

ÉCOLE CENTRALE DE LILLE

UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR  
ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS

# THÈSE

présentée en vue  
d'obtenir le grade de

## DOCTEUR

en Automatique et Informatique Industrielle

par

**Sonia HAMMAMI**

Ingénieur – ENIM

**Doctorat délivré conjointement par l'École Centrale de Lille  
et l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis**

**Sur la stabilisation de systèmes  
dynamiques continus non linéaires  
exploitant les matrices de formes en flèche.  
Application à la synchronisation de systèmes chaotiques**

**soutenue le 21 décembre 2009, devant le Jury d'Examen composé de :**

M.	Jean-Claude GENTINA	Président
M.	Naceur BENHADJ BRAÏEK	Rapporteur
M.	Abdellah EL MOUDNI	Rapporteur
M.	Noureddine ELLOUZE	Examineur
Mme.	Safya MEDIMAGH-BELGHITH	Examinatrice
M.	José RAGOT	Examineur
M.	Mohamed BENREJEB	Co-Directeur de Thèse
M.	Pierre BORNE	Co-Directeur de Thèse

Thèse préparée au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS)  
de l'École Centrale de Lille et à l'Unité de Recherche LARA Automatique  
de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis

# **AVANT-PROPOS**

*Les travaux de recherche, que nous présentons dans ce mémoire, ont été effectués au sein de l'Unité de Recherche LARA Automatique de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT) et au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS) de l'Ecole Centrale de Lille (EC-Lille).*

*Nous sommes particulièrement sensible au grand honneur que nous a fait Monsieur Jean-Claude GENTINA, Professeur à l'EC-Lille, en acceptant de présider notre Jury de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde reconnaissance ainsi que le témoignage de notre profond respect.*

*C'est un agréable devoir pour nous d'exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur Mohamed BENREJEB, Professeur à l'ENIT et Directeur de l'Unité de Recherche LARA Automatique, qui a bien voulu nous accueillir au sein de son équipe et nous guider durant toute l'élaboration de cette thèse avec le sérieux et la compétence qui le caractérisent. Qu'il trouve ici le témoignage de notre très profonde gratitude et notre grande estime.*

*Nous tenons à exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur Pierre BORNE, Professeur à l'EC-Lille, pour toute l'aide qu'il nous a octroyée. Qu'il trouve ici l'expression de notre très profonde gratitude pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux et les conseils éclairés qu'il nous a prodigués pour mener cette thèse à son terme.*

*Nous exprimons notre très vive reconnaissance à Monsieur Naceur BENHADJ BRAÏEK, Professeur à l'Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis et Directeur du Laboratoire d'Etude et Commande Automatique de Processus de l'Ecole Polytechnique de Tunisie, et nous lui adressons nos sincères remerciements pour avoir bien voulu nous initier à la recherche, accepter de juger notre travail et participer au Jury de notre thèse.*

*J'adresse également ma profonde reconnaissance à Monsieur Abdellah EL MOUDNI, Professeur à l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard et Directeur du Laboratoire Système et Transport, pour sa participation au Jury en tant que rapporteur et pour avoir accepté d'évaluer nos travaux de thèse. Nous lui adressons aussi nos plus vifs remerciements.*

*Monsieur Noureddine ELLOUZE, Professeur à l'ENIT et Directeur de l'Unité de Recherche de Traitement du Signal, de Traitement d'Images et Reconnaissance de Formes, nous a, à tout moment encouragé et apporté son soutien. Nous tenons à ce qu'il reçoive ici le témoignage de notre très respectueuse et très vive reconnaissance ainsi que l'expression de notre profond dévouement.*

*Que Madame Safya MEDIMAGH-BELGHITH, Professeur à l'ENIT et Directrice de l'Ecole Supérieure de Technologie et d'Informatique, reçoive ici notre respect et notre reconnaissance. Nous lui exprimons toute notre gratitude ainsi que notre grande estime pour l'honneur qu'elle nous a accordé en acceptant de juger ce travail.*

*Nous sommes heureux d'exprimer notre profonde gratitude à Monsieur José RAGOT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine et Directeur du Laboratoire d'Automatique et de Recherche Appliquée de L'Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy, pour avoir accepté de participer à notre Jury de thèse et évaluer nos travaux.*

## **À la Mémoire de Mon Très Cher Père**

### **À qui je dois ce que je suis**

*J'aurais tant aimé que tu sois là parmi nous pour voir tes souhaits se réaliser.*

*Tu as toujours été pour moi le meilleur ami, le meilleur exemple,  
le meilleur papa  
et tu m'as appris à aider les autres.*

*Aucun mot ne saurait témoigner de l'étendue des sentiments  
que j'éprouve toujours à ton égard.*

*Je te dédie ce travail et le présent diplôme car c'est à toi que je les dois  
et c'est grâce à toi que je les ai obtenus.*

*Que ce rapport soit l'expression de ma grande affection  
et en témoignage de mon profond amour.*

**Tu me manques  
énormément**

## ***À la Meilleure Maman du Monde***

### ***Artisane de Ma Réussite***

*Aucune dédicace ne saurait exprimer ma reconnaissance,  
mon grand attachement et mon profond amour.*

*Tu as toujours tout fait  
pour me préserver une part de bonheur et de réconfort.*

*Que Dieu puisse m'aider à te prouver ma sincère gratitude  
pour ces nombreuses années de sacrifice.*

*Je n'oserais prétendre, que ce travail soit à la hauteur des longues nuits de veille  
et des moments d'angoisse que tu as endurés  
pendant toutes mes années d'étude.*

*Que Dieu te protège et t'accorde longue vie  
afin que je puisse te combler à mon tour.*

## ***À mes Frères et Sœurs***

*Pour toute leur compréhension et encouragements  
dans la réalisation de ce travail.*

*Qu'ils trouvent l'expression de ma gratitude  
et de ma grande affection.*

## **TABLE DES MATIERES**

---

# TABLE DES MATIERES

<b>Introduction générale.....</b>	<b>11</b>
<b>Chapitre I. Généralités sur l'analyse de systèmes continus non linéaires</b>	
Introduction.....	16
I.1. Description des systèmes dynamiques étudiés.....	16
I.1.1. Notion de modèle.....	16
I.1.2. Description des systèmes étudiés.....	18
I.1.3. Cas des systèmes chaotiques.....	20
I.1.3.1. Introduction.....	20
I.1.3.2. Caractérisation globale du chaos.....	21
I.2. Caractérisation des systèmes étudiés.....	23
I.2.1. Introduction.....	23
I.2.2. Formes canoniques des matrices.....	23
I.2.3. Systèmes hiérarchisés à deux niveaux – Formes en flèche des matrices.....	24
I.2.3.1. Introduction.....	24
I.2.3.2. Différents types de matrices de forme en flèche.....	25
I.2.3.3. Opérations sur la matrice de forme en flèche.....	26
I.2.3.4. Conclusion.....	28
I.2.4. Passage aux matrices de forme en flèche mince de Benrejeb.....	28
I.2.4.1. Introduction.....	28
I.2.4.2. Cas d'une matrice initiale de forme Compagnon.....	28
I.2.4.3. Cas d'une matrice initiale de forme quelconque.....	30
I.3. Stabilité de systèmes dynamiques continus non linéaires.....	33
I.3.1. Introduction.....	33
I.3.2. Stabilité – Définitions.....	33
I.3.3. Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques continus non linéaires.....	34
I.3.3.1. Utilisation des techniques d'agrégation pour l'étude de la stabilité.....	35
I.3.3.1.a. Introduction.....	35
I.3.3.1.b. Systèmes majorants – Lemme de comparaison.....	35
I.3.3.2. Cas d'application de conditions de stabilité du linéaire pour des systèmes non linéaires.....	37
I.3.3.2.a. Lemme de Kotelyanski.....	38
I.3.3.2.b. Critère pratique de stabilité de Borne et Gentina.....	39
I.3.4. Conclusion.....	40
I.4. Position du problème de la synchronisation et de l'anti-synchronisation de systèmes chaotiques couplés.....	41
Conclusion.....	42

---

## Chapitre II. Nouvelles approches de stabilisation de systèmes continus non linéaires

Introduction.....	47
II.1. Représentations et méthodes d'étude de la stabilité de systèmes continus non linéaires.....	47
II.1.1. Position du problème.....	47
II.1.2. Mise en œuvre du critère de Borne et Gentina pour l'étude de la stabilité des systèmes décrits par une équation différentielle scalaire.....	47
II.1.3. Application à la stabilisation d'un système de type Lur'e Postnikov.....	49
II.2. Nouvelle méthode de stabilisation des systèmes décrits dans l'espace d'état.....	52
II.2.1. Méthode proposée pour la détermination de la commande par réaction d'état – Idée de base.....	52
II.2.2. Cas d'une matrice en flèche mince.....	53
II.2.3. Cas d'une matrice en flèche mince généralisée.....	54
II.3. Formulation des conditions de stabilisabilité par retour d'état proposées pour les systèmes hiérarchisés à deux niveaux.....	57
II.3.1. Lois de commande stabilisante par retour d'état.....	57
II.3.2. Cas de systèmes multivariables.....	57
II.3.3. Cas de systèmes monovariables.....	67
II.3.3.1. Premier cas d'étude.....	68
II.3.3.2. Deuxième cas d'étude.....	70
II.4. Stabilisation par retour d'état proposée pour les systèmes à matrice caractéristique instantanée quelconque.....	73
II.4.1. Introduction.....	73
II.4.2. Systèmes tels que $m \geq n - 2$ .....	73
II.4.2.1. Conditions de mise sous forme en flèche mince de la matrice caractéristique instantanée du système bouclé.....	73
II.4.2.2. Exploitation des conditions de stabilisabilité proposées pour la détermination de lois de commande – Idée de base.....	74
II.4.3. Conclusion.....	83
II.5. Commandes stabilisantes par retour de sortie proposées.....	83
II.5.1. Introduction.....	83
II.5.2. Cas des systèmes hiérarchisés à deux niveaux.....	84
II.5.3. Cas des systèmes caractérisés par une matrice quelconque.....	89
II.5.4. Conclusion.....	96
II.6. Généralisation des différentes stratégies de commande proposées.....	96
II.6.1. Introduction.....	96
II.6.2. Méthode basée sur l'exploitation des propriétés de la matrice de forme en flèche mince généralisée.....	96
II.6.2.1. Compensation par réaction d'état.....	97
II.6.2.2. Compensation par réaction de sortie.....	99
II.6.3. Cas des matrices de forme en flèche épaisse.....	108
II.6.4. Conclusion.....	110
Conclusion.....	110

---

## Chapitre III. Application à la synchronisation et à l'anti-synchronisation de systèmes chaotiques

Introduction.....	113
III.1. Synchronisation utilisant la commande stabilisante proposée.....	113
III.1.1. Introduction.....	113
III.1.2. Synchronisation entrée-sortie.....	113
III.1.2.1. Définition de la notion d'unicité de la réponse.....	113
III.1.2.2. Conditions suffisantes d'absence d'anomalies de fonctionnement.....	115
III.2. Communiquer avec le chaos – Applications aux systèmes chaotiques.....	115
III.2.1. Introduction.....	115
III.2.2. Synchronisation maître-esclave de systèmes chaotiques.....	115
III.2.2.1. Cas de systèmes chaotiques identiques.....	116
III.2.2.1.a. Synchronisation de deux systèmes chaotiques de Lorenz Stenflo.....	116
III.2.2.1.b. Synchronisation de deux systèmes chaotiques de Qi.....	121
III.2.2.2. Cas de systèmes chaotiques non identiques.....	125
III.2.3. Anti-synchronisation maître-esclave de systèmes chaotiques.....	128
III.2.3.1. Cas de systèmes chaotiques identiques.....	129
III.2.3.1.a. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques de Rössler.....	129
III.2.3.1.b. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques de Chen.....	135
III.2.3.2. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques non identiques – Cas du système de Rössler couplé avec le système de Chen.....	139
III.2.4. Conclusion.....	142
III.3. Synchronisation hybride de systèmes chaotiques.....	142
Conclusion.....	148
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>150</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>153</b>

## **INTRODUCTION GENERALE**

---

# INTRODUCTION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent l'étude de la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques continus de grande dimension, l'objectif principal étant la détermination de lois de commande stabilisante par retour d'état et par retour de sortie.

Pour l'élaboration de telles lois de commande, est envisagée l'exploitation des techniques d'agrégation basées sur l'utilisation des normes vectorielles associées à une représentation matricielle remarquable des processus, de matrices caractéristiques instantanées de forme en flèche mince, à éléments non nuls répartis sur sa diagonale principale, sa dernière ligne et sa dernière colonne.

Le choix de la représentation intervient, d'une manière essentielle sur l'étendue de ces résultats lorsque le processus est non linéaire. En effet, la représentation d'état, bien adaptée aux systèmes de grande dimension, est définie à un changement de base près ; les études effectuées sur les systèmes de comparaison, souvent utilisés pour conclure à leur stabilité d'une manière aisée, dépendant de cette transformation, conduisent à des résultats correspondant à des conditions suffisantes plus ou moins contraignantes selon la description adoptée. Il s'avère important de chercher à mettre la matrice caractéristique du système étudié sous l'une ou l'autre des formes, explicitant les spécificités dynamiques et structurelles de celui-ci, adaptées aux méthodes d'études retenues. Le cas de la mise sous forme en flèche de ces matrices a déjà conduit à des résultats attrayants et importants.

Le présent mémoire est structuré en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, sont introduites les différentes classes de systèmes dynamiques étudiés, quelques propriétés importantes des matrices de formes en flèche ainsi que les notions utilisées et les principales méthodes d'étude de la stabilité des systèmes de grande dimension.

Compte tenu de la difficulté de mise en œuvre des stratégies de commande pour les systèmes complexes, l'élaboration de conditions suffisantes de stabilisabilité est envisagée, dans le deuxième chapitre, sur la base du choix d'une structure remarquable des systèmes de commande non linéaire, de mises en œuvre les plus aisées possibles. La recherche systématique de telles structures de commande permet d'étendre l'étude à de larges classes de systèmes dont ceux pour lesquels la conjecture d'Aizerman est vérifiée.

---

Néanmoins, de telles structures de commande ont été d'abord appliquées à une classe de systèmes dynamiques continus non linéaires de matrice caractéristique en flèche mince, prenant en considération le nombre d'entrées en rapport avec l'ordre du système étudié. La généralisation des approches envisagées est ensuite réalisée par l'exploitation des propriétés des matrices de forme en flèche mince généralisée et de celles de forme en flèche épaisse. Une classe plus large de systèmes dynamiques a pu être ainsi concernée par la mise en œuvre des stratégies de commande proposées.

Plusieurs applications de ces travaux sont envisagées, dans le troisième et dernier chapitre de ce mémoire. Elles concernent l'étude de la synchronisation et de l'anti-synchronisation de systèmes chaotiques du type maître-esclave, d'un grand intérêt, en particulier, pour garantir une transmission sécurisée de l'information et augmenter ainsi les performances des systèmes de communication.

Les travaux présentés montrent de plus que les phénomènes de synchronisation et d'anti-synchronisation peuvent coexister simultanément dans les systèmes chaotiques ; il s'agit, dans ce cas, du phénomène de synchronisation hybride.

Divers exemples sont étudiés pour illustrer l'efficacité des différentes approches de commande considérées.

**CHAPITRE I :**  
**GENERALITES SUR L'ANALYSE**  
**DE SYSTEMES CONTINUS**  
**NON LINEAIRES**

# CHAPITRE I

## GENERALITES SUR L'ANALYSE DE SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES

### Sommaire

---

Introduction.....	16
I.1. Description des systèmes dynamiques étudiés.....	16
I.1.1. Notion de modèle.....	16
I.1.2. Description des systèmes étudiés.....	18
I.1.3. Cas des systèmes chaotiques.....	20
I.1.3.1. Introduction.....	20
I.1.3.2. Caractérisation globale du chaos.....	21
I.2. Caractérisation des systèmes étudiés.....	23
I.2.1. Introduction.....	23
I.2.2. Formes canoniques des matrices.....	23
I.2.3. Systèmes hiérarchisés à deux niveaux – Formes en flèche des matrices.....	24
I.2.3.1. Introduction.....	24
I.2.3.2. Différents types de matrices de forme en flèche.....	25
I.2.3.3. Opérations sur la matrice de forme en flèche.....	26
I.2.3.4. Conclusion.....	28
I.2.4. Passage aux matrices de forme en flèche mince de Benrejeb.....	28
I.2.4.1. Introduction.....	28
I.2.4.2. Cas d'une matrice initiale de forme Compagnon.....	28
I.2.4.3. Cas d'une matrice initiale de forme quelconque.....	30
I.3. Stabilité de systèmes dynamiques continus non linéaires.....	33
I.3.1. Introduction.....	33
I.3.2. Stabilité – Définitions.....	33
I.3.3. Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques continus non linéaires.....	34
I.3.3.1. Utilisation des techniques d'agrégation pour l'étude de la stabilité.....	35
I.3.3.1.a. Introduction.....	35
I.3.3.1.b. Systèmes majorants – Lemme de comparaison.....	35
I.3.3.2. Cas d'application de conditions de stabilité du linéaire pour des systèmes non linéaires.....	37
I.3.3.2.a. Lemme de Kotelyanski.....	38
I.3.3.2.b. Critère pratique de stabilité de Borne et Gentina.....	39

I.3.4. Conclusion.....	40
I.4. Position du problème de la synchronisation et de l'anti-synchronisation de systèmes chaotiques couplés.....	41
Conclusion.....	42

---

## INTRODUCTION

Après la description de la classe des systèmes de grande dimension étudiés, quelques propriétés importantes des matrices de formes en flèche ainsi que les principales méthodes d'étude de la stabilité de tels systèmes, et plus particulièrement le critère pratique de stabilité de Borne et Gentina, sont introduits dans ce premier chapitre.

Pour garantir les propriétés de synchronisation, d'anti-synchronisation et de synchronisation hybride de systèmes de communication chaotiques, l'analyse de la convergence des systèmes écart dynamique et erreur dynamique est envisagée, dans une dernière partie de ce chapitre.

### I.1. Description des systèmes dynamiques étudiés

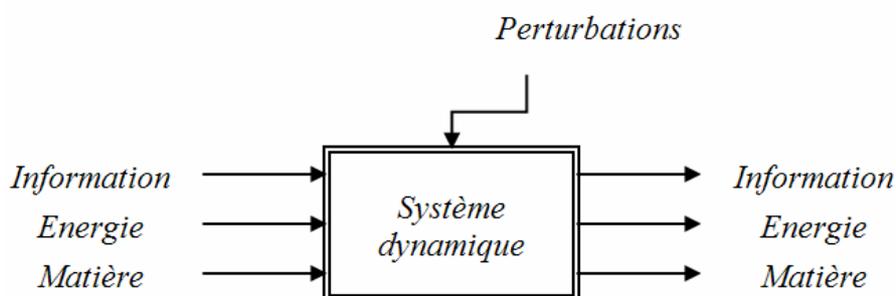
#### I.1.1. Notion de modèle

Un processus est un système dynamique qui évolue dans le temps. Du point de vue d'un observateur, un processus correspond à un système physique envisagé dans le cadre de l'évolution des échanges réalisés avec son environnement [BOR 92].

Diverses variables peuvent être mises en évidence sur un processus :

- des entrées de commande, qui sont les grandeurs physiques externes dont la variation contribue à l'évolution du comportement du système,
- des entrées de perturbation, en général non contrôlables par l'utilisateur et qui agissent également sur le processus,
- des sorties, variables mesurables ou au moins détectables, qui caractérisent l'action du processus sur son environnement,
- des variables d'état, variables internes du système, dont l'action sur l'environnement n'est pas nécessairement directement perceptible mais dont l'évolution régit celle du processus.

Dans le cas général, un processus est un système dynamique traversé par des flux d'informations, d'énergie et de matière tout en étant soumis à des perturbations ayant l'une des trois formes précitées. La figure I.1. fournit un exemple d'une telle représentation.



**Figure I.1.** Schéma synoptique d'un processus

L'étude des processus physiques a généralement pour objectif de :

- pouvoir comprendre le fonctionnement du système et prévoir son comportement et ses performances face à une variation des entrées ; on parle alors d'analyse du système,
- chercher à maîtriser les sorties et les performances du système en agissant sur les entrées ; il s'agit, dans ce cas, de synthèse de lois de commande.

Que ce soit pour l'analyse ou pour la synthèse de lois de commande, il est souvent nécessaire d'établir un modèle des processus étudiés. Modéliser le processus, consiste principalement, à construire une description mathématique du comportement du système physique [ELM 85].

Il existe plusieurs types de modèles, principalement les modèles de connaissance, d'une part, et les modèles de représentation et de conduite, d'autre part. Il est important de noter que le modèle n'est le plus souvent qu'une simplification de la réalité.

Nous nous intéressons ici à deux catégories de modèles paramétriques, le modèle d'état et le modèle entrées / sorties.

**Modèle d'état** : il représente une relation entre les variables d'état  $x(t)$  qui constituent la mémoire du système et les variables d'entrée de commande  $u(t)$ .

Ce modèle est généralement un système d'équations différentielles ordinaires portant sur l'état, ainsi qu'une équation d'observation. Le système peut être défini dans ce cas par :

- l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

- l'équation de sortie :

$$y(t) = g(x, u) \quad (\text{I.2})$$

avec :

- $x$  : le vecteur état, de composantes  $x_i(\cdot)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- $t$  : le temps,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,
- $u$  : le vecteur de commande, de composantes  $u_j(\cdot)$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, m$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,
- $y$  : le vecteur de sortie, de composantes  $y_i(\cdot)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, l$ ,  $y \in \mathbb{R}^l$ ,
- $\dot{x}(t)$  : la dérivée par rapport au temps du vecteur état  $x$ , composante à composante,
- $f(\cdot)$  : une fonction vectorielle, de composantes  $f_i(\cdot)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , supposée telle que  $x_e$  est l'unique état d'équilibre du système, satisfaisant la condition d'existence d'une solution  $x(t, t_0, x_0)$  pour tout  $(t_0, x_0)$ ,
- $g(\cdot)$  : une fonction vectorielle, de composantes  $g_k(\cdot)$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots, l$ .

Un point  $x_e \in \mathbb{R}^n$  est un point d'équilibre de l'équation différentielle (I.1) si on a  $f(x_e) = 0$ . En pratique, le point d'équilibre  $x_e$  est souvent ramené à l'origine ; soit  $x_e = 0$ .

**Remarque**

Les non linéarités sont exprimées au niveau des fonctions  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$ . Dans le cas où le système analysé présente de petites variations autour du point nominal de fonctionnement, une linéarisation autour de ce point devient possible.

**Modèle entrées / sorties :** il exprime directement la relation entre les variables de sortie  $y(t)$  et d'entrée  $u(t)$ .

Le système dynamique est décrit alors par une relation de la forme :

$$h\left(y^{(l)}, y^{(l-1)}, \dots, y ; u^{(m)}, \dots, u\right) = 0 \quad (I.3)$$

Les modèles entrées / sorties correspondent aux représentations du type "boîte noire".

Il est à signaler que les modèles d'état et les modèles entrées / sorties peuvent être classés en plusieurs catégories, dont :

- linéaires ou non linéaires,
- stationnaires ou non stationnaires,
- monovariables ou multivariables.

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques complexes continus, représentés dans l'espace d'état.

**I.1.2. Description des systèmes étudiés**

Un système est qualifié de complexe pour exprimer la difficulté soit à bien le décrire, soit à étudier certains de ses aspects fonctionnels, difficulté due généralement à sa structure, c'est-à-dire, à la forme des relations entre ses différentes parties ou ses attributs [BELG 97, BEN 80, BENH 95].

La classification des systèmes dynamiques peut être établie selon la complexité des relations entre les grandeurs mesurables des éléments composants et des relations d'interaction entre ces éléments.

Une classe assez générale de tels systèmes peut être représentée par l'équation différentielle vectorielle non linéaire (I.1), le vecteur de sortie  $y(t)$  pouvant être défini sous la forme (I.2).

Des classes importantes de tels systèmes dynamiques complexes peuvent en être déduites.

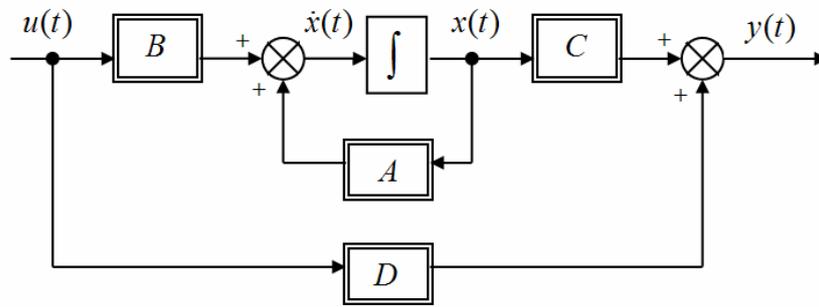
- Dans l'espace d'état, une large classe de systèmes peut être décrite par des relations ayant les formes (I.4) et (I.5) suivantes :

$$\dot{x}(t) = A(.)x(t) + B(.)u(t) \quad (I.4)$$

$$y(t) = C(.)x(t) + D(.)u(t) \quad (I.5)$$

où  $A(.)$  est de dimension  $n \times n$ ,  $B(.)$  de dimension  $n \times m$ ,  $C(.)$  de dimension  $l \times n$  et  $D(.)$  de dimension  $l \times m$ , des matrices, à éléments pouvant être non linéaires.

Le schéma de la figure I.2. fournit une représentation graphique de tels systèmes.



**Figure I.2.** Représentation d'état d'un système dynamique non linéaire

- Les systèmes dynamiques peuvent aussi être décrits par rapport au vecteur séquence par un système d'équations scalaires de la forme :

$$y_{(i)}^{(n_i)} + \sum_{j=0}^{n_i-1} a_{(i)j}(\cdot) y_{(i)}^{(j)} = \sum_{k=1}^m b_{(i)k}(\cdot) u_k \quad \forall i = 1, 2, \dots, l \quad (I.6)$$

lorsque le système ( $S$ ) d'ordre  $n$  est composé de  $l$  sous-systèmes ( $S_i$ ) interconnectés,  $y_{(i)}$  étant la sortie,  $y_{(i)} \in \mathbb{R}$ ,  $x_{(i)}$  un vecteur état du sous-système découplé ( $S_i$ ) d'ordre  $n_i$ ,

$x_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $x_{(i)} = \left[ y_{(i)} \quad y_{(i)}^{(1)} \quad \dots \quad y_{(i)}^{(n_i-1)} \right]^T$ ,  $\sum_{i=1}^l n_i = n$ ,  $a_{(i)j}$  et  $b_{(i)k} \quad \forall i = 1, 2, \dots, l$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots, m$ ,  $\forall j = 0, 1, \dots, n_i - 1$ , des paramètres pouvant être non linéaires,  $a_{(i)j} \in \mathbb{R}$ ,  $b_{(i)k} \in \mathbb{R}$ .

- Les systèmes monovariables du type Lur'e Postnikov [BEN 80, BEN 82, BOR 77, GRU 78a, LUR 44, ROT 83, ROT 87] peuvent être décrits par un système bouclé comportant dans la chaîne d'action une non linéarité suivie d'une partie linéaire, figure I.3., avec :

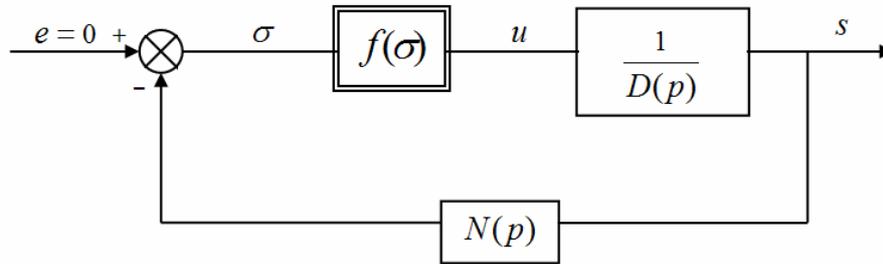
i.  $\sigma = Cx$ ,  $C$  un vecteur ligne à coefficients constants,

$$\text{ii. } f \in F = \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \exists f^* : f(Cx)/Cx = f^*(Cx), \\ f^* \in D = [\underline{f}, \overline{f}] \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \quad (\text{I.7})$$

$$\text{iii. } D(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n \quad (\text{I.8})$$

$$\text{iv. } N(p) = b_0 + b_1 p + \dots + b_{m-1} p^{m-1} + p^m, \forall m \leq n \quad (\text{I.9})$$

$a_i, \forall i = 0, \dots, n-1$ , étant les coefficients du polynôme caractéristique de la partie linéaire du système de la figure I.3., et  $b_j, \forall j = 0, \dots, m-1$ , des réels constants.



**Figure I.3.** Schéma blocs d'un système du type Lur'e Postnikov

Parmi les systèmes complexes non linéaires, on peut distinguer les systèmes chaotiques dont les comportements imprévisibles sont spécifiques.

### I.1.3. Cas des systèmes chaotiques

#### I.1.3.1. Introduction

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique déterministe non linéaire, la notion de déterminisme provenant du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique [LUC 06, MAGH 07].

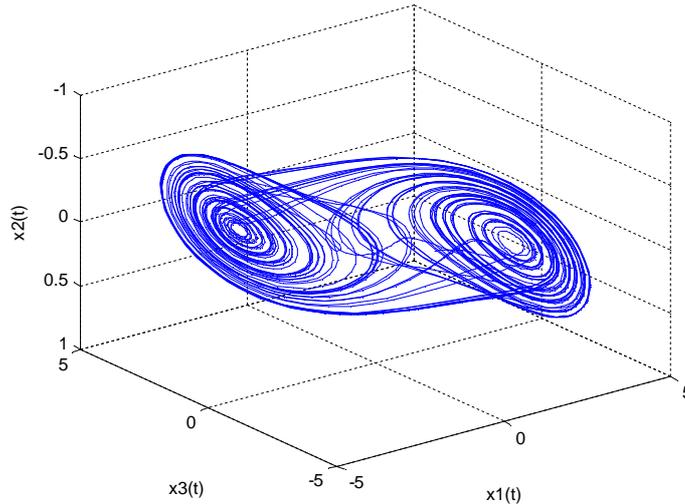
Un grand nombre d'applications a été étudié dans la littérature ; on en distingue :

- le masquage chaotique,
- la transmission avec porteuse chaotique,
- la modulation numérique avec commutation chaotique,
- la démodulation cohérente avec synchronisation du chaos.

Un intérêt croissant a été porté sur les applications en communication [AKH 06, MAGH 04, MAGH 06], et ce depuis que les travaux de Carroll et Pecora [CAR 90, CAR 91] ont montré qu'il est possible de synchroniser deux systèmes chaotiques.

**I.1.3.2. Caractérisation globale du chaos**

Dans un système déterministe non chaotique, des conditions initiales voisines conduisent à des évolutions voisines. Un système chaotique est un système déterministe soumis à une loi d'évolution qui peut être extrêmement simple et régulière, mais dont l'évolution est extrêmement compliquée et parfaitement irrégulière. Ceci lui confère un comportement imprévisible au cours du temps. Par ailleurs, ces systèmes présentent une très grande sensibilité aux conditions initiales, figure I.4.

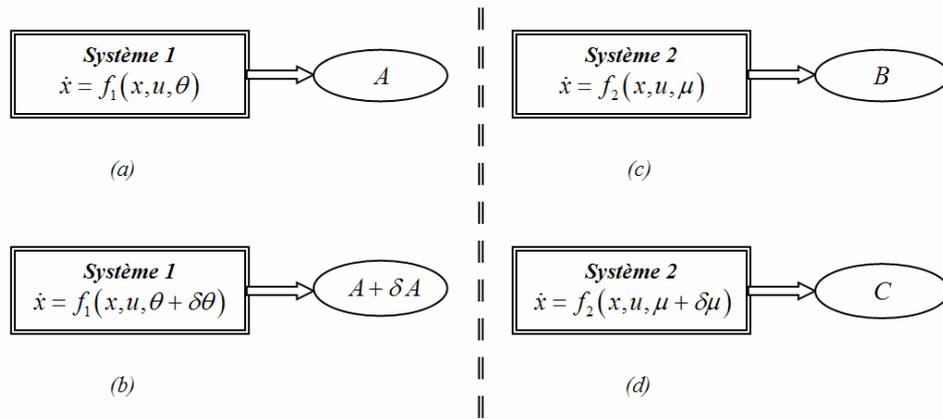


**Figure I.4.** Comportement de l'attracteur chaotique de Chua en vue 3-D

Ci-dessous, nous présentons quelques caractéristiques qui permettent de comprendre, qualitativement, les points marquants d'un système chaotique [ZEM 07].

**Sensibilité aux conditions initiales**

Poincaré fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos. Il remet en cause la façon d'interpréter le hasard et définit, pour la première fois, la sensibilité critique aux conditions initiales, figure I.5.



**Figure I.5.** Différence de comportement entre le système 2 chaotique et le système 1 non chaotique suite à la variation des conditions initiales  $\mu$  et  $\theta$

Il est à noter que  $\theta$  et  $\mu$  représentent les conditions initiales et  $\delta\theta$  et  $\delta\mu$  leurs variations respectives.

- Dans les figures I.5.(a). et I.5.(b)., le système déterministe non chaotique  $A$  placé dans des conditions initiales voisines aura, au cours du temps, des évolutions très proches, allant de  $A$  à  $(A + \delta A)$ .
- Dans les figures I.5.(c). et I.5.(d)., le système chaotique  $B$ , peut, bien qu'étant placé dans des conditions initiales très voisines, présenter des évolutions très différenciées.

L'étude de l'évolution du système par simulation peut introduire, de plus, un problème de précision numérique sur les conditions initiales et être à l'origine de comportements très distincts et inattendus, une petite erreur d'arrondi sur les conditions initiales peut produire une erreur énorme sur les phénomènes finaux, et ce en s'amplifiant d'une manière exponentielle de telle sorte que la trajectoire de phase obtenue ne soit pas représentative de la réalité [ZEM 07].

### Aspect aléatoire

En plus de la sensibilité aux conditions initiales, une autre caractéristique des systèmes chaotiques est que le comportement est imprévisible et aléatoire. Celui-ci correspond à une évolution complexe, non périodique et non prédictible caractérisant un système chaotique [ANS 06].

Après la présentation des systèmes complexes, nous envisageons d'introduire les différentes représentations pouvant faciliter, dans certains cas, leur analyse ou / et leur synthèse.

## I.2. Caractérisation des systèmes étudiés

### I.2.1. Introduction

Le choix des composantes du vecteur état peut être dicté par des considérations physiques ou mathématiques de façon à obtenir une matrice caractéristique sous une forme appropriée, permettant une analyse et une synthèse de lois de commande performantes des systèmes étudiés.

Plusieurs formes de matrices caractéristiques des systèmes dynamiques peuvent être rencontrées dans la littérature ; on peut citer, les formes Compagnon et Frobénius, lorsque le polynôme caractéristique est connu, diagonale ou de Jordan, lorsque les modes peuvent être déterminés aisément [ROS 70].

Pour les systèmes non linéaires, les matrices caractéristiques définies à chaque instant, sont qualifiées d'instantanées.

### I.2.2. Formes canoniques des matrices

#### Forme Compagnon

Cette forme canonique, dite de commandabilité, peut être obtenue aisément pour les systèmes décrits par une équation différentielle scalaire de polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = 0 :$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

#### Forme Frobénius

Cette forme, duale de la forme Compagnon, est dite forme canonique d'observabilité :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

**Forme diagonale**

Lorsque les valeurs propres d'une matrice, notées  $\lambda_i, \forall i = 1, \dots, n$ , sont distinctes, un changement de base régulier transforme la matrice caractéristique par similitude sous la forme diagonale suivante :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

**Forme de Jordan**

Une matrice, possédant une valeur propre multiple  $\lambda$  d'ordre  $n$ , peut être ramenée, par un changement de base adéquat, sous la forme de Jordan suivante :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Ces différentes formes canoniques sont souvent utilisées dans les études portant sur la décomposition de processus linéaires en sous-systèmes soit commandables soit observables, et dans les approches simplificatrices basées sur les méthodes de découplage [FOS 72, SIN 80]. Elles présentent l'avantage de correspondre à des matrices creuses, c'est-à-dire, de mise en œuvre aisée sur le plan calcul numérique, d'une part, et de conduire à des résultats d'analyse et de synthèse de processus, explicites par rapport aux modes et aux coefficients du polynôme caractéristique, d'autre part.

**I.2.3. Systèmes hiérarchisés à deux niveaux – Formes en flèche des matrices**

**I.2.3.1. Introduction**

La mise sous forme en flèche des matrices caractéristiques des systèmes, requiert pour ceux-ci, une structure hiérarchisée à deux niveaux dépendant d'un certain nombre de paramètres pouvant être choisis arbitrairement et constitue, ainsi, un outil mathématique pouvant faciliter le conditionnement de la représentation par rapport à la méthode d'étude choisie pour le système [BEN 80].

Dans cette partie, nous rappelons les différentes formes en flèche pour les matrices caractéristiques des processus, leurs principales propriétés ainsi que la méthode analytique permettant le passage à cette forme remarquable de matrices.

**I.2.3.2. Différents types de matrices de forme en flèche**

Trois formes en flèche, introduites par Benrejeb [BEN 80] pour les matrices caractéristiques instantanées des systèmes, sont considérées dans cette partie : la forme en flèche mince, la forme en flèche mince généralisée et la forme en flèche épaisse.

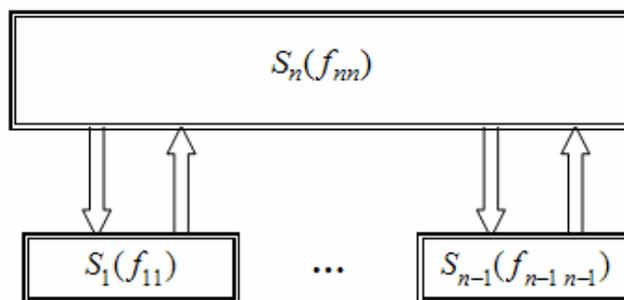
**Forme en Flèche Mince (FFM)**

La matrice caractéristique  $A$  est dite de forme en flèche mince, notée  $A_{FFM}$ , si les éléments, pouvant être non nuls, sont répartis sur la diagonale principale, la dernière ligne et la dernière colonne de  $A$  :

$$A_{FFM} = \begin{bmatrix} f_{11} & & f_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

***Interprétation structurelle***

A cette forme de matrice (I.14), il est possible de faire correspondre une structure hiérarchisée à deux niveaux du système étudié, le premier étant composé de sous-systèmes ( $S_i$ ) de premier ordre, de modes instantanés :  $f_{11}, \dots, f_{n-1 n-1}$ , et le deuxième d'un coordonnateur, de mode instantané  $f_{nn}$ , figure I.6.



**Figure I.6.** Structure hiérarchisée à deux niveaux associée à une matrice caractéristique instantanée en flèche mince

**Forme en Flèche Mince Généralisée (FFMG)**

Les matrices sont dites de forme en flèche mince généralisée, notées  $A_{FFMG}$ , d'ordre  $r$ , lorsque les éléments, pouvant être non nuls, sont isolés sur la diagonale principale, sur les  $(n - r + 1)$  dernières lignes et sur les  $(n - r + 1)$  dernières colonnes de telles matrices :

$$A_{FFMG} = \begin{bmatrix} f_{11} & & & f_{1r} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & f_{r-1\ r-1} & f_{r-1\ r} & \cdots & f_{r-1\ n} \\ f_{r1} & \cdots & f_{r\ r-1} & f_{rr} & \cdots & f_{rn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{n\ r-1} & f_{nr} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \quad (I.15)$$

**Forme en Flèche Epaisse (FFE)**

La généralisation de la FFM peut être considérée lorsque les éléments pouvant être non nuls sont isolés dans les blocs diagonaux, les dernières lignes et les dernières colonnes de la matrice considérée, comme suit :

$$A_{FFE} = \begin{bmatrix} F_{11} & & F_{1r} \\ & \ddots & \vdots \\ F_{r1} & \cdots & F_{rr} \end{bmatrix} \quad (I.16)$$

les blocs diagonaux  $F_{ii}$ ,  $\forall i = 1, \dots, r$ , étant des matrices carrées de dimensions  $n_i \times n_i$  telles que  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ , les blocs hors diagonaux  $F_{ir}$ ,  $\forall i = 1, \dots, r - 1$ , et  $F_{rj}$ ,  $\forall j = 1, \dots, r - 1$ , des matrices de dimensions correspondant à celles des blocs diagonaux.

La matrice  $A$  est dite, dans ce cas, de forme en flèche épaisse, notée  $A_{FFE}$ .

**1.2.3.3. Opérations sur la matrice de forme en flèche**

La puissance et l'intérêt d'une description sont d'autant plus importants qu'elle est plus facile à manipuler.

**Calcul du déterminant** [BEN 80]

Pour une matrice en flèche mince, (I.14), le déterminant de la matrice  $A_{FFM}$  peut être aisément exprimé par la quantité suivante :

$$\det(A_{FFM}) = \left( f_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ni} f_{in}) f_{ii}^{-1} \right) \prod_{i=1}^{n-1} f_{ii} \quad (\text{I.17})$$

Lorsque la matrice est en flèche épaisse, (I.16), le déterminant de la matrice  $A_{FFE}$  est donné par la formule suivante :

$$\det(A_{FFE}) = \det \left( F_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} F_{ri} F_{ii}^{-1} F_{ir} \right) \prod_{i=1}^{r-1} \det(F_{ii}) \quad (\text{I.18})$$

### Calcul de l'inverse [BEN 80, SOU 07]

Les éléments de l'inverse d'une matrice en flèche mince  $A_{FFM}$ , notés par  $f_{ij}^*$ , peuvent être exprimés, d'une manière explicite, par :

$$f_{nn}^* = \left( f_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} f_{ni} f_{in} f_{ii}^{-1} \right)^{-1} \quad (\text{I.19})$$

$$f_{ij}^* = f_{ii}^{-1} f_{in} f_{nn}^* f_{nj} f_{jj}^{-1} \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1, i \neq j \quad (\text{I.20})$$

$$f_{nj}^* = -f_{nn}^* f_{nj} f_{jj}^{-1} \quad \forall j = 1, \dots, n-1 \quad (\text{I.21})$$

$$f_{in}^* = -f_{ii}^{-1} f_{in} f_{nn}^* \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{I.22})$$

$$f_{ii}^* = f_{ii}^{-1} \left( 1 + f_{in} f_{nn}^* f_{ni} f_{ii}^{-1} \right) \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{I.23})$$

La généralisation à une matrice en flèche épaisse  $A_{FFE}$  est immédiate ; les blocs  $F_{ij}^*$  de l'inverse de cette matrice de dimension  $n_i \times n_j$  étant :

$$F_{rr}^* = \left( F_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} F_{ri} F_{ii}^{-1} F_{ir} \right)^{-1} \quad (\text{I.24})$$

$$F_{ii}^* = F_{ii}^{-1} \left( \mathbb{I}_{n_i} + F_{ir} F_{rr}^* F_{ri} F_{ii}^{-1} \right) \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{I.25})$$

$$F_{ij}^* = F_{ii}^{-1} F_{ir} F_{rr}^* F_{rj} F_{jj}^{-1} \quad \forall i, j = 1, \dots, r-1, i \neq j \quad (\text{I.26})$$

$$F_{rj}^* = -F_{rr}^* F_{rj} F_{jj}^{-1} \quad \forall j = 1, \dots, r-1 \quad (\text{I.27})$$

$$F_{ir}^* = -F_{ii}^{-1} F_{ir} F_{rr}^* \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{I.28})$$

$\mathbb{I}_{n_i}$  étant la matrice identité de dimension  $n_i$ .

Il est à noter que les matrices inverses, définies plus haut, existent si :

- tous les éléments  $f_{mm}^*$  et  $f_{ii}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ , sont non nuls pour les matrices de forme en flèche mince,
- $F_{rr}^*$  et  $F_{ii}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, r-1$ , sont des matrices régulières, pour les matrices de forme en flèche épaisse.

#### **I.2.3.4. Conclusion**

Lorsque le système est fortement non linéaire, il apparaît intéressant d'envisager une représentation matricielle dans l'espace d'état, la matrice caractéristique étant de forme en flèche.

Cette description a déjà montré son intérêt pour l'analyse de la stabilité et la synthèse des systèmes monovariables et multivariables de grande dimension [BEN 76, BEN 78, BEN 80, BEN 82, BEN 01, BEN 03, BEN 06, BEN 07, BOR 77, BOR 08, GAS 01].

### **I.2.4. Passage aux matrices de forme en flèche mince de Benrejeb**

#### **I.2.4.1. Introduction**

Le développement des propriétés des différentes matrices de formes en flèche considérées précédemment ainsi que leurs exploitations nécessitent généralement la détermination de la matrice de passage transformant la matrice caractéristique initiale du système étudié en une matrice en flèche mince ou épaisse.

Deux méthodes, permettant de résoudre ce problème, sont proposées [BEN 80] ; la première, graphique, précise les blocs diagonaux de la matrice en flèche pour une matrice présentant dans sa formulation initiale des blocs hors diagonaux dispersés dans celle-ci d'une manière quelconque, et la deuxième, qui sera considérée dans ce mémoire, est analytique.

#### **I.2.4.2. Cas d'une matrice initiale de forme Compagnon**

Considérons le système non linéaire ( $S$ ) régi, en régime libre, par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A(.)x(t) \quad (\text{I.29})$$

$$A(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(.) & -a_1(.) & \dots & -a_{n-2}(.) & -a_{n-1}(.) \end{bmatrix} \quad (\text{I.30})$$

où les éléments  $a_i(.)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , de  $A(.)$  peuvent être non linéaires.

Soit  $P(., \lambda)$  le polynôme caractéristique instantané de la matrice  $A(.)$ , défini par :

$$P(., \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(.) \lambda^i \quad (\text{I.31})$$

Une méthode systématique permettant le passage d'une matrice Compagnon (I.30) à une matrice en flèche mince est rappelée dans cette partie.

En effet, le choix du vecteur état  $z(t)$ , pour le système ( $S$ ), tel que [BEN 80] :

$$x(t) = Pz(t) \quad (\text{I.32})$$

avec :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ f_{11} & f_{22} & \dots & f_{n-1 \ n-1} & 0 \\ (f_{11})^2 & (f_{22})^2 & \dots & (f_{n-1 \ n-1})^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ (f_{11})^{n-1} & (f_{22})^{n-1} & \dots & (f_{n-1 \ n-1})^{n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.33})$$

et :

$$f_{ii} \neq 0, f_{ii} \neq f_{jj} \quad \forall i \neq j \quad (\text{I.34})$$

conduit à la nouvelle description mettant en exergue la matrice de forme en flèche mince de Benrejeb  $F(.)$  suivante :

$$F(.) = \begin{bmatrix} f_{11} & & & f_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & f_{n-1\ n-1} & f_{n-1\ n} \\ f_{n1}(.) & \dots & f_{n\ n-1}(.) & f_m(.) \end{bmatrix} \quad (\text{I.35})$$

avec :

$$f_{in} = \prod_{j=1}^{n-1} (f_{ii} - f_{jj})^{-1} \quad \forall i = 1, \dots, n-1, i \neq j \quad (\text{I.36})$$

$$f_{ni}(.) = -P(., f_{ii}) \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{I.37})$$

$$f_m(.) = -a_{n-1}(.) - \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} \quad (\text{I.38})$$

où les paramètres  $f_{ii}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ , peuvent être choisis arbitrairement non nuls, satisfaisant toutefois la condition (I.34).

### **I.2.4.3. Cas d'une matrice initiale de forme quelconque**

L'introduction du passage d'une forme quelconque de matrice à éléments constants à la forme en flèche, élargit l'utilisation de celle-ci à de nouvelles classes de processus.

Dans cette partie, considérons les systèmes continus linéaires monovariabiles représentés dans l'espace d'état par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{I.39})$$

où  $A$  et  $B$  sont deux matrices à paramètres constants de formes quelconques constituant une paire commandable,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}$ .

Notons par  $P(\lambda)$  le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ , donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \quad (\text{I.40})$$

Le passage de la représentation d'état, relative à la forme quelconque de la matrice caractéristique à la forme en flèche mince de celle-ci, peut être effectué par la mise en œuvre du théorème suivant.

**Théorème** [GAS 01]

Le changement de base  $H$  tel que  $x = Hz_2$ , défini, à partir des vecteurs colonnes  $H^j$  de  $H$ , par :

$$H = \begin{bmatrix} H^1 & H^2 & \dots & H^n \end{bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

avec :

$$\begin{cases} H^i = \left( A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ki} A^{k-1} \right) B \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ H^n = B \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

$$\alpha_{ki} = a_k + f_{ii}^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-k-1} a_{k+j} f_{ii}^j \quad \forall i, k = 1, \dots, n-1 \quad (\text{I.43})$$

où les  $f_{ii}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ , sont des paramètres arbitraires distincts et non nuls, permet de décrire le processus (I.39) par l'équation d'état :

$$\dot{z}_2(t) = Fz_2(t) + Gu(t) \quad (\text{I.44})$$

où la matrice caractéristique  $F$  est de forme en flèche mince (I.35) avec les notations (I.36-I.38) et  $G$  est un vecteur colonne, défini par :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{I.45})$$

Démonstration

Le passage de la matrice quelconque  $A$  à la matrice en flèche  $F$  se fait en deux étapes ; la première consiste à transformer  $A$  en une matrice Compagnon  $M$  en utilisant un changement de base  $P_1$  tel que :  $x = P_1 z_1$ , défini par :

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_1^1 & P_1^2 & \dots & P_1^n \end{bmatrix} \quad (\text{I.46})$$

avec  $P_1^i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , les vecteurs colonnes de  $P_1$  donnés par [FOS 72] :

$$\begin{cases} P_1^j = \left( A^{n-j} + \sum_{k=j}^{n-1} a_k A^{k-j} \right) B \quad \forall j = 1, \dots, n-1 \\ P_1^n = B \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

La matrice  $B$  est, dans ce cas, transformée en une matrice  $N$  telle que :  
 $N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

La deuxième étape consiste à transformer la matrice  $M$  en une matrice en flèche  $F$  en utilisant le changement de base  $P$ , tel que :  $z_1 = Pz_2$ , (I.33) [BEN 80].

La composition  $H$  des changements de base  $P$  et  $P_1$  :

$$H = P_1 P \quad (\text{I.48})$$

permet alors de transformer directement la matrice  $A$  en  $F$ .

En notant par  $H^j$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $H$ , il vient, en utilisant les expressions (I.33), (I.46-I.48) :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^2 & \dots & H^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 & P_1^2 & \dots & P_1^n \end{bmatrix} P \quad (\text{I.49})$$

Il en résulte, par identification colonne à colonne, les égalités suivantes :

$$\begin{cases} H^i = P_1^1 + f_{ii} P_1^2 + f_{ii}^2 P_1^3 + \dots + f_{ii}^{n-1} P_1^n \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ H^n = P_1^n \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

En remplaçant dans (I.50) les vecteurs colonnes  $P_1^j$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ , par leurs expressions données dans (I.47), on obtient le résultat énoncé par le théorème.

**Remarque**

Il est à remarquer que les vecteurs colonnes  $H^j$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ , de la matrice de passage de la matrice  $A$  à la forme en flèche, peuvent être formulés directement à partir des éléments de la matrice  $P_1$ .

En notant par  $p_{1(ij)}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ , les éléments de la matrice de passage  $P_1$ , d'une matrice quelconque à la forme Compagnon, l'utilisation des relations suivantes :

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{1(ik)} (f_{jj})^{k-1} \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \forall j = 1, \dots, n-1 \quad (\text{I.51})$$

$$h_{in} = p_{1(in)} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{I.52})$$

permet la détermination immédiate des éléments  $h_{ij}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ , de la matrice de passage  $H$  d'une matrice quelconque à la forme en flèche.

**Remarque : Systèmes admettant une description naturelle du type en flèche mince**

Il est à noter que diverses classes de systèmes linéaires ou non linéaires présentent, dans leurs descriptions naturelles dans l'espace d'état des matrices en flèche mince ou épaisse. De nombreux exemples figurent dans [ABD 03, BEN 76, BEN 80, BEN 82, GAS 01, OZG 79, REG 71, SOU 07].

Il n'est donc pas toujours nécessaire d'effectuer des transformations pour conditionner la représentation à l'étude envisagée [BEN 80, BEN 82, BIT 83, OZG 79].

### I.3. Stabilité de systèmes dynamiques continus non linéaires

#### I.3.1. Introduction

Le problème de la stabilité consiste à étudier le comportement d'un système donné après qu'il ait subi une perturbation venant l'écartier de sa position d'équilibre.

La complexité des systèmes de grande dimension, tels que ceux définis précédemment, conduit à des méthodes d'étude de la stabilité de plus en plus élaborées pouvant être difficiles à mettre en œuvre.

Les méthodes usuelles d'étude des systèmes linéaires ont d'abord servi pour l'étude des systèmes non linéaires en les appliquant à des modèles linéarisés correspondants, valables autour d'un point de fonctionnement. Ces méthodes se sont révélées insuffisantes lorsque le processus est fortement non linéaire ou / et de grande dimension.

Plusieurs définitions et concepts relatifs à la stabilité utilisés dans la suite du mémoire vont être introduits, l'état d'équilibre unique concerné étant l'origine.

#### I.3.2. Stabilité – Définitions

Les définitions relatives à la stabilité asymptotique des systèmes dynamiques complexes [BOR 77, GEN 72, GRU 78b, HAH 67, MAT 62, ZAM 83] sont considérées dans ce qui suit [MAT 62].

**Définition I.1 : Stabilité au sens de Lyapunov**

Le système décrit par (I.1) est dit stable au sens de Lyapunov par rapport à l'équilibre  $x_e = 0$  si pour des conditions initiales  $x_0$  suffisamment proches de l'équilibre  $x_e = 0$ , la trajectoire reste dans la boule de centre l'origine et de rayon  $\varepsilon$  arbitraire, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 / \|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \forall t \geq t_0 \|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon \quad (\text{I.53})$$

$\|\cdot\|$  étant une norme, par exemple, euclidienne de  $x$ ,  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ .

**Définition I.2 : Attractivité**

L'équilibre  $x_e = 0$  est attractif lorsqu'il y a convergence de l'état  $x$  vers l'état  $x_e = 0$  au bout d'un temps infini, les conditions initiales  $x_0$  étant bornées, soit :

$$\exists \delta_0(t_0) > 0 \forall t_0 \geq 0 / \|x_0\| < \delta_0(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, t_0) = 0 \quad (\text{I.54})$$

Lorsque  $\delta_0(t_0) = +\infty$ , on dit que l'équilibre  $x_e = 0$  est globalement attractif.

**Définition I.3 : Stabilité asymptotique**

L'équilibre  $x_e = 0$  est dit asymptotiquement (respectivement globalement asymptotiquement) stable lorsqu'il est à la fois stable au sens de Lyapunov et attractif (respectivement globalement attractif). Les trajectoires  $x(t, x_0, t_0)$  restent alors arbitrairement bornées pour des conditions initiales suffisamment faibles.

**Définition I.4 : Instabilité au sens de Lyapunov**

Un système est instable au sens de Lyapunov lorsqu'il n'est pas stable au sens de la définition I.1.

**I.3.3. Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques continus non linéaires**

Parmi les méthodes d'étude de la stabilité, on cite :

- la méthode par linéarisation, applicable lorsqu'il ne s'agit pas de cas critiques, ne permettant que l'étude de la stabilité locale d'un état d'équilibre,
- la deuxième méthode de Lyapunov basée sur l'utilisation de fonctions auxiliaires possédant certaines propriétés de positivité.

### ***1.3.3.1. Utilisation des techniques d'agrégation pour l'étude de la stabilité***

#### ***1.3.3.1.a. Introduction***

Pour l'analyse de la stabilité et, principalement, lorsque les systèmes non linéaires ne permettent pas une linéarisation ou lorsque le modèle linéarisé est loin de représenter le comportement réel du système, on utilise généralement des méthodes plus ou moins difficiles à mettre en œuvre dont :

- i. la méthode des portraits de phase,
- ii. le critère de Popov,
- iii. la méthode directe de Lyapunov,
- iv. la méthode des normes vectorielles.

La méthode de Lyapunov [LYA 49], permettant l'analyse de la stabilité directement à partir des équations décrivant les systèmes, ne nécessite pas la détermination explicite des solutions de ces équations.

En effet, la détermination d'une fonction scalaire  $v(x)$ , dite de Lyapunov, définie positive dans l'espace d'état, dont la dérivée par rapport au temps  $\dot{v}(x)$  est une fonction définie négative, suffit pour pouvoir conclure à la stabilité asymptotique du système dynamique continu non linéaire du type (I.1).

Le choix de fonctions de Lyapunov vectorielles a conduit Bellman [BELL 62] et Matrozov [MAT 62] à la généralisation de la méthode de Lyapunov par la détermination de systèmes de comparaison d'ordre supérieur à l'unité.

Le principe de comparaison consiste à travailler sur un système plus simple que le système initial mais dont la propriété de stabilité implique celle du système initial étudié.

La définition de certaines fonctions d'agrégation du type, par exemple, normes vectorielles réduit l'étude de la stabilité à celle du système de comparaison le long des trajectoires du système [BOR 76, GEN 76a].

#### ***1.3.3.1.b. Systèmes majorants – Lemme de comparaison***

La méthode de Lyapunov, utilisant une fonction de Lyapunov scalaire, pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques, a été généralisée en introduisant des fonctions de Lyapunov vectorielles pour l'analyse de la stabilité des systèmes de grande dimension.

Borne et Gentina ont été à l'origine de l'utilisation des normes vectorielles et des techniques d'agrégation et de majoration pour l'étude des systèmes complexes de grande dimension [BOR 76, GEN 76a].

#### **Notion de norme vectorielle**

Considérons l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  et les sous-espaces  $\mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, r$ , tels que :

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r \quad (\text{I.55})$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r]^T \quad (\text{I.56})$$

avec :  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, r$ .

Soit  $p_i(\cdot)$  une norme scalaire sur  $\mathbb{R}^{n_i}$ , on définit la norme vectorielle  $p(\cdot)$  sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$p(x) = [p_1(x_1) \quad p_2(x_2) \quad \dots \quad p_r(x_r)]^T \quad (\text{I.57})$$

$p(x)$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i.  $p(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,
- ii.  $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- iii.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ,
- iv.  $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

### Systeme majorant

Soit un système dynamique continu non linéaire décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) \quad (\text{I.58})$$

et soit  $p(x)$  une norme vectorielle,  $p(x) \in \mathbb{R}^r$ .

La matrice  $M(x)$  de (I.59), de dimension  $r \times r$ , caractérise, relativement à la norme vectorielle  $p(x)$ , un système majorant du système (I.58) si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée, composante à composante, le long des trajectoires du système (I.58) :

$$\dot{p}(x) \leq M(x)p(x) \quad (\text{I.59})$$

### Lemme de comparaison

Soit une norme vectorielle de taille  $r$ . Si la matrice  $M(x)$ , de dimension  $r \times r$ , associée au système (I.58) est à éléments non diagonaux non négatifs, et telle que l'inégalité (I.59) soit vérifiée, le système :

$$\dot{z}(t) = M(x)z(t) \quad (\text{I.60})$$

tel que  $z(t_0) \geq p(x(t_0))$ , est alors un système de comparaison du système (I.58) et l'inégalité suivante :

$$p(x(t)) \leq z(t) \quad (\text{I.61})$$

est vérifiée.

Si le système en  $z$  (I.60) est asymptotiquement stable, il en est donc de même du système en  $x$  (I.58).

**Remarque**

Ce lemme de comparaison peut être interprété comme une généralisation du lemme de comparaison de Wazewski.

**I.3.3.2. Cas d'application de conditions de stabilité du linéaire pour des systèmes non linéaires**

La détermination des domaines de stabilité de plus en plus larges constitue un problème très important à résoudre aussi bien dans l'analyse que dans la synthèse des systèmes non linéaires.

La méthode basée sur les normes vectorielles permet parfois de réduire l'étude du système initial à celle d'un système de comparaison identique au système initial et pour lequel est vérifiée la conjecture du linéaire d'Aizerman [GRU 78a].

**Remarque**

Soit le processus de vecteur état  $x \in \mathbb{R}^n$ , dont l'évolution est régie par une relation de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (\text{I.62})$$

Supposons qu'il soit possible d'écrire  $f(x(t))$  sous la forme :

$$f(x(t)) = F^*(x(t))x(t) \quad (\text{I.63})$$

avec  $F^*$  matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients bornés en module. Cette propriété peut être décrite par la relation suivante :

$$F^*(x(t)) \in [\underline{F}, \bar{F}] \subset \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{I.64})$$

dans laquelle  $\underline{F}$  et  $\bar{F}$  sont deux matrices à éléments constants.

**Enoncé de la conjecture du linéaire d'Aizerman** [GRU 78a]

Si le processus dont l'évolution est décrite par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = Lx(t) \quad (\text{I.65})$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $L$  matrice  $n \times n$  à coefficients constants est stable quelque soit la valeur de  $L \in [\underline{F}, \overline{F}]$ , alors il est possible de conclure à la stabilité asymptotique de l'état d'équilibre  $x = 0$  pour le processus décrit par la relation (I.62).

***1.3.3.2.a. Lemme de Kotelyanski***

Lorsque le système est décrit dans l'espace d'état par l'équation :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (\text{I.66})$$

avec  $A$ ,  $A = \{a_{ij}\}$ , une matrice de dimension  $n \times n$ , constante et indépendante du temps, l'application des conditions de Hurwitz sur les paramètres du polynôme caractéristique de la matrice caractéristique  $A$ , défini par :

$$\det(\lambda \mathbb{I} - A) = 0 \quad (\text{I.67})$$

implique que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont à parties réelles négatives.

Par ailleurs les travaux de Kotelyanski ont mis en évidence un lemme particulier adapté à l'étude de la stabilité des systèmes lorsque la matrice  $A$  possède des éléments hors diagonaux non négatifs [GEN 76a].

**Enoncé du lemme de Kotelyanski**

Les valeurs propres de la matrice  $A$ , d'éléments hors diagonaux non négatifs, sont toutes à partie réelle inférieure à un nombre réel  $\mu$ , si et seulement si tous les mineurs principaux de la matrice  $M$ ,  $M = \mu \mathbb{I}_n - A$ , sont positifs,  $\mathbb{I}_n$  étant la matrice identité de dimension  $n \times n$ .

***Remarque***

Lorsque les mineurs principaux successifs de la matrice  $(-A)$  sont positifs, ce qui revient à dire que les mineurs principaux successifs de la matrice  $A$  sont de signes alternés, le premier étant négatif, le lemme de Kotelyanski permet de conclure à la stabilité du système de matrice caractéristique  $A$ .

**I.3.3.2.b. Critère pratique de stabilité de Borne et Gentina**

Considérons le système continu non linéaire défini dans l'espace d'état par (I.58),  $A$  étant une matrice de dimension  $n \times n$ , à éléments non constants,  $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ .

**Énoncé du critère pratique de stabilité de Borne et Gentina** [GEN 72]

Si la matrice caractéristique  $A(x)$  de (I.58) a ses éléments non constants isolés dans une seule ligne ou une seule colonne, l'application du lemme de Kotelyanski à la matrice, obtenue en remplaçant les éléments hors diagonaux de  $A(x)$  par leurs valeurs absolues permet de conclure à la stabilité de ce système.

Ce critère, utilisant les techniques d'agrégation, adaptées à l'étude des systèmes de grande dimension, est basé sur le choix d'une norme vectorielle  $p(z)$ ,  $z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$ , telle que :  $p(z) = [|z_1| \ |z_2| \ \dots \ |z_n|]^T$ .

En pratique, ce critère est vérifié si les  $n$  inégalités suivantes sont satisfaites :

$$a_{11} < 0, \left| \begin{array}{cc} a_{11} & |a_{12}| \\ |a_{21}| & a_{22} \end{array} \right| > 0, \dots, (-1)^n \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & |a_{12}| & \dots & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & a_{22} & \dots & |a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ |a_{n1}(\cdot)| & |a_{n2}(\cdot)| & \dots & a_{nn}(\cdot) \end{array} \right| > 0 \quad (\text{I.68})$$

**Exemple d'application**

Considérons le système non linéaire décrit par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.6 \\ 0.6 + 0.64x_1(t)x_2(t) & -1.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Soit  $p(x)$  la norme vectorielle définie par :

$$p(x) = \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}$$

Il vient le système de comparaison correspondant :

$$\begin{bmatrix} |\dot{x}_1(t)| \\ |\dot{x}_2(t)| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.6 \\ |0.6 + 0.64x_1(t)x_2(t)| & -1.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1(t)| \\ |x_2(t)| \end{bmatrix}$$

les conditions suffisantes de stabilité obtenues par application du critère pratique de Borne et Gentina s'écrivent :

$$\begin{cases} -1 < 0 \\ 1.64 - 0.6|0.6 + 0.64x_1(t)x_2(t)| > 0 \end{cases}$$

et le domaine de stabilité asymptotique qui en découle,  $D_{S_a}$ , est délimité par la figure I.7.

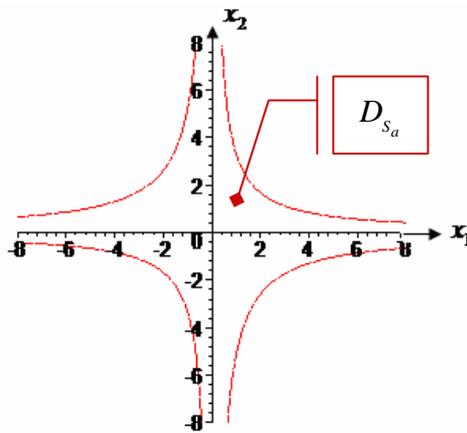


Figure I.7. Domaine de stabilité asymptotique  $D_{S_a}$

**Remarque**

Le cas où la matrice caractéristique instantanée est à éléments hors diagonaux non négatifs, et où les non linéarités sont isolées dans une seule rangée, constitue un cas de vérification de la conjecture du linéaire d'Aizerman.

**I.3.4. Conclusion**

Pour la détermination d'un domaine de stabilité, le plus étendu possible, lorsqu'il existe, il convient de choisir une représentation d'état du système, adaptée à l'étude envisagée. Pour de larges classes de processus complexes, la caractérisation des systèmes par des matrices de forme en flèche peut s'avérer intéressante.

#### I.4. Position du problème de la synchronisation et de l'anti-synchronisation de systèmes chaotiques couplés

La notion de synchronisation classique consiste à faire coïncider les fréquences générées par deux (ou plus) oscillateurs périodiques [PEC 00, RUL 95, RUL 96] ou les fréquences et les phases [ANS 06, BEN 76, LUC 06, MAGH 07].

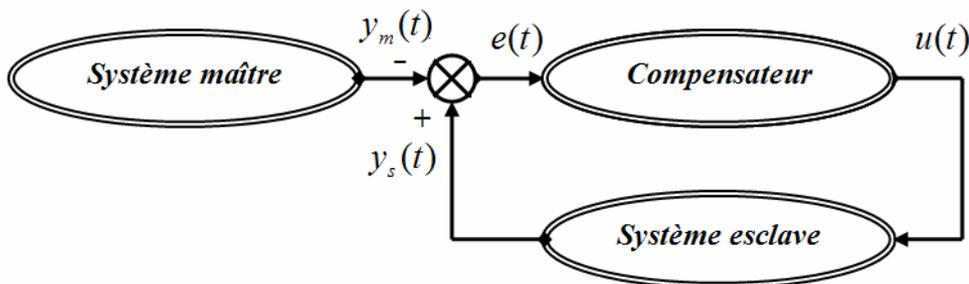
A partir du concept de la synchronisation locale [YAM 83, YAM 84] et du concept de la synchronisation identique [AFR 83, PEC 90], développés sur la base de circuits chaotiques couplés, l'un maître et l'autre esclave, des applications importantes du chaos ont été développées en télécommunication.

Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont Rulkov et al. ont posé les bases [RUL 95, RUL 96] et qui a ensuite été étudiée dans [KOC 95, PEC 00].

Pour un couplage entre les circuits non identiques, la synchronisation vise à réaliser une cohérence de phases entre les variables d'état des systèmes considérés [ROSE 97, VOL 97].

L'emploi des méthodes d'estimation non linéaire de type filtrage de Kalman, vu comme une généralisation du couplage des systèmes chaotiques, sous certaines conditions sur le bruit d'observation, garantit, par ailleurs, un caractère optimal de la synchronisation au sens de l'erreur quadratique moyenne [LEU 00, LEU 01].

Pour le cas de la synchronisation de systèmes identiques de la figure I.8. proposée par Pecora et Carroll [PEC 90], l'objectif est que l'esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire [LUC 06].



**Figure I.8.** Schéma de principe de la synchronisation d'un système esclave avec un système maître

Dans ces conditions, un système esclave de sortie  $y_s(t)$ , est appelé à être synchrone avec le système maître de sortie  $y_m(t)$ , c'est-à-dire, que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_s(t) - y_m(t)| = 0 \quad (I.69)$$

pour n'importe quelles conditions initiales du système maître et du système esclave.

Pour étudier la synchronisation de deux systèmes identiques ou non, il s'avère donc nécessaire de vérifier la convergence de la mesure de l'écart de leurs comportements. Pour y arriver, une solution consiste à mettre en œuvre une condition de stabilité pour le système écart constituant une condition d'unicité de la réponse.

Parmi les méthodes d'étude envisageables permettant de trouver cette solution :

- une approche du linéaire, pouvant être considérée lorsque les systèmes sont linéaires, constitue en général une condition nécessaire et suffisante de convergence,
- des approches du non linéaire, basées sur des techniques d'agrégation, conduisent à des conditions suffisantes de convergence.

Les mêmes méthodes peuvent être appliquées pour l'étude de l'anti-synchronisation qui, pour sa vérification, nécessite de satisfaire la convergence de la somme de signaux générés par les systèmes chaotiques à anti-synchroniser :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_s(t) + y_m(t)| = 0 \quad (\text{I.70})$$

ou encore, pour la vérification de la propriété de synchronisation hybride de systèmes chaotiques du type maître-esclave, pour lesquels, les deux propriétés de synchronisation et d'anti-synchronisation, existent simultanément.

Lorsque ces méthodes ne permettent pas de vérifier la synchronisation des systèmes couplés ou lorsque les deux circuits chaotiques ne sont pas synchrones, il est souvent intéressant d'utiliser une technique forçant les propriétés de synchronisation, les propriétés d'anti-synchronisation ou celles de synchronisation hybride des sous-systèmes considérés.

Parmi les nouvelles techniques envisageables, nous proposons dans le cadre de nos travaux d'utiliser les méthodes de commande et particulièrement les méthodes de stabilisation pour garantir les performances souhaitées pour l'écart des signaux lorsqu'il s'agit de synchronisation et pour leur somme lorsqu'il s'agit d'anti-synchronisation.

## CONCLUSION

Dans ce premier chapitre, est mise en exergue la diversité des descriptions et des représentations des systèmes dynamiques continus non linéaires ou / et de grande dimension.

La mise sous forme, en flèche, des matrices caractéristiques des processus, confère pour ceux-ci, une structure hiérarchisée à deux niveaux dépendant d'un certain nombre de paramètres pouvant être choisis arbitrairement.

Nous envisageons de montrer l'importance du choix de la représentation sur l'étude de la stabilité ainsi que la stabilisation de systèmes dynamiques continus non linéaires dans le deuxième chapitre, et finalement, sur l'extension de l'étude à la synchronisation, à l'anti-synchronisation et à la synchronisation hybride de systèmes chaotiques, du type maître-esclave, identiques ou non dans le troisième et dernier chapitre de ce mémoire.

**CHAPITRE II :**

**NOUVELLES APPROCHES  
DE STABILISATION DE SYSTEMES  
CONTINUS NON LINEAIRES**

## CHAPITRE II

# NOUVELLES APPROCHES DE STABILISATION DE SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES

### Sommaire

---

Introduction.....	47
II.1. Représentations et méthodes d'étude de la stabilité de systèmes continus non linéaires.....	47
II.1.1. Position du problème.....	47
II.1.2. Mise en œuvre du critère de Borne et Gentina pour l'étude de la stabilité des systèmes décrits par une équation différentielle scalaire.....	47
II.1.3. Application à la stabilisation d'un système de type Lur'e Postnikov.....	49
II.2. Nouvelle méthode de stabilisation des systèmes décrits dans l'espace d'état.....	52
II.2.1. Méthode proposée pour la détermination de la commande par réaction d'état – Idée de base.....	52
II.2.2. Cas d'une matrice en flèche mince.....	53
II.2.3. Cas d'une matrice en flèche mince généralisée.....	54
II.3. Formulation des conditions de stabilisabilité par retour d'état proposées pour les systèmes hiérarchisés à deux niveaux.....	57
II.3.1. Lois de commande stabilisante par retour d'état.....	57
II.3.2. Cas de systèmes multivariables.....	57
II.3.3. Cas de systèmes monovariables.....	67
II.3.3.1. Premier cas d'étude.....	68
II.3.3.2. Deuxième cas d'étude.....	70
II.4. Stabilisation par retour d'état proposée pour les systèmes à matrice caractéristique instantanée quelconque.....	73
II.4.1. Introduction.....	73
II.4.2. Systèmes tels que $m \geq n - 2$ .....	73
II.4.2.1. Conditions de mise sous forme en flèche mince de la matrice caractéristique instantanée du système bouclé.....	73
II.4.2.2. Exploitation des conditions de stabilisabilité proposées pour la détermination de lois de commande – Idée de base.....	74
II.4.3. Conclusion.....	83
II.5. Commandes stabilisantes par retour de sortie proposées.....	83
II.5.1. Introduction.....	83
II.5.2. Cas des systèmes hiérarchisés à deux niveaux.....	84
II.5.3. Cas des systèmes caractérisés par une matrice quelconque.....	89

II.5.4. Conclusion.....	96
II.6. Généralisation des différentes stratégies de commande proposées.....	96
II.6.1. Introduction.....	96
II.6.2. Méthode basée sur l'exploitation des propriétés de la matrice de forme en flèche mince généralisée.....	96
II.6.2.1. Compensation par réaction d'état.....	97
II.6.2.2. Compensation par réaction de sortie.....	99
II.6.3. Cas des matrices de forme en flèche épaisse.....	108
II.6.4. Conclusion.....	110
Conclusion.....	110

---

## **INTRODUCTION**

Dans une première partie de ce chapitre est exposée une méthode d'analyse et de synthèse de processus initialement décrits, dans l'espace d'état, par une équation différentielle scalaire à coefficients non linéaires.

Une seconde partie est consacrée à la présentation de l'idée de base de la nouvelle stratégie de commande destinée à la stabilisation de systèmes dynamiques continus non linéaires selon le choix de la représentation matricielle caractérisant le processus étudié. Vient, ensuite, la formulation explicite des conditions suffisantes de stabilité, par retour d'état et par retour de sortie, de systèmes continus non linéaires.

Le dernier volet de ce chapitre concerne la généralisation des différentes stratégies de commande proposées, et ce tout en exploitant les propriétés des matrices de forme en flèche mince généralisée et celles de forme en flèche épaisse.

Toutes les structures de commande proposées sont appliquées sur différents exemples académiques afin de montrer leur efficacité.

### **II.1. Représentations et méthodes d'étude de la stabilité de systèmes continus non linéaires**

#### **II.1.1. Position du problème**

La recherche d'une fonction de Lyapunov [MAI 67, VID 93] n'est, en général, pas une tâche aisée. Il paraît donc intéressant de savoir dans quelle mesure, la stabilité d'un système non linéaire peut être déduite de sa représentation dans l'espace d'état. C'est ce que nous verrons dans la suite, où nous déterminons des conditions permettant de conclure à la stabilité d'un système non linéaire, tout en se basant sur les techniques d'agrégation [GEN 72, GRU 76] associées à une représentation matricielle bien définie.

Il est à noter que pour l'étude de la stabilité et de la stabilisation de systèmes continus non linéaires, l'approche des normes vectorielles [GEN 76a, GEN 76b] est utilisée. Le critère de stabilité de Borne et Gentina [GEN 72] est de mise en œuvre nettement plus simple et plus efficace que l'approche basée sur l'utilisation directe de la méthode de Lyapunov [BEN 76, BIT 83].

#### **II.1.2. Mise en œuvre du critère de Borne et Gentina pour l'étude de la stabilité des systèmes décrits par une équation différentielle scalaire**

L'étude de la stabilité reste à l'heure actuelle très importante pour la détermination des lois de commande des systèmes complexes.

Nous allons, dans cette partie, envisager la détermination de conditions suffisantes de stabilité asymptotique de systèmes continus non linéaires décrits dans l'espace d'état.

Considérons le système monovariante, décrit en régime libre par l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(z) y^{(i)}(t) = 0 \quad (\text{II.1})$$

avec  $z(t) = [y(t) \quad y'(t) \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t)]^T$  et  $\tilde{a}_i(z)$ ,  $\forall i = 0, \dots, n-1$ , des coefficients généralement non linéaires.

Par le choix de  $z(t)$  comme vecteur état, il est en général possible de représenter le système (II.1) par l'équation matricielle :

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}(z)z(t) \quad (\text{II.2})$$

la matrice caractéristique instantanée  $\tilde{A}(z)$  étant sous forme Compagnon [ROS 70].

En effectuant le changement de variables de matrice de passage définie par (I.33), avec  $f_{ii} \equiv \alpha_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , l'évolution du système (II.2) peut être réécrite sous la forme [BEN 80] :

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) \quad (\text{II.3})$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_1(x) & \dots & \gamma_{n-1}(x) & \gamma_n(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

avec :

$$\beta_i = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \quad (\text{II.5})$$

$$\gamma_i(x) = -P_A(x, \alpha_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{II.6})$$

$$\gamma_n(x) = -a_{n-1}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \quad (\text{II.7})$$

et :

$$P_A(x, \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \lambda^i \quad (\text{II.8})$$

**Théorème II.1** [BEN 80]

S'il existe  $\varepsilon > 0$  et des paramètres arbitraires  $\alpha_i, \forall i = 1, \dots, n-1$ , tels que :

$$i. \alpha_i < 0, \alpha_i \neq \alpha_j, \forall i, j = 1, \dots, n-1, i \neq j \quad (\text{II.9})$$

$$ii. \gamma_n(x) - \sum_{i=1}^{n-1} |\beta_i \gamma_i(x)| \alpha_i^{-1} \leq -\varepsilon \quad (\text{II.10})$$

le point d'équilibre  $x = 0$  du système défini par (II.3) et (II.4) avec les notations (II.5-II.8) est asymptotiquement stable.

Le cas particulier, où les produits  $\beta_i \gamma_i(x), \forall i = 1, \dots, n-1$ , sont non négatifs :

$$\beta_i \gamma_i(x) \geq 0 \quad (\text{II.11})$$

constitue un cas d'application de la conjecture du linéaire [GRU 78a].

Il vient le corollaire II.1.

**Corollaire II.1** [BEN 80]

Le point d'équilibre  $x = 0$  du système défini par (II.3) et (II.4) avec les notations (II.5-II.8) est asymptotiquement stable s'il existe des paramètres arbitraires distincts  $\alpha_i$  vérifiant la condition (II.9), et s'il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que :

$$i. (-1)^{n-i} P_A(x, \alpha_i) \geq 0, \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{II.12})$$

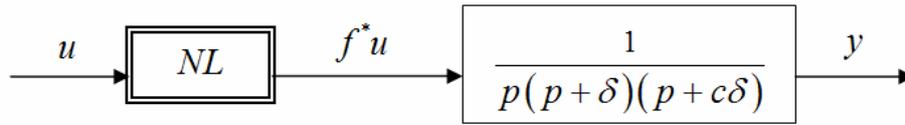
$$ii. P_A(x, 0) \geq \varepsilon \quad (\text{II.13})$$

### II.1.3. Application à la stabilisation d'un système de type Lur'e Postnikov

Considérons le système de type Lur'e Postnikov, dont la chaîne d'action est donnée dans la figure II.1., modélisant un moteur à courant continu, à commander [ABD 03]. Il présente une

grande constante de temps mécanique  $\frac{1}{c\delta}$ ,  $c \ll 1$ , et une petite constante de temps électrique

$\frac{1}{\delta}$ , ainsi qu'un gain non linéaire  $f^*$ .



**Figure II.1.** Modèle d'un moteur à courant continu

Un tel processus peut être décrit dans l'espace d'état par [BEN 03] :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf^* u(t)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} \\ 0 & \alpha_2 & (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} \\ -P_A(\alpha_1) & -P_A(\alpha_2) & -\delta(1+c) - \alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  étant :

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 + \delta(1+c)\lambda^2 + c\delta^2\lambda$$

pour des paramètres  $\delta$  et  $c$  choisis tels que :  $\delta = 12.5$  et  $c = 0.01$ .

Ce système non bouclé étudié, possédant un pôle égal à zéro, est simplement stable. Pour le rendre asymptotiquement stable, nous envisageons de déterminer une loi de commande  $u(t)$  par retour d'état, exploitant le théorème II.1. :

$$u(t) = -Kx(t)$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Il vient la description d'un tel système bouclé :

$$\dot{x}(t) = (A - f^*BK)x(t)$$

avec :

$$A - f^* BK = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} \\ 0 & \alpha_2 & (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} \\ -P_A(\alpha_1) - f^* k_1 & -P_A(\alpha_2) - f^* k_2 & -(\delta(1+c) + \alpha_1 + \alpha_2) - f^* k_3 \end{bmatrix}$$

Les non linéarités  $f^*$  étant isolées dans la dernière ligne de la matrice  $(A - f^* BK)$ , la mise en œuvre du critère pratique de stabilité de Borne et Gentina permet de conclure à la stabilité asymptotique du système ainsi corrigé, si les conditions suffisantes suivantes sont satisfaites :

i.  $\alpha_i < 0, \forall i = 1, 2,$

ii.  $-(\delta(1+c) + \alpha_1 + \alpha_2) - f^* k_3 - \left( \begin{array}{l} \left| (-P_A(\alpha_1) - f^* k_1)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} \right| \alpha_1^{-1} \\ + \left| (-P_A(\alpha_2) - f^* k_2)(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} \right| \alpha_2^{-1} \end{array} \right) < 0.$

Pour  $\alpha_1 = -1.05\delta$  et  $\alpha_2 = -1.05c\delta$ , il suffit de trouver trois paramètres de réglage  $k_1, k_2$  et  $k_3$  vérifiant la condition ii. pour garantir la stabilisation du système étudié.

En remplaçant les termes connus de la dernière inégalité par leurs valeurs numériques, il ressort la condition équivalente suivante :

$$0.63 - f^* k_3 + 0.006 \left| 106.64 - f^* k_1 \right| + 0.59 \left| 0.01 + f^* k_2 \right| < 0$$

Le choix, par exemple, de  $k_1$  et  $k_2$  égaux à 1 conduit au domaine de stabilité asymptotique, hachuré dans le plan des paramètres  $(k_3, f^*)$  de la figure II.2.

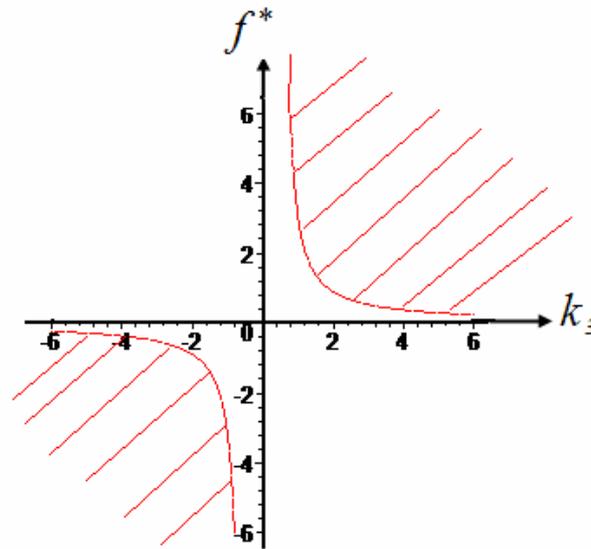


Figure II.2. Domaine de stabilité du système commandé dans le plan  $(k_3, f^*)$

## II.2. Nouvelle méthode de stabilisation des systèmes décrits dans l'espace d'état

### II.2.1. Méthode proposée pour la détermination de la commande par réaction d'état – Idée de base

Considérons le système multivariable, décrit par le système d'équations différentielles suivant :

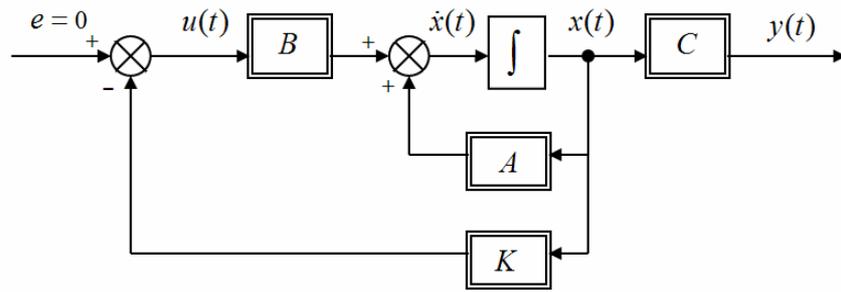
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \\ y(t) = C(x)x(t) \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

où  $x$ ,  $y$  et  $u$  sont les vecteurs d'état, de sortie et d'entrée, de dimensions respectives  $n$ ,  $l$  et  $m$ .

Pour stabiliser un tel système, une solution consiste à déterminer une loi de commande par réaction d'état de la forme, figure II.3. [FOS 72] :

$$u(t) = -K(x)x(t) \quad (\text{II.15})$$

$K(x)$  étant la matrice gain instantané.



**Figure II.3.** Principe de la commande par réaction d'état

Pour la résolution de ce problème de compensation, nous proposons une approche en deux étapes :

- d'abord, la mise de la matrice caractéristique sous une forme appropriée,
- ensuite, la détermination d'un compensateur associé à cette forme et à la méthode d'étude.

Il est à remarquer que les critères de stabilité précédents peuvent être utilisés pour l'élaboration d'une telle loi de commande.

### II.2.2. Cas d'une matrice en flèche mince

Pour les systèmes à matrice caractéristique instantanée de forme en flèche mince, l'application du critère pratique de stabilité de Borne et Gentina conduit à des conditions analytiques, explicites et interprétables par rapport aux coefficients du polynôme caractéristique instantané du système étudié.

**Théorème II.2** [BEN 80]

Le système défini par (II.14), admettant une matrice caractéristique  $A(x)$  en flèche mince d'ordre  $n$ , telle que :

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée,
- ii. les éléments  $a_{ii}(x)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , sont strictement négatifs,

est asymptotiquement stable s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$a_{nn}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} |a_{ni}(x)a_{in}(x)| a_{ii}^{-1}(x) \leq -\varepsilon \quad (\text{II.16})$$

Ces conditions seront exploitées dans les sections suivantes afin de formuler des lois de commande stabilisante, pour les systèmes continus non linéaires de grande dimension.

### II.2.3. Cas d'une matrice en flèche mince généralisée

Considérons la classe de systèmes non linéaires à matrice caractéristique de forme en flèche mince généralisée d'ordre  $r$ , décrits dans l'espace d'état par :

$$\dot{x}(t) = A_{FFMG}(x)x(t) \quad (\text{II.17})$$

où  $x$  représente le vecteur état de dimension  $n$  et  $A_{FFMG}(x)$  la matrice caractéristique instantanée de dimension  $n \times n$ , d'éléments  $a_{ij}(x)$  non nuls répartis sur les  $(n - r + 1)$  dernières lignes et les  $(n - r + 1)$  dernières colonnes,  $A_{FFMG}(x) = \{a_{ij}(x)\}$ .

On a :

$$A_{FFMG}(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & & & a_{1r}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ & \ddots & & \vdots & \dots & \vdots \\ & & a_{r-1\ r-1}(x) & a_{r-1\ r}(x) & \dots & a_{r-1\ n}(x) \\ a_{r1}(x) & \dots & a_{r\ r-1}(x) & a_{rr}(x) & \dots & a_{rn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{n\ r-1}(x) & a_{nr}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Le polynôme caractéristique instantané correspondant, noté  $P_{A_{FFMG}}(x, \lambda)$ , est défini, dans ce cas, par :

$$P_{A_{FFMG}}(x, \lambda) = \det(\lambda \mathbb{I} - A_{FFMG}(x)) \quad (\text{II.19})$$

#### Notations

Durant cette étude, les notations suivantes sont adoptées :

$$A_{FFMG}(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

$$A_{11}(x) = \text{diag} \{a_{ii}(x), \forall i = 1, 2, \dots, r-1\} \quad (\text{II.21})$$

$A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  et  $A_{22}$  sont, respectivement, des matrices de dimensions  $(r-1) \times (r-1)$ ,  $(r-1) \times (n-r+1)$ ,  $(n-r+1) \times (r-1)$  et  $(n-r+1) \times (n-r+1)$ .

$A_{12}^{(i)}(x)$ ,  $A_{21}^{(i)}(x)$  et  $A_{22}^{(i)}(x)$  représentent, respectivement, la  $(r-1) \times (n-r+1)$  matrice constituée par les  $i$  premières colonnes de  $A_{12}(x)$ , la  $(n-r+1) \times (r-1)$  matrice composée par les  $i$  premières lignes de  $A_{21}(x)$  et la  $(n-r+1) \times (n-r+1)$  matrice carrée  $i \times i$  composée par les  $i$  premières lignes et les  $i$  premières colonnes de  $A_{22}(x)$ .

Soit  $M(A_{FFMG}(\cdot))$ , la matrice obtenue à partir de la matrice caractéristique instantanée du système étudié, telle que :

$$M(A_{FFMG}(\cdot)) = \begin{bmatrix} A_{11}(\cdot) & M_{12}(\cdot) \\ M_{21}(\cdot) & M_{22}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

dans laquelle, les matrices  $M_{ij}(\cdot)$ ,  $\forall i, j = 1, 2$ , sont de dimensions convenables, et la matrice  $M_{22}(\cdot)$  est obtenue en substituant les éléments hors diagonaux de la matrice  $A_{22}(\cdot)$  par leurs valeurs absolues. Les matrices  $M_{12}(\cdot)$  et  $M_{21}(\cdot)$  sont obtenues en substituant, respectivement, tous les éléments des matrices  $A_{12}(\cdot)$  et  $A_{21}(\cdot)$  par leurs valeurs absolues.

***Théorème II.3*** [BEN 80]

*Le système défini par (II.17) et (II.18) est asymptotiquement stable si la matrice caractéristique instantanée  $A_{FFMG}(x)$ , est telle que :*

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée,*
- ii.  $a_{ii}(x) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1$*  (II.23)
- iii. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que,  $\forall i = 1, 2, \dots, n-r+1$ :*

$$(-1)^i \det(M_{22}^{(i)}(x) - M_{21}^{(i)}(x)A_{11}^{-1}(x)M_{12}^{(i)}(x)) \geq \varepsilon \quad (\text{II.24})$$

***Démonstration***

Le choix de la norme vectorielle  $p(z) = \left[ |z_1| \quad \dots \quad |z_n| \right]^T$  permet de définir un système de comparaison, d'ordre  $n$ , de matrice caractéristique  $M(A_{FFMG}(\cdot))$ , de la forme :

$$\dot{z}(t) = M(A_{FFMG}(\cdot))z(t) \quad (\text{II.25})$$

avec :

$$M(A_{FFMG}(\cdot)) = \begin{bmatrix} a_{11}(\cdot) & & & M_{1r}(\cdot) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{r-1\ r-1}(\cdot) & M_{r-1\ r}(\cdot) \\ M_{r1}(\cdot) & \dots & M_{r\ r-1}(\cdot) & M_{rr}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

les éléments des blocs  $M_{ij}(\cdot)$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, r$ , suivants :

$$M_{ir}(\cdot) = \left[ |a_{ir}(\cdot)| \quad \dots \quad |a_{in}(\cdot)| \right] \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.27})$$

$$M_{rj}(\cdot) = \left[ |a_{rj}(\cdot)| \quad \dots \quad |a_{nj}(\cdot)| \right]^T \quad \forall j = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.28})$$

$$M_{rr}(\cdot) = \begin{bmatrix} a_{rr}(\cdot) & |a_{r\ r+1}(\cdot)| & \dots & |a_{rn}(\cdot)| \\ |a_{r+1\ r}(\cdot)| & a_{r+1\ r+1}(\cdot) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & |a_{n-1\ n}(\cdot)| \\ |a_{nr}(\cdot)| & \dots & |a_{n\ n-1}(\cdot)| & a_{nn}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

n'étant pas nécessairement nuls et répartis sur les  $(n - r + 1)$  dernières lignes et colonnes de la matrice  $M(A_{FFMG}(\cdot))$ .

Comme les éléments non linéaires de la matrice  $M(A_{FFMG}(\cdot))$  sont isolés dans une seule rangée, une condition suffisante de stabilité asymptotique pour le système de comparaison est que la matrice  $M(A_{FFMG}(\cdot))$  soit l'opposée d'une  $M$  - matrice [GEN 76a]. Le théorème

II.3 est alors déduit des conditions de Kotelyanski, en notant  $M(A_{FFMG}(\cdot)) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & h \\ 1 & 2 & \dots & h \end{pmatrix}$

le déterminant du mineur principal de  $M(A_{FFMG}(\cdot))$  d'ordre  $h$  [GAN 66], ces conditions correspondent à la vérification des inégalités suivantes :

$$(-1)^h M(A_{FFMG}(\cdot)) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & h \\ 1 & 2 & \dots & h \end{pmatrix} > 0 \quad \forall h = 1, \dots, n \quad (\text{II.30})$$

Les  $(r - 1)$  premières conditions du théorème II.3 à vérifier sont les suivantes :

$$a_{ii}(\cdot) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II.31})$$

et les  $(n - r + 1)$  suivantes peuvent être formulées en utilisant les notations précédentes comme suit :

$$(-1)^{r+i-1} \det \begin{pmatrix} A_{11}(\cdot) & M_{12}^{(i)}(\cdot) \\ M_{21}^{(i)}(\cdot) & M_{22}^{(i)}(\cdot) \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n - r + 1 \quad (\text{II.32})$$

et calculées en utilisant la relation suivante :

$$\begin{aligned} & (-1)^{r+i-1} \det \begin{pmatrix} A_{11}(\cdot) & M_{12}^{(i)}(\cdot) \\ M_{21}^{(i)}(\cdot) & M_{22}^{(i)}(\cdot) \end{pmatrix} = \\ & (-1)^{r-1} \prod_{j=1}^{r-1} (a_{jj}(\cdot)) (-1)^i \det \left( M_{22}^{(i)}(\cdot) - M_{21}^{(i)}(\cdot) A_{11}^{-1}(\cdot) M_{12}^{(i)}(\cdot) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Ce résultat montre que la mise sous forme en flèche mince généralisée de la matrice caractérisant la dynamique d'un système non linéaire bouclé de grande dimension peut permettre l'élargissement du champ d'application des stratégies de commande par réaction d'état ou de sortie envisagées dans la suite de ce chapitre.

### II.3. Formulation des conditions de stabilisabilité par retour d'état proposées pour les systèmes hiérarchisés à deux niveaux

L'élaboration de nouvelles conditions de stabilisation de systèmes continus non linéaires hiérarchisés à deux niveaux, de matrice caractéristique instantanée de forme en flèche, obtenues par application des techniques d'agrégation se basant essentiellement sur l'utilisation des normes vectorielles, est considérée dans cette partie.

#### II.3.1. Lois de commande stabilisante par retour d'état

Dans cette partie, l'accent est mis sur la résolution de problèmes de stabilité, dont les résultats peuvent être étendus à ceux relatifs à l'amélioration des performances (temps de réponse, coefficient d'amortissement, etc.).

#### II.3.2. Cas de systèmes multivariables

En plus de la conservation de la forme en flèche de la matrice caractéristique, la loi de commande proposée doit assurer la stabilité des processus dynamiques multivariables étudiés :

$$\dot{x}(t) = A_{FFM}(x)x(t) + B(x)u(t) \quad (\text{II.34})$$

$B(x)$  étant la matrice de commande de dimension  $(n \times m)$ ,  $B(x) = \{b_{ij}(x)\}$ .

$K(x)$  étant une matrice à éléments  $k_{ji}(x)$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$  et  $\forall i = 1, \dots, n$ , la loi de commande stabilisante par retour d'état de la forme :

$$u(t) = -K(x)x(t) \quad (\text{II.35})$$

conduit à la description du système ainsi bouclé suivante :

$$\dot{x}(t) = A_c(x)x(t) \quad (\text{II.36})$$

avec :

$$A_c(x) = A_{FFM}(x) - B(x)K(x) \quad (\text{II.37})$$

$A_c(x)$  étant une matrice d'éléments  $a_{c_{ij}}(x)$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ .

Le polynôme caractéristique instantané de  $A_c(x)$ , noté  $P_{A_c}(x, \lambda)$ , est défini par :

$$P_{A_c}(x, \lambda) = \det(\lambda \mathbb{I} - A_c(x)) \quad (\text{II.38})$$

Considérant la facilité de mise en œuvre des conditions de stabilité des systèmes à matrices de forme en flèche mince, nous envisageons la détermination des éléments de la matrice  $K(x)$ , conservant la forme en flèche pour  $A_c(x)$ , et conférant au système bouclé la propriété de stabilité asymptotique.

Le choix d'une structure de commande telle que :

$$u_j(t) = -k_{jn}(x)x_n(t) \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (\text{II.39})$$

avec :

$$K(x) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & k_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

préserve la forme matricielle en flèche pour la caractérisation du système corrigé (II.36) et permet de déterminer la matrice gain par vérification des conditions de stabilité précédentes.

**Remarque**

Les paramètres de correction introduits par le choix de la matrice gain instantané définie par (II.39) n'interviennent que sur les éléments de la dernière colonne de la matrice du système bouclé  $A_c(x)$ , d'éléments  $a_{c_{ij}}(x)$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ . Par suite, il est clair qu'on ne peut ainsi stabiliser le système analysé que si ses  $(n - 1)$  premiers éléments diagonaux sont constants et strictement négatifs.

**Cas d'une matrice de commande  $B(x)$  de forme en flèche mince**

Considérons le système multivariable, décrit dans l'espace d'état, par :

$$\dot{x}(t) = A_{FFM}(x)x(t) + B_{FFM}(x)u(t) \quad (\text{II.40})$$

dont la matrice de commande  $B_{FFM}(x)$ , d'éléments  $b_{ij}(x)$ , est de la forme (II.41) :

$$B_{FFM}(x) = \begin{bmatrix} b_{11}(x) & 0 & \dots & 0 & b_{1n}(x) \\ 0 & b_{22}(x) & \ddots & \vdots & b_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1\ n-1}(x) & b_{n-1\ n}(x) \\ b_{n1}(x) & \dots & \dots & b_{n\ n-1}(x) & b_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

Pour conserver la forme en flèche pour la matrice du système corrigé, il suffit, dans ce cas, de choisir le vecteur de commande [BEN 08b] :

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T \quad (\text{II.42})$$

tel que :

$$\begin{cases} u_i(t) = -k_{ii}(x)x_i(t) - k_{in}(x)x_n(t), \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ u_n(t) = -k_{nn}(x)x_n(t) \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

la matrice gain  $K(x)$  étant de la forme :

$$K(x) = \begin{bmatrix} k_{11}(x) & 0 & \dots & 0 & k_{1n}(x) \\ 0 & k_{22}(x) & \ddots & \vdots & k_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & k_{n-1\ n-1}(x) & k_{n-1\ n}(x) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & k_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

En résumé, les chaînes de réaction (II.39) et (II.43) influent au niveau du sous-système  $S_i$  du premier ordre de mode instantané  $a_{ii}(x)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , ainsi qu'au niveau des interconnexions. Elles conduisent à la définition d'une matrice caractéristique instantanée, notée  $A_c(x)$ , du processus  $S$  en boucle fermée, désigné par  $S_c$ , en flèche mince d'ordre  $n$ .

Il ne reste donc qu'à choisir, convenablement, les paramètres de la chaîne de correction, dans chaque cas. Ces paramètres, pouvant être choisis linéaires ou non linéaires, doivent garantir aux systèmes hiérarchisés étudiés la propriété de stabilité asymptotique, après bouclage.

**Théorème II.4** [BEN 08b]

*Le processus bouclé (II.36) est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de la matrice  $A_c(x)$ ,
- ii.  $a_{c_{ii}}(x) < 0 \ \forall i = 1, \dots, n-1$  (II.44)
- iii. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$a_{c_{nn}}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \left( |a_{c_{ni}}(x) a_{c_{in}}(x)| a_{c_{ii}}^{-1}(x) \right) \leq -\varepsilon \quad (II.45)$$

avec :

- dans le cas général où la matrice de commande  $B(x)$  est de forme quelconque et la matrice gain  $K(x)$  est de la forme (II.39) :

$$a_{c_{in}}(x) = a_{in}(x) - \sum_{j=1}^m b_{ij}(x) k_{jn}(x) \ \forall i = 1, \dots, n \quad (II.46)$$

$$a_{c_{ni}}(x) = a_{ni}(x) \ \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (II.47)$$

$$a_{c_{ii}}(x) = a_{ii}(x) \ \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (II.48)$$

- dans le cas particulier où la matrice de commande  $B(x)$  est de forme en flèche mince et la matrice gain  $K(x)$  est de la forme (II.43) :

$$a_{c_m}(x) = a_{nn}(x) - \sum_{i=1}^n b_{ni}(x)k_{in}(x) \quad (\text{II.49})$$

$$a_{c_{ni}}(x) = a_{ni}(x) - b_{ni}(x)k_{ii}(x) \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{II.50})$$

$$a_{c_{in}}(x) = a_{in}(x) - (b_{ii}(x)k_{in}(x) + b_{in}(x)k_{nn}(x)) \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{II.51})$$

$$a_{c_{ii}}(x) = a_{ii}(x) - b_{ii}(x)k_{ii}(x) \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{II.52})$$

### Démonstration

Le choix d'une norme vectorielle  $p(z) = [|z_1| \dots |z_n|]^T$  pour  $z = [z_1 \dots z_n]^T$ , conduit au système de comparaison, de matrice caractéristique instantanée  $M(A_c(x))$ , de forme en flèche mince, suivant :

$$\dot{z}(t) = M(A_c(x))z(t) \quad (\text{II.53})$$

Les éléments  $m_{ij}(x)$  de  $M(A_c(x))$  sont obtenus à partir de ceux de la matrice  $A_c(x)$  comme suit :

$$\begin{cases} m_{ii}(x) = a_{c_{ii}}(x) \quad \forall i = 1, \dots, n \\ m_{ij}(x) = |a_{c_{ij}}(x)| \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

Lorsque les non linéarités sont isolées dans une seule rangée, l'application du critère pratique de stabilité de Borne et Gentina [BOR 87, GEN 72] conduit aux conditions suffisantes de stabilisation suivantes :

$$(-1)^i \Delta_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.55})$$

$\Delta_i$  étant le mineur principal d'ordre  $i$  de la matrice majorante  $M(A_c(x))$ .

Le système (II.34), respectivement (II.40), est ainsi stabilisable par (II.39), respectivement (II.43), si la matrice  $M(A_c(x))$  est l'opposée d'une  $M$  - matrice [GEN 76a], ou encore si on a :

$$\begin{cases} a_{c_{ii}}(x) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \\ (-1)^n \det(M(A_c(x))) \geq \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

Le développement du premier membre de la dernière inégalité du système d'inéquations (II.56) :

$$(-1)^n \det(M(A_c(x))) = \left( \begin{array}{l} a_{c_{nn}}(x) \\ (-1) \left( -\sum_{i=1}^{n-1} |a_{c_{ni}}(x)a_{c_{in}}(x)| a_{c_{ii}}^{-1}(x) \right) \\ \times (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} a_{c_{jj}}(x) \end{array} \right) \quad (\text{II.57})$$

achève aisément la démonstration du théorème.

**Corollaire II.2** [BEN 08b]

*Le processus bouclé (II.36) est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de la matrice  $A_c(x)$ ,*
- ii. les  $(n-1)$  premiers éléments diagonaux de la matrice  $A_c(x)$  sont strictement négatifs,*
- iii.  $a_{c_{in}}(x)a_{c_{ni}}(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n-1$  (II.58)*
- iv. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le polynôme caractéristique instantané  $P_{A_c}(x, \lambda)$  soit strictement positif pour  $\lambda = 0$ :*

$$P_{A_c}(x, 0) \geq \varepsilon \quad (\text{II.59})$$

Démonstration

La démonstration du corollaire II.2 se déduit de celle du théorème II.4, en tenant compte de l'hypothèse iii. qui se traduit par :

$$M(A_c(x)) = A_c(x) \quad (\text{II.60})$$

et en remarquant que :

$$(-1)^n \det M(A_c(x)) = P_{A_c}(x, 0) \quad (\text{II.61})$$

Cette classe de systèmes constitue un cas d'application de la conjecture du linéaire d'Aizerman [GRU 78a].

**Exemple illustrant le cas où  $B(x)$  est quelconque**

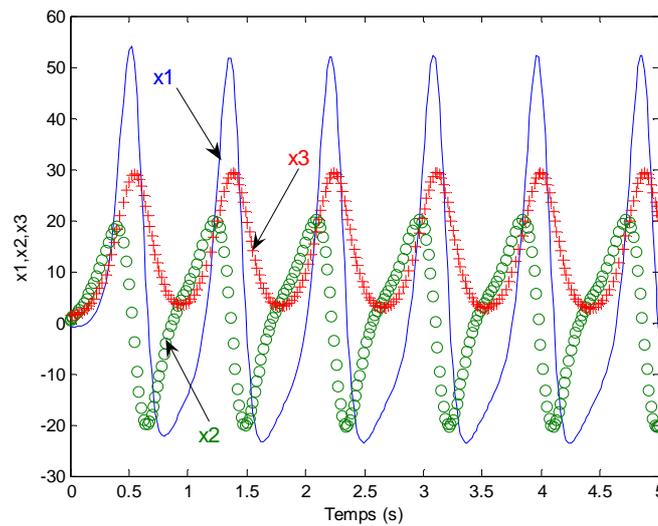
Considérons le système multivariable non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = A_{FFM}(x)x(t) + B(x)u(t)$$

avec :

$$A_{FFM}(\cdot) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & x_2 \\ 0 & -2 & 20 - x_3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 1 & 20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Les évolutions des composantes  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  du vecteur état  $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$  du processus, en régime libre, sont montrées dans la figure II.4.



**Figure II.4.** Evolutions des variables d'état du système en boucle ouverte

Une loi de commande de la forme (II.39) est à déterminer afin de conserver la forme matricielle en flèche vis-à-vis du système corrigé, et ce tout en respectant les conditions suffisantes permettant de conclure à sa stabilité asymptotique.

Soit la matrice gain instantané  $K(x)$  définie par :

$$K(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{13}(\cdot) \\ 0 & 0 & k_{23}(\cdot) \end{bmatrix}$$

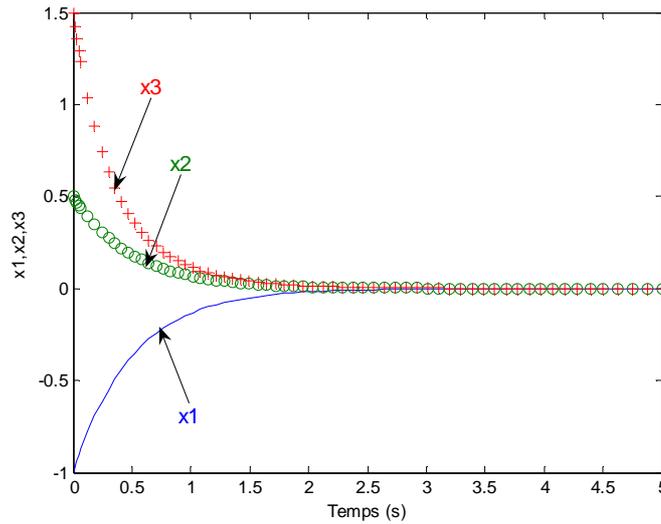
Compte tenu que la correction n'intervient que sur la dernière colonne, comprenant toutes les non linéarités de la matrice du système bouclé, pour laquelle les deux premiers éléments diagonaux sont strictement négatifs, la seule contrainte qui reste à vérifier pour assurer la propriété de stabilité asymptotique du système bouclé relative à (II.45) est la suivante :

$$-1 - 3k_{23}(\cdot) + \left| 0.5x_2(1 - k_{23}(\cdot)) \right| + \left| 2.5(20(1 - k_{23}(\cdot)) - k_{13}(\cdot) - x_3) \right| < 0$$

Il est aisé de constater que le choix suivant des deux paramètres de correction  $k_{13}(\cdot)$  et  $k_{23}(\cdot)$  :

$$\begin{cases} k_{13}(\cdot) = -x_3 \\ k_{23} = 1 \end{cases}$$

permet de vérifier l'inégalité précédente et garantit par suite la stabilisation asymptotique du système considéré, figure II.5.



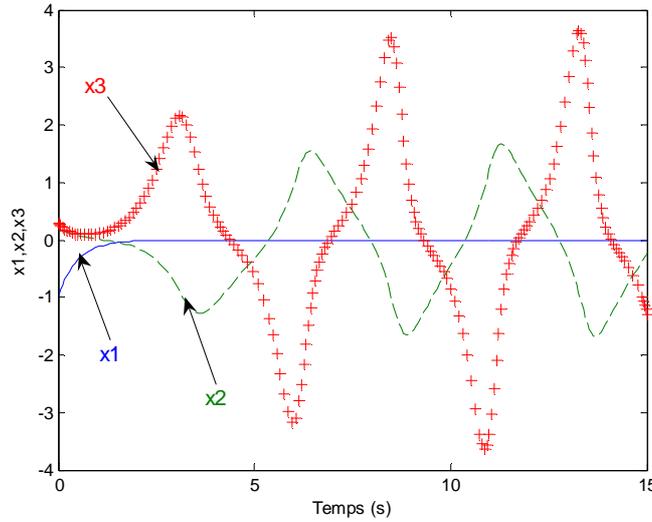
**Figure II.5.** Evolutions des composantes  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  du système corrigé

**Exemple illustrant le cas où  $B(x)$  est de forme diagonale**

Le processus continu non linéaire, étudié ici, est représenté par le doublet  $(A_{FFM}(\cdot), B(\cdot))$  dépendant des composantes du vecteur état  $x_1$  et  $x_2$  de  $x$ ,  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ , de la manière suivante :

$$A_{FFM}(\cdot) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & x_1^2 \\ 0 & -1 & 1 - \sqrt{3 + x_2^2} \\ 1 & 1 & 2(1 - (x_2 - x_1)^2) \end{bmatrix}, \quad B(\cdot) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & |x_2 - x_1| + 1 \end{bmatrix}$$

La figure II.6. montre les évolutions, en régime libre, de ses composantes au cours du temps, dont  $x_2$  et  $x_3$  présentent d'importantes oscillations.



**Figure II.6.** Evolutions des composantes du vecteur état du système en boucle ouverte

Cherchons un vecteur de commande  $u$ , de la forme (II.43),  $u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$ , tel que :

$$\begin{cases} u_i(t) = -k_{ii}(\cdot)x_i(t) - k_{i3}(\cdot)x_3(t) \quad \forall i = 1, 2 \\ u_3(t) = -k_{33}(\cdot)x_3(t) \end{cases}$$

Ce qui conduit à la matrice caractéristique  $A_c(\cdot)$ , en flèche mince, du système bouclé suivante :

$$A_c(\cdot) = \begin{bmatrix} -2 - k_{11}(\cdot) & 0 & x_1^2 - k_{13}(\cdot) \\ 0 & -1 - k_{22}(\cdot) & (1 - \sqrt{3 + x_2^2} - k_{23}(\cdot)) \\ 1 & 1 & (2(1 - (x_2 - x_1)^2) - (|x_2 - x_1| + 1)k_{33}(\cdot)) \end{bmatrix}$$

Les éléments  $k_{ij}(\cdot)$ ,  $\forall i, j = 1, 2, 3$ , pouvant être linéaires ou non linéaires et caractérisant la chaîne de correction, doivent être choisis tels que :

$$\begin{cases} -2 - k_{11}(\cdot) < 0 \\ -1 - k_{22}(\cdot) < 0 \end{cases}$$

inégalités relatives aux conditions (II.44) du théorème II.4 et :

$$\left( \begin{array}{l} 2\left(1 - (x_2 - x_1)^2\right) - (|x_2 - x_1| + 1)k_{33}(\cdot) + \left|(x_1^2 - k_{13}(\cdot))\right|(2 + k_{11}(\cdot))^{-1} \\ + \left|\left(1 - \sqrt{3 + x_2^2} - k_{23}(\cdot)\right)\right|(1 + k_{22}(\cdot))^{-1} \end{array} \right) < 0$$

inégalité relative à la condition (II.45).

Le choix des deux paramètres  $k_{13}(\cdot)$  et  $k_{23}(\cdot)$  vérifiant les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} x_1^2 - k_{13}(\cdot) = 0 \\ 1 - \sqrt{3 + x_2^2} - k_{23}(\cdot) = 0 \end{cases}$$

annule deux termes de l'inégalité précédente, rend la matrice  $A_c(\cdot)$  triangulaire et simplifie, ainsi considérablement, cette inégalité.

Le domaine de stabilité asymptotique du système bouclé peut être alors défini par les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} k_{11} = k_{22} = 1, k_{13}(\cdot) = x_1^2, k_{23}(\cdot) = 1 - \sqrt{3 + x_2^2} \\ 2\left(1 - (x_2 - x_1)^2\right) - (|x_2 - x_1| + 1)k_{33}(\cdot) < 0 \end{cases}$$

$k_{33}(\cdot)$  peut être alors fixé à partir de la condition suivante :

$$k_{33}(\cdot) > \frac{2\left(1 - (x_2 - x_1)^2\right)}{|x_2 - x_1| + 1}$$

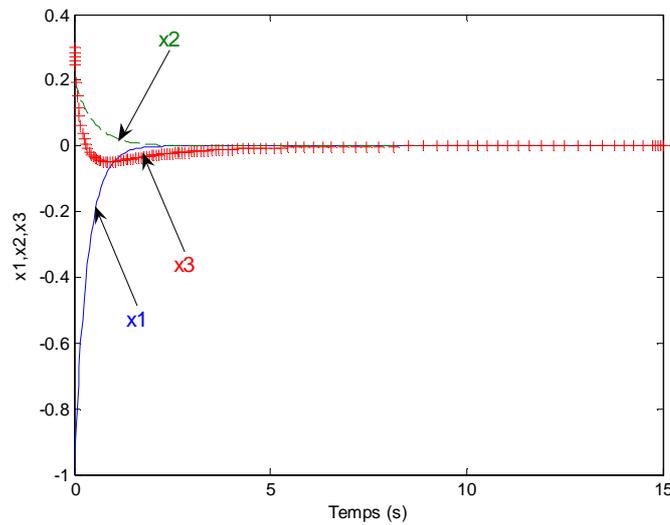
Pour le choix de  $k_{33}(\cdot)$ , il suffit donc d'avoir :

$$k_{33}(\cdot) > 2$$

Soit, par exemple :

$$k_{33} = 2.5$$

Cette loi de commande a, convenablement, stabilisé le système hiérarchisé à deux niveaux étudié comme le montre la figure II.7.



*Figure II.7. Evolutions des variables d'état du système bouclé*

### II.3.3. Cas de systèmes monovariables

Considérons le système dynamique monovariante, défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A_{FFM}(x)x(t) + B(x)u(t) \quad (\text{II.62})$$

La loi de commande stabilisante par retour d'état de la forme :

$$u(t) = -K(x)x(t) \quad (\text{II.63})$$

conduit à la description d'un tel système en boucle fermée comme suit :

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(A_{FFM}(x) - B(x)K(x))}_{A_c(x)} x(t) \quad (\text{II.64})$$

Pour un vecteur ligne  $K(x)$  et un vecteur colonne  $B(x)$ , il vient :

$$B(x)K(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(x) & \dots & k_n(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

et :

$$A_c(.) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(.) \\ -b_1(.)k_1(.) \end{pmatrix} & (-b_1(.)k_2(.)) & \dots & (-b_1(.)k_{n-1}(.)) & \begin{pmatrix} a_{1n}(.) \\ -b_1(.)k_n(.) \end{pmatrix} \\ (-b_2(.)k_1(.)) & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & (-b_{n-2}(.))k_{n-1}(.)) & \vdots \\ (-b_{n-1}(.))k_1(.)) & & & \begin{pmatrix} a_{n-1\ n-1}(.) \\ -b_{n-1}(.))k_{n-1}(.)) \end{pmatrix} & \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{n1}(.) \\ -b_n(.)k_1(.) \end{pmatrix} & \dots & \dots & \begin{pmatrix} a_{n\ n-1}(.) \\ -b_n(.)k_{n-1}(.)) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{nn}(.) \\ -b_n(.)k_n(.) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

Pour que  $A_c(.)$ , représentée par (II.66), soit en flèche mince, il est nécessaire que l'on ait :

$$\begin{cases} b_1(.)k_2(.) = \dots = b_1(.)k_{n-1}(.)) = 0 \\ \dots \\ b_{n-1}(.))k_1(.) = \dots = b_{n-1}(.))k_{n-1}(.)) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

A ce stade, deux cas peuvent se présenter.

### II.3.3.1. Premier cas d'étude

Pour un vecteur de commande  $B(.)$  de la forme :

$$B(.) = [b_1(.) \quad \dots \quad b_{n-1}(.)) \quad b_n(.))]^T \quad (\text{II.68})$$

il s'avère nécessaire que le compensateur soit de la forme suivante [BEN 08a] :

$$K(.) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad k_n(.))] \quad (\text{II.69})$$

La matrice (II.66) devient ainsi de forme en flèche mince :

$$A_c(.) = \begin{bmatrix} a_{11}(.) & 0 & \dots & 0 & a_{1n}(.) - b_1(.)k_n(.) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1\ n-1}(.) & \vdots \\ a_{n1}(.) & \dots & \dots & a_{n\ n-1}(.) & a_{nn}(.) - b_n(.)k_n(.) \end{bmatrix} \quad (\text{II.70})$$

Si les éléments  $a_{ii}(.)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , de la matrice  $A_c(.)$  définie par (II.70) sont strictement négatifs et si on suppose que toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de cette même matrice  $A_c(.)$ , des conditions suffisantes de stabilité asymptotique relativement au système bouclé (II.64) se résument, par conséquent, en la seule contrainte suivante [BEN 08a] :

$$a_{nn}(.) - b_n(.)k_n(.) - \sum_{i=1}^{n-1} \left( |(a_{in}(.) - b_i(.)k_n(.)a_{ni}(.)| \right) a_{ii}^{-1}(.) < 0 \quad (\text{II.71})$$

La mise en œuvre de ce cas d'étude relatif à la première approche de stabilisation de processus monovariabiles hiérarchisés à deux niveaux, pour lesquels le vecteur de commande est de la forme (II.68), semble ne pas être évidente puisqu'on cherche à satisfaire un ensemble de conditions, imposées a priori par l'utilisateur, et ce tout en agissant sur un seul paramètre de réglage.

### *Illustration numérique*

Pour le système dynamique monovariabiles non linéaire, de la forme (II.62), caractérisé par :

$$A_{FFM}(.) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & x_1^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2(1 - x_1^2) \end{bmatrix}, \quad B(.) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

la matrice caractéristique  $A_c(.)$  du système bouclé par une réaction d'état :

$$u(t) = -[0 \quad 0 \quad k_3(.)]x(t)$$

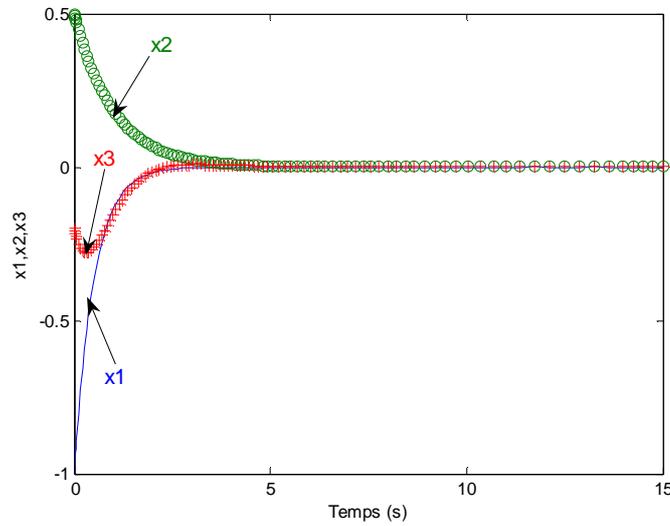
est la suivante :

$$A_c(.) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & x_1^2(1 - k_3(.)) \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2(1 - x_1^2) - 4k_3(.) \end{bmatrix}$$

Ce système bouclé est asymptotiquement stable, si la condition (II.71) est satisfaite, c'est-à-dire :

$$2(1 - x_1^2) - 4k_3(.) + |x_1^2(1 - k_3(.))| < 0$$

Afin de vérifier la contrainte précédente, permettant de conclure à la propriété de stabilité asymptotique globale du système bouclé, en tenant compte de la forme non linéaire du vecteur de commande  $B(.)$ , le choix du seul paramètre de correction  $k_3(.)$  par exemple égal à 1,  $k_3 = 1$ , confère au système corrigé étudié la propriété de stabilité asymptotique, figure II.8.



**Figure II.8.** Evolutions des composantes du vecteur état relativement au système bouclé

### II.3.3.2. Deuxième cas d'étude

Dans cette partie, est traité le cas pour lequel le vecteur de commande  $B$  est de la forme suivante :

$$B = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T \quad (\text{II.72})$$

Il vient :

$$BK(.) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ k_1(.) & \dots & k_{n-1}(.) & k_n(.) \end{bmatrix} \quad (\text{II.73})$$

et :

$$A_c(.) = \begin{bmatrix} a_{11}(.) & & \dots & & a_{1n}(.) \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1\ n-1}(.) & \vdots \\ a_{n1}(.) - k_1(.) & \dots & \dots & a_{n\ n-1}(.) - k_{n-1}(.) & a_{nn}(.) - k_n(.) \end{bmatrix} \quad (\text{II.74})$$

Si les éléments  $a_{ii}(.)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , de la matrice  $A_c(.)$  définie par (II.74) sont strictement négatifs et si on suppose que toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de cette même matrice  $A_c(.)$ , les conditions suffisantes de stabilité asymptotique relativement au système bouclé (II.64) se résument, alors, en la seule contrainte suivante [BEN 08a] :

$$a_{nn}(.) - k_n(.) - \sum_{i=1}^{n-1} \left( |(a_{ni}(.) - k_i(.)) a_{in}(.)| \right) a_{ii}^{-1}(.) < 0 \quad (\text{II.75})$$

### Exemple illustratif

Reprenons l'exemple précédent avec un nouveau vecteur de commande, relativement au deuxième cas de stabilisation de systèmes monovariabiles hiérarchisés à deux niveaux ; soit :

$$A_{FFM}(.) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & x_1^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2(1 - x_1^2) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, pour le vecteur gain instantané  $K(.)$  suivant :

$$K(.) = [k_1(.) \quad k_2(.) \quad k_3(.)]$$

la forme matricielle en flèche est préservée et il ne reste qu'à choisir, judicieusement, les paramètres du réseau correcteur intervenant sur la dernière ligne de la matrice  $A_c(.)$ , caractérisant le système bouclé et laissant ses éléments non constants isolés dans sa dernière colonne :

$$A_c(.) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & x_1^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 - k_1(.) & 1 - k_2(.) & 2(1 - x_1^2) - k_3(.) \end{bmatrix}$$

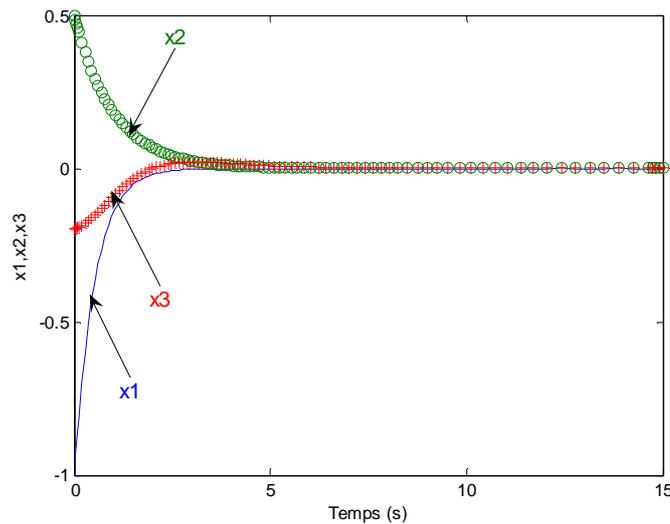
En effet, pour n'importe quelle valeur de  $k_2(\cdot)$ , le système bouclé est asymptotiquement stable si la condition suivante est vraie :

$$2(1 - x_1^2) - k_3(\cdot) + 0.5|x_1^2(2 - k_1(\cdot))| < 0$$

Parmi les différentes solutions possibles permettant de vérifier l'inégalité précédente, nous avons retenu les paramètres, du vecteur gain linéaire, suivants :

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 3 \end{cases}$$

Ce qui nous amène à conclure, aisément, à la stabilisabilité asymptotique du système étudié, comme le montre la figure II.9.



**Figure II.9.** Convergence vers zéro des variables d'état du système corrigé

Les conditions suffisantes de stabilité élaborées pour les systèmes non linéaires hiérarchisés à deux niveaux, aussi bien monovariables que multivariables, sont de mises en œuvre aisées.

## II.4. Stabilisation par retour d'état proposée pour les systèmes à matrice caractéristique instantanée quelconque

### II.4.1. Introduction

Dans cette partie, est présentée une approche permettant la stabilisation de systèmes non linéaires multivariables, par une loi de commande par retour d'état, et la mise sous forme en flèche de la matrice caractéristique du système bouclé, indépendamment de la représentation de départ utilisée pour décrire les systèmes étudiés.

### II.4.2. Systèmes tels que $m \geq n - 2$

Dans cette section, notre contribution est d'une application limitée à une classe spécifique de systèmes dynamiques continus non linéaires, tenant compte du nombre d'entrées en rapport avec l'ordre du système étudié.

#### II.4.2.1. Conditions de mise sous forme en flèche mince de la matrice caractéristique instantanée du système bouclé

Considérons le système non linéaire décrit, dans l'espace d'état, par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = A(.)x(t) + B(.)u(t) \quad (\text{II.76})$$

$x$  et  $u$  étant définis, respectivement, par  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ ,  $A(.)$  la matrice  $n \times n$  caractérisant le système non linéaire étudié et  $B(.)$  la matrice de commande  $n \times m$ .

L'étude de la stabilisabilité du système (II.76) peut être envisagée par le choix d'une loi de commande, par retour d'état, à gains non linéaires, de la forme suivante :

$$u(t) = -K(.)x(t) \quad (\text{II.77})$$

avec :

$$K(.) = \begin{bmatrix} k_{11}(.) & k_{12}(.) & \dots & k_{1n}(.) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1}(.) & k_{m2}(.) & \dots & k_{mn}(.) \end{bmatrix}$$

Il vient la description du système (II.76) ainsi bouclé :

$$\dot{x}(t) = A_c(.)x(t) \quad (\text{II.78})$$

$$A_c(.) = A(.) - B(.)K(.) \quad (\text{II.79})$$

Les éléments  $a_{c_{ij}}(\cdot)$  de la matrice  $A_c(\cdot)$  s'expriment ici, à partir des éléments des matrices  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  et  $K(\cdot)$ , par :

$$a_{c_{ij}}(\cdot) = a_{ij}(\cdot) - \sum_{q=1}^m b_{iq}(\cdot)k_{qj}(\cdot) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (\text{II.80})$$

En imposant les conditions suivantes :

$$a_{ij}(\cdot) - \sum_{q=1}^m b_{iq}(\cdot)k_{qj}(\cdot) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1, i \neq j \quad (\text{II.81})$$

la matrice  $A_c(\cdot)$ , définie par (II.78) et (II.79), est à éléments non nuls isolés dans la diagonale principale, la dernière ligne et la dernière colonne, c'est-à-dire qu'elle devient de forme en flèche mince.

En effet, les égalités (II.81) constituent  $(n-1)(n-2)$  équations à  $(mn)$  inconnues qui sont les paramètres de correction  $k_{qj}$ ,  $\forall q = 1, \dots, m$  et  $\forall j = 1, \dots, n$ .

Une condition nécessaire d'existence d'une solution est donc que le nombre d'équations à résoudre soit inférieur ou égal au nombre d'inconnues à déterminer, soit :

$$m \geq n - 2 \quad (\text{II.82})$$

#### **II.4.2.2. Exploitation des conditions de stabilisabilité proposées pour la détermination de lois de commande – Idée de base**

Par application du critère classique de stabilité de Borne et Gentina [GEN 72], l'étude de la stabilité du système bouclé (II.78) est aisée si la matrice  $A_c(\cdot)$  (II.79) est de forme en flèche mince.

#### **Théorème II.5**

*Le processus défini par (II.76) est stabilisable par la commande définie par (II.77) si la matrice caractéristique instantanée  $A_c(\cdot)$ , définie par (II.78) et (II.79), est telle que :*

- i. la condition (II.81) est vérifiée,*
- ii. les éléments non constants sont isolés dans une seule rangée,*
- iii. les éléments diagonaux sont tels que :*

$$a_{ii}(\cdot) - \sum_{q=1}^m b_{iq}(\cdot)k_{qi}(\cdot) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{II.83})$$

iv. il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que :

$$\left( \begin{array}{c} \left( a_{nn}(\cdot) \right. \\ \left. - \sum_{q=1}^m b_{nq}(\cdot)k_{qn}(\cdot) \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \left( \begin{array}{c} a_{ni}(\cdot) \\ - \sum_{q=1}^m b_{nq}(\cdot)k_{qi}(\cdot) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} a_{in}(\cdot) \\ - \sum_{q=1}^m b_{iq}(\cdot)k_{qn}(\cdot) \end{array} \right) \right] \\ \times \left( \begin{array}{c} a_{ii}(\cdot) \\ - \sum_{q=1}^m b_{iq}(\cdot)k_{qi}(\cdot) \end{array} \right)^{-1} \end{array} \right) \leq -\varepsilon \quad (\text{II.84})$$

### Démonstration

La démonstration du théorème II.5 [HAM 09a], similaire à celle du théorème II.4, concerne ici la matrice caractéristique instantanée du système bouclé  $A_c(\cdot)$ , dans laquelle les éléments sont explicités en fonction de ceux des matrices  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  et  $K(\cdot)$ .

### *Application littérale : Cas d'un système multivariable du 3<sup>ème</sup> ordre*

Pour le système multivariable du troisième ordre, caractérisé par le doublet  $(A(\cdot), B(\cdot))$  suivant :

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} a_{11}(\cdot) & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot) & a_{23}(\cdot) \\ a_{31}(\cdot) & a_{32}(\cdot) & a_{33}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad B(\cdot) = \begin{bmatrix} b_{11}(\cdot) & b_{12}(\cdot) & b_{13}(\cdot) \\ b_{21}(\cdot) & b_{22}(\cdot) & b_{23}(\cdot) \\ b_{31}(\cdot) & b_{32}(\cdot) & b_{33}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II.85})$$

la loi de commande de la forme (II.77), telle que :

$$K(\cdot) = \begin{bmatrix} k_{11}(\cdot) & k_{12}(\cdot) & k_{13}(\cdot) \\ k_{21}(\cdot) & k_{22}(\cdot) & k_{23}(\cdot) \\ k_{31}(\cdot) & k_{32}(\cdot) & k_{33}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II.86})$$

conduit à la matrice caractéristique instantanée  $A_c(\cdot)$  du système bouclé, donnée par (II.87), [HAM 09a] :

$$A_c(.) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(.) \\ -b_{11}(.)k_{11}(.) \\ -b_{12}(.)k_{21}(.) \\ -b_{13}(.)k_{31}(.) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}(.) \\ -b_{11}(.)k_{12}(.) \\ -b_{12}(.)k_{22}(.) \\ -b_{13}(.)k_{32}(.) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13}(.) \\ -b_{11}(.)k_{13}(.) \\ -b_{12}(.)k_{23}(.) \\ -b_{13}(.)k_{33}(.) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21}(.) \\ -b_{21}(.)k_{11}(.) \\ -b_{22}(.)k_{21}(.) \\ -b_{23}(.)k_{31}(.) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{22}(.) \\ -b_{21}(.)k_{12}(.) \\ -b_{22}(.)k_{22}(.) \\ -b_{23}(.)k_{32}(.) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{23}(.) \\ -b_{21}(.)k_{13}(.) \\ -b_{22}(.)k_{23}(.) \\ -b_{23}(.)k_{33}(.) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{31}(.) \\ -b_{31}(.)k_{11}(.) \\ -b_{32}(.)k_{21}(.) \\ -b_{33}(.)k_{31}(.) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{32}(.) \\ -b_{31}(.)k_{12}(.) \\ -b_{32}(.)k_{22}(.) \\ -b_{33}(.)k_{32}(.) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{33}(.) \\ -b_{31}(.)k_{13}(.) \\ -b_{32}(.)k_{23}(.) \\ -b_{33}(.)k_{33}(.) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{II.87})$$

Pour que celle-ci soit de forme en flèche mince, il est nécessaire que les éléments  $k_{11}(.)$ ,  $k_{12}(.)$ ,  $k_{21}(.)$ ,  $k_{22}(.)$ ,  $k_{31}(.)$  et  $k_{32}(.)$  de la matrice (II.87) soient tels que :

$$\begin{cases} a_{12}(.) - b_{11}(.)k_{12}(.) - b_{12}(.)k_{22}(.) - b_{13}(.)k_{32}(.) = 0 \\ a_{21}(.) - b_{21}(.)k_{11}(.) - b_{22}(.)k_{21}(.) - b_{23}(.)k_{31}(.) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.88})$$

Si de plus les conditions suivantes sont vérifiées :

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de la matrice  $A_c(.)$ ,
- ii. les deux premiers éléments diagonaux de la matrice  $A_c(.)$  sont tels que :

$$\begin{cases} a_{c_{11}}(.) < 0 \\ a_{c_{22}}(.) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.89})$$

$$\text{iii. } a_{c_{33}}(.) - \left| a_{c_{31}}(.)a_{c_{13}}(.) \right| a_{c_{11}}^{-1}(.) - \left| a_{c_{32}}(.)a_{c_{23}}(.) \right| a_{c_{22}}^{-1}(.) < 0 \quad (\text{II.90})$$

le système de matrice caractéristique instantanée (II.87) est alors asymptotiquement stable.

Ainsi, il ne reste qu'à choisir, convenablement, les composantes de la matrice gain instantané  $K(.)$ ,  $k_{13}(.)$ ,  $k_{23}(.)$  et  $k_{33}(.)$  de telle sorte que la loi de commande proposée soit stabilisante ; c'est-à-dire que, l'inégalité précédente satisfaite et ce en remplaçant ses termes en fonction des éléments des matrices  $A(.)$ ,  $B(.)$  et  $K(.)$ .

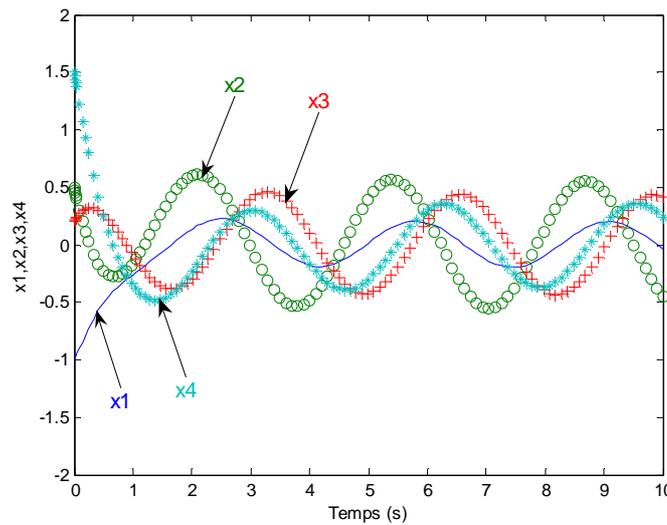
Pour des matrices instantanées  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  données, la méthode proposée simplifie, grandement, la synthèse d'une commande stabilisante, les gains de la matrice de commande devant vérifier les inégalités (II.88-II.90), comme le montre l'exemple numérique suivant.

**Exemple numérique : Cas d'un système multivariable**

Le système non linéaire multivariable du quatrième ordre, décrit par le doublet suivant :

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -x_1^2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

présente les évolutions de ses variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$  en boucle ouverte consignées dans la figure II.10.



**Figure II.10.** Evolutions des variables du système en boucle ouverte

La loi de commande, par retour d'état, de la forme (II.77) conduit à une matrice caractéristique instantanée  $A_c(\cdot)$  de forme en flèche, si on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - k_{12}(\cdot) = 0 \\ -k_{13}(\cdot) = 0 \\ -k_{21}(\cdot) = 0 \\ -2 - k_{23}(\cdot) = 0 \\ 1 - 2k_{11}(\cdot) + k_{21}(\cdot) = 0 \\ 1 - 2k_{12}(\cdot) + k_{22}(\cdot) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_{12} = 1 \\ k_{13} = 0 \\ k_{21} = 0 \\ k_{23} = -2 \\ k_{11} = 0.5 \\ k_{22} = 1 \end{array} \right.$$

Ces choix impliquent que :

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans la dernière colonne de la matrice  $A_c(\cdot)$ ,
- ii. les trois premiers éléments diagonaux de la matrice  $A_c(\cdot)$  sont strictement négatifs.

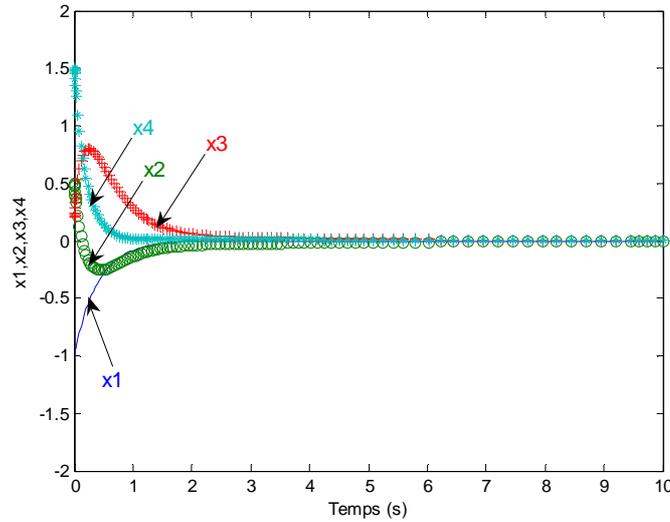
Le système étudié est, par conséquent, asymptotiquement stable si, de plus, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$(k_{14}(\cdot) - k_{24}(\cdot)) + 1.4 \left| (x_1^2 + k_{14}(\cdot)) \right| + 0.5 \left| (1 - 2k_{14}(\cdot) + k_{24}(\cdot)) \right| \leq -\varepsilon$$

Les choix de  $k_{14}(\cdot)$ , annulant la première valeur absolue de l'inégalité précédente, et de  $k_{24}(\cdot) > 1$ , conduisent à la matrice gain suivante :

$$K(\cdot) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & -x_1^2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilisant le système étudié, figure II.11.



**Figure II.11.** Evolutions des variables d'état du système bouclé

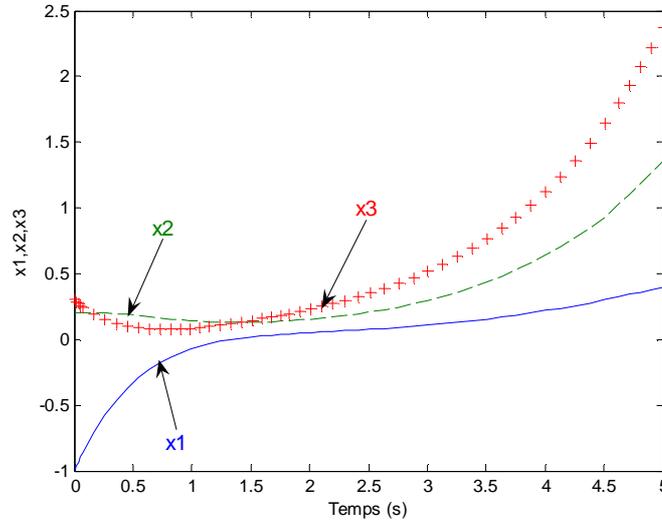
Pour le système numérique étudié, un ensemble de lois de commande stabilisante est envisageable. Le choix de la commande peut être fixé par la recherche de vérification d'autres performances pour le système bouclé, telles que l'amélioration du coefficient d'amortissement ou du temps de réponse.

**Application numérique : Cas d'un système monovariante**

Le système non linéaire monovariante du troisième ordre, décrit par le doublet suivant :

$$A(.) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -x_1^2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

présente les évolutions de ses variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , en régime libre, dans la figure II.12.



**Figure II.12.** Evolutions des variables d'état du système en boucle ouverte

La loi de commande, par retour d'état, de la forme (II.77) conduit à la matrice caractéristique instantanée suivante :

$$A_c(.) = \begin{bmatrix} -2 - k_1(.) & 1 - k_2(.) & -x_1^2 - k_3(.) \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 - 2k_1(.) & 1 - 2k_2(.) & -2k_3(.) \end{bmatrix}$$

Cette matrice peut être mise sous forme en flèche, si  $k_2(.)$  est choisi constant et égal à 1.

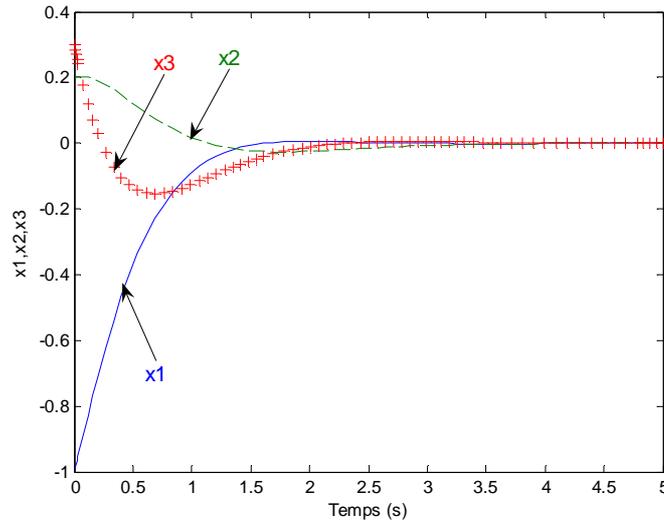
Le système étudié est alors asymptotiquement stable si, de plus, les deux premiers éléments de la diagonale principale sont négatifs, c'est-à-dire que,  $k_1(.) > -2$  et s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$-(2k_3(.)) + 1 - \left| (1 - 2k_1(.))(-x_1^2 - k_3(.)) \right| (-2 - k_1(.))^{-1} \leq -\varepsilon$$

Parmi les lois de commande stabilisante, le vecteur gain  $K$  à éléments constants, défini par :

$$K = [0 \quad 1 \quad 1]$$

suffit pour la stabilisation du système étudié, figure II.13.



**Figure II.13.** Evolutions des variables d'état du système bouclé

**Remarque 1**

Les résultats précédents, bien adaptés pour les systèmes multivariables, ne peuvent être appliqués directement en monovariante que pour les systèmes d'ordre au plus égal à trois, et ce tout en prenant en considération la condition nécessaire (II.82) précitée.

En effet, la matrice de forme en flèche peut être, avantageusement, utilisée d'une façon différente pour les systèmes non linéaires forcés, décrits par une équation différentielle scalaire de la forme :

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(.)y^{(i)}(t) = u(t) \tag{II.91}$$

$u$  et  $y$  étant, respectivement, l'entrée et la sortie,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , et  $a_i(.)$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$ , des coefficients pouvant être non linéaires.

Pour une loi de commande par retour d'état définie par :

$$u(t) = -K(.)x(t) \tag{II.92}$$

avec :

$$K(.) = [k_0(.) \quad k_1(.) \quad \dots \quad k_{n-1}(.)]$$

où  $x$  représente le vecteur d'état,  $x = [y \quad y' \quad \dots \quad y^{(n-1)}]^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , le système bouclé peut être décrit par [BEN 78, BEN 82, BOR 07] :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c(\cdot)x(t) \\ A_c(\cdot) &= \begin{bmatrix} \alpha'_1 & & & \beta'_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha'_{n-1} & \beta'_{n-1} \\ \gamma'_1(\cdot) & \dots & \gamma'_{n-1}(\cdot) & \gamma'_n(\cdot) \end{bmatrix} \\ \beta'_i &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (\alpha'_i - \alpha'_j)^{-1} \\ \gamma'_i(\cdot) &= -P_{A_c}(\cdot, \alpha'_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \gamma'_n(\cdot) &= -(a_{n-1}(\cdot) + k_{n-1}(\cdot)) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

les  $\alpha'_i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ , étant des paramètres constants, distincts et pouvant être choisis arbitrairement.

Soit  $P_{A_c}(\cdot, \lambda)$  le polynôme caractéristique instantané de la matrice  $A_c(\cdot)$  [BEN 82]. On a :

$$P_{A_c}(\cdot, \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i(\cdot) + k_i(\cdot)) \lambda^i \quad (\text{II.94})$$

Compte tenu que les éléments non constants de la matrice sont isolés dans sa dernière ligne, il est démontré dans [BEN 82] que l'état d'équilibre associé au système non linéaire (II.93) est asymptotiquement stable si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i.  $\alpha'_i < 0$ ,  $\alpha'_i \neq \alpha'_j$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n-1$ ,  $i \neq j$  (II.95)
- ii. il existe un petit paramètre strictement positif  $\varepsilon$ , tel que :

$$\gamma'_n(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} |\beta'_i \gamma'_i(\cdot)| \alpha_i'^{-1} \leq -\varepsilon \quad (\text{II.96})$$

### Remarque 2

Dans le cas spécifique, où les  $(n-1)$  produits  $\beta'_i \gamma'_i(\cdot)$  sont non négatifs :

$$\beta'_i \gamma'_i(\cdot) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{II.97})$$

la vérification de la condition (II.96) revient à vérifier que la valeur du polynôme caractéristique instantané de la matrice  $A_c(\cdot)$  pour  $\lambda = 0$ , est positive :

$$P_{A_c}(\cdot, 0) > 0 \quad (\text{II.98})$$

Ce qui constitue un cas de vérification de la conjecture du linéaire d'Aizerman [BEN 80, GRU 78a].

### II.4.3. Conclusion

Des conditions de stabilisabilité simples à tester ont été présentées aussi bien pour les systèmes continus non linéaires monovariabiles que multivariabiles.

Les résultats obtenus concernent la classe des systèmes non linéaires et tiennent compte du nombre d'entrées et de l'ordre du système. Lorsque la condition de dépendance n'est pas vérifiée, il est nécessaire de rechercher d'autres conditions pratiques de stabilité. C'est dans cet esprit que nous envisageons de poursuivre l'étude des systèmes continus non linéaires de grande dimension.

## II.5. Commandes stabilisantes par retour de sortie proposées

### II.5.1. Introduction

Le concept de la stabilisabilité est fortement lié au concept de l'existence d'une loi de commande pour un système donné qui peut rendre le système en boucle fermée asymptotiquement stable.

Considérons le cas de systèmes décrits dans l'espace d'état par (II.14) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \\ y(t) = C(x)x(t) \end{cases}$$

tels que seul le vecteur de sortie  $y$  du système est mesuré.

Il s'agit, dans cette partie, d'adapter les conditions de stabilisabilité, élaborées précédemment, à la recherche de lois de commande stabilisante par réaction de sortie, figure II.14.

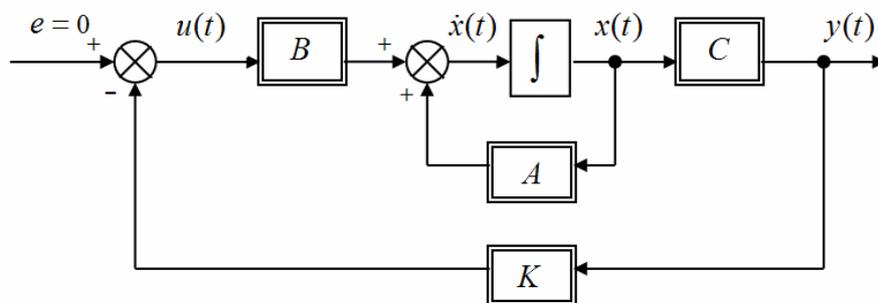


Figure II.14. Schéma de principe de la compensation par réaction de sortie

### II.5.2. Cas des systèmes hiérarchisés à deux niveaux

Dans cette partie, le problème de la stabilisation de systèmes hiérarchisés à deux niveaux est résolu par la mise en œuvre d'une loi de commande par retour de sortie, et ce pour les systèmes ayant des matrices de commande et d'observation de formes quelconques.

Considérons le système hiérarchisé à deux niveaux suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{FFM}(x)x(t) + B(x)u(t) \\ y(t) = C(x)x(t) \end{cases} \quad (\text{II.99})$$

avec :

$$C(.) = \begin{bmatrix} c_{11}(.) & \dots & c_{1n}(.) \\ c_{21}(.) & \dots & c_{2n}(.) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1}(.) & \dots & c_{ln}(.) \end{bmatrix}$$

$x$  étant le vecteur état,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  le vecteur de commande,  $u \in \mathbb{R}^m$ , et  $y$  le vecteur de sortie,  $y \in \mathbb{R}^l$ ,  $y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_l]^T$ .

La réaction de sortie de la forme :

$$u(t) = -K(x)y(t) \quad (\text{II.100})$$

avec :

$$K(.) = \begin{bmatrix} k_{11}(.) & k_{12}(.) & \dots & k_{1l}(.) \\ k_{21}(.) & k_{22}(.) & \dots & k_{2l}(.) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1}(.) & k_{m2}(.) & \dots & k_{ml}(.) \end{bmatrix}$$

est à déterminer de telle sorte que le système bouclé suivant :

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(A_{FFM}(.) - B(.)K(.)C(.))}_{A_c(.)} x(t) \quad (\text{II.101})$$

décrit par une matrice  $A_c(.)$  de forme en flèche mince, soit stable.

Il est nécessaire, dans ce cas, que les éléments, n'appartenant pas à la diagonale principale, à la dernière ligne et à la dernière colonne, soient nuls, c'est-à-dire que :

$$\sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{sj}(\cdot) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1, i \neq j \quad (\text{II.102})$$

Il est clair que l'existence d'une réaction de sortie, conditionnant convenablement la représentation, dépend du produit  $ml$  et de  $n$  comme suit :

$$ml \geq (n-1)(n-2) \quad (\text{II.103})$$

Lorsque cette condition est vérifiée, la matrice caractérisant le système bouclé peut être mise sous forme en flèche mince.

Il ne reste, donc, qu'à satisfaire les deux conditions suivantes pour conclure à la propriété de stabilité asymptotique du système ainsi bouclé :

- i. les  $(n-1)$  premiers éléments diagonaux de la matrice  $A_c(\cdot)$  de forme en flèche mince sont tels que :

$$a_{ii}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{si}(\cdot) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{II.104})$$

- ii. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$a_{nn}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{nr}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{sn}(\cdot) - \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \left( a_{ni}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{nr}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{si}(\cdot) \right) \times \left( a_{in}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{sn}(\cdot) \right) \right) \right] \leq -\varepsilon \quad (\text{II.105})$$

$$\left[ \left( a_{ii}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{si}(\cdot) \right)^{-1} \right]$$

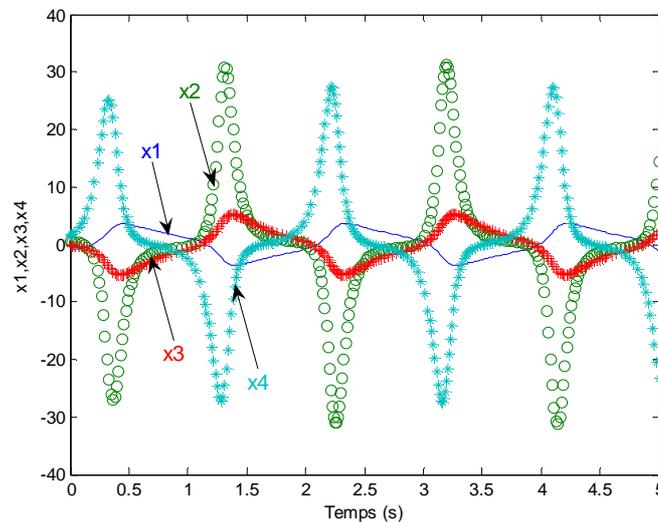
### Exemple numérique

L'approche de commande proposée est mise en œuvre pour le système non linéaire (II.99), caractérisé par le triplet  $(A_{FFM}(\cdot), B(\cdot), C)$  suivant :

$$A_{FFM}(\cdot) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x_1^2 & 0 & -0.5\sqrt{1+x_4^2} \\ 0 & 0 & -3 & -1.5 \\ -2 & 0 & 0 & 2(5-x_1^2) \end{bmatrix}, B(\cdot) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -x_1 & -2 & x_1 \\ 0.5 & (15.5 - 2.67x_1^2) & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.25 \\ 1.5 & -1 & 1 & -0.1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Les évolutions des composantes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$  du vecteur état  $x$  du système, en boucle ouverte, sont présentées dans la figure II.15.



**Figure II.15.** Evolutions des variables d'état du système non bouclé

Ainsi, par application d'une loi de commande par réaction de sortie, de la forme (II.100), le système bouclé (II.101) est caractérisé par une matrice  $A_c(\cdot)$ ,  $A_c(\cdot) = \{a_{c_{ij}}(\cdot)\}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, 4$ , telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_{c_{11}}(.) = -2 - 1.5(k_{12}(.)) - k_{22}(.)) - k_{32}(.)) - 3(k_{13}(.)) - k_{23}(.)) - k_{33}(.)) \\
 a_{c_{12}}(.) = k_{12}(.)) - k_{22}(.)) - k_{32}(.)) \\
 a_{c_{13}}(.) = -k_{12}(.)) + k_{22}(.)) + k_{32}(.)) - 2(k_{13}(.)) - k_{23}(.)) - k_{33}(.)) \\
 a_{c_{14}}(.) = 1 + 0.25(k_{11}(.)) - k_{21}(.)) - k_{31}(.)) + 0.1(k_{12}(.)) - k_{22}(.)) - k_{32}(.)) \\
 a_{c_{21}}(.) = -1.5(-4k_{12}(.)) + k_{32}(.)) - 3(-4k_{13}(.)) + k_{33}(.)) \\
 a_{c_{22}}(.) = -x_1^2 - 4k_{12}(.)) + k_{32}(.)) \\
 a_{c_{23}}(.) = 4k_{12}(.)) - k_{32}(.)) + 8k_{13}(.)) - 2k_{33}(.)) \\
 a_{c_{24}}(.) = -0.5\sqrt{1+x_4^2} + 0.25(-4k_{11}(.)) + k_{31}(.)) + 0.1(-4k_{12}(.)) + k_{32}(.)) \\
 a_{c_{31}}(.) = -1.5(-x_1k_{12}(.)) - 2k_{22}(.)) + x_1k_{32}(.)) - 3(-x_1k_{13}(.)) - 2k_{23}(.)) + x_1k_{33}(.)) \\
 a_{c_{32}}(.) = -x_1k_{12}(.)) - 2k_{22}(.)) + x_1k_{32}(.)) \\
 a_{c_{33}}(.) = -3 + x_1k_{12}(.)) + 2k_{22}(.)) - x_1k_{32}(.)) - 2(-x_1k_{13}(.)) - 2k_{23}(.)) + x_1k_{33}(.)) \\
 a_{c_{34}}(.) = -1.5 + 0.25(-x_1k_{11}(.)) - 2k_{21}(.)) + x_1k_{31}(.)) + 0.1(-x_1k_{12}(.)) - 2k_{22}(.)) + x_1k_{32}(.)) \\
 a_{c_{41}}(.) = -2 - 1.5(0.5k_{12}(.)) + (15.5 - 2.67x_1^2)k_{22}(.)) - 0.5k_{32}(.)) \\
 \quad - 3(0.5k_{13}(.)) + (15.5 - 2.67x_1^2)k_{23}(.)) - 0.5k_{33}(.)) \\
 a_{c_{42}}(.) = 0.5k_{12}(.)) + (15.5 - 2.67x_1^2)k_{22}(.)) - 0.5k_{32}(.)) \\
 a_{c_{43}}(.) = -0.5k_{12}(.)) - (15.5 - 2.67x_1^2)k_{22}(.)) + 0.5k_{32}(.)) \\
 \quad - 2(0.5k_{13}(.)) + (15.5 - 2.67x_1^2)k_{23}(.)) - 0.5k_{33}(.)) \\
 a_{c_{44}}(.) = 2(5 - x_1^2) + 0.25(0.5k_{11}(.)) + (15.5 - 2.67x_1^2)k_{21}(.)) - 0.5k_{31}(.)) \\
 \quad + 0.1(0.5k_{12}(.)) + (15.5 - 2.67x_1^2)k_{22}(.)) - 0.5k_{32}(.))
 \end{array} \right.$$

Pour que la matrice caractérisant le système corrigé soit de forme en flèche mince, il s'avère indispensable que les contraintes suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases} k_{12}(\cdot) - k_{22}(\cdot) - k_{32}(\cdot) = 0 \\ -k_{12}(\cdot) + k_{22}(\cdot) + k_{32}(\cdot) - 2(k_{13}(\cdot) - k_{23}(\cdot) - k_{33}(\cdot)) = 0 \\ -1.5(-4k_{12}(\cdot) + k_{32}(\cdot)) - 3(-4k_{13}(\cdot) + k_{33}(\cdot)) = 0 \\ 4k_{12}(\cdot) - k_{32}(\cdot) + 8k_{13}(\cdot) - 2k_{33}(\cdot) = 0 \\ -1.5(-x_1k_{12}(\cdot) - 2k_{22}(\cdot) + x_1k_{32}(\cdot)) - 3(-x_1k_{13}(\cdot) - 2k_{23}(\cdot) + x_1k_{33}(\cdot)) = 0 \\ -x_1k_{12}(\cdot) - 2k_{22}(\cdot) + x_1k_{32}(\cdot) = 0 \end{cases}$$

C'est un système de six équations à six inconnues, qui est vérifié pour les gains de commande suivants :

$$\begin{cases} k_{12} = 2 \\ k_{13} = -1 \\ k_{22} = 0 \\ k_{23} = 0 \\ k_{32} = 2 \\ k_{33} = -1 \end{cases}$$

Afin de garantir la convergence vers zéro des trajectoires suivies par les composantes du vecteur état après bouclage, il suffit de vérifier que toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de la matrice  $A_c(\cdot)$  et que les conditions (II.104) et (II.105) sont satisfaites.

En effet, la condition (II.104) est satisfaite, et ce en remplaçant les paramètres  $k_{12}(\cdot)$ ,  $k_{13}(\cdot)$ ,  $k_{22}(\cdot)$ ,  $k_{23}(\cdot)$ ,  $k_{32}(\cdot)$  et  $k_{33}(\cdot)$  par leurs valeurs définies ci-dessus, puisque :

$$\begin{cases} -2 - 1.5(k_{12}(\cdot) - k_{22}(\cdot) - k_{32}(\cdot)) - 3(k_{13}(\cdot) - k_{23}(\cdot) - k_{33}(\cdot)) = -2 < 0 \\ -x_1^2 - 4k_{12}(\cdot) + k_{32}(\cdot) = -x_1^2 - 6 < 0 \\ -3 + x_1k_{12}(\cdot) + 2k_{22}(\cdot) - x_1k_{32}(\cdot) - 2(-x_1k_{13}(\cdot) - 2k_{23}(\cdot) + x_1k_{33}(\cdot)) = -3 < 0 \end{cases}$$

Il ne reste, à ce niveau, qu'à vérifier que la condition traduisant (II.105), soit respectée pour cet exemple, soit :

$$2(5 - x_1^2) + 0.25(0.5k_{11}(\cdot) + (15.5 - 2.67x_1^2)k_{21}(\cdot) - 0.5k_{31}(\cdot)) < 0$$

Maintenant, pour s'assurer que les non linéarités ne sont présentes qu'au niveau de la deuxième ligne de la matrice  $A_c(\cdot)$ , il suffit de choisir le gain  $k_{21}(\cdot)$  tel que :

$$k_{21} = 3$$

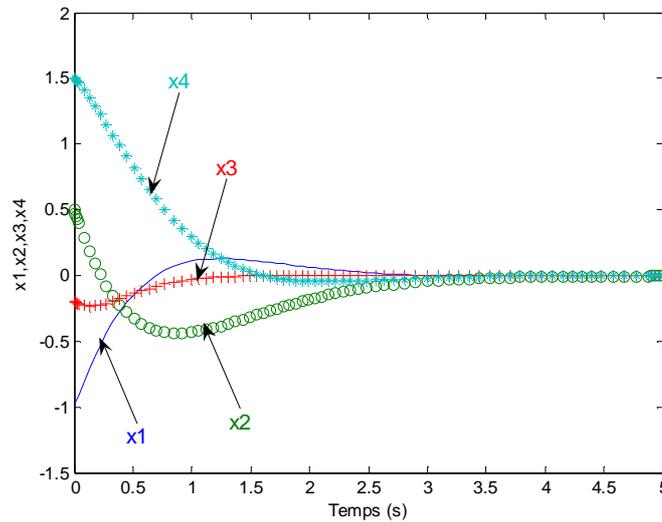
ce qui simplifie l'inégalité précédente qui devient :

$$10 + 0.25(0.5k_{11}(\cdot) + 46.5 - 0.5k_{31}(\cdot)) < 0 \Rightarrow k_{11}(\cdot) < k_{31}(\cdot) - 173$$

Il vient, alors, la matrice  $K$  :

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 175 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

qui confère au système corrigé un comportement asymptotique vers l'origine, figure II.16.



*Figure II.16. Evolutions des variables d'état du système bouclé*

Quelques ajustements, pouvant être apportés à la chaîne de correction par la modification des paramètres de réglage, peuvent améliorer les performances ainsi obtenues.

### II.5.3. Cas des systèmes caractérisés par une matrice quelconque

La section suivante traite du problème de conception de lois de commande par retour de sortie relativement aux systèmes décrits dans l'espace d'état par une matrice pleine.

Les mêmes contraintes et objectifs, que dans le cas du retour d'état, sont ici considérés pour les systèmes continus non linéaires (II.14) étudiés :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \\ y(t) = C(x)x(t) \end{cases}$$

$A(x)$  étant une matrice de forme quelconque, pouvant être pleine.

Doté d'une loi de commande par retour de sortie de la forme (II.100), la matrice caractéristique instantanée de tels systèmes bouclés :

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(A(\cdot) - B(\cdot)K(\cdot)C(\cdot))}_{A_c(\cdot)} x(t) \quad (\text{II.106})$$

est de forme en flèche mince, si on a :

$$a_{ij}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{sj}(\cdot) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1 \text{ pour } i \neq j \quad (\text{II.107})$$

L'existence d'une loi de commande vérifiant (II.107) est là encore conditionnée par (II.103).

### ***Théorème II.6***

*Le système (II.14) est asymptotiquement stabilisable par la loi de commande (II.100) si on a :*

- i. les conditions (II.103) et (II.107) sont vérifiées,*
- ii. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de la matrice  $A_c(\cdot)$ ,*
- iii. les  $(n-1)$  premiers éléments diagonaux de la matrice  $A_c(\cdot)$  sont strictement négatifs,*
- iv. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :*

$$\begin{aligned} & a_{nm}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{nr}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{sn}(\cdot) \\ & - \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \left( a_{ni}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{nr}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{si}(\cdot) \right) \right) \right. \\ & \quad \times \left( a_{in}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{sn}(\cdot) \right) \\ & \quad \left. \times \left( a_{ii}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{si}(\cdot) \right)^{-1} \right] \leq -\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II.108})$$

Démonstration

La démonstration du théorème II.6, similaire à celle du théorème II.4, concerne ici la matrice caractéristique instantanée du système bouclé  $A_c(\cdot)$ , pour laquelle les éléments sont explicités en fonction de ceux des matrices  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  et  $K(\cdot)$ .

**Corollaire II.3**

Le système (II.14) est asymptotiquement stabilisable par la loi de commande (II.100), si on a :

- i. les conditions (II.103) et (II.107) sont vérifiées,
- ii. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de la matrice  $A_c(\cdot)$ ,
- iii. les  $(n-1)$  premiers éléments diagonaux de la matrice  $A_c(\cdot)$  sont strictement négatifs,
- iv. les produits des éléments hors diagonaux de la matrice  $A_c(\cdot)$  sont tels que :

$$\left( \begin{array}{l} \left( a_{ni}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{nr}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{si}(\cdot) \right) \\ \times \left( a_{in}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{sn}(\cdot) \right) \end{array} \right) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{II.109})$$

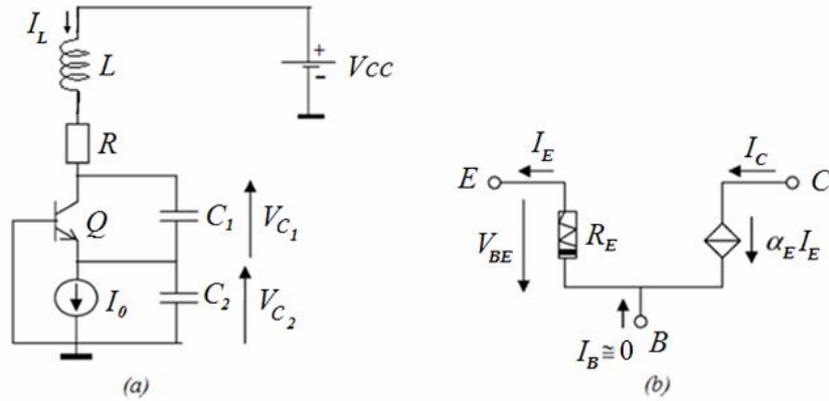
- v. il existe  $\varepsilon > 0$  pour lequel, on a :

$$P_{A_c}(\cdot, 0) \geq \varepsilon \quad (\text{II.110})$$

**Application à la commande d'un oscillateur de Colpitts**

Tout système oscillant est composé d'un élément passif qui dissipe de l'énergie : le résonateur, et d'un élément actif qui apporte de l'énergie : l'amplificateur. Dans le cas d'un oscillateur électronique le résonateur est en général un filtre et l'amplificateur est souvent un amplificateur opérationnel ou bien un transistor.

Les oscillateurs constitués de transistors à effet de champs ou de transistors bipolaires et d'un circuit résonnant  $LC$  sont souvent utilisés pour fonctionner sur des plages de fréquences de quelques  $KHz$  à quelques centaines de  $MHz$ . L'oscillateur de Colpitts est l'oscillateur  $LC$  le plus utilisé à cet effet, il est à la base d'un circuit électrique dont la plus simple configuration électronique est présentée au niveau de la figure II.17.(a). [FOT 05]. Le circuit met en œuvre un transistor à jonction bipolaire (du type NPN), pour lequel le modèle simplifié consiste en une résistance non linéaire, élément clé de ce modèle et responsable du comportement imprévisible de l'oscillateur, et une source de courant, figure II.17.(b). [FOT 05].



**Figure II.17.** Circuit électrique de l'oscillateur de Colpitts :  
 (a) Réalisation physique de l'oscillateur de Colpitts  
 (b) Le modèle du transistor à jonction bipolaire

L'amplificateur est constitué d'un transistor bipolaire monté en configuration base commune. Le circuit résonateur, constitué de l'inductance  $L$  et des capacités  $C_1$  et  $C_2$ , est connecté entre le collecteur et la base du transistor. Une fraction de la tension du circuit  $LC$  est retournée à l'émetteur. Ce retour est obtenu par une division de tension capacitive. La polarisation du transistor est fournie par la source de courant  $I_0$ .

Il est à noter que les mesures expérimentales effectuées sur cet oscillateur de Colpitts ont montré que le courant base  $I_B$  est nettement inférieur au courant émetteur  $I_E$  du transistor  $Q$  ; ce qui nous amène à supposer, dans la suite de cette étude que  $I_B \cong 0$ .

Compte tenu du modèle du transistor à jonction bipolaire mis en œuvre pour la réalisation physique de l'oscillateur de Colpitts, présenté à la figure II.17.(b)., le circuit décrit dans la figure II.17.(a). peut se mettre en équations, en utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds, afin d'obtenir le système d'équations mathématiques donné en (II.111) [FOT 05, MAG 99] :

$$\begin{cases} C_1 \dot{V}_{C_1}(t) = -\alpha_E I_E(t) + I_L(t) \\ C_2 \dot{V}_{C_2}(t) = I_L(t) - I_0 \\ L \dot{I}_L(t) = -V_{C_1}(t) - V_{C_2}(t) - R I_L(t) + V_{cc} \end{cases}$$

où  $\alpha_E$  est le gain en courant du montage base commune considéré,  $\alpha_E = 1$  (puisque  $I_B \cong 0$ ). La caractéristique tension – courant ( $V - I$ ) de la résistance non linéaire  $R_E$  est définie par :

$$I_E(t) = I_S \left( \exp\left(\frac{eV_{BE}(t)}{K_B T}\right) - 1 \right)$$

avec  $e$  la charge élémentaire,  $K_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue. A la température ambiante, le voltage thermique  $V_T = \frac{K_B T}{e}$  est approximativement égal à  $26 \text{ mV}$ .

Du fait que  $V_{BE}(t) = -V_{C_2}(t)$ , il vient :

$$I_E(t) = I_S \left( \exp\left(-\frac{V_{C_2}(t)}{V_T}\right) - 1 \right) = f(V_{C_2}(t))$$

Par conséquent, pour  $V_{C_2}(t) \neq 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , la dynamique de ce circuit peut être modélisée par la description matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\cdot)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec  $x$  le vecteur d'état,  $x(t) = [V_{C_1}(t) \quad V_{C_2}(t) \quad I_L(t)]^T$ ,  $y$  le vecteur de sortie,  $y(t) = [V_{C_1}(t) \quad V_{C_2}(t)]^T$ ,  $u$  l'entrée de commande,  $u(t) = [I_S \quad I_0 \quad V_{CC}]^T$ , et :

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_S \exp\left(\frac{V_{C_2}(t)}{V_T}\right)}{V_{C_2}(t)} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

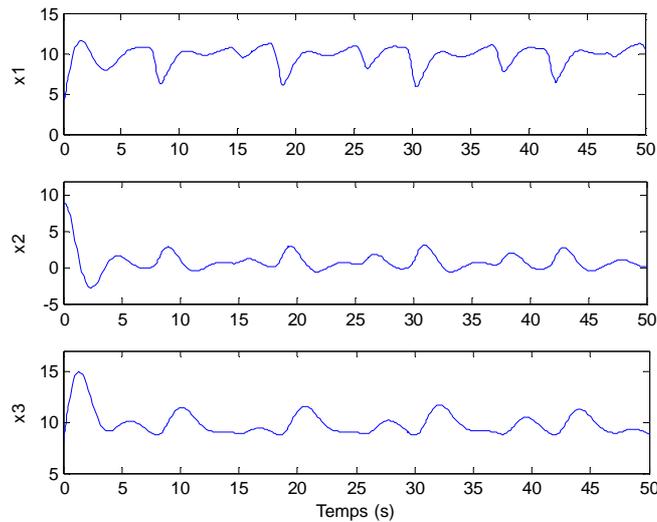
les matrices d'évolution d'état, de commande et d'observation, respectivement.

En utilisant les valeurs suivantes des paramètres du circuit électrique de la figure II.17. :

$$L = 100 \mu H, R = 45 \Omega, C_1 = 47 nF, C_2 = 47 nF$$

$$V_{cc} = 5 V, V_T = 26 mV, I_0 = 5 mA, I_s = 50 mA$$

les évolutions des composantes du vecteur état  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , en régime libre, sont obtenues pour les conditions initiales imposées par  $x(0) = [5 \ 9 \ 8]^T$ , figure II.18.



**Fig. II.18.** Evolutions des variables d'état  $V_{C1}$ ,  $V_{C2}$  et  $I_L$  de l'oscillateur de Colpitts avant l'activation du signal de commande

Maintenant, nous nous intéressons à la détermination de la structure de commande, par réaction de sortie, de la forme :

$$u(t) = -K(.)y(t)$$

telle que :

$$K(.) = \begin{bmatrix} k_{11}(.) & k_{12}(.) \\ k_{21}(.) & k_{22}(.) \\ k_{31}(.) & k_{32}(.) \end{bmatrix}$$

conférant au système bouclé :

$$\dot{x}(t) = (A(.) - BK(.)C)x(t)$$

avec :

$$A(\cdot) - BK(\cdot)C = \begin{bmatrix} -k_{11}(\cdot) & \frac{I_S \exp\left(\frac{V_{C2}(t)}{V_T}\right)}{V_{C2}(t)} - k_{12}(\cdot) & \frac{1}{C_1} \\ -k_{21}(\cdot) & -k_{22}(\cdot) & \frac{1}{C_2} \\ \frac{-1}{L} - k_{31}(\cdot) & \frac{-1}{L} - k_{32}(\cdot) & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}$$

la propriété de stabilité asymptotique, en plus de la mise sous forme en flèche mince de sa matrice caractéristique.

En effet, la matrice caractéristique de l'oscillateur de Colpitts bouclé ne peut être mise sous forme en flèche mince que pour les choix suivants :

$$\begin{cases} k_{12}(\cdot) = \frac{I_S \exp\left(\frac{V_{C2}(t)}{V_T}\right)}{V_{C2}(t)} \\ k_{21} = 0 \end{cases}$$

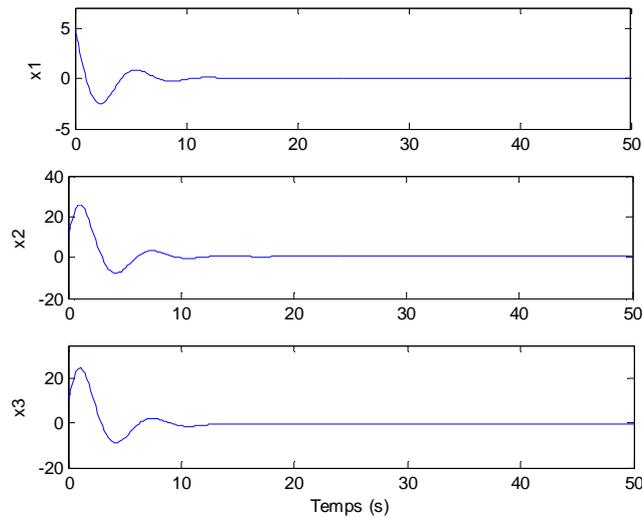
Ainsi, il ne reste qu'à choisir, judicieusement, les paramètres de réglage  $k_{11}(\cdot)$ ,  $k_{22}(\cdot)$ ,  $k_{31}(\cdot)$  et  $k_{32}(\cdot)$ , de telle sorte que les deux premiers éléments diagonaux de la matrice  $(A(\cdot) - BK(\cdot)C)$  soient constants et strictement négatifs et qu'on ait :

$$\frac{-R}{L} - \left( \left( \frac{-1}{L} - k_{31}(\cdot) \right) \left( \frac{1}{C_1} \right) \right) \left( k_{11}(\cdot) \right)^{-1} + \left( \left( \frac{-1}{L} - k_{32}(\cdot) \right) \left( \frac{1}{C_2} \right) \right) \left( k_{22}(\cdot) \right)^{-1} < 0$$

Soit, par exemple :

$$\begin{cases} k_{11} = 1, k_{22} = 2 \\ k_{31} = \frac{-1}{L}, k_{32} = \frac{2(RC - 1)}{L} \end{cases}$$

Par conséquent, la faisabilité de l'approche de commande stabilisante proposée, est illustrée, par le choix volontaire de l'oscillateur de Colpitts, telle que le montre les évolutions des signaux  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  du vecteur état  $x$ , consignées dans la figure II.19.



*Figure II.19. Evolutions des composantes du vecteur état de l'oscillateur de Colpitts suite à l'application de la commande stabilisante proposée*

#### II.5.4. Conclusion

La méthode de stabilisation proposée, dans cette partie, exploite avec succès les conditions suffisantes de stabilité établies dans le premier chapitre. Elle est basée sur le choix d'une représentation convenable du processus bouclé dans l'espace d'état, associé au choix des paramètres de la loi de commande stabilisante. Toutefois, elle reste de mise en œuvre limitée par la vérification de la condition nécessaire (II.103).

La généralisation de cette méthode est envisagée dans la partie suivante.

### II.6. Généralisation des différentes stratégies de commande proposées

#### II.6.1. Introduction

Il s'agit, dans cette partie, de trouver une stratégie de commande pour assurer la stabilisabilité de processus complexes, tout en se référant à des formes matricielles plus générales.

Les cas de la recherche d'une commande stabilisante par retour d'état et celle par retour de sortie y sont aussi considérés.

#### II.6.2. Méthode basée sur l'exploitation des propriétés de la matrice de forme en flèche mince généralisée

Pour faciliter la vérification de la propriété de stabilité des systèmes continus non linéaires (II.14) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \\ y(t) = C(x)x(t) \end{cases}$$

bouclés, suite à un retour d'état ou un retour de sortie, le compensateur est structuré de telle façon que la matrice caractéristique instantanée du système ainsi bouclé soit de forme en flèche mince généralisée.

### ***II.6.2.1. Compensation par réaction d'état***

La loi de commande stabilisante, par retour d'état retenue dans cette partie, de la forme suivante :

$$u(t) = -K(x)x(t) \quad (\text{II.111})$$

conduit au système bouclé, décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = A_c(x)x(t) \quad (\text{II.112})$$

$$A_c(x) = A(x) - B(x)K(x) \quad (\text{II.113})$$

A ce stade, notre tâche est restreinte à la conception de la forme la plus appropriée du compensateur, garantissant, d'une part, la mise sous la forme en flèche mince généralisée de la matrice caractérisant le système bouclé  $A_c(\cdot)$  (II.113),  $A_c(\cdot) = \{a_{c_{ij}}(\cdot)\}$  et assurant la propriété de stabilité asymptotique, relativement au même système, d'autre part.

### **Détermination de la structure du compensateur**

Les conditions permettant la mise sous forme en flèche mince généralisée d'ordre  $r$  de la matrice caractéristique du système bouclé  $A_c(\cdot)$  sont exprimées comme suit :

$$a_{ij}(\cdot) - \sum_{q=1}^m b_{iq}(\cdot)k_{qj}(\cdot) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r-1 \text{ pour } i \neq j \quad (\text{II.114})$$

Les relations (II.114) constituent  $(r-1)(r-2)$  équations à  $(mn)$  variables inconnues, qui sont les paramètres de correction  $k_{qs}$ ,  $\forall q = 1, \dots, m$  et  $\forall s = 1, \dots, n$ .

Une condition nécessaire, assurant l'existence d'une solution relativement au système commandé, est que le nombre des équations à résoudre soit inférieur ou égal au nombre des paramètres de correction à déterminer ; soit :

$$mn \geq (r-1)(r-2) \quad (\text{II.115})$$

Cette condition (II.115) est d'autant moins restrictive par rapport à celle (II.82) que  $r$  est faible. En effet, pour les systèmes monovariables ( $m=1$ ), la condition (II.82) n'est plus vérifiée à partir de  $n=4$ . Cette condition (II.115), peut élargir le champ d'applicabilité de l'approche de commande proposée.

Le tableau suivant présente les différentes possibilités de choix de l'ordre de la matrice en flèche mince généralisée, en fonction de l'ordre et du nombre d'entrées du système considéré.

**Tableau.** Possibilités de choix de l'ordre de la matrice en flèche mince généralisée

$n \backslash m$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
$n=4$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$
$n=5$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$
$n=6$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$
$n=7$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$

En effet, pour  $n = 4$  et  $m = 1$ , les trois solutions suivantes sont possibles pour le choix de  $r$  :  $r = 1$ ,  $r = 2$  ou  $r = 3$ ,  $r = 3$ , correspond à la matrice la plus creuse de forme en flèche mince généralisée d'ordre 3.

Pour  $n = 5$  et  $m = 2$ , les quatre solutions suivantes sont possibles pour le choix de  $r$  :  $r = 1$ ,  $r = 2$ ,  $r = 3$  ou  $r = 4$ , et la solution la plus intéressante est  $r = 4$ .

Pour  $n = 6$  et  $m = 3$ , les cinq solutions suivantes sont possibles pour le choix de  $r$  :  $r = 1$ ,  $r = 2$ ,  $r = 3$ ,  $r = 4$  ou  $r = 5$  ; adoptons la solution  $r = 5$ .

En fait, la solution  $r = 5$ , est vraie, dans l'étude effectuée pour le cas de systèmes d'ordre 7, munis de deux entrées. Le cas de  $m = 3$ , lui correspond six solutions possibles pour le choix de  $r$  :  $r = 1$ ,  $r = 2$ ,  $r = 3$ ,  $r = 4$ ,  $r = 5$  ou  $r = 6$ . Il est donc plus intéressant de retenir la solution  $r = 6$ .

La figure II.20. présente toutes les possibilités de choix de l'ordre de la matrice en flèche mince généralisée en fonction du produit  $mn$ . L'enveloppe du domaine ainsi défini donne les meilleures solutions à retenir pour  $r$ .

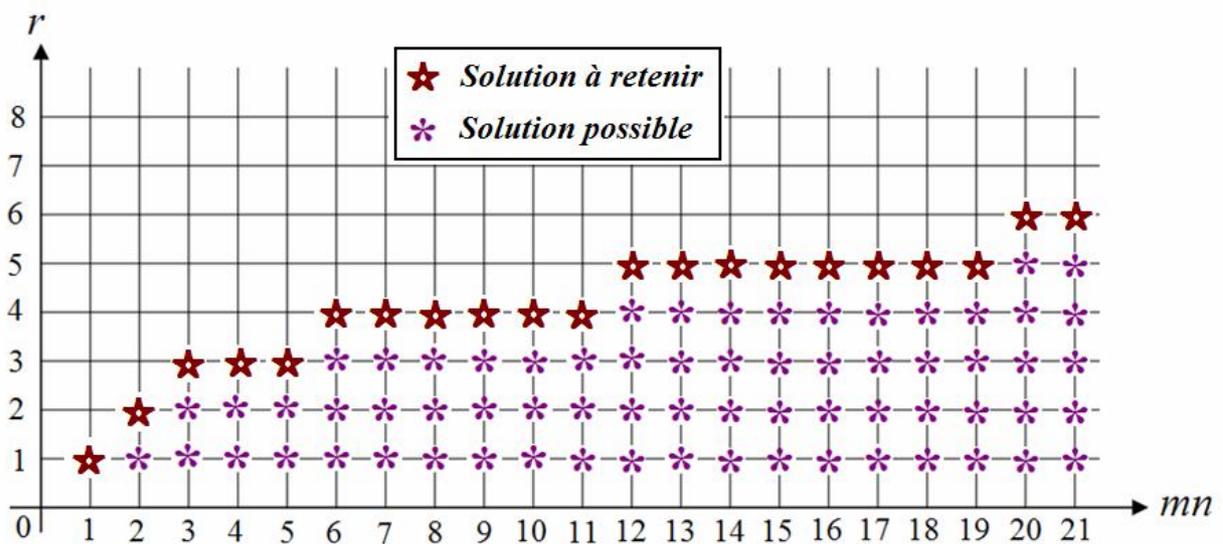


Figure II.20. Possibilités du choix de l'ordre  $r$  de la matrice en flèche mince généralisée en fonction du produit  $mn$

### II.6.2.2. Compensation par réaction de sortie

Dans le cas où la loi de commande stabilisante est par réaction de sortie de la forme :

$$u(t) = -K(x)y(t) \tag{II.116}$$

le système bouclé est alors décrit, comme précédemment, par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = A_c(x)x(t) \quad (\text{II.117})$$

$$A_c(x) = A(x) - B(x)K(x)C(x) \quad (\text{II.118})$$

Comme dans le cas précédent, il s'agit de déterminer la structure du compensateur garantissant la stabilité asymptotique du système ainsi bouclé (II.117) suite à la mise sous forme en flèche mince généralisée de sa matrice caractéristique instantanée, définie par (II.118).

### Détermination de la structure du compensateur

Les conditions permettant la mise sous forme en flèche mince généralisée d'ordre  $r$  de la matrice caractéristique du système bouclé  $A_c(\cdot)$  sont exprimées de la façon suivante :

$$a_{ij}(\cdot) - \sum_{s=1}^l \left( \sum_{r=1}^m b_{ir}(\cdot) k_{rs}(\cdot) \right) c_{sj}(\cdot) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r-1 \text{ pour } i \neq j \quad (\text{II.119})$$

Elles constituent  $(r-1)(r-2)$  équations à  $(ml)$  variables inconnues, qui sont les paramètres de correction  $k_{rs}$ ,  $\forall r = 1, \dots, m$  et  $\forall s = 1, \dots, l$ .

La condition nécessaire assurant l'existence d'une solution relativement au système commandé devient dans le cas présent :

$$ml \geq (r-1)(r-2) \quad (\text{II.120})$$

De ce fait, les possibilités de choix de  $r$  sont à considérer ici en rapport avec le produit  $ml$ .

### Conditions suffisantes de stabilisation proposées

#### **Théorème II.7**

*Le système défini par (II.14) est stabilisable par la loi de commande définie par (II.111) ou (II.116), si la matrice caractéristique instantanée  $A_c(\cdot)$ , définie par (II.113) ou (II.118), respectivement, est de forme en flèche mince généralisée, d'ordre  $r$ , telle que :*

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée,*
- ii.  $a_{c_{ii}}(x) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1$  (II.121)*
- iii. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que,  $\forall i = 1, 2, \dots, n-r+1$ :*

$$(-1)^i \det \left( M_{c_{22}}^{(i)}(x) - M_{c_{21}}^{(i)}(x) A_{c_{11}}^{-1}(x) M_{c_{12}}^{(i)}(x) \right) \geq \varepsilon \quad (\text{II.122})$$

Démonstration

La démonstration du théorème II.7, similaire à celle du théorème II.3, concerne ici la matrice caractéristique du système bouclé  $A_c(\cdot)$ .

Une autre manière d'envisager la résolution de la question de stabilisation formulée au niveau de cette partie est proposée au niveau du théorème suivant dans lequel, le principe de contraction des systèmes majorants est appliqué de telle sorte que la matrice majorante obtenue, par respect à une norme scalaire bien définie, soit de forme en flèche mince ; ce qui simplifie, considérablement, la méthode d'étude proposée.

**Théorème II.8**

*Le système bouclé dont l'évolution est décrite par la matrice  $A_c(\cdot)$ , définie par (II.113) ou (II.118), est asymptotiquement stable si les conditions suffisantes suivantes sont vérifiées :*

- i. il existe une majorante  $M_c(A_c(\cdot))$ , d'ordre  $r$  de  $A_c(\cdot)$ , en flèche mince dont les éléments non constants sont isolés dans une seule rangée,*
- ii. les  $(r-1)$  premiers éléments diagonaux de  $M_c(A_c(\cdot))$  sont strictement négatifs,*
- iii. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :*

$$(-1)^r \det(M_c(A_c(\cdot))) \geq \varepsilon \tag{II.123}$$

Démonstration

La vérification de ce théorème découle directement des conditions de stabilité des matrices de forme en flèche mince puisque la stabilité du système d'évolution décrite par la majorante implique la stabilité du système initial.

A titre d'exemple, prenons le système en flèche mince généralisée, d'ordre  $r < n$ , dont l'évolution est caractérisée par la matrice  $A_c(\cdot) = \{a_{c_{ij}}(\cdot)\}$ , et notons :

$$p(x) = \left[ |x_1| \quad |x_2| \quad \dots \quad |x_{r-1}| \quad p_r(x) \right]^T \tag{II.124}$$

avec :

$$p_r(x) = \max_{i=r}^n |x_i| \tag{II.125}$$

Il vient la majorante :

$$M_c(A_c(\cdot)) = \begin{bmatrix} a_{c_{11}}(\cdot) & & & a_{c_{1r}}^*(\cdot) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{c_{r-1\ r-1}}(\cdot) & a_{c_{r-1\ r}}^*(\cdot) \\ a_{c_{r1}}^*(\cdot) & \dots & a_{c_{r\ r-1}}^*(\cdot) & a_{c_{rr}}^*(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II.126})$$

avec :

$$a_{c_{ii}}^*(\cdot) = a_{c_{ii}}(\cdot) \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.127})$$

$$a_{c_{ir}}^*(\cdot) = \sum_{j=r}^n |a_{c_{ij}}(\cdot)| \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.128})$$

$$a_{c_{rj}}^*(\cdot) = \max_{i=r}^n |a_{c_{ij}}(\cdot)| \quad \forall j = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.129})$$

$$a_{c_{rr}}^*(\cdot) = \max_{i=r}^n \left( a_{c_{ii}}(\cdot) + \sum_{\substack{j=r \\ j \neq i}}^n |a_{c_{ij}}(\cdot)| \right) \quad (\text{II.130})$$

La condition de stabilité devient alors :

$$a_{c_{rr}}^*(\cdot) - \sum_{i=1}^{r-1} |a_{c_{ri}}^*(\cdot) a_{c_{ir}}^*(\cdot)| (a_{c_{ii}}^*(\cdot))^{-1} \leq -\varepsilon < 0 \quad (\text{II.131})$$

Une étude semblable réalisée en prenant :

$$p_r(x) = \sum_{i=r}^n |x_i| \quad (\text{II.132})$$

conduira aux expressions des éléments contractés suivants de la matrice majorante :

$$a_{c_{ir}}^*(\cdot) = \max_{j=r}^n |a_{c_{ij}}(\cdot)| \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.133})$$

$$a_{c_{rj}}^*(\cdot) = \sum_{i=r}^n |a_{c_{ij}}(\cdot)| \quad \forall j = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.134})$$

$$a_{c_{rr}}^*(.) = \max_{j=r}^n \left( a_{c_{jj}}(.) + \sum_{\substack{i=r \\ i \neq j}}^n |a_{c_{ij}}(.)| \right) \quad (\text{II.135})$$

La stabilité est assurée ici par la même condition (II.131) en prenant  $a_{c_{ir}}^*(.)$ ,  $a_{c_{ri}}^*(.)$  et  $a_{c_{rr}}^*(.)$  définis par (II.133-II.135).

**Remarque 1**

Dans cette étude, n'importe quel élément  $a_{c_{ij}}^*(.)$  peut être remplacé par un élément plus grand ; ce qui permet éventuellement de remplacer un élément non constant par sa valeur maximale permettant ainsi de simplifier l'étude, les conditions de stabilité obtenues étant toutefois plus conservatives.

**Remarque 2**

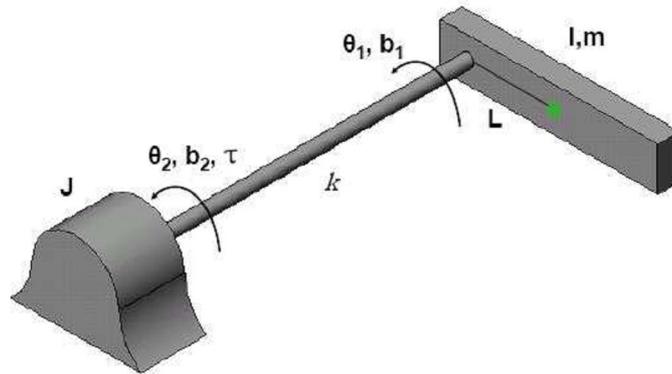
La contraction assurée par la composante  $p_r(x)$  de  $p(x)$  permet, si les éléments non linéaires de  $A_c(.)$  sont localisés dans les  $(n - r + 1)$  dernières lignes ou les  $(n - r + 1)$  dernières colonnes d'obtenir une matrice majorante  $M_c(A_c(.))$  en flèche mince dont les éléments non constants sont isolés dans la dernière ligne ou la dernière colonne.

**Application à la commande d'un robot manipulateur**

Le problème de la commande des bras flexibles a été considéré par divers auteurs [KAN 05, SPO 89, VID 93] par différentes approches dont la commande adaptative, la commande non linéaire, la commande numérique robuste et la commande linéaire quadratique.

Considérons le robot manipulateur à joint flexible de la figure II.21., régi par le système d'équations différentielles suivant [KAN 05] :

$$\begin{cases} I\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + mgL \sin \theta_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ J\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2 - k(\theta_1 - \theta_2) = \tau \end{cases}$$



**Figure II.21.** Bras d'un robot manipulateur à joint flexible

Dans cet exemple, on désigne par  $I$  et  $J$  les moments d'inertie,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les positions angulaires du joint flexible,  $b_1$  et  $b_2$  les coefficients centrifuges de Coriolis,  $\tau$  le couple associé au mouvement de rotation du joint,  $G = mgL$  le coefficient gravitationnel,  $L$  et  $m$  étant la longueur du bras flexible et la masse de la charge ajoutée à l'extrémité du bras manipulateur souple, respectivement, et  $k$  la constante de raideur du bras flexible.

Le choix des variables d'état définies par :

$$\begin{cases} x_1(t) = \theta_1(t) \\ x_2(t) = \theta_2(t) \\ x_3(t) = \dot{\theta}_1(t) \\ x_4(t) = \dot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

conduit à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(.)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec :

$$A(.) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\left(\frac{k}{I} + \frac{mgL \sin(x_1(t))}{Ix_1(t)}\right) & \frac{k}{I} & -\frac{b_1}{I} & 0 \\ \frac{k}{J} & -\frac{k}{J} & 0 & -\frac{b_2}{J} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

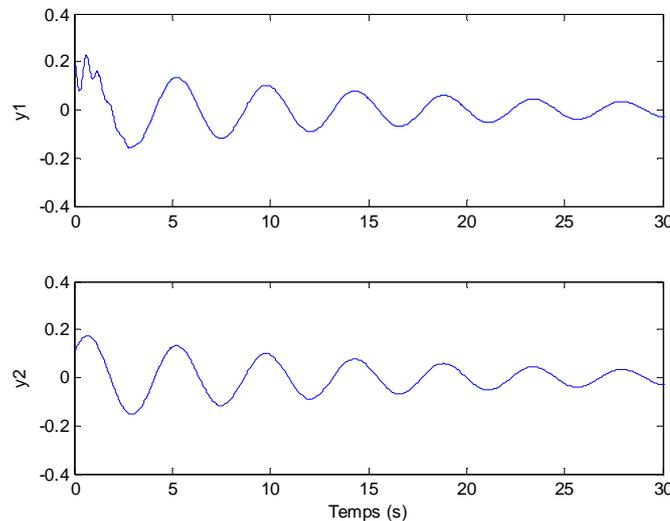
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } u(t) = \frac{\tau}{J}$$

Les données numériques relatives au processus mécanique considéré sont [KAN 05] :

$$J = 0.5 \text{ Kg.m}^2, b_1 = 2 \text{ N.m.s.rad}^{-1}, k = 50 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

$$I = 25 \text{ Kg.m}^2, b_2 = 1 \text{ N.m.s.rad}^{-1}, m = 1 \text{ Kg}, L = 5 \text{ m}$$

La figure II.22. montre l'aspect oscillatoire caractérisant les réponses du bras étudié en boucle ouverte.



**Figure II.22.** Réponses des positions angulaires du robot en boucle ouverte

Les deux conditions nécessaires d'applicabilité des approches de commande par retour d'état et par retour de sortie (II.82) et (II.103), établies dans les sections **II.4.** et **II.5.**, ne pouvant pas être vérifiées, de ce fait, la recherche d'une commande adéquate pour le bras manipulateur à joint flexible étudié vise la mise sous la forme en flèche mince généralisée d'ordre deux de la matrice caractéristique du système après bouclage, par respect aux contraintes (II.115) et (II.120), et ce dans le but d'améliorer le temps de réponse de ce système mécanique.

***Premier cas de synthèse : Stabilisation par retour d'état***

La loi de commande  $u(t)$  :

$$u(t) = -K_x(.)x(t)$$

$$K_x(.) = [k_{1x}(\cdot) \quad k_{2x}(\cdot) \quad k_{3x}(\cdot) \quad k_{4x}(\cdot)]$$

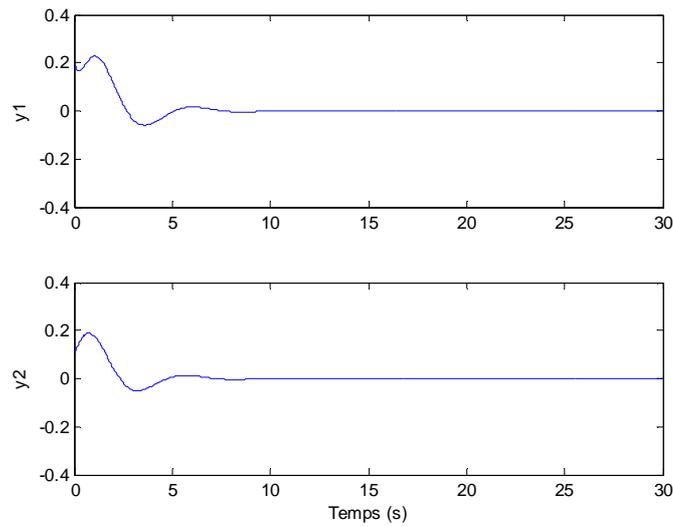
conduit à la description suivante du processus bouclé :

$$\dot{x}(t) = (A(.) - BK_x(.))x(t)$$

Pour satisfaire les hypothèses ii. et iii. énoncées au niveau du théorème II.7, il suffit de choisir, comme précédemment, les paramètres de la chaîne de correction tels que :

$$\begin{cases} k_{1x} = -50 \\ k_{2x} = 20 \\ k_{3x} = 10 \\ k_{4x} = 30 \end{cases}$$

La figure II.23. montre la stabilisation asymptotique du système robotique considéré dans cet exemple.



**Figure II.23.** Réponses des positions angulaires du robot manipulateur commandé par réaction d'état

**Deuxième cas de synthèse : Stabilisation par retour de sortie**

La loi de commande fait intervenir dans ce cas le vecteur de sortie dont les variables sont supposées accessibles :

$$u(t) = -K_y(\cdot)y(t)$$

$$K_y(\cdot) = \begin{bmatrix} k_{1y}(\cdot) & k_{2y}(\cdot) \end{bmatrix}$$

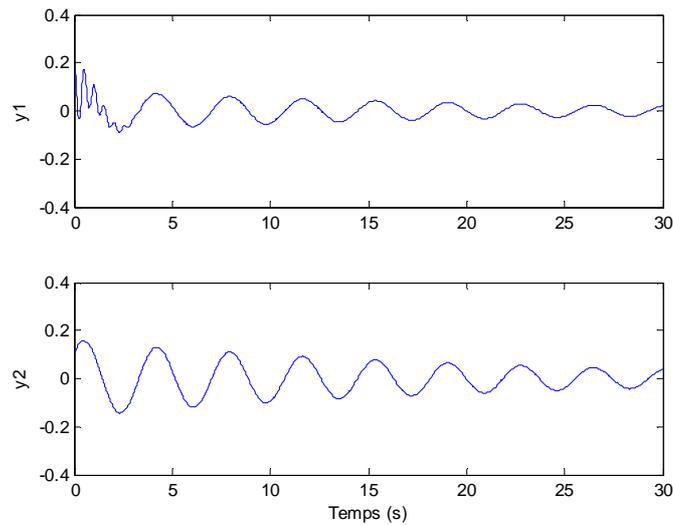
Le processus bouclé, correspondant est régi par :

$$\dot{x}(t) = (A(\cdot) - BK_y(\cdot)C)x(t)$$

De même, une possibilité garantissant la vérification des hypothèses ii. et iii. énoncées au niveau du théorème II.7, est donnée par le choix suivant :

$$\begin{cases} k_{1y} = 50 \\ k_{2y} = 20 \end{cases}$$

La figure II.24. montre clairement la stabilisation asymptotique du système étudié.



**Figure II.24.** Réponses des positions angulaires du robot manipulateur commandé par réaction de sortie

Nous remarquons que par application de deux stratégies de commande différentes, une par retour d'état et l'autre par retour de sortie, les positions angulaires du robot manipulateur  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , commandé par retour d'état, convergent vers l'état d'équilibre,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , plus rapidement et avec moins d'oscillations que celles relatives à la commande par retour de sortie.

### II.6.3. Cas des matrices de forme en flèche épaisse

Outre que la stabilisation asymptotique de systèmes continus non linéaires de grande dimension, les conditions de stabilisabilité, formulées dans cette section, sont basées sur la détermination de la structure du compensateur, par réaction d'état, permettant de caractériser le système bouclé par une matrice de forme en flèche épaisse.

Considérons, alors, la classe de systèmes non linéaires décrits dans l'espace d'état par l'équation différentielle (II.76) :

$$\dot{x}(t) = A(.)x(t) + B(.)u(t)$$

pour lesquels on vise la recherche d'une loi de commande stabilisante, par retour d'état, de la forme :

$$u(t) = -K(.)x(t) \quad (\text{II.136})$$

et conduisant au système bouclé décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A_{FFE} (.)x(t) \quad (\text{II.137})$$

avec :

$$A_{FFE}(\cdot) = A(\cdot) - B(\cdot)K(\cdot)$$

A ce stade, notre tâche primordiale est focalisée sur la conception de la forme du compensateur, garantissant la mise sous la forme en flèche épaisse de la matrice  $A_{FFE}(\cdot)$ , caractérisant le système bouclé (III.137), tout en lui conférant la propriété de stabilité asymptotique.

Dans le cas des matrices en flèche épaisse, un choix judicieux de la norme vectorielle permet également d'obtenir une matrice majorante en flèche mince.

En effet, notons  $A_{FFE}(\cdot) = \{A_{FFE_{ij}}(\cdot)\}$ , où  $A_{FFE_{ij}}(\cdot)$  représente le bloc d'indice  $ij$  de la matrice  $A_{FFE}(\cdot)$ , les blocs diagonaux étant carrés d'ordre  $n_i$ ,  $A_{FFE_{ii}}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  et  $i, j = 1, \dots, r$ .

Notons  $p_i(x)$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de la norme  $p(x)$  correspondant aux composantes du vecteur  $x$  associée au bloc  $A_{FFE_{ii}}(\cdot)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $x = [x_1^T \quad x_2^T \quad \dots \quad x_i^T \quad \dots \quad x_r^T]^T$ .

Dans ces conditions, la matrice majorante associée à la norme  $p(x)$ ,  $p(x) = [p_1(x_1) \quad p_2(x_2) \quad \dots \quad p_i(x_i) \quad \dots \quad p_r(x_r)]^T$  est en flèche mince.

### **Exemple de mise en œuvre**

Notons  $\bar{x}^T = [\bar{x}_1^T \quad \dots \quad \bar{x}_i^T \quad \dots \quad \bar{x}_r^T] \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^T = [x_1 \quad \dots \quad x_n]$ ,  $N_i = \sum_{j=1}^i n_j$ ,

$\bar{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ ,  $I_i = \{N_{i-1} + 1 \quad N_{i-1} + 2 \quad \dots \quad N_i\}$ ,  $\bar{x}_{ij} = \{x_k / k \in I_i\}$ ,

$\bar{x}_i^T = [x_{N_{i-1}+1} \quad x_{N_{i-1}+2} \quad \dots \quad x_{N_i}] = \{\bar{x}_{ij}\}$  et  $\bar{x}_{ij} = x_{N_{i-1}+j}$ ,  $\forall j = 1, \dots, n_i$ .

Choisissons  $p_i(\bar{x}_i) = \max_{j=1}^{n_i} |\bar{x}_{ij}|$ , il vient pour la matrice  $A_{FFE}(\cdot)$  en flèche épaisse la majorante en flèche mince  $M(A_{FFE}(\cdot)) = \{a_{FFE_{ij}}^*(\cdot)\}$ , dont les éléments hors de la diagonale, de la dernière ligne et de la dernière colonne sont nuls :

$$a_{FFE_{ii}}^* (\cdot) = \max_{k \in I_i} \left( a_{FFE_{kk}} (\cdot) + \sum_{\substack{j \in I_i \\ j \neq k}} |a_{FFE_{ij}} (\cdot)| \right) \quad (\text{II.138})$$

$$a_{FFE_{ir}}^* (\cdot) = \max_{k \in I_i} \sum_{l \in I_r} |a_{FFE_{kl}} (\cdot)| \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.139})$$

$$a_{FFE_{rj}}^* (\cdot) = \max_{k \in I_r} \sum_{l \in I_j} |a_{FFE_{kl}} (\cdot)| \quad \forall j = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II.140})$$

#### II.6.4. Conclusion

A partir de l'utilisation d'une description matricielle spécifique, des résultats intéressants sont formulés dans cette partie. Ils concernent l'étude de la stabilisabilité de systèmes continus non linéaires en utilisant le critère pratique de stabilité de Borne et Gentina associé aux représentations en flèche mince généralisée et en flèche épaisse de la matrice de Benrejeb caractérisant le système compensé.

### CONCLUSION

La synthèse de lois de commande par retour d'état et par retour de sortie a conduit à des résultats satisfaisants et de mises en œuvre aisées.

Les propriétés particulières des systèmes majorants présentées au niveau du premier chapitre de ce mémoire et la définition d'une représentation matricielle bien adaptée, ont permis la détermination de nouvelles conditions suffisantes de stabilisabilité asymptotique de systèmes dynamiques continus non linéaires, d'applications simples. En effet, les conditions de stabilité obtenues sont explicites par rapport aux paramètres identifiant la chaîne de correction du système analysé.

La description des systèmes par des matrices en flèche mince généralisée et en flèche épaisse s'est avérée particulièrement bien adaptée à l'étude de la stabilité des processus dynamiques complexes de grande dimension. Elle permet, de plus, une utilisation systématique des critères pratiques de stabilité de Borne et Gentina.

Les différentes applications des stratégies de commande élaborées sur différents systèmes non linéaires ont permis d'illustrer l'efficacité des nouvelles approches proposées.

**CHAPITRE III :**  
**APPLICATION A LA SYNCHRONISATION**  
**ET A L'ANTI-SYNCHRONISATION**  
**DE SYSTEMES CHAOTIQUES**

## CHAPITRE III

# APPLICATION A LA SYNCHRONISATION ET A L'ANTI-SYNCHRONISATION DE SYSTEMES CHAOTIQUES

### Sommaire

---

Introduction.....	113
III.1. Synchronisation utilisant la commande stabilisante proposée.....	113
III.1.1. Introduction.....	113
III.1.2. Synchronisation entrée-sortie.....	113
III.1.2.1. Définition de la notion d'unicité de la réponse.....	113
III.1.2.2. Conditions suffisantes d'absence d'anomalies de fonctionnement.....	115
III.2. Communiquer avec le chaos – Applications aux systèmes chaotiques.....	115
III.2.1. Introduction.....	115
III.2.2. Synchronisation maître-esclave de systèmes chaotiques.....	115
III.2.2.1. Cas de systèmes chaotiques identiques.....	116
III.2.2.1.a. Synchronisation de deux systèmes chaotiques de Lorenz Stenflo.....	116
III.2.2.1.b. Synchronisation de deux systèmes chaotiques de Qi.....	121
III.2.2.2. Cas de systèmes chaotiques non identiques.....	125
III.2.3. Anti-synchronisation maître-esclave de systèmes chaotiques.....	128
III.2.3.1. Cas de systèmes chaotiques identiques.....	129
III.2.3.1.a. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques de Rössler.....	129
III.2.3.1.b. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques de Chen.....	135
III.2.3.2. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques non identiques – Cas du système de Rössler couplé avec le système de Chen.....	139
III.2.4. Conclusion.....	142
III.3. Synchronisation hybride de systèmes chaotiques.....	142
Conclusion.....	148

---

## INTRODUCTION

La théorie du chaos est apparue au début des années soixante en météorologie et s'est rapidement étendue. Certains y ont vu, ou y voient encore, une révolution scientifique d'une importance identique à l'apparition de la mécanique de Newton, de la relativité d'Einstein ou de la mécanique quantique.

La synchronisation constitue une étape centrale dans les schémas de communication. Dans cette optique, nous présentons des applications des résultats introduits dans le chapitre précédent à la synchronisation, à l'anti-synchronisation ainsi qu'à la synchronisation hybride de systèmes chaotiques, du type maître-esclave. Toutes ces applications sont, essentiellement, basées sur l'utilisation des propriétés de la forme matricielle en flèche.

### III.1. Synchronisation utilisant la commande stabilisante proposée

#### III.1.1. Introduction

Après un rappel de la propriété d'unicité de la réponse de systèmes dynamiques en régime forcé, nous considérons, dans cette partie, les conditions suffisantes d'absence d'anomalies de fonctionnement de systèmes dynamiques non linéaires.

#### III.1.2. Synchronisation entrée-sortie

##### III.1.2.1. Définition de la notion d'unicité de la réponse

Le processus étudié est décrit par l'équation d'état non linéaire suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (\text{III.1})$$

$x$  étant le vecteur définissant l'état du système,  $u$  le vecteur d'entrée de dimension  $m$ , et  $f(x(t), u(t))$  le vecteur d'éléments  $f_i(x(t), u(t))$  qui dépendent à tout instant, du vecteur état  $x$  et de l'entrée  $u$ .

Nous désignons par  $x^1(t_0)$  et  $x^2(t_0)$  deux vecteurs conditions initiales pour  $t = t_0$ , auxquels correspondent pour la même loi d'entrée  $u(t)$ , les solutions, ou réponses, respectives de l'équation (III.1) :  $x^1(t, t_0, x^1(t_0), u(t))$  et  $x^2(t, t_0, x^2(t_0), u(t))$ .

L'évolution de l'écart de ces réponses peut être définie par la relation suivante :

$$\dot{x}^2(t) - \dot{x}^1(t) = f(x^2(t), u(t)) - f(x^1(t), u(t)) \quad (\text{III.2})$$

Dans certains cas, la relation (III.2) peut se ramener à la forme matricielle (III.3) [MIC 74] :

$$\dot{e}_s(t) = B^*(.)e_s^*(t) \quad (\text{III.3})$$

dans laquelle nous notons par  $e_s$  le vecteur écart, défini par :

$$e_s(t) = x^2(t) - x^1(t) \quad (\text{III.4})$$

avec :  $e_s^{*T} = [e_s^T \quad \Delta u^T] \in \mathbb{R}^{n+m}$ , et  $B^*$  la matrice d'éléments  $b_{ij}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$ , définis à partir de (III.2) :

$$B^*(.) = \left[ \begin{array}{cc} \Delta_i(a_j) & \Delta_k(a_j) \\ x_j^2 - x_j^1 & u_k^2 - u_k^1 \end{array} \right] \quad (\text{III.5})$$

$$\Delta_i(a_j) = \left\{ \begin{array}{l} a_j [x_1^2, \dots, x_{i-1}^2, x_i^1, \dots, x_n^1, u_1, \dots, u_m] \\ -a_j [x_1^2, \dots, x_i^2, x_{i+1}^1, \dots, x_n^1, u_1, \dots, u_m] \end{array} \right\} \quad (\text{III.6})$$

$\forall i, j = 1, \dots, n$ , et  $\forall k = 1, \dots, m$ .

L'état de sortie d'un système asservi dépend, à un instant donné, de deux grandeurs qui sont :

- le signal d'entrée auquel le servomécanisme est soumis,
- l'ensemble des conditions initiales à l'instant  $t = t_0$ .

**Définition III.1** [MAI 67]

La réponse d'un processus présente la propriété d'unicité, lorsqu'au bout d'un temps suffisant, le signal de sortie ne dépend plus que de l'entrée, l'effet des conditions initiales étant devenu négligeable :  $\forall x^1(t_0), x^2(t_0) \in \mathbb{R}^n$  et  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists t_1$  tel que :

$$\forall t > t_1 \Rightarrow \left\| x(t, t_0, x^2(t_0), u(t)) - x(t, t_0, x^1(t_0), u(t)) \right\| \leq \varepsilon \quad (\text{III.7})$$

La notion d'unicité exprime donc que l'effet des conditions initiales sur le comportement du processus, soumis à une entrée donnée, devient de moins en moins sensible avec le temps. Le problème initial d'unicité peut donc se ramener à l'étude de la stabilité d'un système de la forme (III.3) avec :  $\Delta u = 0$ .

La stabilité du système ainsi défini, à entrée fixée, entraîne l'unicité des réponses du processus dont l'évolution est définie à partir de la relation (III.1).

### ***III.1.2.2. Conditions suffisantes d'absence d'anomalies de fonctionnement***

Nous envisageons, dans cette partie, d'attirer l'attention sur l'applicabilité des conditions suffisantes d'étude de la stabilité pour l'élaboration de conditions d'absence d'anomalies de fonctionnement de circuits complexes, vis-à-vis de la sensibilité des systèmes aux conditions initiales (démultiplication de fréquence, bifurcation, chaos, phénomènes de saut, etc.).

L'approche basée sur l'approximation du premier harmonique constitue une méthode très utilisée dans les bureaux d'étude pour l'analyse et la synthèse des systèmes non linéaires. Cette méthode, pour certains systèmes continus non linéaires, donne des réponses, dans certains cas, très erronées tant du point de vue fréquence que du point de vue amplitude [BEN 76].

La vérification d'une condition suffisante d'unicité de la réponse garantit les conditions nécessaires d'applicabilité de la méthode du premier harmonique, l'absence de sous harmonique et la synchronisation entre les signaux d'entrée et de sortie des systèmes étudiés.

Il a été montré que l'étude de la stabilité du système écart, obtenu pour deux conditions initiales distinctes et la même entrée, peut être menée par l'exploitation de conditions suffisantes de stabilité du système initial. C'est ainsi qu'apparaît l'importance des résultats formulés dans le deuxième chapitre pour l'étude de la synchronisation, de l'anti-synchronisation et de la synchronisation hybride des systèmes de communication chaotiques.

## **III.2. Communiquer avec le chaos – Applications aux systèmes chaotiques**

### **III.2.1. Introduction**

L'idée d'utilisation du chaos dans les systèmes de communication a été inspirée de la découverte de Pecora et Carroll [PEC 90]. Ils ont montré que deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes peuvent éventuellement se synchroniser s'ils sont couplés d'une manière convenable.

Vu que la synchronisation joue un grand rôle dans les schémas de communication, nous introduisons, dans la suite de ce chapitre, des définitions et des résultats concernant la synchronisation des systèmes chaotiques.

### **III.2.2. Synchronisation maître-esclave de systèmes chaotiques**

De nombreux travaux de recherche ont été effectués et différentes méthodes proposées pour la synchronisation des systèmes chaotiques. Pecora et Carroll ont montré la possibilité de synchroniser des systèmes chaotiques à l'aide d'un signal pilote commun [CAR 91]. La synchronisation des systèmes chaotiques a été largement appliquée à la cryptographie et la transmission sécurisée de l'information [FAL 08, KOC 95]. Pour cela, et afin de pouvoir décrypter le message, il faut d'abord synchroniser les systèmes chaotiques (le maître ou l'émetteur et l'esclave ou le récepteur).

### III.2.2.1. Cas de systèmes chaotiques identiques

#### III.2.2.1.a. *Synchronisation de deux systèmes chaotiques de Lorenz Stenflo*

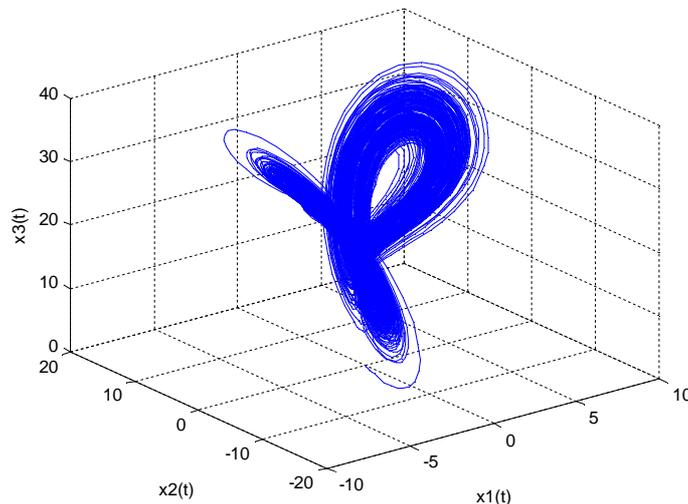
Dans cette section, le problème de synchronisation de deux systèmes chaotiques de Lorenz Stenflo est considéré.

Le système hyper-chaotique de Lorenz Stenflo considéré est régi [STE 96, VIN 08] par le système d'équations différentielles non linéaires du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha(x_2(t) - x_1(t)) + \gamma x_4(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)(r - x_3(t)) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t) \\ \dot{x}_4(t) = -x_1(t) - \alpha x_4(t) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

formulé en se basant sur l'équation d'une onde gravitationnelle à basse fréquence,  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\beta$  étant des constantes strictement positives, respectivement, le nombre de Rayleigh, le nombre de Prandtl, le nombre de rotation et le paramètre géométrique, associés au système hyper-chaotique à étudier.

Pour les données numériques suivantes :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.7$ ,  $\gamma = 1.5$  et  $r = 26$ , le système de Lorenz Stenflo (III.8) constitue l'attracteur chaotique de la figure III.1.



**Figure III.1.** Comportement en 3-D d'un attracteur chaotique de Lorenz Stenflo

**Position du problème**

La recherche sur la synchronisation des systèmes chaotiques consiste à concevoir un processus permettant la synchronisation de deux ou plusieurs systèmes chaotiques équivalents ou non, par couplage (unidirectionnel ou bidirectionnel) ou / et par forçage [MAGH 07].

A un système de Lorenz Stenflo considéré en tant que système maître et décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m}(t) = \alpha(x_{2m}(t) - x_{1m}(t)) + \gamma x_{4m}(t) \\ \dot{x}_{2m}(t) = x_{1m}(t)(r - x_{3m}(t)) - x_{2m}(t) \\ \dot{x}_{3m}(t) = x_{1m}(t)x_{2m}(t) - \beta x_{3m}(t) \\ \dot{x}_{4m}(t) = -x_{1m}(t) - \alpha x_{4m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

est associé un système identique du type esclave, défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s}(t) = \alpha(x_{2s}(t) - x_{1s}(t)) + \gamma x_{4s}(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_{2s}(t) = x_{1s}(t)(r - x_{3s}(t)) - x_{2s}(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_{3s}(t) = x_{1s}(t)x_{2s}(t) - \beta x_{3s}(t) + u_3(t) \\ \dot{x}_{4s}(t) = -x_{1s}(t) - \alpha x_{4s}(t) \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

où  $u(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t)]^T$  représente la commande active qui est à déterminer pour assurer la synchronisation du système esclave (III.10) avec le système maître (III.9).

Considérons les écarts dynamiques sur les variables d'état, définis par :

$$\begin{cases} e_{1s}(t) = x_{1s}(t) - x_{1m}(t) \\ e_{2s}(t) = x_{2s}(t) - x_{2m}(t) \\ e_{3s}(t) = x_{3s}(t) - x_{3m}(t) \\ e_{4s}(t) = x_{4s}(t) - x_{4m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Il vient le système écart correspondant :

$$\begin{cases} \dot{e}_{1s}(t) = \alpha(e_{2s}(t) - e_{1s}(t)) + \gamma e_{4s}(t) + u_1(t) \\ \dot{e}_{2s}(t) = r e_{1s}(t) - e_{2s}(t) - x_{1s}(t)x_{3s}(t) + x_{1m}(t)x_{3m}(t) + u_2(t) \\ \dot{e}_{3s}(t) = -\beta e_{3s}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t) - x_{1m}(t)x_{2m}(t) + u_3(t) \\ \dot{e}_{4s}(t) = -e_{1s}(t) - \alpha e_{4s}(t) \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

qui, dans l'espace d'état, peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{e}_s(t) = A_e(.)e_s(t) + Bu(t) \quad (\text{III.13})$$

$$A_e(.) = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & \gamma \\ (r - x_{3m}(t)) & -1 & -x_{1s}(t) & 0 \\ x_{2m}(t) & x_{1s}(t) & -\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$e_s(t)$  étant le vecteur état,  $e_s(t) = [e_{1s}(t) \ e_{2s}(t) \ e_{3s}(t) \ e_{4s}(t)]^T$ .

### Synchronisation du chaos : Synthèse d'une loi de commande par retour d'état

Dans cette partie, il est envisagé de déterminer une commande par retour d'état afin d'accomplir la synchronisation du chaos de deux systèmes de Lorenz Stenflo identiques [HAM 09b].

Le choix d'une telle structure de commande caractérisée par une matrice gain instantané  $K(.)$  de dimension  $3 \times 4$  :

$$u(t) = -K(.)e_s(t) \quad (\text{III.14})$$

conduit au système écart bouclé suivant :

$$\dot{e}_s(t) = A_{e_s}(.)e_s(t) \quad (\text{III.15})$$

avec :

$$A_{e_s}(.) = A_e(.) - BK(.) \quad (\text{III.16})$$

$$A_{e_s}(.) = \begin{bmatrix} -\alpha - k_{11}(.) & \alpha - k_{12}(.) & -k_{13}(.) & \gamma - k_{14}(.) \\ (r - x_{3m}(t)) - k_{21}(.) & -1 - k_{22}(.) & -x_{1s}(t) - k_{23}(.) & -k_{24}(.) \\ x_{2m}(t) - k_{31}(.) & x_{1s}(t) - k_{32}(.) & -\beta - k_{33}(.) & -k_{34}(.) \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Les paramètres de correction  $k_{ij}(.)$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$ ,  $\forall i \neq j$ , peuvent être choisis tels que  $A_{e_s}(.)$  soit de forme en flèche mince, c'est-à-dire, vérifiant le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - k_{12}(\cdot) = 0 \\ -k_{13}(\cdot) = 0 \\ (r - x_{3m}(t)) - k_{21}(\cdot) = 0 \\ -x_{1s}(t) - k_{23}(\cdot) = 0 \\ x_{2m}(t) - k_{31}(\cdot) = 0 \\ x_{1s}(t) - k_{32}(\cdot) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_{12} = \alpha \\ k_{13} = 0 \\ k_{21}(\cdot) = r - x_{3m}(t) \\ k_{23}(\cdot) = -x_{1s}(t) \\ k_{31}(\cdot) = x_{2m}(t) \\ k_{32}(\cdot) = x_{1s}(t) \end{array} \right. \quad (\text{III.17})$$

Lorsque le système dynamique (III.13) est stabilisé par une telle loi de commande  $u$ , le système écart va converger vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$  ; cela implique que les systèmes (III.9) et (III.10) sont synchronisés.

Appliquons le critère pratique de stabilité de Borne et Gentina [GEN 72, GEN 76a], au système écart ainsi défini de matrice caractéristique instantanée de forme matricielle en flèche.

L'application du théorème II.5, nécessite la vérification des conditions suivantes :

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule rangée de la matrice  $A_{e_s}(\cdot)$ ,
- ii. les éléments diagonaux de la matrice  $A_{e_s}(\cdot)$  sont sélectionnés tels qu'on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha - k_{11}(\cdot) < 0 \\ -1 - k_{22}(\cdot) < 0 \\ -\beta - k_{33}(\cdot) < 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

- iii. il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que :

$$(-\alpha) - \left( |(-1)(\gamma - k_{14}(\cdot))| (-\alpha - k_{11}(\cdot))^{-1} \right) \leq -\varepsilon \quad (\text{III.19})$$

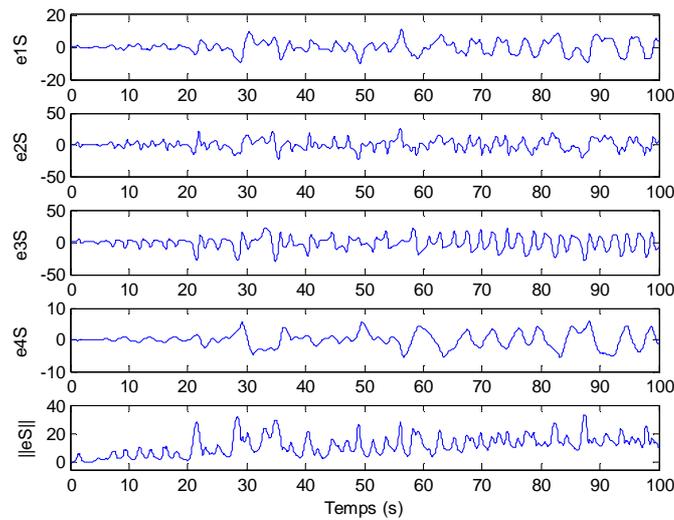
$k_{12}$ ,  $k_{13}$ ,  $k_{21}(\cdot)$ ,  $k_{23}(\cdot)$ ,  $k_{31}(\cdot)$  et  $k_{32}(\cdot)$  étant fixés par (III.17), le choix des autres éléments de la matrice gain instantané  $K(\cdot)$ , vérifiant (III.18) et (III.19), et éliminant la partie non linéaire du système écart, conduit à la solution suivante :

$$K(\cdot) = \begin{bmatrix} -\alpha + 1 & \alpha & 0 & \gamma \\ (r - x_{3m}(t)) & 1 & -x_{1s}(t) & 0 \\ x_{2m}(t) & x_{1s}(t) & -\beta + 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

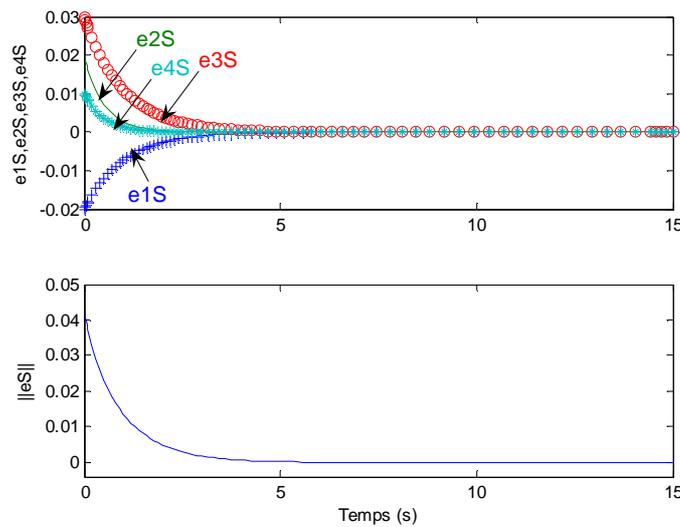
**Résultats de simulation**

Le système écart, présentant en boucle ouverte les réponses chaotiques de la figure III.2., une fois bouclé, montre la convergence asymptotique de  $e_{1S}$ ,  $e_{2S}$ ,  $e_{3S}$  et  $e_{4S}$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , ainsi que la convergence exponentielle de la synchronisation définie par la propagation du signal écart, représenté par :

$$\|e_S(t)\| = \sqrt{e_{1S}^2(t) + e_{2S}^2(t) + e_{3S}^2(t) + e_{4S}^2(t)} \quad (III.21)$$



**Figure III.2.** Erreurs dynamiques ( $e_{1S}$ ,  $e_{2S}$ ,  $e_{3S}$ ,  $e_{4S}$  et  $\|e_S\|$ ) de deux systèmes chaotiques de Lorenz Stenflo couplés en l'absence du signal de commande



**Figure III.3.** Convergence asymptotique des états du système écart suite à l'activation de la commande

Les résultats de la figure III.3. confirment la synchronisation des deux systèmes chaotiques identiques étudiés.

### III.2.2.1.b. Synchronisation de deux systèmes chaotiques de Qi

Dans cette partie, notre attention est focalisée sur le problème de la synchronisation de deux nouveaux systèmes chaotiques identiques de Qi [QI 05].

#### Description du système chaotique de Qi

Le modèle étudié, dans cette partie, est un système non linéaire de dimension 4, décrit par [VIN 08, QI 05] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(x_2(t) - x_1(t)) + x_2(t)x_3(t)x_4(t) \\ \dot{x}_2(t) = b(x_1(t) + x_2(t)) - x_1(t)x_3(t)x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = -cx_3(t) + x_1(t)x_2(t)x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = -dx_4(t) + x_1(t)x_2(t)x_3(t) \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

où  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$  désignent les variables d'état du système et  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  des paramètres réels constants et positifs.

Qi avait montré un comportement chaotique du système (III.22), tel que l'illustre la figure III.4., et ce pour  $a = 30$ ,  $b = 10$ ,  $c = 1$  et  $d = 10$ .

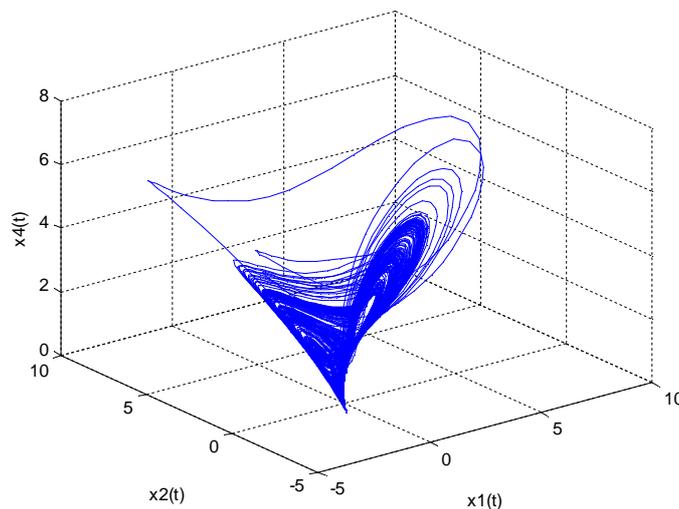


Figure III.4. Comportement chaotique du système de Qi

### Formulation du problème

En suivant les mêmes étapes de la section précédente, au système maître, défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m}(t) = a(x_{2m}(t) - x_{1m}(t)) + x_{2m}(t)x_{3m}(t)x_{4m}(t) \\ \dot{x}_{2m}(t) = b(x_{1m}(t) + x_{2m}(t)) - x_{1m}(t)x_{3m}(t)x_{4m}(t) \\ \dot{x}_{3m}(t) = -cx_{3m}(t) + x_{1m}(t)x_{2m}(t)x_{4m}(t) \\ \dot{x}_{4m}(t) = -dx_{4m}(t) + x_{1m}(t)x_{2m}(t)x_{3m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

nous associons un système identique esclave, donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s}(t) = a(x_{2s}(t) - x_{1s}(t)) + x_{2s}(t)x_{3s}(t)x_{4s}(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_{2s}(t) = b(x_{1s}(t) + x_{2s}(t)) - x_{1s}(t)x_{3s}(t)x_{4s}(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_{3s}(t) = -cx_{3s}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)x_{4s}(t) + u_3(t) \\ \dot{x}_{4s}(t) = -dx_{4s}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)x_{3s}(t) + u_4(t) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

$u_i(t)$ ,  $\forall i = 1, \dots, 4$ , étant les composantes du vecteur de commande défini par (III.11).

Il vient les équations régissant le comportement du système écart entre ces deux systèmes :

$$\begin{cases} \dot{e}_{1s}(t) = a(e_{2s}(t) - e_{1s}(t)) + x_{2s}(t)x_{3s}(t)x_{4s}(t) - x_{2m}(t)x_{3m}(t)x_{4m}(t) + u_1(t) \\ \dot{e}_{2s}(t) = b(e_{1s}(t) + e_{2s}(t)) - x_{1s}(t)x_{3s}(t)x_{4s}(t) + x_{1m}(t)x_{3m}(t)x_{4m}(t) + u_2(t) \\ \dot{e}_{3s}(t) = -ce_{3s}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)x_{4s}(t) - x_{1m}(t)x_{2m}(t)x_{4m}(t) + u_3(t) \\ \dot{e}_{4s}(t) = -de_{4s}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)x_{3s}(t) - x_{1m}(t)x_{2m}(t)x_{3m}(t) + u_4(t) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

La matrice caractéristique instantanée  $A_e(\cdot)$  d'un tel système écart est, dans ce cas, définie par :

$$A_e(\cdot) = \begin{bmatrix} -a & (a - x_{3m}(t)x_{4m}(t)) & x_{2s}(t)x_{4m}(t) & x_{2s}(t)x_{3s}(t) \\ (b + x_{3s}(t)x_{4s}(t)) & b & -x_{1m}(t)x_{4s}(t) & -x_{1m}(t)x_{3m}(t) \\ x_{2m}(t)x_{4m}(t) & x_{1s}(t)x_{4m}(t) & -c & x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ x_{2m}(t)x_{3m}(t) & x_{1s}(t)x_{3m}(t) & x_{1s}(t)x_{2s}(t) & -d \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

### Synchronisation par réaction d'état

Pour pouvoir conférer la propriété de synchronisation pour les deux systèmes chaotiques identiques couplés, la loi de commande par retour d'état de la forme (III.14), conduit à la matrice caractéristique instantanée en boucle fermée  $A_{e_s}(\cdot)$  suivante [HAM 09b] :

$$A_{e_s}(\cdot) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ -k_{11}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a - x_{3m}(t)x_{4m}(t) \\ -k_{12}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{2s}(t)x_{4m}(t) \\ -k_{13}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{2s}(t)x_{3s}(t) \\ -k_{14}(\cdot) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b + x_{3s}(t)x_{4s}(t) \\ -k_{21}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ -k_{22}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -x_{1m}(t)x_{4s}(t) \\ -k_{23}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -x_{1m}(t)x_{3m}(t) \\ -k_{24}(\cdot) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{2m}(t)x_{4m}(t) \\ -k_{31}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{1s}(t)x_{4m}(t) \\ -k_{32}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -c \\ -k_{33}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ -k_{34}(\cdot) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{2m}(t)x_{3m}(t) \\ -k_{41}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{1s}(t)x_{3m}(t) \\ -k_{42}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ -k_{43}(\cdot) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -d \\ -k_{44}(\cdot) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

La mise sous la forme en flèche mince, nécessite le choix de certains paramètres du système de commande, tel que :

$$\begin{cases} k_{12}(\cdot) = a - x_{3m}(t)x_{4m}(t) \\ k_{13}(\cdot) = x_{2s}(t)x_{4m}(t) \\ k_{21}(\cdot) = b + x_{3s}(t)x_{4s}(t) \\ k_{23}(\cdot) = -x_{1m}(t)x_{4s}(t) \\ k_{31}(\cdot) = x_{2m}(t)x_{4m}(t) \\ k_{32}(\cdot) = x_{1s}(t)x_{4m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

De plus, pour satisfaire la contrainte (II.83) du théorème II.5, relative à la négativité des éléments diagonaux de la matrice  $A_{e_s}(\cdot)$ ,  $k_{11}(\cdot)$ ,  $k_{22}(\cdot)$  et  $k_{33}(\cdot)$  peuvent être choisis tels que :

$$\begin{cases} k_{11} = -29 \\ k_{22} = 11 \\ k_{33} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

et pour vérifier l'inégalité (II.84), les paramètres de correction  $k_{14}(\cdot)$ ,  $k_{24}(\cdot)$ ,  $k_{34}(\cdot)$ ,  $k_{41}(\cdot)$ ,  $k_{42}(\cdot)$ ,  $k_{34}(\cdot)$  et  $k_{44}(\cdot)$  peuvent être sélectionnés de la manière suivante :

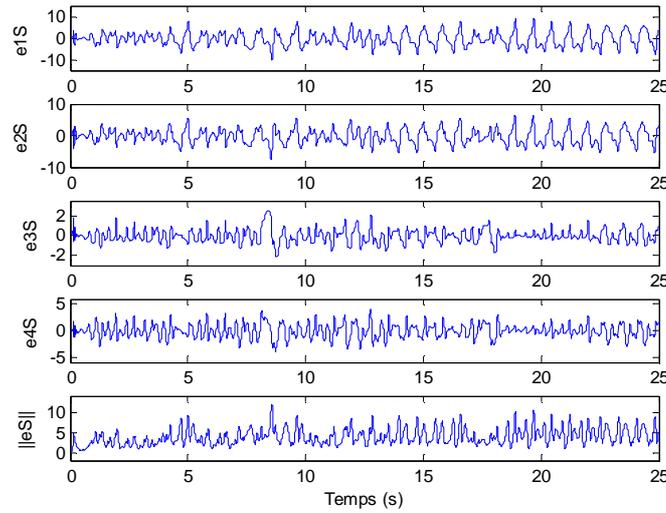
$$\left\{ \begin{array}{l} k_{14}(\cdot) = x_{2s}(t)x_{3s}(t) \\ k_{24}(\cdot) = -x_{1m}(t)x_{3m}(t) \\ k_{34}(\cdot) = x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ k_{41}(\cdot) = x_{2m}(t)x_{3m}(t) \\ k_{42}(\cdot) = x_{1s}(t)x_{3m}(t) \\ k_{43}(\cdot) = x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ k_{44} = 5 \end{array} \right. \quad (\text{III.30})$$

Ainsi, pour les commandes  $u_i(t)$ ,  $\forall i = 1, \dots, 4$ , définies par (III.31) :

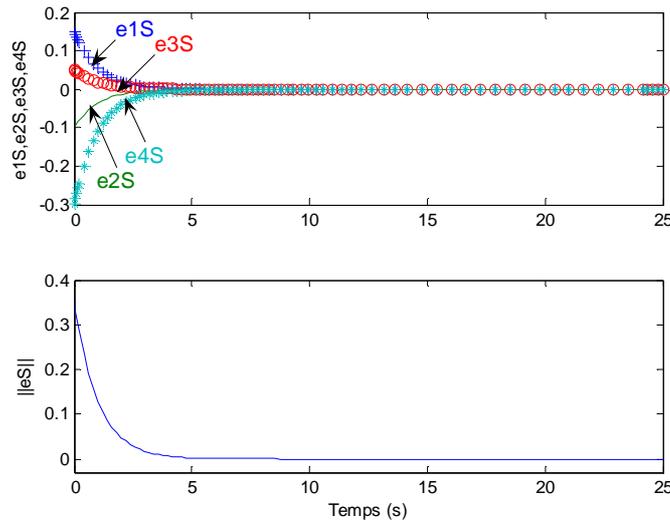
$$u(t) = - \left[ \begin{array}{cccc} -29 & a - x_{3m}(t)x_{4m}(t) & x_{2s}(t)x_{4m}(t) & x_{2s}(t)x_{3s}(t) \\ b + x_{3s}(t)x_{4s}(t) & 11 & -x_{1m}(t)x_{4s}(t) & -x_{1m}(t)x_{3m}(t) \\ x_{2m}(t)x_{4m}(t) & x_{1s}(t)x_{4m}(t) & 0 & x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ x_{2m}(t)x_{3m}(t) & x_{1s}(t)x_{3m}(t) & x_{1s}(t)x_{2s}(t) & 5 \end{array} \right] e_s(t) \quad (\text{III.31})$$

le système écart (III.25) converge vers zéro, lorsque  $t \rightarrow +\infty$  ; ce qui implique que le système (III.24) va globalement se synchroniser avec le système (III.23).

La figure III.5. montre les écarts dynamiques dans le cas où les deux systèmes chaotiques (III.23) et (III.24) ne sont pas encore couplés, tandis que la figure III.6. montre les évolutions des différents états du système écart, résultant du couplage de (III.24) avec (III.23), après l'activation du signal de commande requis à la synchronisation de ces deux systèmes. Ces résultats illustrent, ainsi, l'applicabilité de l'approche de commande proposée.



*Figure III.5. Ecarts dynamiques entre deux systèmes chaotiques de Qi couplés en l'absence du signal de commande*



*Figure III.6. Ecarts dynamiques entre deux systèmes chaotiques de Qi couplés suite à l'activation du signal de commande*

**III.2.2.2. Cas de systèmes chaotiques non identiques**

L'efficacité de la méthode proposée, pour résoudre le problème de la synchronisation de processus chaotiques différents, est testée sur le système de Lorenz Stenflo couplé au système de Qi.

### Position du problème

Le système de Lorenz Stenflo (III.9) étant pris comme système maître et le système de Qi (III.24) comme esclave, il s'agit, dans cette partie, de concevoir une structure de commande  $u_i(t)$ ,  $\forall i = 1, \dots, 4$ , permettant la synchronisation de ces deux systèmes, dont le système écart est défini, comme précédemment, par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_{1s}(t) = -(a + \alpha)e_{1s}(t) + (a + \alpha)e_{2s}(t) + x_{2s}(t)x_{4s}(t)e_{3s}(t) + \gamma e_{4s}(t) \\ \quad + a(x_{2m}(t) - x_{1m}(t)) + \alpha(x_{1s}(t) - x_{2s}(t)) + x_{4s}(t)(x_{2s}(t)x_{3m}(t) - \gamma) + u_1(t) \\ \dot{e}_{2s}(t) = (b + r)e_{1s}(t) + (b - 1)e_{2s}(t) - x_{1s}(t)x_{3s}(t)e_{4s}(t) \\ \quad + b(x_{1m}(t) + x_{2m}(t)) - x_{1s}(t)(r + x_{3s}(t)x_{4m}(t)) + x_{2s}(t) + x_{1m}(t)x_{3m}(t) + u_2(t) \\ \dot{e}_{3s}(t) = -(c + \beta)e_{3s}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)e_{4s}(t) \\ \quad - cx_{3m}(t) + \beta x_{3s}(t) - x_{1m}(t)x_{2m}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)x_{4m}(t) + u_3(t) \\ \dot{e}_{4s}(t) = -e_{1s}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)e_{3s}(t) - (d + \alpha)e_{4s}(t) \\ \quad - dx_{4m}(t) + x_{1s}(t)(1 + x_{2s}(t)x_{3m}(t)) + \alpha x_{4s}(t) + u_4(t) \end{array} \right. \quad (\text{III.32})$$

et dans l'espace d'état par :

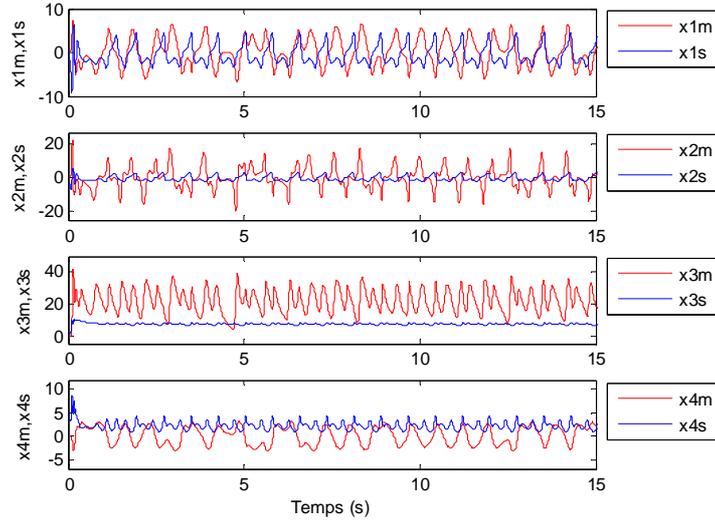
$$\dot{e}_s(t) = A_e(\cdot)e_s(t) + F(\cdot) + Bu(t) \quad (\text{III.33})$$

avec :

$$A_e(\cdot) = \begin{bmatrix} -(a + \alpha) & (a + \alpha) & x_{2s}(t)x_{4s}(t) & \gamma \\ (b + r) & (b - 1) & 0 & -x_{1s}(t)x_{3s}(t) \\ 0 & 0 & -(c + \beta) & x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ -1 & 0 & x_{1s}(t)x_{2s}(t) & -(d + \alpha) \end{bmatrix}$$

$$F(\cdot) = \begin{bmatrix} a(x_{2m}(t) - x_{1m}(t)) + \alpha(x_{1s}(t) - x_{2s}(t)) + x_{4s}(t)(x_{2s}(t)x_{3m}(t) - \gamma) \\ b(x_{1m}(t) + x_{2m}(t)) - x_{1s}(t)(r + x_{3s}(t)x_{4m}(t)) + x_{2s}(t) + x_{1m}(t)x_{3m}(t) \\ -cx_{3m}(t) + \beta x_{3s}(t) - x_{1m}(t)x_{2m}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)x_{4m}(t) \\ -dx_{4m}(t) + x_{1s}(t)(1 + x_{2s}(t)x_{3m}(t)) + \alpha x_{4s}(t) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**Figure III.7.** Erreurs dynamiques entre le système de Lorenz Stenflo et le système de Qi avant l'activation du signal de commande

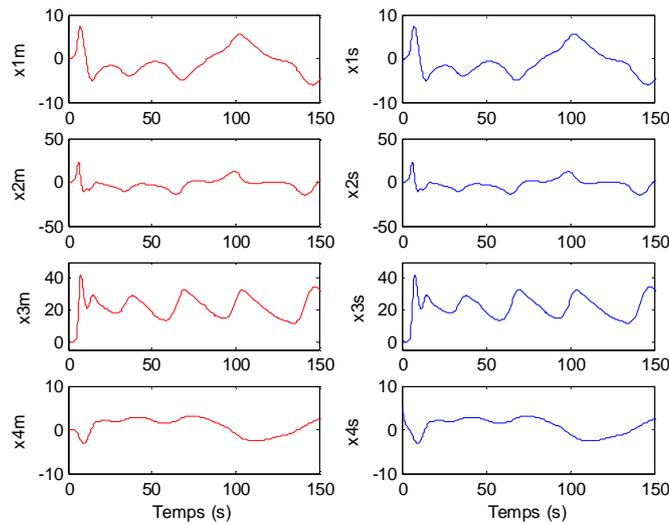
### Nouvelle loi de commande synchronisant le système de Lorenz Stenflo avec celui de Qi

La structure de la loi de commande, retenue dans le cas présent, est par retour d'état et par compensation du terme complémentaire  $F(\cdot)$  figurant dans la description (III.33), définie comme suit [HAM 09b] :

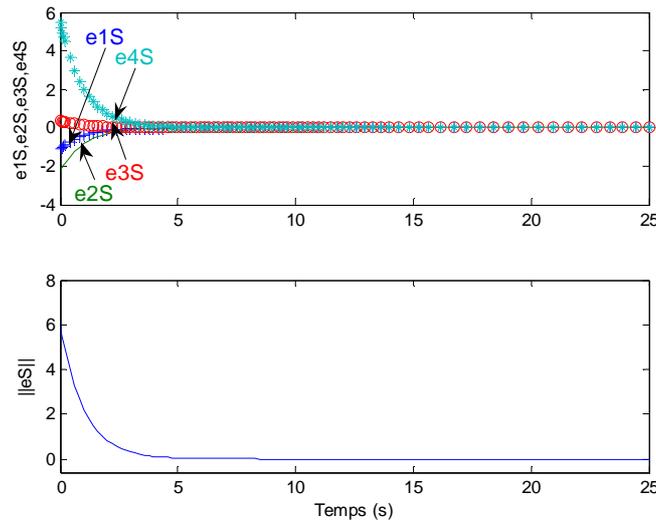
$$u_i(t) = -f_i(\cdot) - k_{ij}(\cdot)e_{is} \quad \forall i, j = 1, \dots, 4 \quad (\text{III.34})$$

Parmi les diverses possibilités de choix de la matrice gain instantané  $K(\cdot) = \{k_{ij}(\cdot)\}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, 4$ , de telle sorte que la synchronisation, entre les deux systèmes non homologues (III.9) et (III.24), soit remplie, celle retenue est la suivante :

$$K(\cdot) = \begin{bmatrix} -(a + \alpha) + 1 & (a + \alpha) & x_{2s}(t)x_{4s}(t) & \gamma \\ (b + r) & b & 0 & -x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ 0 & 0 & -(c + \beta) + 1 & x_{1s}(t)x_{2s}(t) \\ -1 & x_{1s}(t)x_{2s}(t) & 0 & -(d + \alpha) + 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$



**Figure III.8.** Réponses des systèmes de Lorenz Stenflo et de  $Q_i$  couplés suite à la mise en oeuvre de la commande proposée



**Figure III.9.** Evolutions des dynamiques du système écart résultant du couplage du système chaotique de Lorenz Stenflo et du système chaotique de  $Q_i$  après l'activation de la commande

### III.2.3. Anti-synchronisation maître-esclave de systèmes chaotiques

L'anti-synchronisation est un phénomène pour lequel les composantes des vecteurs états des systèmes anti-synchronisés possèdent les mêmes amplitudes en valeurs absolues et sont de signes opposés. De ce fait, la somme de deux signaux est supposée converger vers zéro dans le cas où la propriété d'anti-synchronisation est satisfaite [JUH 09, VIN 07].

### III.2.3.1. Cas de systèmes chaotiques identiques

#### *III.2.3.1.a. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques de Rössler*

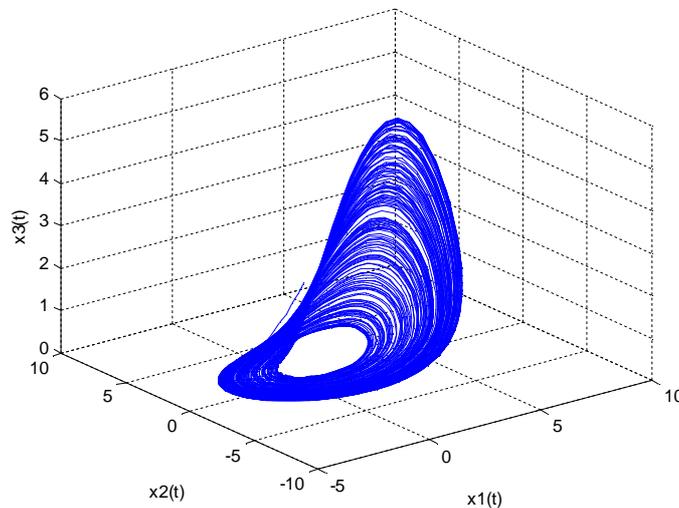
Dans cette section, est traitée la question d'anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques identiques de Rössler.

#### Description du système chaotique de Rössler

Suite à la découverte des attracteurs de Lorenz [LOR 63], Rössler a proposé un système chaotique plus simple [RÖSS 76], nommé système de Rössler et décrit dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -(x_2(t) + x_3(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + \delta x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = \eta + x_3(t)(x_1(t) - \mu) \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

En considérant la condition initiale  $x(0) = [1 \quad 1.5 \quad 2]^T$  et pour :  $\delta = 0.398$ ,  $\eta = 2$  et  $\mu = 4$ , le système de Rössler (III.36) correspond à un attracteur chaotique tel que le montre la figure III.10.



**Figure III.10.** Comportement chaotique du système de Rössler

#### Formulation du problème

Considérons le système maître de Rössler donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m}(t) = -(x_{2m}(t) + x_{3m}(t)) \\ \dot{x}_{2m}(t) = x_{1m}(t) + \delta x_{2m}(t) \\ \dot{x}_{3m}(t) = \eta + x_{3m}(t)(x_{1m}(t) - \mu) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

auquel nous faisons correspondre un système esclave, du même type, décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s}(t) = -(x_{2s}(t) + x_{3s}(t)) + u_1(t) \\ \dot{x}_{2s}(t) = x_{1s}(t) + \delta x_{2s}(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_{3s}(t) = \eta + x_{3s}(t)(x_{1s}(t) - \mu) + u_3(t) \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Le problème à résoudre, dans cette partie, est de déterminer une loi de commande  $u(t)$  du système esclave (III.38),  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^T$ , afin de lui conférer la propriété d'anti-synchronisme vis-à-vis du système (III.37), c'est-à-dire que le système de vecteur état  $e_{AS}$  de composantes  $e_{1AS}$ ,  $e_{2AS}$  et  $e_{3AS}$ , défini par :

$$\begin{cases} e_{1AS}(t) = x_{1s}(t) + x_{1m}(t) \\ e_{2AS}(t) = x_{2s}(t) + x_{2m}(t) \\ e_{3AS}(t) = x_{3s}(t) + x_{3m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

et décrit dans l'espace d'état par :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{1AS}(t) \\ \dot{e}_{2AS}(t) \\ \dot{e}_{3AS}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_{2AS}(t) - e_{3AS}(t) \\ e_{1AS}(t) + \delta e_{2AS}(t) \\ 2\eta + e_{3AS}(t)(e_{1AS}(t) - \mu) - (x_{3s}(t)x_{1m}(t) + x_{3m}(t)x_{1s}(t)) \end{bmatrix} + \mathbb{I}_{3 \times 3} u(t) \quad (\text{III.40})$$

le vecteur de sortie est défini par  $y_{e_{AS}}(t) = [-y_{1e_{AS}}(t) \ 2y_{2e_{AS}}(t) \ y_{3e_{AS}}(t)]^T$  ou encore :

$$y_{e_{AS}}(t) = C e_{AS}(t) \quad (\text{III.41})$$

où la matrice de sortie est supposée être telle que :

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

soit stable.

**Synthèse d'une loi de commande par retour de sortie pour l'anti-synchronisation du chaos**

Dans cette section, le problème d'anti-synchronisation pouvant exister entre deux systèmes chaotiques dynamiques identiques de Rössler est résolu par le choix d'une loi de commande par retour de sortie.

Pour étudier la propriété d'observabilité du système (III.40) et (III.41), en régime libre, adoptons les transformations suivantes :

$$\phi_{e_{1AS}} : \begin{cases} \tilde{e}_{1AS}(t) = e_{1AS}(t) \\ \tilde{e}_{2AS}(t) = \dot{e}_{1AS}(t) \\ \tilde{e}_{3AS}(t) = \ddot{e}_{1AS}(t) \end{cases}, \phi_{e_{2AS}} : \begin{cases} \widehat{e}_{1AS}(t) = e_{2AS}(t) \\ \widehat{e}_{2AS}(t) = \dot{e}_{2AS}(t) \\ \widehat{e}_{3AS}(t) = \ddot{e}_{2AS}(t) \end{cases} \text{ et } \phi_{e_{3AS}} : \begin{cases} \bar{e}_{1AS}(t) = e_{3AS}(t) \\ \bar{e}_{2AS}(t) = \dot{e}_{3AS}(t) \\ \bar{e}_{3AS}(t) = \ddot{e}_{3AS}(t) \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

Le calcul des déterminants des matrices jacobiennes respectives d'observabilité  $J_{\phi_{e_{1AS}}}$ ,  $J_{\phi_{e_{2AS}}}$  et  $J_{\phi_{e_{3AS}}}$ , donne les résultats suivants :

$$\det\left(J_{\phi_{e_{1AS}}}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 - e_{3AS}(t) & -\delta & \mu - e_{1AS}(t) \end{vmatrix} = e_{1AS}(t) - (\delta + \mu) \quad (\text{III.44})$$

$$\det\left(J_{\phi_{e_{2AS}}}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \delta & 0 \\ \delta & \delta^2 - 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad (\text{III.45})$$

$$\det\left(J_{\phi_{e_{3AS}}}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e_{3AS}(t) & 0 & e_{1AS}(t) - \mu \\ \left( \begin{array}{l} 2\eta + 2e_{3AS}(t)(e_{1AS}(t) - \mu) \\ -x_{3s}(t)x_{1m}(t) - x_{3m}(t)x_{1s}(t) \end{array} \right) & -e_{3AS}(t) & \left( \begin{array}{l} (e_{1AS}(t) - \mu)^2 \\ -e_{2AS}(t) - 2e_{3AS}(t) \end{array} \right) \end{vmatrix} = -e_{3AS}^2(t) \quad (\text{III.46})$$

Ils montrent que le système chaotique de Rössler est complètement observable et que, de plus, ses variables d'état peuvent être classées selon leur degré d'observabilité vis-à-vis de la dynamique du système considéré, de la manière suivante :

$$e_{2AS}(t) \succ e_{1AS}(t) \succ e_{3AS}(t) \quad (\text{III.47})$$

Pour l'application traitée dans cette partie, la loi de commande par retour de sortie stabilisante et par compensation du terme non linéaire, ayant la forme suivante :

$$u_i(t) = -\sum_{j=1}^3 k_{ij}(\cdot) y_{jeAS}(t) - f_i(\cdot) \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.48})$$

permet de décrire le système bouclé par une matrice de forme en flèche mince et garantissant l'anti-synchronisation de deux systèmes de Rössler couplés et soumis à des conditions initiales différentes.

En tenant compte de la structure caractérisant la loi de commande (III.48) caractérisée par une matrice gain instantané  $K(\cdot)$ ,  $K(\cdot) = \{k_{ij}(\cdot)\}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, 3$ , il en résulte :

$$\begin{cases} \dot{e}_{1AS}(t) = k_{11}(\cdot)e_{1AS}(t) - (1 + 2k_{12}(\cdot))e_{2AS}(t) - (1 + k_{13}(\cdot))e_{3AS}(t) - f_1(\cdot) \\ \dot{e}_{2AS}(t) = (1 + k_{21}(\cdot))e_{1AS}(t) + (\delta - 2k_{22}(\cdot))e_{2AS}(t) - k_{23}(\cdot)e_{3AS}(t) - f_2(\cdot) \\ \dot{e}_{3AS}(t) = (e_{3AS}(t) + k_{31}(\cdot))e_{1AS}(t) - 2k_{32}(\cdot)e_{2AS}(t) - (\mu + k_{33}(\cdot))e_{3AS}(t) \\ \quad + 2\eta - (x_{3s}(t)x_{1m}(t) + x_{3m}(t)x_{1s}(t)) - f_3(\cdot) \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Pour caractériser le système en boucle fermée par une matrice de forme en flèche mince, les paramètres de correction  $k_{12}(\cdot)$  et  $k_{21}(\cdot)$  doivent être choisis comme suit :

$$\begin{cases} -1 - 2k_{12}(\cdot) = 0 \\ 1 + k_{21}(\cdot) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{12} = -0.5 \\ k_{21} = -1 \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

Pour que (III.49) soit asymptotiquement stable au sens du théorème II.6, les paramètres de la chaîne de correction restants peuvent être choisis de telle sorte que les contraintes suivantes soient vérifiées :

- i. toutes les non linéarités sont isolées dans une seule ligne ou une seule colonne de la matrice caractéristique du système erreur dynamique (III.49) corrigé,
- ii. les paramètres  $k_{11}(\cdot)$  et  $k_{22}(\cdot)$  sont tels que :

$$\begin{cases} k_{11}(\cdot) < 0 \\ (\delta - 2k_{22}(\cdot)) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

iii. il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que :

$$-(\mu + k_{33}(\cdot)) - \left( \begin{array}{l} |(e_{3AS}(t) + k_{31}(\cdot))(-1 + k_{13}(\cdot))|(k_{11}(\cdot))^{-1} \\ + |(-2k_{32}(\cdot))(-k_{23}(\cdot))|(\delta - 2k_{22}(\cdot))^{-1} \end{array} \right) \leq -\varepsilon \quad (\text{III.52})$$

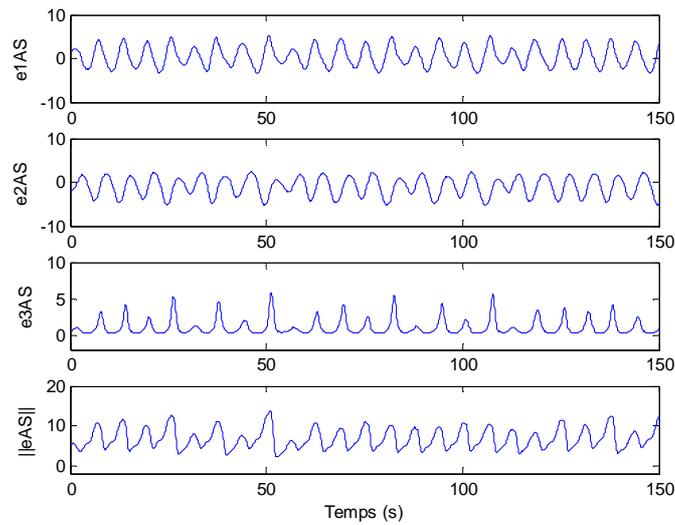
Plusieurs choix de la matrice gain instantané  $K(\cdot)$  et des fonctions non linéaires  $f_i(\cdot)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , pouvant simplifier le système erreur, sont envisageables. Nous avons retenu la solution suivante :

$$K(\cdot) = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 & 0.5 \\ -1 & 5.398 & 0.5 \\ -e_{3AS}(t) & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.53})$$

et :

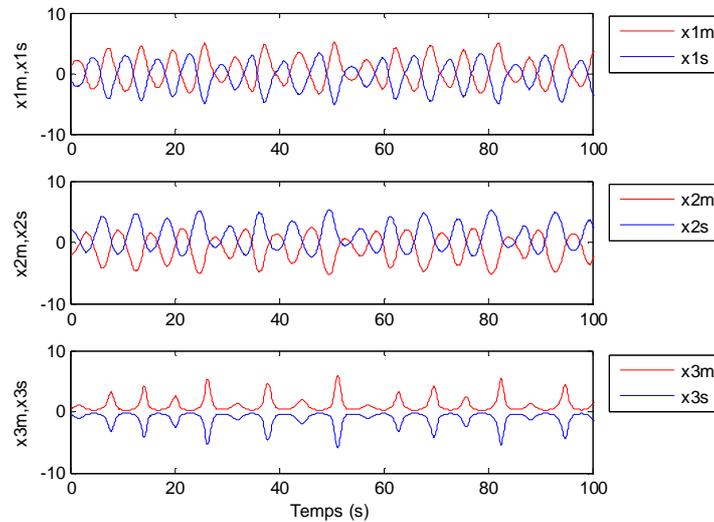
$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3(\cdot) = 2\eta - (x_{3s}(t)x_{1m}(t) + x_{3m}(t)x_{1s}(t)) \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

La figure III.11. montre les évolutions chaotiques des composantes de  $e_{AS}$  en l'absence d'une régulation.



**Figure III.11.** Evolutions de  $e_{1AS}$ ,  $e_{2AS}$ ,  $e_{3AS}$  et de  $\|e_{AS}\|$  dans le cas non compensé

La mise en œuvre de la commande caractérisée par (III.53) et (III.54), a abouti aux résultats de la figure III.12.



**Figure III.12.** Séries temporelles d'anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques de Rössler couplés

La figure III.12 met en exergue, en particulier, trois trajectoires évoluant, d'une façon harmonique, dans des directions opposées suite à l'application de la commande proposée. Ces résultats ont été obtenus pour les conditions initiales du système maître  $x_m(0) = [1.1 \quad -2.2 \quad 0.3]^T$  et celles du système esclave  $x_s(0) = [-1.5 \quad 2.7 \quad -0.6]^T$ , distinctes.

### III.2.3.1.b. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques de Chen

L'étude de l'anti-synchronisation de systèmes chaotiques identiques, est envisagée dans cette partie pour deux systèmes dynamiques de Chen.

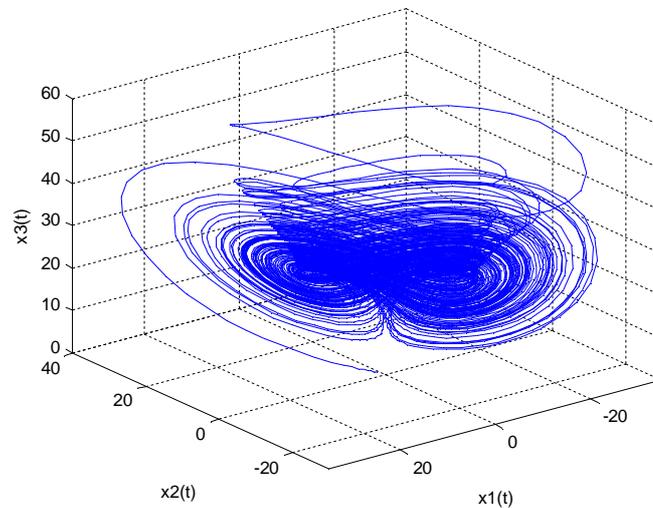
#### Représentations du système chaotique de Chen

Le système chaotique de Chen est décrit par le modèle d'équations différentielles suivant [FAL 08] :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\chi & \chi & 0 \\ \sigma - \chi & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.55})$$

où  $\chi$ ,  $\rho$  et  $\sigma$  sont trois paramètres positifs.

Le système (III.55), partant du vecteur état initial  $x(0) = [1 \ 1 \ 0.5]^T$ , exhibe un attracteur chaotique pour les valeurs suivantes de ses paramètres caractéristiques :  $\chi = 35$ ,  $\rho = 3$  et  $\sigma = 28$ , figure III.13.



**Figure III.13.** Attracteur dynamique du système chaotique de Chen en vue 3-D

Ce système peut aussi être représenté, dans l'espace d'état, par le système d'équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) \quad (\text{III.56})$$

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} -\chi & \chi & 0 \\ \sigma - \chi & \sigma & -x_1(t) \\ 0 & x_1(t) & -\rho \end{bmatrix}$$

### Position du problème

Comme précédemment, le système maître est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m}(t) = \chi(x_{2m}(t) - x_{1m}(t)) \\ \dot{x}_{2m}(t) = (\sigma - \chi - x_{3m}(t))x_{1m}(t) + \sigma x_{2m}(t) \\ \dot{x}_{3m}(t) = x_{1m}(t)x_{2m}(t) - \rho x_{3m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

et le système comme esclave par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s}(t) = \chi(x_{2s}(t) - x_{1s}(t)) + u_1(t) \\ \dot{x}_{2s}(t) = (\sigma - \chi - x_{3s}(t))x_{1s}(t) + \sigma x_{2s}(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_{3s}(t) = x_{1s}(t)x_{2s}(t) - \rho x_{3s}(t) + u_3(t) \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

$u_i(t)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , étant les commandes par retour de sortie à synthétiser.

En tenant compte des notations (III.39), il vient de l'addition de (III.58) à (III.57) :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{1AS}(t) \\ \dot{e}_{2AS}(t) \\ \dot{e}_{3AS}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi(e_{2AS}(t) - e_{1AS}(t)) \\ (\sigma - \chi)e_{1AS}(t) + \sigma e_{2AS}(t) - (x_{1m}(t)x_{3m}(t) + x_{1s}(t)x_{3s}(t)) \\ -\rho e_{3AS}(t) + (x_{1m}(t)x_{2m}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)) \end{bmatrix} + \mathbb{I}_{3 \times 3} u(t) \quad (\text{III.59})$$

Le vecteur de sortie suivant :

$$y_{e_{AS}}(t) = \begin{bmatrix} y_{1e_{AS}}(t) & y_{2e_{AS}}(t) \end{bmatrix}^T \quad (\text{III.60})$$

défini tel que :

$$\begin{bmatrix} y_{1e_{AS}}(t) \\ y_{2e_{AS}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1AS}(t) \\ e_{2AS}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.61})$$

Notre tâche consiste à déterminer la structure la plus appropriée de la loi de commande par réaction de sortie, garantissant la caractérisation du système dynamique compensé par une matrice de forme en flèche mince, tout en lui attribuant la propriété de stabilité asymptotique.

**Anti-synchronisation via une loi de commande active par réaction de sortie**

En ce qui concerne le système chaotique de Chen, la vérification de la propriété d'anti-synchronisation réside dans la vérification de la propriété de stabilité asymptotique du système défini par (III.59) et (III.60).

Considérons une transformation (III.43), relativement à la variable d'état  $e_{1AS}$ , il vient par calcul du déterminant Jacobien :

$$\det\left(J_{\phi_{e_{1AS}}}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\chi & \chi & 0 \\ \chi(\sigma - e_{3AS}(t)) & \chi(\sigma - \chi) & -\chi e_{1AS}(t) \end{vmatrix} = -\chi^2 e_{1AS}(t) \quad (\text{III.62})$$

La loi de commande  $u(t)$ , de composantes  $u_i(t)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , retenue dans cette partie est de la forme :

$$u_i(t) = -\sum_{j=1}^2 k_{ij}(\cdot) y_{je_{AS}}(t) - f_i(\cdot) \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.63})$$

garantissant la caractérisation du système compensé par une matrice de forme en flèche mince, tout en lui conférant la propriété de stabilité asymptotique.

Le système ainsi bouclé avec une matrice gain instantané  $K(\cdot)$ ,  $K(\cdot) = \{k_{ij}(\cdot)\}$ , de dimension  $3 \times 2$ , est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{e}_{1AS}(t) = -(\chi + k_{11}(\cdot))e_{1AS}(t) + (\chi - k_{12}(\cdot))e_{2AS}(t) - f_1(\cdot) \\ \dot{e}_{2AS}(t) = (\sigma - \chi - k_{21}(\cdot))e_{1AS}(t) + (\sigma - k_{22}(\cdot))e_{2AS}(t) \\ \quad - (x_{1m}(t)x_{3m}(t) + x_{1s}(t)x_{3s}(t)) - f_2(\cdot) \\ \dot{e}_{3AS}(t) = -k_{31}(\cdot)e_{1AS}(t) - k_{32}(\cdot)e_{2AS}(t) - \rho e_{3AS}(t) \\ \quad + (x_{1m}(t)x_{2m}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t)) - f_3(\cdot) \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

Nous remarquons que la prise en considération du vecteur état  $e_{AS}(t) = [e_{3AS}(t) \ e_{2AS}(t) \ e_{1AS}(t)]^T$ , il est possible de caractériser, aisément, le système bouclé (III.64) par une matrice de forme en flèche mince, et ce en choisissant le paramètre de réglage  $k_{32}(\cdot)$  et les fonctions non linéaires  $f_i(\cdot)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , tels que :

$$\begin{cases} k_{32} = 0 \\ f_1 = 0 \\ f_2(\cdot) = -x_{1m}(t)x_{3m}(t) - x_{1s}(t)x_{3s}(t) \\ f_3(\cdot) = x_{1m}(t)x_{2m}(t) + x_{1s}(t)x_{2s}(t) \end{cases} \quad (\text{III.65})$$

Ajoutons à ceci que, pour satisfaire la contrainte iii. du théorème II.6, imposant que les deux premiers éléments diagonaux de la matrice caractéristique du système (III.64) soient strictement négatifs, il suffit de vérifier, pour  $\rho > 0$ , que nous avons :

$$(\sigma - k_{22}(\cdot)) < 0 \quad (\text{III.66})$$

soit, par exemple :

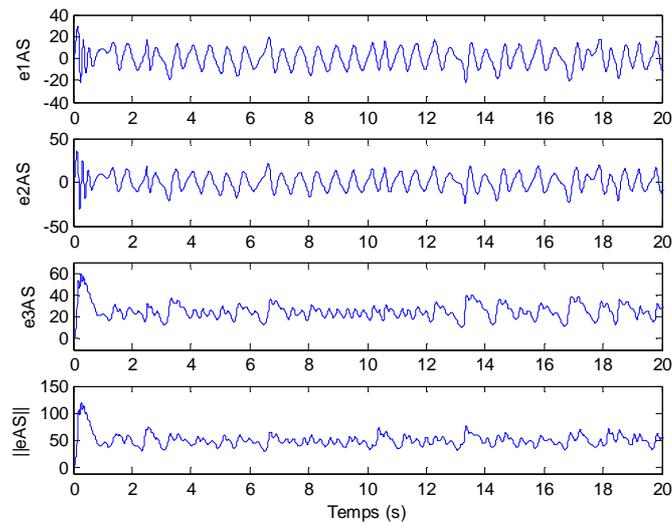
$$k_{22} = 30 \quad (\text{III.67})$$

Pour alléger, notablement, la vérification de la condition (II.108) du même théorème II.6, nous choisissons les paramètres de la chaîne de correction  $k_{11}(\cdot)$ ,  $k_{12}(\cdot)$ ,  $k_{21}(\cdot)$  et  $k_{31}(\cdot)$  de telle façon que les produits des éléments hors diagonaux soient nuls, soit :

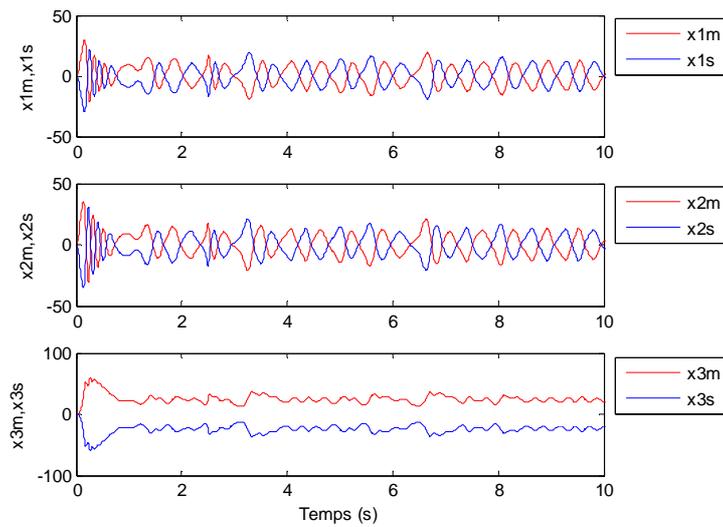
$$\begin{cases} k_{11} = \chi \\ k_{12} = \chi \\ k_{21} = \sigma - \chi \\ k_{31} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.68})$$

Une fois stabilisé par les commandes  $u_i(t)$ , ainsi calculées,  $\forall i = 1, 2, 3$ , le système (III.64) converge vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$ , impliquant que le système (III.58) est en anti-synchronisme global avec le système (III.57).

La figure III.14. montre les évolutions de  $e_{1AS}$ ,  $e_{2AS}$  et  $e_{3AS}$  du système non corrigé et la figure III.15. illustre le fait que les deux systèmes chaotiques de Chen évoluent tout en suivant des directions opposées ; ils sont globalement asymptotiquement anti-synchronisés par le moyen de la structure de commande par réaction de sortie développée par (III.63), (III.65), (III.67) et (III.68).



**Figure III.14.** Evolutions de  $e_{1AS}$ ,  $e_{2AS}$  et  $e_{3AS}$  pour les deux systèmes chaotiques de Chen non corrigés

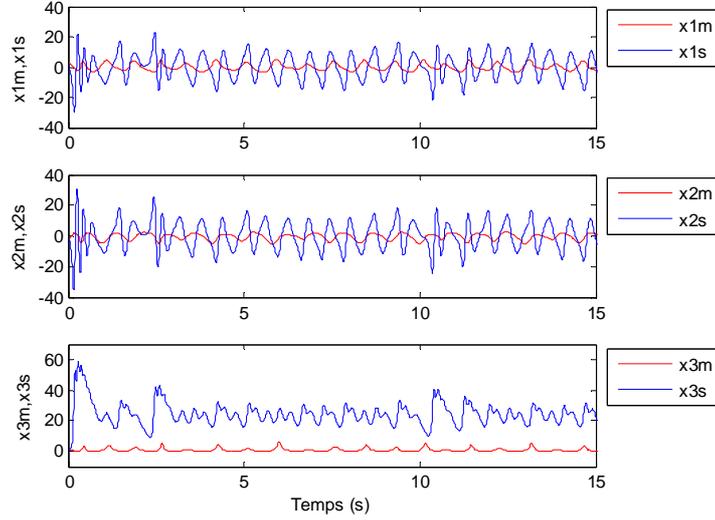


**Figure III.15.** Evolutions des états du système résultant du couplage de deux systèmes chaotiques de Chen suite à l'activation du signal de commande

**III.2.3.2. Anti-synchronisation de deux systèmes chaotiques non identiques – Cas du système de Rössler couplé avec le système de Chen**

Afin de dévoiler la propriété d'anti-synchronisme pouvant exister entre le système chaotique de Rössler et celui de Chen, et ce tout en mettant en évidence une stratégie de commande non linéaire, nous cherchons à ce que le système de Rössler (III.37) impose l'opposée de sa dynamique au système de Chen (III.58).

Dans la figure III.16., sont consignées les évolutions des composantes des vecteurs états du système maître (III.37) et du système esclave (III.58), et ce avant l'application de la stratégie de commande proposée.



**Figure III.16.** Trajectoires des états des deux systèmes couplés de Rössler et de Chen en absence de la commande

### Formulation du problème

Il s'agit ici de concevoir une structure de commande  $u(t)$ , de composantes  $u_i(t)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , permettant au système esclave de Chen d'atteindre un comportement anti-synchrone vis-à-vis du système de Rössler maître.

Par l'ajout des équations (III.37) aux équations (III.58), il vient, comme précédemment :

$$\begin{cases} \dot{e}_{1AS}(t) = -(x_{2m}(t) + x_{3m}(t)) + \chi(x_{2s}(t) - x_{1s}(t)) + u_1(t) \\ \dot{e}_{2AS}(t) = x_{1m}(t) + \delta x_{2m}(t) + (\sigma - \chi - x_{3s}(t))x_{1s}(t) + \sigma x_{2s}(t) + u_2(t) \\ \dot{e}_{3AS}(t) = \eta + x_{3m}(t)(x_{1m}(t) - \mu) + x_{1s}(t)x_{2s}(t) - \rho x_{3s}(t) + u_3(t) \end{cases} \quad (\text{III.69})$$

et :

$$\begin{bmatrix} y_{1e_{AS}}(t) \\ y_{2e_{AS}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1AS}(t) + 2e_{2AS}(t) \\ -e_{1AS}(t) + e_{2AS}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.70})$$

$y_{e_{AS}}(t) = [y_{1e_{AS}}(t) \quad y_{2e_{AS}}(t)]^T$ , étant le vecteur de sortie.

**Détermination de la loi de commande par retour de sortie anti-synchronisant le système chaotique de Rössler couplé avec le système chaotique de Chen**

La loi de commande par retour de sortie adéquate est à concevoir pour anti-synchroniser asymptotiquement les trajectoires de l'attracteur du système esclave et celles du système maître.

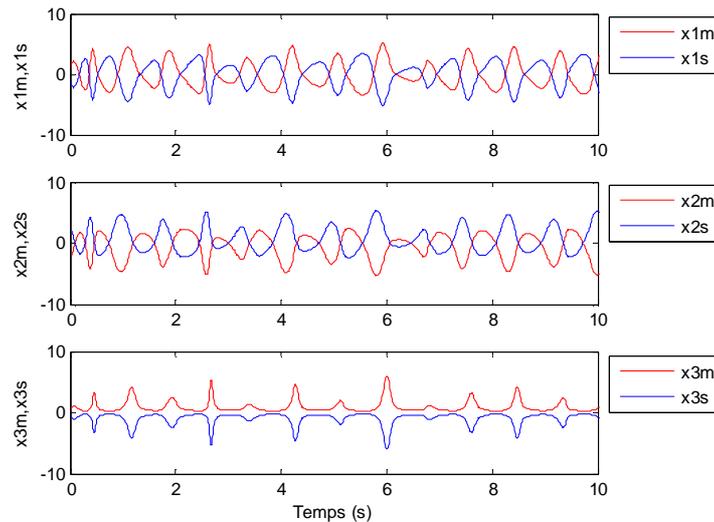
Nous retenons ici une loi de commande similaire à (III.63), de telle manière que l'anti-synchronisation, entre les deux systèmes non identiques (III.37) et (III.58), soit garantie. Parmi plusieurs choix de la matrice gain  $K(\cdot)$  ainsi que des fonctions non linéaires  $f_i(\cdot)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , une solution possible est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.71})$$

et :

$$\begin{cases} f_1(\cdot) = -4e_{2AS}(t) - (x_{2m}(t) + x_{3m}(t)) + \chi(x_{2s}(t) - x_{1s}(t)) \\ f_2(\cdot) = x_{1m}(t) + \delta x_{2m}(t) + (\sigma - \chi - x_{3s}(t))x_{1s}(t) + \sigma x_{2s}(t) \\ f_3(\cdot) = -2e_{3AS}(t) + \eta + x_{3m}(t)(x_{1m}(t) - \mu) + x_{1s}(t)x_{2s}(t) - \rho x_{3s}(t) \end{cases} \quad (\text{III.72})$$

Pour la loi de commande caractérisée par (III.71) et (III.72), deux systèmes oscillants d'une manière anti-synchrone sont obtenus, figure III.17.



**Figure III.17.** Anti-synchronisation entre le système de Rössler et le système de Chen après l'activation du signal de commande

### III.2.4. Conclusion

Nous avons présenté au niveau de cette partie un tour d'horizon sur les principales applications exploitant la richesse de la dynamique des systèmes chaotiques en communication, à savoir la synchronisation et l'anti-synchronisation de tels systèmes.

### III.3. Synchronisation hybride de systèmes chaotiques

Dans cette partie du chapitre, est envisagée l'étude de la possibilité d'existence, dans un système chaotique du type maître-esclave, des deux propriétés de synchronisation et d'anti-synchronisation, simultanément.

#### Coexistence de la synchronisation et de l'anti-synchronisation dans les systèmes chaotiques

Considérons le système chaotique à temps continu, décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (\text{III.73})$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état, relativement au système étudié et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction vectorielle définie dans un espace d'état de dimension  $n$ .

Lorsque les deux propriétés de synchronisation et d'anti-synchronisation se présentent simultanément pour le même système, il s'agit de la synchronisation hybride.

La synchronisation hybride de deux systèmes chaotiques, l'un maître  $S_m$  et l'autre esclave  $S_s$ , est, en effet, assurée si les conditions suivantes sont vérifiées [JUH 09] :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} |e_{iS}(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_{is}(t) - x_{im}(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} |e_{jAS}(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_{js}(t) + x_{jm}(t)| = 0, \quad j = p + 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{III.74})$$

$x_m$  et  $x_s$  étant les vecteurs états des systèmes  $S_m$  et  $S_s$ , respectivement.

#### Synchronisation hybride exploitant une nouvelle structure de commande non linéaire

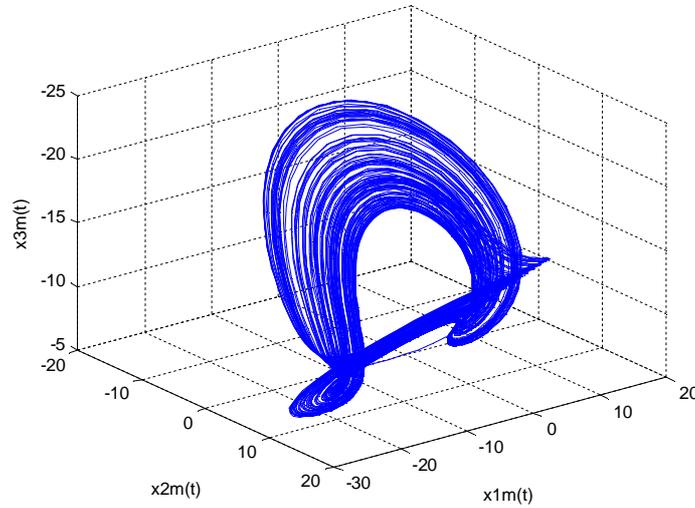
Nous envisageons de chercher une nouvelle structure de commande, dans le but d'aboutir à un système chaotique de Chen–Lee [TAM 08], vérifiant les conditions permettant de conclure à sa synchronisation hybride.

Pour ce faire, considérons le système maître de Chen–Lee, décrit par les équations différentielles non linéaires suivantes [JUH 09] :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m}(t) = -x_{2m}(t)x_{3m}(t) + \lambda x_{1m}(t) \\ \dot{x}_{2m}(t) = x_{1m}(t)x_{3m}(t) + \zeta x_{2m}(t) \\ \dot{x}_{3m}(t) = \psi x_{1m}(t)x_{2m}(t) + \xi x_{3m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.75})$$

où  $x_{1m}$ ,  $x_{2m}$  et  $x_{3m}$  sont des variables d'état,  $\lambda$ ,  $\zeta$ ,  $\psi$  et  $\xi$  quatre paramètres du système.

Pour  $(\lambda, \zeta, \psi, \xi) = \left(5, -10, \frac{1}{3}, -3.8\right)$ , le portrait de phases du système maître (III.75) est montré dans la figure III.18.



**Figure III.18.** Comportement en 3-D de l'attracteur étrange du système chaotique de Chen-Lee

Il est à noter que le système (III.75) est simulé avec les conditions initiales  $[x_{1m}(0) \ x_{2m}(0) \ x_{3m}(0)]^T = [11 \ -22 \ 3]^T$ .

Sans perte de généralités [JUH 09], pour un système esclave adéquatement choisi, admettant  $x_{1s}$ ,  $x_{2s}$  et  $x_{3s}$  comme variables d'état et  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  comme variables de commande :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s}(t) = -x_{2s}(t)x_{3s}(t) + \lambda x_{1s}(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_{2s}(t) = x_{1s}(t)x_{3s}(t) + \zeta x_{2s}(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_{3s}(t) = \psi x_{1s}(t)x_{2s}(t) + \xi x_{3s}(t) + u_3(t) \end{cases} \quad (\text{III.76})$$

les deux variables d'état  $x_1$  et  $x_3$  sont fixées pour le processus d'anti-synchronisation, et la variable d'état restante  $x_2$ , pour le processus de synchronisation.

Les erreurs de synchronisation hybride entre le système maître et le système esclave sont définies, dans ce cas, par le vecteur  $e(t) = [e_{1AS}(t) \ e_{2S}(t) \ e_{3AS}(t)]^T$ , tel que :

$$\begin{cases} e_{1AS}(t) = x_{1s}(t) + x_{1m}(t) \\ e_{2S}(t) = x_{2s}(t) - x_{2m}(t) \\ e_{3AS}(t) = x_{3s}(t) + x_{3m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.77})$$

Nous cherchons, comme précédemment, une loi de commande stabilisante :

$$u(t) = -K(\cdot)e(t) \quad (\text{III.78})$$

Pour une matrice gain instantané  $K(\cdot)$ ,  $K(\cdot) = \{k_{ij}(\cdot)\}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, 3$ , il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s}(t) = -x_{2s}(t)x_{3s}(t) + \lambda x_{1s}(t) \\ \quad - (k_{11}(\cdot)e_{1AS}(t) + k_{12}(\cdot)e_{2S}(t) + k_{13}(\cdot)e_{3AS}(t)) - (-x_{3s}(t) + x_{3m}(t))x_{2s}(t) \\ \dot{x}_{2s}(t) = x_{1s}(t)x_{3s}(t) + \varsigma x_{2s}(t) \\ \quad - (k_{21}(\cdot)e_{1AS}(t) + k_{22}(\cdot)e_{2S}(t) + k_{23}(\cdot)e_{3AS}(t)) - (x_{1s}(t) - x_{1m}(t))x_{3s}(t) \\ \dot{x}_{3s}(t) = \psi x_{1s}(t)x_{2s}(t) + \xi x_{3s}(t) \\ \quad - (k_{31}(\cdot)e_{1AS}(t) + k_{32}(\cdot)e_{2S}(t) + k_{33}(\cdot)e_{3AS}(t)) - \psi(x_{2s}(t) - x_{2m}(t))x_{1s}(t) \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

En prenant en considération les systèmes d'équations différentielles (III.75) et (III.76), les relations (III.77) conduisent au système d'équations différentielles régissant le système erreur dynamique de synchronisation :

$$\begin{cases} \dot{e}_{1AS}(t) = (\lambda - k_{11}(\cdot))e_{1AS}(t) - (x_{3m}(t) + k_{12}(\cdot))e_{2S}(t) - k_{13}(\cdot)e_{3AS}(t) \\ \dot{e}_{2S}(t) = -k_{21}(\cdot)e_{1AS}(t) + (\varsigma - k_{22}(\cdot))e_{2S}(t) + (x_{1m}(t) - k_{23}(\cdot))e_{3AS}(t) \\ \dot{e}_{3AS}(t) = (\psi x_{2m}(t) - k_{31}(\cdot))e_{1AS}(t) - k_{32}(\cdot)e_{2S}(t) + (\xi - k_{33}(\cdot))e_{3AS}(t) \end{cases} \quad (\text{III.80})$$

pouvant être réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{e}(t) = A_{SH}(\cdot)e(t) \quad (\text{III.81})$$

$$A_{SH}(\cdot) = \begin{bmatrix} \lambda - k_{11}(\cdot) & -x_{3m}(t) - k_{12}(\cdot) & -k_{13}(\cdot) \\ -k_{21}(\cdot) & \varsigma - k_{22}(\cdot) & x_{1m}(t) - k_{23}(\cdot) \\ \psi x_{2m}(t) - k_{31}(\cdot) & -k_{32}(\cdot) & \xi - k_{33}(\cdot) \end{bmatrix}$$

Pour rendre la matrice  $A_{SH}(\cdot)$  de forme en flèche mince, il suffit de choisir les paramètres gain  $k_{12}(\cdot)$  et  $k_{21}(\cdot)$  tels que :

$$\begin{cases} k_{12}(\cdot) = -x_{3m}(t) \\ k_{21} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.82})$$

Pour que les deux premiers éléments diagonaux de cette matrice soient strictement négatifs, les conditions nécessaires à l'applicabilité du théorème II.5,  $k_{11}(\cdot)$  et  $k_{22}(\cdot)$  doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \lambda - k_{11}(\cdot) < 0 \\ \zeta - k_{22}(\cdot) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.83})$$

Pour cela, les choix suivants :

$$\begin{cases} k_{11} = 7 \\ k_{22} = -6 \end{cases} \quad (\text{III.84})$$

constituent une solution.

De plus, pour éliminer les non linéarités existant au niveau du système (III.81), la solution suivante peut être retenue :

$$\begin{cases} k_{23}(\cdot) = x_{1m}(t) \\ k_{31}(\cdot) = \psi x_{2m}(t) \end{cases} \quad (\text{III.85})$$

Finalement, en considérant les valeurs fixées de  $k_{11}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{23}(\cdot)$  et  $k_{31}(\cdot)$ , pour satisfaire la condition suffisante (II.84) du théorème II.5, les paramètres restants,  $k_{13}(\cdot)$ ,  $k_{32}(\cdot)$  et  $k_{33}(\cdot)$ , garantissant la synchronisation hybride des systèmes chaotiques considérés doivent vérifier l'inégalité :

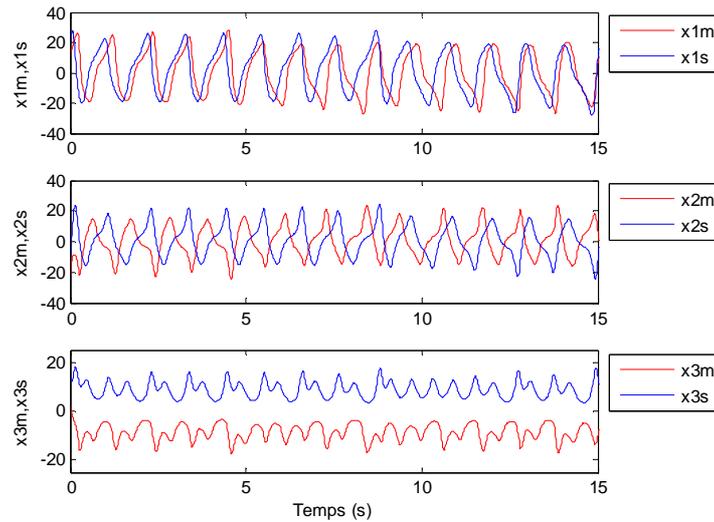
$$d - k_{33}(\cdot) - \left( |k_{13}(\cdot)|(-2)^{-1} + |k_{32}(\cdot)|(-4)^{-1} \right) < 0 \quad (\text{III.86})$$

dont une solution possible est donnée par :

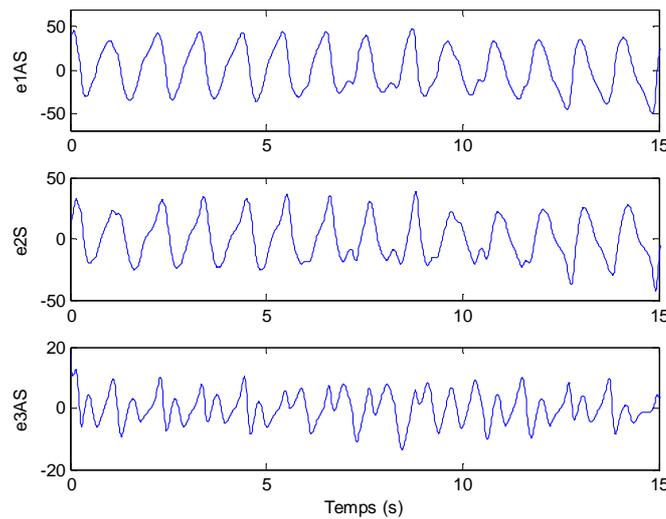
$$\begin{cases} k_{13} = 0 \\ k_{32} = 0 \\ k_{33} = -1 \end{cases} \quad (\text{III.87})$$

La loi de commande ainsi caractérisée confère au système erreur de synchronisation (III.81) la propriété de stabilité asymptotique.

En l'absence de commande, les évolutions obtenues des variables du système maître-esclave étudié sont données dans la figure III.19. pour les conditions initiales,  $x_m(0) = [11 \quad -22 \quad 3]^T$  et  $x_s(0) = [-20 \quad -10 \quad -15]^T$ , et celles des erreurs de synchronisation dans la figure III.20.

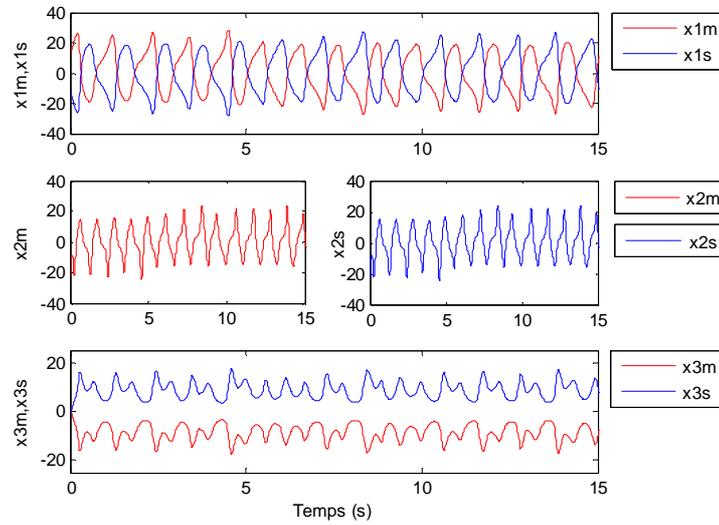


**Figure III.19.** Evolutions des variables du système de Chen-Lee

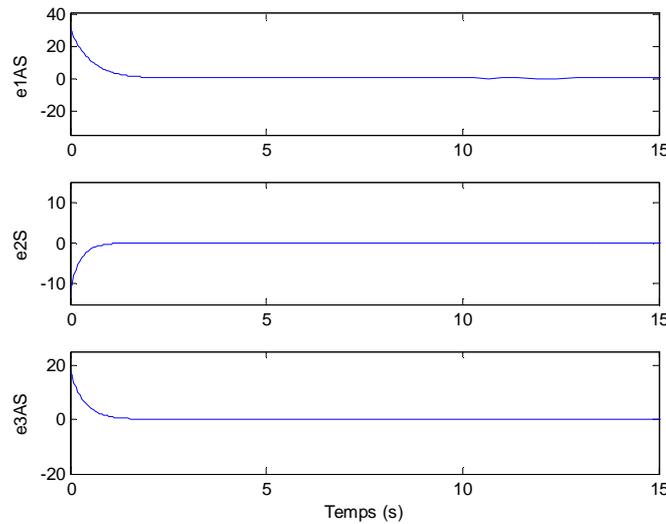


**Figure III.20.** Evolutions des erreurs de synchronisation hybride en l'absence de commande

La figure III.21. montre que le choix d'une loi de commande adéquate du système esclave garantit la synchronisation hybride en régime permanent, figure III.22.

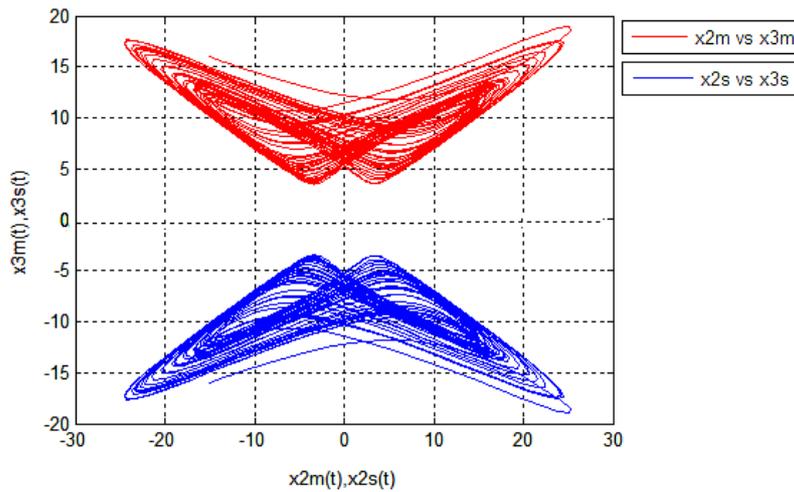


**Figure III.21.** Synchronisation hybride du système chaotique maître-esclave de Chen-lee



**Figure III.22.** Evolutions des variables du système erreur de synchronisation

Le portrait de phases de ce système est donné dans la figure III.23., où l'attracteur chaotique du système esclave de Chen-Lee est synchronisé d'une façon hybride avec son système maître.



*Figure III.23. Projections 2-D des attracteurs chaotiques de deux systèmes de Chen–Lee couplés*

## CONCLUSION

Les critères élaborés, soit pour l'analyse de la stabilité soit pour la synthèse d'une loi de commande stabilisante, sont ainsi exploités, avec succès, pour la formulation de nouvelles conditions suffisantes de vérification des propriétés de synchronisation et d'anti-synchronisation de systèmes chaotiques du type maître-esclave, d'un grand intérêt, en particulier, pour garantir une transmission sécurisée.

Les travaux ont montré de plus que les phénomènes de synchronisation et d'anti-synchronisation peuvent coexister simultanément dans les systèmes chaotiques.

Sous quelques hypothèses structurelles du système maître et en se basant sur les techniques d'agrégation associées au critère pratique de stabilité de Borne et Gentina ainsi que la forme matricielle en flèche, un système esclave a été conçu de telle sorte que les deux types de synchronisation soient atteints, en même temps.

Les résultats de simulation sont présentés afin d'étudier les performances de chaque approche de commande proposée.

## **CONCLUSION GENERALE**

---

## CONCLUSION GENERALE

Le développement de nouvelles conditions suffisantes de stabilisation asymptotique de systèmes dynamiques complexes et de systèmes chaotiques continus, constitue la principale contribution de nos travaux de recherche consignés dans ce mémoire.

La clé principale, permettant l'élaboration de ces conditions, basée sur l'utilisation des normes vectorielles et des techniques d'agrégation, réside dans le choix d'une représentation matricielle bien adaptée ; il s'agit de la forme en flèche des matrices, caractérisant, à chaque instant, les systèmes complexes étudiés.

La synthèse de lois de commande, par retour d'état et par retour de sortie, a conduit à des résultats satisfaisants et de mises en œuvre aisées.

Ces résultats, obtenus pour une large classe de processus, les matrices étant de forme en flèche mince, ont été généralisés pour les systèmes de matrices en flèche mince généralisée et des matrices en flèche épaisse ; ce qui nous a permis d'adapter les approches de commande proposées à une classe plus importante de systèmes dynamiques continus non linéaires de grande dimension.

Dans ce sens, les critères élaborés, soit pour l'analyse de la stabilité soit pour la synthèse d'une loi de commande stabilisante, sont ensuite exploités, avec succès, pour la formulation de nouvelles conditions suffisantes de vérification des propriétés de synchronisation, d'anti-synchronisation et de synchronisation hybride de systèmes chaotiques du type maître-esclave. Ces propriétés sont d'un grand intérêt dans les applications, faisant appel aux systèmes chaotiques pour garantir, en particulier, une transmission sécurisée.

Les différentes applications des stratégies de commande élaborées sur différents systèmes non linéaires ont permis d'illustrer l'efficacité des nouvelles approches proposées.

Nous avons supposé, dans la recherche de lois de commande des différents systèmes continus étudiés, les variables d'état accessibles. Il est important de considérer dans les travaux futurs, en plus de la généralisation des résultats obtenus pour les systèmes discrets, leur extension par l'utilisation d'observateurs d'état pour pallier à ce problème.

---

Comme autres perspectives, il serait intéressant de continuer dans le cadre de la communication sécurisée dans le sens :

- de l'étude de la synchronisation chaotique en utilisant des méthodes d'estimation d'état avec un accent important sur la mise en place d'une nouvelle méthode de filtrage de Kalman non linéaire,
- et de la réalisation d'une méthode de compression basée sur la dynamique symbolique chaotique pour des applications qui demandent un niveau de sécurité important.

## **BIBLIOGRAPHIE**

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [ABD 03] M. N. ABDELKRIM  
« Modélisation et commande de systèmes incertains faiblement couplés et singulièrement perturbés. Approche  $H_\infty$  loop-shaping et approche floue », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 2003.
- [AFR 83] V. S. AFRAIMOVICH, N. N. VEROCHEV et M. I. RABINOVICH  
« Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems », Radio Phys. and Quantum Electron, vol. 29, pp. 795-803, 1983.
- [AKH 06] A. AKHENAK, M. CHADLI, J. RAGOT et D. MAQUIN  
« Unknown input multiple observer based-approach. Application to secure communications », Proc. 1<sup>st</sup> IFAC Conference on analysis and control of chaotic systems, Chaos'06, Reims, France, pp. 193-198, 2006.
- [ANS 06] F. ANSTETT  
« Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : synthèse et cryptanalyse », Thèse de Doctorat, IAEM, Nancy, 2006.
- [BELG 97] S. BELGHITH  
« Méthodes algébriques et numériques pour l'étude de comportements complexes de systèmes non linéaires », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Faculté des Sciences de Tunis, 1997.
- [BELL 62] R. BELLMAN  
« Vector Lyapunov functions », J. SIAM Control, Ser. A, vol. 1, pp. 32-34, 1962.
- [BENH 95] E. BENHADJ BRAIEK  
« Développement de méthodes analytiques pour l'étude et la commande de processus non linéaires », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 1995.
- [BEN 76] M. BENREJEB  
« Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé », Thèse Docteur Ingénieur, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1976.
- [BEN 80] M. BENREJEB  
« Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1980.

- [BEN 03] M. BENREJEB et M. N. ABDELKRIM  
« On order reduction and stabilization of TSK nonlinear fuzzy models by using arrow form matrix », *Systems Analysis Modelling Simulation*, vol. 43, n° 7, pp. 977-991, 2003.
- [BEN 78] M. BENREJEB et P. BORNE  
« On an algebraic stability criterion for nonlinear processes. Interpretation in the frequency domain », *Proc. of MECO'78 Congress, Athens*, vol. 2, pp. 678-682, 1978.
- [BEN 01] M. BENREJEB et M. GASMI  
« On the use of an arrow form matrix for modelling and stability analysis of singularly perturbed nonlinear systems », *Systems Analysis Modelling Simulation*, vol. 40, pp. 509-525, 2001.
- [BEN 08a] M. BENREJEB et **S. HAMMAMI**  
« New approach of stabilization of nonlinear continuous monovariable processes characterized by an arrow form matrix », 1<sup>ère</sup> Conférence Internationale SENDA, Systems ENgineering Design and Applications, Monastir, 2008.
- [BEN 82] M. BENREJEB, P. BORNE et F. LAURENT  
« Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus », *RAIRO Automatique*, vol. 16, n° 2, pp. 133-146, 1982.
- [BEN 08b] M. BENREJEB, **S. HAMMAMI** et K. BEN SAAD  
« Nouvelles conditions de stabilisation par retour d'état de processus multivariables hiérarchisés à deux niveaux », 5<sup>ème</sup> Conférence Internationale JTEA, pp. 735-739, Hammamet, 2008.
- [BEN 07] M. BENREJEB, D. SOUDANI et Y. BEN LETAIFA  
« On stability study of fuzzy systems : new approaches », *Transactions on Systems, Signals and Devices*, vol. 3, n° 1, pp. 1-15, 2007.
- [BEN 06] M. BENREJEB, D. SOUDANI, A. SAKLY et P. BORNE  
« New discrete Tanaka Sugeno Kang fuzzy systems characterization and stability domain », *International Journal of Computers, Communications and Control*, vol. 1, n° 4, pp. 9-19, 2006.
- [BIT 83] G. BITSORIS  
« Stability analysis of nonlinear dynamical systems », *Int. J. Control*, vol. 38, n° 3, pp. 699-711, 1983.
- [BOR 76] P. BORNE  
« Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Applications aux systèmes interconnectés », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1976.
- [BOR 87] P. BORNE  
« Nonlinear system stability. Vector norm approach », *System and Control Encyclopedia*, Pergamon Press, T. 5, pp. 3402-3406, 1987.

- [BOR 77] P. BORNE et M. BENREJEB  
« On the stability of a class of interconnected systems. Application to the forced working conditions », MTVS, Symposium IFAC, pp. 261-265, Fredericton, Canada, 1977.
- [BOR 08] P. BORNE et M. BENREJEB  
« On the representation and the stability study of large scale systems », International Journal of Computers Communications and Control, vol. 3, suppl. 5, pp. 55-66, 2008.
- [BOR 07] P. BORNE, P. VANHEEGHE et E. DUFLOS  
« Automatisation des processus dans l'espace d'état », Ed. Technip, Paris, 2007.
- [BOR 92] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J. P. RICHARD, F. ROTELLA et I. ZAMBETTAKIS  
« Modélisation et identification des processus », Tome I, Ed. Technip, Paris, 1992.
- [CAR 90] T. L. CAROLL et T. M. PECORA  
« Synchronization in chaotic systems », Phy. Rev. Let., vol. 64, n° 8, pp. 821-824, 1990.
- [CAR 91] T. L. CAROLL et T. M. PECORA  
« Synchronization of chaotic circuits », IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 38, n° 4, pp. 453-456, 1991.
- [ELM 85] A. EL MOUDNI  
« Contribution à la modélisation et à l'analyse des systèmes discrets à échelles de temps multiples. Application à la commande optimale », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1985.
- [FAL 08] K. FALLAHI, R. RAOUFI et H. KHOSHBIN  
« An application of Chen system for secure chaotic communication based on extended Kalman filter and multi-shift cipher algorithm », Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 13, n° 4, pp. 763-781, 2008.
- [FOS 72] A. J. FOSSARD  
« Commande des systèmes multidimensionnels », Ed. Dunod, Paris, 1972.
- [FOT 05] H. B. FOTSIN et J. DAAFOUZ  
« Adaptive synchronization of uncertain chaotic colpitts oscillators based on parameter identification », Physics Letters A, vol. 339, pp. 304-315, 2005.
- [GAN 66] F. R. GANTMACHER  
« Théorie des matrices », T. 1 & 2, Dunod, Paris, 1966.

- [GAS 01] M. GASMI  
« Contribution à la modélisation et à l'étude de la stabilité des systèmes continus complexes de grande dimension. Cas des systèmes singulièrement perturbés et des systèmes dynamiques à commande floue de type TSK », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, ENIT, Tunis, 2001.
- [GEN 76a] J. C. GENTINA  
« Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1976.
- [GEN 72] J. C. GENTINA, P. BORNE et F. LAURENT  
« Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension », RAIRO, Août J-3, pp. 67-77, 1972.
- [GEN 76b] J. C. GENTINA, P. BORNE et F. LAURENT  
« General aggregation of large scale system by vector Lyapunov functions and vector norm », International Journal of Control, vol. 24, n° 4, pp. 529-550, 1976.
- [GRU 78a] L. T. GRUJIC  
« Solutions for the Lurie-Postnikov and Aizerman problems », Int. J. Syst. Sc., vol. 9, n° 12, pp. 1359-1372, 1978.
- [GRU 76] L. T. GRUJIC, J. C. GENTINA et P. BORNE  
« General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms », International Journal of Control, vol. 24, n° 4, pp. 529-550, 1976.
- [GRU 78b] L. T. GRUJIC, J. C. GENTINA, P. BORNE, C. BURGAT et J. BERNOUSSOU  
« Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Fonctions de Lyapunov vectorielles », RAIRO, Aut/Sys Analysis and Control, vol. 12, n° 4, pp. 319-348, 1978.
- [HAH 67] W. HAHN  
« Stability of motion », Springer Verlag New York, 1967.
- [HAM 09a] S. HAMMAMI, K. BEN SAAD et M. BENREJEB  
« Sur une nouvelle approche de stabilisation de processus continus non linéaires multivariables », Editions de l'Académie Roumaine, pp. 137-141, 2009.
- [HAM 09b] S. HAMMAMI, K. BEN SAAD et M. BENREJEB  
« On the synchronization on identical and non-identical 4-D chaotic systems using arrow form matrix », Chaos, Solitons & Fractals, vol. 42, pp. 101-112, 2009.
- [JUH 09] H. C. JUHN, K. C. HSIEN et K. L. YU  
« Synchronization and anti-synchronization coexist in Chen – Lee chaotic systems », Chaos, Solitons & Fractals, vol. 39, pp. 707-716, 2009.

- [KAN 05] S. C. KANG  
« On the synthesis of fixed order stabilizing controllers », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Texas A & M University, 2005.
- [KOC 95] L. KOCAREV et U. PARLITZ  
« General approach for chaotic synchronization with application to communication », Phys. Rev. Lett., vol. 74, n° 25, pp. 5028-5031, 1995.
- [LEU 01] H. LEUNG et Z. ZHU  
« Performance evaluation of EKF-based chaotic synchronization », IEEE Transactions in Circuits and Systems I, vol. 48, n° 9, pp. 1118-1125, 2001.
- [LEU 00] H. LEUNG, Z. ZHU et Z. DING  
« An aperiodic phenomenon of the extended Kalman filter in filtering noisy chaotic signals », IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 48, n° 6, pp. 1807-1810, 2000.
- [LOR 63] E. N. LORENZ  
« Deterministic nonperiodic flow », Journal of Atmos. Sci., vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [LUC 06] M. B. LUCA  
« Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information », Thèse de Doctorat, SMIS, Bretagne, 2006.
- [LUR 44] A. I. LURIE et V. N. POSTNIKOV  
« Concerning the stability of regulating systems », Prikl. Mat. I Mekh., Moscou, vol. 8, pp. 246-248, 1944.
- [LYA 49] A. M. LYAPUNOV  
« Problème général de la stabilité du mouvement », University Press, Princeton, 1949.
- [MAG 99] G. M. MAGGIO, O. DE FEO et M. P. KENNEDY  
« Nonlinear analysis of the Colpitts oscillator and applications to design », IEEE Transactions on circuits and systems – I: Fundamental theory and applications, vol. 46, n° 9, pp. 1118-1130, 1999.
- [MAGH 07] M. N. MAGHRAOUI  
« Synchronisation des systèmes non linéaires par synthèse réursive. Applications à la synchronisation des systèmes chaotiques et à la sécurisation de l'information », Thèse de Doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 2007.
- [MAGH 04] M. N. MAGHRAOUI et S. BELGHITH  
« Synchronisation chaotique basée sur le Backstepping. Application à la sécurisation de l'information », CTGE'04, pp. 188-193, 2004.

- [MAGH 06] M. N. MAGHRAOUI, S. BELGHITH et M. DJEMAI  
 « A chaotic systems synchronization method applied to secure communication », 2<sup>nd</sup> International Symposium on Communication, Control and Signal Processing, ISCCSP'06, n° 168, 2006.
- [MAI 67] C. MAIZIERES et F. LAURENT  
 « Sur un modèle mathématique pour l'étude du circuit ferrorésonnant série. Application à la détermination d'une condition suffisante de non démultiplication de fréquence », CRAS, Série B, T. 265, pp. 801-803, Paris, 1967.
- [MAT 62] V. M. MATRASOV  
 « On the theory of stability of motion », Prikl. Mat. Mekhan. vol. 26, pp. 992-1002, 1962.
- [MIC 74] A. N. MICHEL  
 « Stability analysis of interconnected systems », SIAM Journal of Control, vol. 12, pp. 554-579, 1974.
- [OZG 79] U. OZGUNER  
 « Near optimal control of composite systems : the multi-time-scale approach », IEEE Trans. On Aut. Control, vol. 24, n° 4, pp. 652-655, 1979.
- [PEC 90] L. PECORA et T. CARROLL  
 « Synchronization in chaotic systems », Phys. Rev. Lett., vol. 64, pp. 821-824, 1990.
- [PEC 00] L. M. PECORA et T. L. CARROLL  
 « Detecting chaotic drive-response geometry in generalized synchronization », International Journal of Bifurcation & Chaos, vol. 10, n° 4, pp. 875-889, 2000.
- [QI 05] G. QI, S. DU, G. CHEN, Z. CHEN et Z. YUAN  
 « On a four dimensional chaotic system », Chaos, Solitons & Fractals, vol. 23, n° 5, pp. 1671-1682, 2005.
- [REG 71] D. REGNIER  
 « Contribution à l'analyse des régimes dynamiques des systèmes continus. Application aux circuits non linéaires », Thèse Docteur Ingénieur, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1971.
- [ROS 70] H. H. ROSENBROCK et C. STOREY  
 « Mathematics of Dynamical Systems », Editions Nelson, 1970.
- [RÖSS 76] O. RÖSSLER  
 « An equation for continuous chaos », Phys. Lett. A, vol. 57, n° 5, pp. 397-398, 1976.
- [ROSE 97] M. G. ROSENBLUM, A. S. PIKOVSKY et J. KURTHS  
 « Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators », IEEE Transactions in Circuits and Systems I, vol. 44, n° 10, pp. 874-881, 1997.

- [ROT 83] F. ROTELLA  
« Détermination de nouvelles représentations d'état adaptées à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires », Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1983.
- [ROT 87] F. ROTELLA  
« Méthodes algébriques et analytiques pour la simplification et la commande de systèmes bilinéaires à deux dynamiques », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1987.
- [RUL 96] N. F. RULKOV  
« Images of synchronized chaos : Experiments with circuits », *Chaos*, vol. 6, n° 3, pp. 262-279, 1996.
- [RUL 95] N. F. RULKOV, M. M. SUSHCHIK, L. S. TSIMRING et H. D. I. ABARBANEL  
« Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems », *Phys. Rev. E*, vol. 51, n° 2, pp. 980-993, 1995.
- [SIN 80] M. G. SINGH  
« Dynamical hierarchical control », North-Holland Pub. Comp., 1980.
- [SOU 07] D. SOUDANI  
« Sur la modélisation et la commande robuste de systèmes complexes », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 2007.
- [SPO 89] M. W. SPONG et M. VIDYASAGAR  
« Robot dynamics and control », New York, Wiley, 1989.
- [STE 96] L. STENFLO  
« Generalized Lorenz equations for acoustic gravity waves in the atmosphere », *Phys. Src.*, pp. 83-84, 1996.
- [TAM 08] L. M. TAM et W. M. SITOU  
« Parametric study of the fractional order Chen–Lee System », *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 37, pp. 817-826, 2008.
- [VID 93] M. VIDYASAGAR  
« Nonlinear systems analysis », Centre for A.I. and Robotics, Second Ed., Prentice Hall, India, 1993.
- [VIN 08] U. E. VINCENT  
« Synchronization of identical and non-identical 4-D chaotic systems using active control », *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 37, pp. 1065-1075, 2008.
- [VIN 07] U. E. VINCENT et J. A. LAOYE  
« Synchronization, anti-synchronization and current transports in non-identical chaotic ratchets », *Physica A*, vol. 384, pp. 230-240, 2007.

- [VOL 97] A. VOLKOVSKII  
« Synchronization of chaotic systems using phase control », IEEE Transactions in Circuits and Systems I, vol. 44, n° 10, pp. 913-917, 1997.
- [YAM 83] T. YAMADA et H. FUJISAKA  
« Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems ii », Prog. Theor. Phys., pp. 1240-1270, 1983.
- [YAM 84] T. YAMADA et H. FUJISAKA  
« Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems iii », Prog. Theor. Phys., pp. 872-885, 1984.
- [ZAM 83] I. ZAMBETTAKIS  
« Contribution à l'étude des systèmes à non linéarités multiples. Application aux systèmes électromécaniques », Thèse de Docteur Ingénieur, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1983.
- [ZEM 07] A. ZEMOUCHE  
« Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires », Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur Strasbourg I, 2007.

# RÉSUMÉ

Les travaux effectués, dans le cadre de cette thèse, concernent l'analyse et la synthèse de systèmes dynamiques continus complexes de grande dimension. Pour la classe des systèmes étudiés, est mise en exergue en particulier l'importance du choix de la description des systèmes sur l'étendue des résultats pouvant être obtenus lorsque la méthode d'étude de la stabilité est fixée.

L'utilisation des normes vectorielles comme fonction d'agrégation et du critère pratique de Borne et Gentina pour l'étude de la stabilité, associée à la description des systèmes par des matrices caractéristiques de forme en flèche, a permis l'élaboration de nouvelles conditions suffisantes de stabilisabilité de systèmes dynamiques continus non linéaires, monovariables et multivariables, formulées en théorèmes et corollaires.

Ces résultats obtenus, pour une classe de processus, pouvant être caractérisés par des matrices instantanées de forme en flèche mince, ont été généralisés au cas des matrices quelconques, pouvant être mises sous forme en flèche mince généralisée ou en flèche épaisse.

Les critères élaborés, soit pour l'analyse de la stabilité soit pour la synthèse d'une loi de commande stabilisante, sont ensuite exploités, avec succès, pour la formulation de nouvelles conditions suffisantes de vérification des propriétés de synchronisation, d'anti-synchronisation et de synchronisation hybride de systèmes chaotiques du type maître-esclave, d'un grand intérêt, en particulier, pour garantir une transmission sécurisée.

**Mots clés :** Systèmes continus non linéaires ; Techniques d'agrégation ; Normes vectorielles ; Formes en flèche des matrices ; Stabilité ; Stabilisation ; Systèmes chaotiques.

# ABSTRACT

This Thesis deals with the analysis and the synthesis of dynamic large scale continuous systems depending on the choice of the system description.

Stability and stabilisability proposed studies are based on the use of vector norms as an aggregation function and of the practical Borne-Gentina criterion, associated to the description of the system by instantaneous characteristic matrix in arrow form.

Practical stability conditions, easy to use, are obtained for both dynamic nonlinear continuous single input single output systems and multiple inputs multiple outputs ones, formulated by means of theorems and corollaries.

These obtained results for thin arrow form, are generalized to the case of matrices, which can be putted under thin generalized arrow form or thick arrow form.

The proposed stability and stabilisability criteria are afterwards, successfully, exploited to formulate new sufficient conditions, guaranteeing the synchronization, the anti-synchronization and the hybrid synchronization properties, for chaotic master-slave systems, having an increasing interest throughout their application in the secure communication field.

**Keywords:** Nonlinear continuous systems; Aggregation techniques; Vector norms; Arrow forms matrices; Stability; Stabilization; Chaotic systems.