HAL
open science

Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la Méthode Asymptotique Numérique

Sébastien Baguet

To cite this version:

Sébastien Baguet. Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la Méthode Asymptotique Numérique. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2001. Français. NNT : . tel-00593941

HAL Id: tel-00593941

https://theses.hal.science/tel-00593941

Submitted on 18 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II
ECOLE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE MARSEILLE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

Discipline : MECANIQUE
Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

Sébastien BAGUET

le 29 Octobre 2001

Titre :

STABILITÉ DES STRUCTURES MINCES ET SENSIBILITÉ AUX IMPERFECTIONS PAR LA MÉTHODE ASYMPTOTIQUE NUMÉRIQUE

Directeur de thèse :
Bruno COCHELIN

JURY

MM.	P.	LADEVEZE	Président
	A.	COMBESCURE	Rapporteur
	M.	POTIER-FERRY	Rapporteur
	B.	AUROIRE	Examinateur
	B.	COCHELIN	Examinateur
	O.	DEBORDES	Examinateur

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II
ECOLE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE MARSEILLE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

Discipline : MECANIQUE
Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

Sébastien BAGUET

le 29 Octobre 2001

Titre :

STABILITÉ DES STRUCTURES MINCES ET SENSIBILITÉ AUX IMPERFECTIONS PAR LA MÉTHODE ASYMPTOTIQUE NUMÉRIQUE

Directeur de thèse :
Bruno COCHELIN

JURY

MM.	P.	LADEVEZE	Président
	A.	COMBESCURE	Rapporteur
	M.	POTIER-FERRY	Rapporteur
	B.	AUROIRE	Examinateur
	B.	COCHELIN	Examinateur
	O.	DEBORDES	Examinateur

A mes parents,

à mes grands-parents

...

Remerciements

« La rédaction, c'est le meilleur moment de la thèse » m'a dit un jour J-C Lachat, alors que je comptais anxieusement le peu de jours qui me restaient pour la terminer. Avec le recul, je commence à mieux comprendre ce qui en fait un moment si particulier et si fort, et l'écriture des quelques lignes qui suivent ne peuvent que me conforter dans mon opinion.

Ce travail de recherche a été réalisé au sein de l'équipe Modèles Numériques du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille dans le cadre d'une bourse DGA/CNRS. Il ne se serait sans doute pas déroulé dans d'aussi bonnes conditions si je ne m'étais pas trouvé à la croisée de nombreux chemins, tous fertiles en rencontres plus bénéfiques les unes que les autres, tant sur le plan scientifique que personnel.

Ma reconnaissance et ma gratitude s'adressent en premier lieu à Bruno Cochelin qui a encadré ce travail. Il a su me faire confiance et m'a souvent laissé l'initiative tout en me faisant bénéficier de ses compétences et de son esprit critique. Sa bonne humeur et son entrain ont contribué au plaisir que j'ai pris à mener à bien ce travail. Je suis particulièrement fier de lui devoir ma formation de chercheur.

Pierre Ladevèze m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Je lui adresse ici mes plus sincères remerciements. Je tiens également à remercier Michel Potier-Ferry et Alain Combescure d'avoir bien voulu rapporter sur ce travail et pour l'intérêt qu'ils lui ont témoigné. Leur rigueur scientifique et leur recul par rapport au sujet m'ont été extrêmement profitables lors des discussions que nous avons eues. Je suis heureux que Bernard Auroire du CTSN Toulon ait pu participer à mon jury de thèse. Son expérience et sa vision claire des objectifs à atteindre ont permis de recadrer ce travail lorsqu'il le fallait et de le faire progresser de manière efficace. Je n'oublie pas non plus Jean-Marc Bourinet du CTSN qui a su transformer nos relations de travail en véritable amitié. Enfin, je tiens à témoigner ma gratitude à Olivier Débordes, à qui je dois bien plus qu'il ne peut l'imaginer.

Je voudrais présenter mes excuses à mon entourage qui a été victime de mon caractère lunatique, de mon enthousiasme et de mes doutes. J'ai parfois été pénible et ils n'en ont que plus de mérite. Je pense bien évidemment à ma famille, mais aussi à tous les joyeux drilles qui se sont succédés dans le désormais mythique bureau 110 et qui ont participé à la bonne humeur qui y règne constamment : Vincent Acary, Vincent Keryvin, Stéphane Méo et Franck Pérignon. A eux aussi, je leur dois énormément. J'y associe les autres membres de l'équipe : Jérôme Bikard, Stéphane Bourgeois, Christine Dumoulin, Sameh Elbououni, Isabelle Galliet, Hélène Magoariec, ainsi que Thierry Désoyer qui est un être d'exception. Je ne saurais oublier dans cette liste tous mes amis marseillais : Céline, Christine, Elise, François (Hum !), Jean-Marc, Laurent, Marie, Séverine, Stéphane et Sandra, Thomas, Véro, Vincent, Yann et Christine, et feu Taktik et Les Internautes Associés.

Je remercie enfin tous les membres du LMA avec qui j'ai eu le plaisir de travailler, ainsi que le personnel de l'ESM2, pour leur disponibilité et leur gentillesse, en particulier Olivier Pagé pour ses dons de magicien sous Linux et Djaffar Boussaa qui sait pourquoi.

SOMMAIRE

Introduction générale **1**

Partie I

Chapitre 1. Généralités sur la stabilité des structures minces **9**

1.1. Le phénomène de flambement 11

1.2. Aspects historiques 13

1.2.1. Les premiers pas 14

1.2.2. Les premières études théoriques 14

1.2.3. Des constatations expérimentales embarassantes 16

1.2.4. Les explications 18

1.2.5. Les développements modernes 21

1.3. Stabilité des structures élastiques 22

1.3.1. Courbe d'équilibre 22

1.3.2. Stabilité de l'équilibre 23

1.3.3. Points réguliers et points singuliers 23

1.3.4. Caractérisation des points limites et des bifurcations 24

1.3.5. Quelques exemples simples 25

1.4. Influence des imperfections 30

1.4.1. Sensibilité aux imperfections 31

1.4.2. Analyse de sensibilité 33

1.4.3. Imperfections et modes propres coïncidents 36

1.5. Bilan du chapitre 37

Chapitre 2. Modélisation mécanique des coques minces **39**
2.1. Formulation tridimensionnelle du problème non-linéaire géométrique 41
2.1.1. Elasticité non-linéaire tridimensionnelle 41
2.1.2. Cas d'une structure avec défaut initial 42
2.2. Extension aux coques en grandes rotations 43
2.2.1. Description géométrique et cinématique de la coque 45
2.2.2. Introduction de β_{33} par le concept EAS 47
2.3. Extension aux matériaux non-linéaires 48
2.3.1. Remarques préliminaires 48
2.3.2. Loi de type puissance 49
2.4. Discrétisation par éléments finis 51
2.5. Méthodes classiques de résolution du problème non-linéaire 53
2.5.1. Calcul de branche d'équilibre 53
2.5.2. Traitement des points singuliers 54
2.6. Bilan du chapitre 55

Chapitre 3. Méthode Asymptotique Numérique **57**
3.1. Introduction 59
3.2. Méthodes de perturbation et MAN 60
3.2.1. Les méthodes de perturbation en mécanique 60
3.2.2. Spécificités de la MAN 60
3.3. Résolution du problème non-linéaire géométrique 61
3.3.1. Formulation quadratique 62
3.3.2. Développements en séries 62
3.3.3. M.E.F. 64
3.3.4. Récapitulatif de l'algorithme 65
3.4. Méthode de continuation 66
3.4.1. Etude du résidu 67
3.4.2. Critère d'arrêt 68
3.4.3. Application 69
3.5. Amélioration la solution à l'aide d'approximants de Padé 69
3.5.1. Principe 69
3.5.2. Application 70
3.6. Structure avec défaut de forme initial 71
3.6.1. Ecriture matricielle 71
3.6.2. Application 71
3.7. Extension aux coques minces en grandes rotations 72

3.7.1. Ecriture matricielle 73
3.7.2. Récapitulatif de l'algorithme 74
3.7.3. Application 74
3.7.4. Structure avec défaut de forme initial 75
3.8. Extension aux matériaux non-linéaires 76
3.8.1. Ecriture quadratique 76
3.8.2. Développement asymptotique de la loi de comportement 77
3.8.3. Ecriture matricielle 78
3.8.4. Application 79
3.9. Cadre général d'écriture de la MAN 81
3.9.1. Tableau récapitulatif 81
3.9.2. Cadre général d'écriture de la MAN 83
3.10. Bilan du chapitre 84

Conclusion de la première partie **85**

Partie II

Préambule **89**

Chapitre 4. Détection des points singuliers **91**
4.1. Introduction 93
4.2. Comportement de la MAN en présence de bifurcations 93
4.2.1. Problématique 93
4.2.2. Réduction de la longueur de pas 96
4.2.3. Changement de branche 96
4.2.4. Un algorithme pour traverser les bifurcations 98
4.3. Indicateur de bifurcation 102
4.4. Calcul de l'indicateur par la M.A.N. 103
4.4.1. Développements en séries 103
4.4.2. M.E.F. 104
4.4.3. Récapitulatif de l'algorithme 105
4.5. Extension aux coques en grandes rotations 106
4.5.1. Ecriture matricielle 106
4.5.2. Récapitulatif de l'algorithme 107
4.6. Extension aux matériaux non-linéaires 108

4.7. Couplage avec la méthode de continuation 110
4.7.1. Algorithme 113
4.7.2. Exemples numériques 113
4.8. Bilan du chapitre et perspectives 118

Chapitre 5. Suivi de points limites **119**
5.1. Introduction 121
5.2. Problème augmenté 122
5.3. Méthode Asymptotique Numérique 122
5.3.1. Développements en séries 123
5.3.2. M.E.F. 124
5.3.3. Points réguliers et points singuliers de la courbe de suivi 124
5.4. Résolution du système linéaire augmenté 125
5.4.1. Principe et difficultés 125
5.4.2. Résolution à l'ordre 1 126
5.4.3. Résolution à l'ordre p 128
5.5. Deux types d'imperfections 130
5.5.1. Défaut de forme 130
5.5.2. Défaut d'épaisseur 135
5.6. Méthode de continuation 138
5.7. Applications 138
5.7.1. Panneau cylindrique avec défaut d'épaisseur 139
5.7.2. Panneau cylindrique avec défaut de forme 141
5.8. Bilan du chapitre et perspectives 144

Chapitre 6. Le code de calcul EVE **147**
6.1. Description 149
6.1.1. Fonctionnalités 149
6.1.2. Apports du FORTRAN 90 149
6.2. Organisation modulaire 150
6.3. Les développements 151
6.3.1. Les modules ajoutés 151
6.3.2. Une programmation aisée 153
6.4. Bilan du chapitre 154

Chapitre 7. Applications **155**
7.1. Coque cylindrique sous pression externe 157
7.2. Coque cylindrique en compression axiale 159

7.3. Poutre à section « en C » 162
7.4. Coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires 170

Conclusion générale **175**

Bibliographie **i**

Annexes **1**

Annexe A. Module tangent de comportement D_t et contrainte S^{res} **1**
A.1. Calcul de courbes d'équilibre 2
A.2. Détection des points singuliers 3
A.3. Suivi de points limites 4

Annexe B. Seconds membres pour le suivi de points limites **5**
B.1. Défaut de forme 6
B.2. Défaut d'épaisseur 7

Introduction générale

De tous temps, un des objectifs prioritaires en design de structures a été de concevoir les structures les plus résistantes possibles pour un poids minimum. De nos jours, l'existence de matériaux performants et l'utilisation de techniques d'optimisation de plus en plus perfectionnées permettent de bien remplir ces critères. Cependant, cela conduit très souvent à des structures minces et élancées pour lesquelles la stabilité peut devenir un problème primordial.

Il est donc important pour les concepteurs d'être capable de prévoir le comportement en flambement de ces structures. Toutefois, ces études de stabilité peuvent s'avérer très complexes car les structures optimisées sont généralement très sensibles aux imperfections. En effet, une imperfection peut entraîner le flambement de la structure pour une valeur bien inférieure à celle prédite par la théorie pour la même structure sans défaut. Concrètement, cela signifie qu'un défaut apparemment anodin peut avoir un effet catastrophique sur la structure en réduisant considérablement la charge critique qu'elle peut supporter avant son effondrement. De tels défauts sont très courants. Ils peuvent être induits par le processus de fabrication de la structure ou encore par un choc ou par la dégradation du matériau. On sera alors confronté, par exemple, à un défaut de forme ou d'épaisseur. C'est l'influence de ce type de défaut sur la réduction de charge critique de flambement que l'on se propose d'étudier dans ce mémoire.

Deux grandes classes d'analyses de sensibilité aux imperfections ont été développées durant les dernières décennies. La première est basée sur les développements asymptotiques de Koiter dans le voisinage d'une bifurcation. La seconde a vu le jour grâce à l'avènement de l'ordinateur et de la méthode des éléments finis. Elle consiste à suivre, à l'aide d'une méthode de continuation, l'évolution des points singuliers de la courbe d'équilibre de la structure en fonction de l'amplitude de l'imperfection. C'est cette dernière méthode qui a été retenue dans ce mémoire.

Ainsi, notre analyse de sensibilité est basée sur la résolution d'un système d'équations dit *augmenté*, dans lequel l'amplitude du défaut présent dans la structure est une variable additionnelle. Outre les équations d'équilibre classiques, ce système augmenté contient une équation supplémentaire qui caractérise les points d'équilibre singuliers. Ce sont ces points singuliers qui déterminent la charge critique de la structure. Il suffit donc d'étudier leur évolution en fonction de l'amplitude de l'imperfection pour connaître le degré de sensibilité de la structure aux im-

perfections et obtenir précisément la courbe de réduction de la charge critique, très utile pour le dimensionnement. Ce système augmenté a déjà été étudié numériquement par quelques auteurs à l'aide de méthodes incrémentales-itératives classiques de type NEWTON-RAPHSON.

Une des originalités de cette étude réside dans l'utilisation de la Méthode Asymptotique Numérique (M.A.N.) pour la résolution numérique du problème. Cette méthode, qui a prouvé son efficacité et sa robustesse à maintes reprises, couple les anciennes techniques de perturbation avec la méthode des éléments finis. Notre étude s'inscrit donc dans un cadre résolument numérique, avec comme objectif final l'intégration de tous les algorithmes développés dans le code de calcul « maison » EVE.

Les autres points importants qui se sont dégagés au cours de ce travail de thèse sont les suivants :

- L'analyse de sensibilité envisagée nécessite des algorithmes adaptés à la continuation de courbes d'équilibre, ainsi qu'à la détection de points singuliers et à leur suivi.
- L'étude du flambement et du post-flambement des coques minces passe par la mise au point d'un modèle mécanique réaliste. Le modèle retenu s'appuie sur une formulation de coque tridimensionnelle performante, prend en compte les non-linéarités géométriques, et intègre une loi de comportement non-linéaire de type puissance basée sur la relation de RAMBERG-OSGOOD.
- Le couplage des algorithmes de continuation, de détection et de suivi avec ce modèle mécanique a été effectué en introduisant les difficultés une à une. Il en a été de même lors de la résolution par la Méthode Asymptotique Numérique. Cela a permis de mettre en évidence les composantes propres à chaque difficulté et de dégager un cadre général d'écriture de la M.A.N.
- La mise au point de l'algorithme de détection des points singuliers a été l'occasion d'une discussion sur le comportement particulier de la M.A.N. en présence de bifurcations. Quelques éclaircissements en résultent et permettent de mieux cerner ce comportement, jusqu'alors inexpliqué et qui pouvait sembler pathologique.
- Deux types de défauts courants ont été retenus pour l'analyse de sensibilité : les défauts de forme et défauts d'épaisseur. Leur modélisation repose sur la formulation de coque 3D adoptée, ce qui permet d'envisager des imperfections d'ensemble ou localisées.

Ce mémoire s'organise en deux parties.

La première partie propose tout d'abord un état de l'art sur la stabilité des structures minces (chapitre 1). Une attention particulière est portée sur l'influence des imperfections initiales. Les formulations variationnelles des modèles mécaniques retenus sont ensuite présentées (chapitre 2). Pour finir, leur mise en œuvre numérique et leur résolution par la MAN dans le cadre de la conti-

nuation de branches d'équilibre sont détaillés (chapitre 3). Pour résumer, cette première partie présente tous les outils théoriques et numériques qui étaient à notre disposition au début de cette thèse, et qui sont à la base de tous les développements qui font l'objet des chapitres qui suivent.

La seconde partie est plutôt consacrée aux contributions personnelles. Dans un premier temps, un algorithme de détection des points singuliers, basé sur l'indicateur de bifurcation introduit par BOUTYOUR, est exposé (chapitre 4). Il est ici étendu aux coques en grandes rotations et aux matériaux non-linéaires, et couplé à la méthode de continuation présentée dans le chapitre précédent. Puis, l'analyse de sensibilité est abordée (chapitre 5). Le système augmenté sur lequel elle repose est présenté, avant d'être lui aussi étendu aux coques en grandes rotations et aux matériaux non-linéaires. Sa résolution, qui fait appel à une technique particulière, est détaillée puis validée à l'aide d'un exemple numérique académique qui a servi de référence tout au long des chapitres précédents. L'intégration modulaire de ces algorithmes dans le code de calcul EVE ainsi que les spécificités de ce code sont ensuite exposées (chapitre 6). Pour finir, une large place est consacrée à des applications qui mettent en évidence la robustesse et la fiabilité de l'analyse de sensibilité qui a été développée (chapitre 7).

Le schéma de la figure 1 de la page suivante permet d'avoir une vue d'ensemble sur l'organisation de ce mémoire. Les couleurs correspondent aux différents chapitres et les flèches indiquent les ordres de lecture possibles. Ce schéma constitue également un récapitulatif des fonctionnalités qui ont été intégrées au code EVE.

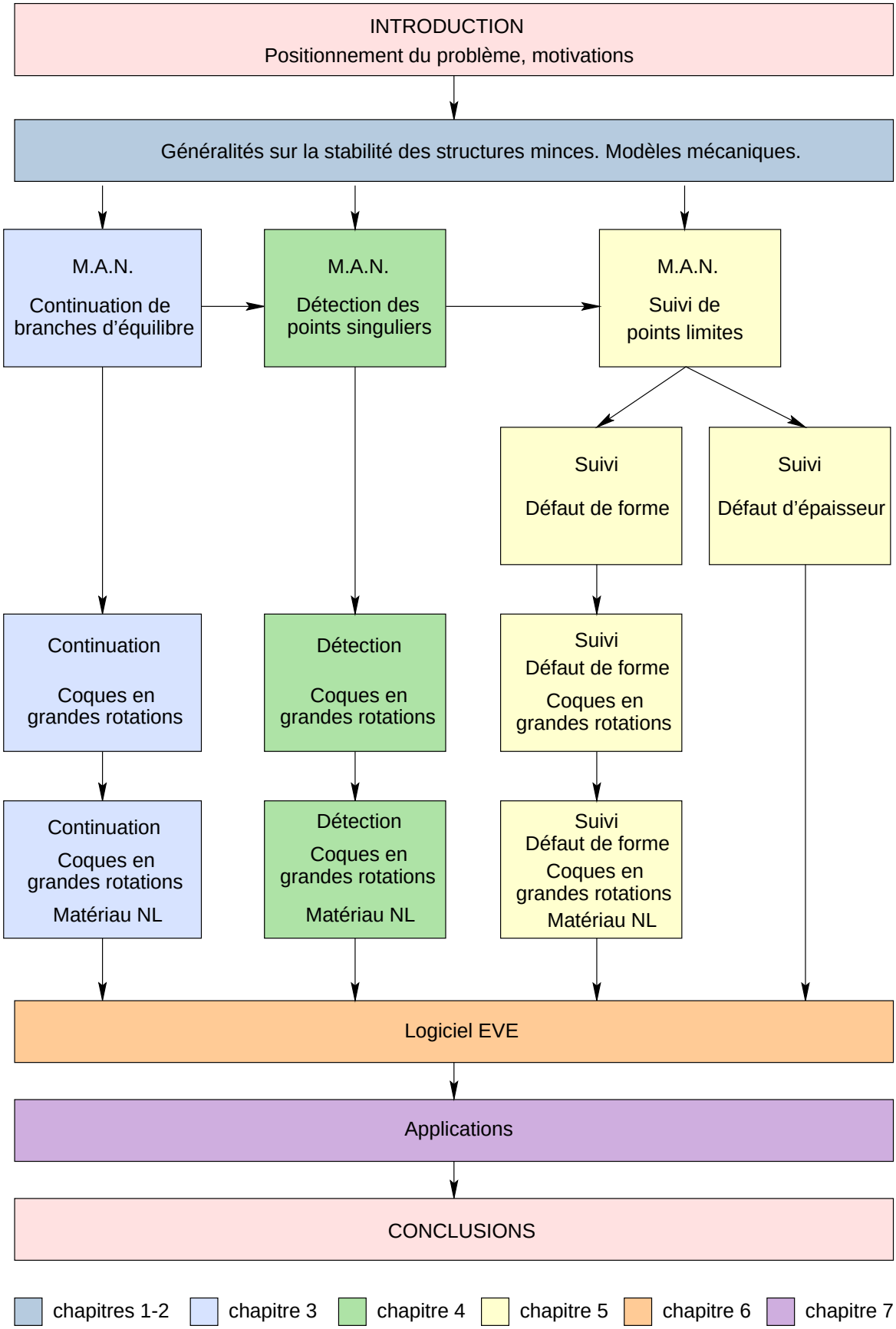


FIGURE 1 – *Plan de la thèse. Les flèches suggèrent les ordres de lecture possibles.*

Première partie

Préambule

L'objectif de cette première partie est double. D'une part, nous tenterons d'esquisser un état de l'art sur le domaine qui nous intéresse. D'autre part, nous présenterons les modèles mécaniques et les méthodes numériques qui sont à la base de l'étude de sensibilité aux imperfections que nous mettrons en œuvre dans la deuxième partie.

La littérature concernant le flambement des stuctures minces est très dense. On dénombre pas moins de plusieurs milliers d'articles sur le sujet depuis le début du siècle. Il ne s'agira pas ici de dresser une revue exhaustive de ces travaux. On cherchera plutôt à en dégager les plus marquants et les plus représentatifs du domaine qui nous intéresse. Ainsi, dans un premier temps, nous verrons comment est née et s'est développée la théorie du flambement au cours du siècle passé, et comment la persévérance de nombreux chercheurs a permis de cerner un point important : la forte sensibilité des structures minces et élancées aux imperfections et la difficulté de la modéliser.

Le deuxième chapitre est consacré aux modèles mécaniques (continus et discrets) retenus pour l'analyse de sensibilité. Il débute par une présentation détaillée des équations non-linéaires 3D qui décrivent les courbes d'équilibre d'une structure avec ou sans défaut initial. Afin d'obtenir une modélisation adaptée aux structures minces et plus réaliste, une cinématique de coque tridimensionnelle basée sur le concept EAS *Enhanced Assumed Strain* sera utilisée, puis le modèle sera enrichi à l'aide d'une loi de comportement non-linéaire. La discrétisation du problème non-linéaire continu par la méthode des éléments finis permettra ensuite d'obtenir une représentation matricielle du problème à résoudre. Le calcul des courbes solutions s'effectue traditionnellement à l'aide de méthodes de prédiction-correction de type NEWTON-RAPHSON. Ce ne sont pas ces méthodes que nous utiliserons ici, mais il nous a semblé important d'en exposer, même brièvement, le principe afin de mieux comprendre l'intérêt de la méthode que nous nous proposons de mettre en œuvre.

La présentation de la Méthode Asymptotique Numérique fera l'objet du troisième et dernier chapitre de cette première partie. Y seront exposés les résultats classiques et principes fondamentaux de cette méthode (développements en séries, méthode de continuation,...) mais aussi quelques résultats non publiés jusqu'à présent (allure caractéristique des courbes de résidu, prise en compte d'un défaut de forme initial). L'introduction des difficultés (défaut de forme, concept

EAS, non-linéarités matérielles) se fera par ordre croissant, en mettant l'accent sur les nouveaux termes introduits à chaque étape. L'idée est de dégager un cadre général d'écriture de la MAN, valable quel que soit le couplage des non-linéarités qui entrent en jeu.

CHAPITRE 1

Généralités sur la stabilité des structures minces

Ce chapitre propose un état de l'art sur la stabilité des structures minces. Dans un premier temps, un aperçu historique axé sur le flambement des structures minces permet de dresser un bilan des travaux réalisés dans ce domaine au cours du XXe siècle et de mieux cerner les difficultés inhérentes à ce problème : non-linéarités géométriques, importance des imperfections, ...
Puis les notions d'équilibre et de stabilité élastique sont introduites et illustrées à l'aide d'exemples académiques qui mettent en évidence la nécessité d'outils numériques bien adaptés. Pour finir, les deux grandes classes de méthodes permettant de mener une analyse de sensibilité aux imperfections sont présentées et discutées.

Plan du Chapitre 1

1.1. Le phénomène de flambement 11

1.2. Aspects historiques 13

1.2.1. Les premiers pas 14

1.2.2. Les premières études théoriques 14

1.2.3. Des constatations expérimentales embarassantes 16

1.2.4. Les explications 18

1.2.5. Les développements modernes 21

1.3. Stabilité des structures élastiques 22

1.3.1. Courbe d'équilibre 22

1.3.2. Stabilité de l'équilibre 23

1.3.3. Points réguliers et points singuliers 23

1.3.4. Caractérisation des points limites et des bifurcations 24

1.3.5. Quelques exemples simples 25

1.3.5.a. Poutre en compression 25

1.3.5.b. Plaque en compression 27

1.3.5.c. Coque cylindrique en compression axiale 28

1.3.5.d. Panneau cylindrique sous chargement ponctuel 29

1.4. Influence des imperfections 30

1.4.1. Sensibilité aux imperfections 31

1.4.2. Analyse de sensibilité 33

1.4.3. Imperfections et modes propres coïncidents 36

1.5. Bilan du chapitre 37

1.1 Le phénomène de flambement

Lorsqu'une poutre est chargée en compression (figure 1.1), elle se contracte longitudinalement. A partir d'une certaine valeur de la charge, deux phénomènes peuvent survenir. Si la poutre est

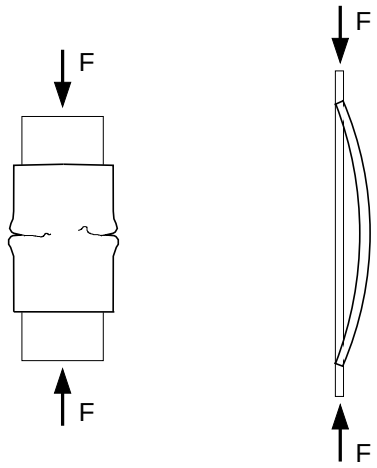


FIGURE 1.1 – *Structures en compression : poutre massive (à gauche) et poutre élancée (à droite).*

suffisament massive, elle va s'écraser jusqu'à rupture. Il s'agit alors d'un problème de ruine du matériau. Si au contraire, la poutre est mince et élancée, elle peut fléchir brutalement. Dans ce dernier cas, on parle de flambement. Il s'agit alors d'un phénomène de stabilité, purement géométrique, complètement dissocié de toute considération de ruine du matériau.

Dans une poutre massive en béton armé, les deux phénomènes peuvent survenir : les armatures en acier flambent alors que le béton se fissure et rompt (figure 1.2). Il convient de dimensionner une telle structure en tenant compte de ces deux phénomènes, i.e. en utilisant des critères de stabilité et de résistance pour le matériau.

FIGURE 1.2 – *Poutre en béton armé en compression : ruine par flambement et rupture fragile.*

L'analyse du flambement est un problème relativement récent, en ce sens que les notions de stabilité n'ont préoccupé les constructeurs que depuis une centaine d'années environ. Jusque là,

les constructions étaient relativement massives et présentaient peu de risques de flambement. A partir du moment où la production de matériaux très résistants a permis de construire des structures avec beaucoup moins de matière, et donc plus élancées qu'auparavant, la stabilité est devenue un problème important.

Lorsque les techniques de production ont permis d'obtenir des plaques [1] et des coques minces [2], la stabilité est devenue un problème crucial. Les coques minces sont utilisées dans la plupart des constructions modernes. Avions, navettes spatiales, sous-marins, cheminées de refroidissement de raffineries, réacteurs nucléaires, silos à grains, réservoirs de stockage, pipelines, ou encore plate-formes offshores en sont les exemples les plus courants. A cause de la faible épaisseur de ces structures, le flambement est la principale cause de ruine. Il est par conséquent très important que leur comportement avant et après flambement soit parfaitement connu, ceci afin de mettre au point des méthodes de dimensionnement appropriées.

Dans ce but, de nombreux tests sont régulièrement menés en laboratoire. Les figures qui suivent présentent des expériences réalisées sur des cylindres sous compression axiale (figure 1.3) et sous vide interne [3] (figure 1.4). Les modes de flambement obtenus sont relativement différents les uns des autres, ce qui donne une idée de la complexité du phénomène. Dans l'exemple précédent de la poutre en béton (figure 1.2), on aurait voulu éviter le flambage [4]. Cependant, ce phénomène est quelque fois recherché : certaines pièces de chassis de voiture sont dimensionnées

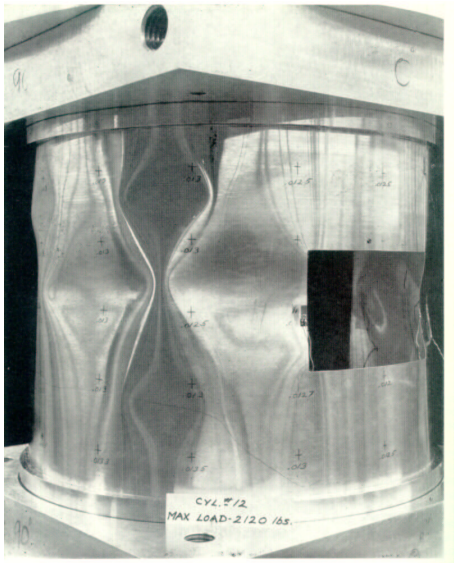


FIGURE 1.3 – *Cylindre avec ouvertures rectangulaires sous compression axiale, après flambement (d'après [*ALMROTH et HOLMES, *1972]).*

1. Surfaces planes.
2. Surfaces courbes avec un diamètre très grand par rapport à l'épaisseur.
3. Chargement équivalent à une pression externe uniforme.
4. Dans tout le document, on utilisera indifféremment les termes *flambement* et *flambage* pour désigner le même phénomène.

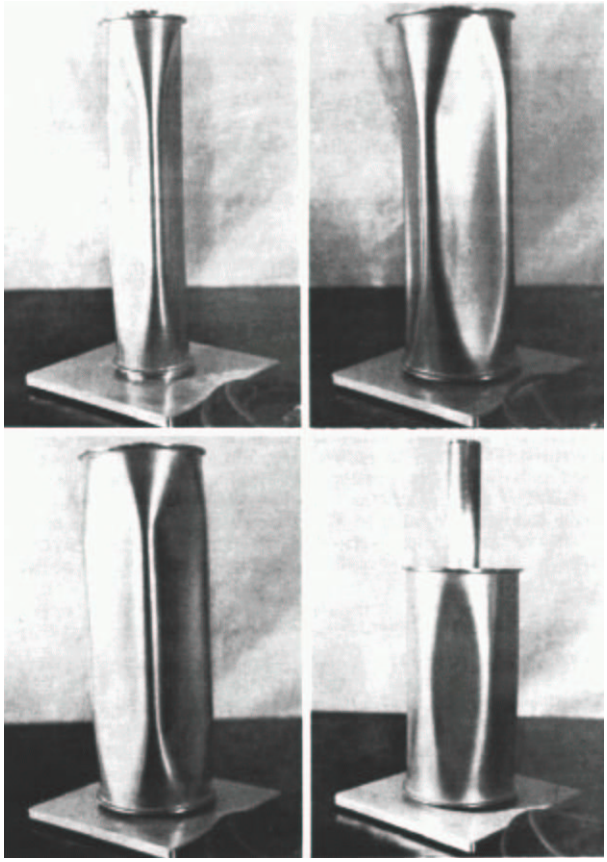


FIGURE 1.4 – *Modes de flambement de cylindres sous vide interne (d'après [*BAZANT et CEDOLIN*, 1991]).*

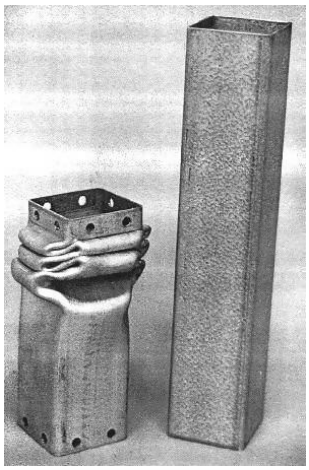


FIGURE 1.5 – *Poutre métallique deformée par flambage plastique.*

pour flamber. Leur capacité à absorber le maximum d'énergie lors d'un choc (figure 1.5) peut sauver la vie des passagers.

1.2 Aspects historiques

La détermination de la charge critique de flambement des coques minces ainsi que leur comportement après le flambement ont fait l'objet de beaucoup d'études et de recherches, aussi bien expérimentales qu'analytiques ou numériques. Les résultats qui découlent de ces études sont très importants car ils permettent la réalisation de structures sûres, c'est-à-dire sans risque de flambement lors de leur utilisation courante.

Il n'est pas étonnant, dès lors, que l'on dénombre plusieurs milliers d'articles relatifs à ce sujet, certains très généraux présentant un état de l'art dans ce domaine, et beaucoup d'autres abordant des problèmes spécifiques qui intéressent les constructeurs. Parmis ces articles généraux, on peut citer ceux de NOOR [1990] sur les coques (plus de 500 références), et de SIMITSES [1986] (une centaine de références), CALLADINE [1995], TENG [1996] (300 références), NEMETH et STARNES [1998] ou SCHMIDT [2000] sur la stabilité des coques, et celui plus général de BAZANT [2000] sur

la stabilité des structures.

Dans l'aperçu historique qui suit, on s'intéressera essentiellement aux coques cylindriques chargées axialement car elles ont motivé les premières études théoriques et, plus généralement, parce qu'il faut bien reconnaître que c'est de leur étude qu'ont découlé les découvertes les plus importantes dans le domaine de la stabilité des coques minces.

1.2.1 Les premiers pas

D'un point de vue historique, le flambement et la notion de stabilité voient le jour avec l'analyse d'une poutre flexible en compression axiale publiée en latin par EULER [1744] en annexe de son ouvrage sur le calcul des variations. Cet exemple académique est aujourd'hui présent dans presque tous les ouvrages traitant de stabilité des structures ([TIMOSHENKO et GERE, 1961] par exemple).

Quinze ans après, LAGRANGE résoud le même problème d'une manière plus complète, par une méthode purement analytique. Les équations de LAGRANGE continuent d'ailleurs de jouer un rôle important en mécanique. De ces travaux découle le concept de minimum de l'énergie potentielle pour la stabilité d'un système conservatif. Son immense ouvrage *Mécanique analytique* [LAGRANGE, 1788] ne fut pourtant publié que 30 ans plus tard car il ne trouvait aucun éditeur[5].

Un siècle plus tard, pendant la révolution industrielle, l'utilisation intensive de l'acier permet de construire des structures minces et élancées, essentiellement en génie civil (figure 1.6). L'intérêt de telles structures réside dans leur excellent rapport résistance/poids. Toutefois, étant donné leur faible épaisseur, elles sont très souvent sujettes à des ruines par effondrement dues au flambement. C'est à partir de ce moment que la stabilité devient un problème primordial.

L'étude de la stabilité des coques minces a débuté bien après celle des poutres ou des plaques. Cela peut s'expliquer par le fait que les techniques nécessaires à la production d'éléments structurels minces à surface courbe (cylindres, tubes, ...) sont apparues plus tard que celles nécessaires à la production de surfaces minces planes (plaques, ...). Mais cela peut aussi tout simplement s'expliquer par le degré de complexité nettement plus élevé des théories de coques.

1.2.2 Les premières études théoriques

Les premières études théoriques remontent au début du XXe siècle, lorsque LORENZ [1908], TIMOSHENKO [1910] et SOUTHWELL [1914] trouvent la charge critique d'une coque cylindre mince sous compression axiale. L'équation donnée par SOUTHWELL était très générale et reliait la contrainte critique de flambement, la géométrie de cylindre (rayon, épaisseur), les propriétés du matériau et le phénomène de flambement (nombre de lobes dans la structure flambée). Pour un cylindre avec des conditions aux limites de support simple[6] sous compression axiale, l'équation

5. On peut trouver des biographies ainsi que le détail des travaux d'EULER et de LAGRANGE dans [MARIE, 1886], disponible sur le site web de la BNF *www.gallica.fr*

6. Ou alors pour un cylindre infiniment (très) long, pour lequel l'influence des conditions aux limites est négligeable

FIGURE 1.6 – *Le viaduc Crumlin, qui enjambe la rivière Ebbw Vale, fut l'un des premiers viaducs totalement en acier. Il fut mis en service en 1857 alors que les exploitations minières du Pays de Galles étaient en pleine expansion. Long de 510 mètres et haut de 66 mètres, il demeura le plus haut viaduc ferroviaire du Royaume-Uni jusqu'à sa fermeture en 1964 à cause du poids devenu excessif des locomotives de l'époque (photo de 1908).*

de SOUTHWELL se simplifie et permet de trouver la plus petite contrainte critique S_{cr} (celle qui correspond au premier mode de flambement)

$$S_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\,\frac{t}{r} \tag{1.1}$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau, t est l'épaisseur et r le rayon de la coque.

La plupart du temps, c'est à cette équation que l'on fait référence lorsqu'on parle de *théorie classique* pour le flambement d'un cylindre en compression. Cette équation, ainsi que toutes les théories linéaires dont elle découle, est basée sur l'hypothèse très forte qu'il n'existe que des contraintes de membrane dans le cylindre lors du préflambage. Cela implique que le cylindre est libre de se dilater dans la direction radiale pendant la compression, et ce de manière constante sur toute sa longueur c'est-à-dire même au niveau des extrémités. D'un point de vue mathématique, ce problème de flambement se réduit à un simple problème de valeurs propres.

D'autres études théoriques suivirent rapidement : cylindre sous pression externe par VON MISES [1914], sphère sous pression externe, ...

Une période de travail intensif sur le flambement linéaire des coques sous chargements divers suivit ces premiers travaux théoriques dans les années 30. On peut retenir les noms de FLÜGGE [1934], TIMOSHENKO [1936] et DONNELL [1934], auteur de l'une des plus célèbres théories pour le flambement des coques cylindriques[7].

Dans les travaux de FLÜGGE et de TIMOSHENKO, le problème de flambement revient à résoudre simultanément trois équations différentielles qui relient les trois composantes de la

7. Connue sous le nom anglais « *shallow shell theory* »

surface moyenne de la coque u, v et w suivant les directions axiale, circonférentielle et radiale respectivement. DONNELL a simplifié ce problème en ne conservant que les termes du premier ordre, omettant ainsi les termes d'ordre supérieur relativement peu importants selon lui. Il a ensuite tranformé les trois équations simplifiées en une seule équation différentielle du huitième ordre en w, couramment appelée *équation de* DONNELL. Cette équation a connu un succès important car elle est relativement simple à résoudre. BATDORF [1947] en a proposé une version simplifiée et a montré qu'elle donnait des résultats comparables à ceux obtenus avec les autres théories (TIMOSHENKO, ...) et à ceux provenants de tests expérimentaux, sauf dans le cas d'un chargement axial.

1.2.3 Des constatations expérimentales embarassantes

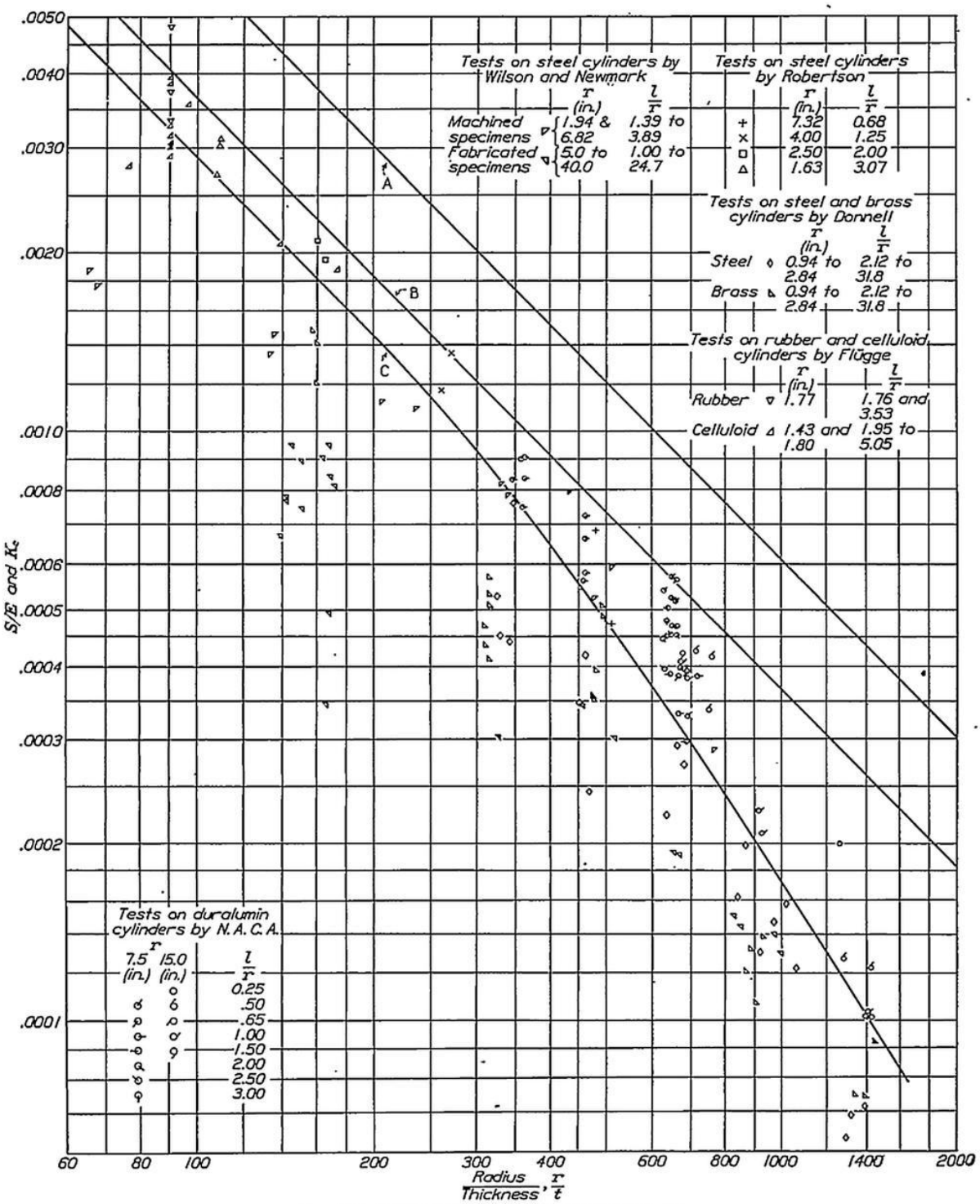
Dans le même temps, les premiers tests expérimentaux sont menés sur des cylindres en compression axiale par ROBERTSON [1929], FLÜGGE [1932], LUNDQUIST [1933], WILSON et NEWMARK [1933] et DONNELL, dont les résultats sont reportés dans [LUNDQUIST, 1933].

Dans son rapport, LUNDQUIST compare les tests expérimentaux des auteurs précédents avec les solutions théoriques données par diverses approximations de l'équation de SOUTHWELL, parmi lesquelles celle de ROBERTSON (figure 1.7).

Toutefois, quel que soit le degré de précision des différentes approximations utilisées, LUNDQUIST constate qu'aucune d'entre elles ne donne de bons résultats en comparaison avec les tests expérimentaux : les charges critiques obtenues lors des tests sont souvent bien plus faibles que ce que prédit la théorie classique. Il avance que ces écarts importants sont dus essentiellement aux imperfections présentes dans les cylindres expérimentaux. Pour cela, il s'appuie sur les tests de WILSON et NEWMARK qui ont comparé des cylindres usinés « *machined specimens* » et des cylindres assemblés par soudure ou rivetage « *fabricated specimens* ». En effet, on constate aisément sur la figure 1.7 que tous les points correspondant aux cylindres assemblés (moins parfaits que les cylindres usinés) sont tous en-dessous de la courbe C. Une autre cause pour les écarts constatés, selon LUNDQUIST, tient à la mauvaise (car délicate) imposition des conditions aux limites lors des tests.

Finalement, LUNDQUIST propose d'utiliser la formule très simple $S_{cr} = K_c E$ pour dimensionner les cylindres, tout en recommandant d'estimer le plus précisément possible le degré d'imperfection de la structure afin d'ajuster la constante K_c. Toutefois, même des coefficients de sécurité de l'ordre de quatre, appliqués à la charge critique du cylindre, n'assuraient pas toujours la résistance de la struture au flambement. Il semblait donc clair que ces théories ne pouvaient pas être utilisées pour le dimensionnement des cylindres en compression axiale.

Les écarts importants entre les solutions théoriques et les charges critiques des strutures « réelles » ont véritablement été admis par tous à partir du moment où de très nombreuses campagnes d'essais systématiques sur le flambement de cylindres ont été menées. La figure 1.8 récapitule quelques uns de ces essais. On y voit très nettement que tous les résultats expérimentaux sont largement en-dessous des prédictions de la *théorie classique*.



Curve A, Robertson cylinders; graph of equation (6) with $\sigma=0.3$
Curve B, Cylinders of infinite length, graph of equation (8) with $\sigma=0.3$
Curve C, Lower limit of test data for the most perfect test specimens
*FIGURE 7—Logarthmic plot of S/E and K_c against r/t.

FIGURE 1.7 – *Courbes logarithmiques de* $\frac{S_{cr}}{E} = f(\frac{r}{t})$ *pour des cylindres sous compression axiale (d'après [*LUNDQUIST, *1933]).*

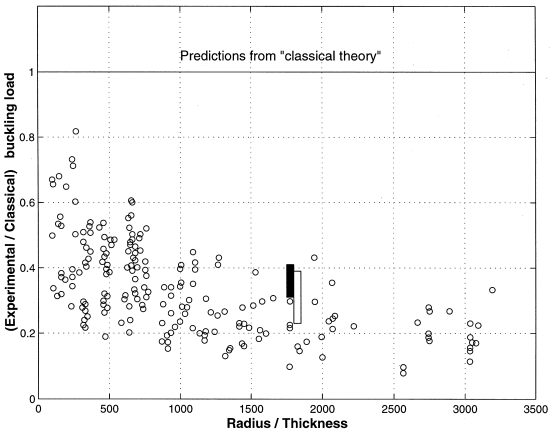


FIGURE 1.8 – *Répartition des charges critiques de flambement obtenues pour des cylindres avec extrémités fermées et soumis à une pression axiale (d'après [*BRUSH et ALMROTH, *1975]). Les données sont normalisées par rapport à la charge critique de flambement prédite par la théorie classique* (1.1).

1.2.4 Les explications

Dès lors, la plupart des travaux qui suivirent, aussi bien analytiques qu'expérimentaux, consistèrent à expliquer ces différences. Dans ces nouvelles études, les hypothèses simplificatrices initiales furent corrigées et les écarts furent attribués aux effets des déformations qui précèdent le flambement, aux effets des conditions aux limites ou encore aux effets des imperfections initiales.

Déformations de pré-flambage Comme on l'a déjà précisé dans le paragraphe 1.2.2, les théories linéaires classiques supposent que l'on n'a que des efforts de membrane dans le cylindre avant le flambement. Cela implique que les extrémités du cylindre sont libres de se déplacer radialement, et que ce déplacement est le même tout le long du cylindre. Une telle expansion n'est généralement pas possible pendant les expériences car le cylindre est comprimé entre deux plaques et, même si le banc d'essai est parfaitement lubrifié, il existe toujours du frottement entre les extrémités du cylindre et les plaques. Cela engendre des déformations dans le voisinage des extrémités et des efforts de flexion, en plus de ceux de membrane, lors du pré-flambage. STEIN [1964] a montré qu'en fixant les extrémités du cylindre en compression pour empecher les déplacements radiaux, la charge critique n'était réduite que de 10% par rapport à sa valeur classique. Les déformations lors du pré-flambage ne peuvent donc expliquer à elles seules les écarts constatés.

Conditions aux limites Une autre cause possible concerne l'effet des conditions aux limites. A la suite de nombreuses expériences, HOFF [1966] arrive à la conclusion que les variations constatées entre toutes les expériences menées en laboratoire proviennent des différentes façons

d'imposer les conditions d'appui simple (hypothèse de la *théorie classique*). Toutefois, il ajoute que cela ne peut suffire à expliquer les écarts énormes avec les prédictions de la théorie et suggère que la cause principale est ailleurs. Dans sa thèse, ABDELMOULA [1989] montre que, pour des cylindres sous pression, certaines conditions aux limites n'agissent que sur la couche limite localisée aux bords de la coque, alors que d'autres peuvent agir plus loin des bords et modifier le mode de flambement de la coque.

Imperfections initiales Les contributions les plus importantes dans le domaine de la sensibilité aux imperfections sont très certainement celle de KOITER [1945] qui a énoncé la *théorie du post-flambement initial*[8] pour les strutures élastiques, puis celles de VON KARMAN et TSIEN [1941] et DONNELL et WAN [1950]. les premiers à avoir calculé les courbes d'équilibre complètes (pré- et post-flambement) pour des cylindres en compression axiale, aussi bien pour des géométries parfaites qu'imparfaites, en utilisant une version non-linéaire de la théorie de DONNELL et la théorie de KOITER.

Dans sa thèse, KOITER établit une nouvelle théorie de la stabilité élastique. Il se place au voisinage du point de bifurcation (obtenu par la théorie classique), et construit un espace formé de tous les modes propres possible pour cette charge critique. A l'aide de développements asymptotiques, il montre alors non seulement comment trouver la forme des courbes de post-flambement dans cet espace, en considérant les dérivées premières de l'énergie potentielle, mais aussi comment caractériser l'état d'équilibre (stable ou instable) le long de ces courbes en considérant les dérivées secondes[9].

Il découvre également que, dans le cas d'une bifurcation multiple[10], les modes de flambement peuvent interagir de manière non-linéaire pour produire une très forte instabilité, en ce sens que la courbe d'équilibre correspondante présente, au niveau du point limite, une brusque perte de rigidité et une pente négative très forte au début du post-flambement (figure 1.9). Il caractérise alors la sensibilité d'une structure aux imperfections d'après la pente initiale de la branche de post-flambement. Plus cette pente est forte, plus la réduction de charge critique due à une imperfection sera sévère (figure 1.9) et, donc, plus la sensibilité aux imperfections sera élevée. Il en déduit que, dans le cas des cylindres sous compression axiale, la sensibilité aux imperfections est très forte. C'est ce qui explique les écarts importants entre les théories linéaires et les résultats des expérimentateurs qui ne disposaient pas de structures parfaites (présence inévitable de défauts dus au procédé de fabrication ou à la manutention).

KOITER a ensuite directement étudié les structures imparfaites. Son approche le lui permettait sans difficulté car il lui suffisait d'utiliser un schéma de perturbation très simple pour voir l'effet

8. Traduction de l'anglais « *initial post-buckling theory* », formule consacrée pour désigner les travaux publiés dans la thèse de KOITER.

9. Un résultat important découle de cette théorie : il existe toujours au moins une branche d'équilibre instable qui émerge d'un point de bifurcation.

10. Bifurcation pour laquelle la théorie classique prédit plusieurs modes de flambement possibles avec la même charge critique. D'un point de vue mathématique, celà revient à dire que le problème admet une valeur propre multiple. Ce cas est très fréquent pour les cylindres en compression axiale.

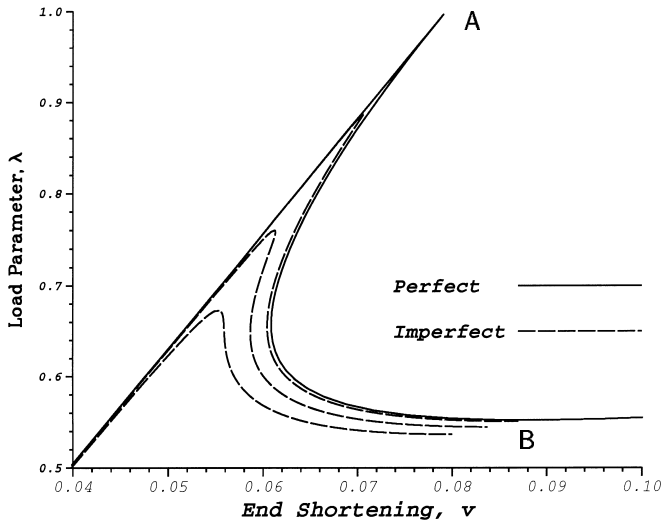


FIGURE 1.9 – *Courbes d'équilibre d'un cylindre imparfait sous compression axiale, pour différentes valeurs de l'imperfection, d'après [*KHEYRKHAHAN et PEEK, *1999].*

de l'introduction d'une imperfection géométrique de forme modale dans la structure. Cela lui a permis de donner des formules explicites pour la réduction de charge critique d'une coque cylindrique en fonction de l'amplitude de l'imperfection[11].

Même si la théorie de KOITER est limitée au voisinage immédiat du point de bifurcation et aux imperfections initiales de faible amplitude, elle a été utilisée par de très nombreux chercheurs par la suite. KOITER l'a lui-même améliorée pour traiter des imperfections plus générales (différentes des modes de flambement) ou localisées, à l'aide de séries de FOURIER.

Les développements qui ont suivi n'ont pas fondamentalement modifié la théorie de Koiter. Les travaux de l'école anglaise (THOMPSON et HUNT [1973]) reposent essentiellement sur des considérations énergétiques (théorème de l'énergie potentielle) dans le cadre de systèmes de dimension finie (discrets). Aux Etats-Unis, les développements se sont quant à eux basés sur le principe des travaux virtuels dans le cadre de systèmes continus (BUDIANSKY et HUTCHINSON [1966], HUTCHINSON et KOITER [1970], BUDIANSKY [1974], HUTCHINSON [1974]). D'un point de vue mathématique, la démonstration rigoureuse de cette théorie est due à POTIER-FERRY [1982, 1985].

L'*International Journal of Solids and Structures* a récemment rendu hommage à KOITER a travers un numéro spécial dont la préface [ARBOCZ *et al.*, 2000] retrace la carrière de ce brillant chercheur.

11. Les fameuses formules dites *en puissance* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{2}{3}$ (cf. § 1.4.2)

1.2.5 Les développements modernes

Désormais capables de calculer analytiquement la courbe de post-flambement de certaines structures, l'idée des concepteurs est alors d'utiliser le minimum de post-flambement de la structure parfaite (point B de la figure 1.9) comme estimation de la charge critique de flambement pour le dimensionnement des structures. On comprend pourquoi à la vue de la figure 1.9 : quelle que soit l'amplitude du défaut présent dans la structure, on est sûr que cette estimation sera inférieure à la charge critique « réelle » de la structure imparfaite.

Il s'en suit une longue période consacrée au calcul de ce minimum de post-flambement de la structure parfaite. Les améliorations successives sont dues essentiellement à la précision des théories non-linéaires de coques utilisées. Parmis tous ces travaux, on peut citer ceux de HOFF *et al.* [1966].

Cette période a également amené une meilleure compréhension des mécanismes physiques qui différencient les structures très sensibles aux imperfections et celles qui le sont moins : les contributions différentes des énergies de membrane et de flexion dans la résistance au flambement initial. Le pré-flambage d'un cylindre sous compression axiale est dominé presque exclusivement par des contraintes de membrane, ce qui rend ce problème très sensible aux imperfections. Un cylindre sous pression externe est, quant à lui, soumis à des efforts de flexion et à des efforts de membrane. C'est ce qui explique qu'il est moins sensible aux imperfections. On peut retrouver ces constatations dans un article récent de YAMADA et CROLL [1999] qui les corrobore avec des résultats numériques.

Les années 60 voient aussi le développement de l'aéronautique et des programmes spatiaux. Ces deux domaines ont financé énormément de recherches dans le cadre de la stabilité des coques minces. Sur le plan théorique, BUDIANSKY et AMAZIGO [1968] proposent une méthode d'analyse des cylindres sous pression externe, basée sur la théorie de post-flambement de KOITER et les équations non-linéaires de KARMAN-DONNELL. Des campagnes d'essais sur les éléments structuraux qui entrent dans les constructions aéronautiques sont également menées : WEINGARTEN *et al.* [1965] pour les coques coniques, ARBOCZ et BABCOCK [1969] pour les cylindres en compression axiale, SINGER *et al.* [1971] pour les cylindres raidis imparfaits, STARNES [1972] pour les cylindres troués.

L'avènement de l'ordinateur et l'utilisation de la Méthode des Eléments Finis (MEF) ont marqué les décennies qui ont suivi. Il devenait alors possible de résoudre directement le problème non-linéaire de post-flambement, trop compliqué à aborder par les méthodes analytiques. La simulation numérique des structures « réelles », ie. imparfaites, devenait également possible incorporant les imperfections initiales dans le modèle EF (éléments finis). Plutôt que d'utiliser la théorie de Koiter, on préfère alors calculer numériquement les branches d'équilibre non-linéaires complètes (pré- et post-flambement). Parmi les premières études numériques réalisées sur ordinateur, on peut citer [BROGAN et ALMROTH, 1970], [ALMROTH et HOLMES, 1972], [BUSHNELL, 1976] ou encore [ALMROTH et BROGAN, 1978].

Il restait toutefois une dernière difficulté : si l'on veut pouvoir faire coïncider les résultats

numériques avec les résultats expérimentaux, il faut disposer de mesures très précises des imperfections à incorporer dans les modèles EF. ARBOCZ, BABCOCK et SINGER ([ARBOCZ et BABCOCK, 1969], [SINGER *et al.*, 1971], [ARBOCZ et HOL, 1995] et [SINGER et ABRAMOVICH, 1995]) ont été les pionniers dans le domaine des mesures précises des imperfections en laboratoire et sur des structures de taille réelle, puis dans le développement des méthodes statistiques. Ils ont également fondé la banque de données internationale sur les imperfections.

Aujourd'hui, de nombreux codes de calculs capables d'effectuer des simulations numériques non-linéaires sur des structures avec défauts initiaux sont à la disposition des chercheurs et des ingénieurs. Parmis les codes du commerce, on peut citer ABAQUS, ANSYS qui sont des codes généraux, et INCA, plus spécialisé dans les coques de révolution.

1.3 Stabilité des structures élastiques

Dans ce paragraphe, on introduit les notions d'équilibre d'un système conservatif et on montre comment caractériser les points réguliers et les différents points singuliers (point limite et bifurcation). Ces notions sont ensuite illustrées à l'aide de quelques exemples.

1.3.1 Courbe d'équilibre

La stabilité d'un système mécanique conservatif est généralement analysée à l'aide de méthodes énergétiques ([NGUYEN, 1995, 2000]), basées sur l'étude de l'énergie potentielle totale du système

$$E = E(\boldsymbol{u}, \lambda) \tag{1.2}$$

où $\boldsymbol{u}$ est le déplacement du système et λ un paramètre de contrôle.

On dit que le système est à l'équilibre si une perturbation infinitésimale $\delta\boldsymbol{u}$ de cet état d'équilibre ne change pas son énergie potentielle. Cela revient à dire que les états d'équilibre possibles $\boldsymbol{u}$ sont les points stationnaires de l'énergie potentielle, i.e. à résoudre le problème

$$\delta E = E_{,u}(\boldsymbol{u}, \lambda).\delta\boldsymbol{u} = 0 \tag{1.3}$$

pour tout déplacement $\delta\boldsymbol{u}$ admissible. $E_{,u}$ désigne ici la dérivée de Fréchet de E par rapport au déplacement $\boldsymbol{u}$ dans la direction $\delta\boldsymbol{u}$. Pour alléger les notations, on introduit la fonctionnelle $\boldsymbol{F}$ définie par

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \lambda) = E_{,u}(\boldsymbol{u}, \lambda) \tag{1.4}$$

Le système (1.3) peut admettre une ou plusieurs solutions. Compte tenu de la continuité de E par rapport à λ, l'ensemble des solutions $\boldsymbol{u}(\lambda)$ forme une ou plusieurs courbes dans l'espace $(\boldsymbol{u}, \lambda)$. Ce sont par définition des courbes d'équilibre du système, encore appelées branches de solutions ou courbes charge-déplacement. Dans la suite, on utilisera indifféremment l'un ou l'autre de ces trois termes.

Pour étudier ces branches d'équilibre, il est commode d'adopter une représentation paramétrique

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(a) \quad , \quad \lambda = \lambda(a) \tag{1.5}$$

où a est un paramètre de chemin qui correspond généralement à l'abscisse curviligne.

1.3.2 Stabilité de l'équilibre

L'étude de la stabilité d'un équilibre u nécessite l'examen de la seconde variation de l'energie potentielle

$$\delta^2 E = \delta\boldsymbol{u}\, E_{,uu}(\boldsymbol{u}, \lambda)\, \delta\boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{u}\, \boldsymbol{F}_{,u}(\boldsymbol{u}, \lambda)\, \delta\boldsymbol{u} \tag{1.6}$$

On dit en effet qu'un état d'équilibre u est *stable* s'il réalise un minimum local de l'énergie potentielle, ce qui revient à dire que la seconde variation de l'énergie potentielle autour de l'équilibre est une forme quadratique définie positive ($\delta^2 E > 0 \; \forall\, \delta\boldsymbol{u} \neq 0$). Si la seconde variation est négative, l'équilibre est dit *instable*, et si elle est nulle, on dit que l'équilibre est *neutre*. Dans ce dernier cas, la stabilité est déterminée par les premières dérivées non nulles d'ordre supérieur à deux. Le tableau 1.1 et la figure 1.10 récapitulent ces résultats.

signe de $\delta^2 E$	**Energie potentielle**	**type d'équilibre**
$\delta^2 E > 0$	minimum local	équilibre stable
$\delta^2 E = 0$	pente nulle	équilibre neutre
$\delta^2 E < 0$	maximum local	équilibre instable

TABLEAU 1.1 – *Signe de $\delta^2 E$ et type d'équilibre correspondant*

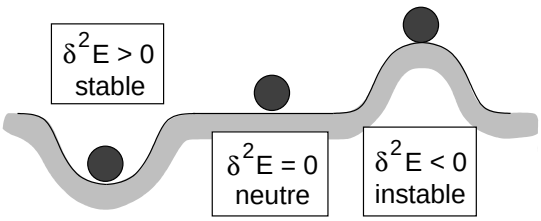


FIGURE 1.10 – *Représentation schématique du niveau d'énergie potentielle et équilibres possibles*

1.3.3 Points réguliers et points singuliers

On dit qu'un point $(\boldsymbol{u}_0, \lambda_0)$ est *régulier* (figure 1.11) si l'opérateur associé à la fonctionnelle $\boldsymbol{F}_u = E_{,uu}$ est inversible en ce point. En discret, cela revient à dire que la matrice $\boldsymbol{K}$ associée

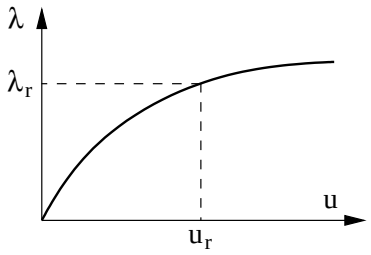


FIGURE 1.11 – *Point régulier*

à l'opérateur $\boldsymbol{F}_u = E_{,uu}$ est inversible, i.e. $\boldsymbol{K}$ définie positive. Par contre, si $\boldsymbol{K}$ est singulière, i.e. si une ou plusieurs valeurs propres de $\boldsymbol{K}$ sont nulles, alors ce point est dit *singulier* et peut correspondre à un *point limite* (figure 1.12) ou à un *point de bifurcation* (figure 1.13). Dans le cas d'un point singulier simple, seule la plus petite valeur propre est nulle et les autres sont positives, i.e. $\boldsymbol{K}$ est semi-définie positive. En un point singulier simple, on vérifie donc la condition

$$det(\boldsymbol{K}) = 0 \tag{1.7}$$

qui équivaut à

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{1.8}$$

où $\boldsymbol{\varphi}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle. $\boldsymbol{K}$ étant symétrique[12], $\boldsymbol{\varphi}$ vérifie aussi la condition

$$\boldsymbol{\varphi}^t\,\boldsymbol{K} = 0 \tag{1.9}$$

Lorsque plusieurs valeurs propres sont nulles, le point singulier est dit *multiple*. Cette situation peut s'avérer beaucoup plus compliquée que dans le cas d'un point singulier simple, jusqu'à relever de la théorie des catastrophes. Cette théorie, élaborée par THOM [1972], ainsi que la théorie des singularités de GOLUBITSKY et SCHAEFFER [1985], ont débouché sur la classification des singularités en sept catastrophes élémentaires. Une présentation de cette classification, adaptée aux problèmes de l'ingénieur, se trouve dans [THOMPSON, 1982].

1.3.4 Caractérisation des points limites et des bifurcations

En dérivant (1.3) par rapport au paramètre de chemin a, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}a} = E_{,uu}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a} + E_{,u\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} = \boldsymbol{K}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a} + E_{,u\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} \tag{1.10}$$

En projetant (1.10) sur le mode propre associé au point singulier (i.e. en multipliant à gauche par $\boldsymbol{\varphi}^t$) et d'après (1.9) il vient

$$(\boldsymbol{\varphi}^t\,E_{,u\lambda})\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} = 0 \tag{1.11}$$

12. Car E représente une différentielle totale exacte, i.e. $\frac{\partial^2 E}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 E}{\partial u^j \partial u^i}$, soit $K_{ij} = K_{ji}$. Si $\boldsymbol{K}$ n'est pas symétrique, en plus du vecteur propre droit $\boldsymbol{\varphi}$, il existe aussi un vecteur propre gauche $\boldsymbol{\phi}$ qui vérifie $\boldsymbol{\phi}^t\,\boldsymbol{K} = 0$.

Cette dernière équation nous amène à distinguer deux cas ([WAGNER et WRIGGERS, 1991])

$$\boldsymbol{\varphi}^t\, E_{,u\lambda} = 0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{bifurcation} \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^t\, E_{,u\lambda} \neq 0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{point limite} \tag{1.13}$$

Dans le cas d'un point limite, le vecteur tangent (horizontal, car $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} = 0$) à la courbe d'équilibre et le vecteur propre coïncident (figure 1.12). Dans le cas d'une bifurcation, on obtient chacune des deux directions tangentes $(\boldsymbol{u}_1, \lambda_1)$ en décomposant $\boldsymbol{u}_1$ sous la forme

$$\boldsymbol{u}_1 = \alpha\, \boldsymbol{\varphi} + \lambda_1\, \boldsymbol{u}_t \qquad \text{avec } \boldsymbol{\varphi}^t\, \boldsymbol{u}_t = 0 \tag{1.14}$$

où $\boldsymbol{u}_t$ est la tangente à la branche fondamentale au point de bifurcation (figure 1.13). Le calcul du coefficient α est détaillé dans [KOUHIA et MIKKOLA, 1989].

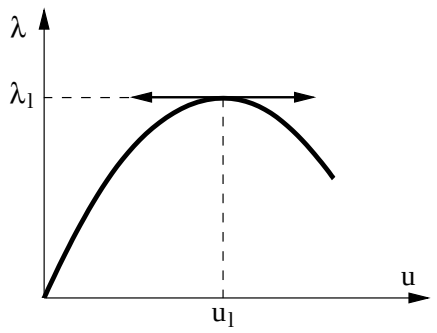


FIGURE 1.12 – *Direction tangente en un point limite*

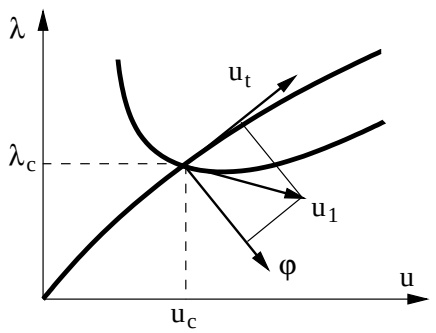


FIGURE 1.13 – *Direction tangente en un point de bifurcation*

1.3.5 Quelques exemples simples

Les quelques exemples qui suivent ont été choisis pour illustrer les notions introduites jusqu'à présent. Le premier exemple très simple de la poutre en compression servira à introduire la terminologie relative à l'étude des courbes d'équilibre. L'examen des courbes d'équilibre des deux autres structures permettra de mettre en evidence des comportements en flambemement très différents.

1.3.5.a Poutre en compression

La poutre élancée en compression est, comme on l'a dit dans le paragraphe 1.2.1, le modèle de base en stabilité des structures. Ce modèle suppose que la poutre est parfaitement rectiligne avant l'application du chargement et que ce chargement est appliqué suivant l'axe de la poutre (figure 1.14). Généralement, on préfère choisir le déplacement latéral δ (aussi appelé *flèche*) pour

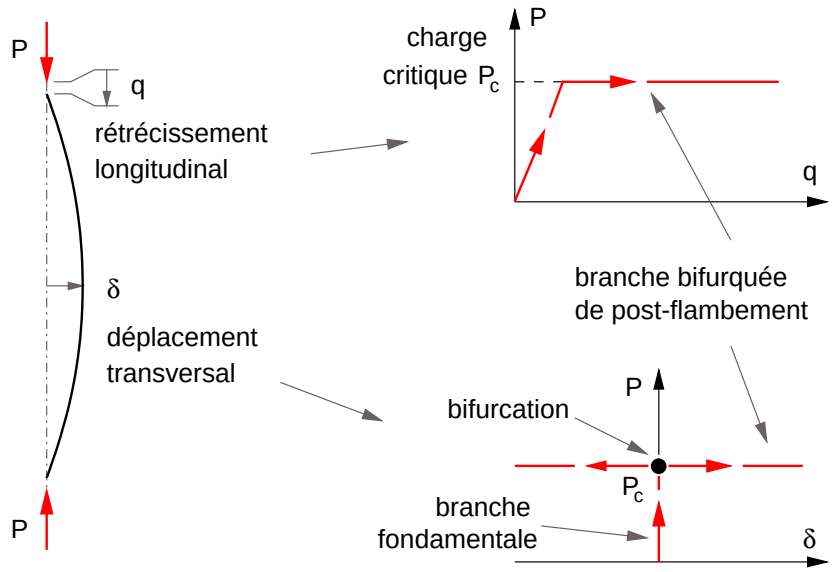


FIGURE 1.14 – *Flambement d'une poutre : déformée et courbe d'équilibre.*

tracer la courbe d'équilibre, plutôt que le raccourcissement q, car il est plus représentatif du phénomène de flambement.

Lorsque le chargement augmente depuis zéro, la poutre est stable, il n'y a pas de flambement et le déplacement latéral reste nul. La courbe d'équilibre (P, δ) est caractérisée par un segment de droite vertical — la *branche fondamentale* — qui s'élève jusqu'à ce que le chargement atteigne la charge critique d'EULER

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{1.15}$$

où L est la longueur de la poutre et EI sa rigidité de flexion suivant l'axe de flambement ([TIMOSHENKO et GERE, 1961]). P_c correspond à la plus petite valeur propre du problème linéarisé et le mode propre qui lui est associé correspond à un demi-sinus entre les extémités de la poutre.

Lorsque la charge d'EULER est atteinte, le flambement se produit soudainement et le déplacement latéral augmente instantanément alors que le chargement axial reste constant. Le flambement peut se développer de manière équiprobable d'un coté ou de l'autre de la poutre (i.e. $\delta > 0$ ou $\delta < 0$). Ainsi, la courbe d'équilibre se sépare en deux *branches bifurquées* symétriques et horizontales. Sur ces *branches de post-flambement*, l'équilibre est dit *neutre* car δ peut augmenter indéfiniment sans accroissement du chargement. C'est possible en théorie, mais la solution du problème complet (i.e. non linéarisé) montre que le chargement augmente légèrement en même temps que δ. Les branches bifurquées sont donc en réalité des branches d'équilibre stables.

1.3.5.b Plaque en compression

Contrairement au *flambement d'ensemble* de la poutre, le flambement d'une plaque en appui simple (figure 1.15) est *local*. Le mode de flambement est constitué d'ondes sinusoïdales et le nombre de creux et de bosses dans chacune des directions dépend exclusivement des dimensions de la plaque ([TIMOSHENKO et GERE, 1961]).

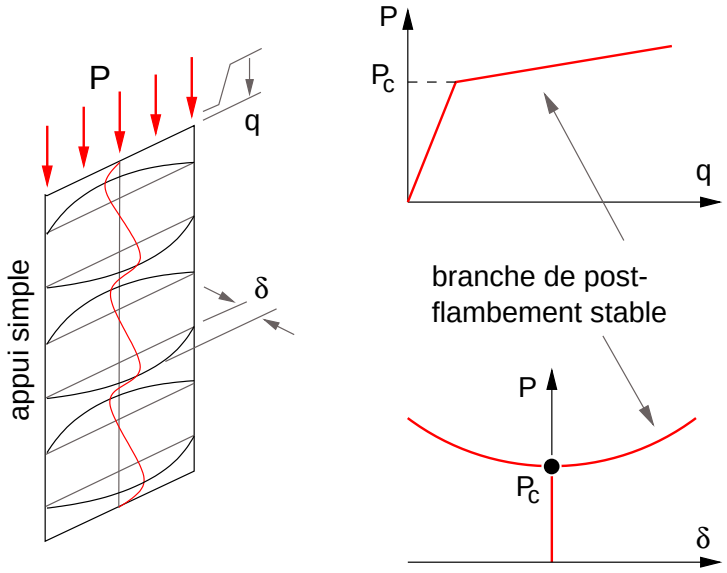


FIGURE 1.15 – *Flambement d'une plaque : déformée et courbe d'équilibre*

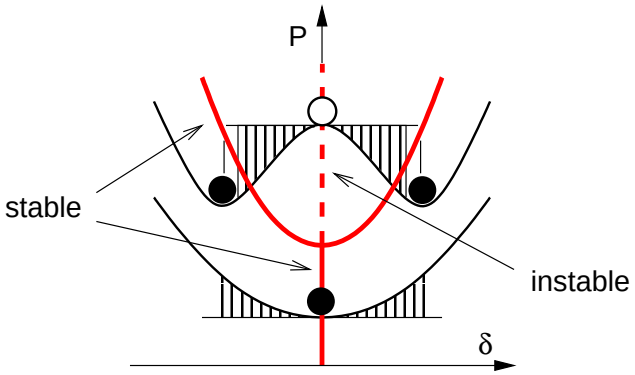


FIGURE 1.16 – *Niveau d'énergie potentielle et stabilité des états d'équilibre.*

Le flambement ne mène pas forcément à la ruine de la structure, comme dans le cas de la poutre, car les plaques peuvent généralement supporter des chargements supérieurs à la charge critique de flambement. La courbe d'équilibre bifurquée reste *stable* après la bifurcation (figure 1.16). Cependant, la rigidité de la plaque est très fortement réduite après le flambement. C'est pourquoi il n'est pas recommandé d'utiliser les plaques en post-flambement, à moins de connaître parfaitement leur comportement dans cette région. Il est important de noter que le brusque

changement de pente dans la courbe (P, δ) n'a rien à voir avec une transition élastique-plastique du matériau, les systèmes décrits ici étant supposés élastiques. C'est un phénomène d'instabilité purement géométrique.

1.3.5.c Coque cylindrique en compression axiale

Le comportement d'une coque cylindrique après flambement est très différent de celui d'une plaque (figure 1.17). Au niveau de la bifurcation, la rigidité devient négative (équilibre *instable*)

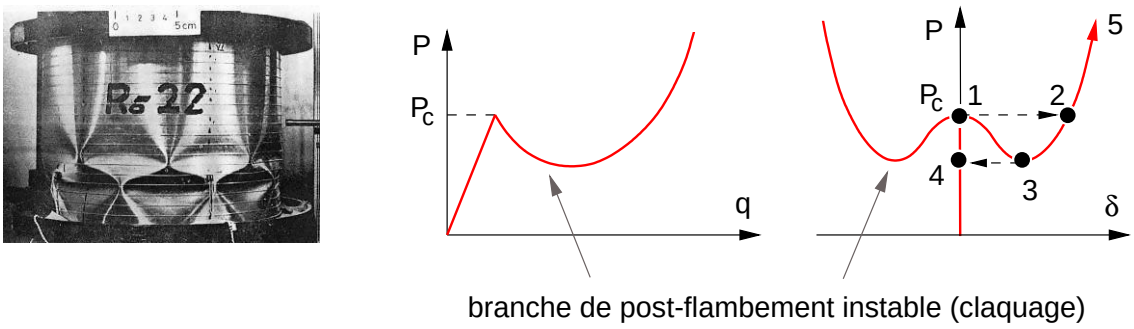


FIGURE 1.17 – *Flambement d'un cylindre : déformée et courbe d'équilibre*

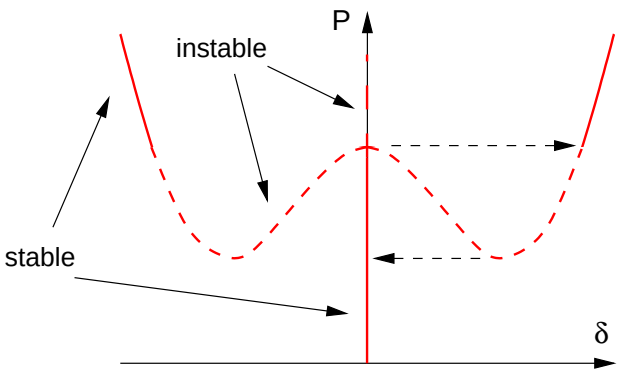


FIGURE 1.18 – *Stabilité des états d'équilibre*

et la charge décroît subitement. Etant donné qu'en pratique les déplacements ne sont pas contrôlés dans la plupart des systèmes, les coques flambent par *claquage* (snap-through) : lorsque le chargement augmente et atteint la charge critique P_c au point de bifurcation 1, le cylindre doit subir un déplacement δ jusqu'au point 2 pour s'adapter à l'accroissement du chargement. Le claquage est un phénomène dynamique. Ainsi, à la suite du saut, le cylindre présente généralement des vibrations de forte amplitude autour de l'état d'équilibre 2. En présence d'amortissement, l'énergie libérée lors du saut 1→2 (correspondant à la surface 1-3-2) peut être dissipée. Dans ce cas, les vibrations disparaissent et le système demeure en équilibre en 2. Si le chargement augmente par la suite, le système va suivre la branche stable 2-5 comme l'indique la flèche sur la figure 1.17.

De la même manière, si le chargement vient à diminuer jusqu'au point 3, un nouveau phénomène de claquage aura lieu et δ diminuera subitement, jusqu'au point 4 de la branche fondamentale cette fois-ci.

Un saut 1→2 important lors du claquage peut entrainer la ruine brutale de la structure. C'est ce qui explique que des coefficients de sécurité élevés sont généralement appliqués à la charge critique théorique lors du dimensionnement des cylindres en compression.

1.3.5.d Panneau cylindrique sous chargement ponctuel

De nombreuses structures flambent par claquage. Le panneau cylindrique sous charge ponctuelle en est un exemple particulièrement représentatif. La géométrie et les propriétés matérielles de ce panneau sont définis dans la fugure 1.19. Il s'agit d'une coque très mince ($\frac{R}{t} = 400$) et très peu courbée soumise à une force ponctuelle en son sommet.

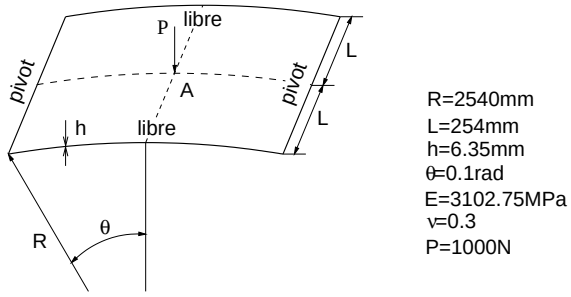


FIGURE 1.19 – *Panneau cylindrique : géométrie et propriétés matérielles*

La courbe d'équilibre du panneau (figure 1.20) comporte deux *points limites* B et F et deux *bifurcations* A et H. La *branche fondamentale* OABEFGHCD correspond à des déformations symétriques du panneau (voir la coupe du panneau sur la figure 1.20) et la *branche bifurquée* AH à des déformations non-symétriques.

Partant de O, lorsqu'on augmente le chargement, le panneau va se déformer de manière symétrique. Le pré-flambage est non-linéaire car il fait intervenir des efforts de flexion et de membrane. Lorsqu'on atteint le point A, deux situations peuvent survenir. Soit le panneau perd sa symétrie et on bifurque sur la branche AH, soit la symétrie est conservée et on continue sur la branche fondamentale AB.

Si on bifurque, il se produit le même phénomène dynamique de *claquage* que celui décrit dans la section précédente. Dans la pratique, le panneau « saute » du point A symétrique (par ses déformations) au point C, symétrique également, en passant par des états intermédiaires non-symétriques. Cependant, les méthodes numériques permettent d'obtenir la totalité de la courbe d'états d'équilibres quasi-statiques. Sur cette courbe, on constate qu'après avoir bifurqué le panneau décrit la courbe instable AH avant d'atteindre un nouveau point de bifurcation par lequel on rejoint la branche fondamentale et un état symétrique stable.

Si, par contre, on reste sur la fondamentale après le point A, le phénomène de claquage se

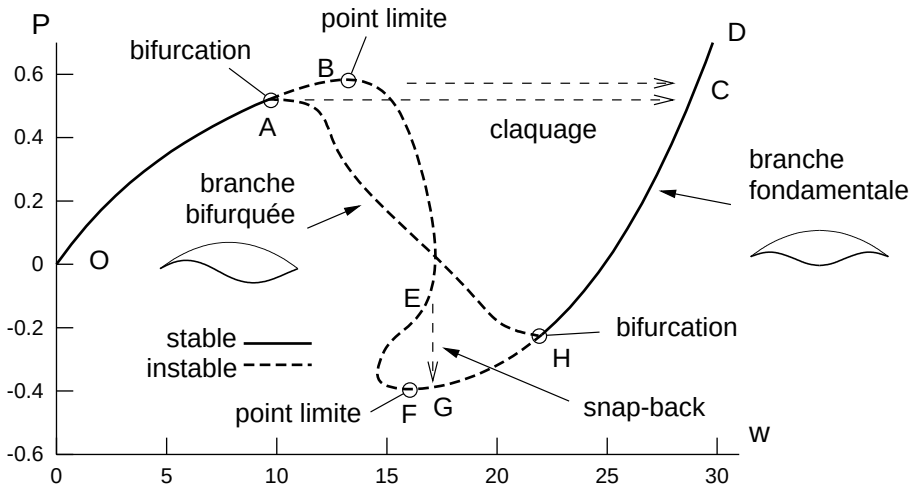


FIGURE 1.20 – *Courbe d'équilibre du panneau cylindrique*

produira au niveau du point B. Le panneau va brusquement se retourner de façon symétrique entre B et C. En pratique, on peut éviter ce claquage dynamique en contrôlant la force appliquée à l'aide d'une vis rigide par exemple (ce qui revient à *piloter* en déplacement plutôt qu'en force). De cette manière, on continue à suivre la branche fondamentale au lieu de sauter en C. Le panneau continue alors de se déformer de façon symétrique jusqu'au point E. Arrivé en ce point, à cause du pilotage en déplacement, une brusque variation du chargement est nécessaire pour s'adapter à l'accroissement du déplacement. On va donc sauter du point E au point F. Il ne s'agit pas de claquage car le déplacement garde une valeur constante durant le saut. On parle cette fois de *snap-back*. On aurait pu éviter ce phénomène en repassant en pilotage en force au niveau du point E. On serait alors passé par le point limite F avant de rejoindre le point G et de continuer vers D. Sur cette dernière portion de courbe se trouve le second point de bifurcation H au niveau duquel on peut à nouveau bifurquer ou rester sur la fondamentale. Bien entendu, les phénomènes de *claquage* décrits sur la portion de branche OAB s'appliquent également à la portion de branche DHF lorsque le chargement décroît.

Bien que très simple d'apparence, ce panneau cylindique a un comportement en flambement très complexe. L'analyse de ce comportement a été détaillée en profondeur car cet exemple nous servira de référence tout au long des prochains chapitres pour tester la validité et la robustesse des algorithmes développés.

1.4 Influence des imperfections

On étudie dans cette section la sensibilité des structures aux imperfections. Plus précisément, il s'agit de voir comment la réponse d'un système et, donc, sa courbe d'équilibre sont modifiées lorsqu'une imperfection géométrique est introduite dans la configuration initiale. On distinguera les structures particulièrement sensibles aux imperfections de celles qui le sont moins, puis on

exposera les différentes méthodes d'investigation à la disposition du numéricien pour mener une analyse de sensibilité.

1.4.1 Sensibilité aux imperfections

Les structures sans défauts sont des structures idéalisées. Dans la pratique, une structure contient inévitablement des *imperfections* géométriques ou matérielles qui peuvent être dues au procédé de fabrication par exemple. Ces imperfections peuvent modifier radicalement la courbe d'équilibre de la structure et diminuer considérablement la charge critique de flambement que la structure peut supporter. Pour étudier cette influence des imperfections, on introduit le paramètre ε qui représente l'amplitude du défaut initial. Dans la suite, on fera référence à la structure idéalisée sans défaut (i.e. $\varepsilon = 0$) par le terme *structure parfaite*, et à la structure avec imperfection (i.e. $\varepsilon \neq 0$) indifféremment par les termes *structure réelle* ou *stucture imparfaite*.

On a vu dans le chapitre 1.3 qu'une structure parfaite flambe soit au niveau d'un point limite (figure 1.21), soit au niveau d'une bifurcation, cette bifurcation pouvant être asymétrique (figure 1.22), symétrique stable (figure 1.23) ou symétrique instable (figure 1.24). Il nous suffit donc d'introduire une imperfection dans chacune de ces quatre configurations pour illlustrer la sensibilité aux imperfections de n'importe quelle structure. Dans chacune des figures 1.21 à 1.24 qui suivent, la courbe d'équilibre de la structure parfaite est tracée en trait épais, les courbes plus minces correspondent à la structure imparfaite, les traits pleins représentent les états d'équilibre stables et les pointillés les états d'équilibre instables.

La figure 1.21 concerne le **point limite**. Deux constatations s'en dégagent. Tout d'abord, la courbe d'équilibre de la structure imparfaite a la même allure que celle de la structure parfaite et sa charge limite λ_m correspond également à un point limite. Ensuite, la charge limite λ_m de la structure varie suivant l'amplitude ε de l'imperfection. Cette variation de la charge limite est représentée sur la courbe de droite. Pour $\varepsilon = 0$, on a évidemment $\lambda_m = \lambda_c$ où λ_c est la charge critique de flambement de la structure parfaite. Par ailleurs, cette courbe (ε, λ_m), appelée couramment *courbe de réduction de charge critique*, a une pente non nulle et ne présente pas de singularité au niveau du point limite.

La figure 1.22 correspond au **point de bifurcation asymétrique**. Les imperfections jouent cette fois-ci un rôle important en modifiant le comportement de la structure. Pour une valeur positive de l'imperfection ε, la bifurcation se transforme en un point limite et la charge limite λ_m qui lui est associée est très nettement inférieure à la charge critique λ_c de la structure parfaite. Par contre, pour une valeur positive de l'imperfection, la courbe d'équilibre imparfaite passe dans le voisinage du point de bifurcation sans présenter de point singulier et continue dans un état stable. La variation de la charge limite λ_m en fonction de l'imperfection ε est elle aussi très différente de celle que l'on a pu observer précédemment pour le point limite. Cette fois-ci, la tangente en $\varepsilon = 0$, i.e. au niveau du point de bifurcation, est verticale. Cela implique une sensibilité très importante aux imperfections initiales. Toutefois, cette courbe n'existe pas pour des valeurs négatives de ε car les courbes d'équilibre correspondantes ne présentent pas de charge

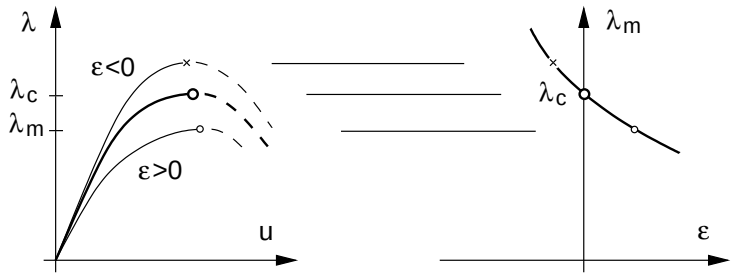


FIGURE 1.21 – *Point limite et imperfections initiales*

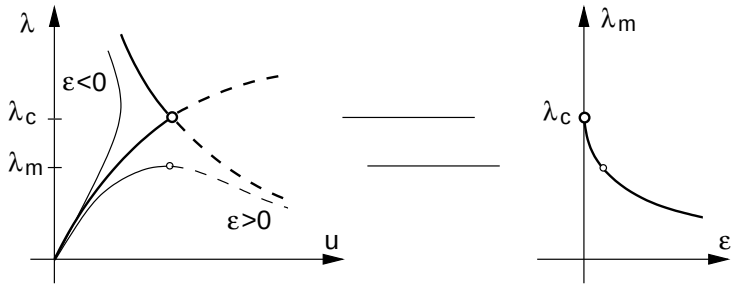


FIGURE 1.22 – *Point de bifurcation asymétrique et imperfections initiales*

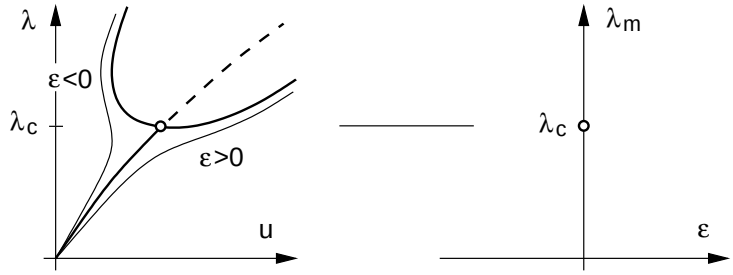


FIGURE 1.23 – *Point de bifurcation symétrique stable et imperfections initiales*

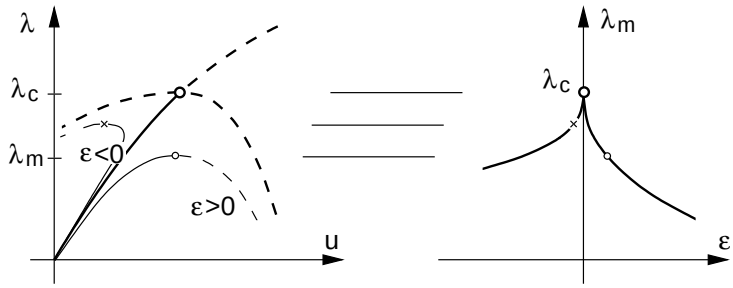


FIGURE 1.24 – *Point de bifurcation symétrique instable et imperfections initiales*

limite.

Le **point de bifurcation symétrique stable** est traité dans la figure 1.23. On constate cette fois-ci que les imperfections jouent un rôle nettement moins important. Des imperfections positives ou négatives ont le même effet et conduisent toutes deux à une branche d'équilibre stable. Ainsi, les structures imparfaites ne présentent pas de charge limite et le « flambement », dans ce cas, se caractérise par un augmentation légèrement plus rapide du déplacement lorsque la charge varie. La courbe de réduction de charge critique est quant à elle réduite au seul point de bifurcation.

Pour terminer, le cas du **point de bifurcation symétrique instable** est décrit dans la figure 1.24. Le rôle des imperfections est cette fois très important. Les imperfections positives et négatives ont le même effet et tranforment la bifurcation en un point limite, pour une valeur du chargement très nettement inférieure à celle de la structure parfaite. La courbe de réduction de charge critique le confirme. En $\varepsilon = 0$, elle présente un point de rebroussement et la pente est infinie. La structure est donc extrêmement sensible aux imperfections, qu'elles soient positives ou négatives.

On peut résumer l'influence des imperfections sur le comportement de la structure par ces quelques remarques :

- Les structures parfaites sont des structures idéalisées qui n'existent pas en pratique, une structure réelle contient inévitablement des imperfections ;
- Les imperfections « effacent » les points de bifurcation et les transforment en quasi-bifurcations. Dans la pratique, les bifurcations sont donc des phénomènes très rares ;
- Pour une même valeur du chargement, la structure imparfaite présente des déformations plus importantes que la structure parfaite ;
- Plus les déformations augmentent, plus le comportement de la structure imparfaite se rapproche de celui de la structure parfaite idéalisée ;
- Les imperfections réduisent la charge limite que la structure peut supporter ;
- Pour des structures avec des branches de post-flambement stables, l'influence des imperfections est minime[13]. Ces structures sont dites *peu sensibles aux imperfections*. Il convient de les dimensionner par rapport à des critères de résistance des matériaux plutôt que de flambement ;
- Pour des structures avec des branches de post-flambement instables, l'influence des imperfections est très importante. Ces structures sont *extrêmement sensibles aux imperfections*.

1.4.2 Analyse de sensibilité

Comme on vient de le voir, il est possible d'évaluer qualitativement la sensibilité d'une structure simplement en étudiant la stabilité des branches bifurquées. Toutefois, une analyse de sensibilité n'est pas complète sans une étude quantitative. Celle-ci passe par le calcul des courbes

13. Leur principal effet est d'introduire très tôt de fortes contraintes de flexion dans la structure

de réduction de charge critique introduites dans le paragraphe précédent.

On peut classer les méthodes de calcul des courbes de réduction en deux catégories. La première regroupe les méthodes basées sur l'hypothèse que la réponse d'une struture imparfaite peut être estimée en étudiant sa configuration parfaite. La théorie du post-flambement de KOITER [1945] appartient à cette catégorie. Cette analyse asymptotique[14] fournit non seulement des informations sur l'allure de la branche de post-flambement et sur sa stabilité (et donc sur le degré de sensibilité aux imperfections), mais aussi une estimation de l'influence des imperfections sur la charge critique grâce à l'introduction des imperfections dans le modèle et à une méthode de perturbation. Il en résulte les désormais célèbres formules de réduction de charge ([THOMPSON et HUNT, 1973], [BUDIANSKY, 1974], [BAZANT et CEDOLIN, 1991])

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_c} = 1 - cte\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{1.16}$$

dans le cas d'une bifurcation asymétrique (figure 1.22) et

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_c} = 1 - cte\ \varepsilon^{\frac{2}{3}} \tag{1.17}$$

dans le cas d'une bifurcation symétrique instable (figure 1.24), leur validité n'étant garantie que pour des valeurs de ε suffisamment petites. Une autre force de cette méthode tient dans le faible coût de calcul de la méthode de perturbation. Ainsi, à partir du moment où les coefficients de la méthode asymptotique ont été obtenus pour la structure parfaite, on peut étudier l'influence de plusieurs imperfections différentes sans beaucoup d'efforts supplémentaires. Il suffit de reconduire la méthode de perturbation pour chacune d'entre elles. Cela peut permettre d'isoler l'imperfection la plus défavorable : c'est celle qui fournira la pente négative la plus importante au début du post-flambement.

Cette méthode a été récemment couplée à la méthode des éléments finis par CASCIARO *et al.* [1992, 1998], LANZO et GARCEA [1996], WU et WANG [1997], PEEK et KHEYRKHAHAN [1993] et KHEYRKHAHAN et PEEK [1999].

On peut estimer que le comportement d'une structure imparfaite ne peut être simulé qu'en analysant la structure imparfaite elle-même. La seconde catégorie de méthodes repose sur cette idée. Il s'agit de mener un calcul non-linéaire complet (pré et post-flambement) sur la structure imparfaite, après que les imperfections ont été introduites dans le modèle éléments finis. La plupart des codes de calcul du commerce incorporent cette fonctionnalité.

Une étude de sensibilité très simple à mettre en œuvre consiste alors à fixer l'amplitude de l'imperfection, à tracer la courbe d'équilibre complète correspondante et à isoler le point limite qui donne la charge critique. En répétant cette opération pour plusieurs valeurs de l'amplitude de l'imperfection (figure 1.25), on obtient suffisamment de points pour tracer la courbe de réduction de charge critique.

14. i.e. valide dans le voisinage du point de bifurcation de la structure parfaite

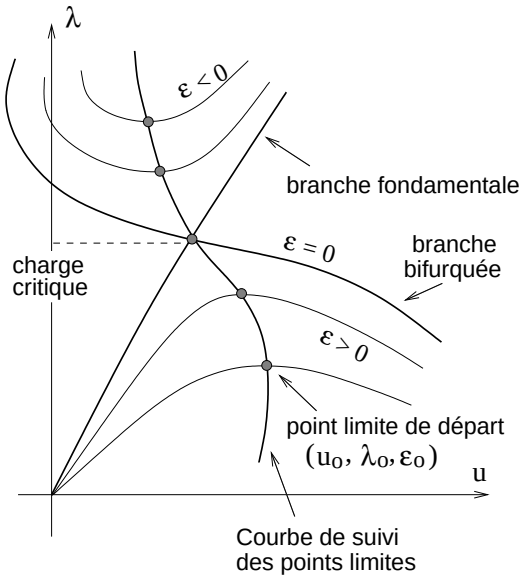


FIGURE 1.25 – *Branches d'équilibre pour une structure parfaite et imparfaite, et branche de points limites*

Toutefois, la simplicité a un prix et le coût de calcul de ce type d'analyse est très important puisqu'un calcul non-linéaire complet est nécessaire pour chaque valeur de l'imperfection. Par ailleurs, on n'obtient des informations que pour les valeurs de l'imperfection qui ont été choisies. Afin de réduire ces coûts de calcul, il est plus judicieux d'isoler un point limite de départ pour une valeur donnée de l'imperfection, puis d'introduire l'imperfection comme paramètre supplémentaire dans la formulation du problème et de suivre directement la branche formée de tous les points limites lorsque l'imperfection varie (figure 1.25). De cette manière, il n'est pas nécessaire de calculer toutes les branches d'équilibres imparfaites. Seule la courbe reliant tous les points limites est calculée. Pour cela, il suffit d'ajouter aux équations d'équilibre de la structure imparfaite une équation qui caractérise les points limites, puis de résoudre ce système d'équations dit *augmenté*. Cette démarche a été mise en œuvre avec succès par ERIKSSON [1994, 1997], ERIKSSON *et al.* [1999], DEML et WUNDERLICH [1997], WUNDERLICH et ALBERTIN [2000], entre autres, à l'aide de méthodes incrémentales-itératives de type NEWTON-RAPHSON, et par BAGUET et COCHELIN [2000, 2001a] à l'aide de la Méthode Asymptotique Numérique. Ce suivi de points limites par la Méthode Asymptotique Numérique fera l'objet du chapitre 5 de ce mémoire.

La seule véritable approximation qui demeure dans ce genre d'analyse concerne l'imperfection elle-même. La plupart du temps, l'imperfection introduite dans le modèle n'inclut pas toutes les composantes d'une imperfection réelle (contraintes résiduelles, imprécision sur les conditions aux limites et les chargements, homogénéité et isotropie du matériau localement imparfaites, ...) et elle se réduit généralement à une imperfection géométrique. Lorsqu'on ne dispose pas d'informations précises sur l'imperfection réelle, il est courant de prendre un défaut avec la même forme que le premier mode de flambement car on considère qu'il s'agit là de l'imperfection la plus défavorable,

i.e. celle qui provoquera la réduction de charge critique la plus importante.

1.4.3 Imperfections et modes propres coïncidents

Lorsque les m premiers modes de flambement apparaissent pour la même valeur λ_c de la charge critique, on parle de *bifurcation en mode multiple*. m est appelé *ordre de multiplicité* du mode de flambement et les modes sont dits *confondus* ou *coïncidants*. La situation est alors nettement plus compliquée que dans le cas d'un mode unique. Une bifurcation asymétrique admet alors 2^m branches de post-flambement : la branche fondamentale et $2^m - 1$ branches bifurquées ([Koiter, 1945], [Thompson et Hunt, 1973], [Budiansky, 1974]). Dans le cas d'une bifurcation symétrique, compte-tenu des symétries du problème, il y en a souvent beaucoup plus. Les travaux de Sewell [1968, 1970] et Johns et Chilver [1971] ont montré qu'on en dénombre au plus $(3^m - 1)/2$.

D'un point de vue théorique et numérique, on sait traiter cette situation. La méthode utilisée pour calculer les directions des branches bifurquées s'appuie généralement sur une décomposition de Lyapunov-Schmidt généralisée ([Thompson et Hunt, 1973], [Carnoy, 1980], [Kouhia et Mikkola, 1989], [Peek et Kheyrkhahan, 1993], [Magnusson, 2001]).

La difficulté, dans le cas d'un mode multiple, est ailleurs. De nombreuses études ont montré que la sensibilité aux imperfections peut être très fortement accrue ([Ho, 1972, 1974], [Kheyrkhahan et Peek, 1999], [Ohsaki, 2001]). Cette situation est très fréquente pour les cylindres en compression axiale ou les coques sphériques sous pression externe. C'est ce qui confère à leur courbe d'équilibre cette allure si particulière (figure 1.9). Le problème est alors de savoir quelle va être l'imperfection la plus défavorable. Ho propose de lui donner la forme du mode de flambement qui correspond à la branche bifurquée instable avec la pente (ou la courbure) la plus importante (branche e sur la figure 1.26). C'est en effet la courbe d'équilibre imparfaite la plus proche de cette branche bifurquée qui aura la charge limite la plus faible (branche f sur la figure 1.26). Cela nécessite toutefois le calcul de toutes les branches bifurquées, au moins dans le voisinage du point de bifurcation multiple, ce qui peut s'avérer très coûteux en temps en calcul.

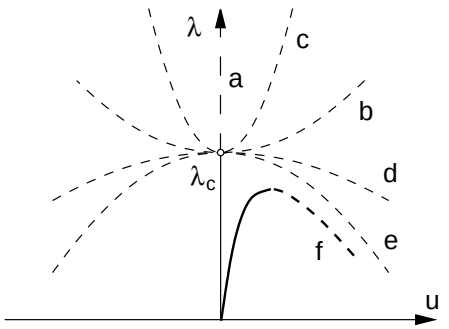


FIGURE 1.26 – *Branches d'équilibre d'une structure parfaite et imparfaite dans le cas de modes confondus*

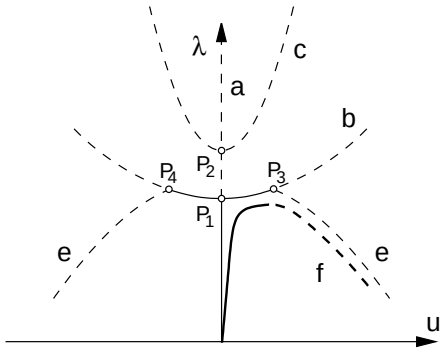


FIGURE 1.27 – *Branches d'équilibre d'une structure parfaite et imparfaite dans le cas de modes quasi-confondus*

Dans la réalité, il est très rare d'avoir des modes exactement confondus car les imperfections ont tendance à les séparer légèrement. On parle alors de modes *quasi-confondus* ou *quasi-coïncidants*. Cette situation est encore plus difficile à traiter à cause de l'interaction de ces modes entre eux. Cette interaction se traduit généralement par l'apparition de branches bifurquées secondaires. Sur la figure 1.27, on a tracé deux points de bifurcation légèrement séparés P_1 et P_2 ainsi que les branches bifurquées b et c qui en émergent. La branche b comporte une bifurcation secondaire P_3 d'où emerge la branche secondaire e. On voit clairement, d'après l'allure de la branche imparfaite f, que c'est cette branche secondaire e qui dicte la sensibilité aux imperfections. Choisir le mode b comme imperfection pour le calcul de sensibilité n'est donc plus suffisant. Pour tenter de simuler l'intéraction des modes b et c, on peut prendre une combinaison linéaire de ces modes ([Ho, 1974], [Kheyrkhahan et Peek, 1999]), mais cela n'est pas forcément représentatif de l'imperfection la plus défavorable. Deml et Wunderlich [1997] ont résolu ce problème en incluant dans leur algorithme le vecteur donnant forme de l'imperfection géométrique comme inconnue supplémentaire[15]. La résolution d'un système augmenté (équations d'équilibre accompagnées d'un critère énergétique ou de minimisation du chargement) leur permet ensuite d'obtenir la forme de l'imperfection la plus défavorable.

En faisant le lien entre les figures 1.26 et 1.27, il est possible de se faire une idée assez précise de ce qui se passe lorsque les points de bifurcation P_1 et P_2 se rapprochent jusqu'à se confondre. Les points de bifurcation secondaires P_3 et P_4 se rapprochent également et, lorsque les modes coïncident, les points P_1, P_2, P_3 et P_4 sont tous confondus. Les branches bifurquées e, qui étaient auparavant des branches secondaires, sont devenues à ce moment des branches bifurquées primaires.

1.5 Bilan du chapitre

Nous avons exposé dans ce chapitre plusieurs notions fondamentales concernant le flambement élastique des structures minces, ainsi que toute la terminologie qui s'y rapporte.

Le phénomène de flambement est connu depuis longtemps et les difficultés théoriques inhérentes à ce problème sont maîtrisées depuis plusieurs dizaines d'années maintenant. Quelques difficultés subsistent néanmoins. Elles concernent principalement l'influence des imperfections et le traitement des bifurcations multiples.

C'est à cette première difficulté que nous nous intéressons dans ce mémoire. Dans ce cadre, nous avons présenté les fondements des deux grandes classes d'analyse de sensibilité couramment utilisées. La première est basée sur l'utilisation de développements asymptotiques dans le voisinage d'une bifurcation. La seconde, qui se veut plus précise, a été rendue possible par l'avènement de l'ordinateur et de la méthode des éléments finis. Elle consite à suivre, à l'aide d'une méthode de continuation, l'évolution d'un point limite lorsque l'amplitude de l'imperfection varie. En pratique, cela revient à résoudre un système dit augmenté.

15. Généralement, on ne traite comme inconnue que l'amplitude de l'imperfection, i.e. un scalaire

CHAPITRE 2

Modélisation mécanique des coques minces

Dans ce chapitre, on présente un modèle numérique de coques minces moderne et performant, sur lequel s'appuieront les applications. Le problème variationnel 3D incluant les non-linéarités géométriques et d'éventuelles imperfections initiales est formulé. Il est ensuite modifié à l'aide du concept EAS pour s'adapter à la cinématique des coques minces, puis enrichi par une loi de comportement non-linéaire basée sur la théorie de la déformation. Pour finir, le problème variationnel continu est discrétisé par éléments finis et les algorithmes classiques de suivi de branches d'équilibre et de détection des points singuliers sont exposés.

Plan du Chapitre 2

2.1. Formulation tridimensionnelle du problème non-linéaire géométrique **41**

2.1.1. Elasticité non-linéaire tridimensionnelle 41

2.1.2. Cas d'une structure avec défaut initial 42

2.2. Extension aux coques en grandes rotations **43**

2.2.1. Description géométrique et cinématique de la coque 45

2.2.2. Introduction de β_{33} par le concept EAS 47

2.3. Extension aux matériaux non-linéaires **48**

2.3.1. Remarques préliminaires 48

2.3.2. Loi de type puissance 49

2.4. Discrétisation par éléments finis **51**

2.5. Méthodes classiques de résolution du problème non-linéaire **53**

2.5.1. Calcul de branche d'équilibre 53

2.5.2. Traitement des points singuliers 54

2.6. Bilan du chapitre **55**

2.1 Formulation tridimensionnelle du problème non-linéaire géométrique

On se restreint au cadre mécanique des structures élastiques en grands déplacements, petites déformations sous chargement proportionnel. Dans un souci de généralité, on se place tout d'abord en 3D. On étendra ensuite le modèle aux structures minces.

2.1.1 Elasticité non-linéaire tridimensionnelle

On considère un solide occupant un volume de référence Ω, de frontière $\partial\Omega$ et soumis à des efforts conservatifs : des forces de surface $\lambda \boldsymbol{t}$ sur une partie $\partial\Omega_t$ de sa frontière et des forces volumiques $\lambda \boldsymbol{b}$ dans Ω, le paramètre de chargement λ permettant de fixer l'intensité de ces efforts. On note $\boldsymbol{u}$ le champ de déplacement. La déformation de GREEN-LAGRANGE du solide est donnée par

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^t \boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u}\, \nabla^t \boldsymbol{u}) \tag{2.1}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\gamma}^l(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\gamma}^{nl}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \big(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})\big).\boldsymbol{u} \tag{2.2}$$

où $\boldsymbol{\gamma}^l$ et $\boldsymbol{\gamma}^{nl}$ désignent respectivement la partie linéaire et la partie symétrique bilinéaire quadratique de $\boldsymbol{\gamma}$, et $\boldsymbol{B}_l$ et $\boldsymbol{B}_{nl}$ sont les opérateurs cinématiques qui leur sont associés[1].
L'énergie potentielle totale du système s'écrit

$$E(\boldsymbol{u}, \lambda) = \int_\Omega W(\boldsymbol{\gamma})\, dV - \lambda P_e(\boldsymbol{u}) \tag{2.3}$$

où $W(\boldsymbol{\gamma})$ est la densité d'énergie élastique emmagasinée (ou énergie de déformation), et $\lambda P_e(\boldsymbol{u})$ est la puissance des efforts extérieurs avec $P_e(\boldsymbol{u})$ définie par

$$P_e(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \boldsymbol{b}.\boldsymbol{u}\, dV + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{t}.\boldsymbol{u}\, dS \tag{2.4}$$

L'hypothèse des petites déformations nous permet d'adopter une forme quadratique pour l'énergie

$$W(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\gamma} \tag{2.5}$$

où $\boldsymbol{D}$ est le tenseur des constantes d'élasticité. On peut alors introduire le tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF de seconde espèce

$$\boldsymbol{S} = W_{,\gamma} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\gamma} \tag{2.6}$$

1. Ces notations seront les mêmes pour les quantités discrétisées par éléments finis (section 2.4). Cela permet de conserver une certaine uniformité lors du passage du problème continu au problème discret

Les équations d'équilibre sont données par la première variation de l'énergie potentielle (cf. § 1.3.1)

$$\delta E = E_{,u}(\boldsymbol{u}, \lambda).\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \lambda).\delta\boldsymbol{u} = \int_\Omega \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{D} : \delta\boldsymbol{\gamma}\, dV - \lambda P_e(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \tag{2.7}$$

avec

$$\delta\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^l(\delta\boldsymbol{u}) + 2\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})).\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} \tag{2.8}$$

où l'on peut noter l'introduction de l'opérateur $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}$.
Dans toute la suite, on préfèrera faire apparaître explicitement la contrainte $\boldsymbol{S}$ et séparer le problème (2.7) en des équations d'équilibre et une relation de comportement. A l'aide de (2.8) et de (2.2), on peut réécrire les équations d'équilibre (2.7) et la loi de comportement (2.6) sous la forme

$$\text{(équilibre)} \qquad \int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u}\, dV - \lambda P_e(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \tag{2.9}$$

$$\text{(comportement)} \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \big(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})\big).\boldsymbol{u} \tag{2.10}$$

Ces deux équations constituent la formulation variationnelle du problème. Par abus de notation, on continuera à utiliser

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \lambda).\delta\boldsymbol{u} = 0 \tag{2.11}$$

et non pas $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}, \lambda).\delta\boldsymbol{u} = 0$ comme écriture condensée de (2.9)- (2.10) car la variable supplémentaire $\boldsymbol{S}$ peut facilement être éliminée en reportant la loi de comportement dans les équations d'équilibre.

2.1.2 Cas d'une structure avec défaut initial

La prise en compte d'une imperfection géométrique fixée dans les équations du problème non-linéaire géométrique a été présentée de nombreuses fois dans la littérature. A ce titre, on peut citer les travaux de COMBESCURE [1981] qui se sont poursuivis par le développement de l'élément de coque COMI[2] [COMBESCURE et GUSIC, 2001].

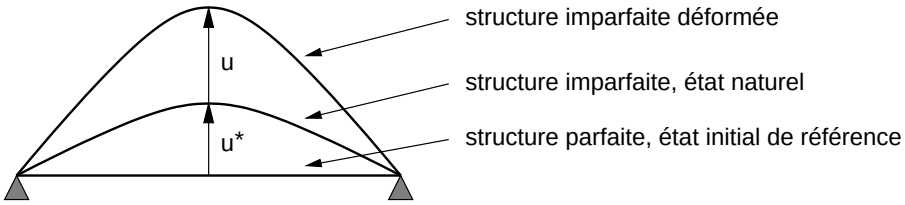


FIGURE 2.1 – *Structure schématisée avec imperfection initiale*

Comme précédemment, on considère un système élastique qui occupe la configuration de référence Ω en description lagrangienne. On suppose maintenant que ce système comporte une

2. qui permet de modéliser des coques de révolution avec imperfection quelconque

imperfection géométrique décrite par le champ de déplacement $\boldsymbol{u}^\star$ par rapport à la configuration de référence (figure 2.1).

Si $\boldsymbol{u}$ désigne le déplacement de la structure sous chargement par rapport à l'état naturel imparfait, alors $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^\star$ désigne le déplacement par rapport à la structure parfaite de référence et la déformation additionnelle par rapport à l'état naturel est donnée par

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^\star) &= \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^\star)-\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\star)\\ &= \boldsymbol{\gamma}^l(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+2\,\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^\star)\\ &= \big(\boldsymbol{B}_l+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star)\big).\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{2.12}$$

En comparaison avec l'expression classique (2.2) de la déformation, il y a un terme supplémentaire $\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^\star)$ qui est bilinéaire en $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}^\star$, et on peut remarquer qu'on a bien

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^\star)\xrightarrow[u\to 0]{} 0 \tag{2.13}$$

La variation de $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^\star)$ s'écrit

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^\star) &= \delta\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^\star)-\delta\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\star)\\ &= \boldsymbol{\gamma}^l(\delta\boldsymbol{u})+2\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u})+2\,\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\boldsymbol{u}^\star,\delta\boldsymbol{u})\\ &= \big(\boldsymbol{B}_l+\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star)\big).\delta\boldsymbol{u}\\ &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^\star).\delta\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{2.14}$$

En remplaçant $\delta\boldsymbol{\gamma}$ dans (2.7) et $\boldsymbol{\gamma}$ dans (2.6), on obtient la formulation variationnelle du problème avec défaut initial

$$\text{(équilibre)}\qquad \int_\Omega \boldsymbol{S}:\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^\star).\delta\boldsymbol{u}\,dV-\lambda P_e(\delta\boldsymbol{u})=0 \tag{2.15}$$

$$\text{(comportement)}\qquad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}:\big(\boldsymbol{B}_l+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star)\big).\boldsymbol{u} \tag{2.16}$$

que l'on peut rééecrire également sous la forme condensée

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^\star,\lambda).\delta\boldsymbol{u}=0 \tag{2.17}$$

2.2 Extension aux coques en grandes rotations

Dans ce paragraphe, la théorie 3D est adaptée aux structures minces par le biais d'une formulation de coque tridimensionnelle à 7 paramètres qui autorise les grandes rotations et la dilatation de l'élément suivant l'épaisseur. Cette formulation a été développée par BÜCHTER *et al.* [1994].

Contrairement aux formulations classiques à 6 paramètres qui nécessitent la condensation de la loi de comportement pour obtenir une dilatation linéaire suivant l'épaisseur, l'introduction d'un paramètre supplémentaire à l'aide du concept EAS (Enhanced Assumed Strain) proposé par SIMO et RIFAI [1990] permet ici d'utiliser des lois de comportement 3D sans avoir à les modifier et élimine les phénomènes de verrouillage. Cette présentation reprend la formulation développée dans [BÜCHTER *et al.*, 1994] en conservant les mêmes notations (tableau 2.1).

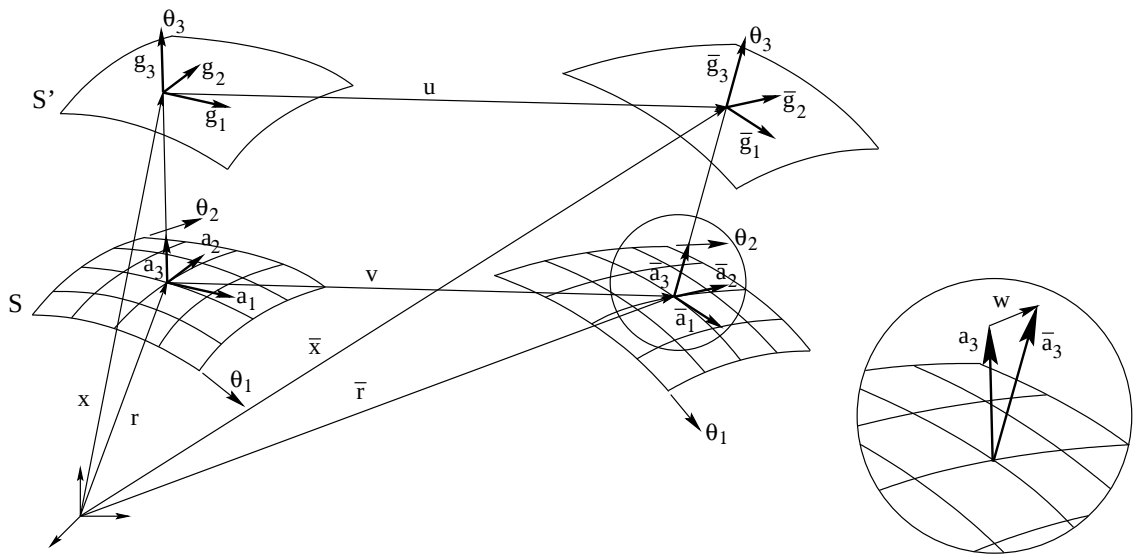


FIGURE 2.2 – *Géométrie de la coque avant et après déformation*

$\theta^1, \theta^2, \theta^3$	coordonnées curvilignes convectives	$\overline{(\,)}$	la barre désigne les variables dans la configuration déformée
$(\,)_{,i} = \dfrac{\partial(\,)}{\partial\theta^i}$	dérivée par rapport à θ^i	$(\,)_{,x} = \dfrac{\partial(\,)}{\partial\boldsymbol{x}}$	dérivée par rapport au vecteur $\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$	vecteur position d'un point de la coque	$\boldsymbol{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$	vecteur déplacement
$\boldsymbol{g}_i = \dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta^i}$	vecteurs de la base covariante	$\boldsymbol{g}^i = \left(\dfrac{\partial\theta^i}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^t$	vecteurs de la base contravariante
$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$	composantes du tenseur métrique covariant	$g^{ij} = \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$	composantes du tenseur métrique contravariant

$\boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{x}}_{,x} = \overline{\boldsymbol{g}}_i \otimes \boldsymbol{g}^i$	gradient de transformation
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^t\boldsymbol{F} = \overline{g_{ij}}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^i$	tenseur des dilatations (CAUCHY-GREEN droit)
$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \gamma_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^i$ $= \frac{1}{2}(\overline{g_{ij}} - g_{ij})\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^i$	tenseur de déformation de GREEN-LAGRANGE
$\boldsymbol{S} = S^{ij}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_i$	second tenseur de contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF

indices en lettres latines $i = 1 \ldots 3$ indices en lettres grecques $\alpha = 1 \ldots 2$

TABLEAU 2.1 – *Variables de base et notations pour l'élément* BÜCHTER *et al. [1994]*

2.2.1 Description géométrique et cinématique de la coque

La géométrie de la coque avant et après déformation est représentée sur la figure 2.2. Toutes les variables cinématiques sont de type déplacement. La cinématique utilisée repose sur les théories classiques de plaques et coques. Ainsi, (θ^1, θ^2) sont les coordonnées curvilignes qui permettent de définir un point sur la surface de référence S, le vecteur position d'un point de cette surcace étant noté $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta^1, \theta^2)$ avant déformation et $\overline{\boldsymbol{r}}$ après déformation. La coordonnées θ^3 permet de repérer un feuillet S' dans l'épaisseur de la coque. Un point de ce feuillet est repéré par le vecteur position $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ avant déformation et $\overline{\boldsymbol{x}}$ après déformation. Sur la figure 2.2, on a aussi représenté les vecteurs $\boldsymbol{g}_i$ et $\overline{\boldsymbol{g}}_i$ de la base covariante avant et après déformation, les vecteurs tangents à la surface de référence $\boldsymbol{a}_\alpha$ et $\overline{\boldsymbol{a}}_\alpha$, et les vecteurs directeurs $\boldsymbol{a}_3$ et $\overline{\boldsymbol{a}}_3$.
La position d'un point quelconque sur la configuration s'écrit

$$\boldsymbol{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \boldsymbol{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \boldsymbol{a}_3(\theta^1, \theta^2) \tag{2.18}$$

On se ramène à une formulation 2D en supposant que les déplacements varient linéairement dans l'épaisseur [3]

hypothèse $$\boldsymbol{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \boldsymbol{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \boldsymbol{w}(\theta^1, \theta^2) \tag{2.19}$$

avec v et w représentant respectivement le déplacement d'un point de la surface moyenne et la différence entre les vecteurs directeurs de la coque $\boldsymbol{a}_3$ et $\overline{\boldsymbol{a}}_3$ dans les configurations initiale et déformée.
Le vecteur position $\overline{x}$ sur la configuration déformée s'écrit alors

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}) + \theta^3(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{w}) = \overline{\boldsymbol{r}} + \theta^3\, \overline{\boldsymbol{a}}_3 \tag{2.20}$$

Des équations (2.18) et (2.19) on déduit les vecteurs de base

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_\alpha &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta^\alpha} = \boldsymbol{r}_{,\alpha} + \theta^3\, \boldsymbol{a}_{3,\alpha} = \boldsymbol{a}_\alpha + \theta^3\, \boldsymbol{a}_{3,\alpha} & \overline{\boldsymbol{g}}_\alpha &= \overline{\boldsymbol{a}}_\alpha + \theta^3\, \overline{\boldsymbol{a}}_{3,\alpha} \\ \boldsymbol{g}_3 &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta^3} = \boldsymbol{a}_3 & \overline{\boldsymbol{g}}_3 &= \overline{\boldsymbol{a}}_3 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Les composantes de la déformation de GREEN-LAGRANGE sont

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\overline{g}_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{g}}_i \overline{\boldsymbol{g}}_j - \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j) \tag{2.22}$$

En y substituant les expressions des vecteurs de (2.21), elles se réécrivent sous la forme quadratique

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{ij} + (\theta^3)^2\, Q_{ij} \tag{2.23}$$

3. De faibles déformations de cisaillement transverse peuvent justifier cette hypothèse

avec

$$
\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}}_i\overline{\boldsymbol{a}}_j - \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j) \\
\beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}}_{3,\alpha}\overline{\boldsymbol{a}}_\beta + \overline{\boldsymbol{a}}_{3,\beta}\overline{\boldsymbol{a}}_\alpha - \boldsymbol{a}_{3,\alpha}\boldsymbol{a}_\beta - \boldsymbol{a}_{3,\beta}\boldsymbol{a}_\alpha) \\
\beta_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}}_{3,\alpha}\overline{\boldsymbol{a}}_3 - \boldsymbol{a}_{3,\alpha}\boldsymbol{a}_3) \\
\beta_{33} &= 0 \\
Q_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}}_{3,\alpha}\overline{\boldsymbol{a}}_{3,\beta} - \boldsymbol{a}_{3,\alpha}\boldsymbol{a}_{3,\beta}) \\
Q_{\alpha 3} &= 0 \\
Q_{33} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Compte-tenu de (2.24), on peut expliciter (2.23) sous la forme

$$\text{(membrane)} \qquad \gamma_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} \tag{2.25}$$

$$\text{(flexion)} \qquad + \theta^3\beta_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2\, Q_{\alpha\beta} \tag{2.26}$$

$$\text{(cisaillement transverse)} \qquad \gamma_{\alpha 3} = \alpha_{\alpha 3} + \theta^3\beta_{\alpha 3} + (\theta^3)^2\, Q_{\alpha 3} = \alpha_{\alpha 3} + \theta^3\beta_{\alpha 3} \tag{2.27}$$

$$\text{(dilatation suivant l'épaisseur)} \qquad \gamma_{33} = \alpha_{33} + \theta^3\beta_{33} + (\theta^3)^2\, Q_{33} = \alpha_{33} \tag{2.28}$$

Remarque 2.1

Si les gradients de cisaillement transverse et la variation d'épaisseur sont petits, on peut négliger les termes quadratiques en θ^3 dans l'équation (2.23). Une estimation de l'erreur induite par cette approximation est donnée dans [Büchter, 1992] et [Büchter *et al.*, 1994]. On suppose donc, pour toute la suite, que $Q_{ij} = 0 \quad \forall\, i, j$. ❑

Remarque 2.2

La dilatation suivant l'épaisseur γ_{33} est une constante. Cela est dû à l'hypothèse (2.19) sur les déplacements. Cela pose un problème lorsque la coque devient très mince. En effet, dans le cas de l'élasticité linéaire, la contrainte S^{33} est obtenue par

$$S^{33} = D^{33ij}\gamma_{ij} + D^{3333}\gamma_{33} \qquad (i,j) \neq (3,3) \tag{2.29}$$

Lorsque l'épaisseur $h \to 0$ on doit avoir $S^{33} \to 0$. Or ce n'est pas le cas ici car $\gamma_{33} = \alpha_{33} = cte$. La solution la plus simple à ce problème consiste à imposer $\gamma_{33} = 0$ de manière à obtenir la bonne limite pour S^{33}. Cependant, cela entraîne une erreur d'au moins ν^2 (ν =coefficient de Poisson) pour les problèmes dominés par la flexion ([Basar et Krätzig, 1985]). Pour obtenir la bonne limite pour S^{33}, dans les formulations traditionnelles, on condense la loi de comportement grâce à l'approximation

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{33} \simeq -\tfrac{D^{33ij}}{D^{3333}}\gamma_{ij} \\
\Rightarrow \quad &\alpha_{33} + \theta^3\beta_{33} = -\tfrac{D^{33ij}}{D^{3333}}(\alpha_{ij} + \theta^3\beta_{ij}) \qquad (i,j) \neq (3,3)
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Toutefois, cela n'est plus possible pour des lois de comportement non-linéaires. ❑

2.2.2 Introduction de β_{33} par le concept EAS

Une autre façon de résoudre le problème soulevé par la remarque 2.2 consiste à introduire un terme β_{33} non nul comme paramère additionnel dans la formulation de coque. De cette manière, la dilatation γ_{33} est linéaire dans l'épaisseur. Par ailleurs, cela permet déviter la condensation de la loi de comportement. On peut ainsi utiliser des lois de comportement 3D (même non-linéaires) sans avoir à les modifier. Les formulations à *7 paramètres* sont basées sur ce principe.
Toutefois, à la différence de ces formulations traditionnelles, le terme additionnel β_{33} est introduit ici à l'aide du concept EAS développé par SIMO et RIFAI [1990] pour améliorer les performances des éléments finis et éviter les problèmes de verrouillage.[4] Ainsi, on ajoute à la déformation usuelle $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u})$ (cf. équations (2.2) et (2.12)) une déformation additionnelle $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$. Le nouveau champ de déformation s'écrit alors

$$\boldsymbol{\gamma} = \underbrace{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u})}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{\text{ajoutée}} \tag{2.31}$$

Dans notre cas, on choisit

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \theta^3 \tilde{\beta}_{33}\, g^3 \otimes g^3 \qquad \textit{avec} \qquad \tilde{\beta}_{33} = \tilde{\beta}_{33}(\theta^1, \theta^2) \tag{2.32}$$

Par opposition au terme usuel de déformation $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u})$ *compatible*, la déformation *ajoutée* $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ est ausi appelée *incompatible* car elle ne nécessite pas de continuité inter-éléments. En introduisant (2.31) dans une formulation à trois champs (Hu-Washisu) et en imposant que les champs de contrainte $\boldsymbol{S}$ et de déformation additionnelle $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ soient orthogonaux à l'aide de la condition de compatibilité

$$\int_\Omega \boldsymbol{S} : \delta\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\, dV = 0 \tag{2.33}$$

on peut se ramener à une formulation de type déplacement où $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ joue le rôle d'un champ incompatible additionnel, condensable au niveau élémentaire. De cette manière, le problème global reste un problème à 6 paramètres.
La formulation variationnelle du problème complet s'écrit donc

$$\text{(équilibre)} \qquad \int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u}\, dV - \lambda P_e(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \tag{2.34}$$

$$\text{(compatibilité)} \qquad \int_\Omega \boldsymbol{S} : \delta\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\, dV = 0 \tag{2.35}$$

$$\text{(comportement)} \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \big(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})\big).\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \tag{2.36}$$

4. Le verrouillage est un phénomène purement numérique qui traduit le désaccord entre la théorie de coque utilisée et les fonctions de forme qui servent à l'interpolation nodale. Le verrouilage de membrane intervient si les effets de membrane et de flexion ne sont pas découplés, le verrouillage de cisaillement se traduit par une surestimation de l'énergie de cisaillement transverse et le verrouillage volumétrique peut survenir lorsque le matériau est presque incompressible.

et dans le cas d'une structure avec défaut initial

$$\text{(équilibre)} \qquad \int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^\star).\delta\boldsymbol{u}\, dV - \lambda P_e(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \tag{2.37}$$

$$\text{(compatibilité)} \qquad \int_\Omega \boldsymbol{S} : \delta\tilde{\gamma}\, dV = 0 \tag{2.38}$$

$$\text{(comportement)} \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \big(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star)\big).\boldsymbol{u} + \tilde{\gamma} \tag{2.39}$$

Puisque la variable additionnelle $\tilde{\gamma}$ est éliminée au niveau élémentaire, on utilisera, par abus de notation comme dans le cas tridimensionnel, indifféremment les écritures condensées $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\lambda).\delta\boldsymbol{u} = 0$ et $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^\star,\lambda).\delta\boldsymbol{u} = 0$ à la place des systèmes d'équations précédents.

2.3 Extension aux matériaux non-linéaires

2.3.1 Remarques préliminaires

A partir d'une certaine valeur du chargement, la loi de comportement des matériaux n'est plus parfaitement élastique et ils subissent des déformations plastiques permanentes. C'est particulièrement vrai pour les métaux utilisés pour la construction de la plupart des structures minces. Si, de plus, l'élancement de ces structures est modéré ou qu'elles présentent des défauts de forme importants, les déformations plastiques peuvent précéder le phénomène de flambement. Dans ce cas, la ruine de la structure peut être due à l'épuisement plastique du matériau, au flambement ou au couplage de ces deux phénomènes.

Le problème est alors beaucoup plus complexe que dans le cas des systèmes conservatifs. La théorie générale du flambage plastique est présentée dans les travaux de HUTCHINSON [1974] ou de LEGER et POTIER-FERRY [1988] et dans [NGUYEN, 2000]. Les résultats de sensibilité aux imperfections énoncés dans le paragraphe 1.4 restent qualitativement valables. Cependant, la charge critique de flambement d'une structure et son degré de sensibilité aux imperfections peuvent être fortement modifiés en présence de déformations plastiques. Il est donc nécessaire de prendre en compte ce phénomène s'il est susceptible de survenir.

Dans le cas où le matériau présente un comportement non-linéaire, l'essentiel du problème réside dans le choix d'une modélisation appropriée de la loi constitutive, souvent très complexe, pour décrire ce comportement ([COMBESCURE, 1991], [COMBESCURE, 1998]). Les lois de comportement tangentes les plus couramment utilisées sont

- le module tangent, qui remplace le module élastique lorsqu'on est dans le domaine plastique ;
- la théorie de la déformation qui considère que la déformation plastique $\boldsymbol{\gamma}^p$ s'exprime en fonction de l'état actuel des contraintes $\boldsymbol{S}$, sans tenir compte de l'histoire des déformations ;
- la théorie incrémentale qui relie l'incrément de déformation plastique $d\boldsymbol{\gamma}^p$ à l'état actuel des contraintes $\boldsymbol{S}$ et à l'incrément de contrainte $d\boldsymbol{S}$ imposé à partir de cet état.

Les déformations plastiques dépendent généralement de l'état actuel et de l'histoire du chargement et ont un caractère irréversible. C'est pourquoi la théorie incrémentale est la plus complète pour décrire ce phénomène. La théorie du module tangent est, quant à elle, la plus simpliste.

La théorie de la déformation est moins satisfaisante que la théorie incrémentale car elle ne tient pas compte de l'histoire du chargement, et donc ne prend pas en compte le phénomène de décharge élastique et le caractère irréversible des déformations plastiques. C'est en fait un modèle élastique non-linéaire.

Suivant la forme du mode de flambement et l'amplitude des imperfections géométriques, la théorie de la déformation peut s'avérer insuffisante car certaines zones peuvent se décharger élastiquement puis retourner en plasticité. Toutefois, pour la prédiction de la charge critique de flambement des plaques et des coques, cette modélisation a tendance à donner des résultats plus proches des résultats expérimentaux que la théorie incrémentale. Des études récentes confirment ce paradoxe ([GIEZEN *et al.*, 1991], [ORE et DURBAN, 1992]).

2.3.2 Loi de type puissance

La Méthode Asymptotique Numérique, que nous allons utiliser par la suite pour la résolution du problème non-linéaire, suppose une certaine régularité des courbes de réponse de la structure. C'est pourquoi elle ne permet pas encore de modéliser efficacement le phénomène de décharge élastique. C'est donc la théorie de la déformation sous l'hypothèse des petites déformations qui sera utilisée ici et on se limitera à l'étude d'une loi de comportement de type puissance basée sur la relation de RAMBERG et OSGOOD [1943] telle qu'elle est décrite dans le manuel théorique d'ABAQUS ([HIBBITT *et al.*, 1998]).
Dans le cas unidimensionnel, cette loi s'écrit

$$E\,\varepsilon = \sigma + \alpha \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y}\right)^{n-1} \sigma \tag{2.40}$$

où σ est la contrainte, ε la déformation et E, σ_y, α et n sont des paramètres intrinsèques au matériau considéré et représentent respectivement le module d'YOUNG, la contrainte limite d'élasticité, un paramètre de décallage et l'exposant réel d'écrouissage ($n > 1$).

Cette relation est non-linéaire quel que soit le niveau de contrainte (figure 2.3) mais, pour les valeurs couramment utilisées de l'exposant d'écrouissage ($n \simeq 5$ ou plus), la non-linéarité ne devient significative que pour des niveaux de contrainte approchant σ_y ou supérieurs. Pour simplifier le rôle des paramètres n et α, on peut dire que n permet de « régler » la courbure de la courbe d'écrouissage, et que le paramètre α permet de « régler » l'écart AB (figure 2.3) qui mesure la surestimation de déformation due à la non-linéarité lorsque $\sigma = \sigma_y$. En effet on a

$$\sigma = \sigma_y \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varepsilon}_y = (1+\alpha)\frac{\sigma_y}{E} \tag{2.41}$$

alors qu'on aurait $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$ si la loi était purement élastique jusqu'à σ_y. Avec les valeurs adéquates des paramètres n et α, il est possible d'approcher les courbes d'écrouissage des métaux les plus courants.

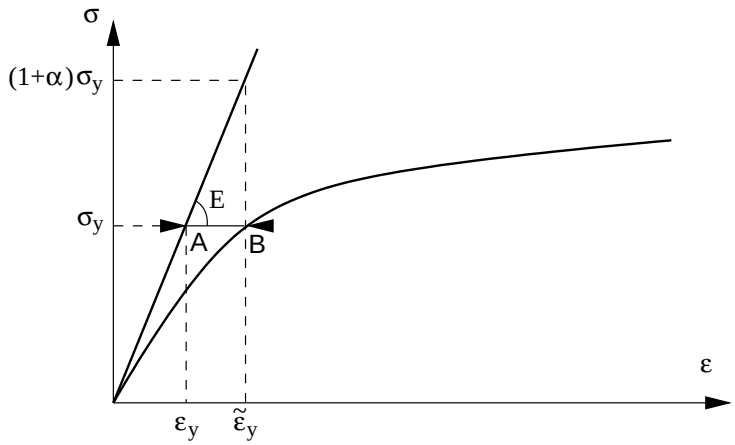


FIGURE 2.3 – *Loi de comportement de type puissance basée sur la relation de* RAMBERG-OSGOOD.

La généralisation au cas tridimensionnel est effectuée à l'aide d'une relation élastique classique pour le premier terme de (2.40) et du critère de plasticité de Von Mises pour le terme non-linéaire. La loi de comportement tridimensionnelle en écriture lagrangienne s'écrit alors sous la forme

$$E\boldsymbol{\gamma} = (1+\nu)\,\boldsymbol{S}^d - (1-2\nu)\,P\boldsymbol{I} + \frac{3}{2}\,\alpha\left(\frac{S_{eq}}{\sigma_y}\right)^{n-1}\boldsymbol{S}^d \tag{2.42}$$

où

$\boldsymbol{S}$ est le second tenseur de contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF
$\boldsymbol{\gamma}$ est le tenseur de déformation de GREEN-LAGRANGE
$\boldsymbol{I}$ est le tenseur unité d'ordre 2
$P = -\frac{1}{3}\,\boldsymbol{S} : \boldsymbol{I} = -\frac{1}{3}\,Tr(\boldsymbol{S})$ est la pression hydrostatique
$\boldsymbol{S}^d = \boldsymbol{S} + P\boldsymbol{I}$ est la partie déviatorique de la contrainte $\boldsymbol{S}$
$S_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\boldsymbol{S}^d : \boldsymbol{S}^d}$ est la contrainte équivalente de VON MISES

On peut utiliser cette loi telle quelle sans la modifier avec la formulation de coque tridimensionnelle décrite dans le paragraphe précédent. La formulation variationnelle du problème complet s'écrit alors

$$\begin{aligned}
&\text{(équilibre)} && \int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u}\,dV - \lambda P_e(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \\
&\text{(compatibilité)} && \int_\Omega \boldsymbol{S} : \delta\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\,dV = 0 \\
&\text{(comportement)} && E\boldsymbol{\gamma} = (1+\nu)\,\boldsymbol{S}^d - (1-2\nu)\,P\boldsymbol{I} + \frac{3}{2}\,\alpha\left(\frac{S_{eq}}{\sigma_y}\right)^{n-1}\boldsymbol{S}^d \\
&\text{(déformation)} && \boldsymbol{\gamma} = \big(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})\big).\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

et dans le cas d'une structure avec défaut initial

$$
\begin{aligned}
&\text{(équilibre)} && \int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^\star).\delta\boldsymbol{u}\, dV - \lambda P_e(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \\
&\text{(compatibilité)} && \int_\Omega \boldsymbol{S} : \delta\tilde{\gamma}\, dV = 0 \\
&\text{(comportement)} && E\gamma = (1+\nu)\,\boldsymbol{S}^d - (1-2\nu)\,P\boldsymbol{I} + \frac{3}{2}\,\alpha\left(\frac{S_{eq}}{\sigma_y}\right)^{n-1}\boldsymbol{S}^d \\
&\text{(déformation)} && \gamma = \big(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star)\big).\boldsymbol{u} + \tilde{\gamma}
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

2.4 Discrétisation par éléments finis

La résolution numérique du problème variationnel et l'implantation dans un code de calcul passe par la Méthode des Eléments Finis (MEF) qui permet de transformer le problème continu en un problème discret sous forme matricielle.
Le déplacement $\boldsymbol{u}$ et sa contrepartie virtuelle $\delta\boldsymbol{u}$ sont approchés classiquement par

$$
[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{N}][\boldsymbol{q}] \qquad\qquad [\delta\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{N}][\delta\boldsymbol{q}] \tag{2.45}
$$

où $[\boldsymbol{N}]$ est la matrice des fonctions de forme qui servent à interpoler les déplacements nodaux $[\boldsymbol{q}]$ et $[\delta\boldsymbol{q}]$ dans l'élément.
Les parties linéaire $\gamma^l(\boldsymbol{u})$ et non-linéaire $\gamma^{nl}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ de la déformation (2.2) s'écrivent sous la forme matricielle suivante

$$
\begin{aligned}
[\gamma] &= [\gamma^l] + [\gamma^{nl}] && (2.46)\\
\text{avec}\quad [\gamma^l] &= [\boldsymbol{R}][\boldsymbol{G}][\boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{B}_l][\boldsymbol{q}] && (2.47)\\
[\gamma^{nl}] &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{G}][\boldsymbol{q}] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{\theta}] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{B}_{nl}][\boldsymbol{q}] && (2.48)
\end{aligned}
$$

où $[\boldsymbol{R}]$, $[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})]$, $[\boldsymbol{G}]$ représentent respectivement la matrice des composantes de la base covariante, la matrice du gradient de déplacement, la matrice du gradient des fonctions de forme. $[\boldsymbol{B}_l]$ est la matrice classique de déformation en petites perturbations. Afin de mettre en évidence sa non-linéarité quadratique, la partie non-linéaire $[\gamma^{nl}]$ est écrite comme produit de la matrice $[\boldsymbol{A}(q)]$ et du vecteur gradient de déplacement $[\boldsymbol{\theta}(q)] = [\boldsymbol{G}][\boldsymbol{q}]$ tous deux linéaires en $\boldsymbol{q}$, ou encore comme produit du vecteur $\boldsymbol{q}$ et de la matrice $[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q})]$ qui est linéaire en $\boldsymbol{q}$ ([Zienkiewicz et Taylor, 1989, 1991], [Crisfield, 1991]).
La déformation virtuelle (2.8) s'écrit

$$
\begin{aligned}
[\delta\gamma] &= [\delta\gamma^l] + [\delta\gamma^{nl}] \\
&= ([\boldsymbol{B}_l] + [\boldsymbol{B}_{nl}])[\delta\boldsymbol{q}] && (2.49)\\
&= [\boldsymbol{B}][\delta\boldsymbol{q}]
\end{aligned}
$$

La loi de comportement (2.10) prend la forme

$$[\boldsymbol{S}] = [\boldsymbol{D}][\gamma] = [\boldsymbol{D}]\left([\boldsymbol{B}_l] + \frac{1}{2}[\boldsymbol{B}_{nl}]\right)[\boldsymbol{q}] \tag{2.50}$$

A l'aide de (2.45) et de (2.49), on peut réécrire les équations d'équilibre du problème variationnel sous la forme matricielle

$$[\delta\boldsymbol{q}]^t \left(\int_\Omega [\boldsymbol{B}]^t[\boldsymbol{S}]\,dV - \lambda\int_\Omega [\boldsymbol{N}]^t[\boldsymbol{b}]\,dV - \lambda\int_{\partial\Omega_t} [\boldsymbol{N}]^t[\boldsymbol{t}]\,dS\right) = 0 \tag{2.51}$$

On définit alors forces internes $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})]$ et les forces externes $[\boldsymbol{F}_e]$ par

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}]^t[\boldsymbol{S}]\,dV \qquad [\boldsymbol{F}_e] = \int_\Omega [\boldsymbol{N}]^t[\boldsymbol{b}]\,dV - \int_{\partial\Omega_t} [\boldsymbol{N}]^t[\boldsymbol{t}]\,dS \tag{2.52}$$

et le vecteur résidu d'équilibre $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q},\lambda)]$ comme la différence entre les forces internes et externes

$$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q},\lambda)] = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})] - \lambda[\boldsymbol{F}_e] \tag{2.53}$$

Etant donné que (2.51) doit être vérifiée pour tout $[\delta\boldsymbol{q}]$ admissible, il est clair que l'on doit avoir

$$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q},\lambda)] = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})] - \lambda[\boldsymbol{F}_e] = \boldsymbol{0} \tag{2.54}$$

Spécificités de l'élément Büchter *et al.* Dans le cas de l'élément de coque décrit dans la section 2.2, la discrétisation est assurée à l'aide des fonctions de forme d'un élément quadrilatéral isoparamétrique classique à 8 nœuds avec intégration réduite (2 points de Gauss dans l'épaisseur) dans le cas d'une loi de comportement purement élastique, et 5 points de Gauss dans l'épaisseur dans le cas de la loi de type puissance présentée dans le paragraphe 2.3. Le vecteur nodal $\boldsymbol{q}$ renferme les vecteurs déplacements $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ de la cinématique de coque illustrée dans la figure 2.2.

Puisque le terme $\tilde{\beta}_{33}$ de la déformation additionnelle (2.32) introduite par le concept EAS ne nécessite aucune continuité inter-éléments, on le discrétise simplement à l'aide d'un polynôme bilinéaire

$$\tilde{\beta}_{33} = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \tag{2.55}$$

où ξ et η représentent les coordonnées isoparamétriques de l'élément. Cette discrétisation permet de réécrire $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ sous la forme matricielle

$$[\tilde{\boldsymbol{\gamma}}] = [\boldsymbol{B}_\alpha]\,[\boldsymbol{\alpha}] \tag{2.56}$$

C'est ce vecteur $\boldsymbol{\alpha}$, de taille 4 au niveau élémentaire, qui est le 7-ième paramètre de la formulation. Il pourra néanmoins être éliminé au niveau élémentaire par condensation des équations (2.35) et (2.36). Les matrices élémentaires $[\boldsymbol{R}]$, $[\boldsymbol{G}]$ et $[\boldsymbol{B}_\alpha]$ pour cet élément sont données en annexe de [Zahrouni, 1998].

2.5 Méthodes classiques de résolution du problème non-linéaire

Afin d'étudier numériquement la stabilité d'une structure, il est nécessaire de coupler la formulation par éléments finis, obtenue dans le paragraphe précédent, avec des méthodes de suivi de branches d'équilibre et de détection des points singuliers le long de ces branches. Lorsque des points singuliers ont été isolés, il peut également être souhaitable de différencier les points limites et les points de bifurcation et, le cas échéant, de déterminer les branches bifurquées.

2.5.1 Calcul de branche d'équilibre

Les techniques classiques de calcul de branches d'équilibre solutions d'un problème non-linéaire sont basées sur des méthodes incrémentales itératives de type NEWTON-RAPHSON, appelées également méthodes de prédiction-correction ([ALLGOWER et GEORG, 1990]). En effet, ces méthodes consistent généralement à faire un pas prédicteur tangent à la courbe d'équilibre puis à corriger le point ainsi obtenu de manière itérative jusqu'à converger vers la courbe d'équilibre (figure 2.4), i.e. jusqu'à annuler le résidu d'équilibre (2.53). En répétant cette procédure, on peut décrire la courbe solution point par point.
Le pas tangent prédicteur $(\Delta \boldsymbol{q}, \Delta\lambda)$ peut être calculé en résolvant le problème tangent

$$[\boldsymbol{f}_{,q}][\Delta \boldsymbol{q}] - \Delta\lambda[\boldsymbol{F}_e] = \boldsymbol{0} \tag{2.57}$$

$$[\Delta \boldsymbol{q}]^t[\Delta \boldsymbol{q}] + \Delta\lambda^2 = \Delta l^2 \tag{2.58}$$

où (2.57) correspond aux équations (2.54) linéarisées et (2.58) permet de régler la longueur du pas tangent. En utilisant (2.52) et (2.50), on peut réécrire (2.57) sous la forme

$$[\boldsymbol{K}_t][\Delta \boldsymbol{q}] - \Delta\lambda[\boldsymbol{F}_e] = \boldsymbol{0} \tag{2.59}$$

où $[\boldsymbol{K}_t]$ est la matrice de rigidité tangente définie par ([ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 1989, 1991])

$$[\boldsymbol{K}_t] = [\boldsymbol{K}_0] + [\boldsymbol{K}_u] + [\boldsymbol{K}_\sigma] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}]^t[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}] + [\boldsymbol{G}][\hat{\boldsymbol{S}}][\boldsymbol{G}]\, dV \tag{2.60}$$

De nombreuses méthodes ont été proposées pour calculer les pas de correction. La plus célèbre d'entre elles est sans doute la méthode à longueur d'arc, introduite par WEMPNER [1971] et RIKS [1972, 1979, 1984], puis modifiée par RAMM [1981], CRISFIELD [1981, 1983, 1991], HELLWEG et CRISFIELD [1998], KOUHIA et MIKKOLA [1989] et ERIKSSON et KOUHIA [1995], entre autres.
La méthode dévelopée par RIKS consiste à calculer des pas de correction $(\delta \boldsymbol{q}_i, \delta\lambda_i)$ orthogonaux à la direction tangente $(\Delta \boldsymbol{q}, \Delta\lambda)$ (figure 2.4). Cela revient à résoudre le problème itératif

$$[\boldsymbol{K}_t][\delta \boldsymbol{q}_i] - \delta\lambda_i[\boldsymbol{F}_e] = -[R(\boldsymbol{q}_i, \lambda_i)] \tag{2.61}$$

$$[\Delta \boldsymbol{q}]^t[\delta \boldsymbol{q}_i] + \Delta\lambda\, \delta\lambda_i = 0 \tag{2.62}$$

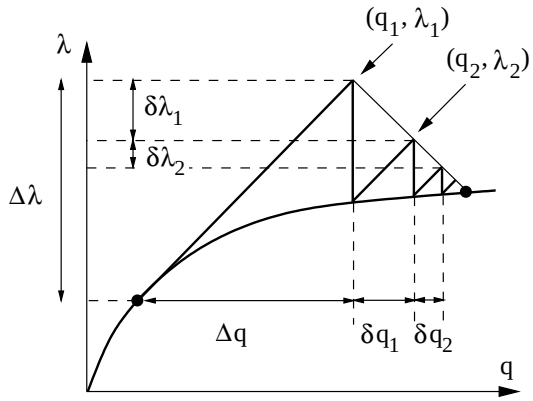


FIGURE 2.4 – *Méthode à longueur d'arc*

2.5.2 Traitement des points singuliers

Lorsqu'on suit une branche d'équilibre avec la méthode à longueur d'arc, il peut y avoir des points singuliers, i.e. des points limites ou des points de bifurcation, le long de la branche. Pour détecter précisément ces points singuliers, on ajoute aux équations du problème éléments finis (2.54) une condition qui n'est remplie qu'en un point singulier. On peut, par exemple (cf. § 1.3.3), choisir d'imposer $det\,[\boldsymbol{K}_t] = 0$ mais ce n'est pas la solution la plus efficace d'un point de vue numérique. On préfère généralement utiliser le fait qu'en un point singulier au moins une valeur propre ω de l'opérateur tangent est nulle, i.e.

$$[\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{\varphi}] = \boldsymbol{f}_{,q}\,\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0} \tag{2.63}$$

Le problème de détection des points singuliers peut donc se reformuler à l'aide du système augmenté

$$[\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}, \lambda)] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{q}, \lambda) \\ \boldsymbol{R}_{,q}\,(\boldsymbol{q}, \lambda)\,\boldsymbol{\varphi} \\ l(\boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{q}) - \lambda \boldsymbol{F}_e \\ \boldsymbol{f}_{,q}\,(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\varphi} \\ l(\boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2.64}$$

où $l(\boldsymbol{\varphi})$ est une fonctionnelle qui sert à normaliser $\boldsymbol{\varphi}$ afin que $\boldsymbol{\varphi} \neq \boldsymbol{0}$, ce qui assure l'unicité de la solution. Le plus souvent, on prend

$$l(\boldsymbol{\varphi}) = \|\boldsymbol{\varphi}\| - 1 = 0 \tag{2.65}$$

Ainsi, la solution du système (2.64) à $2N_{ddl} + 1$ équations et $2N_{ddl} + 1$ inconnues ($\boldsymbol{q}$ possède N_{ddl} inconnues, $\boldsymbol{\varphi}$ en possède N_{ddl} et λ est une inconnue, avec N_{ddl} le nombre de degrés de libertés de la structure discrétisée) est un point de la courbe d'équilibre (grâce à la première ligne) en lequel les équations d'équilibre sont singulières. Ce point solution est donc soit un point limite, soit un point de bifurcation. Ce système augmenté fournit non seulement le déplacement $\boldsymbol{q}$ et la charge critique λ, mais aussi un vecteur propre $\boldsymbol{\varphi}$ associé à la valeur propre nulle. On peut, si

$\boldsymbol{R}_{,q} = \boldsymbol{K}_t$ est symétrique, utiliser ce vecteur propre pour déterminer si le point singulier est un point limite ou une bifurcation. En effet, d'après (1.12) et (1.13), on a

$$[\boldsymbol{\varphi}]^t\,[\boldsymbol{F}_e] = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{bifurcation} \tag{2.66}$$

$$[\boldsymbol{\varphi}]^t\,[\boldsymbol{F}_e] \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{point limite} \tag{2.67}$$

Comme pour le calcul des branches d'équilibre, le système augmenté (2.64) est habituellement résolu à l'aide d'une méthode incrémentale itérative de type NEWTON dont le problème tangent associé est

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_t & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{F}_e \\ \nabla_q(\boldsymbol{K}_t\boldsymbol{\varphi}) & \boldsymbol{K}_t & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\varphi}^t & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{q} \\ \Delta\boldsymbol{\varphi} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2.68}$$

Ce système augmenté a été introduit par KEENER et KELLER [1973], puis étudié ou utilisé dans un contexte éléments finis par MOORE et SPENCE [1980], RHEINBOLDT [1982], WERNER et SPENCE [1984], JEPSON et SPENCE [1985], WEINITSCHKE [1985], WRIGGERS *et al.* [1988], WRIGGERS et SIMO [1990], WAGNER et WRIGGERS [1991], ERIKSSON [1994, 1997, 1998], ERIKSSON *et al.* [1999], REITINGER et RAMM [1995], DEML et WUNDERLICH [1997], IBRAHIMBEGOVIĆ et AL MIKDAD [2000].

Par ailleurs, de nombreuses stratégies de calcul des branches bifurquées ont été proposées. Les développements asymptotiques de KOITER [1945] et BUDIANSKY et HUTCHINSON [1966] et leur couplage à la méthode des éléments finis par CASCIARO *et al.* [1992, 1998], PEEK et KHEYRKHAHAN [1993], LANZO et GARCEA [1996] ont déjà été évoqués. Les autres stratégies sont basées soit sur l'introduction d'une imperfection qui « force » l'aiguillage sur la branche bifurquée, soit sur la détermination des directions tangentes au point de bifurcation et sur l'utilisation d'une méthode de suivi identique à celle utilisée pour la branche fondamentale (cf. § 2.5.1). Parmi ces dernières, on peut citer les contributions de WAGNER et WRIGGERS [1988], KOUHIA et MIKKOLA [1989], FUJII [1992], FUJII et RAMM [1997] et MAGNUSSON et SVENSSON [1998]. Une procédure pour les bifurcations multiples est présentée dans [MAGNUSSON, 2001].

2.6 Bilan du chapitre

Les motivations et les conclusions concernant le modèle mécanique choisi et sa mise en œuvre ont été évoquées tout au long de ce chapitre. Nous nous proposons ici d'en faire la synthèse.

❋ Le modèle de base repose sur les équations de l'élasticité tridimensionnelle. Les non-linéarités géométriques étant à la base du phénomène de flambement, leur prise en compte dans le modèle est inévitable.

❋ Pour étudier des structures minces, il est nécessaire d'adopter une formulation de coque. Plusieurs dizaines de formulations différentes existent à ce jour. Celle que nous avons retenue combine de nombreux avantages :

- Toutes les variables cinématiques sont de type déplacement. On évite ainsi de manipuler des

matrices de rotation, peu propices aux développements en séries que nous allons introduire dans le chapitre qui suit.

- Cette formulation permet les grandes rotations ainsi que le cisaillement transverse.
- Cette formulation autorise une dilatation linéaire de la coque suivant l'épaisseur. Cela est rendu possible par l'introduction d'un paramètre additionnel à l'aide du concept EAS.
- Le concept EAS permet d'utiliser des lois de comportement 3D (linéaires ou non-linéaires) sans avoir à les modifier.

❋ Pour modéliser de manière réaliste le comportement des métaux utilisés pour la construction de la plupart des structures minces, une loi de comportement plastique basée sur la théorie de la déformation est utilisée. Plus précisément, on considère une loi de type puissance qui repose sur la relation de RAMBERG-OSGOOD. Il s'agit en fait d'une loi élastique non-linéaire car la théorie de la déformation ne permet pas de prendre en compte le phénomène de décharge élastique. Malgré cette restriction, cette loi de comportement donne d'excellents résultats lorsque le phénomène de décharge n'est pas trop important.

❋ Les diverses composantes de ce modèle mécanique ont été introduites l'une après l'autre, de manière à mettre en évidence les particularités et les difficultés inhérentes à chacune d'entre elles. Par ailleurs, chacune des formulations variationnelles proposées permet la prise en compte d'un défaut de forme initial.

❋ Une représentation matricielle du problème continu est obtenue par discrétisation à l'aide de la méthode des éléments finis. Cette forme matricielle permet une mise en œuvre numérique aisée. A ce propos, nous avons présenté et discuté les algorithmes classiques de calcul de courbes d'équilibre et de détection des points singuliers, ainsi que la méthode de Newton-Raphson sur laquelles ils reposent.

CHAPITRE 3

Méthode Asymptotique Numérique

Ce chapitre est consacré à la présentation de la MAN et à son utilisation pour le calcul de branches d'équilibre. Les spécificités de cette méthode ainsi que les différentes étapes de sa mise en œuvre sont décrites en détails. Une méthode de continuation basée sur cette procédure est ensuite exposée.
L'algorithme final permet de calculer les courbes d'équilibre d'une structure élastique parfaite ou avec défaut de forme initial. L'extension aux non-linéarités matérielles, dans le cadre de la formulation de coque présentée dans le chapitre précédent, est également traitée. Chacune des fonctionnalités est validée.

Plan du Chapitre 3

3.1. Introduction **59**
3.2. Méthodes de perturbation et MAN **60**
3.2.1. Les méthodes de perturbation en mécanique 60
3.2.2. Spécificités de la MAN 60
3.3. Résolution du problème non-linéaire géométrique **61**
3.3.1. Formulation quadratique 62
3.3.2. Développements en séries 62
3.3.3. M.E.F. 64
3.3.4. Récapitulatif de l'algorithme 65
3.4. Méthode de continuation **66**
3.4.1. Etude du résidu 67
3.4.2. Critère d'arrêt 68
3.4.3. Application 69
3.5. Amélioration la solution à l'aide d'approximants de Padé **69**
3.5.1. Principe 69
3.5.2. Application 70
3.6. Structure avec défaut de forme initial **71**
3.6.1. Ecriture matricielle 71
3.6.2. Application 71
3.7. Extension aux coques minces en grandes rotations **72**
3.7.1. Ecriture matricielle 73
3.7.2. Récapitulatif de l'algorithme 74
3.7.3. Application 74
3.7.4. Structure avec défaut de forme initial 75
3.8. Extension aux matériaux non-linéaires **76**
3.8.1. Ecriture quadratique 76
3.8.2. Développement asymptotique de la loi de comportement 77
3.8.3. Ecriture matricielle 78
3.8.4. Application 79
3.9. Cadre général d'écriture de la MAN **81**
3.9.1. Tableau récapitulatif 81
3.9.2. Cadre général d'écriture de la MAN 83
3.10. Bilan du chapitre **84**

3.1 Introduction

La Méthode Asymptotique Numérique est un algorithme destiné à résoudre les problèmes non-linéaires. C'est donc une alternative aux méthodes incrémentales itératives de type NEWTON-RAPHSON. Elle doit son nom à l'association de développements asymptotiques avec la méthode des éléments finis (MEF).

En effet, cette méthode consiste à développer chaque inconnue du problème sous la forme d'une série entière, en fonction d'un paramètre de contrôle a bien choisi que nous préciserons par la suite. En injectant ces développements dans le problème non-linéaire de départ et en isolant les termes suivant les puissances croissantes de a, on obtient une succession de problèmes linéaires bien posés. Cette première étape correspond à une méthode de perturbation. La seconde étape consiste à résoudre les sytèmes linéaires de manière récursive à l'aide de la MEF.

Etant donné que les séries possèdent un rayon de convergence limité, on n'obtient qu'une portion de la courbe solution. Pour décrire toute la courbe solution, il convient de choisir un nouveau point de départ et d'appliquer à nouveau la procédure, de la même manière que les méthodes de continuation classiques.

Le coût de calcul de cette procédure reste relativement faible car tous les systèmes linéaires à résoudre admettent le même opérateur tangent, i.e. la même matrice de rigidité tangente après discrétisation par éléments finis. La robustesse de la méthode de continuation pour le suivi de courbes et l'adaptation automatique de la longueur de pas en font une méthode très fiable.

Si la méthode asymptotique numérique n'a d'abord été utilisée que pour traiter les non-linéarités géométriques ([AZRAR *et al.*, 1993], [COCHELIN *et al.*, 1994a], [COCHELIN, 1994b]), de nombreux travaux ont par la suite élargi son champ d'applications. Ainsi, on sait aujourd'hui traiter les équations de Navier-Stokes ([TRI *et al.*, 1996], [CADOU, 1997], [CADOU *et al.*, 2001]), les coques élastiques en grandes rotations ([ZAHROUNI, 1998], [ZAHROUNI *et al.*, 1999]). Ces problèmes sont généralement considérés comme « faiblement non-linéaires ». Les fortes non-linéarités ont également été abordées : le contact unilatéral ([ELHAGE-HUSSEIN *et al.*, 1998]), la plasticité par le biais de la théorie de la déformation ([BRAIKAT *et al.*, 1997], [ZAHROUNI, 1998], [ZAHROUNI *et al.*, 1998]), la visco-plasticité ([CAO et POTIER-FERRY, 1999], [BRUNELOT, 1999]), l'élasto-plasticité en grandes déformations ([IMAZATENE, 2001]). Un état de l'art sur le traitement des fortes non-linéarités par la MAN a également été publié ([POTIER-FERRY *et al.*, 1997]). La MAN a par ailleurs été appliquée à des domaines aussi variés que la détection des bifurcations ([BOUTYOUR, 1994]), le calcul des branches bifurquées ([VANNUCCI *et al.*, 1998]), les vibrations ([AZRAR *et al.*, 1999], [DAYA et POTIER-FERRY, 2000]), les problèmes instationnaires ([BRAIKAT, 2000]). Elle a également été couplée à des techniques d'amélioration de séries ([COCHELIN *et al.*, 1994b], [NAJAH *et al.*, 1998], [ELHAGE-HUSSEIN *et al.*, 2000], [IMAZATENE, 2001]), de prédiction-correction par homotopie ([MALLIL, 1999], [LAHMAM *et al.*, 2000]), de sous-structuration et de parallélisme ([ESSAKHI *et al.*, 1999], [GALLIET, 2000]), et à des méthodes multi-grilles ([MOKHTARI *et al.*, 2001]).

3.2 Méthodes de perturbation et MAN

3.2.1 Les méthodes de perturbation en mécanique

D'un point de vue historique, l'introduction des méthodes de perturbations en mécanique remonte à près d'un siècle. Elles s'inscrivaient alors dans la grande tradition de résolution analytique. Les problèmes non-linéaires étant trop difficiles à résoudre de manière analytique, on préfèrait les transformer en une suite de problèmes linéaires que l'on savait traiter. Néanmoins, il était rare d'aller plus loin que les premiers termes des séries, le volume de calculs à mener devenant vite insurmontable. Ainsi, la méthode de perturbation utilisée par KOITER [1945] pour caractériser la sensibilité aux imperfections (cf. § 1.4.2) était tronquée à l'ordre 2.

Par la suite, THOMPSON et WALKER [1968] ont associé les techniques de perturbation à la méthode des éléments finis pour traiter des non-linéarités géométriques. Ils ont constaté que la précision de leur solution asymptotique augmentait avec l'ordre de troncature mais, partis du problème éléments finis cubique en déplacement, ils n'ont pu aller plus loin que le septième terme de la série et ont fini par conclure que leur méthode ne saurait être une véritable technique de résolution numérique. Avec l'avènement de l'ordinateur, n'ayant pas véritablement su faire leurs preuves, toutes ces méthodes ont été délaissées au profit des méthodes incrémentales itératives, capables de traiter toutes sortes de non-linéarités.

Les méthodes de perturbation ont toutefois connu un regain d'intérêt dans les années 80 avec les travaux de NOOR et de ses collaborateurs ([NOOR, 1981, 1985], [NOOR et PETERS, 1980, 1981]) qui les ont utilisées comme générateur des vecteurs de base pour la méthode de réduction de Rayleigh-Ritz. Cette méthode de réduction est basée sur le principe qu'un petit nombre de vecteurs bien choisis suffisent généralement pour obtenir une bonne représentation de la solution, toute la difficulté résidant dans le calcul de ces vecteurs. NOOR constate que cette association est efficace car on inverse très peu de matrices de rigidité et on ne résoud que des problèmes de petite taille. Par contre, il n'aborde pas la question du coût de calcul alors que l'enjeu des méthodes numériques pour le non-linéaire se trouve là.

3.2.2 Spécificités de la MAN

La Méthode Asymptotique Numérique voit le jour lorsque DAMIL et POTIER-FERRY [1990] proposent une « nouvelle méthode » pour calculer les bifurcations perturbées. Comme d'autres méthodes auparavant, cette méthode associe une méthode de perturbation à la MEF. Pourtant, l'association s'avère cette fois-ci très efficace et relativement peu coûteuse. Cela est dû à la constatation suivante : la méthode perturbation est très simple à mettre en œuvre lorsque le problème à traiter est quadratique, i.e. lorsqu'il peut se mettre sous la forme

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{0} \tag{3.1}$$

où $\boldsymbol{L}$ est un opérateur linéaire, $\boldsymbol{Q}$ un opérateur quadratique bilinéaire et $\boldsymbol{U}$ le vecteur contenant les inconnues du problème. Le principe de la méthode de perturbation consiste alors à chercher

le vecteur inconnu $\boldsymbol{U}$ sous la forme d'une série entière dépendant d'un paramètre a, que l'on tronque à l'ordre N

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0 + a\,\boldsymbol{U}_1 + a^2\,\boldsymbol{U}_2 + \ldots + a^N\,\boldsymbol{U}_N \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{U}_0$ est un point de départ connu. En introduisant ce développement dans le problème non-linéaire (3.1) et en identifiant terme à terme suivant les puissances croissantes de a, on obtient la succession de problèmes linéaires suivante

$$\begin{array}{lrcl}
\text{ordre } 1 & \boldsymbol{L}_t(U_1) & = & \boldsymbol{0} \\
\text{ordre } 2 & \boldsymbol{L}_t(U_2) & = & -\boldsymbol{Q}(U_1, U_1) = \boldsymbol{F}_1^{nl} \\
 & & \vdots & \\
\text{ordre } p \quad (p \leq N) & \boldsymbol{L}_t(U_p) & = & -\displaystyle\sum_{r=1}^{p-1} \boldsymbol{Q}(U_r, U_{p-r}) = \boldsymbol{F}_p^{nl}
\end{array} \tag{3.3}$$

Deux remarques s'imposent alors :

Remarque 3.1
Tous ces problèmes linéaires admettent le même opérateur tangent $\boldsymbol{L}_t$ défini par

$$\boldsymbol{L}_t(\bullet) = \boldsymbol{L}(\bullet) + 2\,\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{U}_0, \bullet) \tag{3.4}$$

et chaque second membre $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ ne dépend que de la solution aux ordres précédents. La procédure est donc très simple à mettre en œuvre.

❑

Remarque 3.2
L'écriture du problème dans un cadre quadratique est une des clés de l'efficacité de la procédure. En effet, cela permet d'obtenir des seconds membres très simples à calculer, même à l'ordre 30.

❑

La remarque 3.2 pourrait sembler très restrictive car la plupart des problèmes non-linéaires en mécanique ne se limitent pas à une non-linéarité quadratique. En fait, grâce à l'introduction de variables intermédiaires et éventuellement de procédures de régularisation, il est généralement possible de ramener ces problèmes à une écriture quadratique. C'est ce que nous allons voir dans les paragraphes qui suivent.

3.3 Résolution du problème non-linéaire géométrique

On se propose ici de résoudre à l'aide de la MAN le problème non-linéaire géométrique que l'on a introduit dans le paragraphe 1.3.1, à savoir

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \lambda).\delta\boldsymbol{u} = 0 \tag{3.5}$$

3.3.1 Formulation quadratique

Dans le cas de l'élasticité non-linéaire géométrique, l'équation (3.5) est cubique par rapport à $\boldsymbol{u}$. Comme on l'a expliqué (voir remarque 3.2), une expression cubique n'est pas très propice à des développements en séries. Une expression quadratique est préférable. On l'obtient en faisant apparaître explicitement la contrainte $\boldsymbol{S}$ dans la formulation. On remplace ainsi le problème (3.5) par le problème mixte équivalent

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\lambda).\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u}\, dV - \lambda P_e(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \\ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \big(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})\big).\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{3.6}$$

C'est la formulation que l'on avait déjà privilégiée lors de la mise en equation du problème dans le paragraphe 2.1.1. $\boldsymbol{S}$ joue le rôle de variable intermédiaire et permet de réduire de manière artificielle le degré de non-linéarité du problème. Ainsi, on préfère traiter des équations d'équilibre quadratiques en $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{S}$ et une relation de comportement quadratique en $\boldsymbol{u}$ plutôt qu'un problème cubique en $\boldsymbol{u}$.

3.3.2 Développements en séries

En supposant qu'un point régulier $(\boldsymbol{u}_0, \lambda_0)$ est connu, on cherche la branche de solution $(\boldsymbol{u}, \lambda)$ sous la forme de séries entières par rapport à un paramètre de contrôle a. Puisque la contrainte $\boldsymbol{S}$ est considérée comme une inconnue du problème, on la développe également en série, avec $\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{D} : (\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0)).\boldsymbol{u}_0$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(a) &= \boldsymbol{u}_0 + a\,\boldsymbol{u}_1 + a^2\,\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a^N\,\boldsymbol{u}_N \\ \boldsymbol{S}(a) &= \boldsymbol{S}_0 + a\,\boldsymbol{S}_1 + a^2\,\boldsymbol{S}_2 + \ldots + a^N\,\boldsymbol{S}_N \\ \lambda(a) &= \lambda_0 + a\,\lambda_1 + a^2\,\lambda_2 + \ldots + a^N\,\lambda_N \end{aligned} \tag{3.7}$$

L'introduction de ces développements dans le problème non-linéaire (3.6) et l'identification des termes avec la même puissance de a conduit à la succession de problèmes linéaires

ordre 1

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S}_1 : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_1).\delta\boldsymbol{u}\, dV = \lambda_1 P_e(\delta\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0).\boldsymbol{u}_1 \end{cases}$$

ordre 2

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S}_2 : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_2).\delta\boldsymbol{u}\, dV = \lambda_2 P_e(\delta\boldsymbol{u}) - \int_\Omega \boldsymbol{S}_1 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_1).\delta\boldsymbol{u}\, dV \\ \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0).\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{D} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_1).\boldsymbol{u}_1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

ordre p

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S}_p : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_p).\delta\boldsymbol{u}\, dV = \lambda_p P_e(\delta\boldsymbol{u}) - \int_\Omega \sum_{r=1}^{p-1} \boldsymbol{S}_{p-r} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_r).\delta\boldsymbol{u}\, dV \\ \boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0).\boldsymbol{u}_p + \frac{1}{2}\boldsymbol{D} : \displaystyle\sum_{r=1}^{p-1} \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_r).\boldsymbol{u}_{p-r}\end{array}\right. \tag{3.8}$$

En introduisant les notations

$$\boldsymbol{R}_p^{nl} = \int_\Omega \sum_{r=1}^{p-1} \boldsymbol{S}_{p-r} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_r)\, dV \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{S}_p^{nl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} : \sum_{r=1}^{p-1} \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_r).\boldsymbol{u}_{p-r} \tag{3.10}$$

on peut réécrire le problème à l'ordre p sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S}_p : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_p).\delta\boldsymbol{u}\, dV = \lambda_p P_e(\delta\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{R}_p^{nl}.\delta\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0).\boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{S}_p^{nl}\end{array}\right. \tag{3.11}$$

Le problème (3.11) à l'ordre p est un problème d'élasticité linéarisé tout à fait classique, où $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ joue le rôle d'une contrainte résiduelle et $\boldsymbol{R}_p^{nl}$ celui d'une force appliquée à la structure, tous deux dépendant de la solution aux ordres précédents.
A ce stade de la procédure, il reste une inconnue de trop. Elle va disparaître avec le choix du paramètre de contrôle a. On peut choisir par exemple

$$a = \frac{1}{s^2}\ [\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0)\,.\,\boldsymbol{u}_1 + (\lambda - \lambda_0)\,\lambda_1\,] \tag{3.12}$$

Ce choix est inpiré des méthodes à longueur d'arc (cf. § 2.5.1). Avec cette définition, a correspond à la projection des incréments de déplacement $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0$ et de chargement $\lambda - \lambda_0$ sur la direction tangente $(\boldsymbol{u}_1, \lambda_1)$ (figure 3.1). Le développement en série de (3.12) donne à l'ordre 1

$$\boldsymbol{u}_1\,.\,\boldsymbol{u}_1 + \lambda_1\,\lambda_1 = s^2 \tag{3.13}$$

où s est un scalaire qui fixe la longueur du vecteur tangent. Il est important de noter que s ne règle pas la longueur du pas. Un critère basé sur le résidu d'équilibre sera utilisé à ce propos (cf. § 3.4). s peut être vu comme un paramètre d'échelle qui permet d'éviter que les valeurs de a soient disproportionnées par rapport à celles des termes des développements en séries. A l'ordre p, cette relation s'écrit

$$\boldsymbol{u}_1\,.\,\boldsymbol{u}_p + \lambda_1\,\lambda_p = 0 \tag{3.14}$$

Le système à l'ordre p formé des équations (3.11) et (3.14) détermine de manière unique $\boldsymbol{u}_p$, $\boldsymbol{S}_p$ et λ_p.

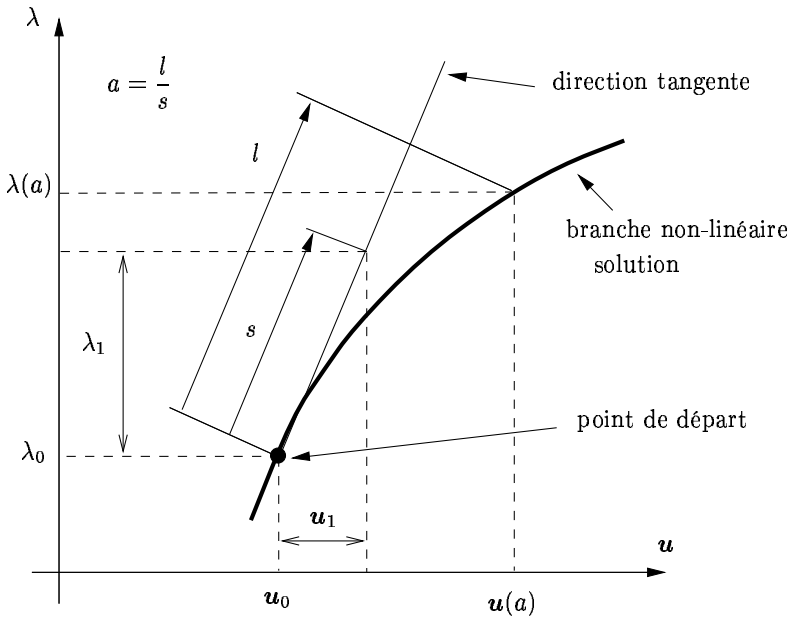


FIGURE 3.1 – *Pilotage en « longueur d'arc », représentation monodimensionnelle.*

3.3.3 M.E.F.

La méthode des éléments finis permet de résoudre de manière efficace la succession de systèmes linéaires. Chacun de ces systèmes contient une équation d'équilibre qui fait intervenir $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{S}$ et une relation de comportement qui lie $\boldsymbol{S}$ à $\boldsymbol{q}$. Etant donné que les M.E.F. classiques sont basées sur une formulation en déplacement, il est nécessaire de transformer ces systèmes linéaires en des problèmes en déplacement. Pour cela, il suffit de reporter la relation de comportement dans les équations d'équilibre. Après discrétisation (cf. § 2.4), le problème en déplacement à l'ordre 1 s'écrit

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{q}_1] = \lambda_1\,[\boldsymbol{F}_e] \\ &[\boldsymbol{q}_1]^t\,[\boldsymbol{q}_1] + \lambda_1\,\lambda_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

et le problème à l'ordre p

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{q}_p] = \lambda_p\,[\boldsymbol{F}_e] + [\boldsymbol{F}_p^{nl}] \\ &[\boldsymbol{q}_1]^t\,[\boldsymbol{q}_p] + \lambda_1\,\lambda_p = 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$\boldsymbol{K}_t = \boldsymbol{K}_t(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{S}_0)$ est la matrice de rigidité tangente classique (cf. § 2.5.1) évaluée au point de départ $(\boldsymbol{q}_0, \lambda_0)$

$$[\boldsymbol{K}_t] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}_0] + [\boldsymbol{G}][\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\,dV \tag{3.17}$$

où $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0)$ a été introduite pour alléger les notations.
$\boldsymbol{F}_p^{nl}$ est un vecteur de chargement qui ne dépend que des ordres précédents dont l'expression est

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{3.18}$$

avec

$$[\boldsymbol{S}_p^{nl}] = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{D}]\sum_{r=1}^{p-1}[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)][\boldsymbol{q}_{p-r}] \tag{3.19}$$

$$[\boldsymbol{R}_p^{nl}] = \int_\Omega \sum_{r=1}^{p-1}[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)]^t\,[\boldsymbol{S}_{p-r}]\,dV \tag{3.20}$$

et les contraintes à l'ordre p sont données par

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] \tag{3.21}$$

Remarque 3.3
Le problème à l'ordre 1 correspond exactement au problème incrémental tangent qui sert de prédicteur dans l'algorithme de Newton-Raphson. Les problèmes aux ordres supérieurs ($p \geq 1$) permettent d'obtenir un prédicteur d'ordre plus élevé. En pratique, on choisit $N = 25$ ou 30. Avec un prédicteur d'ordre aussi élevé, la procédure itérative de correction, qui est au cœur de l'algorithme de Newton-Raphson, n'est pas nécessaire. On peut donc voir la MAN comme un prédicteur d'ordre élevé, sans correction, qui permet de construire une représentation analytique continue de la branche solution.

❑

3.3.4 Récapitulatif de l'algorithme

Les coefficients des séries sont obtenus grâce à la résolution des sytèmes (3.15) et (3.16). Les étapes de cette résolution peuvent être résumées de la manière suivante :

Ordre 1

- Résoudre $[\boldsymbol{K}_t]\,[\hat{\boldsymbol{q}}] = [\boldsymbol{F}_e]$
- Calculer

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + [\hat{\boldsymbol{q}}]^t[\hat{\boldsymbol{q}}]}}$$

$$[\boldsymbol{q}_1] = \lambda_1\,[\hat{\boldsymbol{q}}]$$

$$[\boldsymbol{S}_1] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_1]$$

Ordre p

- A chaque point de Gauss, évaluer $[\boldsymbol{S}_p^{nl}]$
- Assembler $[\boldsymbol{R}_p^{nl}]$ puis $[\boldsymbol{F}_p^{nl}]$
- Résoudre $[\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{q}_p^{nl}] = [\boldsymbol{F}_p^{nl}]$
- Calculer

$$\lambda_p = -\lambda_1\,[\boldsymbol{q}_p^{nl}]^t[\boldsymbol{q}_1]$$

$$[\boldsymbol{q}_p] = \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\,[\boldsymbol{q}_1] + [\boldsymbol{q}_p^{nl}]$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}]$$

Remarque 3.4
Etant donné qu'on utilise la même matrice matrice de rigidité pour chaque ordre, on peut considérer que le coût de calcul d'un développement asymptotique est globalement équivalent à celui d'un pas de l'algorithme itératif de Newton-Raphson modifié ([Azrar *et al.*, 1993], [Cochelin *et al.*, 1994a]).

❑

Remarque 3.5
Lorsque la taille de la structure étudiée est importante, le coût de calcul de l'assemblage des seconds membres est négligeable par rapport au coût de la décomposition de la matrice $\boldsymbol{K}_t$.

❑

3.4 Méthode de continuation

L'algorithme décrit dans la section précédente permet de calculer les termes des séries (3.7) jusqu'à des ordres très élevés (25 ou 30 en pratique). On obtient ainsi une représentation analytique de la solution de très bonne qualité. Mais, à cause du rayon de convergence a_{cv} limité des séries, cette représentation analytique n'est valide que dans un voisinage du point de départ. Pour des valeurs de $a > a_{cv}$ la qualité de la solution se détériore très vite.

Par conséquent, pour décrire toute la branche solution, il est nécessaire d'appliquer la méthode plusieurs fois, de la même manière que les méthodes de continuation classiques. Par ailleurs, il est important de disposer d'un critère d'arrêt qui fixe de manière optimale la longueur de chaque pas. Un tel critère a été proposé par Cochelin [1994a]. Il est basé sur le résidu d'équilibre.

3.4.1 Etude du résidu

Le résidu d'équilibre $\boldsymbol{R}$ correspond à la première équation du système (3.6). En chaque point de la courbe d'équilibre, il est donné par

$$\boldsymbol{R}(a).\delta\boldsymbol{u} = \int_\Omega \boldsymbol{S}(a) : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}(a)).\delta\boldsymbol{u}\, dV - \lambda(a) P_e(\delta\boldsymbol{u}) \tag{3.22}$$

Ce résidu n'est pas tout à fait nul car $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{S}$ et λ sont approximés par leurs développements en séries tronqués à l'ordre N. En remplaçant $\boldsymbol{u}(a)$, $\boldsymbol{S}(a)$ et $\lambda(a)$ par leurs développements en série (3.7), on obtient

$$\boldsymbol{R}(a) = \boldsymbol{R}_0 + a\,\boldsymbol{R}_1 + a^2\,\boldsymbol{R}_2 + \ldots + a^N\,\boldsymbol{R}_N + a^{N+1}\,\boldsymbol{R}_{N+1} + \ldots + a^{2N}\,\boldsymbol{R}_{2N} \tag{3.23}$$

$\boldsymbol{R}$ contient des termes jusqu'à l'ordre $2N$ car (3.22) est quadratique en $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{S}$. $\boldsymbol{R}_0$ est nul car c'est le résidu au point de départ. Les résidus $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, ... , $\boldsymbol{R}_N$ sont nuls également car ils correspondent aux problèmes que l'on a résolus pour obtenir les coeeficients des séries. $\boldsymbol{R}_{N+1}$ est donc le premier terme non nul. Dans la pratique, on constate que ce terme est prédominant sur ceux qui suivent. On peut donc approximer le résidu par

$$\boldsymbol{R}(a) \simeq a^{N+1}\,\boldsymbol{R}_{N+1} \tag{3.24}$$

L'expression exacte de $\boldsymbol{R}_{N+1}$ après discrétisation éléments finis est donnée par

$$[\boldsymbol{R}_{N+1}] = \int_\Omega \sum_{r=1}^{N} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)]^t\,[\boldsymbol{S}_{p-r}]\, dV \tag{3.25}$$

C'est également l'expression du terme $\boldsymbol{R}^{nl}_{N+1}$ du second membre (3.18) du problème éléments finis à l'ordre $N+1$. On peut donc écrire

$$[\boldsymbol{R}(a)] \simeq a^{N+1}\,[\boldsymbol{R}^{nl}_{N+1}] \tag{3.26}$$

En passant en notation logarithmique, on obtient la relation affine

$$Log\,\|\boldsymbol{R}(a)\| \simeq (N+1)\,Log(a) + Log\,\|\boldsymbol{R}^{nl}_{N+1}\| \tag{3.27}$$

Sur la figure 3.2, on a tracé le logarithme du résidu d'équilibre « exact » $\boldsymbol{R}(a)$ calculé en introduisant les séries (3.7) dans (3.22) ainsi que l'approximation (3.24). On constate que le résidu « exact » est affine par morceaux. Le premier segment de droite est presque horizontal. Sa pente vaut 1. On en déduit que le terme $\boldsymbol{R}_1$ est prédominant dans cette zone. En fait, $\boldsymbol{R}_1$ n'est pas nul à cause de la précision machine. C'est aussi à cause de la précision machine que le résidu ne tombe pas en dessous de 10^{-15}. Le second segment de droite concorde remarquablement bien avec l'approximation (3.24). Sa pente vaut $N+1$. On peut conclure que, dans cette zone, le terme $\boldsymbol{R}_{N+1}$ est prépondérant. Le dernier segment de droite a une pente qui vaut exactement $2N$. Dans cette zone, c'est le terme $\boldsymbol{R}_{2N}$ qui est prépondérant.

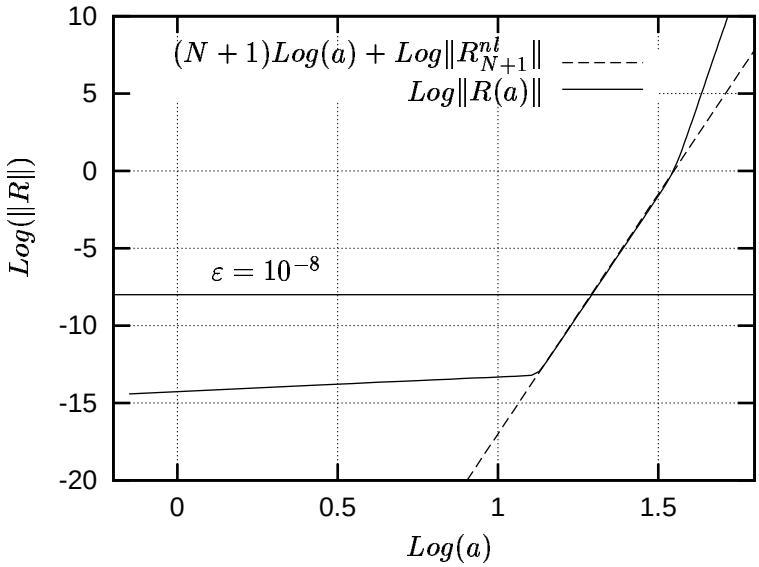


FIGURE 3.2 – *Courbe de résidu pour un pas à l'ordre* 30 *avec la MAN*

3.4.2 Critère d'arrêt

Le critère d'arrêt proposé par COCHELIN [1994a] est basé sur le résidu que l'on vient d'étudier. Il s'agit de déterminer la valeur maximale a_m de a jusqu'à laquelle le résidu reste en dessous d'une précision donnée ε. Formulé autrement, cela signifie que la portion de courbe solution comprise entre $a = 0$ et $a = a_m$ est précise à ε près. On peut visualiser ce critère sur la courbe de la figure 3.2. Sur cette courbe, on a choisi $\varepsilon = 10^{-8}$. Le point d'intersection de la courbe de résidu avec la droite $\varepsilon = 10^{-8}$ donne en abscisse la valeur de a_m qui garantit la précision ε.
On voit également, sur cette courbe, que l'approximation du résidu (droite en pointillés) est fiable pour des précisions allant de $\varepsilon = 10^{-1}$ à $\varepsilon = 10^{-12}$, ce qui est largement suffisant pour les applications courantes.
La mise en équation de ce critère s'écrit

$$\|\boldsymbol{R}(a)\| = a^{N+1}\,\|\boldsymbol{R}^{nl}_{N+1}\| \leq \varepsilon \tag{3.28}$$

On en déduit

$$a_m = \left(\frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{R}^{nl}_{N+1}\|}\right)^{\frac{1}{N+1}} \tag{3.29}$$

On préfère généralement utiliser un critère basé sur le résidu relatif plutôt que sur le résidu absolu. (3.29) devient dans ce cas

$$a_m = \left(\varepsilon\frac{\|\boldsymbol{F}_e\|}{\|\boldsymbol{R}^{nl}_{N+1}\|}\right)^{\frac{1}{N+1}} \tag{3.30}$$

Ce critère permet de terminer un pas et d'obtenir un nouveau point de départ, à partir duquel on peut appliquer à nouveau la procédure asymptotique. Cette méthode de continuation est très robuste et complètement automatique du point de vue de l'utilisateur, les seuls paramètres à choisir étant l'ordre n des séries et la précision ε de la solution.

3.4.3 Application

Afin d'illustrer ces performances, la courbe d'équilibre du panneau cylindrique présenté dans le paragraphe 1.3.5.d est tracée dans la figure 3.3. En utilisant les symétries, un quart seulement du panneau a été discrétisé à l'aide de 200 éléments triangulaires DKT18 ([Batoz et Dhatt, 1992]) et 726 ddl. Avec des séries tronquées à l'ordre 30 et une précision $\varepsilon = 10^{-5}$ contrôlée à l'aide de (3.30), la courbe d'équilibre est décrite en seulement 11 pas.

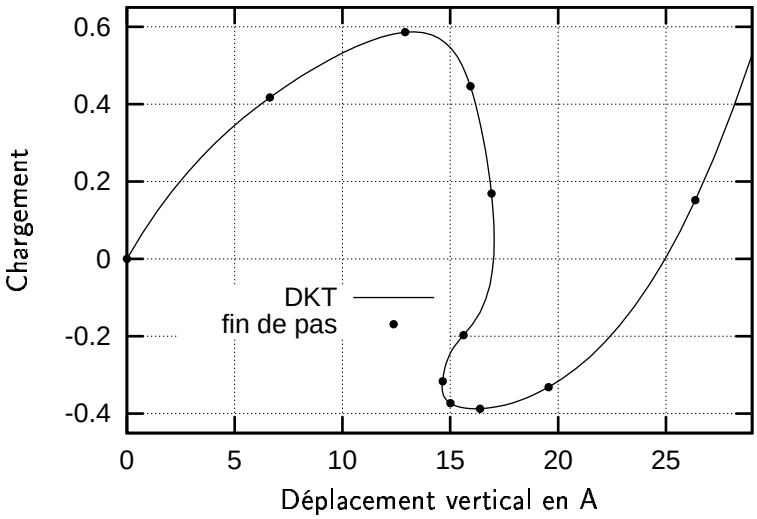


Figure 3.3 – *Courbe d'équilibre du panneau cylindrique calculée avec $N = 30$ et $\varepsilon = 10^{-5}$.*

Remarque 3.6
La longueur de pas dépend des caractéristiques des séries. C'est pourquoi elle est déterminée a posteriori, lorsque tous les termes des séries ont été calculés. De cette manière, la longueur de pas est toujours optimale. ❑

3.5 Amélioration la solution à l'aide d'approximants de Padé

3.5.1 Principe

Il est possible d'améliorer la longueur des pas en remplaçant les approximations polynômiales

$$\boldsymbol{u}(a) = \boldsymbol{u}_0 + a\,\boldsymbol{u}_1 + a^2\,\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a^N\,\boldsymbol{u}_N$$
$$\lambda(a) = \lambda_0 + a\,\lambda_1 + a^2\,\lambda_2 + \ldots + a^N\,\lambda_N$$

par des fractions rationnelles appelées approximants de Padé ([BAKER et GRAVES MORRIS, 1996])

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{u}(a)) &= \boldsymbol{u}_0 + a\,\frac{D_{N-2}}{D_{N-1}}\,\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a^{N-1}\,\frac{1}{D_{N-1}}\,\boldsymbol{u}_{N-1} \\ P_n(\lambda(a)) &= \lambda_0 + a\,\frac{D_{N-2}}{D_{N-1}}\,\lambda_1 + \ldots + a^{N-1}\,\frac{1}{D_{N-1}}\,\lambda_{N-1} \end{aligned} \tag{3.31}$$

où les termes D_i sont des polynômes à coefficients réels

$$D_i(a) = 1 + a\,d_1 + a^2\,d_2 + \ldots + a^i\,d_i \tag{3.32}$$

Le détail du calcul des coefficients d_i est présenté dans [COCHELIN *et al.*, 1994b], [NAJAH *et al.*, 1998] et [ELHAGE-HUSSEIN *et al.*, 2000].
L'assemblage des approximants de Padé à partir des séries polynômiales est très peu coûteux d'un point de vue numérique et cette représentation rationnelle permet généralement de doubler la longueur des pas. Leur emploi est donc très intéressant. Malheureusement, dans le cas des Padé, l'approximation du résidu (3.26) n'est plus valide. On ne peut donc plus utiliser le critère (3.30) pour fixer la longueur des pas et, de fait, on ne dispose pas de méthode de continuation fiable. De plus, les dénominateurs des fractions rationnelles peuvent comporter des pôles et donc engendrer des singularités. C'est pourquoi, malgré les avantages des approximants de Padé, on préfère généralement utiliser les séries polynômiales. Il faut noter, toutefois, qu'une méthode de continuation basée sur les approximants de Padé a récemment été proposée par ELHAGE-HUSSEIN *et al.* [2000], mais elle n'exploite pas, à notre avis, toutes leurs propriétés.

3.5.2 Application

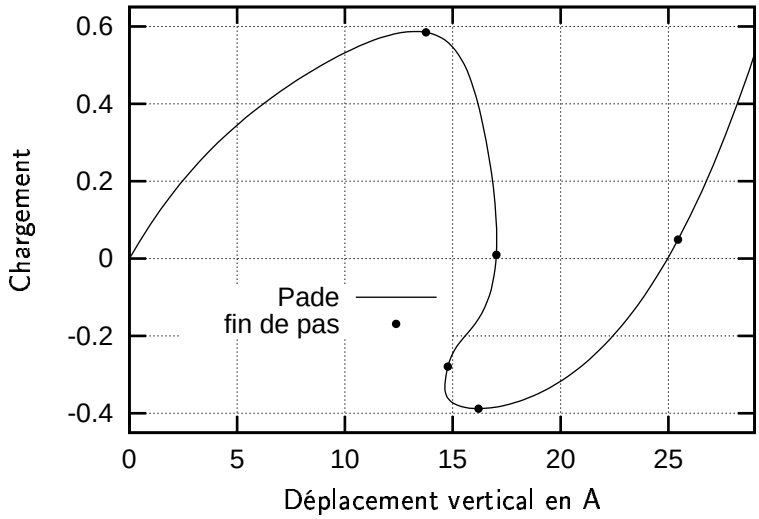


FIGURE 3.4 – *Courbe d'équilibre du panneau cylindrique évaluée à l'aide d'approximants de Padé ($N = 30$, $\varepsilon = 10^{-5}$).*

Les approximants de Padé ont été utilisés pour tracer la courbe d'équilibre de la figure 3.4. Il s'agit du même panneau cylindrique que dans la section précédente. Ici, la longueur de pas a été évaluée de manière brutale : le résidu a été calculé en chaque point de la courbe (une dizaine par pas) et le pas a été stoppé lorsque la norme du résidu a dépassé ε. Cette méthode est évidemment extrêmement coûteuse. C'est pourquoi on ne l'applique que très rarement. Elle a été utilisée ici pour obtenir la longueur de pas optimale. On constate, en comparant avec la figure 3.3, que la longueur des pas est approximativement doublée, la courbe étant décrite en six pas seulement.

3.6 Structure avec défaut de forme initial

3.6.1 Ecriture matricielle

Dans le cas d'une structure avec défaut de forme initial (cf. § 2.1.2), les systèmes matriciels (3.15) et (3.16) qui permettent de calculer les coefficients des séries restent les mêmes. Seules les expressions de $\boldsymbol{K}_t$, $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{S}_p$ changent. Les nouvelles expressions s'obtiennent très simplement en faisant les développements en série dans les équations (2.15) et (2.16) au lieu de (2.9) et (2.10). En introduisant la notation

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_0 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}^\star) \tag{3.33}$$

i.e. après discrétisation

$$[\tilde{\boldsymbol{B}}_0] = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{q}^\star)] \tag{3.34}$$

on obtient

$$[\boldsymbol{K}_t] = \int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t [\boldsymbol{D}][\tilde{\boldsymbol{B}}_0] + [\boldsymbol{G}][\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\, dV \tag{3.35}$$

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\, [\boldsymbol{S}_p^{nl}]\, dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{3.36}$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\, [\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] \tag{3.37}$$

L'algorithme de résolution décrit dans le paragraphe 3.3.4 n'est pas affecté par l'introduction d'un défaut initial et reste totalement inchangé.

3.6.2 Application

Pour cette application, on s'intéresse à nouveau au panneau cylindrique. Il s'agit cette fois de voir comment la courbe d'équilibre est modifiée lorsqu'un défaut initial est introduit dans la structure. Pour cela, on choisit une forme de défaut et on fait varier son amplitude. Un défaut $\boldsymbol{u}^\star$ est donc défini par

$$\boldsymbol{u}^\star = \Lambda\, \boldsymbol{u}_0^\star \tag{3.38}$$

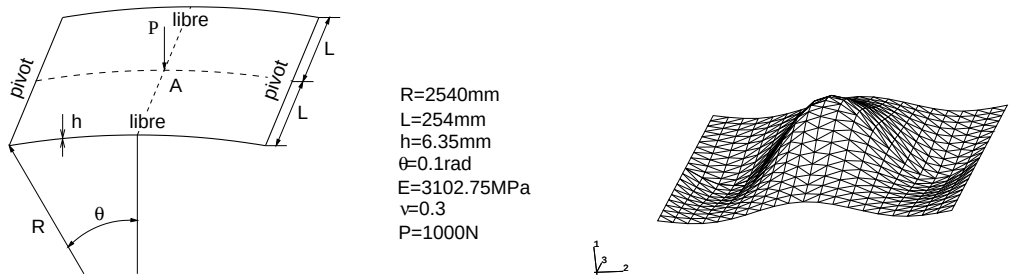


FIGURE 3.5 – *Panneau cylindrique : (a) géométrie (b) premier mode de flambement*

où $\boldsymbol{u}_0^\star$ est un vecteur qui fixe l'allure du défaut et Λ un scalaire qui fixe son amplitude.
On a choisi le premier mode de flambement du panneau (figure 3.5(b)) pour définir l'allure du défaut. Les calculs ont été menés pour deux amplitudes différentes $\Lambda = -\frac{h}{2}$ et $\Lambda = -h$, soit la moitié de l'épaisseur et l'épaisseur du panneau. On constate sur les courbes de la figure 3.6 que ces amplitudes de défauts, pourtant très faibles par rapport au rayon du panneau, modifient considérablement les courbes d'équilibre (et donc la charge critique de flambement) du panneau.

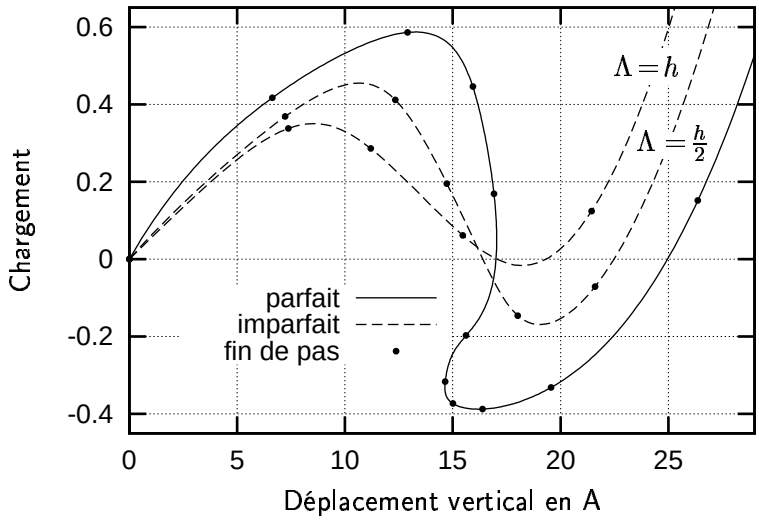


FIGURE 3.6 – *Courbes d'équilibre du panneau cylindrique pour différentes amplitudes du défaut de forme*

3.7 Extension aux coques minces en grandes rotations

On se propose, dans cette section, de résoudre à l'aide de la MAN le système non-linéaire formé des équations (2.34)-(2.35)-(2.36), et introduit dans le paragraphe 2.2 consacré à l'élément développé par BÜCHTER *et al.* [1994]. Pour cela, on suit la démarche proposée par ZAHROUNI

[1998].

3.7.1 Ecriture matricielle

Le système formé des équations (2.34)-(2.35)-(2.36) est assez semblable à celui du problème non-linéaire géométrique (2.9)-(2.10) que nous avons résolu dans la section 3.3. Les équations d'équilibre sont exactement les mêmes et la loi de comportement ne diffère que par le terme linéaire $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$. L'équation de compatibilité constitue donc la seule véritable différence. Cette équation étant linéaire en $\boldsymbol{S}$, elle ne présente pas de difficulté pour les développements asymptotiques. Chacune des équations étant sous forme quadratique (équilibre, comportement) ou linéaire (compatibilité) on peut directement y introduire les développement asymptotiques (3.7) auxquels il faut ajouter celui de $\boldsymbol{\alpha}$ qui est lié à $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ par la relation $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{B}_\alpha.\boldsymbol{\alpha}$.
Après discrétisation par éléments finis, on obtient à l'ordre p

$$\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t[\boldsymbol{S}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_p)]^t[\boldsymbol{S}_0]\, dV = \lambda_p[\boldsymbol{F}_e] - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{3.39}$$

$$\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p]\, dV = \boldsymbol{0} \tag{3.40}$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] \tag{3.41}$$

Les expressions de $\boldsymbol{R}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ sont les mêmes que précédemment et sont données par (3.19) et (3.20), à savoir

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{S}_p^{nl}] &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{D}] \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)][\boldsymbol{q}_{p-r}] \\
[\boldsymbol{R}_p^{nl}] &= \int_\Omega \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)]^t\, [\boldsymbol{S}_{p-r}]\, dV
\end{aligned}$$

Comme on l'a précisé dans le paragraphe 2.2.2, $\boldsymbol{\alpha}_p$ peut être éliminé au niveau élémentaire. Pour cela, on reporte (3.41) dans (3.40), ce qui permet d'écrire

$$[\boldsymbol{\alpha}_p] = [\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}\left([\boldsymbol{R}_p^\alpha] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}][\boldsymbol{q}_p]\right) \tag{3.42}$$

avec

$$[\boldsymbol{K}_{\alpha u}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}_0]\, dV \tag{3.43}$$

$$[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}_\alpha]\, dV \tag{3.44}$$

$$[\boldsymbol{R}_p^\alpha] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\, dV \tag{3.45}$$

Finalement, en reportant (3.41) et (3.42) dans (3.39), on obtient le problème en déplacements

$$\left([\boldsymbol{K}_t] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]\right)\,[\boldsymbol{q}_p] = \lambda_p\,[\boldsymbol{F}_e] + [\boldsymbol{F}_p^{nl}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{R}_p^\alpha] \tag{3.46}$$

L'expression de $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ est la même que dans le cas non-linéaire géométrique simple. Elle est donnée par (3.18), i.e.

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}]$$

Remarque 3.7

- Comme on l'a précisé au début de cette section, l'introduction de $\boldsymbol{\alpha}$ par le concept EAS ne modifie pas les équations d'équilibre. C'est pourquoi $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ demeure inchangé dans le problème final en déplacements.
- L'introduction de $\boldsymbol{\alpha}$ ne modifie que $\boldsymbol{S}$ en lui ajoutant un terme. Ce terme supplémentaire étant linéaire, il n'apporte pas de contribution à $\boldsymbol{S}_p^{nl}$.
- La condensation de $\boldsymbol{\alpha}_p$ amène un terme de rigidité supplémentaire ainsi qu'un second membre additionnel.

❑

3.7.2 Récapitulatif de l'algorithme

On peut résumer les étapes du calcul des coefficients des séries à l'ordre p de la manière suivante

Ordre p

- A chaque point de Gauss, évaluer $[\boldsymbol{S}_p^{nl}]$
- Assembler $[\boldsymbol{R}_p^{\alpha}]$, $[\boldsymbol{R}_p^{nl}]$ puis $[\boldsymbol{F}_p^{nl}]$
- Résoudre
  $\left([\boldsymbol{K}_t] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]\right)\,[\boldsymbol{q}_p^{nl}] = [\boldsymbol{F}_p^{nl}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{R}_p^{\alpha}]$
- Calculer $\lambda_p = -\lambda_1\,[\boldsymbol{q}_p^{nl}]^t[\boldsymbol{q}_1]$
  $[\boldsymbol{q}_p] = \dfrac{\lambda_p}{\lambda_1}\,[\boldsymbol{q}_1] + [\boldsymbol{q}_p^{nl}]$
- Calculer $[\boldsymbol{\alpha}_p] = [\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}\left([\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}][\boldsymbol{q}_p]\right)$
- Calculer $[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}]$

3.7.3 Application

Pour valider l'implémentation de l'élément Büchter *et al.* et son couplage avec la MAN, on effectue une comparaison avec l'élément DKT18. Pour l'élément DKT18, il était nécessaire

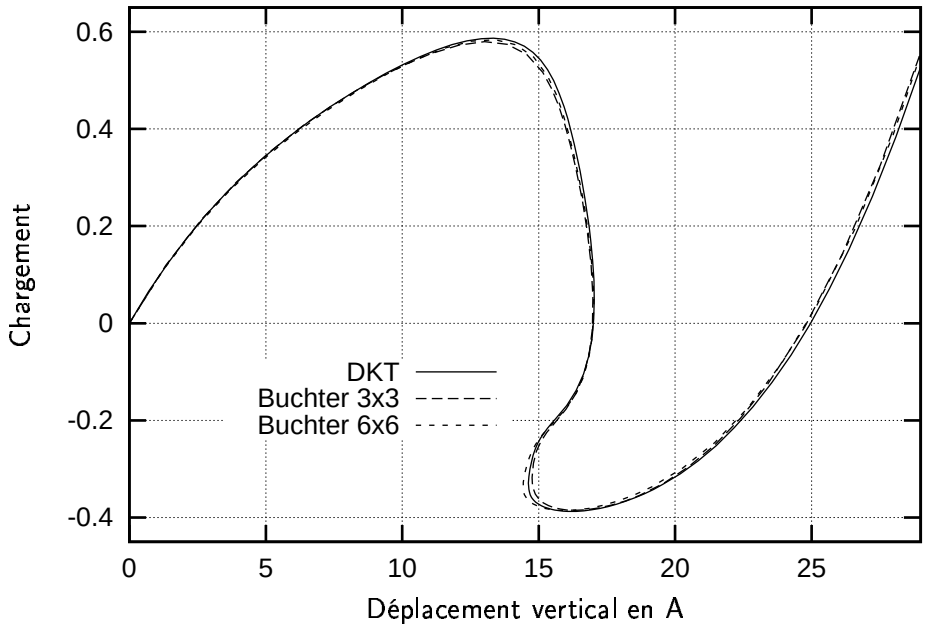


FIGURE 3.7 – *Courbes d'équilibre du panneau cylindrique, comparaison entre l'élément DKT et celui développé par* BÜCHTER *et al.*

d'utiliser un maillage constitué de 200 éléments (726 ddl) pour obtenir de bons résultats. L'élément BÜCHTER *et al.* donne des résultats similaires (figure 3.7) avec un maillage constitué de seulement 9 éléments (240 ddl). Un maillage plus fin (36 éléments, 798 ddl) n'améliorant que très peu la solution, on utilisera dans les prochaines applications le maillage à 9 éléments.

3.7.4 Structure avec défaut de forme initial

L'introduction d'un défaut de forme initial n'affecte pas les expressions de $\boldsymbol{R}_p^{nl}$, $\boldsymbol{S}_p^{nl}$, $\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}$ et $\boldsymbol{R}_p^{\alpha}$. Seules les expressions de $\boldsymbol{K}_t$ et de $\boldsymbol{F}_p^{nl}$, $\boldsymbol{S}_p$ et $\boldsymbol{K}_{\alpha u}$ sont modifiées. Toutefois, $\boldsymbol{K}_t$ et $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ restent les mêmes que dans le cas général avec défaut de forme (cf. § 3.6) et sont données par (3.35) et (3.36). Dans un souci de précision et de clarté, on les redonne ici

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{K}_t] &= \int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t [\boldsymbol{D}][\tilde{\boldsymbol{B}}_0] + [\boldsymbol{G}][\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\, dV \\
[\boldsymbol{F}_p^{nl}] &= -\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\, [\boldsymbol{S}_p^{nl}]\, dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}]
\end{aligned}
$$

avec $\tilde{\boldsymbol{B}}_0 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{q}^\star)$. Les termes $\boldsymbol{S}_p$ et $\boldsymbol{K}_{\alpha u}$ modifiés ou introduits par le concept EAS deviennent quant à eux

$$
[\boldsymbol{K}_{\alpha u}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t [\boldsymbol{D}][\tilde{\boldsymbol{B}}_0]\, dV \tag{3.47}
$$

$$
[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] \tag{3.48}
$$

3.8 Extension aux matériaux non-linéaires

L'élément de coque BÜCHTER *et al.* permet d'utiliser une loi de comportement 3D sans modification. Dans cette section, on se propose de résoudre à l'aide de la MAN le problème (2.43) correspondant à la loi de comportement non-linéaire de type puissance, basée sur la relation de RAMBERG-OSGOOD introduite dans le paragraphe 2.3.

3.8.1 Ecriture quadratique

Le système (2.43) ne diffère de celui résolu dans la section précédente que par la loi de comportement, qui s'écrit désormais

$$E\boldsymbol{\gamma} = (1+\nu)\,\boldsymbol{S}^d - (1-2\nu)\,P\boldsymbol{I} + \frac{3}{2}\,\alpha\left(\frac{S_{eq}}{\sigma_y}\right)^{n-1}\boldsymbol{S}^d \tag{3.49}$$

Cette loi n'est pas analytique pour des contraintes nulles si l'exposant n'est pas entier. Il est donc nécessaire d'introduire une procédure de régularisation pour l'adapter aux développements asymptotiques ([ZAHROUNI, 1998]). Pour éviter que la contrainte équivalente atteigne la valeur nulle, on la redéfinit de la manière suivante en introduisant le paramètre de régularisation η

$$(S_{eq})^2 = \frac{3}{2}\,\boldsymbol{S}^d : \boldsymbol{S}^d + \eta^2\,\sigma_y^2 \tag{3.50}$$

Lorsque $\eta = 0$, on retrouve la loi de comportement initiale.
Pour obtenir une écriture quadratique de la loi de comportement et faciliter les développements asymptotiques, on introduit les variables intermédiaires κ et ξ. On peut donc réécrire la loi de comportement sous la forme du système d'équations suivant

$$E\boldsymbol{\gamma} = (1+\nu)\,\boldsymbol{S}^d - (1-2\nu)\,P\boldsymbol{I} + \kappa\,\boldsymbol{S}^d \tag{3.51}$$

$$\kappa = \frac{3}{2}\,\alpha\,\xi^{n-1} \tag{3.52}$$

$$\xi^2 = \frac{3}{2\sigma_y^2}\,\boldsymbol{S}^d : \boldsymbol{S}^d + \eta^2 \tag{3.53}$$

A ce stade, il demeure encore une difficulté à cause de l'exposant réel n. Pour réduire le degré de non-linéarité de (3.52), on utilise l'équation différentielle

$$\frac{d\kappa}{da} = \frac{d\kappa}{d\xi}\frac{d\xi}{da} = \frac{3}{2}\,\alpha\,(n-1)\,\xi^{n-2}\,\frac{d\xi}{da} \tag{3.54}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\xi\,\frac{d\kappa}{da} = (n-1)\,\kappa\,\frac{d\xi}{da} \tag{3.55}$$

Par ailleurs, pour obtenir la même pente au démarrage que celle de la loi de comportement non régularisée, le premier membre de l'équation (3.51) doit être multiplié par $(1+\alpha\eta^n)$ Le problème

non-linéaire (2.43) mis sous forme quadratique s'écrit donc

$$\int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u}\, dV - \lambda P_e(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \tag{3.56}$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{S} : \delta\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\, dV = 0 \tag{3.57}$$

$$E(1+\alpha\eta^n)\,\boldsymbol{\gamma} = (1+\nu)\,\boldsymbol{S}^d - (1-2\nu)\,P\boldsymbol{I} + \kappa\,\boldsymbol{S}^d \tag{3.58}$$

$$\xi^2 = \frac{3}{2\sigma_y^2}\,\boldsymbol{S}^d : \boldsymbol{S}^d + \eta^2 \tag{3.59}$$

$$\xi\,\frac{d\kappa}{da} = (n-1)\,\kappa\,\frac{d\xi}{da} \tag{3.60}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \big(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})\big).\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \tag{3.61}$$

3.8.2 Développement asymptotique de la loi de comportement

On ne détaillera ici que le développement de la loi de comportement, ceux des équations d'équilibre, de l'équation de compatibilité et de la déformation ayant déjà été traités dans la section 3.7.1.

Ordre1 Après introduction des développements en séries des variables $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{\gamma}$, ξ et κ dans le système formé des équations (3.58)- (3.59)- (3.60), on obtient à l'ordre 1

$$E(1+\alpha\eta^n)\,\boldsymbol{\gamma}_1 = (1+\nu+\kappa_0)\,\boldsymbol{S}_1^d - (1-2\nu)\,P_1\boldsymbol{I} + \kappa_1\,\boldsymbol{S}_0^d \tag{3.62}$$

$$\xi_1 = \frac{3}{2\sigma_y^2\xi_0}\,\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_1^d \tag{3.63}$$

$$\kappa_1 = (n-1)\,\frac{\kappa_0}{\xi_0}\,\xi_1 \tag{3.64}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{B}_0.\boldsymbol{u}_1 + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1 \tag{3.65}$$

Après substitution des équations (3.63) et (3.64) dans (3.62), on obtient une relation liant le tenseur des déformations $\boldsymbol{\gamma}_1$ à celui des contraintes $\boldsymbol{S}_1$

$$E(1+\alpha\eta^n)\,\boldsymbol{\gamma}_1 = (1+\nu+\kappa_0)\,\boldsymbol{S}_1^d - (1-2\nu)\,P_1\boldsymbol{I} + \frac{3(n-1)\kappa_0}{2\sigma_y^2\xi_0^2}\,(\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_1^d)\,\boldsymbol{S}_0^d \tag{3.66}$$

avec $P_1 = -\frac{1}{3}\boldsymbol{S}_1 : \boldsymbol{I}$. L'inversion de cette relation[1] permet d'obtenir la relation de comportement ([Zahrouni, 1998])

$$\boldsymbol{S}_1 = C_1\,\boldsymbol{\gamma}_1 + C_2\,(\boldsymbol{\gamma}_1 : \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{I} + C_3\,(\boldsymbol{\gamma}_1 : \boldsymbol{S}_0^d)\,\boldsymbol{S}_0^d \tag{3.67}$$

1. Le produit doublement contracté de (3.66) avec $\boldsymbol{S}_0^d$ et avec $\boldsymbol{I}$ permet de réécrire $\boldsymbol{S}_1^d$ et P_1 en fonction de $\boldsymbol{\gamma}_1$

que l'on condense sous la forme

$$\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{\gamma}_1 \tag{3.68}$$

C_1, C_2 et C_3 sont des constantes dont l'expression est donnée en annexe A.1.

Ordre p L'identification des coefficients à l'ordre p conduit à

$$E(1+\alpha\eta^n)\,\boldsymbol{\gamma}_p = (1+\nu+\kappa_0)\,\boldsymbol{S}_p^d - (1-2\nu)\,P_p\boldsymbol{I} + \kappa_p\,\boldsymbol{S}_0^d + \sum_{r=1}^{p-1}\kappa_r\,\boldsymbol{S}_{p-r}^d \tag{3.69}$$

$$\xi_p = \frac{3}{2\sigma_y^2\xi_0}\,\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_p^d + \xi_p^{nl} \tag{3.70}$$

$$\kappa_p = \frac{3(n-1)\kappa_0}{2\sigma_y^2\xi_0^2}\,\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_p^d + \kappa_p^{nl} \tag{3.71}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_p = \boldsymbol{B}_0.\boldsymbol{u}_p + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_p + \sum_{r=1}^{p-1}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_r).\boldsymbol{u}_{p-r} \tag{3.72}$$

où ξ_p^{nl} et κ_p^{nl} sont deux scalaires qui ne dépendent que de la solution aux ordres précédents. Ils sont détaillés dans l'annexe A.1.
En procédant comme à l'ordre 1, i.e. en substituant (3.70) et (3.71) dans (3.69) et en inversant la relation obtenue, on aboutit à la loi de comportement à l'ordre p

$$\boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{\gamma}_p + \boldsymbol{S}_p^{res} \tag{3.73}$$

où la matrice $\boldsymbol{D}_t$ est exactement la même qu'à l'ordre 1, et $\boldsymbol{S}_p^{res}$ est un vecteur qui ne dépend que des termes non-linéaires de comportement aux ordres précédents. Son expression est détaillée en annexe A.1.
En reportant l'expression (3.72) de $\boldsymbol{\gamma}_p$ dans (3.73), la loi de comportement devient

$$\boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{B}_0.\boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{D}_t : \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_p + \boldsymbol{S}_p^{nl} + \boldsymbol{S}_p^{res} \tag{3.74}$$

3.8.3 Ecriture matricielle

Après discrétisation par éléments finis, le problème à l'ordre p s'écrit

$$\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t[\boldsymbol{S}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_p)]^t[\boldsymbol{S}_0]\,dV = \lambda_p[\boldsymbol{F}_e] - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{3.75}$$

$$\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p]\,dV = \boldsymbol{0} \tag{3.76}$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}_t][\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}_t][\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] + [\boldsymbol{S}_p^{res}] \tag{3.77}$$

avec

$$[\boldsymbol{S}_p^{nl}] = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{D}_t] \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)][\boldsymbol{q}_{p-r}] \tag{3.78}$$

En comparant ces équations avec celles qu'on avait obtenues pour les coques en grandes rotations (3.39)-(3.40)-(3.41), on constate que les équations d'équilibre et la relation de compatibilité (propre à la théorie de coque utilisée) sont identiques. Seule la loi de comportement change, avec l'introduction des termes $\boldsymbol{D}_t$ et $\boldsymbol{S}_p^{res}$. Lors de la condensation[2] de $\boldsymbol{\alpha}_p$, ces nouveaux termes vont se répercuter dans les équations (3.75) et (3.76). Si le problème en déplacements que l'on obtient s'écrit toujours

$$\left([\boldsymbol{K}_t] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]\right)\,[\boldsymbol{q}_p] = \lambda_p\,[\boldsymbol{F}_e] + [\boldsymbol{F}_p^{nl}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] \tag{3.79}$$

On a désormais

$$[\boldsymbol{K}_t] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t[\boldsymbol{D}_t][\boldsymbol{B}_0] + [\boldsymbol{G}][\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\,dV \tag{3.80}$$

$$[\boldsymbol{K}_{\alpha u}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{D}_t][\boldsymbol{B}_0]\,dV \tag{3.81}$$

$$[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{D}_t][\boldsymbol{B}_\alpha]\,dV \tag{3.82}$$

et les expressions de $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{R}_p^{\alpha}$ deviennent

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - \int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{res}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{3.83}$$

$$[\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p^{res}]\,dV \tag{3.84}$$

Remarque 3.8

En comparaison avec l'élasticité linéaire étudiée dans le paragraphe 3.7, le problème à traiter n'est pas fondamentalement bouleversé. Il suffit de conserver le même algorithme, en remplaçant simplement $\boldsymbol{D}$ par $\boldsymbol{D}_t$ et $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ par $\boldsymbol{S}_p^{nl} + \boldsymbol{S}_p^{res}$, la difficulté résidant dans le calcul des nouveaux termes $\boldsymbol{D}_t$ et $\boldsymbol{S}_p^{res}$.

❑

3.8.4 Application

Afin de valider cet algorithme, on considère le panneau cylindrique avec les propriétés matérielles suivantes: $\sigma_y = E/1000$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$ et $\eta = 0.1$. La valeur de la limite élastique σ_y a été choisie de manière à ce que la plasticité apparaisse avant le flambement. On peut le vérifier sur la figure 3.8 où les courbes d'équilibre ont été tracées pour un matériau élastique et

2. par report de (3.77) dans (3.76) puis dans (3.75)

non-linéaire. On constate que les courbes d'équilibre sont confondues au départ, jusqu'à ce que la structure commence à plastifier. L'effet de la non-linéarité matérielle est relativement important puisque la charge limite de flambement chute d'un tiers environ par rapport à celle de la structure élastique.

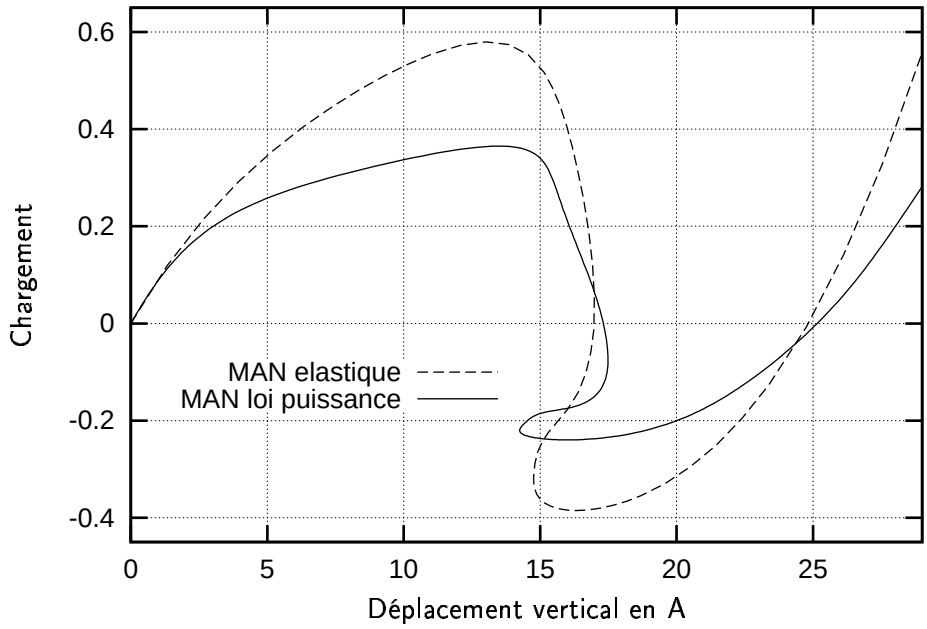


FIGURE 3.8 – *Courbes d'équilibre du panneau cylindrique pour un matériau élastique et non-linéaire*

Pour valider ces résultats, on effectue une comparaison avec ABAQUS. La même loi de comportement[3] est disponible avec le mot-clé `*DEFORMATION PLASTICITY`. La résolution est effectuée à l'aide de la méthode de Newton-Raphson avec pilotage à longueur d'arc. Par défaut, la longueur de pas est adaptative et le nombre de points solutions obtenus pour cet exemple est trop faible pour pouvoir effectuer une comparaison. Afin d'obtenir une courbe suffisamment « lisse »[4] avec ABAQUS, il est nécessaire d'imposer une taille maximale d'incrément pour le pilotage à longueur d'arc. Cela a pour effet d'augmenter le nombre de points calculés. La difficulté est alors de choisir la bonne taille d'incrément pour obtenir une bonne représentation de la solution sans que le coût de calcul devienne trop élevé. Cette difficulté n'existe pas avec la MAN puisque la solution est continue et que la longueur de pas est toujours optimale.
On constate que les courbes de la figure 3.9 coïncident. Toutefois, il aurait fallu encore réduire la taille maximale d'incrément autorisée sous ABAQUS pour obtenir une représentation plus précise de la portion de courbe qui suit le point limite en déplacement.

3. Loi puissance de type RAMBERG-OSGOOD basée sur la théorie de la déformation
4. i.e. avec suffisamment de points solutions

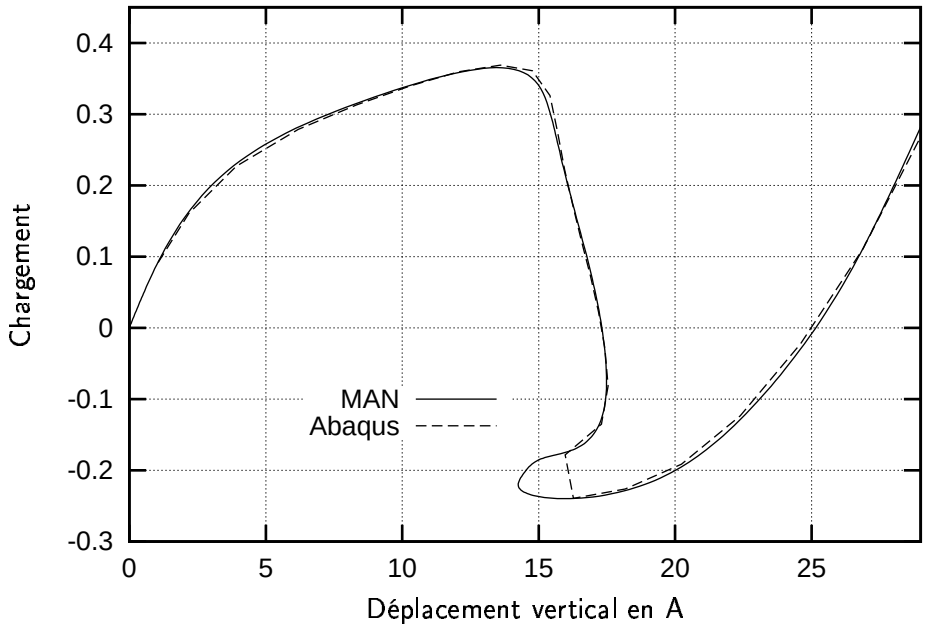


FIGURE 3.9 – *Courbes d'équilibre du panneau cylindrique pour un matériau non-linéaire, comparaison entre la MAN et Abaqus*

3.9 Cadre général d'écriture de la MAN

3.9.1 Tableau récapitulatif

Le tableau 3.1 qui suit propose un récapitulatif des problèmes discrétisés correspondant aux différentes difficultés que l'on a introduites au cours de ce chapitre : les non-linéarités géométriques, les coques en grandes rotations et les non-linéarités matérielles.
Ce tableau donne une vue d'ensemble des différents problèmes, ce qui permet de mieux distinguer les termes supplémentaires introduits par chaque difficulté. Ces termes sont mis en évidence à l'aide de deux nuances de gris, gris pâle pour les coques en grandes rotations et gris foncé pour les matériaux non-linéaires.
Comme on l'a déjà dit, l'extension aux coques en grandes rotations introduit la déformation incompatible $[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p]$ que l'on retrouve dans la contrainte $\boldsymbol{S}_p$. La condensation de $\boldsymbol{\alpha}_p$ au niveau élémentaire fait apparaître les autres termes grisés. Les matériaux non-linéaires, quant à eux, sont caratérisés par l'apparition du terme $\boldsymbol{S}_p^{res}$ et par le remplacement de $\boldsymbol{D}$ par $\boldsymbol{D}_t$.

Le tableau 3.2, pour sa part, met en évidence les modifications apportées par un défaut de forme initial. Celles-ci ne concernent que la matrice $[\boldsymbol{B}_0] = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0)]$ qui est transformée en $[\tilde{\boldsymbol{B}}_0] = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{q}^\star)]$.

Non-linéarités géométriques - Matériau élastique

$$[\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{q}_p] = \lambda_p\,[\boldsymbol{F}_e] + [\boldsymbol{F}_p^{nl}]$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}]$$

$$[\boldsymbol{S}_p^{nl}] = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{D}]\sum_{r=1}^{p-1}[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)][\boldsymbol{q}_{p-r}]$$

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}]$$

Extension aux coques basées sur le concept EAS

$$\Big([\boldsymbol{K}_t]\ -[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]\Big)\ [\boldsymbol{q}_p] = \lambda_p\,[\boldsymbol{F}_e] + [\boldsymbol{F}_p^{nl}]\ -[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{R}_p^{\alpha}]$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_p] = [\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}\,\big([\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}][\boldsymbol{q}_p]\big)$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}]$$

$$[\boldsymbol{S}_p^{nl}] = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{D}]\sum_{r=1}^{p-1}[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)][\boldsymbol{q}_{p-r}]$$

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}]$$

$$[\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV$$

Extension aux matériaux non-linéaires

$$\Big([\boldsymbol{K}_t]\ -[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]\Big)\ [\boldsymbol{q}_p] = \lambda_p\,[\boldsymbol{F}_e] + [\boldsymbol{F}_p^{nl}]\ -[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{R}_p^{\alpha}]$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_p] = [\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}\,\big([\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}][\boldsymbol{q}_p]\big)$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}_t]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}_t]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] + [\boldsymbol{S}_p^{res}]$$

$$[\boldsymbol{S}_p^{nl}] = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{D}_t]\sum_{r=1}^{p-1}[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)][\boldsymbol{q}_{p-r}]$$

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - \int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{res}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}]$$

$$[\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p^{res}]\,dV$$

TABLEAU 3.1 – *Tableau récapitulatif du problème discrétisé. Les deux nuances de gris mettent en évidence les termes propres à chaque difficulté ajoutée au problème initial*

Elastique - Géométrique non-linéaire

$$[\tilde{\boldsymbol{B}}_0] = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{q}^\star)]$$

$$[\boldsymbol{K}_t] = \int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0] + [\boldsymbol{G}][\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\,dV$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0]\,[\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}]$$

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}]$$

Extension aux coques basées sur le concept EAS

$$[\boldsymbol{K}_t] = \int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0] + [\boldsymbol{G}][\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\,dV$$

$$[\boldsymbol{K}_{\alpha u}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0]\,dV$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0]\,[\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}]$$

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}]$$

Extension aux matériaux non-linéaires

$$[\boldsymbol{K}_t] = \int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{D}_t]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0] + [\boldsymbol{G}][\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\,dV$$

$$[\boldsymbol{K}_{\alpha u}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{D}_t]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0]\,dV$$

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}_t]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0]\,[\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}_t][\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] + [\boldsymbol{S}_p^{res}]$$

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - \int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{res}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}]$$

TABLEAU 3.2 – *Tableau récapitulatif du problème discrétisé pour une structure avec défaut initial. Les différences par rapport au problème sans défaut sont indiquées en grisé.*

3.9.2 Cadre général d'écriture de la MAN

Tous les problèmes que nous avons présentés peuvent s'écrire sous la forme générale

$$\begin{cases} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{S}) \\ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}, \theta_1) \\ \theta_1 = \theta_1(\theta_2) \\ \theta_2 = \theta_2(\theta_3) \\ \vdots \end{cases} \tag{3.85}$$

où les θ_i sont autant de variables additionnelles que nécessaire pour que chaque équation s'écrive dans un cadre quadratique. Dans le cas des non-linéarités matérielles, par exemple, deux variables additionnelles κ et ξ sont nécessaires pour obtenir une écriture quadratique du problème.

Après introduction des séries et discrétisation par éléments finis, on obtient à l'ordre p

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{R}_p] &= [\boldsymbol{R}_p^l] + [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \\ [\boldsymbol{S}_p] &= [\boldsymbol{S}_p^l] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] \\ [\theta_{i\,p}] &= [\theta_{i\,p}^l] + [\theta_{i\,p}^{nl}] \qquad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{3.86}$$

où les termes avec l'exposant l sont linéaires par rapport aux variables de l'ordre courant $(\boldsymbol{q}_p, \boldsymbol{S}_p, \theta_{1\,p}, \theta_{2\,p}, \dots)$ et les termes avec l'exposant nl sont quadratiques mais ne dépendent que de la solution aux ordres précédents. A titre d'illustration, dans le cas simple des non-linéarités géométriques, on a

$$[\boldsymbol{R}_p^l] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0)]^t [\boldsymbol{S}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_p)]^t [\boldsymbol{S}_0]\, dV - \lambda_p [\boldsymbol{F}_e] \tag{3.87}$$

$$[\boldsymbol{S}_p^l] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] \tag{3.88}$$

et aucune variable additionnelle θ. Dans le cas des non-linéarités matérielles, le terme $\boldsymbol{S}_p^{res}$ s'ajoute à $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ et les variables κ_p et ξ_p sont introduites.

Pour obtenir le problème en déplacements, il ne reste plus alors qu'à reporter récursivement les équations de (3.86) les unes dans les autres. L'introduction des variables additionnelles n'est donc qu'un artifice qui permet de développer facilement en séries les fortes non-linéarités.

C'est dans cet esprit que seront écrits tous les développements à venir.

3.10 Bilan du chapitre

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la Méthode Asymptotique Numérique (M.A.N.) et à la résolution des problèmes non-linéaires relatifs au calcul de branches d'équilibre..

L'idée de base de cette méthode consiste à chercher les inconnues du problème sous forme de séries entières. Le problème non-linéaire de départ est ainsi transformé en une succession de problèmes linéaires que l'on résoud de manière récursive à l'aide de la méthode des éléments finis. Cette procédure est très efficace car chaque système linéaire admet la même matrice de rigidité tangente.

L'une des clés de l'efficacité de la méthode réside dans l'écriture du problème sous forme quadratique. Ce cadre quadratique n'est pas indispensable pour les développements en séries, mais il les rend particulièrement simples à mettre en œuvre, ce qui permet de pousser les développements à des ordres très élevés (20 ou 30 en pratique). Cette écriture quadratique est obtenue en introduisant autant de variables intermédiaires que nécessaire, et éventuellement grâce à l'utilisation de procédures de régularisation.

Conclusion de la première partie

Dans cette première partie ont été introduites la plupart des notions auxquelles on fera référence par la suite :

- La notion de courbe d'équilibre, la **formulation variationnelle** associée et sa **discrétisation par éléments finis**, pour une structure parfaite ou avec défaut de forme initial ;

- Un **élément de coque performant** qui autorise les grandes rotations et l'utilisation de lois de comportement 3D, ainsi qu'une **loi de comportement élastique non-linéaire**. Ils seront incorporés à chacun des algorithmes proposés par la suite ;

- Le principe de la **Méthode Asymptotique Numérique** qui sera utilisée pour résoudre les problèmes non-linéaires introduits dans les prochains chapitres ;

- Des critères et des outils numériques pour **caractériser et isoler les points singuliers**. La notion de sytème augmenté sera utilisée dans le chapitre 5 et une variante de ces critères sera proposée dans le chapitre 4 ;

- Le principe de l'**analyse de sensibilité aux imperfections** qui sera mise en œuvre dans le chapitre 5.

Deuxième partie

Préambule

Cette seconde partie est axée sur les contributions personnelles. Comme les titres des chapitres qui la composent l'indiquent, nous allons nous intéresser à la détection des points singuliers le long des branches d'équilibres d'une structure, et au suivi de ces mêmes points singuliers lorsqu'un des paramètres de la structure varie (amplitude de défaut, épaisseur).

Toutefois, l'objectif de cette seconde partie est plus général. Il ne s'agit pas seulement de développer et de valider des algorithmes de calcul, mais aussi de montrer qu'en s'y prennant bien il est relativement simple de coupler plusieurs types de non-linéarités (géométriques et matérielles dans notre cas). De la même manière, nous nous efforcerons de montrer que le calcul des seconds membres de la M.A.N. dans le cas de la détection et du suivi des points singuliers ne sont pas très compliqués. Il suffit de mener les calculs de manière rigoureuse et systématique, le principe étant exactement le même que dans le chapitre précédent.

Par ailleurs, la mise au point de ces algorithmes a été l'occasion d'analyser en profondeur le comportement de la M.A.N. en présence de bifurcations. Ce comportement particulier (accumulation de pas, aiguillage ou non sur la branche bifurquée, ...) est bien connu des utilisateurs de la M.A.N. mais il n'avait jamais été expliqué jusqu'à maintenant.

La programmation a constitué une part non négligeable de ce travail de thèse. C'est pourquoi un chapitre est consacré à la description du code de calcul EVE qui contient tous les développements qui ont été effectués. La programmation des algorithmes basés sur la M.A.N. peut sembler fastidieuse car elle ne souffre aucune erreur. La moindre faute de programmation dans le calcul des seconds membres suffit à altérer l'ensemble de la solution. Il faut donc être très consciencieux lors de ce travail de programmation. Cette petite difficulté est toutefois largement compensée par la robustesse et l'efficacité du code qui en résulte.

Cette efficacité est mise en évidence dans le dernier chapitre qui est consacré à quelques applications bien choisies.

CHAPITRE 4

Détection des points singuliers

Dans ce chapitre, on se propose d'améliorer l'algorithme de calcul de branches non-linéaires en le couplant avec un algorithme de détection des points singuliers. Trois points principaux sont développés dans ce chapitre. Dans un premier temps, on analyse le comportement particulier de la MAN en présence de bifurcations. Puis on introduit un indicateur de bifurcation que l'on calcule à l'aide de la MAN Pour terminer, le couplage de cet algorithme avec la méthode de continuation du chapitre précédent est présenté. L'algorithme final permet de détecter les bifurcations et les points limites le long d'une courbe d'équilibre. Il est valide pour des structures parfaites ou avec défaut de forme initial, et pour des propriétés matérielles élastiques linéaires ou non-linéaires.

Plan du Chapitre 4

4.1. Introduction **93**

4.2. Comportement de la MAN en présence de bifurcations **93**

4.2.1. Problématique 93

4.2.2. Réduction de la longueur de pas 96

4.2.3. Changement de branche 96

4.2.4. Un algorithme pour traverser les bifurcations 98

4.3. Indicateur de bifurcation **102**

4.4. Calcul de l'indicateur par la M.A.N. **103**

4.4.1. Développements en séries 103

4.4.2. M.E.F. 104

4.4.3. Récapitulatif de l'algorithme 105

4.5. Extension aux coques en grandes rotations **106**

4.5.1. Ecriture matricielle 106

4.5.2. Récapitulatif de l'algorithme 107

4.6. Extension aux matériaux non-linéaires **108**

4.7. Couplage avec la méthode de continuation **110**

4.7.1. Algorithme 113

4.7.2. Exemples numériques 113

4.8. Bilan du chapitre et perspectives **118**

4.1 Introduction

Avant d'entamer la procédure de suivi de la courbe de points limites, il est nécessaire d'isoler précisément un point limite de départ sur la branche d'équilibre fondamentale de la structure étudiée (voir figure 1.25). Les méthodes classiques de détection des points singuliers ont été exposées dans la section 2.5.2. La méthode présentée ici repose sur l'étude d'un système perturbé que l'on résoud à l'aide de la MAN. Ce problème perturbé a été introduit pour la première fois par BOUTYOUR [1994, 1995], et utilisé par la suite par VANNUCCI *et al.* [1998]. Dans ses travaux, BOUTYOUR avait seulement expliqué comment calculer l'indicateur. Dans ce qui suit, on poursuit ces travaux en effectuant le couplage avec la méthode de continuation exposée dans le chapitre précédent. On adapte ensuite l'algorithme obtenu aux coques en grandes rotations et aux matériaux non-linéaires.

Dans la pratique, on va couramment chercher des points singuliers aussi bien sur la courbe d'équilibre de la structure parfaite ou alors pour une certaine valeur de l'imperfection initiale. Cela revient à prendre en compte ou non une imperfection initiale dans l'algorithme de détection. Dans ce qui suit, on ne traitera que le cas d'une structure avec imperfection, qui est le plus général. Pour se ramener au cas de la structure parfaite, il suffit de prendre un défaut $\boldsymbol{u}^\star$ nul.

4.2 Comportement de la MAN en présence de bifurcations

Il nous paraît important, avant de discuter un quelconque algorithme de détection des points singuliers, d'analyser brièvement le comportement de la MAN en présence de bifurcations. Les quelques réflexions qui suivent ont été présentées en détails dans [BAGUET et COCHELIN, 2001b]. Ce paragraphe en reprend les idées essentielles.

4.2.1 Problématique

Lorsque la branche d'équilibre calculée par la MAN comporte une bifurcation, l'adaptation automatique de la longueur de pas [1] a un comportement spécifique que l'on ne rencontre pas avec les algorithmes classiques de prédiction-correction (NEWTON-RAPHSON par exemple). Lorsqu'on approche de la bifurcation, la longueur de pas est en général sévèrement réduite. On assiste à une accumulation de pas très courts et tout se passe comme si on « butait » contre la bifurcation.

Afin d'illustrer ce phénomène, on s'intéresse au panneau cylindrique qu'on a déjà étudié dans la première partie de ce mémoire. On avait calculé sa courbe d'équilibre dans le paragraphe 3.4.3 en ne maillant qu'un quart du panneau et en appliquant des conditions de symétrie. Avec ces conditions de symétrie, la courbe d'équilibre ne présente pas de bifurcation, comme on peut le constater dans la figure 4.1. Cette courbe a été calculée à l'ordre $N = 25$ avec une précision $\varepsilon = 10^{-5}$, comme dans [BAGUET et COCHELIN, 2001b]. Lorsqu'on maille la moitié du panneau cylindrique au lieu d'un quart, la réponse est alors constituée de la même branche fondamentale

1. inhérente à la procédure de continuation exposée dans le paragraphe 3.4

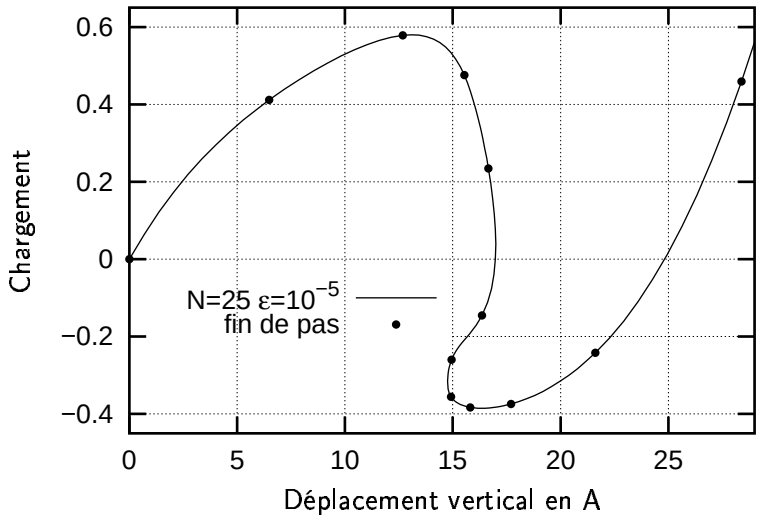


FIGURE 4.1 – *Continuation de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique sans bifurcation ($N = 25$, $\varepsilon = 10^{-5}$)*

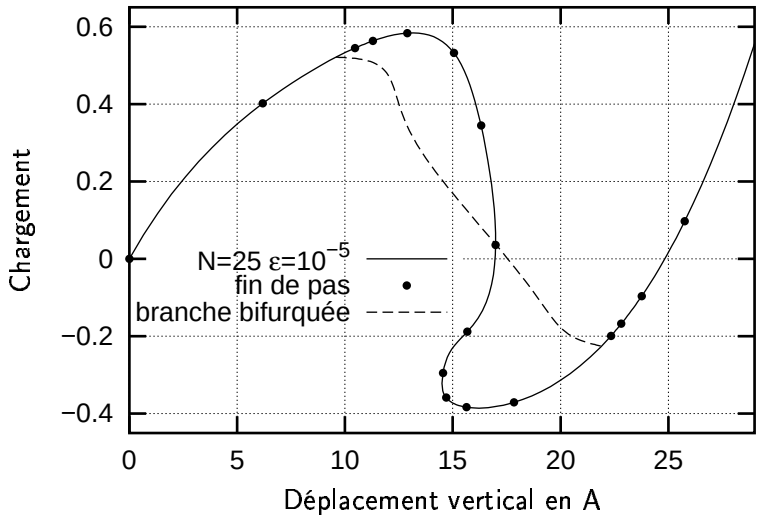


FIGURE 4.2 – *Continuation de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique avec bifurcations. La branche bifurquée est tracée en pointillés ($N = 25$, $\varepsilon = 10^{-5}$)*

que précédemment, et d'une branche bifurquée qui correspond à une perte de symétrie de la structure. Les deux branches sont connectées par deux points de bifurcation, comme on peut le voir sur la figure 4.2. Bien qu'on utilise les mêmes paramètres $N = 25$ et $\varepsilon = 10^{-5}$ que précédemment, le comportement de la MAN lors du calcul de la branche fondamentale est très différent : on constate une diminution de la longueur de pas au niveau des deux bifurcations. Avec $\varepsilon = 10^{-7}$, la réduction de la longueur de pas est plus sévère et on voit clairement une accumulation de pas autour des bifurcations (figure 4.3). Si on réduit ε jusqu'à 10^{-8}, l'accumulation au niveau de la première bifurcation est encore plus marquée et l'algorithme de continuation emprunte la

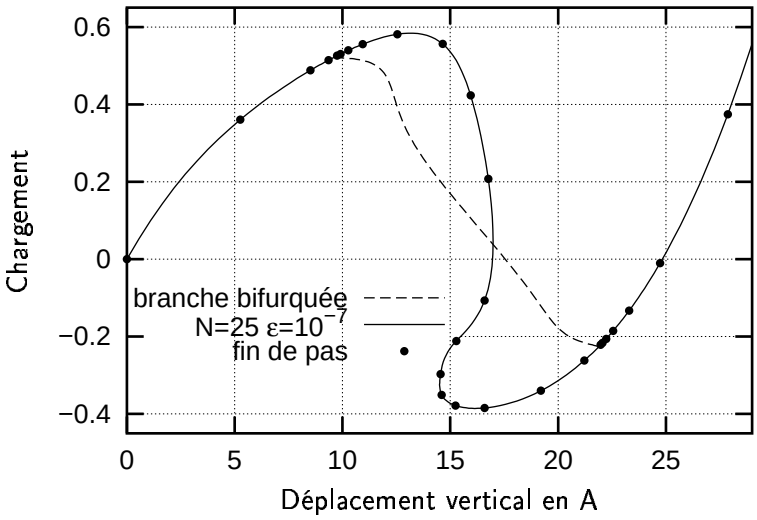


FIGURE 4.3 – *Continuation de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique avec bifurcations. La branche bifurquée est tracée en pointillés ($N = 25$, $\varepsilon = 10^{-7}$)*

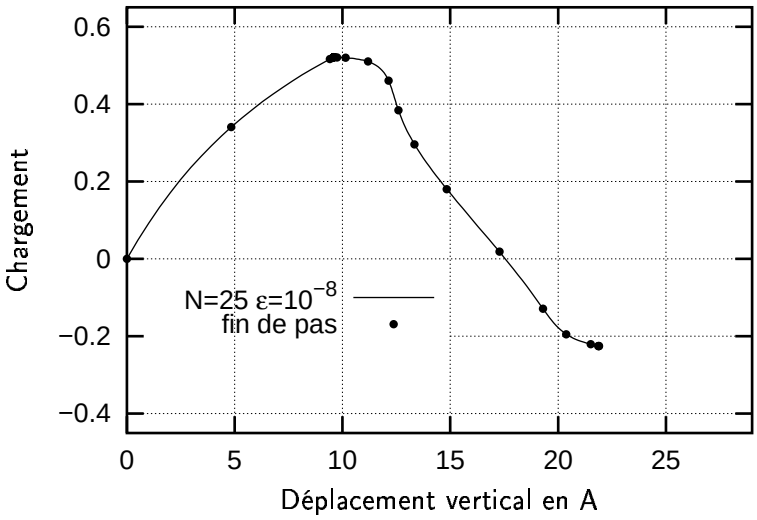


FIGURE 4.4 – *Continuation de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique avec bifurcations ($N = 25$, $\varepsilon = 10^{-8}$)*

branche bifurquée au lieu de continuer sur la branche fondamentale.

Ce comportement particulier a déjà été mentionné dans la littérature et les utilisateurs de la MAN savent que derrière ces accumulations de pas se cachent des bifurcations. C'est donc un moyen très pratique pour déceler (à l'oeil) des bifurcations le long d'une branche d'équilibre. Cependant, aucune véritable explication n'a été fournie en ce qui concerne la diminution de la longueur de pas au niveau des bifurcations et l'embranchement ou non sur la branche bifurquée. Nous allons tenter d'apporter quelques éclaircissements.

4.2.2 Réduction de la longueur de pas

Il peut sembler étonnant d'obtenir des résultats différents lorsqu'on considère un quart du panneau (pas de bifurcation) ou la moitié du panneau (présence de bifurcations). En effet, puisqu'on suit la même courbe d'équilibre, les problèmes $\boldsymbol{R}_i$ qui donnent les termes des séries sont exactement les mêmes dans les deux cas, sauf que l'un est posé sur un quart de la structure et l'autre sur la moitié. Cela revient à résoudre un problème linéaire symétrique en étudiant soit la structure complète soit la moitié avec des conditions de symétrie. Cela ne devrait pas modifier les résultats. Ainsi, les séries obtenues dans chacun des cas devraient être les mêmes, avoir les mêmes rayons de convergence et fournir les mêmes résultats de continuation (nombre de pas identique). Or ce n'est pas le cas ici.

L'explication de ce phénomène est en fait relativement simple. Si, lorsqu'on étudie la moitié du panneau avec conditions de symétrie imposées, on traite un véritable problème symétrique, ce n'est généralement plus le cas lorsqu'on considère la structure complète. En effet, dans un contexte éléments finis, de nombreux facteurs peuvent briser la symétrie de la structure: le nombre de décimales utilisées pour définir la géométrie de la structure dans le fichier d'entrée du programme EF, la précision machine, ... Ces imperfections ou imprécisions introduisent une perturbation dans le problème EF initial. Dans le cas des méthodes incrémentales traditionnelles de type NEWTON-RAPHSON, l'effet de cette perturbation est négligeable. Mais dans le cas de la MAN, une perturbation, aussi infime soit-elle, modifie les termes des séries. Par conséquent, le rayon de convergence des séries est également modifié. C'est ce qui explique la différence de longueur de pas entre les deux calculs.

Pour le problème perturbé, le rayon de convergence dans le voisinage d'une bifurcation est donné par la distance (en a) du point de départ du pas à la bifurcation. On peut le vérifier sur la figure 4.2: le deuxième pas est « stoppé » par la bifurcation. En fait, il se termine peu après avoir traversé la bifurcation. Les pas qui suivent sont eux aussi limités par la présence de la bifurcation. C'est pourquoi la longueur de pas est multipliée par un facteur deux à chaque pas.

4.2.3 Changement de branche

Sur la dernière courbe ($\varepsilon = 10^{-8}$), l'accumulation de pas s'accompagne d'un aiguillage de l'algorithme de continuation sur la branche bifurquée. Dans les autres cas, on « piétinait » également mais on traversait la bifurcation. Pourquoi n'est-ce plus le cas?

A cause de la perturbation présente dans le modèle EF, et même si elle est très faible, on n'est plus confronté à une véritable bifurcation (ou *bifurcation pure*) mais à une *quasi-bifurcation*. La réponse du problème imparfait est constituée de deux branches qui sont très proches des branches fondamentales et bifurquées et qui présentent un virage brusque au niveau de la bifurcation (figure 4.5). Si la perturbation est très faible, ces deux branches deviennent très proches, mais elle ne se rejoignent jamais.

Par conséquent, le comportement qu'on observe dans la figure 4.4 est le « bon comportement ». L'algorithme de continuation de la M.A.N. a suivi la véritable courbe d'équilibre du

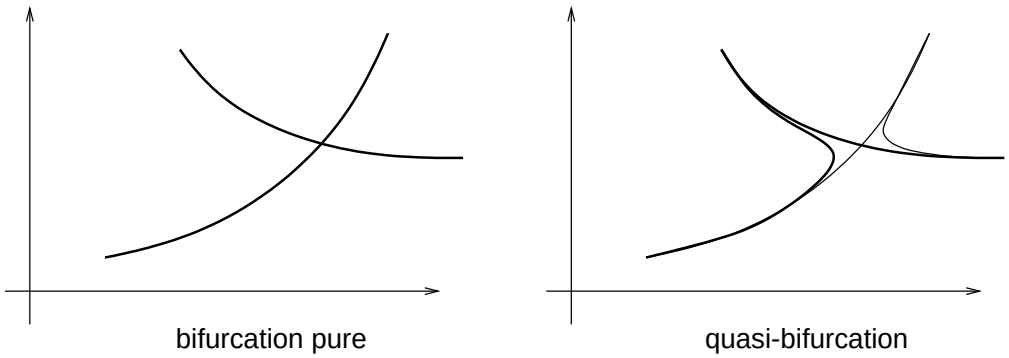


FIGURE 4.5 – *Avec une imperfection, la bifurcation devient une quasi-bifurcation*

problème imparfait. Il a réduit automatiquement la longueur de pas pour s'adapter au virage brusque et suivre la courbe sans sauter sur la branche opposée. Toutefois, ce comportement ne peut se produire que si la précision ε (qui est en fait la tolérance ou erreur admise sur le résidu global d'équilibre) est suffisamment faible : $\varepsilon = 10^{-8}$ dans notre cas. Si on autorise une erreur ε trop élevée, l'algorithme de la M.A.N. ne parvient pas à suivre la courbe du problème imparfait et on saute sur la branche opposée (figures 4.2 et 4.3).

La question qui vient alors à l'esprit est la suivante : comment savoir si on va tourner sur la branche bifurquée ou sauter sur la branche opposée ? Pour y répondre, il est nécessaire de pouvoir évaluer le degré d'imperfection de la structure. Pour cela, on s'intéresse à un modèle très simple constitué de deux barres soumises à un chargement vertical dans le plan (figure 4.6). La simplicité de la géométrie de ce petit modèle nous assure que la seule imperfection présente dans la modélisation EF provient de la précision machine (10^{-15} environ). Afin de contrôler le degré d'imprécision du modèle, on introduit alors une imperfection au moyen d'une force perturbatrice horizontale f très petite. En faisant varier successivement l'intensité de cette force (de 10^{-3} à 10^{-10}) et la valeur de la tolérance ε, on aboutit à la conclusion suivante : si la tolérance ε est plus faible que la force perturbatrice, l'algorithme parvient à suivre la branche perturbée. Si ε est plus élevé, le saut sur la branche opposée a lieu.

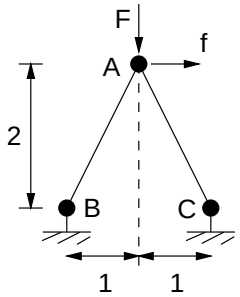


FIGURE 4.6 – *Géométrie du modèle simple à deux barres.*

En résumé, dans un contexte élément finis, une *bifurcation pure* le long d'une courbe d'équilibre est plus une exception que la règle. A cause des imperfections du modèle, on est presque toujours confronté à une *quasi-bifurcation* avec des virages très brusques. Cette situation ne change en rien le comportement des méthodes incrémentales-itératives classiques qui traversent

généralement la quasi-bifurcation et suivent la branche fondamentale. En revanche, l'algorithme de continuation de la M.A.N. est considérablement affecté. D'une part, la longueur de pas se trouve très fortement réduite. D'autre part, si la tolérance sur le résidu est suffisamment faible, l'algorithme emprunte le virage brusque et suit la branche perturbée. Dans le cas contraire, il « saute » sur la branche opposée. Ce phénomène pourrait être considéré comme un inconvénient mais, à nos yeux, il comporte au contraire de nombreux avantages :

- L'accumulation de pas est un très bon indicateur de la présence d'une bifurcation. Toutes les bifurcations peuvent ainsi être identifiées par l'utilisateur sans recours à un outil spécifique.
- L'aiguillage sur la branche bifurquée ne traduit pas une faiblesse de l'algorithme. C'est au contraire une démonstration de la robustesse de l'algorithme de continuation. Par ailleurs, cela permet de suivre la branche bifurquée sans avoir à utiliser une technique de changement de branche.
- L'utilisateur qui veut continuer sur la branche fondamentale au lieu de bifurquer peut, à partir d'un point situé avant la quasi-bifurcation, utiliser une technique de prédiction-correction classique (NEWTON-RAPHSON) pour « sauter » sur la branche opposée. Une autre solution pour traverser pourrait consister à utiliser des approximants de Padé ([ELHAGE-HUSSEIN *et al.*, 2000]) au lieu des séries, ou encore une technique de prédiction-correction par homotopie ([LAHMAM *et al.*, 2000]).
- Le seul inconvénient est le nombre élevé de pas très courts utilisés au niveau de la bifurcation, car cela est coûteux en temps de calcul. Cependant, c'est le prix à payer pour décrire précisément le virage brusque qui correspond à la quasi-bifurcation. Il est tout de même possible de réduire le nombre de pas autour de la bifurcation. C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe qui suit.

4.2.4 Un algorithme pour traverser les bifurcations

On se propose ici d'améliorer la traversée des bifurcation, i.e. de réduire le nombre pas nécessaires à cette traversée. Il ne s'agit donc pas de traverser dans tous les cas mais d'optimiser la traversée lorsqu'elle a lieu.

La stratégie qu'on va utiliser est basée sur l'étude du résidu. Classiquement, pour un pas sans bifurcation, les courbes ont une allure bien particulière, donnée par la figure 4.7. On avait déjà présenté une de ces courbes dans le chapitre 3.4.1, avant d'introduire la critère d'arrêt et la méthode de continuation. Dans la même figure, on a également tracé la droite correspondant à la tolérance sur le résidu ($\varepsilon = 10^{-7}$). A la vue de ces courbes, plusieurs remarques peuvent être faites. Les courbes de résidu correspondant à des ordres différents se croisent toutes en un même point (point A). Ce point est situé au-dessus de la droite $\varepsilon = 10^{-7}$. Il en découle une propriété importante : **dans le cas d'un pas sans bifurcation, pour une précision ε donnée, augmenter l'ordre permet d'augmenter la longueur de pas**. En effet, la longueur de pas a_m est donnée par l'intersection des courbes de résidu avec la droite horizontale ε (point B). Si on appelle a_m^p la longueur de pas pour l'ordre p, on a donc $a_m^{30} > a_m^{20} > a_m^{10}$. On constate par

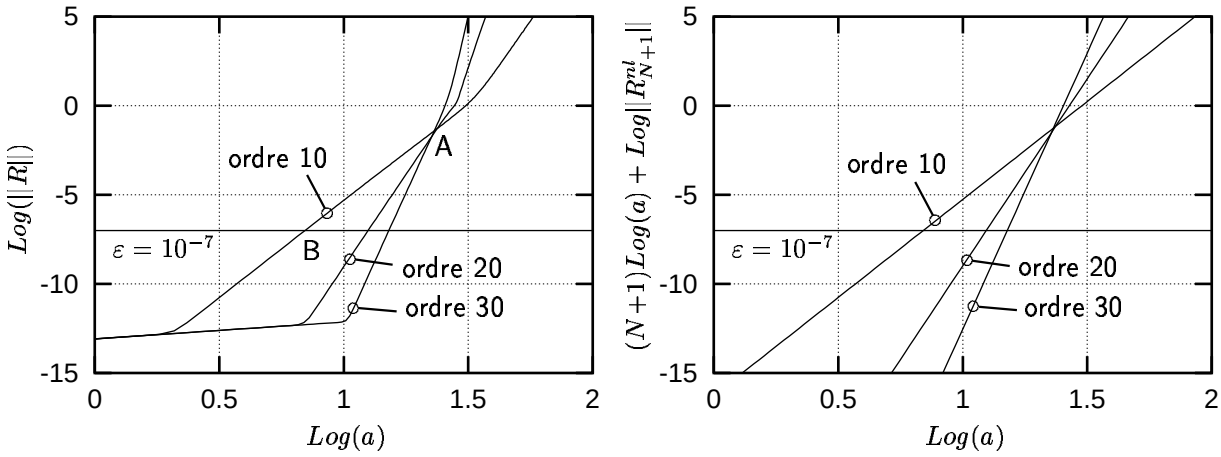


FIGURE 4.7 – *Courbes de résidu et leurs approximations pour un pas sans bifurcation.*

ailleurs que les droites obtenues à l'aide de l'approximation (3.24) donnent exactement le même point d'intersection.

En présence d'une bifurcation, les courbes de résidu ont des propriétés différentes (figure 4.8). Leur allure est similaire, mais cette fois-ci elles se croisent (point A) en-dessous de la précision demandée. On utilise les séries au-delà de leur domaine de convergence (donné par le point A d'intersection des courbes de résidu). Au-delà de ce point d'intersection, les séries divergent et plus on ajoute de termes plus on détériore la solution. Par conséquent, plus l'ordre est élevé, plus le pas est court et plus on « piétine » au niveau de la bifurcation. La propriété qui en ressort va à l'encontre de la précédente : **dans le cas d'un pas avec bifurcation, pour une précision ε donnée, diminuer l'ordre permet d'augmenter la longueur de pas**.

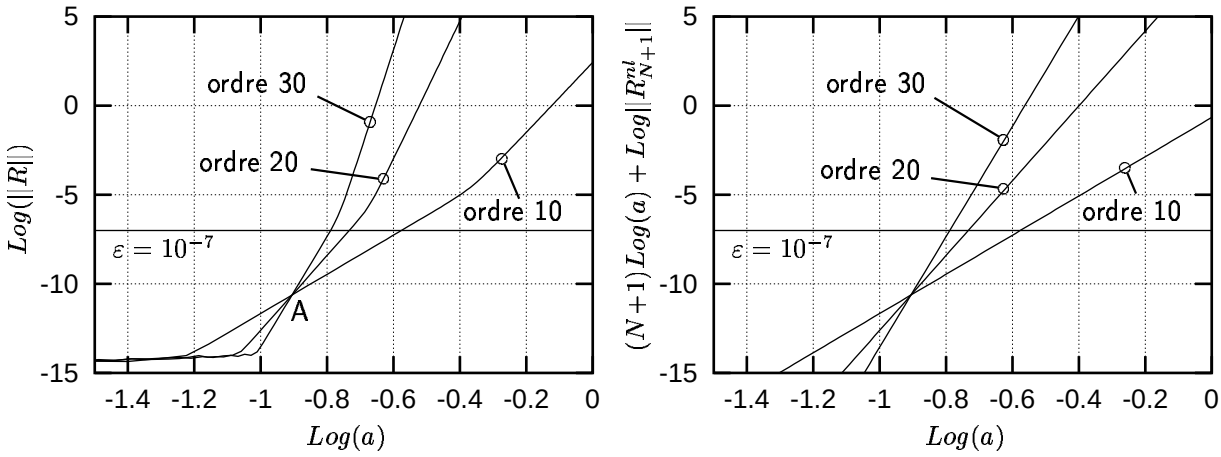
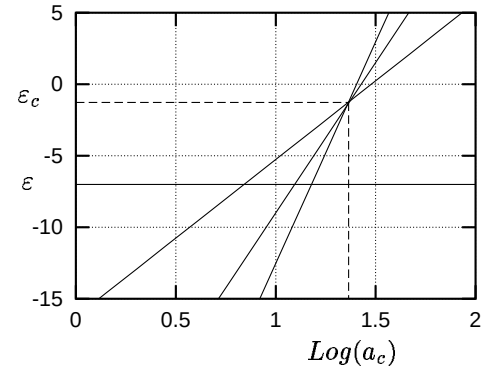
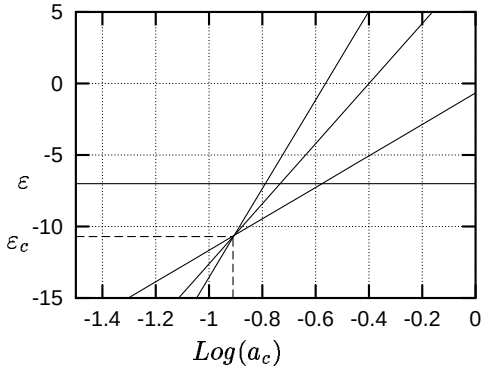


FIGURE 4.8 – *Courbes de résidu et leurs approximations pour un pas en présence d'une bifurcation.*

La stratégie à adopter est donc simple :

1) Déterminer les coordonnées $(Log(a_c), log(\varepsilon_c))$ du point d'intersection.
2) **Si $\boldsymbol{\varepsilon_c > \varepsilon}$**, le pas est normal. Plus l'ordre est élévé, plus la longueur de pas est grande. On travaille avec l'ordre demandé par l'utilisateur.
3) **Si $\boldsymbol{\varepsilon_c < \varepsilon}$**, on est en présence d'une bifurcation. Plus l'ordre est faible, plus la longueur de pas est grande. Si l'ordre demandé par l'utilisateur est trop grand pour franchir facilement la bifurcation, on en choisit un plus petit : on passe à l'ordre 5. On ne descend pas en dessous de l'ordre 5 pour conserver une représentation en série de bonne qualité.





Pour déterminer les coordonnées $(Log(a_c), log(\varepsilon_c)$ du point d'intersection, on utilise les approximations de droites obtenues par (3.24). Puisque toutes ces droites se croisent en un même point, il suffit de choisir deux droites quelconques. Soient n_1 et n_2 les ordres de séries pour lesquels on trace les droites. Leurs approximations sont données par

$$Log\,\|\boldsymbol{R}(a)\| = (n_1+1)\,Log|a| + Log\,\|\boldsymbol{R}^{nl}_{n_1+1}\|$$
$$Log\,\|\boldsymbol{R}(a)\| = (n_2+1)\,Log|a| + Log\,\|\boldsymbol{R}^{nl}_{n_2+1}\|$$

Après résolution de ce système linéaire, on obtient

$$Log(\varepsilon_c) = \frac{(n_1+1)\,Log\,\|\boldsymbol{R}^{nl}_{n_2+1}\| - (n_2+1)\,Log\,\|\boldsymbol{R}^{nl}_{n_1+1}\|}{n_1-n_2} \tag{4.1}$$

$$Log|a_c| = \frac{Log\,\|\boldsymbol{R}^{nl}_{n_2+1}\| - Log\,\|\boldsymbol{R}^{nl}_{n_1+1}\|}{n_1-n_2} \tag{4.2}$$

Dans l'algorithme qui a été implanté dans le code EVE, le choix pour les ordres n_1 et n_2 a été le suivant : $n_1 = 10$ et n_2 est l'ordre choisi par l'utilisateur. On a choisi $n_1 = 10$ et pas $n_1 = 5$ car les approximations des courbes de résidu à des ordres très faibles ne sont pas toujours totalement fiables. Cela tient au fait que les courbes de résidu pour des ordres très faibles n'ont pas toujours le comportement linéaire qu'on a décrit jusqu'à présent.

Les deux courbes qui suivent démontrent l'efficacité de cet algorithme. La première est la même que celle qu'on avait déjà présentée dans la section 4.2.1. Elle correspond à la courbe du panneau avec bifurcation calculée à l'ordre 25 avec une précision $\varepsilon = 10^{-7}$. On la redonne ici pour que la comparaison avec la seconde courbe soit plus aisée. Cette deuxième courbe correspond à la

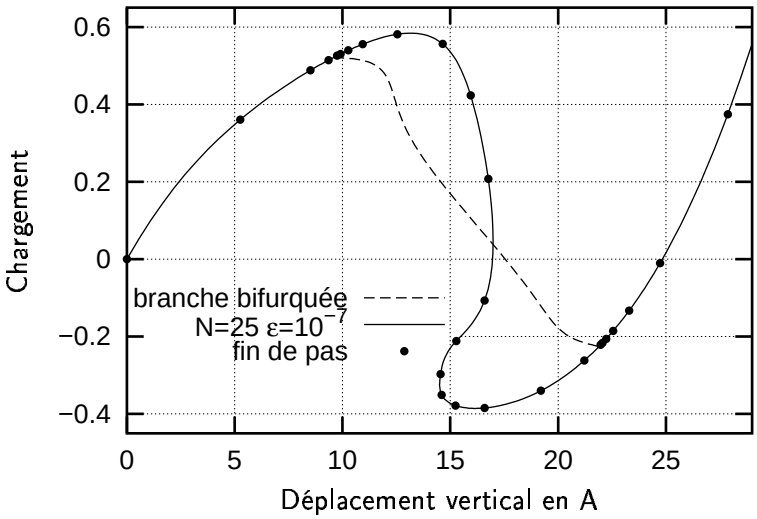


FIGURE 4.9 – *Continuation de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique avec bifurcation ($N = 25$, $\varepsilon = 10^{-7}$)*

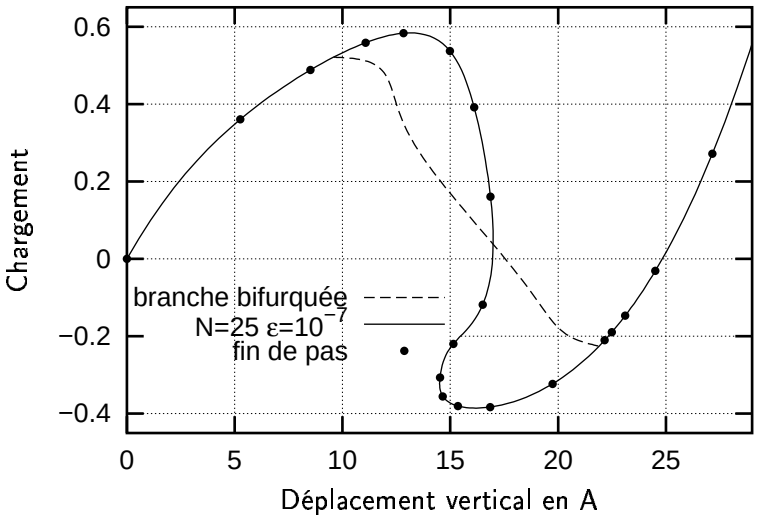


FIGURE 4.10 – *Continuation de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique avec algorithme de passage des bifurcations (passage à l'ordre 5).*

mise en pratique de l'algorithme que l'on vient de proposer. On constate que l'accumulation de pas a disparu au niveau de la première bifurcation et qu'elle a très nettement diminué au niveau de la seconde bifurcation. De manière plus précise, les deux premiers pas sont exactement les mêmes. Par contre, durant le troisième pas, on se trouve dans la situation $\varepsilon_c < \varepsilon$ (présence d'une bifurcation) et l'algorithme de passage à l'ordre 5 s'est déclenché. Il en a été de même pour le 4ème pas. Dans ce cas précis, cet algorithme est très favorable, car il a permis « d'économiser » une dizaine de pas. Même s'il améliore toujours la traversée des bifurcations, son efficacité n'est

pas toujours aussi flagrante. A la suite de nombreux tests numériques, il s'avère que cela dépend de la position de la fin de pas qui précède la bifurcation. Plus on est proche de la bifurcation, plus ε_c est proche de ε. Dans ce cas, le passage à l'ordre 5 ou 10 n'améliore donc que très peu la situation.

4.3 Indicateur de bifurcation

On s'intéresse maintenant à la détection précise des points singuliers le long des branches d'équilibre. L'indicateur de bifurcation qu'on va décrire dans cette section a été proposé par BOUTYOUR [1994]. Un de ses avantages par rapport à l'algorithme décrit dans le paragraphe 2.5.2 est de reposer entièrement sur la M.A.N. Comme on l'a déjà précisé dans l'introduction de ce chapitre, on ne détaille l'algorithme que dans le cas d'une structure avec défaut de forme initial.

La courbe d'équilibre de la structure avec imperfection est décrite par le système d'équations (cf. § 2.1.2)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^\star, \lambda).\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^\star).\delta\boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{F}_e.\delta\boldsymbol{u} = 0 \tag{4.3}$$

La détection des états critiques s'effectue en introduisant une perturbation dans le système. Le système perturbé, obtenu par linéarisation, s'écrit

$$(\boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}} \,.\, \Delta\boldsymbol{u}) \,.\, \delta\boldsymbol{u} = \Delta\mu\, \boldsymbol{f}_e \,.\, \delta\boldsymbol{u} \tag{4.4}$$

où $\Delta\boldsymbol{u}$ est la réponse en déplacement de la structure à la force perturbatrice $\Delta\mu\, \boldsymbol{f}_e$, $\boldsymbol{f}_e$ étant un vecteur fixé et $\Delta\mu$ un scalaire permettant de contrôler son amplitude. Pour détecter les états critiques, il est nécessaire de suivre de près l'évolution de $\Delta\boldsymbol{u}$ et de $\Delta\mu$ en chaque point de la branche d'équilibre. Un point singulier peut être caractérisé de plusieurs manières :

i) C'est un point de la courbe d'équilibre pour lequel l'opérateur tangent $\boldsymbol{K}_T = \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}}$ est singulier. Les méthodes classiques sont basées sur ce critère ;

ii) Pour une valeur fixée de la force perturbatrice $\Delta\mu$, c'est un point pour lequel la réponse en déplacement $\Delta\boldsymbol{u}$ tend vers l'infini. A cause de ces valeurs infinies du déplacement, ce critère n'est pas très adéquat en vue d'une mise en œuvre numérique ;

iii) Pour une valeur fixée de la perturbation en déplacement $\Delta\boldsymbol{u}$, c'est un point pour lequel la réponse en force $\Delta\mu$ tend vers zéro. Lorsque $\Delta\boldsymbol{u}$ est fixé, $\Delta\mu$ peut être vu comme une mesure de rigidité.

C'est ce dernier critère que nous allons utiliser ici. Ainsi, $\Delta\mu$ va jouer le rôle d'indicateur de bifurcation et les points singuliers seront donnés par ses zéros.

Le système (4.4) comporte N_{ddl} équations pour $N_{ddl}+1$ inconnues : les N_{ddl} d.d.l. de $\Delta\boldsymbol{u}$ et le scalaire $\Delta\mu$. Il est donc nécessaire d'ajouter une équation supplémentaire pour assurer l'unicité de la solution en tout point de la branche d'équilibre. Etant donné que nous avons choisi de fixer

la perturbation en déplacement plutôt que la force perturbatrice, cette condition supplémentaire est donnée par

$$\|\Delta \boldsymbol{u}\| = 1 \tag{4.5}$$

Les équations (4.4) et (4.5) forment un système bien posé que nous allons résoudre à l'aide de la M.A.N.

Remarque 4.1
Bien que l'on n'ait fait aucune hypothèse quant à la forme du vecteur de force perturbateur injecté dans le système, on préfère généralement utiliser une force perturbatrice $\boldsymbol{f}_e$ aléatoire. Cela permet d'éviter les cas pathologiques[2] pour lesquels la perturbation utilisée ne permet pas de représenter l'état critique escompté.

❑

4.4 Calcul de l'indicateur par la M.A.N.

4.4.1 Développements en séries

On suppose qu'une expression analytique de la courbe d'équilibre a été obtenue en utilisant la procédure décrite dans le chapitre 3

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(a) &= \boldsymbol{u}_0 + a\,\boldsymbol{u}_1 + a^2\,\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a^N\,\boldsymbol{u}_N \\ \boldsymbol{S}(a) &= \boldsymbol{S}_0 + a\,\boldsymbol{S}_1 + a^2\,\boldsymbol{S}_2 + \ldots + a^N\,\boldsymbol{S}_N \\ \lambda(a) &= \lambda_0 + a\,\lambda_1 + a^2\,\lambda_2 + \ldots + a^N\,\lambda_N \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour résoudre le problème (4.4)-(4.5) par la M.A.N., on applique également la procédure décrite dans le chapitre 3. La première étape consiste à réécrire le problème dans un cadre quadratique. Pour cela, on fait apparaître explicitement la contrainte $\Delta\boldsymbol{S}$ associée au déplacement $\Delta\boldsymbol{u}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \Delta\boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^\star).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_{nl}(\Delta\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u}\,dV = \Delta\mu\,\boldsymbol{f}_e\,.\,\delta\boldsymbol{u} \\ \Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \big(\boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star)\big).\Delta\boldsymbol{u} \\ \Delta\boldsymbol{u}.\Delta\boldsymbol{u} = 1 \end{array} \right. \tag{4.7}$$

De cette manière, $(4.7)_1$ est quadratique (bilinéaire) en $\boldsymbol{u}$ et $\Delta\boldsymbol{S}$ et en $\Delta\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{S}$, et $(4.7)_2$ est quadratique en $\boldsymbol{u}$ et $\Delta\boldsymbol{u}$.
Les perturbations $\Delta\boldsymbol{u}$ et $\Delta\mu$, ainsi que la contrainte $\Delta\boldsymbol{S}$, sont ensuite développés en séries par rapport au même paramètre a

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{u}(a) &= \Delta\boldsymbol{u}_0 + a\,\Delta\boldsymbol{u}_1 + a^2\,\Delta\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a^n\,\Delta\boldsymbol{u}_n \\ \Delta\boldsymbol{S}(a) &= \Delta\boldsymbol{S}_0 + a\,\Delta\boldsymbol{S}_1 + a^2\,\Delta\boldsymbol{S}_2 + \ldots + a^n\,\Delta\boldsymbol{S}_n \\ \Delta\mu(a) &= \Delta\mu_0 + a\,\Delta\mu_1 + a^2\,\Delta\mu_2 + \ldots + a^n\,\Delta\mu_n \end{aligned} \tag{4.8}$$

2. ou, tout du moins, d'en réduire fortement la probabilité

où $\Delta \boldsymbol{u}_0$ est la réponse en déplacement de la structure à la perturbation au point de départ $(\boldsymbol{u}_0, \lambda_0)$.
Après introduction des séries dans le système non-linéaire (4.7), on obtient à l'ordre 0

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Delta \boldsymbol{S}_0 : \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\Delta \boldsymbol{u}_0).\delta \boldsymbol{u}\, dV = \Delta \mu_0\, \boldsymbol{f}_e \,.\, \delta \boldsymbol{u} \\ \Delta \boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{D} : \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\Delta \boldsymbol{u}_0 \\ \Delta \boldsymbol{u}_0.\Delta \boldsymbol{u}_0 = 1 \end{cases} \tag{4.9}$$

avec $\tilde{\boldsymbol{B}}_0 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}^\star)$, et à l'ordre p

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Delta \boldsymbol{S}_p : \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\Delta \boldsymbol{u}_p).\delta \boldsymbol{u}\, dV = \Delta \mu_p\, \boldsymbol{f}_e \,.\, \delta \boldsymbol{u} - \Delta \boldsymbol{R}_p^{nl} \\ \Delta \boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D} : \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\Delta \boldsymbol{u}_p + \Delta \boldsymbol{S}_p^{nl} \\ \Delta \boldsymbol{u}_p.\Delta \boldsymbol{u}_0 = \theta_p^{nl} \end{cases} \tag{4.10}$$

avec

$$\Delta \boldsymbol{R}_p^{nl} = \int_\Omega \sum_{r=1}^{p} \Delta \boldsymbol{S}_{p-r} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_r) + \boldsymbol{S}_r : \boldsymbol{B}_{nl}(\Delta \boldsymbol{u}_{p-r})\, dV \tag{4.11}$$

$$\Delta \boldsymbol{S}_p^{nl} = \boldsymbol{D} : \sum_{r=1}^{p} \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_r).\Delta \boldsymbol{u}_{p-r} \tag{4.12}$$

$$\theta_p^{nl} = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p-1} \Delta \boldsymbol{u}_r.\Delta \boldsymbol{u}_{p-r} \tag{4.13}$$

Remarque 4.2
Cette fois-ci[3], les sommations vont de $r = 1$ à p au lieu de $p - 1$. De plus, les indices $p - r$ portent toujours sur les termes « en Δ ». Cela s'explique par le fait que les termes $\boldsymbol{u}_p$ et $\boldsymbol{S}_p$ sont supposés connus et font donc partie du second membre.

❑

4.4.2 M.E.F.

Après report de la loi de comportement $(4.9)_2$ et $(4.10)_2$ dans les équations d'équilibre $(4.9)_1$ et $(4.10)_1$, et après discrétisation par éléments finis (cf. § 2.4), le problème en déplacement à l'ordre 0 s'écrit

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{K}_t]\,[\Delta \boldsymbol{q}_0] &= \Delta \mu_0\,[\boldsymbol{f}_e] \\ [\Delta \boldsymbol{q}_0]^t\,[\Delta \boldsymbol{q}_0] &= 1 \end{aligned} \tag{4.14}$$

3. en comparaison avec l'algorithme de calcul de branches d'équilibre décrit dans le chapitre précédent

et le problème à l'ordre p

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{K}_t]\,[\Delta \boldsymbol{q}_p] &= \Delta\mu_p\,[\boldsymbol{f}_e] + [\Delta \boldsymbol{F}_p^{nl}] \\ [\Delta \boldsymbol{q}_p]^t\,[\Delta \boldsymbol{q}_0] &= \theta_p^{nl} \end{aligned} \tag{4.15}$$

avec

$$[\Delta \boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\Delta \boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\Delta \boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{4.16}$$

$$[\Delta \boldsymbol{S}_p^{nl}] = [\boldsymbol{D}] \sum_{r=1}^{p} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)][\Delta \boldsymbol{q}_{p-r}] \tag{4.17}$$

$$[\Delta \boldsymbol{R}_p^{nl}] = \int_\Omega \sum_{r=1}^{p} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)]^t\,[\Delta \boldsymbol{S}_{p-r}] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\Delta \boldsymbol{q}_{p-r})]^t\,[\boldsymbol{S}_r]\,dV \tag{4.18}$$

$$\theta_p^{nl} = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{p-1} [\Delta \boldsymbol{q}_r]^t[\Delta \boldsymbol{q}_{p-r}] \tag{4.19}$$

Remarque 4.3
La matrice tangente $\boldsymbol{K}_t$ est la même que dans le cas du calcul de branche d'équilibre. On l'a déjà décomposée pour le calcul des $\boldsymbol{q}_i$, $\boldsymbol{S}_i$ et λ_i. On réutilise ici cette décomposition. Le surcoût de calcul pour déterminer les $\Delta \boldsymbol{q}_i$, $\Delta \boldsymbol{S}_i$ et $\Delta\mu_i$ se réduit donc à l'assemblage de quelques seconds membres et à quelques résolutions de systèmes triangulaires.

❑

4.4.3 Récapitulatif de l'algorithme

Les coefficients des séries sont obtenus grâce à la résolution des sytèmes (4.14) et (4.15). Les étapes de cette résolution peuvent être résumées de la manière suivante :

Ordre 0

- Résoudre $[\boldsymbol{K}_t]\,[\Delta \hat{\boldsymbol{q}}] = [\boldsymbol{f}_e]$
- Calculer

$$\Delta\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{[\Delta \hat{\boldsymbol{q}}]^t[\Delta \hat{\boldsymbol{q}}]}}$$

$$[\Delta \boldsymbol{q}_0] = \Delta\mu_0\,[\Delta \hat{\boldsymbol{q}}]$$

$$[\Delta \boldsymbol{S}_0] = [\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\Delta \boldsymbol{q}_0]$$

Ordre p

- A chaque point de Gauss, évaluer $[\Delta \boldsymbol{S}_p^{nl}]$
- Assembler $[\Delta \boldsymbol{R}_p^{nl}]$ puis $[\Delta \boldsymbol{F}_p^{nl}]$
- Résoudre $[\boldsymbol{K}_t]\,[\Delta \boldsymbol{q}_p^{nl}] = [\Delta \boldsymbol{F}_p^{nl}]$
- Calculer

$$\Delta\mu_p = \Delta\mu_0 \left(\theta_p^{nl} - [\Delta \boldsymbol{q}_p^{nl}]^t [\Delta \boldsymbol{q}_0]\right)$$

$$[\Delta \boldsymbol{q}_p] = \frac{\Delta\mu_p}{\Delta\mu_0}\,[\Delta \boldsymbol{q}_0] + [\Delta \boldsymbol{q}_p^{nl}]$$

$$[\Delta \boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\Delta \boldsymbol{q}_p] + [\Delta \boldsymbol{S}_p^{nl}]$$

4.5 Extension aux coques en grandes rotations

4.5.1 Ecriture matricielle

Dans le cas de l'élément de coque développé par Büchter *et al.*, le problème non-linéaire à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Delta \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^\star).\delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_{nl}(\Delta \boldsymbol{u}).\delta \boldsymbol{u}\, dV = \Delta\mu\, \boldsymbol{f}_e\,.\,\delta \boldsymbol{u} \\ \displaystyle\int_\Omega \Delta \boldsymbol{S} : \delta\,\Delta\tilde{\gamma}\, dV = 0 \\ \Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \big(\boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star)\big).\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{D} : \Delta\tilde{\gamma} \\ \Delta \boldsymbol{u}.\Delta \boldsymbol{u} = 1 \end{cases} \tag{4.20}$$

où $\Delta\tilde{\gamma} = \boldsymbol{B}_\alpha.\Delta\boldsymbol{\alpha}$ est la déformation additionnelle, relative au champ de déplacement $\Delta \boldsymbol{u}$, introduite par le concept EAS (cf. § 2.2.2).
Après introduction des développements en séries et discrétisation par éléments finis, on obtient à l'ordre p

$$\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t [\Delta \boldsymbol{S}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\Delta \boldsymbol{q}_p)]^t [\boldsymbol{S}_0]\, dV = \Delta\mu_p [\boldsymbol{f}_e] - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{4.21}$$

$$\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t [\Delta \boldsymbol{S}_p]\, dV = \boldsymbol{0} \tag{4.22}$$

$$[\Delta \boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\Delta \boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\Delta \boldsymbol{\alpha}_p] + [\Delta \boldsymbol{S}_p^{nl}] \tag{4.23}$$

$$[\Delta \boldsymbol{q}_p]^t\,[\Delta \boldsymbol{q}_0] = \theta_p^{nl} \tag{4.24}$$

Les expressions de $\boldsymbol{S}_p^{nl}$, $\boldsymbol{R}_p^{nl}$ et θ_p^{nl} sont les mêmes que précédemment et sont données par (4.17), (4.18) et (4.19). L'expression de $\Delta\boldsymbol{\alpha}_p$ s'obtient en remplaçant (4.23) dans (4.22)

$$[\Delta\boldsymbol{\alpha}_p] = [\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}\left([\Delta\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}][\Delta\boldsymbol{q}_p]\right) \tag{4.25}$$

avec $\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}$ et $\boldsymbol{K}_{\alpha u}$ données par (3.44) et (3.47) et

$$[\Delta\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] = -\int_{\Omega}[\boldsymbol{B}_{\alpha}]^t[\Delta\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV \tag{4.26}$$

Finalement, en reportant les équations (4.23) et (4.25) dans (4.21), on obtient le problème en déplacements

$$\left([\boldsymbol{K}_t] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]\right)\,[\Delta\boldsymbol{q}_p] = \Delta\mu_p[\boldsymbol{f}_e] + [\Delta\boldsymbol{F}_p^{nl}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\Delta\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] \tag{4.27}$$

où $\Delta\boldsymbol{F}_p^{nl}$ a la même expression que précédemment, i.e. (4.16).

4.5.2 Récapitulatif de l'algorithme

Pour la résolution du problème en déplacements à l'ordre p formé des équations (4.27) et (4.24), on utilise la même démarche que dans le paragraphe 3.7.2. Le récapitulatif des différentes étapes est le suivant

Ordre p

- A chaque point de Gauss, évaluer $[\Delta\boldsymbol{S}_p^{nl}]$
- Assembler $[\Delta\boldsymbol{R}_p^{\alpha}]$, $[\Delta\boldsymbol{R}_p^{nl}]$ puis $[\Delta\boldsymbol{F}_p^{nl}]$ et calculer θ_p^{nl}
- Résoudre
  $\left([\boldsymbol{K}_t] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}]\right)\,[\Delta\boldsymbol{q}_p^{nl}] = [\Delta\boldsymbol{F}_p^{nl}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\Delta\boldsymbol{R}_p^{\alpha}]$
- Calculer $\Delta\mu_p = \Delta\mu_0\,\left(\theta_p^{nl} - [\Delta\boldsymbol{q}_p^{nl}]^t[\Delta\boldsymbol{q}_0]\right)$
  $[\Delta\boldsymbol{q}_p] = \dfrac{\Delta\mu_p}{\Delta\mu_0}[\Delta\boldsymbol{q}_0] + [\Delta\boldsymbol{q}_p^{nl}]$
- Calculer $[\Delta\boldsymbol{\alpha}_p] = [\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}\left([\Delta\boldsymbol{R}_p^{\alpha}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}][\Delta\boldsymbol{q}_p]\right)$
- Calculer $[\Delta\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\Delta\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_{\alpha}][\Delta\boldsymbol{\alpha}_p] + [\Delta\boldsymbol{S}_p^{nl}]$

4.6 Extension aux matériaux non-linéaires

On ne traitera ici que la loi de comportement, les équations d'équilibre et de compatibilité étant exactement les mêmes que dans la section précédente. Les équations relatives à la loi de comportement se déduisent de (3.51)-(3.52)-(3.53) par linéarisation

$$E(1+\alpha\eta^n)\,\Delta\boldsymbol{\gamma} = (1+\nu)\,\Delta\boldsymbol{S}^d - (1-2\nu)\,\Delta P\,\boldsymbol{I} + \Delta\kappa\,\boldsymbol{S}^d + \kappa\,\Delta\boldsymbol{S}^d \tag{4.28}$$

$$\xi\,\Delta\xi = \frac{3}{2\sigma_y^2}\,\Delta\boldsymbol{S}^d : \boldsymbol{S}^d \tag{4.29}$$

$$\xi\,\Delta\kappa = (n-1)\,\kappa\,\Delta\xi \tag{4.30}$$

$$\Delta\boldsymbol{\gamma} = \big(\boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star)\big).\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_\alpha.\Delta\boldsymbol{\alpha} \tag{4.31}$$

où $\Delta\boldsymbol{\gamma}$ est la déformation associée à la perturbation en déplacement $\Delta\boldsymbol{u}$, $\Delta\boldsymbol{S}^d$ est la partie déviatorique de la contrainte $\Delta\boldsymbol{S}$ relative à $\Delta\boldsymbol{u}$, et $\Delta\kappa$ et $\Delta\xi$ sont des variables additionnelles introduites (suivant le principe présenté dans le paragraphe 3.8.1) pour réduire le degré de linéarité de la loi de comportement. De cette manière, chacune de ces équations est quadratique bilinéaire.
On suppose que des expressions analytiques des variables $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{S}$, κ et ξ ont été obtenues à l'aide de la procédure décrite dans le paragraphe 3.8. On suit la même démarche pour calculer les variables $\Delta\boldsymbol{u}$, $\Delta\boldsymbol{\gamma}$, $\Delta\boldsymbol{S}$, $\Delta\kappa$ et $\Delta\xi$.

Ordre 0 Après introduction de leur développement en série dans le système formé des équations (4.28) à (4.31), on obtient à l'ordre 0

$$E(1+\alpha\eta^n)\,\Delta\boldsymbol{\gamma}_0 = (1+\nu+\kappa_0)\,\Delta\boldsymbol{S}_0^d - (1-2\nu)\,\Delta P_0\,\boldsymbol{I} + \Delta\kappa_0\,\boldsymbol{S}_0^d \tag{4.32}$$

$$\Delta\xi_0 = \frac{3}{2\sigma_y^2\xi_0}\,\Delta\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_0^d \tag{4.33}$$

$$\xi_0\,\Delta\kappa_0 = (n-1)\,\kappa_0\,\Delta\xi_0 \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\Delta\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{B}_\alpha.\Delta\boldsymbol{\alpha}_0 \tag{4.35}$$

Après substitution des équations (4.33) et (4.34) dans (4.32), on obtient une relation liant le tenseur des déformations $\Delta\boldsymbol{\gamma}_0$ à celui des contraintes $\Delta\boldsymbol{S}_0$

$$E(1+\alpha\eta^n)\,\Delta\boldsymbol{\gamma}_0 = (1+\nu+\kappa_0)\,\Delta\boldsymbol{S}_0^d - (1-2\nu)\,\Delta P_0\,\boldsymbol{I} + \frac{3(n-1)\kappa_0}{2\sigma_y^2\xi_0^2}\,(\Delta\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_0^d)\,\boldsymbol{S}_0^d \tag{4.36}$$

avec $\Delta P_0 = -\frac{1}{3}\Delta\boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{I}$. Les coefficients de cette équation sont les mêmes que ceux de l'équation (3.66) qu'on avait obtenue pour le calcul de courbes d'équilibre dans le paragraphe 3.8.2. L'inversion de cette relation nous conduit donc à une relation similaire à (3.67)

$$\Delta\boldsymbol{S}_0 = C_1\,\Delta\boldsymbol{\gamma}_0 + C_2\,(\Delta\boldsymbol{\gamma}_0 : \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{I} + C_3\,(\Delta\boldsymbol{\gamma}_0 : \boldsymbol{S}_0^d)\,\boldsymbol{S}_0^d \tag{4.37}$$

que l'on condense sous la forme

$$\Delta \boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{D}_t : \Delta \boldsymbol{\gamma}_0 \tag{4.38}$$

ce qui, en utilisant (4.35), peut se réécrire

$$\Delta \boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{D}_t : \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\Delta \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{B}_\alpha.\Delta \boldsymbol{\alpha}_0 \tag{4.39}$$

Remarque 4.4
Les constantes C_1, C_2 et C_3 ainsi que la matrice de comportement $\boldsymbol{D}_t$ sont exactement les mêmes que celles qui servent au calcul de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{S}$, κ et ξ. Elles ont donc déjà été calculées et assemblées et il suffit de les réutiliser ici.

❑

Ordre p L'identification des termes d'ordre p après introduction des séries conduit à

$$E(1+\alpha\eta^n)\,\Delta\boldsymbol{\gamma}_p = (1+\nu+\kappa_0)\,\Delta\boldsymbol{S}_p^d - (1-2\nu)\,\Delta P_p\,\boldsymbol{I} + \Delta\kappa_p\,\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^d + \sum_{r=1}^{p}\Delta\kappa_{p-r}\,\boldsymbol{S}_r^d + \sum_{r=1}^{p}\kappa_r\,\Delta\boldsymbol{S}_{p-r}^d \tag{4.40}$$

$$\Delta\xi_p = \frac{3}{2\sigma_y^2\xi_0}\,\Delta\boldsymbol{S}_p^d : \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^d + \Delta\xi_p^{nl} \tag{4.41}$$

$$\Delta\kappa_p = \frac{3(n-1)\kappa_0}{2\sigma_y^2\xi_0^2}\,\Delta\boldsymbol{S}_p^d : \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^d + \Delta\kappa_p^{nl} \tag{4.42}$$

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}_p = \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\Delta\boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{B}_\alpha.\Delta\boldsymbol{\alpha}_p + \sum_{r=1}^{p}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_r).\Delta\boldsymbol{u}_{p-r} \tag{4.43}$$

où les termes $\Delta\xi_p^{nl}$ et $\Delta\kappa_p^{nl}$ ne dépendent que de la solution aux ordres précédents. Leur expression est détaillée dans l'annexe A.2. En procédant comme à l'ordre 1, i.e. en substituant (4.41) et (4.42) dans (4.40) et en inversant la relation obtenue, on aboutit à la loi de comportement à l'ordre p

$$\Delta\boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D}_t : \Delta\boldsymbol{\gamma}_p + \Delta\boldsymbol{S}_p^{res} \tag{4.44}$$

que l'on peut, compte tenu de (4.43), réécrire sous la forme

$$\Delta\boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D}_t : \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\Delta\boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{B}_\alpha.\Delta\boldsymbol{\alpha}_p + \Delta\boldsymbol{S}_p^{nl} + \Delta\boldsymbol{S}_p^{res} \tag{4.45}$$

Le vecteur $\Delta\boldsymbol{S}_p^{res}$ ne dépend que de la solution aux ordres précédents. Il est détaillé dans l'annexe A.2.

Remarque 4.5
La remarque qui suit a déjà été formulée pour les matériaux non-linéaires dans le cas du calcul de branches d'équilibre (cf. § 3.8.3). Elle est toujours valable dans le cas de la détection des points singuliers, pour peu qu'on l'adapte aux nouvelles variables qui viennent d'être introduites dans

ce chapitre :
On peut conserver l'algorithme présenté dans le paragraphe 4.5.2 pour le calcul des coefficients des séries. Il suffit simplement d'y remplacer $\boldsymbol{D}$ par $\boldsymbol{D}_t$ et $\Delta \boldsymbol{S}_p^{nl}$ par $\Delta \boldsymbol{S}_p^{nl} + \Delta \boldsymbol{S}_p^{res}$. La matrice $\boldsymbol{D}_t$ a déjà été évaluée lors du calcul de la branche d'équilibre. La seule difficulté réside donc dans le calcul de la contrainte $\Delta \boldsymbol{S}_p^{res}$.

❑

4.7 Couplage avec la méthode de continuation

Dans la section précédente, on a vu comment calculer l'indicateur de bifurcation $\Delta\mu(a)$. Les propriétés essentielles de cet indicateur que nous allons utiliser sont les suivantes :

- Les **points singuliers** correspondent aux valeurs a_c du paramètre de chemin a pour lesquelles $\Delta\mu(a_c) = 0$. A titre d'exemple, sur la première courbe de la figure 4.11, on a tracé $\Delta\mu(a)$ dans le voisinage du sommet de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique. On obtient un zéro pour $a_c \simeq 8$. La courbe voisine représente l'évolution du chargement en fonction de a. On voit très clairement que le chargement est maximum pour $a_c \simeq 8$. Ce point limite correspond bien à un zéro de $\Delta\mu$.
- La **charge critique** correspondante est obtenue en calculant $\lambda(a_c)$.
- Le **mode propre** correspondant est donné par $\Delta\boldsymbol{u}(a_c)$.

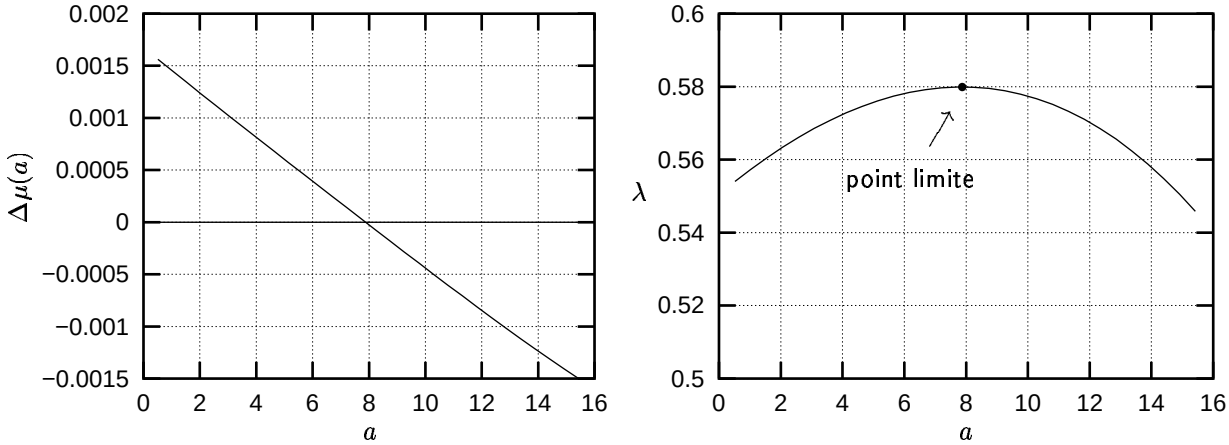


FIGURE 4.11 – *Indicateur de bifurcation $\Delta\mu(a)$ et point limite correspondant*

Pour calculer les racines de $\Delta\mu$, on utilise l'algorithme de BAIRSTOW. Cet algorithme est décrit en détails dans [ELHAGE-HUSSEIN *et al.*, 2000] par exemple. Il permet d'obtenir toutes les racines de $\Delta\mu$ avec une très grande précision.

Cependant, la représentation analytique de $\Delta\mu(a)$ qu'on obtient par les calculs de la section précédente n'est valable qu'à l'intérieur d'un certain domaine $[0, \Delta a_m]$ que l'on va préciser. Par conséquent, seules les racines à l'intérieur de $[0, \Delta a_m]$ sont fiables. On peut éliminer toutes les autres. Cela signifie également que pour isoler tous les points singuliers d'une courbe d'équilibre, une procédure de continuation doit être utilisée. Plutôt que d'initier une procédure spécifique

pour l'indicateur de bifurcation, on va s'appuyer sur la procédure de continuation que l'on utilise déjà pour calculer la branche d'équilibre.

Dans cette procédure, le domaine de validité des séries $[0, a_m]$ (et donc la longueur de pas) est estimé à l'aide du critère (3.29) qui est basé sur le résidu. Pour simplifier le couplage de la détection des points singuliers avec cette méthode de continuation, on peut se contenter de chercher les racines de $\Delta\mu(a)$ comprises dans $[0, a_m]$, d'en déduire qu'il existe ou non des points singuliers durant ce pas, de calculer (s'il y a lieu) leur charge critique et le mode correspondant, puis de relancer le processus lors du pas suivant, et ainsi de suite.

Toutefois, cela sous-entend que $\Delta\mu(a)$ est valide dans tout l'intervalle $[0, a_m]$. Ce n'est pas forcément le cas car a_m est basé sur les séries $\boldsymbol{u}(a)$, $\boldsymbol{S}(a)$ et $\lambda(a)$ alors que $\Delta\mu$ provient d'un problème complètement différent. Avant d'essayer de mettre en œuvre un quelconque couplage, il est donc nécessaire de savoir évaluer le domaine de validité de $\Delta\mu$.

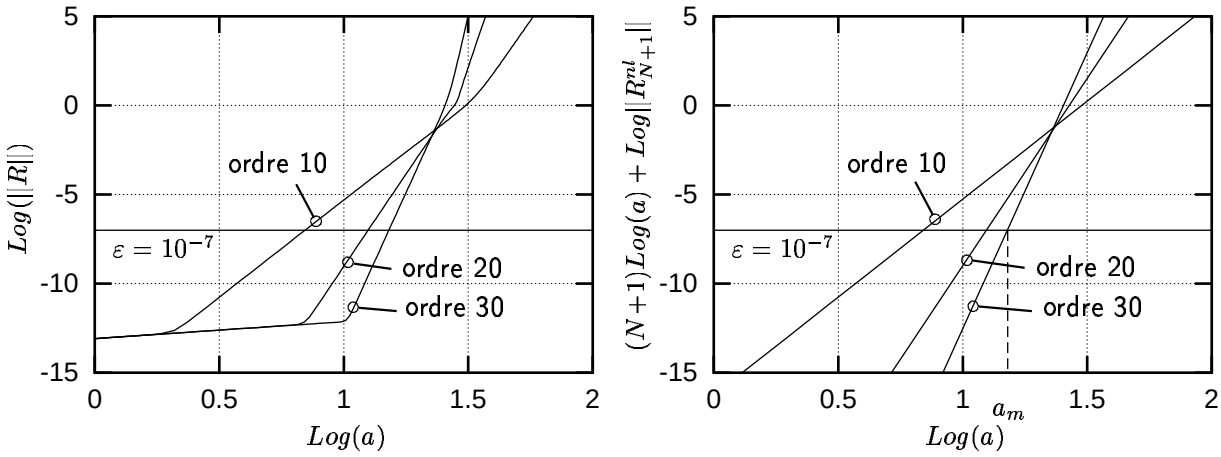


FIGURE 4.12 – *Courbes de résidu et leurs approximations pour le problème d'équilibre.*

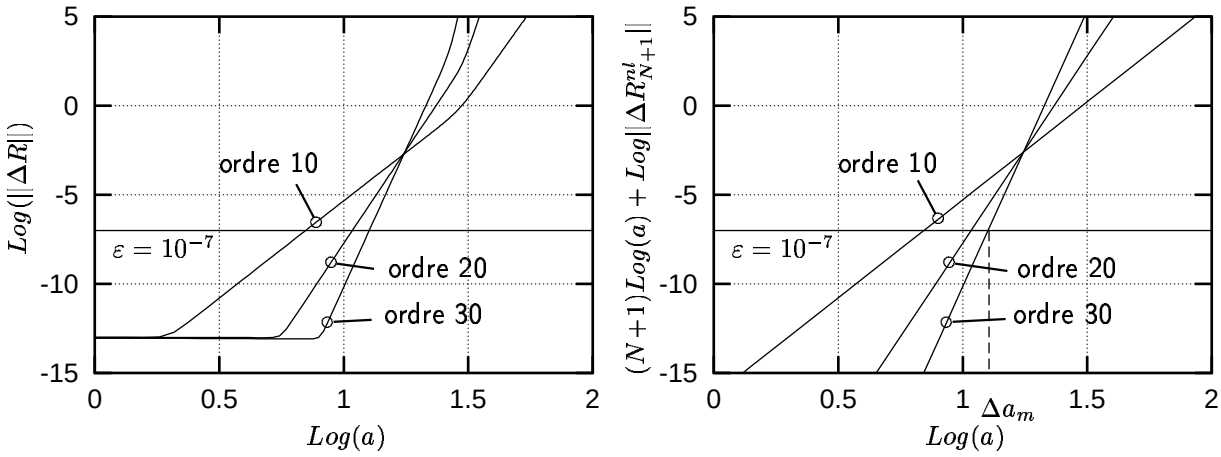


FIGURE 4.13 – *Courbes de résidu et leurs approximations pour le problème de détection (calcul de $\Delta\mu$).*

Comme pour le problème d'équilibre, on peut faire l'approximation

$$\Delta \boldsymbol{R}(a) \simeq a^{N+1}\, \Delta \boldsymbol{R}^{nl}_{N+1} \tag{4.46}$$

ce qui s'écrit encore, en notation logarithmique

$$Log\, \|\Delta \boldsymbol{R}(a)\| \simeq (N+1)\, Log(a) + Log\, \|\Delta \boldsymbol{R}^{nl}_{N+1}\| \tag{4.47}$$

Le résidu du problème de détection (calcul de $\Delta\mu$) ainsi que cette approximation sont tracés dans la figure 4.13. On constate que les courbes de résidu pour la detection ont le même comportement *affine par morceaux* que dans le cas du calcul des branches d'équilibre (figure 4.12). Les courbes pour différents ordres se coupent également en un même point et les approximations (4.46) donnent d'excellents résultats.

Le domaine de validité de $\Delta\mu(a)$ est donc donné par l'intersection d'une courbe de résidu avec la droite horizontale correspondant à la tolérance sur le résidu ε. En comparant les points d'intersection donnés par le problème d'équilibre avec ceux donnés par le problème de détection, on constate qu'on a $\Delta a_m < a_m$: le domaine de validité pour le problème de détection est plus petit que pour le problème d'équilibre. On ne peut donc pas utiliser $[0, a_m]$ comme domaine de validité pour $\Delta\mu(a)$. Cela signifie qu'on ne peut pas greffer la détection à l'algorithme de continuation aussi facilement qu'on l'aurait souhaité.

La limite du domaine de validité pour $\Delta\mu$ est donnée par

$$\Delta a_m = \left(\frac{\varepsilon}{\|\Delta \boldsymbol{R}^{nl}_{N+1}\|} \right)^{\frac{1}{N+1}} \tag{4.48}$$

Les points singuliers détectés dans $[0, \Delta a_m]$ (point singulier 1 de la la figure 4.14) sont assurés d'une précision ε. Par contre, ceux que l'on détecte dans $[\Delta a_m, a_m]$ (point singulier 2 de la la figure 4.14) ne sont pas fiables. Il peut s'agir de véritables points singuliers détectés avec une mauvaise précision mais aussi de points singuliers « fantômes ». On ne peut donc les conserver. On ne peut toutefois pas non plus se contenter de les éliminer. Lorsqu'on est dans cette situation,

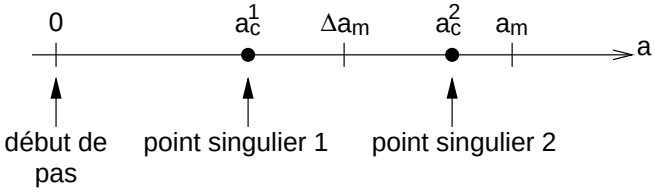


FIGURE 4.14 – *Domaines de validité et points singuliers.*

la bonne solution consiste à réduire la longueur de pas. On stoppe le pas pour $a = \Delta a_m$ au lieu de a_m et on recommence un nouveau pas. Si le second point singulier existe vraiment, on le détectera pendant ce nouveau pas.

4.7.1 Algorithme

L'algorithme de couplage de la détection de points singuliers avec la méthode de continuation que l'on retient est donc le suivant :

❶ Calcul des coefficients des séries $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{S}_i$ et λ_i.

❷ Calcul des coefficients des séries $\Delta\boldsymbol{u}_i$, $\Delta\boldsymbol{S}_i$ et $\Delta\mu_i$.

❸ Calcul de a_m et Δa_m.

❹ Calcul des racines de $\Delta\mu$ par l'algorithme de BAIRSTOW. On ne retient que celles comprises dans $[0, a_m]$.

❺ Si une des racines se trouve dans l'intervalle $[\Delta a_m, a_m]$ alors on stoppe le pas à Δa_m au lieu de a_m.

❻ On calcule un certain nombre de points solutions $\boldsymbol{u}, \lambda$ pour tracer la branche d'équilibre

❼ On évalue la charge critique et le mode propre des points singuliers corespondant aux racines détectées dans $[0, \Delta a_m]$.

❽ On réinitialise $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{S}_0$ et λ_0 avec les valeurs de fin de pas et on commence un nouveau pas.

REMARQUE 4.6
Cet algorithme n'est pas compatible avec l'algorithme qui permet de traverser plus facilement les bifurcations, qu'on a présenté dans la section 4.2.4. L'algorithme de traversée des bifurcations est basé sur le comportement particulier du résidu d'équilibre au niveau des bifurcations : à cet endroit, choisir un ordre de troncature faible permet d'allonger la longueur de pas. Malheureusement, le résidu du problème de détection ne se comporte pas de la même manière : il garde un comportement « normal » au niveau des bifurcations. De ce fait, passer à un ordre faible réduit considérablement le domaine de validité de $\Delta\mu$. On ne peut donc pas, dans un même pas, « traverser » la bifurcation avec un pas très long et la détecter en même temps. ❑

4.7.2 Exemples numériques

Les exemples numériques qui suivent vont nous permettre de valider l'algorithme qui couple la continuation de branches d'équilibre avec la détection. Ils vont également permettre de vérifier la validité de l'algorithme de détection dans le cas des grandes rotations, des matériaux non-linéaires, avec ou sans défaut de forme initial.

Toutes les applications qui suivent concernent le panneau cylindrique, avec lequel on est désormais familier. La première courbe (figure 4.15) correspond au panneau parfait (sans défaut initial) pour un matériau élastique. On a tracé la branche d'équilibre fondamentale, la branche bifurquée, ainsi que les points singuliers qui ont été détectés. Ces points (représentés par un losange) sont au nombre de quatre : les deux points limites de la branche fondamentale et les deux points de bifurcation qui connectent la branche fondamentale et la bifurquée. Les paramètres de calcul sont les même que pour la figure 4.3 ($N = 25$, $\varepsilon = 10^{-7}$). Si on compare les fin de pas de ces deux courbes, on constate que le premier pas est identique. Le deuxième pas, quant à lui, est

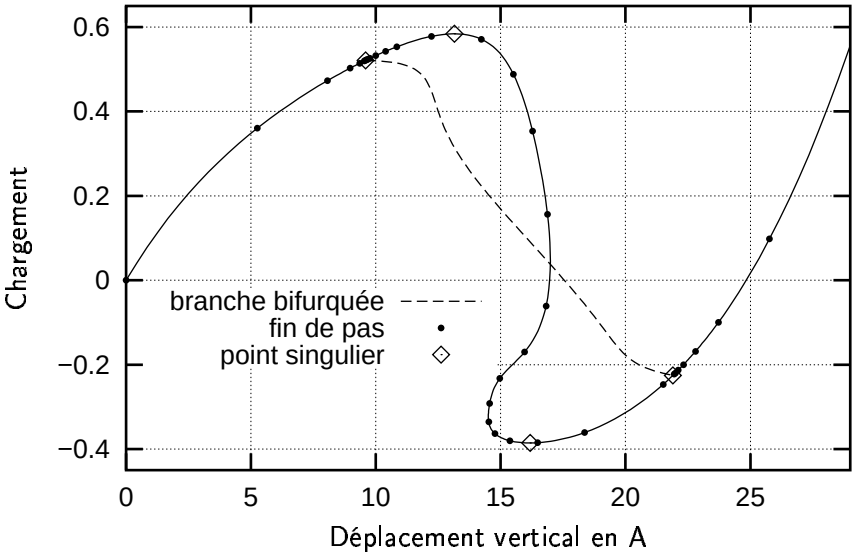


FIGURE 4.15 – *Continuation de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique et détection des points singuliers. La branche bifurquée est tracée en pointillés ($N = 25$, $\varepsilon = 10^{-7}$)*

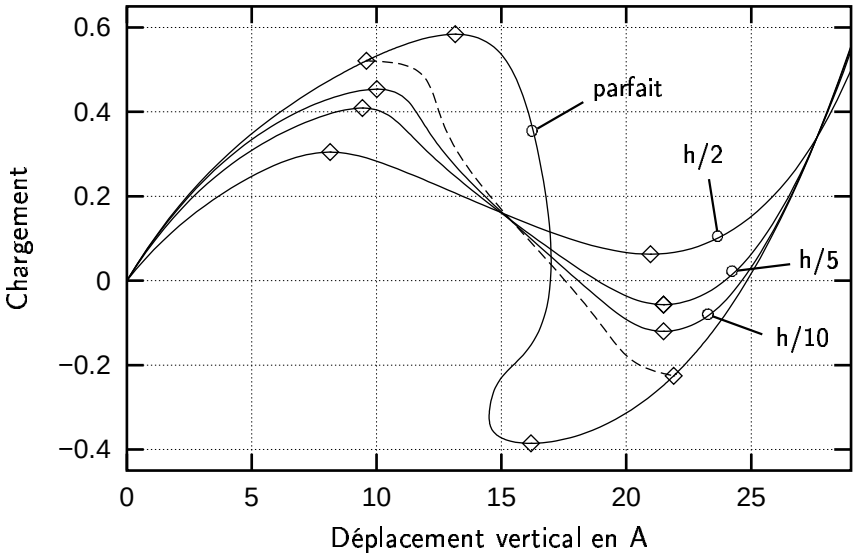


FIGURE 4.16 – *Continuation de la courbe d'équilibre et détection des points singuliers pour le panneau cylindrique avec défaut de forme. Le défaut correspond au mode propre de la première bifurcation. Les amplitudes de défaut sont $h/10$, $h/5$ et $h/2$.*

légèrement plus court car une racine a été détectée dans l'intervalle $[\Delta a_m, a_m]$. La longueur de pas a donc été réduite à Δa_m au lieu de a_m, conformément à l'algorithme décrit précédemment. Il en a été de même pour le troisième pas et la longueur de pas est redevenue « normale » au quatrième pas.

Par ailleurs, il est possible de déterminer le type (bifurcation ou point limite) de chaque point singulier que l'on a détecté en utilisant le critère donné par les équations (1.12)-(1.13), i.e. en calculant $\Delta \boldsymbol{u}^t(a_c).\boldsymbol{F}_e$ et $\frac{d\lambda}{da}(a_c)$. Avec les paramètres de calcul qu'on a choisi ($N = 25$, $\varepsilon = 10^{-7}$), on a $\Delta \boldsymbol{u}^t(a_c).\boldsymbol{F}_e \simeq 10^{-7}$ au niveau des bifurcations et $\frac{d\lambda}{da}(a_c) \simeq 10^{-10}$ au niveau des points limites.

Avec la seconde courbe (figure 4.16), on cherche à vérifier la validité de l'algorithme lorsqu'un défaut de forme est présent dans la structure. Pour cela, on a choisi comme défaut le mode flambement qui correspond à la première bifurcation. Ce mode de flambement correspond à une perte de symétrie de la structure (cf. § 1.3.5.d). Sur la même figure, on a tracé la courbe d'équilibre fondamentale et bifurquée de la structure parfaite (sans défaut) et les courbes d'équilibre de la structure avec défaut, pour des amplitudes de défaut de l'ordre de $h/10$, $h/5$ et $h/2$, h étant l'épaisseur du panneau.

A cause de la présence d'un tel défaut, la symétrie est brisée dès le départ et l'aiguillage vers la branche bifurquée est forcé. C'est pour cela que les courbes obtenues ont l'allure de la branche bifurquée. On retrouve bien le comportement des structures avec imperfection, à savoir que plus l'amplitude de l'imperfection est grande plus on s'éloigne de la branche bifurquée parfaite.

Chacune des courbes obtenues comporte deux points limites. Ces points limites n'ont aucun lien avec les points limites de la branche fondamentale parfaite. Il proviennent de la dégénérescence (due à l'imperfection) des deux points de bifurcation.

La troisième courbe (figure 4.17) correspond également à des courbes de réponse du panneau en présence d'une imperfection, mais cette fois-ci c'est le mode propre associé au premier point limite qui a été utilisé comme défaut.

L'allure des courbes obtenues ressemble maintenant à celle de la branche fondamentale parfaite, et chacune d'elles comporte deux points de bifurcation et deux point limites (comme la branche parfaite). Les branches bifurquées qui émergent des points de bifurcation sont représentées dans la figure 4.18.

L'intérêt de cet exemple provient du comportement des points limites et des bifurcations lorsque l'amplitude de l'imperfection varie. Outre le fait que la charge critique est réduite, on remarque que plus le défaut augmente plus les bifurcations et les points limites se rapprochent les uns des autres. Pour une imperfection de l'ordre de $h/4$, la première bifurcation est presque confondue avec le premier point limite. Pour une imperfection de l'ordre de $h/2$, elle est passée de l'autre côté du point limite. Cela signifie que le panneau va flamber par claquage symétrique au niveau du point limite (atteint avant la bifurcation) plutôt que par perte de symétrie au niveau de la bifurcation.

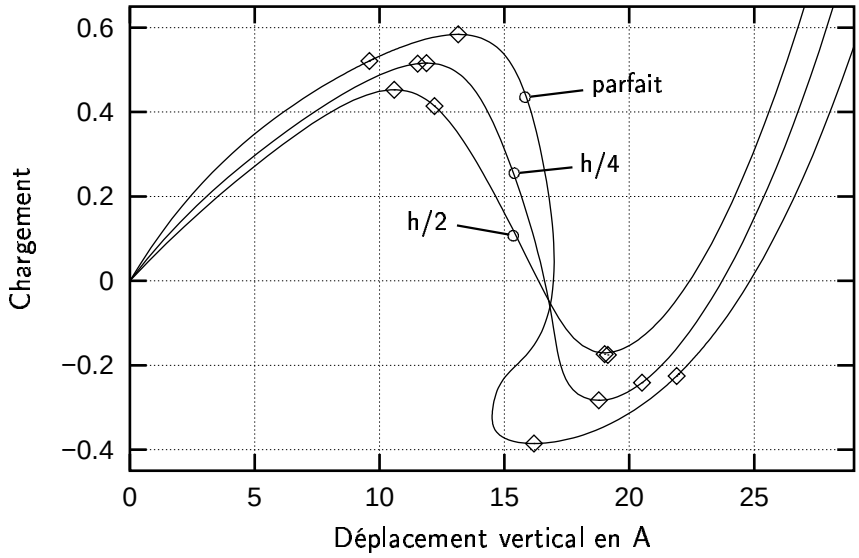


FIGURE 4.17 – *Continuation de la courbe d'équilibre et détection des points singuliers pour le panneau cylindrique avec défaut de forme. Le défaut correspond au mode propre du premier point limite. Les amplitudes de défaut sont $h/4$ et $h/2$.*

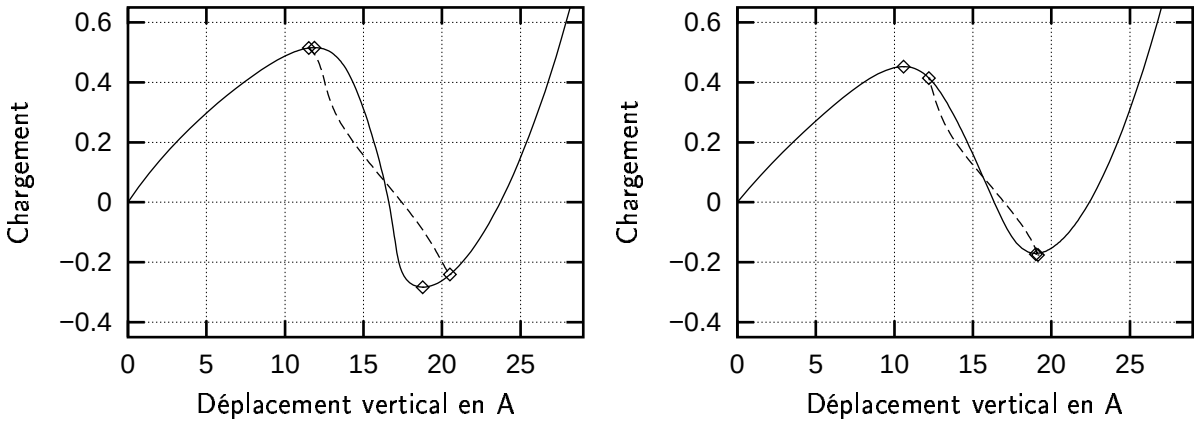


FIGURE 4.18 – *Branches d'équilibre fondamentales et bifurquées pour les deux amplitudes de défaut (mode propre du point limite).*

Par ailleurs, si on continue à augmenter l'amplitude de l'imperfection, les bifurcations vont continuer à se rapprocher, de même que les points limites. Pour une certaine valeur de l'amplitude du défaut, les bifurcations vont se croiser et échanger leur rôle sur la courbe d'équilibre. Pour une autre valeur (plus élevée) de l'amplitude, ce sont les points limites qui se croisent et échangent leur rôle. Nous aurons l'occasion de reparler de ce phénomène dans le prochain chapitre lorsque nous ferons le calcul de suivi des points limites du panneau.

La dernière courbe (figure 4.19) est consacrée à la validation de l'algorithme de détection dans le cas d'un matériau non-linéaire. On y a représenté les courbes d'équilibres fondamentales du panneau pour un matériau élastique et non-linéaire. Les paramètres utilisés ici pour la loi de comportement de type puissance sont les mêmes que pour l'application du § 3.8.4 : $\sigma_y = E/1000$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$ et $\eta = 0.1$. Les courbes tracées ici sont donc strictement identiques à celles de la figure 3.8. On a simplement ajouté les différents points singuliers qui ont été détectés.

Les charges critiques sont bien évidemment diminuées par l'introduction d'un matériau non-linéaire, mais les propriétés de stabilité du panneau ne sont pas fondamentalement bouleversées : il y a toujours deux bifurcations et deux points limites sur la branche d'équilibre.

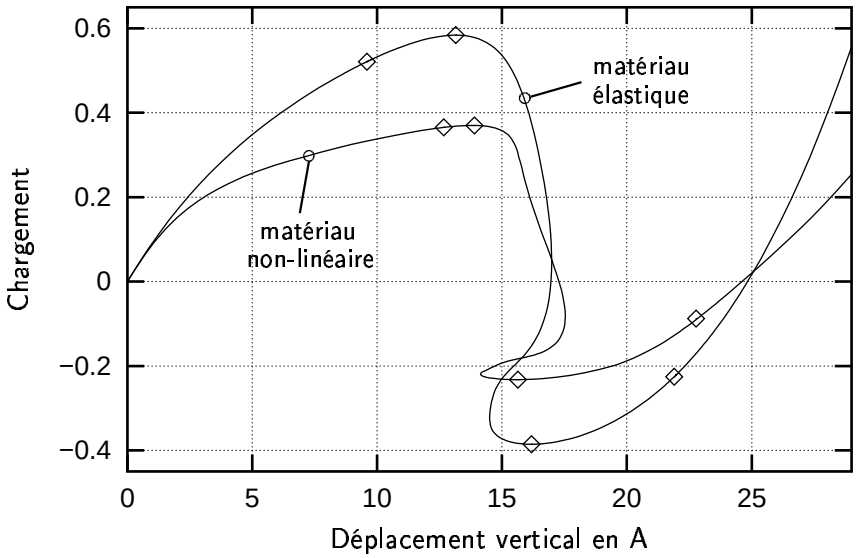


FIGURE 4.19 – *Continuation de la courbe d'équilibre du panneau cylindrique et détection des points singuliers pour un matériau non-linéaire (loi puissance, $\sigma_y = E/1000$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$ et $\eta = 0.1$).*

4.8 Bilan du chapitre et perspectives

Ce chapitre a été consacré au traitement numérique des bifurcations et des points limites. Moyennant le calcul de quelques seconds membres supplémentaires, on obtient un indicateur qui permet de détecter tous les points singuliers le long d'une branche d'équilibre. Cet indicateur donne accès non seulement à la charge critique mais aussi au mode de flambement associés aux points singuliers.

La couplage de la détection avec la méthode de continuation classique de la M.A.N. est relativement simple à mettre en œuvre. Toutefois, le domaine de validité de l'indicateur étant généralement plus court que celui des séries du problème d'équilibre, il est nécessaire d'adapter la longueur de pas pour garantir une procédure de continuation fiable.

L'algorithme ainsi obtenu est très robuste. Il est opérationnel pour des structures avec ou sans défaut de forme initial et pour des matériaux élastiques linéaires ou non-linéaires.

Par ailleurs, ce chapitre a été l'occasion d'analyser en détails le comportement de la M.A.N. en présence de bifurcations (§ 4.2). Cela nous a permis non seulement de mettre en évidence l'extraordinaire robustesse de la continuation de la M.A.N. devant une quasi-bifurcation (§ 4.2.3), mais aussi de mettre au point un algorithme destiné à réduire le nombre de pas nécessaires à la traversée des points de bifurcation (§ 4.2.4).

La même étude avec des approximants de PADÉ devrait permettre d'en apprendre encore plus. En effet, certaines propriétés des PADÉ nous laissent penser qu'ils sont bien adaptés au traitement des bifurcations.

La détection des points singuliers, ainsi que leur traversée ou l'aiguillage sur les branches bifurquées, sont désormais suffisament bien maîtrisés pour envisager le cheminement numérique dans un réseau complexe de branches tel que celui qui émane d'une bifurcation multiple avec des valeurs propres quasi-confondues (cf. § 1.4.3). Cela pourrait permettre, par exemple, de mieux comprendre l'interaction entre le mode d'Euler et les modes de voilement dans les profils « en C » ou « en I » optimisés.

CHAPITRE 5

Suivi de points limites

Ce chapitre est consacré à la description d'un algorithme qui permet de suivre l'évolution d'un point critique lorsqu'un paramètre de la structure étudiée varie. Ce suivi de points limites constitue l'étape centrale de l'analyse de sensibilité décrite dans ce mémoire.
Cet algorithme est basé sur un système dit augmenté. La présentation et la technique de résolution de ce système augmenté ont été voulues les plus générales possibles, afin de permettre la prise en compte de n'importe quel type d'imperfection. A titre d'illustration, deux d'imperfection très communes sont traitées en détails en fin de chapitre : un défaut de forme et une variation d'épaisseur.
L'algorithme final est complètement automatique du point de vue de l'utilisateur : la détection d'un point limite de départ et le suivi s'enchaînent au cours d'un même calcul. La robustesse et la fiabilité de cette procédure est mise en évidence à l'aide de deux exemples étudiés en profondeur.

Plan du Chapitre 5

5.1. Introduction **121**

5.2. Problème augmenté **122**

5.3. Méthode Asymptotique Numérique **122**

5.3.1. Développements en séries 123

5.3.2. M.E.F. 124

5.3.3. Points réguliers et points singuliers de la courbe de suivi 124

5.4. Résolution du système linéaire augmenté **125**

5.4.1. Principe et difficultés 125

5.4.2. Résolution à l'ordre 1 126

5.4.3. Résolution à l'ordre p 128

5.5. Deux types d'imperfections **130**

5.5.1. Défaut de forme 130

5.5.1.a. Extension aux grandes rotations 132

5.5.1.b. Extension aux matériaux non-linéaires 134

5.5.2. Défaut d'épaisseur 135

5.6. Méthode de continuation **138**

5.7. Applications **138**

5.7.1. Panneau cylindrique avec défaut d'épaisseur 139

5.7.2. Panneau cylindrique avec défaut de forme 141

5.8. Bilan du chapitre et perspectives **144**

5.1 Introduction

Le principe de l'analyse de sensibilité qu'on se propose de mettre en œuvre dans ce mémoire a été exposé dans le paragraphe 1.4.2. Il s'agit, dans un premier temps, d'isoler précisément le point limite correspondant à la charge critique d'une structure avec imperfection. Ce problème a fait l'objet des chapitres 3 et 4. Puis, à partir de ce point limite de départ, on suit directement la branche constituée des points limites qui correspondent à d'autres valeurs de l'imperfection (cf. figure 1.25). De cette manière, on obtient en un seul calcul la courbe de réduction de la charge critique de flambement de la structure en fonction de l'amplitude de l'imperfection. C'est cette seconde étape de suivi des points limites que nous allons maintenant détailler, en supposant qu'un point limite de départ a été détecté en utilisant l'algorithme décrit dans le chapitre précédent.
La nature de l'imperfection peut être très diverse. Il peut s'agir

- d'une imperfection géométrique : défaut de forme dû à un choc, défaut d'épaisseur dû à la corrosion ou au processus de fabrication, ...
- d'une imperfection de chargement : vecteurs forces mal orientés, amplitude imprécise, ...
- d'une imperfection dans les propriétés matérielles (module d'YOUNG, limite elastique, ...)

ceci afin d'en étudier l'influence sur la charge critique.

Si certaines de ces imperfections concernent des scalaires (épaisseur, amplitude du chargement, module d'YOUNG, limite elastique), les autres concernent des vecteurs (défaut de forme, vecteur force, ...). Afin de simplifier notre analyse, on va faire en sorte que la variable additionnelle concernant l'imperfection soit toujours de type scalaire. Pour cela, lorsqu'il s'agit d'un vecteur, on le décompose sous la forme du produit d'un vecteur de forme fixée qui donne l'allure de l'imperfection, et d'un scalaire qui donne l'amplitude de l'imperfection. Si on exclut de notre étude les imperfections de chargement [1], le problème d'équilibre classique [2]

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \lambda) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) - \lambda \boldsymbol{F}_e = 0 \tag{5.1}$$

devient, avec la prise en compte de l'imperfection comme variable additionnelle

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \lambda, \Lambda) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, \Lambda) - \lambda \boldsymbol{F}_e = 0 \tag{5.2}$$

où Λ est un scalaire qui représente l'amplitude de l'imperfection.

Le problème (5.1) comporte deux inconnues, le déplacement $\boldsymbol{u}$ et le paramètre λ, et on en représente généralement la solution sous la forme de courbes « charge-déplacement ». Le problème (5.2), quant à lui, comporte trois inconnues, $\boldsymbol{u}$ et les deux paramètres λ et Λ. Pour ce problème, il ne s'agit donc plus de courbes solutions, mais de surfaces solutions. Or, sur ces surfaces, seuls les points critiques (qui donnent l'évolution de la charge critique en fonction de la variation de l'amplitude de l'imperfection) nous intéressent. Afin d'isoler, sur la surface solution, la courbe formée par ces points critiques, on ajoute au problème (5.2) une équation qui

1. Qui ne présentent pas de difficulté majeure
2. Il s'agit ici du problème continu (2.11) introduit dans la section 2.1.1. On a volontairement omis le déplacement virtuel $\delta\boldsymbol{u}$ pour alléger les notations.

caractérise les points critiques. De cette manière, le système non-linéaire à deux paramètre (5.2) est transformé en un système communément appelé système augmenté, de la forme

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\lambda,\Lambda)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\lambda,\Lambda)\\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u},\Lambda)\end{pmatrix}=0 \tag{5.3}$$

C'est ce système augmenté ainsi que sa résolution que nous allons étudier dans les paragraphes qui suivent.

5.2 Problème augmenté

Comme on l'a déjà précisé dans le paragraphe 2.5.2 consacré au traitement des points singuliers, plusieurs alternatives sont possibles quant au choix de l'équation $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u},\Lambda)=0$ pour caractériser les points singuliers. La plus simple d'entre elles repose sur l'étude du déterminant de la matrice de rigidité tangente. Cependant, ce critère n'est pas très efficace d'un point de vue numérique. On lui préfère l'équation (2.63) qui traduit l'apparition d'une valeur propre nulle associée à l'opérateur tangent $\boldsymbol{K}_T=\boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}}$. Avec la prise en compte de l'imperfection commme variable additionnelle dans le modèle, cette équation s'écrit

$$\boldsymbol{F}_{,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\Lambda,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\Lambda)\cdot\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{K}_T\cdot\boldsymbol{\varphi}=0 \tag{5.4}$$

où $\boldsymbol{\varphi}$ est le mode propre associé à la valeur propre nulle. Avec cette équation, le système augmenté devient

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varphi},\Lambda,\lambda)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\Lambda,\lambda)\\ \boldsymbol{F}_{,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\Lambda,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varphi}\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\Lambda)-\lambda\boldsymbol{F}_e\\ \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\Lambda)\cdot\boldsymbol{\varphi}\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|-1\end{pmatrix}=0 \tag{5.5}$$

La dernière équation de normalisation du vecteur propre $\boldsymbol{\varphi}$ assure son unicité. Elle empêche également $\boldsymbol{\varphi}$ de devenir trop grand ou trop petit, ce qui pourrait poser des problèmes numériques.

Pour une valeur fixée Λ_0 du paramètre additionnel Λ, ce système augmenté correspond au système (2.64) du chapitre 2. Il fournit un point singulier de $\boldsymbol{F}$ qui est soit un point de bifurcation soit un point limite par rapport à λ. Lorsque Λ varie, il fournit la courbe qui connecte les points singuliers de $\boldsymbol{F}$.

5.3 Méthode Asymptotique Numérique

De la même manière que pour le problème d'équilibre du chapitre 2 ou pour l'indicateur introduit dans le chapitre 4, on va résoudre le problème augmenté non-linéaire $\boldsymbol{H}$ à l'aide de la M.A.N. Cela va nous permettre d'obtenir un algorithme global d'analyse de sensibilité (détection d'un point limite puis suivi) entièrement basé sur la M.A.N.

Comme on l'a répété de nombreuses fois maintenant (cf. § 3.3.1 par exemple), il est plus commode de travailler avec une écriture quadratique du problème. Cela rend en effet les développements en séries beaucoup plus aisés. Cette étape est certainement une des plus délicates

de la procédure. La difficulté repose sur le nombre et sur le choix des variables additionnelles qui doivent être introduites pour réduire le degré de non-linéarité des équations par rapport aux différentes variables $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$, Λ et λ. Cette étape sera détaillée dans le paragraphe 5.5 dans le cas d'un défaut de forme et d'un défaut d'épaisseur. On ne rentre pas ces détails pour l'instant.

5.3.1 Développements en séries

On suppose que la branche de suivi des points limites peut être représentée par les développements en séries suivants

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(a) &= \boldsymbol{u}_0 + a\,\boldsymbol{u}_1 + a^2\,\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a^n\,\boldsymbol{u}_n \\
\boldsymbol{\varphi}(a) &= \boldsymbol{\varphi}_0 + a\,\boldsymbol{\varphi}_1 + a^2\,\boldsymbol{\varphi}_2 + \ldots + a^n\,\boldsymbol{\varphi}_n \\
\lambda(a) &= \lambda_0 + a\,\lambda_1 + a^2\,\lambda_2 + \ldots + a^n\,\lambda_n \\
\Lambda(a) &= \Lambda_0 + a\,\Lambda_1 + a^2\,\Lambda_2 + \ldots + a^n\,\Lambda_n
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Le point $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \lambda_0, \Lambda_0)$ est supposé connu. En fait, il s'agit du point limite qui a été détecté précédemment pour servir de point de départ au suivi de points limites. C'est un point singulier de $\boldsymbol{F}$, mais pour le système augmenté $\boldsymbol{H}$ il s'agit d'un point régulier.

Comme dans les chapitres précédents, ces séries dépendent du paramètre de chemin a. Pour « supprimer » cette nouvelle inconnue, une équation supplémentaire est nécessaire. En s'inspirant de la méthode de continuation à longueur d'arc, adaptée à notre formulation à deux paramètres, on définit a de la manière suivante

$$a = \frac{1}{s^2}\left[(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0).\boldsymbol{u}_1 + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 + (\Lambda - \Lambda_0)\Lambda_1\right] \tag{5.7}$$

L'introduction des séries (5.6) dans le système augmenté (5.5) et dans l'équation (5.7) qui définit a, et l'identification des termes avec la même puissance de a, transforme le problème non-linéaire en une succession de problèmes linéaires. Le problème à l'ordre 1 s'écrit

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}} & 0 & \boldsymbol{f}_{,\Lambda} & -\boldsymbol{F}_e \\ \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varphi}_0^t & 0 & 0 \\ \boldsymbol{u}_1^t & 0 & \Lambda_1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \Lambda_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ 0 \\ s^2 \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

Ce système linéaire fournit la direction tangente $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1, \Lambda_1, \lambda_1)$. C'est exactement le même système que celui qui est utilisé pour l'étape de prédiction des algorithmes incrémentaux-itératifs de type NEWTON-RAPHSON. Ce système fait également apparaître l'opérateur tangent qui sera le même à tous les ordres. A l'ordre p ($p \geq 2$), le problème s'écrit

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}} & 0 & \boldsymbol{f}_{,\Lambda} & -\boldsymbol{F}_e \\ \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varphi}_0^t & 0 & 0 \\ \boldsymbol{u}_1^t & 0 & \Lambda_1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_p \\ \boldsymbol{\varphi}_p \\ \Lambda_p \\ \lambda_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_p^{nl} \\ \boldsymbol{G}_p^{nl} \\ h_p^{nl} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.9}$$

L'opérateur tangent est le même qu'à l'ordre 1. La différence provient des seconds membres qui ne sont plus nuls désormais. Ces seconds membres dépendent de la solution aux ordres précédents.

L'étape suivante de la M.A.N. repose sur l'utilisation de la méthode des éléments finis, de façon à transformer le problème continu en un problème discret qu'on peut exprimer sous forme matricielle, ce qui permet une résolution numérique efficace.

5.3.2 M.E.F.

Après discrétisation par éléments finis, le problème à l'ordre p prend la forme

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_t & 0 & \boldsymbol{F}_1 & -\boldsymbol{F}_e \\ \boldsymbol{K}_\phi & \boldsymbol{K}_t & \boldsymbol{F}_2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}_0^t & 0 & 0 \\ \boldsymbol{q}_1^t & 0 & \Lambda_1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_p \\ \boldsymbol{\phi}_p \\ \Lambda_p \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_p^{nl} \\ \boldsymbol{G}_p^{nl} \\ h_p^{nl} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (N_{ddl} \text{ éq.}) \\ (N_{ddl} \text{ éq.}) \\ (1 \text{ éq.}) \\ (1 \text{ éq.}) \end{matrix} \tag{5.10}$$

où $\boldsymbol{q}_p$ et $\boldsymbol{\phi}_p$ sont les déplacements nodaux associés aux champs de déplacement $\boldsymbol{u}_p$ et $\boldsymbol{\varphi}_p$. $\boldsymbol{K}_T$ est la matrice de rigidité tangente classique, calculée au point de départ

$$\boldsymbol{K}_t(\boldsymbol{q}_0) = f_{,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}_0) = \int_\Omega \left(\boldsymbol{B}^t(\boldsymbol{q}_0)\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_0) + \boldsymbol{G}^t\, \hat{\boldsymbol{S}}_0\, \boldsymbol{G} \right) dV \tag{5.11}$$

où $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{B}_l+\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q})$, $\hat{\boldsymbol{S}}_0$ contient les composantes de la contrainte $\boldsymbol{S}_0$ associée à $\boldsymbol{q}_0$ et $\boldsymbol{D}$ est la matrice des constantes d'élasticité (cf. § 3.3.3). De la même manière, la matrice $\boldsymbol{K}_\phi$ s'écrit

$$\boldsymbol{K}_\phi(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{\phi}_0) = f_{,\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{\phi}_0 = \int_\Omega \left(\boldsymbol{B}^t(\boldsymbol{q}_0)\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0) + \boldsymbol{B}_{nl}^t(\boldsymbol{\phi}_0)\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_0) + \boldsymbol{G}^t\, \hat{\boldsymbol{\Psi}}_0\, \boldsymbol{G} \right) dV \tag{5.12}$$

où $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_0$ contient les composantes de la contrainte $\boldsymbol{\Psi}_0$ associée à $\boldsymbol{\phi}_0$ (voir les détails dans le § 5.5).

Les matrices $\boldsymbol{K}_t$ et $\boldsymbol{K}_\phi$ ont la même forme quel que soit le type de l'imperfection. Dans l'opérateur tangent, seuls les vecteurs $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ dépendent fortement de l'imperfection. En effet, leur expression fait intervenir une différentiation par rapport à l'imperfection

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{q}_0) = \boldsymbol{f}_{,\Lambda}(\boldsymbol{q}_0) \qquad \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{\varphi}_0) = \boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{q}\Lambda}(\boldsymbol{q}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 \tag{5.13}$$

Les seconds membres $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{G}_p^{nl}$ dépendent également du type d'imperfection étudié. Leurs expressions seront détaillées dans le paragraphe 5.5 dans le cas d'un défaut de forme et d'un défaut d'épaisseur.

Ces remarques sont primordiales et mettent en évidence un résultat important : il est possible de mettre en œuvre un algorithme « *universel* » de résolution du système linéaire augmenté (5.10). Une fois cet algorithme opérationnel, il suffit de basculer vers les bonnes expressions de $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{G}_p^{nl}$ suivant le type d'imperfection que l'on souhaite traiter.

5.3.3 Points réguliers et points singuliers de la courbe de suivi

Des propriétés concernant la régularité du système augmenté $\boldsymbol{H}$ peuvent être déduite de l'étude de la matrice tangente donnée par l'équation (5.10).

Ainsi, d'après JEPSON et SPENCE [1985] et WAGNER et WRIGGERS [1991], les points **réguliers** de la courbe de suivi vérifient

$$[\boldsymbol{\phi}_0]^t[\boldsymbol{F}_e]\, b \neq 0 \quad \text{avec} \quad b = [\boldsymbol{\phi}_0]^t\, [\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{\phi}_0] \tag{5.14}$$

Cette condition implique

$$[\boldsymbol{\phi}_0]^t[\boldsymbol{F}_e] \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \tag{5.15}$$

D'après (2.67), il s'agit forcément de points limites de $\boldsymbol{F}$. Cela signifie qu'un point limite d'une courbe d'équilibre est un point régulier de la branche de suivi. Il est donc impératif de choisir un point limite (et non une bifurcation) comme point de départ pour le suivi. Par ailleurs, les points réguliers de $\boldsymbol{H}$ vérifient aussi

$$[\boldsymbol{\phi}_0]^t\, [\boldsymbol{F}_1] \neq 0 \tag{5.16}$$

Les points **singuliers** de $\boldsymbol{H}$ peuvent survenir lorsque $[\boldsymbol{\phi}_0]^t[\boldsymbol{F}_e]\, b = 0$, i.e. dans les deux cas suivants :

$$[\boldsymbol{\phi}_0]^t\, [\boldsymbol{F}_e] = 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \tag{5.17}$$

$$\text{ou} \qquad [\boldsymbol{\varphi}_0]^t\, [\boldsymbol{F}_e] \neq 0 \quad \text{et} \quad b = 0 \tag{5.18}$$

Si on ajoute en plus la condition $[\boldsymbol{\phi}_0]^t\, [\boldsymbol{F}_1] \neq 0$, alors ces points singuliers de la courbe de suivi sont des points limites en Λ.

5.4 Résolution du système linéaire augmenté

5.4.1 Principe et difficultés

Dans la pratique, on évite de résoudre directement le système (5.10) en inversant la matrice tangente augmentée de taille $2N_{ddl} + 2$. La décomposition de cette matrice est peu intéressante, d'un point de vue numérique, car elle ne possède pas de propriétés particulières (symétrie par exemple). Il faut donc la traiter comme une matrice quelconque. Compte tenu du couplage particulier des différentes équations contenues dans le système (5.10), il est préférable d'utiliser une procédure d'élimination[3] afin de ne traiter que des sous-systèmes de taille N_{ddl} faisant intervenir la matrice $\boldsymbol{K}_T$. Une telle procédure est décrite dans [WRIGGERS *et al.*, 1988] et [WRIGGERS et SIMO, 1990]. Son principal intérêt réside dans le fait que seule la matrice symétrique $\boldsymbol{K}_T$ doit être décomposée, ce qui est beaucoup moins coûteux (en nombre d'opérations à effectuer) que la décomposition de la matrice augmentée. La procédure que nous allons présenter ici en est inspirée.

Outre l'utilisation de cette procédure, une autre particularité doit être signalée. Etant donné que tous les points solutions du système augmenté $\boldsymbol{H}$ sont des points singuliers de $\boldsymbol{F}$, la matrice $\boldsymbol{K}_t$ est singulière tout le long de la branche de suivi de points limites. Cela signifie que

3. il s'agit en fait de condenser les différentes équations en les reportant les unes dans les autres

les techniques traditionnelles de décomposition de matrices ne peuvent pas être utilisées. Des solutions ont été proposées par WRIGGERS et SIMO [1990] mais celles-ci sont peu intéressantes dans notre cas car elles brisent la symétrie de $\boldsymbol{K}_t$. C'est pourquoi une procédure basée sur des multiplicateurs de Lagrange sera préférée ici. Cette procédure consiste à décomposer la solution en deux parties orthogonales entre elles, dont une est la projection sur le mode propre associé à la valeur propre nulle qui rend $\boldsymbol{K}_t$ singulière. Cette décomposition a déjà été utilisée dans [DAMIL et POTIER-FERRY, 1990] et [CHAN et RESASCO, 1986], entre autres.

5.4.2 Résolution à l'ordre 1

A l'ordre 1, le système matriciel (5.10) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_t & 0 & \boldsymbol{F}_1 & -\boldsymbol{F}_e \\ \boldsymbol{K}_\phi & \boldsymbol{K}_t & \boldsymbol{F}_2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}_0^t & 0 & 0 \\ \boldsymbol{q}_1^t & 0 & \Lambda_1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_1 \\ \Lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s^2 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

A cause de la forme quadratique de la dernière équation de ce système, la procédure d'élimination à l'ordre 1 diffère légèrement de celle qui sera utilisée aux ordres supérieurs. Néanmoins, pour les autres ordres, on s'appuiera très largement sur la démarche utilisée à l'ordre 1.

1) En multipliant à gauche la première équation de (5.19) par $\boldsymbol{\phi}_0^t$, on obtient une relation de compatibilité qui lie Λ_1 à λ_1

$$\Lambda_1 = c_1\,\lambda_1 \quad \text{avec} \quad c_1 = \frac{[\boldsymbol{\phi}_0]^t\,[\boldsymbol{F}_e]}{[\boldsymbol{\phi}_0]^t\,[\boldsymbol{F}_1]} \tag{5.20}$$

En y reportant (5.20), la première équation de (5.19) conduit au système linéaire

$$[\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{q}_1] = \lambda_1\,[\boldsymbol{h}_1^\perp] \quad \text{avec} \quad [\boldsymbol{h}_1^\perp] = [\boldsymbol{F}_e] - c_1\,[\boldsymbol{F}_1] \tag{5.21}$$

On peut noter que le vecteur $\boldsymbol{h}_1^\perp$ est orthogonal[4] à $\boldsymbol{\phi}_0$. En effet, on a bien $[\boldsymbol{\phi}_0]^t[\boldsymbol{h}_1^\perp] = 0$. A cause de la singularité de $\boldsymbol{K}_t$, on résoud le système (5.21) de la manière suivante. Le vecteur solution $\boldsymbol{q}_1$ est décomposé en deux parties : sa projection sur $\boldsymbol{\phi}_0$ et son complémentaire orthogonal $\boldsymbol{v}_1^\perp$

$$[\boldsymbol{q}_1] = \alpha\,[\boldsymbol{\phi}_0] + \lambda_1\,[\boldsymbol{v}_1^\perp]\,, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ [\boldsymbol{\phi}_0]^t\,[\boldsymbol{v}_1^\perp] = 0 \tag{5.22}$$

La condition d'orthogonalité est alors forcée à l'aide du multiplicateur de Lagrange μ et la partie orthogonale de $\boldsymbol{q}_1$ est obtenue en résolvant le système

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_t & \boldsymbol{\phi}_0 \\ \boldsymbol{\phi}_0^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^\perp \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1^\perp \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

En principe, ce système peut être résolu en utilisant les méthodes de décomposition classiques (Cholesky, Crout, ...) car la matrice formée de $\boldsymbol{K}_t$ et des vecteurs $\boldsymbol{\phi}_0$ n'est pas singulière.

4. ce qui est mis en évidence avec l'utilisation du symbole $\perp$ en exposant

Néanmoins, il est nécessaire d'incorporer une technique de « full-pivoting » dans l'algorithme de décomposition.

2) L'introduction de la décomposition (5.22) dans la seconde équation du système augmenté (5.19) et la multiplication à gauche par $\boldsymbol{\phi}_0^t$ permet d'obtenir une seconde relation de compatibilité.[5]

$$\alpha = c_2\,\lambda_1 \quad \text{avec} \quad c_2 = -\frac{c_1\,[\boldsymbol{\varphi}_0]^t[\boldsymbol{F}_2] + [\boldsymbol{\phi}_0]^t\,[\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{v}_1^\perp]}{[\boldsymbol{\phi}_0]^t\,[\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{\phi}_0]} \tag{5.24}$$

En remplaçant cette expression dans la seconde équation de (5.19), il vient

$$[\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{\phi}_1] = \lambda_1\,[\boldsymbol{h}_2^\perp] \tag{5.25}$$

où

$$[\boldsymbol{h}_2^\perp] = c_2\,[\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{\phi}_0] - [\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{v}_1^\perp] - c_1\,[\boldsymbol{F}_2]\,, \quad [\boldsymbol{\phi}_0]^t\,[\boldsymbol{h}_2^\perp] = 0 \tag{5.26}$$

De nouveau, on décompose le vecteur solution $\boldsymbol{\phi}_1$ sous la forme

$$[\boldsymbol{\phi}_1] = \beta\,[\boldsymbol{\phi}_0] + \lambda_1\,[\boldsymbol{p}_1^\perp]\,, \quad \beta \in \mathbb{R},\ [\boldsymbol{\phi}_0]^t\,[\boldsymbol{p}_1^\perp] = 0 \tag{5.27}$$

la partie orthogonale $\boldsymbol{p}_1^\perp$ étant obtenue en résolvant

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_t & \boldsymbol{\phi}_0 \\ \boldsymbol{\phi}_0^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1^\perp \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_2^\perp \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

3) Pour finir, la troisième équation du système augmenté (5.19) donne

$$\beta = 0 \tag{5.29}$$

et la quatrième équation de (5.19) fournit l'expression de λ_1

$$\lambda_1 = \frac{s}{\sqrt{d}} \tag{5.30}$$

où

$$d = 1 + c_1^2 + c_2^2 + [\boldsymbol{v}_1^\perp]^t[\boldsymbol{v}_1^\perp] \tag{5.31}$$

Les termes à l'ordre 1 sont alors tous connus

$$\Lambda_1 = c_1\,\lambda_1 \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{q}_1 = c_2\,\boldsymbol{\phi}_0 + \lambda_1\,\boldsymbol{v}_1^\perp \tag{5.33}$$

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \lambda_1\,\boldsymbol{p}_1^\perp \tag{5.34}$$

5. La régularité de $\boldsymbol{H}$ au point de départ assure que les dénominateurs des constantes c_1 et c_2 ne sont pas nuls. En effet, ils correspondent exactement aux conditions de régularité (5.15) et (5.16) énoncées dans le § 5.3.3

5.4.3 Résolution à l'ordre p

La procédure de résolution à l'ordre p est quasiment identique à celle utilisée à l'ordre 1. La différence provient des seconds membres qui, désormais, ne sont plus nuls.

1) En multipliant à gauche la première équation de (5.10) par $\boldsymbol{\phi}_0^t$, on obtient une relation de compatibilité qui lie Λ_p à λ_p.

$$\Lambda_p = c_1\, \lambda_p + c_3^{nl} \tag{5.35}$$

où la constante c_1 est la même qu'à l'ordre 1 et

$$c_3^{nl} = \frac{[\boldsymbol{\phi}_0]^t\, [\boldsymbol{F}_p^{nl}]}{[\boldsymbol{\phi}_0]^t\, [\boldsymbol{F}_1]} \tag{5.36}$$

En y reportant (5.35), la première équation de (5.10) conduit au système linéaire

$$[\boldsymbol{K}_t]\, [\boldsymbol{q}_p] = \lambda_p\, [\boldsymbol{h}_1^{\perp}] + [\boldsymbol{h}_3^{nl}] \tag{5.37}$$

où le nouveau vecteur $\boldsymbol{h}_3^{nl}$ s'écrit

$$[\boldsymbol{h}_3^{nl}] = [\boldsymbol{F}_p^{nl}] - c_3^{nl}\, [\boldsymbol{F}_1]\,, \quad \text{avec } [\boldsymbol{\phi}_0]^t\, [\boldsymbol{h}_3^{nl}] = 0 \tag{5.38}$$

Grâce au théorème de surperposition, le système (5.37) est équivalent à

$$\begin{cases} [\boldsymbol{q}_p] = [\boldsymbol{q}_p^l] + [\boldsymbol{q}_p^{nl}] \\ [\boldsymbol{K}_t]\, [\boldsymbol{q}_p^l] = \lambda_p\, [\boldsymbol{h}_1^{\perp}] \\ [\boldsymbol{K}_t]\, [\boldsymbol{q}_p^{nl}] = [\boldsymbol{h}_3^{nl}] \end{cases} \tag{5.39}$$

La première équation de (5.39) combinée avec (5.21) conduit à

$$[\boldsymbol{q}_p^l] = \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\, [\boldsymbol{q}_1] \tag{5.40}$$

A cause de la singularité de $\boldsymbol{K}_t$ dans la seconde équation de (5.39), on cherche la solution $\boldsymbol{q}_p^{nl}$ sous la forme

$$[\boldsymbol{q}_p^{nl}] = \tilde{\alpha}\, [\boldsymbol{\phi}_0] + \lambda_p\, [\boldsymbol{v}_p^{\perp}]\,, \quad \tilde{\alpha} \in \mathbb{R},\ [\boldsymbol{\phi}_0]^t\, [\boldsymbol{v}_p^{\perp}] = 0 \tag{5.41}$$

où $\boldsymbol{v}_p^{\perp}$ est obtenu en résolvant

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_t & \boldsymbol{\phi}_0 \\ \boldsymbol{\phi}_0^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_p^{\perp} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_3^{nl} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

2) En projetant la seconde équation du système linéaire augmenté (5.10) sur $\boldsymbol{\varphi}_0$, on obtient la nouvelle condition de compatibilité

$$\tilde{\alpha} = c_4^{nl} \tag{5.43}$$

avec

$$c_4^{nl} = \frac{[\boldsymbol{\phi}_0^t]\,[\boldsymbol{G}_p^{nl}] - c_3^{nl}\,[\boldsymbol{\phi}_0^t][\boldsymbol{F}_2] - [\boldsymbol{\phi}_0^t]\,[\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{v}_p^\perp]}{[\boldsymbol{\phi}_0^t]\,[\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{\phi}_0]} \tag{5.44}$$

En remplaçant cette expression dans la seconde équation de (5.10), il vient

$$[\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{\phi}_p] = \lambda_p\,[\boldsymbol{h}_2^\perp] + [\boldsymbol{h}_4^{nl}] \tag{5.45}$$

où

$$[\boldsymbol{h}_4^{nl}] = [\boldsymbol{G}_p^{nl}] - c_3^{nl}\,[\boldsymbol{F}_2] - [\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{v}_p^\perp] - c_4^{nl}\,[\boldsymbol{K}_\phi][\boldsymbol{\varphi}_0] \tag{5.46}$$

Par superposition, on peut alors exprimer la solution du système (5.45) sous la forme

$$\begin{cases} [\boldsymbol{\phi}_p] = [\boldsymbol{\phi}_p^l] + [\boldsymbol{\phi}_p^{nl}] \\ [\boldsymbol{\phi}_p^l] = \dfrac{\lambda_p}{\lambda_1}\,[\boldsymbol{\phi}_1] \\ [\boldsymbol{\phi}_p^{nl}] = \tilde{\beta}\,[\boldsymbol{\phi}_0] + \lambda_p\,[\boldsymbol{p}_p^\perp] \end{cases} \tag{5.47}$$

où $\boldsymbol{p}_p^\perp$ est obtenu en résolvant

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_t & \boldsymbol{\phi}_0 \\ \boldsymbol{\phi}_0^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_p^\perp \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_4^{nl} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

3) Pour terminer, on déduit l'expression de $\tilde{\beta}$ de la troisième équation de (5.10)

$$\tilde{\beta} = h_p^{nl} \tag{5.49}$$

et la dernière équation de (5.10) fournit l'expression de λ_p

$$\lambda_p = -\frac{c_1 c_3^{nl} + c_2 c_4^{nl} + [\boldsymbol{v}_1^\perp]^t[\boldsymbol{v}_p^\perp]}{d} \tag{5.50}$$

où d est le même dénominateur que celui qu'on a utilisé à l'ordre 1.A ce stade, tous les termes à l'ordre p sont déterminés

$$\begin{aligned} \Lambda_p &= c_1\,\lambda_p + c_3^{nl} \\ [\boldsymbol{q}_p] &= \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\,[\boldsymbol{q}_1] + c_4^{nl}\,[\boldsymbol{\phi}_0] + \lambda_p\,[\boldsymbol{v}_p^\perp] \\ [\boldsymbol{\phi}_p] &= \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\,[\boldsymbol{\phi}_1] + h_p^{nl}\,[\boldsymbol{\phi}_0] + \lambda_p\,[\boldsymbol{p}_p^\perp] \end{aligned} \tag{5.51}$$

Cette résolution est un peu technique et elle demande un certain effort de programmation. C'est malgré tout le prix à payer pour obtenir une bonne efficacité et la stabilité de l'algorithme. Les seules opérations lourdes sont les résolutions des systèmes (5.42) et (5.48) qui comportent la même matrice (de taille $N_{ddl} + 1$) et qui réclament un effort équivalent à la résolution d'un problème élastique linéaire.

5.5 Deux types d'imperfections

Jusqu'à présent, nous avons utilisé des notations plutôt abstraites telles que $\boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{f}_{,\Lambda}$, $\boldsymbol{f}_{,\boldsymbol{u}\Lambda}$, ... dans un souci de généralité. Dans cette section, nous allons maintenant donner explicitement les expressions des forces internes $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\Lambda)$ et de ses dérivées $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ pour deux types d'imperfections très communes : un défaut de forme et un défaut d'épaisseur. On va également détailler les expressions des seconds membres $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{G}_p^{nl}$ du problème augmenté dans chacun des deux cas.

Dans le paragraphe 3.3.1, on a mis l'accent sur le fait que la transformation des équations du problème sous une forme quadratique estt essentielle pour faciliter les développements en séries. Cette procédure nécessite généralement l'introduction de variables additionnelles. Ces nouvelles variables, lorsqu'elles seront nécessaires, seront également détaillées dans cette section.

5.5.1 Défaut de forme

Dans les chapitres précédents, on a déjà traité la prise en compte d'un défaut de forme initial dans la structure. Il s'agissait alors d'un défaut d'allure et d'amplitude fixées. Cette fois-ci, c'est un défaut de forme variable $\boldsymbol{u}^\star$ qu'on introduit dans la structure. De façon à ce que la variable additionnelle ajoutée aux équations du problème soit un scalaire, on décompose $\boldsymbol{u}^\star$ sous la forme

$$\boldsymbol{u}^\star = \eta\, \boldsymbol{u}_0^\star \tag{5.52}$$

où $\boldsymbol{u}_0^\star$ est un champ de déplacement fixé qui donne l'allure du défaut, et η fixe l'amplitude. Ici, l'amplitude η joue le rôle du paramètre Λ utilisé dans les paragraphes précédents de ce chapitre. Avec ces notations, les équations de l'élasticité 3D pour une structure avec défaut de forme énoncées dans le § 2.1.2 deviennent

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\eta,\lambda).\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} + \eta\, \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star).\delta\boldsymbol{u}\; dV - \lambda \boldsymbol{F}_e.\delta\boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \left(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \eta\, \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star)\right)\, \boldsymbol{u} \end{cases} \tag{5.53}$$

De ces équations, on déduit

$$\boldsymbol{F}_{,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\eta,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varphi}.\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} + \eta\, \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}).\delta\boldsymbol{u}\; dV = 0 \\ \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{D} : (\boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \eta\, \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star))\, \boldsymbol{\varphi} \end{cases} \tag{5.54}$$

où $\boldsymbol{\Psi}$ est le second tenseur de contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF associé au vecteur propre $\boldsymbol{\varphi}$.

Ces deux systèmes d'équations, auxquels il faut ajouter l'équation de normalisation de $\boldsymbol{\varphi}$, forment le système augmenté $\boldsymbol{H}$ (5.5). Les équations de (5.53) sont quadratiques par rapport aux variables $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{S},\eta,\lambda)$ et (5.54) est quadratique par rapport à $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{S},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\Psi},\eta,\lambda)$.

L'étape suivante consiste à développer chacune de ces variables sous forme de série entière. Avec l'écriture condensée $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{S},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\Psi},\eta,\lambda\}^t$, le développement en série s'écrit

$$\boldsymbol{U}(a) = \boldsymbol{U}_0 + a\,\boldsymbol{U}_1 + a^2\,\boldsymbol{U}_2 + \ldots + a^n\,\boldsymbol{U}_n \tag{5.55}$$

où $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\Psi}_0, \eta_0, \lambda_0)$ est supposé être un point solution régulier et sert de point de départ. L'introduction des séries dans (5.53) et (5.54), et l'identification des termes ayant la même puissance de a, donne à l'ordre p ($p \geq 2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S}_p : \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_p).\delta\boldsymbol{u} + \eta_p\, \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star).\delta\boldsymbol{u}\, dV = \lambda_p \boldsymbol{F}_e.\delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{R}_p^{nl}.\delta\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D} : \left(\tilde{\boldsymbol{B}}_0\, \boldsymbol{u}_p + \eta_p\, \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0)\, \boldsymbol{u}_0^\star\right) + \boldsymbol{S}_p^{nl} \end{array} \right. \tag{5.56}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\Psi}_p : \tilde{\boldsymbol{B}}_0.\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}_p).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_p).\delta\boldsymbol{u} + \eta_p\, \boldsymbol{\Psi}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star).\delta\boldsymbol{u} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \boldsymbol{S}_p : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}_0).\delta\boldsymbol{u}\, dV = -\boldsymbol{Q}_p^{nl}.\delta\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\Psi}_p = \boldsymbol{D} : \left(\tilde{\boldsymbol{B}}_0\, \boldsymbol{\varphi}_p + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}_0)\, (\boldsymbol{u}_p + \eta_p\, \boldsymbol{u}_0^\star)\right) + \boldsymbol{\Psi}_p^{nl} \end{array} \right. \tag{5.57}$$

avec $\tilde{\boldsymbol{B}}_0 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0 + \eta_0 \boldsymbol{u}_0^\star)$. Afin de pouvoir utiliser la méthode des éléments finis, il est nécessaire de repasser à une formulation en déplacements. Pour cela, il suffit de reporter les contraintes $\boldsymbol{S}_p$ et $\boldsymbol{\Psi}_p$ dans chacune des équations d'équilibres. Après discrétisation, on aboutit aux deux problèmes en déplacements suivants

$$\begin{array}{l} [\boldsymbol{K}_t]\,[\boldsymbol{q}_p] + \eta_p\,[\boldsymbol{F}_1] = \lambda_p\,[\boldsymbol{F}] + [\boldsymbol{F}_p^{nl}] \\ [\boldsymbol{K}_\phi]\,[\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{K}_T]\,[\boldsymbol{\phi}_p] + \eta_p\,[\boldsymbol{F}_2] = [\boldsymbol{G}_p^{nl}] \end{array} \tag{5.58}$$

Ce système correspond exactement aux deux premières lignes du problème augmenté (5.10). On a fait apparaître explicitement les matrices $\boldsymbol{K}_t(\boldsymbol{q}_0 + \eta_0 \boldsymbol{q}_0^\star, \boldsymbol{S}_0)$ et $\boldsymbol{K}_\varphi(\boldsymbol{q}_0 + \eta_0 \boldsymbol{q}_0^\star, \boldsymbol{\phi}_0)$, ainsi que les veteurs $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$, dont les expressions sont données par

$$[\boldsymbol{K}_t] = \int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t [\boldsymbol{D}][\tilde{\boldsymbol{B}}_0] + [\boldsymbol{G}]^t [\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\, dV \tag{5.59}$$

$$[\boldsymbol{K}_\phi] = \int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\, [\boldsymbol{D}]\, [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]^t\, [\boldsymbol{D}]\, [\tilde{\boldsymbol{B}}_0] + [\boldsymbol{G}]^t\, [\hat{\boldsymbol{\Psi}}_0]\, [\boldsymbol{G}]\, dV \tag{5.60}$$

$$[\boldsymbol{F}_1] = \int_\Omega \left([\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\, [\boldsymbol{D}]\, [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_0)] + [\boldsymbol{G}]^t\, [\hat{\boldsymbol{S}}_0]\, [\boldsymbol{G}]\right)\, [\boldsymbol{q}_0^\star]\, dV \tag{5.61}$$

$$[\boldsymbol{F}_2] = \int_\Omega \left([\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\, [\boldsymbol{D}]\, [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]^t\, [\boldsymbol{D}]\, [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_0)] + [\boldsymbol{G}]^t\, [\hat{\boldsymbol{\Psi}}_0]\, [\boldsymbol{G}]\right)\, [\boldsymbol{q}_0^\star]\, dV \tag{5.62}$$

A cause de l'imperfection variable, les expressions de $\boldsymbol{F}_p^{nl}$, $\boldsymbol{R}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ sont (légèrement) plus compliquées que dans le cas d'un défaut fixé (cf. § 3.3.2). Leurs expressions, ainsi que celles de $\boldsymbol{G}_p^{nl}$, $\boldsymbol{Q}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}$, sont détaillées dans l'annexe B.1.

5.5.1.a Extension aux grandes rotations

Dans le cas de l'élément de coque développé par BÜCHTER *et al.*, le problème non-linéaire à résoudre s'écrit

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\eta,\lambda).\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} + \eta\,\boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star).\delta\boldsymbol{u}\; dV - \lambda\boldsymbol{F}_e.\delta\boldsymbol{u} = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S} : \delta\tilde{\gamma}\; dV = 0 \\ \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \left(\boldsymbol{B}_l + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \eta\,\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star)\right)\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D} : \tilde{\gamma} \end{cases} \tag{5.63}$$

$$\boldsymbol{F}_{,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\eta,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varphi}.\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} + \eta\,\boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}).\delta\boldsymbol{u}\; dV = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S} : \delta\tilde{\gamma}_{\boldsymbol{\varphi}}\; dV = 0 \\ \quad \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{D} : (\boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}) + \eta\,\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star))\,\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{D} : \tilde{\gamma}_{\boldsymbol{\varphi}} \end{cases} \tag{5.64}$$

où $\tilde{\gamma} = \boldsymbol{B}_\alpha.\boldsymbol{\alpha}$ et $\tilde{\gamma}_{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{B}_\alpha.\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\varphi}}$ sont les déformations additionnelles, relatives aux champs de déplacement $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\varphi}$, introduites par le concept EAS (cf. 2.2.2). Après introduction des développements en séries et discrétisation par éléments finis, on obtient à l'ordre p

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t[\boldsymbol{S}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_p)]^t[\boldsymbol{S}_0] + \eta_p\,[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star)]^t[\boldsymbol{S}_0]\; dV = \lambda_p[\boldsymbol{F}_e] - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \\ \displaystyle\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}_p]\, dV = \boldsymbol{0} \\ \quad [\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\left([\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\boldsymbol{q}_p] + \eta_p\,[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0)]\,[\boldsymbol{q}_0^\star]\right) + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] \end{cases} \tag{5.65}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t[\boldsymbol{\Psi}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_p)]^t[\boldsymbol{S}_0] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_p)]^t[\boldsymbol{\Psi}_0] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]^t[\boldsymbol{S}_p] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \eta_p\,[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0^\star)]^t[\boldsymbol{\Psi}_0]\; dV = -[\boldsymbol{Q}_p^{nl}] \\ \displaystyle\int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{\Psi}_p]\, dV = \boldsymbol{0} \\ \quad [\boldsymbol{\Psi}_p] = [\boldsymbol{D}]\left([\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\boldsymbol{\phi}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]\,([\boldsymbol{q}_p] + \eta_p\,[\boldsymbol{q}_0^\star])\right) + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\phi}\,p}] + [\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}] \end{cases} \tag{5.66}$$

Les expressions de $\boldsymbol{R}_p^{nl}$, $\boldsymbol{Q}_p^{nl}$, $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}$ sont les mêmes que précédemment. Leurs expressions sont données dans l'annexe B.1.

L'étape suivante consiste à condenser les variables additionnelles $\boldsymbol{\alpha}_p$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\phi}\,p}$. On a déjà effectué cette opération dans le cas du calcul de courbes d'équilibre (§ 3.7.1) et de la détection (§ 4.5.1). Elle permet d'éliminer $\boldsymbol{\alpha}_p$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\phi}\,p}$ au niveau élémentaire. Pour commencer, on reporte $\boldsymbol{S}_p$ et $\boldsymbol{\Psi}_p$ dans les deux équations de compatibilité de manière à obtenir les expressions des deux variables

additionnelles $\boldsymbol{\alpha}_p$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\phi} p}$

$$[\boldsymbol{\alpha}_p] = [\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}\Big(-[\boldsymbol{K}_{\alpha u}][\boldsymbol{q}_p] - \eta_p\,[\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha u_0}][\boldsymbol{q}^\star_0] - [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}^{nl}_p]\Big) \tag{5.67}$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\phi} p}] = [\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}\Big(-[\boldsymbol{K}_{\alpha u}][\boldsymbol{\phi}_p] - [\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\Phi_0}][\boldsymbol{q}_p] - \eta_p\,[\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\Phi_0}][\boldsymbol{q}^\star_0] - [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{\Psi}^{nl}_p]\Big) \tag{5.68}$$

Dans ces expressions, les matrices $\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}$ et $\boldsymbol{K}_{\alpha u}$ sont exactement les mêmes que dans le cas du calcul de courbes d'équilibre. Elles sont données par les équations (3.44) et (3.47). Les nouvelles matrices $\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha u_0}$ et $\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\boldsymbol{\phi}_0}$ sont quant à elles données par

$$[\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha u_0}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}^\star_0)]\,dV \tag{5.69}$$

$$[\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\boldsymbol{\phi}_0}] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]\,dV \tag{5.70}$$

Puis, en reportant les expressions de $\boldsymbol{\alpha}_p$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\phi} p}$, ainsi que les contraintes $\boldsymbol{S}_p$ et $\boldsymbol{\Psi}_p$, dans les équations d'équilibre $(5.65)_1$ et $(5.66)_1$, on obtient les problèmes en déplacements dans lesquels $\boldsymbol{\alpha}_p$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\phi} p}$ n'apparaissent plus. En y ajoutant l'équation de normalisation de $\boldsymbol{\phi}$ et l'équation qui définit a, il vient

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^\alpha_t & 0 & \boldsymbol{F}^\alpha_1 & -\boldsymbol{F}_e \\ \boldsymbol{K}^\alpha_{\boldsymbol{\phi}} & \boldsymbol{K}^\alpha_t & \boldsymbol{F}^\alpha_2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}^t_0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{q}^t_1 & 0 & \Lambda_1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_p \\ \boldsymbol{\phi}_p \\ \Lambda_p \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^{nl\,\alpha}_p \\ \boldsymbol{G}^{nl\,\alpha}_p \\ h^{nl}_p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.71}$$

Ce système a la même forme que le système linéaire augmenté (5.10). On peut donc appliquer la procédure décrite dans la section 5.4.3 pour le résoudre, à condition d'avoir préalablement assemblé les nouvelles matrices et les nouveaux vecteurs qui le composent. Dans les expressions de ces matrices et vecteurs, on retrouve la matrice ou le vecteur d'origine et des termes qui proviennent de la condensation des variables $\boldsymbol{\alpha}_p$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\phi} p}$

$$[\boldsymbol{K}^\alpha_t] = [\boldsymbol{K}_t] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}] \tag{5.72}$$

$$[\boldsymbol{K}^\alpha_{\boldsymbol{\phi}}] = [\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\phi}}] - [\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\boldsymbol{\phi}_0}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{\alpha u}] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\boldsymbol{\phi}_0}] \tag{5.73}$$

$$[\boldsymbol{F}^\alpha_1] = [\boldsymbol{F}_1] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha u_0}][\boldsymbol{q}^\star_0] \tag{5.74}$$

$$[\boldsymbol{F}^\alpha_2] = [\boldsymbol{F}_2] - [\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\boldsymbol{\phi}_0}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha u_0}][\boldsymbol{q}^\star_0] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\boldsymbol{\phi}_0}][\boldsymbol{q}^\star_0] \tag{5.75}$$

$$[\boldsymbol{F}^{nl\,\alpha}_p] = [\boldsymbol{F}^{nl}_p] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}^{nl}_p] \tag{5.76}$$

$$[\boldsymbol{G}^{nl\,\alpha}_p] = [\boldsymbol{G}^{nl}_p] - [\boldsymbol{K}^{nl}_{\alpha\boldsymbol{\phi}_0}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{S}^{nl}_p] - [\boldsymbol{K}_{\alpha u}]^t[\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}]^{-1}[\boldsymbol{B}_\alpha]^t[\boldsymbol{\Psi}^{nl}_p] \tag{5.77}$$

Par rapport à la section précédente, la seule vraie difficulté réside donc dans le calcul de ces nouvelles matrices et de ces nouveaux vecteurs qui composent le système augmenté.

5.5.1.b Extension aux matériaux non-linéaires

L'extension à un matériau élastique non-linéaire basé sur la loi puissance n'est pas très compliquée, pour peu qu'on ait bien assimilé les deux remarques 3.8 et 4.5 qu'on avait énoncées pour le calcul des branches d'équilibre et pour la détection des points singuliers.

En substance, ces remarques mettent l'accent sur le fait qu'il n'est pas nécessaire de modifier l'algorithme de résolution lorsqu'on passe d'un matériau élastique à un matériau non-linéaire. Il suffit de remplacer la matrice de comportement $\boldsymbol{D}$ par la matrice de comportement tangente $\boldsymbol{D}_t$, et la contrainte $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ par $\boldsymbol{S}_p^{nl} + \boldsymbol{S}_p^{res}$, $\boldsymbol{S}_p^{res}$ provenant de la non-linéarité de la loi de comportement. On va voir que ces remarques restent valables pour le suivi de points limites.

Avant de continuer, il est essentiel de rappeler que le système augmenté utilisé pour le suivi comporte deux équations vectorielles, qu'on décompose sous la forme des systèmes (5.63) et (5.64) dans le cas des grandes rotations. Le premier système est relatif à l'équilibre de la structure et le second définit les points singuliers de l'équilibre.

Le premier système (5.63) nous est très familier car on l'a déjà étudié dans les chapitres 2 et 3. Il s'agit du système formé des équations (2.37)-(2.38)-(2.39). La seule différence est que le défaut est maintenant variable. Si on compare les lois de comportement de chacun de ces deux systèmes, on s'aperçoit qu'elles sont identiques, à ceci près qu'on a $\boldsymbol{u}^\star$ d'un côté et $\eta\,\boldsymbol{u}_0^\star$ de l'autre. Dans ces conditions, le passage à un matériau non-linéaire est évident. La démarche est rigoureusement identique à celle qu'on a suivie dans le paragraphe 3.8. La contrainte à l'ordre p s'écrit donc

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}_t][\boldsymbol{\gamma}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{res}] \tag{5.78}$$

où la matrice $\boldsymbol{D}_t$ est exactement la même que celle qu'on a introduite dans le paragraphe 3.8. Son expression est détaillée dans l'annexe A.1. La contrainte $\boldsymbol{S}_p^{res}$ est la même également. Elle est également détaillée dans l'annexe A.1. Seule l'expression de la déformation est légèrement différente, à cause du défaut de forme variable

$$\boldsymbol{\gamma}_p = \left([\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\boldsymbol{q}_p] + \eta_p\,[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0)]\,[\boldsymbol{q}_0^\star]\right) + [\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{\gamma}_p^{nl}] \tag{5.79}$$

Une fois cette expression reportée dans (5.78), on obtient

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}_t]\,\left([\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\boldsymbol{q}_p] + \eta_p\,[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0)]\,[\boldsymbol{q}_0^\star]\right) + [\boldsymbol{D}_t]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}] + [\boldsymbol{S}_p^{res}] \tag{5.80}$$

Comme on l'avait annoncé, en comparaison avec la contrainte $(5.65)_3$ obtenue pour les grandes rotations, il suffit de remplacer $\boldsymbol{D}$ par la matrice de comportement tangente $\boldsymbol{D}_t$, et la contrainte $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ par $\boldsymbol{S}_p^{nl}+\boldsymbol{S}_p^{res}$, $\boldsymbol{S}_p^{res}$. Bien sûr, il ne faut pas oublier également de remplacer $\boldsymbol{S}_p^{nl}$ par $\boldsymbol{S}_p^{nl}+\boldsymbol{S}_p^{res}$ lors du calcul de $\boldsymbol{F}_p^{nl\,\alpha}$ et $\boldsymbol{G}_p^{nl\,\alpha}$, et $\boldsymbol{D}$ par $\boldsymbol{D}_t$ lors du calcul de $\boldsymbol{K}_t$, $\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}$, $\boldsymbol{K}_{\alpha u}$, $\boldsymbol{K}_{\alpha u_0}^{nl}$, $\boldsymbol{K}_{\alpha\phi_0}^{nl}$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ...

De la même manière, si on regarde attentivement la loi de comportement du deuxième système (5.64) et celle qu'on avait dans le cas de la détection $(4.20)_3$, on constate à nouveau que la seule différence (hormis les noms de variables différents) tient à l'écriture du défaut : $\boldsymbol{u}^\star$ d'un côté et $\eta\,\boldsymbol{u}_0^\star$ de l'autre. L'extension à un matériau non-linéaire est donc là-aussi très simple. La démarche à suivre est absolument identique à celle de la section 4.6. La contrainte à l'ordre p s'écrit donc

$$[\boldsymbol{\Psi}_p] = [\boldsymbol{D}_t][\boldsymbol{\varepsilon}_p] \tag{5.81}$$

où $\boldsymbol{D}_t$ est la même que précédemment. La déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ est donnée par

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_p] = [\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\boldsymbol{\phi}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]\,([\boldsymbol{q}_p] + \eta_p\,[\boldsymbol{q}_0^\star]) + [\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_{\phi p}] + [\boldsymbol{\varepsilon}_p^{nl}] \tag{5.82}$$

En reportant dans (5.81), on obtient

$$[\boldsymbol{\Psi}_p] = [\boldsymbol{D}_t]\left([\tilde{\boldsymbol{B}}_0][\boldsymbol{\phi}_p] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]\,([\boldsymbol{q}_p] + \eta_p\,[\boldsymbol{q}_0^\star])\right) + [\boldsymbol{D}_t]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_{\phi p}] + [\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}] + [\boldsymbol{\Psi}_p^{res}] \tag{5.83}$$

Il a donc suffit de remplacer $\boldsymbol{D}$ par $\boldsymbol{D}_t$, et $\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}$ par $\boldsymbol{\Psi}_p^{nl} + \boldsymbol{\Psi}_p^{res}$. L'expression de $\boldsymbol{\Psi}_p^{res}$ est identique à celle de $\Delta\boldsymbol{S}_p^{res}$, à ceci près que les sommes vont de $r = 1$ à $p-1$ (au lieu de p pour $\Delta\boldsymbol{S}_p^{res}$). Pour plus de clarté, l'expression de $\boldsymbol{\Psi}_p^{res}$ est détaillée dans l'annexe A.3.

5.5.2 Défaut d'épaisseur

Dans ce paragraphe, nous allons maintenant abandonner les défauts de forme et aborder les défauts d'épaisseur. Le paramètre additionnel Λ est maintenant directement l'épaisseur de la coque. Ainsi, la branche de suivi de points limites permettra de savoir comment varie la charge critique de flambement lorsqu'on augmente ou qu'on diminue l'épaisseur. La variation d'épaisseur pourra bien sûr concerner l'ensemble de la structure, ou être localisée sur une partie seulement (sur quelques éléments). C'est très utile pour étudier, par exemple, l'influence de la corrosion sur la résistance d'une structure.

Pour simplifier le problème, on ne va s'intéresser qu'à des éléments finis de coques qui sont intégrés analytiquement suivant l'épaisseur, et pour lesquels l'épaisseur n'apparaît explicitement que dans la matrice des constantes d'élasticité $\boldsymbol{D}$. L'élément de coque DKT18 [Batoz et Dhatt, 1992] en fait partie. Pour cette classe d'éléments, la matrice d'élasticité a la forme suivante

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{E\,h}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \dfrac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{5.84}$$

Les termes de membrane de $\boldsymbol{D}$ sont linéaires par rapport à h et les termes de flexion sont cubiques par rapport à h. On peut donc réécrire $\boldsymbol{D}$ sous la forme

$$\boldsymbol{D}(h) = \boldsymbol{D}^1\,h + \boldsymbol{D}^3\,h^3 \tag{5.85}$$

On a alors

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},h,\lambda).\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u}\; dV - \lambda \boldsymbol{F}_e.\delta\boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}(h) : \left(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})\right)\, \boldsymbol{u} \end{cases} \tag{5.86}$$

$$\boldsymbol{F}_{,\boldsymbol{u}}\,(\boldsymbol{u},h,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varphi}.\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}).\delta\boldsymbol{u}\; dV = 0 \\ \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{D}(h) : (\boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}))\, \boldsymbol{\varphi} \end{cases} \tag{5.87}$$

En vue de faciliter les développements en séries à venir, il est préférable de traiter des équations quadratiques. C'est le cas de la première équation de (5.86) et de (5.87). Par contre, la seconde équation de (5.86) est cubique en h et quadratique en $\boldsymbol{u}$, i.e. de degré 5 au total. De la même manière, la seconde équation de (5.87) est cubique en h et quadratique en $\boldsymbol{u}$ et en $\boldsymbol{\varphi}$, i.e. de degré 5 au total également. Afin de réduire le degré de non-linéarité de ces équations et obtenir des systèmes qui ne contiennent que des équations quadratiques, il est nécessaire d'introduire des variables et des équations intermédiaires. On y parvient de la manière suivante

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},h,\lambda).\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u}\; dV - \lambda \boldsymbol{F}_e.\delta\boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma} = \left(\boldsymbol{B}_l + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u})\right)\, \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^1\, h + \boldsymbol{D}^3\, eh \\ e = h^2 \end{cases} \tag{5.88}$$

Grâce à l'introduction de la déformation $\boldsymbol{\gamma}$, quadratique en $\boldsymbol{u}$, la loi de comportement devient quadratique par rapport à $\boldsymbol{D}$ et à $\boldsymbol{\gamma}$. Puis, l'introduction de la variable scalaire $e = h^2$ rend (5.85) quadratique également. Ainsi, chacune des équations du système (5.88) est quadratique. De la même manière, on rend le système (5.87) quadratique en introduisant les variables additionnelles $\boldsymbol{\Psi}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\boldsymbol{F}_{,\boldsymbol{u}}\,(\boldsymbol{u},h,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varphi}.\delta\boldsymbol{u} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}).\delta\boldsymbol{u}\; dV = 0 \\ \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}))\, \boldsymbol{\varphi} \end{cases} \tag{5.89}$$

L'étape suivante consiste à développer chacune des variables en série entière par rapport au paramètre de chemin a

$$\boldsymbol{U}(a) = \boldsymbol{U}_0 + a\,\boldsymbol{U}_1 + a^2\,\boldsymbol{U}_2 + \ldots + a^n\,\boldsymbol{U}_n \tag{5.90}$$

où $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, e, h, \lambda\}^t$ est un vecteur qui contient toutes les variables et $\boldsymbol{U}_0$ est un point régulier solution de $\boldsymbol{H}$ et qui sert de point de départ. Après introduction de ces développements en séries dans les systèmes (5.88) et (5.89), et identification des termes ayant la même

puissance de a, on obtient à l'ordre p ($p \geq 2$)

$$\begin{aligned} e_p &= 2h_0 h_p + e_p^{nl} \\ \boldsymbol{\gamma}_p &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0)\,\boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{\gamma}_p^{nl} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0)\,\boldsymbol{\varphi}_p + \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}_0)\,\boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_p^{nl} \end{aligned} \tag{5.91}$$

Les termes e_p^{nl}, $\boldsymbol{\gamma}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{nl}$ ne dépendent que de la solution au ordres précédents. Leurs expressions sont données dans l'annexe B.2. En utilisant l'expression de e_p, et en introduisant la notation $\tilde{\boldsymbol{D}}$, il vient

$$\boldsymbol{D}_p = (\boldsymbol{D}^1 + 3h_0^2\,\boldsymbol{D}^3)\,h_p + \boldsymbol{D}_p^{nl} = \tilde{\boldsymbol{D}}\,h_p + \boldsymbol{D}_p^{nl} \tag{5.92}$$

A ce stade, les seules équations qu'on n'a pas encore développées sont les équations d'équilibre et les lois de comportement. Puisque l'épaisseur n'y intervient pas explicitement, les équations d'équilibre à l'ordre p sont exactement les mêmes que dans le paragraphe 3.3.2. Après avoir développé les lois de comportement, on y reporte les développements des variables additionnelles. De cette manière, on élimine ces variables additionnelles qu'on a introduites uniquement pour faciliter les développements en séries. Ainsi, il ne reste plus que les variables $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$ et h. Finalement, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_\Omega \boldsymbol{S}_p : \boldsymbol{B}_0.\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_p).\delta\boldsymbol{u}\; dV = \lambda_p \boldsymbol{F}_e.\delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{R}_p^{nl}.\delta\boldsymbol{u} \\ &\boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0)\,\boldsymbol{u}_p + h_p\,\tilde{\boldsymbol{D}} : \left(\boldsymbol{B}_l + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_0)\right)\,\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{S}_p^{nl} \end{aligned} \right. \tag{5.93}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_\Omega \boldsymbol{\Psi}_p : \boldsymbol{B}_0.\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_p : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}_0).\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Psi}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{u}_p).\delta\boldsymbol{u} \\ &\qquad\qquad + \boldsymbol{S}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}_p)\; dV = -\boldsymbol{Q}_p^{nl}.\delta\boldsymbol{u} \\ &\boldsymbol{\Psi}_p = \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0)\,\boldsymbol{\varphi}_p + \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}_0)\,\boldsymbol{u}_p + h_p\,\tilde{\boldsymbol{D}} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0)\,\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Psi}_p^{nl} \end{aligned} \right. \tag{5.94}$$

Pour pouvoir mettre en œuvre la méthode des éléments finis, il est nécessaire de revenir à une formulation en déplacements. Pour cela, il suffit de reporter les contraintes $\boldsymbol{S}_p$ et $\boldsymbol{\Psi}_p$ dans chacune des équations d'équilibre. Après discrétisation, on aboutit aux deux problèmes en déplacements suivants

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_t\,\boldsymbol{q}_p + h_p\,\boldsymbol{F}_1 &= \lambda_p\,\boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_p^{nl} \\ \boldsymbol{K}_\phi\,\boldsymbol{q}_p + \boldsymbol{K}_T\,\boldsymbol{\phi}_p + h_p\,\boldsymbol{F}_2 &= \boldsymbol{G}_p^{nl} \end{aligned} \tag{5.95}$$

Ce système correspond exactement aux deux premières lignes du problème augmenté (5.10). Les matrices $\boldsymbol{K}_t$ et $\boldsymbol{K}_\phi$, ainsi que les vecteurs $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$, sont donnés par

$$[\boldsymbol{K}_t] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t[\boldsymbol{D}_0][\boldsymbol{B}_0] + [\boldsymbol{G}]^t[\hat{\boldsymbol{S}}_0][\boldsymbol{G}]\,dV \tag{5.96}$$

$$[\boldsymbol{K}_\phi] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t\,[\boldsymbol{D}_0]\,[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]^t\,[\boldsymbol{D}_0]\,[\boldsymbol{B}_0] + [\boldsymbol{G}]^t\,[\hat{\boldsymbol{\Psi}}_0]\,[\boldsymbol{G}]\,dV \tag{5.97}$$

$$[\boldsymbol{F}_1] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t \, [\tilde{\boldsymbol{D}}] \, ([\boldsymbol{B}_l] + \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_0)]) \, [\boldsymbol{q}_0] \, dV \tag{5.98}$$

$$[\boldsymbol{F}_2] = \int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t \, [\tilde{\boldsymbol{D}}] \, [\boldsymbol{B}_0] \, [\boldsymbol{\phi}_0] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]^t \, [\tilde{\boldsymbol{D}}] \, ([\boldsymbol{B}_l] + \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_0)]) \, [\boldsymbol{q}_0] \, dV \tag{5.99}$$

Les expressions de $\boldsymbol{F}_p^{nl}$, $\boldsymbol{R}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{S}_p^{nl}$, ainsi que celles de $\boldsymbol{G}_p^{nl}$, $\boldsymbol{Q}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}$, sont quant à elles détaillées dans l'annexe B.2.

Il ne reste plus qu'à compléter le système (5.95) à l'aide des deux équations relatives à la normalisation de $\boldsymbol{\phi}$ et au paramètre de chemin a. Il peut alors être résolu à l'aide de la procédure décrite dans le § 5.4.3.

5.6 Méthode de continuation

Le but de ce paragraphe n'est pas de réexpliquer la méthode de continuation de la M.A.N. Elle a été décrite en détail dans le paragraphe 3.4. L'objectif est simplement d'expliciter le critère d'arrêt utilisé pour le suivi de points limites.

Le critère qu'on a utilisé jusqu'ici est basé sur le résidu d'équilibre. Dans le cas de la détection, Il a été nécessaire de lui adjoindre un second critère basé sur le résidu « de détection » pour fiabiliser la procédure de continuation. Cela était indispensable car la longueur de pas donnée par le second critère était quelques fois plus court. Dans le cas du suivi, il va nous falloir choisir le résidu à utiliser pour obtenir un critère d'arrêt fiable.

Pour des raisons de coût de calcul, il n'est pas raisonnable d'évaluer le résidu global du système augmenté (5.10). Par contre, il est relativement aisé d'obtenir le résidu d'équilibre et le résidu relatif à la seconde équation de (5.10). Après avoir effectué de nombreux calculs de suivi, il apparaît que ce deuxième résidu de caractérisation des points critiques est toujours largement inférieur (en norme) à celui d'équilibre. Cela signifie que la seconde équation de (5.10) est respectée avec une meilleure précision que l'équilibre. Cela signifie également que c'est le résidu d'équilibre qui se dégrade le plus rapidement lorsqu'on avance le long de la courbe de suivi. On a donc tout intérêt à utiliser ce dernier dans notre critère d'arrêt, qui prend alors la forme désormais habituelle (cf. § 3.4.2)

$$a_m = \left(\frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{R}_{N+1}^{nl}\|} \right)^{\frac{1}{N+1}} \tag{5.100}$$

où $\boldsymbol{R}_{N+1}^{nl}$ est le vecteur second membre des équations (5.56), (5.65) et (5.93) calculé à l'ordre $N+1$.

5.7 Applications

Les deux exemples qui suivent vont nous permettre de valider l'algorithme de suivi de points limites que nous venons de décrire. Comme dans tous les exemples de validation présentés jusqu'à présent, nous allons continuer l'étude du panneau cylindrique.

5.7.1 Panneau cylindrique avec défaut d'épaisseur

Le but de ce premier exemple est d'étudier la sensibilité de la charge critique de flambement du panneau cylindrique à une variation d'épaisseur. Cette étude peut être considéré comme une analyse de corrosion simplifiée. Pour cela, l'épaisseur h est choisie comme paramètre variable additionnel. Puisque seuls les points limites du panneau nous intéressent, un quart seulement de celui-ci a été maillé, à l'aide de 200 éléments DKT ce qui représente 726 d.d.l.

Dans un premier temps, nous avons calculé la branche fondamentale d'équilibre du panneau pour une certaine valeur de l'épaisseur ($h = 12.7$), jusqu'à détecter un point limite. Dès que ce point limite est détecté, l'algorithme bascule automatiquement sur la procédure de suivi. Le point limite détecté est utilisé comme point de départ, et la courbe qui relie tous les points limites lorsque l'épaisseur varie est suivie. La représentation 3D « charge-déplacement-épaisseur » de la courbe de suivi, ainsi que ses projections, sont tracées dans la figure 5.1.

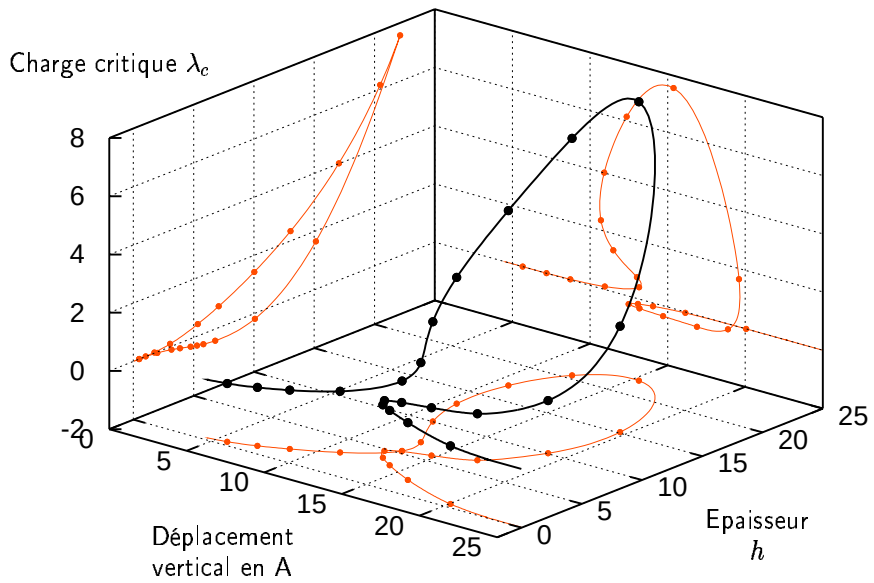


FIGURE 5.1 – *Projections et représentation 3D « charge-déplacement-épaisseur » de la courbe de suivi de points limites*

20 pas de continuation avec des séries à l'ordre 30 ont suffit pour décrire complètement la courbe de suivi. La courbe 3D est assez difficile à analyser. Il est plus simple de s'intéresser à ses projections. Deux d'entre elles sont données dans les figures 5.2 et 5.3. Sur la première sont représentées les courbes d'équilibre du panneau pour plusieurs valeurs de l'épaisseur ainsi que les points limites qui ont été détectés. On constate que la courbe de suivi passe bien par ces points limites. Elle intersecte chaque courbe d'équilibre au niveau de ses deux points limites (minimum et maximum), excepté pour une valeur extrême de l'épaisseur $h \simeq 22.15$ pour laquelle

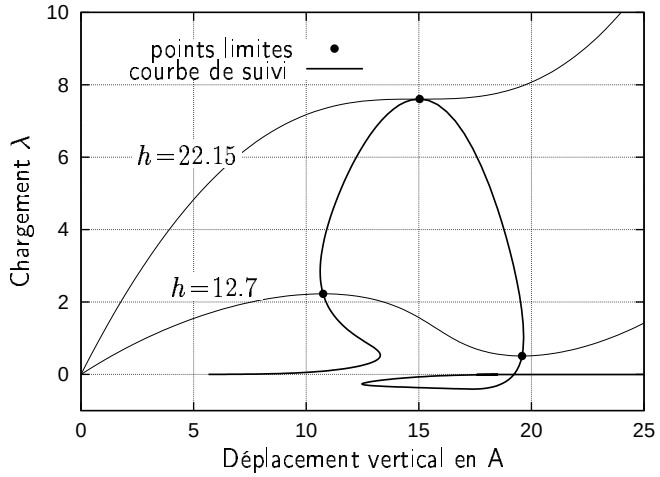


FIGURE 5.2 – *Courbe de suivi de points limites et branches d'équilibre (et points limites associés) pour différentes valeurs de l'épaisseur*

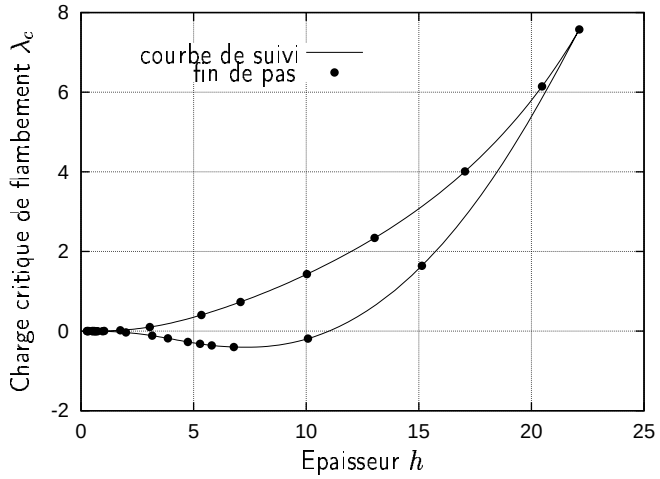


FIGURE 5.3 – *Réduction de la charge critique de flambement en fonction de l'épaisseur du panneau cylindrique*

les deux points limites se croisent et échangent leur rôle. Au-delà de cette valeur, il n'y a plus de point limite sur les courbes d'équilibre du panneau, donc plus de phénomène de claquage. On retrouve ce comportement sur la figure 5.3. Pour une valeur donnée de l'épaisseur, la courbe donne la charge critique correspondant à chacun des points limites (minimum et maximum). On voit également très clairement que la courbe s'arrête pour $h \simeq 22.15$. Les résultats obtenus ici sont en excellent accord avec ceux qui figurent dans [ERIKSSON *et al.*, 1999].

Pour les applications pratiques, il n'est généralement pas utile d'avoir toute la courbe de suivi, mais simplement un morceau au voisinage d'une épaisseur de coque donnée. La figure 5.4 présente un exemple d'un tel calcul sur le panneau : un premier point limite a été isolé pour une valeur de l'épaisseur proche de $h = 22.15$, puis un morceau de la branche de points limites

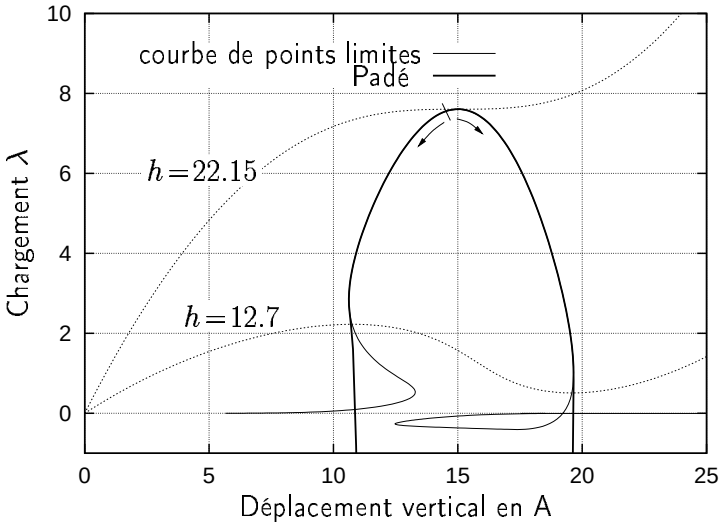


FIGURE 5.4 – *Amélioration des séries à l'aide d'approximants de Padé.*

a été déterminé à l'aide d'un seul développement en séries, sans utiliser de critère d'arrêt. En exploitant le fait que les séries sont valables pour des valeurs positives ou négatives du paramètre de chemin a, et le fait que les approximants de PADÉ (cf. § 3.5) permettent en général de doubler le domaine de validité des séries, on obtient de manière précise l'évolution de la première charge de claquage sur l'intervalle $h \in [12, 22.15]$ et de la deuxième sur l'intervalle $h \in [22.15, 12]$ (le point limite sur la courbe de suivi correspond à un échange entre le premier et le deuxième claquage).

Les performances ne seront peut-être pas toujours aussi spectaculaires sur des exemples moins académiques, mais la procédure de suivi à un seul pas (une seule décomposition, utilisée dans les deux sens), avec amélioration par les PADÉ, sera suffisante dans la plupart des études pratiques.

5.7.2 Panneau cylindrique avec défaut de forme

Le deuxième exemple concerne toujours le panneau cylindrique. Cette fois-ci, il s'agit d'analyser la sensibilité de sa charge critique à un défaut de forme. On a choisi le mode de flambement correspondant au premier point limite de la courbe d'équilibre du panneau pour donner la forme du défaut (figure 5.5). Le champ de déplacement correspondant a été normé de manière à ce que sa plus grande composante soit égale à 1. De cette manière, le paramètre additionnel qui est utilisé dans les calculs est la véritable amplitude du défaut. La procédure de suivi des points

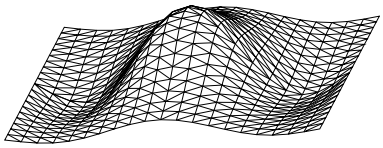


FIGURE 5.5 – *Premier mode de flambement du panneau cylindrique sans imperfection*

limites est complètement automatique. L'utilisateur doit uniquement choisir l'ordre N des séries, la précision ε voulue sur la solution, le nombre de pas à effectuer, l'amplitude de défaut initial η_0 et le sens de suivi de la courbe (augmentation ou diminution de l'amplitude du défaut). Un point limite de départ est alors isolé sur la branche d'équilibre de la structure incluant le défaut initial d'amplitude η_0, puis la procédure de suivi de points limites est engagée à partir de ce point. Cela permet de choisir n'importe quel point de départ sur la courbe de suivi et de la suivre dans un sens ou dans l'autre.

Pour cet exemple, le point limite de départ a été calculé pour une amplitude défaut $\eta_0 = -3\ mm$, i.e. -0.47 fois l'épaisseur ($h = 6.35\ mm$) du panneau. La courbe de la figure 5.6 est la représentation 3D de la courbe qui relie tous les points limites lorsque l'amplitude du défaut varie. On constate qu'il s'agit d'une courbe fermée. Comme on l'a déjà précisé dans l'exemple

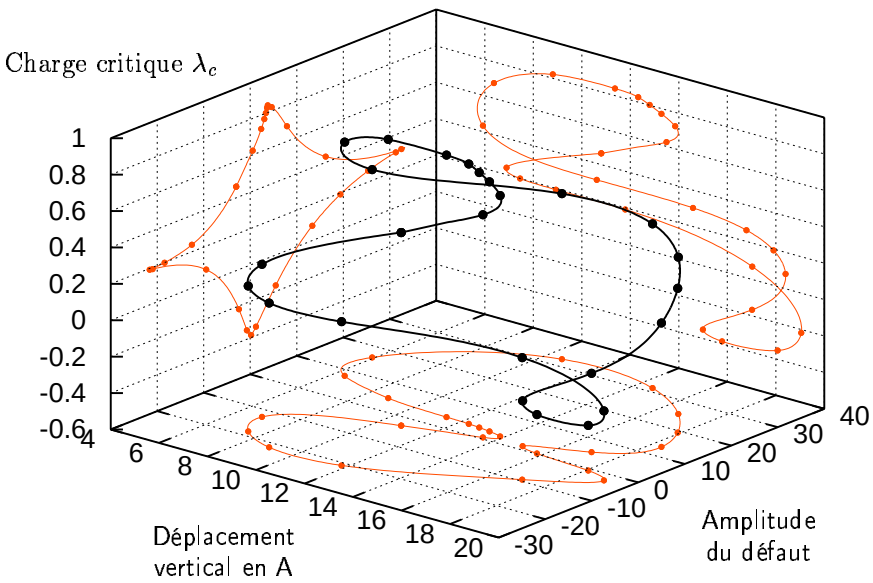


FIGURE 5.6 – *Projections et représentation 3D « charge-déplacement-imperfection » de la courbe de suivi de points limites*

précédent, les projections de la courbe de suivi sont mieux adaptées à notre analyse. Deux d'entre elles sont représentées dans les figures 5.7 et 5.8. La première projection se situe dans le plan charge-déplacement. Dans la même figure, on a tracé des branches d'équilibre du panneau pour trois valeurs différentes de l'imperfection, ainsi que la projection de la courbe de suivi. La courbe de suivi coupe chacune des branches d'équilibre au niveau de ses deux points limites. La courbe d'équilibre du panneau sans imperfection ($\eta/h = 0$) y est représentée pour servir de référence. Les valeurs de la charge critique en chacun des deux points limites (maximum et minimum) peut également être lue sur la courbe de la figure 5.8. Cette courbe donne directement la réduction de charge critique de flambement en fonction de l'amplitude du défaut. Les parties supérieures

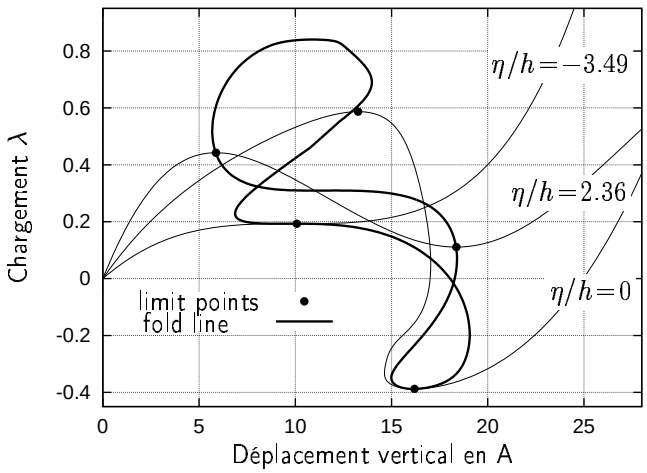


FIGURE 5.7 – *Courbe de suivi de points limites et branches d'équilibre (et points limites associés) pour différentes valeurs de l'amplitude du défaut de forme*

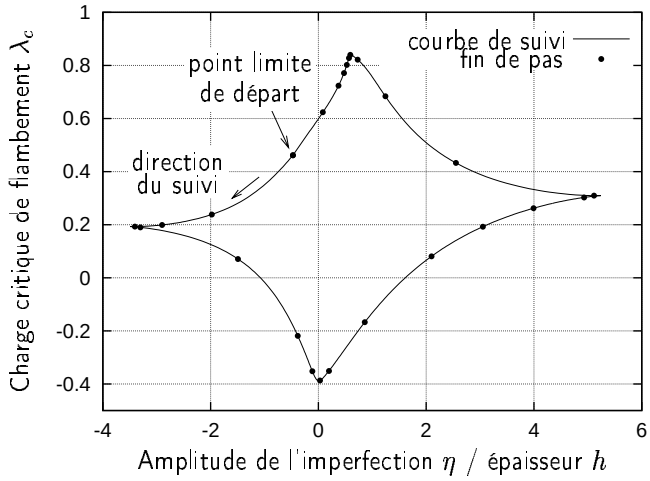


FIGURE 5.8 – *Réduction de la charge critique de flambement en fonction de l'amplitude du défaut de forme*

et inférieures de cette courbe correspondent respectivement à la variation des points limites maximum et minimum des courbes d'équilibre. Cette courbe montre également que les deux points limites se rapprochent lorsque l'imperfection augmente.[6] Pour deux valeurs extrêmes de l'imperfection $\eta/h = -3.5$ et $\eta/h = 5.3$, les points limites se croisent et échangent leur rôle. Au delà de ces valeurs, il n'y a plus de points limites, donc plus de phénomène de claquage.

Pour terminer, on peut noter que la totalité de la courbe de suivi de points limites a été obtenue par seulement 25 pas de continuation, i.e. avec seulement 25 décompositions de la matrice de rigidité tangente.

6. Nous avions déjà constaté ce phénomène dans l'exemple du § 4.7.2 consacré à la détection en présence d'un défaut initial

5.8 Bilan du chapitre et perspectives

L'algorithme présenté ici vient compléter ceux des chapitres 3 pour les branches d'équilibre et 4 pour la détection des points singuliers. L'ensemble forme un tout cohérent pour analyser, de façon numérique, l'influence d'une imperfection (ou d'un paramètre du modèle) sur la charge critique de flambage d'une structure. Ces trois algorithmes ont été implanté dans le code de calcul EF EVE qui est décrit dans le chapitre suivant. Deux types d'imperfections ont été complètement explicités, mais on peut « facilement » étendre ce travail à d'autres types d'imperfections ou de paramètres en suivant la même démarche.

Cet outil numérique permet de faire une étude « exacte » de l'évolution de la charge en fonction du paramètre choisi, en ce sens qu'il n'y a jamais aucune approximation introduite dans l'écriture de l'équation qui caractérise les points singuliers recherchés. Tout repose sur des expressions analytiques exactes des dérivées directionnelles de $\boldsymbol{K}_t$, et pas sur des approximations numériques comme on le trouve dans la plupart des travaux sur le sujet ([Reitinger et Ramm, 1995], [Magnusson et Svensson, 1998], [Eriksson *et al.*, 1999], ...). De même, pour l'algorithme de continuation, tout repose sur le calcul des dérivées exactes, à des ordres élevés, des équations à résoudre par rapport au paramètre de chemin a.

Ceci a des avantages et des inconvénients : l'utilisation d'expressions exactes à tous les niveaux entraine — on l'a vu dans ce chapitre — une certaine lourdeur[7] dans les expressions à manipuler et aussi dans la mise en œuvre[8]. En revanche, cela confère à l'algorithme une stabilité, une robustesse et un confort d'utilisation sans équivalent.

On avait conclu le chapitre précédent en évoquant la possibilité de décrire, grâce à la robustesse de la continuation de la M.A.N., un réseau de courbes complexes tel que celui qui émane d'une bifurcation multiple. Notre algorithme de suivi devrait également permettre d'en étudier l'évolution. C'est un atout considérable car ce genre d'étude reste très délicat à réaliser avec des algorithmes de type Newton.

Une limitation évidente de ce travail réside dans le fait que les équations doivent être suffisamment régulières, ce qui interdit (du moins pour l'instant) les phénomènes de décharge élastique. Il sera intéressant d'évaluer les effets de cette restriction en comparant nos résultats avec ceux de Legay et Combescure [2000] pour lesquels le phénomène de décharge élastique est pris en compte de manière rigoureuse.

Il n'y a pas non plus, dans ce travail, de résultats spécifiques concernant la recherche du défaut le plus défavorable. On peut néanmoins facilement comparer entre eux des défauts en lançant plusieurs analyses de suivi. Une manière de procéder plus élégante consiste à introduire comme variable additionnelle non pas l'amplitude du défaut de forme, mais la totalité du champ de déplacement qui définit le défaut. L'ajout d'un critère énergétique ([Deml et Wunderlich, 1997]) dans le système augmenté permet alors d'obtenir non seulement la courbe de suivi, mais aussi la forme du défaut le plus défavorable. Cette procédure, d'après les résultats qui figurent

7. cette lourdeur est pourtant limitée par l'utilisation d'un cadre quadratique
8. la moindre erreur de programmation au niveau du calcul des séries a des conséquences dramatiques

dans [DEML et WUNDERLICH, 1997], semble très efficace mais elle alourdit considérablement l'algorithme final. Cela pourrait toutefois constituer une suite logique à ce travail.

CHAPITRE 6

Le code de calcul EVE

Tous les algorithmes décrits dans les chapitres précédents ont été intégrés au code de calcul de structures EVE. Ce code maison, écrit en FORTRAN 90, possède de nombreux avantages qui ont facilité ces développements. Chaque nouvelle fonctionnalité a été ajoutée sous la forme d'un module, afin de respecter l'architecture globale de EVE. Par ailleurs, l'algorithme de suivi de points limites a été programmé de manière à pouvoir ajouter très facilement un nouveau type d'imperfection. Les possibilités d'évolution et la pérennité des lignes programmées ont donc été tout autant privilégiées que leur efficacité.

Plan du Chapitre 6

6.1. Description **149**
6.1.1. Fonctionnalités 149
6.1.2. Apports du FORTRAN 90 149
6.2. Organisation modulaire **150**
6.3. Les développements **151**
6.3.1. Les modules ajoutés 151
6.3.2. Une programmation aisée 153
6.4. Bilan du chapitre **154**

6.1 Description

EVE est un logiciel de calcul de structures par éléments finis destiné à la recherche et à l'enseignement. Il a été développé principalement par des enseignants-chercheurs et des thésards pour des besoins de recherche, mais aussi par des étudiants, sous la forme de projets de développement.

EVE version 3 est écrit en FORTRAN 90. La version 3.1 a été développée au début de cette thèse, en collaboration avec Isabelle Galliet et Bruno Cochelin. Les développements réalisés au cours de cette thèse seront incorporés à la version 3.2.

EVE est bien adapté pour dévélopper et tester de nouveaux éléments, pour mettre au point de nouveaux algorithmes de calcul, ou tout simplement pour s'initier aux éléments finis par la pratique.

Il permet aussi de réaliser des calculs de structures réelles avec des géométries complexes et un nombre de d.d.l. important. Cependant, ce n'est pas sa mission première. En effet, l'absence de pré- et de post-processeurs dédiés peuvent rendre cette tâche fastidieuse.

6.1.1 Fonctionnalités

La version 3.1 permet de résoudre les problèmes de mécanique suivants :

- élasticité 3D (briques à 8 et 20 noeuds)
- élasticité 2D en contraintes planes ou déformations planes, et en axisymétrique (triangles à 3 et 6 noeuds, quadrangles à 4 et 8 noeuds)
- plaques et coques (triangle facette plane CST+DKT)
- barres (ressort à 2 noeuds)

Les types d'analyses possibles sont :

- statique linéaire
- statique en non linéaire géométrique
- recherche de modes et charges de flambement linéaire
- dynamique transitoire linéaire
- dynamique transitoire en non linéaire géométrique
- recherche de modes et fréquences propres de vibrations
- vibrations forcées harmoniques en linéaire

6.1.2 Apports du FORTRAN 90

EVE 3 est la réécriture complète en FORTRAN 90 de l'ancienne version EVE 2.1 qui était en FORTRAN 77. Cette réécriture a été l'occasion d'introduire de nouvelles fonctionnalités :

- La gestion dynamique de la mémoire a remplacé le super-tableau classiquement utilisé en FORTRAN 77.

- L'orientation objet proposée par le FORTRAN 90 a été largement utilisée. Il en résulte une organisation du code en modules qui contiennent des types structurés et des méthodes qui agissent dessus.
- Le recours à la surdéfinition d'opérateurs permet de manipuler aisément des types vecteurs de d.d.l. ou encore des contraintes.

Il en résulte un programme plus court, plus modulaire, plus facile à lire, et qui se prête beaucoup mieux aux nouveaux développements que la version précédente. Le seul point négatif est que les performances sont légèrement altérées par l'orientation objet.

6.2 Organisation modulaire

L'architecture générale du code EVE est résumée dans le diagramme de la figure 6.1. Globalement, EVE est composé de 3 blocs :

- Le bloc (I) contient les modules de calcul. Ces modules renferment les algorithmes propres à chaque type d'analyse.
- Le bloc central (II) renferme les modules qui concernent la base de donnée et sa gestion. On

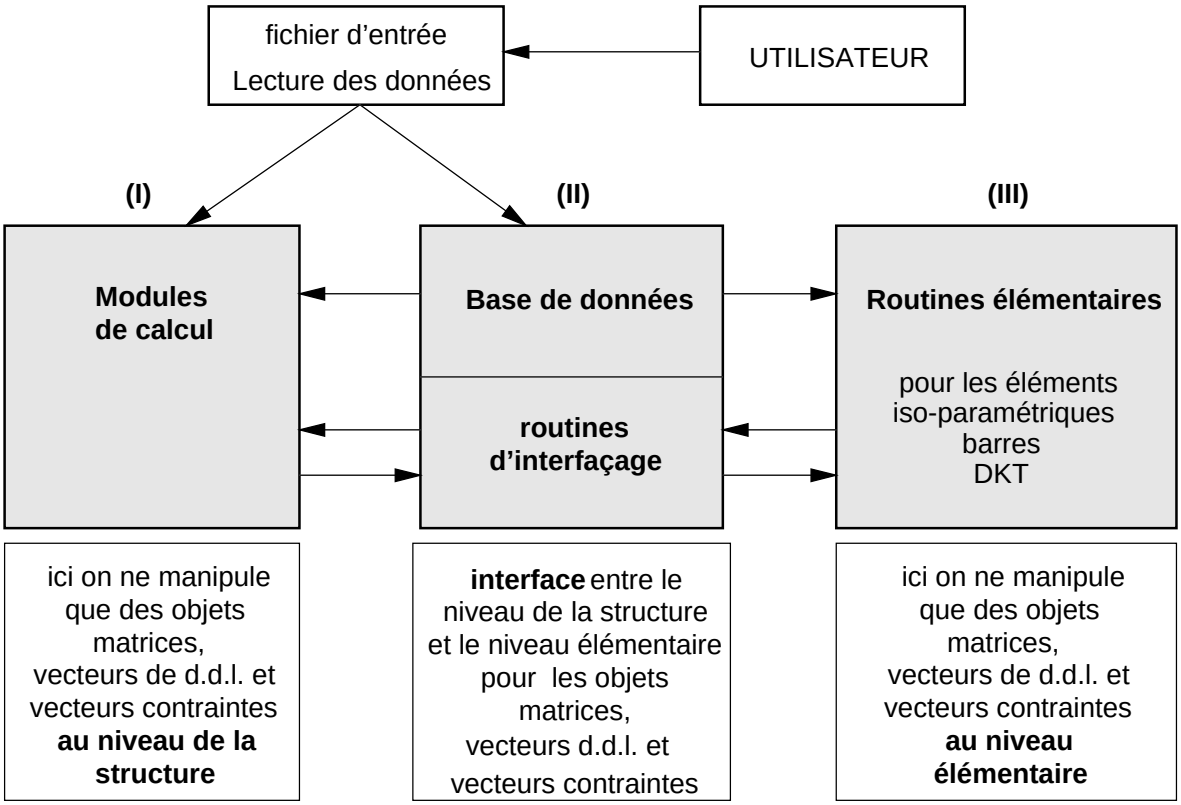


FIGURE 6.1 – *Organisation générale du code EVE*

y trouve également des modules qui permettent de faire l'interface entre le niveau global et le niveau élémentaire de la structure. Ce sont les routines contenues dans ces modules qui assurent l'assemblage des quantités élémentaires, et qui distribuent les quantités globales résultantes aux modules de calcul.

- Le bloc (III) contient les modules relatifs aux éléments. Dans ces modules, on trouve les routines de calcul des matrices élémentaires ($\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{B}_l$, $\boldsymbol{B}_{nl}$, $\boldsymbol{D}$, ...), des rigidités élémentaires, des contraintes élémentaires, des seconds membres pour la M.A.N., ...

L'accès aux données est donc très hiérarchisé. Dans les modules du bloc (III), on n'a accès qu'aux quantités élémentaires, alors que dans le bloc (I) on ne voit jamais ces quantités élémentaires. A titre d'exemple, lorsqu'un module de calcul a besoin de la matrice de rigidité tangente, un appel est fait à la routine correspondante du bloc (II). Cette routine fait appel à la routine de rigidité élémentaire pour chaque élément de la structure, puis assemble la matrice de rigidité globale et la retourne au module de calcul.

Grâce à cette organisation, il est très facile d'ajouter de nouvelles fonctionnalités : un nouveau module du bloc (I) pour un nouvel algorithme, un nouveau module du bloc (III) pour un nouvel élément, ...

La base de données est elle aussi très bien organisée. Le type structuré `T_MODELE` permet de stocker toutes les données relatives à un modèle éléments finis. Il contient quelques champs de type entier ou chaine de caractères, et des tableaux de type structuré `T_NOEUD`, `T_ELEMENT`, `T_MATERIAU`, `T_BLOCAGE`, `T_CHARGEMENT` et `T_FRONTIERE`. Pour transmettre toutes les données du problème à un module de calcul, il suffit donc de lui passer la variable de type structuré `T_MODELE` de la base de donnée.

Dans le bloc (II), on trouve également des fonctions qui permettent d'instancier des variables de type structuré `T_VECT_DDL` (vecteur de d.d.l.), `T_VECT_CONT` (vecteur de contraintes), `T_MAT_SYM_LC` (matrice ligne de ciel) et `T_MAT_SYM_CREUSE` (matrice creuse). C'est typiquement ce genre de variables qu'on utilise dans les modules de calcul. Les opérateurs d'addition, de soustraction, de multiplication et d'égalité ont été surchargés [1] afin de faciliter leur manipulation. On peut ainsi additionner deux vecteurs de d.d.l. ou de contraintes, et multiplier une matrice ligne ciel par un vecteur de d.d.l. sans plus de code que `w=u+v` ou `v=K*u`. Cela permet de rendre la programmation des modules de calcul très lisible.

6.3 Les développements

6.3.1 Les modules ajoutés

Lorsque notre travail de programmation a débuté, le code de calcul EVE était constitué de 7100 lignes de FORTRAN 90. Parmis ces lignes, 670 étaient consacrées à l'algorithme de calcul de

1. redéfinis pour s'adapter à ce type de variables

branche d'équilibre par la M.A.N. (y compris le calcul des seconds membres). Plusieurs modules ont vu le jour durant cette thèse et d'autres ont été modifiés (figure 6.2).

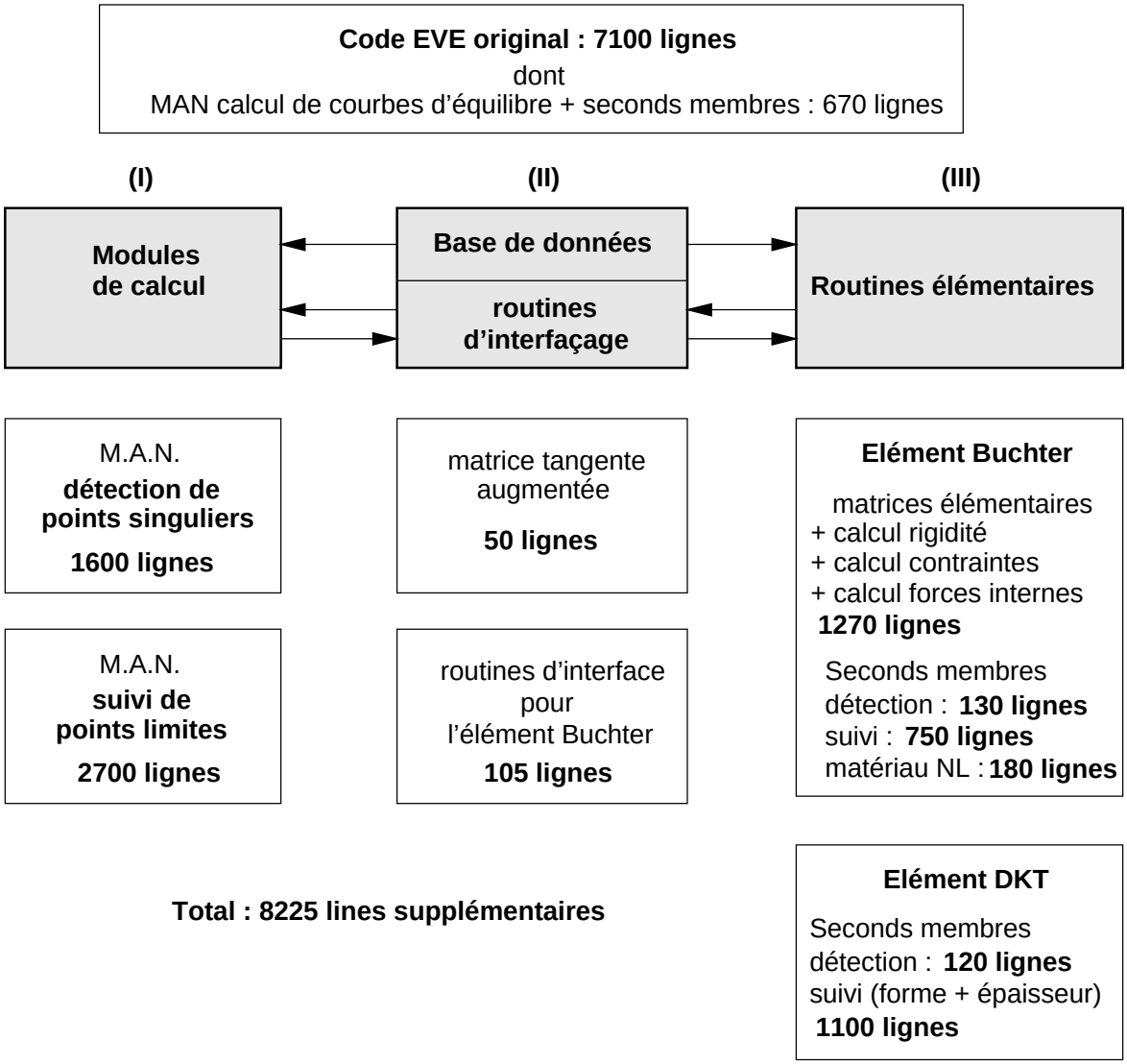


FIGURE 6.2 – *Nouveaux modules développés pendant cette thèse*

Dans le bloc (I), les modules concernant la détection des points singuliers et le suivi de points limites ont été crées. Ils contiennent les algorithmes de calcul propres à ces deux procédures (cf. § 4.4.3 et § 5.4.3). L'algorithme de suivi qui a été programmé est valide pour n'importe quel type d'imperfection. Si on veut traiter un nouveau type d'imperfection, il suffit de programmer les routines élémentaires des vecteurs $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{G}_p^{nl}$, qui sont les seuls à changer avec le type d'imperfection. De la même manière, si on veut que le suivi fonctionne pour les autres éléments qui existent dans EVE (éléments isoparamétriques 3D par exemple), il suffit de coder les seconds membres pour ces éléments.

Dans le bloc (III), les modules correspondant à l'élément DKT ont été modifiés. On y a

ajouté les routines de calcul des seconds membres pour les algorithmes de détection et de suivi. Par ailleurs, tous les modules concernant BÜCHTER *et al.* ont été ajoutés : modules de calcul des matrices élémentaires, des rigidités, des contraintes, des forces internes, ... , et modules de calcul des seconds membres (pour la détection, le suivi, les matériaux non-linéaires). Bien que les équations donnant les seconds membres paraissent parfois très compliquées, cela revient toujours à calculer des sommes. Dès qu'on sait programmer le calcul d'un second membre, les autres suivent très facilement si on s'y prend de manière systématique et rigoureuse.

Pour faire le lien entre ces modules élémentaires et les nouveaux modules de calcul, un certain nombre de fonctions d'interface ont été ajoutées dans le bloc (II). Dans ce même bloc, il a également été nécessaire de créer une fonction qui permet d'instancier des matrices « augmentées ». Il s'agit en fait de la matrice de rigidité tangente classique à laquelle on ajoute une ligne et une colonne. Ce type de matrice est utilisé lors du calcul des coefficients des séries pour le suivi de points limites (cf. § 5.4.3). De plus, la base de données a été aménagée pour accueillir les matériaux non-linéaires.

Au total, ces développements représentent plus de 8000 lignes de programmation. Il en résulte un code qui a doublé en taille en comparaison avec la version de départ, et qui devrait constituer la version 3.2 de EVE.

6.3.2 Une programmation aisée

Comme on l'a déjà précisé à la fin du paragraphe 6.2, la surchage d'opérateurs permet d'obtenir des lignes de programmation plus lisibles et qui ressemblent beaucoup aux équations sur le papier. Cela a grandement facilité notre travail de programmation, ce qui nous a permis d'obtenir rapidement un programme qui fonctionne. En ce sens, on peut dire que EVE a été pensé pour (et par) des gens qui développent et utilisent la M.A.N.

A titre d'exemple, le calcul des contraintes à l'ordre p dans le cas de l'élément BÜCHTER *et al.* (équation (3.48))

$$[\boldsymbol{S}_p] = [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_0][\boldsymbol{q}_p] + [\boldsymbol{D}]\,[\boldsymbol{B}_\alpha][\boldsymbol{\alpha}_p] + [\boldsymbol{S}_p^{nl}]$$

se programme de la manière suivante, au niveau global de la structure :

```
S(P) = CONTRAINTES_LINEARISEES(MOD,U0,U(P)) + CONTRAINTES_ALPHA(MOD,ALPHA_P) + SPNL
```

- `S(P)` et `SPNL` sont deux variables de type structuré `T_VECT_CONT`. De même, `U0` et `U(P)` sont deux variables de type structuré `T_VECT_DDL`.
- `CONTRAINTES_LINEARISEES` et `CONTRAINTES_ALPHA` sont deux fonctions qui prennent comme arguments des vecteurs de d.d.l. et la variable `MOD`, de type structuré `T_MODELE`, qui contient les données du problème. Ces fonctions vont appeler les routines élémentaires autant de fois que nécessaire puis assembler les vecteurs contraintes globaux. Elles retournent chacune une variable de type structuré `T_VECT_CONT`.
- Finalement, l'égalité et les additions peuvent se faire directement sur les variables de type structuré `T_VECT_CONT` car les opérateurs `=` et `+` ont été surchargés.

6.4 Bilan du chapitre

EVE est un code de calcul qui se prête admirablement bien au développement d'algorithmes numériques basés sur la Méthode des Eléments Finis. Son organisation modulaire permet de le faire évoluer facilement. L'utilisation de types structurés et de la surcharge d'opérateurs simplifie le travail de programmation des algorithmes de calcul et rend le code très lisible.

Le code EVE est encore très jeune. C'est un inconvénient car il ne possède pas toutes les fonctionnalités qu'on peut attendre d'un code éléments finis. Mais c'est aussi (et surtout) un avantage car le nombre total de lignes de programmation reste faible. Cela permet d'avoir sans trop de difficultés une vue d'ensemble du code. Grâce à cette vision globale, il est possible de remettre en cause régulièrement l'organisation de la base de donnée et des modules, de manière à les faire évoluer. De nombreuses réflexions ont été menées à ce sujet durant cette thèse. Ainsi, en plus des développements détaillés dans le paragraphe précédent, la version 3.2 de EVE devrait comporter une base de donnée et des modules élémentaires organisés de manière différente, avec une orientation objet plus marquée.

La version 3.1 de EVE est disponible en téléchargement sur le site web qui lui est consacré[2]. Cette version contient toutes les fonctionnalités décrites dans le paragraphe 6.1.1 (dont le calcul de branches d'équilibre par la M.A.N.). De plus, elle est accompagnée d'une notice d'utilisation et de développement, ainsi que d'une série d'exemples.

2. à l'adresse `http://esm2.imt-mrs.fr/~baguet/eve/`

CHAPITRE 7

Applications

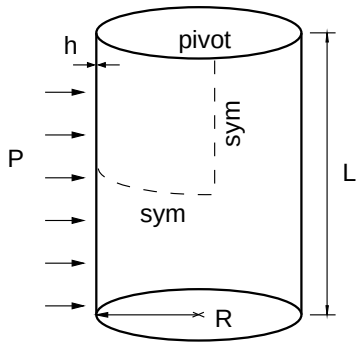
Ce dernier chapitre est consacré à la mise en pratique des différents algorithmes qui ont été développés. Quatre exemples sont traités. Il s'agit soit d'exemples classiques (cylindre sous pression externe, cylindre en compression) soit d'exemples où les interactions de modes (poutre en C) et les non-linéarités matérielles (cylindre avec ouvertures) jouent un rôle prépondérant. Ces quelques exemples ont permis d'exploiter toutes les fonctionnalités du code de calcul qui a été développé. Pour chacune des structures traitées, une analyse de sensibilité est menée. Les résultats qui découlent de ces quatre études mettent en évidence la robustesse et la fiabilité des procédures de calcul basées sur la M.A.N. Ils démontrent également les excellentes performances de l'élément de coque BÜCHTER *et al.*.

Plan du Chapitre 7

7.1. Coque cylindrique sous pression externe 157
7.2. Coque cylindrique en compression axiale 159
7.3. Poutre à section « en C » 162
7.4. Coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires 170

7.1 Coque cylindrique sous pression externe

Ce premier exemple concerne un cylindre soumis à une pression externe uniforme et en appui simple à chaque extrémité. Sa géométrie ainsi que ses propriétés matérielles sont définies dans la figure 7.1. En utilisant les conditions de symétrie appropriées, seul un huitième du cylindre a été discrétisé : la moitié suivant la longueur pour un secteur de 90°. Un maillage constitué de 320 éléments DKT (32 sur la circonférence et 5 sur la hauteur), ce qui représente 1188 d.d.l., a été utilisé. Le premier mode de flambement du cylindre est représenté dans la figure 7.2. Il



Géométrie :

$L = 10\ m$

$R = 1\ m$

$h = 10\ mm$

Matériau :

$E = 210000\ MPa$

$\nu = 0.3$

FIGURE 7.1 – *Géométrie et propriétés matérielles du cylindre sous pression externe*

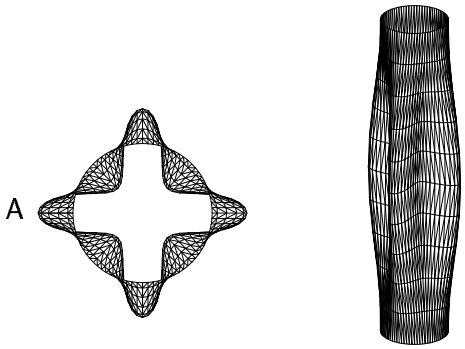


FIGURE 7.2 – *Premier mode de flambement du cylindre sous pression externe*

a été normé en imposant une plus grande composante unitaire, de manière à donner l'allure de l'imperfection pour notre étude de sensibilité. Durant l'analyse de sensibilité, on contrôle l'amplitude de l'imperfection à l'aide du paramètre Λ.

Les courbes d'équilibre du cylindre pour différentes valeurs de l'amplitude de l'imperfection sont représentées dans la figure 7.3. Pour mener à bien notre étude de sensibilité, un point limite de départ a été isolé sur la courbe d'équilibre correspondant à une amplitude $\Lambda = h/4$. La procédure de suivi de points limites a été menée dans les deux directions à partir de ce point limite. La courbe de suivi qui résulte de ce calcul est également tracée dans la figure 7.3.

Sur cette figure, on constate que chaque branche d'équilibre admet deux points limites et que

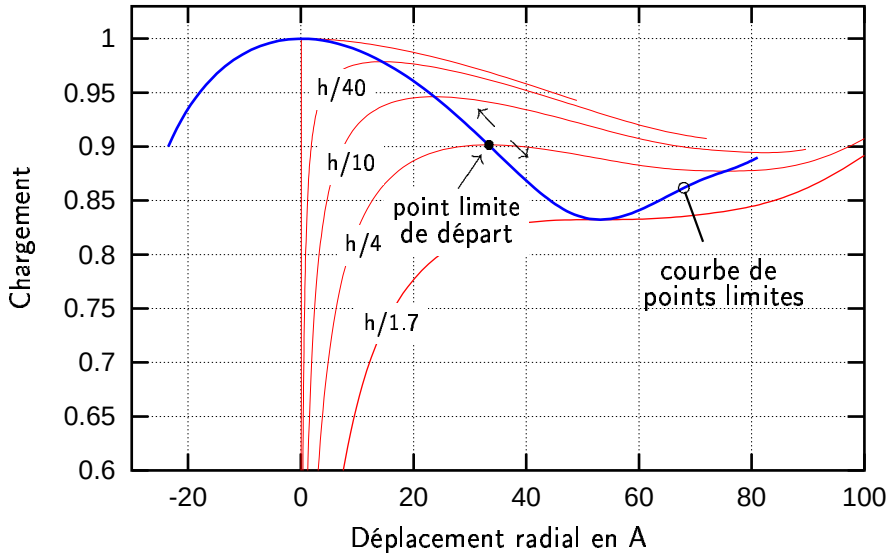


FIGURE 7.3 – *Courbes d'équilibre du cylindre pour différentes valeurs de l'imperfection (de 1/40=0.025 à 1/1.7=0.58 fois l'épaisseur de la coque) et courbe de suivi de points limites*

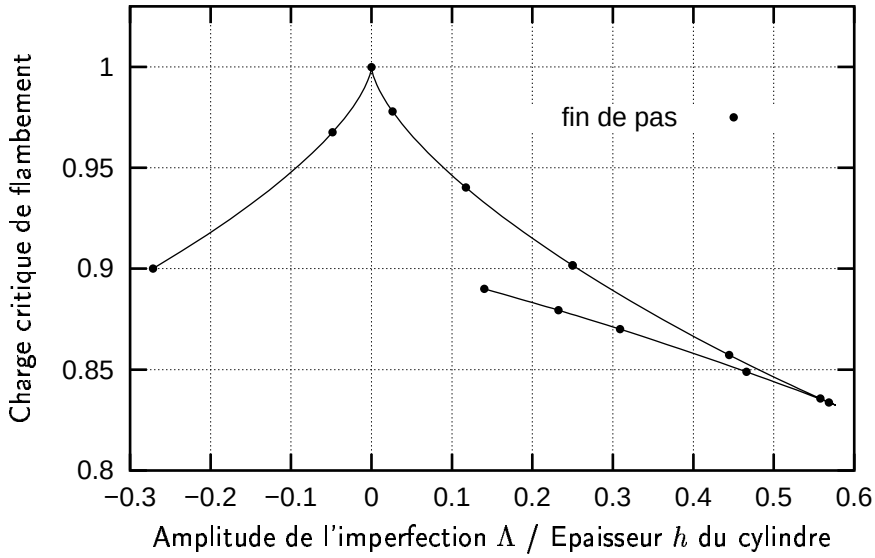


FIGURE 7.4 – *Courbe de réduction de la charge critique de flambement en fonction de l'amplitude de l'imperfection*

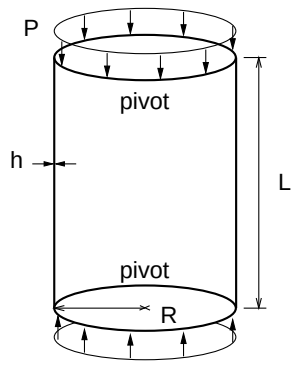
la courbe de suivi passe par chacun d'eux. Pour une valeur extrême $\Lambda = h/1.7$ de l'amplitude de l'imperfection, les deux points limites sont confondus. Ils se croisent et échangent leur rôle. Ainsi, avec la partie gauche (avant ce point limite extrême) de la courbe de suivi, on obtient des informations sur le premier point limite et, avec la partie droite de la branche de suivi, des informations sur le second point limite.

Comme on s'y attendait, on voit que la charge critique associée aux points limites diminue lorsque l'amplitude de l'imperfection augmente. Cette structure est donc sensible au défaut de forme qu'on lui a appliqué. On retrouve ces informations sur la courbe de la figure 7.4. Cette courbe donne directement la réduction de charge critque en fonction de l'amplitude de l'imperfection. A titre d'exemple, à une imperfection d'amplitude 0.1 fois l'épaisseur du cylindre correspond une charge critique $\lambda_c \simeq 0.95$. C'est bien cette valeur qui correspond au premier point limite de la courbe d'équilibre de la figure 7.3 obtenue pour la même imperfection. Pour une imperfection d'amplitude 0.3 fois l'épaisseur, la courbe de réduction donne deux charges critiques : une pour chaque point limite de la courbe d'équilibre correspondante. La valeur de l'imperfection au-delà de laquelle il n'y a plus de point limite (donc plus de phénomène de claquage de la coque) est très nette sur cette courbe de réduction ($0.58h$, i.e. h/1.7).

Cette analyse de sensibilité a nécessité très peu de pas de calcul. En effet, la partie utile de la courbe de réduction[1] a été obtenue en seulement 5 pas, ce qui signifie que seulement 5 décompositions de la matrice de rigidité tangente ont été nécessaires.

La courbe de réduction comporte de nombreux points anguleux. Ces point sont dus à la projection de la courbe de suivi sur le plan $(\boldsymbol{u}, \lambda_c)$. Dans l'espace $(\boldsymbol{u}, \lambda_c, \Lambda)$, la courbe de suivi est bien régulière et ces points anguleux correspondent en fait à de simples points limites en Λ et en λ.

7.2 Coque cylindrique en compression axiale



Géométrie :

$L = 20.32\ m$

$R = 2.54\ m$

$h = 6.35\ mm$

Matériau :

$E = 207000\ MPa$

$\nu = 0.3$

FIGURE 7.5 – *Géométrie et propriétés matérielles du cylindre en compression axiale*

1. la partie qui correspond à la variation du premier points limite, de $\Lambda = 0$ à $\Lambda = h/1.7$

La géométrie et les propriétés matérielles du cylindre sont définies dans la figure 7.5. Cet exemple est l'un des plus classiques en stabilité des coques minces. C'est également l'un des plus spectaculaires car la sensibilité aux imperfections est très importante pour ce type de structure avec un chargement axial.

Grâce à l'emploi de conditions de symétrie adéquates, seul un huitième du cylindre a été maillé (demi-hauteur, secteur de 90°). Le maillage utilisé comporte 24 éléments BÜCHTER *et al.* (4 sur la hauteur et 6 sur la circonférence) et 558 d.d.l. Les propriétés géométriques du cylindre ont été choisies[2] de manière à ce que le premier mode de flambement ait la même forme que dans l'exemple précédent (mode 1 suivant la hauteur et mode 4 suivant la circonférence). C'est ce mode qui a été choisi pour donner l'allure de l'imperfection. La charge critique de flambement prédite par la théorie pour ce mode vaut

$$S_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{h}{R} = 313MPa$$

ce qui correspond à un chargement linéique $N_{cr} = S_{cr} \times h = 1.98.10^6 N/m$. Un calcul aux valeurs propres sur le modèle éléments finis fournit quant à lui un chargement linéique critique $N_{cr} = S_{cr} \times h = 1.92.10^6 N/m$. L'écart avec la théorie est de 3% seulement.

La courbe de suivi reliant tous les points limites lorsque l'imperfection varie, ainsi que les courbes d'équilibre du cylindre pour différentes valeurs de l'amplitude de l'imperfection, sont représentées dans la figure 7.6. Toutes les courbes ont été normalisées par rapport à la charge critique. Pour une amplitude de l'imperfection Λ supérieure à 20 fois l'épaisseur de la coque, la courbe d'équilibre du cylindre n'admet plus de point limite, i.e. il n'y a plus de phénomène de claquage. Pour cette valeur de l'imperfection, la réduction de charge critique est très importante (figure 7.7). En effet, la charge critique de flambement est environ 80% plus faible que pour la coque parfaite.

La courbe de réduction de charge critique de la figure 7.7 est typique des bifurcations symétriques instables (cf. figure 1.24, page 32). Toutefois, cette courbe peut paraître surprenante car la charge critique n'est pas maximale lorsque le défaut est nul. On observe un décalage de la courbe vers des valeurs négatives de l'imperfection, et la charge critique est en fait maximale pour une amplitude de l'imperfection $\Lambda_0 \simeq -5h$.

Ce genre de décalage est bien connu des expérimentateurs qui ne disposent pas de structures parfaites. On retrouve ces courbes avec décalage dans les travaux de ROORDA [1965] qui a été un des tout premiers à mener des études expérimentales de sensibilité aux imperfections[3].

2. en fixant $h/R = 400$ (coque très mince), et en utilisant le « cercle de KOITER »
3. voir aussi [THOMPSON et HUNT, 1973] page 75

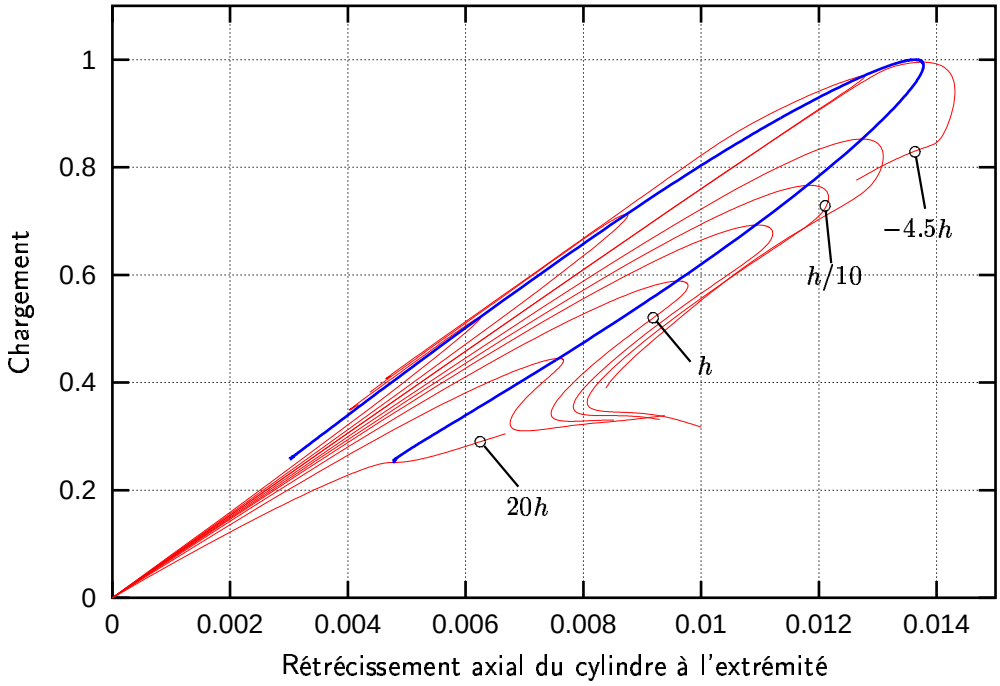


FIGURE 7.6 – *Courbes d'équilibre du cylinre en compression pour différentes valeurs de l'imperfection* ($-10h$, $-7h$, $-4.5h$, $-2h$, $h/10$, $2h$, $5h$, $10h$, $20h$) *et courbe de suivi de points limites*

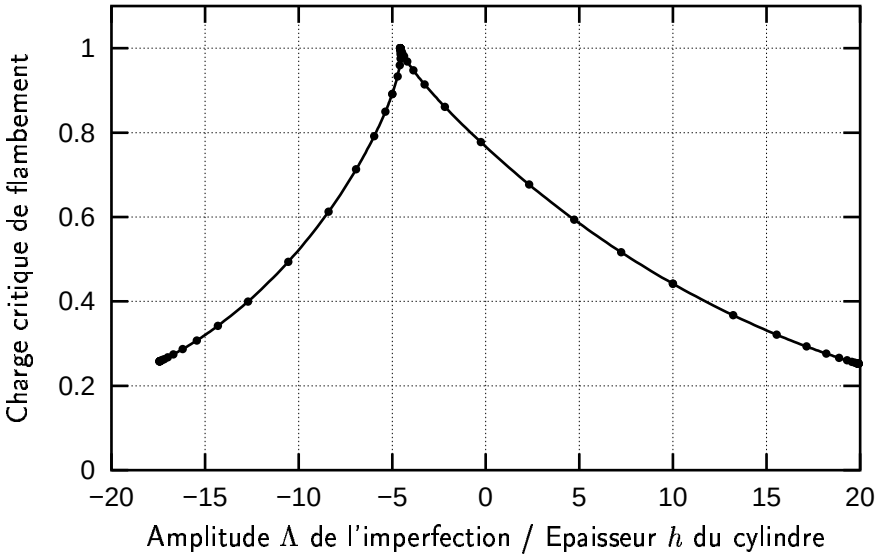


FIGURE 7.7 – *Courbe de réduction de réduction de la charge critique de flambement en fonction de l'amplitude de l'imperfection*

7.3 Poutre à section « en C »

Le troisième exemple concerne une poutre à section « en C », en appui simple sur ses extrémités, avec des propriétés géométriques et matérielles décrites dans la figure 7.8. Chacune des extrémités de la poutre est soumise à un chargement axial de compression uniforme $P = 125000\lambda$. Cet exemple est très intéressant car le mode global (mode d'EULER) et les modes locaux de la poutre sont très proches les uns des autres, et son comportement est très fortement conditionné par l'interaction entre ces modes. Cette interaction entre modes augmente aussi très fortement la sensibilité aux imperfections, comme nous allons le voir.

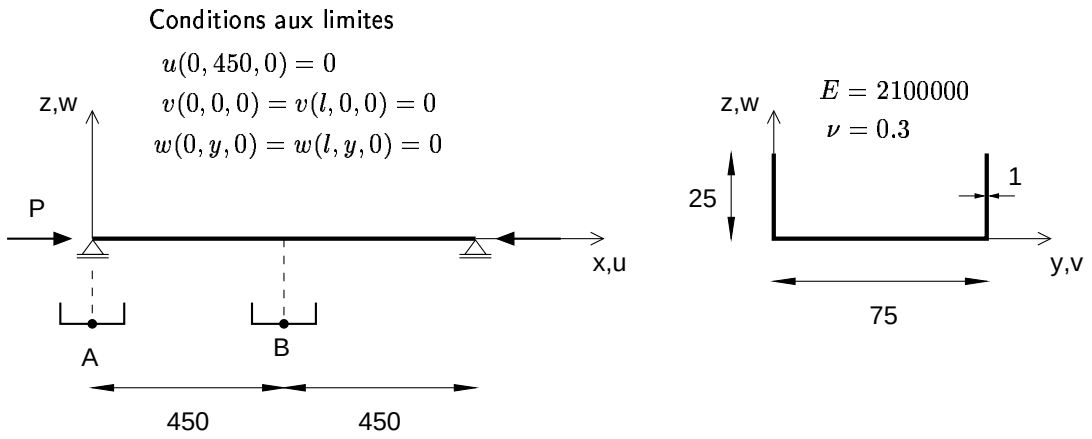


FIGURE 7.8 – *Géométrie et propriétés matérielles de la poutre*

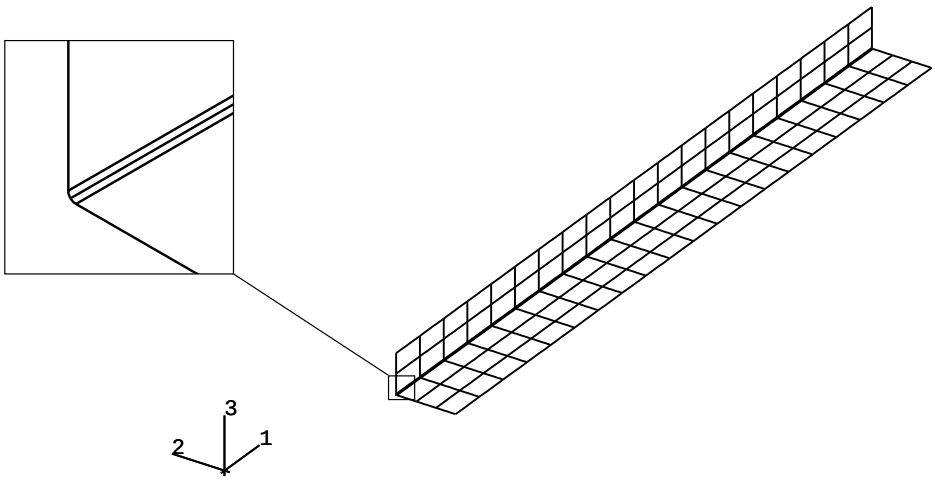


FIGURE 7.9 – *Maillage du quart de poutre*

En utilisant des conditions de symétries, seul un quart de la poutre a été discrétisé. Le maillage utilisé est représenté dans figure 7.9. Comme on peut le voir sur la partie agrandie du

maillage, deux éléments ont été ajoutés pour modéliser un raccord circulaire entre le bord et le fond de la poutre. Cela est indispensable car on ne peut modéliser directement les angles droits avec l'élément BÜCHTER *et al.*. Cela vient du fait que les d.d.l. de cet élément sont tous de type déplacement : les déplacements aux nœuds et les déplacements de la normale à l'élément en chaque nœud. Lorsqu'on modélise un angle droit avec cet élément (figure 7.10), à chacun des nœuds qui forment le coin sont associées deux normales. Or, les d.d.l. en un nœud ne contiennent que les déplacements d'une seule normale. Si on utilise cette modélisation, les variations des deux normales sont donc décrites par un seul et même champ de déplacement. Bien évidemment, cela

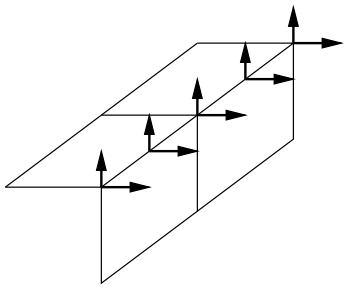


FIGURE 7.10 – *Normales aux éléments* BÜCHTER *et al. dans le cas d'un angle droit*

conduit à des résultats erronés, comme on peut le constater avec les courbes de la figure 7.11. Les deux courbes de cette figure représentent le raccourcissement axial de la poutre en compression en fonction du chargement. L'une des courbes a été obtenue avec le code de calcul Abaqus, en utilisant un maillage composé de 20×(2+3)=120 éléments de coque S8R5 (2106 d.d.l.). L'autre courbe a été obtenue par la M.A.N. avec l'élément BÜCHTER *et al.* (même maillage). On constate que les solutions sont singulièrement différentes, la bonne solution étant donnée par Abaqus.

C'est pour pallier ce problème qu'on a ajouté des éléments au niveau du coin pour modéliser un raccord. De cette façon, chaque nœud ne comporte toujours qu'une seule normale. Le nouveau maillage comporte alors 20×(2+2+3)=140 éléments (2850 d.d.l.). La comparaison avec Abaqus (figure 7.12) donne cette fois des résultats identiques. On peut par ailleurs noter que l'introduction d'un raccord circulaire dans le modèle ne modifie pas la solution car on obtient les mêmes résultats avec Abaqus dans le cas d'un raccord droit ou circulaire. De plus, la solution est identique à celle obtenue par ERIKSSON *et al.* [1999] qui avaient utilisé un modèle avec 3600 éléments triangulaires (11466 d.d.l.), ce qui nous laisse penser que notre maillage est suffisamment fin.

Une analyse de flambement linéaire (problème aux valeurs propres) nous a fourni les premiers modes de flambement représentés dans la figure 7.13.

Il s'agit soit de modes de flambement locaux, soit de modes d'ensemble. Les modes locaux sont désignés par le nombre de « bosses » et de « creux » sur la longueur. Les trois premiers

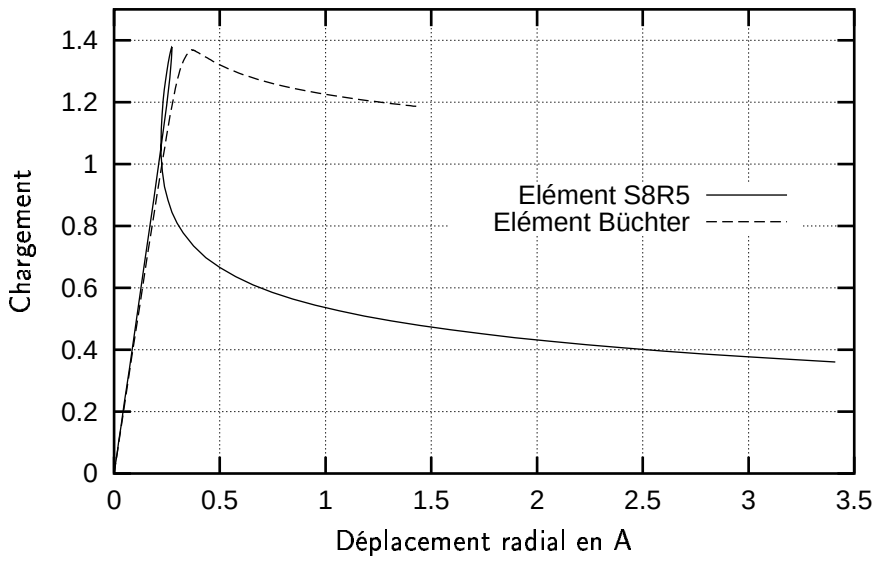


FIGURE 7.11 – *Maillage (incorrect) avec raccord droit. Comparaison des résultats obtenus avec l'élément S8R5 d'Abaqus et l'élément* BÜCHTER *et al.*

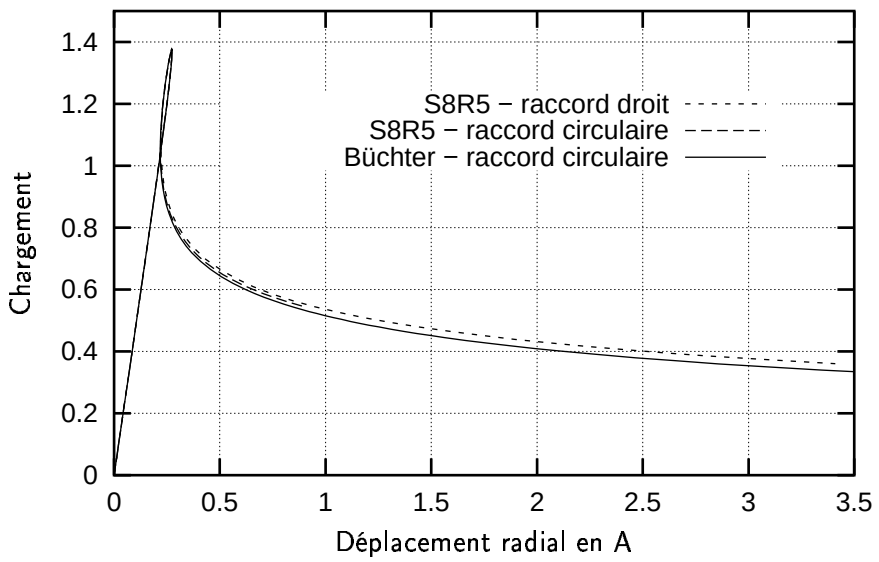
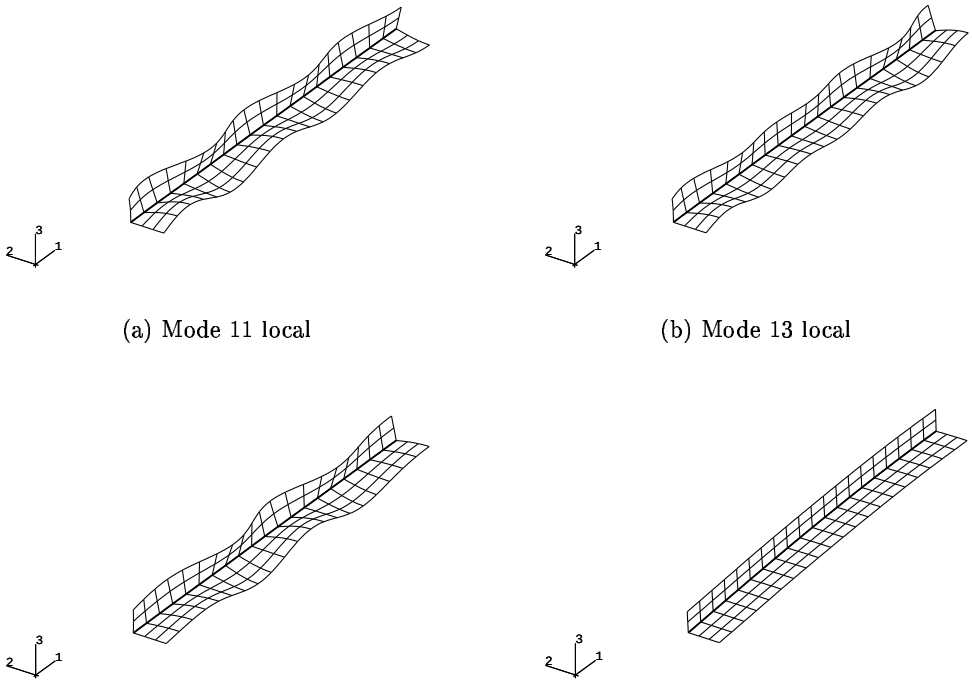


FIGURE 7.12 – *Maillage avec raccord circulaire. Comparaison des résultats obtenus avec l'élément S8R5 d'Abaqus et l'élément* BÜCHTER *et al.*



(a) Mode 11 local

(b) Mode 13 local

(c) Mode 9 local

(d) Mode global de flexion

FIGURE 7.13 – *Modes propres du quart de poutre*

No.	Forme du mode	Charge critique	ERIKSSON *et al.* [1999] (modèle de coque)	LANZO et GARCEA [1996] (NASTRAN)
1	11 local	1.4086	1.4095	1.4102
2	10 local	—	1.4148	1.4150
3	12 local	—	1.4237	1.4237
4	13 local	1.442	1.4424	1.4371
5	9 local	1.4518	1.4518	1.4569
6	14 local	—	1.4786	1.4685
7	flexion globale	1.4637	1.4871	1.4656

TABLEAU 7.1 – *Forme des 7 premiers modes propres et charge critique associée*

modes sont des modes locaux alors que le quatrième est un mode global de flexion. Les charges critiques de flambement associées à ces modes sont reportées dans le tableau 7.1. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de ERIKSSON *et al.* [1999] et à ceux de LANZO et GARCEA [1996].

Pour obtenir ces modes, ERIKSSON *et al.* ont détecté les points de bifurcations correspondant le long de la branche d'équilibre fondamentale, alors que LANZO et GARCEA ont effectué un calcul de flambement linéaire avec le code de calcul Nastran en utilisant 140×(4+4+12)=2800 éléments de coque CQUAD4. Tous ont travaillé sur la poutre entière. C'est pour cela qu'ils obtiennent quelques modes supplémentaires. En ne maillant qu'un quart de la poutre, nous ne pouvons pas obtenir les modes non-symétriques. Tous ces résultats sont en très bon accord. Les résultats obtenus par détection sur la branche fondamentale concordent bien avec ceux obtenu par analyse de flambement linéaire car la branche fondamentale est parfaitement linéaire. En effet, elle correspond uniquement à des déformations de membrane (compression uniforme de la poutre).

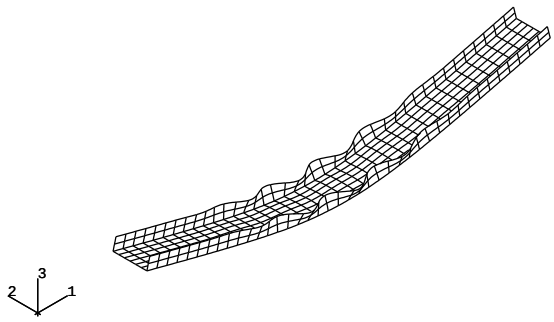


FIGURE 7.14 – *Configuration déformée de la poutre en post-flambement*

L'étude du comportement de la poutre en post-flambement permet de mettre en évidence les interactions entre modes. Les branches bifurquées correspondant au premier mode (mode 11 local) sont tracées sur la courbe de la figure 7.15. On y a également tracé la courbe d'équilibre de la poutre soumise à une imperfection donnée par le modeglobal de flexion. L'amplitude de cette imperfection a été fixée de manière à ce que le déplacement vertical au point B ait la valeur $w_B = -0.1$. Il est difficile de différencier ces courbes tant leur comportement en post-flambement est semblable. Pour mieux comprendre ce qui se passe, il est nécessaire de faire un zoom au niveau du premier point de bifurcation (figure 7.16). La bifurcation est provoquée par le mode 11 local mais, immédiatement après celle-ci, le mode global de flexion est également activé. Quelle que soit la direction dans laquelle est initié le mode local (w positif ou négatif), le mode global se développe toujours dans la même direction (w négatif, i.e. flexion vers le bas). C'est pour cette raison que les deux branches bifurquées partent dans la même direction. La déformée correspondant ces branches est donnée par la figure 7.14. On constate qu'il s'agit bien du mode 11 local d'origine couplé au mode global de flexion.

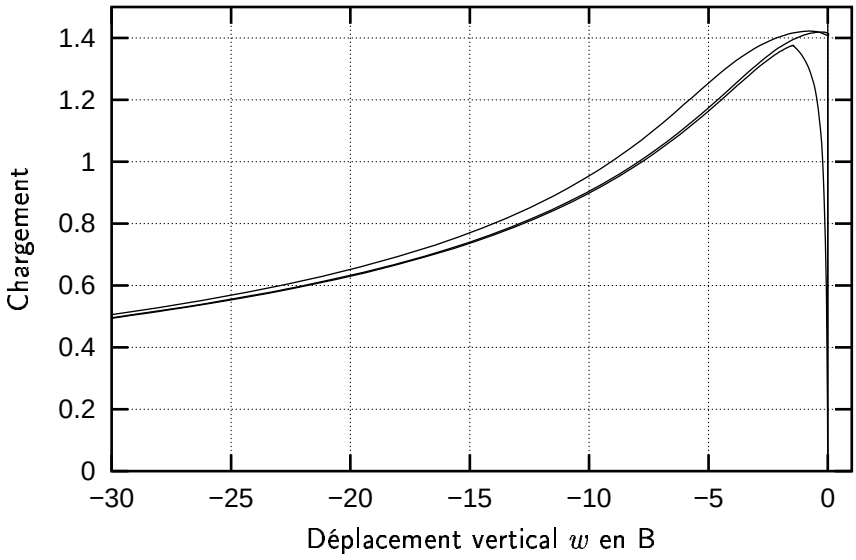


FIGURE 7.15 – *Courbes de post-flambement correspondant au premier mode propre (mode 11 local) et courbe d'équilibre pour une imperfection correspondant au mode global de flexion* ($\Lambda = h/10$)

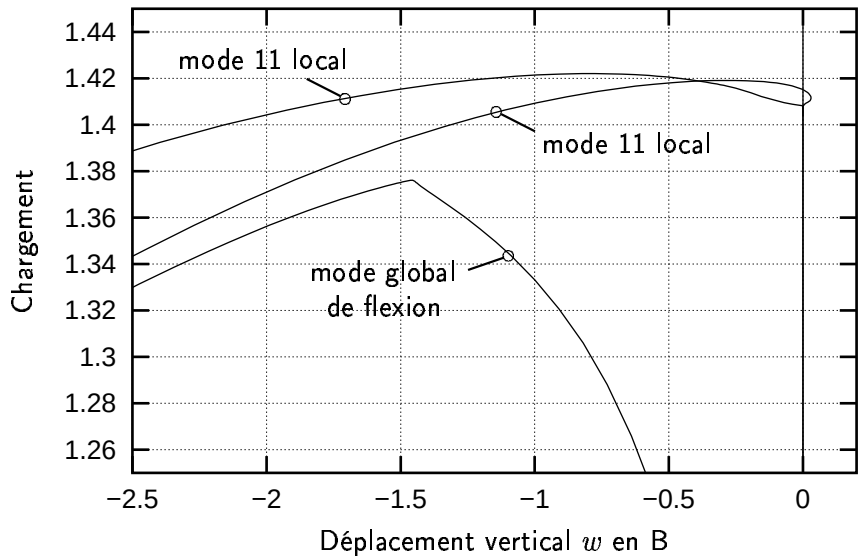


FIGURE 7.16 – *Agrandissement de la figure 7.15 au niveau du point de bifurcation*

L'interaction est encore plus flagrante lorsqu'on regarde l'allure de la courbe d'équilibre avec défaut global de flexion. Jusqu'à ce qu'elle rencontre les deux branches bifurquées, cette courbe correspond à des états de flexion pure. Puis, le mode 11 local est activé et la courbe opère un brusque virage[4] dans la même direction que les branche bifurquées. Sur le reste de la courbe, la déformée correspond également à celle de le figure 7.14. Quel que soit le mode avec lequel on initie le post-flambement, il y a inévitablement interaction.

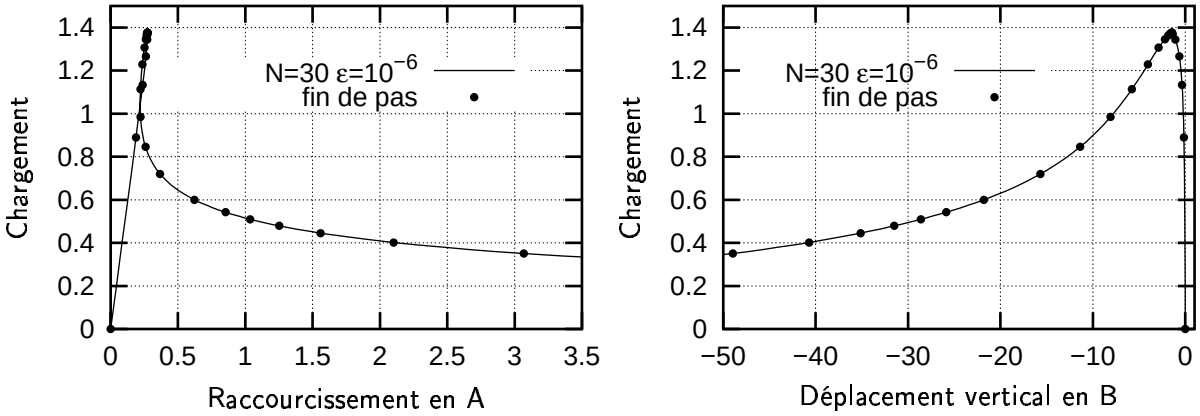


FIGURE 7.17 – *Courbes charge/déplacement pour une imperfection de flexion d'amplitude* $\Lambda = h/10$ *vers le bas*

Intéressons-nous maintenant à la sensibilité de la structure aux imperfections. Pour cela, on considère la même imperfection qu'on a décrite auparavant, i.e. un défaut de forme global de flexion. Pour commencer, dans la figure 7.17, on a tracé les courbes d'équilibre de la poutre pour une amplitude de l'imperfection telle que $w_B = -0.1$. La première courbe est la même que dans les figures 7.11, 7.12. La seconde correspond à celle de la figure 7.16.

On a ensuite fait varier l'imperfection. Les résultats correspondant sont reportés dans les figures 7.18 et 7.19. Les différentes courbes d'équilibres correspondent à des défauts de flexion tels que $w_B = -0.1$, $w_B = -2$, $w_B = -10$, $w_B = -40$. La courbe en trait plus épais est la branche de suivi de points limites. Comme on peut le voir sur la figure 7.20, la réduction de charge critique est très importante. Pour une imperfection telle que $w_B = -50$ ($\Lambda = 50$ en abscisse), la réduction est de l'ordre de 85%. Cette très forte sensibilité aux imperfections est caractéristique des structures pour lesquelles les modes propres sont coïncidents ou quasi-coïncidents. C'est très souvent le cas des structures optimisées.

En choisissant judicieusement les dimensions de ces structures et en utilisant des raidisseurs, il est possible de repousser vers le haut les charges critiques des premiers modes de flambement. Toutefois la conséquence fâcheuse est que tous les modes sont rapprochés, ce qui accroît très fortement la sensibilité aux imperfections.

4. qui n'a rien à voir avec une bifurcation

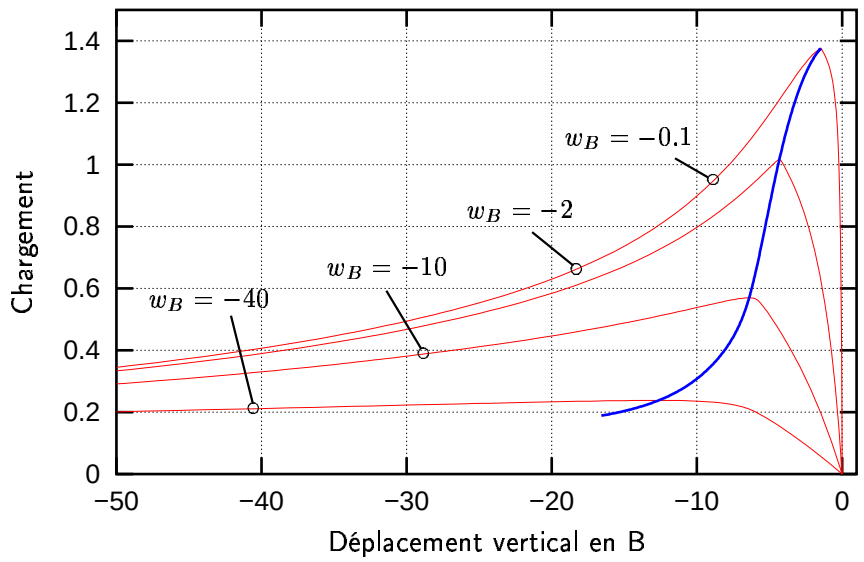


FIGURE 7.18 – *Courbes d'équilibre pour différentes valeurs de l'imperfection (mode 11 local) et courbe de suivi de points limites*

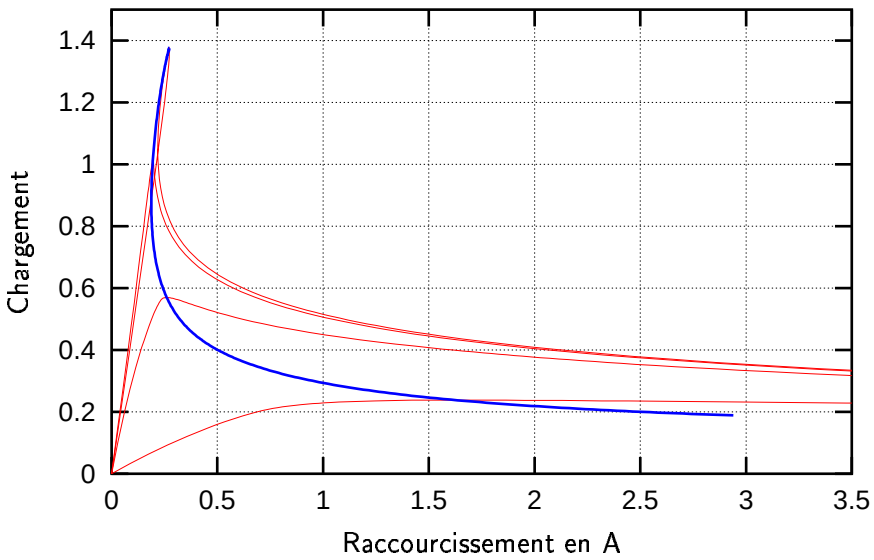


FIGURE 7.19 – *Courbes d'équilibre pour différentes valeurs de l'imperfection (mode 11 local) et courbe de suivi de points limites*

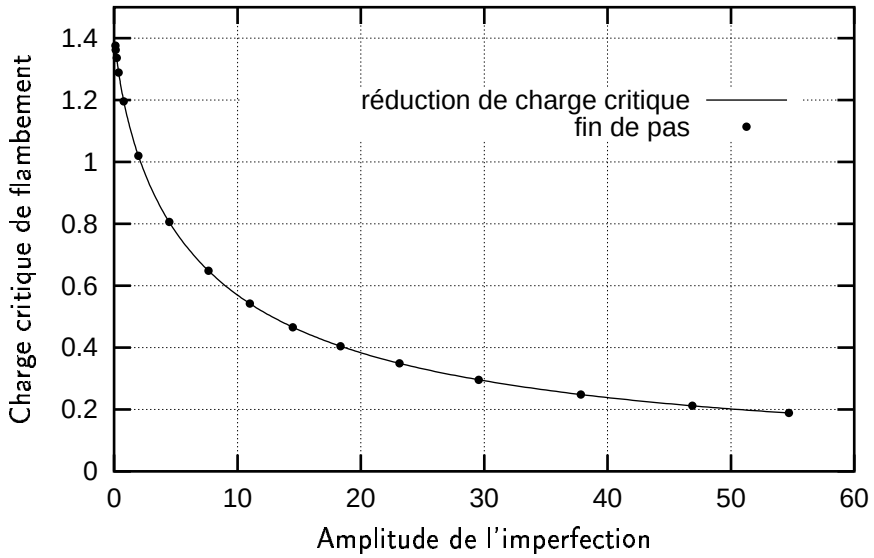
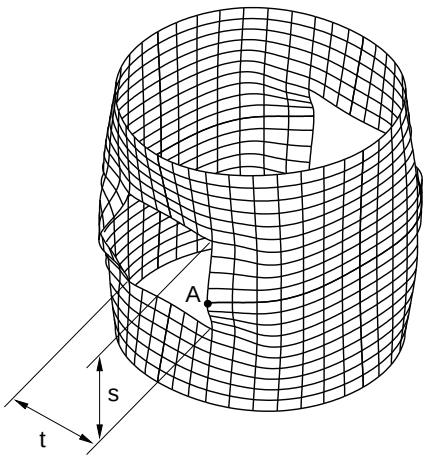


FIGURE 7.20 – *Courbe de réduction de la charge critique de flambement en fonction de l'amplitude de l'imperfection (mode 11 local)*

7.4 Coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires



Géométrie :

$L = 200\ mm$

$R = 100\ mm$

$h = 1\ mm$

$s = 80\ mm$

$t = 79.5\ mm$

Matériau :

$E = 71122.5\ MPa$

$\nu = 0.3$

FIGURE 7.21 – *Configuration déformée de la coque cylindrique soumise à une pression axiale uniforme* $P = 981\ N/mm$

Le dernier exemple concerne une coque cylindrique avec deux ouvertures opposées placées à mi-hauteur. Cette structure a été étudiée par de nombreux auteurs. Parmis les premiers, citons NOOR [1981] et RIKS [1984]. Les propriétés géométriques et matérielles de la coque sont définies dans la figure 7.21. La structure est soumise à l'action d'une pression axiale uniforme $P = 981 N/mm$. En utilisant des conditions de symétrie, un huitième seulement de la coque a

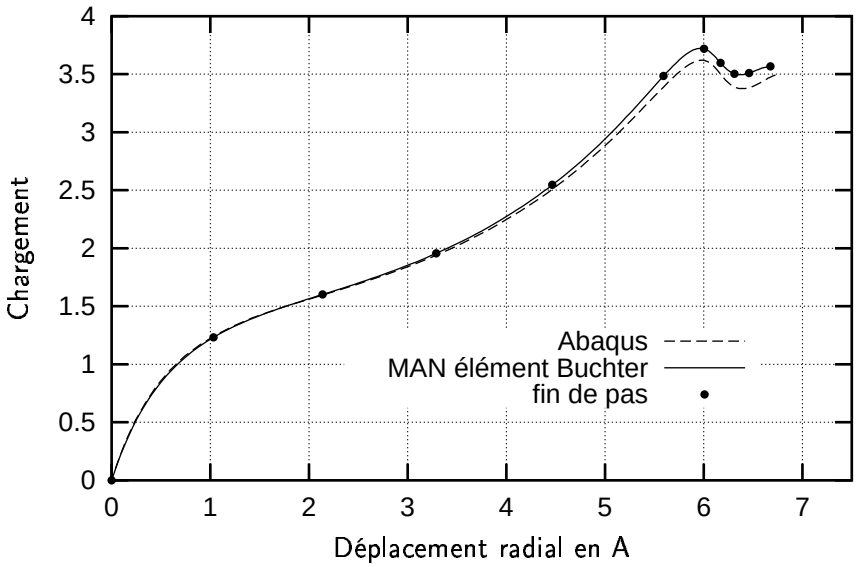


FIGURE 7.22 – *Courbe charge / déplacement radial au point A. Comparaison des résultats obtenus avec la M.A.N. (élément* BÜCHTER *et al.) et Abaqus pour un matériau linéaire*

été discrétisé. Le maillage utilisé comporte 88 éléments BÜCHTER *et al.* (1830 d.d.l.).

La courbe d'équilibre de la coque cylindrique obtenue par la M.A.N. est tracée dans la figure 7.22. On y a également représenté la courbe obtenue avec le code de calcul Abaqus (élément S8R5) par une méthode incrémentale-itérative de type NEWTON. Les résultats concordent, ce qui permet de valider une fois encore l'implémentation de l'élément BÜCHTER *et al.* dans notre code maison EVE. Il existe toutefois un léger décalage entre les deux solutions sur la dernière partie de la courbe. Les différences entre les deux modèles de coques utilisés peuvent expliquer ce phénomène. La déformée de la figure 7.21 correspond au point limite de la courbe d'équilibre.

En remplaçant la loi de comportement linéaire par la loi de type puissance décrite dans le § 2.3.2, avec les paramètres $\sigma_y = E/1000$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$, $\eta = 0.01$, la courbe d'équilibre est radicalement modifiée (figure 7.23). Elle est beaucoup plus « aplatie » que dans le cas élastique et la charge critique est considérablement diminuée. Le même calcul a été mené avec Abaqus afin de valider notre solution (figure 7.24). Les résultats concordent, sauf pour la dernière partie de la courbe où il subsiste toujours un très léger décalage.

Nous avons ensuite mené une analyse de sensibilité. La déformée de la figure 7.21 a été choisie comme défaut de forme. Pour un matériau élastique, les calculs que nous avons menés montrent que la structure est assez peu sensible à cette imperfection. Pour une amplitude défaut égale à 5 fois l'épaisseur, on constate une très faible réduction de charge (entre 1 et 2%). Dans le cas du matériau non-linéaire décrit ci-dessus, la sensibilité est plus prononcée. On le constate avec les courbes des figures 7.25 et 7.26. Pour un défaut de forme d'amplitude égale à 2.7 fois l'épaisseur de la coque, la réduction de la charge critique est d'environ 40%. La prise en compte des non-linéarités matérielles est donc primordiale. Cet exemple confirme un résultat bien connu :

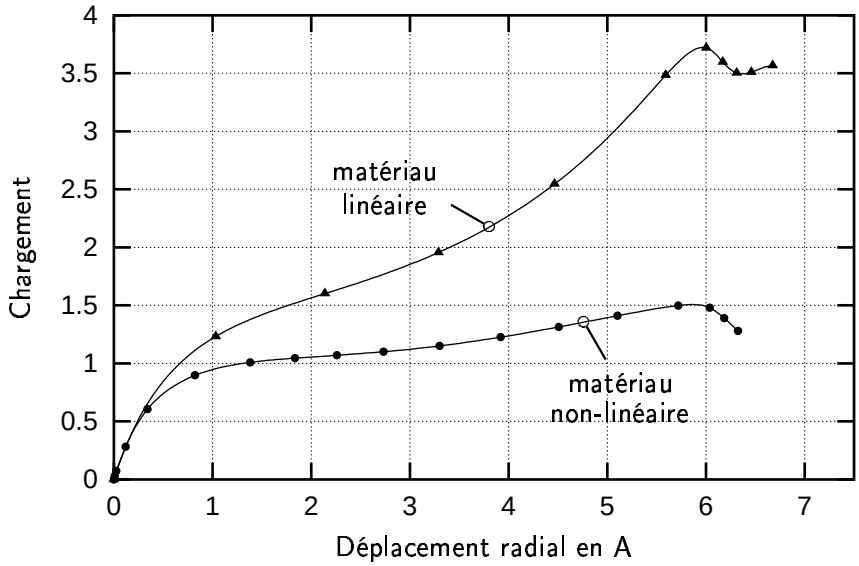


FIGURE 7.23 – *Courbe charge / déplacement radial au point A. Comparaison des résultats obtenus avec la M.A.N. pour un matériau linéaire et non-linéaire (loi puissance,* $\sigma_y = E/1000$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$, $\eta = 0.01$*)*

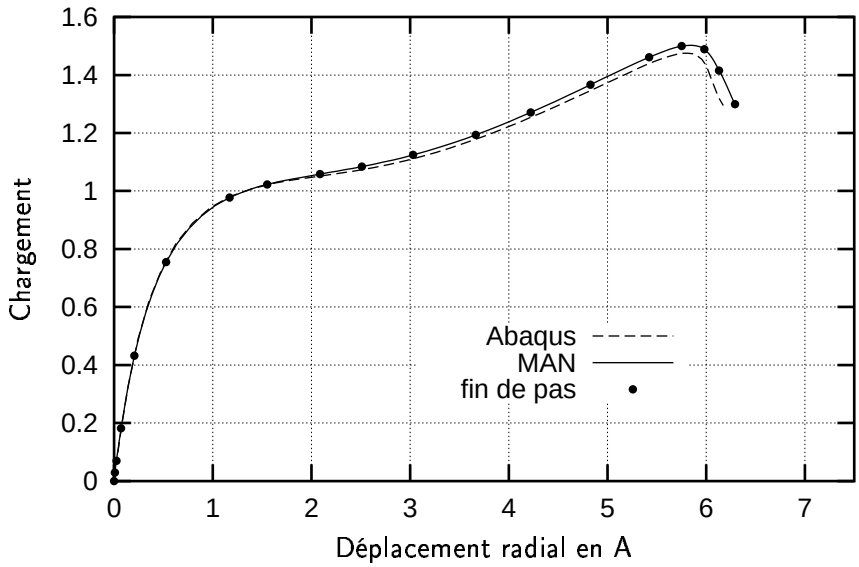


FIGURE 7.24 – *Courbe charge / déplacement radial au point A. Comparaison des résultats obtenus avec la M.A.N. et Abaqus pour un matériau non-linéaire (loi puissance,* $\sigma_y = E/1000$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$, $\eta = 0.01$*)*

la sensibilité aux imperfections est fortement accrue lorsque les non-linéarités matérielles se développent au cours du post-flambage.

La courbe de réduction de charge critique a été obtenue en seulement 6 pas, i.e. son calcul n'a nécessité que 6 décompositions de la matrice de rigidité tangente.

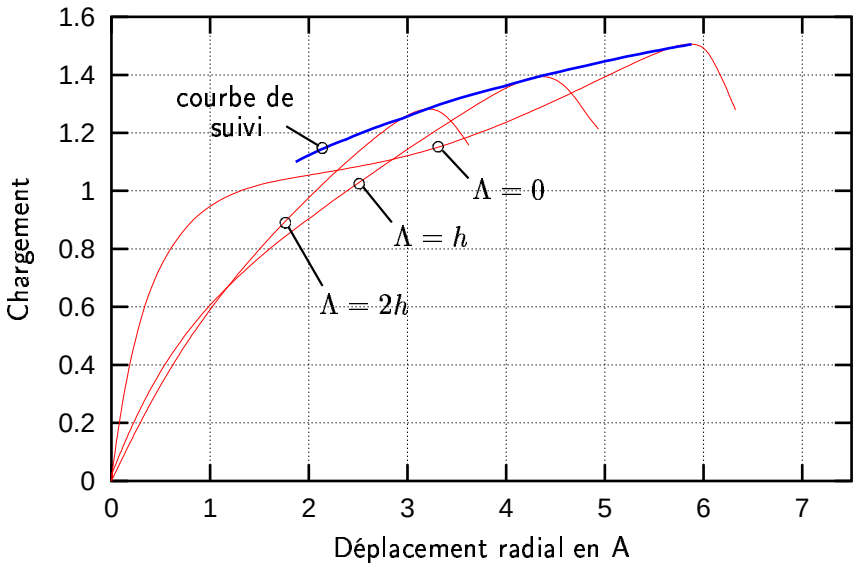


FIGURE 7.25 – *Courbes d'équilibre pour différentes valeurs Λ de l'imperfection et courbe de suivi de points limites (matériau non-linéaire, loi puissance, $\sigma_y = E/1000$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$, $\eta = 0.01$)*

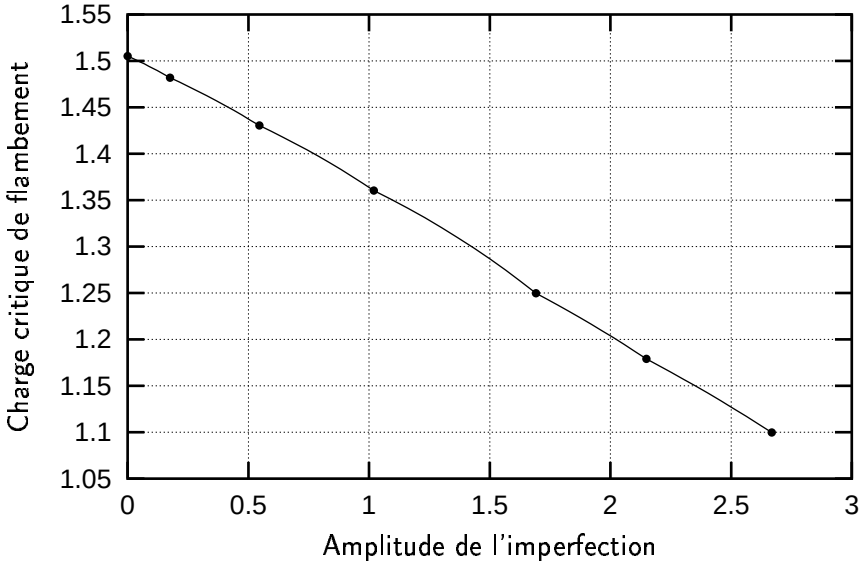


FIGURE 7.26 – *Courbe de réduction de la charge critique de flambement en fonction de l'amplitude de l'imperfection (matériau non-linéaire, loi puissance, $\sigma_y = E/1000$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$, $\eta = 0.01$)*

Conclusion générale

Ce travail est une contribution à l'analyse de stabilité et de sensibilité aux imperfections des structures minces.

La courbe de réduction de charge critique, qui permet d'estimer le degré de sensibilité d'une structure à un défaut donné, est obtenue grâce à un suivi numérique des branches de points limites. L'algorithme sous-jacent repose sur la résolution d'un système non-linéaire, augmenté d'une équation qui caractérise les points critiques, et dans lequel l'amplitude du défaut est un paramètre additionnel. Il s'agit donc d'une alternative à l'analyse de KOITER qui est basée sur des développements asymptotiques dans le voisinage d'un point de bifurcation.

Les objectifs que nous nous étions fixés ont été atteints. Au terme de ce travail, on dispose d'un outil complet d'analyse de sensibilité aux imperfections, entièrement basé sur la Méthode Asymptotique Numérique (M.A.N.), dont les principales fonctionnalités sont :

- Le calcul de branches d'équilibre non-linéaires à l'aide d'une méthode de continuation.
- La détection des points singuliers le long d'une branche d'équilibre.
- Le suivi de points limites, qui permet de mener des études de sensibilité sur des structures 3D, pour des défauts de forme ou d'épaisseur.

En outre, cet outil repose sur :

- Un élément de coque moderne et performant qui autorise les grandes rotations et la dilatation suivant l'épaisseur, prend en compte les non-linéarités géométriques, et intègre les non-linéarités matérielles par le biais de relations de comportement 3D en chaque point de Gauss.
- Des algorithmes de résolution très robustes, fiables, simples à utiliser et complètement automatiques du point de vue de l'utilisateur.

Un bon nombre de travaux de thèse ont déjà été soutenus autour de la résolution de problèmes de stabilité par la M.A.N. (cf. § 3.2). Les apports spécifiques de ce mémoire concernent :

- La définition et le mise en œuvre du suivi pour des défauts de forme ou d'épaisseur, aussi bien pour des imperfections d'ensemble que localisés, et sa validation sur des exemples bien choisis.
- L'extension et la fiabilisation de la procédure de détection des points singuliers lors de la continuation. C'est un préalable indispensable non seulement pour le suivi, mais aussi pour le

branchement sur les solutions bifurquées.[5]

- Pour le suivi de points limites, la proposition d'un cadre de travail suffisamment général pour permettre l'extension de l'étude de sensibilité à d'autres paramètres.
- Une réflexion sur l'organisation générale du code EVE et sur ses améliorations possibles. Le travail de programmation n'a pas uniquement consisté à produire un code qui fonctionne, mais aussi à mettre en place une architecture susceptible d'évoluer et d'intégrer de nouveaux développements.

Nous allons maintenant essayer de cerner les limites de ce travail. Elles ne proviennent pas du modèle éléments finis puisque celui-ci prend en compte de manière exacte les non-linéarités géométriques, autorise les grandes rotations et la dilatation suivant l'épaisseur, et permet de traiter des défauts d'ensemble ou localisés. Elle ne proviennent pas non plus de la résolution numérique, car la matrice tangente et ses dérivées directionnelles sont calculées sans aucune approximation.

La seule véritable limitation concerne la loi de comportement utilisée, puisqu'il ne s'agit pas d'un véritable modèle de plasticité, mais d'élasticité non-linéaire. Plusieurs raisons justifient ce choix. Tout d'abord, la M.A.N. ne permet pas (pour l'instant) de prendre en compte le phénomène de décharge élastique. Ensuite, à cause de la dépendance à l'historique de chargement, la définition de la branche de points limites en plasticité est un problème délicat. Le suivi a-t-il seulement un sens dans ce cas?

Une autre limitation concerne le choix de la forme du défaut à introduire dans la structure. La méthode proposée fournit une courbe de réduction de charge critique pour une imperfection donnée, mais ne donne aucune information sur le défaut le plus défavorable. Toutefois, cette limitation est moins rédhibitoire que la précédente puisque des solutions à ce problème ont déjà été proposées dans la littérature (voir par exemple [Deml et Wunderlich, 1997]).

Les prolongements possibles de ce travail à court terme sont nombreux. Il pourra s'agir, par exemple, d'intégrer de nouvelles lois de comportement hyper-élastiques, en s'appuyant sur les travaux de Zahrouni [1998], ou encore d'étendre l'analyse de sensibilité à d'autres types de défauts. Le code EVE a d'ailleurs été prévu pour accueillir ces nouveaux développements.

A plus long terme, les outils qui ont été mis au point devraient permettre de tracer le réseau complexe de branches bifurquées (primaires, secondaires, tertiaires, ...) qui émanent d'un ensemble de points de bifurcation très proches. Grâce à la procédure de suivi, il devrait être possible de voir comment ce réseau évolue lorsque les points critiques varient, et de comprendre comment se confondent s'échangent les bifurcations et les points limites. Les applications visées concernent les structures complexes optimisées pour lesquelles l'interaction entre les modes de flambement est très forte. Il reste encore quelques efforts à fournir pour y parvenir, notamment au niveau de la procédure de branchement sur les solutions bifurquées, mais c'est désormais un projet réaliste grâce aux algorithmes dont nous disposons.

5. C'était, selon P. Vannucci, le point faible de la procédure de branchement proposée dans [Vannucci *et al.*, 1998]

BIBLIOGRAPHIE

R. ABDELMOULA. *Flambage des coques cylindriques sous pression. Influence des conditions aux limites et des défauts.* Thèse, Université de Metz, 1989.

E. L. ALLGOWER et K. G. GEORG. *Numerical Continuation Methods. An introduction*, volume 13 of *Springer series in Computational Mathematics.* Springer-Verlag, 1990.

B.O. ALMROTH et F.A. BROGAN. The STAGS computer codes. NASA CR 2950, 1978.

B.O. ALMROTH et A.M.C. HOLMES. Buckling of shells with cutouts, experiment and analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 8, pp. 1057–1071, 1972.

J. ARBOCZ et C. D. BABCOCK. The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 36, pp. 28–38, 1969.

J. ARBOCZ, R. DE BORST et E. VAN DER GIESSEN. Preface : Stability, strength and stiffness in materials and structures. *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp. 6773–6775, 2000.

J. ARBOCZ et J.M.A.M. HOL. Collapse of axially compressed cylindrical shells with random imperfections. *Thin-Walled Structures*, 23, pp. 131–158, 1995.

L. AZRAR, R. BENAMAR et M. POTIER-FERRY. An Asymptotic Numerical Method for large amplitude free vibrations of thin elastic plates. *Journal of Sounds and Vibrations*, 220(4), pp. 695–727, 1999.

L. AZRAR, B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. An asymptotic numerical method to compute the post-buckling behavior of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, pp. 1251–1277, 1993.

S. BAGUET et B. COCHELIN. Direct computation of paths of limit points using the Asymptotic Numerical Method. *IASS-IACM 2000, 4th International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*, Chania - Crete, Greece, June 5-7 2000.

S. BAGUET et B. COCHELIN. Buckling of Imperfect Elastic Shells using the Asymptotic Numerical Method. *ECCM-2001, European Conference on Computational Mechanics*, Cracow, Poland, June 26-29 2001a.

S. BAGUET et B. COCHELIN. On the behaviour of the ANM continuation in the presence of bifurcations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2001b. soumis.

G.A. BAKER et P. GRAVES MORRIS. *Padé Approximants, Encyclopaedia of Mathematics and its applications, 2nd edition*, volume 59. Cambrige University Press, 1996.

Y. BASAR et W.B. KRÄTZIG. *Mechanik der Flächentragwerke.* Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985.

S.B. BATDORF. A simplified Method of elastic-stability analysis for thin cylindrical shells. NACA Report No. 874, 1947.

J.L. BATOZ et G.S. DHATT. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 1,2,3. Hermès, Paris, 1992.

Z. BAZANT et L. CEDOLIN. *Stability of structures (elastic, plastic, fracture and damage theories).* Oxford University Press, London, 1991.

Z. P. BAZANT. Structural stability. *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp. 55–67, 2000.

E.H. BOUTYOUR. *Méthode asymptotique numérique pour le calcul des bifurcations : application aux structures élastiques.* Thèse, Université de Metz, 1994.

E.H. BOUTYOUR. Détection des bifurcations par des méthodes asymptotiques-numériques. *Deuxième colloque national en calcul des structures*, volume 2, pp. 687–692, Giens, France, May 1995.

B. BRAIKAT. *Quelques contributions dans l'application de la Méthode Asymptotique Numérique en mécanique.* Thèse d'état, Faculté des sciences Ben M'sik Casablanca, 2000.

B. BRAIKAT, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. Méthodes asymptotiques numériques pour la plasticité. *Revue européenne des éléments finis*, 6, pp. 337–357, 1997.

F. BROGAN et B.O. ALMROTH. Buckling of cylinders with cutouts. *AIAA Journal*, 8(2), pp. 236–240, 1970.

J. BRUNELOT. *Simulation de la mise en forme à chaud par la Méthode Asymptotique Numérique.* Thèse, Université de Metz, 1999.

D.O. BRUSH et B.O. ALMROTH. *Buckling of Bars, Plates and Shells.* McGraw-Hill, New York, 1975.

N. BÜCHTER. *Zusammenführung von degenerationskonzept und schalentheorie bei endlichen rotationen.* PhD thesis, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1992.

N. BÜCHTER, E. RAMM et D. ROEHL. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the Enhanced Assumed Strain Concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 2551–2568, 1994.

B. BUDIANSKY. Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures. *Advances in Applied Mechanics*, volume 14, pp. 1–65. Academic Press, New York, 1974.

B. BUDIANSKY et J.C. AMAZIGO. Initial post-buckling behavior of cylindrical shells under external pressure. *Journal of Mathematics and Physics*, 47, pp. 223–235, 1968.

B. BUDIANSKY et J.W. HUTCHINSON. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*, 4 (9), pp. 1505–1510, 1966.

D. BUSHNELL. BOSOR5 - Program for buckling of elastic-plastic shells of revolution including large deflections and creep. *Computers & Structures*, 6, pp. 221–239, 1976.

J.M. CADOU. *Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure.* Thèse, Université de Metz, 1997.

J.M. CADOU, M. POTIER-FERRY, B. COCHELIN et N. DAMIL. Asymptotic Numerical Method for stationnary Navier-Stokes equations and with Petrov-Galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp. 825–845, 2001.

C.R. CALLADINE. Understanding imperfection-sensitivity in the buckling of thin-walled shells. *Thin-Walled Structures*, 23, pp. 215–235, 1995.

H.L. CAO et M. POTIER-FERRY. An improved iterative method for large strain viscoplastic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, pp. 155–176, 1999.

E. CARNOY. Postbuckling analysis of elastic structures by the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 23, pp. 143–174, 1980.

R. CASCIARO, G. GARCEA, G. ATTANASIO et F. GIORDANO. Perturbation approach to elastic post-buckling analysis. *Computers & Structures*, 66, pp. 585–595, 1998.

R. CASCIARO, G. SALERNO et A.D. LANZO. Finite element asymptotic analysis of slender elastic structures : a simple approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, pp. 1397–1426, 1992.

T.F. CHAN et D.C. RESASCO. Generalized deflated block-elimination. *S.I.A.M. Journal of numerical analysis*, 23(5), pp. 913–924, 1986.

B. COCHELIN. *Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques.* Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz, 1994a.

B. COCHELIN. A path following technique via an asymptotic numerical method. *Computers & Structures*, 29, pp. 1181–1192, 1994b.

B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. The Asymptotic-Numerical-Method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue européenne des éléments finis*, 3, pp. 281–297, 1994a.

B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. Asymptotic-Numerical Methods and Pade approximants for nonlinear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 1181–1192, 1994b.

A. COMBESCURE. Equations d'équilibre et de flambement d'une structure avec défauts. Rapport demt/81/071, 1981.

A. COMBESCURE. Upon the different theories of plastic buckling : elements for a choice. J.F. JULLIEN, editor, *Buckling of Shell Structures , on Land, in the Sea, and in the Air*, pp. 448–457. Elsevier Appl. Sci., London, 1991.

A. COMBESCURE. Etude de la stabilité des coques minces de révolution soumises à des charges complexes. *Bifurcation, flambage, stabilité en mécanique des structures*, Cours IPSI, Paris, septembre 1998.

A. COMBESCURE et G. GUSIC. Nonlinear buckling of cylinders under external pressure with non-axisymetric thickness imperfections using the COMI axisymetric shell element. *International Journal of Solids and Structures*, 38, pp. 6207–6226, 2001.

M.A. CRISFIELD. A fast incremental/iterative solution procedure that handles « snap-through ». *Computers & Structures*, 13, pp. 55–62, 1981.

M.A. CRISFIELD. An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19, pp. 1269–1289, 1983.

M.A. CRISFIELD. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. Wiley, New York, 1991.

N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Sciences - N9*, 28, pp. 943–957, 1990.

E.M. DAYA et M. POTIER-FERRY. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems : application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers & Structures*, 79, pp. 533–541, 2000.

M. DEML et W. WUNDERLICH. Direct evaluation of the 'worst' imperfection shape in shell buckling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149, pp. 201–222, 1997.

L.H. DONNELL. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Transactions of the ASME*, 56, pp. 795–806, 1934.

L.H. DONNELL et C.C. WAN. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 17, pp. 73–83, 1950.

A. ELHAGE-HUSSEIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. An asymptotic numerical algorithm for frictionless contact problems. *Revue européenne des éléments finis*, 7, pp. 119–130, 1998.

A. ELHAGE-HUSSEIN, M. POTIER-FERRY et N. DAMIL. A numerical continuation method based on Padé approximants. *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp. 6981–7001, 2000.

A. ERIKSSON. Fold lines for sensitivity analyses in structural instability. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 114, pp. 77–101, 1994.

A. ERIKSSON. Equilibrium subsets for multi-parametric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140, pp. 305–327, 1997.

A. ERIKSSON. Structural instability analyses based on generalised path-following. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, pp. 45–74, 1998.

A. ERIKSSON et R. KOUHIA. On step size adjustments in structural continuation problems. *Computers & Structures*, 55, pp. 495–506, 1995.

A. ERIKSSON, C. PACOSTE et A. ZDUNEK. Numerical Analysis of complex instability behaviour using incremental-iterative strategies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179, pp. 265–305, 1999.

M. Essakhi, B. Braikat, H. Lahmam, N. Damil et M. Potier-Ferry. Méthode Asymptotique Numérique et sous-structuration : application aux bandes minces. *4ème congrès de mécanique, S.M.S.M.*, pp. 181–182, Mohammadia, Maroc, 1999.

L. Euler. *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate*, chapter Appendix : De Curvis Elasticis. Marcum Michaelem Bousquet, Lausanne et Genève, 1744.

W. Flügge. Die Stabilität der Kreiszylinderschalen. *Ingenieur-Archiv*, 3, pp. 463–506, 1932.

W. Flügge. *Statik und dynamik der schalen.* Springer, Berlin, 1st edition, 1934.

B. Fujii. Branch switching in bifurcation of structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 118 (8), pp. 1578–1596, 1992.

F. Fujii et E. Ramm. Computational bifurcation theory : path-tracing, pinpointing and path-switching. *Engineering Structures*, 19(5), pp. 385–392, 1997.

I. Galliet. *Une version parallèle des Méthodes Asymptotiques Numériques, application à des structures complexes à base d'élastomères.* Thèse, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, 2000.

J.J. Giezen, C.D. Babcock et J. Singer. Plastic buckling of cylindrical shells under biaxial loading. *Exp. Mech.*, 31(4), pp. 337–343, 1991.

M. Golubitsky et D.G. Schaeffer. *Singularities and groups in bifurcation theory*, volume 1 of *Applied Mathematical Sciences N. 51.* Springer-Verlag, New York, 1985.

H.B. Hellweg et M.A. Crisfield. A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Computers & Structures*, 66(5), pp. 705–709, 1998.

Hibbitt, Karlsson et Sorensen Inc. *Abaqus 5.8 – Theory and users' manuals.* Pawtucket, RI, USA, 1998.

D. Ho. The influence of imperfections on systems with coincident buckling loads. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 7, pp. 311–321, 1972.

D. Ho. Buckling load of non-linear systems with multiple eigenvalues. *International Journal of Solids and Structures*, 10, pp. 1315–1330, 1974.

N.J. Hoff. The perplexing behavior of thin circular cylindrical shells in axial compression. *Isr. J. Tech.*, 4(1), pp. 1–28, 1966.

N.J. Hoff, W.A. Madsen et J. Mayers. Postbuckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells. *AIAA Journal*, 4, pp. 126–133, 1966.

J.W. Hutchinson. Plastic buckling. *Advances in Applied Mechanics*, volume 14, pp. 67–114. Academic Press, New York, 1974.

J.W. Hutchinson et W.T. Koiter. Postbuckling theory. *Applied Mechanics Reviews*, 23, pp. 1353–1366, 1970.

A. Ibrahimbegović et M. Al Mikdad. Quadratically convergent direct calculation of critical points for 3d structures undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, pp. 107–120, 2000.

A. Imazatene. *Quelques techniques pour appliquer la Méthode Asymptotique Numérique aux structures plastiques et aux grands systèmes.* Thèse, Université de Metz, 2001.

A.D. JEPSON et A. SPENCE. Folds in solutions of two parameter systems and their calculation. Part I. 22, pp. 347–368, 1985.

K.C. JOHNS et A.H. CHILVER. Multiple path generation at coincident branching points. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13, pp. 899–910, 1971.

J.P. KEENER et H.B. KELLER. Perturbed bifurcation theory. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 50, pp. 159–179, 1973.

M. KHEYRKHAHAN et R. PEEK. Postbuckling analysis and imperfection sensitivity of general shells by the finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 36, pp. 2641–2681, 1999.

W.T. KOITER. *Over de stabiliteit van het elastische evenwicht (in Dutch).* PhD thesis, Delft, Holland, 1945. (English translation: On the stability of elastic equilibrium, NASA AFFDL-TR-70-25 by E. Riks, 1970).

R. KOUHIA et M. MIKKOLA. Tracing the equilibrium path beyond simple critical points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, pp. 2923–2941, 1989.

J.L. LAGRANGE. *Méchanique analytique.* Courcier, Paris, 1788.

H. LAHMAM, J.M. CADOU, H. ZAHROUNI, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. High order predictor-corrector algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000. soumis.

A.D. LANZO et G. GARCEA. Koiter's analysis of thin-walled stuctures by a finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp. 3007–3031, 1996.

A. LEGAY et A. COMBESCURE. Calculs de flambement non-linéaires et fiabilité. Rapport interne n°238, LMT-Cachan, 2000.

A. LEGER et M. POTIER-FERRY. Sur le flambage plastique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 7, pp. 817–857, 1988.

R. LORENZ. Achsensymmetrische verzerrungen in dünnwandingen hohlzylindern. *Zeitschr. Ver. Deut. Ingr.*, 43, pp. 1706–1713, 1908.

E.E. LUNDQUIST. Strength test of thin-walled duralumin cylinders in compression. NACA Report No. 473, 1933.

A. MAGNUSSON. Analysis of post-buckling branches at multiple symmetric bifurcations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51, pp. 413–428, 2001.

A. MAGNUSSON et I. SVENSSON. Numerical treatment of complete load-deflection curves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41, pp. 955–971, 1998.

E.H. MALLIL. *Développement d'une méthode itérative basée sur les séries et les approximants de Padé pour le calcul non-linéaire des structures.* Thèse, Faculté des sciences Ben M'sik Casablanca, 1999.

M. MARIE. *Histoire des sciences mathématiques et physiques.* Tome VIII, D'Euler à Lagrange et Tome IX, De Lagrange à Laplace. Gauthier-Villars, Paris, 1886.

R. MOKHTARI, J.M. CADOU et M. POTIER-FERRY. Une approche multi-grilles basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation pour la résolution de problèmes non-linéaires. *15ème congrès français de mécanique*, Nancy, 2001.

G. MOORE et A. SPENCE. The calculation of turning points of nonlinear equations. 17, pp. 567–576, 1980.

A. NAJAH, B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. A critical review of Asymptotic Numerical Methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5, pp. 31–50, 1998.

M.P. NEMETH et J.H. JR. STARNES. The NASA monographs on shell stability design recommendations. NASA Report TP-1998-206290, Langley research center, Hampton, Virginia, 1998.

Q.S. NGUYEN. *Stabilité des structures élastiques.* Mathématiques & applications 18. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

Q.S. NGUYEN. *Stabilité et mécanique non linéaire.* Hermès, Paris, 2000.

A.K. NOOR. Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. *Computers & Structures*, 13, pp. 31–44, 1981.

A.K. NOOR. Hybrid analytical technique for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal - N6*, 23, pp. 938–946, 1985.

A.K. NOOR. Bibliography of monographs and surveys on shells. *Applied Mechanics Reviews*, 43 (9), pp. 223–234, 1990.

A.K. NOOR et J.M. PETERS. Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal - N4*, 18, pp. 455–462, 1980.

A.K. NOOR et J.M. PETERS. Tracing Post-Limit-Point Paths with reduced Basis Technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 28, pp. 217–240, 1981.

M. OHSAKI. Sensitivity analysis of coincident critical loads with respect to minor imperfection. *International Journal of Solids and Structures*, 38, pp. 4571–4583, 2001.

E. ORE et D. DURBAN. Elastoplastic buckling of axially compressed circular shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 34(9), pp. 727–742, 1992.

R. PEEK et M. KHEYRKHAHAN. Postbuckling behavior and imperfection sensitivity of elastic structures by the Lyapunov-Schmidt-Koiter approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108, pp. 261–279, 1993.

M. POTIER-FERRY. On the mathematical foundations of elastic stability theory. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 78, pp. 301–320, 1982.

M. POTIER-FERRY. Foundations of elastic post-buckling theory. *Buckling and post-buckling*, Lecture notes in physics 288, pp. 1–79. Springer Verlag, Berlin, 1985.

M. POTIER-FERRY, N. DAMIL, B. BRAIKAT, J. DESCAMPS, J.M. CADOU, H.L. CAO et A. ELHAGEHUSSEIN. Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, t 314, pp. 171–177, 1997. Serie II b.

W. RAMBERG et W.R. OSGOOD. Description of stress-strain curves by three parameters. Technical note 902, NASA, 1943.

E. RAMM. Strategies for tracing non-linear responses near limit points. E. STEIN W. WUNDERLICH et K.J. BATHE, editors, *Non-Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pp. 68–89. Springer-Verlag, New-York, 1981.

R. REITINGER et E. RAMM. Buckling and imperfection sensitivity in the optimization of shell structures. *Thin-Walled Structures*, 23, pp. 159–177, 1995.

W.C. RHEINBOLDT. Computation of critical boundaries on equilibrium manifolds. 19(3), pp. 653–669, 1982.

E. RIKS. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 39, pp. 1060–1066, 1972.

E. RIKS. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, pp. 529–551, 1979.

E. RIKS. Some Computational aspects of stability of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, pp. 219–259, 1984.

A. ROBERTSON. The strength of tubular struts. Report and Memorandum No. 1185, British A.R.C., 1929.

J. ROORDA. Stability of structures with small imperfections. *J. Engng. Mech. Div. Am. Soc. civ. Engrs.*, 91, page 87, 1965.

H. SCHMIDT. Stability of steel shell structures General report. *Journal of Constructional Steel Research*, 55, pp. 159–181, 2000.

M.J. SEWELL. A general theory of equilibrium paths through critical points. *Proceedings of the Royal Society, Series A, London*, 306, pp. 201–238, 1968.

M.J. SEWELL. On the branching of equilibrium paths. *Proceedings of the Royal Society, Series A, London*, 315, pp. 499–518, 1970.

G. J. SIMITSES. Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells: A review. *Applied Mechanics Reviews*, 39(10), pp. 1517–1524, 1986.

J.C. SIMO et M.S. RIFAI. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, pp. 1595–1638, 1990.

J. SINGER et H. ABRAMOVICH. The development of shell imperfection measurement techniques. *Thin-Walled Structures*, 23, pp. 379–398, 1995.

J. SINGER, J. ARBOCZ et C. D. BABCOCK. Buckling of imperfect stiffened cylindrical shells under axial compression. *AIAA Journal*, 9(1), pp. 68–75, 1971.

R.V. SOUTHWELL. On the general theory of elastic stability. *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, vol. 213, series A, pp. 187–244, 1914.

J.H. JR. STARNES. Effect of a circular hole on the buckling of cylindrical shells loaded by axial compression. *AIAA Journal*, 10(11), pp. 1466–1472, 1972.

M. STEIN. The influence of prebuckling deformations and stresses on the buckling of perfect cylinders. NASA TR R-190, 1964.

J.G. TENG. Buckling of thin shells : Recent advances and trends. *Applied Mechanics Reviews*, 49(4), pp. 263–274, 1996.

RENÉ THOM. *Stabilité structurelle et morphogénèse.* W.A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1972.

J.M.T. THOMPSON. *Instabilities and catastrophes in science and engineering.* John Wiley & Sons, 1982.

J.M.T. THOMPSON et G.W. HUNT. *A general theory of elastic stability.* John Wiley & Sons, 1973.

J.M.T. THOMPSON et A.C. WALKER. The nonlinear perturbation analysis of discrete structural systems. *International Journal of Solids and Structures*, 4, pp. 757–758, 1968.

S.P. TIMOSHENKO. Einige Stabilitätprobleme aus der elastizitätstheorie. *Zeitschr. Math. und Phys.*, 58(4), pp. 337–385, 1910.

S.P. TIMOSHENKO. *Theory of elastic stability.* McGraw-Hill, New York, 1st edition, 1936.

S.P. TIMOSHENKO et J.M. GERE. *Theory of elastic stability.* McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1961.

A. TRI, B. COCHELIN et M. POTIER FERRY. Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une Méthode Asymptotique Numérique. *Revue européenne des éléments finis*, 5(4), pp. 415–442, 1996.

P. VANNUCCI, B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41, pp. 1365–1389, 1998.

T.H. VON KARMAN et H.S. TSIEN. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 8, pp. 303–312, 1941.

R. VON MISES. Der kritische Außendruck zylindrischer rohre. *Zeitschr. Ver. Deut. Ingr.*, 58, pp. 750–755, 1914.

W. WAGNER et P. WRIGGERS. A simple method for the calculation of postcritical branches. *Engineering Computations*, 5, pp. 103–109, 1988.

W. WAGNER et P. WRIGGERS. Calculation of bifurcation points via fold curves. W. WAGNER et P. WRIGGERS, editors, *Nonlinear Computational Mechanics*, pp. 69–84. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.

V.I. WEINGARTEN, E.J. MORGAN et P. SEIDE. Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression. *AIAA Journal*, 3(3), pp. 500–505, 1965.

H.J. WEINITSCHKE. On the calculation of limit and bifurcation points in stability problems of elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*, 21(1), pp. 79–95, 1985.

G.A. WEMPNER. Discrete approximations related to non-linear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7, pp. 1581–1599, 1971.

B. WERNER et A. SPENCE. The computation of symmetry-breaking bifurcation points. 21(2), pp. 388–399, 1984.

W.M. WILSON et N.M. NEWMARK. The strength of thin cylindrical shells as columns. Bulletin No. 255, Eng. Experimental Station, University of Illinois, 1933.

P. WRIGGERS et J.C. SIMO. A general procedure for the direct calculation of turning and bifurcation points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, pp. 155–176, 1990.

P. WRIGGERS, W. WAGNER et C. MIEHE. A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70, pp. 329–347, 1988.

B. WU et Z. WANG. A perturbation method for the determination of the buckling strength of imperfection-sensitive structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145, pp. 203–215, 1997.

W. WUNDERLICH et U. ALBERTIN. Analysis and load carrying behaviour of imperfection sensitive shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, pp. 255–273, 2000.

S. YAMADA et J.G.A. CROLL. Contributions to understanding the behaviour of axially compressed cylinders. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 66, pp. 299–309, 1999.

H. ZAHROUNI. *Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations.* Thèse, Université de Metz, 1998.

H. ZAHROUNI, B. COCHELIN et M. POTIER-FERRY. Asymptotic-numerical methods for shells with finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175, pp. 71–85, 1999.

H. ZAHROUNI, M. POTIER-FERRY, H. ELASMAR et N. DAMIL. Asymptotic Numerical Method for nonlinear constitutive laws. *Revue européenne des éléments finis*, 7(7), pp. 841–869, 1998.

O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method, Fourth Edition*, volume 1 & 2. Mc Graw-Hill, fourth edition, 1989, 1991.

ANNEXE A

Module tangent de comportement D_t et contrainte S^{res} pour la loi de type puissance régularisée

A.1 Calcul de courbes d'équilibre

A l'ordre 1, la loi de comportement s'écrit (cf. § 3.8.2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_1 &= C_1\,\boldsymbol{\gamma}_1 + C_2\,(\boldsymbol{\gamma}_1 : \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{I} + C_3\,(\boldsymbol{\gamma}_1 : \boldsymbol{S}_0^d)\,\boldsymbol{S}_0^d \\ &= \left[\, C_1\,\mathfrak{S} + C_2\,\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + C_3\,\boldsymbol{S}_0^d\otimes\boldsymbol{S}_0^d \right] : \boldsymbol{\gamma}_1 \qquad \text{(A.1)} \\ &= \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{\gamma}_1 \end{aligned}$$

où $\mathfrak{S}$ est le tenseur unitaire d'ordre quatre et C_1, C_2 et C_3 sont des constantes définies par

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{E\,(1+\alpha\eta^n)}{1+\nu+\kappa_0} \\ C_2 &= \frac{(3\,\nu+\kappa_0)\;C_1}{3\,(1-2\nu)} \qquad \text{(A.2)} \\ C_3 &= \frac{-K\;C_1}{1+\nu+\kappa_0+K\;\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_0^d} \end{aligned}$$

avec

$$K = \frac{3\;(n-1)\;\kappa_0}{2\;\sigma_y^2\;\xi_0^2} \qquad \text{(A.3)}$$

A l'ordre p, la loi de comportement est donnée par la relation

$$\boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{\gamma}_p + \boldsymbol{S}_p^{res} \qquad \text{(A.4)}$$

La matrice $\boldsymbol{D}_t$ est la même à tous les ordres. Les contraintes résiduelles, quant à elles, s'écrivent à l'ordre p

$$\boldsymbol{S}_p^{res} = \frac{1}{1+\nu+\kappa_0}\left[\, C_5\left(\kappa_p^{nl}\;(\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_0^d) + \left(\sum_{r=1}^{p-1}\kappa_r\boldsymbol{S}_{p-r}^d\right) : \boldsymbol{S}_0^d\right) - \kappa_p^{nl}\right]\boldsymbol{S}_0^d - \frac{1}{1+\nu+\kappa_0}\sum_{r=1}^{p-1}\kappa_r\boldsymbol{S}_{p-r}^d$$

où

$$C_5 = \frac{K}{1+\nu+\kappa_0+K\;\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_0^d} \qquad \text{(A.5)}$$

$$\kappa_p^{nl} = \frac{(n-1)\;\kappa_0}{\xi_0}\;\xi_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1}\frac{(n-1)(p-r)-r}{p\,\xi_0}\;\kappa_r\,\xi_{p-r} \qquad \text{(A.6)}$$

$$\xi_p^{nl} = \frac{3}{4\,\sigma_y^2\,\xi_0}\sum_{r=1}^{p-1}\boldsymbol{S}_r^d : \boldsymbol{S}_{p-r}^d - \frac{1}{2\,\xi_0}\sum_{r=1}^{p-1}\xi_r\,\xi_{p-r} \qquad \text{(A.7)}$$

A.2 Détection des points singuliers

Dans le cas de la détection des points singuliers, la loi de comportement à l'ordre 0 s'écrit

$$\Delta \boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{D}_t : \Delta \boldsymbol{\gamma}_0 \tag{A.8}$$

où la matrice $\boldsymbol{D}_t$ est exactement la même que dans le cas du calcul de branches d'équilibre. Son expression est donnée par (A.1) et les constantes C_1, C_2 et C_3 qui le composent par (A.2).
A l'ordre p, la loi de comportement est donnée par

$$\Delta \boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{D}_t : \Delta \boldsymbol{\gamma}_p + \Delta \boldsymbol{S}_p^{res} \tag{A.9}$$

La matrice $\boldsymbol{D}_t$ est la même à tous les ordres et les contraintes résiduelles à l'ordre p s'écrivent

$$\Delta \boldsymbol{S}_p^{res} = \frac{1}{1+\nu+\kappa_0} \left[C_5 \left(\Delta\kappa_p^{nl} \, (\underset{0}{\boldsymbol{S}}^d : \underset{0}{\boldsymbol{S}}^d) + \left(\sum_{r=1}^{p} \Delta\kappa_{p-r} \boldsymbol{S}_r^d + \sum_{r=1}^{p} \kappa_r \Delta \boldsymbol{S}_{p-r}^d \right) : \underset{0}{\boldsymbol{S}}^d \right) - \Delta\kappa_p^{nl} \right] \underset{0}{\boldsymbol{S}}^d$$

$$- \quad \frac{1}{1+\nu+\kappa_0} \left(\sum_{r=1}^{p} \Delta\kappa_{p-r} \boldsymbol{S}_r^d + \sum_{r=1}^{p} \kappa_r \Delta \boldsymbol{S}_{p-r}^d \right)$$

où C_5 est la même constante que dans l'annexe A.1. Son expression est donnée par (A.5) et les constantes $\Delta\kappa_p^{nl}$ et $\Delta\xi_p^{nl}$ sont données par

$$\Delta\kappa_p^{nl} = \frac{(n-1)\,\kappa_0}{\xi_0} \Delta\xi_p^{nl} + \frac{(n-1)}{\xi_0} \sum_{r=1}^{p} \kappa_r \, \Delta\xi_{p-r} - \frac{1}{\xi_0} \sum_{r=1}^{p} \xi_r \, \Delta\kappa_{p-r} \tag{A.10}$$

$$\Delta\xi_p^{nl} = \frac{3}{2\,\sigma_y^2\,\xi_0} \sum_{r=1}^{p} \boldsymbol{S}_r^d : \Delta \boldsymbol{S}_{p-r}^d - \frac{1}{\xi_0} \sum_{r=1}^{p} \xi_r \, \Delta\xi_{p-r} \tag{A.11}$$

Remarque A.1
Cette remarque a déjà été formulée dans le paragraphe 4.4.1, mais il nous a semblé important de l'énoncer à nouveau ici.
Les sommations vont de $r = 1$ à p au lieu de $p - 1$, comme on en avait l'habitude avec le calcul de branches d'équilibre. De plus, les indices $p - r$ portent toujours sur les termes « en Δ ». ❑

A.3 Suivi de points limites

Dans le cas de la détection des points singuliers, la loi de comportement à l'ordre 0 s'écrit

$$\Delta \boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{\varepsilon}_1 \tag{A.12}$$

où la matrice $\boldsymbol{D}_t$ est exactement la même que dans le cas du calcul de branches d'équilibre. Son expression est donnée par (A.1) et les constantes C_1, C_2 et C_3 qui le composent par (A.2).
A l'ordre p, la loi de comportement est donnée par

$$\boldsymbol{\Psi}_p = \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\Psi}_p^{res} \tag{A.13}$$

La matrice $\boldsymbol{D}_t$ est la même à tous les ordres et les contraintes résiduelles à l'ordre p s'écrivent

$$\boldsymbol{\Psi}_p^{res} = \frac{1}{1+\nu+\kappa_0}\left[C_5 \left(\Delta\kappa_p^{nl} \left(\boldsymbol{S}_0^d : \boldsymbol{S}_0^d\right) + \left(\sum_{r=1}^{p-1} \Delta\kappa_{p-r} \boldsymbol{S}_r^d + \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \Delta \boldsymbol{S}_{p-r}^d \right) : \boldsymbol{S}_0^d \right) - \Delta\kappa_p^{nl} \right] \boldsymbol{S}_0^d$$

$$- \frac{1}{1+\nu+\kappa_0} \left(\sum_{r=1}^{p-1} \Delta\kappa_{p-r} \boldsymbol{S}_r^d + \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \Delta \boldsymbol{S}_{p-r}^d \right)$$

où C_5 est la même constante que dans l'annexe A.1. Son expression est donnée par (A.5). A chaque ordre, les constantes $\Delta\xi_p$ et $\Delta\kappa_p$ sont données par les mêmes expressions (4.41)-(4.42) que dans le cas de la détection

$$\begin{aligned} \Delta\xi_p &= \frac{3}{2\sigma_y^2 \xi_0} \Delta \boldsymbol{S}_p^d : \boldsymbol{S}_0^d + \Delta\xi_p^{nl} \\ \Delta\kappa_p &= \frac{3(n-1)\kappa_0}{2\sigma_y^2 \xi_0^2} \Delta \boldsymbol{S}_p^d : \boldsymbol{S}_0^d + \Delta\kappa_p^{nl} \end{aligned}$$

Les constantes $\Delta\kappa_p^{nl}$ et $\Delta\xi_p^{nl}$ sont quant à elles données par

$$\Delta\kappa_p^{nl} = \frac{(n-1)\,\kappa_0}{\xi_0} \Delta\xi_p^{nl} + \frac{(n-1)}{\xi_0} \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \,\Delta\xi_{p-r} - \frac{1}{\xi_0} \sum_{r=1}^{p-1} \xi_r \,\Delta\kappa_{p-r} \tag{A.14}$$

$$\Delta\xi_p^{nl} = \frac{3}{2\,\sigma_y^2\,\xi_0} \sum_{r=1}^{p-1} \boldsymbol{S}_r^d : \Delta \boldsymbol{S}_{p-r}^d - \frac{1}{\xi_0} \sum_{r=1}^{p-1} \xi_r \,\Delta\xi_{p-r} \tag{A.15}$$

ATTENTION : Ces formules ressemblent beaucoup à celles de l'annexe précédente dédiée à la détection. Elles en diffèrent cependant par les sommations qui s'effectuent de $r = 1$ à $p-1$.

ANNEXE B

Seconds membres pour le suivi de points limites

B.1 Défaut de forme

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{B.1}$$

$$[\boldsymbol{G}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\tilde{\boldsymbol{B}}_0]^t\,[\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]^t\,[\boldsymbol{S}_p^{nl}]\,dV - [\boldsymbol{Q}_p^{nl}] \tag{B.2}$$

où $\tilde{\boldsymbol{B}}_0 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_0 + \eta_0 \boldsymbol{u}_0^\star)$ et les termes $\boldsymbol{S}_p^{nl}$, $\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}$, $\boldsymbol{R}_p^{nl}$ et $\boldsymbol{Q}_p^{nl}$ ont pour expression

$$[\boldsymbol{S}_p^{nl}] = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{D}] \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)]\,[\boldsymbol{q}_{p-r}] + [\boldsymbol{D}] \sum_{r=1}^{p-1} \eta_{p-r} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)]\,[\boldsymbol{q}_0^\star] \tag{B.3}$$

$$[\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}] = [\boldsymbol{D}] \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_r)]\,[\boldsymbol{q}_{p-r}] + [\boldsymbol{D}] \sum_{r=1}^{p-1} \eta_{p-r} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_r)]\,[\boldsymbol{q}_0^\star] \tag{B.4}$$

$$[\boldsymbol{R}_p^{nl}] = \int_\Omega \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r + \eta_r\,\boldsymbol{q}_0^\star)]^t\,[\boldsymbol{S}_{p-r}]\,dV \tag{B.5}$$

$$[\boldsymbol{Q}_p^{nl}] = \int_\Omega \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_r)]^t\,[\boldsymbol{S}_{p-r}] + \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r + \eta_r\,\boldsymbol{q}_0^\star)]^t\,[\boldsymbol{\Psi}_{p-r}]\,dV \tag{B.6}$$

B.2 Défaut d'épaisseur

$$e_p^{nl} = \sum_{r=1}^{p-1} h_r \, h_{p-r} \tag{B.7}$$

$$[\boldsymbol{D}_p^{nl}] = [\boldsymbol{D}^3] \left(h_0 e_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1} e_r \, h_{p-r} \right) \tag{B.8}$$

$$[\gamma_p^{nl}] = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)] \, [\boldsymbol{q}_{p-r}] \tag{B.9}$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_p^{nl}] = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)] \, [\boldsymbol{\phi}_{p-r}] \tag{B.10}$$

$$[\boldsymbol{S}_p^{nl}] = [\boldsymbol{D}_0][\gamma_p^{nl}] + [\boldsymbol{D}_p^{nl}][\gamma_0] + \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{D}_r] \, [\gamma_{p-r}] \tag{B.11}$$

$$[\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}] = [\boldsymbol{D}_0][\boldsymbol{\varepsilon}_p^{nl}] + [\boldsymbol{D}_p^{nl}][\boldsymbol{\varepsilon}_0] + \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{D}_r] \, [\boldsymbol{\varepsilon}_{p-r}] \tag{B.12}$$

$$[\boldsymbol{R}_p^{nl}] = \int_\Omega \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)]^t \, [\boldsymbol{S}_{p-r}] \, dV \tag{B.13}$$

$$[\boldsymbol{Q}_p^{nl}] = \int_\Omega \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_r)]^t \, [\boldsymbol{S}_{p-r}] + \sum_{r=1}^{p-1} [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{q}_r)]^t \, [\boldsymbol{\Psi}_{p-r}] \, dV \tag{B.14}$$

$$[\boldsymbol{F}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t \, [\boldsymbol{S}_p^{nl}] \, dV - [\boldsymbol{R}_p^{nl}] \tag{B.15}$$

$$[\boldsymbol{G}_p^{nl}] = -\int_\Omega [\boldsymbol{B}_0]^t \, [\boldsymbol{\Psi}_p^{nl}] + [\boldsymbol{B}_{nl}(\boldsymbol{\phi}_0)]^t \, [\boldsymbol{S}_p^{nl}] \, dV - [\boldsymbol{Q}_p^{nl}] \tag{B.16}$$

Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la Méthode Asymptotique Numérique

Résumé : Ce travail est une contribution à l'analyse de stabilité et de sensibilité aux imperfections des structures minces, ainsi qu'au développement de méthodes numériques performantes pour le non-linéaire. La courbe de réduction de charge critique, qui permet d'estimer le degré de sensibilité d'une structure à un défaut donné, est obtenue grâce à un suivi numérique des courbes de points limites. L'algorithme sous-jacent repose sur la résolution d'un système non-linéaire augmenté. Ce système est composé des équations d'équilibre de la structure et d'une équation qui caractérise les points critiques, dans lesquelles l'amplitude de l'imperfection est un paramètre additionnel. Le modèle utilisé s'appuie sur un élément de coque moderne et performant, basé sur le concept EAS. Il autorise les grandes rotations et la dilatation suivant l'épaisseur, prend en compte de manière exacte les non-linéarités géométriques, et intègre les non-linéarités matérielles par le biais de relations de comportement 3D en chaque point de Gauss. Au terme de ce travail, on dispose d'un outil complet d'analyse de sensibilité aux imperfections, entièrement basé sur la Méthode Asymptotique Numérique, dont les principales fonctionnalités sont : (1) le calcul de branches d'équilibres non-linéaires au moyen d'une méthode de continuation, (2) la détection des points singuliers le long d'une branche d'équilibre, (3) le suivi de points limites, qui permet de mener des études de sensibilité sur des structures 3D, pour des imperfections d'ensemble ou localisées et des défauts de forme ou d'épaisseur.

Mots-clés : Flambement, coques minces, bifurcations, sensibilité aux imperfections, suivi de points limites, système augmenté, Méthode Asymptotique Numérique, éléments finis.

Stability of thin-shell structures and imperfection sensitivity by the Asymptotic Numerical Method

Abstract : This work is devoted to the stability and imperfection sensitivity analysis of thin-shell structures and to the development of efficient numerical methods for nonlinear problems. A numerical path-following of the curve connecting the limit points gives the reduction of critical buckling load which exhibits the sensitivity of the structure to a given imperfection. The underlying algorithm relies on an extended system which contains the equilibrium equations and an additional equation characterizing the singular points. In these equations, the imperfection amplitude is an additional parameter. A modern and efficient shell formulation based on the EAS concept is used. The resulting shell element can handle large rotations and thickness stretching. It takes geometrical nonlinearities into account without any approximation and can deal with material nonlinearities through 3D constitutive laws. The resulting numerical tool is completely based on the Asymptotic Numerical Method. Its main features are : (1) the calculation of nonlinear equilibrium paths with a continuation method, (2) the detection of singular points along an equilibrium branch, (3) the sensitivity analysis of 3D structures through limit-points following for shape or thickness imperfections, in the case of global or local defects.

Keywords : buckling, thin shells, bifurcations, imperfection sensitivity, fold line following, extended system, Asymptotic Numerical Method, finite elements.