

Équations des ondes avec des perturbations dépendantes du temps

Yavar Kian

► **To cite this version:**

Yavar Kian. Équations des ondes avec des perturbations dépendantes du temps. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2010. Français. tel-00576179

HAL Id: tel-00576179

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00576179>

Submitted on 13 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4101

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET
INFORMATIQUE

par

Yavar KIAN

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

**ÉQUATIONS DES ONDES AVEC DES
PERTURBATIONS DÉPENDANTES DU TEMPS**

Soutenue le 23 novembre 2010

Après avis de :

M. J. M. BOUCLET	Professeur, Université de Toulouse 3	Rapporteur
M. N. TZVETKOV	Professeur, Université de Cergy-Pontoise	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

M. A. BACHELOT	Professeur, Université Bordeaux 1	Examineur
M. J. M. BOUCLET	Professeur, Université de Toulouse 3	Rapporteur
M. P. FABRIE	Professeur, ENSERB, Matmeca, IPB	Examineur
M. A. GRIGIS	Professeur, Université de Paris 13	Examineur
M. V. PETKOV	Professeur, Université Bordeaux 1	Directeur de thèse
M. N. TZVETKOV	Professeur, Université de Cergy-Pontoise	Rapporteur

Remerciements

Je veux tout d'abord exprimer ma plus profonde gratitude à Vesselin Petkov, qui m'a initié à la recherche en mathématique. Je le remercie pour la qualité des sujets qu'il m'a proposé, son soutien et ses conseils pertinents.

Je remercie Jean-Marc Bouclet et Nikolay Tzvetkov qui m'ont fait l'honneur de rapporter ma thèse. Je remercie aussi Alain Bachelot, Pierre Fabrie et Alain Grigis d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie toute l'équipe de Physique Mathématique de Bordeaux, pour leurs remarques pertinentes, leur disponibilité ainsi que leur soutien. Je remercie aussi l'ensemble des professeurs dont j'ai suivi les enseignements de qualité durant toutes ces années passées à l'université Bordeaux 1. Je suis également très reconnaissant à Alain Bachelot, Vincent Bruneau et Dietrich Häfner avec qui j'ai eu des discussions qui m'ont beaucoup apporté. Je remercie tout particulièrement Jean-François Bony pour ses remarques pertinentes et sa disponibilité ainsi que Vidian Rousse pour ses conseils qui m'ont beaucoup aidé pour la rédaction de cette thèse.

Je remercie du fond du coeur ma famille, et tout particulièrement ma mère qui nous a quitté et à qui je suis éternellement reconnaissant.

Je remercie aussi mes amis qui m'ont soutenue et conseillé tout le long de cette thèse.

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	1
0.1 Équation des ondes avec une métrique dépendante du temps	1
0.2 Comportement asymptotique de l'énergie locale	2
0.2.1 Décroissance de l'énergie locale	2
0.2.2 Croissance exponentielle de l'énergie locale	4
0.3 Estimations de Strichartz	6
0.4 Estimations de Strichartz des solutions de l'équation des ondes avec une métrique périodique	8
0.4.1 Hypothèses	8
0.4.2 Principaux résultats obtenus dans cette thèse	10
0.4.3 Intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale	10
0.4.4 Schéma de la preuve	12
0.4.5 Généralisation des résultats	14
0.4.6 Exemples de métriques	15
0.4.7 Existence de solutions locales d'équations semilinéaires associées à (0.1.3)	16
1 Estimations de Strichartz globales pour l'équation des ondes avec une perturbation périodique en dimension impaire	19
1.1 Introduction	19
1.2 Propriétés des opérateurs $\mathcal{U}(t, s)$ et $Z^b(t, s)$	20
1.2.1 Le propagateur $\mathcal{U}(t, s)$	20
1.2.2 Les opérateurs $Z^b(t, s)$	23
1.3 Intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale	28
1.3.1 Décroissance exponentielle de l'énergie locale	29
1.3.2 Preuve du Théorème 1.3.1	30
1.4 Estimations de Strichartz pour $(1 - \chi)u$	33
1.5 Estimations de Strichartz pour χu	34
1.6 Preuve du Théorème 1.1.1	40
1.7 Estimations de Strichartz locales pour les solutions de (0.1.3)	40
1.7.1 Approximation du propagateur $\mathcal{U}(t, \tau)$ par des opérateurs intégraux de Fourier	41
1.7.2 Les espaces de Besov	51
1.7.3 Preuve du Théorème 1.5.1	51
1.8 Exemples de métriques $a(t, x)$ vérifiant les conditions (H1) et (H2)	54

1.8.1	Exemples de perturbations non captives	54
1.8.2	Conditions suffisantes pour une énergie globale uniformément bornée	55
1.8.3	Décroissance exponentielle de l'opérateur $Z(t, s)$ associé à une métrique périodique	59
1.9	Généralisation des résultats pour les métriques anisotropes périodiques en temps	60
2	Estimations de Strichartz pour l'équation des ondes avec une perturbation périodique en temps et non captive en dimension paire	65
2.1	Introduction	65
2.2	Equivalence des hypothèses (H2) et (H3)	67
2.3	Décroissance intégrable de l'énergie locale pour $n \geq 4$ pair	70
2.3.1	Hypothèses et définitions	70
2.3.2	Transformation de Fourier-Bloch-Gelfand sur les espaces $H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$	74
2.3.3	Transformation de Fourier-Bloch-Gelfand de l'opérateur $\psi_1 V(t, s) \psi_2$	76
2.3.4	Preuve du Théorème 2.3.1	83
2.4	Intégrabilité L^2 de l'énergie locale	94
2.5	Exemples de métriques $a(t, x)$	94
2.6	Preuve du Théorème 2.1.1	102
2.7	Existence locale de solutions pour les équations des ondes semilinéaires .	102
2.7.1	Existence de solutions locales	103
2.7.2	Existence de solutions en temps long	107
	Bibliographie	113
	Index	117

Introduction

0.1 Équation des ondes avec une métrique dépendante du temps

Les équations hyperboliques ont suscité l'intérêt de beaucoup d'auteurs. Parmi ces équations, les équations des ondes, qui sont associées à la propagation d'ondes, ont fait l'objet de beaucoup de travaux. À partir de l'équation des ondes libres qui s'écrit

$$\partial_t^2 u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (0.1.1)$$

on obtient les différentes équations d'ondes en considérant des perturbations. Ces perturbations prennent différentes formes et modifient largement la nature des solutions. Notons que pour l'équation (0.1.1) tout comme pour toutes les équations que nous présenterons la variable t représente le temps, la variable x représente la variable d'espace, le nombre n constitue la dimension de l'espace et on considèrera que $n \geq 2$. Beaucoup d'auteurs ont établi des estimations sur les solutions d'équations des ondes avec une perturbation indépendante du temps (voir [Bur03], [MRS], [SS], [LP], [Tam77], [Vain75], [Vain88], [Vod99], [Vod04]), ou une perturbation indépendante de x (voir [RY]). Dans beaucoup des travaux où l'on traite le cas de perturbations dépendant à la fois de t et de x , on considère l'équation des ondes avec potentiel (voir [Pet89], [Pet06], [Tam81]) qui s'écrit

$$\partial_t^2 u(t, x) - \Delta_x u(t, x) + V(t, x)u(t, x) = F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \quad (0.1.2)$$

D'autre part, quelques auteurs ont analysé l'équation des ondes avec une métrique dépendant du temps et de x (voir [CR1], [MT09]).

Inspiré par ces travaux, nous nous sommes intéressé à l'équation des ondes avec métrique scalaire dépendant du temps. Le problème de Cauchy que nous allons étudier a la forme

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x u) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(s, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (0.1.3)$$

Dans (0.1.3), la métrique $a(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ est une fonction scalaire qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (i) & C_0 \geq a(t, x) \geq c_0 > 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (ii) & \text{il existe } \rho > 0 \text{ tel que } a(t, x) = 1 \text{ pour } |x| \geq \rho, \\ (iii) & \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{1+n}, \quad |\partial_t^\alpha \partial_x^\beta a(t, x)| \leq C_{\alpha, \beta}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}. \end{aligned} \quad (0.1.4)$$

Soit $\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-\gamma}(L^2(\mathbb{R}^n))$ l'espace de Sobolev homogène, avec $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ déterminé par le laplacien sur \mathbb{R}^n . La solution du problème (0.1.3) est donnée par le propagateur

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, s) : \quad \dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n), \\ (f_1, f_2) = f &\mapsto \mathcal{U}(t, s)f = (u, u_t)(t, \cdot), \end{aligned}$$

où $\dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n) = \dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^n)$.

Dans cette thèse nous étudierons principalement les estimations de la solution u du problème (0.1.3) pour $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$. En particulier, en supposant que $a(t, x)$ est périodique en temps et $n \geq 3$, notre objectif sera d'établir des estimations de Strichartz.

0.2 Comportement asymptotique de l'énergie locale

L'énergie locale associée à (0.1.3) est définie par

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s)\chi\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))}, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Le comportement asymptotique de l'énergie locale quand $t \rightarrow +\infty$ permet de détecter différents phénomènes. Dans cette thèse nous nous intéresserons principalement à la décroissance de l'énergie locale. Nous allons présenter quelques exemples d'équations d'ondes pour lesquelles des résultats de la décroissance de l'énergie locale ont été établis.

0.2.1 Décroissance de l'énergie locale

On dit que l'énergie locale de (0.1.3) décroît si on a

$$\|\chi \mathcal{U}(t, s)\chi\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C_\chi p(t-s), \quad t \geq s, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho+1) \quad (0.2.1)$$

avec $C_\chi > 0$ indépendant de t et de s , et $p(t)$ une fonction tendant vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

Les premiers résultats de décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes ont été établis par Morawetz dans [Mor66] et [Mor68]. Par la suite, beaucoup d'auteurs ont étudié la décroissance de l'énergie locale pour les équations des ondes. Dans cette sous-section nous allons présenter quelques-uns de ces résultats sans faire une bibliographie complète et exhaustive.

Équation des ondes avec un obstacle

Soit Ω le complémentaire dans \mathbb{R}^n d'un ensemble compact contenu dans $\{x : |x| \leq R\}$ à bord \mathcal{C}^∞ . Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta_x v = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ (v, v_t)(0, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (0.2.2)$$

En supposant l'existence d'une fonction de fuite, qu'implique la non capture, ainsi que d'autres hypothèses sur l'obstacle, Morawetz-Ralston-Strauss ont prouvé dans [MRS] que pour $n \geq 3$ l'énergie locale associée au problème (0.2.2) décroît. L'analyse microlocale ainsi que les travaux de Melrose et Sjöstrand [MS] ont permis d'améliorer les résultats de décroissance de l'énergie locale. Ainsi, en supposant uniquement que l'obstacle

est non captif et en utilisant la propagation des singularités de la solution du problème (0.2.2) (voir [SS], [Vain75], [Vain88], [Vod99] et les références cités dans ces travaux), on montre que, pour $n \geq 3$ impair, f à support dans $\{x : |x| \leq R\}$, $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq R)$ et $0 \leq \gamma < \frac{n}{2}$, la solution $v(t)$ de (0.2.2) vérifie

$$\|\chi v(t)\|_{\dot{H}^\gamma(\Omega)} + \|\chi v_t(t)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\Omega)} \leq C e^{-\delta t} \|f\|_{\dot{H}^\gamma(\Omega)}$$

avec $\delta > 0$ indépendant de t . De même, en appliquant les travaux de Melrose [Mel], Metcalfe prouve dans [Met] que si l'obstacle est non captif et $n \geq 2$ est pair, alors, pour f à support dans $\{x : |x| \leq R\}$, $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq R)$ et $0 \leq \gamma < \frac{n}{2}$, la solution v de (0.2.2) vérifie

$$\|\chi v(t)\|_{\dot{H}^\gamma(\Omega)} + \|\chi v_t(t)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\Omega)} \leq C |t|^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{\dot{H}^\gamma(\Omega)}.$$

Notons qu'en suivant les travaux de Vodev [Vod99], on montre que si l'obstacle est non captif et $n \geq 2$ est pair, alors, pour f à support dans $B_R = \{x : |x| \leq R\}$, la solution v de (0.2.2) vérifie

$$\|\nabla_x v(t)\|_{L^2(\Omega \cap B_R)} + \|v_t(t)\|_{L^2(\Omega \cap B_R)} \leq C |t|^{-n} \|f\|_{\dot{H}^1(\Omega)}.$$

Équation des ondes avec une perturbation indépendante du temps

Dans [Vain75] et [Vain88], sous l'hypothèse de non capture, Vainberg propose une analyse générale du comportement asymptotique des solutions de problèmes perturbés reposant sur le comportement de la résolvante tronquée. Il montre que si $a(t, x)$ est indépendante de t et la perturbation est non captive, pour $n \geq 3$ impair, on a (0.2.1) avec $p(t) = e^{-\delta t}$. De même, Vodev a montré dans [Vod99] et [Vod04] que lorsque $a(t, x)$ est indépendante de t et la perturbation est non captive, pour $n \geq 4$ pair, on a (0.2.1) avec $p(t) = t^{-n}$.

Équation des ondes avec une perturbation périodique

Bachelot et Petkov démontrent dans [BaP], en utilisant l'analyse microlocale de la propagation des singularités et le théorème de RAGE (voir [GP]), que si la dimension est impaire, la décroissance de l'énergie associée à (0.2.3) pour $V(t, x)$ périodique en t est exponentielle pour des données initiales à support compact appartenant à un sous-espace de codimension finie.

Équation des ondes avec une perturbation non périodique

Tamura a établi plusieurs résultats de décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes avec des perturbations dépendant du temps (voir [Tam78(1)], [Tam78(2)], [Tam81]). Il a notamment prouvé dans [Tam81] que pour $n = 3$ et $V(t, x)$ vérifiant :

- (i) $V(t, x)$ est positive et de classe \mathcal{C}^1 avec des dérivées bornées
- (ii) il existe $\rho > 0$ tel que $V(t, x) = 0$ pour $|x| \geq \rho$,
- (iii) $\partial_t V(t, x) = O_{t \rightarrow +\infty}(t^{-\alpha})$ pour un $0 < \alpha \leq 1$, uniformément en x ,

l'énergie locale associée au problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u + V(t, x)u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(0, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (0.2.3)$$

décroit de façon exponentielle.

En considérant de petites perturbations dépendantes du temps, Matcalfé et Tataru ont obtenu la décroissance de l'énergie locale (voir [MT08] et [MT09]).

0.2.2 Croissance exponentielle de l'énergie locale

Pour un problème de Cauchy associé à une équation d'évolution d'ordre 2, on dit que l'énergie croît de façon exponentielle s'il existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et une solution u du problème considéré, telles qu'on a

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} e^{-Ct} \|\varphi(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)} > 0. \quad (0.2.4)$$

Pour le problème (0.1.3), contrairement à la décroissance de l'énergie locale, la présence d'une solution vérifiant (0.2.4) implique que l'énergie globale n'est pas uniformément bornée. Pour certains problèmes associés à une équation des ondes il existe des solutions vérifiant (0.2.4). Notons que la présence d'une solution vérifiant (0.2.4) pour les équations des ondes peut se produire sous une hypothèse de capture et sous une hypothèse de non capture. L'objectif de cette section est de présenter quelques exemples de problèmes où ce phénomène se produit.

Un exemple classique

Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k(t)^2x = 0, \quad k(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t). \quad (0.2.5)$$

On étudie l'équation (0.2.5) en utilisant la théorie de Floquet. Il est bien connu (voir par exemple [Arn]), qu'il existe des régions d'instabilité, pour les valeurs de ω et ε , où l'on peut trouver des solutions de (0.2.5) qui croissent de façon exponentielle. Le même type de phénomène se produit pour les équations aux dérivées partielles et plus précisément pour les équations des ondes, mais l'analyse de ces phénomènes est beaucoup plus difficile.

Croissance exponentielle de l'énergie locale pour des problèmes captifs

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ ($n \geq 2$) à bord régulier Σ et soit

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \Omega\}$$

la section transversale de Ω au temps t . On définit l'obstacle au temps t , noté $O(t)$, par $O(t) = \mathbb{R}^n \setminus \Omega_t$ et on suppose qu'il existe $T > 0$ tel qu'on a

$$O(t+T) = O(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus, on supposera que $O(t) \subset B_{R_0} = \{x : |x| \leq R_0\}$. Considérons le problème mixte, associé à l'équation des ondes avec un obstacle mouvant, qui s'écrit

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta_x v = 0, & (t, x) \in \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ (v, v_t)(s, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), & x \in \Omega_s, \end{cases} \quad (0.2.6)$$

avec $f \in \mathcal{H}_s = \dot{H}^1(\Omega_s) \times L^2(\Omega_s)$. Supposons que le vecteur normal $\nu = (\nu_t, \nu_x)$ de Σ dirigé vers Ω vérifie

$$|\nu_t(t, x)| < |\nu_x(t, x)|, \quad (t, x) \in \Sigma.$$

Sous une hypothèse de **capture** forte qui se traduit par l'existence d'une bicaractéristique amortie qui touche une infinité de fois l'obstacle et dont le produit des sauts croît de façon exponentielle, Popov et Rangelov ont établi, dans [PR], qu'il existe une solution v de (0.2.6) telle que

$$\|(v(t), v_t(t))\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(B_R \cap \Omega_t)} \geq C e^{\varepsilon t}, \quad t \in [s, +\infty[$$

avec $R \geq R_0 + T$ et $\varepsilon, C = C(\varepsilon, s, f) > 0$.

Pour le problème (0.1.3), Colombini et Rauch [CR1] ont montré qu'il existe une métrique captive et périodique $a(t, x)$ vérifiant (0.1.4) telle qu'il existe une solution u de (0.1.3) vérifiant (0.2.4). Dans [NU], Nishitani et Ueda ont amélioré ce résultat en examinant la croissance de l'énergie globale. Dans [NU] on prouve que pour des métriques non-périodiques l'existence d'une famille de bicaractéristiques $(t, x_\lambda(t), \tau_\lambda(t), \xi_\lambda(t))$ telles que

$$|x_\lambda(t)| \leq C, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\xi_\lambda(t)| = \infty$$

implique l'existence de solutions dont l'énergie croît exponentiellement. Notons que lorsque la métrique $a(t, x)$ est indépendante du temps, l'énergie de (0.1.3) est uniformément bornée. Par conséquent, la croissance de l'énergie locale pour (0.1.3) ne peut être envisagée que si $a(t, x)$ dépend de t .

Pour les problèmes (0.1.3) et (0.2.6), l'hypothèse de capture est l'argument principal entraînant l'existence d'une solution dont l'énergie croît de façon exponentielle. Néanmoins, même pour des problèmes non captifs, l'existence de résonances hors du disque unité pourrait entraîner la croissance exponentielle en t de l'énergie locale.

Croissance exponentielle de l'énergie locale pour un problème non captif

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta_x w + V(t, x)w = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ (w, w_t)(s, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (0.2.7)$$

avec $f \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ et avec un potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+3}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} (i) \text{ il existe } T > 0 \text{ tel que } V(t+T, x) = V(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ (ii) \text{ il existe } \rho > 0 \text{ tel que } V(t, x) = 0, & \text{pour } |x| \geq \rho. \end{cases} \quad (0.2.8)$$

La solution du problème (0.2.7) est donnée par le propagateur

$$U(t, s) : \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n) \ni (f_1, f_2) = f \mapsto U(t, s)f = (w, w_t)(t, x) \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n).$$

Colombini, Petkov et Rauch ont établi dans [CPR], qu'il existe un potentiel positif $V(t, x)$ vérifiant les conditions (0.2.8) tel que $U(T, 0)$ a une valeur propre $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > 1$. Ce dernier résultat entraîne la croissance exponentielle en temps de l'énergie locale de la solution liée à la fonction propre de $U(T, 0)$.

0.3 Estimations de Strichartz

Les estimations de Strichartz pour les solutions des équations des ondes sont des estimations $L_t^p L_x^q$. Celles-ci prennent différentes formes mais chacune de ces estimations constitue un outil clé pour la démonstration de l'existence de solutions locales ou globales d'équations non linéaires (voir [Kapi94], [KT], [Klai], [GV89], [GV94], [MZ], [Pech], [Str70]). Soient $2 \leq p, q \leq +\infty$. Dans cette thèse, nous considérerons les estimations de Strichartz ayant la forme suivante : on appellera **estimation de Strichartz locale** de la solution u de (0.1.3), l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|(u, u_t)\|_{C([s, s+\delta], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\delta, s) \|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \quad (0.3.1)$$

avec $\delta > 0$. On appellera **estimation de Strichartz globale** de la solution u de (0.1.3) avec $s = 0$, l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0 \quad (0.3.2)$$

avec $C > 0$ indépendant de t . L'estimation (0.3.2) appelée aussi estimation de Minkowski Strichartz globale est une généralisation des travaux de Strichartz [Str70]. Notons que la décroissance de l'énergie locale (voir Section 0.2.1) et l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale (voir Section 0.4.3) sont les principaux arguments permettant de passer des estimations (0.3.1) aux estimations (0.3.2) (voir [Bur03], [Met], [MT08], [SS]). Par ailleurs, si l'un des phénomènes décrits dans la Section 0.2.2 se produit, l'énergie ne sera pas uniformément bornée et les estimations (0.3.2) ne seront pas valables pour toutes les solutions.

Remarque 0.3.1 *L'opérateur différentiel $\operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x \cdot)$ dépend de t et on ne peut pas appliquer l'argument de Keel-Tao (voir [KT]) pour obtenir des estimations de Strichartz non homogènes. C'est pourquoi nous ne considérerons que les estimations homogènes.*

Nous allons présenter quelques résultats d'estimations de Strichartz. Dans cette thèse, nous considérons principalement les estimations de Strichartz globales, nous ne détaillerons donc pas les nombreux travaux concernant les estimations de Strichartz locales des solutions des équations des ondes (voir par exemple [Br], [GV95], [Kapi90], [MSS], [Str77], [Tat00], [Tat01], [Tat02]).

Estimations de Minkowski Strichartz globales

Il est bien connu (voir par exemple, [KT]), que pour $a(t, x) = 1$ et $s = 0$, et pour $2 \leq p, q \leq +\infty$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - 1, \quad \frac{1}{p} \leq \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \quad (0.3.3)$$

avec $(p, q) \neq (2, \infty)$ lorsque $n = 3$, la solution u de (0.1.3) vérifie l'estimation (0.3.2).

D'après les travaux de Smith et Sogge [SS] pour $n \geq 3$ impair et Metcalfe [Met] pour $n \geq 4$ pair, lorsque l'obstacle est non captif, pour $n \geq 3$ et $2 \leq p, q \leq +\infty$ vérifiant (0.3.3) avec $(p, q) \neq (2, \infty)$ lorsque $n = 3$, la solution v de (0.2.2) vérifie

$$\|v\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\Omega))} + \|v(t)\|_{\dot{H}^1(\Omega)} + \|\partial_t(v)(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(p, q, n, \Omega) \left(\|f_1\|_{\dot{H}^1(\Omega)} + \|f_2\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Supposons que le potentiel $V \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R})$ est positif et vérifie

$$\begin{cases} (i) \text{ il existe } T > 0 \text{ tel que } V(t+T, x) = V(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (ii) \text{ il existe } \rho > 0 \text{ tel que } V(t, x) = 0, & \text{pour } |x| \geq \rho. \end{cases}$$

En supposant que la résolvante tronquée de l'opérateur de monodromie associée au problème (0.2.3) est holomorphe sur le demi-plan supérieur pour $n \geq 3$ impair et sur le demi-plan supérieur privé de $2\pi\mathbb{Z}$ pour $n \geq 4$ pair, et en supposant que la résolvante tronquée est bornée en 0 pour $n \geq 4$ pair, Petkov prouve dans [Pet06] que pour $2 \leq p, q \leq +\infty$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - 1, \quad \frac{1}{p} \leq \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad p > 2,$$

la solution u de (0.2.3) vérifie (0.3.2).

Autres formes d'estimations de Strichartz

Les estimations de Strichartz ont été initialement introduites par Strichartz dans [Str70]. D'après [Str70], pour $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N_p > n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ et $t > 0$, les solutions u de (0.1.1), avec $F = 0$, vérifient

$$\|\nabla_x u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|u_t\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left(\|\nabla_x u(0)\|_{W_p^{N_p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_t(0)\|_{W_p^{N_p}(\mathbb{R}^n)} \right)$$

avec

$$\|h\|_{W_p^{N_p}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{0 \leq \alpha \leq N_p} \|D^\alpha h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

On peut aussi trouver des estimations de Strichartz de la forme

$$\| |D_x|^{-\gamma} \nabla_x u \|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (0.3.4)$$

En considérant des perturbations de petites tailles (voir Section 0.4.6) et dépendantes du temps, Metcalfe et Tataru prouvent dans [MT08] et [MT09] que, pour (p, q, γ) vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \gamma, \quad \frac{2}{p} + \frac{n-1}{q} \leq \frac{n-1}{2}$$

avec $(p, q, \gamma) \neq (2, \infty, 1)$ lorsque $n = 3$, la solution de (0.1.3) vérifie (0.3.4).

Certains auteurs ont aussi établi des estimations de Strichartz sur les espaces de Besov (voir par exemple [Kapi90] et [Kapi94]).

Estimations de Strichartz des solutions des équations de Schrödinger

Les travaux exposés dans cette thèse sont exclusivement consacrés aux équations des ondes. Néanmoins, nous signalons quelques résultats obtenus pour les équations de Schrödinger. Nous rappelons que de nombreux auteurs ont établi des estimations de Strichartz locales (voir par exemple [Bou], [BT07], [BGT], [GV85], [RZ] et [ST]) et des estimations de Strichartz globales (voir [BT08], [Bur02(2)] et [Tat08]) des solutions des équations de Schrödinger.

0.4 Estimations de Strichartz des solutions de l'équation des ondes avec une métrique périodique

Les résultats que nous présenterons dans cette section seront démontrés dans les Chapitres 1 et 2 de cette thèse. Notre objectif est d'établir des estimations (0.3.2) pour les solutions de (0.1.3), lorsque $n \geq 3$, $a(t, x)$ est T -périodique et vérifie (0.1.4). Dans un premier temps, afin d'éviter les phénomènes décrits dans la Section 0.2.2 nous allons introduire et justifier nos hypothèses. Ensuite nous présenterons nos principaux résultats. Dans la Section 0.4.3, nous décrirons les arguments que nous allons employer pour montrer la décroissance de l'énergie locale et l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale de (0.1.3). En particulier, nous précisons la nouveauté des méthodes que nous allons appliquer pour montrer la décroissance de l'énergie locale, ainsi que les raisons qui nous ont poussé à employer cette approche. Enfin, dans la Section 0.4.4 nous donnerons les grands axes de la preuve des principaux résultats. Nous présenterons aussi des exemples de métriques vérifiant nos hypothèses (voir Section 0.4.5), ainsi que des généralisations (voir Section 0.4.6) et des applications (voir Section 0.4.7) de nos résultats.

0.4.1 Hypothèses

Nous allons établir les estimations de Strichartz pour la solution du problème (0.1.3), en supposant la métrique $a(t, x)$ non captive. Plus précisément, considérons une bicaractéristique nulle $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$ du symbole principal $\tau^2 - a(t, x)|\xi|^2$ de $\partial_t^2 - \operatorname{div}_x(a\nabla_x)$ vérifiant

$$t(0) = t_0, |x(0)| \leq R_1, \quad \tau^2(\sigma) = a(t(\sigma), x(\sigma))|\xi(\sigma)|^2.$$

On montrera dans la Section 1.7, que les bicaractéristiques peuvent être paramétrées par rapport à t et qu'elles sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. Avec un volontaire abus de notation, on notera $(t, x(t), \tau(t), \xi(t))$ la bicaractéristique $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$ paramétrée par rapport à t . On introduit la condition suivante :

(H1) la métrique scalaire $a(t, x)$ est **non captive** si pour tout $R > R_1$, il existe $T(R, R_1) > 0$ tel que $|x(t)| > R$ pour $|t - t_0| \geq T(R, R_1)$.

La condition de non capture (H1) est nécessaire pour les estimations de Strichartz, car pour certaines perturbations captives il est possible de trouver des solutions dont l'énergie croît de façon exponentielle (voir [CR1]). Cependant, même pour des perturbations non captives des phénomènes de résonances paramétriques peuvent entraîner la présence de solutions dont l'énergie locale croît de façon exponentielle (voir [CPR] et la Section 0.2.2). Afin d'exclure l'existence de telles solutions on doit imposer une seconde hypothèse.

Pour étudier le comportement asymptotique des solutions d'équations des ondes quand $t \rightarrow +\infty$, il est nécessaire de distinguer le cas où n est pair de celui où n est impair (voir [Bur98], [Met], [MRS], [SS], [TZ], [Tam77], [Vain75], [Vain88], [Vain93], [Vod99], [Vod04]). Cette distinction est liée à la nature de la transformation de Fourier par rapport au temps des solutions de l'équation des ondes libres dont la valeur change selon la parité de la dimension n . L'autre point qui justifie cette distinction provient des propriétés de la transformation de Radon (voir [Pet89], Chapitre II) et du principe de Huygens. Ces différences nous contraignent à distinguer, le cas n impair du cas n pair.

Tout d'abord, supposons que $n \geq 3$ est impair. Soit $U_0(t)$ le groupe unitaire sur $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ associé au problème de Cauchy (0.1.3) pour l'équation des ondes libres ($a = 1$ et $s = 0$). Pour $b \geq \rho$, on note P_{\pm}^b la projection orthogonale sur le complémentaire orthogonal des espaces de Lax-Phillips

$$D_{\pm}^b = \{f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n) : U_0(t)f(x) = 0 \text{ pour } |x| < \pm t + b\}.$$

Notons $Z^b(t, s) = P_{+}^b \mathcal{U}(t, s) P_{-}^b$. Alors, les résonances du problème (0.1.3) coïncident avec les valeurs propres de l'opérateur $Z^b(T, 0)$ et la condition (H1) garantit que le spectre $\sigma(Z^b(T, 0))$ de $Z^b(T, 0)$ est constitué de valeurs propres $z_j \in \mathbb{C}$ de multiplicité finie. D'après [Pet89] et [CS], lorsque $n \geq 3$ est impair les valeurs propres de l'opérateur $Z^b(T, 0)$ du problème (0.2.3) sont indépendantes du choix de $b \geq \rho$. Ce résultat reste valable pour l'opérateur $Z^b(T, 0)$ associé au problème (0.1.3). Pour $n \geq 3$ impair, notre seconde condition est la suivante :

$$(H2) \quad \sigma(Z^b(T, 0)) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\} = \emptyset.$$

Lorsque $n \geq 4$ est pair il n'est plus possible d'utiliser les opérateurs $Z^b(t, s)$ et on doit formuler autrement l'hypothèse (H2). Soient $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. On définit la résolvante tronquée du problème (0.1.3) par

$$R_{\psi_1, \psi_2}(\theta) = \psi_1(\mathcal{U}(T, 0) - e^{-i\theta})^{-1} \psi_2, \quad \text{Im}(\theta) \geq AT.$$

On prouve facilement que pour $A > 0$ suffisamment grand, $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$ est holomorphe sur $\text{Im}(\theta) \geq AT$. Pour $n \geq 3$ quelconque, notre seconde condition est la suivante :

(H3) Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^{\infty}(|x| \leq \rho + 2 + 3T)$ telles que $\varphi_1 = 1$ pour $|x| \leq \rho + \frac{4}{5} + 3T$ et $\varphi_2 = 1$ sur $|x| \leq \rho + 2 + 3T$. Alors, l'opérateur $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$ admet un prolongement holomorphe de $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq AT > 0\}$ sur $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$, pour $n \geq 3$ impair, et sur $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) > 0\}$ pour $n \geq 4$ pair. De plus, pour n pair, $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$ se prolonge de façon continue de $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) > 0\}$ sur

$$\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0, \theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

et on a

$$\limsup_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \text{Im} \lambda > 0}} \|R_{\psi_1, \psi_2}(\lambda)\| < \infty.$$

Nous rappelons que dans l'étude des perturbations périodiques de l'opérateur de Schrödinger (voir [GY]) la résolvante de l'opérateur de monodromie $(U(T) - z)^{-1}$ joue un rôle central. L'absence de valeurs propres $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$ de $U(T)$, et le comportement de la résolvante au voisinage de $|z| = 1$, sont liés à la décroissance de l'énergie locale en t . Pour l'équation des ondes on peut trouver des pôles $\theta \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\theta) > 0$ de $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$, alors que pour l'opérateur de Schrödinger avec des perturbations périodiques ce type de phénomène est exclu.

Nous démontrerons dans la Section 2.2 du Chapitre 2 que, sous l'hypothèse (H1) et pour $n \geq 3$ impair, les valeurs propres non nulles de $Z^b(T, 0)$ coïncident avec les pôles de la résolvante tronquée $\chi(\mathcal{U}(T, 0) - z)^{-1} \chi$ avec $\chi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. En appliquant cette propriété, on voit que, sous l'hypothèse (H1) pour $n \geq 3$ impair, les hypothèses (H2) et (H3) sont équivalentes.

0.4.2 Principaux résultats obtenus dans cette thèse

Pour les dimensions impaires nous établirons les estimations suivantes (voir Théorème 1.1.1 du Chapitre 1) :

Théorème 1 *Supposons que $n \geq 3$ est impair. Soit $a(t, x)$ une métrique T -périodique vérifiant (0.1.4) telle que (H1) et (H2) sont satisfaites. Supposons que $2 \leq p, q < +\infty$ vérifient les conditions*

$$p > 2, \quad \frac{1}{p} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right). \quad (0.4.1)$$

Alors, pour $u(t)$ la solution de (0.1.3) avec $s = 0$ et $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ on a, pour tout $t > 0$, l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q, \rho, T)(\|f_1\|_{\dot{H}^1} + \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

Pour les dimensions paires nous obtiendrons le résultat suivant (voir Théorème 2.1.1 du Chapitre 2) :

Théorème 2 *Supposons que $n \geq 4$ est pair. Soit $a(t, x)$ une métrique T -périodique vérifiant (0.1.4) telle que (H1) et (H3) sont satisfaites. Supposons que $2 \leq p, q < +\infty$ vérifient les conditions (0.4.1). Alors, pour $u(t)$ la solution de (0.1.3), avec $s = 0$ et $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, on a, pour tout $t > 0$, l'estimation*

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q, \rho, T)(\|f_1\|_{\dot{H}^1} + \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

0.4.3 Intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale

Il est bien connu que l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale, qui s'écrit

$$\int_0^\infty \|\varphi \mathcal{U}(t, 0)g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(T, \varphi, n, \rho)\|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (0.4.2)$$

joue un rôle crucial dans la mise en place des estimations (0.3.2). Plus précisément, l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale est l'argument principal permettant de passer des estimations locales (0.3.1) aux estimations globales (0.3.2) (voir [Bur03], [Met], [SS]). De même que pour l'équation des ondes avec un potentiel périodique en t (voir [Pet89]), pour obtenir (0.4.2) il est suffisant de prouver que les hypothèses (H1) et (H2) pour $n \geq 3$ impair et les hypothèses (H1) et (H3) pour $n \geq 4$ pair, impliquent une décroissance de l'énergie locale qui a la forme (0.2.1) avec $p \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Notons que l'ensemble des résultats de décroissance de l'énergie locale que nous avons présentés dans la Section 0.2.1 (mise à part ceux de [BaP]) est basé sur l'estimation de la transformation de Fourier par rapport au temps des solutions des problèmes considérés. En effet, soit $P(x, D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre 2 tel que l'opérateur $\partial_t^2 + P(x, D_x)$ vérifie les propriétés A, B, C', D du Chapitre X de [Vain88]. On considère le problème

$$\begin{cases} v_{tt} + P(x, D_x)v = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ (v, v_t)(0, x) = (0, g(x)), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (0.4.3)$$

où $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On prolonge la solution v de (0.4.3) sur \mathbb{R} par 0 pour $t < 0$. Notons \tilde{v} la transformation de Fourier inverse par rapport à t de v définie par

$$\tilde{v}(\lambda, x) = \int_0^{+\infty} v(t, x) e^{it\lambda} dt.$$

On montre facilement que \tilde{v} est la solution de

$$(P(x, D_x) - \lambda^2)\tilde{v}(\lambda, x) = g(x). \quad (0.4.4)$$

Pour $\nu > 0$ suffisamment grand on a la formule d'inversion

$$\chi v(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \chi \tilde{v}(\lambda, x) e^{-i\lambda t} d\lambda, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

et en appliquant (0.4.4) on en déduit

$$\chi v(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} [\chi(P(x, D_x) - \lambda^2)^{-1}g](\lambda, x) e^{-i\lambda t} d\lambda, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (0.4.5)$$

La formule (0.4.5) prouve que pour estimer l'énergie locale associée au problème (0.4.3) il suffit d'obtenir des estimations de la résolvante tronquée $\chi(P(x, D_x) - \lambda^2)^{-1}\psi$, avec $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et d'examiner le prolongement méromorphe de $\chi(P(x, D_x) - \lambda^2)^{-1}\psi$. Après on intègre $\chi(P(x, D_x) - \lambda^2)^{-1}\psi$ par rapport à λ sur un contour convenable dans \mathbb{C} . Pour que cette stratégie soit concluante, il est nécessaire que le symbole principal de l'opérateur différentiel associé au problème considéré soit indépendant du temps. Or, pour le problème (0.1.3), le symbole principal de $\partial_t^2 - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x \cdot)$ dépend du temps et la transformation de Fourier par rapport au temps de la solution ne nous permettra pas de suivre cet argument. Nous devons donc adopter une autre approche.

Tout d'abord, au Chapitre 1 on démontrera, en utilisant les propriétés des opérateurs $Z^b(t, s)$, que les hypothèses (H1) et (H2) impliquent (0.2.1) pour $n \geq 3$ impair avec $p(t) = e^{-\delta t}$. Pour les dimensions paires, la preuve de (0.2.1) sera plus délicate et nécessitera l'usage des résultats établis par Vainberg pour les problèmes non captifs et périodiques en temps. Dans [Vain93], Vainberg propose une étude générale du comportement asymptotique des solutions de problèmes perturbés de façon périodique en temps, avec l'unique hypothèse de non capture. Pour cela, Vainberg utilise, à la place de la transformation de Fourier en temps, la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand qui a la forme

$$F(\varphi)(t, \theta, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(t + kT, x) e^{ik\theta}, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n}), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Soient P_1 et P_2 deux projecteurs de \mathbb{C}^2 définis par

$$P_1(h) = h_1, \quad P_2(h) = h_2, \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2$$

et soient $P^1, P^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2)$ définis par

$$P^1(h) = (h, 0), \quad P^2(h) = (0, h), \quad h \in \mathbb{C}.$$

Considérons les opérateurs $U(t, s)$ et $V(t, s)$ définis par

$$U(t, s) = P_1 \mathcal{U}(t, s) P^1 \quad \text{et} \quad V(t, s) = P_1 \mathcal{U}(t, s) P^2.$$

Fixons $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b)$ avec $b = \rho + 1 + \frac{4}{5} + 3T$. En généralisant les résultats de Vainberg [Vain93], on démontrera dans la Section 2.3 du Chapitre 2 que, pour $0 \leq s < T$ et t assez grand, l'opérateur $V(t, s, \theta)$ défini initialement, pour $\text{Im}(\theta) > AT$ (avec $A > 0$ suffisamment grand), par

$$V(t, s, \theta) = e^{\frac{i\theta}{T}} F(\chi_1 V(t, s) \chi_2)(t, \theta),$$

se prolonge de façon méromorphe sur $\{\theta \in \mathbb{C} : \theta \neq 2k\pi - i\mu, k \in \mathbb{Z}, \mu \geq 0\}$ pour $n \geq 4$ pair. De plus, pour θ proche de 0, t suffisamment grand et $0 \leq s < T$, on a

$$V(t, s, \theta) = \sum_{k \geq -m} \sum_{j \geq -m_k} R_{kj}(t, s) \theta^k (\log \theta)^{-j}$$

avec $R_{kj}(t, s)$ des opérateurs à valeurs dans \mathcal{C}^∞ et T -périodique en t . Notons que Vainberg prouve ce résultat dans [Vain93] pour $s = 0$. Dans les Sections 2.3.2 et 2.3.3 nous montrerons qu'on peut généraliser ces résultats à $0 \leq s < T$ et nous verrons dans la Section 2.3 du Chapitre 2 que ces résultats combinés à l'hypothèse (H3) impliquent (0.2.1) avec

$$p(t) = \frac{1}{(1+t) \ln^2(t+e)}.$$

Notons que dans [Vain93], Vainberg établit uniquement le développement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$ des solutions v de problèmes périodiques d'ordre m vérifiant $v|_{t=0} = \dots = \partial_t^{m-2} v|_{t=0} = 0$. En appliquant ces résultats au problème (0.1.3) nous pourrions uniquement établir le développement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$ de $\chi_1 V(t, 0) \chi_2$. Cela ne nous permettra pas de prouver la décroissance de l'énergie locale. La stratégie que nous allons employer pour prouver la décroissance de l'énergie locale, consiste à faire le lien entre le prolongement méromorphe de la résolvante tronquée et celui de $V(t, s, \theta)$. Dans les Sections 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3 nous allons justifier la généralisation des résultats de [Vain93] pour déterminer la nature du prolongement méromorphe de $V(t, s, \theta)$ lorsque $0 \leq s < T$ tandis que dans la Section 2.3.4 nous démontrons la décroissance de l'énergie locale. Dans la Section 2.3.4, nous présentons la principale contribution de notre analyse, par rapport à l'étude de Vainberg [Vain93], dans la preuve de la décroissance de l'énergie locale pour les dimensions paires.

En combinant (0.2.1) avec les résultats concernant l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale pour les solutions de l'équation (0.1.1) (voir [SS] ainsi que la Section 1.3 du Chapitre 1), on déduit (0.4.2).

0.4.4 Schéma de la preuve

L'objectif de cette sous-section est d'exposer la méthode que nous allons employer pour démontrer les Théorèmes 1 et 2 en utilisant l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale.

Pour démontrer l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale, nous avons été inspiré par l'analyse de l'équation des ondes avec potentiel dépendant de façon périodique de t

(voir [Pet06]). Le problème (0.2.3) et le problème (0.1.3) ont en commun la périodicité en t et l'annulation, en dehors d'un compact fixé, des perturbations. Néanmoins, l'argument principal qui permet d'aboutir aux estimations (0.3.2), pour la solution de (0.2.3) à partir de l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale, est l'égalité

$$\partial_t^2 w - \Delta_x w = -V(t, x)w. \quad (0.4.6)$$

La formule (0.4.6) permet de considérer la solution de (0.2.3) comme la solution de l'équation des ondes libres avec un terme source $-V(t, x)w \in L^2(\mathbb{R}_t^+, L^2(\mathbb{R}^n))$. On en déduit (0.3.2), pour la solution de (0.2.3), en appliquant les estimations de Strichartz pour l'équation des ondes libres. Pour le problème (0.1.3), le même argument donne

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = \operatorname{div}_x((a(t, x) - 1)\nabla_x u). \quad (0.4.7)$$

Dans cette équation le terme source est toujours à support compact en x , mais il est beaucoup plus difficile à estimer, car $\operatorname{div}_x((a(t, x) - 1)\nabla_x \cdot)$ est un opérateur différentiel d'ordre 2. Par conséquent, la méthode employée pour obtenir les estimations (0.3.2) pour la solution de (0.2.3) doit être modifiée pour la solution de (0.1.3). Pour obtenir (0.3.2) à partir de (0.4.2), nous allons utiliser une autre idée inspirée par les travaux de [Bur03]. Tout d'abord, fixons $\chi \in C_0^\infty(|x| \leq \rho + 1)$ telle que $\chi = 1$, pour $|x| \leq \rho + \frac{1}{2}$ et $0 \leq \chi \leq 1$, et considérons la solution u de (0.1.3), pour $s = 0$. Décomposons u de la façon suivante

$$u = \chi u + (1 - \chi)u$$

et procédons en deux étapes.

La première étape consiste à appliquer les estimations de Strichartz pour les solutions de l'équation des ondes libres et (0.4.2), afin de prouver (0.3.2) pour $(1 - \chi)u$. Plus précisément, nous prouverons que $(1 - \chi)u$ est la solution de l'équation des ondes libre avec un terme source $[\Delta_x, \chi]u \in L^2(\mathbb{R}_t^+, L^2(\mathbb{R}^n))$. Puis on déduira (0.3.2) pour $(1 - \chi)u$ en employant les mêmes arguments que [Pet06] pour la solution de (0.2.3).

La deuxième étape consiste à établir des estimations de Strichartz locales pour la solution de (0.1.3) et à appliquer (0.4.2) pour en déduire que χu vérifie (0.3.2). Tout d'abord, en employant des méthodes de type BKW nous montrerons qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $s, t \in [0, T]$, avec $|s - t| < \delta$, et chaque entier $N \geq 1$, on a la représentation

$$\psi U(t, s) = \sum_{j=1}^M \left[\tilde{I}_j^+(t, s) + \tilde{I}_j^-(t, s) \right] + R_N(t, s), \quad (0.4.8)$$

où les $\tilde{I}_j^\pm(t, s)$ sont des opérateurs intégraux de Fourier ayant des noyaux

$$\tilde{I}_j^\pm(t, s, x, y) = \int \tilde{b}_j^\pm(t, s, y, x, \xi) e^{-i\varphi_j^\pm(t, s, y, \xi) + ix \cdot \xi} d\xi. \quad (0.4.9)$$

Ici $R_N(t, s) \in \mathcal{L}(\dot{H}^1(\mathbb{R}^n), H^{1+N}(\mathbb{R}^n))$ et sa norme ainsi que celles de ses dérivées par rapport à t sont bornées indépendamment de $s, t \in [0, T]$. Les amplitudes $\tilde{b}_j^\pm(t, s, y, x, \xi)$ sont à support compact en y et s'annulent pour $|\xi|$ suffisamment petit. De plus, $\tilde{b}_j^\pm, \varphi_j^\pm$ et leurs dérivées sont uniformément bornées, pour $s \in [0, T]$. Une représentation

similaire est valable pour $\psi V(t, s)$. Ensuite, en appliquant les estimations établies par Kapitanski pour les opérateurs intégraux de Fourier dont le noyau est de la forme (0.4.9) (voir [Kapi90]), on montre que pour $u(t, x)$ la solution de (0.1.3), et pour $2 \leq p, q \leq \infty$, $\gamma > 0$ vérifiant

$$\frac{n(q-2)}{2q} - \gamma = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p} \leq \frac{(n-1)(q-2)}{4q}, \quad (0.4.10)$$

on a l'estimation suivante

$$\|u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} \leq C(p, q, n, \rho) \|f\|_{\dot{H}_\gamma(\mathbb{R}^n)} \quad (0.4.11)$$

avec $C > 0$ indépendant de s et de f . En supposant que $T_1 \leq \delta$ et $\gamma = 1$, on déduit facilement (0.3.1), avec une constante ne dépendant que de T pour $s \in [0, T]$. Notons que ces résultats restent valables pour $a(t, x)$ non périodique, vérifiant (0.1.4). Lorsque $\gamma = 1$, on passera des estimations (0.4.11) aux estimations (0.3.2) pour χu en appliquant les estimations (0.4.2) et (0.2.1) et en utilisant une méthode proche de celle décrite dans [Bur03].

Dans la Section 1.8 du Chapitre 1 et la Section 2.4 du Chapitre 2, on démontrera les résultats des Théorèmes 1 et 2 en combinant les estimations obtenues pour χu et $(1 - \chi)u$.

0.4.5 Généralisation des résultats

Soit $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$ une métrique C^∞ telle que, pour tout $i, j = 1 \cdots n$, on a

- (i) il existe $\rho > 0$ tel que $a_{ij}(t, x) = \delta_{ij}$, pour $|x| \geq \rho$, avec $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$,
- (ii) il existe $T > 0$ tel que $a_{ij}(t+T, x) = a_{ij}(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$,
- (iii) $a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$,
- (iv) il existe $C_0 > c_0 > 0$ tel que $C_0 |\xi|^2 \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(0.4.12)

Si on remplace la métrique scalaire $a(t, x)$ dans (0.1.3) par $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$, on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(s, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (0.4.13)$$

Pour $n \geq 3$ impair, on généralise dans la Section 1.9 du Chapitre 1 les estimations (0.3.2) pour la solution u du problème (0.4.13), si pour les trajectoires du symbole

$$\tau^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j$$

et pour l'opérateur $Z^b(T, 0)$ correspondant au problème (0.4.13), (H1) et (H2) sont satisfaites et si n, p, q vérifient (0.4.1). De même, pour $n \geq 4$ pair, on peut facilement

prouver que les estimations (0.3.2) restent valables pour la solution u de (0.4.13) si pour les trajectoires du symbole

$$\tau^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j$$

et pour $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$ la résolvante tronquée correspondante, (H1) et (H3) sont satisfaites et n, p, q vérifient (0.4.1). On peut facilement généraliser les résultats établis pour une métrique scalaire au cas plus général des métriques anisotropes. Nous avons fait le choix d'étudier le problème (0.1.3) à la place du problème (0.4.13) afin d'alléger notre présentation.

0.4.6 Exemples de métriques

Il n'est pas facile de vérifier les hypothèses (H1), (H2) et (H3) à partir des propriétés de la métrique $a(t, x)$. Donc il était nécessaire de donner des exemples de métriques $a(t, x)$ telles que (H1), (H2) et (H3) sont satisfaites. En considérant les bicaractéristiques paramétrées par rapport au temps, on montre que pour $a(t, x)$ vérifiant

$$\frac{2a}{\rho} - \frac{|a_t|}{\sqrt{\inf a}} - |a_r| \geq \beta > 0, \quad (0.4.14)$$

l'hypothèse (H1) est satisfaite pour $n \geq 3$ (ce résultat reste valable pour n pair et n impair). Comme nous l'avons vu, en supposant l'hypothèse (H1) satisfaite, les hypothèses (H2) et (H3) impliquent la décroissance de l'énergie locale. Par conséquent, pour donner des exemples de métriques telles que (H2) et (H3) sont satisfaites il faut considérer des métriques $a(t, x)$ telles que l'on a (0.2.1). Dans [MT08] et [MT09], Metcalfe et Tataru prouvent la décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes avec une métrique, en supposant que la perturbation $((a(t, x) - 1))$ pour le problème (0.1.3) est suffisamment petite. Posons

$$D_0 = \{x : |x| \leq 2\}, \quad D_j = \{x : 2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

et

$$A_j = \mathbb{R} \times D_j.$$

Pour le problème (0.1.3), l'hypothèse principale de [MT08] et [MT09] s'écrit

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sup_{(t,x) \in A_j} [\langle x \rangle^2 \|D_x^2 a(t, x)\| + \langle x \rangle |\nabla_x a(t, x)| + |a(t, x) - 1|] \right) \leq \varepsilon$$

avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Pour ε suffisamment petit cette condition implique la non capture (voir [MT09]). Ainsi, Metcalfe et Tataru prouvent la décroissance de l'énergie locale en modifiant la taille d'un des paramètres de la métrique considérée. En suivant le même raisonnement, on fait le choix de modifier la période T de $a(t, x)$. Ce choix se justifie par les propriétés des opérateurs $\mathcal{U}(t, s)$ et $Z^b(t, s)$ (voir la Section 1.2 du Chapitre 1 et la Section 2.5 du Chapitre 2). Soit $a(t, x)$ une métrique T -périodique vérifiant (0.4.14). Supposons que la période T de $a(t, x)$ est une constante à déterminer, et supposons qu'il existe $T_1 \in]0, T[$ tel que $T_1 < 1$ et

$$a(t, x) = a_1(x), \quad t \in [T_1, T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (0.4.15)$$

D'après (0.4.14), $a_1(x)$ est non captive (voir Section 1.8). En appliquant la décroissance de l'énergie locale pour les solutions de l'équation des ondes munie d'une métrique non captive et indépendante de t ([Vain75], [Vain88] et [Vod99]) on prouve que, pour T suffisamment grand, $a(t, x)$ vérifie les hypothèses (H1) et (H2) pour $n \geq 3$ impair et les hypothèses (H1) et (H3) pour $n \geq 4$ pair. Notons que pour $n \geq 3$ impair nous prouverons facilement ce résultat en utilisant l'opérateur $Z^\rho(t, s)$ tandis que la preuve de ce résultat pour $n \geq 4$ pair sera plus délicate. Cette différence est due au fait que nous ne pouvons pas travailler avec l'opérateur $Z^\rho(t, s)$ lorsque n est pair. Pour $n \geq 4$ pair nous devons tout d'abord montrer que, pour T suffisamment grand, (0.4.15) donne l'estimation

$$\|\psi_1 \mathcal{U}(NT, 0) \psi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_{\psi_1, \psi_2}}{(N+1) \ln^2(N+e)}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b), \quad (0.4.16)$$

puis montrer que (0.4.16) implique (H3).

0.4.7 Existence de solutions locales d'équations semilinéaires associées à (0.1.3)

Initialement introduit par Strichartz dans [Str70], les estimations de Strichartz constituent un outil majeur pour prouver l'existence de solutions d'équations non linéaires. Inspiré par l'application de [KT], dans la Section 2.3 du Chapitre 2, nous allons démontrer l'existence locale de solutions faibles pour des équations semilinéaires associées au problème (0.1.3). Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}_x(a(t, x) \nabla_x u) - F_k(u) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(0, x) = (g_1(x), g_2(x)) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (0.4.17)$$

où pour un $k > 1$ donné, le terme non linéaire F_k est une fonction C^1 sur \mathbb{R} vérifiant $F_k(0) = 0$, $|F'_k(u)| \leq C|u|^{k-1}$ et la métrique $a(t, x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ vérifie les conditions (0.1.4). Dans la section 2.5 nous supposons uniquement que $n \geq 3$ (nous ne ferons aucune hypothèse sur la parité de n). On dit que $u \in \mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$ est une solution faible de (0.4.17) si, pour tout $t \in [0, T_1]$, on a

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\mathcal{U}(t, 0)g + \int_0^t \mathcal{U}(t, s)(0, F_k(u(s))) ds \right)_1 \\ &= (\mathcal{U}(t, 0)g)_1 + \int_0^t V(t, s)(F_k(u(s))) ds, \end{aligned} \quad (0.4.18)$$

où pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2$, $(h)_1 = h_1$. Pour $a(t, x) = 1$ on a le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u - F_k(u) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ (u, u_t)(0, x) = (g_1(x), g_2(x)) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (0.4.19)$$

Le problème (0.4.19) a été largement analysé pour $g \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$. En particulier, il a été établi que (0.4.19) admet une solution globale dans le cas de la croissance sous-critique $1 < k < 1 + \frac{4}{n-2}$ (voir [GV94] et [Str70]) ou dans le cas de la croissance critique $k = 1 + \frac{4}{n-2}$ (voir [Str70] et [Pech]). Pour $k > 1 + \frac{4}{n-2}$, il n'est pas encore clair (voir aussi [Leb]) qu'il existe des solutions globales et régulières du problème de Cauchy (0.4.19), pour une donnée initiale arbitraire. L'existence locale et l'existence globale de (0.4.19), ont été établies dans des espaces de Sobolev particuliers avec des conditions minimales

de régularité des données initiales (voir [Kapi94] et [Str70]). Dans [RY], Reissig et Yagdjian ont établi des estimations de Strichartz pour les solutions d'équations strictement hyperboliques d'ordre deux dont les coefficients dépendent uniquement de t . On peut appliquer ces estimations afin de démontrer des résultats d'existence pour le problème (0.4.17), quand $a(t, x) = a(t)$ est indépendant de x (voir [Klai] et [Sog] pour l'équation des ondes libres). Nous traiterons le cas où $a(t, x)$ dépend à la fois de t et de x . Nous allons appliquer les estimations (0.3.1) et (0.3.2) afin de démontrer l'existence locale de solutions faibles du problème (0.4.17), quand $0 \leq t \leq T_1$. Nous verrons que pour k convenable, en appliquant le théorème du point fixe, nous pourrions prouver l'existence de points fixes de la fonction

$$\mathcal{G}(u) = (\mathcal{U}(t, 0)g)_1 + \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds$$

dans $\mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$. Les points fixes de \mathcal{G} sont localement les solutions faibles de (0.4.17).

Considérons les valeurs de k suivantes :

$$\begin{aligned} i) \quad & n = 3, \quad 3 < k < 5, \\ ii) \quad & n = 4, \quad 2 < k < 3, \\ iii) \quad & n = 5, \quad \frac{5}{3} < k < \frac{7}{3}, \\ iv) \quad & n \geq 6, \quad \frac{n}{n-2} < k \leq \frac{n}{n-3}. \end{aligned} \tag{0.4.20}$$

Dans un premier temps, en appliquant les estimations (0.3.2) ainsi que le lemme de Christ et Kiselev (voir Section 1.4) et en supposant que $a(t, x)$ vérifie uniquement (0.1.4), nous établirons le résultat suivant (Théorème 2.7.2 du Chapitre 2) :

Théorème 3 *Supposons que $a(t, x)$ est une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{n+1} vérifiant les conditions (0.1.4). Soient k et n vérifiant (0.4.20). Alors, il existe $T_1 > 0$ tel que le problème (0.4.17) admet une solution faible u sur $[0, T_1]$. De plus, u est l'unique solution faible de (0.4.17) sur $[0, T_1]$ vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} (i) \quad & u \in \mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)), \quad (ii) \quad u_t \in \mathcal{C}([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n)), \\ (iii) \quad & u \in L^p([0, T_1], L^{2k}(\mathbb{R}^n)) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{n(k-1)}{k} - 1. \end{aligned}$$

En contraste du cas $a = 1$ (voir [KT] et [Pech]) dans notre raisonnement nous pouvons seulement utiliser les estimations de Strichartz homogènes, car la démonstration des estimations (0.3.2) dans le cas non-homogène paraît plus difficile et on ne dispose pas des résultats nécessaires. Cette restriction nous permet uniquement de prouver l'existence de solutions dans l'espace énergétique $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$. De plus, nous avons plus de restrictions sur les valeurs de $k > 1$. Comme nous utilisons les estimations (0.3.1) pour prouver le Théorème 3, la longueur T_1 de l'intervalle $[0, T_1]$ sur laquelle le résultat d'existence est valable, est majorée par la longueur δ de l'intervalle sur lequel les estimations (0.3.1) ont été établies. Afin d'améliorer ce résultat d'existence, en suivant les arguments de [KT], dans la Section 2.7.2 nous appliquerons les estimations (0.3.2).

Considérons les valeurs de k suivantes :

$$\begin{aligned} i) \quad & n = 3, \quad 3 < k < 5, \\ ii) \quad & n = 4, \quad 2 < k < 3, \\ iii) \quad & n = 5, \quad \frac{5}{3} < k < \frac{7}{3}, \\ iv) \quad & n \geq 6, \quad \frac{n}{n-2} < k < \frac{n}{n-3}. \end{aligned} \tag{0.4.21}$$

En supposant que $a(t, x)$ est T -périodique par rapport à t et que les hypothèses (H1) et (H3) sont satisfaites, nous appliquerons les estimations (0.3.2) pour établir l'existence en temps long de solutions faibles de (0.4.17), pour des données initiales petites. Plus précisément, on obtient (Théorème 2.7.3 du Chapitre 2) :

Théorème 4 *Supposons que k et n vérifient les conditions (0.4.21). Soit $a(t, x)$ T -périodique vérifiant (0.1.4) telle que (H1) et (H3) sont satisfaites. Alors, il existe $C(k, F_k, T, \rho, n)$ telle que, pour tout $g \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$, il existe une solution faible u de (0.4.17) sur $[0, T_1]$ avec*

$$T_1 = C(k, F_k, T, n, \rho) \left(\|g\|_{\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)} \right)^{-d}, \quad (0.4.22)$$

où $d = \frac{2(k-1)}{(n+2) - (n-2)k}$. De plus, u est l'unique solution faible de (0.4.17) sur $[0, T_1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & u \in \mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)), \quad (ii) \quad u_t \in \mathcal{C}([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n)), \\ (iii) \quad & u \in L^p([0, T_1], L^{2k}(\mathbb{R}^n)) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{n(k-1)}{k} - 1. \end{aligned} \quad (0.4.23)$$

Ainsi, on a un temps d'existence $T_1 = C\varepsilon^{-d}$ pour des données initiales d'ordre ε . Il semblerait qu'avec une hypothèse convenable sur le signe de la non linéarité $F_k(u)$ et en utilisant uniquement les estimations de Strichartz locales (0.3.1), on puisse prouver l'existence et l'unicité de solutions globales de (0.4.17) en appliquant une méthode énergétique. Dans le problème (0.4.17) on examine un cas plus général sans aucune hypothèse sur le signe de la non linéarité $F_k(u)$. Cela justifie l'usage des estimations globales (0.3.2).

Chapitre 1

Estimations de Strichartz globales pour l'équation des ondes avec une perturbation périodique en dimension impaire

1.1 Introduction

On considère le problème de Cauchy (0.1.3) lorsque la métrique $a(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ est une fonction scalaire qui vérifie les conditions suivantes :

- (i) $C_0 \geq a(t, x) \geq c_0 > 0$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,
 - (ii) il existe $\rho > 0$ tel que $a(t, x) = 1$ pour $|x| \geq \rho$,
 - (iii) il existe $T > 0$ tel que $a(t + T, x) = a(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
- (1.1.1)

Tout au long de ce chapitre nous allons considérer que $n \geq 3$ est impair.

On dit que les nombres $2 \leq p, q \leq +\infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$ sont **admissibles** pour l'équation des ondes libres $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ si, pour $f \in \mathcal{H}_\gamma(\mathbb{R}^n)$, la solution $u(t)$ de (0.1.3), avec $a = 1$ et $s = 0$, vérifie l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^\gamma} + \|\partial_t(u)(t)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} \leq C(p, q, \rho, T)(\|f_1\|_{\dot{H}^\gamma} + \|f_2\|_{\dot{H}^{\gamma-1}})$$

avec $C(p, q, \rho, T) > 0$ indépendant de t . Il est bien connu (voir [KT]) que (p, q, γ) sont admissibles sous les conditions suivantes

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \gamma, \quad \frac{1}{p} \leq \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \quad (1.1.2)$$

avec $(p, q, \gamma) \neq (2, \infty, 1)$ lorsque $n = 3$. Nous allons établir les estimations de Strichartz pour la solution du problème (0.1.3), en supposant la métrique $a(t, x)$ **non captive**. Plus précisément, nous supposons que l'hypothèse (H1) est satisfaite. La condition de non capture (H1) est nécessaire pour les estimations de Strichartz, mais comme nous l'avons vu dans la Section 0.4.1, même pour des perturbations non captives des phénomènes de résonances paramétriques peuvent entraîner la présence de solutions dont l'énergie locale croît de façon exponentielle. Afin d'exclure l'existence de telles solutions on doit imposer une seconde hypothèse. Notre seconde condition est l'hypothèse (H2).

En supposant (H1) et (H2), on prouve une décroissance exponentielle en temps de l'énergie locale semblable aux résultats établis, dans [BaP], [GP] et [Pet89], pour l'équation des ondes avec potentiel dépendant du temps et obstacle mobile.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1.1.1 *Soit $a(t, x)$ une métrique telle que (H1) et (H2) sont satisfaites. Supposons que $2 \leq p, q < +\infty$ vérifient les conditions*

$$p > 2, \quad \frac{1}{p} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right). \quad (1.1.3)$$

Alors, pour $u(t)$ solution de (0.1.3) avec $s = 0$ et $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ on a, pour tout $t > 0$, l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q, \rho, T) (\|f_1\|_{\dot{H}^1} + \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}). \quad (1.1.4)$$

1.2 Propriétés des opérateurs $\mathcal{U}(t, s)$ et $Z^b(t, s)$

L'objectif de cette section est d'établir quelques propriétés des opérateurs $\mathcal{U}(t, s)$ et $Z^b(t, s)$ que nous appliquerons par la suite. Dans un premier temps, nous allons présenter les différentes propriétés de $\mathcal{U}(t, s)$ en supposant uniquement que $a(t, x)$ vérifie (1.1.1). En particulier, nous précisons les contraintes qu'impose la dépendance en t et en x de la métrique $a(t, x)$ et nous verrons, à travers ces résultats, comment la périodicité permet en partie de compenser certaines de ces contraintes. Ensuite, nous nous intéresserons à l'opérateur $Z^b(t, s)$. Nous verrons notamment que, sous l'hypothèse (H1), l'opérateur $Z^b(t, s)$ du problème (0.1.3) vérifie certaines propriétés établies dans [Pet89] pour l'opérateur $Z^b(t, s)$ associé à l'équation des ondes avec potentiel périodique en temps.

1.2.1 Le propagateur $\mathcal{U}(t, s)$

L'ensemble des résultats de cette sous-section sont indépendants de la parité de la dimension de l'espace. Pour $a(t, x)$ indépendant de t , le propagateur associé au problème (0.1.3) est un groupe unitaire. Sous cette hypothèse, le propagateur $\mathcal{U}_0(t) = \mathcal{U}(t, 0)$, défini par

$$\mathcal{U}_0(t) : \dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n) \ni (f_0, f_1) = f \mapsto \mathcal{U}_0(t)f = (u, u_t)(t, x) \in \dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n)$$

avec u la solution du problème (0.1.3), pour $s = 0$, vérifie

$$\mathcal{U}_0(t)\mathcal{U}_0(s) = \mathcal{U}_0(t+s), \quad (\mathcal{U}_0(t))^* = \mathcal{U}_0(-t), \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad (1.2.1)$$

Les propriétés (1.2.1) facilitent la mise en place des estimations (1.1.4), elles permettent notamment de généraliser les estimations (1.1.4) au cas des problèmes non homogènes (voir [KT]). Il est facile de voir que quand $a(t, x)$ dépend de t et de x , $\mathcal{U}(t, s)$ ne vérifie pas (1.2.1). Néanmoins, en tant que propagateur d'un problème linéaire on peut facilement prouver que \mathcal{U} vérifie la loi de composition suivante

$$\mathcal{U}(s_1, s_2)\mathcal{U}(s_2, s_3) = \mathcal{U}(s_1, s_3), \quad s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}. \quad (1.2.2)$$

De plus, la périodicité en t de $a(t, x)$ implique la propriété suivante :

Proposition 1.2.1 *Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a*

$$\mathcal{U}(t + T, s + T) = \mathcal{U}(t, s). \quad (1.2.3)$$

Preuve. Soient $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et u, v définies par :

$$(u, u_t)(t) = \mathcal{U}(t, s)f, \quad (v, v_t)(t) = \mathcal{U}(t + T, s + T)f.$$

On sait que u, v sont \mathcal{C}^∞ en t et qu'elles vérifient

$$(u(t), v(t)) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La périodicité de $a(t, x)$ implique

$$\partial_t^2(v)(t, x) - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x v)(t, x) = \partial_t^2(v)(t + T, x) - \operatorname{div}_x(a(t + T, x)\nabla_x v)(t + T, x) = 0$$

et on a

$$(v, v_t)(s) = f.$$

Ainsi, l'unicité de la solution de (0.1.3) nous permet d'affirmer que $u = v$ et, pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\mathcal{U}(t + T, s + T)f = \mathcal{U}(t, s)f, \quad f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.4)$$

On déduit (1.2.3) de (1.2.4) en utilisant un argument de densité. \square

En appliquant (1.2.3), on obtient

$$\mathcal{U}((N + 1)T, NT) = \mathcal{U}(T, 0), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (1.2.5)$$

On déduit de (1.2.5) la loi de composition suivante

$$(\mathcal{U}(T, 0))^N = \mathcal{U}(NT, 0), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (1.2.6)$$

On pourra ainsi noter $\mathcal{U}(T)$ l'opérateur

$$\mathcal{U}(T) = \mathcal{U}(T, 0).$$

Pour aboutir aux estimations (1.1.4) il est nécessaire d'avoir une estimation uniforme de l'énergie. Or, la dépendance en t de la métrique $a(t, x)$ ne permet pas cela, on peut même prouver que sous une condition de capture (voir [CR1]) et même de non capture (voir [CPR] pour l'équation des ondes avec potentiel périodique en temps) l'énergie de l'équation des ondes avec des coefficients périodiques en t peut croître de façon exponentielle. On peut néanmoins estimer l'énergie par un terme qui croît de façon exponentielle par rapport à t . Plus précisément, on obtient l'estimation suivante :

Proposition 1.2.2 *Supposons que $n \geq 2$ et que $a(t, x)$ vérifie (1.1.1). Alors, on a*

$$\|\mathcal{U}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq Ce^{A|t-s|} \quad (1.2.7)$$

avec $A = \left\| \frac{a_t}{a} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{1+n})}$ et $C = \frac{C_0}{c_0}$, où C_0 et c_0 sont les constantes de l'inégalité (1.1.1).

Preuve. Soient $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $t, s \in \mathbb{R}$ et u solution de (0.1.3). Notons $E(u)(t)$ l'énergie au temps t définie par

$$E(u)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} [|u_t(t, x)|^2 + a(t, x)|\nabla_x u|^2(t, x)] dx.$$

On montre facilement que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ et que, pour tout $t_1 \in \mathbb{R}$, $u(t_1, \cdot) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, $E(u)(t)$ est dérivable par rapport à t et on obtient

$$\frac{dE(u)}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{d^2 u}{dt^2} \overline{u_t} + u_t \frac{d^2 \overline{u}}{dt^2} + a_t |\nabla u|^2 + \nabla u_t \cdot \overline{a \nabla u} + a \nabla u \cdot \overline{\nabla u_t} \right] dx.$$

Comme u est la solution de (0.1.3), cette formule devient

$$\frac{dE(u)}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\operatorname{div}_x(a \nabla u) \overline{u_t} + u_t \operatorname{div}_x(a \nabla_x u) + a_t |\nabla u|^2 + \nabla u_t \cdot \overline{a \nabla u} + a \nabla u \cdot \overline{\nabla u_t} \right] dx.$$

En intégrant par parties, cette égalité devient

$$\frac{dE(u)}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} a_t(t, x) |\nabla u|^2(t, x) dx.$$

D'après (1.1.1), on a

$$A = \left\| \frac{a_t}{a} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{1+n})} < \infty$$

et on obtient

$$\frac{dE(u)}{dt}(t) \leq A \int_{\mathbb{R}^n} a(t, x) |\nabla u|^2(t, x) dx \leq AE(u)(t).$$

En intégrant cette inégalité par rapport à t on trouve

$$E(u)(t) \leq \exp(A|t - s|) E(u)(s). \quad (1.2.8)$$

De plus, d'après (1.1.1) on obtient

$$c_0 \|(u, u_t)(t_1)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq E(u)(t_1) \leq C_0 \|(u, u_t)(t_1)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad t_1 \in \mathbb{R} \quad (1.2.9)$$

avec c_0, C_0 les constantes de l'inégalité (1.1.1). En combinant (1.2.8) et (1.2.9), on obtient

$$\|(u, u_t)(t)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_0}{c_0} \exp(A|t - s|) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

En appliquant un argument de densité, on déduit (1.2.7). \square

Remarque 1.2.1 Notons qu'en appliquant l'estimation (1.2.7), pour tout $T_1 > 0$, on obtient l'estimation uniforme

$$\|\mathcal{U}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(T_1), \quad s, t \in [-T_1, T_1]$$

avec $C(T_1)$ ne dépendant que de T_1 .

1.2.2 Les opérateurs $Z^b(t, s)$

Dans cette sous-section nous supposons que $n \geq 3$ est impair. L'objectif de cette sous-section sera d'établir quelques propriétés fondamentales de $Z^b(t, s)$, pour $b \geq \rho$. On peut souligner que la nature du spectre de $Z^b(T, 0)$ est fortement liée au comportement asymptotique de la solution de (0.1.3) quand $t \rightarrow \infty$, lorsque f est à support compact. Initialement introduit par Lax et Philips dans [LP], pour l'équation des ondes avec potentiel périodique en temps l'opérateur $Z^b(t, s)$ et ses propriétés ont fait l'objet d'une longue étude dans [Pet89] (voir aussi [CS]). Nous montrerons qu'on peut généraliser au problème (0.1.3) certaines de ces propriétés. Pour cela, rappelons les résultats suivants établis dans le Chapitre V et le Chapitre II de [Pet89].

Définition 1.2.1 *Les espaces vectoriels \mathcal{D}^+ et \mathcal{D}^- sont deux sous espaces vectoriels de $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ définis par :*

$f \in \mathcal{D}^+$ (respectivement $f \in \mathcal{D}^-$) si $U_0(t)f(x) = 0$ pour $|x| < t$ (respectivement $|x| < -t$)

Définition 1.2.2 *Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On définit la transformée de Radon de h par :*

$$R(h)(s, \omega) = \int_{\langle x, \omega \rangle = s} f(x) dx, \quad (s, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

Théorème 1.2.1 *Supposons que $n \geq 3$ est impair. Alors, l'application \mathcal{R}_n défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par*

$$\mathcal{R}_n(f_1, f_2)(s, \omega) = d_n D_s^{\frac{n+1}{2}}(R(f_1))(s, \omega) - d_n D_s^{\frac{n-1}{2}}(R(f_2))(s, \omega),$$

où $d_n = 2^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}$, se prolonge en une isométrie de $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$. De plus, pour tout $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathcal{R}_n(U_0(t)f)(s, \omega) = \mathcal{R}_n(f)(s - t, \omega), \quad \omega \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (1.2.10)$$

Remarque 1.2.2 *Notons que la propriété (1.2.10), qui généralise le principe de Huygens, n'est vraie qu'en dimension impaire. Sachant que certaines propriétés de $Z^b(t, s)$ dépendent de (1.2.10) (voir la preuve de la Proposition 1.2.5, nous supposons que n est impair pour étudier $Z^b(t, s)$.*

Théorème 1.2.2 *Supposons que $n \geq 3$ est impair. Alors, $f \in \mathcal{D}^+$ si et seulement si*

$$\text{supp}(\mathcal{R}_n(f)) \subset [0, +\infty[\times \mathbb{S}^{n-1}$$

et $f \in \mathcal{D}^-$ si et seulement si

$$\text{supp}(\mathcal{R}_n(f)) \subset]-\infty, 0] \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

Définition 1.2.3 *On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}$ le produit scalaire sur $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ défini par*

$$\langle (h_1, h_2), (h_3, h_4) \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla_x h_1 \cdot \overline{\nabla_x h_3} + h_2 \overline{h_4}] dx, \quad (h_1, h_2), (h_3, h_4) \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n).$$

Notons que les espaces D_b^\pm , introduits dans la Section 1.1, vérifient les identités

$$D_b^\pm = U_0(\pm b)(\mathcal{D}^\pm).$$

En combinant le Théorème 1.2.1 et le Théorème 1.2.2, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 1.2.3 *Soient $n \geq 3$ impair et $b \geq \rho$. Alors, $f \in D_b^+$ si et seulement si*

$$\text{supp}(\mathcal{R}_n(f)) \subset [b, +\infty[\times \mathbb{S}^{n-1}$$

et $f \in D_b^-$ si et seulement si

$$\text{supp}(\mathcal{R}_n(f)) \subset]-\infty, -b] \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

En appliquant ces résultats, dont on trouve la preuve dans le Chapitre II de [Pet89], on obtient immédiatement la propriété suivante :

Proposition 1.2.4 *Supposons que $n \geq 3$ est impair. Alors, pour tout $b \geq \rho$, on a*

$$D_b^\pm \subset (D_b^\mp)^\perp, \quad (1.2.11)$$

où $(D_b^\mp)^\perp$ est le complémentaire orthogonal de D_b^\mp pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)}$.

D'après (1.2.11), l'opérateur Z associé au problème (0.1.3) vérifie les lois de composition et la propriété de périodicité indiquées ci-dessous.

Proposition 1.2.5 *Soient $b > \rho$ et $s \leq t$. Alors, on trouve que*

- (i) $\mathcal{U}(t, s)f = U_0(t - s)f, \quad f \in D_b^+.$
- (ii) $\mathcal{U}(s, t)f = U_0(s - t)f, \quad f \in D_b^-.$
- (iii) $\mathcal{U}(t, s)((D_b^-)^\perp) \subset (D_b^-)^\perp.$
- (iv) *Pour tous $s_1, t_1, s_2 \in \mathbb{R}$ avec $s_1 \geq t_1 \geq s_2$, on a*

$$Z^b(s_1, t_1)Z^b(t_1, s_2) = Z^b(s_1, s_2).$$

- (v) $Z^b(t + T, s + T) = Z^b(t, s), \quad t \geq s.$

Preuve. Fixons $f \in D_b^-$ et commençons par prouver (i). Par hypothèse, on a

$$(U_0(t - s)f)|_{\{|x| < b\}} = 0. \quad (1.2.12)$$

De plus, comme la métrique vaut uniformément 1 hors du compact $|x| \leq \rho$, on obtient

$$\partial_t^2 - \text{div}_x(a(t, x)\nabla_x) = \partial_t^2 - \Delta_x, \quad \text{pour } |x| \geq b > \rho. \quad (1.2.13)$$

On en déduit que

$$\partial_t^2((U_0(t - s)f)_1) - \text{div}_x(a(t, x)\nabla_x(U_0(t - s)f)_1) = (\partial_t^2 - \Delta_x)(U_0(t - s)f)_1 = 0$$

avec, pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2$, $(h)_1 = h_1$. Par conséquent, (1.2.12), (1.2.13) et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (0.1.3) impliquent (i). On prouve (ii) en

appliquant les mêmes arguments que pour (i). Pour (iii), fixons $g \in D_b^-$ et $f \in (D_b^-)^\perp$. En appliquant (1.2.13), on obtient

$$\mathbb{1}_{\{|x|>b\}}\mathcal{U}(t, s)f = \mathbb{1}_{\{|x|>b\}}U_0(t-s)f. \quad (1.2.14)$$

La propagation en temps fini entraîne

$$\mathbb{1}_{\{|x|>b+(t-s)\}}(U_0(s-t)(\mathbb{1}_{\{|x|\leq b\}}\mathcal{U}(t, s)f)) = 0$$

et

$$U_0(s-t)(\mathbb{1}_{\{|x|>b\}}\mathcal{U}(t, s)f) = \mathbb{1}_{\{|x|>b+(t-s)\}}(U_0(s-t)(\mathbb{1}_{\{|x|>b\}}\mathcal{U}(t, s)f)).$$

Ces deux identités impliquent la formule d'inversion suivante

$$U_0(s-t)(\mathcal{U}(t, s)f) = f, \quad \text{pour } |x| > b + (t-s). \quad (1.2.15)$$

De plus, (ii) et la définition de D_b^- entraînent

$$\mathcal{U}(s, t)g(x) = U_0(s-t)g(x) = 0, \quad \text{pour } |x| \leq b + t - s. \quad (1.2.16)$$

En appliquant (1.2.15) et (1.2.16), on obtient

$$\langle f, \mathcal{U}(s, t)g \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} = \langle U_0(s-t)\mathcal{U}(t, s)f, \mathcal{U}(s, t)g \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}.$$

En appliquant (ii), cela donne

$$\langle f, \mathcal{U}(s, t)g \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} = \langle U_0(s-t)\mathcal{U}(t, s)f, U_0(s-t)g \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}$$

et comme $U_0(s-t)$ est une isométrie sur $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ on obtient

$$\langle \mathcal{U}(t, s)f, g \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \mathcal{U}(s, t)g \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} = \langle f, U_0(s-t)g \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Cependant, $U_0(s-t)g \in D_b^-$ et le dernier terme de droite des égalités précédentes s'annule et cela prouve (iii). Pour la propriété (iv), fixons $f \in (D_b^-)^\perp$. D'après (1.2.11) on a

$$(\text{Id} - P_b^+)f \in D_b^+ \subset (D_b^-)^\perp$$

et

$$P_b^+f = f - (\text{Id} - P_b^+)f.$$

On en déduit

$$P_b^+f \in (D_b^-)^\perp \quad \text{et} \quad P_b^-P_b^+f = P_b^+f, \quad f \in (D_b^-)^\perp.$$

Par conséquent, la propriété (iii) entraîne

$$P_b^-P_b^+\mathcal{U}(t_1, s_2)P_b^- = P_b^+\mathcal{U}(t_1, s_2)P_b^-. \quad (1.2.17)$$

En appliquant (ii), il est facile de voir que

$$\mathcal{U}(s_1, t_1)(\text{Id}_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} - P_b^+)f = U_0(s_1 - t_1)(\text{Id}_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} - P_b^+)f \in D_b^+, \quad f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$$

et cela implique

$$P_b^+\mathcal{U}(s_1, t_1)P_b^+ = P_b^+\mathcal{U}(s_1, t_1). \quad (1.2.18)$$

On déduit (iv) de (1.2.17) et (1.2.18). La propriété (v) est une conséquence immédiate de (1.2.3). \square

Remarque 1.2.3 *Notons qu'en appliquant les propriétés (iv) et (v) de la Proposition 1.2.5 on obtient l'identité suivante*

$$(Z^b(T, 0))^N = Z^b(NT, 0), \quad N \in \mathbb{N} \quad (1.2.19)$$

Pour l'équation des ondes avec potentiel périodique en temps, il a été établi que, pour $t - s$ assez grand, l'opérateur $Z^b(t, s)$ est compact. Nous allons prouver qu'il en est de même pour l'opérateur $Z^b(t, s)$ associé au problème (0.1.3), sous l'hypothèse (H1). L'hypothèse (H1) et les résultats de propagation des singularités impliquent (voir [MS]) le résultat suivant :

Proposition 1.2.6 *Supposons que l'hypothèse (H1) est satisfaite. Alors, pour tout $R > 0$, il existe $T_1(R) > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\text{supp}(f) \subset B_R$, on a*

$$(t, x) \mapsto (\mathcal{U}(t, s)f)(x) \in \mathcal{C}^\infty([T_1(R) + s, +\infty[\times B_R), \quad (1.2.20)$$

où, pour tout $r > 0$, $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$.

Preuve. Soit $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{supp} f \subset B_R$ et soient $t_1, s_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$t_1 - s_1 > T(R + \rho, R)$$

avec $T(R + \rho, R)$ la constante définie dans l'hypothèse (H1). Notons $h(t, x)$ la fonction définie par

$$h(t, x) = (\mathcal{U}(t, s)f)(x).$$

Supposons qu'il existe $x_1 \in B_R$, tel que $h(t, x)$ admet une singularité en (t_1, x_1) . Considérons D l'ensemble des bicaractéristiques nulles $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$ de $\tau^2 - a(t, x)|\xi|^2$ vérifiant $t(0) = t_1$, $x(0) = x_1$, $\tau(0) = \pm\sqrt{a(t_1, x_1)}|\xi_1|$ et $\xi(0) = \xi_1$, où $\xi_1 \neq 0$. On verra dans la Section 1.7 que l'on peut paramétrer les bicaractéristiques par rapport à t . Nous noterons $(t, x(t), \tau(t), \xi(t))$ les bicaractéristiques paramétrées par rapport à t . D'après les propriétés de propagation des singularités établis par Melrose et Sjöstrand dans [MS], les singularités de la solution de (0.1.3) sont portées par les bicaractéristiques. Par conséquent, il existe une bicaractéristique $(t, x(t), \tau(t), \xi(t)) \in D$ telle que $h(t, x)$ a une singularité en $(s_1, x(s_1))$. Cependant, comme $t_1 - s_1 > T(R + \rho, R)$, l'hypothèse (H1) implique

$$|x(s_1)| > R + \rho.$$

De plus, comme $f(x) = 0$, pour $|x| > R$, d'après la propriété de propagation en temps fini, il existe $\delta > 0$ tel que

$$h(t, x) = 0, \quad \text{pour } \|(t, x) - (s_1, x(s_1))\|_{\mathbb{R}^{1+n}} < \delta.$$

Ainsi, nous aboutissons à une contradiction et cela prouve (1.2.20), avec $T_1(R) = T(R + \rho, R)$. □

Nous allons maintenant montrer que la propriété (1.2.20) implique que l'opérateur $Z^b(t, 0)$ est compact, pour $t > 0$ suffisamment grand.

Proposition 1.2.7 *Supposons que $n \geq 3$ est impair et que l'hypothèse (H1) est satisfaite. Soit $b \geq \rho$. Alors, pour tout $t \geq 4b + T_1(4b)$, l'opérateur $Z^b(t, 0)$ est compact dans $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Notons $M(t, s) = \mathcal{U}(t, s) - U_0(t - s)$ et écrivons

$$\begin{aligned} Z^b(t, 0) &= P_+^b M(t, t - 2b) \mathcal{U}(t - 2b, 2b) M(2b, 0) P_-^b \\ &\quad + P_+^b M(t, t - 2b) \mathcal{U}(t - 2b, 2b) U_0(2b) P_-^b + P_+^b U_0(2b) \mathcal{U}(t - 2b, 0) P_-^b. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Choisissons $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq 4b)$ telle que $\chi = 1$, pour $|x| \leq \frac{7}{2}b$. Soit v la fonction définie par $(v(t), v_t(t)) = \mathcal{U}(t, s)(1 - \chi)f$. Comme $b \geq \rho$, la propagation en temps fini implique que, pour $s \leq t \leq 2b + s$ et $|x| \leq \frac{3}{2}b$, on a $v(t, x) = 0$. Alors, on trouve

$$\Delta_x = \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x), \quad \text{pour } |x| > \rho \quad (1.2.22)$$

et on en déduit que v est la solution pour $s \leq t \leq 2b + s$ de

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, \\ (v, v_t)(s, x) = (1 - \psi(x))f(x). \end{cases}$$

Cela implique que

$$M(t, t - 2b)(1 - \chi) = 0. \quad (1.2.23)$$

Notons maintenant u et w les fonctions définies par

$$(u(t), u_t(t)) = \mathcal{U}(t, s)f \quad \text{et} \quad (w(t), w_t(t)) = U_0(t - s)f.$$

En appliquant (1.2.22), on voit que $(1 - \chi)u$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2((1 - \chi)u) - \Delta_x(1 - \chi)u = [\Delta_x, \chi]u, \\ ((1 - \chi)u, \partial_t((1 - \chi)u))(s, x) = (1 - \chi(x))f(x) \end{cases}$$

et $(1 - \chi)w$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2((1 - \chi)w) - \Delta_x(1 - \chi)w = [\Delta_x, \chi]w, \\ ((1 - \chi)w, \partial_t((1 - \chi)w))(s, x) = (1 - \chi(x))f(x). \end{cases}$$

On en déduit que

$$(1 - \chi)M(t, t - 2b) = 0. \quad (1.2.24)$$

En combinant (1.2.23) et (1.2.24), on obtient

$$M(s, s - 2b) = \chi M(s, s - 2b)\chi, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.2.25)$$

En appliquant (1.2.25), la formule (1.2.21) devient

$$\begin{aligned} Z^b(t, 0) &= P_+^b M(t, t - 2b) \chi \mathcal{U}(t - 2b, 2b) \chi M(2b, 0) P_-^b \\ &\quad + P_+^b M(t, t - 2b) \mathcal{U}(t - 2b, 2b) U_0(2b) P_-^b + P_+^b U_0(2b) \mathcal{U}(t - 2b, 0) P_-^b. \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

En utilisant (1.2.10), pour tout $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ on trouve

$$R_n(U_0(2b)P_b^- f)(s, \omega) = R_n(P_b^- f)(s - 2b, \omega), \quad (s, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

D'après la Proposition 1.2.3, comme $P_b^- f \in (D_b^-)^\perp$, on a

$$\text{supp} \mathcal{R}_n (P_b^- f) \subset [-b, +\infty[\times \mathbb{S}^{n-1}.$$

Par conséquent,

$$\text{supp} \mathcal{R}_n (U_0(2b)P_b^- f) \subset [b, +\infty[\times \mathbb{S}^{n-1},$$

dont on déduit

$$U_0(2b)P_b^- f \in D_b^+.$$

En appliquant deux fois la propriété (i) de la Proposition 1.2.5, on obtient

$$M(t, t-2b)\mathcal{U}(t-2b, 2b)U_0(2b)P_b^- = M(t, t-2b)U_0(t-2b)P_b^- = (U_0(t) - U_0(t))P_b^- = 0. \quad (1.2.27)$$

De même, avec l'aide de la propriété (iii) de la Proposition 1.2.5, on trouve

$$\mathcal{U}(t-2b, 0)P_-^b f \in (D_b^-)^\perp, \quad f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$$

et cela implique

$$U_0(2b)\mathcal{U}(t-2b, 0)P_-^b f \in D_b^+, \quad f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n).$$

En combinant ce dernier résultat avec (1.2.27), on voit que les deux derniers termes de droite de l'égalité (1.2.26) s'annulent et on obtient

$$Z^b(t, 0) = P_-^b M(t, t-2b)\chi\mathcal{U}(t-2b, 2b)\chi M(2b, 0)P_-^b.$$

Comme $t-4b > T_1(4b)$, (1.2.20) implique

$$\chi\mathcal{U}(t-2b, 2b)\chi h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad h \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n).$$

Le théorème du graphe fermé et le théorème de Rellich impliquent que $\chi\mathcal{U}(t-2b, 2b)\chi$ est un opérateur compact dans $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ et cela achève la preuve. \square

Remarque 1.2.4 *En combinant (1.2.19) et le résultat de la Proposition 1.2.7, on trouve que, pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, l'opérateur $Z^b(T, 0)^N$ est un opérateur compact. Cela implique que l'opérateur $(Z^b(T, 0) - z)^{-1}$, initialement défini, pour $|z| \geq D$ avec D assez grand, se prolonge de façon méromorphe sur \mathbb{C}^* (voir [Pet89] pour plus de détails).*

Comme pour l'équation des ondes avec potentiel périodique en temps (voir [Pet89], Chapitre V), on peut prouver que, pour une métrique non captive, on a

$$\sigma(Z^b(T, 0)) = \sigma(Z^\rho(T, 0)), \quad b \geq \rho. \quad (1.2.28)$$

Nous omettrons la preuve de ce résultat qui est assez longue.

1.3 Intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale

Le but de cette section est de prouver que, pour $n \geq 3$ impair, les hypothèses (H1) et (H2) impliquent l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale. Plus précisément, nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Supposons que $n \geq 3$ est impair et que les hypothèses (H1), (H2) sont satisfaites. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int_0^\infty \|\varphi \mathcal{U}(t, 0) f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(T, \varphi, n, \rho) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (1.3.1)$$

Dans [Bur03], Burq a démontré (1.3.1) pour le problème (0.1.3), lorsque $a(t, x)$ ne dépend pas de t , en négligeant le comportement asymptotique quand $t \rightarrow \infty$ des solutions ayant une donnée initiale à support compact. Lorsque $a(t, x)$ dépend à la fois de t et de x , comme pour l'équation des ondes avec potentiel périodique en temps (voir [Pet06]), il n'est pas évident que l'estimation (1.3.1) soit indépendante de la décroissance de l'énergie locale. Par conséquent, en appliquant les résultats de la Section 1.2, nous allons prouver que les hypothèses (H1) et (H2) impliquent une décroissance exponentielle en t de l'énergie locale qui s'écrit

$$\|\psi_1 \mathcal{U}(t, s) \psi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C e^{-\delta(t-s)} \quad (1.3.2)$$

avec $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ensuite nous appliquerons (1.3.2) afin d'obtenir (1.3.1).

1.3.1 Décroissance exponentielle de l'énergie locale

Dans toute cette sous-section nous supposons que (H1) est satisfaite. L'objectif de cette sous-section est de prouver (1.3.2), pour les dimensions $n \geq 3$ impaires, sous l'hypothèse (H2). Pour cela nous allons commencer par estimer $Z^b(t, s)$ en utilisant la propriété (1.2.19) et l'hypothèse (H2).

Proposition 1.3.1 *Supposons que $n \geq 3$ est impair. Alors, pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b - \varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon < b$, on a*

$$\chi P_b^\pm = P_b^\pm \chi = \chi. \quad (1.3.3)$$

Preuve. Soit $f \in D_b^\pm$. D'après la Proposition 1.2.3, on a

$$\text{supp}(\mathcal{R}_n(f)) \subset \{(s, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} : |s| \geq b\}.$$

On montre facilement que

$$\text{supp}(\mathcal{R}_n(\chi)) \subset \{(s, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} : |s| \leq b - \varepsilon\}.$$

Comme la transformation \mathcal{R}_n est une isométrie de $\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$, cela implique que $\chi \in (D_b^\pm)^\perp$. Par conséquent, on obtient

$$P_b^\pm \chi = \chi.$$

De plus, comme $D_b^\pm = U_0(\pm b)(\mathcal{D}^\pm)$, on voit facilement que, pour tout $g \in D_b^\pm$, on a $g(x) = 0$, pour $|x| \leq b$. Cela entraîne

$$\chi(\text{Id} - P_b^\pm) = 0$$

et on en déduit (1.3.3). \square

En appliquant (1.3.3) et (H2), on montre le résultat suivant :

Proposition 1.3.2 *Supposons que $n \geq 3$ est impair et que les hypothèses (H1), (H2) sont satisfaites. Alors, pour tout $t - s \geq 0$ et pour tout $b \geq \rho$, il existe $C_b, \delta_b > 0$ indépendants de t et s tels que*

$$\|Z^b(t, s)\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C_b e^{-\delta_b(t-s)}. \quad (1.3.4)$$

Preuve. Soient $b \geq \rho$ et $r(Z^b(T, 0))$ le rayon spectral de $Z^b(T, 0)$. L'hypothèse (H2) et (1.2.28) impliquent que $r(Z^b(T, 0)) < 1$. On en déduit l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|Z^b(T, 0)^m\|^{\frac{1}{m}} < 1 - \delta. \quad (1.3.5)$$

D'après l'identité (1.2.19) et la formule (1.3.5), il existe d'un entier $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $m \geq m_0$, on a

$$\|Z^b(mT, 0)\| \leq \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^m = e^{-\delta_b m T} \quad (1.3.6)$$

avec $\delta_b > 0$ indépendants de m . Supposons maintenant que $t - s \geq (m_0 + 2)T$ et prenons $k, l \in \mathbb{N}$ tels que

$$kT \leq t \leq (k+1)T, \quad lT \leq s \leq (l+1)T.$$

Alors, la propriété (iv) de la Proposition 1.2.5 implique

$$\|Z^b(t, s)\| = \|Z^b(t, kT)Z^b(kT, (l+1)T)Z^b((l+1)T, s)\| \quad (1.3.7)$$

et $(k - (l+1))T \geq m_0 T$. En appliquant à la formule (1.3.7) les estimations (1.3.6) et (1.2.7), on obtient

$$\|Z^b(t, s)\| \leq C'_b e^{-\delta_b(k-(l+1))T} \leq C'_b e^{-\delta_b(t-s)} e^{2\delta_b T}. \quad (1.3.8)$$

Pour $t - s \leq (m_0 + 2)T$, en tenant compte de (1.2.7), on trouve

$$\|Z^b(t, s)\| \leq C''_b e^{\alpha(m_0+2)T} \leq C''_b e^{(\alpha+\delta_b)(m_0+2)T} e^{-\delta_b(t-s)}. \quad (1.3.9)$$

En combinant les estimations (1.3.8) et (1.3.9), on déduit (1.3.4). \square

Finalement, on obtient facilement (1.3.2) de (1.3.4) en appliquant (1.3.3).

Remarque 1.3.1 *On montre en particulier que, pour $n \geq 3$ impair, l'estimation (1.3.4) implique (1.3.2) avec δ indépendant du support de ψ_1 et ψ_2 .*

1.3.2 Preuve du Théorème 1.3.1

Avant de prouver l'estimation (1.3.1) on rappelle un résultat établi par Smith et Sogge dans [SS] concernant l'intégrabilité L^2 de l'énergie locale, pour les solutions de l'équation des ondes libres, qui est définie par l'estimation suivante :

Théorème 1.3.2 ([SS], Lemme 2.2) *Soit $\gamma \leq \frac{n-1}{2}$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| < \rho + 1)$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}} \|\varphi e^{\pm it\Lambda} h\|_{H^\gamma(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(\varphi, n, \gamma) \|h\|_{\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^n)}^2, \quad h \in \dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^n). \quad (1.3.10)$$

Dans [SS] les auteurs considère seulement le cas des dimension impaires $n \geq 3$, la même preuve reste valable pour les dimensions paires. On déduit facilement de (1.3.10) l'estimation suivante :

Corollaire 1.3.1 *Soit $\gamma \leq \frac{n-1}{2}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}} \|\varphi U_0(t)f\|_{\dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(\varphi, n, \gamma) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n)}^2, \quad f \in \dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n). \quad (1.3.11)$$

Nous allons prouver (1.3.1), en combinant l'estimation (1.3.2) et l'estimation (1.3.11).

Preuve du Théorème 1.3.1. Posons $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in C_0^\infty(|x| < \rho + 1)$ telle que $\chi = 1$ pour $|x| \leq \rho + \frac{1}{2}$ et $0 \leq \chi \leq 1$. Notons que

$$\varphi \mathcal{U}(t, 0)f = \varphi \mathcal{U}(t, 0)\chi f + \varphi \mathcal{U}(t, 0)(1 - \chi)f. \quad (1.3.12)$$

L'estimation (1.3.2) implique

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \|\varphi \mathcal{U}(t, 0)\chi f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt &\leq C^2(\varphi, n, \rho) \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\delta t} dt \right) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq C_1(\varphi, n, \rho) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Ainsi, il ne nous reste plus qu'à montrer

$$\|\varphi \mathcal{U}(t, 0)(1 - \chi)f\|_{L^2(\mathbb{R}_t^+, \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\varphi, n, \rho) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.3.14)$$

Soient u, u_0, u_1, u_2 définies par

$$(u_0, \partial_t(u_0))(t) = U_0(t)f, \quad (u, \partial_t(u))(t) = \mathcal{U}(t, 0)(1 - \chi)f, \quad u_1 = (1 - \chi)u_0 \quad \text{et} \quad u_2 = u - u_1.$$

D'après (1.2.13), on a

$$\partial_t^2(u_1) - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x(u_1)) = (\partial_t^2 - \Delta_x)u_1.$$

Cela entraîne que u_1 est une solution de

$$(\partial_t^2 - \Delta_x)u_1 = (1 - \chi)(\partial_t^2 - \Delta_x)(u_0) + [\Delta_x, \chi](u_0) = [\Delta_x, \chi](u_0).$$

Cette formule implique que u_2 est la solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t^2(u_2) - \operatorname{div}_x(a\nabla_x u_2) = -[\Delta_x, \chi]u_0, \\ (u_2, \partial_t(u_2))(0, x) = (0, 0). \end{cases}$$

Par conséquent, en appliquant la formule de Duhamel, on peut écrire

$$(u_2, \partial_t(u_2))(t) = - \int_0^t \mathcal{U}(t, s)(0, [\Delta_x, \chi]u_0(s)) ds.$$

Comme $\operatorname{supp}_x(0, [\Delta_x, \chi]u_0(s)) \subset \operatorname{supp}\chi \subset \{|x| < \rho + 1\}$, en appliquant l'estimation (1.3.2), on trouve

$$\|\varphi \mathcal{U}(t, s)(0, [\Delta_x, \chi]u_0(s))\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq C(\rho, n) e^{-\delta(t-s)} \|(0, [\Delta_x, \chi]u_0(s))\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.3.15)$$

On choisit $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| < \rho + 1)$ une fonction de troncature égale à 1 sur $\text{supp}\chi$. On voit facilement que l'inégalité (1.3.15) devient

$$\|\varphi(u_2, \partial_t(u_2))(t)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq C(\rho, n, \varphi) \int_0^t e^{-\delta(t-s)} \|\beta U_0(s)f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} ds. \quad (1.3.16)$$

En écrivant le terme de droite de l'inégalité (1.3.16) comme un produit de convolution, on obtient

$$\|\varphi(u_2, \partial_t(u_2))(t)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq C(\rho, n, \varphi) (e^{-\delta t} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}) * \left(\|\beta U_0(t)f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \mathbf{1}_{[0, +\infty[} \right).$$

Une application de l'inégalité de Young entraîne

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} \|\varphi(u_2, \partial_t(u_2))(t)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\rho, n, \varphi) \left(\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}^+} \|\beta U_0(t)f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.17)$$

Comme $1 \leq \frac{n-1}{2}$, d'après le Corollaire 1 l'estimation (1.3.17) s'écrit

$$\|\varphi(u_2, \partial_t(u_2))(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\varphi, \rho, n) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.3.18)$$

Ensuite, en appliquant (1.3.11), on montre facilement que

$$\|\varphi(u_1, \partial_t(u_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\varphi, \rho, n) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}$$

et cela implique

$$\int_0^{+\infty} \|\varphi \mathcal{U}(t, 0)(1 - \chi)f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C_3(\varphi, n, \rho) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (1.3.19)$$

En appliquant les estimations (1.3.13) et (1.3.19) à la représentation (1.3.12), on obtient (1.3.2). \square

Pour l'ensemble des résultats de la Section 1.2 et de la Section 1.3, nous avons été inspiré par l'analyse de l'équation des ondes avec potentiel dépendant de façon périodique de t (0.1.2) (voir [Pet06]). L'identité (0.4.6), est l'argument principal qui permet d'aboutir aux estimations (1.1.4), pour la solution de (0.2.3) à partir de l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale. Comme nous l'avons déjà précisé dans la Section 0.4.4, la méthode employée pour obtenir les estimations (1.1.4) pour les solutions de (0.1.2) ne fonctionne pas pour les solutions de (0.1.3). Pour obtenir (1.1.4) à partir de (1.3.1), nous allons utiliser une autre idée. Tout d'abord, fixons $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1)$ telle que $\chi = 1$, pour $|x| \leq \rho + \frac{1}{2}$ et $0 \leq \chi \leq 1$, et considérons u solution de (0.1.3), pour $s = 0$. Décomposons u de la façon suivante

$$u = \chi u + (1 - \chi)u$$

et procédons en deux étapes qui feront l'objet des deux prochaines sections. La première étape consiste à appliquer les estimations de Strichartz pour les solutions de l'équation des ondes libres et (1.3.1), afin de prouver (1.1.4) pour $(1 - \chi)u$. La deuxième étape consiste à établir des estimations de Strichartz locales pour la solution de (0.1.3) et à appliquer (1.3.1) pour en déduire que χu vérifie (1.1.4).

1.4 Estimations de Strichartz pour $(1 - \chi)u$

Dans cette section on se propose d'appliquer les estimations de Strichartz pour l'équation des ondes libres ainsi que (1.3.1) afin d'établir les estimations suivantes :

Proposition 1.4.1 *Supposons que $n \geq 3$ et que les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites. Soient $2 \leq p, q < \infty$ vérifiant (1.1.2) avec $p > 2$. Alors, pour tout $t > 0$, on a*

$$\|(1 - \chi)u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^n))} + \|(1 - \chi)u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(1 - \chi)(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.4.1)$$

avec $C > 0$ indépendant de t .

Afin de prouver les estimations (1.4.1), nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.4.1 ([HTW], Lemme 8.1) *Soient X et Y deux espaces de Banach. Pour $s, t \in \mathbb{R}^+$ considérons $K(s, t) : X \rightarrow Y$ l'opérateur à noyau défini sur X à valeurs dans Y . Supposons que, pour $1 \leq r < l \leq +\infty$ et pour tous $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $g \in L^r(\mathbb{R}^+, X)$, on a*

$$\left\| \int_0^{t_0} K(s, t)g(s)ds \right\|_{L^l([t_0, +\infty[, Y)} \leq A \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^+, X)},$$

où $A > 0$ est indépendant de t_0 . Alors, on obtient

$$\left\| \int_0^t K(s, t)g(s)ds \right\|_{L^l(\mathbb{R}^+, Y)} \leq AC_{r,l} \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^+, X)}$$

avec $C_{r,l} > 0$ dépendant uniquement de r, l .

On renvoie à [HTW] pour la preuve du Lemme 1.4.1 qu'on appelle le lemme de Christ-Kiselev (voir aussi dans [CK] la première version de ce résultat). Ensuite, considérons

$$K(s, t) = \frac{\sin((t-s)\Lambda)}{\Lambda} \psi, \quad X = L^2(\mathbb{R}^n), \quad Y = L^q(\mathbb{R}^n), \quad l = p \quad \text{et} \quad r = 2.$$

En appliquant le lemme de Christ-Kiselev et les estimations de Strichartz pour les solutions de l'équation des ondes libres (voir [KT]), on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.4.2 *Soit p et q vérifiant (1.1.2) avec $p > 2$ et $\gamma = 1$. Alors, pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\left\| \int_0^t \frac{\sin((t-s)\Lambda)}{\Lambda} \psi h(s, \cdot) ds \right\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C(p, q, n, \psi) \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))}$$

et

$$\left\| \int_0^t \frac{\sin((t-s)\Lambda)}{\Lambda} \psi h(s, \cdot) ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q, n, \psi) \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))}.$$

On renvoie à [Pet06] pour la preuve du Lemme 1.4.2.

Preuve de la Proposition 1.4.1. En appliquant (1.2.22), on remarque que $(1 - \chi)u$ vérifie

$$(\partial_t^2 - \Delta_x)((1 - \chi)u) = (1 - \chi)(\partial_t^2 u - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x u)) + [\Delta_x, \chi]u = [\Delta_x, \chi]u \quad (1.4.2)$$

La formule (1.4.2) et l'estimation (1.3.1) impliquent que $(1 - \chi)u$ est solution de l'équation des ondes libres avec terme source $[\Delta_x, \chi]u \in L_t^2(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^n))$ et condition initiale $((1 - \chi)u, (1 - \chi)u_t)(0) = ((1 - \chi)f_1, (1 - \chi)f_2)$. Par conséquent, $(1 - \chi)u$ s'écrit

$$(1 - \chi)u(t) = \cos(t\Lambda)(1 - \chi)f_1 + \frac{\sin(t\Lambda)}{\Lambda}(1 - \chi)f_2 + \int_0^t \frac{\sin((t - s)\Lambda)}{\Lambda}[\Delta_x, \chi]u(s)ds.$$

En exploitant les estimations de Strichartz pour l'équation des ondes libres et le Lemme 1.4.2 on obtient immédiatement (1.4.1). \square

1.5 Estimations de Strichartz pour χu

L'objectif de cette section est de prouver que χu vérifie (1.1.4). Pour cela, nous allons appliquer les estimations de Strichartz locales suivantes :

Théorème 1.5.1 *Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $2 \leq p, q < +\infty$, $s \in [0, T]$ et $\gamma > 0$ vérifiant*

$$\frac{1}{p} = \frac{n(q - 2)}{2q} - \gamma \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{(n - 1)(q - 2)}{4q}, \quad (1.5.1)$$

on a

$$\int_s^{s+\delta} \|\psi(\mathcal{U}(t, s)f)_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt \leq C(T, \psi, \delta, p, q, n) \|f\|_{\mathcal{H}_\gamma}^p, \quad (1.5.2)$$

où δ et $C > 0$ sont indépendants de s et f .

Notons que dans le Théorème 1.5.1, pour $h = (h_1, h_2)$, on pose $(h)_1 = h_1$. Dans cette section, nous admettrons le résultat du Théorème 1.5.1 pour compléter les estimations de χu . Le Théorème 1.5.1 sera démontré dans la Section 1.7. Pour montrer que χu vérifie (1.1.4) à partir de (1.5.2), nous allons appliquer un argument semblable à celui utilisé par Burq dans [Bur03]. Commençons par appliquer les estimations (1.5.2), de sorte à obtenir des estimations locales par rapport au terme source $g(t, x)$ et aux conditions initiales h pour la solution v du problème

$$\begin{cases} v_{tt} - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x v) = g(t, \cdot), \\ (v, v_t)(s, x) = h, \end{cases} \quad (1.5.3)$$

indépendamment de s .

Lemme 1.5.1 Soit $\tau > 0$ et soient $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant les conditions (1.5.1) avec $\gamma = 1$. Alors, on a

$$\|(\chi \mathcal{U}(t, \tau) f)_1\|_{L^p([\tau, \tau + \delta], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.5.4)$$

avec $C > 0$ indépendant de τ et f .

Preuve. Prenons $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $kT \leq \tau < (k+1)T$ et $s = \tau - kT \in [0, T]$. La propriété (1.2.3) implique

$$\mathcal{U}(t, \tau) f = \mathcal{U}(t - kT, s) f. \quad (1.5.5)$$

En appliquant (1.5.5) et en effectuant un changement de variable, on obtient

$$\int_{\tau}^{\tau + \delta} \|(\chi \mathcal{U}(t, \tau) f)_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt = \int_s^{s + \delta} \|(\chi \mathcal{U}(t', s) f)_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt'. \quad (1.5.6)$$

On conclut en appliquant les estimations (1.5.2) au terme de droite de l'égalité (1.5.6). \square

Les estimations (1.5.4) nous permettent de prouver les estimations suivantes :

Proposition 1.5.1 Soient $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant les conditions (1.5.1) avec $\gamma = 1$ et soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout $g \in L^1([\tau, \delta + \tau], L^2(\mathbb{R}^n))$, on a

$$\left\| \int_{\tau}^t \psi(\mathcal{U}(t, s)(0, g(s)))_1 ds \right\|_{L^p([\tau, \delta + \tau], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|g\|_{L^1([\tau, \delta + \tau], L^2(\mathbb{R}^n))} \quad (1.5.7)$$

avec $C > 0$ indépendant de g et τ .

Preuve. Fixons $t_0 \in [\tau, \delta + \tau]$. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\tau}^{t_0} \psi(\mathcal{U}(t, s)(0, g(s)))_1 ds \right\|_{L^p([\tau, \delta + \tau], L^q(\mathbb{R}^n))} \\ & \leq \int_{\tau}^{\tau + \delta} \left\| \mathbf{1}_{\{s < t_0\}} \psi(\mathcal{U}(t, s)(0, g(s)))_1 \right\|_{L_t^p([\tau, \delta + \tau], L^q(\mathbb{R}_x^n))} ds. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

En appliquant les estimations (1.5.4), pour tout $s \in [\tau, \tau + \delta]$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{1}_{\{s < t_0\}} \psi(\mathcal{U}(t, s)(0, g(s)))_1 \right\|_{L_t^p([\tau, \delta + \tau], L^q(\mathbb{R}^n))} & \leq \left\| \psi(\mathcal{U}(t, s)(0, g(s)))_1 \right\|_{L_t^p([\tau, \delta + \tau], L^q(\mathbb{R}^n))} \\ & \leq C \|g(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

avec $C > 0$ indépendant de g , τ et t_0 . En intégrant (1.5.9) par rapport à s , on voit que l'inégalité (1.5.8) devient

$$\left\| \int_{\tau}^{t_0} \psi(\mathcal{U}(t, s)(0, g(s)))_1 ds \right\|_{L^p([\tau, \delta + \tau], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|g\|_{L^1([\tau, \delta + \tau], L^2(\mathbb{R}^n))}. \quad (1.5.10)$$

Considérons l'opérateur $K(s, t) = \mathbf{1}_{[\tau, \delta + \tau]}(t) \mathbf{1}_{[\tau, \delta + \tau]}(s) P_1 \mathcal{U}(t, s) P^2$ et posons $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ et $Y = L^q(\mathbb{R}^n)$. Comme $p > 1$, d'après le lemme de Christ-Kiselev, (1.5.10) implique (1.5.7). \square

D'après les estimations (1.5.4) et (1.5.7), pour tous $\tau > 0$, $g \in L^1([\tau, \delta + \tau], L^2(\mathbb{R}^n))$, $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, et pour tous $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant les conditions (1.5.1), la solution v de (1.5.3) vérifie

$$\|\psi v\|_{L^p([\tau, \delta + \tau], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \left(\|g\|_{L^1([\tau, \delta + \tau], L^2(\mathbb{R}^n))} + \|h\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \right) \quad (1.5.11)$$

avec $C > 0$ indépendant de τ . Supposons maintenant que $n \geq 3$ est impair et que les conditions (H1) et (H2) sont satisfaites. Posons $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant les conditions (1.5.1). Comme dans [Bur03], considérons la fonction de troncature $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{supp}\varphi \subset]0, \delta[$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et

$$\varphi(t) = 1, \quad t \in \left[\frac{\delta}{4}, \frac{3\delta}{4} \right].$$

Posons

$$\varphi_\nu(t) = \varphi \left(t - \frac{\nu\delta}{2} \right), \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Il est facile de voir que

$$\text{supp}\varphi_\nu \cap \text{supp}\varphi_{\nu+2} = \emptyset \quad \text{et} \quad 1 \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(t) \leq 2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5.12)$$

Notons

$$v_\nu = \varphi_\nu \chi u, \quad I_\nu = \left] \frac{\nu\delta}{2}, \frac{\nu\delta}{2} + \delta \right[\cap \mathbb{R}^+$$

et

$$u_\nu = [\partial_t^2, \varphi_\nu] \chi u - [\text{div}_x(a \nabla_x \cdot), \chi] \varphi_\nu u.$$

On remarque que v_ν est la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2(v_\nu) - \text{div}_x(a(t, x) \nabla_x v_\nu) = u_\nu, \\ (v_\nu, \partial_t(v_\nu))(0) = g_\nu, \end{cases}$$

avec $g_{-1} = \chi f$ et $g_\nu = 0$ pour $\nu \neq -1$. Comme v_ν est à support compact en t et en x , les estimations (1.5.11) impliquent

$$\|v_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^n))} = \|v_\nu\|_{L^p(I_\nu, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \left(\|g_\nu\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} + \|u_\nu\|_{L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))} \right) \quad (1.5.13)$$

avec $C > 0$ indépendant de ν . En utilisant les inégalités de Minkowski, on trouve

$$\left\| \left(\sum_{\nu=-N}^N |v_\nu| \right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{\nu=-N}^N \|v_\nu\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|v_\nu\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\left\| \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |v_\nu| \right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{\nu=-N}^N |v_\nu| \right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|v_\nu\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

En combinant cette inégalité avec les propriétés (1.5.12) de φ_ν , on trouve

$$\|\chi u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |v_\nu| \right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|v_\nu\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.5.14)$$

De plus, les propriétés (1.5.12) de φ_l , pour tout $l \in \mathbb{Z}$, impliquent

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|v_\nu(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|v_{l-1}(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|v_l(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|v_{l+1}(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in I_l. \quad (1.5.15)$$

Comme $p > 1$, on déduit de (1.5.14) et (1.5.15) l'inégalité suivante

$$\|\chi u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \leq (\|v_{l-1}(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)})^p + (\|v_l(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)})^p + (\|v_{l+1}(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)})^p, \quad t \in I_l.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à t sur I_l , on obtient

$$\int_{I_l} \|\chi u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt \leq C \int_{\mathbb{R}^+} [\|v_{l-1}(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p + \|v_l(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p + \|v_{l+1}(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p] dt. \quad (1.5.16)$$

En sommant ces estimations par rapport à l et en tenant compte du fait que $\bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}} I_\nu = \mathbb{R}^+$, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^+} \|\chi u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{I_\nu} \|u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt \leq C \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|v_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^n))}^p.$$

De même, en sommant (1.5.13) par rapport à ν on obtient

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|v_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^n))}^p \leq C \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\|u_\nu\|_{L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))} + \|g_\nu\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \right)^p$$

et cela donne

$$\int_{\mathbb{R}^+} \|\chi u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt \leq C \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\|u_\nu\|_{L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))} + \|g_\nu\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \right)^p. \quad (1.5.17)$$

Lemme 1.5.2 *Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\|u_\nu\|_{L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C' \|u_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))} \quad (1.5.18)$$

avec $C' > 0$ indépendant de ν .

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, vérifiant $\psi = 1$ sur $[0, \delta]$. Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ on note ψ_ν la fonction définie par

$$\psi_\nu(t) = \psi \left(t - \frac{\nu\delta}{2} \right).$$

On prouve facilement que, pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$, on a

$$\psi_\nu \varphi_\nu = \varphi_\nu \quad \text{et} \quad \psi_\nu \partial_t \varphi_\nu = \partial_t \varphi_\nu$$

et cela entraîne $\psi_\nu(t)u_\nu(t, x) = u_\nu(t, x)$. En appliquant cette identité, on obtient

$$\|u_\nu\|_{L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \int_0^{+\infty} \psi_\nu(t) \|u_\nu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt.$$

L'inégalité de Hölder entraîne

$$\|u_\nu\|_{L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \left(\int_0^{+\infty} (\psi_\nu(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \|u_\nu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.5.19)$$

En effectuant le changement de variable $t' = t + \frac{\nu\delta}{2}$ on trouve

$$\int_0^{+\infty} \psi_\nu(t)^2 dt \leq \int_{\mathbb{R}} \psi_\nu(t)^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \psi(t')^2 dt'.$$

En appliquant ce résultat à l'inégalité (1.5.19), on déduit (1.5.18) avec $C' = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}$. \square

On utilise (1.5.18) dans le terme de droite de l'inégalité (1.5.17) et on obtient

$$\|\chi u\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^n))}^p \leq C \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\|u_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))}^2 + \|g_\nu\|_{\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (1.5.20)$$

Lemme 1.5.3 *Soit $r \geq 1$. Alors, pour toute suite à valeurs complexes $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, on a*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^r \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k| \right)^r. \quad (1.5.21)$$

Preuve. Supposons que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |b_k| = 1$. Alors

$$|b_k|^r \leq |b_k|, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \sum_{-N}^{+N} |b_k|^r \leq \sum_{-N}^{+N} |b_k|, \quad N \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |b_k|^r \leq 1. \quad (1.5.22)$$

Posons maintenant $\alpha = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_k|$ et considérons $b_k = \frac{a_k}{\alpha}$. L'inégalité (1.5.22) implique

$$\frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_k|^r}{\alpha^r} \leq 1. \quad (1.5.23)$$

On déduit facilement (1.5.21) de (1.5.23). \square

Comme $\frac{p}{2} \geq 1$, en appliquant (1.5.21) au terme de droite de l'inégalité (1.5.20), on trouve

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\|u_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))}^2 + \|g_\nu\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\|u_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))}^2 + \|g_\nu\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (1.5.24)$$

Soit $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $\beta = 1$ sur $\text{supp}\chi$. L'estimation (1.3.1) implique

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|u_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))}^2 \leq C \int_0^{+\infty} \|\beta(u, u_t)(t)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(\rho, n, T) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (1.5.25)$$

De même, d'après la définition des g_ν , on a

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|g_\nu\|^2 = \|\chi f\|^2. \quad (1.5.26)$$

On déduit des formules (1.5.20), (1.5.24), (1.5.25) et (1.5.26), l'estimation suivante

$$\|\chi u\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^q)} \leq \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\|u_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))}^2 + \|g_\nu\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.5.27)$$

On conclut en démontrant qu'on a une estimation uniforme de l'énergie

$$\|\chi(u(t), u_t(t))\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}$$

qui s'écrit de la façon suivante :

Proposition 1.5.2 *Supposons que $n \geq 3$ est impair et que (H1), (H2) sont satisfaites. Alors, pour tout $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $t > 0$, on a*

$$\|\chi \mathcal{U}(t, 0) f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq C(\chi, n, \rho, T) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.5.28)$$

avec $C(\chi, n, \rho, T)$ indépendant de t et f .

Preuve. Soient $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ et $t > 0$. Décomposons $\chi \mathcal{U}(t, 0) f$ de la façon suivante

$$\chi \mathcal{U}(t, 0) f = \chi \mathcal{U}(t, 0) \chi f + \chi \mathcal{U}(t, 0) (1 - \chi) f.$$

L'estimation (1.3.2) implique

$$\|\chi \mathcal{U}(t, 0) \chi f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq C(\chi, n, \rho) e^{-\delta t} \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq C' \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.5.29)$$

avec $C' > 0$ indépendant de t et f . De plus, d'après l'estimation (1.3.16), pour $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\beta = 1$ sur $\text{supp}\chi$, on a

$$\begin{aligned} \|\chi \mathcal{U}(t, 0) (1 - \chi) f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\chi (1 - \chi) U_0(t) f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + C(\rho, n, \varphi) \int_0^t e^{-\delta(t-s)} \|\beta U_0(s) f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} ds \end{aligned}$$

On déduit facilement de cette inégalité l'estimation suivante

$$\|\chi\mathcal{U}(t, 0)(1 - \chi)f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.5.30)$$

avec $C > 0$ indépendant de t et f . L'estimation (1.5.28) est une conséquence immédiate de (1.5.29) et (1.5.30). \square

En conclusion, les estimations (1.5.27) et (1.5.28) impliquent que si $2 \leq p, q < +\infty$ vérifient les conditions (1.4.1), avec $\gamma = 1$, alors, pour tout $t > 0$, on a

$$\|\chi u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}_t^+, L^q(\mathbb{R}^n))} + \|\chi u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(\chi u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\rho, T, n, p, q)(\|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)}). \quad (1.5.31)$$

1.6 Preuve du Théorème 1.1.1

Dans cette section nous allons appliquer les estimations (1.4.1) et (1.5.31) afin de prouver le Théorème 1.1.1. Tout d'abord, d'après la Proposition 1.4.1, pour tout $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant

$$p > 2, \quad \frac{1}{p} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad (1.6.1)$$

on a (1.4.1). De plus, pour $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant

$$\frac{1}{p} = \frac{n(q-2)}{2q} - 1 = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{q-2}{2q} \right) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad (1.6.2)$$

on a (1.5.31). En combinant les conditions (1.6.1) et (1.6.2), pour p, q vérifiant

$$p > 2, \quad \frac{1}{p} = \frac{n(q-2)}{2q} - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \left(\frac{n-1}{2} \right) \frac{q-2}{2q}, \quad (1.6.3)$$

on obtient (1.1.4).

1.7 Estimations de Strichartz locales pour les solutions de (0.1.3)

L'objectif de cette section est de démontrer les estimations locales définies dans le Théorème 1.5.1. Pour les équations strictement hyperboliques il est possible, en appliquant des méthodes BKW, d'obtenir des approximations des solutions par des opérateurs intégraux de Fourier (voir le Chapitre VI de [GS]). Pour l'équation des ondes munie d'une métrique on obtient des estimations de Strichartz locales en estimant la gaussienne de la phase de ces opérateurs intégraux de Fourier (voir [Kapi90]). La particularité des estimations (1.5.2) est le fait qu'elles sont uniformes tant que s reste dans un compact. Pour montrer cela, nous devons commencer par étudier les approximations obtenues par les méthodes BKW et établir des estimations convenables de ces approximations. Ensuite, nous appliquerons les estimations de Strichartz de Kapitanski (voir [Kapi90]) pour des opérateurs intégraux de Fourier sur des espaces de Besov afin de prouver (1.5.2).

1.7.1 Approximation du propagateur $\mathcal{U}(t, \tau)$ par des opérateurs intégraux de Fourier

Considérons les opérateurs $U(t, s)$ et $V(t, s)$ définis par

$$U(t, s)f = (\mathcal{U}(t, s)(f, 0))_1, \quad f \in \dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^n),$$

$$V(t, s)g = (\mathcal{U}(t, s)(0, g))_1, \quad g \in \dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^n).$$

On note B^m l'espace

$$B^m = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s-m}(\mathbb{R}^n)).$$

Définition 1.7.1 Soit $\mathcal{B}(t) \in B^k$, pour tout $t \in [S_1, S_2]$. On dit que l'opérateur $\mathcal{B}(t)$ dépend de t de façon admissible si $\partial_t^j \mathcal{B}(t) \in B^{k+j}$, $j = 1, 2, \dots$ et

$$\|\partial_t^j \mathcal{B}(t)\|_{\mathcal{L}(H^s, H^{s-k-j})} \leq C_j, \quad s \in \mathbb{R}$$

avec $C_j > 0$ indépendant de t , S_1 et S_2 .

Nous allons commencer avec l'approximation suivante :

Théorème 1.7.1 Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq R_1)$, $R_1 > \rho$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $s, t \in [0, T]$, avec $|s - t| < \delta$, et chaque entier $N \geq 1$, on a la représentation

$$\psi U(t, s) = \sum_{j=1}^M \left[\tilde{I}_j^+(t, s) + \tilde{I}_j^-(t, s) \right] + R_N(t, s), \quad (1.7.1)$$

où les $\tilde{I}_j^\pm(t, s)$ sont des opérateurs intégraux de Fourier de noyau

$$\tilde{I}_j^\pm(t, s, x, y) = \int \tilde{b}_j^\pm(t, s, y, x, \xi) e^{-i\varphi_j^\pm(t, s, y, \xi) + ix \cdot \xi} d\xi \quad (1.7.2)$$

et $R_N(t, s) \in B^{-N}$ dépend de (t, s) de façon admissible. Les amplitudes $\tilde{b}_j^\pm(t, s, y, x, \xi)$ sont à support compact en y et s'annulent pour $|\xi|$ suffisamment petit. De plus, \tilde{b}_j^\pm , φ_j^\pm et leurs dérivées sont uniformément bornées, pour $s \in [0, T]$. Une représentation similaire est valable pour $\psi V(t, s)$.

Afin de prouver la représentation (1.7.1), on commence avec quelques propriétés des bicaractéristiques nulles de l'opérateur différentiel $\partial_t^2 - \operatorname{div}_x(a\nabla_x \cdot)$. Ces résultats sont utiles pour l'analyse de l'hypothèse (H1), et ils permettront d'obtenir des estimations uniformes de la phase et de l'amplitude des opérateurs $\tilde{I}_j^\pm(t, s)$ de la représentation (1.7.1). On associe à l'opérateur différentiel $\partial_t^2 - \operatorname{div}_x(a\nabla_x \cdot)$ le hamiltonien suivant

$$H(t, x, \tau, \xi) = \tau^2 - a(t, x)|\xi|^2.$$

Les bicaractéristiques nulles associées à $H(t, x, \tau, \xi)$ sont respectivement l'unique solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = -2a(t, x)\xi, & \frac{\partial t}{\partial \sigma} = 2\tau, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = |\xi|\nabla_x a(t, x), & \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = a_t(t, x)|\xi|^2, \\ (t(0), x(0), \xi(0), \tau(0)) = (t_0, x_0, \xi_0, \tau_0), & \text{avec } \tau_0^2 - a(t_0, x_0)|\xi_0|^2 = 0. \end{cases} \quad (1.7.3)$$

Proposition 1.7.1 *Soit $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$ tel que $\tau_0^2 - a(t_0, x_0)|\xi_0|^2 = 0$ et $\xi_0 \neq 0$. Alors, la solution maximale de (1.7.3) est définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ de I sur \mathbb{R} .*

Preuve. Soit $(t(\sigma), x(\sigma), \xi(\sigma), \tau(\sigma))$ la solution maximale de (1.7.3) définie sur I . Pour tout $\sigma \in I$, on a $\tau(\sigma)^2 - a(t(\sigma), x(\sigma))|\xi(\sigma)|^2 = 0$. Cela entraîne

$$\frac{dt}{d\sigma} = 2\tau(\sigma) = \pm 2\sqrt{a(t(\sigma), x(\sigma))}|\xi(\sigma)|, \quad \sigma \in I. \quad (1.7.4)$$

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma_0 \in I$ tel que $\xi(\sigma_0) = 0$. Comme

$$(t_1(\sigma), x_1(\sigma), \tau_1(\sigma), \xi_1(\sigma)),$$

définie par

$$(t_1(\sigma), x_1(\sigma), \tau_1(\sigma), \xi_1(\sigma)) = (t(\sigma_0), x(\sigma_0), 0, 0), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

est la solution sur \mathbb{R} de (1.7.3) avec la condition initiale $(t(\sigma_0), x(\sigma_0), 0, 0)$, l'unicité de la solution de (1.7.3) implique que $I = \mathbb{R}$ et

$$(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma)) = (t(\sigma_0), x(\sigma_0), 0, 0), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (1.7.5)$$

Sachant que $\xi(0) = \xi_0 \neq 0$, (1.7.5) donne une contradiction. On en déduit que, pour tout $\sigma \in I$, $\xi(\sigma) \neq 0$ et

$$\sqrt{a(t(\sigma), x(\sigma))}|\xi(\sigma)| > 0. \quad (1.7.6)$$

Les formules (1.7.4) et (1.7.6) impliquent que $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est strictement monotone sur I et $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ de I sur son image J_0 . Par conséquent, pour $\xi_0 \neq 0$, on peut paramétrer $(x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$ par rapport à t et le problème (1.7.3) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{a(t, x)\xi}{\tau(t)}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{a_t(t, x)|\xi|^2}{2\tau(t)}, & \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{|\xi|^2}{2\tau(t)}\nabla_x a(t, x), \\ (x(t_0), \tau(t_0), \xi(t_0)) = (x_0, \tau_0, \xi_0), & \text{avec } \tau_0^2 - a(t_0, x_0)|\xi_0|^2 = 0. \end{cases} \quad (1.7.7)$$

On suppose dorénavant que $\tau_0 = \sqrt{a(t_0, x_0)}|\xi_0|$ (le cas $\tau_0 = -\sqrt{a(t_0, x_0)}|\xi_0|$ se traite de façon analogue). On voit que $\tau(t) = \sqrt{a(t, x(t))}|\xi(t)|$ et (1.7.7) a la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -\sqrt{a(t, x(t))} \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{|\xi(t)|}{2\sqrt{a(t, x(t))}} \nabla_x a(t, x(t)), \\ (x(t_0), \xi(t_0)) = (x_0, \xi_0), \quad \xi_0 \neq 0. \end{cases} \quad (1.7.8)$$

Soit $(x(t), \xi(t))$ la solution maximale de (1.7.8) définie sur J . Pour tout $t \in J$, on a

$$\frac{\partial |x(t)|^2}{\partial t} = -2\sqrt{a(t, x(t))} \frac{\xi(t) \cdot x(t)}{|\xi(t)|}$$

et

$$\frac{\partial |\xi(t)|^2}{\partial t} = \frac{|\xi(t)|}{\sqrt{a(t, x(t))}} \nabla_x a(t, x(t)) \cdot \xi(t).$$

Les propriétés (1.1.1) de $a(t, x)$ nous permettent d'introduire

$$C = \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}} 2\sqrt{a(t, x)} + \frac{|\nabla_x a(t, x)|}{\sqrt{a(t, x)}} < +\infty.$$

En utilisant cette constante on obtient l'estimation suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \|(x(t), \xi(t))\|^2 \leq C(1 + \|(x(t), \xi(t))\|^2),$$

et cela entraîne

$$\|(x(t), \xi(t))\|^2 \leq (1 + \|(x_0, \xi_0)\|^2) e^{C|t-t_0|}, \quad t \in J. \quad (1.7.9)$$

De telle façon, (1.7.8) implique

$$\frac{\partial |\xi(t)|^2}{\partial t} = -\frac{|\xi(t)|^2}{a(t, x(t))} \nabla_x a(t, x(t)) \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t}.$$

En intégrant cette expression, on obtient

$$|\xi(t)|^2 = |\xi_0|^2 \exp \left(- \int_{t_0}^t \frac{\nabla_x a(t', x(t')) \cdot \frac{\partial x(t')}{\partial t}}{a(t', x(t'))} dt' \right). \quad (1.7.10)$$

De plus, on voit facilement que

$$\int_{t_0}^t \frac{\nabla_x a(t', x(t')) \cdot \frac{\partial x(t')}{\partial t}}{a(t', x(t'))} dt' = \ln \left(\frac{a(t, x(t))}{a(t_0, x(t_0))} \right) - \int_{t_0}^t \frac{a_t(t', x(t'))}{a(t', x(t'))} dt'$$

et en effectuant ce changement, (1.7.10) devient

$$|\xi(t)|^2 = |\xi_0|^2 \left(\frac{a(t_0, x_0)}{a(t, x(t))} \right) \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{a_t(t', x(t'))}{a(t', x(t'))} dt' \right). \quad (1.7.11)$$

Une fois de plus, les propriétés (1.1.1) de $a(t, x)$ nous permettent d'introduire

$$D = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}} \frac{|a_t(t, x)|}{a(t, x)} < +\infty.$$

On déduit de (1.7.11) et de la condition (i) de (1.1.1) que

$$|\xi(t)|^2 \geq |\xi_0|^2 \left(\frac{c_0}{C_0} \right) e^{-D|t-t_0|}, \quad t \in J. \quad (1.7.12)$$

Les estimations (1.7.9) et (1.7.12) impliquent que $J = \mathbb{R}$ et cela prouve que la solution maximale $(x(t), \tau(t), \xi(t))$ de (1.7.7) est définie sur \mathbb{R} . Par construction, on a clairement $J_0 \subset J = \mathbb{R}$, pour conclure il reste à voir que $J \subset J_0$. Considérons maintenant $(x_1(t), \tau_1(t), \xi_1(t))$ la solution sur \mathbb{R} de (1.7.7) et $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$ la solution maximale de (1.7.3). Soit $s_1(t)$ la fonction définie par

$$s_1(t) = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{2\tau_1(t')}.$$

On remarque que $s_1(t)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R} sur $\text{Image}(s_1)$. Considérons aussi $(t_3(\sigma), x_3(\sigma), \tau_3(\sigma), \xi_3(\sigma))$ définie sur $\text{Image}(s_1)$ par

$$(t_3(\sigma), x_3(\sigma), \tau_3(\sigma), \xi_3(\sigma)) = (s_1^{-1}(\sigma), x_1(s_1^{-1}(\sigma)), \tau_1(s_1^{-1}(\sigma)), \xi_1(s_1^{-1}(\sigma))).$$

On voit facilement que $(t_3(\sigma), x_3(\sigma), \tau_3(\sigma), \xi_3(\sigma))$ est la solution sur $\text{Image}(s_1)$ de (1.7.3). L'unicité de la solution de (1.7.3) implique que $\text{Image}(s_1) \subset I$ et que, pour tout $\sigma \in \text{Image}(s_1)$, on a

$$(t_3(\sigma), x_3(\sigma), \tau_3(\sigma), \xi_3(\sigma)) = (t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma)).$$

Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on obtient

$$t(s_1(h)) = s_1^{-1}(s_1(h)) = h$$

et l'image de $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est \mathbb{R} . En conclusion, $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est un \mathcal{C}^∞ difféomorphisme de I sur \mathbb{R} . □

Remarque 1.7.1 *Le résultat de la Proposition 1.7.1 nous permet de considérer les bicaractéristiques nulles de H comme des fonctions de t définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela justifie la présentation de l'hypothèse de non capture sous la forme (H1).*

Posons $P = \partial_t^2 - \text{div}_x(a(t, x)\nabla_x)$ et $R_1 > \rho > 0$. Pour démontrer (1.7.1), nous allons appliquer les propriétés des bicaractéristiques afin de montrer que les opérateurs intégraux de Fourier qui sont les solutions locales de $P(v) = 0$, ont des phases et des amplitudes uniformément bornées.

Proposition 1.7.2 Soit $(t_0, x_0, \eta_0) \in [0, T] \times B(0, R_1) \times \mathbb{S}^{n-1}$, $R_1 > 0$ et soit $S(y, \xi)$ une fonction \mathcal{C}^∞ dont le support est contenu dans un voisinage suffisamment petit de (x_0, η_0) . Alors, il existe $\delta_{t_0} > 0$, $r_{x_0} > 0$ et un voisinage $\omega_{\eta_0} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ de η_0 tels que, pour chaque entier $N \geq 1$, on peut construire des opérateurs intégraux de Fourier $I^\pm(t)$ définis par

$$(I^\pm(t)f)(t, x) = \int \int e^{i\varphi^\pm(t, x, \xi) - iy \cdot \xi} b^\pm(t, x, y, \xi) f(y) dy d\xi,$$

tels que

$$\begin{cases} P(I^+(t)f + I^-(t)f) &= R_N(t)f, \\ I^+(t_0)f + I^-(t_0)f &= S(x, D_x)f + V_N f, \\ \partial_t I^+(t_0)f + \partial_t I^-(t_0)f &= W_N f. \end{cases} \quad (1.7.13)$$

Ici $V_N, W_N \in B^{-N}$, $R_N(t) \in B^{-N}$ et, pour $|t - t_0| < \delta_{t_0}$, ces opérateurs dépendent de t de façon admissible. De plus, $R_N(t)$, V_N et W_N sont uniformément bornés par rapport à t_0 , x_0 , η_0 . De façon similaire, on peut construire des opérateurs intégraux de Fourier $J^\pm(t)$ définis par

$$(J^\pm(t)f)(t, x) = \int \int e^{i\varphi^\pm(t, x, \xi) - iy \cdot \xi} c^\pm(t, x, y, \xi) f(y) dy d\xi$$

vérifiant

$$\begin{cases} P(J^+(t)f + J^-(t)f) &= R'_N(t)f, \\ J^+(t_0)f + J^-(t_0)f &= V'_N f, \\ \partial_t J^+(t_0)f + \partial_t J^-(t_0)f &= S(x, D_x)f + W'_N f. \end{cases} \quad (1.7.14)$$

$R'_N(t)$, V'_N et W'_N sont des opérateurs régularisants ayant les mêmes propriétés que $R_N(t)$, V_N et W_N .

Preuve. Nous allons résoudre le problème (1.7.13) en utilisant la méthode BKW. Tout d'abord, P est un opérateur strictement hyperbolique de symbole principal

$$\sigma(P) = \tau^2 - a(t, x)|\xi|^2 = (\tau - \sqrt{a(t, x)|\xi|})(\tau + \sqrt{a(t, x)|\xi|}).$$

Considérons l'équation eikonale

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial t} \pm \sqrt{a(t, x)} |\nabla_x \varphi^\pm| = 0, \\ \varphi^\pm(t_0, x, \eta) = x \cdot \eta. \end{cases} \quad (1.7.15)$$

On peut résoudre (1.7.15), pour $(t, x, \eta) \in [t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}] \times B(x_0, r_{x_0}) \times \omega_{\eta_0}$, en utilisant la méthode classique de Hamilton-Jacobi (voir [GS], Chapitre V). On prolonge φ^\pm comme une fonction régulière qui est positivement homogène de degré 1 en η , en posant $\varphi(t, x, \eta) = |\eta| \varphi(t, x, \frac{\eta}{|\eta|})$. Soit $\eta' \in \mathbb{S}^{n-1}$. Considérons

$$\Lambda_1^\pm(t_0, \eta') = \{(t_0, x, \mp \sqrt{a(t_0, x)}, \eta') : |x| \leq R\}.$$

$\Lambda_1^\pm(t_0, \eta')$ est une sous-variété \mathcal{C}^∞ de dimension n . Notons $\Lambda_2^\pm(t_0, \eta')$, l'ensemble des bicaractéristiques $(t, x(t), \tau(t), \xi(t))$ paramétrées par rapport à t vérifiant

$$(t_0, x(t_0), \tau(t_0), \xi(t_0)) \in \Lambda_1^\pm(t_0, \eta').$$

On présente le lagrangien

$$\Lambda^\pm(t_0, \eta') = \{(t, x(t), \tau(t), \xi(t)) : t \in [0, T + 1], (t, x(t), \tau(t), \xi(t)) \in \Lambda_2^\pm(t_0, \eta')\}. \quad (1.7.16)$$

Soient $(t^\pm(\sigma), x^\pm(\sigma), \tau^\pm(\sigma), \xi^\pm(\sigma))$ les bicaractéristiques de conditions initiales

$$(t^\pm(0), x^\pm(0), \tau^\pm(0), \xi^\pm(0)) = (t_0, x_0, \mp\sqrt{a(t_0, x_0)}, \eta'),$$

avec $|x_0| \leq R_1$. D'après la théorie des équations de Hamilton-Jacobi on a

$$\left(\frac{\partial \varphi^\pm}{\partial t}, \nabla_x \varphi^\pm \right) (t^\pm(\sigma), x^\pm(\sigma), \eta') = (\tau^\pm(\sigma), \xi^\pm(\sigma)).$$

Alors, $\Lambda^\pm(t_0, \eta')$ est le graphe de φ^\pm , pour

$$(t, x, \eta') \in [t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}] \times B(x_0, r_{x_0}) \times \omega_{\eta_0}.$$

Considérons maintenant $(x^\pm(t, t', x, \eta'), \xi^\pm(t, t', x, \eta'), \tau^\pm(t, t', x, \eta'))$ la solution sur \mathbb{R} du problème (1.7.7) de condition initiale $x^\pm(t', t', x, \eta') = x$, $\xi^\pm(t', t', x, \eta') = \eta'$ et $\tau^\pm(t', t', x, \eta') = \mp\sqrt{a(t', x)}|\eta'|$. On peut voir que $x^\pm(t, t', x, \eta')$ et $\xi^\pm(t, t', x, \eta')$ sont continues par rapport à t, t', x, η' sur l'ensemble compact

$$[0, T + 1] \times [0, T + 1] \times B_F(0, R) \times \mathbb{S}^{n-1}$$

et il existe $C > 0$ tel que, pour tout $(t, t', x, \eta') \in [0, T + 1] \times [0, T + 1] \times B_F(0, R) \times \mathbb{S}^{n-1}$, on a

$$|x(t, t', x, \eta')| \leq C, \quad |\xi(t, t', x, \eta')| \leq C. \quad (1.7.17)$$

Le résultat de la Proposition 1.7.1, la définition (1.7.16) et l'estimation (1.7.17) impliquent que, pour tout $t_0 \in [0, T]$ et $\eta' \in \mathbb{S}^{n-1}$, le lagrangien $\Lambda^\pm(t_0, \eta')$ est contenu dans un ensemble uniformément borné indépendamment de t_0 et η' . Par conséquent, φ^\pm et ses dérivées sont uniformément bornées par rapport à

$$(t, x, \eta) \in [t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}] \times B(x_0, r_{x_0}) \times \omega_{\eta_0},$$

indépendamment de t_0, x_0, η_0 . En utilisant une troncature, on peut supposer que tous les symboles s'annulent pour $|\eta|$ suffisamment petit. Considérons maintenant le développement asymptotique de b^\pm

$$b^\pm \sim \sum_{k=0}^N b_k^\pm$$

avec b_k^\pm homogène de degré $-k$ en η . Pour résoudre (1.7.13) (voir [GS], Chapitre VI), b_0^\pm doit être la solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} L^\pm(b_0^\pm) = 0, \\ b_0^+(t_0, x, y, \eta) + b_0^-(t_0, x, y, \eta) = S(y, \eta), \\ (\partial_t \varphi^+ b_0^+ + \partial_t \varphi^- b_0^-)(t_0, x, \eta) = 0. \end{cases} \quad (1.7.18)$$

De même, b_k^\pm , pour $k \in \{1, \dots, N\}$, doit être la solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} L^\pm(b_k^\pm) = -P(b_{k-1}^\pm), \\ b_k^+(t_0, x, \eta) + b_k^-(t_0, x, \eta) = 0, \\ (\partial_t \varphi^+ b_k^+ + \partial_t \varphi^- b_k^-)(t_0, x, \eta) = -(\partial_t b_{k-1}^+ + \partial_t b_{k-1}^-)(t_0, x, \eta) \end{cases} \quad (1.7.19)$$

avec

$$L^\pm(v) = \partial_t \varphi^\pm \partial_t v - 2a \nabla_x \varphi^\pm \cdot \nabla_x v + P(\varphi^\pm)v.$$

Comme

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial t}(t_0, x, \eta) = -\sqrt{a(t, x)} |\nabla_x \varphi(t_0, x, \eta)| = -\sqrt{a(t, x)} |\eta|$$

et

$$\frac{\partial \varphi^-}{\partial t}(t_0, x, \eta) = \sqrt{a(t, x)} |\eta|,$$

on a

$$\frac{\partial \varphi^-}{\partial t}(t_0, x, \eta) \neq \frac{\partial \varphi^+}{\partial t}(t_0, x, \eta). \quad (1.7.20)$$

La condition (1.7.20) permet de prouver l'existence de b_0^\pm et b_k^\pm , pour $k \in \{1, \dots, N\}$, comme des solutions respectives de (1.7.18) et (1.7.19) sur

$$[t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}] \times B(x_0, r_{x_0}) \times \omega_{\eta_0}.$$

De plus, sur un voisinage suffisamment petit de (x_0, η_0) , b_k^\pm vont vérifier

$$\text{supp}_x(b_k^\pm(t, x, y, \eta)) \subset B(x_0, r_{x_0}), \quad \text{supp}_\eta(b_k^\pm(t, x, y, \eta)) \subset \omega_{\eta_0}$$

et b_0^\pm, b_k^\pm , pour $k \in \{1, \dots, N\}$, vont être les solutions homogènes de degré $-k$ en η de (1.7.18) et (1.7.19) sur $[t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}] \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\eta^n$. Soient $(t^\pm(\sigma), x^\pm(\sigma), \tau^\pm(\sigma), \xi^\pm(\sigma))$ les bicaractéristiques nulles vérifiant

$$(t^\pm(0), x^\pm(0), \tau^\pm(0), \xi^\pm(0)) = \left(t_0, x, \mp \sqrt{a(t_0, x)}, \frac{\eta}{|\eta|} \right).$$

Alors, $b_0^\pm \left(t(\sigma), x(\sigma), \frac{\eta}{|\eta|} \right)$ est la solution de

$$\begin{cases} \partial_\sigma \left(b_0^\pm \left(t(\sigma), x(\sigma), \frac{\eta}{|\eta|} \right) \right) + P(\varphi) b_0^\pm \left(t(\sigma), x(\sigma), \frac{\eta}{|\eta|} \right) = 0, \\ b_0^\pm \left(t(\sigma), x(\sigma), \frac{\eta}{|\eta|} \right) \Big|_{\sigma=0} = b_0^\pm \left(t_0, x, \frac{\eta}{|\eta|} \right). \end{cases} \quad (1.7.21)$$

En résolvant (1.7.21) on obtient

$$b_0^\pm(t(\sigma), x(\sigma), \eta) = b_0^\pm(t_0, x, \eta) \exp \left(- \int_0^\sigma P(\varphi^\pm) \left(t(s), x(s), \frac{\eta}{|\eta|} \right) ds \right). \quad (1.7.22)$$

Comme φ^\pm et ses dérivées sont uniformément bornées indépendamment de t_0, x_0 et η_0 , (1.7.22) implique qu'il en est de même pour b_0^\pm . De même, on prouve que b_1^\pm, \dots, b_N^\pm sont uniformément bornées sur $[t_0 - \delta_{t_0}, \delta_{t_0} + t_0] \times B(x_0, r_{x_0}) \times \mathbb{R}^n$ indépendamment de t_0, x_0 et η_0 . Finalement, on trouve

$$\begin{aligned} & (\partial_t^2 - \text{div}_x(a(t, x) \nabla_x)) I(t, t_0) f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (P(b_N^+) e^{i\varphi^+} + P(b_N^-) e^{i\varphi^-})(t, x, \eta) e^{-iy \cdot \eta} f(y) d\eta dy \end{aligned}$$

et

$$I(t_0, t_0, x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} (S(y, \eta) + V_N(x, y, \eta)) e^{i(x-y) \cdot \eta} d\eta,$$

$$\partial_t I(t_0, t_0, x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} W_N(x, y, \eta) e^{i(x-y)\cdot\eta} d\eta$$

avec $V_N(x, y, \eta), W_N(x, y, \eta) \in S_{1,0}^{-N}$. On achève la preuve en remarquant que

$$(P(b_N^+) + P(b_N^-)) \in S_{1,0}^{-N},$$

est uniformément bornée sur $[t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}] \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ indépendamment de t_0, x_0 et η_0 . On applique le même argument pour $J^\pm(t)$. \square

Lemme 1.7.1 *Soient $s_1, s_2 \in [0, T]$. Pour tous $t, s \in [s_1, s_2]$, $U(t, s) \in B^0$ et $V(t, s) \in B^{-1}$. De plus, $U(t, s)$ et $V(t, s)$ dépendent de t, s de façon admissible.*

Le Lemme 1.7.1 est une conséquence des propriétés des solutions d'une équation strictement hyperbolique.

En appliquant les propriétés des solutions $I^\pm(t)$ et $J^\pm(t)$ des problèmes (1.7.13) et (1.7.14), on obtient l'approximation suivante des opérateurs $U(t, s)$ et $V(t, s)$.

Proposition 1.7.3 *Soit $\psi \in C_0^\infty(|x| \leq R_1)$, $R_1 > \rho$. Alors, il existe $\delta > 0$ telle que, pour $s, t \in [0, T]$ avec $|s - t| < \delta$, et chaque entier $N \geq 1$, on a la représentation*

$$U(t, s)\psi = \sum_{j=1}^M (I_j^+(t, s) + I_j^-(t, s)) + R_N(t, s), \quad (1.7.23)$$

où $\tilde{I}_j^\pm(t, s)$ sont des opérateurs intégraux de Fourier ayant des noyaux

$$I_j^\pm(t, s, x, y) = \int b_j^\pm(s, t, x, y, \xi) e^{i\varphi_j^\pm(s, t, x, \xi) - iy \cdot \xi} d\xi \quad (1.7.24)$$

et $R_N(s, t) \in B^{-N}$ dépend de (t, s) de façon admissible. Les amplitudes $b_j^\pm(t, s, x, y, \xi)$ sont à support compact par rapport à x et s'annulent pour $|\xi|$ petit. De plus, b_j^\pm et φ_j^\pm et leurs dérivées sont uniformément bornées, pour $s \in [0, T]$, et $\varphi_k^\pm(t, s, x, \xi)$ est la solution sur $[s - \delta, s + \delta] \times \text{supp}_{(y, \xi)}(b_k^\pm)$ homogène en ξ de l'équation eikonale

$$\begin{cases} \partial_s(\varphi_k^\pm)(s, t, x, \xi) \pm \sqrt{a(t, x)} |\nabla_x \varphi_k^\pm(t, s, x, \xi)| = 0, \\ \varphi_k^\pm(t, t, x, \xi) = x \cdot \xi. \end{cases}$$

Une représentation similaire est valable pour $V(t, s)\psi$.

Preuve. Soit $t_0 \in [0, T]$ et $s, \tau \in [t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}]$ (avec δ_{t_0} la même constante que celle de la Proposition 1.7.2). Considérons $R > 0$ tel que $\text{supp} \psi \subset B_F(0, R)$. Comme $B_F(0, R) \times \mathbb{S}^{n-1}$ est compact, la Proposition 1.7.2 implique que, pour δ_{t_0} suffisamment petit, on peut trouver des symboles $S_1(y, \xi), \dots, S_M(y, \xi)$ tels que :

(i) $S_1(y, \xi), \dots, S_M(y, \xi)$ sont homogènes de degré 1 en ξ , $S_1(y, \xi), \dots, S_M(y, \xi) \in C_0^\infty(B_F(0, R) \times \mathbb{S}^{n-1})$ et

$$\sum_{i=1}^M S_i(y, \xi) = \psi(y).$$

(ii) On peut trouver des opérateurs intégraux de Fourier $I_1^\pm(s, \tau), \dots, I_M^\pm(s, \tau)$ construits dans la Proposition 1.7.2 tels que $I_1^+(s, \tau) + I_1^-(s, \tau), \dots, I_M^+(s, \tau) + I_M^-(s, \tau)$ sont respectivement des solutions de (1.7.13) sur $[t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}] \times \mathbb{R}_x^n$ avec $S(y, \xi)$ remplacé respectivement par $S_1(y, \xi), \dots, S_M(y, \xi)$ et t, t_0 remplacé par s, τ .

Les résultats (i) et (ii), le Lemme 1.7.1 et la Proposition 1.7.2 impliquent que, pour δ_{t_0} suffisamment petit, on a

$$U(s, \tau)\psi = \sum_{j=1}^M I_j^\pm(s, \tau, t_0) + Q_N(s, \tau, t_0), \quad (1.7.25)$$

avec $I_j^\pm(s, \tau, t_0)$ ayant pour noyau

$$I_j^\pm(s, \tau, t_0, x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} b_j^\pm(s, \tau, x, y, \xi) e^{i\varphi_j^\pm(s, t, x, \xi) - ix \cdot \xi} d\xi \quad (1.7.26)$$

avec b_i^\pm, φ_i^\pm et ses dérivées bornées indépendamment de s, τ , tandis que

$$Q_N(s, \tau, t_0) \in B^{-N}$$

dépend de s, τ de façon admissible. Nous allons maintenant prouver la représentation (1.7.23) à partir de la représentation (1.7.25), en utilisant un recouvrement adapté de $[0, T]$ par des intervalles de type $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, avec $\varepsilon < \delta_{t_0}$. Considérons le recouvrement de $[0, T]$

$$[0, T] \subset \bigcup_{t_0 \in [0, T]} \left[t_0 - \frac{\delta_{t_0}}{3}, t_0 + \frac{\delta_{t_0}}{3} \right].$$

Comme $[0, T]$ est compact, on peut extraire du recouvrement précédent de $[0, T]$, le recouvrement fini

$$[0, T] \subset \bigcup_{i=1}^l \left[t_i - \frac{\delta_{t_i}}{3}, t_i + \frac{\delta_{t_i}}{3} \right] \quad (1.7.27)$$

avec $t_1, \dots, t_l \in [0, T]$. Notons $\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{t_1}}{3}, \dots, \frac{\delta_{t_l}}{3} \right\}$. Soient $s, t \in [0, T]$ tels que

$|s - t| < \delta$. D'après (1.7.27), il existe $j \in \{1, \dots, l\}$ tel que $t \in \left[t_j - \frac{\delta_{t_j}}{3}, t_j + \frac{\delta_{t_j}}{3} \right]$, et

$$|t_j - s| \leq |t - s| + |t - t_j| \leq \frac{2\delta_{t_j}}{3} < \delta_{t_j}. \quad (1.7.28)$$

D'après la propriété (1.7.28) et la représentation (1.7.25), on obtient

$$U(s, t)\psi = \sum_{k=1}^{M_{t_j}} I_k^\pm(s, t, t_j) + Q_N(s, t, t_j).$$

avec $I_k^\pm(s, t, t_j)$ et $Q_N(s, t, t_j)$ ayant la même propriété que celle décrite dans la Proposition 1.7.2. On déduit facilement (1.7.23) de (1.7.28). On traite $V(t, s)\psi$ de la même manière. \square

Pour obtenir la représentation (1.7.1) avec des opérateurs ayant des noyaux de la forme (1.7.2) à partir de la représentation (1.7.23), nous allons appliquer les propriétés des opérateurs adjoints $(\psi U(t, s))^*$ et $(\psi V(t, s))^*$ définis ci-dessous.

Lemme 1.7.2 Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$, avec $\tau_1 < \tau_2$. Alors

$$(\psi V(\tau_2, \tau_1))^* = V(\tau_1, \tau_2)\psi, \quad (\psi \partial_t U(\tau_2, \tau_1))^* = \partial_t U(\tau_1, \tau_2)\psi. \quad (1.7.29)$$

Preuve. Posons $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Considérons $u(t) = V(t, \tau_1)f$ et $w(t) = V(t, \tau_2)g$. En intégrant par parties, on trouve

$$0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t^2 u - \operatorname{div}_x(a \nabla_x u)(t, x)]w(t, x) dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t(u)w]_{\tau_1}^{\tau_2} dx - \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t(w)u]_{\tau_1}^{\tau_2} dx.$$

Cette identité implique

$$0 = \langle g, w(\tau_2) \rangle_{L^2} - \langle u(\tau_2), f \rangle_{L^2} = \langle g, V(\tau_2, \tau_1)f \rangle_{L^2} - \langle V(\tau_2, \tau_1)g, f \rangle_{L^2}.$$

On déduit de cette formule que, pour tous $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle V(\tau_2, \tau_1)f, g \rangle_{L^2} = \langle f, V(\tau_1, \tau_2)g \rangle_{L^2}.$$

En appliquant un argument de densité, on trouve

$$\langle \psi V(\tau_2, \tau_1)f, g \rangle_{L^2} = \langle f, V(\tau_1, \tau_2)\psi g \rangle_{L^2}, \quad f, g \in L^2.$$

Avec le même argument on obtient

$$(\psi \partial_t U(\tau_2, \tau_1))^* = \partial_t(U)(\tau_1, \tau_2)\psi.$$

□

Preuve du Théorème 1.5.1. En appliquant l'identité (1.7.29) et la représentation (1.7.23), on obtient

$$\psi V(t, s) = (V(s, t)\psi)^* = \sum_{j=1}^M (J_j^\pm(s, t))^* + (R_N(s, t))^*$$

avec $J_j^\pm(s, t)$ un opérateur intégral de Fourier de noyau

$$J_j^\pm(s, t) = \int c_j^\pm(s, t, x, y, \xi) e^{i\varphi_j^\pm(s, t, x, \xi) - iy \cdot \xi} d\xi$$

et $R_N(s, t) \in B^{-N}$ dépendant de s, t de façon admissible. Posons

$$\tilde{J}_j^\pm(t, s) = (J_j^\pm(s, t))^* \quad \text{et} \quad \tilde{R}_N(t, s) = (R_N(s, t))^*,$$

où $\tilde{J}_j^\pm(t, s)$ est un opérateur intégral de Fourier de noyau

$$\tilde{J}_j^\pm(t, s, x, y) = \int \tilde{c}_j^\pm(t, s, y, x, \xi) e^{-i\tilde{\varphi}_j^\pm(t, s, y, \xi) + ix \cdot \xi} d\xi$$

avec $\tilde{c}_j^\pm(t, s, y, x, \xi) = \overline{c_j^\pm(s, t, y, x, \xi)}$ et $\tilde{\varphi}_j^\pm(t, s, y, \xi) = \varphi_j^\pm(s, t, y, \xi)$. Finalement, $\tilde{R}_N(t, s)$ vérifie les mêmes propriétés régularisantes que $R_N(s, t)$. On obtient la même représentation pour $\psi U(t, s)$. □

1.7.2 Les espaces de Besov

Avant de présenter et d'appliquer les résultats de Kapitanski, nous allons faire un petit rappel sur les espaces de Besov que nous utiliserons. Commençons par définir ces espaces. Considérons $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \chi(2^{-k}\xi) = 1 \quad \text{pour } \xi \neq 0.$$

Pour $j \geq 1$, considérons $\chi_j(\xi) = \chi(2^{-j}\xi)$ et $\chi_0(\xi) = 1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \chi_j(\xi)$. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $1 \leq q, q_1 \leq +\infty$. On définit $\|\cdot\|_{B_{q,q_1}^r}$ par

$$\|f\|_{B_{q,q_1}^r} = \|(2^{jr} \|\chi_j(D)f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)})_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^{q_1}(\mathbb{N})}.$$

Les espaces

$$B_{q,q_1}^r(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{B_{q,q_1}^r} < +\infty\},$$

sont appelés les espaces de Besov. Ici $\chi_j(D)f = \mathcal{F}^{-1}(\chi_j(\xi)\mathcal{F}(f)(\xi))$.

Proposition 1.7.4 *Soient $2 \leq q \leq \infty$. Alors, $B_{q,2}^0(\mathbb{R}^n)$ s'injecte de façon continue dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 1.7.5 *Soit $A \in B^m$. Alors, pour tous $r \in \mathbb{R}$ et $1 \leq q, q_1 < +\infty$, on a $A \in \mathcal{L}(B_{q,q_1}^r, B_{q,q_1}^{r-m})$.*

On renvoie à [Kapi90] et [Tri] pour la preuve de ces propriétés.

1.7.3 Preuve du Théorème 1.5.1

Considérons des opérateurs $\tilde{I}_j(t, s)$ ayant des noyaux de la forme (1.7.2). D'après les résultats établis par Kapitanski dans [Kapi90], on obtient l'estimation suivante des opérateurs $\tilde{I}_j(t, s)$.

Lemme 1.7.3 ([Kapi90], Lemme 3.1) *Soit $\tilde{I}(t, s)$ un opérateur intégral de Fourier de noyau*

$$\tilde{I}(t, s, x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} b(t, s, y, x, \xi) e^{ix \cdot \xi - i\varphi(t, s, y, \xi)} d\xi.$$

Supposons que $b(t, s, x, \xi) \in S_{1,0}^0$ est telle que $b(t, s, \cdot, \cdot)$ dépend de façon régulière de t, s , $\text{supp}_y b(t, s, y, x, \xi) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq R\}$, $b(t, s, y, x, \xi) = 0$, pour $|\xi|$ petit, tandis que φ est \mathcal{C}^∞ et homogène de degré 1 en ξ avec $\varphi(s, s, y, \xi) = y \cdot \xi$. Soit $r, \varepsilon > 0$ et soit m le plus grand entier positif vérifiant

$$m \leq \text{rang}(\partial_\xi^2 \partial_t \varphi(s, s, y, \xi)), \quad |y| \leq r, \quad |\xi| \geq \varepsilon.$$

Alors, pour $|t - s|$ suffisamment petit et $2 \leq q < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\left(n - \frac{m}{2}\right) \frac{q-2}{q} \leq \nu \leq \frac{n(q-2)}{q}, \quad (1.7.30)$$

on a

$$\|\tilde{I}(t, s)f\|_{B_{q,2}^0(\mathbb{R}^n)} \leq C|t - s|^{\nu - \frac{n(q-2)}{q}} \|f\|_{B_{q,2}^\nu}. \quad (1.7.31)$$

Notons que ce lemme généralise le résultat du Lemme 3.1 de [Kapi90], mais comme la phase φ ne dépend pas de x la preuve est identique. Pour les opérateurs ayant des noyaux de la forme (1.7.2), on obtient

$$\partial_t(\varphi^\pm(s, s, y, \xi)) = \mp \sqrt{a(s, y)} |\nabla_y \varphi^\pm(s, y, \xi)|,$$

et $\varphi^\pm(s, s, y, \xi) = y \cdot \xi$. Par conséquent, $\partial_t \varphi^\pm(s, s, y, \xi) = \mp \sqrt{a(s, y)} |\xi|$ et cela donne

$$\partial_\xi^2 \partial_t \varphi^\pm(s, s, y, \xi) = \mp \sqrt{a(s, y)} \partial_\xi^2(|\xi|). \quad (1.7.32)$$

Proposition 1.7.6 *Soit $n \geq 3$ et soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^n par $g : \xi \mapsto |\xi|$. Alors*

$$\text{rang}(\partial_\xi^2(g))(\xi) = n - 1, \quad \xi \neq 0. \quad (1.7.33)$$

Preuve. On sait que, pour tout $\xi \neq 0$, on a

$$\partial_\xi^2(|\xi|) = \frac{1}{|\xi|^3} \begin{pmatrix} |\xi| - \xi_1^2 & -\xi_1 \xi_2 & \dots & -\xi_1 \xi_n \\ -\xi_2 \xi_1 & |\xi|^2 - \xi_2^2 & -\xi_2 \xi_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\xi_n \xi_1 & \dots & -\xi_n \xi_{n-1} & |\xi|^2 - \xi_n^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\xi|^3} (|\xi|^2 I_n - N),$$

où $N = (\xi_i \xi_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Nous allons diagonaliser la matrice N . Notons (C_1, \dots, C_n) les colonnes de N . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on trouve

$$C_i = \xi_i (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \text{Vect}((\xi_1, \dots, \xi_n)).$$

Par conséquent, $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}((\xi_1, \dots, \xi_n))$. Cela implique que $\text{rang}(N) = 1$ donc $\dim(\text{Ker}(N)) = n - 1$. De plus, on a

$$N \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \xi_i C_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = |\xi|^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

et on en déduit que $|\xi|^2$ est l'unique valeur propre non nulle de N . Cela entraîne

$$\text{Ker}(N - |\xi|^2 I_n) + \text{Ker}(N) = \mathbb{R}^n,$$

avec $\dim(\text{Ker}(N)) = n - 1$ et $\dim(\text{Ker}(N - |\xi|^2 I_n)) = 1$. Comme N est symétrique, on sait qu'on peut trouver $S \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$SNS^{-1} = \begin{pmatrix} |\xi|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela implique

$$S \partial_\xi^2(|\xi|) S^{-1} = \frac{1}{|\xi|^3} \left(|\xi|^2 I_n - \begin{pmatrix} |\xi|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{|\xi|^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\xi|^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & |\xi|^2 \end{pmatrix}$$

et $\text{rang}(\partial_{\xi}^2(g)) = n - 1$.

□

L'identité (1.7.32) et la formule (1.7.33) impliquent que, pour les opérateurs $\tilde{I}_j(t, s)$, l'estimation (1.7.31) est vraie, pour ν vérifiant (1.7.30) avec $m = n - 1$.

Proposition 1.7.7 *Considérons $2 \leq q < \infty$ et $\frac{(n+1)(q-2)}{2q} < \nu < \frac{n(q-2)}{q}$ et une fonction de troncature $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $s, t \in [0, T]$ avec $0 < t - s < \delta$, on a*

$$\|\psi U(t, s)f\|_{B_{q,2}^0(\mathbb{R}^n)} \leq C|t - s|^{\nu - \frac{n(q-2)}{q}} \|f\|_{B_{q',2}^\nu(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.7.34)$$

$$\|\psi V(t, s)g\|_{B_{q,2}^0(\mathbb{R}^n)} \leq C|t - s|^{\nu - \frac{n(q-2)}{q}} \|\Lambda^{-1}g\|_{B_{q',2}^\nu(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.7.35)$$

avec $C > 0$ indépendant de s, t et f .

Kapitanski a établi (1.7.34) et (1.7.35), pour $s = 0$, dans le Théorème 1 de [Kapi90], en appliquant le Lemme 1.7.3 à la représentation (1.7.2), pour $s = 0$. Dans le Théorème 1.7.1, nous avons montré qu'on peut représenter $\psi U(t, s)$ et $\psi V(t, s)$ avec une somme d'opérateurs intégraux de Fourier dont l'amplitude et la phase sont uniformément bornées indépendamment de $s, t \in [0, T]$, modulo un opérateur suffisamment régularisant et uniformément borné indépendamment de $s, t \in [0, T]$. Ce dernier argument nous permet de généraliser le résultat de Kapitanski afin d'obtenir la Proposition 1.7.7.

Théorème 1.7.2 *Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour $2 \leq p, q < +\infty$ et $\gamma > 0$ vérifiant*

$$\frac{1}{p} = \frac{n(q-2)}{2q} - \gamma \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{(n-1)(q-2)}{4q},$$

il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $s \in [0, T]$, on a

$$\int_s^{s+\delta} \|\psi(\mathcal{U}(t, s)f)_1\|_{B_{q,2}^0(\mathbb{R}^n)}^p dt \leq C(T, \varphi, p, q, n) \|f\|_{\dot{H}^\gamma}^p$$

avec $C > 0$ indépendant de s, f .

En appliquant la Proposition 1.7.7, la preuve du Théorème 1.7.2, lorsque $f = (f_1, 0)$, est identique à celle du Théorème 2 de [Kapi90], si on remplace $U(t, s)$ par $\psi U(t, s)$ et si on change la définition donnée pour Λ par Kapitanski. Avec ces mêmes arguments on estime $\psi V(t, s)$ et on en déduit le Théorème 1.7.2.

D'après la Proposition 1.7.4, le Théorème 1.5.1 est une conséquence immédiate du Théorème 1.7.2.

Notons que, dans la preuve du Théorème 1.5.1, on peut omettre l'hypothèse (iii) de (1.1.1). Ainsi, on peut établir des estimations de Strichartz locales sans supposer $a(t, x)$ périodique en temps ni n impair. Plus précisément, on obtient les estimations suivantes :

Corollaire 1.7.1 *Supposons que $n \geq 2$ et que $a(t, x)$ est une fonction \mathcal{C}^∞ définie sur \mathbb{R}^{1+n} vérifiant la condition (i) et (ii) de (1.1.1). Soient $2 \leq p, q < +\infty$, $\gamma > 0$ tels que*

$$\frac{1}{p} = \frac{n(q-2)}{2q} - \gamma, \quad \frac{1}{p} \leq \frac{(n-1)(q-2)}{4q}.$$

Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute solution u de (0.1.3) avec $s \in [0, T_1]$ et $f \in \dot{\mathcal{H}}_\gamma$, on a

$$\|u\|_{L^p([s, s+\delta], L^q(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{C([s, s+\delta], \dot{H}^\gamma)} + \|\partial_t(u)\|_{C([s, s+\delta], \dot{H}^{\gamma-1})} \leq C(p, q, \rho, \gamma, n, T_1) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_\gamma},$$

avec $C(p, q, \rho, \gamma, n, T_1)$ indépendant du choix de s , pour s parcourant $[0, T_1]$.

1.8 Exemples de métriques $a(t, x)$ vérifiant les conditions (H1) et (H2)

Dans cette section nous allons donner des exemples de métriques $a(t, x)$ vérifiant les hypothèses (H1) et (H2) ainsi qu'une estimation uniforme de l'énergie. Nous allons commencer par définir une classe de métriques non captives vérifiant (1.1.1).

1.8.1 Exemples de perturbations non captives

L'exemple que nous allons définir dans cette sous-section est valable pour n pair et pour n impair. L'objectif de cette sous-section sera de montrer que, pour une métrique $a(t, x)$ vérifiant l'inégalité

$$\frac{2a}{\rho} - \frac{|a_t|}{\sqrt{\inf a}} - |a_r| \geq \beta > 0, \quad (1.8.1)$$

la condition de non capture (H1) est satisfaite. Pour cela nous allons appliquer les propriétés des bicaractéristiques que nous avons défini dans la Section 1.7. Nous rappelons que les bicaractéristiques nulles $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$ de $\partial_t^2 u - \operatorname{div}_x(a \nabla_x u) = 0$ sont, respectivement, la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial \sigma} = 2\tau, & \frac{\partial x}{\partial \sigma} = -2a(t, x)\xi, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = a_t(t, x)|\xi|^2, & \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = |\xi|^2 \nabla_x a(t, x), \\ (x(0), t(0), \tau(0), \xi(0)) = (x_0, t_0, \tau_0, \xi_0), \end{cases}$$

avec $H(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) = 0$. Prenons $|x_0| \leq R_1$ et $\xi_0 \neq 0$. D'après la Proposition 1.7.1, $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R} , $\tau(\sigma) = \pm \sqrt{a(t(\sigma), x(\sigma))}$ et les bicaractéristiques paramétrées par rapport à t , notées $(t, x(t), \tau(t), \xi(t))$, sont définies pour $t \in \mathbb{R}$. Nous allons prouver que si la condition (1.8.1) est vraie, alors $|x(t)|^2$ est majorée par un polynôme de degré 2 en $(t - t_0)$ dont les coefficients sont indépendants de t , t_0 , ξ_0 et x_0 , pour $|x_0| \leq R_1$. En considérant les bicaractéristiques paramétrées par rapport à t , on trouve

$$\frac{\partial |x|^2}{\partial t} = -2a(t, x) \frac{\xi \cdot x}{\tau}. \quad (1.8.2)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\xi \cdot x}{\tau} \right)}{\partial t} &= \frac{|\xi|^2 \nabla_x a \cdot x}{2\tau^2} - \frac{a|\xi|^2}{\tau^2} + \frac{\xi \cdot x}{2\tau} \left(-\frac{a_t|\xi|^2}{\tau^2} \right) \\ &= \frac{a_r}{2a} |x| - 1 - \frac{a_t}{2a} \frac{\xi \cdot x}{\tau}. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

L'hypothèse (1.1.1) (ii) implique que $a_t(t, x) = a_r(t, x) = 0$, pour $|x| > \rho$. On déduit de cela

$$|a_t(t, x)| |x| \leq |a_t(t, x)|\rho, \quad |a_r(t, x)| |x| \leq |a_r(t, x)|\rho, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1.8.4)$$

En appliquant (1.8.4) et l'inégalité de Cauchy Schwarz à la formule (1.8.3), on obtient

$$\frac{\partial \left(\frac{\xi \cdot x}{\tau} \right)}{\partial t} \leq \frac{|a_r|}{2a} \rho + \frac{|a_t|}{2a|\tau|} |\xi| \rho - 1. \quad (1.8.5)$$

La condition (1.8.1) et l'inégalité (1.8.5) impliquent

$$\frac{\partial \left(\frac{\xi \cdot x}{\tau} \right)}{\partial t} \leq -\frac{\rho}{2a} \left(\frac{2a}{\rho} - \frac{|a_t|}{\sqrt{a}} - |a_r| \right) \leq -\frac{\rho}{2a} \left(\frac{2a}{\rho} - \frac{|a_t|}{\sqrt{\inf a}} - |a_r| \right),$$

et on obtient

$$\frac{\partial \left(\frac{\xi \cdot x}{\tau} \right)}{\partial t} \leq -\frac{\rho}{2a} \beta \leq -\alpha < 0.$$

En intégrant cette formule par rapport à t , pour $t > t_0$, on a

$$-2a \frac{x \cdot \xi}{\tau} \geq -2a \frac{x_0 \cdot \xi_0}{\tau_0} + 2a\alpha(t - t_0) \geq 2\alpha C_0(t - t_0) - C_1|x_0|. \quad (1.8.6)$$

D'après (1.8.2), en intégrant (1.8.6) on trouve

$$|x(t)|^2 \geq \alpha C_0(t - t_0)^2 - C_1|x_0|(t - t_0) + |x_0|^2 \geq \alpha C_0(t - t_0)^2 - C_1 R_1(t - t_0). \quad (1.8.7)$$

Comme $\frac{dt}{d\sigma} = 2\tau$, en remplaçant $\frac{x \cdot \xi}{\tau}$ par $\frac{x \cdot \xi}{-\tau}$, en appliquant le même argument, on voit que (1.8.7) est aussi vraie pour $t < t_0$. Notons $Q(y)$ le polynôme de degré 2 défini par

$$Q(y) = \alpha C_0 y^2 - C_1 R_1 y.$$

Comme $Q(y)$ est un polynôme dont le coefficient dominant est strictement positif et que ses coefficients sont indépendants de t , t_0 , ξ_0 et x_0 , pour tout $R > 0$, il existe $T(R, R_1) > 0$ indépendant de t , t_0 , ξ_0 et x_0 , tel que pour $|y| \geq T(R, R_1)$ on a

$$Q(y) \geq R.$$

En appliquant ce dernier résultat, on voit facilement que l'estimation (1.8.7) de $|x(t)|^2$ implique (H1).

1.8.2 Conditions suffisantes pour une énergie globale uniformément bornée

Dans cette sous section nous présentons des exemples de métriques $a(t, x)$ permettant d'avoir une estimation uniforme de l'énergie. Les résultats de cette sous section sont valables pour n pair et n impair. Plus précisément, nous allons donner des exemples de métriques $a(t, x)$ vérifiant (i) et (ii) de (1.1.1), telles que la solution u de (0.1.3) vérifie

$$\|(u, u_t)(t)\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad t > 0 \quad (1.8.8)$$

avec $C > 0$ indépendant de t , f et s . Pour cela, nous appliquerons la méthode classique de multiplicateurs (voir [Pet89]).

Soit $\xi(r)$ une fonction \mathcal{C}^∞ qui est radiale ($\xi(x)$ ne dépend que de $r = |x|$) vérifiant les conditions suivantes :

$$\xi'' \leq 0, \quad 0 < r\xi' \leq \xi \leq \varepsilon \inf a < \inf a, \quad (1.8.9)$$

Supposons que ξ et $a(t, x)$ vérifient

$$\xi'a - a_t - \xi a_r \geq 0 \quad (1.8.10)$$

et

$$\left(\frac{\xi}{r} - \xi'\right) \left(\frac{a(n-3)}{r} + a_r\right) - a\xi'' \geq 0. \quad (1.8.11)$$

Théorème 1.8.1 *Supposons que $a(t, x)$ vérifie les conditions (1.8.10) et (1.8.11) pour une fonction radiale $\xi(r)$ vérifiant (1.8.9). Alors, la solution u de (0.1.3) vérifie l'estimation uniforme (1.8.8).*

Soit $v(t, x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1})$. Notons

$$e(v) = \frac{1}{2}(a|\nabla_x v|^2 + v_t^2), \quad M_\xi(v) = v_t + \xi v_r + \frac{\xi(n-1)}{2r}v,$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Lemme 1.8.1 *Soit $u(t, x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1})$. Alors*

$$M_\xi(u)(\partial_t^2 u - \operatorname{div}_x(a\nabla_x u)) = \frac{\partial X}{\partial t} + \operatorname{div}_x Y + Z, \quad (1.8.12)$$

avec

$$\begin{aligned} X &= e(u) + \xi u_t \left(u_r + \frac{n-1}{r} u \right), \\ Y &= -a\nabla_x u M_\xi(u) + \frac{x\xi}{2r}(a|\nabla_x u|^2 - u_t^2) + \frac{n-1}{4r^2} \left(\xi' - \frac{\xi}{r} \right) x u^2, \\ Z &= \frac{1}{2}\xi' u_t^2 + a \left(\frac{\xi}{r} - \xi' \right) (|\nabla u|^2 - u_r^2) + \left(\frac{\xi}{r} - \xi' \right) (|\nabla_x u|^2 - u_r^2) \\ &\quad + \left[\left(\frac{\xi}{r} - \xi' \right) \left(\frac{a(n-3)}{r} + a_r \right) - a\xi'' \right] \frac{n-1}{4r} u^2 + \frac{1}{2}(a\xi' - a_t - \xi a_r) |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Nous omettrons la preuve de (1.8.12) qui est un calcul direct.

Preuve du Théorème 1.8.1. Pour montrer (1.8.8), il suffit de considérer les solutions à valeurs réelles de (0.1.3) de condition initiale $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit

$$\mathcal{U}(t, s)f = (u(t, \cdot), u_t(t, \cdot)).$$

Pour chaque t la fonction $u(t, x)$ est à support compact et \mathcal{C}^∞ par rapport à x . Ainsi, u vérifie (1.8.12) et sous ces conditions (1.8.12) est intégrable sur \mathbb{R}^n par rapport à x . Les conditions (1.8.9), (1.8.10), (1.8.11) impliquent que $Z \geq 0$. Par conséquent, en intégrant (1.8.12) et en supposant que $n \geq 4$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial X}{\partial t} dx + \int_{\mathbb{R}^n} Z dx + \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}_x(Y) dx = 0. \quad (1.8.13)$$

D'après les propriétés de u on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}_x(Y) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq R} \operatorname{div}_x(Y)(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \delta^{n-1} Y(\delta x) \cdot x d\sigma(x) = 0. \quad (1.8.14)$$

De plus, comme $u(t, x)$ est à support compact par rapport à x , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial X}{\partial t} dx = \frac{\partial \left(\int_{\mathbb{R}^n} X dx \right)}{\partial t}. \quad (1.8.15)$$

En appliquant (1.8.14) et (1.8.15), (1.8.13) implique

$$\frac{\partial \left(\int_{\mathbb{R}^n} X dx \right)}{\partial t} = - \int_{\mathbb{R}^n} Z dx \leq 0. \quad (1.8.16)$$

L'égalité (1.8.16) montre que $\int_{\mathbb{R}^n} X(t, x) dx$ est décroissant et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} X(t, x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} X(s, x) dx. \quad (1.8.17)$$

Pour X on utilise la représentation

$$\begin{aligned} X &= \left(1 - \frac{\xi}{\inf a} \right) e(u) + \xi u^2 \frac{(n-1)(n-3)}{8r^2} + \xi' u^2 \frac{(n-1)}{4r} \\ &\quad + \operatorname{div}_x \left(-\xi u^2 \frac{n-1}{4r^2} x \right) \\ &\quad + \xi \left[\frac{e(u)}{\inf a} + \frac{n-1}{r} u u_r + \frac{(n-1)^2}{8r^2} u^2 + u_t \left(u_r + \frac{n-1}{2r} u \right) \right]. \end{aligned}$$

Maintenant, comme $\inf a \leq 1$, il est facile de voir que

$$u_t \left(u_r + \frac{n-1}{2r} u \right) \geq -\frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} \left| u_r + \frac{n-1}{2r} u \right|^2 \geq - \left(\frac{e(u)}{\inf a} + \frac{(n-1)}{r} u u_r + \frac{(n-1)^2}{8r^2} u^2 \right).$$

Par conséquent, le dernier terme dans la représentation de X est positif et cela entraîne

$$\int_{\mathbb{R}^n} X(t, x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 - \frac{\xi}{\inf a} \right) e(u)(t, x) dx \geq \frac{(1-\varepsilon)}{2} c \|(u, u_t)(t)\|_{\dot{H}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.8.18)$$

avec c, C des constantes indépendantes de f et t telles que

$$c\|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} (a(t, x)|\nabla f_1|^2 + (f_2)^2) dx \leq C\|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n), \quad t > 0.$$

De même, en écrivant X de la façon suivante

$$\begin{aligned} X &= \left(1 + \frac{\xi}{\inf a}\right) e(u) - \xi u^2 \frac{(n-1)(n-3)}{8r^2} - \xi' u^2 \frac{(n-1)}{4r} \\ &\quad + \operatorname{div}_x \left(\xi u^2 \frac{n-1}{4r^2} x \right) \\ &\quad - \xi \left[\frac{e(u)}{\inf a} + \frac{n-1}{r} u u_r + \frac{(n-1)^2}{8r^2} u^2 + u_t \left(u_r + \frac{n-1}{2r} u \right) \right], \end{aligned}$$

on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}^n} X(s, x) dx \leq \frac{(1+\varepsilon)}{2} C \|(u, u_t)(s)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.8.19)$$

La décroissance (1.8.17) et les inégalités (1.8.18) et (1.8.19) impliquent l'estimation uniforme

$$\|(u, u_t)(t)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C(1+\varepsilon)}{c(1-\varepsilon)} \|(u, u_t)(s)\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.8.20)$$

Pour $n = 3$ le terme Y a une singularité en $r = 0$ et en intégrant sur $0 < \delta \leq |x| \leq R$, on trouve

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\delta \leq |x| \leq R} \operatorname{div}_x Y dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\delta \leq |x| \leq R} -\operatorname{div}_x \left(\frac{\xi(n-1)}{4r^3} x u^2 \right) dx.$$

Cela implique

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}_x(Y) dx = \frac{n-1}{4} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^2} \delta^2 \frac{\xi}{\delta^3} u^2(t, \delta\omega) \delta\omega \cdot x d\sigma(\omega) = \frac{(n-1)\pi}{2} \xi(0) u(t, 0)^2 \geq 0. \quad (1.8.21)$$

D'après (1.8.21), l'expression $\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}_x(Y) dx$ est positive. On en déduit facilement (1.8.17) puis (1.8.20), pour $n = 3$. Finalement, on prouve (1.8.8) à partir de (1.8.20) en appliquant un argument de densité. \square

Notons que pour une métrique permettant d'avoir une estimation uniforme de l'énergie, on a

$$\sigma(Z^b(T, 0)) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Ainsi, on voit que l'estimation (1.8.8) ne permet pas d'exclure la présence de valeurs propres de $Z^b(T, 0)$ appartenant à \mathbb{S}^1 . Nous devons imposer des conditions plus fortes sur $a(t, x)$ afin d'éliminer les résonances appartenant à \mathbb{S}^1 .

1.8.3 Décroissance exponentielle de l'opérateur $Z(t, s)$ associé à une métrique périodique

Dans cette sous-section on se propose d'appliquer les résultats obtenus pour les métriques non captives indépendantes de t afin de construire une métrique périodique en t et non captive telle que la condition (H2) soit satisfaite. Considérons une métrique $a(t, x)$ T -périodique par rapport à t (avec $T > 0$ à déterminer) telle que $a(t, x)$ vérifie (1.1.1) et (1.8.1). De plus, supposons qu'il existe $T_1 \in [0, T]$ tel que $T_1 < 1$ et

$$a(t, x) = a_1(x), \quad t \in [T_1, T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.8.22)$$

Notons que, d'après les résultats de la sous-section 1.8.1, la condition (1.8.1) implique que $a_1(x)$ et $a(t, x)$ sont des métriques non captives. Notre objectif sera de montrer que pour T suffisamment grand $a(t, x)$ vérifie l'hypothèse (H2). Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} v_{tt} - \operatorname{div}_x(a_1(x)\nabla_x v) = 0, \\ (v, v_t)(0) = f, \end{cases} \quad (1.8.23)$$

et le propagateur

$$\mathcal{V}(t) : \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto (v, v_t)(t) \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n),$$

associé au problème (1.8.23). Soit u la solution du problème (0.1.3). Pour $T_1 \leq t \leq T$ on a

$$\partial_t^2 u - \operatorname{div}_x(a_1(x)\nabla_x u) = \partial_t^2 u - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x u) = 0.$$

Cela entraîne que, pour tout $T_1 \leq s < t \leq T$, on a

$$\mathcal{U}(t, s) = \mathcal{V}(t - s). \quad (1.8.24)$$

Le comportement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$ des solutions de l'équation des ondes avec une métrique indépendante de t a été très largement étudié (voir [TZ], [Vain88]). En particulier, on a prouvé que sous une condition de non capture et pour $n \geq 3$ impair, l'énergie locale associée au problème (1.8.23) admet le développement asymptotique suivant :

Théorème 1.8.2 *Supposons que $n \geq 3$ est impair et $a(t, x)$ est non captive et indépendante de t . Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ identiquement égale à 1 sur un voisinage de $B(0, \rho)$. Alors, pour tous $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, pour tout $t > 0$ suffisamment grand et $g \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\chi u = \sum_{\substack{\lambda_j \in \operatorname{Res}(A) \\ \operatorname{Im}(\lambda_j) < 0}}^{M_j} \sum_{m=0} e^{-i\lambda_j t} t^m w_{j,m} + E_C(t)g \quad (1.8.25)$$

où u est solution de (0.1.3) avec $s = 0$, $A = \operatorname{div}_x(a(x)\nabla_x \cdot)$ et $f = \chi g$, les $w_{j,m} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont les états de résonances tronqués correspondant aux résonances λ_j , $\operatorname{Res}(A)$ sont les pôles du prolongement méromorphe de

$$\chi(\operatorname{div}_x(a(x)\nabla_x \cdot) - \lambda^2)^{-1}\chi$$

et $E_C(t)g$ est le terme d'erreur vérifiant

$$\|E_C(t)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C(\varepsilon)e^{-(C-\varepsilon)t}.$$

Pour la preuve de (1.8.25) on renvoie à [Vain88] et [TZ]. On déduit de la représentation (1.8.25) l'estimation suivante :

Théorème 1.8.3 *Supposons que $n \geq 3$ est impair. Alors*

$$\|P_+^\rho \mathcal{V}(t) P_-^\rho\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C e^{-\delta t}, \quad (1.8.26)$$

avec $C > 0$ indépendant de t .

Pour la preuve de l'estimation (1.8.26) on peut aussi consulter [Pet89], [CS] et [LP]. L'estimation (1.8.26) et la formule (1.8.24) vont permettre de prouver le résultat suivant :

Proposition 1.8.1 *Supposons que $n \geq 3$ est impair et que $a(t, x)$ est de la forme (1.8.22) et vérifie (1.8.1). Alors, pour T suffisamment grand, l'hypothèse (H2) est satisfaite.*

Preuve. En appliquant (1.8.24), on obtient

$$\mathcal{U}(T) = \mathcal{V}(T - T_1) \mathcal{U}(T_1, 0).$$

Cette représentation permet d'écrire

$$Z^\rho(T, 0) = P_+^\rho \mathcal{V}(T - T_1) \mathcal{U}(T_1, 0) P_-^\rho.$$

La propriété (iii) de la Proposition 1.2.5 implique que $(\text{Id}_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} - P_-^\rho) \mathcal{U}(T_1, 0) P_-^\rho = 0$. En appliquant cette propriété à la formule précédente, on obtient

$$Z^\rho(T, 0) = P_+^\rho \mathcal{V}(T - T_1) P_-^\rho \mathcal{U}(T_1, 0) P_-^\rho.$$

On déduit, de cette représentation de $Z^\rho(T, 0)$ et de (1.8.25), l'estimation

$$\|Z^\rho(T, 0)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C e^{-\delta(T-T_1)} \|\mathcal{U}(T_1, 0)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))}. \quad (1.8.27)$$

En appliquant (1.8.27), il est facile de voir que, pour T suffisamment grand, on a

$$r(Z^\rho(T, 0)) \leq \|Z^\rho(T, 0)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} < 1$$

avec $r(Z^\rho(T, 0))$ le rayon spectral de l'opérateur $Z^\rho(T, 0)$. □

1.9 Généralisation des résultats pour les métriques anisotropes périodiques en temps

Soit $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$ une métrique C^∞ telle que, pour tout $i, j = 1 \cdots n$, on a

- (i) il existe $\rho > 0$ tel que $a_{ij}(t, x) = \delta_{ij}$, pour $|x| \geq \rho$, avec $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$,
- (ii) il existe $T > 0$ tel que $a_{ij}(t + T, x) = a_{ij}(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$,
- (iii) $a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$,
- (iv) il existe $C_0 > c_0 > 0$ tel que

$$C_0 |\xi|^2 \geq \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(1.9.1)

Si on remplace $a(t, x)$ dans (0.1.3) par $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$, on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(s, x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.9.2)$$

L'objectif de cette section est de prouver que les estimations (1.1.4) sont vraies pour la solution u du problème (1.9.2), si pour les trajectoires du symbole

$$\tau^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j$$

et pour l'opérateur $Z^b(T, 0)$ correspondant au problème (1.9.2), (H1) et (H2) sont satisfaites et si n, p, q vérifient (1.1.3). Pour cela, nous allons commencer par établir quelques propriétés des bicaractéristiques associées aux opérateurs différentiels

$$\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(t, x) \partial_{x_j}).$$

On associe à l'opérateur différentiel

$$\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(t, x) \partial_{x_j}),$$

le hamiltonien

$$H(t, x, \tau, \xi) = \tau^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j.$$

Notons $A(t, x)$ la fonction à valeur dans les matrices $n \times n$ définie par

$$A(t, x) = (a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}.$$

Notons que les propriétés (iii) et (iv) de (1.9.1) impliquent que $A(t, x)$ est une matrice symétrique et définie positive, et la propriété (i) implique que $A(t, x) = I_n$, pour $|x| \geq \rho$. De plus, d'après la propriété (iv) de (1.9.1) on a

$$\sigma(A(t, x)) \subset [c_0, C_0], \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \quad (1.9.3)$$

avec $\sigma(A(t, x))$ l'ensemble des valeurs propres de $A(t, x)$. Les bicaractéristiques nulles $(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma))$ de $H(t, x, \tau, \xi)$ sont les solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial \sigma} = 2\tau, \quad \frac{\partial x}{\partial \sigma} = -2A(t, x)\xi, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = \langle \partial_t A(t, x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \partial_x (\langle A(t, x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^n}), \\ (x(0), t(0), \tau(0), \xi(0)) = (x_0, t_0, \tau_0, \xi_0), \end{cases} \quad (1.9.4)$$

avec $H(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) = 0$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n . Nous allons montrer qu'on peut paramétrer les bicaractéristiques de $H(t, x, \tau, \xi)$ par rapport à t , pour $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.9.1 Soit $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$ tel que $H(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) = 0$ et $\xi_0 \neq 0$. Alors, la solution maximale de (1.9.4) est définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ de I sur \mathbb{R} .

Preuve. Pour démontrer la Proposition 1.9.1, nous allons employer la même stratégie que celle de la Proposition 1.7.1. Soit $(t(\sigma), x(\sigma), \xi(\sigma), \tau(\sigma))$ la solution maximale de (1.9.4), définie sur I . Pour tout $\sigma \in I$ on a

$$\tau^2(\sigma) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i(\sigma) \xi_j(\sigma) = \tau^2(\sigma) - \langle A(t(\sigma), x(\sigma)) \xi(\sigma), \xi(\sigma) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Cela entraîne

$$\frac{dt}{d\sigma} = 2\tau(\sigma) = \pm 2\sqrt{\langle A(t(\sigma), x(\sigma)) \xi(\sigma), \xi(\sigma) \rangle_{\mathbb{R}^n}}, \quad \sigma \in I \quad (1.9.5)$$

et d'après la propriété (iv) de (1.9.1)

$$|\tau(\sigma)| \leq \sqrt{C_0} |\xi(\sigma)|, \quad \sigma \in I.$$

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma_0 \in I$ tel que $\xi(\sigma_0) = 0$. Comme

$$(t_1(\sigma), x_1(\sigma), \tau_1(\sigma), \xi_1(\sigma))$$

définie par

$$(t_1(\sigma), x_1(\sigma), \tau_1(\sigma), \xi_1(\sigma)) = (t(\sigma_0), x(\sigma_0), 0, 0), \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

est la solution sur \mathbb{R} de (1.9.4) avec la condition initiale $(t(\sigma_0), x(\sigma_0), 0, 0)$, l'unicité de la solution de (1.9.4) implique

$$(t(\sigma), x(\sigma), \tau(\sigma), \xi(\sigma)) = (t(\sigma_0), x(\sigma_0), 0, 0), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (1.9.6)$$

Sachant que $\xi(0) = \xi_0 \neq 0$, (1.9.6) nous conduit à une contradiction. On en déduit que, pour tout $\sigma \in I$, $\xi(\sigma) \neq 0$, et, d'après (1.9.1), on a

$$\sqrt{\langle A(t(\sigma), x(\sigma)) \xi(\sigma), \xi(\sigma) \rangle_{\mathbb{R}^n}} \geq \sqrt{c_0} |\xi(\sigma)| > 0. \quad (1.9.7)$$

Les formules (1.9.5) et (1.9.7) impliquent que $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est strictement monotone sur I et c'est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ de I sur $\text{Image}(t)$. Par la suite, en appliquant des arguments proches de ceux que nous avons utilisé pour prouver la Proposition 1.7.1, on montre que $\text{Image}(t) = \mathbb{R}$. \square

Soit $(t, x(t), \tau(t), \xi(t))$ une bicaractéristique paramétrée par rapport à t de

$$\tau^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j$$

vérifiant $|x(t_0)| \leq R_1$. En appliquant le résultat de la Proposition 1.9.1, on introduit l'hypothèse de non capture qui s'écrit de la façon suivante :

(H1') On dit que la métrique $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$ est non captive si, pour tout $R > R_1$, il existe $T(R, R_1) > 0$ telle que $|x(t)| > R$, pour $|t - t_0| \geq T(R, R_1)$.

Notons $\mathcal{R}(t, s)$, le propagateur associé au problème (1.9.2), définie par

$$\mathcal{R}(t, s) : \dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n) \ni (f_1, f_2) = f \mapsto \mathcal{R}(t, s)f = (u, u_t)(t, x) \in \dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n),$$

et notons $Z_2^b(t, s) = P_b^+ \mathcal{R}(t, s) P_b^-$. On introduit notre seconde hypothèse qui sera

(H2')

$$\sigma(Z_2^p(T, 0)) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\} = \emptyset.$$

Proposition 1.9.2 Soit $n \geq 3$ et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^{1+n} \times \mathbb{R}^n$ par

$$h : (t, x, \xi) \mapsto \sqrt{\langle A(t, x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^n}}.$$

Alors

$$\text{rang}(\partial_\xi^2(h))(t, x, \xi) = n - 1, \quad \xi \neq 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}. \quad (1.9.8)$$

Preuve. Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$. Comme $A(t, x)$ est une matrice symétrique et définie positive, il existe une matrice $B(t, x)$ symétrique et définie positive telle que

$$B(t, x)^2 = A(t, x).$$

Par conséquent, on obtient

$$h(t, x, \xi) = \sqrt{\langle B(t, x)\xi, B(t, x)\xi \rangle} = |B(t, x)\xi|.$$

En appliquant (1.7.33) et le fait que $B(t, x)$ est une matrice inversible, on déduit (1.9.8). \square

En répétant les arguments employés dans la Section 1.7, en appliquant la Proposition 1.9.1 et la propriété (1.9.8), on établit les estimations locales suivantes :

Théorème 1.9.1 Soient $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et u solution de (1.9.2). Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $2 \leq p, q < +\infty$ et $\gamma > 0$ vérifiant

$$\frac{1}{p} = \frac{n(q-2)}{2q} - \gamma \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{(n-1)(q-2)}{4q},$$

on a

$$\int_s^{s+\delta} \|\psi u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p dt \leq C(T, \varphi, p, q, n) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_\gamma}^p,$$

où δ et $C > 0$ sont indépendants de s et f .

Ensuite, en appliquant les mêmes arguments que dans la Section 1.2, on montre l'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale et on en déduit les estimations suivantes :

Théorème 1.9.2 Soit $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$ une métrique pour laquelle (H1') et (H2') sont satisfaites. Supposons que $2 \leq p, q < +\infty$ vérifient les conditions

$$p > 2, \quad \frac{1}{p} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right).$$

Alors, si $u(t)$ est solution de (1.9.2), avec $s = 0$ et $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, on a, pour tout $t > 0$, l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q, \rho, T)(\|f_1\|_{\dot{H}^1} + \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

Chapitre 2

Estimations de Strichartz pour l'équation des ondes avec une perturbation périodique en temps et non captive en dimension paire

2.1 Introduction

Tout au long de ce chapitre nous allons considérer que $n \geq 3$. On considère le problème de Cauchy (0.1.3) où la métrique $a(t, x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ est une fonction scalaire et T périodique en t qui vérifie les conditions (1.1.1). Nous supposons que l'hypothèse (H1) du Chapitre 1 est satisfaite. Afin d'exclure l'existence de solutions dont l'énergie croît de façon exponentielle nous supposons que l'hypothèse (H3) est satisfaite. Contrairement à l'hypothèse (H2) du Chapitre 1, l'hypothèse (H3) sera valable pour les dimensions paires et impaires. Dans le Chapitre 1, nous avons établi des estimations de Strichartz globales pour $n \geq 3$ impair, en supposant que l'hypothèse (H1) et (H2) sont satisfaites. Plus précisément, nous avons établi dans le Chapitre 1 que sous les hypothèses (H1), (H2), pour $n \geq 3$ impair et pour $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant

$$p > 2, \quad \frac{1}{p} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad (2.1.1)$$

la solution $u(t)$ de (0.1.3), pour $s = 0$ et $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, vérifie l'estimation

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\rho, T, n, p, q) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.1.2)$$

De plus, d'après les résultats établis dans la Section 1.5 et la Section 1.6 du Chapitre 1, pour $n \geq 3$ et pour $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant

$$\frac{1}{p} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad (2.1.3)$$

la solution u de (0.1.3) vérifie l'estimation locale

$$\|\chi u\|_{L_t^p([s, s+\delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \quad (2.1.4)$$

avec $C, \delta > 0$ indépendants de f et de s , et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. L'objectif de ce chapitre est de démontrer que, sous les hypothèses (H1) et (H3), les estimations (2.1.2) sont aussi vraies pour les dimensions paires. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit $n \geq 4$ pair. Soit $a(t, x)$ une métrique T périodique en t telle que (H1) et (H3) sont satisfaites. Supposons que $2 \leq p, q < +\infty$ vérifient les conditions (2.1.1). Alors, pour $u(t)$ solution de (0.1.3), avec $s = 0$ et $f \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$, on a, pour tout $t > 0$, l'estimation*

$$\|u\|_{L_t^p(\mathbb{R}^+, L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t(u)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q, \rho, T)(\|f_1\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}). \quad (2.1.5)$$

L'intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale est l'argument principal permettant d'obtenir les estimations (2.1.5) à partir des estimations (2.1.4) (voir la Section 1.6 du Chapitre 1). Le point crucial de la preuve des estimations (2.1.5) sera de démontrer l'intégrabilité L^2 par rapport à t de l'énergie locale. Pour cela, nous devons montrer que pour toutes fonctions de troncature $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\psi = 1$ pour $|x| \leq \rho + 2$ les hypothèses (H1) et (H3) impliquent

$$\|\psi_1 \mathcal{U}(t, s) \psi_2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C_{\psi_1, \psi_2} p(t - s), \quad t \geq s \quad (2.1.6)$$

avec $p(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

La démonstration de (2.1.6) est longue et nous allons décrire les principaux étapes pour faciliter la lecture.

(i) Soit $V(t, s) = P_1 \mathcal{U}(t, s) P^2$, où $P_1(h_1, h_2) = h_1$, $P^2(h) = (0, h)$, pour $h, h_1, h_2 \in \mathbb{C}$. En suivant [Van93], on utilise des fonctions de troncature $\xi(t, s, x)$ et $\psi(x)$ et on introduit un opérateur

$$W(t, s) = \xi(t, s) V(t, s) - \psi N(t, s),$$

où

$$N(t, s) = \int_s^t \frac{\sin(\Lambda(t - \tau))}{\Lambda} \psi[P(\tau), \xi(t, \tau)] V(\tau, s) d\tau.$$

et $P(t) = \partial_t^2 - \operatorname{div}_x(a(t, x) \nabla_x \cdot)$.

(ii) On introduit un opérateur $L(t, s)$ comme solution d'une équation intégrale et on pose

$$R(t, s) = -\psi N(t, s) + \int_s^t W(t, \tau) L(\tau, s) d\tau.$$

Si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'hypothèse (H1) permet d'appliquer le résultat de Vainberg [Van93] et on conclut que la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand

$$R(t, s, \theta) = F'(\chi R(t, s))(t, \theta)$$

admet un *prolongement méromorphe* vérifiant la propriété (S') (voir Théorème 2.3.10 ci-dessous). On prouve que

$$\chi_1 V(t, s) \chi_2 = \chi_1 R(t, s) \chi_2, \quad \chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(|x| \leq b)$$

et on obtient un *prolongement méromorphe* de la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand

$$F'(\chi_1 V(t, s) \chi_2)(t, \theta).$$

(iii) Le **point crucial** est de trouver une liaison entre $V(t, s, \theta) = F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(t, \theta)$ et la résolvante tronquée

$$R_{\psi_4, \psi_4}(\theta) = \chi_4(\mathcal{U}(T, 0) - e^{-i\theta})^{-1} \psi_4,$$

définie dans l'introduction, où $\chi_3, \psi_3, \chi_4, \psi_4$ sont des troncatures convenables (voir (2.3.45)). Notons $\mathbb{C}' = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 2k\pi - i\mu, k \in \mathbb{Z}, \mu \geq 0\}$. Ici notre hypothèse (H3) permet de conclure que $V(dT, s, \theta)$ n'a pas de pôles dans

$$\{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$$

et, de plus, on obtient un comportement borné quand $\theta \rightarrow 0, \text{Im} \theta > 0$.

(iv) En intégrant sur une contour bien choisi dans \mathbb{C}' , on établit l'estimation

$$\|\chi_3 V(dT, 0) \psi_3\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), H^1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)}, \quad d \geq k_0$$

avec $k_0 \in \mathbb{N}$ assez grand (voir la sous-section 2.3.4). Cela implique la décroissance de l'énergie locale des solutions de (0.1.3) lorsque $f = (0, f_2)$.

(v) En appliquant les résultats des étapes (iii), (iv), on prouve la décroissance de l'énergie locale des dérivées d'ordre 1 en t des solutions de (0.1.3) lorsque $f = (0, f_2)$.

(vi) En utilisant la propagation en temps fini et la liaison entre $V(t, s)$ et $U(t, 0)$, on déduit la décroissance de l'énergie locale des solutions de (0.1.3) lorsque $f = (f_1, 0)$.

(vii) En appliquant les mêmes arguments que ceux utilisés dans l'étape (vi), on prouve la décroissance de l'énergie locale des dérivées d'ordre 1 en t des solutions de (0.1.3) lorsque $f = (f_1, 0)$.

(viii) On examine l'opérateur $\chi_1 \mathcal{U}(t, s) \psi_1$, où χ_1 et ψ_1 sont des troncatures convenables (voir (2.3.45)), et on établit (2.1.6) avec une fonction $p(t) \in L^1([0, +\infty[)$.

2.2 Equivalence des hypothèses (H2) et (H3)

Dans cette section nous supposons que l'hypothèse (H1) est satisfaite. L'objectif de cette section est de prouver que les hypothèses (H3) et (H2) sont équivalentes pour les dimensions $n \geq 3$ impaires.

Proposition 2.2.1 *Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi = 1$ sur $|x| \leq \rho + \frac{1}{2} + T$. Alors, on a*

$$\mathcal{U}(T) - U_0(T) = \psi(\mathcal{U}(T) - U_0(T)) = (\mathcal{U}(T) - U_0(T))\psi. \quad (2.2.1)$$

Preuve. Soit $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ et v la fonction définie par $(v(t), v_t(t)) = \mathcal{U}(t, 0)(1 - \psi)f$. La propagation en temps fini implique que, pour tout $0 \leq t \leq T$ et $|x| \leq \rho + \frac{1}{2}$, on a $v(t, x) = 0$. Ainsi, on trouve

$$\Delta_x = \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x), \quad \text{pour } |x| > \rho \quad (2.2.2)$$

et on en déduit que v est la solution, pour $0 \leq t \leq T$, de

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta_x v = 0, \\ (v, v_t)(0, x) = (1 - \psi(x))f(x). \end{cases}$$

Cela implique

$$(\mathcal{U}(T) - U_0(T))(1 - \psi) = 0. \quad (2.2.3)$$

Notons maintenant u et v les fonctions définies par

$$(u(t), u_t(t)) = \mathcal{U}(t, 0)f \quad \text{et} \quad (v(t), v_t(t)) = U_0(t)f$$

avec $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$. En appliquant (2.2.2), on voit que $(1 - \psi)u$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2((1 - \psi)u) - \Delta_x(1 - \psi)u = [\Delta_x, \psi]u, \\ ((1 - \psi)u, \partial_t((1 - \psi)u))(0, x) = (1 - \psi(x))f(x) \end{cases}$$

et $(1 - \psi)v$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2((1 - \psi)v) - \Delta_x(1 - \psi)v = [\Delta_x, \psi]v, \\ ((1 - \psi)v, \partial_t((1 - \psi)v))(0, x) = (1 - \psi(x))f(x). \end{cases}$$

On en déduit

$$(1 - \psi)(\mathcal{U}(T) - U_0(T)) = 0. \quad (2.2.4)$$

En combinant (2.2.3) et (2.2.4), on obtient (2.2.1). □

Théorème 2.2.1 *Supposons que $n \geq 3$ est impair et que la condition (H1) est satisfaite. Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + T + 1)$ telle que $\psi = 1$, pour $|x| \leq \rho + \frac{1}{2} + T$. Soit $\sigma(Z^\rho(T))$ le spectre de $Z^\rho(T, 0)$. Alors, $\sigma(Z^\rho(T)) \setminus \{0\}$ coïncide avec les pôles de $\psi(\mathcal{U}(T) - z)^{-1}\psi$.*

Preuve. D'après (1.2.28), il suffira de montrer ce résultat pour $Z^b(T)$, avec $b \geq \rho$. Par la suite, on choisira $b = \rho + 2 + T$ et on écrira $Z(T)$, P_+ , P_- en lieu et place de $Z^b(T)$, P_+^b , P_-^b . De même, nous noterons $Z_0(T)$ l'opérateur $Z_0^b(T) = P_+^b U_0(T) P_-^b$. La Proposition 1.2.7 et la Remarque 1.2.4 de la Section 1.2 du Chapitre 1 impliquent que le spectre $\sigma(Z(T))$ de $Z(T)$ est constitué de valeurs propres et $(Z(T) - z)^{-1}$ est méromorphe sur \mathbb{C}^* (voir aussi le chapitre V de [Pet89]). Pour $|z| > \|\mathcal{U}(T)\| \geq \|Z(T)\|$, on a

$$\psi(Z(T) - z)^{-1}\psi = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(Z(T))^k \psi}{z^{k+1}}.$$

Les propriétés de $Z^b(T)$ (voir la Section 1.2 du Chapitre 1) impliquent que, pour $|z| > \|\mathcal{U}(T)\| \geq \|Z(T)\|$, on a

$$\psi(Z(T) - z)^{-1}\psi = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi P_+(\mathcal{U}(kT)) P_- \psi}{z^{k+1}}.$$

Comme $b > \rho + T + 1$ et $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + T + 1)$, en appliquant (1.2.3) et (1.3.3), on obtient

$$\psi(Z(T) - z)^{-1}\psi = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(\mathcal{U}(T))^k \psi}{z^{k+1}} = \psi(\mathcal{U}(T) - z)^{-1}\psi. \quad (2.2.5)$$

La formule (2.2.5) implique que $\psi(\mathcal{U}(T) - z)^{-1}\psi$ est méromorphe sur \mathbb{C}^* et ses pôles sont contenus dans l'ensemble des valeurs propres de $Z(T)$. Montrons la réciproque. Pour cela, notons

$$W(T) = Z_0(T) - Z(T) = P_+(U_0(T) - \mathcal{U}(T))P_-.$$

En appliquant (1.3.3) et (2.2.1), on trouve

$$W(T) = \psi V(T)\psi, \quad \text{avec} \quad V(T) = U_0(T) - \mathcal{U}(T). \quad (2.2.6)$$

Ensuite, fixons $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \|\mathcal{U}(T)\|$. On a

$$(Z(T) - z)^{-1}(Z_0(T) - Z(T))(Z_0(T) - z)^{-1} = (Z(T) - z)^{-1} - (Z_0(T) - z)^{-1},$$

et on en déduit

$$(Z(T) - z)^{-1} = (Z(T) - z)^{-1}(Z_0(T) - Z(T))(Z_0(T) - z)^{-1} + (Z_0(T) - z)^{-1}. \quad (2.2.7)$$

De même, on a

$$(Z(T) - z)^{-1} = (Z_0(T) - z)^{-1}(Z_0(T) - Z(T))(Z(T) - z)^{-1} + (Z_0(T) - z)^{-1}$$

et en appliquant l'identité (2.2.7) au terme de droite de cette égalité, on obtient

$$(Z(T) - z)^{-1} = (Z_0(T) - z)^{-1}W(T)(Z(T) - z)^{-1}W(T)(Z_0(T) - z)^{-1} + (Z_0(T) - z)^{-1}W(T)(Z_0(T) - z)^{-1} + (Z_0(T) - z)^{-1}.$$

En appliquant (2.2.6), cela donne

$$(Z(T) - z)^{-1} = (Z_0(T) - z)^{-1}\psi V(T)\psi(Z(T) - z)^{-1}\psi V(T)\psi(Z_0(T) - z)^{-1} + (Z_0(T) - z)^{-1}\psi V(T)\psi(Z_0(T) - z)^{-1} + (Z_0(T) - z)^{-1}$$

et (2.2.5) implique

$$(Z(T) - z)^{-1} = (Z_0(T) - z)^{-1}\psi V(T)\psi(\mathcal{U}(T) - z)^{-1}\psi V(T)\psi(Z_0(T) - z)^{-1} + (Z_0(T) - z)^{-1}\psi V(T)\psi(Z_0(T) - z)^{-1} + (Z_0(T) - z)^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Sachant que la résolvante $(Z_0(T) - z)^{-1}$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* , la représentation (2.2.8) implique que les valeurs propres non-nulles de $Z(T)$ sont parmi les pôles de la résolvante $\psi(\mathcal{U}(T) - z)^{-1}\psi$. Ainsi, les résonances coïncident avec les pôles du prolongement méromorphe de $\psi(\mathcal{U}(T) - z)^{-1}\psi$. \square

En appliquant le résultat du Théorème 2.2.1, on voit facilement qu'en supposant (H1), les conditions (H3) et (H2) sont équivalentes, pour $n \geq 3$ impair. En combinant cette équivalence avec les résultats établis dans le Chapitre 1, on déduit que, pour $n \geq 3$ impair et pour $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant les conditions (2.1.1), les hypothèses (H1) et (H3) impliquent (2.1.5).

2.3 Décroissance intégrable de l'énergie locale pour $n \geq 4$ pair

L'objectif de cette section est de montrer que les hypothèses (H1) et (H3) impliquent la décroissance (2.1.6) de l'énergie locale. En appliquant certains résultats de [Vain93], nous allons établir l'estimation suivante :

Théorème 2.3.1 *Supposons que les hypothèses (H1) et (H3) sont satisfaites et que $n \geq 4$ est pair. Soient $\chi_1, \psi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1)$. Alors, pour tous $s \leq t$, on obtient*

$$\|\chi_1 \mathcal{U}(t, s) \psi_1\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq Cp(t - s), \quad (2.3.1)$$

où $C > 0$ est indépendant de t, s et avec $p(t)$ définie par

$$p(t) = \frac{1}{(t + 1) \ln^2(t + e)}.$$

Dans [Vain93], l'objectif de Vainberg est d'établir, sous une hypothèse de non capture, le développement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$ de l'énergie locale pour certaines solutions de problèmes périodiques en temps. Ainsi, Vainberg ne décrit pas d'hypothèses impliquant la décroissance de l'énergie locale et ses résultats ne suffisent pas à prouver (2.3.1). Notre objectif est de combiner l'hypothèse (H3) avec les résultats de [Vain93] afin de prouver (2.3.1). Pour cela, dans les sous-sections 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3 nous démontrons une généralisation de [Vain93] dont nous avons besoin pour prouver (2.3.1) dans la sous-section 2.3.4. Il est important de noter qu'en combinant les résultats de [Vain93] avec l'hypothèse (H3) on prouve uniquement la décroissance de l'énergie locale des solutions de (0.1.3) vérifiant $f = (0, f_2)$. Il est donc nécessaire de montrer comment obtenir la décroissance de l'énergie locale pour toutes les solutions à partir de ce résultat (voir sous-section 2.3.4).

Remarque 2.3.1 *Dans [Vain93], Vainberg poursuit les travaux entrepris dans [Vain92]. Contrairement à [Vain93], dans [Vain92] Vainberg considère les problèmes dont l'énergie globale est uniformément bornée. Même sous cette hypothèse la présence de résonances de module 1 peut empêcher la décroissance de l'énergie locale. Dans ces deux papiers, [Vain92] et [Vain93], Vainberg étudie le comportement asymptotique des solutions mais ne prouve pas la décroissance de l'énergie locale.*

2.3.1 Hypothèses et définitions

Dans cette sous-section nous allons définir quelques outils que nous utiliserons par la suite. Nous précisons aussi les hypothèses que nous supposons dans cette section. L'ensemble de ces notions ont été introduites par Vainberg dans [Vain93]. Notons que dans [Vain93], Vainberg propose une analyse générale des problèmes avec une perturbation périodique en temps. Pour plus de clarté, nous adapterons ces résultats au problème (0.1.3).

Dans cette section, on suppose que

$$\mathcal{U}(t, s) = 0 \quad \text{pour } t < s \quad \text{et} \quad U_0(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0. \quad (2.3.2)$$

Soient P_1 et P_2 deux projecteurs de \mathbb{C}^2 définis par

$$P_1(h) = h_1, \quad P_2(h) = h_2, \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2$$

et soient $P^1, P^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2)$ définis par

$$P^1(h) = (h, 0), \quad P^2(h) = (0, h), \quad h \in \mathbb{C}.$$

Notons $V(t, s)$ l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$V(t, s) = P_1 \mathcal{U}(t, s) P^2.$$

On remarque que pour $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $V(t, s)g$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2(V(t, s)g) - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x V(t, s)g) = 0, \\ (V(t, s)g, \partial_t V(t, s)g)|_{t=s} = (0, g). \end{cases}$$

Soit $E(t, s, x, x_0)$ le noyau de l'opérateur $V(t, s)$. D'après les propriétés de propagation des singularités établis dans [MS], l'hypothèse (H1) implique que, pour tout $r > 0$, il existe $T_1(r)$ tel que

$$E \in \mathcal{C}^\infty \quad \text{pour} \quad |x|, |x_0| < r \text{ et } t - s > T_1(r). \quad (2.3.3)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que la fonction $T_1(r)$ est strictement croissante et régulière (voir [Vain93]). De plus, on peut aussi supposer que

$$T_1(r) = T_1(b), \quad r \leq b \quad \text{avec} \quad b = \rho + 1 + \frac{4}{5} + 2T. \quad (2.3.4)$$

Soit $T_2 = T_2(r)$ une fonction croissante et infiniment dérivable vérifiant

$$T_2(r) > T_1(r), \quad r > 0$$

et

$$T_2(r) = k_0 T, \quad r \leq b \quad \text{avec} \quad k_0 \in \mathbb{N}.$$

Soit $\xi(t, s, x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\xi = 0$ pour $t - s > T_2(|x|)$, $\xi = 1$ pour $t - s \leq T_1(|x|)$, pour $|x| \leq b$, ξ ne dépend que de $t - s$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ une fonction définie par $\psi = 1$ pour $|x| \geq b - \frac{1}{3}$ et $\psi = 0$ pour $|x| \leq b - \frac{2}{3}$. Notons $P(t)$ l'opérateur différentiel

$$P(t) = \partial_t^2 - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x).$$

On note $W(t, s)$ l'opérateur défini par

$$W(t, s) = \xi(t, s)V(t, s) - \psi N(t, s), \quad (2.3.5)$$

avec

$$N(t, s) = \int_s^t \frac{\sin(\Lambda(t - \tau))}{\Lambda} \psi[P(\tau), \xi(\tau, s)]V(\tau, s) d\tau.$$

Soit $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On voit facilement que $Z_1 = N(t, s)h$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 Z_1 - \Delta_x Z_1 = \psi[P(t), \xi(t, s)]V(t, s)h, \\ (Z_1, \partial_t Z_1)|_{t=s} = (0, 0). \end{cases}$$

D'après (2.2.2), $Z_2 = \psi N(t, s)h$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 Z_2 - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x Z_2) = -[\Delta_x, \psi]N(t, s)h + \psi^2[P(t), \xi(t, s)]V(t, s)h, \\ (Z_2, \partial_t Z_2)|_{t=s} = (0, 0). \end{cases}$$

On en déduit que $Z_3 = W(t, s)h$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 Z_3 - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x Z_3) = G(t, s)h, \\ (Z_3, \partial_t Z_3)|_{t=s} = (0, h) \end{cases}$$

avec

$$G(t, s)h = [\Delta_x, \psi]N(t, s)h + (1 - \psi^2)[P(t), \xi(t, s)]V(t, s)h.$$

Proposition 2.3.1 *Soit $\chi \in C_0^\infty(|x| \leq b)$. Alors, l'opérateur $G(t, s)\chi$ est un opérateur compact de $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Soit $\chi \in C_0^\infty(|x| \leq b)$. Les propriétés de la fonction ξ entraînent

$$[P(t), \xi(t, s, x)] = 0, \quad \text{pour } t - s < T_1(|x|) \text{ ou pour } t - s > T_2(|x|). \quad (2.3.6)$$

Comme $1 - \psi^2(x) = 0$ pour $|x| \geq b - \frac{1}{3}$, les propriétés (2.3.3) et (2.3.6) impliquent que $(1 - \psi^2)[P(t), \xi(t, s)]V(t, s)\chi$ est un opérateur compact de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Les propriétés (2.3.4) et (2.3.6) impliquent que le noyau de Schwarz $N(t, s, x, x_0)$ de l'opérateur $N(t, s)$ vérifie

$$N(t, s, x, x_0) = 0, \quad \text{pour } t - s < T_1(b). \quad (2.3.7)$$

En appliquant les propriétés (2.3.3) et (2.3.4), cela donne

$$N(t, s, x, x_0) \in C^\infty, \quad \text{pour } |x|, |x_0| \leq b. \quad (2.3.8)$$

Ainsi, comme $[\Delta_x, \psi](x) = 0$ pour $|x| > b$, (2.3.8) entraîne que $[\Delta_x, \psi]N(t, s)\chi$ est un opérateur compact de $L^2(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $G(t, s)\chi$ est un opérateur compact de $L^2(\mathbb{R}^n)$. \square

Théorème 2.3.2 1) *Pour tous $h \in C_0^\infty(|x| \leq b)$ et $s \geq 0$, l'équation intégrale*

$$\varphi_s(t, \cdot) + \int_s^t G(t, \tau)\varphi_s(\tau, \cdot)d\tau = -G(t, s)h, \quad (2.3.9)$$

admet une unique solution $\varphi_s(t, x)$, avec $\varphi_s \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp}_x \varphi_s \subset \{x : |x| \leq b\}$ et $\varphi_s(t, x) = 0$ pour $t \leq s + T_1(b)$.

2) *Pour tout $h \in C_0^\infty(|x| \leq b)$ et pour φ_s solution de (2.3.9) on a*

$$V(t, s)h = W(t, s)h + \int_s^t W(t, \tau)\varphi_s(\tau, \cdot)d\tau. \quad (2.3.10)$$

Preuve. D'après la Proposition 2.3.1, $G(t, s)h \in C_0^\infty(|x| \leq b)$ et l'opérateur $G(t, \tau)$ envoie $C_0^\infty(|x| \leq b)$ vers lui-même. Comme l'équation (2.3.9) est une équation intégrale de Volterra, cette équation admet une unique solution $\varphi_s(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R})$ vérifiant $\varphi_s(t, x) = 0$ pour $|x| \geq b$. De plus, comme $G(t, s) = 0$ pour $t - s < T_1(b)$, on obtient

$$\varphi_s(t, x) = 0 \quad \text{pour } t - s \leq T_1(b). \quad (2.3.11)$$

Démontrons maintenant 2). Écrivons l'opérateur $W(t, \tau)$ sous la forme

$$W(t, \tau) = V(t, \tau) + Q(t, \tau), \text{ avec } Q(t, \tau) = (\xi(t, \tau) - 1)V(t, \tau) - \psi N(t, \tau). \quad (2.3.12)$$

Comme $\xi = 1$ pour $t - \tau < T_1(|x|)$, d'après (2.3.3) et (2.3.4), le noyau $(\xi - 1)V$ de l'opérateur $(\xi - 1)V(t, \tau)$ est infiniment dérivable pour $|x_0| \leq b$. De plus, on prouve facilement que le noyau de $\psi N(t, \tau)$ est C^∞ pour $|x_0| \leq b$. On en déduit que le noyau $Q(t, \tau, x, x_0)$ de $Q(t, \tau)$ vérifie

$$Q(t, \tau, x, x_0) \text{ est } C^\infty \text{ sur } |x_0| \leq b. \quad (2.3.13)$$

Soient $h \in C_0^\infty(|x| \leq b)$ et φ_s solution de (2.3.9). On a

$$\begin{aligned} P(t) \left(\int_s^t W(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau \right) &= P(t) \left(\int_s^t V(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau \right) \\ &\quad + P(t) \left(\int_s^t Q(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau \right) \\ &= \varphi_s + P(t) \left(\int_s^t Q(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau \right). \end{aligned}$$

Le noyau $(\xi - 1)V$ de l'opérateur $(\xi - 1)V(t, \tau)$ s'annule pour $t - \tau < T_1(b)$. De même, (2.3.7) implique que $Q(t, \tau, x, x_0) = 0$ pour $t - \tau < T_1(b)$. En combinant cela avec (2.3.13), on obtient

$$P(t) \left(\int_s^t Q(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau \right) = \int_s^t P(t) Q(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau.$$

Cette formule, les relations (2.3.12) et l'égalité $P(t)V(t, \tau)\varphi_s = 0$ impliquent

$$P(t) \left(\int_s^t W(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau \right) = \varphi_s + \int_s^t P(t) W(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau = \varphi_s + \int_s^t G(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau.$$

En appliquant (2.3.9), on trouve

$$P(t) \left(\int_s^t W(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau \right) = -G(t, s)h. \quad (2.3.14)$$

Ainsi, d'après (2.3.14), on a

$$P(t) \left(W(t, s)h + \int_s^t W(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau \right) = G(t, s)h - G(t, s)h = 0.$$

De plus, d'après les formules (2.3.11) et (2.3.12), pour $t - s < T_1(b)$, on obtient

$$W(t, s)h + \int_s^t W(t, \tau) \varphi_s(\tau, \cdot) d\tau = V(t, s)h.$$

On en déduit (2.3.10). □

Soit $r \in \mathbb{R}$. On note $H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$ l'espace défini de manière suivante, on dit que $g \in H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$ si

- (i) $e^{-A_1 t} \varphi \in H^r(\mathbb{R}^{1+n})$,
- (ii) $g(t, x) = 0$ pour $t < s$ ou $|x| \geq b$.

On note aussi L_b^2 et $H_b^r(\mathbb{R}^{1+n})$ les ensembles constitués des éléments f de $L^2(\mathbb{R}^n)$ ou des éléments φ de $H^r(\mathbb{R}^{1+n})$, vérifiant $f(x) = \varphi(\cdot, x) = 0$, pour $|x| \geq b$. En appliquant l'estimation (1.2.7), on remarque que, pour $A_1 > A$ (avec A la constante de l'estimation (1.2.7)) et pour $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b)$, on a

$$\chi V(t, s) \in \mathcal{L}(L_b^2, H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^n)). \quad (2.3.15)$$

Dans la suite on notera A_1 un réel vérifiant $A_1 > A$.

2.3.2 Transformation de Fourier-Bloch-Gelfand sur les espaces $H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$

Dans cette sous-section, nous allons démontrer quelques propriétés de la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand sur les espaces $H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$. Notons que Vainberg a établi, dans [Vain93], l'ensemble de ces résultats pour $s = 0$. Nous allons montrer que ces résultats restent valables pour $s > 0$. On définit sur les espaces $H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$ la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand notée F par, pour $\text{Im}(\theta) \geq A_1 T$,

$$F(\varphi)(t, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(kT + t) e^{ik\theta}, \quad \varphi \in H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}).$$

Soit $\varphi \in H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$. Pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, on pose

$$\hat{\varphi}(t, \theta) = F(\varphi)(t, \theta).$$

Proposition 2.3.2 *Soit $\varphi \in H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$. Alors pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$ les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1) pour chaque $B > 0$ l'opérateur

$$F : H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_b^r([s - B, s + B] \times \mathbb{R}^n)$$

est borné et analytique en θ .

2)

$$\hat{\varphi}(t, \theta + 2\pi) = \hat{\varphi}(t, \theta);$$

3)

$$\hat{\varphi}(t + T, \theta) = e^{-i\theta} \hat{\varphi}(t, \theta),$$

et si $v(t, \theta) = e^{\frac{i\theta}{T}} \hat{\varphi}(t + T, \theta)$, alors

$$v(t + T, \theta) = v(t, \theta).$$

4) Pour tout $\alpha > A_1 T$, $c \in \mathbb{R}$ et $d_{\alpha,c} = [i\alpha + c, i\alpha + c + 2\pi]$, on a

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{d_{\alpha,c}} F(\varphi)(t, \theta) d\theta, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3.16)$$

Preuve. Comme $\varphi = 0$ pour $t < s$, on déduit que $\varphi(kT + t) = 0$ pour $|t - s| \leq B$ si $k < -k_0$ avec k_0 la partie entière de $\frac{B}{T}$. Par conséquent, pour $|t - s| \leq B$, on a

$$\hat{\varphi}(t, \theta) = \sum_{k \geq -k_0} \varphi(kT + t) e^{ik\theta}. \quad (2.3.17)$$

Posons

$$K = \|\varphi(t) e^{-A_1 t}\|_{H^r(\mathbb{R}^{1+n})} < +\infty.$$

Alors

$$\|\varphi(t + kT) e^{-A_1(kT+t)}\|_{H^r(\mathbb{R}^{1+n})} = K$$

et on obtient

$$\|\varphi(t + kT) e^{-A_1 t}\|_{H^r([s-B, s+B] \times \mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi(t + kT) e^{-A_1 t}\|_{H^r(\mathbb{R}^{1+n})} = K e^{kA_1 T}.$$

Comme la multiplication par $e^{-A_1 t}$ est un opérateur borné de $H^r([s - B, s + B] \times \mathbb{R}^n)$, on trouve

$$\|\varphi(t + kT)\|_{H^r([s-B, s+B] \times \mathbb{R}^n)} \leq CK e^{kA_1 T}.$$

On en déduit la convergence des séries (2.3.17) et de leurs dérivées par rapport à θ sur $H^r([s - B, s + B] \times \mathbb{R}^n)$ pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$. Cela prouve la propriété 1). Les autres propriétés sont évidentes. \square

On note $H_{b,s,per}^r(\mathbb{R}^{1+n})$ la fermeture du sous-espace vectoriel de $H^r([s, s + T] \times \mathbb{R}^n)$ constitué de fonctions infiniment dérivables sur $[s, s + T] \times \mathbb{R}^n$ qui sont T -périodiques par rapport à t et s'annulent pour $|x| \geq b$. Soit F' l'opérateur défini par

$$F'(\varphi)(t, \theta) = e^{\frac{i\theta t}{T}} F(\varphi)(t, \theta).$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 2.3.2.

Proposition 2.3.3 *Pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$ l'opérateur*

$$F' : H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s,per}^r(\mathbb{R}^{1+n})$$

est borné et analytique en θ .

Nous allons maintenant définir la transformation de Fourier-Bloch Gelfand d'opérateurs à noyau.

Proposition 2.3.4 *Supposons que l'opérateur*

$$R : H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s}^{l,A_1}(\mathbb{R}^n)$$

est borné et son noyau vérifie la propriété suivante

$$R(t + T, \tau + T, x, x_0) = R(t, \tau, x, x_0). \quad (2.3.18)$$

Supposons qu'il existe $T_0 > 0$ tel que

$$R(t, \tau, x, x_0) = 0, \quad \text{pour } t - \tau \notin [0, T_0]. \quad (2.3.19)$$

Alors, il existe un opérateur

$$R(t, s, \theta) : H_{b,s,per}^r(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s,per}^l(\mathbb{R}^{1+n})$$

tel que $R(t, s, \theta)$ est une fonction entière en θ et $F'(R) = R(t, s, \theta)F'$ pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$.

Preuve. Dans ce qui suit, nous négligerons la dépendance de toutes les fonctions par rapport à x, x_0 . Soit $\varphi \in H_{b,s}^{r,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$. Pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, on a

$$\begin{aligned} F'(R\varphi)(t, \theta) &= F' \left(\int_{\mathbb{R}} R(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \right) \\ &= e^{\frac{i\theta t}{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} R(t + kT, \tau) \varphi(\tau) e^{ik\theta} d\tau. \end{aligned}$$

On déduit de (2.3.19) que, pour $t \in [1 + T_0, 1 + T_0 + T]$, la dernière intégrale de la formule précédente ne sera pas modifiée si on inclut le multiplicateur $m(\tau - kT)$ dans l'intégrale, avec $m \in C^\infty(\mathbb{R})$, $m(t) = 1$ pour $t \in [1, 1 + T_0 + T]$ et $m(t) = 0$ pour $t < 0$ et $t > 2 + T_0 + T$. En appliquant (2.3.18), pour tout $t \in [1 + T_0, 1 + T_0 + T]$ on trouve, avec $\text{Im}\theta > A_1 T$,

$$\begin{aligned} F'(R\varphi)(t, \theta) &= e^{\frac{i\theta t}{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} R(t, \tau - kT) m(\tau - kT) \varphi(\tau) e^{ik\theta} d\tau \\ &= e^{\frac{i\theta t}{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} R(t, \tau) m(\tau) \varphi(\tau + kT) e^{ik\theta} d\tau \tag{2.3.20} \\ &= e^{\frac{i\theta t}{T}} R \left(m(t) e^{-\frac{i\theta t}{T}} F'(\varphi) \right). \end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence de la Proposition 2.3.3. Comme le terme de gauche de la formule (2.3.20) est T -périodique en t , on déduit la Proposition 2.3.4 de (2.3.20) et du fait que R est borné. \square

On prouve facilement le résultat suivant :

Proposition 2.3.5 *Supposons que l'opérateur*

$$R(t, s) : H_b^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{b,s}^{l,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$$

soit borné. Alors, l'opérateur

$$R(t, s, \theta) = F'(R(t, s))(t, \theta) : H_b^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{b,per}^l(\mathbb{R}^{1+n})$$

est borné et est une fonction entière en θ pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$.

Fixons $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(|x| \leq b)$. Dans ce qui suit, nous allons analyser la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand de l'opérateur $\psi_1 V(t, s) \psi_2$.

2.3.3 Transformation de Fourier-Bloch-Gelfand de l'opérateur $\psi_1 V(t, s) \psi_2$

Le but de cette sous-section sera de montrer que la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand de l'opérateur $\psi_1 V(t, s) \psi_2$, pour $0 \leq s < T$ et $t \geq T_2(b) + T$, définie initialement pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, se prolonge de façon méromorphe en vérifiant certaines propriétés

que nous préciserons. Ces résultats nous permettrons de définir le comportement asymptotique de l'énergie locale quand $t \rightarrow +\infty$. Les résultats de Vainberg (voir [Vain93]) donnent la nature du prolongement méromorphe de $F(\psi_1 V(t, s) \psi_2)(t, \theta)$, lorsque $s = 0$ et $t \geq T_2(b)$. Nous allons montrer que ces résultats restent valables lorsque $0 \leq s < T$ et $t \geq T_2(b) + T$.

Définition 2.3.1 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On dit qu'une famille d'opérateurs $Q(t, s, \theta) : H_1 \rightarrow H_2$ est méromorphe de façon fini sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$, si pour chaque pôle $\theta = \theta_0$ de $Q(t, s, \theta)$, les coefficients des puissances négatives de $\theta - \theta_0$ dans un développement en série de Laurent sont des opérateurs de rang fini.

Notons $\mathbb{C}' = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 2k\pi - i\mu, k \in \mathbb{Z}, \mu \geq 0\}$.

Définition 2.3.2 On dit que les opérateurs $Q(t, s, \theta)$ vérifient la propriété (S) si : quand n est impair, les opérateurs $Q(t, s, \theta)$, $\theta \in \mathbb{C}$, sont bornés et forment une famille méromorphe de façon fini ; Quand n est pair les opérateurs $Q(t, s, \theta)$ sont bornés pour $\theta \in \mathbb{C}'$ et forment une famille méromorphe de façon fini . De plus, pour n pair et $\theta \in \mathbb{C}'$ proche de 0, les opérateurs $Q(t, s, \theta)$ sont de la forme

$$Q(t, s, \theta) = B(t, s, \theta) \log \theta + \sum_{j=1}^m B_j(t, s) \theta^{-j} + C(t, s, \theta), \quad (2.3.21)$$

où les opérateurs $B(t, s, \theta)$ et $C(t, s, \theta)$ sont analytiques en θ pour $|\theta| < \varepsilon_0$, \log est le logarithme défini sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$, et où pour tous $j = 1, \dots, m$ et $l \in \mathbb{N}$ les opérateurs $B_j(t, s)$ et $(\partial_\theta^l B(t, s, \theta))|_{\theta=0}$ sont des opérateurs de rang fini. De plus, $B(t, s, \theta)$, $C(t, s, \theta)$ et les opérateurs $B_j(t, s)$ sont \mathcal{C}^∞ et T -périodiques en t et dépendent de s .

Notons G_s et W_s les opérateurs définis, pour tout $\varphi \in H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$, par

$$G_s(\varphi)(t) = \int_s^t G(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad W_s(\varphi)(t) = \int_s^t W(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (2.3.22)$$

On rappelle les résultats suivants, qui précisent la nature de la composition de F' et des opérateurs G_s , $G(t, s)$, χW_s et $\chi N(t, s)$, avec $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b)$.

Théorème 2.3.3 Soit $0 \leq s < T$. L'opérateur

$$G_s : H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s}^{2,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}) \quad (2.3.23)$$

est borné, et pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, la relation $F'(G_s)(t, \theta) = G_s(t, s, \theta) F'$ reste vraie, où

$$G_s(t, s, \theta) : H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s,per}^2(\mathbb{R}^{1+n})$$

est un opérateur vérifiant la propriété (S).

Théorème 2.3.4 Soit $0 \leq s < T$. Pour tout $c > 0$ et pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'opérateur

$$G(t, s) : H_b^1(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s}^{r,c}(\mathbb{R}^{1+n}) \quad (2.3.24)$$

est borné, et l'opérateur

$$G(t, s, \theta) = F'(G(t, s))(t, \theta) : H_b^1(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s,per}^r(\mathbb{R}^{1+n}),$$

initialement défini pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, se prolonge de façon méromorphe jusqu'au demi-plan inférieur avec la propriété (S).

Théorème 2.3.5 Soient $\chi \in C_0^\infty(|x| \leq b)$ et $0 \leq s < T$. L'opérateur

$$\chi W_s : H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s}^{2,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}) \quad (2.3.25)$$

est borné, et, pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, la relation $F'(\chi W_s)(t, \theta) = W_s(t, s, \theta)F'$ reste vraie, où

$$W_s(t, s, \theta) : H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s,per}^2(\mathbb{R}^{1+n})$$

est un opérateur vérifiant la propriété (S).

Théorème 2.3.6 Soit $0 \leq s < T$ et soit $\chi \in C_0^\infty(|x| \leq b)$. L'opérateur

$$\chi N(t, s) : H_b^1(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s}^{2,A_1}(\mathbb{R}^{1+n}), \quad (2.3.26)$$

est borné, et l'opérateur

$$N(t, s, \theta) = F'(\chi N(t, s))(t, \theta) : H_b^1(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s,per}^2(\mathbb{R}^{1+n}),$$

initialement défini pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, se prolonge de façon méromorphe jusqu'au demi-plan inférieur avec la propriété (S).

Dans [Vain93], Vainberg a démontré les Théorèmes 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5 et 2.3.6 pour $s = 0$. En combinant l'estimation (2.3.15), les résultats des Propositions 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5 ainsi que les arguments employés par Vainberg pour prouver les Théorèmes 2, 3 et 4 de [Vain93], on voit que les résultats des Théorèmes 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5 et 2.3.6 restent valables pour $0 \leq s < T$.

Définition 2.3.3 On dit que les opérateurs $Q(t, s, \theta)$ ont la propriété (S') si : quand n est impair les opérateurs $Q(t, s, \theta)$, $\theta \in \mathbb{C}$ sont bornés et forment une famille méromorphe de façon fini ; 2) Quand n est pair les opérateurs $Q(t, s, \theta)$ sont bornés pour $\theta \in \mathbb{C}'$ et forment une famille méromorphe de façon fini. De plus, pour θ proche de 0 dans \mathbb{C}' , $Q(t, s, \theta)$ est de la forme

$$Q(t, s, \theta) = \theta^{-m} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\theta}{R_{t,s}(\log \theta)} \right)^j P_{j,t,s}(\log \theta) + C(t, s, \theta), \quad (2.3.27)$$

où $C(t, s, \theta)$ est analytique en θ pour $|\theta| < \varepsilon_0$, $R_{t,s}$ est un polynôme, les $P_{j,t,s}$ sont des polynômes de degré au plus l_j et \log est le logarithme défini sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$. Notons que $C(t, s, \theta)$, et les coefficients de $R_{t,s}$ et $P_{j,t,s}$ sont C^∞ et T -périodique en t et dépendent de s . De plus, les coefficients des $P_{j,t,s}$ sont des opérateurs de rang fini.

Théorème 2.3.7 Soit $B > A$ avec A la constante de l'estimation (1.2.7). Il existe $A_2 > B$ tel que, pour tout $h \in H_{b,s}^{1,B}(\mathbb{R}^{1+n})$ avec $0 \leq s < T$, l'équation

$$\varphi + \int_s^t G(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = h \quad (2.3.28)$$

admet une unique solution dans l'espace $H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$ pour tout $A_1 \geq A_2$, et on a

$$\|\varphi\|_{H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})} \leq C(s) \|h\|_{H_{b,s}^{1,B}(\mathbb{R}^{1+n})}. \quad (2.3.29)$$

Preuve. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de (2.3.28) appartenant à $H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$. Alors, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ est une solution de

$$\varphi + \int_s^t G(t, \tau) \varphi(\tau) = 0.$$

Par conséquent, φ est solution de (2.3.9) pour $h = 0$ et l'unicité de la solution de (2.3.9) implique que $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Cela prouve l'unicité de la solution de (2.3.28). Pour prouver le théorème il nous suffit maintenant de montrer que (2.3.28) a une solution vérifiant (2.3.29) pour h à valeurs dans un sous-espace dense de $H_{b,s}^{1,B}(\mathbb{R}^{1+n})$. Prenons comme sous-espace dense $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+n}) \cap H_{b,s}^{1,B}(\mathbb{R}^{1+n})$. Dans ce cas on montre facilement que l'équation (2.3.28) a une solution $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$ vérifiant $\varphi(t, x) = 0$ pour $|x| \geq b$ ou pour $t \leq s$ (voir la preuve du Théorème 2.3.2). Notons

$$\psi = e^{-Bt} \varphi, \quad \hat{G}(t, \tau) = e^{-B(t-\tau)} G(t, \tau).$$

Alors, l'équation (2.3.28) s'écrit de la façon suivante

$$\psi + \hat{G}_s \psi = e^{-Bt} h, \quad \text{où } (\hat{G}_s \psi)(t) = \int_s^t \hat{G}(t, \tau) \psi(\tau) d\tau. \quad (2.3.30)$$

D'après le Théorème 2.3.3 pour tout $q \in H_b^2(\mathbb{R}^{1+n})$ vérifiant $q(t, x) = 0$ pour $t < s$, on a

$$\begin{aligned} \|\hat{G}_s q\|_{H^2(\mathbb{R}^{1+n})} &= \|e^{-Bt} G_s(e^{Bt} q)(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^{1+n})} \\ &\leq C \|e^{-Bt} e^{Bt} q\|_{H^1(\mathbb{R}^{1+n})} = C \|q\|_{H^1(\mathbb{R}^{1+n})}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $d > 0$, on a

$$\|\hat{G}_s q\|_{H^2([s, s+d] \times \mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|q\|_{H^1(\mathbb{R}^{1+n})}. \quad (2.3.31)$$

En utilisant l'opérateur de prolongement, on prouve l'existence d'une fonction $\tilde{\psi}$ égale à ψ pour $t \leq s + d$ et vérifiant

$$\|\tilde{\psi}\|_{H^1(\mathbb{R}^{1+n})} \leq 2 \|\psi\|_{H^1([s, s+d] \times \mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.32)$$

Comme $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$, le terme de droite de (2.3.32) est borné. Le terme de gauche de (2.3.31) est indépendant de la valeur de la fonction $q(\tau)$ pour $\tau > s + d$. On en déduit que l'estimation (2.3.31) pour $q = \tilde{\psi}$ et l'estimation (2.3.32) impliquent

$$\begin{aligned} \|\hat{G}_s \tilde{\psi}\|_{H^2([s, s+d] \times \mathbb{R}^n)} = \|\hat{G}_s \tilde{\psi}\|_{H^2([s, s+d] \times \mathbb{R}^n)} &\leq C_1 \|\tilde{\psi}\|_{H^1(\mathbb{R}^{1+n})} \\ &\leq 2C_1 \|\psi\|_{H^1([s, s+d] \times \mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

On note $E(d, q)$ la quantité

$$E(d + s, q) = \|\partial_t q(d + s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|q(d + s)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Comme $\hat{G}_s \psi(s) = 0$, $\hat{G}_s \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$ et comme $\hat{G}_s \psi(\cdot, x) = 0$ pour $|x| \geq b$, pour tout $d > 0$, on a

$$\begin{aligned} E(d + s, \hat{G}_s \psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^{s+d} [\partial_t^2 (G_s \psi) \overline{\partial_t G_s \psi} + \partial_t (G_s \psi) \overline{\partial_t^2 G_s \psi}] (t, x) dt dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^{s+d} [\partial_t (G_s \psi) \overline{G_s \psi} + (G_s \psi) \overline{\partial_t G_s \psi}] (t, x) dt dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^{s+d} [\partial_t \nabla_x (G_s \psi) \cdot \overline{\nabla_x G_s \psi} + \nabla_x (G_s \psi) \cdot \partial_t \overline{\nabla_x G_s \psi}] (t, x) dt dx. \end{aligned}$$

Une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$E(d + s, \hat{G}_s \psi) \leq C_2 \|\hat{G}_s \psi\|_{H^2([s, s+d] \times \mathbb{R}^n)}^2$$

avec C_2 indépendant de d . On en déduit que (2.3.33) implique

$$E(d + s, \hat{G}_s \psi) \leq C \|\psi\|_{H^1([s, s+d] \times \mathbb{R}^n)}^2 = C \int_s^{s+d} E(t, \psi) dt. \quad (2.3.34)$$

On montre facilement que pour tous φ_1, φ_2 , on a

$$E(d, \varphi_1 + \varphi_2) \leq 2E(d, \varphi_1) + 2E(d, \varphi_2).$$

En combinant cela avec la formule (2.3.30) et l'estimation (2.3.34), on obtient

$$E(d + s, \psi) \leq 2C \int_s^{s+d} E(t, \psi) dt + 2E(d, e^{-Bt} h).$$

Une application du lemme de Gronwall donne alors

$$E(d + s, \psi) \leq 2CE(d, e^{-Bt} h) e^{2Cd},$$

dont on déduit

$$e^{-2Cd} E(d + s, \psi) \leq 2CE(d, e^{-Bt} h). \quad (2.3.35)$$

En intégrant (2.3.35) par rapport à $d > 0$, on obtient (2.3.29) pour $A_2 = \sqrt{2C} + B$. \square

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des Théorèmes 2.3.2, 2.3.4 et 2.3.7.

Proposition 2.3.6 *Soient $0 \leq s < T$ et $A_1 \geq A_2$, avec A_2 la constante du Théorème 2.3.7 pour un certain $B > A$. Il existe un opérateur*

$$L(t, s) : L_b^2 \rightarrow H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$$

tel que $L(t, s)$ est borné et vérifie

$$L(t, s)h + \int_s^t G(t, \tau) L(\tau, s) h d\tau = -G(t, s)h, \quad h \in L_b^2, \quad t \geq T. \quad (2.3.36)$$

Dans la suite, on supposera que $A_1 \geq A_2$ avec A_2 la constante du Théorème 2.3.7 pour un certain $B > A$. Nous allons maintenant rappeler un résultat, établi par Vainberg, qui permettra de définir la nature de la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand de $L(t, s)$.

Théorème 2.3.8 ([Vain93], Théorème 9) *Soit H un espace de Hilbert. Si*

$$G(t, s, \theta) : H \rightarrow H$$

est une famille d'opérateurs compacts ayant la propriété (S) et s'il existe θ_0 telle que $\text{Id} + G(t, s, \theta_0)$ est inversible, alors la famille d'opérateurs $(\text{Id} + G(t, s, \theta))^{-1}$ a la propriété (S').

En appliquant ce résultat, on démontre la propriété suivante :

Théorème 2.3.9 *Soient $0 \leq s < T$. L'opérateur*

$$L(t, s, \theta) : L_b^2 \rightarrow H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{n+1}),$$

définie sur $\text{Im}(\theta) > A_1 T$ par la relation

$$L(t, s, \theta) = F'(L(t, s))(t, \theta),$$

se prolonge de façon méromorphe et vérifie la propriété (S').

Preuve. Appliquons l'opérateur F' aux deux côtés de (2.3.36). On déduit des Théorèmes 2.3.4 et 2.3.5, et des Propositions 2.3.5 et 2.3.6, que, pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, $F'(L(t, s))(t, \theta)$ vérifie

$$(\text{Id} + G_s(t, s, \theta))F'(L(t, s))(t, \theta) = -G(t, s, \theta). \quad (2.3.37)$$

Nous supposons que l'opérateur $G_s(t, s, \theta)$ agit dans les espaces

$$G_s(t, s, \theta) : H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n}) \rightarrow H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n}). \quad (2.3.38)$$

D'après le Théorème 2.3.4, l'opérateur (2.3.38) est compact. Par conséquent, on déduit de (2.3.37) ainsi que du Théorème 2.3.8 et des propriétés des opérateurs $G_s(t, s, \theta)$ et $G(t, s, \theta)$ établies dans les Théorèmes 2.3.4 et 2.3.5, que le Théorème 2.3.9 est vrai, si on peut démontrer l'existence de $D > A_1 T$ tel que pour $\theta = iD$ l'opérateur $(\text{Id} + G_s(t, s, \theta))$ est inversible. Pour prouver cela, il suffira de démontrer que, pour un certain $D > A_1 T$ et pour $\theta = iD$, l'équation

$$(\text{Id} + G_s(t, s, \theta))\psi = \varphi, \quad \varphi, \psi \in H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n}), \quad (2.3.39)$$

admet une unique solution ψ pour tout φ . Soient $g \in H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n})$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $0 \leq \gamma \leq 1$, $\gamma(t) = 0$ pour $t \leq s + \frac{T}{2}$, $\gamma(t) = 1$ pour $t \geq s + \frac{2T}{3}$. D'après le Théorème 2.3.7, l'équation

$$\varphi_1 + \int_s^t G(t, \tau)\varphi_1(\tau)d\tau = \gamma g$$

a une unique solution $\varphi_1 \in H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$. Le Théorème 2.3.3 implique que, pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$, l'équation (2.3.39) a pour unique solution

$$\psi = F'(\varphi_1) \in H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n}) \quad \text{pour} \quad \varphi = F'(\gamma g).$$

Fixons $D > A_1 T$. Pour prouver le théorème il suffit de démontrer que pour chaque $\varphi \in H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n})$, on peut trouver $g \in H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n})$ tel que

$$\varphi = [F'(\gamma g)]|_{\theta=iD}. \quad (2.3.40)$$

Pour $\text{Im}(\theta) > A_1 T$ et $t \in [s, s + T]$, on a

$$\begin{aligned} F'(\gamma g)(t, \theta) &= e^{\frac{i\theta t}{T}} \sum_{k=0}^{+\infty} (\gamma g)(kT + t) e^{ik\theta} \\ &= e^{\frac{i\theta t}{T}} \left((\gamma g)(t) + \sum_{k=0}^{+\infty} g(kT + t) e^{ik\theta} \right) \\ &= e^{\frac{i\theta t}{T}} \left((\gamma g)(t) + g(t) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ik\theta} \right) \\ &= e^{-\frac{Dt}{T}} g(t) [\gamma(t) + (1 - e^{-D})^{-1} e^{-D}]. \end{aligned}$$

Soit p_1 une fonction définie sur $s \leq t \leq s + T$, par

$$p_1(t) = e^{-\frac{Dt}{T}} [\gamma(t) + (1 - e^{-D})^{-1} e^{-D}].$$

Pour tout $s \leq t \leq s + \frac{T}{2}$, on a

$$p_1(t) = e^{-\frac{Dt}{T}} (1 - e^{-D})^{-1} e^{-D}$$

et, pour tout $s + \frac{3T}{2} \leq t \leq s + T$, on a

$$\begin{aligned} p_1(t) &= e^{-\left(\frac{D(t-T)}{T}\right)} e^{-D} [1 + (1 - e^{-D})^{-1} e^{-D}] \\ &= e^{-\left(\frac{D(t-T)}{T}\right)} [e^{-D} + (1 - e^{-D})^{-1} e^{-2D}] \\ &= e^{-\left(\frac{D(t-T)}{T}\right)} (1 - e^{-D})^{-1} e^{-D}. \end{aligned}$$

Cela implique que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{d^N p_1}{dt^N}(s) = \frac{d^N p_1}{dt^N}(s + T).$$

Par conséquent on peut définir une fonction $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et T -périodique telle que

$$p(t) = p_1(t), \quad t \in [s, s + T].$$

Comme $\gamma(t) \geq 0$, on obtient que $p(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors, pour chaque $\varphi \in H_{b,s,per}^1(\mathbb{R}^{1+n})$, on a (2.3.40) si

$$g(t, \cdot) = \frac{\varphi(t, \cdot)}{p(t)}.$$

□

Notons $R(t, s)$ l'opérateur défini par

$$R(t, s) = -\psi N(t, s) + \int_s^t W(t, \tau) L(\tau, s) d\tau. \quad (2.3.41)$$

On peut généraliser les résultats établis par Vainberg pour $s = 0$, de la façon suivante :

Théorème 2.3.10 Soit $0 \leq s < T$ et soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b)$. L'opérateur

$$\chi R(t, s) : L_b^2 \rightarrow H_{b,s}^{1,A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$$

est un opérateur borné. De plus, la famille d'opérateurs

$$R(t, s, \theta) : L_b^2 \rightarrow H_{b,per}^1(\mathbb{R}^{1+n}), \quad R(t, s, \theta) = F'(\chi R(t, s))(t, \theta)$$

définie initialement pour $\text{Im}(\theta) > AT$, admet un prolongement méromorphe vérifiant la propriété (S').

Vainberg a établi les résultats du Théorème 2.3.10 dans le Théorème 11 de [Vain93] pour $s = 0$ et $t > T_2(b)$. En combinant les résultats des Théorèmes 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 et 2.3.9 avec l'estimation (2.3.15), on démontre que ces résultats restent valables pour $0 \leq s < T$ et $t \geq T_2(b) + T$.

Remarque 2.3.2 Notons que le Théorème 2.3.10 ne donne aucune information sur la dépendance en s de $R(t, s, \theta)$. Dans la sous-section 2.3.4, en supposant (H3) satisfaite, nous précisons la nature de cette dépendance pour $\text{Im}(\theta) \geq 0$.

En combinant les représentations (2.3.10) et (2.3.36), et en appliquant un argument de densité, on obtient

$$V(t, s)h = W(t, s)h + \int_s^t W(t, \tau)L(\tau, s)h \, d\tau, \quad h \in L_b^2. \quad (2.3.42)$$

D'après la définition de ξ , pour $t - s > T_2(b)$, on a

$$\chi \xi(t, s) = 0, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b).$$

En combinant ce résultat avec les formules (2.3.5), (2.3.42) et (2.3.41), on trouve que, pour $0 \leq s < T$ et $t \geq T_2(b) + T$,

$$\chi_1 V(t, s) \chi_2 = \chi_1 R(t, s) \chi_2, \quad \chi_1, \chi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b).$$

Le Théorème 2.3.10 implique que, pour $0 \leq s < T$ et $t \geq T_2(b) + T$,

$$V(t, s, \theta) = F'(\chi_1 V(t, s) \chi_2)(t, \theta)$$

admet un prolongement méromorphe vérifiant la propriété (S'). Nous allons maintenant combiner ce dernier résultat avec l'hypothèse (H3) afin de démontrer l'estimation (2.3.1) pour les dimensions paires.

2.3.4 Preuve du Théorème 2.3.1

L'objectif de cette sous-section sera de montrer la décroissance de l'énergie locale définie dans le Théorème 2.3.1. Pour cela, nous allons utiliser le fait que, pour $0 \leq s < T$ et $t \geq T_2(b) + T$, l'opérateur

$$F'(\psi_1 V(t, s) \psi_2)(t, \theta), \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b)$$

vérifie la propriété (S'). L'objectif des sous-sections 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3 a été de généraliser les résultats de [Vain93] afin de prouver ce dernier résultat. En suivant les arguments de [Vain93] ce résultat nous permet de déterminer le développement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$ de $\chi_1 V(t, s) \chi_2$. Néanmoins on ne peut pas en déduire l'estimation (2.3.1). L'objectif de cette sous-section est de montrer comment on peut combiner l'hypothèse (H3), qui ne figure pas dans [Vain93], avec les généralisations que nous avons établi pour prouver (2.3.1). Tout d'abord, nous montrerons comment l'hypothèse (H3) modifie la nature du prolongement méromorphe $F'(\psi_1 V(t, s) \psi_2)(t, \theta)$. Ensuite, en intégrant sur un contour convenablement choisi, nous démontrerons la décroissance de l'énergie locale des solutions de (0.1.3) lorsque $f = (0, f_2)$. Plus précisément, en établissant le liens entre la résolvante tronquée $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$ et $F'(\psi_1 V(t, s) \psi_2)(t, \theta)$, nous montrerons que les hypothèses (H1) et (H3) impliquent que, pour tout $\chi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq b)$, on a

$$\|\chi_1 V(t, s) \chi_1\| \leq \frac{C}{(t+1) \ln^2(t+e)}, \quad \|\chi_1 \partial_t V(t, s) \chi_1\| \leq \frac{C}{(t+1) \ln^2(t+e)} \quad (2.3.43)$$

avec C indépendant de s et de t . Enfin, nous établirons des arguments permettant de déduire (2.3.1) à partir de (2.3.43). Notons $U(t, s)$ l'opérateur défini par

$$U(t, s) = P_1 \mathcal{U}(t, s) P^1.$$

Pour tout $h \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$, $w = U(t, s)h$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \operatorname{div}_x(a(t, x) \nabla_x w) = 0, \\ (w, w_t)|_{t=s} = (h, 0). \end{cases}$$

Lorsque $a(t, x)$ est indépendant de t on a

$$\partial_t V(t, s) f - V(t, s) ((\partial_t^2 V(t, s) f)|_{t=s}) = U(t, s) f, \quad f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2.3.44)$$

et on déduit immédiatement l'estimation (2.3.1) des estimations (2.3.43). Lorsque $a(t, x)$ dépend de t l'identité (2.3.44) n'est plus valable et il est plus difficile de prouver que (2.3.43) implique (2.3.1).

Remarque 2.3.3 *Contrairement aux sous-sections 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3, où nous avons généralisé les résultats de [Vain93], dans cette sous-section nous démontrons le lien entre le prolongement méromorphe de la résolvante tronquée $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$ et celui de $F'(\psi_1 V(t, s) \psi_2)(t, \theta)$, et nous établissons des arguments permettant de passer des estimations (2.3.43) à l'estimation (2.3.1). La démonstration de ces étapes, qui sont nécessaires pour établir (2.3.1), constituent l'une des principales contributions de notre analyse par rapport à l'analyse de Vainberg dans [Vain93].*

Dans la suite, on considérera $\chi_j, \psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| < \rho + 1 + \frac{j+1}{5} + (j-1)T)$, $j \in \{1, \dots, 4\}$, telles que, pour tout $j \in \{1, \dots, 4\}$, on a

$$\psi_j(x) = \chi_j(x) = 1, \quad \text{pour } |x| \leq \rho + 1 + \frac{j}{5} + (j-1)T. \quad (2.3.45)$$

En particulier, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\chi_{j+1} = 1 \text{ sur } \operatorname{supp}(\chi_j) + T, \quad \psi_{j+1} = 1 \text{ sur } \operatorname{supp}(\psi_j) + T.$$

Pour prouver le Théorème 2.3.1, nous allons commencer par faire la liaison entre $F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(t, \theta)$ et $R_{\chi_4, \psi_4}(\theta)$.

Lemme 2.3.1 *Supposons que (H1) et (H3) sont satisfaites et que $n \geq 4$ est pair. Soient $t \geq (k_0+1)T$, $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$. Alors, la famille d'opérateurs $V(t, s, \theta) = F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(t, \theta)$ est analytique en θ pour $\theta \in \{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$ et on a*

$$\limsup_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \text{Im}(\lambda) > 0}} \left(\sup_{s \in [0, \frac{2T}{3}]} \|V(t, s, \lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))} \right) < \infty. \quad (2.3.46)$$

Preuve. Notons que, d'après l'estimation (1.2.7), pour $\text{Im}(\theta) > AT$ et pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) = -e^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1 \mathcal{U}(kT) \varphi_2 e^{ik\theta}. \quad (2.3.47)$$

Fixons $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq t' = t - k_2 T < T$. Supposons que $t' \geq s$. Alors, pour $\text{Im}(\theta) > AT$, on trouve

$$\begin{aligned} F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(t, \theta) &= F'(P_1 \chi_3 \mathcal{U}(t, s) \psi_3 P^2)(t, \theta) \\ &= e^{i\frac{t}{T}\theta} \left(\sum_{k=-k_2}^{\infty} P_1 \chi_3 \mathcal{U}(t + kT, s) \psi_3 P^2 e^{ik\theta} \right) \\ &= P_1 \left(e^{i\frac{t}{T}\theta} \sum_{k=-k_2}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t + kT, s) \psi_3 e^{ik\theta} \right) P^2. \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

De plus, on obtient

$$e^{i\frac{t}{T}\theta} \sum_{k=-k_2}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t+kT, s) \psi_3 e^{ik\theta} = e^{i(\frac{t}{T}-k_2)\theta} \chi_3 \mathcal{U}(t', s) \psi_3 + e^{i\frac{t}{T}\theta} \sum_{k=-(k_2-1)}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t+kT, s) \psi_3 e^{ik\theta}$$

et comme $\frac{t}{T} = k_2 + \frac{t'}{T}$, cette formule devient

$$e^{i\frac{t}{T}\theta} \sum_{k=-k_2}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t+kT, s) \psi_3 e^{ik\theta} = e^{i\frac{t'}{T}\theta} \chi_3 \mathcal{U}(t', s) \psi_3 + e^{i\frac{t}{T}\theta} \left(e^{ik_2\theta} \sum_{k=-(k_2-1)}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t+kT, s) \psi_3 e^{ik\theta} \right).$$

En appliquant (1.2.3), pour $\text{Im}(\theta) > AT$, on trouve

$$e^{ik_2\theta} \sum_{k=-(k_2-1)}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t+kT, s) \psi_3 e^{ik\theta} = e^{ik_2\theta} \sum_{k=-(k_2-1)}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t', 0) \mathcal{U}((k_2-1)T+kT) \mathcal{U}(0, s-T) \psi_3 e^{ik\theta}$$

et la propagation en temps fini implique

$$\begin{aligned} &e^{ik_2\theta} \sum_{k=-(k_2-1)}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t+kT, s) \psi_3 e^{ik\theta} \\ &= e^{ik_2\theta} \sum_{k=-(k_2-1)}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t', 0) \chi_4 \mathcal{U}((k_2-1)T+kT) \psi_4 \mathcal{U}(0, s-T) \psi_3 e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

En appliquant (2.3.47) au terme de droite de la formule précédente, on obtient

$$e^{ik_2\theta} \sum_{k=-(k_2-1)}^{\infty} \chi_3 \mathcal{U}(t+kT, s) \psi_3 e^{ik\theta} = -\chi_3 \mathcal{U}(t', 0) R_{\chi_4, \psi_4}(\theta) \mathcal{U}(0, s-T) \psi_3.$$

On en déduit

$$F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(t, \theta) = P_1 \left(e^{i\frac{t'}{T}\theta} [\chi_3 \mathcal{U}(t', s) \psi_3 - \chi_3 \mathcal{U}(t', 0) R_{\chi_4, \psi_4}(\theta) \mathcal{U}(0, s-T) \psi_3] \right) P^2. \quad (2.3.49)$$

De même, pour $t' < s$ et $\text{Im}(\theta) > AT$, on obtient

$$F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(t, \theta) = -P_1 \left(e^{i\frac{t'}{T}\theta} \chi_3 \mathcal{U}(t', 0) R_{\chi_4, \psi_4}(\theta) \mathcal{U}(0, s-T) \psi_3 \right) P^2. \quad (2.3.50)$$

Rappelons que $T_2(b) = k_0 T$. Nous avons établi dans la sous-section 2.3.3 que, pour $t \geq (k_0 + 1)T = T_2(b) + T$ et $0 \leq s \leq \frac{2T}{3} < T$, $V(t, s, \theta)$ est méromorphe sur $\{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$. De plus, d'après (2.3.49) et (2.3.50), pour $t \geq (k_0 + 1)T$ et $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$, l'hypothèse (H3) implique que la famille d'opérateurs $V(t, s, \theta)$ n'a pas de pôles dans $\{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$ et vérifie (2.3.46). On en déduit que la famille d'opérateurs $V(t, s, \theta)$ est analytique en θ pour $\theta \in \{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$ et vérifie (2.3.46). \square

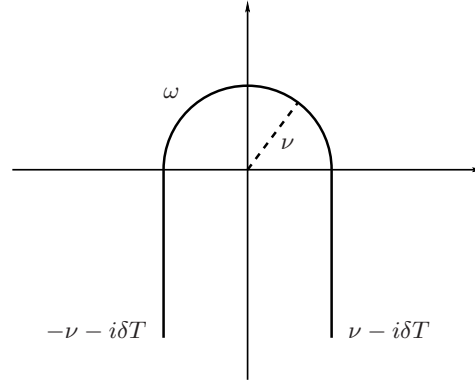
Remarque 2.3.4 *Notons que, sous l'hypothèse (H3), les égalités (2.3.49) et (2.3.50) restent vraies pour $\theta \in \{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$. Cela implique que $F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(t, \theta)$ ainsi que ses dérivées par rapport à t , pour $(k_0 + 1)T \leq t < (k_0 + 2)T$, sont bornés indépendamment de s pour $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$ et $\theta \in \{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$.*

Fixons $0 < \nu$ et $\delta > 0$. On définit le contour ω de \mathbb{C} comme une courbe, reliant $-i\delta T - \nu$ et $-i\delta T + \nu$, qui est symétrique par rapport à l'axe $\text{Re}(\theta) = 0$. La partie de ω contenue dans $\{\theta : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$ est un demi cercle de rayon ν ,

$$\omega \cap \{\theta : \text{Re}(\theta) < 0, \text{Im}(\theta) \leq 0\} = [-\nu - i\delta T, -\nu]$$

et

$$\omega \cap \{\theta : \text{Re}(\theta) > 0, \text{Im}(\theta) \leq 0\} = [\nu, \nu - i\delta T].$$


 FIGURE 2.1 – Contour ω

À partir de la transformation de Fourier-Bloch-Gelfand de $\psi_1 V(t, s) \psi_2$, on obtient le développement asymptotique de $\psi_1 V(t, s) \psi_2$, quand $t \rightarrow +\infty$, en appliquant l'estimation suivante :

Lemme 2.3.2 ([Vain88], Lemme 7, Chapitre X) *Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ et \log le logarithme défini sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$. Supposons que $\nu = \frac{1}{4}$. Alors, on a*

$$\int_{\omega} e^{-it\theta} \theta^p (\log(\theta))^q d\theta \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} C t^{-p-1} (\ln(t))^{q-1} \quad (2.3.51)$$

avec C indépendant de t .

Lemme 2.3.3 *Supposons que (H1) et (H3) sont satisfaites et que $n \geq 4$ est pair. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq k_0 + 1$ et soit $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$. Alors, on a*

$$\|\chi_3 V(dT, s) \psi_3\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_5}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)}. \quad (2.3.52)$$

Preuve. Sachant que $V(dT, s, \theta) = F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(dT, \theta)$ vérifie la propriété (S'), il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour $\theta \in \mathbb{C}'$ avec $|\theta| \leq \varepsilon_0$, on a

$$V(dT, s, \theta) = V((k_0 + 1)T, s, \theta) = \sum_{k \geq -m} \sum_{j \geq -m_k} R_{kj}(s) \theta^k (\log \theta)^{-j}. \quad (2.3.53)$$

La propriété (2.3.46) implique que dans la représentation (2.3.53), $R_{kj}(s) = 0$ pour $k < 0$ ou $k = 0$ et $j < 0$. Cela entraîne que, pour $\theta \in \mathbb{C}'$ avec $|\theta| \leq \varepsilon_0$, on obtient la représentation suivante

$$V(dT, s, \theta) = V((k_0 + 1)T, s, \theta) = A(s, \theta) + B(s) \theta^{m_0} \log(\theta)^{-\mu} + \underset{\theta \rightarrow 0}{o}(\theta^{m_0} \log(\theta)^{-\mu}) \quad (2.3.54)$$

avec $A(s, \theta)$ une fonction holomorphe en θ pour $|\theta| \leq \varepsilon_0$, $B(s)$ un opérateur de rang fini, $m_0 \geq 0$ et $\mu \geq 1$. De plus, d'après (2.3.49) et (2.3.50), pour ε_0 assez petit $A(s, \theta)$ et $B(s)$ sont bornés indépendamment de s .

En appliquant ces résultats et en intégrant $V(dT, s, \theta)$ sur un contour convenable nous allons montrer la décroissance des solution de (0.1.3) pour $f_1 = 0$. Commençons par définir ce contour. Comme $V(dT, s, \theta)$ n'a pas de pôles sur $\{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$, il existe $0 < \delta \leq \varepsilon_0$ tel que $V(dT, s, \theta)$ n'a pas de pôles sur

$$\{\theta \in \mathbb{C}' : \text{Im}(\theta) \geq -\delta T, -\pi \leq \text{Re}(\theta) \leq \pi\}.$$

Considérons le contour $\gamma = \Gamma_1 \cup \omega \cup \Gamma_2$ où

$$\Gamma_1 = [-i\delta T - \pi, -i\delta T - \nu], \quad \Gamma_2 = [-i\delta T + \nu, -i\delta T + \pi]$$

et $0 < \nu < \varepsilon_0$ est suffisamment petit. Le contour ω est une courbe, reliant $-i\delta T - \nu$ et $-i\delta T + \nu$, qui est symétrique par rapport à l'axe $\text{Re}(\theta) = 0$. La partie de ω contenue dans $\{\theta : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$ est un demi cercle de rayon ν ,

$$\omega \cap \{\theta : \text{Re}(\theta) < 0, \text{Im}(\theta) \leq 0\} = [-\nu - i\delta T, -\nu]$$

et

$$\omega \cap \{\theta : \text{Re}(\theta) > 0, \text{Im}(\theta) \leq 0\} = [\nu, \nu - i\delta T].$$

De plus, ω est contenu dans la région où $V(dT, s, \theta)$ n'a pas de pôles. Considérons aussi le contour fermé \mathcal{C} défini par

$$\mathcal{C} = [i(A+1)T + \pi, i(A+1)T - \pi] \cup [i(A+1)T - \pi, -i\delta T - \pi] \cup \gamma \cup [-i\delta T + \pi, i(A+1)T + \pi].$$

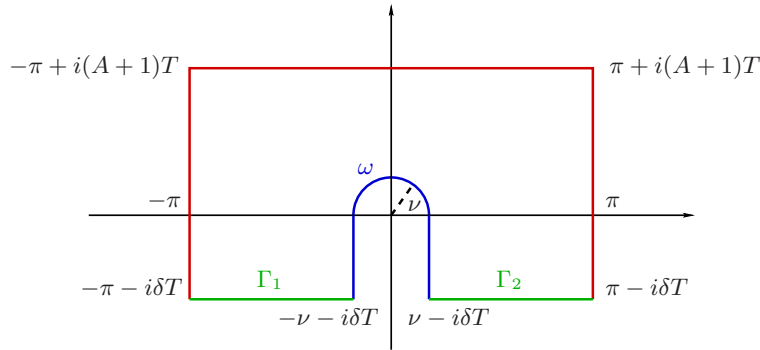


FIGURE 2.2 – Contour \mathcal{C}

D'après les propriétés de F' , on a

$$V(dT, s, \theta + 2\pi) = V(dT, s, \theta). \quad (2.3.55)$$

Comme le contour \mathcal{C} est contenu dans la région où $V(dT, s, \theta)$ n'a pas de pôles, la formule de Cauchy implique

$$\int_{\mathcal{C}} e^{-id\theta} V(dT, s, \theta) d\theta = 0.$$

De plus, la propriété (2.3.55) entraîne

$$\int_{[i(A+1)T - \pi, -i\delta T - \pi]} e^{-id\theta} V(dT, s, \theta) d\theta = - \int_{[-i\delta T + \pi, i(A+1)T + \pi]} e^{-id\theta} V(dT, s, \theta) d\theta.$$

On en déduit

$$\int_{[i(A+1)T-\pi, i(A+1)T+\pi]} F(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(dT, \theta) d\theta = \int_{\gamma} F(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(dT, \theta) d\theta. \quad (2.3.56)$$

La formule d'inversion (2.3.16) et l'égalité (2.3.56) impliquent

$$\chi_3 V(dT, s) \psi_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} F(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(dT, \theta) \psi_3 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} e^{-id\theta} V((k_0 + 1)T, s, \theta) d\theta. \quad (2.3.57)$$

Pour estimer le terme de droite de la formule (2.3.57), nous allons appliquer le Lemme 2.3.2. Considérons $A(s, \theta)$ la partie holomorphe de la représentation (2.3.54). Choisissons δ tel que $\delta < \frac{\varepsilon_0}{T}$. Ainsi, la courbe fermée $\omega \cup [-i\delta T - \nu, -i\delta T + \nu]$ est contenue dans le domaine $\{\theta \in \mathbb{C} : |\theta| < \varepsilon_0\}$. Comme $A(s, \theta)$ est holomorphe en θ pour $|\theta| \leq \varepsilon_0$, en appliquant la formule de Cauchy, on obtient

$$\int_{\omega} e^{-id\theta} A(s, \theta) d\theta = - \int_{[-i\delta T - \nu, -i\delta T + \nu]} e^{-id\theta} A(s, \theta) d\theta$$

et, comme $A(s, \theta)$ est borné indépendamment de s , cela donne

$$\left| \int_{\omega} e^{-id\theta} A(s, \theta) d\theta \right| \leq C_1 e^{-\delta(dT)} \quad (2.3.58)$$

avec $C_1 > 0$ indépendant de s et de d . D'après (2.3.49) et (2.3.50), pour $\theta \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec δ suffisamment petit,

$$V(dT, s, \theta) = V(k_0 T, s, \theta)$$

est borné indépendamment de s et on montre facilement que

$$\left| \int_{\Gamma_j} e^{-ik\theta} V(dT, s, \theta) d\theta \right| \leq C_2 e^{-\delta(dT)}, \quad j = 1, 2 \quad (2.3.59)$$

avec C_2 indépendant de s et de d . En appliquant les estimations (2.3.58), (2.3.59) et la représentation (2.3.54), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{-id\theta} V((k_0 + 1)T, s, \theta) d\theta &= \underset{d \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)} \right) \\ &+ \int_{\omega} e^{-id\theta} \left(B(s) \theta^{m_0} (\log \theta)^{-\mu} + \underset{\theta \rightarrow 0}{o} (\theta^{m_0} (\log \theta)^{-\mu}) \right) d\theta. \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

En appliquant l'estimation (2.3.51) pour $t = d$ et $\nu = \frac{1}{d}$, on trouve

$$\int_{\omega} e^{-id\theta} \theta^{m_0} (\log \theta)^{-\mu} d\theta \leq \frac{C_3}{(dT + 1)^{m_0+1} \ln^{\mu+1}(dT + e)}.$$

En combinant l'estimation précédente avec la représentation (2.3.60), pour tous $d \geq k_0 + 1$ et $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$, on obtient

$$\left\| \int_{\gamma} e^{-id\theta} V((k_0 + 1)T, s, \theta) d\theta \right\|_{\mathcal{L}(L^2, \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_4}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)}$$

avec $C_4 > 0$ indépendant de s et de d . La formule d'inversion (2.3.57) implique que, pour tous $d \geq k_0 + 1$ et $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$, on a (2.3.52). \square

Lemme 2.3.4 *Supposons que (H1) et (H3) sont satisfaites et que $n \geq 4$ est pair. Soient $t \geq (k_0 + 1)T$, $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$. Alors, on a la représentation suivante*

$$\chi_3 V(t, s) \psi_3 h = t^{-m_0-1} \ln^{-\mu_0-1}(t) B_1(t, s) h + \tilde{V}(t, s) h, \quad (2.3.61)$$

où

$$\begin{aligned} B_1(t, s) : L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^{1+n}) \\ h &\mapsto B_1(t, s) h \end{aligned}$$

est un opérateur de rang fini borné indépendamment de s pour $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$, et $B_1(t, s)$ est T -périodique par rapport à t , $\mu_0 \geq 1$ et $m_0 \geq 0$. De plus, pour $t \geq (k_0 + 1)T$ et $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$, on a l'estimation

$$\left\| \partial_t^j \left(\tilde{V}(t, s) \right) \right\| \leq C_5^j \partial_t^j \left(t^{-m_0-1} \ln^{-\mu_0-2}(t) \right), \quad j \in \mathbb{N}$$

avec $C_5^j > 0$ indépendant de s et t .

Preuve. Considérons $V(t, s, \theta) = F'(\chi_3 V(t, s) \psi_3)(t, \theta)$. Dans la sous-section 2.3.3 nous avons montré que, pour $t \geq (k_0 + 1)T$ et $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$, $V(t, s, \theta)$ se prolonge de façon méromorphe en vérifiant la propriété (S'). Notons $(\kappa_j)_{j \geq 1}$ les pôles de $V(t, s, \theta)$ dans \mathbb{C}' vérifiant

$$0 \leq \text{Re}(\kappa_j) < \frac{2\pi}{T}, \quad \text{Im}(\kappa_{j+1}) < \text{Im}(\kappa_j), \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \text{Im}(\kappa_j) = -\infty.$$

D'après (S'), il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\theta \in \mathbb{C}'$ vérifiant $|\theta| \leq \varepsilon_0$ on a la représentation

$$V(t, s, \theta) = \sum_{k \geq -m} \sum_{j \geq -m_k} R_{kj}(t, s) \theta^k (\log \theta)^{-j} \quad (2.3.62)$$

avec $R_{kj}(t, s)$ des opérateurs \mathcal{C}^∞ et T -périodiques en t . On déduit de cette représentation que, pour $\theta \in \mathbb{C}'$ vérifiant $|\theta| \leq \varepsilon_0$, on a

$$V(t, s, \theta) = A(t, s, \theta) + B(t, s) \theta^p \log^q(\theta) + C(t, s, \theta) \quad (2.3.63)$$

avec $A(t, s, \theta)$ la partie holomorphe de la représentation (2.3.62) et $B(t, s) \theta^p \log^q(\theta)$ le terme dominant, pour $\theta \rightarrow 0$, de $V(t, s, \theta) - A(t, s, \theta)$. De plus, $A(t, s, \theta)$, $B(t, s)$ et $C(t, s, \theta)$ sont \mathcal{C}^∞ et T -périodiques en t . À partir de ces propriétés de $V(t, s, \theta)$, sous l'hypothèse (H1), Vainberg donne (voir la preuve du théorème principal de [Vain93] qu'on trouve à la fin de [Vain93]) la représentation suivante

$$\chi_3 V(t, s) \psi_3 h = \sum_{1 \leq j \leq N} \sum_{0 \leq l \leq p_j} t^l e^{-i\kappa_j t} A_{j,l}(t, s) h + t^{-p-1} \ln^{q-1} t B_1(t, s) h + V_N(t, s) h, \quad (2.3.64)$$

où $B_1(t, s)$, $A_{j,l}(t, s) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$ sont des opérateurs de rang fini qui sont \mathcal{C}^∞ et T -périodiques en t , et $V_N(t, s)$ vérifie

$$\left\| \partial_t^j (V_N(t, s)) \right\| \leq C_5^j(s) \partial_t^j \left(t^{-p-1} \ln^{q-2}(t) \right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

De plus, on a

$$\operatorname{Im}(\kappa_j) \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Notons que la dépendance en s des opérateurs $B_1(t, s)$, $A_{j,l}(t, s)$ et $V_N(t, s)$ est de la même nature que celle des opérateurs $A(t, s, \theta)$, $B(t, s)$, $C(t, s, \theta)$ et $V(t, s, \theta)$ pour $\operatorname{Im}(\theta)$ proche de 0. D'après le Lemme 2.3.1, pour $t \geq (k_0 + 1)T > 1$ et $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$, la famille d'opérateurs $V(t, s, \theta)$ n'a pas de pôles sur $\{\theta \in \mathbb{C}' : \operatorname{Im}(\theta) \geq 0\}$. De plus, les identités (2.3.49), (2.3.50) et l'hypothèse (H3) impliquent que les opérateurs $A(t, s, \theta)$, $B(t, s)$ et $C(t, s, \theta)$ et leurs dérivées par rapport t sont bornés indépendamment de t . Par conséquent, dans la représentation (2.3.64), les opérateurs $A_{j,l}(t, s)$ sont nuls et les opérateurs $B_1(t, s)$ et $V_N(t, s)$ ainsi que leurs dérivées par rapport à t sont bornés indépendamment de s . On en déduit, la représentation suivante

$$\chi_3 V(t, s) \psi_3 h = t^{-p-1} \ln^{q-1} t B_1(t, s) h + \tilde{V}(t, s) h$$

avec $\tilde{V}(t, s)$ vérifiant

$$\left\| \partial_t^j \left(\tilde{V}(t, s) \right) \right\| \leq C_5^j \partial_t^j \left(t^{-p-1} \ln^{q-2}(t) \right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

avec $C_5^j > 0$ indépendant de s . D'autre part, en notant $t = dT + t'$, avec $0 \leq t' < T$, et en appliquant les mêmes arguments qu'au Lemme 2.3.3 et le fait que

$$F(V(t, s))(t, \theta + 2\pi) = F(V(t, s))(t, \theta),$$

on montre que

$$\chi_3 V(t, s) \psi_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} e^{-i\frac{t'}{T}\theta} e^{-id\theta} V((k_0 + 1)T + t', s, \theta) d\theta$$

avec γ le contour défini dans la preuve du Lemme 2.3.3. En appliquant le Lemme 2.3.1 ainsi que les mêmes arguments que ceux utilisés au Lemme 2.3.3, on obtient

$$\left\| \int_{\gamma} e^{-i\frac{t'}{T}\theta} e^{-id\theta} V((k_0 + 1)T + t', s, \theta) d\theta \right\| \leq \frac{C}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)}$$

et on en déduit que

$$\|\chi_3 V(t, s) \psi_3\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C'}{(t + 1) \ln^2(t + e)}, \quad t \geq (k_0 + 1)T.$$

Cette dernière estimation prouve que $q \leq -1$ et $p \geq 0$. □

En utilisant (2.3.61) on obtient facilement l'estimation suivante :

Lemme 2.3.5 *Supposons que (H1) et (H3) sont satisfaites et que $n \geq 4$ est pair. Soient $d \geq (k_0 + 1)$, $0 \leq s \leq \frac{2T}{3}$. Alors, on a*

$$\|\chi_3 \partial_t V(dT, s) \psi_3\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_5}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)}. \quad (2.3.65)$$

Preuve du Théorème 2.3.1.

D'après (2.3.52), nous avons établi la décroissance de l'énergie locale des solutions de (0.1.3) pour $f = (0, f_2)$. Nous allons maintenant montrer que ce résultat reste vrai pour toutes les solutions de (0.1.3). Pour cela, il nous suffira d'estimer $\chi_2 U(dT, 0)\psi_2$. Soit $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\alpha(t) = 0$ pour $t \leq \frac{T}{2}$ et $\alpha(t) = 1$ pour $t \geq \frac{2T}{3}$. On remarque que pour tout $h \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$, $w = \alpha(t)U(t, 0)h$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x w) = [\partial_t^2, \alpha](t)U(t, 0)h, \\ (w, w_t)|_{t=0} = (0, 0). \end{cases} \quad (2.3.66)$$

On déduit du problème de Cauchy (2.3.66) la représentation suivante

$$U(t, 0) = \alpha(t)U(t, 0) = \int_0^t V(t, s)[\partial_t^2, \alpha](s)U(s, 0)ds, \quad t \geq T. \quad (2.3.67)$$

Comme $[\partial_t^2, \alpha](t) = 0$ pour $t > \frac{2T}{3}$, la formule (2.3.67) devient

$$U(t, 0) = \int_0^{\frac{2T}{3}} V(t, s)[\partial_t^2, \alpha](s)U(s, 0)ds, \quad t \geq T.$$

La propagation en temps fini implique

$$\chi_2 U(dT, 0)\psi_2 = \int_0^{\frac{2T}{3}} \chi_2 V(dT, s)\psi_3[\partial_t^2, \alpha](s)U(s, 0)\psi_2 ds, \quad d \geq 1. \quad (2.3.68)$$

La formule (2.3.68) et l'estimations (2.3.52), impliquent que, pour $d \geq k_0 + 1$, on a

$$\|\chi_2 U(dT, 0)\psi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{H}^1(\mathbb{R}^n), \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_6}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)}, \quad (2.3.69)$$

avec $C_6 > 0$ indépendant de d .

Montrons maintenant que ces estimations sont aussi valables pour les dérivées d'ordre 1 par rapport à t des solutions de (0.1.3). Soit $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. La formule (2.3.67) implique que, pour $t \geq (k_0 + 1)T$, on a

$$\partial_t U(t, 0)\beta = \int_0^{\frac{2T}{3}} \partial_t V(t, s)[\partial_t^2, \alpha](s)U(s, 0)\beta ds.$$

Par densité, cela donne

$$\chi_2 \partial_t U(dT, 0)\psi_2 = \int_0^{\frac{2T}{3}} \chi_2 \partial_t V(dT, s)\psi_3[\partial_t^2, \alpha](s)U(s, 0)\psi_2 ds, \quad d \geq k_0 + 1$$

et l'estimation (2.3.65) entraîne que, pour $d \geq k_0 + 1$, on a

$$\|\chi_2 \partial_t U(dT, 0)\psi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{H}^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_7}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)}. \quad (2.3.70)$$

En appliquant l'ensemble des estimations que nous avons établi, nous allons démontrer (2.3.1). En effet, les estimations (2.3.52), (2.3.65), (2.3.69) et (2.3.70), impliquent que, pour $d \geq k_0 + 1$, on a

$$\|\chi_2 \mathcal{U}(dT, 0) \psi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_8}{(dT + 1) \ln^2(dT + e)}. \quad (2.3.71)$$

Supposons que $t - s \geq (k_0 + 3)T$ et prenons $k, l \in \mathbb{N}$ tels que

$$kT \leq t \leq (k + 1)T, \quad lT \leq s \leq (l + 1)T.$$

Alors, la propriété (1.2.3) et la propagation en temps fini impliquent

$$\chi_1 \mathcal{U}(t, s) \psi_1 = \chi_1 \mathcal{U}(t, kT) \chi_2 \mathcal{U}((k - (l + 1))T, 0) \psi_2 \mathcal{U}((l + 1)T, s) \psi_1$$

et $(k - (l + 1))T \geq (k_0 + 1)T$. En combinant les estimations (1.2.7) et (2.3.71), on obtient

$$\|\chi_1 \mathcal{U}(t, s) \psi_1\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_9}{((k - (l + 1))T + 1) \ln^2((k - (l + 1))T + e)}.$$

De plus, on trouve

$$\begin{aligned} (t - s + 1) \ln^2(t - s + e) &\leq ((k - (l + 1))T + 2T + 1) \ln^2((k - (l + 1))T + 2T + e) \\ &\leq (k - (l + 1))T \ln^2((k - (l + 1))T) \left(1 + \frac{2T + 1}{(k - (l + 1))T}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{2T + e}{(k - (l + 1))T})}{\ln((k - (l + 1))T)}\right)^2 \\ &\leq C_{10} (k - (l + 1))T \ln^2((k - (l + 1))T) \end{aligned}$$

et on montre facilement que

$$(k - (l + 1))T \ln^2((k - (l + 1))T) \leq C_{11} ((k - (l + 1))T + 1) \ln^2((k - (l + 1))T + e).$$

On en déduit l'estimation

$$(t - s + 1) \ln^2(t - s + e) \leq C_{12} ((k - (l + 1))T + 1) \ln^2((k - (l + 1))T + e).$$

Cela entraîne

$$\|\chi_1 \mathcal{U}(t, s) \psi_1\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_{13}}{(t - s + 1) \ln^2(t - s + e)}.$$

Pour $t - s \leq (k_0 + 3)T$, d'après l'estimation (1.2.7), on a

$$\begin{aligned} \|\chi_1 \mathcal{U}(t, s) \psi_1\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n))} &\leq C_{14} e^{A(k_0 + 3)T} \\ &\leq C_{14} e^{A(k_0 + 3)T} \left(\frac{((k_0 + 3)T + 1) \ln^2((k_0 + 3)T + e)}{(t - s + 1) \ln^2(t - s + e)} \right). \end{aligned}$$

On en déduit facilement (2.3.1) pour $n \geq 4$ pair. \square

2.4 Intégrabilité L^2 de l'énergie locale

En appliquant les estimations (2.3.1) et (1.3.11), nous allons établir l'intégrabilité L^2 de l'énergie locale qui s'écrit sous la forme suivante :

Théorème 2.4.1 *Supposons que $n \geq 4$ est pair et que les hypothèses (H1), (H3) sont satisfaites. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1)$, on a*

$$\int_0^\infty \|\varphi \mathcal{U}(t, 0) f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C(T, \varphi, n, \rho) \|f\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (2.4.1)$$

Preuve. Soient $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| < \rho + 1)$ telle que $\chi = 1$ pour $|x| \leq \rho + \frac{1}{2}$ et $0 \leq \chi \leq 1$. Notons que

$$\varphi \mathcal{U}(t, 0) f = \varphi \mathcal{U}(t, 0) \chi f + \varphi \mathcal{U}(t, 0) (1 - \chi) f. \quad (2.4.2)$$

En combinant les estimations (2.3.1), (1.3.11) et la représentation (2.4.2), et en appliquant les mêmes arguments que ceux que nous avons utilisés pour démontrer le Théorème 1.3.1, on prouve (2.4.1). \square

2.5 Exemples de métriques $a(t, x)$

L'objectif de cette section est d'appliquer les résultats obtenus pour les métriques non captives indépendantes de t afin de construire une métrique périodique en t pour laquelle les conditions (H1) et (H3) sont satisfaites. Considérons la condition suivante

$$\frac{2a}{\rho} - \frac{|a_t|}{\sqrt{\inf a}} - |a_r| \geq \beta > 0 \quad (2.5.1)$$

avec β indépendant de t et x . Il a été établi dans la Section 1.8.1 du Chapitre 1 que l'hypothèse (H1) est satisfaite si $a(t, x)$ vérifie (2.5.1). Par conséquent, nous supposons que $a(t, x)$ vérifie (2.5.1) et nous allons chercher une condition impliquant l'hypothèse (H3). Considérons une métrique $a(t, x)$ T -périodique par rapport à t (avec $T > 0$ à déterminer) telle que $a(t, x)$ vérifie (1.1.1) et (2.5.1). De plus, supposons qu'il existe $T_1 \in [0, T]$ tel que $T_1 < 1$ et

$$a(t, x) = a_1(x), \quad t \in [T_1, T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5.2)$$

Notons que la condition (2.5.1) implique que $a_1(x)$ est une métrique non captive (voir la Section 1.8.1 du Chapitre 1). Notre objectif sera de montrer que pour T suffisamment grand $a(t, x)$ vérifie l'hypothèse (H3). Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} v_{tt} - \operatorname{div}_x(a_1(x) \nabla_x v) = 0, \\ (v, v_t)(0) = f, \end{cases} \quad (2.5.3)$$

et le propagateur associé

$$\mathcal{V}(t) : \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto (v, v_t)(t) \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n).$$

Soit u la solution du problème (0.1.3). Pour $T_1 \leq t \leq T$ on a

$$\partial_t^2 u - \operatorname{div}_x(a_1(x)\nabla_x u) = \partial_t^2 u - \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x u) = 0.$$

Cela entraîne que, pour tout $T_1 \leq s < t \leq T$, on a

$$\mathcal{U}(t, s) = \mathcal{V}(t - s). \quad (2.5.4)$$

Le comportement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$ de l'énergie locale pour le problème (0.1.3) quand $a(t, x)$ ne dépend pas de t a été très largement étudié (voir [Bur98], [TZ], [Vain88], [Vain75], [Vain88], [Vod99] et [Vod04]). En particulier, il a été prouvé que sous une condition de non capture et pour $n \geq 3$, l'énergie locale associée au problème (2.5.3) décroît.

On suppose que $n \geq 4$ est pair car le cas impair a été examiné dans le Chapitre 1. Afin de montrer (H3), nous appliquerons le résultat suivant :

Théorème 2.5.1 *Supposons que $n \geq 4$ est pair et que $a_1(x)$ est non captive. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors, on a*

$$\|\varphi_1 \mathcal{V}(t) \varphi_2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C_{\varphi_1, \varphi_2} t^{1-n}, \quad t \geq t_0 > 1 \quad (2.5.5)$$

avec $C_{\varphi_1, \varphi_2} > 0$ indépendant de t .

L'estimation de l'énergie locale (2.5.5) est démontrée par Vodev dans [Vod99] en supposant que pour la résolvante tronquée $R_\psi(\lambda) = \psi(\operatorname{div}(a_1 \nabla \cdot) - \lambda^2)^{-1} \psi$, $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi = 1$ pour $|x| \leq \rho$ on a estimation

$$|\lambda| \|R_\psi(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C, \quad |\lambda| \geq C_0 > 0.$$

D'autre part, pour des perturbations non captives l'estimation ci-dessus de la résolvante tronquée a été démontrée par Vainberg dans [Vain75] et [Vain88].

Lemme 2.5.1 *Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1 + T_1)$ telle que $\psi = 1$ pour $|x| \leq \rho + \frac{1}{2} + T_1$. Alors, on a*

$$\mathcal{U}(T_1, 0) - \mathcal{V}(T_1) = \psi(\mathcal{U}(T_1, 0) - \mathcal{V}(T_1)) = (\mathcal{U}(T_1, 0) - \mathcal{V}(T_1))\psi. \quad (2.5.6)$$

Preuve. Soit $g \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$ et w la fonction définie par

$$(w, w_t)(t) = \mathcal{U}(t, 0)(1 - \psi)g.$$

La propagation en temps fini implique que, pour $0 \leq t \leq T_1$ et $|x| \leq \rho + \frac{1}{2}$, on a $w(t, x) = 0$. Alors, on obtient

$$\operatorname{div}_x(a_1(x)\nabla_x) = \Delta_x = \operatorname{div}_x(a(t, x)\nabla_x), \quad \text{pour } |x| > \rho. \quad (2.5.7)$$

Par conséquent, w est la solution sur $0 \leq t \leq T_1$ du problème

$$\begin{cases} w_{tt} - \operatorname{div}_x(a_1(x)\nabla_x w) = 0, \\ (w, w_t)(0) = (1 - \psi)g \end{cases}$$

et cela entraîne

$$(\mathcal{U}(T_1, 0) - \mathcal{V}(T_1))(1 - \psi) = 0. \quad (2.5.8)$$

Notons maintenant u et v les fonctions définies par

$$(u, u_t)(t) = \mathcal{U}(t, 0)g \quad \text{et} \quad (v, v_t)(t) = \mathcal{V}(t)g$$

avec $g \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$. En appliquant (2.5.7), on peut facilement montrer que $(1 - \psi)u$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2((1 - \psi)u) - \Delta_x((1 - \psi)u) = [\Delta_x, \psi]u, \\ (((1 - \psi)u), ((1 - \psi)u)_t)(0) = (1 - \psi)g, \end{cases}$$

et $(1 - \psi)v$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2(((1 - \psi)v)) - \Delta_x((1 - \psi)v) = [\Delta_x, \psi]v, \\ (((1 - \psi)v), ((1 - \psi)v)_t)(0) = (1 - \psi)g, \end{cases}$$

et cela implique

$$(1 - \psi)(\mathcal{U}(T_1, 0) - \mathcal{V}(T_1)) = 0. \quad (2.5.9)$$

En combinant (2.5.8) et (2.5.9), on obtient (2.5.6). □

À partir de maintenant, nous considérerons une fonction de troncature

$$\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1 + T_1)$$

telle que $\psi = 1$ pour $|x| \leq \rho + \frac{1}{2} + T_1$.

Lemme 2.5.2 *Supposons que $n \geq 4$ est pair et que $a(t, x)$ vérifie (2.5.1) et (2.5.2). Alors, pour T assez grand, on a*

$$\mathcal{U}(NT, 0)\psi = \mathcal{V}(NT)\psi + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{V}(kT + T - T_1)B_{k,N}, \quad N \geq 1, \quad (2.5.10)$$

où, pour tout $N \geq 1$ et pour tout $k \in \{0, \dots, N - 1\}$, $B_{k,N}$ vérifie

$$\begin{cases} B_{k,N} = \psi B_{k,N}, \\ \|B_{k,N}\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C}{(N - k) \ln^2(N - k + e)} \end{cases} \quad (2.5.11)$$

avec $C > 0$ indépendant de N , k et T .

Preuve. Nous allons prouver (2.5.10) et (2.5.11) par récurrence. Tout d'abord, prenons

$$B_{0,1} = \mathcal{U}(T_1, 0) - \mathcal{V}(T_1).$$

On déduit de (2.5.6) que

$$B_{0,1} = \psi B_{0,1} = B_{0,1}\psi. \quad (2.5.12)$$

De plus, la formule (2.5.4) implique

$$\mathcal{U}(T, 0) = \mathcal{V}(T - T_1)\mathcal{U}(T_1, 0) = \mathcal{V}(T - T_1)B_{0,1} + \mathcal{V}(T). \quad (2.5.13)$$

Ainsi, en combinant (2.5.12) et (2.5.13), on voit que la propriété (2.5.10) est vraie pour $N = 1$.

Supposons maintenant que (2.5.10) et (2.5.11) sont vraies pour $N \geq 1$. Posons $S = \mathcal{U}(T_1, 0) - \mathcal{V}(T_1)$. Avec l'aide de (2.5.6) on observe que

$$S = \psi S = S\psi. \quad (2.5.14)$$

Puis, on obtient

$$\mathcal{U}((N+1)T, 0)\psi = \mathcal{U}(T, 0)\mathcal{U}(NT, 0)\psi = (\mathcal{V}(T) + \mathcal{V}(T - T_1)S)\mathcal{U}(NT, 0)\psi.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne

$$\mathcal{U}((N+1)T, 0)\psi = (\mathcal{V}(T) + \mathcal{V}(T - T_1)S) \left(\mathcal{V}(NT)\psi + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{V}(kT + T - T_1)B_{k,N} \right),$$

où, pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $B_{k,N}$ vérifie (2.5.11). On en déduit

$$\mathcal{U}((N+1)T, 0)\psi = \mathcal{V}((N+1)T)\psi + \sum_{k=0}^N \mathcal{V}(kT + T - T_1)B_{k,N+1}, \quad (2.5.15)$$

où, pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $B_{k,N+1} = B_{k-1,N}$ et

$$B_{0,N+1} = \sum_{k=0}^{N-1} S\mathcal{V}(kT + T - T_1)B_{k,N} + S\mathcal{V}(NT)\psi.$$

L'hypothèse de récurrence implique que, pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $B_{k,N+1} = B_{k-1,N}$ vérifie (2.5.11). Afin de conclure, il ne nous reste plus qu'à démontrer que $B_{0,N+1}$ vérifie (2.5.11). Premièrement, notons que l'hypothèse de récurrence et (2.5.15) impliquent

$$B_{0,N+1} = \psi B_{0,N+1} \quad (2.5.16)$$

et on trouve

$$B_{0,N+1} = \sum_{k=0}^{N-1} S\psi\mathcal{V}(kT + T - T_1)\psi B_{k,N} + S\psi\mathcal{V}(NT)\psi. \quad (2.5.17)$$

Ensuite, l'estimation (2.5.11) donne que, pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$, on a

$$\|B_{k,N}\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C}{(N-k)\ln^2(N-k+e)}, \quad (2.5.18)$$

avec $C > 0$ indépendant de k , N et T . D'après l'estimation (2.5.5), pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, on a

$$\|\psi\mathcal{V}(kT + T - T_1)\psi\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_\psi}{(kT + 1 + T - T_1)\ln^2(kT + (T - T_1) + e)}.$$

Si on prend $T \geq 2$, l'inégalité précédente devient

$$\|\psi\mathcal{V}(kT + T - T_1)\psi\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_1}{T(k+1)\ln^2(k+1+e)}, \quad (2.5.19)$$

où $C_1 = 2C(T_1)$ est indépendant de k , N et T . Notons que $\|S\|$ est indépendant de T , k et N . En combinant la représentation (2.5.17) et les estimations (2.5.18), (2.5.19), on obtient

$$\begin{aligned} \|B_{0,N+1}\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} &\leq \frac{C_1 C}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(N-k) \ln^2(N-k+e)} \cdot \frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1+e)} \\ &\quad + \frac{C_1}{(NT+1) \ln^2(N+1+e)}. \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

De telle manière, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{\frac{N-1}{2} \leq k \leq N-1} \frac{1}{(N-k) \ln^2(N-k+e)} \cdot \frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1+e)} \\ &\leq \frac{2}{(N+1) \ln^2\left(\frac{N+1}{2} + e\right)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k+e)} \right) \leq \frac{C_2}{(N+1) \ln^2(N+1+e)} \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq k \leq \frac{N-1}{2}} \frac{1}{(N-k) \ln^2(N-k+e)} \cdot \frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1+e)} \\ &\leq \frac{2}{(N+1) \ln^2\left(\frac{N+1}{2} + e\right)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k+e)} \right) \leq \frac{C_2}{(N+1) \ln^2(N+1+e)}, \end{aligned} \tag{2.5.22}$$

avec C_2 indépendant de k , N et T . De plus, on a

$$\frac{1}{NT} = \frac{1}{T(N+1)} \frac{N+1}{N} \leq \frac{2}{T(N+1)}.$$

Les inégalités (2.5.21), (2.5.22) et l'estimation (2.5.20), impliquent

$$\|B_{0,N+1}\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \left(\frac{4CC_1C_2 + 2C_1}{T} \right) \cdot \frac{1}{(N+1) \ln^2(N+1+e)}. \tag{2.5.23}$$

On déduit de l'estimation (2.5.23) et de la formule (2.5.16) que si l'on choisit T de telle sorte que $T \geq 2$ et $\frac{4CC_1C_2 + 2C_1}{T} \leq C$, $B_{0,N+1}$ vérifiera (2.5.11). Comme la valeur de T est indépendante de N , en associant ce dernier résultat à (2.5.12) et (2.5.13), on déduit que (2.5.10) et (2.5.11) sont vraies pour tout $N \geq 1$. \square

À partir de maintenant, on choisit $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + \frac{1}{4})$ telle que $\beta = 1$ pour $|x| \leq \rho + \frac{1}{5}$.

Lemme 2.5.3 *Supposons que $n \geq 4$ est pair et que $a(t, x)$ vérifie (2.5.1) et (2.5.2). Soit $s \in [T_1, T]$. Alors, pour T assez grand, on obtient*

$$\mathcal{U}(NT, s)\beta = \mathcal{V}(NT - s)\beta + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{V}(kT + T - T_1)D_{k,N}(s), \quad N \geq 2, \tag{2.5.24}$$

où, pour tout $N \geq 2$ et pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $D_{k,N}(s)$ vérifie

$$\begin{cases} D_{k,N}(s) = \psi D_{k,N}(s), \\ \|D_{k,N}(s)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C}{(N-k) \ln^2(N-k+e)} \end{cases} \quad (2.5.25)$$

avec $C > 0$ indépendant de s , N , k et T .

Preuve. Comme $s \in [T_1, T]$, on a $\mathcal{U}(T, s) = \mathcal{V}(T-s)$. Cela entraîne

$$\mathcal{U}(2T, s)\beta = (\mathcal{V}(T) + \mathcal{V}(T-T_1)S)\mathcal{V}(T-s)\beta = \mathcal{V}(2T-s)\beta + \mathcal{V}(T-T_1)D_{1,2}(s),$$

où $D_{1,2}(s) = S\mathcal{V}(T-s)\beta$. En tenant compte de l'estimation (2.5.5), il est facile de voir que $D_{1,2}(s)$ vérifie (2.5.25) pour $N = 2$. Par conséquent, en répétant l'argument employé dans la preuve de (2.5.10) et (2.5.11), on déduit que pour T assez grand (2.5.24) et (2.5.25) sont satisfaites pour tout entier $N \geq 2$. \square

Lemme 2.5.4 *Supposons que $n \geq 4$ est pair et que $a(t, x)$ vérifie (2.5.1) et (2.5.2). Supposons de plus que les conditions (2.5.10), (2.5.11), (2.5.24) et (2.5.25), sont satisfaites et que $T > 2$. Alors, pour tous $N \geq 1$, $\varphi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 1 + 3T)$ et pour $0 \leq s \leq NT$, on a*

$$\|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)\psi\| \leq \frac{C}{(N+1) \ln^2(N+e)}, \quad (2.5.26)$$

$$\|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, s)\beta\| \leq \frac{C'}{(NT-s+1) \ln^2(NT-s+e)} \quad (2.5.27)$$

avec $C, C' > 0$ indépendants de s et N .

Preuve. Comme $T > 2$, l'estimation (2.5.5) implique

$$\|\varphi_1 \mathcal{V}(kT)\psi\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_2}{(k+1) \ln^2(k+e)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.5.28)$$

avec C_2 indépendant de k . La représentation (2.5.10) peut s'écrire

$$\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)\psi = \varphi_1 \mathcal{V}(NT)\psi + \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_1 \mathcal{V}(kT + T - T_1)\psi B_{k,N}.$$

En combinant cette représentation avec les estimations (2.5.11) et (2.5.28), on trouve

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)\beta\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} &\leq \frac{C_3}{(N+1) \ln^2(N+e)} \\ &+ C'_3 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(N-k) \ln^2(N-k+e)} \cdot \frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1+e)} \end{aligned}$$

et (2.5.21), (2.5.22) impliquent (2.5.26).

Montrons maintenant (2.5.27). Soit $s \in [0, NT]$ et soit $l \in \{0, \dots, N\}$ tels que $s = lT + s'$, avec $0 \leq s' < T$. On a $\mathcal{U}(NT, s) = \mathcal{U}((N-l)T, s')$. Tout d'abord, supposons que $s' \in [T_1, T]$. En appliquant (2.5.24) et (2.5.25), pour $N-l \geq 2$ on obtient

$$\varphi_1 \mathcal{U}(NT, s)\beta = \varphi_1 \mathcal{U}((N-l)T, s')\beta = \varphi_1 \mathcal{V}((NT-s)\beta) + \sum_{k=0}^{N-l-1} \varphi_1 \mathcal{V}(kT+T-T_1)\psi D_{k,N}(s') \quad (2.5.29)$$

où $D_{k,N}(s')$ vérifie (2.5.25). En combinant les estimations (2.5.25), (2.5.5) et la représentation (2.5.29), on obtient

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, s)\beta\| &\leq \frac{C_4}{(N-l+1) \ln^2(N-l+e)} \\ &+ C'_4 \sum_{k=0}^{N-l-1} \frac{1}{(N-l-k) \ln^2(N-l-k+e)} \cdot \frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1+e)} \end{aligned}$$

avec $C_4, C'_4 > 0$ indépendants de l, s' et N . En appliquant (2.5.21) et (2.5.22), cela donne

$$\|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, s)\beta\| \leq \frac{C_5}{(N-l+1) \ln^2(N-l+e)}. \quad (2.5.30)$$

Notons que

$$\frac{(N-l+1) \ln^2(N-l+e)}{(NT-s+T) \ln^2(NT-s+Te)} \leq C_6$$

avec C_6 indépendant de s, N et l . Par conséquent, la condition (2.5.30) implique (2.5.27). Pour $N-l = 1$, on a $\mathcal{U}(NT, s) = \mathcal{V}(NT-s)$ et on en déduit facilement (2.5.27). Supposons maintenant que $s' \in [0, T_1]$. La propagation en temps fini implique que

$$\varphi_1 \mathcal{U}(NT, s)\beta = \varphi_1 \mathcal{U}((N-l)T, s')\beta = \varphi_1 \mathcal{U}((N-l)T, 0)\psi \mathcal{U}(0, s')\beta$$

et on obtient (2.5.27) en appliquant (2.5.26). □

Théorème 2.5.2 *Supposons que $n \geq 4$ est pair et que $a(t, x)$ vérifie (2.5.1) et (2.5.2). Alors, pour T assez grand, les hypothèses (H1) et (H3) sont satisfaites.*

Preuve. Prenons $T \geq 2$ tel que les conditions (2.5.10), (2.5.11), (2.5.24) et (2.5.25) soient satisfaites, et fixons $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + 2 + 3T)$ vérifiant

$$\varphi_i = 1 \text{ pour } |x| \leq \rho + 3T + 1, \quad i = 1, 2.$$

Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(|x| \leq \rho + \frac{1}{4})$ telle que $\chi = 1$, sur $|x| \leq \rho + \frac{1}{5}$. Considérons la représentation suivante

$$\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)\varphi_2 = \varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)\chi\varphi_2 + \varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)(1-\chi)\varphi_2. \quad (2.5.31)$$

Pour le premier terme de droite de l'égalité (2.5.31), en appliquant (2.5.26), on obtient

$$\|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)\chi\varphi_2\| \leq \frac{C'}{(N+1) \ln^2(N+e)}$$

avec $C' > 0$ indépendant de N . Soit v la fonction définie par $(v(t), v_t(t)) = \mathcal{V}(t)g$. En appliquant (2.5.7), on voit que $w = (1 - \chi)v$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \operatorname{div}_x(a \nabla_x w) = [\Delta_x, \chi]v, \\ (w, w_t)(0) = (1 - \chi)g. \end{cases}$$

On en déduit la représentation suivante

$$\mathcal{U}(NT, 0)(1 - \chi) = (1 - \chi)\mathcal{V}(NT) - \int_0^{NT} \mathcal{U}(NT, s)Q\mathcal{V}(s)ds,$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [\Delta_x, \chi] & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\beta = 1$ sur $\operatorname{supp}\chi$, on peut écrire cette représentation de la façon suivante

$$\mathcal{U}(NT, 0)(1 - \chi) = (1 - \chi)\mathcal{V}(NT) - \int_0^{NT} \mathcal{U}(NT, s)\beta Q\beta\mathcal{V}(s)ds.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)(1 - \chi)\varphi_2\| &\leq \|\varphi_1(1 - \chi)\mathcal{V}(NT)\varphi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \\ &\quad + C \int_0^{NT} \|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, s)\beta\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} \|\beta\mathcal{V}(s)\varphi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{H}_1(\mathbb{R}^n))} ds. \end{aligned}$$

Les estimations (2.5.26), (2.5.27) et (2.5.5), entraînent

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0)\varphi_2\| &\leq \frac{C}{(N+1)\ln^2(N+e)} \\ &\quad + C' \int_0^{NT} \frac{1}{(NT-s+1)\ln^2(NT-s+e)} \cdot \frac{1}{(s+1)\ln^2(s+e)} ds. \end{aligned} \tag{2.5.32}$$

Notons qu'on a

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{NT}{2}}^{NT} \frac{1}{(NT-s+1)\ln^2(NT-s+e)} \cdot \frac{1}{(s+1)\ln^2(s+e)} ds \\ &\leq \frac{1}{\left(\frac{NT}{2}+1\right)\ln^2\left(\frac{NT}{2}+e\right)} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(s+1)\ln^2(s+e)} ds\right) \leq \frac{C_1}{\left(\frac{NT}{2}+1\right)\ln^2\left(\frac{NT}{2}+e\right)} \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{NT}{2}} \frac{1}{(NT-s+1)\ln^2(NT-s+e)} \cdot \frac{1}{(s+1)\ln^2(s+e)} ds \\ &\leq \frac{1}{\left(\frac{NT}{2}+1\right)\ln^2\left(\frac{NT}{2}+e\right)} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(s+1)\ln^2(s+e)} ds\right) \leq \frac{C_1}{\left(\frac{NT}{2}+1\right)\ln^2\left(\frac{NT}{2}+e\right)}. \end{aligned} \tag{2.5.34}$$

En combinant (2.5.32), (2.5.33) et (2.5.34), pour tout $N \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0) \varphi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C}{(N+1) \ln^2(N+1+e)} + \frac{2C_1}{\left(\frac{NT}{2} + 1\right) \ln^2\left(\frac{NT}{2} + e\right)}.$$

Cela implique

$$\sum_{N=0}^{+\infty} \|\varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0) \varphi_2\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} < +\infty. \quad (2.5.35)$$

En appliquant (1.2.7), pour tout $\theta \in \mathbb{C}$ vérifiant $\text{Im}(\theta) > AT$, on obtient

$$R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) = \varphi_1(\mathcal{U}(T, 0) - e^{-i\theta})^{-1} \varphi_2 = -e^{i\theta} \sum_{N=0}^{\infty} \varphi_1 \mathcal{U}(NT, 0) \varphi_2 e^{iN\theta}. \quad (2.5.36)$$

Les conditions (2.5.35) et (2.5.36) impliquent que l'opérateur $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$ admet un prolongement holomorphe de $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq A\}$ sur $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) > 0\}$ et $R_{\psi_1, \psi_2}(\theta)$ admet un prolongement continu et borné de $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) > 0\}$ sur $\{\theta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\theta) \geq 0\}$. Cela achève la preuve. \square

2.6 Preuve du Théorème 2.1.1

En combinant l'estimation (2.4.1), l'estimation (2.3.1) et les estimations locales (2.1.4), on déduit (2.1.5) (voir la Section 1.4 et la Section 1.5 du Chapitre 1, pour plus de détails).

Remarque 2.6.1 *Les Théorèmes 2.1.1 et 2.2.1 et les résultats du Chapitre 1 impliquent que, sous les hypothèses (H1) et (H3), pour $n \geq 3$ et pour $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant les conditions (2.1.1), la solution de (0.1.3), avec $s = 0$ et $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, vérifie (2.1.5).*

2.7 Existence locale de solutions pour les équations des ondes semilinéaires

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \text{div}_x(a(t, x) \nabla_x u) - F_k(u) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ (u, u_t)(0, x) = (g_1(x), g_2(x)) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.7.1)$$

où pour un $k > 1$ donné, le terme non linéaire F_k est une fonction C^1 sur \mathbb{R} vérifiant $F_k(0) = 0$, $|F'_k(u)| \leq C|u|^{k-1}$ et la métrique $a(t, x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ vérifie les conditions (1.1.1). Dans cette section nous supposons que $n \geq 3$. On dit que $u \in \mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$ est une solution faible de (2.7.1) si, pour tout $t \in [0, T_1]$, on a

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\mathcal{U}(t, 0)g + \int_0^t \mathcal{U}(t, s)(0, F_k(u(s))) ds \right)_1 \\ &= (\mathcal{U}(t, 0)g)_1 + \int_0^t V(t, s)(F_k(u(s))) ds. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Au Chapitre 1 nous avons établi le résultat suivant :

2.7. Existence locale de solutions pour les équations des ondes semilinéaires 103

Théorème 2.7.1 *Supposons que $n \geq 3$ et que $a(t, x)$ est une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^{n+1} vérifiant les conditions (i) et (ii) de (1.1.1). Soit $2 \leq p, q < +\infty$, vérifiant (2.1.3). Alors, il existe $\delta > 0$ telle que, si $u(t)$ est la solution de (0.1.3), avec $s = 0$ et $f = g \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, alors on a*

$$\|u\|_{L_t^p([0, \delta], L_x^q(\mathbb{R}^n))} + \|u(t)\|_{C([0, \delta], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n_x))} + \|\partial_t(u)(t)\|_{C([0, \delta], L^2(\mathbb{R}^n_x))} \leq C(p, q, \rho, n) \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.7.3)$$

L'objectif de cette section est d'appliquer les estimations (2.7.3) et (2.1.5) afin de démontrer l'existence locale de solutions faibles du problème (2.7.1), quand $0 \leq t \leq T_1$. Nous verrons que pour k convenable nous pourrions prouver l'existence des points fixes de la fonction

$$\mathcal{G}(u) = (\mathcal{U}(t, 0)g)_1 + \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds.$$

dans $\mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$. Les points fixes de \mathcal{G} sont localement les solutions faibles de (2.7.1). Dans un premier temps, nous appliquerons les estimations (2.7.3) pour prouver l'existence et l'unicité locale de solutions faibles de (2.7.1) lorsque $a(t, x)$ vérifie uniquement les conditions (i) et (ii) de (1.1.1). Ensuite, en supposant que $a(t, x)$ vérifie (1.1.1) et que les hypothèses (H1) et (H3) sont satisfaites, nous appliquerons les estimations (2.1.5) pour établir l'existence en temps long de solutions faibles de (2.7.1), pour des données initiales petites.

2.7.1 Existence de solutions locales

Le but de cette sous-section est d'appliquer les estimations (2.7.3) pour déterminer les nombres $k > 1$ pour lesquels il existe une solution locale du problème (2.7.1), lorsque $a(t, x)$ vérifie les conditions (i) et (ii) de (1.1.1). Pour cela, nous devons trouver des nombres $k > 1$ tels qu'il existe $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant (2.1.3) pour lesquels

$$k = \frac{q}{2}, \quad \frac{k}{p} < 1. \quad (2.7.4)$$

Soit $k > 1$ vérifiant (2.7.4) avec p, q vérifiant (2.1.3). Les inégalités (2.1.3) et (2.7.4) impliquent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p} = \frac{n(q-2)}{2q} - 1 = \frac{n(k-1)}{2k} - 1, \\ \frac{1}{p} \leq \frac{(n-1)(q-2)}{4q} = \frac{(n-1)(k-1)}{4k}, \\ \frac{k}{p} = \frac{(n-2)k-n}{2}. \end{array} \right.$$

Par conséquent, pour k on trouve les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(n-2)k-n}{2} < 1, \\ 0 < \frac{n(k-1)}{2k} - 1 \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{n(k-1)}{2k} - 1 \leq \frac{(n-1)(k-1)}{4k}. \end{array} \right. \quad (2.7.5)$$

Le système (2.7.5) est équivalent au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} k < \frac{n+2}{n-2}, \\ (n-3)k \leq n, \\ k > \frac{n}{n-2}, \\ (n-3)k \leq n+1. \end{array} \right. \quad (2.7.6)$$

Alors, pour $n \geq 4$, on a

$$\frac{n+2}{n-2} - \frac{n}{n-3} = \frac{n-6}{(n-2)(n-3)},$$

tandis que pour $n \geq 6$, on trouve

$$\frac{n+2}{n-2} > \frac{n}{n-3},$$

et pour $n = 4, 5$, on obtient

$$\frac{n+2}{n-2} \leq \frac{n}{n-3}.$$

Ces inégalités impliquent que k vérifie (2.7.4) si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{array}{l} i) \ n = 3, \ 3 < k < 5, \\ ii) \ n = 4, \ 2 < k < 3, \\ iii) \ n = 5, \ \frac{5}{3} < k < \frac{7}{3}, \\ iv) \ n \geq 6, \ \frac{n}{n-2} < k \leq \frac{n}{n-3}. \end{array} \quad (2.7.7)$$

Nous allons utiliser le résultat suivant :

Lemme 2.7.1 *Soit $a(t, x)$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de (1.1.1). Soient $T_1 \leq \delta$ et $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant les conditions (2.1.3). Alors, pour tout $h \in L^1([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n))$, on a*

$$\left\| \int_0^t V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|h\|_{L^1([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n))} \quad (2.7.8)$$

avec $C > 0$ indépendant de T_1 .

2.7. Existence locale de solutions pour les équations des ondes semilinéaires

Preuve. Soit $t_0 \in [0, T_1]$. On a

$$\left\| \int_0^{t_0} V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([t_0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq \int_0^{t_0} \|V(t, s)h(s)\|_{L^p([t_0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} ds.$$

La définition de $V(t, s)$ entraîne

$$\begin{aligned} \|V(t, s)h(s)\|_{L^p([t_0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} &= \|(\mathcal{U}(t, s)(0, h(s)))_1\|_{L^p([t_0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq \|(\mathcal{U}(t, 0)(\mathcal{U}(0, s)(0, h(s))))_1\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))}. \end{aligned}$$

Alors, les estimations (2.7.3) impliquent que, pour tout $s \in [0, t_0]$, on obtient

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{U}(t, 0)(\mathcal{U}(0, s)(0, h(s))))_1\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} &\leq C_\delta \|(\mathcal{U}(0, s)(0, h(s)))_1\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C'_\delta \|h(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

où $C'_\delta = C_\delta \sup_{s \in [0, T_1]} \|(\mathcal{U}(0, s))_1\|$ est indépendant de t_0 . Cela entraîne

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t_0} V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([t_0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} &\leq C'_\delta \int_0^{t_0} \|h(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\leq C'_\delta \|h\|_{L^1([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n))}. \end{aligned}$$

Soient $K(s, t) = \mathbf{1}_{[0, T_1]}(t)\mathbf{1}_{[0, T_1]}(s)V(t, s)$, $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ et $Y = L^q(\mathbb{R}^n)$. Comme $p > 1$, le lemme de Christ-Kiselev (voir Chapitre 1, Section 1.4) implique

$$\left\| \int_0^t V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C(\delta, p) \|h\|_{L^1([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n))}.$$

□

En appliquant (2.7.8), nous montrerons que le problème (2.7.1) est localement bien posé pour k et n vérifiant les conditions (2.7.7).

Théorème 2.7.2 *Supposons que $a(t, x)$ est une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^{n+1} vérifiant les conditions (i) et (ii) de (1.1.1). Soient k et n vérifiant (2.7.7). Alors, il existe $T_1 > 0$ tel que le problème (2.7.1) admet une solution faible u sur $[0, T_1]$. De plus, u est l'unique solution faible de (2.7.1) sur $[0, T_1]$ vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} (i) \quad &u \in \mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)), \quad (ii) \quad u_t \in \mathcal{C}([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n)), \\ (iii) \quad &u \in L^p([0, T_1], L^{2k}(\mathbb{R}^n)) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{n(k-1)}{k} - 1. \end{aligned}$$

Preuve. Soient k et n vérifiant (2.7.7). Nous avons prouvé qu'on peut trouver $2 \leq p, q < \infty$ vérifiant les conditions (2.1.3) tels que $\frac{k}{p} < 1$ et $\frac{k}{q} = \frac{1}{2}$. Considérons la norme $\|\cdot\|_{Y_{T_1}}$ définie par

$$\|u\|_{Y_{T_1}} = \|u\|_{\mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1)} + \|u\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))}$$

et

$$Y_{T_1} = \mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1) \cap L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))$$

avec T_1 une constante à déterminer. Notons que $(Y_{T_1}, \|\cdot\|_{Y_{T_1}})$ est un espace de Banach. supposons que $f \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, $M > 0$ et soit $B_M = \{u \in Y_{T_1} : \|u\|_{Y_{T_1}} \leq M\}$, avec M à déterminer. Trouver une solution faible u de (2.7.1) revient à trouver un point fixe de la fonction

$$\mathcal{G}(u) = (\mathcal{U}(t, 0)g)_1 + \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds.$$

Soit $u \in B_M$. On a

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds \right\|_{C([0, T_1], \dot{H}^1)} &\leq \sup_{t \in [0, T_1]} \int_0^t \mathbf{1}_{[0, t]}(s) \|V(t, s)F_k(u(s))\|_{\dot{H}^1} ds, \\ &\leq \sup_{t \in [0, T_1]} \int_0^t \|V(t, s)F_k(u(s))\|_{\dot{H}^1} ds. \end{aligned}$$

Les estimations (2.7.3) impliquent que, pour $T_1 \leq \delta$, il existe $C > 0$ indépendant de T_1 tel que

$$\left\| \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds \right\|_{C([0, T_1], \dot{H}^1)} \leq C \int_0^{T_1} \|F_k(u(s))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \leq C_1 \int_0^{T_1} \| |u|^k(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds. \quad (2.7.9)$$

Alors, le Lemme 2.7.1 donne l'estimation

$$\left\| \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds \right\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C_2 \int_0^{T_1} \| |u|^k(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds. \quad (2.7.10)$$

On déduit de (2.7.9) et (2.7.10) que

$$\left\| \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds \right\|_{Y_{T_1}} \leq C_3 \int_0^{T_1} \| |u|^k(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds = C_3 \int_0^{T_1} \|u(s)\|_{L^q}^k ds. \quad (2.7.11)$$

Comme $\frac{k}{p} < 1$, une application de l'inégalité de Hölder entraîne

$$\left\| \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds \right\|_{Y_{T_1}} \leq C_3 \|u\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))}^k (T_1)^{1-\frac{k}{p}} \leq C_3 M^k (T_1)^{1-\frac{k}{p}}.$$

Choisissons M telle que $\frac{M}{2} \geq 2C(\|g_1\|_{\dot{H}^1} + \|g_2\|_{L^2})$ et soit T_1 suffisamment petit tel que

$$C_3 M^k (T_1)^{1-\frac{k}{p}} \leq \frac{M}{2}.$$

Alors, $\|\mathcal{G}(u)\|_{Y_{T_1}} \leq M$ et $\mathcal{G}(u) \in Y_{T_1}$. On a $\mathcal{G}(B_M) \subset B_M$ et B_M est un ensemble fermé de l'espace de Banach $(Y_{T_1}, \|\cdot\|_{Y_{T_1}})$. Nous allons maintenant montrer qu'on peut choisir T_1 assez petit tel que \mathcal{G} soit une fonction contractante. Soient $u, v \in B_M$. On a

$$\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(v) = \int_0^t V(t, s)(F_k(u(s)) - F_k(v(s)))ds.$$

De même que pour les inégalités (2.7.9), les estimations (2.7.3) et le Lemme 2.7.1 impliquent

$$\|\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(v)\|_{Y_{T_1}} \leq C_4 \int_0^{T_1} \|F_k(u(s)) - F_k(v(s))\|_{L^2} ds.$$

2.7. Existence locale de solutions pour les équations des ondes semilinéaires 105

De plus, F_k vérifie

$$|F_k(u) - F_k(v)| \leq C_5 |u - v| (|u| + |v|)^{k-1}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\|\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(v)\|_{Y_{T_1}} \leq C_6 \int_0^{T_1} \| |u(s) - v(s)| (|u(s)| + |v(s)|)^{k-1} \|_{L^2} ds.$$

Comme $\frac{k-1}{q} + \frac{1}{q} = \frac{k}{q} = \frac{1}{2}$, en appliquant l'inégalité de Hölder généralisée, on trouve

$$\begin{aligned} \| |u(s) - v(s)| (|u(s)| + |v(s)|)^{k-1} \|_{L^2} &\leq \|u - v\|_{L^q} \| (|u(s)| + |v(s)|)^{k-1} \|_{L^{\frac{q}{k-1}}} \\ &\leq \|u - v\|_{L^q} (\|u\|_{L^q} + \|v\|_{L^q})^{k-1}. \end{aligned}$$

Cela donne

$$\|\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(v)\|_{Y_{T_1}} \leq C_7 \int_0^{T_1} \|u(s) - v(s)\|_{L^q} (\|u(s)\|_{L^q} + \|v(s)\|_{L^q})^{k-1} ds.$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(v)\|_{Y_{T_1}} &\leq C_7 (T_1)^{1-\frac{k}{p}} 2^{k-1} M^{k-1} \|u - v\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq C_7 (T_1)^{1-\frac{k}{p}} (2M)^{k-1} \|u - v\|_{Y_{T_1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, si on choisit T_1 tel que

$$C_7 (2M)^{k-1} (T_1)^{1-\frac{k}{p}} < 1,$$

\mathcal{G} sera une contraction de B_M sur B_M . Par conséquent, il existe un unique $u \in Y_{T_1}$ tel que

$$\|u\|_{Y_{T_1}} \leq M \quad \text{et} \quad \mathcal{G}(u) = u.$$

□

Comme nous utilisons les estimations (2.7.3) pour prouver le Théorème 2.7.1, la longueur T_1 de l'intervalle $[0, T_1]$ sur laquelle le résultat d'existence est valable, est majorée par la longueur δ de l'intervalle sur lequel les estimations (2.7.3) ont été établies. Afin d'améliorer ce résultat d'existence, en suivant le raisonnement de [KT], dans la section suivante nous allons appliquer les estimations (2.1.5).

2.7.2 Existence de solutions en temps long

Dans cette sous-section nous supposons que $n \geq 3$, $a(t, x)$ est T -périodique par rapport à t et (H1), (H3) sont satisfaites. Nous allons utiliser les estimations (2.1.5) pour trouver une solution de (2.7.1) définie sur $[0, T_1]$, avec T_1 dépendant uniquement de k, n et g . Pour cela, nous devons trouver $k > 1$ tel qu'il existe $2 \leq p, q < +\infty$ vérifiant (2.1.1) pour lesquels on a

$$k = \frac{q}{2}, \quad \frac{k}{p} < 1. \tag{2.7.12}$$

Comme pour l'existence locale, $k > 1$ vérifie (2.7.12) avec p, q vérifiant (2.1.1) si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned}
 i) \quad & n = 3, \quad 3 < k < 5, \\
 ii) \quad & n = 4, \quad 2 < k < 3, \\
 iii) \quad & n = 5, \quad \frac{5}{3} < k < \frac{7}{3}, \\
 iv) \quad & n \geq 6, \quad \frac{n}{n-2} < k < \frac{n}{n-3}.
 \end{aligned} \tag{2.7.13}$$

Lemme 2.7.2 *Supposons que (H1) et (H3) sont satisfaites, $a(t, x)$ vérifie (1.1.1) et $n \geq 3$. Soient $t \geq s \geq 0$. Alors*

$$\|\mathcal{U}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C_0$$

avec $C_0 > 0$ indépendant de s et t .

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq s - mT < T$. On a

$$\mathcal{U}(t, s) = \mathcal{U}(t - mT, s - mT) = \mathcal{U}(t - mT, 0)\mathcal{U}(0, s - mT).$$

Comme $t - mT \geq s - mT \geq 0$, (2.1.5) implique

$$\|\mathcal{U}(t - mT, 0)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C'$$

avec $C' > 0$ indépendant de t . De même, on a

$$\|\mathcal{U}(0, s - mT)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq \sup_{s' \in [0, T]} \|\mathcal{U}(0, s')\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} = C''.$$

Cela implique

$$\|\mathcal{U}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n))} \leq C' C'' = C_0$$

et C_0 est indépendant de t et s . □

Les estimations (2.1.5), le lemme de Christ-Kiselev (voir Chapitre 1, Section 1.4) et le Lemme 2.7.2 impliquent le résultat suivant :

Lemme 2.7.3 *Supposons que $n \geq 3$, et supposons que $a(t, x)$ vérifie (1.1.1) et que (H1), (H3) sont satisfaites. Soient $2 \leq p, q < \infty$ vérifiant (2.1.1) et soit $T_1 > 0$. Alors, pour tout $h \in L^1([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n))$, on a*

$$\left\| \int_0^t V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|h\|_{L^1([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n))}$$

avec $C > 0$ indépendant de h et T_1 .

Preuve. Soient $t_0 > 0$, $s \in [0, t_0]$ et $t > t_0$. Considérons $mT \leq t_0 < (m + 1)T$. On a

$$\begin{aligned}
 V(t, s)h(s) &= (\mathcal{U}(t - mT, s - mT)(0, h(s)))_1, \\
 &= (\mathcal{U}(t - mT, 0)\mathcal{U}(0, s - mT)(0, h(s)))_1, \\
 &= (\mathcal{U}(t - mT, 0)\mathcal{U}(mT, s)(0, h(s)))_1.
 \end{aligned}$$

2.7. Existence locale de solutions pour les équations des ondes semilinéaires 109

Par conséquent, les estimations (2.1.5) impliquent

$$\left\| \int_0^{t_0} V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([t_0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \int_0^{t_0} \|\mathcal{U}(mT, s)(0, h(s))\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} ds.$$

Le Lemme 2.7.2 entraîne

$$\int_0^{mT} \|\mathcal{U}(mT, s)(0, h(s))\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} ds \leq C_0 \int_0^{mT} \|h(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds.$$

De même, comme $mT \leq t_0 < (m+1)T$, on a

$$\int_{mT}^{t_0} \|\mathcal{U}(0, s - mT)(0, h(s))\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} ds \leq \sup_{s \in [0, T]} \|\mathcal{U}(0, s)\| \int_{mT}^{t_0} \|h(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds.$$

Cela entraîne

$$\left\| \int_0^{t_0} V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([t_0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \int_0^{+\infty} \|h(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds$$

avec $C > 0$ indépendant de t_0 . Comme $p > 1$, le lemme de Christ-Kiselev implique

$$\left\| \int_0^t V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C_p \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} &\leq \left\| \int_0^t V(t, s)\mathbf{1}_{[0, T_1]}(s)h(s)ds \right\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq C \|h\|_{L^1([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n))} \end{aligned}$$

avec $C > 0$ indépendant de T_1 . □

Théorème 2.7.3 *Supposons que k et n vérifient les conditions (2.7.13). Soit $a(t, x)$ vérifiant (1.1.1) telle que (H1) et (H3) sont satisfaites. Alors, il existe $C(k, F_k, T, \rho, n)$ telle que, pour tout $g \in \dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)$, il existe une solution faible u de (2.7.1) sur $[0, T_1]$ avec*

$$T_1 = C(k, F_k, T, n, \rho) \left(\|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \right)^{-d}, \quad (2.7.14)$$

où $d = \frac{2(k-1)}{(n+2) - (n-2)k}$. De plus, u est l'unique solution faible de (2.7.1) sur $[0, T_1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad &u \in \mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)), \quad (ii) \quad u_t \in \mathcal{C}([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n)), \\ (iii) \quad &u \in L^p([0, T_1], L^{2k}(\mathbb{R}^n)) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{n(k-1)}{k} - 1. \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

Preuve. Soit $C_F > 0$ telle que

$$|F_k(u)| \leq C_F |u|^k \quad \text{et} \quad |F_k(u) - F_k(v)| \leq C_F |u - v| (|u|^{k-1} + |v|^{k-1}).$$

Alors, les estimations (2.1.5) et le Lemme 2.7.3 impliquent l'existence d'une constante A_k telle que pour tout $T_1 > 0$ on a

$$\left\| \int_0^t V(t, s)h(s)ds \right\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq A_k \|h\|_{L^1([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^n))}$$

et

$$\|(\mathcal{U}(t, 0)g)_1\|_{L^p([0, T_1], L^q(\mathbb{R}^n))} \leq A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}.$$

D'après le Théorème 2.7.1, $\mathcal{G}(u) = (\mathcal{U}(t, 0)g)_1 + \int_0^t V(t, s)F_k(u(s))ds$ admet un point fixe dans l'ensemble

$$\{u \in \mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1) \cap L^p([0, T_1], L^q) : \|u\|_{\mathcal{C}([0, T_1], \dot{H}^1)} + \|u\|_{L^p([0, T_1], L^q)} \leq M\},$$

si on choisit $M, T_1 > 0$ telles que

$$\begin{cases} A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} + C_3 M^k (T_1)^{1-\frac{k}{p}} \leq M, \\ C_7 (2M)^{k-1} (T_1)^{1-\frac{k}{p}} < 1. \end{cases} \quad (2.7.16)$$

En particulier, les conditions (2.7.16) seront satisfaites si

$$\begin{cases} A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} + C_3 M^k (T_1)^{1-\frac{k}{p}} = M, \\ C_7 (2M)^{k-1} (T_1)^{1-\frac{k}{p}} < 1. \end{cases} \quad (2.7.17)$$

Prenons M, T_1 vérifiant (2.7.17). Soit $t_1 = (T_1)^{1-\frac{k}{p}}$. On trouve que le système (2.7.17) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} t_1 = \frac{M - A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}}{C_3 M^k}, \\ 0 < \frac{M - A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}}{M} < \frac{1}{C_7 2^{k-1}}. \end{cases} \quad (2.7.18)$$

Comme $M \mapsto \frac{M - A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}}{M}$ est strictement croissante, on obtient que (t_1, M) est une solution de (2.7.18) si

$$M < \frac{2^{k-1} A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}}{2^{k-1} - 1}.$$

Prenons

$$M_0 = \frac{\alpha 2^{k-1} A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}}{2^{k-1} - 1} \quad \text{et} \quad t_1 = \frac{M_0 - A_k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}}{C_3 (M_0)^k}$$

avec $1 - \frac{1}{2^{k-1}} < \alpha < 1$. Alors, (M_0, t_1) est une solution de (2.7.18) et on a

$$t_1 = \frac{\frac{\alpha 2^{k-1}}{2^{k-1} - 1} - 1}{C_8 \left(\frac{2^{k-2} A_k}{2^{k-1} - 1} \right)^k \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^{k-1}} = C'(k, F_k) \|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}^{-(k-1)}.$$

Par conséquent, pour $M = M_0$ et

$$T_1 = (t_1)^{\frac{1}{1-\frac{k}{p}}} = C(k, F_k) \left(\|g\|_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)} \right)^{-\left(\frac{k-1}{1-\frac{k}{p}} \right)},$$

2.7. Existence locale de solutions pour les équations des ondes semilinéaires

M et T_1 vérifient les conditions (2.7.17). De plus, on a

$$\frac{k}{p} = \frac{(n-2)k - n}{2}.$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{k-1}{1 - \frac{k}{p}} = \frac{2(k-1)}{(n+2) - (n-2)k}$$

et M, T_1 vérifient les conditions (2.7.16) si $M = M_0$ et

$$T_1 = C(k, F_k) \left(\|g\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \right)^{-\left(\frac{2(k-1)}{(n+2) - (n-2)k}\right)}.$$

Notons que, pour $n \geq 6$, on a $\frac{n}{n-3} \leq \frac{n+2}{n-2}$ et $k < \frac{n}{n-3}$ implique que $k < \frac{n+2}{n-2}$. \square

Bibliographie

- [Arn] V. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1973.
- [BaP] A. Bachelot et V. Petkov, *Existence des opérateurs d’ondes pour les systèmes hyperboliques avec un potentiel périodique en temps*, Ann. Inst. H. Poincaré (Physique théorique), **47** (1987), 383-428.
- [BK] C. O. Bloom et N. D. Kazarinoff, *Energy decays locally even if total energy grows algebraically with time*, J. Differential Equation, **16** (1974), 352-372.
- [BoP] J-F. Bony et V. Petkov, *Resonances for non trapping time-periodic perturbation*, J. Phys. A : Math. Gen., **37** (2004), 9439-9449.
- [Bou] J. M. Bouclet, *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds*, à paraître à Analysis and PDE.
- [BT07] J. M. Bouclet et N. Tzvetkov, *Strichartz estimates for long range perturbations*, Amer. J. Math. **129** (2007), 6, 1565-1609.
- [BT08] J. M. Bouclet et N. Tzvetkov, *On global Strichartz estimates for non trapping metrics*, J. Funct. Anal., **257** (2008), 6, 1661-1682.
- [Br] P. Brenner, *On $L_p - L_{p'}$ estimates for the wave-equation*, Math. Z., **145** (1975), 251-254.
- [Bur98] N. Burq, *Décroissance de l’énergie locale de l’équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel*, Acta Mathematica, **180** (1998), 1-29.
- [Bur02(1)] N. Burq, *Semi-classical estimates for the resolvent in non trapping geometries*, Int. Math. Res. Not., (2002), no. 5, 221-241.
- [Bur02(2)] N. Burq, *Estimation de Strichartz pour des perturbations à longue portée de l’opérateur de Schrödinger*, Seminaire EDP, Ecole polytechnique, 2002.
- [Bur03] N. Burq, *Global Strichartz estimates for non-trapping geometries : About an article by H.Smith and C.Sogge*, Commun. PDE, **28** (2003), 1675-1683.
- [BGT] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov, *Strichartz inequalities and the non linear Schrödinger equation on compact manifolds*, Amer. J. of Math., **126** (2004), 569-605.
- [CK] M. Christ et A. Kiselev, *Maximal functions associated to filtrations*, J. Funct. Anal., **179**(2) (2001), 409-425.
- [CPR] F. Colombini, V. Petkov et J. Rauch, *Exponential growth for the wave equation with compact time-periodic positive potential*, Comm. Pure Appl. Math., **62** (2009), 565-582.
- [CR1] F. Colombini et J. Rauch, *Smooth localized parametric resonance for wave equations*, J. Reine Angew. Math., **616** (2008), 1-14.
- [CR2] F. Colombini et J. Rauch, *A simple example of parametric resonance for the wave equation*, Serdica Mathematics Journal, (2008), 55-66.
- [CS] J. Cooper et W. Strauss, *Scattering theory of waves by periodically moving bodies*, J. Funct. Anal., **47** (1982), 180-229.

- [GYY] A. Galtabayar, A. Yensen et K. Yajima, *Local time-decay of solutions to Schrödinger equations with time periodic potentials*, Journal of Statistical Physics, **114** (2004), 231-281.
- [GP] V. Georgiev et V. Petkov, *RAGE theorem for power bounded operators and decay of local energy for moving obstacles*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **51** (1989), no.2, 155-185.
- [Gri] M. G. Grillakis, *Regularity and asymptotic behavior of the wave equation with a critical non-linearity*, Ann. of Math., **132** (1990), 485-509.
- [GV85] J. Ginibre et G. Velo, *The global Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation*, Ann. I.H. Poincaré-Analyse non linéaire, **2** (1985), 309-327.
- [GV89] J. Ginibre et G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear wave equations*, Comm. Math. Phys., **123** (1989), 535-573.
- [GV94] J. Ginibre et G. Velo, *Regularity of solutions of critical and subcritical nonlinear wave equations*, Nonlinear Anal., **22** (1994), 1-19.
- [GV95] J. Ginibre et G. Velo, *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation* J. Funct. Anal., **133** (1995), 50-68.
- [GS] A. Grisis et J. Sjöstrand, *Microlocal analysis for differential operators*, Cambridge University Press, New York, 1994.
- [HTW] A. Hassell, T. Tao et J. Wunsch, *Sharp Strichartz estimates on non-trapping asymptotically conic manifolds*, Amer. J. Math., **128** (2006), no. 4, 963-1024.
- [Hör83] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators vol.II*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Hör85] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators vol.IV*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Kapi90] L. Kapitanski, *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality*, Leningrad Math. J., **1** (1990), 693-726.
- [Kapi94] L. Kapitanski, *Weak and yet weaker solutions of semi-linear wave equations*, Commun. PDE, **19** (1994), 1629-1676.
- [KT] M. Keel et T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math., **120** (1998), 955-980.
- [Ki1] Y. Kian, *Strichartz estimates for the wave equation with a time-periodic non-trapping metric*, Asymptotic Analysis, **68** (2010), 41-76.
- [Ki2] Y. Kian, *Cauchy problem for semilinear wave equation with time-dependent metrics*, Nonlinear Analysis, **73** (2010), 2204-2212.
- [Ki3] Y. Kian, *Strichartz estimates for the wave equation with a time-periodic non-trapping metric in even dimensions*, preprint.
- [Klai] S. Klainerman, *Global existence for nonlinear wave equations*, Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), 43-101.
- [LP] P. D. Lax et R. S. Phillips, *Scattering Theory*, 2nd Edition, Academic press, New York, 1989.
- [Leb] G. Lebeau, *Non linear optic and supercritical wave equation*, **70** (2001), no4-6, 267-306.
- [Mart] A. Martinez, *An introduction to semi-classical and microlocal analysis*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Mel] R. Melrose, *Singularities and energy decay in acoustical scattering*, Duke Math. J., **46** (1979), 43-59.
- [MS] R. Melrose et J. Sjöstrand, *Singularities of boundary value problem*, Comm. Pure Appl. Math., I, **31** (1978) , 593-617, II, **35** (1982), 129-168.

- [Met] J. L. Metcalfe, *Global Strichartz estimates for solutions to the wave equation exterior to a convex obstacle*, Trans. Amer. Math. Soc, **356** (2004), no.12, 4839-4855.
- [MT08] J. L. Metcalfe et D. Tataru, *Decay estimates for variable coefficient wave equations in exterior domains*, (2008) à paraître à Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.
- [MT09] J. L. Metcalfe et D. Tataru, *Global parametrices and dispersive estimates for variable coefficients wave equations*, à paraître à Mathematische Annalen.
- [MZ] C. Miao et B. Zhang, *H^s -global well-posedness for semilinear wave equations*, J. Math. Anal. Appl., **283** (2003), 645-666.
- [MSS] G. Mockenaupt, A. Seeger, et C. D. Sogge, *Local smoothing of Fourier integral operators and Carleson-Sjolin estimates*, J. Amer. Math. Soc., **6** (1993), 65-130.
- [Mor66] C. Morawetz, *Exponential decay of solutions of the wave equation*, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1966), 439-444.
- [Mor68] C. Morawetz, *Time decay for the nonlinear Klein-Gordon equations*, Proc. Roy. Soc. Ser. A, **306** (1968), 291-296.
- [MRS] C. Morawetz, J. Ralston, W. Strauss, *Decay of solutions of wave equations outside non-trapping obstacle*, Comm. Pure Appl. Math., **30** (1977), no.4, 447-508.
- [NU] T. Nishitani et H. Ueda, *Note on lower bounds of energy growth for solutions to wave equations*, preprint.
- [Pech] H. Pecher, *Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equation*, Math. Z, **185** (1984), 261-270.
- [Pet89] V. Petkov, *Scattering theory for hyperbolic operators*, North Holland, Amsterdam, 1989.
- [Pet06] V. Petkov, *Global Strichartz estimates for the wave equation with time-periodic potentials*, J. Funct. Anal., **235** (2006), 357-376.
- [PR] G. Popov et Ts. Rangelov, *Exponential growth of the local energy for moving obstacles*, Osaka J. Math., **26** (1989), 881-895.
- [RT] J. Rauch et M. Taylor, *Decay of solutions to non-dissipative hyperbolic systems on compact manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **28** (1975), 501-523.
- [RS72] M. Reed et B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I : Functional analysis*, Academic Press, New York, 1972.
- [RS75] M. Reed et B. Simon, *Methods of modern mathematical physics II : Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
- [RS78] M. Reed et B. Simon, *Methods of modern mathematical physics IV : Analysis of operators*, Academic Press, New York, 1978.
- [RY] M. Reissig et K. Yagdijian, *L_p-L_q estimates for the solution of strictly hyperbolic equation of second order with increasing in time coefficient*, Math. Nachr., **214** (2000), 71-104.
- [RZ] L. Robbiano et C. Zuily, *Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients*, Mém. SMF, (2005), no. 101-102.
- [SS] H. F. Smith et C. Sogge, *Global Strichartz estimates for non-trapping perturbations of the laplacian*, Commun. PDE, **25** (2000), 2171-2183.
- [Sog] C. Sogge, *Fourier integrals in classical analysis*, Cambridge University Press, New York, 1993.
- [St] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Cambridge University Press, Princeton, 1970.

- [ST] G. Staffilani et D. Tataru, *Strichartz estimates for a Schrödinger operator with non smooth coefficients*, Comm. PDE, **27** (2002), no. 7-8, 1337-1372.
- [Str70] R. Strichartz, *A priori estimates for the wave equation and some applications*, Journal. Funct. Anal, **5** (1970), 218-235.
- [Str77] R. Strichartz, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J., **44** (1977), 705-714.
- [Tam77] H. Tamura, *The decay of the local energy for wave equations with discontinuous coefficients*, Nagoya Math. J., **68** (1977), 35-58.
- [Tam78(1)] H. Tamura, *Local energy decays for wave equations with time-dependent coefficients*, Nagoya Math. J., **71** (1978), 107-123.
- [Tam78(2)] H. Tamura, *On the decay of the local energy for wave equations with a moving obstacle*, Nagoya Math. J., **71** (1978), 125-147.
- [Tam81] H. Tamura, *On the decay of local energy for wave equations with time-dependent potentials*, J. Math. Soc. Japan, **33** (1981), no.4, 605-618.
- [TZ] S-H. Tang et M. Zworski, *Resonance expansions of scattered waves*, Comm. Pure Appl. Math., **53** (2000) , 1305-1334.
- [Tat00] D. Tataru, *Strichartz estimates for operators with non-smooth coefficients and the non-linear wave equation*, Amer. J. Math., **122** (2000), no.2, 349-376.
- [Tat01] D. Tataru, *Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with non-smooth coefficients. II*, Amer. J. Math., **123** (2001), no.3, 385-423.
- [Tat02] D. Tataru, *Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with non-smooth coefficients. III*, J. Amer. Math. Soc., **15** (2002), no.2, 419-442.
- [Tat08] D. Tataru, *Parametrices and dispersive estimates for Schrödinger operators with variable coefficients*, Amer. J. Math., **130** (2008), no.3, 571-634.
- [Tay1] M. Taylor, *Partial differential equations I : Basic theory*, Springer, Berlin, 1991.
- [Tay2] M. Taylor, *Partial differential equations II : Qualitative studies of linear equations*, Springer, Berlin, 1991.
- [Tay3] M. Taylor, *Pseudodifferential operators*, Princeton University Press, New Jersey, 1981.
- [Tri] H. Triebel, *Spaces of Besov-Hardy-Sobolev type*, Teubner-Texte, Berlin, 1978.
- [Vain75] B. Vainberg, *On the short wave asymptotic behavior of solutions of stationary problems and the asymptotic behavior as $t \rightarrow \infty$ of solutions of non-stationary problems*, Russian Math. Surveys, **30** (1975), 1-53.
- [Vain88] B. Vainberg, *Asymptotic methods in Equation of mathematical physics*, Gordon and Breach, New York, 1988.
- [Vain92] B. Vainberg, *Scattering by periodically moving obstacles*, Mat. Sbornik, translation : Math USSR Sbornik, **73** (1992), 289-304.
- [Vain93] B. Vainberg, *On the local energy of solutions of exterior mixed problems that are periodic with respect to t* , Trans. Moscow Math. Soc., (1993), 191-216.
- [Vod99] G. Vodev, *On the uniform decay of the local energy*, Serdica Math. J., **25** (1999), 191-206.
- [Vod04] G. Vodev, *Local energy decay of solutions to the wave equation for non-trapping metrics*, Ark. Math., **42** (2004), no2, 379-397.
- [Ya] K. Yajima, *Rate of decay at high energy of local spectral projections associated with Schrödinger operators*, J. Math. Soc. Japan, **41** (1989), no 1, 117-142.

Index

- $(1 - \chi)u$, 32
 $(\cdot)_1$, 16
 $(a_{ij}(t, x))_{1 \leq i, j \leq n}$, 14
 A_1 , 74
 B^m , 41
 $B_{q, q_1}^r(\mathbb{R}^n)$, 51
 $B_{k, N}$, 96
 D_{\pm}^b , 9
 $D_{k, N}(s)$, 99
 $E(t, s, x, x_0)$, 71
 F , 74
 F' , 75
 F_k , 16
 $G(t, s)$, 72
 $H_b^r(\mathbb{R}^{1+n})$, 74
 $H_{b, s}^{r, A_1}(\mathbb{R}^{1+n})$, 73
 $H_{b, s, per}^r(\mathbb{R}^{1+n})$, 75
 $L(t, s)$, 80
 L_b^2 , 74
 $N(t, s)$, 71
 $P(t)$, 71
 P^1 , 11
 P^2 , 11
 P_{\pm}^b , 9
 P_1 , 11
 P_2 , 11
 $R(t, s)$, 82
 $R(t, s, \theta)$, 83
 $R_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta)$, 9
 T , 10
 $T(R, R_1)$, 8
 $T_1(r)$, 71
 $T_2(r)$, 71
 $U(t, s)$, 41
 $V(t, s)$, 41
 $V(t, s, \theta)$, 83
 $W(t, s)$, 72
 $Z^b(t, s)$, 9
 Λ , 2
 χu , 32
 $\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^n)$, 2
 $\dot{\mathcal{H}}_\gamma(\mathbb{R}^n)$, 2
 $\frac{\partial}{\partial r}$, 56
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{\mathcal{H}}_1(\mathbb{R}^n)}$, 23
 \mathbb{C}' , 67
 \mathcal{D}^\pm , 23
 $\mathcal{U}(T)$, 21
 $\mathcal{U}(t, s)$, 2
 \mathcal{R}_n , 23
 ρ , 2
(H1), 8
(H2), 9
(H3), 9
 $\tilde{I}_j^\pm(t, s)$, 13
 $\xi(t, s, x)$, 71
 $a(t, x)$, 1
 b , 71
bicaractéristiques nulles, 42
capture, 5
contour ω , 86
décroissance de l'énergie locale, 2
dépendance en t de façon admissible, 41
équation des ondes libres, 1
équations semilinéaires, 16
espace de Besov, 51
estimation de Strichartz globale, 6
estimation de Strichartz locale, 6
existence en temps long de solutions faibles,
18
famille méromorphe de façon fini, 77
hamiltonien, 41

intégrabilité L^2 en temps de l'énergie locale, 10

lemme de Christ-Kiselev, 33

non captive, 8

opérateurs intégraux de Fourier , 13

propagation des singularités , 26

propriété (S'), 78

propriété (S), 77

résolvante tronquée, 9

résonances, 9

solution faible, 16

transformation de Fourier-Bloch-Gelfand, 74

transformation de Radon, 23