Calcul asymptotique lié à l'étude de certains processus stochastiques

Samuel Herrmann

▶ **To cite this version:**

Samuel Herrmann. Calcul asymptotique lié à l'étude de certains processus stochastiques. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2009. tel-00591974

HAL Id: tel-00591974
https://theses.hal.science/tel-00591974

Submitted on 10 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut ÉLIE CARTAN Nancy

Nancy-Université

École Doctorale IAE + M
D.F.D. Mathématiques

MÉMOIRE présenté par

Samuel HERRMANN

en vue d'obtenir le diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité: Mathématiques Appliquées.

Sujet: Calcul asymptotique lié à l'étude de certains processus stochastiques.

soutenu le 30 novembre 2009

Le jury est composé de Messieurs les Professeurs:

Rapporteurs:	
M. Paolo BALDI	Université "Tor Vergata", Rome.
M. Gérard BEN AROUS	Courant Institute, New York.
M. Alain ROUAULT	Université de Versailles.
Examinateurs :	
M. Benjamin JOURDAIN	Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
M. Bernard ROYNETTE	Université Henri Poincaré, Nancy.
M. Pierre VALLOIS	Université Henri Poincaré, Nancy.
M. Liming WU (président)	Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.

Remerciements

Rédiger un mémoire de recherche, c'est faire en quelque sorte le bilan des problèmes mathématiques étudiés au cours des dernières années. En me retournant de la sorte pour voir le chemin parcouru, je me souviens de moments partagés avec collègues et amis... J'ai l'impression de visionner les photos de mon dernier trekking ! Quelques chemins raides et escarpés suivis parfois de pentes douces et ombragées... Mais en toute occasion, l'important est d'être bien accompagné et je le fus ! Merci à tous.

Je tiens à remercier particulièrement Bernard Roynette, mon directeur de thèse, dont j'apprécie l'enthousiasme et la curiosité scientifique. Il a toujours été de bon conseil et même après quelques années au sein de la même équipe de recherche, je reste encore admiratif tant de son expertise mathématique que de ses qualités humaines : générosité et calme olympien notamment. Je lui suis particulièrement reconnaissant d'avoir accepté de faire partie du jury...n'ayant pas arrêté la recherche à l'âge fatidique de la retraite !

J'ai récemment eu l'occasion de collaborer avec Pierre Vallois sur un problème lié aux marches aléatoires persistentes. J'ai beaucoup apprécié ces moments partagés. J'ai eu également le privilège de l'apprécier comme responsable de l'équipe de probabilités pendant de nombreuses années. Son engagement au sein de l'équipe de recherche, au sein du laboratoire, au sein de l'équipe enseignante de l'université Henri Poincaré est pour moi exemplaire.

Je suis vraiment reconnaissant à tous les membres du jury avec une mention spéciale aux rapporteurs, bien entendu, qui ont accepté que cette tâche, quelque peu ingrate je l'admets, vienne chahuter leurs emplois du temps déjà bien chargés.

Alain Rouault, que j'ai croisé à quelques reprises lors des différentes "Journées de Probabilités", m'a fait le plaisir d'accepter de rapporter ce mémoire. Je le remercie de sa gentillesse.

Paolo Baldi a déjà par le passé subit ma prose scientifique puisqu'il avait accepté de rapporter mon mémoire de doctorat. Même si je suis en général contre la double peine, je suis très touché qu'il ait accepté de rapporter également ce mémoire. Merci beaucoup !

Dès mes premiers pas dans le monde de la recherche mathématique, j'ai entendu parler de Gérard Ben Arous. Il faut dire qu'au cours de ma thèse, j'ai collaboré avec Mihai Gradinaru qui fut un de ses doctorants... Je suis très flatté qu'il ait accepté ce rôle de rapporteur. Un grand merci !

Je remercie également Liming Wu de participer au jury. C'est en rencontrant Hacène Djellout à l'école d'été de Saint Flour, il y a de cela quelques années, que j'ai découvert que certains sujets de prédilection de Liming Wu m'intéressaient tout spécialement. C'est un privilège pour moi de compter dans mon jury un expert des déviations de processus stochastiques.

Benjamin Jourdain m'a fait le plaisir d'accepter de participer à ce jury. Même si je l'avais déjà croisé lors de rencontres pédagogiques, j'ai appris à le découvrir davantage lors de la conférence "EDP, Analyse stochastique et simulation de processus". Je le remercie pour sa sympathie.

J'ai eu le privilège de collaborer avec différents collègues que je tiens à remercier maintenant. J'adresse un grand merci à Mihai qui a participé en quelque sorte à l'encadrement de ma thèse de

doctorat et avec qui j'ai pu passer de nombreux moments de travail, de réflexion. Même si tous nos efforts n'ont pas été récompensés, quelques questions restant en suspens..., j'ai vraiment passé d'agréables moments en sa compagnie. Merci à Michaël Scheutzow de m'avoir accueilli à la "Technishe Universität" de Berlin et d'avoir montré de l'intérêt pour mes thématiques de recherche. Le séjour berlinois en fut d'autant plus agréable. Peter Imkeller m'a également fait découvrir des problématiques passionantes. Sa capacité à s'engager très rapidement dans des calculs parfois fastidieux m'a bien impressionné. Je le remercie pour tous les moments passés à l'université Humboldt de Berlin lors de mes séjours réguliers dans cette ville charmante. Ce fut aussi un privilège de partager des idées, des questions, des réflexions avec Dierk Peithmann. J'aurais tellement aimé que cette collaboration se prolonge au delà de son doctorat ! Il a effectivement dû supporter mon vocabulaire primitif tant en allemand qu'en anglais, j'espère que ce n'est pas la raison de sa fuite vers le monde des affaires... L'apprentissage de l'encadrement de la recherche, j'ai pu le prolonger avec Julian Tugaut qui a accepté de partager mes interrogations et mon envie de résoudre quelques questions épineuses.

Un grand merci à Patricia Georges qui m'a épaulé dans le parcours d'obstacles administratifs que représentait cette demande d'Habilitation à Diriger des Recherches. Je lui dois sans doute quelques demies journées de RTT...

Une petite pensée à mes collègues qui ont plus ou moins longtemps partagé mon bureau : Sophie, Hannelore, Ammar, Régine, Céline, Xavier.

Merci à tous mes collègues de l'École des Mines de Nancy et de l'Institut Élie Cartan et tout particulièrement de l'équipe projet TOSCA qui rendent mon cadre de travail agréable.

Un très grand merci à ma famille et à mes amis qui ont accepté et respecté le fait que je sois moins présent par moments pour cause de ... Recherche en cours, veuillez patienter !

Evidémment, l'apotéose de cette série de remerciements revient à mon épouse, Claire-Lise, qui m'encourage, me comprend, me supporte, m'aide bien souvent à garder les pieds sur terre.

Préface

La dernière démarche de la raison est de reconnaître qu'il y a une infinité de choses qui la surpassent ; elle n'est que faible, si elle ne va jusqu'à connaître cela.
Que si les choses naturelles la surpassent, que dira-t-on des surnaturelles ? B. Pascal

Même s'il est toujours plus passionnant d'aller de l'avant vers de nouvelles recherches c'est-à-dire de nouvelles aventures, il est parfois nécessaire de se poser et de faire un bilan sur le chemin parcouru. Ce document de synthèse devrait permettre de faire coexister le nécessaire et le passionnant : pour chaque thématique abordée au cours de mes activités de recherche, un bilan, suivi d'un texte décrivant les perspectives qui en découlent, sera présenté.

Ma recherche commencée aux côtés de Bernard Roynette concerne essentiellement l'étude de processus stochastiques et plus particulièrement de diffusions. Trois problèmes différents avaient été abordés et ont, en partie, initié d'autres études. La première étude concernait un principe de grandes déviations pour une diffusion unidimensionnelle. Il s'agissait de considérer une équation différentielle ordinaire admettant une infinité de solutions (phénomène de Peano) et d'ajouter un terme de diffusion brownienne de faible intensité. L'idée principale était alors de décrire le comportement asymptotique de l'unique solution de l'équation différentielle stochastique lorsque l'intensité de la perturbation aléatoire tendait vers zéro. C'est en particulier une situation qui n'entrait pas dans le cadre classique analysé par M. Freidlin et A. Wentzell. Le second problème concernait la limite au sens de McKean-Vlasov d'un système de particules en interaction, conduisant à des processus auto-stabilisants. Ces processus stochastiques sont en fait attirés par leur propre loi, ce qui rend leur étude plutôt compliquée. Là encore ces processus n'entrent pas dans le cadre habituel des diffusions, solutions d'EDS, puisqu'il s'agit de processus non-linéaires. Le dernier problème abordé fut celui des diffusions dites renforcées qui sont attirées par leur propre trajectoire. Apparaît alors une mémoire longue. Il est évident que les outils habituels du calcul stochastique pour étudier des processus markoviens ne peuvent être appliqués dans ce contexte.
Pour résumer, les études effectuées lors de la thèse de doctorat concernaient des processus de diffusion qui n'entraient pas dans les cadres classiques. Il fallait alors soit trouver de nouveaux outils d'étude soit essayer par quelques stratagèmes de se ramener à des situations plus connues. Certains travaux qui suivirent se basèrent sur ces premières esquisses notamment ceux en collaboration avec Michaël Scheutzow ou encore Peter Imkeller, Dierk Peithmann et enfin Julian Tugaut.

Au cours de l'année post-doctorale passée à l'université Humboldt à Berlin, Peter Imkeller m'a présenté différentes questions liées à la *résonance stochastique*. Ce concept permettant à des systèmes dynamiques, subissant essentiellement deux perturbations : une perturbation périodique et une per-

turbation brownienne (toutes les deux de faible intensité), d'admettre des solutions stochastiques comprenant une forte composante périodique est intrigant. En effet le bruit dans les systèmes dynamiques est souvent considéré comme perturbateur. Or ici, le bruit est créateur d'événement, il permet aux solutions du système d'osciller entre différents points stables, ce qui ne serait pas possible dans un contexte uniquement déterministe. Le point de départ de nos différentes collaborations était de chercher à déterminer une mesure de qualité pour quantifier la "périodicité" d'une trajectoire aléatoire et qui réponde à nos différentes exigences. Là encore la théorie des gandes déviations, sur laquelle repose notre étude, ne pouvait s'appliquer directement à l'EDS considérée puisque la dérive dépendait elle-même du paramètre autour duquel s'articulait le passage à la limite.

Une dernière thématique de recherche m'a intéressé récemment. Avec Pierre Vallois nous avons considéré des marches aléatoires persistantes, dont les accroissements avaient une mémoire d'ordre 1. Là encore il s'agit de processus non-markoviens sortant des sentiers battus. L'intérêt est de comprendre comment en renormalisant ces processus discrets, il est possible, en faisant tendre le pas de temps vers 0, d'obtenir des processus continus non-markoviens.

Evidemment dans cette synthèse, je ne présenterai que les travaux aboutis. Et pourtant j'ai passé du temps avec différents chercheurs à essayer de répondre à diverses questions tout aussi passionnantes que celles exposées dans ces quelques pages, mais qui n'ont malheureusement pas abouti et qui restent donc en suspens, pour l'instant...

Même si les études présentées dans les différents chapitres de ce document semblent bien diverses, elles possèdent de nombreux points communs :

☛ Elles concernent des équations différentielles stochastiques ou des systèmes d'EDS dirigés par des mouvements browniens.

☛ Elles font appel au calcul asymptotique. Dans les questions posées, il s'agit bien souvent de considérer la limite d'un paramètre du système dynamique. Cela peut être : le coefficient de diffusion qui tend vers 0, le temps qui croît à l'infini, le nombre de particules dans un système de particules en interaction qui tend vers l'infini, le pas de temps d'une marche aléatoire qui tend vers 0. Les techniques utilisées sont donc spécifiques à ces passages à la limite : grandes déviations, estimation d'intégrales par la méthode de Laplace, limite de McKean-Vlasov, propagation du chaos, critère de tension des lois de processus, décomposition spectrale des semi-groupes.

☛ Elles présentent des non-linéarités. En effet, dans les problèmes étudiés, les outils classiques du calcul stochastique ne peuvent s'appliquer directement à cause de différentes non-linéarités. Certains processus sont non-markoviens car ils possèdent des mémoires longues (diffusions renforcées) ou instantanées (processus du télégraphe). D'autres processus sont attirés par leur propre loi (processus auto-stabilisants). Quelques outils spécifiques font donc leur apparition : théorèmes de point fixe et théorèmes de comparaison.

Cette synthèse s'articule de la façon suivante :

- Le premier chapitre concerne l'étude de diffusions renforcées. Il s'agit de processus attirés par leur propre trajectoire. Ils ont tendance à passer beaucoup de temps dans des régions qu'ils ont déjà fréquemment visitées dans le passé et la question naturelle de leur comportement en temps long est posée. Ce travail en collaboration avec Bernard Roynette puis Michaël Scheutzow a fait l'objet de deux publications [46, 47].
- Le second chapitre concerne un principe de grandes déviations singulier. Il s'agit de considérer une perturbation browienne de faible intensité d'une équation différentielle, laquelle admet une infinité de solutions (phénomène de Peano). Le comportement asymptotique des trajectoires

est présenté à travers deux articles [36] et [38] écrits en collaboration avec Bernard Roynette et Mihai Gradinaru.

– Le troisième chapitre présente le phénomène de résonance stochastique. L'enjeu de cette étude est de pouvoir décider si une trajectoire d'une EDS à coefficients périodiques est plus périodique qu'une autre trajectoire. Evidemment comme il s'agit de trajectoires aléatoires, elles ne sont nullement périodiques mais nous chercherons quand-même à trouver un critère adéquat pour quantifier cette notion. Ce travail a fait l'ojet de différentes publications avec Peter Imkeller et Dierk Peithmann : [40, 42, 44].
– Dans le quatrième chapitre seront présentés les processus auto-stabilisants. Solutions d'EDS, ils sont attirés par leur propre loi et s'obtiennent comme limite de McKean-Vlasov dans un système de particules en interaction. Différentes questions seront abordées : existence et unicité des solutions et des mesures invariantes, propagation du chaos, grandes déviations, temps de sortie d'un domaine,... Ce travail a été réalisé avec B. Roynette, P. Imkeller, D. Peithmann et J. Tugaut [39, 45, 48].
– Le dernier chapitre repose sur l'étude de marches aléatoires persistantes et leur convergence lorsque le pas de temps tend vers 0. Ce travail initié récemment par Pierre Vallois a fait l'objet d'une prépublication [49].

Publications

Articles publiés dans des revues à comité de lecture :

• *A singular large deviations phenomenon*,
avec M. Gradinaru et B. Roynette,
Annales de l'Institut Henri Poincaré 37 (2001) no.5, pp 555–580

• *Phénomène de Peano et Grandes Déviations*,
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 332, (2001), no.11

• *Barrier crossings characterize stochastic resonance*,
avec P. Imkeller
Stochastics and Dynamics 2, no.3 (2002), pp 413-436

• *Boundedness and convergence of some self-attracting diffusions*,
avec B. Roynette
Mathematische Annalen, 325, no.1 (2003), pp 81-96

• *Système de processus auto-stabilisants*
Dissertationes Mathematicae 414 (2003) 49 pages.

• *Rate of convergence of some self-attracting diffusions*,
avec M. Scheutzow
Stochastic Processes and their Applications 111, no.1 (2004), pp 41-55.

• *The exit problem for diffusions with time-periodic drift and stochastic resonance*,
avec P. Imkeller
Annals of Applied Probability 15, no. 1A, (2005), pp 39–68

• *Transition times and stochastic resonance for multidimensional diffusions with time periodic drift : a large deviations approach*,
avec P. Imkeller et D. Peithmann
Annals of Applied Probability 16, no. 4 (2006), pp 1851–1892

• *Large deviations and a Kramers' type law for self-stabilizing diffusions*,
avec P. Imkeller et D. Peithmann
Annals of Applied Probability 18, no. 4 (2008), pp 1379–1423

➥ **Articles soumis :**

• *From persistent random walk to the telegraph noise*,
avec P. Vallois,
Prépublications de l'Institut Elie Cartan, n. 46, 2008.

• *Non uniqueness of stationary measures for self-stabilizing diffusions*,
avec J. Tugaut
Prépublications de l'Institut Elie Cartan, n. 12, 2009.

➥ **Autres articles :**

• *Stochastic resonance : non-robust and robust tuning notions*,
avec P. Imkeller et I. Pavlyukevich
Probabilistic Problems in Atmospheric and Water Sciences Banach Center Publ.

• *Two Mathematical Approaches to Stochastic Resonance*,
avec P. Imkeller et I. Pavlyukevich
Closing volume of the German national research program on interacting stochastic systems of high complexity Springer.

• *Stochastic Resonance*,
avec P. Imkeller
Encyclopedia of Mathematical Physics, eds. J.-P. Françoise, G.L. Naber and Tsou S.T. Oxford : Elsevier, 2006

➥ **Mémoire de doctorat :**

• *Etude de processus de diffusion*
Thèse université Henri Poincaré Nancy I, 2001.

La plupart de ces articles sont disponibles sur ma page web :
http ://www.iecn.u-nancy.fr/˜herrmann/

Table des matières

Remerciements **i**

Préface **iii**

1 Processus auto-attractifs **1**
1.1 Le support de la fonction d'interaction contient un voisinage de l'origine 2
1.2 La fonction d'interaction s'annule sur un voisinage de l'origine 5
1.3 Perspectives 6

2 Un principe singulier de grandes déviations **9**
2.1 Etude asymptotique de la densité 10
2.1.1 Vitesse de convergence pour $|x| > K^{-1}(t)$ 11
2.1.2 Vitesse de convergence pour $|x| < K^{-1}(t)$ 12
2.2 Principe de grandes déviations fonctionnel 14
2.3 Perspectives 16

3 Résonance stochastique **17**
3.1 Temps de sortie pour une diffusion faiblement inhomogène 19
3.2 Phénomène de résonance 23
3.3 Réduction de modèle : mesure de qualité robuste 24
3.4 Perspectives 26

4 Diffusions auto-stabilisantes **29**
4.1 Systèmes de processus auto-stabilisants 31
4.2 Temps de sortie et potentiel convexe 33
4.3 Mesures invariantes et potentiel à double puits 37
4.4 Perspectives et travaux en cours 39

5 Marches aléatoires persistantes **41**
5.1 Le processus du télégraphe 42
5.2 Résultats de convergence principaux 43
5.3 Perspectives 43

Chapitre 1

Processus auto-attractifs

Ce chapitre se rapporte aux articles [46, 47] et à un chapitre de ma thèse [37]. C'est un travail en collaboration avec B. Roynette et M. Scheutzow

Introduction

Il y a de nombreuses façons de construire des processus non-markoviens dont la dynamique dépend de l'histoire du processus. Dans ce chapitre seront présentés des processus à mémoire longue : la dynamique à un instant donné dépendant de toute la trajectoire passée. Evidemment la prise en compte d'une telle quantité d'information ne peut que modifier drastiquement le comportement d'un processus et cela d'autant plus que le temps écoulé est important. L'étude de ces processus appelés auto-attractifs se focalise donc sur le comportement asymptotique en temps long. Le processus qui concentrera notre attention est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$Z_t = Z_0 - \int_0^t \left(\int_0^s \Phi(Z_s - Z_u) du \right) ds + B_t, \tag{1.0.1}$$

où B_t est un mouvement brownien unidimensionnel. La fonction d'interaction Φ, occupant une place centrale dans ce problème, est une fonction impaire mesurable et bornée avec $\Phi(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Analyser cette "diffusion" particulière revient à trouver sous quelles conditions les trajectoires sont bornées voire convergentes presque sûrement. Dans le cas des trajectoires convergentes, une estimation de la vitesse de convergence complètera le tableau. L'étude met en évidence la relation entre la croissance de la fonction d'interaction au voisinage de l'origine et le comportement asymptotique du processus stochastique associé. Je présente donc deux cas très différents :

- le support de la fonction d'interaction Φ contient un voisinage de l'origine
- la fonction d'interaction s'annule sur un voisinage de l'origine.

Le concept de processus à mémoire longue fut précédemment introduit dans le contexte des marches aléatoires renforcées. Et c'est précisément les résultats surprenants, que R. Pemantle et S. Volkov [66] ont mis en évidence, qui ont motivé notre analyse. Ils ont décrit le comportement en temps long de la marche aléatoire renforcée par sommets sur $\mathbb{Z}$: les trajectoires sont presque sûrement bornées et le support aléatoire limite du processus comporte 5 points. Evidemment il n'y a pas de correspondance immédiate entre ce processus à espace d'états discret et les diffusions auto-attractives, également appelées diffusions renforcées. Il s'ensuit une diversité de définitions des processus renforcés sur $\mathbb{R}$. Une des alternatives de (1.0.1) est de considérer dans le terme de dérive de la diffusion une moyenne de la mesure d'occupation (M. Benaïm, M. Ledoux, O. Raimond [7] et [9, 8], A. Kurtzmann [58]) : le

fait de renormaliser la dérive va évidemment changer le comportement de la diffusion et les méthodes d'analyse.
Avec B. Roynette puis M. Scheutzow, nous nous sommes intéressés aux processus renforcés introduits par R. T. Durrett and L. C. G. Rogers [28], puis étudiés par M. Cranston et Y. Le Jan [21] et généralisés par O. Raimond [70]. Les techniques que nous avons utilisées s'inspirent donc en partie de leurs travaux.

1.1 Le support de la fonction d'interaction contient un voisinage de l'origine

Cette hypothèse concernant le support de la fonction d'interaction indique que l'ensemble de l'historique d'une trajectoire est pris en compte dans la dérive du processus. Il n'y a donc aucune perte d'information. Ceci permet dans un premier temps d'étudier la bornitude presque sûre des trajectoires mais également dans un second temps leur convergence en temps long.

Supposons tout d'abord que la diffusion parte de l'origine (sans perte de généralité) et que la fonction d'interaction Φ soit une fonction impaire continue croissante et bornée qui satisfasse à une condition minimaliste au voisinage de l'origine : il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P_k de degré $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} P_k(x) = +\infty$ tels que

$$|\Phi(x)| \geq C \exp -P_k\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{1.1.1}$$

➥ *Sous cette condition peu exigente, les trajectoires de l'unique solution forte à l'équation* (1.0.1) *sont bornées presque sûrement.*

Evidemment sur un tel processus non-markovien, il est difficile de faire des calculs explicites. La démonstration repose donc essentiellement sur des principes de comparaison. Localement les diffusions renforcées peuvent être comparées à des diffusions homogènes pour lesquels l'analyse stochastique offre de nombreux résultats précis. La preuve repose alors sur la construction d'une suite d'intervalles imbriqués I_n :

$$I_0 =]-\infty, 0] \subset I_1 =]-\infty, L_1] \subset \ldots \subset I_n =]-\infty, L_n] \subset \ldots]-\infty, L_\infty],$$

avec $\lim_{n\to\infty} L_n = L_\infty < \infty$ et sur l'étude de l'événement $\left\{ \sup_{t\geq 0} Z_t < L_\infty \right\}$. En fait, nous allons considérer un événement plus petit qui peut être décrit comme suit : la diffusion passe un temps minimal déterministe α_n entre le temps de sortie de l'intervalle I_n, noté τ_n, et celui de l'intervalle I_{n+1}. Ces temps minimaux α_n sont choisis pour former une suite croissante qui tend vers l'infini. Ainsi le niveau L_∞ ne sera pas atteint en temps fini.
L'événement décrit précédemment peut alors être estimé. En effet lorsque la diffusion quitte l'intervalle I_n pour la première fois, la mesure d'occupation de $(Z_t,\, 0 \leq t \leq \tau_n)$ a son support inclus dans I_n. Comme la dérive de la diffusion renforcée est décroissante (Φ est croissante) et négative pour $x \geq L_n$ et $t \geq \tau_n$ la diffusion a tendance à retourner rapidement dans l'intervalle I_n. La suite (α_n) permet alors de quantifier cette force d'attraction et ainsi, pour n assez grand, d'obtenir un majorant (négatif) de la dérive à l'extérieur de l'intervalle I_n. Ce majorant est noté D_n. Il suffit alors de comparer la diffusion renforcée sur l'intervalle de temps $[\tau_n, \tau_n + \alpha_n]$ avec le processus markovien suivant :

$$Y_t = W_t + D_n t + L_t,$$

où W_t est un mouvement brownien, L_t est un processus croissant à variation finie qui ne croît que lorsque $Y_t = 0$ et qui permet à Y de rester positif. L'utilisation des martingales de Wald permet d'obtenir la transformée de Laplace des temps de sortie d'intervalles semi-infinis pour la diffusion Y et donc d'obtenir les informations suffisantes sur la diffusion auto-attractive. Le résultat final se résume ainsi :

$$\lim_{L_\infty \to \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} Z_t < L_\infty\right) = 1.$$

Evidemment la majoration presque sûre des trajectoires amène automatiquement la bornitude par des arguments de symétrie.
Même si la croissance de la fonction d'interaction Φ est importante dans cette étude puisqu'elle permet à la dérive du processus d'être décroissante, elle n'est cependant pas fondamentale. En effet, un résultat similaire de bornitude des trajectoires peut être obtenu pour des fonctions d'interaction Φ impaires continues et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\Phi(0) = 0$, $\Phi(0_+) > 0$ et $\Phi(x) > 0$ pour $x > 0$. La preuve présentée précédemment peut être adaptée à cette situation particulière en remplaçant les intervalles semi-infinis I_n par des intervalles symétriques $\tilde{I}_n = [-L_n, L_n]$.

➥ Si Φ est une fonction impaire, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $x\Phi^{2+\alpha}(x)$ soit une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim_{x\to\infty} x\Phi^{2+\alpha}(x) = +\infty$ alors l'unique solution faible de l'équation (1.0.1) a des trajectoires bornées presque sûrement.

Revenons au cas d'une fonction d'interaction croissante. Notons que la dérive est une fonction décroissante :

$$-\int_0^t \Phi(x - Z_s)ds \geq -\int_0^t \Phi(y - Z_s)ds, \quad \text{pour } x \leq y.$$

Puisque les trajectoires sont bornées presque sûrement, la dérive du processus s'annule une infinité de fois. Après chaque instant de ce type, grâce à la décroissance de la dérive, la diffusion renforcée aura tendance à rester longtemps confinée dans un intervalle très petit. D'ailleurs cette tendance va s'accroître avec le temps, ce qui permet finalement de montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} Z_t = \liminf_{t\to\infty} Z_t.$$

➥ Si Φ est une fonction croissante impaire vérifiant (1.1.1) alors les trajectoires de la diffusion renforcée (1.0.1) convergent presque sûrement.

Le fait que la dérive de la diffusion passe une infinité de fois par l'origine semble être le point crucial et permet de poursuivre l'étude sous une autre forme : nous introduisons un processus auxiliaire qui aura beaucoup plus d'inertie que la diffusion et qui va l'attirer. Pour toute fonction d'interaction Φ strictement croissante régulière, la dérive de (1.0.1) peut s'écrire sous la forme :

$$D(t, x) := -\int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y)d\mu_t(y),$$

où μ_t représente la mesure d'occupation du processus Z au temps t. Cette fonction est régulière par rapport à la variable x et strictement décroissante presque sûrement lorsque $t > 0$. Nous définissons alors le *processus moyen* noté C_t qui satisfait $D(t, C_t) = 0$ avec $C_0 = Z_0$. Ce processus stochastique particulier joue un rôle fondamental : il attire en tout temps la diffusion renforcée.

➥ S'il existe $c > 0$ et $R > 0$ tels que $\Phi'(x) \geq c$ pour tout $|x| \geq R$, alors $\lim_{t\to\infty} |Z_t - C_t| = 0$ presque sûrement.

Pour la suite, nous noterons $R_t = Z_t - C_t$. Le résultat énoncé est vérifié sans aucune condition particulière sur le comportement de la fonction d'interaction au voisinage de l'origine. Ainsi même si les trajectoires de la diffusion ne convergent pas presque sûrement, la différence entre le processus auto-attractif et le *processus moyen* tend bien vers 0. Ce résultat intuitivement clair repose là encore sur un principe de comparaison entre des diffusions à mémoire longue et des processus de Markov. En utilisant la régularité de la dérive, le *processus moyen* peut être décrit de la sorte :

$$C'_t = \frac{-\Phi(-R_t)}{\int_{\mathbb{R}} \Phi'(C_t - y) d\mu_t(y)}.$$

Nous obtenons une EDS pour le *processus différence* R_t :

$$dR_t = \left(- \int_0^t \Phi(R_t + C_t - y) d\mu_t(y) + \frac{\Phi(-R_t)}{\int_{\mathbb{R}} \Phi'(C_t - y) d\mu_t(y)} \right) dt + dB_t, \quad R_0 = 0. \tag{1.1.2}$$

Toute l'étude des diffusions auto-attractives peut se résumer alors en l'étude de l'EDS (1.1.2). Cette équation n'est pas plus simple à résoudre mais peut faire l'objet d'un principe de comparaison. En effet, il est possible de définir φ une fonction impaire vérifiant $\varphi(\epsilon) > 0$ pour $\epsilon > 0$ et

$$\varphi(\epsilon) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}} \Big\{ \Phi(x + \epsilon) - \Phi(x) \Big\}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Comme, par ailleurs, C'_t est du même signe que R_t, nous obtenons la comparaison suivante :

$$\mathbb{P}(R_t^2 \leq U_t^2, \ \forall t \geq 0) = 1,$$

où le processus U a la même loi que la solution de l'EDS suivante :

$$dU_t = dW_t - t\varphi(U_t) dt, \quad U_0 = 0.$$

L'équation est donc bel et bien simplifiée même s'il reste que cette équation est inhomogène et exige une analyse détaillée pour parvenir à nos fins. En utilisant le Lemme de Borel-Cantelli, d'autres principes de comparaisons et des martingales de Wald, nous obtenons la convergence vers 0 du processus U_t en temps long et une minoration de la vitesse de convergence. Il s'ensuit immédiatement le résultat de convergence suivant :

➥ *Si la fonction d'interaction est impaire croissante régulière et s'il existe $\gamma > 0$ et $C_\gamma > 0$ tels que*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \geq C_\gamma |x - y|^\gamma, \tag{1.1.3}$$

au voisinage de l'origine, alors il existe $K_\gamma > 0$ tel que

$$\limsup_{t \to \infty} \left\{ \left(\frac{t}{\ln t} \right)^{1/(1+\gamma)} \sup_{s \geq t} |Z_s - C_s| \right\} \leq K_\gamma \quad p.s.$$

Puisque la fonction *différence* $(R_t, \, t \geq 0)$ tend vers 0 avec un contrôle de la vitesse, le processus auto-attractif est donc de plus en plus proche du *processus moyen* qui a, pour sa part, une grande inertie. Ce dernier va varier de moins en moins au fur et à mesure que le temps s'écoule. Il est finalement possible (après quelques calculs fastidieux...) de montrer que le processus $(C_t, \, t \geq 0)$ converge en temps long presque sûrement et entraîne de ce fait la convergence de la diffusion renforcée.

➥ *Si la fonction d'interaction est impaire croissante régulière et vérifie* (1.1.3) *au voisinage de l'origine, alors pour tout* $\mu < 1/(1+\gamma)$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\left(\frac{t}{\ln t}\right)^{\mu}\sup_{s\geq t}|Z_s - Z_t|\right\} = 0 \quad p.s.$$

Notons que dans le cas d'une interaction linéaire $\Phi(x) = ax$ avec $a > 0$, les résultats de convergence et de vitesse de convergence peuvent être précisés en montrant, au passage, que la minoration de la vitesse de convergence obtenue précédemment est relativement fine. Le processus Z_t converge vers une variable aléatoire limite Z_∞ qui a l'expression intégrale suivante :

$$Z_\infty = \int_0^\infty \left(1 - ase^{as^2/2}\int_s^\infty e^{-au^2/2}du\right)dB_s.$$

Une analyse basée sur la loi du logarithme itéré permet d'obtenir

$$\limsup_{t\to\infty}\sqrt{\frac{t}{\ln t}}\,(Z_t - Z_\infty) = -\liminf_{t\to\infty}\sqrt{\frac{t}{\ln t}}\,(Z_t - Z_\infty) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \text{p.s.}$$

Dans tous ces résultats de convergence, la stricte croissance de la fonction d'interaction au voisinage de l'origine est fondamentale.

1.2 La fonction d'interaction s'annule sur un voisinage de l'origine

M. Cranston et Y. Le Jan [21] ont étudié le cas particulier de l'interaction

$$\Phi(x) = \nu\ \mathrm{sgn}(x)1_{\{|x|\geq\alpha\}}, \tag{1.2.1}$$

avec $\alpha > 0$, $\nu > 0$, pour mettre en évidence l'importance du comportement de Φ au voisinage de l'origine. Ils ont montré que, presque sûrement, les trajectoires de l'unique solution faible de (1.0.1) ne convergent pas. En effet, après un instant t_0 fixé, le processus se comporte comme une diffusion homogène tant que $|Z_t - Z_{t_0}| \leq \alpha/2$. Ce qui entraîne en particulier que cette différence atteint la valeur $\alpha/2$ presque sûrement en temps fini. Il est donc presque sûrement impossible de contenir le processus dans un petit intervalle de $\mathbb{R}$.
Avec B. Roynette, nous nous sommes intéressés à l'analyse de la bornitude des trajectoires. Soit τ_n le premier instant où la diffusion atteint le niveau $n\alpha$. Il suffit de montrer que, sachant $\tau_n < \infty$, le processus stochastique n'atteint pas le niveau $(n+1)\alpha$ avec une probabilité strictement positive qu'il est possible de minorer indépendemment de n. Nous montrons ainsi que les trajectoires sont presque sûrement majorées. Par des arguments de symétrie, la minoration s'obtient de la même façon.

➥ *Les trajectoires de l'unique solution faible de l'équation* (1.0.1)*, munie de l'interaction* (1.2.1)*, sont presque sûrement bornées.*

La démonstration de ce résultat présente quelque difficulté liée à la mémoire longue du processus. La structure particulière de la fonction d'interaction permet de relier la dérive à chaque instant au temps passé historiquement par la diffusion dans certaines régions de la droite réelle. Ainsi en considérant $t \geq \tau_n$, la dérive $D(t,x)$ du processus auto-attractif ne dépend que du temps passé sous le niveau $(n-1/2)\alpha$ lorsque $x \geq 0$ et tant que $|Z_t - \alpha n| \leq \alpha/2$. Pour pouvoir estimer ne serait-ce que grossièrement la probabilité de ne pas atteindre le niveau $(n+1)\alpha$, nous avons besoin de décrire l'évolution au cours du temps de la dérive $D(t,x)$ sur l'intervalle $[(n+1/2)\alpha, (n+1)\alpha]$. Cette description va faire intervenir différents ingrédients dont :

– Plusieurs principes de comparaison qui permettent de se ramener à l'étude de processus markoviens arrêtés du type :

$$X_t = W_t - m \int_0^t 1_{[0,1]}(X_s)ds, \quad m > 0,\ t \leq \tau$$

où W_t est un mouvement brownien et τ est le premier instant de sortie de $[-1, a_m]$, $0 < a_m < 1$.
– Une estimation du temps passé par la diffusion arrêtée X dans l'intervalle $[0, a_m]$, noté A_m. Cette étape passe par l'utilisation de la formule de Feynman-Kac et la résolution d'une équation différentielle ordinaire.
– Une loi forte des grands nombres adaptée à notre situation qui va décrire l'évolution de la dérive au cours du temps. Cette loi forte permet de gérer des variables aléatoires indépendantes de moyenne α_m et de variance σ_m^2 satisfaisant $\sum_{m\geq 1} \alpha_m = \infty$ et $\sum_{m\geq 1} \sigma_m^2 < \infty$. Elle est appliquée directement aux variables A_m définies dans l'étape précédente.

Cette démonstration permet en particulier de présenter le résultat limite suivant : la solution de (1.0.1) satisfait l'inégalité

$$\limsup_{t\to\infty} Z_t - \liminf_{t\to\infty} Z_t \leq 11\alpha \quad p.s.$$

Ainsi même dans le cas où la fonction d'interaction s'annule dans un voisinage de l'origine, les trajectoires restent bornées presque sûrement.

1.3 Perspectives

Il y a de nombreuses questions ouvertes concernant ces diffusions dites renforcées mais, comme les processus sont non-markoviens (le couple (Z_t, μ_t) où μ_t est la mesure d'occupation est markovien), il est plutôt difficile d'obtenir des réponses à ces diverses questions. Les outils habituels du calcul stochastique ne peuvent en effet s'appliquer. Voici un échantillon de questions :

– Nous ne connaissons que peu de choses sur la variable aléatoire limite Z_∞ dans le cas où les trajectoires convergent presque sûrement. Dans le cas d'une interaction linéaire i.e. $\Phi(x) = ax$, M. Cranston et Y. Le Jan [21] ont décrit la variable aléatoire limite sous la forme d'une intégrale stochastique. Dans le cas général, aucune information n'est encore disponible sur cette limite aléatoire. Même s'il est sans doute très difficile d'en avoir une expression précise, une description des queues de distribution serait une avancée significative.
– Concernant le bruit de l'EDS (1.0.1), plusieurs questions se posent. Peut-on ajouter un coefficient de diffusion homogène sans pour autant changer drastiquement le comportement des trajectoires ? Ce comportement trajectoriel peut-il se généraliser à des processus auto-attractifs dirigés par des processus gaussiens généraux ? L. Yan, Y. Sun and Y. Lu [82] ont considéré le cas du mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $1/2 < H < 1$. Mais cette étude est essentiellement centrée sur le cas linéaire. Il serait ainsi intéressant de généraliser l'analyse à d'autres fonctions d'interaction.
– Le choix de la fonction d'interaction est primordial. Toute fonction croissante impaire peut évidemment être considérée comme le gradient d'un potentiel qui forme un puits, le fonds du puits se localisant à l'origine. Que se passe-t-il si le fond du puits n'est plus situé à l'origine ? Que se passe-t-il si le potentiel a plusieurs minima locaux ? Il parait même difficile de se faire une idée du comportement trajectoriel de la diffusion. R.T. Durrett et L. C. G. Rogers [28] ont considéré le cas d'une fonction d'interaction négative $\Phi(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ils ont alors étudié la vitesse de convergence de la diffusion vers l'infini. Ce cas est sans doute extrême mais il ne faut pas négliger, à mon avis, la possibilité pour une diffusion renforcée de tendre

vers l'infini.
Par ailleurs le type d'interaction peut être changé, on pourrait alors considérer toute fonction dépendant de la mesure d'occupation du processus. J.R. Norris, L.C.R. Rogers et D. Williams [63] ont par exemple étudié le cas de la masse de Dirac $\Phi = -\delta_0$, ce qui permet d'obtenir l'EDS

$$Z_t = B_t + \int_0^t L(s, Z_s)ds,$$

où $L(s,x)$ désigne le temps local du processus Z. Là encore, le processus tend vers l'infini. Mais que se passe-t-il si le temps local est remplacé par une fonction du temps local ?

– Une dernière piste de réflexion concernant les processus auto-attractifs serait d'introduire un renforcement par pénalisation. La pénalisation est souvent utilisée pour changer drastiquement le comportement d'un processus en mettant des poids différents sur les trajectoires (voir [73] par exemple). Ainsi un processus récurrent peut devenir transient et vise et versa. Soit $(X_t,\ t \geq 0)$ un mouvement brownien, soit $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ sa filtration naturelle et soit F une fonction strictement positive. Alors pour tout $s \geq 0$ et $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$ on définit le quotient

$$\frac{\mathbb{E}\left[1_{\Lambda_s} \exp - \int_0^t F(X_s - X_t)ds\right]}{\mathbb{E}\left[\exp - \int_0^t F(X_s - X_t)ds\right]}.$$

En analysant le comportement asymptotique du quotient lorsque t devient grand, il est peut-être possible, dans quelques cas particuliers, de montrer que la limite existe, nous la noterons $\mathbb{Q}$. L'intérêt est d'étudier la loi du processus canonique $(X_t,\ t \geq 0)$ sous cette nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ et de déterminer quel genre de renforcement anime la dynamique du processus.

Chapitre 2

Un principe singulier de grandes déviations

Ce chapitre se rapporte aux articles [36] et [38]. C'est un travail en collaboration avec M. Gradinaru et B. Roynette.

Introduction

La théorie des grandes déviations a une place fondamentale dans l'étude de systèmes dynamiques perturbés par du bruit de faible intensité. Elle permet en particulier de décrire la vitesse de convergence d'un processus stochastique vers sa limite déterministe. L'application de cette théorie aux processus de diffusion fut initiée par M. Freidlin et A.D. Wentzell [30]. Ce chapitre se concentre sur une famille de diffusions qui n'entre pas dans le cadre classique d'application des grandes déviations, et pour cause : le système dynamique deterministe limite admet une infinité de solutions ayant la même condition initiale (phénomène de Peano).
Nous considérons tout d'abord $(X_t^\varepsilon,\ t \geq 0)$ la solution sur $[0,T]$ de l'équation différentielle stochastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\, dB_t + b(X_t^\varepsilon)dt \\ X_0^\varepsilon = 0. \end{array} \right. \tag{2.0.1}$$

où b est une fonction continue, $(B_t,\ t \geq 0)$ un mouvement brownien unidimensionnel. La loi de ce processus sera notée $\mathbb{P}^\varepsilon$. Nous cherchons à analyser le comportement de la diffusion quand l'intensité du bruit tend vers 0. Pour cela considérons le système dynamique *débruité* donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = b(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{array} \right. \tag{2.0.2}$$

Dans le cadre classique, lorsque la dérive b est une fonction lipschitzienne, X^ε converge, uniformément sur $[0,T]$, vers l'unique solution de l'équation différentielle (2.0.2). La théorie de Freidlin-Wentzell, qui repose sur le principe de contraction et le théorème de Schilder décrivant le PDG du mouvement brownien, permet d'obtenir la vitesse de convergence exponentielle d'ordre ε. Ainsi $\mathbb{P}^\varepsilon$ converge vers la masse de Dirac en l'unique solution de (2.0.2) et satisfait un principe de grandes déviations dans l'espace fonctionnel $\mathcal{C}([0,T])$, muni de la norme uniforme, avec la bonne fonctionnelle d'action :

$$I_T(f) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |f'(t) - b(f(t))|^2 dt\ ,\ \text{si } f \in H^1 \\ \infty\ \text{ sinon,} \end{array} \right.$$

où H^1 désigne l'espace de Cameron-Martin.

☛ *Que se passe-t-il si la dérive n'est pas lipschitzienne ?*

Cette question a déjà été abordée, sous la forme d'une discussion informelle, par G. Jona-Lasinio [54] pour une diffusion à dérive mesurable mais les résultats sont clairement plus faibles que les estimations habituelles. Notre objectif (travail en commun avec B. Roynette et M. Gradinaru) était de décrire avec précision le comportement dans la cas suivant :

(H1) b est une fonction continue impaire croissante, $b' \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$ et b^{-1} est intégrable au voisinage de 0.

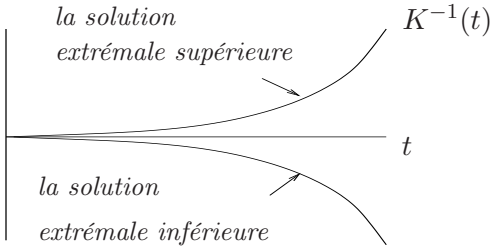
(H2) il existe $0 < \gamma < 1$ et $C > 0$ tels que $b'(x) \sim C\gamma|x|^{\gamma-1}$ au voisinage de l'origine.

Sous l'hypothèse (H1), le système dynamique (2.0.2) admet une infinité de solutions indexées par un paramètre λ :

$$x(t) = \pm K^{-1}(t-\lambda)1_{\{t\geq\lambda\}} \quad \text{avec } K(x) = \int_0^x \frac{1}{b(y)}\,dy \text{ et } \lambda \geq 0. \tag{2.0.3}$$

L'équation différentielle stochastique admet, quant à elle, une unique solution de loi $\mathbb{P}^\varepsilon$. Sous la condition de continuité de b, la famille $\{\mathbb{P}^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est relativement compacte et toute valeur d'adhérence a son support contenu dans l'ensemble des solutions déterministes décrit par (2.0.3).

Evidemment cette information est peu précise puisque le système dynamique admet un phénomène de Peano. R. Bafico et P. Baldi [2] ont mis en évidence que la condition (H1) permet d'obtenir l'unicité de la valeur d'adhérence dont le support se restreint aux solutions extrémales de (2.0.2) : $\pm K^{-1}(t)$. Plus précisément, $\mathbb{P}^\varepsilon$ converge vers $\mathbb{P} = \frac{1}{2}\delta_{K^{-1}} + \frac{1}{2}\delta_{-K^{-1}}$ sur l'intervalle $[0,T]$.



Ce résultat peut trouver une justification heuristique. En effet, la perturbation brownienne de l'équation différentielle va permettre, dès que le temps est strictement positif, de quitter l'origine et de se trouver immédiatement en un point par lequel passe une unique solution de (2.0.2) qui attire alors la diffusion. Par des arguments de symétrie, la probabilité de rejoindre un voisinage de la solution extrémale inférieure ou supérieure est identique.

Avec M. Gradinaru et B. Roynette, nous avons analysé la vitesse de convergence de $\mathbb{P}^\varepsilon$ vers $\mathbb{P}$, en mettant en évidence un principe de grandes déviations singulier puisque deux vitesses drastiquement différentes entrent en ligne de compte dans cette étude asymptotique. Le premier paragraphe est consacré à l'étude asymptotique de X_t^ε pour t fixé. Puis, dans le second paragraphe, un principe fonctionel sera présenté.

2.1 Etude asymptotique de la densité

La densité de l'unique solution forte de (2.0.1) est notée $p^\varepsilon(t,x)$. Cette densité converge vers 0 pour tout point (t,x) qui n'est pas sur une des trajectoires extrémales. Mais la vitesse de convergence dépend de la position du point : s'il est entre les deux trajectoires extrémales ($|x| < K^{-1}(t)$), c'est-à-dire s'il existe une solution du type (2.0.3) qui passe par le point, alors la vitesse est bien plus faible que si le point ne se trouve pas sur la trajectoire d'une solution issue de 0 du système dynamique débruité (2.0.2).

2.1.1 Vitesse de convergence pour $|x| > K^{-1}(t)$

En considérant un point (t,x) à l'extérieur des trajectoires optimales, les outils d'analyse de la densité sont des outils classiques de calcul stochastique, complétés par la théorie des grandes déviations : théorème de Varadhan et théorème de Schilder. La vitesse de convergence exponentielle est alors classique pour les EDS.

➥ *Il existe une fonction strictement positive k_t telle que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon \ln p^{\varepsilon}(t,x) = -k_t(|x|). \tag{2.1.1}$$

Dans le cas particulier où $b(x) = \mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ ce qui correspond au paramètre $\gamma = 1/2$, la fonction k_t se calcule de façon explicite :

$$k_t(x) = \frac{x^2}{2t} - \frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{xt}{4} - \frac{t^3}{96}.$$

Voici les principales idées de la démonstration. En utilisant quelques éléments de calcul stochastique : changement d'échelle, formule de Girsanov, formule d'Itô et la décomposition de la trajectoire brownienne sur l'intervalle $[0,1]$ à l'aide du pont brownien : $B_t = gt + \beta_t$, g étant une gaussienne indépendante du pont β, nous obtenons l'expression de la densité de X_t^{ϵ} :

$$p^{\varepsilon}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{G(|x|)}{\varepsilon} - \frac{x^2}{2\varepsilon t}\right\} \mathbb{E}\left[\exp\left(-F(\sqrt{\varepsilon}\beta) - \frac{J(\sqrt{\varepsilon}\beta)}{\varepsilon}\right)\right] \tag{2.1.2}$$

où $G(x) = \int_0^x b(y)dy$, $F(\sqrt{\varepsilon}\beta) = \frac{t}{2}\int_0^1 b'(xs + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{t}\beta_s)ds$ et $J(\sqrt{\varepsilon}\beta) = \frac{t}{2}\int_0^1 b^2(xs + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{t}\beta_s)ds$. Dans l'expression de la densité, il suffit d'estimer convenablement le terme d'espérance. Pour la majoration, comme F est une fonction positive, on se contente d'étudier $\mathbb{E}[\exp -\frac{J(\sqrt{\varepsilon}\beta)}{\varepsilon}]$ en appliquant les théorèmes de Varadhan et de Schilder (voir, par exemple, [26] p. 43 et p. 81). Ainsi

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln p^{\varepsilon}(t,x) \le G(|x|) - \frac{x^2}{2t} - \frac{1}{2}\inf_{\phi\in H_0^1} A(\phi)$$

où le minimum est pris sur l'espace fonctionnel de Cameron-Martin restreint aux fonctions vérifiant $\phi(0) = \phi(1) = 0$ et, par ailleurs, la fonctionnelle A est donnée par

$$A(\phi) := t\int_0^1 b^2(xs - \sqrt{t}\phi(s))ds + \int_0^1 \phi'^2(s)ds. \tag{2.1.3}$$

La fonction qui minimise A, notée ϕ_0 peut être trouvée. Il s'agit d'une démonstration quelque peu calculatoire mais la résolution d'une équation différentielle ordinaire permet de montrer qu'il existe une fonction strictement positive k_t telle que

$$\inf_{\phi\in H_0^1} A(\phi) = A(\phi_0) = \begin{cases} 2G(|x|) - \frac{x^2}{t}, & \text{si } |x| \le K^{-1}(t) \\ 2G(|x|) - \frac{x^2}{t} + 2k_t(|x|), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci permet en priorité de montrer la majoration de la densité pour tous les points (t,x) situés à l'extérieur des trajectoires extrémales mais met également en évidence que la vitesse est différente si (t,x) est entre ces trajectoires particulières.

En ce qui concerne la minoration de $\varepsilon \ln p^\varepsilon(t,x)$, il suffit de se placer dans un voisinage de ϕ_0. Ainsi en choisissant judicieusement ce voisinage $\mathcal{W}$, on obtient :

$$p^\varepsilon(t,x) \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{G(|x|)}{\varepsilon} - \frac{x^2}{2\varepsilon t}\right\} \mathbb{E}\left[1_{\mathcal{W}}(\sqrt{\varepsilon}\beta) \exp\left(-F(\sqrt{\varepsilon}\beta) - \frac{J(\sqrt{\varepsilon}\beta)}{\varepsilon}\right)\right].$$

Un contrôle du terme F pour toute fonction de $\mathcal{W}$ aboutit à l'équivalence annoncée. La démonstration repose donc essentiellement sur des outils classiques de grandes déviations, qui mis bout à bout de façon judicieuse aboutissent à l'estimation de la vitesse de convergence à l'extérieur des trajectoires extrémales.

2.1.2 Vitesse de convergence pour $|x| < K^{-1}(t)$

Lorsque (t,x) se trouve entre les trajectoires extrémales, le résultat de convergence est complètement différent. Pour bien mettre cela en évidence, étudions tout d'abord le cas particulier suivant : $b(x) = \mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$.

➥ *Pour* $|x| \leq t^2/4$,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1/3} \ln p^\varepsilon(t,x) \leq a_1'(t/2 - \sqrt{|x|}), \tag{2.1.4}$$

où a_1' *est le plus grand zéro négatif de la dérivée de la fonction de Airy :* $a_1' = -1.01879297...$ *(voir, par exemple, [1] p. 172)*

Pour obtenir une telle majoration, nous allons développer des calculs plus fins que ceux décrits dans le paragraphe précédent. En fait, dans l'expression de la densité (2.1.2), nous supprimons F car il s'agit d'une fonction positive. Il reste donc à évaluer $\mathbb{E}[\exp -\frac{J(\sqrt{\varepsilon}\beta)}{\varepsilon}]$. Cette évaluation a été décrite à l'aide du théorème de Varadhan mais il nous faut, dans cette nouvelle situation, développer davantage les calculs. Ainsi en notant ϕ_0 la fonction minimisant A défini par (2.1.3), nous introduisons une boule en norme α-Hölderienne ($0 < \alpha < 1$) centrée en ϕ_0, de petit diamètre et notée $\mathcal{B}_\alpha$. On obtient alors deux termes : $\mathcal{E}_1 = \mathbb{E}[1_{\mathcal{B}_\alpha}(\sqrt{\varepsilon}\beta) \exp -\frac{J(\sqrt{\varepsilon}\beta)}{\varepsilon}]$ et $\mathcal{E}_2 = \mathbb{E}[1_{\mathcal{B}_\alpha^c}(\sqrt{\varepsilon}\beta) \exp -\frac{J(\sqrt{\varepsilon}\beta)}{\varepsilon}]$. Il suffit de se concentrer sur $\mathcal{E}_1$ puisque le second terme est négligeable. En développant le pont brownien dans la base de Schauder, et en utilisant la forme particulière de la fonction minimisante $\phi_0(s)$ qui est égale à $xs/\sqrt{t}$ pour $s \leq 1 - 2\sqrt{|x|}/t$, nous montrons que

$$\mathcal{E}_2 \leq \left(\exp -\frac{A(\phi_0)}{2\varepsilon}\right) \mathbb{E}\left[\exp -\frac{t^{3/2}}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{1-2\sqrt{|x|}/t} |\beta_s| ds\right].$$

$A(\phi_0)$ a déjà été estimé, il reste donc à considérer attentivement le terme d'espérance. Or l'utilisation de la formule de Kac permet de relier l'analyse de l'espérance précédente à la résolution d'une équation différentielle ordinaire en lien avec les fonctions d'Airy qui satisfont : $-u''(x) + xu(x) = 0$. Ainsi, pour tout $0 < a < 1$, nous avons l'asymptotique suivante :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1/3} \ln \mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^a |\beta_u| du\right] = \frac{a_1' a}{2^{1/3}}$$

qui implique la majoration souhaitée.

Considérons maintenant le cas général d'une dérive b satisfaisant les conditions (H1) et (H2).

➥ *Si* (t,x) *appartient au domaine situé entre les trajectoires des solutions extrémales de (2.0.2), alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) \ln p^\varepsilon(t,x) = -\lambda_1 \left(t - K(|x|)\right), \tag{2.1.5}$$

où $s(\varepsilon) := \varepsilon^{(1-\gamma)/(1+\gamma)}$ et λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger :

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{C\gamma}{2|x|^{1-\gamma}} + \frac{C^2|x|^{2\gamma}}{2}. \tag{2.1.6}$$

Par ailleurs, cette convergence est uniforme sur tout compact de l'ensemble

$$\Big\{(t,x) :\ 0 < t \le T,\ 0 < |x| < K^{-1}(t)\Big\}.$$

La démonstration de ce résultat utilise des techniques analytiques très différentes de celles présentées jusqu'ici. Elle repose sur la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Pour cela, il est nécessaire d'introduire une nouvelle expression de la densité. Le calcul stochastique (formule d'Itô et formule de Girsanov) permet d'obtenir

$$p^\varepsilon(t,x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{G(|x|)}{\varepsilon} - \frac{x^2}{2\varepsilon t}\right\} \mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t V(B_s)ds \,\middle|\, B_t = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right], \tag{2.1.7}$$

où G est la primitive de b et $V(x) = b'(\sqrt{\varepsilon}x) + \frac{b^2(\sqrt{\varepsilon}x)}{\varepsilon}$. Nous utilisons alors le résultat classique suivant (voir [72] Définition 2 p.122 et Théorème 1 p.127) : si V vérifie une propriété d'uniforme continuité höldérienne dans un voisinage de tout point $x \neq 0$, alors

$$(t,x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t V(B_s)ds \,\middle|\, B_t = x\right]$$

est une solution classique de l'équation de Schrödinger associé au potentiel V :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\,V\,u \quad \text{sur }]0,T] \times \mathbb{R}^*.$$

Ce résultat peut donc s'appliquer simplement à la densité $p^\varepsilon(t,x)$. Mais, pour pouvoir passer aisément à la limite ($\varepsilon \to 0$) et tenir compte des bords ($x = 0$), nous allons préférer le concept de solutions de viscosité d'équations de Hamilton-Jacobi (voir [4]). Cette théorie est agréable : elle permet une grande souplesse au niveau des théorèmes limites et les conditions de régularité des solutions sont minimales (semi-continues inférieures ou supérieures). Il y a évidemment un prix à payer. Après passage à la limite, deux fonctions particulières apparaissent : une sur-solution limite et une sous-solution limite et le jeu consiste alors à montrer l'unicité. Mais le jeu en vaut la chandelle...

Comme la densité est une fonction paire, il suffit d'estimer la vitesse de convergence pour $x \ge 0$. En choisissant convenablement un domaine excluant $x = 0$ noté Ω^ε et défini par $\{(t,x) :\ K(\sqrt{\varepsilon}s(\varepsilon)^{1/2}) < t \le T,\ \sqrt{\varepsilon}s(\varepsilon)^{1/2} < x < K^{-1}(t)\}$ (Figure 2.1) et par une transformation logarithmique de la densité, nous obtenons que $u^\varepsilon(t,x) = -s(\varepsilon)\ln p^\varepsilon(t,x)$ est une solution de viscosité de l'équation

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + H_\varepsilon\Big(t,x,u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}\Big) = 0 \quad \text{sur } \Omega^\varepsilon,$$

où l'Hamiltonien est défini par

$$H_\varepsilon(x,u,p,q) := -\frac{\varepsilon}{2}\,q + \frac{\varepsilon}{2s(\varepsilon)}\,p^2 + b(x)p - b'(x)s(\varepsilon).$$

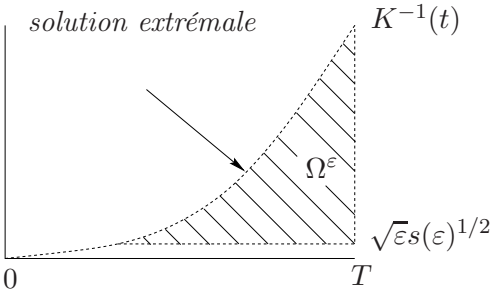


FIG. 2.1 – Le domaine Ω^ε

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, nous obtenons, par des résultats de stabilité des solutions de viscosité, que la limite supérieure de u^ε et la limite inférieure sont sous-solution et sur-solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

où $\Omega = \{(t,x) : 0 < t \leq T,\ 0 < x < K^{-1}(t)\}$. A condition de montrer que ces deux solutions coïncident sur la frontière $\{0 < t \leq T,\ x = 0\}$, la limite est unique et vérifie $u^0(t,x) = c_0(t - K(x))$. Il reste donc à estimer la valeur de la solution, dépendant de ε, sur la frontière correspondante, c'est-à-dire à calculer l'asymptotique de la densité $p^\varepsilon(t, \sqrt{\varepsilon}s(\varepsilon)^{1/2})$ en vue, d'une part, de montrer l'unicité de la solution limite et, d'autre part, de déterminer la constante c_0. En utilisant (2.1.7), il vient

$$p^\varepsilon(t, \sqrt{\varepsilon}s(\varepsilon)^{1/2}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{G(\sqrt{\varepsilon}s(\varepsilon)^{1/2})}{\varepsilon} - \frac{s(\varepsilon)}{2t}\right\} \mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t V(B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2}\right].$$

La condition (H2) permet, dans l'estimation précédente, de remplacer le potentiel $V(x)$ par $\tilde{V}(x) := \frac{C\gamma}{|x|^{1-\gamma}} + C^2|x|^{2\gamma}$ et $G(x)$ par $x^{\gamma+1}/(\gamma+1)$. Par la propriété de changement d'échelle du mouvement brownien, l'expression à analyser s'écrit alors

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{1}{\gamma+1} - \frac{s(\varepsilon)}{2t}\right\} \mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^{t/s(\varepsilon)} \tilde{V}(B_s)ds \,\middle|\, B_{t/s(\varepsilon)} = 1\right] = \frac{e^{1/(\gamma+1)}}{\sqrt{\varepsilon}s(\varepsilon)^{1/2}}\ a_{\frac{t}{s(\varepsilon)}}(0,1).$$

Ici $a_t(x,y)$ représente la densité d'un semi-groupe de contraction auto-adjoint dont le générateur infinitésimal est un opérateur à trace. La fonction a_t se développe donc sous la forme d'une série impliquant les fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger (2.1.6). Par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) \ln p^\varepsilon(t, \sqrt{\varepsilon}s(\varepsilon)^{1/2}) = -\lambda_1 t,$$

où λ_1 est la première valeur propre positive de (2.1.6). En d'autres termes, l'asymptotique de la densité est entièrement déterminée puisque la sur-solution limite équivaut à la sous-solution limite : $u^0(t,x) = c_0(t - K(x))$. Par ailleurs, la valeur de la constante c_0 correspond à $-\lambda_1$.

Pour résumer, un mélange d'outils analytiques (décomposition spectrale et résolution d'une équation de Hamilton-Jacobi) et stochastiques (formule d'Itô, propriétés du mouvement brownien, formule de Girsanov) permet de montrer que la vitesse de convergence de la densité au point (t,x) est complètement liée à la position du point vis-à-vis des solutions extrémales : la vitesse de convergence correspondant au domaine compris entre les trajectoires extrémales est bien plus faible (exponentiellement plus faible) que la vitesse à l'extérieur de ces trajectoires. Ce résultat bien singulier est difficilement explicable. Il est cependant à noter que la présence de nombreuses solutions au système dynamique débruité, dans un voisinage du point considéré, influe sur la vitesse avec laquelle la densité en ce point décroît vers 0.

2.2 Principe de grandes déviations fonctionnel

Il est important de pouvoir généraliser le principe de grandes déviations exposé dans le paragraphe précédent, concernant la marginale X_t^ε, aux trajectoires aléatoires : $(X_t^\varepsilon,\ 0 \leq t \leq T)$. Le principe de grandes déviations fonctionnel qui en découle permet alors d'appréhender la probabilité pour que la diffusion X^ε reste dans le voisinage d'une fonction déterministe fixée φ. Là encore, deux

vitesses de convergence différentes vont apparaître.

➥ *Si la dérive b est une fonction bornée vérifiant (H1) et (H2) alors X^ε suit un principe de grandes déviations dans $(\mathcal{C}([0,T]), \|\cdot\|_\infty)$ de vitesse ε avec une bonne fonctionnelle d'action définie par*

$$I_T(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |f'(t) - b(f(t))|^2 dt \ , \ si\ f \in H^1 \\ \infty \quad sinon, \end{cases}$$

où H^1 désigne l'espace de Cameron-Martin.

Ce résultat est finalement identique à celui énoncé dans le cadre classique, c'est-à-dire dans le cas d'une EDS avec une dérive régulière, voir, par exemple [25]. Et pour cause... En suivant la discussion informelle de G. Jona-Lasinio [54], l'idée essentielle est de régulariser la dérive par convolution avec une approximation de l'unité. La bornitude de la dérive permet alors de contrôler l'erreur d'approximation.
Ce principe de grandes déviations fonctionnel permet en particulier d'estimer la probabilité que la diffusion X^ε appartienne à un borélien Γ de $(\mathcal{C}([0,T]), \|\cdot\|_\infty)$:

$$-\inf_{x\in\Gamma^\circ} I_T(x) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \mathbb{P}^\varepsilon(\Gamma) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \mathbb{P}^\varepsilon(\Gamma) \leq -\inf_{x\in\bar{\Gamma}} I_T(x). \tag{2.2.1}$$

Si le borélien $\overline{\Gamma}$ ne contient aucune solution du système dynamique débruité (2.0.2) alors les inégalités précédentes indiquent que la vitesse de convergence vers 0 de la probabilité d'appartenir à ce borélien est exponentielle avec un taux en ε. C'est notamment le cas d'un borélien dont les marginales (coupes à temps fixés) ne contiennent que des points à l'extérieur des trajectoires extrémales. Mais c'est également le cas d'un borélien dont les marginales peuvent être entre les trajectoires extrémales mais qui est suffisamment "tordu" pour ne contenir aucune solution de (2.0.2), voir Figure 2.2.

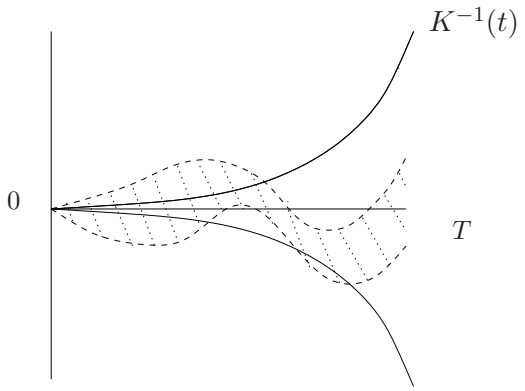


FIG. 2.2 – Borélien Γ

Evidemment ce résultat ne donne aucune information sur les boréliens qui contiennent ne serait-ce qu'une solution du système dynamique limite. L'analyse de R. Bafico et P. Baldi [2] permet de donner la réponse suivante : si le borélien Γ contient une solution extrémale alors la probabilité ne tend pas vers 0. La dernière situation a été étudiée dans [38]. Quelle est la probabilité que X^ε appartienne à un voisinage d'une solution non-extrémale de (2.0.2) ?

➥ *Si la dérive b est bornée et strictement croissante satisfaisant (H1) et (H2), si φ est une solution non-extrémale du système dynamique, alors pour tout $0 < \delta < K^{-1}(T) - |\varphi(T)|$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{(1-\gamma)/(1+\gamma)} \ln \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| \leq \delta\right) = \lambda_1\Big(K(|\varphi(T)| + \delta) - T\Big)$$

Le passage de l'étude d'une marginale X_t^ε à la trajectoire elle-même repose sur une idée très simple.

L'événement à étudier peut être décomposé de la sorte : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ avec

$$\mathcal{E} := \left\{ \sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| \leq \delta \right\} = \left\{ |X_T^\varepsilon - \varphi(T)| \leq \delta \right\} \dot\cup \mathcal{E}_2.$$

Grâce à la croissance de la fonction b, l'événement $\mathcal{E}_2$ ne contient aucune solution de l'équation (2.0.2) et la probabilité d'un tel événement décroît exponentiellement vite avec vitesse ε comme nous venons de le démontrer. Il s'ensuit que $\mathcal{E}_2$ est négligeable par rapport $\mathcal{E}_1$ dont l'estimation est évidente à partir de la convergence de la densité.

2.3 Perspectives

Cette étude effectuée autour d'un système dynamique qui satisfait un phénomène de Peano était tout à fait passionnante. Bien que difficile, elle a permit de mettre en valeur un phénomène tout à fait singulier et motive à découvrir d'autres systèmes qui n'entrent pas dans des schémas classiques d'étude asymptotique.

- D'autres systèmes déterministes qui apparaissent comme limite d'EDS lorsque l'intensité du bruit tend vers 0 et qui, par ailleurs, admettent une infinité de solutions issues d'une même condition initiale attirent particulièrement l'attention. Que se passe-t-il pour des diffusions à coefficient non-homogène dépendant du temps ? Que se passe-t-il pour des systèmes dynamiques en dimension supérieure ?
- Un autre champ d'étude concerne les EDS qui, lorsqu'un paramètre tend vers 0, convergent vers une EDS limite qui admet plusieurs solutions. C'est notamment le cas de la pénalisation de la mesure de Wiener étudiée par C. Donati-Martin et Y. Hu [27]. La solution de l'équation stochastique (unique) tend avec probabilité 1/2 vers un processus de Bessel de dimension 3 et avec probabilité 1/2 vers son opposé. Dans une telle situation, il paraît très intéressant de connaître la vitesse de convergence. Les outils seraient sans doute différents puisque le processus limite est stochastique.

L'article [36] est cité par [68], [67] et [69].

Chapitre 3

Résonance stochastique

Ce chapitre repose sur les articles [40], [41], [44] et les documents de synthèse [42] et [43]. C'est un travail en collaboration avec P. Imkeller et D. Peithmann

Introduction

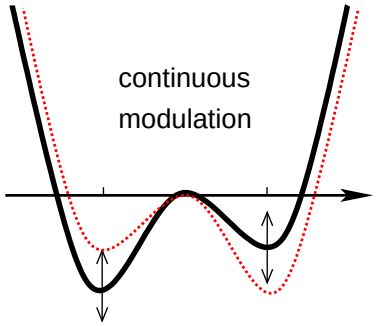
La théorie de la résonance stochastique prend naissance dans le contexte des systèmes dynamiques périodiques en temps, perturbés par du bruit de faible intensité. Son principal défi consiste à trouver une *mesure de qualité* pour évaluer parmi deux diffusions, solutions d'EDS, laquelle a ses trajectoires les plus périodiques. Evidemment cette question anodine peut paraître bien farfelue puisque par construction, la solution d'une EDS, même à coefficients périodiques vis-à-vis de la variable temporelle, ne peut en aucun cas être périodique ! Il se trouve néanmoins que dans de nombreux systèmes issus de la physique (climatologie [10, 11, 12], neurosciences, étude des lasers,..., voir [34] pour une synthèse) les trajectoires observées soient bruitées mais comportent cependant une forte composante périodique. Un critère de qualité devient donc indispensable surtout pour les problèmes de calibration en vue d'obtenir les trajectoires "les plus périodiques" possibles. La situation correspondant au choix optimal des paramètres est alors appelée *résonance stochastique*.
L'équation différentielle stochastique qui est au coeur de cette étude est la suivante :

$$dX_t^\varepsilon = b\Big(\frac{t}{T}, X_t^\varepsilon\Big)\,dt + \sqrt{\varepsilon}dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0^\varepsilon = x_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{3.0.1}$$

où la dérive b est une fonction périodique de période 1 pour la variable temporelle, de sorte que la période du système est T. Par ailleurs, $(W_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard de dimension d.
Peu d'études mathématiques traitant de la périodicité de la solution d'une telle équation ont vu le jour. M. Freidlin fut le premier à introduire les grandes déviations pour présenter une approche de la question d'optimalité [31, 19] : quelle est la meilleure relation entre ε et T pour observer des trajectoires "périodiques" ? Mais le critère choisi pour quantifier la périodicité des trajectoires n'a pas permis de déterminer un réglage optimal. P. Imkeller et I. Pavlyukevich ont présenté différents réglages optimaux, dépendant du critère choisi [50, 51, 52, 53]. Mais toutes ces études ont été réalisées dans le cadre particulier suivant : la diffusion est unidimensionnelle et la dépendance de la dérive vis-à-vis de la variable temporelle est squeletique. La fonction $t \to b(t, x)$ est en effet constante par demi-période. Nous nous sommes intéressés au cadre d'une dépendence temporelle continue : $t \to b(t, x)$ est une fonction régulière.

Typiquement la situation à analyser est celle d'un gradient de potentiel à deux puits dont la profondeur des puits change périodiquement de façon continue. Le puits le plus profond devient périodiquement le puits le moins profond et vice et versa. Donnons l'exemple suivant : $b(t,x) = -\nabla_x U(t,x)$ avec

$$U(t,x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - Ax\sin(2\pi t), \quad 1 \gg A > 0.$$



Dans cette situation, l'équation (3.0.1) représente grosso modo le comportement d'une particule brownienne évoluant dans le paysage à deux puits $U(t,x)$ c'est-à-dire dans un paysage symétrique subissant une faible et lente perturbation périodique externe. Si l'intensité du bruit est trop forte, de nombreuses transitions entre les puits sont observées rendant le mouvement plutôt chaotique. Par contre, si l'intensité est trop faible, la particule ne bouge pas beaucoup et va nécessiter un temps très long pour pouvoir franchir le col séparant les puits.

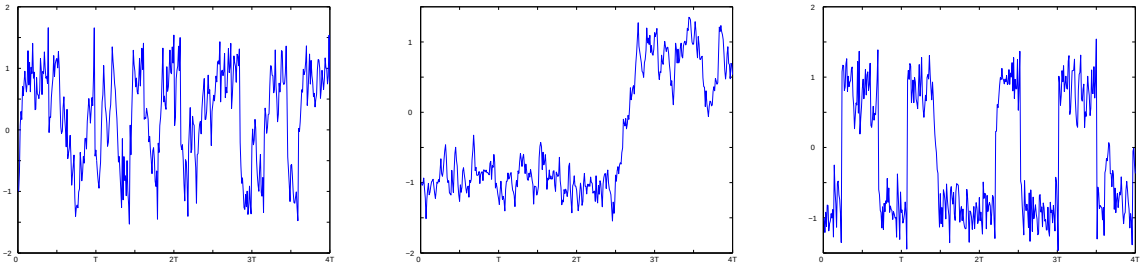


FIG. 3.1 – Problème d'optimalité de l'intensité du bruit pour la résonance

Il apparaît alors une intensité de bruit optimale pour que la particule adopte un mouvement périodique en rejoignant systématiquement le puits le plus profond. Ce régime optimal est celui de la résonance stochastique. M. Freidlin [31] a démontré que la période devait être très grande vis-à-vis de l'intensité du bruit. En effet, d'après la théorie des grandes déviations, il faut attendre en moyenne un temps exponentiellement grand pour observer une transition entre les deux puits du potentiel sachant que la barrière séparant les deux puits a, par hypothèse, une hauteur minimale indépendante de ε (pour une hauteur dépendant de ε voir [13]). Ainsi la période doit avoir la forme suivante $T^\varepsilon \sim \exp\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)$ quand $\varepsilon \to 0$, où μ est supérieur à une valeur critique reliée à la loi de Kramers-Eyring : loi du temps de sortie d'un puits. Nous cherchons donc à compléter ce résultat pour déterminer le paramètre μ optimal lorsque $\varepsilon \to 0$.
La discussion présentée jusqu'ici a été volontairement réduite au cas des dérives sous forme de gradient mais l'étude menée avec P. Imkeller et D. Peithmann concerne des fonctions de dérive générales.

☛ *Quelles sont les différentes mesures de qualité pour la périodicité des trajectoires utilisées jusqu'ici ?*
Les mathématiciens ne se sont intéressés à ce problème que récemment mais les physiciens avaient déjà depuis quelque temps des outils à leur disposition pour mesurer la périodicité des solutions d'EDS. Evidemment le processus X^ε solution de (3.0.1) n'est pas markovien et par conséquent

n'admet pas de mesure invariante. Mais en prenant en compte la variable temporelle, nous pouvons alors définir le processus de Markov suivant $Z_t = (t \bmod(T^\varepsilon), X_t)$. Nous notons alors $\nu_t(x)dx$ sa mesure stationnaire. En d'autres termes, les lois de $X_t \sim \nu_t(x)dx$ et de $X_{t+T} \sim \nu_{t+T}(x)dx$, sous cette mesure, sont identiques pour tout $t \geq 0$.
Présentons alors les principales mesures de qualité utilisées par les physiciens :

- La première mesure est sans doute la plus utilisée. Elle repose sur le coefficient de Fourier de la trajectoire moyenne de la diffusion correspondant à la période T^ε. Cette mesure nommée *spectral power amplification* (SPA) est donnée par :

$$M_{SPA}(\varepsilon, T) = \left| \int_0^1 \mathbb{E}_\nu[X^\varepsilon_{sT}] e^{2\pi i s} ds \right|^2 .$$

  Les autres mesures de qualité sont des dérivées de celle-ci.
- La seconde mesure est le quotient entre la périodicité de la diffusion et l'intensité du bruit, nommée *SPA-to-noise ratio* : $M_{SPN}(\varepsilon, T) = M_{SPA}(\varepsilon, T)/\varepsilon^2$.
- Une troisième mesure repose sur l'énergie totale des trajectoires moyennes :

$$M_{EN}(\varepsilon, T) = \int_0^1 \Big(\mathbb{E}_\nu[X_{sT}] \Big)^2 ds.$$

Tous ces critères reposent sur les trajectoires moyennes de la diffusion et ne tiennent que peu compte des fluctuations autour de la moyenne. Ce que nous souhaitions avant tout, c'est de proposer un nouveau critère qui ne soit pas uniquement basé sur le comportement moyen sous la mesure invariante mais qui tienne plus compte du comportement trajectoriel de la diffusion, notamment des transitions entre les états méta-stables du système.

Cette recherche est devenue d'autant plus essentielle que P. Imkeller et I. Pavlyukevich [51] ont mis en évidence une défaillance des mesures favorites. En effet, il est relativement compliqué dans la pratique de calculer explicitement les critères cités ci-dessus pour des EDS. Il est donc fréquent, de remplacer la diffusion par une chaîne de Markov à temps continu à valeurs dans un espace à deux états, chaque état représentant un fond de puits de U. Un choix convenable du générateur de cette chaîne permet de mimer les transitions de la diffusion entre ces états méta-stables. Il s'ensuit qu'habituellement les critères sont estimés dans le cadre de ce *modèle réduit* et utilisés directement pour trouver la relation optimale entre l'intensité ε et la période T^ε. Or P. Imkeller et I. Pavlyukevich ont montré que l'évaluation des mesures de qualité n'était pas robuste face à la réduction de modèle ! Notre objectif est alors de trouver une nouvelle mesure trajectorielle qui soit effectivement robuste vis-à-vis de cette réduction de modèle.

3.1 Temps de sortie pour une diffusion faiblement inhomogène

La nouvelle mesure de périodicité d'une diffusion sera basée sur les transitions entre les états méta-stables du système dynamique associé à la diffusion. Il est donc essentiel d'appréhender le temps nécessaire à la diffusion pour sortir d'un compact puis du domaine d'attraction d'un des deux états stables. Ce genre de résultat est directement lié à la théorie des grandes déviations. Le livre de A. Dembo et O. Zeitouni [25] présente agréablement les résultats classiques liés au problème de sortie et donc à la loi de Kramers-Eyring [56]. Des résultats plus précis concernant le lien entre cette loi et une loi exponentielle ont été présentés par M.V. Day [23, 24] dans le cas d'un unique point stable. Enfin A. Bovier, M. Eckhoff, V. Gayrard et M. Klein [17, 18] ont étudié précisément cette loi dans le cas d'un paysage comprenant plusieurs états métastables en utilisant la théorie du

potentiel. Tous ces résultats concernent une EDS à coefficients homogènes.
Considérons l'équation qui nous intéresse :

$$dX_t^\varepsilon = b\Big(\frac{t}{T^\varepsilon}, X_t^\varepsilon\Big)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,dW_t, \quad t \geq 0,\ X_0^\varepsilon = x_0 \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1.1}$$

Nous supposons que $T^\varepsilon = \exp\frac{\mu}{\varepsilon}$ avec $\mu > 0$, et que b est une fonction localement lipschitzienne qui satisfait de plus une condition de croissance ou plutôt de dissipativité : il existe $\eta > 0$ et $R_0 > 0$ tel que

$$\langle x, b^\varepsilon(t,x)\rangle < -\eta|x| \quad \text{pour tout } t \geq 0,\ |x| \geq R_0.$$

Cette condition permet en particulier d'obtenir assez facilement la tension exponentielle de la loi de X^ε.
Le but de ce paragraphe est de présenter des résultats concernant le temps nécessaire à la diffusion pour aller d'un état méta-stable à l'autre. Pour cela nous définissons ces états et leurs domaines d'attraction.
Hypothèse : *L'équation différentielle ordinaire*

$$\dot\varphi_s(t) = b(s, \varphi_s(t)), \quad t \geq 0, \tag{3.1.2}$$

admet deux états d'équilibre stables x_- et x_+ dans $\mathbb{R}^d$ qui ne dépendent pas de $s \geq 0$. De plus, les domaines d'attraction définis par

$$A_\pm(s) = \Big\{y \in \mathbb{R}^d :\ \varphi_s(0) = y \quad \textit{implique} \lim_{t\to\infty} \varphi_s(t) = x_\pm\Big\}$$

sont aussi indépendents de $s \geq 0$ et nommés $A_\pm$. Ils sont supposés satisfaire $\overline{A_- \cup A_+} = \mathbb{R}^d$ et $\partial A_- = \partial A_+$. On note χ cette frontière.

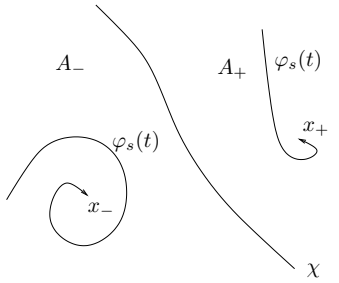


FIG. 3.2 – Domaines d'attraction

Pour analyser les transitions entre les deux domaines d'attraction, nous allons nous intéresser tout particulièrement au temps d'entrée dans un voisinage de x_+ sachant que la condition initiale de la diffusion appartient à un voisinage de x_-. Si $B_\varrho(x_+) \subset A_+$ désigne une boule euclidienne de rayon $\rho > 0$ centrée en x_+ alors le temps d'arrêt qui concentre notre attention est le suivant :

$$\tau_\varrho = \inf\{t \geq 0 :\ X_t^\varepsilon \in B_\varrho(x_+)\}. \tag{3.1.3}$$

L'étude du comportement asymptotique de τ_ϱ, quand ε tend vers 0, présente deux difficultés majeures, la première réside dans le fait que la dérive de (3.1.1) dépende du paramètre ε, la seconde concerne la non-homogénéité de la dérive : celle-ci dépend de la variable temporelle de façon périodique. C'est pour cela que les résultats classiques ne s'appliquent pas directement. Il faut alors, en premier lieu, analyser le principe de grandes déviations lié à (3.1.1) puis utiliser ces résultats pour faire une étude du temps de sortie. C'est la méthode utilisée dans [41] et [44]. Les résultats démontrés sont plutôt techniques, je préfère donc présenter une discussion informelle sur l'estimation de ce temps d'arrêt.

✍ *Comment déterminer grossièrement la loi du temps de sortie d'un domaine d'attraction ?*

Considérons une EDS à coefficients homogènes :

$$dY_t^\varepsilon = b(Y_t^\varepsilon)dt + \sqrt{\varepsilon}dW_t, \quad Y_0 = y_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{3.1.4}$$

où W_t est un mouvement brownien et notons $\hat{\tau}$ son temps de sortie d'un domaine d'attraction défini autour d'un point stable, disons x_-. Pour décrire $\hat{\tau}$, nous allons découper l'axe temporel en une infinité d'intervalles de longueur L. Cette longueur est fixée et indépendante du paramètre ε. Pour chaque intervalle de temps $[kL, k(L+1)[$, $k \in \mathbb{N}$, nous observons si la diffusion sort, ou non, du domaine. La probabilité de sortir sur un tel intervalle ne dépend que très peu de k puisque le processus est markovien. En fait la seule variation, qu'il est possible d'observer, est entièrement due à la position de la diffusion au début de la fenêtre temporelle et cette position est forcément relativement proche du point stable autour duquel le domaine est construit. On en déduit donc que $\lfloor \hat{\tau}/L \rfloor$ suit approximativement une loi géométrique de paramètre p^ε où p^ε est la probabilité pour la diffusion partant de x_- de sortir du domaine avant le temps L.
Pour évaluer p^ε, il suffit de considérer toutes les trajectoires continues φ allant de x_- et sortant du domaine A_- avant l'instant L puis de calculer avec quelle probabilité la diffusion peut rester proche d'une telle function. C'est alors qu'entre en scène la théorie des grandes déviations : cette probabilité est exponentiellement petite et le taux de décroissance est donné par la fonctionnelle d'action

$$I_L(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L |\dot{\varphi}_t - b(\varphi_t)|^2\, dt, & \text{si } \varphi \text{ est absolument continue,} \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons la fonction *coût* :

$$V(x,y,t) = \inf\{I_t(\varphi) : \varphi \in C([0,t]), \varphi_0 = x, \varphi_t = y\},$$

puis le *quasi-potentiel* :

$$V(x,y) = \inf_{t>0} V(x,y,t). \tag{3.1.5}$$

Le coût minimal nécessaire pour sortir du domaine d'attraction est donné par $\inf_{y \in A_-^c} V(x_-, y, L)$. Pour L suffisamment grand, on peut approcher cette expression par la quantité $\mathcal{E} = \inf_{y\in\chi} V(x_-, y)$ où χ est la frontière de A_-. Il s'ensuit que $p^\varepsilon \asymp e^{-\mathcal{E}/\varepsilon}$.
Puisque $\lfloor \hat{\tau}/L \rfloor$ suit grosso modo une loi géométrique de paramètre p^ε, le temps moyen qu'il faut attendre pour voir la diffusion sortir du domaine est de l'ordre de $1/p^\varepsilon$ c'est-à-dire $e^{\mathcal{E}/\varepsilon}$ et, de plus, $\frac{\hat{\tau}}{\mathbb{E}[\hat{\tau}]}$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1. Ce résultat a été démontré rigoureusement par M.V. Day [23] en utilisant des méthodes de décomposition spectrale de l'opérateur associé à la diffusion (3.1.4).

✍ *Que se passe-t-il alors pour la diffusion* (3.1.1) *?*

Nous souhaitons évidemment, pour pouvoir observer un comportement périodique des trajectoires, que les transitions entre les voisinages de x_- et x_+ au cours d'une période soient très probables. Décomposons la période T^ε en N intervalles de même longueur et analysons le comportement de la diffusion sur chaque intervalle. Sur $\left[\frac{k}{N}T^\varepsilon, \frac{k+1}{N}T^\varepsilon\right[$ le processus (3.1.1) est relativement proche d'une diffusion homogène de dérive $b(\frac{k}{N}, \cdot)$. Ceci revient à geler le paramètre du temps dans la dérive de l'EDS. Cette comparaison entre une diffusion dont la dérive dépend périodiquement du temps et un processus autonome peut être abordée de deux façons différentes. La première méthode consiste à utiliser des principes de comparaison qui permettent de relier les diffusions de dérive respectivement $b(t,x)$ et $\underline{b}_I(x) = \inf_{t\in I} b(t,x)$ ou encore $\overline{b}_I(x) = \sup_{t\in I} b(t,x)$ où I représente un petit intervalle de temps. Cette méthode très intuitive utilisée dans [41] a le grand désavantage de ne pouvoir être utilisée qu'en dimension 1. Pour une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, nous avons dû introduire une seconde méthode [44] qui consiste à estimer précisément la distance entre deux diffusions et les conséquences sur les principes de grandes déviations. En d'autres termes, il nous faut montrer que

la solution de l'EDS (3.1.1) est localement (en temps) exponentiellement équivalente, vis-à-vis des grandes déviations, à une diffusion à coefficients homogènes. La démonstration est vraiment plus pénible mais fonctionne quelle que soit la dimension de l'espace.
Revenons donc à la diffusion dont on a "gelé" la dérive $b(s,x)$ avec disons $s = \frac{k}{N}$. Soient la bonne fonctionnelle d'action associée :

$$I_T^s(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T |\dot\varphi_t - b(s,\varphi_t)|^2 \, dt, & \text{si } \varphi \text{ est absolument continue,} \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

la fonction de coût et le quasi-potentiel correspondants :

$$V^s(x,y,t) = \inf\{I_t^s(\varphi) : \varphi \in C([0,t]), \varphi_0 = x, \varphi_t = y\}, \quad V^s(x,y) = \inf_{t>0} V^s(x,y,t).$$

Il est alors possible d'estimer la probabilité pour que la diffusion de dérive $b(\frac{k}{N},x)$ sorte de A_- dans l'intervalle de temps $\left[\frac{k}{N}T^\varepsilon, \frac{k+1}{N}T^\varepsilon\right[$. Le temps moyen de sortie est de l'ordre de $\exp\frac{\mathcal{E}(k/N)}{\varepsilon}$ où

$$\mathcal{E}(s) := \inf_{y\in\chi} V^s(x_-,y), \quad s \geq 0.$$

Pour savoir si un tel temps de sortie est probable dans cet intervalle de temps fixé, il suffit de comparer $\exp\frac{\mathcal{E}(k/N)}{\varepsilon}$ à $T^\varepsilon = \exp\frac{\mu}{\varepsilon}$. La probabilité d'observer la sortie sera élevée dès que $\mathcal{E}(k/N) \leq \mu$.
Cette discussion informelle nous permet alors de mettre en place tous les éléments nécessaires à l'énoncé du résultat principal.
Hypothèse : *La fonction d'énergie $\mathcal{E}(t)$ est strictement monotone entre ses extrema (discrets) et tout extremum est global.*
Il est évident que $\mathcal{E}$ est une fonction continue périodique de période 1. Nous définissons

$$\mu_* := \inf_{t\geq 0} \mathcal{E}(t) \qquad \text{et} \qquad \mu^* := \sup_{t\geq 0} \mathcal{E}(t),$$

et pour tout $\mu \in]\mu_*, \mu^*[$ nous introduisons le premier instant où l'énergie nécessaire pour quitter A_- est plus petite que μ, en d'autre terme, plus petite que l'énergie disponible :

$$a_\mu = \inf\{t \geq 0 : \ \mathcal{E}(t) \leq \mu\}. \tag{3.1.6}$$

Intuitivement nous comprenons bien que la sortie de la diffusion sera observée autour de $a_\mu T^\varepsilon$.

➥ *Soit $\mu < \mathcal{E}(0)$. Il existe $\eta > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $h \leq h_0$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \sup_{y\in B_\eta(x_-)} \mathbb{P}_y\left(\tau_\varrho \notin [(a_\mu - h)T^\varepsilon, (a_\mu + h)T^\varepsilon]\right) \ = \ \mu - \mathcal{E}(a_\mu - h).$$

De plus cette convergence est uniforme par rapport au paramètre μ dans tout compact de $]\mu_*, \mathcal{E}(0)[$.

La preuve de ce résultat repose essentiellement sur des estimations techniques de grandes déviations qui doivent être appréhendées avec précaution puisque plusieurs paramètres entrent en ligne de compte (condition initiale, μ, le temps "gelé" s) et exigent l'uniformité de la limite.

3.2 Phénomène de résonance

Fort de l'estimation du temps nécessaire à la diffusion (3.1.1) pour sortir du domaine d'attraction A_-, nous pouvons envisager l'étude du phénomène de résonance. Ce problème consiste à trouver la relation optimale entre l'intensité du bruit ε et la période $T^\varepsilon = \exp\frac{\mu}{\varepsilon}$ du système dynamique associé à la diffusion, en d'autres termes à trouver le parametre μ optimal, de sorte que les trajectoires soient les "plus périodiques" possible.

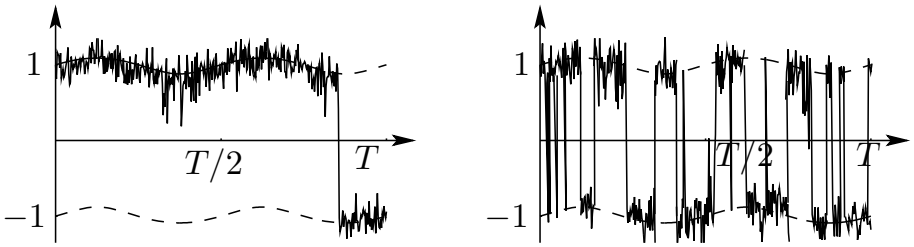
Evidemment, pour parler de périodicité, il faut considérer la dynamique complète de la diffusion, c'est-à-dire combiner la sortie du domaine d'attraction A_- avec celle de A_+. Pour décrire les transitions notées $\tau_\rho^\pm$ entre un voisinage de $x_\mp$ et un voisinage de $x_\pm$, nous noterons $\mathcal{E}_\pm$ l'énergie instantanée nécessaire et définissons :

$$a_\mu^\pm = \inf\Big\{t \geq 0 :\ \mathcal{E}_\pm(t) \leq \mu\Big\}. \tag{3.2.1}$$

La famille des paramètres μ qui présentent un intérêt dans cette étude doit appartenir aux intervalles suivants :

$$I_i \ = \ \Big]\inf_{t\geq 0}\mathcal{E}_i(t),\sup_{t\geq 0}\mathcal{E}_i(t)\Big[, \quad i\in\{-,+\}.$$

En effet si μ n'appartient pas à ces intervalles alors deux situations peuvent se présenter : soit la diffusion reste trop longtemps dans un domaine d'attraction et les transitions sont donc exceptionnelles, soit le comportement de la diffusion devient chaotique puisque un grand nombre de transitions apparaissent lors d'une période.



Le fait que μ appartienne aux deux intervalles décrits ci-dessus, ne suffit pas tout à fait pour obtenir les trajectoires voulues puisque cette condition n'empêche pas des transitions immédiates à l'échelle de temps T^ε. En effet si pour un temps t fixé les deux fonctions d'énergie satisfont $\mathcal{E}_\pm(t) < \mu$ un grand nombre de transitions ont lieu dans un voisinage de ce temps à l'échelle T^ε, en d'autres termes, dans l'intervalle $[(t-\delta)T^\varepsilon, (t+\delta)T^\varepsilon]$, avec δ petit.

On définit donc l'*interval de résonance* $I_\mathcal{R}$ comme étant la famille des paramètres μ qui évite les transitions immédiates et les séjours anormalement long dans un domaine d'attraction.

$$I_\mathcal{R} \ = \ \Big]\max_{i=\pm}\inf_{t\geq 0}\mathcal{E}_i(t),\inf_{t\geq 0}\max_{i=\pm}\mathcal{E}_i(t)\Big[$$

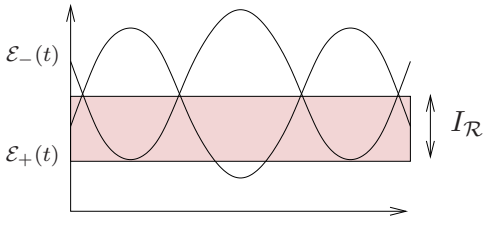


FIG. 3.3 – Intervalle de résonance

Supposons que $\mathcal{E}_i(0) > \inf_{t\geq 0}\max_{j=\pm}\mathcal{E}_j(t)$ (on peut toujours en translatant le temps se ramener à ce cas). Pour trouver parmi cette famille de paramètres le paramètre optimal, c'est-à-dire la relation

optimale entre T^ε et ε, nous considérons le critère de qualité suivant :

$$\mathcal{M}(\varepsilon,\mu,\varrho)=\min_{i=\pm}\sup_{x\in B_\varrho(x_i)}\mathbb{P}_x\left(\tau_\varrho^{-i}\in[(a_\mu^i-h)T^\varepsilon,(a_\mu^i+h)T^\varepsilon]\right),\quad \varepsilon>0,\mu\in I_{\mathcal{R}}, \tag{3.2.2}$$

qui mesure la proximité entre les transitions aléatoires et leur limite déterministe. En effet, si les transitions ont lieu à des intervalles réguliers, la trajectoire est proche d'une trajectoire périodique. Remarquons que ce critère dépend de la largeur h de la fenêtre temporelle considérée.

➥ *Soit M un sous-ensemble compact de $I_{\mathcal{R}}$ et $h_0>0$. Alors pour tout $h\le h_0$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\Big(1-\mathcal{M}(\varepsilon,\mu,\varrho)\Big)=\max_{i=\pm}\big\{\mu-\mathcal{E}_i(a_\mu^i-h)\big\} \tag{3.2.3}$$

uniformément par rapport à $\mu\in M$.

Supposons que

$$I_{\mathcal{R}}\ni\mu\mapsto\max_{i=\pm}\big\{\mu-\mathcal{E}_i(a_\mu^i-h)\big\}$$

admette un minimum global $\mu_{\mathcal{R}}(h)$. Supposons de plus que

$$\mu_{\mathcal{R}}=\lim_{h\to 0}\mu_{\mathcal{R}}(h)$$

existe dans $I_{\mathcal{R}}$. Nous notons alors $\mu_{\mathcal{R}}$ le *point de résonance stochastique* de la diffusion X^ε. Il décrit la relation optimale recherchée entre T^ε et ε. Dans certains cas, ce point de résonance peut être déterminé simplement. Par exemple, en considérant qu'il existe une phase $\phi\in]0,1[$ entre les fonctions d'énergie : $\mathcal{E}_-(t)=\mathcal{E}_+(t+\phi)$, la détermination de $\mu_{\mathcal{R}}$ est alors liée au minimum de la dérivée de la fonction d'énergie.

➥ *Supposons que $\mathcal{E}_-$ est deux fois différentiable et que son maximum global (resp. son minimum global) est atteint au temps t_1 (resp. t_2) avec $t_1<t_2$. S'il existe par ailleurs un unique point $t_1<s<t_2$ tel que $\mathcal{E}_-|_{]t_1,s[}$ est strictement concave et $\mathcal{E}_-|_{]s,t_2[}$ est strictement convexe alors le point de résonance est donné par $\mu_{\mathcal{R}}=\mathcal{E}_-(s)$.*

Dans la pratique, les fonctions d'énergie peuvent souvent être calculées simplement. En fait, si la dérive est issue d'un gradient $b(t,x)=-\nabla_x U(t,x)$ alors les énergies $\mathcal{E}_\pm$ sont reliés aux profondeurs des puits du potentiel U [30].

3.3 Réduction de modèle : mesure de qualité robuste

La réduction de modèle, souvent utilisée dans la pratique, consiste à remplacer la diffusion (3.1.1) par une chaîne de Markov mimant les transitions entre les points méta-stables [51]. La chaîne de Markov à temps continu $\{Y_t^\varepsilon,\ t\ge 0\}$, de condition initiale $Y_0^\varepsilon=-1$, prend ses valeurs dans l'espace d'état $S=\{-1,+1\}$. Son générateur infinitésimal est donné par

$$Q(t)=\begin{pmatrix}-\varphi(t) & \varphi(t)\\ \psi(t) & -\psi(t)\end{pmatrix},$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, $t\ge 0$, sont des fonctions périodiques de période 1 décrivant les taux qui induisent les transitions de la diffusion entre les points d'équilibre $x_\pm$, i.e.

$$\varphi(t)=\exp\Big\{-\frac{\mathcal{E}_-(t/T^\varepsilon)}{\varepsilon}\Big\}\quad\text{et}\quad\psi(t)=\exp\Big\{-\frac{\mathcal{E}_+(t/T^\varepsilon)}{\varepsilon}\Big\},\quad t\ge 0,$$

avec $T^\varepsilon = \exp\frac{\mu}{\varepsilon}$.
L'étude de ce modèle réduit a fait l'objet de l'article [40]. Si τ_1 désigne le premier instant de saut de la chaîne de Markov alors nous définissons $S_0 = \tau_1/T^\varepsilon$ le temps de saut renormalisé dont la densité de probabilité est connue explicitement. Ce qui permet, à l'aide de la méthode de Laplace, d'obtenir les résultats asymptotiques suivants :

➥ *Faisons tendre ε vers 0, alors*
• *si $\mu > \sup_{t\geq 0}\mathcal{E}_-(t)$ la loi de S_0 tend vers une masse de Dirac en 0.*
• *si $\mu \in]\inf_{t\geq 0}\mathcal{E}_-(t), \sup_{t\geq 0}\mathcal{E}_-(t)]$ alors la loi conditionnelle de S_0 sachant $Y_0^\varepsilon = \pm 1$ tend vers la masse de Dirac au point $a_\mu^\pm$ défini par (3.2.1).*
• *si $\mu \leq \inf_{t\geq 0}\mathcal{E}_-(t)$, alors la mesure de probabilité de S_0 tend faiblement vers la mesure nulle.*

Le comportement asymptotique de la chaîne de Markov Y^ε est ainsi relativement proche de celui de la diffusion X^ε solution de (3.1.1). Ceci se confirme par le théorème contrôlant la distance entre le temps d'arrêt S_0 et les temps déterministes $a_\mu^- + k$, $k \in \mathbb{N}$ défini par (3.2.1). On rappelle que $Y_0^\varepsilon = -1$.

➥ *Si $\mu \in]\inf_{t\geq 0}\mathcal{E}_-(t), \sup_{t\geq 0}\mathcal{E}_-(t)[$ et si h est suffisamment petit alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon \ln \mathbb{P}\left(|S_0 - (a_\mu^- + k)| \geq h,\ \forall k \in \mathbb{N}\right) = \mu - \mathcal{E}_-(a_\mu^- - h),$$

En considérant la densité de S_0, il est évident que le premier pic est le plus important et que l'estimation de la probabilité précédemment étudiée correspond essentiellement à la probabilité de l'événement $\{|S_0 - a_\mu^-| \geq h\}$ qui est exponentiellement petite.
Ceci nous amène à considèrer la mesure de qualité :

$$\mathcal{N}(\varepsilon,\mu) = \min_{i=\pm}\mathbb{P}_i\left(S_0 \in [a_\mu^i - h, a_\mu^i + h]\right), \quad \varepsilon > 0,\ \mu \in I_{\mathcal{R}}, \tag{3.3.1}$$

C'est le pendant de la mesure utilisée jusqu'ici pour les diffusions : elle correspond à la probabilité que les transitions se réalisent dans des fenêtres temporelles de longueur h autour de la limite déterministe. Cette mesure est un critère d'optimisation : il permet de trouver $\mu_{\mathcal{R}}(h)$ grâce à la limite suivante :

➥ *Soit Γ un sous-ensemble compact de $I_{\mathcal{R}}$ et h un paramètre suffisamment petit, alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln(1 - \mathcal{N}(\varepsilon,\mu)) = \max_{i=\pm}\left\{\mu - \mathcal{E}_i(a_\mu^i - h)\right\}$$

uniformément par rapport à $\mu \in \Gamma$.

Ce résultat est une conséquence quasi-immédiate du résultat précédent. Cela repose essentiellement sur des estimations asymptotiques d'intégrales (méthode de Laplace) pour la convergence simple et l'utilisation du théorème d'Ascoli pour obtenir les limites uniformes. Les preuves de ces théorèmes concernant la chaîne de Markov Y^ε sont plutôt évidentes mais le véritable intérêt de l'étude de ce modèle réduit est de montrer la robustesse de notre nouvelle mesure de qualité vis-à-vis de la réduction de modèle, propriété qui faisait vraiment défaut aux autres mesures étudiées jusqu'ici dans la littérature. En effet la chaîne de Markov Y^ε et la diffusion X^ε ont exactement le même comportement de résonance : $\mathcal{M}(\varepsilon,\mu)$ et $\mathcal{N}(\varepsilon,\mu)$ (définis par (3.2.2) et (3.3.1)) ont les mêmes taux exponentiels de décroissance. Il est alors possible de définir les points de résonance pour Y^ε comme nous l'avons déjà fait pour X^ε. La constatation suivante s'impose.

➥ *Les points de résonance de la diffusion X^ε associée à la dérive b et de la chaîne de Markov Y^ε de taux de transition exponentiels $\mathcal{E}_\pm$ coincident.*

3.4 Perspectives

Les sujets de recherche liés à la question de résonance stochastique et qui m'intéressent particulièrement se concentrent autour de deux axes.

– Dans cette étude, nous avons considéré une diffusion dont l'équation ordinaire associée (système débruité) était un système homogène faiblement perturbé par une force périodique externe, c'est notamment le cas de la température moyenne de la Terre qui dépend fortement de l'influence de la chaleur du soleil. Or cette chaleur varie périodiquement avec une faible intensité à cause des orbites de certaines planètes [12], [62]. C'est cette faible perturbation externe qui permet à l'énergie minimale nécessaire pour quitter un domaine d'attraction de varier périodiquement. Mais les systèmes dynamiques se subissent pas toujours des perturbations externes. Une première piste de réflexion concerne des systèmes dynamiques autonomes où la périodicité des trajectoires provient juste de la structure interne du système. Dans ce cas les coefficients intervenant dans les équations ne dépendent plus directement du temps et ne sont pas périodiques. M. Freidlin [31] a, par exemple, discuté du système suivant :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = b_1(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} dW_t, \quad X_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}^d, \\ dY_t^\varepsilon = \frac{1}{T} b_2(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dt, \quad Y_0^\varepsilon = y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

en montrant que sous certaines hypothèses le comportement de la variable rapide X^ε (T grand) avait une structure périodique. En fait la variable rapide, guidée par un mouvement brownien, fait des transitions entre les états d'équilibre du système décrit par b_1 et à chaque fois qu'une transition a lieu, la dynamique de la variable lente Y^ε est changée. Ce phénomène peut être observé en biologie, notamment dans le cadre du modèle de Morris-Lecar stochastique qui décrit la transmission d'un potentiel électrique le long d'une membrane de neurone. Dans cet exemple, l'application d'une tension constante comme signal d'entrée permet de générer un signal de sortie bruité et périodique. La périodicité provenant juste de la structure interne de transmission du neurone s'effectuant par un mécanisme d'ouverture et fermeture de canaux ioniques [29].

Ce genre de systèmes qui admettent une variable rapide et une variable lente ont fait l'objet de différentes études menées par N. Berglund et B. Gentz [14, 15]. Mais une question reste ouverte : quel est l'asymptotique du premier instant où X^ε atteint un niveau donné, lorsque l'intensité du bruit tend vers 0 ? Puis, à partir de ce résultat limite, est-il possible de construire une mesure de qualité pour, par la suite, résoudre le problème d'optimisation suivant : trouver la meilleure relation entre T et ε de sorte que les trajectoires de X^ε soient les "plus périodiques" possible ?

– Le second problème issu de cette étude est de comprendre un peu plus comment analyser des solutions d'EDS à coefficients inhomogènes, dépendant du temps de façon périodique. Les processus stochastiques à coefficients périodiques n'ont fait l'objet que de peu d'études mathématiques à ma connaissance. Quelques premières pierres ont été amenées à l'édifice par P. Jung [55]. Mieux comprendre ces diffusions permetterait d'avoir des informations plus précises sur différents temps d'arrêt qui leur sont liés. Pour les équations différentielles ordinaires, la théorie de Floquet qui permet de passer, à l'aide d'un isomorphisme, d'une équation à coefficients périodiques à une équation à coefficients constants a permis d'étudier en particulier

la stabilité des solutions. Cette théorie à été développée par P. Kuchment [57] dans le cadre des équations aux dérivées partielles, en particulier des problèmes de Cauchy, en utilisant notamment la théorie des opérateurs de Fredholm. S-N. Chow, K. Lu et J. Mallet-Paret [20] ont utilisé des techniques différentes pour prouver l'existence d'un isomorphisme périodique qui permette de relier l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + b(t,x)u(t,x),$$

munie des conditions aux bords de Dirichlet $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ à l'équation autonome :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + q(x)u(t,x),$$

munie des mêmes conditions aux bords. Malheureusement la description de l'isomorphisme n'est pas vraiment explicite. Y-a-t-il alors un moyen de bâtir une relation entre une EDS à coefficients périodiques et une EDS homogène pour laquelle les lois asymptotiques des temps de sortie de domaine d'attraction sont connues ?

Chapitre 4

Diffusions auto-stabilisantes

Ce chapitre repose sur les articles [39], [45] et [48]. Il s'agit de travaux effectués en collaboration avec P. Imkeller, D. Peithmann et J. Tugaut.

Introduction

Dans ce chapitre sont présentées plusieurs études de processus auto-stabilisants. Ces processus sont associés à des équations aux dérivées partielles non-linéaires et ont été introduits par H. P. McKean [60, 61]. Ils ont la particularité suivante : les trajectoires de la diffusion sont attirées par la propre loi du processus. La loi du processus à l'instant t apparaît donc comme une inconnue dans le système. Le point de vue adopté dans ce chapitre repose essentiellement sur les résultats obtenus par S. Benachour, B. Roynette, D. Talay et P. Vallois [5] et [6]. Ils ont analysé l'EDS suivante :

$$dX_t = -\left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(X_t - x) du_t(x)\right) dt + dW_t, \quad \mathbb{P}(X_t \in dx) = u_t(dx) \quad t \geq 0. \tag{4.0.1}$$

Ici $(W_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien unidimensionnel. La fonction Φ appelée *fonction d'interaction* décrit quelle est la force de rappel imposée par la loi du processus aux trajectoires. Trouver une solution à l'équation revient à déterminer le couple (X_t, u_t). Evidemment s'il est possible de résoudre l'EDP non-linéaire satisfaite par la densité de ce processus, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\Phi * u)\frac{\partial u}{\partial x},$$

où $*$ représente le produit de convolution, alors en injectant cette solution dans la dérive de l'EDS (4.0.1), le problème se résume à la résolution d'une équation stochastique usuelle. Mais résoudre l'EDP s'avère être un problème difficile...
Les équations de type (4.0.1) apparaissent de manière naturelle comme limite dans des systèmes de particules en interaction, lorsque le nombre de particules tend vers l'infini (limite au sens de McKean-Vlasov). En effet, considérons le système composé de N particules :

$$dX_t^{i,N} = -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \Phi(X_t^{i,N} - X_t^{j,N})\, dt + dW_t^i, \quad X_0^{i,N} = x_0, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{4.0.2}$$

où les équations sont dirigés par des mouvements browniens indépendants. La fonction d'interaction décrit alors l'attraction entre les particules du système. Résoudre un tel système d'équations est

alors un problème classique d'analyse stochastique. En faisant tendre le nombre de particules vers l'infini, nous observons plusieurs résultats limites intéressants : la mesure empirique $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{X_t^{j,N}}$ converge vers une distribution u_t à t fixé et chaque particule du système converge en probabilité vers la solution de l'équation (4.0.1) où W_t est remplacé par le brownien qui dirigeait la particule en question dans le système. Par ailleurs, si nous nous focalisons sur un nombre fini de particules et si N tend vers l'infini, les particules considérées deviennent indépendantes et de même loi. Ce phénomène singulier est appelé *propagation du chaos*. A-S. Sznitman a publié une analyse intéressante du cas d'une fonction d'interaction générale Φ sous des conditions de régularité et de bornitude [75]. Une description précise de la limite de McKean-Vlasov à travers la théorie des grandes déviations fut présentée par D.A. Dawson et J. Gärtner [22]. D'autres études concernant la convergence de la mesure empirique vers la loi du processus auto-stabilisant se trouvent, entre autres, dans les articles [59], [16].

☛ *Quelles sont les hypothèses concernant la fonction d'interaction Φ ?*

L'étude de l'équation (4.0.1) dépend évidemment de la forme de la fonction d'interaction. Différents types de fonctions d'interaction ont été proposés dans la littérature. Nous nous concentrons sur le cadre d'étude introduit dans [5] et [6]. Ainsi nous considérons que Φ est une fonction croissante, à croissance polynômiale, localement lipschitzienne et impaire. L'exemple typique d'interactions de ce genre est $\Phi(x) = x^n$ avec n impair. Il peut paraître étrange a priori que les particules du système (4.0.2) s'attirent d'autant plus que les valeurs X^i sont éloignées... Mais cette situation reflète très bien l'analyse de systèmes éléctromagnétiques dans lesquels une grande différence de charge électrique implique une forte attraction.
Différents travaux de recherche ont été effectués sous des hypothèses variées : nous citerons H.P. McKean [60, 61], D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan [74], K. Oelschläger [64], T. Funaki [32] et Y. Tamura [77, 76].

☛ *Quels sont les éléments de cette étude ?*

✍ Dans un premier temps nous cherchons à généraliser les résultats obtenus dans [5, 6] à un système comportant des particules de natures différentes. Ainsi nous supposerons qu'il existe des particules *rouges* et des particules *bleues*. Les particules de même couleur auront tendance à s'attirer, celles de couleurs différentes à se repousser. Différentes questions sont abordées : existence et unicité de la solution du système d'EDS, existence et unicité de loi stationnaire, convergence vers la loi stationnaire, propagation du chaos dans le système de particules,... Ce travail à fait l'objet de l'article [39]
✍ Nous avons par la suite considéré le problème d'évaluation du temps de sortie d'un compact par une diffusion auto-stabilisante dont le coefficient de diffusion $\sqrt{\varepsilon}$ est petit [45]. L'équation considérée est la suivante :

$$dX_t^\varepsilon = V(X_t^\varepsilon)\,dt - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(X_t^\varepsilon - x)\,du_t^\varepsilon(x)\,dt + \sqrt{\varepsilon}dW_t. \tag{4.0.3}$$

Les différences fondamentales avec l'équation (4.0.1) sont la dimension de l'espace (la diffusion est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$), le coefficient de diffusion qui n'est plus unitaire et enfin la présence d'une fonction de dérive qui typiquement représente l'opposé de la dérivée d'un potentiel $V(x) = -\nabla U(x)$. Ainsi la solution de l'EDS (4.0.3) représente grossièrement le comportement d'une particule brownienne évoluant dans un paysage défini par U et attiré par sa propre loi. Un principe de grandes déviations est mis en évidence et le temps de sortie lié au processus est étudié dans le cas où le paysage est convexe.
✍ Dans le cas où U est un potentiel à deux puits, qui a fait l'objet de l'étude [48], nous considérons l'existence et l'unicité de lois stationnaires qui devraient également permettre par la suite l'analyse

du temps de sortie.

4.1 Systèmes de processus auto-stabilisants

Dans ce paragraphe nous considérons la solution d'un système d'EDS couplées $(X_t, Y_t,\, t \geq 0)$. Chaque coordonnée est attirée par sa propre loi et, d'autre part, est repoussée par la loi de l'autre coordonnée. Le système s'écrit de la façon suivante :

$$(E)\quad \begin{cases} X_t = X_0 + B_t + a\displaystyle\int_0^t \gamma * v_s(X_s)ds - (1-a)\int_0^t \Phi * u_s(X_s)ds \\ Y_t = Y_0 + \tilde{B}_t + (1-a)\displaystyle\int_0^t \gamma * u_s(Y_s)ds - a\int_0^t \Phi * v_s(Y_s)ds \end{cases}$$

$$\text{où } \mathbb{P}(X_t \in dx) = u_t(dx) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_t \in dx) = v_t(dx),$$

avec une constante $a \in [1/2, 1[$ et deux mouvements browniens unidimensionnels indépendants : B_t et $\tilde{B}_t$. Les fonctions Φ et γ représentent respectivement les fonctions d'attraction et de répulsion du système auto-stabilisant. Il y a finalement dans le système 4 inconnues : les trajectoires X_t et Y_t et leurs lois u_t et v_t.
En ce qui concerne les fonctions d'interaction, les hypothèses suivantes sont considérées :

- La fonction Φ est croissante, à croissance polynômiale et impaire. De plus, une croissance minimale est imposée :

$$\Phi(x) - \Phi(y) \geq \Phi_1(x-y) + \Phi_0, \text{ pour tout } x \geq y, \tag{4.1.1}$$

  où les constantes satisfont $\Phi_1 > 0$ et $\Phi_0 \in \mathbb{R}$.
- La fonction γ est lipschitzienne de constante L_γ, bornée, impaire et satisfait $\gamma(x) \geq 0$ lorsque $x \geq 0$.

Sous des conditions de bornitude de certains moments des conditions initiales X_0 et Y_0, le résultat central suivant peut être démontré :

➥ *Si X_0 et Y_0 ont des densités symétriques et si $\Phi_1 > \frac{1-a}{a} L_\gamma$ alors il existe une unique solution forte $(X_t, Y_t,\, t \geq 0)$ au système* (E).

La démonstration de ce résultat repose sur un argument de point fixe similaire à celui présenté dans [5]. En considérant un vecteur de fonctions $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ et en définissant les projections $(p_i)_{1 \leq i \leq 4}$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, on peut introduire X^b (respectivement Y^b) la solution de l'EDS :

$$dX_t^b = dB_t - p_1 \circ b(t, X_t^b)dt + p_3 \circ b(t, X_t^b)dt, \tag{4.1.2}$$

respectivement

$$dY_t^b = dB_t - p_2 \circ b(t, Y_t^b)dt + p_4 \circ b(t, Y_t^b)dt. \tag{4.1.3}$$

A partir de ces processus et surtout de leur loi, nous définissons l'application Γ dont les coordonnées sont données par :

$$\begin{aligned} p_1 \circ \Gamma(b)(t,x) &= (1-a)\,\mathbb{E}[\Phi(x - X_t^b)], & p_2 \circ \Gamma(b)(t,x) &= a\,\mathbb{E}[\Phi(x - Y_t^b)], \\ p_3 \circ \Gamma(b)(t,x) &= a\,\mathbb{E}[\gamma(x - Y_t^b)], & p_4 \circ \Gamma(b)(t,x) &= (1-a)\,\mathbb{E}[\gamma(x - X_t^b)]. \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir judicieusement un espace fonctionnel sur lequel l'application Γ admette un point fixe b_0. En remplaçant b par b_0 dans (4.1.2) et (4.1.3), $(X_t^{b_0}, Y_t^{b_0},\, t \geq 0)$ est solution du système

(E). Pour cela des majorations des moments de X_t et Y_t sont utilisées. L'hypothèse $\Phi_1 > \frac{1-a}{a} L_\gamma$ implique que ces majorations ne dépendent pas du temps.

Utiliser un théorème de point fixe, c'est cette même démarche qui nous permet de montrer l'existence d'un couple de lois stationnaires (u, v), qui doivent évidemment satisfaire le système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(\gamma * v)u\Big] + (1-a)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(\Phi * u)u\Big] = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1-a)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(\gamma * u)v\Big] + a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(\Phi * v)v\Big] = 0. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Ainsi trouver une solution au système précédent revient à trouver un point fixe à l'application qui à (u, v) associe $(\mathcal{A}(u, v), \mathcal{B}(u, v))$ défini par

$$\mathcal{A}(u,v)(x) = \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\left\{ a\int_0^x \gamma * v(y)dy - (1-a)\int_0^x \Phi * u(y)dy \right\},$$

$$\mathcal{B}(u,v)(x) = \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\left\{ (1-a)\int_0^x \gamma * u(y)dy - a\int_0^x \Phi * v(y)dy \right\}.$$

Dans les expressions précédentes λ et μ représentent des coefficients de renormalisation. Il suffit donc, là encore, de trouver de bons espaces fonctionnels sur lesquels il sera possible d'exhiber un point fixe (utilisation du théorème du point fixe de Schauder). Dans certains cas, nous sommes en mesure de démontrer l'unicité de ce point fixe puisque l'application devient une contraction.

➥ *Il existe un couple de densités paires (u, v) satisfaisant le système (4.1.4). De plus, si $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \alpha x$ avec $\alpha > 0$, Φ_0 une fonction positive et convexe sur $\mathbb{R}_+$, alors il existe α_0 tel que les lois stationnaires symétriques solutions de (4.1.4) soient uniques pour $\alpha \geq \alpha_0$.*

Lorsque la dérive d'une diffusion ne dépend pas du temps, il est alors possible, sous certaines conditions, d'avoir des informations sur la vitesse de convergence de la loi du processus vers sa mesure stationnaire. En utilisant par exemple le critère de Bakry-Emery [3], il est possible d'obtenir la propriété de trou spectral pour l'opérateur associé à la diffusion, et ainsi, de relier la vitesse de convergence à la première valeur propre non nulle de l'opérateur. Dans notre contexte, ce genre de théorie ne peut être appliquée directement puisque les dérives des deux équations stochastiques dépendent du temps t à travers les densités $u_t(x)$ et $v_t(x)$. Pour contourner cette difficulté, les dérives sont minorées et majorées par des fonctions indépendantes du temps lorsque $t \geq t_0$ et l'utilisation de théorèmes de comparaison permet d'obtenir des encadrements suffisamment précis. En faisant alors tendre t_0 vers l'infini, il devient possible de démontrer le résultat de convergence suivant.

➥ *Si X_0 et Y_0 sont deux variables aléatoires de lois symétriques, $\Phi_0(x) \geq kx^\rho$ pour $x \geq 1$ et pour un certain $\rho > 1$ et si γ est concave sur $\mathbb{R}_+$, alors il existe α_0 tel que $\alpha \geq \alpha_0$, la distribution du couple (X_t, Y_t), solution de (E), converge vers $(u(x)dx, v(x)dx)$ (solutions de (4.1.4)) quand t tend vers l'infini.*

Dans toute cette étude, les diffusions (X_t) et (Y_t) sont auto-stabilisantes, en d'autres termes elles sont attirées par leur propre loi, mais elles se repoussent aussi mutuellement. Or pour quantifier cette aversion, il est possible de comparer les densités des lois stationnaires $u(x)$ et $v(x)$ en fonction du paramètre a apparaissant dans le système (E). Ce paramètre permet de diminuer ou d'amplifier l'importance de la répulsion vis-à-vis de l'attraction. Nous observons ainsi une variation des queues de distribution :

➥ *Au voisinage de $\pm\infty$, l'équivalence suivante est satisfaite :*

$$\ln \frac{u(x)}{v(x)} \sim (2a-1) \int_0^{|x|} \Phi(y) dy.$$

Evidemment le cas $a = 1/2$ joue un rôle particulier puisque le système (E) se résume à deux équations identiques : les lois stationnaires sont les mêmes... Cette différence sur les lois de X et Y s'observe en temps long (lois stationnaires) mais également en temps très petit. Imaginons que les lois de X_0 et Y_0 sont identiques (de densité $w(x)$) alors, dès que $t > 0$, les lois se séparent à une vitesse qui dépend du paramètre a. En effet, en notant W la distance de Wasserstein, il vient :

➥ *Si w (loi de X_0 et Y_0) est symétrique alors*

$$\liminf_{t\to 0} \frac{W(u_t(x)dx, v_t(x)dx)}{t} \geq (2a-1) \int_{\mathbb{R}} |(\gamma + \Phi) * w|(x) w(x) dx.$$

Pour terminer l'étude du système de processus auto-stabilisants, il est à noter qu'il peut être obtenu par passage à la limite dans un système de particules comprenant deux types de particules. On considère N_n particules de type X et M_n particules de type Y avec la proportion donnée par $\lim_{n\to\infty} M_n/(N_n + M_n) = a$. Les particules de même type s'attirent et les particules de types différents se repoussent. Il est alors aisé de montrer que la propagation du chaos a bien lieu dans ce système et que (E) en est une limite naturelle.

4.2 Temps de sortie et potentiel convexe

L'attraction présente dans la dérive d'une diffusion auto-stabilisante lui donne sans aucun doute plus d'inertie. Il est difficile de trouver des critères de qualité pour quantifier ce supplément d'inertie. Une idée est d'estimer le temps nécessaire à la diffusion pour quitter un domaine borné et de le comparer au temps d'arrêt d'une diffusion standard. Ce travail a fait l'objet de l'article [45]. Pour cela nous considérons le modèle suivant :

$$dX_t^\varepsilon = V(X_t^\varepsilon)\, dt - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(X_t^\varepsilon - x)\, du_t^\varepsilon(x)\, dt + \sqrt{\varepsilon} dW_t, \tag{4.2.1}$$

où $u_t^\varepsilon(dx)$ désigne la loi de X_t^ε et $(W_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien d-dimensionel.

☛*Les hypothèses sur les fonctions intervenant dans l'équation* (4.2.1) *:*

Nous supposerons que V et la fonction d'attraction Φ sont localement lipschitziennes, que Φ est invariant par rotation et de croissance au plus polynômiale. Enfin nous supposons que V est *rentrant* : si $DV(x)$ représente le Jacobien de V au point x alors nous supposons qu'il existe $K_V > 0$ tel que $\langle h, DV(x)h\rangle \leq -K_V$ pour $h \in \mathbb{R}^d$ de norme 1, dès que x est de norme suffisamment grande.

☛ *Existence et unicité d'une solution forte.*

Le résultat d'existence d'une unique solution forte est basé sur une généralisation de la preuve de [5]. L'ajout de la dérive V et l'analyse en dimension d quelconque sont les nouveautés de l'équation étudiée. L'utilisation d'un théorème de point fixe dans ce nouveau cadre se fait aisément.

☛ *Etude asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$.*

Le but de l'étude est d'analyser le comportement asymptotique de la diffusion auto-stabilisante lorsque ε tend vers 0. La théorie des grandes déviations développée par M. Freidlin et A. Wentzell

[30] ne peut pas s'appliquer directement puisque la dérive de la diffusion dépend elle-même de sa propre loi et donc du paramètre ε. En effet l'EDS peut s'écrire :

$$dX_t^\varepsilon = V(X_t^\varepsilon)\,dt - b^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon)\,dt + \sqrt{\varepsilon} dW_t,\ t \geq 0,$$

où la fonction b^ε satisfait

$$b^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y)\,du_t^\varepsilon(y) = \mathbb{E}\left\{\Phi(x - X_t^\varepsilon)\right\}.$$

Que se passe-t-il donc lorsque ε tend vers 0 ? Une première estimation montre que la solution de (4.2.1) partant de x_0 converge vers l'unique solution du système dynamique suivant :

$$\dot{\psi}_t = V(\psi_t), \quad \psi_0 = x_0. \tag{4.2.2}$$

Plus précisément, une démonstration basée sur le lemme de Gronwall permet d'obtenir la convergence uniforme de la dérive pour tout $t \in [0,T]$ et x dans un compact de $\mathbb{R}^d$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} b^\varepsilon(t,x) = \Phi(x - \psi_t(x_0)).$$

Il s'ensuit que la diffusion X^ε solution de (4.2.1) est très proche de la diffusion Y^ε définie par

$$dY_t^\varepsilon = V(Y_t^\varepsilon)\,dt - \Phi(Y_t^\varepsilon - \psi_t(x_0))\,dt + \sqrt{\varepsilon} dW_t,$$

dont on connaît le principe de grandes déviations. La distance qui sépare ces deux diffusions peut être estimée et permet d'utiliser des arguments d'approximation exponentielle pour exhiber les grandes déviations liées à X^ε.

➥ *La famille X^ε satisfait un principe de grandes déviations dans $(\mathcal{C}([0,T]), \|\cdot\|_\infty)$ avec la bonne fonctionnelle d'action :*

$$I_T^{x_0}(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \|\dot{\varphi}_t - V(\varphi_t) + \Phi(\varphi_t - \psi_t(x_0))\|^2\,dt, & \text{si } \varphi \in H^1_{x_0}, \\ \infty, & \text{sinon .} \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Ici $H^1_{x_0}$ représente l'espace de Cameron-Martin des fonctions qui satisfont $\varphi_0 = x_0$.

Il est à remarquer que l'ajout d'une fonction d'attraction Φ dans la dérive de la diffusion ne change pas la limite lorque $\varepsilon \to 0$. Les diffusions classique (de dérive V) et auto-stabilisante convergent toutes les deux vers l'unique solution du système dynamique (4.2.2). Ceci provient surtout du fait que $\Phi(0) = 0$. Mais mentionnons quand-même que les vitesses de convergence sont bel et bien différentes : Φ apparaît dans la fonctionnelle d'action.

☛ *Problème de sortie pour la diffusion auto-stabilisante.*

Considérons pour ce faire un domaine D, contenant la condition initiale x_0, et le temps de sortie correspondant pour la diffusion auto-stabilisante (4.2.1) :

$$\tau_D^\varepsilon = \inf\{t > 0 :\ X_t^\varepsilon \in \partial D\}.$$

Le domaine D considéré est supposé contenir un unique point stable de (4.2.2) qui attire toutes les trajectoires issues de D. Par ailleurs ce point stable doit également attirer les trajectoires du système modifié suivant : $\dot{\phi}_t = V(\phi_t) - \Phi(\phi_t - x_{\text{stable}})$.

Pour introduire le résultat principal de cette section, définissons différentes fonctions liées à la théorie des grandes déviations. Nous considérons la fonctionnelle d'action :

$$I_T^{\infty,y}(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \|\dot\varphi_t - V(\varphi_t) + \Phi(\varphi_t - x_{\text{stable}})\|^2 \, dt, & \text{si } \varphi \in H_y^1, \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.2.4}$$

qui représente en quelque sorte le coût associé à une fonction φ donnée. A l'aide de cette fonctionnelle, nous sommes en mesure de décrire le coût minimal pour relier deux points y et z de $\mathbb{R}^d$ en un temps fixé T

$$C(y,z,T) = \inf_{\varphi\in\mathcal{C}([0,T]):\ \varphi(T)=z} I_T^{\infty,y}(\varphi), \quad y,z\in\mathbb{R}^d.$$

Le quasipotentiel qui y est lié $Q(y,z) = \inf_{T>0} C(y,z,T)$ apprécie le coût minimal global pour relier deux points. Le problème de sortie est naturellement associé aux trajectoires qui, partant de l'unique point stable appartenant à D atteignent la frontière du domaine. Nous notons alors

$$\overline{Q} := \inf_{z\in\partial D} Q(x_{\text{stable}}, z). \tag{4.2.5}$$

La description du temps de sortie est relativement semblable à celle obtenue par M. Freidlin et A. Wentzell [30] dans le cadre d'une diffusion standard. En particulier, nous noterons que le temps d'arrêt moyen est exponentiellement grand par rapport au paramètre ε et qu'il est possible d'avoir quelques informations, certes sommaires, sur la localisation de la sortie sur la frontière du domaine D. Malgré tout, pour obtenir la description du temps de sortie nous faisons une hypothèse essentielle : la géométrie induite par la dérive V est convexe, i.e. il existe $K_V > 0$ tel que

$$\langle h, DV(x)h\rangle \le -K_V \quad \text{pour } h\in\mathbb{R}^d \text{ avec } \|h\| = 1 \text{ et } x\in\mathbb{R}^d. \tag{4.2.6}$$

Pour la présentation du principe de grandes déviations, une hypothèse de ce type était déjà mentionnée. La différence est qu'il suffisait de la vérifier pour les points x dont la norme dépassait un certain seuil. Ici, pour le problème de sortie, l'hypothèse (4.2.6) doit être satisfaite pour tous les $x\in\mathbb{R}^d$.

➥ *On se place sous l'hypothèse* (4.2.6). *Pour tout $x_0\in D$ et $\eta>0$, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}_{x_0}\left(e^{(\overline{Q}-\eta)/\varepsilon} < \tau_D^\varepsilon < e^{(\overline{Q}+\eta)/\varepsilon}\right) = 1, \tag{4.2.7}$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{E}_{x_0}(\tau_D^\varepsilon) = \overline{Q}. \tag{4.2.8}$$

Par ailleurs, si $N\subset\partial D$ est un sous ensemble fermé satisfaisant $\inf_{z\in N} Q(x_{\text{stable}},z) > \overline{Q}$, alors il ne contient pas le point de sortie : pour tout $x_0\in D$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}_{x_0}(X^\varepsilon_{\tau_D}\in N) = 0$.

La compréhension de ce résultat passe par la discussion informelle déjà introduite dans la Section 3.1. Pour ce faire, il suffit de diviser l'axe temporel en intervalle de longueur T : $[kT,(k+1)T[$ avec $k\in\mathbb{N}$ puis calculer la probabilité que le temps d'arrêt τ_D^ε se réalise dans un intervalle de ce genre. Dans le cadre d'une diffusion classique, ces probabilités sont presque toutes identiques puisque le processus est markovien et les coefficients indépendants du temps. Dans le cas d'une diffusion auto-stabilisante, ce n'est évidemment pas le cas et il faut analyser le comportement asymptotique quand $\varepsilon\to 0$ sur chaque intervalle. Nous avons déjà étudié le cas de l'intervalle $[0,T]$ en énoncant que le comportement asymptotique de la diffusion mimait celui de Y^ε définie par

$$dY_t^\varepsilon = V(Y_t^\varepsilon)\,dt - \Phi(Y_t^\varepsilon - \psi_t(x_0))\,dt + \sqrt{\varepsilon}dW_t.$$

D'une façon similaire, nous montrons que la diffusion auto-stabilisante, étudiée sur l'intervalle $[kT, (k+1)T[$, a un comportement asymptotique similaire à celui de la diffusion suivante :

$$dY_t^\varepsilon = V(Y_t^\varepsilon)\,dt - \Phi(Y_t^\varepsilon - \psi_{kT+t}(x_0))\,dt + \sqrt{\varepsilon}dW_t.$$

Comme le point stable x_{stable} attire toutes les trajectoires solutions de l'équation (4.2.2) issues du domaine D, $\lim_{t\to\infty}\psi_t(x_0) = x_{\text{stable}}$. Il s'ensuit que pour k suffisamment grand, le comportement de Y^ε est à comparer au comportement de la diffusion

$$dZ_t^\varepsilon = V(Z_t^\varepsilon)dt - \Phi(Z_t^\varepsilon - x_{\text{stable}})dt + \sqrt{\varepsilon}dW_t. \tag{4.2.9}$$

Puisque la diffusion auto-stabilisante utilise un temps très long pour quitter le domaine, le comportement asymptotique sur les premiers intervalles de longueur T importe peu. Il est plutôt essentiel d'analyser la diffusion sur les intervalles associés à un grand k. Par conséquent, le temps de sortie de X^ε est similaire au temps de sortie de la diffusion Z^ε, définie par (4.2.9), ce qui permet d'obtenir l'estimation du temps de sortie et la localisation du point de sortie.

☛ *Quelques remarques :*

1. La démonstration repose sur des estimations précises et utilise surtout l'hypothèse de convexité pour obtenir la limite uniforme de la dérive $\lim_{\varepsilon\to 0} b^\varepsilon(t,x) = \Phi(x-\psi_t(x_0))$ par rapport à $t \geq 0$. A priori pour étudier la diffusion dans un domaine borné, on peut s'étonner que l'hypothèse principale concerne l'espace d'état $\mathbb{R}^d$ tout entier. Ceci est particulier aux processus auto-stabilisants, puisque la dérive ne dépend pas juste de la position de la diffusion mais bien de la position et de la loi qui, en fait, charge tout l'espace dès que $t > 0$, même si le processus n'est pas encore sorti du domaine considéré. Ainsi les propriétés de V à l'extérieur de D influent sur le temps de sortie τ_D^ε. Notons que, dans le cas où $V(x) = -\nabla U(x)$ avec U un potentiel convexe, le résultat asymptotique développé précédemment s'applique. Par contre, si U est un potentiel à plusieurs puits et si le problème de sortie consiste à analyser le temps nécessaire pour sortir d'un puits donné, l'analyse développée ici ne s'applique pas. Il s'agit d'ailleurs d'un problème ouvert.
2. Dans l'article [45], nous proposons un exemple de diffusion en dimension 2 qui met en évidence que l'ajout d'un terme d'interaction, représenté par la fonction Φ, peut changer drastiquement le comportement du processus, non seulement les temps de sortie mais également la localisation de la sortie sur la frontière ∂D peuvent être complètement différents.
3. Notons enfin que le temps de sortie étudié ici concerne le premier instant où la diffusion sort de D alors qu'à l'instant $t = 0$, X_0^ε avait pour loi δ_{x_0}. Si nous laissons "vivre" la diffusion et si nous attendons le premier instant après τ_D où la diffusion se trouve à nouveau dans un voisinage du point stable x_{stable} alors le temps de sortie qui suit aura automatiquement une loi différente puisque la dérive est non-linéaire. Ceci ne devrait toutefois pas changer le comportement asymptotique. En effet, même après de nombreuses entrées et sorties du domaine D, les estimations du temps de sortie restent semblables. Si nous supposons en fait qu'il existe une unique mesure invariante u^ε, nous pouvons effectuer le programme suivant : nous faisons partir la diffusion X^ε avec la condition $X_0^\varepsilon \sim u^\varepsilon(dx)$, puis nous attendons d'être dans un voisinage de x_{stable}, enfin nous étudions le temps de sortie du domaine. Dans ce cas, il suffit d'étudier une diffusion de dérive, indépendante de la variable temporelle, donnée par :

$$V(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y)u^\varepsilon(dy).$$

Il ne doit pas être très difficile de montrer que, dans ce cas, le problème de sortie peut être caractérisé par le même quasipotentiel (4.2.5) et cela en affaiblissant l'hypothèse de convexité de la fonction V.

4.3 Mesures invariantes et potentiel à double puits

Nous avons détaillé dans le paragraphe précédent le problème de sortie pour la diffusion X^ε solution de (4.0.3). L'analyse effectuée s'applique dans le cadre d'un gradient $V(x) = -\nabla U(x)$ à condition que U soit un potentiel convexe. Or nous souhaiterions étudier le cas d'un potentiel à deux puits. Une première étape, qui permetterait par la suite de proposer une analyse du temps de sortie, est d'étudier les mesures invariantes de l'équation (4.0.3) en dimension 1 ; ce travail en collaboration avec J. Tugaut a donné lieu à la prépublication [48]. Dans l'article [5], S. Benachour, B. Roynette, D. Talay et P. Vallois ont démontré que l'équation (4.0.1) admettait une unique loi stationnaire à condition que la fonction d'interaction Φ satisfasse à quelques hypothèses concernant notamment sa dérivée à l'origine. Le fait d'ajouter à la dérive le gradient d'un potentiel U qui admet plusieurs minima globaux va changer les énoncés et les résultats.

☛ *Les hypothèses :*

L'équation qui concentre notre attention dans ce paragraphe est

$$dX_t^\varepsilon = -\nabla U(X_t^\varepsilon)\,dt - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(X_t^\varepsilon - x)\,du_t^\varepsilon(x)\,dt + \sqrt{\varepsilon} dW_t, \qquad (4.3.1)$$

où $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien unidimensionnel. Nous supposerons que Φ est une fonction impaire polynômiale, croissante et convexe sur $\mathbb{R}_+$. Concernant le potentiel U, nous supposerons qu'il est pair, régulier, que $U(0) = 0$, qu'il possède deux puits localisés en $\pm a$, et qu'il est à croissance polynômiale (Figure 4.1).

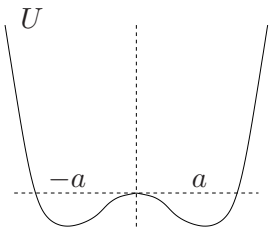


FIG. 4.1 – Potential U

☛ *Les mesures invariantes :*

Trouver une mesure invariante de densité $u_\varepsilon(x)$ pour l'EDS (4.3.1), c'est trouver une solution à l'équation :

$$\frac{\epsilon}{2} u_\epsilon''(x) + \Big(u_\epsilon(x) \left(\nabla U(x) + \Phi * u_\epsilon(x)\right) \Big)' = 0, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette équation permet en particulier de donner une "forme exponentielle" à la densité. Ainsi

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{\lambda(u_\epsilon)} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} \left(\int_0^x \Phi * u_\epsilon(y) dy + U(x) \right) \right], \qquad (4.3.2)$$

où λ est un facteur de renormalisation. Le cas particulier de l'interaction linéaire $\Phi(x) = \alpha x$, $\alpha > 0$, permet de bien poser le problème et de le résoudre via des calculs simples. En définissant m la moyenne de la loi de densité u_ε, l'équation (4.3.2) revient à trouver un point fixe de l'application Ψ_ε définie par :

$$\Psi_\epsilon(m) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} \left(U(x) + \alpha \frac{x^2}{2} - \alpha m x \right) \right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} \left(U(x) + \alpha \frac{x^2}{2} - \alpha m x \right) \right] dx}.$$

Evidemment la moyenne $m = 0$ correspondant à la densité $u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\lambda(u_\varepsilon)} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} \left(U(x) + \alpha \frac{x^2}{2} \right) \right]$ est un point fixe de l'application. Mais ce n'est pas le seul point fixe...

➥ *Si U'' est une fonction convexe alors, pour ε suffisamment petit, il existe exactement trois mesures invariantes pour l'EDS* (4.3.1) *: une mesure symétrique et deux mesures asymétriques concentrées respectivement autour de a et de $-a$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En particulier les moyennes $\pm m$ des mesures excentrées satisfont : pour tout $\delta \in]0,1[$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que*

$$a - \frac{(1+\delta)U^{(3)}(a)}{4U''(a)\,(\alpha + U''(a))}\,\epsilon \leq m \leq a - \frac{(1-\delta)U^{(3)}(a)}{4U''(a)\,(\alpha + U''(a))}\,\epsilon, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

La preuve repose essentiellement sur la méthode de Laplace utilisée pour développer les calculs asymptotiques. Si le potentiel U ne satisfait pas l'hypothèse de convexité de U'', il est imaginable de trouver des situations permettant l'existence de plus de trois mesures invariantes.
Ce résultat intéressant issu du contexte d'interaction linéaire peut se généraliser à une fonction d'interaction quelconque (sous les hypothèses énoncées précédemment bien entendu). Les démonstrations se compliquent immédiatement : dans l'interaction linéaire, il suffisait de connaître la moyenne de la loi pour que celle-ci soit entièrement déterminée, ce qui n'est pas le cas en général. Au lieu d'utiliser un théorème de point fixe pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous sommes amenés alors à utiliser le théorème de point fixe de Schauder qui agit sur un espace fonctionnel. Il est facile de deviner l'application à étudier grâce à l'équation (4.3.2) Nous généralisons ainsi la preuve de S. Benachour, B. Roynette, D. Talay et P. Vallois [5] au cadre d'une diffusion comprenant le gradient d'un potentiel à deux puits dans sa dérive.

➥ *Cadre général (non-linéaire) : il existe une mesure invariante symétrique.*

Il est malheureusement très difficile de montrer que l'application considérée est une contraction. Nous n'obtenons donc pas l'unicité de cette mesure invariante symétrique par la méthode du point fixe.
Il est par contre possible de montrer qu'il ne s'agit pas de l'unique mesure invariante. En effet, puisque la fonction d'interaction Φ est polynômiale, il suffit de connaître un nombre fini de moments de la densité u_ε pour que celle-ci soit entièrement déterminée. Ainsi d'un problème de point fixe dans un espace fonctionnel, il est possible de revenir à un problème plus simple de recherche de point fixe dans un espace de dimension finie. Ceci nous permet effectivement d'exhiber deux mesures invariantes particulières qui sont dans un voisinage de δ_a, respectivement δ_{-a} lorsque ε est petit. Les informations précises sont obtenues par des estimations d'intégrales utilisant la méthode de Laplace et par une résolution du système de Cramer suivant : déterminer $(\tau_1, \ldots, \tau_{2n-1})$ solution de

$$\sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!}\,\Phi^{(p)}(a)\tau_p + \frac{\Phi'(0)+U''(a)}{ka^{k-1}}\,\tau_k = \frac{U^{(3)}(a)}{4(\Phi'(0)+U''(a))} - \frac{k-1}{4a}, \quad 1 \leq k \leq 2n-1, \quad (4.3.3)$$

où $2n-1$ est le degré du polynôme Φ. La solution est donnée par

$$\tau_k^0 = ka^{k-1}\frac{aU^{(3)}(a) - (k-1)U''(a)}{4aU''(a)\,(\Phi'(0)+U''(a))}, \quad 1 \leq k \leq 2n-1. \quad (4.3.4)$$

Cadre général :
➥ *Il existe au moins trois mesures invariantes associées à la diffusion* (4.3.1).

➥ *Sous quelques conditions supplémentaires (voir [48]), il existe deux mesures invariantes excentrées (symétriques l'une de l'autre) concentrées autour de a ou de $-a$. Pour celle concentrée autour de a, les moments d'ordre k, notés m_k, satisfont : pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que*

$$\left| m_k - \left(a^k - \tau_k^0 \epsilon \right) \right| \leq \delta\epsilon, \quad 1 \leq k \leq 2n-1, \ \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Ici τ_k^0 est défini par (4.3.4).

Evidemment la découverte de plusieurs mesures stationnaires complique l'analyse du comportement asymptotique de la diffusion auto-stabilisante. Il faudrait en particulier avoir un résultat identique à celui obtenu dans le cas linéaire : savoir déterminer exactement le nombre de mesures invariantes. Par ailleurs, il serait fondamental de connaître, au moins grossièrement, les domaines d'attraction des différentes mesures. Nous nous doutons bien, par exemple, que toute condition initiale symétrique obligera la diffusion à avoir une densité paire en tout temps : elle ne pourra donc pas converger vers une mesure excentrée. Peut-on cependent avoir des informations plus précises ?
Un grand nombre de questions restent ouvertes...

4.4 Perspectives et travaux en cours

La thématique des processus auto-stabilisants est intéressante puisqu'elle ne permet pas l'utilisation directe des outils de calculs stochastiques classiques pour mener les études d'existence et unicité des processus, des lois invariantes,...
Il reste, dans ce domaine, de nombreuses questions à explorer et le travail présenté ici me motive tout particulièrement à m'y investir. Voici un échantillon de questions qui se regroupent en plusieurs problématiques :

- *Les systèmes de particules en interaction.* Les processus auto-stabilisants apparaissent comme limite de McKean-Vlasov d'un système de particules en interaction. Par exemple, la loi de la solution de l'EDS (4.0.3) est la loi limite (lorsque $N \to \infty$) d'une particule du grand système suivant :

$$dX_t^{i,N} = V(X_t^{i,N})\,dt - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \Phi(X_t^{i,N} - X_t^{j,N})\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,dW_t^i, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{4.4.1}$$

  Avec P. Imkeller et D. Peithmann [45], nous avons présenté un résultat de grandes déviations pour la diffusion auto-stabilisante (4.0.3) lorsque le paramètre $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs, la théorie basée sur les résultats de M. Freidlin et A. Wentzell [30] permet d'appréhender le comportement du système (4.4.1) lorsque $\varepsilon \to 0$. Y-a-t-il alors une façon de relier ces résultats ? En d'autres termes, y-a-t-il une possibilité de permuter les limites $\varepsilon \to 0$ et $N \to \infty$? Sous quelles conditions ? Il me semble que les limites devraient pouvoir s'échanger notamment lorsque V est le gradient d'un potentiel convexe. Mais, par contre, lorsqu'il s'agit d'un potentiel à plusieurs puits, cela semble exclus. Que se passe-t-il si on lie la dépendence de N à celle de ε ?
- *Les mesures stationnaires.* Le résultat principal exposé dans ce chapitre concernant les mesures invariantes de la diffusion (4.0.3), est l'existence de plusieurs mesures invariantes à ε fixé, relativement petit. Avec J. Tugaut, nous nous intéressons à la limite de ces mesures invariantes lorsque le paramètre ε tend vers 0 et à leur vitesse de convergence en vue d'établir une description précise de l'ensemble des mesures invariantes lorsque ε est petit. Nous espérons ainsi déterminer dans quel cadre il existe exactement trois mesures invariantes comme nous l'avons déjà observé dans le cadre d'une interaction linéaire.

Il serait tout aussi intéressant d'analyser la convergence de la loi du processus auto-stabilisant lorsque le temps $t \to \infty$. Peut-on alors déterminer une convergence vers une loi stationnaire, le choix de celle-ci dépendant évidemment de la loi initiale ?
Par ailleurs, les mesures stationnaires ont été étudiées dans [5] lorsque $V = 0$, dans [48] lorsque $V = -\nabla U$ avec U un potentiel symétrique, que se passe-t-il lorsque U n'est ni symétrique ni convexe ? Concrètement l'étude d'un potentiel à deux puits avec un puits bien plus profond que l'autre serait d'un intérêt certain...

– *Le problème de sortie d'un domaine.* Un des objectifs de l'étude des mesures stationnaires c'est d'aboutir à la description du temps de sortie d'un domaine d'attraction pour la diffusion (4.0.3) lorsque $V = -\nabla U$ avec U un potentiel à deux puits. Une première approche est de simplifier le problème. Au lieu de considérer une diffusion dont la dérive dépend à l'instant t à la fois de la position de la diffusion X_t^ε, du paramètre ε et du temps t (à travers la loi $u_t^\varepsilon(dx)$), nous allons supprimer la dépendence vis-à-vis du temps. Pour cela il suffit de remplacer la loi $u_t^\varepsilon(dx)$ dans la dérive par une distribution stationnaire $u_\varepsilon(dx)$. En connaissant la limite de $u_\varepsilon(dx)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, il est alors possible d'établir un principe de grandes déviations et d'estimer le temps nécessaire à la diffusion pour sortir d'un domaine donné. Cela permet en principe de traiter de nombreuses situations.

Chapitre 5

Marches aléatoires persistantes

Ce chapitre repose sur l'article [49] écrit en collaboration avec P. Vallois.

Introduction

Le travail présenté dans ce chapitre représente essentiellement une synthèse de différentes convergences possibles pour les marches aléatoires persistantes lorsque le pas de temps Δ_t tend vers 0. Historiquement l'étude des marches aléatoires persistantes remonte aux études de R. Fürth [33] et G.I. Taylor [78]. Cette marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est définie à partir de ses accroissements $(Y_t,\ t \in \mathbb{N})$ qui forment une chaîne de Markov.
Le processus des accroissements est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de matrice de transition :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \qquad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1. \tag{5.0.1}$$

La marche est alors définie comme somme partielle de ses accroissements :

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} Y_i \quad \text{avec} \quad X_0 = Y_0 = 1 \text{ ou } -1. \tag{5.0.2}$$

Notons que le choix des paramètres α et β est déterminant pour l'étude. En particulier, si $\alpha+\beta = 1$ alors les accroissements forment une suite de variables aléatoires indépendantes : $(X_t,\, t \geq 0)$ est juste une marche aléatoire de Bernoulli classique, il n'y a pas de phénomène de persistance c'est-à-dire de présence d'une courte mémoire. Le cas symétrique : $\alpha = \beta$, aussi appelé *marche de Kac*, fut étudié par G.I. Taylor [78], S. Goldstein [35], G.H. Weiss [80, 81]. Une présentation de différents résultats de convergence concernant cette marche a été rédigée par E. Renshaw et R. Henderson [71]. Dans le cadre général, P. Vallois et C. Tapiero [79] ont étudié l'influence de la persistance sur les deux premiers moments de la marche.

La marche aléatoire persistante a cette particularité : elle n'est pas markovienne puisque la mémoire du processus entre en jeu. Par contre la mémoire est relativement "courte" : toute l'information se trouve dans le lien entre la valeur du processus à l'instant t et celle de l'instant précédent X_{t-1} : le couple (X_{t-1}, X_t) est une chaîne de Markov. Ainsi en renormalisant la marche aléatoire et en faisant tendre le pas de temps vers 0, on doit trouver à la limite une mémoire "instantanée", au support très réduit.

5.1 Le processus du télégraphe

Avant de détailler les résultats limites, il nous faut introduire un processus central dans cette étude, celui du télégraphe. Pour ce faire, nous considérons une suite de variables aléatoires i.i.d $(e_n,\, n \geq 1)$ de loi exponentielle de paramètre 1 et construisons le processus de comptage suivant :

$$N_t^{c_0,c_1} = \sum_{k\geq 1} 1_{\{\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_k e_k \leq t\}}, \quad \text{avec } \lambda_k = \begin{cases} 1/c_0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 1/c_1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Le processus du télégraphe est alors défini par

$$Z_t^{c_0,c_1} = \int_0^t (-1)^{N_u^{c_0,c_1}} du. \tag{5.1.2}$$

Ce processus ne satisfait évidemment pas la propriété de Markov : connaître $Z_t^{c_0,c_1}$ ne suffit pas pour déterminer la loi de $Z_{t+h}^{c_0,c_1}$ avec $h > 0$. Par contre, l'information fournie par la dérivée de Z^{c_0,c_1} au point t est suffisante pour déterminer la dynamique du processus après cet instant. Plus précisément $(N_t^{c_0,c_1}, Z_t^{c_0,c_1})$ est un processus markovien.
Dans notre étude, nous avons présenté plusieurs résultats concernant ce processus :

– La *loi du processus* $(Z_t^{c_0,c_1}, N_t^{c_0,c_1})$ peut être déterminée explicitement en utilisant des techniques élémentaires de calcul des probabilités. On note notamment que la loi de $Z_t^{c_0,c_0}$ sachant $N_t^{c_0,c_0}$ suit une loi de type beta centrée. Par ailleurs la densité de $Z_t^{c_0,c_1}$ s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel. Les fonctions de Bessel modifiées sont définies par :

$$I_\nu(\xi) = \sum_{m\geq 0} \frac{(\xi/2)^{\nu+2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}.$$

➥ *La loi de* $Z_t^{c_0,c_1}$ *est donnée par* $\mathbb{P}(Z_t^{c_0,c_1} \in dx) = e^{-c_0 t}\delta_t(dx) + e^{-\frac{c_0+c_1}{2}t} f(t,x) 1_{[-t,t]}(x)$, *avec*

$$f(t,x) = \frac{1}{2}\Big[\sqrt{\frac{c_0 c_1 (t+x)}{t-x}}\; I_1\Big(\sqrt{c_0c_1(t^2-x^2)}\Big) + c_0 I_0\Big(\sqrt{c_0c_1(t^2-x^2)}\Big)\Big] e^{\frac{c_1-c_0}{2}x}.$$

– *L'équation du télégraphe.* Comme $(Z_t^{c_0,c_1}, N_t^{c_0,c_1})$ est un processus de Markov, nous présentons dans [49] le semi-groupe associé à son générateur. Par ailleurs, dans le cas symétrique $c_0 = c_1 = c > 0$, l'utilisation du processus linéaire par morceaux $Z_t^{c,c}$ permet de relier l'équation des ondes à une équation aux dérivées partielles appelée *équation du télégraphe*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big\{f(x+at) + f(x-at)\Big\}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Alors u est l'unique solution de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, avec les conditions aux bords $u(x,0) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

➥ *La fonction* $w(x,t) = \mathbb{E}[u(x, Z_t^{c,c})]$, $(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ *est la solution de l'équation du télégraphe* $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, *avec les conditions limites* $w(x,0) = f(x)$ *et* $\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0$.

Ce résultat peut être généralisé au cas $c_0 \neq c_1$: dans ce cas, l'équation du télégraphe est remplacée par deux équations couplées.

Ayant introduit le processus du télégraphe, nous sommes en mesure de présenter les différents résultats de convergence liés à la marche aléatoire persistante.

5.2 Résultats de convergence principaux

Définissons la marche aléatoire renormalisée. Pour cela nous considérons la matrice de transition (5.0.1) avec les coefficients : $\alpha = \alpha_0 + c_0\Delta_x$ et $\beta = \beta_0 + c_1\Delta_x$. A partir du processus $(X_t,\, t \in \mathbb{N})$ défini par (5.0.2), introduisons la marche $(Z_s^\Delta,\, s \in \Delta_t\,\mathbb{N})$ à l'aide de la relation :

$$Z_s^\Delta = \Delta_x X_{s/\Delta_t}, \quad (\Delta_t > 0,\ \Delta_x > 0). \tag{5.2.1}$$

Pour obtenir un processus continu, il suffit de considérer $(\tilde{Z}_s^\Delta,\, s \geq 0)$ l'interpolée linéaire de (Z_s^Δ). En faisant tendre Δ_t et Δ_x simultanément vers 0, nous pouvons obtenir différentes limites suivant le lien entre Δ_t et Δ_x. Dans certains cas, la limite sera un processus de Markov et donc la persistance de la marche aléatoire aura disparu, dans d'autres cas le processus limite conserve une mémoire "instantanée" : le processus n'est pas markovien.
Considérons deux paramètres essentiels :

$$\rho_0 = 1 - \alpha_0 - \beta_0 \quad \text{(le coefficient d'asymétrie), et} \quad \eta_0 = \beta_0 - \alpha_0.$$

➥ *Premier cas : $\rho_0 = 1$ i.e. $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.*
Soit $\Delta_x = \Delta_t$. Si $Y_0 = X_0 = -1$ alors l'interpolée linéaire de la marche aléatoire persistante $(\tilde{Z}_s^\Delta,\ s \geq 0)$ converge en loi, quand $\Delta_x \to 0$, vers le processus du télégraphe $(-Z_s^{c_0,c_1},\ s \geq 0)$.

Dans le cas où $\alpha_0 = \beta_0$, les accroissements de la marche ont tendance à rester longtemps dans le même état, soit dans l'état 1, soit en -1. Ainsi les changements de pente de l'interpolée de la marche interviennent au bout de temps géométriques qui, correctement renormalisés, convergent vers des lois exponentielles. Le processus du télégraphe apparaît donc de manière naturelle.

➥ *Second cas : $\rho_0 \neq 1$.*
1) Si $r\Delta_t = \Delta_x$ avec $r > 0$ alors $\tilde{Z}_t^\Delta$ converge, quand $\Delta_x \to 0$, vers la limite déterministe $-\frac{rt\eta_0}{1-\rho_0}$.
2) Si $r\Delta_t = \Delta_x^2$ avec $r > 0$, alors le processus $(\xi_t^\Delta,\ t \geq 0)$ défini par $\xi_t^\Delta = \tilde{Z}_t^\Delta + \frac{t\sqrt{r}\eta_0}{(1-\rho_0)\sqrt{\Delta_t}}$ converge en loi, quand $\Delta_x \to 0$, vers $(\xi_t^0,\ t \geq 0)$ où

$$\xi_t^0 = r\Big(\frac{c_0 - c_1}{1-\rho_0} + \frac{\eta_0(c_0+c_1)}{(1-\rho_0)^2}\Big)t + \sqrt{\frac{r(1+\rho_0)}{1-\rho_0}\Big(1 - \frac{\eta_0^2}{(1-\rho_0)^2}\Big)}W_t,$$

$(W_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien unidimensionnel.

Dans ce cas, la mémoire disparaît bel et bien à la limite. La première partie du résultat précédent correspond en quelque sorte à une loi des grands nombres alors que la seconde partie est de type théorème de la limite centrale. Il se démontre classiquement en calculant la loi de marginales, à partir d'une relation de récurrence pour la fonction génératrice, et en utilisant la tension de la loi du processus.

5.3 Perspectives

Les perspectives liées à cet article sont sans doute nombreuses : recherche d'un modèle de marche aléatoire persistante qui converge vers un processus du télégraphe fractionnaire (intégration du bruit du télégraphe contre un noyau fractionnaire), interprétation de l'équation du télégraphe à dérivées fractionnaires (voir l'article de E. Orsingher et L. Beghin [65]),...

Mais la recherche qui attire le plus mon attention est la généralisation des résultats de convergence

à des marches aléatoires dont les accroissements sont des chaînes de Markov d'ordre supérieur à 2. Evidemment si le support de la mémoire est déterministe et fini, il y a de fortes chances pour qu'à la limite la mémoire soit instantanée et que le processus obtenu ne diffère pas vraiment du processus du télégraphe. Par contre si le support est infini, la marche aléatoire ressemblerait à un processus à mémoire longue comme il en existe en théorie des séries choronologiques et le passage à la limite aboutirait sans doute à un processus à trajectoires continues et à mémoire longue.
Une autre perspective intéressante est d'essayer d'étudier de façon plus générale, les processus tels celui du télégraphe, qui ne sont pas markoviens mais qui, associés à d'autres processus forment des couples qui satisfont cette propriété de Markov. C'est notamment le cas de $(Z_t^{c_0,c_1}, N_t^{c_0,c_1})$.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and A. Stegun. *Pocket book of mathematical functions*. Verlag Harri Deutsch, 1984.

[2] R. Bafico and P. Baldi. Small random perturbations of Peano phenomena. *Stochastics*, 6(3-4) :279–292, 1981/82.

[3] D. Bakry and M. Émery. Diffusions hypercontractives. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 177–206. Springer, Berlin, 1985.

[4] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1994.

[5] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay, and P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :173–201, 1998.

[6] S. Benachour, B. Roynette, and P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. II. Convergence to invariant probability. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :203–224, 1998.

[7] M. Benaïm, M. Ledoux, and O. Raimond. Self-interacting diffusions. *Probab. Theory Related Fields*, 122(1) :1–41, 2002.

[8] M. Benaïm and O. Raimond. Self-interacting diffusions. II. Convergence in law. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 39(6) :1043–1055, 2003.

[9] M. Benaïm and O. Raimond. Self-interacting diffusions. III. Symmetric interactions. *Ann. Probab.*, 33(5) :1717–1759, 2005.

[10] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *J. Phys. A*, 14 :453–457, 1981.

[11] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani. Stochastic resonance in climatic changes. *Tellus*, 34 :10–16, 1982.

[12] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani. A theory of stochastic resonance in climatic change. *SIAM J. Appl. Math.*, 43 :563–578, 1983.

[13] N. Berglund and B. Gentz. A sample-paths approach to noise-induced synchronization : stochastic resonance in a double-well potential. *Ann. Appl. Probab.*, 12(4) :1419–1470, 2002.

[14] N. Berglund and B. Gentz. Geometric singular perturbation theory for stochastic differential equations. *J. Differential Equations*, 191(1) :1–54, 2003.

[15] N. Berglund and B. Gentz. *Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag London Ltd., London, 2006. A sample-paths approach.

[16] F. Bolley, A. Guillin, and C. Villani. Quantitative concentration inequalities for empirical measures on non-compact spaces. *Probab. Theory Related Fields*, 137(3-4) :541–593, 2007.

[17] A. Bovier, M. Eckhoff, V. Gayrard, and M. Klein. Metastability in reversible diffusion processes. I. Sharp asymptotics for capacities and exit times. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 6(4) :399–424, 2004.

[18] A. Bovier, V. Gayrard, and M. Klein. Metastability in reversible diffusion processes. II. Precise asymptotics for small eigenvalues. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 7(1) :69–99, 2005.

[19] S. C. Carmona and M. I. Freidlin. On logarithmic asymptotics of stochastic resonance frequencies. *Stoch. Dyn.*, 3(1) :55–71, 2003.

[20] S-N. Chow, K. Lu, and J. Mallet-Paret. Floquet theory for parabolic differential equations. *J. Differential Equations*, 109(1) :147–200, 1994.

[21] M. Cranston and Y. Le Jan. Self-attracting diffusions : two case studies. *Math. Ann.*, 303(1) :87–93, 1995.

[22] D. A. Dawson and J. Gärtner. Large deviations from the McKean-Vlasov limit for weakly interacting diffusions. *Stochastics*, 20(4) :247–308, 1987.

[23] M. V. Day. On the exponential exit law in the small parameter exit problem. *Stochastics*, 8(4) :297–323, 1983.

[24] M. V. Day. Recent progress on the small parameter exit problem. *Stochastics*, 20(2) :121–150, 1987.

[25] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[26] J.-D. Deuschel and D. W. Stroock. *Large deviations*, volume 137 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[27] C. Donati-Martin and Y. Hu. Penalization of the Wiener measure and principal values. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 of *Lecture Notes in Math.*, pages 251–269. Springer, Berlin, 2003.

[28] R. T. Durrett and L. C. G. Rogers. Asymptotic behavior of Brownian polymers. *Probab. Theory Related Fields*, 92(3) :337–349, 1992.

[29] Christopher P. Fall, Eric S. Marland, John M. Wagner, and John J. Tyson, editors. *Computational cell biology*, volume 20 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[30] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell. *Random perturbations of dynamical systems*, volume 260 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1984. Translated from the Russian by Joseph Szücs.

[31] M.I. Freidlin. Quasi-deterministic approximation, metastability and stochastic resonance. *Phys. D*, 137(3-4) :333–352, 2000.

[32] T. Funaki. A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 67(3) :331–348, 1984.

[33] R. Fürth. *Schwankungerscheinungen in der Physik*. Sammlung Vieweg, Braunschweig, 1920.

[34] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, 70 :223–287, January 1998.

[35] S. Goldstein. On diffusion by discontinuous movements, and on the telegraph equation. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 4 :129–156, 1951.

[36] M. Gradinaru, S. Herrmann, and B. Roynette. A singular large deviations phenomenon. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 37(5) :555–580, 2001.

[37] S. Herrmann. Etude de processus de diffusion. *Thèse université Henri Poincaré Nancy I*, 2001.

[38] S. Herrmann. Phénomène de Peano et grandes déviations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(11) :1019–1024, 2001.

[39] S. Herrmann. Système de processus auto-stabilisants. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 414 :49, 2003.

[40] S. Herrmann and P. Imkeller. Barrier crossings characterize stochastic resonance. *Stoch. Dyn.*, 2(3) :413–436, 2002. Special issue on stochastic climate models.

[41] S. Herrmann and P. Imkeller. The exit problem for diffusions with time-periodic drift and stochastic resonance. *Ann. Appl. Probab.*, 15(1A) :39–68, 2005.

[42] S. Herrmann and P. Imkeller. *Stochastic resonance*. Academic Press/Elsevier Science, Oxford, 2006.

[43] S. Herrmann, P. Imkeller, and I. Pavlyukevich. Two mathematical approaches to stochastic resonance. In *Interacting stochastic systems*, pages 327–351. Springer, Berlin, 2005.

[44] S. Herrmann, P. Imkeller, and D. Peithmann. Transition times and stochastic resonance for multi-dimensional diffusions with time periodic drift : a large deviations approach. *Ann. Appl. Probab.*, 16(4) :1851–1892, 2006.

[45] S. Herrmann, P. Imkeller, and D. Peithmann. Large deviations and a Kramers' type law for self-stabilizing diffusions. *Ann. Appl. Probab.*, 18(4) :1379–1423, 2008.

[46] S. Herrmann and B. Roynette. Boundedness and convergence of some self-attracting diffusions. *Math. Ann.*, 325(1) :81–96, 2003.

[47] S. Herrmann and M. Scheutzow. Rate of convergence of some self-attracting diffusions. *Stochastic Process. Appl.*, 111(1) :41–55, 2004.

[48] S. Herrmann and J. Tugaut. Non uniqueness of stationary measures for self-stabilizing processes. Prépublications de l'Institut Elie Cartan, n. 12, 2009.

[49] S Herrmann and P Vallois. From persistent random walk to the telegraph noise. Prépublications de l'Institut Elie Cartan, n. 46, 2008.

[50] P. Imkeller and I. Pavlyukevich. Stochastic resonance in two-state Markov chains. *Arch. Math. (Basel)*, 77(1) :107–115, 2001. Festschrift : Erich Lamprecht.

[51] P. Imkeller and I. Pavlyukevich. Model reduction and stochastic resonance. *Stoch. Dyn.*, 2(4) :463–506, 2002.

[52] P. Imkeller and I. Pavlyukevich. The reduction of potential diffusions to finite state Markov chains and stochastic resonance. In *IUTAM Symposium on Nonlinear Stochastic Dynamics*, volume 110 of *Solid Mech. Appl.*, pages 57–69. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

[53] P. Imkeller and I. Pavlyukevich. Stochastic resonance : a comparative study of two-state models. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV*, volume 58 of *Progr. Probab.*, pages 141–154. Birkhäuser, Basel, 2004.

[54] G. Jona-Lasinio. Large deviations for weak solutions of stochastic differential equations. In *Ideas and methods in mathematical analysis, stochastics, and applications (Oslo, 1988)*, pages 162–167. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[55] P. Jung. Periodically driven stochastic systems. *Phys. Rep.*, 234(4-5) :175–295, 1993.

[56] H. A. Kramers. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, 7 :284–304, 1940.

[57] P. Kuchment. *Floquet theory for partial differential equations*, volume 60 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[58] A. Kurtzmann. *Comportement asymptotique de diffusions renforcées sur* $\mathbb{R}^d$. PhD thesis, Université de Neufchâtel, mai 2007.

[59] F. Malrieu. Logarithmic Sobolev inequalities for some nonlinear PDE's. *Stochastic Process. Appl.*, 95(1) :109–132, 2001.

[60] H. P. McKean, Jr. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 56 :1907–1911, 1966.

[61] H. P. McKean, Jr. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. In *Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967)*, pages 41–57. Air Force Office Sci. Res., Arlington, Va., 1967.

[62] C. Nicolis. Stochastic aspects of climatic transitions – responses to periodic forcing. *Tellus*, 34 :1–9, 1982.

[63] J. R. Norris, L. C. G. Rogers, and D. Williams. Self-avoiding random walk : a Brownian motion model with local time drift. *Probab. Theory Related Fields*, 74(2) :271–287, 1987.

[64] K. Oelschläger. A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(2) :279–322, 1985.

[65] E. Orsingher and L. Beghin. Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with Brownian time. *Probab. Theory Related Fields*, 128(1) :141–160, 2004.

[66] R. Pemantle and S. Volkov. Vertex-reinforced random walk on $\mathbf{Z}$ has finite range. *Ann. Probab.*, 27(3) :1368–1388, 1999.

[67] Z. Qian, F. Russo, and W. Zheng. Comparison theorem and estimates for transition probability densities of diffusion processes. *Probab. Theory Related Fields*, 127(3) :388–406, 2003.

[68] Z. Qian and W. Zheng. Sharp bounds for transition probability densities of a class of diffusions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(11) :953–957, 2002.

[69] Z. Qian and W. Zheng. A representation formula for transition probability densities of diffusions and applications. *Stochastic Process. Appl.*, 111(1) :57–76, 2004.

[70] O. Raimond. Self-attracting diffusions : case of the constant interaction. *Probab. Theory Related Fields*, 107(2) :177–196, 1997.

[71] E. Renshaw and R. Henderson. The correlated random walk. *J. Appl. Probab.*, 18(2) :403–414, 1981.

[72] M. Rosenblatt. On a class of Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 :120–135, 1951.

[73] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Some penalisations of the Wiener measure. *Jpn. J. Math.*, 1(1) :263–290, 2006.

[74] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*, volume 233 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[75] A.-S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, volume 1464 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–251. Springer, Berlin, 1991.

[76] Y. Tamura. On asymptotic behaviors of the solution of a nonlinear diffusion equation. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 31(1) :195–221, 1984.

[77] Y. Tamura. Free energy and the convergence of distributions of diffusion processes of McKean type. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(2) :443–484, 1987.

[78] G. I. Taylor. Diffusion by continuous movements. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 20 :196–212, 1921/22.

[79] P. Vallois and C. S. Tapiero. Memory-based persistence in a counting random walk process. *Physica A*, 386 :303–317, 2007.

[80] G.H. Weiss. *Aspects and applications of the random walk*. Random Materials and Processes. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994.

[81] G.H. Weiss. Some applications of persistent random walks and the telegrapher's equation. *Phys. A*, 311(3-4) :381–410, 2002.

[82] L. Yan, Y. Sun, and Y. Lu. On the linear fractional self-attracting diffusion. *J. Theoret. Probab.*, 21(2) :502–516, 2008.