# Contributions à l'étude algébrique et géométrique des structures et théories du premier ordre

Jean Berthet

Université Claude Bernard Lyon 1
Thèse de Doctorat (Arrêté du 7 août 2006)
Spécialité Mathématiques
Ecole Doctorale Informatique et Mathématiques
Institut Camille Jordan

# Contributions à l'Etude Algébrique et Géométrique des Structures et Théories du Premier Ordre

Jean BERTHET

**Directeur**
Itaï BEN YAACOV

**Rapporteurs**
Gregory CHERLIN
Michel COSTE

Soutenue le 3 décembre 2010

**Jury**
Itaï BEN YAACOV
Michel COSTE
Françoise POINT
Frank WAGNER

CONTRIBUTIONS À L'ETUDE ALGÉBRIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DES STRUCTURES ET THÉORIES DU PREMIER ORDRE

**Résumé**

La notion de **T**-radical d'un idéal permet à G.Cherlin de démontrer un Nullstellensatz dans les théories inductives d'anneaux. Nous proposons une analyse modèle-théorique de phénomènes connexes. En premier lieu, une réciproque de ce théorème nous conduit à une caractérisation des corps algébriquement clos, suggérant une version "positive" du travail de Cherlin, la théorie des idéaux T-radiciels. Ceux-ci se caractérisent par un théorème de représentation et sont associés à un théorème des zéros "positif". Ces résultats se généralisent à la logique du premier ordre : grâce à la notion de classe spéciale, nous développons ensuite une théorie logique des idéaux. On peut encore parler d'idéaux premiers et radiciels, relativement à une classe de structures. Dans ce cadre, le théorème de représentation est une propriété intrinsèque des classes spéciales et le théorème des zéros une propriété de préservation logique, que nous appelons "complétude géométrique" et qui entretient des rapports étroits avec la modèle-complétude positive. Les algèbres basées en groupes de P.Higgins permettent d'appliquer ces résultats aux théories modèle-complètes de corps avec opérateurs additionnels. Dans certains cas "noethériens", l'algèbre de coordonnées est un invariant algébrique des "variétés affines". Enfin, il est possible à partir d'un ensemble de formules $\mathcal{E}$ de généraliser les classes spéciales et autres classes de structures. Notre théorie des idéaux logiques est de plus un cas particulier du phénomène de localisation étudié par M.Coste ; dans certaines situations, un bon choix de formules permet d'identifier les types complets d'une "algèbre" à des types de localisation.

**Mots-clés**

Théorie des modèles, théorème des zéros de Hilbert, modèle-complétude, logique positive, algèbre universelle, quasivariété, algèbre, géométrie algébrique, anneau, corps, localisation, spectre.

Institut Camille Jordan, UMR 5208 du CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex

Contributions to the Algebraic and Geometric Study
of First Order Structures and Theories


## Abstract

The notion of **T**-radical of an ideal allows G.Cherlin to prove a Nullstellensatz for inductive ring theories. We present here a model-theoretic analysis of closely related phenomena. At first, a reverse of this theorem leeds us to a characterization of algebraically closed fields, suggesting a "positive" version of Cherlin's work, the theory of T-radical ideals. These are characterized by a representation theorem and associated to a "positive" Nullstellensatz. Those results are generalized to first order logic : thanks to the notion of special class, we then develop a logical theory of ideals. One may still speak about prime and radical ideals, relatively to a class of structures. In this setting, the representation theorem is an intrinsic property of special classes and the Nullstellensatz a logical preservation property, which we call "geometric completeness" and which is closely linked to positive model-completeness. The group-based algebras of P.Higgins allow us to apply these results to model-complete theories of fields with additional operators. In certain "noetherian" cases, the coordinate algebra is an algebraic invariant of "affine algebraic sets". At last, it is possible from a set of formulas $\mathcal{E}$ to generalize special and other classes of structures. Moreover, our theory of logical ideals is a particular case of the localisation phenomenon studied by M.Coste ; in certain situations, a good choice of formulas leeds to an identification of the complete types of a given "algebra" with some localisation types.



## Key words

Model theory, Hilbert's Nullstellensatz, model-completeness, positive logic, universal algebra, quasivariety, algebra, algebraic geometry, ring, field, localisation, spectrum.

**Remerciements**

Je suis reconnaissant envers Edouard Thomas, qui m'a fait découvrir et aimer les mathématiques supérieures : j'en ai quitté les sciences expérimentales pour les sciences formelles. Ma gratitude va aussi à Messieurs Didier Arnal et Daniel Beau, responsables de la Licence de Mathématiques de Dijon de l'époque, qui m'ont donné une chance de me reconvertir en Mathématiques.
Mon directeur de thèse, le professeur Itaï Ben Yaacov, a accepté de manière précipitée d'encadrer cette thèse dès son arrivée à Lyon, malgré mon choix d'un sujet personnalisé un peu éloigné de sa pratique mathématique courante. Je le remercie vivement pour sa confiance et son ouverture d'esprit.
Je remercie aussi Gregory Cherlin, Michel Coste, Françoise Point et Frank Wagner qui me font l'honneur d'être rapporteurs ou membres du jury.
L'équipe de Logique Mathématique, et en général, les membres de l'Institut Camille Jordan, m'ont accueilli, et le personnel administratif et technique de l'Institut m'a permis de travailler dans un environnement confortable.
Merci enfin aux amis qui m'ont encouragé pendant cette période et à Emmanuelle, mon épouse, pour sa patience sans limites.

*A mes grands-parents*

# Sommaire

# Introduction

Les logiciens ont régulièrement puisé leurs exemples, leur intuition, leurs idées...dans l'algèbre et la géométrie algébrique. En particulier, les travaux sur le théorème des zéros de D.Hilbert et divers analogues ne manquent pas ([14], [15], [36]). Du point de vue modèle-théorique, ce théorème est étroitement lié à la notion de complétude existentielle, due à A.Robinson. Par exemple, le travail de G.Cherlin a donné lieu à une application surprenante, la recherche d'une description explicite de ces radicaux par McKenna ([25]).
En géométrie algébrique élémentaire, le Nullstellensatz est la propriété fondamentale sur laquelle s'établit la correspondance entre idéaux radiciels de type fini et fermés algébriques d'un espace affine de dimension finie sur un corps algébriquement clos. Il permet d'établir la dualité entre les variétés affines et les algèbres réduites de type fini, premiers invariants, par l'anneau de coordonnées.
Cette perspective nous place dans la catégorie dont les objets sont les anneaux et les flèches les homomorphismes. Cette description intrinsèque d'une variété affine par son algèbre de coordonnées est d'ailleurs à la base de la théorie des schémas, dont la catégorie est une extension de la catégorie précédente.
En théorie des modèles, on a souvent affaire à des théories de corps : la question se pose de pouvoir reproduire certaines constructions liées à la géométrie algébrique, géométrie qui se décline d'ailleurs dans divers contextes analogues, correspondant à des structures du premier ordre de théorie souvent modèle-complète (corps réels clos, corps différentiellement clos, corps de Hasse clos, etc...). La question se pose de trouver un dénominateur commun entre la logique et la géométrie, et ces constructions analogues.
Or, le travail de Cherlin ou même la complétude existentielle, dans une perspective modèle-théorique « classique », s'inscrivent dans la catégorie dont les objets sont les sous-structures de modèles d'une théorie d'anneaux donnés, et les flèches les plongements ; la construction des invariants algébriques les plus simples n'y est pas possible.
Pour aborder le programme proposé ci-avant, il faut donc envisager développer des concepts analogues dans une perspective différente, plus « algébrique » dans un certain sens.
Dans la première partie, nous exposons par le menu les pré-requis nécessaires à la lecture de nos travaux, souvent sans démonstration. Le lecteur y trouvera des formulations peut-être un peu particulières et quelques éléments nouveaux ; s'il est habitué à la théorie des modèles élémentaire, il pourra passer son chemin dans un premier temps.
Dans une deuxième partie, nous revisitons la théorie du **T**-radical dans les classes « positivement modèle-complètes d'anneaux », dans le contexte de la logique positive. Nous commençons par caractériser les théories modèle-complètes d'anneaux intègres par le Nullstellen-

satz de Cherlin, ce qui nous oriente vers une caractérisation des corps algébriquement clos dans la catégorie des anneaux. La théorie « positive » s'appuie sur cet exemple et repose sur les notions duales de théorie universelle Horn stricte et de quasivariété, ce qui apparaît en germe chez Weispfenning ([36]) : dans un sens, les deux ingrédients modèle-théoriques fondamentaux du Nullstellensatz, dans une version classique ou positive, sont la modèle-complétude et les énoncés universels Horn stricts.
La troisième partie aborde la question dans une perspective générale plus conceptuelle, en partant des classes spéciales, version générale des quasivariétés, via l'introduction de la notion de complétude géométrique. Nous développons pour cela quelques outils conceptuels d'algèbre dite "formelle", qui rappellent leurs analogues algébriques universels. Il est alors possible de définir des idéaux logiques, ainsi que des idéaux premiers et radiciels et deux radicaux, relativement à une classe de structures donnée, et liés à un théorème de représentation analogue à celui des anneaux réduits. La propriété de complétude géométrique, c'est-à-dire le « théorème des zéros », apparaît alors comme propriété de préservation logique d'énoncés uHs dans une classe spéciale, de manière tout-à-fait analogue aux complétudes existentielles classique et positive. Elle entretient des rapports étroits avec la modèle-complétude positive, et dans une version faible avec la complétude existentielle : on retrouve le résultat de Cherlin. On peut donc résoudre un aspect du problème évoqué précédemment : décrire les invariants algébriques élémentaires des variétés affines en général. Nous le faisons à titre d'exemple dans des cas d'algèbres basées en groupes, notion qui permet de tenir compte des expansions d'anneaux par des opérations. Dans ces algèbres, les idéaux « algébriques » correspondent aux idéaux logiques, et dans le cas des théories de corps, la modèle-complétude équivaut alors à la complétude géométrique des modèles.
Enfin, dans une quatrième et dernière partie, nous ouvrons la réflexion sur les éléments de formalisation introduits précédemment. D'une part, les notions de classe universelle ou spéciale s'étendent à des notions plus vastes dans lesquelles on peut établir une dualité entre les propriétés de certaines classes de structures et la forme de certaines axiomatisations, relativement à des ensembles de formules pris comme référence. D'autre part, la théorie des idéaux logiques peut s'interpréter comme un cas particulier de la théorie de la localisation de M.Coste. Ceci permet d'envisager une description modèle-théorique d'autres aspects de la géométrie algébrique au sens large : topologies, ensembles constructibles, faisceaux et spectres. Nous en présentons ici les prémisses, en établissant une correspondance entre certains espaces de types et certains espaces de classes de localisations, à partir d'« ensembles cartésiens d'élimination ».

# Partie I

# Préliminaires, Vocabulaire et Notations

Dans cette première partie, nous introduisons les éléments sur lesquels notre travail, exposé à partir de la deuxième partie, s'édifie. La plupart des résultats présentés sont connus, mais il pourra apparaître sporadiquement des résultats ou démonstrations un peu nouveaux ou du moins présentés de manière un peu originale pour les besoins de la cause.
Nous avons en effet voulu donner une forme particulière à ces pré-requis, pour qu'ils s'harmonisent avec ce qui suit. En particulier, nous avons opté pour une exposition un peu "algébrique" des préliminaires logiques. Le lecteur est supposé connaître un peu d'algèbre commutative et la sémantique du calcul des prédicats.
Du reste, la plupart des démonstrations sont omises : lorsque le résultat n'est pas évident, le lecteur est renvoyé à la bibliographie.

# Chapitre 1

# Algèbre et Géométrie Algébrique Elémentaire

## 1 Notations

Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Si $X$ est un ensemble, on note $A[X]$ la $A$-algèbre des polynômes à coefficients dans $A$ en les indéterminées $X$. Si $b \in B^X$, on note $f_b$ le morphisme ("d'évaluation en $b$ au-dessus de $f$") de $A[X]$ dans $B$ prolongeant $f$ et fourni par la propriété universelle de $A[X]$. Si $T \subseteq A[X]$ et $E \subseteq B^X$, on rappelle quelques notations.

- $\mathscr{Z}_f(T) := \{b \in B^X : \forall P \in T, P^f(b) := f_b(P) = 0\} = \bigcap_{P \in T} \mathscr{Z}_f(P)$ ;
- $\mathscr{I}_f(E) := \{Q \in A[X] : Q^f(b) = 0, \forall b \in E\} = \bigcap_{b \in E} \mathscr{I}_f(b)$.

Si $f$ est clairement identifiable à partir du contexte, on pourra noter $P$ pour $P^f$, $\mathscr{Z}_B(T)$ pour $\mathscr{Z}_f(T)$ et $\mathscr{I}(E)$ pour $\mathscr{I}_f(E)$.
Les deux définitions s'interprètent en termes d'homomorphismes. Soit en effet $I$ un idéal de $A[X]$. Un point $b \in B^X$ est dans $\mathscr{Z}_f(I)$ si et seulement si $I \subseteq Ker(f_b)$. On peut alors considérer le produit $f_I : A[X] \to B^{\mathscr{Z}_f(I)}$ des morphismes $f_b, b \in \mathscr{Z}_f(I)$, et l'on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I)) = Ker(f_I) = \bigcap\{Ker(f_b) : b \in \mathscr{Z}_f(I)\}$. On a donc $I \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I))$ et pour tout $b \in \mathscr{Z}_f(I)$, $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I)) \subseteq Ker f_b$.

## 2 Le théorème des zéros de Hilbert

Le théorème des zéros de Hilbert, dans sa forme fondamentale, peut s'énoncer en termes d'extensions de corps.

**Théorème 1.1** ([2] 7.9)**.** *Soient $K$ un corps, et $f : K \to L$ une extension de corps de type fini. Alors l'extension $f$ est algébrique, donc finie.*

Toutefois, lorsqu'on travaille avec la topologie de Zariski (au sens ensembliste), on utilise le Nullstellensatz dans la version suivante :

**Théorème 1.2** ([17] I, proposition 1.2)**.** *Soient $K$ un corps algébriquement clos, $X$ un ensemble fini, et $I$ un idéal de $K[X]$. Alors on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_K(I)) = \sqrt{I}$.*

Dans un corps, l'image d'une variété affine par un morphisme régulier n'est pas en général une variété affine, si bien qu'il est naturel de considérer les ensembles constructibles, combinaisons booléennes de variétés affines, et stables par images de morphismes réguliers, selon le théorème suivant dit de "Tarski-Chevalley", cité ici dans une forme "algébrique".

**Théorème 1.3** ([27] 3.2.8). *Soient $K$ un corps algébriquement clos, $X \subseteq K^n$ un ensemble constructible et $f : K^n \to K^m$ un morphisme régulier. Alors l'image de $X$ par $f$ est un ensemble constructible.*

En utilisant le théorème des zéros, on peut caractériser les corps algébriquement clos en termes de ces ensembles constructibles. La démonstration du théorème suivant donne un exemple d'argument que nous retrouverons dans les chapitres 3 et 4.

**Théorème 1.4.** *Soit $A$ un anneau commutatif intègre. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$A$ est un corps algébriquement clos*
2. *Pour tout plongement $f : A \hookrightarrow B$, où $B$ est un anneau intègre, pour tout ensemble constructible $E$ dans $A$, si $E$ a un point rationnel dans $B$ via $f$, alors $E$ a un point rationnel dans $A$.*

*Démonstration.* (1)$\Rightarrow$(2) Quitte à le plonger dans son corps de fractions, on peut supposer que $B$ est un corps. Soit $C$ un ensemble constructible défini sur $A$ par les conditions $P_i(X) = 0, i = 1, \ldots, n$ et $Q_j(X) \neq 0, i = 1 \ldots, m$, $X$ étant un ensemble fini de variables et $P_i, Q_j \in A[X]$ pour tous $i, j$. On suppose donc que $C$ a un point rationnel dans $B$ : cela signifie que l'idéal $I := (P_i, Y.Q_j - 1, i = 1, \ldots, n, j = 1 \ldots, m)$ a un point rationnel dans $B$ ($Y$ est une nouvelle indéterminée). En particulier, on a $\sqrt{I} \neq A[X]$, si bien que par le théorème 1.2, on a $\mathscr{Z}_A(I) \neq \emptyset$. Si $a$ est un point de $I$ dans $A$, les coordonnées correspondant à $X$ sont les composantes d'un point rationnel de $C$ dans $A$, puisque ce dernier est un corps.
(2)$\Rightarrow$(1) Soit $a \in A$, $a \neq 0$. Soit $f : A \hookrightarrow F$ un corps de fractions de $A$. L'idéal $(aX - 1)$ a un point rationnel dans $f$, si bien que par hypothèse il en a un dans $A$ : $A$ est un corps. Il est alors clair que $A$ est un corps algébriquement clos.

## 3 Anneaux de coordonnées

Soit $A$ un anneau intègre. Soient $X$ un ensemble et $I$ un idéal de $A[X]$. Tout polynôme de $A[X]$ induit une fonction de $A^X$ (donc en particulier de $\mathscr{Z}_A(I)$) dans $A$, si bien qu'on a un homomophisme $A[X] \to A^{\mathscr{Z}_A(I)}$, dont le noyau est $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$.

**Définition 1.5.** L'anneau $A[X]/\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$ est *l'algèbre de coordonnées* de la variété affine $\mathscr{Z}_A(I)$.

Comme $A$ est intègre, les idéaux $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$ sont toujours radiciels, si bien que les algèbres de coordonnées sont réduites.

**Proposition 1.6.** *La règle qui associe à une variété affine quelconque sur $A$ son algèbre de coordonnées est un foncteur contravariant de la catégorie des variétés affines sur $A$ et de leurs morphismes réguliers, dans la catégorie des $A$-algèbres réduites.*

Lorsque $A$ est un corps algébriquement clos, le théorème des zéros permet de montrer le théorème suivant :

**Théorème 1.7** ([34] I, section 2.3 p.29). *Soit K un corps algébriquement clos. La règle qui associe à une variété affine $\mathscr{V}$ de K (en dimension finie) son algèbre de coordonnées, est une dualité de catégories entre la catégorie dont les objets sont les variétés affines sur K et les flèches les morphismes réguliers, et la catégorie des K-algèbres réduites de présentation finie.*

# Chapitre 2

# Logique

## 1 Conventions modèle-théoriques

Nous suivrons l'usage modèle-théorique habituel, en travaillant en toute généralité dans un langage du premier ordre multi-sortes $\mathscr{L}$ *finitaire* (autrement dit les arités des fonctions et relations sont finies), et nous supposerons connues les notions de base du calcul des prédicats, notamment le théorème de compacité de la logique du premier ordre.
Nous introduisons quelques particularités.
Premièrement, nous utiliserons fréquemment la logique *infinitaire* dans le langage (finitaire !) $\mathscr{L}$ (ce que W.Hodges appelle $\mathscr{L}_{\infty,\infty}$ dans [18], p.27). Cela signifie que pour chaque sorte, nous nous autorisons à utiliser une classe de variables en bijection avec la classe des ordinaux. Les termes et les formules atomiques sont formés de manière habituelle sur ce langage, et l'on s'autorise des conjonctions et des disjonctions sur des *ensembles* quelconques de formules, ainsi que des quantifications sur n'importe quel *ensemble* de variables. Si $\Phi$ est un ensemble de formules, on notera $\bigwedge \Phi$ sa conjonction, par exemple, et si $X$ est un ensemble de variables, on notera $\exists X\ \Phi$ la quantification existentielle. En somme, on appliquera les deux connecteurs et les deux quantificateurs sur des *ensembles* plutôt que sur des couples de formules ou sur des variables individuelles. Pour cette raison, nous choisirons une présentation par *ensembles* des quantifications, conjonctions...plutôt que par *uplets*. Une théorie infinitaire désignera en toute généralité une *classe* d'énoncés, et un modèle d'une théorie sera une $\mathscr{L}$-structure au sens habituel, dans laquelle tout énoncé de la théorie est satisfait.
Lorsque l'on parlera de logique *finitaire*, il s'agira de la logique du premier ordre classique. Dans cette logique, on pourra choisir un ensemble dénombrable de variables pour chaque sorte : les opérations $\bigwedge, \bigvee$ et les quantifications s'appliqueront alors à des ensembles finis.
Nous parlerons d'uplets pour désigner des applications $X \to A$, où $X$ est un ensemble de variables et $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Nous désignerons les uplets par des lettres minuscules $a, b, c$....
Nous autorisons les $\mathscr{L}$-structures à avoir des domaines de sortes vides, comme dans [18], sans quoi il est impossible d'utiliser les quasivariétés en général. Tous les théorèmes élémentaires de la théorie des modèles restent valables, si l'on fait toutefois attention dans certains cas, qui ne se présenteront pas ici.
Le lecteur familier de la théorie des modèles élémentaire peut lire directement la dernière section de ce chapitre et commencer la lecture du suivant.

# 2 Algèbre formelle

## 2.1 Applications, expansions et morphismes

### Applications et expansions

Soient $A$ et $B$ deux $\mathscr{L}$-structures. On notera $\mathscr{L}(A)$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathscr{L}$ les *éléments* de $A$ vus comme nouveaux symboles de constantes. Si $f : A \to B$ est une application quelconque, on peut associer à $f$ la $\mathscr{L}(A)$-structure sur $B$ qui consiste en l'expansion de la $\mathscr{L}$-structure par l'interprétation des éléments de $A$ donnée par $f$. On écrit $F(f)$ cette expansion. Réciproquement, si $B^+$ est une $\mathscr{L}(A)$-expansion de $B$, on peut lui associer l'application $f : A \to B$ qui décrit l'interprétation dans $B$ des éléments de $A$. On écrit $G(B^+) := f$ cette application. Il y a ainsi une correspondance exacte entre les applications $f : A \to B$ entre les deux $\mathscr{L}$-structures, et les $\mathscr{L}(A)$-expansions de $B$, ce qu'on peut dire de la manière suivante.

**Proposition 2.1.** *Les foncteurs $F$ et $G$ sont deux isomorphismes réciproques entre la catégorie des applications entre $\mathscr{L}$-structures de domaine $A$ et celle des $\mathscr{L}(A)$-structures.*

### Notation dynamique

Soit donc $f : A \to B$ une application : $f$ induit une $\mathscr{L}(A)$-expansion sur $B$, que l'on notera occasionnellement $(B, f)$.
La donnée de $f$ ouvre donc la possibilité de s'interroger sur la validité des énoncés à paramètres dans $A$, dans l'expansion $(B, f)$. Si $\varphi$ est un tel énoncé, on peut donc rigoureusement définir $(B, f) \vDash \varphi$.
Dans le cas où $A = B$ et $f = 1_B$, on pourra écrire $B \vDash \varphi$ simplement, au lieu de $(B, 1_B) \vDash \varphi$ : autrement dit, on s'autorisera dans la notation habituelle de la satisfaction des énoncés, à écrire $B \vDash \varphi$ pour un énoncé $\varphi$ avec des paramètres éventuels dans $B$.
Si $X$ est un ensemble de variables et $a$ est un $X$-uplet d'éléments de $A$ (c'est-à-dire une application $X \to A$), on pourra user à l'occasion d'une autre notation pour désigner l'expression $(B, f) \vDash \varphi(a)$, en écrivant plutôt $B \vDash \varphi^f$, où $\varphi^f$ désigne la formule $\varphi(fa)$, formule à paramètres, cette fois-ci, dans $B$.
En fait, la donnée de l'expansion $(B, f)$ est en fin de compte entièrement déterminée par l'application $f$, si bien qu'on peut se contenter, sans ambiguité, d'écrire $f \vDash \varphi$, si $\varphi$ est un $\mathscr{L}(A)$-énoncé, pour dire $(B, f) \vDash \varphi$. L'avantage de cette notation "dynamique", est de tenir compte intrinsèquement des morphismes en changeant "localement" d'expansion du langage $\mathscr{L}$, et de tracer ainsi de manière commode la validité d'énoncés à paramètres dans des diagrammes pour lesquels les notations précédentes deviennent lourdes. En outre, la considération des morphismes entre structures comme objets d'étude conduit naturellement à adopter cette notation. Nous passerons d'une notation à une autre selon les besoins.

### Morphismes

Nous rappelons brièvement trois types de morphismes utilisés couramment en logique du premier ordre.

**Définitions 2.2.** Soient $A$ et $B$ deux $\mathscr{L}$-structures.

1. On dit que $f$ est un *($\mathscr{L}$-)homomorphisme* de $A$ dans $B$ si pour tout ensemble fini $S$ de symboles de sortes, tout symbole de sorte $s$ et tout uplet $a$ de $A$ de sortes $S$, on a
   - pour tout symbole relationnel $R$ de $\mathscr{L}$, de sortes $S$, si $A \vDash R(a)$, alors $B \vDash R(fa)$ ;
   - pour tout symbole fonctionnel $F$ de $\mathscr{L}$, de sortes $(S,s)$, $f(F^A(a)) = F^B(a)$
   - pour tout symbole de constante $c$ de $\mathscr{L}$, de sorte $s$, $f(c^A) = c^B$.
2. On dit que $f$ est un *($\mathscr{L}$-)plongement* si $f$ est un homomorphisme, et si il *reflète* la validité des énoncés atomiques à paramètres dans $A$, autrement dit si pour tout symbole relationnel $R$ de $\mathscr{L}$, de sortes $S$, et pour tout $S$-uplet $a$ d'éléments de $A$, si $B \vDash R(fa)$, on a $A \vDash R(a)$.
3. On dit que $f$ est une application ou un plongement *élémentaire* si pour tout $\mathscr{L}(A)$-énoncé $\varphi(a)$, si $A \vDash \varphi$, alors $B \vDash \varphi(fa)$.

## 2.2 Algèbres et extensions, morphismes et sous-algèbres

A partir des notions précédentes, on introduit un langage algébrique qui sera utilisé amplement dans la suite.

**Définitions 2.3.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure.

1. Un homomorphisme $f$ de domaine $A$ sera appelé une *$A$-algèbre*.
2. Un plongement $f$ de domaine $A$ sera appelé une *extension de $A$*.
3. Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux $A$-algèbres. Un *homomorphisme de $A$-algèbres* entre $f$ et $g$ est un homomorphisme $h : B \to C$ tel que $h \circ f = g$.
4. Une *sous-$A$-algèbre* d'une $A$-algèbre $g : A \to C$ est un morphisme $h$ de $A$-algèbres d'une $A$-algèbre $f : A \to B$ dans $g$, tel que $h$ est un plongement de $B$ dans $C$.

*Remarque* 2.4. Une sous-$A$-algèbre est un monomorphisme entre $A$-algèbres, mais la réciproque est fausse, à cause de la présence en général de relations autres que l'égalité.

## 2.3 Algèbres de termes

Dans ce cadre algébrique "formel", les équivalents des algèbres de polynômes sont les algèbres de termes.
Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $X$ un ensemble. L'ensemble des $\mathscr{L}(A \sqcup X)$-termes clos est noté $\mathscr{T}_X A$. Il existe deux fonctions injectives $i_X : A \hookrightarrow \mathscr{T}_X A$ et $\eta_X : X \hookrightarrow \mathscr{T}_X A$ qui correspondent à l'interprétation naturelle des symboles de constante comme des termes.
L'ensemble $\mathscr{T}_X A$ est naturellement muni d'une $\mathscr{L}$-structure, en interprétant les relations du langage de manière minimale pour que $i_X$ soit un plongement.

**Définition 2.5.** Le plongement $i_X : A \hookrightarrow \mathscr{T}_X A$ est appelé l'algèbre de termes en les indéterminées $X$, et à coefficients, ou paramètres, dans $A$.

*Remarque* 2.6. Attention, en général, on interprète dans les algèbres de termes les relations du langage par des champs vides. C'est qu'en général, on ne s'embarasse pas des coefficients. Cependant, même les algèbres de termes au sens classique sont munies d'une injection de la

$\mathscr{L}$-structure libre qui est aussi un plongement, puisque cette $\mathscr{L}$-structure a des champs relationnels vides.
Si $X$ est un ensemble de variables du langage, l'algèbre de termes classique $\mathscr{T}_X$ "est" donc l'algèbre de termes en les indéterminées $X$, à coefficients dans la $\mathscr{L}$-structure libre des termes clos (elle-même une algèbre de termes).

Soient $h : A \to B$ une $A$-algèbre et $f : X \to B$ une application. La $\mathscr{L}(A)$-structure sur $B$ permet d'établir la propriété suivante.

**Proposition 2.7.** *Il existe un unique morphisme $\tilde{f}$ de $A$-algèbres entre $i_X$ et $h$ tel que $\tilde{f} \circ \eta_X = f$, autrement dit, tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, hook, "\eta_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathscr{T}_X A \arrow[r, "\tilde{f}"] & B \\
A \arrow[u, hook, "i_X"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

**Fonctorialité des algèbres de termes**

On peut donner une interprétation fonctorielle de la propriété universelle de l'algèbre de termes.
Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Soit $f : X \to Y$ une application entre deux ensembles. En considérant l'application composée $\eta_Y \circ f : X \to Y \hookrightarrow \mathscr{T}_Y A$ et la $A$-algèbre $i_Y : A \hookrightarrow \mathscr{T}_Y A$, la propriété universelle des algèbres de termes permet d'affirmer qu'il existe un unique morphisme , que nous noterons $\mathscr{T}_f A$, de $A$-algèbres de $i_X$ dans $i_Y$, tel que $\mathscr{T}_f A \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$, comme sur le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, hook, "\eta_Y"] \\
\mathscr{T}_X A \arrow[r, dotted, "\mathscr{T}_f A"] & \mathscr{T}_Y A \\
A \arrow[u, hook, "i_X"] \arrow[ur, hook, "i_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

On peut alors vérifier que $\mathscr{T}_\bullet A$ (par abus de notation) définit un foncteur de la catégorie des ensembles dans la catégorie des $A$-algèbres : il associe à un ensemble $X$ la $A$-algèbre

$i_X : A \hookrightarrow \mathscr{T}_X A$. On notera plus simplement ici ce foncteur $F$.
Nous considérons maintenant le foncteur d'oubli $G$, de la catégorie des $A$-algèbres, notée $A\mathscr{L}^+\mathbf{St}$, dans la catégorie des ensembles, et qui associe à une $A$-algèbre $h : A \to B$ l'ensemble sous-jacent à $B$, noté encore $B$.
Le diagramme précédent établit alors que $\eta$ est une transformation naturelle de $\mathbf{id}_{\mathscr{E}ns}$ dans $GF$ et la propriété universelle 2.7 se reformule de la manière suivante.

**Proposition 2.8.** *La transformation naturelle $\eta$, qui associe à un ensemble $X$, l'ensemble sous-jacent à l'algèbre de termes $\mathscr{T}_X A$, est l'unité d'une adjonction $F \dashv G$. Autrement dit, le foncteur algèbre de termes à coefficients dans $A$, est adjoint à gauche du foncteur d'oubli des $A$-algèbres dans les ensembles.*

Ainsi, si $h : A \to B$ est une $A$-algèbre, on a une bijection naturelle entre $B^X$ et $Hom_A(\mathscr{T}_X A, B)$.

## 2.4 Diagrammes

La méthode des diagrammes, objets syntactiques, permet d'une part de traduire dans le langage de la logique des propriétés liées aux divers types de morphismes déjà introduits, d'autre part, de démontrer l'existence de certains morphismes ou certaines constructions par des arguments de compacité.

**Définitions 2.9.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure.

1. Le *diagramme atomique de $A$*, noté $D^+(A)$, est l'ensemble des $\mathscr{L}(A)$-énoncés atomiques satisfaits dans $A$.
2. Le *diagramme littéral de $A$*, noté $D(A)$, est l'ensemble des $\mathscr{L}(A)$-énoncés littéraux (atomiques ou négatomiques), satisfaits dans $A$.
3. Le *diagramme complet de $A$*, noté $Th(A|A)$, est l'ensemble des $\mathscr{L}(A)$-énoncés satisfaits dans $A$.

*Remarque* 2.10. La notation $D^+(A)$ désigne souvent le diagramme *positif* de $A$, c'est-à-dire l'ensemble des énoncés positifs sans quanteurs à paramètres dans $A$ et valides dans $A$. Il est évident que le diagramme atomique et le diagramme positif de $A$ sont équivalents : nous avons donc choisi une version minimaliste, ce que nous ferons dès que possible, et qui sera justifié dans la suite.
On peut faire la même remarque pour le diagramme littéral, qui est équivalent au diagramme sans quanteurs, ensemble des $\mathscr{L}(A)$-énoncés sans quanteurs valides dans $A$.

On peut, à l'aide de ces diagrammes, caractériser de manière compacte les divers types de morphismes, et en donner une interprétation catégorique.

**Proposition 2.11.** *Soit $f : A \to B$ une application entre deux $\mathscr{L}$-structures.*

1. *L'application $f$ est un homomorphisme si et seulement si $f \vDash D^+(A)$.*
2. *L'application $f$ est un plongement si et seulement si $f \vDash D(A)$.*
3. *L'application $f$ est élémentaire si et seulement si $f \vDash Th(A|A)$.*

**Proposition 2.12.** *L'isomorphisme de catégories entre les applications de $\mathscr{L}$-structures de domaine $A$ et les $\mathscr{L}(A)$-structures se restreint*

1. *à un isomorphisme de catégories entre les $A$-algèbres et les modèles de $D^+(A)$*
2. *à un isomorphisme de catégories entre les extensions de $A$ et les modèles de $D(A)$*
3. *à un isomorphisme de catégories entre les extensions élémentaires de $A$ et les modèles de $Th(A|A)$.*

## 2.5 Formules préservées et reflétées

Aux divers types de morphismes introduits, sont associés divers types de formules, "préservées" ou "reflétées" par ces morphismes.

**Définitions 2.13.** Soit $\varphi$ une formule finitaire.

1. La formule $\varphi$ est dite *existentielle* si elle est de la forme $\exists X\ \psi(X)$, où $\psi$ est une formule sans quanteurs.
2. La formule $\varphi$ est dite *cohérente* ou *(existentielle) positive*, si les seuls connecteurs qu'elle contient sont parmi $\{\wedge, \vee\}$ et si ses quantificateurs éventuels sont tous existentiels.
3. La formule $\varphi$ est dite *positive primitive*, si elle est de la forme $\exists Y\ \psi$, où $\psi$ est une conjonction de formules atomiques.
4. La formule $\varphi$ est dite *primitive*, si elle est de la forme $\exists Y\ \psi$, où $\psi$ est une conjonction de formules atomiques ou négatomiques.

**Définition 2.14.** Si $f : A \to B$ est un homomorphisme et $\Phi$ un ensemble de $\mathscr{L}(A)$-énoncés, on dira que $f$ *préserve (la validité de)* $\Phi$, si pour tout $\varphi \in \Phi$, dès que $A \vDash \varphi$, alors $B \vDash \varphi^f$, autrement dit $f \vDash \varphi$.

**Proposition 2.15** ([18] 2.4.1 et 2.4.3)**.** *1. Un homomorphisme $f : A \to B$ préserve la validité de tous les $\mathscr{L}(A)$-énoncés cohérents.*

*2. Un plongement $f : A \hookrightarrow B$ préserve la validité de tous les $\mathscr{L}(A)$-énoncés existentiels.*

**Définitions 2.16.** 1. Une formule h-universelle est une formule de la forme $\forall X\ \neg\varphi$, où $\varphi$ est une formule positive sans quanteurs (finitaire), dont les variables libres figurent parmi $X$. Elle est dite basique si $\varphi$ est une conjonction de formules atomiques.

2. Une formule universelle est une formule de la forme $\forall X\ \varphi$, où $\varphi$ est une formule sans quanteurs (finitaire), dont les variables libres figurent parmi $X$. Une formule universelle est dite basique si elle est de la forme $\forall X\ \bigwedge\Phi \Rightarrow \bigvee\Psi$, où $\Phi$ et $\Psi$ sont deux ensembles finis de formules atomiques.

**Définition 2.17.** Soient $f : A \to B$ un homomorphisme et $\Phi$ un ensemble de $\mathscr{L}(A)$-énoncés. On dira que $f$ *reflète (la validité de)* $\Phi$, si pour tout $\varphi \in \Phi$, dès que $f \vDash \varphi$, on a $A \vDash \varphi$.

De la proposition précédente, on en déduit immédiatement la réflection des formules duales dans les deux types de morphismes.

**Proposition 2.18.** *1. Un homomorphisme $f : A \to B$ reflète la validité de tous les $\mathscr{L}(A)$-énoncés h-universels.*

*2. Un plongement reflète la validité de tous les $\mathscr{L}(A)$-énoncés universels.*

**Plongements existentiellement clos et immersions**

Les homomorphismes préservent la validité des énoncés cohérents, les plongements celle des énoncés existentiels. On s'intéresse maintenant à la *réflexion* de cette validité.

**Définitions 2.19.**
1. Un plongement de $\mathscr{L}$-structures $f : A \hookrightarrow B$ est dit *existentiellement clos* si il reflète la validité de tous les énoncés existentiels à paramètres dans $A$, ou de manière équivalente, préserve la validité des $\mathscr{L}(A)$-énoncés universels. Une sous-structure $A$ d'une structure $B$ sera dite *existentiellement close* si le plongement canonique $i : A \hookrightarrow B$ est existentiellement clos.
2. Un homomorphisme de $\mathscr{L}$-structures $f : A \to B$ est appelé une *immersion* si il reflète la validité de tous les énoncés cohérents à paramètres dans $A$, autrement dit s'il préserve la validité des $\mathscr{L}(A)$-énoncés h-universels. Une sous-structure $A$ d'une structure $B$ sera dite *immergée* si le plongement canonique $i : A \hookrightarrow B$ est une immersion.

# 3 Classes axiomatisables

Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre.

## 3.1 $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}^+$-Catégories, classes élémentaires

Soit $\mathbf{T}$ une théorie infinitaire, et soit $\mathbf{K}$ la classe de ses modèles : $\mathbf{K}$ est fermée par copies isomorphes.
D'un autre côté, soient $A$ et $B$ deux $\mathscr{L}$-structures qui ont la même théorie infinitaire. Soit $\Phi$ le diagramme littéral de $A$, dans lequel on a remplacé $A$ par un ensemble de variables $X$. On a $A \models \exists X\ [\bigwedge \Phi \wedge \forall y \bigvee_X y = x]$ : $B$ est un modèle de cet énoncé, qui spécifie un plongement surjectif de $A$ dans $B$ : $A$ et $B$ sont isomorphes, autrement dit la théorie infinitaire d'une structure spécifie son type d'isomorphisme. En fait, la théorie infinitaire d'une classe spécifie tous ses types d'isomorphismes :

**Proposition 2.20.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de structures. Soit* $\mathbf{T}$ *la théorie infinitaire de* $\mathbf{K}$*. Si* $A \models \mathbf{T}$*, alors* $A$ *est isomorphe à un objet de* $\mathbf{K}$*.*

*Démonstration.* Supposons qu'une $\mathscr{L}$-structure $A$ n'est pas isomorphe à un objet $B$ de $\mathbf{K}$ : cela signifie que $B \models \neg(\exists X\ [\bigwedge \Phi \wedge \forall y \bigvee_X y = x])$, avec les notations précédentes. Si donc $A$ est un modèle de $\mathbf{T}$, cette dernière théorie doit absolument éviter l'énoncé précédent, qui est faux dans $A$ : il s'ensuit qu'il existe une structure $B$ dans $\mathbf{K}$ à laquelle $A$ est isomorphe.

Autrement dit, l'équivalence "$\infty$-élémentaire" (satisfaction des mêmes énoncés infinitaires) est la relation d'isomorphisme. On fera donc un usage général assez simple de la logique infinitaire.
Si $\mathbf{K}$ est une classe quelconque de structures, on notera $Th^{\infty}(\mathbf{K})$ la *classe* des énoncés infinitaires satisfaits dans tous les éléments de $\mathbf{K}$ (qu'on appelera ses *objets*) : c'est une classe propre. On pourra donc utiliser de manière interchangeable les théories infinitaires et les classes fermées par copies isomorphes, commodité de présentation.

Nous distinguerons souvent entre homomorphismes et plongements de $\mathscr{L}$-structures, si bien que les définitions suivantes, assez naturelles, pourront être utiles.

**Définitions 2.21.** Soit $\mathbf{K}$ une catégorie. On dira que $\mathbf{K}$ est une

1. $\mathscr{L}^+$-catégorie, si c'est une sous-catégorie pleine et fermée par copies isomorphes de la catégorie notée $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$, dont les objets sont les $\mathscr{L}$-structures et les morphismes les homomorphismes.
2. $\mathscr{L}$-catégorie, si c'est une sous-catégorie pleine et fermée par copies isomorphes de la catégorie notée $\mathscr{L}\mathbf{St}$, dont les objets sont les $\mathscr{L}$-structures et les morphismes les plongements.

Ces deux notions pourront par exemple permettre de distinguer quels morphismes on considère entre les modèles d'une théorie.

*Notations* 2.22. Soit $\mathbf{T}$ une théorie quelconque. On notera

1. $Mod(\mathbf{T})$ la classe des modèles de $\mathbf{T}$
2. $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T})$ la $\mathscr{L}^+$-catégorie dont la classe sous-jacente est $Mod(\mathbf{T})$
3. $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ la $\mathscr{L}$-catégorie dont la classe sous-jacente est $Mod(\mathbf{T})$.

On sait que les classes axiomatisables par une théorie finitaire se caractérisent de la façon suivante.

**Théorème 2.23.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{K}$ *est la classe des modèles d'une théorie du premier ordre (finitaire).*
2. $\mathbf{K}$ *est stable par ultraproduits et équivalence élémentaire.*
3. $\mathbf{K}$ *est stable par ultraproduits, sous-structures élémentaires et copies isomorphes.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) Evident, puisque la satisfaction des énoncés est stable par ultraproduits (théorème de Łoś, [30] 4.03) et par équivalence élémentaire, par définition.
(2)⇒(3) Evident, puisqu'une sous-structure élémentaire $A$ d'une structure $B$ est élémentairement équivalente à $B$ et deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.
(3)⇒(1) Soit $\mathbf{T} := Th(\mathbf{K})$. Soit $A \vDash \mathbf{T}$. On considère la théorie $\mathbf{T}' := Th(A|A)$ (le diagramme complet de $A$). Soit $i(a)$ une partie finie de $\mathbf{T}'$ ($a$ désigne le uplet des éléments de $A$ apparaissant dans $i$) : comme $A \vDash \bigwedge i(a)$, on a $\mathbf{T} \nvDash \forall x\ \neg \bigwedge i(x/a)$, sinon $A \nvDash \mathbf{T}$ ($x$ est un uplet fini de variables en bijection avec $a$). Il existe donc par définition de $\mathbf{T}$ un objet $M_i$ de $\mathbf{K}$ tel que $M_i \vDash \exists x\ \bigwedge i(x)$, et on peut définir une $\mathscr{L}(A)$-expansion de $M_i$ dans laquelle l'interprétation de $a$ est une réalisation de $\bigwedge i$. On a donc une famille $(\tilde{M}_i)_I$ de $\mathscr{L}(A)$-expansions d'objets $M_i$ de $\mathbf{K}$, où $I$ décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbf{T}'$, telle que $\tilde{M}_i$ satisfait $\bigwedge i$ pour tout $i$. Or, l'ensemble des $I_i := \{j \in I : i \subseteq j\}$ forme une base de filtre de parties de $I$, et est donc contenu dans un ultrafiltre $\mathscr{U}$ (voir [30], section 4.a). Comme $I_i \subseteq \{i \in I : \tilde{M}_i \vDash \bigwedge i\}$, ce dernier ensemble est dans $\mathscr{U}$ pour tout $i$, si bien que l'ultraproduit $\tilde{M} := \prod_I \tilde{M}_i/\mathscr{U}$ est une $\mathscr{L}(A)$-structure qui satisfait $\bigwedge i$, pour tout $i \in I$, par le théorème de Łoś : c'est un modèle de $\mathbf{T}'$. Autrement dit, son $\mathscr{L}$-réduit $M = \prod_I M_i/\mathscr{U}$ est un ultraproduit d'objets de $\mathbf{K}$ dans lequel $A$ se plonge élémentairement : par hypothèse, $A$ est un objet de $\mathbf{K}$ et donc $\mathbf{K} = Mod(\mathbf{T})$.

*Remarque* 2.24. Nous avons autorisé la présence des structures vides. Ce théorème est valable dans ce cadre quelle que soit la définition d'ultraproduit que l'on choisit, c'est-à-dire la définition restreinte aux structures non-vides ou la définition généralisée.

**Définitions 2.25.** Une classe de $\mathscr{L}$-structures **K** est dite *élémentaire* si elle vérifie les conditions équivalentes du théorème précédent.
Une $\mathscr{L}^+$-catégorie ou une $\mathscr{L}$-catégorie sera dite élémentaire, si la classe de ses objets l'est.

### 3.2 Classes inductives et h-inductives

Dans l'étude de la complétude existentielle, certaines classes, dites inductives, jouent un rôle essentiel. On leur associe certains énoncés qui les axiomatisent dans le cas élémentaire. On pourra se reporter à [4] pour trouver la plupart des détails de cette sous-section, à l'exception notoire de la condition (2) des théorèmes 2.31 et 2.34, qui sera reprise dans la partie IV dans un contexte non-élémentaire.

**Définitions 2.26.**
1. • Une formule *inductive basique* est une formule finitaire de la forme $\forall X\ \varphi \Rightarrow \psi$, où $\varphi$ et $\psi$ sont des formules existentielles. Une formule inductive est une conjonction finie de formules inductives basiques.
   • Une théorie *inductive* est un ensemble d'énoncés inductifs. Si **T** est une théorie, l'ensemble de ses conséquences inductives sera noté $\mathbf{T}_{\forall\exists}$.
   • Soit **K** une classe de structures. La théorie inductive de **K**, notée $Th_{\forall\exists}(\mathbf{K})$, est l'ensemble des énoncés inductifs satisfaits dans tout objet de **K**.
2. • Une formule *h-inductive basique* est une formule finitaire de la forme $\forall X\ \varphi \Rightarrow \psi$ où $\varphi$ et $\psi$ sont des formules cohérentes dont les variables libres figurent dans l'ensemble $X$. Une formule h-inductive est une conjonction finie de formules h-inductives basiques.
   • Une théorie *h-inductive* est un ensemble d'énoncés h-inductifs. Si **T** est une théorie, l'ensemble de ses conséquences h-inductives sera noté $\mathbf{T}_i$.
   • Soit **K** une classe de structures. La théorie h-inductive de **K**, notée $Th_i(\mathbf{K})$, est l'ensemble des énoncés h-inductifs satisfaits dans tout objet de **K**.

*Remarques* 2.27.
1. On montre facilement qu'une formule finitaire de la forme $\forall X \exists Y\ \varphi$, où $\varphi$ est une formule sans quanteurs, est logiquement équivalente à une formule inductive, d'où les notations $\mathbf{T}_{\forall\exists}$ et $Th_{\forall\exists}(\mathbf{K})$ ; on trouve aussi $\mathbf{T}_{A_2}$ dans [15], III.1. En fait, les formules h-inductives sont un cas particulier de formules inductives, mais la théorie des modèles des théories h-inductives, ou logique positive, est une généralisation de la logique du premier ordre classique, d'où notre présentation, d'après [4] (voir aussi [3]). Autrement dit, tout ce qui est démontré pour les formules et théories inductives est contenu dans les résultats "positifs" analogues, ce qui sera vrai aussi des résultats sur la complétude existentielle de la section 4 du présent chapitre.
2. Une théorie inductive (h-inductive) est axiomatisée par ses conséquences inductives (h-inductives) basiques.

Pour tenir compte du cas "classique" (théories inductives) et du cas "positif" (théories h-inductives), on introduit la définition suivante.

**Définition 2.28.** Une catégorie $\mathscr{C}$ sera dite *inductive* si tout diagramme inductif (c'est-à-dire dirigé) dans $\mathscr{C}$ possède une colimite dans $\mathscr{C}$.

**Proposition 2.29** ([4], p.7).
1. *Si* **T** *est une théorie inductive,* $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ *est une* $\mathscr{L}$*-catégorie inductive.*

2. *Si* $\mathbf{T}$ *est une théorie h-inductive,* $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T})$ *est une* $\mathscr{L}^+$*-catégorie inductive.*

Les classes inductives et h-inductives sont essentiellement liées aux plongements existentiellement clos et aux immersions.

**Lemme 2.30.** 1. ([15] III.1, lemme 1) Un plongement $f : A \hookrightarrow B$ est existentiellement clos si et seulement si il existe un plongement $g : B \hookrightarrow C$, tel que $g \circ f$ est élémentaire.

2. Si $\mathbf{K}$ est une classe élémentaire et $A \vDash Th_{\forall\exists}(\mathbf{K})$, il existe un plongement existentiellement clos de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$.

**Théorème 2.31** (d'après [15] III.1, théorème 15)**.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe élémentaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{K}$ *est stable par limites inductives de plongements*
2. $\mathbf{K}$ *est stable par sous-structures existentiellement closes*
3. $\mathbf{K}$ *est la classe des modèles d'une théorie inductive.*

*Remarque* 2.32. Une autre formulation du théorème consiste à dire qu'une $\mathscr{L}$-catégorie élémentaire est inductive si et seulement si c'est la $\mathscr{L}$-catégorie des modèles d'une théorie inductive, précisément de sa théorie inductive.

**Lemme 2.33.** 1. ([4], lemme 22) Un homomorphisme $f : A \to B$ est une immersion si et seulement si il existe un homomorphisme $g : B \to C$, tel que $g \circ f$ est élémentaire.

2. Si $\mathbf{K}$ est une classe élémentaire et $A \vDash Th_i(\mathbf{K})$, il existe une immersion de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$.

**Théorème 2.34** (d'après [4], théorème 23)**.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe élémentaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{K}$ *est stable par limites inductives d'homomorphismes*
2. $\mathbf{K}$ *est stable par sous-structures immergées*
3. $\mathbf{K}$ *est la classe des modèles d'une théorie h-inductive.*

*Remarque* 2.35. Une autre formulation du théorème consiste à dire qu'une $\mathscr{L}^+$-catégorie élémentaire est inductive si et seulement si c'est la $\mathscr{L}^+$-catégorie des modèles d'une théorie h-inductive, précisément de sa théorie h-inductive.

### 3.3 Classes universelles et h-universelles

Nous introduisons dans la généralité de la logique infinitaire certaines classes, qui dans le cas élémentaire sont des classes (h-)inductives jouant un rôle central dans la théorie de la complétude géométrique que nous développons dans la troisième partie. Sans doute, beaucoup des résultats généraux qui suivent font-ils partie du folklore de la logique ; nous produisons quand même certaines preuves, instructives pour la suite.

**Définitions 2.36.** 1. Une formule *universelle infinitaire basique* est une formule de la forme $\forall X \bigwedge \Phi(X) \Rightarrow \bigvee \Psi(X)$, où $\Phi$ et $\Psi$ sont des ensembles de formules atomiques dont les variables libres sont dans l'ensemble $X$.

2. Une formule *universelle basique* est donc de la forme $\forall X \; \bigwedge \Phi \Rightarrow \bigvee \Psi$, où $\Phi$ et $\Psi$ sont deux ensembles finis de formules atomiques.
3. Une formule *h-universelle infinitaire basique* est une formule universelle infinitaire basique dans laquelle $\Psi$ est vide, autrement dit de la forme $\forall X \; \bigwedge \Phi \Rightarrow \bot$.
4. Une formule *h-universelle basique* est donc une formule de la forme $\forall X \; \neg\varphi$, où $\varphi$ est une conjonction finie de formules atomiques.

**Définitions 2.37.** Soient $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures et $\mathbf{T}$ une théorie infinitaire.

1. La théorie universelle infinitaire de $\mathbf{K}$, notée $Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K})$, est la classe des énoncés universels infinitaires basiques satisfaits dans tous les objets de $\mathbf{K}$. On définit de même la théorie h-universelle infinitaire de $\mathbf{K}$, notée $Th^{\infty}_{\forall\neg}(\mathbf{K})$.
2. On définit de manière analogue la théorie universelle de $\mathbf{K}$, notée $Th_{\forall}(\mathbf{K})$ et la théorie h-universelle de $\mathbf{K}$, notée $Th_{\forall\neg}(\mathbf{K})$.
3. On notera $\mathbf{T}^{\infty}_{\forall}$ la classe des conséquences universelles infinitaires basiques de $\mathbf{T}$, et $\mathbf{T}^{\infty}_{\forall\neg}$ la classe de ses conséquences h-universelles infinitaires basiques.
4. On définit $\mathbf{T}_{\forall}$ comme l'ensemble des conséquences universelles, et $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ l'ensemble des conséquences h-universelles de $\mathbf{T}$.

### Théories universelles et h-universelles

L'existence d'homomorphismes ou de plongements dans un objet d'une classe se caractérise syntactiquement par les formules précédentes.

**Lemme 2.38.** Soient $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures, et $A$ une $\mathscr{L}$-structure.

1. $A \vDash Th^{\infty}_{\forall\neg}(\mathbf{K})$ si et seulement si il existe un homomorphisme de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$.
2. $A \vDash Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K})$ si et seulement si il existe un plongement de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$.

*Démonstration.* (1) Soit $\mathbf{T} := Th^{\infty}_{\forall\neg}(\mathbf{K})$, et soit $A \vDash \mathbf{T}$. Soit $\Phi$ le diagramme atomique de $A$, et soit $X$ un ensemble de variables en bijection avec $A$. Supposons qu'aucun objet de $\mathbf{K}$ ne reçoit un homomorphisme de domaine $A$ : cela signifie que l'énoncé infinitaire $\forall X \; \bigwedge \Phi(X/A) \Rightarrow \bot$ est dans $\mathbf{T}$, si bien que $A$ le satisfait. Or, c'est impossible, puisque $A$ lui-même est une réalisation de $\Phi(X/A)$.
(2) Soit $\mathbf{T} := Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K})$. Supposons que $A \vDash \mathbf{T}$ et que $A$ ne se plonge dans aucun objet de $\mathbf{K}$. En particulier, aucun homomorphisme éventuel de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$ n'est un plongement. Soit $\Phi(A)$ le diagramme atomique de $A$ et soit $\Psi(A)$ l'anti-diagramme atomique de $A$ (autrement dit, l'ensemble des $\mathscr{L}(A)$-énoncés atomiques qui ne sont pas satisfaits dans $A$). Soit $X$ un ensemble de variables en bijection avec $A$. Soit $B$ un objet de $\mathbf{K}$ : un homomorphisme de $A$ dans $B$ (qui existe d'ailleurs par (1)) correspond à une réalisation dans $B$ de l'ensemble $\Phi(X)$ ; puisqu'un tel homomorphisme ne peut être un plongement, l'une des formules de $\Psi$ est nécessairement vérifiée par cette réalisation dans $B$. Autrement dit, on a $B \vDash \forall X \; \bigwedge \Phi(X) \Rightarrow \bigvee \Psi(X)$. Comme cela est vrai pour tout objet $B$ de $\mathbf{K}$, cet énoncé est dans $\mathbf{T}$, si bien que $A$ en est un modèle. Or, c'est précisément impossible, puisque $A$ réalise lui-même son diagramme tout en évitant son anti-diagramme. Par conséquent, $A$ se plonge dans un objet de $\mathbf{K}$.

Comme on l'a vu pour les diagrammes, les énoncés basiques de la forme appropriée suffisent à axiomatiser ces théories.

**Lemme 2.39.** Soit $\mathbf{T}$ une $\mathscr{L}$-théorie finitaire.

1. La théorie $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ est axiomatisée par l'ensemble de ses énoncés h-universels basiques.
2. La théorie $\mathbf{T}_{\forall}$ est axiomatisée par l'ensemble de ses énoncés universels basiques.

*Démonstration.* En mettant sa partie sans quanteurs sous forme normale conjonctive (voir [10] ch.1, 3.4), on voit que toute formule universelle est équivalente à une conjonction finie de formules universelles basiques.

Dans le cas de la classe des modèles d'une théorie finitaire, on peut simplifier le lemme 2.38 en utilisant un argument de compacité.

**Proposition 2.40.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une* $\mathscr{L}$*-théorie finitaire et* $A$ *une* $\mathscr{L}$*-structure.*

1. *On a* $A \models \mathbf{T}_{\forall\neg}$ *si et seulement si il existe un homomorphisme de* $A$ *dans un modèle de* $\mathbf{T}$*.*
2. *On a* $A \models \mathbf{T}_{\forall}$ *si et seulement si il existe un plongement de* $A$ *dans un modèle de* $\mathbf{T}$*.*

### Classes universelles

**Théorème 2.41.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures, fermée par copies isomorphes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{K}$ *est fermée par sous-structures.*
2. $\mathbf{K}$ *est la classe des modèles d'une théorie universelle infinitaire basique.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) Soient $\mathbf{T} := Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K})$ et $A \models \mathbf{T}$. Par le lemme 2.38, $A$ se plonge dans un objet de $\mathbf{K}$, si bien que $A$ est dans $\mathbf{K}$, par l'hypothèse (1). Ainsi, on a $\mathbf{K} = Mod(\mathbf{T})$.
(2)⇒(1) Le résultat est évident.

**Définitions 2.42.** Une classe de $\mathscr{L}$-structures $\mathbf{K}$ sera dite *universelle* si elle possède les propriétés du théorème précédent.
Une $\mathscr{L}^+$-catégorie ou une $\mathscr{L}$-catégorie $\mathbf{K}$ sera dite *universelle* si la classe de ses objets est universelle.

**Proposition-Définition 2.43.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures. La classe des structures qui se plongent dans un objet de* $\mathbf{K}$ *est la plus petite classe universelle contenant* $\mathbf{K}$*. C'est aussi la classe des modèles de* $Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K})$*. Nous l'appellerons* classe universelle engendrée par $\mathbf{K}$, *et la noterons* $\mathbf{U_K}$.

**Corollaire 2.44.** Soit $\mathbf{K}$ une classe universelle élémentaire. Alors, $\mathbf{K}$ est la classe des modèles de ses conséquences universelles.

*Démonstration.* Nous donnons une preuve un peu originale. Soit encore $\mathbf{T} := Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K})$, et soit $\mathbf{S}$ une axiomatisation finitaire de $\mathbf{K}$. Soit $\chi \in \mathbf{T}$ : $\chi$ est de la forme $\forall X \ \bigwedge \Phi(X) \Rightarrow \bigvee \Psi(X)$, où $\Phi$ et $\Psi$ sont des ensembles quelconques de formules atomiques dont les variables figurent dans l'ensemble $X$. Par choix de $\mathbf{S}$, on a $\mathbf{S} \models \chi$. Soit alors $C$ un ensemble de constantes additionnelles en bijection avec $X$ : la $\mathscr{L}(C)$-théorie $\mathbf{S} \cup \Phi(C) \cup \{\neg\psi(C) : \psi \in \Psi\}$ est donc inconsistente. Par le théorème de compacité de la logique du premier ordre, il existe deux sous-ensembles finis $\Phi_0(Y)$ et $\Psi_0(Y)$ de $\Phi$ et $\Psi$ respectivement, où $Y \subseteq X$ est fini, tels que $\mathbf{S} \cup \Phi_0(C) \cup \{\neg\psi(C) : \psi \in \Psi_0(C)\}$ est inconsistent. Autrement dit, on a $\mathbf{S} \models \forall Y \ \bigwedge \Phi_0 \Rightarrow \bigvee \Psi_0$. Appelons $\chi_0$ ce dernier énoncé finitaire.

- $\chi_0$ est vrai dans $\mathbf{K}$, donc $\chi_0 \in Th_\forall(\mathbf{K})$ ;
- on a $\chi_0 \vDash \chi$.

Par conséquent, les théories $Th^\infty_\forall(\mathbf{K})$ et $Th_\forall(\mathbf{K})$ ont les mêmes modèles, donc $\mathbf{K}$ est la classe des modèles de $Th_\forall(\mathbf{K})$, par le théorème.

**Corollaire 2.45.** Si $\mathbf{K}$ est une classe de $\mathscr{L}$-structures et si $\mathbf{U_K}$ est élémentaire, alors $\mathbf{U_K} = Mod(Th_\forall(\mathbf{K}))$.

Voici quelques exemples de classes universelles élémentaires ou non.

*Exemples* 2.46.
1. La classe des anneaux intègres est universelle et élémentaire.
2. On dira qu'un anneau intègre est *formellement réel inférieurement* si il vérifie l'axiome $\forall X\ \sum_X x^2 = 0 \Rightarrow \bigwedge_X x = 0$ pour tout ensemble fini de variables $X$. La classe des anneaux intègres FRI est universelle et élémentaire, ainsi que celle des anneaux intègres totalement ordonnés.
3. La classe des ensembles totalement ordonnés est universelle et élémentaire.
4. Toute classe spéciale (voir la sous-section suivante) est universelle.

### Classes h-universelles

On peut reproduire dans le cas des homomorphismes ce qui a été fait avec les plongements et les classes universelles.

**Théorème 2.47.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{K}$ *est stable par pré-structures et copies isomorphes.*
2. $\mathbf{K}$ *est la classe des modèles d'une théorie h-universelle basique infinitaire.*

*Démonstration.* La preuve est tout-à-fait analogue à celle du théorème 2.41.

**Définitions 2.48.** Une classe de $\mathscr{L}$-structures $\mathbf{K}$ sera dite *h-universelle* si elle possède les propriétés du théorème précédent.
Une $\mathscr{L}^+$-catégorie ou une $\mathscr{L}$-catégorie $\mathbf{K}$ sera dite *h-universelle* si la classe de ses objets est h-universelle.

**Proposition-Définition 2.49.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures. La classe des structures qui se continuent dans un objet de* $\mathbf{K}$ *est la plus petite classe h-universelle contenant* $\mathbf{K}$*. C'est aussi la classe des modèles de* $Th^\infty_{\forall\neg}(\mathbf{K})$*. Nous l'appellerons* classe h-universelle engendrée par $\mathbf{K}$, *et la noterons* $h\mathbf{U_K}$.

**Corollaire 2.50.** Soit $\mathbf{K}$ une classe h-universelle élémentaire. Alors, $\mathbf{K}$ est la classe des modèles de ses conséquences h-universelles.

*Démonstration.* Ici encore, la preuve est analogue à celle donnée dans le cas universel.

**Corollaire 2.51.** Si $\mathbf{K}$ est une classe de $\mathscr{L}$-structures et si $h\mathbf{U_K}$ est élémentaire, alors $h\mathbf{U_K} = Mod(Th_{\forall\neg}(\mathbf{K}))$.

### 3.4 Classes spéciales et quasivariétés

Les résultats de cette sous-section, sur les classes spéciales, bien qu'elles n'y soient pas nommées ainsi, et que notre présentation en diffère un peu, sont essentiellement tirés du chapitre 9 de [18]. Notamment, nous dirons ici "présenté *au sens algébrique*" là où Wilfrid Hodges dit "présenté". La raison apparaîtra avec les théories limite un peu plus loin.

#### Présentations

Le diagramme atomique d'une structure permet de caractériser les algèbres basées sur cette structure. La notion générale est celle de *présentation*, utilisée couramment en algèbre.

**Définitions 2.52.** Une ($\mathscr{L}$-)présentation est un couple $(X, \Phi)$, où $X$ est un ensemble et $\Phi$ est un ensemble de $\mathscr{L}(X)$-énoncés atomiques.
Soient $\mathbf{K}$ une $\mathscr{L}^+$-catégorie et $(X, \Phi)$ une $\mathscr{L}$-présentation. Un modèle de $(X, \Phi)$ dans $\mathbf{K}$ est une $\mathscr{L}(X)$-structure, modèle de $\Phi$, dont le $\mathscr{L}$-réduit est dans $\mathbf{K}$. Gardant à l'esprit les points de vue équivalents d'une $\mathscr{L}(X)$-structure et d'une application $f : X \to A$ dans une $\mathscr{L}$-structure, nous noterons $(A, f)$ un modèle de la présentation $(X, \Phi)$, mettant l'accent sur la $\mathscr{L}$-structure $A$.

*Exemple* 2.53. Si $f : A \to B$ est un homomorphisme de $\mathscr{L}$-structures, $(B, f)$ est naturellement un modèle de la présentation $(A, D^+(A))$.

**Définitions 2.54.** Soient $P := (X, \Phi)$ une $\mathscr{L}$-présentation et $A$ un objet de $\mathbf{K}$.
Un modèle $(A, f)$ de $P$ sera dit présenté par $P$ *au sens algébrique (dans* $\mathbf{K}$*)* si

1. $(A, f)$ est un modèle initial de $P$ dans $\mathbf{K}$
2. $A$ est engendrée par $f(X)$.

On dira qu'un objet $A$ de $\mathbf{K}$ admet la présentation $P$ *au sens algébrique* (dans $\mathbf{K}$) si il peut être enrichi en un modèle de $P$ présenté au sens algébrique par $P$ dans $\mathbf{K}$.

*Exemple* 2.55. Si $A$ est une $\mathscr{L}$-structure, $(A, 1_A)$ est présentée par $(A, D^+(A))$ dans la $\mathscr{L}^+$-catégorie de toutes les $\mathscr{L}$-structures.

**Définition 2.56.** Soit $\mathbf{K}$ une $\mathscr{L}^+$-catégorie. On dira que $\mathbf{K}$ admet les présentations (*au sens algébrique*) si toute $\mathscr{L}$-présentation présente dans $\mathbf{K}$ un objet de $\mathbf{K}$ (au sens algébrique).

Les présentations sont essentiellement liées à une certaine classe d'énoncés, qui reflètent leur propriété universelle.

**Définitions 2.57.**
1. Un énoncé *universel Horn (basique)* est un énoncé de la forme $\forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, où $\Phi$ est un ensemble de formules atomiques dont les variables sont dans $X$ et $\psi$ une formule de même nature ou bien la formule $\perp$. Si $\psi$ n'est pas $\perp$, on dira que l'énoncé est *strict*. On utilisera la notation "uHs" pour "universel Horn strict" (basique).
2. Une théorie uHs sera un ensemble d'énoncés uHs.
3. Si $\mathbf{K}$ est une classe de $\mathscr{L}$-structures, la théorie uHs (infinitaire) de $\mathbf{K}$, notée $Th_W^\infty(\mathbf{K})$, désignera la classe des énoncés uHs infinitaires satisfaits dans tous les objets de $\mathbf{K}$. On définit de même $Th_W(\mathbf{K})$, la théorie uHs finitaire de $\mathbf{K}$.

### Classes spéciales

La $\mathscr{L}^+$-catégorie des $\mathscr{L}$-structures admet les présentations.
De manière générale, on peut donner une caractérisation des classes de structures qui ont cette propriété.

**Théorème 2.58** ([18] 9.2.2). *Soit* $\mathbf{K}$ *une* $\mathscr{L}^+$*-catégorie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{K}$ *admet les présentations au sens algébrique*
2. $\mathbf{K}$ *est stable par produits quelconques et sous-structures*
3. $\mathbf{K}$ *est la* $\mathscr{L}^+$*-catégorie des modèles d'une théorie universelle Horn stricte (infinitaire en général).*

**Définition 2.59.** Une $\mathscr{L}^+$-catégorie vérifiant les propriétés équivalentes du théorème sera dite *spéciale*. C'est notre terminologie, et l'on rencontre quelquefois le terme de "quasivariété infinitaire" (par exemple, dans [1]).
On appliquera la même terminologie à la classe des objets d'une $\mathscr{L}^+$-catégorie spéciale.

*Remarque* 2.60. Cette notion de classe spéciale joue un rôle essentielle dans les parties II et III, et est l'ingrédient logique fondamental qui sous-tend l'analyse du théorème des zéros. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que dans [6], on peut trouver une notion de classe spéciale (définition 8.6.5) qui n'est pas à l'origine de notre terminologie ; il n'y a donc aucune raison pour que les deux notions coïncident. Il faut être d'autant plus prudent qu'il est question dans [6] de radicaux, notion que nous introduirons nous-mêmes relativement aux classes spéciales, sans rapport *a priori* !

**Proposition 2.61.** *Une* $\mathscr{L}^+$*-catégorie spéciale* $\mathbf{K}$ *est cocomplète. Autrement dit, tout diagramme dans* $\mathbf{K}$ *possède une colimite dans* $\mathbf{K}$*.*

*Démonstration.* A tout diagramme $J \to \mathbf{K}$, on peut associer une présentation $\mathscr{P}$ et donc un objet de $\mathbf{K}$ présenté par $\mathscr{P}$, qui fournit la colimite voulue.

**Proposition-Définition 2.62** ([18] 9.2.3). *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures.*

1. *La classe de toutes les structures qui se plongent dans un produit d'objets de* $\mathbf{K}$ *est la plus petite classe spéciale contenant* $\mathbf{K}$*. Nous l'appellerons* classe spéciale engendrée par $\mathbf{K}$, *et nous la noterons* $\mathbf{W_K}$*.*
2. *La classe spéciale engendrée par* $\mathbf{K}$ *est axiomatisée par* $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K})$*, la classe des énoncés uHs infinitaires valides dans tous les objets de* $\mathbf{K}$*.*
3. $\mathbf{K}$ *est une classe spéciale si et seulement si* $\mathbf{K} = \mathbf{W_K}$*.*

*Remarque* 2.63. Si $\mathbf{K}$ est une classe de structures, on a $\mathbf{W_K} = \mathbf{W_{U_K}}$.

Si $\mathbf{W}$ est une classe spéciale, on notera aussi $\mathbf{W}^*$ la sous-classe des objets non terminaux de $\mathbf{W}$. Supposons que $\mathbf{K}$ est une classe de structures et $A$ un objet de $\mathbf{W}^*_{\mathbf{K}}$. Par définition de la quasivariété engendrée, $A$ se plonge dans un produit *non vide* $\prod_I M_i$ d'objets de $\mathbf{K}$, puisqu'il n'est pas terminal. Chaque projection du produit témoigne donc qu'il existe un homomorphisme de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$ ; autrement dit, on a $A \in h\mathbf{U_K}$, ce que nous résumons dans l'énoncé suivant, dont nous ferons usage à plusieurs reprises.

**Proposition 2.64.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures. Alors,* $\mathbf{W}^*_{\mathbf{K}}$ *est une sous-classe de* $h\mathbf{U_K}$*.*

**Quasivariétés**

**Proposition 2.65** ([18] 9.2.3)**.** *Soit* **K** *une classe élémentaire spéciale. Alors,* **K** *est la classe des modèles de sa théorie universelle Horn stricte finitaire.*

**Définition 2.66.** On appellera quasivariété une $\mathscr{L}^+$-catégorie élémentaire spéciale, ou par abus de langage une classe élémentaire spéciale.

**Proposition 2.67** ([18] 9.2.3)**.** *Soit* **K** *une classe élémentaire.*

1. *La classe spéciale* $\mathbf{W_K}$ *engendrée par* **K** *est la classe des modèles de* $Th_W(\mathbf{K})$*. C'est la plus petite quasivariété contenant* **K***, qui sera appelée* quasivariété engendrée par **K**.
2. **K** *est une quasivariété si et seulement si* $\mathbf{K} = \mathbf{W_K}$.

Nous donnons quelques exemples de théories universelles Horn strictes et de quasivariétés.

*Exemples* 2.68.

1. Toute variété est une quasivariété (voir la sous-section suivante).
2. Si $\mathscr{L}$ est le langage $\langle +, -, \times, 0, 1 \rangle$ dit des anneaux, la $\mathscr{L}^+$-catégorie des anneaux réduits, vus comme $\mathscr{L}$-structures, est une quasivariété. En revanche, la sous-catégorie des anneaux intègres n'est pas une quasivariété, et celle des corps non plus. La quasivariété engendrée par les corps (algébriquement clos) est la quasivariété des anneaux réduits.
3. Si $\mathscr{L} = \langle +, -, 0 \rangle$, la théorie des groupes abéliens sans torsions dans le langage $\mathscr{L}$ est une théorie de Horn (universelle, stricte). La théorie des groupes abéliens sans torsions et divisibles, dans ce langage, n'a pas d'axiomatisation Horn, sinon la $\mathscr{L}^+$-catégorie de ces groupes serait une quasivariété, ce qui est impossible, puisqu'elle n'est même pas universelle : $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ est un sous-groupe non divisible.
4. La $\langle \leq \rangle^+$-catégorie **K** des ensembles partiellement ordonnés est une quasivariété. Cependant, la sous-catégorie des ensembles totalement ordonnés n'est pas une quasivariété, puisqu'un produit d'ordres totaux n'est pas toujours un ordre total, ce qu'on discerne en remarquant que l'axiome qui exprime qu'un ordre est total est universel, mais pas Horn.
5. La quasivariété engendrée dans le langage des anneaux par la catégorie des corps réels clos est la catégorie des anneaux vérifiant l'axiome $\forall x_1 \ldots x_n \ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ pour tout $n \geq 1$ (voir 2.46). En effet, ces axiomes sont valides dans les corps réels clos et stables par produits et sous-structures, et si $A$ est un anneau qui les vérifie, l'idéal $(0)$ est réel, ce qui signifie qu'il est égal à son radical réel : on peut plonger $A$ dans le produit de ses quotients par un idéal premier réel, donc dans autant de corps réels clos (voir [7], chapitres 1 et 4).
6. Un anneau (non nécessairement commutatif ou unitaire) réticulé (c'est-à-dire ordonné en treillis) est appelé un $f$-anneau, si pour tous éléments $a, b$ de $A$ et $x$ du cône positif de $A$, $a \wedge b = 0$ implique que $a \wedge bx = a \wedge xb = 0$. Or, tout $f$-anneau réduit est produit sous-direct d'anneaux intègres totalement ordonnés. Puisque tout anneau commutatif unitaire totalement ordonné se plonge dans un corps ordonné réel clos, on en déduit que dans le langage des anneaux réticulés, la quasivariété engendrée par les corps ordonnés réels clos est la catégorie des $f$-anneaux réduits (voir [6] 9.1.1 et 9.3.1).

## 3.5 Variétés et algèbre universelle

Les notions abordées dans cette sous-section sont tirées du chapitre 9 de [18], ainsi que de [29], qui mentionne l'apparition des algèbres basées en groupes dans [19].

### Variétés

Parmi les classes spéciales, certaines ont une propriété supplémentaire : la stabilité par images homomorphes. Il est remarquable que dans ce cas, elles sont automatiquement élémentaires.

**Théorème 2.69** ([18] 9.2.8)**.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{K}$ *est close par produits quelconques, sous-structures et images homomorphes*
2. $\mathbf{K}$ *est la classe des modèles d'un ensemble d'énoncés de la forme* $\forall X\ \varphi$*, où* $\varphi$ *est une formule atomique.*

**Définitions 2.70.**

1. Une classe de structures ou une $\mathscr{L}^+$-catégorie vérifiant les propriétés du théorème sera appelée ici une *variété*.
2. Une variété dans un langage fonctionnel (qui ne comporte pas de symboles relationnels) sera appelée ici une *variété équationnelle*. Une théorie de la forme évoquée dans le théorème et dans un langage fonctionnel sera appelée une *théorie équationnelle*.

Comme précédemment, on peut parler de variété engendrée.

**Proposition-Définition 2.71.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures. La classe des images homomorphes de sous-structures de produits d'éléments de* $\mathbf{K}$*, est la plus petite variété contenant* $\mathbf{K}$*. Elle sera notée* $\mathbf{V_K}$ *et appelée la* variété engendrée par $\mathbf{K}$.
*Si* $\mathbf{K} = Mod(\mathbf{T})$*, on notera* $\mathbf{V_T}$ *pour* $\mathbf{V_K}$ *;* $\mathbf{V_T}$ *est axiomatisée par toutes les conséquences de* $\mathbf{T}$ *de la forme* $\forall X\ \varphi$*, où* $\varphi$ *est une formule atomique.*

### Algèbre universelle

L'objet de l'algèbre universelle au sens propre est l'étude des variétés équationnelles.

**Définition 2.72.** Soit $f : A \to B$ un homomorphisme dans une variété équationnelle $\mathbf{V}$. Le noyau de $f$, noté $Ker(f)$, est l'ensemble des couples $(a,b) \in A^2$ tels que $f(a) = f(b)$.

**Proposition 2.73** (voir [18] p.427)**.** *Le noyau d'un homomorphisme* $f : A \to B$ *dans une variété équationnelle est une relation d'équivalence et une sous-structure (de la structure produit sur* $A^2$*).*

On remarque que le noyau d'un homomorphisme dans $\mathbf{V}$ est un objet de $\mathbf{V}$.

**Définition 2.74.** Soit $A$ un objet d'une variété équationnelle $\mathbf{V}$. Une congruence sur $A$ est une sous-structure de $A^2$ qui est aussi une relation d'équivalence.

Une congruence est *toujours* le noyau d'un homomorphisme, ce qui permet de démontrer un théorème d'isomorphie omniprésent en algèbre.

**Théorème 2.75.** *Soient $T$ une congruence sur un objet $A$ d'une variété équationnelle* $\mathbf{V}$ *et* $f : A \to B$ *un homomorphisme dans* $\mathbf{V}$.

1. *$T$ est le noyau d'un homomorphisme dans* $\mathbf{V}$*, appelé la projection canonique* $A \to A/T$.
2. *Si* $T \subseteq Ker(f)$*, $f$ se factorise de manière unique à travers la projection canonique* $A \to A/T$.
3. *On a un théorème d'isomorphie : l'image $f(A)$ de $f$ est isomorphe au quotient $A/Ker(f)$. Autrement dit, deux homomorphismes de même domaine dans* $\mathbf{V}$ *ont une image isomorphe si et seulement si ils ont le même noyau.*

*Démonstration.* (1) Le domaine de la $\mathscr{L}$-structure $A/T$ est le quotient de $A$ par la relation d'équivalence $T$. Comme $T$ est une sous-structure de $A^2$, cela entraîne automatiquement que la définition des opérations dans $A/T$ sur les représentants de chaque classe définit une $\mathscr{L}$-structure, et que la projection ensembliste $A \to A/T$ est un homomorphisme. Comme $A/T$ est alors l'image d'un homomorphisme de domaine $A$, la $\mathscr{L}$-structure $A/T$ est un objet de $\mathbf{V}$.
(2) Notons $\pi : A \twoheadrightarrow A/T$ la projection canonique de (1). Si $T \subseteq Ker(f)$, définissons $\tilde{f} : A/T \to B$ en posant $\tilde{f}([a]) := f(a)$, pour tout $a \in A$. On vérifie que cela définit bien un homomorphisme tel que $\tilde{f} \circ \pi = f$, et unique avec cette propriété, par construction.
(3) Par (2), on peut factoriser $f$ par la projection $\pi : A \twoheadrightarrow A/Ker(f)$ : l'homomorphisme $\tilde{f}$ défini comme en (2) a pour image $f(A)$. Si $a,b \in A$ et $\tilde{f}([a]) = \tilde{f}([b])$, c'est que $f(a) = f(b)$, donc $(a,b) \in Ker(f)$, donc $[a] = [b]$ : $\tilde{f}$ est un isomorphisme.

Donnons quelques exemples de théories ou de variétés équationnelles.

*Exemples* 2.76.

1. La théorie des ensembles munis d'une bijection interne $f$ dans le langage $\langle f, f^{-1} \rangle$ est équationnelle ; elle ne l'est pas dans le langage $\langle f \rangle$.
2. La théorie des groupes dans le langage des groupes $\langle *, ^{-1}, e \rangle$ est équationnelle, donc la catégorie des groupes peut être décrite comme une variété équationnelle dans ce langage. Une congruence correspond ici à un sous-groupe normal. Il en est de même de la théorie des groupes abéliens.
3. La théorie des anneaux dans le langage des anneaux $\langle +, -, \times, 0, 1 \rangle$ est équationnelle. Les congruences d'un anneau correspondent alors à ses idéaux. Cette théorie est la variété engendrée par la $\mathscr{L}^+$-catégorie des corps algébriquements clos, car tout anneau est un quotient d'un anneau universel intègre. La théorie des anneaux réduits dans ce même langage n'est pas équationnelle : il peut apparaître des éléments nilpotents dans l'image d'un anneau réduit (penser à l'exemple typique $\mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\varepsilon] := \mathbb{Z}[X]/(X^2)$).
4. En revanche, la théorie des anneaux dans le langage des demi-anneaux $\langle +, \times, 0, 1 \rangle$ n'est pas équationnelle, tandis que celle des demi-anneaux l'est. En effet, une sous-structure d'un anneau, dans ce langage, n'est en général qu'un demi-anneau.
5. La théorie des treillis distributifs dans le langage $\langle \wedge, \vee, 1, 0 \rangle$ est équationnelle, mais ici les congruences d'un treillis ne correspondent pas à ses idéaux ou à ses filtres (voir [21]). La théorie des algèbres de Boole dans ce langage n'est pas équationnelle ; elle le devient si l'on ajoute un symbole unaire pour désigner le complément.

**Variétés d'algèbres basées en groupes**

Nous mentionnons un cas particulier de variétés équationnelles. Il s'agit des variétés d'algèbres basées en groupes, introduites par P.Higgins dans [19].

**Définitions 2.77.** Soit $\mathscr{L}$ un langage fonctionnel unisorte contenant le langage $\{+,-,0\}$ des groupes, noté additivement comme pour les groupes abéliens.

1. Une $\mathscr{L}$-structure $A$ est une algèbre basée en groupe dans le langage $\mathscr{L}$ si c'est une $\mathscr{L}$-structure, si son réduit au langage des groupes est un groupe (pas nécessairement abélien !), et si pour tout symbole additionnel $F$ d'arité $n$ positive, on a $F(0,\dots,0)=0$. La $\mathscr{L}^+$-catégorie des algèbres basées en groupes dans le langage $\mathscr{L}$ est une variété.
2. Une sous-variété équationnelle $\mathbf{V}$ de la variété des algèbres basées en groupes dans le langage $\mathscr{L}$ est appelée simplement une variété d'algèbres basées en groupes.

Dans tout le reste de ce paragraphe, $\mathbf{V}$ est une variété d'algèbres basées en groupes dans le langage $\mathscr{L}$.
Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathbf{V}$. Le noyau de $f$ au sens des groupes est un sous-groupe normal de $A$ qui possède les propriétés suivantes.

**Définition 2.78.** Soit $A$ un objet de $\mathbf{V}$. Un idéal de $A$ est un sous-groupe normal $I$ tel que pour tout symbole additionnel $F$ d'arité positive $n$, pour tous $n$-uplets $\overline{a}$ d'éléments de $I$ et $\overline{b}$ d'éléments de $A$, on a

1. $F(\overline{a}) \in I$
2. $-F(\overline{a}) - F(\overline{b}) + F(\overline{a}+\overline{b}) \in I$.

**Définition 2.79.** L'élément $-F(\overline{a}) - F(\overline{b}) + F(\overline{a}+\overline{b})$ de $A$ de la définition est appelé commutateur de $\overline{a},\overline{b}$ et $F$, et il est noté $[\overline{a},\overline{b};F]$.

La notion d'idéal permet de manier un peu plus concrètement les congruences dans les variétés d'algèbres basées en groupes. Si $I$ est un idéal de $A$, le quotient groupe-théorique $A/I$ peut être naturellement muni d'une $\mathscr{L}$-structure qui en fait une algèbre de $\mathbf{V}$, qu'on notera encore $A/I$.

**Proposition 2.80** ([29], lecture 4, §1)**.** *Soit $A$ un objet de* $\mathbf{V}$. *L'application $\Phi$ qui associe à une congruence $T$ de $A$ la classe d'équivalence de* 0 *est une bijection de l'ensemble des congruences de $A$ sur l'ensemble des idéaux de $A$.*
*En particulier, on a pour toute congruence $T$ de $A$, $A/T = A/\Phi(T)$.*

Voici quelques exemples de variétés d'algèbres basées en groupes.

*Exemples* 2.81. 1. La théorie des anneaux différentiels dans le langage $\langle +,-,\times,d,0,1\rangle$ est équationnelle, et on voit facilement que les opérateurs additionnels à la structure de groupe sont "compatibles". Les congruences d'un anneau différentiel $A$ sont essentiellement ses idéaux différentiels, c'est-à-dire donc ses idéaux au sens des algèbres basées en groupes.

2. Les anneaux avec endomorphisme forment une variété d'algèbres basées en groupes dans le langage $\langle +, -, \times, \sigma, 0, 1\rangle$. Les idéaux sont les $\sigma$-idéaux (fermés par $\sigma$). Comme dans le cas précédent, les commutateurs associés à $\sigma$ sont triviaux, parce que $\sigma$ est un endomorphisme de la structure de groupe sous-jacente.
3. De manière générale, on peut traiter des cas divers d'expansions d'anneaux par des symboles fonctionnels.
4. La catégorie des anneaux de Lie (groupes abéliens munis d'un crochet de Lie) s'interprète comme une variété d'algèbres basées en groupes dans un langage approprié $\langle +, [\,|\,], -, 0, \rangle$.

### 3.6 Théories limite et catégories localement finiment présentables

Les théories les plus générales, dont les classes de modèles possèdent de "bonnes propriétés algébriques", englobent les quasivariétés. Leurs catégories de modèles possèdent une propriété relative aux présentations, et leurs objets peuvent être reconstitués par certaines colimites d'objets de présentation finie. Au sujet de ces théories "limite" et de leurs catégories associées, on pourra consulter [11] et [12] où Michel Coste les introduit, ainsi que [21] (V 1.12) et [1], dans une perspective plus large.

**Définitions 2.82.** Soient $P := (X, \Phi)$ une $\mathscr{L}$-présentation, **K** une $\mathscr{L}^+$-catégorie et $A$ un objet de **K**.

1. Un modèle $(A, f)$ de $P$ sera dit présenté par *P au sens logique (dans* **K***)* si $(A, f)$ est un modèle initial de $P$ dans **K**.
2. On dira qu'un objet $A$ de **K** admet la présentation *P au sens logique* (dans **K**) si il peut être enrichi en un modèle de $P$ présenté au sens logique par $P$ dans **K**.

*Remarque* 2.83. Une présentation $P$ présente dans **K** une structure $A$ au sens algébrique si et seulement si il existe une expansion $f : X \to A$ telle que $(A, f)$ est présenté par $P$ au sens logique dans **K** *et* $f(X)$ engendre $A$ comme $\mathscr{L}$-structure.

**Définition 2.84.** Un objet $A$ de **K** est dit de présentation *finie* (au sens logique) dans **K** si il admet une présentation au sens logique dans **K**, de la forme $(X, \Phi)$, où $X$ et $\Phi$ sont finis.

**Définition 2.85.** Soit **K** une classe de $\mathscr{L}$-structures ou une $\mathscr{L}^+$-catégorie. On dira que **K** admet les présentations (*au sens logique*) si toute $\mathscr{L}$-présentation présente dans **K** un objet de **K** (au sens logique).

Comme pour les théories universelles Horn strictes, ces propriétés sont intrinsèquement liées à des formules et des énoncés logiques d'une certaine forme.

**Définition 2.86.** Soit **T** une théorie du premier ordre, finitaire, dans le langage $\mathscr{L}$. Les formules cartésiennes de **T** sont définies par induction de la manière suivante :

1. Toute formule atomique est cartésienne (rappel : $\perp$ n'est pas considérée comme atomique) ;
2. La conjonction de deux formules cartésiennes est cartésienne ;

3. Si $\varphi(X,Y)$ est cartésienne et si $\mathbf{T} \models \forall X,Y,Y'\ \varphi(X,Y) \wedge \varphi(X,Y') \Rightarrow Y = Y'$, alors $\exists Y\ \varphi(X,Y)$ est cartésienne.

*Remarque* 2.87. Toute formule cartésienne $\varphi(X)$ est équivalente à une formule cartésienne de la forme $\exists Y\ \psi(X,Y)$ où $\psi$ est une conjonction de formules atomiques.

**Définitions 2.88.** Une formule $\theta(Y)$ est dite *limite* ($\underleftarrow{\lim}$-formule dans [11],[12]) (pour $\mathbf{T}$) si elle est de la forme $\forall X\ \varphi(X,Y) \Rightarrow \psi(X,Y)$, où $\varphi$ et $\psi$ sont deux formules cartésiennes (relativement à $\mathbf{T}$).
Une théorie $\mathbf{T}$ sera dite *limite*, si elle est axiomatisable par des énoncés limite de $\mathbf{T}$.

*Remarque* 2.89. Toute formule limite $\theta(Y)$ de $\mathbf{T}$ est équivalente à une formule limite de la forme $\forall X\ \varphi(X,Y) \Rightarrow \psi(X,Y)$, où $\varphi$ est une conjonction d'atomiques.

*Remarque* 2.90. Dans le langage de la logique catégorique, on fait la différence entre les formules et les séquents, si bien que selon les textes, on s'apercevra qu'une théorie cartésienne est ce qu'on a appelé ici une théorie limite (voir par exemple [21] V 1.10 et V 1.12). Le contexte ne laisse en général pas d'ambiguité. Nous avons choisi cette double terminologie pour la même raison que dans le cas des formules cohérentes et des théories h-inductives (ces dernières étant appelées théories cohérentes en logique catégorique) : pour éviter au théoricien des modèles ensemblistes une confusion inutile, à lui qui ne distingue pas fondamentalement les formules des axiomes.

Nous recensons quelques propriétés des catégories de modèles des théories limite.

**Proposition 2.91** ([11] III 1.3 et 2.1, [12] 2.4.1, [1] 1.9 et 1.11)**.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une théorie limite et* $\mathbf{K} = \mathbf{Mod}^+(\mathbf{T})$.

1. *Tout modèle de* $\mathbf{T}$ *admet une présentation au sens logique dans* $\mathbf{K}$.
2. *La* $\mathscr{L}^+$*-catégorie* $\mathbf{K}$ *admet les présentations au sens logique ; autrement dit, toute présentation présente au sens logique une structure dans* $\mathbf{K}$.
3. $\mathbf{K}$ *est cocomplète.*
4. *Tout objet de* $\mathbf{K}$ *est une colimite dirigée d'objets de présentation finie dans* $\mathbf{K}$.

On dit qu'une catégorie qui vérifie les conditions (3) et (4) de la proposition est *localement finiment présentable*. M.Coste a montré que ces catégories sont "essentiellement" les catégories de modèles ensemblistes de théories limite ([11] III 2.2, [12] 2.4.1).

Donnons quelques exemples de théories limites.

*Exemples* 2.92. 1. La théorie des catégories ([11] II 2.2).

2. La théorie des groupes dans le langage $\langle *, e \rangle$, mais aussi celle des groupes abéliens divisibles sans torsions, sont limite dans ce langage. C'est un des rares exemples que nous connaissons de théorie limite qui est modèle-complète. On peut en dire autant de la théorie des groupes abéliens ordonnés divisibles dans le langage $\langle *, e, \leq \rangle$ des monoïdes ordonnés.
3. La théorie des anneaux dans le langage des semi-anneaux, et celle des anneaux réduits dans ce même langage. En revanche, même si tout élément a au plus un inverse dans tout anneau, la théorie des corps ou même celle des anneaux locaux ne sont pas limites dans le langage des anneaux.

4. La théorie des algèbres de Boole dans le langage des semi-anneaux (ou des treillis) est limite.

### 3.7 Factorisation et localisation

La notion de système de factorisation sur une catégorie apparaît de manière ubiquitaire en algèbre. Dans sa thèse d'état ([11]), M.Coste en développe une version interprétable en termes de logique du premier ordre (on peut aussi consulter la version condensée [12]). Les résultats de la section 2 du chapitre 9 s'appuient sur cette théorie.

**Définition 2.93.** Soit $\mathbf{T}_0$ une théorie limite. Soit $\Lambda$ un ensemble de couples $(\varphi(X), \psi(X,Y))$, où $\varphi$ et $\psi$ sont des conjonctions de formules atomiques dont les variables libres sont dans les ensembles finis $X$ et $X \cup Y$ respectivement. Un homomorphisme $f : A \to B$ entre modèles de $\mathbf{T}_0$ est dit *($\Lambda$-)admissible*, si pour tout couple $(\varphi(X), \psi(X,Y))$ de $\Lambda$, pour tous $X$-uplet $a$ de $A$ et $Y$-uplet $b$ de $B$, si $A \vDash \varphi(a)$ et $B \vDash \psi(f(a), b)$, il existe un unique $X$-uplet $c$ de $A$ tel que $A \vDash \psi(a,c)$ et $f(c) = b$.

M.Coste démontre alors le théorème dit de "factorisation" suivant.

**Théorème 2.94** ([11] V 5.1, [12] 3.3.3)**.** *Dans les mêmes conditions que la définition, pour tout homomorphisme $f : A \to B$ entre modèles de $\mathbf{T}_0$, il existe une factorisation*

$$A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} B$$

*de $f$ avec $h$ $\Lambda$-admissible, et qui est initiale.*

**Définition 2.95.** Les premières composantes des factorisations de morphismes dans $\mathbf{T}_0$ seront appelées *morphismes ($\Lambda$-)extrêmaux*.

*Remarque* 2.96. M.Coste définit les morphismes extrêmaux d'une autre façon (cf [11] V 5, [12] 3.3.4). On peut montrer que les deux notions sont équivalentes. La définition que nous donnons est suffisante pour les applications du dernier chapitre.

Voici deux propriétés essentielles des morphismes extrêmaux.

**Proposition 2.97** ([11] V 5.4 v et i)**.** *Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux homomorphismes entre modèles de $\mathbf{T}_0$, où $f$ est extrêmal.*

1. *Si $g \circ f$ est extrêmal, alors $g$ est extrêmal.*
2. *Si $f$ est admissible, alors c'est un isomorphisme .*

A partir du théorème de factorisation, il démontre une propriété de localisation des modèles de $\mathbf{T}_0$ dans les modèles d'une extension $\mathbf{T}$ qui satisfait les conditions suivantes.

**Définition 2.98.** Si $\mathbf{T}_0$ est une théorie limite et $\Lambda$ un ensemble de couples comme précédemment, on dira qu'une théorie $\mathbf{T}$ est une $\Lambda$-théorie, si

- $\mathbf{T}$ est une extension h-inductive de $\mathbf{T}_0$
- les axiomes supplémentaires de $\mathbf{T}$ sont de la forme $\forall X\ \varphi(X) \Rightarrow \bigvee_I \exists Y_i\ \psi(X, Y_i)$, où pour tout $i \in I$, le couple $(\varphi(X), \psi_i(X, Y_i))$ est dans $\Lambda$.

**Proposition 2.99** ([11] VI 2.1). *Soient* $\mathbf{T}$ *une* $\Lambda$*-théorie et* $f : A \to B$ *un homomorphisme* $\Lambda$*-admissible, entre un modèle* $A$ *de* $\mathbf{T}_0$ *et un modèle* $B$ *de* $\mathbf{T}$*. Alors,* $A$ *est un modèle de* $\mathbf{T}$*.*

On déduit directement de cette propriété le théorème de "localisation" suivant.

**Théorème 2.100** ([11] VI 2.2, [12] 3.4.1). *Soient* $A$ *un modèle de* $\mathbf{T}_0$ *et* $B$ *un modèle de* $\mathbf{T}$*, ainsi que* $f : A \to B$ *un homomorphisme. Il existe une factorisation*

$$A \xrightarrow{\ g\ } C \xrightarrow{\ h\ } B$$

*de* $f$*, où* $C$ *est un modèle de* $\mathbf{T}$ *et* $h$ *est* $\Lambda$*-admissible, et qui est initiale parmi des telles factorisations. En outre,* $g$ *est extrêmal.*

**Définition 2.101.** On appelle *localisation* d'un modèle $A$ de $\mathbf{T}_0$ un homomorphisme $\Lambda$-extrêmal $f : A \to B$, où $B$ est un modèle de $\mathbf{T}$.

*Remarque* 2.102.
1. De manière équivalente, les localisations d'un modèle $A$ de $\mathbf{T}_0$ sont les premières composantes des factorisations de morphismes $f : A \to B$, où $B$ est un modèle de $\mathbf{T}$ (voir [11] VI 2.3).
2. La notion de localisation nécessite la donnée de $\mathbf{T}_0$, $\Lambda$ et $\mathbf{T}$ : on parle alors de *triplet à localisations* (voir [11] VI 1.1 et [12] 3.4.2).

*Exemple* 2.103. L'exemple typique de localisation est celui donné par $\mathbf{T}_0$, la théorie des anneaux dans le langage des anneaux, $\mathbf{T}$ la théorie des anneaux locaux, et $\Lambda : \{(x = x, xy = 1)\}$. Les factorisations de morphismes d'anneaux relativement à $\Lambda$ correspondent aux morphismes extrêmaux, qui sont à isomorphisme près les localisations par une partie multiplicative ([11] V 7.7, [12] 3.5.1). Les localisations d'un anneau relativement au triplet $(\mathbf{T}_0, \Lambda, \mathbf{T})$ sont alors précisément les localisations du spectre premier ([11] VI 4.1, [12] 3.5.2). Il existe de nombreux autres exemples de localisation (voir [11] IV 2.5 et VI 4, [12] 4.2.3 par exemple).

# 4 Complétude existentielle et modèle-complétude

L'analyse logique élémentaire de la théorie du premier ordre des corps algébriquement clos et d'autres structures, en termes d'ensembles constructibles, reflète les théorèmes 1.3 et 1.4. On s'intéresse ici au second, dont le premier est un cas particulier, traité à la fin de la section. Pour la théorie de la complétude existentielle, on pourra consulter en particulier [15], et [29] pour la version positive, tout en rappelant que les résultats de logique positive suffisent (voir la première remarque dans 2.27).

## 4.1 Objets existentiellement clos et positivement e.c.

**Définitions 2.104.**
1. Soit $\mathbf{K}$ une $\mathscr{L}$-catégorie. Un objet $A$ de $\mathbf{K}$ est dit *existentiellement clos (dans* $\mathbf{K}$*)* si tout plongement dans $\mathbf{K}$ de domaine $A$ est existentiellement clos.
   On notera $\mathbf{E_K}$ la sous-catégorie pleine des existentiellement clos de $\mathbf{K}$, $\mathbf{E_T}$ si $\mathbf{K} = \mathbf{Mod}(\mathbf{T})$.
2. Soit $\mathbf{K}$ une $\mathscr{L}^+$-catégorie. Un objet $A$ de $\mathbf{K}$ est dit *positivement existentiellement clos*, ou *pur* (dans $\mathbf{K}$) si tout homomorphisme dans $\mathbf{K}$ de domaine $A$ est une immersion.
   On notera $\mathbf{E}^+_\mathbf{K}$ la sous-catégorie pleine des positivement existentiellement clos de $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}^+_\mathbf{T}$ si $\mathbf{K} = \mathbf{Mod}^+(\mathbf{T})$.

**Persistence**

On peut exprimer les propriétés précédentes en termes de diagrammes, approche que l'on retrouvera dans le chapitre 7.

**Définitions 2.105.** Soient $\mathbf{K}$ une classe de structures, $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\Theta$ un ensemble de $\mathscr{L}(A)$-énoncés.

1. On dira que $\Theta$ est *persistent dans* $\mathbf{K}$, si tout plongement $f : A \hookrightarrow B$, où $B$ est un objet de $\mathbf{K}$, est un modèle de $\Theta$.
2. On dira que $\Theta$ est *h-persistent dans* $\mathbf{K}$, si tout homomorphisme $f : A \to B$, où $B$ est un objet de $\mathbf{K}$, est un modèle de $\Theta$.

Si $\mathbf{K}$ est une sous-catégorie de $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ et $A \in \mathbf{K}$, on dira que $\Theta$ est $\mathbf{K}$-persistent si toute flèche dans $\mathbf{K}$, de domaine $A$, est un modèle de $\Theta$.

La persistence se caractérise syntactiquement de la manière suivante.

**Lemme 2.106.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\Theta$ une classe de $\mathscr{L}(A)$-énoncés infinitaires. Soit $\mathbf{T}$ une théorie (possiblement infinitaire). On a

1. $\Theta$ est $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$-persistent si et seulement si $\mathbf{T} \cup D(A) \models \Theta$
2. $\Theta$ est $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T})$-persistent si et seulement si $\mathbf{T} \cup D^+(A) \models \Theta$.

Cette propriété permet de caractériser les structures existentiellement closes par une propriété de "préservation" : nous introduisons dans le chapitre 7 une propriété analogue.

**Proposition 2.107.** *1. Soit* $\mathbf{K}$ *une* $\mathscr{L}$*-catégorie. Un objet* $A$ *de* $\mathbf{K}$ *est existentiellement clos si et seulement si* $Th_{\forall}(A|A)$ *est persistente dans* $\mathbf{K}$.

*2. Soit* $\mathbf{K}$ *une* $\mathscr{L}^+$*-catégorie. Un objet* $A$ *de* $\mathbf{K}$ *est positivement existentiellement clos si et seulement si* $Th_{\forall\neg}(A|A)$ *est persistente dans* $\mathbf{K}$.

**Inductivité**

Les propositions suivantes complètent en quelque sorte la sous-section 3.2 sur les théories inductives et h-inductives. Plusieurs résultats sont un peu plus généraux que dans les références données, mais on adapte facilement les démonstrations.

**Proposition 2.108** ([15] III.1 16, [4] 12)**.** *1. La sous-catégorie* $\mathbf{E_K}$ *des objets existentiellement clos d'une* $\mathscr{L}$*-catégorie* $\mathbf{K}$ *est inductive.*

*2. La sous-catégorie* $\mathbf{E_K^+}$ *des objets positivement existentiellement clos d'une* $\mathscr{L}^+$*-catégorie* $\mathbf{K}$ *est inductive.*

**Proposition 2.109** ([15] III.1 4, [4] 1)**.** *Soit* $\mathbf{K}$ *une catégorie inductive.*

1. *Si* $\mathbf{K}$ *est une* $\mathscr{L}$*-catégorie, tout objet de* $\mathbf{K}$ *se plonge dans un existentiellement clos.*
2. *Si* $\mathbf{K}$ *est une* $\mathscr{L}^+$*-catégorie, tout objet de* $\mathbf{K}$ *se continue en un positivement existentiellement clos.*

## 4.2 Le cas élémentaire

### Théories inductives et h-inductives

Certains énoncés sont vérifiés automatiquement dans les objets e.c et p.e.c.

**Proposition 2.110** ([15] III.1 14, [4] 3 et 4). *Soit* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures. On note*
- $\mathbf{U_K}$ *la* $\mathscr{L}$*-catégorie des structures qui se plongent dans un objet de* $\mathbf{K}$
- $h\mathbf{U_K}$ *la* $\mathscr{L}^+$*-catégorie des structures qui se continuent en un objet de* $\mathbf{K}$.

*On note aussi* $\mathbf{T} := Th(\mathbf{K})$ *:* $\mathbf{T}_{\forall\exists}$ *est l'ensemble des conséquences inductives de* $\mathbf{T}$ *et* $\mathbf{T}_i$ *l'ensemble de ses conséquences h-inductives. Alors,*

1. *Tout objet existentiellement clos de* $\mathbf{U_K}$ *est modèle de* $\mathbf{T}_{\forall\exists}$.
2. *Tout objet positivement existentiellement clos de* $h\mathbf{U_K}$ *est modèle de* $\mathbf{T}_i$.

On peut en dire un peu plus dans les classes élémentaires.

**Théorème 2.111** (voir [30] 5.07 et [4] 7). *Soient* $\mathbf{K}$ *une classe élémentaire, et* $\mathbf{T} = Th(\mathbf{K})$. *On a donc* $\mathbf{U_K} = \mathbf{Mod}(\mathbf{T}_\forall)$ *et* $h\mathbf{U_K} = \mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}_{\forall\neg})$.

1. *Si* $\mathbf{T}'$ *est une théorie inductive comprise entre* $\mathbf{T}_\forall$ *et* $\mathbf{T}_{\forall\exists}$*, on a* $\mathbf{E}_{\mathbf{T}_\forall} = \mathbf{E}_{\mathbf{T}'} = \mathbf{E}_{\mathbf{T}_{\forall\exists}}$.
2. *Si* $\mathbf{T}'$ *est une théorie h-inductive comprise entre* $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ *et* $\mathbf{T}_i$*, on a* $\mathbf{E}^+_{\mathbf{T}_{\forall\neg}} = \mathbf{E}^+_{\mathbf{T}'} = \mathbf{E}^+_{\mathbf{T}_i}$.

### Théories modèles-complètes et positivement-modèle-complètes

On peut donner une caractérisation syntactique des théories dont tous les modèles sont existentiellement clos. La preuve du résultat suivantes découle du résultat analogue 2.115, mais on peut aussi adapter facilement la démonstration de ce dernier.

**Théorème 2.112.** *Soit* $\mathbf{T}$ *une théorie du premier ordre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout modèle de* $\mathbf{T}$ *est existentiellement clos.*
2. *Tout plongement de modèles de* $\mathbf{T}$ *est existentiellement clos.*
3. *Tout plongement de modèles de* $\mathbf{T}$ *est élémentaire.*
4. *Toute formule existentielle est équivalente modulo* $\mathbf{T}$ *à une formule universelle.*
5. *Toute formule est équivalente modulo* $\mathbf{T}$ *à une formule universelle.*
6. *Toute formule est équivalente modulo* $\mathbf{T}$ *à une formule existentielle.*

**Définition 2.113.** Une théorie vérifiant les propriétés équivalentes du théorème est dite *modèle-complète*.
Plus généralement, une $\mathscr{L}$-catégorie $\mathbf{K}$ sera dite *modèle-complète* si tout plongement dans $\mathbf{K}$ est élémentaire.

**Corollaire 2.114** ([15] III.1 5). Une théorie modèle-complète est inductive.

Tous ces résultats sont encore valides dans le cas positif. En fait, on peut voir la complétude existentielle comme un cas particulier de la complétude existentielle positive (voir [3],[4]).

Nous donnons la démonstration du résultat suivant, qui est une adaptation de ce qu'on peut trouver dans une version "classique" dans [35] (1.2.15) et [18] (8.3.1).

**Théorème 2.115.** *Soit* **T** *une théorie du premier ordre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout modèle de* **T** *est positivement existentiellement clos.*
2. *Tout homomorphisme entre modèles de* **T** *est une immersion.*
3. *Tout homomorphisme entre modèles de* **T** *est élémentaire.*
4. *Toute formule cohérente est équivalente modulo* **T** *à une formule h-universelle.*
5. *Toute formule est équivalente modulo* **T** *à une formule h-universelle.*
6. *Toute formule est équivalente modulo* **T** *à une formule cohérente.*

*Démonstration.* L'équivalence (1)⇔(2) vient directement de la définition des homomorphismes et modèles positivement existentiellement clos.
(2)⇒(4) Soit $\varphi(x)$ une formule cohérente et soit $\Psi := \{\psi(x)$ h-universelles, $\mathbf{T} \cup \varphi \models \psi\}$. Soit $(M,m) \models \Psi(x)$. Si la théorie $D^+(M) \cup \mathbf{T} \cup \{\varphi(m)\}$ dans le langage $\mathscr{L}(M)$ était inconsistente, par compacité il y aurait un entier $n$ et des formules $\chi_i(m,m') \in D^+(M), i = 1,\ldots,n$, telles que $\mathbf{T} \cup \varphi(x) \models \forall x,y \neg \bigwedge_i \chi_i(x,y)$, c'est-à-dire que $\forall x,y \neg \bigwedge_i \chi_i(x,y) \in \Psi$, ce qui est impossible puisque par hypothèse $M \models \bigwedge_i \chi_i(m,m')$. Par conséquent, la théorie en question est consistente, et il en existe un modèle $N$, qui spécifie un $\mathscr{L}$-homomorphisme $f : M \to N$, tel que $(N,f) \models \varphi(m)$. Or, la formule $\varphi$ est cohérente, donc par (2), on a aussi $M \models \varphi(m)$, si bien qu'en fait $\varphi(x)$ équivaut à $\Psi(x)$ modulo **T**. Par compacité encore, on en déduit qu'il existe une formule h-universelle équivalente à $\varphi$ modulo **T**. Ainsi, toute formule cohérente est équivalente modulo **T** à une formule h-universelle (4).
(4)⇔(5) Si (4) est vérifiée, on montre alors facilement par induction sur la complexité des formules qu'il en est ainsi pour toutes les formules.
(5)⇔(6) Une formule cohérente étant équivalente à la négation d'une formule h-universelle, l'équivalence est évidente.
(6)⇒(3) Si $f : M \to N$ est un homomorphisme entre modèles de **T**, soit $\varphi(m)$ un énoncé à paramètres dans $M$, tel que $M \models \varphi$. La formule $\varphi(x)$ est équivalente modulo **T** à une formule cohérente $\psi(x)$, si bien que $(N,f) \models \psi(m)$, d'où encore $(N,f) \models \varphi(m)$, puisque $N \models \mathbf{T}$ : $f$ est élémentaire.
(3)⇒(2) Un plongement élémentaire est une immersion.

**Définition 2.116.** Une théorie vérifiant les hypothèses du théorème sera dite *positivement modèle-complète*.
Plus généralement, une $\mathscr{L}^+$-catégorie **K** sera dite *positivement modèle-complète* si tout homomorphisme dans **K** est élémentaire.

La notion de théorie positivement modèle-complète fait son apparition semble-t-il dans [22], et l'étude de cette notion dans une perspective comparable à celle d'Abraham Robinson est considérée par Itaï Ben Yaacov et Bruno Poizat dans [3] et [4].

**Corollaire 2.117.** Une théorie positivement modèle-complète est h-inductive.

Le corollaire immédiat suivant peut paraître surprenant au premier abord : une immersion n'est pas un plongement existentiellement clos en général !

**Corollaire 2.118.** Une théorie positivement modèle-complète est modèle-complète.

### Compagnonage

La classe des existentiellement clos, quand elle est élémentaire, a des propriétés intéressantes.

**Corollaire 2.119.** Soit $\mathbf{T}$ une théorie.

1. Si $\mathbf{E_T}$ est élémentaire, elle est modèle-complète.
2. Si $\mathbf{E_T^+}$ est élémentaire, elle est positivement modèle-complète.

**Définitions 2.120.** Soient $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ deux théories.

1. $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont dites *compagnes* si tout modèle de l'une se plonge dans un modèle de l'autre, autrement dit si $\mathbf{T}_\forall = \mathbf{T}'_\forall$.
2. $\mathbf{T}'$ est une modèle-compagne de $\mathbf{T}$ si $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont compagnes et si $\mathbf{T}'$ est modèle-complète.
3. $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont dites *h-compagnes* si tout modèle de l'une se continue en un modèle de l'autre, autrement dit si $\mathbf{T}_{\forall\neg} = \mathbf{T}'_{\forall\neg}$.
4. $\mathbf{T}'$ est une modèle-compagne positive de $\mathbf{T}$ si $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont h-compagnes et si $\mathbf{T}'$ est positivement modèle-complète.

*Remarque* 2.121. On peut lire parfois (par exemple, [30] 5.05) que la modèle-compagne d'une théorie, si elle existe, est unique. Nous avons pris le parti de ne pas considérer que les théories sont closes par leurs conséquences dans toute la logique du premier ordre, pour des raisons syntactiques qui devraient être claires : c'est pourquoi, ici, l'unicité de la modèle-compagne n'est pas vraie *stricto sensu* bien que toutefois, deux modèle-compagnes sont "essentiellement les mêmes" (elles sont logiquement équivalentes).

### Elimination des quantificateurs

Le théorème 1.3 exprime une propriété plus forte que la modèle-complétude.

**Définition 2.122.** On dit qu'une théorie $\mathbf{T}$ admet *l'élimination des quantificateurs* si toute formule du langage est équivalente modulo $\mathbf{T}$ à une formule sans quantificateurs.

*Remarque* 2.123. B.Poizat ([30] 5.c) réserve cette définition pour une propriété plus faible qui ne concerne que les formules en un nombre strictement positif de variables libres, ce que W.Hodges appelle l'élimination des quantificateurs pour les non-énoncés ([18], p.387). Les deux notions sont équivalentes lorsque le langage $\mathscr{L}$ possède au moins un symbole de constante.

**Théorème 2.124.** *Une théorie qui admet l'élimination des quantificateurs est modèle-complète.*

**Définition 2.125.** On dit qu'un ensemble de $\mathscr{L}$-formules $\mathcal{E}$ est un *ensemble d'élimination* pour une théorie $\mathbf{T}$ si toute $\mathscr{L}$-formule est équivalente modulo $\mathbf{T}$ à une combinaison booléenne de formules de $\mathcal{E}$.

**Quelques exemples**

Nous donnons quelques exemples de théories modèle-complètes ou positivement modèle-complètes.

*Exemples* 2.126.

1. La théorie des corps algébriquement clos admet l'élimination des quanteurs dans le langage des anneaux (c'est le théorème 1.3, voir [27] 3.2.2 et 3.2.8 ou [18] 8.1.4). C'est une modèle-compagne de la théorie des anneaux intègres, et une modèle-compagne positive de la théorie des anneaux non triviaux. Dans le langage des demi-anneaux, la théorie des corps algébriquement clos est une modèle-compagne positive de la théorie des demi-anneaux non triviaux, puisqu'un tel demi-anneau se plonge dans son "anneau de Grothendieck".
2. La théorie des corps réels clos dans le langage des anneaux, est une modèle-compagne de la théorie des anneaux intègres formellement réels, ce qu'on peut déduire de [27] 3.3.15 (nous appelons un anneau intègre formellement réel si son corps de fractions est formellement réel).
3. De manière générale, une théorie modèle-complète de corps est positivement modèle-complète ; c'est encore vrai dans un langage qui n'ajoute au langage des anneaux que des symboles fonctionnels. K.McKenna a montré qu'il existe un nombre continu de théories modèle-complètes de corps "purs" ([25]) .
4. La théorie des corps réels clos dans le langage $\langle +, -, \times, 0, 1, < \rangle$ des anneaux ordonnés est positivement modèle-complète et a l'élimination des quantificateurs (voir [27] 3.3.15 ou [18] 8.4.4). C'est vrai aussi si l'on remplace $<$ par $\leq$, ou dans le langage des anneaux réticulés.
5. Si $p$ est un nombre premier et $d$ un entier naturel fixés, la théorie des corps $p$-adiquement clos de $p$-rang $d$ a l'élimination des quantificateurs dans un langage "naturel" approprié (voir [31] 5.6).
6. La théorie des groupes abéliens sans torsions et divisibles a l'élimination des quanteurs dans le langage $\langle +, -, 0 \rangle$ des groupes abéliens. La théorie des groupes abéliens ordonnés divisibles dans le langage $\langle +, -, <, 0, 1 \rangle$ admet l'élimination des quanteurs ; elle est en outre positivement modèle-complète, puisqu'un homomorphisme, entre ensembles totalement et strictement ordonnés, est un plongement (voir [27]).
7. La théorie des corps différentiellement clos, dans le langage $\langle +, \times, -, d, \times, 0, 1 \rangle$, a l'élimination des quantificateurs (voir [27] 4.3 et [28] III 2.4).
8. En général, la théorie des corps de Hasse clos de caractéristique $p$ fixée a l'élimination des quantificateurs (voir [5] II.2).
9. La théorie des corps de différence génériques, dans le langage $\langle +, -, \times, \sigma, 0, 1 \rangle$, est modèle-complète, et donc positivement modèle-complète (voir [8] 1.1).

## 5 T-Radicaux et complétude existentielle dans les théories d'anneaux

Gregory Cherlin a introduit la notion de **T**-radical d'un idéal, pour une théorie d'anneaux commutatifs **T** ([15] III.6), qui lui a permis de démontrer une certaine généralisation du théorème des zéros de Hilbert. Nous reproduisons ici ses définition et résultat, avec la notation suggestive de Kenneth McKenna ([25]).

**Définition 2.127.** Une théorie d'anneaux commutatifs (unitaires) est une théorie dans le langage $\mathscr{L} := \langle +, -, \times, 0, 1 \rangle$ dit des anneaux, et contenant la théorie des anneaux commutatifs unitaires.

**Définition 2.128.** Soient $\mathbf{T}$ une théorie d'anneaux et $A \vDash \mathbf{T}_\forall$. Soient $X$ un ensemble fini et $I$ un idéal de $A[X]$. Le $\mathbf{T}$-radical de $I$, noté ici $\sqrt[\mathbf{T}]{I}$, est l'intersection de tous les idéaux $J$ de $A[X]$, tels que

1. $I \subseteq J$
2. $A/J \vDash \mathbf{T}_\forall$
3. $J \cap A = (0)$.

Cherlin en tire le théorème suivant.

**Théorème 2.129** ([15] III.6 73)**.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une théorie inductive d'anneaux et* $A$ *un modèle existentiellement clos de* $\mathbf{T}$*. Soient* $X$ *un ensemble fini,* $I$ *un idéal de type fini de* $A[X]$ *et* $P \in A[X]$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathscr{Z}_A(I) \subseteq \mathscr{Z}_A(P)$
2. $P \in \sqrt[\mathbf{T}]{I}$.

# Partie II

# T-Algèbre des Anneaux Commutatifs Unitaires

Le théorème des zéros de Hilbert se décline dans différents contextes analogues (corps réels clos, corps ordonnés, corps différentiels, corps $p$-valués...) et la recherche d'une description modèle-théorique de ces différents théorèmes de "zéros" s'est faite dans plusieurs directions. Dans [36], Volker Weispfenning utilise dans un cadre général une approche "formule-par-formule" dans la lignée de la théorie des idéaux d'A.Robinson. De son côté, Gregory Cherlin introduit dans [15] la notion de **T**-radical de certains idéaux, dans une analyse qui ne distingue pas les formules mais qui travaille sur les idéaux aux sens algébrique, et dans les théories d'anneaux commutatifs. Ceci lui permet de démontrer un Nullstellensatz généralisé, une idée exploitée par la suite par Kenneth McKenna dans l'étude des théories de corps ([25]) par exemple. Le point commun entre l'approche de Weispfenning et celle de Cherlin, c'est le développement modèle-théorique d'une notion de radical et l'étude de certaines de ses propriétés dans le contexte des structures existentiellement closes.
Deux idées sous-tendent ce que nous présentons dans cette section :

- D'une part, on peut étendre le théorème de Cherlin à une caractérisation de la complétude existentielle des modèles d'une théorie inductive d'anneaux intègres ;
- D'autre part, ceci suggère de développer un analogue positif du **T**-radical introduit par Cherlin, qui se définit de manière plus générale pour tous les idéaux, dans tous les anneaux : le **T**-radical positif.

Le radical positif apparaîtra comme généralisation modèle-théorique du radical algébrique d'un idéal, mais aussi du radical réel d'un idéal dans un autre contexte. De plus, dans les théories modèle-complètes de corps (en nombre continu d'après [25] 1.5), ce radical positif coïncide dans les algèbres de polynômes avec le **T**-radical, si bien qu'on peut se poser la question de l'existence de versions plus générales des résultats de [25].
La notion de **T**-radical positif repose fortement sur les classes universelles et spéciales, et cette seconde partie sert aussi d'intuition fondamentale à ce qui sera fait dans la troisième.

# Chapitre 3

# Théories d'Anneaux Intègres

Nous abordons dans ce chapitre la question de la réciproque du théorème de Cherlin dans un cas particulier : les théories d'anneaux intègres. Cette question nous a suggéré une caractérisation analogue des corps algébriquement clos comme anneaux non triviaux positivement existentiellement clos (ce qu'on sait déjà trivialement par des arguments modèle-théoriques), dont une preuve algébrique est instructive et contient en germe les idées sous-jacentes à la notion de **T**-radical positif.

## 1 Modèles existentiellement clos

### 1.1 Une réciproque des zéros

En utilisant un peu de théorie élémentaire des anneaux, on peut démontrer la réciproque (corollaire 3.2) du théorème de Hilbert. On note CAC la théorie des corps algébriquement clos dans le langage des anneaux.

**Théorème 3.1.** *Soit $A$ un anneau intègre, tel que pour tout idéal $I$ de type fini au-dessus de $A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt[\mathrm{CAC}]{I}$. Alors, $A$ est un corps algébriquement clos.*

*Démonstration.* Montrons d'abord que $A$ est un corps. Soit $f : A \hookrightarrow F$ le corps de fractions de $A$. Soit $a \in A$, non nul : il existe $b \in F$, tel que $f(a).b = 1$. On considère alors le plongement canonique $i : A \hookrightarrow A[X]$ et le morphisme d'évaluation en $b$ au-dessus de $f$, $f_b$, de sorte que l'on a $f_b \circ i = f$. Par choix de $b$, on a $(aX - 1) \subseteq Ker(f_b)$. De plus, on a $Ker(f_b) \cap i(A) = (0)$. Comme $F$ est un anneau intègre, $Ker(f_b)$ est un idéal premier : on en conclut que $\sqrt[\mathrm{CAC}]{aX-1} \subseteq Ker(f_b) \neq (1)$, d'où par hypothèse, $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(aX-1)) \neq (1)$, ce qui signifie que $\mathscr{Z}_A(aX-1) \neq \emptyset$ : $a$ est inversible dans $A$, donc $A$ est un corps.
Montrons ensuite que $A$ est algébriquement clos. Soit $f : A \hookrightarrow K$ une extension algébrique de $A$. Soit $\alpha \in K$ : $\alpha$ est algébrique sur $f$, de polynôme minimal $P$ dans $A[X]$. L'idéal $(P)$ est premier, si bien que l'on a $\sqrt[\mathrm{CAC}]{P} = (P)$, puisque $(P) \cap i(A) = (0)$. Comme, par hypothèse, on a aussi $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(P)) = \sqrt[\mathrm{CAC}]{P}$, on en conclut que $P$ a un point rationnel $a$ dans $A$. On a donc nécessairement $P = X - a$, d'où $f(a) = \alpha$ : $f$ est surjective, c'est donc un isomorphisme et $A$ est algébriquement clos.

**Corollaire 3.2.** Soit $A$ un anneau intègre. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est un corps algébriquement clos.
2. Pour tout ensemble fini $X$ d'indéterminées, pour tout idéal $I$ de $A[X]$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt{I}$.

*Démonstration.* Le sens direct est le théorème de Hilbert. Pour la réciproque, l'hypothèse (2) implique les hypothèses du théorème précédent, si bien que $A$ est un corps algébriquement clos.

Nous expliquerons dans la section suivante pourquoi ce résultat est vrai pour tous les anneaux non-triviaux et le radical algébrique, ce que nous dit directement la logique positive.
Contrairement à ce que pourrait laisser croire la démonstration de ce théorème, il n'est pas besoin de beaucoup de théorie des anneaux pour le démontrer en toute généralité : la propriété d'intégrité permet une simplification essentielle des disjonctions de formules atomiques en formules atomiques.

**Lemme 3.3.** Soient $\mathbf{T}$ une théorie d'anneaux commutatifs et $A \subseteq B$ une extension de modèles de $\mathbf{T}_\forall$. Soient $X$ un ensemble fini et $I$ un idéal de type fini de $A[X]$. Alors, on a $\sqrt[\mathbf{T}]{I} \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_B(I))$.

*Démonstration.* Soient $P_1, \dots, P_k$ des générateurs de $I$. Soit $P \notin \mathscr{I}(\mathscr{Z}_B(I))$ : il existe $b \in B^X$ tel que $B \vDash \bigwedge_i P_i(b) = 0 \wedge P(b) \neq 0$. Soit $J := Ker(e_b)$, où $e_b$ est le morphisme d'évaluation en $b$ : par hypothèse, $P \notin J$. Comme $A \subseteq B$, on a $J \cap A = (0)$ et comme aussi $B \vDash \mathbf{T}_\forall$ et $I \subseteq J$, $J$ est l'un des idéaux définissant le $\mathbf{T}$-radical de $I$, si bien que $P \notin \sqrt[\mathbf{T}]{I}$.

**Théorème 3.4.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une théorie d'anneaux intègres et* $A$ *un modèle de* $\mathbf{T}_\forall$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A$ est existentiellement clos.*
2. *Pour tout idéal $I$ de type fini au-dessus de $A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt[\mathbf{T}]{I}$.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) C'est en quelque sorte une reformulation du théorème 2.129. Par le lemme précédent, on a $\sqrt[\mathbf{T}]{I} \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$. Supposons que $P \notin \sqrt[\mathbf{T}]{I}$. Par le théorème de Cherlin, on a $\mathscr{Z}_A(I) \nsubseteq \mathscr{Z}_A(P)$, donc il existe $a \in \mathscr{Z}_A(I) - \mathscr{Z}_A(P)$, ce qui signifie exactement que $P \notin \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$.
(2)⇒(1) Soient $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m \in A[X]$ et $f : A \hookrightarrow B \vDash \mathbf{T}_\forall$ un plongement tel que $B \vDash \exists X \bigwedge_i P_i^f(X) = 0 \wedge \bigwedge_j Q_j^f(X) \neq 0$. Soient $I := (P_1, \dots, P_n)$ et $Q := \prod_j Q_j$. Soit $b \in B^X$ un témoin de l'énoncé précédent, et soit $J := Ker(f_b)$ le noyau du morphisme d'évaluation en $b$ au-dessus de $f$ : comme dans le lemme, $J$ est un des idéaux définissant le $\mathbf{T}$-radical de $I$, donc pour tout $j$, on a $Q_j \notin \sqrt[\mathbf{T}]{I}$, et même $Q \notin \sqrt[\mathbf{T}]{I}$, puisque $B$ est intègre. Par hypothèse, cela signifie qu'il existe $a \in \mathscr{Z}_A(I) - \mathscr{Z}_A(Q)$. Comme $A$ est intègre lui aussi, on a $A \vDash \exists X \bigwedge_i P_i(X) = 0 \wedge \bigwedge_j Q_j(X) \neq 0$, et $f$ est existentiellement clos.

*Remarque* 3.5. Nous démontrerons dans le chapitre 4 une version analogue de ce résultat pour des radicaux *positifs* analogues au radical algébrique.

## 1.2 Quelques remarques sur le CAC-radical

Soient $A$ un anneau intègre, $X$ un ensemble fini et $I$ un idéal de $A[X]$. Si $A$ est un corps, le CAC-radical de $I$ est son radical, puisque tout idéal premier de $A[X]$ a une intersection nulle

avec "$A$". Cependant, en général il peut exister des éléments non inversibles mais non nuls de $A$ dans l'intersection d'un idéal premier $J$ de $A[X]$ avec la copie de $A$ dans $A[X]$. Autrement dit, pour la théorie **T** des anneaux intègres ou celle des corps algébriquement clos, si le **T**-radical coïncide avec le radical algébrique, à coup sûr, dans les anneaux de polynômes sur un corps, rien n'indique que ce soit le cas en général ; il n'est d'ailleurs pas fait pour cela.
Mentionnons toutefois un cas où les deux notions coïncident sur un certain ideal, et où l'anneau de base n'est pas un corps : considérons l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes en une variable à coefficients entiers. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$ contenant $X$. L'intersection $\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$ donc de la forme $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$, pour un nombre premier $p$. Soit $P \in \mathfrak{q}$ : si $P$ n'a pas de terme constant, c'est que $X|P$. Si $P$ a un terme constant, ce terme est dans $\mathfrak{p}$, puisqu'on l'obtient en retranchant à $P$ un multiple de $X$. Il s'ensuit que $\mathfrak{q} = (X, p)$, d'où $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{q} \simeq \mathbb{F}_p$. On en conclut que dans ce cas, le CAC-radical de $(X)$ est son radical au sens classique.
Si le CAC-Nullstellensatz, conçu avec sa réciproque, est une généralisation modèle-théorique du théorème de Hilbert, conçu lui aussi avec sa réciproque, nous occultons cependant la différence entre le radical algébrique et le CAC-radical.
Or, le radical algébrique d'un idéal a une place significative en géométrie algébrique, puisqu'il définit les fermés de la topologie de Zariski sur le spectre premier d'un anneau (et dans un sens, le spectre premier est un espace géométrique qui vérifie le théorème des zéros). Ce n'est donc pas un artifice algébrique qui n'apparaît que dans le théorème de Hilbert. D'ailleurs, d'un point de vue naïf, des idéaux radiciels apparaissent déjà dans les anneaux de coordonnées, qui ne sont plus que des anneaux réduits : peut-on aller plus loin dans l'interprétation modèle-théorique de ces phénomènes ?
Reconsidérons la définition du **T**-radical (2.128) : c'est la clause (3) qui nous fait travailler avec des plongements (donc des anneaux intègres) en logique classique, et pas avec des homomorphismes (donc des anneaux). Observons que si **T** contient la théorie des corps, et si l'on relaxe cette clause, le théorème 2.129 reste vrai. La raison profonde, c'est qu'un modèle existentiellement clos d'une théorie de corps est positivement existentiellement clos, ce qui nous amène naturellement à nous tourner vers les théories positivement modèle-complètes.

## 2 Les corps algébriquement clos comme anneaux

Un anneau intègre, c'est au sens du langage des anneaux ($\langle +, -, \times, 0, 1 \rangle$) une sous-structure d'un corps algébriquement clos. La théorie CAC est *positivement* modèle-complète (voir 2.116), et tout anneau non-trivial se prolonge en un corps algébriquement clos par l'axiome du choix. Réciproquement, s'il existe un homomorphisme d'un anneau $A$ dans un corps algébriquement clos, $A$ ne peut être trivial, si bien que la théorie CAC est une modèle-compagne positive de la théorie des anneaux non-triviaux (voir 2.120). Un analogue des théorèmes précédents peut donc s'énoncer sous la forme suivante, dont la preuve est essentielle dans ce qui suit.

**Théorème 3.6.** *Soit $A$ un anneau commutatif non trivial. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A$ est un corps algébriquement clos*
2. *Pour tout ensemble fini $X$, pour tout idéal $I$ de $A[X]$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt{I}$*
3. *Pour tout ensemble fini $X$, pour tout idéal $I$ de type fini de $A[X]$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt{I}$*

4. *A est positivement existentiellement clos dans la catégorie des anneaux non-triviaux.*

*Démonstration.* (3)⇒(4) Soit $I$ un idéal de type fini au-dessus de A, et supposons qu'il n'a pas de point rationnel dans $A$, c'est-à-dire que $\mathscr{Z}_A(I) = \emptyset$. Il s'ensuit que $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = A[X]$, et comme par hypothèse on a $\sqrt{I} \supseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$, on en conclut que $1 \in \sqrt{I}$, d'où $1 \in I$, et $I = A[X]$. Ainsi, $I$ ne peut pas avoir de point rationnel dans une $A$-algèbre non-triviale. Par contraposée, A est un anneau non trivial positivement existentiellement clos.
(4)⇒(3) On distingue deux cas :

. On a $\sqrt{A[X]} = A[X]$, et comme $A$ n'est pas trivial, $\mathscr{Z}_A(A[X]) = \emptyset$, si bien que $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(A[X])) = A[X]$. Si donc $I = A[X]$, on a bien $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt{I}$.
. Si $I \neq A[X]$, soit $Q \notin \sqrt{I}$ : il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \supseteq I$ tel que $Q \notin \mathfrak{p}$, si bien que dans la $A$-algèbre non-triviale $A[X]/\mathfrak{p}$, $I$ a un point rationnel en-dehors de l'ensemble algébrique défini par $Q$. Dans le corps des fractions de $A[X]/\mathfrak{p}$, on trouve donc une solution $c$ de $I$ et un inverse $d$ de $Q(c)$, que l'on relève par hypothèse dans $A$ en une solution $c'd'$ de l'ensemble algébrique défini par $I$ et l'équation $Q(X).Y - 1 = 0$ : le point $c'$ est dans $\mathscr{Z}_A(I)$ mais pas dans $\mathscr{Z}_A(Q)$, d'où $Q \notin \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$ : on a $\sqrt{I}^c \subseteq (\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)))^c$, d'où $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) \subseteq \sqrt{I}$.

(3)⇒(1) Par la caractérisation précédente des corps algébriquement clos (3.2), il suffit de montrer que $A$ est un corps. Soit donc $a \in A$, $a \neq 0$ et soit $I := (a)$. Comme $a \neq 0$, on a $\mathscr{Z}_A(I) = \emptyset$, si bien que $\sqrt{I} \supseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = A$, donc $a$ est inversible : $A$ est un corps.
Les quatre assertions sont donc équivalentes, si l'on remplace les égalités dans (2) et (3) par des inclusions ; mais dans ce cas, $A$ est un corps, donc ces inclusions sont des égalités.

*Remarque* 3.7. Notons bien que cette preuve jette un peu de lumière sur ce qu'est un corps : si un corps algébriquement clos est un anneau non-trivial qui satisfait le théorème de Hilbert, un corps est un anneau non-trivial qui le satisfait "en dimension zéro".

Nous proposons de le reformuler de manière un peu différente : il est gênant, dans un sens, d'exclure l'anneau trivial, qui est presque un "corps algébriquement clos à un élément".

**Corollaire 3.8.** Soit $A$ un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est trivial ou $A$ est un corps algébriquement clos
2. Pour tout ensemble fini $X$, pour tout idéal $I$ de $A[X]$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = (\subseteq)\sqrt{I}$.

*Remarque* 3.9. La classe des anneaux vérifiant le "théorème des zéros" est ainsi une classe élémentaire.

Nous avons parlé d'anneaux réduits : ils interviendront de manière cruciale, et on peut les caractériser par une propriété liée à leurs idéaux, qui rappelle le Nullstellensatz.

**Proposition 3.10.** *Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est réduit*
2. *Pour tout idéal I au-dessus de A, on a* $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) \supseteq \sqrt{I}$.

*Démonstration.* (1)⇒(2) Soit $I$ un idéal sur $A$, en les variables $X$. Pour chaque point $a$ de $\mathscr{Z}_A(I)$, on dispose d'un morphisme d'évaluation en $a$, $e_a : A[X] \to A$. On considère le produit de ces morphismes $e : A[X] \to A^{\mathscr{Z}_A(I)}$ : le noyau de $e$ est par définition $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$. Le produit $A^{\mathscr{Z}_A(I)}$ est réduit puisque

$A$ l'est, donc $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$ est radiciel. Par suite, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) \supseteq \sqrt{I}$, puisque ce dernier est le plus petit idéal radiciel contenant $I$.
(2)⇒(1) On applique (2) avec $X = \emptyset$ et $I = (0)$. On a $\mathscr{Z}_A(0) = A^{\emptyset}$, donc, que $A$ soit trivial ou non, on a $(0) = \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(0)) = \sqrt{0}$ par hypothèse, si bien que $A$ est réduit.

# Chapitre 4

# T-Algèbre des Anneaux Commutatifs Unitaires

Nous développons ici la théorie des radicaux positifs, en nous appuyant sur l'intuition du chapitre précédent. Nous étendrons ce travail dans la partie III, ce qui permettra avec la même intuition de traiter des théories d'anneaux avec opérateurs additionnels, grâce au concept d'*algèbre basée en groupe*.

## 1 T-Idéaux et représentations

### 1.1 Idéaux T-premiers et T-radiciels

Considérons les deux situations suivantes.

1. Soit $f : A \to B$ un homomorphisme, où $B$ est un anneau intègre (par exemple, une extension de corps). Soient $X$ un ensemble et $I$ un idéal de $A[X]$. Notons $f_I : A[X] \to B^{\mathscr{Z}_f(I)}$ le produits des morphismes d'évaluation $f_b$ sur les points $b$ de $\mathscr{Z}_f(I)$. Par définition, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I)) = \mathrm{Ker}(f_I)$. Comme $B$ est intègre, et comme pour tout $b \in \mathscr{Z}_f(I)$, on a le plongement $A[X]/\mathrm{Ker}(f_b) \hookrightarrow B$, on a $\sqrt{\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I))} (\subseteq \sqrt[\mathsf{CAC}]{\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I))}) \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I))$, si bien que $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I))$ est radiciel.
2. Soient $A$ un anneau et $\mathscr{P}$ l'ensemble de ses idéaux premiers. On considère le produit des morphismes quotients $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ décrit $\mathscr{P}$, et l'on note ce produit $f : A \to \prod_{\mathscr{P}} A/\mathfrak{p}$ : ce morphisme est la *représentation canonique de $A$*. Le noyau de $f$ est le nilradical de $A$, et c'est lui aussi un idéal radiciel.

Il apparaît ainsi de manière évidente que dans la constitution même des objets de base de la géométrie algébrique, d'un point de vue extrinsèque (définition concrète des variétés dans un anneau intègre) ou d'un point de vue intrinsèque (définition d'un espace géométrique inhérent à un anneau), la classe des anneaux intègres et la classe des anneaux réduits sont essentielles. Or, la première est la classe universelle engendrée, la seconde la quasivariété engendrée, par la classe des corps algébriquement clos.
Soit donc $\mathbf{T}$ une théorie d'anneaux commutatifs unitaires. On rappelle que $\mathbf{T}_\forall$ axiomatise la

classe $\mathbf{U_T}$ des sous-anneaux de modèles de **T**, et que $\mathbf{T}_W$ axiomatise la quasivariété $\mathbf{W_T}$ des anneaux qui se plongent dans un produit de modèles de **T**. Nous donnons quelques noms aux objets que nous allons fréquenter maintenant.

**Définitions 4.1.** Soient $A$ un anneau et $I$ un idéal de $A$.

1. L'anneau $A$ sera dit
   - *(**T**-)universel* si c'est un modèle de $\mathbf{T}_\forall$, autrement dit un objet de $\mathbf{U_T}$
   - *(**T**-)spécial* si c'est un modèle de $\mathbf{T}_W$, autrement dit un objet de $\mathbf{W_T}$.
2. L'idéal $I$ sera dit
   - *(**T**-)premier* si le quotient $A/I$ est un modèle de $\mathbf{T}_\forall$.
   - *(**T**-)radiciel* si le quotient $A/I$ est un modèle de $\mathbf{T}_W$.

   Le (**T**-)radical (positif) de $I$, noté $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^+$, désignera l'intersection de *tous* les idéaux **T**-premiers contenant $I$.

*Remarques* 4.2.

1. Pour toute théorie $\mathbf{T}'$ comprise entre $\mathbf{T}_\forall$ et **T**, les idéaux **T**-premiers sont les idéaux $\mathbf{T}'$-premiers, et c'est donc aussi vrai pour les idéaux **T**-radiciels. En particulier, on a $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^+ = \sqrt[\mathbf{T}_\forall]{I}^+$.
2. On rappelle que si $A$ est un anneau universel, $X$ un ensemble et $I$ un idéal de $A[X]$, le **T**-radical de $I$ ($\sqrt[\mathbf{T}]{I}$) est l'intersection de tous les idéaux **T**-premiers $\mathfrak{p}$ contenant $I$ et tels que $\mathfrak{p} \cap A = (0)$, où l'on identifie $A$ à sa copie dans $A[X]$.

## 1.2 Le théorème de représentation

On peut représenter tout anneau relativement à une théorie, comme cela a été rappelé pour les anneaux intègres. Soit en effet **T** une théorie d'anneaux. Si $\mathscr{P}_I$ désigne l'ensemble des idéaux **T**-premiers d'un anneau $A$ contenant un idéal $I$ de $A$, on peut de nouveau considérer le produit $f_I : A \to \prod_{\mathscr{P}_I} A/\mathfrak{p}$ des projections canoniques sur les quotients $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ décrit $\mathscr{P}_I$. Le noyau de $f_I$ est par définition le **T**-radical positif de $I$, et on voit bien que c'est un idéal **T**-radiciel, comme tous les idéaux égaux à leur propre **T**-radical positif d'ailleurs. En fait, ces deux propriétés sont équivalentes, ce qui montre que la terminologie a été correctement choisie.

**Théorème 4.3.** *Soient $A$ un anneau et $I$ un idéal de $A$. Alors, $I$ est **T**-radiciel si et seulement si il est égal à son propre radical positif.*

*Démonstration.* Si $I$ est égal à son radical positif, il est **T**-radiciel via la représentation "canonique" $A/I \hookrightarrow \prod_{\mathscr{P}_I} A/\mathfrak{p}$, où l'on a factorisé le morphisme précédent $(f_I)$ par $A \twoheadrightarrow A/\sqrt[\mathbf{T}]{I}^+$.
Réciproquement, soit $I$ le noyau d'un homomorphisme $f : A \to B$, où $B \models \mathbf{T}_W$. Si $I \neq A$, $B$ est une sous-structure d'un produit $\prod_i C_i$ de modèles de **T**, indexé par un ensemble non vide. Pour tout $i$, soit $J_i := Ker(f_i)$, où $f_i$ est le composé de $f$ par la $i$-ème projection du produit. Pour tout $i$, l'idéal $J_i$ contient $I$ et est le noyau d'un homomorphisme de $A$ vers un modèle de **T**, donc par définition du **T**-radical positif, on a $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^+ \subseteq \bigcap_i J_i = Ker(f) = I$. Par suite, on a $I = \sqrt[\mathbf{T}]{I}^+$, car l'inclusion inverse est évidente.

*Remarque* 4.4. Si $A$ est un anneau et $\pi : A \hookrightarrow \prod_{\mathscr{P}} A/\mathfrak{p}$ est injectif, alors $A$ est isomorphe à un sous-anneau du produit, auquel la restriction de chaque projection est surjective : on dit que $A$ est *produit sous-direct* des $A/\mathfrak{p}$. En général, on définit une représentation comme un tel plongement, et c'est l'origine du nom du théorème.

Les idéaux apparaissant dans les deux situations évoquées au début du chapitre ont évidemment cette propriété.

**Corollaire 4.5.** Soient $A$ un anneau, $X$ un ensemble et $I$ un idéal de $A[X]$.

1. Pour toute $A$-algèbre **T**-spéciale $f : A \to B$, l'idéal $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I))$ est égal à son propre radical positif.
2. L'idéal $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+}$ est égal à son radical positif.

*Démonstration.* Il suffit de montrer, par le théorème, que ces idéaux sont **T**-radiciels.
(1) L'idéal $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I))$ est le noyau de l'homomorphisme produit $f_I : A[X] \to B^{\mathscr{Z}_f(I)}$ des morphismes d'évaluation en les points de $\mathscr{Z}_f(I)$. Comme $\mathbf{W}_\mathbf{T}$ est stable par produits quelconques, cet idéal est **T**-radiciel.
(2) Il a été mentionné au début de la sous-section que l'idéal $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+}$ est **T**-radiciel quasiment par définition.

*Remarque* 4.6. Si $A$ est un anneau et $I$ un idéal de $A$, l'idéal $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+}$ est le plus petit idéal **T**-*radiciel* contenant $I$.

Donnons quelques exemples "classiques" de radicaux positifs.

*Exemples* 4.7.
1. Soit **T** la théorie des corps algébriquement clos. Un idéal **T**-premier est simplement un idéal premier, et le **T**-radical positif d'un idéal est donc son radical algébrique classique.
2. Soit **T** la théorie des corps réels clos. Un idéal est **T**-premier si et seulement si c'est un idéal premier réel ; un idéal **T**-radiciel est la même chose qu'un idéal réel.
3. On peut définir les notions d'idéal premier $p$-adique, d'idéal $p$-adique et de radical $p$-adique d'un idéal, à l'aide de la théorie des corps $p$-adiquement clos, qui s'axiomatise dans le langage des anneaux.
4. Si **T** est une théorie de corps, si $F$ est un modèle de **T** et $X$ un ensemble, soit $I$ un idéal de $F[X]$. Alors, on a $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+} = \sqrt[\mathbf{T}]{I}$.
5. Soit **T** une axiomatisation de la classe dont les objets sont les corps algébriquement clos et l'anneau trivial. Si $A$ est un anneau et $I$ un idéal, $I$ est **T**-premier s'il est premier ou égal à $A$ tout entier ; le **T**-radical de $I$ est son radical au sens algébrique.

## 2 Un théorème des zéros positif

### 2.1 Théories positivement modèle-complètes

Nous disposons désormais d'un appareillage conceptuel suffisant pour résoudre la question de l'existence d'un théorème analogue à 3.6.

**Définition 4.8.** Soit $\mathbf{T}$ une théorie d'anneaux. Un anneau $A$, modèle de $\mathbf{T}$, sera dit *géométriquement clos (relativement à* $\mathbf{T}$*)*, si il vérifie le théorème des zéros "positif" relatif à $\mathbf{T}$, c'est-à-dire, si pour tout ensemble fini $X$, pour tout idéal $I$ de type fini de $A[X]$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt[\mathbf{T}]{I}^+$.

L'idée du théorème 3.6 nous est venue de la modèle-complétude positive de la théorie CAC. Il est donc naturel de commencer par là.

**Théorème 4.9.** *Soit* $\mathbf{T}$ *une théorie positivement modèle-complète d'anneaux. Alors, tout modèle de* $\mathbf{T}$ *est géométriquement clos.*

*Démonstration.* Soient $X$ un ensemble fini de variables et $I := (P_1, \dots, P_n)$ un idéal de type fini de $A[X]$, au-dessus de $A \models \mathbf{T}$. On sait déjà que $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^+ \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$. Réciproquement, soit $Q \notin \sqrt[\mathbf{T}]{I}^+$ : il existe un idéal $\mathbf{T}$-premier $J$ contenant $I$, tel que $Q \notin J$. Comme $J$ est $\mathbf{T}$-premier, on a $A[X]/J \vDash \mathbf{T}_\forall$, et on a donc une suite d'homomorphismes $A \hookrightarrow A[X] \twoheadrightarrow A[X]/J \hookrightarrow B \models \mathbf{T}$, dont on note $f$ la composition, avec $B \models \exists X \bigwedge_i P_i^f(X) = 0 \wedge Q^f(X) \neq 0$. Comme $\mathbf{T}$ est positivement modèle-complète, $f$ est élémentaire (théorème 2.115), si bien que $A \models \exists X \bigwedge_i P_i(X) = 0 \wedge Q(X) \neq 0$ ; autrement dit, il existe un point $a$ de $A$ dans $\mathscr{Z}_A(I) - \mathscr{Z}_A(Q)$, ce qui signifie que $Q \notin \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$, c'est-à-dire $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) \subseteq \sqrt[\mathbf{T}]{I}^+$. Finalement, on a bien $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt[\mathbf{T}]{I}^+$.

Dans le cas où la théorie contient la théorie des corps, on retrouve les invariants algébriques élémentaires de la géométrie.

**Théorème 4.10.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une théorie positivement modèle-complète de corps et* $F \vDash \mathbf{T}$*. Le foncteur "algèbre de coordonnées",* $\mathscr{V} = \mathscr{Z}_F(I) \mapsto F[X]/\mathscr{I}(\mathscr{Z}_F(I))$*, est une dualité de catégories entre les variétés affines sur* $F$ *(en dimension finie) et les* $F$*-algèbres spéciales de type fini (en fait de présentation finie).*

*Démonstration.* Si $X$ est fini, $F[X]/\mathscr{I}(\mathscr{Z}_F(I))$ est de type fini et spéciale, et on montre comme pour les corps algébriquement clos que le foncteur est contravariant, plein et fidèle. Soit $f : F \to B$ une $F$-algèbre spéciale de type fini : il existe un ensemble fini $X$ et un idéal $I \subseteq F[X]$, tels que $f \simeq (! : F \to F[X]/I)$. Comme $f$ est spéciale, on a $I = \sqrt[\mathbf{T}]{I}^+$, et comme $F$ est un corps, l'idéal $I$ est de type fini. On peut donc appliquer le "théorème des zéros", si bien que l'on a $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^+ = \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$. Il s'ensuit que $f \simeq (! : F \to F[X]/\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)))$, c'est-à-dire que le foncteur est bien une anti-équivalence.

## 2.2 Complétude existentielle forte

La théorème 4.9 n'est pas véritablement un analogue "positif" du théorème 2.129 puisqu'il suppose que les positivement existentiellement clos forment une classe élémentaire, sans quoi il est impossible de conclure avec les seules immersions, puisque la complétude géométrique fait intervenir quelques formules existentielles non positives. Un moyen d'obtenir un véritable analogue positif et ses généralisations, est d'introduire la notion suivante, qui sera étudiée plus en détail dans la troisième partie.

**Définition 4.11.** Soit $\mathbf{K}$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des anneaux. Un anneau $A$ de $\mathbf{K}$ sera dit *fortement existentiellement clos (dans* $\mathbf{K}$*)*, si tout homomorphisme dans $\mathbf{K}$ de domaine $A$ est un plongement existentiellement clos.

La démonstration du théorème 4.9 s'adapte alors facilement pour montrer le résultat suivant.

**Théorème 4.12.** *Soit* $\mathbf{T}$ *une théorie d'anneaux. Alors, tout modèle fortement existentiellement clos de* $\mathbf{T}_\forall$ *est un modèle de* $\mathbf{T}_W$ *géométriquement clos.*

On peut reprendre l'hypothèse d'intégrité, comme dans le théorème 3.4.

**Théorème 4.13.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une théorie d'anneaux intègres et* $A$ *un modèle de* $\mathbf{T}_\forall$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A$ est fortement existentiellement clos.*
2. *Pour tout idéal $I$ de type fini au-dessus de $A$, on a* $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+}$.

# 3 Théories strictes et T-corps

Le théorème 4.9 est une version positive du théorème des zéros, mais on n'a pas encore une caractérisation de la complétude existentielle positive de certains anneaux par la complétude géométrique. Le théorème 3.4 peut fournir une idée supplémentaire : puisque ce qui a été fait avec les corps a.c et les anneaux intègres, leurs sous-structures, peut être fait avec toutes les théories d'anneaux intègres, pourquoi ne pas introduire la théorie des anneaux non-triviaux, l'analogue "positif" des anneaux intègres ?

## 3.1 Théories strictes et Nullstellensatz

On rappelle ici que $\mathbf{1}$ désigne en général la $\mathscr{L}$-structure terminale à un élément, ici l'anneau trivial.

**Définition 4.14.** Une théorie du premier ordre quelconque $\mathbf{T}$ sera dite *stricte*, si $\mathbf{1} \nvDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$, autrement dit si $\mathbf{T}_{\forall\neg} \neq \emptyset$.

*Remarque* 4.15. Cette définition équivaut encore à dire que $\mathbf{1} \nvDash \mathbf{T}_\forall$, ou que $\mathbf{T} \vDash 0 \neq 1$.

Cette notion de théorie stricte s'articule bien avec nos idéaux préférés.

**Proposition 4.16.** *Une théorie d'anneaux* $\mathbf{T}$ *est stricte si et seulement si pour tout anneau $A$, tout idéal* $\mathbf{T}$*-premier de $A$ est propre.*

*Démonstration.* L'anneau $\mathbf{1}$ est un modèle de $\mathbf{T}_\forall$ si et seulement si il existe un anneau $A$ qui est un idéal $\mathbf{T}$-premier.

On peut maintenant montrer ce qui manque au théorème 4.9.

**Proposition 4.17.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une théorie stricte d'anneaux, et $A$ un modèle de* $\mathbf{T}$. *Si $A$ est géométriquement clos, alors $A$ est un objet positivement existentiellement clos de* $\mathbf{Mod}^{+}(\mathbf{T}_{\forall\neg})$.

*Démonstration.* Soit $f : A \to B$ un homomophisme vers un modèle de $\mathbf{T}$. Il suffit de démontrer que tout idéal de type fini au-dessus de $A$ qui a un point rationnel dans $B$ a un point rationnel dans $A$. Soient $X$ un ensemble fini et $I$ un idéal de $A[X]$, et soit $b \in B^X$ un point rationnel de $I$ dans $B$. Soit $e_b : A[X] \to B$ le morphisme d'évaluation en $b$ : l'idéal $Ker(e_b)$ est un idéal $\mathbf{T}$-premier, donc un idéal propre par le lemme précédent, d'où $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^+ \subseteq Ker(e_b) \neq A[X]$. Par hypothèse, on a donc $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) \neq A[X]$, ce qui signifie exactement que $I$ a un point rationnel dans $A$, puisque $A$ n'est pas trivial : $f$ est une immersion, donc $A$ est p.e.c.

*Remarque* 4.18. Si $\mathbf{T}$ est une théorie stricte d'anneaux, c'est aussi le cas de $\mathbf{T}_\forall$. Si donc $A$ est un modèle géométriquement clos de $\mathbf{T}_\forall$, c'est un modèle positivement existentiellement clos de $(\mathbf{T}_\forall)_{\forall\neg} = \mathbf{T}_{\forall\neg}$, par la proposition.

**Théorème 4.19.** *Soit* $\mathbf{T}$ *une théorie stricte d'anneaux. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout modèle de* $\mathbf{T}$ *est géométriquement clos*
2. $\mathbf{T}$ *est positivement modèle-complète.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) Soit $f : A \to B$ un homomorphisme entre deux modèles de $\mathbf{T}$. Par la proposition précédente, $f$ est une immersion, donc $\mathbf{T}$ est p.m.c.
(2)⇒(1) Il s'agit du théorème 4.9.

Donnons quelques exemples de théories positivement modèle-complètes et strictes d'anneaux, autres que CAC.

*Exemples* 4.20.
1. La théorie complète $\mathbf{T}$ d'un corps fini le détermine à isomorphisme près, et tout homomorphisme de corps est un plongement,si bien que $\mathbf{T}$ est positivement modèle-complète et stricte.
2. Toute théorie modèle-complète de corps est positivement modèle-complète et stricte.
3. En particulier, un anneau possède un idéal premier réel si et seulement si $-1$ n'est pas une somme de carrés, ce qui s'exprime par une théorie finitaire. Le théorème des zéros réels caractérise les corps réels clos comme de tels anneaux positivement existentiellement clos.

*Problèmes* 4.21. Les problèmes suivants se présentent ici naturellement :
- La théorie d'une structure finie la détermine à isomorphisme près. Un anneau intègre fini est un corps, mais les anneaux finis peuvent avoir des endomorphismes non-triviaux. Or, si la théorie d'un anneau non-trivial fini est positivement modèle-complète, cela est exclu : un tel anneau est-il nécessairement un corps ?
- De manière générale, une théorie positivement modèle-complète d'anneaux intègres est-elle une théorie de corps ? Si oui, une théorie positivement modèle-complète d'anneaux non-triviaux est-elle une théorie de corps ?

## 3.2 T-Algèbre stricte

Dans toute cette sous-section, nous faisons l'hypothèse que la théorie $\mathbf{T}$ est stricte. Ceci permet de recouvrer plusieurs éléments de la théorie des anneaux, dans le contexte particulier fixé par la théorie.

**Proposition 4.22.** *Soient $A$ un anneau, $I$ un idéal de $A$. On a $A/I \models \mathbf{T}_{\forall\neg} \Leftrightarrow \sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+} \neq A \Leftrightarrow$ il existe un idéal $\mathbf{T}$-premier de $A$ contenant $I$.*

*Démonstration.* Si $A/I \models \mathbf{T}_{\forall\neg}$, il existe un modèle $B$ de $\mathbf{T}$ et un homomorphisme $f : A \to B$ de noyau $I$. Comme $\mathbf{1} \not\models \mathbf{T}$, on a $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+} \subseteq Ker(f) \neq A$.
Réciproquement, si $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+} \neq A$, il existe un idéal $\mathbf{T}$-premier $J$, contenant $I$, noyau d'un homomorphisme $f : A \to A/J$, où $A/J \models \mathbf{T}_{\forall}$. Ce morphisme se factorise par $A \twoheadrightarrow A/I$, donc $A/I$ est un modèle de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$.

Le théorème 3.6 a mis en évidence une caractérisation des corps par le radical algébrique (voir la remarque associée). Nous proposons ici de reprendre cette idée pour définir une notion de corps associée à une théorie. L'expression "**T**-idéal" est synonyme d'"idéal **T**-radiciel".

**Proposition 4.23.** *Soient $A$ un anneau et $I$ un $\mathbf{T}$-idéal propre de $A$, maximal comme tel. Alors $I$ est $\mathbf{T}$-premier.*

*Démonstration.* Comme $I$ est propre, on a $A/I \in \mathbf{W}^*_{\mathbf{T}}$ (remarque précédente), d'où $A/I \models \mathbf{T}_{\forall\neg}$ par le corollaire 2.64. Il existe donc un homomorphisme $f : A/I \to B$, où $B \models \mathbf{T}$. Comme $\mathbf{T}$ est stricte, le $\mathbf{T}$-idéal $Ker(f)$ est propre et contient $I$, par suite, $I = Ker(f)$. Ainsi, on a $A/I \models \mathbf{T}_{\forall}$, c'est-à-dire $I$ est $\mathbf{T}$-premier.

**Définition 4.24.** Un idéal $I$ d'un anneau $A$ est dit **T**-maximal si c'est un **T**-idéal propre et maximal comme tel.

La cocomplétude des classes spéciales permet de montrer le résultat suivant.

**Proposition 4.25.** *Soient $A$ un anneau, et $I$ un $\mathbf{T}$-idéal propre. Alors $I$ est inclus dans un idéal $\mathbf{T}$-maximal.*

*Démonstration.* Soit $(J_i)_i$ une chaîne de $\mathbf{T}$-idéaux propres contenant $I$. Soit $J := \bigcup_i J_i$. L'idéal $J$ est propre et on a $A/J \simeq \varinjlim_I A/I_i$. Comme pour tout $i$, $A/I_i \in \mathbf{W}_{\mathbf{T}}$, la limite inductive $A/J \in \mathbf{W}_{\mathbf{T}}$ car cette dernière catégorie est cocomplète. Par suite, $J$ est un $\mathbf{T}$-idéal. Par le lemme de Zorn, $I$ est contenu dans un idéal $\mathbf{T}$-maximal.

Nous proposons une définition des "**T**-corps", qui s'appuie sur la remarque suivante : du point de vue des idéaux, un corps est un anneau non trivial qui ne possède qu'un idéal propre, l'idéal nul. On peut faire un peu mieux : un corps est un anneau dont l'idéal nul est le seul idéal radiciel propre.

*Notation* 4.26. Si $A$ est un anneau et $a \in A$, on écrira $\sqrt[\mathbf{T}]{a}^{+}$ pour $\sqrt[\mathbf{T}]{(a)}^{+}$.

**Proposition 4.27.** *Soit $A$ un anneau non trivial. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *pour tout idéal $I$ de $A$, on a $I = (0)$ ou $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+} = A$ ;*
2. *pour tout $a \in A$, on a $a = 0$ ou $\sqrt[\mathbf{T}]{a}^{+} = A$.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) Evident.
(2)⇒(1) Si $I \neq (0)$, $I$ contient un élément non nul $a$ et $A = \sqrt[\mathbf{T}]{a}^{+} \subseteq \sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+}$.

**Définition 4.28.** Soit $\mathbf{T}$ une théorie stricte d'anneaux. Un $\mathbf{T}$-corps est un modèle $A$ de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ qui vérifie l'une des conditions précédentes. En particulier, un $\mathbf{T}$-corps est un modèle de $\mathbf{T}_W$ donc un objet de $\mathbf{W}^*_{\mathbf{T}}$.

*Remarques* 4.29. Soit $A$ un anneau. Si $A \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$, on a $\sqrt[\mathrm{T}]{0}^+ \neq A$. Supposons donc que $A \in \mathbf{W}^*_{\mathbf{T}}$ : $A$ est un $\mathbf{T}$-corps si et seulement si $0 = \sqrt[\mathrm{T}]{0}^+$ est le seul $\mathbf{T}$-idéal propre de $A$.

Les idéaux $\mathbf{T}$-maximaux et les $\mathbf{T}$-corps entretiennent des relations étroites.

**Proposition 4.30.** *Soit $A$ un anneau. Un $\mathbf{T}$-idéal propre $I$ de $A$ est $\mathbf{T}$-maximal si et seulement si $A/I$ est un $\mathbf{T}$-corps.*

*Démonstration.* Soit $I$ un $\mathbf{T}$-idéal propre : on a $A/I \vDash \mathbf{T}_W$. L'idéal $I$ est donc $\mathbf{T}$-maximal si et seulement si $(0)$ est $\mathbf{T}$-maximal dans $A/I$, ce qui équivaut, par la remarque, à dire que $A/I$ est un $\mathbf{T}$-corps.

Enfin, tout homomorphisme d'un corps dans un anneau non-trivial est un plongement. C'est en fait ce qui les caractérise.

**Proposition 4.31.** *Soit $A \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A$ est un $\mathbf{T}$-corps*
2. *Tout homomorphisme $f : A \to B$, où $B \models \mathbf{T}_{\forall\neg}$, est un plongement*
3. *Tout homomorphisme $f : A \to B$, où $B \models \mathbf{T}$, est un plongement.*

*Démonstration.* (1)⇒(3) Supposons que $A$ est un $\mathbf{T}$-corps, $B \vDash \mathbf{T}$ et $f : A \to B$ est un homomorphisme. Soit $a \in A$ non nul : on doit montrer que $f(a) \neq 0$. Il suffit de montrer que $1 \in \sqrt[\mathrm{T}]{f(a)}^+$, puisque $B$ est un modèle non trivial de $\mathbf{T}_W$. Soit $J$ un idéal $\mathbf{T}$-premier de $B$ contenant $f(a)$. Alors $f^{-1}(J)$ est un idéal $\mathbf{T}$-premier de $A$ contenant $a$. Comme $a \neq 0$, on a $1 \in \sqrt[\mathrm{T}]{a}^+ \subseteq f^{-1}(J)$, d'où $1 = f(1) \in J$. Par suite, on a $1 \in \sqrt[\mathrm{T}]{f(a)}^+$, et $f$ est un plongement.
(3)⇒(2) Soit $f : A \to B$ un homomorphisme, où $B \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$ : il existe un homomorphisme $g : B \to C$, où $C \vDash \mathbf{T}$. Par hypothèse, $g \circ f$ est un plongement, donc $f$ est un plongement.
(3)⇒(1) Soit $a \in A$, non nul. Soit $I$ un $\mathbf{T}$-idéal de $A$ contenant $a$. $I$ est propre si et seulement si il existe un idéal $\mathbf{T}$-premier $J$ contenant $I$. Or il est impossible qu'un tel idéal $J$ existe, car il serait le noyau non trivial d'un homomorphisme de $A$ vers un modèle de $\mathbf{T}$ . Par suite, on a $\sqrt[\mathrm{T}]{a}^+ = A$, et $A$ est un $\mathbf{T}$-corps.

Il faut remarquer que cette notion de $\mathbf{T}$-corps n'est pas en général une notion du *premier ordre*, puisqu'elle est définie à partir des $\mathbf{T}$-idéaux. Nous renvoyons à la sous-section 4.6 du chapitre 7 pour une analyse plus générale.

# Chapitre 5

# Eléments de T-Algèbre des Anneaux et des Corps

## 1 Algèbres de polynômes et de fractions rationnelles

Les algèbres de polynômes à coefficients dans un anneau intègre sont intègres. Nous montrons ici que c'est un phénomène général dans les théories d'anneaux intègres. On rappelle que si $\alpha$ est un ordinal, on peut le voir comme une catégorie, comme tout ensemble partiellement ordonné : si $\beta \leq \gamma$ sont deux éléments de $\alpha$, il y a une unique flèche $(\beta \to \gamma)$ entre $\beta$ et $\gamma$. Par convention, comme avant $A[\emptyset] = A$.

**Proposition 5.1.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une théorie d'anneaux intègres et* $A$ *un modèle infini de* $\mathbf{T}_\forall$*. Alors, pour tout ensemble* $X$*, l'anneau* $A[X]$ *est un modèle de* $\mathbf{T}_\forall$*.*

*Démonstration.* On démontre le résultat par récurrence transfinie dans le cas où $X$ est un ordinal $\alpha$. Par isomorphisme, la proposition s'en déduit.
Si $\alpha = 0$, il n'y a rien à démontrer.
Supposons que $\alpha = \beta + 1$ est successeur, et que pour tout $\gamma < \alpha$, le résultat soit vrai. En particulier, l'anneau $A[\beta]$ est un modèle de $\mathbf{T}_\forall$. Par le théorème de Löwenheim-Skolem, il existe une extension élémentaire $f : A[\beta] \hookrightarrow B$, où $B$ est de cardinal infini strictement supérieur au cardinal de $A[\beta]$. Les éléments de $B$ algébriques sur $A[\beta]$ sont en nombre strictement inférieur au cardinal de $B$, si bien qu'il y a dans $B$ au moins un élément $x$ transcendant sur $f$. L'anneau $f(A[\beta])[x]$ est isomorphe à $A[\alpha]$, qui est donc un modèle de $\mathbf{T}_\forall$.
Si $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$, et si le résultat est vrai pour tout $\beta < \alpha$, on considère les plongements naturels $A[\beta] \hookrightarrow A[\gamma]$, pour tous $\beta < \gamma$ dans $\alpha$. Ces inclusions définissent un foncteur $F : \alpha \to \mathbf{Mod}(\mathbf{T}_\forall)$, où $\alpha$ est considéré avec sa structure de catégorie associée à sa structure d'ensemble ordonné. Le diagramme $F$ est inductif, et la théorie $\mathbf{T}_\forall$ est inductive, si bien que l'anneau $A[\alpha]$, qui est une limite inductive de $F$, est un modèle de $\mathbf{T}_\forall$ (théorème 2.31). Le résultat est démontré.

On peut en fait montrer un résultat plus fort.

**Proposition 5.2.** *Soient* $\mathbf{T}$ *une théorie d'anneaux intègres et* $A$ *un modèle infini de* $\mathbf{T}_\forall$*. Alors, pour tout ensemble* $X$*, il existe une extension élémentaire* $f : A \to B$ *et un* $\mathscr{L}(A)$*-plongement* $A[X] \hookrightarrow B$*.*

*Démonstration.* On commence par démontrer l'assertion suivante : "pour tout ordinal $\alpha$, il existe un foncteur $F_\alpha : \alpha + 1 \to A\mathscr{L}\mathbf{St}$, ayant les propriétés suivantes :

1. $F_\alpha(0) = A$
2. Pour tout $\gamma \in \alpha + 1$, $F_{\alpha\lceil\gamma} = F_\gamma$
3. Pour tous $\beta \leq \gamma \in \alpha + 1$, $F_\alpha(\beta \to \gamma)$ est élémentaire
4. Pour tout $\beta \in \alpha + 1$, il existe un $\mathscr{L}(A)$-plongement $i_\beta : A[\beta] \hookrightarrow F_\alpha(\beta)$."

La preuve se fait par induction transfinie.
Si $\alpha = 0$, on définit $F_0(0) := A$, et $F_0(0 \to 0) := 1_A = i_0$.
Si $\alpha = \beta + 1$, supposons l'hypothèse vérifiée pour tout $\gamma < \alpha$. On définit $F_\alpha$ sur $\beta$ comme $F_\beta$. On a un plongement $i_\beta : A[\beta] \hookrightarrow F_\beta(\beta)$, dont on note $A_\beta$ l'image. Comme précédemment, par le théorème de Löwenheim-Skolem, il exise une extension élémentaire de $F_\beta(\beta)$, qu'on note $F_\alpha(\beta \to \alpha) : F_\beta(\beta) \hookrightarrow F_\alpha(\alpha)$, telle que $F_\alpha(\alpha)$ est de cardinal infini strictement supérieur à celui de $F_\beta(\beta)$, contenant donc un élément transcendent sur $i_\beta$, ce qui permet de définir le plongement $i_\alpha$ : on a démontré la propriété au rang $\alpha$.
Si $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$ est limite, on définit, pour tout $\beta \in \alpha$, $F_\alpha(\beta)$ comme dans le cas "successeur" : il existe un élément $\gamma$ de $\alpha$ (par exemple $\beta + 1$), tel que $\beta \in \gamma$, et $F_\alpha$ est bien défini ainsi, par la condition (2) de l'hypothèse d'induction. On fait de même pour les morphismes entre éléments de $\alpha$, et on se retrouve avec un foncteur $F : \alpha \to A\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ ; la limite inductive de ce diagramme d'extensions élémentaires est notée $F_\alpha(\alpha)$. Ceci définit un prolongement de $F$ en $\alpha + 1$ : en effet, les morphismes $F_\alpha(\beta \to \alpha)$ sont définis comme les morphismes de transition de la limite inductive, et ils sont élémentaires. De plus, les plongements $i_\beta : A[\beta] \hookrightarrow F_\alpha(\beta)$ définissent un autre système inductif indexé par $\alpha$, dont toute limite, isomorphe à $A[\alpha]$, se plonge dans $F_\alpha(\alpha)$, au-dessus de $A$. L'assertion est démontrée.
Le résultat général s'en déduit immédiatement en énumérant l'ensemble $X$ de l'énoncé par un ordinal.

**Corollaire 5.3.** Soient $\mathbf{T}$ une théorie d'anneaux intègres et $K$ un corps, modèle de $\mathbf{T}_\forall$. Alors, pour tout ensemble $X$, il existe une extension élémentaire de $K$ dans laquelle se plonge $K(X)$. En particulier, on $K(X) \models \mathbf{T}_\forall$.

*Démonstration.* Par la proposition précédente, on peut plonger $K[X]$ dans une extension élémentaire de $K$. Cette extension est un corps, modèle de $\mathbf{T}_\forall$, si bien que l'on peut aussi y plonger $K(X)$.

## 2 Anneaux T-locaux

Soit $\mathbf{T}$ une théorie de corps. On peut isoler un fragment simple de $\mathbf{T}$ qui identifie les sous-corps de modèles de $\mathbf{T}$. Soit ainsi $\mathbf{T}_F := \{\chi := \forall X\ [\bigwedge_I (P_i(X) = 0)] \Rightarrow [\bigvee_J (Q_j(X) = 0) \vee \bigvee_K (\exists y_k R_k(X).y_k = 1)] : \mathbf{T} \models \chi\}$. La propriété suivante est une évidence :

**Lemme 5.4.** Un anneau $A$ est un modèle de $\mathbf{T}_F$ si et seulement si c'est un sous-corps d'un modèle de $\mathbf{T}$.

*Remarque* 5.5. Le résultat est encore vrai si l'on part d'une théorie de corps avec des symboles de constantes ou de fonctions additionnels.

Un modèle de $\mathbf{T}_F$ est un **T**-corps, mais l'inverse n'est pas du tout évident. On s'intéresse à $\mathbf{T}_F$ surtout en rapport à certains anneaux locaux.
Soit $A$ un anneau, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal **T**-premier : $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, donc on peut localiser par $A - \mathfrak{p}$ ; notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal du localisé $A_\mathfrak{p}$. On sait que le corps résiduel de $A_\mathfrak{p}$ est isomorphe au corps de fractions $k_\mathfrak{p}$ de $A/\mathfrak{p}$ : comme $A/\mathfrak{p} \vDash \mathbf{T}_\forall$, et **T** est une théorie de corps, l'idéal $\mathfrak{m}$ est un **T**-idéal propre (maximal), puisque $k_\mathfrak{p}$ se plonge dans un modèle de **T**. Soit maintenant $\mathbf{T}_L := \{\chi := \forall X \; [\bigwedge_I (P_i(X) = 0)] \Rightarrow [\bigvee_K (\exists y_k R_k(X).y_k = 1)] : \mathbf{T} \vDash \chi\}$ : on a $\mathbf{T}_F \vDash \mathbf{T}_L$. Les théories $\mathbf{T}_F$ et $\mathbf{T}_L$ sont liées par le phénomène suivant.

**Proposition 5.6.** *Soit $A$ un anneau local de corps résiduel $k$. Alors, $A \vDash \mathbf{T}_L$ si et seulement si $k \vDash \mathbf{T}_F$.*

Pour montrer cela, nous commençons par établir quels sont les anneaux modèles de $\mathbf{T}_L$.

**Lemme 5.7.** La théorie $\mathbf{T}_L$ est reflétée par morphismes locaux.

*Démonstration.* Soit $f : A \to B$ un morphisme local, où $B \vDash \mathbf{T}_L$. Soit $\chi \in \mathbf{T}_L$ comme dans la définition précédente, et supposons que $A \vDash \bigwedge_I P_i(a) = 0$ : on a donc $B \vDash \bigwedge_I (P_i(fa) = 0)$, donc il existe $k$ tel que $R_k(fa)$ est inversible dans $B$. Comme $f$ est local, $R_k(a)$ est inversible dans $A$, qui est donc un modèle de $\chi$, donc de $\mathbf{T}_L$.

*Remarques* 5.8.
1. Ce lemme nous donne donc la moitié de la proposition. Une autre façon de dire les choses, c'est de dire que $\mathbf{T}_L$ est "Zariski-stable" ([33], paragraphe 2).
2. Nous aurions pu démontrer le lemme en appliquant directement la proposition 2.99.

**Corollaire 5.9.** Tout localisé d'un anneau en un idéal **T**-premier est un modèle de $\mathbf{T}_L$.

*Démonstration.* La projection résiduelle d'un tel localisé $A$ est locale, et le corps résiduel est un modèle de $\mathbf{T}_L$, d'où le résultat par le lemme.

**Proposition 5.10.** *Soit $A$ un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$A$ est un modèle de $\mathbf{T}_L$*
2. *$A$ est le localisé d'un anneau en un idéal **T**-premier*
3. *$A$ est un anneau local dont l'idéal maximal est un **T**-idéal.*

*Démonstration.* (2)$\Leftrightarrow$(3) Il a déjà été dit que dans un localisé en un idéal **T**-premier, l'idéal maximal est un **T**-idéal. Réciproquement, si $A$ est local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, $A$ est isomorphe à $A_\mathfrak{m}$. Or, si $\mathfrak{m}$ est un **T**-idéal, il est **T**-premier, puisque **T**-maximal (proposition 4.23).
(1)$\Leftrightarrow$(2) Il ne reste qu'à montrer le sens direct, l'autre étant donné dans le corollaire précédent. Supposons donc que $A \vDash \mathbf{T}_L$ : cette théorie contient celle des anneaux locaux, puisque **T** est une théorie de corps, si bien que $A$ est un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et que $A \simeq A_\mathfrak{m}$. Il suffit donc de montrer que $\mathfrak{m}$ est **T**-premier, c'est-à-dire que le corps résiduel $k := A/\mathfrak{m}$ est un modèle de $\mathbf{T}_\forall$. Soit donc par l'absurde $\forall X \; [\bigwedge_I P_i(X) = 0] \Rightarrow [\bigvee_J Q_j(X) = 0]$ un énoncé basique de $\mathbf{T}_\forall$ qui n'est pas satisfait dans $k$ : il existe un $X$-uplet $a$ d'éléments de $A$ tel que $k \vDash \bigwedge_I P_i(fa) = 0 \wedge \bigwedge_J Q_j(fa) \neq 0$ ($f$ dénote la projection résiduelle). Comme $k$ est un corps et $f$ est locale, on en déduit que $A \vDash [\bigwedge_J (\exists z_j \; Q_j(a).z_j = 1)] \wedge [\bigwedge_I (\neg \exists y_i \; P_i(X).y_i = 1)]$, autrement dit $A \nvDash \forall X \; [\bigwedge_J (\exists y_j \; Q_j(X).y_j = 1)] \Rightarrow [\bigvee_I (\exists y_i \; P_i(X).y_i = 1)]$.

Or, il est facile de voir que cet énoncé est une conséquence de $\mathbf{T}$, et qu'il est donc dans $\mathbf{T}_L$, si bien que $A$ en est un modèle, ce qui est une contradiction. On en conclut que $k \vDash \mathbf{T}_\forall$, ce qui termine la démonstration.

On déduit de ce résultat le sens direct de la proposition 5.6, puisque tout modèle de $\mathbf{T}_L$ a un corps résiduel modèle de $\mathbf{T}_\forall$.

**Corollaire 5.11.** La théorie $\mathbf{T}_L$ est la stabilisation de Zariski de la théorie $\mathbf{T}$ ([33], paragraphe 5).

*Démonstration.* La théorie $\mathbf{T}_L$ est Zariski-stable (proposition 5.6), est incluse dans $\mathbf{T}$, et tout modèle de $\mathbf{T}_L$ a un morphisme local dans un modèle de $\mathbf{T}$, via sa projection résiduelle, par la proposition précédente. On conclut par le lemme 5.2 de [33].

Nous avons vu que les $\mathbf{T}$-corps ne forment pas *a priori* une classe élémentaire. Nous pourrions en dire autant des anneaux "$\mathbf{T}$-locaux", qui seraient les anneaux n'ayant qu'un seul idéal $\mathbf{T}$-maximal. Les modèles de $\mathbf{T}_L$ en sont certainement, mais rien n'exige qu'ils épuisent la classe. Ce dernier résultat montre tout de même que du point de vue élémentaire, la théorie $\mathbf{T}_L$ capture bien les localisations de Zariski.

## 3 Extensions de T-corps

Soit $\mathbf{T}$ une théorie p.m.c stricte d'anneaux. Nous mentionnons ici deux résultats qui ont leur contrepartie en théorie des corps.

**Proposition 5.12.** *Si $A$ est un $\mathbf{T}$-corps, c'est un modèle de $\mathbf{T}$ si et seulement si toute extension de $\mathbf{T}$-corps $f : A \hookrightarrow B$, de type fini, est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Supposons que $A$ est un modèle de $\mathbf{T}$ et que l'extension de $\mathbf{T}$-corps $f$ est engendrée par $n$ éléments $b_1, \ldots, b_n \in B$ formant un $n$-uple $b$. On considère le morphisme d'évaluation en $b$ : son noyau $\mathfrak{m}$ est un idéal $\mathbf{T}$-maximal puisque $B$ est un $\mathbf{T}$-corps (proposition 4.30). Par complétude géométrique, $\mathfrak{m}$ a un point rationnel dans $A$ ; comme $\mathfrak{m}$ est maximal, on a nécessairement $f(a) = b$, donc $f$ est un isomorphisme.
Réciproquement, soit $I$ un idéal $\mathbf{T}$-radiciel propre de $A[X]$, où $X$ est fini. Il existe, par le lemme de Zorn, un idéal $\mathbf{T}$-maximal $\mathfrak{m}$ contenant $I$ ; l'anneau $A[X]/\mathfrak{m}$ est un $\mathbf{T}$-corps, et par hypothèse, l'extension $A \hookrightarrow A[X] \twoheadrightarrow A[X]/\mathfrak{m}$, de type fini, est triviale. Par suite, $\mathfrak{m}$ a un point rationnel dans $A$, donc $I$ aussi : $A$ est un modèle géométriquement clos non trivial de $\mathbf{T}_\forall$, si bien que $A \vDash \mathbf{T}$ (remarque 4.18).

**Proposition 5.13.** *Si $\mathbf{T}$ est une théorie d'anneaux intègres et $A$ un anneau principal, modèle de $\mathbf{T}$, toute extension algébrique de $\mathbf{T}$-corps $f : A \to B$ est triviale.*

*Démonstration.* Supposons que $A$ soit un modèle de $\mathbf{T}$ et soit $f : A \to B$ une telle extension. Soit $b \in B$ : on sait que $b$ est algébrique sur $f$. Comme $A$ est principal, le noyau $I$ du morphisme d'évaluation en $b$ est un idéal maximal : il est donc $\mathbf{T}$-maximal, puisque c'est un idéal $\mathbf{T}$-radiciel. Le sous-anneau $f(A)[b]$ est donc un $\mathbf{T}$-corps, ce qui signifie par la proposition précédente que $b \in f(A)$. Il s'ensuit que $f$ est un isomorphisme.

*Remarques* 5.14.

1. Si **T** est une théorie de corps, la proposition précédente est vérifiée pour les modèles de **T**.
2. On sait qu'une extension de corps est de type fini si et seulement si elle est algébrique et finie. En général, ce que cela signifierait n'est pas clair, si bien qu'on ne peut pas *a priori* dire si un **T**-corps est un modèle de **T** si il n'a pas d'extension algébrique propre. Peut-être faut-il définir une notion d'algébricité propre à la théorie **T**.

# Partie III

# Algèbre Contextuelle et Complétude Géométrique

Dans cette partie, nous nous engageons dans un programme de généralisation de ce qui a été fait dans la partie précédente pour les anneaux commutatifs unitaires. Nous nous plaçons dans le cadre modèle-théorique ensembliste le plus large de la logique du premier ordre, c'est-à-dire la logique infinitaire, et nous traiterons le cas de la logique finitaire comme cas particulier. Travailler dans cette généralité se justifie de plusieurs manières.

D'une part, nos travaux sont liés à l'algèbre universelle, notamment la géométrie algébrique universelle de Boris Plotkin (voir [29] par exemple), qui ne s'inscrit pas dans un contexte exclusivement élémentaire.

D'autre part, nous commençons par développer des outils algébriques formels qui ne se fondent que sur les particularités des structures du premier ordre, et pas sur des questions d'axiomatisabilité finitaire ; nous pensons avoir montré dans la première partie que beaucoup de choses peuvent être faites ou dites en-dehors du cadre élémentaire.

Enfin, les résultats obtenus dans la deuxième partie peuvent être obtenus dans un cadre infinitaire qui jette dans un sens un peu de lumière sur leur nature profonde. La cas élémentaire apparaît alors comme une situation finitaire heureuse.

Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre.

# Chapitre 6

# Algèbres, $a$-Types et Idéaux

Nous reprenons dans ce chapitre les considérations abordées dans la section 2 des préliminaires logiques (chapitre 2). Le travail algébrique qui a été fait avec les anneaux commutatifs peut être généralisé à un contexte plus large que celui de l'algèbre universelle, sans qu'il soit donc nécessaire de restreindre les langages à des symboles de fonctions et de constantes. Nous verrons que les classes spéciales jouent un rôle "algébrique" particulier, et elles nous serviront entre autres à introduire une notion d'"idéal logique".

## 1 $a$-Types et algèbres

Du point de vue de la logique du premier ordre, on peut voir les idéaux comme des ensembles d'équations. La première notion de "proto-idéal" qui nous intéresse est la suivante.

**Définition 6.1.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Un *$a$-type de $A$* ($a$ pour "atomique") est un ensemble de $\mathscr{L}(A)$-énoncés atomiques contenant $D^+(A)$, le diagramme atomique de $A$.

On a alors une notion analogue à celle du noyau d'un morphisme.

**Définition 6.2.** Soit $f : A \to B$ un homomorphisme entre deux $\mathscr{L}$-structures Le $a$-type de $f$, noté $tp_a(f)$, est l'ensemble des $\mathscr{L}(A)$-énoncés atomiques satisfaits dans l'expansion $(B, f)$.

### 1.1 Quotient d'une $\mathscr{L}$-structure par un $a$-type

Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\pi$ un $a$-type de $A$ (donc on a $D^+(A) \subseteq \pi$). Nous voulons "quotienter" la structure $A$ par le $a$-type $\pi$, de sorte que le quotient ait une bonne propriété universelle, c'est-à-dire qu'il soit un modèle initial de $\pi$. Nous décrivons ici la construction de ce "quotient *absolu*" $A \twoheadrightarrow A/\pi$ (la suite du texte fera apparaître des quotients *relatifs*).
Soit $\tilde{\pi} := \{\mathscr{L}(A)\text{-énoncés atomiques } \varphi : \pi \models \varphi\}$. On définit sur $A$ une relation d'équivalence $\sim$ en posant $a \sim b \Leftrightarrow$ "$a = b$" $\in \tilde{\pi}$. On définit alors sur le quotient appelé $A/\pi$ une $\mathscr{L}$-structure, en interprétant chaque symbole de sorte de manière naturelle : comme l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de son interprétation dans $A$.
Si $F$ est un symbole fonctionnel de sortes $(S, s)$ du langage, et si $a$ est un $S$-uplet de $A$, on désigne par $[a]$ les classes d'équivalence des éléments de $a$, et l'on pose $F^\pi([a]) := [F(a)]$. C'est

bien défini car si $a_i = b_i$ pour tout $i$, c'est que $\pi \vDash \bigwedge_i a_i = b_i$, donc aussi $\pi \vDash F(a) = F(b)$, donc cette égalité est dans $\tilde{\pi}$ et $[F(a)] = [F(b)]$.
Si $R$ est un symbole relationnel de sortes $S$ du langage, on définit $R^{A/\pi}$ comme l'ensemble des $S$-uplets $[a]$ de $A/\pi$, tels que $R(a) \in \tilde{\pi}$. Il n'y a pas d'ambiguité dans cette définition, puisque si $\pi \vDash \bigwedge_i a_i = b_i$, on "$R(a)$" $\in \tilde{\pi} \Leftrightarrow$ "$R(b)$" $\in \tilde{\pi}$.
Par définition même de cette $\mathscr{L}$-structure sur $A/\pi$, la projection canonique $f_\pi : A \twoheadrightarrow A/\pi$ est un $\mathscr{L}$-homomorphisme, puisque $D^+(A) \subseteq \tilde{\pi}$ et par construction, on a $f_\pi \vDash \pi$.

**Définitions 6.3.** Le *quotient absolu de $A$ par $\pi$* est la $A$-algèbre $f_\pi : A \twoheadrightarrow A/\pi$, ou par abus de langage, la structure $A/\pi$.
Par abus de langage, "un" quotient absolu de $A$ par $\pi$ sera une $A$-algèbre isomorphe à $f_\pi$.

Le quotient possède la propriété universelle annoncée. Soit en effet $h : A \to B$ une $A$-algèbre, telle que $h \vDash \pi$ (voir la sous-section 2.1 du chapitre 2 pour la notyation dynamique $h \vDash \pi$) : on a nécessairement $h \vDash \tilde{\pi}$. Définissons une application $g : A/\pi \to B$ en posant $g([a]) := h(a)$. Si $a \sim b$, on a $h \vDash a = b$, d'où $h(a) = h(b)$ et $g$ est donc bien définie. Il est facile de voir que $g$ est un homomorphisme de $A$-algèbres de la projection canonique $f_\pi$ dans $h$ et que c'est le seul, par construction. Autrement dit, on a la

**Proposition 6.4.** *Soit $h : A \to B$ une $A$-algèbre. Supposons que $h \vDash \pi$. Alors, il existe un unique morphisme de $A$-algèbres de $f_\pi$ dans $h$.*

A partir de cette propriété universelle, on montre très simplement le théorème formel d'isomorphie suivant.

**Théorème 6.5.** *Soit $h : A \to B$ un homomorphisme, et soit $\pi := tp_a(h)$. Alors, on a $A/\pi \simeq h(A)$.*

*Démonstration.* Soit $g : f_\pi \to h$ l'homomorphisme donné par la propriété universelle de $f_\pi : A \twoheadrightarrow A/\pi$ : on a $g(A/\pi) = h(A)$. Si $\varphi$ est un $\mathscr{L}(A)$-énoncé atomique tel que $h \vDash \varphi$, on a $\varphi \in \pi$, d'où $f_\pi \vDash \varphi$ : $g$ est un isomorphisme.

## 2 Fonctorialité des $a$-types et algèbres

Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. On note $A\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ la $\mathscr{L}^+$-catégorie des $A$-algèbres. Si $\pi$ est un $a$-type, on lui associe la $A$-algèbre quotient canonique $f_\pi : A \twoheadrightarrow A/\pi$. Réciproquement, on peut associer à toute $A$-algèbre $h : A \to B$ son $a$-type. Posons $f_\pi := F(\pi)$ et $tp_a(h) := G(h)$ : on définit de cette manière deux foncteurs de sens inverses, $F : Atp_a \to A\mathscr{L}^+\mathbf{St}$, et $G : A\mathscr{L}^+\mathbf{St} \to Atp_a$, où $Atp_a$ est la catégorie des $a$-types de $A$, vue comme sous catégorie de la catégorie des ensembles, où l'on ne retient comme morphismes que les inclusions.
Si $\pi$ est un $a$-type, on peut lui associer $tp_a(f_\pi) = GF(\pi) := \tilde{\pi}$. Supposons que $\pi \subseteq \pi'$ sont deux $a$-types. On aura naturellement le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \pi \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \tilde{\pi} \arrow[d, hook] \\ \pi' \arrow[r, hook] & \tilde{\pi}', \end{tikzcd}$$

où les injections sont des inclusions. Autrement dit, l'association $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ définit une transformation naturelle $\eta : \mathbf{id}_{Atp_a} \to GF$.
Soient alors $\pi$ un $a$-type et $h : A \to B$ une $A$-algèbre, tels que $\pi \subseteq tp_a(h)$ : par propriété universelle, il existe un unique morphisme $g : f_\pi \to h$. On a $G(f_\pi) = \tilde{\pi}$ , $G(h) = tp_a(h)$ et $G(g)$ est l'inclusion $\tilde{\pi} \subseteq tp_a(h)$. On a aussi $\eta_\pi : \pi \subseteq \tilde{\pi}$, d'où $G(g) \circ \eta_\pi = i : \pi \hookrightarrow tp_a(h)$, où ce dernier plongement est la composée des deux inclusions $\pi \subseteq \tilde{\pi} \subseteq tp_a(h)$. Il s'ensuit que $\eta$ est l'unité d'une adjonction $F \dashv G$.

*Remarque* 6.6. On peut voir directement que si $(f_i)_I$ est une famille de $A$-algèbres, on a $tp_a(\prod_I f_i) = \bigcap_I tp_a(f_i)$. Cette propriété se déduit aussi de l'adjonction $F \dashv G$, puisqu'alors $G$ préserve toutes les petites limites, ayant un adjoint à gauche (voir le théorème du foncteur adjoint de Freyd).

# 3 Algèbres et extensions universelles et spéciales

Nous reprenons la terminologie de la section 1 du chapitre 4 : nous allons définir certaines algèbres particulières et leurs $a$-types associés. Nous nous plaçons dans le cadre d'une classe de $\mathscr{L}$-structures $\mathbf{K}$, qu'on peut supposer close par copies isomorphes, si bien qu'on peut aussi se donner de manière équivalente une théorie infinitaire $\mathbf{T}$, d'après les remarques de la section 3 du chapitre 2 : cela nous permettra de conserver les notations $\sqrt[T]{}^{+}$ et $\sqrt[T]{}$. On rappelle que $\mathbf{U_K}$ et $\mathbf{W_K}$ sont respectivement les classes universelle et spéciale engendrées par $\mathbf{K}$ (voir 2.43 et 2.62).

## 3.1 Algèbres universelles et spéciales

**Définitions 6.7.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure.

1. Une $A$-algèbre $f : A \to B$ sera dite *universelle* si elle se plonge dans une $A$-algèbre $g : A \to C$, où $C \in \mathbf{K}$.
2. Une $A$-algèbre $f : A \to B$ sera dite *spéciale*, si elle se plonge dans un produit de $A$-algèbres universelles.
3. Une $A$-algèbre $f : A \to B$ sera dite *très spéciale*, si c'est une sous-$A$-algèbre d'un produit d'extensions universelles de $A$.

*Remarques* 6.8. 1. Une $A$-algèbre est universelle si et seulement si son *image* est un objet de $\mathbf{U_K}$.
2. Une $A$-algèbre est spéciale si et seulement si son *image* est un objet de $\mathbf{W_K}$.

## 3.2 $a$-Types premiers et radiciels

Les $a$-types des algèbres introduites dans le paragraphe précédent sont les suivants. Nous distinguerons deux situations, correspondant l'une à la version positive du $\mathbf{T}$-radical, l'autre à sa version classique.

**Définitions 6.9.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\pi$ un $a$-type de $A$.

1. $\pi$ sera dit *premier*, si c'est le $a$-type d'une $A$-algèbre *universelle*.

2. Le *radical positif* de $\pi$, noté $\sqrt{\pi}^+$, est l'intersection de tous les $a$-types premiers contenant $\pi$.
3. $\pi$ sera dit *radiciel*, si c'est le $a$-type d'une $A$-algèbre *spéciale*.

*Remarque* 6.10. Une $\mathscr{L}$-structure $A$ possède un $a$-type premier si et seulement si elle se continue en un objet de $\mathbf{K}$.

**Définitions 6.11.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure, $X$ un ensemble et $\pi$ un $a$-type de $A[X]$.

1. $\pi$ sera dit *fortement premier* si c'est le $a$-type d'un $X$-uplet dans une *extension* universelle de $A$.
2. Le *radical* de $\pi$, noté $\sqrt{\pi}$, est l'intersection de tous les $a$-types fortement premiers de $A[X]$ contenant $\pi$.

*Notation* 6.12. Nous omettons ici le "$\mathbf{T}$" dans la notation des radicaux pour alléger la notation.

*Remarques* 6.13.
1. Une $\mathscr{L}$-structure possède un $a$-type fortement premier si et seulement si elle se plonge dans un objet de $\mathbf{K}$.
2. Dans cette seconde définition, on doit faire intervenir les indéterminées $X$ séparément de $A$, à cause du rôle que joue $A$ dans la définition : le quotient $A[X]/\pi$, pour $\pi$ fortement premier, doit être une *extension* de $A$. Dans la première définition, il n'est pas nécessaire de distinguer, puisque l'on ne fait pas d'hypothèse particulière sur l'image d'une sous-structure dans un quotient par un $a$-type radiciel.

On peut donner une caractérisation syntactique des $a$-types premiers et radiciels, qui provient de leur intrication avec les classes $\mathbf{U_K}$ et $\mathbf{W_K}$.

**Proposition 6.14.** *Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\pi$ un $a$-type de $A$. Soit $\mathbf{T} := Th^\infty(\mathbf{K})$. Le $a$-type $\pi$ est*

1. *premier si et seulement si pour tout ensemble $\Phi$ de $\mathscr{L}(A)$-énoncés atomiques tels que $\mathbf{T} \cup \pi \models \bigvee \Phi$, on a $\pi \cap \Phi \neq \emptyset$.*
2. *radiciel si et seulement si pour tout $\mathscr{L}(A)$-énoncé $\varphi$ tel que $\mathbf{T}^\infty_W \cup \pi \models \varphi$, on a $\varphi \in \pi$.*

*Démonstration.* (1) Supposons que $\pi$ est premier. Par le théorème d'isomorphie 6.5, l'algèbre $f_\pi : A \to A/\pi$ est universelle. Comme $\mathbf{T} \cup \pi \models \bigvee \Phi$, on a $f_\pi \models \bigvee \Phi$, si bien qu'il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $f_\pi \models \varphi$. Il s'ensuit que $\varphi \in \pi$, puisque $\pi = tp_a(f_\pi)$.
Réciproquement, montrons que la condition est suffisante pour que $\pi$ soit premier : il suffit de montrer que $f_\pi \models \mathbf{T}^\infty_\forall$. Soit $\chi := \forall X\ \bigwedge \Phi \Rightarrow \bigvee \Psi$ un énoncé universel infinitaire basique de $\mathbf{T}$ (définitions 2.36 et 2.37) . Soit alors $a : X \to A$ un $X$-uplet tel que $f_\pi \models \bigwedge \Phi(a)$. Par propriété universelle de $f_\pi$, cela signifie que $\mathbf{T} \cup \pi \models_{\mathscr{L}(A)} \bigwedge \Phi(a)$, d'où $\mathbf{T} \cup \pi \models \bigvee \Psi(a)$, puisque $\chi \in \mathbf{T}$. Il existe donc, par hypothèse, un énoncé $\psi \in \Psi \cap \pi$, d'où $f_\pi \models \psi$. Cela ne dépendant ni de $a$, ni de $\chi$, on a $f_\pi \models \mathbf{T}^\infty_\forall$, donc le quotient est universel.
(2) Si $\pi$ est radiciel, il est en fait premier relativement à la classe universelle $\mathbf{W_K}$, si bien que le sens direct est automatiquement vérifié.
Réciproquement, soient $\chi := \forall X\ \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$ un énoncé uHs (infinitaire) basique de $\mathbf{T}$ et $a : X \to A$ un $X$-uplet tels que $f_\pi \models \bigwedge \Phi(a)$. Comme précédemment, par la propriété universelle de $f_\pi$ on en déduit que $\mathbf{T}^\infty_W \cup \pi \models \bigwedge \Phi(a)$, d'où $\mathbf{T}^\infty_W \cup \pi \models \psi(a)$. Par hypothèse, on a donc $\psi \in \pi$, d'où $f_\pi \models \psi(a)$, puisque $\pi = tp_a(f_\pi)$ : on a donc $f_\pi \models \chi$, donc $f_\pi$ est une $A$-algèbre spéciale.

*Remarque* 6.15. Dans la condition sur les $a$-types premiers, on peut remplacer $\mathbf{T}$ par $\mathbf{T}^\infty_\forall$.

**Le cas élémentaire**

On suppose que $\mathbf{U_K}$ est axiomatisable par une théorie finitaire du premier ordre $\mathbf{T}$. On peut dans ce cas simplifier la caractérisation syntactique des $a$-types premiers en une condition *finitaire*.

**Proposition 6.16.** *Soit $\pi$ un $a$-type de $A$. Alors, $\pi$ est*

1. *premier si et seulement si pour tout ensemble* fini *$\Phi$ de $\mathscr{L}(A)$-énoncés atomiques tel que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigvee \Phi$, on a $\Phi \cap \pi \neq \emptyset$.*
2. *radiciel si et seulement si pour tout $\mathscr{L}(A)$-énoncé atomique $\varphi$ tel que $\mathbf{T}_W \cup \pi \vDash \varphi$, on a $\varphi \in \pi$.*

*Démonstration.* (1) Le sens direct est un cas particulier de la caractérisation générale des $a$-types premiers. Pour la réciproque, la démonstration est analogue au cas infinitaire, la condition finitaire étant alors suffisante parce que $\mathbf{T}$ est finitaire.
(2) Cette propriété est en fait la propriété générale, puisque $\mathbf{T}_W \equiv \mathbf{T}_W^\infty$ dans ce cas (par la proposition 2.65).

# 4 Algèbre Spéciale

## 4.1 Représentation des algèbres spéciales

La définition du radical positif s'interpète comme dans le cas des anneaux en termes d'algèbres. $\mathbf{K}$ désigne toujours une classe quelconque de $\mathscr{L}$-structures.

**Définition 6.17.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Soit $\mathscr{P} := \{a\text{-types premiers de } A\}$. La *représentation canonique (spéciale)* de $A$ est le produit canonique des morphismes de projection $(f_\mathfrak{p} : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}}$.

*Remarque* 6.18. Soit $\pi$ un $a$-type de $A$. Si $f : A/\pi \to B$ est la représentation canonique de $A/\pi$, le radical positif de $\pi$ est le $a$-type du morphisme composé $f \circ f_\pi$.

On peut alors montrer le théorème suivant, dit de "représentation", en toute généralité. Il s'agit bien d'un théorème, car il faut établir d'une manière ou d'une autre qu'une algèbre est spéciale si et seulement si son $a$-type est égal à son propre radical positif, autrement dit que la terminologie "$a$-type radiciel" est bien choisie.

**Théorème 6.19.** *Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\pi$ un $a$-type de $A$. $\pi$ est égal à son radical positif si et seulement si c'est le $a$-type d'une $A$-algèbre spéciale, autrement dit, s'il est radiciel.*

*Démonstration.* Supposons que $\pi = tp_a(f : A \to B)$, où $f$ est spéciale : il existe une famille $(g_j)_J$ de $A$-algèbres universelles, telle que $f$ est une sous-algèbre d'un produit $g$ des $g_j$. Pour tout $j$, soit $\mathfrak{p}_j := tp_a(g_j)$ : c'est un $a$-type premier contenant $\pi$. Or, on a $\pi = \bigcap\{\mathfrak{p}_j : j \in J\}$, par définition de la validité des énoncés atomiques dans les produits. Il s'ensuit que $\pi \supseteq \sqrt{\pi}^+$, d'où $\pi = \sqrt{\pi}^+$.
Réciproquement, soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des $a$-types premiers contenant $\pi$, qu'on suppose égal à son radical positif. Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$, il existe une $A$-algèbre universelle $f_\mathfrak{p} : A \to B_\mathfrak{p}$, telle que $\mathfrak{p} = tp_a(f_\mathfrak{p})$. Soit $f : A \to B$ le produit de ces algèbres. On a $\pi = \sqrt[\mathbf{T}]{\pi}^+ = \bigcap \mathscr{P} = \bigcap\{tp_a(f_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathscr{P}\} = tp_a(\prod_\mathscr{P} f_\mathfrak{p})$ $= tp_a(f)$, si bien que $\pi$ est bien le $a$-type d'une $A$-algèbre spéciale.

*Remarque* 6.20. *Stricto sensu*, on appelle *représentation (sous-directe)* d'une structure $A$ un isomorphisme de $A$ avec un produit sous-direct de certaines structures (voir 4.4, [18] p.414 et [6] 8.3.7 par exemple).
Le théorème porte donc bien son nom, puisqu'on en conclut que tout objet de $\mathbf{W_K}$ se représente comme produit sous-direct d'objets de $\mathbf{U_K}$, se plongeant dans le produit de ses quotients par un $a$-type premier. Il fournit alors dans chaque cas un théorème de représentation sous-directe, si l'on peut toutefois identifier $\mathbf{W_K}$ et les idéaux premiers (voir 2.68 pour quelques exemples de quasivariétés engendrées) ! Une autre façon de voir les choses, c'est de dire que la classe spéciale $\mathbf{W_K}$ engendrée par une classe $\mathbf{K}$ est exactement la classe des produits sous-directs d'objets de $\mathbf{U_K}$ (à isomorphisme près).

## 4.2 Réduction spéciale et polynômes généralisés

Nous avons parlé de quotients absolus et mentionné une notion de quotient relatif à une classe spéciale. Nous voulons dans cette section préciser de quoi il s'agit et en profiter pour introduire de manière canonique les équivalents des algèbres de polynômes dans les classes spéciales : les algèbres de termes réduites, qui représentent les espaces de points dans les algèbres. Soit $\mathbf{W}$ une classe spéciale, qu'on peut sans perte de généralité supposer engendrée par une classe $\mathbf{K}$, stable par copies isomorphes. On sait qu'il existe une théorie infinitaire $\mathbf{T}$ telle que $\mathbf{K} = Mod(\mathbf{T})$ et $\mathbf{W} = \mathbf{W_K} = Mod(\mathbf{T}_W^\infty)$.

### Quotients relatifs dans une classe spéciale

Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\pi$ un $a$-type de $A$.

**Définitions 6.21.** Le *quotient de $A$ par $\pi$, relatif à* $\mathbf{W}$, est le quotient absolu $A \twoheadrightarrow A/\sqrt[\mathrm{T}]{\pi}^+$. Nous le noterons $A \twoheadrightarrow (A/\pi)_\mathbf{W}$.
Un quotient de $A$ par $\pi$, relatif à $\mathbf{W}$, désignera une $A$-algèbre isomorphe à $A \twoheadrightarrow (A/\pi)_\mathbf{W}$.

On vérifie immédiatement que les quotients relatifs sont spéciaux et initiaux.

**Lemme 6.22.** Le quotient relatif $A \twoheadrightarrow (A/\pi)_\mathbf{W}$ de $A$ par $\pi$ est une $A$-algèbre spéciale.

*Démonstration.* On applique le théorème de représentation 6.19.

**Proposition 6.23.** *Le quotient relatif $A \twoheadrightarrow (A/\pi)_\mathbf{W}$ est présenté dans* $\mathbf{W}$ *par $(A, \pi)$.*

*Démonstration.* On se donne un modèle $B$ de la présentation $\pi$ dans $\mathbf{W}$, autrement dit une algèbre spéciale $g : A \to B$, telle que $\pi \subseteq tp_a(g)$. Comme $g$ est spéciale, on a $\sqrt[\mathrm{T}]{tp_a(g)}^+ = tp_a(g)$ par le théorème de représentation, d'où $tp_a(g) \supseteq \sqrt[\mathrm{T}]{\pi}^+$. Par propriété universelle du quotient $A \twoheadrightarrow (A/\pi)_\mathbf{W}$ vu comme quotient absolu, il existe un unique morphisme de $A$-algèbres de $A \twoheadrightarrow (A/\pi)_\mathbf{W}$ dans $g$.

**W-Réduction d'une structure**

La notion de quotient relatif permet de définir la *réduction* d'une structure, analogue à la réduction d'un anneau en son anneau réduit associé.

**Définition 6.24.** La $\mathbf{W}$-réduction de $B$ est le quotient absolu $B/\sqrt[\mathrm{T}]{D^+(B)}^{+}$, noté $\mathcal{R}_{\mathbf{W}}B$. Elle est naturellement munie de l'homomorphisme canonique noté $r_B^{\mathbf{W}} : B \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{\mathbf{W}}B$.

**Proposition 6.25.** *La structure $\mathcal{R}_{\mathbf{W}}B$ est un objet de $\mathbf{W}$, présenté dans $\mathbf{W}$ par $D^+(B)$.*

*Démonstration.* C'est un cas particulier de quotient relatif $B \twoheadrightarrow (B/D^+(B))_{\mathbf{W}}$.

On se donne désormais un homomorphisme $h : A \to B$. On peut le prolonger par la réduction $r_B^{\mathbf{W}} : B \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{\mathbf{W}}B$. La $A$-algèbre $r_B^{\mathbf{W}} \circ h$ est spéciale, si bien qu'elle satisfait $\sqrt[\mathrm{T}]{D^+(A)}^{+}$. Par propriété universelle de la réduction $r_A^{\mathbf{W}} : A \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{\mathbf{W}}A$, on a une unique factorisation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r_A^{\mathbf{W}}"'] & B \arrow[d, "r_B^{\mathbf{W}}"] \\ \mathcal{R}_{\mathbf{W}}A \arrow[r, dotted, "\mathcal{R}_{\mathbf{W}}h"] & \mathcal{R}_{\mathbf{W}}B, \end{tikzcd}$$

où l'on a appelé $\mathcal{R}_{\mathbf{W}}h$ l'unique factorisation issue de la propriété universelle, de sorte que $\mathcal{R}_{\mathbf{W}}$ est un foncteur de $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ dans $\mathbf{W}$, et que les morphismes $r_A^{\mathbf{W}}, A \in |\mathscr{L}^+\mathbf{St}|$ sont les composantes d'une transformation naturelle $r_\bullet^{\mathbf{W}}$ de $\mathbf{id}_{\mathscr{L}^+\mathbf{St}}$ dans $\mathcal{R}_{\mathbf{W}}$, que l'on notera $r_\bullet$ (bien définie parce que $\mathbf{W}$ est une sous-catégorie de $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$).

**Réduction des algèbres**

Supposons maintenant que $g : A \to B$ et $h : A \to C$ sont deux $A$-algèbres et que $k : g \to h$ est un morphisme de $A$-algèbres. En appliquant le foncteur de réduction à $k$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "k"] & \mathcal{R}_{\mathbf{W}}B \arrow[d, "\mathcal{R}_{\mathbf{W}}k"] \\ & C \arrow[r, "r_C"'] & \mathcal{R}_{\mathbf{W}}C, \end{tikzcd}$$

si bien que $\mathcal{R}_{\mathbf{W}}k$ est naturellement un morphisme de $A$-algèbres spéciales de $r_B \circ g$ dans $r_C \circ h$. Notons $A\mathbf{W}$ la catégorie des $A$-algèbres spéciales. La correspondance précédente définit donc un foncteur $A\mathcal{R}_{\mathbf{W}}$ de $A\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ dans $A\mathbf{W}$.

## 4.3 Algèbres de termes réduites

Notons $G$ le foncteur d'oubli $A\mathscr{L}^{+}\mathbf{St} \to \mathscr{E}ns$, $(h : A \to B) \mapsto B$, et sa restriction à la catégorie $A\mathbf{W}$. Dans le cas des algèbres de termes (voir la sous-section 2.3 du chapitre 2), on avait une adjonction $\mathscr{T}_{\bullet}A \dashv G$ entre les catégories $\mathscr{E}ns$ et $A\mathscr{L}^{+}\mathbf{St}$.
On considère alors le foncteur composé $A\mathcal{R}_{\mathbf{W}} \circ \mathscr{T}_{\bullet}A : \mathscr{E}ns \to A\mathscr{L}^{+}\mathbf{St} \to A\mathbf{W}$, que l'on notera $A_{\mathbf{W}}$ pour simplifier. Si $X$ est un ensemble, on écrira $A_{\mathbf{W}}[X]$ pour $A_{\mathbf{W}}X$. On peut alors définir une transformation naturelle $\tau : \mathbf{id}_{\mathscr{E}ns} \to GA_{\mathbf{W}}$, définie sur la composante $X$ par $\tau_X := r_{\mathscr{T}_X A} \circ \eta_X$, où l'on rappelle que $\eta$ est l'unité de l'adjonction "canonique" $\mathscr{T}_{\bullet}A \dashv G$ liée à l'algèbre de termes. De plus, $A_{\mathbf{W}}[X]$ est naturellement munie d'une structure de $A$-algèbre donnée par l'application $r_{\mathscr{T}_X A} \circ i_X := w_X$, où $i_X$ est l'algèbre de termes $\mathscr{T}_X A$ à proprement parler.
Les propriétés du foncteur de réduction $A\mathcal{R}_{\mathbf{W}}$ permettent alors de montrer que $\tau$ est l'unité d'une adjonction $A\mathcal{R}_{\mathbf{W}} \dashv G$. Autrement dit, la $A$-algèbre $w_X$ vérifie la propriété universelle suivante.

**Proposition 6.26.** *Soient $h : A \to B$ une $A$-algèbre spéciale et $f : X \to B$ une application. Il existe un unique morphisme de $A$-algèbres $\tilde{f} : w_X \to h$, tel que $\tilde{f} \circ \tau_X = f$ (l'application $B^X \to Hom_{A\mathbf{W}}(w_X, h)$, $f \mapsto \tilde{f}$ est une bijection).*

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, hook', "\eta_X"'] \arrow[d, "\tau_X"] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathscr{T}_X A \arrow[r, "r_{\mathscr{T}_X A}"] & A_{\mathbf{W}}[X] \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"] & B \\
& A \arrow[ul, hook, "i_X"] \arrow[u, "w_X"'] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

**Définitions 6.27.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $X$ un ensemble.

1. L'algèbre $w_X : A \to A_{\mathbf{W}}[X]$ sera appelée *l'algèbre de termes réduite à coefficients dans $A$ et en les indéterminées $X$*.
2. Soient $h : A \to B$ une $A$-algèbre et $b : X \to B$ une application. L'homomorphisme $\tilde{b}$ de la proposition précédente sera appelé le *morphisme d'évaluation en $b$ au-dessus de $h$*, noté $h_b$.

Le foncteur $A\mathcal{R}_{\mathbf{W}}$ associe donc à tout ensemble $X$ une $A$-algèbre spéciale initiale parmi celles qui sont engendrées par un $X$-uplet, et si $h : A \to B$ est une $A$-algèbre, on peut représenter l'espace $A$-affine $B^X$ par $Hom_A(A_{\mathbf{W}}[X], B)$. Autrement dit, dans toute classe spéciale $\mathbf{W}$, on dispose d'"algèbres de polynômes généralisés" et l'on peut représenter les espaces et variétés affines à partir de ces algèbres.

# 5 Idéaux logiques et théories pseudo-algébriques

Dans un anneau $A$, un idéal $I$ est un peu plus qu'un ensemble d'équations formelles à coefficients dans l'anneau : l'ensemble des équations associées à $I$ contient ses conséquences qui sont vérifiées dans toute $A$-algèbre ; autrement dit, il "tient compte" des règles de calcul dans les anneaux. Pour obtenir une véritable notion d'idéal logique, il faut donc faire quelques ajouts à la notion de $a$-type ; nous verrons que ces ajouts n'interviennent pas fondamentalement dans la version générale du théorème des zéros que nous démontrerons.
Cette théorie des idéaux est essentiellement associée aux classes spéciales, mais on peut l'élargir d'un point de vue naïf à certaines théories limite dont nous parlerons brièvement, et que nous appellerons théories *pseudo-algébriques*. Ces théories offrent une certaine liberté par rapport au choix du langage.

## 5.1 $a$-Types admissibles, pré-premiers, pré-radiciels

### $a$-Types admissibles

Parmi les $a$-types, on distingue ceux qui sont clos par toutes leurs conséquences formelles.

**Définition 6.28.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Un $a$-type $\pi$ de $A$ sera dit *admissible* si pour tout $\mathscr{L}(A)$-énoncé atomique $\varphi$ tel que $A/\pi \models \varphi$, on a $\varphi \in \pi$, autrement dit si $\pi = tp_a(f_\pi : A \twoheadrightarrow A/\pi)$

*Remarque* 6.29. Les $a$-types admissibles sont les $a$-types dans l'image du foncteur $a$-type de $A\mathscr{L}^+$**St** dans $Atp_a$ (section 2, chapitre 6) autrement dit les $a$-types $\emptyset$-radiciels.

**Définition 6.30.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\pi$ un $a$-type. Le $a$-type admissible engendré par $\pi$, noté $\tilde{\pi}$, est le $a$-type de la projection canonique $f_\pi$. C'est le $a$-type obtenu par l'unité de l'adjonction entre le foncteur quotient et le foncteur $a$-type.

### $a$-Types prépremiers et préradiciels

A l'inverse, quand nous avons parlé de $a$-types premiers ou radiciels, nous avons implicitement supposé qu'ils étaient admissibles. Or, ce n'est pas essentiel pour définir les notions d'algèbre universelle ou spéciale.

**Définition 6.31.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Un $a$-type $\pi$ de $A$ sera dit

1. pré-premier si $\tilde{\pi}$ est premier
2. pré-radiciel si $\tilde{\pi}$ est radiciel.

*Remarques* 6.32. Un $a$-type premier est toujours radiciel et un $a$-type radiciel est toujours admissible.
Un $a$-type premier est pré-premier, un $a$-type radiciel et pré-radiciel.

**Proposition 6.33.** *Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\pi$ un $a$-type de $A$.*

1. *$\pi$ est premier si et seulement si il est pré-premier et admissible.*
2. *$\pi$ est radiciel si et seulement si il est pré-radiciel et admissible.*

*Démonstration.* Par le théorème formel d'isomorphie 6.5, un $a$-type pré-radiciel et admissible est le $a$-type d'une algèbre spéciale, donc il est radiciel. On montre de même qu'un $a$-type pré-premier et admissible est premier.

## 5.2 Idéaux

Nous pouvons désormais parler d'idéaux. Il faut bien noter qu'il ne s'agit pas de la notion d'idéal développée par A.Robinson, qui est une notion locale définie d'une autre manière (voir par exemple [36]). Puisqu'un idéal doit contenir dans un sens "toutes ses conséquences modulo la théorie ambiante", nous voyons réapparaître ici les énoncés universels Horn stricts, c'est-à-dire de la forme $\forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, où $\Phi \cup \{\psi\}$ est un ensemble de formules atomiques. On se place dans le contexte d'une classe spéciale quelconque $\mathbf{W}$.

**Définitions 6.34.** Soient $A$ un objet de $\mathbf{W}$ et $\pi$ un $a$-type de $A$.

1. On dira que $\pi$ est un idéal, si $\pi$ est radiciel, relativement à $\mathbf{W}$.
2. L'idéal engendré par $\pi$, noté $\langle \pi \rangle$, est le $a$-type du quotient relatif $(A \twoheadrightarrow A/\pi)_{\mathbf{W}}$.

*Remarque* 6.35. L'idéal engendré par $\pi$ est l'ensemble des $\mathscr{L}(A)$-énoncés atomiques qui sont conséquences de $Th^{\infty}(\mathbf{W}) \cup \pi$ (autrement dit, de $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{W}) \cup \pi$).

**Définition 6.36.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $I$ un idéal de $A$. On dira que $I$ est *de type fini*, ou *finiment engendré*, si il existe un $a$-type fini $\pi$ tel que $I = \langle \pi \rangle$.

*Exemples* 6.37.
1. Dans la quasivariété $\mathscr{L}^{+}\mathbf{St}$ des $\mathscr{L}$-structures, les idéaux sont les $a$-types admissibles.
2. Soit $\mathbf{T}$ la théorie des anneaux dans le langage des anneaux. Si $A$ est un anneau, et $I$ un idéal au sens de la théorie des anneaux, on peut lui associer $\tilde{I} := \{``a = 0" : a \in I\}$. Le $a$-type $\tilde{I}$ est un idéal logique, puisque tout modèle de $\mathbf{T} \cup \tilde{I}$ induit une $A$-algèbre qui factorise par le quotient $A/I$, donc toute égalité "$a = 0$" conséquence de $\mathbf{T} \cup \tilde{I}$ est déjà vraie dans $A/I$. Réciproquement, si $J$ est un idéal logique d'un anneau $A$ décrit par le langage des anneaux, on peut lui associer un idéal algébrique $I := \{a \in A : ``a = 0" \in J\}$ et l'on a alors $\tilde{I} = J$. Ces deux opérations sont des bijections réciproques de l'ensemble des idéaux algébriques de $A$ sur l'ensemble de ses idéaux logiques.
3. Dans le langage $\langle +, 0 \rangle$ des monoïdes abéliens, si $M$ est un tel monoïde, un idéal logique de $M$ est essentiellement la même chose qu'une congruence sur $M$.
4. Si $G$ est un groupe dans le langage $\langle +, -, 0 \rangle$, un idéal de $G$ correspond à un sous-groupe normal, pour la même raison que dans l'exemple précédent (voir ci-après les rapports entre congruences et idéaux dans les variétés équationnelles, sous-section 5.5).

## 5.3 Idéaux premiers et radiciels

Nous n'avons pour l'instant parlé que de $a$-types premiers et radiciels, d'une part, et d'idéaux, d'autre part. Nous voulons maintenant parler d'idéaux radiciels ou premiers en toute généralité. Pour cela, nous nous plaçons ici dans le contexte d'une classe spéciale $\mathbf{W}_0$, contenant une classe $\mathbf{K}$ : on a donc $\mathbf{W}_0 \supseteq \mathbf{W}_{\mathbf{K}} \supseteq \mathbf{U}_{\mathbf{K}} \supseteq \mathbf{K}$. Il faut bien faire attention à distinguer les *idéaux*, définis comme $a$-types radiciels *relativement à* $\mathbf{W}_0$, et les idéaux radiciels, définis comme $a$-types radiciels *relativement à* $\mathbf{K}$. Autrement dit, le présent vocabulaire présuppose un contexte double : la donnée de $\mathbf{K}$ *et* de $\mathbf{W}_0$.

**Définition 6.38.** Soit $A$ un objet de $\mathbf{W}_0$. Un idéal $I$ de $A$ sera dit

1. radiciel, si c'est un $a$-type radiciel, relativement à $\mathbf{K}$ (c'est-à-dire à $\mathbf{W}_{\mathbf{K}}$).
2. premier, si c'est un $a$-type premier, relativement à $\mathbf{K}$ (c'est-à-dire à $\mathbf{U}_{\mathbf{K}}$).

Il est heureux de voir que la définition du radical positif d'un $a$-type s'adapte bien à la théorie des idéaux.

**Proposition 6.39.** *Le radical positif d'un* $a$-type $\pi$ *est l'intersection de tous les* idéaux *premiers de* $A$ *contenant* $\pi$.

*Démonstration.* Soit $J$ un $a$-type premier de $A$ : $J$ est radiciel relativement à $\mathbf{W}_{\mathbf{K}}$, donc a fortiori relativement à $\mathbf{W}_0$ : c'est donc un idéal. Les idéaux premiers sont donc les $a$-types premiers.

En outre, les idéaux engendrés par des $a$-types particuliers conservent les propriétés syntactiques de ceux-ci.

**Proposition 6.40.** *Soient $A$ un élément de $\mathbf{W}_0$, $\pi$ un $a$-type de $A$ et $I = \langle \pi \rangle$ l'idéal engendré par $\pi$.*

1. *Si $\pi$ est pré-radiciel, alors $I$ est radiciel.*
2. *Si $\pi$ est pré-premier, alors $I$ est premier.*

*Démonstration.* Par définition même de l'idéal engendré, on a $(A/\pi)_{\mathbf{W}_0} = (A/I)$.
Supposons que $\pi$ est pré-radiciel : on a alors $A/\pi \simeq (A/\pi)_{\mathbf{W}_{\mathbf{K}}}$, puisque $f_\pi$ est un modèle initial de $\pi$, donc aussi un modèle initial de $\pi$ dans $A\mathbf{W}_{\mathbf{K}}$. Pour la même raison, $f_\pi$ est un modèle initial de $\pi$ dans $\mathbf{W}_0$, d'où l'on tire $A/\pi \simeq (A/\pi)_{\mathbf{W}_{\mathbf{K}}} \simeq (A/\pi)_{\mathbf{W}_0}$. On en déduit que $(A/\pi)_{\mathbf{W}_{\mathbf{K}}} \simeq A/I$, donc $I$ est un $a$-type pré-radiciel, donc radiciel puisqu'il est admissible.
De même, si $\pi$ est premier, $I$ est un $a$-type admissible et prépremier, donc premier (proposition 6.33).

*Exemples* 6.41.

1. Si $A$ est un anneau décrit dans le langage des anneaux, si $\mathbf{T}$ est la théorie des anneaux intègres, un idéal logique $\mathbf{T}$-premier est essentiellement un idéal premier.
2. Si $G$ est un groupe décrit dans le langage des groupes, si $\mathbf{T}$ est la théorie des groupes abéliens, un idéal logique est essentiellement un sous-groupe normal, et un idéal logique $\mathbf{T}$-premier un sous-groupe normal contenant le sous-groupe dérivé.
3. Soit $\mathbf{T}_0$ la théorie des anneaux dans le langage $\mathscr{L} := \langle +, \times, -, <, 0, 1 \rangle$ des anneaux ordonnés avec inégalité stricte. Soit $\mathbf{T}$ la théorie des corps ordonnés réels clos dans ce langage. Si $A$ est un anneau, on peut le munir d'une $\mathscr{L}$-structure en interprétant par exemple l'inégalité par la relation vide.
   Soit alors $P$ un cône premier d'un anneau $A$, de support $I$. $P$ détermine un $\mathscr{L}$-homomorphisme $\pi_P : A \to (A/I, <_P)$, où $<_P$ est l'ordre strict total induit sur le quotient $A/I$ par le cône $P$. On peut donc associer à $P$ le $a$-type $\mathfrak{p}$ de $\pi_P$. Comme $(A/I, <_P)$ est un anneau intègre totalement ordonné, le $a$-type $\mathfrak{p}$ est un idéal logique premier. Si $Q$ est un autre

cône premier de $A$, différent de $P$, et de support $J$, on lui associe de même l'idéal logique premier $\mathfrak{q} := tp_a(\pi_Q : A \to (A/J, <_Q))$. Si $I = J$, il existe par exemple $a \in P - (Q \cap J)$, donc $a_I >_P 0$ tandis que $a_J <_Q 0$, si bien que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Si $I \neq J$, il existe par exemple $a \in I - J$, et donc $a_I = 0$, tandis que $a_J \neq 0$ et là encore on a $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Il s'ensuit que $\Phi : P \mapsto \mathfrak{p}$ est une injection de l'ensemble des cônes premiers de $A$ dans l'ensemble des idéaux logiques premiers de $A$. Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal logique premier de $A$ : on peut lui associer l'ensemble $P := \{a \in A : ``a > 0'' \in \mathfrak{p} \text{ ou } ``a = 0'' \in \mathfrak{p}\}$. Par les règles de calcul qui découlent de la théorie des anneaux intègres ordonnés, $P$ est un cône premier et il est à peu près évident que $\Phi(P) = \mathfrak{p}$, donc $\Phi$ établit une bijection entre les cônes premiers de $A$ et ses idéaux logiques premiers, au sens de la théorie des corps ordonnés réels clos dans le langage avec ordre strict.

Soit maintenant $\mathbf{T}$ la théorie des corps ordonnés réels clos dans le langage $\mathscr{L} := \langle +, \times, -, \leq, 0, 1\rangle$. Si $A$ est un anneau, on peut faire de $A$ une $\mathscr{L}$-structure en interprétant le symbole de relation binaire $\leq$ par l'égalité ou même par le vide. Dans ce cas, on peut comme auparavant associer à tout cône premier $P$ de $A$ le $a$-type de son homomorphisme canonique associé $\pi_P : A \to (A/I, \leq_P)$, qui est encore un idéal logique premier, puisque les anneaux intègres ordonnés par l'inégalité large sont les sous-structures des modèles de $\mathbf{T}$ dans ce langage. On associe réciproquement à tout idéal logique premier $\mathfrak{p}$ de $A$ le cône premier $P$ de $A$ défini par $P := \{a \in A : ``a \geq 0'' \in \mathfrak{p}\}$. On a ici encore une bijection entre les cônes premiers de $A$ et les idéaux logiques premiers de $A$, au sens cette fois d'une théorie écrite dans le langage avec inégalité large.

## 5.4 Théories pseudo-algébriques

Il est apparu que l'on pouvait encore "faire des choses algébriques" dans le cadre des catégories localement (finiment) présentables, cadre plus large aux sens catégorique et logique que celui des quasivariétés (cf [1], [11], [12] et [16]). Supposons qu'on veuille étendre notre notion d'idéal dans ce contexte, et soit $\mathbf{T}$ une théorie limite (voir la sous-section 3.6 du chapitre 2). Si l'on fait le quotient absolu, comme on l'a fait en fait précédemment, par un $a$-type clos par ses conséquences atomiques modulo $\mathbf{T}$, le codomaine du quotient est un modèle de $\mathbf{T}_W$, mais pas forcément de $\mathbf{T}$, ce qui le situe éventuellement hors de la catégorie $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T})$. On pourrait chercher à y remédier en prenant le problème par l'autre bout : le quotient dans une classe spéciale est en quelque sorte présenté par l'idéal : on pourrait alors définir le quotient comme le modèle de $\mathbf{T}$ présenté par l'idéal (au sens logique), ce qui est possible dans ces théories. Mais dans cette configuration, les bonnes propriétés du quotient absolu, dont nous userons dans le théorème de représentation, ne sont plus valides. Il est toutefois possible d'étendre la situation précédente à une classe de théories limite plus vaste que celle des théories uHs, ce que nous exposons brièvement dans cette section.

**Lemme 6.42.** Les énoncés de la forme $\forall X\ \varphi(X)$, où $\varphi$ est une formule positive primitive, sont préservés par images homomorphes.

*Démonstration.* Soient $f : A \to B$ un homomorphisme surjectif de $\mathscr{L}$-structures et $\varphi(X) = \exists Y\ \psi(X,Y)$ une formule positive primitive, telle que $A \vDash \forall X\ \varphi(X)$. Soit $b \in B^X$ : il existe $a \in A^X$ tel que $b = f(a)$. On sait qu'il existe $c \in A$, tel que $A \vDash \psi(a,c)$, d'où $f \vDash \psi(a,c)$, c'est-à-dire $B \vDash \varphi(b)$. Par suite, on a $B \models \forall X\ \varphi$.

**Définition 6.43.** Une théorie $\mathbf{T}$ sera dite *pseudo-algébrique*, si c'est une théorie limite dont tous les axiomes sont uHs ou de la forme $\forall X\ \varphi$, où $\varphi$ est une formule positive primitive.

*Remarque* 6.44. Si $\mathbf{T}$ est une théorie pseudo-algébrique, une sous-théorie $\mathbf{S}$ de $\mathbf{T}$ n'est pas nécessairement pseudo-algébrique. Cette remarque vaut en général pour les théories limite, puisqu'il se peut que la sous-théorie omette de préciser la fonctionnalité de certaines formules : une formule cartésienne modulo $\mathbf{T}$ n'est pas nécessairement cartésienne modulo $\mathbf{S}$.

**Définition 6.45.** Soit $\mathbf{T}$ une théorie pseudo-algébrique. Soient $A$ un modèle de $\mathbf{T}$ et $\pi$ un $a$-type de $A$. On dira que $\pi$ est un *idéal* de $A$ si c'est un idéal de $A$ vu comme modèle de $\mathbf{T}_W$.

Autrement dit, du point de vue des idéaux logiques, on regarde un modèle d'une théorie pseudo-algébrique comme un modèle de sa théorie uHs.

**Proposition 6.46.** *Soient $A$ un modèle d'une théorie pseudo-algébrique $\mathbf{T}$ et $I$ un idéal de $A$. Alors, le quotient $A/I$ est un modèle initial de $\mathbf{T} \cup I$.*

*Démonstration.* Puisque $I$ est un idéal, on sait déjà que $A/I \models \mathbf{T}_W$. Soit maintenant $\psi$ un énoncé de $\mathbf{T}$ qui n'est pas uHs : c'est un énoncé de la forme $\forall X\ \varphi$, où $\varphi$ est positive primitive. Par le lemme 6.42, on a $A/I \models \psi$, puisque la projection canonique $A \twoheadrightarrow A/I$ est surjective : il s'ensuit que $A/I \models \mathbf{T}$. Comme $A/I$ est aussi un modèle initial de $\mathbf{T}_W \cup I$, c'est un modèle initial de $\mathbf{T} \cup I$.

Donnons quelques exemples de théories pseudo-algébriques.

*Exemples* 6.47.

1. Soit $\mathbf{T}$ la théorie des groupes abéliens dans le langage $\langle +, 0 \rangle$ : c'est une théorie pseudo-algébrique. Si $M$ est un monoïde abélien dans ce langage, un idéal est une congruence, et le quotient sera un monoïde abélien. Si $M$ est toutefois un groupe, un idéal correspondra à un sous-groupe, puisque le quotient sera naturellement un groupe abélien.
2. Soit $\mathbf{T}_0$ la théorie des groupes dans le langage $\langle *, e \rangle$ : c'est une théorie pseudo-algébrique. Soit $\mathbf{T}$ la théorie des groupes abéliens dans le même langage. Si $G$ est un groupe décrit dans ce langage, les idéaux de $G$ correspondent à ses sous-groupes normaux, tandis que les idéaux $\mathbf{T}$-premiers correspondent aux sous-groupes normaux contenant le sous-groupe dérivé de $G$. D'ailleurs, comme la théorie des groupes abéliens est pseudo-algébrique dans ce langage, les idéaux premiers se confondent avec les idéaux radiciels.
3. Soit $\mathbf{T}$ la théorie des anneaux dans le langage $\langle +, \times, 0, 1 \rangle$, qui est une théorie pseudo-algébrique. Un idéal d'un anneau $A$ correspond à un idéal au sens classique. Si maintenant $\mathbf{T}$ est la théorie des anneaux réduits dans le même langage, c'est encore une théorie pseudo-algébrique, et les idéaux logiques d'un anneau réduit correspondent alors à ses idéaux radiciels.
4. De manière générale, si $\mathbf{T}$ est une théorie d'anneaux dans le langage précédent et $\mathbf{T}_0$ la théorie des anneaux, les $\mathbf{T}$-idéaux d'un anneau $A$ dans ce langage correspondent toujours aux $\mathbf{T}$-idéaux dans le langage dit des anneaux : la notion de théorie pseudo-algébrique apporte ici un peu de stabilité par rapport au choix du langage. D'ailleurs, toute théorie

positivement modèle-complète d'anneaux le reste si on la traduit dans ce langage, et fournit une théorie positivement modèle-complète de demi-anneaux, par le théorème 2.115 (un homomorphisme de demi-anneaux entre anneaux "est" un homomorphisme d'anneaux !). Par exemple, les corps algébriquement clos sont *aussi* les demi-anneaux non-triviaux positivement existentiellement clos (2.126).

5. Un treillis distributif est un demi-anneau, si par exemple $+$ est interprété comme la borne supérieure et $\times$ comme la borne inférieure de deux éléments. Soient donc $\mathbf{T}_0$ la théorie des treillis distributifs dans le langage $\langle +, \times, 0, 1\rangle$ des demi-anneaux, et $\mathbf{T}$ la théorie du treillis universel $\mathbf{2}$ dans ce langage. Au passage, la théorie $\mathbf{T}$ est stricte et positivement modèle-complète, puisque comme théorie d'une structure finie, tout modèle est isomorphe à $\mathbf{2}$ et $\mathbf{2}$ n'a pas d'endomorphisme non trivial. Si $A$ est un treillis distributif non trivial ($0 \neq 1$), les idéaux $\mathbf{T}$-premiers de $A$ au sens logique correspondent à ses idéaux premiers au sens des treillis, ou encore dualement à ses filtres premiers, et les idéaux radiciels correspondent aux filtres de $A$. La "représentation canonique" d'un treillis distributif $A$ est un homomorphisme de $A$ dans $\mathbf{2}^{\mathscr{P}}$ où $\mathscr{P}$ est l'ensemble des idéaux premiers de $A$. Quand cet homomorphisme est-il un plongement ?
   En particulier, la théorie $\mathbf{T}_0'$ des algèbres de Boole est une théorie pseudo-algébrique dans ce langage des semi-anneaux, et cette théorie est incluse dans $\mathbf{T}$ ! Si $A$ est une algèbre de Boole, les idéaux premiers de $A$ au sens logique correspondent à ses ultrafiltres.

*Remarques* 6.48.
1. La plupart de ces exemples fournissent des exemples d'idéaux logiques dans une quasivariété, en changeant le langage.
2. En théorie des modèles, on aime parfois passer d'un point de vue à un autre. Par exemple, on peut vouloir écrire les théories dans un langage purement relationnel, ou à l'extrême opposé, vouloir les décrire avec des symboles de sortes et de fonctions seuls. Les théories pseudo-algébriques permettent de remplacer en logique multi-sortes des symboles de fonction par des symboles relationnels, ou l'inverse : la "traduction" fournit une théorie pseudo-algébrique. On pourra consulter dans l'annexe 2.2 la description de traductions grâce à des théories limite.

## 5.5 Le cas de l'algèbre universelle

L'intuition de cette théorie logique des idéaux provient de l'algèbre et de l'algèbre universelle. Nous vérifions brièvement ici que la théorie des idéaux logiques est une généralisation véritable de la théorie des congruences dans les variétés d'algèbres, et donc en particulier des idéaux (algébriques !) dans les algèbres basées en groupes (chapitre 2, sous-section 3.5).

### Congruences et idéaux

Soit $\mathbf{T}$ une théorie équationnelle, et $\mathbf{V}$ la variété $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T})$.
Soit $A$ un objet de $\mathbf{V}$. Si $T$ est une congruence de $A$, on peut lui associer l'idéal logique $I_T$, engendré par l'ensemble des énoncés de la forme $a = b$, où le couple $(a,b) \in T$. Dans l'autre sens, on peut associer à un idéal $I$ de $A$ le sous-ensemble de $A^2$ noté $T_I := \{(a,b) : \text{"}a = b\text{"} \in I\}$. Comme $I$ est le $a$-type de la projection $A \to A/I$, l'ensemble $T_I$ est le noyau de cette projection, si bien que $T_I$ est une congruence. Soient $\mathscr{C}$ l'ensemble des congruences sur $A$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble

des idéaux logiques de $A$. On peut donc définir deux applications $\Phi : \mathscr{C} \to \mathscr{I}$, $T \mapsto I_T$ et $\Psi : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$, $I \mapsto T_I$.

**Proposition 6.49.** *Soient $T$ une congruence et $I$ un idéal de $A$. On a*

1. $A/T \simeq A/\Phi(T)$.
2. $A/\Psi(I) \simeq A/I$.

*Démonstration.* (1) Remarquons que la projection sur le quotient $A/T$ définit un modèle de la présentation $(A,\Phi(T))$. En effet, le quotient est un modèle de $\mathbf{T} \cup \{``a = b" : (a,b) \in T\}$, puisque notamment $A/T \in \mathbf{V}$, donc il satisfait toutes les conséquences de cet ensemble d'énoncés, soit précisément $I_T$. Soit alors $(B,f) \vDash (A,\Phi(T))$ dans $\mathbf{V}$. Pour tout couple $(a,b) \in T$, on a $(B,f) \vDash a = b$, si bien que $T \subseteq Ker(f)$, et par le théorème d'isomorphie (voir 2.75), le morphisme $f$ factorise de manière unique par la projection $\pi : A \to A/T$. Autrement dit, si l'on note $\pi : A \twoheadrightarrow A/\pi$ la projection canonique, $(A/T,\pi)$ est un modèle initial de $(A,\Phi(T))$ dans $\mathbf{V}$, donc il est isomorphe à $A/\Phi(T)$.
(2) Soit comme précédemment $(B,f)$ un modèle de $(A,I)$ dans $\mathbf{V}$. Si $(a,b) \in \Psi(I)$, on a $``a = b" \in I$, si bien que $(B,f) \vDash a = b$, d'où $\Psi(I) \subseteq Ker(f)$. Par le théorème d'isomorphie, $f$ factorise de manière unique par le quotient $A \to A/\Psi(I)$. Par définition d'un modèle de $\mathbf{T}$ présenté par $(A,I)$, on a $A/I \simeq A/\Psi(I)$, puique $A \to A/\Psi(I)$ définit un modèle de $(A,I)$.

**Corollaire 6.50.** Les applications $\Phi$ et $\Psi$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, les congruences dans une variété équationnelle sont essentiellement les idéaux logiques.

*Démonstration.* Soit $T$ une congruence de $A$. Soit $(a,b) \in \Psi \circ \Phi(T)$. Par définition de $\Psi$, la formule $a = b$ est dans $\Phi(T)$. Par la proposition, on a donc $(a,b) \in T$, d'où $T = \Psi \circ \Phi(T)$ : $\Phi$ est injective. Soit $I$ un idéal de $A$. Supposons qu'un énoncé $\varphi$ est dans $\Phi \circ \Psi(I)$ : il existe deux $\mathscr{L}$-termes $t$ et $u$ et des uplets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de $A$ tels que la formule $\varphi$ est de la forme $t\bar{a} = u\bar{b}$. Par définition d'un idéal engendré, on a $\mathbf{T} \cup \{``c = d" : (c,d) \in \Psi(I)\} \vDash t\bar{a} = u\bar{b}$. Or, la projection canonique $A \to A/\Psi(I)$ est modèle du premier membre de l'implication, donc de $t\bar{a} = u\bar{b}$. Par la proposition, on a $A/I \simeq A/\Psi(I)$, d'où l'on déduit que $A/I \vDash t\bar{a} = u\bar{b}$. Comme $I$ est un idéal, il est admissible, donc on a $``t\bar{a} = u\bar{b}" \in I$. On en conclut $I = \Phi \circ \Psi(I)$, c'est-à-dire que $\Phi$ est surjective, ce qu'il fallait démontrer.

# Chapitre 7

# Complétude Géométrique

Ce chapitre forme le coeur de cette troisième partie : nous développons la théorie générale qui sous-tend les théorèmes de la seconde partie. Tout au long de ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera une classe de $\mathscr{L}$-structures, les précisions supplémentaires étant mentionnées à l'occasion.

## 1 $a$-Types, idéaux et points

Nous conserverons les notations utilisées pour les anneaux, bien qu'elles soient un peu impropres (l'ensemble des solutions d'un $a$-type n'est pas, en toute généralité, un ensemble de "zéros"...).
Si $f : A \to B$ est un homomorphisme, $X$ un ensemble et $\pi$ un $a$-type de $A[X] = \mathscr{T}_X A$, on notera

- $\mathscr{Z}_f(\pi) := \{b \in B^X : \pi \subseteq tp_a(f_b)\}$
- $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(\pi)) := \bigcap_{b \in \mathscr{Z}_f(\pi)} \{tp_a(f_b)\}$.

Si $\mathbf{W}_0$ est une classe spéciale, et $I$ un idéal de $A_{\mathbf{W}_0}[X]$, on notera encore, si $f$ est dans $\mathbf{W}_0$,

- $\mathscr{Z}_f(I) := \{b \in B^X : I \subseteq tp_a(f_b)\}$
- $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I)) := \bigcap_{b \in \mathscr{Z}_f(I)} \{tp_a(f_b)\}$.

Notons que dans ce cas, les $a$-types $tp_a(f_b)$ et donc $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(I))$ sont des idéaux.
Pour exprimer les résultats de complétude géométrique suivants en termes d'idéaux, nous aurons besoin du lemme suivant, qui permet de passer du point de vue des $a$-types formels aux idéaux dans $\mathbf{W}_0$ (on pourra se reporter à la sous-section 4.2 du chapitre 6 pour la définition de la transformation naturelle $r_\bullet^{\mathbf{W}_0}$).

**Lemme 7.1.** Soit $f : A \to B$ un homomorphisme dans $\mathbf{W}_0$. Soient $X$ un ensemble de variables et $I$ un idéal de $A_{\mathbf{W}_0}[X]$, engendré par le $a$-type $\pi_0$. Soit $\pi$ un relèvement de $\pi_0$ par le morphisme $r^{\mathbf{W}_0}_{\mathscr{T}_X A} : \mathscr{T}_X A \twoheadrightarrow A_{\mathbf{W}_0}[X]$. Alors, on a $\mathscr{Z}_f(I) = \mathscr{Z}_f(\pi)$.

*Démonstration.* Soit $b \in B^X$. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}_X A \arrow[r, "r^{\mathbf{W}_0}_{\mathscr{T}_X A}"] & A_{\mathbf{W}_0}[X] \arrow[d, "f_b"] \\
A \arrow[u, hook, "i_X"] \arrow[ur] \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle de $i_X$, l'application $f_b \circ r^{\mathbf{W}_0}_{\mathscr{T}_X A}$ est l'évaluation en $b$ au sens de l'algèbre de termes, donc si $\varphi$ est un $\mathscr{L}(\mathscr{T}_X A)$-énoncé, on a $(B,f) \vDash \varphi(b) \Leftrightarrow f_b \circ r^{\mathbf{W}_0}_{\mathscr{T}_X A} \vDash \varphi \Leftrightarrow f_b \vDash \varphi^{r^{\mathbf{W}_0}_{\mathscr{T}_X A}}$. Il s'ensuit que $(B,f) \vDash \pi(b) \Leftrightarrow f_b \vDash \pi_0 \Leftrightarrow f_b \vDash I$, la dernière équivalence provenant du fait que $B \in \mathbf{W}_0$, donc $\pi_0$ est équivalent dans $f$ à $I$, par définition de l'idéal engendré. Autrement dit, on a $\mathscr{Z}_f(\pi) = \mathscr{Z}_f(I)$.

## 2 Diagrammes uHs et propriétés géométriques

On comprend directement pourquoi la notion d'énoncé uHs est liée à celle d'idéal. D'un autre côté, on réalise que cette forme d'énoncé est fondamentalement liée au théorème des zéros lorsque l'on considère qu'une structure satisfait ce théorème quand elle réalise certains ensembles d'équations en évitant exactement une autre équation, c'est-à-dire en réalisant un énoncé de la forme $\exists X \bigwedge \Phi \wedge \neg\psi$, où $\Phi \cup \{\psi\}$ est un ensemble de formules atomiques : les négations de tels énoncés sont précisément les énoncés uHs. Cette idée apparaît plus ou moins explicitement dans [36] et [29], dans des contextes différents.
Nous pouvons aller plus loin dans l'usage de ces énoncés, en nous inspirant de la complétude existentielle (resp. positive), contexte dans lequel on peut caractériser les existentiellement clos (resp. p.e.c), par la *persistence* de leur diagramme universel (resp. h-universel). Nous introduisons donc les diagrammes uHs par analogie, pour aboutir à une démonstration du théorème des "zéros" conceptuellement différente de celle qui est présentée dans le théorème 4.9 par exemple. On se place dans le contexte d'une classe de $\mathscr{L}$-structures $\mathbf{K}$, qu'on peut supposer fermée par copies isomorphes. Si $A$ est une $\mathscr{L}$-structure, on notera $A\mathbf{K}$ la catégorie des $A$-algèbres dont le codomaine est dans $\mathbf{K}$, et $\tilde{A\mathbf{K}}$ la $\mathscr{L}(A)^+$-catégorie des $\mathscr{L}(A)$-expansions d'un objet de $\mathbf{K}$ qui sont des modèles de $D^+(A)$ : autrement dit, $\tilde{A\mathbf{K}}$ est obtenue à partir de $A\mathbf{K}$ en retenant les expansions induites par la structure de $A$-algèbre.

**Définitions 7.2.**
1. Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Le *diagramme universel Horn strict (uHs)* de $A$, noté $Th^{\infty}_{W}(A|A)$, est l'ensemble des énoncés universels Horn stricts basiques à paramètres dans $A$, et satisfaits dans $A$. Le diagramme uHs *finitaire* de $A$, noté $Th_W(A|A)$, en est la version finitaire.
2. Soit $f : A \to B$ une algèbre. Le *diagramme universel Horn strict (uHs)* de $f$, noté $Th^{\infty}_{W}(f)$, est l'ensemble des énoncés universels Horn stricts à paramètres dans $A$, et satisfaits par $f$. On définit comme avant $Th_W(f)$, le diagramme uHs finitaire de $f$.

3. Soit $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures. La *théorie universelle Horn stricte (uHs)* de $\mathbf{K}$, notée $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K})$, est l'ensemble des énoncés universels Horn stricts infinitaires satisfaits dans tous les objets de $\mathbf{K}$. On définit aussi $Th_{W}(\mathbf{K})$, la théorie uHs finitaire de $\mathbf{K}$, de manière évidente.

Donnons une explication rigoureuse de la connexion modèle-théorique entre les "variétés affines" et les énoncés uHs.

**Lemme 7.3.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. La catégorie $\tilde{A\mathbf{K}}$ est axiomatisée par $Th^{\infty}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A)$ et $\mathbf{W}_{\tilde{A\mathbf{K}}}$ par la théorie $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A)$ (on a $Th^{\infty}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \equiv Th^{\infty}(\tilde{A\mathbf{K}})$ et $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \equiv Th^{\infty}_{W}(\tilde{A\mathbf{K}})$).

*Démonstration.* Comme $\mathbf{K} = Mod(Th^{\infty}(\mathbf{K}))$, un modèle de $Th^{\infty}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A)$ est une $\mathscr{L}(A)$-expansion d'un objet de $\mathbf{K}$, qui est aussi un modèle de $D^{+}(A)$, autrement dit un objet de $\tilde{A\mathbf{K}}$, et un objet de $\tilde{A\mathbf{K}}$ est évidemment un modèle de $Th^{\infty}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A)$, d'où la première axiomatisation.
Pour la deuxième, un modèle $C$ de de $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A)$ est une une $\mathscr{L}(A)$-expansion induite par une $A$-algèbre spéciale $f : A \to B$. Autrement dit, il existe une famille $(B_i)_I$ d'objets de $\mathbf{K}$ telle que $B$ se plonge dans $\prod_I B_i$ : les projections sur chaque coordonnées fournissent autant d'objets de $\tilde{A\mathbf{K}}$ dont le produit contient $C$, si bien que $C \in \mathbf{W}_{\tilde{A\mathbf{K}}}$. La réciproque est évidente.

**Lemme 7.4.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure, $X$ un ensemble de variables, $\Phi$ un ensemble de $\mathscr{L}(A)$-formules atomiques en les variables $X$ et $\psi$ une $\mathscr{L}(A)$-formule en les variables $X$. On a

1. $\psi \in \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi))$ si et seulement si $A \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$
2. $\psi \in \sqrt{\Phi}^{+}$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes, équivalentes, est vérifiée :
   - $Th^{\infty}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$
   - $Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$
   - $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$,
3. $\psi \in \sqrt{\Phi}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes, équivalentes, est vérifiée :
   - $Th^{\infty}(\mathbf{K}) \cup D(A) \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$
   - $Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K}) \cup D(A) \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$.

*Démonstration.* (1) Evident.
(2) Soient $\psi \in \sqrt{\Phi}^{+}$, $B \models Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A)$ et $f : A \to B$ l'homomorphisme induit. Soit $b \in B^X$, tel que $B \models \bigwedge \Phi^f(b)$. Soit $f_b : \mathscr{T}_X A \to B$ le morphisme d'évaluation en $b$, de sorte que $f_b \models \bigwedge \Phi$. Le $a$-type $f_b$ est radiciel, il contient $\Phi$, donc il contient $\psi$, ce qui signifie que $B \models \psi^f(b)$. Autrement dit, on a $B \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, d'où $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \models \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$.
Réciproquement, supposons que $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \models \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, et soit $\mathfrak{p}$ un $a$-type premier contenant $\Phi$. Notons $f$ le morphisme composé $A \hookrightarrow A[X] \twoheadrightarrow A[X]/\mathfrak{p}$. On a $f \models \Phi$, et aussi $f \models Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A)$, puisque $\mathfrak{p}$ est premier, si bien que par hypothèse, on a encore $f \models \psi$. Cela signifie exactement que $\psi \in \mathfrak{p}$ ; on en conclut que $\psi \in \sqrt{\Phi}^{+}$, puisque $\mathfrak{p}$ a été choisi indifféremment.
Il reste à montrer l'équivalence des trois conditions syntactiques, et il suffit de montrer que la première implique la dernière. Soit donc $\chi$ un énoncé uHs à paramètres dans $A$, tel que $Th^{\infty}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \models \chi$ : par le lemme précédent, on a donc $\chi \in Th^{\infty}_{W}(\tilde{A\mathbf{K}})$, c'est-à-dire que $Th^{\infty}_{W}(\mathbf{K}) \cup D^{+}(A) \models \chi$, toujours

par le lemme.
(3) La démonstration est tout-à-fait identique à celle du point (2), en remplaçant les $a$-types premiers par des $a$-types fortement premiers. L'équivalence des deux conditions syntactiques est évidente.

# 3 Complétudes géométriques infinitaires

## 3.1 Complétude géométrique (infinitaire)

On note comme avant $\mathbf{T} := Th^{\infty}(\mathbf{K})$, de sorte que $\mathbf{T}_W^{\infty} := Th_W^{\infty}(\mathbf{K})$, axiomatisation uHs infinitaire de la classe spéciale $\mathbf{W_K}$, engendrée par $\mathbf{K}$. En reprenant l'idée de la proposition 3.10, on peut caractériser les modèles de $\mathbf{T}_W$ par le radical positif.

**Proposition 7.5.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout ensemble de variables $X$, pour tout a-type $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) \supseteq \sqrt{\Phi}^+$*
2. *$A \vDash \mathbf{T}_W^{\infty}$, c'est-à-dire $A \in \mathbf{W_K}$.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) Soit $\chi := \forall X \ \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$ un énoncé de $\mathbf{T}_W^{\infty}$. Par le lemme 7.4, comme $\mathbf{T}_W^{\infty} \cup D^+(A) \vDash \chi$, on a $\psi \in \sqrt{\Phi}^+$. Par hypothèse, on a donc $\psi \in \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi))$, d'où par le même lemme, on conclut que $A \vDash \chi$. Finalement, on a $A \vDash \mathbf{T}_W^{\infty}$.
(2)⇒(1) Soit $\psi \in \sqrt{\Phi}^+$. Par le lemme 7.4, cela signifie que $\mathbf{T}_W^{\infty} \cup D^+(A) \vDash \forall X \ \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$. Comme par hypothèse, on a $A \vDash \mathbf{T}_W^{\infty} \cup D^+(A)$, il s'ensuit que $A \vDash \forall X \ \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, d'où par le même lemme, $\psi \in \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi))$.

Dans l'autre sens, on peut donner une expression équivalente d'un théorème des zéros "infinitaire" en termes d'énoncés uHs (pour la notion de persistence, voir la sous-section 4.1 du chapitre 2).

**Proposition 7.6.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout ensemble de variables $X$, pour tout a-type $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) \subseteq \sqrt[T]{\Phi}^+$*
2. *$Th_W^{\infty}(A|A)$ est h-persistent dans $\mathbf{U_K}$*
3. *$Th_W^{\infty}(A|A)$ est h-persistent dans $\mathbf{W_K}$.*

*Démonstration.* La première condition revient à dire, par le lemme 7.4, que $\mathbf{T}_W^{\infty} \cup D^+(A) \vDash Th_W^{\infty}(A|A)$. Par le lemme 2.106, cela revient encore à dire que $Th_W^{\infty}(A|A)$ est $\mathbf{W_K}$-h-persistente, ou encore que $Th_W^{\infty}(A|A)$ est $\mathbf{U_K}$-h-persistente, puisque $\mathbf{T}_{\forall}^{\infty} \cup D^+(A) \vDash Th_W^{\infty}(A|A)$.

Mises ensembles, les deux notions aboutissent naturellement à l'équivalence et à la définition suivantes.

**Corollaire 7.7.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout ensemble de variables $X$, pour tout $a$-type $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) = \sqrt{\Phi}^+$
2. $A \vDash \mathbf{T}_W^{\infty}$ et $Th_W^{\infty}(A|A)$ est h-persistent dans $\mathbf{W_K}$ .

**Définitions 7.8.** 1. On dira qu'un homomorphisme $f : A \to B$ entre deux $\mathscr{L}$-structures est $\infty$-*géométriquement clos*, si $f \vDash Th^{\infty}_{W}(A|A)$.

2. Soit $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures. On dira qu'un objet $A$ de $\mathbf{K}$ est $\infty$-*géométriquement clos (dans* $\mathbf{K}$*)*, si son diagramme uHs (infinitaire) est h-persistent dans $\mathbf{K}$.

Ainsi, si $\mathbf{K}$ est une classe, les $\mathscr{L}$-structures qui vérifient le "théorème des zéros" infinitaire relativement à $\mathbf{K}$ sont les objets $\infty$ -géométriquement clos de sa classe spéciale engendrée, $\mathbf{W_K}$.

On peut revenir à une caractérisation de la complétude géométrique par des idéaux.

**Proposition 7.9.** *Soit $A$ un objet de $\mathbf{W_K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A$ est $\infty$-géométriquement clos*
2. *Pour toute classe spéciale $\mathbf{W}_0$ contenant $\mathbf{W_K}$, pour tout ensemble $X$, pour tout idéal $I$ de $A_{\mathbf{W}_0}[X]$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt{I}^{+}$.*

*Démonstration.* On peut supposer que $X$ est un ensemble de variables.
(1)⇒(2) Soit $\pi_0$ un ensemble générateur de $I$ (par exemple $I$ lui-même) et soit $\pi$ un relèvement de $\pi_0$ par $r^{\mathbf{W}_0}_{\mathscr{T}_X A}$. Par le lemme 7.1, on a $\mathscr{Z}_A(I) = \mathscr{Z}_A(\pi)$. Par l'hypothèse (1), on a aussi $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\pi)) = \sqrt[T]{\pi}^{+}$. Soit $\varphi_0 \in \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$. Si $\varphi$ est un relèvement de $\varphi_0$, on a $\varphi \in \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\pi))$, d'où $\varphi \in \sqrt{\pi}^{+}$. Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $A_{\mathbf{W}_0}[X]$ contenant $I$ : le relèvement $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{p}$ est évidemment un $a$-type premier de $\mathscr{T}_X A$ contenant $\pi$, si bien que $\varphi \in \mathfrak{q}$. Il s'ensuit que $\varphi_0 \in \mathfrak{p}$, d'où l'on tire que $\varphi_0 \in \sqrt{I}^{+}$. On a donc $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) \subseteq \sqrt{I}^{+}$, et l'inclusion inverse se montre de la même façon, ou par une version de la proposition 7.5 qui utilise des idéaux.
(2)⇒(1) Soit $\mathbf{W}_0 := \mathscr{L}^{+}\mathbf{St}$. Si $\pi$ est un $a$-type au-dessus de $A$ en les variables $X$, soit $I$ le $a$-type admissible engendré par $\pi$. On a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\pi)) = \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I))$ et $\sqrt{I}^{+} = \sqrt{\pi}^{+}$, puisque ces $a$-types sont admissibles. Par l'hypothèse (2), on en déduit que $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\pi)) = \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt{I}^{+} = \sqrt{\pi}^{+}$, d'où le résultat, par la proposition 7.6.

## 3.2 Complétude géométrique (infinitaire) faible

Les théorèmes du second chapitre s'inspirent du travail de Cherlin sur le $\mathbf{T}$-radical dans une perspective modèle-théorique classique. Nous proposons les analogues suivants des résultats précédents, correspondant à cette situation initiale, en commençant par caractériser les objets de la classe universelle engendrée par $\mathbf{K}$. On rappelle que $\mathbf{1}$ dénote la $\mathscr{L}$-structure "terminale", de base l'ordinal $\mathbf{1}$ à un élément, et dont les champs relationnels sont tous pleins.

**Proposition 7.10.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout ensemble de variables $X$, pour tout a-type $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) \supseteq \sqrt{\Phi}$*
2. *$A \in \mathbf{U_K}$ ou $A \simeq \mathbf{1}$.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) On applique l'hypothèse (1) avec $X = \emptyset$ et $\Phi = D^{+}(A)$. Si il existe un $a$-type fortement premier contenant $D^{+}(A)$, c'est que $A$ se plonge dans un objet de $\mathbf{U_K}$, et d'ailleurs, $D^{+}(A)$ est alors le seul $a$-type fortement premier de $A$. Sinon, le radical de $D^{+}(A)$ est l'intersection d'un ensemble vide de sous-ensembles, c'est donc le $a$-type total, et alors comme

$D^+(A) = \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(D^+(A)))$ (parce que $\mathscr{Z}_A(D^+(A)) = A^{\varnothing}$), ce $a$-type est par hypothèse le $a$-type total, si bien que $A$ est triviale.
(2)⇒(1) Supposons que $\psi \in \sqrt{\Phi}$ : on a alors $Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K}) \cup D(A) \cup \Phi \models \psi$, d'après le lemme 7.4. Si $A$ n'est pas triviale, par hypothèse $A \models Th^{\infty}_{\forall}(\mathbf{K}) \cup D(A)$, d'où l'on conclut que $A \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, c'est-à-dire que $\psi \in \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi))$, d'où $\sqrt{\Phi} \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi))$.

**Proposition 7.11.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout ensemble de variables $X$, pour tout a-type $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) \subseteq \sqrt{\Phi}$*
2. *$Th^{\infty}_{W}(A|A)$ est $\mathbf{U_K}$-persistent.*

*Démonstration.* La preuve est analogue à la preuve dans le cas positif. La première condition revient à dire, par le lemme 7.4, que $\mathbf{T}^{\infty}_{\forall} \cup D(A) \models Th^{\infty}_{W}(A|A)$. Par le lemme 2.106, cela revient encore à dire que $Th^{\infty}_{W}(A|A)$ est $\mathbf{U_K}$-persistente.

**Corollaire 7.12.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout ensemble de variables $X$, pour tout $a$-type $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) = \sqrt{\Phi}$
2. $A \simeq \mathbf{1}$, ou bien $A \in \mathbf{U_K}$ et $Th^{\infty}_{W}(A|A)$ est $\mathbf{U_K}$-persistent.

**Définition 7.13.** Soit $\mathbf{K}$ une classe. On dira qu'un élément $A$ de $\mathbf{K}$ est *faiblement $\infty$-géométriquement clos (dans* $\mathbf{K}$*)*, si son diagramme uHs est persistent dans $\mathbf{K}$.

Si $A$ est un objet de la classe $\mathbf{U_K}$, $\infty$-géométriquement clos dans $\mathbf{W_K}$, alors $A$ est faiblement $\infty$-g.c dans $\mathbf{U_K}$, ce qui illustre le choix de la terminologie.

# 4 Le cas finitaire

Le théorème des zéros apparaît ainsi comme une propriété de "préservation" logique, analogue à la complétude existentielle (préservation "universelle") et à la complétude existentielle positive (préservation "h-universelle"). Les $a$-types premiers et radiciels ayant été définis en toute généralité, nous avons voulu, dans la section précédente, exposer cette propriété dans un cas infinitaire. Il n'est cependant pas évident qu'il existe des modèles $\infty$-géométriquement clos, et le théorème des zéros apparaîtra plutôt dans une version finitaire, dans le contexte de théories p.m.c de corps avec structure additionnelle par exemple, si bien que nous nous concentrons ici sur des situations finitaires, notamment élémentaires. Nous traitons ainsi les cas où certaines des classes $\mathbf{K}$, $\mathbf{U_K}$ ou $\mathbf{W_K}$ sont élémentaires.

## 4.1 Complétude géométrique

On peut en toute généralité montrer l'analogue finitaire suivant de la proposition 7.6.

**Proposition 7.14.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout ensemble* fini *de variables $X$, pour tout a-type* fini *$\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a* $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) \subseteq \sqrt{\Phi}^{+}$

2. *$Th_W(A|A)$ est h-persistent dans $\mathbf{W_K}$.*

*Démonstration.* La preuve suit la même ligne que celle de la proposition 7.6, sans qu'il soit besoin de faire d'hypothèse supplémentaire. En effet, la première assertion équivaut à dire que $\mathbf{T}_W^\infty \cup D^+(A) \vDash Th_W(A|A)$, ou encore que $Th_W(A|A)$ est h-persistent dans $\mathbf{W_K}$.

Nous pouvons alors définir une version *finitaire* de la complétude géométrique : c'est la propriété finitaire que nous avons implicitement manipulé aux chapitres 3 et 4.

**Définitions 7.15.** 1. On dira qu'un homomorphisme $f : A \to B$ entre deux $\mathscr{L}$-structures est *géométriquement clos*, si $f \vDash Th_W(A|A)$.

2. Soit $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures. On dira qu'un objet $A$ de $\mathbf{K}$ est *géométriquement clos (dans* $\mathbf{K}$*)*, si son diagramme uHs (finitaire) est h-persistent dans $\mathbf{K}$.
3. On dira qu'une $\mathscr{L}$-structure $A$, modèle de $\mathbf{T}_W$, est *géométriquement close* (sans précision), si elle vérifie les conditions équivalentes du corollaire précédent, autrement dit le "théorème des zéros" relatif à $\mathbf{K}$.

*Remarque* 7.16. Les structures "géométriquement complètes" relativement à une classe $\mathbf{K}$ sont donc les objets géométriquement clos de $\mathbf{W_K}$.

Cette propriété est équivalente au théorème des zéros, même dans le cas où $\mathbf{W_K}$ n'est pas élémentaire. Nous la formulons dans le langage des idéaux. On suppose que $\mathbf{W}_0 \supseteq \mathbf{W_K}$ est une quasivariété.

**Proposition 7.17.** *Soit $A$ un objet de $\mathbf{W_K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$A$ est géométriquement clos.*
2. *Pour tout ensemble fini $X$, pour tout idéal $I$ de type fini de $A_{\mathbf{W}_0}[X]$, on a*
$\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt[\mathrm{T}]{I}^+$.

*Démonstration.* Nous ne reproduisons pas la démonstration, analogue à celle donnée dans le cas infinitaire (proposition 7.9) : il suffit de remplacer $\pi_0$ et $\pi$ par des ensembles finis.

Enfin, dans le cas où $\mathbf{W_K}$ est **élémentaire**, on peut caractériser les algèbres spéciales par une propriété du radical positif. Dans cette situation, on peut choisir $Th_W(\mathbf{K}) = \mathbf{T}_W$ comme axiomatisation.

**Proposition 7.18.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Si $\mathbf{W_K}$ est élémentaire, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Pour tout ensemble* fini *de variables $X$, pour tout a-type* fini *$\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a*
$\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) \supseteq \sqrt{\Phi}^+$
2. *$A \vDash Th_W(\mathbf{K})$, c'est-à-dire $A \in \mathbf{W_K}$.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) Il suffit d'adapter la preuve de 7.5 aux axiomes finitaires de $Th_W(\mathbf{K})$, qui est équivalente à $\mathbf{T}_W^\infty$.
(2)⇒(1) C'est une conséquence immédiate de 7.5.

En combinant les deux propositions précédentes, on peut caractériser les algèbres spéciales géométriquement closes.

**Corollaire 7.19.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Si $\mathbf{W_K}$ est élémentaire, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est un objet géométriquement clos de $\mathbf{W_K}$.
2. Pour toute quasivariété $\mathbf{W}_0 \supseteq \mathbf{W_K}$, pour tout ensemble fini $X$, pour tout idéal $I$ de type fini de $A_{\mathbf{W}_0}[X]$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt{I}^+$.

## 4.2 Complétude géométrique faible

On dispose aussi naturellement des versions finitaires associées au $\mathbf{T}$-radical, que nous donnons sans démonstration.

**Proposition 7.20.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout ensemble fini de variables $X$, pour tout a-type fini $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a* $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) \subseteq \sqrt{\Phi}$
2. $Th_W(A|A)$ *est* $\mathbf{U_K}$*-persistent.*

**Définition 7.21.** Soit $\mathbf{K}$ une classe. On dira qu'un objet $A$ de $\mathbf{K}$ est *faiblement géométriquement clos (dans* $\mathbf{K}$*)*, si son diagramme uHs finitaire est persistent dans $\mathbf{K}$.

On peut alors caractériser les faiblement géométriquement clos de $\mathbf{U_K}$ en général.

**Proposition 7.22.** *Soit $A$ un objet de* $\mathbf{U_K}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout ensemble fini de variables $X$, pour tout a-type fini $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a* $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) = \sqrt{\Phi}$
2. *$A$ est faiblement géométriquement close dans* $\mathbf{U_K}$.

Observons ce qui se passe dans le cas **élémentaire**. D'abord, on peut caractériser les algèbres universelles.

**Proposition 7.23.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Si* $\mathbf{U_K}$ *est élémentaire, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout ensemble fini de variables $X$, pour tout a-type fini $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a* $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) \supseteq \sqrt{\Phi}$
2. $A \in \mathbf{U_K}$ *ou* $A \simeq \mathbf{1}$.

On peut alors affiner un peu la proposition 7.22.

**Corollaire 7.24.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Si $\mathbf{U_K}$ est élémentaire, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout ensemble fini de variables $X$, pour tout $a$-type fini $\Phi$ de $\mathscr{T}_X A$, on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) = \sqrt{\Phi}$
2. $A \simeq \mathbf{1}$, ou bien $A$ est un objet faiblement géométriquement clos de $\mathbf{U_K}$.

## 4.3 Théories positivement modèle-complètes

Nous abordons maintenant l'exposition d'une version générale du théorème 4.9, dans le contexte qui fait apparaître naturellement la complétude géométrique finitaire : les théories positivement modèle-complètes. Les modèles de ces théories sont géométriquement clos ; la "réciproque" est vraie dans les théories "strictes", qui seront abordées dans la section 4.5.

**Théorème 7.25.** *Soit* $\mathbf{T}$ *une théorie positivement modèle-complète. Alors, tous les modèles de* $\mathbf{T}$ *sont géométriquement clos.*

*Démonstration.* Soient $M \models \mathbf{T}$ et $f : M \to B$ une $M$-algèbre spéciale : on doit montrer que $f \models \mathbf{T}_W(M|M)$. $f$ étant spéciale, elle se plonge par $g$ dans un produit $h$ d'une famille de $M$-algèbres universelles $h_i : M \to N_i, i \in I$, qu'on peut toutes supposer des modèles de $\mathbf{T}$, comme sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h=\prod_I h_i"'] & B \arrow[d, hook, "g"] \\ & \prod\limits_I N_i. \end{tikzcd}$$

Par le théorème 2.115, les $h_i$ sont des plongements élémentaires, donc $h_i \models \mathbf{T}_W(M|M)$ pour tout $i$, d'où l'on tire que $h \models \mathbf{T}_W(M|M)$, puisque la validité des énoncés Horn est stable par produits ([18], théorème 9.1.5). En fin de compte, on a aussi $f \models \mathbf{T}_W(M|M)$, puisque les énoncés uHs sont universels et leur validité est donc préservée par sous-structures. L'homomorphisme $f$ est donc géométriquement clos, donc $M$ aussi.

*Remarques* 7.26.
1. On pourrait penser qu'il est nécessaire dans la démonstration de distinguer deux cas : si $I$ est vide ou non. Cependant, les énoncés uHs sont stables par produits quelconques, si bien que l'argument tient compte aussi de ce cas.
2. En utilisant la proposition 7.17, on peut reformuler le théorème dans le langage des idéaux, et retrouver ainsi un résultat cosmétiquement plus proche de 4.9.

*Exemple* 7.27. Soit $\mathbf{T}$ la théorie des corps réels clos dans le langage $\langle +, -, \times, \geq, 0, 1 \rangle$ : elle est positivement modèle-complète. Le théorème précédent nous dit alors que si $F$ est un corps réel clos, pour tout ensemble fini $\mathcal{E}$ d'équations et d'inégalités polynomiales à coefficients dans $F$, en les variables $x_1, \ldots, x_n$, l'ensemble des inégalités polynomiales qui sont satisfaites en tout point de l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ dans $F^n$, est donnée par l'intersection des cônes premiers contenant l'ensemble des polynômes figurant dans $\mathcal{E}$ (pour une équation $P(\overline{x}) = 0$, on retient les polynômes $P$ et $-P$, et pour une inégalité $P(\overline{x}) \geq 0$, on retient le polynôme $P$).

On peut accessoirement montrer aussi la version classique suivante du théorème 2.129.

**Théorème 7.28.** *Soit* $A$ *un modèle existentiellement clos d'une théorie universelle* $\mathbf{T}$*. Alors,* $A$ *est faiblement géométriquement clos dans* $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$.

## 4.4 Complétude existentielle forte

Comme cela a été suggéré dans la seconde partie, notamment dans le théorème 4.12, il n'est pas nécessaire de travailler, au moins théoriquement, dans une théorie positivement modèle-complète, pour avoir une version "positive" du théorème 2.129. Nous développons ici l'analyse de la notion introduite alors, et observons ses liens avec la modèle-complétude positive, avant d'énoncer la version générale de 4.12. Nous renvoyons le lecteur à la section 4 du chapitre 2 pour des précisions sur la complétude existentielle.

**Définition 7.29.** Soit $\mathbf{K}$ une $\mathscr{L}^+$-catégorie. Un objet $A$ de $\mathbf{K}$ sera dit *fortement existentiellement clos (dans* $\mathbf{K}$*, noté f.e.c)*, si tout homomorphisme de domaine $A$, dans $\mathbf{K}$, est un plongement existentiellement clos.

Soient $\mathbf{K}$ une $\mathscr{L}^+$-catégorie et $\mathbf{T}$ une théorie du premier ordre. On notera $\mathbf{fE_K}$ la $\mathscr{L}^+$-catégorie (qui est une $\mathscr{L}$-catégorie) des objets f.e.c de $\mathbf{K}$ et de leurs homomorphismes. On notera de même $\mathbf{fE_T}$ la $\mathscr{L}^+$-catégorie des modèles de $\mathbf{T}$ qui sont fortement existentiellement clos comme tels.

**Proposition 7.30.** *Soit $A$ un modèle f.e.c de $\mathbf{T}_\forall$. Alors $A \models \mathbf{T}_{\forall\exists}$.*

*Démonstration.* C'est un cas particulier de la proposition 2.110.

**Corollaire 7.31.** On a l'égalité $\mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall} = \mathbf{fE}_{\mathbf{T}_{\forall\exists}}$.

*Démonstration.* L'inclusion $\subseteq$ provient de ce que $\mathbf{T}_\forall \subseteq \mathbf{T}_{\forall\exists}$ et de la proposition précédente : si $A$ est un objet de $\mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall}$, c'est un modèle de $\mathbf{T}_{\forall\exists}$, et comme il est f.e.c dans $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}_\forall)$, il l'est *a fortiori* dans $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}_{\forall\exists})$.
Réciproquement, soit $M$ un modèle f.e.c de $\mathbf{T}_{\forall\exists}$. C'est un modèle de $\mathbf{T}_\forall$, et si $f : M \to A$ est un homomorphisme vers un modèle de $\mathbf{T}_\forall$, il existe un plongement $g : A \hookrightarrow N$, où $N \models \mathbf{T}$. Le composé $g \circ f$ est par hypothèse un plongement existentiellement clos, si bien que si $\varphi(\overline{m})$ est un énoncé existentiel à paramètres dans $M$ satisfait dans $(A, f)$, il est aussi satisfait dans $(N, gf)$, donc dans $M$, ce qui montre que $M$ est f.e.c dans $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}_\forall)$.

**Proposition 7.32.** *Tout modèle fortement existentiellement clos de $\mathbf{T}_\forall$ est un modèle positivement existentiellement clos de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$.*

*Démonstration.* Soient $A \models \mathbf{T}_\forall$, f.e.c. et $f : A \to B$ un homomorphisme, où $B \models \mathbf{T}_{\forall\neg}$. Il existe une continuation $g : B \to C$, où $C \models \mathbf{T}$. Par suite, le composé $g \circ f$ est un plongement existentiellement clos. Si $\varphi(\overline{a})$ est un énoncé cohérent à paramètres dans $A$ et satisfait dans $(B, f)$, il l'est aussi dans $(C, gf)$, donc $A \models \varphi(\overline{a})$, puisque $gf$ est une immersion. Il s'ensuit que $A$ est p.e.c dans $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}_{\forall\neg})$.

Ceci nous permet d'avoir une autre perspective sur les théories positivement modèle-complètes, en introduisant un peu de "négations" : ces négations apparaissent dans le théorème des zéros.

**Théorème 7.33.** *Si la catégorie $\mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall}$ est élémentaire, alors c'est la $\mathscr{L}^+$-catégorie $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}^*)$ des modèles d'une théorie positivement modèle-complète $\mathbf{T}^*$.*
*En particulier, si la théorie $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ est positivement compagnonable, de modèle-compagne positive $\mathbf{T}^*$, on a $\mathbf{fE}_{\mathbf{T}_{\forall\exists}} = \mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall} = \mathbf{E}^+_{\mathbf{T}_{\forall\neg}} = \mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}^*)$.*

*Démonstration.* Supposons que $\mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall}$ est axiomatisable par une théorie finitaire $\mathbf{T}^*$. Dans ce cas, tout homomorphisme entre modèles de $\mathbf{T}^*$ est une immersion, donc $\mathbf{T}^*$ est positivement modèle complète et $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}^*) = \mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall}$.
Si $\mathbf{T}^*$ est une modèle-compagne positive h-inductive de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$, soient $M \models \mathbf{T}^*$ et $f : M \to A$, où $A \models \mathbf{T}_\forall$ : il existe un modèle $N$ de $\mathbf{T}$ et un plongement $g : A \hookrightarrow N$. Si $(A, f) \models \varphi(\overline{m})$, où $\varphi$ est un énoncé existentiel à paramètres dans $M$, on a aussi $(N, g \circ f) \models \varphi$. Par hypothèse, $\mathbf{T}^*$ est p.m.c, donc le composé $gf$ est une application élémentaire (théorème 2.115) , et l'on a $M \models \varphi$, si bien que $f$ est un plongement e.c. Il s'ensuit que $M$ est fortement existentiellement clos dans $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}_\forall)$. On a donc $\mathbf{E}^+_{\mathbf{T}_{\forall\neg}} \subseteq \mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall}$, d'où l'égalité des deux catégories puisque l'inclusion réciproque est donnée par la proposition 7.32. Les égalités $\mathbf{fE}_{\mathbf{T}_{\forall\exists}} = \mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall}$ et $\mathbf{E}^+_{\mathbf{T}_{\forall\neg}} = \mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}^*)$ sont mises pour mémoire.

*Remarque* 7.34. Si $\mathbf{fE}_{\mathbf{T}_\forall} = \mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}^*)$ est élémentaire, cela n'entraîne pas nécessairement que $\mathbf{T}^*$ est la modèle-compagne positive de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$, car rien ne nous assure *a priori* qu'un modèle de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ se continue en un modèle f.e.c de $\mathbf{T}_\forall$.

La complétude géométrique est vérifiée dans les fortement existentiellement clos. Les existentiellement clos dans certaines classes de corps sont fortement existentiellement clos, ce qui fournit, *a priori* dans un cadre non nécessairement élémentaire, des structures vérifiant le théorème des zéros : le résultat suivant est la généralisation du théorème 4.12.

**Théorème 7.35.** *Soient $\mathbf{T}$ une théorie finitaire et $M$ un modèle fortement existentiellement clos de $\mathbf{T}_\forall$. Alors, $M$ est un modèle géométriquement clos de $\mathbf{T}_W$.*

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 7.25, et de l'adapter en remplaçant les plongements élémentaires par des plongements existentiellement clos.

## 4.5 Théories strictes

Comme on l'a vu avec les anneaux commutatifs, la complétude géométrique se ramène à la complétude existentielle positive dans les théories *strictes*. Nous abordons ici le cas général.

**Proposition 7.36.** *Soit $\mathbf{T}$ une théorie (finitaire). Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{T}_{\forall\neg} \neq \emptyset$
2. $\mathbf{1} \not\models \mathbf{T}_{\forall\neg}$
3. $\mathbf{1} \not\models \mathbf{T}_\forall$
4. *tout a-type premier de toute structure est propre.*

**Définition 7.37.** Une théorie vérifiant les conditions équivalentes de la proposition sera dite *stricte*.

La version suivante de la proposition 4.17 repose sur une approche un peu différente.

**Proposition 7.38.** *Soit* $\mathbf{T}$ *une théorie stricte. Un modèle géométriquement clos de* $\mathbf{T}_W$ *est soit trivial, soit un modèle positivement existentiellement clos de* $\mathbf{T}_{\forall\neg}$.

*Démonstration.* Supposons que $A$ est un tel modèle. Si $A$ n'est pas trivial, c'est un modèle de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ (2.64). Supposons par l'absurde que $A$ n'est pas p.e.c comme modèle de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ : cela signifie qu'il existe un homomorphisme $f : A \to M$ dans un modèle de $\mathbf{T}$ et un énoncé positif primitif $\chi := \exists X \bigwedge \Phi$, à paramètres dans $A$, tels que $A \nvDash \chi$, tandis que $f \vDash \chi$. Par hypothèse, $A$ est géométriquement clos, donc on a $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\Phi)) = \sqrt[\mathrm{T}]{\Phi}^{+}$, et ce $a$-type est le $a$-type total par hypothèse, $\mathscr{Z}_A(\Phi)$ étant vide. Soit $m \in M^X$ un témoin de $\chi$ dans $f$ ; $M$ étant un modèle de $\mathbf{T}$, on a $tp_a(f_m) \supseteq \mathscr{I}(\mathscr{Z}_f(\Phi)) \supseteq \sqrt[\mathrm{T}]{\Phi}^{+}$, si bien que $tp_a(f_m)$ est lui aussi le $a$-type total de $A[X]$. Or, ce $a$-type dit que toutes les variables $X$ sont identifiées avec tous les éléments de $A$, si bien que la sous-structure de $M$ engendrée par $m$ est $f(A) \simeq \mathbf{1}$. On en conclut que $\mathbf{1} \vDash \mathbf{T}_\forall$, ce qui est tout-à-fait impossible par hypothèse. Il s'ensuit que l'hypothèse faite est fausse, autrement dit que $f$ est une immersion : $A$ est un modèle positivement existentiellement clos de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$.

Ce résultat permet de démontrer l'analogue suivant du théorème 4.19.

**Théorème 7.39.** *Soit* $\mathbf{T}$ *une théorie stricte. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{T}$ *est positivement modèle-complète*
2. *Tous les modèles de* $\mathbf{T}$ *sont géométriquement clos.*

*Démonstration.* (1)⇒(2) Il s'agit du théorème 7.25.
(2)⇒(1) Soit $M \vDash \mathbf{T}$. Par hypothèse, $\mathbf{T}$ est stricte, si bien que $M \not\simeq \mathbf{1}$. Par hypothèse, $M$ est géométriquement clos, donc par le lemme, c'est un modèle p.e.c de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$. Il s'ensuit que tous les modèles de $\mathbf{T}$ sont p.e.c, donc que $\mathbf{T}$ est positivement modèle-complète.

## 4.6 T-Algèbre stricte

On se place ici dans le contexte d'une théorie finitaire stricte $\mathbf{T}$ et d'une classe spéciale $\mathbf{W}_0$ contenant $\mathbf{W} = \mathbf{W_T}$, et l'on reproduit les éléments de la section 3 du chapitre 4, dans ce contexte élargi. Nous désignerons par "algèbres" les objets de $\mathbf{W}_0$, et les $A$-algèbres seront toujours des objets de $\mathbf{W}_0$.

**Proposition 7.40.** *Soient $A$ une algèbre, $I$ un idéal de $A$. On a* $A/I \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg} \Leftrightarrow \sqrt[\mathrm{T}]{I}^{+}$ *est propre* $\Leftrightarrow$ *il existe un idéal* $\mathbf{T}$*-premier de $A$ contenant $I$.*

*Démonstration.* Si $A/I \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$, il existe un modèle $B$ de $\mathbf{T}$ et un homomorphisme $f : A \to B$ de $a$-type $\mathfrak{p}$, un idéal premier contenant $I$ : en particulier, $\sqrt[\mathrm{T}]{I}^{+}$ est propre, par la proposition 7.36.
Réciproquement, si $\sqrt[\mathrm{T}]{I}^{+}$ est propre, il existe un idéal $\mathbf{T}$-premier $\mathfrak{p}$, contenant $I$, $a$-type de l'homomorphisme $f : A \to A/\mathfrak{p}$, où $A/\mathfrak{p} \vDash \mathbf{T}_\forall$. Ce morphisme se factorise par $A \twoheadrightarrow A/I$, donc $A/I$ est un modèle de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$.

**Proposition 7.41.** *Soient $A$ une algèbre et $I$ un idéal* **T***-radiciel propre de $A$, maximal comme tel. Alors $I$ est* **T***-premier.*

*Démonstration.* Comme $I$ est propre, on a $A/I \in \mathbf{W}^*_{\mathbf{T}}$ (la sous-classe de $\mathbf{W}_{\mathbf{T}}$ des objets non triviaux, sous-section 3.4, chapitre 2), d'où $A/I \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$ par la proposition 2.64. Il existe donc un homomorphisme $f : A/I \to B$, où $B \vDash \mathbf{T}$. Notant $\pi_I : A \twoheadrightarrow A/I$ la projection canonique, comme $\mathbf{T}$ est stricte, l'idéal $tp_a(f \circ \pi_I)$ est propre et contient $I$, par suite, $I = tp_a(f \circ \pi_I)$. Ainsi, $f$ est un plongement et on a $A/I \vDash \mathbf{T}_{\forall}$, c'est-à-dire $I$ est $\mathbf{T}$-premier.

**Définition 7.42.** Un idéal $I$ d'une algèbre $A$ sera dit **T**-maximal si c'est un idéal radiciel propre et maximal comme tel.

La définition des **T**-corps ne pose pas de problème, mais on doit faire un peu différemment ici, puisque l'on travaille avec des ensembles de formules et pas des structures.

**Définition 7.43.** Soit **T** une théorie stricte. Un **T**-corps est une algèbre $A$, modèle de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$, telle que le seul idéal **T**-radiciel propre de $A$ est $D^+(A)$. En particulier, un **T**-corps est une algèbre spéciale.

**Proposition 7.44.** *Soit $A$ une algèbre. Un idéal* **T***-radiciel propre $I$ de $A$ est* **T***-maximal si et seulement si $A/I$ est un* **T***-corps.*

*Démonstration.* Soit $I$ un idéal **T**-radiciel propre : on a $A/I \vDash \mathbf{T}_W \cup \mathbf{T}_{\forall\neg}$. L'idéal $I$, qui est le $a$-type de la projection canonique, est **T**-maximal si et seulement si le diagramme atomique de $A/I$ est **T**-maximal.

Les **T**-corps ont la propriété des plongements, comme dans la proposition 4.31.

**Proposition 7.45.** *Soit $A \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A$ est un* **T***-corps*
2. *Tout homomorphisme de $A$ dans un modèle de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$ est un plongement*
3. *Tout homomorphisme $f : A \to B$, où $B$ est un modèle de* **T***, est un plongement.*

*Démonstration.* (1)⇒(3) Supposons que $A$ est un **T**-corps, $B \vDash \mathbf{T}$ et $f : A \to B$ un homomorphisme (un tel $f$ existe puisque $A$ est un modèle de $\mathbf{T}_{\forall\neg}$). Comme **T** est stricte, le $a$-type de $f$ est propre, il est donc nécessairement égal à $D^+(A)$, puisque $A$ est un **T**-corps. Par suite, $f$ est un plongement. Ceci montre que $A$ est un modèle de $\mathbf{T}_{\forall}$, et (3).
(3)⇒(2) Soit $f : A \to B$ un homomorphisme, où $B \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$ : il existe un homomorphisme $g : B \to C$, où $C \vDash \mathbf{T}$. Par hypothèse, $g \circ f$ est un plongement, donc $f$ est un plongement.
(2)⇒(1) Soit $I$ un idéal **T**-radiciel propre de $A$. Cela signifie que $A/I \not\simeq \mathbf{1}$, puisque **T** est stricte. Il s'ensuit que $A/I \vDash \mathbf{T}_{\forall\neg}$ (2.64), donc par (2), la projection canonique est un plongement, c'est-à-dire $I = D^+(A)$ : $A$ est un **T**-corps.

*Remarque* 7.46. L'usage des formules simplifie un peu la démonstration.

# 5 Applications en algèbre universelle

Nous mentionnons ici quelques applications de la complétude géométrique, dans le contexte des variétés d'algèbres basées en groupes (voir la sous-section 3.5 du chapitre 2). On rappelle que dans une telle variété $\mathbf{V}$, les idéaux *algébriques* sont en bijection avec les congruences (proposition 2.80) et qu'en général dans une variété les idéaux logiques sont en bijection avec les congruences (corollaire 6.50). En particulier, nous pouvons appliquer tous les résultats finitaires précédents aux expansions d'anneaux par des fonctions ayant une compatibilité minimale. Nous nous plaçons dans cette section dans le contexte d'une variété d'algèbres basées en groupes $\mathbf{V}$, axiomatisée par une théorie $\mathbf{T}_0$. Les éléments de $\mathbf{V}$ seront ce qu'on appelle ici les *algèbres*, et l'on notera $A[X]$ pour $A_{\mathbf{V}}[X]$. Nous terminons par une courte discussion sur la "noethérianité" dans un cadre général.

## 5.1 Equivalence géométrique

B.Plotkin introduit dans [29] la notion d'*extensions équivalentes* d'un corps donné (Lecture 1,§2), notion qu'il développe ensuite dans le contexte des variétés (Lecture 3,§1) et des quasi-variétés engendrées par certaines algèbres. Les extensions géométriquement équivalentes sont étroitement associées au théorème de Hilbert et aux *quasi-identités* que nous avons ici appelées énoncés uHs. Nous reformulons la définition dans notre langage.

**Définition 7.47.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Deux $A$-algèbres $f : A \to B$ et $g : A \to C$ seront dites *géométriquement équivalentes* si elles satisfont les mêmes énoncés uHs finitaires (à paramètres dans $A$ bien sûr), autrement dit si $Th_W(f) = Th_W(g)$.

## 5.2 Nullstellensätze dans les algèbres basées en groupes

Nous ajoutons au contexte une théorie finitaire $\mathbf{T}$. Nous commençons par quelques définitions évidentes.

**Définitions 7.48.** Soient $A$ une algèbre et $I$ un idéal *algébrique* de $A$.

1. $I$ sera dit *premier* si $A/I \models \mathbf{T}_{\forall}$.
2. $I$ sera dit *radiciel* si $A/I \models \mathbf{T}_W$.
3. Le *radical positif* de $I$, noté $\sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+}$, est l'intersection de tous les idéaux premiers de $A$ contenant $I$.

Soient $X$ un ensemble et $I$ un idéal de $A[X]$. On notera $A$ la copie de $A$ dans $A[X]$ par abus de langage.

1. $I$ sera dit *fortement premier* si $I$ est premier et $A \cap I = (0)$.
2. Le *radical faible* de $I$, noté $\sqrt[\mathbf{T}]{I}$, est l'intersection de tous les idéaux fortement premiers de $A[X]$ contenant $I$.

**Définitions 7.49.** Le couple $(\mathbf{T}_0, \mathbf{T})$ est appelé une *théorie d'algèbres basées en groupes*. On dira que cette "théorie" est positivement modèle-complète si $\mathbf{T}$ l'est.

On en tire les versions suivantes des Nullstellensätze, dont la démonstration n'est pas donnée, car il suffit de remarque que les idéaux algébriques premiers (resp. radiciels) correspondent aux idéaux logiques **T**-premiers (resp. **T**-radiciels).

**Théorème 7.50.** *Soit* $(\mathbf{T}_0, \mathbf{T})$ *une théorie d'algèbres b.e.g. Soient* $A$ *un modèle de* $\mathbf{T}_\forall$*,* $X$ *un ensemble fini et* $I$ *un idéal de* $A[X]$ *de type fini.*

1. *Si* $A$ *est un modèle fortement existentiellement clos de* $\mathbf{T}_\forall$*, on a* $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt[\mathbf{T}]{I}^{+}$*.*
2. *Si* $A$ *est un modèle existentiellement clos de* $\mathbf{T}_\forall$*, on a* $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(I)) = \sqrt[\mathbf{T}]{I}$*.*
3. $A$ *est faiblement géométriquement clos parmi les modèles de* $\mathbf{T}_\forall$ *si et seulement si deux extensions universelles de* $A$ *sont toujours géométriquement équivalentes.*

## 5.3 Algèbres basées en anneaux commutatifs unitaires

**Définition 7.51.** On dira que la variété d'algèbres basée en groupes **V** est une *variété d'algèbres basées en anneaux (commutatifs unitaires)* si $\mathscr{L}$ contient le langage des anneaux et si $\mathbf{T}_0$ contient la théorie des anneaux dans ce langage.

Dans ce cadre, les idéaux algébriques sont toujours au moins des idéaux au sens des anneaux, avec une compatibilité supplémentaire aux opérateurs additionnels. On retrouve grâce à cette notion des exemples de structures apparaissant en théorie des modèles, et si l'on ajoute une théorie "forte" au contexte, ceci permet d'obtenir directement une version du Nullstellensatz dans la théorie désirée ; dans les théories de corps, qui sont strictes, c'est aussi un critère pour la modèle-complétude, par le théorème 7.39 (puisque dans ce cas, modèle complétude et modèle complétude positive coïncident).

*Exemples* 7.52.

1. Soient $\mathbf{T}_0$ et $\mathbf{T}$ les théories des anneaux différentiels (resp. des corps différentiellement clos de caractéristique nulle, voir 2.126) dans le langage $\langle +, -, \times, d, 0, 1\rangle$ des anneaux différentiels. Les idéaux algébriques d'un anneau différentiel sont ses idéaux différentiels ; ses idéaux algébriques premiers sont ses idéaux différentiels premiers ne contenant aucun entier non nul, et ses idéaux algébriques radiciels sont ses idéaux différentiels radiciels ; ceux-ci sont propres si et seulement si il ne contiennent aucun entier non nul. Le couple $(\mathbf{T}_0, \mathbf{T})$ est une théorie positivement modèle-complète stricte d'algèbres basées en anneaux.
2. On peut citer le cas analogue des $D$-anneaux et des corps de Hasse clos de caractéristique positive fixée.
3. Soient $\mathbf{T}_0$ et $\mathbf{T}$ les théories des anneaux avec un endomorphisme (resp. des corps de différence génériques, voir 2.126) dans le langage $\langle +, -, \times, \sigma, 0, 1\rangle$. On peut montrer que les idéaux algébriques d'un anneau avec endomorphisme sont les idéaux fermés par $\sigma$ ($\sigma$-idéaux) ; ils sont radiciels si et seulement si ils sont parfaits en tant que $\sigma$-idéaux (on étend la définition des anneaux de différence aux anneaux avec endomorphisme) et ils sont premiers si et seulement si ils sont premiers en tant que $\sigma$-idéaux. Le couple $(\mathbf{T}_0, \mathbf{T})$ est une théorie positivement modèle-complète stricte d'algèbres basées en anneaux.

Dans les théories d'algèbres basées en anneaux, on peut démontrer que les idéaux **T**-maximaux existent toujours.

**Proposition 7.53.** *Soient $A$ une algèbre, et $I$ un idéal* $\mathbf{T}$*-radiciel propre de $A$. Alors $I$ est inclus dans un idéal* $\mathbf{T}$*-maximal.*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle du cas des anneaux commutatifs : la réunion d'une chaîne de $\mathbf{T}$-idéaux propres est propre, sinon l'un d'entre eux contiendrait l'unité.

## 5.4 Noethérianité radicielle

Le théorème de Ritt-Raudenbush dans les corps différentiels ([28] III 1.16) et son analogue dans les corps de différence ([9] 3.8 V, [32] 10), établissent une condition de noethérianité sur les idéaux algébriques radiciels en un nombre fini de variables sur les modèles de la théorie. On se replace ici dans un contexte général, c'est-à-dire un langage contenant éventuellement des symboles relationnels (bien que les exemples connus soient dans des langages fonctionnels).

**Définitions 7.54.** Soit $\mathbf{T}$ une théorie finitaire.

1. Un modèle $A$ de $\mathbf{T}_W$ sera dit *radiciellement noethérien*, si pour tout ensemble fini $X$, tout $a$-type $\mathbf{T}$-radiciel de $\mathscr{T}_X A$ est de type fini.
2. La théorie $\mathbf{T}$ sera dite *radiciellement noethérienne* si tout modèle de $\mathbf{T}$ est radiciellement noethérien.

On peut appliquer sans problème la définition précédente lorsque l'on travaille avec des idéaux.

**Proposition 7.55.** *Soient $\mathbf{T}_0 \subseteq \mathbf{T}$ deux théories, où $\mathbf{T}_0$ est une théorie uHs. Alors, un modèle $A$ de $\mathbf{T}_W$ est radiciellement noethérien si et seulement si pour tout ensemble fini $X$, tout idéal* $\mathbf{T}$*-radiciel de $A_{\mathbf{T}_0}[X]$ est de type fini.*

Nous pouvons alors identifier les invariants algébriques élémentaires des variétés affines dans les modèles géométriquement clos.

**Théorème 7.56.** *Soient $\mathbf{T}$ une théorie finitaire et $A$ un modèle géométriquement clos et radiciellement noethérien de $\mathbf{T}_W$. Alors, la règle qui associe à une variété affine sur $A$ son algèbre de coordonnées, est une dualité entre la catégorie des variétés affines (en dimension finie) de $A$ et la catégorie des $A$-algèbres spéciales de type fini (en fait, de présentation finie).*

*Démonstration.* Soit $\mathscr{V}$ une variété affine de $A$ : il existe un ensemble fini $X$ et un $a$-type $\pi$ de $A[X]$ tel que $\mathscr{V} = \mathscr{Z}_A(\pi)$. La règle qui associe à $\mathscr{V}$ son algèbre de coordonnées $A[X]/\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\pi))$ est un foncteur contravariant, à valeurs dans les $A$-algèbres spéciales de type fini. Soit maintenant $f : A \to B$ une $A$-algèbre spéciale de type fini : il existe donc un ensemble fini $X$ et un $a$-type admissible $\pi$ de $A[X]$ tels que $f \simeq (! : A \to A[X]/\pi)$. Comme $f$ est spéciale, on a $\sqrt[\mathbf{T}]{\pi}^{+} = \pi$, puisque $\pi$ est admissible. Par hypothèse, $\pi$ est donc de type fini : par complétude géométrique de $A$, on a donc $\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\pi)) = \pi$, d'où $f \simeq (A \to A[X]/\mathscr{I}(\mathscr{Z}_A(\pi)))$ : la dualité est établie.

*Remarque* 7.57. La théorie des "anneaux réduits géométriquement clos" (c'est-à-dire les corps algébriquement clos et l'anneau trivial, voir 3.8) est radiciellement noethérienne et "géométriquement complète", mais pas positivement modèle-complète.

# Partie IV

# Ensembles de Formules, $\mathcal{E}$-Types et Localisations

# Chapitre 8

# Classes de Formules et de Structures

Dans ce chapitre, nous introduisons une notion assez simple, celle de théorie pseudo-$\mathcal{E}$-inductive, pour une classe $\mathcal{E}$ de formules, et qui permet de démontrer de nombreux théorèmes de caractérisation de classes axiomatisables, élémentaires ou non. Ces théorèmes sont des généralisations de théorèmes de structure des classes inductives, universelles, spéciales...de la section 3 du chapitre 2. Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre.

## 1 Classes de formules et $\mathcal{E}$-applications

*Notations* 8.1. Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure et $\mathcal{E}$ une classe de formules du premier ordre, possiblement infinitaires. On notera $\mathcal{E}(A)$ la classe des $\mathscr{L}(A)$-énoncés obtenus en substituant aux variables de formules de $\mathcal{E}$ des éléments de $A$.

**Définitions 8.2.** Soit $\mathcal{E}$ une classe de formules.
Une formule infinitaire sera dite *pseudo-$\mathcal{E}$-inductive* si elle est de la forme $\forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \bigvee \Psi$, où $\Phi$ et $\Psi$ sont des ensembles de formules de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}$ est finitaire (c'est-à-dire ne contient que des formules finitaires), une formule $\mathcal{E}$-inductive désignera une formule pseudo-$\mathcal{E}$-inductive et finitaire.
Une formule infinitaire sera dite *$\mathcal{E}$-universelle* si elle est de la forme $\forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \bot$, où $\Phi$ est un ensemble de formules de $\mathcal{E}$ : c'est donc une formule logiquement équivalente à la négation d'une disjonction de formules de $\mathcal{E}$.
Si $\mathbf{K}$ est une classe de structures, on notera $Th^{\infty}_{\forall\mathcal{E}}(\mathbf{K})$ l'ensemble des conséquences pseudo-$\mathcal{E}$-inductives de $\mathbf{K}$, et $Th^{\infty}_{\forall\neg\mathcal{E}}(\mathbf{K})$ l'ensemble des conséquences $\mathcal{E}$-universelles de $\mathbf{K}$, et si $\mathcal{E}$ est finitaire, leurs versions finitaires sans l'exposant $\infty$.
De manière générale, si $\mathbf{T}$ est une théorie (infinitaire), on notera $\mathbf{T}^{\infty}_{\forall\mathcal{E}}$ l'ensemble des conséquences pseudo-$\mathcal{E}$-inductives et $\mathbf{T}^{\infty}_{\forall\neg\mathcal{E}}$ l'ensembles des conséquences $\mathcal{E}$-universelles de $\mathbf{T}$, et si $\mathcal{E}$ est finitaire, leurs versions finitaires sans l'exposant $\infty$.
Si $A$ est une $\mathscr{L}$-structure, on notera $D^{\mathcal{E}}(A)$ l'ensemble des $\mathcal{E}(A)$-énoncés satisfaits dans $A$.

**Définitions 8.3.** Soit $\mathcal{E}$ une classe de formules.

1. Une application $f : A \to B$ sera appelée une *$\mathcal{E}$-application* si elle préserve la validité des $\mathcal{E}(A)$-énoncés.

2. Une $\mathcal{E}$-application sera dite *réflexive* si elle reflète la validité des $\mathcal{E}(A)$-énoncés.

**Lemme 8.4.** Soient $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures stable par copies isomorphes et $\mathcal{E}$ une classe de formules.

1. Une application $f : A \to B$ entre deux $\mathscr{L}$-structures est une $\mathcal{E}$-application si et seulement si $f \vDash D^{\mathcal{E}}(A)$.
2. Une $\mathscr{L}$-structure $A$ est un modèle de $Th^{\infty}_{\forall\neg\mathcal{E}}(\mathbf{K})$ si et seulement si il existe une $\mathcal{E}$-application de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$.
3. Une $\mathscr{L}$-structure $A$ est un modèle de $Th^{\infty}_{\forall\mathcal{E}}(\mathbf{K})$ si et seulement si il existe une $\mathcal{E}$-application réflexive de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$.

*Démonstration.* (1) Par définition de la préservation d'un ensemble d'énoncés.
(2) Si il existe une $\mathcal{E}$-application $f$ de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$, $f$ préserve la validité des $\mathcal{E}(A)$-énoncés à paramètres, donc $f$ reflète la validité des énoncés $\mathcal{E}$-universels sans paramètres qui sont valides dans son codomaine. Réciproquement, si une telle $\mathcal{E}$-application n'existe pas, c'est que le $\mathcal{E}$-diagramme $D^{\mathcal{E}}(A)$ n'est pas réalisable dans $\mathbf{K}$, donc que $Th^{\infty}_{\forall\neg\mathcal{E}}(\mathbf{K})$ l'exclut : $A$ ne peut donc pas être un modèle de cette théorie.
(3) Soit $\mathbf{T} := Th^{\infty}(\mathbf{K})$, et soit $\mathbf{T}'$ l'ensemble des conséquences pseudo-$\mathcal{E}$-inductives de $\mathbf{T}$. Soit $A \vDash \mathbf{T}'$. Notons $\Phi(A) := D^{\mathcal{E}}(A)$ et $\Psi(A) := Th^{\infty}_{\forall\neg\mathcal{E}}(A|A)$. Soit $X$ un ensemble de variables énumérant $A$ et supposons que la théorie $\mathbf{T} \cup \Phi \cup \Psi$ est inconsistente. On a alors $\mathbf{T} \vDash \forall X \bigvee_{\Phi(X/A)} \neg\varphi \vee \bigvee_{\Psi(X/A)} \neg\psi$. Soit $\Theta := \{\neg\psi : \psi \in \Psi\}$ : on a donc $\mathbf{T} \vDash \forall X \ \bigwedge \Phi(X/A) \Rightarrow \bigvee \Theta(X/A)$. Or, les formules de $\Theta$ sont équivalentes à des disjonctions de formules de $\mathcal{E}$, donc l'énoncé $\chi := \forall X \ \bigwedge \Phi(X/A) \Rightarrow \bigvee \Theta(X/A)$ est équivalent à un énoncé pseudo-$\mathcal{E}$-inductif, si bien que $A \vDash \chi$, puisque $A \vDash \mathbf{T}'$. Or, ceci est impossible, puisque l'énumération de $A$ par $X$ en est un contre-exemple. Par conséquent, il existe un modèle de $\mathbf{T} \cup D^{\mathcal{E}}(A) \cup Th^{\infty}_{\forall\neg\mathcal{E}}(A|A)$, qui spécifie une $\mathcal{E}$-application réflexive de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$.
La réciproque est évidente.

*Remarque* 8.5. En appliquant le théorème de compacité, on peut dans le cas où $\mathbf{K}$ est élémentaire, se contenter des versions finitaires des deux théories de l'énoncé.

# 2 Classes pseudo-$\mathcal{E}$-inductives

## 2.1 Caractérisation des classes pseudo-$\mathcal{E}$-inductives

**Théorème 8.6.** *Soient* $\mathbf{K}$ *une classe de* $\mathscr{L}$*-structures et* $\mathcal{E}$ *une classe de formules. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{K}$ *est la classe des modèles d'une théorie pseudo-*$\mathcal{E}$*-inductive*
2. $\mathbf{K}$ *contient toutes les structures qu'elles reçoit par des* $\mathcal{E}$*-applications réflexives.*

*On parlera alors de classe* pseudo-$\mathcal{E}$-inductive.

*Démonstration.* (1)$\Rightarrow$(2) Cette implication est évidente.
(2)$\Rightarrow$(1) Par le lemme, si $A \vDash Th^{\infty}_{\forall\mathcal{E}}(\mathbf{K})$, il existe une $\mathcal{E}$-application réflexive de $A$ dans un objet de $\mathbf{K}$, si bien que par l'hypothèse, on a $A \in \mathbf{K}$, et $\mathbf{K} = Mod(Th^{\infty}_{\forall\mathcal{E}}(\mathbf{K}))$.

**Corollaire 8.7.** Soient $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures et $\mathcal{E}$ un ensemble de formules finitaires. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{K}$ est la classe des modèles d'une théorie $\mathcal{E}$-inductive.
2. $\mathbf{K}$ est pseudo-$\mathcal{E}$-inductive et stable par ultraproduits.

*Démonstration.* (1)$\Rightarrow$(2) La classe $\mathbf{K}$ est élémentaire donc stable par ultraproduits (2.25) et pseudo-$\mathcal{E}$-inductive.
(2)$\Rightarrow$(1) Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure, et $f : A \hookrightarrow B$ un plongement élémentaire dans un objet de $\mathbf{K}$ : $f$ est une $\mathcal{E}$-application réflexive, donc par le théorème, on a $A \in \mathbf{K}$ : $\mathbf{K}$ est une classe élémentaire. Pour le reste, on reproduit la démonstration du corollaire 2.44. Soient $\mathbf{T} := Th^{\infty}_{\forall\mathcal{E}}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{S} := Th_{\forall\mathcal{E}}(\mathbf{K})$. Soit $\chi := \forall X \ \bigwedge\Phi \Rightarrow \bigvee\Psi$ un énoncé de $\mathbf{S}$. Si l'on considère $X$ comme un ensemble de constantes additionnelles, cela signifie que la théorie $\mathbf{S} \cup \Phi \cup \{\neg\psi : \psi \in \Psi\}$ est inconsistente. Par compacité, il existe deux sous-ensembles finis $\Phi_0(Y) \subseteq \Phi$ et $\Psi_0(Y) \subseteq \Psi$, où $Y \subseteq X$ est un ensemble fini, tels que $\mathbf{S} \cup \Phi_0 \cup \{\neg\psi : \psi \in \Psi_0\}$ est inconsistente. On en conclut que l'énoncé $\forall Y \bigwedge\Phi_0 \Rightarrow \bigvee\Psi_0$ est dans $\mathbf{S}$. Or, cet énoncé $\mathcal{E}$-inductif implique logiquement $\chi$, si bien que les théories $\mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ sont équivalentes, d'où $\mathbf{K} = Mod(\mathbf{S})$.

*Remarques* 8.8. Les deux résultats précédents ont une version "$\mathcal{E}$-universelle" : une classe est la classe des modèles d'une théorie $\mathcal{E}$-universelle si et seulement si elle contient toutes les structures qu'elle reçoit par des $\mathcal{E}$-applications.

### 2.2 Classes complémentaires

**Définition 8.9.** Soit $\mathcal{E}$ une classe de formules. Le *complément* de $\mathcal{E}$ est la classe des négations de formules de $\mathcal{E}$ : on le notera $\mathcal{E}^c$.

**Proposition 8.10.** *Soient $\mathcal{E}$ une classe de formules et $\mathbf{T}$ une théorie infinitaire. Les théories $\mathbf{T}^{\infty}_{\forall\mathcal{E}}$ et $\mathbf{T}^{\infty}_{\forall\mathcal{E}^c}$ sont équivalentes.*

*Démonstration.* Par contraposée, si $\forall X \ \bigwedge\Phi \Rightarrow \bigvee\Psi$ est un énoncé de $\mathbf{T}^{\infty}_{\forall\mathcal{E}}$, il est équivalent à l'énoncé $\forall X \bigwedge\{\neg\psi : \psi \in \Psi\} \Rightarrow \bigvee\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$.

## 3 Quelques exemples finitaires

### 3.1 Homomorphismes et plongements

*Remarque* 8.11. Si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des formules atomiques, une formule pseudo-$\mathcal{E}$-inductive est exactement une formule universelle infinitaire basique.
Une $\mathcal{E}$-application est alors un homomorphisme, et elle est réflexive si c'est un plongement.

On retrouve la caractérisation des classes universelles, et des classes universelles élémentaires.

### 3.2 Immersions

**Définition 8.12.** Soit $\mathcal{E}$ le fragment finitaire des formules positives primitives (voir 2.13). Une formule pseudo-$\mathcal{E}$-inductive sera dite simplement *pseudo-h-inductive*.

**Théorème 8.13.** *Soit* **K** *une classe de $\mathscr{L}$-structures. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. **K** *est la classe des modèles d'une théorie pseudo-h-inductive*
2. **K** *est stable par sous-structures immergées et copies isomorphes.*

*Démonstration.* On applique le théorème 8.6 avec le fragment $\mathcal{E}$ des formules positives primitives.

On retrouve la condition (2) du théorème 2.34, dans la forme suivante.

**Corollaire 8.14.** Une classe **K** est h-inductive si et seulement si elle est stable par sous-structures immergées et ultraproduits.

### 3.3 Plongements existentiellement clos

**Définition 8.15.** Soit $\mathcal{E}$ le fragment finitaire des formules primitives (2.13). Une formule pseudo-$\mathcal{E}$-inductive sera dite simplement *pseudo-inductive*.

**Théorème 8.16.** *Soit* **K** *une classe de $\mathscr{L}$-structures. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. **K** *est la classe des modèles d'une théorie pseudo-inductive*
2. **K** *est stable par sous-structures existentiellement closes et copies isomorphes.*

*Démonstration.* On applique le théorème 8.6 avec le fragment $\mathcal{E}$ des formules primitives.

On retrouve la condition (2) du théorème 2.31, dans la forme suivante.

**Corollaire 8.17.** Une classe **K** est inductive si et seulement si elle est stable par sous-structures existentiellement closes et ultraproduits.

### 3.4 Applications élémentaires

**Définition 8.18.** Soit $\mathcal{E}$ le fragment de toute la logique finitaire. Une formule pseudo-$\mathcal{E}$-inductive sera appelée simplement une formule *pseudo-élémentaire*.

**Théorème 8.19.** *Soit* **K** *une classe de $\mathscr{L}$-structures. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. **K** *est la classe des modèles d'une théorie pseudo-élémentaire*
2. **K** *est stable par sous-structures élémentaires et copies isomorphes.*

*Démonstration.* On applique le théorème 8.6 avec le fragment $\mathcal{E}$ de toutes les formules du premier ordre finitaires.

# 4 Théories $\mathcal{E}$-Horn strictes

## 4.1 Classes $\mathcal{E}$-spéciales

On se place maintenant dans un cadre positif : les classes de formules que nous considérons sont des ensembles de formules positives primtives (donc finitaires). Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de formules positives primitives.

**Définitions 8.20.**
1. On dira qu'un énoncé infinitaire $\chi$ est *$\mathcal{E}$-Horn strict*, s'il est de la forme $\forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, où $\Phi \cup \{\psi\} \subseteq \mathcal{E}$.
2. Si $\mathbf{K}$ est une classe de $\mathscr{L}$-structures, la classe des énoncés $\mathcal{E}$-Horn stricts satisfaits dans tous les objets de $\mathbf{K}$ sera notée $Th^{\infty}_{W\mathcal{E}}(\mathbf{K})$. La version finitaire sera notée $Th_{W\mathcal{E}}(\mathbf{K})$.
3. En général, si $\mathbf{T}$ est une théorie infinitaire, la classe de toutes les conséquences $\mathcal{E}$-Horn strictes de $\mathbf{T}$, sera notée $\mathbf{T}^{\infty}_{W\mathcal{E}}$, et la version finitaire $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}}$.

**Lemme 8.21.** La validité des énoncés $\mathcal{E}$-Horn stricts est préservée dans les produits.

*Démonstration.* Les énoncés $\mathcal{E}$-Horn stricts sont Horn, donc il s'agit d'un cas particulier du théorème 9.1.5 de [18], qui dit que les énoncés Horn sont préservés par produits de structures.

**Lemme 8.22.** Soit $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures, fermée par produits quelconques. Soient $\Phi(X)$ un ensemble de formules positives primitives et $\Psi(X)$ un ensemble de formules positives primitives ou $\perp$, telles que $\mathbf{K} \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \bigvee \Psi$. Alors, il existe une formule $\psi \in \Psi$ telle que $\mathbf{K} \models \forall X \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$.

*Démonstration.* Nous adaptons la preuve du lemme de McKinsey 9.1.7 dans [18]. Supposons que la conclusion du lemme soit infirmée, tandis que les hypothèses sont vérifiées : pour toute $\psi \in \Psi$, il existe $A_\psi$ dans $\mathbf{K}$ et $a_\psi \in A^X$, tels que $A \models (\bigwedge \Phi \wedge \neg\psi)(a_\psi)$. Soit $B := \prod_\Psi A_\psi$. Soit $b \in B^X$ le $X$-uplet défini par $\pi_\psi(b) = a_\psi$ pour tout $\psi$ ($\pi_\psi$ est la $\psi$-ième projection). Les énoncés positifs primitifs étant préservés dans les produits, on a $B \models \bigwedge \Phi(b)$. Par hypothèse, $B$ est dans $\mathbf{K}$ et donc il existe $\theta \in \Psi$ telle que $B \models \theta(b)$. Il est impossible que $\theta$ soit $\perp$, et les projections étant des homomorphismes, on a $A_\theta \models \theta(a_\theta)$, ce qui est impossible par choix de $A_\theta$ et $a_\theta$. Par la loi de Pierce, la conclusion du lemme est vérifiée.

On peut alors caractériser les classes de modèles des théories $\mathcal{E}$-Horn strictes, dans le même esprit que les classes spéciales.

**Théorème 8.23.** *Soient $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures, stable par copies isomorphes. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathbf{K}$ est la classe des modèles d'une théorie $\mathcal{E}$-Horn stricte.*
2. *$\mathbf{K}$ est stable par produits quelconques, et $\mathbf{K}$ contient toutes les structures qu'elle reçoit par des $\mathcal{E}$-applications réflexives.*

*Démonstration.* (1)$\Rightarrow$(2) Il est à peu près évident que de tels énoncés sont stables par produits quelconques et structures reçues par $\mathcal{E}$-applications réflexives.

(2)⇒(1) Soient $\mathbf{T} := Th^{\infty}_{W\mathcal{E}}(\mathbf{K})$ et $\Phi$ le $\mathcal{E}$-diagramme d'un modèle $B$ de $\mathbf{T}$, où $B$ est remplacé par un ensemble de variables $X$, qui indexe $B$ par un $X$-uplet $b : X \twoheadrightarrow B$. On considère l'ensemble $\Psi$ des formules $\psi$ de $\mathcal{E}$ pour lesquelles il existe un objet $A$ de $\mathbf{K}$ tel que $A \nvDash \forall X \ \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$. Par le lemme précédent, comme $\mathbf{K}$ est fermée par produits, il en existe un objet $A$, et un $X$-uplet $a$, tels que $A \vDash \bigwedge \Phi(a) \wedge \neg \bigvee \Psi(a)$ : autrement dit, pour toute formule $\psi(X)$ dans $\mathcal{E}$, on a $A \vDash \psi(a)$ si et seulement si $\mathbf{K} \vDash \forall X \ \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$. Puisqu'aussi $A \vDash \bigwedge \Phi(a)$, $a$ spécifie une $\mathcal{E}$-application $f : B \to A$, telle que $f(b) = a$. Supposons maintenant que $A \vDash \psi(a)$, pour une formule $\psi$ de $\mathcal{E}$. Par la remarque sur la propriété de $A$, on a $\mathbf{K} \vDash \forall X \ \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, et comme cet énoncé est $\mathcal{E}$-Horn strict, $B$ le satisfait : on a donc $B \vDash \psi(b)$, donc $f$ est réflexive. Par l'hypothèse, $B$ est un objet de $\mathbf{K}$, donc $\mathbf{K} = Mod(\mathbf{T})$.

**Définition 8.24.** Une classe vérifiant les hypothèses du théorème précédent sera dite *$\mathcal{E}$-spéciale*.

Comme cas particulier de ce théorème, on peut citer le fragment de toutes les formules positives primitives : les classes stables par produits et sous-structures immergées sont donc les classes axiomatisables par des énoncés “Horn-géométriques infinitaires”, c'est-à-dire de la forme $\forall X \ \bigwedge \Phi \Rightarrow \psi$, où $\Phi \cup \{\psi\}$ est un ensemble de formules positives primitives.

## 4.2 Le cas élementaire

La version élémentaire du résultat précédent est la suivante.

**Corollaire 8.25.** Soient $\mathcal{E}$ un ensemble de formules positives primitives et $\mathbf{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-structures. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{K}$ est la classe des modèles de sa théorie $\mathcal{E}$-Horn stricte finitaire
2. $\mathbf{K}$ est stable par produits et ultraproduits, et contient les structures qu'elle reçoit par des $\mathcal{E}$-applications réflexives.

*Démonstration.* La preuve suit le même schéma que les preuves de résultats analogues, comme par exemple celle du corollaire 8.7.

Citons comme cas particulier une caractérisation des classes de modèles de théories limite (sous-section 3.6 du chapitre 2).

**Définitions 8.26** (cf [11] V 7.4)**.** 1. Si $\mathbf{T}$ est une théorie quelconque, on dira qu'un homomorphisme $f : A \to B$ est *descriptivement clos (relativement à* $\mathbf{T}$*)*, si il reflète la validité de tous les énoncés cartésiens (finitaires) modulo $\mathbf{T}$, à paramètres dans $A$, autrement dit si c'est une $\mathcal{E}$-application réflexive, où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des formules cartésiennes modulo $\mathbf{T}$ (voir 2.86 pour la notion de formule cartésienne).

2. Si $\mathbf{K}$ est une classe de $\mathscr{L}$-structures, on dira qu'un homomorphisme $f : A \to B$ est *descriptivement clos (relativement à* $\mathbf{K}$*)*, s'il l'est relativement à $Th^{\infty}(\mathbf{K})$.

*Remarque* 8.27. Nous étendons un peu la définition des morphismes descriptivement clos de M.Coste ([11] V 7.4) , mais il s'agit bien de la même chose.

**Corollaire 8.28.** Soit $\mathbf{K}$ une classe élémentaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. **K** est la classe des modèles d'une théorie limite
2. **K** est stable par produits quelconques et sous-structures descriptivement closes.

*Démonstration.* Soit **T** la théorie finitaire de **K**. On considère le fragment $\mathcal{E}$ des formules cartésiennes modulo **T**, et l'on applique le corollaire précédent, en remarquant que sous l'hypothèse (1), **K** est la classe des modèles de toutes ses conséquences qui sont des énoncés limite.

*Remarque* 8.29. La définition "circulaire" des théories limite ne pose pas de problème dans cette caractérisation.

On peut en conjecturer la caractérisation suivante des classes de modèles de théories pseudo-algébriques (voir la section 5 du chapitre 6), dont le sens direct est une évidence.

*Conjecture* 8.30. Soit **K** une classe élémentaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. **K** est la classe des modèles d'une théorie pseudo-algébrique
2. **K** est stable par produits, sous-structures descriptivement closes et images homomorphes dans un objet de **K**.

# Chapitre 9

# Théorie Spectrale des $\mathcal{E}$-Types

## 1 $\mathcal{E}$-Types et filtres

On se place ici dans le contexte d'une théorie finitaire $\mathbf{T}$ du langage $\mathscr{L}$, et d'un ensemble de formules finitaires $\mathcal{E}$.

**Définitions 9.1.** Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure.

1. Un $\mathcal{E}$-type de $A$ désignera un ensemble de $\mathcal{E}(A)$-énoncés contenant le $\mathcal{E}$-diagramme $D^{\mathcal{E}}(A)$.
2. Un $\mathcal{E}$-type $\pi$ de $A$ sera dit *premier* si pour tout ensemble fini $\Phi$ de $\mathcal{E}(A)$-énoncés tel que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigvee \Phi$, on a $\pi \cap \Phi \neq \emptyset$.
3. Un $\mathcal{E}$-type $\pi$ de $A$ sera dit *radiciel* si pour tout $F(A)$-énoncé $\psi$ tel que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \psi$, on a $\psi \in \pi$.

Un $\mathcal{E}$-type premier est toujours radiciel.

*Remarque* 9.2. Un $\mathcal{E}$-type radiciel ou premier n'est pas nécessairement consistent avec $\mathbf{T}$. Par exemple, si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des formules atomiques, et si $\mathbf{T}$ est stricte, le $\mathcal{E}$-type total est radiciel, mais inconsistent avec $\mathbf{T}$.

La relation $\varphi \sqsubseteq \psi$ entre les formules de $\mathcal{E}$ définie par $\mathbf{T} \vDash \varphi \Rightarrow \psi$ (la quantification universelle est sous-entendue), est une relation de préordre sur $\mathcal{E}$, dont la relation d'équivalence associée est la relation d'équivalence logique modulo $\mathbf{T}$.

*Notation* 9.3. On notera $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}^{\mathcal{E}}$ l'ensemble des classes de formules de $\mathcal{E}$ modulo équivalence logique relativement à $\mathbf{T}$.

**Définition 9.4.** On définit la théorie $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}$ comme l'ensemble des conséquences de $\mathbf{T}$ de la forme $\forall X\ \varphi \Rightarrow \psi$, où $\varphi$ et $\psi$ sont dans $\mathcal{E}$.

Nous introduisons maintenant quelques notations concernant des opérations logiques sur les ensembles de formules finitaires.

*Notations* 9.5.
- On notera $\vee\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les disjonctions *finies* de formules de $\mathcal{E}$.
- On notera $\wedge\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les conjonctions *finies* de formules de $\mathcal{E}$.

**Lemme 9.6.** 1. L'ensemble $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}^{\wedge\mathcal{E}}$ est un demi-treillis inférieur.

2. L'ensemble $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}^{\vee\wedge\mathcal{E}}$ est un treillis distributif.

*Démonstration.* L'opération $\wedge$ définie sur les éléments de $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}^{\wedge\mathcal{E}}$ par $[\varphi] \wedge [\psi] := [\varphi \wedge \psi]$ en fait clairement un demi-treillis inférieur. Pour $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}^{\vee\wedge\mathcal{E}}$, on définit $\wedge$ et $\vee$ de la même façon, la définition étant possible en vertu de l'existence de formes normales disjonctives pour les formules finitaires sans quantificateurs.

On peut montrer facilement que les $\mathcal{E}$-types radiciels d'une structure correspondent exactement à ses $\wedge\mathcal{E}$-types radiciels, par la bijection évidente qui associe à un $\mathcal{E}$-type radiciel $\pi$ l'ensemble des conjonctions finies de ses éléments. En ce qui concerne les $\mathcal{E}$-types premiers, ce n'est pas aussi clair : le cas des $a$-types, pour lequel c'est vrai, est particulier en ce que tout $a$-type premier $\pi$ d'une $\mathscr{L}$-structure $A$ a un modèle "générique", le quotient $A \twoheadrightarrow A/\pi$. Toutefois, la notion de $\mathcal{E}$-type premier peut s'exprimer à l'aide des conjonctions finies de formules de $\mathcal{E}$, ce qui permet d'obtenir un résultat analogue en général.

**Lemme 9.7.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure, $n$ et $m_i, i = 1\ldots, n$ des entiers naturels non nuls et $\psi_{i,j}, i = 1\ldots, n, j = 1, \ldots, m_i$ des énoncés de $\mathcal{E}(A)$. Alors, l'énoncé $\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \psi_{i,j})$ est logiquement équivalent à l'énoncé $\bigwedge_{\bar{j}\in\prod_{i=1}^{n}[1,m_i]}(\bigvee_{i=1}^{n} \psi_{i,j_i})$.

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur $n$, en appliquant la loi de distributivité de la conjonction sur la disjonction, modulo équivalence logique.

**Lemme 9.8.** Soient $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Soit $\pi$ un $\mathcal{E}$-type de $A$. Alors $\pi$ est premier si et seulement si il est radiciel et si pour tout ensemble fini $\Phi \subseteq \wedge\mathcal{E}(A)$ tel que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigvee \Phi$, il existe un énoncé $\varphi \in \Phi$, tel que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \varphi$.

*Démonstration.* Nous ne montrons que le sens direct, la réciproque étant évidente. Rappelons d'emblée qu'un $\mathcal{E}$-type premier est radiciel. Nous procédons par récurrence sur le nombre $n$ d'énoncés dans $\Phi$. Si $n = 1$, le résultat est acquis puisque $\pi$ est radiciel. Supposons par récurrence que le résultat est acquis pour $n \geq 1$, et soit $\Phi := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ un ensemble de $n + 1$ énoncés de $\wedge\mathcal{E}(A)$ tel que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigvee \Phi$ où l'on pose, pour tout $i = 1\ldots, n + 1$, $\varphi_i = \bigwedge_{j=1}^{m_i} \psi_{i,j}$, $\psi_{i,j} \in \mathcal{E}(A)$. Par le lemme précédent, l'énoncé $\bigvee \Phi$ est logiquement équivalent à $\bigwedge_{\bar{j}\in\prod_{i=1}^{n+1}[1,m_i]}(\bigvee_{i=1}^{n+1} \psi_{i,j_i})$, si bien que pour tout $\bar{j} \in \prod_{i=1}^{n+1}[1, m_i]$, on a $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigvee_{i=1}^{n+1} \psi_{i,j_i}$. Supposons que $\mathbf{T} \cup \pi \nvDash \varphi_{n+1}$ : il existe alors $j \in [1, m_{n+1}]$ tel que $\mathbf{T} \cup \pi \nvDash \psi_{n+1,j}$. Par suite, si l'on note $\bar{j} = j_1, \ldots, j_{n+1}$, alors pour tout $\bar{j} \in \prod_{i=1}^{n+1}[1, m_i]$ tel que $j_{n+1} = j$, on a $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigvee_{i=1}^{n} \psi_{i,j_i}$, puisque $\pi$ est premier. Autrement dit, on a $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigwedge_{\bar{j}\in\prod_{i=1}^{n+1}[1,m_i], j_{n+1}=j}(\bigvee_{i=1}^{n} \psi_{i,j_i})$. Or, ce dernier énoncé est équivalent à $\bigwedge_{\bar{j}\in\prod_{i=1}^{n}[1,m_i]}(\bigvee_{i=1}^{n} \psi_{i,j_i})$, qui est équivalent à $\bigvee \Phi$, par le lemme précédent. Par hypothèse de récurrence, il existe $i \in [1, n]$ tel que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \varphi_i$, et le lemme est démontré.

**Proposition 9.9.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Il existe une bijection entre les $\mathcal{E}$-types premiers de $A$ et les filtres premiers du treillis $\mathscr{A}_{\mathbf{T}\cup D^{\mathcal{E}}(A)}^{\vee\wedge\mathcal{E}(A)}$.*

*Démonstration.* On pose $\Lambda := \mathscr{A}^{\vee\wedge\mathcal{E}(A)}_{\mathbf{T}\cup D^{\mathcal{E}}(A)}$. Nous commençons par définir les deux bijections réciproques :

- Si $\pi$ est un $\mathcal{E}$-type premier de $A$, on pose $G(\pi) := \{[\varphi] : \mathbf{T} \cup \pi \vDash \varphi, \varphi \in \vee\wedge\mathcal{E}(A)\}$
- Si $\mathscr{F}$ est un filtre premier de $\Lambda$, on pose $H(\mathscr{F}) := \{\varphi \in \mathcal{E}(A) : [\varphi] \in \mathscr{F}\}$.

(1) Montrons que les deux applications sont bien définies. Tout d'abord, si $\Phi$ est un ensemble fini de $\vee\wedge\mathcal{E}(A)$-énoncés dont les classes résiduelles des éléments sont dans $G(\pi)$, on a $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \varphi$, pour tout $\varphi \in \Phi$, si bien que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigwedge\Phi$, donc $[\bigwedge\Phi] = \bigwedge[\Phi] \in G(\pi)$. De plus, si $[\varphi] \in G(\pi)$ et $[\varphi] \leq [\psi]$, c'est que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \varphi$ et $\mathbf{T} \cup D^{\mathcal{E}}(A) \vDash \varphi \Rightarrow \psi$, d'où l'on tire que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \psi$, puisque $\pi$ est un $\mathcal{E}$-type : il s'ensuit que $[\psi] \in G(\pi)$ : $G(\pi)$ est un filtre. Supposons alors que $\Phi$ est un ensemble fini de $\vee\wedge\mathcal{E}(A)$-énoncés tel que $\bigvee[\Phi] \in G(\pi)$ : cela signifie que l'on a $[\bigvee\Phi] \in G(\pi)$, donc que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \bigvee\Phi$. On peut supposer que $\Phi \subseteq \wedge\mathcal{E}$, et comme $\pi$ est premier, par le lemme précédent il existe $\varphi \in \Phi$ telle que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \varphi$, d'où $[\varphi] \in G(\pi)$, qui est donc premier.
Soit maintenant $\varphi \in D^{\mathcal{E}}(A)$. On a $\mathbf{T} \cup D^{\mathcal{E}}(A) \vDash \varphi$, donc comme $\mathscr{F}$ est un filtre, il contient la classe $[\varphi]$, si bien que $H(\mathscr{F})$ est un $\wedge\mathcal{E}$-type de $A$. Soit $\Phi \subseteq \mathcal{E}(A)$ un ensemble fini d'énoncés tel que $\mathbf{T} \cup H(\mathscr{F}) \vDash \bigvee\Phi$ : par compacité, il existe une partie finie $\Psi$ de $H(\mathscr{F})$ telle que $\mathbf{T} \cup D^{\mathcal{E}}(A) \vDash \bigwedge\Psi \Rightarrow \bigvee\Phi$. La classe $[\bigwedge\Psi]$ est bien sûr dans $\mathscr{F}$ puisque $\mathscr{F}$ est un filtre, si bien que $[\bigvee\Phi]$ aussi puisqu'elle lui est supérieure et que $\mathscr{F}$ est un filtre. Autrement dit, on a $\bigvee[\Phi] \in \mathscr{F}$, et comme $\mathscr{F}$ est premier, il existe $\varphi \in \Phi$ telle que $[\varphi] \in \mathscr{F}$. Comme $\varphi$ est dans $\mathcal{E}(A)$, on a $\varphi \in H(\mathscr{F})$, qui est donc un $\mathcal{E}$-type premier.
(2) Montrons que $G$ et $H$ sont deux bijections réciproques. Clairement $\pi \subseteq HG(\pi)$. Si $\varphi \in HG(\pi)$, c'est que $[\varphi] \in G(\pi)$, donc que $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \varphi$, donc que $\varphi \in \pi$, puisque $\pi$ est radiciel : on a donc $\pi = HG(\pi)$.
Soit $[\varphi] \in \mathscr{F}$. On peut supposer que $\varphi$ est sous forme normale disjonctive $\bigvee_I \bigwedge_{J_i} \varphi_{i,j}$, avec les $\varphi_{i,j}$ dans $\mathcal{E}$ : par primalité, il existe $i \in I$ tel que $[\bigwedge_{J_i} \varphi_{i,j}] \in \mathscr{F}$. Pour tout $j \in J_i$, on a donc $[\varphi_{i,j}] \in \mathscr{F}$, c'est-à-dire $\varphi_{i,j} \in H(\mathscr{F})$. Il s'ensuit que $[\varphi_{i,j}] \in GH(\mathscr{F})$ pour tout $j \in J_i$, d'où $[\bigwedge_{J_i} \varphi_{i,j}] \in GH(\mathscr{F})$, et finalement $[\varphi] \in GH(\mathscr{F})$.
Enfin, soit $[\varphi] \in GH(\mathscr{F})$ : on a donc $\mathbf{T} \cup H(\mathscr{F}) \vDash \varphi$. En décomposant comme avant $\varphi$ sous forme normale disjonctive, on en déduit que $[\varphi] \in \mathscr{F}$, d'où l'égalité $\mathscr{F} = HG(\mathscr{F})$, ce qui termine la preuve.

**Corollaire 9.10.** Il existe une bijection entre les $\mathcal{E}$-types premiers, les $\wedge\mathcal{E}$-types premiers, les $\vee\mathcal{E}$-types premiers et les $\vee\wedge\mathcal{E}$-types premiers d'une structure $A$.

*Démonstration.* Par la proposition précédente, les types premiers de chacun de ces ensembles relativisés à $A$ sont en bijection avec le treillis engendré correspondant ; or, ce treillis est le même dans chaque cas, par l'utilisation de la forme normale disjonctive.

**Corollaire 9.11.** Si $A$ est une $\mathscr{L}$-structure, et si $\mathcal{E}$ est un ensemble de formules positives primitives, il existe une bijection entre les $\mathcal{E}$-types radiciels de $A$ et les filtres *premiers* du treillis $\mathscr{A}^{\vee\wedge\mathcal{E}(A)}_{\mathbf{T}_{W\mathcal{E}}\cup D^{\mathcal{E}}(A)}$.

*Démonstration.* Un $\mathcal{E}$-type $\pi$ est $\mathbf{T}$-radiciel si et seulement si il est $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}}$-radiciel si et seulement si il est $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}}$-premier. En effet, la première équivalence est évidente et si $\pi$ est un $\mathcal{E}$-type $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}}$-premier, il est $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}}$-radiciel. Réciproquement, supposons que $\pi$ est $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}}$-radiciel et que $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}} \cup \pi \vDash \bigvee\Phi$, où $\Phi \subseteq \mathcal{E}(A)$ est fini. On en conclut que $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}} \vDash \forall X\ \bigwedge\pi(X/A) \Rightarrow \bigvee\Phi(X/A)$. Par le lemme 8.22, il existe $\psi \in \Phi$ telle que $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}} \vDash \forall X \ \bigwedge \pi(X/A) \Rightarrow \psi(X/A)$, ou encore $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \psi$. Comme $\pi$ est $\mathbf{T}$-radiciel, on a $\psi \in \pi$ : $\pi$ est $\mathbf{T}_{W\mathcal{E}}$-premier. On conclut par la proposition.

**Proposition 9.12.** *Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. Il existe une bijection entre les $\mathcal{E}$-types radiciels de $A$ et les filtres du demi-treillis inférieur $\mathscr{A}^{\wedge\mathcal{E}(A)}_{\mathbf{T}\cup D^{\mathcal{E}}(A)}$.*

*Démonstration.* On associe comme avant à un $\mathcal{E}$-type $\pi$ l'ensemble $G(\pi) := \{[\varphi] : \mathbf{T} \cup \pi \vDash \varphi, \varphi \in \wedge\mathcal{E}(A)\}$. Cet ensemble est clairement clos par bornes inférieures d'ensembles finis, et si $[\varphi] \in G(\pi)$ et $[\varphi] \leq [\psi]$, on a comme avant $\mathbf{T} \cup \pi \vDash \psi$. Il s'ensuit que $G(\pi)$ est un filtre.
Inversement, si $\mathscr{F}$ est un filtre, on lui associe $H(\mathscr{F}) := \{\varphi \in \mathcal{E}(A) : [\varphi] \in \mathscr{F}\}$. On a $[H(\mathscr{F})] \subseteq \mathscr{F}$, et si $\psi$ est un $\mathcal{E}(A)$-énoncé tel que $\mathbf{T} \cup H(\mathscr{F}) \vDash \psi$, il existe comme avant par compacité une partie finie $\Phi$ de $H(\mathscr{F})$ telle que $[\bigwedge \Phi] \leq [\psi]$, d'où $[\psi] \in \mathscr{F}$ et $\psi \in H(\mathscr{F})$, si bien que $H(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{E}$-type radiciel.
On vérifie aisément que $G$ et $H$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

*Remarque* 9.13. En adaptant un peu la preuve de 9.9, on peut montrer que la bijection entre les $\mathcal{E}$-types premiers et les filtres premiers s'étend à une *injection* des $\mathcal{E}$-types radiciels dans l'ensemble des *filtres* de $\mathscr{A}^{\vee\wedge\mathcal{E}(A)}_{\mathbf{T}\cup D^{\mathcal{E}}(A)}$.

## 2 Localisation et $\mathcal{E}$-types

La section précédente donne une certaine interprétation "spectrale" des $\mathcal{E}$-types premiers, puisque les espaces spectraux sont les espaces de filtres premiers des treillis distributifs (voir [20]). Dans cette section, nous abordons l'étude des $\mathcal{E}$-types de manière différente, en nous appuyant sur les travaux de localisation de M.Coste, qui fournissent des localisations "génériques", qu'on pourra identifier à des $\mathcal{E}$-types premiers dans certains cas. Le lecteur est renvoyé à la sous-section 3.7 du chapitre 2 pour les éléments de factorisation et de localisation.

### 2.1 $\mathcal{E}$-Types premiers strictement consistents

On se donne un ensemble de formules positives primitives $\mathcal{E}$. Soit $\Lambda$ un ensemble de couples de conjonctions de formules atomiques, *contenant* les couples de la forme

- $(\top, \psi(X,Z))$,
- $(\varphi(X,Y), \psi(X,Z))$,

où $\exists Y\ \varphi(X,Y)$ et $\exists Z\ \psi(X,Z)$ sont des formules de $\mathcal{E}$ telles que $\varphi$ et $\psi$ sont des conjonctions de formules atomiques.
On se donne une théorie limite $\mathbf{T}_0$ et une extension h-inductive $\mathbf{T}$. On définit la théorie $\mathbf{T}_1$ comme la réunion de $\mathbf{T}_0$ et de toutes les conséquences de $\mathbf{T}$ de la forme
$\forall X\ \varphi(X) \Rightarrow \bigvee_I \exists Y_i\ \psi(X,Y_i)$, où pour tout $i$, le couple $(\varphi(X), \psi(X,Y_i))$ est dans $\Lambda$.
On peut alors associer à toute classe d'isomorphismes de localisation d'un modèle $A$ de $\mathbf{T}_0$, un $\mathcal{E}$-type premier.

**Définition 9.14.** Un $\mathcal{E}$-type premier $\mathfrak{p}$ d'une structure $A$ sera dit *strictement consistent* avec $\mathbf{T}_1$ si la théorie $\mathbf{T}_1 \cup D^+(A) \cup \mathfrak{p} \cup \mathfrak{p}^*$ est consistente, où $\mathfrak{p}^*$ désigne l'ensemble des négations des

$\mathcal{E}(A)$-énoncés qui ne sont pas dans $\mathfrak{p}$. Autrement dit, $\mathfrak{p}$ est strictement consistent si et seulement si il existe une réalisation "générique" de $\mathfrak{p}$ dans un modèle de $\mathbf{T}_1$.

**Proposition 9.15.** *Soit $A$ un modèle de $\mathbf{T}_0$. Il existe un foncteur de la catégorie des localisations de $A$ en des modèles de $\mathbf{T}_1$, dans l'ensemble partiellement ordonné des $\mathcal{E}$-types premiers de $A$. L'image de ce foncteur est l'ensemble des $\mathcal{E}$-types premiers strictement consistents avec $\mathbf{T}_1$.*

*Démonstration.* Soit $f : A \to B$ une localisation de $A$. Le foncteur est bien évidemment défini par $F(f) := \{\varphi \in \mathcal{E}(A) : f \models \varphi\} = tp_{\mathcal{E}}(f)$. Supposons que $\mathbf{T} \cup F(f) \models \bigvee \Phi$, où $\Phi \subseteq \mathcal{E}(A)$ est un ensemble fini. Par compacité, on a $\mathbf{T}_1 \cup F(f) \models \bigvee \Phi$, d'où $f \models \bigvee \Phi$, puisque $f \models \mathbf{T}_1$. Il existe donc une formule $\psi \in \Phi$ telle que $f \models \psi$ ; il s'ensuit que $\psi \in F(f)$, qui est donc premier, et la fonctorialité est évidente. Un tel $\mathcal{E}$-type premier est évidemment strictement consistent avec $\mathbf{T}_1$.
Soit $\mathfrak{p}$ un $\mathcal{E}$-type premier, strictement consistent avec $\mathbf{T}_1$ : il existe donc un homomorphisme $f : A \to C$, modèle de $\mathbf{T}_1 \cup \mathfrak{p} \cup \mathfrak{p}^*$. Par le théorème de localisation 2.100, on peut factoriser $f$ de la manière suivante

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

où $h$ est admissible, et $g$ est une localisation. Soit $\varphi(a) := \exists Y\ \psi(a, Y) \in \mathcal{E}(A)$, où $\psi$ est une conjonction d'atomiques. Si $g \models \varphi$, alors $f = hg \models \varphi$, puisque $h$ est un homomorphisme. Si $f \models \varphi$, alors $g \models \varphi$, puisque $g \models \top$, que le couple $(\top, \psi(X, Y))$ est dans $\Lambda$ et que $h$ est $\Lambda$-admissible. Il s'ensuit que $\mathfrak{p} = tp_{\mathcal{E}}(g)$, si bien que $\mathfrak{p}$ est dans l'image de $F$.

*Remarque* 9.16. On utilise dans la démonstration précédente toutes les hypothèses sur $\Lambda$ et $\mathbf{T}_1$. En effet, dans la première partie, l'argument de compacité est possible parce que $\mathbf{T}_1$ implique toutes les conséquences de $\mathbf{T}$ de la forme $\forall X\ \bigwedge \exists Y_i\ \varphi(X, Y_i) \Rightarrow \bigvee_J \exists Z_j\ \psi(X, Z_j)$, où les formules $\exists Y_i\ \varphi(X, Y_i)$ et $\exists Z_j\ \psi(X, Z_j)$ sont dans $\mathcal{E}$. Dans la seconde partie, un $\mathcal{E}$-type premier strictement consistent est strictement réalisable par la propriété de localisation parce qu'un morphisme $\Lambda$-admissible reflète la validité des $\mathcal{E}(A)$-énoncés, les couples $(\top, \varphi(X, Y))$, où $\exists Y\ \varphi(X, Y) \in \mathcal{E}$, étant dans $\Lambda$.

*Exemple* 9.17. Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}$ est une théorie uHs et $\mathcal{E}$ est l'ensemble des conjonctions de formules atomiques, si l'on prend pour $\Lambda$ l'ensemble minimal de couples donné par $\mathcal{E}$, les localisations d'un modèle $A$ de $\mathbf{T}_0$ "sont" des quotients de modèles de $A$ par ses idéaux logiques ; l'application $F$ de la proposition est alors une bijection. Pour une extension $\mathbf{T}$ h-inductive quelconque, les classes de localisation relativement à $\mathbf{T}_\forall$ pour ce même ensemble $\Lambda$ sont essentiellement les idéaux premiers de $A$, et les classes de localisation pour $\mathbf{T}_W$, les idéaux radiciels.

## 2.2 Ensembles cartésiens d'élimination

On se donne toujours une théorie limite $\mathbf{T}_0$ et une extension h-inductive $\mathbf{T}$, ainsi qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de formules positives primitives. Nous introduisons une théorie analogue à la théorie $\mathbf{T}_1$ de la sous-section précédente, mais que le lecteur fasse attention : il ne s'agit pas de la même situation. Premièrement, on considère le nouvel ensemble $\Lambda_2$ des couples $(\varphi(X), \psi(X, Y))$, où $\varphi$ est une conjonction de **formules atomiques** et $\exists Y\ \psi(X, Y)$ est une **formule de** $\mathcal{E}$. On considère alors la théorie $\mathbf{T}_2 := \{\chi := \forall X\ \bigwedge \Phi \Rightarrow \bigvee \Psi : \mathbf{T} \models \chi\} \cup \mathbf{T}_0$, où dans les énoncés $\chi$, $\Phi$ est un ensemble fini de formules *atomiques* et $\Psi$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}$ : autrement dit, $\mathbf{T}_2$ est construite à partir de $\Lambda_2$ de la même manière que $\mathbf{T}_1$ à partir de $\Lambda$.

**Proposition 9.18.** *Si les formules de $\mathcal{E}$ sont cartésiennes modulo $\mathbf{T}_0$ et si $f : A \to B \models \mathbf{T}_2$ est une localisation d'un modèle $A$ de $\mathbf{T}_0$, il existe un morphisme $\Lambda_2$-admissible $g : B \to M$, où $M$ est un modèle de $\mathbf{T}$.*

*Démonstration.* On considère la théorie formée de $\mathbf{T}$, du diagramme positif $D^+(B)$ et du $\mathcal{E}^c$-diagramme $D^{\mathcal{E}^c}(B)$ de $B$ (on rappelle que $\mathcal{E}^c$ est l'ensemble des négations de formules de $\mathcal{E}$, voir la sous-section 2.2 du chapitre 8). Si cette théorie est inconsistente, c'est qu'il existe par compacité un énoncé $\chi$ de $\mathbf{T}_2$ que $B$ ne satisfait pas, ce qui est impossible par hypothèse sur $B$. Il s'ensuit que la théorie est consistente : un modèle de cette théorie spécifie un homomorphisme $\mathcal{E}$-réflexif $f : B \to M$ dans un modèle de $\mathbf{T}$. Soient alors $(\varphi(X), \psi(X,Y)) \in \Lambda_2$, $b$ un $X$-uplet de $B$ et $m$ un $Y$-uplet de $M$ tels que $B \models \varphi(b)$ et $M \models \psi(f(b), m)$. Comme $f$ est $\mathcal{E}$-réflexif, on a $B \models \exists Y\ \psi(b,Y)$ et comme la formule $\exists Y\ \psi(X,Y)$ est cartésienne modulo $\mathbf{T}_0$, elle a un unique témoin $c$ dans $B$, dont l'image par $f$ ne peut être que $m$ pour la même raison. Autrement dit, l'homomorphisme $f$ est $\Lambda_2$-admissible.

**Définition 9.19.** On dira qu'un ensemble de formules cartésiennes modulo $\mathbf{T}_0$ qui est aussi un ensemble d'élimination pour $\mathbf{T}$ (voir 2.125) est un *ensemble cartésien d'élimination pour le couple* $(\mathbf{T}_0, \mathbf{T})$.

*Remarque* 9.20. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble cartésien d'élimination pour $(\mathbf{T}_0, \mathbf{T})$, on peut toujours supposer que $\mathbf{T}_0$ mentionne les conditions de fonctionalité des formules de $\mathcal{E}$. Si maintenant $\mathcal{E}$ est un ensemble d'élimination pour $\mathbf{T}$ de formules cartésiennes modulo $\mathbf{T}$, on peut toujours extraire de $\mathbf{T}$ une théorie limite $\mathbf{T}_0$ relativement à laquelle les formules de $\mathbf{T}$ sont cartésiennes : il suffit de retenir les conditions de fonctionalité des formules positives primitives de $\mathcal{E}$, qui sont des énoncés uHs. En particulier, dans cette configuration l'ensemble $\mathcal{E}$ est toujours un ensemble cartésien d'élimination pour $(\mathbf{T}_W, \mathbf{T})$.

**Lemme 9.21.** Si $\mathcal{E}$ est un ensemble d'élimination pour la théorie $\mathbf{T}$, et si $f : A \to M$ et $g : A \to N$ sont deux homomorphismes d'une même structure dans des modèles de $\mathbf{T}$, tels que $tp_{\mathcal{E}}(f) = tp_{\mathcal{E}}(g)$, alors $tp(f) = tp(g)$ ($tp(f)$ désigne le type complet de $f$, c'est-à-dire l'ensemble des $\mathscr{L}(A)$-énoncés satisfaits dans $(M, f)$).

*Démonstration.* Les $\mathscr{L}(A)$-structures $(M, f)$ et $(N, g)$ satisfont les mêmes $\mathcal{E}(A)$-énoncés, autrement dit les mêmes combinaisons booléennes de tels énoncés. Comme $M$ et $N$ sont deux modèles de $\mathbf{T}$, par élimination $(M, f)$ et $(N, g)$ satisfont les mêmes $\mathscr{L}(A)$-énoncés, autrement dit $tp(f) = tp(g)$.

**Proposition 9.22.** *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble cartésien d'élimination pour $(\mathbf{T}_0, \mathbf{T})$. Si $f : A \to B$ et $g : A \to C$ sont deux $\mathbf{T}_2$-localisations de même $\mathcal{E}$-type d'un modèle $A$ de $\mathbf{T}_0$, alors elles sont isomorphes.*

*Démonstration.* Comme $\mathcal{E}$ est cartésien, par la proposition 9.18 il existe deux morphismes admissibles $h : B \to M$ et $k : C \to N$, où $M, N \models \mathbf{T}$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(A)$, telle que $hf \models \varphi$ : on a $f \models \varphi$, puisque $h$ est admissible, d'où $\varphi \in tp_{\mathcal{E}}(f) = tp_{\mathcal{E}}(g)$, d'où $kg \models \varphi$, puisque $\varphi$ est cohérente. Comme $\mathcal{E}$ est un ensemble d'élimination pour $\mathbf{T}$ et $M$ et $N$ sont des modèles de $\mathbf{T}$, on a $(M, hfA) \equiv_{\mathscr{L}(A)} (N, kgA)$ par le lemme précédent. Il existe donc deux plongements élémentaires (dans le langage $\mathscr{L}(A)$)

$(M,hfA) \hookrightarrow (P,\tilde{A})$ et $(N,kgA) \hookrightarrow (P,\tilde{A})$ dans une même $\mathscr{L}(A)$-structure. Un plongement élémentaire est $\Lambda_2$-admissible dans ce cas, puisque $\mathcal{E}$ est cartésien momdulo $\mathbf{T}_0$, si bien qu'on peut supposer que $(M,hfA) = (N,kgA)$. Par la propriété de localisation (théorème 2.100), il existe une factorisation initiale de $h \circ f = k \circ g$, si bien qu'on se retrouve dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "h"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "g"'] & D \arrow[u, dotted, "i"] \arrow[r, "n"] \arrow[d, dotted, "j"] & M \\
& C \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

où $m$ est extremal (une localisation), $n$ est admissible, et $i$ et $j$ sont les morphismes admissibles uniques de la propriété universelle de la factorisation $n \circ m = h \circ f$. Or, les morphismes $f$ et $m$ étant extremaux, on en conclut que $i$ est aussi extremal, par la proposition 2.97. Comme ce dernier est aussi admissible, c'est un isomorphisme par la même proposition, si bien qu'avec le même raisonnement appliqué à $j$, $j \circ i^{-1}$ est un isomorphisme entre $f$ et $g$.

**Théorème 9.23.** *Si $\mathcal{E}$ est un ensemble cartésien d'élimination pour $(\mathbf{T}_0,\mathbf{T})$, et si $A \models \mathbf{T}_0$, il existe une bijection entre les classes d'isomorphismes de localisations de $A$ en des modèles de $\mathbf{T}_2$ et les théories complètes dans le langage $\mathscr{L}(A)$, contenant $\mathbf{T} \cup D^+(A)$.*

*Démonstration.* Soit $f : A \to B$ un représentant d'une classe de localisations de $A$. Il existe par la proposition 9.18 un morphisme admissible $g : B \to M$, où $M \models \mathbf{T}$. On peut alors associer à $f$ le type complet de $g \circ f$. Si $h : B \to N$ est un autre morphisme admissible dans un modèle de $\mathbf{T}$, on a $tp_{\mathcal{E}}(hf) = tp_{\mathcal{E}}(f) = tp_{\mathcal{E}}(gf)$, si bien que le type complet de $hf$ est le même que celui de $gf$ par élimination. Ce type ne dépend évidemment pas du choix de $f$, si bien qu'on a associé sans ambiguité à la classe de $f$ une théorie complète de la forme annoncée, que nous noterons $F(f)$.
Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ est une théorie complète contenant $\mathbf{T} \cup D^+(A)$, soit $f : A \to M$ un homomorphisme qui réalise cette théorie. On peut factoriser $f$ en $h \circ g$, où $g : A \to B$ est une $\mathbf{T}_2$-localisation et $h : B \to M$ un morphisme admissible.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & M \\
& B \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $h$ est admissible, on a $tp_{\mathcal{E}}(g) = tp_{\mathcal{E}}(f)$. Si donc $f' : A \to N$ est une autre réalisation de $\mathfrak{p}$, factorisée par une autre localisation $g' : A \to B'$, on a $tp_{\mathcal{E}}(g') = tp_{\mathcal{E}}(f') = tp_{\mathcal{E}}(f) = tp_{\mathcal{E}}(g)$. Par

la proposition précédente, $g$ et $g'$ sont isomorphes, si bien qu'on peut associer aussi à toute théorie complète contenant $\mathbf{T} \cup D^+(A)$ une classe de localisations, qu'on note $G(\mathfrak{p})$.
On vérifie alors facilement que $F$ et $G$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Ce théorème permet d'envisager dans des cas concrets une identification des espaces de types avec des spectres au sens de M.Coste ([11], [12]). Dans ces conditions, le topos sous-jacent au spectre est *spatial* ([11] VIII 2.2, [12] 4.4.1) ce qui signifie en particulier que l'on a une relation d'ordre partiel entre les *points* du topos ([13]), qui ne sont autre chose que les classes d'isomorphisme de localisations ou encore les types complets ; l'espace des types hérite donc d'une structure d'espace spectral (voir [20]), dont les ensembles constructibles correspondent aux ensembles définissables.
On peut mentionner comme cas particuliers deux théories.

- Si $\mathbf{T}$ est la théorie des corps algébriquement clos dans le langage des anneaux et $\mathbf{T}_0$ la théorie des anneaux, soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des formules de la forme $\exists y\ t(X).y = 1$, où $t(X)$ est un terme du langage. La théorie $\mathbf{T}_2$ est alors essentiellement la théorie des anneaux locaux et $\mathcal{E}$ est un ensemble cartésien d'élimination pour $(\mathbf{T}_0,\mathbf{T})$. En effet, la formule $\exists y\ t(X).y = 1$ est équivalente modulo $\mathbf{T}$ à la formule $t(X) \neq 0$ et on conclut par élimination des quanteurs (voir 2.126) puisque dans un anneau, l'inverse d'un élément est unique. Les localisations d'un anneau $A$ sont ses localisations au sens algébrique classique, et l'on reconnaît la bijection entre le spectre premier de $A$ et l'ensemble des théories complètes contenant $\mathbf{T} \cup D^+(A)$ : on a ainsi une relation de spécialisation sur cet ensemble de théories complètes.
- Si $\mathbf{T}$ est la théorie des corps ordonnés réels clos dans le langage $\langle +, -, \times, \leq, 0, 1 \rangle$, l'ensemble des formules de la forme $\exists y\ [t(X).y^2 = 1 \wedge y \geq 0]$ est un ensemble d'élimination pour $\mathbf{T}$, constitué de formules cartésiennes modulo $\mathbf{T}$. En effet, la formule $\exists y\ [t(X).y^2 = 1 \wedge y \geq 0]$ est équivalente à la formule $t(X) \geq 0 \wedge t(X) \neq 0$ ($t(X) > 0$) modulo $\mathbf{T}$ et on conclut encore par élimination des quanteurs (2.126) et parce que précisément l'ordre permet de choisir l'unique racine carrée positive d'un élément strictement positif. On considère la théorie $\mathbf{T}_W$, ensemble des conséquences uHs finitaires de $\mathbf{T}$ : sans l'identifier, on sait qu'elle mentionne toutes les conditions de fonctionnalité des formules cartésiennes modulo $\mathbf{T}$ par la remarque 9.20, et que l'anneau partiellement ordonné associé à un ensemble semi-algébrique fermé est un modèle de $\mathbf{T}_W$. On peut donc représenter les "types complets" de cet anneau réticulé par les classes de localisations partiellement ordonnées par la relation de spécialisation correspondant à la topologie euclidienne (voir [7], chapitre 7).

Ces rapports entre la théorie de la localisation de M.Coste et la théorie des modèles ensembliste ne sont que des exemples élémentaires, qui ont toutefois un intérêt en ce que les spectres associés sont spatiaux. On peut raisonnablement envisager de systématiser la connexion entre les spectres au sens de Cole-Coste, et l'algèbre modèle-théorique classique, dans une théorie qui s'intéresserait entre autres à représenter les ensembles définissables par des spectres. La notion centrale qui permet d'articuler les deux mondes est celle de théorie positivement modèle-complète. En effet, les constructions de logique catégorique cohérente présupposent l'utilisation des théories h-inductives, qui ont de bonnes propriétés topos-théoriques (voir par exemple [24] X.3.6). Cela semble exclure certaines théories du premier ordre, mais il n'en est rien puisque par morléisation positive on peut ramener toute théorie à une théorie h-inductive positivement modèle-complète (voir [4], p.21). Des cas intéressants peuvent provenir des théories qui ont naturellement cette propriété, et sont munies d'un ensemble d'élimination relativement naturel, pas nécessairement cartésien (en pensant aux corps réels clos dans un langage égalitaire, ou aux corps de différence génériques). Dans de telles théories de corps positivement modèle-complètes, on disposerait ainsi de constructions liées à la géométrie algébrique : les invariants algébriques issus de la complétude géométrique et les propriétés de représentation associées, et éventuellement une topologie spectrale intéressante. Dans les cas "dégénérés", le spectre d'un "ensemble définissable" serait une façon alternative (au modèle universel) de regarder tous ses points dans une extension élémentaire du modèle où il est considéré.

# Annexe

# Traductions et Théories Limite et Pseudo-Algébriques

Selon les préférences ou les contextes, on peut vouloir travailler en théorie des modèles avec un langage purement relationnel (plus "ensembliste"), ou alors dans une perspective radicalement opposée, dans un langage qui ne comporte que des symboles de sortes, de fonctions et de constantes (plus "catégorique"). Les théories limite et pseudo-algébriques en particulier interviennent de manière fondamentale dans le passage d'une situation à l'autre.

## Traduction Relationnelle

Soit $\mathscr{L}$ un langage multi-sortes quelconque. Nous voulons associer à $\mathscr{L}$ un langage "purement relationnel" $\mathscr{L}^*$ (sans symboles de sortes, de fonctions, ou de constantes) "équivalent", dans le sens où les $\mathscr{L}$-structures soient "équivalentes" aux $\mathscr{L}^*$-structures, du moins à certaines.

- Soit $s$ un symbole de sorte de $\mathscr{L}$ : on lui associe un symbole relationnel unaire $r_s$ de $\mathscr{L}^*$.
- Soit $f$ un symbole fonctionnel de $\mathscr{L}$, de sortes $s_1, \ldots, s_n, s$ : on lui associe un symbole relationnel $r_f$, d'arité $n+1$, de $\mathscr{L}^*$.
- Soit $r$ un symbole relationnel de $\mathscr{L}$, de sortes $s_1, \ldots, s_n$ : on lui associe le même symbole relationnel $r$, d'arité $n$, de $\mathscr{L}^*$.
- Soit $c$ un symbole de constante de $\mathscr{L}$ : on lui associe un symbole relationnel unaire $r_c$ de $\mathscr{L}^*$.

Soit maintenant $A$ une $\mathscr{L}$-structure : nous explicitons comment construire une $\mathscr{L}^*$-structure $A^*$ à partir de $A$.

- Le domaine de $A^*$ est la réunion disjointe des sortes $A_s$ de $A$.
- Si $s \in \mathscr{S}$, le prédicat unaire $r_s$ décrit la copie de $A_s$ dans le domaine.
- Si $f \in \mathscr{F}$, le graphe de $f$ dans $A$ définit clairement un sous-ensemble du produit $A^{*n+1}$, qui est l'interprétation de $r_f$.
- Si $r \in \mathscr{R}$, le champ de $r$ dans $A$ définit clairement un sous-ensemble de $A^{*n}$, qui est l'interprétation de $r$.
- Si $c \in \mathscr{C}$, l'élément $c^A$ de $A$ définit clairement un élément $c^{A^*}$ de $A^*$, et on prend le sin-

gleton $\{c^{A^*}\}$ pour interprétation de $r_c$.
Soit maintenant $f : A \to B$ un $\mathscr{L}$-homomorphisme entre deux $\mathscr{L}$-structures ; $f$ préserve les sortes, les fonctions, les relations et les constantes, donc l'application $f^*$ définie de manière évidente de $A^*$ dans $B^*$ est un $\mathscr{L}^*$-homomorphisme, et si $g : B \to C$, on a $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$. On vérifie aussi que si $A$ est une $\mathscr{L}$-structure, $1_A^*$ est l'identité de $A^*$. On a donc la proposition suivante.

**Proposition.** *La transformation* $^*$ *est un foncteur de la catégorie* $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ *dans la catégorie* $(\mathscr{L}^*)^+\mathbf{St}$.

*Remarques.* Si $f : A \to B$ est un $\mathscr{L}$-homomorphisme, le $\mathscr{L}^*$-homomorphisme $f^*$ associé à $f$ est bien défini parce que le domaine de $A^*$ est la réunion disjointe des sortes $A_s$ de $A$.

La traduction $^*$ entraîne avec elles certaines propriétés, notamment la fonctionnalité des symboles de graphes. Nous décrivons ici une théorie qui exprime quelles $\mathscr{L}^*$-structures sont essentiellement des traductions de $\mathscr{L}$-structures.
On définit la théorie $\mathbf{T}^*$ par les axiomes suivants :

- Pour tout symbole de fonction $f \in \mathscr{F}$, de sortes $s_1, \ldots, s_n, s$, les axiomes
  $\forall x_1, \ldots, x_n, y \; r_f(x_1, \ldots, x_n, y) \Rightarrow r_s(y)$,
  $\forall x_1, \ldots, x_n, y, y' \; r_f(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge r_f(x_1, \ldots, x_n, y') \Rightarrow y = y'$ et
  $\forall x_1, \ldots, x_n, y \; [\exists y \; r_f(x_1, \ldots, x_n, y)] \Leftrightarrow \bigwedge_i r_{s_i}(x_i)$
  sont dans $\mathbf{T}^*$ ;
- Pour tout symbole de relation $r \in \mathscr{R}$, de sortes $s_1, \ldots, s_n$, l'axiome
  $\forall x_1, \ldots, x_n \; r(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \bigwedge_i r_{s_i}(x_i)$
  est dans $\mathbf{T}^*$ ;
- Pour tout symbole de constante $c \in \mathscr{C}$, de sorte $s$, les axiomes
  $\forall x \; r_c(x) \Rightarrow r_s(x)$,
  $\forall x, x' \; r_c(x) \wedge r_c(x') \Rightarrow x = x'$ et
  $\exists x \; r_c(x)$
  sont dans $\mathbf{T}^*$.

Il est évident que si $A$ est une $\mathscr{L}$-structure, $A^*$ est un modèle de $\mathbf{T}^*$. Réciproquement, donnons-nous un modèle $B$ de $\mathbf{T}^*$. Nous allons décrire une $\mathscr{L}$-structure $B_*$ à partir de $B$.

- Si $s \in \mathscr{S}$, la sorte $(B_*)_s$ est l'interprétation $r_s(B)$ ;
- Si $f \in \mathscr{F}$, de sortes $s_1, \ldots, s_n, s$, $r_f$ définit dans $B$ une application de $\prod_i r_{s_i}(B) \to r_s(B)$ ; on interprète $f$ dans $B_*$ par cette application ;
- Si $r \in \mathscr{R}$, de sortes $s_1, \ldots, s_n$, $r$ définit dans $B$ une relation dont le champ définit un sous-ensemble de $\prod_i r_{s_i}(B)$ : on interprète $r$ dans $B_*$ par ce sous-ensemble.
- Si $c \in \mathscr{C}$, de sorte $s$, $r_c$ est interpété dans $B$ par un singleton $\{c^B\}$ : on pose $c^{B_*} := c^B$.

Supposons que $f : B \to C$ est un $\mathscr{L}^*$-homomorphisme entre modèles de $\mathbf{T}^*$. On peut associer à $f$ un $\mathscr{L}$-homomorphisme $f_* : B_* \to C_*$, puisque $f$ spécifie une application de $B_*$ dans $C_*$, qui est évidemment un $\mathscr{L}$-homomorphisme. On peut voir aussi facilement que la proposition suivante est vérifiée.

**Proposition.** *La transformation* $_*$ *est un foncteur de* $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}^*)$ *dans* $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$.

Comment les deux foncteurs $^*$ et $_*$ sont-ils liés ? La définition des deux transformations entraîne immédiatement que pour toute $\mathscr{L}$-structure $A$, on a $(A^*)_* \simeq A$. Si $B$ est un modèle de $\mathbf{T}^*$, on voit aussi aisément que $(B_*)^* \simeq B$.

**Théorème.** *Les foncteurs $^*$ et $_*$ sont deux équivalences de catégories entre la catégorie des $\mathscr{L}$-structures et la catégorie des modèles de $\mathbf{T}^*$.*

On remarque que la théorie $\mathbf{T}^*$ est une théorie *limite*.
On peut faire une traduction analogue sans éliminer les symboles de sortes : on obtient encore une équivalence de catégories entre $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ et les modèles de $\mathbf{T}^*$, où la théorie $\mathbf{T}^*$ ne mentionne plus que les axiomes suivants (où les variables sont supposées choisies avec la bonne sorte) :

- Pour tout symbole de fonction $f \in \mathscr{F}$, de sortes $s_1,\dots,s_n,s$, les axiomes
  $\forall x_1,\dots,x_n,y,y'\ r_f(x_1,\dots,x_n,y) \wedge r_f(x_1,\dots,x_n,y') \Rightarrow y = y'$ et
  $\forall x_1,\dots,x_n,y\ \exists y\ r_f(x_1,\dots,x_n,y)$ ;
- Pour tout symbole de constante $c \in \mathscr{C}$, de sorte $s$, les axiomes
  $\forall x,x'\ r_c(x) \wedge r_c(x') \Rightarrow x = x'$ et
  $\exists x\ r_c(x)$.

On remarque que dans ce cas, la théorie $\mathbf{T}^*$ est une théorie *pseudo-algébrique*, ce qui n'était pas le cas dans la traduction pleine précédente, une théorie limite, puisque le troisième axiome correspondant aux symboles de fonctions mentionne un axiome non pseudo-algébrique.

## Traduction Fonctionnelle

Ainsi, le passage d'un langage multi-sortes général à un langage purement relationnel est une équivalence de catégories.
Nous décrivons ici la traduction "en sens inverse", en quelque sorte. Il s'agit de passer d'un langage du premier ordre multi-sortes $\mathscr{L}$ à un langage multi-sortes $\mathscr{L}^*$ qui ne comporte que des symboles de sortes, de fonctions et éventuellement de constantes.
Nous décrivons le langage $\mathscr{L}^*$ comme suit.

- Si $s \in \mathscr{S}$, $s$ est aussi un symbole de sorte de $\mathscr{L}^*$.
- Si $n \geq 2$ et si $\bar{s} = s_1,\dots,s_n$ est un $n$-uplet de sortes de $\mathscr{S}$, on introduit un nouveau symbole de sortes noté $\bar{s}$, et $n$ nouveaux symboles de fonction de sortes respectives $(\bar{s},s_i)$, notés $\pi_i^{\bar{s}}$.
- Si $f \in \mathscr{F}$, $f$ est aussi un symbole de fonction de $\mathscr{L}^*$, de mêmes sortes.
- Si $c \in \mathscr{C}$ est un symbole de constante, on le conserve aussi dans $\mathscr{L}^*$.
- Si $r \in \mathscr{R}$ est un symbole relationnel de sortes $\bar{s} = s_1,\dots,s_n$, on lui associe un nouveau symbole de sorte $s_r$ et un nouveau symbole de fonction $f_r$, de sortes $(s_r,\bar{s})$.

Soit $A$ une $\mathscr{L}$-structure. On associe à $A$ une $\mathscr{L}^*$-structure $A^*$ de la manière suivante.

- Les domaines $(A^*)_s$ sont les domaines $(A)_s$ pour les symboles $s \in \mathscr{S}$.
- Si $n \geq 2$ et si $\bar{s}$ est $n$-un uplet de sortes de $\mathscr{S}$, $(A^*)_{\bar{s}}$ est par définition *le* produit ensembliste (naturel) $\prod_i A_{s_i}$, et les symboles $\pi_i^{\bar{s}}$ sont interprétés comme les projections du produit sur chaque $A_{s_i}$
- Les symboles de fonction et de constante originels sont interprétés comme dans $A$.
- Si $r \in \mathscr{R}$ est de sortes $\bar{s}$, on interprète $s_r$ comme le champ de la relation $r$ dans $A$, et $f_r$ comme l'inclusion de $A_{s_r}$ dans $\prod_i A_{s_i}$.

On peut faire la vérification un peu fastidieuse de la propriété suivante.

**Proposition.** *La traduction $^*$ est un foncteur de $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ dans $(\mathscr{L}^*)^+\mathbf{St}$.*

Comme dans la section précédente, on peut identifier une liste d'axiomes $\mathbf{T}^*$ satisfaits dans toutes les traductions.

- Si $n \geq 2$ et si $\bar{s}$ est un $n$-uplet de sortes de $\mathscr{L}$, si $x_1,\ldots,x_n$ sont des variables de sortes correspondantes et $y,y'$ deux variables de sorte $\bar{s}$ dans $\mathscr{L}^*$, les axiomes
$\forall y,y' \; [\bigwedge_i \pi_i^{\bar{s}}(y) = \pi_i^{\bar{s}}(y')] \Rightarrow y = y'$ et
$\forall x_1,\ldots,x_n \exists y \; \bigwedge_i \pi_i^{\bar{s}}(y) = x_i$,
qui exprime que la sorte $\bar{s}$ s'interpète comme *un* produit des interprétations des $s_i$, est dans $\mathbf{T}^*$ ;
- Si $r$ est un symbole relationnel de $\mathscr{L}$ de sortes $s_1,\ldots,s_n$, pour toutes variables $x,x'$ de sorte $s_r$, l'axiome
$\forall x,x' \; f_r(x) = f_r(x') \Rightarrow x = x'$,
qui exprime que l'interprétation de $s_r$ *se plonge* dans l'interprétation de la sorte $\bar{s}$, est dans $\mathbf{T}^*$.

Remarquons que le champ correspondant à la relation $r$ dans $A^*$ est la valeur de la formule $\exists y \; f_r(x) = y$ (avec des variables de sortes appropriées).
La traduction $A^*$ est évidemment un modèle de $\mathbf{T}^*$, et on a en fait une équivalence.

**Théorème.** *Le foncteur* $^*$ *est une équivalence de catégories de* $\mathscr{L}^+\mathbf{St}$ *dans* $\mathbf{Mod}^+(\mathbf{T}^*)$.

*Démonstration.* Le foncteur $f^*$ est pleinement fidèle, parce qu'un homomorphisméventuellee dans l'image de $^*$ induit clairement un homomorphisme entre les antécédents, et que par définition de $^*$, deux homomorphismes ayant la même image sont identiques, étant définis ensemblistement.
Soit maintenant $B$ un modèle de $\mathbf{T}^*$. Définissons une $\mathscr{L}$-structure $A$ de la manière suivante.

- Le domaine de $A$ de sorte $s \in \mathscr{S}$ est $B_s$.
- Si $f$ est un symbole de fonction originel, son interprétation dans $A$ est définie comme son interprétation dans $B$.
- Si $r$ est un symbole de relation originel, de sortes $\bar{s}$, son champ dans $A$ est le sous-ensemble de $\prod_i A_{s_i}$ induit par l'isomorphisme entre $\prod_i A_{s_i}$ et $B_{\bar{s}}$ : ce dernier ensemble contient l'image de $B_{s_r}$ par $f_r^B$, qui a donc une copie isomorphe dans $\prod_i A_{s_i}$.

On obtient ainsi une $\mathscr{L}$-structure $A$, dont il est à peu près évident que la traduction $A^*$ est isomorphe à $B$ : $^*$ est une équivalence.

*Remarques.* On pourrait envisager de ne pas mentionner dans $\mathbf{T}^*$ l'injectivité des fonctions $f_r$. Si on le faisait, la démonstration précédente ne fonctionnerait plus, car alors dans $A^*$, le domaine de $s_r$ ne serait plus nécessairement en bijection avec son analogue dans $B$.

La théorie $\mathbf{T}^*$ intervenant dans cette traduction est encore une théorie *pseudo-algébrique*, en particulier une théorie limite.
En résumé, en logique du premier ordre multi-sortes, le passage d'un langage fonctionnel à un langage relationnel se fait dans le deux sens à l'aide d'une théorie pseudo-algébrique. Si l'on veut éliminer complètement les symboles de sorte dans la traduction relationnelle, il faut semble-t-il une théorie limite dans le sens le plus général.

# Bibliographie


[1] Jiři Adamek and Jiři Rosicky, *Locally Presentable and Accessible Categories*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, Vol.189, Cambridge University Press, 1994.

[2] M.F. Atiyah et I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[3] Itaï Ben Yaacov, *Positive model theory and compact abstract theories*, Journal of Mathematical Logic, **3** (2003), no. 1, 85-118.

[4] Itaï Ben Yaacov et Bruno Poizat, *Fondements de la Logique positive*, Journal of Symbolic Logic, **72** (2007), no. 4, 1141-1162.

[5] Franck Benoist, *Théorie des modèles de corps munis d'une dérivation de Hasse*, Thèse de doctorat en Mathématiques, Université Paris 7, 2005.

[6] Alain Bigard, Klaus Keimel, Samuel Wofenstein, *Groupes et Anneaux Réticulés*, Lecture Notes in Math., Vol. 608, Springer-Verlag, 1977.

[7] Jacek Bochnak, Michel Coste, Marie-Françoise Roy, *Real Algebraic Geometry*, A Series of Modern Surveys in Math., Vol.36, Springer-Verlag, 1998.

[8] Zoé Chatzidakis and Ehud Hrushovski, *Model theory of difference fields*, Trans Amer. Math. Soc., **351** (1999), 2997-3071.

[9] Richard M. Cohn, *Difference algebra*, Interscience Publishers, 1965.

[10] René Cori et Daniel Lascar, *Logique mathématique*, Dunod, 2003.

[11] Michel Coste, *Localisation dans les catégories de modèles*, Thèse de doctorat d'état es Sciences Mathématiques, Université Paris Nord, 1977.

[12] Michel Coste, *Localisation, spectra and sheaf representation*, dans M.P. Fourman et al. eds., *Applications of sheaves*, Lecture Notes in Math., Vol. 753, Springer-Verlag, 1979.

[13] Michel Coste and M-F. Coste-Roy, *Topologies for real algebraic geometry*, dans A. Kock, ed., *Topos Theoretic Methods in Geometry*, Aarhus Univ. Var. Publ. Series, Vol. 30, Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, 1979.

[14] Michel Coste, Henri Lombardi, Marie-Françoise Roy, *Dynamical method in algebra : effective Nullstellensätze*, Annals of Pure and Applied Logic, **111** (2001), 203-256.

[15] Greg Cherlin, *Model Theoretic Algebra Selected Topics*, Lecture Notes in Math., Vol. 521, Springer-Verlag, 1976.

[16] Sabah Fakir, *Objets algébriquement clos et injectifs dans les catégories localement présentables*, Mémoires de la S.M.F., tome 42 (1975), 5-75.

[17] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., Vol. 52, Springer-Verlag, 1977.

[18] Wilfrid Hodges, *Model Theory*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 42, Cambridge University Press, 1993.

[19] P.Higgins, *Groups with multioperators*, Proc. London Math. Soc., **6** (1956), 366-373.

[20] M. Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **142** (1969), 43-60.

[21] Peter Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.

[22] Angus Macintyre, *Model-completeness for sheaves of structures*, Fundamenta Mathematicae, LXXXI (1973), 73-89.

[23] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1998.

[24] Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, 1992.

[25] Kenneth McKenna, *Some Diophantine Nullstellensätze*, dans L. Pacholski et al. eds., *Model Theory of Algebra and Arithmetic, Karpacz, 1979*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 834, Springer-Verlag, 1980.

[26] Michael Makkaï and Gonzalo Reyes, *First Order Categorical Logic*, Lecture Notes in Math., Vol. 611, Springer-Verlag, 1977.

[27] David Marker, *Model Theory : An Introduction*, Springer-Verlag, 2002.

[28] David Marker, Margit Messmer and Anand Pillay, *Model theory of fields*, Lecture Notes in Logic, Vol. 5, Springer-Verlag, 1996.

[29] Boris Plotkin, *Seven lectures on the universal algebraic geometry*, disponible sur http ://arxiv.org/abs/math/0204245, 2002.

[30] Bruno Poizat, *Cours de théorie des modèles*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985.

[31] Alexander Prestel and Peter Roquette, *Formally p-adic fields*, Lecture Notes in Math., Vol. 1050, Springer-Verlag, 1984.

[32] J.F. Ritt and H.W. Raudenbush Jr, *Ideal theory and algebraic difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **46** (1939), 445-452.

[33] Edmund Robinson, *Stable theories of local rings*, dans A. Kock, ed., *Category Theoretic Methods in Geometry*, Aarhus Univ. Var. Publ. Series, Vol. 35, Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, 1983.

[34] I.R. Shafarevitch, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1974.

[35] Frank Olaf Wagner, *Simple Theories*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[36] Volker Weispfenning, *Nullstellensätze - a model theoretical framework*, Zeitschrift Math. Logik Grundlagen Math., **23** (1977), no. 6, 539-545.