



HAL
open science

Modèles LES invariants par groupes de symétries en écoulements turbulents anisothermes

Nazir Al Sayed

► **To cite this version:**

Nazir Al Sayed. Modèles LES invariants par groupes de symétries en écoulements turbulents anisothermes. Autre. Université de La Rochelle, 2011. Français. NNT : 2011LAROS325 . tel-00605655

HAL Id: tel-00605655

<https://theses.hal.science/tel-00605655>

Submitted on 3 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

École Doctorale Sciences pour l'Environnement Gay-Lussac (GL)

THÈSE

Pour l'obtention du grade de docteur de l'Université de La Rochelle

Discipline : **MÉCANIQUE**

Modèles LES Invariants par Groupes de Symétries en Écoulements Turbulents Anisothermes

Nazir AL SAYED

Soutenue le **16 Mai 2011**

Dirigée par Aziz **HAMDOUNI** & Dina **RAZAFINDRALANDY**

JURY :

Rapporteurs :

M. AZAIEZ

Professeur à l'ENSCP

S. TARDU

Maître de Conférences HDR, Université de J. Fourier-Grenoble

Examineurs :

A. HAMDOUNI

Professeur, Université de La Rochelle

M. JAZAR

Professeur, Université Libanaise

D. RAZAFINDRALANDY

Maître de Conférences, Université de La Rochelle

A. SAKOUT

Professeur, Université de La Rochelle

Remerciements

Ce travail de recherche a été effectué au sein de Laboratoire d'Étude des Phénomènes de Transfert et de l'Instantanéité : Agro-industrie et Bâtiment (LEPTIAB) de l'Université de La Rochelle.

Je tiens d'abord à remercier très sincèrement mes directeurs de thèse Mr Aziz HAMDOUNI et Mr Dina RAZAFINDRALANDY pour leurs encadrement tout au long de ces quatre années. Grâce à eux, j'ai beaucoup avancé dans le domaine de la recherche scientifique : je n'oublierai jamais leurs précieuses remarques concernant la méthode de travail, ainsi que leurs corrections d'articles.

Je tiens également à remercier vivement le directeur du laboratoire, Mr Francis ALLARD qui m'a permis de faire cette thèse au sein du LEPTIAB. Un grand merci aussi à Mr Erwan LIBERGE pour son aide concernant le *Code-Saturne*.

Je suis très reconnaissant à Mr Mejdî AZAIEZ, Professeur et responsable de l'équipe Mécanique des Fluides et Énergétique numérique à l'ENSCP de Bordeaux, ainsi qu'à Mr Sedat TARDU, Maître de Conférences HDR à l'Université de J. Fourier-Grenoble, pour m'avoir fait l'honneur de juger mes travaux.

Mes remerciements vont également à Mr Mustapha JAZAR, Professeur à l'Université Libanaise, et à Mr Anas SAKOUT, Professeur à l'Université de La Rochelle pour leurs participations au jury.

Je tiens aussi à remercier Dr Abdel Hafiz OSMAN et Pr Mustapha JAZAR, pour leur humanité et leur support moral tout au long de mon projet de master 2 et de doctorat.

A mes amies du bureau les plus proches Nissrine AKKARI et Alexandra TALLET, un grand merci pour les plus beaux moments qu'on a passé ensemble et surtout Nissrine,

cette thèse aurait été différente et difficile sans toi. Je n'oublierai pas non plus tous mes collègues du LEPTIAB.

Un grand merci aux personnes à qui je dois tout : ma mère, ma famille, qui m'ont toujours donné, soutien et confiance.

Enfin et avant tout, le grand et le vrai merci à Dieu qui m'a donné le moral et la vie pour accomplir mon projet.

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	5
Notations & Symboles	11
Introduction Générale	13
1 Sur la méthode de type LES (isotherme et anisotherme)	17
1.1 La simulation des grandes échelles	19
1.1.1 Principe	19
1.1.2 Notion de filtrage	21
1.1.3 Equations de conservation dans le cas isotherme	23
1.1.4 Equations de Navier-Stokes filtrées isothermes	25
1.1.5 Equations des écoulements turbulents anisothermes	27
1.1.6 Equations filtrées des écoulements turbulents anisothermes	27
1.2 Modèles de turbulence anisothermes	28
1.2.1 Modèle de Smagorinsky (SM)	28
1.2.2 Modèle Dynamique	30
1.2.3 Modèle WALE	31
1.2.4 Modèles d'Eidson	32
1.2.5 Modèle de fonction de structure d'ordre 2	33
1.2.6 Modèle de similarité d'échelles (Bardina)	34
1.2.7 Modèle mixte Smagorinsky-Bardina	34
1.2.8 Modèles Wang	35
2 Groupe des Symétries de Lie	37
2.1 Groupe de transformations à un paramètre	38
2.2 Transformation infinitésimale	40

TABLE DES MATIÈRES

2.2.1	Générateur infinitésimal	40
2.3	Prolongation	42
2.3.1	Prolongement à l'ordre k , pour $m = n = 1$	44
2.3.2	Prolongement à l'ordre k pour n, m quelconques	45
2.4	Détermination du groupe de symétrie	47
2.4.1	Groupe de symétrie des écoulements turbulents anisothermes	50
3	Usage du groupe de symétries en mécanique des fluides	57
3.1	Solution auto-similaire	57
3.1.1	Définition	57
3.1.2	Écoulement bidimensionnel cisailé	59
3.2	Dynamique tourbillonnaire	61
3.2.1	Groupe de rotation X_{12}	62
3.2.2	Vortex de Burgers détecté par le groupe de rotation X_{12}	68
3.2.3	Vortex de Burgers-Lundgren détecté par le groupe de rotation X_{12}	71
3.2.4	Transformations galiléennes généralisées X_1	73
3.2.5	Le cisaillement de Burgers détecté par la transformation X_1	77
3.3	Lois d'échelles d'un écoulement turbulent anisotherme moyenné	82
3.3.1	Approche moyennée	83
3.3.2	Groupe de symétrie et lois d'échelles	86
4	Modèles de turbulence invariants par le groupe de symétrie	97
4.1	Principe	97
4.2	Analyse de modèles	98
4.2.1	L'invariance par les translations temporelles et de pression	98
4.2.2	L'invariance par rotation	99
4.2.3	L'invariance par la transformation galiléenne généralisée	100
4.2.4	L'invariance par les changements d'échelle	101
4.2.5	L'invariance par la translation pression-température	104
4.2.6	Invariance par réflexion	105
4.2.7	Invariance par l'indifférence matérielle	106
4.3	Construction d'une classe de Modèles anisothermes invariants	109
4.3.1	Modèle invariant fortement couplé	114
4.3.2	Modèle invariant non couplé	114
4.4	Lois d'échelles conservées par les modèles invariants	119

5	Validation numérique	123
5.1	Structure du <i>Code-Saturne</i>	123
5.1.1	La méthode des volumes finis	124
5.1.2	Terme de convection	125
5.1.3	Terme de diffusion	127
5.1.4	Discrétisation temporelle	127
5.2	Modèles de turbulence en LES, simulés avec <i>Code-Saturne</i>	129
5.3	Convection naturelle en cavité différentiellement chauffée	132
5.3.1	Configurations et conditions aux limites	133
5.3.2	Maillage et schéma de calcul	133
5.4	Convection mixte	135
5.4.1	Configurations et conditions aux limites	135
5.4.2	Maillage et schéma de calcul	137
	Conclusion Générale et Perspectives	144
	Bibliographie	153

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures

1	Fractale	13
1.1	Simulation des Grandes Echelles	19
1.2	Espace spectrale	20
1.3	Filtre boîte pour $\bar{\delta} = 1$	23
1.4	Filtre gaussien pour $\bar{\delta} = 1$	24
1.5	Filtre porte pour $\bar{\delta} = 1$	24
2.1	Groupe des translations	39
3.1	Tourbillon d'Oseen	67
3.2	Tourbillon spirale	69
3.3	3 ^e composante du vortex de Burgers ω_3 , pour $f_0 = 1, f_1 = 0$ et $\nu = 1$	71
3.4	Vortex de Burgers-Lundgren pour $f_0 = 1 = \gamma = \nu$	73
3.5	2 ^e composante du vortex de Burgers instationnaire, $\lambda = 4, \nu = 1$ et $A = -1$	82
3.6	Ecoulement dans un canal.	85
3.7	Zone interne mécanique [46]	94
3.8	Zone interne thermique [7], $Pr = 0.71$ et $\beta = (3.85Pr^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln Pr$	95
4.1	Ecoulement proche de la paroi	116
4.2	Lois d'échelles, par la méthode de RANS	120
4.3	Lois d'échelles, par l'application de la méthode de LES puis RANS	120
5.1	Configuration de deux cellules adjacentes I et J internes au domaine	125
5.2	Convection naturelle	133
5.3	Discrétisation de l'axe Ox	134
5.4	Discrétisation de l'axe Oy	134
5.5	Vitesse \bar{u}_2 moyenne dans le plans $y = 1.25 m$ et $z = 0.25 m$	135
5.6	Température \bar{T} moyenne dans le plans $y = 1.25 m$ et $z = 0.25 m$	136
5.7	Convection mixte.	137

TABLE DES FIGURES

5.8	Maillage selon x	137
5.9	Maillage selon y	138
5.10	Vitesse moyenne \bar{u}_1 , pendant 1750 s pour $x = 0.502$ m.	139
5.11	Vitesse moyenne \bar{u}_2 , pendant 1750 s pour $y = 0.502$ m.	140
5.12	Température moyenne pendant 1750 s pour $y = 0.502$ m	140
5.13	Température moyenne pendant 1750 s pour $x = 0.502$ m.	141

Notations & Symboles

Symboles Grecs

α	Flux de la chaleur à la paroi
β	Coefficient d'expansion thermique
Δt	Pas de temps
Δx_1	Taille de maille dans la direction longitudinale
Δx_2	Taille de maille dans la direction normale
Δx_3	Taille de maille dans la direction transverse
δ	Taille locale du maillage, $\delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{\frac{1}{3}}$
ϵ	Taux moyen du transfert d'énergie cinétique
η	Échelle de longueur de Kolmogorov
κ	Diffusivité thermique
κ_c	Nombre d'onde de coupure
κ_{sm}	Diffusivité thermique de sous-maille
μ	Viscosité dynamique du fluide
ν	Viscosité cinématique du fluide, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$
ν_{sm}	Viscosité de sous-maille
Ω	Tenseur de rotation, $\Omega = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla^T u)$
$\bar{\delta}$	Longueur de coupure
$\bar{\Omega}$	Tenseur de rotation filtré, $\bar{\Omega} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} - \nabla^T \bar{u})$
$\bar{\theta}$	Température absolue filtrée

Notations & Symboles

ρ	Masse volumique du fluide
τ	Tenseur de sous-maille, $\tau = \overline{u \otimes u} - \bar{u} \otimes \bar{u}$
τ^d	Tenseur déviatorique, $\tau^d = \tau - \frac{1}{3}(\text{tr}\tau)I_d$
τ^s	Tenseur sphérique, $\tau^s = \frac{1}{3}(\text{tr}\tau)I_d$
θ	Température absolue
θ_{ref}	Température de référence, θ_{ref} est égale la température moyenne

Symboles Latins

\bar{p}	Champ de pression filtrée
\bar{S}	Tenseur de déformation filtrée, $\bar{S} = \frac{1}{2}(\nabla\bar{u} + \nabla^T\bar{u})$
\bar{u}	Champ de vitesse filtrée
C_s	Constante de Smagorinsky
g	Accélération de la pesanteur
$G_{\bar{\delta}}$	Noyau du filtre spatial
h	Flux de sous-maille, $h = \overline{\theta u} - \bar{\theta}\bar{u}$
L	Échelle intégrale de longueur de la turbulence
p	Champ de pression
Pr	Nombre de Prandtl
Pr_{sm}	Nombre de Prandtl de sous-maille
Ra_H	Nombre de Rayleigh basée sur la hauteur, $Ra_H = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$
S	Tenseur de déformation, $S = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$
t	Variable temps
T^+	Température moyenne adimensionnelle, $T^+ = \frac{T - T_p}{T_\tau}$
T_τ	Température de frottement à la paroi
u	Champ de vitesse
U^+	Vitesse moyenne adimensionnelle, $U^+ = \frac{U}{u_\tau}$
u_τ	Vitesse de frottement à la paroi

X	Générateur infinitésimal
x	Vecteur position, $x = (x_1, x_2, x_3)$
y^+	Distance adimensionnelle à la paroi, $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$
Re	Nombre de Reynolds

Opérateurs Mathématiques

e_g	Vecteur unitaire vertical ascendant
det	Déterminant d'une matrice
div	Opérateur divergence
∇	Gradient
Adj	Opérateur adjugué ou comatrice tel que : $\overline{S} \cdot (\text{Adj } \overline{S}) = (\det \overline{S}) I_d$
tr	Trace d'une matrice
\otimes	Produit tensoriel
$\overline{\Phi}$	Variable filtrée
Φ'	Partie fluctuante
I_d	Matrice identité

Introduction Générale

Les symétries jouent un rôle important en physique [54, 16, 29]. Elles forment une structure de groupe, connue depuis les travaux d'Evariste-Galois. Une des premières applications modernes est la cristallographie, où les groupes de symétries discrets jouent un rôle fondamental dans la classification et l'étude des propriétés physiques des réseaux cristallins. Ces groupes, en tant que groupes de symétries¹ discrets, sont des transformations décrivant les invariances des objets de la nature. Par exemple, le fractale FIGURE 1 possède une symétrie d'échelle et une autre centrale.

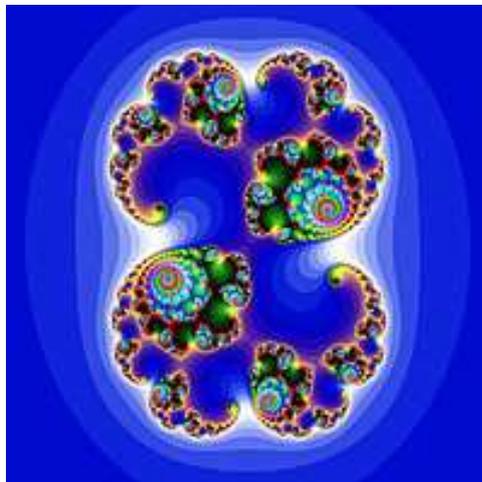


FIGURE 1 – Fractale

Le groupe des symétries continues, dit groupe de Lie ou de symétrie de Lie, ont en plus les propriétés d'être constitué de transformations (ou sy-

1. Ensemble de transformations sur des objets qui les laissent invariant

métries) dépendantes d'une manière différentiable d'un ensemble de paramètres. Leur origine se trouve dans les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie vers 1873-1874. Son idée était de développer une théorie des symétries continues des équations différentielles et aux dérivées partielles qui permettrait de les classer et d'étudier leurs intégrabilités, s'inspirant des idées développées par Evariste Galois pour les équations algébriques.

En 20ème siècle, cet outil mathématique va jouer un rôle fondamental dans la formalisation et la structuration de la physique moderne en particulier en mécanique quantique [79] & H. Weyl [78]. C'est probablement le théorème d'Emmy Noether qui va lui donner sa belle traduction physique. En effet ce théorème [73][16] établit une équivalence entre les symétries de Lie dépendantes d'un nombre fini de paramètres d'un problème variationnel et les lois de conservation des équations d'Euler-Lagrange. Par exemple, d'après le théorème de Noether, le groupe de translations temporelles et spatiales, représente respectivement, la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Le groupe de rotations représente la conservation du moment angulaire.

Si le groupe des symétries de Lie est devenu d'un usage courant en physique théorique, il n'est que rarement utilisé en sciences de l'ingénieur. Plus particulièrement, en physique de la turbulence, des raisonnements utilisant quelques symétries continues sont à l'origine de résultats importants. C'est le cas pour l'obtention des lois de Kolmogorov ou pour un certain nombre de lois de similitudes. Mais il y a peu de travaux qui utilisent d'une manière systématique l'ensemble des symétries de Lie des équations de la mécanique des fluides pour modéliser la turbulence. A notre connaissance, le premier auteur à avoir effectué une analyse des modèles de sous-maille en tenant compte de tous les groupes de symétries des équations de Navier-Stokes dans le cas isotherme est M. Oberlack [49, 50, 51]. Il a aussi construit les

lois d'échelles en écoulement isotherme (lois des parois) grâce au groupe des symétries des équations de Navier-Stokes moyennées. Par la suite, D. Razafindralandy et al. [62, 64] ont analysé, construit et validé des modèles de simulation des grandes échelles qui respectent les symétries des équations de Navier-Stokes isothermes. Des simulations sur des configurations de type cavité ventilée, montrent que ces modèles présentent une bonne capacité à reproduire l'écoulement proche de la paroi. V. Saveliev & M. Gorokhovski [68] ont utilisé la théorie des groupes de symétrie, en particulier les propriétés de symétrie de l'équation d'Euler, pour renormaliser les équations de Navier-Stokes. Ils ont trouvé des équations similaires aux équations de Navier-Stokes filtrées, où le terme de la viscosité turbulente est calculé à partir de la viscosité laminaire et non pas à partir du gradient de la vitesse moyenne. Au niveau des schémas numériques, M. Chhay et A. Hamdouni [14, 13, 15] ont utilisé cette théorie pour la construction de schémas numériques conservant les symétries de l'équation continue (appelé schéma invariant).

Le présent travail s'inscrit dans la lignée de ces travaux. Il constitue une suite de la thèse D. Razafindralandy. Il s'agit d'étendre son travail aux écoulements anisothermes. Le groupe des symétries des équations de Navier-Stokes pour les écoulements anisothermes sera l'outil privilégié pour construire des solutions de ces équations, pour obtenir des lois de parois et enfin construire des modèles de sous-maille. La thèse est organisée comme suit :

Dans le chapitre 1, on définit le principe de la méthode de la simulation des grandes échelles LES, afin de présenter les équations de Navier-Stokes filtrées dans le cas isotherme et les équations des écoulements turbulents anisothermes filtrées. Puis, on présente quelques modèles de turbulence anisothermes existants dans la littérature. Dans le chapitre 2, on donne la définition d'un groupe de Lie et d'un groupe de symétries continues, ainsi

que la méthode de calcul de ce dernier. Ensuite, on applique cette méthode pour calculer les groupes de symétries à un paramètre des équations des écoulements turbulents anisothermes. Le chapitre 3 présente quelques applications de la théorie des groupes de symétries continus, en mécanique des fluides. En effet, on utilise la notion d'une solution auto-similaire pour calculer des solutions exactes et des vortex particuliers des écoulements turbulents anisothermes. Ensuite, pour un écoulement parallèle anisotherme, moyenné par la méthode de RANS, on calcule de nouvelles lois d'échelles (lois des parois). Dans le chapitre 4, on propose une troisième application de cette théorie à la modélisation théorique et numérique des écoulements anisothermes. On construit une classe de modèles de turbulence LES, invariants par le groupe de symétrie et qui respectent la physique de ces écoulements. Enfin, dans le chapitre 5, un test numérique est effectué dans le but de comparer ces modèles invariants avec les modèles de Smagorinsky et Smagorinsky dynamique, en convections naturelle et mixte.

Chapitre 1

Sur la méthode de type LES (isotherme et anisotherme)

Dans ce chapitre, on va définir la méthode de la simulation des grandes échelles LES afin de l'appliquer sur les équations de Navier-Stokes isothermes et anisothermes. Un aperçu général est aussi donné pour les deux méthodes DNS et RANS :

- La Simulation Numérique Directe DNS , consiste à résoudre explicitement les échelles des écoulements. Aucune modélisation n'est nécessaire pour les équations d'origine, mais nous sommes obligés d'utiliser un maillage très fin. En effet, dans le cadre d'une turbulence tridimensionnelle homogène et isotrope, le nombre de degrés de liberté est donné par $(\frac{L}{\eta})^3$, où L et η sont respectivement, l'échelle intégrale la plus énergétique et l'échelle de longueur de Kolmogorov (1941, [40]). Dans le contexte d'une cascade d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles, la théorie de Kolmogorov [37, 38] montre, en utilisant l'analyse dimensionnelle, la loi suivante :

$$\frac{L}{\eta} = O(Re^{3/4}) \quad (1.1)$$

où Re est le nombre de Reynolds.

Donc, pour bien représenter toutes les échelles de la turbulence (la

taille minimale étant à l'échelle de Kolmogorov η), il est nécessaire que le nombre des points de la grille N , dans chaque direction de l'écoulement, soit supérieur à $Re^{3/4}$, alors le nombre de degrés de liberté en 3D est $O(Re^{9/4})$. La DNS reste un outil applicable pour la recherche fondamentale et la compréhension du mécanisme d'un écoulement à des nombres de Reynolds modérés. Par contre, il reste actuellement hors de portée pour des écoulements turbulents à très grand nombre de Reynolds. En effet, par exemple pour un nombre de Reynolds de 10^8 , le nombre de points du maillage nécessaires pour résoudre toutes les échelles de cet écoulement turbulent tridimensionnel, est de l'ordre $Re^{9/4} \cong 10^{18}$. Ceci est impossible avec les capacités des calculateurs actuels.

- L'approche Moyennée des équations de Navier-Stokes (Reynolds Averaged Navier Stokes, RANS). Cette méthode consiste à décomposer la solution comme la somme d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante. Par cette technique, on ne calcule que les champs moyens dynamique et thermique. Les champs fluctuants n'apparaissent que dans le tenseur de Reynolds et le flux de chaleur turbulent. De plus, cette méthode ne dépend pas du rapport entre la plus grande et la plus petite échelle d'un écoulement turbulent. Par conséquent, elle est la plus utilisée dans le monde industriel grâce à son coût de calcul faible et son application aux écoulements à grand nombre de Reynolds.

1.1 La simulation des grandes échelles

1.1.1 Principe

La Simulation des Grandes Echelles est très liée à la notion de séparation entre grandes et petites échelles (FIGURE 1.1) par filtrage spatial [8].

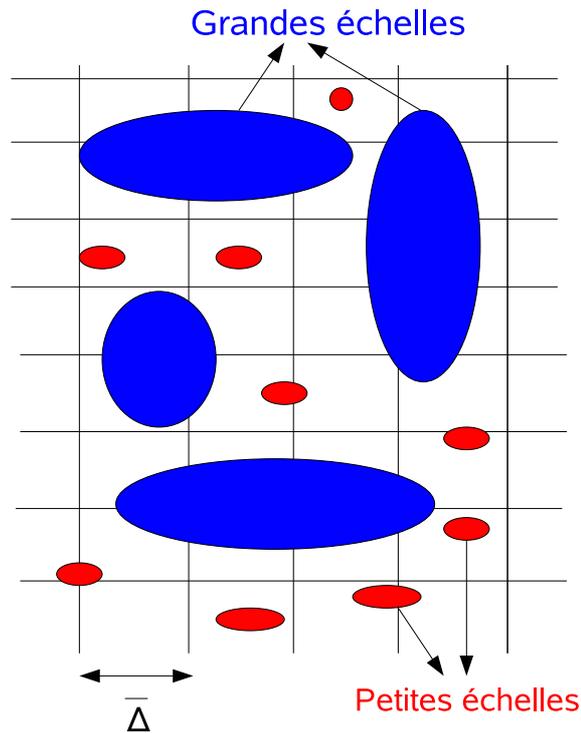


FIGURE 1.1 – Simulation des Grandes Echelles

La différence entre ces deux zones est soumise à la détermination d'une longueur de référence, dite "longueur de coupure" noté $\bar{\delta}$ qui est associée à la fréquence de coupure κ_c dans l'espace spectral : Les grandes échelles ou échelles résolues celles qui sont d'une taille caractéristique plus grande que la longueur de coupure et les petites échelles ou échelles de sous-maillages celles qui sont d'une taille caractéristique plus petite que la longueur de coupure. Ce principe est représenté sur le spectre d'énergie cinétique de la FIGURE 1.2. Dans le cas des petites fréquences qui correspondent aux grandes structures, il y a une production d'énergie. La zone inertielle pré-

sente le transfert d'énergie des grandes structures vers les petites structures. Dans le cas des grandes fréquences, qui correspondent aux petites structures, il y a une dissipation d'énergie. La limite de cette zone liée aux effets dissipatifs, est appelée échelle de Kolmogorov. [30, 37, 38] :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (1.2)$$

où ϵ désigne le taux moyen du transfert d'énergie et ν la viscosité du fluide qui est à l'origine de la dissipation de l'énergie cinétique produite aux grandes échelles.

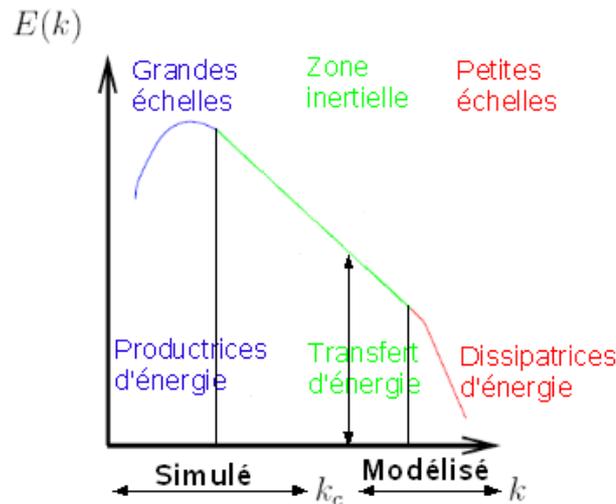


FIGURE 1.2 – Espace spectrale

En simulation des grandes échelles LES, plusieurs perspectives doivent être examinées avec précaution, ce qui fait l'objet de beaucoup de travaux en LES : P. Gamnitzer et al. [23] ont étudié l'effet de la dépendance temporelle de l'échelle de sous-maille par une méthode variationnelle de multi-échelle ; J. Meyers et al. [45, 46] ont évalué le calcul des erreurs de discrétisation par volumes finis du modèle de Smagorinsky ; L. Temmerman et al. [72] ont étudié l'influence des approximations par la fonction de

paroi et les modèles sous-maille, pour un l'écoulement turbulent dans un canal, sur la solution numérique ; V. John & W. J. Layton [31] ont étudié les erreurs numériques dans la simulation des grandes échelles.

La qualité des résultats dépende des méthodes et des schémas numériques choisis, qui sont des facteurs importants en LES. Un autre facteur joue aussi un rôle essentiel en LES, c'est les modèles de turbulence utilisés qui font l'objet de ce manuscrit. Et enfin, le traitement de l'écoulement à la paroi est très compliqué, il demande beaucoup de précaution numérique. La méthode la plus utilisée consiste à choisir un maillage non régulier, très fin près de la paroi.

Dans les paragraphes suivants, nous introduisons la notion de filtrage sous forme mathématique, de manière à permettre la manipulation des équations de Navier-Stokes dans les cas isotherme et anisotherme.

1.1.2 Notion de filtrage

Mathématiquement, la Simulation des Grandes Echelles LES, consiste à appliquer, dans l'espace physique, un filtre à la variable instantannée Φ quelconque (vitesse, température, pression,...). Cette variable filtrée $\bar{\Phi}$ se traduit par un produit de convolution (voir Leonard [39] et Tabor [19]) :

$$\bar{\Phi}(t, x) = (G_{\bar{\delta}} * \Phi)(t, x) = \int_{\Omega} G_{\bar{\delta}}(x - \xi) \Phi(t, \xi) d\xi \quad (1.3)$$

et

$$\Phi' = \Phi - \bar{\Phi} \quad (1.4)$$

où Ω le domaine définie par l'écoulement, $G_{\bar{\delta}}$ est le noyau du filtre, $\bar{\delta}$ est sa longueur d'onde de coupure, qui est liée au nombre d'onde de coupure κ_c par la relation [66] :

$$\kappa_c = \frac{\pi}{\bar{\delta}}. \quad (1.5)$$

La taille locale de la maille δ est liée à la largeur du filtre, par :

$$\bar{\delta} = c_l \delta, \quad (1.6)$$

où c_l est une constante telle que, $c_l \geq 2$. Dans la pratique, on prend $c_l = 2$. Donc, seules les structures de taille supérieure à celle de la maille, sont simulées (grandes échelles), alors que les autres structures sont modélisées.

Les filtres doivent vérifier les propriétés suivantes [67, 59] :

- conservation des constantes :

$$\bar{\lambda} = \lambda \Leftrightarrow \int_{\Omega} G_{\bar{\delta}}(x - \xi) d\xi = 1 \quad (1.7)$$

- linéarité

$$\overline{\Phi + \Psi} = \bar{\Phi} + \bar{\Psi} \quad (1.8)$$

qui est vrai quelque soit le types des filtres $G_{\bar{\delta}}$

- commutativité avec la dérivation :

$$\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi}, \xi = x, t. \quad (1.9)$$

D'une façon générale, les opérateurs de dérivation $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ne commutent pas avec le filtrage sur un domaine Ω borné de l'espace (voir Razafindralandy [60]). Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ et Φ est une fonction dérivable, le filtrage commute avec les opérateurs de dérivation. Et on a :

$$\partial \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi) \Phi(t, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi) \partial \Phi(t, \xi) d\xi.$$

De plus, les filtres ne sont pas à priori des opérateurs de Reynolds, c'est-à-dire :

$$\overline{\bar{\Phi}} \neq \bar{\Phi} \text{ et } \overline{\bar{\Phi}'} \neq 0 \quad (1.10)$$

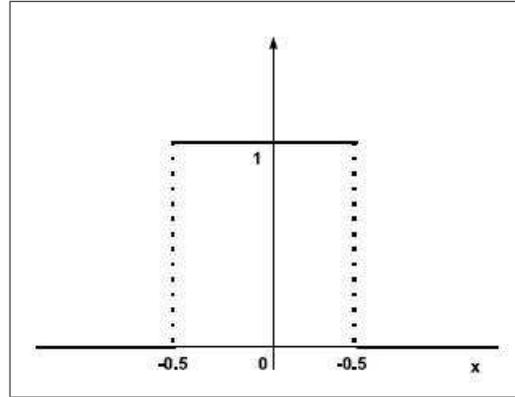


FIGURE 1.3 – Filtre boîte pour $\bar{\delta} = 1$

Les trois filtres théoriques les plus utilisés en simulation des grandes échelles sont les filtres homogènes présentés dans le TABLE 1.1

Nom du filtre	Fonction $G_{\bar{\delta}}(x - \xi)$
Boîte	$\begin{cases} \frac{1}{\bar{\delta}} & \text{si } x - \xi \leq \frac{\bar{\delta}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Gaussien	$\left(\frac{6}{\pi\bar{\delta}^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-6 x - \xi ^2}{\bar{\delta}^2}\right)$
Porte	$\frac{\sin(\kappa_c(x - \xi))}{\kappa_c(x - \xi)}$

TABLE 1.1 – Filtres homogènes

1.1.3 Equations de conservation dans le cas isotherme

Considérons un écoulement visqueux newtonien, incompressible, homogène et isotrope. Cet écoulement est alors décrit par les équations de conser-

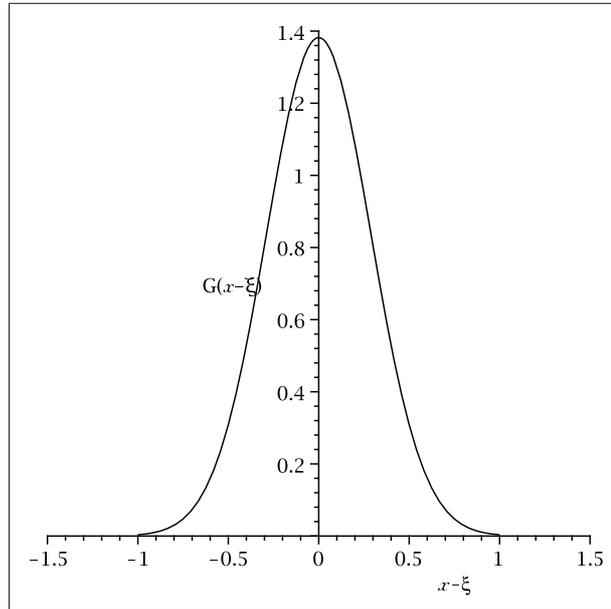


FIGURE 1.4 – Filtre gaussien pour $\bar{\delta} = 1$

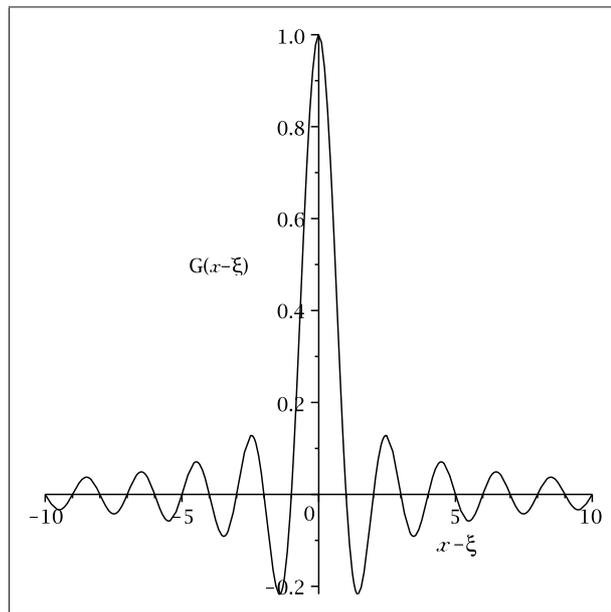


FIGURE 1.5 – Filtre porte pour $\bar{\delta} = 1$

vation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\nu \operatorname{div}(S) = 0, \quad (1.11)$$

et par l'équation de continuité :

$$\operatorname{div}(u) = 0. \quad (1.12)$$

où u est le champ de vitesse, p le champ de pression, S le tenseur des taux de déformation :

$$S = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$$

Avec

- $\frac{\partial u}{\partial t}$ est le terme de dérivation temporelle
- $\operatorname{div}(u \otimes u) = u \cdot \nabla u$ (quand $\operatorname{div}(u) = 0$) est le terme non-linéaire convectif
- ∇p est le gradient de pression
- $\nu \operatorname{div} S$ est le terme de diffusion

1.1.4 Equations de Navier-Stokes filtrées isothermes

Dans le cadre de la simulation des grandes échelles LES, l'application d'un filtre aux équations précédentes (1.11) et (1.12), nous permet d'écrire le système suivant [8] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - 2\nu \operatorname{div}(\bar{S}) + \operatorname{div}(\tau) = 0 \\ \operatorname{div}(\bar{u}) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

où

$$\tau = \overline{u \otimes u} - \bar{u} \otimes \bar{u} \quad (1.14)$$

est le tenseur des contraintes de sous-maille, qu'on peut décomposer en deux tenseurs, déviatorique τ^d et sphérique τ^s comme suit :

$$\tau^d = \tau - \frac{1}{3}(\text{tr}\tau)I_d \quad (1.15)$$

$$\tau^s = \frac{1}{3}(\text{tr}\tau)I_d. \quad (1.16)$$

Le tenseur de sous-maille τ , représente l'interaction entre les grandes et les petites structures des écoulements. Ce tenseur joue un rôle essentiel pour fermer les équations filtrées (1.13). Pour cela, il doit être modélisé¹. La partie à modéliser est le tenseur déviatorique τ^d , dont la trace est nulle. Le tenseur sphérique est simulé avec le terme de la pression statique filtrée \bar{p} :

$$\bar{p}_m = \bar{p} + \frac{1}{3}(\text{tr}\tau). \quad (1.17)$$

Ceci nous conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \text{div}(\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}_m - 2\nu \text{div} \bar{S} + \text{div}(\tau^d) = 0 \\ \text{div}(\bar{u}) = 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

où $\bar{S} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} + \nabla^T \bar{u})$ est le tenseur de taux de deformation filtré, et \bar{u} le champ de vitesse filtré. Dans le paragraphe suivant, on présente les équations d'un écoulement turbulent anisotherme incompressible, puis leurs équations filtrées, et on note simplement \bar{p} la pression modifiée \bar{p}_m .

1. Il y a deux axes principaux de modélisation : modélisation fonctionnelle et structurelle, voir Sagaut [66].

1.1.5 Equations des écoulements turbulents anisothermes

Considérons un fluide visqueux newtonien, incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ , supposées constantes. Sous l'hypothèse de Boussinesq, ce fluide est alors régi par les équations instationnaires qui s'écrivent dans l'espace physique sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \operatorname{div}(S) + \beta g(\theta - \theta_{ref}) e_g \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(u\theta) = \kappa \operatorname{div}(\nabla \theta) \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{array} \right. \quad (1.19)$$

où θ la température absolue, θ_{ref} une température de référence, e_g vecteur unitaire vertical ascendant, g est l'accélération de la pesanteur, β le coefficient d'expansion thermique qui vaut :

$$\beta = \frac{1}{\theta_{ref}}$$

et κ la diffusivité thermique.

1.1.6 Equations filtrées des écoulements turbulents anisothermes

Après application d'un filtre aux équations (1.19), et en utilisant la même procédure que dans la cas isotherme en ce qui concerne l'erreur de commutation entre le filtre et les opérateurs de dérivation, on obtient les

systèmes d'équations suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - 2\nu \operatorname{div} \bar{S} - \beta g(\bar{\theta} - \theta_{ref}) e_g + \operatorname{div}(\tau) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \bar{\theta}) - \kappa \operatorname{div}(\nabla \bar{\theta}) + \operatorname{div}(h) = 0 \\ \operatorname{div}(\bar{u}) = 0 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

où h est le flux de sous-maille défini par :

$$h = \overline{\theta u} - \bar{\theta} \bar{u} \quad (1.21)$$

$\bar{\theta}$ est la température filtrée.

Dans tout ce qui suit, les deux nouvelles inconnues à modéliser pour fermer le système d'équations (1.20) seront le tenseur déviatorique de sous-maille τ^d et le flux thermique de sous-maille h .

1.2 Modèles de turbulence anisothermes

Dans ce paragraphe, on va présenter quelques modèles de turbulence anisothermes usuels dans la littérature. Il s'agit du modèle de Smagorinsky, du modèle Smagorinsky dynamique, du modèle de Wang, du modèle WALE, du modèle de Eidson et Eidson modifié, du modèle de fonction de structure, du modèle de similarité d'échelles et du modèle mixte Smagorinsky-Bardina.

1.2.1 Modèle de Smagorinsky (SM)

Le modèle de Smagorinsky est le modèle le plus connu en mécanique des fluides, simple à mettre en œuvre, et basé sur les grandes échelles. Il est défini par :

$$\tau^d = -2\nu_{sm} \bar{S}, \quad (1.22)$$

et

$$h = -\kappa_{sm} \nabla \bar{\theta}, \quad (1.23)$$

avec ν_{sm} la viscosité de sous-maille turbulente définie par :

$$\nu_{sm} = (C_s \bar{\delta})^2 \sqrt{2 \operatorname{tr}(\bar{S}^2)},$$

et κ_{sm} la diffusivité thermique de sous-maille :

$$\kappa_{sm} = \frac{\nu_{sm}}{Pr_{sm}},$$

avec, Pr_{sm} le nombre de Prandtl de sous-maille, et $\bar{\delta} = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{\frac{1}{3}}$. longueur de coupure.

La valeur de la constante C_s de Smagorinsky est calculée en utilisant l'hypothèse d'équilibre local entre la production et la dissipation de l'énergie cinétique [8] :

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3K_0}{2} \right)^{-3/4} \approx 0,18$$

K_0 étant la constante de Kolmogorov :

$$K_0 \approx 1,4.$$

Ce modèle est le plus ancien modèle de sous-maille (1963), il présente plusieurs défauts majeurs malgré son usage courant :

1. La constante de Smagorinsky n'est pas universelle, certains auteurs ont proposé d'améliorer cette constante : W. Zhang & Q. Chen [81] utilisent $C_s \in [0.1, 0.25]$ pour un écoulement homogène isotrope. E. Lévêque et al. [43] ont utilisé $C_s = 0.17$.
2. Il diffuse beaucoup proche de la paroi. Pour régler ce problème, certains auteurs (exemple U. Piomelli [58]) multiplie la viscosité de sous-maille par la fonction d'amortissement de Van Driest suivante :

$$(1 - \exp(-y^+/25)) \quad (1.24)$$

où y^+ est la distance à la paroi adimensionnée par la vitesse de frottement à la paroi u_τ , $y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$.

3. Il ne s'annule pas à la paroi [48]. En effet, il faut que la viscosité de sous-maille à la paroi soit nulle, or ce n'est pas le cas :

$$\nu_{sm}|_{paroi} \neq 0$$

4. Le comportement de la viscosité de sous-maille dans la zone proche de la paroi, est incorrect.

En effet, on sait d'après [48] que le comportement de ν_{sm} doit être en $O(y^3)$. Or le modèle de Smagorinsky prédit une évolution de la viscosité de sous-maille en $O(y^2)$ au voisinage de la paroi [8] (en supposant que δ est constant proche de la paroi).

1.2.2 Modèle Dynamique

Germano et al [25] puis Lilly [41] proposent de calculer la constante C_s de Smagorinsky d'une manière dynamique. Cette méthode consiste à appliquer un nouveau filtrage noté $(\tilde{\cdot})$, de longueur de coupure $\tilde{\delta}$ supérieure à la longueur de coupure $\bar{\delta}$ ($\tilde{\delta} = 2\bar{\delta}$). Ensuite, par la méthode des moindres carrés sur le terme $\mathcal{L} = \widetilde{\bar{u} \otimes \bar{u}} - \tilde{\bar{u}} \otimes \tilde{\bar{u}}$ et $M = \tilde{\delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S} - (\tilde{\delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S})$, on calcule la constante C_{s_1} de Smagorinsky du tenseur déviatorique qui est égale :

$$C_{s_1} = \frac{1 \operatorname{tr}(\mathcal{L}.M)}{2 \operatorname{tr}(M^2)}, \quad (1.25)$$

et la constante du flux thermique de sous-maille qui est égale :

$$C_{s_2} = \frac{1 \operatorname{tr}(\mathcal{H}.M)}{2 \operatorname{tr}(M^2)}$$

où

$$|\bar{S}| = \sqrt{2 \operatorname{tr} \bar{S}^2}$$

$$\mathcal{H} = \widetilde{\bar{\theta} \bar{u}} - \bar{\theta} \bar{u},$$

et

$$\mathbf{M} = \bar{\delta}^2 |\bar{S}| \nabla \bar{\theta} - (\bar{\delta}^2 |\bar{S}| \nabla \bar{\theta}).$$

Ils obtiennent alors le modèle Smagorinsky dynamique suivant :

$$\tau^d = -\frac{\text{tr}(\mathcal{L}.M)}{\text{tr}(M^2)} \bar{\delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}, \quad (1.26)$$

$$h = -\frac{\text{tr}(\mathcal{H}.\mathbf{M})}{\text{tr}(\mathbf{M}^2)} \bar{\delta}^2 |\bar{S}| \nabla \bar{\theta}. \quad (1.27)$$

Ce modèle améliore généralement le résultat par rapport au modèle de Smagorinsky, et on peut toujours utiliser cette procédure dynamique pour déterminer la constante pour n'importe quel modèle de sous-maille. Mais l'inconvénient est que la constante C_s calculée par cette procédure n'est ni bornée ni positive, ce qui peut créer des instabilités numériques. Afin de corriger ces défauts, il faut effectuer des moyennes temporelles de la constante selon les directions d'homogénéité de l'écoulement ou bien limiter les bornes de la constante.

1.2.3 Modèle WALE

Afin d'obtenir un comportement de ν_{sm} en $O(y^{+3})$, Nicoud & Ducros [48](1999) ont développé le modèle **WALE** (**W**all **A**dapting **L**ocal **E**ddy), basé sur les échelles résolues, et qui dépend à la fois du tenseur des déformations et du tenseur de rotation. Sa formulation est :

$$\tau^d = -2\nu_{sm} \bar{S} \quad (1.28)$$

$$h = -\kappa_{sm} \nabla \bar{\theta}, \quad (1.29)$$

avec

$$\nu_{sm} = (C_w \bar{\delta})^2 \frac{\|s^d\|^3}{\|\bar{S}\|^5 + \|s^d\|^{5/2}}, \quad (1.30)$$

où C_w est une constante ($C_w = 0.5$), $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne, $\bar{\Omega}$ est le tenseur de rotation filtré

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} - \nabla^T \bar{u}),$$

et

$$s = \bar{S} \bar{S} + \bar{\Omega} \bar{\Omega}.$$

Les avantages de ce modèle sont les suivantes :

- Il est utilisé pour des géométries complexes.
- Sa viscosité turbulente (ou de sous-maille ν_{sm}) s'annule à la paroi.
- Le comportement de ν_{sm} à la paroi est en $O(y^{+3})$.

1.2.4 Modèles d'Eidson

Eidson [17] à proposé un autre modèle couplé de sous-maille basé aussi sur l'hypothèse d'équilibre locale. Ce modèle est de la forme :

$$\tau^d = -2C\bar{\delta}^2 \left(|\bar{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}} \nabla \bar{\theta} \cdot e_g \right)^{1/2} \bar{S}, \quad (1.31)$$

$$h = -\frac{C\bar{\delta}^2}{Pr_{sm}} \left(|\bar{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}} \nabla \bar{\theta} \cdot e_g \right)^{1/2} \nabla \bar{\theta}. \quad (1.32)$$

Afin d'éviter des solutions non-réelles pour ce modèle, il est souvent nécessaire de limiter la viscosité instantanée ν_{sm} et la supposer égale à zéro dans le cas où :

$$|\bar{S}|^2 < \frac{\beta g}{Pr_{sm}} \nabla \bar{\theta} \cdot e_g.$$

Cette contrainte peut être relaxée en utilisant la norme du tenseur de déformation $|\overline{S}|$ [55, 56], Peng et Davidson obtiennent alors le modèle suivant (en supposant que $|\overline{S}| \neq 0$) :

$$\tau^d = -2C\overline{\delta}^2 \left(|\overline{S}| - \frac{\beta g}{Pr_{sm} |\overline{S}|} \nabla \overline{\theta} \cdot e_g \right)^{1/2} \overline{S}, \quad (1.33)$$

$$h = -\frac{C\overline{\delta}^2}{Pr_{sm}} \left(|\overline{S}| - \frac{\beta g}{Pr_{sm} |\overline{S}|} \nabla \overline{\theta} \cdot e_g \right)^{1/2} \nabla \overline{\theta}. \quad (1.34)$$

1.2.5 Modèle de fonction de structure d'ordre 2

Le modèle de fonction de structure est basé sur l'énergie de coupure $E(\kappa_c)$ dans l'espace physique comme suit :

$$\nu_{sm}\left(\frac{\kappa}{\kappa_c}\right) = \frac{2}{3} C_\kappa^{-3/2} \left(\frac{E(\kappa_c)}{\kappa_c} \right), \quad (1.35)$$

où $C_\kappa = 1,4$ est la constante de Kolmogorov et $\kappa_c = \frac{\pi}{\overline{\delta}}$.

Dans le cas de la turbulence homogène isotrope, Métais et Lesieur [47] ont proposé d'estimer l'énergie de coupure par la fonction de structure d'ordre deux. La viscosité de sous-maille s'écrit alors :

$$\nu_{sm}\left(\frac{\kappa}{\kappa_c}\right) = C_{FS} \overline{\delta} [F_2(x, \overline{\delta}, t)]^{1/2}, \quad (1.36)$$

où $F_2(x, \overline{\delta}, t)$ est la fonction de structure d'ordre deux définie par :

$$F_2(x, \overline{\delta}, t) = \int_{B(x', \overline{\delta})} [u(x, t) - u(x + x', t)]^2 dx'. \quad (1.37)$$

Avec, $C_{FS} = 0,105 C_\kappa^{-3/2} \approx 0,063$, et $B(x', \overline{\delta})$ boule de centre x' et de rayon $\overline{\delta}$.

1.2.6 Modèle de similarité d'échelles (Bardina)

Bardina et al. [5] ont proposé un modèle basé sur l'hypothèse de similarité d'échelles entre les échelles de sous-maille $u - \bar{u}$ et les plus petites échelles résolues $\bar{u} - \tilde{u}$, où $\tilde{\cdot}$ est un second filtre dont la longueur de coupure est supérieure à celle du premier filtre.

On obtient le modèle suivant :

$$\tau = K_1(\widetilde{\bar{u} \otimes \bar{u}} - \tilde{u} \otimes \tilde{u}), \quad (1.38)$$

$$h = K_2(\widetilde{\bar{\theta} \bar{u}} - \tilde{\theta} \tilde{u}), \quad (1.39)$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes du modèle, pouvant être évaluées dynamiquement. L'avantage de ce modèle, est qu'il prend en compte le mécanisme de cascade d'énergie inverse. Par contre, il n'est pas assez dissipatif.

1.2.7 Modèle mixte Smagorinsky-Bardina

Ce modèle est proposé pour la première fois par Bardina et al. [6]. Le tenseur déviatorique est une combinaison linéaire du modèle de Smagorinsky (1.22) et du modèle de Bardina (1.38). Il s'écrit :

$$\tau^d = \frac{1}{2}(-2\nu_{sm}\bar{S} + \mathcal{L}^d), \quad (1.40)$$

et

$$h = \frac{1}{2}(-2\kappa_{sm}\nabla\bar{\theta} + \mathcal{H}), \quad (1.41)$$

D'autres auteurs, Zang et al. [80], ont proposé un autre type de modélisation mixte, il s'agit d'un modèle mixte dynamique-Bardina.

En général, il est mieux de coupler le modèle de Bardina avec n'importe quel modèle de sous-maille, et la constante du modèle est calculée par une

procédure dynamique. En effet, les modèles basés sur l'hypothèse de similarité d'échelles sont souvent plus performants en ce qui concerne la prise en compte de la cascade d'énergie inverse. Ils sont moins importants en ce qui concerne la reproduction du phénomène du transfert d'énergie. Par contre, les modèles de sous-maille reproduisent mieux le transfert d'énergie et ne prennent pas en compte le phénomène de la cascade inverse. D'où l'idée de combiner d'une manière linéaire un modèle de chaque famille.

1.2.8 Modèles Wang

Récemment, B. Wang et al. [75] ont proposé trois nouveaux modèles dynamiques (LES) pour le tenseur et le flux de sous-maille. Dans ce qui suit, on présentera un seul modèle parmi les trois.

$$\tau^d = -C_S\beta - C_W\gamma - C_N\eta. \quad (1.42)$$

Avec β est un tenseur défini par :

$$\beta = 2 \left(\bar{\delta}^2 |\bar{S}| \bar{S} \right), \quad (1.43)$$

et les deux autres tenseurs sont définis respectivement par :

$$\gamma = 4\bar{\delta}^2 \left(\bar{S} \bar{\Omega} + {}^T (\bar{S} \bar{\Omega}) \right), \quad (1.44)$$

$$\eta = 4\bar{\delta}^2 \left(\bar{S}^2 \right)^d. \quad (1.45)$$

Les constantes de ce modèle C_S , C_W et C_N sont calculées par une procédure dynamique :

$$\begin{bmatrix} \text{tr}(M^2) & \text{tr}(MW) & \text{tr}(MN) \\ \text{tr}(WM) & \text{tr}(W^2) & \text{tr}(WN) \\ \text{tr}(NM) & \text{tr}(NW) & \text{tr}(N^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_S \\ C_W \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{tr}(\mathcal{L}M) \\ \text{tr}(\mathcal{L}W) \\ \text{tr}(\mathcal{L}N) \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Les tenseurs W et N sont respectivement définis par :

$$W = \lambda - \tilde{\gamma}, \quad (1.47)$$

$$N = \zeta - \tilde{\eta}, \quad (1.48)$$

avec

$$\lambda = 4\tilde{\delta}^2 \left(\tilde{S} \tilde{\Omega} + {}^T (\tilde{S} \tilde{\Omega}) \right), \quad (1.49)$$

$$\zeta = 4\tilde{\delta}^2 \left(\tilde{S}^2 \right)^d, \quad (1.50)$$

et le flux de sous-maille est modélisé comme suit :

$$h = -C_{\theta G} \mathfrak{F} \tau^d \nabla \bar{\theta}, \quad (1.51)$$

où \mathfrak{F} est une échelle de sous-maille définie par :

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{|\bar{A}|},$$

avec

$$|\bar{A}| = \left(|\bar{S}|^2 + |\bar{\Omega}|^2 \right)^{1/2}$$

De même, le coefficient $C_{\theta G}$ est obtenu en minimisant l'erreur à l'aide de la méthode des moindres carrés.

Dans le chapitre 4, on analyse ces modèles de sous-mailles par rapport au groupe des symétries à un paramètre des équations de Navier-Stokes anisothermes (1.19).

Le chapitre suivant, est consacré aux groupes des symétries de Lie et leurs liens avec les équations aux dérivées partielles. Tout d'abord on définit le groupe de transformations à un paramètre et la transformation infinitésimale, puis on présente une méthode de calcul du groupe de symétrie à un paramètre pour une équation aux dérivées partielles quelconques.

Chapitre 2

Groupe des Symétries de Lie

La théorie des groupes de symétries de Lie a une grande importance dans la physique, fondamentale et appliquée [10, 9]. En effet, en relativité galiléenne, l'invariance des lois physiques par le groupe de Galilée¹, a été largement utilisée dans le dix-septième siècle, notamment par Huygens dans sa solution au problème de la collision des corps et par Newton dans ses premiers travaux sur le mouvement. Huygens et Newton établissent une relation entre une force (centrifuge pour Huygens, centripète pour Newton) et l'écart au mouvement inertiel engendré par cette force, ce qu'on appelle aujourd'hui le principe d'inertie. Puis, en mécanique quantique, on peut citer les travaux fondamentaux de E. Wigner [79] et H. Weyl [78] pour comprendre la symétrie des lois de la mécanique quantique en utilisant la théorie de groupe de Lie.

Récemment, en mécanique des fluides, M. Oberlack [50, 52] a utilisé les groupes de symétries à un paramètre pour déterminer quelques lois d'échelles (loi de paroi) pour un écoulement isotherme dans un canal plan.

Dans ce manuscrit, et pour le même type d'écoulement mais en anisotherme, on développe quelques lois d'échelles intéressantes 3.3. D'autres

1. Transformations d'espace-temps avec vitesse uniforme

applications de cette théorie en mécanique des fluides sont présentées :

- Pour trouver les solutions (jet, couche limite, profil parabolique...) d'un écoulement bidimensionnel cisailé [3.1.2](#).
- En dynamique tourbillonnaire, pour trouver des solutions exactes et certains vortex particuliers (vortex de Burgers et Burgers-Lundgren) pour un écoulement anisotherme.
- Pour construire une classe de modèles de sous-maille qui conservent la physique de l'écoulement pendant la simulation numérique des équations de Navier-Stokes anisothermes.

Le but de ce chapitre est de proposer une méthode de calcul du groupe de symétries pour une équation aux dérivées partielles et d'étudier ses propriétés de symétrie. Ce chapitre se décompose comme suit. Dans la section [2.1](#), on définit le groupe de transformations à un paramètre. Dans la section [2.2](#), on définit le générateur infinitésimal associé à ce groupe. Dans la section [2.3](#), on présente la prolongation d'un générateur infinitésimal. A la fin, on donne un algorithme de calcul du groupe de symétries pour une équation aux dérivées partielles.

2.1 Groupe de transformations à un paramètre

Définition 1 Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élément dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$, et T_a une transformation à un paramètre a , appartenant à un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, avec Φ une loi additive interne définie sur I , T_a définie comme suit :

$$T_a : D \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

L'ensemble des transformations T_a

$$\hat{x} = T_a(x), \tag{2.1}$$

forme un groupe de transformations à un paramètre G si :

2.1. GROUPE DE TRANSFORMATIONS À UN PARAMÈTRE

1. $\forall a$ dans I , la transformation $T_a(x)$ est de classe C^∞ .
2. I avec la loi additive interne Φ forment un groupe noté (I, Φ) .
3. $T_0(x) = x$, où 0 est l'identité du groupe (I, Φ) .
4. $\forall T_a \in G, T_a$ est inversible et $(T_a)^{-1} = T_{-a}$.

Exemple 1 Le groupe de transformations dans un plan :

$$\hat{x}_1 = x_1 + \frac{1}{2}a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\hat{x}_2 = x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

est un groupe à un paramètre a , avec $\Phi(a, b) = a + b$. Ce groupe correspond à des mouvements parallèles à l'orbite γ , qui est une droite d'angle $\pi/3$ (voir la FIGURE 2.1, où γ est l'orbite du point $(0, 0)$).

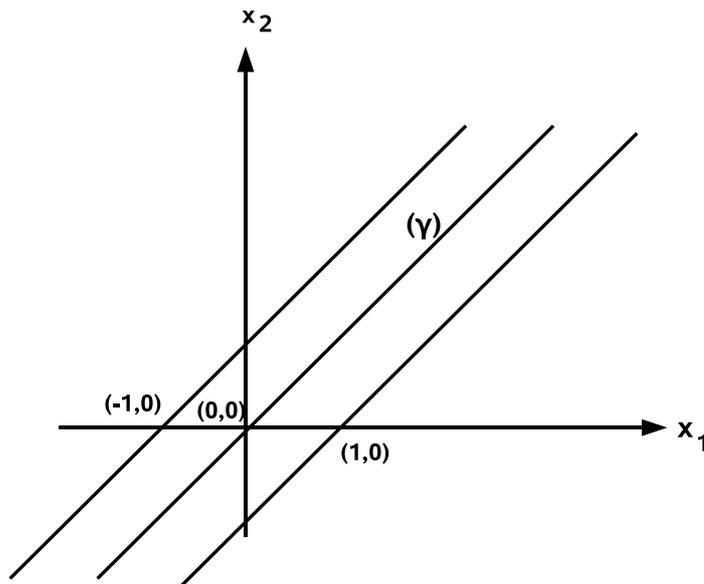


FIGURE 2.1 – Groupe des translations

2.2 Transformation infinitésimale

Considérons une transformation

$$y = T_a(x) \tag{2.2}$$

où $a \in I$.

Le développement de Taylor de (2.2) par rapport à a , au voisinage de l'identité 0, donne :

$$y = x + a \left(\left. \frac{\partial T_a(x)}{\partial a} \right|_{a=0} \right) + O(a^2).$$

Notons :

$$\xi(x) = \left. \frac{\partial T_a(x)}{\partial a} \right|_{a=0}. \tag{2.3}$$

La transformation :

$$y = x + a\xi(x) + O(a^2) \tag{2.4}$$

est dite transformation infinitésimale de la transformation (2.2) et $\xi(x)$ est dite composante infinitésimale de (2.2).

2.2.1 Générateur infinitésimal

Définition 2 *Le générateur infinitésimal d'une transformation (2.2) du groupe G , est l'opérateur :*

$$X = X(x) = \xi(x) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.5}$$

où ∇ est l'opérateur gradient défini par :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right); \tag{2.6}$$

2.2. TRANSFORMATION INFINITÉSIMALE

et pour toute fonction différentiable $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a l'égalité suivante :

$$X.F(x) = \xi(x) \cdot \nabla F(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \quad (2.7)$$

Exemple 2 A titre d'exemple, considérons le groupe de rotation dans \mathbb{R}^2

$$y_1 = x_1 \cos a + x_2 \sin a$$

$$y_2 = -x_1 \sin a + x_2 \cos a.$$

La composante infinitésimale de cette transformation est :

$$\begin{aligned} \xi(x_1, x_2) &= (\xi_1(x_1, x_2), \xi_2(x_1, x_2)) \\ &= \left(\left. \frac{\partial y_1}{\partial a} \right|_{a=0}, \left. \frac{\partial y_2}{\partial a} \right|_{a=0} \right) \\ &= (x_2, -x_1) \end{aligned}$$

Le générateur infinitésimal associé à ce groupe est :

$$X = \xi_1(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (2.8)$$

Etant donné un générateur infinitésimal X , on peut reconstruire la transformation à un paramètre associée en résolvant le problème :

$$\begin{cases} \frac{dT_a(x)}{da} = X.T_a(x) \\ T_0(x) = x. \end{cases} \quad (2.9)$$

Alors, il y a une équivalence entre le groupe de transformations à un paramètre et son générateur infinitésimal par la relation (2.9).

Définition 3 Une fonction $F(x)$ de classe C^∞ est dite invariante par le groupe de transformations à un paramètre G si et seulement si

$$F(T_a(x)) \equiv F(x) \quad \forall T_a \in G \quad (2.10)$$

On peut montrer [54] que F est invariante par la transformation T_a si et seulement si

$$X.F \equiv 0 \quad (2.11)$$

Dans la section suivante on s'intéresse à la détermination des groupes de transformations à un paramètre pour un système d'équations aux dérivées partielles EDP.

2.3 Prolongation

Considérons une EDP d'ordre k , de la forme suivante :

$$F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}) = 0. \quad (2.12)$$

Avec :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.13)$$

correspond aux n variables indépendantes et,

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (2.14)$$

correspond aux m variables dépendantes de l'EDP ; soit $u^{(1)}$ l'ensemble des coordonnées correspondant à toutes les dérivées partielles du premier ordre de u par rapport à x :

$$u^{(1)} = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; i = 1, \dots, m \ \& \ j = 1, \dots, n \right\}.$$

2.3. PROLONGATION

$u^{(k)}$ représente l'ensemble des coordonnées correspondant à toutes les dérivées partielles d'ordre k de u par rapport à x . Un élément de cet ensemble sera noté par :

$$u_{\mu, i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{\partial u_\mu}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \quad (2.15)$$

avec $\mu = 1, 2, \dots, m$; $i_j = 1, 2, \dots, n$ pour $j = 1, 2, \dots, k$.

Notons $\mathbf{X} \cong \mathbb{R}^n$ l'espace des variables indépendantes x de dimension n , $\mathbf{U} \cong \mathbb{R}^m$ l'espace des variables dépendantes u de dimension m , \mathbf{U}_k l'espace des germes à l'ordre k , dont chaque élément est de la forme $u^{(k)}$, et $\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{U} \times \mathbf{U}_1 \times \dots \times \mathbf{U}_k$ est l'espace de produit cartésien.

Un groupe de transformations associé à cette EDP (2.12) est défini par ces éléments comme suit :

$$\begin{aligned} T_a : \mathbf{X} \times \mathbf{U} &\longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{U} \\ (x, u) &\longmapsto (\hat{x}, \hat{u}) \end{aligned}$$

où : \hat{x} et \hat{u} sont, respectivement, l'image des variables indépendantes et dépendantes.

Avant la mise en œuvre d'une méthode de calcul du groupe de symétries à un paramètre d'un système d'équations aux dérivées partielles, nous avons besoin de remplacer la notion d'un système d'équations aux dérivées partielles par un objet concret géométrique. Pour ce faire nous avons besoin de "prolonger" l'espace de base $\mathbf{X} \times \mathbf{U}$ représentant les variables indépendantes et dépendantes à l'étude à un espace totale qui représente également les différents dérivés partielles survenant dans le système. Cet espace totale $\mathbf{X} \times \mathbf{U}^{(k)}$ dont les coordonnées représentent les variables indépendantes, les variables dépendantes et les dérivés des variables dépendantes à l'ordre k est appelé l'espace de jet $\mathbf{J}^{(k)}$ d'ordre k de l'espace de base $\mathbf{X} \times \mathbf{U}$.

Dans les paragraphes suivants, on définit le prolongement à l'ordre k du générateur infinitésimal associé à une transformations du groupe des transformations à un paramètre de l'EDP, dans un cas simple où le nombre des composantes de la variable indépendante x est égale à 1 ($n = 1$) et le nombre des composantes de la variable dépendante u est égale à 1 ($m = 1$). Ensuite, on généralise la définition pour (n, m) quelconques.

2.3.1 Prolongement à l'ordre k , pour $m = n = 1$

Etant donné une équation aux dérivées partielles d'ordre k , une transformation à un paramètre associée à cette EDP est de la forme :

$$(\hat{x}, \hat{u}) = T_a(x, u) \in \mathbf{X} \times \mathbf{U}, \quad (2.16)$$

avec $\hat{u} = U(x, u, a) \in \mathbf{U}$. Le générateur infinitésimal associé à (2.16) est de la forme :

$$X = \xi_x(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_u(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.17)$$

où

$$\xi_x = \left. \frac{\partial \hat{x}}{\partial a} \right|_{a=0} \quad (2.18)$$

$$\xi_u = \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial a} \right|_{a=0}. \quad (2.19)$$

Le prolongement d'ordre 1 de X , noté $X^{(1)}$, est un champ de vecteurs défini dans l'espace de jet $\mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{X} \times \mathbf{U}^{(1)}$ comme suit :

$$X^{(1)} = \xi_x(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_u(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}(x, u, u^1) \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad (2.20)$$

$$\text{avec } u^1 = \frac{\partial u}{\partial x} \in u^{(1)},$$

$$\eta^{(1)}(x, u, u^1) = D_x \xi_u - u^1 D_x \xi_x, \quad (2.21)$$

et D_x est la dérivation totale par rapport à x :

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u^1 \frac{\partial}{\partial u} + u^2 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots \quad (2.22)$$

$X^{(2)}$ est le prolongement de X à l'ordre 2, défini dans l'espace de jet $\mathbf{J}^{(2)} = \mathbf{X} \times \mathbf{U}^{(2)}$ par :

$$X^{(2)} = \xi_x(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_u(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}(x, u, u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} + \eta^{(2)}(x, u, u^1, u^2) \frac{\partial}{\partial u^2}, \quad (2.23)$$

avec

$$\eta^{(2)}(x, u, u^1, u^2) = D_x \eta^{(1)} - u^2 D_x \xi_x, \quad (2.24)$$

⋮

$X^{(k)}$ est le prolongement de X à l'ordre k , défini dans l'espace de jet $\mathbf{J}^{(k)} = \mathbf{X} \times \mathbf{U}^{(k)}$ par :

$$\begin{aligned} X^{(k)} = & \xi_x(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_u(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}(x, u, u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} + \eta^{(2)}(x, u, u^1, u^2) \frac{\partial}{\partial u^2} + \dots \\ & + \eta^{(k)}(x, u, u^1, u^2, \dots, u^k) \frac{\partial}{\partial u^k}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec

$$\eta^{(k)}(x, u, u^1, u^2, \dots, u^k) = D_x \eta^{(k-1)} - u^{(k)} D_x \xi_x. \quad (2.26)$$

2.3.2 Prolongement à l'ordre k pour n, m quelconques

Etant donné une équation aux dérivées partielles d'ordre k , une transformation du groupe de transformations à un paramètre associé à cette EDP est de la forme :

2.3. PROLONGATION

$$(\hat{x}, \hat{u}) = T_a(x, u). \quad (2.27)$$

Avec

$$\hat{x}_i = T_i(x, u, a), \quad (2.28)$$

$$\hat{u}_j = U_j(x, u, a), \quad (2.29)$$

$i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$

Le générateur infinitésimal associé à (2.28,2.29), est de la forme :

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \eta_j(x, u) \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (2.30)$$

Avec,

$$\xi_i(x, u) = \left(\frac{\partial T_i(x, u, a)}{\partial a} \right) \Big|_{a=0} \quad (2.31)$$

et

$$\eta_j(x, u) = \left(\frac{\partial U_j(x, u, a)}{\partial a} \right) \Big|_{a=0}. \quad (2.32)$$

Son prolongement à l'ordre k , défini dans l'espace de jet $\mathbf{J}^{(k)}$ comme suit :

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_j(x, u) \frac{\partial}{\partial u_j} + \eta_{j_i}^{(1)}(x, u, u^1) \frac{\partial}{\partial u_{j_i}} + \dots \\ &+ \eta_{j_{i_1 i_2 \dots i_k}}^{(k)}(x, u, u^1, u^2, \dots, u^k) \frac{\partial}{\partial u_{j_{i_1 i_2 \dots i_k}}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Avec,

$$\eta_{j_i}^{(1)} = D_i \eta_j - \frac{\partial u_j}{\partial x_l} D_l \xi_i \quad (2.34)$$

⋮

$$\eta_{j_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} = D_{i_k} \eta_{j_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - \frac{\partial u_{j_1 i_2 \dots i_{k-1}}}{\partial x_l} D_{i_k} \xi_l \quad (2.35)$$

$l = 1, 2, \dots, n$ et D_i la dérivée totale définie comme suit :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_{ji} \frac{\partial}{\partial u_j} + u_{j i i_1} \frac{\partial}{\partial u_{j i_1}} + \dots + u_{j i i_1 i_2 \dots i_n} \frac{\partial}{\partial u_{j i_1 i_2 \dots i_n}} + \dots \quad (2.36)$$

Dans la section suivante, nous présenterons une méthode de calcul du groupe de symétrie à un paramètre, dont la définition sera aussi donnée dans cette section, pour une équation aux dérivées partielles quelconque. On passe ensuite, aux équations des écoulements turbulents anisothermes.

2.4 Détermination du groupe de symétrie

Considérons tout d'abord une équation aux dérivées partielles d'ordre k sous cette forme :

$$F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}) = 0. \quad (2.37)$$

Avec, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ la variable indépendante, et $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ la variable dépendante. Soit $T_a(x, u) = (\hat{x}_i, \hat{u}_j)$ une transformation de classe C^∞ et qui dépend continûment de a . Elle est définie par :

$$\hat{x}_i = T_i(x, u, a), \quad (2.38)$$

$$\hat{u}_j = U_j(x, u, a). \quad (2.39)$$

Cette transformation est une symétrie de l'équation aux dérivées partielles (2.37) si :

$$F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}) = 0 \Rightarrow F(\hat{x}, \hat{u}, \hat{u}^{(1)}, \hat{u}^{(2)}, \dots, \hat{u}^{(k)}) = 0 \quad (2.40)$$

2.4. DÉTERMINATION DU GROUPE DE SYMÉTRIE

L'égalité (2.40) signifie que l'image d'une solution de l'équation aux dérivées partielles (2.37), par la transformation (2.38) et (2.39,) est aussi une solution de (2.37).

Avant de définir le groupe de symétries, on aborde la notion de groupe de Lie. Ce groupe joue un rôle important dans la physique mathématique (mécanique quantique, mécanique des fluides, théorie des cordes....).

Définition 4 *Un groupe de Lie est une variété différentiable G , de classe C^∞ , munie d'une structure de groupe, telle les opérations de multiplication et d'inversion sont différentiables de classe C^∞ .*

Définition 5 *Le groupe de symétries de Lie d'une équation aux dérivées partielles est l'ensemble des transformations à un paramètre² local a ³ continues par rapport à a et vérifiant l'égalité (2.40). Cet ensemble vérifie les axiomes d'un groupe et $T_0 = I_d$ est son élément neutre.*

Après la définition de ces deux groupes, on peut voir les groupes de Lie comme des familles de symétries qui varient d'une façon régulières en fonctions des paramètres. Par exemple, le groupe de rotation $SO(2)$ d'angle θ , est une famille de symétrie qui dépend d'une façon continue d'un paramètre θ , où l'action de ce groupe sur \mathbb{R}^2 est définie comme suit :

$$\left(\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta & -x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta & +x_2 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

De plus, le calcul du groupe de symétrie est algorithmique. Il est présenté par les étapes suivantes [54] :

2. On peut définir aussi le groupe de symétrie à plusieurs paramètres.

3. a est un paramètre local dans un voisinage centré en 0.

2.4. DÉTERMINATION DU GROUPE DE SYMÉTRIE

- Etablissement du prolongement $X^{(k)}$ du champ de vecteurs X de l'équation (2.37) d'ordre k , en fonction de ξ et η par la relation (2.34, ..., 2.35).
- En utilisant la condition⁴ :

$$F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}) = 0 \Rightarrow X^{(k)}.F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}) = 0, \quad (2.42)$$

on construit un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les composantes infinitésimales ξ et η du champ de vecteurs X .

- La résolution de ce système, par les codes des calculs **GeM** de A. F. Cheviakov [12], donne les générateurs infinitésimaux en fonction des variables indépendantes et dépendantes.
- Pour chaque générateur infinitésimal, on applique la relation (2.9) pour trouver la transformation à un paramètre associée.

On aura finalement le groupe de symétrie de l'équation (2.37).

Notre première application de la théorie de groupe de Lie sera sur les équations des écoulements turbulents anisothermes. On calcule le groupe de symétries associé à ces équations, ce qui va contribuer d'une part à la construction d'une classe de modèles de sous-maille invariants par ce groupe de symétrie, et d'autre part à la détermination de lois d'échelles d'un écoulement parallèle en appliquant la méthode de RANS.

4. C'est une condition suffisante pour qu'une transformation soit une symétrie de l'équation différentielle [54]

2.4.1 Groupe de symétrie des écoulements turbulents anisothermes

On représente les équations des écoulements turbulents anisothermes déjà définies au chapitre 1, paragraphe 1.1.5 comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \operatorname{div}(S) + \beta g(\theta - \theta_{ref}) e_g \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(u\theta) = \kappa \operatorname{div}(\nabla \theta) \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Il y a plusieurs types de symétries pour un système d'équations aux dérivées partielles, mais on se limitera dans cette thèse au groupe G des transformations à un paramètre.

Dans ce qui suit, on détermine le groupe des transformations à un paramètre qui laissent invariant l'ensemble des solutions de l'équations (2.43). En effet, ces équations sont équivalentes à des équations de la forme :

$$F \left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (2.44)$$

Avec $q = (t, x, u, \theta, p)$.

Soit T_a un élément du groupe G . Il est de la forme :

$$T_a : q \longmapsto \hat{q},$$

où a est le paramètre du groupe G .

2.4. DÉTERMINATION DU GROUPE DE SYMÉTRIE

Soit X un générateur infinitésimal du groupe G de la forme :

$$X = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_{u_i} \frac{\partial}{\partial u_i} + \eta_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \eta_p \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.45)$$

où

$$\xi_t = \left. \frac{\partial \hat{t}}{\partial a} \right|_{a=0}$$

$$\xi_{x_i} = \left. \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial a} \right|_{a=0} \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\eta_{u_i} = \left. \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial a} \right|_{a=0} \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\eta_\theta = \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial a} \right|_{a=0}$$

$$\eta_p = \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial a} \right|_{a=0}$$

et $X^{(2)}$ son prolongement à l'ordre 2 [54] défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 X^{(2)} = & X + \sum_{i=1}^3 \eta_i^T \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} + \sum_{i,j=1}^3 \eta_i^j \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} + \\
 & \sum_{j=1}^3 \eta_p^j \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)} + \sum_{j=1}^3 \eta_\theta^j \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right)} + \\
 & \sum_{i,j=1}^3 \eta_i^{jj} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)} + \sum_{j=1}^3 \eta_\theta^{jj} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_j^2} \right)}
 \end{aligned}$$

où

$$\eta_i^T = D_t \eta_{u_i} - \frac{\partial u_i}{\partial t} D_t \xi_t, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\eta_i^j = D_{x_j} \eta_{u_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} D_{x_j} \xi_{x_k}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\eta_p^j = D_{x_j} \eta_p - \frac{\partial p}{\partial x_k} D_{x_j} \xi_{x_k}, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$\eta_\theta^j = D_{x_j} \eta_\theta - \frac{\partial \theta}{\partial x_k} D_{x_j} \xi_{x_k}, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$\eta_i^{jj} = D_{x_j} \eta_i^j - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} D_{x_j} \xi_{x_k}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\eta_\theta^{jj} = D_{x_j} \eta_\theta^j - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} D_{x_j} \xi_{x_k}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

et D_α désigne la dérivation totale par rapport à α .

La condition de symétrie [54] :

$$F = 0 \quad \Rightarrow \quad X^{(2)}.F = 0 \tag{2.46}$$

2.4. DÉTERMINATION DU GROUPE DE SYMÉTRIE

nous donne un système d'équations différentielles ordinaires vérifiées par ξ_\bullet et η_\bullet , dont la résolution conduit aux générateurs infinitésimaux des équations des écoulements turbulents anisothermes. Notons que ces calculs sont effectuées avec le logiciel de calcul symbolique **Maple** et les codes **GeM** de A. F. Cheviakov [12] :

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.47)$$

$$Y_0 = \zeta(t) \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.48)$$

$$Z_0 = \beta g x_3 \frac{\partial}{\partial p} + \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.49)$$

$$X_{12} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} \quad (2.50)$$

$$X_i = \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \dot{\alpha}_i(t) \frac{\partial}{\partial u_i} - \rho x_i \ddot{\alpha}_i(t) \frac{\partial}{\partial p}, i = 1, 2, 3. \quad (2.51)$$

$$Y_1 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial u_j} - 2p \frac{\partial}{\partial p} - 3\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.52)$$

$$Y_2 = \sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + 2p \frac{\partial}{\partial p} + \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + 2\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa}, \quad (2.53)$$

avec $\zeta(t)$ et $\alpha_i(t)$ sont des fonctions de classe infinie quelconques.

Ces générateurs infinitésimaux déterminent complètement le groupe G des symétries. En effet, connaissant X , on peut reconstruire les transfor-

2.4. DÉTERMINATION DU GROUPE DE SYMÉTRIE

mations du groupe G à partir du système suivant (2.9) :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{q}}{da} = X.\hat{q} \\ \hat{q}(0) = q. \end{cases} \quad (2.54)$$

Lorsqu'on applique le système (2.54) aux générateurs (2.47)-(2.53), on obtient un système d'équations différentielles ordinaires, dont la résolution conduit aux groupes de symétrie à un paramètre des équations (2.43) :

- Le groupe des translations temporelles

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t + a, x, u, \theta, p) \quad (2.55)$$

- Le groupe des translations par rapport à la pression

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, x, u, \theta, p + \zeta(t)) \quad (2.56)$$

- Le groupe des translations pression-température

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, x, u, \theta + \frac{a}{\rho}, p + a\beta gx_3) \quad (2.57)$$

- Le groupe des rotations horizontales, d'angle a

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, Rx, Ru, \theta, p), \quad (2.58)$$

où R est la matrice de rotation.

- Le groupe des transformations galiléennes généralisées

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, x + \alpha(t), u + \dot{\alpha}(t), \theta, p + \rho x \cdot \ddot{\alpha}(t)), \quad (2.59)$$

où $x = (x_i)_i$, $\alpha = (\alpha_i)_i$, $\alpha_i(t)$ étant une fonction quelconque de classe C^∞ .

– Premier groupe de changement d'échelles

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (a^2 t, ax, a^{-1} u, a^{-3} \theta, a^{-2} p) \quad (2.60)$$

– Second groupe de changement d'échelles

$$(t, x, u, \theta, p, \nu, \kappa) \longmapsto (t, ax, au, a\theta, a^2 p, a^2 \nu, a^2 \kappa). \quad (2.61)$$

Grâce à la théorie de Lie, on a pu trouver les groupes de symétries à un nombre fini de paramètres des équations (2.43). Mais, elles possèdent d'autres groupes de symétries qui ne sont pas à un paramètre, comme l'invariance par réflexion et l'indifférence matérielle⁵, définies comme suit :

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, \Lambda x, \Lambda u, i_2 \theta, p), \quad (2.62)$$

$$(t, x, u, \theta, p) \mapsto (t, R(t)x, R(t)u + \dot{R}(t)x, \theta, p - 3w\psi + \frac{1}{2}w^2 \|x\|^2), \quad (2.63)$$

où $\Lambda = \text{diag}(i_1, i_2, i_3)$, $i_l = \pm 1$, ψ la fonction de courant et $R(t)$ la matrice de rotation plane, d'angle wt :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos wt & \sin wt & 0 \\ -\sin wt & \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme le groupe de symétries représente les propriétés physiques intrinsèques contenues dans les équations, il offre un outil efficace de modélisation des phénomènes physiques. Cette modélisation était souvent construite à partir d'hypothèses physiques ou mathématiques (R. Schiestel [69, 70], P. Sagaut [66]) sans tenir compte de la symétrie, ce qui détruit les propriétés physiques de l'écoulement considéré (voir D. Razafindralandy & H. Hamdouni. [64]). Au niveau des lois d'échelles, M. Oberlack [49, 50, 51, 52] est

5. L'indifférence matérielle est une symétrie en $2D$

le premier à utiliser cette théorie pour déterminer ces lois pour un écoulement parallèle isotherme. Au niveau de la modélisation des phénomènes physiques, D. Razafindralandy, A. Hamdouni et al. [63, 60, 61, 62] ont été les premiers à construire une classe de modèles de turbulence invariants par les groupes de symétrie des équations de Navier-Stokes isothermes.

Dans ce chapitre, nous avons défini le groupe de Lie et le groupe de symétrie à un paramètre pour une équations aux dérivées partielles. Ensuite, nous avons cité le principe général pour calculer ce groupe en utilisant le code formel **GeM**. Enfin, nous avons appliqué ce principe de calcul pour déterminer le groupe de symétrie des équations turbulents anisothermes.

Dans le chapitre suivant, on propose quelques applications de la théorie des groupes de symétries en mécanique des fluides. D'abord, en dynamique tourbillonnaire pour trouver des solutions et des vortex particulier. Puis, on développe des nouvelles lois d'échelles pour un écoulement anisotherme.

Chapitre 3

Usage du groupe de symétries en mécanique des fluides

Le but de ce chapitre est de montrer l'importance de la théorie du groupe de symétries en mécanique des fluides, notamment pour trouver des solutions exactes de l'équation de Navier-Stokes anisotherme. On cherche des solutions invariantes par les groupes de symétrie associés [28, 27]. Par ces solutions, on détecte des vortex particuliers [26, 28]. Enfin, on présente de nouvelles lois d'échelles pour un écoulement parallèle anisotherme.

3.1 Solution auto-similaire

3.1.1 Définition

Définition 6 Soient E une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$E(t, x, u) = 0, \quad (3.1)$$

T_a une symétrie à un paramètre a de l'équation (3.1), définie par :

$$T_a(q) = \hat{q} = (\hat{t}, \hat{x}, \hat{u}), \quad (3.2)$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ la variable indépendante, et $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ la variable dépendante.

3.1. SOLUTION AUTO-SIMILAIRE

Une solution **auto-similaire** de l'équation (3.1) est une solution qui ne change pas avec la transformation T_a , c'est-à-dire :

$$\hat{u}(\hat{t}, \hat{x}) = u(t, x). \quad (3.3)$$

Autrement dit, si X est le générateur infinitésimal de la transformation T_a , u est une solution auto-similaire ssi

$$X.u = 0. \quad (3.4)$$

Le calcul des solutions auto-similaires, est l'une des premières utilisations de la théorie des groupes de symétrie en mécanique des fluides. Avec cette théorie, on peut :

- Trouver des solutions exactes de l'équations Navier-Stokes (voir partie dynamique tourbillonnaire 3.2)
- A partir d'un ensemble de solutions, obtenir de nouvelles solutions en appliquants un élément du groupe sur cet ensemble.
- Trouver les lois d'échelles (3.3)
- A partir des invariances de l'EDP, utiliser la théorème de E. Noëther [73], pour les problèmes variationnels, pour obtenir des lois de conservation.
- Résoudre les équations différentielles ordinaires EDO (V. A. Baikov & N. H. Ibragimov [3])
- Réduire les équations aux dérivées partielles (voir W.I. Fushchych [20, 21]).

Dans le paragraphe suivant, on va déterminer les solutions auto-similaires d'un écoulement de couche-limite laminaire bidimensionnel isotherme.

3.1.2 Écoulement bidimensionnel cisailé

Considérons un écoulement bidimensionnel cisailé en 2D. Cet écoulement est gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Les groupes de symétries du système (3.5) sont :

– Le groupe des translations :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_3 = \dot{G}(x)u \frac{\partial}{\partial v} + G(x) \frac{\partial}{\partial y},$$

où $G(x)$ est une fonction arbitraire.

– Premier groupe de changement d'échelles :

$$X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}$$

– Second groupe de changement d'échelles :

$$X_5 = -2x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial v}.$$

3.1. SOLUTION AUTO-SIMILAIRE

Ce système d'équation admet quelques solutions particulières qu'on peut calculer en cherchant la solution auto-similaire associée à la combinaison du premier et du second groupe de changement d'échelles $X = n_1X_4 + n_2X_5$:

$$(x, y, u, v) \longrightarrow (\hat{x} = a^{n_1}x, \hat{y} = a^{n_2}y, \hat{u} = a^{n_1-2n_2}u, \hat{v} = a^{-n_2}v), \quad (3.6)$$

où n_1 et n_2 sont deux entiers relatifs.

Ces solutions vérifient les deux égalités suivantes :

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{y}) = u(x, y), \quad \hat{v}(\hat{x}, \hat{y}) = v(x, y). \quad (3.7)$$

Dérivons l'égalité (3.7) par rapport à a au voisinage de $a = 1$ on obtient :

$$(n_1 - 2n_2)u + n_1x \frac{\partial u}{\partial x} + n_2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

$$-n_2v + n_1x \frac{\partial v}{\partial x} + n_2y \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.9)$$

Il y a deux cas à traiter :

1. Si $n_1 = 0$, on a les solutions auto-similaires suivantes :

$$u(x, y) = y^2F(x) \quad v(x, y) = yH(x) \quad (3.10)$$

2. Si $n_1 \neq 0$, les équations caractéristiques (3.8, 3.9) admettent une solution :

$$u(x, y) = x^{1-2\alpha}F\left(\frac{y}{x^\alpha}\right), \quad v(x, y) = x^{-\alpha}H\left(\frac{y}{x^\alpha}\right) \quad \text{avec } \alpha = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.11)$$

F et H vérifient un système d'équations différentielles ordinaires, déduit en injectant la forme (3.10) et (3.11) dans (3.5) [65].

Choix de α

- (a) Si on cherche la solution d'un **jet**, avec une quantité de mouvement constant :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, y) dy,$$

il faut que $\alpha = \frac{2}{3}$ et la solution du jet est :

$$u(x, y) = x^{-1/3} F(\eta), v(x, y) = x^{-2/3} H(\eta) \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{x^{2/3}} \quad (3.12)$$

- (b) Pour un écoulement de **couche-limite**, il faut que :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = \text{constante}, \quad (3.13)$$

indépendant de y pour un x fixé. Pour cela, il faut que $\alpha = \frac{1}{2}$, et

que la variable auto-similaire soit $\frac{y}{x^{1/2}}$.

- (c) Pour trouver le **profil parabolique** de la vitesse d'un écoulement dans un canal, il suffit de prendre :

$$\alpha = 1/4 \quad \text{et} \quad F(\eta) = \eta^2.$$

Dans cette partie, nous avons utilisé la solution auto-similaire associée à la transformation d'échelle des écoulements cisailés pour calculer des solutions particulières intéressantes connues en mécanique des fluides afin de montrer l'importance du groupe de symétrie et notamment la solution auto-similaire. Dans le paragraphe suivant, on va calculer des solutions exactes des équations Navier-Stokes anisothermes, en utilisant certaines propriétés du groupe de symétries de ces équations.

3.2 Dynamique tourbillonnaire

Dans ce paragraphe, on utilise le groupe de rotation X_{12} (2.50) dans le plan (xOy) d'angle a et le groupe des transformations galiléennes généralisées X_1 (2.51) dans la direction de x_1 , des équations de Navier-Stokes

anisothermes (2.43), pour trouver quelques solutions exactes. Puis, dans un cas particulier, on trouve le vortex de Burgers, Burgers-Lundgren, le cisaillement de Burgers et certains vortex instationnaires.

3.2.1 Groupe de rotation X_{12}

Les invariants du groupe de rotation X_{12} , sont les solutions de l'équation caractéristique suivante :

$$X_{12}.I = x_2 \frac{\partial I}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial I}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial I}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial I}{\partial u_2} \quad (3.14)$$

Ces invariants sont alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, z \text{ et } t. \text{ Avec } (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z).$$

Autrement dit, ce sont les variables indépendantes des coordonnées cylindriques. Par ces invariants, on fait un changement de variables de la forme :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \\ u_1 = U_r(r, z, t) \cos \varphi - U_\varphi(r, z, t) \sin \varphi \\ u_2 = U_r(r, z, t) \sin \varphi + U_\varphi(r, z, t) \cos \varphi \\ u_3 = U_z(r, z, t) \\ \theta = T(r, z, t) \text{ et } p = P(r, z, t), \end{cases} \quad (3.15)$$

Par ce changement de variables, le système (2.43), se réduit à :

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_\varphi^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial r} - \nu \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial U_\varphi}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{U_r U_\varphi}{r} + U_z \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} - \nu \left[\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} - \nu \left[\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] - \beta g T = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} - \kappa \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

Supposons que $U_r = U_r(r)$, $U_\varphi = U_\varphi(r)$ et $P = P(r)$. Dans ce cas, la solution exacte de l'équation (3.16) et (3.17) est :

$$U_r = \frac{c_1}{r}$$

$$U_\varphi = \frac{c_2}{r} + c_3 r^{(1+\frac{c_1}{\nu})}$$

$$P = c_{12} - \frac{1}{2r^2}(c_2^2 + c_1^2) + \nu \frac{2c_3 c_2}{c_1} r^{-\frac{c_1}{\nu}} + \frac{\nu}{2c_1 + \nu} c_3^2 r^{2+2\frac{c_1}{\nu}}$$

avec c_1, c_2, c_3 et c_{12} sont des constantes arbitraires.

Ensuite, on déduit de l'équation (3.20) (respectivement de l'équation (3.18)) que $U_z = U_z(r, t)$ et $T = T(r, t)$ ne dépendent pas de z .

Il reste deux équations à résoudre, (3.18) et (3.19), qui se réduisent aux équations suivantes :

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} - \nu \left[\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} \right] - \beta g T = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} - \kappa \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad (3.22)$$

On calcule tout d'abord le groupe de symétries des équations (3.21) et (3.22), puis on cherche des solutions auto-similaires associées à ces deux équations. Le groupe de symétries des équations (3.21) et (3.22) est :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.23)$$

$$X_2 = U_z \frac{\partial}{\partial U_z} + T \frac{\partial}{\partial T} \quad (3.24)$$

$$X_3 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha U_z \frac{\partial}{\partial U_z} + (\alpha - 2)T \frac{\partial}{\partial T}. \quad (3.25)$$

Avec α , un nombre réel.

On cherche maintenant les solutions auto-similaires associées au groupe de symétries X_3 (3.25), en supposant que $\alpha = 1$.

$$X_3.U_z = 0 \quad (3.26)$$

$$X_3.T = 0 \quad (3.27)$$

Les deux équations (3.26) et (3.27) donnent les équations caractéristiques suivantes :

$$2t \frac{\partial U_z}{\partial t} + r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial U_z} = 0 \quad (3.28)$$

$$2t \frac{\partial T}{\partial t} + r \frac{\partial T}{\partial r} - T \frac{\partial T}{\partial T} = 0. \quad (3.29)$$

L'invariant de ces deux équations, noté η , est de la forme :

$$\eta = \frac{r^2}{t}.$$

et les deux solutions auto-similaires sont :

$$U_z = \Phi(\eta) \quad (3.30)$$

$$T = \frac{1}{t} \Psi(\eta). \quad (3.31)$$

3.2. DYNAMIQUE TOURBILLONNAIRE

Avec Φ et Ψ vérifient un système d'équations différentielles ordinaires, obtenu en injectant les formes (3.30) et (3.31) dans (3.21) et (3.22) :

$$-4\nu\eta\ddot{\Phi} + (2c_1 - 4\nu - \eta)\dot{\Phi} = \beta g\Psi \quad (3.32)$$

$$-4\kappa\eta\ddot{\Psi} + (2c_1 - 4\kappa - \eta)\dot{\Psi} = 0 \quad (3.33)$$

Les solutions de ces deux équations différentielles ordinaires (3.32) et (3.33), sont :

$$\Phi(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} s^{\frac{c_1}{2\nu}-1} \exp\left(\frac{-s}{4\nu}\right) \left\{ c_5 - \frac{\beta g}{4\nu} \int_{s_0}^s \Psi(\xi) \exp\left(\frac{\xi}{4\nu}\right) \xi^{\frac{-c_1}{2\nu}} d\xi \right\} ds \quad (3.34)$$

et

$$\Psi(\eta) = c_4 \int_{\eta_0}^{\eta} s^{\frac{c_1}{2\kappa}-1} \exp\left(\frac{-s}{4\kappa}\right) ds. \quad (3.35)$$

Avec c_4 et c_5 sont deux constantes arbitraires.

La solution des équations de Navier-Stokes pour les écoulements anisothermes, en fonction des coordonnées cylindriques, est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_r(r) = \frac{c_1}{r} \\ U_\varphi(r) = \frac{c_2}{r} + c_3 r^{(1+\frac{c_1}{\nu})} \\ U_z(r, t) = \int_{\frac{r_0^2}{t_0}}^{\frac{r^2}{t}} s^{\frac{c_1}{2\nu}-1} \exp\left(\frac{-s}{4\nu}\right) \left\{ c_5 - \frac{\beta g}{4\nu} \int_{s_0}^s \Psi(\xi) \exp\left(\frac{\xi}{4\nu}\right) \xi^{\frac{-c_1}{2\nu}} d\xi \right\} ds \\ T(r, t) = \frac{c_4}{t} \int_{\frac{r_0^2}{t_0}}^{\frac{r^2}{t}} s^{\frac{c_1}{2\kappa}-1} \exp\left(\frac{-s}{4\kappa}\right) ds = \frac{1}{t} \Psi \\ P(r) = c_{12} - \frac{1}{2r^2} (c_2^2 + c_1^2) + \nu \frac{2c_3 c_2}{c_1} r^{\frac{-c_1}{\nu}} + \frac{\nu}{2} \frac{c_3^2}{c_1 + \nu} r^{2+2\frac{c_1}{\nu}} \end{array} \right. \quad (3.36)$$

et, en coordonnées cartésiennes, est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{c_1}{r^2}x - \frac{c_2}{r^2}y - c_3 y r^{\frac{c_1}{\nu}} \\ u_2 = \frac{c_1}{r^2}y + \frac{c_2}{r^2}x + c_3 x r^{\frac{c_1}{\nu}} \\ u_3 = U_z(r, t) \\ \theta = T(r, t) \\ p = c_{12} - \frac{1}{2r^2}(c_2^2 + c_1^2) + \frac{2c_3\nu c_2}{c_1} r^{-\frac{c_1}{\nu}} + \frac{\nu}{2} \frac{c_3^2}{c_1 + \nu} r^{2+2\frac{c_1}{\nu}}. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

On remarque dans le terme $U_z(r, t)$, l'effet du couplage de la température et les champs de vitesses. La troisième composante des champs de vitesses $U_z(r, t)$ dépend d'une manière explicite de la température $T(r, t)$. Pour la suite, on va calculer la vorticité, not e w , associ e aux solutions exactes générales des équations de Navier-Stokes anisothermes en coordonnées cylindriques, on traitera ensuite quelques cas particuliers. La vorticité w en coordonnées cylindriques est :

$$w = \text{rot}(u) = \begin{bmatrix} w_r \\ w_\varphi \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rU_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

On obtient :

$$w_r = 0 \quad (3.39)$$

$$w_\varphi = -2 \frac{r^{\frac{c_1}{\nu}-1}}{t^{\frac{c_1}{2\nu}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \left\{ c_5 - \underbrace{\frac{\beta g}{4\nu} \int_{r_0^2/t_0}^{r^2/t} \Psi(\xi) \exp\left(\frac{\xi}{4\nu}\right) \xi^{\frac{-c_1}{2\nu}} d\xi}_{\text{Influence de la température}} \right\} \quad (3.40)$$

$$w_z = \left(\frac{c_1}{\nu} + 2c_3 \right) r^{\frac{c_1}{\nu}} \quad (3.41)$$

- Supposons que $\beta = 0$ (convection forcée) et $c_1 = 0$, on obtient une solution particulière des équations de Navier-Stokes pour les écoulements anisothermes en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} U_r(r) = 0 \\ U_\varphi(r) = \frac{c_2}{r} + c_3 r \\ U_z(r, t) = c_5 \int_{\frac{r_0^2}{t_0}}^{\frac{r^2}{t}} s^{-1} \exp\left(\frac{-s}{4\nu}\right) ds \\ T(r, t) = \frac{c_4}{t} \int_{\frac{r_0^2}{t_0}}^{\frac{r^2}{t}} s^{-1} \exp\left(\frac{-s}{4\kappa}\right) ds \end{cases} \quad (3.42)$$

A partir de cette solution, on déduit les tourbillons d'Oseen (vortex circulaire voir FIGURE 3.1) et la vorticité associ e est :

$$w_r = 0$$

$$w_\varphi = -2 \frac{c_5}{r} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)$$

et

$$w_z = 2c_3.$$

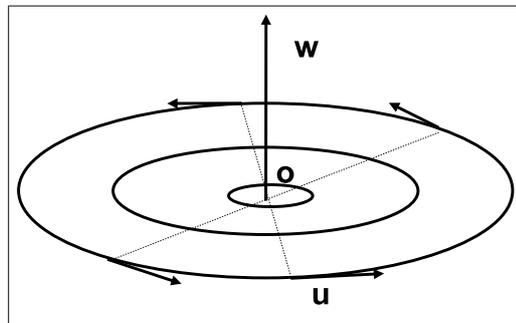


FIGURE 3.1 – Tourbillon d'Oseen

- Supposons que $\beta = 0$ et $c_1 = \nu$, on obtient une solution particulière de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_r(r) = \frac{\nu}{r} \\ U_\varphi(r) = \frac{c_2}{r} + c_3 r^2 \\ U_z(r, t) = c_5 \int_{\frac{r_0^2}{t_0}}^{\frac{r^2}{t}} s^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-s}{4\nu}\right) ds \\ T(r, t) = \frac{c_4}{t} \int_{\frac{r_0^2}{t_0}}^{\frac{r^2}{t}} s^{\frac{\nu}{2\kappa}-1} \exp\left(\frac{-s}{4\kappa}\right) ds \end{array} \right. \quad (3.43)$$

La vorticité associ e à ce système (3.43) est :

$$w_r = 0$$

$$w_\varphi = -2 \frac{c_5}{t^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)$$

et

$$w_z = (1 + 2c_3) r$$

Ceci représente les tourbillons spirales FIGURE 3.2.

3.2.2 Vortex de Burgers détecté par le groupe de rotation X_{12}

Pour trouver le vortex de Burgers [44, 27] à partir du groupe rotation, il suffit de choisir :

$$U_r = -\frac{\gamma}{2} r \quad (3.44)$$

$$U_\varphi = r f(r) \quad (3.45)$$

$$U_z = \gamma z \quad (3.46)$$

comme solution de l'équation (3.16)-(3.20), avec γ une constante.

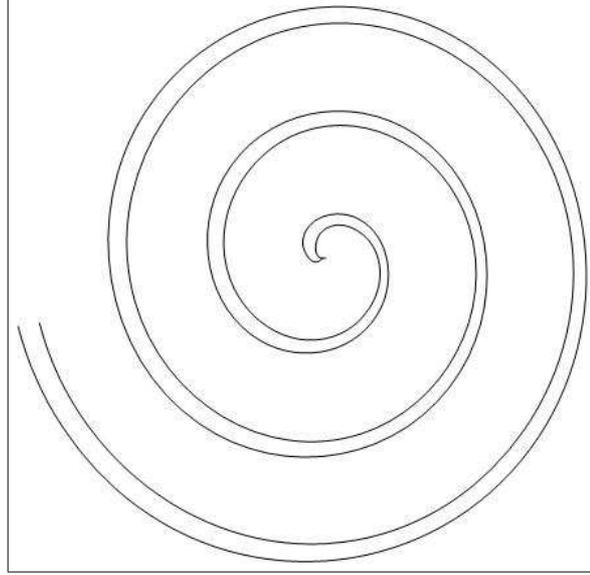


FIGURE 3.2 – Tourbillon spirale

A partir de l'équation (3.16), la dérivée de la pression par rapport à r vérifie :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\gamma^2}{4}r + rf^2(r), \quad (3.47)$$

où $f(r)$ est une fonction radiale. On substitue U_r, U_φ , et U_z de l'égalité (3.44), (3.45) et (3.46), par leurs valeurs dans l'équation (3.17), on obtient une équation différentielle ordinaire :

$$\ddot{f} + \left(\frac{1}{2}\frac{\gamma r}{\nu} + \frac{3}{r}\right)\dot{f} + \frac{\gamma}{\nu}f = 0. \quad (3.48)$$

La solution générale de l'équation (3.48) est :

$$f(r) = \frac{f_0 - (f_0 - f_1)\exp(-ar^2)}{r^2}, \quad (3.49)$$

avec f_0, f_1, γ, a sont des constantes et,

$$a = \frac{\gamma}{4\nu}.$$

Supposons de plus que la dérivée de la pression ne dépend pas de r , alors d'après l'équation (3.18) on déduit que la température ne dépend pas de r , et elle vérifie :

$$\ddot{T} - \frac{\gamma}{\kappa} z \dot{T} = 0. \quad (3.50)$$

La solution générale de l'équation (3.50) est :

$$T(z) = T_0 + T_1 \int_0^z \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\kappa} \xi^2\right) d\xi. \quad (3.51)$$

Selon le signe de γ , la température est égale à :

$$T(z) = \begin{cases} T_0 + T_1 \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2\gamma}} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2\kappa}} z\right) & \text{si } \gamma \geq 0 \\ T_0 + T_1 \sqrt{\frac{-\pi\kappa}{2\gamma}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-\gamma}{2\kappa}} z\right) & \text{si } \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

Parsuite, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma^2 z + \beta g T(z). \quad (3.53)$$

Avec T_0, T_1 deux constantes, erf, et erfi sont deux fonctions définies comme suit :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds.$$

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(s^2) ds.$$

Enfin, la forme finale du champ de vitesse exact est :

$$u_1 = -\frac{\gamma}{2} x - y f(r) \quad (3.54)$$

$$u_2 = -\frac{\gamma}{2} y + x f(r) \quad (3.55)$$

$$u_3 = \gamma z \quad (3.56)$$

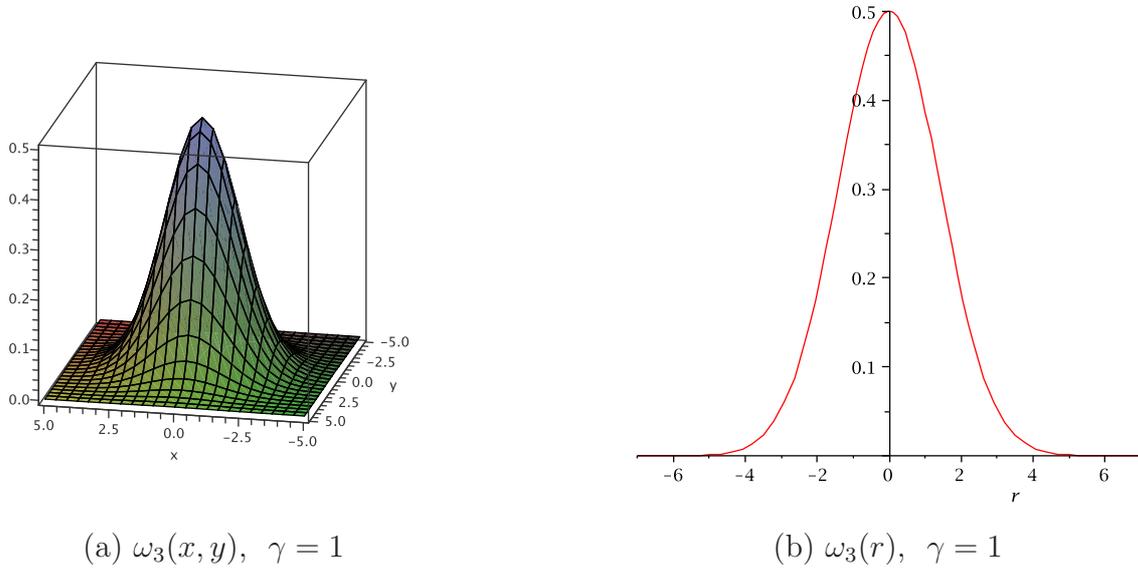


FIGURE 3.3 – 3^e composante du vortex de Burgers ω_3 , pour $f_0 = 1, f_1 = 0$ et $\nu = 1$

Son vortex est :

$$\begin{aligned}
 \omega &= T \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\
 &= T (0, 0, \omega_3) \\
 &= \omega_3 e_3,
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

avec

$$\omega_3 = 2f(r) + r\dot{f}(r) = 2af_0 \exp(-ar^2).$$

Les tourbillons de Burgers sont des généralisations en $3D$ des vortex d'Oseen, mais ils ne dépendent pas du temps.

3.2.3 Vortex de Burgers-Lundgren détecté par le groupe de rotation X_{12}

Un autre vortex intéressant, que l'on peut trouver par le groupe de rotation X_{12} , est le vortex de Burgers-Lundgren [42] associé au champ de

vitesse de l'équation (3.16) ... (3.20) :

$$U_r = -\frac{\gamma}{2}r \quad (3.58)$$

$$U_\varphi = rf(r, t) \quad (3.59)$$

$$U_z = \gamma z \quad (3.60)$$

La fonction $f(r, t)$ dépend de r et t . Elle vérifie :

$$f_t - \nu f_{rr} - \left(\frac{1}{2}\gamma r + \frac{3\nu}{r}\right)f_r - \gamma f = 0. \quad (3.61)$$

La solution particulière de (3.61) qui aboutit au vortex de Burgers-Lundgren, FIGURE (3.4), est de la forme :

$$f(r, t) = f_0 \frac{1 - \exp\left[-\frac{ar^2}{1 - \exp(-\gamma t)}\right]}{r^2}. \quad (3.62)$$

Dans ce cas, le vortex est instationnaire :

$$\omega = {}^T(0, 0, w_3(r, t)). \quad (3.63)$$

Avec

$$w_3(r, t) = 2af_0 \frac{\exp\left(1 - \frac{ar^2}{1 - \exp(-\gamma t)}\right)}{1 - \exp(-\gamma t)}. \quad (3.64)$$

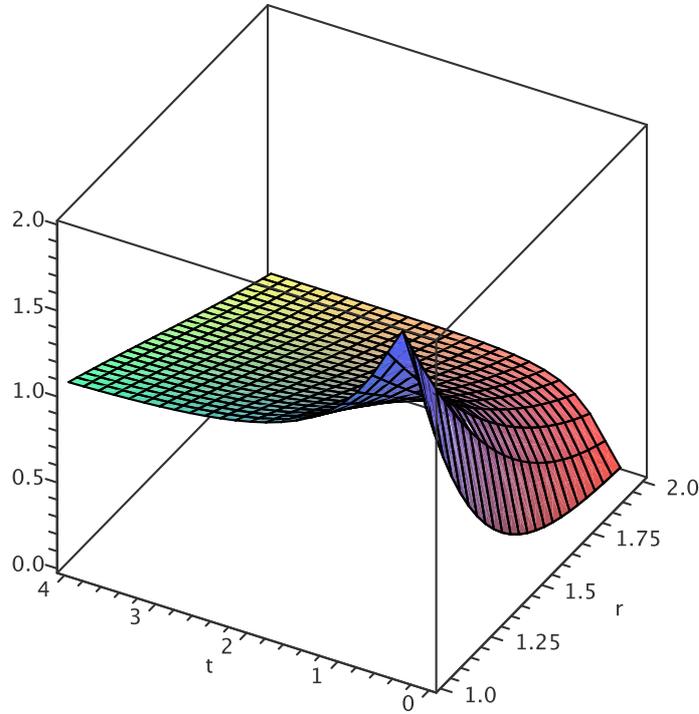


FIGURE 3.4 – Vortex de Burgers-Lundgren pour $f_0 = 1 = \gamma = \nu$

3.2.4 Transformations galiléennes généralisées X_1

Les invariants du groupe des transformations galiléennes généralisées X_1 (2.51) sont les solutions de l'équation suivante :

$$X_1.I = \alpha_1(t) \frac{\partial I}{\partial x_1} + \dot{\alpha}_1(t) \frac{\partial I}{\partial u_1} - \rho x_1 \ddot{\alpha}_1(t) \frac{\partial I}{\partial p}. \quad (3.65)$$

et qui sont :

$$t, \quad y, \quad z,$$

$$u_1 - \frac{\dot{\alpha}_1(t)}{\alpha_1(t)} x, \quad u_2, \quad u_3, \quad \theta \text{ et } p + \frac{\rho \cdot \ddot{\alpha}_1(t)}{2\alpha_1(t)} x^2.$$

On utilise ces invariants pour faire le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1(y, z, t) = u_1 - \frac{\dot{\alpha}_1(t)}{\alpha_1(t)}x \\ U_2(y, z, t) = u_2 \\ U_3(y, z, t) = u_3 \\ T(y, z, t) = \theta \\ P(y, z, t) = p + \frac{\rho \cdot \ddot{\alpha}_1(t)}{2\alpha_1(t)}x^2 \end{array} \right. \quad (3.66)$$

Supposons de plus, que $\rho = 1$, $\alpha_1(t) = cte$, $U_2 = U_2(y)$, $U_3 = U_3(z)$, $T = T(y, z, t)$, et $P = P(y, z, t)$. Le système (2.43) se réduit à :

$$U_{1t} + U_2U_{1y} + U_3U_{1z} - \nu(U_{1yy} + U_{1zz}) = 0 \quad (3.67)$$

$$U_2U_{2y} + P_y - \nu U_{2yy} = 0 \quad (3.68)$$

$$U_3U_{3z} + P_z - \nu U_{3zz} = \beta \cdot g \cdot T \quad (3.69)$$

$$T_t + U_2T_y + U_3T_z - \kappa(T_{yy} + T_{zz}) = 0 \quad (3.70)$$

$$U_{2y} + U_{3z} = 0. \quad (3.71)$$

La solution générale de l'équation de continuité (3.71) est de la forme :

$$U_2 = c_1y + c_2$$

$$U_3 = -c_1z + c_3,$$

où $c_1 \neq 0$, c_2 et c_3 sont deux constantes arbitraires. A partir des équations (3.68) et (3.69) on déduit :

$$P = -\frac{1}{2}c_1^2 y^2 + c_1 c_3 z - c_1 c_2 y - \frac{1}{2}c_1^2 z^2 + \beta g \int T(z) dz + g(t).$$

Avec $g(t)$ est une fonction quelconque qui dépend de t .

Enfin, d'après (3.69) on déduit que la fonction T ne depend que de t et z .

Parsuite, l'équation de l'énergie devient :

$$T_t + (-c_1 z + c_3)T_z - \kappa T_{zz} = 0. \quad (3.72)$$

En appliquant la méthode de séparation des variables, la solution de (3.72) est :

$$T(y, z, t) = c_4 c_5 \exp(C_I t) M \left(-\frac{1}{2} \frac{C_I}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{(-c_1 z + c_3)^2}{c_1 \kappa} \right) + c_4 \exp(C_I t) c_6 U \left(-\frac{1}{2} \frac{C_I}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{(-c_1 z + c_3)^2}{c_1 \kappa} \right), \quad (3.73)$$

où c_4, c_5, c_6 et C_I sont des constantes arbitraires, M et U sont les fonctions de Kummer [1] définies par :

$$\begin{aligned} M(a, b, z) &= \text{Kummer } M(a, b, z) \\ &= 1 + \frac{a}{b} z + \dots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} + \dots, \end{aligned}$$

$$(\alpha)_n = (\alpha)(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1)$$

$$(\alpha)_0 = 1$$

$$\begin{aligned} U(a, b, z) &= \text{Kummer } U(a, b, z) \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi b} \left[\frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1 + a - b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1 + a - b, 2 - b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2 - b)} \right] \end{aligned}$$

3.2. DYNAMIQUE TOURBILLONNAIRE

$\Gamma(z)$ est une fonction définie pour $\Re(z) > 0$ comme suit :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{z-1}dt.$$

Il reste la première équation (3.67) à résoudre :

$$U_{1t} + (c_1y + c_2)U_{1y} + (-c_1z + c_3)U_{1z} - \nu(U_{1yy} + U_{1zz}) = 0. \quad (3.74)$$

Par la méthode de séparation des variables, on cherche une solution de (3.74) sous la forme :

$$U_1(y, z, t) = f_1(y)f_2(z)f_3(t). \quad (3.75)$$

On substitue l'égalité (3.75) dans l'équation (3.74), on a alors le système :

$$\ddot{f}_1 - \frac{c_1y + c_2}{\nu} \dot{f}_1 + \frac{C_{II}}{\nu} f_1 = 0 \quad (3.76)$$

$$\ddot{f}_2 + \frac{c_1z - c_3}{\nu} \dot{f}_2 - \frac{C_{III}}{\nu} f_2 = 0 \quad (3.77)$$

$$\dot{f}_3 + (C_{II} - C_{III})f_3 = 0, \quad (3.78)$$

dont la solution générale est de la forme :

$$f_1(y) = c_7 M \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{II}}{c_1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{(c_1y + c_2)^2}{c_1\nu} \right) + c_8 U \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{II}}{c_1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{(c_1y + c_2)^2}{c_1\nu} \right)$$

$$f_2(z) = c_9 M \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{III}}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{(-c_1z + c_3)^2}{c_1\nu} \right) + c_{10} U \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{III}}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{(-c_1z + c_3)^2}{c_1\nu} \right)$$

$$f_3(t) = c_{11} \exp(C_{III} - C_{II})t,$$

où $c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, C_{II}$ et C_{III} sont des constantes. Par conséquence, la solution exacte de (2.43) est :

$$\begin{aligned}
 u_1 = & \left[c_7 M \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{II}}{c_1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{(c_1 y + c_2)^2}{c_1 \nu} \right) + c_8 U \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{II}}{c_1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{(c_1 y + c_2)^2}{c_1 \nu} \right) \right] \\
 & \left[c_9 M \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{III}}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{(-c_1 z + c_3)^2}{c_1 \nu} \right) + \right. \\
 & \left. c_{10} U \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{III}}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{(-c_1 z + c_3)^2}{c_1 \nu} \right) \right] \cdot [c_{11} \exp(C_{III} - C_{II})t] \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

$$u_2 = c_1 y + c_2 \quad (3.80)$$

$$u_3 = -c_1 z + c_3 \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned}
 \theta = & c_4 c_5 \exp(C_I t) M \left(-\frac{1}{2} \frac{C_I}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{(-c_1 z + c_3)^2}{c_1 \kappa} \right) + \\
 & c_4 c_6 \exp(C_I t) U \left(-\frac{1}{2} \frac{C_I}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{(-c_1 z + c_3)^2}{c_1 \kappa} \right) \quad (3.82)
 \end{aligned}$$

$$p = -\frac{1}{2} c_1^2 \cdot y^2 + c_1 c_3 z - c_1 c_2 y - \frac{1}{2} c_1^2 \cdot z^2 + \beta g \int \theta(z) dz + g(t). \quad (3.83)$$

3.2.5 Le cisaillement de Burgers détecté par la transformation X_1

A partir des solutions (3.79)-(3.83) de l'équation (2.43), on déduit des solutions particulières intéressantes par leur aspect physique. On distingue entre autres deux cas :

$$\odot C_{III} = C_{II} \equiv \lambda = 0$$

$$\odot C_{III} = C_{II} \equiv \lambda \neq 0.$$

Pour le premier cas, les équations (3.76)-(3.78) deviennent :

$$\ddot{f}_1 - \frac{c_1 y + c_2}{\nu} \dot{f}_1 = 0 \quad (3.84)$$

$$\ddot{f}_2 + \frac{c_1 z - c_3}{\nu} \dot{f}_2 = 0 \quad (3.85)$$

$$\dot{f}_3 = 0, \quad (3.86)$$

leurs solutions est de la forme :

$$f_1(y) = \begin{cases} K_2 + K_3 \sqrt{\frac{\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erfi}(\sqrt{\frac{c_1}{2\nu}} y) & \text{si } c_1 > 0 \\ K_2 + K_3 \sqrt{\frac{-\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{-c_1}{2\nu}} y) & \text{si } c_1 < 0 \end{cases} \quad (3.87)$$

$$f_2(z) = \begin{cases} K_4 + K_5 \sqrt{\frac{\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{c_1}{2\nu}} z) & \text{si } c_1 > 0 \\ K_4 + K_5 \sqrt{\frac{-\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erfi}(\sqrt{\frac{-c_1}{2\nu}} z) & \text{si } c_1 < 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

$$f_3(t) = c_{11} \quad (3.89)$$

où K_2, K_3, K_4 et K_5 sont des constantes, d'où la solution (3.79)-(3.83) se réduit à :

$$u_1 = \begin{cases} \left[K_2 + K_3 \sqrt{\frac{\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erfi}(\sqrt{\frac{c_1}{2\nu}} y) \right] \left[K_4 + K_5 \sqrt{\frac{\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{c_1}{2\nu}} z) \right] & \text{si } c_1 > 0 \\ \left[K_2 + K_3 \sqrt{\frac{-\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{-c_1}{2\nu}} y) \right] \left[K_4 + K_5 \sqrt{\frac{-\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erfi}(\sqrt{\frac{-c_1}{2\nu}} z) \right] & \text{si } c_1 < 0 \end{cases} \quad (3.90)$$

$$u_2 = c_1 y \quad (3.91)$$

$$u_3 = -c_1 z \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \theta = c_4 c_5 \exp(C_I t) M \left(-\frac{1}{2} \frac{C_I}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{c_1}{2\kappa} z^2 \right) + \\ c_4 c_6 \exp(C_I t) U \left(-\frac{1}{2} \frac{C_I}{c_1}, \frac{1}{2}, -\frac{c_1}{2\kappa} z^2 \right) \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$p = -\frac{1}{2} c_1^2 y^2 - \frac{1}{2} c_1^2 z^2 + \int (\beta \cdot g \cdot \theta) dz + g(t). \quad (3.94)$$

Afin de calculer le cisaillement du Burgers [71, 22], il suffit de prendre $c_1 < 0$ et $K_5 = 0$:

$$\mathbf{u} = {}^T (u_1(y), c_1 y, -c_1 z), \quad (3.95)$$

avec

$$u_1(y) = D_0 + D_1 \sqrt{\frac{-\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{2\nu}} y\right),$$

où D_0 et D_1 sont deux constantes.

Le vortex correspondant à la solution (3.95) est :

$$\omega = {}^T (0, 0, w_3) \quad (3.96)$$

avec

$$w_3 = -\dot{u}_1(y) = -D_1 \exp\left(\frac{c_1}{2\nu} y^2\right).$$

Autre que le cisaillement de Burgers, on peut trouver en supposant $c_1 > 0$ et $K_3 = 0$, la solution particulière suivante :

$$\mathbf{u} = {}^T (u_1(z), c_1 y, -c_1 z) \quad (3.97)$$

$$u_1(z) = D_2 + D_3 \sqrt{\frac{-\pi\nu}{2c_1}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{2\nu}} z\right)$$

où D_2 et D_3 sont deux constantes.

Le vortex correspondant à la solution (3.97) est :

$$\omega = {}^T (0, w_2, 0), \quad (3.98)$$

avec

$$w_2 = \dot{u}_1(z) = D_3 \exp\left(\frac{c_1}{2\nu}y^2\right).$$

Donc, la solution (3.90) peut être interprétée comme une solution générale qui aboutit au cisaillement général de Burgers. Cette solution est calculée dans la cas isotherme par Grassi et al. [27].

Dans le deuxième cas où $C_{III} = C_{II} \equiv \lambda \neq 0$, on peut aussi trouver des vortex stationnaires qui ont un sens physique intéressant. En effet, supposons que $c_2 = c_3 = c_8 = c_{10} = 0$ et $\lambda = -c_1$ ($c_1 < 0$), on obtient la solution particulière suivante :

$$u_1 = A \exp\left(\frac{c_1}{2\nu}(y^2 - z^2)\right) \quad (3.99)$$

$$u_2 = c_1 y \quad (3.100)$$

$$u_3 = -c_1 z \quad (3.101)$$

$$\theta = \exp\left(-c_1 t - \frac{1}{2} \frac{c_1}{\kappa} z^2\right) \left[B - D\sqrt{\pi} \left(-1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-\frac{c_1}{\kappa}} z\right) \right) \right] \quad (3.102)$$

$$p = -\frac{1}{2}c_1^2 [y^2 + z^2] + \int (\beta \cdot g \cdot \theta) dz + g(t). \quad (3.103)$$

Le vortex associé à ce champ de vitesse est :

$$\omega = {}^T(0, \omega_2, \omega_3), \quad (3.104)$$

où

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{Ac_1}{\nu} z \exp\left[\frac{c_1}{2\nu}(y^2 - z^2)\right] \\ \omega_3 &= -\frac{Ac_1}{\nu} y \exp\left[\frac{c_1}{2\nu}(y^2 - z^2)\right] \end{aligned}$$

3.2. DYNAMIQUE TOURBILLONNAIRE

Les deux composantes ω_2 et ω_3 , sont fonction de y et z . On peut déduire un autre vortex particulier instationnaire de l'égalité (3.79) . . . (3.83). En effet, supposons que $C_{III} = \frac{\lambda}{2}, C_{II} = \lambda, C_I = -c_1 = \lambda, c_2 = c_3 = c_7 = c_8 = c_{10} = 0, c_9 \neq 0$ et $g(t) = 0$. la solution est de la forme :

$$u_1 = Az^{1/2} \exp \left[-\left(\frac{\lambda}{2}t + \frac{\lambda}{4\nu}z^2 \right) \right] \text{Bessell} \left(-\frac{1}{4}, \frac{\lambda}{4\nu}z^2 \right) \quad (3.105)$$

$$u_2 = -\lambda y \quad (3.106)$$

$$u_3 = \lambda z \quad (3.107)$$

$$\theta = \exp \left(\lambda t + \frac{\lambda}{2\kappa}z^2 \right) \left[B_1 - D_1 \sqrt{\pi} \left(-1 + \text{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}z^2 \right) \right) \right] \quad (3.108)$$

$$p = -\frac{1}{2}\lambda^2 [y^2 + z^2] + \int (\beta.g.\theta) dz. \quad (3.109)$$

Avec B_1 et D_1 sont deux constantes et $I_\nu(z) := \text{Bessell}(\nu, z)$, est la fonction de Bessel modifiée :

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z^2}{4} \right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}$$

Le vortex ω est :

$$\omega = {}^T(0, \omega_2, 0), \quad (3.110)$$

où

$$\begin{aligned} \omega_2 &= u_{1z} \\ &= -\frac{\lambda A}{2\nu} z^{3/2} \exp \left[-\frac{\lambda(2t\nu + z^2)}{4\nu} \right] \left[I_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\lambda}{4\nu}z^2 \right) - I_{\frac{3}{4}} \left(\frac{\lambda}{4\nu}z^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.111)$$

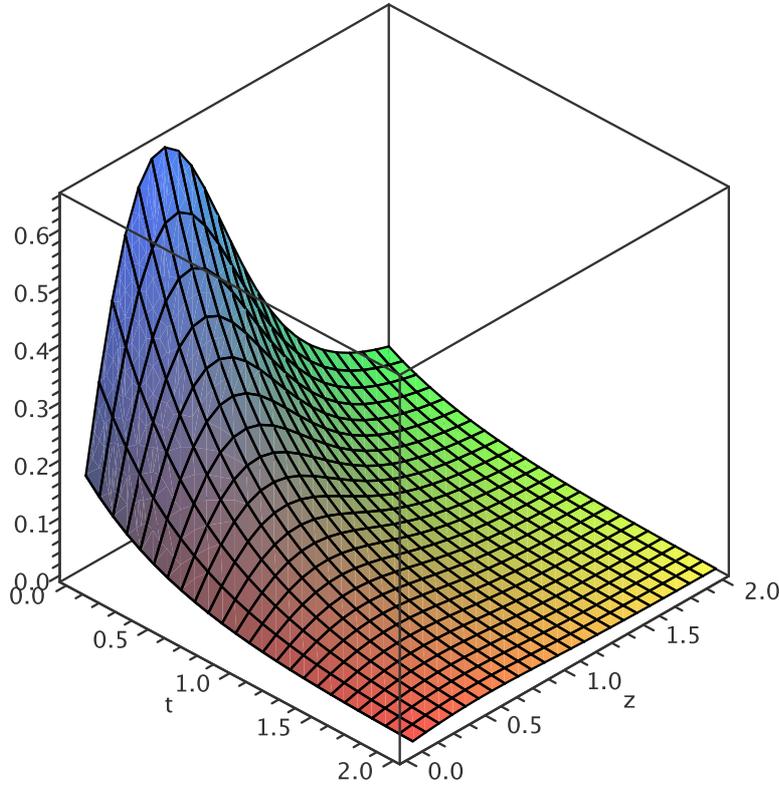


FIGURE 3.5 – 2^e composante du vortex de Burgers instationnaire, $\lambda = 4$, $\nu = 1$ et $A = -1$

Dans le paragraphe suivant, une nouvelle approche théorique pour les écoulements turbulents anisothermes basée sur la théorie des groupes de symétrie est présentée. Elle permet de calculer un grand nombre de «solutions» pour la vitesse et la température moyenne des écoulements cisailés turbulents entre deux plans parallèles fixes.

3.3 Lois d'échelles d'un écoulement turbulent anisotherme moyenné

Dans le cadre d'utilisation des solutions auto-similaires, nous nous intéressons à déterminer les lois d'échelles pour un écoulement turbulent

anisotherme par l'approche moyennée RANS, en utilisant la théorie des groupes de symétries de Lie. En effet, dans le cas isotherme M. Oberlack a trouvé et validé numériquement [50, 52] de nouvelles lois d'échelles (loi de paroi) qui sont inaccessibles par l'analyse dimensionnelle comme la loi de paroi de Von Karman (1930). Récemment, M. Oberlack et S. Guenther (2003) ont trouvé [53] trois nouvelles solutions différentes invariantes (lois d'échelle) pour la diffusion de la turbulence de cisaillement, qui ont été validées expérimentalement plus tard (2008) par M. Kinzel et al. [36]. Aussi, en couche limite turbulente, G. Khujadze et M. Oberlack [34, 35] ont utilisé l'approche de groupe de Lie pour obtenir des nouvelles lois d'échelle pour un écoulement à gradient de pression nul.

3.3.1 Approche moyennée

Considérons un fluide visqueux newtonien, incompressible, de coefficient d'expansion thermique β et de diffusivité thermique k , dans un canal Ω , de frontière Γ . Ce fluide est alors régi par les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\nu \operatorname{div} S - \beta g \theta e_g = 0, \quad (3.112)$$

par l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(u \theta) - k \operatorname{div}(\nabla \theta) = 0 \quad (3.113)$$

et, par l'équation de la continuité :

$$\operatorname{div}(u) = 0. \quad (3.114)$$

Avec u, θ, p et e_g sont respectivement, les champs de vitesse, la température, le champ de la pression et le vecteur unitaire vertical ascendant. La décomposition standard de Reynolds est de la forme :

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

$$f = \langle f \rangle + f', \quad (3.115)$$

où f' est la partie fluctuante de la grandeur f et $\langle f \rangle$ est un opérateur défini comme étant la moyenne d'ensemble ou la moyenne stochastique sur N réalisations du même écoulement, f ($f = u, \theta$ ou p) est une fonction aléatoire en espace et en temps, prenant la valeur f_k pour la réalisation k :

$$\langle f(x, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(x, t). \quad (3.116)$$

Pour simplifier l'écriture, on écrit :

$$\langle u_i \rangle = U_i, \langle p \rangle = P \text{ et } \langle \theta \rangle = \Theta.$$

On applique le principe de décomposition de Reynolds de l'égalité (3.115) aux équations (2.43), on obtient :

- Les équations de conservation de la quantité de mouvement moyennées :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} + \beta g \Theta e_g \quad (3.117)$$

- Les équations de conservation de la quantité de mouvement fluctuantes :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_i u'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2} - \beta g \theta' e_g = 0 \quad (3.118)$$

- Les équations de l'énergie moyennées :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Theta U_j}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j^2} \quad (3.119)$$

- Les équations de l'énergie fluctuantes :

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial(\Theta u'_j + \theta' U_j + \theta' u'_j)}{\partial x_j} - \kappa \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2} = 0 \quad (3.120)$$

- Les équations de la continuité moyennées :

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.121)$$

- Les équations de la continuité fluctuantes :

$$\psi = \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0. \quad (3.122)$$

Ensuite, on suppose que l'écoulement est dans la direction x_1 perpendiculaire à l'axe x_2 , comme dans la FIGURE 3.6, et la pression moyenne remplacée par $P(x_2) - x_1 K$, avec K une constante.

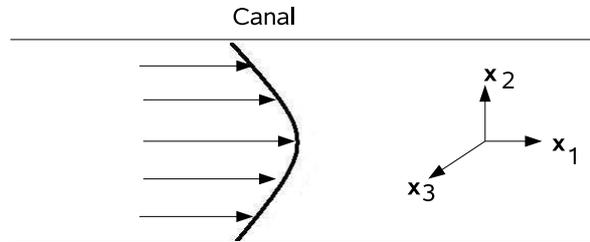


FIGURE 3.6 – Ecoulement dans un canal.

On cherche les lois de paroi pour un écoulement bidimensionnel stationnaire en moyenne et on suppose que l'écoulement est de couche très mince, ce qui implique :

$$U_2 = U_3 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3} = \frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} = \frac{\partial P}{\partial x_3} = 0.$$

Supposons de plus que les moyennes U_1 , Θ et P sont fonctions de x_2 seul, alors les équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_i = \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} + u'_2 \frac{dU_1}{dx_2} \delta_{i1} - \left(K + \nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \right) \delta_{i1} + \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} - \beta g \Theta \right) \delta_{i2} + \\ \frac{\partial u'_i u'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2} - \beta g \theta' \delta_{i2} = 0 \\ N = \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial \theta' u'_j}{\partial x_j} - \kappa \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2} - \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} + u'_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + U_1 \frac{\partial \theta'}{\partial x_1} = 0 \\ \psi = \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right. \quad (3.123)$$

Dans le paragraphe suivant, on détermine les groupes de symétries des équations (3.123). On résout des centaines d'équations pour trouver les symétries du système (3.123).

3.3.2 Groupe de symétrie et lois d'échelles

Les équations (3.123) sont équivalentes à un système de la forme :

$$S(t, x_i, U_1, \Theta, P, u'_i, \theta', p') = 0. \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.124)$$

Soit X un générateur infinitésimal du groupe de symétrie G du système (3.124), il est de la forme :

$$X = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_{U_1} \frac{\partial}{\partial U_1} + \xi_{\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \xi_P \frac{\partial}{\partial P} + \xi_{u'_i} \frac{\partial}{\partial u'_i} + \xi_{\theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} + \xi_{p'} \frac{\partial}{\partial p'} \quad (3.125)$$

et $X^{(2)}$ son prolongement d'ordre 2. La condition de symétrie [54] :

$$S = 0 \Rightarrow X^{(2)}.S = 0, \quad (3.126)$$

aboutit aux composantes infinitésimales suivantes :

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

$$\begin{aligned}
\xi_t &= [n - 2m]t + A, \\
\xi_{x_1} &= [n - m]x_1 + \alpha_1(t) + l, \\
\xi_{x_2} &= [n - m]x_2 + b, \\
\xi_{x_3} &= [n - m]x_3 + \alpha_2(t) + q \\
\xi_\nu &= n\nu, \\
\xi_\kappa &= n\kappa, \\
\xi_{u'_1} &= mu'_1 + H(t) + c(t, x_2) - I(x_2, U_1, P), \\
\xi_{U_1} &= mU_1 - H(t) - c(t, x_2) + I(x_2, U_1, P) + \dot{\alpha}_1(t), \\
\xi_{u'_2} &= mu'_2, \\
\xi_{u'_3} &= mu'_3 + \dot{\alpha}_2(t), \\
\xi_{p'} &= 2mp' + [K(n - 3m) - \dot{H}(t) - c_t(t, x_2)]x_1 - \ddot{\alpha}_2(t)x_3 + G(t, x_2) \\
&\quad - g_3(x_2, U_1, P), \\
\xi_P &= 2mP + c_t(t, x_2)x_1 + \beta gh(t, x_1, x_3)x_2 - G(t, x_2) + F(t, x_1, x_3) \\
&\quad + g_3(x_2, U_1, P), \\
\xi_\Theta &= [3m - n]\Theta - L(x_2) + h(t, x_1, x_3), \\
\xi_{\theta'} &= [3m - n]\theta' + L(x_2).
\end{aligned}$$

Toutes les constantes et les fonctions arbitraires dépendent de ν et κ .

A partir des ces listes de générateurs infinitésimaux, on cherche les lois d'échelles en passant par les solutions auto-similaires U_1 et Θ invariantes par les groupes de symétries, et qui vérifient :

$$X.U_1 = 0. \quad (3.127)$$

$$X.\Theta = 0. \quad (3.128)$$

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

A partir de ces relations (3.127) et (3.128), on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{dU_1}{\xi_{U_1}} = \frac{dx_2}{\xi_{x_2}} = \frac{d\Theta}{\xi_{\Theta}}, \quad (3.129)$$

avec :

$$\xi_{U_1} = mU_1 - H(t) - c(t, x_2) + I(x_2, U_1, P) + \dot{\alpha}_1(t)$$

$$\xi_{\Theta} = [3m - n] \Theta - L(x_2) + h(t, x_1, x_3)$$

$$\xi_{x_2} = [n - m] x_2 + b.$$

Les lois d'échelles que nous présenterons par la suite, sont les solutions des équations caractéristiques (3.129), en supposant que toutes les fonctions arbitraires sont des constantes :

- Loi puissance, où $n \neq m, n \neq 3m$ et $m \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = C_1 \left[x_2 + \frac{b}{n-m} \right]^{\frac{m}{n-m}} + \frac{C_2}{m} \\ \Theta = C_3 \left[x_2 + \frac{b}{n-m} \right]^{\frac{3m-n}{n-m}} + \frac{C_4}{3m-n} \end{array} \right. \quad (3.130)$$

- Loi logarithmique, où $m=0$, et $n \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{C_5}{n} \ln \left(x_2 + \frac{b}{n} \right) + C_6 \\ \Theta = C_7 \left[x_2 + \frac{b}{n} \right]^{-1} - \frac{C_8}{n} \end{array} \right. \quad (3.131)$$

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

- Loi linéaire, où $m = n = 0$:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{C_9}{b}x_2 + C_{10} \\ \Theta = \frac{C_{11}}{b}x_2 + C_{12} \end{cases} \quad (3.132)$$

- Loi exponentielle, où $m = n \neq 0$:

$$\begin{cases} U_1 = C_{13} \exp\left(\frac{mx_2}{b}\right) - \frac{C_9}{m} \\ \Theta = C_{14} \exp\left(\frac{2mx_2}{b}\right) - \frac{C_{15}}{2m} \end{cases} \quad (3.133)$$

avec $C_i, i = 1, \dots, 14$ sont les constantes des intégrales.

Ces quatre nouvelles lois d'échelles sont liées aux constantes arbitraires qui ne sont pas pour le moment validées numériquement.

Lorsque $\beta = 0$, c'est la convection forcée où les champs de vitesses ne dependent pas de la température. Dans ce cas, les équations (3.123)

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_i = \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} + u'_2 \frac{dU_1}{dx_2} \delta_{i1} - \left(K + \nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \right) \delta_{i1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} \delta_{i2} + \frac{\partial u'_i u'_k}{\partial x_k} + \\ \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2} = 0 \\ N = \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial \theta' u'_j}{\partial x_j} - \kappa \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2} - \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} + u'_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + U_1 \frac{\partial \theta'}{\partial x_1} = 0 \\ \psi = \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right. \quad (3.134)$$

Le groupe de symétries associés à ces équations sont :

$$\begin{aligned} \xi_t &= (n - 2m)t + A, \\ \xi_{x_1} &= (n - m)x_1 + \alpha_1(t) + l, \\ \xi_{x_2} &= (n - m)x_2 + b \\ \xi_{x_3} &= (n - m)x_3 + \alpha_2(t) + q, \\ \xi_\nu &= n\nu, \\ \xi_\kappa &= n\kappa, \\ \xi_{u'_1} &= mu'_1 + H(t) + c(t, x_2) - g_1(x_2, U_1, P), \\ \xi_{U_1} &= mU_1 - H(t) - c(t, x_2) + g_1(x_2, U_1, P) + \dot{\alpha}_1(t), \\ \xi_{u'_2} &= mu'_2, \\ \xi_{u'_3} &= mu'_3 + \dot{\alpha}_2(t), \\ \xi_{p'} &= 2mp' + [K(n - 3m) - \dot{H}(t) - c_t(t, x_2)] x_1 - \ddot{\alpha}_2(t)x_3 + D(t, x_2) \\ &\quad - g_3(x_2, U_1, P), \end{aligned}$$

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

$$\begin{aligned}\xi_P &= 2mP + c_t(t, x_2)x_1 + k(t, x_1, x_3) - D(t, x_2) + g_3(x_2, U_1, P), \\ \xi_\Theta &= r\Theta - L(x_2) + h(t, x_1, x_3), \\ \xi_{\theta'} &= r\theta' + L(x_2) + s.\end{aligned}$$

On remarque que toutes les composantes infinitésimales (groupe de symétrie) des écoulements anisothermes, sont les mêmes que les composantes infinitésimales des écoulements forcés sauf les composantes qui dépend du coefficient d'expansion thermique β , c'est-à-dire

$$\xi_P, \quad \xi_\Theta \quad \& \quad \xi_{\theta'}.$$

La distinction entre ces deux cas, nous donne par analogie, des nouvelles lois d'échelles de la convection forcée qui sont :

- Loi puissance, où $m \neq 0, r \neq 0$ et $n \neq m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = C_1 \left[x_2 + \frac{b}{n-m} \right]^{\frac{m}{n-m}} + \frac{C_2}{m} \\ \Theta = C_3 \left[x_2 + \frac{b}{n-m} \right]^{\frac{r}{n-m}} - \frac{C_4}{r} \end{array} \right. \quad (3.135)$$

- Loi logarithmique, où $m = r = 0$, et $n \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{C_5}{n} \ln \left(x_2 + \frac{b}{n} \right) + C_6 \\ \Theta = \frac{s_1}{n} \ln \left(x_2 + \frac{b}{n} \right) + s_2 \end{array} \right. \quad (3.136)$$

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

- Loi logarithmique dans la zone interne dynamique et la loi de puissance dans la zone interne thermique, où $m = 0, r \neq 0$ et $n \neq 0$:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{C_5}{n} \ln \left(x_2 + \frac{b}{n} \right) + C_6 \\ \Theta = C_7 \left[x_2 + \frac{b}{n} \right]^{\frac{r}{n}} - \frac{C_4}{r} \end{cases} \quad (3.137)$$

- Loi linéaire dans la zone interne dynamique et la loi exponentielle dans la zone interne thermique, où $m = n = 0$ et $r \neq 0$:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{C_8}{b} x_2 + C_9 \\ \Theta = C_{10} \exp \left(\frac{r x_2}{b} \right) + \frac{C_{11}}{r} \end{cases} \quad (3.138)$$

- Loi linéaire, où $m = n = r = 0$:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{C_8}{b} x_2 + C_{15} \\ \Theta = \frac{C_{13}}{b} x_2 + C_{16} \end{cases} \quad (3.139)$$

- Loi exponentielle dans la zone interne dynamique et la loi linéaire dans la zone interne thermique, où $m = n \neq 0$ et $r = 0$:

$$\begin{cases} U_1 = C_{12} \exp \left(\frac{m x_2}{b} \right) + \frac{C_2}{m} \\ \Theta = \frac{C_{13}}{b} x_2 + C_{14} \end{cases} \quad (3.140)$$

- Loi exponentielle, où $m = n \neq 0$, et $r \neq 0$:

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

$$\begin{cases} U_1 = C_{17} \exp\left(\frac{mx_2}{b}\right) + \frac{C_2}{m} \\ \Theta = C_{18} \exp\left(\frac{rx_2}{b}\right) - \frac{C_4}{r}. \end{cases} \quad (3.141)$$

Avec $C_i, i = 1, \dots, 18$ sont les constantes des intégrales.

Une partie des lois d'échelles obtenues ci-dessus sont classiques dans la littérature. On peut par exemple, citer en convection forcées les lois de paroi suivantes [18] :

- Loi linéaire (3.139), dans la sous-couche visqueuse et conductive :

$$\begin{cases} U^+ = y^+ & \text{pour } 0 < y^+ < 5 \\ T^+ = Pr y^+ & \text{pour } 0 < y^+ < 5Pr \end{cases} \quad (3.142)$$

- Loi exponentielle (3.141), dans la sous-couche tampon
- Loi logarithmique (3.136), dans la sous-couche inertielle :

$$\begin{cases} U^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 & \text{pour } 40 < y^+ \\ T^+ = 2.12 \ln y^+ + \beta & \text{pour } 40 < y^+ \end{cases} \quad (3.143)$$

Avec : T^+ la température moyenne adimensionnelle : $T^+ = \frac{T - T_p}{T_\tau}$, T_p la température à la paroi, T_τ la température de frottement à la paroi :

$$T_\tau = \frac{\alpha}{u_\tau} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{paroi} \quad \text{et } \alpha \text{ le flux de la chaleur à la paroi.}$$

Les résultats numériques, voir FIGURES 3.7 & 3.8, montrent que les profils moyens U^+ de la couche limite dynamique présentent la même topologie que celle de la couche limite thermique à un facteur près désigné par

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

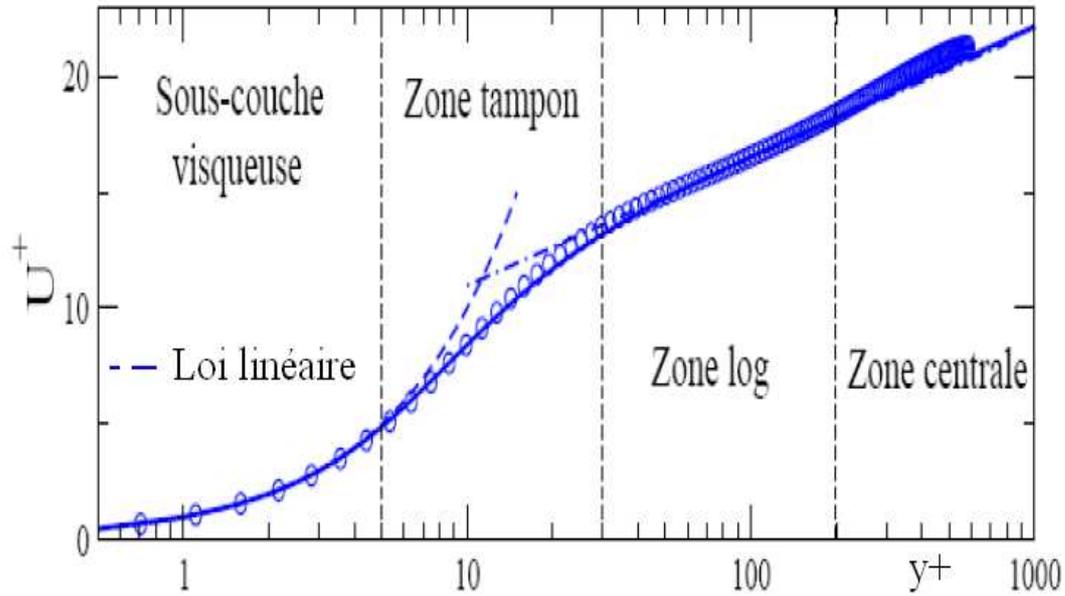


FIGURE 3.7 – Zone interne mécanique [46]

le nombre de Prandtl. Kader [32, 33] propose une formulation plus générale pour décrire le profil de la température dans la couche limite turbulente par :

$$T^+(y^+, Pr) = Pr y^+ \exp(-\Gamma) + \{2.12 \ln [(1 + y^+)C] + \beta\} \exp(-1/\Gamma), \quad (3.144)$$

où Γ est une constante définie par :

$$\Gamma = \frac{10^{-2}(Pr y^+)^4}{1 + 5Pr^3 y^+}$$

et, C est définie suivant le type de l'écoulement :

– Canal de demi-hauteur h ou tuyau de rayon h :

$$C = \frac{1.5(2 - y/h)}{1 + 2(1 - y/h)^2}$$

– Couche limite d'épaisseur δ :

$$C = \frac{2.5(2 - y/\delta)}{1 + 4(1 - y/\delta)^2}$$

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

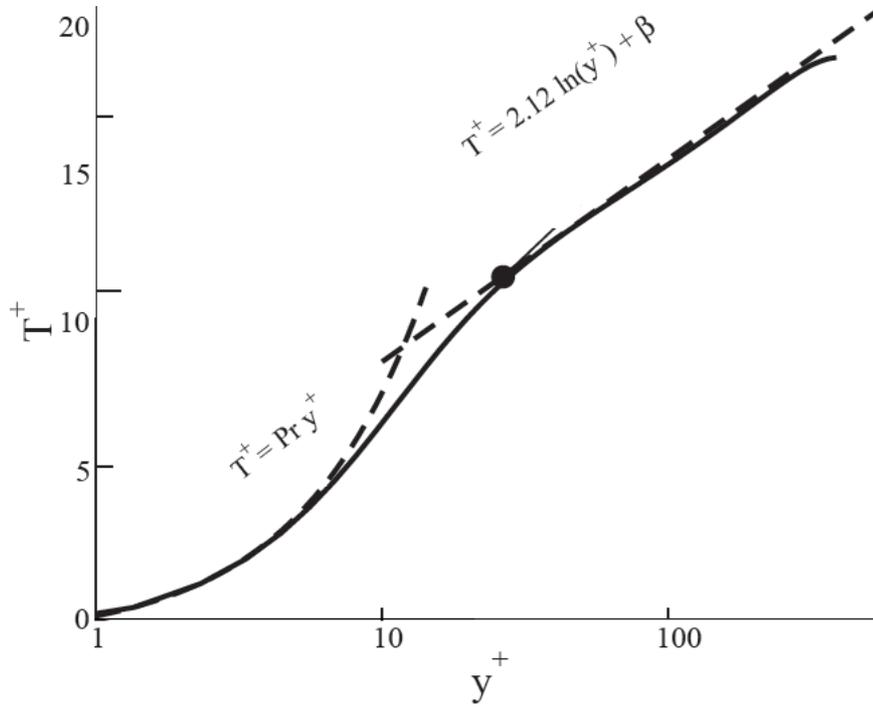


FIGURE 3.8 – Zone interne thermique [7], $Pr = 0.71$ et $\beta = (3.85Pr^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln Pr$.

D'autres échelles de températures ont été calculées et validées numériquement pour la convection forcée dans la couche limite turbulente; W.K. George et al. [24], X. Wang et al. [77, 76]. Ces échelles [77], avaient comme but d'éliminer les effets de la dépendance du nombre de Reynolds et du gradient de la pression sur le profil de la température des deux flux interne et externe.

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la théorie du groupe de Lie en dynamique tourbillonnaire pour calculer des nouvelles solutions exactes des équations Navier-Stokes en anisothermes, et des vortex particulier. Ensuite, pour un écoulement parallèle, moyenné par la méthode de RANS, nous avons trouver des nouvelles lois d'échelles pour la vitesse et la température.

3.3. LOIS D'ÉCHELLES D'UN ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTHERME MOYENNÉ

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à la mise en œuvre de cette approche pour étudier et construire des modèles de sous-maille consistant avec les équations de Navier-Stokes en anisotherme.

Chapitre 4

Modèles de turbulence invariants par le groupe de symétrie

Dans la littérature il existe un grand nombre de modèles LES, qui se basent sur des hypothèses diverses, d'origine mathématique et physique [66, 67]. Parmi ces modèles, beaucoup détruisent les propriétés d'invariance des équations de Navier-Stokes par rapport à certaines transformations (4.1). D'où l'idée d'utiliser la théorie de groupe de symétrie pour conserver la physique de l'écoulement pendant la simulation numérique. Dans ce chapitre, on donne d'abord une définition d'un modèle invariant par le groupe de symétrie. Puis, une analyse des modèles de turbulence présentés au chapitre 1, paragraphe 1.2 par rapport aux symétries des écoulements anisothermes du chapitre 2, paragraphe 2.4.1. Ensuite, on présente une méthode de construction de modèles invariants par le groupe de symétries G d'un écoulement turbulent anisotherme¹. Enfin, on donnera plusieurs modèles invariants à partir de cette classe de modèles.

4.1 Principe

Formellement, la seule différence entre les équations de Navier-Stokes anisothermes (1.19) et les équations filtrées (1.20), est la présence des deux

1. Cette méthode reste valable pour n'importe quel type de modélisation des écoulements par LES

termes :

$$\operatorname{div}(\tau^d) \text{ et } \operatorname{div}(h).$$

L'invariance des équations filtrées (1.20) par les transformations (2.55)-(2.63) dépendent donc des propriétés du modèle. **On dira qu'un modèle est invariant par le groupe de symétrie G si les équations (1.20) sont invariantes par toutes les transformations du groupe G .**

Dans ce qui suit, on va analyser les modèles de turbulence du chapitre selon leurs propriétés d'invariance.

4.2 Analyse de modèles

4.2.1 L'invariance par les translations temporelles et de pression

Les modèles présentés ci-dessus sont invariants par les translations temporelles et de la pression. En effet, ces deux translations (2.55, 2.56) sont de la forme :

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t + a, x, u, \theta, p),$$

et

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, x, u, \theta, p + \zeta(t)).$$

Le temps et la pression n'interviennent pas dans τ^d et h pour tous les modèles de turbulence 1.2, sauf pour le modèle de fonction de structure qui dépend de t :

$$\hat{F}_2(x, \delta, t) = F_2(x, \delta, t)$$

alors

$$\hat{\tau}^d = \tau^d$$

et

$$\hat{h} = h.$$

D'où l'invariance par rapport aux translations temporelles et de la pression.

4.2.2 L'invariance par rotation

Les équations anisothermes filtrées (1.20) sont invariantes par le groupe de rotation (2.58) :

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, Rx, Ru, \theta, p),$$

si et seulement si :

$$\hat{\tau}^d = R \tau^d {}^T R \quad \text{et} \quad \hat{h} = R h.$$

Comme on a :

$$\hat{\theta} = \bar{\theta}, \quad \hat{\nabla} \hat{\theta} = R \nabla \bar{\theta},$$

$$\hat{S} = R \bar{S} {}^T R, \quad \hat{\Omega} = R \bar{\Omega} {}^T R,$$

$$\widetilde{\hat{u} \otimes \hat{u}} - \hat{\tilde{u}} \otimes \hat{\tilde{u}} = R \left(\widetilde{\bar{u} \otimes \bar{u}} - \bar{\tilde{u}} \otimes \bar{\tilde{u}} \right) {}^T R$$

et,

$$\widetilde{\hat{\theta} \hat{u}} - \hat{\tilde{\theta}} \hat{\tilde{u}} = R \left(\widetilde{\bar{\theta} \bar{u}} - \bar{\tilde{\theta}} \bar{\tilde{u}} \right).$$

On déduit donc :

- Les modèles de sous-mailles, similarité d'échelle et Bardina-Smagorinsky sont invariants par ce groupe.
- Le modèle de Wang est aussi invariant par la rotation. En effet :

$$\hat{\beta} = R \beta {}^T R, \quad \hat{\gamma} = R \gamma {}^T R, \quad \hat{\eta} = R \eta {}^T R,$$

alors :

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}^d &= -\hat{C}_S \hat{\beta} - \hat{C}_W \hat{\gamma} - \hat{C}_N \hat{\eta} \\
 &= R (-C_S \beta - C_W \gamma - C_N \eta) {}^T R \\
 &= R \tau^d {}^T R
 \end{aligned}$$

car les constantes du Wang C_S, C_W et C_N sont invariantes par la rotation. De plus :

$$\begin{aligned}
 \hat{h} &= -\hat{C}_{\theta G} \hat{\mathfrak{F}} \hat{\tau}^d \hat{\nabla} \hat{\theta} \\
 &= -C_{\theta G} \mathfrak{F} R \tau^d {}^T R R \nabla \bar{\theta} \\
 &= Rh
 \end{aligned}$$

D'où l'invariance par la rotation.

4.2.3 L'invariance par la transformation galiléenne généralisée

Aussi, on a l'invariance par le groupe de transformation galiléenne généralisée (2.59) :

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, x + \alpha(t), u + \dot{\alpha}(t), \theta, p + \rho x \cdot \ddot{\alpha}(t))$$

En effet

$$\begin{aligned}
 \hat{\nabla} \hat{u} &= \nabla \hat{u} = \nabla \bar{u} \\
 \hat{\theta} &= \bar{\theta}, \quad |\hat{\mathfrak{S}}| = |\bar{\mathfrak{S}}|.
 \end{aligned}$$

Donc les modèles Smagorinsky, Wang, WALE, fonction de structure Eidson et Eidson modifié sont tous invariants et on a :

$$\hat{\tau}^d = \tau^d \quad \text{et} \quad \hat{h} = h.$$

Et pour les modèles dynamique, Bardina et Smagorinsky-Bardina on a :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} &= (\bar{u} + \dot{\alpha}(t)) \widetilde{\otimes} (\bar{u} + \dot{\alpha}(t)) - (\bar{u} + \dot{\alpha}(t)) \otimes (\bar{u} + \dot{\alpha}(t)) \\ &= \widetilde{\bar{u}} \otimes \bar{u} - \tilde{u} \otimes \tilde{u} \\ &= \mathcal{L}\end{aligned}$$

car $\dot{\alpha}(t)$ ne depend pas de x , par suite $\hat{\tau} = \tau$. De même on a :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \widetilde{\hat{\theta}} \hat{\bar{u}} - \tilde{\theta} \tilde{\bar{u}} \\ &= \bar{\theta} \widetilde{(\bar{u} + \dot{\alpha}(t))} - \tilde{\theta} \widetilde{(\bar{u} + \dot{\alpha}(t))} \\ &= \widetilde{\bar{\theta}} \bar{u} - \tilde{\theta} \tilde{u} \\ &= \mathcal{H},\end{aligned}$$

d'où l'invariance.

4.2.4 L'invariance par les changements d'échelle

On peut rassembler les deux changements d'échelles (2.60,2.61) par une transformation à deux paramètres de la forme :

$$(t, x, u, \theta, p, \nu, \kappa) \longrightarrow (a^2 t, abx, \frac{b}{a} u, \frac{b}{a^3} \theta, \frac{b^2}{a^2} p, b^2 \nu, b^2 \kappa)$$

et on a l'invariance par ces deux groupes si et seulement si

$$\hat{\tau}^d = \frac{b^2}{a^2} \tau^d$$

et

$$\hat{h} = \frac{b^2}{a^4} h.$$

- Supposons que $\bar{\delta}$ est fixe, le modèle de Smagorinsky n'est invariant ni pour le premier changement d'échelle (qui correspond à $b = 1$) ni pour le second ($a = 1$). En effet, la viscosité de sous-maille du modèle de Smagorinsky varie comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_{sm} &= C_s^2 \bar{\delta}^2 \left| \hat{S} \right| \\ &= \frac{1}{a^2} C_s^2 \bar{\delta}^2 \left| \bar{S} \right| \\ &= \frac{1}{a^2} \nu_{sm},\end{aligned}$$

car

$$\hat{S} = \frac{1}{a^2} \bar{S} \quad \text{et} \quad \hat{\nabla} \hat{\theta} = \frac{1}{a^4} \nabla \bar{\theta}.$$

Par suite

$$\hat{\tau}^d = \frac{1}{a^4} \tau^d \neq \frac{b^2}{a^2} \tau^d.$$

- L'évaluation dynamique du coefficient C_d rend le modèle dynamique invariant. En effet

$$\hat{C}_d = a^2 b^2 C_d,$$

ce qui donne

$$\hat{\nu}_{sm} = b^2 \nu_{sm}.$$

Par suite on a

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{b^2}{a^2} C_d \bar{\delta}^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S} = \frac{b^2}{a^2} \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{H}} = \frac{b^2}{a^4} \mathcal{H}.$$

D'où

$$\hat{\tau}^d = \frac{b^2}{a^2} \tau^d \quad \text{et} \quad \hat{h} = \frac{b^2}{a^4} h.$$

- Le modèle de Wang est invariant par les changements d'échelle grâce au procédure dynamique des calculs des constantes de ce modèle. En effet :

$$\hat{\beta} = \frac{1}{a^4} \beta, \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{a^4} \gamma, \quad \hat{\eta} = \frac{1}{a^4} \eta,$$

$$\hat{C}_S = a^2 b^2 C_S, \quad \hat{C}_W = a^2 b^2 C_W, \quad \hat{C}_N = a^2 b^2 C_N \quad \text{et} \quad \hat{C}_{\theta G} = \frac{1}{a^2} C_{\theta G}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\hat{\tau}^d &= -\hat{C}_S\hat{\beta} - \hat{C}_W\hat{\gamma} - \hat{C}_N\hat{\eta} \\ &= \frac{b^2}{a^2} (-C_S\beta - C_W\gamma - C_N\eta) \\ &= \frac{b^2}{a^2} \tau^d\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{h} &= -\hat{C}_{\theta G} \hat{\mathfrak{F}} \hat{\tau}^d \hat{\nabla}\hat{\theta} \\ &= \frac{b^2}{a^4} h.\end{aligned}$$

- Le modèle WALE n'est pas invariant par les changements d'échelle.
En effet

$$\hat{\nu}_{sm} = \frac{1}{a^2} \nu_{sm}.$$

Donc

$$\hat{\tau}^d = -2\hat{\nu}_{sm}\hat{S} = -2\frac{1}{a^4}\nu_{sm}\bar{S} = \frac{1}{a^4}\tau \neq \frac{b^2}{a^2}\tau^d.$$

- Le modèle d'Eidson, n'est pas invariant par les changements d'échelle car

$$\hat{\tau}^d = \frac{1}{a^4}\tau^d \neq \frac{b^2}{a^2}\tau^d.$$

- Par rapport au modèle de fonction de structure d'ordre 2 on a :

$$\hat{\nu}_{sm} = C_{FS}\bar{\delta}\hat{F}_2^{1/2} = C_{FS}\bar{\delta}\frac{b}{a}F_2^{1/2} = \frac{b}{a}\nu_{sm}$$

par suite, l'image de tenseur déviatorique τ^d par ces changements d'échelle est :

$$\hat{\tau}^d = -2\hat{\nu}_{sm}\hat{S} = -2\frac{b}{a}\nu_{sm}\frac{1}{a^2}\bar{S} = -2\frac{b}{a^3}\nu_{sm}\bar{S} \neq \frac{b^2}{a^2}\tau^d.$$

Donc, le modèle de fonction de structure n'est pas invariant par les changements d'échelle.

- le modèle de Bardina est invariant par les changements d'échelle, En effet :

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}^d &= K_1 \left(\widetilde{\hat{u} \otimes \hat{u}} - \tilde{\hat{u}} \otimes \tilde{\hat{u}} \right) \\
 &= \frac{b^2}{a^2} K_1 \left(\widetilde{\bar{u} \otimes \bar{u}} - \tilde{\bar{u}} \otimes \tilde{\bar{u}} \right) \\
 &= \frac{b^2}{a^2} \tau^d
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \hat{h} &= K_2 \left(\widetilde{\hat{\theta} \hat{u}} - \tilde{\hat{\theta}} \tilde{\hat{u}} \right) \\
 &= \frac{b^2}{a^4} K_2 \left(\widetilde{\bar{\theta} \bar{u}} - \tilde{\bar{\theta}} \tilde{\bar{u}} \right) \\
 &= \frac{b^2}{a^4} h.
 \end{aligned}$$

Comme les modèles de Smagorinsky et Bardina sont invariants par les changements d'échelle, alors le modèle mixte Smagorinsky-Bardina est aussi invariant.

4.2.5 L'invariance par la translation pression-température

Pour que les équations filtrées (1.20) soient invariantes par le groupe de translation pression-température (2.57) :

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto \left(t, x, u, \theta + \frac{a}{\rho}, p + a\beta g x_3 \right)$$

il faut et il suffit que

$$\hat{\tau}^d = \tau^d \quad \text{et} \quad \hat{h} = h.$$

Par cette transformation, les champs des vitesses, le gradient du température et du pression ne varie pas. C'est qui donne l'invariance des modèles

Smagorinsky, Dynamique, Wang, WALE, Eidson et le modèle de fonction de structure. Le modèle de Bardina et le modèle mixte sont également invariants par translation pression-température. En effet

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} &= \widetilde{\hat{u} \otimes \hat{u}} - \tilde{\hat{u}} \otimes \tilde{\hat{u}} \\ &= \tilde{\hat{u}} \otimes \hat{u} - \tilde{\hat{u}} \otimes \tilde{\hat{u}} \\ &= \mathcal{L}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \widetilde{\hat{\theta} \hat{u}} - \tilde{\hat{\theta}} \tilde{\hat{u}} \\ &= \tilde{\hat{\theta}} \hat{u} - \tilde{\hat{\theta}} \tilde{\hat{u}} \\ &= \mathcal{H}.\end{aligned}$$

4.2.6 Invariance par réflexion

Les équations filtrées (1.20) sont invariantes par la réflexion (2.62)

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (t, \Lambda x, \Lambda u, i_2 \theta, p),$$

si et seulement si

$$\hat{\tau}^d = \tau^d \quad \text{et} \quad \hat{h} = i_2 \Lambda h.$$

Où $\Lambda = \text{diag}(i_1, i_2, i_3)$ et $i_l = \pm 1$.

Comme

$$\hat{S} = \bar{S}, \quad \hat{\Omega} = \bar{\Omega}, \quad \text{et} \quad \hat{\nabla} \hat{\theta} = i_2 \Lambda \nabla \bar{\theta}$$

alors les modèles de Smagorinsky, Wang, Eidson et Eidson modifié sont invariants par ces réflexions.

De plus, on a

$$\hat{u} \otimes \hat{u} = \bar{u} \otimes \bar{u} \quad \text{et} \quad \hat{\theta}\hat{u} = i_2\Lambda(\bar{\theta}\bar{u}).$$

Cela conduit à l'invariance des modèles dynamique, de fonction de structure, Bardina et Smagorinsky-Bardina par ces transformations.

En ce qui concerne le modèle WALE, on a :

$$\hat{\Omega} = \bar{\Omega},$$

ce qui donne :

$$\hat{\nu}_{sm} = (C_w\bar{\delta})^2 \frac{\|\hat{s}^d\|^3}{\|\hat{S}\|^5 + \|\hat{s}^d\|^{5/2}} = (C_w\bar{\delta})^2 \frac{\|s^d\|^3}{\|\bar{S}\|^5 + \|s^d\|^{5/2}} = \nu_{sm}.$$

Ensuite, le modèle WALE est invariant par ces réflexions.

4.2.7 Invariance par l'indifférence matérielle

Les équations filtrées (1.20) sont invariantes par l'indifférence matérielle (2.63) :

$$(t, x, u, \theta, p) \mapsto (t, R(t)x, R(t)u + \dot{R}(t)x, \theta, p - 3w\psi + \frac{1}{2}w^2 \|x\|^2),$$

si et seulement si

$$\hat{\tau}^d = R(t) \tau^d T R(t) \quad \text{et} \quad \hat{h} = R(t)h.$$

- Les modèles de Smagorinsky, Eidson sont invariants par la transformation (2.63). En effet,

$$\hat{S} = R(t) \bar{S} T R(t), \quad \hat{\nabla}\hat{\theta} = R(t)\nabla\bar{\theta},$$

Ensuite,

$$\hat{\tau}^d = R(t) \tau^d T R(t)$$

et

$$\hat{h} = R(t) h.$$

- Pour les modèles dynamique, Wang et les similarités d'échelle on a :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} &= R(t) \left(\widetilde{\bar{u} \otimes \bar{u}} - \tilde{u} \otimes \tilde{u} \right)^T R(t) \\ &+ R(t) \left(\widetilde{\bar{u} \otimes x} - \tilde{u} \otimes \tilde{x} \right)^T \dot{R}(t) \\ &+ \dot{R}(t) \left(\widetilde{x \otimes \bar{u}} - \tilde{x} \otimes \tilde{u} \right)^T R(t) \\ &+ \dot{R}(t) \left(\widetilde{x \otimes x} - \tilde{x} \otimes \tilde{x} \right)^T \dot{R}(t). \end{aligned}$$

Or pour tous les filtres, on a :

$$\left(\widetilde{\bar{u} \otimes x} - \tilde{u} \otimes \tilde{x} \right) \neq 0 \quad (4.1)$$

$$\left(\widetilde{x \otimes \bar{u}} - \tilde{x} \otimes \tilde{u} \right) \neq 0 \quad (4.2)$$

$$\left(\widetilde{x \otimes x} - \tilde{x} \otimes \tilde{x} \right) \neq 0. \quad (4.3)$$

Donc, ces modèles ne sont pas invariants par l'indifférence matérielle.

- Le modèle WALE n'est pas invariant par la transformation (2.63). En effet

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\Omega}} &= R(t) \bar{\Omega}^T R(t) + \dot{R}(t)^T R(t) \\ &= R(t) \bar{\Omega}^T R(t) + J \end{aligned} \quad (4.4)$$

où J est la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ce qui donne :

$$\hat{\nu}_{sm} = (C_w \bar{\delta})^2 \frac{\|\hat{s}^d\|^3}{\|\hat{S}\|^5 + \|\hat{s}^d\|^{5/2}} \neq (C_w \bar{\delta})^2 \frac{\|s^d\|^3}{\|S\|^5 + \|s^d\|^{5/2}} = \nu_{sm}.$$

D'où : $\hat{\tau}^d \neq R(t) \tau^d R(t)$.

- Le modèle de fonction de structure n'est pas invariant par l'indifférence matérielle. En effet :

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}_2 &= \int_{\|x'\|=\bar{\delta}} [R\bar{u}(x, t) + \dot{R}x - (R\bar{u}(x + x', t) + \dot{R}x' + \dot{R}x)]^2 d^3x' \\
 &= \int_{\|x'\|=\bar{\delta}} [\bar{u}(x, t) - \bar{u}(x + x', t) -^T R\dot{R}x']^2 d^3x' \\
 &= \bar{F}_2 + w^2 \int_{\|x'\|=\bar{\delta}} \|x'\|^2 d^3x' \\
 &\quad - 2w \int_{\|x'\|=\bar{\delta}} {}^T [\bar{u}(x, t) - \bar{u}(x + x', t)] {}^T R\dot{R}x' d^3x' \\
 &= \bar{F}_2 + 2\pi w^2 \bar{\delta}^3 - 2w \int_{\|x'\|=\bar{\delta}} {}^T [\bar{u}(x, t) - \bar{u}(x + x', t)] {}^T R\dot{R}x' d^3x'.
 \end{aligned}$$

On constate que $\widehat{F}_2 \neq \bar{F}_2$ quelque soit $\bar{u}(x, t)$. Donc

$$\hat{\nu}_{sm} \neq \nu_{sm}$$

et par suite

$$\hat{\tau}^d \neq R(t) \tau^d {}^T R(t).$$

Cette analyse des modèles de turbulences est résumée dans le TABLE 4.1, on déduit que la plupart des modèles ne sont pas invariants par les changements d'échelle

Donc lors de la modélisation de la turbulence, en LES, il est important que le modèle ne détruise pas les symétries des équations (1.19) si on veut retrouver les lois de conservation et les propriétés de la solution exacte. Autrement dit, lorsqu'on introduit le modèle dans les équations filtrées (LES), il faut que les symétries des équations d'origine soient aussi symétries des équations finales ce qui est le but de la partie suivante.

Dans le paragraphe suivant, on va construire une classe de modèles anisothermes invariants par le groupe de symétries des équations (1.20).

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

Modèles de turbulence	Tran _t . X ₀ Tran _p . Y ₀	X ₁₂ Rot	X _i Gal	Y ₁ & Y ₂ Echelles	Tran.Z P & T	Ref	Ind Mat
Smagorinsky	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>	Inv	Inv	Inv
Dynamique	Inv	Inv	Inv	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>
Wang	Inv	Inv	Inv	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>
WALE	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>
Eidson	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>	Inv	Inv	Inv
Eidson modifié	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>	Inv	Inv	Inv
Structure	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>
Bardina	Inv	Inv	Inv	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>
Mixte	Inv	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>	Inv	Inv	<i>Non-Inv</i>

TABLE 4.1 – Résultats d'analyse des modèles

4.3 Construction d'une classe de Modèles anisothermes invariants

Pour que le modèle soit invariant par rapport aux groupes des translations (2.55), (2.56) et (2.59), il suffit que le tenseur de sous-maille τ^d soit indépendant du temps et de la pression. Et pour assurer l'invariance par rapport à la translation pression-température (2.57), on ne fait intervenir $\bar{\theta}$ qu'à travers son gradient $\bar{\mathbb{T}} = \nabla \bar{\theta}$. Ensuite, pour avoir l'invariance par l'indifférence matérielle, on prend

$$-\tau = \mathcal{L}(\bar{S}, \bar{\mathbb{T}}) \quad (4.5)$$

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

$$-h = \mathfrak{F}(\bar{S}, \bar{\mathbb{T}}). \quad (4.6)$$

D'après la théorie des invariants et l'égalité des traces, on peut modéliser les deux couples (τ, h) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^d = E_1 \bar{S} + E_2 \text{Adj}^d \bar{S} + E_3 (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})^d \\ \quad + E_4 [\bar{S}(\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})]^d + E_5 [\bar{S}(\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})\bar{S}]^d, \\ -h = E_6 \bar{\mathbb{T}} + E_7 \bar{S} \bar{\mathbb{T}} + E_8 \bar{S}^2 \bar{\mathbb{T}}, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

où les coefficients E_i sont des fonctions des invariants indépendants formé à partir de \bar{S} et de $\bar{\mathbb{T}}$ qui sont :

$\mathcal{X} = \text{tr } \bar{S}^2, \xi = \det \bar{S}, \vartheta = \bar{\mathbb{T}}^2, \omega_1 = \bar{\mathbb{T}} \cdot \bar{S} \bar{\mathbb{T}}, \omega_2 = \bar{S} \bar{\mathbb{T}} \cdot \bar{S} \bar{\mathbb{T}}$, et Adj est l'opérateur adjugué ou comatrice tel que :

$$\bar{S} \cdot (\text{Adj } \bar{S}) = (\det \bar{S}) I_d.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à faire vérifier l'invariance par les changements d'échelles (2.60, 2.61).

Notons

$$v_1 = \frac{\xi}{\mathcal{X}^{3/2}}$$

$$v_2 = \frac{\vartheta}{\mathcal{X}^2}$$

$$v_3 = \frac{\omega_1}{\mathcal{X}^{5/2}}$$

$$v_4 = \frac{\omega_2}{\mathcal{X}^3}.$$

Théorème 1 *Un modèle de sous-maille (τ^d, h) de la forme :*

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^d = \nu F_1 \bar{S} + \nu \mathcal{X}^{-1/2} F_2 \text{Adj}^d \bar{S} \\ \quad + \nu \mathcal{X}^{-3/2} F_3 (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})^d + \nu \mathcal{X}^{-2} F_4 [\bar{S} (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})]^d \\ \quad + \nu \mathcal{X}^{-5/2} F_5 \bar{S} [(\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}}) \bar{S}]^d \\ -h = \kappa \left(F_6 + \mathcal{X}^{-1/2} F_7 \bar{S} + \mathcal{X}^{-1} F_8 \bar{S}^2 \right) \bar{\mathbb{T}}, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

où les F_i , $i = 1, \dots, 8$, sont des fonctions des invariants (v_1, v_2, v_3, v_4) . respecte le groupe de symétrie des équations des écoulements anisothermes (2.43).

Preuve et la méthode de construction

Le premier changement d'échelle est défini comme suivant :

$$(t, x, u, \theta, p) \longmapsto (a^2 t, ax, a^{-1} u, a^{-3} \theta, a^{-2} p). \quad (4.9)$$

Pour avoir l'invariance du modèle par le premier changement d'échelle, il faut et il suffit que l'image de tenseur de sous-maille et le flux thermique de sous-maille par cette transformation soit de la forme :

$$\hat{\tau}^d = \frac{1}{a^2} \tau^d \quad (4.10)$$

$$\hat{h} = \frac{1}{a^4} h. \quad (4.11)$$

Or

$$\hat{\bar{S}} = \frac{1}{a^2} \bar{S}$$

$$\hat{\bar{\mathbb{T}}} = \frac{1}{a^4} \bar{\mathbb{T}}$$

on obtient

$$\hat{\mathcal{X}} = \frac{1}{a^4} \mathcal{X}$$

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

$$\begin{aligned}\hat{\xi} &= \frac{1}{a^6} \xi \\ \hat{\vartheta} &= \frac{1}{a^8} \vartheta \\ \hat{\omega}_1 &= \frac{1}{a^{10}} \omega_1 \\ \hat{\omega}_2 &= \frac{1}{a^{12}} \omega_2.\end{aligned}$$

A partir de ces relations et du modèle (4.7), on doit avoir

$$E_i(\mathcal{X}, \hat{\xi}, \hat{\vartheta}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = b_i E_i(\mathcal{X}, \xi, \vartheta, \omega_1, \omega_2) \quad (4.12)$$

$$i = 1, \dots, 8$$

avec

$$b_1 = 1, b_2 = a^2, b_3 = a^6, b_4 = a^8, b_5 = a^{10}, b_6 = 1, b_7 = a^2 \text{ et } b_8 = a^4.$$

La variation de E_i autour de $a = 1$, nous donne

$$\mathcal{X} \frac{\partial E_i}{\partial \mathcal{X}} + \frac{3}{2} \xi \frac{\partial E_i}{\partial \xi} + 2\vartheta \frac{\partial E_i}{\partial \vartheta} + \frac{5}{2} \omega_1 \frac{\partial E_i}{\partial \omega_1} + 3\omega_2 \frac{\partial E_i}{\partial \omega_2} = c_i E_i \quad (4.13)$$

où

$$c_1 = 0, c_2 = -\frac{1}{2}, c_3 = -\frac{3}{2}, c_4 = -2, c_5 = -\frac{5}{2}, c_6 = 0, c_7 = -\frac{1}{2} \text{ et } c_8 = -1.$$

Les équations caractéristiques associées des égalités (4.13) sont

$$\frac{d\mathcal{X}}{\mathcal{X}} = \frac{2}{3} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\vartheta}{2\vartheta} = \frac{2}{5} \frac{d\omega_1}{\omega_1} = \frac{d\omega_2}{3\omega_2} = \frac{dE_i}{c_i E_i}, \quad (4.14)$$

Une solution des ces équations (4.14) de la forme :

$$E_i = \mathcal{X}^{b_i} F_i(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad i = 1, \dots, 8.$$

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

montre l'invariance par le premier et second changement d'échelle, d'où le théorème.

Pour réduire notre classe de modèles invariants, de telle façon qu'ils respectent le second principe de la thermodynamique, on donne des valeurs pour les fonctions F_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^d = \nu \left[2g_m - 3v_1 \frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2} - 5v_3 \frac{\partial g_m}{\partial v_3} \right. \\ \left. - 6v_4 \frac{\partial g_m}{\partial v_4} \right] \bar{S} + \nu \left[\mathcal{X}^{-1/2} \frac{\partial g_m}{\partial v_1} \text{Adj}^d \bar{S} \right. \\ \left. + \mathcal{X}^{-3/2} \frac{\partial g_m}{\partial v_3} (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})^d + 2\mathcal{X}^{-2} \frac{\partial g_m}{\partial v_4} [\bar{S}(\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})]^d, \right] \\ -h = \kappa \left(\frac{\partial g_t}{\partial v_2} I_3 + \mathcal{X}^{-1/2} \frac{\partial g_t}{\partial v_3} \bar{S} + \mathcal{X}^{-1} \frac{\partial g_t}{\partial v_4} \bar{S}^2 \right) \bar{\mathbb{T}}, \end{array} \right. \quad (4.15)$$

où g_m et g_t sont des fonctions de

$$v_1 = \frac{\xi}{\mathcal{X}^{3/2}}, \quad v_2 = \frac{\vartheta}{\mathcal{X}^2}, \quad v_3 = \frac{\omega_1}{\mathcal{X}^{5/2}}, \quad v_4 = \frac{\omega_2}{\mathcal{X}^3}.$$

Les v_i sont les invariants par le premier changement d'échelle (2.60).

Enfin, on vérifie que le modèle défini par (4.15) est invariant par les changements d'échelle (2.60) et (2.61). ■

On présente dans ce qui suit quelques cas particuliers des modèles invariants.

4.3.1 Modèle invariant fortement couplé

Si on choisit g_m et g_t fonctions uniquement de v_1 et v_2 , on a :

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu \left(2g_m - 3v_1 \frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2} \right) \bar{S} + \nu \frac{1}{\|\bar{S}\|} \frac{\partial g_m}{\partial v_1} \text{Adj}^d \bar{S}, \\ -h = \kappa h_t \bar{\mathbb{T}}. \end{cases} \quad (4.16)$$

où $h_t = \frac{\partial g_t}{\partial v_2}$, et $\|\bar{S}\| = \sqrt{\text{tr} \bar{S}^2}$. On obtient un modèle couplé où τ^d et h dépendent tous les deux de \bar{S} et de $\bar{\theta}$. On test un cas particulier de modèle fortement couplé au chapitre 5 où g_m et h_t sont de la forme :

$$\begin{aligned} g_m &= C_m \left(v_1 + \frac{1}{v_2} \right) \\ g_t &= C_t v_1 \end{aligned}$$

d'où une forme particulière du modèle invariant couplé :

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu C_m \left[\left(-\frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} + 6 \frac{\|\bar{S}\|^4}{\|\nabla \bar{\theta}\|^2} \right) \bar{S} + \frac{1}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S} \right], \\ -h = \kappa C_t \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \bar{\mathbb{T}}. \end{cases} \quad (4.17)$$

4.3.2 Modèle invariant non couplé

Si on suppose que g_m dépend uniquement de $v = v_1$ et g_t uniquement de v_2 , alors on obtient un modèle non couplé où le tenseur de sous-maille ne dépend pas de la température :

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu (2g_m - 3v \dot{g}_m) \bar{S} + \nu \frac{1}{\|\bar{S}\|} \dot{g}_m \text{Adj}^d \bar{S}, \\ -h = \kappa h_t \bar{\mathbb{T}}, \end{cases} \quad (4.18)$$

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

On remarque que les fonctions g_m et g_t sont arbitraires. On étudie deux cas, le premier choix sera une fonction linéaire de v qui nous donne un modèle invariant nul à la paroi mais n'a pas un comportement en x_2^3 proche de la paroi (x_2 coordonné suivant la direction normale). C'est pour cela, que l'on propose un deuxième modèle invariant nul à la paroi et qui a le comportement en x_2^3 proche de la paroi.

- **Modèle invariant linéaire**

Prenons le cas où g_m et h_t sont des fonctions linéaires de v :

$$g_m = c_m v, \quad h_t = C_t v$$

où c_m et C_t sont deux constantes du modèle, dépendant de la taille du maillage et de la constante de Smagorinsky. Alors,

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu c_m \left[-\frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \bar{S} + \text{Adj}^d \bar{S} \frac{1}{\|\bar{S}\|} \right], \\ -h = \kappa C_t \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \bar{\mathbb{T}}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Ce modèle est nul à la paroi et a un comportement en x_2 proche de la paroi. En effet, considérons tout d'abord le premier point où on a une plaque plane placée à $x_2 = 0$, (voir 4.1) on a :

$$\left. \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \right|_{paroi} = 0$$

$$\left. \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_3} \right|_{paroi} = 0$$

et d'après la condition de l'incompressibilité on a aussi :

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right|_{paroi} = 0.$$

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

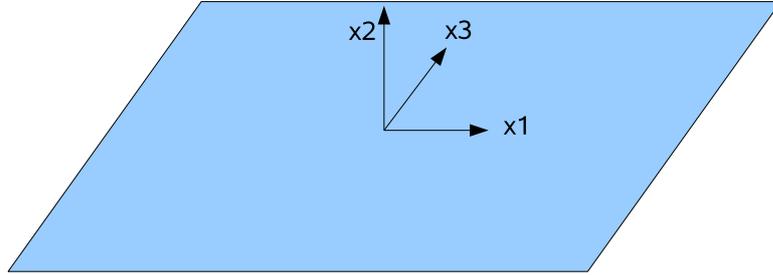


FIGURE 4.1 – Ecoulement proche de la paroi

Donc à la paroi, le tenseur de déformation filtré devient :

$$\bar{S}|_{paroi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, le déterminant est nul :

$$\det \bar{S}|_{paroi} = 0. \quad (4.20)$$

Une autre formule de l'adjugué du tenseur de déformation \bar{S} est donnée par (car $\text{tr} \bar{S} = 0$) :

$$\text{Adj} \bar{S} = \bar{S}^2 - \frac{1}{2} \text{tr} \bar{S}^2 I_3.$$

Sa partie déviatorique est :

$$\text{Adj}^d \bar{S} = \bar{S}^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \bar{S}^2 I_3.$$

La dissipation D , d'une part, est donnée par :

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

$$\begin{aligned}
D &= \text{tr}(-\bar{S}\tau^d) \\
&= -\nu c_m \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \text{tr} \bar{S}^2 + \nu c_m \frac{1}{\|\bar{S}\|} \text{tr}(\text{Adj}^d \bar{S} \cdot \bar{S}) \\
&= \nu c_m \left[-\frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \text{tr} \bar{S}^2 + \frac{3 \det \bar{S}}{\|\bar{S}\|} \right] \\
&= 2\nu c_m \frac{\det \bar{S}}{\sqrt{\text{tr} \bar{S}^2}},
\end{aligned}$$

et d'autre part, définissant la viscosité de sous-maille par :

$$D = 2\nu_{sm} \sqrt{\text{tr} \bar{S}^2}.$$

Donc la viscosité de sous-maille du modèle invariant linéaire est :

$$\nu_{sm} = \nu c_m \frac{\det \bar{S}}{\left(\sqrt{\text{tr} \bar{S}^2}\right)^3}. \quad (4.21)$$

D'où à la paroi on a :

$$\nu_{sm}|_{paroi} = \nu c_m \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \Big|_{paroi} = 0. \quad (4.22)$$

Proche de la paroi, les composantes du champs de vitesse sont de la forme [48] :

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= u_1(x_1, x_3)x_2 + u_2(x_1, x_3)x_2^2 + O(x_2^3) \\
\bar{u}_2 &= v_2(x_1, x_3)x_2^2 + O(x_2^3) \\
\bar{u}_3 &= w_1(x_1, x_3)x_2 + w_2(x_1, x_3)x_2^2 + O(x_2^3)
\end{aligned}$$

Donc, on peut décomposer le tenseur des déformations proche de la paroi sous la forme :

$$\bar{S} = S_0 + S_1 x_2 + O(x_2^2), \quad (4.23)$$

4.3. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE MODÈLES ANISOTHERMES INVARIANTS

où $S_0, S_1 \in M_3(\mathbb{R})$ tel que : $\text{tr}S_0 = \text{tr}S_1 = \det S_0 = 0$ et

$$\begin{aligned}
 \det \bar{S} \Big|_{\text{près de la paroi}} &= \det(S_0 + S_1 x_2) \\
 &= \frac{1}{3} \text{tr} [\text{Adj}(S_0 + S_1 x_2) \cdot (S_0 + S_1 x_2)] \\
 &= \frac{1}{3} \text{tr}(S_0 + S_1 x_2)^3 \\
 &= \frac{1}{3} \text{tr} S_0^3 + \text{tr}(S_0^2 S_1) x_2 + \text{tr}(S_0 S_1^2) x_2^2 + \frac{1}{3} \text{tr} S_1^3 x_2^3 \\
 &= \underbrace{\text{tr}(S_0^2 S_1)}_{\neq 0} x_2 + \text{tr}(S_0 S_1^2) x_2^2 + \frac{1}{3} \text{tr} S_1^3 x_2^3 \\
 &= Ax_2 + O(x_2)
 \end{aligned}$$

où $\frac{1}{3} \text{tr} S_0^3 = \det S_0 = 0$ et $A = \text{tr}(S_0^2 S_1) \neq 0$. Donc, d'après l'égalité (4.21), la viscosité de sous-maille du modèle invariant linéaire à un comportement en x_2 proche de la paroi. C'est pour cela, que l'on propose un deuxième modèle invariant pour lequel la viscosité turbulente admet un comportement en $(x_2)^3$ proche de la paroi.

- **Modèle invariant exponentiel**

Supposons que g_m et h_t sont de la forme :

$$g_m = c_m(1 - \exp(-v^3)),$$

$$h_t = c_t(1 - \exp(-v^3)),$$

où $v = \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3}$, alors le modèle invariant non couplé est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\tau^d = \nu c_m [2(1 - \exp(-v^3)) - 9v^3 \exp(-v^3)] \bar{S} \\
 + \frac{\nu \dot{g}_m}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S}, \\
 -h = \kappa C_t (1 - \exp(-v^3)) \bar{\mathbb{T}}.
 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Avec :

$$\dot{g}_m = 3c_m v^2 \exp(-v^3).$$

La quantité τ^d est nul à la paroi et se comporte comme $(x_2)^3$ près de la paroi. En effet, d'après les relations (4.18) et (4.20), le déterminant est nul à la paroi, et par conséquent $g_m = 0$, $\dot{g}_m = 0$ et $\tau^d = 0$. En ce qui concerne la viscosité de sous-maille près de la paroi on :

$$\begin{aligned} \nu_{sm} &= \frac{D}{\|\bar{S}\|^2} \\ &= \frac{\text{tr}(\bar{S}\tau^d)}{\|\bar{S}\|^2} \\ &= \frac{\nu c_m}{\|\bar{S}\|^2} [2(1 - \exp(-v^3)) - 9v^3 \exp(-v^3)] \text{tr}\bar{S}^2 + \frac{\nu \dot{g}_m}{\|\bar{S}\|^3} \text{tr}(\bar{S} \cdot \text{Adj}^d \bar{S}) \\ &= \frac{\nu c_m}{2} [2(1 - \exp(-v^3)) - 9v^3 \exp(-v^3)] + \frac{3\nu \dot{g}_m}{\|\bar{S}\|^3} \det \bar{S} \end{aligned}$$

qui se comporte en $(x_2)^3$ proche de la paroi.

4.4 Lois d'échelles conservées par les modèles invariants

D'autres propriétés intéressantes des modèles invariants (fortement couplé (4.17), non-couplé linéaire (4.19) et invariant exponentiel non-couplé (4.24)) viennent du fait qu'ils sont invariants par les groupes des symétries (3.3.2) des équations de Navier-Stokes anisothermes moyennées (3.123) si on répète la même procédure des moyennes par RANS sur les équations des écoulements turbulents anisothermes filtrées (1.20). En effet, formellement la seule différence entre les équations des écoulements turbulents anisothermes filtrées et non filtrées est la présence de $\text{div}(\tau^d)$ et $\text{div}(h)$ comme on présente dans la FIGURE 4.2 & 4.3.

4.4. LOIS D'ÉCHELLES CONSERVÉES PAR LES MODÈLES INVARIANTS

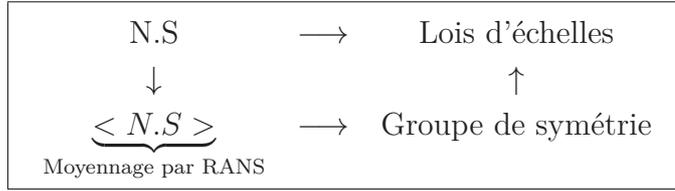


FIGURE 4.2 – Lois d'échelles, par la méthode de RANS

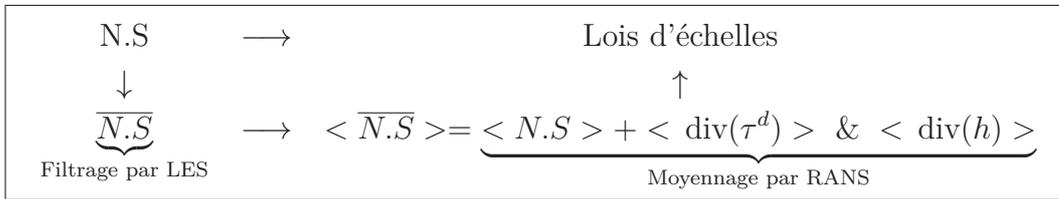


FIGURE 4.3 – Lois d'échelles, par l'application de la méthode de LES puis RANS

Pour montrer que ces modèles invariants conserve les lois d'échelles des écoulements turbulents anisothermes présenté au chapitre 2, paragraphe 3.3, il faut :

- Moyenner par la méthode de RANS et par la même hypothèse, les équations anisothermes filtrées (1.20), où le tenseur de sous-maille τ^d et le flux de sous-maille h sont celles des modèles invariants.
- Vérifier que chaque transformation de groupes des symétries des équations anisothermes moyennées par la méthode de RANS (3.3.2) est une symétrie de l'équation anisothermes filtrées par LES et moyennées par RANS (4.25), où le tenseur de sous-maille τ^d et le flux de sous-maille h sont celles des modèles invariants.

En effet, les équations anisothermes filtrées par LES puis moyennées par RANS sont calculées comme dans le paragraphe approche moyennée

(3.3.1), elles sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_i = \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial t} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_1} + \bar{u}'_2 \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \delta_{i1} - \\
 \quad \left(K + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_2^2} \right) \delta_{i1} + \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} - \beta g \bar{\Theta} \right) \delta_{i2} + \\
 \quad \frac{\partial \bar{u}'_i \bar{u}'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}'_i}{\partial x_k^2} - \beta g \bar{\theta}' \delta_{i2} + (\text{div}(\langle \tau_{inv}^d \rangle))_i = 0 \\
 \\
 N = \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta}' \bar{u}'_j}{\partial x_j} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}'}{\partial x_j^2} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x_2^2} + \bar{u}'_2 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_2} + \\
 \quad \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial x_1} + \text{div}(\langle h_{inv} \rangle) = 0. \\
 \\
 \Psi = \frac{\partial \bar{u}'_k}{\partial x_k} = 0
 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

- $\bar{u} = \langle \bar{u} \rangle + \bar{u}' := \bar{U} + \bar{u}'$ est le champ de vitesses filtré par LES, puis décomposé, par la méthode de RANS, en une partie moyenne notée \bar{U} et une partie fluctuante notée \bar{u}' .
- $\bar{\theta} = \langle \bar{\theta} \rangle + \bar{\theta}' := \bar{\Theta} + \bar{\theta}'$ est la température filtrée par LES, puis décomposée, par la méthode de RANS, en une partie moyenne notée $\bar{\Theta}$ et une partie fluctuante notée $\bar{\theta}'$.
- $\bar{p} = \langle \bar{p} \rangle + \bar{p}' := \bar{P} + \bar{p}'$ est le champ de pression filtré par LES, puis décomposé, par la méthode de RANS, en une partie moyenne notée \bar{P} et une partie fluctuante notée \bar{p}' .

Grâce aux propriétés des modèles invariants, on peut montrer que les transformations du paragraphe 3.3.2 du chapitre 3 sont des symétries des équations (4.25). Aussi, les lois d'échelles établies dans le chapitre 3 restent valables quand τ^d et h sont déduites des modèles invariants.

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de construction d'une classe de modèles invariants pour un écoulement anisotherme. Puis, on en

4.4. LOIS D'ÉCHELLES CONSERVÉES PAR LES MODÈLES INVARIANTS

a déduit trois modèles particuliers de sous-maille. Ces modèles permettent d'obtenir les lois d'échelles établies dans le chapitre 3.

Dans le chapitre suivant, un test numérique est effectué pour les modèles : Smagorinsky, Smagorinsky dynamique, et invariants, pour la configuration d'une cavité chauffée ventilée ou non.

Chapitre 5

Validation numérique

Dans ce manuscrit, les simulations sont effectuées avec le *Code-Saturne*¹ [2] qui a été développé par Électricité de France EDF. *Code-Saturne* résout les équations de Navier-Stokes, pour des écoulements en 2D ou 3D, stationnaires et instationnaires, laminaires ou turbulents, faiblement compressibles ou incompressibles, isothermes ou anisothermes. Ce code est écrit en volumes finis pour un maillage structuré ou non-structuré². Nous avons implémenté dans le *Code-Saturne* les modèles invariants suivants : invariant linéaire, couplé, exponentiel et invariant dynamique. Dans ce chapitre, on donne une description rapide du schéma de discrétisation utilisé dans *Code-Saturne*. Puis, on rappelle les modèles invariants qui seront simulés. Enfin, les résultats des validations numériques en convection naturelle et mixte seront présentés.

5.1 Structure du *Code-Saturne*

Pour simplifier l'exposé, nous présentons la discrétisation à partir des équations de Navier-Stokes (avec une viscosité éventuellement non constante).

1. *Code-Saturne* est un open source

2. Maillage non-structuré est utilisable pour des géométries complexes

5.1.1 La méthode des volumes finis

Le principe de la méthode des volumes finis est de découper le domaine de calcul en un nombre fini de cellules de centre I et de volume Ω_i [74], puis on intègre les équations de Navier-Stokes sur chaque volume des cellules. Commançant d'abord, par l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.1) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\operatorname{div}(u \otimes u)}_{\text{convection}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underbrace{\operatorname{div}(2\nu S)}_{\text{diffusion}} + S_{\Phi}, \quad (5.1)$$

où S_{Φ} est un terme source.

L'équation de conservation (5.1) est intégrée sur chaque cellule Ω_i , on obtient :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(u \otimes u) dx = -\frac{1}{\rho} \int_{\Omega_i} \nabla p dx + \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(2\nu S) dx + \int_{\Omega_i} S_{\Phi} dx. \quad (5.2)$$

Le théorème de la divergence, appliqué au terme de convection et diffusion, permet de transformer les intégrales de volume en intégrales de surface comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_i} u dx \right) + \int_{S_i} (u \otimes u) \cdot \mathbf{n} ds = -\frac{1}{\rho} \int_{S_i} p \mathbf{n} ds + \int_{S_i} (2\nu S) \cdot \mathbf{n} ds + S_{\Phi} |\Omega_i|. \quad (5.3)$$

Avec $S_i = \partial\Omega_i$ la surface entourant le volume Ω_i , \mathbf{n} le vecteur unitaire normal extérieure à la surface S_i . Dans le *Code-Saturne*, les variables sont calculées au centre de gravité de la cellule.

5.1.2 Terme de convection

Le terme de convection est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(u \otimes u) \, d\Omega &= \int_{S_i} (u \otimes u) \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \sum_{j \in \text{Vois}(i)} F_{ij}((u), u) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} F_{b_{ik}}((u), u). \end{aligned}$$

Avec :

$$F_{ij}((u), u) = [(u)_{ij} \cdot S_{ij}] u_{f,ij} \quad (5.4)$$

$$F_{b_{ik}}((u), u) = [(u)_{b_{ik}} \cdot S_{b_{ik}}] u_{f,b_{ik}} \quad (5.5)$$

Avec $\text{Vois}(i)$ ensemble des centres des cellules voisines de Ω_i , $\gamma_b(i)$ ensemble des centres des faces de bord de Ω_i , $S_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$, $S_{b_{ik}}$ est la k -ème face de bord de $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ voir FIGURE 5.1.

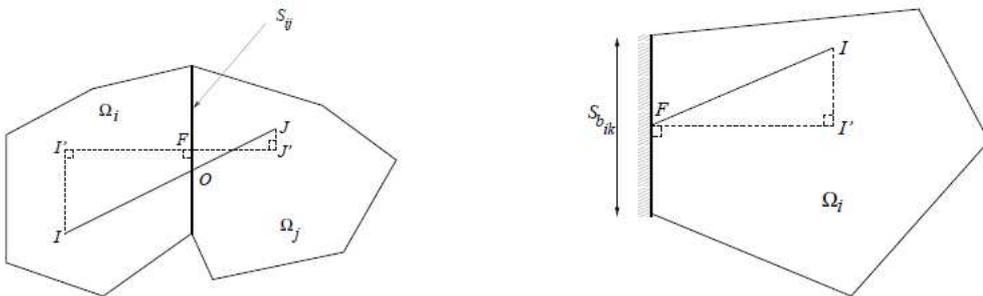


FIGURE 5.1 – Configuration de deux cellules adjacentes I et J internes au domaine

Les valeurs des vitesses F_{ij} et $F_{b_{ik}}$ sont calculée aux centres des volumes de contrôle Ω_i . Il existe trois schémas dans le *Code-Saturne* pour le calculer F_{ij} :

- Le schéma décentré amont d'ordre 1 (UPWIND) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_{ij}((u), u) = F_{ij}^{\text{amont}}((u), u) \\ u_{f,ij} = u_I & \text{si } (u)_{ij} S_{ij} \geq 0 \\ u_{f,ij} = u_J & \text{si } (u)_{ij} S_{ij} < 0, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

- Le schéma centré d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{ij}((\rho u), u) = F_{ij}^{\text{centré}}((\rho u), u) \\ u_{f,ij} = \alpha_{ij} u_I + (1 - \alpha_{ij}) u_J + \frac{1}{2} [\text{grad}(u)_I + \text{grad}(u)_J] \cdot \overline{OF}, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

où $\alpha_{ij} = \frac{\overline{FJ}}{\overline{IJ}}$

- Le schéma décentré amont d'ordre 2 (Second Order Linear Upwind, S.O.L.U)

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_{ij}((u), u) = F_{ij}^{\text{S.O.L.U}}((u), u) \\ u_{f,ij} = u_I + \overline{IF} \cdot (\text{grad}(u))_I & \text{si } (u)_{ij} S_{ij} \geq 0 \\ u_{f,ij} = u_J + \overline{JF} \cdot (\text{grad}(u))_J & \text{si } (u)_{ij} S_{ij} < 0. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

la valeur de $F_{b_{ik}}$ est calculée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{f,b_{ik}} = u_I & \text{si } (u)_{ij} S_{ij} \geq 0 \\ u_{f,b_{ik}} = u_{b_{ik}} & \text{si } (u)_{ij} S_{ij} < 0, \end{array} \right. \quad (5.9)$$

où $u_{b_{ik}}$ valeur au bord donnée par les conditions aux limites.

5.1.3 Terme de diffusion

Le terme de diffusion est la somme de deux quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(2\nu S) \, d\Omega &= \int_{S_i} (2\nu S) \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \int_{S_i} (\nu \operatorname{grad}(u) + \nu^T \operatorname{grad}(u)) \cdot \mathbf{n} \, ds. \end{aligned}$$

Ces deux termes de diffusion sont approximés comme suit dans le *Code-Saturne* :

$$\int_{S_i} (\nu \operatorname{grad}(u)) \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{j \in \text{Vois}(i)} D_{ij}(u) + \sum_{k \in \gamma_b(i)} D_{b_{ik}}(u). \quad (5.10)$$

Avec,

$$D_{ij}(u) = \nu_{ij} \frac{u_{J'} - u_{I'}}{I'J'} S_{ij} \quad (5.11)$$

et

$$D_{b_{ik}}(u) = \nu_{b_{ik}} \frac{u_{b_{ik}} - u_{I'}}{I'F} S_{b_{ik}}. \quad (5.12)$$

La viscosité ν_{ij} à la face est calculée à partir des valeurs de ν_{ij} aux centres des volumes de contrôle Ω_i . Deux méthodes sont proposées pour calculer ν_{ij} , soit par une moyenne arithmétique :

$$\nu_{ij} = \frac{1}{2}(\nu_I + \nu_J), \quad (5.13)$$

soit par une moyenne géométrique :

$$\nu_{ij} = \frac{\nu_I \nu_J}{\alpha_{ij}\nu_I + (1 - \alpha_{ij})\nu_J}, \quad (5.14)$$

et la viscosité $\nu_{b_{ik}} = \nu_I$.

5.1.4 Discrétisation temporelle

Dans cette partie, on présente le principe de la résolution, par *Code-Saturne*, l'équation de quantité de mouvement, l'équation de continuité et

l'équation de transport d'un scalaire a (a est la température dans notre cas). Ce principe est basé sur une discrétisation temporelle de type Euler implicite d'ordre 1 ou Crank-Nicolson d'ordre 2.

La discrétisation temporelle du système (2.43) se fait par une méthode dite "méthode pas fractionnaires" (prediction-correction)[2]. Soit Δt le pas de temps, et on suppose que les variables physiques (u, a, p) sont connues à l'instant t^n aux centres des cellules Ω_i . La résolution temporelle de l'instant t^n à l'instant $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ se fait en trois étapes :

- La première étape (prédiction), consiste à prédire le champ de vitesse, de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, avec une pression et terme source explicite comme suit :

$$\begin{cases} p^* = p^n \\ \left(\frac{u^* - u^n}{\Delta t} \right) + \text{div} [u^* \otimes u^* - 2\nu S^*] = -\frac{1}{\rho} \nabla p^n + S_{\Phi}^n \end{cases} \quad (5.15)$$

Cette étape aboutit à la première valeur du champ de vitesse u^* , appelée vitesse prédite. Ce champ de vitesse ne vérifie pas la condition :

$$\text{div}(u^*) = 0$$

- La seconde étape (correction de la pression), consiste à résoudre une équation de Poisson [57], afin de retrouver un champ de vitesse u^{n+1} à divergence nulle, tout en négligeant les variations du terme source et des termes de convection et de diffusion. Le système (5.15) s'écrit alors, comme suit :

$$\begin{cases} \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \\ \rho(u^{n+1} - u^*) = -\Delta t \nabla(p^{n+1} - p^*) \end{cases} \quad (5.16)$$

Pour résoudre ce système (5.16), on prend la divergence de la deuxième équation du ce système pour obtenir une équation de Poisson sur l'incrément de pression $\delta p^{n+1} = p^{n+1} - p^n$:

$$\operatorname{div}(\Delta t \nabla \delta p^{n+1}) = \operatorname{div}(\rho u^*) \quad (5.17)$$

La résolution de ce système permet d'obtenir d'abord la pression p^{n+1} , puis le champ de la vitesse corrigée $u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t \nabla \delta p^{n+1}}{\rho}$, en résolvant la deuxième équation du système (5.16). Ce champ de vitesse vérifie l'équation de la continuité suivante :

$$\operatorname{div}(u^{n+1}) = 0$$

- La troisième étape consiste à résoudre l'équation du transport pour la température θ comme suit :

$$\left(\frac{\theta^{n+1} - \theta^*}{\Delta t} \right) + \operatorname{div}(u^{n+1} \theta^{n+1} - (\kappa + \kappa_t) \nabla \theta^{n+1}) = 0. \quad (5.18)$$

Notons, qu'on utilise la même méthode pour l'intégration des termes de convection et de diffusion de l'étape de prédiction du champ de vitesse pour résoudre l'équation du transport (5.18). Aussi, pour les modèles LES, la viscosité turbulente de sous-maille ν_t est utilisée explicitement dans la première étape de prédiction du champ de vitesse u^* et la diffusivité turbulente de sous-maille est utilisé à la troisième étape de calcul de la température θ . D'ailleurs, trois conditions aux limites peuvent être choisies : condition de type Dirichlet, de type Neumann ou condition périodique.

5.2 Modèles de turbulence en LES, simulés avec *Code-Saturne*

Les valeurs de références des constantes utilisées dans code-saturne sont :

$$C_s = 0.065 \text{ et } Pr_{sm} = 0.699.$$

Par ailleurs, l'échelle de sous-maille est définie par :

$$\bar{\delta} = 2(\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}}.$$

Modèle invariant linéaire.

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu (C_m \bar{\delta})^2 \left[-\frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \bar{S} + \frac{1}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S} \right], \\ -h = \kappa (C_t \bar{\delta})^2 \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \nabla \bar{\theta}, \end{cases} \quad (5.19)$$

où Adj est l'opérateur adjugué ou matrice des cofacteurs telle que :

$$\text{Adj}^d \bar{S} = \bar{S}^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \bar{S}^2 I_3$$

et $C_m = C_t = C_s$ sont égales à la constante de Smagorinsky.

Modèle invariant dynamique linéaire.

Dans cette partie, on calcule les deux constantes (C_m et C_t) du modèle invariant linéaire par une procédure dynamique, on obtient les deux égalités suivantes :

$$C_m = \frac{L_{ij} P_{ij}}{P_{ij}^2} \quad (5.20)$$

où

$$P_{ij} = \alpha_{ij} - \tilde{\beta}_{ij}$$

$$\alpha_{ij} = -\nu \tilde{\delta}^2 \left[-\frac{\det \tilde{S}}{\|\tilde{S}\|^3} \tilde{S} + \frac{1}{\|\tilde{S}\|} \text{Adj}^d \tilde{S} \right]$$

$$\beta_{ij} = -\nu \bar{\delta}^2 \left[-\frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \bar{S} + \frac{1}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S} \right]$$

$$L_{ij} = \bar{u}_i \widetilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j$$

et

$$C_t = \frac{\mathcal{L}_{ij} Q_{ij}}{Q_{ij}^2} \quad (5.21)$$

où

$$Q_{ij} = \xi_{ij} - \zeta_{ij}$$

$$\xi_{ij} = -\kappa \bar{\delta}^2 \frac{\det \tilde{S}}{\|\tilde{S}\|^3} \nabla \tilde{\theta}$$

$$\zeta_{ij} = -\kappa \bar{\delta}^2 \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \nabla \bar{\theta}$$

$$\mathcal{L}_{ij} = \bar{u}_i \widetilde{\theta} - \tilde{u}_i \bar{\theta}$$

Modèle exponentiel

Supposons que g_m et h_t sont de la forme :

$$g_m = (C_s \bar{\delta})^2 (1 - \exp(-v^3)),$$

$$h_t = (C_s \bar{\delta})^2 (1 - \exp(-v^3)),$$

où $v = \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3}$, alors le modèle invariant exponentiel est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^d = \nu(C_s \bar{\delta})^2 [2(1 - \exp(-v^3)) - 9v^3 \exp(-v^3)] \bar{S} \\ \quad + \frac{\nu \dot{g}_m}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S}, \\ -h = \kappa(C_s \bar{\delta})^2 (1 - \exp(-v^3)) \nabla \bar{\theta}. \end{array} \right. \quad (5.22)$$

avec

$$\dot{g}_m = 3(C_s \bar{\delta})^2 v^2 \exp(-v^3).$$

Modèle couplé

Le modèle invariant couplé est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^d = \nu(C_s \bar{\delta})^2 \left[\left(-\frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} + \frac{3 \|\bar{S}\|^4}{2 \|\nabla \bar{\theta}\|^2} \right) \bar{S} + \frac{1}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S} \right], \\ -h = \kappa(C_s \bar{\delta})^2 \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \nabla \bar{\theta}. \end{array} \right. \quad (5.23)$$

5.3 Convection naturelle en cavité différentiellement chauffée

Considérons un écoulement d'air dans une chambre tridimensionnelle chauffée non ventilée voir FIGURE 5.2. La paroi à gauche est chauffée à une température $T_c = 68$ °C et la paroi à droite à une température $T_f = 22.2$ °C. Les autres parois sont isolés (nous avons utilisé la même configuration que W. Zhang & Q. Chen [81]). Nos résultats sont comparés avec des résultats expérimentaux de Cheesewright et al. [11].

5.3. CONVECTION NATURELLE EN CAVITÉ DIFFÉRENTIELLEMENT CHAUFFÉE

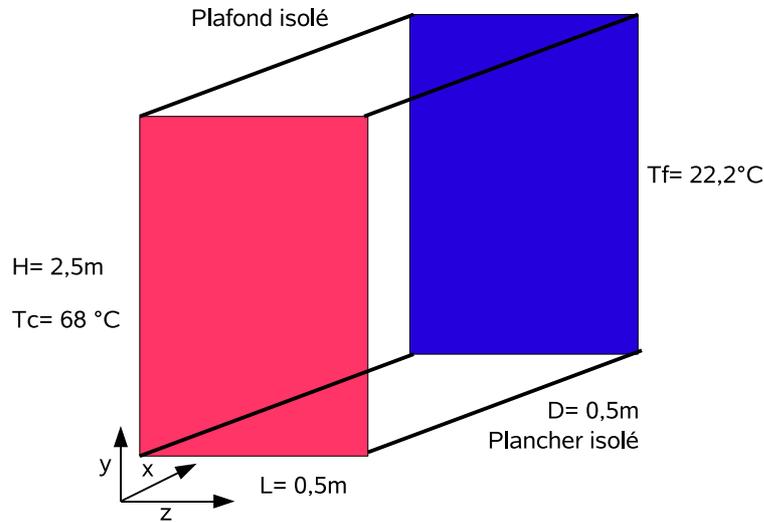


FIGURE 5.2 – Convection naturelle

5.3.1 Configurations et conditions aux limites

Les paramètres de nos calculs sont [81] :

- $T_{ref} = \frac{T_c + T_f}{2} = 318.25 \text{ K}$
- $\beta = \frac{1}{T_{ref}}$, $Pr_{sm} = 0.699$, $\Delta T = 45.8$
- La masse volumique de l'air à température $T_{ref} = 318.25 \text{ K}$ est environ $\rho = 1.109 \text{ kg m}^{-3}$
- L'accélération de la pesanteur est égale $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$
- Le nombre de Rayleigh basé sur la hauteur de la cavité est égal :

$$Ra_H = 5.10^{10}$$

5.3.2 Maillage et schéma de calcul

La simulation numérique a été effectuée avec un maillage de taille $(96 \times 96 \times 12)$ FIGURE 5.3 et 5.4, jusqu'à $t = 120 \text{ s}$. Le schéma de discrétisation temporelle utilisé est le schéma de Cranck-Nicolson avec un pas de temps

5.3. CONVECTION NATURELLE EN CAVITÉ DIFFÉRENTIELLEMENT CHAUFFÉE

constant Δt égal à 2×10^{-3} s. La discrétisation spatiale utilisé est le schéma centré. Le terme source est considéré comme explicite.

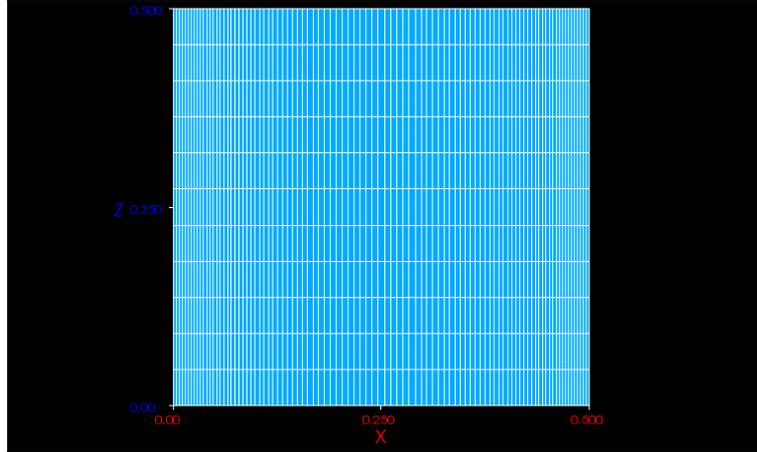


FIGURE 5.3 – Discrétisation de l'axe Ox

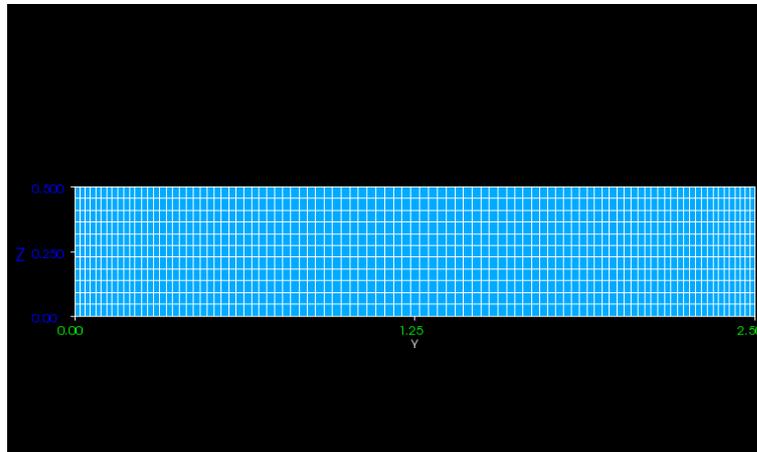


FIGURE 5.4 – Discrétisation de l'axe Oy

Les FIGURES 5.5 et 5.6 montrent les résultats obtenus. On observe que les présents modèles invariants donnent de meilleurs résultats que les modèles de Smagorinsky et Smagorinsky dynamique. On note cependant, un écart entre la température prédite et les valeurs expérimentales. Cet écart, que l'on retrouve souvent lors des simulations numériques de ce type de configurations, s'explique traditionnellement par la non maîtrise des condi-

tions aux limites expérimentales. En effet, il est très difficile d'imposer expérimentalement un flux de chaleur nul sur les parois verticales et horizontales.

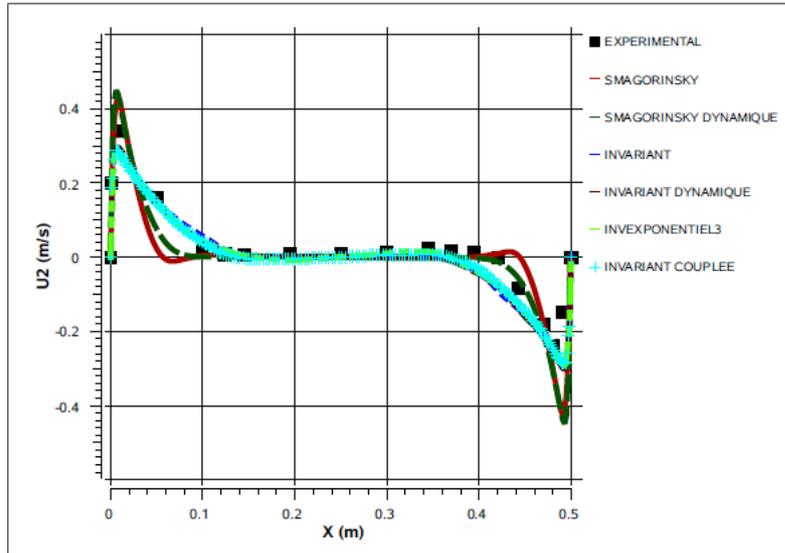


FIGURE 5.5 – Vitesse \bar{u}_2 moyenne dans le plans $y = 1.25 \text{ m}$ et $z = 0.25 \text{ m}$.

5.4 Convection mixte

Nous avons fait une deuxième validation numérique pour nos modèles invariants, il s'agit d'une étude d'écoulement dans une cavité ventilée anisotherme FIGURE 5.7. C'est un phénomène plus compliqué que la convection naturelle, et nous permet d'évaluer par la simulation de grandes échelles la performance des nos différents modèles invariants. Les résultats des calculs seront comparés avec des résultats expérimentaux effectués par Baly et al. [4].

5.4.1 Configurations et conditions aux limites

Considérons un écoulement d'air dans une chambre tridimensionnelle chauffée et ventilée (convection mixte) (voir FIGURE 5.7), dans laquelle la

5.4. CONVECTION MIXTE

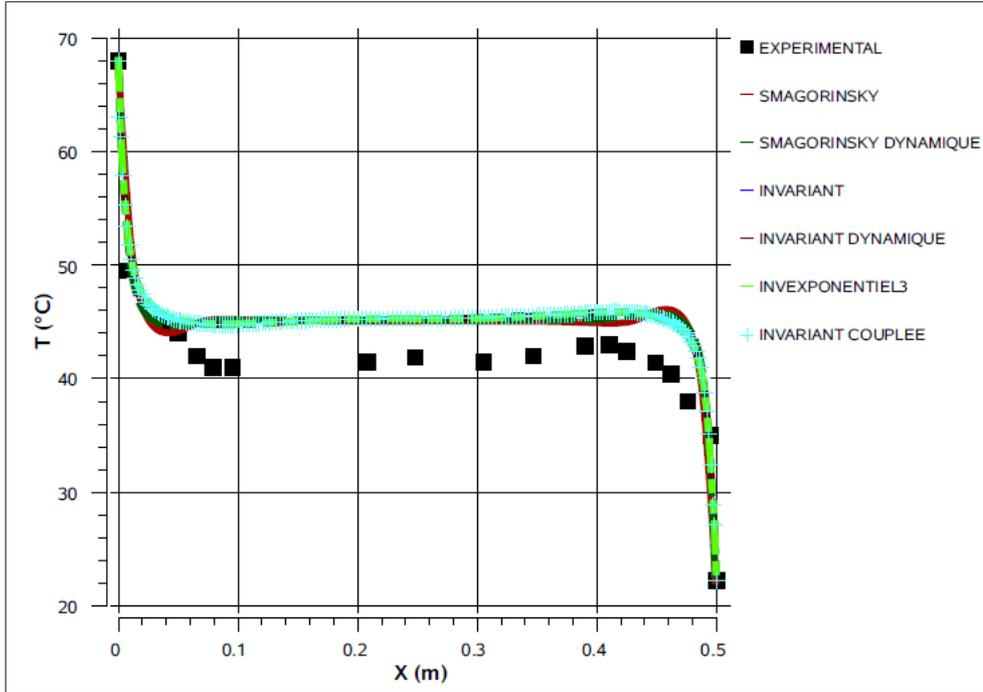


FIGURE 5.6 – Température \bar{T} moyenne dans le plans $y = 1.25 \text{ m}$ et $z = 0.25 \text{ m}$.

vitesse d'entrée est $U_{in} = 0.57 \text{ m s}^{-1}$, la température des toutes les parois est de 15 °C sauf la paroi basse où la température est égale à $T_f = 35 \text{ °C}$.

Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse U_{in} et la hauteur h_{in} d'entrée :

$$Re = \frac{U_{in} h_{in}}{\nu} = 678.$$

La température de référence est égale à

$$T_{ref} = \frac{T_w + T_f}{2} = 298.15 \text{ K}.$$

La masse volumique ρ d'air pour une température moyenne 298 K est :

$$\rho = 1.109 \text{ kg m}^{-3},$$

$$\beta = \frac{1}{T_{ref}}, \quad T_w = 35 \text{ °C}, \quad T_f = 15 \text{ °C} \quad \text{et} \quad Pr_{sm} = 0.699.$$

5.4. CONVECTION MIXTE

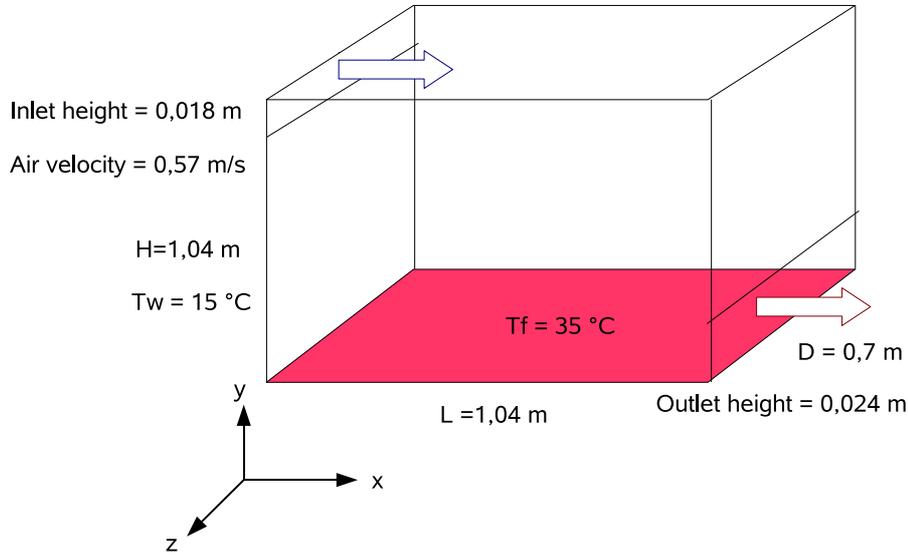


FIGURE 5.7 – Convection mixte.

5.4.2 Maillage et schéma de calcul

Le maillage est de taille $86 \times 86 \times 12$ (voir FIGURE 5.8 et 5.9). Pour l'entrée, nous avons pris 4 nœuds et 5 nœuds pour la sortie et il est équidistant suivant z . Les schémas de discrétisations temporelle et spatiales sont les mêmes que pour la configuration précédente. Le pas de temps est $\Delta t = 7 \times 10^{-3} s$.

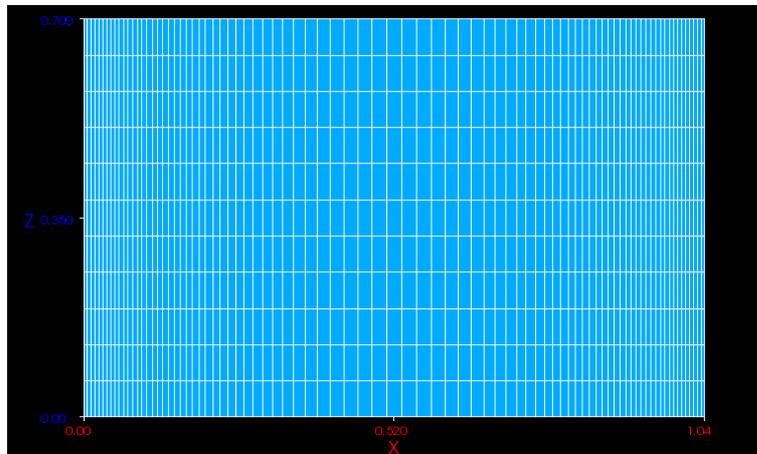
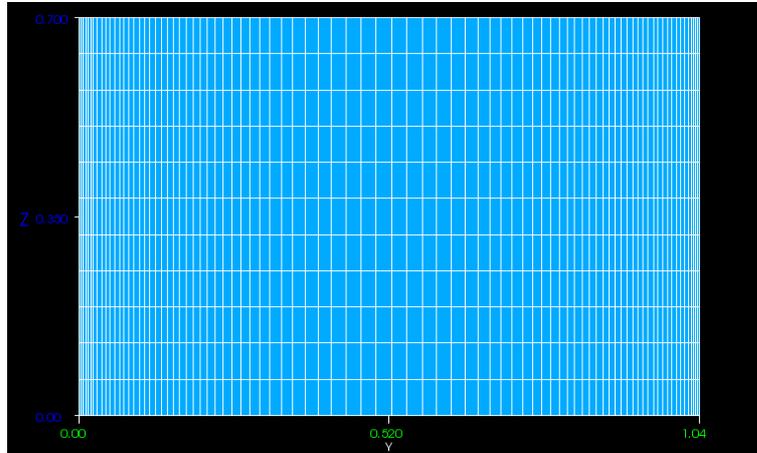


FIGURE 5.8 – Maillage selon x

FIGURE 5.9 – Maillage selon y

Sur les FIGURES 5.10 et 5.11, nous avons reporté les comparaisons entre les profils de la vitesse simulés et expérimentaux. On observe une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir des modèles invariants. En particulier, ces dernières prédisent assez bien le comportement de la vitesse moyenne proche des parois. Ce résultat peut être expliqué par le fait que ces modèles invariants sont compatibles avec les lois d'échelles (comme cela a été montré dans les chapitres 3 et 4).

De plus, le modèle invariant exponentiel, pour lequel la viscosité de sous-maille a un comportement en $O(y^{+3})$ proche de la paroi, donne un meilleur résultat pour la prédiction du profil de vitesse moyenne \bar{u}_1 en fonction de y , FIGURE 5.10. Par contre, les modèles de Smagorinsky et Smagorinsky dynamique ne prédisent pas bien les profils de vitesses moyennes au milieu et à la paroi de la cavité.

Sur les FIGURES 5.12 et 5.13 nous avons reporté les comparaisons entre les profils de la température simulés et expérimentaux. On observe une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir des modèles invariants. En particulier, ces dernières prédisent assez bien le comportement de la température moyenne proche des parois. Ce

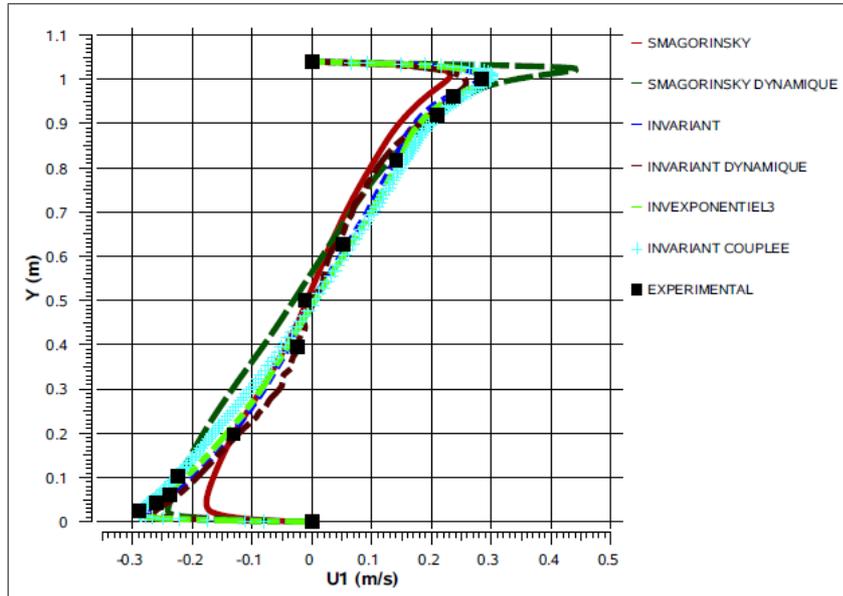


FIGURE 5.10 – Vitesse moyenne \bar{u}_1 , pendant 1750 s pour $x = 0.502$ m.

résultat peut être expliqué par le fait que ces modèles invariants sont compatibles avec les lois d'échelles (comme cela a été montré dans les chapitres 3 et 4).

Les profils des températures moyennes obtenus par nos modèles invariants donnent de meilleures prédictions que ceux de Smagorinsky et Smagorinsky dynamique. En plus, le modèle invariant couplé fournit les meilleures prédictions, en particulier proche de la paroi. Ce résultat confirme l'importance du couplage des tenseurs de sous-maille et du flux de sous-maille dans le cas d'une convection mixte.

Dans ce chapitre, nous avons présenté le *Code-Saturne* dans lequel nous avons implémenté les modèles invariants de sous-maille que nous avons construits. Puis des tests numériques ont été effectués sur deux configurations : cavité chauffée (convection naturelle) et cavité ventilée anisotherme (convection mixte).

5.4. CONVECTION MIXTE

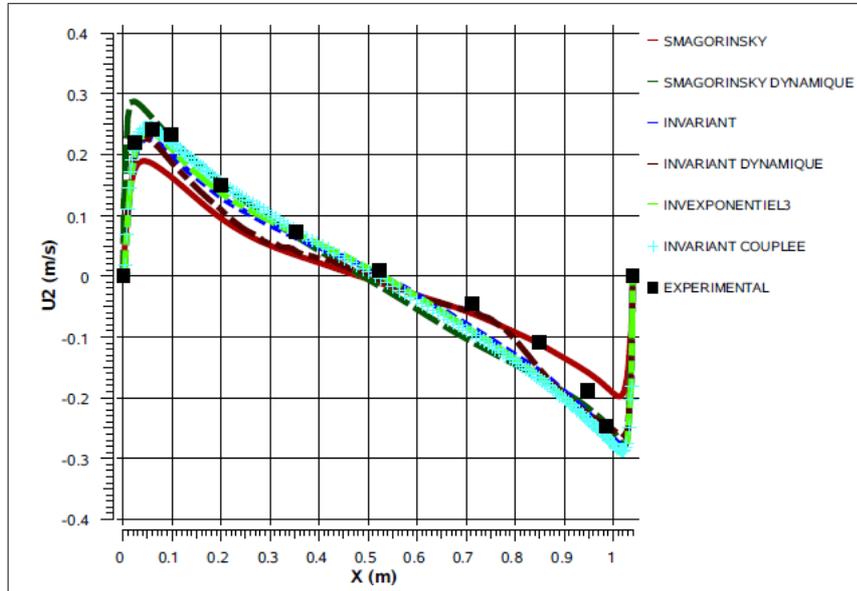


FIGURE 5.11 – Vitesse moyenne \bar{u}_2 , pendant 1750 s pour $y = 0.502$ m.

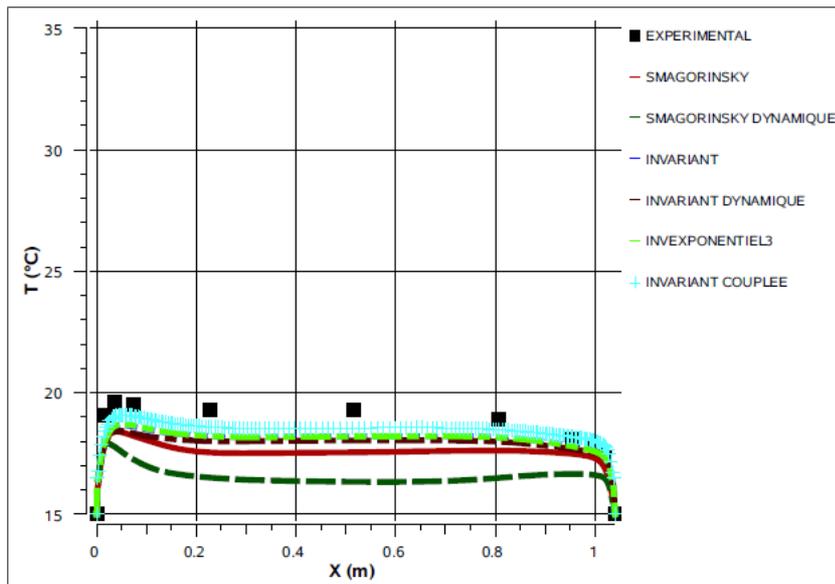


FIGURE 5.12 – Température moyenne pendant 1750 s pour $y = 0.502$ m .

5.4. CONVECTION MIXTE

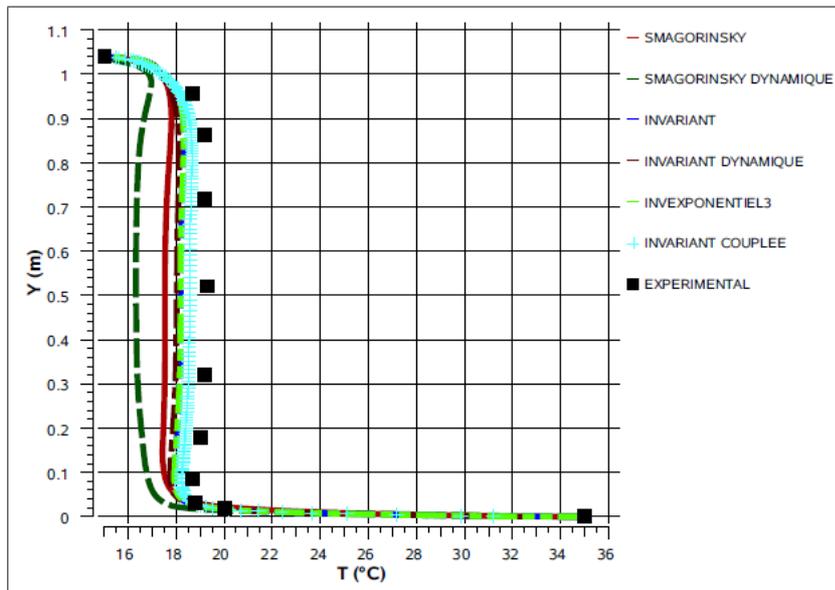


FIGURE 5.13 – Température moyenne pendant 1750 s pour $x = 0.502$ m.

5.4. CONVECTION MIXTE

Conclusion Générale et Perspectives

Dans cette thèse nous avons présenté une modélisation des écoulements anisothermes turbulents consistante avec la physique. Pour donner un sens constructif à ce terme nous avons fait usage systématique du groupe des symétries de Lie des équations de Navier-Stokes en anisotherme.

Ainsi, en se basant sur les propriétés du groupe des symétries de Lie, nous avons pu trouvé, des solutions exactes et des vortex particuliers pour les équations de Navier-Stokes anisothermes. Nous avons aussi pu construire d'une manière unifiée des lois d'échelles pour les écoulements turbulents anisothermes qui permettent d'obtenir des lois connues mais aussi des nouvelles.

Cette approche nous a permis de construire une classe de modèles de sous-maille invariants par le groupe des symétries de Lie des équations de Navier-Stokes en anisotherme. Ces modèles sont physiquement consistants avec la physique des écoulements. En particuliers, ils reproduisent naturellement les lois de paroi sans introduction de fonctions empiriques. Nous avons aussi proposé comme alternative au modèle WALE, un modèle de sous-maille que l'on a dénommé "modèle invariant exponentiel " pour lequel la viscosité de sous-maille a un comportement en y^3 proche de la paroi. Nous avons comparé les performances de ces modèles avec ceux de Smagorinsky et Smagorinsky dynamique. Les configurations choisies, et pour les quelles on possède des valeurs expérimentales, sont une cavité différentia-

lement chauffée (convection naturelle) et une cavité ventilée anisotherme (convection mixte). Nous avons montré que les modèles invariants sont plus performants que ceux de Smagorinsky et Smagorinsky dynamique, en particulier proche des parois.

Ce travail offre de nombreuses perspectives dans le domaine des écoulements turbulents anisothermes. Une première perspective immédiate, consisterait à valider les lois d'échelles construites à partir d'une simulation directe pour une configuration de type canal différentialement chauffé.

D'autre part, les fonctions invariantes de la classe de modèles invariants ne sont pas toutes étudiées. On a choisi trois fonctions d'une manière simple, pour avoir des modèles avec une certaine particularité du point de vue du comportement de la viscosité de sous-maille proche de la paroi. De plus, le choix des constantes des modèles invariants reste à étudier. En effet, dans notre cas, on a calculé les constantes par deux méthodes : dans un premier temps, on a supposé que les constantes sont égales à la constante de Smagorinsky. Dans un second temps, on a calculé ces constantes par la procédure dynamique.

D'autres simulations sont nécessaires pour compléter et poursuivre cette étude. Il s'agit de valider ces modèles invariants pour un écoulement périodique dans un canal dans le cas isotherme et anisotherme pour différents nombres de Reynolds.

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1970.
- [2] F. Archambeau, N. Méchitoua, and M. Sakiz. Code Saturne : A finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows-industrial applications. *Int. J. on Finite Volumes, Electronical edition* : <http://averoes.math.univ-paris13.fr/html>, ISSN 1634(0655), 2004.
- [3] V. A. Baikov and N. H. Ibragimov. Continuation of approximate transformation groups via multiple time scales method. *Nonlinear Dynamics, 2000 Kluwer Academic Publishers*, 22 :3–13, 2000.
- [4] D. Baly, S. Mergui, and C. Niculae. Confined turbulent mixed convection in the presence of a horizontal buoyant wall jet, in : Fundamentals of mixed convection. *ASME, New York*, HTD-Vol. 213 :pp. 65–72, 1992.
- [5] J. Bardina, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. Improved subgrid scale models for large eddy simulation. *AIAA Paper*, pages 80–1357, 1980.
- [6] J. Bardina, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. Improved turbulence models based on for large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows. *Report TF-19, Thermosciences Division, Dept. Mechanical Engineering, Stanford University*, 1983.
- [7] Y. Benarafa, O. Cioni, F. Ducros, and P. Sagaut. Temperature wall modelling for large-eddy simulation in a heated turbulent plane chan-

- nel flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 :4360–4370, 2007.
- [8] L. C. Berselli, T. Iliescu, and W. J. Layton. *Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows*. Scientific Computation Springer, 2006.
- [9] K. Brading and E. Castellani. *Symmetries in Physics. Philosophical Reflections*. Cambridge University Press, 2003.
- [10] B. Cantwell. *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge University Press, 2002.
- [11] R. Cheesewright, K.J. King, and S. Ziai. Experimental data for the validation of computer codes for the prediction of two-dimensional buoyant cavity flows. *ASME Winter Annual Meeting, Anaheim*, HTD-60 :p. 155, 1986.
- [12] A. F. Cheviakov. GeM software package for computation of symmetries and conservation laws of differential equations. *Computer Physics Communications*, 176 :48–61, 2007.
- [13] M. Chhay and A. Hamdouni. Lie symmetry preservation by finite difference schemes for the Burgers equation. *Symmetry*. 2, pages 868–883, 2010.
- [14] M. Chhay and A. Hamdouni. A new construction for invariant numerical schemes using moving frames. *C. R. Acad. Sci. Meca.* 338, pages 97–101, 2010.
- [15] M. Chhay and A. Hamdouni. On accuracy of invariant numerical schemes. *Comm. Pure and Appl. Analysis*, 10(2), 2011.
- [16] D. H. Darryl, T. Schmah, and C. Stoica. *Geometric Mechanics and Symmetry : From Finite to Infinite Dimensions*. Oxford University Press, 2009.

- [17] T. Eidson. Numerical simulation of the turbulent Rayleigh-Bénard problem using subgrid modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 158 :245–268, 1985.
- [18] J. Taine et J.-P. Petit. *Transferts thermiques. Mécanique des fluides anisothermes : Cours et données de base, 2ème édition*. Dunod, 1998.
- [19] C. Fureby and G. Tabor. Mathematical and physical constraints on large-eddy simulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 9(2) :85–102, 1997.
- [20] W.I. Fushchych. The symmetry and exact solutions of some multi-dimensional nonlinear equations of mathematical physics. *Scientific*, Vol. 3 :175–179, 2001.
- [21] W.I. Fushchych, W. M. Shtelen, and S.L. Slavutsky. Reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. *Scientific*, Vol. 4 :306–319, 2002.
- [22] B. Galanti, J.D. Gibbon, and M. Heritage. Vorticity alignment results for the three-dimensional Euler and Navier-Stokes equations. *Nonlinearity* 10, pages 1675–1694, 1997.
- [23] P. Gamnitzer, V. Gravemeier, and W. A. Wall. Time-dependent subgrid scales in residual-based large eddy simulation of turbulent channel flow. *Comput. Methods Appl. Mec. Engrg*, 199 :819–827, 2010.
- [24] W. K George, M. Wosnik, and L. Castillo. Similarity analysis for forced convection thermal boundary layer. *10th International Symposium in Transport Phenomena in Thermal Science and Process Engineering, Kyoto, Japan*, Vol. 1 :239–244, 1997.
- [25] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, A3(7) :1760–1765, 1991.
- [26] V. Grassi, R.A. Lea, G. Soliani, and P. Tempesta. Temperature behavior of vortices of a 3D thermoconducting viscous fluid.

- [27] V. Grassi, R.A Lea, G. Soliani, and P. Tempesta. Vorticies and invariant surfaces generated by symmetries for the 3D Navier-Stokes equations. *Physica A*, Vol. 286 :79–108, 2000.
- [28] V. Grassi, R.A Lea, G. Soliani, and P. Tempesta. A group analysis of the 2D Navier-Stokes-Fourier equations. *Physica A*, Vol. 293 :421–434, 2001.
- [29] N.H. Ibragimov. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*. Volume 1 CRC Press, 1994.
- [30] T. Ishihara, T. Gotoh, and Y. Kaneda. Study of high-Reynolds number isotopic turbulence by direct numerical simulation. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 41 :165–180, 2009.
- [31] V. John and W. J. Layton. Analysis of numerical errors in large eddy simulation. *SIAM J. Numer. Anal. Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 40 :995–1020, 2002.
- [32] B.A. Kader. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 24 :1541–1544, 1981.
- [33] B.A. Kader. Heat and mass transfer in pressure-gradient boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 34 :2837–2857, 1991.
- [34] G. Khujadze and M. Oberlack. DNS and scaling laws from new symmetries of ZPG turbulent boundary layer flow. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. 18 (5) :pp. 391–411, 2004.
- [35] G. Khujadze and M. Oberlack. DNS and Lie group analysis of turbulent boundary layer flow. *Proc. Appl. Math. Mech. (PAMM)*, Vol. 5 :pp. 565–566, 2005.
- [36] M. Kinzel, M. Holzner, B. Lüthi, C. Tropea, W. Kinzelbach, and M. Oberlack. Scaling laws of turbulent diffusion- an experimental va-

- lidation. *14th Int Symp on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics Lisbon, Portugal*, 07-10 July,2008.
- [37] A.N. Kolmogorov. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *C. R. Acad. Sci. URSS*, Vol. 30 :301–305, 1941.
- [38] A.N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *C. R. Acad. Sci. URSS*, Vol. 32 :16–18, 1941.
- [39] A. Leonard. Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. Geophys*, A 18 :237–248, 1974.
- [40] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*. Fluid Mechanics and its Applications. Vol. 40, 1997.
- [41] D. Lilly. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids*, A4(3) :633–365, 1992.
- [42] T.S. Lundgren. Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. *Phys. Fluids*, Vol. 25 :2193, 1982.
- [43] E. Lévêque, F. Toschi, L. Shao, and J.-P Bertoglio. Shear-Improved Smagorinsky model for large-eddy simulation od wall-bounded turbulent flows. *J. Fluid Mech*, 2008.
- [44] A. Majda and A. Bertozzi. Vorticity and Incompressible Flow. *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, 2002.
- [45] J. Meyers, B.J. Geurts, and P. Sagaut. A computational error-assessment of central finite-volume discretizations in large-eddy simulation using a Smagorinsky model. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227 :156–173, 2007.
- [46] J. Meyers and P. Sagaut. Evaluation of Smagorinsky variants in large-eddy simulations of wall-resolved plane channel flows. *Physics of Fluids*, 19, 2007.

- [47] O. Métais and M. Lesieur. Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech*, Vol. 239 :157–194, 1992.
- [48] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modeling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 62 :183–200, 1999.
- [49] M. Oberlack. Invariant modeling in large-eddy simulation of turbulence. *In Annual Research Briefs. Stanford University*, 1997.
- [50] M. Oberlack. Symmetries, invariance and scaling-laws in homogeneous turbulent shear flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 62(2) :111–135, 1999.
- [51] M. Oberlack. Symmetries of the Navier-Stokes equation and their applications for subgrid-models in large eddy simulation of turbulence. *In A. Gyr, W.Kinzelbach, and A. Tsinober, editors, Fundamental Problematic Issues in Turbulence. Birkhäuser Verlag*, 1999.
- [52] M. Oberlack. A unified approach for symmetries in plane parallel turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, Vol. 427 :299–328, 2001.
- [53] M. Oberlack and S. Guenther. Shear-free turbulent diffusion, classical and new scaling laws. *Fluid Dynamics Research*, 33 :453–476, 2003.
- [54] P. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.
- [55] S.-H Pend and L. Davidson. Comparaison of subgrid-scale models in LES for turbulent convection flow with heat transfer. *In 2nd EF Conference in Turbulent Heat Transfer*, Vol. 1 :5.25–5.35, Manchester, United Kingdom, 1998.
- [56] S.-H Pend and L. Davidson. Numerical investigation of turbulent buoyant cavity flow using large eddy simulation. *In 3rd International Symposium on Turbulence, Heat and mass transfer*, Vol. 3 :737–744, Nagoya, Japan, 2000.

- [57] J. H. Ferziger & M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 2002.
- [58] U. Piomelli. High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model. *Phys. Fluids A*, Vol. 5 (6) :1484–1490, june 1993.
- [59] SB. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge, UK : Cambridge Univ. Press, 2000.
- [60] D. Razafindralandy. *Contribution a l'étude mathématique et numérique de la simulation des grandes échelles*. PhD thesis, La Rochelle, 2005.
- [61] D. Razafindralandy and A.Hamdouni. Analysis of subgrid models of heat convection by symmetry group theory. *C.R Mecanique*, Vol. 335(2007) :225–230.
- [62] D. Razafindralandy, A.Hamdouni, and Claudine Béghein. A class of subgrid-scale models preserving the symmetry group of Navier-Stokes equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 12, pages 243–253, 2007.
- [63] D. Razafindralandy, A.Hamdouni, and M. Oberlack. Analysis and development of subgrid turbulence models preserving the symmetry properties of the Navier-Stokes equations. *European Journal of Mechanics/B fluids*, Vol. 26 :531–550, 2007.
- [64] D. Razafindralandy and A. Hamdouni. Consequences of symmetries on the analysis and construction of turbulence models. *Journal of Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications (SIGMA)*, Vol. 2 :Paper 052, 20 pages, 2006.
- [65] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, and M. Chhay. Symmetry in turbulence simulation. *in Numerical Simulation Research Progress*. Nova Publishers. USA, pages 161–207, 2009.

- [66] P. Sagaut. Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible. *Mathématiques et Applications. Springer-Verlag*, Vol. 30, 1998.
- [67] P. Sagaut. Large eddy simulation for incompressible flows. *An introduction. Scientific Computation. Springer*, 2006.
- [68] V. Saveliev and M. Gorokhovski. Modèle de turbulence développée basé sur la théorie du groupe; renormalisation des équations de Navier-Stokes. *18ème Congrès Français de Mécanique*, 2007.
- [69] R. Schiestel. *Les écoulements turbulents : Modélisation et simulation*. Paris, 1998.
- [70] R. Schiestel. *Méthodes de modélisation et de simulation des écoulements turbulents*. Paris, 2006.
- [71] M. Tanaka and S. Kida. Characterization of vortex tubes and sheets. *Phys. Fluids*, Vol. A 5 :2079, 1983.
- [72] L. Temmerman, M. A. Leschziner, C. P. Mellen, and J. Fröhlich. Investigation of wall-function approximations and subgrid-scale models in large eddy simulation of separated flow in a channel with stream-wise periodic constrictions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24 :157–180, 2003.
- [73] E. Noether. Invariant Variationsprobleme. *Kgl. Ges. Wiss., Nachr. Göttingen Math. Phys. K. l.*, pages 235–257, 1918.
- [74] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method*. Longman Scientific & Technical, 1995.
- [75] B.-C. Wang, E. Yee, D.J. Bergstrom, and O. Iida. New dynamic subgrid-scale heat flux models for large-eddy simulation of thermal convection based on the general gradient diffusion hypothesis. *J. Fluid Mech*, Vol. 604 :pp. 125–163, 2008.

- [76] X. Wang and L. Castillo. Asymptotic solutions in forced convection turbulent boundary layers. *J. Turbul.*, Vol. 4 :1–18, 2003.
- [77] X. Wang, L. Castillo, and G. Araya. Temperature scalings and profiles in forced convection turbulent boundary layers. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 130, 2008.
- [78] H. Weyl. Symmetry. *Princeton, NJ : Princeton University Press*, 1952.
- [79] E. Wigner. Symmetries and Reflections. *Bloomington, IN : Indiana University Press*, 1967.
- [80] Y. Zang, R.L. Street, and J.R. Koseff. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Phys. Fluids A*, Vol. 5(12) :3186–3196, 1993.
- [81] W. Zhang and Q. Chen. Large eddy simulation of indoor airflow with a filtered dynamic subgrid scale model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43 :3219–3231, 2000.

Modèles LES Invariants par Groupes de Symétries en Écoulements Turbulents Anisothermes

Résumé :

Comme le groupe de symétries de Lie des équations aux dérivées partielles représentent les propriétés physiques intrinsèques contenues dans les équations, il offre un outil efficace pour étudier et modéliser les phénomènes physiques. Ainsi, dans cette thèse, on se propose d'appliquer la théorie du groupe de symétries de Lie à la modélisation des écoulements anisothermes. On calcule alors des lois de paroi, et, plus généralement des lois d'échelle, pour la vitesse et la température dans le cas d'un écoulement parallèle. En fait, ces lois d'échelle se révèlent être simplement des solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes moyennées par rapport aux symétries des équations.

Ensuite, par l'approche de la théorie des groupes de Lie, on construit une classe de modèles de sous-maille qui sont invariants par les symétries des équations de Navier-Stokes anisothermes. Ces modèles ont l'avantage de respecter les propriétés physiques des équations qui sont contenues dans les symétries. De plus, par cette approche, le modèle de flux de chaleur apparaît naturellement, sans qu'on ait besoin de faire appel à la notion du nombre de Prandtl de sous-maille, ce qui augmente la portée de ces modèles par rapport à la plupart des modèles existants. Par ailleurs, le comportement proche de la paroi de certains des modèles proposés est étudié. Enfin, des tests numériques en convection naturelle et en convection mixtes sont effectués.

Mots clés : Turbulence, Convection thermique, Simulation des Grandes Échelles LES, Groupe de Symétrie de Lie, Modèle Invariant.

Invariant LES Models via symmetry groups for turbulent non-isothermal flows

Abstract :

Since the Lie group of a given partial differential equation represents the intrinsic physical properties of the equation, it gives a powerful tool for modeling its physical phenomena. The main purpose of this thesis is to apply the Lie group theory, in modeling non-isothermal flows. Therefore, we calculate wall laws and more generally scaling laws for the velocity and the temperature of a parallel flow. In fact, these scaling laws are simply self-similar solutions of the averaged Navier-Stokes equations with respect to their symmetry.

The approach of the Lie group theory, leads to a class of sub-grid models which are invariant via the symmetries of the non-isothermal Navier-Stokes equations. These models respect the physical properties contained in these symmetries. Moreover, via this approach the heat flow model appears naturally in this class, without introducing the notion of the Prandtl number, which is not always the case of an other existing model. On the other side, the behavior near the wall of particular models in this class, is studied. Finally, numerical tests are carried out in both cases of natural and mixed convection.

Key words : Turbulence, Heat Convection, Large Eddy Simulation, Symmetry, Lie Group, Invariant Model.