

**Processus stochastiques associés aux équations  
d'évolution linéaires ou non-linéaires et méthodes  
numériques probabilistes**

Madalina Deaconu

► **To cite this version:**

Madalina Deaconu. Processus stochastiques associés aux équations d'évolution linéaires ou non-linéaires et méthodes numériques probabilistes. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2008. tel-00590778

**HAL Id: tel-00590778**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00590778>**

Submitted on 5 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Mémoire présenté en vue d'obtenir le diplôme**

**d'Habilitation à diriger des recherches de l'Université Henri Poincaré**

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

# **Processus stochastiques associés aux équations d'évolution linéaires ou non-linéaires et méthodes numériques probabilistes**

**Madalina DEACONU**

Soutenue le 7 mai 2008

Composition du jury :

<b>Jean Bertoin</b>	Université Paris 6, Paris	Président du jury
<b>Pierre Del Moral</b>	INRIA, Bordeaux	
<b>Emmanuel Gobet</b>	ENSIMAG, Grenoble	Rapporteur
<b>Sylvie Méléard</b>	École Polytechnique, Paris	Rapporteur
<b>James Norris</b>	Statistical Laboratory, Cambridge	Rapporteur
<b>Bernard Roynette</b>	Université Henri Poincaré, Nancy	
<b>Denis Talay</b>	INRIA, Sophia-Antipolis	



## Avant propos

Le jury...

Un des moments les plus agréables dans la préparation de l'habilitation est celui du choix du jury. J'ai trouvé cette tâche très plaisante car elle m'a permis de réunir un jury d'experts qui par leurs thématiques et par leur personnalité ont influencé l'évolution de mes travaux.

Je remercie en premier lieu Bernard Roynette qui est à l'origine de mon intérêt pour la recherche. Mon penchant pour les probabilités remonte à très loin mais le goût pour les aspects stochastiques doit beaucoup à la passion avec laquelle Bernard nous fait découvrir des problématiques variées et difficiles. Son esprit ouvert et son intuition nous permettent à tous, au cours des séminaires de probabilités, de "toucher du bout des doigts" des domaines très éloignés.

Je remercie très sincèrement les trois rapporteurs pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Sylvie Méléard est pour moi un exemple. Ses travaux ont été une belle source d'inspiration. Mes travaux sur la coagulation s'inspirent fortement et adaptent des idées qu'elle a introduites pour l'équation de Boltzmann. J'admire son esprit d'ouverture vers les domaines nouveaux et sa force à abattre les problèmes les plus difficiles.

Je remercie James Norris pour la gentillesse avec laquelle il a accepté d'être rapporteur. Les workshops qu'il a organisés sur la coagulation ont été des moments privilégiés où l'ensemble de la communauté scientifique (mathématiciens, physiciens, chimistes etc) a pu se réunir et discuter sur les dernières avancées dans ce domaine actif.

Emmanuel Gobet est l'expert des méthodes de Monte-Carlo dans les rapports. Je le remercie très sincèrement pour avoir accepté cette tâche.

Je remercie chaleureusement Jean Bertoin pour sa présence dans ce jury et pour son rôle de président. Ses exposés sont à mes yeux des leçons de "Comment exposer des mathématiques difficiles?". On a toujours l'impression d'avoir tout compris, sauf au dernier quart d'heure lorsque le terrible théorème se dévoile.

Pierre Del Moral m'a fait découvrir les algorithmes génétiques et leur universalité. Les techniques constructives qu'il a introduites devraient pouvoir me permettre d'améliorer les méthodes de réduction de variance auxquelles je m'intéresse. Je suis très heureuse et honorée de l'avoir comme membre du jury.

Je remercie chaleureusement Denis Talay pour tout ce qu'il m'a appris. Les collaborations avec les industriels sont le fruit de son exceptionnel dynamisme. La tendance qu'il donne à tous les membres du projet Tosca, ex-Omega, est tout sauf linéaire.

Mes collaborateurs...

Le travail en collaboration est à mes yeux une source inépuisable de motivation et d'idées. Ceci explique le grand plaisir que j'ai à travailler avec d'autres personnes.

À ce titre, je remercie chaleureusement tous mes collaborateurs : Antoine, Étienne, Nicolas, Sophie, Anna, Mihai et Jean.

Mireille est pour moi une amie, j'espère poursuivre et approfondir les discussions passionnantes que nous avons menées au long de toutes ces années.

Le cadre de travail...

L'ambiance amicale qui souffle dans l'équipe-projet Tosca et dans l'équipe de probabilités de Nancy a contribué largement à un cadre de travail particulièrement agréable. Je remercie très chaleureusement tous les membres de l'équipe de probabilités et plus particulièrement Pierre Vallois et de manière aléatoire Jean-Sébastien, Antoine, Régine, Samuel, Céline et Agnès.

Je remercie très sincèrement Laurence Quirot, Hélène Zganic, Didier Gemmerlé, Raymonde Michel, Nathalie Piérache, Colette Erzen, Patricia Georges et Chantal Lecomte pour leur disponibilité et leur gentillesse.

Casa...

Tot ceea ce am realizat se datorează dragostei și încrederii cu care m-au înconjurat părinții mei. Le mulțumesc.

Clara y Luis son mis rayos de sol, las risas cristalinas y los besitos suaves hacen todos los días mágicos.

*À Clara*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Interprétation probabiliste des équations aux dérivées partielles</b>	<b>5</b>
1.1 Cadre général - Lien entre les équations aux dérivées partielles et les équations différentielles stochastiques . . . . .	5
1.2 Processus de diffusions linéaires . . . . .	8
1.2.1 Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante . . . . .	8
1.2.2 Temps de séjour de certains mouvements brownien dans le disque unité . . . . .	9
1.3 Processus de diffusion non-linéaires . . . . .	15
1.3.1 Processus non-linéaire auto-stabilisant réfléchi . . . . .	16
1.3.2 Modèles de coagulation-fragmentation . . . . .	20
1.3.3 Approche probabiliste de l'équation de Prandtl . . . . .	33
<b>2 Méthodes de Monte-Carlo pour les diffusions - nouvelles approches</b>	<b>35</b>
2.1 Méthodes de Monte-Carlo - bref aperçu . . . . .	35
2.2 Problématique . . . . .	37
2.3 Marche aléatoire sur les rectangles . . . . .	39
2.4 Simulation des diffusions par échantillonnage pondéré . . . . .	41
<b>3 Régularité dans les espaces de Besov</b>	<b>45</b>
3.1 Espaces de Besov . . . . .	46
3.2 Régularité du mouvement brownien itéré . . . . .	47
3.3 Régularité de l'équation de Walsh . . . . .	48
3.4 Approximation par réseaux de neurones . . . . .	50
<b>4 Exemples d'applications industrielles</b>	<b>51</b>
4.1 Capacité des centrales électriques . . . . .	51



4.2 Problème du canal plan . . . . .	52
<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

# Introduction

Ce document de synthèse présente mes travaux de recherche, effectués au sein du projet Omega de l'Inria, et plus récemment dans la nouvelle équipe-projet Tosca. La composante nancéienne de l'équipe-projet Tosca est un sous-ensemble de l'équipe de probabilités de l'Institut Élie Cartan de Nancy.

Mes sujets de recherche portent principalement sur l'interprétation probabiliste des équations aux dérivées partielles linéaires ou non-linéaires et sont motivés par la mise en place de méthodes numériques de simulation des solutions de ces équations.

Pendant ma thèse, effectuée sous la direction de Bernard Roynette, j'ai eu l'occasion de traiter des problèmes assez divers ayant comme caractéristique commune l'étude des processus stochastiques. Ma thèse est composée de deux parties assez différentes : une partie est dédiée à l'étude du lien qui existe entre certains processus stochastiques et les équations aux dérivées partielles linéaires ou non-linéaires, et une seconde partie a trait à l'étude des propriétés fines de certains processus stochastiques dans une classe sympathique d'espaces fonctionnels, à savoir les espaces de Besov.

Le travail commencé dans ces premières années se poursuit à présent dans la direction interprétation probabiliste d'équations d'évolution non-linéaires comme c'est le cas des modèles de coagulation-fragmentation ou des équations type couche limite de la mécanique des fluides. D'autres directions de recherche sont apparues, comme par exemple l'étude de nouvelles méthodes de simulation pour le couple temps de sortie et position de sortie des processus stochastiques solutions des équations différentielles stochastiques avec des conditions mixtes Neumann et/ou Dirichlet au bord du domaine.

En tant que chargée de recherches Inria, une partie de ma recherche a été guidée par les collaborations avec les industriels. Cette partie, qui a donné lieu à des rapports de fin de contrats, est non négligeable et fort intéressante. D'une part, ce type de collaboration apporte aux chercheurs que nous sommes des problèmes concrets, et, d'autre part, les échanges avec des experts d'autres domaines, même si difficiles au départ, s'avèrent instruc-

tifs et enrichissants pour tous.

Le plan de ce document de synthèse est le suivant.

La première partie présente le corps principal de ma recherche, à savoir l'approche probabiliste de certaines équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires.

La seconde partie trouve sa cohérence avec la première dans la construction de nouveaux algorithmes de simulation de type Monte-Carlo pour une large classe d'équations différentielles stochastiques.

Dans la troisième partie je présente brièvement les travaux sur l'analyse fine de certains processus stochastiques dans les espaces de Besov.

Et finalement, dans la quatrième partie, je fais une rapide présentation de deux des contrats industriels auxquels j'ai participé dans le cadre du projet Omega, et plus récemment dans le cadre de la nouvelle équipe-projet Tosca, de l'Inria.

Les travaux décrits ci-dessous ont été menés en collaboration avec Mireille Bossy, Nicolas Fournier, Mihai Grădinaru, Anna Kamont, Antoine Lejay, Sophie Mézières, Jean-Rodolphe Roche, Bernard Roynette, Denis Talay et Etienne Tanré.

# Chapitre 1

## Interprétation probabiliste des équations aux dérivées partielles

Cette première partie réunit plusieurs résultats portant sur l'approche probabiliste de certaines équations d'évolution linéaires ou non-linéaires. Comme nous le verrons par la suite, les techniques utilisées sont assez différentes et s'adaptent aux divers modèles.

D'une manière générale nous allons présenter le lien qui existe entre les équations aux dérivées partielles et les processus de diffusion. Dans un premier temps nous considérons le cas linéaire. Nous présentons dans la seconde partie les principaux outils dans le cas non-linéaire. La non-linéarité doit être comprise ici au sens de McKean, plus précisément la loi du processus est une des inconnues de l'équation.

### 1.1 Cadre général - Lien entre les équations aux dérivées partielles et les équations différentielles stochastiques

L'approche probabiliste de certaines équations aux dérivées partielles permet d'exprimer leurs solutions sous la forme de l'espérance d'une certaine fonctionnelle d'un processus stochastique, processus stochastique qui est solution d'une équation différentielle stochastique. Ce formalisme permet ensuite l'évaluation de ces solutions à travers des méthodes de Monte-Carlo. Par ailleurs, à partir de la formule d'Itô, nous pouvons retrouver l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la densité des processus stochastiques

et utiliser les propriétés de ces processus afin d'obtenir des résultats sur les solutions des équations aux dérivées partielles.

Il est, par exemple, bien connu que les solutions du problème de Dirichlet et des équations aux dérivées partielles du type équation de la chaleur peuvent être représentées à l'aide des espérances qui font apparaître des fonctionnelles du mouvement brownien.

Dans un cadre plus général, considérons une équation différentielle stochastique homogène générique, à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , de la forme :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \\ X_0 = x, \end{cases} \quad (1.1)$$

où

- $(B_t; t \geq 0)$  est un mouvement brownien  $m$ -dimensionnel,
- $b : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$  est le terme de dérive,
- $\sigma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  est le coefficient de diffusion.

On admet pour toute la suite de cette partie introductive que le terme de dérive  $b$  et celui de diffusion  $\sigma$  satisfont les hypothèses nécessaires qui assurent l'existence et l'unicité d'une solution forte de (1.1). Pour une fonction  $f$  régulière (par exemple de classe  $\mathcal{C}^2$ ), l'application de la formule d'Itô permet d'écrire

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t Lf(X_s)ds + \int_0^t \nabla f(X_s)\sigma(X_s)dB_s \quad (1.2)$$

où

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad (1.3)$$

désigne le générateur infinitésimal du processus  $(X_t, t \geq 0)$  et  $a = \sigma\sigma^T$ . En particulier :

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds \quad (1.4)$$

est une martingale locale.

Si  $u(t; x, y)$  note la loi du processus  $X_t$  qui à l'instant initial démarre de  $x$ , i.e.  $\mathbb{P}_x(X_t \in dy) = u(t; x, y)dy$ , alors  $u(t; x, y)$  est solution de l'équation de Kolmogorov *forward* appelée aussi équation de Fokker-Planck. Cette équation s'écrit, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  fixé :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t; x, y) = L^*u(t; x, y), \text{ pour } t > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

où  $L^*$  est l'adjoint formel de  $L$ , donné par la formule :

$$L^* f(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [a_{ij}(y) f(y)] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} [b_i(y) f(y)]. \quad (1.6)$$

On peut par ailleurs rappeler que  $u(t; x, y)$  vérifie l'équation de Kolmogorov *backward* par rapport à la variable  $x$  (le point de départ), i.e. pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  fixé

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t; x, y) = Lu(t; x, y), \text{ pour } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

Ce formalisme basique et classique va nous guider dans l'étude de plusieurs modèles que nous listons brièvement.

Nous étudierons dans le cas linéaire le comportement des temps d'atteinte d'une diffusion réelle fortement rentrante en caractérisant le comportement de sa transformée de Laplace.

Ensuite, dans le cas bidimensionnel, nous nous intéressons au temps de séjour du mouvement brownien plan qui vit dans un anneau déterminé par deux disques, avec des conditions mixtes aux bords. Le processus est réfléchi sur le cercle intérieur et tué dès qu'il touche la frontière du disque le plus grand.

Dans le cas non-linéaire les outils principaux qui nous serviront pour obtenir les résultats sont le problème des martingales et la propagation du chaos qui, à travers le système de particules en interaction correspondant, nous permet d'interpréter les solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires comme limite de systèmes de particules.

Dans le cas non-linéaire un premier travail est consacré à l'étude d'un processus non-linéaire auto-stabilisant réfléchi qui vit dans un intervalle compact de la droite réelle.

Nous étudions ensuite un autre modèle, les équations de coagulation fragmentation. D'un point de vue mathématique il s'exprime sous la forme d'un système infini d'équations différentielles qui est difficile à caractériser. Dans un premier travail sur le sujet nous avons étudié ce modèle dans le cas des noyaux de coagulation constant, multiplicatif et additif. Nous avons donné une première interprétation probabiliste de leurs solutions ainsi qu'un lien entre les solutions des cas additif et multiplicatif. Ensuite, dans le cas continu et le cadre général pour le noyau, en utilisant des techniques proches de celles employées pour l'équation de Boltzmann, nous avons associé à cette équation un processus stochastique à sauts et un système de particules permettant la simulation de la solution. Une autre étude a été effectuée dans le cas où la

particule est aussi caractérisée par sa position, ce qui rend l'équation inhomogène en espace.

Nous présentons aussi une étude en cours portant sur l'équation de Prandtl, qui est une équation de type couche limite issue de la mécanique des fluides.

## 1.2 Processus de diffusions linéaires

### 1.2.1 Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante

Dans cette étude nous caractérisons le comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante. Cette caractéristique est illustrée par les propriétés satisfaites par le terme de dérive. L'équation différentielle stochastique que nous considérons est unidimensionnelle et prend la forme :

$$\begin{cases} X_t^y = y - \frac{1}{2} \int_0^t b(X_s^y) ds + B_t \\ X_0^y = y. \end{cases} \quad (1.8)$$

Ici  $y$  est un réel positif, c'est le point de départ du processus  $X_t^y$ . Le processus  $(B_t; t \geq 0)$  est un mouvement brownien réel et le terme de dérive  $b$  une fonction de l'ensemble des réels positifs dans lui-même. Nous cherchons à caractériser le premier temps d'atteinte d'une valeur  $x$  par le processus qui démarre du point  $y$ , pour  $y > x$  :

$$T_x^y = \inf\{t \geq 0; X_t^y = x\}, \quad (1.9)$$

c'est donc le temps de retour en  $x$ . Plus précisément, nous caractérisons la transformée de Laplace de ce temps d'atteinte,  $\mathbb{E}[\exp(-\alpha T_x^y)]$ , en fonction des valeurs de  $\alpha$  et des propriétés du terme de dérive qui, par son caractère fortement rentrant, assure l'ultracontractivité du semi-groupe associé au processus stochastique  $X_t^y$ . Cette étude met en évidence deux classes de fonctions propres associées au générateur infinitésimal  $L$  du processus  $X_t^y$ . Le résultat principal est contenu dans le théorème suivant :

- Supposons que le terme de dérive vérifie les hypothèses suivantes :  $b : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $b$  et sa dérivée tendent vers l'infini à l'infini,  $b''$  et  $\frac{b'^2}{b}$  sont des  $o(b)$  à l'infini et  $b'' \leq 2\frac{b'^2}{b}$  en dehors d'un ensemble compact. Admettons de plus que  $\int_1^\infty \frac{1}{b(x)} dx < +\infty$ .  
Il existe alors un ensemble compact  $K$  et deux constantes  $0 < c_1 < c_2 < \infty$  tels que pour tout  $x$  positif, en dehors de  $K$ , et  $\alpha > 0$

1. Pour tout  $\alpha$  tel que  $b(x) \geq c_2\sqrt{\alpha}$  et pour tout  $y \geq x$  nous avons

$$\mathbb{E}[\exp(\alpha T_x^y)] < +\infty.$$

De plus,  $\sup_{y \geq x} \mathbb{E}[\exp(\alpha T_x^y)]$  est fini et la limite  $\lim_{y \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\exp \alpha T_x^y)]$  existe.

2. Pour tout  $\alpha$  tel que  $b(x) \leq c_1\sqrt{\alpha}$  nous avons  $\mathbb{E}[\exp(\alpha T_x^y)] = +\infty$ .

3. De plus, pour tout  $\alpha$  nous avons

$$0 < k(\alpha, x) = \liminf_{y \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\exp(-\alpha T_x^y)] \leq \limsup_{y \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\exp(-\alpha T_x^y)] \leq 1.$$

$c_2$  (respectivement  $c_1$ ) peut être choisie arbitrairement proche et strictement plus grande que  $2\sqrt{2}$  (respectivement arbitrairement proche et strictement plus petite que  $\sqrt{2}$ ).  $k(\alpha, x)$  désigne une constante qui ne dépend que de  $\alpha$  et de  $x$ .

Un exemple simple de fonction  $b$  qui vérifie les hypothèses du théorème est donné par  $b(x) = x^\gamma$  avec  $\gamma > 1$ .

Nous nous référons aux travaux de Giorno, Nobile, Ricciardi et Sacerdote [GNRS86], pour une caractérisation du temps de retour dans le cas du processus d'Ornstein Uhlenbeck et à un article de Schäl [Sch93], qui utilise un argument de martingale pour obtenir la transformée de Laplace pour un processus avec sauts qui dépendent du temps et du passé.

Concernant les perspectives, dans cette étude il serait intéressant de trouver une équivalence entre la notion d'ultracontractivité et les propriétés satisfaites par le terme de dérive  $b$  de l'équation différentielle stochastique. Par ailleurs il serait intéressant de considérer le cas d'une équation différentielle stochastique en dimension supérieure.

Cette étude a fait l'objet des articles [DW96] et [DW97].

## 1.2.2 Temps de séjour de certains mouvements brownien dans le disque unité

Nous considérons ici le problème de diffusion de la chaleur dans un domaine annulaire, par exemple une pièce de forme ronde avec un obstacle placé à l'intérieur. La question à laquelle on souhaite répondre, en admettant que l'obstacle est réfléchissant et que la frontière du domaine est absorbante, est la suivante : où doit-être placée une source de chaleur dans le domaine,



de manière à obtenir une quantité de chaleur maximale ? C'est ce problème classique d'optimisation introduit par Roche et Sokolowski [RS96], que nous abordons d'un point de vue stochastique.

Nous étudions donc le mouvement brownien plan dans le domaine

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1; |z - c_0| > r_0\}.$$

$\Omega$  est le disque unité auquel on enlève un autre disque, centré en  $c_0$  avec  $|c_0| < 1$ , et de rayon  $r_0$ ,  $0 \leq r_0 \leq 1$ . Le mouvement brownien est réfléchi sur le cercle  $\gamma_0 = \{z \in \mathbb{C}, |z - c_0| = r_0\}$  et il est tué lorsqu'il atteint le cercle unité  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ .

L'équation différentielle stochastique qui décrit ce phénomène s'écrit :

$$\begin{cases} X_t = B_t - k_t \\ k_t = \int_0^t n(X_s) d|k|_s \\ |k|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \in \gamma_0\}} d|k|_s, k_0 = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $n$  note la normale unitaire sortante à la frontière  $\gamma_0$ , par rapport au domaine  $\Omega$ , et  $(k_t, t \geq 0)$  est le processus adapté, continu, à variations bornées qui "mesure" la réflexion sur la frontière  $\gamma_0$ . Le processus  $(X_t; t \geq 0)$  ainsi défini n'est rien d'autre que le mouvement brownien plan issu de  $z$  ( $B_0 = z$ ), réfléchi sur la frontière  $\gamma_0$  et tué dès qu'il touche  $\gamma_1$ . La quantité de chaleur s'exprime en fonction de l'espérance du temps de séjour du processus dans le domaine. Le problème de chaleur maximale se transforme ainsi en un problème de maximisation de l'espérance du temps de séjour dans le domaine  $\Omega$  pour le processus  $X_t$ , à savoir  $\mathbb{E}_z(\tau)$ , par rapport au point de départ  $z$ , où :

$$\tau := \inf\{t \geq 0, X_t \in \gamma_1\}.$$

En effet, lorsqu'une source de chaleur est placée au point  $z \in \Omega$ , la quantité de chaleur est donnée par la formule :

$$Q(z) = \int_{\Omega} \int_0^{\infty} u(t, z, w) dt dw = C \times \mathbb{E}_z(\tau), \quad (1.11)$$

avec  $C$  une constante.  $u(\cdot, z, \cdot)$  est l'unique solution de l'équation aux dérivées partielles suivante avec des conditions mixtes Neumann ou Dirichlet sur la frontière :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, z, w) = \frac{1}{2} \Delta u(t, z, w), & (t, w) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u(0, z, w) = \delta_z(w), & w \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(t, z, w) = 0, & (t, w) \in (0, \infty) \times \gamma_0 \\ u(t, z, w) = 0, & (t, w) \in (0, \infty) \times \gamma_1. \end{cases} \quad (1.12)$$

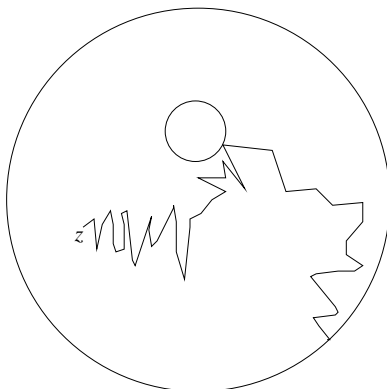


FIG. 1.1 – Mouvement brownien réfléchi sur  $\gamma_0$  et absorbé sur  $\gamma_1$

De plus, la fonction  $Q$  donnée par (1.11) est, du point de vue de la théorie du potentiel, à une constante multiplicative près, l'intégrale sur le domaine  $\Omega$  de la fonction de Green  $G$ , associée au problème (1.12) :

$$\begin{cases} \Delta_z G(z, w) = \delta_z(w), & w \in \Omega \\ \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(z, w) = 0, & w \in \gamma_0 \\ G(z, w) = 0, & w \in \gamma_1. \end{cases} \quad (1.13)$$

La deuxième partie de l'égalité (1.11) est une conséquence directe du calcul stochastique appliqué au processus  $X_t$ .

Plus précisément, l'application de la formule d'Itô conduit à l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}_z(\tau) = -2 \int_{\Omega} G(z, w) dw.$$

Lorsque les deux cercles sont centrés à l'origine et les conditions sur les deux frontières sont de type Dirichlet, le calcul de la fonction de Green est donné dans Villat [Vil12]. Lorsqu'aux deux frontières le processus vérifie des conditions de type Neumann, donc de réflexion, le calcul est fait dans Henrici [Hen86]. Le cas de conditions mixtes Neumann et Dirichlet ne semble pas avoir été traité auparavant.

Dans le cas  $r_0 = 0$  (pas d'obstacle) on a la formule :

$$\mathbb{E}_z(\tau) = \frac{1 - |z|^2}{2}$$

et le maximum est atteint dans cette situation au point  $z = 0$ .

Lorsque les deux cercles sont concentriques ( $c_0 = 0$ ), le calcul reste simple, on peut le retrouver dans le livre de Rao [Rao77]. L'expression de l'espérance

prend la forme :

$$\mathbb{E}_z(\tau) = \frac{1 - |z|^2 + r_0^2 \ln |z|}{2},$$

sa valeur étant maximale lorsque le point  $z$  se situe sur le bord  $\gamma_0$ .

Dans le cas général nous exprimons  $\mathbb{E}_z(\tau)$  en fonction du point de départ  $z$ , sous la forme d'une série qui s'avère rapidement convergente. Ce résultat prend la forme

– L'espérance du temps de séjour  $\tau$  est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_z(\tau) &= \frac{1}{2} (|z \sinh p - \cosh p|^2 - |z \cosh p - \sinh p|^2) \\ &\quad - \log \frac{|z \cosh p - \sinh p| |z q \sinh 2p - r|}{|z \sinh p - \cosh p| |z r - q \sinh 2p|} \\ &\quad + \frac{R^2}{r^2} \log \frac{|z \cosh p - \sinh p| |z r - q \sinh 2p| |z 2q(1 - q) \sinh 2p - s|}{|z \sinh p - \cosh p| |z q \sinh 2p - r| |z s - 2q(1 - q) \sinh 2p|} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(z, p, R) \end{aligned} \tag{1.14}$$

où

$$p = \frac{1}{4} \log \frac{(1 + c_0)^2 - r_0^2}{(1 - c_0)^2 - r_0^2}, \quad R = \tanh \left( \frac{1}{4} \log \frac{(1 + r_0)^2 - c_0^2}{(1 - r_0)^2 - c_0^2} \right),$$

$$q = (1 - R^2)/2, \quad r = \cosh^2 p - R^2 \sinh^2 p, \quad s = \cosh^2 p - R^4 \sinh^2 p. \tag{1.15}$$

La suite  $(s_n(z, p, R))_{n \geq 1}$ , est explicite et converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, à une vitesse de  $R^{4n}$ .

La démonstration de ce résultat repose sur deux ingrédients essentiels.

Dans une première étape, on exprime la fonction de Green avec des conditions mixtes au bord du domaine  $\Omega$  dans le cas des cercles concentriques. Notons dans ce cas la couronne par  $\Omega_{r_0} = \{w \in \mathbb{C}, r_0 < |w| < 1\}$ . L'idée est de traduire la formule du mouvement brownien réel réfléchi en 0 et absorbé en 1 (voir pour cette formule Dynkin et Yushkevich [DJ67]) dans le cas du mouvement brownien plan. "Un brin" de géométrie conduit à remplacer la symétrie par l'homothétie de rapport  $r_0$  et la translation par l'inversion de

centre l'origine et de rapport  $r_0$ . La fonction de Green s'écrit alors :

$$G^{(r_0)}(z, w) = \frac{1}{4\pi} \log |w|^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log \frac{|z - w/r_0^{4n}|^2 |z - 1/\bar{w}r_0^{4n+2}|^2}{|z - 1/\bar{w}r_0^{4n}|^2 |z - w/r_0^{4n+2}|^2}. \quad (1.16)$$

Dans la deuxième étape, afin de passer à la situation générale, plus précisément de la couronne  $\Omega_{r_0}$  au domaine  $\Omega$ , on utilise la famille de transformations linéaires complexes, pour  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\zeta \in \mathbb{C}$

$$a_\theta(\zeta) = \frac{\zeta \cosh \theta + \sinh \theta}{\zeta \sinh \theta + \cosh \theta}. \quad (1.17)$$

Cette transformation géométrique  $a_\theta$  transforme un cercle centré à l'origine en un cercle dont le centre est situé sur l'axe des réels et laisse invariant le cercle unité. Nous pouvons obtenir ensuite par calcul direct la fonction de Green pour le domaine  $\Omega$  :

$$G(w, z) := G^{(r)}(a_{-p}(w), a_{-p}(z)),$$

où  $G^{(r)}$  est donnée par (1.16) avec le rayon  $r \in ]0, 1[$

$$r = \tanh \left( \frac{1}{4} \ln \frac{(1+r_0)^2 - c_0^2}{(1-r_0)^2 - c_0^2} \right)$$

et le paramètre  $p$

$$p = \frac{1}{4} \ln \frac{(1+c_0)^2 - r_0^2}{(1-c_0)^2 - r_0^2}.$$

On conclut la démonstration en utilisant l'expression donnée par la formule d'Itô :

$$\mathbb{E}_z(\tau) = -2 \int_{\Omega} G^{(r)}(a_{-p}(z), a_{-p}(w)) dw.$$

Lorsqu'on remplace  $c_0 = 0$  ou  $r_0 = 0, c_0 = 0$  dans la formule (1.14) on retrouve les formules classiques.

Dans cette étude nous avons illustré les résultats en approchant par simulation ces fonctions afin de localiser le maximum. Dans les simulations nous constatons que lorsque le cercle  $\gamma_0$  est petit ( $r_0$  petit) la position du point qui réalise le maximum est proche de zéro, comme dans le cas sans obstacle. Si on fait varier  $r_0$  de manière croissante, on constate que le maximum se déplace en s'approchant de  $\gamma_1$  et donc en s'éloignant de  $\gamma_0$ . Par ailleurs, lorsqu'on fige la valeur de  $r_0$  et qu'on fait varier  $c_0$ , nous observons sur les simulations que la distance entre le point de maximum et la frontière de réflexion  $\gamma_0$  dépend linéairement de  $c_0$ . Dans l'autre configuration, lorsqu'on fige le  $c_0$  et qu'on fait

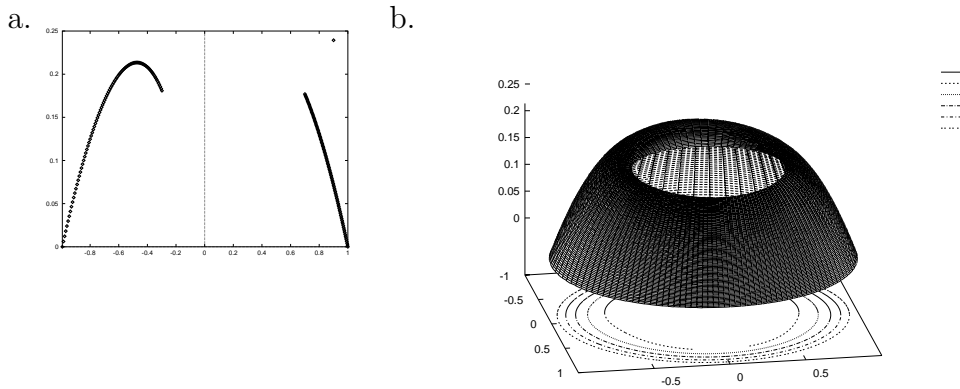


FIG. 1.2 – Le cas  $c_0 = 0.2$  et  $r_0 = 0.4$ .

varier le  $r_0$ , on constate que la distance peut être la même pour différentes valeurs de  $r_0$ . Nous présentons dans la figure 1.2 un exemple d'approximation de  $\mathbb{E}_z(\tau)$  par les séries.

Les perspectives intéressantes ici sont d'une part, de justifier rigoureusement les observations issues des simulations, et d'autre part, de considérer des domaines généraux, comme par exemple des frontières pointues. Il serait par ailleurs intéressant de considérer des dimensions plus grandes  $d \geq 3$ , situation dans laquelle les transformations géométriques précédentes restent à être imaginées.

Cette étude a été publiée dans [DGR00].

### 1.3 Processus de diffusion non-linéaires

Les modèles de diffusions non-linéaires dans tout l'espace ont été introduits par McKean [McK66], [McK67] initialement comme des exemples de processus de Markov non-linéaires. Depuis, on utilise le terme d'équation différentielle stochastique non-linéaire au sens de McKean pour désigner une équation dans laquelle la loi du processus de diffusion est elle-même une inconnue de l'équation.

Décrivons la forme générale d'une telle équation différentielle stochastique non-linéaire. Considérons un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ,  $b, \sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  des applications bornées et lipschitziennes, et  $(B_t; t \geq 0)$  un mouvement brownien en dimension  $n$ . Supposons également que  $X_0$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable de loi  $u_0$  connue.

Nous considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} b(X_s, y) u(s, dy) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(X_s, y) u(s, dy) dB_s \\ \mathbb{P}(X_t \in dy) = u(t, dy), \text{ pour tout } t \geq 0 \\ X_0 \text{ de loi } u_0, \end{array} \right. \quad (1.18)$$

$u(t, \cdot)$  est donc la loi de  $X_t$ .

Dans cette équation, il y a deux inconnues : le processus  $X_t$  et la loi  $u(t, \cdot)$  de ce processus. À titre d'exemple, pour  $\sigma(x, y) = 1$ , l'équation (1.18) admet une unique solution en loi et trajectorielle.

La manière naturelle pour traiter la non-linéarité est d'utiliser le système de particules linéarisé associé et le phénomène de propagation du chaos. Ce phénomène se traduit par le fait que les particules dans le système sont asymptotiquement indépendantes et convergent en loi vers le processus de diffusion solution de (1.18). Plus précisément, pour  $N \geq 1$  entier, construisons le système de particules  $(X_t^{i,N})_{t \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}}$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t^{i,N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}) dt + \sum_{j=1}^N \sigma(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}) dB_t^{i,N}, i \in \{1, \dots, N\} \\ X_0^{i,N} \text{ de loi } u_0. \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Les conditions initiales  $X_0^{i,N}$  sont indépendantes et indépendantes des mouvements browniens de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(B_t^{i,N}; t \geq 0)$ . Les  $(B_t^{i,N}; t \geq 0)_i$  sont de plus indépendants entre eux.

D'après la propagation du chaos, lorsque  $N$  tend vers l'infini, chaque

$X^{i,N}$  converge vers une limite  $X^i$  qui est solution de l'équation différentielle stochastique non-linéaire (1.18).

Dans la pratique on montre que pour tout  $t$  positif et tout  $k \leq N$  la distribution jointe du  $k$ -uplet  $(X_t^{1,N}, \dots, X_t^{k,N})$  converge vers  $u(t, \cdot)^{\otimes k}$ , lorsque  $N$  tend vers l'infini. Ce résultat reste vrai pour les processus. L'intérêt, dans cette approche probabiliste par systèmes de particules, vient du fait que ces systèmes sont facilement simulables par les méthodes de Monte-Carlo et que les algorithmes associés sont très faciles à programmer sur un ordinateur. Nous nous référons à Sznitman [Szn91] pour une revue sur la propagation du chaos.

Lorsqu'on étudie une équation différentielle stochastique non-linéaire, une autre approche possible consiste à caractériser d'abord la loi à travers une équation aux dérivées partielles et ensuite à considérer cette loi comme connue dans l'équation différentielle stochastique. L'équation se transforme ainsi en une équation différentielle stochastique linéaire classique. Nous adoptons cette approche dans un des paragraphes qui suivent.

Dans ce qui suit nous présentons plusieurs modèles non-linéaires. Le premier modèle introduit un processus non-linéaire réel auto-stabilisant et réfléchi. Ensuite nous allons considérer les modèles de coagulation et fragmentation qui feront apparaître des équations différentielles stochastiques non-linéaires à sauts. Dans le dernier paragraphe, nous présenterons une étude en cours portant sur une équation issue de la mécanique des fluides, l'équation de Prandtl.

### 1.3.1 Processus non-linéaire auto-stabilisant réfléchi

Nous considérons dans cette partie un processus non-linéaire réfléchi dans un intervalle compact de la droite réelle. Nous montrons pour ce processus, l'existence d'une unique mesure stationnaire et la convergence en temps long de la loi de ce processus vers cette mesure stationnaire.

Considérons, pour  $\beta : [-2, 2] \mapsto \mathbb{R}$  une fonction impaire, croissante et lipschitzienne, l'équation différentielle stochastique réfléchie non-linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta * u(s, X_s) ds - k_t, X_t \in [-1, 1] \\ \mathbb{P}(X_t \in dx) = u(t, dx) \\ |k|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s) d|k|_s \\ k_t = \int_0^t n(X_s) d|k|_s, \end{array} \right. \quad (1.20)$$

où  $(B_t; t \geq 0)$  est un mouvement brownien standard issu de zéro,  $|\cdot|$  désigne

la variation totale et  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant aux extrémités de l'intervalle  $[-1, 1]$ . Il est évident que dans ce cas  $\mathbf{n}(x) = \text{sgn}(x) \cdot \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(x)$ . On note par  $*$  l'opération de convolution

$$\beta * u(t, x) = \int_{-1}^1 \beta(x - y) u(t, dy). \quad (1.21)$$

L'équation différentielle stochastique (1.20), comporte trois inconnues : le couple des processus  $(X_t, k_t)_{t \geq 0}$  et la famille de densités  $(u(t, \cdot))_{t \geq 0}$ . Avec les hypothèses satisfaites par  $\beta$ , l'existence de la densité  $u$  assure l'existence et l'unicité du couple  $(X_t, k_t)_{t \geq 0}$  solution de (1.20).

Dans le cas sans réflexion, une équation de type (1.20), a été étudiée par Benachour, Vallois, Talay et Roynette [BRTV98], [BRV98]. Nous employons globalement les mêmes techniques mais, le fait de se placer dans un compact nous permet d'affaiblir les hypothèses sur  $\beta$  (supposée convexe dans leur étude), et de simplifier considérablement les démonstrations. Nous étudions aussi deux schémas d'approximation pour cette équation différentielle stochastique réfléchie.

Nous nous référons au travail de Sznitman [Szn84] pour des résultats concernant les équations différentielles stochastiques non-linéaires réfléchies.

La motivation physique de notre étude est la suivante. Pour un entier  $N \geq 1$  et  $u_N$  une probabilité symétrique sur  $[-1, 1]^N$ , on définit comme dans Sznitman [Szn84] le système de particules associé à l'équation différentielle stochastique (1.20) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t^i = dB_t^i - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \beta(X_t^i - X_t^j) dt - dk_t^i, \quad X_t^i \in [-1, 1] \\ |k^i|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s^i) d|k^i|_s < +\infty \\ k_t^i = \int_0^t \mathbf{n}(X_s^i) d|k^i|_s, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ (X_0^i)_{i \in \{1, \dots, N\}} \text{ de loi } u_N, \end{array} \right. \quad (1.22)$$

avec  $(B_t^i; t \geq 0)$  des mouvements browniens indépendants à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et indépendants de la donnée initiale  $(X_0^i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ .

Les hypothèses pour  $\beta$  assurent l'existence et l'unicité du  $N$ -uplet  $((X_t^i, k_t^i); t \geq 0, i \in \{1, \dots, N\})$  solution de (1.22). D'après le résultat de Sznitman [Szn84], il y a propagation du chaos pour ce système. Les  $(X_t^i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$  sont asymptotiquement indépendants et convergent vers la loi du processus non-linéaire  $(X_t; t \geq 0)$ .

Il est évident que les  $(X_t^i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$  ne modélisent pas dans ce cas la position d'une particule car la fonction  $\beta$  est croissante (lorsque deux particules



s'éloignent,  $\beta$  croit avec la distance entre les deux). En fait,  $X^i$  doit être interprété ici comme la charge d'une particule ionisée qui se trouve dans un milieu biologique ou chimique.

L'équation non-linéaire (1.20) permet par exemple de modéliser le fonctionnement de certains systèmes biologiques appelés systèmes tampons avec consigne. En effet sous l'effet de la réflexion, les particules ne peuvent pas s'échapper d'une certaine région. D'autre part, l'action des autres particules agit sur la particule comme une force de rappel vers un état d'équilibre. Nous pouvons interpréter ce comportement comme un phénomène de régulation d'un paramètre biologique (par exemple la température du corps humain) dans une région fixée.

Présentons brièvement les résultats principaux de cette étude.

L'application de la formule d'Itô nous conduit à l'équation aux dérivées partielles non-linéaire satisfaite par la densité. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $u(t, x)$  est solution de :

$$\begin{cases} u_{xx} + ((\beta * u) u)_x = u_t \\ [(\beta * u) u](t, 1) = u_x(t, 1) \\ [(\beta * u) u](t, -1) = -u_x(t, -1). \end{cases} \quad (1.23)$$

Dans le cas stationnaire (lorsque  $u$  ne dépend pas de  $t$ ), en notant par  $\mu$  la densité, nous avons

$$\begin{cases} \mu_{xx} + ((\beta * \mu) \mu)_x = 0 \\ [(\beta * \mu) \mu](1) = -\mu_x(1) \\ [(\beta * \mu) \mu](-1) = -\mu_x(-1). \end{cases} \quad (1.24)$$

On déduit que la densité stationnaire  $\mu$  est caractérisée par l'équation :

$$\mu(x) = \frac{\exp\left(-\int_0^x (\beta * \mu)(y) dy\right)}{\lambda(\mu)}, \quad (1.25)$$

avec la constante de normalisation  $\lambda(\mu) = \int_{-1}^1 \exp\left(-\int_0^x (\beta * \mu)(y) dy\right) dx$ . Nos résultats sont les suivants. Dans une première partie, on montre l'existence et l'unicité de la mesure stationnaire. Ce résultat s'exprime sous la forme

- Sous les hypothèses  $\beta$  impaire, croissante et lipschitzienne sur  $[-2, 2]$ , nous avons
  - (i) Il existe une fonction symétrique  $\mu$  sur  $[-1, 1]$ , densité de probabilité, qui vérifie (1.24).
  - (ii) Soit  $(X_t; t \geq 0)$  l'unique solution de (1.20) avec donnée initiale  $X_0$ . Si  $\mu$  est la densité de  $X_0$ , alors le processus  $X_t$  est stationnaire (i.e. la densité de  $X_t$  est égale à  $\mu$  pour tout  $t$  positif).

Pour établir l'existence d'une mesure stationnaire, on applique un théorème de point fixe. Pour l'unicité, nous avons besoin d'imposer une hypothèse supplémentaire sur  $\beta$  : on suppose qu'elle est de la forme  $\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x$ , avec  $\alpha$  positif assez grand et  $\beta_0$  vérifiant les mêmes conditions que le  $\beta$  initial ; nous construisons alors une application qui est une contraction sur un espace convenable.

Nous nous intéressons ensuite à la convergence vers la mesure stationnaire dans le cas d'une donnée initiale symétrique. Sous les hypothèses sur  $\beta$  assurant l'existence de la mesure stationnaire, dans le cas d'une donnée initiale symétrique ; on peut montrer la convergence en loi du processus  $X_t$ , lorsque le temps  $t$  converge vers l'infini, vers l'unique mesure invariante  $\mu(x)dx$ .

Nous étudions ensuite la convergence dans le cas non symétrique. Notre outil principal est le principe de symétrisation suivant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[h(X_t)] = 0 \tag{1.26}$$

pour  $h : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$  lipschitzienne et impaire. Cela nous permet d'établir le résultat général suivant :

- Pour toute donnée initiale  $X_0$ , le processus réfléchi  $X_t$  converge en loi, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers l'unique mesure de probabilité symétrique et invariante  $\mu(x) dx$  solution de l'équation (1.20).

Nous avons ainsi établi la convergence en loi vers une mesure invariante unique dans le cas où la fonction  $\beta$  peut s'écrire sous la forme  $\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x$ , avec  $\alpha$  grand et certaines conditions sur  $\beta_0$ .

Cette décomposition de  $\beta$  ne couvre pas toutes les situations dans lesquelles il y a convergence. En effet, nous étudions deux cas particuliers  $\beta(x) = x^3$  et  $\beta(x) = x^5$  pour lesquels on peut montrer des résultats de convergence en loi. Pour ces deux cas, on peut donc choisir  $\alpha = 0$ . Les techniques de démonstration sont différentes : on utilise cette fois la forme explicite de la mesure invariante.

Nous présentons aussi deux schémas d'approximation pour les équations différentielles stochastiques réfléchies : le schéma de Slomiński [Sł94] pour des processus réfléchis dans des domaines convexes et un autre schéma dû à Lépingle [Lép93]. Ce deuxième schéma fournit une vitesse de convergence améliorée, par rapport au schéma de Slomiński. On détaille les résultats de ces schémas dans le cas  $\beta(x) = x^3$  et le domaine  $[-1, 1]$  ce qui revient, dans le cas du schéma de Lépingle, à considérer deux barrières en 1 et  $-1$ .

Les perspectives que je suggère dans cette direction sont liées à la caractérisation de la fonction  $\beta$  qui assure la convergence vers la mesure stationnaire. Une autre suite naturelle consiste à considérer un modèle qui admet

plusieurs mesures stationnaires et la caractérisation de la convergence dans cette situation.

Ces résultats sont présentés dans [DW98].

### 1.3.2 Modèles de coagulation-fragmentation

Mes travaux de recherche portant sur le phénomène de coagulation ont été motivés par un article de revue publié par Aldous en 1999 [Ald99]. Dans cet article Aldous adressait de nombreuses questions ouvertes pour lesquelles il proposait une approche probabiliste.

Le phénomène de coagulation est étudié dans des domaines variés : en chimie (polymères), en astrophysique (formation des étoiles et des planètes), en physique (aérosols, comportement du mélange d’huiles dans les moteurs à combustion), en biologie (dynamique des populations), etc. L’origine de ce modèle remonte au travail du physicien polonais Marian von Smoluchowski de 1916 [Smo16], dans lequel il étudiait la précipitation dans les suspensions colloïdales.

Pour décrire le modèle de coagulation et/ou fragmentation, considérons un système infini de particules, caractérisées par leurs masses discrètes disons,  $i \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la particule élémentaire (monomère), est de masse 1. Par conséquent, la masse d’une particule dans ce système n’est rien d’autre que le nombre de monomères qui la composent. Supposons d’abord que le système est homogène en espace et intéressons nous à l’évolution de la distribution des masses au cours du temps. Lorsque deux particules sont proches, elles peuvent s’agréger pour former des amas de taille (masse) plus grande. Les interactions sont binaires, autrement dit deux particules de tailles  $i$  et  $j$  peuvent s’agréger à un taux  $K(i, j) = K(j, i) \geq 0$  et donner naissance à une particule de taille  $i + j$ . C’est le phénomène de *coagulation*. Par ailleurs, une particule de masse  $i + j$  peut se fragmenter en deux particules de masses  $i$  et  $j$  à un taux qui dépend du noyau de fragmentation  $F$ . C’est le phénomène de *fragmentation*.

On s’intéresse à l’évolution au cours du temps de la concentration  $c(i, t)$  (le nombre de particules par unité de volume) de particules de taille  $i$  présentes dans le système à l’instant  $t$ . L’équation satisfaite par  $c(i, t)$  s’exprime, dans

le cas de masses discrètes, sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}c(i, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} [K(j, i-j)c(j, t)c(i-j, t) - F(j, i-j)c(i, t)] \\ \quad - \sum_{j=1}^{\infty} [K(i, j)c(i, t)c(j, t) - F(i, j)c(i+j, t)] \\ c(i, 0) = c_0(i), \quad i \geq 1. \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Cette équation est purement déterministe et s'exprime sous la forme d'un système infini d'équations non-linéaires ce qui rend son étude bien complexe. Dans l'équation (1.27) les sommes positives décrivent le phénomène de création de particules de taille  $i$  et les termes négatifs mesurent la partie perte, liée à la disparition de particules de taille  $i$ . Les noyaux de coagulation  $K$  et de fragmentation  $F$  sont supposés symétriques et positifs.

La version de cette équation dans le cas de tailles continues s'écrit, pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $t \geq 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}c(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x [K(y, x-y)c(y, t)c(x-y, t) - F(y, x-y)c(x, t)] dy \\ \quad - \int_0^{\infty} [K(x, y)c(x, t)c(y, t) - F(x, y)c(x+y, t)] dy \\ c(x, 0) = c_0(x). \end{array} \right. \quad (1.28)$$

La remarque suivante est à la base de l'interprétation probabiliste de ce modèle. Considérons par exemple le cas continu. Un calcul formel conduit à

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} xc(x, t)dx = 0. \quad (1.29)$$

D'un point de vue physique l'égalité (1.29) est équivalente à la conservation de la masse dans le système. Tant que cette égalité est vérifiée,

$$\int_0^{\infty} xc(x, t)dx = \int_0^{\infty} xc(x, 0)dx, \quad (1.30)$$

et on peut, quitte à renormaliser, supposer que

$$\int_0^{\infty} xc(x, 0)dx = 1. \quad (1.31)$$

Le premier instant où l'égalité (1.30) n'est plus valide est appelé instant de gel et correspond à la formation d'un amas de taille infini, appelé gel, qui

n'est plus pris en compte dans l'écriture des systèmes (1.27) et (1.28). Nous le notons par :

$$T_{gel} = \inf \left\{ t \geq 0; \int_0^\infty xc(x, t)dx < \int_0^\infty xc(x, 0)dx \right\}. \quad (1.32)$$

Ce phénomène est lié à la perte de masse dans le système.

La conservation de la masse et l'existence du gel sont des phénomènes largement étudiés dans la littérature, il est par exemple bien connu que lorsqu'il n'y a que le phénomène de coagulation, (i.e.  $F = 0$ ), dans le cas  $K(x, y) = xy$ , la masse n'est pas conservée pour tout temps  $t$ , en particulier  $T_{gel} < \infty$ .

Nous nous référons à Aldous [Ald99], Bertoin [Ber06], Drake [Dra62], Ball et Carr [BC90], McLeod [McL62], Laurençot et Mischler [LM04], Jeon [Jeo98] pour des résultats sur le sujet.

### Phénomène de coagulation

Revenons à l'interprétation probabiliste et considérons uniquement le phénomène de coagulation ( $F = 0$ ) dans les équations (1.27) et (1.28). Lorsqu'on a conservation de la masse, donc avant le temps  $T_{gel}$ , on note  $Q_t(dx) = \sum_{i=1}^\infty ic(i, t)\delta_i(dx)$ , dans le cas discret, et  $Q_t(dx) = xc(x, t)dx$ , dans le cas continu. Dans les deux cas,  $Q_t(dx)$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour chaque  $0 \leq t < T_{gel}$ . Cette notation va nous permettre de traiter de façon unifiée les situations des masses discrètes et continues.

### Noyaux constant, additif et multiplicatif : lien avec les processus de branchement et comportement en temps long

Dans une première étude nous avons présenté une représentation probabiliste, à travers des processus de branchement, de la solution de l'équation de Smoluchowski pour trois cas particuliers de noyau.

Considérons, dans un premier temps, la situation des masses discrètes, les noyaux de coagulation constant, additif ou multiplicatif et une donnée initiale monomères. L'équation s'exprime alors sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}c(i, t) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} K(j, i-j)c(j, t)c(i-j, t) - \sum_{j=1}^{\infty} K(i, j)c(i, t)c(j, t) \\ c(i, 0) &= \delta_1(i), i \geq 1, \end{cases} \quad (1.33)$$

avec  $K(i, j) = 1$ ,  $K(i, j) = i + j$  ou  $K(i, j) = ij$  et  $\delta_1$  la masse de Dirac en 1. Les premiers résultats que nous obtenons ne sont pas nouveaux mais

présentent une nouvelle démonstration, simplifiée et originale, à travers le lien qui existe avec des processus de branchement. Nous obtenons ainsi les solutions explicites de l'équation (1.33) dans ces trois cas de noyau. La technique que nous utilisons repose sur l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction génératrice d'une loi de probabilité associée à notre équation de coagulation et aux connexions qui existent avec certains processus de branchement, en lien avec leur population totale. Nous notons dans le tableau suivant les résultats ( $\mathcal{P}(\lambda)$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  et  $\mathcal{B}(\lambda)$  une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre  $\lambda$ ) :

$K(i, j)$	$c(i, t)$	$T_{gel}$	Loi de la progéniture du processus de branchement associé
1	$c(i, t) = \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{i-1}$	$\infty$	$\mathcal{B}\left(\frac{t}{2+t}\right)$
$i + j$	$c(i, t) = \frac{1}{i} \frac{(i(1 - e^{-t}))^{i-1}}{(i-1)!} e^{-t} e^{-i(1-e^{-t})}$	$\infty$	$\mathcal{P}(1 - e^{-t})$
$ij$	$c(i, t) = \frac{1}{i^2} \frac{(it)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-it}$	1	$\mathcal{P}(t)$

Nous traitons ensuite le cas des masses continues pour les trois noyaux : additif, multiplicatif et constant. Nous présentons des résultats nouveaux, d'une part une dualité entre les solutions des cas additif et multiplicatif et d'autre part des théorèmes de renormalisation qui assurent la convergence des solutions pour une large classe de données initiales. Notons  $c_a(x, t)$  et  $c_m(x, t)$  les solutions dans les cas des noyaux additif et multiplicatif respectivement. Nous avons alors, en notant dans le cas du noyau additif, par  $c_a(x, 0)$  la donnée initiale supposée connue et par  $T = \int_0^\infty c_a(x, 0) dx$  :

$$c_m(x, t) = \frac{1}{T-t} c_a\left(x, -\log\left(1 - \frac{t}{T}\right)\right), \quad \text{pour tout } t < T. \quad (1.34)$$

Nous obtenons le comportement en temps long pour la solution dans le cas de ces trois noyaux. En particulier, la connexion (1.34), nous a permis d'obtenir des résultats sur le comportement en temps long des solutions pour les deux noyaux, additif et multiplicatif. Les démonstrations sont basées sur des techniques de transformées de Laplace et les limites que nous obtenons font apparaître des processus de Bessel de dimension un ou deux.

Les résultats présentés dans cette section font l'objet des articles [DT00] et [DT01].

### Processus de Markov à sauts associé à l'équation de coagulation de Smoluchowski

Dans une autre étude, nous construisons un processus stochastique dont la loi est solution de l'équation de coagulation. Cette approche originale permet de comprendre d'une manière intuitive la dynamique du modèle introduit par Smoluchowski. C'est une des premières interprétations en tant que processus obtenue pour ce modèle. Nous nous référons aux articles de Jourdain [Jou03] et Norris [Nor04] pour d'autres approches dans cette direction.

Cette étude emploie des techniques utilisées pour l'équation de Boltzmann. Cette association est naturelle car les deux équations ont plusieurs caractéristiques communes. Plus précisément, les deux équations décrivent un phénomène discontinu : d'une part dans le modèle de *Smoluchowski* une particule change de taille après *coagulation* avec une autre particule, d'autre part dans le modèle de *Boltzmann* une particule change sa vitesse après *collision* avec une autre particule.

Dans le cas de la coagulation pure, nous construisons un processus de Markov croissant, solution d'une équation différentielle stochastique non-linéaire dirigée par une mesure de Poisson. Le générateur de ce processus s'exprime, pour  $x > 0$  et  $f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$  sous la forme

$$L_t f(x) = \int_0^\infty [f(x+y) - f(x)] \frac{K(x,y)}{y} Q_t(dy). \quad (1.35)$$

Cette interprétation probabiliste donne une information supplémentaire par rapport aux équations (1.27) et (1.28) car elle contient aussi l'historique de l'évolution des particules.

Nous montrons que

- Si  $Q_0$  est une probabilité ayant un moment de second ordre et si le noyau  $K$  est localement lipschitzien et symétrique, alors il existe un

processus de Markov  $(X_t; 0 \leq t < T_0)$  croissant, càdlàg, de générateur  $L_t$  donné par (1.35). Le temps  $T_0$  est donné par

- Si  $K(x, y) \leq C(1 + x + y)$ ,  $T_0 = \infty$ .
- Si  $K(x, y) \leq C(1 + x + y + xy)$ ,  $T_0 = [C(1 + \int xQ_0(dx))]^{-1}$ .

De plus, si  $Q_t$  est la loi de  $X_t$  pour  $t \in [0, T_0)$  alors  $\mu_t(dx) = Q_t(dx)/x$  satisfait une formulation mesure de l'équation de coagulation.

Nous évaluons aussi le nombre de coalescences subies par une particule ainsi que le temps de gel.

Un résultat intéressant, qui valide en quelque sorte d'un point de vue physique notre approche, est celui qui établit le lien qui existe entre notre processus et le modèle de Marcus-Lushnikov [Lus78], [Mar68]. Plus précisément, on montre que le processus non-linéaire que nous construisons, converge vers le processus de Marcus-Lushnikov.

Décrivons le modèle de Marcus-Lushnikov, il est proche du système de particules que nous avons introduit dans la partie introductive sur les modèles de coagulation fragmentation, à une différence près, le nombre de particules qui s'agrègent est fini.

Considérons donc un système de  $n$  particules de tailles discrètes, notées  $x_0^1, \dots, x_0^n$ . Soit  $m_n = x_0^1 + x_0^2 + \dots + x_0^n$  la masse totale initiale. On décrit l'évolution de ce système comme suit : à tout instant  $t$  une paire de particules de masses  $x_t^i$  et  $x_t^j$  peut coaguler et former une particule de taille  $x_t^i + x_t^j$ ; ce phénomène se produit à un taux exponentiel de paramètre  $\frac{K(x_t^i, x_t^j)}{2m_n}$ . Pour tout  $t \geq 0$  nous notons par  $n(t)$  le nombre de particules présentes dans le système au temps  $t$  et par  $x_t^1, \dots, x_t^{n(t)}$  leur masse respective. On définit la mesure empirique  $\mu_t^n = \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{n(t)} \delta_{x_t^i}$ . Le processus de Markov associé à cette construction est le processus de Marcus-Lushnikov.

Il a été récemment démontré par Jeon [Jeo98] et Norris [Nor99] que, sous des hypothèses convenables pour le noyau de coagulation (plus précisément si  $\frac{K(x, y)}{y} \mapsto 0$  lorsque  $y$  tend vers l'infini, pour tout  $x$  positif),  $\mu_t^n$  converge vers la solution de l'équation (1.27) lorsque le nombre de particules  $n$  tend vers l'infini, à condition que la donnée initiale soit à son tour convergente.

Le processus ainsi défini fournit une méthode simple pour approcher numériquement les solutions de l'équation de coagulation.

Décrivons, dans le cas discret, le lien entre ce processus et le processus non-linéaire que nous avons construit. Supposons que le noyau  $K$  est tel que  $K(x, y) \leq C(1 + x + y)$  et que la donnée initiale  $Q_0(dx) = x\mu_0(dx)$  admet un moment d'ordre 3. Notons par  $(X_t; t \geq 0)$  notre processus de Markov non-linéaire. Considérons le processus de Marcus-Lushnikov décrit précédemment et choisissons un monomère au hasard parmi les  $m_n$  présents



à l'instant initial. Notons ensuite par  $(M_t^n; t \geq 0)$  l'évolution de la taille de la particule contenant ce monomère, au cours du temps. Lorsque la condition initiale  $\mu_0^n$  converge vers la condition initiale de notre processus  $\mu_0$ , nous montrons que le processus  $(M_t^n; t \geq 0)$  converge en loi vers le processus  $(X_t; t \geq 0)$ . Ceci établit donc, d'une manière rigoureuse, le lien entre notre processus et celui de Marcus-Lushnikov.

Ces résultats ont fait l'objet de l'article [DFT02] et d'une publication dans les actes de la conférence Stochastic Numerics, à l'ETH Zurich en 2001, où j'ai présenté ces travaux en tant que conférencière invitée [DFT01].

### L'équation de Smoluchowski comme limite des systèmes particuliers aléatoires

L'interprétation probabiliste des équations (1.27) et (1.28), dans le cas  $F = 0$ , présentée dans le paragraphe précédent, conduit naturellement à une méthode particulière stochastique et à un algorithme numérique facilement simulable dans la pratique qui permet d'approcher les solutions de l'équation de coagulation. Une méthode du même type a été présentée dans Babovsky [Bab99] et ensuite dans Eibeck et Wagner [EW01]. Si on compare notre étude avec celles des articles précédents, nos résultats sont plus d'une nature trajectorielle.

L'idée essentielle consiste à linéariser le processus de Markov  $(X_t; t \geq 0)$ , en considérant un nombre fini de particules  $n$  et en faisant ensuite tendre  $n$  vers l'infini. De telles techniques rejoignent les études probabilistes de l'équation de Boltzmann présentées par Graham et Méléard [GM97].

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous notons par  $(X_0^{i,n})_{i \in \{1, \dots, n\}}$  une famille de variables aléatoires indépendantes de loi  $Q_0$ . Nous construisons ensuite un processus de Markov  $(X_t^{i,n})_{i \in \{1, \dots, n\}}$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}_+^*)^n$  qui est caractérisé par le générateur infinitésimal défini comme suit : pour  $(m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  et  $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \mapsto \mathbb{R}$  suffisamment régulière

$$L^n f(m_1, \dots, m_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{K(m_i, m_j)}{m_i} \times [f(m(i, j)) - f(m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n)] \quad (1.36)$$

où  $m(i, j) = (m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, m_i + m_j, m_{i+1}, \dots, m_j, \dots, m_n)$ . Avec ce formalisme on remarque que, contrairement au cas du processus de Marcus-Lushnikov, les interactions ne sont plus symétriques : dans notre construction on garde constant le nombre de particules, en ajoutant, dans le cas d'une coagulation entre la particule  $i$  et la particule  $j$ , la masse de la particule  $j$  à celle de la particule  $i$  et en laissant la particule  $j$  inchangée. Malgré

cette dissymétrie apparente, notre système de particules possède de bonnes propriétés de convergence vers la solution de l'équation de coagulation de Smoluchowski.

Nous montrons que ce système de particules vérifie la propagation du chaos qui décrit en quelque sorte le fait que, lorsque le nombre  $n$  de particules tend vers l'infini, les particules deviennent asymptotiquement indépendantes. Ces techniques s'inspirent des résultats obtenus dans le cas de l'équation de Boltzmann par Graham et Méléard [GM97], [Mél96].

Nous obtenons, dans le cas de tailles discrètes, un théorème central limite en utilisant des techniques de compacité pour les suites en question et de convergence faible. Les hypothèses que l'on doit imposer sont assez fortes (noyau borné). Mais d'un point de vue numérique, nous constatons le même résultat de convergence pour un spectre plus large de noyaux de coagulation, ce qui laisse penser que le résultat s'applique à une classe plus étendue de situations.

Pour être plus précis, notons par

$$Q^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X^{i,n}} \quad (1.37)$$

la mesure empirique du système de particules précédent. Il est alors possible de montrer que

- La suite de mesures  $(Q^n)_{n \geq 1}$  est compacte en loi. De plus, toute limite  $Q$  est la loi d'un processus de Markov  $(X_t; t \geq 0)$  de générateur infinitésimal donné par (1.35). On retrouve ainsi  $\mu_t$  comme solution faible d'une version mesure des équations (1.27) et (1.28), en notant  $Q_t = \mathcal{L}(X_t)$  et  $\mu_t(dx) = \frac{1}{x} Q_t(dx)$ .
- Si le support de la condition initiale  $\mu_0(dx) = \frac{1}{x} Q_0(dx)$  est discret, donc si on est dans la situation des masses discrètes, alors il y a propagation du chaos dans la norme de la variation totale. Plus précisément, pour tout temps  $T \geq 0$  fixé, la loi du  $k$ -uplet  $(X^{1,n}, \dots, X^{k,n})$  converge, en tant que loi des processus sur  $[0, T]$ , vers le produit tensoriel  $\mathcal{L}(X^{1,n}) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}(X^{k,n})$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Nous obtenons aussi une approximation numérique facile et intuitivement claire de la solution par le système de particules associé au processus. Plus précisément, le système décrit la dynamique d'une particule moyenne qui, à des instants aléatoires, coagule avec d'autres particules et change donc de taille. Nous présentons dans la figure 1.3 un exemple d'évaluation numérique de l'erreur renormalisée.

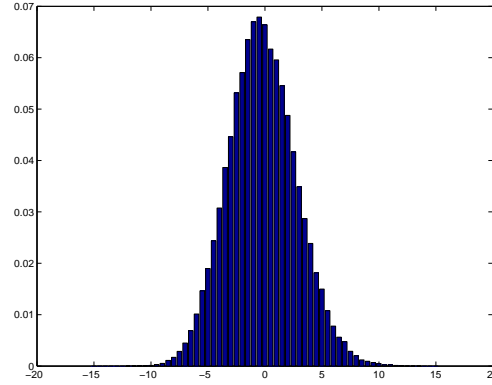


FIG. 1.3 – Résultat de convergence pour  $K(x, y) = xy$ ,  $t = 0.5$ ,  $n = 10^3$ .

Ce travail a fait l'objet de l'article [DFT03].

### Processus stochastique et équation de coagulation avec diffusion

Dans les modèles précédents, chaque particule est caractérisée uniquement par sa taille. Nous considérons dans ce paragraphe, un modèle plus réaliste qui prend en compte la position de la particule. Dans ce nouveau modèle, chaque particule se déplace selon une diffusion brownienne qui est perturbée par une fonction qui dépend de sa taille.

On interprète la solution comme étant la loi d'un couple de processus stochastiques ; la première composante décrit la position de la particule et la deuxième sa taille. Nous obtenons des résultats très intéressants sur cette nouvelle approche de la coagulation diffusive. Cette étude présente aussi une approche numérique de la solution via le système de particules associé au processus.

Considérons un système de particules infini qui décrit, comme avant, le phénomène de coagulation. Dans ce nouveau modèle, chaque particule est caractérisée par sa position  $z \in \mathbb{R}^p$  et par sa taille  $x \in \mathbb{R}_+$ . Notons par  $c(z, x, t)$  la concentration de particules de taille  $x$ , au point  $z$ , à l'instant  $t$  (par unité de volume). L'équation que nous considérons s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} c(z, x, t) = d(x) \Delta_z c(z, x, t) \\ \quad + \frac{1}{2} \int_0^x K(x', x - x') c(z, x', t) c(z, x - x', t) dx' \\ \quad - c(z, x, t) \int_0^\infty K(x, x') c(z, x', t) dx' \\ c(z, x, 0) = c_0(z, x), \quad (z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \end{array} \right. \quad (1.38)$$

où  $c : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ , le noyau  $K : (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto \mathbb{R}_+$  est un noyau symétrique et positif et le coefficient de diffusion  $d : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  est positif.

Dans cette équation il y a deux types de phénomènes

- Le phénomène de diffusion qui traduit le fait que chaque particule du système se déplace selon un mouvement brownien, à une vitesse qui dépend de sa taille (il est intuitivement clair que, plus une particule est “grosse” plus elle se déplace lentement).
- Le phénomène de coagulation qui décrit le fait que lorsque deux particules de tailles  $x$  et  $x'$  se trouvent au même endroit, au même instant, elles ont une chance de se coller l’une à l’autre et de former une particule de taille  $x + x'$ .

Nous supposons que le système conserve sa masse, ce qui nous conduit à une interprétation probabiliste naturelle.

Pour l’équation de coagulation fragmentation inhomogène dans un domaine borné, des résultats ont été obtenus via des techniques déterministes par Laurençot et Mischler [LM02a], [LM02b]. On trouve dans ces articles des résultats d’existence mais pas d’unicité.

Nous introduisons  $Q_t$  la loi du couple (position, taille) de particules élémentaires noté  $(Z_t, X_t)$ .

La difficulté supplémentaire de cette équation réside dans son caractère local en  $z$ . Dans le cas homogène, les deux particules qui subissaient une coagulation étaient indépendantes. Dans cette nouvelle situation, les deux particules sont indépendantes, conditionnellement au fait qu’elles se trouvent au même endroit, au même instant.

Afin de résoudre ces problèmes et construire le système de particules simulable, on est amené à introduire deux paramètres d’approximation : comme dans le cas homogène on a besoin d’introduire un système de  $n$  particules,  $n$  est donc le premier paramètre, et, dû à l’inhomogénéité, un paramètre supplémentaire  $\varepsilon > 0$  de délocalisation en espace. La coagulation ne peut se produire que si la distance entre les deux particules est inférieure à  $\varepsilon$ .

Cette technique de délocalisation en espace a été déjà employée dans l’étude de l’équation de Boltzmann inhomogène, par Graham et Méléard [GM97].

Introduisons d’abord la délocalisation en espace, pour  $\varepsilon > 0$  fixé on construit une mesure  $Q_t^\varepsilon$  qui est la loi d’un couple de processus  $(Z_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$  et ce processus de Markov a pour générateur infinitésimal  $L^\varepsilon$  défini, pour

toute fonction  $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$  suffisamment régulière et bornée, par :

$$L^\varepsilon f(z, x) = d(x)\Delta_z f(z, x) + \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+} [f(z, x + x') - f(z, x)] \frac{K(x, x')}{x'} \mathbb{1}_{\{|z-z'| \leq \varepsilon\}} \frac{1}{v_p \varepsilon^p} Q_s^\varepsilon(dz', dx'). \quad (1.39)$$

Dans cette égalité  $v_p$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^p$ .

Le traitement de la non-linéarité du système se fait comme dans la section précédente, en linéarisant le système de particules.

Nous construisons donc un système de particules de type (position, taille), que nous notons  $((Z_t^{1,n,\varepsilon}, X_t^{1,n,\varepsilon}), \dots, (Z_t^{n,n,\varepsilon}, X_t^{n,n,\varepsilon}))_{t \geq 0}$ , où les variables  $Z$  marquent la position et  $X$  la taille des particules. Il s'agit d'un processus de Markov dans  $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+)^n$ , ayant un certain générateur  $L^{n,\varepsilon}$  défini de la même manière qu'auparavant.

Nous définissons la famille de mesures empiriques associée à ce système

$$Q^{n,\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(Z^{i,n,\varepsilon}, X^{i,n,\varepsilon})}. \quad (1.40)$$

Admettons que les conditions suivantes sont satisfaites

- La donnée initiale  $Q_0(dz, dx)$  admet un moment d'ordre 2 et est absolument continue, en espace, par rapport à la mesure de Lebesgue i.e.,  $Q_0(dz, dx) \leq C dz \nu_0(dx)$ .
- La taille minimale des particules est minorée par une constante strictement positive.
- Le noyau de coagulation  $K$  est continu, symétrique et majoré ;  $K(x, x') \leq C(1 + x + x')$ .
- Le coefficient de diffusion  $d : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  est décroissant et borné. De plus  $\sqrt{2d(x)} \leq C(1 + x)$ , pour tout  $x$ .

Le résultat principal s'exprime alors sous la forme

- La famille de mesures empiriques  $Q^{n,\varepsilon}$  donnée par (1.40) est, à  $\varepsilon$  fixé, compacte en  $n$ . On a donc le résultat de propagation du chaos pour le système de particules. En particulier, tout point limite  $(Q_t^\varepsilon; t \geq 0)$  de cette famille compacte, est solution d'une équation de type (1.38) délocalisée.
- La famille  $(Q_t^\varepsilon; t \geq 0)$  est compacte en  $\varepsilon > 0$ , et tout point limite  $Q_t$  est de la forme  $Q_t(dz, dx) = xc(z, x, t) dz dx$ , où  $c$  est une solution au

sens faible de l'équation de coagulation avec diffusion (1.38).

Nous obtenons ici des résultats sur les lois de processus. Dans la preuve nous utilisons, dans l'étude de la convergence de  $\varepsilon$  vers zéro, qui est l'étape la plus difficile, des propriétés du semi-groupe de la chaleur. Par ailleurs, nous employons une propriété fondamentale de monotonie, caractéristique à l'équation de coagulation. Ce résultat est un plus par rapport au cas de l'équation de Boltzmann où on ne peut pas faire tendre le paramètre  $\varepsilon$  vers zéro.

Il serait intéressant de faire tendre simultanément  $\varepsilon$  vers 0 et  $n$  vers l'infini. Pour l'instant, les tentatives dans cette direction ont été infructueuses.

Nous avons proposé un algorithme stochastique numérique associé au système de particules en question et taché de choisir dans les simulations des paramètres  $\varepsilon$  et  $n$  optimaux. Dans les courbes tracées on peut deviner des résultats de type théorème central limite, voir à titre d'exemple la figure 1.4.

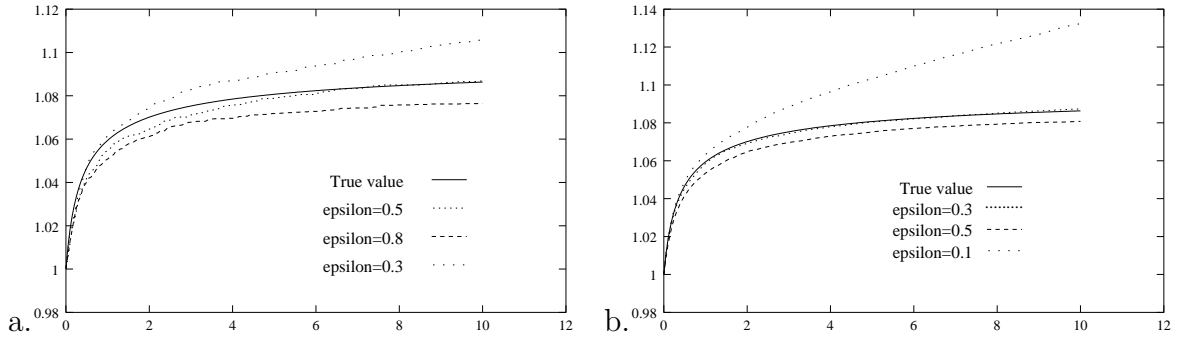


FIG. 1.4 – Évaluation numérique de  $\mathbb{E}(X_t)$  pour  $p = 3$ ,  $d(z) = 1/2$ ,  $K(z, z') = 1$ ,  $Q_0(dx, dz) = \frac{1}{\sigma^3 \pi \sqrt{\pi}} \exp(-|x|^2/(2\sigma^2)) ds \otimes \delta_1(dz)$ ,  $\sigma^2 = 0.2$  les cas  $n = 5000$  et  $n = 50000$ .

Ces résultats sont détaillés dans l'article [DF02].

## Travaux en cours et perspectives

Ce sujet de recherche est très intéressant et nombreuses pistes restent encore à explorer. Voici quelques idées possibles.

- Nous avons traité le cas de la *coagulation-fragmentation inhomogène dans un domaine borné*. Le but était de considérer le cas de l'équation

(1.38) avec fragmentation, dans un domaine borné. Les particules se déplacent donc dans ce domaine borné et sont réfléchies au bord du domaine. Nous avons réussi à conclure dans le cas discret mais le cas continu reste encore un problème ouvert.

- Dans le cas de la *coagulation diffusive*, à défaut de faire tendre les deux paramètres du problème (celui de délocalisation en espace et celui du nombre de particules du système de particules), simultanément vers leurs limites respectives, on pourrait chercher un lien entre les deux, ce qui nous conduirait à une évaluation de la vitesse de convergence.
- L'étude des *noyaux particuliers* et des *solutions particulières* reste une direction de recherche intéressante.
- Une autre approche intéressante et celle qui consiste à considérer les *mesures d'équilibre* dans ces modèles.
- Dans le souci de mettre en pratique les résultats théoriques obtenus, des phénomènes plus complexes, qui prennent en compte la modélisation du phénomène de *fragmentation*, sont actuellement à l'étude. Nos résultats peuvent être valorisés dans l'industrie du cuivre au Chili, où l'on cherche à pulvériser du minerai de cuivre dans des moulins à l'aide de billes d'acier. L'objectif est de fragmenter le minerai en utilisant un minimum d'énergie. Des résultats intéressants ont été déjà obtenus sur un sujet proche par Bertoin et Martínez [BM05].

Le but de cette nouvelle étude est de construire un modèle efficace pour illustrer le phénomène de fragmentation en prenant en compte de nouveaux paramètres tels que : la position des particules de cuivre dans le moulin ; la géométrie du moulin ; la forme, la taille et le nombre des billes d'acier utilisées comme projectiles et le facteur d'endommagement. Ce facteur traduit l'effet des faibles impacts même avant la fracture de la particule de cuivre. Il faudra trouver un bon équilibre entre la complexité du modèle et sa qualité à approcher le modèle réel du moulin.

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec des chercheurs de Pontificia Universidad Católica de Chile et en particulier avec Rolando Rebolledo.

Cette nouvelle direction de recherche constitue un bel exemple d'utilisation a posteriori des résultats théoriques sur un modèle réel.

### 1.3.3 Approche probabiliste de l'équation de Prandtl

En collaboration avec Mireille Bossy, nous cherchons une interprétation probabiliste de l'équation de couche limite de Prandtl. Cette équation décrit l'évolution d'un écoulement incompressible et faiblement visqueux dans un demi-plan.

L'équation de Prandtl est la limite asymptotique de l'équation de Navier-Stokes lorsque la viscosité s'approche de zéro. Le cas limite de viscosité zéro correspond à l'équation d'Euler et conduit à la réduction de l'ordre des équations, correspondant à une réduction du nombre de conditions à la frontière. Pour les équations d'Euler seulement la composante normale de la vitesse est donnée à la frontière. Or, dans les équations de Navier-Stokes, les deux composantes de la vitesse sont imposées au bord du domaine.

Par conséquent, afin d'obtenir les équations de Prandtl, qui sont les équations décrivant l'évolution du fluide dans la couche limite, il faut effectuer un changement d'échelle de la composante normale avec la racine de la viscosité et exprimer ensuite les équations de Navier-Stokes dans cette limite. Comme dans le cas de l'équation de Navier-Stokes, pour éliminer la pression on écrit l'équation de Prandtl en fonction du tourbillon. L'équation s'exprime alors sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div}(\omega \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, & \text{dans } D \\ \omega(0, x, y) = \omega_0(x, y) = -\frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y), & \text{dans } D \\ \nabla \omega \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial p}{\partial x}, & \text{sur } \partial D, \end{cases} \quad (1.41)$$

où  $\mathbf{u} = (u, v)$  est la vitesse du fluide,  $p$  la pression,  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante,  $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}$  le tourbillon et  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  le domaine. On peut exprimer  $u(t, x, y)$  par rapport à la solution de l'équation d'Euler notée  $u^E$

$$u(t, x, y) = u^E(t, x, 0) + \int_y^\infty \omega(t, x, y') dy'. \quad (1.42)$$

De plus on a :

$$v(t, x, y) = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y') dy' \quad (1.43)$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \left[ \frac{\partial u^E}{\partial t}(t, x, 0) + u^E \frac{\partial u^E}{\partial x}(t, x, 0) \right]. \quad (1.44)$$

Comme pour l'équation de Navier-Stokes, l'équation de Prandtl contient le phénomène de création de vorticité sur le bord. Notre objectif est de formuler



une interprétation probabiliste de cette équation correspondant à la limite de l'algorithme de nappe de vortex de Chorin [Cho73], [Cho78].

Lorsque nous considérons l'approche par processus stochastique la difficulté provient de la double non-linéarité du système, en effet une non-linéarité supplémentaire provient de la condition au bord.

En nous inspirant du travail de Benachour, Roynette et Vallois [BRV01] sur l'interprétation probabiliste des solutions de l'équation de Navier-Stokes avec condition dans un domaine borné et des résultats plus récents de Jourdain et Méléard [JM04], nous pouvons donner une formulation stochastique de la dynamique du tourbillon de Prandtl en terme de processus stochastique. Mais le lien avec l'algorithme de Chorin reste encore à éclaircir.

## Chapitre 2

# Méthodes de Monte-Carlo pour les diffusions - nouvelles approches

Les méthodes de Monte-Carlo représentent parfois la seule alternative pour le traitement de problèmes déterministes comme par exemple l'étude des équations aux dérivées partielles complexes ou l'évaluation de certains coefficients en géophysique.

Nous présentons dans cette partie une nouvelle méthode pour la simulation du mouvement brownien et des équations différentielles stochastiques, qui s'avère utile lorsqu'on souhaite par exemple estimer de façon précise le premier moment de sortie d'un domaine et la position de sortie. Les conditions aux bords peuvent combiner des zones de réflexion avec des zones d'absorption.

Nous appliquons aussi des techniques d'échantillonnage pondéré afin de réduire la variance ou pour simuler des événements rares.

La technique se fonde sur un découpage du domaine en rectangles et sur des calculs explicites de densités. Cette méthode est une alternative à la méthode des marches aléatoires pour les sphères, introduite par Muller [Mul56].

### 2.1 Méthodes de Monte-Carlo - bref aperçu

Les méthodes de Monte-Carlo permettent d'évaluer un spectre large d'expressions sur la base d'expériences répétées. Lorsque l'on cherche par exemple à évaluer l'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle compact, on peut le faire en divisant l'intervalle en  $N$  intervalles de longueurs égales et en tirant

$x_i, i = 1, \dots, N$ , points selon la loi uniforme dans l'intervalle. Nous évaluons ensuite

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

La vitesse de convergence de cette méthode est de l'ordre  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  ce qui peut paraître faible quand on la compare aux autres méthodes d'intégration en dimension 1. Mais toutes les autres méthodes numériques classiques ne sont plus fonctionnelles lorsque la dimension augmente. Le grand avantage de la méthode de Monte-Carlo est d'être insensible à la dimension.

Dans notre contexte nous utiliserons les méthodes de Monte-Carlo pour approcher des quantités du type

$$\mathbb{E}[f(X.)] \tag{2.1}$$

où  $X$  est une variable aléatoire ou un processus stochastique. Pour appliquer la méthode il convient de savoir simuler une suite de variables aléatoires indépendantes  $(X_i; i \geq 1)$  de même loi que  $X$ . On approche alors la quantité à évaluer par :

$$\mathbb{E}[f(X)] \sim \frac{f(X_1) + \dots + f(X_N)}{N}.$$

Les résultats classiques de la théorie des probabilités nous permettent de répondre aux deux questions permettant de valider une méthode numérique, respectivement

- Pourquoi la méthode converge ?
- Et à quelle vitesse ?

La réponse à la première question est donnée par la loi forte des grands nombres qui assure la convergence presque sûre de la quantité que nous évaluons par la méthode de Monte-Carlo, à condition que  $\mathbb{E}[|f(X)|]$  soit finie.

Pour évaluer la vitesse de convergence, on applique le théorème de la limite centrale qui donne le comportement asymptotique de l'erreur. Plus précisément, si on note l'erreur par :

$$\varepsilon_N = \mathbb{E}[f(X)] - \frac{f(X_1) + \dots + f(X_N)}{N}, \tag{2.2}$$

d'après le théorème de la limite centrale, pour  $N$  grand,  $\varepsilon_N$  ressemble à une loi gaussienne centrée. En supposant que  $\text{Var}[f(X)] = \sigma^2$  est finie, on peut exprimer ceci sous la forme :

$$\text{quand } N \mapsto \infty, \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \varepsilon_N \text{ converge en loi vers } G, \tag{2.3}$$

où  $G$  est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite. Ce résultat ne permet pas de borner l'erreur, mais, selon les objectifs, on peut soit donner l'écart type soit la caractériser par un intervalle de confiance.

Nous remarquons aussi que si on souhaite diminuer l'erreur on peut soit augmenter le nombre de simulations  $N$  soit diminuer la variance  $\sigma$ . Ce qui explique en partie que les techniques de réduction de variance sont au cœur des recherches actuelles dans les approximations des diffusions.

Notre étude s'inscrit dans cette direction.

## 2.2 Problématique

Le problème que nous considérons est la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques de la forme :

$$\begin{cases} Lu + cu + f = 0 \text{ sur un domaine } D \\ u(x) = \varphi(x) \text{ sur } \partial D, \end{cases} \quad (2.4)$$

ou de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu + cu + f = 0 \\ u(0, x) = g(x), \end{cases} \quad (2.5)$$

avec  $L$  un opérateur différentiel du type générateur infinitésimal de diffusion et  $f$  une fonction dans le domaine de  $L$ . Plus précisément, on a :

$$Lf = \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.6)$$

Prenons par exemple la première équation (2.4). La formule de Feynman-Kac permet d'exprimer la solution sous la forme d'une espérance, plus précisément on peut écrire :

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[ \exp \left( \int_0^\tau c(X_s) ds \right) \varphi(X_\tau) + \int_0^\tau \exp \left( \int_0^s c(X_r) dr \right) f(X_s) ds \right] \quad (2.7)$$

où  $\tau$  est le premier instant où le processus de diffusion  $X$  de générateur infinitésimal  $L$  sort du domaine  $D$ .

L'approche analytique pour ce type de problème passe par les fonctions de Green. Par ailleurs, la forme explicite des fonctions de Green est connue uniquement dans le cas de certains domaines particuliers.

L'utilisation des méthodes de Monte-Carlo dans ce contexte est basée sur la simulation du processus  $X$  et l'utilisation de la formule donnée par (2.7). Par rapport aux méthodes déterministes plusieurs avantages sont à noter :

- l'évaluation de  $X$  se fait localement en fonction de la valeur des coefficients de la diffusion, alors que dans les approches déterministes les simulations doivent se faire généralement dans tout le domaine ;
- dans les méthodes de Monte-Carlo on peut parfois se passer du maillage, ce qui est très intéressant dès que la dimension augmente ( $> 4$ ) ;
- les méthodes de Monte-Carlo sont en général faciles et rapides à programmer.

Dans le cadre qui nous intéresse, la résolution d'une équation aux dérivées partielles satisfaisant des conditions au bord d'un domaine, de nombreux travaux portant sur une approche numérique probabiliste ont été effectués. Nous pouvons classer les méthodes de Monte-Carlo dans ce cas en deux classes.

### **Première classe de méthodes**

Nous associons à cette première classe l'ensemble des méthodes qui reposent sur une approche de la trajectoire du processus stochastique sous-jacent, comme c'est par exemple la situation dans laquelle on cherche à approcher une intégrale stochastique ou toute quantité qui dépend de toute la trajectoire. Le schéma d'Euler, le schéma de Milstein et en général tous les schémas qui se servent du développement de Taylor pour aboutir à l'approximation, rentrent dans cette catégorie. Un large éventail de résultats ont été obtenus avec cette approche. Citons par exemple les travaux de Gobet [Gob00], [Gob01], Słomiński [Sło01] etc. Des améliorations sur la convergence de ces schémas ont été faites, mais ce type d'approche ne permet toujours pas d'évaluer correctement par exemple le cas des domaines avec des coins rentrants.

### **Seconde classe de méthodes**

Nous mettons dans cette seconde classe de méthodes toutes celles qui sont des variantes de la marche aléatoire sur les sphères, introduite par Muller [Mul56]. L'idée de ces techniques est de simuler le temps de sortie et la position de sortie d'un certain sous-domaine de  $D$  pour le processus de diffusion et de continuer cette procédure jusqu'à ce que l'on soit aussi proche du bord  $\partial D$  que l'on souhaite. Ces méthodes reposent sur la connaissance de la fonction de Green pour des domaines simples (sphère, carré, rectangle).

C'est dans cette deuxième classe que nous allons considérer nos résultats.

Dans cette classe de méthode l'outil principal de calcul est la connaissance du couple temps de sortie et position de sortie d'un domaine spécifique, pour le processus stochastique étudié.

Ce type de résultat trouve des applications diverses dans la pratique. Par exemple, il permet de calculer des coefficients dans les milieux fissurés. Plus

précisément, pour le calcul du coefficient de porosité il faut évaluer l'espérance du temps de sortie d'un domaine. Le problème est donc de simuler, par une méthode sans grille, le premier temps d'atteinte d'un réseau de fissures dans un modèle en dimension deux. Nous devons ainsi simuler efficacement le temps de sortie d'un polygone pour un mouvement brownien en dimension deux. Dans cette première approximation on n'a pas besoin de connaître la position de sortie. Par contre, si le calcul demande plus de précision il faut aussi l'évaluer. Nous sommes ainsi amenés à calculer la loi du couple (temps de sortie, position de sortie), du domaine.

D'autres applications possibles sont : l'étude des événements rares, le pricing des options exotiques type options barrières en finance etc.

Nous présentons dans ce qui suit des nouvelles méthodes permettant d'approcher le temps de sortie et la position de sortie pour le mouvement brownien et pour des diffusions en général. Ces processus stochastiques vivent dans des domaines complexes et satisfont des conditions de type Neumann et/ou Dirichlet au bord du domaine. Nous présenterons ensuite des résultats de réduction de variance par fonction d'importance.

## 2.3 Marche aléatoire sur les rectangles

Nous considérons dans ce premier paragraphe l'étude de la position de sortie et du temps de sortie d'un domaine pour une diffusion. L'objectif est de construire un algorithme efficace pour la simulation de ce couple de variables aléatoires.

La méthode de la marche aléatoire sur les sphères a été introduite par Muller en 1956, [Mul56]. Elle fournit une méthode de Monte-Carlo pour résoudre des problèmes de Dirichlet du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\Delta u(t, x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times D \\ u(t, x) = \psi(t, x) \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial D \end{cases}$$

où  $D$  est un domaine régulier borné et  $\psi$  une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}_+ \times \partial D$ . La représentation probabiliste de ces solutions s'exprime sous la forme :

$$u(t, x) = \mathbb{E}_{t,x}[\psi(\tau, B_\tau)],$$

où  $\tau = \inf\{s \geq t, B_s \in \partial D\}$  est le premier temps de sortie du mouvement brownien, qui part de  $x$  à l'instant  $t$ , du domaine  $D$ . On remarque dans cette formule que pour obtenir la solution recherchée il suffit de connaître les lois du temps de sortie  $\tau$  et la position correspondant au temps de sortie,  $B_\tau$ .

L'idée de Muller est alors de générer par récurrence le premier temps de sortie et la position de sortie de la plus grande sphère, centrée dans la position courante et qui est contenue dans le domaine  $D$ . L'algorithme se poursuit de la même manière et s'arrête lorsque la position est aussi proche qu'on le souhaite du bord  $\partial D$ .

À la base de cet algorithme se trouvent les expressions analytiques (sous forme de séries) de la loi du temps de sortie et de la position de sortie pour la sphère.

D'une manière plus générale cette procédure est applicable pour tout domaine pour lequel on connaît la fonction de Green. Cette méthodologie a été ainsi reproduite et généralisée. Il est par exemple possible d'utiliser cet algorithme en considérant des carrés à la place des sphères comme dans les travaux de Milstein et Tretyakov [MT99].

Dans le cas de la marche aléatoire sur les sphères une erreur supplémentaire apparaît car la particule est en général arrêtée lorsqu'elle est à une distance  $\varepsilon$  de la frontière. En utilisant des carrés dans le cas d'un domaine polygonal ce biais supplémentaire par rapport aux méthodes de Monte-Carlo habituelles, est éliminé.

Dans les cas présentés ci-dessus, la simulation de la loi et de la position de sortie repose sur le fait que la sphère ou l'hypercube sont centrés sur la position courante de la particule. Par conséquent, lorsque la particule s'approche du bord, il est nécessaire de choisir des domaines (sphères ou hypercubes) de plus en plus petits.

Un autre domaine pour lequel on sait évaluer explicitement la fonction de Green est le rectangle. Dans le cas du rectangle, on peut donc obtenir la loi de la position de sortie  $B_\tau$  ou du temps de sortie  $\tau$  pour un mouvement brownien  $B$ , quel que soit son point de départ dans le rectangle. Du point de vue de la simulation, inverser la fonction de répartition de ces variables aléatoires équivaut à la réalisation d'une loi uniforme. On dispose donc des formules permettant la réalisation d'une variable aléatoire ayant ces lois (mais cela ne donne pas la loi du couple).

La méthode proposée dans Milstein et Tretyakov [MT99], repose sur des arguments de symétrie et d'indépendance entre les composantes du mouvement brownien. Cette méthode conduit à la simulation du couple temps et position de sortie  $(\tau, B_\tau)$  d'un hypercube  $[0, 1]^d$  de dimension  $d$  et centré sur la position initiale du mouvement brownien. Les calculs se font à partir de la densité du mouvement brownien tué en dimension un.

Dans notre étude nous proposons une nouvelle méthode permettant de simuler le couple temps de sortie et position de sortie  $(\tau, B_\tau)$  d'un rectangle, quel que soit le point de départ à l'intérieur. La méthode de la marche aléatoire sur les rectangles utilise la simulation de variables aléatoires uni-

dimensionnelles que l'on simule par inversion de séries (notons que comme dans le cas de l'hypercube, et contrairement au cas de la sphère, le couple de variables aléatoires n'est pas indépendant). L'avantage de cette méthode par rapport à celle utilisant des sphères ou des hypercubes est que les rectangles peuvent être choisis avant toute simulation. De même, il est possible d'ajouter un terme de dérive (ce que propose aussi Milstein et Tretyakov [MT99]). Par ailleurs, on peut prendre naturellement en compte des conditions de Neumann homogènes sur les bords du domaine grâce à des arguments de symétrie, ou bien avoir exactement (si le domaine est polygonal), la loi du processus à un instant  $t$ .

Dans le cas d'un domaine polygonal, le choix des rectangles se fait au début de l'algorithme. Nous construisons des rectangles qui ont un côté sur la frontière  $\partial D$ , qui sont inclus en  $D$  et qui ont une aire maximale. Dans cette configuration particulière de domaine polygonal, les calculs sont exacts.

Le point fort de notre algorithme vient du fait que les calculs se font à partir des densités du mouvement brownien en dimension 1 et des lois conditionnées par le point de sortie d'un intervalle et/ou le temps de sortie.

L'algorithme ne se base pas sur la comparaison à chaque pas des temps de sortie pour chacune des composantes du mouvement brownien, mais joue sur la dissymétrie du point de départ car on a plus de chance de sortir du côté qui est le plus proche.

Nous présentons dans la figure 2.1, un exemple d'application de notre méthode. Dans ce calcul, nous évaluons la loi du point de sortie conditionnée par le côté de sortie, correspondant au domaine de la figure. Le dessin présente aussi le découpage, avant tout calcul, du domaine en rectangles.

Les résultats de cette étude sont présentés dans l'article [DL06].

## 2.4 Simulation des diffusions par échantillonnage pondéré

Dans cette partie, nous appliquons des techniques de réduction de variance pour la méthode de la marche aléatoire sur les rectangles introduite dans Deaconu et Lejay [DL06], méthode que nous avons présentée dans la paragraphe précédent.

L'inconvénient de la marche aléatoire sur les rectangles est qu'elle demande la simulation de variables aléatoires dont les densités sont exprimées par des séries qui dépendent d'un ou deux paramètres. Il n'est donc pas facile de calculer les fonctions de répartition. En particulier, si les valeurs ne sont pas stockées, la méthode n'est pas forcément efficace s'il s'agit de



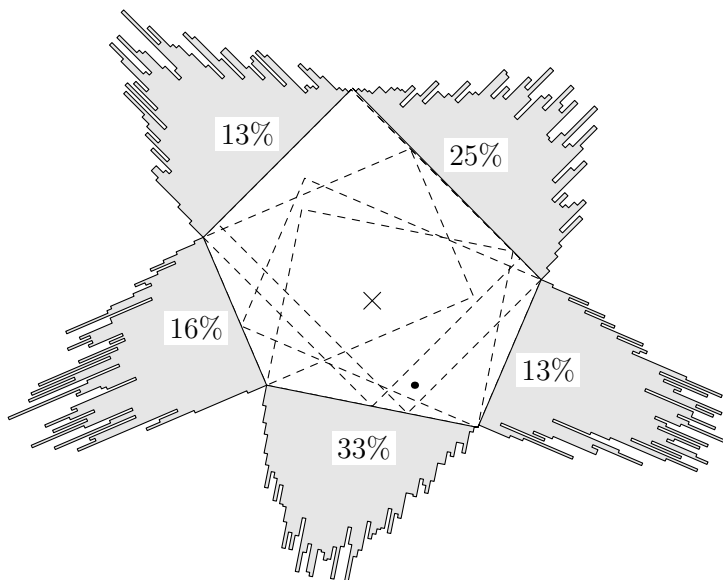


FIG. 2.1 – Histogramme de la densité du point de sortie, conditionné par le côté de sortie du polygone (10000 en MC). Les pourcentages = la proportion des particules sortant sur le côté. Point de départ marqué x.

simuler une équation différentielle stochastique. Par ailleurs, comme toutes les autres méthodes qui approchent des processus de diffusion, elle n'est pas forcément adaptée à la simulation d'événements rares. Une autre configuration que cette méthode n'est pas capable de prendre en compte est celle où la condition au bord est concentrée sur une zone que la solution visite avec une faible probabilité. Malgré l'ensemble de ces inconvénients, dans certaines situations complexes notre méthode donne de meilleurs résultats que le schéma d'Euler.

Toutes ces remarques nous ont conduit à une nouvelle étude dans laquelle nous proposons une méthode qui repose sur la simulation de la marche aléatoire sur les rectangles de [DL06], à laquelle on applique une méthode d'échantillonnage pondéré. Plus précisément, au lieu de simuler exactement la loi du temps de sortie et de la position de sortie  $(\tau, B_\tau)$  d'un rectangle, nous tirons un couple de variables aléatoires  $(\theta, Z)$  selon une loi arbitraire. Nous calculons ensuite un poids qui est donné par le rapport entre la densité exacte de  $(\tau, B_\tau)$  et celle de  $(\theta, Z)$ . Au temps final, lorsque la particule atteint le bord ou qu'un temps arbitraire s'est écoulé, le résultat va être pondéré par le produit des poids. Le calcul des poids se fait facilement à partir de la densité du mouvement brownien tué en dimension 1.

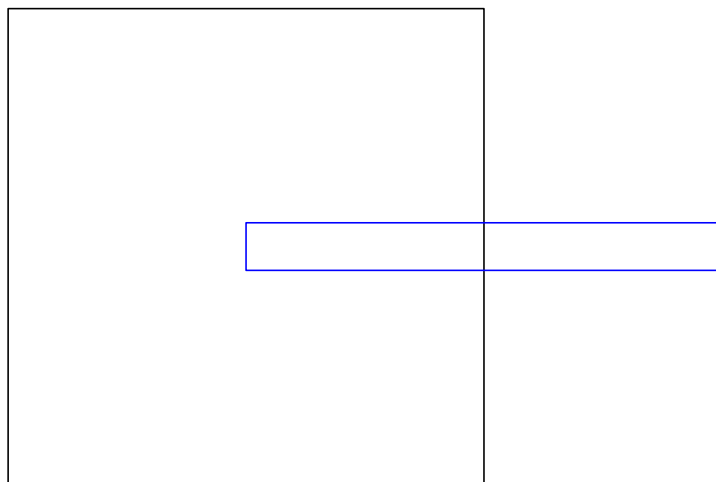


FIG. 2.2 –

Cet algorithme est beaucoup plus rapide si l'on choisi des lois simples pour  $(\theta, Z)$ , et surtout, il est possible de “contraindre” le processus à aller dans les zones qu'il atteint avec de faibles probabilités, si c'est là que les fonctions à intégrer sont concentrées.

Cet algorithme conduit à une réduction de variance et permet de simuler des événements rares.

Présentons un exemple de calcul numérique qui illustre ce type d'approche. Nous souhaitons évaluer la probabilité de sortir du côté le plus à droite du domaine de la figure 2.2.

En considérant notre algorithme avec les deux rectangles de la figure 2.2 et en faisant les calculs on peut trouver la probabilité recherchée (de l'ordre de  $10^{-10}$ ) à l'aide de 100 000 simulations. Les résultats sont explicités dans la figure 2.3, figure qui contient aussi les résultats obtenus par la méthode des éléments finis. Nous observons dans ces résultats que notre méthode reste efficace pour l'évaluation de petites probabilités.

Le choix d'une stratégie conduisant à une réduction de variance reste une chose difficile. Cela nous motive à poursuivre cette étude. L'idée est de coupler notre méthode avec des algorithmes adaptatifs de réduction de variance, comme cela a été fait récemment avec d'autres méthodes comme par exemple celles introduites par Arouna [Aro04] et Bardou [Bar05]. Pierre Del Moral nous a dirigé vers une autre piste intéressante, qui consiste à introduire des algorithmes génétiques, en interprétant les poids comme des

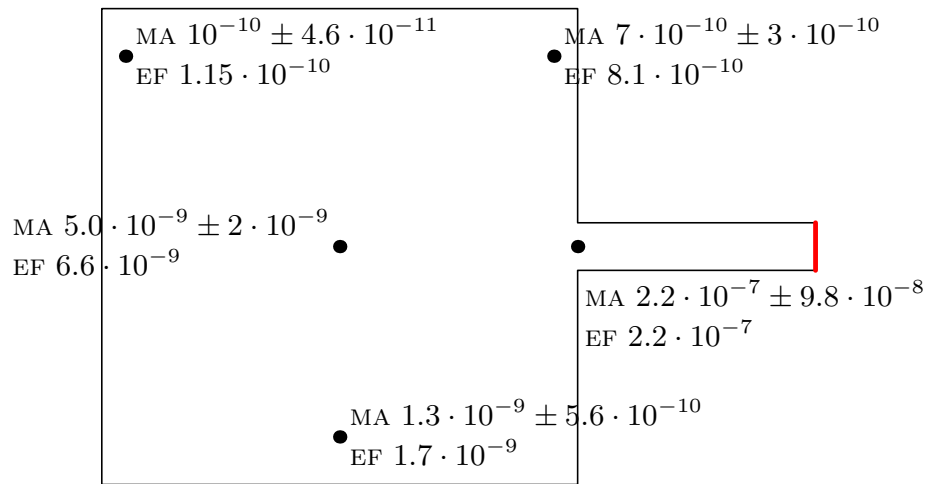


FIG. 2.3 –

branchements/interactions (voir [DM04]).

Les résultats de cette étude sont présentés dans [DL07].

## Chapitre 3

# Régularité dans les espaces de Besov

La théorie de l'approximation constructive des fonctions représente un outil puissant pour l'analyse des éléments appartenant aux espaces fonctionnels.

L'usage de certaines bases, comme celles de Haar, de Schauder ou dans un cadre plus général celle de Franklin, a conduit aux premières applications de cette théorie dans le calcul stochastique. Le premier résultat dans cette voie remonte à Lévy [Lév54] qui donne la décomposition de la trajectoire du mouvement brownien dans la base de Schauder.

Cette décomposition est souvent utilisée comme définition du mouvement brownien. Rappelons ce résultat important.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité. Considérons sur cet espace  $g_{jk}$ ,  $j = 0, 1, \dots; k = 1, \dots, 2^j$ , des variables aléatoires gaussiennes centrées, réduites et indépendantes. Soit  $(\varphi_{jk})_{j,k}$  l'ensemble des fonctions de Schauder. Pour tout  $t$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , on définit le mouvement brownien par :

$$B_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^{2^j} g_{jk}(\omega) \varphi_{jk}(t). \quad (3.1)$$

Les espaces fonctionnels que nous considérons dans cette partie généralisent les espaces de Hölder et sont appelés espaces de Besov.

Le résultat essentiel qui nous permet une approche facile de ces espaces est un théorème dû à Ciesielski, Kerkyacharian et Roynette [CKR93], résultat qui précise un isomorphisme entre ces espaces et des espaces de Banach de suites numériques.

La régularité du mouvement brownien dans les espaces de Hölder a été considérée par Ciesielski [Cie59] et des résultats plus fins dans les espaces de

Besov ont été obtenus par Roynette [Roy93].

Nous allons présenter trois applications des espaces de Besov dans l'étude de la régularité de certains processus stochastiques.

Nous allons nous intéresser tout d'abord au mouvement brownien itéré pour lequel nous allons montrer un résultat de régularité optimal dans les espaces de Besov et dans les espaces de Besov-Orlicz.

Nous considérons ensuite la solution d'une équation aux dérivées partielles parabolique stochastique qui fait intervenir le drap brownien. Nous étudions cette fois-ci un processus à deux indices et nous établissons un résultat de régularité pour la solution de cette équation dans sa variable d'espace.

Dans la dernière partie nous allons étudier l'approximation d'une fonction à plusieurs variables par des réseaux de neurones.

### 3.1 Espaces de Besov

Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Nous définissons (voir Ciesielski [Cie66]) l'espace de Besov  $\mathcal{B}_{p,q}^\alpha$  comme l'espace de fonctions suivant :

$$\mathcal{B}_{p,q}^\alpha = \{f \in L^p[0,1] / \|f\|_{p,q}^\alpha < \infty\}, \quad (3.2)$$

où

$$\|f\|_{p,q}^\alpha = \|f\|_{L^p} + \left( \int_0^\infty \left( \frac{\omega_p(f,t)}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.3)$$

et  $\omega_p(f,t)$  désigne le module de continuité

$$\omega_p(f,t) = \sup_{|h| \leq t} \left( \int_{I_h} |f(x-h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.4)$$

avec  $I_h = \{x \in [0,1]; x-h \in [0,1]\}$ .

$\mathcal{B}_{p,q}^\alpha$  est un espace de Banach qui coïncide avec l'espace de Hölder d'indice  $\alpha$  lorsque  $p = q = \infty$ .

Introduisons la base de Schauder. Pour  $j \geq 0$  et  $k = 1, \dots, 2^j$ , considérons l'ensemble de fonctions de Schauder de l'intervalle  $[0,1]$  :

$$\varphi_{00}(t) = t; \varphi_{01}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1-t & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}; \varphi_{jk}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi_{01}(2^j t - k), j \geq 2. \quad (3.5)$$

Cet ensemble forme une base de  $L^2[0,1]$ . Toute fonction  $f$  continue avec  $f(0) = 0$  admet la décomposition suivante

$$f(t) = f(1)\varphi_{01}(t) + \sum_{j,k} f_{jk} \varphi_{jk}(t) \quad (3.6)$$

où  $f_{jk}$  sont les coefficients de  $f$  dans la base de Schauder

$$f_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \left[ 2f \left( \frac{2k-1}{2^{j+1}} \right) - f \left( \frac{2k-2}{2^{j+1}} \right) - f \left( \frac{2k}{2^{j+1}} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Ciesielski, Kierkyacharian et Roynette [CKR93] ont caractérisé les espaces de Besov (et d'une manière plus générale les espaces de Besov-Orlicz) en montrant qu'il existe un isomorphisme entre ces espaces et certains espaces de suites réelles. Cet isomorphisme conduit à une équivalence des normes qu'on peut exprimer sous la forme :

$$\|f\|_{p,q}^\alpha = \left[ \sum_{j \geq 0} 2^{-jq(\frac{1}{2}-\alpha+\frac{1}{p})} \left( \sum_{k=1}^{2^j} |f_{jk}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (3.8)$$

L'égalité précédente, couplée avec le calcul explicite des coefficients de Schauder, nous permettra d'obtenir des résultats pour les trois modèles qui suivent.

## 3.2 Régularité du mouvement brownien itéré

Dans cette partie nous étudions la régularité du mouvement brownien itéré dans les espaces de Besov. Notre résultat est optimal.

Il est bien connu que le mouvement brownien standard est lié à l'équation de la chaleur avec condition de Cauchy. Il est ainsi naturel de chercher quel modèle probabiliste peut être associé à l'équation aux dérivées partielles d'ordre pair, supérieur à deux ( $n \geq 1$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans le cas  $n = 2$ , Benachour, Roynette et Vallois [BRV99] ont présenté une approche probabiliste au problème de Cauchy correspondant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (3.10)$$

Le processus associé à cette équation aux dérivées partielles est le mouvement brownien itéré. Soit  $(X_t; t \in \mathbb{R})$  un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que  $(X_t; t \geq 0)$  et  $(X_{-t}; t \geq 0)$  sont deux copies indépendantes du mouvement brownien réel partant de zéro. Soit  $(W_t; t \geq 0)$  un mouvement brownien indépendant de  $X_t$ . Le mouvement brownien itéré est défini par :

$$Z_t := X_{W_t}; t \geq 0. \quad (3.11)$$

Lorsqu'on compare ce processus avec le mouvement brownien standard on constate qu'il conserve certaines de ses propriétés : il est invariant par translation, il vérifie une propriété d'échelle d'ordre  $\frac{1}{4}$  et pour tout  $t$ , la loi de  $Z_t$  est connue. En contrepartie, ce processus n'est pas un processus à accroissements indépendants et n'est pas stable par inversion en temps.

Nous étudions la régularité dans les espaces de Besov de ce processus et nous montrons que les trajectoires du mouvement brownien itéré ( $Z_t; t \geq 0$ ) appartiennent presque sûrement à l'espace de Besov  $\mathcal{B}_{p,\infty}^{\frac{1}{4}}$ . De plus, notre résultat est optimal car nous montrons que le processus n'est pas Hölder d'indice  $\frac{1}{4}$ .

Nous obtenons aussi un résultat d'appartenance dans des espaces plus généraux, ceux de Besov-Orlicz.

Les résultats sont détaillés dans [Dea96].

### 3.3 Régularité de l'équation de Walsh

Dans cette partie nous considérons une équation aux dérivées partielles stochastique qui fait intervenir le drap brownien.

Rappelons la définition et quelques propriétés du drap brownien. Le drap brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $W = (W_{s,t})_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2}$  est un processus gaussien centré de matrice de covariance

$$\text{Cov}(W_{s,t}, W_{s',t'}) = \min(s, s') \times \min(t, t'). \quad (3.12)$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $W$  est continu et nous pouvons l'interpréter comme la fonction de distribution du bruit blanc sur  $\mathbb{R}_+^2$ , autrement dit si on note  $\hat{W}$  le bruit blanc on a :

$$W_{s,t} = \hat{W}([0, s] \times [0, t]). \quad (3.13)$$

Le drap brownien vérifie des propriétés d'échelle, d'inversion et de translation.

L'équation que nous nous proposons d'étudier ici a son origine dans la neurophysiologie, plus précisément dans l'étude de neurones. Nous considérons dans ce modèle que les neurones peuvent être vus comme des petits cylindres de longueur  $L$ , se comportant comme des câbles électriques.

On note par  $v(x, t)$  le potentiel électrique à l'instant  $t$  au point  $x$ . L'équation que nous considérons est l'équation vérifiée par  $v(x, t)$  et on l'appellera équation de Walsh [Wal86]. Elle s'écrit, pour  $t > 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v + f(v, t) \dot{W}, & 0 < x < L \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0 \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $W$  est le drap brownien introduit auparavant donc  $W$  est un processus adapté à deux indices sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . La présence du drap brownien dans ce modèle s'explique, d'un point de vue physique, par le fait que les impulsions sont petites et nombreuses.

Des résultats d'existence et unicité pour cette équation ont été obtenus par Bally, Gyöngy et Pardoux [BGP94]; un théorème de support dans les espaces de Hölder pour la loi de la solution par Bally, Millet et Sanz-Solé [BMSS95] ou encore des propriétés de régularité dans les espaces de Hölder par Walsh [Wal86]. Nous obtenons des résultats améliorés, d'appartenance aux espaces de Besov. Présentons brièvement ces résultats.

Compte tenu des propriétés du drap brownien, l'équation (3.14) n'admet pas de solution au sens classique : toute solution possible est non différentiable.

Pour résoudre cette équation il faut donc l'écrire sous une forme intégrale et se contenter ainsi d'une solution faible. Pour toute fonction test  $\phi$  sur  $\mathbb{R}_+$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\phi'(0) = \phi'(L) = 0$  on a la forme faible de l'équation (3.14) :

$$\begin{aligned} \int_0^L (v(x, t) - v_0(x))\phi(x)dx &= \int_0^t \int_0^L v(x, s)(\phi''(x) - \phi(x))dxds + \\ &+ \int_0^t \int_0^L f(v(x, s), s)\phi(x)W(dx, ds) \end{aligned} \tag{3.15}$$

en supposant que  $v(x, s)$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable pour que l'intégrale stochastique ait un sens.

La fonction de Green pour l'équation du câble peut être obtenue par la méthode des images et ses propriétés permettent une étude fine des propriétés trajectoires.

Walsh [Wal86], montre dans une première étape l'existence et l'unicité d'un processus  $(v(x, t))_{0 < x < L, t \geq 0}$  borné dans  $L^2([0, L] \times [0, T])$  pour tout  $T > 0$ , solution de (3.15). Si de plus la donnée initiale  $v_0(x)$  est bornée dans  $L^p$  pour tout  $p > 0$ , alors l'application  $v(x, t)$  est hölderienne, en  $t$  et en  $x$ , d'indice  $\frac{1}{4} - \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

Nous obtenons dans cette partie un résultat de régularité plus fin que celui obtenu par Walsh. Dans la variable espace on montre que, pour tout  $t$  fixé, l'application  $x \mapsto v(x, t)$  appartient presque sûrement à l'espace de Besov  $\mathcal{B}_{p, \infty}^{\frac{1}{2}}$ .

Nous nous appuyons dans la démonstration sur la forme explicite de la fonction de Green, ce qui nous permet de contrôler finement les coefficients de la base de Schauder.



Nous conjecturons aussi que, dans la variable temps, la solution de l'équation (3.15), appartient presque sûrement à l'espace de Besov  $\mathcal{B}_{p,\infty}^{\frac{1}{4}}$

Ces résultats sont présentés dans la prépublication [DR95].

### 3.4 Approximation par réseaux de neurones

Nous avons aussi étudié l'approximation de fonctions de l'espace de Besov à plusieurs variables, sur le cube  $d$ -dimensionnel, par le produit tensoriel de réseaux de neurones. Ces résultats sont la version multidimensionnelle des résultats obtenus par Roynette (communication privée).

L'objectif qu'on se fixe ici est d'étudier l'approximation d'une fonction à plusieurs variables par le produit tensoriel de réseaux de neurones et de caractériser les éléments appartenant aux espaces de Besov à l'aide de cette approximation.

Nous sommes intéressés par la relation qui existe entre la régularité de la fonction et l'ordre de la meilleure approximation par des combinaisons linéaires de produits tensoriels de fonctions sigmoïdales avec un nombre fixé de termes.

La condition de régularité de la fonction est exprimée en terme de comportement asymptotique du module de continuité dans la norme  $L^p$ , qui conduit naturellement aux espaces de Besov.

Dans une première partie, nous présentons un résultat concernant l'ordre d'approximation de fonctions de l'espace de Besov par des combinaisons linéaires de produits tensoriels des fonctions sigmoïdales arbitraires. Rappelons qu'une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est dite sigmoïdale si elle est mesurable, bornée et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 1. \quad (3.16)$$

Pour obtenir le résultat inverse, c'est-à-dire qu'une fonction avec un certain ordre de meilleure approximation par des combinaisons linéaires de produits tensoriels de fonctions sigmoïdales avec un nombre donné de termes appartienne à un certain espace de Besov, on doit imposer certaines conditions sur la régularité des fonctions sigmoïdales considérées.

Grâce à cette remarque, nous allons considérer une classe particulière de fonctions, dites  $L$ -sigmoïdales. Nous obtenons une caractérisation des espaces de Besov en terme de la meilleure approximation d'une fonction par des combinaisons linéaires de produits tensoriels de fonctions  $L$ -sigmoïdales.

Finalement, nous montrons que nos résultats sont optimaux.

Ces résultats sont précisés dans la prépublication [DK95].

# Chapitre 4

## Exemples d'applications industrielles

Une partie de ma recherche a été guidée par les collaborations industrielles du projet Omega et plus récemment par celles initiées dans l'équipe-projet Tosca.

Je présente ici deux aspects de cette recherche.

### 4.1 Capacité des centrales électriques

Dans le cadre d'une collaboration avec EDF, je me suis intéressée à la mise en place d'un modèle mathématique permettant d'évaluer la capacité de production d'un parc de centrales électriques. Les centrales sont de plusieurs types et chaque type de centrales a un fonctionnement et une réparation spécifiques. Le but est de caractériser le premier instant, où, à cause des pannes, la capacité de production passe au dessous d'un seuil critique donné.

Dans la première partie de cette étude, nous considérons le cas simplifié d'un seul type de centrale. Nous présentons le modèle mathématique associé au problème et nous caractérisons le premier instant où, à cause des pannes, la capacité de production descend au dessous d'un niveau fixé (qui correspond à un seuil critique). Dans ce cas nous calculons explicitement la moyenne du temps d'atteinte. La transformée de Laplace du temps d'atteinte est donnée par une formule récursive difficilement utilisable dans la pratique. Afin de contourner cette difficulté, nous utilisons une méthode de Monte-Carlo pour évaluer le temps d'atteinte d'un niveau. Nous testons l'efficacité de cette méthode en utilisant les formules explicites dont on dispose dans les cas simples.

La deuxième partie est consacrée à la situation décrivant un parc de centrales constitué de centrales de plusieurs types. L'évaluation mathématique du temps d'atteinte étant très compliquée, nous n'étudions que les cas simples (des niveaux bas). Nous présentons ensuite une approche numérique pour le temps moyen d'atteinte d'un niveau. L'outil mathématique utilisé est une chaîne de Markov à temps continu. La méthode numérique simule la trajectoire de la chaîne et ensuite calcule le temps d'atteinte d'un niveau, en supposant que les temps de saut d'un état à un autre sont des variables exponentielles de paramètre donné. En utilisant ensuite les méthodes de Monte-Carlo, nous obtenons la valeur moyenne du temps d'atteinte recherché.

## 4.2 Problème du canal plan

Dans le cadre d'une collaboration avec des industriels, j'ai étudié un système d'équations différentielles stochastiques issu d'un modèle physique, le problème du canal plan pour un écoulement turbulent diphasique.

Parmi les écoulements diphasiques, nombreux sont caractérisés par l'existence d'une phase sous forme d'inclusions séparées et dispersées au sein de l'autre phase. C'est le cas, par exemple, dans un écoulement liquide-solide. Nous avons alors une phase continue (le fluide en occurrence) et une phase dispersée (prenant la forme de particules solides).

Le problème que nous avons considéré étudie la dynamique des particules solides, entraînées dans le mouvement d'un fluide qui s'écoule dans un canal plan.

Le système combine des réflexions de certaines composantes avec des coefficients singuliers (qui prennent de valeurs très grandes au voisinage du bord du canal plan). Outre les aspects théoriques, une grande partie de cette étude a porté sur la simulation efficace de ce modèle. Dans ce contexte, l'objectif a été de fournir des résultats numériques explicitant les caractéristiques des méthodes particulières appliquées à ce problème.

Les équations d'évolution en temps des différentes variables s'expriment sous la forme du système différentiel stochastique :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = V_t^\varepsilon dt + \varepsilon dB_t^1 - n(X_t^\varepsilon) dA_t^\varepsilon \\ dV_t^\varepsilon = (U_t^\varepsilon - V_t^\varepsilon) dt \\ dU_t^\varepsilon = \psi(X_t^\varepsilon) dt + \varphi(X_t^\varepsilon) dB_t^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $X_t^\varepsilon \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $-n(X_t^\varepsilon) dA_t^\varepsilon$  est le terme qui assure la réflexion normale de la deuxième composante du processus  $X_t^\varepsilon$  aux extrémités de l'in-

tervalle  $[0, 1]$ .  $X_t^\varepsilon$  et  $V_t^\varepsilon$  modélisent respectivement, la position et la vitesse d'une particule dans un fluide.  $U_t^\varepsilon$  est un terme perturbateur, il doit être interprété comme la vitesse du fluide vue par la particule.  $B_t^1$  et  $B_t^2$  sont des mouvements browniens bidimensionnels, indépendants.  $\psi$  et  $\varphi$  notent des fonctions qui vérifient certaines propriétés.

Ce système décrit l'évolution d'une particule dans un fluide qui s'écoule dans un canal plan. La particule subit les forces "moyennes" du fluide et est réfléchi sur les parois du canal plan.

Nous avons étudié ce modèle en considérant les points polaires, le but étant de vérifier que les points critiques ne sont pas visités. L'étude de l'existence de ce processus, en fonction des caractéristiques des coefficients du problème, a été aussi considérée. Par ailleurs, une étude numérique détaillée en fonction des paramètres, a été effectuée.



# Publications

- *Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante* (avec S. Wantz), C.R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I : 757-762, 1996.
- *Régularité du mouvement brownien itéré*. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I : 933-938, 1996.
- *Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante* (avec S. Wantz), Séminaire de Probabilités XXXI. Éditeurs : J. Azéma, M. Emery, M. Yor. Lecture Notes in Mathematics, 1655 : 168-175, 1997.
- *Processus non linéaire auto-stabilisant réfléchi* (avec S. Wantz), Bulletin des Sciences Mathématiques, 122 : 521-569, 1998.
- *Sojourn time of some reflected Brownian motion in the unit disk* (avec M. Gradinaru et J.R. Roche), Probability and Mathematical Statistics, vol. 20, no. 1, 19-38, 2000.
- *Smoluchowski's coagulation equation : probabilistic interpretation of solutions for constant, additive and multiplicative kernels* (avec E. Tanré), Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Série IV, Vol. XXIX (3) : 549-580, 2000.
- *A generalization of the connection between the additive and multiplicative solutions for the Smoluchowski's coagulation equation* (avec E. Tanré), Monte Carlo Methods and Appl., Vol. 7, no. 1-2, 141-147, 2001, (Special Number Monte Carlo 2000).
- *A pure jump Markov process associated with the Smoluchowski's coagulation equation* (avec N. Fournier et E. Tanré), Annals of Probability, Vol. 30, No. 4, 1763-1796, 2002.
- *Probabilistic approach of some discrete and continuous coagulation equations with diffusion* (avec N. Fournier), Stochastic Processes and Their Applications, 101, 83-111, 2002.

- *Rate of Convergence of a Stochastic Particle System for the Smoluchowski coagulation equation* (avec N. Fournier et E. Tanré), *Methodology and Computing in Applied Probability*, 5, 131-158, 2003.
- *A Random Walk on Rectangles Algorithm* (avec A. Lejay), *Methodology and Computing in Applied Probability*, 8, 135-151, 2006.
- *Processus stochastiques et équations aux dérivées partielles. Applications des espaces de Besov aux processus stochastiques*. Thèse de Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy I, 1997.

#### Articles soumis

- *Simulation of a diffusion process by using the importance sampling paradigm* (avec A. Lejay), en cours de révision pour *Annals of Applied Probability*.

#### Actes de conférences

- *Simulation of exit times and positions for Brownian motions and diffusions* (avec A. Lejay), ICIAM 2007, Zurich.
- *A pure jump Markov process associated with the Smoluchowski's coagulation equation* (avec N. Fournier et E. Tanré), *Stochastic Numerics 2001*, a Workshop on numerical methods for stochastic differential equations, Feynman-Kac representations and paths integrals.

#### Autres publications

- *Markov Chains and Coupling Approach in Probability Theory*. Final Year-Project Report 1992/1993, School of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Science and Mathematics, Middlesex University-Londres.
- *Approximation by Tensor Product Neural Networks* (avec A. Kamont), Prépublication de l'Institut Élie Cartan, N° 20, 1995.
- *Besov Regularity for the Solution of Walsh Equation* (avec B. Roynette), Prépublication de l'Institut Élie Cartan, N° 6, 1995.
- *Rapport de fin de collaboration EDF/INRIA sur la simulation d'écoulements diphasiques turbulents* (avec M. Bossy, J.P. Minier et D. Talay), 1998.
- *Rapport de fin de collaboration EDF/INRIA, Étude de la capacité des centrales électriques*, 2000.
- *Rapport de fin de collaboration EDF/INRIA Marché de l'électricité - modèle trois marchés trois producteurs* (avec M. Bossy et E. Tanré), 2004.

# Bibliographie

- [Ald99] D. J. Aldous. Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation and coagulation) : a review of the mean-field theory for probabilists. *Bernoulli*, 5(1) :3–48, 1999.
- [Aro04] B. Arouna. Adaptative Monte Carlo method, a variance reduction technique. *Monte Carlo Methods Appl.*, 10(1) :1–24, 2004.
- [Bab99] H. Babovsky. On a Monte Carlo scheme for Smoluchowski’s coagulation equation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 5(1) :1–18, 1999.
- [Bar05] O. Bardou. *Contrôle dynamique des erreurs de simulation et d’estimation de processus de diffusion*. PhD thesis, Université de Nice/INRIA Sophia-Antipolis, 2005.
- [BC90] J. M. Ball et J. Carr. The discrete coagulation-fragmentation equations : existence, uniqueness, and density conservation. *J. Statist. Phys.*, 61(1-2) :203–234, 1990.
- [Ber06] Jean Bertoin. *Random fragmentation and coagulation processes*, volume 102 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [BGP94] V. Bally, I. Gyöngy, et É. Pardoux. White noise driven parabolic SPDEs with measurable drift. *J. Funct. Anal.*, 120(2) :484–510, 1994.
- [BM05] Jean Bertoin et Servet Martínez. Fragmentation energy. *Adv. in Appl. Probab.*, 37(2) :553–570, 2005.
- [BMSS95] V. Bally, A. Millet, et M. Sanz-Solé. Approximation et support theorem in Hölder norm for parabolic stochastic partial differential equations. *Ann. Probab.*, 23(1) :178–222, 1995.
- [BRTV98] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay, et P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :173–201, 1998.
- [BRV98] S. Benachour, B. Roynette, et P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. II. Convergence to invariant probability. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :203–224, 1998.



- [BRV99] S. Benachour, B. Roynette, et P. Vallois. Explicit solutions of some fourth order partial differential equations via iterated Brownian motion. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 1996)*, volume 45 of *Progr. Probab.*, pages 39–61. Birkhäuser, Basel, 1999.
- [BRV01] S. Benachour, B. Roynette, et P. Vallois. Branching process associated with 2d-Navier Stokes equation. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 17(2) :331–373, 2001.
- [Cho73] A. J. Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57(4) :785–796, 1973.
- [Cho78] A. J. Chorin. Vortex sheet approximation of boundary layers. *J. Comp. Phys.*, 27 :428–442, 1978.
- [Cie59] Z. Ciesielski. On Haar functions and on the Schauder basis of the space  $C_{(0,1)}$ . *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 7 :227–232, 1959.
- [Cie66] Z. Ciesielski. Properties of the orthonormal Franklin system. II. *Studia Math.*, 27 :289–323, 1966.
- [CKR93] Z. Ciesielski, G. Kerkyacharian, et B. Roynette. Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens. *Studia Math.*, 107(2) :171–204, 1993.
- [Dea96] M. Deaconu. Régularité de mouvement brownien itéré. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(8) :933–938, 1996.
- [DF02] M. Deaconu et N. Fournier. Probabilistic approach of some discrete and continuous coagulation equations with diffusion. *Stochastic Process. Appl.*, 101(1) :83–111, 2002.
- [DFT01] M. Deaconu, N. Fournier, et E. Tanré. A pure jump Markov Process associated with the Smoluchowski’s coagulation equation. *Stochastic Numerics Conference, ETH, Zurich*, 2001.
- [DFT02] M. Deaconu, N. Fournier, et E. Tanré. A pure jump Markov process associated with Smoluchowski’s coagulation equation. *Ann. Probab.*, 30(4) :1763–1796, 2002.
- [DFT03] M. Deaconu, N. Fournier, et E. Tanré. Rate of convergence of a stochastic particle system for the Smoluchowski coagulation equation. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 5(2) :131–158, 2003.
- [DGR00] M. Deaconu, M. Gradinaru, et J. R. Roche. Sojourn time of some reflected Brownian motion in the unit disk. *Probab. Math. Statist.*, 20(1, Acta Univ. Wratislav. No. 2246) :19–38, 2000.

- [DJ67] E. B. Dynkin et A. A. Juškevič. *Markov Processes, Theorems and Problems*. Plenum Press, 1967.
- [DK95] M. Deaconu et A. Kamont. Approximation by tensor product neural networks. *Prépublication de l'Institut Élie Cartan*, (12), 1995.
- [DL06] M. Deaconu et A. Lejay. A random walk on rectangles algorithm. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 8(1) :135–151, 2006.
- [DL07] M. Deaconu et A. Lejay. Simulation of a diffusion process by using the importance sampling paradigm. *soumis*, 2007.
- [DM04] P. Del Moral. *Feynman-Kac formulae*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2004. Genealogical and interacting particle systems with applications.
- [DR95] M. Deaconu et B. Roynette. Besov regularity for the solution of Walsh equation. *Prépublication de l'Institut Élie Cartan*, (6), 1995.
- [Dra62] R. Drake. A general mathematical survey of the coagulation equation. volume 3, pages 201–376. Oergamon Press, Oxford, 1962.
- [DT00] M. Deaconu et E. Tanré. Smoluchowski's coagulation equation : probabilistic interpretation of solutions for constant, additive and multiplicative kernels. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 29(3) :549–579, 2000.
- [DT01] M. Deaconu et E. Tanré. A generalization of the connection between the additive and multiplicative solutions for the Smoluchowski's coagulation equation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 7(1-2) :141–147, 2001. Monte Carlo and probabilistic methods for partial differential equations (Monte Carlo, 2000).
- [DW96] M. Deaconu et S. Wantz. Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(8) :757–762, 1996.
- [DW97] M. Deaconu et S. Wantz. Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante. In *Séminaire de Probabilités, XXXI*, volume 1655 of *Lecture Notes in Math.*, pages 168–175. Springer, Berlin, 1997.
- [DW98] M. Deaconu et S. Wantz. Processus non linéaire autostabilisant réfléchi. *Bull. Sci. Math.*, 122(7) :521–569, 1998.
- [EW01] A. Eibeck et W. Wagner. Stochastic particle approximations for Smoluchoski's coagulation equation. *Ann. Appl. Probab.*, 11(4) :1137–1165, 2001.

- [GM97] C. Graham et S. Méléard. Stochastic particle approximations for generalized Boltzmann models and convergence estimates. *Ann. Probab.*, 25(1) :115–132, 1997.
- [GNRS86] V. Giorno, A. G. Nobile, L. M. Ricciardi, et L. Sacerdote. Some remarks on the Rayleigh process. *J. Appl. Probab.*, 23(2) :398–408, 1986.
- [Gob00] E. Gobet. Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes. *Stochastic Process. Appl.*, 87(2) :167–197, 2000.
- [Gob01] E. Gobet. Efficient schemes for the weak approximation of reflected diffusions. *Monte Carlo Methods Appl.*, 7(1-2) :193–202, 2001. Monte Carlo and probabilistic methods for partial differential equations (Monte Carlo, 2000).
- [Hen86] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis. Vol. 3.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Discrete Fourier analysis—Cauchy integrals—construction of conformal maps—univalent functions, A Wiley-Interscience Publication.
- [Jeo98] I. Jeon. Existence of gelling solutions for coagulation-fragmentation equations. *Comm. Math. Phys.*, 194(3) :541–567, 1998.
- [JM04] B. Jourdain et S. Méléard. Probabilistic interpretation and particle method for vortex equations with Neumann’s boundary condition. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 47(3) :597–624, 2004.
- [Jou03] B. Jourdain. Nonlinear processes associated with the discrete Smoluchowski coagulation-fragmentation equation. *Markov Process. Related Fields*, 9(1) :103–130, 2003.
- [Lép93] D. Lépingle. Un schéma d’Euler pour équations différentielles stochastiques réfléchies. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 316(6) :601–605, 1993.
- [Lév54] P. Lévy. *Le mouvement brownien.* Mémor. Sci. Math., no. 126. Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [LM02a] P. Laurençot et S. Mischler. The continuous coagulation-fragmentation equations with diffusion. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 162(1) :45–99, 2002.
- [LM02b] P. Laurençot et S. Mischler. Global existence for the discrete diffusive coagulation-fragmentation equations in  $L^1$ . *Rev. Mat. Iberoamericana*, 18(3) :731–745, 2002.

- [LM04] P. Laurençot et S. Mischler. On coalescence equations and related models. In *Modeling and computational methods for kinetic equations*, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., pages 321–356. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [Lus78] A. A. Lushnikov. Some new aspects of coagulation theory. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. Atmosfer. I Okeana*, 14(10) :738–743, 1978.
- [Mar68] A. H. Marcus. Stochastic coalescence. *Technometrics*, 10 :133–143, 1968.
- [McK66] H. P. McKean, Jr. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 56 :1907–1911, 1966.
- [McK67] H. P. McKean, Jr. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. In *Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967)*, pages 41–57. Air Force Office Sci. Res., Arlington, Va., 1967.
- [McL62] J. B. McLeod. On an infinite set of non-linear differential equations. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 13 :119–128, 1962.
- [Mél96] S. Méléard. Asymptotic behaviour of some interacting particle systems; McKean-Vlasov and Boltzmann models. In *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995)*, volume 1627 of *Lecture Notes in Math.*, pages 42–95. Springer, Berlin, 1996.
- [MT99] G. N. Milstein et M. V. Tretyakov. Simulation of a space-time bounded diffusion. *Ann. Appl. Probab.*, 9(3) :732–779, 1999.
- [Mul56] M. E. Muller. Some continuous Monte Carlo methods for the Dirichlet problem. *Ann. Math. Statist.*, 27 :569–589, 1956.
- [Nor99] J. R. Norris. Smoluchowski’s coagulation equation : uniqueness, nonuniqueness and a hydrodynamic limit for the stochastic coalescent. *Ann. Appl. Probab.*, 9(1) :78–109, 1999.
- [Nor04] J. R. Norris. Brownian coagulation. *Commun. Math. Sci.*, 2(suppl. 1) :93–101, 2004.
- [Rao77] M. Rao. *Brownian motion and classical potential theory*. Matematisk Institut, Aarhus University, Aarhus, 1977. Lecture Notes Series, No. 47.
- [Roy93] B. Roynette. Mouvement brownien et espaces de Besov. *Stochastics Stochastics Rep.*, 43(3-4) :221–260, 1993.

- [RS96] J.R. Roche et J. Sokołowski. Numerical methods for shape identification problems. *Control Cybernet.*, 25(5) :867–894, 1996. Shape optimization and scientific computations (Warsaw, 1995).
- [Sch93] M. Schäl. On hitting times for jump-diffusion processes with past dependent local characteristics. *Stochastic Process. Appl.*, 47(1) :131–142, 1993.
- [Sło94] L. Słomiński. On approximation of solutions of multidimensional SDEs with reflecting boundary conditions. *Stochastic Process. Appl.*, 50(2) :197–219, 1994.
- [Sło01] L. Słomiński. Euler’s approximations of solutions of SDEs with reflecting boundary. *Stochastic Process. Appl.*, 94(2) :317–337, 2001.
- [Smo16] M.V. Smoluchowski. Drei Vortage uber Diffusion, Brownsche Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Physik.*, 17 :557–585, 1916.
- [Szn84] A. S. Sznitman. Nonlinear reflecting diffusion process, and the propagation of chaos and fluctuations associated. *J. Funct. Anal.*, 56(3) :311–336, 1984.
- [Szn91] A. S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, volume 1464 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–251. Springer, Berlin, 1991.
- [Vil12] H. Villat. Le problème de *Dirichlet* dans une aire annulaire. *Palermo Rend.*, 33 :134–174, 1912.
- [Wal86] J. B. Walsh. An introduction to stochastic partial differential equations. In *École d’été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, volume 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pages 265–439. Springer, Berlin, 1986.



## **Processus stochastiques associés aux équations d'évolution linéaires ou non-linéaires et méthodes numériques probabilistes**

Ce document de synthèse est consacré à l'interprétation probabiliste de certaines équations d'évolution linéaires ou non-linéaires ainsi qu'à l'étude de méthodes numériques probabilistes.

La première partie réunit plusieurs résultats qui mettent en évidence les liens qui existent entre les équations aux dérivées partielles et les processus de diffusion pour des modèles linéaires ou non-linéaires. Un paragraphe important est consacré à l'approche probabiliste des modèles de coagulation et/ou fragmentation.

Nous présentons dans la seconde partie la construction de nouveaux algorithmes de simulation de type Monte-Carlo pour une large classe d'équations différentielles stochastiques. Cette méthode permet d'estimer de façon précise le premier moment de sortie d'un domaine et la position de sortie pour un processus stochastique. Nous nous intéressons ensuite aux techniques d'échantillonnage pondéré afin de réduire la variance de nos estimateurs.

Dans la troisième partie nous présentons des travaux sur l'analyse fine de certains processus stochastiques dans les espaces de Besov.

La quatrième partie est consacrée à des applications issues de collaborations industrielles.

*Mots-clés* : Équations différentielles stochastiques, Analyse stochastique, Modèles de Coagulation / Fragmentation, Systèmes de particules, Propagation du chaos, Méthodes de Monte-Carlo, Technique de réduction de variance.

---

## **Stochastic processes for linear and non-linear evolution equations and probabilistic numerical methods**

The document contains results on the probabilistic approach of some linear and non-linear evolution equations and probabilistic numerical methods.

The first part concerns some results on the connection between partial differential equations and stochastic processes for linear or non-linear models. An important part is devoted to the study of the probabilistic approach of coagulation and/or fragmentation models.

We introduce in the second part new algorithms based on Monte-Carlo methods for a large class of stochastic differential equations. This method allows to simulate with high accuracy the first exit time and the exit position from a domain. We are interested also in importance sampling techniques in order to reduce the variance.

In the third part we present results on the regularity of some stochastic processes in Besov spaces.

And finally, in the fourth part, a brief presentation of some practical problems is done.

*Keywords* : Stochastic differential equations, Stochastic analysis, Coagulation / Fragmentation models, Particular Systems, Propagation of chaos, Monte-Carlo methods, Variance reduction methods.