



**HAL**  
open science

# COMPORTEMENT QUANTIQUE DES APPAREILS DE MESURE : ILLUSTRATIONS EN OPTIQUE QUANTIQUE

Taoufik Amri

► **To cite this version:**

Taoufik Amri. COMPORTEMENT QUANTIQUE DES APPAREILS DE MESURE : ILLUSTRATIONS EN OPTIQUE QUANTIQUE. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT : . tel-00596762v1

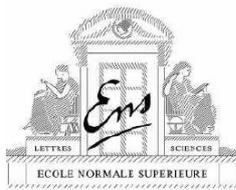
**HAL Id: tel-00596762**

**<https://theses.hal.science/tel-00596762v1>**

Submitted on 30 May 2011 (v1), last revised 5 Nov 2011 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : **Physique Quantique**

ED 107 – École Doctorale de Physique de la Région Parisienne

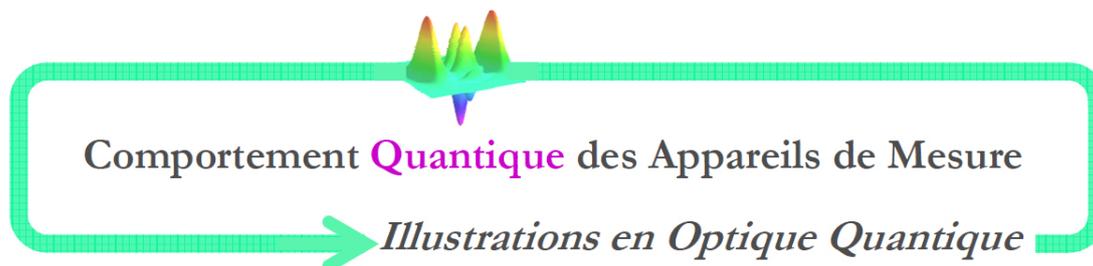
présentée par

**M. Taoufik Amri**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie**

Sujet de la Thèse :



soutenue le 18 Mai 2011 devant le jury composé de :

M. Stephen M. Barnett ..... Examineur  
M. Nicolas J. Cerf ..... Rapporteur  
M. Claude Fabre ..... Directeur  
M. Serge Haroche ..... Président  
M. Franck Laloë ..... Membre Invité  
M. Jean-François Roch ..... Rapporteur



## Résumé

Cette thèse explore le comportement quantique des appareils de mesure avec des illustrations en optique quantique. Il s'agit de la première étude des propriétés quantiques de mesures effectuées par n'importe quel type d'appareil de mesure. Nous montrons que les propriétés quantiques d'une mesure, comme son caractère projectif ou non-classique, ne peuvent être révélées que par les états quantiques d'une approche inhabituelle de la physique quantique : l'approche rétrodictive. Cette approche consiste à faire des rétro-prédictions sur les préparations d'états conduisant à un certain résultat de mesure, contrairement à l'approche prédictive avec laquelle nous faisons habituellement des prédictions sur les résultats d'une expérience.

En précisant les fondations mathématiques de l'approche rétrodictive, nous mettons en évidence une procédure générale de reconstruction des états quantiques de cette approche : les états rétrodictés. Nous avons réalisé ces reconstructions pour des détecteurs de photons uniques, très utilisés dans les protocoles de cryptographie quantique par exemple. Il s'agit de la première tomographie d'états quantiques entièrement fondée sur l'approche rétrodictive et des choix de préparation, contrairement aux reconstructions habituelles basées sur des résultats de mesure. Ces tomographies nous ont permis d'étudier expérimentalement l'influence du bruit sur les propriétés quantiques des mesures effectuées par ces détecteurs, en particulier leur transition d'un comportement fortement quantique vers un comportement plus classique.

Enfin, nous proposons un détecteur d'états « chat de Schrödinger » de la lumière qui sont des superpositions d'états quasi-classiques de la lumière. Dans une version moderne d'une expérience de pensée imaginée par Eugène Wigner en 1961, un tel dispositif permettrait à « l'Ami de Wigner » de détecter un chat de Schrödinger, contrairement à l'œil humain dont nous précisons certaines propriétés quantiques. Nous généralisons l'usage d'un tel détecteur non-classique à un protocole d'estimation de paramètre, entièrement fondé sur l'approche rétrodictive et des choix de préparation. Une telle procédure permettrait de réaliser des estimations optimales, en atteignant la limite de Cramér-Rao quantique, qui est un enjeu très actuel de la métrologie quantique.

**Mots clés :** Mesure quantique, rétrodiction quantique, état rétrodicté, tomographie quantique, projectivité, idéalité, fidélité, détectivité, photon unique, œil humain, chat de Schrödinger, Ami de Wigner, métrologie quantique, limite de Cramér-Rao quantique.

## Abstract

This thesis explores the quantum behavior of measurement apparatus with illustrations in quantum optics. This is the first study of quantum properties of measurements performed by any kind of devices. We show that the quantum properties of a measurement, such as its projective or non-classical character, are revealed only by the quantum states of an unusual approach of quantum physics: the retrodictive approach. This approach involves retro-predictions about state preparations leading to a given measurement result, contrary to the predictive approach with which we usually make predictions about the results of an experiment.

By clarifying the mathematical foundations of the retrodictive approach, we propose a general procedure for reconstructing the quantum states of this approach: the retrodicted states. We have realized these reconstructions for single-photon detectors, widely used in quantum cryptography for instance. This is the first tomography of quantum states totally based on the retrodictive approach and preparation choices, contrary to usual reconstructions based on measurement results. These tomographies enabled us to study experimentally the noise influence on the quantum properties of measurements performed by these detectors, in particular their transition from a strongly quantum behavior into a more classical behavior.

Finally, we propose a detector of “Schrödinger’s Cat” states of light, which are superpositions of incompatible quasi-classical states of light. In a modern version of a thought experiment proposed by Eugene Wigner in 1961, such a device could allow the “Wigner’s Friend” to detect a “Schrödinger’s Cat”, contrary to human eyes for which we precise some quantum properties. We generalize the use of such a non-classical detector to an estimation protocol, totally based on the retrodictive approach and preparation choices. Such a procedure could enable optimal estimations, by reaching the quantum Cramér-Rao bound, which is a very topical issue of quantum metrology.

**Keywords:** quantum measurement, quantum retrodiction, retrodicted state, quantum tomography, projectivity, ideality, fidelity, detectivity, single photon, human eyes, Schrödinger’s cat, Wigner’s Friend, quantum metrology, quantum Cramér-Rao bound.



---

## REMERCIEMENTS

---

Je tiens tout d'abord à remercier Claude Fabre avec qui je travaille depuis de nombreuses années. L'ouverture d'esprit de Claude a été un terreau fertile à mes entreprises scientifiques. Son bureau est à l'image de cet esprit : toujours ouvert ! Je garderai des souvenirs précis de nos nombreuses discussions amicales et scientifiques... Je lui souhaite sincèrement une très belle suite.

Le Laboratoire Kastler Brossel est un grand et beau laboratoire dans le paysage français. Je remercie son directeur, Paul Indélicato, pour m'y avoir accueilli et pour sa disponibilité malgré un emploi du temps très chargé. J'en profite également pour remercier le directeur de l'école doctorale, Roland Combescot, pour sa bienveillance et sa patience.

Ma thèse a eu le droit à un jury exceptionnel. Je pense en particulier aux rapporteurs : Nicolas Cerf et Jean-François Roch, qui m'ont fait l'honneur d'accomplir cette fonction exigeante et d'être présents à ma soutenance, malgré des activités débordantes. Je les remercie pour l'intérêt et l'enthousiasme qu'ils ont manifestés. J'y suis réellement sensible !

J'ai eu le plaisir et l'honneur d'interagir avec Franck Laloë au sujet de ma thèse. Je le remercie pour ses conseils avisés. J'attends avec impatience son livre, après un article<sup>1</sup> au titre éloquent : la forme interrogative d'une de mes prétentions. Je lui souhaite beaucoup de succès pour cet opus !

Je remercie très sincèrement Serge Haroche pour avoir présidé mon jury de thèse. J'ai également eu l'honneur d'interagir avec lui sur mes travaux. Ses cours au Collège de France m'ont toujours impressionné et inspiré. Je lui suis reconnaissant pour ses conseils bienveillants, et pour m'avoir permis de rencontrer Luiz Davidovich avec qui j'ai eu des discussions fructueuses !

*I would like to thank sincerely Stephen Barnett for taking part in my jury. I was really impressed by his intellectual agility and his kindness. I hope that we could work together on our common interests!*

Enfin, je tiens également à remercier Claude Cohen-Tannoudji pour m'avoir fait l'honneur et la surprise d'être venu à ma soutenance. Il est l'éclaireur d'une belle lignée d'explorateurs du monde quantique. J'espère que ma thèse sera digne de cette tradition.

Au cours de ces trois années, j'ai bénéficié de l'assistance et de l'aide précieuse de nombreux services du laboratoire. Je remercie ainsi les services techniques : électronique, informatique et mécanique, et les services administratifs, avec une pensée particulière à Monique Granon. Bien que je sois assez « furtif », j'ai eu le plaisir de partager des moments agréables avec certains doctorants et post-doctorants du laboratoire. Je ne peux évidemment pas être exhaustif, je m'excuse auprès de ceux que j'oublie. Je remercie sans relation d'ordre : Sidney, Claire, Alexandros, Alexandre, Pierre, Vincent, Rym, Oxana, Chiara, Michael, Aurélien, Lambert, Jean-François, Lucille...

Enfin, il y a quand même une vie en dehors de la physique. Je tiens à remercier mes ami(e)s proches pour leur soutien : Joffrey, Hélène (et sa petite Sarah), Christine, Frédérique, Brice, Gaétan, Brigitte (à Ibiza !), Stéphane, Gauthier (et sa petite Oriane), Aurélie (et son petit Ezio)... Mes pensées vont naturellement à ma famille : Mes Parents et mes deux petits frères : Sawab et Imad, je vous dédie cette thèse ! Et puis, je dois te mentionner, Toi aussi, Ma Dulcinée: Nezha. J'espère que tu es fière de ton petit « Sushi » qui joue admirablement bien le « Chat de Schrödinger » !

---

<sup>1</sup> F. Laloë, *Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems.* American Journal of Physics **69**, 655–701 (2001).



---

# Sommaire

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
A A l'aube d'une "seconde révolution" quantique ?	1
B Le postulat de la description quantique	2
C L'étrangeté quantique	4
C.1 Le chat de Schrödinger	4
C.2 Intrication et non-localité	6
D Mesure et décohérence quantique	8
D.1 Postulat de la mesure	8
D.2 Phase et décohérence quantique	9
D.3 Règle de Born	10
E Contexte, objectifs et plan de ce travail doctoral	11
<b>I Décrire et Manipuler la Lumière</b>	<b>13</b>
<b>1 Description Quantique de la Lumière</b>	<b>15</b>
A Autour de la quantification	15
A.1 Traitement classique	15
A.2 Traitement quantique	17
B Description discrète et continue de la lumière	19
B.1 Matrice densité	19
B.2 Fonction de Wigner	21
C Etats Gaussiens	23
C.1 Généralités	23
C.2 Etats cohérents ou quasi-classiques	23
C.3 Etats comprimés	25
C.4 Etats intriqués ou EPR	26
D Etats Non-Gaussiens	27
D.1 Négativité et non-classicalité	27
D.2 Exemples	29
D.2.1 Etats de Fock	29
D.2.2 Etats "Chats de Schrödinger"	29
D.3 Intérêts et applications	30

<b>2</b>	<b>Protocoles Quantiques</b>	<b>33</b>
A	Évolutions quantiques . . . . .	33
A.1	Evolution unitaire . . . . .	33
A.2	Processus quantique . . . . .	35
A.2.1	Évolution assistée par un environnement . . . . .	35
A.2.2	Représentations de Kraus . . . . .	37
A.3	Illustrations en optique quantique . . . . .	38
B	Préparation conditionnelle . . . . .	43
B.1	Règle de projection . . . . .	43
B.1.1	Cas idéal . . . . .	43
B.1.2	Cas général . . . . .	44
B.2	Principe général . . . . .	45
B.3	Illustration en optique quantique . . . . .	48
C	Conclusions . . . . .	51
<b>Interlude I : Rétrospective d'une Approche de la Physique Quantique</b>		<b>53</b>
<b>II Comportement Quantique des Appareils de Mesure</b>		<b>57</b>
<b>3</b>	<b>États Quantiques et Propositions</b>	<b>59</b>
A	États et propositions . . . . .	59
A.1	Propriétés et propositions . . . . .	59
A.2	Théorème de Gleason-Busch . . . . .	60
A.3	Reconstruction d'un état quantique . . . . .	61
B	Préparations et Mesures . . . . .	63
B.1	Un jeu quantique . . . . .	63
B.2	Approche Prédictive . . . . .	63
B.3	Approche Rétrodictive . . . . .	65
B.3.1	Fondations mathématiques . . . . .	65
B.3.2	Lien avec l'approche prédictive . . . . .	66
B.3.3	Discussions . . . . .	67
B.3.4	Rétro-propagation des états rétrodictés . . . . .	69
B.4	Complémentarité, Indéterminisme et Causalité . . . . .	70
C	Illustration en optique quantique . . . . .	72
C.1	Principe d'une détection homodyne . . . . .	72
C.2	États rétrodictés . . . . .	74
C.3	Influence du bruit . . . . .	77
D	Conclusions . . . . .	78
<b>Interlude II : Intrication des Etats Rétrodictés</b>		<b>79</b>
<b>4</b>	<b>Propriétés Quantiques de la Mesure</b>	<b>83</b>
A	Comment caractériser un appareil de mesure? . . . . .	83
B	Tomographie des états rétrodictés . . . . .	85
B.1	Principe de la reconstruction . . . . .	85
B.2	Estimation par maximum de vraisemblance (MaxLike) . . . . .	86

C	Propriétés quantiques de la mesure . . . . .	88
C.1	Projectivité et idéalité . . . . .	88
C.2	Fidélité avec une mesure projective et détectivité . . . . .	89
C.3	Non-classicalité d'une mesure . . . . .	90
C.4	Caractère non-gaussien d'une mesure . . . . .	92
D	Illustrations en optique quantique . . . . .	93
D.1	Photodiode à Avalanche . . . . .	93
D.1.1	Éléments POVM . . . . .	93
D.1.2	Non-classicalité . . . . .	95
D.1.3	Projectivité et idéalité . . . . .	95
D.1.4	Fidélité . . . . .	96
D.2	Détection homodyne . . . . .	99
D.2.1	États rétrodictés . . . . .	99
D.2.2	Propriétés quantiques . . . . .	100
E	Conclusions . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Illustration Expérimentale</b> . . . . .	<b>103</b>
A	Protocole expérimental . . . . .	103
A.1	Dispositif expérimental . . . . .	103
A.2	Données expérimentales . . . . .	105
A.3	Reconstructions numériques . . . . .	105
A.3.1	Espace de Hilbert et opérateurs de propositions . . . . .	105
A.3.2	Algorithme de reconstruction . . . . .	107
B	Résultats . . . . .	108
B.1	Réponse "off" . . . . .	108
B.2	Réponse "on" . . . . .	110
B.3	Réponse "1" . . . . .	111
C	Conclusions . . . . .	115
	<b>Interlude III : L'Ami de Wigner et le Chat de Schrödinger</b> . . . . .	<b>117</b>
<b>III</b>	<b>Application à la Métrologie Quantique</b> . . . . .	<b>121</b>
<b>6</b>	<b>Détecteur de "Chats de Schrödinger" de la Lumière</b> . . . . .	<b>123</b>
A	Versions prédictive et rétrodictive . . . . .	123
B	Conception du détecteur . . . . .	124
B.1	Principe . . . . .	125
B.2	Discussion . . . . .	126
C	Propriétés quantiques . . . . .	128
C.1	Éléments POVM et états rétrodictés . . . . .	128
C.2	Fidélité . . . . .	129
C.3	Projectivité et idéalité . . . . .	132
C.4	Non-classicalité . . . . .	132
D	Conclusions . . . . .	134
	<b>Interlude IV : Mesures Conditionnelles</b> . . . . .	<b>135</b>

<b>7</b>	<b>Application à la Métrologie Quantique</b>	<b>139</b>
A	Introduction . . . . .	139
B	Limites Quantiques . . . . .	141
B.1	Limite Quantique Standard (LQS) . . . . .	141
B.2	Limite de Heisenberg (LH) . . . . .	142
C	Un protocole de métrologie . . . . .	142
C.1	Description du protocole . . . . .	143
C.2	Principe de l'estimation . . . . .	144
C.3	Estimateur du déplacement . . . . .	147
C.4	Performances . . . . .	148
C.5	Discussion . . . . .	150
D	Généralisation . . . . .	153
D.1	Principe d'une estimation rétrodictive . . . . .	153
D.2	Information de Fisher . . . . .	154
D.3	Limite de Cramér-Rao Quantique . . . . .	156
D.3.1	État de l'art dans l'approche prédictive . . . . .	156
D.3.2	Optimisation dans l'approche rétrodictive . . . . .	157
D.4	Protocole d'estimation rétrodictive . . . . .	158
D.4.1	Description de la procédure . . . . .	158
D.4.2	Caractère optimal . . . . .	159
D.4.3	Discussion . . . . .	161
E	Conclusions . . . . .	163
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>165</b>
	<b>Communications écrites et orales</b>	<b>167</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>

---

# Introduction

---

## A A l'aube d'une "seconde révolution" quantique ?

Notre monde est en partie fondé sur une économie dite numérique. Il s'agit de la révolution d'Internet et des réseaux de communications puissants tissés par des terminaux (ordinateurs, téléphones, ...) de plus en plus innovants et accessibles. Ainsi, pratiquement tous les services qui faisaient l'économie classique se retrouvent dotés du préfixe "e-" (e-mail, e-commerce, e-learning ...). Le grand public ignore parfois que cette *première révolution* résulte d'une description très particulière des lois de la nature, celle de *la Physique Quantique*. Cette physique a la réputation d'être incompréhensible car elle défierait nos intuitions forgées par l'expérience quotidienne. Elle constitue même l'archétype du dialogue entre science fondamentale et philosophie, et cela dès ses fondations avec des débats passionnés entre ses pères fondateurs.

Cependant, cette science fondamentale est également à l'origine de grands progrès technologiques. En expliquant la conduction électrique dans les matériaux, elle a donné naissance à la physique du solide et à l'industrie des semi-conducteurs dont l'un des meilleurs - et des plus vieux - ambassadeurs reste le transistor, inventé en 1947 dans les laboratoires Bell. Ce dernier peuple aujourd'hui par millions les puces électroniques de nos ordinateurs et de nos téléphones portables. Un autre ambassadeur est le laser qui résulte de la description quantique de la matière et de la lumière. Cette source lumineuse nous permet, entre autres, de stocker et de lire de l'information sur divers supports (DVD, Blu-ray disc ...) mais aussi de véhiculer de l'information d'un continent à un autre par le biais de fibres optiques. Nul ne peut nier l'importance des télécommunications dans un monde de plus en plus globalisé, et il est aujourd'hui facile de se convaincre qu'une grande partie des richesses produites dans ce monde découle de cette connaissance quantique de la nature. La figure 1 regroupe quelques illustrations des applications de la physique quantique.

Mais depuis les années 1970, dans les coulisses que constituent les laboratoires de recherche, une autre révolution se prépare. Il s'agit de *l'Information Quantique* qui tente d'exploiter *l'étrangeté quantique* pour traiter de l'information avec des performances inégalables par tout autre moyen classique. On parle même de *"seconde révolution" quantique* et la terminologie parle d'elle même. On parle en effet de communications quantiques, d'oracle, d'intrication et même de téléportation [1]. Dans l'imaginaire collectif, tout cela s'apparente à de la science fiction mais dans de nombreux laboratoires à travers le monde, cette révolution est bien en marche avec les premiers embryons de réseaux de communications quantiques ou d'ordinateurs quantiques. Nous sommes encore loin de solutions



**Figure 1:** Quelques illustrations de la première révolution quantique. –Depuis l’invention du transistor en 1947 dans les laboratoires Bell, ces commutateurs électroniques peuplent par millions les microprocesseurs des ordinateurs. La description quantique de l’interaction entre la matière et la lumière a permis l’invention du laser et toutes les applications multimédias qui en découlent. L’imagerie par résonance magnétique (IRM) repose sur une propriété spécifiquement quantique de la matière : le spin. L’interaction de ce dernier avec un champ magnétique permet de réaliser la tomographie des organes sans intervention invasive.

réellement commercialisables, même si une société Suisse<sup>1</sup> vend déjà du *hasard quantique* avec des générateurs de nombres aléatoires basés sur le comportement quantique des photons, ou encore assure la sécurité des votes du canton de Genève avec des dispositifs de *cryptographie quantique*.

Dans cette introduction, nous survolerons un certain nombre de notions élémentaires mais importantes de la physique quantique sur lesquelles nous reviendrons tout au long de ce mémoire de thèse, dans des formes plus avancées et illustrées dans un domaine particulièrement fertiles à l’heure actuelle : *l’optique quantique*.

## B Le postulat de la description quantique

Avant d’aborder l’étrangeté du monde quantique, il est nécessaire de s’attarder sur l’essence de cette dernière qui résulte en fait de ce que l’on peut appeler *un choix de description*. L’idée fondamentale est de décrire un système par un *vecteur d’état*, habituellement noté  $|\psi\rangle$  et de norme unité. Ce choix de description est immédiatement riche en conséquences, dont notamment certains aspects des plus étranges de la physique quantique. En effet, la notion mathématique de vecteur est introduite très tôt, dès le collège, et elle est ensuite formalisée au lycée dans l’espace à trois dimensions. N’importe quel bon collégien est en mesure de comprendre que d’aller d’un point A à un point B, puis de ce point B à un autre point C, revient tout simplement d’aller du point A au point C ! C’est

1. Société IdQuantique : <http://www.idquantique.com/>

ainsi que la structure d'espace vectoriel est souvent introduite.

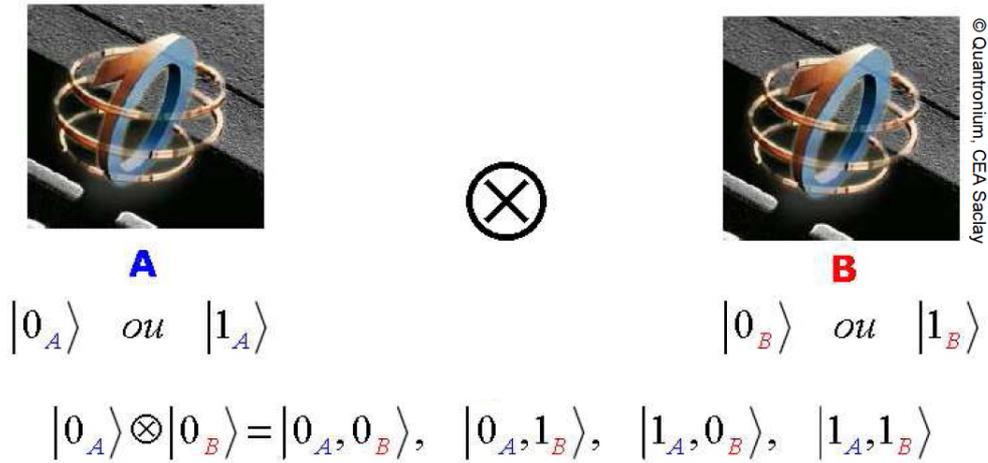
Le choix de décrire l'état d'un système par un vecteur implique directement, de part la structure d'espace vectoriel, que la combinaison de deux états est également un état possible du système. C'est ce que l'on appelle *le principe de superposition quantique* dont la meilleure illustration est fournie par *l'expérience du chat de Schrödinger* que l'on étayera dans la section suivante. On retrouve ce principe de superposition dans d'autres domaines de la physique, où l'on a affaire à des grandeurs vectorielles et à des équations de dynamique linéaires (Équations de Maxwell, ...). Néanmoins, on peut déjà noter qu'un *espace des états* doit contenir au moins deux états de bases pour pouvoir engendrer ces superpositions. Pour revenir aux technologies numériques, il s'agit par exemple de l'espace des états d'un bit classique qui est l'entité élémentaire de l'information numérique. Les deux états classiques d'un bit sont les chiffres binaires "0" et "1". On notera ces états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , correspondant par exemple à une tension électrique valant respectivement 0V ou 5V, ou encore à la présence ou non de lumière.

Revenons à l'espace mathématique dans lequel évolue ces vecteurs d'états. Il s'agit d'un *espace de Hilbert* dont les propriétés mathématiques garantissent un certain nombre d'exigences "naturelles", du moins justifiables. Afin de pouvoir décrire des systèmes jouissant d'un très grand nombre - même infini - de degrés de liberté, ce qui est le cas de la lumière par exemple, on doit pouvoir approcher l'état du système par une suite de vecteurs aux composantes finies mais en nombre croissant. C'est le caractère *complet* de l'espace des états qui assure l'existence de telles *bases de Hilbert*. Cette approximation se fait à une exigence donnée et elle est similaire à celle que l'on rencontre dans la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique, où un certain nombre d'harmoniques suffit généralement pour reconstituer un signal donné. Cette analogie avec l'analyse de Fourier réapparaîtra dans la suite de ce mémoire dans des situations parfois cruciales, puisqu'il s'agira de signatures du caractère non-classique d'un état.

Ensuite, les coordonnées des vecteurs de cet espace des états doivent être des *nombre complexes* assurant la normalisation des vecteurs. Une justification du caractère complexe de ces amplitudes pourrait être la nécessité d'une transition quantique/classique. En effet, nous verrons que la phase relative entre les deux états d'une superposition joue un rôle important dans son comportement quantique. Une dissipation de cette phase induit la transition vers un comportement plus classique, c'est une forme du phénomène de *décohérence* que l'on esquissera également dans la suite de cette introduction.

Enfin, il faut préciser la règle de description pour un système se composant de plusieurs parties ou sous-systèmes. Par exemple, un système composé de deux bits quantiques - ou *qu-bits* - A et B comme illustré sur la figure 2.

Chacun de ces bits A ou B a deux états possibles, notés respectivement  $|0_{A,B}\rangle$  et  $|1_{A,B}\rangle$ . L'espace des états du système composé de ces deux bits peut être engendré par une base qui est simplement la liste des différentes combinaisons d'états classiquement possibles. On parle alors de *produit tensoriel* d'états et des superpositions dans de tels espaces composites peuvent avoir des manifestations non-locales pour le moins déroutantes.



**Figure 2:** Description quantique d'un système de deux bits quantiques. –La base de l'espace des états de ce système à deux bits est obtenue en considérant les différentes combinaisons possibles. On parle alors de produit tensoriel noté  $\otimes$ .

## C L'étrangeté quantique

Nous allons maintenant présenter deux aspects des plus étranges de la physique quantique. Le principe de superposition avec l'expérience de pensée du "Chat de Schrödinger" et la non-localité se manifestant lorsqu'un système composé de plusieurs parties se retrouvent dans des états dits *intriqués*.

### C.1 Le chat de Schrödinger

Cette expérience de pensée a été imaginée en 1935 par Erwin Schrödinger [2] pour illustrer l'étrangeté du monde quantique et les manifestations "absurdes" que pourrait avoir une superposition d'états macroscopiques. Nous allons l'aborder dans une forme légèrement différente. On imagine un chat et un noyau atomique radioactif enfermés dans une même boîte parfaitement *isolée*. La désintégration du noyau est amplifiée afin d'entraîner l'explosion d'une fiole de cyanure. Cette dernière libère ainsi un gaz mortel pour le chat, comme illustré sur la figure 3.

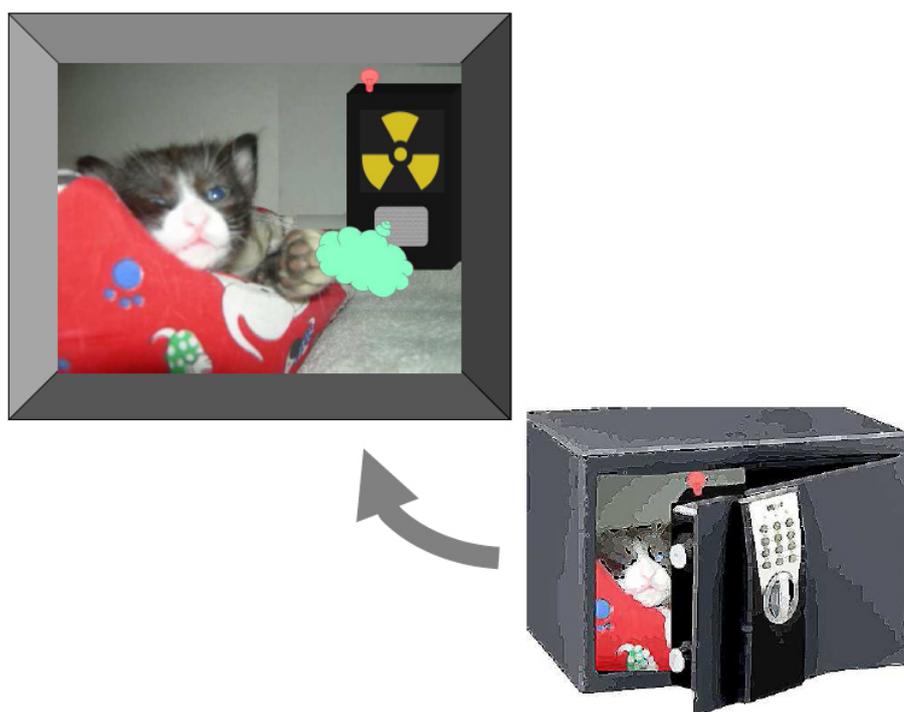
Le processus de mesure se résume ici à l'ouverture du coffre pour constater l'état du chat. L'état initial du chat est évidemment l'état  $|\text{vivant}\rangle$ , alors que l'état du noyau - système quantique par excellence - sera préparé dans une superposition des états fondamentaux  $|f\rangle$  et excité  $|e\rangle$ . Si l'atome était isolé, cette superposition s'écrirait comme

$$|\phi_{\text{noyau}}\rangle = \alpha|f\rangle + \beta|e\rangle, \quad (1)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres complexes assurant la normalisation de ce vecteur d'état

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2)$$

Nous les précisons dans la section suivante lorsque l'on abordera les processus de mesure et de décohérence.



**Figure 3:** Expérience du Chat de Schrödinger. –Un chat est enfermé dans un coffre avec un système de mise à mort quantique. Ce dernier est composé d'un noyau atomique qui sera préparé dans une superposition quantique telle qu'il a à chaque instant 50% de se désintégrer. Cette désintégration entraîne l'explosion d'une fiole de cyanure qui induit irrémédiablement la mort du chat. Cette "mise en boîte quantique" enchevêtre les états du chat à ceux du noyau atomique.

Lorsque l'on isole le chat et le système de mise à mort "quantique" du reste de l'univers, la préparation du noyau atomique dans la superposition (1) conduit à l'évolution globale :

$$|\text{vivant}\rangle \otimes |\phi_{\text{noyau}}\rangle \longrightarrow |\Psi\rangle = \alpha|\text{mort}\rangle \otimes |f\rangle + \beta|\text{vivant}\rangle \otimes |e\rangle, \quad (3)$$

La nature paradoxale de cette expérience de pensée réside en fait dans l'impossibilité d'utiliser notre langage habituel pour qualifier un tel état (3). Pourtant l'origine de cette étrangeté est liée à une notion mathématique a priori simple, celle de structure vectorielle comme nous l'avons évoqué. La difficulté vient en fait de notre langage courant qui n'est pas celui de l'algèbre linéaire, même si ce dernier est puissant et couvre un large éventail d'applications. On doit donc s'y résigner : le seul langage de la physique quantique est celui de son formalisme, initié par E. Schrödinger et W. Heisenberg, puis développé par John Von Neumann [4] et Paul Dirac [3].

De plus, les états du chat et du noyau atomique se retrouvent fortement "enchevêtrés", puisqu'il est impossible de préciser l'état du chat ou du noyau atomique seul. Cela se traduit mathématiquement par l'impossibilité de séparer les états de chacune des parties, en écrivant l'état global (3) sous la forme d'un produit d'états  $|\psi_{\text{chat}}\rangle \otimes |\phi_{\text{noyau}}\rangle$ . On parle alors d'états *intriqués*, une autre étrangeté du monde quantique que nous allons maintenant aborder.

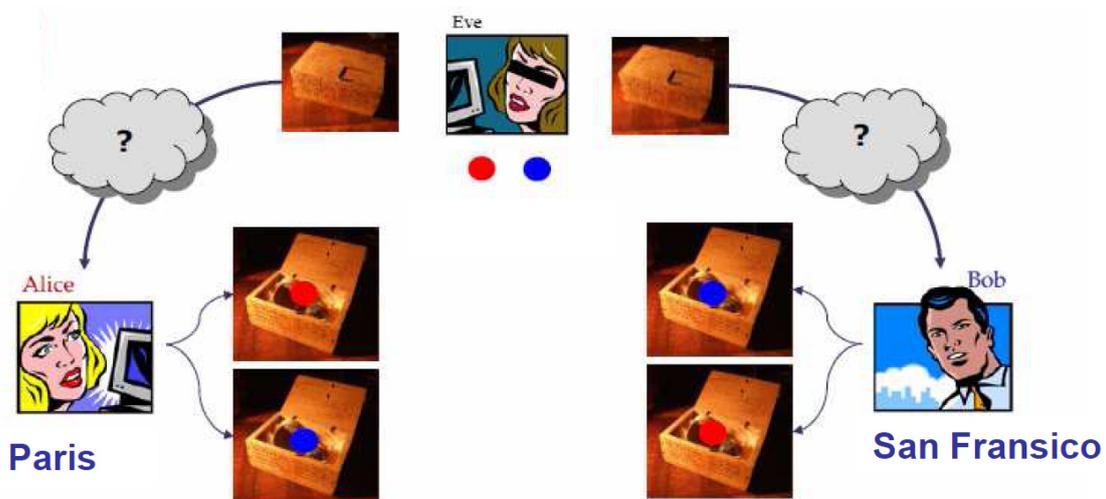
## C.2 Intrication et non-localité

Nous avons vu que le choix de description quantique impliquait directement l'existence de superposition d'états classiquement incompatibles. Or, ce même choix de description pour des systèmes à plusieurs parties conduit à l'existence d'états intriqués comme pour le chat de Schrödinger. Ces états peuvent même avoir des manifestations non-locales déroutantes. En effet, la position spatiale de chacune des parties n'a aucune incidence sur le choix de description quantique. Ainsi, si l'on arrivait à séparer spatialement le chat et le noyau - d'une distance arbitrairement grande - tout en veillant à ce qu'ils restent isolés du reste de l'univers, l'état du système global serait toujours l'état intriqué (3) puisqu'il n'y a pas eu d'autre interaction que celle intervenue dans la boîte.

Pour illustrer les manifestations non-locales d'une telle intrication, imaginons que le coffre soit composée de deux compartiments *isolables* et *séparables*. Le compartiment contenant le chat est remis à Alice vivant à Paris. L'autre compartiment, contenant le noyau et le système de mise à mort quantique, est remis à Bob vivant à San Fransisco. Lorsque chacun des deux protagonistes a devant lui une boîte fermée, il est incapable de dire dans quel état est le chat ou le noyau. La seule chose qui est définie, c'est l'état du système global (3). Par contre, si l'expérience est renouvelée un grand nombre de fois, les constats d'Alice et de Bob à l'ouverture de la boîte présenteront de très fortes corrélations à la confrontation de leurs relevés respectifs. Or, l'état de chacune des deux parties n'est pas défini avant la mesure, et on pourrait croire à une "action à distance" modifiant l'état de l'une en fonction de l'état constaté de l'autre. On est alors en droit de se demander si de telles corrélations ne pourraient pas simplement avoir une origine plus classique, puisque ces corrélations ne sont révélées que par la confrontation des relevés d'Alice et de Bob. En effet, si Alice découvre que le chat est mort, elle peut facilement en déduire que le noyau s'est désintégré. Le pré-requis à une telle déduction est la connaissance du système de mise à mort et le fait que le noyau a une certaine chance de se désintégrer à chaque instant.

Ainsi, le chat ou le noyau pourrait être dans un état bien déterminé avant l'ouverture de la boîte, tout en donnant les mêmes corrélations que celles observées avec l'état intriqué (3).

Les premières tentatives pour rendre compte de telles corrélations par des modèles classiques ont été initiées par Albert Einstein lui-même en 1935, avec le célèbre argument EPR du nom de ses trois auteurs [5]. Ce dernier soutenait le caractère incomplet de la mécanique quantique en s'appuyant sur une conception très particulière de "réalité physique" qu'il est inutile de reproduire ici. Albert Einstein allait même jusqu'à supposer l'existence de *paramètres cachés* dont la connaissance permettrait de rendre compte des corrélations observées. Pour illustrer cette notion de variable cachée, nous considérons la situation illustrée sur la figure 4.



**Figure 4 :** Modèle à variable cachée dans un "jeu à deux balles". – Les corrélations entre les couleurs des balles d'Alice et Bob s'expliquent par l'intervention d'Ève. Cette dernière avait deux balles de couleurs différentes et les a distribué (au hasard) dans les deux boîtes à destination d'Alice et Bob. L'intervention d'Ève est la variable cachée du problème.

Alice et Bob reçoivent chacun une série de boîtes contenant chacune une balle dont la couleur est inconnue. En ouvrant la boîte, chacun de leur côté, il note la couleur de la balle qui s'y trouve - rouge ou bleue - tout en ignorant l'origine de ces boîtes. Ensuite, la confrontation de leurs relevés révèle des corrélations du même type que celles observées avec le chat de Schrödinger. Est ce que l'on doit en déduire pour autant que les balles étaient dans un état intriqué de la forme (3)? Dans ce "jeu à deux balles", l'origine des corrélations est liée à l'intervention d'une tierce personne : Ève. Elle a décidé consciemment de mettre une balle dans chacune des boîtes, prise au hasard dans une paire de balles rouge et bleue. Ce choix délibéré d'Ève est la variable cachée du problème. Elle permet de rendre compte des fortes corrélations observées, sans pour autant prédire avec certitude la couleur de la balle contenu dans chacune des boîtes. Ève peut en effet faire ces choix au hasard, en se bandant les yeux par exemple.

Afin de trancher ces débats de principe, John S. Bell proposa en 1964 un test accessible à l'expérience [6] : une inégalité d'une quantité dépendant des corrélations mesurées et dont la violation écarterait définitivement toute une classe de modèles à variables cachées.

Les premières véritables violations de cette inégalité de Bell ont été réalisées par John F. Clauser en 1974 [7], Edward S. Fry en 1976 [8] et Alain Aspect en 1982 [9], avec des photons intriqués en polarisation. Le chat de Schrödinger et le noyau atomique sont donc bien dans un état intriqué de la forme (3). Mais une question reste ouverte : comment réconcilier un tel état avec notre monde classique ? Cette réconciliation ne peut provenir que de la mesure, comme nous allons le voir.

## D Mesure et décohérence quantique

Nous nous intéressons à présent au processus de décohérence quantique qui permet d'assurer une transition quantique/classique. Cette transition est également au coeur du processus de mesure quantique. L'étude du lien entre la mesure quantique et la décohérence relève plus généralement de ce que l'on appelle *le problème de la mesure*. Ce dernier a été soulevé dès les fondations de la théorie par John Von Neumann [4] pour éluder le statut particulier du *postulat de la mesure*.

### D.1 Postulat de la mesure

Ce postulat joue un rôle particulier dans les fondations de la physique quantique. Il permet de faire le lien entre le formalisme et l'expérience. En effet, dans l'expérience du chat de Schrödinger, la mesure faite par l'observateur ne peut conduire qu'à deux issues : le chat ne peut être "à ses yeux" que *mort* ou *vivant*. Cependant, ces états ne sont qu'une base possible de l'espace de Hilbert du chat. Une autre base pourrait être celle engendrée par les deux états

$$|\psi_{\text{chat}}^{\pm}\rangle = \frac{|\text{mort}\rangle \pm |\text{vivant}\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Nous pouvons donc dire que l'on observe des superpositions d'états dans la vie quotidienne, puisque l'état d'un chat vivant s'écrit comme une superposition d'états dans une autre base

$$|\text{vivant}\rangle = \frac{|\psi_{\text{chat}}^{+}\rangle - |\psi_{\text{chat}}^{-}\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Cependant, il s'agit d'une superposition d'états fortement non-classiques  $|\psi_{\pm}\rangle$ . La mesure semble *réduire* ou *projeter* l'état du chat (3) dans une base d'états "privilegiés", celle composée des états classiques *mort* ou *vivant* que l'on est capable d'observer ou détecter directement avec nos sens. Nous verrons dans la troisième partie de cette thèse comment il devient possible de détecter directement de tels états (4) de la lumière, avec une proposition de détecteur d'états "chats de Schrödinger" de la lumière.

Une fois la mesure faite et son résultat connu, l'état du chat est celui dans lequel on le mesure : *mort* ou *vivant*. C'est la forme la plus simple du *postulat de la mesure*, aussi appelé *réduction du paquet d'onde*. Dans la suite de ce mémoire, nous préférons l'appeler *règle de projection*.

Plus précisément, lorsque l'on mesure une certaine quantité ou *observable* A, cette dernière peut prendre un certain nombre de valeurs  $\{a_k\}$ . Chaque valeur de cette observable correspond idéalement à un état du système bien déterminé que l'on notera  $|a_k\rangle$ . Ces états  $\{|a_k\rangle\}$  sont mutuellement *incompatibles*, ce qui se traduit en termes de produits scalaires

par  $\langle a_k | a_l \rangle = \delta_{k,l}$ . On représente alors l'observable physique  $A$  par un opérateur dans l'espace de Hilbert :

$$\hat{A} = \sum_k a_k |a_k\rangle \langle a_k|. \quad (6)$$

De manière générale, toute observable physique sera représentée dans l'espace de Hilbert par un opérateur *hermitien*, dont les valeurs propres ne sont rien d'autres que les différentes valeurs possibles de cette observable. La règle de projection consiste alors à fixer l'état du système sur l'état propre  $|a_k\rangle$  correspondant à la valeur mesurée de l'observable,  $A = a_k$ . Cette règle de projection s'apparente à *une remise à jour de l'état de connaissance* que représente le vecteur d'état sous l'apport d'information que constitue la mesure. Nous donnerons une forme beaucoup plus générale de cette règle de projection dans la suite de cette thèse.

## D.2 Phase et décohérence quantique

Le processus de mesure constitue un bel exemple de transition quantique/classique : l'état du chat intriqué à celui du noyau atomique s'effondre dans une base d'états classiques, ceux dans lesquels on observe le chat ou l'atome dans la vie de tous les jours. Dans l'expérience du chat de Schrödinger, le chat - objet macroscopique - joue en fait le rôle d'appareil de mesure. Il permet de mesurer l'état d'excitation du noyau atomique. Cette mesure s'accompagne nécessairement d'une transition de l'état intriqué (3) vers un état au comportement plus classique. On sait déjà que l'on se retrouvera avec une sorte de jeu "pile ou face" dans lequel le chat sera retrouvé *vivant* avec une certaine chance, indiquant que le noyau est excité, et dans les autres cas, le chat sera retrouvé *mort* indiquant que le noyau est désexcité.

Afin de visualiser une telle transition, il est utile d'introduire un autre opérateur dans l'espace de Hilbert. Il s'agit d'une des formes les plus générales de l'état quantique : *la matrice densité*, qui est ici simplement la représentation matricielle du projecteur sur l'état (3)

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \alpha\beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta\alpha^* & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Il s'agit également d'une observable et nous allons montrer que le caractère complexe des amplitudes  $\alpha$  et  $\beta$  est nécessaire pour assurer une transition vers un état au comportement plus classique. Pour cela, nous supposons sans perdre en généralité que  $\alpha$  est réel et que  $\beta = |\beta| e^{i\phi}$ , où  $\phi$  désigne une phase relative. Lorsque cette phase relative n'est *plus du tout contrôlée*, l'observable (7) devra être moyennée sur toutes les valeurs possibles de la phase qui sont *a priori* équiprobables. La matrice densité devient alors diagonale et se réduit à

$$\hat{\rho}_{dec} = |\alpha|^2 |\text{vivant}, e\rangle \langle \text{vivant}, e| + |\beta|^2 |\text{mort}, f\rangle \langle \text{mort}, f|. \quad (8)$$

Il s'agit d'une des manifestations de la décohérence. La phase quantique  $\phi$  et sa dissipation sont nécessaires pour faire transiter l'état intriqué (3) vers un état au comportement plus classique (8), que l'on appelle *un mélange statistique*. C'est *une* justification du caractère complexe des amplitudes  $\alpha$  et  $\beta$  d'une superposition d'états quantiques.

Ce processus de décohérence est l'un des modèles du processus de mesure quantique. Par exemple, il a été éprouvé expérimentalement par l'équipe de Serge Haroche [10]. En réalité, la décohérence peut être induite par divers mécanismes, notamment des couplages à l'environnement. Le fait que la décohérence se fasse dans une base particulière, celle des états classiques "mort" ou "vivant", est un aspect de la formulation moderne du problème de la mesure, dont l'un des acteurs les plus actifs est Z. H. Zurek [11].

### D.3 Règle de Born

Nous cherchons maintenant à interpréter les amplitudes complexes  $\alpha$  et  $\beta$  intervenant dans la superposition (3). En fait, la matrice densité (8) prend également la forme d'une observable donnée en (6). Cela signifie donc que la quantité  $|\alpha|^2$  est la valeur de cette observable associée à un chat et un noyau respectivement dans les états *mort* et *désexcité*. De même, la quantité  $|\beta|^2$  est associée à un chat et un noyau respectivement dans les états *vivant* et *excité*.

L'éclairage sur ces quantités vient de la condition de normalisation (2). Il s'agit en fait des *probabilités* de trouver le noyau excité ou desexcité. Historiquement, on doit *l'interprétation statistique des états quantiques* à Max Born qui l'a formulé dans un tout autre contexte [17] en 1926, et pour laquelle il a reçu le prix Nobel en 1954. Cette interprétation a donné un sens à la fonction d'onde introduite par Erwin Schrödinger en 1925. Elle fonde également l'interprétation majoritairement admise de la physique quantique, que l'on appelle également *l'École de Copenhague*.

La *règle de Born* postule que la probabilité de mesurer, ici avec le chat, le noyau dans l'état fondamental  $|f\rangle$  est donnée par  $|\alpha|^2 = |\langle f|\phi_{\text{noyau}}\rangle|^2$ . Nous retrouverons une forme beaucoup plus générale de cette règle dans la suite de ce mémoire. Ainsi, le chat jouant le rôle d'appareil de mesure, la mesure sur le noyau correspondant au résultat "chat mort" est uniquement caractérisée par l'état  $|f\rangle$ , puisqu'il permet de déterminer la probabilité de retrouver le chat mort et le noyau dans l'état  $|f\rangle$ .

Dans ce cas précis, le formalisme établi par John Von Neumann [4] décrit le comportement des réponses de l'appareil de mesure par des projecteurs

$$\hat{P}_{\text{mort}} = |f\rangle\langle f|, \hat{P}_{\text{vivant}} = |e\rangle\langle e|.$$

Ces derniers constituent par ailleurs une résolution de l'espace de Hilbert du système mesuré (le noyau), car ils vérifient  $\hat{P}_{\text{mort}} + \hat{P}_{\text{vivant}} = \hat{1}$ . On qualifie alors les mesures effectuées par l'appareil de mesure (le chat) de *mesures projectives*. Nous montrerons dans cette thèse que cette définition n'est pas la plus générale. Elle devient même un cas particulier des mesures projectives.

## E Contexte, objectifs et plan de ce travail doctoral

### Contexte

Mon travail doctoral était initialement dédié à la préparation conditionnelle d'états "Chat de Schrödinger" de la lumière qui sont des superpositions d'états quasi-classiques de la lumière. Ces protocoles de préparation consistent à tirer profit du postulat de la mesure afin de *projeter* des états quantiques de la lumière dans états plus exotiques. En optique quantique, les ingrédients d'une telle préparation sont essentiellement deux faisceaux lumineux dans un état intriqué et une mesure *judicieuse* effectuée sur l'un des deux faisceaux. Lorsque l'on obtient le résultat espéré, l'état de l'autre faisceau est décrit par un état qui peut être fortement plus non-classique, dans un sens que l'on précisera. Ces expériences ont été réalisées par plusieurs équipes à travers le monde. Après avoir contribué à l'implémentation d'une telle expérience dans le groupe d'optique quantique du Laboratoire Kastler Brossel, mes recherches se sont focalisées sur le processus de mesure intervenant dans ces préparations conditionnelles. C'est le point de départ d'un travail théorique pour, et illustré par, l'expérience abordant les concepts fondamentaux de la physique quantique.

### Objectifs

Cette thèse porte sur le *comportement quantique des appareils de mesure*. Il s'agit de l'étude des propriétés quantiques de la mesure qui ont été peu étudiées jusqu'à présent, malgré leur importance cruciale dans de nombreux protocoles quantiques basés sur des mesures, comme des préparations conditionnelles.

La principale contribution de mon travail est la caractérisation de la mesure dans le cadre d'une approche très inhabituelle de la physique quantique : *l'approche rétrodictive*. Il s'agit d'une approche complémentaire à l'approche habituelle qui est fondée sur la règle de Born, et avec laquelle on prédit les résultats de mesure d'une expérience. Cependant, cette approche rétrodictive souffrait jusqu'à présent de quelques lacunes au niveau de ses fondations, rendant l'interprétation de ses outils difficiles et quelques fois discutables. En montrant pourquoi et comment elle permet de caractériser complètement une mesure quantique, ces travaux lui confèrent désormais un véritable statut, équivalent à celui de l'approche prédictive. D'autant plus que les propriétés introduites et étudiées dans cette thèse ont été illustrées expérimentalement en optique quantique avec des détecteurs de photons uniques. La pertinence de ces propriétés est également illustrée sur une proposition de détecteur d'états "chats de Schrödinger" de la lumière, dont nous précisons les applications en métrologie quantique.

### Plan de la thèse

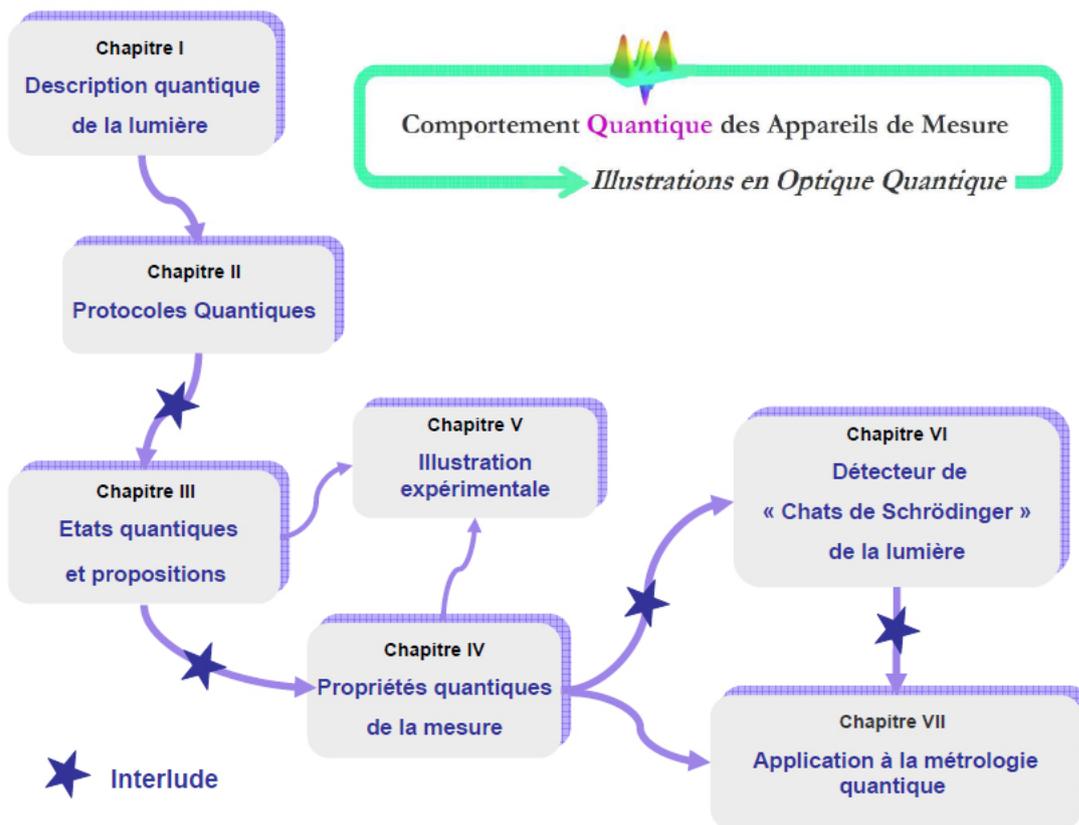
La thèse se compose de sept chapitres et quatre interludes dont l'articulation est illustrée sur la figure 5. Les interludes reviennent sur des notions abordées dans cette introduction, tout en étant à la charnière des chapitres qu'ils séparent.

La première partie est composée de deux chapitres. Le premier chapitre introduit les outils de *description quantique de la lumière* utiles pour cette thèse. Le second chapitre aborde les *protocoles quantiques*. Il s'agit des procédures permettant de manipuler les états

quantiques. La préparation conditionnelle y sera décrite sous sa forme la plus générale. Nous illustrerons alors cette description sur l'une des mesures optiques intervenant dans ce genre de protocoles en optique quantique : le comptage de photons.

La deuxième partie aborde le coeur de ce travail doctoral sur *le comportement quantique des appareils de mesure*. Le troisième chapitre montrera comment introduire et définir de manière la plus générale les états quantiques. Les approches prédictive et rétrodictive seront alors obtenues à partir de considérations très générales sur les fondations mathématiques de la physique quantique. La reconstruction des états quantiques y sera alors abordée sans distinction entre les deux approches. Le chapitre IV est consacré à l'étude des propriétés quantiques de la mesure dans le cadre de l'approche rétrodictive. Le chapitre V présente l'illustration expérimentale des deux chapitres précédents sur des détecteurs de photons uniques très couramment utilisés en optique quantique.

Enfin, la troisième partie aborde les applications de ce travail pour la métrologie quantique. Le chapitre VI présente une proposition de détecteur d'états "chats de Schrödinger" de la lumière. Une étude théorique de ses propriétés est reproduite et s'appuie sur la deuxième partie de la thèse. Le dernier chapitre présente un protocole de métrologie quantique basée sur cette proposition de détecteur



**Figure 5:** Plan et articulation de la thèse. – La transition entre certains chapitres est assurée par des interludes, qui reprennent dans une forme moins formelle des notions fondamentales abordées dans l'introduction.

**Première partie**

**Décrire et Manipuler la Lumière**



---

# Description Quantique de la Lumière

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Autour de la quantification</b>	<b>15</b>
A.1	Traitement classique	15
A.2	Traitement quantique	17
<b>B</b>	<b>Description discrète et continue de la lumière</b>	<b>19</b>
B.1	Matrice densité	19
B.2	Fonction de Wigner	21
<b>C</b>	<b>Etats Gaussiens</b>	<b>23</b>
C.1	Généralités	23
C.2	Etats cohérents ou quasi-classiques	23
C.3	Etats comprimés	25
C.4	Etats intriqués ou EPR	26
<b>D</b>	<b>Etats Non-Gaussiens</b>	<b>27</b>
D.1	Négativité et non-classicalité	27
D.2	Exemples	29
D.3	Intérêts et applications	30

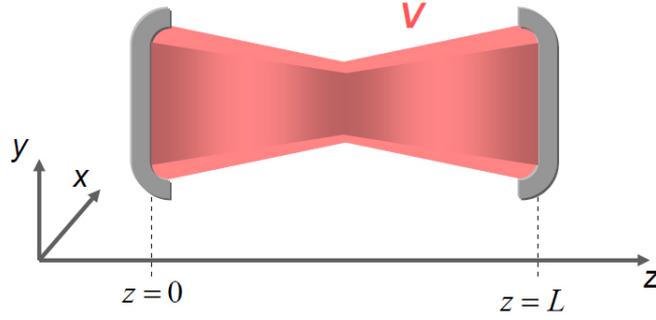
---

*Dans cette thèse, les illustrations en optique quantique ne considèrent essentiellement qu'un seul mode du champ. Les outils de description quantique de la lumière seront donc introduits dans ce cadre.*

## A Autour de la quantification

### A.1 Traitement classique

Dans un souci de concision, nous considérons un champ électromagnétique contenu dans une cavité de longueur  $L$  arbitraire et dotée de miroirs parfaitement réfléchissants, comme l'illustre la figure 1.1. Les résultats de ce chapitre se généralisent sans difficulté au cas d'un champ en propagation libre en faisant par exemple tendre la longueur de la cavité vers l'infini.



**Figure 1.1:** Cavité optique en résonance avec le champ électromagnétique contenu entre ses deux miroirs parfaitement réfléchissants : le champ électromagnétique est alors nul à leurs surfaces en  $z = 0$  et  $z = L$ . La cavité délimite un volume de quantification arbitraire  $V$  (en rouge) pour le champ électromagnétique.

De plus, nous supposons que le champ électrique est polarisé linéairement selon l'axe  $x$ , et nous nous plaçons au voisinage de l'axe de révolution de la cavité si bien que

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E(z, t) \vec{u}_x.$$

Le volume de la cavité peut alors s'écrire  $V = S_{eff}L$  en terme d'une surface effective  $S_{eff}$  qui tient compte du profil spatial du champ électrique.

Par ailleurs, le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  décrivant la lumière contenue dans la cavité vérifient les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $\epsilon_o$  et  $\mu_o$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide. Ces deux constantes vérifient par ailleurs la relation  $\epsilon_o \mu_o = 1/c^2$ , avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

Avec les conditions aux limites imposées par les miroirs de la cavité, une solution *monomode* de ces équations (1.1) est donnée par le champ électrique :

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{\epsilon_o V}} x(t) \sin(kz), \quad (1.2)$$

où  $V$  désigne le volume effectivement occupé par le champ électromagnétique et  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde avec la pulsation du champ  $\omega$ . Le champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{u}_y$  s'obtient alors facilement à partir du champ électrique et nous l'écrivons sous la forme

$$B(z, t) = \frac{\epsilon_o \mu_o}{k} \sqrt{\frac{2\omega^2}{\mu_o V}} p(t) \cos(kz). \quad (1.3)$$

L'énergie du champ électromagnétique contenu dans cette cavité s'obtient en intégrant la densité d'énergie sur tout le volume occupé par le champ,

$$\mathcal{H} = \int_V d^3\vec{r} \frac{1}{2} \left( \epsilon_o E^2 + \frac{1}{\mu_o} B^2 \right) = S_{eff} \int_L dz \frac{1}{2} \left( \epsilon_o E^2 + \frac{1}{\mu_o} B^2 \right) \quad (1.4)$$

qui devient après simplification :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [p^2(t) + \omega^2 x^2(t)]. \quad (1.5)$$

Or, ce résultat est à mettre en regard de celui obtenu pour un oscillateur harmonique à une dimension qui conduit à une énergie  $\mathcal{H} = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(t)$ , où  $x$  et  $p$  sont alors les variables de position et d'impulsion. Nous constatons donc que les deux variables  $(x, p)$  décrivant le champ électromagnétique sont les analogues classiques de la position et de l'impulsion d'un oscillateur harmonique classique de masse unité  $m = 1$ . Cette analogie vulgarise la procédure de quantification *canonique*, introduite par P. Dirac en 1927.

## A.2 Traitement quantique

*Pour une revue plus complète de la quantification, nous renvoyons le lecteur aux références [20, 21]. Notre traitement s'inspire de celui fait dans l'enseignement au niveau Master. Il est suffisant pour introduire les outils nécessaires à la description quantique d'un ou deux modes du champ lumineux.*

*Quantification du champ.* – Dans la quantification de l'oscillateur harmonique (voir par exemple [19]), les deux variables  $(x, p)$  deviennent des opérateurs  $(\hat{x}, \hat{p})$  vérifiant la relation de commutation  $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite  $\hbar = h/2\pi$ . La quantification du champ consiste à traiter *le mode du champ* comme un oscillateur harmonique quantique de masse unité  $m = 1$ . Les opérateurs  $(\hat{x}, \hat{p})$  constituent alors les opérateurs de *quadratures du champ* qu'il convient d'écrire

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (1.6)$$

où l'opérateur  $\hat{a}$  n'est pas hermitien et vérifie la relation de commutation suivante

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}. \quad (1.7)$$

Ainsi, les champs électrique (1.2) et magnétique (1.3) qui constituent des observables physiques sont maintenant représentés par des opérateurs hermitiens

$$\begin{aligned} \hat{E}(z, t) &= \mathcal{E}_o \left( \hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t) \right) \sin(kz), \\ \hat{B}(z, t) &= \frac{1}{i} \mathcal{B}_o \left( \hat{a}(t) - \hat{a}^\dagger(t) \right) \cos(kz) \end{aligned} \quad (1.8)$$

où  $\mathcal{E}_o = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}$  et  $\mathcal{B}_o = \mathcal{E}_o/kc^2$  sont des constantes qui dépendent du volume occupé par le champ qui est a priori arbitraire. Cet arbitraire est en partie levé lorsque l'on regarde l'expression de l'énergie du champ (1.5)

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.9)$$

qui est un opérateur hermitien et positif. Notons qu'il ne dépend plus du volume de quantification  $V$ .

*Photons.* – La quantification du champ apparaît véritablement lorsque l'on réduit cet opérateur d'énergie (1.9) à ses éléments propres,

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_n E_n |n\rangle \langle n|, \quad (1.10)$$

où  $|n\rangle$  désigne l'état du champ correspondant à une énergie  $E_n$ . Comme pour l'oscillateur harmonique quantique, il est facile de montrer que l'énergie du champ est quantifiée. En effet, nous avons  $\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = E_n|n\rangle$ . En faisant agir sur les deux membres de cette égalité l'opérateur  $\hat{a}^\dagger$ , on montre à l'aide de la relation de commutation canonique  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}$  que  $\hat{a}^\dagger|n\rangle$  est également un état propre d'énergie  $E_n + \hbar\omega$ . L'opérateur  $\hat{a}^\dagger$  ajoute donc une excitation  $\hbar\omega$  à l'énergie du champ. On parle d'*opérateur création* et l'excitation élémentaire  $\hbar\omega$  est appelée *photon* en optique quantique. De plus, comme les valeurs propres de l'opérateur  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  sont positives, les énergies propres sont discrètes et par conséquent indexées par des entiers  $n$ . Ils correspondent simplement aux nombres de photons d'énergie  $\hbar\omega$  que le champ contient.

Dans un autre contexte, comme par exemple pour une corde de guitare vibrant entre deux noeuds, cette quantification se reproduirait exactement de la même manière. C'est l'énergie de la vibration qui révèle cette nature "corpusculaire", et celle ci devient accessible lorsque l'énergie d'une excitation  $\hbar\omega$  devient comparable à celle d'un niveau typique  $E_n$ .

*Espace des états.* – L'espace de Hilbert du champ est engendré par les états propres de l'opérateur nombre de photons  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ , noté  $|n\rangle$  et d'énergie  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . On parle alors d'*états nombres de photons* ou d'*états de Fock*. Ces états du champ ont des comportements très fortement non-classiques comme nous le verrons dans la suite. Ainsi, l'action des opérateurs  $\hat{a}$  sur un état nombre  $|n\rangle$  devrait être la suivante

$$\hat{a}|n\rangle = c_n|n-1\rangle, \quad (1.11)$$

où  $c_n$  est un coefficient que nous déterminons facilement puisque nous avons  $\langle n|\hat{N}|n\rangle = |c_n|^2 = n$ , soit  $c_n = \sqrt{n}$ . Leur action sur les états nombre de photons se résume donc aux relations suivantes

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.12)$$

On les appellera respectivement *opérateurs d'annihilation et de création d'un photon*. Ils permettent de générer tous les états nombre de photons  $|n\rangle$  puisqu'il est facile de montrer par récurrence que

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (1.13)$$

où  $|0\rangle$  représente l'état *vide de photon* à ne pas confondre avec le vecteur nul de l'espace de Hilbert.

Le champ dans la cavité (1.1), sans lumière à l'intérieur, est également décrit par un vecteur de l'espace de Hilbert, c'est l'état vide de photon  $|0\rangle$  d'énergie  $\hbar\omega/2$ . Le vide de photon a donc *une énergie non nulle*, ce qui n'est pas en contradiction avec le fait que le volume  $V$  soit vide de photon. En effet, cette énergie est une *énergie de point zéro* par rapport à laquelle sont jaugées les énergies des autres états, puisque le nombre de photons est effectivement donné par  $n = (E_n - E_o)/\hbar\omega$ . Elle résulte du confinement du champ dans la cavité.

Ces états nombre de photons constituent une base de l'espace de Hilbert, si bien que nous avons une résolution de l'identité sur cet espace

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1}. \quad (1.14)$$

On peut ainsi décomposer n'importe quel état  $|\psi\rangle$  du champ sur la base de ces états,

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n |n\rangle, \quad (1.15)$$

où  $\beta_n = \langle n|\psi\rangle$  désigne les amplitudes complexes avec lequel l'état se décompose sur les états nombres de photons  $|n\rangle$ . Nous allons maintenant nous intéresser aux deux principales représentations des états quantiques de la lumière. Elles nous seront particulièrement utiles pour les illustrations en optique quantique.

## B Description discrète et continue de la lumière

Nous introduisons ici les outils de description quantique de la lumière utilisés habituellement en optique quantique. On introduira la matrice densité et la représentation de Wigner de manière courante et nous montrerons dans la deuxième partie comment introduire les états quantiques de manière beaucoup plus générale.

### B.1 Matrice densité

Nous allons introduire la forme la plus générale de la matrice densité à partir de l'interprétation statistique de Born, comme c'est habituellement le cas dans la littérature, notamment une majorité de cours de mécanique quantique<sup>1</sup>. Pour cela, on s'intéresse à la valeur moyenne d'une observable quelconque  $\hat{A}$  lorsque le champ est décrit par l'état (1.15). Si cette observable se décompose comme  $\hat{A} = \sum_k a_k |a_k\rangle\langle a_k|$ , la probabilité de mesurer la valeur  $A = a_k$  est donnée par la règle de Born,

$$\Pr(A = a_k|\psi) = |\langle a_k|\psi\rangle|^2. \quad (1.16)$$

Ainsi, la valeur moyenne de l'observable est simplement une espérance au sens des probabilités

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \sum_k a_k \Pr(A = a_k|\psi). \quad (1.17)$$

Cette dernière peut alors s'écrire sous une forme plus compacte

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle. \quad (1.18)$$

Cette formule n'est cependant valable que lorsque la préparation du champ dans l'état  $|\psi\rangle$  est complètement maîtrisée. Lorsque l'on ne maîtrise pas le processus de préparation, le champ peut se retrouver dans un état choisi parmi une collection d'états  $\{|\psi_m\rangle\}_m$ , avec une probabilité  $p_m$  telle que  $\sum_m p_m = 1$ . La moyenne de l'observable  $\hat{A}$  est une moyenne statistique des moyennes "quantiques" correspondant à chacun des choix

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_m p_m \langle \hat{A} \rangle_m, \quad (1.19)$$

---

1. Ce rappel permet de mettre en relief notre démarche qui est reproduite au chapitre III

où  $\langle \hat{A} \rangle_m = \langle \psi_m | \hat{A} | \psi_m \rangle$  est la *moyenne quantique* de l'observable  $\hat{A}$  dans l'état  $|\psi_m\rangle$ . Nous pouvons alors introduire une représentation plus générale de l'état quantique : la *matrice densité* définie par

$$\hat{\rho} = \sum_m p_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m|. \quad (1.20)$$

On parle également de *mélange statistique* des états  $|\psi_m\rangle$  et on peut déjà en déduire un certain nombre de propriétés générales qu'un état quantique doit satisfaire. En effet, un état quantique doit être représenté par une matrice *hermitienne, positive et normalisée*. La normalisation correspond à une trace  $\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho} | n \rangle = \sum_m p_m = 1$ . La moyenne de l'observable  $\hat{A}$  prend une forme plus compacte

$$\langle \hat{A} \rangle_{\rho} = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{A}\}. \quad (1.21)$$

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, la matrice densité est également une observable (i.e. matrice hermitienne) et à ce titre, nous pouvons calculer la moyenne de la matrice densité elle-même

$$\mu = \langle \hat{\rho} \rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho}^2\}. \quad (1.22)$$

Sans perte de généralité, on suppose maintenant que les états  $|\psi_m\rangle$  sont les états propres de la matrice densité. Il est alors facile de montrer que

$$\mu = \sum_m p_m^2 \leq \sum_m p_m = 1. \quad (1.23)$$

Il s'agit d'un estimateur de ce que l'on appelle la *pureté quantique* d'un état. Lorsque cette pureté  $\mu = 1$ , on se retrouve avec la préparation d'un état  $|\psi_m\rangle$  avec certitude absolue puisque  $p_m = 1$ . On parle alors d'*état quantique pur*.

Un autre estimateur de la pureté d'un état quantique est fourni par l'*entropie de Von Neumann* [4] définie par

$$\mathcal{S}[\hat{\rho}] = -\text{Tr}\{\hat{\rho} \log \hat{\rho}\}, \quad (1.24)$$

qui se réduit dans la base propre  $\{|\psi_m\rangle\}_m$  à

$$\mathcal{S}[\hat{\rho}] = -\sum_m p_m \log p_m. \quad (1.25)$$

Cette entropie est nulle pour un état pur  $\hat{\rho} = |\psi_m\rangle \langle \psi_m|$ . Elle devient maximale lorsque les probabilités  $p_m$  sont uniformes, soit  $p_m = 1/D$  pour un espace de Hilbert de dimension finie  $D$ , ce qui conduit à la matrice densité  $\hat{\rho} = \hat{1}/D$ . Il s'agit de l'état quantique le plus mélangé que l'on puisse avoir dans cet espace de Hilbert. La pureté quantique  $\mu$  constitue également un indicateur du degré de mélange d'un état quantique, bornée de la manière suivante

$$1/D \leq \mu \leq 1. \quad (1.26)$$

Enfin, en optique quantique, la décomposition de la matrice densité se fait naturellement dans la base des états nombres de photons

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n} \rho_{m,n} |m\rangle \langle n|. \quad (1.27)$$

Les éléments de cette matrice densité ont alors une signification particulière. En effet, les termes diagonaux  $\rho_{nn}$  de cette décomposition correspondent aux *populations* des états  $|n\rangle$ .

Il s'agit simplement des probabilités de trouver la lumière décrite par l'état  $\hat{\rho}$  dans un état nombre de photons  $|n\rangle$ . Les éléments non diagonaux  $\rho_{nm}$  rendent compte d'éventuelles *cohérences quantiques* entre différents états nombre de photons. Il s'agit du principal outil de la *description discrète de la lumière*, puisqu'elle se décompose dans la base des états propres de l'opérateur nombre de photons  $\hat{n}$  : le meilleur ambassadeur du caractère *corporel* de la lumière.

## B.2 Fonction de Wigner

D'autres observables du champ lumineux peuvent être mesurées, comme les opérateurs de quadratures du champ  $\hat{x}$  ou  $\hat{p}$ . Dans un souci de simplification, nous redéfinissons les opérateurs canoniques de quadratures comme suivant

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (1.28)$$

vérifiant toujours la relation de commutation  $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{i}$  qui a l'avantage de ne plus dépendre de la constante de Planck réduite  $\hbar$ . Comme pour l'oscillateur harmonique, la base des états propres de ces observables est de dimension infinie et continue. Ainsi, l'opérateur de quadrature  $\hat{x}$  se décomposera de la manière suivante

$$\hat{x} = \int dx x |x\rangle \langle x|, \quad (1.29)$$

avec  $\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$ . A ce stade, il est intéressant de donner le lien entre les états propres de cet opérateur de quadrature et ceux de l'opérateur nombre de photons. Il s'agit des fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique [19] de masse  $m = 1$  et de constante de Planck réduite  $\hbar = 1$ ,

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-x^2/2} \quad (1.30)$$

où  $H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-t^2+2xt}|_{t=0}$  désigne le n-ième polynôme de Hermite.

En physique classique, une représentation intéressante de l'état d'un système décrit par de telles variables conjuguées  $(x, p)$  est l'*espace des phases*. Un point de cet espace correspond à une valeur particulière du couple de variables  $(x, p)$ . En optique quantique [22], cet espace des phases correspond au plan de Fresnel dans lequel on représente habituellement le champ électrique oscillant associé une onde lumineuse. L'espace des phases est aussi propice à une description statistique. En effet, en physique statistique, on peut s'intéresser à la probabilité jointe de trouver la particule à la position  $x$  avec une impulsion  $p$ . On définit alors une distribution de probabilité jointe  $\mathcal{D}(x, p)$  sur l'espace des phases  $(x, p)$  telle que

$$\mathcal{D}(x, p) \geq 0, \quad \int dx dp \mathcal{D}(x, p) = 1. \quad (1.31)$$

Cette définition ne pose pas de problème en mécanique classique car on peut mesurer simultanément la position  $x$  et l'impulsion  $p$  avec une précision arbitraire, ce qui n'est pas le cas en physique quantique. En effet, d'après la relation de commutation des opérateurs

de quadratures (1.28), on ne peut mesurer qu'une seule quadrature à la fois  $\hat{x}$  ou  $\hat{p}$ , ou toute autre quadrature de la forme

$$\hat{x}_\phi = \hat{\mathcal{R}}(\phi)^\dagger \hat{x} \hat{\mathcal{R}}(\phi) = \cos(\phi) \hat{x} + \sin(\phi) \hat{p}, \quad (1.32)$$

où  $\hat{\mathcal{R}}(\phi) = \exp[-i\phi\hat{n}]$  désigne l'opérateur de rotation d'angle  $\phi$ . On vérifie toujours la relation de commutation  $[\hat{x}_\phi, \hat{p}_\phi] = i$  qui est à l'origine d'une *relation d'incertitude* [19] en terme des variances de chacune des deux quadratures conjuguées

$$\Delta x_\phi^2 \Delta p_\phi^2 \geq \frac{1}{4} |[\hat{x}_\phi, \hat{p}_\phi]|^2 = \frac{1}{4}. \quad (1.33)$$

Pour remédier à cette difficulté, une distribution a été introduite par Eugène Wigner [23] en 1932. Il s'agit de la *fonction de Wigner*  $\mathcal{W}$  [23]. Pour un état quantique pur  $|\psi\rangle$ , cette fonction est définie par

$$\mathcal{W}_\psi(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int du e^{iup} \psi(x - u/2) \psi^*(x + u/2). \quad (1.34)$$

où  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$  est la fonction d'onde caractérisant l'état  $|\psi\rangle$ . Une telle fonction a été étendue par la suite à l'analyse de Fourier où elle permet une représentation en termes de variables réciproques quelconques, comme par exemple le temps et la fréquence. On parle alors de *représentation de Wigner-Ville* [24].

La définition de la fonction de Wigner s'étend sans difficulté à un mélange statistique  $\hat{\rho}$  (1.20) pour lequel elle est donnée par,

$$\mathcal{W}_\rho(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int du e^{iup} \langle x - u/2 | \hat{\rho} | x + u/2 \rangle. \quad (1.35)$$

L'une des propriétés intéressantes de cette distribution  $\mathcal{W}$  est qu'elle permet de réécrire la moyenne d'une observable  $\hat{A}$  (1.21) comme suivant

$$\langle \hat{A} \rangle_\rho = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{A}\} = 2\pi \int dx dp \mathcal{W}_\rho(x, p) \mathcal{W}_A(x, p), \quad (1.36)$$

où  $\mathcal{W}_A$  désigne la représentation de Wigner de l'observable  $\hat{A}$ , définie de la même manière que (1.35) en remplaçant  $\hat{\rho}$  par  $\hat{A}$ . Ainsi, la fonction de Wigner semble jouer le rôle d'une distribution de probabilité sur l'espace des phases, puisque l'on peut facilement vérifier que cette dernière est également normalisée :

$$\int dx dp \mathcal{W}(x, p) = 1. \quad (1.37)$$

Cependant, la positivité de cette distribution n'est absolument pas garantie pour tous les états quantiques  $\hat{\rho}$ . On qualifie alors la fonction de Wigner est une *quasi-distribution de probabilité*. En effet, une telle représentation peut prendre des valeurs négatives pour certains états quantiques, comme nous allons le voir dans la suite.

Néanmoins, il existe une classe particulière d'états pour lesquels la fonction de Wigner est toujours positive : *les états Gaussiens* en sont des exemples. Pour de tels états, la fonction de Wigner peut alors jouer le rôle d'une distribution de probabilité permettant de rendre compte des fluctuations quantiques du champ électrique dans le plan de Fresnel  $(x, p)$ . La probabilité de mesurer le couple de valeurs  $(x, p)$  à  $dx dp$  près pour le champ est alors donnée par  $\mathcal{W}(x, p) dx dp$ .

## C Etats Gaussiens

### C.1 Généralités

Les états gaussiens constituent la ressource d'une grande majorité d'expériences d'optique quantique qui s'intéressent aux observables à variables continues [25, 26], comme par exemple les quadratures du champ. Ces états sont caractérisés par des fonctions de Wigner qui sont des formes gaussiennes. Elles sont donc assimilables à de véritables distributions de probabilités sur le plan de Fresnel. Pour des états purs, les états gaussiens ont la particularité de minimiser l'inégalité de Heisenberg (1.33)

$$\Delta x_\phi \Delta p_\phi = 1/2, \quad (1.38)$$

Nous allons déterminer la fonction de Wigner d'un état gaussien  $|\phi\rangle$  à partir de cette condition (1.38). Pour cela, nous formons l'état

$$|\Phi\rangle = \left( \delta\hat{p} - \frac{i}{s}\delta\hat{x} \right) |\phi\rangle, \quad (1.39)$$

où  $\delta\hat{x} = \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$  désigne l'opérateur des fluctuations affectant la quadrature  $\hat{x}$ , et  $s$  est un facteur d'échelle rendant compte d'une éventuelle asymétrie des variances  $\Delta x^2 = \frac{s}{2}$  et  $\Delta p^2 = \frac{1}{2s}$  tout assurant l'égalité (1.38). La norme de cet état  $|\Phi\rangle$  s'écrit alors comme

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = \Delta p^2 + \frac{\Delta x^2}{s^2} - \frac{1}{s} = 0. \quad (1.40)$$

Or, comme pour l'oscillateur harmonique [19], l'opérateur de quadrature  $\hat{p}$  admet pour représentation différentielle  $\hat{p} = -i\partial_x$ , ce qui conduit à une équation différentielle sur la fonction d'onde  $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$  dont la solution normée est

$$\phi(x) = \frac{1}{(\pi s)^{1/4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2s} + i\langle p \rangle x \right]. \quad (1.41)$$

La fonction de Wigner de cet état s'obtient en utilisant (1.34), soit

$$\mathcal{W}(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{s} - \frac{(p - \langle p \rangle)^2}{1/s} \right]. \quad (1.42)$$

L'allure de cette dernière reproduite sur la figure 1.3.

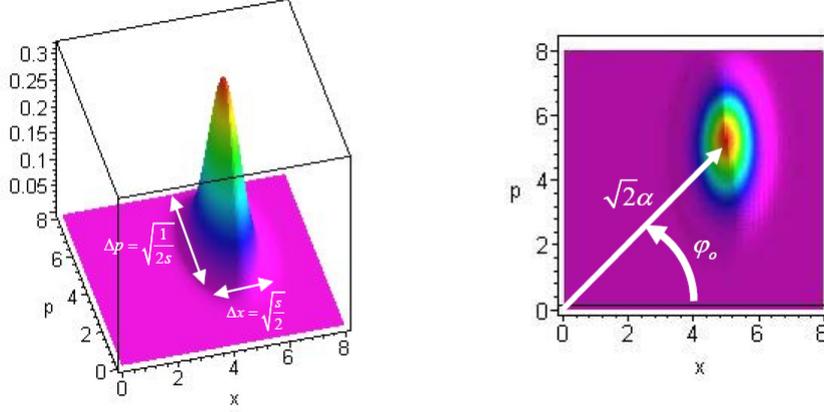
De manière générale, la dénomination d'états gaussiens couvrira tous les états - purs ou mélangés - dont les fonctions de Wigner sont des formes gaussiennes. En particulier, on démontre qu'un *état pur* ayant une fonction de Wigner *positive* est un *état gaussien*. Il s'agit du *théorème de Hudson-Piquet* [27] que l'on retrouvera dans la suite de cette thèse.

Nous allons à présent dresser un inventaire des principaux états gaussiens utilisés dans les expériences d'optique quantique, et qui constituent l'une des ressources des protocoles de préparation conditionnelle que l'on abordera dans le chapitre suivant.

### C.2 Etats cohérents ou quasi-classiques

#### Définition

Les *états cohérents* sont les états purs les plus "classiques" que l'on puisse définir en optique quantique. On les appelle également *états quasi-classiques*. On rappelle que l'ex-



**Figure 1.2:** Fonction de Wigner d'un état gaussien avec  $s = 1/2$ .

pression du champ électrique (1.8) fait intervenir les opérateurs de création  $\hat{a}$  et d'annihilation  $\hat{a}^\dagger$  d'un photon. Afin de retrouver un comportement quasi-classique, on impose à un état cohérent d'être un état propre de l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$ ,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (1.43)$$

où  $\alpha$  est une valeur propre nécessairement complexe puisque l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$  n'est pas hermitien. Elle constitue l'amplitude complexe de l'état cohérent. Un tel état est donc insensible à la soustraction d'un photon, ce qui n'est pas le cas de tous les états gaussiens comme on le verra. Par ailleurs, on vérifie également la relation suivante

$$(\hat{a} - \alpha)^\dagger (\hat{a} - \alpha) |\alpha\rangle = 0, \quad (1.44)$$

ce qui conduit de la même manière que précédemment à une équation différentielle sur la fonction d'onde de l'état  $\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$ . On obtient alors une fonction de Wigner  $\mathcal{W}_\alpha(x, p)$  gaussienne, centrée en  $\sqrt{2}\alpha = \langle x\rangle + i\langle p\rangle$  et symétrique ( $s = 1$ )

$$\mathcal{W}_\alpha(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp [-(x - \langle x\rangle)^2 - (p - \langle p\rangle)^2]. \quad (1.45)$$

A partir de la relation (1.43), il est également possible de donner une décomposition des états cohérents  $|\alpha\rangle$  sur la base des états de Fock  $\{|n\rangle\}$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.46)$$

A l'aide de cette décomposition, nous pouvons alors montrer la relation de fermeture suivante

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1} \quad (1.47)$$

avec  $d^2\alpha = d\text{Re}\alpha d\text{Im}(\alpha)$ .

D'autre part, comme pour les états nombres (1.13), les états cohérents peuvent être obtenus à partir du vide de photon  $|0\rangle$  par l'action d'un opérateur

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \quad (1.48)$$

où  $\hat{D}(\alpha)$  désigne l'opérateur de déplacement dans l'espace des phases défini par

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \quad (1.49)$$

tel que  $\hat{D}(\alpha)^\dagger = \hat{D}(-\alpha)$ .

Autrement dit, les propriétés quantiques d'un état cohérent  $|\alpha\rangle$ , produit usuellement par un laser, sont simplement celles du *vide de photon*  $|0\rangle$  dont la fonction de Wigner est une gaussienne symétrique et centrée en  $\alpha = 0$ . Le vide est bien un état quantique à part entière, si bien que les variances de ses fluctuations quantiques constituent une référence. Il s'agit de ce que l'on appelle le *bruit quantique standard* ou *Limite Quantique Standard* (SQL) par rapport à laquelle on compare toutes mesures de bruit. On reviendra sur cette limite lorsque l'on abordera la métrologie quantique dans la troisième partie.

### Représentation de Glauber-Sudarshan

De manière beaucoup plus générale, tout état décrit par sa matrice densité  $\hat{\rho}$  peut se décomposer sur les états cohérents comme

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P_\rho(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (1.50)$$

où  $P_\rho(\alpha)$  est la distribution de Glauber-Sudarshan [28, 29] de l'état. On vérifie facilement que cette distribution est normalisée

$$\int d^2\alpha P_\rho(\alpha) = 1. \quad (1.51)$$

Cette distribution permet de préciser la non-classicalité d'un état. En effet, lorsque cette fonction  $P(\alpha)$  ne satisfait plus aux conditions requises pour être une vraie distribution de probabilité, la décomposition (1.50) n'est plus assimilable à un mélange statistique d'états quasi-classiques  $|\alpha\rangle$ . L'état  $\hat{\rho}$  est alors qualifié d'*état non-classique*. Une condition de non-classicalité est une distribution  $P_\rho(\alpha)$  négative ou plus singulière qu'une distribution de Dirac, puisque un état cohérent  $|\beta\rangle$  est représenté par  $\delta(\alpha - \beta)$ .

### C.3 Etats comprimés

Nous avons vu que la fonction de Wigner d'un état gaussien faisait intervenir un facteur d'échelle  $s$  au niveau des variances de leur représentation de Wigner

$$\mathcal{W}_{sq}(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp \left[ -\frac{(x - x_o^2)}{s} - \frac{(p - p_o)^2}{1/s} \right]. \quad (1.52)$$

Ce facteur traduit simplement une asymétrie aux niveaux des variances  $\Delta x^2 = \frac{s}{2}$  et  $\Delta p^2 = \frac{1}{2s}$ , comme représenté sur la figure 1.2.

On parle alors d'*états comprimés* comme le *vide comprimé* qui est très utilisé en pratique. Comme pour un état cohérent, un état de vide comprimé peut s'obtenir par l'action d'un opérateur sur le vide  $|0\rangle$ . Il s'agit de l'opérateur de compression défini par

$$\mathcal{S}(r) = \exp \left[ \frac{r}{2} (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) \right]. \quad (1.53)$$

où  $r$  est un paramètre liée au facteur de compression par  $s = e^{-2r}$ .

Ainsi, la décomposition de l'état de vide comprimé dans la base des états nombres  $|n\rangle$  conduit à l'expression suivante ([30]) :

$$|\psi_{sq}\rangle = (1 - \lambda^2)^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{1/2} \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^n |2n\rangle. \quad (1.54)$$

où  $\lambda = \tanh(r)$  permet d'exprimer le facteur de compression  $s$  en échelle logarithmique comme

$$s_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right). \quad (1.55)$$

Il permet de comparer directement la variance des fluctuations de l'état par rapport à celle du vide. Il est également possible d'exprimer le nombre moyen de photons associé à l'état comprimé en fonction du paramètre  $\lambda$  comme

$$\langle \hat{n} \rangle_{sq} = \langle \psi_{sq} | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi_{sq} \rangle = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} = \sinh^2(r). \quad (1.56)$$

Enfin, soulignons que ces états comprimés ont des représentations de Glauber-Sudarshan très singulières. Elles sont effectivement composées de dérivées successives de distributions de Dirac (voir par exemple [31]). Les états comprimés sont donc des états non-classiques dont la compression des fluctuations est une signature de non-classicalité. Nous utiliserons cette signature dans la suite de cette thèse.

#### C.4 Etats intriqués ou EPR

Dans la base des états nombres de deux modes A et B, dont les états de base sont  $|m, n\rangle = |m\rangle_A \otimes |n\rangle_B$ , l'état intriqué défini par

$$|\psi_{AB}\rangle = (1 - \lambda^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n, n\rangle, \quad (1.57)$$

est également un état gaussien dont le paramètre  $\lambda = \tanh(r)$  rend compte du degré d'intrication entre les deux modes A et B. En effet, on montre [30] que la représentation de Wigner d'un tel état est donnée par

$$\mathcal{W}_{AB}(x, p; x', p') = \mathcal{W}_A\left(\frac{x - x'}{\sqrt{2}}, \frac{p - p'}{\sqrt{2}}\right) \mathcal{W}_B\left(\frac{x + x'}{\sqrt{2}}, \frac{p + p'}{\sqrt{2}}\right). \quad (1.58)$$

où  $\mathcal{W}_A$  et  $\mathcal{W}_B$  désignent les fonctions de Wigner du vide comprimé (C.3) respectivement de facteurs de compression  $s = e^{-2r}$  et  $1/s$ . La fonction de Wigner de cet état (1.58) est donc bien une gaussienne.

Lorsque le paramètre de compression  $s \simeq 0$ , cette représentation tend vers un produit de distributions de Dirac

$$\mathcal{W}_{AB}(x, p; x', p') \sim \delta(x - x') \delta(p + p'), \quad (1.59)$$

Historiquement, cet état intriqué sert de base à l'argument EPR [5] que nous avons évoqué dans l'introduction. Cependant, il ne peut pas être utilisé pour violer des inégalités de Bell car la fonction de Wigner d'un tel état est positive et constitue un modèle statistique pour décrire les corrélations observées. Elle constitue donc une variable cachée. Nous reviendrons sur ces aspects dans la suite de ce chapitre avec les états non-gaussiens, puis nous retrouverons cet état intriqué dans un tout autre contexte dans la deuxième partie de cette thèse.

## D Etats Non-Gaussiens

### D.1 Négativité et non-classicalité

Nous venons de voir que les états gaussiens sont complètement caractérisés par des fonctions de Wigner *positives* qui sont assimilables à de véritables distributions de probabilité sur l'espace des phases. Les fluctuations de tels états peuvent alors s'interpréter comme des bruits statistiques décrits par la fonction de Wigner. Il devient donc possible de simuler leur comportement avec des simulations stochastiques.

#### Théorème de Hudson-Piquet

Il existe un lien entre la positivité et le caractère gaussien d'un état. Il s'agit du *théorème de Hudson-Piquet* [27] qui stipule qu'*un état pur caractérisé par une fonction de Wigner positive est un état gaussien*. On en déduit donc que la fonction de Wigner d'un *état non-gaussien* et pur présentera inévitablement des *négativités* qui sont la signature d'un caractère spécifiquement quantique. En effet, une telle négativité dans une fonction de Wigner écarte toute possibilité d'utiliser cette dernière comme une vraie distribution de probabilité sur le plan de Fresnel. Nous ne pouvons donc pas reproduire le comportement d'un tel état quantique avec une simulation stochastique.

Pour illustrer cette particularité, nous considérons l'état à un photon  $|1\rangle$ , dont la fonction de Wigner est donnée par

$$\mathcal{W}_1(x, p) = \frac{2}{\pi} \left( x^2 + p^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-(x^2 + p^2)}. \quad (1.60)$$

Une représentation graphique de cette fonction est reproduite sur la figure 1.3, où l'on constate immédiatement que cette dernière prend une valeur minimale et négative à l'origine de l'espace des phases  $\mathcal{W}_1(0, 0) = -1/\pi$ . Ainsi, l'interprétation selon laquelle  $\mathcal{W}(x, p) dx dp$  représenterait la probabilité de mesurer le champ en  $(x, p)$  à  $dx dp$  près devient obsolète car elle conduirait à une probabilité négative.

#### Signification de la négativité

La négativité à l'origine d'une fonction de Wigner a une signification très intéressante. En effet, en utilisant la définition de la fonction de Wigner (1.35), une négativité à l'origine est donnée par

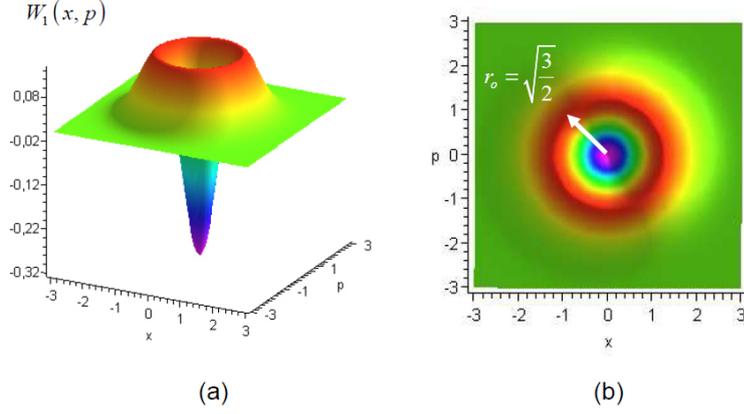
$$\mathcal{W}(0, 0) = \frac{1}{\pi} \int dv \langle v | \hat{\rho} | v \rangle, \quad (1.61)$$

où la matrice densité  $\hat{\rho}$  sera décomposée dans la base des états nombres de photons,

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n} \rho_{m,n} |m\rangle \langle n|. \quad (1.62)$$

Ainsi, la valeur à l'origine (1.61) devient

$$\mathcal{W}(0, 0) = \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \rho_{m,n} \int du \psi_m(-v) \psi_n(v), \quad (1.63)$$



**Figure 1.3:** Fonction de Wigner d'un état à un photon - (a) La négativité à l'origine  $(0,0)$  est la signature du caractère fortement non-classique d'un tel état. (b) La distribution ne dépend pas de la phase et elle est maximale sur la couronne rouge. Cette dernière correspond approximativement au champ électrique  $\mathcal{E}_o = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_o V}}$  associé à un photon.

où  $\psi_m(v)$  désigne le fonction d'onde de l'état à  $m$  photons donnée en (1.30). Comme pour l'oscillateur harmonique, elles sont orthogonales et de même parité que le nombre quantique  $m$

$$\int du \psi_m(-v) \psi_n(v) = (-1)^m \delta_{m,n}. \quad (1.64)$$

Nous reconnaissons finalement la moyenne de l'opérateur parité  $\hat{\mathcal{P}}_n = (-1)^{\hat{n}}$  du nombre de photons

$$\mathcal{W}(0,0) = \frac{1}{\pi} \langle \hat{\mathcal{P}}_n \rangle_\rho = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \hat{\mathcal{P}}_n \right]. \quad (1.65)$$

Ainsi, un état dont la représentation de Wigner est négative à l'origine est caractérisée par une population  $\rho_{n,n}$  en nombre de photons qui sera globalement impaire  $\langle \hat{\mathcal{P}} \rangle_\rho < 0$ . Lorsque la négativité se présente en un point quelconque  $(x,p)$  de l'espace des phases, il suffit de déplacer cet état d'une amplitude  $\alpha = (x + ip)/\sqrt{2}$  vers l'origine, soit

$$\mathcal{W}(x,p) = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(-\alpha) \hat{\mathcal{P}}_n \right], \quad (1.66)$$

où  $\hat{\rho}(-\alpha) = \hat{D}(-\alpha) \hat{\rho} \hat{D}(-\alpha)^\dagger$  est l'état quantique  $\hat{\rho}$  déplacé dans l'espace des phases d'une amplitude  $-\alpha$ . Nous retrouvons une expression à la base d'une méthode de détermination directe de la fonction de Wigner à partir des statistiques de comptage [32].

La négativité de la représentation de Wigner constitue une signature importante de non-classicalité. Elle traduit l'impossibilité de décrire le comportement d'un état quantique par un modèle statistique utilisant la fonction de Wigner comme une véritable distribution de probabilité sur le plan de Fresnel  $(x,p)$ . Cependant, une telle négativité n'est pas la seule signature de non-classicalité. Une représentation de Wigner positive ne signifie pas forcément que l'état est "classique". En effet, le vide de photon  $|0\rangle$  est un exemple important d'état non-classique, puisque le vide classique est un champ électromagnétique nul sans fluctuation.

Dans cette thèse, la première signature de non-classicalité que l'on vérifiera sera la négativité dans la fonction de Wigner. Si cette dernière est positive, on s'attardera alors

sur les fluctuations du champ pour y déceler une éventuelle compression qui est également une signature de non-classicalité, au sens de distribution de Glauber singulière, comme expliquée précédemment.

## D.2 Exemples

L'ensemble des états quantiques non-gaussiens est très vaste et nous allons nous contenter de deux cas particuliers d'états non-gaussiens qui nous seront utiles pour la suite de cette thèse.

### D.2.1 Etats de Fock

Les états nombres de photons  $|n\rangle$  sont les états propres de l'opérateur nombre de photons  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Les fonctions de Wigner de ces états s'obtiennent à partir de leurs fonctions d'onde (1.30) :

$$\mathcal{W}_n(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} \exp(-x^2 - p^2) L_n[2(x^2 + p^2)], \quad (1.67)$$

où  $L_n(x) = e^x \partial_x^n (e^{-x} x^n) / n!$  sont les polynômes de Laguerre. On vérifie notamment que la valeur à l'origine de ces fonctions est

$$\mathcal{W}_n(0, 0) = \frac{(-1)^n}{\pi}. \quad (1.68)$$

On constate donc seuls les états nombres impairs de photons présenteront une négativité à l'origine, comme on pouvait s'y attendre d'après la relation (1.65). Notons que l'état de vide de photon  $n = 0$  est caractérisé par une représentation de Wigner gaussienne. Il s'agit néanmoins d'un état non-classique du champ lumineux, puisque le vide classique n'est pas affecté de fluctuations, comme nous l'avons évoqué précédemment.

### D.2.2 Etats "Chats de Schrödinger"

Par analogie avec la fameuse expérience de pensée [2, 33], on définit *un chat de Schrödinger optique* comme la superposition quantique de deux états quasi-classiques suffisamment *incompatibles*

$$|\psi_{\text{cat}}^\pm\rangle = \mathcal{N}_\pm(\alpha) [|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle], \quad (1.69)$$

avec la constante de normalisation suivante

$$\mathcal{N}_\pm(\alpha) = \left[ 2 \left( 1 \pm e^{-2|\alpha|^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (1.70)$$

L'incompatibilité des états cohérents se traduit en termes de recouvrement par

$$|\langle \alpha | -\alpha \rangle| = e^{-2|\alpha|^2} \ll 1. \quad (1.71)$$

Une condition nécessaire est une amplitude  $|\alpha|^2$  suffisamment grande. Cette "taille" correspond simplement au nombre moyen de photons contenu dans l'état quasi-classique  $|\alpha\rangle$ .

Afin de déterminer la fonction de Wigner de ces états, on se place maintenant dans le cas où l'amplitude  $\alpha$  est réelle, ce qui correspond simplement à un choix d'origine des

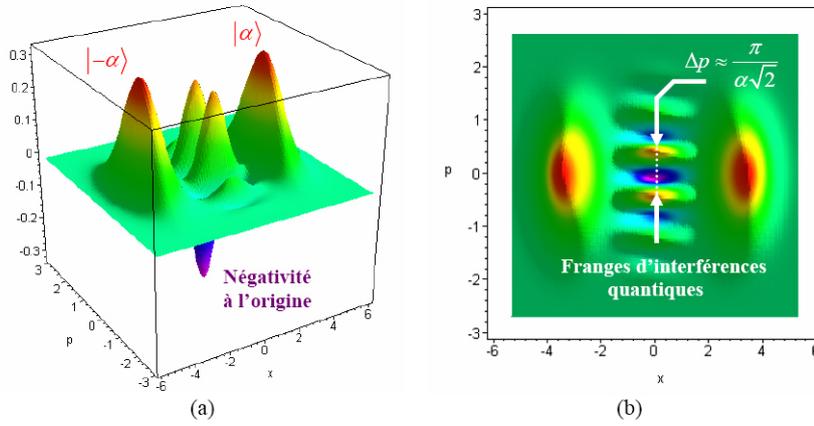
phases dans le plan de Fresnel. En utilisant la relation (1.34), on montre que la fonction de Wigner d'un état "chat"  $|\psi_{\text{cat}}^{\pm}\rangle$  admet pour structure générale

$$\mathcal{W}_{\text{cat}}^{\pm}(x, p) = \mathcal{N}_{\pm}^2(\alpha) [\mathcal{W}_{\alpha}(x, p) + \mathcal{W}_{-\alpha}(x, p) + \mathcal{I}_{\pm}(x, p)], \quad (1.72)$$

où  $\mathcal{W}_{\alpha}(x, p)$  est la fonction de Wigner gaussienne (1.45) d'un état cohérent d'amplitude  $\alpha$  et  $\mathcal{I}_{\pm}(x, p)$  représente un terme d'interférences quantiques donné par

$$\mathcal{I}_{\pm}(x, p) = \pm \frac{2}{\pi} e^{-(x^2+p^2)} \cos(2\sqrt{2}\alpha p). \quad (1.73)$$

Ce terme est la manifestation directe des *cohérences quantiques* existant entre les deux états quasi-classiques  $|\alpha\rangle$  et  $|\alpha\rangle$ . C'est également une signature du caractère non-gaussien de cet état.



**Figure 1.4:** Fonction de Wigner d'un état "chat de Schrödinger"  $|\psi_{\text{cat}}^{-}\rangle$  de taille  $|\alpha|^2 = 6$  photons - (a) On distingue bien les deux pics gaussiens correspondant aux deux états cohérents ainsi que des oscillations dues aux interférences quantiques entre ces derniers. La fonction de Wigner prend alors sa valeur minimale et négative à l'origine de l'espace des phases, avec  $\mathcal{W}_{\text{cat}}^{-}(0, 0) = -0.318$ . (b) Structure des franges d'interférences quantiques entre les deux états quasi-classiques.

Les franges d'interférences quantiques révèlent des oscillations à l'échelle  $\Delta p = \pi / \sqrt{2|\alpha|^2}$ . Cette dernière peut devenir bien inférieure à celle de la limite quantique standard  $(\Delta p)_{\text{LQS}} = 1/\sqrt{2}$  lorsque la taille du chat  $|\alpha|^2$  est suffisamment grande. On parle alors de *structure sub-Planck* [109]. C'est l'un des aspects les plus intéressants de ces états notamment pour la métrologie quantique où de telles échelles permettent de battre la limite quantique standard. En effet, cette dernière constitue une graduation bien plus fine que l'échelle de Planck fixée par la limite quantique standard. Nous reviendrons plus en détails sur ces propriétés dans la troisième partie de cette thèse.

### D.3 Intérêts et applications

Afin d'illustrer l'intérêt de tels états non-gaussiens, nous allons énumérer brièvement un certain nombre d'applications potentielles, qui sont des champs de recherche très actifs à l'heure actuelle.

## Calcul quantique universel

Un calcul quantique effectué avec des ressources gaussiennes ne permet pas de gain significatif, puisqu'il peut être simulé avantageusement sur un ordinateur classique, en utilisant les fonctions de Wigner comme de véritables distributions de probabilités. En revanche, une superposition quantique - un chat de Schrödinger optique par exemple - pourrait être utilisée comme un bit quantique ou qubit qui est la brique élémentaire de la logique quantique. De tels protocoles nécessitent cependant des chats de taille suffisante si le codage des états logiques  $|0, 1\rangle$  se fait avec les états  $|\pm\alpha\rangle$ . Un traitement théorique [34] montre qu'un chat de taille  $|\alpha|^2 \simeq 6$  photons est suffisant pour effectuer du calcul quantique.

## Distillation d'intrication

La distillation d'intrication consiste à augmenter le degré d'intrication d'un état initialement intriqué. Il a été démontré [35] qu'une telle opération de distillation est impossible sans avoir recours des ressources non gaussiennes ou des mesures non gaussiennes dont on précisera la signification dans la deuxième partie de cette thèse. Une telle distillation est en fait indispensable si l'on souhaite réaliser des réseaux de communications quantiques dans lesquels l'intrication joue un rôle crucial. En effet, le transfert d'information quantique d'un relais quantique à un autre se fait par téléportation quantique qui est d'autant plus efficace et sûre que le degré d'intrication est élevé. Ainsi, la distillation d'intrication permettrait de compenser, en amont et en aval des noeuds du réseau, les pertes liées à la propagation de la lumière sur les segments de ce dernier. Elles permettraient également de se prémunir de celles intervenant lors des processus d'écriture et de lecture au sein de mémoires quantiques, qui joueraient alors le rôle de répéteurs quantiques.

## Tests "sans échappatoire" des inégalités de Bell

Les expériences de violation [9] des inégalités de Bell [6] n'écartent pas toutes les théories à variables cachées, puisque les efficacités réduites des détecteurs utilisés permettent l'existence de modèles rendant compte des résultats expérimentaux. Récemment, des tests "sans échappatoires" ont été proposés en variables continues [37, 38] avec des états non-gaussiens, ce qui permet d'écarter dès le départ toute théorie à variables cachées. En effet, une fonction de Wigner positive constituerait elle-même un tel modèle classique, en jouant le rôle de la distribution de probabilité décrivant le comportement de l'état par un processus stochastique. Ces expériences devraient être accessibles dans un avenir proche, même si la préparation des ressources nécessaires reste très difficile.

## Métrieologie quantique

La métrologie quantique regroupe les protocoles de manipulation d'états permettant d'estimer un paramètre quelconque avec la meilleure sensibilité, en mettant à profit les propriétés quantiques de certains états non-classiques de la lumière. En effet, une mesure optique est ultimement limitée par le bruit quantique de la lumière. En manipulant ce dernier et en préparant la lumière dans des états quantiques judicieux, il devient possible d'améliorer l'estimation d'un paramètre quelconque. Nous montrerons dans la troisième

partie de cette thèse comment de nouveaux types d'appareils de mesure pourraient réaliser de tels protocoles de métrologie quantique.

---

# Protocoles Quantiques

---

## Sommaire

<b>A</b>	<b>Évolutions quantiques</b>	<b>33</b>
A.1	Evolution unitaire	33
A.2	Processus quantique	35
A.3	Illustrations en optique quantique	38
<b>B</b>	<b>Préparation conditionnelle</b>	<b>43</b>
B.1	Règle de projection	43
B.2	Principe général	45
B.3	Illustration en optique quantique	48
<b>C</b>	<b>Conclusions</b>	<b>51</b>

---

*Nous venons d'introduire les outils nécessaires à la description quantique de la lumière. Nous allons à présent nous intéresser aux protocoles quantiques qui permettent de manipuler ces états. Nous en donnerons une description très générale, inspirée des traitements modernes de la décohérence et orientée vers l'étude de la mesure quantique. Nous généraliserons le postulat de la mesure afin de traiter les protocoles de préparation conditionnelle qui mettent à profit la mesure pour manipuler des états quantiques.*

## A Évolutions quantiques

Les évolutions quantiques permettent de manipuler les états quantiques. Il peut s'agir d'évolutions unitaires décrites par l'équation de Schrödinger ou d'évolutions plus générales que l'on appelle *processus quantique*.

### A.1 Evolution unitaire

L'évolution la plus simple est celle d'un état quantique pur  $|\psi\rangle$  qui est régie dans le régime non-relativiste par l'équation de Schrödinger. Cette dernière prend alors la forme suivante

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{H}$  désigne l'opérateur d'énergie du système que l'on appelle également l'*hamiltonien*. Ce dernier peut éventuellement dépendre du temps. Cette équation se généralise sans difficulté au cas d'un mélange statistique  $\hat{\rho} = \sum_m p_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$  pour devenir

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)], \quad (2.2)$$

où  $[\cdot, \cdot]$  désigne le commutateur habituel défini par  $[A, B] = AB - BA$ .

*Cas indépendant du temps.* – Pour un hamiltonien indépendant du temps  $\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}$ , l'intégration de l'équation de Schrödinger (2.1) conduit à introduire l'*opérateur d'évolution*

$$\hat{U}(t, t_o) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}(t - t_o) \right], \quad (2.3)$$

tel que

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_o) \hat{\rho}(t_o) \hat{U}^\dagger(t, t_o). \quad (2.4)$$

De plus, cet opérateur d'évolution vérifie la relation de composition

$$\hat{U}(t_2, t_o) = \hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t_o), \quad (2.5)$$

qui conduit immédiatement à

$$\hat{U}(t, t_o) \hat{U}(t, t_o)^\dagger = \hat{1}. \quad (2.6)$$

On parle alors d'évolution *unitaire* qui assure la normalisation des probabilités après l'évolution de l'état quantique.

*Cas dépendant du temps.* – Pour un hamiltonien dépendant du temps  $\hat{\mathcal{H}}(t)$ , l'intégration peut se faire de la même manière en segmentant l'intervalle de temps  $t - t_o$  en  $N$  intervalles de largeur  $\epsilon$  suffisamment petite. Ainsi, entre un instant  $t_k$  et  $t_{k+1} = t_k + \epsilon$ , l'opérateur d'évolution est simplement

$$\hat{U}(t_{k+1}, t_k) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}(t_k) \epsilon \right]. \quad (2.7)$$

La relation de composition (2.5) est toujours valable et conduit à

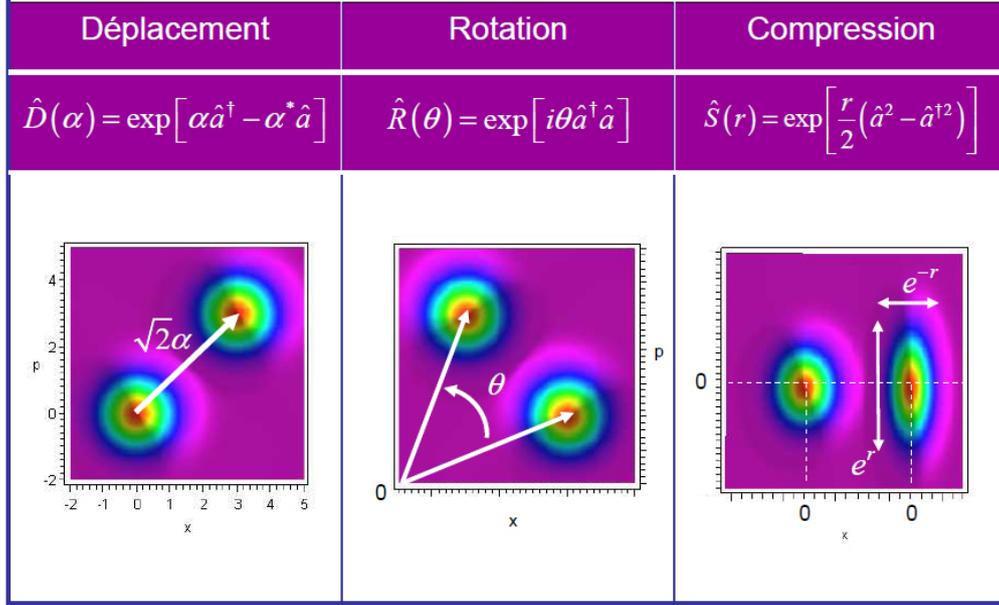
$$\hat{U}(t, t_o) = \hat{U}(t, t_{N-1}) \dots \hat{U}(t_{k+1}, t_k) \dots \hat{U}(t_1, t_o). \quad (2.8)$$

L'opérateur d'évolution  $\hat{U}(t, t_o)$  s'écrit finalement comme [39]

$$\hat{U}(t, t_o) = \hat{T} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t dt' \hat{\mathcal{H}}(t') \right], \quad (2.9)$$

où  $\hat{T}$  désigne l'opérateur de produit chronologique qui reproduit l'ordre chronologique de la relation (2.8).

En optique quantique, l'essentiel des opérations unitaires se base sur des combinaisons de déplacements, de rotations et de compressions que nous avons introduit dans le premier chapitre pour définir respectivement les états cohérents, les quadratures du champ et les états comprimés. La figure 2.1 résume leur action sur un état cohérent.



**Figure 2.1:** Opérations unitaires de base de l'optique quantique - L'action de ces opérations sur un état gaussien est représentée dans l'espace des phases  $(x,p)$ .

## A.2 Processus quantique

Un *processus quantique* constitue l'évolution la plus générale que peut subir un état quantique. C'est le cadre naturel pour modéliser n'importe quel protocole manipulant l'état quantique d'un système. En effet, un système quantique est rarement *isolé* et on ne maîtrise pas toujours l'interaction de ce dernier avec ce que l'on appelle *l'environnement*. Nous allons nous intéresser aux outils qui permettent de décrire ce genre d'évolution, puis les utiliser pour traiter de la manière la plus générale le processus de mesure, en englobant l'appareil de mesure dans l'environnement.

### A.2.1 Évolution assistée par un environnement

Un système quantique S décrit par sa matrice densité  $\hat{\rho}_S$  peut se retrouver couplé - même faiblement - à un autre système que l'on appelle *l'environnement*. Ce dernier est généralement décrit par une matrice densité  $\hat{\rho}_E$  dont il est toujours possible de prendre *une purification*, en considérant un environnement encore plus grand, comme nous allons maintenant le voir.

#### Purification d'un état quantique

L'environnement E est généralement décrit par un mélange statistique,

$$\hat{\rho}_E = \sum_k p_k |E_k\rangle\langle E_k| \quad (2.10)$$

où  $|E_k\rangle$  désigne les états propres de l'opérateur densité  $\hat{\rho}_E$  qui constitue une base de l'espace de Hilbert de l'environnement E tel que  $\langle E_k | E_l \rangle = \delta_{k,l}$ .

Si l'on prend en compte un autre environnement "fictif" F, ce mélange statistique peut en fait s'obtenir à partir d'un état intriqué des environnements E et F

$$|\psi_{E,F}\rangle = \sum_k \sqrt{p_k} |E_k, F_k\rangle, \quad (2.11)$$

où  $\{|F_k\rangle\}$  désigne une base de l'espace de Hilbert de l'environnement F tel que  $\langle F_k | F_l \rangle = \delta_{k,l}$ .

On retrouve l'état de l'environnement E en procédant à une somme sur tous les états de l'environnement F que l'on appelle *trace partielle*, et qui est définie par :

$$\text{Tr}_F \{ |\psi_{E,F}\rangle \langle \psi_{E,F}| \} = \sum_m \langle F_m | \psi_{E,F}\rangle \langle \psi_{E,F} | F_m \rangle = \hat{\rho}_E. \quad (2.12)$$

Ainsi, l'état intriqué  $|\psi_{E,F}\rangle$  constitue ce que l'on appelle *une purification* du mélange statistique  $\hat{\rho}_E$ . L'environnement F est introduit de manière artificielle pour purifier l'état quantique de l'environnement E afin de conduire certains développements, comme nous allons maintenant le voir.

### Évolution unitaire du système et de l'environnement

L'évolution du système S et de l'environnement E doit être une évolution unitaire, décrit par un opérateur d'évolution  $\hat{U}_{SE}(t)$ , telle que

$$\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E \longrightarrow \hat{U}_{SE}(t) (\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E) \hat{U}_{SE}^\dagger(t). \quad (2.13)$$

A partir de (2.13), l'évolution de l'état du système S est obtenue en effectuant la trace partielle sur l'environnement E :

$$\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_E \left[ \hat{U}_{SE}(t) (\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E) \hat{U}_{SE}^\dagger(t) \right]. \quad (2.14)$$

La purification de l'environnement  $|\psi_{E,F}\rangle$  révèle alors tout son intérêt dans le développement de cette trace. En effet, cette dernière peut également s'écrire comme

$$\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_{E,F} \left[ \hat{U}_{SE}(t) \hat{\rho}_S \otimes |\psi_{E,F}\rangle \langle \psi_{E,F}| \hat{U}_{SE}^\dagger(t) \right]. \quad (2.15)$$

En explicitant cette trace sur les états de E et F, l'évolution du système admet pour forme générale

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{k,l} \hat{M}_{k,l}(t) \hat{\rho} \hat{M}_{k,l}^\dagger(t), \quad (2.16)$$

où  $\hat{M}_{k,l}(t) = \langle E_k, F_l | \hat{U}_{SE}(t) | \psi_{E,F} \rangle$  vérifiant la relation de fermeture

$$\sum_{k,l} \hat{M}_{k,l}^\dagger(t) \hat{M}_{k,l}(t) = \hat{1}_S. \quad (2.17)$$

On constate donc que l'interaction du système avec un environnement nécessite toujours une connaissance précise de ce dernier et de son interaction avec le système malgré la trace partielle. Il existe cependant un résultat général qui apporte une simplification inattendue.

### A.2.2 Représentations de Kraus

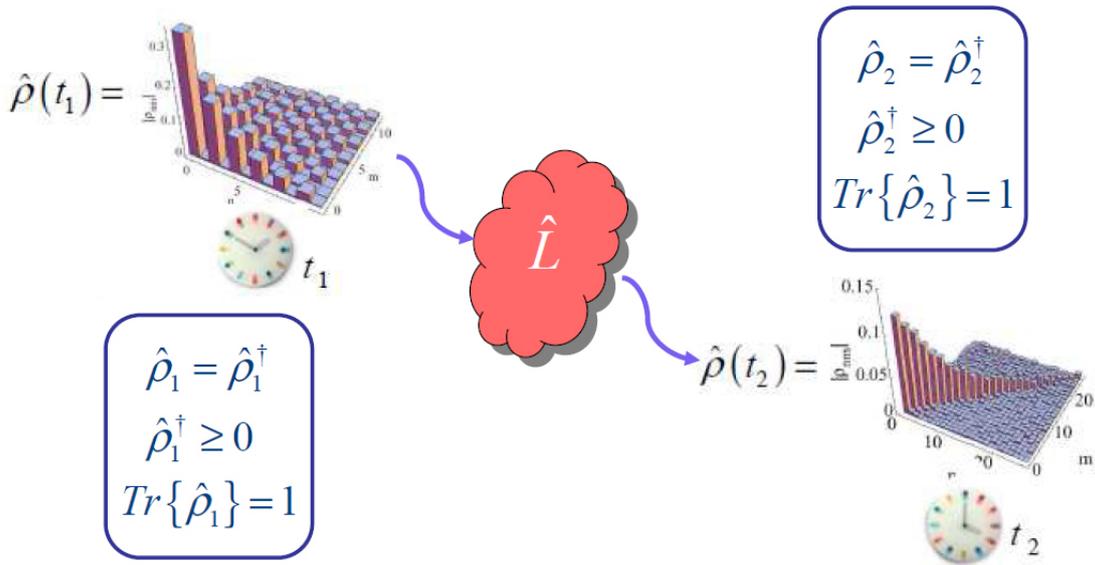
L'expression (2.16) de l'évolution du système, assistée par un environnement, constitue ce que l'on appelle *une représentation de Kraus* [40, 41] définie de manière générale par

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{\mu} \hat{K}_{\mu}(t) \hat{\rho} \hat{K}_{\mu}^{\dagger}(t), \quad (2.18)$$

où les opérateurs  $\hat{K}_{\mu}$  désignent les opérateurs de Kraus du processus quantique ainsi représenté. Ces derniers vérifient également la relation de fermeture suivante

$$\sum_{\mu} \hat{K}_{\mu}^{\dagger}(t) \hat{K}_{\mu}(t) = \hat{1}. \quad (2.19)$$

Ainsi, comme l'illustre la figure 2.2, un processus quantique manipule un état quantique  $\hat{\rho}(t_1)$  pour donner un autre état quantique  $\hat{\rho}(t_2)$ . Cette manipulation est mathématiquement représentée par un opérateur linéaire  $\hat{L}$  agissant sur l'ensemble des états de l'espace de Hilbert.



**Figure 2.2:** Processus quantique manipulant un état quantique  $\hat{\rho}(t_1)$  pour donner un autre état quantique  $\hat{\rho}(t_2)$ . – Dans un espace de Hilbert de dimension finie  $D$ , le processus quantique se réduit aux transformations de chacun des  $D^2$  éléments d'une matrice densité initiale vers ceux d'une autre matrice densité.

Pour n'importe quel état initial  $\hat{\rho}$ , le processus quantique doit toujours donner un état quantique. L'opérateur linéaire  $\hat{L}$  doit alors satisfaire les conditions suivantes :

1. l'hermiticité  $(\hat{L}[\hat{\rho}])^\dagger = \hat{L}[\hat{\rho}]$ ,
2. la positivité  $\hat{L}[\hat{\rho}] \geq 0$ ,
3. la normalisation  $\text{Tr}\{\hat{L}[\hat{\rho}]\} = 1$ .

De plus, l'opérateur  $\hat{L}$  doit être *complètement* positif, c'est-à-dire que pour tout état intriqué  $|\psi_{S,E}\rangle$ , on doit avoir :

$$\langle \psi_{S,E} | \hat{L} \otimes \hat{1}_E [\rho_{\hat{S},E}] | \psi_{S,E} \rangle \geq 0 \quad (2.20)$$

quel que soit l'état bipartite  $\hat{\rho}_{S,E}$  sur lequel le processus  $\hat{L}_S \otimes \hat{1}_E$  agit. En effet, il peut exister des opérateurs  $\hat{L}$  vérifiant les conditions (A.2.2) sans être complètement positifs. Cette condition assure en fait une évolution physiquement acceptable de l'état  $\hat{\rho}_{S,E}$  qui se ramène à une évolution unitaire dans un espace de Hilbert plus grand.

### Théorème de Kraus

Lorsque ces quatre conditions sont remplies, le théorème de Kraus [40] assure l'existence d'une représentation de Kraus (2.18) pour un tel processus  $\hat{L}$ ,

$$\hat{\rho}(t) = \hat{L}[\hat{\rho}] = \sum_{\mu=1}^{D^2} \hat{K}_\mu(t) \hat{\rho} \hat{K}_\mu^\dagger(t), \quad (2.21)$$

où  $D$  est la dimension de l'espace de Hilbert du système. C'est le résultat important de ce théorème. En effet, il réduit le nombre d'opérateurs de Kraus  $\hat{K}_\mu$  au carré de la dimension de l'espace de Hilbert du système.

Sans reproduire la démonstration de ce théorème, nous pouvons donner une justification simple de ce résultat qui est révélée par la figure 2.2. En effet, pour transformer une matrice densité à  $D^2$  éléments en une autre matrice densité à  $D^2$  éléments, il est suffisant d'avoir  $D^2$  matrices  $\hat{K}_\mu$  modifiant un à un chacun des  $D^2$  éléments. Ainsi, l'évolution assistée par un environnement - même très grand - ne nécessite qu'un nombre réduit d'opérateurs de Kraus, contrairement à ce que laisse croire l'expression (2.16). Par exemple, pour un bit quantique ( $D = 2$ ), quatre matrices à quatre éléments suffisent pour décrire n'importe quelle évolution de ce qubit, y compris son couplage avec le reste de l'Univers!

Enfin, il faut préciser que cette décomposition n'est pas unique. En effet, le processus quantique  $\hat{L}$  peut également être décrit par les opérateurs de Kraus

$$\hat{J}_\nu = \sum_{\mu} M_{\mu,\nu} \hat{K}_\mu, \quad (2.22)$$

où les  $M_{\mu\nu}$  sont les éléments d'une matrice unitaire  $M$  telle que  $M^\dagger M = 1$ . On vérifie alors facilement que

$$\hat{L}[\hat{\rho}] = \sum_{\mu} \hat{K}_\mu \hat{\rho} \hat{K}_\mu^\dagger = \sum_{\nu} \hat{J}_\nu \hat{\rho} \hat{J}_\nu^\dagger. \quad (2.23)$$

Cette ambiguïté de la décomposition de Kraus reflète en fait la possibilité de tracer sur une autre base de l'environnement E. On passe effectivement d'une base à une autre par une transformation unitaire. Cette ambiguïté s'avère toutefois intéressante, car elle conduit à différentes interprétations pour un même processus quantique  $\hat{L}$ . Chaque interprétation correspond alors à un ensemble d'opérateurs de Kraus.

## A.3 Illustrations en optique quantique

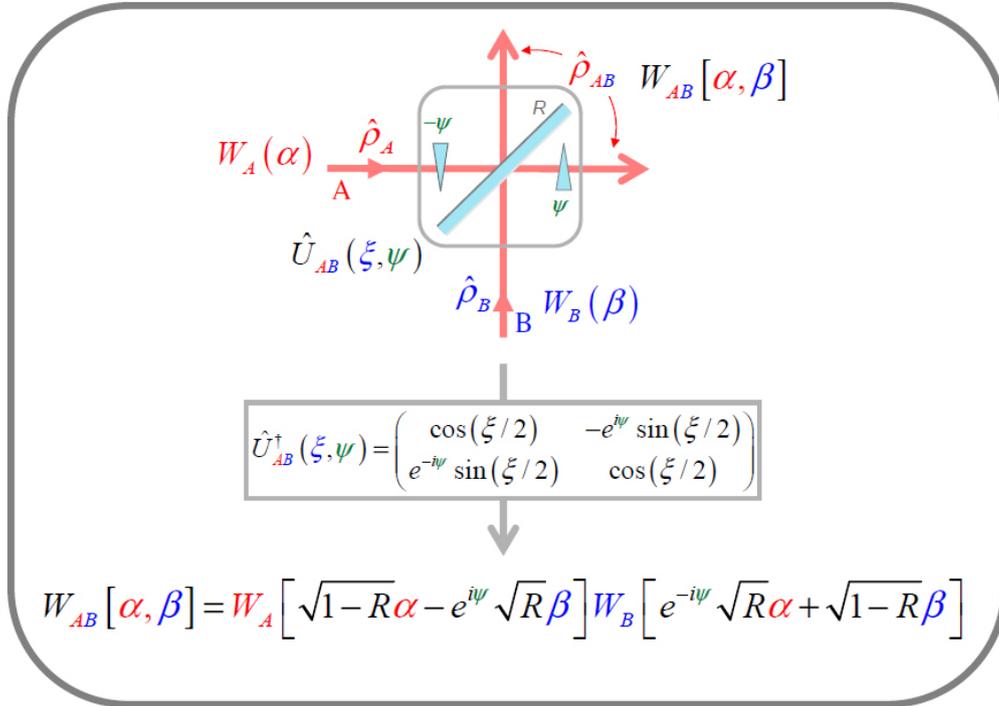
### Modèle d'interaction linéaire

Dans les sections précédentes, nous avons étudié l'évolution d'un système en interaction avec un environnement. Lorsque le couplage entre le système et son environnement est

faible, ce qui est généralement le cas, l'évolution unitaire peut se réduire à un modèle linéaire. Nous détaillons maintenant la réalisation de ce modèle d'interaction en optique quantique. L'interaction linéaire entre deux faisceaux lumineux  $A$  et  $B$  est décrite par l'opérateur d'évolution unitaire

$$\hat{U}_{AB}(\xi, \psi) = \exp \left[ \frac{i\xi}{2} \left( e^{-i\psi} \hat{a} \hat{b}^\dagger + e^{i\psi} \hat{a}^\dagger \hat{b} \right) \right], \quad (2.24)$$

où  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  désignent respectivement les opérateurs d'annihilation d'un photon dans le mode  $A$  et le mode  $B$ . Cette évolution linéaire se réalise très facilement à l'aide d'une lame séparatrice de réflectivité  $R = \sin^2(\xi/2)$  et deux lames à retard  $\pm\psi$ , comme illustré sur la figure 2.3.



**Figure 2.3:** Modèle d'interaction linéaire entre deux faisceaux lumineux  $A$  et  $B$ . –L'interaction linéaire la plus générale s'implémente à l'aide d'une lame séparatrice de réflectivité  $R = \sin^2(\xi/2)$  et deux lames à retard  $\pm\psi$ . La matrice agit sur les vecteurs d'opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$ , dont les valeurs propres sont  $\alpha$  et  $\beta$ . L'évolution des états quantiques en termes de leurs fonctions de Wigner est également précisée (cf. texte).

Pour la suite de cette thèse, il est également intéressant de préciser l'action d'une telle évolution en termes des fonctions de Wigner. D'après la définition générale de la fonction de Wigner (1.35), la représentation de Wigner de l'état  $\hat{\rho}_{AB}$  est donnée par :

$$\mathcal{W}_{AB}(x, p; x', p') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dudv e^{i(up+vp')} \langle x - u/2, x' - v/2 | \hat{\rho}_{AB} | x + u/2, x' + v/2 \rangle, \quad (2.25)$$

avec

$$\hat{\rho}_{AB} = \hat{U}_{AB} (\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) \hat{U}_{AB}^\dagger. \quad (2.26)$$

En faisant agir l'opération unitaire  $\hat{U}_{AB}^\dagger$  sur le ket  $|x + u/2, x' + v/2\rangle_{AB}$ , l'expression (2.25) se factorise sous la forme suivante :

$$\mathcal{W}_{AB}[\alpha, \beta] = \mathcal{W}_A \left[ \sqrt{1 - R}\alpha - e^{i\psi} \sqrt{R}\beta \right] \mathcal{W}_B \left[ e^{-i\psi} \sqrt{R}\alpha + \sqrt{1 - R}\beta \right], \quad (2.27)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent les valeurs propres des opérateurs de champ dans les modes A et B définies par

$$\alpha = (x + ip) / \sqrt{2}, \quad \beta = (x' + ip') / \sqrt{2}. \quad (2.28)$$

Cette propriété (2.27) de la fonction de Wigner nous sera très utile tout au long de cette thèse. Elle est résumée sur l'encadré de la figure 2.3.

## Modélisation des Réseaux de Communication Quantique

Nous terminons cette section en donnant des illustrations d'un tel traitement en optique quantique, plus particulièrement dans le contexte de l'information quantique et des réseaux de communication quantique abordé dans l'introduction.

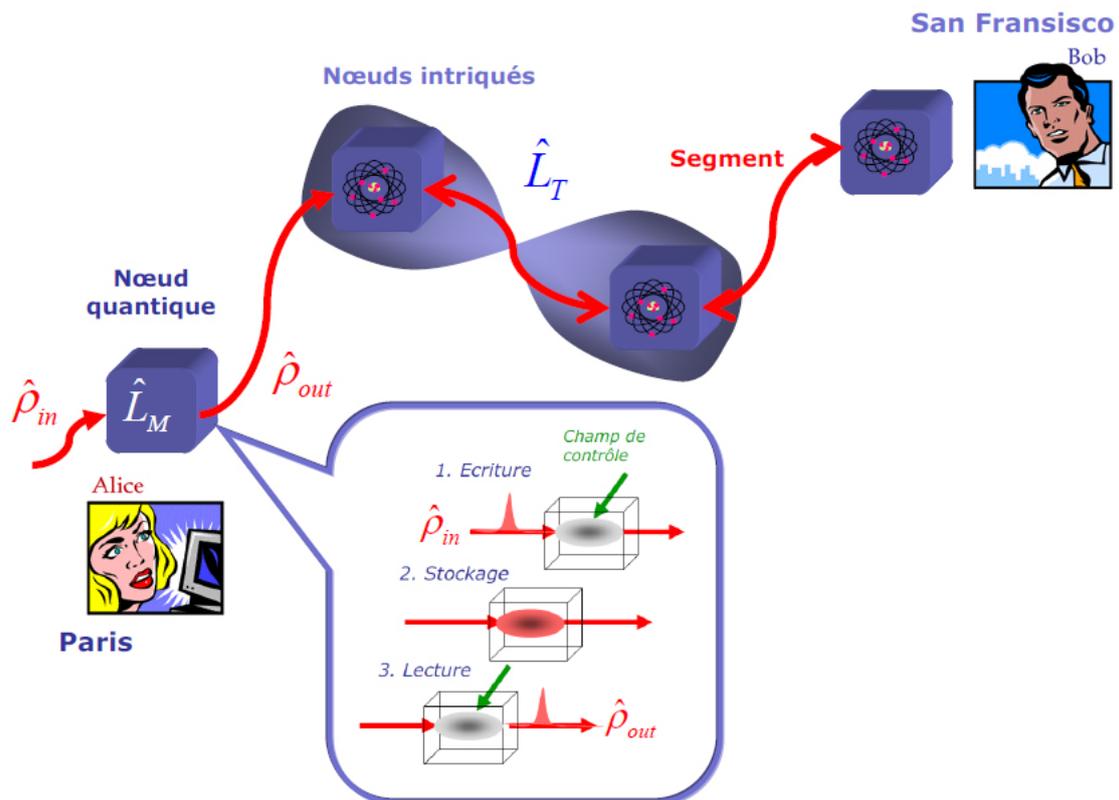
Les réseaux de communication quantique ont pour ambition de remplacer les réseaux de communication actuels. On parle même d'*internet quantique* [43]. Un embryon d'un tel réseau est illustré sur la figure 2.4. L'une des forces de ces réseaux est la possibilité de distribuer de l'intrication entre différents noeuds distants. Pour cela, il suffit par exemple de stocker sur deux noeuds distants de la lumière dans un état intriqué [47]. Avec une telle intrication, il devient alors possible de téléporter de l'information quantique d'un noeud à un autre. Nous allons voir comment le traitement en termes de processus quantique permet de modéliser entièrement un tel réseau.

**Noeuds quantiques.** – Dans un réseau de communication quantique, un noeud est une mémoire quantique qui permet de stocker et de manipuler l'état quantique de la lumière. Une telle mémoire repose par exemple sur le phénomène de transparence électromagnétiquement induite (EIT) dans des systèmes atomiques à trois niveaux [44].

Comme illustré sur la figure 2.4, la manipulation d'un état quantique  $\hat{\rho}_{in}$  se fait en trois phases. Après la phase d'écriture, la phase de stockage est celle où l'on peut manipuler l'état de la mémoire avant la phase de lecture. Cette dernière libère une impulsion lumineuse dans un état  $\hat{\rho}_{out}$ , lorsque l'on rebranche le champ de contrôle qui induit de nouveau la transparence de l'ensemble atomique.

La description la plus générale de la mémoire quantique est donnée par un processus quantique  $\hat{L}_M$  tel que

$$\hat{\rho}_{out} = \hat{L}_M [\hat{\rho}_{in}] = \sum_{\mu=1}^{D^2} \hat{K}_\mu \hat{\rho}_{in} \hat{K}_\mu^\dagger. \quad (2.29)$$



**Figure 2.4:** Un réseau de communication quantique entre Alice et Bob. -Les noeuds d'un tel réseau sont des mémoires quantiques permettant de stocker et de manipuler les états quantiques de la lumière, qui se propagent dans les segments du réseau. Ces mémoires sont par exemple basées sur le phénomène d'EIT. Les segments sont constitués de fibres optiques acheminant la lumière d'un noeud à un autre. Ils permettent ainsi de distribuer de l'intrication sur les différents noeuds du réseau.

Une telle caractérisation d'une mémoire n'a été réalisée expérimentalement que très récemment [45, 46]. Il s'agit de ce que l'on appelle *une tomographie quantique de processus* (QPT) qui consiste à déterminer les opérateurs de Kraus  $\hat{K}_\mu$ . Pour cela, on sonde la mémoire avec une collection d'états cohérents de différentes amplitudes. On recherche alors les opérateurs de Kraus donnant les matrices densités les plus proches de celles que l'on mesure en sortie. On reviendra sur les méthodes de reconstruction des états quantiques dans la deuxième partie de cette thèse.

Ensuite, si le rôle de la mémoire quantique est de jouer le rôle de répéteur quantique, l'état de sortie devrait être idéalement proche d'un état cible  $\hat{\rho}_{tar}$  [  $\hat{\rho}_{in}$  ] dépendant de l'état d'entrée  $\hat{\rho}_{in}$ . La performance du répéteur peut alors être évaluée à l'aide de la fidélité [48] définie de manière générale par

$$\mathcal{F}_{rep} = \left( \text{Tr} \left\{ \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_{tar}} \hat{\rho}_{out} \sqrt{\hat{\rho}_{tar}}} \right\} \right)^2. \quad (2.30)$$

Le répéteur joue son véritable rôle lorsque cette fidélité  $\mathcal{F}_{rep} \simeq 1$ . Si l'on cherche maintenant à qualifier les performances de stockage de cette mémoire, l'état cible devra simplement être remplacé par l'état d'entrée  $\hat{\rho}_{tar} = \hat{\rho}_{in}$ .

La connaissance des opérateurs de Kraus du processus quantique décrivant la mémoire permet donc de qualifier ses performances. Dans un avenir proche, ce genre de caractérisation deviendra indispensable pour véritablement modéliser tout système prétendant manipuler des états quantiques.

**Canaux quantiques.** — Dans un réseau de communication quantique, les canaux quantiques regroupent les segments en fibres optiques reliant deux noeuds du réseau et les protocoles de téléportation quantique (voir Interlude IV) qui permettent de transférer l'information entre deux noeuds intriqués. La description en termes de processus quantiques permet ici de traiter les phénomènes de décohérence induite par la propagation dans les fibres optiques, mais aussi les protocoles de téléportation quantique entre deux noeuds intriqués.

Les tomographies des processus quantiques associés à chacun de ces canaux permettraient d'avoir une modélisation complète, au niveau quantique, du réseau. Une telle description est indispensable si l'on veut traiter de l'information véhiculée par des états fortement non-classiques, comme des états "chats de Schrödinger" qui sont très sensibles aux perturbations comme nous le verrons dans la troisième partie.

## B Préparation conditionnelle

Nous allons à présent nous intéresser à une autre manière de manipuler les états quantiques de la lumière. Il s'agit des protocoles de *préparations conditionnelles* qui tirent profit de la mesure quantique et de la règle de projection.

### B.1 Règle de projection

#### B.1.1 Cas idéal

Dans l'introduction, nous avons présenté la forme la plus simple de la règle de projection qui consiste à une remise à jour de l'état du système, après une mesure effectuée sur ce dernier. L'état du système est alors simplement l'état dans lequel le système est mesuré.

Dans l'expérience du "chat de Schrödinger", le chat joue à merveille le rôle d'appareil de mesure. C'est un système macroscopique dont l'état - mort ou vivant - permet de réaliser une mesure de l'état du noyau atomique. Ainsi, un chat mort indique que le noyau est dans son état fondamental  $|f\rangle$  alors qu'un chat vivant indique que le noyau est dans son état excité  $|e\rangle$ . Les mesures sur le noyau sont en fait caractérisées par ces états. On doit à John Von Neumann [4] la représentation de ces mesures en termes de projecteurs :

$$\hat{P}_{\text{mort}} = |f\rangle\langle f|, \quad \hat{P}_{\text{vivant}} = |e\rangle\langle e|. \quad (2.31)$$

Ces derniers agissent sur l'espace de Hilbert du système mesuré et constituent une résolution de son identité  $\hat{P}_{\text{mort}} + \hat{P}_{\text{vivant}} = \hat{1}$ .

De manière plus générale, l'état du système mesuré  $|\psi\rangle$  à la lecture du résultat "n" est projeté sur l'état correspondant à ce résultat,

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi_n^{\text{cond}}\rangle = \frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle^{1/2}}, \quad (2.32)$$

où les projecteurs  $\hat{P}_n$  constituent une ensemble complet de projecteurs orthogonaux tels que

$$\hat{P}_m\hat{P}_n = \delta_{m,n}\hat{P}_n, \quad \sum_n \hat{P}_n = \hat{1}. \quad (2.33)$$

La projection (2.32) se généralise sans grande difficulté à un système décrit par un opérateur densité  $\hat{\rho}$ ,

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho}_n^{\text{cond}} = \frac{\hat{P}_n\hat{\rho}\hat{P}_n}{\text{Tr}\{\hat{P}_n\hat{\rho}\hat{P}_n\}}. \quad (2.34)$$

Il s'agit de l'énoncé habituel du postulat de projection introduit par John Von Neumann [4] en 1932. Il donne l'état conditionné sur le résultat de la mesure 'n', obtenu avec une probabilité donnée par la règle de Born

$$\text{Pr}(n) = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{P}_n\}. \quad (2.35)$$

On parle également de *mesures projectives* qui sont très intéressantes puisque l'état conditionné est alors simplement donné par  $\hat{\rho}_n^{\text{cond}} = \hat{P}_n$ . Si l'on répète une autre mesure, immédiatement après la première mesure, le résultat de cette dernière devient même certain : c'est encore une fois le résultat 'n' puisque  $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$ .

Ce comportement est à l'origine de *l'effet Zénon quantique* où l'évolution d'un système peut être "gelée" par la répétition de mesures judicieuses. Ce genre d'expérience ont été par exemple réalisées au sein du groupe d'électrodynamique en cavité du laboratoire Kastler Brossel [51]. L'évolution d'un champ microonde injecté dans une cavité supraconductrice a été figée par des mesures successives du nombre de photons contenus dans la cavité. Ces mesures ont été réalisées à l'aide d'atomes de Rydberg dont l'interaction avec le champ est soigneusement contrôlée.

Enfin, lorsque le résultat de la mesure n'est pas utilisé pour conditionner l'évolution future du système, l'état du système mesuré est alors simplement un mélange statistique des différents états conditionnés :

$$\hat{\rho}_? = \sum_n \Pr(n) \hat{\rho}_n^{\text{cond}} = \sum_n \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n. \quad (2.36)$$

Nous reconnaissons en fait une représentation de Kraus (2.21) puisqu'il est facile de vérifier que

$$\sum_n \hat{P}_n^\dagger \hat{P}_n = \sum_n \hat{P}_n = \hat{1}. \quad (2.37)$$

Ce résultat est tout à fait compréhensible : *l'interaction du système avec l'appareil de mesure rentre dans le cadre général des évolutions quantiques décrites par des processus quantiques*. Ce simple constat nous sert maintenant de *point de départ* pour généraliser la règle de projection.

### B.1.2 Cas général

Dans le cas d'une *mesure généralisée "non lue"*, l'évolution du système mesuré doit être décrite par un processus quantique dont la représentation de Kraus la plus générale est

$$\hat{\rho}_? = \sum_{n,\mu} \hat{M}_{n,\mu} \hat{\rho} \hat{M}_{n,\mu}^\dagger, \quad (2.38)$$

où les opérateurs de Kraus vérifient toujours la relation de fermeture

$$\sum_{n,\mu} \hat{M}_{n,\mu}^\dagger \hat{M}_{n,\mu} = \hat{1}. \quad (2.39)$$

Nous avons volontairement indexé ces opérateurs sur deux indices  $(n, \mu)$  en jouant sur l'ambiguïté d'une décomposition de Kraus évoquée précédemment. Cette indexation nous permet de gagner en généralité par rapport à la règle de projection idéale (2.34). En effet, d'après le théorème de Kraus, nous devons avoir au plus  $D^2$  opérateurs de Kraus dans un espace de Hilbert de dimension  $D$ . Or, un appareil de mesure peut avoir un nombre de réponses  $N < D$ . Une sommation seulement sur les résultats de mesure "n" ne permettrait pas de rendre compte de l'évolution la plus générale.

Pour arriver à la règle de projection généralisée, nous mettons l'évolution (2.38) sous la forme d'un mélange statistique d'états conditionnés sur les résultats de mesure 'n' :

$$\hat{\rho}_? = \sum_n \Pr(n) \hat{\rho}_n^{\text{cond}}. \quad (2.40)$$

Les états conditionnés sont alors les résultats de la transformation suivante

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho}_n^{\text{cond}} = \sum_\mu \frac{\hat{M}_{n,\mu} \hat{\rho} \hat{M}_{n,\mu}^\dagger}{\Pr(n)}. \quad (2.41)$$

Nous obtenons *la règle de projection généralisée* qui se distingue de celle que l'on trouve habituellement dans la littérature [41, 42, 50] par la sommation sur les opérateurs de Kraus  $\{\hat{M}_{n,\mu}\}_\mu$ . Notons que cette règle de projection (2.41) ne constitue pas pour autant un processus quantique, puisque la transformation de l'état  $\hat{\rho}$  est non-linéaire à cause de la normalisation par la probabilité  $\text{Pr}(n)$  d'obtenir le résultat "n". Cette probabilité est ici donnée par une forme plus générale de la règle de Born [17] :

$$\text{Pr}(n) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \hat{\Pi}_n \right], \quad (2.42)$$

où

$$\hat{\Pi}_n = \sum_{\mu} \hat{M}_{n,\mu}^\dagger \hat{M}_{n,\mu}. \quad (2.43)$$

Il s'agit d'un opérateur *hermitien* et *positif* que l'on appelle élément POVM pour "Positive Operator Valued Measure" [41, 49]. Il est facile de vérifier que ces éléments POVM sont également une résolution de l'identité

$$\sum_{n=1}^N \hat{\Pi}_n = \hat{1}. \quad (2.44)$$

Contrairement aux mesures projectives décrites précédemment, ces opérateurs ne sont pas des projecteurs puisque nous avons en général  $\hat{\Pi}_m \hat{\Pi}_n \neq \delta_{m,n} \hat{\Pi}_n$ . On parle alors de *mesures généralisées* qui sont le cadre dans lequel nous allons décrire les protocoles de préparation conditionnelle.

La signification physique de ces opérateurs ne sera précisée que dans la deuxième partie de cette thèse, lorsque nous aborderons les *états quantiques et les propositions* que l'on peut faire sur ces derniers. Pour l'instant, les éléments POVMs nous permettent seulement de prédire le comportement des réponses d'un appareil de mesure. Ils ne révèlent pas les propriétés quantiques des mesures effectuées par l'appareil.

## B.2 Principe général

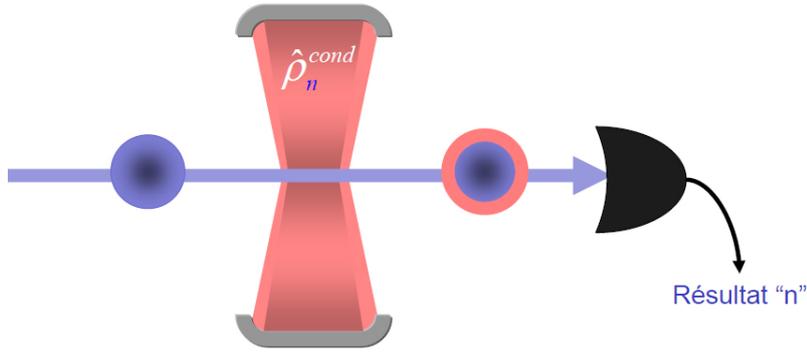
Un protocole de préparation conditionnelle tire profit de la règle de projection pour préparer le système mesuré dans des états particuliers. Ces derniers sont les états conditionnés (2.41) sur les résultats de la mesure effectuée sur le système. On distingue deux types de protocoles, ceux basés sur des *mesures non-destructives* (une minorité) et ceux utilisant des *mesures destructives* qui constituent la majorité des protocoles, notamment en optique quantique.

### Mesures non-destructives

Lors d'une mesure quantique non-destructive, le système mesuré est disponible après la mesure. En optique quantique, une telle situation est illustrée sur la figure 2.5 et s'inspire d'expériences d'électrodynamique en cavité [50].

Dans de telles expériences, des atomes interagissent avec le champ électromagnétique stocké dans une cavité de telle manière qu'ils permettent de réaliser des mesures non-destructives de ce champ. L'état de la lumière, conditionné sur le résultat de cette mesure, s'écrit alors de manière générale comme

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho}_n^{\text{cond}} = \sum_{\mu} \frac{\hat{M}_{n,\mu} \hat{\rho} \hat{M}_{n,\mu}^\dagger}{\text{Pr}(n)}, \quad (2.45)$$



**Figure 2.5:** Protocole de préparation conditionnelle basée sur des mesures non-destructives. – L’interaction d’un atome avec un champ électromagnétique stockée dans une cavité permet de réaliser une mesure non-destructive de ce dernier (voir par exemple [50]).

où les opérateurs de Kraus  $\{\hat{M}_{n,\mu}\}_\mu$  décrivent le détail du processus de mesure correspondant au résultat 'n'.

Lorsque l’interaction entre la lumière et l’atome est judicieusement contrôlée, une telle expérience permet de réaliser des mesures quantiques non-destructives (QND) du nombre de photons contenu dans la cavité [52]. Dans le cas idéal, les éléments POVM se réduisent aux projecteurs sur les états nombre de photons  $\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$ . Ainsi, il devient possible de préparer le champ dans des états de Fock à partir de ressources aussi simple que des états cohérents. On peut même vérifier que le résultat de mesures projectives successives est certain. Ce comportement a été par exemple vérifié expérimentalement [52] dans le groupe de Serge Haroche au Laboratoire Kastler Brossel.

## Mesures destructives

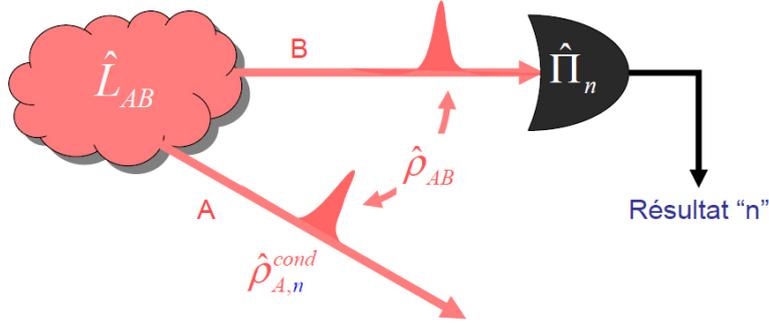
La majorité des mesures sont destructives, et cela est particulièrement vrai en optique quantique où la lumière doit être généralement absorbée. Une préparation conditionnelle basée sur de telles mesures doit donc utiliser au moins deux faisceaux lumineux dans un état intriqué, comme illustré sur la figure 2.6.

Deux impulsions lumineuses sont préparées dans un état intriqué  $\hat{\rho}_{AB}$  qui constitue la *ressource* du protocole. On effectue ensuite une mesure judicieuse sur l’impulsion lumineuse dans le *mode de conditionnement* B. Lorsque l’on obtient le résultat espéré 'n', l’état de la ressource suit la règle de projection (2.41)

$$\hat{\rho}_{AB} \longrightarrow \sum_{\mu} \frac{1}{\text{Pr}(n)} \left( \hat{\mathbb{1}}_A \otimes \hat{M}_{n,\mu} \right) \hat{\rho}_{AB} \left( \hat{\mathbb{1}}_A \otimes \hat{M}_{n,\mu}^\dagger \right). \quad (2.46)$$

L’état conditionné de l’impulsion dans le mode signal A est alors obtenu en prenant la trace partielle de (2.46) sur les états dans le mode B. Comme la mesure n’agit que sur le mode de conditionnement B, les propriétés de permutation circulaire de la trace permettent d’écrire l’état conditionné sous la forme générale

$$\hat{\rho}_{A,n}^{\text{cond}} = \frac{1}{\text{Pr}(n)} \text{Tr}_B \left[ \hat{\rho}_{AB} \hat{\mathbb{1}}_A \otimes \hat{\Pi}_n \right], \quad (2.47)$$



**Figure 2.6:** Protocole de préparation conditionnelle basée sur une mesure destructive. – *Un processus quantique  $\hat{L}_{AB}$  permet de préparer deux impulsions lumineuses dans un état intriqué  $\hat{\rho}_{AB}$ . Une mesure destructive effectuée sur l'impulsion lumineuse, dans le mode de conditionnement B, permet alors de préparer l'autre impulsion dans un état conditionné  $\hat{\rho}_{A,n}^{\text{cond}}$ .*

où  $\hat{\Pi}_n$  est l'élément POVM correspondant au résultat 'n' donné par

$$\hat{\Pi}_n = \sum_{\mu} \hat{M}_{n,\mu}^{\dagger} \hat{M}_{n,\mu}. \quad (2.48)$$

Il permet d'obtenir le taux de préparation du protocole

$$\text{Pr}(n) = \text{Tr}_{AB} \left[ \hat{\rho}_{AB} \hat{I}_A \otimes \hat{\Pi}_n \right]. \quad (2.49)$$

Contrairement aux protocoles basés sur des mesures non-destructives, l'état conditionné (2.47) ne dépend que de l'état de la ressource  $\hat{\rho}_{AB}$  et de l'élément POVM  $\hat{\Pi}_n$  correspondant au résultat 'n'. En particulier, il ne dépend plus du processus de mesure décrit par les opérateurs de Kraus  $\{\hat{M}_{n,\mu}\}_{\mu}$ .

D'autre part, une mesure caractérisée par un élément POVM donné peut se réaliser de différentes manières, ce qui signifie qu'il n'existe pas de règle générale pour concevoir un appareil de mesure caractérisé par un élément POVM donné. En effet, la décomposition d'un élément POVM (2.43) n'est pas unique car ce dernier peut toujours s'écrire comme une somme arbitraire d'opérateurs hermitiens et positifs de la forme

$$\hat{\Pi}_n = \sum_k \hat{\Pi}_{n,k}. \quad (2.50)$$

où les opérateurs  $\hat{\Pi}_{n,k}$  sont également hermitiens et positifs. Chacun de ces opérateurs admet une décomposition de Cholesky  $\hat{\Pi}_{n,k} = \hat{N}_{n,k}^{\dagger} \hat{N}_{n,k}$  qui fournit les opérateurs de Kraus  $\{\hat{N}_{n,k}\}_k$  d'un processus de mesure réalisant une mesure décrite par le POVM  $\hat{\Pi}_n$ .

Enfin, il est intéressant de donner la représentation de Wigner de la règle de projection (2.47). En effet, à partir de la définition de la représentation de Wigner (1.35), nous vérifions que l'état conditionné admet pour fonction de Wigner

$$\mathcal{W}_n^{\text{cond}}(x, p) = \frac{\int dudv \mathcal{W}_{AB}(x, p; u, v) \mathcal{W}_n(u, v)}{\int dx' dp' dudv \mathcal{W}_{AB}(x', p'; u, v) \mathcal{W}_n(u, v)}, \quad (2.51)$$

où  $\mathcal{W}_{AB}(x, p; u, v)$  et  $\mathcal{W}_n(u, v)$  désignent respectivement les représentations de Wigner de la ressource  $\hat{\rho}_{AB}$  et de l'élément POVM  $\hat{\Pi}_n$ .

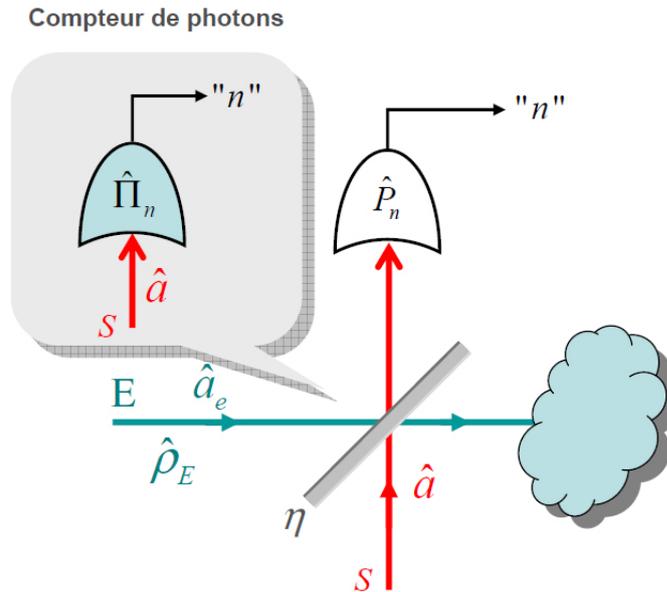
Ainsi, si la fonction de Wigner de la ressource  $\hat{\rho}_{AB}$  est positive, une condition nécessaire pour préparer conditionnellement un état avec une fonction de Wigner négative est de réaliser une mesure pour laquelle la représentation de Wigner est négative. Cependant, la signification d'une telle signature est difficile à appréhender pour un élément POVM, car ce dernier n'est pas un état. Il est certes facile de normaliser cet opérateur et d'obtenir formellement un opérateur densité. Mais la question reste ouverte : quelle est la signification de cet état ? Dans la deuxième partie de cette thèse, nous précisons le contenu physique de ces opérateurs en donnant une signification précise des états obtenus en normalisant l'élément POVM décrivant une mesure.

### B.3 Illustration en optique quantique

#### Le comptage de photons

A travers ce deuxième chapitre, nous voyons que la mesure joue un rôle important dans les protocoles de préparations conditionnelles. Nous avons montré que cette dernière est décrite par un ensemble d'opérateurs hermitiens et positifs que l'on appelle les éléments POVM. Nous allons maintenant déterminer les éléments POVM décrivant l'une des mesures les plus utilisées dans les protocoles conditionnels en optique quantique : *le comptage de photons*.

Un compteur de photons est un dispositif qui est capable de déceler le nombre de photons absorbés. Pour un détecteur *idéal*, le comportement de la réponse "n" est décrit par le projecteur  $\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$ . Or, les détecteurs sont en réalité inefficaces et soumis à l'influence du bruit. Nous modélisons une telle détection par une mesure idéale effectuée sur le mode signal ayant interagi avec un mode de bruit, aussi appelé mode d'environnement E, comme illustré sur la figure 2.7.



**Figure 2.7:** Modélisation d'un compteur imparfait de  $n$  photons. – Le mode signal  $S$  est couplé à un mode d'environnement  $E$ , par une lame séparatrice de transmission en intensité  $\eta$ , avant d'être soumis à un comptage idéal de  $n$  photons décrit par le projecteur  $\hat{P}_n$ .

Afin de déterminer l'élément POVM  $\hat{\Pi}_n$  décrivant le comptage inefficace de  $n$  photons, il est nécessaire d'introduire la notion d'*ordre normal* des opérateurs de création  $\hat{a}^\dagger$  et d'annihilation  $\hat{a}$ . En effet, l'ordre normal d'une puissance de l'opérateur nombre de photons  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  est par définition

$$:\hat{n}^k := \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^k. \quad (2.52)$$

En utilisant la relation de commutation canonique  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}$ , il est facile de voir que  $\hat{a}^\dagger \hat{n} = (\hat{n} - \hat{1}) \hat{a}^\dagger$ . On démontre alors par récurrence la relation suivante

$$:\hat{n}^k := \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^k = k! \binom{\hat{n}}{k}. \quad (2.53)$$

Nous pouvons maintenant calculer l'ordre normal de l'exponentielle  $\exp [x \hat{a}^\dagger \hat{a}]$

$$:\exp [x \hat{a}^\dagger \hat{a}] := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\hat{n}}{k} x^k = (1+x)^{\hat{n}}.$$

La décomposition de cette expression sur la base des états nombres

$$(1+x)^{\hat{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n |n\rangle \langle n| \quad (2.54)$$

donne une autre expression du projecteur sur le vide  $|0\rangle$  pour  $x = -1$

$$\hat{P}_0 = |0\rangle \langle 0| =: \exp [-\hat{a}^\dagger \hat{a}] :. \quad (2.55)$$

Cette dernière nous est utile pour exprimer le projecteur caractérisant le comptage idéal de  $n$  photons

$$\hat{P}_n = |n\rangle \langle n| = \frac{1}{n!} \hat{a}^{\dagger n} : \exp [-\hat{a}^\dagger \hat{a}] : \hat{a}^n. \quad (2.56)$$

Nous pouvons maintenant écrire la probabilité de compter  $n$  photons avec le modèle décrit sur la figure 2.7

$$\Pr(n) = \text{Tr}_{S,E} \left[ (\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E) \hat{U}_{SE}^\dagger \hat{P}_n \hat{U}_{SE} \right], \quad (2.57)$$

où  $\hat{U}_{SE}$  désigne l'opérateur d'évolution correspondant à la lame séparatrice donné (2.24). Son action sur l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$  est simple, car elle correspond à celle du champ classique

$$\hat{U}_{SE}^\dagger \hat{a} \hat{U}_{SE} = \sqrt{\eta} \hat{a} + \sqrt{1-\eta} \hat{a}_e, \quad (2.58)$$

où  $\hat{a}_e$  désigne l'opérateur de d'annihilation d'un photon dans le mode d'environnement E.

Pour déterminer les éléments POVMs décrivant le comptage inefficace de  $n$  photons sans bruit, nous considérons un mode d'environnement dans l'état de vide  $\hat{\rho}_E = |0_E\rangle \langle 0_E|$ . L'expression de la probabilité (2.57) peut aussi s'écrire comme

$$\Pr(n) = \text{Tr}_S \left[ \hat{\rho}_S \hat{\Pi}_n(\eta) \right], \quad (2.59)$$

où l'on reconnaît l'élément POVM :

$$\hat{\Pi}_n(\eta) = \langle 0_E | \hat{U}_{SE}^\dagger \hat{P}_n \hat{U}_{SE} | 0_E \rangle = \frac{\eta^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} : \exp [-\eta \hat{a}^\dagger \hat{a}] : \hat{a}^n. \quad (2.60)$$

On retrouve la formule dite de Kelley-Kleiner [53] que l'on peut décomposer dans la base des états nombres

$$\hat{\Pi}_n(\eta) = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} \eta^n (1-\eta)^{m-n} |m\rangle\langle m|, \quad (2.61)$$

où  $\eta$  est l'efficacité de détection.

Cette modélisation du comptage de photons est en fait très générale puisque elle constitue une illustration du *théorème de Neumark* [54] qui ramène toute mesure caractérisée par un POVM à une mesure idéale, caractérisée par un projecteur, dans un espace de Hilbert plus grand. Ainsi, l'influence du bruit pourrait également être traitée dans ce cadre en prenant un environnement dans un état judicieux.

Nous allons plutôt traiter les effets du bruit à l'aide d'une approche purement probabiliste [55], qui a l'avantage d'éviter des calculs inutilement lourds pour ce chapitre. En effet, le bruit correspond à des coups noirs, c'est-à-dire du comptage en l'absence de photons dans le mode signal. On sait expérimentalement que ces coups noirs sont distribués de manière aléatoire et totalement décorrélés. Ils suivent donc une statistique de Poisson selon laquelle la probabilité d'avoir  $m$  coups noirs est donnée par

$$P_\nu(m) = \frac{\nu^m}{m!} e^{-\nu}. \quad (2.62)$$

où  $\nu$  désigne le nombre moyen de coups noirs sur une certaine fenêtre de détection de durée  $T$ .

Ensuite, comme nous ne pouvons pas distinguer les coups d'obscurité des vrais événements de détection, la probabilité de compter  $n$  photons en présence de bruit s'obtient par la convolution de la probabilité d'avoir  $n - m$  coups noirs et de la probabilité d'avoir  $m$  coups :

$$\Pr(n) = \sum_{m=0}^n P_\nu(n-m) \text{Tr}_S \left[ \hat{\rho}_S \hat{\Pi}_m(\eta) \right]. \quad (2.63)$$

Le comptage de  $n$  photons sous l'influence du bruit est donc décrit par les éléments POVMs

$$\hat{\Pi}_n(\eta, \nu) = e^{-\nu} \sum_{m=0}^n \frac{\nu^{n-m}}{(n-m)!} \hat{\Pi}_m(\eta). \quad (2.64)$$

Dans le chapitre V, nous montrerons expérimentalement que ces éléments POVMs décrivent bien le comportement de détecteurs de photons uniques sous l'influence du bruit.

## C Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré comment les outils issus des traitements modernes de la décohérence quantique peuvent être utilisés pour décrire des protocoles manipulant des états quantiques. Ainsi, nous avons généralisé la règle de projection aux cas de mesures plus générales et réalistes, en considérant l'appareil de mesure comme une partie de l'environnement. Ce traitement nous a permis d'aboutir à une règle de projection (2.41) beaucoup plus générale que celle que l'on peut trouver dans la littérature [41, 42, 50].

Ensuite, nous avons décrit les protocoles de préparation conditionnelle qui permettent de tirer profit de cette règle de projection pour préparer des états quantiques généralement plus non-classiques. Ainsi, nous avons montré que le comportement des réponses d'un appareil de mesure était décrit par une collection d'opérateurs hermitiens et positifs que l'on appelle habituellement des éléments POVM.

Enfin, nous avons déterminé les éléments POVM décrivant un compteur de photons soumis à l'influence du bruit. Ces derniers nous seront utiles tout au long de cette thèse pour traiter des illustrations en optique quantique, et pour modéliser les reconstructions d'états quantiques reproduites au chapitre V.



---

# Interlude I :

## Rétrospective d'une Approche de la Physique Quantique

---

*L'approche habituelle de la physique quantique est prédictive sur les résultats de mesure. Nous allons voir dans la deuxième partie de cette thèse qu'une autre approche de la physique quantique est possible, même si cette dernière semble avoir été beaucoup moins utilisée et enseignée. Dans cet interlude, nous proposons une brève rétrospective de la physique quantique pour comprendre les raisons d'un tel état de fait.*

Après la description du rayonnement en termes de photons par Max Planck [12] et Albert Einstein [13], Louis De Broglie généralise dans sa thèse [14], en 1923, *la dualité onde-corpuscule* à toute particule matérielle. Face à l'enthousiasme grandissant d'Albert Einstein, Erwin Schrödinger s'attèle à la description mathématique des "ondes de matière" postulée par L. De Broglie. D'abord dubitatif, il met à profit tous ses talents en matière d'équations aux dérivées partielles pour établir en 1925, ce que l'on appelle aujourd'hui, *l'équation de Schrödinger* [15]. La formulation de cette équation linéaire est faite par analogie avec l'optique ondulatoire. Elle décrit la dynamique d'une fonction d'onde complexe, dont la signification échappe aux physiciens de l'époque. C'est l'une des premières fois qu'une telle séparation conceptuelle se produit entre l'outil mathématique d'une théorie physique et son interprétation. Il faudra attendre une petite année de plus pour que Max Born propose, en 1926, l'interprétation probabiliste de cette fonction d'onde [17]. Elle lui vaudra le prix Nobel en 1954 et fonde en partie l'interprétation habituelle de la physique quantique, que l'on appelle aujourd'hui *l'École de Copenhague* en référence à Niels Bohr, considéré comme son père fondateur. Cette interprétation considère la physique quantique comme une théorie de prédiction des résultats de mesure d'une expérience. L'état quantique, quelle que soit sa forme, représente un état de connaissance du système. Il permet de calculer les probabilités avec lesquelles on obtient les résultats de n'importe quelle mesure effectuée sur le système. Dès lors, les physiciens se heurtent à un *indéterminisme irréductible* sur l'issue d'une mesure. Ils doivent se résigner à seulement prédire des probabilités pour les résultats d'une mesure, au grand dam de Albert Einstein qui ne se fera jamais à l'idée de cet indéterminisme, remettant en question le caractère complet de la physique quantique avec le célèbre *argument EPR* [5].

A l'aube des années 1930, la physique quantique ne fait pas encore l'unanimité. En plus de l'indéterminisme quantique qui perturbe l'aspiration naturelle des physiciens de

décrire les constituants élémentaires de la nature de manière déterministe, le formalisme mathématique de la théorie est confus. A l'époque, Werner Heisenberg, qui est aussi l'assistant de Max Born à Göttingen, formule indépendamment de Schrödinger un formalisme matriciel de la physique quantique [16]. Peu de temps après, Erwin Schrödinger démontre l'équivalence de ces deux formulations. Sous l'impulsion de David Hilbert, John Von Neumann s'intéresse dès 1926 aux fondations mathématiques de la théorie quantique afin d'en proposer un formalisme rigoureux et unifié, qui sera publié en 1932 [4]. Il comprend alors que l'état quantique d'un système doit en fait être représenté par un vecteur d'un espace de Hilbert. La fonction d'onde de Schrödinger n'est rien d'autre qu'une projection de ce vecteur dans une base particulière de cet espace, tandis que les matrices de Heisenberg ne constituent qu'une représentation des observables physiques, qui sont désormais représentés par des opérateurs hermitiens. La version moderne de la physique quantique est presque née, mais Paul Dirac procède également à une formalisation qui met l'accent sur les principes physiques. Elle introduit notamment la notation élégante "bra-ket" qui remportera l'adhésion des physiciens jusqu'à aujourd'hui.

Le formalisme de la physique quantique est maintenant cohérent avec un nombre réduit de postulats, qui sont au nombre de cinq ou six dans la majorité des cours de physique quantique [18, 19]. Deux de ces postulats méritent une attention particulière. Il s'agit des postulats dits "de la mesure" qui regroupent *la règle de projection* et *la règle de Born*, dont nous avons donné les formes les plus générales au chapitre II de cette thèse. Cependant, parmi ces deux règles, une seule mérite véritablement le statut de postulat. Il s'agit de la règle de projection qui ne peut pas être obtenue à partir d'une évolution du système mesuré et de l'appareil de mesure. En effet, la règle de projection est une transformation non-linéaire de l'état quantique qui ne résulte pas d'une évolution quantique, même générale, comme nous l'avons montré au chapitre II. Cette transformation brutale s'apparente en fait à *une remise à jour de l'état de connaissance* que l'on a sur le système mesuré. Si la règle de projection mérite bien le statut de postulat, il n'en est pas de même pour la règle de Born qui découle en fait d'un théorème mathématique, comme nous le verrons dans le chapitre III. Il s'agit de la récente généralisation en 2003 par Paul Busch [57] d'un théorème démontré par Andrew Gleason en 1957 [56]. Ce théorème justifie l'expression mathématique des probabilités dans un espace de Hilbert, sous des exigences très générales sur les probabilités et en utilisant seulement les propriétés mathématiques de l'espace de Hilbert. De manière assez surprenante, les physiciens n'ont accordé que relativement peu d'importance<sup>1</sup> à ce théorème et ses corollaires, ce qui explique sans doute l'approche *essentiellement* prédictive de la physique quantique.

Le succès de la règle de Born provient de son lien direct avec l'expérience. Dans des expériences d'interférence ou de diffraction de particules matérielles comme l'électron, elle décrit à merveille les figures observées. Dès lors, il apparaît inutile pour un physicien - expérimentateur de surcroît - de savoir d'où provient cette règle, tant qu'elle prédit correctement ce qui est mesuré. Ainsi, l'interprétation habituelle de la physique quantique - l'École de Copenhague - est en cela aussi qualifiée de *minimale*. L'outil de prédiction que constitue la théorie quantique nécessite une connaissance précise de l'état quantique du système. Cette entité abstraite résulte pourtant de procédures expérimentales qui pré-

---

1. A la rédaction de cette thèse, le site de la Société Américaine de Physique (APS) répertorie seulement 16 publications citant l'article de P. Busch [57].

parent le système dans un état quantique donné. Une telle préparation peut également se faire par le biais d'une mesure, et elle est alors conditionnée sur un certain résultat qui annonce la préparation du système, comme nous l'avons décrit au chapitre II. Bien que la physique quantique soit réversible du point de vue de sa dynamique, décrite par l'équation de Schrödinger, il semble que les actes de préparation et de mesure insufflent *une flèche du temps*.

Aux alentours des années 1950, la question de la flèche du temps en physique quantique occupe quelques physiciens, notamment Satoshi Watanabe [58] et Yakir Aharonov [59]. Cette question est alors immédiatement liée à la mesure, car la règle de projection est une transformation irréversible, comme l'avait déjà noté John Von Neumann [4]. Le postulat de la mesure semble ainsi *nouer* l'évolution quantique d'un système, au gré des mesures jonchant son histoire. Ces mesures s'apparentent alors à de nouvelles conditions "initiales", car l'évolution du système demeure réversible entre deux mesures successives. Cependant, à l'instar d'autres sciences quantitatives ayant recours aux probabilités, les *rétrodictions* ne semblaient pas avoir leur place en physique quantique, car la préparation du système est généralement connue et maîtrisée. En effet, rien ne justifie *a priori* de faire des "rétro-prédictions" sur les préparations qui auraient pu conduire à un certain résultat de mesure. Yakir Aharonov s'est intéressé à ces rétrodictions dans le formalisme simplifié d'états quantiques purs. Dans notre contexte, nous illustrerons cela avec des états nombres de photons et des détections idéales de ces états. Si l'on effectue un comptage idéal de  $n$  photons, cela signifie que l'état détecté est un état nombre de photons  $|n\rangle$ . Yakir Aharonov préconise alors d'assigner cet état au système, juste avant son interaction avec l'appareil de mesure, et de le faire évoluer en arrière dans le temps pour "rétro-prédire" l'état dans lequel le système a été préparé. Sans aucune justification, les probabilités rétrodictives se calculent alors en utilisant la règle de Born : l'amplitude de probabilité rétrodictive est la projection de l'état détecté  $|n\rangle$  sur les différentes préparations du système. Si l'on a préparé la lumière dans différents états nombres  $|m\rangle$ , sans évolution entre la préparation et la mesure, la probabilité rétrodictive d'avoir préparé la lumière dans un état à  $m$  photons est évidemment maximale pour  $m = n$ . Nous avons même la certitude sur la préparation qui a conduit au résultat  $n$ . Cette situation idéale est loin de se généraliser à d'autres procédures de préparation, où l'on prépare par exemple d'autres états que les états propres de l'observable mesurée, ou encore qu'un nombre réduit d'entre eux. La rétrodiction quantique semblait alors exiger des conditions supplémentaires, très restrictives, pour son application, comme le soulignait Frederik J. Belinfante [61].

A l'aube de l'an 2000, le statut de la rétrodiction quantique n'est toujours pas clair, même si une contribution majeure a été faite par Stephen M. Barnett *et al.* [63]. Ils ont en effet montré que les probabilités rétrodictives peuvent être obtenues à partir des probabilités prédictives, en utilisant le théorème de Bayes. Une analogie avec la règle de Born leur permet alors d'obtenir une expression simple du principal outil de cet approche : *l'état rétrodicté*, mais sous des conditions exigeantes sur les préparations qui sont difficiles à appréhender physiquement, comme nous l'expliquerons dans le chapitre III. Ces difficultés proviennent essentiellement de l'analogie avec la règle de Born qui a encore le statut de postulat. David T. Pegg *et al.* [64] ont même tenté de remplacer la règle de Born par un autre postulat, plus symétrique, donnant les probabilités jointes d'avoir fait une certaine préparation et d'obtenir un certain résultat de mesure. Les probabilités prédictives et

rétrodictives s’obtiennent alors à partir de cette unique probabilité jointe, en appliquant le théorème de Bayes. Malgré l’élégante symétrie, il est très difficile d’appréhender le contenu physique des opérateurs intervenant dans cette probabilité jointe, comme le soulignaient Stephen M. Barnett *et al.* en conclusion de leur article [63]. Ces difficultés sont analogues à celles évoquées pour des éléments POVM dans le chapitre II de cette thèse, c’est-à-dire l’impossibilité d’exploiter directement le contenu physique de ces opérateurs hermitiens et positifs pour en déduire des propriétés sur les mesures.

La rétrodiction est appliquée à quelques situations, essentiellement en optique quantique [65, 66, 67], mais elle se heurte toujours à une certaine réticence de la part des physiciens. Ces appréhensions sont essentiellement liées au statut de son principal outil : l’état rétrodicté. Ce dernier est assigné au système avant la mesure, sur la base d’un résultat intervenant dans le présent, ce qui a conduit parfois à des ”paradoxes” [68] impliquant la causalité. La reconstruction de ces états semblait alors impossible, contrairement aux états préparés. En effet, au cours de ces dernières années, la tomographie des états quantiques s’est généralisée, en particulier en optique quantique [75, 76]. Ces reconstructions d’états quantiques, préparés dans diverses expériences, se font sur la base des statistiques des mesures. Ces statistiques doivent être données par la règle de Born, ce qui permet ainsi de retrouver l’état quantique reproduisant les probabilités mesurées. La description de la mesure, en termes d’éléments POVM, est donc implicite à ces reconstructions. Cela souligne par ailleurs l’importance d’une caractérisation de la mesure. L’approche prédictive est maintenant consacrée, et la reconstruction des états quantiques dans des préparations conditionnelles met fin aux quelques débats qui pouvaient encore entourer la réalité physique de la règle de projection.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous allons montrer comment un retour judicieux aux fondations mathématiques de la théorie quantique nous permet de mettre les approches prédictive et rétrodictive sur un même piédestal. Nous proposerons une procédure générale de reconstruction des états rétrodictés pour n’importe quel dispositif de mesure. Nous montrerons également que les propriétés quantiques d’une mesure, comme son caractère non-classique ou projectif, ne peuvent être révélées que par son état rétrodicté. Nous illustrerons théoriquement et expérimentalement ces propriétés sur des détecteurs très utilisés en optique quantique. Cette étude légitimera l’approche rétrodictive pour l’étude des protocoles quantiques. La troisième partie sera dédiée à des illustrations dans le contexte de la métrologie quantique, où nous montrerons comment détecter des états fortement non-classiques de la lumière, comme des ”chat de Schrödinger”.

Deuxième partie

**Comportement Quantique des  
Appareils de Mesure**



---

# États Quantiques et Propositions

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>États et propositions</b> . . . . .	<b>59</b>
A.1	Propriétés et propositions . . . . .	59
A.2	Théorème de Gleason-Busch . . . . .	60
A.3	Reconstruction d'un état quantique . . . . .	61
<b>B</b>	<b>Préparations et Mesures</b> . . . . .	<b>63</b>
B.1	Un jeu quantique . . . . .	63
B.2	Approche Prédictive . . . . .	63
B.3	Approche Rétrodictive . . . . .	65
B.4	Complémentarité, Indéterminisme et Causalité . . . . .	70
<b>C</b>	<b>Illustration en optique quantique</b> . . . . .	<b>72</b>
C.1	Principe d'une détection homodyne . . . . .	72
C.2	États rétrodictés . . . . .	74
C.3	Influence du bruit . . . . .	77
<b>D</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>78</b>

---

*Dans ce chapitre, nous allons montrer comment un retour aux fondations mathématiques de la théorie quantique permet d'éclairer la notion d'état quantique. Nous montrons qu'un état quantique est en fait indissociable d'une autre notion fondamentale, celle de proposition que l'on fait sur lui. Les tests de ces propositions permettent alors de reconstruire les états quantiques de deux approches de la physique quantique que nous allons étudier.*

## A États et propositions

### A.1 Propriétés et propositions

#### Observable et propriétés

Une propriété  $\mathcal{P}_k$  d'un système correspond à une valeur précise  $a_k$  pour une observable  $A$  donnée de ce dernier.

Idéalement, chaque valeur  $a_k$  de cette observable correspond à un état bien déterminé du système, que l'on note  $|a_k\rangle$ . Ces états  $\{|a_k\rangle\}$  sont mutuellement *incompatibles*, ce qui se traduit en termes de produits scalaires par la condition

$$\langle a_k | a_l \rangle = \delta_{k,l}. \quad (3.1)$$

L'observable physique  $A$  ne peut prendre qu'une seule valeur à la fois. Soulignons que cela n'implique pas la mesure de cette observable. D'après le chapitre II, nous pouvons très bien imaginer un protocole déterministe ou conditionnel préparant le système dans un état  $|a_k\rangle$ , et donc avec la propriété  $\mathcal{P}_k : A = a_k$ . Nous pouvons donc *mesurer* le système avec la propriété  $\mathcal{P}_k$ , tout comme nous pouvons le *préparer* avec cette même propriété  $\mathcal{P}_k$ .

### Opérateurs de proposition

*Cas idéal.* – Une proposition sur le système correspond à une propriété à tester sur ce dernier  $\mathcal{P}_k : A = a_k$ . Elle est représentée dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  par un opérateur de proposition  $\hat{P}_k$  qui n'est rien d'autre que le projecteur sur l'état propre  $|a_k\rangle$

$$\hat{P}_k = |a_k\rangle\langle a_k|. \quad (3.2)$$

Ces opérateurs de proposition constituent également une résolution de l'identité,

$$\hat{P}_k \hat{P}_l = \delta_{k,l} \hat{P}_k, \quad \sum_k \hat{P}_k = \hat{1}. \quad (3.3)$$

Nous parlons alors d'*ensembles exhaustifs* de propositions. Toutes les propriétés  $\mathcal{P}_k$  accessibles au système sont alors énumérées et représentées de cette façon. Dans l'approche traditionnelle, fondée sur la règle de Born (D.3), ces opérateurs de proposition nous permettent de faire des prédictions sur les valeurs prises par une observable. Il s'agit en fait des projecteurs introduits par John Von Neumann [4]. L'appareil de mesure apparaît ainsi comme un dispositif réalisant les tests de ces propositions.

*Cas général.* – Dans le chapitre précédent, nous avons montré que cette représentation en termes de projecteurs n'étaient pas la plus générale. En effet, les résultats d'un appareil de mesure sont généralement décrits par des éléments POVM qui sont des opérateurs *seulement* hermitiens et positifs. Ils ne sont pas forcément orthogonaux  $\hat{P}_k \hat{P}_l \neq \delta_{k,l} \hat{P}_k$ . Ainsi, la représentation la plus générale d'une proposition devrait être un opérateur *hermitien et positif*  $\hat{P}_k = \hat{P}_k^\dagger \geq 0$ , vérifiant la condition d'exhaustivité (3.3) :

$$\sum_k \hat{P}_k = \hat{1}. \quad (3.4)$$

Nous allons voir que la justification d'une telle représentation est fournie par la récente généralisation en 2003 d'un théorème mathématique important pour les fondations mathématiques de la théorie quantique.

## A.2 Théorème de Gleason-Busch

A partir d'exigences très générales sur les probabilités et la structure mathématique de l'espace de Hilbert, le théorème de Gleason [56, 57] assure l'existence d'un opérateur densité  $\hat{\rho}$  permettant de faire des prédictions sur n'importe quelle propriété du système.

Ce théorème avait été initialement démontré par Andrew Gleason en 1957 pour des propositions représentées par des projecteurs orthogonaux (*cas idéal*). Il n'était alors applicable qu'à des espaces de Hilbert de dimension  $D \geq 3$ . La généralisation de ce théorème à des propositions plus générales (*cas général*) n'a été démontrée qu'en 2003 par Paul Busch [57]. Elle est maintenant applicable à des espaces de Hilbert de dimension  $D \geq 2$ . Il s'agit en fait de la condition minimale pour justifier l'usage des probabilités.

La probabilité  $\Pr(k)$  de vérifier une proposition  $\mathcal{P}_k$  sur le système doit satisfaire les exigences suivantes :

1.  $0 \leq \Pr(k) \leq 1$  pour toute proposition  $\mathcal{P}_k$ .
2.  $\sum_k \Pr(k) = 1$  pour tout ensemble *exhaustif* de propositions tel que  $\sum_k \hat{P}_k = \hat{1}$ .
3.  $\Pr(k_1 \text{ ou } k_2 \text{ ou } \dots) = \Pr(k_1) + \Pr(k_2) + \dots$  pour tout ensemble *non-exhaustif* de proposition tel que  $\hat{P}_{k_1} + \hat{P}_{k_2} + \dots \leq \hat{1}$ .

D'après la généralisation [57] du théorème de Gleason [56], dans un espace de Hilbert de dimension  $D \geq 2$ , la probabilité de vérifier la proposition  $\mathcal{P}_k$  est donnée par

$$\Pr(k) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \hat{P}_k \right], \quad (3.5)$$

où  $\hat{\rho}$  désigne un opérateur *hermitien, positif et normalisé* qui nous permet de faire des prédictions sur tout ensemble exhaustif de propositions. C'est la forme la plus générale de ce que l'on peut appeler *l'état quantique du système*. Cet état ne dépend pas de l'ensemble de propositions, à condition que ce dernier soit exhaustif. Ainsi, comme le système peut a priori être préparé dans tout état  $\hat{\rho}$ , les probabilités (3.5) sont en fait conditionnées sur la connaissance préalable de cet état  $\Pr(k) = \Pr(k|\hat{\rho})$ . Nous verrons dans la suite de ce chapitre comment représenter une telle connaissance. Si nous réduisons maintenant cet opérateur  $\hat{\rho}$  dans la base de ses états propres

$$\hat{\rho} = \sum_{\mu} p_{\mu} |\psi_{\mu}\rangle \langle \psi_{\mu}|, \quad (3.6)$$

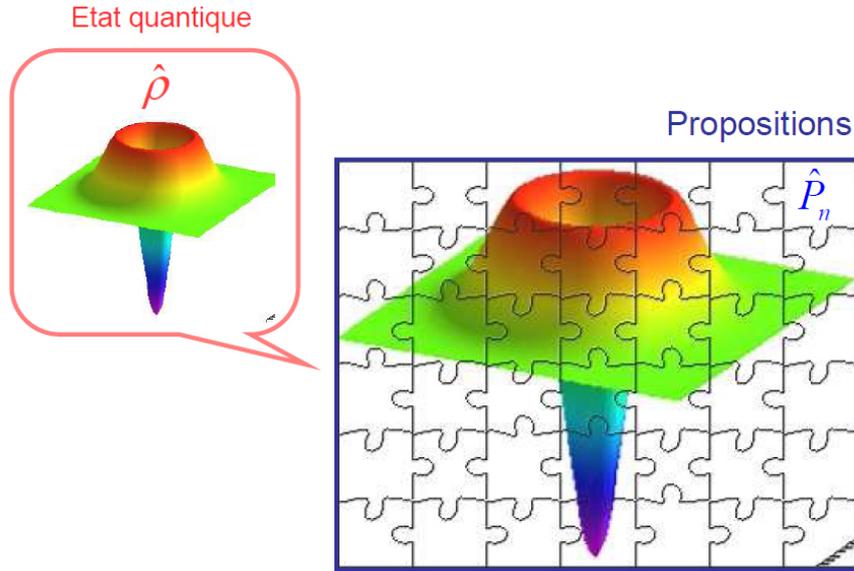
nous retrouvons l'image d'un mélange statistique habituellement utilisée pour introduire la matrice densité, comme nous l'avons fait au premier chapitre de cette thèse (B.1) à partir de la règle de Born. Cette dernière est maintenant le résultat d'un théorème fondé sur un choix de représentation, celui de représenter les propositions par des opérateurs hermitiens et positifs de l'espace de Hilbert du système.

### A.3 Reconstruction d'un état quantique

Le principal enseignement des sections précédentes est que nous ne pouvons pas dissocier un état quantique des propositions que nous pouvons faire sur lui. Ces dernières nous permettent de faire des prédictions sur les propriétés physiques du système, mais également de le reconstruire comme nous allons le montrer. En effet, les tests d'un ensemble *arbitraire* et *exhaustif* de propositions permettent de reconstruire l'état quantique, comme illustré sur la figure 3.1.

La reconstruction d'un état quantique  $\hat{\rho}$  nécessite de réaliser les tests de propositions  $\hat{P}_k$  pris d'un ensemble exhaustif tel que  $\sum_k \hat{P}_k = \hat{1}$ . A partir des probabilités de succès de ces tests,

$$\Pr(k|\hat{\rho}) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \hat{P}_k \right], \quad (3.7)$$



**Figure 3.1:** Reconstruction d'un état quantique à partir de tests de propositions. – *Les tests d'un ensemble arbitraire et exhaustif de propositions  $\hat{P}_n$  sur un état quantique permettent de reconstruire cet état. Cette situation s'apparente à la reconstruction d'un puzzle composé de différentes pièces. Chaque pièce correspond à une proposition  $\hat{P}_n$ , dont les tests fournissent la probabilité  $\Pr(n|\hat{\rho})$ . L'exhaustivité et la connaissance précise des propositions permettent de reconstruire complètement l'état quantique  $\hat{\rho}$ , sans que ce dernier ne dépende des propositions  $\hat{P}_n$  vérifiées.*

nous pouvons reconstruire l'état quantique  $\hat{\rho}$  qui donne ces probabilités. En effet, dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension finie  $D \geq 2$ , l'état quantique  $\hat{\rho}$  prend la forme d'une matrice hermitienne, positive et normalisée à  $D^2$  éléments. Il est donc nécessaire de réaliser les tests d'au moins  $D^2$  propositions pour reconstruire la matrice densité.

Lorsque le nombre de propositions  $N$  devient supérieur au nombre d'éléments de la matrice densité, les inversions linéaires fondées sur  $D^2$  équations choisies parmi les  $N$  tests disponibles peuvent conduire à différentes matrices densités ne vérifiant pas toujours les conditions requises par cette dernière. Cela s'explique par les incertitudes entachant l'estimation des probabilités de succès (3.7). Des méthodes d'estimation non-linéaires sont alors nécessaires. Nous détaillerons l'une de ces méthodes dans le chapitre IV lorsque l'on étudiera les propriétés quantiques de la mesure. Son implémentation expérimentale sera reproduite au chapitre V avec des détecteurs de photons uniques très utilisés en optique quantique.

## B Préparations et Mesures

Dans les sections précédentes, nous avons volontairement occulté la réalisation physique des tests de propositions nécessaires à la reconstruction d'un état quantique. En effet, une proposition concerne une propriété physique donnée du système. Nous pouvons *mesurer* le système avec une telle propriété, mais nous pouvons également *préparer* le système avec cette même propriété. Ainsi, les tests de propositions correspondent aux tâches incontournables de toute expérience de physique quantique : *les préparations et les mesures*.

### B.1 Un jeu quantique

En physique quantique, tout protocole est basé sur des préparations d'états, des évolutions et des mesures. La préparation du système dans un état quantique  $\hat{\rho}_m$  peut être associée à une information que l'on appelle *le choix "m"*. La mesure donne une autre information classique qui est simplement *le résultat "n"*.

Dans un tel jeu<sup>1</sup> quantique, nous pouvons seulement faire des prédictions sur les choix "m" et sur les résultats "n". Cela correspond à deux approches : l'approche prédictive habituelle qui nous permet de faire des prédictions sur les résultats de mesure "n" en partant d'un choix donné de préparation "m", et l'approche rétrodictive - beaucoup moins habituelle - qui nous permet de faire des prédictions sur les choix de préparation "m" conduisant à un certain résultat de mesure "n". D'après la section précédente, chacune de ces approches nécessite un état quantique et des propositions afin de réaliser ces prédictions, comme l'illustre la figure 3.2.

### B.2 Approche Prédictive

Dans les traitements habituels de la physique quantique, nous préparons le système dans un état quantique  $\hat{\rho}_m$  résultant d'un choix "m". Ce dernier correspond généralement à un processus quantique  $\hat{L}_m$ , ou à une préparation conditionnelle, agissant sur une ressource donnée. Avec l'état  $\hat{\rho}_m$  résultant de ce choix de préparation, nous pouvons faire des prédictions sur les résultats de mesure "n" correspondant au test d'un opérateur de proposition, qui n'est rien d'autre que l'élément POVM  $\hat{\Pi}_n$ , introduit au chapitre II. Ainsi, l'appareil de mesure peut être vu comme un dispositif réalisant les tests de propositions sur l'état du système interagissant avec lui.

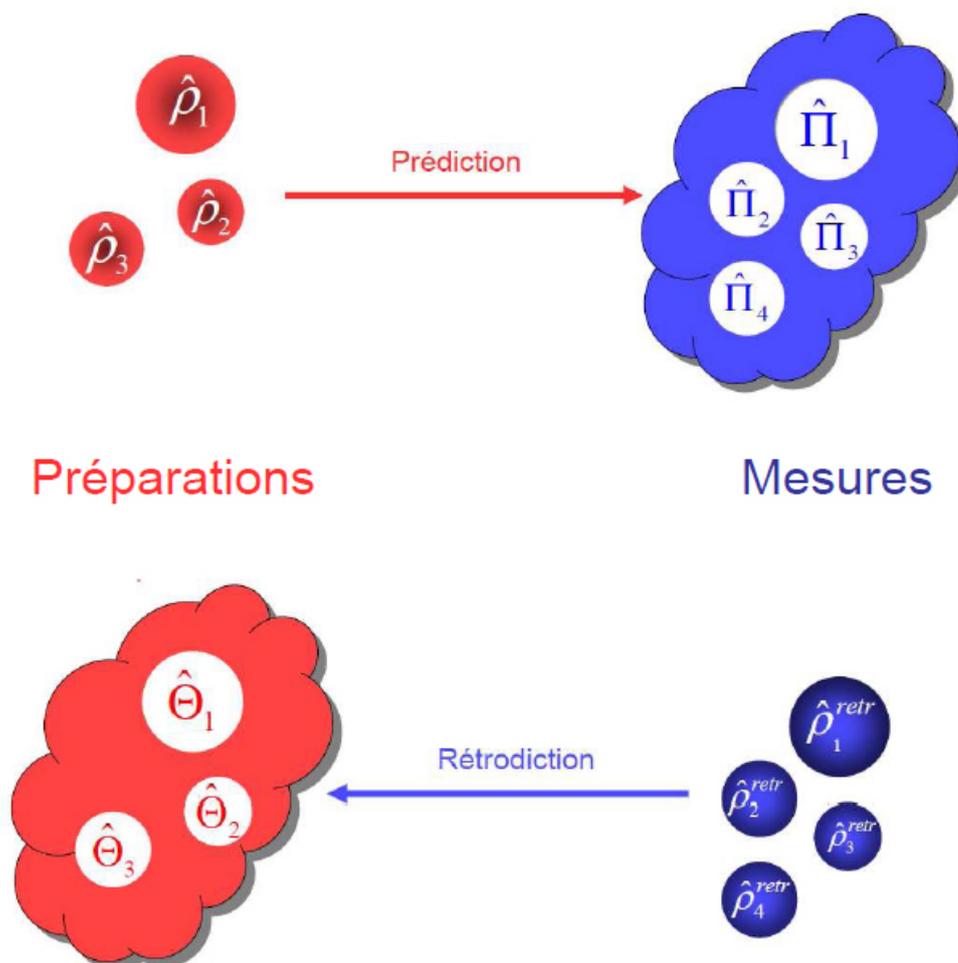
D'après le théorème de Gleason-Busch, la probabilité d'obtenir le résultat "n" après avoir fait le choix de préparation "m" doit prendre la forme suivante

$$\Pr(n|m) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_m \hat{\Pi}_n \right]. \quad (3.8)$$

où  $\hat{\Pi}_n$  désigne l'élément POVM décrivant la mesure donnant le résultat "n". On retrouve effectivement la règle de Born sur laquelle l'interprétation traditionnelle de la physique quantique est en grande partie fondée.

---

1. En mathématique, la théorie du jeu définit un jeu comme au moins deux parties s'influencent mutuellement. Dans cet autre contexte et sans lien avec la mécanique quantique, on doit à John Von Neumann une contribution majeure : *Theory of Games and Economic Behavior* (1944) qui traite les jeux dits à somme nulle (ce qui est perdu par l'un est gagné par l'autre).



**Figure 3.2:** Le Jeu Quantique fondé sur des préparations et des mesures. – Les prédictions et les rétrodictions nécessitent des états quantiques et des propositions que nous notons respectivement  $(\hat{\rho}_m, \hat{\Pi}_n)$  et  $(\hat{\rho}_n^{retr}, \hat{\Theta}_m)$  (voir texte). Les probabilités prédictives et rétrodictives peuvent s'interpréter comme des probabilités de "passage" d'un état à travers des "gabarits" de propositions. Lorsqu'une proposition est vérifiée, une mesure donnant le résultat "n" par exemple, l'état rétrodicté sur ce résultat est en quelque sorte "taillé dans le gabarit" correspondant à la proposition  $\hat{\Pi}_n$ . Ce "façonnage" se traduit mathématiquement par la normalisation de l'opérateur de proposition.

### B.3 Approche Rétrodictive

Contrairement à l'approche prédictive, l'approche rétrodictive est beaucoup moins habituelle [58, 59, 60, 61, 62, 63, 64] si bien qu'elle peut quelques fois conduire à des difficultés d'interprétation, essentiellement liées à un usage inapproprié de ses outils [voir par exemple [68]]. L'approche rétrodictive consiste à faire des *rétro-prédictions* sur les choix de préparations, effectués dans le passé et conduisant à un certain résultat de mesure. On appelle alors de telles prédictions des *rétrodictions*. Ces dernières sont très inhabituelles en physique quantique, car on maîtrise généralement le choix de préparation et non le résultat d'une mesure. C'est même l'archétype de l'indéterminisme quantique. Cependant, il existe des situations où un seul résultat de mesure est intéressant. C'est par exemple le cas des préparations conditionnelles. Nous allons voir que l'indéterminisme quantique affecte tout autant les choix de préparation que les résultats de mesure.

#### B.3.1 Fondations mathématiques

Pour faire des rétrodictions, l'approche rétrodictive nécessite également un état quantique et des propositions sur ce dernier, comme l'illustre la figure 3.2. L'état est maintenant assigné au système uniquement sur la base d'un résultat de mesure "n". C'est l'*état rétrodicté* que l'on note  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$ , et avec lequel nous allons faire des "prédictions" sur les préparations conduisant à ce résultat de mesure "n". Cet état ne doit donc dépendre que de la mesure qui fournit le résultat "n", comme nous allons le préciser avec le théorème de Gleason-Busch.

Les propositions sur l'état rétrodicté correspondent aux différentes préparations du système avant son interaction avec l'appareil de mesure. Nous notons  $\hat{\Theta}_m$  l'opérateur de proposition associé à chacun des choix de préparation "m". Afin d'avoir un *ensemble exhaustif* de propositions, ces opérateurs doivent de plus constituer une partition de l'identité

$$\sum_m \hat{\Theta}_m = \hat{1}. \quad (3.9)$$

D'après le théorème de Gleason-Busch, la probabilité rétrodictive d'avoir préparé le système dans l'état  $\hat{\rho}_m$  - quand la mesure donne le résultat "n" - peut s'écrire comme

$$\text{Pr}(m|n) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_n^{\text{retr}} \hat{\Theta}_m \right]. \quad (3.10)$$

Dans cette expression, l'état rétrodicté  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$  ne doit dépendre que de la mesure donnant le résultat "n", et en aucun cas des propositions  $\hat{\Theta}_m$  faites sur cet état, comme le stipule le théorème de Gleason-Busch. L'expression de ces probabilités rétrodictives est similaire à la règle de Born pour des résultats de mesure. A ce stade, elle est la meilleure illustration de l'indéterminisme quantique affectant les choix de préparation. Autrement dit, il ne suffit pas de connaître le résultat d'une mesure pour remonter avec certitude à la préparation conduisant à ce résultat.

Les expressions générales des états rétrodictés et des opérateurs de proposition peuvent être obtenues à l'aide du théorème de Bayes [69]. Une dérivation avait été faite par Stephen M. Barnett *et al.* en 2000 [63]. Cependant, elle se base uniquement sur une analogie avec la règle de Born, en imposant aux probabilités rétrodictives de s'écrire sous la même forme. La dérivation des états rétrodictés nécessitait alors des hypothèses que notre approche justifie complètement [70], tout en explicitant leur contenu physique.

Dans la suite de cette thèse, nous verrons que les propriétés quantiques d'une mesure ne sont révélées que par son état rétrodicté.

### B.3.2 Lien avec l'approche prédictive

Nous allons maintenant établir l'expression des états rétrodictés en utilisant les théorèmes de Bayes [69] et de Gleason-Busch. Le théorème de Gleason-Busch justifie l'expression des probabilités rétrodictives (3.10). Chaque étape nécessaire à la rétrodiction des états est maintenant justifiée dans le cadre de notre travail sur les états et les propositions.

La rétrodiction ne requiert aucun postulat supplémentaire que la règle de projection qui peut intervenir dans la préparation des états. En effet, le théorème de Bayes donne pour la probabilité rétrodictive

$$\Pr(m|n) = \frac{\Pr(n|m) \Pr(m)}{\Pr(n)}. \quad (3.11)$$

La probabilité marginale  $\Pr(n)$  d'avoir le résultat "n" est obtenue en sommant la probabilité jointe sur tous les états "candidats" :

$$\Pr(n) = \sum_m \Pr(n|m) \Pr(m) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{\text{sonde}} \hat{\Pi}_n \right], \quad (3.12)$$

où nous introduisons le mélange statistique de ces états "candidats"

$$\hat{\rho}_{\text{sonde}} = \sum_m \Pr(m) \hat{\rho}_m. \quad (3.13)$$

Au chapitre II, nous avons montré sur une préparation conditionnelle qu'un tel état correspond également aux effets d'une mesure "non-lue" : un mélange des états conditionnés sur chaque résultat "m" et pondérés par leur probabilité de préparation  $\Pr(m)$ . La préparation des états se fait alors de manière indéterministe.

Afin d'écrire les probabilités rétrodictives (3.11) sous leur forme la plus générale (3.10), imposée par le théorème de Gleason-Busch, nous décomposons le mélange sondant comme

$$\hat{\rho}_{\text{sonde}} = \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}, \quad (3.14)$$

en utilisant la décomposition de Cholesky  $\hat{\sigma}$  qui est possible pour tout opérateur hermitien et positif. Elle devient même *unique* pour tout opérateur hermitien *défini* positif. Les propriétés de la trace nous permettent alors d'écrire les probabilités rétrodictives (3.11) sous une forme proche de celle exigée par le théorème de Gleason-Busch (3.10)

$$\Pr(m|n) = \frac{\text{Tr} \left[ \hat{\sigma} \hat{\Pi}_n \hat{\sigma}^\dagger (\hat{\sigma}^{-1})^\dagger \Pr(m) \hat{\rho}_m \hat{\sigma}^{-1} \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{\sigma} \hat{\Pi}_n \hat{\sigma}^\dagger \right]} = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_n \hat{\Lambda}_m \right], \quad (3.15)$$

où nous identifions les opérateurs :

$$\hat{\rho}_n = \frac{\hat{\sigma} \hat{\Pi}_n \hat{\sigma}^\dagger}{\text{Tr} \left[ \hat{\sigma} \hat{\Pi}_n \hat{\sigma}^\dagger \right]} \quad (3.16)$$

et

$$\hat{\Lambda}_m = \Pr(m) (\hat{\sigma}^{-1})^\dagger \hat{\rho}_m \hat{\sigma}^{-1}. \quad (3.17)$$

Ces opérateurs (3.16) et (3.17) vérifient respectivement toutes les propriétés mathématiques requises par des états quantiques :

$$\hat{\rho}_n = \hat{\rho}_n^\dagger \geq 0, \text{Tr}\{\hat{\rho}_n\} = 1, \quad (3.18)$$

et un ensemble exhaustif de propositions :

$$\hat{\Lambda}_m = \hat{\Lambda}_m^\dagger \geq 0, \sum_m \hat{\Lambda}_m = \hat{1}. \quad (3.19)$$

Cependant, d'après le théorème de Gleason-Busch (3.10), l'état quantique  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$  ne doit pas dépendre de l'ensemble de propositions  $\hat{\Theta}_m$  que l'on fait sur lui. Cette dépendance intervient dans l'expression de l'état (3.16) par le biais de la décomposition de Cholesky  $\hat{\sigma}$ . Pour éliminer cette dépendance, cette décomposition doit être telle que  $\hat{\sigma} \propto \hat{1}$ . Dans un espace de Hilbert de dimension finie  $D \geq 2$ , elle décrit un état sondant  $\hat{\rho}_{\text{sonde}} = \hat{1}/D$  dans un degré maximal de mélange, comme nous le verrons dans différentes situations pratiques. Dans ces conditions, nous obtenons l'expression de l'état retrodicté à partir d'un résultat "n" d'une mesure

$$\hat{\rho}_n^{\text{retr}} = \frac{\hat{\Pi}_n}{\text{Tr}[\hat{\Pi}_n]}. \quad (3.20)$$

L'état retrodicté ne dépend donc que de la proposition vérifiée par la mesure donnant le résultat "n", c'est-à-dire son élément POVM  $\hat{\Pi}_n$ , comme illustrée sur la figure 3.2. Les opérateurs de propositions portant sur la préparation du système sont donnés par

$$\hat{\Theta}_m = D\Pr(m)\hat{\rho}_m. \quad (3.21)$$

Chaque opérateur  $\hat{\Theta}_m$  dépend uniquement du choix de préparation "m" qui correspond à la préparation du système dans un état quantique  $\hat{\rho}_m$ , avec une probabilité  $\Pr(m) \leq 1/D$ . La condition de normalisation (3.9) de ces opérateurs de proposition a maintenant une signification intéressante. Elle correspond à la maximisation de l'entropie de Von Neumann (1.24)

$$\mathcal{S}[\hat{\rho}] = -\text{Tr}[\hat{\rho} \log \hat{\rho}]$$

par le mélange d'états  $\hat{\rho}_{\text{sonde}}$ . Cet état est alors caractérisé par un degré de mélange maximal qui permet de sonder toutes les réponses de l'appareil de mesure. Nous avons alors une ignorance totale sur les différentes préparations conduisant à certains résultats de mesure.

### B.3.3 Discussions

Pour illustrer l'équivalence des deux approches de la physique quantique, nous allons montrer comment les probabilités prédictives, données par le théorème de Gleason-Busch, permettent également d'obtenir les probabilités prédictives pour un ensemble non-exhaustif de mesures. Nous considérons d'abord un ensemble de  $N$  mesures, caractérisées par des éléments POVM tels que

$$\sum_{n=1}^N \hat{\Pi}_n = \hat{1}. \quad (3.22)$$

Ces mesures peuvent être réalisées par différents appareils de mesure, choisis judicieusement pour réaliser cette condition d'exhaustivité. Ainsi, quand nous préparons le système dans un état  $\hat{\rho}_m$ , les probabilités prédictives d'obtenir chacun des résultats "n" sont données par

$$\Pr(n|m) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_m \hat{\Pi}_n \right]. \quad (3.23)$$

Nous considérons maintenant la procédure expérimentale dans laquelle nous préparons l'état quantique  $\hat{\rho}_m$  un très grand nombre de fois  $\mathcal{N}_m$ . Durant cette procédure, nous allons nous focaliser uniquement sur certaines mesures telles que

$$\sum_{n'=1}^{N_r < N} \hat{\Pi}_{n'} = \hat{\Pi} \neq \hat{1}. \quad (3.24)$$

Ces mesures réalisent alors les tests d'un ensemble non-exhaustif de propositions. Les probabilités prédictives peuvent être obtenues comme les limites des fréquences prédictives d'obtenir chacune de ces réponses "n". En effet, chaque réponse "n" se produit un certain nombre de fois  $\mathcal{N}_{n|m}$  donné par

$$\mathcal{N}_{n|m} \simeq \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_m \hat{\Pi}_n \right] \mathcal{N}_m. \quad (3.25)$$

L'égalité stricte est assurée lorsque le nombre de préparations  $\mathcal{N}_m$  est suffisamment grand. Si l'on se restreint à l'ensemble non-exhaustif de mesures (3.24), les fréquences prédictives sont données par

$$F(n|m) = \frac{\mathcal{N}_{n|m}}{\sum_{n'=1}^{N_r} \mathcal{N}_{n'|m}}. \quad (3.26)$$

Dans la limite des très grands nombres de répétitions, ces fréquences prédictives tendent vers les probabilités prédictives, qui sont alors données par

$$\Pr(n|m) = \frac{\text{Tr} \left[ \hat{\rho}_m \hat{\Pi}_n \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{\rho}_m \hat{\Pi} \right]}, \quad (3.27)$$

où l'ensemble des mesures est représenté par l'opérateur

$$\hat{\Pi} = \sum_{n'=1}^{N_r < N} \hat{\Pi}_{n'} \neq \hat{1}. \quad (3.28)$$

Ces expressions sont remarquables, car elles sont similaires à celles donnant les probabilités rétrodictives pour des préparations non-exhaustives. En effet, comme nous l'avons montré précédemment en utilisant le théorème de Bayes (3.11), ces probabilités rétrodictives sont données par

$$\Pr(m|n) = \frac{\text{Tr} \left[ \hat{\rho}_n^{\text{retr}} \hat{\Theta}_m \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{\rho}_n^{\text{retr}} \hat{\Theta} \right]}, \quad (3.29)$$

où l'ensemble des préparations est représenté par l'opérateur

$$\hat{\Theta} = \sum_m \hat{\Theta}_m \neq \hat{1}. \quad (3.30)$$

L'équivalence des deux approches de la physique quantique réside donc dans les tests d'ensembles exhaustifs de propositions. Dans l'approche prédictive, un appareil de mesure est généralement caractérisé de telle façon que ses éléments POVM constituent bien un ensemble exhaustif : un appareil de mesure possède au moins deux réponses "oui" et "non". Cette condition n'est généralement pas satisfaite par des préparations, car nous cherchons habituellement à prédire les probabilités des différents résultats de mesures effectuées sur un seul choix de préparation. Pour réaliser un ensemble exhaustif de préparations, la préparation d'un état  $\hat{\rho}_m$  doit s'accompagner de la préparation d'au moins un autre état. Cette préparation complémentaire sera décrite par l'opérateur  $\hat{1} - \hat{\Theta}_m$ .

Nous reviendrons sur ces aspects, d'un point de vue plus pratique, lorsque nous aborderons la reconstruction des états rétrodictés aux chapitres IV et V. Ces reconstructions seront basées sur la statistique des choix de préparation conduisant à un certain résultat de mesure.

### B.3.4 Rétro-propagation des états rétrodictés

#### Évolutions unitaires

Contrairement aux états préparés, les états rétrodictés doivent être propagés en arrière dans le temps en utilisant les opérateurs unitaires d'évolution quantique. En effet, il est bien connu que la règle de Born conduit à deux représentations possibles de la physique quantique : *la représentation de Schrödinger* où l'état évolue dans le temps et les observables restent fixes, et *la représentation de Heisenberg* où les observables évoluent dans le temps alors que l'état reste fixe. Ces deux représentations conduisent aux mêmes valeurs moyennes. Ainsi, dans le cas d'une évolution unitaire  $\hat{U}(t)$ , la moyenne d'une observable  $A$  est donnée (1.21) par

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(t) \hat{A} \right]. \quad (3.31)$$

L'état quantique  $\hat{\rho}$  évolue alors sous l'action d'une évolution unitaire  $\hat{U}(t)$ . En utilisant les propriétés de permutations circulaires de la trace (3.31), on obtient la représentation de Heisenberg de l'observable  $A$

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t). \quad (3.32)$$

L'état rétrodicté étant une observable (POVM) normalisée, on en déduit que ce dernier évolue bien en arrière dans le temps

$$\hat{\rho}_n^{\text{retr}}(t) = \frac{\hat{\Pi}_n(t)}{\text{Tr} \left[ \hat{\Pi}_n(t) \right]} = \hat{U}(-t) \hat{\rho}_n^{\text{retr}}(0) \hat{U}^\dagger(-t), \quad (3.33)$$

puisque l'on vérifie pour une évolution unitaire  $\hat{U}^\dagger(t) = \hat{U}(-t)$ .

#### Évolution quantique générale

La rétro-propagation des états rétrodictés n'est plus possible pour une évolution décrite dans l'approche prédictive par un processus quantique  $\hat{L}$ . En effet, la représentation de Heisenberg d'un élément POVM peut toujours s'écrire comme

$$\hat{\Pi}_n(t) = \hat{L}^\dagger \left[ \hat{\Pi}_n \right] = \sum_\mu \hat{K}_\mu^\dagger(t) \hat{\Pi}_n \hat{K}_\mu(t), \quad (3.34)$$

où  $\hat{K}_\mu(t)$  désignent les opérateurs de Kraus du processus  $\hat{L}$  tels que

$$\sum_{\mu} \hat{K}_\mu^\dagger(t) \hat{K}_\mu(t) = \hat{1}. \quad (3.35)$$

L'état rétrodicté est toujours obtenu en normalisant l'élément POVM

$$\hat{\rho}_n^{\text{retr}}(t) = \frac{\hat{\Pi}_n(t)}{\text{Tr}[\hat{\Pi}_n(t)]} \neq \hat{L}^\dagger[\hat{\rho}_n^{\text{retr}}]. \quad (3.36)$$

La normalisation ne permet plus d'écrire l'état rétrodicté comme le résultat du processus  $\hat{L}$ , à cause des propriétés de la trace et des opérateurs de Kraus (3.35). La rétro-propagation d'un état rétrodicté n'est donc plus possible pour des évolutions quantiques décrites par des processus dans l'approche prédictive. En effet, comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre, ces dernières décrivent généralement l'évolution d'un système en interaction avec un environnement qui induit des dissipations, et donc de l'irréversibilité. Cette dernière est révélée par la "simple" normalisation de l'élément POVM, ce qui souligne toute son importance.

Enfin, notons qu'il est possible d'écrire une équation maîtresse pour l'évolution des états rétrodictés [65]. Dans le cadre du chapitre II, il serait donc possible de décrire la rétro-propagation des états rétrodictés par un processus quantique  $\hat{L}^{\text{retr}}$ , spécifique à l'approche rétrodictive. Les opérateurs de Kraus de ce processus sont en effet différents de ceux décrivant le processus  $\hat{L}$  dans l'approche prédictive.

A la fin de ce chapitre, nous illustrerons la rétro-propagation pour un dispositif de mesure très utilisé en optique quantique : la détection homodyne. La rétro-propagation sera également au centre de la troisième partie, où nous proposerons un dispositif de mesure dont les états rétrodictés sont des états "chat de Schrödinger" de la lumière.

## B.4 Complémentarité, Indéterminisme et Causalité

### Complémentarité

Pour illustrer la complémentarité des approches prédictive et rétrodictive, un résumé de leurs outils est reproduit sur la figure 3.3. Le lien entre les deux approches réside dans le test réussi d'une proposition. En normalisant l'opérateur de proposition associé à cette dernière, nous obtenons un état quantique qui nous permet de faire des prédictions sur des résultats de mesure ou sur des choix de préparation.

Une prédiction ne doit se faire que dans l'une ou l'autre de ces deux approches. Les controverses sur la rétrodiction (voir par exemple [68]) viennent de l'usage inapproprié de ses outils. Par exemple, si l'on prépare un état cohérent  $|\alpha_m\rangle$  devant un compteur parfait de photons, ce dernier a une certaine probabilité d'afficher le résultat "n" correspondant aux comptages de  $n$  photons. Cette probabilité suit une loi de Poisson

$$\text{Pr}(n|\alpha) = |\langle \alpha|n\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (3.37)$$

D'après l'approche rétrodictive, l'état rétrodicté est l'état à  $n$  photons  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}} = |n\rangle\langle n|$ , puisque l'élément POVM décrivant le comptage idéal de  $n$  photons est  $\hat{\Pi}_n = |n\rangle\langle n|$ . Cela peut apparaître en contradiction avec le fait que la lumière ait été préparée dans un état

	Prédictive	Rétrodictive
Etat	Etat préparé $\hat{\rho}_m$	Etat rétrodicté $\hat{\rho}_n^{retr}$
Propositions	Mesures $\hat{\Pi}_n$ $\sum_n \hat{\Pi}_n = \hat{1}$	Préparations $\hat{\Theta}_m$ $\sum_m \hat{\Theta}_m = \hat{1}$
Test réussi	$\hat{\rho}_n^{retr} = \frac{\hat{\Pi}_n}{Tr\{\hat{\Pi}_n\}}$	$\hat{\rho}_m = \frac{\hat{\Theta}_m}{Tr\{\hat{\Theta}_m\}}$
Prédictions	$Pr(n m) = Tr\{\hat{\rho}_m \hat{\Pi}_n\}$	$Pr(m n) = Tr\{\hat{\rho}_n^{retr} \hat{\Theta}_m\}$
Evolution	$\hat{U}(t)$	$\hat{U}^\dagger(t)$

**Figure 3.3:** Complémentarité entre les approches prédictive et rétrodictive de la physique quantique. –Le lien entre les deux approches réside dans le test réussi d'une proposition dans l'une de deux approches. La normalisation de l'opérateur de proposition fournit alors l'état quantique avec lequel nous pouvons faire des prédictions dans l'autre approche.

cohérent  $|\alpha\rangle$ , mais il n'en est rien. Cet état rétrodicté permet *uniquement* de faire des prédictions sur les préparations, tout comme l'état préparé permet *uniquement* de faire des prédictions sur les résultats de mesure. Quand nous lisons le résultat "n", il n'y a aucune certitude sur le choix de préparation conduisant à ce résultat, sauf bien évidemment la préparation d'un état nombre  $|n\rangle$ .

### Indéterminisme et Causalité

Nous pouvons maintenant dire que l'indéterminisme entoure également les choix de préparation conduisant à un certain résultat de mesure. Ainsi, quand on parle d'indéterminisme quantique, il serait plus juste d'évoquer également les choix de préparation et non seulement les résultats de mesure. Par ailleurs, l'indéterminisme sur les résultats de mesure assure le respect de la causalité. En effet, l'état rétrodicté est assigné au système dans le passé, sur la base d'un résultat de mesure "n" se produisant dans le présent. Si ce résultat devenait déterministe, on aurait là un moyen de contrôler les choix de préparation faits dans le passé. La statistique de ces choix de préparation est en effet gouvernée par l'état rétrodicté. Nous voyons donc que la forme habituelle d'indéterminisme quantique, celle qui concerne les résultats de mesure, veille soigneusement au respect de la causalité et au libre arbitre des préparateurs.

## C Illustration en optique quantique

### La détection homodyne

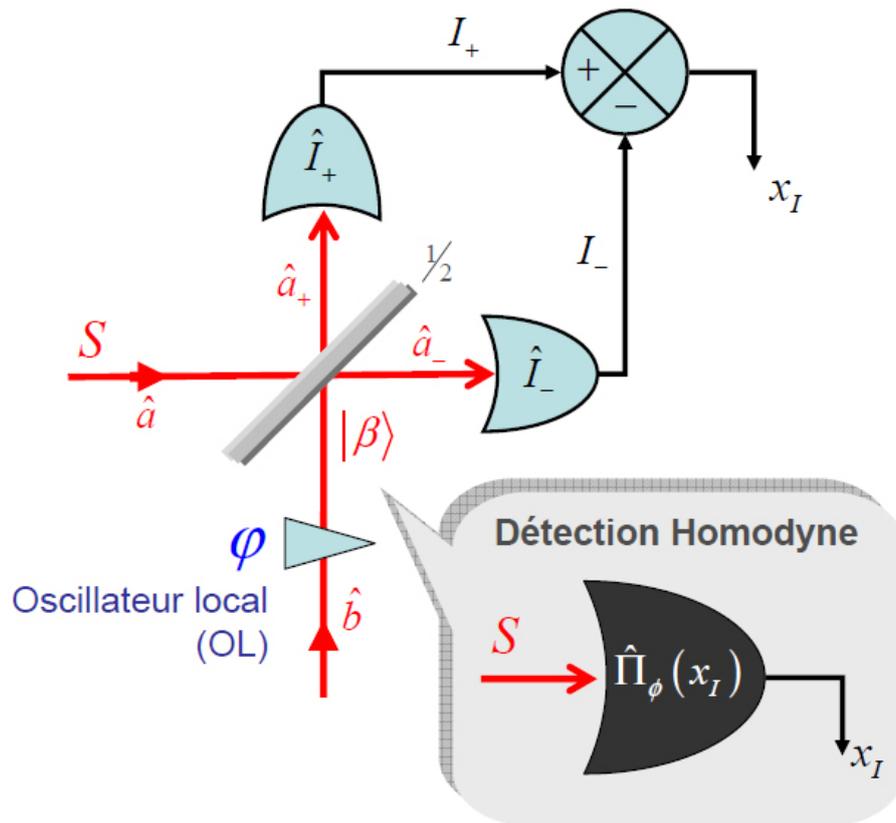
La détection homodyne joue un rôle très important en optique quantique où elle permet de mesurer l'observable de quadrature du champ  $\hat{x}_\phi$  comme nous allons le voir. Au lieu de reproduire le traitement complet [71] de la détection homodyne afin d'obtenir ses éléments POVMs, nous allons plutôt mettre à profit l'approche rétrodictive pour directement déterminer ses états rétrodictés. Cela nous permettra de nous familiariser avec une subtilité par rapport à l'approche habituelle : *la rétro-propagation des états rétrodictés*. Cette dernière nous sera très utile dans la troisième partie de cette thèse.

#### C.1 Principe d'une détection homodyne

Le principe d'une détection homodyne est illustré sur la figure 3.4. Nous allons d'abord montrer qu'un tel dispositif permet idéalement de mesurer une quadrature du champ d'un faisceau signal. En effet, le faisceau dans le mode signal S interagit sur une lame séparatrice 50/50 avec un oscillateur local (OL), obtenu par modulation de la phase  $\phi$  d'un état cohérent  $|\beta\rangle$  tel que  $\beta = |\beta|$ . L'action des lames séparatrice et à retard est représentée par l'opérateur d'évolution décrit sur la figure 2.3 du chapitre II. Les deux photodiodes disposées sur les deux faisceaux sortants permettent de mesurer idéalement les intensités

$$\hat{I}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger \hat{a}_\pm = \frac{1}{2} \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} \pm e^{-i\phi} \hat{b}^\dagger \hat{a} \pm e^{+i\phi} \hat{a}^\dagger \hat{b} \right], \quad (3.38)$$

où  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  désignent respectivement les opérateurs de champ dans le mode signal S et dans le mode de l'oscillateur local (OL).



**Figure 3.4:** Principe d'une détection homodyne. –Le signal dans le mode  $S$  interagit avec un oscillateur local (OL), obtenu par modulation de phase  $\phi$  d'un état cohérent  $|\beta\rangle$ . Deux mesures d'intensités  $\hat{I}_{\pm} = \hat{a}_{\pm}^{\dagger} \hat{a}_{\pm}$  sont réalisées sur les deux faisceaux sortants. Les courants des photodiodes résultant de ces mesures subissent enfin une soustraction électronique qui donne idéalement la valeur de la quadrature  $\hat{x}_{\phi}$ .

Dans le cas d'une détection homodyne idéale, les courants délivrés par les photodiodes sont proportionnels aux intensités  $I_{\pm}$ . La soustraction électronique de ces courants donne alors :

$$\Delta \hat{I}_{S,OL} = \hat{I}_+ - \hat{I}_- = e^{-i\phi} \hat{b}^\dagger \hat{a} + e^{+i\phi} \hat{a}^\dagger \hat{b}. \quad (3.39)$$

Cette observable concerne le signal  $S$  et l'oscillateur local  $OL$ . Lorsque le faisceau signal est décrit par un état  $\hat{\rho}_S$ , la valeur moyenne de  $x_I$  est donnée par (1.21) :

$$\langle x_I \rangle_S \propto \text{Tr}_{S,OL} \left[ \hat{\rho}_S \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \Delta \hat{I}_{S,OL} \right] = \text{Tr}_S \left[ \hat{\rho}_S \Delta \hat{I}_S \right], \quad (3.40)$$

avec la trace partielle sur tous les états de base de l'oscillateur local ( $OL$ )

$$\Delta \hat{I}_S = \text{Tr}_{OL} \left[ |\beta\rangle\langle\beta| \Delta \hat{I}_{S,OL} \right] = \langle\beta| \Delta \hat{I}_{S,OL} |\beta\rangle = |\beta| \left( e^{i\phi} \hat{a}^\dagger + e^{-i\phi} \hat{a} \right). \quad (3.41)$$

Nous voyons que la différence de courant  $x_I$  est directement reliée à l'observable de quadrature  $\hat{x}_\phi$ , définie en (1.32), par

$$\hat{x}_I \propto \Delta \hat{I}_S = \sqrt{2} |\beta| \hat{x}_\phi. \quad (3.42)$$

Les fluctuations de la quadrature  $\hat{x}_\phi$  deviennent alors accessibles grâce au gain que constitue l'amplitude de l'oscillateur local, en particulier lorsque cette dernière est suffisamment grande  $|\beta| \gg 1$ . Une détection homodyne idéale réalise donc bien la mesure de l'observable de quadrature  $\hat{x}_\phi$ . Ce dispositif de mesure est idéalement décrit par les éléments POVM

$$\hat{\Pi}_\phi(x_I) = \hat{P}_\phi(x_I) = |x_I, \phi\rangle\langle x_I, \phi|, \quad (3.43)$$

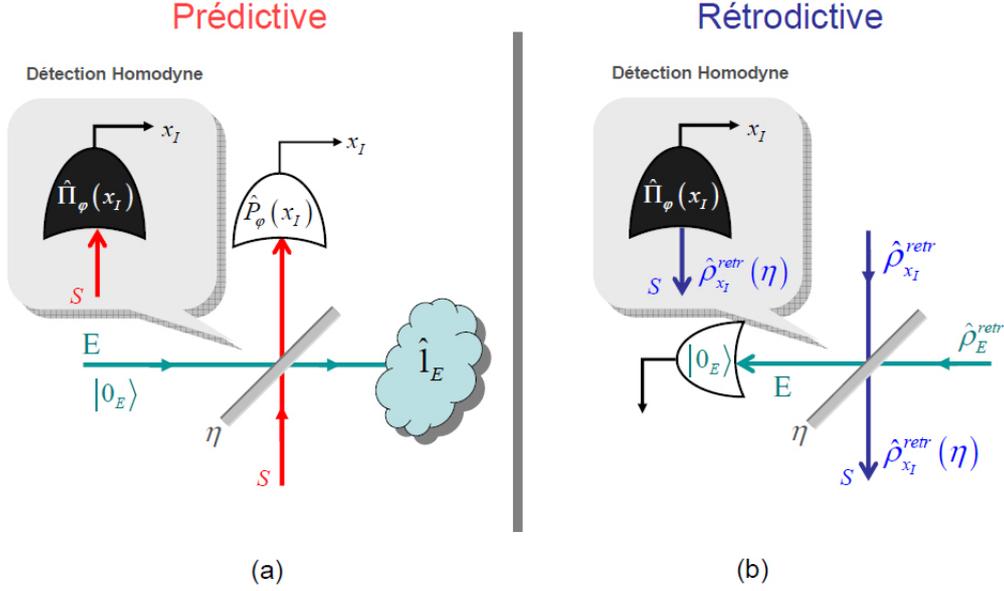
où  $x_I$  désigne la valeur de la quadrature obtenue à partir de la différence de courant  $\Delta I_S$ .

## C.2 États rétrodictés

Dans l'approche prédictive, la modélisation d'une détection *inefficace* est illustrée sur la figure 3.5-(a). Comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre pour le comptage de photons, il s'agit d'une modélisation très générale que l'on appelle *une extension de Neumark* [54] : une mesure caractérisée par un élément POVM donné peut toujours être vue comme une mesure projective et idéale dans un espace de Hilbert plus grand. L'extension de Neumark est en quelque sorte l'équivalent pour les éléments POVM de la purification des mélanges statistiques pour les états quantiques.

Une détection homodyne inefficace est ainsi équivalente à une détection homodyne idéale sur le signal  $S$  qui a interagi avec un mode d'environnement  $E$ , dans un état vide de photon  $|0_E\rangle$ . L'interaction entre le signal et l'environnement est une interaction linéaire, modélisée par une lame séparatrice de transmission en intensité égale à l'efficacité de détection  $\eta$ . La version rétrodictive de cette modélisation est représentée sur la figure 3.5-(b). Les préparations d'états deviennent maintenant des mesures ayant pour états rétrodictés les états préparés, et vice versa. Nous reviendrons plus généralement sur ces règles de correspondances dans la troisième partie. L'exemple de la détection homodyne nous permet de nous familiariser avec l'approche rétrodictive sur un appareil de mesure bien connu en optique quantique.

Les états rétrodictés à partir des mesures doivent être propagés en arrière dans le temps afin d'obtenir l'état rétrodicté de la détection homodyne inefficace  $\hat{\rho}_{x_I}^{retr}(\eta)$ . L'état



**Figure 3.5:** Modélisation d'une détection homodyne inefficace dans les approches prédictive (a) et rétrodictive (b). –(a) Une détection inefficace est équivalente à une détection idéale sur un signal ayant interagi avec un mode d'environnement  $E$ , dans l'état de vide  $|0_E\rangle$ , sur une lame séparatrice de transmission égale à l'efficacité de détection  $\eta$ . (b) Version rétrodictive de cette modélisation. Nous avons remplacé une mesure par la préparation de son état rétrodicté, et une préparation par une mesure ayant le même état rétrodicté (cf. texte).

rétrodicté  $\hat{\rho}_{x_I}^{retr}$  à partir de la détection homodyne idéale, décrite par le projecteur (3.43), est un état infiniment comprimé selon  $x_\phi$  et centré autour de la valeur mesurée  $x_I$ . La fonction de Wigner de cet état est donnée par

$$\mathcal{W}_{x_I}^{retr}(x_\phi, p_\phi) \underset{s_o \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\pi} \exp \left[ -\frac{(x_\phi - x_I)^2}{s_o} - \frac{p_\phi^2}{1/s_o} \right]. \quad (3.44)$$

La perte du mode d'environnement  $E$  est équivalente à une mesure donnant une seule et même réponse. Son état rétrodicté est donc un état dans un degré de mélange maximum  $\hat{\rho}_E^{retr} \propto \hat{1}$ , dont la représentation de Wigner est simplement  $\mathcal{W}_E^{retr}(x_\phi, p_\phi) \propto 1/2\pi$ . L'interaction sur la lame séparatrice affecte ici les arguments des fonctions de Wigner, comme nous l'avons illustré sur la figure (2.3) au chapitre II. Elle donne donc un état à deux modes décrit par la fonction de Wigner suivante

$$\mathcal{W}_{SE}^{retr}(x_\phi, p_\phi; x'_\phi, p'_\phi) \propto \mathcal{W}_{x_I}^{retr} \left( \sqrt{\eta}x_\phi - \sqrt{1-\eta}x'_\phi, \sqrt{\eta}p_\phi - \sqrt{1-\eta}p'_\phi \right). \quad (3.45)$$

La préparation du mode d'environnement  $E$  dans l'état de vide  $|0_E\rangle$  devient maintenant une mesure projective sur cet état, caractérisée par la fonction de Wigner

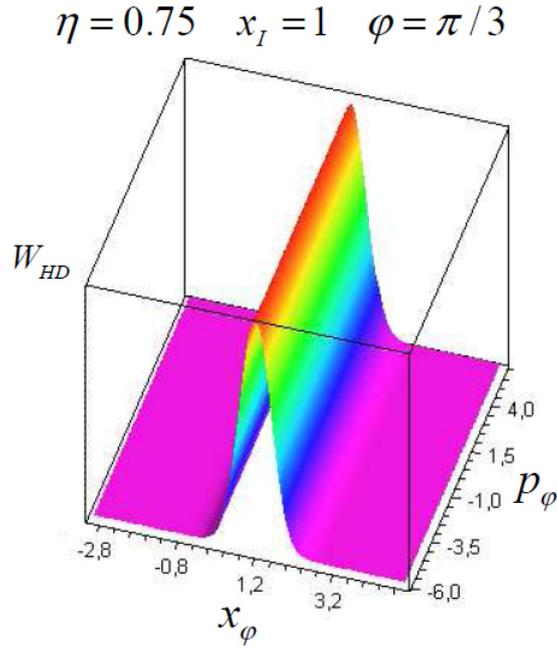
$$\mathcal{W}_E(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp[-x^2 - p^2]. \quad (3.46)$$

La version rétrodictive représentée sur la figure 3.5-(b) correspond en fait au schéma d'une préparation conditionnelle que nous avons décrit au chapitre II. L'état rétrodicté de la détection homodyne inefficace est alors obtenu en utilisant la règle de projection (2.47)

que nous avons réécrit en terme de représentations de Wigner (2.51). Cette dernière prend ici la forme suivante

$$\mathcal{W}_{x_I, \eta}^{\text{retr}}(x_\phi, p_\phi) = \frac{\int dx' dp' \mathcal{W}_{SE}^{\text{retr}}(x_\phi, p_\phi; x', p') \mathcal{W}_E(x', p')}{\int dx dp dx' dp' \mathcal{W}_{SE}^{\text{retr}}(x, p; x', p') \mathcal{W}_E(x', p')}. \quad (3.47)$$

A l'aide d'un outil informatique de calcul formel, ces intégrations de gaussiennes ne posent pas de grandes difficultés, mise à part une expression a priori inextricable mais qui reste tout de même une gaussienne. Une représentation graphique de cette fonction est illustrée sur la figure 3.6. Il s'agit d'une sorte "digue" au profil gaussien selon  $x_\phi$  et orientée selon  $p_\phi$ .



**Figure 3.6:** Représentation de Wigner de l'état rétrodicté à partir du résultat  $x_I = 1$  d'une détection homodyne d'efficacité  $\eta = 0,75$ .

Nous vérifions formellement [72] qu'un équivalent asymptotique de la fonction (3.47) est donné par

$$\mathcal{W}_{x_I, \eta}^{\text{retr}}(x_\phi, p_\phi) \underset{e_n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi \sqrt{1 + e_n s(\eta)}} \exp \left[ -\frac{(x_\phi - x_I / \sqrt{\eta})^2}{s(\eta)} - \frac{p_\phi^2}{1/s(\eta) + e_n} \right]. \quad (3.48)$$

Il s'agit en fait d'un état comprimé et déplacé dans l'espace des phases d'une amplitude  $\alpha_I = x_I / \sqrt{2\eta}$ , mais avec un bruit en excès  $e_n \propto 1/s_o$  très important sur la quadrature conjuguée  $p_\phi$  qui est à l'origine de l'allure de "digue" représentée sur la figure 3.6. En pratique, la limite formelle  $e_n \rightarrow \infty$  peut être remplacée par la limite plus physique  $e_n \gg 1/s(\eta)$ . Le facteur de compression  $s(\eta)$  est lié à l'efficacité de détection  $\eta$  par

$$s(\eta) = \frac{1 - \eta}{\eta}. \quad (3.49)$$

Nous voyons apparaître une justification physique du fait qu'une détection homodyne idéale ( $\eta = 1$ ) est impossible en réalité. En effet, cela impliquerait un état rétrodicté (état

avant-mesure) contenant une énergie infinie, puisque le nombre moyen de photons (1.56) dans un tel état comprimé est donné par

$$\langle \hat{n} \rangle_{retr} \simeq \frac{1}{4s(\eta)} \rightarrow \infty. \quad (3.50)$$

Cette justification physique est plus forte que les raisons techniques (optique, électronique, ...) qui sont assujetties à de constantes améliorations augmentant sans cesse l'efficacité de détection  $\eta$ , comme nous le verrons plus tard.

### C.3 Influence du bruit

A partir de cet état rétrodicté, nous décelons un comportement intéressant de la détection homodyne. En effet, une détection homodyne est généralement soumise à un bruit électronique [73], notamment au niveau des soustractions électroniques. Ce dernier est gaussien et peut être modélisé par un mode d'environnement E dans un état gaussien (3.46), avec une variance de bruit  $\sigma_n^2 \geq \sigma_o^2$  qui peut être supérieure à celle du vide  $\sigma_o^2 = 1/2$ .

L'expression de l'état rétrodicté (3.47) conduit à un état de la même forme que (3.48), mais avec une variance qui est affectée par celle du bruit gaussien

$$\sigma_x^2 = \frac{1-\eta}{\eta} \sigma_o^2 \longrightarrow \frac{1-\eta}{\eta} \sigma_n^2. \quad (3.51)$$

Nous obtenons alors une efficacité équivalente  $\eta_n$  en utilisant la relation (4.53)

$$s(\eta_n) = \frac{1-\eta_n}{\eta_n} = \frac{1-\eta}{\eta} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_o} \right)^2. \quad (3.52)$$

Comme les facteurs de compression sont tels que  $s(\eta_n) > s(\eta)$ , nous en déduisons pour les efficacités de détection  $\eta_n < \eta$ . Ainsi, une détection homodyne inefficace et sous l'influence d'un bruit gaussien est toujours équivalente à une détection d'efficacité  $\eta_n < \eta$  plus faible et sans bruit. Ce résultat n'a été éprouvé que récemment [73] dans le contexte de la tomographie d'états quantiques basée sur des détections homodynes.

Dans le chapitre suivant, nous reviendrons sur cet état afin d'étudier les propriétés quantiques des mesures réalisées par une détection homodyne. Nous préciserons alors des propriétés quelque peu inhabituelles pour cet appareil de mesure pourtant très utilisé en optique quantique.

## D Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré qu'un état quantique est indissociable d'une autre notion fondamentale, celle de propositions que l'on peut faire sur lui. Ces dernières sont arbitraires et permettent d'exploiter le contenu physique d'un état quantique, c'est-à-dire les propriétés physiques que ce dernier distribue. La seule contrainte est que ces propositions doivent être exhaustives au sens où elles doivent couvrir toutes les propriétés accessibles au système. Lorsque cette condition est remplie, il devient même possible de reconstruire complètement l'état quantique à partir des tests de ces propositions.

Ensuite, nous avons montré les implications de ces outils dans un jeu très universel en physique quantique, celui fondé sur des préparations d'états et des mesures. Dans ce cadre, deux approches de la physique quantique émergent naturellement : l'approche prédictive habituelle et l'approche rétrodictive beaucoup moins habituelle, puisqu'elle consiste à faire des prédictions sur les choix de préparations conduisant à un certain résultat de mesure. Ces choix de préparation sont généralement maîtrisés dans une expérience, ce qui explique le caractère inhabituel de telles rétrodictions. Nous avons montré que cette approche est pourtant bâtie sur les mêmes fondations que celles de l'approche prédictive habituelle.

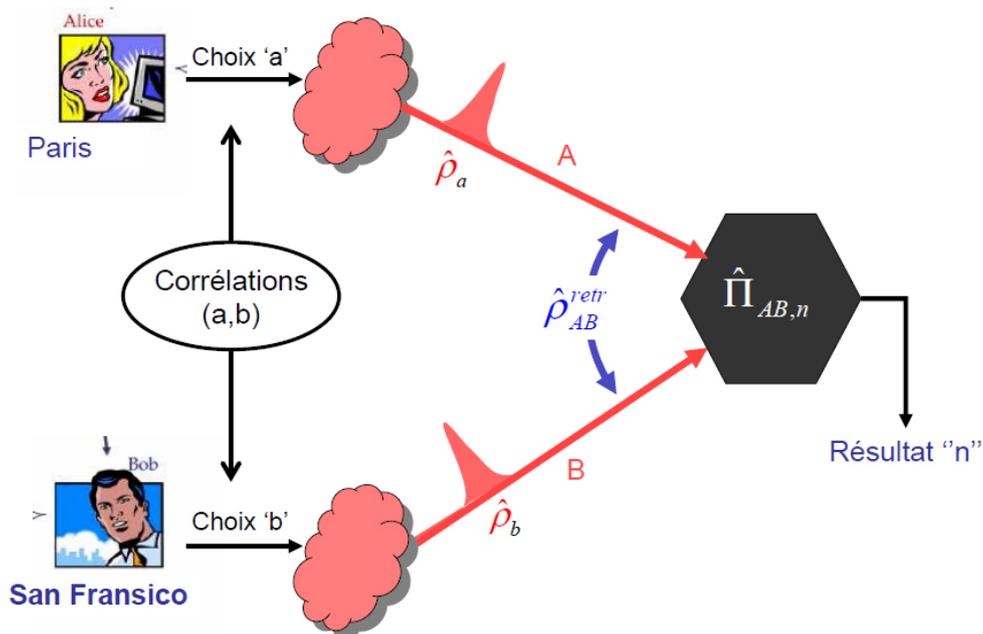
Nous allons maintenant illustrer la pertinence de cette approche dans l'étude des propriétés quantiques de la mesure. Nous proposerons d'abord une méthode expérimentale pour reconstruire le principal outil de l'approche rétrodictive : l'état rétrodicté, avant d'explicitement les propriétés quantiques de la mesure que seule cette approche révèle par le biais de ses états.

---

## Interlude II : Intrication des Etats Rétrodictés

---

Dans cet interlude, nous revenons sur une notion qui mérite une attention toute particulière. Il s'agit de l'intrication d'états rétrodictés. Lors de l'introduction, nous avons évoqué la manifestation la plus populaire des états intriqués. Il s'agit des très fortes corrélations entre les résultats de mesures effectuées sur différentes parties séparées spatialement et dans un état intriqué. Comme pour l'indéterminisme quantique, nous ne pouvons plus résumer l'intrication aux seules corrélations qu'elle induit sur des résultats de mesure. L'intrication se manifeste également par des corrélations sur les choix de préparation conduisant à un certain résultat de mesure, comme l'illustre la figure 3.7.



**Figure 3.7:** Intrication d'états rétrodictés. –Alice et Bob sont séparés par des milliers de kilomètres. Chacun d'eux réalise des choix de préparations notés "a" pour Alice et "b" pour Bob. Ces choix correspondent respectivement à la préparation d'impulsions lumineuses dans les états  $\hat{\rho}_a$  et  $\hat{\rho}_b$ . Ces dernières sont envoyées vers un appareil de mesure qui réalise des mesures sur deux modes A et B. L'état rétrodicté à partir du résultat "n" de ce détecteur est un état intriqué. Cette intrication se manifeste par de très fortes corrélations sur les choix de préparation (a,b) qui conduisent à ce résultat de mesure.

Nous considérons un appareil qui réalise des mesures sur deux modes A et B. Cet appareil de mesure est caractérisé par un ensemble d'éléments POVMs tels que

$$\sum_n \hat{\Pi}_{AB,n} = \hat{1}_A \otimes \hat{1}_B. \quad (3.53)$$

L'état rétrodicté à partir d'un résultat de mesure "n" peut être un état intriqué, c'est-à-dire un état *inséparable* tel qu'il devient impossible spécifier l'état rétrodicté de chacun des modes A ou B :

$$\hat{\rho}_{AB,n}^{\text{retr}} = \frac{\hat{\Pi}_{AB,n}}{\text{Tr}_{AB} [\hat{\Pi}_{AB,n}]} \neq \hat{\rho}_{A,n}^{\text{retr}} \otimes \hat{\rho}_{B,n}^{\text{retr}}. \quad (3.54)$$

Alice et Bob préparent respectivement dans les modes A et B des impulsions lumineuses dans les états  $\hat{\rho}_a$  et  $\hat{\rho}_b$ . Ces états résultent de choix  $(a, b)$  complètement arbitraires, car Alice et Bob sont séparés par des milliers de kilomètres et qu'ils n'ont instauré aucune règle au préalable. Ainsi, les probabilités rétrodictives qu'Alice et Bob aient fait les choix  $(a, b)$  quand l'appareil affiche le résultat "n" s'écrivent comme

$$\text{Pr}(a, b|n) = \text{Tr}_{AB} [\hat{\rho}_{AB,n}^{\text{retr}} \hat{\Theta}_a \otimes \hat{\Theta}_b], \quad (3.55)$$

où  $\hat{\Theta}_{a,b}$  désignent les opérateurs de propositions correspondant aux choix de préparations d'Alice (a) ou de Bob (b). L'intrication de l'état rétrodicté ne permet plus d'écrire ces probabilités sous la forme d'un produit de probabilités

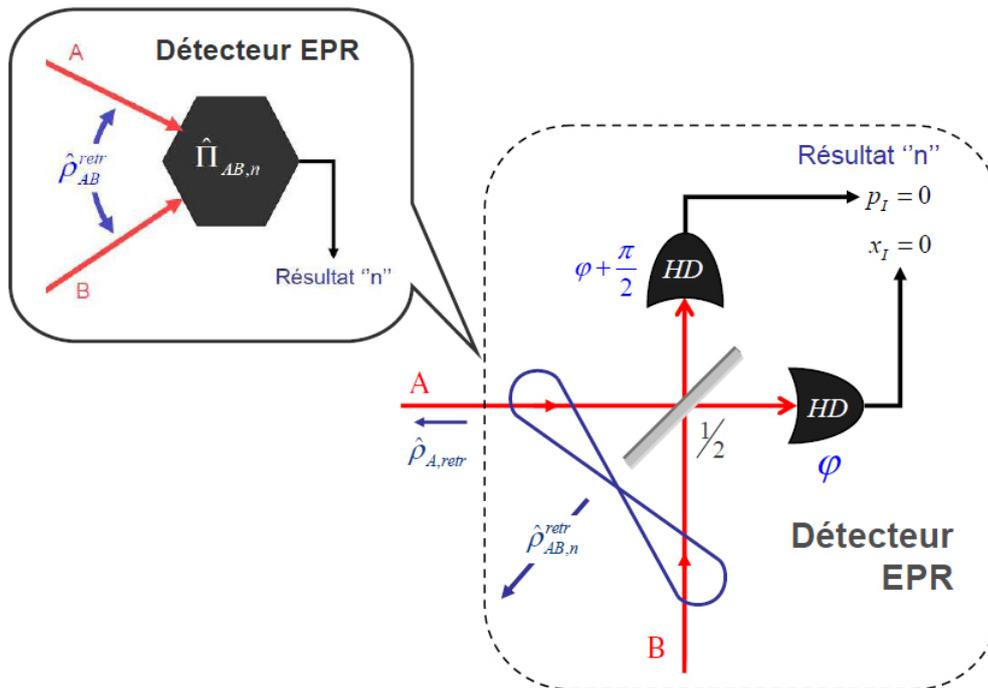
$$\text{Pr}(a, b|n) \neq \text{Pr}(a|n) \text{Pr}(b|n), \quad (3.56)$$

ce qui traduit bien l'existence de corrélations entre les choix de préparation faits par Alice et Bob.

De la même manière que les résultats de mesures sur différentes parties dans un état intriqué, ces corrélations de choix ne peuvent pas être décrites par un modèle à variables cachées. Une telle notion est encore plus difficile à saisir dans l'approche rétrodictive que dans l'approche prédictive. Nous pouvons simplement dire que lorsque le résultat "n" se produit, certaines combinaisons de choix  $(a, b)$  sont plus probables que d'autres pour conduire à ce résultat de mesure, mais cela n'entrave pas les libertés de choix d'Alice ou de Bob. Seul l'état rétrodicté  $\hat{\rho}_{AB,n}^{\text{retr}}$  permet de rendre compte de ces coïncidences de choix, comme nous allons maintenant l'illustrer sur un cas de détecteur.

L'archétype d'un appareil de mesure avec de tels états rétrodictés intriqués est représenté sur la figure 3.8. Il s'agit de ce que nous appelons *un détecteur EPR* en référence au célèbre argument EPR [5] évoqué dans l'introduction. Nous nous intéressons à la réponse "n" de cet appareil qui correspond à deux détections homodynes idéales, couplées par une lame séparatrice 50/50, en quadratures de phase et donnant les résultats  $x_I = p_I = 0$ . Les états rétrodictés à partir de ces détections sont des états de vide infiniment comprimés (3.44) selon les deux quadratures conjuguées  $x_\phi$  et  $p_\phi$ . Afin d'obtenir l'état rétrodicté  $\hat{\rho}_{AB,n}^{\text{retr}}$  de l'appareil, nous propageons en arrière dans le temps ces deux états comprimés qui interagissent sur une lame 50/50. La fonction de Wigner de cet état est donnée par

$$\mathcal{W}_{AB,n}^{\text{retr}}(x, p; x', p') = \mathcal{W}_A^{\text{retr}}\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}, \frac{p-p'}{\sqrt{2}}\right) \mathcal{W}_B^{\text{retr}}\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}}, \frac{p+p'}{\sqrt{2}}\right), \quad (3.57)$$



**Figure 3.8:** Détecteur EPR. –Le détecteur à deux modes se compose de deux détections homodynes (HD) en quadratures de phase et à la sortie d'une lame séparatrice 50/50. Le résultat "n" correspond aux valeurs jointes  $x_I = 0$  et  $p_I = 0$ .

en utilisant les propriétés de la représentation de Wigner que nous avons précisées sur la figure 2.3 au chapitre II. Nous reconnaissons alors l'état intriqué gaussien (1.58) décrit dans le premier chapitre de cette thèse. Il s'agit de ce que l'on appelle *un état EPR*. En effet, pour des détections homodynes idéales, cette représentation de Wigner tend vers un produit de distribution de Dirac

$$\mathcal{W}_{AB}(x, p; x', p') \sim \delta(x - x') \delta(p + p'). \quad (3.58)$$

Nous voyons donc que cet état présente de très fortes corrélations sur les quadratures de chacun des modes. Pour illustrer la manifestation de cette intrication sur les choix de préparation d'Alice et Bob, nous prenons la décomposition de cet état (1.57) dans la base des états nombre de photons :

$$|\psi_{AB,n}^{retr}\rangle \underset{\lambda \rightarrow 1}{\sim} (1 - \lambda^2)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k |k, k\rangle. \quad (3.59)$$

Ainsi, si Alice prépare une impulsion lumineuse dans un état à  $m$  photon  $|m\rangle_A$  et que le résultat "n" se produit, Alice est certaine du choix fait par Bob : il a également préparé une impulsion lumineuse dans un état à  $m$  photons  $|m\rangle_B$ . Ces corrélations de choix ne peuvent être utilisées par Alice que lorsque le résultat et l'état rétrodicté de la mesure sont connus par elle, et il est de même pour Bob. Rappelons que dans l'approche prédictive habituelle, les résultats de mesures de Bob ne peuvent être prédit par Alice que lorsqu'elle a connaissance du choix de préparation et de l'état résultant de ce choix. La situation est donc ici identique, sauf qu'elle porte sur des choix de préparation.

Dans la suite de cette thèse, l'intrication d'états rétrodictés interviendra dans plusieurs situations que nous étudierons sans spécialement s'attarder sur la quantification de cette intrication. En effet, une telle caractérisation de l'intrication est à ce stade inutile. Elle ne ferait que reproduire celle qui existe pour des états préparés, notamment dans le cadre d'un traitement quantique de l'information fournie par l'intrication et les mesures [74]. Par contre, les effets de choix de préparation judicieux sur ces états rétrodictés intriqués seront exploités dans la troisième partie pour concevoir des appareils de mesures fortement non-classiques.

---

# Propriétés Quantiques de la Mesure

---

## Sommaire

<b>A</b>	<b>Comment caractériser un appareil de mesure ?</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>B</b>	<b>Tomographie des états rétrodictés</b> . . . . .	<b>85</b>
B.1	Principe de la reconstruction . . . . .	85
B.2	Estimation par maximum de vraisemblance (MaxLike) . . . . .	86
<b>C</b>	<b>Propriétés quantiques de la mesure</b> . . . . .	<b>88</b>
C.1	Projectivité et idéalité . . . . .	88
C.2	Fidélité avec une mesure projective et détectivité . . . . .	89
C.3	Non-classicalité d'une mesure . . . . .	90
C.4	Caractère non-gaussien d'une mesure . . . . .	92
<b>D</b>	<b>Illustrations en optique quantique</b> . . . . .	<b>93</b>
D.1	Photodiode à Avalanche . . . . .	93
D.2	Détection homodyne . . . . .	99
<b>E</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>101</b>

---

*Dans ce chapitre, nous allons montrer comment l'approche rétrodictive de la physique quantique permet de révéler de nouvelles propriétés pour les mesures effectuées par tout appareil de mesure. En effet, cette approche nous permet de répondre à une question naturelle lorsque l'on effectue une mesure : quelles préparations ont pu conduire à ce résultat de mesure ? Nous illustrerons les propriétés quantiques de la mesure sur deux détecteurs largement utilisés en optique quantique : la photodiode à avalanche (APD) et la détection homodyne.*

## A Comment caractériser un appareil de mesure ?

Un appareil de mesure réalise autant de mesures qu'il a de résultats de mesures ou de réponses. Chaque mesure correspond à une réponse donnée, dont le comportement dans l'approche prédictive est décrit par un élément POVM qui donne les probabilités prédictives d'avoir cette réponse.

Pour caractériser un appareil de mesure et aller au-delà de ces simples probabilités prédictives, on pourrait s'intéresser aux effets de la mesure sur un système. Ces effets sont

au coeur des protocoles de préparation conditionnelle que nous avons décrit au chapitre II. Cependant, un élément POVM ne suffit pas à rendre compte de tels effets dans le cas général. En effet, nous avons montré que les effets d'une mesure généralisée sur un système sont donnés par la règle de projection généralisée

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_n^{\text{cond}} = \sum_{\mu} \frac{\hat{M}_{n,\mu} \hat{\rho} \hat{M}_{n,\mu}^{\dagger}}{\text{Pr}(n)}, \quad (4.1)$$

où  $\hat{M}_{n,\mu}$  sont les opérateurs de Kraus décrivant complètement le processus de mesure donnant le résultat "n". La probabilité  $\text{Pr}(n)$  d'avoir ce résultat est associée à l'élément POVM

$$\hat{\Pi}_n = \sum_{\mu} \hat{M}_{n,\mu}^{\dagger} \hat{M}_{n,\mu}. \quad (4.2)$$

L'état conditionné sur le résultat d'une mesure non-destructive dépend donc du détail du processus de mesure, décrit par les opérateurs de Kraus  $\{\hat{M}_{n,\mu}\}_{\mu}$ , et non de l'élément POVM (4.2).

Dans le cas d'une préparation conditionnelle basée sur une mesure destructive, nous devons effectuer la mesure sur une partie B d'une ressource intriquée à deux parties  $\hat{\rho}_{AB}$ . L'état de la partie A, conditionné sur le résultat de cette mesure, dépend cette fois de l'élément POVM correspondant au résultat espéré "n" :

$$\hat{\rho}_{A,n}^{\text{cond}} = \frac{1}{\text{Pr}(n)} \text{Tr}_B \left[ \hat{\rho}_{AB} \hat{1}_A \otimes \hat{\Pi}_n \right], \quad (4.3)$$

comme nous l'avons montré en (2.47) au chapitre II. Cependant, cet état conditionné fait intervenir explicitement la ressource intriquée  $\hat{\rho}_{AB}$  sur laquelle la mesure est effectuée. Ainsi, l'approche prédictive ne peut pas conduire à une étude de l'appareil de mesure comme une implémentation de tests vérifiant des propositions (éléments POVM). Les états conditionnés dépendent en effet de l'état initial du système et/ou du détail du processus de mesure décrivant cette mesure. De plus, nous avons montré qu'une mesure caractérisée par un élément POVM donné peut être réalisée par différents processus de mesure, puisque la décomposition (4.2) n'est pas unique. L'approche prédictive est définitivement plus adaptée à l'étude des effets de la mesure, dans des préparations conditionnelles par exemple, que pour révéler les propriétés quantiques d'une mesure effectuée par un détecteur.

L'approche rétrodictive nous semble être plus proche de ce but. A partir d'un certain résultat de mesure, elle assigne un état au système : *l'état rétrodicté* qui nous permet de faire des prédictions sur les préparations qui ont pu conduire à ce résultat. Elle nous permet ainsi de répondre à des questions naturelles lorsque l'on effectue une mesure : *quelles préparations ont pu conduire à ce résultat de mesure ?* Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer comment l'état rétrodicté révèle de nouvelles propriétés pour la mesure. Nous devons donc être capable de reconstruire ces états rétrodictés pour n'importe quel appareil de mesure.

## B Tomographie des états rétrodictés

Avant d'aborder les propriétés quantiques de la mesure, nous allons montrer comment les états rétrodictés peuvent être directement reconstruits à partir de données expérimentales, en utilisant les mêmes outils qu'une tomographie d'états quantiques (QST) habituelle [75, 76]. Cependant, notre tomographie est ici entièrement fondée sur l'approche rétrodictive et des choix préparations, contrairement aux tomographies habituelles basées sur l'approche prédictive et des résultats de mesures. A notre connaissance, il s'agit de la première proposition [72, 86] de tomographie fondée sur l'approche rétrodictive (retro-QST).

D'un point de vue fondamental, une telle reconstruction illustre la pertinence de l'approche rétrodictive. En effet, son principal outil : l'état rétrodicté peut être reconstruit à partir de données expérimentales tout comme les états préparés de l'approche habituelle. Il n'y a donc plus de débats autour de "l'existence" ou non d'un tel état, surtout que ces états nous permettront d'introduire et d'étudier des propriétés quantiques pour la mesure.

### B.1 Principe de la reconstruction

Nous devons sonder le comportement de l'appareil de mesure avec un certain nombre  $M$  d'états quantiques  $\hat{\rho}_m$ . Chaque choix de préparation "m" est effectué de manière aléatoire ou déterministe avec une probabilité  $\Pr(m)$ , si bien que l'appareil interagit *globalement* avec le mélange statistique

$$\hat{\rho}_{\text{sonde}} = \sum_{m=1}^M \Pr(m) \hat{\rho}_m = \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}. \quad (4.4)$$

où  $\hat{\sigma}$  désigne la décomposition de Cholesky du mélange sondant  $\hat{\rho}_{\text{sonde}}$ . De manière générale, cet état ne sera pas caractérisé par un degré maximal de mélange ( $\hat{\rho}_{\text{sonde}} \neq \hat{1}/D$ ), comme exigée au chapitre III. Les probabilités  $\Pr(m)$  devront donc être choisies de telle manière que

$$\det [\hat{\rho}_{\text{sonde}}] \neq 0, \quad (4.5)$$

afin d'obtenir des opérateurs hermitiens et positifs

$$\hat{\Lambda}_m = \Pr(m) (\hat{\sigma}^{-1})^\dagger \hat{\rho}_m \hat{\sigma}^{-1} \quad (4.6)$$

tels que

$$\sum_m \hat{\Lambda}_m = \hat{1}. \quad (4.7)$$

Les probabilités rétrodictives d'avoir fait le choix "m" quand la mesure donne le résultat "n" seront alors données par l'expression

$$\Pr(m|n) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_n \hat{\Lambda}_m \right], \quad (4.8)$$

comme nous l'avons montré en (3.15) au chapitre III. A chaque fois que le résultat "n" se produit, nous enregistrons les choix de préparation "m" qui ont conduit à ce résultat. De cette manière, nous pouvons directement déterminer les fréquences rétrodictives  $f(m|n)$  d'avoir préparé le système dans l'état résultant du choix "m" et conduisant au résultat "n".

Ensuite, nous utilisons ces fréquences pour reconstruire l'opérateur  $\hat{\rho}_n$  donnant les probabilités rétrodictives  $\Pr(m|n) = \text{Tr}[\hat{\rho}_n \hat{\Lambda}_m]$  qui sont les plus proches des fréquences expérimentales  $f(m|n)$ . Dans cette thèse, nous utiliserons une estimation par maximum de vraisemblance de l'opérateur  $\hat{\rho}_n$  que nous décrirons dans la section suivante. Une fois la matrice densité  $\hat{\rho}_n$  estimée, nous obtenons l'état retrodicté  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$  en effectuant la transformation suivante :

$$\hat{\rho}_n^{\text{retr}} = \frac{\hat{\sigma}^{-1} \hat{\rho}_n (\hat{\sigma}^{-1})^\dagger}{\text{Tr}[\hat{\sigma}^{-1} \hat{\rho}_n (\hat{\sigma}^{-1})^\dagger]}, \quad (4.9)$$

qui est simplement une inversion de la relation (3.16) établie au chapitre III. Notons que nous retrouvons également ce genre de transformation dans les tomographies d'états quantiques habituelles, basées sur des résultats de mesure. En effet, on sollicite rarement toutes les réponses d'un appareil de mesure, comme une détection homodyne par exemple. On se retrouve ainsi avec un ensemble non-exhaustif de propositions, puisque la somme des éléments POVM n'égalé généralement pas l'identité.

## B.2 Estimation par maximum de vraisemblance (MaxLike)

L'état quantique que nous cherchons à reconstruire est celui qui optimise la vraisemblance entre les fréquences mesurées  $f(m|n)$  et les probabilités rétrodictives (4.8). Cette vraisemblance est définie de manière générale [76] par

$$\mathcal{L}[\hat{\rho}_n] = \prod_{m=1}^M \left[ \frac{\Pr(m|n)}{\sum_{m'} \Pr(m'|n)} \right]^{f(m|n)}. \quad (4.10)$$

Il s'agit d'une fonctionnelle non-linéaire de l'état quantique qui est plus robuste aux erreurs affectant la détermination des fréquences rétrodictives, comme nous le verrons lors de son implémentation au chapitre V. Cette vraisemblance devient maximale pour l'état quantique  $\hat{\rho}_n^{\text{max}}$  tel que

$$\frac{d \log \mathcal{L}[\hat{\rho}_n^{\text{max}}]}{d\hat{\sigma}_n} = 0. \quad (4.11)$$

où  $\hat{\sigma}_n$  désigne la décomposition de Cholesky de l'état  $\hat{\rho}_n = \hat{\sigma}_n^\dagger \hat{\sigma}_n$ . Nous pouvons vérifier que

$$\frac{d \log \Pr(m|n)}{d\hat{\sigma}_n} = \frac{\hat{\Lambda}_m \hat{\sigma}_n^\dagger}{\Pr(m|n)}, \quad (4.12)$$

ce qui permet d'écrire la condition (4.11) sur  $\hat{\rho}_n^{\text{max}}$  comme

$$\hat{R}[\hat{\rho}_n^{\text{max}}] \hat{\rho}_n^{\text{max}} = \hat{\rho}_n^{\text{max}}, \quad (4.13)$$

avec

$$\hat{R}[\hat{\rho}_n] = \sum_m \frac{f(m|n)}{\Pr(m|n)} \hat{\Lambda}_m. \quad (4.14)$$

Cette condition peut également se mettre sous la forme suivante

$$\hat{R}[\hat{\rho}_n^{\text{max}}] \hat{\rho}_n^{\text{max}} \hat{R}[\hat{\rho}_n^{\text{max}}] = \hat{\rho}_n^{\text{max}}, \quad (4.15)$$

puisque les opérateurs  $\hat{\rho}_n$  et  $\hat{R}[\hat{\rho}_n]$  sont hermitiens. Cette relation est à la base du schéma itératif dit "RρR" [76] basé sur la relation de récurrence suivante

$$\hat{\rho}_n^{(k+1)} = \frac{\hat{R}[\hat{\rho}_n^{(k)}]\hat{\rho}_n^{(k)}\hat{R}[\hat{\rho}_n^{(k)}]}{\text{Tr}\left[\hat{R}[\hat{\rho}_n^{(k)}]\hat{\rho}_n^{(k)}\hat{R}[\hat{\rho}_n^{(k)}]\right)}. \quad (4.16)$$

L'algorithme est initialisé avec la matrice densité  $\hat{\rho}_n^{(0)} = \hat{1}/D$ . Ainsi, quand la matrice densité  $\hat{\rho}_n^{(k)}$  devient suffisamment proche de  $\hat{\rho}_n^{max}$ , les probabilités rétrodictives redonnent pratiquement les fréquences expérimentale

$$\text{Pr}(m|n) \simeq f(m|n)$$

si bien que l'opérateur non-linéaire (4.14) devient

$$\hat{R}(\hat{\rho}_n) \simeq \sum_{m=1}^M \hat{\Lambda}_m = \hat{1}.$$

Nous retrouvons la condition de convergence (4.15) de l'algorithme. L'état rétrodicté à partir de la réponse "n" de l'appareil est alors obtenu en effectuant la transformation suivante :

$$\hat{\rho}_n^{\text{retr}} = \frac{\hat{\sigma}^{-1}\hat{\rho}_n^{max}(\hat{\sigma}^{-1})^\dagger}{\text{Tr}\left[\hat{\sigma}^{-1}\hat{\rho}_n^{max}(\hat{\sigma}^{-1})^\dagger\right]}. \quad (4.17)$$

Nous pouvons même déterminer l'élément POVM à partir de l'état estimé  $\hat{\rho}_n^{max}$  :

$$\hat{\Pi}_n = \text{Pr}(n) \hat{\sigma}^{-1}\hat{\rho}_n^{max}(\hat{\sigma}^{-1})^\dagger. \quad (4.18)$$

Notons que nous obtenons ici l'élément POVM caractérisant uniquement la réponse "n" qui nous intéresse, contrairement à une tomographie quantique de détecteur (QDT) [77, 78] qui détermine tous les éléments POVM décrivant un appareil de mesure. En effet, une QDT doit prendre en compte toutes les réponses de l'appareil afin de reconstruire les éléments POVMs, vérifiant la condition  $\sum_n \hat{\Pi}_n = \hat{1}$ . Cette condition complique notablement l'algorithme de reconstruction, qui peut déjà être non-linéaire. Notre tomographie s'avère donc plus judicieuse pour des appareils de mesures ayant un très grand nombre de réponse, voir un ensemble continu de réponses.

Dans le chapitre suivant, nous réaliserons la tomographie des états rétrodictés pour étudier le comportement quantique d'un détecteur de photons uniques sous l'influence du bruit. Ainsi, nous illustrerons expérimentalement les propriétés quantiques de la mesure que nous allons maintenant introduire.

## C Propriétés quantiques de la mesure

Nous montrons maintenant comment les propriétés quantiques d'une mesure sont révélées par l'état quantique rétrodicté à partir de son résultat. Cela nous permettra d'introduire et de définir des propriétés quantiques qui restaient jusqu'ici évasives, comme le caractère projectif ou non-classique d'une mesure, mais également de prédire des comportements totalement inattendus.

### C.1 Projectivité et idéalité

Une mesure *idéale* vérifie une proposition simple correspondant à un projecteur  $\hat{\Pi}_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$  dans l'espace de Hilbert. Cependant, dans des situations plus réalistes, un dispositif de mesure est caractérisé par des éléments POVM qui ne sont pas du tout des projecteurs. Nous proposons des estimateurs du caractère projectif et idéal d'une mesure.

#### Projectivité

Une évaluation du caractère projectif d'une mesure : *la projectivité* est fournie par la pureté  $\pi_n$  de son état rétrodicté

$$\pi_n = \text{Tr} \left[ (\hat{\rho}_n^{\text{retr}})^2 \right]. \quad (4.19)$$

Quand cet état rétrodicté est un état quantique pur, avec  $\pi_n = 1$ , la mesure effectuée par l'appareil est *projective* pour la réponse "n". Cependant, elle peut être *non-idéale*. En effet, l'élément POVM correspondant à une telle projectivité ( $\pi_n = 1$ ) est en fait donné par

$$\hat{\Pi}_n = \eta_n |\psi_n^{\text{retr}}\rangle\langle\psi_n^{\text{retr}}| \quad (4.20)$$

où  $\eta_n = \text{Tr}\{\hat{\Pi}_n\}$  peut être vue comme l'efficacité de détection de l'état rétrodicté  $|\psi_n^{\text{retr}}\rangle$ , puisque l'approche prédictive donne pour la probabilité prédictive  $\text{Pr}(n|\psi_n) = \eta_n$ . De telles mesures projectives et non-idéales ne peuvent pas être modélisées de manière "traditionnelle", notamment avec une lame séparatrice de transmission en intensité égale à l'efficacité  $\eta_n$ , ce qui est par exemple le cas pour le comptage inefficace de photons.

#### Idéalité

De manière générale, l'idéalité d'une mesure sera évaluée par *l'efficacité de détection* de son état rétrodicté. Cette efficacité n'est rien d'autre que la probabilité prédictive d'avoir le résultat "n" quand on prépare l'état rétrodicté

$$\eta_n = \text{Pr}(n|\hat{\rho}_n^{\text{retr}}) = \frac{\text{Tr}\{\hat{\Pi}_n^2\}}{\text{Tr}\{\hat{\Pi}_n\}}. \quad (4.21)$$

Ainsi, la projectivité et l'idéalité d'une mesure sont reliées par la relation suivante

$$\frac{\eta_n}{\pi_n} = \text{Tr}\{\hat{\Pi}_n\}. \quad (4.22)$$

Ces propriétés de la mesure illustrent bien la complémentarité entre les approches prédictive et rétrodictive. Le caractère projectif d'une mesure n'est révélé que par l'approche

rétrodictive, et non par l'approche prédictive. La définition habituelle d'une mesure projective, introduite par John Von Neumann (1932) [4], correspond maintenant à un cas très particulier : une mesure projective et idéale ( $\pi_n = \eta_n = 1$ ).

A notre connaissance, de telles mesures projectives et non-idéales n'avaient jamais été étudiées auparavant [70]. Dans la troisième partie de cette thèse, nous étudierons deux dispositifs réalisant des mesures projectives mais non-idéales.

## C.2 Fidélité avec une mesure projective et détectivité

### Fidélité avec une mesure projective

Il peut être intéressant et utile de comparer la mesure effectuée par un appareil, lorsque ce dernier donne un certain résultat "n", avec une mesure projective "cible". L'état rétrodicté de cette mesure "cible" est un état quantique de référence  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$ .

Nous estimons *la fidélité d'une mesure* par le recouvrement entre l'état cible  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$  et l'état rétrodicté  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$  à partir d'un certain résultat "n" de l'appareil que nous cherchons à caractériser. Une telle fidélité peut s'écrire comme

$$\mathcal{F}_n(\psi_{\text{tar}}) = \langle \psi_{\text{tar}} | \hat{\rho}_n^{\text{retr}} | \psi_{\text{tar}} \rangle. \quad (4.23)$$

Avec l'approche rétrodictive, ce recouvrement a une interprétation intéressante. Il s'agit de la probabilité rétrodictive de préparer le système dans l'état cible  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$ , avant le processus de mesure donnant le résultat "n" :

$$\mathcal{F}_n(\psi_{\text{tar}}) = \Pr(\psi_{\text{tar}}|n) = \text{Tr}\{\hat{\rho}_n^{\text{retr}} \hat{\Theta}_{\text{tar}}\}. \quad (4.24)$$

L'opérateur de proposition sur l'état du système, juste après le processus de préparation, est simplement le projecteur

$$\hat{\Theta}_{\text{tar}} = |\psi_{\text{tar}}\rangle\langle\psi_{\text{tar}}|. \quad (4.25)$$

Notons que la probabilité marginale de préparer le système dans cet état cible est  $\Pr(\psi_{\text{tar}}) = 1/D$  dans ce cas particulier. Elle assure un mélange maximum des états purs constituant une base de l'espace de Hilbert. Cette base est composée de l'état cible  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$  et de  $(D - 1)$  autres états purs. Ainsi, pour avoir une description exhaustive du système, nous avons besoin de compléter cet ensemble par une autre proposition au moins. Cette dernière est représentée par

$$\hat{\Theta}_{\text{tar}} = \hat{1} - \hat{\Theta}_{\text{tar}}. \quad (4.26)$$

Elle correspond à la préparation du système dans l'état  $\hat{\rho}_{\text{tar}} = \hat{\Theta}_{\text{tar}}/\text{Tr}\{\hat{\Theta}_{\text{tar}}\}$  avec la probabilité  $1 - \Pr(\psi_{\text{tar}})$ .

### Détectivité d'un état cible

Une mesure sera dite *fidèle* à une mesure projective sur un état cible lorsque sa fidélité est suffisamment élevée ( $\mathcal{F}_n \sim 1$ ). La préparation la plus probable du système est alors l'état cible  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$ . Par contre, *la détectivité* de l'état cible est donnée par la probabilité prédictive de détecter cet état

$$\kappa_n = \Pr(n|\psi_{\text{tar}}) = \text{Tr}\{\hat{\Pi}_n\} \text{Tr}\{\hat{\rho}_{\text{tar}} \hat{\rho}_n^{\text{retr}}\}. \quad (4.27)$$

En utilisant la relation entre la projectivité et l'idéalité (4.22), nous obtenons une relation remarquable entre toutes les propriétés de la mesure que nous avons introduite jusqu'ici :

$$\kappa_n = \frac{\eta_n \mathcal{F}_n}{\pi_n}. \quad (4.28)$$

Le comportement de cette détectivité est intéressant. Lorsqu'une mesure est intrinsèquement efficace, la fidélité de la mesure avec l'état cible ne peut qu'améliorer les chances de détecter cet état. Par contre, à efficacité et fidélité fixées, une mesure moins projective aura tendance à augmenter les chances de détecter l'état cible. En effet, l'état rétrodicté est alors moins pur et la mesure devient en quelque sorte moins "sélective". Une illustration de ce comportement sera fournie dans la troisième partie de cette thèse, lorsque nous étudierons un détecteur d'états "chat de Schrödinger" de la lumière.

### C.3 Non-classicalité d'une mesure

#### Définition

La notion de non-classicalité est bien étudiée pour des états du champ en optique quantique [79]. Il existe plusieurs signatures de non-classicalité correspondant à différents niveaux de non-classicalité. On peut citer la négativité dans des quasi-distributions de probabilité, comme la fonction de Wigner ou la distribution de Glauber-Sudarshan, mais aussi la réduction des fluctuations quantiques en dessous de la limite quantique standard, avec des états comprimés par exemple.

Quelle que soit la signature de non-classicalité que l'on utilisera, nous avons maintenant une définition précise d'une telle notion pour la mesure. *La non-classicalité d'une mesure* correspond à *la non-classicalité de son état rétrodicté*, pour qui il existe différentes signatures, notamment celles évoquées au chapitre I de cette thèse.

#### Signification

La négativité de certaines quasi-distributions de probabilité, comme la représentation de Wigner, est l'une des premières signatures du caractère non-classique d'un état quantique. Pour une mesure, cela correspond à des négativités dans la représentation de Wigner  $\mathcal{W}_n^{\text{retr}}(x, p)$  de son état rétrodicté  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$ .

Pour appréhender la signification d'une telle signature, nous écrivons les probabilités rétrodictives (3.10) en termes des fonctions de Wigner. En effet, la probabilité rétrodictive d'avoir fait un choix de préparation "m", décrit par l'opérateur de proposition  $\hat{\Theta}_m$ , est donnée par

$$\Pr(m|n) = \text{Tr}\{\hat{\rho}_n^{\text{retr}} \hat{\Theta}_m\} = 2\pi \int dx dp \mathcal{W}_n^{\text{retr}}(x, p) \mathcal{W}_m(x, p), \quad (4.29)$$

où  $\mathcal{W}_m(x, p)$  désigne la représentation de Wigner de l'opérateur de proposition  $\hat{\Theta}_m$  qui est directement liée à celle de l'état préparé  $\hat{\rho}_m = \hat{\Theta}_m / \text{Tr}[\hat{\Theta}_m]$ .

Si l'on prépare des états "quasi-classiques"  $\hat{\rho}_m$ , caractérisés par des fonctions de Wigner positives, nous pouvons utiliser leurs fonctions de Wigner comme de véritables distributions de probabilité sur l'espace des phases  $(x, p)$ . Les fluctuations quantiques peuvent alors être reproduites par un processus stochastique classique, distribué par la fonction de Wigner.

Cependant, si nous effectuons une mesure dont l'état rétrodicté est caractérisé par une fonction de Wigner  $\mathcal{W}_n^{\text{retr}}(x, p)$  négative, il devient impossible de simuler le comportement de l'appareil de mesure par un processus stochastique classique, comme le souligne l'expression (4.29). En effet, les négativités de l'état rétrodicté diminuent le recouvrement avec les états préparés, ce qui rend ces préparations beaucoup moins probables que l'on pourrait le prévoir classiquement. Autrement dit, lorsque nous obtenons le résultat "n", le choix de préparation "m" ne peut être "rétro-prédit" que par le traitement quantique de la mesure.

### Illustration

Nous illustrons maintenant la pertinence de notre définition de la non-classicalité d'une mesure pour des préparations conditionnelles utilisant des mesures destructives. Nous avons décrit ces protocoles au chapitre II de cette thèse. Pour réaliser un tel protocole en optique quantique, la première ressource intriquée qui vient à l'esprit en parcourant le premier chapitre est l'état intriqué gaussien (1.57). Cet état admet pour décomposition dans la base des états nombres de photons l'expression suivante :

$$|\psi_{AB}\rangle = (1 - \lambda^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n, n\rangle. \quad (4.30)$$

Lorsque cet état est suffisamment peuplé,  $\lambda \simeq 1$ , la représentation de Wigner de cette ressource admet pour équivalent

$$\mathcal{W}_{AB}(x, p; x', p') \sim \delta(x - x') \delta(p + p'), \quad (4.31)$$

comme nous l'avons montré dans le chapitre I de cette thèse. Ensuite, nous pouvons mettre à profit l'expression de l'état conditionné en terme de fonction de Wigner, établie en (2.51) au chapitre II. Nous rappelons ici cette expression

$$\mathcal{W}_n^{\text{cond}}(x, p) = \frac{\int dudv \mathcal{W}_{AB}(x, p; u, v) \mathcal{W}_n(u, v)}{\int dx' dp' dudv \mathcal{W}_{AB}(x', p'; u, v) \mathcal{W}_n(u, v)}, \quad (4.32)$$

où  $\mathcal{W}_n(u, v)$  désigne la représentation de Wigner de l'élément POVM  $\hat{\Pi}_n$  correspondant au résultat espéré "n". La fonction de Wigner de l'état conditionné s'obtient alors sans grande difficulté :

$$\mathcal{W}_n^{\text{cond}}(x, p) \simeq \mathcal{W}_n^{\text{retr}}(x, -p), \quad (4.33)$$

ce qui s'écrit en termes d'opérateurs densité :

$$\hat{\rho}_{A,n}^{\text{cond}} \simeq (\hat{\rho}_n^{\text{retr}})^*. \quad (4.34)$$

Nous reconnaissons le complexe conjugué de l'état rétrodicté  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$ , en utilisant la définition générale de la fonction de Wigner (1.35) et les propriétés de conjugaison du produit hermitien.

Une condition nécessaire pour préparer des états non-classiques est donc d'utiliser des mesures caractérisées par des états rétrodictés non-classiques. Si l'on souhaite par exemple préparer des états de Fock, il suffit d'utiliser une mesure dont l'état rétrodicté est un état nombre de photons  $|n\rangle$ . Dans la troisième partie de cette thèse, nous allons voir qu'il devient même possible d'imaginer des appareils de mesure caractérisés par des états rétrodictés encore plus exotiques que des états de Fock.

## C.4 Caractère non-gaussien d'une mesure

Le caractère non-gaussien d'une mesure est essentiel dans beaucoup de protocoles d'information quantique tels que la distillation d'intrication [35] ou la correction d'erreur quantique [36]. Cette propriété pour la mesure peut être mesurée à l'aide du *caractère non-gaussien de son état rétrodicté*.

### Non-Gaussianité

Lorsque la représentation de Wigner de l'état rétrodicté d'une mesure est positive, nous devons préciser son éventuel caractère non-gaussien. Nous évaluons alors sa *non-gaussianité* (nonG) [80], définie comme l'entropie relative de Von Neumann (1.24) entre son état rétrodicté et son état gaussien de référence  $\hat{\rho}_g^{\text{ref}}$  :

$$\text{nonG}_n = \mathcal{S}[\hat{\rho}_n^{\text{retr}}] - \mathcal{S}[\hat{\rho}_g^{\text{ref}}]. \quad (4.35)$$

La non-gaussianité *nonG* est nulle seulement pour des mesures gaussiennes, dont l'état rétrodicté est alors l'état gaussien de référence  $\hat{\rho}_g^{\text{ref}}$ . Cet état gaussien de référence est l'état gaussien ayant la même matrice de covariance que l'état rétrodicté. En effet, tout état gaussien est entièrement caractérisé par sa matrice de covariance :

$$\mathbf{V} = 2 \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{x}^2 \rangle & \langle \delta \hat{x} \delta \hat{p} \rangle_S \\ \langle \delta \hat{x} \delta \hat{p} \rangle_S & \langle \delta \hat{p}^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

où les variances croisées sont définies par

$$\langle \delta \hat{x} \delta \hat{p} \rangle_S = \frac{1}{2} (\langle \delta \hat{x} \delta \hat{p} \rangle + \langle \delta \hat{p} \delta \hat{x} \rangle), \quad (4.37)$$

afin de tenir compte de la non-commutation des observables  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ . Notons que cette matrice est normalisée par la variance du vide dans nos notations. On montre [81] que l'entropie de Von Neumann d'un état gaussien est liée à sa pureté

$$\mathcal{S}[\hat{\rho}_g^{\text{ref}}] = \frac{1-\mu}{2\mu} \ln \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - \ln \left( \frac{2\mu}{1+\mu} \right), \quad (4.38)$$

où  $\mu$  est la pureté donnée par  $\mu = 1/\sqrt{\det \mathbf{V}}$ .

L'évaluation de la non-G nécessite plusieurs étapes numériques que nous allons décrire brièvement. Dans un premier temps, nous devons déterminer la matrice de covariances (4.36) avec la fonction de Wigner (numérique) de l'état rétrodicté, en utilisant la relation (1.36) pour les observables correspondantes. Cette matrice de covariance nous permet alors d'estimer l'entropie de Von Neumann (4.38) de l'état gaussien de référence  $\hat{\rho}_g^{\text{ref}}$ . Ensuite, nous devons diagonaliser la matrice densité de l'état rétrodicté  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$ . Les valeurs propres  $\{p_k\}_k$  de cet état nous permettent d'obtenir son entropie de Von Neumann :

$$\mathcal{S}[\hat{\rho}_n^{\text{retr}}] = - \sum_k p_k \log p_k \quad (4.39)$$

Nous obtenons finalement la non-gaussianité de la mesure (4.35) en effectuant la différence des entropies (4.39) et (4.38). Si cette différence est quasiment nulle, la mesure pourra être qualifiée de mesure gaussienne ( $\text{nonG}_n = 0$ ). On pourra donc simuler les rétrodictions faites à partir de cette mesure par un modèle stochastique, dont la fonction de Wigner est la distribution gaussienne de probabilité.

## Lien avec la projectivité

Il existe un résultat intéressant basé sur le théorème de Hudson-Piquet [27], que nous avons évoqué dans le premier chapitre. Ce théorème stipule que tout état *pur*, caractérisé par une fonction de Wigner *positive*, est un état *gaussien* dont la fonction de Wigner est une gaussienne caractérisée par une matrice de covariance précise.

Nous avons donc un lien intéressant entre le caractère gaussien d'une mesure et sa projectivité. Quand une mesure est *projective*, avec une représentation de Wigner positive pour son état rétrodicté, alors cette mesure est *gaussienne* ( $\text{nonG} = 0$ ). Une telle mesure ne pourra pas être utilisée pour distiller l'intrication d'un état gaussien [35].

## D Illustrations en optique quantique

Nous allons maintenant évaluer certaines de ces propriétés pour deux appareils de mesure très utilisés en optique quantique : la photodiode à avalanche (APD) et la détection homodyne. Cela nous permettra d'aborder ces appareils incontournables sous un jour nouveau, comme par le caractère non-classique des mesures effectuées par ces détecteurs.

### D.1 Photodiode à Avalanche

La photodiode à avalanche (APD) est sans doute le détecteur de photon unique le plus utilisé en optique quantique [82], en particulier dans le régime dit de "comptage de photons" où l'on cherche à distinguer les photons d'un faisceau lumineux.

#### D.1.1 Éléments POVM

Un tel détecteur possède uniquement deux réponses, traditionnellement appelées "off" et "on". On parle alors de détecteur "on/off" qui couvre un large éventail de détecteurs caractérisés par les mêmes éléments POVM. En effet, la réponse "off" correspond à la détection inefficace et bruyante d'aucun photon. Comme nous l'avons montré à la fin du chapitre II, une telle mesure est caractérisée par l'élément POVM (2.64)

$$\hat{\Pi}_{\text{off}}(\eta, \nu) = e^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (1-\eta)^n |n\rangle\langle n|, \quad (4.40)$$

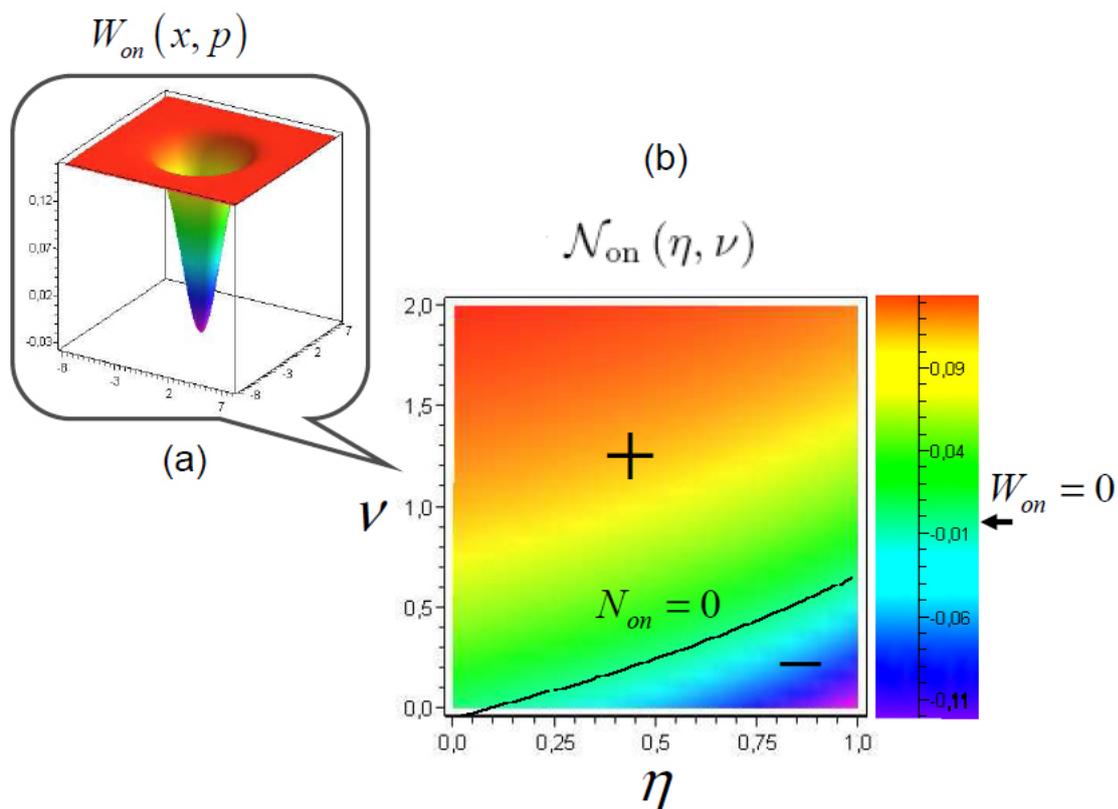
où  $\eta$  et  $\nu$  désignent respectivement l'efficacité de détection et le nombre moyen de coups d'obscurité. La réponse "on" de ce détecteur correspond à la détection inefficace et bruyante d'au moins un photon, caractérisée par l'élément POVM

$$\hat{\Pi}_{\text{on}} = \hat{1} - \hat{\Pi}_{\text{off}}. \quad (4.41)$$

La représentation de Wigner (1.35) de cet élément POVM est alors donnée par

$$\mathcal{W}_{\text{on}}(x, p) = \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{-\nu}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (\eta - 1)^m e^{-(x^2+p^2)} L_m [2(x^2 + p^2)]. \quad (4.42)$$

où  $L_m(x) = e^x \partial_x^m (x^m e^{-x}) / m!$  sont les polynômes de Legendre. L'allure de cette représentation est représentée sur la figure 4.1-(a).



**Figure 4.1:** Évolution de la non-classicalité d'une mesure effectuée par une APD affichant le résultat "on". –(a) Fonction de Wigner de l'élément POVM pour une efficacité  $\eta = 0.35$  et un bruit  $\nu = 0$ . (b) Évolution de la négativité à l'origine avec l'efficacité  $\eta$  et le bruit d'obscurité  $\nu$ . La ligne noire correspond à une transition quantique/classique.

### D.1.2 Non-classicalité

Quand le résultat "on" s'affiche, la non-classicalité de la mesure effectuée par l'APD peut être évaluée par la négativité de la représentation de Wigner de son état rétrodicté. Cependant, la rétrodiction de cet état à partir de l'élément POVM (4.41) est délicate dans un espace de Hilbert de dimension infinie  $D$ . Pour contourner cette difficulté, nous choisissons pour la négativité à l'origine

$$\mathcal{N}_{\text{on}}(\eta, \nu) = \mathcal{W}_{\text{on}}(0, 0) \quad (4.43)$$

puisque la fonction de Wigner est minimale à l'origine, comme l'illustre la figure 4.1-(a). L'évolution de cette signature de non-classicalité, sous l'influence du bruit, est illustrée sur la figure 4.1-(b). La négativité est alors assurée pour un nombre moyen de coups noirs  $\nu$  tel que

$$\nu < \nu_o = -\ln(1 - \eta/2). \quad (4.44)$$

L'évolution de ce seuil  $\nu_o$  avec l'efficacité est représentée par la ligne noire sur la figure 4.1-(b). Cette dernière correspond à une transition quantique/classique de la mesure effectuée par l'APD. Comme nous l'avons montré dans le chapitre I, cette transition correspond également à un changement de parité moyenne de l'état rétrodicté. En effet, à l'aide de (1.65), nous avons

$$\mathcal{N}_{\text{on}}(\eta, \nu) \propto \frac{1}{\pi} \langle (-1)^{\hat{n}} \rangle_{\text{retr}} = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{\text{on}}^{\text{retr}} (-1)^{\hat{n}} \right]. \quad (4.45)$$

Lorsque le bruit reste en-dessous du seuil (4.44), l'état rétrodicté est "plus souvent" dans des états à nombres impairs de photons, donnant un autre sens à la dénomination de détecteur de photon unique.

Enfin, notons que nous pouvons facilement vérifier une telle non-classicalité pour un détecteur "on/off". Il suffit de mesurer son efficacité de détection  $\eta$  et son bruit d'obscurité  $\nu$ . Ces caractéristiques sont en fait disponibles sur les spécifications techniques de l'appareil. Il devient même possible de comparer cette signature pour différentes technologies de détecteurs "on/off", en plaçant simplement leurs points  $(\eta, \nu)$  sur la figure 4.1-(b).

### D.1.3 Projectivité et idéalité

Pour une APD, la projectivité n'est pertinente que pour la mesure correspondant au résultat "off" qui est caractérisé dans le cas idéal ( $\eta = 1$ ) par l'état de vide  $|0\rangle$ . En effet, l'état rétrodicté à partir de la réponse "off" est obtenu en normalisant l'élément (4.40), soit

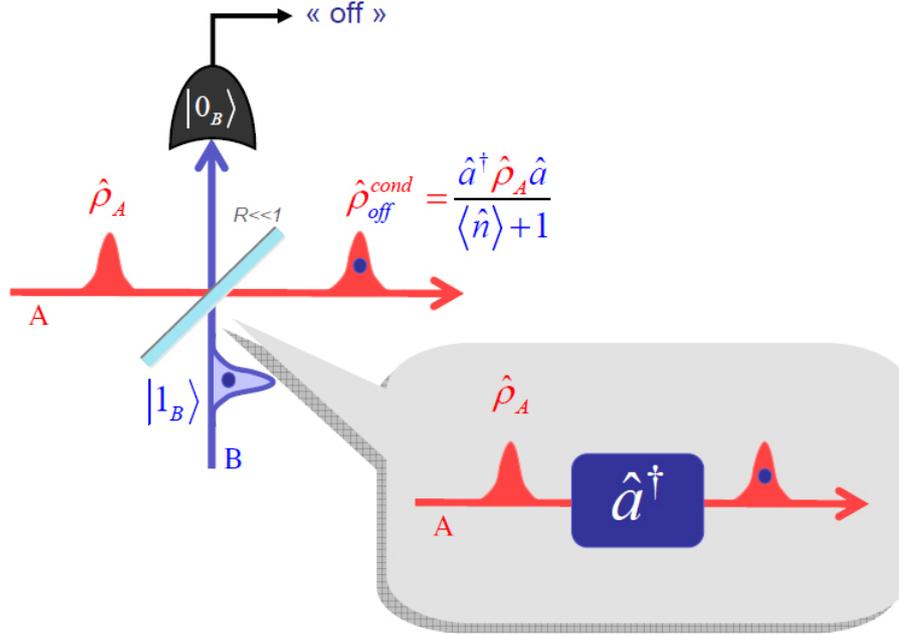
$$\hat{\rho}_{\text{off}}^{\text{retr}}(\eta, \nu) = \eta \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta)^n |n\rangle \langle n|. \quad (4.46)$$

La projectivité de cette mesure est alors donnée par sa pureté

$$\pi_{\text{off}}(\eta, \nu) = \frac{\eta}{2 - \eta}. \quad (4.47)$$

Nous voyons clairement que cet état et ses propriétés ne dépendent plus des coups d'obscurité  $\nu$ , contrairement à l'élément POVM (4.40). En effet, les coups noirs correspondent à des résultats "on" distribués aléatoirement et sans aucune corrélation entre eux.

Ainsi, lorsqu'une APD affiche le résultat "off", les propriétés de la mesure effectuée par cette dernière ne dépendent plus que de l'efficacité de détection  $\eta$ . Si la mesure est quasi-idéale  $\eta \simeq 1$ , l'état rétrodicté devient fidèle au vide, même pour un bruit d'obscurité  $\nu$  arbitrairement grand. Un tel comportement peut s'avérer intéressant pour des protocoles conditionnels basés sur une telle mesure. La figure 4.2 représente un protocole conditionnel d'addition d'un photon unique sur un faisceau lumineux. L'addition d'un photon unique sur un faisceau signal est conditionnée sur le résultat d'une détection du vide.



**Figure 4.2:** Protocole conditionnel d'addition d'un photon unique. –Le faisceau signal est initialement décrit dans le mode A par un état  $\hat{\rho}_A$ . Il interagit sur une lame séparatrice, de très faible coefficient de réflexion  $R \ll 1$ , avec un mode de conditionnement B préparé dans un état à un photon  $|1_B\rangle$ . L'addition du photon dans le mode signal A se produit lorsque la mesure donne le résultat "off", correspondant idéalement à un état rétrodicté  $|0_B\rangle$ .

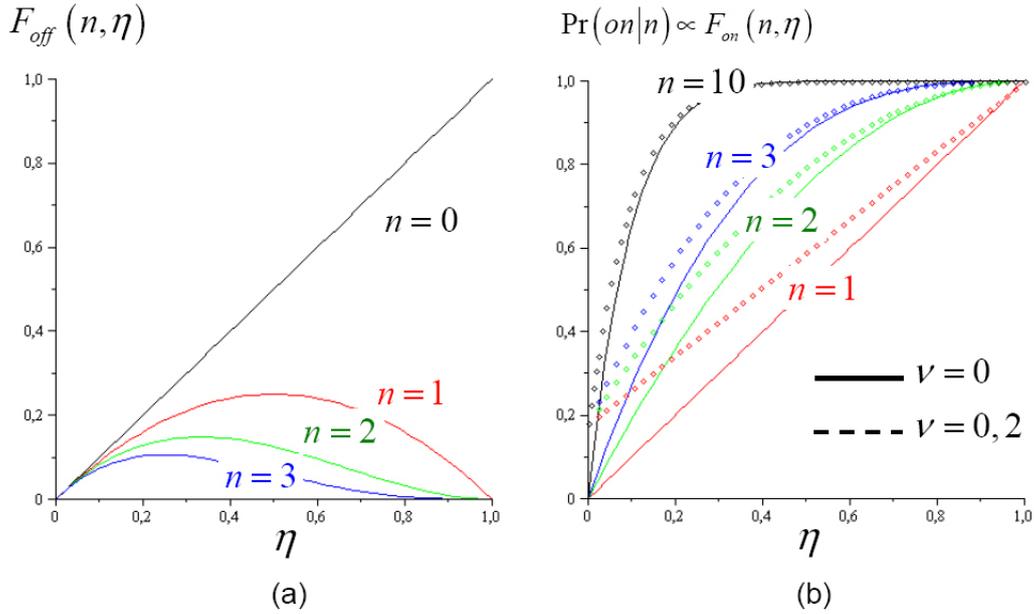
#### D.1.4 Fidélité

##### Résultat "off"

Pour la mesure donnant le résultat "off", la fidélité avec un comptage idéal de  $n$  photons est donnée par

$$\mathcal{F}_{\text{off}}(n, \eta) = \Pr(n|\text{off}) = \eta(1 - \eta)^n. \quad (4.48)$$

L'évolution de cette fidélité avec l'efficacité de détection  $\eta$  est tracée pour différents nombres de photons  $n$  sur la figure 4.3-(a). Comme on pouvait s'y attendre pour le résultat "off" d'une APD, la détection du vide  $n = 0$  est la mesure la plus fidèle à celle effectuée par l'APD. En termes de probabilités rétrodictives, cela signifie que la préparation la plus probable du système avant son interaction avec l'APD donnant ce résultat "off" est le vide de photon  $|0\rangle$ . Pour de faibles efficacités  $\eta \rightarrow 0$ , toutes les mesures de comptage deviennent équiprobables car la mesure n'est plus du tout projective.



**Figure 4.3:** Fidélités entre les mesures effectuées par une APD et des compteurs idéaux de photons. –(a) Évolution de la fidélité, entre la mesure correspondant au résultat "off" d'une APD d'efficacité  $\eta$  et un comptage idéal de  $n$  photons. (b) Évolution de la probabilité prédictive  $\Pr(\text{on}|n)$  avec l'efficacité de détection  $\eta$  et le nombre de photons  $n$ , pour deux bruits d'obscurité  $\nu$ .

### Resultat "on"

Pour la mesure donnant le résultat "on", la situation est quelque peu délicate car l'élément POVM (4.41) correspondant à ce résultat conduit à des divergences dans la rétro-diction de l'état rétrodicté. Néanmoins, nous pouvons donner un équivalent asymptotique de cet état rétrodicté

$$\hat{\rho}_{\text{on}}^{\text{retr}}(\eta, \nu) \underset{D \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{D} \sum_{n=0}^D [1 - e^{-\nu} (1 - \eta)^n] |n\rangle\langle n|, \quad (4.49)$$

où  $D$  est en fait la dimension de l'espace de Hilbert. La fidélité entre cette mesure et un comptage idéal de  $n$  photons est alors donnée par

$$\mathcal{F}_{\text{on}}(n, \eta, \nu) = \Pr(n|\text{on}) \underset{D \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{D} \Pr(\text{on}|n), \quad (4.50)$$

dans laquelle on reconnaît la probabilité prédictive d'avoir le résultat "on" quand la lumière est préparée dans un état nombre de photons  $|n\rangle$  :

$$\Pr(\text{on}|n) = 1 - e^{-\nu} (1 - \eta)^n. \quad (4.51)$$

Ainsi, le comportement de la fidélité  $\mathcal{F}_{\text{on}}(n, \eta, \nu)$  est identique à celui de la probabilité prédictive (4.51). Son évolution avec le nombre de photons  $n$  et l'efficacité de détection  $\eta$  est illustrée sur la figure 4.3-(b).

Pour une efficacité donnée, seuls les états à grand nombre  $n$  de photons constituent les préparations les plus probables conduisant au résultat "on", et cela avec ou sans bruit

d'obscurité. Nous pouvons également voir l'effet de ce bruit sur la figure 4.3-(b) qui est principalement une probabilité non nulle pour un détecteur totalement inefficace ( $\eta = 0$ ). Cette probabilité tend alors à devenir la même pour tous les états nombres, puisque l'APD n'interagit plus avec la lumière incidente.

## D.2 Détection homodyne

### D.2.1 États rétrodictés

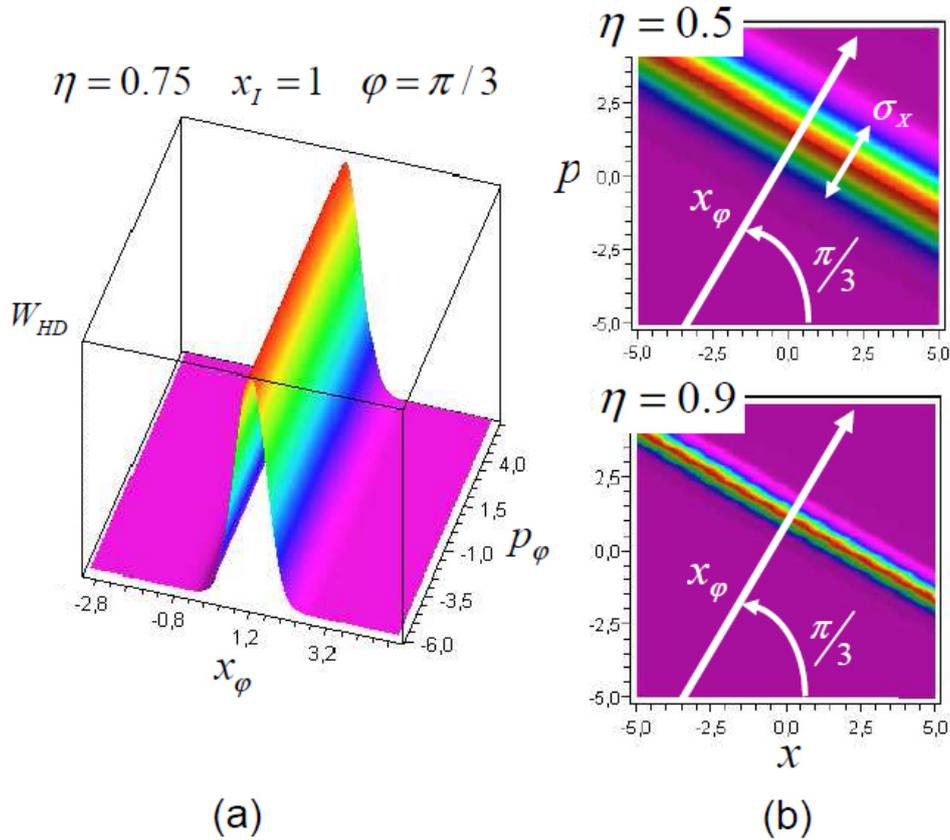
A la fin du chapitre précédent, nous avons déterminé les états rétrodictés d'une détection homodyne en utilisant l'approche rétrodictive. Nous rappelons l'expression (3.48) de la fonction de Wigner de cet état rétrodicté à partir du résultat  $x_I$

$$\mathcal{W}_{x_I, \eta}^{\text{retr}}(x_\phi, p_\phi) \underset{e_n \gg 1/s(\eta)}{\simeq} \frac{1}{\pi \sqrt{1 + e_n s(\eta)}} \exp \left[ -\frac{(x_\phi - x_I/\sqrt{\eta})^2}{s(\eta)} - \frac{p_\phi^2}{1/s(\eta) + e_n} \right]. \quad (4.52)$$

Il s'agit d'un état comprimé et déplacé dans l'espace des phases d'une amplitude  $\alpha_I = x_I/\sqrt{2\eta}$ , mais avec un bruit en excès  $e_n$  très important sur la quadrature conjuguée  $p_\phi$ . Son facteur de compression est lié à l'efficacité de détection  $\eta$  par

$$s(\eta) = \frac{1 - \eta}{\eta}. \quad (4.53)$$

L'allure de cette fonction de Wigner est illustrée sur la figure 4.4-(a). L'évolution de sa variance  $\sigma_x^2(\eta) = \frac{1-\eta}{2\eta}$  avec l'efficacité de détection est illustrée sur la figure 4.4-(b).



**Figure 4.4:** (a) Représentation de Wigner de l'état rétrodicté à partir du résultat  $x_I = 1$  d'une détection homodyne d'efficacité  $\eta = 0.75$  dans le plan de Fresnel  $(x_\phi, p_\phi)$ . (b) Évolution de cette représentation de Wigner avec l'efficacité de détection  $\eta$  dans le plan  $(x, p)$ .

## D.2.2 Propriétés quantiques

### Caractère Gaussien

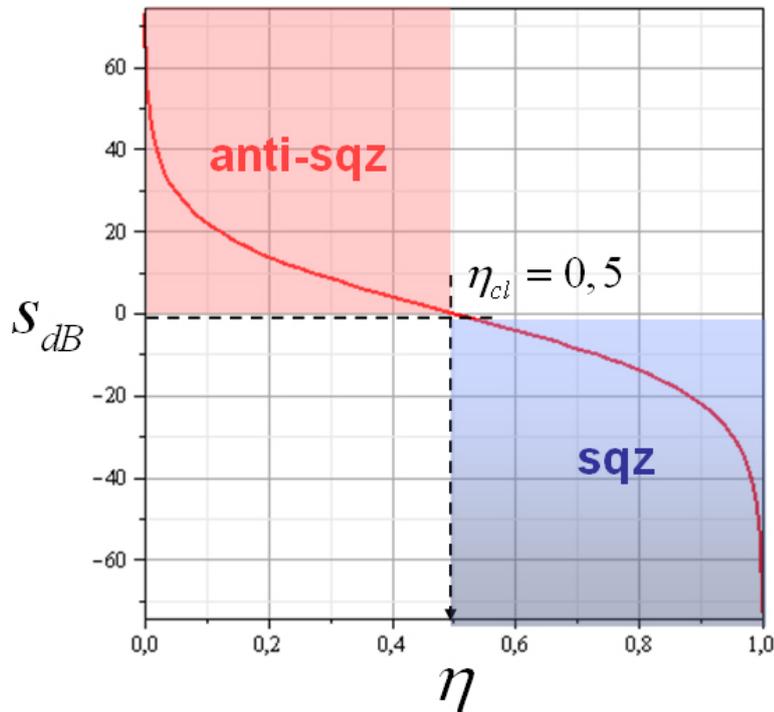
Une détection homodyne inefficace est caractérisée par des états rétrodictés (4.52) dont le caractère gaussien est évident. Elle réalise donc des mesures gaussiennes ( $\text{nonG} = 0$ ). Ces mesures sont entièrement caractérisées par des matrices de covariances, qui peuvent facilement s'écrire pour les quadratures  $(x_\phi, p_\phi)$  :

$$V_\phi \underset{e_n \gg \frac{\eta}{(1-\eta)}}{\simeq} \begin{pmatrix} \frac{1-\eta}{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{\eta}{(1-\eta)} + e_n \end{pmatrix}_{(x_\phi, p_\phi)} \quad (4.54)$$

Une détection homodyne est donc entièrement caractérisée par son efficacité de détection  $\eta$ . Enfin, ce caractère gaussien a une conséquence immédiate : il est impossible de préparer des états non-gaussiens, à partir de ressources gaussiennes, dans une préparation conditionnelle utilisant des détections homodynes.

### Non-classicalité et projectivité

Une détection homodyne effectuée des *mesures non-classiques* au même sens que des états comprimés sont des états non-classiques. En effet, la compression des états rétrodictés (4.52) est assurée pour une efficacité de détection telle que  $\eta > 50\%$ , comme l'illustre la figure 4.5.



**Figure 4.5:** Évolution de la compression (en échelle logarithmique) de l'état rétrodicté d'une détection homodyne avec son efficacité de détection  $\eta$ .— La compression (sqz) de cet état est perdue à des efficacités  $\eta < 0,5$  pour lesquelles l'état rétrodicté est anti-comprimé (anti-sqz).

Enfin, nous allons fixer quelques ordres de grandeur. L'efficacité de détection  $\eta$  atteint actuellement dans le régime continu des valeurs proches de 98% [83]. Elle correspond à un taux de compression réellement impressionnant  $s_{\text{dB}} \simeq -17$  dB. En effet, l'une des meilleures compressions pour des états préparés dans le régime continu [84] se situe actuellement autour de  $-10$  dB, correspondant à une efficacité de détection homodyne de 90%. Évidemment, l'état rétrodicté à partir d'une telle détection a une pureté beaucoup plus faible qui correspond également à la projectivité de la mesure :

$$\pi_{\text{HD}}(\eta, e_n) = \frac{1}{\sqrt{\det V_\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + s(\eta)e_n}} \simeq 0. \quad (4.55)$$

Une détection homodyne d'efficacité  $\eta \neq 1$  n'est donc absolument pas projective. En effet, la base des états propres  $|x, \phi\rangle$  de l'observable de quadrature  $\hat{x}_\phi$  est continue et de dimension infinie. Une détection homodyne peut donc réaliser les tests d'un nombre infini de propositions. La moindre inefficacité rend la mesure totalement non-projective.

## E Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'approche prédictive habituelle de la physique quantique ne permet pas de d'étudier les propriétés quantiques de la mesure. Nous nous sommes alors tournés vers l'approche rétrodictive dont le principal outil : *l'état rétrodicté* révèle les propriétés quantiques de la mesure.

Nous avons proposé une méthode de reconstruction des états rétrodictés. Cette dernière est entièrement fondée sur l'approche rétrodictive et des choix de préparations, contrairement aux tomographies habituelles basées sur l'approche prédictive et des résultats de mesure.

Ensuite, nous avons introduit de nouvelles propriétés pour la mesure, comme une signification précise de sa non-classicalité. Ces propriétés ont été numériquement illustrées sur deux appareils de mesure très utilisés en optique quantique : la photodiode à avalanche et la détection homodyne.

Nous allons maintenant aborder la réalisation expérimentale de la tomographie des états rétrodictés à partir des réponses de détecteurs de photons uniques, ce qui nous permettra d'explorer leur comportement quantique sous l'influence du bruit.



---

# Illustration Expérimentale

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Protocole expérimental</b> . . . . .	<b>103</b>
A.1	Dispositif expérimental . . . . .	103
A.2	Données expérimentales . . . . .	105
A.3	Reconstructions numériques . . . . .	105
<b>B</b>	<b>Résultats</b> . . . . .	<b>108</b>
B.1	Réponse "off" . . . . .	108
B.2	Réponse "on" . . . . .	110
B.3	Réponse "1" . . . . .	111
<b>C</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>115</b>

---

*Dans ce chapitre, nous décrivons la tomographie quantique des états rétrodictés (retroQST) à partir des réponses de détecteurs de photons uniques. Il s'agit de la première reconstruction d'états quantiques totalement basée sur l'approche rétrodictive et des choix de préparations. Elle nous permet d'illustrer expérimentalement les propriétés quantiques que nous avons introduites dans le chapitre précédent.*

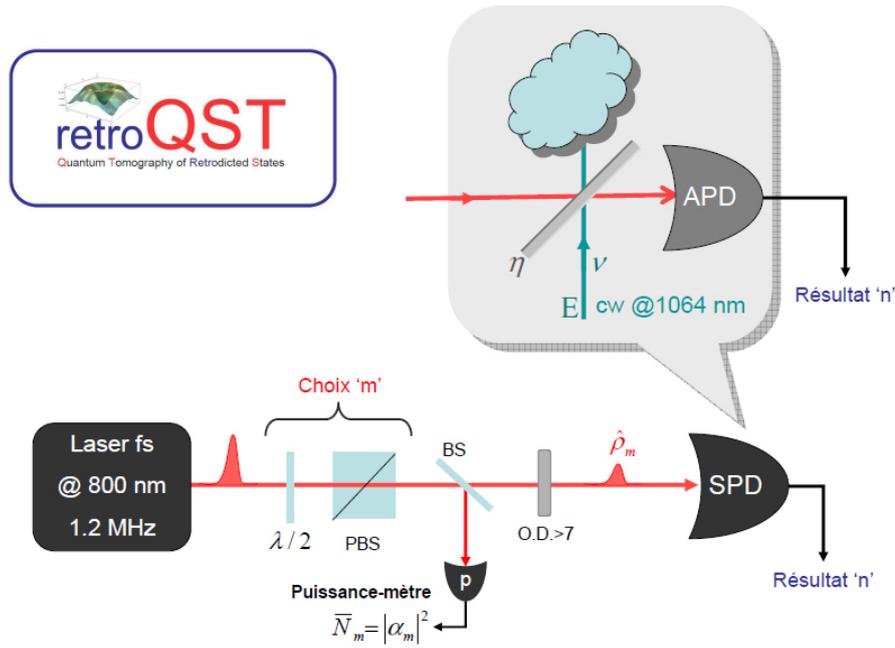
## A Protocole expérimental

### A.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est décrit sur la figure 5.1. Nous sondons le comportement des réponses d'un détecteur de photon unique (Single-Photon Detector, SPD) avec un ensemble de  $M$  états cohérents, moyennés en phases  $\hat{\rho}_m$ , idéalement décrits par les matrices densités suivantes :

$$\hat{\rho}_m = \int \frac{d\phi_m}{2\pi} |\alpha_m\rangle\langle\alpha_m| = e^{-\bar{N}_m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{N}_m^k}{k!} |k\rangle\langle k| \quad (5.1)$$

où  $\phi_m = \arg(\alpha_m)$  et  $\bar{N}_m$  est le nombre moyen de photons simplement liés à l'amplitude des états cohérents par  $\bar{N}_m = |\alpha_m|^2$ . Avec notre dispositif expérimental, nous disposons d'un nombre  $M \gtrsim 100$  de valeurs pour ce nombre moyen de photons.

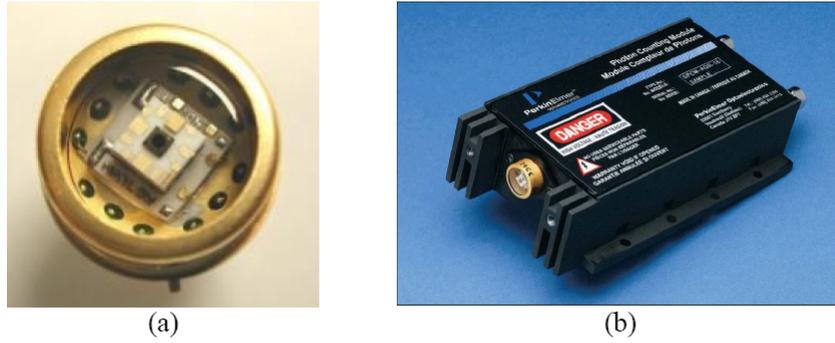


**Figure 5.1:** Principe du dispositif expérimental.

Ces états sondes sont préparés à partir d'une source d'impulsions lumineuses, réalisée à l'aide d'un laser femtoseconde dont on prélève une impulsion à intervalle de temps réguliers (pulse-picking), sans contrôle de la phase de ces impulsions. Ainsi, nous arrivons à un taux de préparation de 1,2 MHz tout en assurant une largeur d'impulsion suffisamment courte (100 fs) pour qu'elle soit entièrement intégrée par le détecteur, dont le temps d'intégration  $T \sim 1$  ns. Chaque choix de préparation "m" correspond à un certain nombre moyen de photons  $\bar{N}_m$  par impulsion que l'on mesure à l'aide d'un puissance-mètre (p). Ce choix se réalise à l'aide d'un ensemble d'éléments optiques composé d'une lame demi-onde  $\lambda/2$  et d'un cube séparateur de polarisation (PBS), suivi de densités optiques (OD) soigneusement calibrées au préalable. Nous pouvons ainsi contrôler le nombre moyen de photons par impulsion de 0 à 100, avec un pas de 0,1.

Le détecteur de photon unique (SPD) que nous avons sondé est une photodiode à avalanche (Perkin-Elmer-AQRH-14) dont une photographie est reproduite sur la figure 5.2. Afin d'étudier l'influence du bruit sur ses propriétés quantiques, nous introduisons une lame séparatrice dont la transmission nous permet d'ajuster l'efficacité de détection  $\eta$  autour de 8%, 12% ou 26%. Nous injectons également sur la deuxième voie E de la séparatrice un faisceau continu dont nous contrôlons très finement la puissance. Il nous permet de porter le nombre moyen de coups noirs  $\nu$  (sur le temps d'intégration  $T$  de l'APD) aux valeurs 0.00, 0.08, 0.16 ou 0.36. Nous pouvons ainsi étudier différentes influences du bruit  $(\eta, \nu)$  sur les propriétés quantiques de mesures effectuées par l'APD.

Ensuite, nous avons réalisé une autre configuration de ce détecteur en le dotant d'un multiplexeur optique, à base d'éléments optiques fibrés. Cette configuration nous a permis d'obtenir une réponse "1", dont nous avons reconstruit l'état rétrodicté pour une seule influence de bruit  $(\eta, \nu)$ . Cette dernière nous a permis de vérifier une modélisation de ce détecteur, et de préciser l'intérêt et les limites d'une telle configuration.



**Figure 5.2:** Photodiode à Avalanche (APD SPCM-AQRH-16 de Perkin-Elmer).—(a) Photodiode à Avalanche seule avec une surface active de  $180 \mu\text{m}$  de diamètre sur laquelle la lumière doit être focalisée. (b) APD montée sur son module délivrant sous la forme d'une tension les réponses "off" (0V) et "on" (5V).

## A.2 Données expérimentales

Pour chaque choix de préparation "m", nous déterminons les fréquences prédictives  $F(n|m)$  qui sont données par le rapport du taux d'apparition (dans le temps) de la réponse "n" sur le taux de préparation (1,2 MHz). A l'aide du théorème de Bayes, les probabilités rétrodictives peuvent directement être obtenues à partir de ces probabilités prédictives, soit

$$\Pr(m|n) = \Pr(n|m) \Pr(m) / \Pr(n), \quad (5.2)$$

où  $\Pr(m)$  et  $\Pr(n)$  sont respectivement les probabilités marginales de faire le choix "m" et d'avoir le résultat "n". Comme le taux de répétition du laser pulsé est le même pour tous les choix de préparation "m", la probabilité de préparer l'état  $\hat{\rho}_m$  est pour tous les choix de préparation  $\Pr(m) = 1/M$ , où  $M$  est le nombre de choix possibles. Les fréquences rétrodictives sont alors simplement données par

$$f(m|n) = \frac{F(n|m)}{\left(\sum_{m'=1}^M F(n|m')\right)} \quad (5.3)$$

A partir de ces fréquences rétrodictives, nous allons réaliser la tomographie des états rétrodictés décrite au chapitre IV.

## A.3 Reconstructions numériques

La reconstruction numérique des états rétrodictés est l'application directe de la tomographie décrite au chapitre précédent. Dans le cas de détecteurs de photons uniques, cette dernière bénéficie même de certaines simplifications qui exigent toutefois quelques précautions.

### A.3.1 Espace de Hilbert et opérateurs de propositions

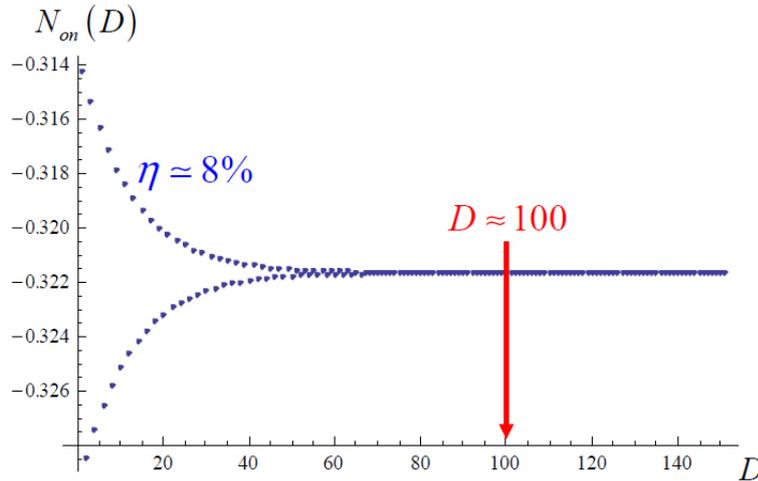
Nous devons tronquer l'espace de Hilbert à une dimension finie  $D$ . Comme nous l'avons précisé dans le troisième chapitre, la reconstruction d'un état quantique contenu dans un tel espace nécessite les tests d'au moins  $D^2$  propositions dans le cas général. Or, pour des

détecteurs de photons uniques, la situation est plus simple car leurs états rétrodictés ne présentent pas de cohérences dans la base de Fock. Leurs matrices densités sont en effet diagonales et nécessitent seulement les tests de  $D$  propositions pour être reconstruites.

Pour fixer cette dimension  $D$ , nous allons utiliser la modélisation de l'APD que nous avons faite dans le chapitre précédent. Nous vérifierons par la suite que cette dernière est valable. En effet, nous allons utiliser la représentation de Wigner (4.42) correspondant à la réponse "on". Nous prendrons une estimation de la négativité de cette dernière dans un espace de dimension finie  $D$  :

$$\mathcal{N}_{\text{on}}(D) = \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{-\nu}}{\pi} \sum_{m=0}^{D-1} (\eta - 1)^m \xrightarrow{D \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{-\nu}}{\pi(2 - \eta)} \quad (5.4)$$

Ainsi, si nous souhaitons suivre l'évolution de cette signature de non-classicalité sous l'influence du bruit  $(\eta, \nu)$ , nous devons nous assurer de sa convergence dans un espace de dimension finie  $D$ . L'évolution de cette estimation de la négativité avec la dimension  $D$  est illustrée sur la figure 5.3 pour l'efficacité  $\eta \simeq 8\%$  qui nécessiterait a priori la plus grande dimension.



**Figure 5.3:** Évolution de l'estimation de la négativité à l'origine avec la dimension  $D$  de l'espace de Hilbert. – L'estimation converge dans un espace de Hilbert de dimension  $D \sim 100$ .

Nous constatons donc qu'un espace de Hilbert de dimension  $D \sim 100$  devrait être amplement suffisant pour reconstruire les états rétrodictés, mais surtout pour assurer la convergence de la négativité qui nous servira de signature de non-classicalité. Il faudra juste vérifier que le modèle rend bien compte des résultats obtenus.

Avec notre dispositif expérimental, il est tout à fait possible de réaliser un nombre de choix de préparation  $M \gtrsim D$ . Ces derniers correspondent aux matrices de propositions :

$$\hat{\Lambda}_m = (1/M) \hat{\sigma}^{-1} \hat{\rho}_m \hat{\sigma}^{-1}, \quad (5.5)$$

où nous utilisons la racine carrée  $\hat{\sigma}$  du mélange

$$\hat{\rho}_{\text{sonde}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{\rho}_m = \hat{\sigma}^2, \quad (5.6)$$

soit

$$\sigma_n = \langle n | \hat{\sigma} | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \sum_{m=1}^M e^{-\bar{N}_m} \frac{\bar{N}_m^n}{n!} \right]^{1/2}. \quad (5.7)$$

Les états sondes (5.1) sont en effet décrits par des matrices densités diagonales dans la base des états nombres de photons. La réalisation de l'algorithme de reconstruction devient donc plus simple.

### A.3.2 Algorithme de reconstruction

Afin de reconstruire la matrice densité  $\hat{\rho}_n^{\max}$  qui maximise la vraisemblance entre les fréquences rétrodictives (5.3) et les probabilités données par l'approche rétrodictive  $\Pr(m|n) = \text{Tr}\{\hat{\rho}_n \hat{\Lambda}_m\}$ , nous initialisons la matrice densité à  $\hat{\rho}_n^{(0)} = \hat{1}/D$  avec laquelle nous calculons la matrice

$$\hat{R}(\hat{\rho}_n) = \sum_{m=1}^M \frac{f(m|n)}{\Pr(m|n)} \hat{\Lambda}_m, \quad (5.8)$$

pour l'itération basée sur la relation

$$\hat{\rho}_n^{(k+1)} = \frac{\hat{R}[\hat{\rho}_n^{(k)}] \hat{\rho}_n^{(k)} \hat{R}[\hat{\rho}_n^{(k)}]}{\text{Tr}[\hat{R}[\hat{\rho}_n^{(k)}] \hat{\rho}_n^{(k)} \hat{R}[\hat{\rho}_n^{(k)}]}. \quad (5.9)$$

Nous répétons ces itérations jusqu'à obtenir une matrice densité suffisamment proche de celle qui maximise la vraisemblance  $\hat{\rho}_n^{\max}$ . Les probabilités rétrodictives sont alors proches des fréquences mesurées  $\Pr(m|n) \simeq f(m|n)$ , ce qui conduit à

$$\hat{R}(\hat{\rho}_n) \simeq \sum_{m=1}^M \hat{\Lambda}_m = \hat{1}.$$

Nous retrouvons ainsi la condition de convergence de l'algorithme

$$\hat{R}(\hat{\rho}_n^{\max}) \hat{\rho}_n^{\max} \hat{R}(\hat{\rho}_n^{\max}) \simeq \hat{\rho}_n^{\max}, \quad (5.10)$$

que nous évaluons numériquement avec l'erreur relative  $\epsilon_r$  entre les probabilités et les fréquences rétrodictives<sup>1</sup>

$$\epsilon_r = \frac{\|\Pr(m|n) - f(m|n)\|_2}{\|f(m|n)\|_2}, \quad (5.11)$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme euclidienne du vecteur dont les composantes sont simplement les probabilités pour chaque choix de préparation "m".

Enfin, nous obtenons l'état rétrodicté à partir du résultat "n" en effectuant la transformation

$$\hat{\rho}_n^{\text{retr}} = \frac{\hat{\sigma}^{-1} \hat{\rho}_n^{\max} \hat{\sigma}^{-1}}{\text{Tr}\{\hat{\sigma}^{-1} \hat{\rho}_n^{\max} \hat{\sigma}^{-1}\}}. \quad (5.12)$$

Nous pouvons également déterminer l'élément POVM décrivant cette réponse :

$$\hat{\Pi}_n = \Pr(n) \hat{\sigma}^{-1} \hat{\rho}_n^{\max} \hat{\sigma}^{-1}. \quad (5.13)$$

1. La plupart des publications sur les reconstructions d'états quantiques par MaxLike occulte souvent cet aspect. Avec de tels algorithmes non-linéaires, il est essentiel d'apprécier simplement l'écart entre les probabilités mesurées et reconstruites, ce que nous faisons ici en évaluant en plus la fidélité de l'état reconstruit avec un modèle de l'état rétrodicté.

Ces reconstructions numériques ont été réalisées à partir des fréquences rétrodictives déterminées dans l'expérience pour différentes influences de bruit  $(\eta, \nu)$ . Nous allons donc explorer l'influence du bruit sur les propriétés quantiques des mesures réalisées par ce détecteur de photon unique très utilisé en optique quantique.

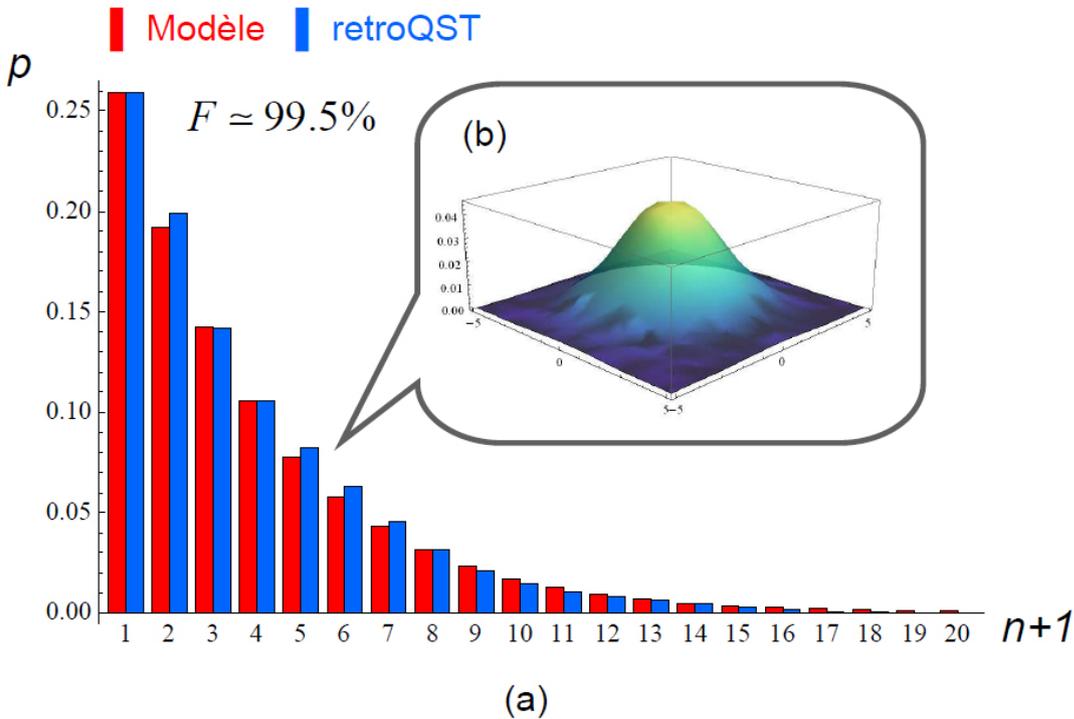
## B Résultats

Nous reproduisons maintenant les résultats de ces reconstructions pour la photodiode à avalanche (figure 5.2). Nous avons reconstruit les états rétrodictés à partir de ses résultats sous différentes influences du bruit  $(\eta, \nu)$  et pour deux configurations de ce détecteur. La première configuration est simplement une APD "nue", fournissant deux réponses "off" et "on" que nous avons modélisées au chapitre précédent.

La seconde configuration est une APD dotée d'un multiplexeur optique permettant en principe d'améliorer certaines de ses propriétés. Ce détecteur fournit alors trois réponses : les résultats "off", "1" et "2" que nous détaillerons dans la suite de ce chapitre. Nous mettrons alors en évidence, expérimentalement, l'intérêt et les limitations d'une telle configuration.

### B.1 Réponse "off"

Un état rétrodicté à partir du résultat "off" est illustré sur la figure 5.4 pour une efficacité  $\eta = 26\%$  et bruit d'obscurité  $\nu = 0,08$ .



**Figure 5.4:** État rétrodicté à partir du résultat "off" de l'APD avec une efficacité  $\eta = 0.26$  et un bruit d'obscurité  $\nu = 0,08$ . –(a) Population de l'état rétrodicté dans la base des états nombres de photons. La fidélité entre le modèle (rouge) et l'état reconstruit (bleu) est d'environ 99.5%. (b) Représentation de Wigner de l'état reconstruit par retroQST.

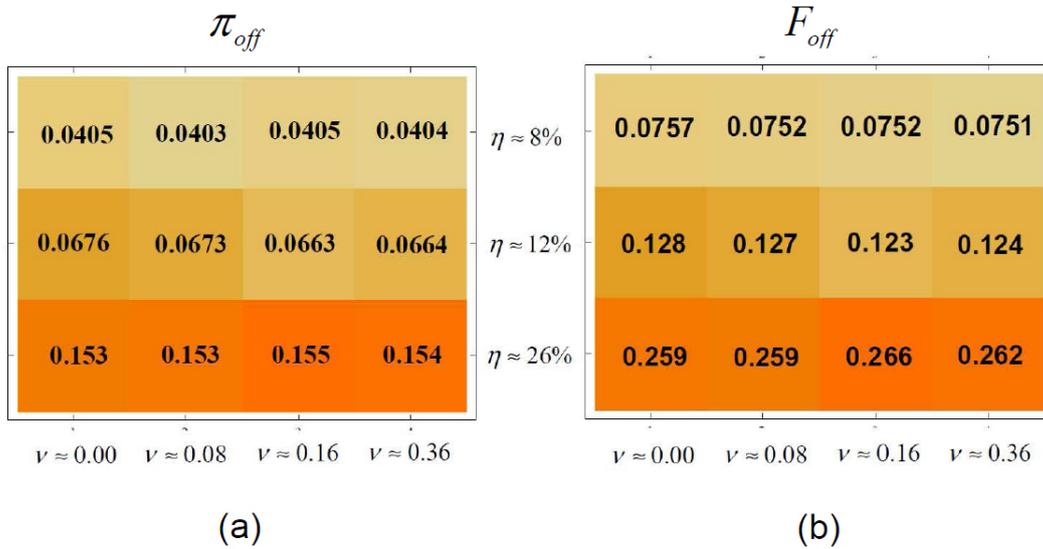
Nous pouvons comparer l'état reconstruit à celui obtenu à l'aide des éléments POVMs décrivant l'APD. Nous avons déterminé ce dernier au chapitre précédent (4.46). En effet, l'état rétrodicté à partir du résultat "off" est donné par

$$\hat{\rho}_{\text{off}}^{\text{retr}}(\eta, \nu) = \eta \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta)^n |n\rangle\langle n|. \quad (5.14)$$

Ce modèle rend parfaitement compte de l'état reconstruit à partir des données expérimentales, comme l'illustre la figure 5.4(a). En effet, la fidélité [48] entre ce modèle et l'état rétrodicté est toujours supérieure à 99% pour toutes les influences de bruit  $(\eta, \nu)$ , alors que la convergence de l'algorithme intervient pour une erreur relative (5.11)  $\epsilon_r \sim 0.5\%$ .

Notons que le modèle de l'état rétrodicté (5.14) conduit à une projectivité  $\pi_{\text{off}} = \eta / (2 - \eta)$  et une fidélité  $\mathcal{F}_{\text{off}} = \eta$ . Ainsi, pour une influence du bruit donnée  $(\eta, \nu)$ , la valeur de l'efficacité de détection sera prise égale à la fidélité pour ajuster le modèle.

Ensuite, à partir des états reconstruits par retroQST, nous pouvons visualiser l'évolution des propriétés de la mesure sous l'influence du bruit  $(\eta, \nu)$ . La figure 5.5 illustre l'évolution de la projectivité et de la fidélité de cette mesure avec l'influence du bruit  $(\eta, \nu)$ .



**Figure 5.5:** Évolution de la projectivité (a) et de la fidélité (b) avec une mesure projective sur le vide. Seuls les chiffres significatifs qui restent invariants sous les changements de dimension  $D$  sont reproduits. Les nuances de couleurs ont été générées séparément pour la projectivité et la fidélité.

Nous retrouvons le comportement prédit dans le chapitre précédent. Bien que l'élément POVM décrivant la réponse "off" dépende du bruit d'obscurité, nous voyons clairement que les propriétés de la mesure ne sont plus influencées par ce dernier. En effet, les coups d'obscurité correspondent à des résultats "on", et quand nous avons le résultat "off", les propriétés de la mesure effectuée par l'APD ne dépendent plus que de son efficacité de détection  $\eta$ . De telles propriétés peuvent être intéressantes pour des protocoles basés sur des détections du vide, comme nous l'avons vu pour le protocole d'addition d'un photon (Fig. 4.2) décrit au chapitre IV.

Notons que les nuances de couleurs de la figure 5.5 ont été générées séparément pour la projectivité et la fidélité, pour les différentes influences de bruits  $(\eta, \nu)$ . Les corrélations de couleurs entre ces deux diagrammes illustrent bien la qualité de ces reconstructions. Enfin, il faut souligner qu'il est très difficile d'estimer l'erreur relative sur les estimateurs obtenus à partir des états reconstruits. En effet, la propagation des incertitudes dans un algorithme d'estimation non-linéaire est une question en partie ouverte. Nos estimateurs n'ont un sens que si les états reconstruits reproduisent des probabilités proches des fréquences expérimentales, ce qui est le cas dans nos reconstructions.

## B.2 Réponse "on"

Pour la réponse "on", la reconstruction directe de l'état rétrodicté n'est pas possible dans un espace de Hilbert de dimension finie  $D$ , comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre IV. En effet, l'état rétrodicté à partir de la réponse "on" (4.49) ne peut pas être tronqué dans la base des états nombres de photons. Pour pouvoir étudier l'évolution de la non-classicalité de cette mesure, nous allons ici aussi utiliser la représentation de Wigner de son élément POVM.

Nous pouvons reconstruire l'élément POVM décrivant le comportement de la réponse "off" comme expliqué précédemment, en utilisant la relation (5.13). A partir de cet élément POVM, nous obtenons facilement la représentation de Wigner du POVM décrivant la réponse "on"  $\hat{\Pi}_{\text{on}} = \hat{1} - \hat{\Pi}_{\text{off}}$ , soit

$$\mathcal{W}_{\text{on}}(x, p) = \frac{1}{2\pi} - \sum_{k=0}^{D-1} \langle k | \hat{\Pi}_{\text{off}} | k \rangle \mathcal{W}_k(x, p), \quad (5.15)$$

où  $\mathcal{W}_k(x, p)$  est la fonction de Wigner de l'état à  $k$  photons  $|k\rangle$  dont on rappelle l'expression

$$\mathcal{W}_k(x, p) = \frac{(-1)^k}{\pi} e^{-(x^2+p^2)} L_n [2(x^2 + p^2)]$$

avec les polynômes de Laguerre  $L_n(x) = e^x \partial_x^n (e^{-x} x^n) / n!$ . Une de ces représentations de Wigner est représentée sur la figure 5.6-(a).

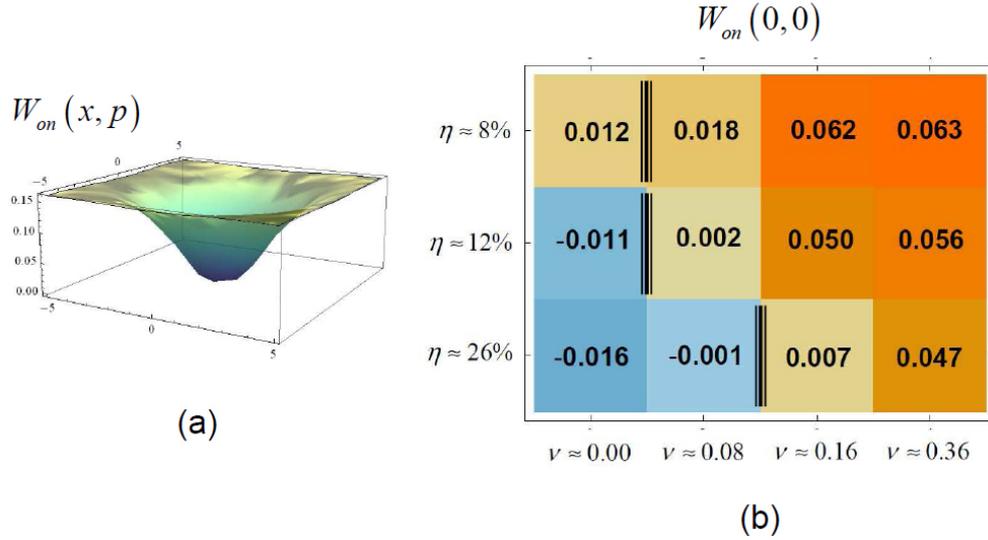
Ensuite, à partir de nos reconstructions, nous avons déterminé l'évolution de la négativité sous les différentes influences de bruit  $(\eta, \nu)$ , comme illustré sur la figure 5.6-(b). Nous retrouvons alors le comportement prédit au chapitre IV. Pour une efficacité  $\eta$  donnée, cette signature de non-classicalité est perdue lorsque le bruit d'obscurité augmente au-dessus d'un certain seuil. Nous avons montré (4.44) que ce seuil en bruit est donné par

$$\nu_o(\eta) = -\ln(1 - \eta/2). \quad (5.16)$$

La position des transitions, liées au franchissement de ces seuils  $\nu_o$  par le bruit  $\nu$ , est indiquée par des marqueurs noirs sur la figure 5.6-(b). Les résultats expérimentaux concordent bien avec ces prédictions, excepté pour l'efficacité la plus basse  $\eta \approx 8\%$ , pour qui des bruits expérimentaux ont eu des effets non négligeables. En effet, la puissance fournie par le laser pouvait être soumise à des fluctuations importantes, essentiellement liées aux conditions d'utilisation de ce dernier.

Enfin, nous rappelons que cette négativité correspond à une parité moyenne négative pour l'état rétrodicté

$$\mathcal{W}_{\text{on}}(0, 0) \propto \frac{1}{\pi} \langle (-1)^{\hat{n}} \rangle_{\text{retr}} = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{\text{on}}^{\text{retr}} (-1)^{\hat{n}} \right]. \quad (5.17)$$



**Figure 5.6:** Reconstruction de l'élément POVM décrivant la réponse "on" de l'APD. (a) Représentation de Wigner  $\mathcal{W}_{on}(x, p)$  de  $\tilde{\Pi}_{on}$  pour une efficacité de détection  $\eta \simeq 26\%$  et un bruit d'obscurité  $\nu \simeq 0.08$ . (b) Évolution de la négativité de  $\mathcal{W}_{on}(0, 0)$  avec l'efficacité  $\eta$  et le bruit  $\nu$ . Seuls les chiffres significatifs qui restent invariants sous les changements de dimension  $D$  sont reproduits. Les marqueurs noirs indiquent la position théorique du changement de signe de  $\mathcal{W}_{on}(0, 0)$  (cf. texte).

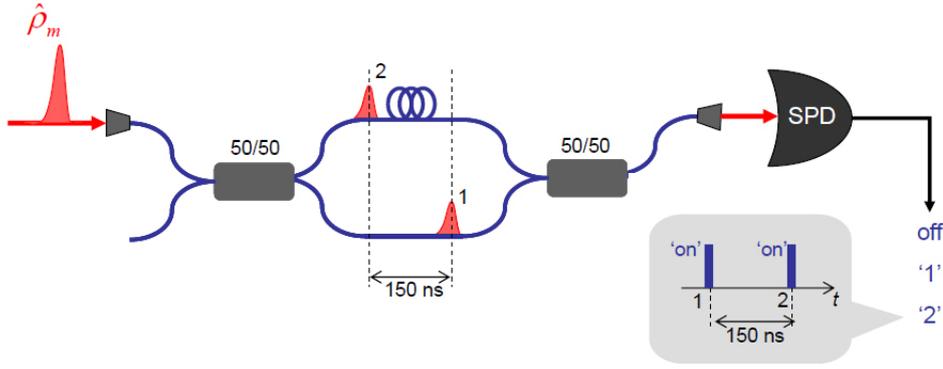
Ainsi, l'APD n'est véritablement un détecteur de photon unique que pour une influence de bruit  $(\eta, \nu)$  préservant cette négativité. Cette négativité est par ailleurs une condition nécessaire pour la préparation conditionnelle d'états non-classiques de la lumière, basée sur de telles mesures et des ressources gaussiennes, comme nous l'avons décrit au chapitre II. Cependant, même si cette mesure peut être non-classique sous une influence de bruit donnée  $(\eta, \nu < \nu_o)$ , sa fidélité avec le comptage idéal d'un photon et sa projectivité sont pratiquement nulles, comme nous l'avons montré au chapitre IV.

### B.3 Réponse "1"

Afin d'améliorer la fidélité et la projectivité, nous avons réalisé un multiplexeur optique devant l'APD. Le principe de ce dernier est illustré sur la figure 5.7.

Nous allons montrer que ce dispositif permet à l'APD de détecter un seul photon, sous une certaine influence de bruit  $(\eta, \nu)$  que nous déterminerons. Cette nouvelle réponse "1" correspond à une seule réponse "on" de l'APD. La réponse "2" est une succession de deux réponses "on" séparées par un délais de 150 ns. Nous ne réaliserons pas la tomographie de cette réponse "2", car elle correspond à l'absorption d'au moins deux photons. Elle constitue donc une détection à seuil (2 photons) avec un état rétrodicté qui ne peut pas être directement reconstruit dans un espace de Hilbert de dimension finie  $D$ , comme pour l'APD. Ces reconstructions ne feraient donc qu'alourdir notre exposé.

Par contre, pour illustrer la capacité d'un tel dispositif à détecter un seul photon, nous réalisons la tomographie de l'état rétrodicté à partir du résultat "1". La convergence de l'algorithme de reconstruction intervient maintenant pour une erreur relative (5.11), entre les fréquences expérimentales et estimées par MaxLike, qui est aux alentours de 2%. Un



**Figure 5.7:** Multiplexeur optique réalisé devant l'APD. –Une impulsion lumineuse contenant en moyenne deux photons donne, au passage de la première séparatrice, deux impulsions contenant en moyenne un seul photon. L'une des deux impulsions est retardée, à l'aide d'une ligne à retard optique (fibre optique), d'une durée de 150 ns avant de rencontrer une seconde séparatrice 50/50. Les deux voies de sortie de cette dernière sont focalisée sur l'APD et donneront deux réponses "on" séparées de 150 ns. C'est la réponse "2". Les réponses "1" correspondent à des réponses "on" séparées d'un intervalle de temps inférieur ou supérieur à 150 ns.

tel écart s'explique par la grande sensibilité au photon unique d'un tel dispositif. Il devient alors difficile de contrôler finement l'influence du bruit, comme nous avons pu le faire avec l'APD.

Par conséquent, au lieu d'étudier l'influence du bruit, nous allons plutôt confirmer la modélisation du détecteur (figure 5.7) par les éléments POVMs décrivant le comptage de photons. Nous avons déterminé ces derniers à la fin du chapitre II. En effet, si nous prétendons que la réponse "1" correspond au comptage d'un seul photon, la mesure doit alors être décrite par l'élément POVM

$$\hat{\Pi}_1(\eta, \nu) = e^{-\nu} \left[ \nu \hat{\Pi}_0(\eta) + \hat{\Pi}_1(\eta) \right], \quad (5.18)$$

avec

$$\hat{\Pi}_n(\eta) = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} \eta^n (1-\eta)^{m-n} |m\rangle\langle m|. \quad (5.19)$$

L'état rétrodicté à partir du résultat "1" s'obtient simplement en normalisant l'élément POVM (5.18), soit

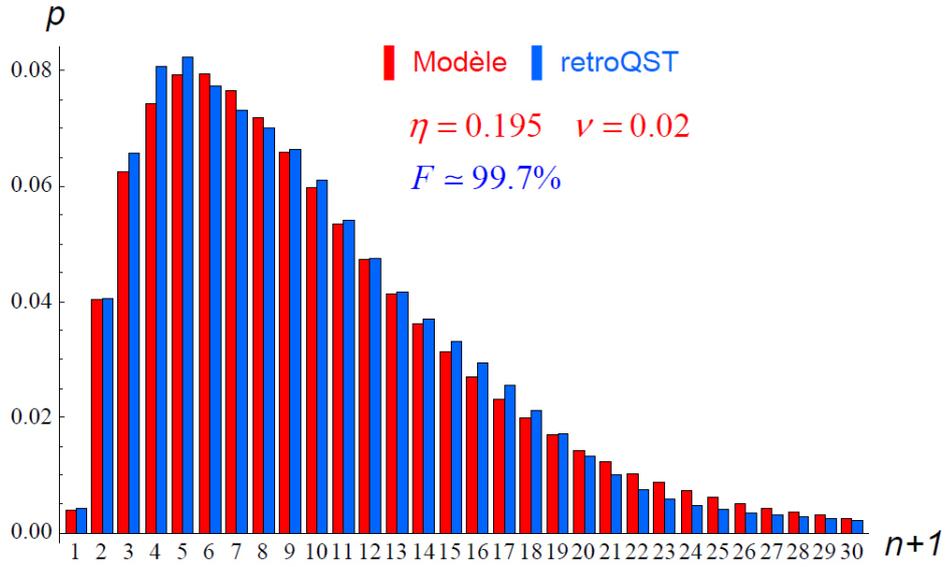
$$\hat{\rho}_1^{\text{retr}}(\eta, \nu) = \frac{\eta}{1+\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \nu (1-\eta)^m + m \eta (1-\eta)^{m-1} \right] |m\rangle\langle m|. \quad (5.20)$$

La fidélité de cette mesure avec le comptage idéal d'un seul photon est donnée par

$$\mathcal{F}_1(\eta, \nu) = \frac{\eta}{1+\nu} [\eta + \nu (1-\eta)]. \quad (5.21)$$

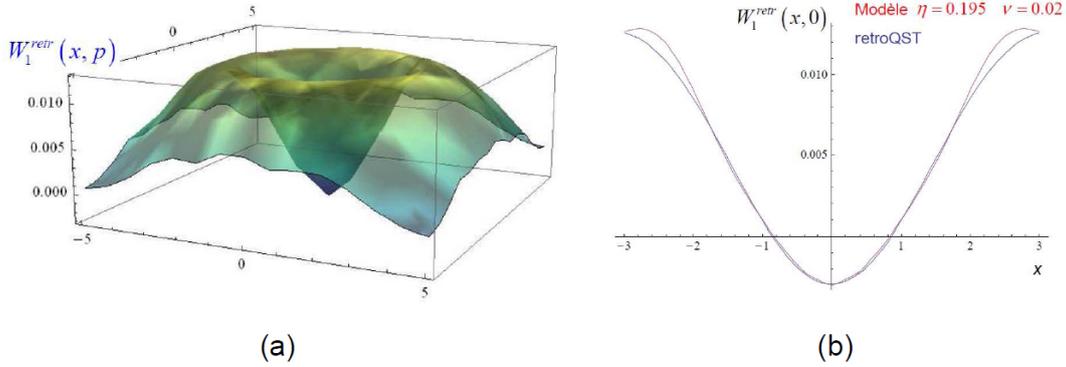
Ce modèle s'accorde très bien avec l'état reconstruit à partir des données expérimentales, comme illustré sur la figure 5.8.

La représentation de Wigner de l'état reconstruit est reproduite sur la figure 5.9-(a). Nous comparons cette représentation avec celle donnée par le modèle (5.20) sur la figure



**Figure 5.8:** État rétrodicté à partir du résultat "1" de l'APD multiplexée. –Populations de l'état rétrodicté dans la base des états nombres de photons. La fidélité entre le modèle (rouge) et l'état reconstruit par retroQST (bleu) est d'environ 99%.

5.9-(b) en effectuant une coupe dans le plan de Fresnel. Cette dernière illustre très bien la fidélité de la modélisation que nous avons faite de ce détecteur.



**Figure 5.9:** (a) Représentation de Wigner de l'état rétrodicté par retroQST. (b) Confrontation de la fonction de Wigner de l'état reconstruit (en bleu) avec celle obtenue à partir du modèle (en rouge).

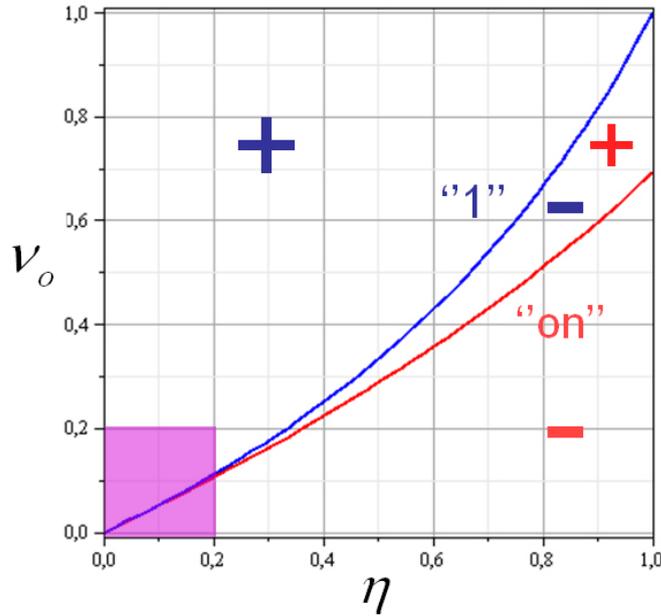
Ensuite, étant donné que le modèle est particulièrement fidèle ( $\mathcal{F} \gtrsim 99.5\%$ ) à l'état reconstruit par MaxLike, nous pouvons évaluer l'évolution de la non-classicalité de la mesure effectuée par l'APD multiplexée. La signature utilisée est toujours la valeur à l'origine de la fonction de Wigner de l'état rétrodicté (5.20). Pour obtenir cette valeur, nous calculons la parité moyenne du nombre de photons à l'aide des populations de l'état rétrodicté (5.20) :

$$\mathcal{W}_1^{retr}(0,0) = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_1^{retr} (-1)^{\hat{n}} \right] = \frac{\eta}{\pi(1+\nu)(2-\eta)} \left[ \nu - \frac{\eta}{2-\eta} \right]. \quad (5.22)$$

La négativité de cette parité est assurée pour un bruit d'obscurité tel que

$$\nu \leq \nu_o(\eta) = \frac{\eta}{2 - \eta}. \quad (5.23)$$

Pour chaque valeur de l'efficacité de détection  $\eta$ , ce seuil de bruit  $\nu_o$  marque une transition quantique/classique, comme pour la mesure donnant la réponse "on". Nous pouvons même comparer l'évolution de ce seuil de transition avec celui correspondant au résultat "on", comme illustré sur la figure 5.10.



**Figure 5.10:** Évolution des seuils en bruit  $\nu_o$  avec l'efficacité de détection  $\eta$  pour une APD simple (en rouge) et une APD multiplexée (en bleu). – Le signe de la fonction de Wigner est spécifiée pour chacune des mesures. Pour de fortes efficacités  $\eta$ , la non-classicalité de la mesure effectuée par l'APD multiplexée est plus robuste au bruit que pour une APD. Pour de faibles efficacités (zone en violet), le comportement de la non-classicalité est similaire à celui de l'APD.

Ainsi, pour de fortes efficacités de détection, la non-classicalité de la mesure donnant le résultat "1" est relativement plus robuste au bruit que celle de la mesure donnant le résultat "on". Cette robustesse tend à disparaître aux basses efficacités, puisqu'il est facile de vérifier que les seuils en bruit  $\nu_o$  pour chacune des mesures (5.16) et (5.24) ont le même comportement

$$\nu_o \underset{\eta \rightarrow 0}{\simeq} \eta/2. \quad (5.24)$$

Ce comportement justifie *a posteriori* notre choix d'avoir uniquement exploré l'évolution de la non-classicalité de la mesure donnant le résultat "on" (figure 5.6). En effet, l'efficacité de détection de l'APD multiplexée ( $\eta \simeq 20\%$ ) se situe dans le régime où il n'y a plus de réel avantage à mettre en oeuvre un multiplexeur optique devant l'APD. Ce régime est représentée par la zone en violet sur la figure 5.6. Cette étude expérimentale permet donc de simplifier certains protocoles de préparation conditionnelle basées sur des soustractions successives d'un certain nombre de photons uniques [87]. Pour de faibles efficacités globales de détection  $\eta$ , on peut utiliser de simples APDs au lieu de détections de photons uniques.

## C Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons reproduit les résultats des premières reconstructions [86] d'états quantiques entièrement fondées sur l'approche rétrodictive. Elles nous ont permis d'étudier les propriétés quantiques des mesures effectuées par un détecteur de photon unique très utilisé en optique quantique. Nous avons ainsi exploré l'évolution des propriétés quantiques de ce détecteur sous l'influence du bruit, confirmant les modélisations de ces mesures.

Sur un plan fondamental, ces reconstructions d'états rétrodictés illustrent la pertinence de l'approche rétrodictive en lui donnant un statut équivalent à celui de l'approche prédictive. Nous sommes désormais capables de reconstruire les états rétrodictés à partir de données expérimentales comme pour les états préparés. En effet, ces reconstructions peuvent se faire pour n'importe quelles préparations.

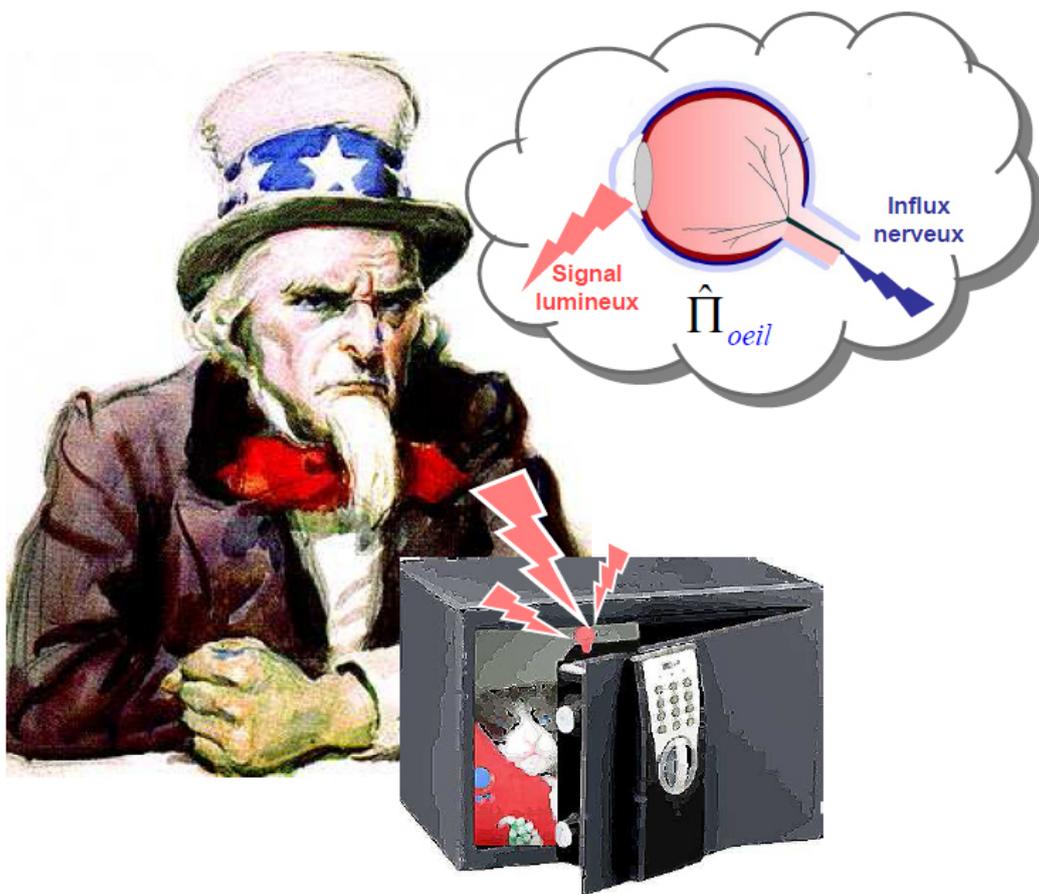
Dans notre expérience, nous avons utilisé des états cohérents, car ces états sont simples à produire et manipuler. Le contrôle de la phase de ces états aurait été nécessaire pour reconstruire les états rétrodictés d'un détecteur comme une détection homodyne. Ses états rétrodictés sont en effet des états comprimés suivant la quadrature mesurée, sélectionnée par la phase de l'oscillateur local. Il s'agit donc d'un état gaussien qui est entièrement caractérisé par sa matrice de covariance. Nous avons montré au chapitre IV que cette matrice (4.54) ne dépend que de l'efficacité de la détection homodyne. Une détermination [73, 83] de cette dernière revient donc à caractériser complètement les états rétrodictés de la détection homodyne.



---

## Interlude III : L'Ami de Wigner et l'Oeil Humain

---



**Figure 5.11:** Notre version de l'expérience de "l'Ami de Wigner"\*. – Un observateur suit l'état de vie ou de mort d'un chat de Schrödinger à l'aide d'un petit voyant lumineux. L'état de cette lumière est alors intriquée à l'état du chat et du noyau atomique. Les effets de la perception de ce signal lumineux par l'Ami de Wigner peuvent être décrits par une préparation conditionnelle (cf. texte), dont la mesure est réalisée par l'oeil humain.

\*Note - L'oncle Sam de James Montgomery Flagg incarne ici "l'Ami de Wigner" en référence à l'expression qui lui est attribuée : "I want you [...]". Le "you" désigne évidemment le "chat de Schrödinger" qu'il veut préserver, malgré sa curiosité...

L'une des principales révélations de l'approche rétrodictive concerne l'indéterminisme quantique. Ce dernier ne concerne plus seulement les résultats de mesure, mais également les choix de préparation conduisant à un certain résultat de mesure. Il existe en effet des situations où l'on s'intéresse uniquement à un seul résultat de mesure comme dans des préparations conditionnelles.

Pour illustrer l'importance de cette autre forme d'indéterminisme quantique, nous revenons à l'expérience du "chat de Schrödinger" que nous avons décrite dans l'introduction. La règle de projection y prenait alors une forme très simple : une fois la mesure faite et son résultat connu, l'état du chat est celui dans lequel on le mesure, soit  $|\text{mort}\rangle$  ou  $|\text{vivant}\rangle$ . Ces états constituent une base de l'espace de Hilbert du chat, mais il existe bien d'autres bases puisque rien n'empêche de choisir la base composée des deux états

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{|\text{mort}\rangle \pm |\text{vivant}\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.25)$$

Ainsi, lorsque l'on observe un chat vivant dans la vie courante, ce dernier est en fait dans une superposition d'états

$$|\text{vivant}\rangle = \frac{|\psi_{+}\rangle - |\psi_{-}\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.26)$$

Cependant, il s'agit d'une superposition d'états fortement non-classiques  $|\psi_{\pm}\rangle$ . L'observation semble donc *réduire* ou *projeter* l'état du chat (3) dans une base d'états privilégiés, celle des états classiques *mort* ou *vivant* que l'on est capable d'observer ou de détecter directement avec nos sens, notamment la vue.

Imaginons maintenant la situation illustrée sur la figure 5.11. Un observateur suit l'état de vie ou de mort d'un chat de Schrödinger, à l'aide d'une petite diode laser jouant le rôle de voyant. L'état de la lumière produite par cette dernière est lié à l'état de vie du chat, en amplifiant par exemple ses pulsations cardiaques. Il s'agit de notre version de *l'Ami de Wigner* : une expérience de pensée imaginée par Eugène Wigner en 1961 [88] pour soutenir le rôle hypothétique de la conscience dans la réduction d'une superposition quantique. Nous allons montrer que la conscience n'intervient nullement dans la réduction d'une superposition quantique. Les effets de la vision peuvent en fait être décrits à l'aide des outils introduits dans cette thèse.

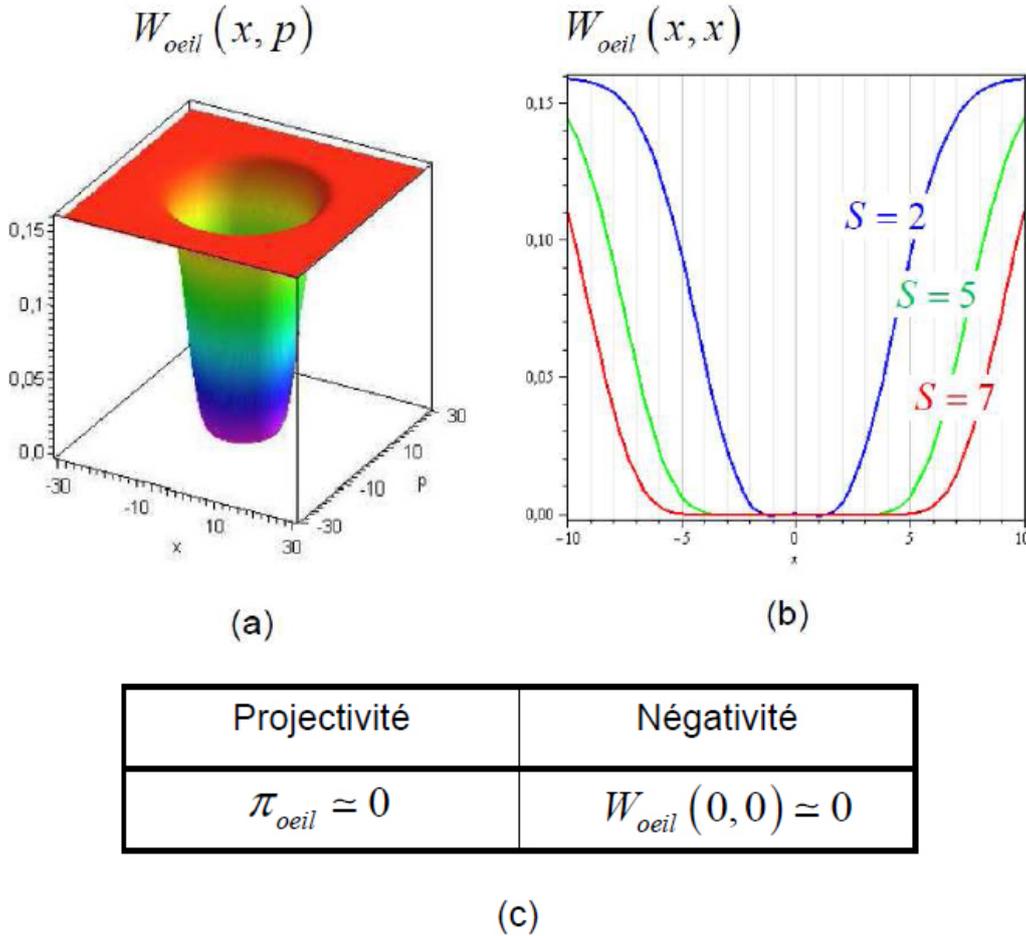
Lorsque l'on isole la boîte de l'environnement, l'état du système global composé du chat (C), du noyau atomique (N) et de la diode (D) devient un état intriqué à trois parties

$$|\Psi_{C,D,N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{mort}\rangle_C|0\rangle_D|f\rangle_N + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{vivant}\rangle_C|\alpha\rangle_D|e\rangle_N. \quad (5.27)$$

où  $|0\rangle_D$  et  $|\alpha\rangle_D$  désignent respectivement les états de vide et cohérent d'amplitude  $|\alpha| \gg 1$  de la lumière provenant de la diode. Ces états de la lumière sont distinguables par l'oeil humain, dont il est même possible de préciser les éléments POVMs. En effet, l'oeil humain est un détecteur sensible à seulement quelques photons. Des expériences de neurophysiologie [89, 90] ont permis de déterminer le seuil de détection de la rétine. Pour un oeil normal, ce dernier se situe aux alentours de 7 photons avec une efficacité de détection  $\eta \simeq 0,08$  et un bruit d'obscurité  $\nu \simeq 0,03$ . En utilisant les éléments POVM décrivant le comptage de photons (2.64), déterminés au second chapitre [B.3], la perception de lumière par l'oeil humain est décrite par

$$\hat{\Pi}_{\text{oeil}} = \sum_{n=S}^{\infty} \hat{\Pi}_n(\eta, \nu). \quad (5.28)$$

où  $S$  est le seuil de perception exprimé en nombre de photons. La représentation de Wigner de cet élément POVM est reproduite sur la figure 5.12-(a). Nous constatons alors que cette dernière est toujours positive quelque soit le seuil de perception  $S$ , comme le montre la figure 5.12-(b). Ainsi, le rayon du disque sur lequel la fonction de Wigner est quasiment nulle correspond au champ moyen en-dessous duquel le sujet n'a plus la sensation de percevoir de la lumière.



**Figure 5.12:** Représentation de Wigner de l'élément POVM décrivant la perception lumineuse pour un oeil humain normal avec un seuil de perception  $S = 7$  photons. (b) Évolution de la fonction de Wigner avec le seuil de perception  $S$  exprimé en nombre de photons. Le seuil de perception normal est  $S \approx 7$ . (c) Projectivité et négativité d'un oeil humain normal, avec un seuil  $S = 7$  photons, une efficacité de détection  $\eta = 0,08$ , et un bruit d'obscurité  $\nu = 0,03$ .

L'état rétrodicté à partir de la sensation lumineuse s'obtient en normalisant l'élément (5.28), soit

$$\hat{\rho}_{oeil}^{retr} \underset{D \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{D} \sum_{n=S}^D \hat{\Pi}_n(\eta, \nu). \quad (5.29)$$

Nous constatons qu'une telle mesure n'est absolument pas projective, puisque la projectivité est quasi-nulle  $\pi_{oeil} \sim 0$ , même pour un oeil parfait ( $\eta = 1, \nu = 0$ ), comme résumé sur la figure 5.12-(c).

Les effets d'une telle observation sur l'état du chat et du noyau (5.27) peuvent être décrits de manière identique à ceux intervenant dans une préparation conditionnelle. Cette préparation est alors basée sur une mesure destructive et elle a été décrite au chapitre II. En effet, à la perception par l'oeil de la lumière provenant de la diode, l'état du chat et du noyau n'est rien d'autre que l'état conditionné (2.47) sur ce signal

$$\hat{\rho}_{CN,oeil}^{\text{cond}} = \frac{\text{Tr}_D [|\Psi_{C,D,N}\rangle\langle\Psi_{C,D,N}| \hat{1}_C \otimes \hat{\rho}_{oeil}^{\text{retr}} \otimes \hat{1}_N]}{\text{Tr}_{CDN} [|\Psi_{C,D,N}\rangle\langle\Psi_{C,D,N}| \hat{1}_C \otimes \hat{\rho}_{oeil}^{\text{retr}} \otimes \hat{1}_N]}. \quad (5.30)$$

Comme la mesure réalisée par l'oeil n'est absolument pas projective  $\hat{\rho}_{oeil}^{\text{retr}} \sim \hat{1}/D$ , les cohérences quantiques entre les états du chat et du noyau disparaissent à la perception de la lumière provenant de la diode

$$\hat{\rho}_{CN,oeil}^{\text{cond}} \sim \text{Tr}_D [|\Psi_{C,D,N}\rangle\langle\Psi_{C,D,N}|]. \quad (5.31)$$

Autrement dit, notre perception de la lumière ne permet pas de *préparer* le chat et le noyau dans une superposition d'états incompatibles.

Pour préserver ces cohérences, outre la protection du système contre toutes les autres sources de décohérence, l'Ami de Wigner doit utiliser un appareil de mesure capable de détecter directement des états "chat de Schrödinger" de la lumière. Cela signifie que l'état rétrodicté à partir d'une certaine réponse "n" d'un tel appareil est une superposition des deux états produits par la diode (D) :

$$|\psi_n^{\text{retr}}\rangle = \frac{|0\rangle + |\alpha\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.32)$$

Lorsque l'appareil affiche la réponse "n", l'état du système (5.27) est projeté sur cet état rétrodicté

$$|\Psi_{C,D,N}\rangle \longrightarrow |\Psi_{CN,n}^{\text{cond}}\rangle \propto \langle\psi_n^{\text{retr}}|\Psi_{C,D,N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{mort}\rangle_C|f\rangle_N + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{vivant}\rangle_C|e\rangle_N. \quad (5.33)$$

Les cohérences quantiques entre les états du chat et du noyau sont donc bien préservées malgré la mesure réalisée par le détecteur. Cette dernière est une mesure projective sur un état fortement non-classique du champ (5.32). Lorsque nous obtenons le résultat "n", la préparation la plus probable de la lumière est précisément cet état "chat de Schrödinger" de la lumière. Cette certitude nous permet de *préparer* le chat et le noyau dans une superposition d'états incompatibles. Le seul rôle de la conscience est donc d'instaurer une règle de sélection, basée sur le résultat d'une mesure dont on connaît parfaitement les propriétés quantiques. Cette préparation reste indéterministe comme dans toute préparation conditionnelle.

Dans la troisième partie de cette thèse, nous proposons le principe d'un *détecteur de "chats de Schrödinger" de la lumière* en nous appuyant sur la complémentarité entre les approches prédictive et rétrodictive. Nous étudierons les propriétés quantiques des mesures réalisées par ce dispositif, comme nous l'avons expliqué dans le quatrième chapitre, avant d'aborder les *applications à la métrologie quantique* d'un tel détecteur.

Troisième partie

Application à la Métrologie  
Quantique



---

# Détecteur de "Chats de Schrödinger" de la Lumière

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Versions prédictive et rétrodictive</b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Conception du détecteur</b>	<b>124</b>
B.1	Principe	125
B.2	Discussion	126
<b>C</b>	<b>Propriétés quantiques</b>	<b>128</b>
C.1	Éléments POVM et états rétrodictés	128
C.2	Fidélité	129
C.3	Projectivité et idéalité	132
C.4	Non-classicalité	132
<b>D</b>	<b>Conclusions</b>	<b>134</b>

---

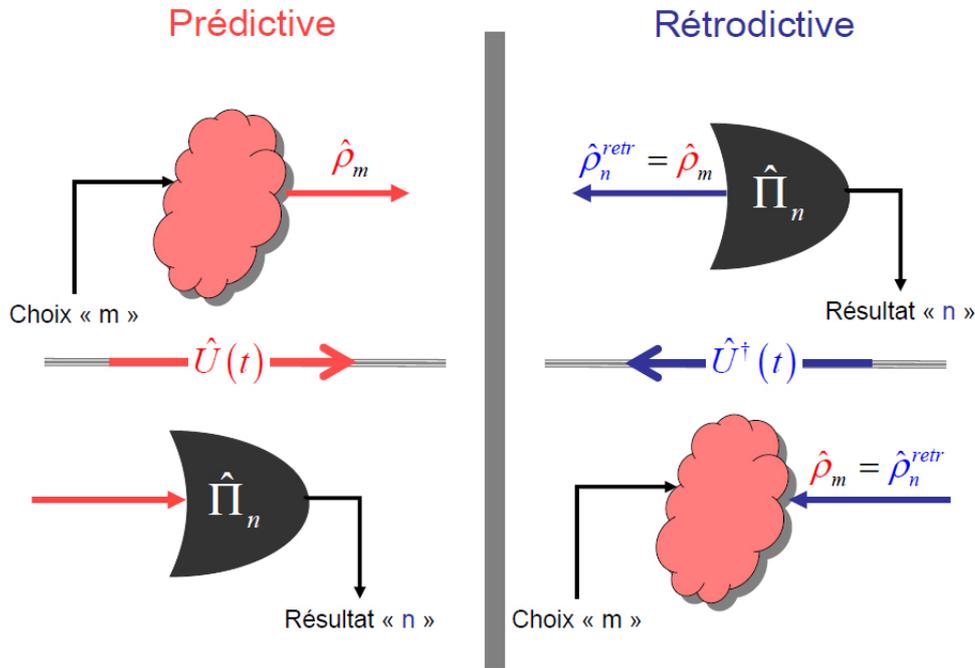
*Dans ce chapitre, nous allons montrer comment la complémentarité entre les approches prédictive et rétrodictive permet de concevoir des appareils de mesure dont les états rétrodictés sont des états "chats de Schrödinger" de la lumière. Nous évaluerons les propriétés quantiques des mesures effectuées par ce détecteur. Ces dernières nous seront utiles pour les applications en métrologie quantique que nous aborderons dans le chapitre suivant.*

## A Versions prédictive et rétrodictive

L'idée centrale de cette proposition est de mettre à profit la complémentarité entre les approches prédictive et rétrodictive, comme nous l'avons déjà fait pour la modélisation de la détection homodyne à la fin du troisième chapitre.

Pour un protocole quantique basé sur des préparations, des évolutions unitaires et des mesures, il existe des règles de correspondances simples qui permettent de passer d'une version prédictive du protocole à une version rétrodictive, et inversement. Ces règles de correspondance sont résumées sur la figure 6.1. Elles traduisent simplement l'idée centrale du chapitre III. En effet, *nous pouvons mesurer un système avec une certaine propriété*

physique, mais nous pouvons également préparer le système avec cette même propriété. Ainsi, la préparation d'un état  $\hat{\rho}_m$  dans une version prédictive devient une mesure dont l'état rétrodicté doit être identique ou fidèle à l'état préparé  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}} = \hat{\rho}_m$ , et vice versa.



**Figure 6.1:** Règles de correspondance entre les versions prédictive et rétrodictive d'un protocole basé sur des préparations, des évolutions unitaires et des mesures. – Le caractère unitaire des évolutions est nécessaire pour remplacer la préparation d'un certain état  $\hat{\rho}_m$  par une mesure ayant le même état rétrodicté  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}} = \hat{\rho}_m$ , et vice versa. Ces règles traduisent simplement le fait que nous pouvons mesurer le système avec une propriété physique donnée, mais que nous pouvons également préparer le système avec cette même propriété.

Pour appliquer ces règles, une condition indispensable est le caractère unitaire des évolutions quantiques intervenant dans le protocole. En effet, dans une version rétrodictive, la rétro-propagation des états est intimement liée au caractère unitaire des évolutions qui est un gage de réversibilité, comme nous l'avons montré au chapitre III. Ces règles de correspondance ne sont plus valables pour un protocole dont les évolutions quantiques sont décrites par un processus quantique  $\hat{L}$ . Ces derniers décrivent en effet l'évolution de systèmes ouverts, inévitablement soumis à des dissipations qui rendent leurs évolutions irréversibles.

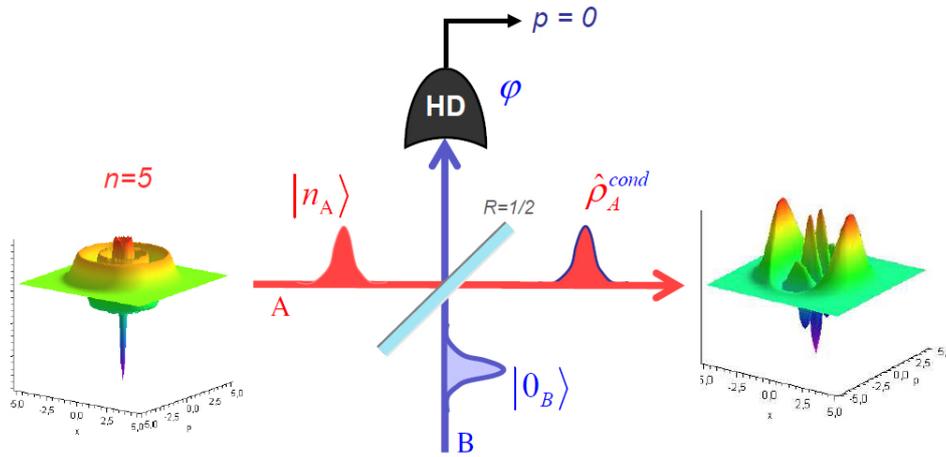
## B Conception du détecteur

Nous appliquons maintenant ces règles pour concevoir un appareil de mesure capable de détecter des états de la lumière plus exotiques que des états de Fock ou des états comprimés qui caractérisent les deux principaux appareils de mesure de l'optique quantique : les compteurs de photons et la détection homodyne.

## B.1 Principe

Pour concevoir un tel appareil, il nous faut judicieusement choisir un protocole de préparation d'états "chat de Schrödinger" afin d'obtenir une version rétrodictive pertinente. Nous décrivons simplement le protocole et ses performances, sans les redémontrer car nous traiterons complètement les propriétés quantiques des mesures réalisées par le détecteur dans la suite de ce chapitre. Pour l'instant, on se contente de "dénicher" ce protocole.

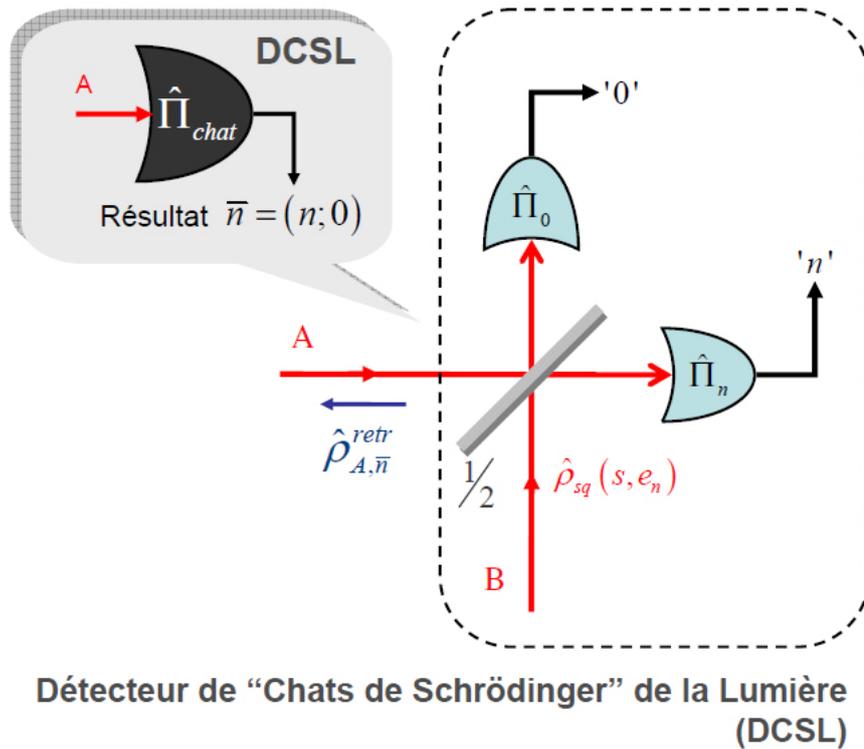
Pour préparer des états "chat de Schrödinger" de la lumière, plusieurs protocoles conditionnels ont été récemment proposés et implémentés [91, 92, 93]. A l'heure actuelle, le protocole le plus intéressant est basé sur une ressource non-gaussienne et une détection homodyne, comme illustré sur la figure 6.2. Ce protocole a été proposé en 2006 par H. Jeong *et al.* [91]. Il a été ensuite réalisé en 2007 par A. Ourjoumtsev *et al.* [93], dans le groupe de Philippe Grangier à l'Institut d'Optique, à partir d'un état à deux photons produit par préparation conditionnelle.



**Figure 6.2:** Protocole de préparation conditionnelle d'états "chat de Schrödinger" de la lumière. – La ressource de ce protocole est obtenue à partir d'un état à  $n$  photons  $|n\rangle$ , préparé dans le mode A d'une lame séparatrice 50/50 dont le mode B est dans l'état de vide  $|0\rangle$ . La préparation est conditionnée sur une détection homodyne (HD), donnant le résultat  $p_I = 0$  pour une phase  $\phi$  de l'oscillateur local (OL). Pour  $n = 5$ , les fonctions de Wigner sont reproduites. L'état conditionné est fidèle à une superposition d'états cohérents  $|\pm\alpha\rangle$ , avec  $|\alpha|^2 = n$ , et comprimée de  $-3dB$  selon la quadrature  $x_\phi$  (voir texte).

La ressource de ce protocole est obtenue à partir d'un état de Fock  $|n\rangle$  que l'on prépare dans le mode A d'une séparatrice 50/50. L'interaction de ce dernier avec le vide sur l'autre mode B donne une ressource  $\hat{\rho}_{AB}$  non-gaussienne et intriquée. Une détection homodyne est alors effectuée sur le mode de conditionnement B. Lorsque le résultat espéré  $p_I = 0$  se produit pour un oscillateur local de phase  $\phi$ , l'état conditionné est fidèle à un état "chat de Schrödinger" tel que nous l'avons défini en (1.69) au premier chapitre, mais comprimé de  $-3dB$  selon la quadrature  $x_\phi$ . Nous précisons tous ces aspects dans la suite du chapitre. Le principal intérêt de ce protocole se révèle au niveau de la fidélité qui a un comportement asymptotique très intéressant. En effet, on montre [93] que la fidélité de la préparation avec un état "chat de Schrödinger" de taille  $|\alpha|^2 = n$  et comprimé de  $-3dB$  est  $\mathcal{F}_n \sim 1 - 0,03/n$ , lorsque le nombre de photons  $n \geq 3$ . Nous retrouverons ce comportement dans la suite.

Le principe du *détecteur de "Chat de Schrödinger" de la Lumière* (DCSL) est reproduit sur la figure 6.3. Il s'agit de la version rétrodictive du protocole conditionnel reproduit sur la figure 6.2. Comme nous allons le montrer dans la suite, l'état rétrodicté à partir du résultat  $\bar{n} = (n, 0)$  est effectivement fidèle à un état "chat de Schrödinger" comprimé, dont la taille est directement liée au nombre de photons détectés  $n$ . C'est l'un des intérêts d'un tel dispositif que nous allons maintenant discuter d'un point de vue plus pratique.



**Figure 6.3:** Principe du détecteur de "Chat de Schrödinger" de la lumière (DCSL). – Les états rétrodictés à partir des comptages de photons sont les états nombres  $|n\rangle$  et le vide  $|0\rangle$ . Ces états se propagent en arrière dans le temps en interagissant sur la lame séparatrice. La détection homodyne de la version prédictive correspond maintenant à la préparation d'un état fidèle à son état rétrodicté : un état comprimé  $\hat{\rho}_{sq}$ .

## B.2 Discussion

### Version prédictive contre version rétrodictive

La version prédictive du protocole de la figure 6.2 nécessite la préparation d'états de Fock. Ces derniers sont très difficiles à préparer, même pour de petits nombres de photons. La réalisation de sources déterministes de photons uniques est d'ailleurs un enjeu très actuel [94, 95, 96, 97]. Le meilleur moyen pour préparer des états de Fock "libre" reste la préparation conditionnelle basée sur de l'intrication gaussienne, comme nous l'avons décrit au chapitre IV pour illustrer la non-classicalité d'une mesure. Ainsi, des compteurs de photons sont incontournables pour réaliser de telles préparations. Ces détecteurs doivent

en plus être caractérisés par de très bonnes efficacités et des bruits d'obscurité très faibles, afin d'améliorer la pureté des états préparés.

### Un choix technologique

Les détecteurs basés sur des supraconducteurs sont les plus prometteurs. En effet, les TES (Transition Edge Sensors) [98] sont capable de discerner entre 0, 1, 2, ou 3 photons avec de très bonnes efficacités ( $\eta \simeq 0.95$ ) et un bruit d'obscurité réellement négligeables. De plus, des projections [98] annonçaient des efficacités plus élevées permettant de distinguer des nombres de photons allant jusqu'à  $n = 5$  photons, qui sont aujourd'hui atteintes.

Dans ces détecteurs, un mince ruban de tungstène est maintenu en dessous de sa température critique ( $\sim 100mK$ ), devenant ainsi supraconducteur. Lorsqu'un certain nombre  $n$  de photons est absorbé par le ruban, l'élévation de la température  $\Delta T$  - proportionnelle au nombre  $n$  de photons absorbés - modifie la résistance  $R(T)$  du ruban. Cette variation est détectée à l'aide d'une électronique supraconductrice, à base de dispositifs à interférences quantiques (SQUID), qui ont l'avantage d'être extrêmement sensible aux variations de courant parcourant le ruban de tungstène (polarisé en tension).

Un tel choix technologique peut apparaître lourd mais, à l'heure actuelle, plusieurs groupes à travers le monde se dotent de ce genre de dispositif. Dans le cas de notre proposition, il n'est pas nécessaire d'avoir deux compteurs pour réaliser les deux mesures de comptages impliquées dans le détecteur de chat. En effet, comme nous l'avons fait dans le quatrième chapitre pour l'APD, un multiplexeur optique permettrait de détecter d'abord les  $n$  photons provenant du mode A, puis le vide du mode B après un certain délais.

### Pertinence

La pertinence de ce dispositif réside donc dans la relative facilité à détecter  $n$  photons au lieu de préparer un état à  $n$  photons. Une telle préparation nécessite de toute manière des compteurs de photons avec les mêmes exigences d'efficacité et de bruit que notre dispositif.

Par ailleurs, une détection homodyne en régime pulsé est relativement plus difficile à mettre en oeuvre qu'en régime continu. En effet, les efficacités se situent à environ 80% dans le régime pulsé, alors qu'elles dépassent facilement les 95% dans le régime continu [83]. La préparation d'états comprimés dans le régime pulsé est par contre prometteuse, puisque les intensités crêtes y sont très importantes et exaltent les phénomènes d'optique non linéaire à la base de ce genre de préparation.

Enfin, comme nous allons le montrer, un tel détecteur réalisera pour chacune de ses réponses  $\bar{n} = (n, 0)$  une mesure caractérisée par un état rétrodicté fidèle à un état "chat de Schrödinger". La taille de ces états (nombre moyen de photons) est directement lié au nombre de photons détectés. Ce nombre  $n$  est *a fortiori* plus important que pour celui des états de Fock préparés.

## C Propriétés quantiques

Nous déployons ici les outils que nous avons introduits au quatrième chapitre afin de qualifier le comportement quantique d'un tel détecteur.

### C.1 Éléments POVM et états rétrodictés

#### Éléments POVM

Dans l'approche prédictive, la probabilité d'avoir la combinaison particulière de résultat  $\bar{n} = (n; 0)$  est donnée par :

$$\Pr(\bar{n}|m) = \text{Tr}_{AB} \left[ \hat{U}_{AB} (\hat{\rho}_m \otimes \hat{\rho}_{sq}) \hat{U}_{AB}^\dagger \hat{\Pi}_n(\eta) \otimes \hat{\Pi}_0(\eta) \right], \quad (6.1)$$

que nous pouvons également écrire comme

$$\Pr(\bar{n}|m) = \text{Tr}_A \left[ \hat{\rho}_m \hat{\Pi}_{\text{chat}}(\bar{n}) \right]. \quad (6.2)$$

En utilisant les propriétés de permutations circulaires de la trace partielle sur le mode B, nous identifions l'expression des éléments POVMs décrivant le comportement des réponses  $\bar{n}$  du détecteur :

$$\hat{\Pi}_{\text{chat}}(\bar{n}) = \text{Tr}_B \left[ \hat{\rho}_{sq} \hat{U}_{AB}^\dagger \hat{\Pi}_n(\eta) \otimes \hat{\Pi}_0(\eta) \hat{U}_{AB} \right], \quad (6.3)$$

où  $\hat{U}_{AB}$  est l'opérateur d'évolution associé à la lame séparatrice 50/50,  $\hat{\Pi}_n(\eta)$  désigne l'élément POVM décrivant le comptage de  $n$  photons avec l'efficacité  $\eta$ , et  $\hat{\rho}_{sq}(s, e_n)$  représente l'état de vide comprimé - préparé dans le mode B - avec un taux de compression  $s$  et un excès de bruit  $e_n$ .

L'usage de la représentation de Wigner s'avère plus judicieux pour déterminer les propriétés de la mesure. Nous avons précisé les effets d'une évolution unitaire en termes de fonctions de Wigner au chapitre II. Ces règles sont résumées sur l'encadré 2.3 du chapitre II. Par exemple, pour le comptage inefficace de  $n$  photons, la modélisation faite sur la figure 2.7 à la fin du deuxième chapitre conduit directement à la représentation suivante

$$\mathcal{W}_{n,\eta}(x, p) = \int dudv \mathcal{W}_0(u, v) \mathcal{W}_n\left(\sqrt{\eta}x + \sqrt{1-\eta}u, \sqrt{\eta}p + \sqrt{1-\eta}v\right), \quad (6.4)$$

où  $\mathcal{W}_n(x, p)$  est la fonction de Wigner (1.68) de l'état à  $n$  photons.

Ensuite, la représentation de Wigner de l'état comprimé  $\hat{\rho}_{sq}$  est simplement donnée par la distribution gaussienne :

$$\mathcal{W}_{sq}(x, p) = \frac{1}{\pi\sqrt{1+se_n}} \exp\left[-\frac{x^2}{1/s+e_n} - \frac{p^2}{s}\right]. \quad (6.5)$$

Il s'agit d'un état comprimé d'un facteur  $s$  selon la quadrature  $p$  et affecté d'un bruit en excès  $e_n$  sur la quadrature conjuguée  $x$ . Ce dernier affecte essentiellement la pureté de l'état qui est donnée par

$$\mu_{sq} = \frac{1}{\sqrt{1+se_n}}. \quad (6.6)$$

Nous arrivons enfin à la représentation de Wigner des éléments POVMs (6.3) du détecteur,

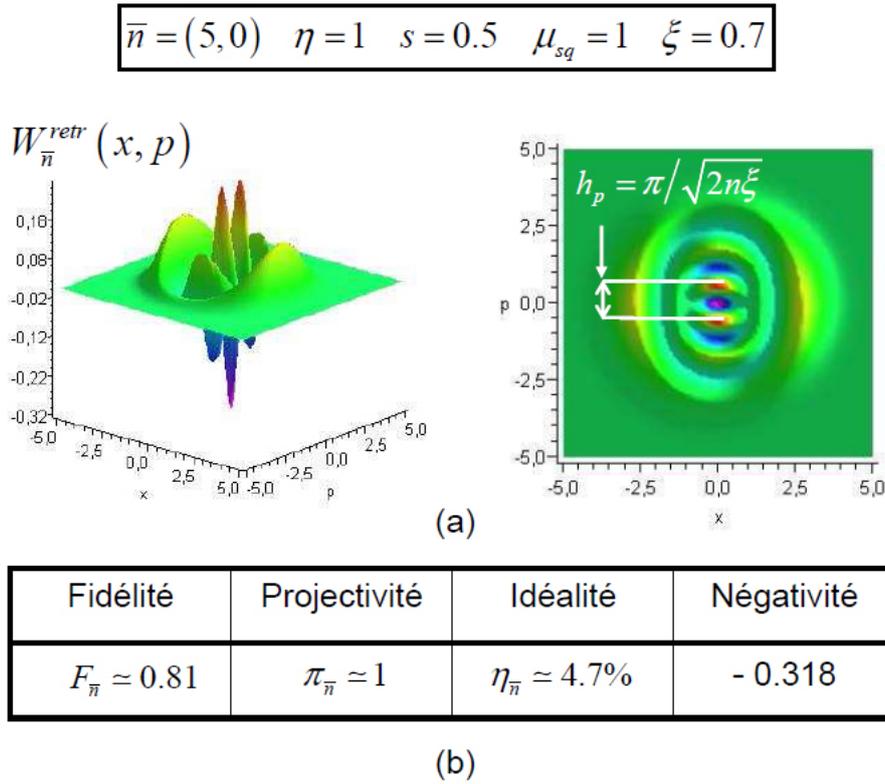
$$\mathcal{W}_{\text{chat},\bar{n}}(x, p) = 2\pi \int dudv \mathcal{W}_{sq}(u, v) \mathcal{W}_{n,\eta}\left(\frac{x-u}{\sqrt{2}}, \frac{p-v}{\sqrt{2}}\right) \mathcal{W}_{0,\eta}\left(\frac{x+u}{\sqrt{2}}, \frac{p+v}{\sqrt{2}}\right). \quad (6.7)$$

## États rétrodictés

La représentation de Wigner de l'état rétrodicté à partir du résultat  $\bar{n}$  est obtenue en normalisant celle de l'élément POVM (6.7), soit

$$\mathcal{W}_{\text{chat},\bar{n}}^{\text{retr}}(x,p) = \frac{\mathcal{W}_{\text{chat},\bar{n}}(x,p)}{\int dudv \mathcal{W}_{\text{chat},\bar{n}}(u,v)}. \quad (6.8)$$

L'allure de cette représentation est reproduite sur la figure 6.4-(a) pour un cas idéalisé ( $\eta = \mu_{sq} = 1$ ), avec une compression finie  $s = 0.5$ . Une telle compression correspond à une détection homodyne d'efficacité  $\eta_{hd} = 1/(1+s) \simeq 0.66$  dans la version prédictive du protocole (Fig. 6.2), comme nous l'avons montré en (4.53) au chapitre IV.



**Figure 6.4:** (a) Représentation de Wigner de l'état rétrodicté à partir du résultat  $\bar{n} = (5, 0)$  pour un comptage idéal ( $\eta = 1$ ) et un état comprimé  $s = 0.5$  de pureté  $\mu_{sq} = 1$ . (b) Fidélité, projectivité, idéalité et négativité pour le résultat  $\bar{n} = (5, 0)$ . Pour la fidélité, l'état cible est un état chat de taille  $|\alpha|^2 = 5$  photons et comprimé selon  $x$  de  $\xi = 0.7$ .

## C.2 Fidélité

Cette fidélité est le recouvrement entre l'état rétrodicté (6.8) et un état cible  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$  que nous précisons dans la suite. Cette fidélité s'écrit en termes de représentations de Wigner comme

$$\mathcal{F}_{\bar{n}}(\psi_{\text{tar}}) = \langle \psi_{\text{tar}} | \hat{\rho}_{\bar{n}}^{\text{retr}} | \psi_{\text{tar}} \rangle = 2\pi \int dx dp \mathcal{W}_{\text{chat},\bar{n}}^{\text{retr}}(x,p) \mathcal{W}_{\psi_{\text{tar}}}(x,p), \quad (6.9)$$

où  $\mathcal{W}_{\psi_{\text{tar}}}(x,p)$  désigne la fonction de Wigner de l'état cible  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$ .

Cette fidélité correspond également à la probabilité rétrodictive d'avoir préparé la lumière dans l'état cible  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$  quand le résultat " $\bar{n}$ " se produit

$$\mathcal{F}_{\bar{n}}(\psi_{\text{tar}}) = \langle \psi_{\text{tar}} | \hat{\rho}_{\bar{n}}^{\text{retr}} | \psi_{\text{tar}} \rangle = \text{Pr}(\psi_{\text{tar}} | \bar{n}), \quad (6.10)$$

comme nous l'avons montré au chapitre IV. Ainsi, lorsque la mesure est fidèle à la mesure cible ( $\mathcal{F}_{\bar{n}}(\psi_{\text{tar}}) \sim 1$ ), la préparation la plus probable - conduisant au résultat " $\bar{n}$ " - est l'état cible  $|\psi_{\text{tar}}\rangle$ . Cet état cible est ici un état "chat de Schrödinger", comprimé, défini par

$$|\psi_{\text{tar}}(\alpha, r)\rangle = \hat{S}_x(r) |\psi_{\text{chat}}^{\pm}(\alpha)\rangle, \quad (6.11)$$

où  $\hat{S}_x(r) = \exp\left[\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger)\right]$  est l'opérateur d'évolution unitaire décrivant une compression  $\xi = e^{-2r}$  selon la quadrature  $x$ .

L'état "chat de Schrödinger"  $|\psi_{\text{chat}}^{\pm}(\alpha)\rangle$  est toujours défini comme au premier chapitre par la superposition d'états quasi-classiques  $|\pm\alpha\rangle$

$$|\psi_{\text{chat}}^{\pm}(\alpha)\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(\alpha) [|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle] \quad (6.12)$$

avec la constante de normalisation

$$\mathcal{N}_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}}. \quad (6.13)$$

Nous prendrons une amplitude réelle  $\alpha = |\alpha|$  sans perdre en généralité, puisque cela correspond simplement à un choix de phase. L'expression de la fonction de Wigner de ces états (6.12) prend alors la forme suivante

$$\mathcal{W}_{\text{chat}}^{\pm}(x, p) = \mathcal{N}_{\pm}^2(\alpha) [\mathcal{W}_{\alpha}(x, p) + \mathcal{W}_{-\alpha}(x, p) + \mathcal{I}_{\alpha, \pm}(x, p)], \quad (6.14)$$

où  $\mathcal{W}_{\alpha}(x, p) = \mathcal{W}_0(x - \sqrt{2}\alpha, p)$  est la fonction de Wigner de l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  et  $\mathcal{I}_{\alpha, \pm}(x, p)$  désigne le terme d'interférence quantique donné par

$$\mathcal{I}_{\alpha, \pm}(x, p) = \pm \frac{2}{\pi} e^{-(x^2 + p^2)} \cos(2\sqrt{2}\alpha p). \quad (6.15)$$

Ce terme d'interférence quantique joue un rôle très important dans le caractère non-classique des mesures effectuées par ce détecteur, comme nous le verrons dans la suite.

Enfin, nous devons déterminer l'action de l'opérateur de compression  $\hat{S}_x$  (6.11) sur l'état chat (6.12). Cette compression se traduit simplement sur la représentation de Wigner de l'état (6.14) par

$$\mathcal{W}_{\text{tar}}(x, p) = \mathcal{W}_{\text{chat}}^{\pm}\left(x/\sqrt{\xi}, \sqrt{\xi}p\right), \quad (6.16)$$

comme illustré sur la figure 2.1 du chapitre II.

### Cas idéalisé

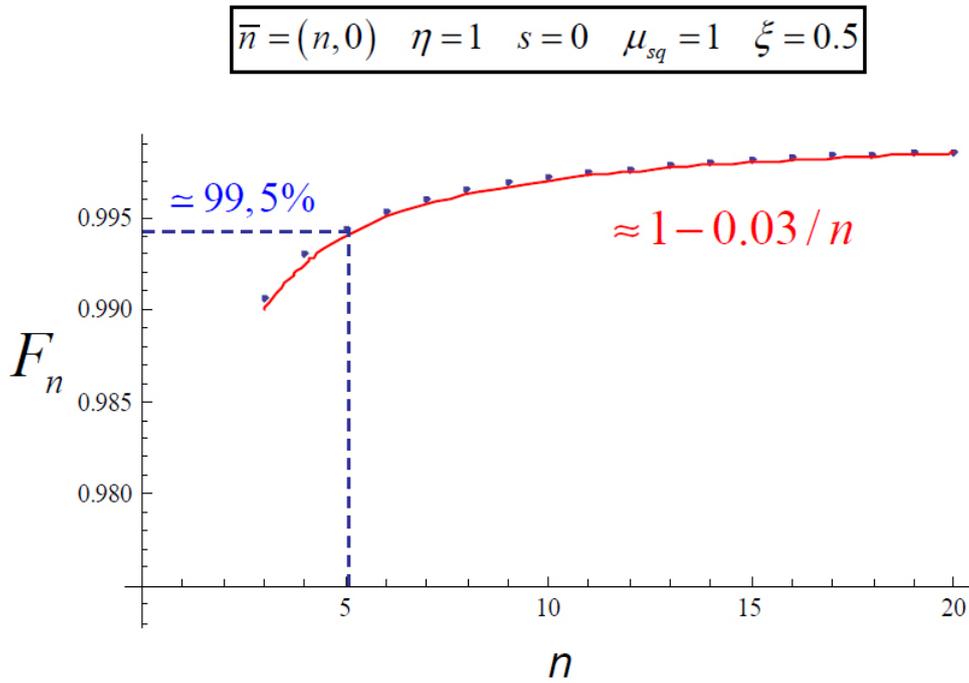
Nous nous intéressons maintenant au comportement de la fidélité dans le cas caractérisé par des comptages de photons idéaux ( $\eta = 1$ ) et un état de vide parfaitement comprimé ( $s = 0$ ) qui se rapproche de l'état rétrodicté à partir d'une détection homodyne idéale ( $\eta_{hd} = 1$ ). A partir des comptages de photons  $\bar{n} = (n, 0)$ , la rétro-propagation des états rétrodictés conduit à un état rétrodicté intriqué :

$$\mathcal{W}_{AB, \bar{n}}^{\text{retr}}(x, p; u, v) = \mathcal{W}_n^{\text{retr}}\left(\frac{x-u}{\sqrt{2}}, \frac{p-v}{\sqrt{2}}\right) \mathcal{W}_0^{\text{retr}}\left(\frac{x+u}{\sqrt{2}}, \frac{p+v}{\sqrt{2}}\right). \quad (6.17)$$

La préparation d'un état parfaitement comprimé dans le mode B conduit à assimiler sa fonction de Wigner à une distribution de Dirac  $\mathcal{W}_{sq}(u, v) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \delta(v)$ . L'état rétrodicté est alors donné par la règle de projection (2.51) du chapitre II, soit

$$\mathcal{W}_{\bar{n}}^{\text{retr}}(x, p) \simeq \frac{\int du \mathcal{W}_{AB, \bar{n}}^{\text{retr}}(x, p; u, 0)}{\int dudx' dp' \mathcal{W}_{AB, \bar{n}}^{\text{retr}}(x', p'; u, 0)}. \quad (6.18)$$

L'évaluation numérique de la fidélité entre l'état rétrodicté à partir de la réponse  $\bar{n}$  et un état cible (6.16) d'amplitude  $|\alpha|^2 = n$  et comprimé de  $\xi = 1/2$  est reproduite sur la figure 6.5. Nous retrouvons un comportement similaire à celui de la version prédictive du protocole. C'est l'un des intérêts de ce détecteur. Chaque réponse  $\bar{n}$  est idéalement caractérisée par un état "chat de Schrödinger" de  $n$  photons et comprimés de 3 dB selon la quadrature  $x$ .



**Figure 6.5:** Évolution de la fidélité entre l'état rétrodicté à partir de la réponse  $\bar{n}$  du DCSL et un état cible d'amplitude  $|\alpha|^2 = n$  et comprimé de  $\xi = 1/2$ . – Pour des nombres de photons  $n \geq 3$ , la fidélité (en bleu) est bien ajustée par  $\mathcal{F}_{\bar{n}} \simeq 1 - 0.03/n$  (en rouge).

### Cas réaliste

Pour une compression réaliste  $s \neq 0$  correspondant dans la version prédictive à une détection homodyne d'efficacité  $\eta_{hd} = 1/(1+s)$ , nous pouvons déterminer un facteur de compression  $\xi \neq 1/2$  pour l'état cible (6.16) qui optimise la fidélité (6.9). Une telle optimisation est illustrée sur la figure 6.4-(b).

### C.3 Projectivité et idéalité

La projectivité d'une mesure effectuée par ce détecteur est donnée par la pureté de son état rétrodicté, soit

$$\pi_{\bar{n}}(\eta, p_{sq}) = 2\pi \int dx dp [\mathcal{W}_{\text{chat}, \bar{n}}^{\text{retr}}(x, p)]^2, \quad (6.19)$$

où  $\eta$  est l'efficacité de détection du compteur de photons ( $\eta \simeq 0.95$  pour un TES) et  $\mu_{sq} = (1 + se_n)^{-1/2}$  est la pureté de l'état comprimé.

L'idéalité de la mesure est, quant à elle, évaluée par l'efficacité de détection  $\eta_{\text{cat}}$  de son état rétrodicté (6.8) :

$$\eta_{\text{cat}}(\bar{n}) = \text{Pr}(\bar{n} | \hat{\rho}_{\bar{n}}^{\text{retr}}) = 2\pi \int dx dp \mathcal{W}_{\text{chat}, \bar{n}}(x, p) \mathcal{W}_{\text{chat}, \bar{n}}^{\text{retr}}(x, p), \quad (6.20)$$

qui est la probabilité prédictive d'obtenir le résultat ' $\bar{n}$ ' quand la lumière a été préparée dans l'état rétrodicté.

Nous avons déterminé numériquement ces estimateurs sur la figure 6.4-(b) pour un cas idéalisé correspondant à des comptages de photons idéaux et un état comprimé pur. Malgré une bonne fidélité ( $\mathcal{F}_{\bar{n}} \simeq 0.8$ ) avec l'état cible, l'efficacité de détection de cet état est particulièrement basse ( $\eta_{\bar{n}} \simeq 4\%$ ). Il s'agit en fait d'une mesure projective, mais non-idéale, comme nous l'avons prédit au chapitre IV sans avoir pu l'éprouver sur les deux principaux détecteurs (APD et HD) de l'optique quantique. Le résultat de cette mesure projective n'est pas certain, même lorsque l'on prépare des états cibles fidèles à son état rétrodicté. Cette faible détectivité reflète en fait le taux de succès du protocole de préparation conditionnelle, dont le détecteur est la version rétrodictive.

Par contre, lorsque nous obtenons le résultat  $\bar{n}$ , nous sommes seulement certain d'une chose : la préparation la plus probable qui a conduit à ce résultat est l'état cible. C'est une distinction importante avec la définition habituelle de mesures projectives pour qui le résultat de deux mesures projectives devient certain.

Le détecteur de "chat de Schrödinger" constitue une belle illustration de la complémentarité entre les approches prédictive et rétrodictive, puisqu'il nous a fallu déterminer les éléments POVMs et les états rétrodictés de l'appareil pour révéler ses propriétés quantiques et son comportement subtil.

### C.4 Non-classicalité

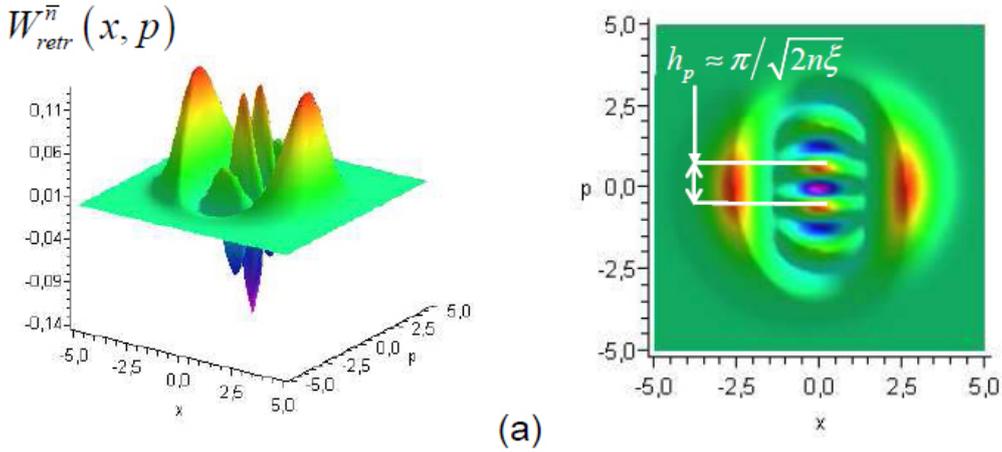
#### Signature de non-classicalité

La principale manifestation de la non-classicalité des états rétrodictés du DCSL est le terme d'interférence quantique dans sa représentation de Wigner. Ce terme est responsable de négativités qui écartent toutes possibilités d'utiliser la fonction de Wigner comme une vraie distribution de probabilité. Ces franges d'interférences sont une manifestation des cohérences quantiques entre les deux états comprimés  $\hat{S}_x(r) | \pm \alpha \rangle$  qui composent cette superposition.

Lorsque l'état rétrodicté (6.8) se réduit à un simple mélange statistique des états comprimés  $\hat{S}_x(r) | \pm \alpha \rangle$ , la fidélité de la mesure atteint la limite classique de 1/2 et le terme d'interférence s'annule. Une fidélité supérieure à 1/2 constitue donc une signature de non-classicalité de la mesure réalisée par le DCSL.

Pour des imperfections données, il est possible d'ajuster le taux de compression  $s$  de la préparation afin d'améliorer la fidélité et la maintenir au-dessus de cette limite classique de  $1/2$ . Les résultats d'une telle optimisation sont reproduits sur la figure 6.6 pour un cas de détecteur plus réaliste.

$$\bar{n} = (5, 0) \quad \eta = 0.95 \quad s = 0.3 \quad \mu_{sq} = 0.9 \quad \xi = 0.7$$



Fidélité	Projectivité	Idéalité	Négativité
$F_{\bar{n}} \simeq 0.66$	$\pi_{\bar{n}} \simeq 0.54$	$\eta_{\bar{n}} \simeq 4.4\%$	- 0.139

(b)

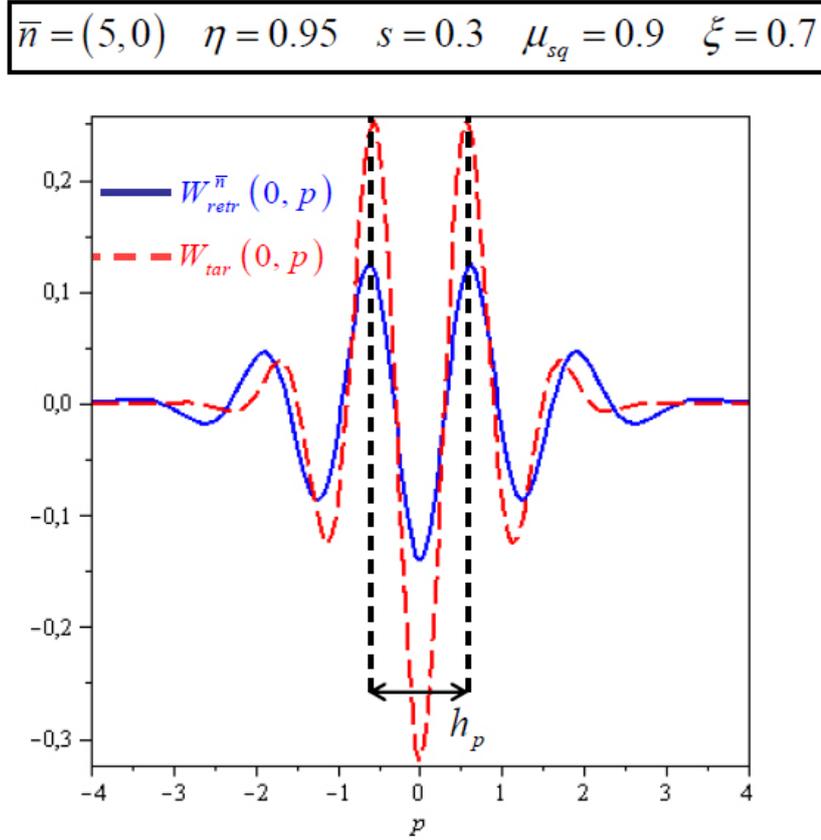
**Figure 6.6:** (a) Représentation de Wigner de l'état rétrodicté à partir du résultat  $\bar{n} = (5, 0)$  pour un comptage d'efficacité  $\eta = 0.95$  et un état comprimé  $s = 0.3$  de pureté  $\mu_{sq} = 0.9$ . (b) Fidélité, projectivité, idéalité et négativité pour le résultat  $\bar{n} = (5, 0)$ . Pour la fidélité, l'état cible est un état chat de taille  $|\alpha|^2 = 5$  photons et comprimé selon  $x$  de  $\xi = 0.7$ .

### Effets des imperfections

Pour apprécier les effets des imperfections sur les cohérences quantiques, nous comparons les profils des fonctions de Wigner de l'état rétrodicté. Les résultats sont reproduits sur la figure 6.7. Nous constatons que les franges d'interférence de l'état rétrodicté ont quasiment la même période  $h_p \simeq \pi/\sqrt{2n\xi}$  que celle de l'état cible dont la représentation est

$$\mathcal{I}_{\text{tar}}(x, p) = (-1)^n \frac{2}{\pi} e^{-\frac{x^2}{\xi} - \xi p^2} \cos\left(2\sqrt{2n\xi}p\right). \quad (6.21)$$

Les effets du bruit sont donc essentiellement une diminution de l'amplitude des oscillations et de la négativité à l'origine. Les cohérences quantiques des états rétrodictés nous seront très utiles dans le chapitre suivant, où nous étudierons un protocole de métrologie quantique basé sur les mesures réalisées par ce détecteur.



**Figure 6.7:** Profils des représentations de Wigner selon  $(x = 0, p)$  de l'état rétrodicté à partir de la réponse  $\bar{n} = (5, 0)$  du détecteur et de l'état cible correspondant. – Les franges d'interférence ont quasiment la même période  $h_p \simeq \pi/\sqrt{2n\xi}$ .

## D Conclusions

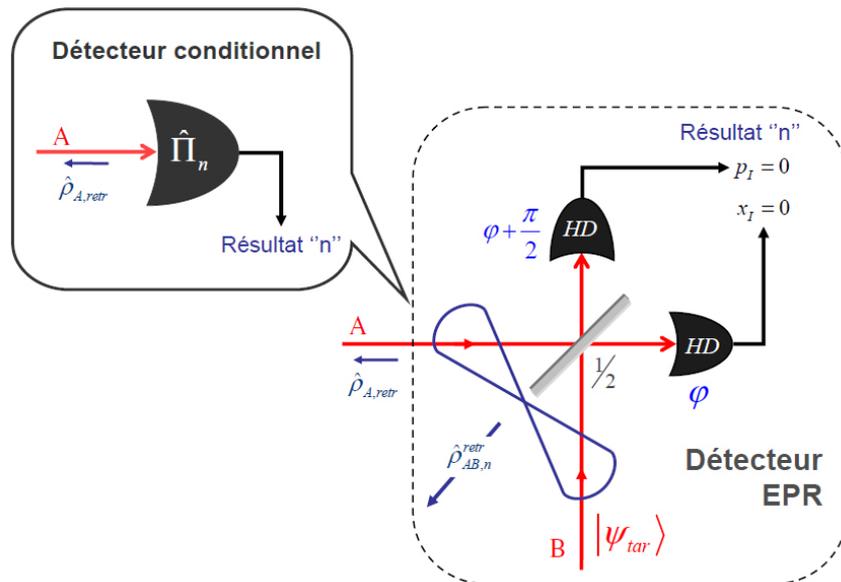
Dans ce chapitre, nous avons proposé et étudié le principe d'un dispositif de mesure dont les états rétrodictés à partir de certains résultats sont fidèles à des états "chat de Schrödinger" de la lumière. L'étude des propriétés quantiques de ces mesures révèle des comportements subtiles pour une mesure, mais que nous avons prédits avec l'approche rétrodictive au chapitre IV. Il s'agit essentiellement du caractère non idéal de mesures pourtant projectives. De telles mesures ont été occultées par les traitements habituels qui avaient pour unique cadre l'approche prédictive. Nous allons maintenant voir l'implication de ces propriétés quantiques dans un protocole de métrologie quantique nécessitant un détecteur de "chats de Schrödinger".

---

## Interlude IV : Mesures Conditionnelles

---

Dans cet interlude, nous allons voir qu'il est possible de détecter n'importe quel état quantique à condition de le préparer. Il s'agit en fait de la version rétrodictive d'une préparation conditionnelle basée sur un état intriqué gaussien. Nous avons décrit cette préparation conditionnelle pour illustrer la non-classicalité de la mesure au chapitre IV. Ainsi, nous parlerons ici de *mesure conditionnelle* car la mesure effectuée sur un mode A est *conditionnée sur la préparation d'un état cible* sur un autre mode B. La ressource d'un tel dispositif est l'état rétrodicté intriqué de l'appareil EPR que nous avons décrit à l'Interlude II. Le principe de cette mesure conditionnelle est reproduit sur la figure 6.8.



**Figure 6.8:** Principe d'une mesure conditionnelle basée sur une mesure EPR. – L'état rétrodicté du détecteur EPR est un état fidèle à un état gaussien intriqué, lorsque les doubles détections homodynes en quadrature donnent les résultats  $x_I = p_I = 0$ . Lorsque le mode B est préparé dans un état cible  $|\psi_{tar}\rangle$ , l'état rétrodicté du mode A est un état quantique fidèle à cet état cible (voir texte). Nous parlons alors de mesures conditionnelles : les mesures effectuées dans le mode A sont conditionnées sur la préparation de l'état cible dans le mode B.

Dans la suite, nous supposons que les détections homodynes sont quasi-idéales avec une efficacité  $\eta \gtrsim 0.98$ , ce qui est le cas dans le régime continu [83]. Comme nous l'avons montré dans l'interlude II, l'état rétrodicté à partir de la réponse "n" admet pour représentation dans la base des états nombres

$$|\psi_{AB,n}^{retr}\rangle \underset{\lambda \rightarrow 1}{\sim} (1 - \lambda^2)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k |k, k\rangle, \quad (6.22)$$

où le paramètre  $\lambda$  est lié à l'efficacité des détections homodynes par

$$\lambda(\eta) = 2\eta - 1 \simeq 0.96. \quad (6.23)$$

Lorsque l'on prépare l'état cible  $|\psi_{tar}\rangle$  dans le mode B, l'élément POVM décrivant le comportement de la réponse "n" est donné par

$$\hat{\Pi}_n = \text{Tr}_B \left[ \hat{\rho}_{tar} \hat{\Pi}_{AB}(n) \right] \underset{\lambda \rightarrow 1}{\simeq} \langle \psi_{tar} | \psi_{AB}^{retr} \rangle \langle \psi_{AB}^{retr} | \psi_{tar} \rangle. \quad (6.24)$$

Nous obtenons l'état rétrodicté caractérisant la mesure sur le mode A en normalisant cet élément POVM. Étant donné l'efficacité, la mesure est pratiquement projective, puisque l'état rétrodicté est

$$|\psi_n^{retr}\rangle \underset{\lambda \rightarrow 1}{\sim} \left( \frac{1 - \lambda^2}{\eta_n} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \langle \psi_{tar} | k \rangle |k\rangle, \quad (6.25)$$

où  $\eta_n$  est l'idéalité de la mesure donnée par

$$\eta_n \simeq (1 - \lambda^2) \sum_k \lambda^{2k} |\langle \psi_{tar} | k \rangle|^2. \quad (6.26)$$

Pour l'état cible, nous allons prendre un état "chat de Schrödinger" impair tel que

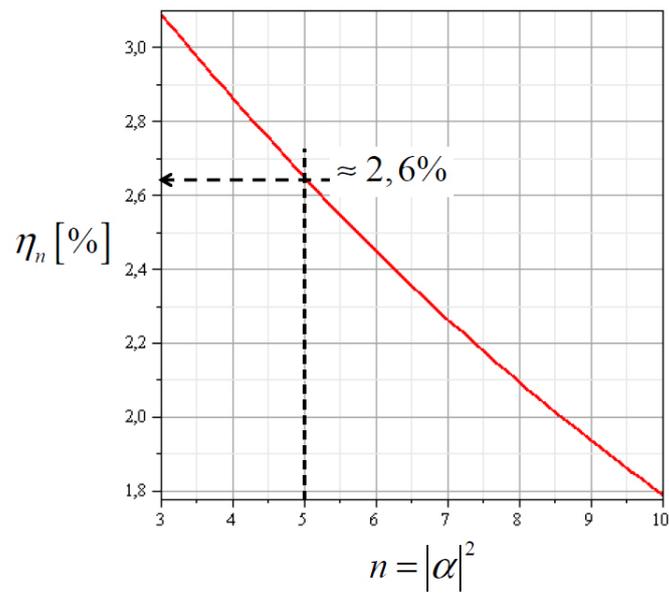
$$|\psi_{tar}\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle], \quad (6.27)$$

où la phase de l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  sera prise égale à la phase de l'oscillateur local  $\phi$  des détections homodynes, ce qui est possible en pratique avec un asservissement de phases. Nous pouvons maintenant expliciter l'expression de l'idéalité de la mesure qui prend la forme suivante

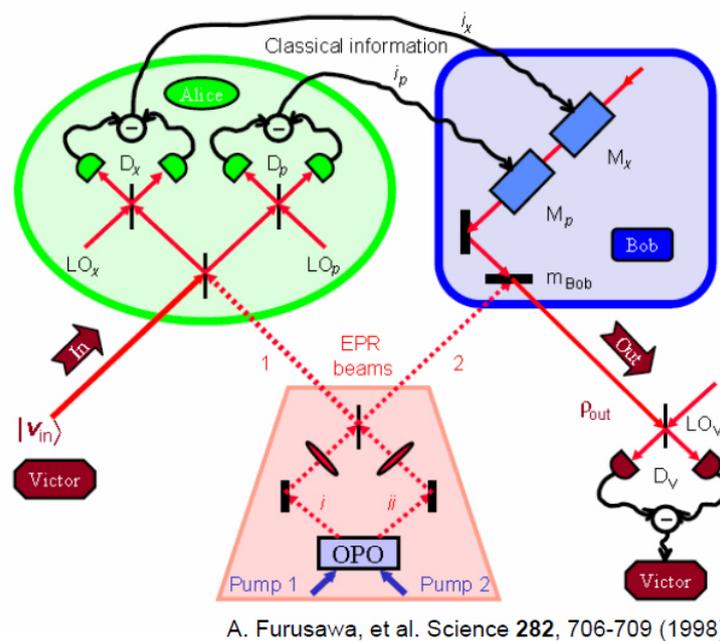
$$\eta_n \simeq (1 - \lambda^2) e^{-|\alpha|^2} \sinh(\lambda^2 |\alpha|^2). \quad (6.28)$$

L'évolution de cette dernière avec la "taille du chat"  $|\alpha|^2$  est illustrée sur la figure 6.9. Nous sommes en mesure de comparer l'idéalité de cette mesure avec celle réalisée par le détecteur décrit au chapitre précédent. Pour un état "chat de Schrödinger" de taille  $|\alpha|^2 \simeq 5$  photons, nous avons une efficacité deux fois plus faible que celle obtenue pour le détecteur proposé au chapitre VI. De plus, ce détecteur ne devient réellement utilisable que lorsque la préparation des états cibles est déterministe, ce qui est loin d'être le cas pour des états fortement non-classiques comme les états "chat de Schrödinger".

Enfin, il existe une illustration célèbre de telles mesures conditionnelles. En effet, le protocole de téléportation quantique en variables continues [100] fait intervenir une mesure conditionnelle dont l'état cible est simplement l'état à téléporter. Une illustration de ce protocole est reproduite sur la figure 6.10.



**Figure 6.9:** Évolution de l'idéalité  $\eta_n$  de la mesure avec l'amplitude  $|\alpha|$  de l'état cible. – Pour un état "chat de Schrödinger" de taille  $n = 5$  photons, l'idéalité est d'environ 2.6%.



**Figure 6.10:** Protocole de téléportation quantique en variables continues. Extrait de [100]. – Alice réalise deux détections homodynes en quadratures et transmet les résultats à Bob. Ce dernier effectue à partir de ces résultats des modulations d'amplitude (AM) et de phase (PM) sur le faisceau pour le retrouver idéalement dans l'état à téléporter.

La mesure conditionnelle est effectuée sur un faisceau "1" partageant de l'intrication gaussienne avec un autre faisceau "2" destiné à Bob. Cette intrication est idéalement décrite par un état de la même forme que l'état (6.25). La mesure effectuée par Alice sur le faisceau "1" est conditionnée sur la préparation de l'état d'entrée  $\hat{\rho}_{in}$ . Lorsque le résultat  $x_I = p_I = 0$  se produit, l'état du faisceau destiné à Bob est alors préparé dans un état quantique fidèle à l'état cible de la mesure conditionnelle d'Alice, soit l'état d'entrée  $\hat{\rho}_{in}$ .

La téléportation quantique n'est rien d'autre qu'un protocole de préparation conditionnelle "améliorée". Lorsque le résultat  $n = (x_I, p_I) \neq (0, 0)$  se produit, l'état rétrodicté  $\hat{\rho}_n^{retr}$  est fidèle à l'état cible  $\hat{\rho}_{in}$ , ayant subi un déplacement et une rotation dans l'espace des phases. Bob doit donc moduler en amplitude et en phase son faisceau "2" afin de retrouver un état fidèle à l'état cible. Le protocole de téléportation quantique tire donc profit de l'information fournie par la mesure d'Alice afin de préparer - de manière déterministe - un état quantique fidèle à l'état cible. On parle alors de *rétroaction quantique*.

Un autre exemple récent [101] de rétroaction quantique a été étudié pour des expériences d'électrodynamique quantique en cavité. Il permet de préparer à partir d'un état cohérent, stocké dans une cavité, un état de Fock arbitraire en effectuant des mesures non-destructives du nombre de photons contenus dans la cavité. La rétroaction est alors effectuée en fonction de l'historique des résultats de ces mesures, en injectant dans la cavité un champ cohérent d'amplitude et de phase adéquate.

---

# Application à la Métrologie Quantique

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>Limites Quantiques</b>	<b>141</b>
B.1	Limite Quantique Standard (LQS)	141
B.2	Limite de Heisenberg (LH)	142
<b>C</b>	<b>Un protocole de métrologie</b>	<b>142</b>
C.1	Description du protocole	143
C.2	Principe de l'estimation	144
C.3	Estimateur du déplacement	147
C.4	Performances	148
C.5	Discussion	150
<b>D</b>	<b>Généralisation</b>	<b>153</b>
D.1	Principe d'une estimation rétrodictive	153
D.2	Information de Fisher	154
D.3	Limite de Cramér-Rao Quantique	156
D.4	Protocole d'estimation rétrodictive	158
<b>E</b>	<b>Conclusions</b>	<b>163</b>

---

*Nous abordons le dernier chapitre dédié à l'application du détecteur de "chat de Schrödinger" de la lumière à la métrologie quantique. Nous détaillerons une stratégie d'estimation de petits déplacements d'états quantiques dans l'espace des phases. Nous généraliserons ensuite l'usage de tels détecteurs non-classiques à des protocoles d'estimation de paramètre, entièrement fondés sur l'approche rétrodictive et des choix de préparation.*

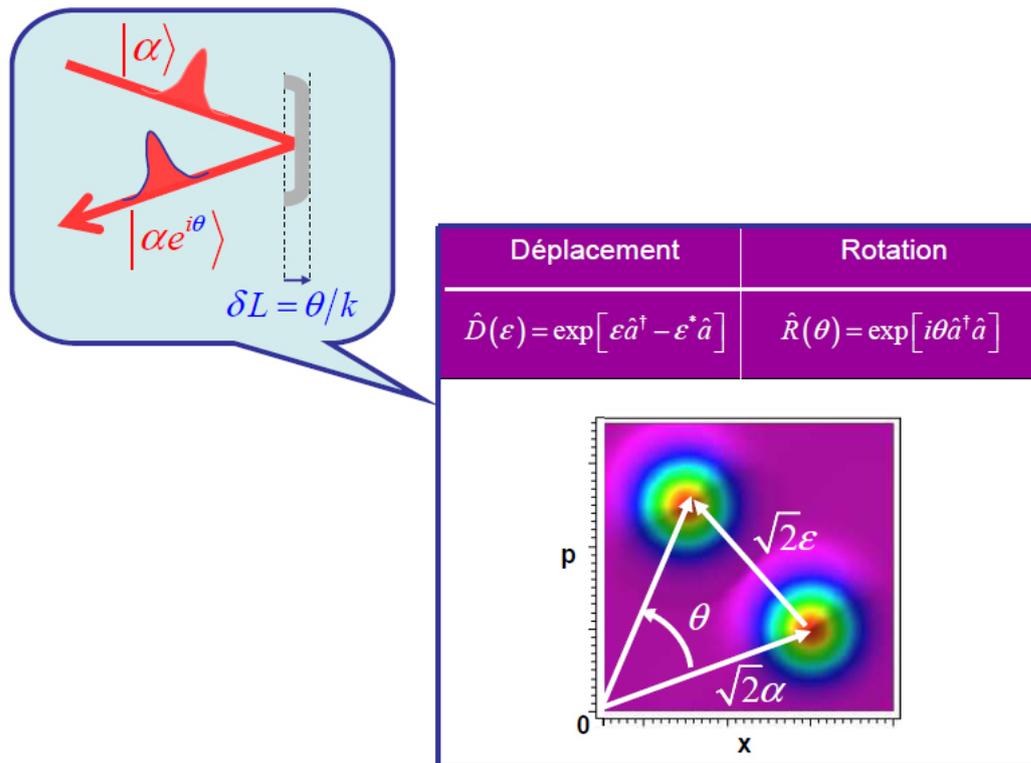
## A Introduction

La métrologie quantique est un domaine de l'information quantique très actif à l'heure actuelle, en particulier en optique quantique, où de nombreux protocoles [110, 102, 103, 104, 111] ont été étudiés. Ces protocoles exploitent les propriétés de certains états non-classiques afin d'estimer un paramètre physique avec la meilleure précision.

Par exemple, dans le groupe d'optique quantique de Claude Fabre au Laboratoire Kastler Brossel, le traitement multimode dans le régime continu a montré un rôle essentiel de la mesure, en dressant des exigences précises sur les modes à travers lesquels la préparation et la détection doivent être effectuées [107]. Ces études ont été appliquées à des estimations de petits déplacements spatiaux [105, 106] ou de durées [108]. Elles impliquent essentiellement des états gaussiens et la compression des fluctuations quantiques de ces états.

Dans ce chapitre, nous adopterons une approche différente, celle d'un traitement monomode où l'on s'intéresse principalement aux propriétés quantiques d'états et de mesures fortement non-classiques. Ces états nécessitent peu de photons, contrairement aux régimes continus. En effet, certains protocoles de métrologie exigent de faibles intensités lumineuses, en particulier si ils font intervenir des substances biologiques ou des nanostructures.

Une situation typique de la métrologie consiste à estimer de petits déplacements d'états quantiques intervenant dans beaucoup de problèmes pratiques, comme dans la microscopie à force atomique pour ne citer qu'un exemple. A cet effet, un faisceau lumineux est généralement focalisé sur une surface réfléchissante subissant de petits déplacements spatiaux  $\delta L$ . Ces derniers induisent un déplacement sur l'état quantique de la lumière que l'on cherche à estimer avec la meilleure précision.



**Figure 7.1:** Estimation d'un déplacement ou d'une rotation dans l'espace des phases. – Un faisceau lumineux préparé dans un état cohérent  $|\alpha\rangle$  est focalisé sur une surface réfléchissante. Un petit déplacement spatial  $\delta L$  de cette surface induit un déphasage  $\theta = k\delta L$  sur l'état cohérent. L'évolution de cet état dans l'espace des phases est alors équivalente à une rotation  $\hat{R}(\theta)$  ou à un déplacement  $\hat{D}(\epsilon)$  d'une amplitude complexe  $\epsilon \simeq i(\alpha/|\alpha|)|\epsilon|$ .

Si le faisceau lumineux qui sonde les déplacements du miroir est dans un état cohérent  $|\alpha\rangle$ , les effets des déplacements  $\delta L$  sont essentiellement un déphasage

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha e^{i\theta}\rangle \quad (7.1)$$

où  $\theta = k\delta L$  avec le nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$  caractérisant la lumière de longueur d'onde  $\lambda$ . L'évolution de l'état cohérent est alors assimilable à une rotation dans l'espace des phases décrite par l'opérateur  $\hat{R}(\theta)$ , comme illustré sur la figure 7.1. De plus, les déplacements  $\delta L$  sont en général très petits, y compris devant la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière utilisée. Le déphasage  $\theta$  est alors suffisamment faible pour que l'évolution de l'état cohérent puisse également être décrite par un déplacement dans l'espace des phases. Ce déplacement se fait orthogonalement à l'amplitude  $\alpha$  de l'état cohérent  $|\alpha\rangle$ . Il est décrit par l'opérateur de déplacement  $\hat{D}(\epsilon)$  avec une amplitude complexe  $\epsilon \simeq i(\alpha/|\alpha|)|\epsilon|$ .

L'estimation d'un déplacement spatial  $\delta L$  se ramène donc à l'estimation d'un déplacement  $|\epsilon|$  de l'état quantique de la lumière dans l'espace des phases  $(x, p)$ . Nous allons maintenant montrer que l'estimation d'un tel déplacement ne peut pas dépasser certaines limites imposées par la structure dans l'espace des phases des états quantiques et des mesures utilisés dans le protocole. Ce genre d'argument a été initialement formulé par Z. H. Zurek [109] pour apprécier le comportement de certains états vis-à-vis de la décohérence. Il a ensuite été étendu à la métrologie quantique [111], sans toutefois considérer les mesures nécessaires à ces estimations. C'est l'un des objectifs de ce chapitre.

## B Limites Quantiques

### B.1 Limite Quantique Standard (LQS)

Lors de la définition des états cohérents au premier chapitre, nous avons évoqué cette limite fixée par les fluctuations quantiques du vide qui affectent l'amplitude et la phase du champ classique. En effet, en optique quantique, les états les plus simples à préparer sont justement les états cohérents, qui peuvent notamment être produits par un laser très au-dessus de son seuil. Il est alors naturel de s'intéresser aux limitations imposées par ces états dans l'estimation d'un déplacement dans l'espace des phases.

A l'aide de la figure 7.1, nous pouvons facilement visualiser la limite de déplacement  $|\epsilon|_{\text{LS}}$  en-dessous de laquelle l'estimation perd son sens. En effet, une telle limite doit minimiser le recouvrement entre les états  $|\alpha\rangle$  et  $|\alpha e^{i\theta}\rangle$  afin de les rendre suffisamment distinguables. Cette limite correspond simplement à la surface occupée par l'état cohérent dans l'espace des phases, qui est directement liée à la variance du vide, soit

$$|\epsilon|_{\text{LS}} \simeq \frac{1}{2}. \quad (7.2)$$

A l'aide d'un simple argument géométrique dans le plan de Fresnel, nous obtenons également la limite sur l'angle de rotation  $\theta$  qui rend les états cohérents discernables

$$\theta_{\text{LS}} \simeq \frac{1}{2\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}}, \quad (7.3)$$

où  $\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$  est le nombre moyen de photons dans l'état cohérent  $|\alpha\rangle$ . Cette dépendance avec le nombre moyen de photons caractérise ce que l'on appelle *la limite quantique standard (LQS)*.

## B.2 Limite de Heisenberg (LH)

Nous venons de déterminer la limite quantique standard (LQS) en utilisant une classe très particulière d'états gaussiens : les états cohérents. Or, plus généralement, les états gaussiens purs ont la particularité de minimiser l'inégalité de Heisenberg sur les quadratures  $\hat{x}_\phi$  et  $\hat{p}_\phi$ , ce qui se traduit en termes de variances par

$$\Delta x_\phi \Delta p_\phi = 1/2. \quad (7.4)$$

Les états comprimés vérifient une telle égalité avec une asymétrie au niveau de leurs variances

$$\Delta x_\phi^2 = \frac{1}{2s}, \Delta p_\phi^2 = \frac{s}{2} \quad (7.5)$$

où  $s = e^{-2r}$  est le facteur de compression selon  $p_\phi$ .

Ainsi, si l'on considère un état de vide comprimé selon  $p_\phi$ , le déplacement minimal qui rend un tel état distinguable devient

$$|\epsilon| \simeq \sqrt{s} |\epsilon|_{\text{LS}} \leq |\epsilon|_{\text{LS}}. \quad (7.6)$$

Pour de très fortes compressions, cette limite devient bien inférieure à celle imposée par la LQS. Nous pouvons même la relier au nombre moyen de photons dans l'état comprimé (1.56) qui est donné par

$$\langle \hat{n} \rangle_{sq} = \sinh^2(r) \lesssim e^{2r}/4. \quad (7.7)$$

Nous arrivons finalement à la *limite de Heisenberg* pour le déplacement

$$|\epsilon|_{\text{LH}} \propto \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}}. \quad (7.8)$$

Cette dépendance avec le nombre moyen de photons caractérise la limite de Heisenberg pour les déplacements. C'est l'un des enjeux de la métrologie quantique. Elle permet de profiter du nombre moyen de photons de la ressource pour battre la limite quantique standard. Enfin, la limite de Heisenberg pour une rotation d'angle  $\theta$  dans l'espace des phases correspond à une dépendance avec le nombre moyen de photons telle que

$$\theta_{\text{LH}} \propto \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle}. \quad (7.9)$$

Notons que cette limite n'est pas atteinte avec des états comprimés. Dans des dispositifs d'interférométrie avec deux chemins A et B, elle est atteinte en utilisant par exemple des états intriqués non-gaussiens dits "NOON" [112] de la forme

$$|\text{NOON}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|n, 0\rangle_{A,B} + |0, n\rangle_{A,B}]. \quad (7.10)$$

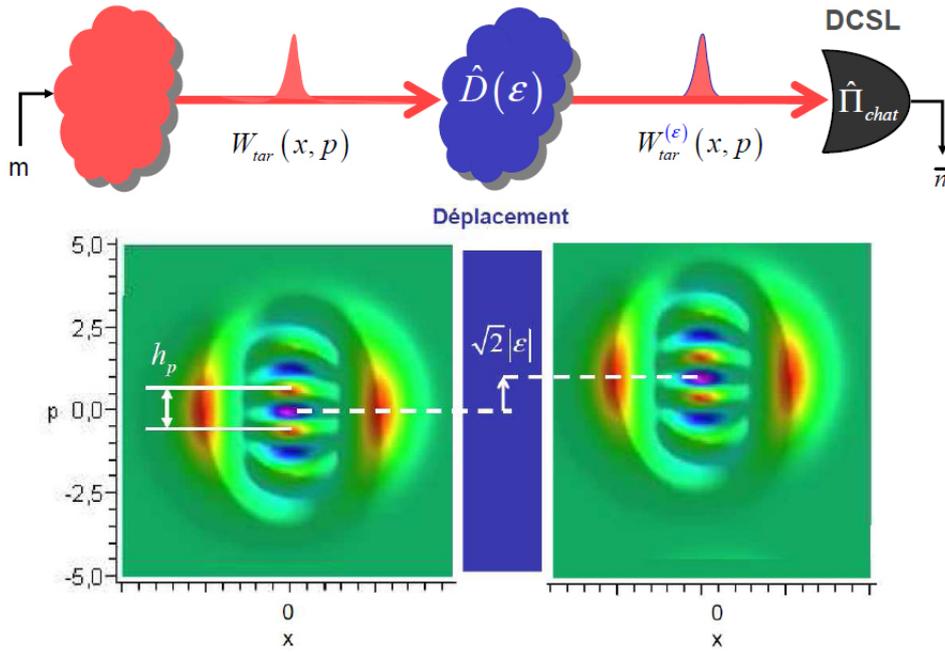
## C Un protocole de métrologie

Nous décrivons maintenant un protocole de métrologie utilisant les états "chats de Schrödinger" de la lumière et le détecteur de ces états que nous avons décrit dans le chapitre précédent. Nous allons montrer comment les propriétés quantiques des mesures réalisées par ce dernier permettent de réaliser des estimations de petits déplacements à la limite de Heisenberg. Bien que des protocoles basés sur des états "chat de Schrödinger" aient été étudiés par le passé [110, 111], aucune proposition concernant la détection de ces états "chat de Schrödinger" n'a été proposée et étudiée à ce jour [99].

### C.1 Description du protocole

Nous allons exploiter le caractère très fortement non-classique des états "chat de Schrödinger" qui caractérisent les mesures du détecteur décrit au chapitre précédent. Dans l'espace des phases, cette non-classicalité se manifeste par des franges d'interférence quantique qui sont responsables des négativités de la fonction de Wigner de ces états, mais aussi de leur très grande sensibilité aux déplacements, comme nous allons le voir.

Le protocole consiste à préparer le faisceau sonde dans des états suffisamment fidèles aux états cibles du détecteur de "chat de Schrödinger", comme illustré sur la figure 7.2. Les états cibles sont "perturbés" par un déplacement  $\epsilon$ , avant d'être soumis à des mesures réalisées par le détecteur de "chat de Schrödinger". Les effets d'un tel déplacement sur les états sont également représentés dans l'espace des phases.



**Figure 7.2:** Principe du protocole d'estimation d'un déplacement  $\epsilon$  dans l'espace des phases. – L'effet d'un déplacement  $\hat{D}(\epsilon)$  d'amplitude  $\epsilon = i|\epsilon|$  sur l'état cible (de taille  $n = 5$  photons et comprimé d'un facteur  $\xi = 0.7$  selon  $x$ ) est représenté dans l'espace des phases  $(x, p)$ . Les franges d'interférence quantique jouent alors le rôle de "graduations", dont la résolution est la période  $h_p = \pi/\sqrt{2\xi n}$  selon la quadrature  $p$  qui est naturellement à la limite de Heisenberg,  $h_p \propto 1/\sqrt{\langle \hat{n} \rangle_{tar}}$ .

Les franges d'interférence dans la fonction de Wigner de ces états jouent le rôle d'une "règle" dans l'espace des phases  $(x, p)$ . Cette règle est orientée selon la quadrature  $p$  avec des graduations espacées d'une période  $h_p = \pi/\sqrt{2\xi n}$ . Cette échelle  $h_p$  est naturellement à la limite de Heisenberg, puisque sa dépendance avec le nombre moyen de photons dans l'état cible est

$$h_p = \frac{\pi}{\sqrt{2\xi n}} \propto \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{n} \rangle_{tar}}}. \quad (7.11)$$

Ainsi, les déplacements  $|\epsilon| \sim h_p$  deviennent discernables, avec une résolution d'autant plus fine que le nombre de photons  $n$  est grand.

## C.2 Principe de l'estimation

Nous décrivons maintenant le principe de l'estimation du déplacement en introduisant d'abord la fonction de recouvrement entre états quantiques, puis en approchant son évolution avec le déplacement pour des états "chat de Schrödinger". Enfin, nous établirons le lien entre cette fonction de recouvrement et le comportement des réponses du DCSL, introduit au chapitre VI.

### Fonction de recouvrement

Pour estimer un déplacement  $|\epsilon|$ , nous devons accéder au recouvrement entre l'état cible du détecteur et l'état cible affecté par le déplacement. Cette fonction de recouvrement s'écrit simplement avec leurs représentations de Wigner comme

$$\mathcal{S}(\epsilon) = 2\pi \int dx dp \mathcal{W}_{tar}(x, p) \mathcal{W}_{tar}^{(\epsilon)}(x, p). \quad (7.12)$$

où  $\mathcal{W}_{tar}^{(\epsilon)}(x, p) = \mathcal{W}_{tar}(x, p + \sqrt{2}|\epsilon|)$  désigne la fonction de Wigner de l'état cible après un déplacement d'une amplitude  $\epsilon = i|\epsilon|$ . Nous relirons cette fonction de recouvrement au comportement du détecteur de "chat de Schrödinger" de la lumière dans la suite de ce chapitre.

### Approche qualitative

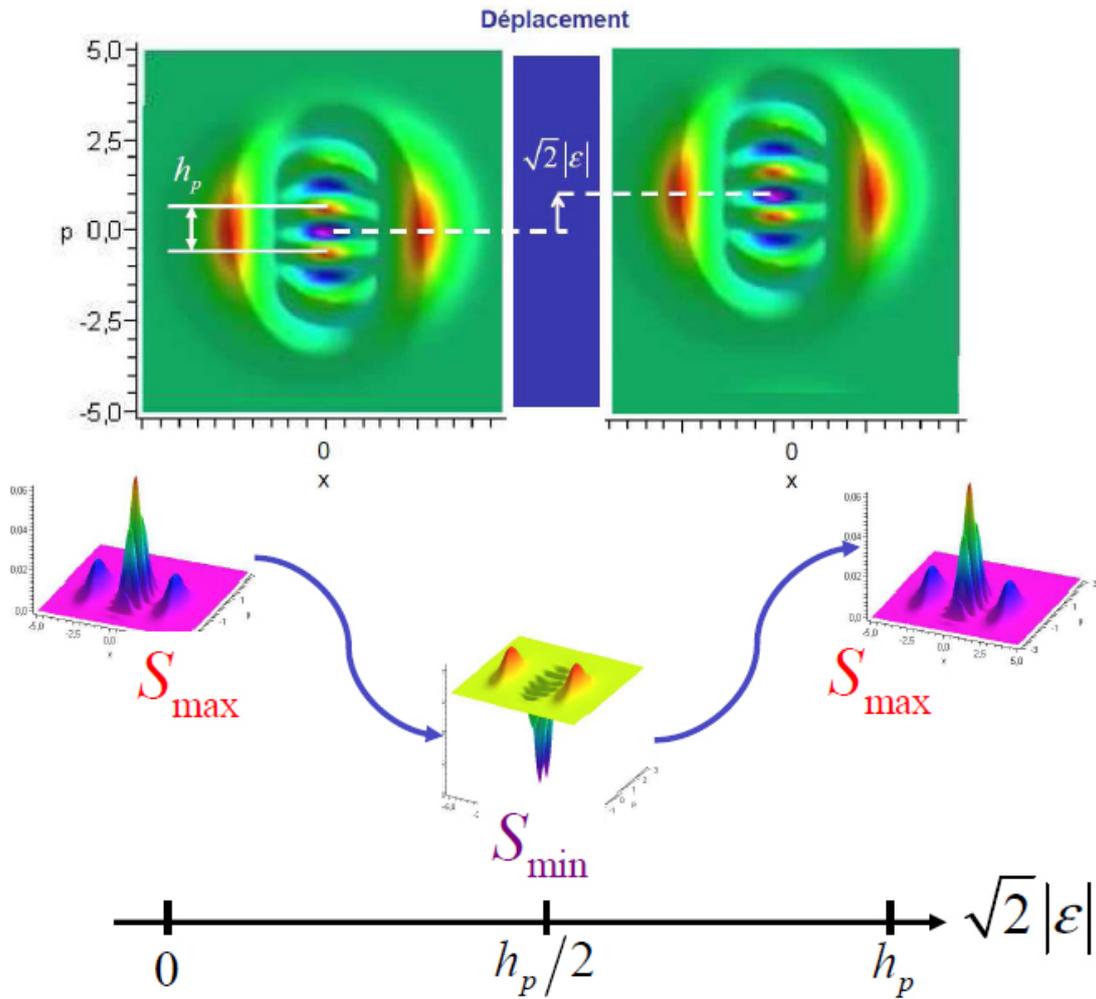
Dans un premier temps, il est intéressant d'approcher de manière qualitative le comportement de cette fonction de recouvrement avec le déplacement  $|\epsilon|$ . Nous avons représenté sur la figure 7.3 l'allure du produit des fonctions de Wigner de l'état cible et de l'état cible déplacé à différentes amplitudes  $|\epsilon|$ .

Lorsque le déplacement le long de  $p$  est égal à une demi-période  $h_p/2$ , le produit des fonctions de Wigner présente une série de franges strictement négatives. En effet, les franges négatives se recouvrent avec les franges positives. L'intégrale sur l'espace des phases (7.12) donne alors un recouvrement minimal  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{min}$ . Par contre, lorsque le déplacement selon  $p$  est égal à une période  $h_p$ , le produit des fonctions de Wigner est positif, puisque les franges d'interférences de même signe se recouvrent. L'intégrale sur tout l'espace des phases  $(x, p)$  donne alors un recouvrement maximal  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{max}$ .

A partir de cette simple analyse qualitative, nous décelons le comportement le plus intéressant de cette fonction de recouvrement : une oscillation sur une période  $h_p/\sqrt{2}$ . Le nombre de photons  $n$  sera donc choisi afin que le déplacement  $|\epsilon|$  à estimer reste inférieur au déplacement maximal

$$|\epsilon_{max}| = \frac{\pi}{4\sqrt{\xi n}}, \quad (7.13)$$

correspondant à un recouvrement minimal  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{min}$ , comme illustré sur la figure 7.3. Une telle condition est indispensable afin d'avoir une relation univoque entre le recouvrement et le déplacement, comme nous allons le montrer dans la suite.



**Figure 7.3:** Évolution du recouvrement entre les états cibles non-perturbé et perturbé par différents déplacements  $\epsilon$ . – Le recouvrement entre les deux états est donné par l'intégrale du produits de leurs fonctions de Wigner. L'allure de ce produit est représentée pour trois valeurs particulières du déplacements  $\epsilon$ .

### Comportement des réponses du DCSL

La fonction de recouvrement (7.12) est directement accessible à partir du comportement des réponses du détecteur de "chats de Schrödinger". Nous allons d'abord traiter le cas de mesures fidèles, au sens défini au chapitre IV. Nous généraliserons ensuite le résultat aux cas des mesures quasi-fidèles, dont les fidélités  $\mathcal{F}_{\bar{n}}$  sont supérieures à la limite classique de 1/2, assurant les cohérences quantiques des états rétrodictés du détecteur.

**Mesures fidèles.** Si nous préparons des états cibles suffisamment fidèles aux états rétrodictés décrivant la mesure associée au résultat  $\bar{n}$ , alors la probabilité prédictive d'obtenir ce résultat  $\bar{n}$  est simplement liée à la fonction de recouvrement (7.12) par

$$p_{\bar{n}}(\epsilon) = \Pr(\bar{n}|\psi_{tar}) = \text{Tr}\{\hat{\Pi}_{\text{chat}}(\bar{n})\} \text{Tr}[\hat{\rho}_{tar}(\epsilon) \hat{\rho}_{\bar{n}}^{retr}] = \frac{\eta_{\bar{n}}}{\pi_{\bar{n}}} \mathcal{S}(\epsilon). \quad (7.14)$$

où  $\eta_{\bar{n}}$  et  $\pi_{\bar{n}}$  désignent respectivement l'efficacité et la projectivité de la mesure donnant le résultat  $\bar{n} = (n, 0)$ . Nous avons effectivement utilisé l'expression de la trace d'un élément POVM (4.22) établie au chapitre IV.

**Mesures quasi-fidèles.** L'analyse qualitative a le mérite de révéler la robustesse de ces oscillations qui sont assurées tant que l'état cible et l'état rétrodicté présentent des franges d'interférences avec quasiment la même période. La fonction de recouvrement (7.12) oscillera alors entre deux valeurs  $\mathcal{S}_{min}$  et  $\mathcal{S}_{max}$  avec une période  $h_p \propto 1/\sqrt{\langle \hat{n} \rangle_{tar}}$ .

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que cette non-classicalité de la mesure est assurée lorsque sa fidélité est supérieure à la limite classique de 1/2. Nous le vérifions pour le cas réaliste décrit à la fin du chapitre précédent, comme l'illustre bien la figure 6.7. Le recouvrement entre l'état rétrodicté et l'état cible ne pourra donc pas dépasser cette fidélité. Plus précisément, si l'influence du bruit est négligeable, le contraste des oscillations est pratiquement préservé. La probabilité prédictive d'avoir la réponse  $\bar{n}$  est alors simplement atténuée par la fidélité de la mesure :

$$p_{\bar{n}}(\epsilon) \simeq \frac{\eta_{\bar{n}}}{\pi_{\bar{n}}} \mathcal{F}_{\bar{n}} \mathcal{S}(\epsilon). \quad (7.15)$$

Cette expression n'est valable que pour des comptages de photons de très haute efficacité et un état comprimé suffisamment pur. Notre proposition a été effectivement formulée dans ce cadre, comme le résume la figure 6.6. Nous reviendrons encore sur ce cas réaliste dans la suite de ce chapitre.

Enfin, notons que les résultats de cette section peuvent se généraliser à tout état cible. De plus, nous pouvons effectivement imaginer la préparation déterministe de trains d'impulsions lumineuses dans un état cible quelconque, puis utiliser certaines de ces impulsions pour sonder le déplacement  $\epsilon$ , tandis que les autres impulsions serviront à conditionner les mesures réalisées par un détecteur EPR, comme nous l'avons expliqué à l'interlude IV. Les expressions des probabilités prédictives (7.14) et (7.15) demeurent alors valables, dans les mêmes conditions.

### C.3 Estimateur du déplacement

Nous allons maintenant expliciter l'expression de la fonction de recouvrement (7.12) afin d'obtenir un estimateur du déplacement  $|\epsilon|$  de l'état cible. Dans une expérience réelle, une telle fonction devra plutôt être calibrée par des déplacements maîtrisés, comme c'est souvent le cas en métrologie.

A l'aide de la figure 7.3, le calcul de cette fonction de recouvrement se retrouve facilement. En effet, nous voyons que les recouvrements entre les états comprimés, centrés en  $x = \pm\sqrt{2\xi n}$ , et le terme d'interférence quantique sont négligeables lorsque le nombre de photons  $n$  est suffisamment grand. De plus, comme les déplacements  $|\epsilon|$  sont très faibles pour justifier l'usage d'un tel protocole, la fonction de recouvrement se réduit à la somme du recouvrement entre les états comprimés d'une part, et des termes d'interférence d'autre part, soit

$$\mathcal{S}(\epsilon) \simeq \frac{1}{4} \left[ 2 + \int dx dp \mathcal{I}_{tar}(x, p) \mathcal{I}_{tar}^{(\epsilon)}(x, p) \right], \quad (7.16)$$

où  $\mathcal{I}_{tar}^{(\epsilon)}(x, p) = \mathcal{I}_{tar}(x, p + \sqrt{2}|\epsilon|)$  désigne le terme d'interférence de l'état cible, déplacé d'une amplitude  $\sqrt{2}|\epsilon|$  selon  $p$ . Le terme non déplacé est donnée par

$$\mathcal{I}_{tar}(x, p) = \mathcal{I}_{tar}^{(0)}(x, p) = (-1)^n \frac{2}{\pi} e^{-\frac{x^2}{\xi} - \xi p^2} \cos\left(2\sqrt{2n\xi}p\right), \quad (7.17)$$

et nous vérifions que son intégrale sur tout l'espace des phases  $(x, p)$  est rigoureusement nulle.

Ensuite, en utilisant l'identité trigonométrique

$$\cos(a) \cos(a + \epsilon) = [\cos(\epsilon) + \cos(2a + \epsilon)] / 2,$$

nous arrivons sans grande difficulté à l'expression de la fonction de recouvrement

$$\mathcal{S}(\epsilon) \simeq \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(4\sqrt{\xi n}|\epsilon|\right) \right]. \quad (7.18)$$

Le recouvrement oscille donc bien avec une période  $h_p/\sqrt{2}$ , comme nous l'avons déjà trouvé par l'analyse qualitative reproduite sur la figure 7.3. Cette échelle est naturellement à la limite de Heisenberg, puisqu'elle est liée au nombre moyen de photons dans l'état cible par

$$h_p = \frac{\pi}{\sqrt{2n\xi}} \propto \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}}. \quad (7.19)$$

Finalement, nous obtenons *un estimateur du déplacement*  $|\epsilon|$  à partir de la probabilité prédictive  $p_{\bar{n}}$  d'obtenir le résultat " $\bar{n}$ "

$$|\bar{\epsilon}| = \frac{1}{4\sqrt{\xi n}} \arccos \left[ 2 \frac{p_{\bar{n}}}{\kappa_{\bar{n}}} - 1 \right], \quad (7.20)$$

où  $\kappa_{\bar{n}} = \eta_{\bar{n}} \mathcal{F}_{\bar{n}} / \pi_{\bar{n}}$  est la détectivité de l'état cible que nous avons introduit en (4.28) au chapitre IV. Si nous évaluons cette détectivité pour le détecteur étudié au chapitre précédent, dont les propriétés quantiques sont résumées sur la figure 6.6-(b), nous obtenons une détectivité

$$\kappa_{\bar{n}} = \frac{\eta_{\bar{n}} \mathcal{F}_{\bar{n}}}{\pi_{\bar{n}}} \approx 5\%. \quad (7.21)$$

L'estimation du déplacement nécessite donc une connaissance précise de toutes les propriétés quantiques de la mesure que nous avons introduites au chapitre IV. La faible valeur de la détectivité (7.21) souligne par ailleurs le comportement subtil de ce genre de mesures non-classiques, qui sont des mesures projectives mais non-idéales. Il s'agit d'une illustration supplémentaire de la pertinence de l'approche rétrodictive dans l'étude des mesures quantiques et des protocoles faisant intervenir des mesures.

Nous allons maintenant étudier plus précisément l'influence de ces propriétés sur les performances de ce protocole qui est symétrique au niveau des préparations et des mesures, puisqu'il nécessite la préparation des états cibles du détecteur. Nous aborderons à la fin du chapitre le formalisme permettant la généralisation à des protocoles non symétriques, où l'on pourrait préparer d'autres états que les états cibles du détecteur.

#### C.4 Performances

L'estimation du déplacement repose sur la détermination aussi précise que possible de la probabilité prédictive  $p_{\bar{n}}(\epsilon)$ . Cette détermination nécessite de répéter un grand nombre de fois les préparations et les mesures décrites dans ce protocole. Nous allons évaluer les performances du protocole en déterminant l'incertitude qui entoure l'estimateur du déplacement (7.20). Nous dégagerons ainsi les conditions sous lesquelles cet estimateur fournit véritablement le déplacement  $|\epsilon|$  à la limite de Heisenberg.

En effet, la détermination de la probabilité prédictive  $p_{\bar{n}}$  consiste à préparer  $M$  fois l'état cible et de dénombrer le nombre de fois  $m$  que les réponses  $\bar{n}$  se produisent. Une estimation de cette probabilité est alors donnée par le rapport  $m/M$ . Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir  $m$  fois la réponse  $\bar{n}$  est donnée par la loi binomiale

$$\mathcal{P}_M(m) = \Pr(m, \bar{n} | M, \psi_{tar}) = \binom{M}{m} p_{\bar{n}}^m (1 - p_{\bar{n}})^{M-m}. \quad (7.22)$$

où  $p_{\bar{n}}$  désigne la probabilité prédictive (7.15) d'avoir la réponse  $\bar{n}$ . L'estimateur du déplacement (7.20) devient donc une fonction du rapport  $m/M$

$$|\epsilon| = \frac{1}{4\sqrt{\xi n}} \arccos\left(\frac{2}{\kappa_{\bar{n}}} \frac{m}{M} - 1\right). \quad (7.23)$$

Ces estimations du déplacement sont également distribuées suivant la loi binomiale (7.22), puisque chaque rapport  $m/M$  donne une seule et unique estimation du déplacement (7.23). Cela est vrai tant que le déplacement à estimer  $|\epsilon|$  reste inférieur au déplacement maximal  $|\epsilon|_{\max} \simeq \pi/\sqrt{16n\xi}$ , comme nous l'avons expliqué précédemment.

Lorsque le nombre de préparations  $M$  devient suffisamment grand, le rapport  $m/M$  est assimilable à une variable continue, si bien que la distribution binomiale peut avantageusement être remplacée par une distribution normale de la forme générale

$$\mathcal{P}_M(m) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{m/M}^2}} \exp\left[-\frac{(m/M - p_{\bar{n}})^2}{2\sigma_{m/M}^2}\right], \quad (7.24)$$

où la variance  $\sigma_{m/M}^2 = p_{\bar{n}}(1 - p_{\bar{n}})/M$ . Ainsi, l'estimation  $m/M$  de la probabilité prédictive  $p_{\bar{n}}$  devient de plus en plus juste, à mesure que le nombre de préparations  $M$  augmente. Il s'agit simplement d'une manifestation de la "loi des grands nombres".

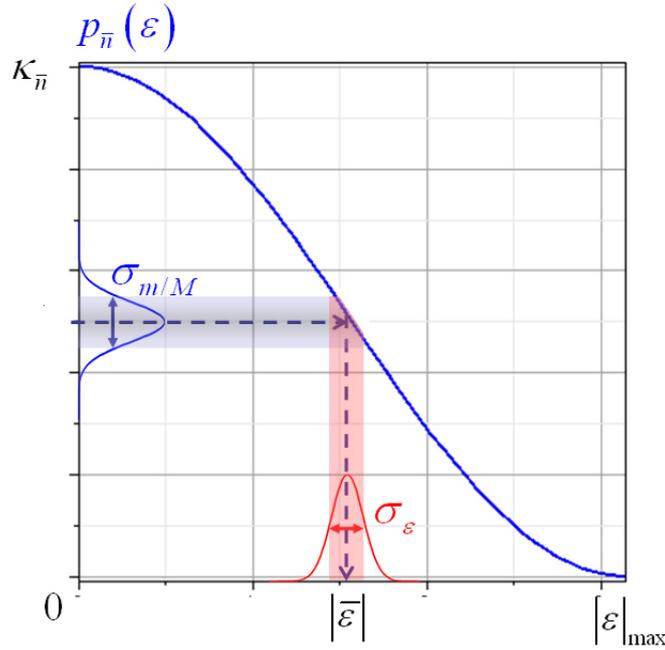
Cependant, certaines précautions sont nécessaires pour l'estimation du déplacement. En effet, si les estimations de la probabilité  $m/M$  sont distribuées selon une gaussienne, il en est de même pour les estimations du déplacement (7.23). La distribution de ces estimations prendra également la forme d'une distribution gaussienne

$$\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{\epsilon}}^2}} \exp\left[-\frac{|\epsilon - \bar{\epsilon}|^2}{2\sigma_{\bar{\epsilon}}^2}\right], \quad (7.25)$$

où la véritable valeur du déplacement est donnée par

$$|\bar{\epsilon}| = \frac{1}{4\sqrt{\xi n}} \arccos\left(\frac{2}{\kappa_{\bar{n}}} p_{\bar{n}} - 1\right). \quad (7.26)$$

Pour déterminer la variance de cette distribution, nous allons mettre à profit son caractère gaussien, comme illustré sur la figure 7.4.



**Figure 7.4:** Détermination de l'incertitude entourant l'estimation du déplacement  $\epsilon$ . – La courbe bleue représente l'expression de l'estimateur (7.20). La probabilité prédictive  $p_{\bar{n}}(\epsilon)$  est entachée d'une incertitude  $\sigma_{m/M}$  que nous pouvons évaluer tant que le déplacement à estimer  $|\bar{\epsilon}|$  est inférieur ou proche de  $|\epsilon_{\max}|$ . La sensibilité maximale est obtenue pour un déplacement  $|\epsilon| \simeq |\epsilon_{\max}|/2$ .

Pour cela, nous considérons deux estimations  $|\epsilon_{\pm}|$  du déplacement correspondant respectivement aux deux rapports  $m_{\pm}/M = p_{\bar{n}} \pm \sigma_{m/M}$ . D'autre part, rappelons que le rapport entre les valeurs en ces points et la valeur au centre est une quantité invariante pour une distribution gaussienne, puisque l'on vérifie facilement que

$$\frac{\mathcal{P}_M(m_{\pm})}{\mathcal{P}_M(Mp_{\bar{n}})} = \frac{\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}(\epsilon_{\pm})}{\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}(\bar{\epsilon})} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \quad (7.27)$$

Ainsi, la déviation standard sur l'estimation du déplacement est simplement donnée par

$$\sigma_{\epsilon} = \frac{1}{2} [|\epsilon_{-}| - |\epsilon_{+}|], \quad (7.28)$$

où un développement limité au premier ordre en  $\sigma_{m/M}$  de (7.26) donne

$$|\epsilon_{\pm}| \simeq |\bar{\epsilon}| \mp \frac{1}{2\kappa_{\bar{n}}\sqrt{\xi n}} \frac{\sigma_{m/M}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2p_{\bar{n}}}{\kappa_{\bar{n}}} - 1\right)^2}}. \quad (7.29)$$

L'incertitude sur l'estimation du déplacement admet finalement pour expression générale

$$\sigma_{\epsilon}(\epsilon, \kappa_n) \simeq \frac{1}{4\sqrt{\kappa_n(\epsilon) M \xi n}}, \quad (7.30)$$

où  $\kappa_n(\epsilon)$  est une détectivité effective qui dépend du déplacement à estimer  $\epsilon$  et de la détectivité intrinsèque du détecteur  $\kappa_n$

$$\kappa_n(\epsilon) = \frac{\kappa_n \sin^2(2\sqrt{\xi n}|\epsilon|)}{1 - \kappa_n \cos^2(2\sqrt{\xi n}|\epsilon|)} \leq \kappa_n(\epsilon_{max}/2) = \kappa_n. \quad (7.31)$$

Nous reconnaissons alors le nombre moyen de photons  $\langle \hat{n} \rangle = \kappa_{\bar{n}}(\epsilon) M \xi n$  *effectivement* utilisés par le protocole pour estimer le déplacement  $\epsilon$ . Il s'agit du nombre moyen de photons ayant conduit aux résultats  $\bar{n} = (n, 0)$ . Pour améliorer la qualité de l'estimation, nous devons en fait travailler avec un nombre de préparations *effectivement* détectées  $M_n = \kappa_n(\epsilon) M$  suffisamment grand, ce qui améliore la précision relative sur l'estimateur du déplacement (7.23).

Ensuite, notons que l'incertitude sur l'estimation n'est minimale que pour un déplacement  $\epsilon \simeq \epsilon_{max}/2$  (7.13). De plus, si la mesure était caractérisée par une détectivité parfaite  $\kappa_n = 1$ , l'incertitude (7.30) ne dépendrait plus du déplacement à estimer  $\epsilon$ . Elle deviendrait même *optimale* dans un sens que nous préciserons dans la suite.

Enfin, la faible détectivité d'un tel détecteur non-classique est malheureusement un état de fait. Elle reflète le taux de succès du protocole de préparation conditionnelle, dont le détecteur est la version rétrodictive. Nous verrons comment contourner cette faiblesse dans la suite de ce chapitre en proposant une estimation *ultimement optimale* du paramètre  $\epsilon$  totalement fondée sur l'approche rétrodictive et des choix de préparation.

## C.5 Discussion

Pour apprécier les avantages du protocole que nous venons d'étudier, nous allons comparer ses performances avec celles d'un protocole utilisant uniquement des états comprimés en guise d'états cibles. En effet, nous avons vu au début de ce chapitre que de tels états permettent également d'atteindre la limite de Heisenberg dans l'estimation d'un déplacement. Pour comparer les deux ressources, nous étudions l'évolution du taux de compression  $s$  nécessaire pour atteindre la même sensibilité que le protocole utilisant des états "chat de Schrödinger". D'après la section précédente, ces états permettent d'estimer des déplacements

$$|\epsilon| \simeq \frac{|\epsilon_{max}|}{2} = \frac{\pi}{8\sqrt{\xi n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\xi n}}. \quad (7.32)$$

Pour un état comprimé d'un facteur  $s$  donné, nous rappelons que le nombre moyen de photons (1.56) est donné par

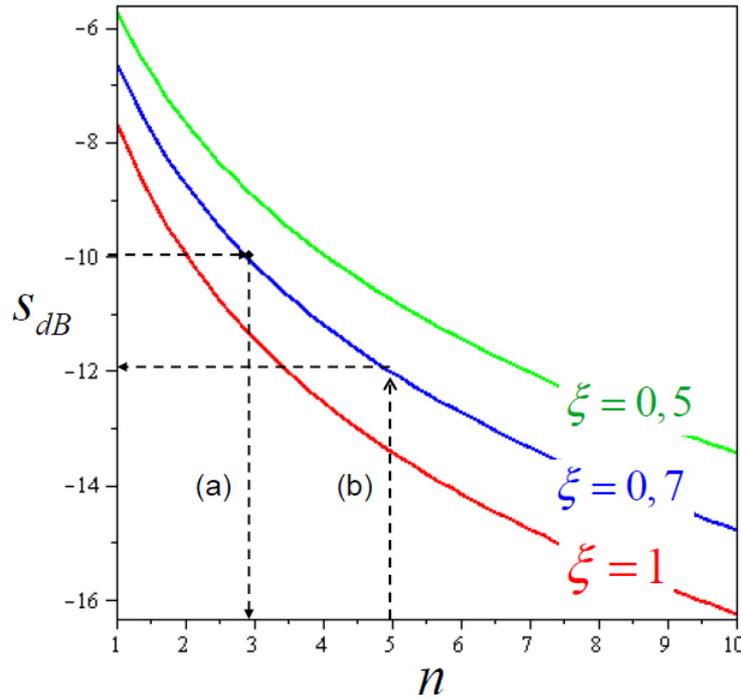
$$\langle \hat{n} \rangle_{sq} = \sinh^2(r), \quad (7.33)$$

où le paramètre  $r$  est lié au facteur de compression par  $s = e^{-2r}$ . Pour atteindre les mêmes performances que notre protocole, il faut atteindre un taux de compression  $s$  tel que le

nombre moyen de photon soit comparable à celui d'un état cible du détecteur de "chat de Schrödinger". Nous obtenons ainsi la relation suivante

$$s(n, \xi) = \exp \left[ -2 \sinh^{-1} \left( \sqrt{\xi n} \right) \right]. \quad (7.34)$$

où  $\xi$  désigne la compression de l'état cible qui est le plus fidèle à l'état rétrodicté à partir du résultat  $\bar{n} = (n, 0)$ . L'évolution de ce taux de compression  $s(n, \xi)$ , avec le nombre de photons  $n$  et la compression  $\xi$  de l'état cible, est illustrée sur la figure 7.5.



**Figure 7.5:** Évolution de la compression nécessaire  $s$  pour atteindre les mêmes sensibilités que celles du protocole basé sur la mesure donnant le résultat  $\bar{n} = (n, 0)$ . – (a) Les plus fortes compressions préparées dans le régime continu se situe autour de -10 dB à l'heure actuelle [84]. Cette dernière peut être atteinte dans le régime pulsé avec la préparation et la détection d'un état "chat de Schrödinger" contenant environ 3 photons. (b) Pour des états "chat de Schrödinger" contenant environ 5 photons, il faut une compression dépassant les -12 dB dans le régime pulsé, alors que l'appareil nécessite un état comprimé d'environ -5 dB.

Ce protocole d'estimation *prédictive* devient potentiellement intéressant si on utilise une source continue de vide comprimé. Un tel état doit être comprimé selon la quadrature  $p_\phi$ , avec un taux de compression  $s$  donné par l'expression (7.34). La largeur de cet état selon la quadrature  $p_\phi$  est alors comparable à la période  $h_p$  des franges d'interférences de l'état rétrodicté du DCSL. L'état comprimé joue ainsi le rôle de "curseur", déplacé de  $\sqrt{2}|\epsilon|$  selon la quadrature  $p_\phi$ . La probabilité d'obtenir la réponse appropriée "n" du DCSL présentera donc un comportement oscillatoire, mais avec un très mauvais contraste. En effet, la détectivité  $\kappa_n$  de la mesure est extrêmement faible, puisque un état de vide comprimé n'est pas du tout fidèle à l'état rétrodicté du DCSL. Cependant, le régime continu atteint des fréquences de préparation très élevées, qui peuvent assurer des fréquences de répétition de la réponse "n" suffisantes pour estimer le déplacement. Cet genre d'argument

est souvent mis en avant dans la détection de certains états intriqués, comme les états intriqués "NOON" [112].

Le traitement quantique d'un tel protocole exige une décomposition multimode des états et des mesures sur une base appropriée aux signaux limités en temps et en fréquence [114, 115]. Il s'agit des fonctions d'ondes sphéroïdales allongées. Nous ne ferons pas ce traitement dans cette thèse, mais nous en décrivons brièvement le principe. Les mesures de comptage intervenant dans le DCSL sont effectuées sur une fenêtre temporelle de largeur  $T$ , alors que la préparation des états comprimés se fait par le biais de cavités optiques, qui limitent ces états à un domaine spectral de largeur  $B$ . Le nombre de modes intervenant dans cette décomposition est alors approximativement donné par le produit  $BT$ . Pour réaliser l'estimation, nous devons assurer le caractère monomode des états et des mesures, ce qui revient en fait à travailler avec un produit  $BT \sim 1$  [115]. Cette condition doit scrupuleusement être assurée afin de pouvoir estimer le déplacement.

## D Généralisation

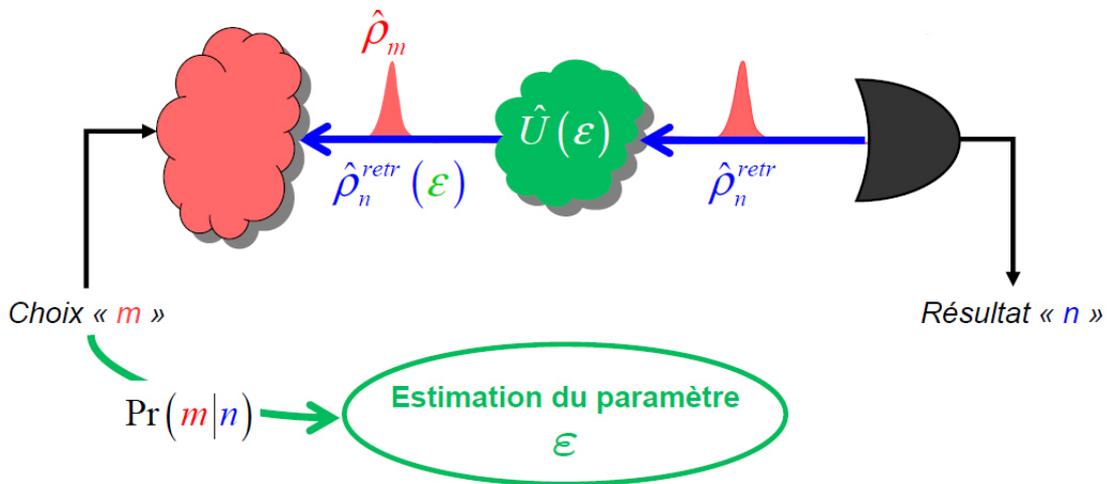
Nous allons maintenant généraliser l'utilisation de détecteurs d'états fortement non-classiques, comme le détecteur d'états "chat de Schrödinger", à des protocoles d'estimation fondés sur l'approche rétrodictive et des choix de préparations.

### D.1 Principe d'une estimation rétrodictive

Les états rétrodictés de détecteurs non-classiques, comme le détecteur de "chat de Schrödinger", peuvent devenir très intéressants dans une version rétrodictive d'un protocole d'estimation. En effet, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, il est toujours intéressant de considérer les versions prédictive et rétrodictive d'un protocole pour distinguer la version qui est la plus judicieuse à réaliser et/ou la plus performante.

Imaginons un protocole d'estimation basé sur la préparation d'états fortement non-classiques, des évolutions unitaires et des mesures, dont les états rétrodictés peuvent être plus simplement préparés. D'après les règles de correspondance résumées sur la figure 6.1, la version rétrodictive du protocole nécessitera la préparation des états rétrodictés à partir des mesures intervenant dans la version prédictive, et des mesures non-classiques dont les états rétrodictés sont fidèles aux préparations intervenant dans l'approche prédictive.

Dans une telle version rétrodictive, l'estimation d'un paramètre  $\epsilon$  sera fondée sur la statistique des choix de préparation "m" au lieu de celle des résultats de mesure habituellement utilisée, comme l'illustre la figure 7.6.



**Figure 7.6:** Protocole d'estimation d'un paramètre  $\epsilon$  fondée sur l'approche rétrodictive. – La statistique des choix de préparation "m" conduisant à un résultat "n" d'un détecteur non-classique permet d'estimer le paramètre  $\epsilon$  associée à l'opération unitaire  $\hat{U}(\epsilon)$ .

Une telle estimation ne semble pas impossible à ce stade, puisque nous avons montré au chapitre V comment estimer des états quantiques à partir de la statistique des choix de préparation conduisant à un certain résultat de mesure. Les tomographies quantiques habituelles utilisent en effet la statistique des résultats de mesures effectuées sur une préparation donnée du système.

## D.2 Information de Fisher

### Définition

D'après la théorie de l'information [49], l'information maximale que nous pouvons extraire sur le paramètre  $\epsilon$  à partir de la statistique des choix de préparation "m" conduisant au résultat "n" est donnée par *l'information de Fisher*, définie ici par :

$$I_F(\epsilon) = \sum_m \frac{1}{\Pr(m|n)} \left( \frac{d\Pr(m|n)}{d\epsilon} \right)^2, \quad (7.35)$$

où  $\Pr(m|n)$  désigne les probabilités rétrodictives d'avoir fait le choix de préparation "m" quand on obtient le résultat "n". Notons que l'information de Fisher dans l'approche prédictive est définie exactement de la même manière, et s'obtient en permutant les choix de préparation "m" et les résultats de mesure "n".

### Interprétation

L'information de Fisher (7.35) rend en fait compte des variations des distributions de probabilités rétrodictives sous l'influence du paramètre  $\epsilon$ . En effet, la distance entre deux distributions de probabilités  $\Pr(m|n)$  et  $\Pr(m|n) + \delta\Pr(m|n)$ , correspondant respectivement aux paramètres  $\epsilon$  et  $\epsilon + \delta\epsilon$ , peut être mesurée par la métrique de Wootters [116] qui prend ici la forme suivante

$$\delta s^2 = \sum_m \Pr(m|n) \left( \frac{\delta\Pr(m|n)}{\Pr(m|n)} \right)^2. \quad (7.36)$$

Il s'agit simplement de la moyenne des variations relatives des probabilités sur tous les choix de préparation "m". Lorsque l'on rapporte cette distance à la variation du paramètre  $\delta\epsilon$ , nous retrouvons l'information de Fisher (7.35)

$$\left( \frac{\delta s}{\delta\epsilon} \right)^2 = I_F(\epsilon). \quad (7.37)$$

L'information de Fisher s'interprète donc comme un taux global de variation des probabilités rétrodictives sous l'influence d'une petite variation  $\delta\epsilon$  du paramètre  $\epsilon$ , que nous cherchons à estimer avec la meilleure sensibilité. La condition requise pour une telle sensibilité est donc de maximiser l'information de Fisher (7.35).

Cette optimisation est régulièrement faite pour des protocoles prédictifs, basés sur une préparation donnée et des mesures particulières. Elle consiste alors à rechercher l'estimateur du paramètre  $\epsilon$  qui rend l'information de Fisher maximale. Ainsi, l'estimation du paramètre  $\epsilon$  ne pourra jamais se faire avec une variance inférieure à ce que l'on appelle *la limite de Cramér-Rao* [49]

$$(\sigma_\epsilon)_{CR} = \frac{1}{\sqrt{NI_F(\epsilon)}}, \quad (7.38)$$

où  $N$  est le nombre de répétitions de l'estimation. Ainsi, le comportement de l'information de Fisher avec le nombre de photons déterminera celui de la limite de Cramér-Rao [117]. Un protocole atteignant la limite de Cramér-Rao réalisera *une estimation optimale* au sens de cette limite.

### Illustration

Nous allons déterminer la limite de Cramér-Rao du protocole de métrologie que nous avons décrit à la section précédente. Ce protocole est prédictif et l'information de Fisher est ici associée aux probabilités prédictives  $p_{\bar{n}}(\epsilon)$  données en (7.15).

L'estimateur de ce protocole considère le DCSL comme un détecteur caractérisé uniquement par des réponses binaires "oui" et "non". La réponse "oui" correspond au résultat " $\bar{n}$ " qui se produit avec la probabilité  $p_{\bar{n}}(\epsilon)$ , alors que la réponse "non" correspond à toutes les autres réponses de l'appareil. Cette réponse "non" se produit alors avec une probabilité  $1 - p_{\bar{n}}(\epsilon)$ . L'information de Fisher prend donc la forme suivante

$$I_F(\epsilon) = \frac{1}{p_{\bar{n}}(\epsilon)} \left( \frac{dp_{\bar{n}}(\epsilon)}{d\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{1 - p_{\bar{n}}(\epsilon)} \left( \frac{d\{1 - p_{\bar{n}}(\epsilon)\}}{d\epsilon} \right)^2, \quad (7.39)$$

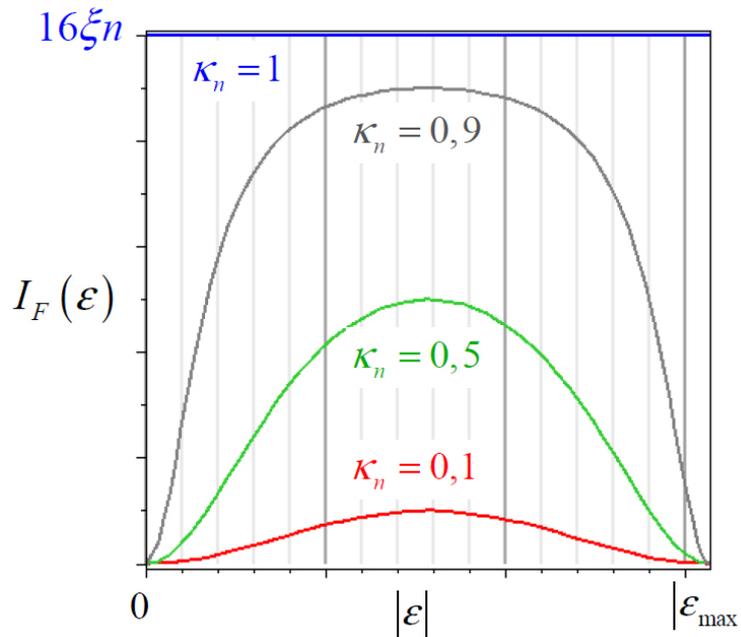
soit

$$I_F(\epsilon) = \frac{1}{p_{\bar{n}}(\epsilon) [1 - p_{\bar{n}}(\epsilon)]} \left( \frac{dp_{\bar{n}}(\epsilon)}{d\epsilon} \right)^2. \quad (7.40)$$

A l'aide de la fonction de recouvrement (7.20), nous arrivons à l'expression suivante

$$I_F(\epsilon) = \frac{16\kappa_n \xi n \sin^2(2\sqrt{\xi n}|\epsilon|)}{1 - \kappa_n \cos^2(2\sqrt{\xi n}|\epsilon|)}, \quad (7.41)$$

qui est maximale pour un déplacement  $\epsilon \simeq \epsilon_{\max}/2$ , comme l'illustre la figure 7.7.



**Figure 7.7:** Évolution de l'information de Fisher  $I_F(\epsilon)$  avec le déplacement  $|\epsilon|$  et avec la détectivité  $\kappa_n$  du DCSL. – Pour des détectivités  $\kappa_n < 1$ , l'information de Fisher dépend du déplacement à estimer  $\epsilon$  et prend sa valeur maximale  $16\kappa_n \xi n$  en  $\epsilon = \epsilon_{\max}/2$ . Pour une détectivité parfaite  $\kappa_n = 1$ , l'information de Fisher ne dépend plus du déplacement  $\epsilon$  et atteint sa valeur optimale  $16\xi n$ .

La limite de Cramér-Rao (7.38) associée à cette information admet donc pour expression

$$(\sigma_\epsilon)_{CR} = \frac{1}{4\sqrt{\kappa_n(\epsilon)} M\xi n}, \quad (7.42)$$

avec une détectivité effective  $\kappa_n(\epsilon)$  donnée par

$$\kappa_n(\epsilon) = \frac{\kappa_n \sin^2(2\sqrt{\xi n}|\epsilon|)}{1 - \kappa_n \cos^2(2\sqrt{\xi n}|\epsilon|)} \leq \kappa_n(\epsilon_{max}/2) = \kappa_n. \quad (7.43)$$

Nous retrouvons l'incertitude  $\sigma_\epsilon(\epsilon, \kappa_n)$  déterminée précédemment en (7.30). L'estimation du déplacement  $\epsilon$  est donc *optimale*, au sens de la limite de Cramér-Rao classique (7.38). Cependant, rien ne prouve que la mesure effectuée par le détecteur soit *optimale*, ce qui pourrait correspondre à une détectivité parfaite ( $\kappa_n = 1$ ).

Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer comment contourner la faible détectivité de tels détecteurs pour réaliser des estimations *ultimement optimales*, au sens d'une optimisation quantique de la limite de Cramér-Rao.

### D.3 Limite de Cramér-Rao Quantique

La limite de Cramér-Rao quantique est un enjeu très actuel et largement ouvert de la métrologie quantique, car elle repose sur une optimisation de la limite de Cramér-Rao classique sur toutes les mesures d'un espace de Hilbert donné. Nous allons montrer comment l'approche rétrodictive permet également de réaliser une telle optimisation, avec des avantages que nous préciserons.

#### D.3.1 État de l'art dans l'approche prédictive

Dans l'approche habituelle de la physique quantique, l'optimisation de la limite de Cramér-Rao doit également se faire sur toutes les mesures que l'on peut effectuer sur une préparation donnée du système sondant le paramètre  $\epsilon$ . On espère alors estimer ce paramètre avec une incertitude atteignant la *limite de Cramér-Rao quantique* définie par

$$(\sigma_\epsilon)_{CRQ} = \min_{\{\hat{\Pi}_n\}_n \in \mathcal{H}} (\sigma_\epsilon)_{CR}. \quad (7.44)$$

où  $\{\hat{\Pi}_n\}_n$  désigne un ensemble d'éléments POVM de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  considéré. L'optimisation de la limite de Cramér-Rao (7.38) doit alors se faire sur toutes les mesures de cet espace de Hilbert. Cette tâche est très difficile en pratique, car l'ensemble des mesures d'un espace de Hilbert donné est très vaste.

Pour atteindre cette limite, une démarche courante est de borner l'information de Fisher pour la préparation considérée  $I_F(\epsilon)$  par un majorant  $\mathcal{M}_{F,max}(\epsilon)$  aussi précis que possible. Ce dernier ne dépend alors que de la ressource et de l'opération unitaire caractérisée par le paramètre  $\epsilon$ . Ensuite, par une démarche essentiellement qualitative et inductive, une mesure est "exhibée" afin de calculer explicitement l'information de Fisher et de montrer que cette dernière est égale au majorant  $\mathcal{M}_{F,max}(\epsilon)$ . On parle alors de *mesure optimale*, dans le sens où elle permet d'atteindre la limite de Cramér-Rao quantique (7.44)

$$(\sigma_\epsilon)_{CRQ} = 1/\sqrt{N\mathcal{M}_{F,max}(\epsilon)}. \quad (7.45)$$

Cependant, si l'on trouve effectivement une mesure optimale par cette démarche, rien ne garantit la réalisation de cette mesure qui restait jusqu'ici une question pratique largement ouverte. Cette question n'est pas seulement pratique, puisque nous avons montré au chapitre II qu'une mesure caractérisée par un élément POVM pouvait être réalisée par différents processus de mesure. Par contre, nous avons montré au chapitre VI et à l'interlude IV comment il est possible de détecter un état quantique, à condition de savoir le préparer de manière conditionnelle ou déterministe. Le détecteur de cet état correspond en effet à la version rétrodictive d'un protocole de préparation conditionnelle de cet état, si cette version rétrodictive est pertinente d'un point de vue pratique.

### D.3.2 Optimisation dans l'approche rétrodictive

Nous allons maintenant décrire l'optimisation quantique de la limite de Cramér-Rao pour un protocole d'estimation de paramètre fondée sur l'approche rétrodictive, comme illustré sur la figure 7.6. L'information de Fisher (7.35) que nous devons optimiser décrit maintenant la statistique des choix de préparation "m" conduisant à un certain résultat de mesure "n". En effet, les probabilités rétrodictives intervenant dans cette information (7.35) sont données dans le cadre de l'approche rétrodictive par

$$\Pr(m|n) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_n^{\text{retr}}(\epsilon) \hat{\Theta}_m \right], \quad (7.46)$$

où l'état rétrodicté  $\hat{\rho}_n^{\text{retr}}$  de la réponse "n" du détecteur est rétro-propagé par l'opération unitaire  $\hat{U}(\epsilon)$ , caractérisée par le paramètre  $\epsilon$ ,

$$\hat{\rho}_n^{\text{retr}}(\epsilon) = \hat{U}^\dagger(\epsilon) \hat{\rho}_n^{\text{retr}} \hat{U}(\epsilon). \quad (7.47)$$

Nous rappelons que les opérateurs de préparation sont donnés par  $\hat{\Theta}_m = D\text{Pr}(m)\hat{\rho}_m$ . Ils doivent en plus constituer un ensemble exhaustif de propositions tel que

$$\sum_m \hat{\Theta}_m = \hat{1}, \quad (7.48)$$

En pratique, il est possible de se restreindre à un sous-espace de Hilbert de dimension finie  $D$ . Par exemple, nous avons fait une telle réduction au chapitre V afin de réaliser la tomographie des états rétrodictés de détecteurs de photons uniques. Ces tomographies sont des estimations d'états quantiques par maximum de vraisemblance (MaxLike) avec la statistique des choix de préparation conduisant à un certain résultat, contrairement aux tomographies habituelles impliquant la statistique des mesures effectuées sur une préparation donnée.

L'optimisation de l'information de Fisher (7.35) se fait maintenant sur tous les choix de préparation de l'espace de Hilbert considéré. Une telle optimisation permettrait idéalement d'atteindre *la limite de Cramér-Rao quantique* définie ici par

$$(\sigma_\epsilon)_{CRQ} = \min_{\{\hat{\Theta}_m\}_m \in \mathcal{H}} (\sigma_\epsilon)_{CR}. \quad (7.49)$$

où  $\{\hat{\Theta}_m\}_m$  désigne l'ensemble des choix de préparation que l'on peut faire dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension finie  $D$ . Chaque choix de préparation "m" est représenté par l'opérateur de proposition

$$\hat{\Theta}_m = D\text{Pr}(m)\hat{\rho}_m. \quad (7.50)$$

D'un point de vue pratique, nous pouvons dans un premier temps optimiser uniquement sur tous les états quantiques  $\hat{\rho}_m$  que l'on est effectivement capable de préparer. Il est facile de se convaincre que de telles préparations sont plus nombreuses et manipulables que des mesures quantiques. De plus, la détectivité d'une mesure est un paramètre difficilement contrôlable, ce qui n'est pas le cas pour les probabilités  $\text{Pr}(m)$  des différents choix de préparation "m". Ces probabilités, comme nous le verrons, peuvent également être ajustées afin d'atteindre la limite de Cramér-Rao quantique.

Enfin, cette optimisation de la limite de Cramér-Rao (7.49) - sur tous les choix de préparation d'un espace de Hilbert - n'est qu'une application des notions d'états quantiques et de propositions introduites au chapitre III. Ces deux notions sont bien indissociables et permettent d'exploiter le contenu physique d'un état quantique. Dans un protocole d'estimation, le paramètre est en quelque sorte "imprimé" sur l'état quantique et nous devons donc tester les propositions permettant la "lecture" optimale de ce paramètre.

## D.4 Protocole d'estimation rétrodictive

Nous proposons maintenant une procédure générale d'estimation de la véritable valeur  $\bar{\epsilon}$  d'un paramètre  $\epsilon$  dans l'approche rétrodictive, comme illustrée sur la figure 7.6. Nous montrerons ensuite son caractère optimal au sens de la limite de Cramér-Rao quantique (7.49).

### D.4.1 Description de la procédure

Nous supposons que la mesure est *projective* et *fidèle* à un état cible  $\hat{\rho}_{tar}$ , mais elle reste *non-idéale*. Elle est donc caractérisée par l'état rétrodicté  $|\psi_n^{retr}\rangle = |\psi_{tar}\rangle$  et une détectivité  $\kappa_n < 1$ .

1. On détermine la dimension  $D$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  dans lequel on peut réaliser l'estimation du paramètre  $\epsilon$ . La valeur minimale de cette dimension est essentiellement liée à l'état rétrodicté à partir du résultat "n" de la mesure considérée et à l'opération unitaire  $\hat{U}(\bar{\epsilon})$ . Nous avons par exemple fait une telle détermination au chapitre V. La valeur  $D$  de cette dimension sera en réalité fixée à l'étape (4) de cette procédure.
2. Les différents choix de préparation "m" se feront à des fréquences temporelles

$$\mathcal{N}_m = \text{Pr}(m) \mathcal{N}_o,$$

où  $\mathcal{N}_o$  désigne un étalon de fréquence assurant un taux de répétition de la réponse "n" suffisamment grand. Ces fréquences temporelles  $\mathcal{N}_m$  reflètent directement les probabilités  $\text{Pr}(m)$  de faire les différents choix de préparation "m".

3. Pour le choix "oui", on prépare l'état cible  $|\psi_{tar}\rangle$  de la mesure donnant le résultat "n". Cet état est ensuite soumis à une évolution modèle  $\hat{U}_m(\epsilon) \simeq \hat{U}^\dagger(\epsilon)$ , caractérisée par une valeur ajustable du paramètre  $\epsilon$ . La probabilité de faire ce choix "oui" doit être  $\text{Pr}(\hat{\rho}_{tar}) = 1/D$  afin de réaliser l'opérateur de proposition

$$\hat{\Theta}_{\text{oui}}(\epsilon) = D \text{Pr}(\text{oui}) \hat{\rho}_{tar}(\epsilon) = |\psi_{tar}(\epsilon)\rangle \langle \psi_{tar}(\epsilon)|.$$

4. Pour les choix  $m \neq \text{oui}$ , on prépare autant d'états mélangés  $\hat{\rho}_m$  que nécessaires afin de réaliser la condition d'exhaustivité (7.48). Ces préparations peuvent se faire dans un espace de Hilbert de dimension  $D$  plus grande que la valeur minimale déterminée à l'étape (1).

L'exhaustivité des préparations s'évalue à l'aide de l'entropie de Von Neumann du mélange sondant, comprenant l'état cible  $|\psi_{tar}\rangle$ ,

$$\hat{\rho}_{\text{sonde}} = \sum_m \text{Pr}(m) \hat{\rho}_m.$$

Dans un espace de Hilbert de dimension finie  $D$ , cette entropie  $\mathcal{S}_{\text{sonde}}$  doit être aussi proche que possible de sa valeur maximale  $\mathcal{S}_{\text{max}} = \log D$ . L'augmentation du nombre de choix de préparation "m", avec des probabilités  $\text{Pr}(m)$  adéquates, permet d'augmenter l'entropie de Von Neumann, puisque cette fonctionnelle est *concave*

$$\mathcal{S}_{\text{sonde}} = \mathcal{S} \left[ \sum_m \text{Pr}(m) \hat{\rho}_m \right] \geq \sum_m \text{Pr}(m) \mathcal{S}[\hat{\rho}_m].$$

Tous les choix de préparation "m  $\neq$  oui" réalise alors l'opérateur de proposition

$$\hat{\Theta}_{\text{non}} = \sum_{m \neq \text{oui}} \hat{\Theta}_m \simeq \hat{1} - \hat{\Theta}_{\text{oui}}.$$

5. On détermine expérimentalement les fréquences rétrodictives  $p_{\text{oui}}(\epsilon) = \text{Pr}(\text{oui}|n)$  d'avoir fait le choix de préparation "oui" quand nous obtenons le résultat "n", comme illustré la figure 7.6. Nous avons fait ce genre de détermination au chapitre V pour la tomographie des états rétrodictés des détecteurs de photons uniques. Cette probabilité rétrodictive est idéalement donnée par

$$p_{\text{oui}}(\epsilon) = \mathcal{S}(\epsilon - \bar{\epsilon}) = |\langle \psi_{tar}(\epsilon) | \psi_n^{\text{retr}}(\bar{\epsilon}) \rangle|^2 \leq p_{\text{oui}}(\bar{\epsilon}) = 1.$$

Lorsque le paramètre est égale à sa valeur véritable  $\epsilon = \bar{\epsilon}$ , la probabilité rétrodictive est maximale et fournit une certitude sur le choix de préparation "oui".

#### D.4.2 Caractère optimal

Nous allons maintenant vérifier que cette procédure est *ultimement optimale* en permettant l'estimation du paramètre  $\epsilon$  avec une incertitude atteignant la limite de Cramér-Rao quantique (7.49). Nous adopterons pour cela la démarche décrite précédemment et inspirée d'une démonstration faite dans le cadre de l'approche prédictive par Bruno M. Escher [118] du groupe de Luiz Davidovich à l'Université Fédérale de Rio de Janeiro. Nous allons d'abord majorer l'information de Fisher pour l'état rétrodicté à partir du résultat "n", puis calculer explicitement cette information pour les préparations introduites dans la procédure que nous venons de décrire.

*Majoration de l'information de Fisher.* – Nous avons considéré une mesure projective, fidèle à un état cible  $|\psi_{tar}\rangle$  mais non-idéale. D'après la figure 7.6, l'état rétrodicté à partir de cette mesure doit être propagé en arrière dans le temps par l'opérateur d'évolution  $\hat{U}(\epsilon)$ , soit

$$|\psi_n^{\text{retr}}(\epsilon)\rangle = \hat{U}^\dagger(\epsilon) |\psi_n^{\text{retr}}\rangle. \quad (7.51)$$

La dérivation de cet état par rapport au paramètre  $\epsilon$  à estimer peut s'écrire comme

$$\frac{d}{d\epsilon} |\psi_n^{retr}(\epsilon)\rangle = i\hat{d}(\epsilon) |\psi_n^{retr}(\epsilon)\rangle, \quad (7.52)$$

avec

$$\hat{d}(\epsilon) = -i \left[ \frac{d}{d\epsilon} \hat{U}^\dagger(\epsilon) \right] \hat{U}(\epsilon). \quad (7.53)$$

La probabilité rétrodictive  $p_m(\epsilon) = \Pr(m|n)$  est alors donnée par

$$p_m(\epsilon) = \Pr(m|n) = \langle \psi_n^{retr}(\epsilon) | \hat{\Theta}_m | \psi_n^{retr}(\epsilon) \rangle. \quad (7.54)$$

La dérivée par rapport au paramètre à estimer  $\epsilon$  de cette probabilité peut s'écrire comme

$$\frac{dp_m(\epsilon)}{d\epsilon} = i \langle \psi_n^{retr}(\epsilon) | \left[ \hat{\Theta}_m, \hat{d}(\epsilon) \right] | \psi_n^{retr}(\epsilon) \rangle = -2\text{Im} \left[ \langle \psi_n^{retr}(\epsilon) | \hat{\Theta}_m \left( \hat{d}(\epsilon) - r(\epsilon) \right) | \psi_n^{retr}(\epsilon) \rangle \right].$$

En effet, nous pouvons introduire une fonction scalaire arbitraire  $r(\epsilon)$  à valeurs strictement réelles. Cette fonction nous permettra d'obtenir la majoration la plus fine de l'information de Fisher (7.35), qui fait intervenir le carré des dérivées (7.55), que l'on peut borner en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left( \frac{dp_m(\epsilon)}{d\epsilon} \right)^2 \leq 4p_m(\epsilon) \langle \psi_n^{retr}(\epsilon) | \hat{\Theta}_m \left[ \hat{d}(\epsilon) - r(\epsilon) \right]^2 | \psi_n^{retr}(\epsilon) \rangle. \quad (7.55)$$

Nous arrivons ainsi à une majoration de l'information de Fisher (7.35)

$$I_F(\epsilon) = \sum_m \frac{1}{p_m(\epsilon)} \left( \frac{dp_m(\epsilon)}{d\epsilon} \right)^2 \leq 4 \langle \psi_n^{retr}(\epsilon) | \left[ \hat{d}(\epsilon) - r(\epsilon) \right]^2 | \psi_n^{retr}(\epsilon) \rangle, \quad (7.56)$$

où nous utilisons la relation d'exhaustivité (7.48) des opérateurs de proposition  $\hat{\Theta}_m$ . Nous pouvons également écrire cette majoration en terme de l'état rétrodicté  $|\psi_n^{retr}\rangle$  non rétro-propagé, soit

$$I_F(\epsilon) \leq 4 \langle \psi_n^{retr} | [\hat{c}(\epsilon) - r(\epsilon)]^2 | \psi_n^{retr} \rangle, \quad (7.57)$$

avec

$$\hat{c}(\epsilon) = \hat{U}(\epsilon) \hat{d}(\epsilon) \hat{U}^\dagger(\epsilon). \quad (7.58)$$

Ensuite, le plus petit majorant de l'information de Fisher (7.57) est obtenue pour la fonction  $r(\epsilon)$  définie par

$$r(\epsilon) = \langle \hat{c}(\epsilon) \rangle_o = \langle \psi_n^{retr} | \hat{c}(\epsilon) | \psi_n^{retr} \rangle, \quad (7.59)$$

ce qui conduit finalement à

$$I_F(\epsilon) \leq \mathcal{M}_F(\epsilon) = 4 \langle (\Delta \hat{c})^2 \rangle_o = \langle \psi_n^{retr} | [\hat{c}(\epsilon) - \langle \hat{c}(\epsilon) \rangle_o]^2 | \psi_n^{retr} \rangle. \quad (7.60)$$

Nous devons maintenant montrer que la procédure décrite précédemment permet effectivement d'atteindre ce majorant  $\mathcal{M}_F(\epsilon)$ , et donc que l'estimation du paramètre  $\epsilon$  est *ultimement optimale* au sens de la limite de Cramér-Rao quantique.

*Preuve du caractère optimal.* – Pour l'estimation de la véritable valeur  $\bar{\epsilon}$  du paramètre  $\epsilon$ , nous considérons les choix de préparation binaires "oui" et "non". Le choix "oui" correspond

à la préparation de l'état cible  $|\psi_n^{retr}(\epsilon)\rangle$ , alors que le choix "non" englobe tous les autres choix de préparation  $m \neq$  oui. L'information de Fisher prend alors une forme similaire à celle que nous avons calculée précédemment en (7.39), soit

$$I_F(\epsilon) = \frac{1}{p_{\text{oui}}(\epsilon)[1 - p_{\text{oui}}(\epsilon)]} \left( \frac{dp_{\text{oui}}(\epsilon)}{d\epsilon} \right)^2. \quad (7.61)$$

Lorsque le paramètre  $\epsilon$  tend vers sa véritable valeur  $\bar{\epsilon}$ , cette information de Fisher est indéterminée, car la probabilité rétrodictive  $p_{\text{oui}}(\bar{\epsilon}) = 1$  avec une dérivée nulle.

Pour lever cette indétermination, nous utilisons la règle de L'Hôpital qui conduit à l'expression suivante

$$I_F(\epsilon) = -2 \frac{d^2 p_{\text{oui}}(\epsilon)}{d\epsilon^2}. \quad (7.62)$$

Lorsque le paramètre  $\epsilon$  tend maintenant vers sa véritable valeur  $\bar{\epsilon}$ , nous obtenons une information de Fisher qui est égale à son majorant (7.60), soit

$$I_F(\bar{\epsilon}) = 4\langle(\Delta\hat{c})^2\rangle_o = \langle\psi_n|[\hat{c}(\bar{\epsilon}) - \langle\hat{c}(\bar{\epsilon})\rangle_o]^2|\psi_n\rangle. \quad (7.63)$$

Cette égalité montre que la procédure d'estimation que nous avons proposée dans le cadre de l'approche rétrodictive est *ultimement optimale*, dans le sens où elle réalise une estimation de la véritable valeur  $\bar{\epsilon}$  d'un paramètre  $\epsilon$  avec une incertitude égale à la limite de Cramér-Rao quantique.

### D.4.3 Discussion

La limite de Cramér-Rao quantique atteinte par ce protocole est donnée par

$$(\sigma_\epsilon)_{CRQ} = \frac{1}{\sqrt{N I_F(\bar{\epsilon})}} \quad (7.64)$$

où  $N$  est le nombre de répétitions de la réponse "n". Ce nombre est en fait lié au nombre total  $M$  de préparations, tous choix "m" confondus, intervenant dans l'estimation

$$N = \Pr(n) M = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{\text{sonde}} \hat{\Pi}_n \right] M \simeq \kappa_n \frac{M}{D} = \kappa_n M_{tar}. \quad (7.65)$$

Nous reconnaissons alors le nombre de préparations d'états cibles  $\kappa_n M_{tar}$  effectivement détectés par le détecteur, puisque la probabilité de préparer l'état cible est  $\Pr(\text{oui}) = 1/D$ , soit un nombre de préparations  $M_{tar} = M/D$ .

Le véritable avantage de notre procédure se révèle au niveau de l'information de Fisher. En effet, dans un protocole d'estimation prédictive, nous aurions eu le même nombre effectif de répétitions, mais avec une information de Fisher plus faible. Ce comportement est lié au caractère projectif mais non-idéal de la mesure : le résultat "n" n'est pas certain même lorsque l'on prépare l'état cible de la mesure.

Par contre, la probabilité rétrodictive d'avoir préparé ce même état cible, quand nous obtenons le résultat "n", fournit une certitude sur le choix de préparation "oui". Cette certitude est à l'origine de l'indétermination sur l'information de Fisher (7.61). Nous avons évoqué ces aspects au chapitre IV, lorsque nous avons introduit la projectivité, l'idéalité et la fidélité d'une mesure. Il s'agit d'une belle manifestation de ces propriétés qui ne sont révélées que par l'approche rétrodictive.

Enfin, nous comparons sur la figure 7.8 les informations de Fisher pour des protocoles d'estimation prédictive et rétrodictive de petits déplacements d'états "chat de Schrödinger". Contrairement à l'estimation prédictive, l'estimation rétrodictive fournit l'optimum d'information de Fisher sur le déplacement  $\epsilon$  que l'on cherche à estimer. L'incertitude sur l'estimation atteint alors la limite de Cramér-Rao quantique, qui est la limite ultime pour toute estimation de déplacement, basée sur des états "chat de Schrödinger".

	Prédictive	Rétrodictive
Nombre de répétitions	$N = M_{tar}$	$N = \kappa_n M_{tar}$
Information de Fisher	$I_F(\epsilon) \leq 16\xi n \kappa_n$	$I_F(\epsilon) = 16\xi n$
Limite de Cramér-Rao	$(\sigma_\epsilon)_{CR} = \frac{1}{\sqrt{N I_F(\epsilon)}}$	
Caractère optimal	$\sigma_\epsilon \geq (\sigma_\epsilon)_{CRQ}$	$\sigma_\epsilon = (\sigma_\epsilon)_{CRQ}$

**Figure 7.8:** Comparaison des informations de Fisher fournies par des protocoles d'estimation prédictive et rétrodictive de petits déplacements  $\epsilon$  d'états "chat de Schrödinger". – Pour l'estimation prédictive, l'information de Fisher associée aux résultats de mesure n'est pas optimale et dépend du déplacement à estimer. Pour l'estimation rétrodictive, l'information de Fisher associée aux choix de préparation est optimale. Le nombre effectif de répétitions, intervenant dans la limite de Cramér-Rao, est identique pour les deux estimations. Il correspond au nombre de préparations d'états cibles effectivement détectés  $\kappa_n M_{tar}$ , où  $M_{tar}$  est le nombre de préparations de ces états cibles.

## E Conclusions

Dans ce dernier chapitre, nous avons montré comment des détecteurs d'états fortement non-classiques, comme le détecteur de "chats de Schrödinger" de la lumière, pouvaient avoir des applications en métrologie quantique. En effet, nous avons d'abord montré qu'un tel détecteur permettait d'estimer des petits déplacements d'états quantiques dans l'espace des phases à la limite de Heisenberg.

Ensuite, nous avons généralisé l'usage de tels détecteurs non-classiques à des protocoles d'estimation rétrodictive de paramètre caractérisant une opération unitaire quelconque. Ces estimations sont fondées sur l'approche rétrodictive et la statistique des choix de préparation, contrairement aux protocoles d'estimation habituels utilisant la statistique des résultats de mesure. Nous avons défini la limite ultime de telles estimations : *la limite de Cramér-Rao quantique* qui est maintenant le résultat d'une optimisation sur tous les choix de préparation possibles dans un espace de Hilbert donné. Cette optimisation peut s'avérer plus judicieuse qu'une optimisation sur les mesures d'un espace de Hilbert.

Enfin, nous avons proposé une procédure d'estimation optimale pour des mesures projectives mais non-idéales. Cette procédure permet d'estimer un paramètre avec une incertitude égale à la limite de Cramér-Rao quantique. Nous espérons que les protocoles d'estimation quantique seront désormais étudiés dans le cadre de l'approche rétrodictive, qui peut fournir plus d'information sur un paramètre, tout en contournant certaines difficultés pratiques.



---

## Conclusions et Perspectives

---

A travers cette thèse, nous avons montré comment les propriétés quantiques d'une mesure sont révélées par une approche de la physique quantique qui a souvent été occultée jusqu'à présent. L'approche rétrodictive est moins habituelle dans les traitements quantiques, mais elle répond à des questions naturelles et légitimes quand on effectue une mesure. En effet, elle consiste à faire des rétro-prédictions sur les choix de préparation qui ont conduit à un certain résultat de mesure.

Les raisons de ce manque d'intérêt sont en partie liées à l'histoire de la physique quantique, comme nous l'avons montré à l'interlude I. En effet, les outils de cette approche rétrodictive avaient été formulés sur la base d'une analogie avec la règle de Born [63]. A cause de ce statut, il était alors difficile de comprendre et d'exploiter le contenu physique des outils de cette approche. Par exemple, rien ne venait justifier le fait que des probabilités rétrodictives puissent se mettre sous la même forme que la règle de Born. Cette règle a été postulée par Max Born en 1926 [17] pour délivrer le formalisme mathématique qui était en train d'être élaboré afin de représenter la fonction d'onde, introduite par Erwin Schrödinger en 1925. Une interprétation minimale de la physique quantique en est née : *l'École de Copenhague* qui considère la physique quantique avant tout comme une théorie nous permettant de faire des prédictions sur des résultats de mesure. Tous les débats sur l'interprétation de certains aspects de l'étrangeté quantique finissent par ce constat. Certains physiciens se sont même égarés dans des interprétations douteuses. L'expérience dite de *l'Ami de Wigner* [88] en est la parfaite illustration. Nous avons décrit cette expérience à l'interlude III en traitant l'oeil humain comme un véritable détecteur optique.

Heureusement, l'interprétation de l'École de Copenhague a été illustrée et complétée par de belles expériences explorant le comportement quantique de la matière et de la lumière. L'enseignement de la physique quantique en est aujourd'hui fortement imprégné. Cependant, ce pragmatisme met parfois dans l'ombre d'importants résultats issus de ce que l'on appelle les fondations mathématiques de la théorie quantique. Pour la plupart des physiciens en lien avec l'expérience, ces derniers se résument souvent à une axiomatisation excessive de la physique quantique visant à en réduire au maximum les postulats qui sont au nombre de cinq ou six dans la plupart des manuels de mécanique quantique. La règle de Born fait partie de ces postulats, alors qu'elle découle d'un théorème dont les seules hypothèses relèvent d'un choix de description, qui est le premier des postulats. En effet, nous avons vu au chapitre III que le théorème de Gleason-Busch justifie la forme mathématique de la règle de Born. Ce résultat nous révèle également qu'un état quantique n'est exploitable qu'avec un ensemble exhaustif de propositions sur ce dernier. Ces propositions

ne correspondent pas uniquement à des mesures, comme trop souvent invoqué par les mathématiciens eux même. En effet, nous pouvons *mesurer* le système avec une propriété, mais nous pouvons également *préparer* le système avec cette même propriété. L'application du théorème de Gleason-Busch au jeu fondamental, basé sur des préparations d'états et des mesures, nous a conduit naturellement aux approches prédictive et rétrodictive [70]. L'interprétation des outils de ces approches en est unifiée : il s'agit d'états quantiques distribuant des propriétés physiques représentées par des opérateurs hermitiens et positifs. Nous avons ainsi proposé et réalisé des reconstructions d'états quantiques rétrodictés. Il s'agit des premières tomographies quantiques basées sur l'approche rétrodictive et des choix de préparations illustrant la pertinence de cette approche [86].

Ensuite, nous avons étendu l'approche rétrodictive à la métrologie quantique où il devient maintenant possible d'estimer un paramètre à partir de choix de préparations, et non plus seulement des résultats de mesure. Des appareils de mesures plus exotiques deviennent alors nécessaires. Nous avons proposé le principe d'un détecteur d'états "chat de Schrödinger" de la lumière [99]. L'étude des propriétés quantiques des mesures réalisées par ce détecteur a été faite dans le cadre de notre approche. Nous avons ainsi obtenu une illustration éloquentes des propriétés de la mesure que nous avons introduit dans le cadre de l'approche rétrodictive, comme le caractère projectif et non-idéal qui ne fournit pas de certitude dans l'approche prédictive. Pour un protocole d'estimation prédictive, ce caractère permettait des estimations de déplacements dans l'espace des phases à la limite de Heisenberg, sans atteindre la limite de Cramér-Rao quantique qui est un enjeu actuel de la métrologie quantique. Nous avons montré que cette limite est atteinte dans un protocole d'estimation rétrodictive, utilisant le même détecteur. L'interprétation en termes d'information de Fisher est également très intéressante : une estimation rétrodictive peut fournir plus d'information sur un paramètre qu'une estimation prédictive.

Dans le contexte particulièrement actif de l'information quantique, nous espérons que les protocoles proposés seront maintenant étudiés dans le cadre des deux approches de la physique quantique. En effet, nous avons précisé les règles de correspondances entre les versions prédictive et rétrodictive d'un protocole. Cela nous permet de choisir la version qui est la plus pertinente au niveau expérimental. Par exemple, la préparation d'états "chats de Schrödinger" de la lumière pose toujours des difficultés. Si un protocole implique la préparation de tels états et des mesures dont les états rétrodictés sont plus facilement réalisables, alors la version rétrodictive de ce protocole devient plus judicieuse. Le détecteur de "chats de Schrödinger" que nous proposons révélera alors tous ses avantages.

Enfin, le comportement quantique de la matière ou de la lumière dans des états toujours plus non-classiques est intensivement exploré aussi bien au niveau théorique qu'expérimental. Nous espérons désormais qu'il en sera de même pour *le comportement quantique des appareils de mesures* dont cette thèse contribue à en préciser les aspects. Il reste maintenant à imaginer et à concevoir des appareils de mesures toujours plus non-classiques que ceux qui sont actuellement utilisés en optique quantique et dans d'autres domaines, notamment la physique mésoscopique où les analogies avec l'optique quantique sont très intéressantes. Le détecteur de "chat de Schrödinger" de la lumière est une première proposition en ce sens.

---

# Communications écrites et orales

---

Mes travaux de recherche, présentés dans cette thèse, ont fait ou feront l'objet de publications dans des revues à comité de lecture. Ce chapitre énumère les principales communications écrites et orales effectuées à la date de la rédaction de cette thèse.

## Publications

1. T. Amri, *et al.* *Characterizing Quantum Properties of a Measurement Apparatus : Insights from the Retrodictive Approach*. Physical Review Letters **106**, 020502 (2011).
2. T. Amri *et al.* *Quantum Tomography of Retrodicted States for Single-Photon Detectors*, in preparation (2011).
3. T. Amri *et al.* *Detecting "Schrödinger's Cat" States of Light for Quantum Metrology*, in preparation (2011).
4. T. Amri *et al.* *Wigner's Friend and the Human Eye*, in preparation (2011).

## Conférences

1. T. Amri, V. D'Auria, J. Laurat and C. Fabre, *Characterizing Quantum Properties of a Measurement Apparatus : An Experimental Illustration*. Quantum 2010 : International Workshop on Advances in Foundations of Quantum Mechanics and Quantum Information with atoms and photons. Présentation orale en session plénière. Turin, Italie. Mai 2010.
2. T. Amri *et al.* *Detecting "Schrödinger's Cat" States of Light : Insights from the Retrodictive Approach*. International Conference on Quantum Information. Présentation orale en session plénière. Ottawa, Canada. Juin 2011.



---

# Bibliographie

---

- [1] Michel Le Bellac, *Introduction à l'Information Quantique*. Éditions Belin, Collection Échelles (2005). Cité p. [1](#)
- [2] E. Schrödinger, *Physique Quantique et Représentation du Monde*, Points-Sciences (1992), Trad. Française de l'article de vulgarisation de *La situation actuelle en mécanique quantique* (1935). Cité p. [4](#), [29](#)
- [3] P. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (1930). Cité p. [6](#)
- [4] J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Springer, Berlin (1932). Cité p. [6](#), [8](#), [10](#), [20](#), [43](#), [54](#), [55](#), [60](#), [89](#)
- [5] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Really Considered Complete ?*. Phys. Rev. **47**, 777-780 (1935). Cité p. [7](#), [26](#), [53](#), [80](#)
- [6] J. S. Bell, *On the EPR Paradox*, Physics **1**, 195 (1964). Cité p. [7](#), [31](#)
- [7] J. F. Clauser and M. A. Horne, *Experimental consequences of objective local theories*. Phys. Rev. **D 10**, 526-535 (1974) Cité p. [8](#)
- [8] E. S. Fry and R. C. Thompson, *Experimental Test of Local Hidden Variable Theories*. Phys. Rev. Lett. **37**, 465-468 (1976). Cité p. [8](#)
- [9] A. Aspect, P. Grangier and P. Roger, *Experimental Realization of Einstein-Rosen-Podolsky-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell's Inequalities*. Phys. Rev. Lett. **49**, 2, 91-94 (1982). Cité p. [8](#), [31](#)
- [10] M. Brune *et al.* *Observing the Progressive Decoherence of the "Meter" in a Quantum Measurement*. Phys. Rev. Lett. **77**, 4887-4890 (1996). Cité p. [10](#)
- [11] Z. H. Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*. Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003). Cité p. [10](#)
- [12] Max Planck, *Annalen der physik* **4**, 553 (1901). Cité p. [53](#)
- [13] Albert Einstein, *Traduction : Un modèle heuristique de la création et la transformation de la lumière*. Annalen der Physik, **17**, 132-148, (1905). Cité p. [53](#)
- [14] Louis De Broglie, *Recherches sur la Théorie des Quanta*. Disponible sur le serveur des thèses TEL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006807/fr/>. Cité p. [53](#)
- [15] Erwin Schrödinger, *Physical Review* **28**, 6, p. 1049-1070 (1926). Cité p. [53](#)
- [16] Werner Heisenberg, *Annalen der Physik*, **33**, p. 879-893 (1925). Cité p. [54](#)

- [17] Traduction anglaise dans : J. A. Wheeler and W. H. Zurek, *Quantum theory and measurement*, section I.2, Princeton University Press (1983). Cité p. [10](#), [45](#), [53](#), [165](#)
- [18] Claude Cohen Tannoudji, Bernard Dieu, Franck Laloë, *Mécanique Quantique*. Hermann (1997). Cité p. [54](#)
- [19] J. L. Basdevant et J. Dalibard, *Mécanique Quantique*, Editions de l'Ecole Polytechnique (2002). Cité p. [17](#), [21](#), [22](#), [23](#), [54](#)
- [20] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Photons et Atomes : Introduction à l'Électrodynamique Quantique*, CNRS Éditions (2001). Cité p. [17](#)
- [21] G. Grynberg, A. Aspect and C. Fabre, *Introduction to Quantum Optics*. Cambridge University Press, (2010). Cité p. [17](#)
- [22] Wolfgang P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH (2001). Cité p. [21](#)
- [23] E. Wigner, *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*. Phys. Rev. **40**,749 (1932). Cité p. [22](#)
- [24] J. Ville, *Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique*, Cables et Transmission, 2A, 61-74 (1948). Cité p. [22](#)
- [25] S. L. Braunstein and P. V. Lock, *Quantum information with continuous variables*. Rev. Mod. Phys. **77**, 513-577 (2005). Cité p. [23](#)
- [26] *Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light*, Editors : N. J. Cerf, G. Leuchs, E.S. Polzik. Imperial College Press (2007). Cité p. [23](#)
- [27] R. L. Hudson, Rep. Math. Phys. **6**, 249 (1974). Cité p. [23](#), [27](#), [93](#)
- [28] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963). Cité p. [25](#)
- [29] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963). Cité p. [25](#)
- [30] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*. Springer Study Edition (1995). Cité p. [26](#)
- [31] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*. Springer-Verlag, Berlin (2000). Cité p. [26](#)
- [32] L. G. Lutterbach and L. Davidovich, Method for direct measurement of the Wigner Function in cavity QED and ion traps, Phys. Rev. Lett. **78**, 2547-2550, (1997). Cité p. [28](#)
- [33] J. R. Gribbin, *Le Chat de Schrödinger : Physique Quantique et Réalité*. Editions Champ Flammarion, (1999). Cité p. [29](#)
- [34] T. C. Ralph, A. Gilchrist, and G. J. Milburn. *Quantum Computation with optical states*, Phys. Rev A **68**, 042319 (2003). Cité p. [31](#)
- [35] J. Eisert *et al.*, *Distilling Gaussian States with Gaussian Operations is Impossible*. Phys. Rev. Lett. **89**, 137903 (2002). Cité p. [31](#), [92](#), [93](#)
- [36] J. Niset, J. Fiurasek and N. J. Cerf, *A No-Go Theorem for Gaussian Quantum Error Correction* Phys. Rev. Lett. **102**, 120501 (2009). Cité p. [92](#)
- [37] H. Nha and H.J. Carmichael, *Proposed Test of Quantum Nonlocality for Continuous Variables*, Phys. Rev. Lett. **93**, 020401 (9 July 2004). Cité p. [31](#)

- [38] R. Garcia-Patron, J. Fiurasek, N.J. Cerf, J. Wenger, R. Tualle-Brouri and Ph. Grangier, *Proposal for a Loophole-Free Test Using Homodyne Detection*, Phys. Rev. Lett. **93**, 130409 (2004). Cité p. [31](#)
- [39] Jean Zinn-Justin, *Intégrale de chemin en mécanique quantique : Introduction*. Collection Savoirs Actuels, EDP Sciences, CNRS Editions (2003). Cité p. [34](#)
- [40] K. Kraus, *States, Effects and Operations : Fundamental Notions of Quantum Theory*. Springer Verlag (1983). Cité p. [37](#), [38](#)
- [41] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, (2000). Cité p. [37](#), [45](#), [51](#)
- [42] John Preskill, *Lecture Notes of Quantum Computation (PHYS 229) at Caltech*. Available online <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>. Cité p. [45](#), [51](#)
- [43] J. Kimble, *The Quantum Internet*. Nature **453**, 1023-1030 (2008). Cité p. [40](#)
- [44] A. I. Lvovsky, B. C. Sanders, and W. Tittel, *Optical Quantum Memory*. Nature Photonics **3**, 706-714 (2009). Cité p. [40](#)
- [45] M. Lobino *et al.*, Science **24**, Vol. 322, no. 5901 (October 2008). Cité p. [42](#)
- [46] M. Lobino *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 203601 (2009). Cité p. [42](#)
- [47] A. Ourjoumtsev *et al.*, Nature Physics **5**, 189 - 192 (2009). Cité p. [40](#)
- [48] R. Jozsa, *Fidelity for Mixed Quantum States*, J. Mod. Opt. **41**, 2315-2314 (1994). Cité p. [42](#), [109](#)
- [49] C. W. Helstrom, *Quantum detection and estimation theory*, Academic Press, NY (1976). Cité p. [45](#), [154](#)
- [50] S. Haroche and J.M. Raimond, *Exploring the quantum : Atoms, Cavities, and Photons*, Oxford Graduate Texts (2006). Cité p. [45](#), [46](#), [51](#)
- [51] J. Bernu *et al.*, *Freezing Coherent Field Growth in a Cavity by the Quantum Zeno Effect*. Phys. Rev. Lett. **101**, 180402 (2008). Cité p. [44](#)
- [52] C. Guerlin *et al.*, *Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting*. Nature **448**, 889-893 (2007). Cité p. [46](#)
- [53] P. L. Kelley and W. H. Kleiner, Phys. Rev. A **136**, 316 (1964). Cité p. [50](#)
- [54] M. A. Neumark, Compt. Rend. Acad. Sci. URSS, 41(9), 359 (1983). Cité p. [50](#), [74](#)
- [55] S. M. Barnett, L.S. Philipps, D. T. Pegg. *Imperfect photodetection as projection onto mixed states*. Optics Communications **158**, 45-49, (1998). Cité p. [50](#)
- [56] A.M. Gleason, J. Math. Mech. **6**, 885 (1957). Cité p. [54](#), [60](#), [61](#)
- [57] P. Busch, *Quantum States and Generalized Observables : A Simple Proof of Gleason's Theorem*. Phys. Rev. Lett. **91**, 120403 (2003). Cité p. [54](#), [60](#), [61](#)
- [58] S. Watanabe, *Prediction and Retrodiction*. Rev. Mod. Phys. **27**, 179 (1955). Cité p. [55](#), [65](#)
- [59] Y. Aharonov, P. G. Bergman, J. L. Lebowitz, Phys. Rev. **134**, B1410 (1964). Cité p. [55](#), [65](#)
- [60] R. H. Penfield, *More on the arrow of time*. Am. J. Phys. **34**, 422 (1966). Cité p. [65](#)
- [61] F. J. Belinfante, *Measurements and time reversal in objective quantum theory*. Pergamon Press, Oxford (1975). Cité p. [55](#), [65](#)

- [62] Y. Aharonov and L. Vaidman, *Complete description of a quantum system at a given time*. J. Phys. A **24**, 2315 (1991). Cité p. [65](#)
- [63] S. M. Barnett *et al.*, *Bayes' theorem and quantum retrodiction* J. Mod. Opt. **47**, 1779 (2000). Cité p. [55](#), [56](#), [65](#), [165](#)
- [64] D. T. Pegg, S. M. Barnett, and J. Jeffers, *Quantum theory of preparation and measurement*. J. Mod. Opt. **49**, 913 (2002). Cité p. [55](#), [65](#)
- [65] Stephen M. Barnett, David T. Pegg, John Jeffers and Ottavia Jedrkiewicz. *Master Equation for Retrodiction of Quantum Communication Signals*. Phys. Rev. Lett. **86**, 2455 (2001). Cité p. [56](#), [70](#)
- [66] E.-K. Tan, J. Jeffers, S. M. Barnett, D. T. Pegg. *Retrodictive States and Two-Photon Quantum Imaging*. Eur. Phys. J. D. **22**, 495 (2003). Cité p. [56](#)
- [67] John Jeffers, Stephen M. Barnett, David T. Pegg, *Retrodiction as a tool for micro-maser field measurements*. J. Mod. Opt. **49**, 925, (2002). Cité p. [56](#)
- [68] Y. Aharonov and L. Vaidman, *Resolution of a "Retrodiction Paradox"*, arXiv :quant-ph/9501002v2 (1995). Cité p. [56](#), [65](#), [70](#)
- [69] Thomas Bayes and Richard Price, *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chance*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London **53**, 370-418, doi :10.1098/rstl.1763.0053 (1763). Cité p. [65](#), [66](#)
- [70] T. Amri *et al.*, *Characterizing quantum properties of a measurement apparatus : Insights from the retrodictive approach*. Phys. Rev. Lett. **106**, 020502 (2011). Cité p. [65](#), [89](#), [166](#)
- [71] K. Banaszek *et al.*, *Operational theory of homodyne detection*, Phys. Rev. A **55**, 3117-3123 (1997). Cité p. [72](#)
- [72] T. Amri, *Quantum Behavior of Measurement Apparatus*, arXiv :1001.3032 [quant-ph] (2010). Cité p. [76](#), [85](#)
- [73] J. Appel *et al.*, *Electronic noise in optical homodyne tomography*. Phys. Rev. A **75**, 035802 (2007). Cité p. [77](#), [115](#)
- [74] N. J. Cerf and C. Adami, *Information Theory of Quantum Entanglement and Measurement*. Physica D **120**, 62-81 (1998). Cité p. [82](#)
- [75] U. Leonhardt, *Measuring the quantum state of light*, Cambridge University Press, Cambridge (1997). Cité p. [56](#), [85](#)
- [76] A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, *Continuous-variable optical quantum state tomography*. Rev. Mod. Phys. **81**, 299-332 (2009). Cité p. [56](#), [85](#), [86](#), [87](#)
- [77] J. Lundeen *et al.*, Nature Physics **5**, 27 (2009). Cité p. [87](#)
- [78] J. Fiurasek, Phys. Rev. A **64**, 024102 (2001). Cité p. [87](#)
- [79] N. Treps and C. Fabre, Laser Physics **15**, 187 (2005). Cité p. [90](#)
- [80] M. G. Genoni *et al.*, Phys. Rev. A, **78** 060303 (R), (2008). Cité p. [92](#)
- [81] G. S. Agarwal, Phys. Rev. A **3**, 828 (1971). Cité p. [92](#)
- [82] R. H. Hadfield, *Single-photon detectors for optical quantum information applications*. Nature Photonics **3**, 696 (2009). Cité p. [93](#)

- [83] K. Wakui, H. Takahashi, A. Furusawa, and M. Sasaki, *Opt. Express* **15**, 3568 (2007). Cité p. [101](#), [115](#), [127](#), [136](#)
- [84] H. Vahlbruch *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 033602 (2008). Cité p. [101](#), [151](#)
- [85] D. Achilles, Ch. Silberhorn, C. Sliwa, K. Banaszek, I.A. Wamsley, *Opt. Lett.* **8**, 2387 (2003). Cité p.
- [86] T. Amri, V. D'Auria, J. Laurat and C. Fabre. *Quantum tomography of retrodicted states for single-photon detectors*. in preparation (2011). Cité p. [85](#), [115](#), [166](#)
- [87] A. E. B. Nielsen and K. Molmer, *Transforming squeezed light into a large-amplitude coherent state superposition*, *Phys. Rev. A* **76**, 043840 (2007). Cité p. [114](#)
- [88] E. Wigner, *Symmetries and Reflections*. Indiana University Press, p. 171-184 (1967). Cité p. [118](#), [165](#)
- [89] F. Rieke and D. A. Baylor, *Single-Photon detection by rod cells of the retina*. *Rev. Mod. Phys.* Vol. **70**, No. 3,(1998). Cité p. [118](#)
- [90] P. Sekatski *et al.*, *Towards Quantum Experiments with Human Eyes as Detectors Based on Cloning via Stimulated Emission*. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 113601 (2009). Cité p. [118](#)
- [91] H. Jeong *et al.*, *Phys. Rev. A* **74**, 033813 (2006). Cité p. [125](#)
- [92] A. Ourjoumtsev *et al.*, *Science* **312**, 83 (2006). Cité p. [125](#)
- [93] A. Ourjoumtsev *et al.*, *Nature* **448**, 784-486 (2007). Cité p. [125](#)
- [94] F. Treussart, R. Alléaume, V. Le Floch, L.-T. Xiao, J.-M. Courty, and J.-F. Roch, *Direct Measurement of the Photon Statistics of a Triggered Single-Photon Source*. *Phys. Rev. Lett.* **89** 093601 (2002). Cité p. [126](#)
- [95] E Wu, V. Jacques, H. Zeng, Ph. Grangier, F. Treussart, and J.-F. Roch, *Narrow-band single-photon emission in the near infrared for quantum key distribution*. *Optics Express* **14**, 1296-1303 (2006). Cité p. [126](#)
- [96] A. Dousse *et al.*, *Ultrabright Source of Entangled Photon Pairs*. *Nature* **466**, 217 (2010). Cité p. [126](#)
- [97] Z. H. Levine *et al.*, *Heralded, Pure-State Single Photon Source based on a Potassium Titanyl Phosphate waveguide*. *Optics Express* **18**, 3708 - 3718 (2010). Cité p. [126](#)
- [98] A. E. Lita *et al.*, *Optics Express*, Vol. **16**, No. 5 3032 (2008). Cité p. [127](#)
- [99] T. Amri *et al.*, *Detector of "Schrödinger's Cat" States of Light for Quantum Metrology*, in preparation (2011). Cité p. [142](#), [166](#)
- [100] A. Furusawa *et al.*, *Unconditionnal Quantum Teleportation*, *Science* **282**, 706-709 (1998). Cité p. [136](#), [137](#)
- [101] I. Dotsenko *et al.*, *Quantum feedback by discrete quantum nondemolition measurements : Towards on-demand generation of photon-number states*. *Phys. Rev. A* **80**, 013805 (2009). Cité p. [138](#)
- [102] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, *Science* **306**, 1330 (2004). Cité p. [139](#)
- [103] A. Gilchrist *et al.*, *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt*, **6**, S828 (2004). Cité p. [139](#)
- [104] M. Kolobov and C. Fabre, *Quantum limits on optical resolution*. *Phys. Rev. Letters* **85** 3789 (2000). Cité p. [139](#)

- [105] N. Treps *et al.*, *Crossing the standard quantum limit for high sensitivity measurements in optical images using non classical light*. Phys. Rev. Letters **88**, 203601 (2002). Cité p. [140](#)
- [106] Nicolas Treps, Nicolai Grosse, Warwick P. Bowen, Claude Fabre, Hans-A. Bachor, and Ping Koy Lam, *A Quantum Laser Pointer*, Science **301**, 940-943 (2003). Cité p. [140](#)
- [107] N. Treps, V. Delaubert, A. Maître, J.M. Courty and C. Fabre, *Quantum noise in multipixel image processing*, Phys. Rev. A **71**, 013820 (2005). Cité p. [140](#)
- [108] B. Lamine, C. Fabre, N. Treps, *Quantum improvement of time transfer between remote clocks*. Phys Rev. Letters **101**, 123601 (2008). Cité p. [140](#)
- [109] W.H. Zurek, *Sub-Planck phase-space structure and its relevance for quantum decoherence*. Nature **412**, 712 (2001). Cité p. [30](#), [141](#)
- [110] W. J. Munro *et al.*, Phys. Rev. A **66**, 023819 (2002). Cité p. [139](#), [142](#)
- [111] F. Toscano *et al.*, Phys. Rev. A **73**, 023803 (2006). Cité p. [139](#), [141](#), [142](#)
- [112] K. J. Resch *et al.*, *Time-reversal and super-resolving phase measurements*. Phys. Rev. Lett. **98**, 223601 (2007). Cité p. [142](#), [152](#)
- [113] M. Reck *et al.* Physical Review Letters **73**, 58 (1994). Cité p.
- [114] M. Sasaki and S. Suzuki, *Multimode theory of measurement-induced non-Gaussian operation on wideband squeezed light : Analytical formula*. Phys. Rev. A **73**, 043807 (2006). Cité p. [152](#)
- [115] T. Amri, *Préparation Conditionnelle d'Etats Non-Classiques de la Lumière*. Mémoire du Master de Recherche en Physique Quantique de l'ENS, (2008). Cité p. [152](#)
- [116] W. K. Wootters, *Statistical Distance and Hilbert Space*. Phys. Rev. D **23**, 357 (1981). Cité p. [154](#)
- [117] M. Zwiernik *et al.*, *General Optimality of the Heisenberg Limit for Quantum Metrology*. Phys. Rev. Lett. **105**, 180402 (2010). Cité p. [154](#)
- [118] Bruno M. Escher, private communication (2011). Cité p. [159](#)

## Résumé

Cette thèse explore le comportement quantique des appareils de mesure avec des illustrations en optique quantique. Il s'agit de la première étude des propriétés quantiques de mesures effectuées par n'importe quel type d'appareil de mesure. Nous montrons que les propriétés quantiques d'une mesure, comme son caractère projectif ou non-classique, ne peuvent être révélées que par les états quantiques d'une approche inhabituelle de la physique quantique : l'approche rétrodictive. Cette approche consiste à faire des rétro-prédictions sur les préparations d'états conduisant à un certain résultat de mesure, contrairement à l'approche prédictive avec laquelle nous faisons habituellement des prédictions sur les résultats d'une expérience.

En précisant les fondations mathématiques de l'approche rétrodictive, nous mettons en évidence une procédure générale de reconstruction des états quantiques de cette approche : les états rétrodictés. Nous avons réalisé ces reconstructions pour des détecteurs de photons uniques, très utilisés dans les protocoles de cryptographie quantique par exemple. Il s'agit de la première tomographie d'états quantiques entièrement fondée sur l'approche rétrodictive et des choix de préparation, contrairement aux reconstructions habituelles basées sur des résultats de mesure. Ces tomographies nous ont permis d'étudier expérimentalement l'influence du bruit sur les propriétés quantiques des mesures effectuées par ces détecteurs, en particulier leur transition d'un comportement fortement quantique vers un comportement plus classique.

Enfin, nous proposons un détecteur d'états « chat de Schrödinger » de la lumière qui sont des superpositions d'états quasi-classiques de la lumière. Dans une version moderne d'une expérience de pensée imaginée par Eugène Wigner en 1961, un tel dispositif permettrait à « l'Ami de Wigner » de détecter un chat de Schrödinger, contrairement à l'œil humain dont nous précisons certaines propriétés quantiques. Nous généralisons l'usage d'un tel détecteur non-classique à un protocole d'estimation de paramètre, entièrement fondé sur l'approche rétrodictive et des choix de préparation. Une telle procédure permettrait de réaliser des estimations optimales, en atteignant la limite de Cramér-Rao quantique, qui est un enjeu très actuel de la métrologie quantique.

**Mots clés :** Mesure quantique, rétrodiction quantique, état rétrodicté, tomographie quantique, projectivité, idéalité, fidélité, détectivité, photon unique, œil humain, chat de Schrödinger, Ami de Wigner, métrologie quantique, limite de Cramér-Rao quantique.

## Abstract

This thesis explores the quantum behavior of measurement apparatus with illustrations in quantum optics. This is the first study of quantum properties of measurements performed by any kind of devices. We show that the quantum properties of a measurement, such as its projective or non-classical character, are revealed only by the quantum states of an unusual approach of quantum physics: the retrodictive approach. This approach involves retro-predictions about state preparations leading to a given measurement result, contrary to the predictive approach with which we usually make predictions about the results of an experiment.

By clarifying the mathematical foundations of the retrodictive approach, we propose a general procedure for reconstructing the quantum states of this approach: the retrodicted states. We have realized these reconstructions for single-photon detectors, widely used in quantum cryptography for instance. This is the first tomography of quantum states totally based on the retrodictive approach and preparation choices, contrary to usual reconstructions based on measurement results. These tomographies enabled us to study experimentally the noise influence on the quantum properties of measurements performed by these detectors, in particular their transition from a strongly quantum behavior into a more classical behavior.

Finally, we propose a detector of “Schrödinger’s Cat” states of light, which are superpositions of incompatible quasi-classical states of light. In a modern version of a thought experiment proposed by Eugene Wigner in 1961, such a device could allow the “Wigner’s Friend” to detect a “Schrödinger’s Cat”, contrary to human eyes for which we precise some quantum properties. We generalize the use of such a non-classical detector to an estimation protocol, totally based on the retrodictive approach and preparation choices. Such a procedure could enable optimal estimations, by reaching the quantum Cramér-Rao bound, which is a very topical issue of quantum metrology.

**Keywords:** quantum measurement, quantum retrodiction, retrodicted state, quantum tomography, projectivity, ideality, fidelity, detectivity, single photon, human eyes, Schrödinger’s cat, Wigner’s Friend, quantum metrology, quantum Cramér-Rao bound.