



**HAL**  
open science

# Séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources cyclostationnaires

Elena Florian

► **To cite this version:**

Elena Florian. Séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources cyclostationnaires. Autre. Université Paris-Est, 2010. Français. NNT : 2010PEST1023 . tel-00607229

**HAL Id: tel-00607229**

**<https://pastel.hal.science/tel-00607229>**

Submitted on 8 Jul 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

soutenue le 14 Décembre 2010 pour obtenir

le grade de **Docteur en Sciences** de l'Université de Marne la Vallée

Spécialité : Traitement du Signal

par

Elena FLORIAN

## **Séparation de mélanges convolutifs de sources cyclostationnaires**

Composition de la commission d'examen :

Rapporteurs :	Eric MOREAU Christian JUTTEN
Examineurs :	Pierre COMON Pascal CHEVALIER
Directeur de Thèse :	Philippe LOUBATON
Co-Directeur :	Antoine CHEVREUIL



---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Présentation . . . . .	5
<b>I</b>	<b>Introduction :</b>	
	<b>Les problèmes de séparation de sources</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Introduction aux problèmes de séparation de sources</b>	<b>9</b>
2.1	Séparation aveugle de mélanges sur-déterminés et convolutifs de sources . .	9
2.2	Le cas de signaux i.i.d. ou stationnaires. . . . .	10
2.2.1	Approches par identification de la fonction de transfert dans le cas i.i.d. . . . .	11
2.2.2	Approches par identification d'un inverse de $\mathbf{H}(z)$ . . . . .	11
2.3	Le cas des signaux cyclostationnaires. . . . .	15
2.3.1	Impact de la cyclostationnarité sur les méthodes "classiques" de séparation . . . . .	15
2.3.2	Techniques de séparation de sources basées sur la connaissance des fréquences cycliques - Estimation des fréquences cycliques du signal reçu . . . . .	17
2.3.3	Fonctions de contraste ne nécessitant pas la connaissance des fréquences cycliques . . . . .	19
<b>II</b>	<b>Séparation de mélanges de sources cyclostationnaires non circulaires à l'ordre 2</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>Séparation de sources non circulaires par minimisation du critère du module constant dans une approche par déflation</b>	<b>25</b>
3.1	Contexte général . . . . .	26
3.1.1	Type du mélange . . . . .	26
3.1.2	Modèles des signaux . . . . .	26
3.2	Critère du CMA et non-circularité de deuxième ordre . . . . .	29
3.2.1	Mise en évidence de l'expression de $J(r)$ . . . . .	30
3.2.2	Cas de signaux de fréquences cycliques différentes. . . . .	32
3.2.3	Cas de signaux partageant le même débit et la même fréquence porteuse. . . . .	38
3.2.4	Étude du schéma de séparation modifié dans le cas général. . . . .	48
3.3	Estimation des fréquences cycliques non conjuguées significatives. . . . .	49

3.4	Conclusions . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Complexité des algorithmes et Simulations.</b>	<b>55</b>
4.1	Étude de la complexité des algorithmes . . . . .	55
4.1.1	Description de la méthode de détection des fréquences cycliques non conjugués significatives. . . . .	55
4.1.2	Minimisation du critère du module constant modifié. . . . .	56
4.1.3	La procédure de déflation. . . . .	58
4.1.4	Conclusion sur la complexité de la procédure basée sur le critère du module constant modifié. . . . .	60
4.2	Contexte de simulations . . . . .	61
4.2.1	Conditions de simulation et méthodologie d'analyse des performances	61
4.3	Résultats numériques et conclusions . . . . .	64
4.3.1	Choix du seuil de détection pour l'estimation des fréquences cycliques non-conjuguées significatives . . . . .	65
4.3.2	Comparaison entre le CMA et le CMA modifié . . . . .	67
4.3.3	Performances du CMA et du CMA modifié dans la séparation de différents types de mélanges . . . . .	71
4.4	Conclusions . . . . .	81
<b>III</b>	<b>Séparation de mélanges de sources cyclostationnaires circulaires à l'ordre 2</b>	<b>83</b>
<b>5</b>	<b>Séparateurs dérivant du principe du maximum de vraisemblance.</b>	<b>85</b>
5.1	Le contexte des mélanges instantanés de sources modulées linéairement dont les débits symboles et les résidus de porteuse sont connus. . . . .	85
5.1.1	Mise en évidence des estimateurs. . . . .	86
5.1.2	Implémentation des l'estimateurs (5.1.13, 5.1.16) . . . . .	91
5.2	Analyse des propriétés statistiques des estimateurs. . . . .	92
5.3	Généralisation au cas des mélanges convolutifs de sources de périodes symbole et de résidus de porteuses connus. . . . .	99
5.4	Complexité de l'estimateur et résultats. . . . .	100
5.4.1	Complexité . . . . .	100
5.4.2	Résultats expérimentaux. . . . .	101
5.5	Conclusions sur les algorithmes de séparation dérivant du principe du maximum de vraisemblance. . . . .	106
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>109</b>
6.1	Résumé des travaux de cette thèse . . . . .	109
6.2	Perspectives . . . . .	110
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>113</b>
A.1	Preuve du Théorème 2 du chapitre 3 . . . . .	114
A.2	Preuve de la Proposition 6 du chapitre 3 . . . . .	115
A.3	Preuve de la Proposition 4 du chapitre 3 . . . . .	117
A.4	Canaux GSM/ETSI . . . . .	118

---

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Présentation

Cette thèse a été financée par la *délégation générale à l'armement* et s'est déroulée au sein de l'Équipe Signal et Communications du LIGM à l'université de Marne La Vallée.

Les travaux de cette thèse concernent les problèmes d'écoute passive dans les systèmes de communications numériques :  $K$  signaux sont émis dans une même bande de fréquences par différents émetteurs, et observés sur un réseau de  $N$  capteurs. L'objectif est d'évaluer certaines propriétés des signaux émis et d'en extraire certaines informations jugées pertinentes (débit, modulation...). Plutôt que de traiter le problème dans sa généralité, les approches classiques proposent de le scinder en plusieurs problèmes, plus simples. Le premier problème est la séparation du mélange qui permet d'isoler les  $K$  signaux émis. C'est ce problème qui est traité dans ce manuscrit. Ensuite, les méthodes d'écoute passive tentent d'estimer les paramètres techniques de chacun des signaux reconstruits de façon à pouvoir les démoduler.

Dans ce manuscrit nous nous focaliserons sur les problèmes de séparation des mélanges convolutifs sur-déterminés de signaux. Les mélanges non-linéaires et les mélanges sous-déterminés ne seront pas abordés mais des informations à ce sujet pourront être trouvés dans [32] et respectivement [7] et [8].

Dans la première partie de ce manuscrit, nous rappelons quelques généralités sur les systèmes de communications numériques et sur les problèmes de séparation de sources. Un état de l'art, non exhaustif, des différentes méthodes de séparation de sources est présenté, en insistant plus particulièrement sur les méthodes exploitant les statistiques d'ordre 4 des signaux observés.

La deuxième partie de ce manuscrit est dédiée aux mélanges des signaux cyclostationnaires et non-circulaires au deuxième ordre. Nous présentons dans un premier temps les problèmes engendrés par la non-circularité des signaux en mettant en évidence des situations dans lesquelles les méthodes classiques ne permettent pas de séparer. Ensuite nous proposons un nouveau critère dérivé du critère du CMA permettant de séparer ce type de mélanges.

Dans la dernière partie de ce manuscrit, nous nous intéressons aux méthodes optimales de séparation des mélanges des signaux cyclostationnaires et circulaires au deuxième ordre et notamment à un séparateur optimal. Dans le chapitre 5 nous présentons une nouvelle classe d'estimateurs dérivant du principe du maximum de vraisemblance et montrons l'intérêt théorique de ce type de séparateurs.



---

**Première partie**

**Introduction :**  
**Les problèmes de séparation de**  
**sources**



---

## Chapitre 2

# Introduction aux problèmes de séparation de sources

Dans le domaine du traitement du signal, la séparation de sources est utile dans le contexte où un mélange de plusieurs signaux est reçu par un récepteur et où il est nécessaire d'extraire chacun des signaux initiaux. Les différentes méthodes de séparation de sources existantes sont spécifiques du contexte considéré (type des signaux, type de canaux de propagation, type du récepteur, etc.).

Dans cette introduction, nous avons choisi de présenter quelques généralités concernant la séparation de sources dans le contexte de l'écoute passive en télécommunications. Nous présenterons les problèmes liés à la séparation des mélanges convolutifs sur-déterminés de signaux et quelques-uns des algorithmes susceptibles de les résoudre.

Nous commencerons par une courte présentation des problèmes de séparation des sources dans le contexte de l'écoute passive (section 2.1) pour ensuite évoquer quelques résultats obtenus dans le cas des signaux i.i.d ou stationnaires (section 2.2) et cyclostationnaires (section 2.3).

### 2.1 Séparation aveugle de mélanges sur-déterminés et convolutifs de sources

Dans le contexte de l'écoute passive, les techniques de démodulation aveugle développées à ce jour ne sont pas directement utilisables lorsque la bande passante analysée contient plusieurs signaux non séparables fréquentiellement. Aussi, il est naturel d'utiliser un récepteur pourvu de plusieurs capteurs afin de séparer ces différents signaux, et par la suite de les analyser.

On qualifie le problème de séparation de sources de *sur-déterminé* lorsque le nombre de capteurs  $N$  est plus grand que le nombre de sources  $K$ , et de *sous-déterminé* dans le cas contraire. Le premier cas est *a priori* plus simple que le second car, dans le cas sur-déterminé, il est potentiellement possible, en absence de bruit, de générer à partir du signal reçu sur le réseau de capteurs une réplique de chaque source par filtrage spatial (dans le cas d'un mélange instantané) ou filtrage spatio-temporel.

Historiquement, le problème de la séparation de sources a d'abord été étudié dans le contexte de mélanges instantanés de sources. Dans ce cadre, le signal à temps continu  $\mathbf{y}_a(t)$  de dimension  $N$  reçu coïncide avec l'action sur une matrice constante,  $\mathbf{H}$  du vecteur  $\mathbf{s}_a(t)$  de dimension  $K$  dont les composantes représentent les signaux transmis par les différents

émetteurs

$$\mathbf{y}_a(t) = \mathbf{H}\mathbf{s}_a(t)$$

En pratique, une telle situation est pertinente lorsque les canaux de propagation entre émetteurs et récepteurs sont mono-trajets.

Cependant, de nombreux canaux radioélectriques sont sélectifs en fréquence. Dans ces conditions, le signal  $\mathbf{y}_a(t)$  peut être vu comme la sortie d'un système linéaire  $K$ -entrées /  $N$ -sorties excité par le signal  $\mathbf{s}_a(t)$ . Après échantillonnage à une cadence  $T_e$  qui respecte le théorème de Shannon, une relation de filtrage linéaire à temps discret lie le signal à temps discret  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{y}_a(nT_e)$  au signal  $\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}_a(nT_e)$ , c'est-à-dire que

$$\mathbf{y}(n) = \sum_k \mathbf{H}_k \mathbf{s}(n-k) \quad (2.1.1)$$

On dit alors que le signal observé  $\mathbf{y}(n)$  est un mélange *convolutif* des composantes  $s_1(n), \dots, s_K(n)$  de  $\mathbf{s}(n)$ , et que le filtre de fonction de transfert  $\mathbf{H}(z) = \sum_k \mathbf{H}_k z^{-k}$  est le filtre mélangeant. Le problème de la séparation du mélange convolutif (3.1.1) consiste alors à reconstituer une version filtrée de chacun des signaux  $s_1(n), \dots, s_K(n)$  à partir de  $\mathbf{y}(n)$  (en l'absence d'hypothèse supplémentaire sur les signaux et/ou sur le filtre les mélangeant, on ne peut restituer les signaux sources qu'à un filtre près).

La majorité des contributions qui ont été consacrées jusqu'à maintenant au problème de la séparation des mélanges convolutifs sur-déterminés ont considéré le cas où les composantes de  $\mathbf{s}(n)$  sont des suites indépendantes et identiquement distribuées non gaussiennes, et dans une moindre mesure des suites non gaussiennes stationnaires. Dans le contexte de l'écoute passive en télécommunications, ces situations ne peuvent se produire que lorsque les signaux transmis par les différents émetteurs sont des modulations linéaires ou non linéaires de type CPM, que les périodes symboles utilisées coïncident, et que la période d'échantillonnage  $T_e$  est choisie égale à cette période symbole. Dans le cas où les signaux sources sont modulés linéairement, les signaux  $s_1, \dots, s_K$  représentent les symboles transmis par les différents émetteurs, et constituent donc des suites i.i.d. Si par contre le mélange contient un ou plusieurs signaux CPM, les signaux échantillonnés correspondants seront simplement des suites stationnaires.

Dans un contexte aveugle, les composantes de  $\mathbf{s}(n)$  sont des signaux cyclostationnaires et les techniques de séparation des mélanges convolutifs de sources i.i.d. ou stationnaires ne sont a priori pas pertinentes. Nous allons cependant résumer dans le paragraphe 2.2 la plupart des travaux importants relatifs aux sources i.i.d. et stationnaires afin de mieux mettre en évidence les difficultés posées par le cas cyclostationnaire. Les travaux effectués dans ce dernier cas seront développés dans le paragraphe 2.3.

## 2.2 Le cas de signaux i.i.d. ou stationnaires.

Les approches pour la séparation des mélanges des signaux i.i.d. ou stationnaires peuvent être regroupés dans deux catégories : celles qui consistent à identifier la fonction de transfert  $\mathbf{H}(z)$ , qui ne fonctionnent que dans le cas de sources i.i.d., et celles qui cherchent à estimer un inverse de  $\mathbf{H}(z)$ . Ces dernières approches peuvent être adaptées au cas stationnaire, et sont réputées fournir des algorithmes plus performants.

### 2.2.1 Approches par identification de la fonction de transfert dans le cas i.i.d.

L'identification de  $\mathbf{H}(z)$  permet d'estimer l'un de ses inverses, qui peut être appliqué aux observations pour extraire les signaux sources. Pour cela, divers auteurs ont proposé d'exploiter de façon pertinente des statistiques d'ordre élevé de la sortie (voir par exemple [1] [5]). Ce type d'approche donne lieu à des algorithmes peu performants, et est à peu près abandonnée depuis plus d'une dizaine d'années dans le contexte de la séparation de sources.

### 2.2.2 Approches par identification d'un inverse de $\mathbf{H}(z)$ .

Dans ce contexte, il convient de déterminer un filtre  $N$ -entrées /  $K$ -sorties de fonction de transfert  $\mathbf{G}(z)$ , qui agissant sur le signal reçu  $\mathbf{y}(n)$ , produit à sa sortie un signal  $\mathbf{r}(n) = [\mathbf{G}(z)]\mathbf{y}(n)$  dont les composantes sont statistiquement indépendantes entre elles. En pratique, l'indépendance statistique se mesure en optimisant des fonctions de contraste. Nous pouvons distinguer deux approches de la séparation de sources i.i.d ou stationnaires par fonction de contraste : les approches de séparation par bloc et les approches de séparation par déflation.

#### 2.2.2-a) Les approches de séparation par bloc.

Les approches de séparation par bloc consistent à chercher un filtre  $N$ -entrées /  $K$ -sorties de fonction de transfert  $\mathbf{G}(z)$  minimisant une fonction  $J(\mathbf{G})$  bien choisie s'exprimant en fonction des statistiques du signal  $\mathbf{r}(n) = [\mathbf{G}(z)]\mathbf{y}(n)$ .

Certains contrastes utilisés dans les approches par bloc sont obtenus en exprimant de façon partielle l'indépendance statistique des composantes du signal  $\mathbf{r}(n) = [\mathbf{G}(z)]\mathbf{y}(n)$ . Ainsi, dans le cas 2 sources / 2 capteurs, les auteurs de [11] construisent une fonction de coût dont le minimum est atteint lorsque le trispectre conjoint des deux signaux de sortie est identiquement nul. Toujours dans le cas  $2 \times 2$ , mais sous l'hypothèse restrictive que les sources sont des suites i.i.d. de lois de probabilités absolument continues, [35] s'intéresse au contraste dont la minimisation permet de reconstituer les signaux sources au sens du maximum de vraisemblance. Il est établi que la minimisation de ce contraste est réalisée lorsque le signal  $(r_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , i.e. la  $i$ ème composante de  $\mathbf{r}$ , est décorrélé du signal  $(\psi_j(r_j(n)))_{j \in \mathbb{Z}}$ , où la fonction  $\psi_j$  est définie par

$$\psi_j(x) = \frac{p'_j(x)}{p_j(x)}$$

$p_j(x)$  représentant la densité de probabilité des variables aléatoires  $(s_j(n))_{j \in \mathbb{Z}}$ . En pratique, ce résultat n'est pas directement utilisable car les fonctions  $\psi_j$  ne sont pas connues. Cependant, rien n'interdit d'estimer dans un premier temps les densités de probabilité  $p_j$  en extrayant les signaux sources grâce à une approche sous-optimale, puis dans un deuxième temps d'améliorer les performances de la séparation de sources en utilisant les résultats de [35].

Un deuxième groupe de fonctions de coût, se situant dans le prolongement de travaux relatifs à l'égalisation aveugle 1 source / 1 capteur ([14]) a également été mis en évidence (voir par exemple [27], [6]). Ces fonctions doivent être optimisées sous une contrainte portant sur  $\mathbf{G}(z)$  permettant d'assurer que la même source n'est pas extraite plusieurs fois.

Après un pré-blanchiment spatio-temporel de  $\mathbf{y}(n)$ , la contrainte la plus fréquemment rencontrée est celle de para-unitarité, i.e.  $\mathbf{G}(e^{2i\pi f})\mathbf{G}(e^{2i\pi f})^* = I_K$  pour toute fréquence  $f$ . Bien entendu, l'ensemble des filtres para-unitaires a une structure relativement compliquée, et maximiser une fonction sur cet ensemble n'est en pratique pas facile. La mise en évidence d'algorithmes fiables permettant d'atteindre cet objectif a fait l'objet de quelques travaux récents tels que [22], [10], [24, 23], [9].

**Exemples de contrastes** dont l'optimisation sous la contrainte de para-unitarité permet de séparer les sources.

Dans la suite, on désigne par  $\text{cum}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  le cumulants d'ordre 4 conjoint des variables aléatoires  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , et par  $c_4(x)$  le cumulants d'ordre 4 de la variable aléatoire  $x$  défini par  $c_4(x) = \text{cum}(x, x^*, x, x^*)$ .

- Dans le cas de sources i.i.d. un contraste assurant la séparation est

$$J(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^K |c_4(r_i(n))|^2$$

ou

$$J(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^K c_4(r_i(n))$$

si les cumulants d'ordre 4 des suites  $s_i$  sont tous négatifs.

- Dans le cas stationnaire, les précédents contrastes ne fonctionnent pas, mais les résultats récents de [3] permettent en particulier d'établir que

$$J(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^K \sum_{j_1, j_2, j_3} |\text{cum}(r_i(n), r_i(n+j_1)^*, r_i(n+j_2), r_i(n+j_3)^*)|^2$$

est un contraste permettant de séparer les sources.

En pratique, l'optimisation des contrastes s'effectue en général de la façon suivante :

- Les filtres  $\mathbf{G}(z)$  sont choisis à réponse impulsionnelle finie. La taille des réponses impulsionnelles dépend de l'idée que l'on se fait de la longueur de celle du filtre  $\mathbf{H}(z)$  à inverser.
- L'optimisation d'une fonction de contraste  $J(\mathbf{G})$  ne peut en général s'effectuer de façon analytique. On utilise donc des techniques numériques qui peuvent nécessiter l'évaluation du gradient et du Hessien de  $J$ .
- La valeur théorique d'une fonction de contraste  $J(\mathbf{G})$ , ainsi que celles de son gradient et de son Hessien en un point  $\mathbf{G}(z)$  dépend des statistiques exactes de  $\mathbf{r}(n) = [\mathbf{G}(z)]\mathbf{y}(n)$ . Celles-ci sont évidemment inconnues, et sont en pratique estimées de façon empirique à partir des observations  $\mathbf{y}(n)$  disponibles. A titre d'exemple, si l'on dispose de  $(\mathbf{y}(n))_{n=0, \dots, M-1}$ , alors  $\sum_{i=1}^K c_4(r_i(n))$  s'estime de la façon suivante :
  - Si  $\mathbf{G}(z)$  est la valeur courante du filtre, on génère la suite  $\mathbf{r}(n) = [\mathbf{G}(z)]\mathbf{y}(n)$  pour  $n = 0, \dots, M-1$ .
  - Pour chaque  $i = 1, \dots, N$ , on estime  $c_4(r_i(n))$  défini par

$$c_4(r_i(n)) = \mathbb{E}|r_i(n)|^4 - 2(\mathbb{E}|r_i(n)|^2)^2 - |\mathbb{E}(r_i(n))^2|^2 \quad (2.2.2)$$

par

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |r_i(m)|^4 - 2 \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |r_i(m)|^2 \right)^2 - \left| \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (r_i(m))^2 \right|^2$$

La pertinence de cet estimateur est liée au caractère stationnaire de  $\mathbf{y}(n)$ , et donc de  $\mathbf{r}(n)$ , qui permet d'affirmer que  $\mathbb{E}|r_i(n)|^4$ ,  $\mathbb{E}|r_i(n)|^2$ ,  $\mathbb{E}(r_i(n))^2$  ne dépendent pas du temps, et peuvent être estimés de façon consistante par les moyennes temporelles  $\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |r_i(m)|^4$ ,  $\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |r_i(m)|^2$ ,  $\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (r_i(m))^2$  respectivement.

- Ceci permet d'estimer  $\sum_{i=1}^K c_4(r_i(n))$  par une fonction des coefficients de  $\mathbf{G}(z)$  dont on peut éventuellement calculer le gradient et le Hessien.

Il convient de noter qu'aucune fonction de contraste par bloc dépourvue d'extrema locaux parasites n'a pu être mise en évidence dans le contexte de la séparation des mélanges convolutifs. Par conséquent, les algorithmes d'optimisation du type gradient ou Newton ne sont a priori jamais assurés de converger vers l'extremum global si ils sont mal initialisés. Ceci renforce l'intérêt de techniques d'optimisation alternatives.

### 2.2.2-b) Les approches par déflation.

Les approches par déflation, proposées à l'origine dans [13], consistent à extraire la première source, à identifier et soustraire sa contribution au signal  $\mathbf{y}(n)$  afin de former un nouveau mélange convolutif de  $K - 1$  sources. L'étape initiale peut alors être répétée  $K - 1$  fois afin de séparer toutes les sources. Afin d'extraire la première source, on cherche une fonction de transfert  $\mathbf{g}(z)$  à  $N$ -entrées / 1-sortie maximisant une fonction bien choisie  $J(\mathbf{g})$  s'exprimant en fonction des statistiques du signal scalaire  $r(n) = [\mathbf{g}(z)]\mathbf{y}(n)$ . En s'inspirant de travaux relatifs à l'égalisation aveugle 1 source / 1 capteur ([14]), on peut mettre en évidence facilement des fonctions  $J$  dont le maximum est atteint si et seulement si  $r(n)$  coïncide avec une version filtrée de l'une des composantes de  $\mathbf{s}(n)$ .

**Exemples de contrastes** permettant la séparation des sources pour une approche par déflation

- Dans le cas de sources i.i.d. dont les cumulants d'ordre 4 sont tous négatifs, la minimisation de

$$\frac{c_4(r(n))}{(\mathbb{E}(|r(n)|^2))^2}$$

permet d'extraire l'une des sources à un retard et à un facteur d'échelle près. Si les sources sont de surcroît circulaires à l'ordre 2, la minimisation du critère du module constant (CMA)

$$\mathbb{E} (|r(n)|^2 - 1)^2,$$

très utilisé dans le contexte de l'égalisation aveugle, rend les mêmes services.

- Si les sources sont simplement stationnaires, la maximisation de

$$\left( \frac{c_4(r(n))}{(\mathbb{E}(|r(n)|^2))^2} \right)^2$$

permet d'extraire une version filtrée de l'une des sources.

La minimisation pratique des contrastes par déflation s'effectue de façon similaire à celle des contrastes par blocs (filtres  $\mathbf{g}(z)$  à réponse impulsionnelle finie, estimation empirique des contrastes, ...), et pose en général moins de problème. Ainsi, il n'est pas nécessaire de contraindre  $\mathbf{g}(z)$  à appartenir à une classe de fonctions compliquée (comme celle des filtres para-unitaires utilisée dans les approches par bloc). Il convient également de noter que les exemples de fonctions de contraste par déflation que nous venons de lister plus haut sont dépourvus d'extrema locaux parasites ([13], [34], [31]). Même si ce résultat théorique important n'est a priori pas vérifié pour les estimées empiriques de ces contrastes, il permet de se rassurer quant au comportement des algorithmes du gradient et Newton. En pratique, ils convergent quasiment toujours vers l'extremum global.

L'optimisation des contrastes par déflation usuels est cependant compliquée par le fait que les fonctions de coût correspondantes sont non quadratiques par rapport aux coefficients du filtre séparateur. Leur optimisation doit donc s'effectuer le plus souvent par un algorithme du gradient ou de Newton dont la convergence peut être lente.

Récemment, les auteurs de [26, 2] ont introduit une nouvelle classe de contrastes, appelés contrastes avec références, quadratiques en les coefficients du séparateur. A titre d'exemple, une fonction de contraste de ce type adaptée au contexte des approches par déflation est définie par

$$J(\mathbf{g}) = \frac{|\text{cum}(z(n), z^*(n), r(n), r^*(n))|}{\mathbb{E}|r(n)|^2}$$

où  $z(n)$  est un signal fixé, dit de référence, correspondant à une version filtrée/mélangée des sources. En raison de la dépendance quadratique du critère vis-à-vis de  $r(n)$ , une solution au problème de maximisation peut alors être déterminée de manière quasiment explicite alors que, par exemple, les méthodes de maximisation du kurtosis ou l'algorithme du CMA requièrent des résolutions itératives dont la convergence peut être lente. Cependant, la maximisation d'un tel contraste n'aboutit à l'extraction d'une source que sous réserve d'une condition en apparence peu restrictive. Nous nous contentons de la mentionner dans le cas i.i.d. : il faut que le maximum sur  $i$  et  $l$  des  $|\text{cum}(z(n), z^*(n), s_i(n-l), s_i^*(n-l)^*)|$  ne soit atteint que pour une unique valeur  $(i_0, l_0)$ . Même si cette condition est génériquement vérifiée pour tout signal  $z$ , le fait que les 2 plus grandes valeurs de l'ensemble  $(|\text{cum}(z(n), z^*(n), s_i(n-l), s_i^*(n-l)^*)|)_{i=1, K}$  soient proches rend l'approche très peu performante. Par conséquent, il ne semble pas très évident que cette approche puisse réellement être utilisée en utilisant un signal de référence arbitraire. Cependant, on peut montrer que si  $z$  coïncide avec l'un des signaux sources, la condition de séparation est vérifiée avec un marge importante. Ceci montre qu'il est pertinent de choisir pour  $z(n)$  le résultat d'une première séparation imparfaite, obtenue par exemple à l'issue d'un nombre réduit d'itérations d'un algorithme du gradient ou de Newton d'un contraste non quadratique. L'utilisation du contraste avec référence peut alors permettre d'améliorer ce point initial grâce à un algorithme simple permettant d'accélérer la convergence de la procédure de séparation de sources.

## 2.3 Le cas des signaux cyclostationnaires.

### 2.3.1 Impact de la cyclostationnarité sur les méthodes "classiques" de séparation

Un signal à temps discret  $x(n)$  est dit cyclo-stationnaire si ses statistiques évoluent de façon périodique ou presque périodique en fonction du temps. Si l'on prend l'exemple des statistiques du second ordre, un signal cyclo-stationnaire à temps discret est tel que pour tout entier  $\tau$ , la suite  $n \rightarrow \mathbb{E}(x(n + \tau)x(n)^*)$  dépend de  $n$ , mais d'une façon très spécifique dans la mesure où elle peut être développée en somme de sinusoides dont les fréquences sont appelées les fréquences cycliques de  $x(n)$ . Plus précisément, on peut écrire  $\mathbb{E}(x(n + \tau)x(n)^*)$  sous la forme

$$\mathbb{E}(x(n + \tau)x(n)^*) = \sum_l R_x^{(\alpha_l)}(\tau) e^{2i\pi n \alpha_l} \quad (2.3.3)$$

où les  $\alpha_l$  représentent les fréquences cycliques, et où  $R_x^{(\alpha_l)}(\tau)$  est le coefficient de corrélation cyclique de  $x$  à la fréquence cyclique  $\alpha_l$  et à l'instant  $\tau$ . Quand le signal  $x$  est non circulaire à l'ordre 2,  $\mathbb{E}(x(n + \tau)x(n))$  peut également se développer sous une forme similaire, mais avec en général un jeu de fréquences différent que l'on appelle les fréquences cycliques non-conjuguées de  $x$  et que l'on note  $(\beta_l)$

$$\mathbb{E}(x(n + \tau)x(n)) = \sum_l R_{c,x}^{(\beta_l)}(\tau) e^{2i\pi n \beta_l} \quad (2.3.4)$$

où  $R_{c,x}^{(\beta_l)}(\tau)$  est le coefficient de corrélation cyclique non-conjuguée de  $x$  à la fréquence cyclique non-conjuguée  $\beta_l$  et à l'instant  $\tau$ .

La version échantillonnée d'un signal issu d'un système de communication numérique est en général cyclostationnaire. Dans la plupart des cas, ses fréquences cycliques non nulles significatives sont  $\pm \frac{T_e}{T}$  où  $T_e$  désigne la fréquence d'échantillonnage et où  $T$  représente sa période symbole. Si le signal est non circulaire à l'ordre 2, sa fréquence cyclique non-conjuguée la plus significative est  $\delta f_0 T_e$  où  $\delta f_0$  est le résidu de porteuse. Le problème de la séparation des sources cyclostationnaires est donc important dans le contexte de l'écoute passive, mais aussi dans d'autres domaines comme celui de l'analyse vibratoire. Il n'a pourtant pas suscité un intérêt très important de la part des spécialistes, bien que la cyclostationnarité des signaux sources soit à la base de difficultés nouvelles qui sont loin d'avoir été levées.

Ainsi que cela a été remarqué la première fois [15] dans le contexte de la séparation des mélanges instantanés, la cyclostationnarité des signaux peut rendre inopérantes les techniques de séparation de sources par fonctions de contrastes.

Il faut tout d'abord reconsidérer les fonctions de contraste du cas stationnaire puisque, souvent basées sur les statistiques du signal de sortie du séparateur, leur expression fait apparaître une dépendance temporelle. A titre d'exemple, si  $r(n) = [\mathbf{g}(z)]\mathbf{y}(n)$ ,

$$J_4(\mathbf{g}) = \frac{c_4(r(n))}{(\mathbb{E}(|r(n)|^2))^2}$$

dépend évidemment du temps dans le cas où les signaux sources sont cyclostationnaires. Comme les filtres séparateurs sont invariants au cours du temps, il est inutile de minimiser

ce contraste à chaque instant (à supposer que cela soit possible) car les filtres optimaux dépendraient alors du temps. Il faut donc reconsidérer les fonctions de contraste du cas stationnaire de façon à les rendre invariantes au cours du temps. Dans le contexte du contraste  $J_4(\mathbf{g})$ , il a par exemple été établi dans [20] que la minimisation de

$$J'_4(\mathbf{g}) = \frac{\langle c_4(r(n)) \rangle}{\langle \mathbb{E}(|r(n)|^2) \rangle^2} \quad (2.3.5)$$

permet d'extraire un signal source dans le cadre d'une approche par déflation si les signaux sources sont issus de modulations linéaires. Le symbole  $\langle \rangle$  désigne l'opérateur de moyenne temporelle défini par  $\langle u(n) \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M u(n)$ .

Le deuxième problème posé par la présence de signaux cyclostationnaires est plus sérieux, et concerne l'estimation des fonctions de contraste. En effet, les estimateurs des divers moments et statistiques utilisés dans le cas stationnaire pour évaluer les fonctions de contraste les plus usuelles ne convergent pas toujours vers les valeurs souhaitées. Dans ces conditions, on ne minimise pas les bonnes fonctions, et les performances des méthodes de séparation peuvent en être affectées. Afin d'obtenir des estimateurs consistants, il est en général nécessaire d'estimer les fréquences cycliques du signal reçu. A titre d'exemple, expliquons cette difficulté dans le contexte de l'estimation de  $\langle c_4(r(n)) \rangle$  nécessaire pour utiliser en pratique le contraste  $J'_4(\mathbf{g})$ . Ainsi que nous l'avons déjà mentionné,  $c_4(r(n))$  peut s'écrire sous la forme

$$c_4(r(n)) = \mathbb{E}|r(n)|^4 - 2(\mathbb{E}|r(n)|^2)^2 - |\mathbb{E}(r(n))^2|^2$$

Par conséquent,

$$\langle c_4(r(n)) \rangle = \langle \mathbb{E}|r(n)|^4 \rangle - 2 \langle (\mathbb{E}|r(n)|^2)^2 \rangle - \langle |\mathbb{E}(r(n))^2|^2 \rangle \quad (2.3.6)$$

Supposons que l'on dispose des valeurs prises par  $r(m)$  pour  $m = 0, \dots, M-1$ . Sous réserve de conditions peu restrictives, le terme  $\langle \mathbb{E}|r(n)|^4 \rangle$  peut s'estimer de façon consistante par la moyenne empirique

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |r(m)|^4$$

L'estimation des deux autres termes du terme de droite de (2.3.6) nécessite toutefois la connaissance des fréquences cycliques du signal  $r(n)$ , c'est-à-dire du signal reçu. Considérons le second terme  $\langle (\mathbb{E}|r(n)|^2)^2 \rangle$ . Du fait de la cyclostationnarité de  $r(n)$ , on peut écrire  $\mathbb{E}|r(n)|^2$  sous la forme

$$\mathbb{E}|r(n)|^2 = \sum_l R_r^{(\alpha_l)}(0) e^{2i\pi n \alpha_l}$$

En utilisant l'identité de Parseval dans le cas des fonctions presque périodiques, on obtient

$$\langle (\mathbb{E}|r(n)|^2)^2 \rangle = \sum_l |R_r^{(\alpha_l)}(0)|^2 \quad (2.3.7)$$

où les  $(\alpha_l)$  sont les fréquences cycliques de  $r$  et  $R_r^{(\alpha_l)}(0)$  les coefficients de corrélation cyclique de  $r$  à l'instant  $\tau = 0$ .

De la même façon, si  $r$  n'est pas circulaire à l'ordre 2,

$$\langle |\mathbb{E}(r(n))^2|^2 \rangle = \sum_l |R_r^{(\beta_l)}(0)|^2 \quad (2.3.8)$$

où les  $(\beta_l)$  sont les fréquences cycliques conjuguées de  $r$  et  $R_r^{(\beta_l)}(0)$  les coefficients de corrélation cyclique non-conjuguée de  $r$  à l'instant  $\tau = 0$ .

Afin d'estimer (2.3.7) et (2.3.8), il faut évaluer les corrélations cycliques, ce qui implique au préalable d'estimer les fréquences cycliques.

Une première approche générique consiste donc à détecter et estimer les fréquences cycliques du signal reçu afin d'être en mesure d'estimer de façon consistante des fonctions de contraste construites à partir du cas stationnaire grâce à des moyennages temporels, voire en cherchant à utiliser de façon plus habile la connaissance des fréquences cycliques en utilisant des approches développées dans le contexte du filtrage d'antenne ([30]). Cette piste est très largement inexplorée actuellement. Afin d'estimer les fréquences cycliques, il existe un certain nombre d'approches classiques, mais dont les performances dépendent d'une part de l'excès de bande des signaux transmis, et d'autre part de la durée des signaux observés. Quelques travaux très récents menés dans [19] semblent indiquer que les techniques actuelles sont perfectibles, et que des progrès puissent être obtenus en les améliorant. Nous détaillerons cette approche dans le paragraphe 2.3.2

Un deuxième type d'approche est de mettre en évidence des fonctions de contraste ne nécessitant pas l'estimation de toutes les fréquences cycliques du signal reçu. Cette piste a été en particulier suivie dans [19] pour les algorithmes de type JADE dans le contexte des mélanges instantanés et dans le contexte des approches par déflation dans le cas des mélanges convolutifs. A noter que [19] ne s'intéresse qu'au cas où les signaux générés par les différents émetteurs sont circulaires à l'ordre 2.

### 2.3.2 Techniques de séparation de sources basées sur la connaissance des fréquences cycliques - Estimation des fréquences cycliques du signal reçu

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné, il est relativement simple de mettre en évidence des fonctions de contraste adaptées au contexte des signaux cyclostationnaires. Cependant, il convient d'avoir accès aux fréquences cycliques des statistiques du second ordre du signal reçu pour pouvoir estimer ces fonctions de façon consistante à partir des signaux disponibles, et les optimiser. Le thème général de la détection et de l'estimation des fréquences cycliques des statistiques du second ordre d'un mélange de signaux cyclostationnaire est donc tout à fait pertinent.

Rappelons que les fréquences cycliques  $(\alpha_l)$  des statistiques du second ordre d'un signal cyclostationnaire  $y(n)$  sont définies par le fait que

$$\mathbb{E}(y(n+k)y(n)^*) = \sum_l R^{(\alpha_l)}(k)e^{2i\pi n\alpha_l} \quad (2.3.9)$$

où le coefficient  $R^{(\alpha_l)}(k)$  est appelé corrélation cyclique de  $y$  à la fréquence cyclique  $\alpha_l$  et à l'instant  $k$ . Notons également que si le signal  $y(n)$  est non circulaire à l'ordre 2, il

peut également être pertinent de considérer les fréquences cycliques **non-conjuguées** ( $\beta_l$ ) définies par

$$\mathbb{E}(y(n+k)y(n)) = \sum_l R_c^{(\beta_l)}(k) e^{2i\pi n\beta_l} \quad (2.3.10)$$

Les travaux relatifs à l'estimation des fréquences cycliques des statistiques du second ordre d'un signal cyclostationnaire  $y(n)$  sont relativement peu nombreux. Les premiers travaux ont été menés par Gardner ([16]), et consistent à détecter les maximums significatifs de la fonction de  $\alpha$  définie comme le carré de la norme du vecteur  $\hat{\mathbf{r}}^{(\alpha)}$  dont les composantes  $(\hat{R}^{(\alpha)}(k))_{k=-P,\dots,P}$  sont donnés par

$$\hat{R}^{(\alpha)}(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} y(m+k)y(m)^* e^{-2i\pi n\alpha}$$

$M$  représente ici le nombre d'échantillons disponibles pour réaliser la détection. La pertinence de ceci provient du fait que si  $\alpha$  n'est pas l'une des fréquences cycliques, alors les coefficients  $(\hat{R}^{(\alpha)}(k))_{k=-P,\dots,P}$  tendent vers 0 lorsque  $M$  augmente. Inversement, si  $\alpha$  est fréquence cyclique, certains coefficients tendent par contre vers des termes non nuls quand le nombre d'observations  $M$  grandit. Bien entendu, pour  $M$  fini, sous l'hypothèse nulle (i.e. si  $\alpha$  n'est pas fréquence cyclique), la statistique de test  $\|\hat{\mathbf{r}}^{(\alpha)}\|^2$  présente des fluctuations statistiques qu'il est nécessaire de caractériser afin de mettre en évidence un seuil de détection. Pour cela, Dandawate et Giannakis ([12]) ont montré que le vecteur  $\hat{\mathbf{r}}^{(\alpha)}$ , est, pour  $M$  assez grand, asymptotiquement gaussien, et que la moyenne statistique de  $\|\hat{\mathbf{r}}^{(\alpha)}\|^2$  est inversement proportionnelle à  $M$ . Ceci permet d'avoir une idée de la distribution de probabilité de  $\hat{\mathbf{r}}^{(\alpha)}$  sous l'hypothèse nulle. Dans la plupart des situations d'intérêt pratique, la moyenne de  $\|\hat{\mathbf{r}}^{(\alpha)}\|^2$  dépend de  $\alpha$ , et prend en particulier des valeurs nettement plus importantes quand  $\alpha$  est proche de 0 car 0 est dans tous les cas fréquence cyclique du signal  $y(n)$ . Il est donc en pratique très souhaitable de "renormaliser" la statistique de test  $\|\hat{\mathbf{r}}^{(\alpha)}\|^2$ , par exemple par un estimateur de sa moyenne statistique, afin de positionner un seuil de détection garantissant une probabilité de fausse alarme à peu près indépendante de la valeur de  $\alpha$ .

Lorsque cette approche classique est appliquée à l'estimation du débit symbole d'un signal modulé linéairement par une suite de symbole i.i.d. d'excès de bande réduit (il n'y a alors qu'une seule fréquence cyclique strictement positive  $\alpha_0$  directement reliée au débit symbole), les performances s'avèrent modestes si le nombre d'échantillons disponibles  $M$  n'est pas assez grand. En effet, les fluctuations statistiques de la statistique de test quand  $\alpha \neq \alpha_0$  peuvent être du même ordre de grandeur que sa valeur au point  $\alpha_0$ , ce qui, bien sur, produit des fausses alarmes et des non détections. [17] a proposé une approche tout à fait différente pour estimer  $\alpha_0$ , et qui s'avère plus performante. Elle est toutefois très complexe à mettre en oeuvre, et utilise explicitement le caractère linéaire de la modulation utilisée. Une approche alternative a été très récemment mise en évidence dans [19]. [19] propose d'utiliser une statistique de test basée sur des coefficients définis comme les  $(\hat{R}^{(\alpha)}(k))_{k=-P,\dots,P}$ , mais où le signal à analyser  $y(n)$  est remplacé par une filtrée dans une bande étroite centrée autour de la fréquence  $\alpha$ . On montre alors que les fluctuations de la statistique de test sous l'hypothèse nulle sont réduites, et que si la bande passante du filtre est du même ordre de grandeur que celle du cyclopectre à la fréquence cyclique  $\alpha_0$  du signal à analyser, la valeur de la statistique de test à la fréquence  $\alpha_0$  n'est par contre pas modifiée. Il en résulte un gain très important en terme de probabilités de détection

et de fausse alarme. Une analyse plus approfondie de cette technique montre que pour chaque valeur de  $\alpha$ , la nouvelle statistique de test peut s'interpréter comme l'intégrale du module au carré d'un estimateur lissé fréquemment du cyclopectre à la fréquence cyclique  $\alpha$  du signal  $y(n)$ . Cette remarque ouvre la voie à d'autres techniques, basées sur des estimateurs différents des cyclopectres cycliques, comme par exemple celle qui est esquissée dans [33] utilisant une technique de débruitage par ondelette.

### 2.3.3 Fonctions de contraste ne nécessitant pas la connaissance des fréquences cycliques

Puisque l'estimation préalable des fréquences cycliques n'est pas toujours un problème facile à résoudre, il est naturel de chercher à mettre en évidence des fonctions de contraste pouvant être estimées sans la connaissance de toutes les fréquences cycliques. Dans le cas des mélanges instantanés l'algorithme JADE peut être adapté pour la séparation des signaux cyclostationnaires. Dans le cas des mélanges convolutifs des signaux cyclostationnaire, l'algorithme du module constant couplé avec une approche par déflation s'avère efficace.

#### 2.3.3-a) Algorithmes de type JADE pour la séparation des mélanges instantanés

Afin de séparer des mélanges instantanés, il suffit de déterminer une matrice  $\mathbf{G}$  inversant la matrice de mélange, au lieu d'un filtre comme dans le cas convolutif. Les algorithmes de type JADE fonctionnent après blanchiment spatial des observations  $\mathbf{y}(n)$ , ce qui permet de chercher a priori la matrice  $\mathbf{G}$  dans la classe des matrices unitaires  $K \times K$ . Dans le cas stationnaire, ces algorithmes permettent de maximiser le contraste

$$J(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^K |c_4(r_i(n))|^2$$

sur l'ensemble des matrices unitaires, où  $\mathbf{r}(n) = (r_1(n), \dots, r_K(n))^T$  représente  $\mathbf{r}(n) = \mathbf{G}\mathbf{y}(n)$ . Dans le cas cyclostationnaire, on peut être tenté de remplacer  $J$  par

$$\bar{J}(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^K | \langle c_4(r_i(n)) \rangle |^2$$

Il est facile d'établir que la maximisation  $\bar{J}$  permet de séparer les sources, mais ainsi que nous l'avons évoqué plus haut, en absence de connaissance sur les fréquences cycliques de  $\mathbf{y}(n)$ , on ne peut estimer les  $\langle c_4(r_i(n)) \rangle$ . Considérons uniquement le cas où les signaux sources sont circulaires à l'ordre 2. Dans ce cas,  $\langle c_4(r_i(n)) \rangle$  se réduit à

$$\langle c_4(r_i(n)) \rangle = \langle \mathbb{E}|r_i(n)|^4 \rangle - 2 \langle (\mathbb{E}|r_i(n)|^2)^2 \rangle = \langle \mathbb{E}|r_i(n)|^4 \rangle - 2 \sum_l |R_{r_i}^{(\alpha_l)}(0)|^2$$

Du fait du blanchiment spatio-temporel,  $R_{r_i}^{(0)}(0) = \langle \mathbb{E}|r_i(n)|^2 \rangle = 1$ , de sorte que

$$\langle c_4(r_i(n)) \rangle = \langle \mathbb{E}|r_i(n)|^4 \rangle - 2 - 2 \sum_{\alpha_l \neq 0} |R_{r_i}^{(\alpha_l)}(0)|^2$$

Dans le cas où l'on ne se donne pas les moyens d'estimer les fréquences cycliques non nulles de  $\mathbf{y}(n)$ , [15] et [19] suggèrent de considérer la fonction de coût modifiée

$$\bar{J}'(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^K (\langle \mathbb{E}|r_i(n)|^4 \rangle - 2)^2$$

Pour toute matrice  $\mathbf{G}$ ,  $\bar{J}'(\mathbf{G})$  peut être estimée de façon consistante à partir des observations disponibles car tel est le cas pour  $\langle \mathbb{E}|r_i(n)|^4 \rangle$ . Il est donc naturel de vérifier si la maximisation de  $\bar{J}'$  sur l'ensemble des matrices unitaires permet de séparer les sources. [15] fournit des conditions suffisantes, qui sont beaucoup améliorées dans [19]. Il est établi que si les sources ne partagent pas les mêmes fréquences cycliques, alors la maximisation de  $\bar{J}'(\mathbf{G})$  permet de séparer. Dans le cas contraire, [19] montre la condition suffisante suivante :

Notons  $\zeta(s_i) = \langle \mathbb{E}|s_i(n)|^4 \rangle - 2$ . Alors, si pour tous  $i$  et  $j$ ,

$$|\zeta(s_i)| > 2 \sum_{\alpha_l \neq 0} |R_{s_j}^{\alpha_l}(0)|^2 \quad (2.3.11)$$

alors, la maximisation de  $\bar{J}'(\mathbf{G})$  permet de séparer les sources.

Cette condition est explicitée dans [19] dans le contexte des modulations linéaires dont les filtres de mise en forme sont des demi-Nyquist d'excès de bande plus petits que 1. (2.3.11) est alors vérifiée si pour tout  $k$

$$|\zeta(s_i)| > 4 \left( \frac{1}{\pi} \right)^2 \quad (2.3.12)$$

La valeur de  $|\zeta(s_i)|$  dépend de la constellation utilisée et de l'excès de bande du signal transmis par la source  $i$ . La figure 2.1 permet de vérifier si (2.3.12) est ou non vérifiée dans le contexte de diverses constellations.

On peut constater que la condition est toujours vérifiée, sauf pour des constellations QAM256 et des excès de bande supérieurs à 0.7.

### 2.3.3-b) Algorithme du module constant pour la séparation de mélanges convolutifs par déflation.

L'utilisation de l'algorithme du module constant (CMA) couplé avec une approche par déflation pour la séparation des mélanges convolutifs de sources circulaires à l'ordre 2 à aussi été étudié en [19].

Le CMA consiste à minimiser la fonction de coût

$$J(\mathbf{g}) = \langle \mathbb{E}(|r(n)|^2 - 1)^2 \rangle$$

où  $r(n)$  représente le signal scalaire  $r(n) = [\mathbf{g}(z)]\mathbf{y}(n)$ . Cette fonction de coût peut s'estimer de façon consistante sans problème.

[19] analyse aussi les conditions de succès de cette méthode en introduisant la quantité  $\beta(s_k)$  définie par

$$\beta(s_k) = \min_{\|f_k\|=1} \langle \mathbb{E} |[f_k(z)]s_k(n)|^4 \rangle \quad (2.3.13)$$

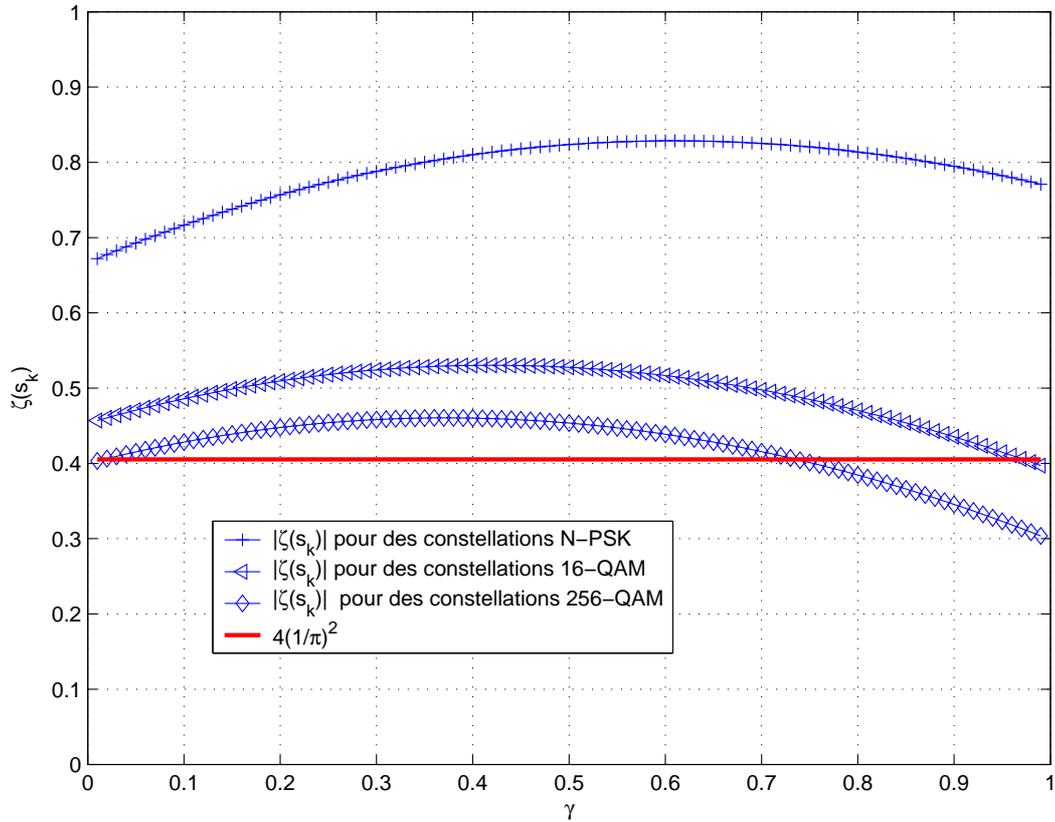


FIG. 2.1 –  $|\zeta(s_i)|$  en fonction de l'excès de bande  $\gamma$  pour diverses constellations.

où on désigne par  $\|f_k\|$  la norme

$$\|f_k\| = \int_{-1/2}^{1/2} |f_k(e^{2i\pi\nu})|^2 S_{s_k}(\nu) d\nu$$

et où  $S_{s_k}(\nu)$  est la densité spectrale du signal  $s_k(n)$ .

*Si les fréquences cycliques non nulles des différentes sources sont différentes, alors la minimisation du critère du module constant permet d'extraire une version filtrée d'une des sources si*

$$\beta(s_k) < 2 \quad (2.3.14)$$

*pour tout  $k$*

Il est établi dans [19] que cette condition est toujours vérifiée par les signaux modulés linéairement d'excès de bande inférieur à 1 et par les signaux CPM "raisonnablement" filtrés passe-bas.

Le cas où les différentes sources partagent des fréquences cycliques est plus complexe. Des conditions suffisantes de séparation sont encore établies. Elles ont d'autant plus de chances d'être vérifiées que le nombre de sources possédant une même fréquence cyclique est faible et que leurs excès de bande sont réduits. A titre d'exemple, si le mélange contient des groupes d'au plus 2 sources possédant le même débit, et dont le maximum de l'excès

de bande appartient à  $[0.06, 0.85]$ , alors la séparation est assurée.

Il convient enfin de noter que [19] ne met en évidence que des conditions suffisantes ; en particulier, leur non satisfaction ne signifie nullement que l'algorithme de séparation ne fonctionne pas, et les simulations numériques effectuées dans [19] n'ont jamais fait apparaître d'échec dans des contextes où les conditions suffisantes de séparation n'étaient pas respectées. En conclusion, les travaux [19] tendent à prouver que l'algorithme du module constant couplé avec une approche par déflation permet de séparer n'importe quel mélange convolutif de modulations linéaires circulaires à l'ordre 2 et de CPM. Le cas des signaux non circulaires n'as pas encore été considéré.

---

## Deuxième partie

# Séparation de mélanges de sources cyclostationnaires non circulaires à l'ordre 2



---

## Chapitre 3

# Séparation de sources non circulaires par minimisation du critère du module constant dans une approche par déflation

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à la séparation de mélanges convolutifs sur-déterminés de signaux non circulaires à l'ordre 2. Nous nous limiterons aux modulations BPSK et CPM d'indice 1/2 qui sont les plus utilisées parmi les modulations non-circulaires mais les méthodologies qui vont être présentées peuvent être adaptés sans réel problème au contexte des modulations PAM, OQPSK et FSK.

Nous commencerons par un court descriptif du contexte et du type des signaux considérés (section 3.1) pour ensuite nous concentrer sur la séparation de ce type de mélanges par une approche de déflation couplée avec le critère du CMA (section 3.2).

Après une courte analyse du critère du CMA (section 3.2.1) nous étudierons ses performances dans la séparation de deux types particuliers de mélanges de signaux non circulaires : le mélange des signaux sources dont les fréquences cycliques et les fréquences cycliques non conjuguées sont différents (section 3.2.2) et la situation opposée des mélanges de signaux supposés avoir la même fréquence porteuse et le même débit i.e. mêmes fréquences cycliques et cycliques non conjuguées (section 3.2.3).

Dans le premier cas, nous montrerons que, comme dans le cas où tous les signaux sources sont circulaires à l'ordre 2, la minimisation du critère du module constant permet de séparer l'une des sources et de plus nous montrons que les arguments des minima locaux du critère sont des filtres séparants. Notons que ce résultat est nouveau, même dans le cas circulaire où il n'avait pas été établi.

En ce qui concerne le deuxième type de mélange, nous commencerons par illustrer les difficultés posées par la séparation de 2 sources BPSK par l'algorithme du module constant et nous proposerons ensuite une modification du critère du CMA pour éliminer ces difficultés.

Nous étudierons enfin le comportement de ce nouvel algorithme dans le contexte de mélange de signaux non-circulaires non nécessairement BPSK, ayant des fréquences cycliques différentes et des fréquences cycliques non conjuguées pouvant coïncider (section 3.2.4).

Le nouveau critère que nous avons développé nécessite la connaissance des fréquences

cycliques non conjuguées les plus significatives des signaux sources. Nous proposerons donc dans la section 3.3 une méthode d'estimation de ces fréquences cycliques.

## 3.1 Contexte général

### 3.1.1 Type du mélange

Tous les résultats présentés dans ce manuscrit ont été obtenus dans un contexte d'écoute passive pour les télécommunications. On suppose que  $K$  émetteurs inconnus transmettent simultanément dans la bande passante analysée par un récepteur pourvu de  $N$  capteurs, et l'on désigne par  $\mathbf{s}_a(t) = (s_{a,1}(t), \dots, s_{a,K}(t))^T$  le signal analogique (à temps continu) de dimension  $K$  des  $K$  signaux transmis, et par  $\mathbf{y}_a(t) = (y_{a,1}(t), \dots, y_{a,N}(t))^T$  le signal analogique de dimension  $N$  reçu. Nous considérons uniquement le cas où  $K \leq N$ , c'est à dire le cas d'un mélange sur-déterminé. Les canaux de propagation entre les émetteurs et les différents capteurs du récepteur sont supposés être sélectifs en fréquence, de sorte que  $\mathbf{y}_a$  peut être vu comme la sortie d'un système linéaire  $K$  entrées /  $N$  sorties excité par  $\mathbf{s}_a(t) = (s_{a,1}(t), \dots, s_{a,K}(t))^T$ . Après échantillonnage à une cadence  $T_e$  qui respecte le théorème d'échantillonnage de Shannon, le signal observé  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{y}_a(nT_e)$  est un mélange *convolutif* des composantes de  $s_1(n), \dots, s_K(n)$  de  $\mathbf{s}(n)$

$$\mathbf{y}(n) = \sum_k \mathbf{H}_k \mathbf{s}(n - k) \quad (3.1.1)$$

où  $s_k(n) = s_{a,k}(nT_e)$ . Séparer les sources d'un mélange convolutif (3.1.1) revient à reconstituer une version filtrée de chacun des signaux  $s_1(n), \dots, s_K(n)$  à partir de  $\mathbf{y}(n)$ . La difficulté spécifique du contexte que nous étudions est lié au fait que les signaux sources  $(s_k)_{k=1, \dots, K}$  sont cyclostationnaires, et que leurs fréquences cycliques, liées à leurs rythmes symboles et à leurs fréquences porteuses, sont inconnus au niveau du récepteur. Dans ces conditions, et prenant en compte le fait que l'estimation des fréquences cycliques du signal  $r(n)$  n'est pas toujours une tâche simple à accomplir, nous nous sommes intéressés aux fonctions dont la minimisation permet d'extraire l'une des sources, et pouvant être estimée de façon consistante sans connaissance à priori des fréquences cycliques.

Nous ne considérons dans ce chapitre que des méthodes de séparation par déflation et nous nous concentrons sur les critères permettant l'extraction d'une source du mélange.

### 3.1.2 Modèles des signaux

Dans ce chapitre nous considérons uniquement des signaux sources à temps continu  $(s_{a,k})_{k=1, \dots, K}$  modulés linéairement ou des signaux CPM. Nous allons noter  $(T_k)_{k=1, \dots, K}$  les périodes symboles des signaux, et  $(\Delta f_k)_{k=1, \dots, K}$  les résidus de porteuses inévitables dus aux différences entre les fréquences porteuses des  $K$  émetteurs et la fréquence d'accord du récepteur.

Un signal  $s_{a,k}$  est donc soit le résultat d'une modulation linéaire d'une suite de symboles  $\{a_{k,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  par un filtre de mise en forme  $g_{a,k}(t)$  :

$$s_{a,k}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{k,n} g_{a,k}(t - nT_k)$$

soit un signal  $s_{a,k}(t)$  obtenu en filtrant passe bas un signal CPM  $\exp(i\phi_{a,k}(t))$  dont la phase est donnée par :

$$\phi_{a,k}(t) = \pi h \int_{u=-\infty}^{u=t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{k,n} g_{a,k}(t - nT_k) du$$

où  $h$  est l'indice de modulation, habituellement compris entre 0 et 1.

Dans le cas d'un signal  $s_{a,k}$  linéairement modulé, le filtre de mise en forme que nous avons considéré est un filtre en racine de cosinus surélevé dont on appelle le facteur d'excès de bande " $\gamma_k$ " et dont la fonction de transfert est :

$$\hat{G}_{a,k}(f) = \begin{cases} T_k & \text{si } |f| < \frac{1-\gamma_k}{2T_k} \\ T_k \cos\left(\frac{\pi T_k (|f| - \frac{1-\gamma_k}{2T_k})}{2\gamma_k}\right) & \text{si } \frac{1-\gamma_k}{2T_k} < |f| < \frac{1+\gamma_k}{2T_k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\hat{G}_{a,k}(\nu)$  est la transformée Fourier de  $g_{a,k}(t)$ . Nous avons choisi ce type de filtre de mise en forme parce qu'il satisfait la condition de Nyquist :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{G}_{a,k}\left(\nu - \frac{n}{T_k}\right) \right|^2 = T_k$$

La densité spectrale de  $s_{a,k}(t)$  a comme support l'intervalle  $[-\frac{1+\gamma_k}{2T_k}, \frac{1+\gamma_k}{2T_k}]$ .

Pour les signaux CPM nous utiliserons un filtre de mise en forme rectangulaire de longueur  $L$  :

$$g_{a,k}(t) = \begin{cases} \frac{1}{LT_k} & \text{si } 0 \leq t < LT_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou un filtre en cosinus surélevé :

$$g_{a,k}(t) = \begin{cases} \frac{1}{LT_k} (1 - \cos(\frac{2\pi t}{LT_k})) & \text{si } 0 \leq t < LT_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Afin de limiter leurs bandes passantes les signaux CPM habituels sont en pratique filtrés à l'émission, et nous supposons que leurs bandes passantes sont encore des intervalles du type  $[-\frac{1+\gamma_k}{2T_k}, \frac{1+\gamma_k}{2T_k}]$ , où  $0 < \gamma_k \leq 1$ .

Désignons par  $\mathbf{y}_{a,k}(t)$  le signal à temps continu de dimension  $N$  représentant la contribution du signal  $s_{a,k}(t)$  au signal reçu  $\mathbf{y}_a(t)$ , c'est-à-dire le signal que l'on recevrait si seul l'émetteur numéro  $k$  était actif. Alors,  $\mathbf{y}_{a,k}(t)$  est supposé s'écrire sous la forme

$$\mathbf{y}_{a,k}(t) = e^{2i\pi\Delta f_k t} (\mathbf{h}_{a,k} * s_{a,k})(t) \quad (3.1.2)$$

où  $*$  représente le produit de convolution et où  $\mathbf{h}_{a,k}(t)$  désigne la réponse impulsionnelle (de dimension  $N$ ) du canal entre la source  $k$  et le récepteur multi-capteurs. La présence du résidu de porteuse a donc pour effet de translater la bande passante de  $\mathbf{y}_{a,k}$  de  $\Delta f_k$ ; celle-ci coïncide donc avec l'intervalle  $[-\frac{1+\gamma_k}{2T_k} + \Delta f_k, \frac{1+\gamma_k}{2T_k} + \Delta f_k]$ .

Le signal reçu (en absence de bruit)  $\mathbf{y}_a(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_{a,k}(t)$  est échantillonné à un rythme  $F_e = \frac{1}{T_e}$  vérifiant

$$\frac{1 + \gamma_k}{2T_k} + |\Delta f_k| < \frac{F_e}{2} \quad (3.1.3)$$

pour tout  $k = 1, \dots, K$ . Posons  $\mathbf{s}(n) = (s_1(n), \dots, s_K(n))^T$ , où  $s_k(n) = s_{a,k}(nT_e)$ ,  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{y}_a(nT_e)$ , et  $\delta f_k = \Delta f_k T_e$ . Compte tenu des conditions vérifiées par  $F_e$ , le signal à temps discret  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{y}_a(nT_e)$  se met sous la forme

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{k=1}^K e^{2i\pi n \delta f_k} [\mathbf{h}_k(z)] s_k(n) \quad (3.1.4)$$

où  $\mathbf{h}_k(z)$  représente le filtre à temps discret dont la réponse impulsionnelle est obtenue en échantillonnant le produit de convolution entre  $\mathbf{h}_a$  et le filtre passe-bas idéal sur  $[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}]$ , et où la notation  $[\mathbf{h}_k(z)] s_k(n)$  représente la valeur à l'instant  $n$  de la sortie du filtre  $\mathbf{h}_k(z)$  excité par  $s_k$ .

Nous allons à présent mettre en évidence les fréquences cycliques des statistiques du second ordre des divers signaux. On peut constater que pour tout  $k$ , et pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \rightarrow \mathbb{E}(s_{a,k}(t + \tau) s_{a,k}(t)^*)$  est périodique de période  $T_k$ . Compte tenu des conditions portant sur la bande passante de  $s_{a,k}$ , son développement en série de Fourier ne fait apparaître que les fréquences  $0, \frac{1}{T_k}, -\frac{1}{T_k}$  qui sont appelées les fréquences cycliques de  $s_{a,k}$  :

$$\mathbb{E}(s_{a,k}(t + \tau) s_{a,k}(t)^*) = R_{s_{a,k}}^{(0)}(\tau) + R_{s_{a,k}}^{(1/T_k)}(\tau) e^{2i\pi t/T_k} + R_{s_{a,k}}^{(-1/T_k)}(\tau) e^{-2i\pi t/T_k}$$

$R_{s_{a,k}}^{(0)}(\tau), R_{s_{a,k}}^{(1/T_k)}(\tau), R_{s_{a,k}}^{(-1/T_k)}(\tau)$  sont appelés coefficients de corrélation cycliques de  $s_{a,k}$  aux fréquences  $0, 1/T_k, -1/T_k$  et à l'instant  $\tau$ . A noter que lorsque l'excès de bande  $\gamma_k$  est faible, alors les coefficients de corrélation cyclique aux fréquences non nulles sont nettement inférieurs à ceux qui correspondent à la fréquence 0. Dans le cas où le signal  $s_{a,k}$  est non circulaire au second ordre, la fonction  $t \rightarrow \mathbb{E}(s_{a,k}(t + \tau) s_{a,k}(t))$  est non identiquement nulle et peut être développé en série de Fourier.

– Dans le cas de signaux BPSK,  $s_{a,k}(t)$  se met sous la forme

$$s_{a,k}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_{a,k}(t - nT_k)$$

où  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite indépendante identiquement distribuée telle  $a_n = \pm 1$  avec probabilité  $1/2$ . La fonction  $t \rightarrow \mathbb{E}(s_{a,k}(t + \tau) s_{a,k}(t))$  est alors clairement périodique de période  $T_k$ , et son développement en série de Fourier ne fait également apparaître que les fréquences  $0, \frac{1}{T_k}, -\frac{1}{T_k}$ . On dit alors que ces 3 fréquences sont les fréquences cycliques “non-conjuguées” de  $s_{a,k}$ . Les coefficients de corrélation cycliques non conjugués sont notés  $R_{c,s_{a,k}}^{(0)}(\tau), R_{c,s_{a,k}}^{(1/T_k)}(\tau), R_{c,s_{a,k}}^{(-1/T_k)}(\tau)$ . Comme précédemment, les corrélations cycliques non conjuguées aux fréquences non nulles sont nettement plus faibles que ceux qui correspondent à la fréquence 0 si l'excès de bande  $\gamma_k$  est proche de 0.

– Si  $s_{a,k}(t)$  est un signal CPM d'indice non demi-entier (en pratique différents de  $1/2$ ), il est circulaire à l'ordre 2. Si l'indice de modulation de  $s_{a,k}(t)$  est  $1/2$ , il est bien établi que  $t \rightarrow \mathbb{E}(s_{a,k}(t + \tau) s_{a,k}(t))$  est de période  $2T_k$  contrairement au contexte des signaux BPSK. Compte tenu de la limitation de la bande passante, les fréquences cycliques non conjuguées sont a priori réduites à  $0, \pm \frac{1}{2T_k}, \pm \frac{1}{T_k}, \pm \frac{3}{2T_k}$ , les 4 dernières fréquences étant peu significatives dans le cas où l'excès de bande est faible. De plus, la structure particulière des signaux CPM d'indice  $1/2$  implique que  $0$  et  $\pm \frac{1}{T_k}$  ne sont en fait pas fréquences cycliques conjuguées car pour tout  $\tau$ , on

peut montrer que les coefficients de corrélation non conjugués correspondants sont nuls . En conclusion, dans le contexte CPM d'indice  $1/2$ , les fréquences cycliques non-conjuguées de  $s_{a,k}(t)$  sont  $\pm \frac{1}{2T_k}, \pm \frac{3}{2T_k}$ , les 2 dernières fréquences cycliques étant en pratique quasi négligeables du fait de la limitation de la bande passante.

Les fréquences cycliques du signal  $\mathbf{y}_{a,k}(t)$  restent identiques à celles de  $s_{a,k}(t)$  car la présence du résidu de porteuse n'a pas d'effet sur les fréquences cycliques. Par contre, les fréquences cycliques non conjuguées sont translatées de  $2\Delta f_k$ , et sont donc égales à  $2\Delta f_k, 2\Delta f_k \pm \frac{1}{T_k}$  dans le cas BPSK, et  $2\Delta f_k \pm \frac{1}{2T_k}, 2\Delta f_k \pm \frac{3}{2T_k}$  dans le cas CPM d'indice  $1/2$ .

Les fréquences cycliques et cycliques non conjuguées des signaux à temps discret  $s_k(n) = s_{a,k}(nT_e)$ ,  $\mathbf{y}_k(n) = \mathbf{y}_{a,k}(nT_e)$  et  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{y}_a(nT_e)$  sont obtenues en multipliant celles de  $s_{a,k}(t)$ ,  $\mathbf{y}_{a,k}(t)$  et  $\mathbf{y}_a(t)$  par  $T_e$ . Dans la suite, nous allons poser  $\alpha_k = \frac{T_e}{T_k}$ , et appellerons  $I$  et  $I_c$  l'ensemble des fréquences cycliques et des fréquences cycliques non conjuguées du signal à temps discret reçu  $\mathbf{y}(n)$ . Par ailleurs,  $I_*$  représentera l'ensemble des fréquences cycliques non nulles de  $\mathbf{y}(n)$ .

### 3.2 Critère du CMA et non-circularité de deuxième ordre

Le problème de séparation de mélanges convolutifs des sources dans un contexte aveugle par une méthode de déflation a été abordé dans [18] dans le cas où toutes les sources sont circulaires à l'ordre 2. Ce contexte couvre en pratique la grande majorité des signaux de télécommunications, à l'exception des modulations BPSK, des modulations FSK, des modulations décalées de type OQPSK, et des modulations CPM dont les indices sont des demi-entiers, en pratique  $1/2$  car les autres demi-entiers ne semblent pas être utilisés en pratique. Le principe des approches par déflation est d'extraire les signaux du mélange un par un. Il est donc convenable de chercher des filtres  $\mathbf{g}_k(z)_{k=1,\dots,K}$  à  $N$  entrées / 1 sortie destinés à extraire chacun des  $K$  signaux sources. Dans la suite nous considérons un de ces filtres qu'on appelle par simplicité  $\mathbf{g}(\mathbf{z})$  et appelons  $r(n)$  le signal obtenu en filtrant le mélange initial par ce filtre,  $r(n) = [\mathbf{g}(\mathbf{z})]\mathbf{y}(n)$ . [18] s'intéresse aux critères dont la minimisation permet de trouver un filtre  $\mathbf{g}(\mathbf{z})$  capable d'extraire une source du mélange et surtout au critère du module constant défini par

$$J(r) = \langle \mathbb{E}(|r(n)|^2 - 1)^2 \rangle \quad (3.2.5)$$

où l'opérateur  $\langle . \rangle$  désigne l'opérateur de moyenne temporelle défini par

$$\langle u_n \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} u_n$$

L'une des conclusions importantes de [18] est que la minimisation de  $J$  permet d'extraire des sources circulaires à l'ordre 2, avec une petite restriction de nature théorique sur le nombre de sources présentes dans le cas où leurs périodes symboles coïncident, mais qui apparemment n'a pas de conséquence pratique. Dans cette section nous étudions dans quelle mesure ces résultats restent vrais dans le cas des signaux non-circulaires à l'ordre 2.

### 3.2.1 Mise en évidence de l'expression de $J(r)$

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'évaluation du critère du CMA et à l'étude de l'impact de la non-circularité à l'ordre 2 des sources sur le filtre obtenu en le minimisant. Pour cela, nous remarquons que  $J(r)$  peut s'écrire sous la forme

$$J(r) = \langle \mathbb{E}|r(n)|^4 \rangle - 2 \langle \mathbb{E}|r(n)|^2 \rangle + 1$$

Pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}|r(n)|^4$  est donné par

$$\mathbb{E}|r(n)|^4 = c_4(r(n)) + 2 (\mathbb{E}|r(n)|^2)^2 + |\mathbb{E}(r^2(n))|^2$$

où  $c_4(x) = \text{cum}(x, x^*, x, x^*)$  représente le cumulants d'ordre 4 de la variable aléatoire  $x$ .  $\langle \mathbb{E}|r(n)|^4 \rangle$  se met donc sous la forme

$$\langle \mathbb{E}|r(n)|^4 \rangle = \langle c_4(r(n)) \rangle + 2 \langle (\mathbb{E}|r(n)|^2)^2 \rangle + \langle |\mathbb{E}(r^2(n))|^2 \rangle$$

Le signal  $r(n)$  est cyclostationnaire et ses fréquences cycliques et fréquences cycliques non-conjuguées sont les mêmes que celles de  $\mathbf{y}(n)$ . En particulier, on peut écrire que

$$\mathbb{E}(|r(n)|^2) = \sum_{\alpha \in I} R_r^{(\alpha)}(0) e^{2i\pi n \alpha}.$$

et que, de façon analogue,

$$\mathbb{E}(r(n)^2) = \sum_{\alpha_c \in I_c} R_{c,r}^{(\alpha_c)}(0) e^{2i\pi n \alpha_c}.$$

Dans ces conditions, l'identité de Parseval implique que

$$\langle (\mathbb{E}|r(n)|^2)^2 \rangle = \sum_{\alpha \in I} |R_r^{(\alpha)}(0)|^2$$

et que

$$\langle |\mathbb{E}(r(n)^2)|^2 \rangle = \sum_{\alpha_c \in I_c} |R_{c,r}^{(\alpha_c)}(0)|^2$$

Dans ces conditions,  $J(r)$  se met sous la forme

$$J(r) = \langle c_4(r(n)) \rangle + 2 \sum_{\alpha \in I} |R_r^{(\alpha)}(0)|^2 + \sum_{\alpha_c \in I_c} |R_{c,r}^{(\alpha_c)}(0)|^2 - 2R_r^{(0)}(0) + 1 \quad (3.2.6)$$

Nous allons à présent exprimer  $r(n)$  en fonction des différents signaux sources, et utiliser cette expression afin d'obtenir une expression plus exploitable de  $J(r)$ . En utilisant (3.1.4),  $r(n)$  peut se mettre sous la forme

$$r(n) = \sum_{k=1}^K e^{2i\pi n \delta f_k} [f_k(z)] s_k(n) \quad (3.2.7)$$

où  $f_k(z)$  est la fonction de transfert définie par  $f_k(z) = \mathbf{g}(ze^{-2i\pi\delta f_k}) \mathbf{h}_k(z)$ . Par ailleurs, nous désignons par  $\|f_k\|$  la norme de  $f_k(z)$  définie par

$$\|f_k\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |f_k(e^{2i\pi\nu})|^2 S_{s_k}^{(0)}(e^{2i\pi\nu}) d\nu \quad (3.2.8)$$

où la fonction  $S_{\tilde{s}_k}^{(0)}(e^{2i\pi\nu})$  représente la densité spectrale du signal  $(s_k(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , et définissons le filtre  $\tilde{f}_k(z)$  et le signal  $\tilde{s}_k(n)$  par

$$\tilde{f}_k(z) = \frac{f_k(z)}{\|f_k\|}, \quad \tilde{s}_k(n) = [\tilde{f}_k(z)]s_k(n)$$

Si  $\|f_k\| = 0$ , on prend  $\tilde{f}_k(z) = 0$  et  $\tilde{s}_k(n) = 0$ . Il est bien évident que  $\|\tilde{f}_k\| = 1$ , et que  $\langle \mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^2 \rangle = 1$ .  $r(n)$  peut s'écrire sous la forme

$$r(n) = \sum_{k=1}^K \|f_k\| e^{2i\pi n \delta f_k} \tilde{s}_k(n) \quad (3.2.9)$$

et coïncide donc avec une version filtrée de l'une des sources si et seulement si tous les coefficients  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$  sont nuls sauf 1. Ceci implique que la minimisation de  $J(r)$  par rapport à  $\mathbf{g}$  permet d'extraire l'une des sources si et seulement si le point  $\mathbf{g}$  où le minimum de  $J$  est atteint est tel que tous les coefficients  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$  sont nuls sauf 1.

Nous allons à présent exprimer  $J(r)$  en fonction des  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$  ainsi que des statistiques des signaux  $(\tilde{s}_k)_{k=1, \dots, K}$ . Pour ceci, il convient de remarquer que ces signaux sont indépendants. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle c_4(r(n)) \rangle &= \sum_{k=1}^K \|f_k\|^4 \langle c_4(\tilde{s}_k(n)) \rangle \\ R_r^{(\alpha)}(0) &= \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 R_{\tilde{s}_k}^{(\alpha)}(0) \end{aligned}$$

où  $\alpha$  représente une fréquence cyclique de  $r$ . A noter que pour  $\alpha = 0$ , la dernière relation s'écrit  $R_r^{(0)}(0) = \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2$  car par construction,  $\langle \mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^2 \rangle = R_{\tilde{s}_k}^{(0)}(0) = 1$ . Par ailleurs, il est simple de vérifier que si  $\alpha_c$  est une fréquence cyclique non-conjuguée de  $r$ , alors, le coefficient de corrélation cyclique non-conjugué du signal  $e^{2i\pi n \delta f_k} \tilde{s}_k(n)$  à la fréquence  $\alpha_c$  et à l'instant 0 coïncide avec  $R_{c, \tilde{s}_k}^{(\alpha_c - 2\delta f_k)}(0)$ . Ceci implique que

$$R_{c, r}^{(\alpha_c)}(0) = \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 R_{c, \tilde{s}_k}^{(\alpha_c - 2\delta f_k)}(0)$$

En utilisant ces diverses expressions dans (3.2.6), on obtient après quelques manipulations l'expression suivante de  $J(r)$  :

$$J(r) = \sum_{k=1}^K \beta(\tilde{s}_k) \|f_k\|^4 + 2 \sum_{k_1 < k_2} l(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \quad (3.2.10)$$

où le terme  $l(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2})$  est donné par

$$l(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) = 2 + \operatorname{Re} \left[ 2 \sum_{\alpha \in I_*} R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(\alpha)}(0) \left( R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(\alpha)}(0) \right)^* + \sum_{\alpha_c \in I_c} R_{c, \tilde{s}_{k_1}}^{(\alpha_c - 2\delta f_{k_1})}(0) \left( R_{c, \tilde{s}_{k_2}}^{(\alpha_c - 2\delta f_{k_2})}(0) \right)^* \right] \quad (3.2.11)$$

et où  $\beta(\tilde{s}_k)$  est défini par

$$\beta(\tilde{s}_k) = \langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle + 2 + 2 \sum_{\alpha \in I_*} |R_{\tilde{s}_k}^{(\alpha)}(0)|^2 + \sum_{\alpha_c \in I_c} |R_{c, \tilde{s}_k}^{(\alpha_c - 2\delta f_k)}(0)|^2 \quad (3.2.12)$$

Notons qu'il est facile d'établir que  $\beta(\tilde{s}_k)$  est également donné par

$$\beta(\tilde{s}_k) = \langle \mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^4 \rangle \quad (3.2.13)$$

Avec l'inégalité de Jensen on peut montrer que

$$\langle \mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^4 \rangle \geq \langle (\mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^2)^2 \rangle \geq (\langle \mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^2 \rangle)^2$$

et puisque par définition  $\langle \mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^2 \rangle = 1$ , on trouve facilement que

$$\beta(\tilde{s}_k) = \langle \mathbb{E}|\tilde{s}_k(n)|^4 \rangle \geq 1 \quad (3.2.14)$$

L'expression (3.2.10) montre que  $J(r)$  dépend d'une part des  $(\|f_k\|^2)_{k=1,\dots,K}$ , et d'autre part des filtres de norme 1  $(\tilde{f}_k(z))_{k=1,\dots,K}$  définis par  $\tilde{s}_k(n) = [\tilde{f}_k(z)]s_k(n)$ , et que ces 2 types de paramètres sont découplés. Minimiser  $J(r)$  par rapport à  $\mathbf{g}(z)$  est donc équivalent à minimiser (3.2.10) indépendamment par rapport aux  $(\|f_k\|^2)_{k=1,\dots,K}$  et aux filtres de norme 1  $(\tilde{f}_k(z))_{k=1,\dots,K}$ .

Dans la suite nous allons étudier ce problème de minimisation lorsque les différents signaux sources n'ont aucune fréquence cyclique non nulle et aucune fréquence cyclique non-conjuguée en commun et dans la situation opposée.

### 3.2.2 Cas de signaux de fréquences cycliques différentes.

Nous supposons que les différents émetteurs ont des caractéristiques de transmission pour lesquelles les signaux sources n'ont aucune fréquence cyclique non nulle ni aucune fréquence cyclique non conjuguée en commun. Ceci implique en particulier que  $\alpha_k \neq \alpha_l$  (i.e.  $T_k \neq T_l$ ), et que  $\delta f_k \neq \delta f_l$  (i.e.  $\Delta f_k \neq \Delta f_l$ ) si  $k \neq l$ . Cette situation se produira en pratique lorsque les différents émetteurs n'appartiennent pas au même réseau.

#### Mise en évidence de conditions nécessaires et suffisantes de séparation par la minimisation de $J(r)$ .

La situation présente est relativement simple car le terme  $l(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2})$  défini par (3.2.11) se réduit à la constante 2 tandis que dans l'expression (3.2.13) de  $\beta(\tilde{s}_k)$ , la somme sur  $I_*$  et  $I_c$  se réduit à la somme sur les fréquences cycliques non nulles de la contribution  $\mathbf{y}_k(n)$  de  $s_k(n)$  à  $\mathbf{y}(n)$ , et à la somme sur les fréquences cycliques non conjuguées du même signal  $\mathbf{y}_k(n)$ . Les fréquences cycliques non nulles de  $\mathbf{y}_k(n)$  sont  $\pm\alpha_k$  et les fréquences cycliques non conjuguées de  $\mathbf{y}_k(n)$  valent  $2\delta f_k, 2\delta f_k \pm \alpha_k$  si  $s_k$  est un signal BPSK, et  $2\delta f_k \pm \alpha_k/2, 2\delta f_k \pm 3\alpha_k/2$  si  $s_k$  est un signal CPM d'indice 1/2. Si le signal  $s_k$  est circulaire, les valeurs des fréquences cycliques non-conjuguées ne présentent pas d'importance puisque les coefficients de corrélation non-conjugués sont nuls. Nous pouvons donc écrire

$$\beta(\tilde{s}_k) = \langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle + 2 + 2 \sum_{l=-1,1} \left| R_{\tilde{s}_k}^{l\alpha_k}(0) \right|^2 + \sum_{l=-1,0,1} \left| R_{c,\tilde{s}_k}^{l\alpha_k}(0) \right|^2 \quad (3.2.15)$$

dans le cas d'une modulation BPSK, et

$$\beta(\tilde{s}_k) = \langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle + 2 + 2 \sum_{l=-1,1} \left| R_{\tilde{s}_k}^{l\alpha_k}(0) \right|^2 + \sum_{l=-3,-1,1,3} \left| R_{c,\tilde{s}_k}^{l\alpha_k/2}(0) \right|^2 \quad (3.2.16)$$

dans le cas d'une modulation CPM d'indice 1/2.  $J(r)$  vaut

$$J(r) = \sum_{k=1}^K \beta(\tilde{s}_k) \|f_k\|^4 + 2 \sum_{k_1 \neq k_2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \quad (3.2.17)$$

et apparaît comme une fonction particulièrement simple des coefficients  $(\|f_k\|^2)_{k=1,\dots,K}$ . Nous allons déterminer à présent sous quelles conditions le minimum de  $J(r)$  est atteint pour un filtre  $\mathbf{g}(z)$  pour lequel tous les  $\|f_k\|$  sont nuls sauf 1. Pour cela, nous allons fixer les  $(\tilde{f}_k(z))_{k=1,\dots,K}$ , c'est-à-dire les  $(\beta(\tilde{s}_k))_{k=1,\dots,K}$ , et étudier le problème de la minimisation de  $J(r)$  par rapport aux paramètres  $(\|f_k\|^2)_{k=1,\dots,K}$  uniquement. La solution est donnée par le résultat suivant.

**Proposition 1.** *Le minimum de  $J(r)$  par rapport aux  $(\|f_k\|^2)_{k=1,\dots,K}$  est atteint pour  $\|f_k\|^2 = \delta(k - k_0) \|f_{k_0}\|^2$  pour un certain indice  $k_0$  si et seulement si*

$$\min_{k=1,\dots,K} \beta(\tilde{s}_k) < 2$$

et si le minimum est atteint pour l'indice  $k_0$ .

Pour établir ce résultat, il suffit de chercher les valeurs de  $(\|f_k\|^2)_{k=1,\dots,K}$  pour lesquelles le gradient de  $J(r)$  par rapport aux  $(\|f_k\|^2)_{k=1,\dots,K}$  s'annule, d'évaluer la valeur de  $J$  en ces points, et de constater que le point  $\|f_k\|^2 = \delta(k - k_0) \|f_{k_0}\|^2$  réalise le minimum si et seulement si  $\beta(\tilde{s}_{k_0}) = \min_{k=1,\dots,K} \beta(\tilde{s}_k)$  et  $\beta(\tilde{s}_{k_0}) < 2$ . La preuve de cette proposition se trouve dans ([19]).

Notons à présent  $\beta_{min,k}$  le minimum sur les filtres  $\tilde{f}_k$  de norme 1 de  $\beta(\tilde{s}_k)$  :

$$\beta_{min,k} = \min_{\tilde{f}_k, \|\tilde{f}_k\|=1} \beta(\tilde{s}_k) \quad (3.2.18)$$

La proposition 1 montre immédiatement que la minimisation de  $J$  sur tous les paramètres  $(\|f_k\|^2)_{k=1,\dots,K}$  et  $(\tilde{f}_k(z))_{k=1,\dots,K}$ , permet d'extraire l'une des sources si et seulement si

$$\min_{k=1,\dots,K} \beta_{min,k} < 2 \quad (3.2.19)$$

Supposons que cette condition soit respectée et précisons la valeur minimale prise par  $J(r)$ , ainsi que le signal  $r(n)$  extrait. Pour cela, nous appelons  $k_0$  le numéro de la source pour lequel  $\beta_{min,k}$  est minimum. Soit  $\tilde{f}_{k_0}^*$  le (ou l'un des) filtre de norme 1 pour lequel  $\beta_{min,k_0} = \beta([\tilde{f}_{k_0}^*(z)]s_{k_0}(n))$ . Alors le filtre  $\mathbf{g}^*(z)$  minimisant  $J(r)$  est tel que  $f_k(z) = 0$  si  $k \neq k_0$ . Le signal  $r^*(n) = [\mathbf{g}^*(z)]\mathbf{y}(n)$  s'écrit donc sous la forme

$$r^*(n) = e^{2i\pi n \delta f_{k_0}} [f_{k_0}^*(z)]s_{k_0}(n)$$

où  $f_{k_0}^*(z) = \mathbf{g}^*(ze^{-2i\pi\delta f_{k_0}})\mathbf{h}_{k_0}(z)$ .  $r^*$  coïncide donc, au terme du résidu de fréquence près, avec une version filtrée de la source  $s_{k_0}(n)$ . On peut constater que  $\frac{f_{k_0}^*(z)}{\|f_{k_0}^*\|}$  coïncide avec  $\tilde{f}_{k_0}^*(z)$ , tandis que la valeur de  $\|f_{k_0}^*\|$  s'obtient en minimisant par rapport à  $\|f_{k_0}\|$  la quantité

$$\beta_{min,k_0} \|f_{k_0}\|^4 - 2\|f_{k_0}\|^2 + 1$$

i.e.  $\|f_{k_0}^*\|^2 = \frac{1}{\beta_{min,k_0}}$ . De ceci, on déduit immédiatement que

$$J(r^*) = 1 - \frac{1}{\beta_{min,k_0}} \quad (3.2.20)$$

La condition (3.2.19) ne concerne que l'extraction de la première source dans l'approche par déflation. Pour que toutes les sources puissent être extraites, il faut que (3.2.19) soit vérifiée à chaque itération de la procédure. Nous avons donc établi le résultat suivant.

**Théorème 1.** *Dans le cas où les sources ne partagent aucune fréquence cyclique et aucune fréquence cyclique non conjuguée, la minimisation du critère du module constant permet d'extraire toutes les sources par une procédure par déflation si et seulement si tous les  $(\beta_{min,k})_{k=1,\dots,K}$  sont strictement inférieurs à 2, sauf peut-être l'un d'entre eux.*

**Vérification de la condition  $\beta_{min,k} < 2$ .**

Nous allons à présent vérifier dans quelle mesure les  $(\beta_{min,k})_{k=1,\dots,K}$  sont strictement inférieurs à 2 dans le cas des signaux sources que nous prenons en compte. La réponse à cette question a été trouvée dans [19] si  $s_k(n)$  est une modulation linéaire associée à des symboles circulaires à l'ordre 2. Dans ce cas, il a été établi analytiquement que  $\beta_{min,k} < 2$ . Dans le cas des CPM, quelque soit la valeur de l'indice, il a été vérifié numériquement dans [21] que  $\beta_{min,k}$  est également strictement inférieur à 2; ceci est aisément compréhensible car si le signal CPM n'était pas filtré, le module de  $s_k(n)$  serait égal à 1, et  $\beta(s_k) = \langle \mathbb{E}|s_k(n)|^4 \rangle$  vaudrait 1. Lorsque le signal CPM est filtré,  $\beta(s_k)$  est naturellement plus grand que 1, mais en pratique, il a été observé que même pour des excès de bande nuls,  $\beta_{min,k}$  est très nettement inférieur à 2. Il reste donc à étudier le contexte des modulations BPSK pour lequel nous pouvons mettre en évidence des résultats obtenus de façon mi-analytique / mi-numérique.

Nous considérons donc un signal BPSK, et étudions le paramètre  $\beta_{min}$  correspondant. Pour simplifier les notations, la version temps continu de ce signal sera notée  $s_a(t)$ , et sa version échantillonnée à  $T_e$   $s(n)$ . Nous ne précisons donc pas le numéro de cette source particulière. Nous faisons de même concernant la période symbole et l'excès de bande notés respectivement  $T$  et  $\gamma$ , et nous notons  $\kappa$  le cumulants d'ordre 4 des symboles, qui bien entendu est égal à -2. Nous commençons par donner une première caractérisation analytique de  $\beta_{min}$  pouvant s'obtenir en utilisant les mêmes arguments que dans [29].

**Théorème 2.** *Supposons que  $T_e$  n'appartient pas à l'ensemble  $\{T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\}$ , et que  $T_e < \frac{T}{1+\gamma}$ . Alors,  $\beta_{min}$  ne dépend pas de la valeur de  $T_e$ , et s'exprime sous la forme*

$$\beta_{min} = \inf_{f_a \in \mathcal{F}(\left[-\frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}\right])} \Phi(f_a) \quad (3.2.21)$$

où  $\Phi(f_a)$  est défini par

$$\begin{aligned} \Phi(f_a) = & \kappa T \frac{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^4 dt}{\left(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt\right)^2} + 2 + 4 \left( \frac{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T}} dt}{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt} \right)^2 \\ & + \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 dt \right|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt\right)^2} + \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T}} dt \right|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt\right)^2} + \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 e^{2i\pi \frac{t}{T}} dt \right|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt\right)^2} \quad (3.2.22) \end{aligned}$$

et où  $\mathcal{F}([- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}])$  désigne l'ensemble des fonctions  $f_a(t)$  dont la transformée de Fourier  $\hat{f}_a(\nu)$  s'annule hors de l'intervalle  $[- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}]$ . Posons par ailleurs

$$\eta_{min} = \min_{\|f\|=1} c_4(\tilde{s}) > \quad (3.2.23)$$

Alors,  $\eta_{min}$  est donné par

$$\eta_{min} = \inf_{f_a \in \mathcal{F}([- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}])} \kappa T \frac{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^4 dt}{(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt)^2} \quad (3.2.24)$$

Nous donnons la preuve de ce théorème dans l'annexe A.1.

**Remarque 1.** Si  $T_e \in \{T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\}$ , l'expression, et par conséquent, la valeur de  $\beta_{min}$ , est différente de (3.2.21).  $\beta_{min}$ , en tant que fonction de  $T_e$ , est donc une fonction constante, sauf aux points de  $\{T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\}$  où elle prend une valeur différente. Il s'agit donc en particulier d'une fonction discontinue. Pour illustrer ce point, considérons par exemple le cas où  $T_e = T$ . Afin que ce rythme d'échantillonnage satisfasse la condition de Shannon, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'excès de bande soit égal à 0. Dans ces conditions, il est bien connu que  $\beta_{min}$  est égal à 1 et  $\eta_{min} = -2$ , alors que nous verrons dans un instant que  $\beta_{min} = 1.18$  et  $\eta_{min} = -1.36$  si  $T_e$  n'appartient pas à  $\{T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\}$ . Nous préférons ne pas donner les expressions de  $\beta_{min}$  si  $T_e \in \{\frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\}$  par souci de simplicité. En tout état de cause, la probabilité pour que  $T_e$  soit égale à l'un des valeurs critiques précédentes est évidemment nulle dans un contexte aveugle. C'est la raison pour laquelle nous supposons dans la suite que  $T_e$  n'appartient pas à  $\{T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\}$  sauf mention explicite du contraire.

Le théorème 2 implique que  $\beta_{min}$  est une fonction décroissante de l'excès de bande  $\gamma$ . Afin de préciser ce point de façon plus claire, nous faisons apparaître provisoirement la dépendance de  $\beta_{min}$  par rapport à  $\gamma$  en le notant  $\beta_{min}(\gamma)$ . La décroissance provient du fait que l'expression de la fonction  $\Phi$  ne dépend pas de l'excès de bande  $\gamma$ , et que la dépendance de  $\beta_{min}$  en  $\gamma$  ne provient que de l'ensemble sur lequel la fonction  $\Phi$  est minimisée, i.e.  $\mathcal{F}([- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}])$ . Cet ensemble croît avec  $\gamma$ , de sorte que le minimum de  $\Phi$  sur  $\mathcal{F}([- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}])$  est d'autant plus petit que  $\gamma$  est grand. Résumons cette discussion :

**Proposition 2.** La fonction  $\gamma \rightarrow \beta_{min}(\gamma)$  décroît lorsque  $\gamma$  croît de 0 à 1. Par conséquent,  $\beta_{min}(\gamma)$  est strictement plus petit que 2 pour toutes les valeurs de  $\gamma$  si et seulement si  $\beta_{min}(0) < 2$ .

L'un des intérêts de la proposition 2 provient du fait que si une fonction  $f_a(t) \in \mathcal{F}([- \frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}])$ , alors l'expression de  $\Phi(f_a)$  se simplifie quelque peu puisque les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T}} dt, \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T}} dt, \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 e^{2i\pi \frac{t}{T}} dt$$

sont nulles. Ceci provient immédiatement de l'identité de Parseval, puisque, les intégrales valent

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - 1/T)^* d\nu, \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - 1/T) d\nu, \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu + 1/T) d\nu$$

et que les fonctions  $\hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - 1/T)^*$ ,  $\hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - 1/T)$ ,  $\hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu + 1/T)$  sont identiquement nulles. Par conséquent,  $\beta_{min}(0)$  est donné par

$$\beta_{min}(0) = \min_{f_a \in \mathcal{F}([- \frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}])} \kappa T \frac{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^4 dt}{(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt)^2} + 2 + \frac{|\int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 dt|^2}{(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt)^2} \quad (3.2.25)$$

Nous formulons à présent divers commentaires sur le théorème 2.

- Il est facile de voir que  $\beta_{min}$  est indépendant de  $T$ .
- Les expressions théoriques (3.2.21) et (3.2.24) de  $\beta_{min}$  et  $\eta_{min}$  peuvent être utilisées afin de les calculer numériquement pour toute valeur de  $\gamma \in [0, 1]$ . Pour cela, il convient de transformer la fonction  $\Phi$  de façon à ce qu'elle dépende d'une suite à temps discret plutôt que d'une fonction à temps continu. A chaque fonction  $f_a(t) \in \mathcal{F}([- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}])$  on peut associer la suite à temps discret  $\bar{f}(n) = f_a(n \frac{T}{1+\gamma})$ , et exprimer  $\Phi$  en fonction des éléments  $(\bar{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Ainsi, après quelques calculs, on aboutit à l'expression suivante de  $\beta_{min}$  et de  $\eta_{min}$ .

$$\eta_{min} = \inf_{\bar{f} \in l^2(\mathbb{Z})} \kappa \frac{1 + \gamma}{2} \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n/2)|^4}{(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n)|^2)^2} \quad (3.2.26)$$

et

$$\begin{aligned} \beta_{min} = \inf_{\bar{f} \in l^2(\mathbb{Z})} & \left( \kappa \frac{1 + \gamma}{2} \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n/2)|^4}{(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n)|^2)^2} + 2 + \left( \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n/2)|^2 e^{-i\pi \frac{n}{1+\gamma}}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n)|^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left| \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\bar{f}(n))^2}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n)|^2} \right|^2 + 1/4 \left| \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\bar{f}(n/2))^2 e^{-i\pi \frac{n}{1+\gamma}}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n)|^2} \right|^2 + 1/4 \left| \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\bar{f}(n/2))^2 e^{i\pi \frac{n}{1+\gamma}}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n)|^2} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

où  $\bar{f}(p + 1/2) = f_a((p + 1/2)T/(1 + \gamma))$  est donné par la formule d'interpolation de Shannon

$$\bar{f}(p + \frac{1}{2}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{f}(n) \frac{\sin(\pi(p + \frac{1}{2} - n))}{\pi(p + \frac{1}{2} - n)} \quad (3.2.28)$$

et où  $l^2(\mathbb{Z})$  représente l'ensemble des suites de carré sommables. En pratique, les expressions (3.2.26) et (3.2.27) peuvent être utilisées pour évaluer numériquement  $\eta_{min}$  et  $\beta_{min}$  par un algorithme d'optimisation en représentant les suites infinies  $(\bar{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  par des vecteurs de dimension finie de taille adéquate. En particulier, nous avons mis en évidence que

$$\inf_{\bar{f} \in l^2(\mathbb{Z})} \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n/2)|^4}{(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n)|^2)^2} \simeq 1.36$$

de sorte que

$$\eta_{min} \simeq -0.68\kappa(1 + \gamma) = -1.36(1 + \gamma) \quad (3.2.29)$$

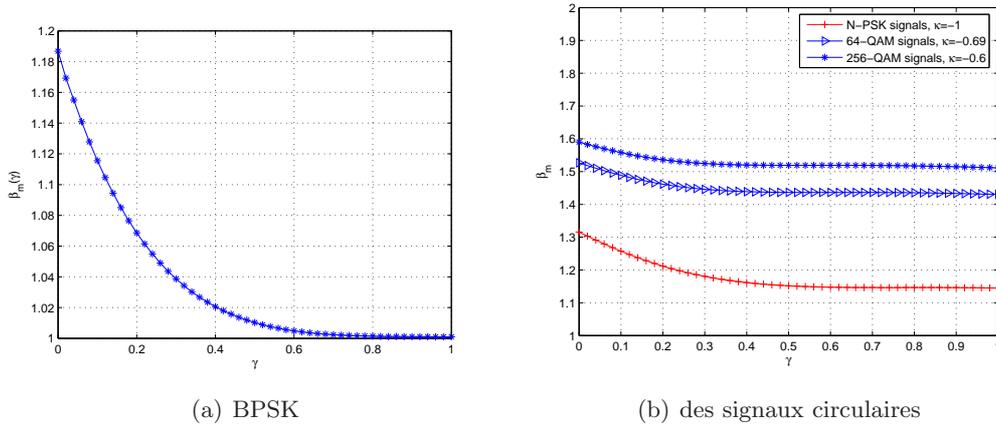
car  $\kappa = -2$ .

Nous représentons dans la Figure 3.2(a) le paramètre  $\beta_{min}$  en fonction de  $\gamma$  dans le cas BPSK évalué par un algorithme de minimisation du gradient à pas optimal du second membre de (3.2.27) lorsque les suites  $(\bar{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont approximées par des vecteurs  $\bar{\mathbf{f}}$  de dimension 101 ( $\bar{\mathbf{f}} = (\bar{f}(-50), \dots, \bar{f}(0), \dots, \bar{f}(50))^T$ ). La figure 3.2(a) confirme la décroissance de  $\beta_{min}$  par rapport à  $\gamma$ , et que  $\beta_{min} < 2$  pour tout  $\gamma$  dans le cas d'une modulation BPSK si  $T_e$  n'appartient pas à  $\{T, T/2, T/3, 2T/3\}$ . Si  $T_e = T$ , nous avons déjà mentionné que  $\beta_{min} = 1$ ; si  $T_e$  est égal à l'une des trois autres valeurs possibles, on peut vérifier directement que  $\beta_{min}$  est aussi strictement plus petit que 2. Ainsi, nous pouvons conclure ce paragraphe consacré au cas où toutes les fréquences cycliques et toutes les fréquences cycliques non conjuguées diffèrent par la proposition suivante.

**Proposition 3.** *Dans le cas où les signaux sources, circulaires ou non circulaires de type BPSK ou CPM d'indice 1/2, ne partagent aucune fréquence cyclique ni aucune fréquence cyclique conjuguée, la minimisation du critère du module constant associée à une procédure de déflation permet d'extraire toutes les sources.*

**Remarque 2.** *Il convient de remarquer que les valeurs de  $\beta_{\min}$  dans le cas d'une modulation BPSK sont plus faibles que celles que l'on peut observer pour une modulation linéaire circulaire. La figure 3.2(b) représente ainsi  $\beta_{\min}$  pour divers types de symboles circulaires. Ceci signifie que si une source BPSK est mélangée avec des modulations circulaires, alors c'est la source BPSK qui sera le plus souvent extraite la première lors de la procédure par déflation. De la même façon, les évaluations numériques de  $\beta_{\min}$  dans le cas de modulations CPM présentées dans [21] prédisent des valeurs de  $\beta_{\min}$  du même ordre de grandeur que celles du cas BPSK. D'éventuels signaux CPM seront donc aussi extraits lors des premières étapes de la déflation lorsqu'ils sont mélangés avec des signaux circulaires.*

FIG. 3.1 –  $\beta_{\min}$  en fonction de  $\gamma$  dans le cas



La proposition 2 est évidemment très importante. Cependant, elle ne permet pas d'être complètement rassuré sur la pertinence de l'approche que nous proposons. En effet, le résultat mis en évidence dans la proposition n'est réellement utile que si l'on est effectivement capable de déterminer un filtre à réponse impulsionnelle finie  $\mathbf{g}(z) = \sum_{l=-L}^L \mathbf{g}(l)z^{-l}$  atteignant le minimum global de l'estimateur consistant traditionnel  $\hat{J}(r)$  de  $J(r)$  défini par

$$\hat{J}(r) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (|r(n)|^2 - 1)^2 \quad (3.2.30)$$

$\hat{J}(r)$  est une fonction non quadratique du vecteur  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}(-L), \dots, \mathbf{g}(L))$ , et la recherche de son minimum ne peut s'effectuer de façon analytique, mais par l'intermédiaire d'un algorithme itératif de type gradient ou Newton. Ce type d'algorithme n'est en fait assuré de converger que vers un **minimum local** de  $\hat{J}$ , et pas nécessairement vers le minimum global. Il convient donc de s'assurer que  $\hat{J}$  ne possède pas de minima locaux **non séparants**. L'étude de  $\hat{J}$  étant évidemment très délicate, nous allons en fait étudier les minima locaux

de la fonction idéale  $J(r)$  en considérant que les effets liés à l'erreur d'estimation  $J(r) - \hat{J}(r)$  sont négligeables. Cette démarche est tout à fait traditionnelle dans le domaine de l'égalisation aveugle.

Plutôt que de travailler directement avec le filtre  $\mathbf{g}(z)$ , nous allons, comme précédemment, exprimer  $J(r)$  en fonction des filtres  $f_1(z), \dots, f_K(z)$ , et exprimer  $J(r)$  en faisant apparaître d'une part les  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$ , et d'autre part les filtres de norme 1  $(\tilde{f}_k(z))_{k=1, \dots, K}$ . Rappelons que ces 2 jeux de paramètres sont en quelque sorte découplés, que l'analyse de la dépendance de  $J(r)$  par rapport aux  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$  est relativement simple, et que l'influence des  $(\tilde{f}_k(z))_{k=1, \dots, K}$  est plus complexe à analyser.

**Proposition 4.** *Supposons qu'au moins l'une des fonctions  $\tilde{f}_k \rightarrow \beta(\tilde{s}_k)$  définies sur l'ensemble des filtres de norme 1 n'ait pas de minimum local  $\tilde{f}_{k,*}$  pour lequel  $\beta(\tilde{s}_{k,*}) \geq 2$ . Alors, tout minimum local de la fonction  $J(r)$  est séparant, c'est-à-dire que tous les  $(\|f_k\|)_{k=1, \dots, K}$  sont nuls sauf 1.*

Nous donnons la preuve de cette proposition dans l'annexe A.3

La condition qu'au moins l'une des fonctions  $\tilde{f}_k \rightarrow \beta(\tilde{s}_k)$  n'ait pas de minimum local  $\tilde{f}_{k,*}$  pour lequel  $\beta(\tilde{s}_{k,*}) \geq 2$  est évidemment très difficile à vérifier, tant cette fonction a une expression compliquée. Cependant, lorsque l'on cherche à minimiser numériquement  $\tilde{f}_k \rightarrow \beta(\tilde{s}_k)$ , l'algorithme de descente ne converge jamais vers un point plus grand que 2. Par ailleurs, même si cette condition n'était pas vérifiée, nous pensons que le minimum local  $(f_{1,*}, \dots, f_{K,*})$  associé de  $J(r)$  doit être extrêmement peu attractif car aucune de nos expérimentations numériques de minimisation de  $\hat{J}(r)$  n'ont produit de point non séparant. Nous pensons donc que notre analyse des minima locaux de  $J(r)$  est pleinement rassurante quant à la capacité de l'algorithme du module constant à séparer les signaux sources considérés dans ce chapitre quand leurs fréquences cycliques et leurs fréquences cycliques non conjuguées diffèrent.

### 3.2.3 Cas de signaux partageant le même débit et la même fréquence porteuse.

Nous allons à présent étudier le cas opposé à celui que nous avons considéré dans le paragraphe 3.2.2, i.e. nous supposons que les  $K$  émetteurs actifs transmettent le même type de signaux, i.e. que leurs modulations, leurs porteuses, leurs débits symboles, leurs excès de bande, et leurs types de symboles coïncident. Outre la valeur d'exemple que cette situation particulière possède, ce cas peut correspondre à la réalité lorsque les différents émetteurs appartiennent au même réseau. Dans le contexte de ce paragraphe, nous allons noter les paramètres techniques communs aux divers signaux par  $T, \delta f, \Delta f, \alpha$ , et  $\gamma$ .

#### 3.2.3-a) L'échec de l'algorithme du module constant

L'étude de la fonction  $J(r)$  effectuée dans le paragraphe 3.2.2 ne peut pas être généralisée car le terme  $l(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2})$  n'est plus réduit à 2. Pierre Jallon ([19]) a mis en évidence des conditions suffisantes sous lesquelles la minimisation de  $J(r)$  permet de séparer des modulations linéaires circulaires ou des modulations CPM d'indice différent de 1/2. Ces conditions suffisantes portent sur le nombre de sources ( $K \leq 4$ ) et l'excès de bande.

La situation est bien différente lorsque la modulation utilisée par les différents émetteurs est non-circulaire de type BPSK ou CPM d'indice 1/2. Nous allons d'abord présenter

un exemple qui montre que la minimisation de  $J(r)$  ne permet pas toujours de séparer des signaux BPSK identiques dans le cas où la période d'échantillonnage  $T_e$  est choisie égale à  $T$ . Bien que cette valeur n'ait aucune chance d'être choisie en absence d'information a priori sur  $T$ , il est clair que la mise en évidence de scénarios non séparants dans ce contexte montre que la minimisation de  $J(r)$  n'est pas une solution fiable. Nous nous plaçons dans le cas de 2 sources BPSK de résidu de porteuse nul, d'excès de bande nul, et échantillonné à la période  $T$ . Dans ces conditions,  $s_1(n)$  et  $s_2(n)$  coïncident avec des versions filtrées des symboles réels  $(a_1(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(a_2(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  transmis par les 2 émetteurs. L'égaliseur  $\mathbf{g}(z)$  est choisi de façon à ce que  $r(n) = [\mathbf{g}(z)]\mathbf{y}(n)$  s'écrive sous la forme  $r(n) = u_1 a_1(n) + i u_2 a_2(n)$  où  $u_1$  et  $u_2$  sont réels, et vérifient  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ .  $r(n)$  est donc de module 1,  $J(r) = 0$ , et est donc minimum. Pour autant, les 2 sources ne sont pas séparées puisque  $r(n)$  dépend des 2 suites de symboles  $a_1$  et  $a_2$ .

Dans un deuxième temps, nous allons considérer les mêmes signaux BPSK d'excès de bande nuls et de résidu de porteuses nuls, et nous supposons que  $T_e$  n'appartient pas  $\{T, T/2, T/3, 2T/3\}$ . Nous allons voir que le minimum global de  $J(r)$  ne peut être qu'un filtre séparant contrairement au cas où  $T_e = T$ , mais que  $J(r)$  possède apparemment des minima locaux non séparants suffisamment attractifs pour que l'algorithme de minimisation de l'estimée empirique  $\hat{J}(r)$  définie par (3.2.30) converge vers l'un d'eux relativement fréquemment.

### Le cas de 2 BPSK identiques de résidu de porteuse nul, d'excès de bande nul, et échantillonné à la période $T_e < T$

Nous allons d'abord montrer que l'argument du minimum global de  $J(r)$  est un filtre permettant d'extraire l'une des 2 sources. Puisque l'excès de bande des 2 signaux est nul, les corrélations cycliques et cycliques conjuguées du signal reçu aux fréquences  $\alpha$  et  $-\alpha$  sont nulles.  $J(r)$  s'écrit donc sous la forme

$$J(r) = \beta(\tilde{s}_1) \|f_1\|^4 + \beta(\tilde{s}_2) \|f_2\|^4 + 2 \|f_1\|^2 \|f_2\|^2 \left( 2 + \operatorname{Re}(R_{c, \tilde{s}_1}^{(0)}(0) R_{c, \tilde{s}_2}^{(0)}(0)^*) \right) - 2 (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2) + 1 \quad (3.2.31)$$

avec

$$\beta(\tilde{s}_i) = \langle c_4(\tilde{s}_i) \rangle + 2 + |R_{c, \tilde{s}_i}^{(0)}(0)|^2$$

pour  $i = 1, 2$ . Il est facile de vérifier que  $|R_{c, \tilde{s}_i}^{(0)}(0)|^2 < 1$ , et que l'étude du minimum global de  $J(r)$  peut être effectuée en utilisant les résultats de [19]. Ces résultats sont uniquement valables dans le cas circulaire, mais l'expression (3.2.31) de  $J(r)$  que nous observons dans le cas de modulations d'excès de bande nul est formellement similaire à celle du cas circulaire dans le cas d'excès de bande nul, le terme  $R_{c, \tilde{s}_i}^{(0)}(0)$  du cas BPSK étant remplacé par le terme  $2R_{\tilde{s}_i}^{(\alpha)}(0)$  dans le cas circulaire. En particulier, dans le cas circulaire, il est établi dans [19] que  $|2R_{\tilde{s}_i}^{(\alpha)}(0)|^2 < 1$ . On peut alors utiliser la démarche de [19] et établir que le minimum global de  $J(r)$  est séparant dès que les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

$$-3\beta_{\min} + 5 + \eta_{\min} > 0 \quad (3.2.32)$$

$$2(\beta_{\min} - 1)\beta_{\min} - 4 \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2(\beta_{\min} - 1) - 1 - \eta_{\min}} \right)^2 < 0, \quad (3.2.33)$$

où  $\beta_{\min} = \min_{\tilde{f}_i} \beta(\tilde{s}_i)$  et où  $\eta_{\min} = \min_{\tilde{f}_i} \langle c_4(\tilde{s}_i) \rangle$ . Dans notre cas, il s'avère que  $\beta_{\min} \simeq 1.19$ , tandis que  $\eta_{\min} \simeq -1.36$ . On peut alors vérifier immédiatement que les

2 conditions (3.2.32) et (3.2.33) sont vérifiées, et que le minimum global de  $J(r)$  vaut  $1 - \frac{1}{\beta_{min}} = 1 - \frac{1}{1.19} \simeq 0.16$ .

Si l'argument du minimum global de  $J(r)$  permet bien de séparer les 2 signaux sources lorsque  $T_e \neq T$ , nous avons de très sérieuses raisons de penser que  $J$  possède des minima locaux non séparants construits d'une façon assez similaire à celle que nous avons utilisée dans le cas  $T_e = T$ . Nous n'avons pas établi rigoureusement que les points en question sont des minima locaux, mais les expérimentations numériques prouvent que dans un nombre de cas non négligeable, l'algorithme de minimisation de  $\hat{J}$  semble converger vers de tels points. Nous considérons tout d'abord le filtre à réponse impulsionnelle réelle  $\tilde{f}_{1,*}(z)$  minimisant  $\beta(\tilde{s}_1)$ . Puisque  $\tilde{f}_{1,*}(z)$  est réel, il est facile de vérifier que  $R_{c,\tilde{s}_1,*}^{(0)}(0)$  est égal à 1, et que  $\beta(\tilde{s}_{1,*}) = \eta_{min} + 3 = 1.64$ . Nous posons à présent  $\tilde{f}_{2,*}(z) = i\tilde{f}_{1,*}(z)$ , et  $\tilde{s}_{2,*} = [\tilde{f}_{2,*}(z)]s_2(n)$ . Il est alors immédiat que  $R_{c,\tilde{s}_2,*}^{(0)}(0) = -1$ . Nous considérons alors les filtres  $f_{1,*}(z)$  et  $f_{2,*}(z)$  de normes  $\|f_{1,*}\|^2 = \|f_{2,*}\|^2 = \frac{1}{1+\beta(\tilde{s}_{1,*})}$ , et dont les filtres normalisés associés sont  $\tilde{f}_{1,*}(z)$  et  $\tilde{f}_{2,*}(z)$ . Le critère  $J(r)$  est égal en ce point à  $1 - \frac{2}{1+\beta(\tilde{s}_{1,*})}$ , c'est-à-dire  $1 - \frac{1}{1.32} \simeq 0.25$ .

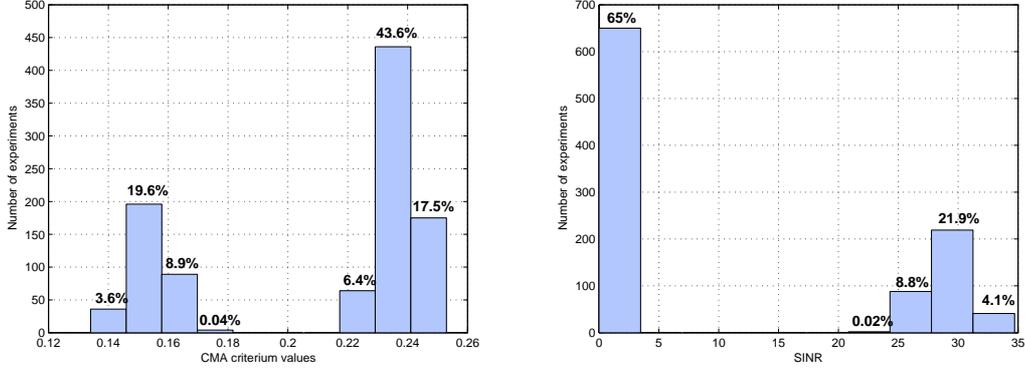
L'histogramme 3.3(a) ci-dessous permet de visualiser la répartition des valeurs prises par  $\hat{J}(r)$  lorsque l'algorithme du gradient à pas optimal utilisé pour la minimiser a convergé. 1000 réalisations ont été simulées, chacune correspondant à des canaux de propagation différents tirés aléatoirement, et nous supposons que le bruit thermique est négligeable. Il est clair que dans plus de la moitié des expérimentations, la valeur finale de  $\hat{J}(r)$  correspond à  $1 - \frac{1}{1.32} \simeq 0.25$  plutôt qu'à la valeur du minimum global  $1 - \frac{1}{\beta_{min}} = 1 - \frac{1}{1.19} \simeq 0.16$ . Afin de vérifier que la valeur finale  $1 - \frac{1}{1.32}$  ne correspond pas à un filtre séparant, nous donnons dans la figure 3.3(b) l'histogramme des rapports signaux à interférence plus bruit correspondant aux filtres déterminés par la "minimisation" de  $\hat{J}(r)$ . Nous définissons ce SINR comme le rapport de la puissance du signal  $r_1$  obtenu en filtrant la contribution du signal extrait par le filtre déterminé par l'algorithme et de la puissance du signal  $r_2$  obtenu en filtrant la contribution de l'autre signal par le même filtre. Dans le cas où le filtre est parfaitement ajusté, il est clair que, en absence de bruit thermique, le SINR doit être égal à  $+\infty$ . Ces expérimentations tendent à confirmer notre intuition que  $J(r)$  possède les minima locaux qui viennent d'être mis en évidence.

Notons que nous limitons cette analyse au cas  $\gamma = 0$ , et que nous ne savons pas réellement si de tels phénomènes se produisent pour toutes les valeurs de  $\gamma$ . Cette question n'a pas énormément d'intérêt car l'analyse de la situation  $\gamma = 0$  suffit à prouver que l'utilisation de l'algorithme du module constant ne permet pas de séparer 2 sources BPSK de mêmes caractéristiques. Il convient donc de mettre en évidence d'autres solutions, ce que nous allons faire dans la suite.

### 3.2.3-b) Une modification du critère du module constant

Le critère du module constant ne permet donc pas de séparer des sources non circulaires de type BPSK. Nous allons à présent montrer que si l'on connaît (ou si l'on estime) les fréquences cycliques non conjuguées significatives du signal reçu, il est facile de modifier le critère du module constant et de mettre en évidence une nouvelle fonction  $J'(r)$  dont la minimisation permet la séparation dans le cas que nous considérons dans ce paragraphe. Rappelons que les fréquences cycliques significatives sont la fréquence  $2\delta f$  dans le cas de signaux sources BPSK, et les fréquences  $2\delta f \pm \alpha/2$  pour une modulation CPM d'indice

FIG. 3.2 – Histogrammes

(a) des valeurs finales de  $\hat{J}(r)$  pour  $\gamma = 0$  dans le cas BPSK

(b) des SINR

1/2. Nous allons considérer tout d'abord le cas BPSK, et aborder plus rapidement le cas CPM d'indice 1/2.

#### Le cas de signaux BPSK.

Nous supposons que le résidu de fréquence porteuse commun à toutes les sources et connu (ou bien estimé) au niveau du récepteur, et nous définissons la fonction  $J'(r)$  par

$$J'(r) = J(r) - |R_{c,r}^{(2\delta f)}(0)|^2 = \langle \mathbb{E}(|r(n)|^2 - 1)^2 \rangle - \left| \langle \mathbb{E}(r^2(n))e^{-2i\pi n 2\delta f} \rangle \right|^2 \quad (3.2.34)$$

$J'(r)$  est donc obtenu en retranchant de  $J(r)$  le module au carré du coefficient de corrélation cyclique non conjuguée à l'instant 0 et à la fréquence cyclique non conjuguée  $2\delta f$ . En utilisant l'expression de  $J(r)$ , on obtient immédiatement que  $J'(r)$  se met sous la forme

$$J'(r) = \sum_{k=1}^K \beta'(\tilde{s}_k) \|f_k\|^4 + 2 \sum_{k_1 < k_2} l'(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \quad (3.2.35)$$

où le terme  $l'(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2})$  est donné par

$$l'(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) = 2 + \text{Re} \left[ 2 \sum_{l=-1,1} R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(l\alpha)}(0) \left( R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(l\alpha)}(0) \right)^* + \sum_{l=-1,1} R_{c,\tilde{s}_{k_1}}^{(l\alpha)}(0) R_{c,\tilde{s}_{k_2}}^{(l\alpha)}(0)^* \right] \quad (3.2.36)$$

et où  $\beta'(\tilde{s}_k)$  est défini par

$$\beta'(\tilde{s}_k) = \langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle + 2 + 2 \sum_{l=-1,1} \left| R_{\tilde{s}_k}^{l\alpha}(0) \right|^2 + \sum_{l=-1,1} \left| R_{c,\tilde{s}_k}^{(l\alpha)}(0) \right|^2 \quad (3.2.37)$$

$\beta'(\tilde{s}_k)$  est également égal à

$$\beta'(\tilde{s}_k) = \beta(\tilde{s}_k) - \left| R_{c,\tilde{s}_k}^{(0)}(0) \right|^2$$

Nous allons commencer par montrer que l'argument du minimum de  $J'(r)$  correspond à un filtre séparant. Contrairement au cas où toutes fréquences cycliques et cycliques conjuguées différent, il n'est pas possible de caractériser directement le minimum global de  $J'(r)$  car sa forme analytique est trop complexe. Nous allons donc contourner cette difficulté en utilisant le résultat suivant qui est à la base des techniques développées dans [19] :

**Proposition 5.** *Supposons que pour tout filtre  $\mathbf{g}(z)$ ,  $J'(r) \geq m(r)$  où  $m(r)$  est une fonction des statistiques de  $r$  qui atteint son minimum si et seulement si  $r(n)$  coïncide avec une version filtrée de l'une des sources  $r(n) = [f_{k_0,*}(z)]_{s_{k_0}}(n)$ . Alors, si  $J'(r)$  coïncide avec  $m(r)$  lorsque  $r(n) = [f_{k_0,*}(z)]_{s_{k_0}}(n)$ , le minimum de  $J'(r)$  est atteint si et seulement si  $r(n)$  est égal à  $[f_{k_0,*}(z)]_{s_{k_0}}(n)$ .*

Pour utiliser cette proposition, nous allons mettre en évidence une fonction  $m(r)$  minorant  $J'(r)$  pour tout  $r$ , dont la recherche du minimum global est plus facile que celle de  $J'(r)$ . La relative complexité de  $J'(r)$  provient essentiellement du fait que le terme  $l'(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2})$  n'est pas réduit à la constante 2. Nous allons donc mettre en évidence un minorant du terme

$$\operatorname{Re} \left[ 2 \sum_{l=-1,1} R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(l\alpha)}(0) \left( R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(l\alpha)}(0) \right)^* + \sum_{l=-1,1} R_{c,\tilde{s}_{k_1}}^{(l\alpha)}(0) R_{c,\tilde{s}_{k_2}}^{(l\alpha)}(0)^* \right]$$

**Proposition 6.** *On a l'inégalité suivante :*

$$\operatorname{Re} \left[ 2 \sum_{l=-1,1} R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(l\alpha)}(0) \left( R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(l\alpha)}(0) \right)^* + \sum_{l=-1,1} R_{c,\tilde{s}_{k_1}}^{(l\alpha)}(0) R_{c,\tilde{s}_{k_2}}^{(l\alpha)}(0)^* \right] \geq -3/2 \quad (3.2.38)$$

La preuve de ce résultat se trouve dans l'annexe A.2. Soit alors  $m(r)$  la fonction définie par

$$m(r) = \beta'_{min} \left( \sum_{k=1}^K \|f_k\|^4 \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{k_1 \neq k_2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 \right) - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \quad (3.2.39)$$

où on désigne par  $\beta'_{min}$  la quantité

$$\beta'_{min} = \beta'_{min,k}$$

avec  $\beta'_{min,k} = \min_{\|\tilde{f}_k\|=1} \beta'(\tilde{s}_k)$ . Rappelons que les signaux présents dans la bande d'analyse sont de la même nature, et qu'en conséquence, les  $(\beta'_{min,k})_{k=1,\dots,K}$  sont tous égaux.

Puisque la relation (3.2.38) est vérifiée, il est clair que  $l'(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) \geq 1/2$ . Par ailleurs, les  $(\beta'(\tilde{s}_k))_{k=1,\dots,K}$  sont tous plus grand que  $\beta'_{min}$ . Ceci implique que pour tout  $r$ ,  $J'(r) \geq m(r)$ . Nous allons à présent établir que si  $\beta'_{min} < 1/2$ , le minimum global de  $m(r)$  est atteint si tous les  $(\|f_k\|)_{k=1,\dots,K}$  sont nuls sauf 1, i.e. si  $r(n)$  est une version filtrée de l'une des sources. Pour ceci, nous posons  $u^2 = \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2$ ,  $v_k = \frac{\|f_k\|}{u}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_K)^T$ , et définissons  $t(\mathbf{v})$  par

$$t(\mathbf{v}) = \left( \beta'_{min} - \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^K v_k^4 + \frac{1}{2}$$

Il est facile de vérifier que

$$m(r) = u^4 t(\mathbf{v}) - 2u^2 + 1$$

et que le minimum global de  $m(r)$  est atteint en un point  $(u_*, \mathbf{v}_*)$  pour lequel  $t(\mathbf{v}_*)$  est minimum et  $u_*^2 = \frac{1}{t(\mathbf{v}_*)}$ . La valeur de ce minimum est alors  $1 - \frac{1}{t(\mathbf{v}_*)}$ . Pour conclure, il suffit de remarquer que si  $\beta_{min} - 1/2 < 0$ , alors le minimum de  $t(\mathbf{v})$  est atteint si et seulement si toutes les composantes de  $\mathbf{v}$  sont nulles sauf une qui est égale à 1, ce qui correspond à des  $\|f_k\|$  qui sont tous nuls sauf 1 ([13]).  $t(\mathbf{v}_*)$  est par ailleurs égal à  $\beta'_{min}$ ,  $u_*^2 = \frac{1}{\beta'_{min}}$  et le minimum de  $m(r)$  vaut  $1 - \frac{1}{\beta'_{min}}$ . Appelons à présent  $k_0$  l'un des indices pour lesquels  $\beta'_{min} = \beta'_{min, k_0}$ , soit  $\tilde{f}_{k_0, *}$  un filtre de norme 1 pour lequel  $\beta'_{min, k_0} = \beta'([\tilde{f}_{k_0, *}(z)]s_{k_0}(n))$ , et posons  $f_{k_0, *}(z) = u_* \tilde{f}_{k_0, *}(z)$ . Le minimum de  $m(r)$  est atteint si  $r_*(n) = [f_{k_0, *}(z)]s_{k_0}(n)$ , et si  $J'(r_*)$  coïncide avec  $m(r_*) = 1 - \frac{1}{\beta'_{min}}$ . D'après la proposition 5, le minimum global de  $J'$  est atteint seulement si  $r(n)$  est une version filtrée de  $s_{k_0}(n)$ .

On peut résumer cette discussion par la proposition suivante.

**Proposition 7.** *Si  $\beta'_{min} < 1/2$ , alors la minimisation de  $J'(r)$  permet d'extraire l'une des sources.*

Il nous reste à étudier dans quelle mesure la condition  $\beta'_{min} < 1/2$  est vérifiée. En suivant le même raisonnement que dans le cas de  $\beta_{min}$  nous considérons un signal BPSK à temps continu  $s_a(t)$  dont la version échantillonnée à  $T_e$  est  $s(n)$ . La période symbole de ce signal sera noté  $T$ , le facteur d'excès de bande  $\gamma$ , le résidu de porteuse  $\delta f$  et le cumulatif d'ordre 4 des symboles  $\kappa$ . Nous pouvons facilement adapter le théorème 2 à notre cas en remplaçant l'expression 3.2.21 par

$$\beta'_{min} = \inf_{f_a \in \mathcal{F}([- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}])} \Phi'(f_a) \quad (3.2.40)$$

où  $\Phi'(f_a)$  est défini par

$$\begin{aligned} \Phi'(f_a) = & \kappa T \frac{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^4 dt}{(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt)^2} + 2 + 4 \left( \frac{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T}} dt}{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt} \right)^2 \\ & + \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T}} dt \right|^2}{(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt)^2} + \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 e^{2i\pi \frac{t}{T}} dt \right|^2}{(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt)^2} \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

et où  $\mathcal{F}([- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}])$  désigne l'ensemble des fonctions  $f_a(t)$  dont la transformée de Fourier  $\hat{f}_a(\nu)$  s'annule hors de l'intervalle  $[- \frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}]$ .

L'expression du  $\Phi'(f_a)$  s'obtient directement en soustrayant de l'expression du  $\Phi(f_a)$  (3.2.22) le terme dû au module carré du coefficient cyclique non conjugué de  $s(n)$  à la fréquence cyclique non conjuguée significative  $2\delta f$ . Comme dans le cas de  $\beta_{min}$ , ce résultat implique la fonction  $\beta'_{min}$  est une fonction décroissante de l'excès de bande  $\gamma$ . Nous pouvons donc formuler la proposition suivante :

**Proposition 8.** *La fonction  $\gamma \rightarrow \beta'_{min}(\gamma)$  décroît lorsque  $\gamma$  croît de 0 à 1. Par conséquent,  $\beta'_{min}(\gamma)$  est strictement plus petit que  $1/2$  pour toutes les valeurs de  $\gamma$  si et seulement si  $\beta_{min}(0) < \frac{1}{2}$ .*

L'expression de  $\beta'_{min}(0)$  se déduit directement de celle de  $\beta_{min}(0)$  (3.2.25) :

$$\beta'_{min}(0) = \min_{f_a \in \mathcal{F}([- \frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}])} \kappa T \frac{\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^4 dt}{(\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt)^2} + 2 = \eta_{min} + 2 \quad (3.2.42)$$

avec  $\eta_{min}$  défini par l'équation 3.2.24.

Avec l'équation 3.2.29 nous pouvons calculer les valeurs de  $\eta_{min}$  pour tout excès de bande  $\gamma \in [0, 1]$ . En particulier pour un excès de bande nul,  $\eta_{min} \simeq 1.36$  et par conséquent  $\beta'_{min} = 0.64 \geq 1/2$ . Afin de vérifier l'existence des valeurs de  $\beta'_{min}$  inférieures à  $1/2$  nous avons évalué numériquement  $\beta'_{min}(\gamma)$  pour tous les valeurs de  $\gamma$  entre 0 et 1. La figure 3.3 confirme la décroissance de  $\beta'_{min}$  avec l'excès de bande  $\gamma$  et montre que  $\beta'_{min} < 1/2$  lorsque  $\gamma > 0.1$ . Par conséquent, nous sommes assurés de séparer les sources BPSK en minimisant  $J'(r)$  lorsque leur excès de bande commun est supérieur à 0.1.

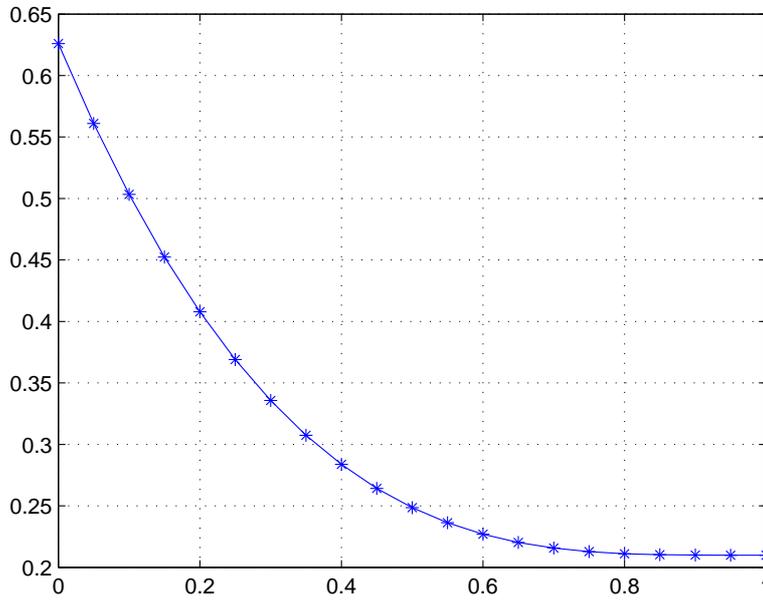


FIG. 3.3 –  $\beta'_{min}$  en fonction de  $\gamma$  dans le cas BPSK.

Lorsque l'excès de bande est inférieur à 0.1, le minorant  $m(r)$  n'est pas en mesure d'apporter des conclusions sur le minimum global de  $J'(r)$ . On peut alors utiliser l'approche utilisée dans [19] dans le cas circulaire en prenant en compte l'inégalité (3.2.38). Après divers développements, on peut montrer que si  $\beta_{min} > 1/2$ , alors le minimum global de  $J'(r)$  est atteint pour des filtres qui permettent d'extraire l'une des sources si les 2 conditions suffisantes suivantes sont satisfaites.

$$\eta_{min} + 3 - (K - 1)(\beta_{min} - 1/2) > 0 \quad (3.2.43)$$

$$\beta_{min} (1/2 + K(\beta_{min} - 1/2)) - (K - 1) \left( 2 - \sqrt{3/2} \sqrt{(K(\beta_{min} - 1/2) - (\eta_{min} + 3/2))} \right)^2 < 0 \quad (3.2.44)$$

On peut vérifier facilement que ces conditions sont respectées pour  $\gamma \in [0, 0.1]$  dès que le nombre de sources  $K$  reste inférieur à 10, ce qui est satisfaisant dans le contexte que

nous avons considéré.

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, montrer que l'argument du minimum global de  $J'(r)$  est un filtre qui extrait l'une des sources n'est pas suffisant puisqu'il est également souhaitable de vérifier que  $J'(r)$  n'a pas de minimum local non séparant. L'étude des minima locaux de  $J'(r)$  dans le cas général ne semble cependant pas être très facile. Par contre, cette étude peut-être réalisée dans le cas où l'excès de bande commun à toutes les sources est égal à 0. Dans ce cas, toutes les corrélations cycliques et cycliques conjuguées des différents signaux aux fréquences  $\pm\alpha$  sont nulles.  $J'(r)$  s'écrit donc sous la forme

$$J'(r) = \sum_{k=1}^K \beta'(\tilde{s}_k) \|f_k\|^4 + 2 \sum_{k_1 \neq k_2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1$$

Afin d'étudier les minima locaux, nous posons de nouveau  $u^2 = \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2$ ,  $v_k = \frac{\|f_k\|}{u}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_K)^T$ ,  $\boldsymbol{\beta}' = (\beta'(\tilde{s}_1), \dots, \beta'(\tilde{s}_K))^T$  et  $T'(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}') = \sum_{k=1}^K (\beta'(\tilde{s}_k) - 2)v_k^2$ .  $J'(r)$  peut s'écrire sous la forme

$$J'(r) = u^4 T'(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}') - 2u^2 + 1$$

Si  $(f_{1,*}(z), \dots, f_{K,*}(z))^T$  est un minimum local de  $J'(r)$ , le point  $\mathbf{v}_*$  est un maximum local de la fonction  $\mathbf{v} \rightarrow T'(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}')$ . Or, puisque l'excès de bande est nul,

$$\beta'(\tilde{s}_k) = \langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle + 2$$

de sorte que  $\beta'(\tilde{s}_k) - 2 = \langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle$ . Comme  $\langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle < 0$ , il est clair que  $\beta'(\tilde{s}_{k,*}) - 2 < 0$  pour tout  $k$ . Ceci implique que les minima locaux de  $\mathbf{v} \rightarrow T'(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}')$  sont les vecteurs dont toutes les composantes sont nulles sauf une, i.e. les filtres permettant de séparer les sources. Nous avons donc bien vérifié l'absence de minimum local non séparant de  $J'$  si  $\gamma = 0$ . Dans le cas général toutes les simulations que nous avons effectuées généraient des filtres séparants. On peut donc être confiant concernant le bon fonctionnement des algorithmes de descente minimisant la fonction  $J'(r)$ .

#### Le cas de signaux CPM d'indice 1/2.

Nous considérons à présent brièvement le cas de signaux CPM d'indice 1/2, et nous nous contentons de donner quelques éléments qui peuvent être développés dans des cas plus généraux. Nous considérons ici le cas de modulation à réponse complète, c'est-à-dire que le support de l'impulsion fréquentielle est limitée à l'intervalle  $[0, T]$ . Dans ce cadre, le signal à temps continu numéro  $k$ ,  $s_{a,k}(t)$  transmis par l'émetteur  $k$  est donné par

$$s_{a,k}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n b_{k,n} g_a(t - nT) \quad (3.2.45)$$

où les  $(b_{k,n})_{n \in \mathbb{Z}}$  sont liés aux symboles transmis, et constituent une suite indépendante de variables aléatoires prenant les valeurs  $\pm 1$  avec probabilité 1/2, et où  $g_a(t)$  est une fonction dépendant de l'impulsion fréquentielle et du filtre passe-bas utilisé à l'émetteur afin de limiter la bande passante du signal transmis (nous rappelons que les signaux CPM considérés ici sont supposés filtrés passe-bas). (3.2.45) est la représentation de Laurent ([25]) du signal  $s_{a,k}(t)$ , et signifie que  $s_{a,k}(t)$  peut être vu comme un signal modulé linéairement par la suite de symboles  $(i^n b_{k,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ . Du fait de la forme particulière des symboles,

les fréquences cycliques non conjuguées de  $s_{a,k}(t)$  se réduisent à  $\pm \frac{1}{2T}$  et  $\pm \frac{3}{2T}$ . Afin d'expliquer ce point rapidement, considérons par exemple la fonction  $t \rightarrow \mathbb{E}(s_{a,k}(t)^2)$  qui s'écrit clairement sous la forme

$$\mathbb{E}(s_{a,k}(t)^2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n g_a(t - nT)^2$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$\mathbb{E}(s_{a,k}(t)^2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_a(t - 2mT) \quad (3.2.46)$$

où  $f_a(t) = g_a(t)^2 - g_a(t - T)^2$ . La fonction  $t \rightarrow \mathbb{E}(s_{a,k}(t)^2)$  est donc périodique de période  $2T$ , et se développe en série de Fourier. A priori, les fréquences des sinusoides apparaissant dans ce développement sont  $0, \pm \frac{1}{2T}, \pm \frac{1}{T}, \pm \frac{3}{2T}$ , les coefficients de Fourier associés aux autres multiples entiers de  $\frac{1}{2T}$  étant annulés par la limitation de la bande passante du signal  $s_{a,k}(t)$ . De plus, montrons que

$$R_{s_{a,k}}^{(0)}(0) = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} \mathbb{E}(s_{a,k}(t)^2) dt = 0$$

Pour cela, il suffit d'utiliser (3.2.46), et d'effectuer des changements de variables qui permettent d'aboutir à

$$R_{s_{a,k}}^{(0)}(0) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) dt$$

qui vaut clairement 0 du fait de la forme particulière de la fonction  $f_a(t)$ . Un calcul du même type aboutit à  $R_{s_{a,k}}^{(1/T)}(0) = R_{s_{a,k}}^{(-1/T)}(0) = 0$ . Remarquons enfin que si l'excès de bande de  $s_{a,k}(t)$  est inférieur à 0.5, alors les coefficients  $R_{s_{a,k}}^{(3/2T)}(0)$  et  $R_{s_{a,k}}^{(-3/2T)}(0)$  sont également nuls. Bien que nous ayons présenté ces évaluations dans le contexte de signaux CPM à réponse complète, ils peuvent se généraliser aisément dans le cas général en utilisant de nouveau la représentation de Laurent.

Signalons enfin que si  $s_{a,k}(t)$  représentait une modulation MSK associée à une impulsion fréquentielle rectangulaire sur  $[0, T]$  non filtrée passe-bas, alors,  $|R_{s_{a,k}}^{(1/2T)}(0)|$  et  $|R_{s_{a,k}}^{(-1/2T)}(0)|$  vaudraient tous deux 1/2. En pratique, le filtrage passe-bas est susceptible de diminuer quelque peu cette valeur.

Nous allons à présent utiliser ces quelques éléments afin de comprendre comment la fonction  $J'(r)$  doit être définie. Les signaux à temps discret  $(s_k(n))_{k=1, \dots, K}$  ont comme fréquences cycliques conjuguées  $\pm \alpha/2$  et  $\pm 3\alpha/2$ , et celles du signal reçu  $r(n)$  sont donc égales à  $2\delta f \pm \alpha/2$  et  $2\delta f \pm 3\alpha/2$ . La philosophie qui sous tend la définition de  $J'(r)$  consiste à retrancher de  $J(r)$  les coefficients de corrélation cycliques à l'instant 0 aux fréquences cycliques conjuguées les plus significatives, c'est-à-dire  $\alpha/2$  et  $-\alpha/2$ . Ainsi, dans notre contexte des modulations CPM d'indice 1/2, nous allons définir  $J'(r)$  par

$$J'(r) = J(r) - |R_{c,r}^{(2\delta f + \alpha/2)}(0)|^2 - |R_{c,r}^{(2\delta f - \alpha/2)}(0)|^2 \quad (3.2.47)$$

$$= \left\langle \mathbb{E}(|r(n)|^2 - 1)^2 \right\rangle - \left| \left\langle \mathbb{E}(r^2(n)) e^{-2i\pi n(2\delta f + \alpha/2)} \right\rangle \right|^2 - \left| \left\langle \mathbb{E}(r^2(n)) e^{-2i\pi n(2\delta f - \alpha/2)} \right\rangle \right|^2 \quad (3.2.48)$$

Comme dans le cas BPSK,  $J'(r)$  peut s'écrire sous la forme

$$J'(r) = \sum_{k=1}^K \beta'(\tilde{s}_k) \|f_k\|^4 + 2 \sum_{k_1 < k_2} l'(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \quad (3.2.49)$$

où le terme  $l'(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2})$  est donné par

$$l'(\tilde{s}_{k_1}, \tilde{s}_{k_2}) = 2 + \operatorname{Re} \left[ 2 \sum_{l=-1,1} R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(l\alpha)}(0) \left( R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(l\alpha)}(0) \right)^* + \sum_{l=-1,1} R_{c, \tilde{s}_{k_1}}^{(l3\alpha/2)}(0) R_{c, \tilde{s}_{k_2}}^{(l3\alpha/2)}(0)^* \right] \quad (3.2.50)$$

et où  $\beta'(\tilde{s}_k)$  est défini par

$$\beta'(\tilde{s}_k) = \langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle + 2 + 2 \sum_{l=-1,1} \left| R_{\tilde{s}_k}^{(l\alpha)}(0) \right|^2 + \sum_{l=-1,1} \left| R_{c, \tilde{s}_k}^{(l3\alpha/2)}(0) \right|^2 \quad (3.2.51)$$

$\beta'(\tilde{s}_k)$  est également égal à

$$\beta'(\tilde{s}_k) = \beta(\tilde{s}_k) - \left| R_{c, \tilde{s}_k}^{(\alpha/2)}(0) \right|^2 - \left| R_{c, \tilde{s}_k}^{(-\alpha/2)}(0) \right|^2$$

Nous supposons à présent pour simplifier notre analyse que l'excès de bande du signal est inférieur à  $1/2$ . Dans ces conditions, les coefficients de corrélation non conjugués aux fréquences  $\pm 3\alpha/2$  sont nuls. Le minimum global de  $J'(r)$  peut alors être étudié en minorant  $J'(r)$  par une fonction  $m(r)$  bien choisie. En utilisant la preuve de la proposition 5 (voir aussi [19]) on obtient que

$$\operatorname{Re} \left[ \sum_{l=-1,1} R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(l\alpha)}(0) \left( R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(l\alpha)}(0) \right)^* \right] \geq -1$$

et que par conséquent,

$$J'(r) \geq m(r)$$

où  $m(r)$  vaut cette fois

$$m(r) = \beta'_{min} \left( \sum_{k=1}^K \|f_k\|^4 \right) + \left( \sum_{k_1 \neq k_2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 \right) - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \quad (3.2.52)$$

Il est facile de voir que le minimum de  $m(r)$  est atteint pour un filtre séparant dès que  $\beta'_{min} < 1$ . Cette condition est vérifiée car  $\beta'(\tilde{s}_k) = \langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle + 2$  et que le minimum de  $\langle c_4(\tilde{s}_k) \rangle$  est toujours régi par le Théorème 2 avec  $\kappa = -2$  dans le cas particulier des CPM à réponse complète d'indice  $1/2$ . Dans ces conditions, on peut constater que  $\beta'_{min} = 0.64$  pour tout  $\gamma \in [0, 0.5]$ . Par conséquent, on est assuré que le minimum global de  $J'(r)$  permet de séparer pour les modulations CPM considérées d'excès de bande inférieures à  $0.5$ . Nous pensons que ceci doit rester vrai dans tous les cas.

Enfin, la discussion du cas BPSK sur les minima locaux de  $J'(r)$  dans le cas où  $\gamma = 0$  reste tout à fait valable dans le cas des signaux CPM considérés. Par conséquent, nous avons établi que dans le contexte des signaux CPM considérés, la minimisation de la fonction  $J'(r)$  permet d'arriver aux mêmes types de résultats que dans le cas BPSK.

### 3.2.4 Étude du schéma de séparation modifié dans le cas général.

La fonction  $J'(r)$  a été définie dans le cas de sources BPSK ou CPM d'indice 1/2 de mêmes caractéristiques. Il nous reste à présent à expliquer comment elle peut être étendue dans le cas général, et à montrer que dans le cas où la minimisation de  $J(r)$  fonctionne, l'utilisation de  $J'(r)$  n'entraîne pas de nouvelles difficultés.

#### Définition de $J'(r)$ dans le cas général.

Ainsi que nous le disions, la logique qui préside à la définition de  $J'(r)$  est de retrancher à  $J(r)$  les modules au carré des coefficients de corrélation cycliques non conjugués à l'instant 0 et aux fréquences cycliques non conjuguées les plus significatives du signal reçu. Dans le cas général, ces fréquences sont les  $(2\delta f_k)$  associés aux signaux BPSK et les  $(2\delta f_k \pm \alpha_k/2)$  correspondants aux signaux CPM d'indice 1/2. Dans la suite, nous allons désigner  $I_{c,s}$  cet ensemble. En pratique, elles nécessitent évidemment d'être estimées, et nous allons présenter une méthode d'estimation dans la section 3.3

La fonction  $J'(r)$  est donc définie par

$$J'(r) = J(r) - \sum_{\alpha_c \in I_{c,s}} |R^{(\alpha_c)}(0)|^2 \quad (3.2.53)$$

$$= \langle \mathbb{E} (|r(n)|^2 - 1)^2 \rangle - \sum_{\alpha_c \in I_{c,s}} |\langle \mathbb{E}(r^2(n))e^{-2i\pi n\alpha_c} \rangle|^2 \quad (3.2.54)$$

Dans le cas où le mélange n'est constitué que de sources BPSK ou CPM d'indice 1/2 de mêmes caractéristiques, cette définition coïncide évidemment avec celles que nous avons données précédemment. Nous allons à présent vérifier rapidement que la minimisation de la fonction  $J'(r)$  permet toujours la séparation de sources ne partageant pas les mêmes fréquences cycliques ni les mêmes fréquences cycliques conjuguées. Dans ce contexte, il suffit de remarquer que  $J'(r)$  s'écrit sous la forme

$$J'(r) = \sum_{k=1}^K \beta'(\tilde{s}_k) \|f_k\|^4 + 2 \sum_{k_1 \neq k_2} \|f_{k_1}\|^2 \|f_{k_2}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^K \|f_k\|^2 + 1 \quad (3.2.55)$$

où  $\beta'(\tilde{s}_k)$  coïncide avec  $\beta(\tilde{s}_k)$  (3.2.15) si la source  $k$  est circulaire et où  $\beta'(\tilde{s}_k)$  est défini par (3.2.37) ou (3.2.51) suivant le type de signal non circulaire. La forme de  $J'(r)$  est donc similaire à celle de  $J(r)$ , et toutes les conclusions obtenues dans le paragraphe 3.2.2 restent évidemment valides car pour tout  $k$ ,  $\beta'_{k,min} \leq \beta_{k,min} < 2$ . La modification proposée de  $J$  pour régler les problèmes posés par des sources non circulaires de même nature ne remet donc pas en cause les résultats obtenus dans le contexte de sources ayant des fréquences cycliques et cycliques non conjuguées toutes différentes.

Il nous reste à présent à évoquer brièvement le cas général : des sources de fréquences cycliques et cycliques non conjuguées toutes différentes peuvent coexister avec des sources non circulaires et/ou non circulaires de mêmes paramètres. Dans ces conditions, la technique consistant à minorer  $J'(r)$  par l'une des 2 fonctions  $m(r)$  que nous avons définies précédemment continue à fonctionner avec les mêmes hypothèses ( $\gamma \geq 0.1$  dans le cas BPSK,  $\gamma \leq 0.5$  dans le cas CPM à réponse complète d'indice 1/2). Le minimum global de  $J'(r)$  correspond alors à un filtre permettant d'extraire une version filtrée de la (ou l'une)

des sources ayant le plus petit  $\beta'_{k,min}$ . Afin de vérifier les performances pratiques du  $J'(r)$  nous présenterons dans le chapitre 4 les résultats de simulations que nous avons effectuées sur plusieurs types de mélanges, qui montre que le critère du CMA modifié est capable de séparer des mélanges de sources non-circulaires non-séparables avec le critère du CMA, tout en assurant des bonne performances dans le cas où le CMA fonctionne correctement.

### 3.3 Estimation des fréquences cycliques non conjuguées significatives.

Nous abordons à présent le problème de l'estimation des fréquences cycliques non conjuguées significatives à partir de l'observation du signal reçu  $(\mathbf{y}(n))_{n=0,\dots,M-1}$  où  $MT_e$  représente la durée d'observation disponible. Rappelons que  $\mathbf{y}(n)$  est un vecteur de dimension  $N$  qui s'écrit  $\mathbf{y}(n) = (y_1(n), \dots, y_N(n))^T$ , où  $(y_m(n))_{m=1,\dots,N}$  est le signal reçu sur le capteur numéro "m". Le problème de détection de fréquence cyclique se traite de façon relativement classique.

Rappelons que  $I_c$  désigne l'ensemble des fréquences cycliques non conjuguées du signal reçu. Pour chaque entier  $\tau$ , on peut écrire le signal  $(y_m(n + \tau)y_m(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  sous la forme

$$y_m(n + \tau)y_m(n) = \mathbb{E}(y_m(n + \tau)y_m(n)) + \epsilon_{m,\tau}(n)$$

où  $\epsilon_{m,\tau}(n)$  est un signal de moyenne nulle. Par ailleurs,  $\mathbb{E}(y_m(n + \tau)y_m(n))$  est une somme de sinusoides dont les fréquences sont les éléments de l'ensemble  $I_c$ . On peut donc interpréter le signal  $(y_m(n + \tau)y_m(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  comme une somme de sinusoides perturbée par le "bruit additif"  $\epsilon_{m,\tau}$ . Bien que ce terme perturbateur ne soit ni blanc ni stationnaire, la détection des fréquences peut s'effectuer par examen des maxima du module du périodogramme du signal  $(y_m(n + \tau)y_m(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  (voir par exemple [4]). Appelons  $R_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)$  le coefficient de corrélation cyclique non conjugué du signal  $y_m(n)$  à la fréquence cyclique non conjuguée  $\alpha$  et à l'instant  $\tau$ . Nous désignons par  $\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)$  l'estimateur suivant de  $R_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)$  :

$$\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y_m(n + \tau)y_m(n)e^{-2i\pi n\alpha} \tag{3.3.56}$$

Ce terme coïncide évidemment avec le périodogramme du signal  $(y_m(n + \tau)y_m(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  observé de l'instant 0 à l'instant  $M - 1$ . Son module est donc censé prendre des valeurs "importantes" si  $\alpha \in I_c$ , et faibles si  $\alpha$  n'est pas un élément de  $I_c$ . Afin de détecter les fréquences cycliques non conjuguées, il est donc raisonnable d'étudier les "maxima significatifs" de la quantité  $\hat{P}(\alpha)$  définie par

$$\hat{P}(\alpha) = \sum_{m=1}^N \sum_{\tau=-\tau_{max}}^{\tau_{max}} |\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)|^2 \tag{3.3.57}$$

La valeur  $\tau_{max}$  choisie dépend des supports des réponses impulsionnelles des canaux de propagation entre les émetteurs et les différents capteurs du récepteur (en y adjoignant les effets des filtres d'émission). Si en effet  $|\tau|T_e$  est supérieur au maximum des largeurs de ces supports, alors  $R_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau) = 0$  même si  $\alpha$  est une fréquence cyclique non conjuguée. Il est donc tout à fait inutile, voire même nuisible, d'intégrer dans le critère  $\hat{P}(\alpha)$  de telles

valeurs de  $\tau$  car les termes  $|\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)|^2$  correspondants, évidemment non nuls en pratique, n'ont comme effet que d'augmenter la variance des fluctuations statistiques apparaissant inévitablement dans  $\hat{P}(\alpha)$ .

Afin de détecter les éléments de  $I_c$ , il suffit de comparer  $\hat{P}(\alpha)$  à un seuil lorsque  $\alpha$  varie dans l'ensemble des valeurs possibles prises par les fréquences cycliques non conjuguées du signal reçu. Comme dans tous les problèmes de détection, il est nécessaire de mettre en évidence une méthode permettant de déterminer ce seuil. Il convient de rappeler à ce niveau que nous ne cherchons pas réellement à détecter toutes les fréquences cycliques non conjuguées de  $\mathbf{y}(n)$ , mais seulement celles que nous avons qualifiées de significatives. En particulier, les fréquences qui peuvent être atténuées par de faibles valeurs de l'excès de bande peuvent être laissées de côté par la procédure de détection. Il n'est donc pas nécessaire de déterminer le seuil de détection de façon très fine, contrairement à la situation qui prévaut lorsque l'on cherche à estimer les débits symboles par des approches cycliques.

Notre approche consiste à normaliser la statistique de test  $\hat{P}(\alpha)$  par un estimateur relativement grossier de son espérance mathématique **si  $\alpha$  n'est pas une fréquence cyclique non conjuguée**. Nous allons voir en effet que la covariance de la variable aléatoire  $\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)$ , définie par

$$\text{cov}(\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)) = \mathbb{E} \left| \hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau) \right|^2 - \left| \mathbb{E}(\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)) \right|^2$$

se met sous la forme

$$\text{cov}(\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)) = \frac{S_{m,\tau}(\alpha)}{M} + o\left(\frac{1}{M}\right) \quad (3.3.58)$$

que  $\alpha$  appartienne à  $I_c$  ou non, et où  $o(\frac{1}{M})$  représente un terme convergeant vers 0 plus vite que  $\frac{1}{M}$  lorsque  $M \rightarrow +\infty$ . Nous allons de plus montrer que le terme  $S_{m,\tau}(\alpha)$  peut se calculer analytiquement en fonction de certaines caractéristiques des signaux reçus, et peut, dans une certaine mesure, s'estimer à partir du signal reçu.

Si  $\alpha$  n'appartient pas à  $I_c$ ,  $\left| \mathbb{E}(\hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau)) \right|^2$  est un terme  $O(\frac{1}{M^2})$ , et

$$\mathbb{E} \left| \hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau) \right|^2 = \frac{S_{m,\tau}(\alpha)}{M} + o\left(\frac{1}{M}\right)$$

alors que si  $\alpha \in I_c$ ,

$$\mathbb{E} \left| \hat{R}_{c,y_m}^{(\alpha)}(\tau) \right|^2 = O(1)$$

Désignons par  $S(\alpha)$  la quantité définie par

$$S(\alpha) = \sum_{m=1}^N \sum_{-\tau_{max}}^{\tau_{max}} S_{m,\tau}(\alpha) \quad (3.3.59)$$

qui, ainsi que nous allons le voir, peut être estimée grossièrement à partir des observations disponibles. On peut dire que si  $\alpha$  n'est pas une fréquence cyclique conjuguée de  $\mathbf{y}(n)$ , alors

$$\mathbb{E}(\hat{P}(\alpha)) = \frac{S(\alpha)}{M} + o\left(\frac{1}{M}\right)$$

Puisque  $\hat{P}(\alpha)$  est un terme du même ordre de grandeur que  $\mathbb{E}(\hat{P}(\alpha))$ , il est clair que la quantité  $\bar{T}(\alpha)$  définie par

$$\bar{T}(\alpha) = \frac{\hat{P}(\alpha)}{\frac{S(\alpha)}{M}} \quad (3.3.60)$$

est un terme  $O(1)$  si  $\alpha$  n'est pas une fréquence cyclique non conjuguée de  $\mathbf{y}(n)$ . Si par contre  $\alpha$  est une fréquence cyclique non conjuguée de  $\mathbf{y}(n)$ , alors  $\mathbb{E}(\hat{P}(\alpha))$  est un terme  $O(1)$ , et la quantité  $\bar{T}(\alpha)$  est un terme  $O(M)$ . En conclusion,

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha \text{ n'appartient pas à } I_c \quad \bar{T}(\alpha) &= O(1) \\ \text{Si } \alpha \text{ appartient à } I_c \quad \bar{T}(\alpha) &= O(M) \end{aligned} \quad (3.3.61)$$

Notre procédure de détection va donc consister à estimer  $S(\alpha)$  par une certaine quantité  $\hat{S}(\alpha)$  pour chaque valeur de  $\alpha$ , puis à comparer la statistique de test

$$\hat{T}(\alpha) = \frac{\hat{P}(\alpha)}{\frac{\hat{S}(\alpha)}{M}} \quad (3.3.62)$$

à un seuil plus grand que 1.

Nous allons à présent brièvement expliciter (3.3.58), et mettre en évidence notre schéma d'estimation de  $S(\alpha)$ .

**Proposition 9.** *La relation (3.3.58) est vérifiée, et le terme  $S_{m,\tau}(\alpha)$  s'exprimerait sous la forme*

$$S_{m,\tau}(\alpha) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} \left( R_{y_m}^{(0)}(u) R_{y_m}^{(0)*}(-u) + R_{y_m}^{(0)}(u + \tau) R_{y_m}^{(0)*}(\tau - u) \right) e^{-2i\pi u \alpha} + s_{m,\tau}(\alpha) \quad (3.3.63)$$

si les signaux sources étaient gaussiens. Le terme  $s_{m,\tau}(\alpha)$  s'exprime en fonction des coefficients de corrélation cycliques de  $\mathbf{y}(n)$  aux fréquences cycliques  $(\pm\alpha_j)_{j=1,\dots,N}$ . Dans le cas non gaussien, si tous les signaux sources sont des modulations linéaires, l'expression de  $S_{m,\tau}(\alpha)$  doit être corrigée par l'ajout d'un terme négatif dépendant linéairement des cumulants d'ordre 4 des symboles transmis par les différents émetteurs.

Nous préférons ne pas donner la démonstration de ce résultat. Elle résulte d'un calcul assez standard, mais relativement pénible à présenter. Nous nous contentons donc de commenter (3.3.63) :

- Le premier terme du second membre de (3.3.63) est exprimé sous la forme d'une somme infinie sur l'indice  $u$ . Cependant, il s'agit évidemment d'une somme finie car les coefficients de corrélation  $R_{y_m}^{(0)}(u)$  sont nuls si  $|uT_e|$  est plus grand que la durée de la réponse impulsionnelle du canal de propagation.
- Le premier terme du second membre de (3.3.63) peut s'estimer sans problème à partir des observations car les coefficients de corrélations  $R_{y_m}^{(0)}(u)$  peuvent l'être.
- Les signaux transmis ne sont évidemment jamais gaussiens. La proposition montre que l'expression proposée de  $S_{m,\tau}(\alpha)$  proposée est supérieure à sa vraie valeur dans le cas de signaux modulés linéairement. Si le mélange contient des modulations non linéaires, l'analyse est plus complexe, et nous n'avons pas de réponse claire à apporter sur le signe du terme correctif.
- Le fait de sur-estimer  $S_{m,\tau}(\alpha)$  dans le cas où seules des modulations linéaires sont présentes n'est pas très grave car nous ne cherchons qu'à détecter des fréquences cycliques non conjuguées suffisamment puissantes. En tout état de cause, la surestimation du facteur de normalisation a pour effet de diminuer la statistique de test  $\hat{T}(\alpha)$  que  $\alpha$  soit fréquence cyclique conjugué ou pas. Comme nous déterminerons le seuil de détection empiriquement, ceci n'aura aucun impact sur les performances de l'algorithme de détection.

- De façon analogue, nous ne nous intéressons pas à l'expression de  $s_{m,\tau}(\alpha)$  car ce terme est en général assez faible par rapport au premier facteur du terme de droite de (3.3.63). Par ailleurs, même si nous souhaitions prendre en compte ce terme, nous ne pourrions pas l'estimer pratiquement car son expression dépend des fréquences cycliques inconnues des différents signaux.

Au vue de cette discussion, nous proposons donc d'estimer le terme  $S_{m,\tau}(\alpha)$  par  $\hat{S}_{m,\tau}(\alpha)$  défini par

$$\hat{S}_{m,\tau}(\alpha) = \sum_{u=-\tau_{max}}^{\tau_{max}} \left( \hat{R}_{y_m}^{(0)}(u) \hat{R}_{y_m}^{(0)}(-u)^* + \hat{R}_{y_m}^{(0)}(u + \tau) \hat{R}_{y_m}^{(0)}(\tau - u)^* \right) e^{-2i\pi u \alpha} \quad (3.3.64)$$

où pour tout  $u$ ,  $\hat{R}_{y_m}^{(0)}(u)$  est égal au classique estimateur

$$\hat{R}_{y_m}^{(0)}(u) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1-u} y_m(n+u) y_m(n)^*$$

si  $u \geq 0$  et  $\hat{R}_{y_m}^{(0)}(-u) = \hat{R}_{y_m}^{(0)}(u)^*$  pour  $u \geq 0$ .  $\tau_{max}$  dépend du type de canal de propagation considéré. Finalement,  $S(\alpha)$  est estimé par  $\hat{S}(\alpha)$  défini par

$$\hat{S}(\alpha) = \sum_{m=1}^N \sum_{\tau=-\tau_{max}}^{\tau_{max}} \hat{S}_{m,\tau}(\alpha) \quad (3.3.65)$$

Afin d'illustrer l'effet de la normalisation du critère  $\hat{P}(\alpha)$  par le terme  $\hat{S}(\alpha)$ , nous allons présenter quelques figures visualisant les fonctions  $\alpha \rightarrow \hat{P}(\alpha)$  et  $\alpha \rightarrow \hat{T}(\alpha)$ .

Il convient à présent de mettre en évidence une stratégie raisonnable permettant de positionner le seuil de détection. Puisqu'il est impossible d'estimer avec précision  $S(\alpha)$ , il serait déraisonnable d'utiliser une approximation de la loi de probabilité de  $\hat{T}(\alpha)$  par une loi de type loi du chi2 et de positionner le seuil en conséquence. Nous préférons proposer une approche pragmatique consistant à se faire une idée du seuil en effectuant des simulations de Monte Carlo. Plus précisément, nous considérons un certain nombre de situations représentatives des mélanges possibles, et effectuons des histogrammes des valeurs prises par  $\hat{T}(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  est une fréquence cyclique significative et des valeurs prises par le maximum de  $\hat{T}(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  n'appartient pas à l'ensemble des fréquences cycliques non conjuguées ; on élimine donc d'une part les fréquences cycliques non conjuguées significatives, et d'autre part celles qui peuvent être atténuées par un faible excès de bande. La visualisation des histogrammes dans chaque situation représentative permet d'évaluer un seuil de détection permettant de séparer les 2 histogrammes dans tous les cas. Nous tenons à rappeler de nouveau que cette stratégie, relativement rustique, est raisonnablement pertinente car seules les fréquences cycliques significatives doivent être détectées.

**Illustrations numériques.** Nous allons à présent illustrer la procédure d'estimation des fréquences cycliques non conjuguées significatives par le biais de simulations numériques. Dans toutes les expérimentations qui suivent, le nombre de sources  $K$  est égal à 3, et le nombre de capteurs  $N$  est égal à 5. On suppose en outre que le réseau de capteurs est circulaire à capteurs équidistants, et que le rapport de l'espacement entre capteurs et la longueur d'onde est égal à  $1/2$ . Les périodes symboles des 3 signaux sources sont  $T_1 = 3.4\mu s$ ,  $T_2 = 3.6\mu s$  et  $T_3 = 3.9\mu s$  et leurs excès de bande sont égaux à 0.5. La période d'échantillonnage est  $T_e = 2.25\mu s$  et les résidus de porteuses des 3 signaux sont supposées

différentes et sont tirés aléatoirement de façon à ce que la condition  $\frac{1}{T_e} > |2\delta f_k| + \frac{1+\gamma}{T_k}$  soit vraie pour tout  $k = 1, \dots, K$ . Par ailleurs, la durée d'observation est de l'ordre de 2000  $T_e$ .

Les canaux de propagation entre chaque émetteur et le récepteur multi-capteurs sont des canaux de propagation à trajets multiples et à front d'onde plan. Pour chaque réalisation, les angles d'arrivée des différents trajets sont tirés aléatoirement sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et les amplitudes complexes des trajets et les temps d'arrivée des trajets correspondent aux canaux ETSI, BUx et sont listés dans le tableau A.4. Dans le contexte de ces expérimentations, les amplitudes complexes des trajets restent constantes sur la durée de l'observation.

Le rapport signal sur bruit est défini par rapport à la première source, et vaut 20dB dans toutes les expérimentations qui suivent.

Nous allons illustrer ici l'effet de la normalisation du critère  $\hat{P}(\alpha)$  par le terme  $\hat{S}(\alpha)$ , et nous allons présenter quelques figures visualisant les fonctions  $\alpha \rightarrow \hat{P}(\alpha)$  et  $\alpha \rightarrow \hat{T}(\alpha)$ . Nous renvoyons le lecteur à la section 4.3.1 pour la procédure de détermination du seuil de détection des fréquences cycliques non conjuguées significatives.

Nous supposons dans un premier temps que 3 sources BPSK de fréquences porteuses différentes, de débits différents, et de même puissance sont présentes dans la bande d'analyse. On s'attend donc à trouver 3 fréquences cycliques conjuguées significatives, et 6 fréquences cycliques non conjuguées plus atténuées. Dans la figure 3.4(a), nous représentons la fonction  $\alpha \rightarrow \hat{P}(\alpha)$ , où  $\alpha$  appartient à  $[-1/2, 1/2]$ , et où  $\hat{P}(\alpha)$  est exprimé en dB. Dans la figure 3.4(b), nous représentons  $\hat{T}(\alpha)$  dans la même configuration. Les 2 figures sont cohérentes avec ce qui est attendu en terme de fréquences détectables. Par ailleurs, on peut observer figure 3.4(a) que les propriétés statistiques de  $\hat{P}(\alpha)$  varie en fonction de  $\alpha$  lorsque  $\alpha$  n'est pas une fréquence cyclique conjuguée. Au contraire, la figure 3.4(b) montre que l'effet de la normalisation par  $\hat{S}(\alpha)$  a pour effet de rendre les propriétés statistiques de  $\hat{T}(\alpha)$  indépendantes de  $\alpha$  lorsque  $\alpha$  n'est pas fréquence cyclique.

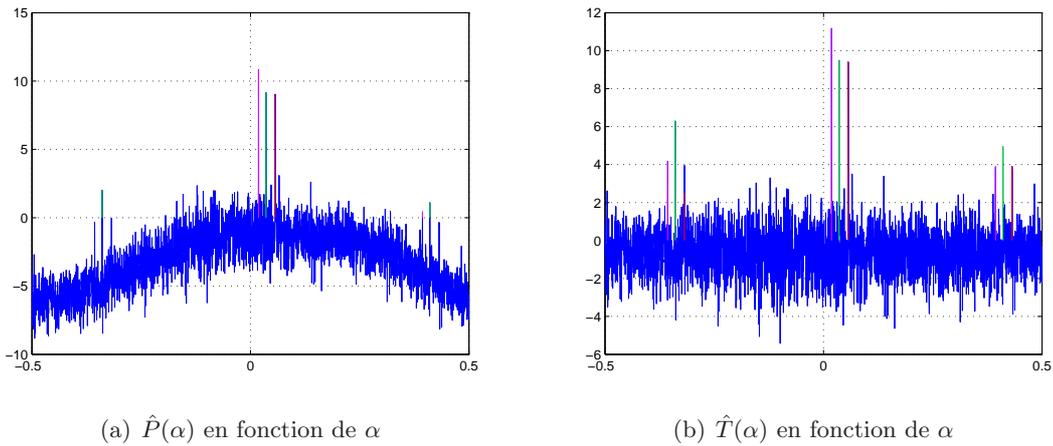


FIG. 3.4 – Le cas de 2 sources BPSK de mêmes paramètres

Les figures 3.5(a) et 3.5(b) correspondent à une réalisation de  $\hat{P}(\alpha)$  et  $\hat{T}(\alpha)$  lorsque les 3 sources sont des CPM d'indice 1/2 de débits différents et de fréquences porteuses différentes. Les 6 fréquences cycliques attendues (à  $2\delta f_k \pm \frac{1}{2T_k}$  avec  $k \in \{1, 2, 3\}$ ) sont bien visibles sur les 2 figures, mais la renormalisation a un effet tout à fait bénéfique puisqu'elle

permet de les faire apparaître plus nettement.

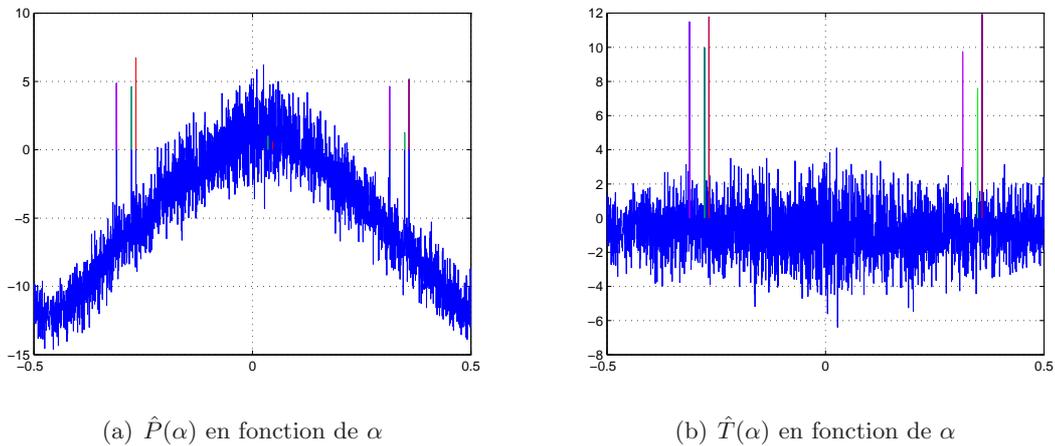


FIG. 3.5 – Le cas de 2 sources CPM d’indice 1/2 de mêmes paramètres

### 3.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons étudié la séparation des mélanges convolutifs de signaux non circulaires à l’ordre 2 dans le contexte de l’écoute passive en télécommunications. Nous nous sommes intéressés uniquement aux approches de séparation par déflation et minimisation du critère du module constant. Nous avons démontré que dans le cas des signaux qui ne partagent pas les mêmes débits et les mêmes résidus de porteuse, la minimisation du critère du CMA assure l’extraction d’une version filtrée d’un des signaux source du mélange. Nous avons également prouvé que dans ce cas et sous une condition toujours vérifiée en pratique, tous les minima locaux du critère sont séparants. Ce résultat n’est pas vrai dans le cas des mélanges de signaux non circulaires de même période symbole et même résidu de porteuses, cas dans lequel nous avons prouvé l’existence des minima locaux attractifs non-séparants pour le critère du CMA. Nous avons proposé une modification du critère du CMA basé sur la connaissance des fréquences cycliques non conjuguées significatives des signaux non circulaires. Nous avons présenté une méthode d’estimation de ces fréquences et nous avons démontré que le nouveau critère proposé permet de séparer les sources dans les cas où le critère du CMA échoue et aussi dans le cas où le CMA fonctionne correctement.

---

## Chapitre 4

# Complexité des algorithmes et Simulations.

Ce chapitre est consacré aux résultats expérimentaux que nous avons menés afin de valider les études théoriques présentées dans le chapitre précédent. Nous commencerons par une description de différents algorithmes utilisés et par l'évaluation de leur complexité (section 4.1) et présenterons ensuite le contexte des simulations réalisées ainsi que les critères d'évaluation de performances que nous avons considérés (section 4.2). Les résultats obtenus seront présentés et interprétés dans la section 4.3.

### 4.1 Étude de la complexité des algorithmes

Dans le chapitre 3 nous avons proposé une méthode de séparation des mélanges convolutifs des signaux non-circulaires à l'ordre 2 basé sur le critère du CMA modifié couplé avec une approche par déflation. Nous rappelons que l'extraction d'une source par minimisation du critère proposé nécessite la mise en œuvre de deux étapes :

- la détection des fréquences cycliques non conjuguées significatives du mélange considéré ;
- le calcul et minimisation du critère proprement dit.

Dans la suite nous décrivons uniquement les opérations à effectuer pour extraire la première source, l'extraction des autres sources étant effectué de la même manière.

#### 4.1.1 Description de la méthode de détection des fréquences cycliques non conjugués significatives.

La procédure de détection consiste à évaluer la statistique de test  $\hat{T}(\alpha)$  (3.3.62) pour chaque valeur possible de fréquence cyclique non conjuguée normalisée (i.e. appartenant à  $[-1/2, 1/2]$ ), et à la comparer à un seuil. On suppose que  $M$ , le nombre d'échantillons disponibles, est **une puissance de 2**. Par ailleurs, on appelle  $\tau_{max}$  un majorant du nombre maximum de coefficients non nuls des équivalents temps discrets des canaux entre émetteurs et récepteurs. Cette quantité peut être évaluée en prenant en compte la bande de fréquence analysée et les canaux de propagation typiques que l'on y trouve. Enfin, on désigne par  $[-\alpha_{max}, \alpha_{max}]$  l'intervalle inclus dans  $[-1/2, 1/2]$  dans lequel les fréquences cycliques non conjuguées vont être cherchées. L'algorithme de détection fonctionne en 3 étapes :

1. Pour chaque  $m = 1, \dots, N$ , pour chaque entier  $\tau = -\tau_{max}, \dots, \tau_{max}$ , et pour chaque valeur de  $\alpha$  située sur la grille  $\{k/M, k = -M/2 + 1, \dots, M/2\}$ , nous calculons grâce à un algorithme de FFT les quantités définies en 3.3.56 et 3.3.64 respectivement. **La complexité de cette étape est de l'ordre de  $2\tau_{max}NM \log_2 M$  opérations.**
2. Pour chaque  $\alpha$  appartenant à la grille de FFT, nous calculons  $\hat{P}(\alpha)$  (3.3.57) et  $\hat{S}(\alpha)$  (3.3.65)
3. Pour chaque  $\alpha$  nous évaluons la statistique de test  $\hat{T}(\alpha) = \frac{\hat{P}(\alpha)}{\frac{\hat{S}(\alpha)}{M}}$ , et la comparons à un seuil lorsque  $\alpha \in [-\alpha_{max}, \alpha_{max}]$ . **La complexité de ces étapes est de l'ordre de  $4\tau_{max}MN$  opérations.**

Nous pouvons constater que l'étape la plus coûteuse est celle qui consiste à calculer les  $2\tau_{max}N$  FFT des signaux  $m \rightarrow y_n(m + \tau)y_n(m)$ , soit  $2\tau_{max}NM \log_2 M$  opérations pour l'extraction de la première source. A titre d'exemple, si l'on considère que les différences de temps de retard maximales entre les trajets associés à une même source valent 3 périodes symboles, et que la période d'échantillonnage choisie est de l'ordre d'une demie période symbole, cela conduit à une valeur de  $\tau_{max}$  d'environ 10 en prenant en compte l'étalement dû au filtre de mise en forme. Il conviendra donc de calculer  $20N$  FFT  $M$  points, soit  $20NM \log_2 M$  opérations.

#### 4.1.2 Minimisation du critère du module constant modifié.

Le filtre  $N$  entrées / 1 sortie  $\mathbf{g}(z)$  appliqué au signal observé afin d'extraire l'une des sources est un filtre à réponse impulsionnelle finie  $\mathbf{g}(z) = \sum_{l=0}^L \mathbf{g}_l z^{-l}$ , où les  $L + 1$  coefficients de la réponse impulsionnelle  $(\mathbf{g}_l)_{l=0, \dots, L}$  sont des vecteurs ligne de dimension  $N$ . En pratique, déterminer ce filtre équivaut à déterminer le vecteur ligne  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_L)$  dont la dimension est égale à  $N(L + 1)$ . La sortie  $r(m) = [\mathbf{g}(z)]\mathbf{y}(m)$  du filtre  $\mathbf{g}(z)$  excité par  $\mathbf{y}(m)$  peut aussi se mettre sous la forme  $r(m) = \mathbf{g}\mathbf{Y}_L(m)$  où  $\mathbf{Y}_L(m)$  est le vecteur colonne de dimension  $N(L + 1)$  défini par  $\mathbf{Y}_L(m) = (\mathbf{y}(m)^T, \mathbf{y}(m-1)^T, \dots, \mathbf{y}(m-L)^T)^T$ .

Dans le chapitre 3 nous avons défini un nouveau critère théorique  $\hat{J}'(r)$  (3.2.53) dont la minimisation permet d'extraire une source du mélange. Il s'agit du critère théorique du module constant (3.2.5) duquel on retranche les modules au carré des coefficients de corrélation cycliques non-conjugués à l'instant 0 et aux fréquences cycliques non-conjuguées les plus significatives du signal reçu. Puisque  $r(m) = \mathbf{g}\mathbf{Y}_L(m)$ ,  $\hat{J}'(r)$  dépend du vecteur  $\mathbf{g}$ , et nous utilisons par abus de langage la notation  $\hat{J}'(\mathbf{g})$  pour bien marquer la dépendance en  $\mathbf{g}$ .

Il convient donc de minimiser par rapport au vecteur  $\mathbf{g}$  la fonction  $\hat{J}'(\mathbf{g})$  donnée par

$$\hat{J}'(\mathbf{g}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (|\mathbf{g}\mathbf{Y}_L(m)|^2 - 1)^2 - \sum_{\alpha_c \in \hat{I}_{c,s}} \left| \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (\mathbf{g}\mathbf{Y}_L(m))^2 e^{-2i\pi m \alpha_c} \right|^2 \quad (4.1.1)$$

Pour cela, nous utilisons un algorithme du gradient à pas optimal : si  $\mathbf{g}^{(k)}$  est la valeur du vecteur à l'itération  $k$  de l'algorithme, le vecteur  $\mathbf{g}^{(k+1)}$  à l'itération  $k + 1$  est donné par

$$\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)} - \mu_{k+1} \left( \frac{\partial \hat{J}'}{\partial \mathbf{g}} \right)_{\mathbf{g}=\mathbf{g}^{(k)}}$$

et où  $\mu_{k+1}$  est choisi de façon à ce que

$$\mu \rightarrow \hat{J}' \left( \mathbf{g}^{(k)} - \mu \left( \frac{\partial \hat{J}'}{\partial \bar{\mathbf{g}}} \right)_{\mathbf{g}=\mathbf{g}^{(k)}} \right)$$

soit minimum. L'opérateur  $\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{g}}}$  représente l'opérateur de dérivation par rapport au vecteur  $\bar{\mathbf{g}}$  obtenu en prenant les complexes conjugués des composantes du vecteur  $\mathbf{g}$ . Cette version de l'algorithme du gradient est plus compacte à écrire que celle dans laquelle on sépare les parties réelles et imaginaires de  $\mathbf{g}$ , et où le gradient est le vecteur obtenu en empilant le vecteur des dérivées par rapport aux parties réelles avec celui des dérivées par rapport aux parties imaginaires. La fonction de  $\mu$  qu'il convient de minimiser est un polynôme de degré 4 en  $\mu$ , et il suffit en pratique de déterminer les racines réelles (au plus 3) de la dérivée, et d'y évaluer la fonction à minimiser pour déterminer celle qui atteint le minimum.

Un test d'arrêt sur la norme du vecteur  $\mathbf{g}^{(k+1)} - \mathbf{g}^{(k)}$  permet de stopper l'algorithme, et un nombre maximum d'itérations  $N_{IT}$  doit être également fixé.

L'expression de  $\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{g}}}$  est

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{J}'(\mathbf{g})}{\partial \bar{\mathbf{g}}} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} 2 (|\mathbf{g}\mathbf{Y}_L(m)|^2 - 1)^2 \mathbf{g}\mathbf{Y}_L(m) \bar{\mathbf{Y}}_L(m) \\ &\quad - \sum_{\alpha_c \in \hat{I}_{c,s}} \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (\mathbf{g}\mathbf{Y}_L(m))^2 e^{-2i\pi m \alpha_c} \right) \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} 2\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{Y}}_L(m)) \bar{\mathbf{Y}}_L(m) e^{2i\pi m \alpha_c} \right) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

où  $\bar{\mathbf{Y}}_L(m)$  représente le conjugué du vecteur  $\mathbf{Y}_L(m)$ . En tenant compte du fait que  $\mathbf{g}\mathbf{Y}_L(m) = r(m)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{J}'(\mathbf{g})}{\partial \bar{\mathbf{g}}} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} 2 (|r(m)|^2 - 1)^2 r(m) \bar{\mathbf{Y}}_L(m) \\ &\quad - \sum_{\alpha_c \in \hat{I}_{c,s}} \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (r(m))^2 e^{-2i\pi m \alpha_c} \right) \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} 2\bar{r}(m) \bar{\mathbf{Y}}_L(m) e^{2i\pi m \alpha_c} \right) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

La minimisation de  $\hat{J}'(\mathbf{g})$  se résume en 4 étapes :

1. Initialisation du vecteur  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}_l^{(0)} = 0$  si  $l = 0, \dots, \frac{L}{2} - 1$ ,  $\mathbf{g}_{L/2}^{(0)} = (1, \dots, 1)$ ,  $\mathbf{g}_l^{(0)} = 0$  si  $l = \frac{L}{2} + 1, \dots, L$ .
2. Itération  $k + 1$ ,  $\mathbf{g}^{(k)}$  supposé disponible. Calcul de la dérivée de  $\hat{J}'(\mathbf{g})$  au point  $\mathbf{g}^{(k)}$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \hat{J}'(\mathbf{g})}{\partial \bar{\mathbf{g}}} \right)_{\mathbf{g}=\mathbf{g}^{(k)}} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} 2 (|r^{(k)}(m)|^2 - 1)^2 r^{(k)}(m) \bar{\mathbf{Y}}_L(m) - \\ &\quad \sum_{\alpha_c \in \hat{I}_{c,s}} \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (r^{(k)}(m))^2 e^{-2i\pi m \alpha_c} \right) \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} 2\bar{r}^{(k)}(m) \bar{\mathbf{Y}}_L(m) e^{2i\pi m \alpha_c} \right) \end{aligned}$$

avec  $r^{(k)}(m) = \mathbf{g}^{(k)}\mathbf{Y}_L(m)$ .

3. Déterminer le pas optimal  $\mu_{k+1}$ , et calculer

$$\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)} - \mu_{k+1} \left( \frac{\partial \hat{J}'}{\partial \mathbf{g}} \right)_{\mathbf{g}=\mathbf{g}^{(k)}}$$

4. Si  $\|\mathbf{g}^{(k+1)} - \mathbf{g}^{(k)}\|^2 < \epsilon$ ,  $\hat{\mathbf{g}}^{(1)} = \mathbf{g}^{(k)}$ , sinon faire  $k = k + 1$ .

En terme de complexité, l'essentiel coût du calcul de l'algorithme réside dans le calcul des  $\mathbf{g}^{(k)} \mathbf{Y}_L(m)$  lorsque  $m$  varie de 0 à  $M - 1$  et lorsque le numéro de l'itération  $k$  varie de 1 au nombre maximum d'itération  $N_{IT}$ . L'ensemble représente  $N(L + 1)MN_{IT}$ . A titre d'exemple, dans nos simulations, nous avons pris  $L = 16$  et  $N_{IT} = 30$ . La complexité de l'algorithme de minimisation de  $\hat{J}'$  est donc de l'ordre de  $510NM$ . Ceci est du même ordre de grandeur que le nombre d'opérations nécessaires pour réaliser la détection des fréquences cycliques ( $20N$  FFT  $M$  points) pour des valeurs de  $M$  de quelques milliers.

#### 4.1.3 La procédure de déflation.

On appelle  $\hat{\mathbf{g}}^1$  le vecteur obtenu à la dernière itération de l'algorithme du gradient que nous venons d'introduire, et nous désignons par  $\hat{r}_1(m)$  le signal défini par  $\hat{r}_1(m) = \hat{\mathbf{g}}^1 \mathbf{Y}_L(m)$ .  $\hat{r}_1(m)$  représente en principe un estimateur d'une version filtrée de l'un des signaux sources. La procédure de déflation consiste à retrancher la contribution de cette source du signal observé  $\mathbf{y}(m)$  de façon à former un nouveau signal  $\mathbf{y}^{(2)}(m)$  censé être un mélange convolutif des autres sources. On peut alors utiliser, sur le signal  $\mathbf{y}^{(2)}(m)$ , la procédure de minimisation du critère de module constant modifié, de façon à extraire la contribution d'une seconde source nécessairement différente de celle qui a été extraite au départ.

La procédure de déflation consiste à déterminer un filtre non causal 1 entrée /  $N$  sorties  $\mathbf{t}(z) = \sum_{l=-P}^P \mathbf{t}_l z^{-l}$  ( $\mathbf{t}(z)$  et les vecteurs  $(\mathbf{t}_l)_{l=-P, \dots, P}$  sont des vecteurs colonnes de dimension  $N$ ) à réponse impulsionnelle finie de telle sorte que le critère

$$JD(\mathbf{t}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left\| \mathbf{y}(m) - \sum_{l=-P}^P \mathbf{t}_l \hat{r}_1(m-l) \right\|^2$$

soit minimum, où  $\mathbf{t}$  représente le vecteur ligne de dimension  $(2P + 1)N$  défini par  $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_{-P}^T, \dots, \mathbf{t}_0^T, \dots, \mathbf{t}_P^T)$ . Afin de mieux mettre en évidence ce qu'implique la minimisation de ce critère, nous faisons apparaître les composantes  $(t_n(z))_{n=1, \dots, N}$  de  $\mathbf{t}(z)$ ,  $\mathbf{t}(z) = (t_1(z), \dots, t_N(z))^T$ , et leurs réponses impulsionnelles définies par  $t_n(z) = \sum_{l=-P}^P t_{n,l} z^{-l}$  où  $t_{n,l}$  est un coefficient scalaire.  $JD(\mathbf{t})$  s'écrit alors

$$JD(\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^N JD_n(\mathbf{t}^{(n)})$$

où  $\mathbf{t}^{(n)} = (t_{n,-P}, \dots, t_{n,0}, \dots, t_{n,P})$  est un vecteur de dimension  $2P + 1$  et où  $JD_n$  est défini par

$$JD_n(\mathbf{t}^{(n)}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left| y_n(m) - \sum_{l=-P}^P t_{n,l} \hat{r}_1(m-l) \right|^2$$

Minimiser  $JD(\mathbf{t})$  est donc équivalent à minimiser chacun des critères  $JD_n(\mathbf{t}^{(n)})$  par rapport au vecteur  $\mathbf{t}^{(n)}$ .

Si l'on pose  $\hat{\mathbf{r}}_1(m) = (\hat{r}_1(m+P), \dots, \hat{r}_1(m), \dots, \hat{r}_1(m-P))^T$ , le critère  $JD(\mathbf{t}^{(n)})$  se met sous la forme

$$JD_n(\mathbf{t}^{(n)}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left| y_n(m) - \mathbf{t}^{(n)} \hat{\mathbf{r}}_1(m) \right|^2$$

$JD_n(\mathbf{t}^{(n)})$  est donc la forme quadratique du vecteur  $\mathbf{t}^{(n)}$  qui s'écrit sous la forme

$$JD_n(\mathbf{t}^{(n)}) = \mathbf{t}^{(n)} \mathbf{A}_n \mathbf{t}^{(n)H} - 2\text{Re} \left( \mathbf{t}^{(n)} \mathbf{b}_n^H \right) + c_n$$

avec

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |y_n(m)|^2 \\ \mathbf{b}_n &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{\mathbf{r}}_1(m)^H y_n(m) \\ \mathbf{A}_n &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{\mathbf{r}}_1(m) \hat{\mathbf{r}}_1(m)^H \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Le minimum de  $JD_n$  est atteint pour le vecteur  $\mathbf{t}_{opt}^{(n)}$  défini par

$$\mathbf{t}_{opt}^{(n)} = \mathbf{b}_n \mathbf{A}_n^{-1}$$

Le vecteur  $\mathbf{t}_{opt}$  minimisant  $JD(\mathbf{t})$  s'obtient immédiatement à partir des vecteurs  $(\mathbf{t}_{opt}^{(n)})_{n=1, \dots, N}$ .

On forme alors le signal  $\mathbf{y}^{(2)}(m)$  défini par

$$\mathbf{y}^{(2)}(m) = \mathbf{y}(m) - \sum_{l=-P}^P \mathbf{t}_{l,opt} \hat{r}_1(m-l) \quad (4.1.5)$$

qui, en principe, devrait être proche d'un mélange convolutif des sources restantes.

La procédure de déflation se résume en 4 étapes :

1. Pour chaque instant  $m$  former, à partir du signal extrait  $(\hat{r}_1(m))_{m=0, \dots, M-1}$ , le vecteur  $\hat{\mathbf{r}}_1(m) = (\hat{r}_1(m+P), \dots, \hat{r}_1(m), \dots, \hat{r}_1(m-P))^T$
2. Pour chaque numéro de capteur  $n = 1, \dots, N$ , calculer le vecteur  $\mathbf{b}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{\mathbf{r}}_1(m)^H y_n(m)$  et la matrice  $\mathbf{A}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{\mathbf{r}}_1(m) \hat{\mathbf{r}}_1(m)^H$ , complexité de l'ordre de  $N^2 M$  opérations.
3. Pour chaque numéro de capteur calculer  $n = 1, \dots, N$  le vecteur  $\mathbf{t}_{opt}^{(n)} = \mathbf{b}_n \mathbf{A}_n^{-1}$ , et construire le vecteur de dimension  $(2P+1)N$   $\mathbf{t}_{opt} = (\mathbf{t}_{-P,opt}, \dots, \mathbf{t}_{0,opt}, \dots, \mathbf{t}_{P,opt})$ , complexité de l'ordre de la résolution de  $N$  systèmes linéaires de taille  $2P+1$ , c'est-à-dire  $N(2P+1)^2$ .
4. Pour chaque instant calculer  $m = 0, \dots, M-1$  le signal  $\mathbf{y}^{(2)}(m) = \mathbf{y}(m) - \sum_{l=-P}^P \mathbf{t}_{l,opt} \hat{r}_1(m-l)$ , complexité de l'ordre de  $(2P+1)MN$ .

Le nombre d'opérations est donc de l'ordre de  $N^2 M + N(2P+1)^2 + (2P+1)MN$ . A titre d'exemple, nous avons choisi dans nos simulations  $P = 10$ , et le terme dominant vaut  $(2P+1)MN \simeq 20MN$ .

**Reinitialisation pour extraction de la deuxième source.** La procédure de déflation permet la formation du signal  $\mathbf{y}^{(2)}(m)$  qui est en principe débarrassé de la première source extraite. On peut appliquer à  $\mathbf{y}^{(2)}(m)$  l'algorithme du module constant modifié de façon à déterminer un filtre  $\tilde{\mathbf{g}}^{(2)}(z)$  pour lequel le signal  $\tilde{r}_2(m) = [\tilde{\mathbf{g}}^{(2)}(z)]\mathbf{y}^{(2)}(m)$  représente un estimateur d'une version filtrée d'une deuxième source. En pratique, la procédure de soustraction de la première source aboutissant à  $\mathbf{y}^2(m)$  n'est pas parfaite. En particulier,  $\hat{r}_1(m)$  contient des versions filtrées des sources restantes, avec des filtres de longueurs plus importantes qu'initialement du fait des traitements effectués précédemment. Ceci peut rendre le mélange convolutif définissant  $\mathbf{y}^2(m)$  plus compliqué à inverser que le mélange initial. Il est donc tout à fait raisonnable d'essayer de revenir au signal reçu initial  $\mathbf{y}(m)$ , et d'y appliquer l'algorithme du module constant modifié **initialisé en un filtre suffisamment proche d'une solution permettant l'extraction de la deuxième source**. Ce filtre initial, noté  $\mathbf{g}_{init}^{(2)}(z) = \sum_{l=0}^L \mathbf{g}_{init,l}^{(2)} z^{-l}$ , est obtenu en minimisant par rapport au vecteur  $\mathbf{g}_{init}^{(2)} = (\mathbf{g}_{init,0}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}_{init,L}^{(2)})$  le critère quadratique

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left| \mathbf{g}_{init}^{(2)} \mathbf{Y}_L(m) - \tilde{r}_2(m) \right|^2$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$\mathbf{g}_{init}^{(2)} \mathbf{D} \mathbf{g}_{init}^{(2)H} - 2\text{Re}(\mathbf{g}_{init}^{(2)} \mathbf{d}^H) + d_0$$

avec

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |\tilde{r}_2(m)|^2 \\ \mathbf{d} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{Y}_L(m)^H \tilde{r}_2(m) \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{Y}_L(m) \mathbf{Y}_L(m)^H \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

La solution est le vecteur  $\mathbf{g}_{init}^{(2)} = \mathbf{d} \mathbf{D}^{-1}$ , dont le calcul nécessite la résolution d'un système linéaire de taille  $N(L+1)$ , ce qui est négligeable par rapport à l'algorithme du CMA modifié. Ceci permet en pratique d'extraire la deuxième source avec des performances de meilleure qualité. Cette étape a un coût calcul égal à celui de l'algorithme du module constant modifié. En conclusion, l'extraction de la deuxième source nécessite donc l'utilisation de 2 algorithmes de minimisation du critère du module constant modifié, soit un nombre d'opérations maximum de l'ordre de  $2(L+1)N_{IT}NM$ . Remarquons toutefois que le second algorithme, initialisé au filtre  $\mathbf{g}_{init}^{(2)}(z)$  assez proche de la solution optimale, nécessite le plus souvent moins d'itérations que  $N_{IT}$ . Le chiffre que nous donnons est donc relativement pessimiste.

#### 4.1.4 Conclusion sur la complexité de la procédure basée sur le critère du module constant modifié.

Nous concluons en résumant les analyses précédentes, et en prenant comme valeurs de  $\tau_{max}, L, P$  celles que nous avons utilisées dans nos simulations :  $\tau_{max} = 10, L = 16, P = 10$ . Nous faisons apparaître le nombre d'itérations maximum  $N_{IT}$  comme un paramètre.

- Détection des fréquences cycliques non conjuguées du mélange initial :  $20 \log_2 M \times MN$
- Algorithme du module constant pour la première source extraite :  $17N_{IT} \times MN$
- Déflation première source :  $20 \times MN$

- Pour chacune des  $K - 1$  sources suivantes : détection des fréquences cycliques non conjuguées des mélanges obtenus après soustraction, soit  $20 \log_2(M)MN$ , puis ré-initialisation et algorithme du module constant  $34N_{IT} \times MN$ , déflation  $20 \times MN$ .

Soit pour les  $K$  sources :  $(20K \log_2 M + (34N_{IT} + 20)K - 17N_{IT}) \times MN$ . Nous tenons toutefois à rappeler que l'évaluation est pessimiste car nous avons supposé que le nombre d'itérations des différents algorithmes du module constant exécutés était toujours égal au nombre maximum  $N_{IT}$ . En prenant  $N_{IT} = 30$ , nous obtenons environ  $(20 \log_2 M + 1000) \times MNK$ .

## 4.2 Contexte de simulations

### 4.2.1 Conditions de simulation et méthodologie d'analyse des performances

Les résultats expérimentaux que nous présenterons dans la suite ont été obtenus dans le contexte de séparation d'un mélange convolutif de  $K = 3$  sources, observé sur des réseaux d'antennes pourvus de  $N = 5$  capteurs. Nous allons présenter dans cette section la topologie des réseaux, le type des canaux de propagation utilisés, les caractéristiques des sources et du bruit considéré. Ensuite nous décrirons les critères que nous avons choisis pour évaluer les performances des algorithmes de séparation considérés.

**Types de réseaux d'antennes.** Sauf mention explicite contraire, les réseaux d'antennes que nous avons considérés dans les expérimentations qui suivent sont circulaires à capteurs équidistants, avec une distance entre 2 capteurs consécutifs égale à une demie longueur d'onde. Nous verrons cependant que quelques expérimentations ont été menées pour des distances égales à un quart de longueur d'onde afin d'évaluer l'impact de ce paramètre.

**Canaux de propagation.** Les canaux de propagation simulés sont des canaux de propagation à trajets multiples et à front d'onde plan. Cela signifie que si le signal transmis (en fait son enveloppe complexe) par une source est  $s_a(t)$ , sa contribution au signal reçu (son enveloppe complexe) sur le réseau d'antennes est égal à  $\sum_{k=1}^{N_{trajets}} \lambda_k s_a(t - \tau_k) \mathbf{d}(\theta_k)$  où  $\mathbf{d}(\theta_k)$  représente le vecteur directionnel correspondant aux angles d'arrivée du trajet numéro  $k$ , où  $\tau_k$  est le retard dont est affecté le trajet numéro  $k$ , et où  $\lambda_k$  est un scalaire représentant l'amplitude complexe du trajet numéro  $k$ . Les paramètres  $\lambda_k$  et  $\tau_k$  correspondent aux canaux ETSI : RAx, TUx, BUx et HTx et sont listés dans le tableau A.1 dans l'annexe A.4. Il s'agit de canaux de Rayleigh à trajets multiples. La plupart des expérimentations ont été menées avec des canaux fixes sur la durée de la trame considérée ; nous avons également évalué l'impact d'une mobilité sur les performances.

Pour des canaux fixes, sur chaque réalisation de l'algorithme, les valeurs des angles d'arrivée des divers trajets et sources résultant d'un tirage aléatoire selon la loi uniforme entre  $[-\pi/2, \pi/2]$  et  $[-\pi, \pi]$  dans le cas d'un réseau circulaire (il y a 2 angles à considérer). Il en est de même pour les diverses amplitudes complexes. Le fait de tirer des canaux différents sur chaque réalisation permet de disposer de résultats ayant une signification statistique. Nous re-normalisons les tirages des  $\lambda_k$  de façon à ce que  $\sum_{k=1}^{N_{trajets}} |\lambda_k|^2 = 1$ . Dans le cas de canaux à temps variable, nous assurons la continuité des amplitudes complexes des trajets d'une réalisation à l'autre, mais nous continuons à générer des réalisations différentes des angles d'arrivée sur chaque réalisation de l'algorithme afin de disposer de

résultats ayant une signification statistique. Quant à la normalisation elle est effectuée de sorte que  $\mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{N_{trajets}} |\lambda_k|^2 \right) = 1$ .

### Évaluation de l'énergie par symbole reçu pour une source/un capteur donnés.

Considérons le signal source à temps continu de période symbole  $T$ ,  $s_a(t)$  normalisé de telle sorte que sa puissance moyenne soit égale à 1. Sa contribution au signal reçu sur le premier capteur s'écrit alors

$$\sum_{k=1}^{N_{trajets}} \lambda_k s_a(t - \tau_k)$$

L'énergie reçue par symbole émis est donc

$$T \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_k \lambda_k e^{-i2\pi f \tau_k} \right|^2 S_{s_a}(f) df \quad (4.2.7)$$

où  $S_{s_a}(f)$  représente la densité spectrale de  $s_a(t)$ . Pour un canal spéculaire, les trajets sont bien séparés les uns des autres (d'une quantité de l'ordre de la période symbole de la source), cette énergie est très proche de  $T \sum_k |\lambda_k|^2$ . Au contraire,  $T \sum_k |\lambda_k|^2$  est en général une évaluation assez optimiste de l'énergie par symbole dans le cas contraire. Cependant, nous avons choisi  $T \sum_k |\lambda_k|^2$  pour représenter l'énergie par symbole car cette quantité correspond à l'énergie que l'on obtiendrait s'il était possible de recombinaison de façon cohérente tous les trajets. Cette façon de procéder est assez usuelle. Par conséquent, les performances que nous allons présenter sont parfois plus défavorables sur les canaux courts du type RAX que sur les canaux longs. Notons enfin que, dans le cas des canaux à temps variable, il convient de considérer l'espérance mathématique du terme (4.2.7), qui vaut alors exactement  $T \mathbb{E} \left( \sum_k |\lambda_k|^2 \right)$ .

**Les sources.** Les trois sources correspondent à des modulations de natures différentes qui seront mises en évidence clairement dans chaque expérimentations. Sauf mention explicite du contraire, nous avons choisi  $T = T_1 = T_2 = T_3$  correspondant à un débit symbole de  $\frac{1}{T} = 277\text{kHz}$  (GSM), des excès de bande égaux à 0.5, et des résidus de porteuses tous différents, tirés aléatoirement sur chaque réalisation, mais de façon à ce que la condition d'échantillonnage de Shannon soit respectée. La fréquence d'accord du récepteur est  $f_0 = 1\text{GHz}$ , valeur qui a son importance pour les canaux variables.

**La période d'échantillonnage  $T_e$ .** Elle est choisie égale à  $T_e = \frac{T}{1.6}$  dans le cas de périodes symboles et excès de bandes égaux. Dans les autres cas, parfois traités,  $T_e$  est choisie de façon à vérifier la condition d'échantillonnage de Shannon. Nous avons toujours fait en sorte que chaque source ne remplisse pas complètement la bande sélectionnée par l'échantillonnage.

**Rapport signal sur bruit.** Le bruit additif est blanc gaussien complexe sur la bande sélectionnée par l'échantillonnage, et les variances des bruits sont identiques sur les différents capteurs. La variance du bruit est choisie pour que le rapport  $\frac{E_s}{N_0}$  associé à l'une des sources du mélange sur le premier capteur soit égal à une valeur fixée. Il convient d'insister sur trois points :

- $E_s$  représente ici l'énergie par symbole, et pas l'énergie par bit. Cette référence est plus commode à utiliser dans notre contexte.
- $\frac{E_s}{N_0}$  représente le rapport signal sur bruit que l'on aurait en faisant passer le signal source dans son filtre adapté, et en échantillonnant aux bons instants la sortie de ce filtre à la période symbole de la source. Dans tous les cas, le rapport de la puissance de la source avec la puissance du bruit dans la bande d'échantillonnage est donc plus petit que  $\frac{E_s}{N_0}$  (1.6 fois plus petit dans le scénario standard  $T_e = \frac{T}{1.6}$ );
- dans le cas de canaux invariants dans le temps, le rapport signal sur bruit est le même sur chaque réalisation bien que les canaux soit tirés aléatoirement. Dans le cas de canaux variant dans le temps, ceci n'est plus vrai car le bon indicateur est le rapport signal sur bruit moyen.

Dans les simulations effectuées pour le choix du seuil optimum de détection des fréquences cycliques non conjuguées significatives ainsi que dans celles qui ont pour but la comparaison des performances des algorithmes du CMA et CMA modifié dans la séparation des mélanges des signaux non-circulaires, nous avons considéré un rapport signal sur bruit de 20dB. Dans le reste des simulations, le rapport signal sur bruit dans chacun des scénarios considérés a été fixé comme suit : on considère la source utilisant la constellation la plus grande, et l'on choisit, sauf mention du contraire, pour valeur de son  $\frac{E_s}{N_0}$  celle qui donnerait une probabilité d'erreur symbole de  $10^{-3}$  dans un canal gaussien (sans trajets) mono-antenne.

**Méthodologie d'analyse des performances.** Les indicateurs sur lesquels nous avons choisi de baser nos évaluations sont le rapport signal à interférences plus bruit (SINR) en sortie du séparateur ainsi que les taux d'erreur-symbole calculés en sortie d'un égaliseur aveugle CMA fractionnaire supposé connaître la période-symbole de la source considérée. Notons toutefois que cet égaliseur ne fonctionne que pour les modulations linéaires. L'absence d'égaliseur aveugle de référence pour les modulations CPM nous a conduit à nous contenter de SINR dans ces situations. Nous allons à présent définir le SINR. Ainsi que nous l'avons vu, l'algorithme de séparation, avec la réinitialisation, fournit pour chaque source numéro  $k$  un filtre extracteur  $\hat{\mathbf{g}}^{(k)}(z)$ , qui agissant sur  $\mathbf{y}(m)$ , fournit une estimée  $\hat{r}_k(m)$  d'une version filtrée du signal source  $k$ . En utilisant le fait que  $\mathbf{y}(m) = \sum_{k=1}^K e^{i2\pi m \delta f_k} ([\mathbf{h}_k(z)]s_k(m)) + \mathbf{v}(m)$  où  $\mathbf{v}(m)$  est le bruit additif, on voit immédiatement que

$$\hat{r}_k(m) = r_k(m) + \sum_{j \neq k} r_j(m) + w_k(m)$$

où les  $(r_j)_{j=1, \dots, K}$  représentent les contributions des différentes sources dans le signal de sortie du séparateur  $\hat{r}_k(m)$ , et où  $w_k(m) = [\hat{\mathbf{g}}^{(k)}(z)]\mathbf{v}(m)$  est la contribution du bruit additif. Si l'on désigne par  $i_k(m)$  le terme d'interférence plus bruit défini par

$$i_k(m) = \sum_{j \neq k} r_j(m) + w_k(m)$$

le SNIR sur la source  $k$  est défini comme le rapport entre la puissance de  $r_k$  et la puissance de  $i_k$ . Afin de l'évaluer de façon fiable, nous n'utilisons pas la trame de taille  $M$  sur laquelle les différents filtres sont évalués car  $M$  est en général trop faible. Nous générons donc une trame de signal de  $\bar{M}$  échantillons, avec  $\bar{M} \gg M$ , et calculons

$$SINR_k = \frac{\frac{1}{\bar{M}} \sum_{m=0}^{\bar{M}-1} |r_k(m)|^2}{\frac{1}{\bar{M}} \sum_{m=0}^{\bar{M}-1} |i_k(m)|^2}$$

Notons toutefois que, dans le cas de canaux à temps variable, cette évaluation des SINR est effectuée sur la trame initiale. L'intérêt du SINR est qu'il donne une certaine idée des performances de séparation des algorithmes. Si une source a été correctement extraite du mélange, le rapport SINR qui lui correspond a une valeur élevée, si par contre le signal extrait correspond à un mélange de sources, ce rapport va avoir des valeurs plus faibles.

Dans le cas des mélanges contenant des signaux modulés linéairement, nous avons aussi évalué, uniquement pour ces signaux, les taux d'erreurs effectifs en sortie d'un égaliseur CMA fractionnaire censé connaître à la fois les périodes-symboles et les résidus de porteuse. Afin de comparer les performances des différents algorithmes qui nous intéressent nous regardons le nombre de réalisations sur lequel le taux d'erreur est plus favorable que  $10^{-2}$ . Dans toutes les expérimentations qui suivent nous avons utilisé des filtres séparateurs de 9 coefficients et des égaliseurs fractionnaires de 11 coefficients.

Pour chaque réalisation de l'algorithme, nous évaluons les performances du CMA et du CMA modifié. On peut donc se faire une idée de la perte de performance occasionnée par la modification du critère du module constant dans les cas, sans doute les plus nombreux, où elle n'est pas nécessaire (sources circulaires ou de sources non circulaires ayant des fréquences cycliques différentes).

Par ailleurs, les canaux étant tirés aléatoirement à chaque expérience, il convient d'avoir une mesure de référence de la difficulté du problème de séparation. Nous calculons donc également pour chaque source  $k$  les performances qui seraient obtenues avec la méthode de l'estimateur minimisant l'erreur quadratique moyenne (MMSE). Le filtre de Wiener  $\hat{\mathbf{g}}_{wiener}^{(k)}(z)$  obtenu avec cette méthode est un filtre à réponse impulsionnelle finie de même longueur que le filtre  $\hat{\mathbf{g}}$ . Ce filtre est choisi non causal, et s'écrit sous la forme  $\hat{\mathbf{g}}_{wiener}^{(k)}(z) = \sum_{l=-L/2+1}^{L/2} \mathbf{g}_{l,wiener}^{(k)} z^{-l}$ . Ses coefficients sont estimés à partir des échantillons  $(\mathbf{y}(m))_{m=0,\dots,M-1}$  et du signal  $(s_k(m))_{m=0,\dots,M-1}$  comme si on disposait d'une séquence d'apprentissage de taille  $M$ . Les performances associées à ce filtre sont donc une borne ultime de ce que l'on est en droit d'attendre. Notons toutefois que, dans certains cas, les filtres fournis par les algorithmes CMA/CMA modifié sont plus performants car nous avons calculé le filtre de Wiener par inversion brutale de la matrice de covariance du signal reçu alors que les algorithmes itératifs CMA/CMA modifié peuvent être plus robustes lorsque cette matrice est mal conditionnée.

### 4.3 Résultats numériques et conclusions

Nous avons groupé les résultats expérimentaux que nous allons présenter dans cette section dans 3 catégories :

1. simulations liées au choix du seuil de détection des fréquences cycliques non-conjuguées significatives
2. simulations liées à la comparaison des performances des critères du CMA et CMA modifié dans la séparation des mélanges des signaux non-circulaires
3. simulations liées à la performance du critère du CMA modifié pour la séparation des différents types de mélanges

### 4.3.1 Choix du seuil de détection pour l'estimation des fréquences cycliques non-conjuguées significatives

Nous présentons d'abord les résultats des simulations qui ont conduit au choix du seuil de détection des fréquences cycliques non-conjuguées les plus importantes des signaux non circulaires à l'ordre 2 étudiés.

Nous avons considéré les mélanges des signaux suivants :

1. 3 signaux BPSK
2. 2 signaux BPSK et un signal MSK(CPM d'indice 1/2)

Les signaux sont transmis à travers les canaux de propagation mentionnés dans la section 4.2.1. Nous nous sommes intéressés d'une part au cas où les sources partagent les mêmes périodes symboles et résidus de porteuses et d'autre part au cas où toutes les fréquences cycliques des signaux sont différentes. Dans le dernier cas nous avons considéré des sources de périodes symbole  $T_1 = 3,4\mu s$  ;  $T_2 = 3,6\mu s$  ;  $T_3 = 3,9\mu s$  et résidus de porteuses tirés aléatoirement sur chaque réalisation. Dans tous les cas considérés, les sources ont le même excès de bande de  $\gamma = 0.5$  et le rapport signal à bruit est de 20 dB.

Nous avons choisi une procédure empirique de détermination du seuil de détection. Pour chaque type de mélange considéré, nous avons généré 10000 réalisations de la fonction  $\alpha \rightarrow \hat{T}(\alpha)$ . Pour chacune d'entre elles, nous avons relevé les valeurs de cette fonction aux fréquences cycliques non conjuguées significatives, et le maximum de ses valeurs lorsque  $\alpha$  n'est pas fréquence cyclique conjuguée. Comme  $\hat{T}(\alpha)$  est évalué sur une grille de FFT, nous excluons de plus les 2 valeurs à gauche et à droite de chaque fréquence cyclique. Grâce aux 10000 réalisations, nous effectuons un histogramme de ces 2 types de valeurs. Pour qu'il existe un seuil permettant de détecter sans erreur les bonnes fréquences cycliques conjuguées sur les réalisations effectuées, il faut que les 2 histogrammes n'aient aucun recouvrement.

Nous considérons tout d'abord le mélange de 3 sources BPSK de même période symbole et de même résidu de porteuse et nous supposons que les canaux de communication sont des canaux TUX. Nous montrons dans la figure 4.1 les histogrammes qui ont servi à choisir le seuil de détection dans ce cas. Les figures 4.1(a), 4.1(c) et 4.1(e) représentent les histogrammes des valeurs de  $\hat{T}(\alpha)$  quand  $\alpha$  n'est pas fréquence cyclique non conjuguée ; les trames correspondent à des durées de 2000, 1000 et 500 symboles respectivement. Les valeurs de  $\hat{T}(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  est égal à 2 fois le résidu de porteuse des sources BPSK sur les 3 types de trames de symboles sont représentées dans les figures 4.1(b), 4.1(d) et 4.1(f) respectivement. Nous constatons que les histogrammes correspondant aux trames de 2000 symboles (figures 4.1(a) et 4.1(b)) ne présentent aucun recouvrement et nous choisissons le seuil de détection de manière à avoir une probabilité de fausse alarme nulle, c'est à dire de ne pas détecter des fréquences  $\alpha$  qui ne sont pas des vrais fréquences cycliques non-conjuguées. Nous choisirons donc un seuil de détection de 7dB. Dans le cas de trames de 1000 symboles, les deux histogrammes (figures 4.1(c) et 4.1(d)) ne présentent pratiquement pas de recouvrement à partir de 8dB, valeur que nous choisissons pour le seuil de détection. La situation est plus délicate dans le cas des trames de 500 symboles dans lequel on observe un recouvrement plus important des histogrammes correspondants (figures 4.1(e) et 4.1(f)) entre 6dB et 9dB. Nous observons quand même que le nombre de réalisations qui fournissent des valeurs de  $\hat{T}(\alpha)$  plus grandes que 8dB quand  $\alpha$  n'est pas une fréquence cyclique non-conjuguée est très faible. Nous pouvons donc choisir un seuil de détection de 8.5dB pour avoir une très faible probabilité de fausse alarme. Du fait du grand nombre de simulations, nous préférons ne pas représenter les histogrammes permettant de choisir le

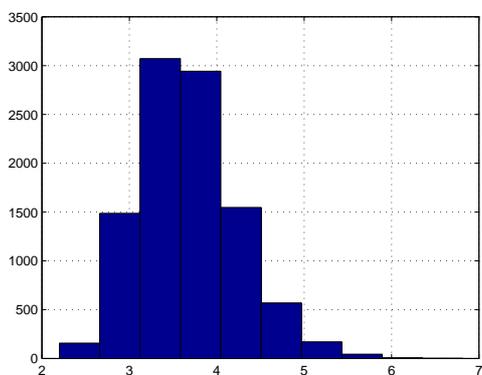
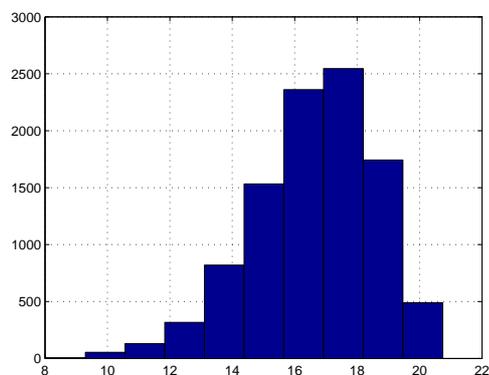
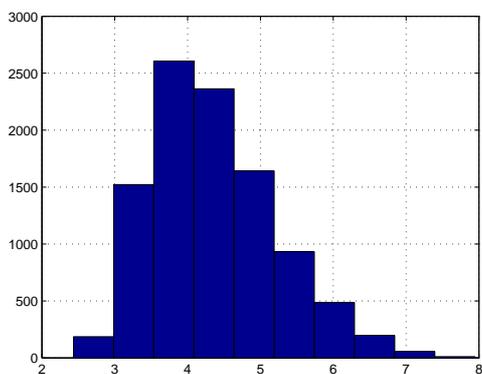
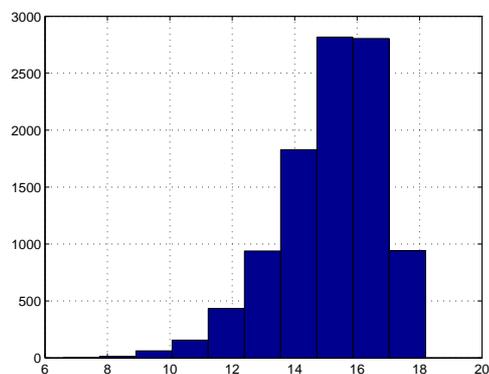
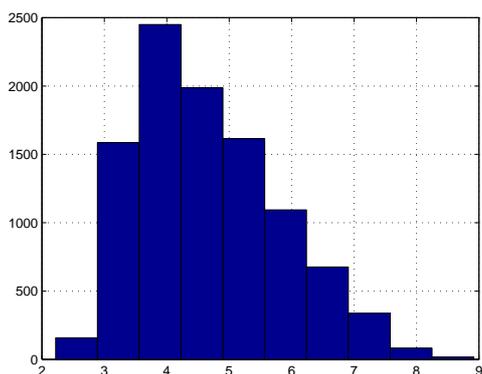
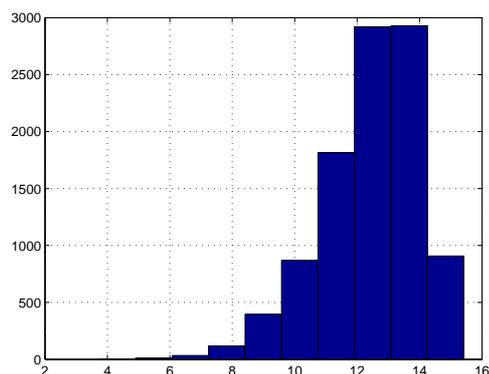
(a)  $\alpha$  n'est pas fréquence cyclique non conjuguée(b)  $\alpha$  est égal à 2 fois le résidu de porteuse d'une des sources BPSK(c)  $\alpha$  n'est pas fréquence cyclique non conjuguée(d)  $\alpha$  est égal à 2 fois le résidu de porteuse d'une des sources BPSK(e)  $\alpha$  n'est pas fréquence cyclique non conjuguée(f)  $\alpha$  est égal à 2 fois le résidu de porteuse d'une des sources BPSK

FIG. 4.1 – Histogramme de  $\hat{T}(\alpha)$  dans le cas de 3 sources BPSK, canaux BUx et trames de 2000, 1000 et 500 symboles

seuil de détection dans les autres scénarios considérés. Nous présentons directement dans le tableau 4.1 les valeurs choisies dans chaque cas.

Les valeurs choisies pour les seuils de détection dans les mêmes conditions que plus haut (3 BPSK de mêmes débits et résidus de porteuses) mais sur les autres canaux GSM se trouvent dans le tableau 4.1(a). Le tableau 4.1(b) contient les valeurs des seuils dans le cas d'un mélange de 3 BPSK ayant des fréquences cycliques et cycliques non-conjuguées différentes. Les valeurs des seuils pour un mélange de deux signaux BPSK et un signal CPM d'indice 1/2 (MSK) se trouvent dans les tableaux 4.1(c) - cas où les sources ont les mêmes périodes symbole et résidus de porteuse - et 4.1(d) - cas où toutes les périodes symboles et toutes les résidus de porteuse sont différentes.

TAB. 4.1 – Valeurs choisies pour le seuil de détection de fréquences cycliques non-conjuguées dans le cas d'un mélange de

(a) 3 BPSK ayant les mêmes débits et (b) 3 BPSK ayant des débits et résidus de mêmes résidus de porteuse et porteuse différentes

Canal \ No.symb.	2000	1000	500
<b>BUx</b>	7	8	8.5
<b>TUx</b>	7	8	8.5
<b>HTx</b>	6	7.5	8
<b>RAx</b>	6.5	7.5	8

Canal \ No.symb.	2000	1000	500
<b>BUx</b>	6	6	6
<b>TUx</b>	5.5	6	6.5
<b>HTx</b>	6	6	6.5
<b>RAx</b>	5.5	6	6.5

(c) 2 BPSK et un MSK ayant les mêmes (d) 2 BPSK et 1 MSK ayant des débits et débits et mêmes résidus de porteuse et résidus de porteuse différentes

Canal \ No.symb.	2000	1000	500
<b>BUx</b>	6.5	7	7.5
<b>TUx</b>	6	6.5	7.5
<b>HTx</b>	6.5	6.5	7.5
<b>RAx</b>	5.5	6	7

Canal \ No.symb.	2000	1000	500
<b>BUx</b>	6.5	7	7
<b>TUx</b>	5.5	6.5	7
<b>HTx</b>	6	6.5	6.5
<b>RAx</b>	5.5	6	6

En regardant les valeurs obtenues dans les différents cas considérés, nous pouvons fixer le seuil de détection des fréquences cycliques non-conjuguées significatives à 7.5 dB pour des durées d'observation de 2000 symboles, à 7 dB pour des durées d'observation de 1000 symboles et à 6 dB pour des durées d'observation de 500 symboles. Cependant, nos simulations nous ont permis de constater qu'un seuil "universel" de détection égal à 7 dB peut être utilisé sans engendrer de pertes de performances significatives.

### 4.3.2 Comparaison entre le CMA et le CMA modifié

Avec le seuil de détection "universel" précédemment défini, nous avons fait des simulations pour comparer les performances des critères du CMA et CMA modifié dans la séparation des 3 types de mélanges considérés. Compte tenu du fait que les histogrammes des rapports SINR obtenus dans chaque cas sont nombreux, nous préférons présenter le nombre de fois où les taux d'erreur effectifs obtenus pour les signaux BPSK sont inférieurs à  $10^{-2}$ . En ce qui concerne les modulations CPM, comme nous n'avons pas mis en place un démodulateur aveugle de référence, nous ne fournirons pas les taux d'erreur liés à l'extraction de ces signaux. En plus, l'étude théorique que nous avons présenté dans le chapitre 3 montre que le critère du CMA ne rencontre pas de difficultés dans la séparation de ces signaux ; une comparaison entre les critères du CMA et du CMA modifié ne présente donc

pas un grand intérêt.

Pour chaque type de mélange nous avons considéré le cas où les sources ont les mêmes fréquences cycliques et les mêmes fréquences cycliques non-conjuguées ( $T_1 = T_2 = T_3$  et  $\delta f_1 = \delta f_2 = \delta f_3 = \delta f$ ) ainsi que le cas où les périodes symboles et les résidus de porteuse des 3 sources sont différentes ( $T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$  et  $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$ ).

**Mélange de 3 sources BPSK.** Le tableau 4.2(a) contient les résultats obtenus pour la séparation de ce type de mélange dans le cas où les signaux partagent les mêmes fréquences cycliques et cycliques non-conjuguées. Nous pouvons observer que le nombre de fois où le taux d'erreur correspondant à l'extraction des signaux par l'algorithme du CMA est inférieur à  $10^{-2}$  est plus petit que celui obtenu après la séparation avec le critère du CMA modifié. Ceci est dû au grand nombre de cas où l'algorithme du CMA n'extrait pas correctement les sources du mélange. Avec le critère du CMA modifié, la séparation est correcte dans la majorité des cas. Pour illustrer ce phénomène, nous avons représenté dans la figure 4.2 les histogrammes des rapport SINR obtenus après l'extraction d'une source d'un mélange de 3 signaux BPSK de mêmes débits et résidus de porteuses, transmis à travers des canaux BUX et par trames de 2000 symboles, avec les méthodes du CMA, CMA modifié et MMSE. On peut facilement remarquer que dans un nombre important de cas l'algorithme du CMA n'assure pas une extraction correcte (le rapport SINR des sources mal extraites est proche de 0 dB). L'utilisation du CMA modifié réduit considérablement le nombre de séparations échouées et les performances obtenues s'approchent de celles du filtre de Wiener (MMSE).

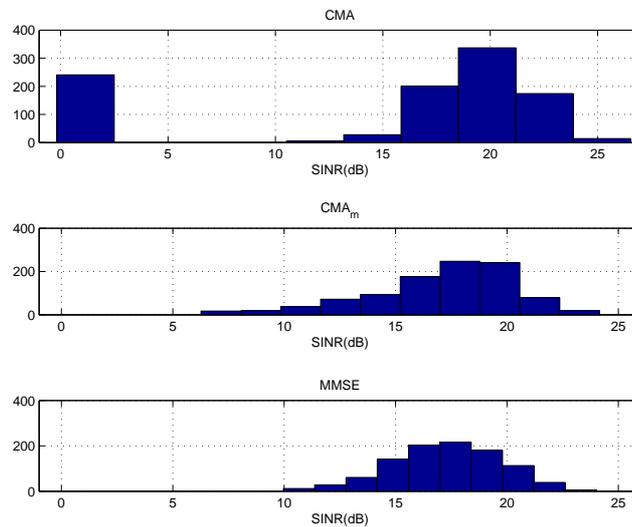


FIG. 4.2 – Histogramme des SINR obtenus après l'extraction d'une source d'un mélange de 3 signaux BPSK de mêmes caractéristiques, transmis à travers des canaux BUX par trames de 2000 symboles

Nous préférons ne pas donner les nombreux histogrammes des SINR associés aux autres cas étudiés et considérons que le phénomène décrit ici est aussi “visible” dans les taux d'erreurs obtenus pour chaque source dans chaque scénario.



**Mélange de 2 sources BPSK et une source MSK.** Les résultats obtenus pour la séparation de ce type de mélanges dans le cas où les sources ont les mêmes caractéristiques sont donnés dans le tableau 4.3(a). Pour l'extraction des deux sources BPSK nous observons comme dans le cas précédent des meilleures performances en terme de taux d'erreurs pour le critère du CMA modifié. Bien que la présence d'une source CPM d'indice 1/2 dans le mélange ne pose pas de problèmes pour le critère du CMA, celui-ci rencontre quand même des difficultés dans la séparation des deux sources BPSK de mêmes fréquences cycliques et cycliques non conjuguées. Ces difficultés disparaissent quand on utilise le critère du CMA modifié dont les performances sont proches de celles du filtre de Wiener.

TAB. 4.3 – Pourcentage de taux d'erreur  $< 10^{-2}$  2BPSK de fréquences cycliques et cycliques non-conjuguées

(a) Identiques

No.symbloles	2000		1000		500	
<b>BUx :</b>	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
CMA	87.3%	86.6%	87.3%	87.4%	89.7%	90.2%
CMAm	100%	99.9%	99.7%	99.8%	98.7%	98.5%
MMSE	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>TUx :</b>	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
CMA	92.5%	92.3%	91.7%	91.5%	91.1%	92.2%
CMAm	100%	99.8%	99%	98.9%	96.1%	95.3%
MMSE	100%	100%	100%	100%	100%	99.9%
<b>HTx :</b>	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
CMA	92.5%	93.2%	91.1%	91.9%	91.7%	93.3%
CMAm	99.7%	99.8%	99.3%	99.1%	96.2%	96%
MMSE	100%	100%	100%	100%	99.9%	100%
<b>RAx :</b>	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
CMA	84.9%	86%	87.6%	88%	87.8%	88.9%
CMAm	100%	99.8%	99.5%	99.4%	95.9%	95.4%
MMSE	100%	100%	100%	100%	100%	100%

(b) Différentes

No.symbloles	2000		1000		500	
<b>BUx :</b>	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
CMA	100%	99.8%	99.8%	99.7%	99.7%	99.7%
CMAm	100%	100%	100%	99.9%	99.2%	99.5%
MMSE	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>TUx :</b>	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
CMA	99.9%	99.9%	99.3%	99.5%	99.4%	99.7%
CMAm	100%	100%	99.2%	99.2%	98.3%	97.6%
MMSE	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>HTx :</b>	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
CMA	99.3%	99.1%	99%	99.1%	97.8%	98.3%
CMAm	99.9%	99.9%	99.6%	99.4%	98.1%	98.8%
MMSE	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>RAx :</b>	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
CMA	99.1%	99.4%	99.4%	99.7%	99.6%	99.7%
CMAm	100%	99.8%	99%	99.1%	98.2%	98.7%
MMSE	99.9%	100%	100%	100%	100%	100%

Les résultats obtenus dans le cas où les sources ont des fréquences cycliques et des fréquences cycliques non conjuguées différentes sont donnés dans le tableau 4.3(b). Dans ce cas

on peut constater que l'utilisation du CMA modifié n'apporte pas d'améliorations significatives sur l'extraction des sources du mélange, le deux critères fonctionnant correctement dans ces conditions et s'approchant des performances obtenus avec le filtre de Wiener. Toutefois, les résultats obtenus avec l'algorithme du CMA modifié, surtout dans le cas des trames de 2000 symboles nous font croire que l'utilisation de ce critère pourrait apporter des améliorations plus significatives dans des contextes de simulations plus difficiles.

Les résultats obtenus sur ces différents types de mélanges confirment donc notre étude théorique et montrent l'intérêt d'utiliser l'algorithme du CMA modifié dans le cas des mélanges de plusieurs sources BPSK surtout quand les signaux ont les mêmes caractéristiques (débits et résidus de porteuses).

### 4.3.3 Performances du CMA et du CMA modifié dans la séparation de différents types de mélanges

Nous présentons maintenant des résultats obtenus dans le cas des mélanges des signaux circulaires et non circulaires. Nous considérons les deux scénarios suivants :

1. scénario n°1 : mélange de 2 signaux BPSK et un signal QAM-4
2. scénario n°2 : mélange d'un signal BPSK, un signal QAM-4 et un signal QAM-16

Pour chaque scénario, nous considérons des trames de 2000, 1000 et 500 symboles. Sauf mention explicite du contraire, nous avons considéré trois sources de même puissance, des périodes symboles  $T = T_1 = T_2 = T_3$  correspondant à un débit symbole de  $\frac{1}{T} = 277\text{kHz}$  (GSM), des excès de bande égaux à 0.5, des résidus de porteuses tous différents, tirés aléatoirement sur chaque réalisation, mais de façon à ce que la condition d'échantillonnage de Shannon soit respectée. La période d'échantillonnage  $T_e = \frac{T}{1.6}$ , le rapport  $\frac{d}{\lambda}$  vaut 1/2 et la fréquence porteuse est égale à 1 GHz.

Nous avons choisi de comparer les résultats obtenus avec les algorithmes du CMA et du CMA modifié avec ceux obtenus en utilisant la méthode de l'estimateur minimisant l'erreur quadratique moyenne (MMSE), et avec l'algorithme JADE qui est un algorithme de référence dans le cas des mélanges instantanés. Bien que les mélanges que nous étudions ne soient pas instantanés, nous avons choisi de comparer les performances de nos algorithmes avec cet algorithme bien connu. Il n'est en principe justifié que si les divers trajets sont suffisamment séparés temporellement pour qu'ils puissent être considérés comme des signaux indépendants à chaque instant, et que la somme de tous les signaux correspondants ne dépasse pas le nombre d'antennes de réception. En pratique, cette condition n'est pas respectée sauf peut-être sur les canaux ruraux utilisés dans le simulateur. Cependant, il est intéressant de montrer ce que peut faire gagner l'utilisation d'approches convolutives. A noter que le nombre de "sources" supposé par JADE est toujours choisi égal au nombre  $M$  de capteurs, et que une technique de corrélation avec les signaux transmis permet d'évaluer quelle sortie du séparateur représente le mieux chaque signal émis. Pour chaque méthode de séparation et chaque source extraite, nous avons évalué les taux d'erreurs effectifs en sortie d'un égaliseur CMA fractionnaire censé connaître à la fois les périodes-symboles et les résidus de porteuse. Dans toutes nos simulations, nous avons utilisé des filtres séparateurs de 9 coefficients et des égaliseurs fractionnaires de 11 coefficients.

Afin de résumer les nombreuses données que nous avons collectées, nous avons décidé de procéder de la façon suivante : nous présentons dans des tableaux le nombre de réalisations sur lequel le taux d'erreur est plus favorable que  $10^{-2}$  ainsi que les taux d'erreurs moyen. Dans le cas de canaux à temps variable nous fournissons uniquement les taux d'erreurs

moyen car les taux d'erreurs par trame ne sont pas pertinents du fait de la variabilité des canaux. Dans tous les simulations effectuées nous avons évalué les performances des différentes méthodes de séparation sur 1000 réalisations. Les taux d'erreurs pour chaque réalisation ont été évalués sur des trames de 20000 symboles, à l'exception des simulations sur des canaux à temps variables pour lesquels, les taux d'erreur ont été évalué sur des trames de la même longueur que celles utilisés pour la séparation.

**Scénario n°1.** Les performances mesurées (pourcentage de réalisations associées à un taux d'erreur inférieur à  $10^{-2}$  et taux d'erreur moyen) sont consignées dans les tableaux 4.4(a) et 4.4(b) respectivement. Rappelons que le rapport signal sur bruit est choisi de façon à ce que le taux d'erreur symbole théorique de la modulation QAM-4 sur un canal gaussien mono-antenne soit égale à  $Q(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}) \simeq 10^{-3}$ , ce qui correspond à un rapport signal sur bruit de  $\frac{E_s}{N_0} = 10.3\text{dB}$ . Pour ce rapport signal sur bruit, le taux d'erreur théorique d'une modulation BPSK est plus favorable puisqu'il vaut  $Q(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}})$ . Les résultats obtenus nous permettent d'analyser les performances des différentes méthodes de séparation :

- Performances de l'algorithme de référence JADE. On constate que celles-ci sont sensiblement inférieures à celles des algorithmes CMA/CMA modifié sauf sur le canal RAx : ceci était prévisible car le mélange des signaux est assimilable à un mélange instantané. Par ailleurs, le canal TUX est un peu plus long que le canal RAx : cependant, les performances de JADE ne sont pas trop dégradées. On note une réelle dégradation de JADE dans le canal HTx et de façon plus marquée encore dans le canal BUX. Les meilleures performances associées au canal HTx trouvent leur cause en ce que le canal HTx est plus spéculaire que le canal BUX. Dans ces conditions, l'algorithme JADE est susceptible d'extraire des trajets individuels des sources car ils peuvent être vus comme des sources indépendantes. Notons toutefois qu'il n'est pas toujours possible d'assurer la reconstitution des trois sources, plusieurs trajets associés à une même source pouvant être extraits à la place de l'une des autres sources.
- Comparaison CMA/CMA modifié. Rappelons que l'algorithme du CMA modifié est conçu pour des scénarios "difficiles" dans lesquels certaines fréquences cycliques non-conjuguées sont communes à plusieurs sources. Or, dans le contexte des expériences présentées, les résidus de porteuse sont tirés aléatoirement : en conséquence, la probabilité qu'existe une fréquence cyclique non-conjuguée commune aux deux sources BPSK est nulle : considérer le CMA modifié n'est donc pas théoriquement nécessaire. On pourrait s'attendre à ce que la modification du CMA soit susceptible de dégrader les performances du CMA standard. Néanmoins, les performances mesurées ne font pas apparaître de réelle dégradation des performances du CMA modifié par rapport au CMA mais au contraire une très légère amélioration. Il convient toutefois de noter que si les pourcentages consignés dans le tableau 4.4 sont proches, les taux d'erreur moyens peuvent par contre être assez différents (voir le tableau 4.4(b)). Ceci est dû au fait que dans beaucoup de cas l'algorithme du CMA ne réussit à extraire qu'une seule des deux sources BPSK du mélange alors que le CMA modifié extrait correctement les 2 sources.
- Influence des canaux. Le canal HTx, ainsi que l'on pouvait s'y attendre, est le plus difficile. Ainsi les performances de l'estimateur de référence (le MMSE) sont dégradées par rapport à celles obtenues pour l'ensemble des autres types de canaux. Les performances obtenues pour le canal RAx sont moins bonnes que celle associées aux

TAB. 4.4 – Résultats obtenus dans le Scénario 1  
(a) Pourcentage des taux d'erreur < 0.01 dans le cas du Scénario 1

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>
CMA	99.8%	98.9%	99.9%	99.8%	98.4%	99.9%	98.9%	93.9%	99.1%
CMAm	100%	99.3%	99.9%	100%	99.3%	100%	99.4%	94.8%	99.6%
MMSE	100%	94.7%	100%	99.9%	94.9%	99.9%	99.9%	92.8%	100%
JADE	84%	30%	69.6%	83.6%	32.6%	67.6%	74.8%	23.3%	56.9%
<b>TUx :</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>
CMA	99.7%	98.1%	99.5%	99.4%	97.4%	99.7%	99.2%	95.2%	99.5%
CMAm	99.8%	98.7%	100%	100%	98.4%	100%	99.6%	95.7%	99.8%
MMSE	99.8%	94.7%	99.8%	99.7%	94.5%	99.9%	99.9%	92.2%	99.7%
JADE	97.2%	82.3%	93.9%	96%	79.2%	92.7%	96.1%	76.9%	89.3%
<b>HTx :</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>
CMA	96.1%	74.1%	95.3%	94.2%	69.8%	95%	89%	61.8%	89.4%
CMAm	97.5%	74.8%	97.5%	97.3%	71.3%	97.8%	94.1%	62.2%	94.4%
MMSE	99.8%	89.4%	99.8%	99.7%	86.6%	100%	99.6%	85.3%	99.8%
JADE	95.3%	67.6%	78.8%	94.4%	64.8%	79.4%	92.3%	62.9%	75%
<b>RAx :</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>
CMA	98.2%	94.8%	98.2%	97.4%	93.2%	97.5%	96.7%	91.4%	96.8%
CMAm	98.9%	95.2%	99.3%	98.7%	93.8%	98.7%	98.2%	92.5%	97.7%
MMSE	99.1%	95.4%	99.3%	98.9%	94%	98.9%	99%	93.7%	98.4%
JADE	98.5%	95%	98.5%	98.6%	94%	98.3%	98.4%	93.5%	97.6%

(b) Taux d'erreur moyen

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>
CMA	0.0020	0.0026	0.0010	0.0020	0.0059	0.00003	0.0042	0.0206	0.0058
CMAm	0.00002	0.0004	0.0010	0.00002	0.0004	0.00001	0.0023	0.0110	0.0033
MMSE	0.00003	0.0038	0.00002	0.0010	0.0019	0.0010	0.00005	0.0026	0.00005
JADE	0.0346	0.0969	0.0406	0.0317	0.1087	0.0368	0.0579	0.1607	0.0760
<b>TUx :</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>
CMA	0.0015	0.0061	0.0022	0.0017	0.0074	0.0002	0.0063	0.0131	0.0036
CMAm	0.0020	0.0014	0.00001	0.00003	0.0006	0.00002	0.0033	0.0087	0.0020
MMSE	0.00008	0.0019	0.0010	0.0011	0.0020	0.00007	0.0001	0.0035	0.0001
JADE	0.0092	0.0195	0.0104	0.0088	0.0185	0.0108	0.0133	0.0309	0.0196
<b>HTx :</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>
CMA	0.0067	0.0464	0.0145	0.0150	0.0711	0.0148	0.0336	0.1129	0.0308
CMAm	0.0017	0.0208	0.0032	0.0024	0.0265	0.0025	0.0140	0.0645	0.0152
MMSE	0.0011	0.0061	0.0001	0.0001	0.0057	0.0001	0.0002	0.0068	0.0001
JADE	0.0142	0.0372	0.0219	0.0127	0.0424	0.0187	0.0142	0.0506	0.0268
<b>RAx :</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>	<b>BPSK</b>	<b>4-QAM</b>	<b>BPSK</b>
CMA	0.0075	0.0098	0.0064	0.0072	0.0263	0.0100	0.0190	0.0345	0.0114
CMAm	0.0042	0.0078	0.0042	0.0072	0.0116	0.0075	0.0098	0.0188	0.0090
MMSE	0.0002	0.0029	0.0003	0.0002	0.0035	0.0010	0.0003	0.0042	0.0004
JADE	0.0082	0.0102	0.0072	0.0072	0.0099	0.0073	0.0111	0.0140	0.0115

canaux TUx et BUx. Deux explications peuvent être avancées : tout d'abord, la taille de l'égaliseur utilisé n'est pas dimensionnée à ce canal (filtre trop long) et il en résulte un bruit d'estimation de l'égaliseur plus important. D'autre part (et peut-être est-ce là la raison principale), la manière de calculer l'énergie par symbole émis ne rend pas bien compte de la réalité du rapport signal sur bruit effectif, ce dernier, du fait de la proximité des temps d'arrivée des trajets, étant plus faible.

En conclusion, pour les constellations de petites dimensions considérées dans ce scénario, on constate que les performances des algorithmes CMA/CMA modifié sont tout à fait comparables à celles d'un égaliseur non-aveugle MMSE sur les canaux BUx, TUx, RAx. Une dégradation sensible est constatée sur les canaux HTx. L'algorithme JADE est clairement inadapté pour les autres canaux que RAx.

**Scénario n°1. Distance entre antennes  $\lambda/4$ .** Nous testons dans ces expériences l'influence de l'écart entre deux antennes par rapport à la longueur d'onde et considérons le cas particulier  $\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{4}$ . Les fréquences de la bande passante analysée sont mal adaptées à la géométrie du réseau d'antennes : ce cas peut se produire lorsque l'on utilise des récepteurs large-bande. Afin de bien faire apparaître l'influence de  $\frac{d}{\lambda}$ , nous considérons toujours le scénario n°1. Les performances mesurées sont consignées dans les tableaux 4.5(a) et 4.5(b). En regardant les valeurs obtenues nous pouvons remarquer que :

- La diversité spatiale est plus faible, les canaux sont plus difficiles à inverser. Ceci apparaît clairement au regard des performances du MMSE qui sont beaucoup moins favorables que dans le cas où  $\frac{d}{\lambda} = 1/2$ .
- Concernant la démodulation des BPSK, on observe, contrairement au cas où  $\frac{d}{\lambda} = 1/2$ , que les performances se dégradent rapidement si la fenêtre d'observation diminue et que les performances du CMA modifié restent comparables à celles du MMSE tandis que celles du CMA s'en écartent. Ce phénomène est dû au fait que, en retranchant du mélange la contribution de termes associés aux fréquences cycliques non-conjuguées significatives des sources BPSK on facilite l'extraction de ces sources par un algorithme du type du CMA dans la bande passante analysée. Ceci montre l'intérêt d'utiliser le CMA modifié dans ce type de scénarios. Globalement on peut constater que tous les algorithmes fonctionnent plus difficilement sur des canaux mal conditionnés.
- En terme de taux d'erreur moyen, le CMA modifié fournit des meilleurs résultats que le CMA et ses performances sont comparables à celles du MMSE.
- Pour la QAM-4, la remarque précédente s'applique et l'effet du manque de diversité est encore plus net.

Au regard de cette analyse, l'influence du paramètre  $\frac{d}{\lambda}$  sur les taux d'erreur s'avère très importante.

**Scénario n°1. Bandes des signaux différentes.** Les performances mesurées sont consignées dans les tableaux 4.6(a) et 4.6(b).

- Dans ce scénario la source QAM-4 a une bande 4 fois inférieure à celle des deux BPSK.
- Par rapport au scénario 1 initial (tableau 4.4(a)), nous observons des performances analogues, voire meilleures. Ceci nous semble lié au fait que les filtres séparateurs extrayant la source de bande la plus étroite réalise de fait un filtrage qui diminue les interférences dues aux autres émetteurs.
- En terme de taux d'erreur moyen on observe que le CMA modifié fournit toujours des meilleurs résultats pour l'extraction des sources BPSK que le CMA.

TAB. 4.5 – Résultats obtenus dans le Scénario 1 et distance entre capteurs de  $\frac{\lambda}{4}$ (a) Pourcentage des taux d'erreur  $< 0.01$ 

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	87%	57%	87%	80.5%	51.6%	81.4%	66.6%	39.8%	68.5%
CMAm	98.6%	69.2%	98.4%	95.1%	62.2%	95.1%	77.2%	41.4%	76.2%
MMSE	95.3%	44.8%	95.9%	93.9%	42.5%	95%	90.2%	39.6%	93.2%
JADE	40.8%	11%	30.6%	40%	7.5%	25.6%	33.6%	8.6%	19.6%
<b>TUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	76.6%	46.5%	77.9%	74.9%	45.5%	72.5%	65.4%	45.1%	66.2%
CMAm	94.6%	71.6%	94.1%	91.2%	69.4%	91%	68.7%	46.5%	65.2%
MMSE	94%	62.2%	94.6%	94.1%	61.1%	92.5%	92.2%	57.2%	91.4%
JADE	77.2%	43.5%	69.6%	74.1%	42.1%	67.6%	71.4%	39%	60.2%
<b>HTx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	60.2%	30%	59.3%	56%	29.6%	55.7%	44.4%	24.3%	44.7%
CMAm	76.4%	36.8%	78.8%	72.6%	34%	73.7%	53.8%	25.6%	54.2%
MMSE	90.7%	46.4%	90.8%	89%	46.2%	89.8%	86.2%	43.6%	87.8
JADE	65.9%	32%	57.6%	65.1%	31.4%	55.1%	61.2%	30.1%	51.2%
<b>RAx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	79.5%	61.3%	79.7%	75.3%	58.3%	72.8%	67.5%	51.7%	70.2%
CMAm	87.3%	66.8%	86.5%	85.1%	65.8%	84.6%	75.1%	53.3%	75.5%
MMSE	90.4%	69.4%	91.6%	91%	68.6%	90.2%	85.7%	62.1%	88.5%
JADE	84.4%	65.7%	83.6%	84.3%	65.1%	82.6%	78.3%	58.7%	78.3%

(b) Taux d'erreur moyen

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.0478	0.1528	0.0472	0.0864	0.2005	0.0846	0.1419	0.2917	0.1471
CMAm	0.0050	0.0272	0.0076	0.0262	0.0683	0.0277	0.1346	0.26021	0.1411
MMSE	0.0028	0.0263	0.0023	0.0023	0.0305	0.0019	0.0032	0.0357	0.0027
JADE	0.2924	0.3574	0.2973	0.3137	0.3948	0.3322	0.3468	0.4383	0.3634
<b>TUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.1146	0.3124	0.1146	0.1367	0.3421	0.1498	0.1887	0.3430	0.1731
CMAm	0.0304	0.0568	0.0326	0.0514	0.0887	0.0557	0.2173	0.3337	0.2279
MMSE	0.0032	0.0232	0.0035	0.0020	0.0246	0.0059	0.0029	0.0309	0.0040
JADE	0.1328	0.1647	0.1368	0.1493	0.1844	0.154	0.1797	0.2315	0.1902
<b>HTx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.1743	0.3471	0.1811	0.1980	0.3703	0.2172	0.27	0.4163	0.2597
CMAm	0.0638	0.1350	0.0755	0.0937	0.1899	0.1016	0.2254	0.3661	0.2393
MMSE	0.0031	0.0331	0.0046	0.0033	0.0358	0.0036	0.0045	0.0397	0.0046
JADE	0.1617	0.2109	0.1638	0.1724	0.2212	0.1787	0.1972	0.2532	0.2044
<b>RAx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.1296	0.2030	0.1228	0.1572	0.2567	0.1816	0.2084	0.2925	0.1853
CMAm	0.0797	0.1047	0.0842	0.0925	0.1149	0.0928	0.1622	0.2261	0.1670
MMSE	0.0093	0.0328	0.0146	0.0085	0.0341	0.0127	0.0186	0.0564	0.0254
JADE	0.1101	0.1237	0.1098	0.1193	0.1351	0.1195	0.1616	0.1833	0.1613

TAB. 4.6 – Résultats obtenus dans le Scénario 1 et bandes des signaux différentes

(a) Pourcentage des taux d'erreur  $< 0.01$ 

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	99.9%	99.8%	99.9%	99.9%	99.9%	99.8%	99.2%	99.9%	99.7%
CMAm	100%	99.9%	100%	99.9%	99.7%	99.9%	99.8%	98.1%	99.9%
MMSE	100%	99.7%	100%	100%	100%	100%	100%	99.7%	100%
JADE	92.7%	72.2%	82.7%	91.8%	69.8%	79.8%	88.3%	53%	74.6%
<b>TUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	99.8%	99.8%	99.8%	99.6%	99.9%	99.8%	99.4%	99.9%	99.7%
CMAm	100%	100%	100%	99.8%	99.5%	99.8%	99.5%	98.5%	99.5%
MMSE	100%	100%	99.9%	100%	99.9%	100%	100%	99.7%	100%
JADE	98.1%	93.5%	95.4%	97.3%	91.5%	95.7%	98.1%	84.5%	93.9%
<b>HTx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	98.7%	99.5%	98.8%	98.7%	98.7%	99.1%	97.1%	96.9%	97.1%
CMAm	99.2%	99.8%	99.8%	99.8%	98.9%	99.3%	99%	95.6%	98.7%
MMSE	100%	99.8%	100%	99.9%	99.4%	100%	99.9%	98.6%	100%
JADE	96.6%	83.5%	82.3%	95.7%	78.5%	78.4%	95.1%	70.6%	75%
<b>RAx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	98.7%	99.9%	98.8%	99.3%	99.6%	99.1%	97.6%	99.3%	98.7%
CMAm	99.6%	100%	100%	100%	99.5%	99.9%	99%	98.3%	99.1%
MMSE	99.8%	100%	99.8%	99.9%	99.5%	99.5%	99.8%	99.5%	99.8%
JADE	99.1%	97.5%	98.3%	99.3%	96.2%	99.1%	98.7%	94.1%	98.6%

(b) Taux d'erreur moyen

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.00008	0.00003	0.00028	0.00101	0.00002	0.0020	0.00801	0.00004	0.00132
CMAm	0.000001	0.00002	0.000002	0.0010	0.00151	0.0010	0.00143	0.00783	0.00100
MMSE	0.000002	0.00007	0.000002	0.000001	0.000003	0.000007	0.000005	0.00012	0.00001
JADE	0.01963	0.05052	0.02441	0.02428	0.06614	0.02967	0.03518	0.10967	0.0445
<b>TUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.002005	0.002001	0.002017	0.00304	0.00005	0.002014	0.002957	0.001007	0.002183
CMAm	0.000003	0.000001	0.000006	0.00060	0.00288	0.000631	0.004041	0.006855	0.003842
MMSE	0.000008	0.00001	0.001013	0.00001	0.00004	0.000001	0.000002	0.000008	0.000002
JADE	0.0093	0.013358	0.010448	0.01090	0.01700	0.010533	0.006971	0.026767	0.010021
<b>HTx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.00825	0.00014	0.00575	0.0072	0.0026	0.00657	0.01804	0.0024	0.01621
CMAm	0.00117	0.00012	0.00013	0.0001	0.0028	0.00042	0.00560	0.0081	0.00418
MMSE	0.00001	0.00007	0.00001	0.0010	0.0002	0.00002	0.00005	0.0004	0.00003
JADE	0.01193	0.02161	0.01807	0.0123	0.0283	0.01860	0.01595	0.0515	0.02679
<b>RAx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.0101	0.00100	0.00923	0.00519	0.00208	0.00421	0.0191	0.0038	0.0101
CMAm	0.0020	0.00001	0.00002	0.00002	0.00009	0.00006	0.0074	0.0085	0.0080
MMSE	0.0001	0.00001	0.00005	0.00002	0.00013	0.00109	0.0001	0.0006	0.0010
JADE	0.0070	0.00768	0.00721	0.00637	0.00826	0.00609	0.0051	0.0099	0.0052

**Scénario n°1. Puissances des signaux différentes.** Les performances mesurées sont consignées dans le tableaux 4.7(a) et 4.7(b).

- Dans ces scénarios, la source QAM-4 à une puissance 2 fois, plus faible que les sources BPSK.
- On peut noter une dégradation des performances pour la source QAM-4 par rapport au scénario 1 initial (tableau 4.4(a)). Les performances du CMA/CMA modifié

restent comparables à celles du MMSE sauf dans le contexte du canal HTx.

TAB. 4.7 – Résultats obtenus dans le Scénario 1 et puissances des signaux différentes

(a) Pourcentage des taux d'erreur < 0.01

No.symb.	2000			1000			500		
	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK
<b>BUx :</b>									
CMA	97.7%	99.9%	99.9%	97.4%	99.9%	99.8%	91.5%	99.7%	99.5%
CMAm	98.6%	100%	100%	98.2%	99.8%	99.8%	93.6%	99.4%	99.4%
MMSE	92.3%	100%	100%	91.6%	100%	100%	87.2%	100%	100%
JADE	18.3%	72.1%	72.2%	13.5%	64.7%	64.6%	11%	58.7%	59.1%
<b>TUx :</b>									
CMA	96.8%	99.9%	99.9%	92.9%	99.9%	99.8%	92.9%	99.9%	99.8%
CMAm	98.1%	99.9%	100%	94.1%	99.1%	98.9%	94.1%	99.1%	98.9%
MMSE	91.7%	99.9%	100%	88.5%	100%	100%	88.5%	100%	100%
JADE	69.8%	94.4%	94.1%	66.2%	94.9%	94.7%	64.9%	92.4%	91.9%
<b>HTx :</b>									
CMA	61.5%	98.9%	98.5%	59.7%	98.6%	97.8%	46.8%	94.8%	94.8%
CMAm	65.2%	98.7%	99.6%	62.9%	98.8%	99%	51.7%	97.7%	97%
MMSE	79.6%	99.8%	100%	79.8%	100%	100%	73.6%	99.8%	100%
JADE	53.9%	78.5%	79.1%	50.6%	76.5%	76.9%	48.3%	72.1%	69.8%
<b>RAx :</b>									
CMA	92.3%	99.4%	99.3%	89.9%	99.4%	99%	88.9%	98.9%	99%
CMAm	94.6%	99.7%	99.7%	93.2%	99.2%	98.9%	92.5%	98.9%	99%
MMSE	94.2%	99.7%	99.8%	93.2%	99.7%	99.9%	94.1%	99.8%	100%
JADE	94.3%	98.8%	98.8%	93.1%	98.2%	98.3%	94.4%	97.6%	97.6%

(b) Taux d'erreur moyen

No.symb.	2000			1000			500		
	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK
<b>BUx :</b>									
CMA	0.0096	0.0010	0.0005	0.0116	0.0005	0.0020	0.0433	0.0015	0.0023
CMAm	0.0006	$10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-7}$	0.0043	0.0013	0.0010	0.0169	0.0054	0.0044
MMSE	0.0029	$4 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6}$	0.0031	$6 \cdot 10^{-7}$	$10^{-6}$	0.0048	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$
JADE	0.2597	0.1882	0.1900	0.3042	0.2257	0.2234	0.3390	0.2336	0.2326
<b>TUx :</b>									
CMA	0.0159	$5.5 \cdot 10^{-5}$	0.0010	0.0433	0.0003	0.0013	0.0433	0.0003	0.0013
CMAm	0.0008	0.0010	$1.8 \cdot 10^{-6}$	0.0252	0.0069	0.0077	0.0252	0.0069	0.0077
MMSE	0.0036	0.0010	$1.1 \cdot 10^{-5}$	0.0049	$10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	0.0049	$10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
JADE	0.0611	0.0395	0.0414	0.0584	0.0281	0.0274	0.0752	0.0383	0.0387
<b>HTx :</b>									
CMA	0.1170	0.0033	0.0008	0.1482	0.0059	0.0088	0.2303	0.0184	0.0180
CMAm	0.0400	0.0022	0.0021	0.0519	0.0052	0.0039	0.0990	0.0081	0.0100
MMSE	0.0084	0.0020	$4 \cdot 10^{-6}$	0.0102	$9 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	0.0113	0.0010437	$2.3 \cdot 10^{-5}$
JADE	0.0801	0.0486	0.0475	0.0848	0.0493	0.0484	0.1067	0.0650	0.0649
<b>RAx :</b>									
CMA	0.0377	0.0031	0.0032	0.0536	0.0011	0.0061	0.0644	0.0036	0.0084
CMAm	0.0052	0.0020	0.0020	0.0179	0.0071	0.0078	0.0240	0.0078	0.0077
MMSE	0.0038	$8.7 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	0.0033	0.0004	$3.8 \cdot 10^{-5}$	0.0036	0.0001	$9 \cdot 10^{-6}$
JADE	0.0091	0.0065	0.0091	0.0114	0.0117	0.0116	0.0127	0.0109	0.0145

**Scénario n°2.** Les performances mesurées sont consignées dans les tableaux 4.8(a) et 4.8(b). Par rapport à l'analyse suivie dans le cas du scénario n°1, le fait marquant est la présence d'une modulation à plus grand nombre d'états (QAM-16). Les points essentiels qu'il convient de retenir sont les suivants :

- Les résultats correspondant à la QAM-16 sont acceptables et de même ordre de grandeurs que ceux obtenus grâce au MMSE pour les canaux BU<sub>x</sub>, TU<sub>x</sub> et RA<sub>x</sub> pour des trames de 2000 symboles. Le canal HT<sub>x</sub> est beaucoup plus délicat. Pour de plus petites durées d'observation, les algorithmes du CMA/CMA modifié sont incapables d'approcher les performances du MMSE qui, lui-même, fournit des taux d'erreur-symbole de très mauvaise qualité. Ceci n'est pas étonnant car les rapports signaux à bruit nécessaires à l'obtention de taux d'erreurs acceptables pour de telles modulations sont assez élevés (environ 17,6dB pour atteindre un taux d'erreur-symbole de  $10^{-3}$  sur canal gaussien). Par conséquent les résidus d'interférences dus à la séparation nécessairement imparfaite ont une influence cruciale sur les taux d'erreur contrairement à la situation qui prévaut pour les petites constellations. D'autre part, les algorithmes basés sur la minimisation du critère de module constant sont moins efficaces lorsqu'ils sont appliqués à des signaux impliquant des modulations de module non-constant comme la QAM-16.
- Les performances du CMA/CMA modifié quant à la démodulation des signaux BPSK et QAM-4 sont comparables à celles obtenues avec le MMSE exception faite du canal HT<sub>x</sub> (à l'instar du scénario n°1).

**Scénario n°1. Taux d'erreur moyen sur les canaux variables dans le temps (Rayleigh).** Les résultats sont consignés dans les tableaux 4.9(a) et 4.9(b). Nous rappelons que dans ces scénarios les taux d'erreurs sont évalués sur des trames de 2000, 1000 et 500 symboles respectivement. Dans chaque cas avons effectué 1000 réalisations des algorithmes du séparation. Le nombre de symboles dont nous disposons n'est donc pas suffisamment grand pour nous permettre d'évaluer de manière très fiable des taux d'erreur de l'ordre de  $10^{-2}$ . Nous présentons quand même les taux d'erreurs moyennes obtenus dans ces scénarios.

- Nous avons considéré des vitesses de 10 m/s et de 30 m/s pour chacun des émetteurs.
- Lorsque  $v = 10$  m/s, on peut constater que les taux d'erreur prennent des valeurs acceptables qui rend utilisables les signaux reconstruits.
- Lorsque  $v = 30$  m/s, compte tenu des débits symbole utilisés, les performances ne peuvent qu'être dégradées si les trames considérées dépassent quelques centaines de symboles. Sur les canaux BU<sub>x</sub>, TU<sub>x</sub> et RA<sub>x</sub>, on peut constater que lorsque la durée d'observation correspond à 500 symboles, les taux d'erreurs associés à la QAM-4 atteignent des valeurs raisonnables, permettant une exploitation fructueuse des symboles démodulés. Par contre on note une nette dégradation sur des trames de 1000 et 2000 symboles. Sur le canal HT<sub>x</sub>, les performances sont de mauvaise qualité même si la durée d'observation est de 500 symboles mais ceci ne semble pas lié à la mobilité car le même phénomène a été constaté dans le cadre du scénario 1 (tableau 4.4(a)).

TAB. 4.8 – Résultats obtenus dans le Scénario 2

(a) Pourcentage des taux d'erreur  $< 0.01$ 

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM
CMA	100%	99.8%	58.7%	99.9%	99.9%	11.6%	99.8%	96.7%	0%
CMAm	100%	100%	61.2%	100%	99.8%	12.8%	99.6%	97.2%	0%
MMSE	100%	99.8%	58.3%	99.9%	100%	47.5%	100%	99.9%	17.9%
JADE	91.8%	56.3%	0.9%	93.5%	55.2%	0.3%	89.1%	50.4%	0%
<b>TUx :</b>	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM
CMA	100%	99.6%	83.6%	99.9%	99.4%	35.6%	99.8%	98.9%	1%
CMAm	99.9%	99.1%	85.3%	99.9%	99.3%	37.2%	99.3%	98.2%	1.1%
MMSE	100%	99.9%	68.1%	99.8%	99.6%	55.5%	100%	100%	31.4%
JADE	98.8%	93.1%	25.3%	99.5%	93.9%	14.4%	99.1%	93.1%	2.6%
<b>HTx :</b>	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM
CMA	99.4%	93.6%	8.5%	98.8%	92.6%	0.7%	97.1%	83.6%	0%
CMAm	99.6%	95.3%	9%	99.6%	93.1%	1%	98.1%	86%	0%
MMSE	100%	99.4%	33.8%	100%	99.3%	24.4%	100%	99.4%	9.3%
JADE	98.7%	86.9%	9.5%	98.7%	85.8%	4.4%	98.7%	82.4%	0.4%
<b>RAx :</b>	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM
CMA	99.9%	98.5%	78.8%	99.8%	98.5%	33.5%	99.4%	98.2%	0.6%
CMAm	99.8%	98.7%	80%	98.8%	98.2%	36.1%	99%	98.6%	0.7%
MMSE	100%	99.6%	87.7%	100%	99.7%	83.9%	100%	99.7%	56.4%
JADE	100%	99.7%	84.8%	100%	99.7%	73%	100%	99.7%	19.1%

(b) Taux d'erreur moyen

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM
CMA	0	0.0007	0.0231	0.0001	0.0004	0.0598	0.0020	0.0254	0.2544
CMAm	$7 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-7}$	0.0188	$9 \cdot 10^{-6}$	0.0020	0.0540	0.0025	0.0199	0.2415
MMSE	0	0.0020	0.0223	0.0010	$8 \cdot 10^{-6}$	0.0313	$2 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$	0.0556
JADE	0.0267	0.0552	0.4019	0.0251	0.0593	0.4531	0.0387	0.0816	0.5673
<b>TUx :</b>	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM
CMA	0	0.0026	0.0187	0.0010	0.0040	0.0403	0.0002	0.0079	0.1514
CMAm	0.0010	0.0072	0.0146	0.0003	0.0038	0.0349	0.0046	0.0122	0.1487
MMSE	$6 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	0.0192	0.0020	0.0011	0.0287	$10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	0.0512
JADE	0.0052	0.0097	0.1295	0.0033	0.0063	0.1477	0.0026	0.0070	0.2155
<b>HTx :</b>	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM
CMA	0.0032	0.0147	0.2028	0.0047	0.0215	0.2862	0.0118	0.0759	0.5126
CMAm	0.0002	0.0064	0.1694	0.0018	0.0137	0.2557	0.0104	0.0531	0.4857
MMSE	$2 \cdot 10^{-6}$	0.0022	0.0579	$10^{-6}$	0.0002	0.0740	$2 \cdot 10^{-6}$	0.0003	0.1085
JADE	0.0014	0.0087	0.2101	0.0019	0.0113	0.2437	0.0027	0.0161	0.3203
<b>RAx :</b>	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM	BPSK	4-QAM	16-QAM
CMA	0.0010	0.0097	0.0333	0.0001	0.0090	0.0589	0.0012	0.0140	0.1570
CMAm	0.0020	0.0082	0.0290	0.0096	0.0137	0.0502	0.0087	0.0103	0.1490
MMSE	$4 \cdot 10^{-7}$	0.0001	0.0100	$8 \cdot 10^{-6}$	$8.4 \cdot 10^{-5}$	0.0152	$4 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-5}$	0.0289
JADE	$10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-5}$	0.0114	$7 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-5}$	0.0192	$6 \cdot 10^{-6}$	0.0011	0.0559

TAB. 4.9 – Taux d’erreur moyen obtenus dans le Scénario 1 et canaux de Rayleigh de vitesse :

(a)  $v = 10$  m/s

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	$5 \cdot 10^{-5}$	0.0017	0.0010	0.0001	0.0010	0.001	0.003	0.0040	0.0022
CMAM	$5 \cdot 10^{-5}$	0.0016	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$10^{-6}$	0	0.001	0
MMSE	$4 \cdot 10^{-5}$	0.0020	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	0.0003	$2 \cdot 10^{-6}$	0	0.00002	0
JADE	0.0758	0.1725	0.0918	0.0635	0.1153	0.0643	0.0479	0.1048	0.0462
<b>TUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.0015	0.0036	0.0005	0.0004	0.0031	0.0004	0.001	0.0030	0.0004
CMAM	$3 \cdot 10^{-5}$	0.0016	$5 \cdot 10^{-5}$	0.0010	0.0027	0.0003	0	$6 \cdot 10^{-6}$	0
MMSE	0.0001	0.0023	$6 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$	0.0005	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-5}$	0
JADE	0.0333	0.1346	0.0743	0.0066	0.0198	0.0063	0.0028	0.0138	0.0037
<b>HTx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.0099	0.0604	0.0054	0.0059	0.0414	0.0035	0.0102	0.0681	0.0071
CMAM	0.0029	0.0299	0.0019	0.0013	0.0166	0.0005	0.0033	0.0379	0.0022
MMSE	0.0002	0.0068	0.0002	$5 \cdot 10^{-5}$	0.0016	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.0008	0.0010
JADE	0.0227	0.1318	0.0801	0.0058	0.0331	0.0166	0.0056	0.0324	0.0140
<b>RAx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.0098	0.0213	0.0079	0.0041	0.0162	0.0015	0.0041	0.0271	0.0100
CMAM	0.0027	0.0098	0.0025	0.0135	0.0160	0.0125	0.0030	0.0065	0.0050
MMSE	0.0005	0.0030	0.0005	$2 \cdot 10^{-5}$	0.0009	$10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	0.0004	$6 \cdot 10^{-6}$
JADE	0.1554	0.4567	0.3181	0.0548	0.1475	0.1193	0.0180	0.0207	0.0236

(b)  $v = 30$  m/s

No.symb.	2000			1000			500		
<b>BUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.0413	0.1687	0.0417	0.0029	0.0155	0.0044	0.0024	0.0113	0.0007
CMAM	0.0272	0.1486	0.0186	0.0007	0.0089	0.0007	0.0010	0.0027	0.0004
MMSE	0.0065	0.0486	0.0056	0.0003	0.0078	0.0002	0.00001	0.0010	$8 \cdot 10^{-6}$
JADE	0.3615	0.5648	0.3926	0.1249	0.296	0.1635	0.0676	0.1549	0.0775
<b>TUx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.0664	0.2027	0.0616	0.0014	0.0159	0.0062	0.0020	0.0031	0.0019
CMAM	0.0357	0.1811	0.0341	0.0018	0.0102	0.0012	0.0010	0.0012	0.0007
MMSE	0.0068	0.0469	0.0062	0.0003	0.0073	0.0004	$7 \cdot 10^{-5}$	0.0012	$6 \cdot 10^{-5}$
JADE	0.3110	0.5646	0.3832	0.0879	0.3232	0.1872	0.0117	0.0746	0.0428
<b>HTx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.1158	0.3275	0.1221	0.0346	0.1128	0.0303	0.0274	0.1071	0.0215
CMAM	0.0739	0.3417	0.0765	0.0118	0.0821	0.0071	0.0088	0.0784	0.0104
MMSE	0.0109	0.0717	0.0109	0.0012	0.0164	0.0011	$9 \cdot 10^{-5}$	0.0047	$7 \cdot 10^{-5}$
JADE	0.3253	0.5787	0.4181	0.0741	0.3217	0.1993	0.0210	0.0808	0.0635
<b>RAx :</b>	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK	BPSK	4-QAM	BPSK
CMA	0.1243	0.3074	0.1151	0.0191	0.0674	0.0187	0.0091	0.0315	0.0072
CMAM	0.0708	0.3049	0.0677	0.0106	0.0541	0.0143	0.0030	0.0152	0.0005
MMSE	0.0097	0.0625	0.0105	0.0010	0.0116	0.0014	$8 \cdot 10^{-5}$	0.0018	0.0002
JADE	0.3773	0.6555	0.4873	0.2758	0.612	0.4586	0.0353	0.1153	0.0845

## 4.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons validé par simulations les résultats théoriques annoncés dans le chapitre 3. Nous avons déterminé les seuils de détections des fréquences cycliques non conjuguées par une méthode empirique et nous avons prouvé par simulations que les valeurs ainsi choisies assurent le bon fonctionnement de l'algorithme du CMA modifié. Nous avons ensuite comparé les résultats obtenus dans la séparation des mélanges des signaux BPSK avec le critère du CMA et ceux obtenus avec le critère du CMA modifié. Nous avons constaté que dans le cas des signaux ayant les mêmes caractéristiques (période symbole et résidu de porteuse) l'algorithme du CMA modifié assure la séparation des sources quand l'algorithme du CMA échoue. Dans le cas opposé où les sources ont les fréquences cycliques et cycliques conjuguées différentes, nous avons constaté que les deux algorithmes fonctionnent correctement et que les pertes de performances du CMA modifié par rapport au CMA ne sont pas significatives. On a pu constater le même effet dans le cas des mélanges contenant des modulations CPM d'indice  $1/2$ . Nous avons ensuite comparé les performances des algorithmes du CMA et du CMA modifié avec celles du filtre de Wiener (MMSE) et de l'algorithme JADE, dans la séparation des différents mélanges des signaux. Les résultats obtenus ont montré l'intérêt d'utiliser le critère du CMA modifié à la place du CMA dans le cas des canaux mal conditionnés ou des modulations à grand nombre d'états (QAM-16).



---

Troisième partie

**Séparation de mélanges de sources  
cyclostationnaires circulaires à  
l'ordre 2**



---

## Chapitre 5

# Séparateurs dérivant du principe du maximum de vraisemblance.

Nous avons vu précédemment que les techniques basées sur le critère du module constant couplées avec une approche par déflation produisaient des résultats tout à fait corrects dans un grand nombre de situations sans nécessiter d'information a priori sur les différents émetteurs. Ce type de technique pragmatique n'a toutefois aucune garantie d'optimalité. Il est donc légitime d'essayer de proposer des algorithmes pouvant aller au delà au moins dans des classes de modulations restreintes.

Le but de ce chapitre est de présenter des travaux s'inscrivant dans cette logique, et qui sont inspirés du principe du maximum de vraisemblance utilisé pour la première fois dans le domaine de la séparation de sources dans [28]. L'approche utilisée ici diffère cependant très sensiblement de celle développée dans le cadre de la démodulation aveugle des modulations linéaires car d'une part le modèle d'observation sur lequel les méthodes sont bâties est un modèle non bruité, et d'autre part les symboles transmis ne sont pas modélisés par des variables aléatoires discrètes.

Nous allons d'abord mettre en évidence et étudier des estimateurs dérivant du principe du maximum de vraisemblance dans le cas des mélanges instantanés de sources modulées linéairement dont les débits symboles et les résidus de porteuse sont connus (sections 5.1 et 5.2). Nous généraliserons après les idées développées au cas plus difficile des mélanges convolutifs de sources de périodes symbole et de résidus de porteuses connus (section 5.3). Une étude de la complexité des algorithmes proposés ainsi que des résultats expérimentaux obtenus seront ensuite présentés dans la section 5.4.

### 5.1 Le contexte des mélanges instantanés de sources modulées linéairement dont les débits symboles et les résidus de porteuse sont connus.

Dans ce chapitre, nous supposons que le mélange est instantané et appelons  $\mathbf{H}$  la matrice de mélange. Nous ne considérons en outre que le cas de signaux sources modulés linéairement par des symboles circulaires à l'ordre 2, et supposons que les débits symboles et les résidus de porteuse des différentes sources sont connus a priori. Cette hypothèse est évidemment irréaliste, mais ces quantités peuvent évidemment être estimées. Nous

supposons en outre que le nombre de capteurs  $N$  coïncide avec le nombre de sources  $K$ . Afin de simplifier les divers calculs, nous supposons dans la suite que les résidus de porteuse des sources sont tous nuls, et nous contentons d'annoncer les résultats dans le cas le plus général.

### 5.1.1 Mise en évidence des estimateurs.

Le signal reçu à temps continu  $\mathbf{y}_a(t)$  s'écrit donc sous la forme  $\mathbf{y}_a(t) = \mathbf{H}\mathbf{s}_a(t)$  où  $\mathbf{s}_a(t) = (s_{a,1}(t), \dots, s_{a,K}(t))^T$  représente le vecteur des signaux sources transmis par les différents émetteurs. Nous supposons que ces signaux sont obtenus en modulant linéairement des suites de symboles circulaires à l'ordre 2.  $\mathbf{y}_a(t)$  est échantillonné à une période  $T_e$  vérifiant la condition de Shannon et le signal à temps discret  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{y}_a(nT_e)$  s'exprime donc comme

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{H}\mathbf{s}(n) \quad (5.1.1)$$

où  $\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}_a(nT_e)$ .

Nous notons  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}(0)^T, \dots, \mathbf{y}(M-1)^T)^T$  le vecteur de dimension  $NM$  reçu. De même, pour  $k = 1, \dots, K$ , nous posons  $\mathbf{s}_k = (s_k(0), \dots, s_k(M-1))^T$  et  $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_K^T)^T$ .

Nous allons formuler le problème de séparation de sources comme celui de l'estimation au sens du maximum de vraisemblance d'une matrice de séparation  $\mathbf{G}$  qui coïncide avec l'inverse de  $\mathbf{H}$  à une permutation et à une matrice diagonale près. Afin de simplifier les notations, nous allons supposer que nous sommes en mesure d'estimer la matrice  $\mathbf{H}^{-1}$  exactement. Nous allons poser dans la suite  $\mathbf{r}(m) = \mathbf{G}\mathbf{y}(m)$  même si  $\mathbf{r}(m)$  coïncide avec  $\mathbf{s}(m)$  dans le cadre de notre convention  $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$ . Nous appelons également  $\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{G}\mathbf{y}_a(t)$  le vecteur des signaux reconstitués; on a bien entendu  $\mathbf{r}(m) = \mathbf{r}_a(mT_e)$ . Comme dans le contexte des problèmes d'estimation de paramètres, nous appelons  $p_{\mathbf{G}}(\mathbf{y})$  la vraisemblance de l'observation lorsque  $\mathbf{G}$  coïncide avec  $\mathbf{H}^{-1}$ . Dans la suite, nous allons introduire des densités de probabilité de variables complexes; il faut comprendre qu'elles représentent les densités conjointes des couples constitués par leurs parties réelles et leurs parties imaginaires.

Soit  $p_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{x}_1), \dots, p_{\mathbf{s}_K}(\mathbf{x}_K)$  les densités de probabilités conjointes des vecteurs aléatoires  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_K$ ,  $\mathbf{x}_k = (x_k(0), \dots, x_k(M-1))^T_{k=1, \dots, K}$  représentant des vecteurs de dimension  $M$  de valeurs génériques prises par les vecteurs  $(\mathbf{s}_k)_{k=1, \dots, K}$ . On appelle par ailleurs  $p_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$  la densité de probabilité de  $\mathbf{s}$ , qui, compte tenu de l'indépendance des sources, se met sous la forme

$$p_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = p_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{x}_1) \dots p_{\mathbf{s}_K}(\mathbf{x}_K) \quad (5.1.2)$$

Afin de mettre en évidence le lien entre  $p_{\mathbf{G}}(\mathbf{y})$  et  $p_{\mathbf{s}}$ , nous remarquons que l'équation (5.1.1) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}\mathbf{s} \quad (5.1.3)$$

où  $\mathcal{H}$  est donnée par

$$\mathcal{H} = (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{h}_K)$$

où les vecteurs  $(\mathbf{h}_k)_{k=1, \dots, K}$  représentent les colonnes de  $\mathbf{H}$  et où  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  désigne le produit de Kronecker de deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  défini par la matrice dont les blocs sont les  $A_{i,j}\mathbf{B}$ .

L'inverse  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{H}$  est évidemment la matrice

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{g}_M \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

où  $(\mathbf{g}_k)_{k=1,\dots,K}$  représentent les lignes de  $\mathbf{G}$ . Par conséquent,  $\mathbf{s} = \mathcal{G}\mathbf{y}$ . On peut vérifier que la formule du changement de variable se généralise dans le cas des variables aléatoires complexes de la façon suivante :

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) = (\det \mathcal{G} \mathcal{G}^H) p_{\mathbf{s}}(\mathcal{G}\mathbf{y}) \quad (5.1.5)$$

On peut vérifier sans peine que

$$\det \mathcal{G} = (\det \mathbf{G})^M$$

de sorte que la log vraisemblance normalisée  $\mathcal{L}_v(\mathbf{G}) = \frac{1}{M} \log p_{\mathbf{G}}(\mathbf{y})$  est donnée par

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{G}) = \log \det \mathbf{G} + \log \det \mathbf{G}^H + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K \log p_{\mathbf{s}_k}(\mathbf{r}_k) \quad (5.1.6)$$

où  $\mathbf{r}_k = (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{g}_k)\mathbf{y} = (r_k(0), \dots, r_k(M-1))^T$  représente le vecteur de la  $k$ -ième source reconstituée.

La matrice de séparation  $\hat{\mathbf{G}}$  optimale au sens du maximum de vraisemblance est celle qui maximise la fonction  $\mathbf{G} \rightarrow \mathcal{L}_v(\mathbf{G})$ . Il convient d'exprimer  $p_{\mathbf{s}_k}(\mathbf{r}_k)$  de façon plus explicite afin d'aller plus loin dans les calculs permettant de déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance. Pour cela, nous remarquons que le signal à temps continu  $r_{a,k}(t)$  se met sous la forme

$$r_{a,k}(t) = \sum_j a_k(j) h_{a,k}(t - jT_k)$$

où  $h_{a,k}(t)$  représente le filtre de mise en forme de la source  $k$  supposé connu provisoirement. Nous allons également supposer que la loi de probabilité commune des variables aléatoires  $a_k(0), \dots, a_k(M-1)$  possède une densité de probabilité notée  $p_k(a_k)$ . Ceci n'est évidemment pas vérifié car les symboles appartiennent à un alphabet fini. On peut cependant effectuer cette hypothèse sans que cela soit bien gênant.

En négligeant les effets de bord, on peut écrire que

$$\mathbf{r}_k = \mathcal{H}_k \mathbf{a}_k$$

où  $\mathcal{H}_k$  représente la matrice de taille  $M \times \alpha_k M$  définie par

$$\mathcal{H}_k(m, j) = h_{a,k}(mT_e - jT_k)$$

où on rappelle que  $\alpha_k = \frac{T_e}{T_k}$ . On constate que le vecteur de dimension  $M$   $\mathbf{r}_k$  est engendré par  $M\alpha_k$  variables aléatoires indépendantes. Ceci implique l'existence de relations linéaires déterministes entre les composantes de  $\mathbf{r}_k$ . Ceci signifie que la loi conjointe de  $\mathbf{r}_k$  contient une partie singulière. Appelons  $\mathcal{G}_k$  une inverse à gauche de  $\mathcal{H}_k$  et soit  $\mathcal{P}_k$  une base orthogonale du complément orthogonal de l'espace engendré par les colonnes de  $\mathcal{H}_k$ . Alors,  $p_{\mathbf{s}_k}(\mathbf{r}_k)$  est égal à un facteur près à

$$p_{\mathbf{a}_k}(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k) \delta(\mathcal{P}_k^H \mathbf{r}_k = 0)$$

où  $\delta(\mathcal{P}_k^H \mathbf{r}_k = 0)$  représente une masse de Dirac localisée sur l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{r}_k$  vérifiant  $\mathcal{P}_k^H \mathbf{r}_k = 0$ . Ceci signifie que le vecteur  $\mathbf{r}_k$  reconstitué doit appartenir à l'espace colonne de  $\mathcal{H}_k$ . Comme en pratique cette condition ne peut être exploitée que si le filtre  $h_{a,k}$  est parfaitement connu, nous préférons ne pas tenir compte de cette information et proposons de maximiser par rapport  $\mathbf{G}$  la quantité

$$\mathcal{L}(\mathbf{G}) = \log \det \mathbf{G} + \log \det \mathbf{G}^H + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K \log p_{\mathbf{a}_k}(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)$$

qui, compte tenu de l'indépendance des symboles, s'écrit aussi

$$\mathcal{L}(\mathbf{G}) = \log \det \mathbf{G} + \log \det \mathbf{G}^H + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K \sum_j \log p_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] \quad (5.1.7)$$

(où on rappelle que  $p_k$  représente la densité de probabilité de chaque symbole  $a_k(j)$ ). Afin de maximiser cette fonction réelle des variables complexes  $(\mathbf{G}_{p,q})_{p=1,\dots,K,q=1,\dots,N}$ , il convient d'annuler ses dérivées partielles par rapport aux parties réelles et imaginaires des  $\mathbf{G}_{p,q}$ . Pour faciliter les calculs, on introduit classiquement l'opérateur de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} - i \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \quad (5.1.8)$$

où  $z = z_1 + iz_2$ . Annuler les dérivées partielles de  $\mathcal{L}(\mathbf{G})$  par rapport aux parties réelles et imaginaires des  $\mathbf{G}_{p,q}$  est équivalent à annuler  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{G}_{p,q}}$  en considérant que les variables  $\mathbf{G}_{p,q}$  et  $\overline{\mathbf{G}}_{p,q}$  sont indépendantes. Il est facile de vérifier que la dérivée de  $\log \det \mathbf{G}$  par rapport à  $\mathbf{G}_{p,q}$  est égale à  $\mathbf{G}_{q,p}^{-1}$  et que celle de  $\log \det \mathbf{G}^H$  est nulle. Il reste donc à calculer la dérivée par rapport à  $\mathbf{G}_{p,q}$  du troisième terme de la partie droite de l'équation (5.1.7).

Nous allons à présent considérer des inverses à gauche  $\mathcal{G}_k$  constituées à partir de filtres à temps continu  $g_{a,k}(t)$  permettant de reconstituer les symboles  $a_k(j)$  à partir du signal  $r_k(m)$ . Soit  $g_{a,k}(t)$  la réponse impulsionnelle d'un filtre vérifiant :

$$\frac{1}{T_k} \int_{\mathbb{R}} h_{a,k}(t) g_{a,k}(jT_k - t) dt = \delta(j)$$

condition qui équivaut à dire que le filtre  $h_{a,k} * g_{a,k}$  est un filtre de Nyquist pour la cadence  $T_k$ . Il est facile de se convaincre qu'aux effets de bord près, la matrice  $\mathcal{G}_k$  définie par

$$(\mathcal{G}_k)(j, m) = \frac{T_e}{T_k} g_{a,k}(jT_k - mT_e)$$

est une inverse à gauche de  $\mathcal{H}_k$  car

$$a_k(j) = (\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j) = \frac{1}{T_k} \int_{\mathbb{R}} g_{a,k}(jT_k - t) r_{a,k}(t) dt = \frac{T_e}{T_k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{a,k}(jT_k - mT_e) r_k(mT_e)$$

Si le filtre de mise en forme  $h_{a,k}(t)$  est un filtre de demi-Nyquist, le filtre adapté  $g_{a,k}(t) = \overline{h}_{a,k}(-t)$  est un filtre de ce type.

Définissons à présent la fonction  $\psi_k(a)$  par

$$\psi_k(a) = -\frac{\partial \log p_k(a)}{\partial a}$$

Les symboles transmis étant complexes, l'opérateur de dérivation est à prendre au sens de (5.1.8). Si par exemple  $\log p_k(a) = -|a|^2 = -a\bar{a}$ , alors  $\psi_k(a) = \bar{a}$ .

En utilisant cette fonction nous pouvons évaluer la dérivée de  $\log p_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)]$  par rapport à  $\mathbf{G}_{p,q}$  :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{G}_{p,q}} \log p_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] = -\psi_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{G}_{p,q}} [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] \quad (5.1.9)$$

Du fait que cette dérivée est non nulle uniquement si  $p = k$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{G}_{k,q}} \log p_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] &= -\psi_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] \frac{T_e}{T_k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{a,k}(jT_k - mT_e) \frac{\partial r_k(mT_e)}{\partial \mathbf{G}_{k,q}} \\ &= -\psi_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] \frac{T_e}{T_k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{a,k}(jT_k - mT_e) y_q(m) \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

La matrice optimale  $\hat{\mathbf{G}}$  vérifie donc :

$$\hat{\mathbf{G}}_{q,p}^{-1} - \sum_j \psi_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] \frac{T_e}{T_k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{a,k}(jT_k - mT_e) y_q(m) = 0$$

Cette équation peut se mettre sous la forme  $\hat{\mathbf{G}}^{-1} + \mathbf{E} = 0$  ce qui peut encore s'écrire comme

$$\mathbf{I} + \hat{\mathbf{G}}\mathbf{E} = 0$$

où  $\mathbf{E}$  est la matrice dont les éléments sont

$$\mathbf{E}_{q,p} = - \sum_j \psi_k [(\mathcal{G}_k \mathbf{r}_k)(j)] \frac{T_e}{T_k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{a,k}(jT_k - mT_e) y_q(m) = 0$$

Ceci est équivalent à dire que  $\forall k \neq l, \sum_q \hat{\mathbf{G}}_{k,q} \mathbf{E}_{q,l} = 0$  ce qui, compte tenu du fait que  $\sum_{q=1}^N \hat{\mathbf{G}}_{k,q} y_q(m) = \hat{r}_k(m)$  conduit à

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_k(m) \sum_j \psi_l(\hat{a}_l(j)) \frac{T_e}{T_l} g_{a,l}(jT_l - mT_e) = 0$$

Nous avons donc établi que l'annulation des dérivées partielles de  $\mathcal{L}$  par rapport aux éléments de  $\mathbf{G}$  conduit à définir l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\mathbf{G}}$  de  $\mathbf{G}$  par les équations :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_k(m) \sum_j \psi_l(\hat{a}_l(j)) g_{a,l}(jT_l - mT_e) = 0 \quad (5.1.11)$$

où  $\hat{\mathbf{r}}(m) = \hat{\mathbf{G}}\mathbf{y}(m)$  et où  $\hat{a}_l(j)$  représente l'estimateur du symbole  $a_l(j)$  défini par

$$\hat{a}_l(j) = \frac{T_e}{T_l} \sum_{n=0}^{M-1} g_{a,l}(jT_l - nT_e) \hat{r}_l(n) \quad (5.1.12)$$

Ces équations expriment la décorrélation approchée du  $k$ -ième signal reconstitué  $(\hat{r}_k(m))_{m \in \mathbb{Z}}$  avec le signal  $(\hat{u}_l(m))_{m \in \mathbb{Z}}$  défini par

$$\hat{u}_l(m) = \sum_j \overline{\psi_l(\hat{u}_l(j)) g_{a,l}(jT_l - mT_e)}$$

$\hat{u}_l$  correspond à un signal obtenu en mettant en forme les "symboles"  $\overline{\psi_l(\hat{u}_l(j))}$  par le filtre de mise en forme  $k_{a,l}(t) = \overline{g_{a,l}(-t)}$ . On constate que la résolution de ces équations suppose de connaître les fonctions  $\psi_l$  et les filtres égaliseurs  $g_{a,l}(t)$  qui eux-mêmes dépendent des filtres de mise en forme  $h_{a,l}(t)$  pour  $l = 1, \dots, K$ . En pratique, les fonctions  $\psi_l$  peuvent être remplacées par des fonctions pertinentes  $\phi_l$  vérifiant

$$\mathbb{E}(\phi_l(a_l)) = 0$$

pour tout  $l$ . De plus, lorsque les filtres de mise en forme sont inconnus, il est possible d'estimer un égaliseur  $g_{a,l}(t)$  par une technique d'égalisation aveugle opérant sur un signal  $\hat{r}_{init,l}(m)$  obtenu grâce à un premier algorithme de séparation non optimum. Par conséquent, les idées qui viennent d'être présentées sont en pratique tout à fait implémentables. Nous allons donc étudier dans la suite les estimateurs  $\hat{\mathbf{G}}$  qui vérifient les relations

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_k(m) \sum_j \phi_l(\hat{u}_l(j)) g_{a,l}(jT_l - mT_e) = 0 \quad (5.1.13)$$

pour tous  $(k, l)$ ,  $k \neq l$ , avec  $\hat{u}_l(j)$  défini par (5.3.46) et  $\phi_l$  vérifiant  $\mathbb{E}(\phi_l(a_l)) = 0$ .

Dans le cas où les sources sont affectées de résidus de porteuses notés  $(\Delta f_k)_{k=1, \dots, K}$ , l'estimateur (5.1.13) doit être modifié comme suit. Il convient tout d'abord de remarquer que tout le formalisme précédent peut-être étendu en remarquant que tout se passe comme si chaque signal  $s_{a,k}(t)$  transmis était remplacé par le signal

$$s_{a,k}^{res}(t) = \sum_j a_k(j) e^{2ij\pi\Delta f_k T_k} h_{a,k}^{res}(t - jT_k)$$

où

$$h_{a,k}^{res}(t) = h_{a,k}(t) e^{2i\pi\Delta f_k t} \quad (5.1.14)$$

L'égaliseur  $g_{a,k}(t)$  doit alors être remplacé par la fonction  $g_{a,k}^{res}(t)$  donné par par

$$g_{a,k}^{res}(t) = g_{a,k}(t) e^{2i\pi\Delta f_k t} \quad (5.1.15)$$

Dans ces conditions, on montre comme plus haut que l'estimateur (5.1.13) prend la forme

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_k(m) \sum_j \phi_l(\hat{u}_l^{res}(j)) g_{a,l}^{res}(jT_l - mT_e) = 0 \quad (5.1.16)$$

où l'estimateur  $\hat{u}_l^{res}(j)$  est cette fois donné par

$$\hat{u}_l^{res}(j) = e^{-2i\pi\Delta f_l T_l} \left( \frac{T_e}{T_l} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_l(m) g_{a,l}^{res}(jT_l - mT_e) \right) \quad (5.1.17)$$

### 5.1.2 Implémentation des l'estimateurs (5.1.13, 5.1.16)

Nous commençons par préciser comment mettre en oeuvre l'estimateur (5.1.13). Pour cela, nous allons nous inspirer de [28]. Nous supposons qu'un premier estimateur pertinent  $\hat{\mathbf{G}}_{init}$  de la matrice  $\mathbf{G}$  a été mis en évidence, par exemple via l'algorithme CMA et la procédure par déflation que nous avons présentée précédemment. Nous posons  $\hat{\mathbf{r}}_{init}(m) = \hat{\mathbf{G}}_{init}\mathbf{y}(m)$ . Nous allons chercher la solution de l'équation (5.1.13) sous la forme

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}}_{init} + \mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{G}}_{init} \quad (5.1.18)$$

où la matrice  $\mathbf{\Delta}$  est supposée "petite". Ceci suppose implicitement que l'estimateur initial est suffisamment proche de la solution. Le fait que les éléments de  $\mathbf{\Delta}$  soient petits permet d'effectuer des développements limités au premier ordre des termes intervenant dans l'équation (5.1.13), et de déterminer la matrice  $\mathbf{\Delta}$  en résolvant un système linéaire. Le terme  $\hat{r}_k(m)$  se met sous la forme

$$\hat{r}_k(m) = \hat{r}_{init,k}(m) + \sum_{p=1}^K \mathbf{\Delta}_{k,p} \hat{r}_{init,p}(m) \quad (5.1.19)$$

Nous choisissons de fixer les termes diagonaux  $(\mathbf{\Delta}_{k,k})_{k=1,\dots,K}$  à 0. Cette condition signifie que  $\hat{r}_k(m)$  donné par (5.1.19) s'obtient en retranchant de l'estimateur initial  $\hat{r}_{init,k}(m)$  une combinaison linéaire des autres signaux sources reconstitués initialement. Afin d'évaluer au premier ordre  $\hat{u}_l(m)$ , nous commençons par exprimer  $\hat{u}_l(j)$  sous la forme

$$\hat{u}_l(j) = \hat{a}_{init,l}(j) + \sum_{p \neq l} \mathbf{\Delta}_{l,p} \frac{T_e}{T_l} \sum_n g_{a,l}(jT_l - nT_e) \hat{r}_{init,p}(n) \quad (5.1.20)$$

puis nous effectuons un développement limité de la fonction  $\phi_l$  au voisinage du point  $\hat{a}_{init,l}(j)$ . Puisque la variable  $\hat{a}_{init,l}(j)$  est complexe, la fonction  $\phi_{a,l}$  peut-être interprété comme une fonction de 2 variables (parties réelle et imaginaire). Il est plus agréable d'écrire ce développement en faisant intervenir les variables complexes :

$$\phi_l(a + \delta a) \simeq \phi_l(a) + \delta a \frac{\partial \phi_l}{\partial a} + \overline{\delta a} \frac{\partial \phi_l}{\partial \bar{a}}$$

où l'opérateur de dérivation par rapport à la variable  $\bar{a}$  est défini par

$$\frac{\partial}{\partial \bar{a}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial a_1} + i \frac{\partial}{\partial a_2} \right)$$

avec  $a = a_1 + ia_2$ . Tous calculs faits, on obtient que

$$\hat{u}_l(m) = \hat{u}_{init,l}(m) + \frac{T_e}{T_l} \sum_{p \neq l} \mathbf{\Delta}_{l,p} \sum_j \frac{\partial \phi_l}{\partial a} g_{a,l}(jT_l - mT_e) \sum_n g_{a,l}(jT_l - nT_e) r_p(n) + \frac{T_e}{T_l} \sum_{p \neq l} \mathbf{\Delta}_{l,p} \sum_j \frac{\partial \phi_l}{\partial \bar{a}} g_{a,l}(jT_l - mT_e) \sum_n g_{a,l}(jT_l - nT_e) \bar{r}_p(n) \quad (5.1.21)$$

où les dérivées partielles sont prises au point  $\hat{a}_{init,l}(j)$ . En injectant les expressions (5.1.19) et (5.1.21) dans l'équation (5.1.13), on obtient immédiatement

$$\sum_{p \neq k} \mathbf{\Delta}_{k,p} \hat{\alpha}_{init,k,l}^{(p)} + \sum_{p \neq l} \mathbf{\Delta}_{l,p} \hat{\beta}'_{init,k,l}^{(p)} + \sum_{p \neq l} \overline{\mathbf{\Delta}}_{l,p} \hat{\beta}^{(p)}_{init,k,l} = \hat{\theta}_{init,k,l} \quad (5.1.22)$$

avec

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{init,l}^{(p)} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_{init,p}(m) \sum_j \phi_l(\hat{a}_{init,l}(j)) g_{a,l}(jT_l - mT_e) \\
\hat{\beta}'_{init,k,l}^{(p)} &= \frac{T_e}{T_l} \frac{1}{M} \sum_{(m,n)=0}^{M-1} \hat{r}_{init,k}(m) \hat{r}_{init,p}(n) \sum_j \frac{\partial \phi_l}{\partial a} g_{a,l}(jT_l - mT_e) g_{a,l}(jT_l - nT_e) \\
\hat{\beta}_{init,k,l}^{(p)} &= \frac{T_e}{T_l} \frac{1}{M} \sum_{(m,n)=0}^{M-1} \hat{r}_{init,k}(m) \bar{\hat{r}}_{init,p}(n) \sum_j \frac{\partial \phi_l}{\partial a} g_{a,l}(jT_l - mT_e) \overline{g_{a,l}(jT_l - nT_e)} \\
\hat{\theta}_{init,k,l} &= -\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_{init,k}(m) \sum_j \phi_l(\hat{a}_{init,l}(j)) g_{a,l}(jT_l - mT_e)
\end{aligned} \tag{5.1.23}$$

On peut simplifier ces équations en négligeant les termes du second ordre. Les termes  $(\hat{\alpha}_{init,l}^{(p)})_{p \neq l}$ ,  $(\hat{\beta}'_{init,k,l}^{(p)})_{p \neq k}$ ,  $(\hat{\beta}_{init,k,l}^{(p)})_{p \neq k}$  sont proches de 0 si l'estimateur initial est pertinent. Multipliés par les éléments de la matrice  $\mathbf{\Delta}$ , ils se transforment en termes du second ordre négligeables devant les termes qui sont de l'ordre des éléments de  $\mathbf{\Delta}$ . Dans ces conditions, on peut se contenter des équations

$$\mathbf{\Delta}_{k,l} \hat{\alpha}_{init,l} + \mathbf{\Delta}_{l,k} \hat{\beta}'_{init,k,l} + \bar{\mathbf{\Delta}}_{l,k} \hat{\beta}_{init,k,l} = \hat{\theta}_{init,k,l} \tag{5.1.24}$$

où, pour simplifier les notations, nous avons posé  $\hat{\alpha}_{init,l} = \hat{\alpha}_{init,l}^{(l)}$ ,  $\hat{\beta}'_{init,k,l} = \hat{\beta}'_{init,k,l}^{(k)}$  et  $\hat{\beta}_{init,k,l} = \hat{\beta}_{init,k,l}^{(k)}$ . Par ailleurs, la circularité au second ordre des suites de symboles implique également que les coefficients  $\hat{\beta}'_{init,k,l}$  sont proches de 0. On aboutit donc finalement à

$$\mathbf{\Delta}_{k,l} \hat{\alpha}_{init,l} + \bar{\mathbf{\Delta}}_{l,k} \hat{\beta}_{init,k,l} = \hat{\theta}_{init,k,l} \tag{5.1.25}$$

pour tout  $k \neq l$ . En écrivant la même équation pour le couple  $(l, k)$ , et en la conjuguant, on obtient le système de 2 équations à 2 inconnues suivant

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{init,k,l} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{\Delta}}_{l,k} \\ \mathbf{\Delta}_{k,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{init,k,l} \\ \bar{\hat{\theta}}_{init,l,k} \end{pmatrix} \tag{5.1.26}$$

où la matrice  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{init,k,l}$  est donnée par

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{init,k,l} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{init,k,l} & \hat{\alpha}_{init,l} \\ \bar{\hat{\alpha}}_{init,k} & \bar{\hat{\beta}}_{init,l,k} \end{pmatrix} \tag{5.1.27}$$

La résolution de l'équation (5.1.26) pour tout couple  $(k, l)$ , avec  $k > l$ , permet de calculer la matrice  $\mathbf{\Delta}$  ainsi que l'estimateur  $\hat{\mathbf{G}}$  donné par (5.1.18).

Dans le cas où les résidus de porteuse sont non nuls (cf. l'estimateur 5.1.16), on obtient des systèmes d'équation similaires du type (5.1.26), mais les quantités  $\hat{\beta}_{init,k,l}$ ,  $\hat{\alpha}_{init,l}$ ,  $\hat{\theta}_{init,l,k}$  doivent être remplacés par

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{init,l}^{res} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_{init,l}(m) \sum_j \phi_l(\hat{a}_{init,l}^{res}(j)) e^{-2i\pi j \Delta f_l T_l} g_{a,l}^{res}(jT_l - mT_e) \\
\hat{\beta}_{init,k,l}^{res} &= \frac{T_e}{T_l} \frac{1}{M} \sum_{(m,n)=0}^{M-1} \hat{r}_{init,k}(m) \bar{\hat{r}}_{init,k}(n) \sum_j \frac{\partial \phi_l}{\partial a} g_{a,l}^{res}(jT_l - mT_e) \overline{g_{a,l}^{res}(jT_l - nT_e)} \\
\hat{\theta}_{init,k,l}^{res} &= -\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_{init,k}(m) \sum_j \phi_l(\hat{a}_{init,l}^{res}(j)) e^{-2i\pi j \Delta f_l T_l} g_{a,l}^{res}(jT_l - mT_e)
\end{aligned} \tag{5.1.28}$$

## 5.2 Analyse des propriétés statistiques des estimateurs.

Nous allons à présent étudier les performances statistiques de l'estimateur  $\hat{\mathbf{G}}$  en faisant l'hypothèse usuelle que le nombre d'échantillons disponibles  $M$  est suffisamment grand.

Nous supposons également que les égaliseurs  $g_{a,l}(t)$  sont connus exactement, ce qui revient en pratique à supposer que l'on néglige l'erreur d'estimation correspondante. Comme précédemment, nous effectuons les calculs détaillés dans le cas où les résidus de porteuse sont tous nuls, et nous contentons de donner les résultats dans le cas le plus général.

La méthodologie employée est tout à fait classique, et consiste à effectuer un développement à l'ordre 1 de  $\hat{\mathbf{G}}$  formellement identique à celui du paragraphe précédent, la différence étant que le point autour duquel le développement est réalisé est la vraie valeur  $\mathbf{G}$  du paramètre plutôt que l'estimateur initial  $\hat{\mathbf{G}}_{init}$ . Nous supposons donc que  $M$  est suffisamment grand pour que

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \Delta \mathbf{G} \quad (5.2.29)$$

où la matrice  $\Delta$  est supposée être petite comme dans le paragraphe précédent (nous utilisons la même notation  $\Delta$  pour simplifier) et vérifie  $\Delta_{k,k} = 0$  pour tout  $k$ . Les éléments de la matrice  $\Delta$  qualifient les erreurs de reconstruction associées à l'estimateur du maximum de vraisemblance puisque l'on déduit de (5.2.29) que

$$\hat{r}_k(m) = r_k(m) + \sum_{p \neq k} \Delta_{k,p} r_p(m)$$

En supposant que les données sur lesquelles  $\hat{\mathbf{G}}$  est calculée sont indépendantes de celles qui sont utilisées pour estimer les signaux sources, on peut évaluer l'erreur de reconstruction moyenne sur la source  $k$  par

$$\mathbb{E} |\hat{r}_k(m) - r_k(m)|^2 = \sum_{p \neq k} \mathbb{E} |\Delta_{k,p}|^2$$

Il est donc utile d'évaluer les  $\mathbb{E} |\Delta_{k,p}|^2$ , au moins au premier ordre près. Pour cela, nous utilisons un classique développement limité au premier ordre en les éléments de  $\Delta$ , similaire à celui qui a été présenté dans le paragraphe précédent. On obtient, au premier ordre près,

$$\mathbf{\Gamma}_{k,l}^{(M)} \begin{pmatrix} \overline{\Delta}_{l,k} \\ \Delta_{k,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{k,l} \\ \bar{\theta}_{l,k} \end{pmatrix} \quad (5.2.30)$$

où la matrice  $\mathbf{\Gamma}_{k,l}^{(M)}$  et le terme  $\theta_{k,l}$  sont définis de la même façon que  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{k,l}$  et  $\hat{\theta}_{k,l}$ , la différence étant que l'estimateur initial  $\hat{\mathbf{G}}_{init}$  doit être remplacé par la vraie matrice  $\mathbf{G}$ . Plus précisément,

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} r_l(m) \sum_j \phi_l(a_l(j)) g_{a,l}(jT_l - mT_e) \\ \beta_{k,l} &= \frac{T_e}{T_l} \frac{1}{M} \sum_{(m,n)=0}^{M-1} r_k(m) \bar{r}_k(n) \sum_j \frac{\partial \phi_l}{\partial a} g_{a,l}(jT_l - mT_e) \overline{g_{a,l}(jT_l - nT_e)} \\ \theta_{k,l} &= -\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} r_k(m) \sum_j \phi_l(a_l(j)) g_{a,l}(jT_l - mT_e) \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

et

$$\mathbf{\Gamma}_{k,l}^{(M)} = \begin{pmatrix} \beta_{k,l} & \alpha_l \\ \bar{\alpha}_k & \bar{\beta}_{l,k} \end{pmatrix} \quad (5.2.32)$$

A noter que dans les équations (5.2.31), la dérivée partielle est prise au point  $a_l(j)$ , vraie valeur du symbole  $j$  de la source  $l$ . Soit  $\Theta_{k,l}^{(M)}$  la matrice de covariance du vecteur  $\sqrt{MT_e} \begin{pmatrix} \theta_{k,l} \\ \bar{\theta}_{l,k} \end{pmatrix}$ . En effectuant des calculs relativement longs, on peut montrer que si les débits symboles des différentes sources sont différents, alors,

$$\Theta_{k,l}^{(M)} = \Theta_{k,l} + O\left(\frac{1}{M}\right) \quad (5.2.33)$$

$$\mathbf{\Gamma}_{k,l}^{(M)} = \mathbf{\Gamma}_{k,l} + O\left(\frac{1}{M}\right) \quad (5.2.34)$$

et

$$\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} \overline{\Delta}_{l,k} \\ \Delta_{k,l} \end{pmatrix} (\Delta_{l,k} \overline{\Delta}_{k,l}) \right] = \frac{1}{MT_e} (\mathbf{\Gamma}_{k,l})^{-1} \mathbf{\Theta}_{k,l} (\mathbf{\Gamma}_{k,l})^{-H} + O\left(\frac{1}{M^2}\right) \quad (5.2.35)$$

les matrices  $\mathbf{\Gamma}_{k,l}$  et  $\mathbf{\Theta}_{k,l}$  étant données par

$$\mathbf{\Gamma}_{k,l} = \begin{pmatrix} \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \phi_l}{\partial \bar{a}} \right] \frac{c_{k,l}}{T_l} & \mathbb{E}[a_l(j) \phi_l(a_l(j))] \\ \mathbb{E}[a_k(j) \phi_k(a_k(j))] & \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \phi_k}{\partial \bar{a}} \right] \frac{c_{l,k}}{T_k} \end{pmatrix} \quad (5.2.36)$$

$$\mathbf{\Theta}_{k,l} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}|\phi_l(a_l(j))|^2 \frac{c_{k,l}}{T_l} & \mathbb{E}[a_l(j) \phi_l(a_l(j))] \mathbb{E}[a_k(j) \phi_k(a_k(j))] d_{k,l} \\ \mathbb{E}[a_l(j) \phi_l(a_l(j))] \mathbb{E}[a_k(j) \phi_k(a_k(j))] d_{k,l} & \mathbb{E}|\phi_k(a_k(j))|^2 \frac{c_{l,k}}{T_l} \end{pmatrix} \quad (5.2.37)$$

avec

$$\begin{aligned} c_{k,l} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{h}_{a,k}(\nu)|^2}{T_k} \frac{|\hat{g}_{a,l}(\nu)|^2}{T_l} d\nu \\ d_{k,l} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}_{a,k}(\nu) \hat{g}_{a,k}(\nu)}{T_k} \frac{\hat{h}_{a,l}(\nu) \hat{g}_{a,l}(\nu)}{T_l} d\nu \\ c_{l,k} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{h}_{a,l}(\nu)|^2}{T_l} \frac{|\hat{g}_{a,k}(\nu)|^2}{T_k} d\nu \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

où  $\hat{h}_{a,k}(\nu)$  et  $\hat{g}_{a,k}(\nu)$  représentent les transformées de Fourier des fonctions  $h_{a,k}(t)$  et  $g_{a,k}(t)$ .

Dans le cas où les résidus de porteuse ne sont pas nuls, on peut montrer que les résultats sont exactement les mêmes à condition de remplacer les filtres  $(h_{a,k})_{k=1,\dots,K}$  et  $(g_{a,k})_{k=1,\dots,K}$  par les filtres  $(h_{a,k}^{res})_{k=1,\dots,K}$  et  $(g_{a,k}^{res})_{k=1,\dots,K}$ . Dans le domaine de Fourier, ceci est équivalent à remplacer  $\hat{h}_{a,k}(\nu)$  et  $\hat{g}_{a,k}(\nu)$  par  $\hat{h}_{a,k}(\nu - \Delta f_k)$  et  $\hat{g}_{a,k}(\nu - \Delta f_k)$  pour tout  $k$ . Les valeurs des coefficients  $c_{k,l}$ ,  $d_{k,l}$ ,  $c_{l,k}$  sont donc

$$\begin{aligned} c_{k,l} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{h}_{a,k}(\nu - \Delta f_k)|^2}{T_k} \frac{|\hat{g}_{a,l}(\nu - \Delta f_l)|^2}{T_l} d\nu \\ d_{k,l} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}_{a,k}(\nu - \Delta f_k) \hat{g}_{a,k}(\nu - \Delta f_k)}{T_k} \frac{\hat{h}_{a,l}(\nu - \Delta f_l) \hat{g}_{a,l}(\nu - \Delta f_l)}{T_l} d\nu \\ c_{l,k} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{h}_{a,l}(\nu - \Delta f_l)|^2}{T_l} \frac{|\hat{g}_{a,k}(\nu - \Delta f_k)|^2}{T_k} d\nu \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

Ces expressions montrent que les performances de l'estimateur  $\hat{\mathbf{G}}$  dépendent des fonctions  $\phi_l$  et des filtres égaliseurs  $g_{a,l}$ . La formule (5.2.35) permet donc potentiellement d'étudier l'influence de ces choix sur la qualité du séparateur, et dans l'idéal, de les optimiser. Ce problème ne semble malheureusement pas très facile, et malgré de longs efforts, nous n'avons pas réussi à établir de résultat théorique convaincant en la matière. Rappelons à ce propos que dans le cadre de la séparation de mélanges instantanés de sources i.i.d., [28] a établi que les fonctions  $\phi_l$  permettant d'optimiser les erreurs de reconstruction coïncident avec les fonctions  $\psi_l$  construites à partir des densités de probabilité  $p_l$  des symboles (en fait des échantillons des signaux sources dans le cas i.i.d.). Cependant, les arguments utilisés dans [28] ne peuvent être adaptés ici compte tenu de la plus grande complexité du problème traité. Nous allons donc nous contenter d'évaluer les variances des diverses erreurs dans certains cas, et de déduire de ces calculs une meilleure intuition sur le potentiel de l'approche. Nous allons nous placer a priori dans le cas où les résidus de porteuse sont tous nuls, ce qui correspond au cas où l'interférence est maximale.

Nous supposons à partir de maintenant que les filtres de mise en forme  $h_{a,k}(t)$  sont des filtres en “racine de cosinus surélevés” d’excès de bande  $\gamma_k$ , c’est-à-dire que leurs transformées de Fourier  $\hat{h}_{a,k}(\nu)$  sont données par

$$\hat{h}_{a,k}(\nu) = \begin{cases} T_k, & |\nu| \leq \frac{1-\gamma_k}{2T_k} \\ T_k \cos\left(\frac{\pi T_k}{2\gamma_k}\left(|\nu| - \frac{1-\gamma_k}{2T_k}\right)\right), & \frac{1-\gamma_k}{2T_k} \leq |\nu| \leq \frac{1+\gamma_k}{2T_k} \\ 0, & |\nu| \geq \frac{1+\gamma_k}{2T_k} \end{cases} \quad (5.2.40)$$

et que les égaliseurs  $g_{a,k}(t)$  sont les filtres adaptés aux  $h_{a,k}(t)$ , i.e.

$$g_{a,k}(t) = (h_{a,k}(-t))^*$$

Cette hypothèse n’est pas totalement déraisonnable car nous avons constaté expérimentalement que l’algorithme du CMA fractionnaire appliqué à un signal dont le filtre de mise en forme est donné par (5.2.40) a tendance à produire un égaliseur très proche du filtre adapté. Cette condition implique que les coefficients  $c_{k,l}, c_{l,k}, d_{k,l}$  sont égaux. Par ailleurs, nous allons considérer le cas où toutes les suites de symboles transmis sont de modules constants, c’est-à-dire que  $|a_k(j)| = 1$  pour tous  $k$  et  $j$ . Enfin, nous supposons que les fonctions  $\phi_l(a)$  sont toutes données par  $\phi_l(a) = p|a|^{2(p-1)}\bar{a}$  où  $p$  est un entier.

Nous supposons dans un premier temps que

$$\frac{1 + \gamma_k}{2T_k} < \frac{1 - \gamma_l}{2T_l} \quad (5.2.41)$$

ce qui implique évidemment que la source  $k$  a une bande passante plus faible que la source  $l$ . Cette condition est particulièrement agréable car elle implique que

$$c_{k,l} = c_{l,k} = d_{k,l} = T_l$$

Un calcul immédiat donne

$$\mathbb{E}(|\Delta_{k,l}|^2) = \frac{T_l}{MT_e} \frac{(p-1)^2}{(1-p^2\frac{T_l}{T_k})^2} \quad (5.2.42)$$

$$\mathbb{E}(|\Delta_{l,k}|^2) = \frac{T_l}{MT_e} \frac{(1-p\frac{T_l}{T_k})^2}{(1-p^2\frac{T_l}{T_k})^2} \quad (5.2.43)$$

Ces formules donnent quelques informations intéressantes sur le comportement de l’algorithme. On constate tout d’abord que le dénominateur de (5.2.42, 5.2.43) peut s’annuler. En pratique, ceci signifie que l’estimateur n’est plus consistant si  $p^2\frac{T_l}{T_k} = 1$ .

**Etude du cas  $p = 1$ .** Le cas où  $p = 1$  est tout à fait spécifique puisque on trouve que si  $T_k \neq T_l$ ,  $\mathbb{E}(|\Delta_{k,l}|^2) = 0$  et que  $\mathbb{E}(|\Delta_{l,k}|^2) = \frac{T_l}{MT_e}$ . En d’autres termes, l’estimateur permet d’éliminer la contribution de la source de bande la plus large dans l’estimée de la source de bande la plus petite, qui se trouve donc restituée de façon optimale. Si la condition (5.2.41) n’est pas vérifiée, les calculs sont plus compliqués, et ne sont pas consignés. Nous nous contentons de représenter sur la figure 5.1 les quantités  $M\frac{T_e}{T_l}\mathbb{E}|\Delta_{k,l}|^2$ ,  $M\frac{T_e}{T_l}\mathbb{E}|\Delta_{l,k}|^2$  et leur somme en fonction de  $\frac{T_l}{T_k}$  dans le cas où  $\gamma_k = \gamma_l = \gamma = 0.5$  et où  $p = 1$ . La condition (5.2.41) est alors équivalente à  $\frac{T_l}{T_k} < \frac{1}{3}$ , mais on peut constater que numériquement,  $M\frac{T_e}{T_l}\mathbb{E}|\Delta_{k,l}|^2$ ,

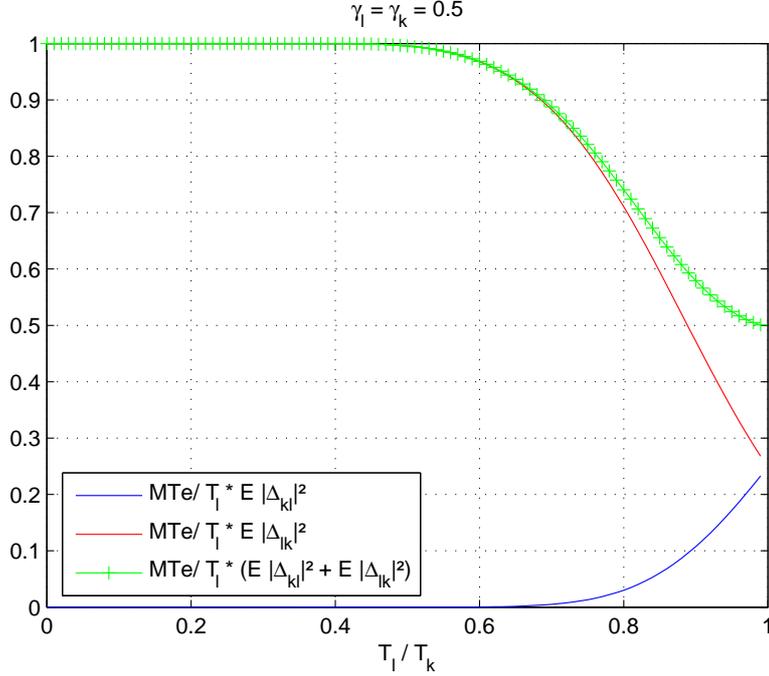


FIG. 5.1 – Evaluation de  $M_{T_l}^{T_e} \mathbb{E}|\Delta_{k,l}|^2$ ,  $M_{T_l}^{T_e} \mathbb{E}|\Delta_{l,k}|^2$  en fonction de  $\frac{T_l}{T_k}$

$M_{T_l}^{T_e} \mathbb{E}|\Delta_{l,k}|^2$  sont numériquement égaux à 0 et 1 jusqu'à  $\frac{T_l}{T_k} < \frac{1}{2}$  environ. Le point le plus notable est que la somme des covariances des erreurs n'est pas minimale dans le cas où la source de bande passante la plus faible est parfaitement restituée.

Il est intéressant de remarquer que si l'on considère un modèle de mélange dans lequel la source  $k$  est observée, i.e.

$$\begin{aligned} y_k(m) &= r_k(m) \\ y_l(m) &= r_l(m) + \alpha_{l,k} r_k(m) \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

alors l'estimateur naturel de  $\hat{\alpha}_{l,k}$  défini par

$$\hat{\alpha}_{l,k} = \frac{\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} y_l(m) y_k(m)^*}{\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |y_k(m)|^2}$$

possède une covariance asymptotique  $\mathbb{E}|\hat{\alpha}_{l,k} - \alpha_{k,l}|^2$  donnée par

$$\mathbb{E}|\hat{\alpha}_{l,k} - \alpha_{k,l}|^2 = \frac{c_{k,l}}{MT_e}$$

Si la condition (5.2.41) est vérifiée,  $c_{k,l} = T_l$ , et on trouve que  $\mathbb{E}(|\Delta_{l,k}|^2) = \mathbb{E}|\hat{\alpha}_{l,k} - \alpha_{k,l}|^2 = \frac{T_l}{MT_e}$ . En d'autres termes, la variance sur l'estimée de la source  $l$  fournie par la technique de séparation de sources proposée est exactement la même que si on observait parfaitement la source  $k$ . Si la condition (5.2.41) n'est pas vérifiée, il est intéressant de comparer  $\mathbb{E}|\hat{\alpha}_{l,k} - \alpha_{k,l}|^2$  avec la somme  $\mathbb{E}(|\Delta_{k,l}|^2) + \mathbb{E}(|\Delta_{l,k}|^2)$ . La figure 5.2 présente cette comparaison qui démontre que l'algorithme de séparation de sources tend à produire globalement de

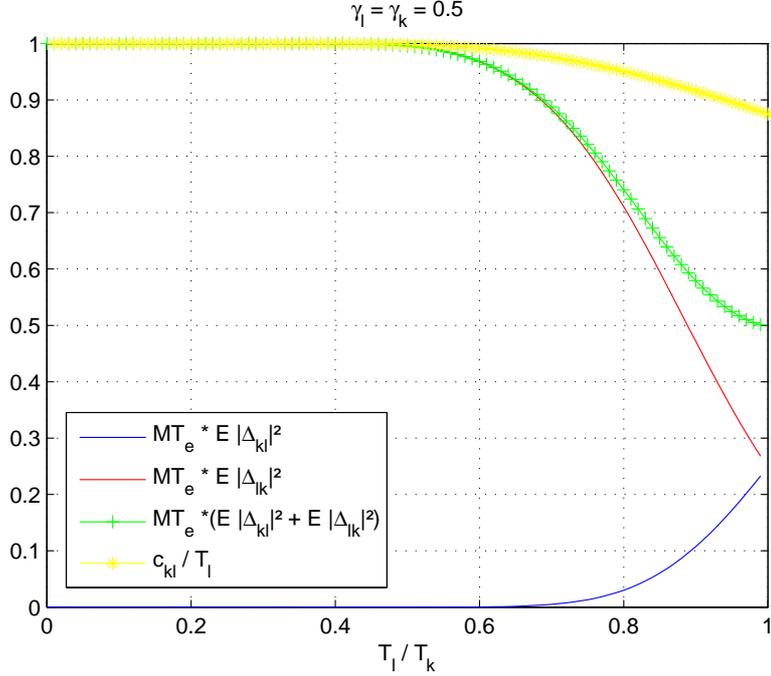


FIG. 5.2 – Evaluation de  $M \frac{T_e}{T_l} \mathbb{E}|\hat{\alpha}_{l,k} - \alpha_{k,l}|^2$ , en fonction de  $\frac{T_l}{T_k}$  et comparaison avec  $M \frac{T_e}{T_l} \mathbb{E}|\Delta_{k,l}|^2 + M \frac{T_e}{T_l} \mathbb{E}|\Delta_{l,k}|^2$  en fonction de  $\frac{T_l}{T_k}$

meilleurs résultats que dans le cas où la source  $k$  est observée. Ceci tend à montrer qu'il est plus aisé de séparer des mélanges où les 2 sources sont effectivement mélangées.

Nous allons maintenant montrer que ces résultats purement asymptotiques reflètent bien la réalité. Nous considérons le scénario suivant. Nous considérons  $K = 3$  sources QAM-4 ayant tout d'abord les périodes symboles :  $T_1 = 3.6\mu s$ ,  $T_2 = 3.5T_1$ ,  $T_3 = 1.1T_1$  et le même excès de bande :  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma = 0.5$ . On considère une période d'échantillonnage  $Te = T_1/1.6$  et des trames de  $M = 1601$  échantillons. Le mélange des 3 signaux sources est instantané, et correspond donc à un scénario de propagation mono-trajet. L'objet de l'expérimentation qui suit est de valider les expressions des covariances asymptotiques (5.2.42, 5.2.43) par simulation de Monte-Carlo en évaluant numériquement sur chaque réalisation de l'algorithme les quantités  $\Delta_{k,l}$  pour  $k \neq l$ , et en évaluant leurs variances en calculant les moyennes des  $|\Delta_{k,l}|^2$  sur les différentes réalisations de l'algorithme. Afin que les résultats aient un sens, la matrice de mélange reste évidemment identique d'une réalisation à l'autre. Nous donnons ci-dessous les variances théoriques et les variances empiriques des différentes variables aléatoires  $\Delta_{k,l}$  pour  $k \neq l$ .

On note

$$\epsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_{lk} \\ \Delta_{kl} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\epsilon_{kl}\epsilon_{kl}^H] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(|\Delta_{lk}|^2) & \mathbb{E}(\bar{\Delta}_{lk}\bar{\Delta}_{kl}) \\ \mathbb{E}(\Delta_{kl}\Delta_{lk}) & \mathbb{E}(|\Delta_{kl}|^2) \end{pmatrix}$$

Pour les sources  $l = 1$  et  $k = 2$ ,  $\frac{T_1}{T_2} = 0.2857$  de sorte que la condition (5.2.41) est ici vérifiée.

**Valeurs théoriques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{21}\epsilon_{21}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.9994 + 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i \\ -0.0000 + 0.0000i & 0.0000 + 0.0000i \end{pmatrix}$$

**Valeurs pratiques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{21}\epsilon_{21}^H] = \begin{pmatrix} 0.0010 & 0.0000 + 0.0000i \\ 0.0000 - 0.0000i & 0.0000 \end{pmatrix}$$

On constate donc que la variance empirique de  $\Delta_{21}$  est numériquement nulle comme les calculs asymptotiques le laissaient entrevoir.

Pour les sources  $l = 1$  et  $k = 3$ ,  $\frac{T_1}{T_3} = 0.9091$  et la condition (5.2.41) n'est cette fois pas vérifiée.

**Valeurs théoriques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{31}\epsilon_{31}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.4490 - 0.0000i & 0.2301 + 0.0000i \\ 0.2301 + 0.0000i & 0.1180 - 0.0000i \end{pmatrix}$$

**Valeurs pratiques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{31}\epsilon_{31}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.4447 & 0.2305 + 0.0000i \\ 0.2305 - 0.0000i & 0.1202 \end{pmatrix}$$

Pour les sources  $l = 3$  et  $k = 2$ ,  $\frac{T_3}{T_2} = 0.3143$  et la condition (5.2.41) est vérifiée .

**Valeurs théoriques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{32}\epsilon_{32}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.0000 + 0.0000i & 0.0000 + 0.0000i \\ 0.0000 - 0.0000i & 1.1 + 0.0000i \end{pmatrix}$$

**Valeurs pratiques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{32}\epsilon_{32}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 - 0.0000i \\ 0.0000 + 0.0000i & 1.1 \end{pmatrix}$$

On retrouve de nouveau que la variance empirique de  $\Delta_{23}$  est numériquement nulle.

Nous considérons ensuite le cas de 3 sources QAM-4 dont les périodes symboles sont  $T_1 = 3.6\mu s$ ,  $T_2 = 2.5T_1$ ,  $T_3 = 1.1T_1$ , les autres paramètres restant identiques.

Pour les sources  $l = 1$  et  $k = 2$ ,  $\frac{T_1}{T_2} = 0.4000$ . La condition (5.2.41) n'est en principe pas vérifiée, mais la variance asymptotique de  $\Delta_{21}$  est très faible.

**Valeurs théoriques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{21}\epsilon_{21}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.9993 + 0.0000i & -0.0001 - 0.0000i \\ -0.0001 + 0.0000i & 0.0000 - 0.0000i \end{pmatrix}$$

**Valeurs pratiques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{21}\epsilon_{21}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0.0000 - 0.0000i \\ 0.0000 + 0.0000i & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Pour les sources  $l = 1$  et  $k = 3$ ,  $\frac{T_1}{T_3} = 0.9091$ .

**Valeurs théoriques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{31}\epsilon_{31}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.4490 - 0.0000i & 0.2301 + 0.0000i \\ 0.2301 + 0.0000i & 0.1180 - 0.0000i \end{pmatrix}$$

**Valeurs pratiques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{31}\epsilon_{31}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.4391 & 0.2276 + 0.0000i \\ 0.2276 - 0.0000i & 0.1187 \end{pmatrix}$$

Pour les sources  $l = 3$  et  $k = 2$ ,  $\frac{T_3}{T_2} = 0.4400$ .

**Valeurs théoriques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{32}\epsilon_{32}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.0000 + 0.0000i & 0.0000 - 0.0000i \\ 0.0000 + 0.0000i & 1.1 + 0.0000i \end{pmatrix}$$

**Valeurs pratiques :**

$$\mathbb{E}[\epsilon_{32}\epsilon_{32}^H] = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 - 0.0000i \\ 0.0000 + 0.0000i & 1.1 \end{pmatrix}$$

### 5.3 Généralisation au cas des mélanges convolutifs de sources de périodes symbole et de résidus de porteuses connus.

Nous supposons toujours que les sources sont des modulations linéaires dont les suites de symboles sont circulaires à l'ordre 2. Dans le cas où le mélange des signaux est convolutif, la matrice  $\mathbf{H}$  de l'équation (5.1.1) est remplacée par une fonction de transfert  $\mathbf{H}(z)$ . Nous avons pu généraliser les résultats obtenus dans le cas instantané en formulant le problème de la séparation comme l'estimation au sens du maximum de vraisemblance de l'inverse  $\mathbf{G}(z)$  de  $\mathbf{H}(z)$ . Il est pertinent d'estimer  $\mathbf{G}(z)$  par le filtre  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  solution de l'équation

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_k(m+n) \sum_j \phi_l(\hat{a}_l(j)) g_{a,l}(jT_l - mT_e) = 0 \quad (5.3.45)$$

pour tout  $n \in \{-P, \dots, 0, \dots, P\}$  où  $P$  est un entier, où  $\hat{\mathbf{r}}(m) = [\hat{\mathbf{G}}(z)]\mathbf{y}(m)$  est le signal reconstruit (par filtrage inverse dans le contexte convolutif) et où  $\hat{a}_l(j)$  représente l'estimateur du symbole  $a_l(j)$  défini par

$$\hat{a}_l(j) = \frac{T_e}{T_l} e^{-2i\pi j \Delta f_l T_l} \sum_{n=0}^{M-1} g_{a,l}(jT_l - nT_e) \hat{r}_l(n) \quad (5.3.46)$$

Les fonctions  $g_{a,l}(t)$  se définissent comme dans le cas instantané, et peuvent être en pratique estimées en déterminant des égaliseurs aveugles grâce aux sorties d'un séparateur

initial  $\hat{\mathbf{G}}_{init}(z)$ . Il nous semble inutile de justifier l'équation (5.3.45) qui se met en évidence en effectuant des calculs assez similaires à ceux du cas instantané, au moins formellement.

En pratique, les équations (5.3.45) peuvent être résolues en cherchant ses solutions sous la forme

$$\hat{\mathbf{G}}(z) = \hat{\mathbf{G}}_{init}(z) + \mathbf{\Delta}(z)\hat{\mathbf{G}}_{init}(z)$$

où  $\mathbf{\Delta}(z) = \sum_{l=-P}^P \mathbf{\Delta}(l)z^{-l}$  est un filtre à réponse impulsionnelle finie dont les coefficients sont censés être des termes du premier ordre. En effectuant un développement limité au premier ordre des équations (5.3.45) au voisinage de  $\hat{\mathbf{G}}_{init}(z)$ , on montre que pour tout  $(k_1, k_2)$ ,  $1 \leq k_1 < k_2 \leq K$ , le vecteur  $\delta_{k_1, k_2}$  dont les composantes sont les coefficients  $\mathbf{\Delta}(l)_{k_1, k_2}, \overline{\mathbf{\Delta}}(l)_{k_2, k_1}$  pour  $l = -P, \dots, P$  est solution d'un système linéaire de  $2(2P + 1)$  équations à  $2(2P + 1)$  inconnues. La détermination de la matrice  $\mathbf{\Delta}$  nécessite donc la résolution de  $K(K - 1)/2$  systèmes linéaires de ce type dont omettons les expressions.

## 5.4 Complexité de l'estimateur et résultats.

### 5.4.1 Complexité

L'analyse de complexité de l'estimateur proposé nécessite essentiellement l'évaluation des éléments des matrices  $2 \times 2 \hat{\mathbf{G}}_{init, k, l}$  et les composantes des vecteurs du second membre des équations (5.1.26) pour  $k < l$ . Ces évaluations nécessitent de disposer d'un estimateur des égaliseurs à temps continu  $g_{a, l}(t)$  pour tout  $l = 1, \dots, K$ .

**Étape 1 : Estimation de l'égaliseur à temps continu  $g_{a, l}(t)$ .** Pour cela, on utilise l'étape de séparation initiale par CMA qui permet de générer le signal  $(\hat{r}_{init, l}(m))_{m=0, \dots, M-1}$  qui est un estimateur de  $s_l$ . Ce signal est ensuite re-échantillonné à la période  $T_l/2$  grâce à un interpolateur implémentant une formule du type

$$\hat{r}_{init, a, l}(nT_l/2) = \sum_n \hat{r}_{init, l}(m)k_{a, l}(nT_l/2 - mT_e)$$

où  $k_{a, l}(t)$  est un filtre de mise en forme bien choisi dont la réponse impulsionnelle est à support fini inclus dans l'intervalle  $[-L_{int}T_e, L_{int}T_e]$ . Dans ces conditions, l'évaluation de chaque échantillon  $\hat{r}_{init, a, l}(nT_l/2)$  nécessite environ  $2L_{int} + 1$  opérations, de sorte que la génération du signal re-échantillonné à  $T_l/2$  a un coût calcul aux alentours de  $2\frac{T_l}{T_e}(2L_{int} + 1)M$ . Un algorithme d'égalisation aveugle de type CMA fractionnaire est ensuite appliqué au signal re-échantillonné. Le coût calcul du CMA fractionnaire est identique à celui d'un CMA extrayant une source à partir de 2 antennes, soit environ  $2N_{IT}(2L + 1)M$  où  $2L + 1$  est le nombre de coefficients de l'égaliseur et où  $N_{IT}$  est le nombre d'itérations du CMA. Cet algorithme permet d'estimer les valeurs  $g_{a, l}(kT_l/2)$ , puis enfin les valeurs  $g_{a, l}(jT_l - mT_e)$  grâce à un interpolateur pour chaque valeur du couple  $(j, m)$  pour laquelle  $g_{a, l}(jT_l - mT_e) \neq 0$ . Le support de l'égaliseur  $g_{a, l}(t)$  est un intervalle de largeur  $2LT_l$  de sorte qu'il convient de calculer environ  $M(2L + 1)$  échantillons  $g_{a, l}(jT_l - mT_e)$  a priori non nuls.

Ordre de grandeur pour la première étape :  $KM(4L_{int} \max_l T_l T_e + 2L + 4N_{IT}L)$

**Étape 2 : Calcul des coefficients des systèmes (5.1.26).** Afin d'évaluer la complexité nécessaire à l'évaluation des coefficients  $\hat{\alpha}_{init, l}, \hat{\theta}_{init, k, l}, \hat{\beta}_{init, k, l}$ , il convient d'utiliser

le fait que le support de chaque égaliseur  $g_{a,l}(t)$  est inclus dans un intervalle dont la taille est inférieure à  $2LT_l$ . Afin de comprendre comment cette observation peut être utilisée, commençons par traiter  $\hat{\alpha}_{init,l}$  que l'on peut également écrire sous la forme

$$\hat{\alpha}_{init,l} = \sum_j \phi_l(\hat{\alpha}_{init,l}(j)) \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_{init,l}(m) g_{a,l}(jT_l - mT_e)$$

Pour chaque valeur de  $j$ , la somme  $\sum_{m=0}^{M-1} \hat{r}_{init,l}(m) g_{a,l}(jT_l - mT_e)$  est en réalité une somme sur les indices  $m$  pour lesquels  $|jT_l - mT_e| \leq LT_l$ , c'est-à-dire environ  $(2L+1)\frac{T_l}{T_e}$  termes. Dans ces conditions, l'évaluation de  $\hat{\alpha}_{init,l}$  nécessite de l'ordre de  $2LM$  opérations auxquelles il convient d'ajouter le coût nécessaire au calcul des estimées  $\hat{\alpha}_{init,l}(j)$  pour chaque  $j = 1, \dots, M\frac{T_e}{T_l}$ , qui par le même raisonnement nécessite aussi  $2LM$  opérations. Par conséquent, le calcul de  $\hat{\alpha}_{init,l}$  coûte de l'ordre de  $4LM$  opérations, de même que celui de  $\hat{\theta}_{init,k,l}$ .

Terminons enfin par le coefficient  $\hat{\beta}_{init,k,l}$ , que l'on peut écrire sous la forme

$$\hat{\beta}_{init,k,l} = \frac{T_e}{T_l} \sum_j \frac{\partial \phi_l}{\partial \bar{a}} \frac{1}{M} \sum_{(m,n)=0}^{M-1} \hat{r}_{init,k}(m) \bar{r}_{init,k}(n) g_{a,l}(jT_l - mT_e) \overline{g_{a,l}(jT_l - nT_e)}$$

Pour chaque  $j$  fixé, la double somme  $\sum_{(m,n)=0}^{M-1} \hat{r}_{init,k}(m) \bar{r}_{init,k}(n) g_{a,l}(jT_l - mT_e) \overline{g_{a,l}(jT_l - nT_e)}$  est en fait une somme sur environ  $\left((2L+1)\frac{T_l}{T_e}\right)^2$  termes. Par conséquent, l'évaluation de  $\hat{\beta}_{init,k,l}$  nécessite de l'ordre de  $4L^2\frac{T_l}{T_e}M$  opérations, auxquelles il convient d'ajouter l'évaluation des dérivées partielles qui coutent  $2LM$  opérations (comme le calcul des estimateurs  $\hat{\alpha}_{init,l}(j)$ ). Au total, le calcul de  $\hat{\beta}_{init,k,l}$  coûte de l'ordre de  $(4L^2\frac{T_l}{T_e} + 2L)M$  opérations.

Ordre de grandeur pour la deuxième étape :  $K^2M(4L + 4L^2 \max_l T_l T_e)$

**Conclusion sur la complexité de l'algorithme.** Les termes prépondérants donnent donc un nombre d'opération dont l'ordre de grandeur est  $KM \left(4KL^2 \max_l \frac{T_l}{T_e} + 4N_{IT}L\right)$  où  $2LT_l$  représente la taille du support de l'égaliseur et  $N_{IT}$  le nombre d'itération de l'algorithme du CMA fractionnaire destiné à évaluer les égaliseurs  $g_{a,l}(t)$ . Si on prend par exemple  $L = 8$  et  $N_{IT} = 30$  comme dans le contexte du CMA, et que  $\max_l \frac{T_l}{T_e} = 4$ , on aboutit à un nombre d'opérations de l'ordre de  $KM(1024K+960) \simeq 1000K^2M+1000KM$ , ce qui est de l'ordre de grandeur du coût du CMA et de sa procédure de déflation. L'utilisation de cette technique conduit donc à doubler la complexité de l'approche initiale.

### 5.4.2 Résultats expérimentaux.

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats de simulation permettant d'évaluer le potentiel des algorithmes présentés plus haut. Dans toutes les expériences réalisées, le nombre de sources et le nombre de capteurs sont égaux à 3, et les sources sont de même puissance.

Nous commençons par évaluer les performances des algorithmes basés sur les estimateurs de maximum de vraisemblance dans le cas d'un mélange instantané de 3 sources circulaires, modulés linéairement (QAM4) de périodes symboles  $T_1 = 3, 4\mu$  sec,  $T_2 = 3, 6\mu$

sec et  $T_1 = 3,9\mu$  sec et d'excès de bande  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,5$ . Les fonctions  $\phi$  sont toutes égales à  $\phi_l(a) = \bar{a}|a|^2$  et les filtres  $g_{a,l}(t)$  ont été estimés en appliquant des égaliseurs aveugles aux sorties du séparateur initial correspondant à l'algorithme du module constant utilisé avec une procédure de déflation. La période d'échantillonnage est égale à  $T_e = \frac{3,6}{1,6}\mu$  sec. et les durées d'observation correspondent à 200 symboles et 500 symboles pour la source de période symbole  $3,6\mu$  sec. Dans chaque cas, nous avons calculé le gain moyen sur le SINR (en décibels) produit par le nouvel algorithme par rapport à l'algorithme du CMA. Nous présentons ces résultats dans le tableau (5.1). Dans chaque configuration, l'algorithme à été réalisé 1000 fois.

<b>200 symboles</b>	Source no 1	Source no 2	Source no 3
Gain(dB) sans bruit	<b>1.3806</b>	<b>1.3383</b>	<b>0.8639</b>
Gain(dB) bruit 20dB	<b>0.1429</b>	<b>0.0993</b>	<b>0.0744</b>
Gain(dB) bruit 15dB	<b>0.0554</b>	<b>0.0572</b>	<b>0.0545</b>
Gain(dB) bruit 10dB	<b>0.0268</b>	<b>0.0245</b>	<b>0.0174</b>
<b>500 symboles</b>	Source no 1	Source no 2	Source no 3
Gain(dB) sans bruit	<b>2.2217</b>	<b>2.0376</b>	<b>1.2333</b>
Gain(dB) bruit 20dB	<b>0.1001</b>	<b>0.0792</b>	<b>0.0585</b>
Gain(dB) bruit 15dB	<b>0.0221</b>	<b>0.0207</b>	<b>-0.0034</b>
Gain(dB) bruit 10dB	<b>0.0010</b>	<b>-0.0174</b>	<b>-0.0198</b>

TAB. 5.1 – Gain moyen sur le *SINR* produit par le nouvel algorithme par rapport à l'algorithme du CMA

On peut constater que si les gains produits par le nouvel algorithme sont significatifs dans le cas non bruité, une très nette dégradation apparaît en présence d'un bruit même limité. Le nouvel algorithme apporte donc des améliorations notables par rapport à l'algorithme du CMA uniquement dans le cas de mélanges instantanés non bruités.

Dans la suite, nous allons nous attacher à comparer les 2 approches dans les contextes plus réalistes d'un mélange instantané bruité et d'un mélange convolutif de signaux. De plus, nous allons considérer des algorithmes correspondant aux fonctions  $\phi_l(a) = \bar{a}|a|^2$  ( $p = 2$ ) et  $\phi_l(a) = \bar{a}$  ( $p = 1$ ) pour tout  $l$ .

**Cas d'un mélange instantané.** Nous étudions le cas où le mélange est instantané, ce qui correspond à un scénario de propagation mono-trajet. Sur chaque réalisation de l'algorithme, l'amplitude complexe du trajet et ses angles d'arrivées sont tirés aléatoirement, de sorte que la matrice de mélange est modifiée d'un tirage à l'autre. Remarquons que dans les résultats qui suivent, le filtre de mise en forme n'est pas supposé connu a priori, et est estimé à partir des signaux produits par le séparateur initial.

Nous considérons tout d'abord un mélange d'une source QAM16 et de deux sources QAM4. Comme de coutume, le rapport signal sur bruit est choisi de telle sorte que le taux d'erreur symbole associé au signal QAM16 sur un canal gaussien mono-antenne soit égal à  $10^{-3}$ , ce qui correspond à un rapport signal sur bruit de  $17.6dB$ . Les périodes symboles sont données par  $T_1 = 3.4\mu s$ ,  $T_2 = 3.6\mu s$ ,  $T_3 = 3.9\mu s$ , et les résidus de porteuse sont nuls. Les différents algorithmes de séparation opèrent sur des trames de 1000 symboles. Nous

évaluons le pourcentage de réalisations pour lesquelles le taux d'erreur sur la trame est inférieur à  $10^{-2}$ , et donnons également le taux d'erreur moyen évalué uniquement sur les réalisations sur lesquelles le taux d'erreur est inférieur à  $10^{-1}$  afin d'éviter de prendre en compte des situations dans lesquelles la séparation initiale n'a pas fonctionné. Les résultats sont donnés dans les tableaux 5.2(a) et 5.2(b)

TAB. 5.2 – Mélange d'une source QAM 16 et deux sources QAM 4 de périodes symboles différentes, et résidus de porteuse nuls

(a) Pourcentage de cas où les taux d'erreur sont inférieurs à  $< 10^{-2}$

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ $\delta f_1 = \delta f_2 = \delta f_3 = 0$		
<b>CAS</b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	44.1%	91.9%	92.8%
<b>p=2</b>	50.7%	92.2%	92.5%
<b>p=1</b>	41.6%	92%	92.5%

(b) Moyenne des taux d'erreur inférieurs à  $10^{-1}$

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ $\delta f_1 = \delta f_2 = \delta f_3 = 0$		
<b>CAS</b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	0.0180	0.0020	0.0017
<b>p=2</b>	0.0158	0.0023	0.0023
<b>p=1</b>	0.0191	0.0020	0.0018

Nous considérons à présent le même scénario, mais dans lequel les résidus de porteuse sont non-nuls, tirés aléatoirement, et connus du récepteur ; ceci se traduit par le fait que les estimées des symboles (5.3.46) sont corrigés par le terme  $e^{-2i\pi j \Delta f_i T_i}$  (tableaux 5.3(a) et 5.3(b)).

Afin d'évaluer l'importance de la connaissance a priori du résidu de porteuse, nous considérons le même scénario, mais dans le cas où les résidus de porteuse sont inconnus. Ceci se traduit par le fait que les estimateurs des symboles (5.3.46) ne sont pas corrigés par les termes  $e^{-2i\pi j \Delta f_i T_i}$  (tableaux 5.4(a) et 5.4(b)). On peut constater que les performances sont du même ordre de grandeur (pas exactement identiques car les données, canaux, et résidus de porteuse ne sont pas identiques) ; il semble donc que la connaissance des résidus de porteuse ne soit en fait pas réellement nécessaire.

Nous considérons à présent le cas où les périodes symboles coïncident et où les résidus de porteuse sont nuls (tableaux 5.5(a), 5.5(b)).

Les tableaux correspondants aux contextes d'un canal mono-trajet permettent d'observer que le nouvel algorithme fonctionne mieux pour  $p = 2$  que pour  $p = 1$ , et qu'il permet d'améliorer quelque peu les taux d'erreur de la source QAM16 par rapport au CMA. Il n'y a pas de différence très sensible sur les sources QAM4. Ceci est peut-être lié au bon fonctionnement global du CMA sur des signaux modulés linéairement par des symboles de module constant, observation déjà formulée dans des rapports précédents.

TAB. 5.3 – Mélange d’une source QAM 16 et deux sources QAM 4 de périodes symboles différentes et résidus de porteuse différents et connus

(a) Pourcentage de cas où les taux d’erreur sont inférieurs à  $< 10^{-2}$ 

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
<b>CAS</b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	43.9%	92.6%	93.4%
<b>p=2</b>	49%	92.6%	93.3%
<b>p=1</b>	40.8%	92.7%	93.3%

(b) Moyenne des taux d’erreur inférieurs à  $10^{-1}$ 

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
<b>CAS</b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	0.0180	0.0014	0.0017
<b>p=2</b>	0.0166	0.0015	0.0017
<b>p=1</b>	0.0192	0.0014	0.0017

TAB. 5.4 – Mélange d’une source QAM 16 et deux sources QAM 4 de périodes symboles différentes et résidus de porteuse différents et inconnus

(a) Pourcentage de cas où les taux d’erreur sont inférieurs à  $< 10^{-2}$ 

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
<b>CAS</b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	45.2%	93.1%	93.6%
<b>p=2</b>	51.1%	93%	93.6%
<b>p=1</b>	42.7%	92.8%	93.6%

(b) Moyenne des taux d’erreur inférieurs à  $10^{-1}$ 

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
<b>CAS</b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	0.0173	0.0018	0.0018
<b>p=2</b>	0.0149	0.0018	0.0018
<b>p=1</b>	0.0182	0.0019	0.0018

Nous reprenons les mêmes types de scénarios, mais dans le cas où les 3 sources transmettent des symboles QAM4, donc de modules constants. Dans ce cas, le rapport signal sur bruit est égal à  $10.32dB$ , et permettrait d’assurer un taux d’erreur symbole de  $10^{-3}$  sur un canal gaussien mono-antenne. Nous nous contentons de consigner les résultats quand  $T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ , et lorsque les résidus de porteuse sont nuls. Les résultats sont donnés dans les tableaux 5.6(a) et 5.6(b). Nous pouvons constater cette fois que les algorithmes proposés n’améliorent pas vraiment les performances du CMA, confirmant ainsi les observations effectuées précédemment dans le contexte de 1 source

TAB. 5.5 – Mélange d'une source QAM 16 et deux sources QAM 4 de périodes symboles égales, et résidus de porteuse nuls

(a) Pourcentage de cas où les taux d'erreur sont inférieurs à  $< 10^{-2}$ 

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = T_2 = T_3 = 3.6\mu s$ $\delta f_1 = \delta f_2 = \delta f_3 = 0$		
CAS	16-QAM	4-QAM	4-QAM
CMA	40.2%	93.5%	92.9%
p=2	45.1%	93.8%	93.3%
p=1	37.8%	93.6%	92.9%

(b) Moyenne des taux d'erreur inférieurs à  $10^{-1}$ 

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = T_2 = T_3 = 3.6\mu s$ $\delta f_1 = \delta f_2 = \delta f_3 = 0$		
CAS	16-QAM	4-QAM	4-QAM
CMA	0.0188	0.0016	0.0021
p=2	0.0178	0.0018	0.0020
p=1	0.0199	0.0016	0.0021

QAM16 et 2 sources QAM4.

TAB. 5.6 – Mélange de 3 sources QAM4, périodes symboles différentes, résidus de porteuse nuls

(a) Pourcentage de cas où les taux d'erreur sont inférieurs à  $< 10^{-2}$ 

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ $\delta f_1 = \delta f_2 = \delta f_3 = 0$		
CAS	4-QAM	4-QAM	4-QAM
CMA	79.5%	81.1%	83.6%
p=2	79.7%	81.1%	84.6%
p=1	79.1%	80.9%	83.7%

(b) Moyenne des taux d'erreur inférieurs à  $10^{-1}$ 

<b>1000 symboles</b>	$T_1 = 3.4\mu s, T_2 = 3.6\mu s, T_3 = 3.9\mu s$ $\delta f_1 = \delta f_2 = \delta f_3 = 0$		
CAS	4-QAM	4-QAM	4-QAM
CMA	0.0074	0.0059	0.0055
p=2	0.0076	0.0061	0.0056
p=1	0.0073	0.0061	0.0057

Nous donnons à présent des résultats obtenus dans le cas du canal RAX qui est assez proche d'un canal sans mémoire (tableaux 5.7(a) et 5.7(b)). La séparation initiale est effectuée par des filtres ayant 17 coefficients mais la fonction de transfert  $\Delta(z)$  est modélisée par une matrice constante. Les sources sont constituées d'une modulation QAM16 et de 2 modulations QAM4, scénario qui avait été plutôt favorable aux algorithmes pro-

posés. Cependant, les résultats ne font pas apparaître d'amélioration par rapport au CMA.

TAB. 5.7 – Mélange d'une source QAM 16 et 2 sources QAM4 sur les canaux RAx

(a) Pourcentage de cas où les taux d'erreur sont inférieurs à  $< 10^{-2}$

<b>2000 symboles</b>	$T_1 = T_2 = T_3 = 3.6\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
CAS : RAx	16-QAM	4-QAM	4-QAM
CMA	30.58%	91.76%	93.82%
p=2	27.64%	91.61%	94.11%

(b) Moyenne des taux d'erreur inférieurs à  $10^{-1}$

<b>2000 symboles</b>	$T_1 = T_2 = T_3 = 3.6\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
CAS : RAx	16-QAM	4-QAM	4-QAM
CMA	0.0237	0.0016	0.0011
p=2	0.0261	0.0016	0.0011

Pour terminer, nous évaluons à présent les algorithmes sur les canaux convolutifs BUx et TUx (tableaux 5.8(a), 5.8(b), 5.8(c), 5.8(d)). Nous proposons de modéliser la fonction de transfert  $\Delta(z)$  soit par un coefficient constant (comme dans le cas d'un mélange instantané) soit comme un filtre à 3 coefficients. Les sources sont toujours constituées de 1 QAM16 et 2 QAM4. Dans l'ensemble, on ne peut observer d'amélioration significative par rapport au CMA sur les 2 types de canaux.

## 5.5 Conclusions sur les algorithmes de séparation dérivant du principe du maximum de vraisemblance.

Les algorithmes que nous venons de décrire ont été développés dans le cas de signaux sources modulés linéairement par des symboles circulaires à l'ordre 2. Les périodes symboles des différentes sources doivent être connues a priori ou alors bien estimées. Si les développements théoriques laissent penser que les résidus de porteuse doivent être accessibles, les simulations ont montré que leur connaissance n'est en fait pas nécessaire. Les nouveaux séparateurs sont en pratique implantés à partir d'un point initial, fourni par exemple par la procédure basée sur l'algorithme du module constant. Dans le cas de mélanges instantanés non bruités, les nouveaux algorithmes permettent indéniablement une amélioration des performances. Par ailleurs, toujours dans ce contexte idéal, quelques propriétés théoriques intéressantes ont été mises en évidence, comme par exemple la possibilité d'estimer dans certains cas la source de bande passante la plus petite avec une erreur de l'ordre de  $O(\frac{1}{M})$  contre  $O(\frac{1}{\sqrt{M}})$  pour les méthodes habituelles. Malgré ces éléments positifs, les algorithmes, testés dans des conditions plus réalistes (présence de bruit et de canaux convolutifs) n'ont fait apparaître, par rapport au CMA d'amélioration notable. La complexité des algorithmes dérivés du principe du maximum de vraisemblance étant par ailleurs du même ordre de grandeur que celle du CMA, nous ne recommandons pas l'utilisation de ce type de méthode de façon systématique. Le formalisme du maximum

TAB. 5.8 – Mélange convolutif

(a) Nombre de fois où le taux d’erreur est  $< 10^{-2}$  sur les canaux  $TU_x$

<b>2000 symboles</b>	$T_1 = T_2 = T_3 = 3.6\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
<b>CAS : <math>TU_x</math></b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	17.09%	94.62%	95.48%
$\Delta 1$	18.27%	94.51%	95.26%
$\Delta 3$	14.40%	94.51%	95.05%

(b) Taux d’erreur moyen sur les réalisations dont le taux d’erreur est  $< 10^{-1}$  sur les canaux  $TU_x$

<b>2000 symboles</b>	$T_1 = T_2 = T_3 = 3.6\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
<b>CAS : <math>TU_x</math></b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	0.0315	0.0017	0.0016
$\Delta 1$	0.0301	0.0018	0.0016
$\Delta 3$	0.0336	0.0018	0.0016

(c) Nombre de fois où le taux d’erreur est  $< 10^{-2}$  sur les canaux  $BU_x$

<b>2000 symboles</b>	$T_1 = T_2 = T_3 = 3.6\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
<b>CAS : <math>BU_x</math></b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	1.2%	88.31%	87.22%
$\Delta 1$	1.3%	87.34%	87.34%
$\Delta 3$	0.96%	87.59%	87.34%

(d) Taux d’erreur moyen sur les réalisations dont le taux d’erreur est  $< 10^{-1}$  sur les canaux  $BU_x$

<b>2000 symboles</b>	$T_1 = T_2 = T_3 = 3.6\mu s$ $\delta f_1 \neq \delta f_2 \neq \delta f_3$		
<b>CAS : <math>BU_x</math></b>	<b>16-QAM</b>	<b>4-QAM</b>	<b>4-QAM</b>
<b>CMA</b>	0.0535	0.0038	0.0039
$\Delta 1$	0.0525	0.0038	0.0039
$\Delta 3$	0.0541	0.0038	0.0039

de vraisemblance est en fait utilisé ici pour mettre en évidence une nouvelle classe d’estimateurs, mais ne garantit pas nécessairement une amélioration des performances dans les contextes les plus réalistes. Rappelons que les “vrais” estimateurs du maximum de vraisemblance auraient une complexité considérable dans le contexte du problème de séparation de sources étudié ici.



---

## Chapitre 6

# Conclusion et perspectives

### 6.1 Résumé des travaux de cette thèse

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux méthodes de séparation de mélanges convolutifs de signaux cyclostationnaires, et particulièrement de signaux issus de systèmes de communications numériques.

Les résultats de ces travaux concernent principalement les méthodes de séparation basées sur la minimisation d'un critère du type CMA avec une approche par déflation. Dans la première partie de ce manuscrit nous nous sommes concentrés sur les mélanges de sources non-circulaires à l'ordre 2, notamment des sources BPSK ou CPM d'indice  $1/2$ . Nous avons montré que dans le cas où les sources ont des caractéristiques différentes (en terme de débit et de résidu de porteuse) la minimisation du critère du module constant couplée avec une approche par déflation permet d'extraire les sources du mélange sans connaître leurs fréquences cycliques ni leurs fréquences cycliques non conjuguées. Dans le cas opposé, où les sources partagent les mêmes fréquences cycliques et les mêmes fréquences cycliques non conjuguées, nous avons prouvé l'existence de minima locaux non-séparants du critère du CMA. Nous avons aussi montré que le critère du CMA converge dans un grand nombre de cas vers ces points et que par conséquent la séparation de sources n'est pas toujours réalisée pour ce type de mélanges. Nous avons ensuite proposé un nouveau critère basé sur le critère du CMA qui, couplé avec une approche par déflation, assure l'extraction des sources dans ces situations. Ce nouveau critère ne nécessite pas la connaissance des fréquences cycliques des signaux mais nécessite quand même la connaissance des fréquences cycliques non-conjuguées les plus significatives. Nous avons proposé une méthode assez grossière d'estimation de ces fréquences et nous avons montré que, avec les fréquences cycliques non-conjuguées significatives ainsi estimées, l'algorithme proposé fonctionne correctement et qu'il est capable d'extraire les sources des mélanges pour lesquels le critère du CMA échoue.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, nous nous sommes intéressés aux séparateurs dérivés du principe du maximum de vraisemblance. Nous avons d'abord étudié des mélanges instantanés des signaux cyclostationnaires et circulaires à l'ordre 2. Dans ce contexte, nous avons mis en évidence des estimateurs basés sur le principe du maximum de vraisemblance et nous avons présenté une méthode pour les implanter. Nous avons ensuite étudié les propriétés asymptotiques de ces estimateurs et nous avons montré que, dans des conditions idéales (absence du bruit), ces estimateurs permettent d'améliorer les performances du critère du CMA. Toujours dans ces conditions, nous avons montré que les

estimateurs dérivés du critère du maximum de vraisemblance permettent dans certains cas d'estimer la source ayant la bande passante la plus petite avec une erreur plus petite que les méthodes usuelles. Ces résultats ne sont malheureusement plus vrais dans un contexte plus réaliste comme en présence de bruit. Nous avons généralisé les idées développées dans le cas de mélanges instantanés au cas de mélanges convolutifs mais pour ce type de mélanges, nous n'avons pas constaté d'amélioration des performances du critère du CMA même dans le cas non-bruité. Bien qu'en pratique cette étude n'apporte pas de grandes contributions, elle a néanmoins un intérêt théorique certain.

## 6.2 Perspectives

La séparation de mélanges de sources cyclostationnaires reste un problème ouvert :

- Dans la première partie de ce manuscrit nous avons étudié la séparation des mélanges convolutifs de sources cyclostationnaires non-circulaires et nous avons proposé un nouveau critère capable de remplacer le CMA dans le cas de mélanges où celui-ci ne fonctionne pas. Les simulations que nous avons ensuite effectuées ont mis en évidence d'autres contextes dans lesquels le critère du CMA modifié s'avère meilleur que le CMA (notamment le cas où les récepteurs utilisés sont de large bande, ou le cas de mélanges contenant plus d'une source BPSK). L'étude de ce nouveau séparateur est encore loin d'être finie.
- Toujours dans la première partie de cette thèse nous avons proposé une méthode assez grossière d'estimation des fréquences cycliques non-conjuguées significatives. Cette méthode a l'inconvénient d'utiliser un seuil de détection qui est choisi de manière empirique. Une nouvelle méthode de détection pourrait être envisagée afin de rendre l'algorithme du CMA modifié plus fiable dans d'autres conditions que celles que nous avons considérées ici (canaux ETSI, modulations linéaires, débits utilisés en GSM).
- Dans la deuxième partie de ce manuscrit nous avons étudié des séparateurs dérivés du principe de maximum de vraisemblance et nous avons mis en évidence leur expression dans le cas de mélanges de sources circulaires. Il serait intéressant de voir comment ces expressions sont modifiées en présence d'une ou de plusieurs sources non-circulaires et quels seraient les résultats obtenus.
- Dans nos études nous avons considéré uniquement des sources de débits différents. De nouveaux calculs pourraient être effectués pour voir dans quelle mesure l'expression de l'estimateur dérivé du principe de maximum de vraisemblance est modifiée en cas de fréquences cycliques communes.
- ...

---

# ANNEXES



---

**Annexe A**

**Annexes**

## A.1 Preuve du Théorème 2 du chapitre 3

Afin de prouver ce théorème nous faisons appel à un résultat déjà démontré en [19] : quel que soit le filtre à temps discret  $f(z)$ , il existe un filtre  $f_a(t)$  à temps continu, de bande passante  $\left[-\frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T}\right]$  tel que le signal  $r(n) = [f(z)]s_a(nT_e)$  coïncide avec  $r_a(nT_e) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l f_a(nT_e - lT)$ .

D'après ce résultat  $\forall f(z), \exists f_a(t)$  tel que  $\langle E |r(n)|^2 \rangle = \langle E |r_a(nT_e)|^2 \rangle$  et  $\langle E \{r(n)^2\} \rangle = \langle E \{r_a(nT_e)^2\} \rangle$ . Les fonctions  $E |r_a(t)|^2$  et  $E \{r_a(t)^2\}$  étant périodiques, on peut facilement les décomposer en série de Fourier :

$$E \{|r_a(t)|^2\} = R_{r_a}^{(0)}(0) + R_{r_a}^{(\alpha)}(0)e^{2i\pi \frac{t}{T}} + R_{r_a}^{(-\alpha)}(0)e^{-2i\pi \frac{t}{T}}$$

$$E \{r_a(t)^2\} = R_{c,r_a}^{(0)}(0) + R_{c,r_a}^{(\alpha)}(0)e^{2i\pi \frac{t}{T}} + R_{c,r_a}^{(-\alpha)}(0)e^{-2i\pi \frac{t}{T}}$$

En appliquant l'opérateur de moyennage temporel et considérant que  $T_e$  n'appartient pas à l'ensemble  $\{T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \langle E |r(n)|^2 \rangle &= \langle E |r_a(nT_e)|^2 \rangle = R_{r_a}^{(0)}(0) + R_{r_a}^{(\alpha)}(0) \langle e^{2i\pi \frac{t}{T}} \rangle + R_{r_a}^{(-\alpha)}(0) \langle e^{-2i\pi \frac{t}{T}} \rangle \\ &= R_{r_a}^{(0)}(0) = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\begin{aligned} \langle E \{r(n)^2\} \rangle &= \langle E \{r_a(nT_e)^2\} \rangle = R_{c,r_a}^{(0)}(0) + R_{c,r_a}^{(\alpha)}(0) \langle e^{2i\pi \frac{t}{T}} \rangle + R_{c,r_a}^{(-\alpha)}(0) \langle e^{-2i\pi \frac{t}{T}} \rangle \\ &= R_{c,r_a}^{(0)}(0) = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

En suivant le même raisonnement on peut montrer que :

$$\begin{aligned} R_{r_a}^{(\alpha)}(0) &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T}} dt \\ R_{r_a}^{(-\alpha)}(0) &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^2 e^{2i\pi \frac{t}{T}} dt \\ R_{c,r_a}^{(\alpha)}(0) &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T}} dt \\ R_{c,r_a}^{(-\alpha)}(0) &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} f_a(t)^2 e^{2i\pi \frac{t}{T}} dt \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Pour le cumulante d'ordre 4 de  $r(n)$ , une démonstration similaire peut être utilisée : la fonction  $c_4(r_a(t))$  s'écrit  $c_4(r_a(t)) = \kappa \sum_n |f(t - nT)|^4$ , où  $\kappa$  est le cumulante d'ordre 4 de la séquence de symboles transmise. Elle est donc périodique, de période  $T$  et à cause des contraintes de support fréquentiel du filtre  $f_a$ , elle a au plus 7 fréquences cycliques. Son développement en série de Fourier est alors de la forme :

$$c_4(r_a(t)) = \sum_{k=-3}^3 c_k e^{2i\pi k \frac{t}{T}}$$

Grâce à la condition imposé sur  $T_e$ , les termes  $\langle e^{2i\pi k \frac{nT_e}{T}} \rangle$  s'annulent quand  $k \neq 0$ , c'est-à-dire :

$$\langle c_4(r(n)) \rangle = c_0 = \frac{\kappa}{T} \int_{\mathbb{R}} |f_a(t)|^4 dt \quad (\text{A.1.4})$$

où  $c_0$  est le terme constant du développement en série Fourier de  $\langle c_4(r_a(t)) \rangle$ .

En remplaçant  $r_a$  par  $\tilde{s}$  dans les calculs précédents et en considérant les définitions de  $\eta_{min}$  (3.2.23),  $\beta_{min}$  (3.2.18) et  $\beta(\tilde{s})$  (3.2.15) on obtient les résultats annoncés par le théorème.

## A.2 Preuve de la Proposition 6 du chapitre 3

Pour démontrer ce résultat, nous considérons de nouveau le filtre à temps continu  $f_a \in \mathcal{F} \left( \left[ -\frac{1+\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T} \right] \right)$ , de norme  $\|f_a\|^2 = \frac{1}{T} \int |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu$  tel que le signal

$$\tilde{s}(m) = \left[ \frac{f(z)}{\|f\|} \right] s(m) = \left[ \tilde{f}(z) \right] s(m)$$

coïncide avec  $\tilde{s}_a(mT_e) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \tilde{f}_a(mT_e - nT)$ , où  $\tilde{f}_a(z) = \frac{f(z)}{\|f\|}$ .

En utilisant les expressions (A.1.1), (A.1.2), (A.1.3) nous calculons les coefficients d'autocorrélation cyclique et cyclique non conjuguée d'un signal  $\tilde{s}$  :

$$\begin{aligned} R_{\tilde{s}}^{(\alpha)}(0) &= \frac{\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - \frac{1}{T})^* d\nu}{\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu} \\ R_{c, \tilde{s}}^{(+\alpha)}(0) &= E(a_n^2) \frac{\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\frac{1}{T} - \nu) d\nu}{\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu} \\ R_{c, \tilde{s}}^{(-\alpha)}(0) &= E(a_n^2) \frac{\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(-\nu - \frac{1}{T}) d\nu}{\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

Afin de simplifier les notations, nous notons  $B_\gamma^+$  et  $B_\gamma^-$  les intervalles  $B_\gamma^+ = \left[ \frac{1-\gamma}{2T}, \frac{1+\gamma}{2T} \right]$  et  $B_\gamma^- = \left[ -\frac{1+\gamma}{2T}, -\frac{1-\gamma}{2T} \right]$ . Avec ces notations, on peut écrire

$$\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \geq \int_{B_\gamma^-} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu + \int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \quad (\text{A.2.6})$$

On peut facilement remarquer que les fonctions  $\nu \rightarrow \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - \frac{1}{T})^*$  et  $\nu \rightarrow \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\frac{1}{T} - \nu)$  sont nulles sauf si  $\nu \in B_\gamma^+$  et que la fonction  $\nu \rightarrow \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(-\nu - \frac{1}{T})$  est nulle en dehors de  $B_\gamma^-$ . Alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - \frac{1}{T})^* d\nu &= \int_{B_\gamma^+} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - \frac{1}{T})^* d\nu \\
\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\frac{1}{T} - \nu) d\nu &= \int_{B_\gamma^+} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\frac{1}{T} - \nu) d\nu \\
\int_{-\frac{1+\gamma}{2T}}^{\frac{1+\gamma}{2T}} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(-\nu - \frac{1}{T}) d\nu &= \int_{B_\gamma^-} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(-\nu - \frac{1}{T}) d\nu
\end{aligned} \tag{A.2.7}$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz sur chacun des termes du deuxième membre des égalités A.2.7 on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\gamma^+} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\nu - \frac{1}{T})^* d\nu \right| &\leq \left( \int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \left( \int_{B_\gamma^+} \left| \hat{f}_a(\nu - \frac{1}{T}) \right|^2 d\nu \right)^{1/2} \\
&= \left( \int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \left( \int_{B_\gamma^-} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{A.2.8}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\gamma^+} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(\frac{1}{T} - \nu) d\nu \right| &\leq \left( \int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \left( \int_{B_\gamma^+} \left| \hat{f}_a(\frac{1}{T} - \nu) \right|^2 d\nu \right)^{1/2} \\
&= \left( \int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \left( \int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \\
&= \int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu
\end{aligned} \tag{A.2.9}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\gamma^-} \hat{f}_a(\nu) \hat{f}_a(-\nu - \frac{1}{T}) d\nu \right| &\leq \left( \int_{B_\gamma^-} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \left( \int_{B_\gamma^-} \left| \hat{f}_a(-\nu - \frac{1}{T}) \right|^2 d\nu \right)^{1/2} \\
&= \left( \int_{B_\gamma^-} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \left( \int_{B_\gamma^-} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \\
&= \int_{B_\gamma^-} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu
\end{aligned} \tag{A.2.10}$$

Avec les relations A.2.5, A.2.6 A.2.9 et avec l'inégalité des moyennes ( $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ), nous trouvons :

$$|\hat{R}_s^{(\alpha)}(0)| \leq \frac{\frac{1}{2} \left( \int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu + \int_{B_\gamma^-} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu \right)}{\int_{B_\gamma^+} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu + \int_{B_\gamma^-} |\hat{f}_a(\nu)|^2 d\nu} = \frac{1}{2} \tag{A.2.11}$$

Du fait que  $\hat{R}_s^{(-\alpha)}(0) = (\hat{R}_s^{(\alpha)}(0))^*$  nous obtenons aussi que  $|\hat{R}_s^{(-\alpha)}(0)| \leq \frac{1}{2}$

Dans la suite nous allons considérer le cas de deux sources et nous définissons les quantités suivantes :

$$x_k = \int_{B_\gamma^+} \left| \hat{f}_{a,k}(\nu) \right|^2 d\nu, \quad y_k = \int_{B_\gamma^-} \left| \hat{f}_{a,k}(\nu) \right|^2 d\nu, \quad k \in \{1, 2\}$$

$$t = 2R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(\alpha)}(0)R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(\alpha)}(0)^* + 2R_{\tilde{s}_{k_1}}^{(\alpha)}(0)R_{\tilde{s}_{k_2}}^{(\alpha)}(0)^* + R_{\tilde{s}_{c,k_1}}^{(\alpha)}(0)R_{\tilde{s}_{c,k_2}}^{(\alpha)}(0)^* + R_{\tilde{s}_{c,k_1}}^{(-\alpha)}(0)R_{\tilde{s}_{c,k_2}}^{(-\alpha)}(0)^*$$

où  $k_1, k_2 \in \{1, 2\}$ ,  $k_1 \neq k_2$ .

Avec ces notations et en utilisant les relations (A.2.5), (A.2.6) et (A.2.9) pour les signaux  $\tilde{s}_{k_1}$  et  $\tilde{s}_{k_2}$ , on trouve :

$$|t| \leq 4 \frac{\sqrt{x_1 y_1}}{x_1 + y_1} \frac{\sqrt{x_2 y_2}}{x_2 + y_2} + |E(a_n^2)|^2 \frac{x_1}{x_1 + y_1} \frac{x_2}{x_2 + y_2} + |E(a_n^2)|^2 \frac{y_1}{x_1 + y_1} \frac{y_2}{x_2 + y_2}$$

$$|t| \leq |E(a_n^2)|^2 \frac{(\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{y_1 y_2})^2}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)} + (2 - |E(a_n^2)|^2) \frac{2\sqrt{x_1 y_1} \sqrt{x_2 y_2}}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}$$
(A.2.12)

D'après l'inégalité de Schwartz :

$$\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{y_1 y_2} \leq \sqrt{(\sqrt{x_1})^2 + (\sqrt{y_1})^2} \sqrt{(\sqrt{x_2})^2 + (\sqrt{y_2})^2} = \sqrt{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}$$

et sachant que  $\frac{\sqrt{x_i y_i}}{x_i + y_i} \leq \frac{1}{2}$ , on obtient finalement

$$|t| \leq |E(a_n^2)|^2 + \frac{1}{2} \left( 2 - |E(a_n^2)|^2 \right)$$
(A.2.13)

Dans le cas des signaux BPSK,  $E(a_n^2) = 1$  et l'inégalité (A.2.13) devient  $|t| \leq \frac{3}{2}$ , ceci implique  $\text{Re}[t] \geq -\frac{3}{2}$

### A.3 Preuve de la Proposition 4 du chapitre 3

Pour démontrer ce résultat il est utile d'écrire  $J(r)$  donné par (3.2.17) d'une façon un peu différente en posant  $u = (\sum_{k=1}^K \|f_k\|^2)^{1/2}$  et  $v_k = \frac{\|f_k\|}{u}$ . Avec ces notations l'expression de  $J(r)$  devient

$$J(r) = u^4 \left[ \sum_{k=1}^K \beta(\tilde{s}_k) v_k^4 + 2 \sum_{k_1 \neq k_2} v_{k_1,1}^2 v_{k_2,2}^2 \right] - 2u^2 \left( \sum_{k=1}^K v_k^2 \right) + 1$$

On pose  $\beta = (\beta(\tilde{s}_1), \dots, \beta(\tilde{s}_K))^T$  dans la suite.

Dans la suite nous allons dénoter par  $T(\mathbf{v}, \beta)$  l'expression qui multiplie le terme  $u^4$ . Il est facile à vérifier que le vecteur  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_K)$  est de norme 1, c'est-à-dire que  $\sum_{k=1}^K v_k^2 = 1$ . Avec cette observation et en utilisant l'égalité

$$\sum_{k_1 \neq k_2} v_{k_1,1}^2 v_{k_2,2}^2 = \left( \sum_{k=1}^K v_k^2 \right)^2 - \sum_{k=1}^K v_k^4$$

nous obtenons une expression plus simple pour  $T(\mathbf{v}, \beta)$

$$T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}) = 2 + \sum_{k=1}^K v_k^4 (\beta(\tilde{s}_k) - 2)$$

$J(r)$  s'écrit alors :

$$J(r) = u^4 T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}) - 2u^2 + 1$$

Considérons à présent un minimum local  $(f_{1,*}, \dots, f_{K,*})$  de  $J(r)$ , et appelons  $u_*$ ,  $\mathbf{v}_*$ ,  $\tilde{f}_{k,*}$  et  $\boldsymbol{\beta}_*$  les quantités associés. La dérivée première de  $J(r)$  par rapport à  $u$  vaut :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 4u(u^2 T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}) - 1)$$

Il est facile de voir que nécessairement, le point  $\mathbf{v}_*$  est un minimum local de la fonction  $\mathbf{v} \rightarrow T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}_*)$  et que  $u_*^2$  est égal à  $\frac{1}{T(\mathbf{v}_*, \boldsymbol{\beta}_*)}$  (directement de la condition  $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$ ). La valeur du critère dans un minimum local  $r_*$  est donc  $J(r_*) = 1 - \frac{1}{T(\mathbf{v}_*, \boldsymbol{\beta}_*)}$ .

L'intérêt de cette remarque est que l'analyse des minimas locaux de la fonction  $\mathbf{v} \rightarrow T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}_*)$  a déjà été réalisée dans [13] : Si au moins l'un des  $\beta_{k,*} - 2$  est négatif, alors, les minimas locaux de cette fonction correspondent aux vecteurs  $\mathbf{v}$  dont toutes les composantes sont nulles, sauf une, l'indice  $k_0$  de cette composante étant telle que  $\beta_{k_0,*} - 2 < 0$ . Par conséquent, si le minimum local  $(f_{1,*}, \dots, f_{K,*})$  que nous étudions est tel que au moins l'un des  $\beta_{k,*} - 2$  est négatif, nous sommes assurés que toutes les normes  $\|f_k\|$  sont nulles sauf une. Il nous reste donc à envisager le cas où le minimum local étudié est tel que tous les  $\beta_{k,*}$  sont supérieurs à 2. Dans ces conditions, le point  $\mathbf{v}_*$  a toutes ses composantes non nulles, et il est aisé de montrer que nécessairement, tous les filtres  $\tilde{f}_{k,*}$  sont des minimas locaux de la fonction  $\tilde{f}_k \rightarrow \beta(\tilde{s}_k)$ . Ceci est pourtant impossible par hypothèse.

## A.4 Canaux GSM/ETSI

Trajet	BUx		TUx		HTx		RAx	
	$\tau$	P(dBW)	$\tau$	P(dBW)	$\tau$	P(dBW)	$\tau$	P(dBW)
1	0.0e-6	-7.7	0.0e-6	-4	0.0e-6	-10.0	0.1e-6	0.0e-6
2	0.1e-6	-3.4	0.1e-6	-3	0.1e-6	-8.0	0.2e-6	-4.0
3	0.3e-6	-1.3	0.3e-6	0.0	0.3e-6	-6.0	0.3e-6	-8.0
4	0.7e-6	0.0	0.5e-6	-2.6	0.5e-6	-4.0	0.4e-6	-12.0
5	1.6e-6	-2.3	0.8e-6	-3	0.7e-6	0.0	0.5e-6	-16.0
6	2.2e-6	-5.6	1.1e-6	-5	1.0e-6	0.0	0.6e-6	-20.0
7	3.1e-6	-7.4	1.3e-6	-7	1.3e-6	-4.0		
8	5.0e-6	-1.4	1.7e-6	-5	15.0e-6	-8.0		
9	6.0e-6	-1.6	2.3e-6	-6.5	15.2e-6	-9.0		
10	7.2e-6	-6.7	3.1e-6	-8.6	15.7e-6	-10.0		
11	8.1e-6	-9.8	3.2e-6	-11	17.2e-6	-12.0		
12	10.0e-6	-15.1	5.0e-6	-10	20.0e-6	-14.0)		

TAB. A.1 – Standard ETSI pour les canaux GSM

---

# Table des figures

2.1	$ \zeta(s_i) $ en fonction de l'excès de bande $\gamma$ pour diverses constellations. . . . .	21
3.1	$\beta_{min}$ en fonction de $\gamma$ dans le cas . . . . .	37
3.2	Histogrammes . . . . .	41
3.3	$\beta'_{min}$ en fonction de $\gamma$ dans le cas BPSK. . . . .	44
3.4	Le cas de 2 sources BPSK de mêmes paramètres . . . . .	53
3.5	Le cas de 2 sources CPM d'indice 1/2 de mêmes paramètres . . . . .	54
4.1	Histogramme de $\hat{T}(\alpha)$ dans le cas de 3 sources BPSK, canaux BUx et trames de 2000, 1000 et 500 symboles . . . . .	66
4.2	Histogramme des SINR obtenus après l'extraction d'une source d'un mélange de 3 signaux BPSK de mêmes caractéristiques, transmis à travers des canaux BUx par trames de 2000 symboles . . . . .	68
5.1	Evaluation de $M \frac{T_e}{T_l} \mathbb{E} \Delta_{k,l} ^2$ , $M \frac{T_e}{T_l} \mathbb{E} \Delta_{l,k} ^2$ en fonction de $\frac{T_l}{T_k}$ . . . . .	96
5.2	Evaluation de $M \frac{T_e}{T_l} \mathbb{E} \hat{\alpha}_{l,k} - \alpha_{k,l} ^2$ , en fonction de $\frac{T_l}{T_k}$ et comparaison avec $M \frac{T_e}{T_l} \mathbb{E} \Delta_{k,l} ^2 + M \frac{T_e}{T_l} \mathbb{E} \Delta_{l,k} ^2$ en fonction de $\frac{T_l}{T_k}$ . . . . .	97



---

# Liste des tableaux

4.1	Valeurs choisies pour le seuil de détection de fréquences cycliques non-conjuguées dans le cas d'un mélange de . . . . .	67
4.2	Pourcentage de taux d'erreur $< 10^{-2}$ pour 3BPSK de fréquences cycliques et cycliques non-conjuguées . . . . .	69
4.3	Pourcentage de taux d'erreur $< 10^{-2}$ 2BPSK de fréquences cycliques et cycliques non-conjuguées . . . . .	70
4.4	Résultats obtenus dans le Scénario 1 . . . . .	73
4.5	Résultats obtenus dans le Scénario 1 et distance entre capteurs de $\frac{\lambda}{4}$ . . . .	75
4.6	Résultats obtenus dans le Scénario 1 et bandes des signaux différentes . . . .	76
4.7	Résultats obtenus dans le Scénario 1 et puissances des signaux différentes . .	77
4.8	Résultats obtenus dans le Scénario 2 . . . . .	79
4.9	Taux d'erreur moyen obtenus dans le Scénario 1 et canaux de Rayleigh de vitesse : . . . . .	80
5.1	Gain moyen sur le <i>SINR</i> produit par le nouvel algorithme par rapport à l'algorithme du CMA . . . . .	102
5.2	Mélange d'une source QAM 16 et deux sources QAM 4 de périodes symboles différentes, et résidus de porteuse nuls . . . . .	103
5.3	Mélange d'une source QAM 16 et deux sources QAM 4 de périodes symboles différentes et résidus de porteuse différents et connus . . . . .	104
5.4	Mélange d'une source QAM 16 et deux sources QAM 4 de périodes symboles différentes et résidus de porteuse différents et inconnus . . . . .	104
5.5	Mélange d'une source QAM 16 et deux sources QAM 4 de périodes symboles égales, et résidus de porteuse nuls . . . . .	105
5.6	Mélange de 3 sources QAM4, périodes symboles différentes, résidus de porteuse nuls . . . . .	105
5.7	Mélange d'une source QAM 16 et 2 sources QAM4 sur les canaux RAX . . . . .	106
5.8	Mélange convolutif . . . . .	107
A.1	Standard ETSI pour les canaux GSM . . . . .	118



---

# Bibliographie

- [1] G.B. Giannakis A. Swami and S. Shamsunder. Multichannel arma processes. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(4) :898–913, April 1994.
- [2] M. Castella, S. Rhioui, E. Moreau, and J.-C. Pesquet. Source separation by quadratic contrast functions : a blind approach based on any higher-order statistics. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2005)*, pages 569–572, Phildelphia, PA, March 18-23 2005.
- [3] Marc Castella, Jean-Christophe Pesquet, and Athina P. Petropulu. A family of frequency- and time-domain contrasts for blind separation of convolutive mixtures of temporally dependent signals. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 53(1) :107–120, January 2005.
- [4] Ph. Ciblat, Ph. Loubaton, E. Serpedin, and G.B. Giannakis. Performance analysis of blind carrier offset estimation for non-circular transmissions through frequency-selective channels. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 50(1) :130–140, January 2002.
- [5] P. COMON. Tensor diagonalization, a useful tool in signal processing. In M. Blanke and T. Soderstrom, editors, *IFAC-SYSID, 10th IFAC Symposium on System Identification*, volume 1, pages 77–82, Copenhagen, Denmark, July 4-6 1994. invited session.
- [6] P. COMON. Contrasts for multichannel blind deconvolution. *Signal Processing Letters*, 3(7) :209–211, July 1996.
- [7] P. COMON. Blind identification and source separation in 2x3 under-determined mixtures. *IEEE Trans.Signal Processing*, pages 11–22, January 2004.
- [8] P. COMON and M. RAJIH. Blind identification of under-determined mixtures based on the characteristic function. *Signal Processing*, 86(9) :2271–2281, September 2006.
- [9] P. COMON and L. ROTA. Blind separation of independent sources from convolutive mixtures. *IEICE Trans. on Fundamentals of Elec. Com. Comput. Sciences*, E86-A(3), March 2003. invited.
- [10] P. COMON, L. ROTA, and S. ICART. Blind MIMO paraunitary equalizer. In *ICASSP'03*, Hong-Kong, April 2003.
- [11] E. Weinstein D. Yellin. Criteria for multichannel signal separation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(8) :2158–2168, August 1994.
- [12] A.V. Dandawate and G.B. Giannakis. Statistical tests for presence of cyclostationarity. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(9) :2355–2369, September 1994.
- [13] N. Delfosse and Ph. Loubaton. Adaptive blind separation of independent sources : a deflation approach. *Signal Processing*, 45(1) :59–83, July 1995.
- [14] D. DONOHO. On minimum entropy deconvolution. In *Applied time-series analysis II*, pages 565–609. Academic Press, 1981.

- [15] A. Ferréol and P. Chevalier. On the behaviour of current second order and higher order blind source separation methods for cyclostationary sources. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(6) :1712–1724, June 2000.
- [16] W.A. Gardner. Signal interception, a unifying theoretical framework for feature detection. *IEEE Trans. on Communications*, 36(8) :897–906, August 1988.
- [17] S. Houcke, A. Chevreuil, and Ph. Loubaton. Blind equalization : case of an unknown symbol period. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 51(3) :781–793, March 2003.
- [18] P. Jallon, A. Chevreuil, and Ph. Loubaton. Separation of digital communication mixtures with the cma : case of various unknown baud rates. *Signal Processing*, 90(9) :2633–2647, September 2010.
- [19] Pierre Jallon. *Séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources cyclostationnaires*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 2006. Jury : P. Chevalier, A. Chevreuil, P. Comon, C. Jutten, P. Loubaton, E. Moreau, G. Tantot.
- [20] Pierre Jallon, Antoine Chevreuil, Philippe Loubaton, and Pascal Chevalier. Separation of convolutive mixtures of cyclostationary sources : a contrast function based approach. In *Proc. ICA '04*, Grenade, Spain, September 2004.
- [21] Pierre Jallon, Antoine Chevreuil, Philippe Loubaton, and Pascal Chevalier. Séparation de mélanges convolutifs de modulations cpm suréchantillonnées. In *Proc. GRETSI05*, Louvain la Neuve, Belgique, September 2005.
- [22] L. De Lathauwer. Algebraic techniques for the blind deconvolution of constant modulus signals. In *Proc. EUSIPCO 2004*, Vienna, Austria, Sept. 2004.
- [23] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle. An algebraic approach to blind mimo identification. In *Proc. 2nd Int. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA 2000)*, Helsinki, Finland, June 2000.
- [24] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle. An algebraic approach to the blind identification of para-unitary filters. In *Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC 2000)*, Chicago, USA, Sept. 2000.
- [25] P.A. Laurent. Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulse. *IEEE Trans. on Communications*, 34(2) :150–160, February 1986.
- [26] E. Moreau M. Castella and J.-C. Pesquet. A quadratic miso contrast for blind equalization. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2004)*, pages 681–684, Montréal, Canada, 17-21 May 2004.
- [27] E. Moreau and J.C. Pesquet. Generalized contrasts for multichannel blind deconvolution of linear systems. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(6) :182–193, June 1997.
- [28] D.T Pham and P. Garat. Blind separation of mixture of independent sources through a quasi-maximum likelihood approach. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(7) :1712–1725, July 1997.
- [29] Philippe Loubaton Pierre Jallon, Antoine Chevreuil. Separation of digital communication mixtures with the cma : case of various unknown baud-rates. *IEEE Trans. on Signal Processing.*, 90 :2633–2647, 1996.
- [30] S.V. Schell. Cyclostationarity in communications and signal processing. In *An overview of sensor-array processing for cyclostationary signals*, pages 168–239. IEEE Press, 1994.

- 
- [31] C. Simon, Ph. Loubaton, and C. Jutten. Separation of a class of convolutive mixtures : a contrast function approach. *Signal Processing*, 81 :883–887, 2001.
  - [32] A. Taleb and C. Jutten. Source separation in post non linear mixtures. *IEEE-SP*, 47(10) :2807, October 1999.
  - [33] Sami Touati and Jean-Christophe Pesquet. Wavelet estimation of cyclopectra. In *Proc. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Hong Kong*, pages 289–292, April 2003.
  - [34] J.K. Tugnait. Blind spatio-temporal equalization and impulse response estimation for mimo channels using a godard cost function. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(1) :268–271, January 1995.
  - [35] D. Yellin and B. Friedlander. An algorithm for dual-channel noiseless signal reconstruction and its performance analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(6) :1452–1588, June 1999.