



Invariants semi-locaux des Structures de Poisson

Brahic Olivier

► **To cite this version:**

Brahic Olivier. Invariants semi-locaux des Structures de Poisson. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2004. Français. NNT : 2004MON20092 . tel-00575486

HAL Id: tel-00575486

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00575486>

Submitted on 10 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : Mathématiques

Formation Doctorale : Mathématiques

Ecole Doctorale : Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement par

Olivier BRAHIC

le 12 novembre 2004

**Invariants semi-locaux
des Structures de Poisson**

JURY

M. Bordemann Président du Jury

J.P. Dufour

R.L. Fernandes Rapporteur

A. Medina Directeur de thèse

P. Vanhaecke

RAPPORTEURS

R.L. Fernandes

I. Vaisman

C'est sous la direction de Jean-Paul Dufour que j'ai commencé ce travail, qui porte assurément son empreinte. Les pires équations ont su, sous sa craie ingénieuse, prendre les formes raffinées de la géométrie, merci Jean-Paul pour toutes ces merveilles.

Alberto Médina n'est pas en reste, sa passion dévorante et son humour acéré en font un collaborateur redoutable. Je le remercie pour l'attention qu'il m'a porté, pour ses conseils précieux, et surtout pour les nouveaux horizons sur lesquels il m'a ouvert les yeux.

Je tiens aussi à remercier Rui Loja Fernandes, pour ses judicieuses remarques sur ce travail, j'ai pris un grand plaisir à le compter parmi mon jury.

Bien sûr, l'ensemble des participants au séminaire des Algèbres de Lie de dimension infinie emporte avec lui toute ma sympathie, ainsi que tous les thésards qui m'ont accompagné pendant ces années.

Enfin, je ne remercierai jamais assez mon père, ma mère, ainsi que toute ma famille pour leur soutien sans faille.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 3 |
| 1 Généralités | 5 |
| 1.1 Structures de Poisson | 5 |
| 1.1.1 Crochets de Poisson | 5 |
| 1.1.2 Crochet de Schouten | 7 |
| 1.1.3 Feuilletage symplectique | 8 |
| 1.1.4 Cohomologie de Poisson | 9 |
| 1.1.5 Rotationnel d'une structure de Poisson | 9 |
| 2 Structures de Poisson le long d'un cercle de singularités | 11 |
| 2.1 Mise en place du contexte et des notations | 12 |
| 2.2 La forme normale | 14 |
| 2.2.1 Le principal résultat | 19 |
| 2.2.2 Unicité de la forme normale | 20 |
| 2.2.3 Le cas C^∞ | 22 |
| 2.3 Signification géométrique des paramètres : | 28 |
| 2.3.1 Période du rotationnel | 28 |
| 2.3.2 Nature de la linéarisée aux points de Γ | 28 |
| 2.3.3 Description du feuilletage symplectique | 29 |
| 3 Structures de Poisson au voisinage d'une feuille symplectique | 33 |
| 3.1 Tenseurs de couplage | 34 |
| 3.1.1 Notations et définitions de base | 34 |
| 3.1.2 Description de Π comme donnée géométrique | 35 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 3.1.3 | Homotopie de données géométriques | 46 |
| 3.1.4 | Quelques résultats classiques sur les structures de Poisson . . . | 54 |
| 3.2 | Linéarisation le long d'une feuille | 58 |
| 3.2.1 | Linéarisation de la partie verticale | 58 |
| 3.2.2 | Linéarisation de la connection | 62 |
| 3.3 | Global splitting | 65 |
| 3.4 | Le cas transversalement semi-simple compact | 66 |
| 3.4.1 | Linéarisabilité | 66 |
| 3.4.2 | Invariants semi-locaux de Casimir | 66 |
| 3.4.3 | le cas so_3 | 67 |
| Annexe 1 | | 70 |
| A Principe d'homotopie de Moser | | 70 |
| A.1 | Homotopies de champs de vecteurs | 70 |
| A.2 | Homotopies de formes symplectiques | 71 |
| A.3 | Homotopie de données géométriques | 72 |
| Bibliographie | | 78 |

Introduction

La géométrie de Poisson est apparue dans l'étude des systèmes mécaniques avec Lagrange et Poisson, pour lesquels il s'agissait essentiellement d'intégrer des équations différentielles. Ce n'est que beaucoup plus tard qu'elle est devenue une véritable discipline mathématique, c'est en effet une géométrie très abstraite. Aujourd'hui, on sait qu'en plus de décrire la mécanique classique, elle intervient aussi en optique, en électromagnétisme, et contribue même à appréhender la mécanique quantique. L'étude des structures de Poisson s'inscrit ainsi dans le cadre de la physique moderne, autant que dans la compréhension des systèmes dynamiques.

La donnée d'une structure de Poisson sur une variété induit un feuilletage dont les feuilles sont des variétés symplectiques. On peut se représenter chacune de ces feuilles comme l'espace des phases d'un système dynamique, et voir ainsi une structure de Poisson comme un enchevêtrement de tels espaces des phases. Cette thèse est dédiée à l'étude du voisinage d'une feuille fixée, du point de vue physique, il s'agit donc d'étudier comment peut se déformer un espace des phases.

Le choix d'une forme de densité sur la variété ambiante permet de définir le rotationnel. C'est un champ de vecteurs qui préserve la structure, mais qui n'est défini qu'à un champ hamiltonien près, suivant le choix de la forme de densité. Il apparaît ainsi naturel de s'intéresser aux points où le tenseur de Poisson s'annule, en ces points, le rotationnel ne dépend en effet pas de la forme volume choisie. De plus, si le rotationnel ne s'annule pas en un tel point, la structure de Poisson est contrainte à s'annuler tout le long de sa trajectoire Γ . Si cette dernière n'est pas une feuille à proprement parler, elle en a toutes les caractéristiques, simplement à cause de l'invariance de la structure par rapport au rotationnel. C'est cette situation qu'on se propose d'étudier au chapitre 2, dans le cas où la linéarisée de la structure est non-résonnante, et où la trajectoire est un cercle. Cette situation se prête à l'étude, et permet de dégager un ensemble complet d'invariants semi-locaux, ainsi que des interprétations géométriques très satisfaisantes. On obtient aussi une forme normale

de la structure de Poisson au voisinage de la singularité : dans un bon système de coordonnées, cette dernière prend la forme suivante

$$\Pi = \partial\theta \wedge \left(\sum_{i,j=1\dots n} \mu_i x_i \partial x_i \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \partial x_i \wedge \partial x_j.$$

Dans cette expression, les constantes μ_i sont liées à la linéarisée de la structure, ainsi qu'à la période du rotationnel le long de Γ , tandis que les $a_{i,j}$ (couplés aux μ_i) décrivent le feuilletage de la structure.

En plus des résultats en eux-mêmes, cette étude permet d'entrevoir la situation de structures de Poisson en des points où le rotationnel n'est pas tangent à une feuille S , et peut être choisi de sorte à avoir une trajectoire circulaire, on peut envisager alors un collier de feuilles calquées sur S , autour duquel s'organise une structure de la forme décrite dans le chapitre 1.

Dans le second chapitre, on commence par démontrer en détail le formalisme développé par Vorobjev pour décrire le voisinage d'une feuille symplectique. Sur un voisinage tubulaire de la feuille, le germe de la structure est horizontalement non-dégénéré, ce qui permet de la décrire comme une donnée géométrique, c'est-à-dire un triplet $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$ où

- $\mathcal{V} \in \chi(\Lambda^2 Ver)$ désigne un 2-tenseur vertical,
- Γ est une forme de connexion sur E ,
- $\mathcal{F} \in \Omega^2(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ est une 2-forme non-dégénérée sur S à valeurs dans $C^\infty(E)$,

satisfaisant certaines conditions de compatibilité. Cette façon de voir la structure de Poisson permet non seulement de dégager des invariants géométriques qui décrivent le voisinage d'une feuille, mais aussi d'établir des critères d'équivalence entre deux structures coïncidant sur une feuille. De ces critères, on déduit ensuite des résultats de formes normales et de linéarisation dans un cadre semi-local. Pour finir, dans l'appendice, on rappelle le principe d'homotopie de Moser, et on montre que les critères d'équivalence de données géométriques, sont une version à paramètres de ce principe.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Structures de Poisson

1.1.1 Crochets de Poisson

Une *structure de Poisson* sur une variété, disons lisse, M de dimension n , est la donnée d'un crochet bilinéaire, dit de Poisson :

$$\begin{aligned} \{ , \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longmapsto C^\infty(M) \\ (f, g) &\longmapsto \{f, g\}, \end{aligned}$$

tel que, pour toutes fonctions $f, g, h \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} && \textit{Antisymétrie,} \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + \{f, h\}g && \textit{Identité de leibniz,} \\ \oint_{f,g,h} \{f, \{g, h\}\} &= 0 && \textit{Identité de Jacobi.} \end{aligned}$$

où $\oint_{f,g,h}$ désigne la somme cyclique sur f, g et h . Une variété munie d'une structure de Poisson est appelée variété de Poisson.

L'identité de Leibniz indique que, pour toute $f \in C^\infty(M)$, l'opérateur :

$$\begin{aligned} \{f, \} : C^\infty(M) &\longmapsto C^\infty(M) \\ g &\longmapsto \{f, g\}, \end{aligned}$$

est une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$, il existe donc un unique champ de vecteur, que l'on notera en général X_f , tel que $X_f(g) = \{f, g\}$. Ce fait, couplé à l'antisymétrie,

permet de décrire complètement le crochet de Poisson sous la forme d'un 2-vecteur $\Pi \in \rho(\Lambda^2 TM)$, dégageant ainsi le caractère local d'une structure de Poisson.

Remarque 1.1.1. De manière générale, si $v : V \mapsto M$ désigne une fibration vectorielle quelconque, on notera $\rho(V)$ l'espace de ses sections, la variété de base ne faisant en général aucune ambiguïté. Ainsi $\Omega^k(M) = \rho(\Lambda^k T^*M)$ désignera l'espace des k -formes sur la variété M .

Morphismes de Poisson

Soient (M, Π) et (M', Π') deux variétés de Poisson de crochets respectifs $\{ , \}$ et $\{ , \}'$. On dit que $\phi : (M, \Pi) \mapsto (M', \Pi')$ est un *morphisme de Poisson* si :

$$\forall f, g \in C^\infty(M') \quad \{f \circ \phi, g \circ \phi\} = \{f, g\}' \circ \phi,$$

où, de manière équivalente si :

$$\phi_* \Pi = \Pi'.$$

L'existence de tels morphismes pose notamment des problèmes de projectabilité (voir par exemple [Va]). Comme toujours en géométrie, lorsque ϕ est un difféomorphisme entre ouverts de \mathbb{R}^n , on pourra voir Π et Π' comme deux structures liés par un isomorphisme, ou comme la même structure vue dans deux cartes différentes.

Expression locale des structures de Poisson

Si (x_1, \dots, x_n) désigne un système de coordonnées locales sur un ouvert de M , notons $\Pi_{i,j} := \frac{1}{2}\{x_i, x_j\}$. Le 2-vecteur Π prend la forme :

$$\begin{aligned} \Pi &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Pi_{i,j} \partial x_i \wedge \partial x_j \\ &= \sum_{i,j=1..n} \Pi_{i,j} \partial x_i \wedge \partial x_j. \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction lisse f , le champ hamiltonien X_f associé à f prend s'exprime comme :

$$X_f = \sum_{i=1..n} \Pi_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial x_j.$$

Exemples de structures de Poisson

- *Structures de Poisson sur \mathbb{R}^2 :*

On vérifie aisément que, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\Pi := f \partial x \wedge \partial y$ définit une structure de Poisson. L'étude des structures de Poisson topologiquement stables sur des surfaces compactes est traité dans [Rad1], [Rad2].

• *Structures symplectiques :*

Les *structures symplectiques* sont les structures de Poisson pour lesquelles la matrice $\Pi_{i,j}$ est inversible sur tout M : on définit en effet de manière unique une 2-forme non-dégénérée ω de sorte que $\Pi^\sharp = \omega^\flat$, l'équation de Jacobi est alors équivalente à $d\omega = 0$.

• *Structures de Poisson linéaires :*

Une structure de Poisson est dite *linéaire* si elle est définie sur un espace vectoriel, et si le crochet de deux fonctions linéaires est linéaire. De telles structures sont en correspondance biunivoque avec les algèbres de Lie de dimension finie : si $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}})$ désigne une algèbre de Lie de dimension finie, la structure de Poisson correspondante est définie sur \mathcal{G}^* par la formule :

$$\forall f, g \in C^\infty(\mathcal{G}), \forall \alpha \in \mathcal{G}^* \quad \{f, g\}(\alpha) = \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha g]_{\mathcal{G}} \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignent les crochets de dualité, et où $d_\alpha f$ et $d_\alpha g$ sont vus comme des éléments de $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}$.

De telles structures sont entièrement déterminées par leurs constantes de structure $c_{i,j}^k \in \mathbb{R}$, définies par :

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1 \dots n} c_{i,j}^k x_k,$$

où, de manière équivalente

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1 \dots n} c_{i,j}^k x_k \partial x_i \wedge \partial x_j.$$

1.1.2 Crochet de Schouten

Notons $\rho(\Lambda TM)$ l'espace des sections de l'algèbre extérieure de TM : $\rho(\Lambda TM) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \rho(\Lambda^n TM)$, avec $\rho(\Lambda^0 TM) = C^\infty(M)$, $\rho(\Lambda TM)$ est une algèbre graduée associative sur laquelle il existe un unique crochet $[\cdot, \cdot] : \rho(\Lambda TM) \times \rho(\Lambda TM) \rightarrow \rho(\Lambda TM)$ vérifiant, pour tous $A \in \rho(\Lambda^a TM)$, $B \in \rho(\Lambda^b TM)$, $C \in \rho(\Lambda^c TM)$, et $X \in \rho(\Lambda^1 TM)$ les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} [A, B] &\in \rho(\Lambda^{a+b-1} TM), \\ [X, A] &= \mathcal{L}_X A, \\ [A, B] &= -(-1)^{(a+1)(b+1)} [B, A], \\ [A, B \wedge C] &= [A, B] \wedge C + (-1)^{(a+1)b} B \wedge [A, C], \end{aligned}$$

ainsi que l'identité de Jacobi graduée :

$$(-1)^{(a+1)(c+1)}[A, [B, C]] + (-1)^{(b+1)(a+1)}[B, [C, A]] + (-1)^{(c+1)(b+1)}[C, [A, B]] = 0.$$

Autrement dit, $\rho(\Lambda TM)$ muni du produit extérieur et du *crochet de Schouten* est une algèbre de Gerstenhaber. L'identité de Jacobi pour une structure de Poisson Π se traduit alors en termes de crochet de Schouten par :

$$[\Pi, \Pi] = 0.$$

Localement, cette équation prend la forme :

$$\forall i, j, k = 1 \dots n, \quad \oint_{i,j,k} \sum_{l=1 \dots n} \Pi_{i,l} \frac{\partial \Pi_{j,k}}{\partial x_l} = 0$$

A priori très simple, nous verrons au cours notamment du second chapitre, à quel point peut elle être riche et prendre de multiples formes.

1.1.3 Feuilletage symplectique

Pour tout 2–vecteur Π on peut considérer le morphisme fibré :

$$\begin{aligned} \Pi^\sharp : T^*M &\longmapsto TM \\ \alpha &\longmapsto i_\alpha \Pi, \end{aligned}$$

$i_\alpha \Pi$ désignant le produit intérieur de α par Π : $i_\alpha \Pi(\beta) := \Pi(\alpha, \beta)$. Lorsque Π est une structure de Poisson, l'espace des 1–formes sur M , $\Omega^1(M)$, est muni d'une structure d'algèbre de Lie, entièrement définie par la condition :

$$\forall f, g \in C^\infty(M) \quad \{df, dg\} = d\{f, g\},$$

et en imposant l'identité de Leibniz :

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M) \quad \{\alpha, f\beta\} = f\{\alpha, \beta\} + \mathcal{L}_{\Pi^\sharp(\alpha)}\beta$$

(ici, on note de la même manière les crochets sur $C^\infty(M)$ et sur $\Omega^1(M)$). On sait de plus que Π^\sharp est alors un morphisme d'algèbres de Lie. Son image $\text{Im} \Pi^\sharp$ définit donc une distribution (singulière) C^∞ intégrable sur M (voir [Sus]). Les feuilles de cette distribution (qui, de manière générale, sont des variétés strictement immergées) héritent de Π d'une structure symplectique, en particulier, elles sont de dimension paire.

1.1.4 Cohomologie de Poisson

Grace à l'identité de Jacobi, on peut définir sur $\Lambda(TM)$ un opérateur de carré nul en posant pour tout p :

$$\begin{aligned} \partial_{\Pi}^p : \rho(\Lambda^p TM) &\longmapsto \rho(\Lambda^{p+1} TM) \\ \Delta &\longmapsto [\Pi, \Delta] \end{aligned}$$

lequel mène naturellement à une théorie cohomologique, et dont on note $H_{\Pi}^*(M)$ le complexe associé :

$$H_{\Pi}^p(M) := \ker \partial_{\Pi}^p / \text{Im} \partial_{\Pi}^{p-1}$$

Pour les petites valeurs de p , on peut donner une interprétation géométrique de ces espaces de cohomologie : $H_{\Pi}^0(M)$ est l'ensemble des fonctions dites de Casimir, c'est-à-dire celle dont le champ hamiltonien est nul, ou, de manière équivalente, les fonctions constantes sur les feuilles. $H_{\Pi}^1(M)$ est l'ensemble des champs laissant Π invariant, modulo les champs hamiltoniens. $H_{\Pi}^2(M)$ mesure quand à lui les déformations infinitésimales de Π modulo les déformations infinitésimales triviales.

1.1.5 Rotationnel d'une structure de Poisson

Supposons la variété M orientable, et fixons $\nu \in \Omega^n(M)$ une forme volume sur M . L'application :

$$\begin{aligned} \nu^b : \rho(\Lambda^p TM) &\longmapsto \Omega^{n-p}(M) \\ \Delta &\longmapsto i_{\Delta} \nu \end{aligned}$$

est alors un isomorphisme. En posant : $\mathcal{D}_{\nu} := (\nu^b)^{-1} \circ d \circ \nu$, on transporte l'opérateur de différentiation externe d sur le complexe $\rho(\Lambda TM)$ suivant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \rho(\Lambda^p TM) & \xrightarrow{\nu^b} & \Omega^{n-p}(M) \\ \mathcal{D}_{\nu} \downarrow & & \downarrow d \\ \rho(\Lambda^{p-1} TM) & \xrightarrow{\nu^b} & \Omega^{n-p+1}(M) \end{array}$$

Étant donné un p -vecteur Δ , on définit ainsi le *rotationnel* $\mathcal{D}_{\nu}(\Delta)$ de Δ relativement à la forme volume ν . Rotationnel et crochet de Schouten sont liés par la formule suivante.

Proposition 1.1.1. *Soit $A \in \rho(\Lambda^a TM)$ et $B \in \rho(\Lambda^b TM)$, le crochet de Schouten vérifie :*

$$[A, B] = (-1)^a \mathcal{D}_\nu(A \wedge B) - \mathcal{D}_\nu A \wedge B - (-1)^b A \wedge \mathcal{D}_\nu B.$$

En d'autres termes, le rotationnel (relativement à une forme volume quelconque) engendre le crochet de l'algèbre de Gerstenhaber $\rho(\Lambda TM)$, on dit encore que $\rho(\Lambda TM)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky (ou BV-algèbre).

La functorialité du rotationnel s'exprime comme suit : si ϕ est un difféomorphisme, on a

$$\phi_* \mathcal{D}_\nu \Delta = \mathcal{D}_{\phi_* \nu} \phi_* \Delta$$

Pour une structure de Poisson dont l'expression locale est $\Pi = \sum_{i,j=1}^n \Pi_{i,j} \partial x_i \wedge \partial x_j$, et si on prend pour forme volume $\nu = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, le rotationnel est un champ de vecteurs, qui prend la forme :

$$\mathcal{D}_\nu \Pi = \sum_{i,j=1 \dots n} \frac{\partial \Pi_{i,j}}{\partial x_j} \partial x_i,$$

Notons que ce champ de vecteur est toujours tangent aux feuilles de dimension maximale.

Le rotationnel d'une structure de Poisson possède l'importante propriété de préserver cette dernière :

$$(1.1.1) \quad [\mathcal{D}_\nu \Pi, \Pi] = 0.$$

Par ailleurs, si $\nu' = f\nu$ est une autre forme volume (f désignant une fonction lisse ne s'annulant pas sur M), les rotationnels relativement à ces deux formes volumes diffèrent d'un champ hamiltonien, plus précisément :

$$\mathcal{D}_{f\nu} \Pi = \mathcal{D}_\nu \Pi + X_{\ln|f|}.$$

Ce qui signifie que même si le rotationnel dépend de la forme volume choisie, sa classe de cohomologie elle, est indépendante de ce choix. La non-nullité de cette classe de cohomologie est une obstruction à l'existence d'une forme volume invariante par Π , on l'appelle la classe modulaire de la structure de Poisson (voir [D-Ha], [We1]).

Lorsque la variété n'admet pas de forme volume, il reste possible de définir le rotationnel, il suffit pour cela de se donner une forme de densité, l'équivalent au signe près d'une forme volume, la formule précédente assure en effet que le rotationnel reste bien défini.

Chapitre 2

Structures de Poisson le long d'un cercle de singularités

Considérons une variété M munie d'une structure de Poisson Π qui s'annule en un point m de M , mais dont le rotationnel $\mathcal{D}_\Omega\Pi$ par rapport à une quelconque forme volume Ω ne s'annule pas en ce point :

$$(2.0.1) \quad \Pi_m = 0$$

$$(2.0.2) \quad (\mathcal{D}_\Omega\Pi)_m \neq 0.$$

On peut alors remarquer, en vertu de la propriété (1.1.1), et puisque Π s'annule en m , que la valeur du rotationnel au point m ne dépend pas du choix de Ω .

Par ailleurs, comme le rotationnel préserve la structure Π , cette dernière doit s'annuler tout le long de la trajectoire du point m pour le champ $\mathcal{D}_\Omega\Pi$, que nous noterons Γ . De plus, cette trajectoire ne dépend que de Π , et, pour tout $m' \in \Gamma$, il existe un voisinage de m' isomorphe à un voisinage de m . On voit ainsi que les hypothèses 2.0.1 et 2.0.2, qui sont de nature locale, ont des conséquences de nature semi-locale.

Dans ce chapitre, on étudie cette situation dans le cas où la linéarisée de Π en m est le plus simple possible, on suppose aussi que la trajectoire Γ de m est fermée, ce afin d'obtenir des invariants semi-locaux intéressants.

Dans le cas des structures de Poisson analytiques, on parvient alors à donner une forme normale pour Π au voisinage de Γ ainsi qu'un ensemble complet d'invariants

pour de telles situations. Le cas lisse sera ensuite traité sous des hypothèses supplémentaires. Enfin, on donnera une interprétation géométrique de ces invariants, et on décrira complètement le feuilletage de telles structures.

2.1 Mise en place du contexte et des notations

Dans la suite, Π désigne une structure de Poisson analytique définie sur $M = S^1 \times \mathbb{R}^n$, avec S^1 paramétré par $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et \mathbb{R}^n par (x_1, \dots, x_n) . On note $\Gamma = S^1 \times \{0\}$ et on suppose que Π s'annule en un point m de Γ et que la trajectoire passant par m du rotationnel $\mathcal{D}_\omega \Pi$ de Π par rapport une forme volume quelconque Ω est Γ .

On a vu que Π s'annule nécessairement le long de Γ , la proposition suivante décrit la partie linéaire de Π en tout point de Γ :

Proposition 2.1.1. *Soit Λ une structure de Poisson sur \mathbb{R}^{n+1} , nulle en 0 et dont le rotationnel en 0 est non nul. Alors la linéarisée $\Lambda^{(1)}$ de Λ en 0 est le dual d'une algèbre de Lie produit semi-direct de \mathbb{R} par une algèbre de Lie unimodulaire :*

$$\Lambda^{(1)} = (\mathcal{U} \rtimes_D \mathbb{R})^*,$$

où \mathcal{U} désigne une algèbre de Lie unimodulaire, et \mathbb{R} agit sur \mathcal{U} via une dérivation $D : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$.

preuve :

Rappelons d'abord qu'une algèbre de Lie unimodulaire est une algèbre de Lie dont l'adjoint de tout élément est de trace nulle. On commence par montrer que si le rotationnel de Λ en 0 est non nul, il en va de même pour celui de $\Lambda^{(1)}$: notons $R_0 \in T_0\mathbb{R}^{n+1}$ (respectivement $R_0^{(1)}$) le rotationnel de Λ (respectivement $\Lambda^{(1)}$) en 0, on a vu que R_0 et $R_0^{(1)}$ ne dépendaient pas de la forme volume choisie, dans un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) , on a donc :

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial \Lambda_{i,j}}{\partial x_i}(0) \partial x_j \\ R_0^{(1)} &= \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial \Lambda_{i,j}^{(1)}}{\partial x_i}(0) \partial x_j(0) \\ &= \sum_{i,j=0}^n c_{i,j}^i \partial x_j, \quad (\star) \end{aligned}$$

où $c_{i,j}^k \in \mathbb{R}$ désignent les constantes de structure de $\Lambda^{(1)}$. Mais, précisément, $c_{i,j}^k = \frac{\partial \Lambda_{i,j}}{\partial x_k}(0)$, ainsi, sous des identifications usuelles, on a $R_0 = R_0^{(1)} \neq 0$.

Pour voir que $\Lambda_0^{(1)}$ est bien de la forme $(\mathcal{U} \rtimes_D \mathbb{R})^*$ avec \mathcal{U} , il suffit de choisir le système de coordonnées (x_0, \dots, x_n) de sorte que $R_0^{(1)} = (\partial x_0)_0$: puisque $\Lambda^{(1)}$ doit s'annuler sur l'axe Ox_0 , on a alors $c_{i,j}^0 = 0, \forall i, j = 1 \dots n$ (ce qui signifie que $\mathcal{U} = Vect\{\partial x_i, i = 1 \dots n\}$ et $D = \{x_0, \cdot\}$ font l'affaire), le fait que l'adjoint de tout élément de \mathcal{U} soit de trace nulle est alors une conséquence directe de l'égalité (\star) . \square

Pour notre propos, Λ désigne Π au voisinage de m et $\Lambda^{(1)}$ la linéarisée $\Pi^{(1)}$ de Π au point m . Afin d'utiliser des techniques classiques pour les problèmes de formes normales, il est naturel d'imposer aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ de D de ne vérifier aucune des relations de résonnance suivantes :

$$(2.1.1) \quad \lambda_i = p_1 \lambda_1 + \dots + p_n \lambda_n$$

$$(2.1.2) \quad \lambda_i + \lambda_j = q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n,$$

pour tous $i, j \in \{1 \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, où (p_1, \dots, p_n) et (q_1, \dots, q_n) sont des multi-indices à coefficients entiers positifs, avec $\sum_{k=1}^n p_k \geq 2$, à l'exception des relations triviales $\lambda_i = \lambda_i$ et $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_i + \lambda_j$.

Cette hypothèse, quoique que "générique", est cependant très contraignante pour l'algèbre \mathcal{U} , en effet on le résultat suivant :

Proposition 2.1.2. *Si $\mathcal{U} \rtimes_D \mathbb{R}$ est une algèbre de Lie telle que les valeurs propres de D ne satisfassent aucune des relation de résonnance 2.1.1 et 2.1.2, alors \mathcal{U} est nécessairement abélienne.*

preuve :

Puisque \mathcal{U} s'injecte naturellement dans $\mathcal{U} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, il suffit de montrer que cette dernière est abélienne. Or en choisissant une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathcal{U} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ pour laquelle D est sous forme de Jordan, il est facile de montrer successivement que $\{e_1, e_2\} = 0, \{e_2, e_3\} = 0 \dots$ grace aux identités de Jacobi $D(\{e_i, e_j\}) = \{D(e_i), e_j\} + \{e_i, D(e_j)\}$. \square

Dans le cas analytique, il sera aussi utile de supposer que ces valeurs propres vérifient les conditions de Bruno : si I désigne l'ensemble des multi-indices $(c_i)_{i=1 \dots n} \in \mathbb{Z}^n$ tels que $c_i \leq -1, \forall i = 1 \dots n$ et $\sum_{i=1 \dots n} c_i \lambda_i \neq 0$, on pose :

$$(2.1.3) \quad \omega_k = \min\left\{ \left| \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \right|; (c_i) \in I, \sum_{i=1}^n c_i < 2^k \right\},$$

on suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \log \frac{1}{\omega_k} > \infty$.

Enfin, et par souci de simplification, on suppose aussi que toutes ces valeurs propres sont réelles, bien que le cas complexe puisse être traité de manière analogue.

Remarque 2.1.1. Une étude purement locale de cette situation a déjà été réalisée dans [D-Zh], la manière de traiter le cas complexe y est notamment exposée. Il y apparaît qu'une telle structure est, au moins formellement, quadratisable, c'est-à-dire que l'on peut trouver un système de coordonnées formelles dans lequel cette dernière ne contient que des termes linéaires ou quadratiques.

2.2 La forme normale

Dans cette section, on démontre toute une série de lemmes qui vont peu à peu préciser la forme de Π pour aboutir à une forme normale au voisinage de Γ , avec pour préoccupation sous-jacente d'obtenir des coordonnées globales vis-à-vis de $\theta \in S^1$.

Lemme 2.2.1. *Le crochet induit par Π peut, au voisinage de Γ , être écrit sous la forme :*

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= o_2(\mathbf{x}) & \forall i, j = 1 \dots n \\ \{\theta, x_i\} &= \sum_{j=1 \dots n} h_{i,j}(\theta) x_j + o_2(\mathbf{x}) & \forall i = 1 \dots n \end{aligned}$$

où $h_{i,j}$ sont des fonctions analytiques sur S^1 et $o_2(\mathbf{x})$ désignent des fonctions (analytiques ?) sur $S^1 \times \mathbb{R}^n$ d'ordre deux en les variables x_1, \dots, x_n et où la matrice $H_\theta = (h_{i,j}(\theta))_{i,j=1 \dots n}$ a pour valeurs propres $\{k(\theta)\lambda_i/i = 1 \dots n\}$ pour une certaine fonction $k : S^1 \mapsto \mathbb{R}$.

preuve :

Ce lemme est juste une conséquence du fait que deux algèbres de Lie de la forme $\mathbb{R} \rtimes_D \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R} \rtimes_{D'} \mathbb{R}^n$ sont isomorphes si et seulement si D et D' sont conjuguées à un scalaire près (en particulier, à isomorphisme de Poisson près, les valeurs propres de D ne sont définies que modulo multiplication par un scalaire) mais voyons cela en détail.

Π s'annulant sur $\Gamma = \{x_i = 0, i = 1 \dots n\}$, son crochet a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= \sum_{k=1 \dots n} u_{i,j}^k(\theta) x_k + o_2(\mathbf{x}) & \forall i, j = 1 \dots n \\ \{\theta, x_i\} &= \sum_{j=1 \dots n} h_{i,j}(\theta) x_j + o_2(\mathbf{x}) & \forall i = 1 \dots n \end{aligned}$$

Soit $\theta_0 \in S^1$ fixé, et notons $\Pi_{\theta_0}^{(1)}$ la linéarisée de Π en $(\theta_0, 0, \dots, 0)$. D'après la proposition 2.1.2, $\Pi_{\theta_0}^{(1)}$ est isomorphe au dual d'une algèbre de Lie dont l'idéal dérivé est commutatif, donc tous les $u_{i,j}^k(\theta_0)$ sont nuls.

Considérons maintenant $\Psi_{\theta_0} : (\mathbb{R}^n \rtimes_D \mathbb{R})^* \mapsto \Pi_{\theta_0}^{(1)}$ un isomorphisme de Poisson et notons :

$$\tilde{\Psi}_{\theta_0} = \begin{pmatrix} k & v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & & & \\ \vdots & & (\Psi_{i,j}) & \\ w_n & & & \end{pmatrix}$$

la matrice associée; $(\Psi_{\theta_0})^*$ étant un isomorphisme d'algèbres de Lie, il doit envoyer idéal dérivé sur idéal dérivé, et (w_1, \dots, w_n) est nécessairement nul.

On voit alors que $\det(\Psi_{\theta_0}) = k \cdot \det(\Psi_{i,j})$, en particulier, $k \neq 0$ et la matrice $(\Psi_{i,j})$ est inversible. À ce point, les conditions pour que Ψ_{θ_0} soit de Poisson sont :

$$\sum_{k=1 \dots n} h_{i,k} \cdot \Psi_{k,j} = k \cdot \Psi_{i,j} \cdot \lambda_i, \quad \forall i, j = 1 \dots n,$$

mais ces relation s'écrivent précisément sous la forme :

$$\mathbf{H}_{\theta_0} \cdot (\Psi_{i,j}) = (\Psi_{i,j}) \cdot \begin{pmatrix} k \cdot \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \cdot \lambda_n \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat. \square

Lemme 2.2.2. *À un revêtement à deux feuillets près, et dans un bon système de coordonnées, le crochet induit par Π prend, au voisinage de Γ , la forme*

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= o_2(\mathbf{x}) & \forall i, j = 1 \dots n \\ \{\theta, x_i\} &= k(\theta) \lambda_i x_i + o_2(\mathbf{x}) & \forall i = 1 \dots n, \end{aligned}$$

preuve :

Pour tout $\theta \in S^1$, H_θ possède des valeurs propres $\{k(\theta) \cdot \lambda_i, i = 1 \dots n\}$ distinctes, donc k est analytique, et, si on note E_{λ_i} les sous-espace caractéristiques associés, ceux-ci définissent des sous-fibrés vectoriels supplémentaires dans la fibration $S^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto$

S^1 , de sorte qu'ils sont simultanément soit triviaux, soit difféomorphes au ruban de Möbius. Dans ce dernier cas, le revêtement

$$\begin{aligned} C : S^1 \times \mathbb{R}^n &\longmapsto S^1 \times \mathbb{R}^n \\ (\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{x}}) &\longmapsto (2\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{x}}) \quad , \end{aligned}$$

induit sur sa source une structure de Poisson $\tilde{\Pi}$ dont les sous-fibrés caractéristiques sont tous triviaux. La topologie de ces sous-espaces étant invariante par isomorphisme de Poisson, il est clair que deux germes de structures de Poisson, Π et Π' , le long de Γ sont isomorphes si et seulement si $\tilde{\Pi}$ est isomorphe à $\tilde{\Pi}'$ et chaque E_{λ_i} difféomorphe à l'un des $E_{\lambda'_i}$.

Ainsi, à un revêtement près, les E_{λ_i} sont triviaux. Le choix pour chacun d'eux d'une section partout non nulle permet alors de définir un changement de coordonnées linéaire en \mathbf{x} qui diagonalise la matrice H_θ pour tout θ . \square

Remarque 2.2.1. Un exemple basique de structure de Poisson sur $S^1 \times \mathbb{R}^2$ admettant des sous-fibrés caractéristiques non triviaux peut être donnée par le crochet suivant :

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \frac{x_1^2}{2}(\lambda \cos^2 \frac{\theta}{2} + \mu \sin^2 \frac{\theta}{2}) + \frac{x_2^2}{2}(\lambda \sin^2 \frac{\theta}{2} + \mu \cos^2 \frac{\theta}{2}) + x_1 x_2(\mu - \lambda) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \{\theta, x_1\} &= x_1(\lambda \cos^2 \frac{\theta}{2} + \mu \sin^2 \frac{\theta}{2}) + x_2(\mu - \lambda) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \{\theta, x_2\} &= x_1(\mu - \lambda) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + x_2(\lambda \sin^2 \frac{\theta}{2} + \mu \cos^2 \frac{\theta}{2}), \end{aligned}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont arbitraires. Ici, il est intéressant de voir comment ces équations se simplifient lorsque $\lambda = \mu = 1$, bien qu'il s'agisse d'un cas résonant.

Lemme 2.2.3. *Un reparamétrage de S^1 permet de mettre le crochet induit par Π sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= o_2(\mathbf{x}) & \forall i, j = 1 \dots n \\ \{\theta, x_i\} &= \mu_i x_i + o_2(\mathbf{x}) & \forall i = 1 \dots n, \end{aligned}$$

où $\mu_i \in \mathbb{R}$.

preuve :

La formule

$$\chi(\theta) = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} k(t) dt} \int_0^\theta \frac{1}{k(t)} dt$$

définit un un difféomorphisme $\chi : S^1 \longmapsto S^1$ qui donne la reparamétrisation souhaitée. \square

Lemme 2.2.4. *Il existe un système de coordonnées, défini sur un voisinage de Γ , pour lequel le crochet de Π s'exprime comme*

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= o_2(\mathbf{x}) & \forall i, j = 1 \dots n \\ \{\theta, x_i\} &= \mu_i x_i & \forall i = 1 \dots n. \end{aligned}$$

preuve :

Notons X_θ le champ hamiltonien associé à la (multi-)fonction θ :

$$X_\theta = \sum_{i=1 \dots n} (\mu_i x_i + p_i) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où p_i sont des $o_2(\mathbf{x})$. La partie linéaire d'un tel champ est connue pour être non-dégénérée, autrement dit, tout champ de vecteurs ayant une telle partie linéaire est formellement et lisse linéarisable (considéré comme champ en les variables x_i à paramètre θ) sous les conditions de non-résonance 2.1.1, et il l'est analytiquement avec les conditions de Bruno 2.1.3 (voir par exemple [Rou], théorème 20). Donnons tout de même une idée de la preuve de la non-dégénérescence de ce champ : on remarque qu'un difféomorphisme $\phi_\theta = (\phi_\theta^1, \dots, \phi_\theta^n)$ linéarise le champ X_θ si et seulement si

$$\mathcal{L}_{X_\theta} \phi_\theta^i = \mu_i \phi_\theta^i \quad \forall i = 1 \dots n, \forall \theta \in S^1.$$

Il s'agit alors dans un premier temps de prouver le résultat formellement. Pour cela on écrit X_θ sous la forme

$$X_\theta = X_\theta^{(1)} + X_\theta^{(r)} + o_r(\mathbf{x}),$$

où $X_\theta^{(1)}, X_\theta^{(r)}$ et $o_r(\mathbf{x})$ désignent respectivement les parties d'ordre 1, d'ordre $r > 1$ et d'ordre supérieur à r en les variables x_i , et on montre formellement l'existence de $\phi_\theta = Id + \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_\theta^{(r)}$ par récurrence sur r , en utilisant les conditions de non-résonance 2.1.1. Lorsque l'hypothèse 2.1.3 est aussi vérifiée, on peut montrer que la série ϕ_θ converge, obtenant ainsi le résultat analytique. Dans le cas lisse, on peut procéder comme [Rou] : d'après ce qui précède, on peut partir de $X_\theta = X_\theta^{(1)} + o_\infty(\mathbf{X})$ où $o_\infty(\mathbf{X})$ désigne un champ lisse plat en $0 \in \mathbb{R}^n$ pour tout $\theta \in S^1$, il est ensuite possible d'éliminer la partie plate par intégration directe, la platitude assurant l'existence de cette intégrale.

Il existe donc une famille ϕ_θ de difféomorphismes locaux, périodique et analytique en θ , telle que :

$$(\phi_\theta)_* X_\theta = \sum_{i=1 \dots n} \mu_i x_i \partial x_i.$$

Ainsi, le changement de variables $(\theta, \mathbf{x}) \mapsto (\theta, \phi_\theta(\mathbf{x}))$ donne le résultat. \square

Lemme 2.2.5. *Un dernier changement de coordonnées mène au crochet suivant :*

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= a_{i,j} x_i x_j & \forall i, j = 1 \dots n \\ \{\theta, x_i\} &= \mu_i x_i & \forall i = 1 \dots n. \end{aligned}$$

où $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

preuve :

Notons $u_{i,j} = \{x_i, x_j\}$, les identités de Jacobi $\mathcal{F}_{\theta, x_i, x_j} \{\theta, \{x_i, x_j\}\} = 0$ s' écrivent maintenant simplement :

$$(2.2.1) \quad (\mu_i + \mu_j) u_{i,j} = X_\theta(u_{i,j}).$$

Si on développe $u_{i,j}$ en série entière des variables x_i :

$$u_{i,j} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n \\ i_1 + \dots + i_n = p}} u_{i,j}^{(i_1 \dots i_n)}(\theta) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

on a :

$$\begin{aligned} X_\theta(u_{i,j}) &= \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n \\ i_1 + \dots + i_n = p}} u_{i,j}^{(i_1 \dots i_n)}(\theta) X_\theta(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n \\ i_1 + \dots + i_n = p}} u_{i,j}^{(i_1 \dots i_n)}(\theta) \left(\sum_{k=1 \dots n} i_k \lambda_k \right) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \end{aligned}$$

donc les équations 2.2.1 sont équivalentes à :

$$\left(\sum_{k=1 \dots n} i_k \lambda_k \right) u_{i,j}^{(i_1 \dots i_n)}(\theta) = (\lambda_i + \lambda_j) u_{i,j}^{(i_1 \dots i_n)}(\theta) \quad \forall (i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n,$$

et, à cause des relations de non-résonance 2.1.2, on a nécessairement $u_{i,j} = a_{i,j}(\theta) x_i x_j$ pour $a_{i,j}(\theta)$ une certaine fonction analytique.

Les identités de Jacobi $\mathcal{F}_{x_1, x_i, x_j} \{x_1, \{x_i, x_j\}\} = 0$ prennent ainsi la forme :

$$\lambda_1 \frac{\partial a_{i,j}}{\partial \theta} + \lambda_i \frac{\partial a_{j,1}}{\partial \theta} + \lambda_j \frac{\partial a_{1,i}}{\partial \theta} = 0,$$

en particulier, si $a_{1,i}$ et $a_{1,j}$ sont indépendants de θ , alors $a_{i,j}$ l'est aussi. Il suffit donc d'exhiber un difféomorphisme rendant $a_{1,k}$ indépendant de θ pour tout $k = 1 \dots n$ pour que tous les $a_{i,j}$ le soient. Un tel difféomorphisme peut être défini par :

$$(\theta, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\theta, x_1, \chi_2(\theta)x_2, \dots, \chi_n(\theta)x_n),$$

où $\chi_j(\theta) = \exp\left(\frac{1}{\lambda_1} \int_0^\theta (a_{1,j}(t) - \widehat{a}_{1,j}) dt\right)$ avec $\widehat{a}_{1,j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{1,j}(t) dt$ □

Remarque 2.2.2. C'est uniquement dans ce dernier lemme que la condition d'analyticité est utilisée. Nous verrons dans la sous-section 2.2.3 que, dans le cas lisse, les crochets $\{x_i, x_j\}$ peuvent contenir des termes plats, que l'on parvient à éliminer avec difficulté lorsque $n = 2$.

Exemple 1. Dans le cas particulier $n = 1$, la forme normale se réduit à :

$$\Pi = cx \partial \theta \wedge \partial x,$$

Lorsque $n = 2$, la forme normale est :

$$\Pi = \partial \theta \wedge (\mu_1 x_1 \partial x_1 + \mu_2 x_2 \partial x_2) + a x_1 x_2 \partial x_1 \wedge \partial x_2.$$

2.2.1 Le principal résultat

Pour conclure la sous-section précédente, énonçons simplement le théorème qui en résulte :

Théorème 2.2.1. *Soit Π une structure de Poisson analytique définie sur un voisinage U de $\Gamma = S^1 \times \{0\}$ dans $S^1 \times \mathbb{R}^n$, avec S^1 paramétré par θ et satisfaisant, pour un certain $m \in \Gamma$:*

(i) $\Pi_m = 0$.

(ii) $(D_\Omega \Pi)_m \neq 0$.

(iii) les valeurs propres de l'opérateur :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\longmapsto \mathcal{U} \\ (dx_i)_m &\longmapsto (d\{\theta, x_i\})_m, \end{aligned}$$

où \mathcal{U} désigne le sous-espace vectoriel de T_m^*U engendré par $\{d_m x_i, i = 1 \dots n\}$, ne vérifient aucune des relations de raisonnance :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= p_1 \lambda_1 + \dots + p_n \lambda_n \\ \lambda_i + \lambda_j &= q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n, \end{aligned}$$

pour tous $i, j \in \{1 \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, où (p_1, \dots, p_n) et (q_1, \dots, q_n) sont des multi-indices à coefficients entiers positifs, avec $\sum_{k=1}^n p_k \geq 2$, à l'exception des relations triviales $\lambda_i = \lambda_i$ et $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_i + \lambda_j$.

(iv) ces mêmes valeurs propres vérifient les condition de Bruno (2.1.3)

Alors, à un revêtement à deux feuilletés près, il existe un système de coordonnées analytique, défini sur un voisinage de Γ , dans lequel Π prend la forme :

$$\Pi = \partial\theta \wedge \left(\sum_{i=1 \dots n} \mu_i x_i \partial x_i \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \partial x_i \wedge \partial x_j.$$

2.2.2 Unicité de la forme normale

Les constantes mises en jeux dans le théorème précédent sont uniques, autrement dit, elles caractérisent la structure. Nous expliquerons plus tard pourquoi les μ_i sont uniques, pour nous concentrer ici sur les $a_{i,j}$

Pour montrer que les $a_{i,j}$ sont des invariants de Poisson, considérons deux structures Π and Π' sur un voisinage de Γ , et Φ un isomorphisme de Poisson de Π sur Π' . On met Π et Π' sous forme normale, puisque les μ_i sont des invariants

de la structure, on peut supposer que $\mu_i = \mu'_i$ pour tout $i = 1 \dots n$. Avec des notations évidentes, les équations pour que Φ soit de Poisson s'écrivent : $\forall i, j = 1 \dots n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right) + \sum_{k,l=1}^n a_{k,l} x_k x_l \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_l} \right) &= \mu_i \Phi_i & (I)_i \\ \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta} \right) + \sum_{k,l=1}^n a_{k,l} x_k x_l \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} &= a'_{i,j} \Phi_i \Phi_j & (II)_{i,j}. \end{aligned}$$

En différentiant l'équation $(I)_i$ par rapport à θ , et en l'évaluant sur Γ , on obtient :

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}(\theta, 0, 0) = 0 \quad \forall \theta \in S^1.$$

En la différentiant par rapport à x_j , et en l'évaluant sur Γ , on a :

$$\mu_j \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)(\theta, 0, 0) = \mu_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\theta, 0, 0) \quad \forall \theta \in S^1.$$

Par ailleurs $\Phi|_{\Gamma}$ échange les champs modulaires, donc $\Phi_1(\theta, 0, 0) = \theta + \text{constante}$ et cette équation devient :

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\theta, 0, 0) = 0 \quad \forall \theta \in S^1.$$

On en conclue que l'on peut écrire Φ sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \theta + o_2(x) \\ \Phi_i &= u_i(\theta) x_i + o_2(x) \quad \forall i = 1 \dots n. \end{aligned}$$

Dans $(II)_{i,j}$, les termes d'ordre deux en les variables (x_1, \dots, x_n) donnent alors la relation :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\mu_j \ln |u_i| + \mu_i \ln |u_j|) = a_{i,j} - a'_{i,j}$$

Dans cette dernière égalité, le membre de gauche est la dérivée d'une fonction définie sur S^1 , son intégrale est donc nulle, et $a_{i,j} = a'_{i,j}$. La forme donnée dans le théorème 1 est donc caractéristique de la structure considérée.

La section (2.3), consacrée à l'analyse géométrique de la situation, décrit précisément le rôle de ces constantes dans le feuilletage symplectique.

2.2.3 Le cas C^∞

Si l'on considère à présent le cas d'une structure de Poisson lisse Π sur $S^1 \times \mathbb{R}^n$ satisfaisant les conditions du théorème 2.2.1, l'étude effectuée dans la section précédente prouve l'existence d'un difféomorphisme, défini sur un voisinage de Γ , qui met Π sous la forme :

$$\Pi = \partial\theta \wedge \left(\sum_{i=1 \dots n} \mu_i x_i \partial x_i \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,j} x_i x_j + \epsilon_{i,j}) \partial x_i \wedge \partial x_j.$$

où μ_i et $a_{i,j}$ désignent des constantes et $\epsilon_{i,j}$ des fonctions sur $S^1 \times \mathbb{R}^n$ plates le long de Γ . Notons ici que, dans le lemme 2.2.4, la linéarisation du champ X_θ le long de Γ est praticable dans la catégorie C^∞ . Ceci justifie le fait qu'aucun terme plat n'apparaisse ici dans l'expression de ce dernier.

Nous allons montrer que, lorsque $n = 2$, il est possible d'éliminer les termes plats (le cas $n = 1$ est traité dans [Rad2]). On considère donc désormais, et seulement pour cette sous-section, une structure de Poisson lisse Π , définie sur $S^1 \times \mathbb{R}^2$, et de la forme :

$$\Pi = \lambda x \partial\theta \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \partial\theta \wedge \partial y + (axy + \epsilon(x, y, \theta)) \partial x \wedge \partial y,$$

où a, λ et μ sont des constantes, et ϵ une fonction lisse, plate le long de Γ .

Observons d'abord que ϵ peut se mettre sous la forme $\epsilon = \tilde{\epsilon}(x, y, \theta)xy$: il suffit pour cela de montrer que ϵ s'annule sur les ensembles $\{x = 0\}$ and $\{y = 0\}$. Sur $\{x = 0\}$ par exemple, l'identité de Jacobi $\mathcal{J}_{\theta, x, y} \{\theta, \{x, y\}\} = 0$ s'exprime comme suit :

$$\mu y \frac{\partial \epsilon}{\partial y}(0, y, \theta) = (\lambda + \mu) \epsilon(0, y, \theta).$$

Or, sur $\{y < 0\}$ et $\{y > 0\}$ les solutions de cette équation sont toutes de la forme $\epsilon(0, y, \theta) = Ky^{\frac{\lambda+\mu}{\mu}}$, avec K une constante réelle. L'hypothèse de non-résonance implique alors que $\frac{\lambda+\mu}{\mu} \notin \mathbb{N}$, de sorte que K doit être nulle afin que l'application $y \mapsto \epsilon(\theta, 0, y)$ soit bien lisse en $y = 0$, ce qui montre bien que ϵ s'annule sur l'ensemble $\{x = 0\}$.

Une fois ceci établi, on remarque que l'équation $\mathcal{J}_{\theta, x, y} \{\theta, \{x, y\}\} = 0$ prend désormais la forme : $X_\theta(\tilde{\epsilon}) = 0$, par conséquent, si λ et μ sont de même signe, la dynamique du champ X_θ force $\tilde{\epsilon}$ à être identiquement nulle, il n'y a alors rien à

montrer. On supposera donc par la suite que $\lambda < 0 < \mu$. Dans ce cas, l'ensemble des intégrales premières de X_θ est fonctionnellement engendré par la fonction $z = x^\mu y^{-\lambda}$ sur chaque composante connexe de $\{xy \neq 0\}$, de sorte que travailler sur l'ensemble $\{x > 0, y > 0\}$, nous permet de voir $\tilde{\epsilon}$ comme dépendante uniquement de θ et z . On cherche alors un changement de coordonnées de la forme :

$$\begin{cases} \theta' = \theta \\ x' = (1 + \nu)x \\ y' = y, \end{cases}$$

où $\nu(\theta, z)$, désigne une fonction plate le long de $\{z = 0\}$, cette dernière condition nous assurant que, en résolvant indépendemment le problème sur chaque composante connexe de $\{xy \neq 0\}$, puis en recollant les différents difféomorphismes, l'on obtienne bien un difféomorphisme global.

Un tel changement de variable n'affectera pas le champ X_θ , ainsi, la seule équation que ν ait à vérifier pour éliminer le terme plat ϵ est $\{(1 + \nu)x, y\} = a(1 + \nu)xy$, ou, de manière équivalente :

$$(2.2.2) \quad \tilde{\epsilon}(\theta, z)(1 + \nu(\theta, z)) + (a + \tilde{\epsilon}(\theta, z))\mu z \frac{\partial \nu}{\partial z}(\theta, z) = 0.$$

Travaillons sur $\{x > 0, y > 0\}$, et posons $\tilde{\nu} = \ln(1 + \nu)$, cette équation s'écrit alors :

$$(2.2.3) \quad Z(\tilde{\nu}) = -\frac{\tilde{\epsilon}}{\mu},$$

avec $Z = \frac{\partial}{\partial \theta} + (a + \tilde{\epsilon})z \frac{\partial}{\partial z}$. Notons ϕ_t^Z le flot de Z . Puisque $\phi_t^Z(\theta, 0)$ est au moins défini pour $t \in [0, 4\pi]$, il en va de même pour $\phi_t^Z(\theta, z)$ avec z dans un intervalle ouvert I suffisamment petit autour de zéro. L'application $\tilde{\nu}_0(\theta, z) = \int_{-\theta}^0 \tilde{\epsilon} \circ \phi_t^Z(\theta, z) dt$, définit donc une solution de 2.2.3 pour $\theta \in [0, 4\pi]$, et $z \in I$, cependant, cette dernière n'est a priori pas 2π -périodique en θ .

Pour corriger cette non-périodicité, on doit trouver une intégrale première χ of Z , définie pour $\theta \in [0, 4\pi]$, et telle que $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 + \chi$ soit 2π -périodique in θ . En fait, pour obtenir la périodicité, il nous suffit de nous assurer que $\tilde{\nu}$ vérifie $\tilde{\nu}(0, z) = \tilde{\nu}(2\pi, z)$: en effet, pour une telle fonction $\tilde{\nu}$, on aura alors $Z(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}') = 0$ pour $\tilde{\nu}'(\theta, z) = \tilde{\nu}(\theta + 2\pi, z)$,

or il est clair qu'une intégrale première de Z s'annulant sur $\{\theta = 0\}$ est identiquement nulle, forçant \tilde{v} à coïncider avec \tilde{v}' pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

Notons $\sigma : I \mapsto \sigma(I)$, l'application définie par $\phi_{2\pi}^Z(0, z) = (0, \sigma(z))$, autrement dit, σ mesurant l'holonomie de Z le long de Γ ; elle est clairement inversible, et nous permet de reformuler la condition $\tilde{v}(0, z) = \tilde{v}(2\pi, z)$ uniquement en termes de $\chi(0, z)$:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(0, z) = \tilde{v}(2\pi, z) &\Leftrightarrow \tilde{v}_0(0, z) + \chi(0, z) = \tilde{v}_0(2\pi, z) + \chi(2\pi, z) \\ &\Leftrightarrow \chi(0, z) - \chi(2\pi, z) = \tilde{v}_0(2\pi, z) - \tilde{v}_0(0, z) \\ &\Leftrightarrow \chi(0, z) - \chi(0, \sigma^{-1}(z)) = \tilde{v}_0(2\pi, z) - \tilde{v}_0(0, z). \end{aligned}$$

Ici, χ , en tant qu'intégrale première de Z , peut être complètement déterminée par sa restriction $f(z) = \chi(0, z)$, ainsi, afin de la définir, il nous suffit de trouver f satisfaisant :

$$(2.2.4) \quad f(z) - f(\sigma^{-1}(z)) = D(z),$$

où $D(z) = \tilde{v}_0(2\pi, z) - \tilde{v}_0(0, z)$.

Laissons pour la suite la manière de résoudre une telle équation : selon le lemme 7, la seule chose à vérifier est que D est plate en 0, et que $\sigma^{-1}(z) = \sigma'(0)z$ modulo des termes plats, et que $\sigma'(0) \in]0, 1[$. Il est facile de voir que, dans notre situation, D est plate en zéro, et que $\sigma^{-1}(z) = e^{-a}z$ modulo des termes plats, il semble ainsi nécessaire de faire l'hypothèse $a > 0$, cependant, moyennant quelques modifications techniques, on peut mener la preuve à terme dans le cas $a > 0$.

Il ne nous reste plus qu'à résoudre cette dernière équation, à commencer par le lemme préliminaire suivant.

Lemme 2.2.6. *Soient α, ρ et h des fonctions lisses telles que $\rho(0) = 0$, $\rho'(0) \in]0, 1[$, $h(0) = 0$ et $|\alpha(0)| \leq 1$. Alors l'équation :*

$$(2.2.5) \quad g - \alpha.g \circ \rho = h$$

possède une unique solution g de classe C^1 , s'annulant en zéro, et définie sur un intervalle V autour de zéro sur lequel $|\rho(z)| \leq \rho_1 \cdot |z|$ pour une certaine constante $\rho_1 \in]0, 1[$.

preuve :

Montrons d'abord l'unicité : désignons par $\rho^{[n]} = \rho \circ \dots \circ \rho$, c'est-à-dire ρ composée n fois avec elle-même, on tire successivement de la relation 2.2.5

$$\begin{aligned} g - \alpha.g \circ \rho &= h \\ \alpha.g \circ \rho - \alpha.\alpha \circ \rho.g \circ \rho^{[2]} &= \alpha.h \circ \rho \\ \alpha.\alpha \circ \rho.g \circ \rho^{[2]} - \alpha.\alpha \circ \rho.\alpha \circ \rho^{[2]}.g \circ \rho^{[3]} &= \alpha.\alpha \circ \rho.h \circ \rho^{[2]} \\ &\dots \\ \alpha.\alpha \circ \rho \dots \alpha \circ \rho^{[n-1]}.g \circ \rho^{[n]} - \alpha.\alpha \circ \rho \dots \alpha \circ \rho^{[n]}.g \circ \rho^{[n+1]} &= \alpha.\alpha \circ \rho \dots \alpha \circ \rho^{[n-1]}.h \circ \rho^{[n]}, \end{aligned}$$

et, en sommant termes a termes :

$$g - \alpha.\alpha \circ \rho \dots \alpha \circ \rho^{[n]}.g \circ \rho^{[n+1]} = \sum_{k=1}^n (\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}).h \circ \rho^{[k]}.$$

Donc, si g existe, continue avec $g(0) = 0$, alors, sur V , on a :

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} (\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}).h \circ \rho^{[k]},$$

ce qui prouve l'unicité.

Pour montrer l'existence d'une solution de classe C^1 , il nous suffit de montrer que le série $\sum_{k=0}^{\infty} (\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}).h \circ \rho^{[k]}$ converge normalement, ainsi que la série des dérivées $\sum_{k=0}^{\infty} ((\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}).h \circ \rho^{[k]})' = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{k-1} (\Pi_{j=1 \dots \hat{l} \dots k-1} \alpha \circ \rho^{[j]})(\alpha \circ \rho^{[l]})')h \circ \rho^{[k]} + \sum_{k=0}^{\infty} (\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]})(h \circ \rho^{[k]})'$.

Choisissons d'abord $h_1 \in R$ pour lequel $|h(z)| \leq h_1 \cdot |z|$ sur V . On voit aisément que, pour une certaine constante $M_1 \in R$, $|\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}(z)| \leq M_1$ sur V et pour tout k . On a ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |(\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}(z)).h \circ \rho^{[k]}(z)| &\leq \sum_{k=1}^n M_1 \cdot |h \circ \rho(z)| \\ &\leq M_1 h_1 |z| \sum_{k=1}^n \rho_1^k, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\sum_{k=0}^{\infty} (\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}).h \circ \rho^{[k]}$ converge normalement.

Pour montrer qu'il en va de même de $\sum_{k=0}^{\infty} ((\Pi_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}).h \circ \rho^{[k]})'$, on commence par établir que pour un certain $M_2 \in R$, $|\Pi_{j=0 \dots \hat{l} \dots k-1}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[j]}(z)| \leq M_2$ sur V , et

pour tout k et l , puis que

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-1} | (\prod_{j=0 \dots \hat{l} \dots k-1} \alpha \circ \rho^{[j]}).(\alpha \circ \rho^{[l]})'(z) | &\leq \sum_{l=0}^{k-1} M_2. | (\alpha \circ \rho^{[l]})'(z) | \\ &\leq M_2. \sum_{l=0}^{k-1} \rho^{1+2+\dots+l-1} | \alpha' \circ \rho^{[l]}(z) | \\ &\leq M_3, \end{aligned}$$

pour $M_3 \in \mathbb{R}$. Au final on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} | \sum_{l=0}^{k-1} (\prod_{j=0 \dots \hat{l} \dots k-1} \alpha \circ \rho^{[j]}).(\alpha \circ \rho^{[l]})'(z) h \circ \rho(z) | &\leq \sum_{k=1}^{\infty} M_3. | (h \circ \rho^{[k]})(z) | \\ &\leq M_3. \sum_{l=0}^{\infty} h_1 |z| \rho^{k+1} \\ &< \infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} | (\prod_{l=0}^{k-1} \alpha \circ \rho^{[l]}(z)).(h \circ \rho^{[k]})'(z) | &\leq \sum_{k=1}^{\infty} M_1 | (h \circ \rho^{[k]})'(z) | \\ &\leq M_1. \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^{1+2+\dots+k} | h' \circ \rho^{[k]}(z) | \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. \square

Le lemme suivant permet enfin de conclure à l'existence de solutions C^∞ à l'équation 2.2.4.

Lemme 2.2.7. *Soit D et ρ deux fonctions lisses, avec D plate en zéro, et $\rho(x) = \rho'(0)z + \epsilon_\rho(z)$ où $\rho'(0) \in]0, 1[$ et ϵ_ρ désigne une fonction plate en zéro, alors l'équation*

$$f - f \circ \rho = D$$

possède une unique solution f s'annulant en zéro, et définie sur tout intervalle V sur lequel $|\rho(z)| \leq \rho_1. |z|$ pour un certain $\rho_1 \in]0, 1[$. De plus f est lisse.

preuve :

Le lemme précédent donne l'existence d'une unique fonction f de classe C^1 sur V , nulle en zéro, et satisfaisant

$$f - f \circ \rho = D.$$

En dérivant cette expression, on s'aperçoit que f' est une fonction continue, s'annulant en zéro, et vérifiant :

$$f' - \rho' f' \circ \rho = D'.$$

Applicant à nouveau le lemme précédent, on conclue alors que f' est nécessairement de classe C^1 sur V .

Ceci est la première étape d'une récurrence forte d'hypothèse générique (P_n) définie par :

(P_n) : $f^{(n)}$ est une fonction de classe C^1 sur V , nulle en zéro, et solution d'une équation de la forme

$$f^{(n)} - (\rho')^n f^{(n)} \circ \rho = D^{(n)} - Q_n(\rho_i, f^{(j)} \circ \rho)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < n}}, \quad (E_n)$$

où $Q_n(\rho_i, f^{(j)} \circ \rho)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < n}}$ désigne un polynôme Q_n en les variables ρ_i and $f^{(j)} \circ \rho$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j < n$, ne contenant pas de terme constant, ni aucun terme de la forme $\alpha \rho'$.

Supposons (P_k) satisfaite pour tout $1 \leq k \leq n$, en particulier, $f^{(n)}$ satisfait (E_n) où toutes les fonctions mises en jeux sont de classe C^1 , donc $f^{(n+1)}$ est C^0 et satisfait :

$$f^{(n+1)} - (\rho')^{n+1} f^{(n+1)} \circ \rho = D^{(n+1)} - (Q_n(\rho_i, f^{(j)} \circ \rho)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < n}})' - n\rho''(\rho)^{n-1} f^{(n)} \circ \rho.$$

L'hypothèse imposée à Q_n et $\rho^i(0) = f^{(j)}(0) = 0$, pour tout $1 < i$ et $1 \leq j \leq n$ nous assure que, dans cette dernière équation, le second membre s'annule en zéro ce qui implique à la fois que $f^{(n+1)}(0) = 0$ et que cette équation satisfait les hypothèses du lemme précédent Ainsi $f^{(n+1)}$ est nécessairement de classe C^1 sur V et on voit aisément, qu'en posant

$$Q_{n+1}(\rho^i, f^{(j)} \circ \rho)_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j < n+1}} = (Q_n(\rho_i, f^{(j)} \circ \rho)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < n}})' - n\rho''(\rho)^{n-1} f^{(n)} \circ \rho,$$

on obtient bien un polynôme Q_{n+1} satisfaisant le propriétés requises par (P_{n+1}) .

□

Remarque 2.2.3. On bien voit ici à quel point il devient technique d'obtenir des résultats en classe C^∞ , et ce, dès les petites dimensions. Les démonstrations qui précédent sont vraiment spécifiques au cas $n=2$, où il n'y a qu'une seule fonction plate ϵ à éliminer. Le problème en dimension supérieure s'avère difficilement abordable, nécessitant de toute évidence un cadre théorique adéquat.

2.3 Signification géométrique des paramètres :

Dans cette section, Π désigne une structure de Poisson, définie sur $S^1 \times \mathbb{R}^n$ paramétré par $(\theta, x_1, \dots, x_n)$, de la forme

$$\Pi = \partial\theta \wedge \left(\sum_{i=1 \dots n} \mu_i x_i \partial x_i \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \partial x_i \wedge \partial x_j.$$

Les paramètres μ_i et $a_{i,j}$ qui apparaissent dans la forme normale sont tous des invariants de la structure de Poisson : plus précisément, que deux telles structures de Poisson isomorphes au voisinage de Γ ont les mêmes $a_{i,j}$ et μ_i dans leur forme normale. À cet égard, nous allons voir quelles interprétations géométriques l'on peut donner à ces différents paramètres : la somme des μ_i est liée à la période du rotationnel le long de la courbe singulière Γ et la droite engendrée par le n-uplet (μ_1, \dots, μ_n) caractérise la linéarisée de la structure en un quelconque point de Γ . Par ailleurs, les μ_i , couplés aux $a_{i,j}$, décrivent la manière dont s'organisent les feuilles symplectiques le long de Γ .

2.3.1 Période du rotationnel

Le rotationnel $D_\Omega \Pi$ pour la forme volume $\Omega = d\theta \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, où $(\theta, x_1, \dots, x_n)$ désignent les coordonnées de la forme normale, prend la forme suivante :

$$D_\Omega \Pi = - \left(\sum_{i=1 \dots n} \mu_i \right) \partial\theta + \sum_{j=1 \dots n} \left(\sum_{i=1 \dots n} a_{i,j} \right) \partial x_j.$$

Ce dernier étant défini à un champ hamiltonien près, sa restriction à Γ ne dépend que de Π . Par ailleurs, $2\pi / \sum_{i=1}^n \mu_i$ apparaît comme sa période le long de Γ . Ainsi, comme nous l'avons indiqué en introduction, cette dernière est bien un invariant de la structure.

2.3.2 Nature de la linéarisée aux points de Γ

La structure linéarisée de Π en un point de Γ est connue pour être un invariant local de la structure, or, comme nous l'avons vu dans le lemme 2.2.1, cette dernière est caractérisée par l'ensemble, $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ à une constante multiplicative près,

cependant, puisque la somme des μ_i est directement liée à la période du rotationnel, cet ensemble devient, sans restrictions, un invariant du germe de Π le long de Γ .

L'ensemble $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ décrit donc complètement, à un revêtement à deux feuillets près, la partie linéaire de Π le long de Γ .

2.3.3 Description du feuilletage symplectique

Nous décrirons ici uniquement le feuilletage engendré par Π sur l'ouvert $P^+ := \{(\theta, x) \in S^1 \times \mathbb{R}^n / x_i > 0, \forall i = 1 \dots n\}$, bien que le raisonnement présenté permette de décrire entièrement le feuilletage de manière très satisfaisante : en effet si, pour toute partie I de $\{1, \dots, n\}$ on note $P_I = \{(\theta, x) \in S^1 \times \mathbb{R}^n / x_i = 0, \forall i \notin I\}$, on remarque que P_I est un sous-variété de Poisson, du même type que celui précédemment étudié, et que celle-ci se décompose de la même manière en P_J avec $J \subset I$. En outre, il apparaîtra clairement au cours de cet étude que P^+ est l'une des composantes connexes de l'ouvert régulier de Π -lesquelles sont toutes isomorphes puisque les réflexions $(\theta, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (\theta, x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$ sont des morphismes de Poisson- et que le complémentaire de cette partie régulière est composé précisément des P_I pour $I \subset J, I \neq J$.

Pour mettre en évidence le feuilletage défini par Π sur P^+ , il suffit d'appliquer le difféomorphisme :

$$L : \begin{array}{ccc} P^+ & \longmapsto & S^1 \times \mathbb{R}^n \\ (\theta, x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (\theta, \ln x_1, \dots, \ln x_n), \end{array}$$

puisque

$$\{\theta, \ln x_i\} = \mu_i \{\ln x_i, \ln x_j\} = a_{i,j},$$

dans les nouvelles coordonnées (que l'on notera $(\theta, \bar{x}) = (\theta, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = (\theta, \ln x_1, \dots, \ln x_n)$), la matrice $(\Pi_{i,j})$ des crochets de Π est à coefficients constants :

$$(\Pi_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_1 & \dots & -\mu_n \\ \mu_1 & & & \\ \vdots & & (a_{i,j}) & \\ \mu_n & & & \end{pmatrix}.$$

Notons μ le vecteur (μ_1, \dots, μ_n) et $2s$ le rang de la matrice $(a_{i,j})$, le théorème de décomposition spectrale des morphismes anti-autoadjoints assure l'existence d'un isomorphisme linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dont on notera $(\phi_{i,j})$ la matrice, qui conjugue $(a_{i,j})$ à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & O & & O \\ & \ddots & & & \vdots \\ O & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & O \\ O & \dots & O & & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

De plus, si μ appartient à $Im(a_{i,j})$, on peut le choisir comme élément de la base dans laquelle $(a_{i,j})$ prend cette forme, ce qui nous incite à distinguer deux cas :

1^{er} cas : si $\mu \in Im(a_{i,j})$

En choisissant ϕ comme ci-dessus, le difféomorphisme $(\theta, \mathbf{x}) \mapsto (\theta, \phi(\mathbf{x}))$ conjugue $(\Pi_{i,j})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & & \dots & & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & O & & \\ 1 & & & & & & \vdots \\ \vdots & O & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ 0 & & \dots & 0 & & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ici, la matrice nulle, en bas à droite, est de rang $n - 2s$.

Notons $(\theta, q_1, p_1, \dots, q_s, p_s, \tilde{x}_{2s+1}, \dots, \tilde{x}_n)$ les coordonnées induites par $\phi \circ L$, le feuilletage est alors engendré par $\partial\theta + \partial q_1, \partial p_1, \partial q_2, \partial p_2, \dots, \partial q_s, \partial p_s$, de sorte que ce

feuilletage n'est pas parallèle à $S^1 \times \{0\}$, laissant apparaître un phénomène d'holonomie le long de Γ . L'ensemble des feuilles est paramétré par $(q_1, \tilde{x}_{2s+1}, \dots, \tilde{x}_n) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}^{n-2s}$.

De plus, si $\mathcal{F}_{(q_1, \tilde{x}_{2s+1}, \dots, \tilde{x}_n)}$ désigne la feuille par le point $(0, q_1, 0, \dots, 0, \tilde{x}_{2s+1}, \dots, \tilde{x}_n) \in S^1 \times \mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{F}_{(q_1, \tilde{x}_{2s+1}, \dots, \tilde{x}_n)}$ est paramétrée par (t_1, \dots, t_{2s}) :

$$\mathcal{F}_{(q_1, \tilde{x}_{2s+1}, \dots, \tilde{x}_n)} = \{(\exp^{it_1}, q_1 + t_1, t_2, t_3, \dots, t_{2s}, \tilde{x}_{2s+1}, \dots, \tilde{x}_n) \in S^1 \times \mathbb{R}^n / t_1 \dots t_{2s} \in \mathbb{R}\},$$

Dans les coordonnées de la forme normale, il apparaît ainsi que la feuille $F_{(x_1, \dots, x_n)}$ par le point (x_1, \dots, x_n) admet un paramétrage de la forme :

$$F_{(x_1, \dots, x_n)} = \{(e^{it_1}, x_i e^{\sum_{j=1 \dots 2s} \psi_{i,j} t_j})_{i=1 \dots n} \in P^+ / t_1 \dots t_{2s} \in \mathbb{R}\},$$

où $(\psi_{i,j})$ désigne la matrice inverse de $(\phi_{i,j})$.

2nd cas : si $\mu \notin \text{Im}(a_{i,j})$

On suit le même raisonnement : L définit une carte sur P^+ dans laquelle la matrice $(\Pi_{i,j})$ est conjuguée par un isomorphisme linéaire ϕ à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots \\ \vdots & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & O & & \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & O & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ 1 & & & & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \dots & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Dans les coordonnées induites par $\phi \circ L$, que l'on note $(\theta, q_1, p_1, \dots, q_s, p_s, \tilde{x}_{2s+1}, \dots, \tilde{x}_n)$, le feuilletage est engendré par $\partial\theta, \partial q_1, \partial p_1, \partial q_2, \partial p_2, \dots, \partial q_s, \partial p_s, \partial \tilde{x}_{2s+1}$, il est ainsi parallèle à la sous-variété $S^1 \times \{0\}$ et il n'y a pas d'holonomie dans ce cas.

On note $\mathcal{F}_{(\tilde{x}_{2s+2}, \dots, \tilde{x}_n)}$ la feuille par le point $(0, \dots, 0, \tilde{x}_{2s+2}, \dots, \tilde{x}_n) \in S^1 \times \mathbb{R}^n$, et on a :

$$\mathcal{F}_{(\tilde{x}_{2s+2}, \dots, \tilde{x}_n)} = \{(e^{it_0}, t_1, \dots, t_{2s}, \tilde{x}_{2s+1} = t_{2s+1}, \tilde{x}_{2s+2}, \dots, \tilde{x}_n) \in P^+ / t_0 \dots, t_{2s+1} \in \mathbb{R}\}$$

Dans les coordonnées de la forme normale, on note $F_{(x_1, \dots, x_n)}$ la feuille par le point (x_1, \dots, x_n) , elle admet donc un paramétrage de la forme :

$$F_{(x_1, \dots, x_n)} = \{(e^{it_0}, (x_i e^{\sum_{j=1 \dots 2s+1} \psi_{i,j} t_j})_{i=1 \dots n}) \in P^+ / t_0 \dots t_{2s+1} \in \mathbb{R}\},$$

où $(\psi_{i,j})$ désigne la matrice inverse de $(\phi_{i,j})$.

Remarque 2.3.1. Ici, on parle d'*holonomie*, ce terme est à prendre au sens des feuilletages singuliers. Dans [Fer1], l'auteur définit plusieurs types d'holonomie pour décrire le voisinage d'une feuille symplectique. Ici, on travaille au voisinage d'une courbe de singularités. Cependant, l'étude précédente montre qu'étant donnée une feuille voisine de Γ , il est possible de relever tout chemin fermé inclus dans Γ en un chemin inclus dans cette feuille. Ce dernier n'est alors pas fermé si on se trouve dans le premier cas précédent, laissant apparaître le phénomène d'holonomie dont il est question.

Chapitre 3

Structures de Poisson au voisinage d'une feuille symplectique

On sait depuis longtemps ([We3]) que, si S désigne une feuille dans une structure de Poisson Π , et N une variété transverse à S en un point quelconque x de S , Π induit, sur un voisinage \hat{N} de x dans N , une structure de Poisson \mathcal{V} nulle en x , dite structure transverse. On sait de plus que cette structure ne dépend pas, à isomorphisme près, du point x de S choisi, la classe d'isomorphisme de cette structure est donc un invariant de Π au voisinage de S . Cependant, cet invariant reste de nature locale : il ne donne des informations sur le feuilletage symplectique qu'au voisinage de x .

Plus récemment, la notion de connections de Poisson, développée par R. L. Fernandes dans [Fer1] lui a permis de définir proprement l'holonomie de Poisson autour d'une feuille, et d'en tirer l'équivalent en géométrie de Poisson du théorème de stabilité locale de Reeb. Il en dégage aussi des classes caractéristiques secondaires, lesquelles sont des invariants algébriques semi-locaux de Poisson. Dans [Fer2], il étend toutes ces notions aux algébroïdes, objets intimement liés aux structures de Poisson. Un type plus géométrique d'invariants semi-locaux a été découvert par Crainic et Fernandes dans [Cr-Fer] : la monodromie, associée aux feuilles d'un algébroïde (donc d'une structure de Poisson), qui permet d'obtenir des obstructions à l'intégrabilité (en termes de groupoïdes) des crochets de Poisson.

Dans ce chapitre, on prendra le point de vue de Vorobjev : dans un premier temps,

nous rappellerons le formalisme qu'il a développé dans [Vo] pour décrire Π dans un voisinage d'une de ses feuilles S , nous utiliserons ensuite ses critères d'équivalence pour simplifier au maximum l'expression de Π dans le cas où la structure transverse est semisimple compacte.

3.1 Tenseurs de couplage

Dans un souci évident de clarté, il me semble indispensable d'exposer les détails de l'étude réalisée par Vorobjev dans [Vo], ceux-ci n'apparaissant pas explicitement dans son article. Dans la suite, Π désigne une structure de Poisson lisse, définie au voisinage d'une de ses feuilles S dont nous supposons qu'elle admet un voisinage tubulaire. Nous travaillerons uniquement dans ce voisinage tubulaire, on considèrera donc que Π est une structure de Poisson définie sur E , espace total de dimension $2s + n$ d'une fibration vectorielle $p : E \rightarrow S$, et dont S est une feuille de dimension $2s$.

3.1.1 Notations et définitions de base

Nous n'utiliserons que partiellement les notations introduites par Vorobjev, en particulier, nous noterons $Ver = \ker p_*$ le sous-fibré, dit vertical, de TE , et $\mathcal{X}(S)$ (respectivement $\mathcal{X}(E)$) l'algèbre des champs sur S (respectivement sur E).

Par forme de connexion Γ , on entend connexion au sens d'Ehresmann, c'est à dire un tenseur $\Gamma \in \Omega^1(E) \otimes_{C^\infty(S)} \rho(Ver)$ tel que

$$\Gamma(X_V) = X_V \quad \forall X_V \in \rho(Ver).$$

Une telle connexion n'est autre qu'un projecteur $TE \rightarrow Ver$, par suite, elle est équivalente à la donnée d'un sous-fibré, dit horizontal et noté Hor , complémentaire de Ver dans TE (il suffit en effet de prendre $Hor = \ker \Gamma$) ou bien à la donnée, pour tout $X \in \mathcal{X}(B)$, d'un relèvement horizontal (pas forcément linéaire en les fibres), que nous noterons systématiquement $hor(X)$, satisfaisant $p_* hor(X) = X$. Pour une telle connexion, la courbure est notée $Curv_\Gamma(u, v) = [horu, horv] - hor[u, v]$, et $\partial_\Gamma : \Omega^k(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E) \rightarrow \Omega^{k+1}(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ désigne l'opérateur de dérivée

covariante associé à Γ , défini par :

$$(3.1.1) \quad (\partial_\Gamma \alpha)(u_0, u_1, \dots, u_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i \mathcal{L}_{hor(u_i)} \alpha(u_0, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k) \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([u_i, u_j], u_0, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k).$$

Notons Π^\sharp désigne le morphisme naturel $\Pi^\sharp : T^*E \mapsto TE$, et $Ver^0 \subset T^*E$ l'annulateur de Ver . Π étant non-dégénéré sur S , on peut toujours choisir E de sorte que Π soit horizontalement non-dégénéré, c'est-à-dire satisfasse les conditions :

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} \Pi^\sharp(Ver^0) \cap Ver & = \{0\} \\ \dim \Pi^\sharp(Ver^0) & = \dim S \\ Im \Pi^\sharp|_S & = TS. \end{cases}$$

En effet, $\Pi^\sharp(Ver^0)$ est une distribution C^∞ (voir [Sus]), non intégrable en général, son rang ne peut donc qu'augmenter, or il est égal à $2s$ sur S , donc maximal puisque forcément inférieur ou égal à $\dim(Ver^0) = 2s$. Quitte à restreindre E , on peut donc avoir la première condition, Ver et $\Pi(Ver^0)$ sont alors deux sous-fibrés de TM en somme directe le long de S , quitte à restreindre à nouveau E , la seconde condition est alors aussi satisfaite. Nous allons voir que toute structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur E est équivalente à une *donnée géométrique*, suivant l'appellation de Vorobjev, c'est à dire un triplet $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$ où :

- $\mathcal{V} \in \rho(\Lambda^2 Ver)$ désigne un 2-tenseur vertical,
- Γ est une forme de connexion sur E ,
- $\mathcal{F} \in \Omega^2(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ est une 2-forme non-dégénérée sur S à valeurs dans $C^\infty(E)$,

satisfaisant certaines conditions de compatibilité.

Nous verrons plus tard que la manipulation de données géométriques, plutôt que de tenseurs, s'avère très efficace dans l'étude d'une structure de Poisson au voisinage d'une feuille donnée.

3.1.2 Description de Π comme donnée géométrique

Le premier résultat de Vorobjev consiste à décomposer Π sous la forme d'une donnée géométrique :

Proposition 3.1.1. *Il existe une correspondance biunivoque entre 2-vecteurs horizontalement non-dégénérés sur E et données géométriques.*

preuve :

Étant donnée un 2-vecteur horizontalement non-dégénérée Π sur E , les conditions 3.1.2 assurent que :

$$Hor := \Pi^\sharp(Ver^0)$$

détermine un sous-fibré complémentaire de Ver dans TE qui permet de définir une connexion Γ . On obtient ainsi une décomposition en somme directe : $TE = Hor \oplus Ver$, dont Γ est la projection sur le second facteur. On pose alors

$$\mathcal{V} := \Gamma^{\wedge 2}(\Pi),$$

qui n'est rien d'autre que la partie verticale de Π . Enfin, si l'on note :

$$\hat{\Pi}_H^\sharp := \Pi^\sharp|_{Ver^0},$$

on voit que les conditions de non-dégénérescence horizontale 3.1.2 imposent à $\hat{\Pi}_H^\sharp$ d'être un isomorphisme sur son image. La 2-forme $\mathcal{F} \in \Omega^2(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ peut donc être définie en posant :

$$\mathcal{F}(u_1, u_2) := - \langle (\hat{\Pi}_H^\sharp)^{-1} hor(u_1), hor(u_2) \rangle \forall u_1, u_2 \in \mathcal{X}(S).$$

La situation s'éclaircit nettement lorsqu'on la décrit localement : considérons (x_1, \dots, x_{2s}) un système de coordonnées locales sur un ouvert trivialisant U de S pour \mathbb{E} , et (y_1, \dots, y_n) de coordonnées sur les fibres au-dessus de U . Sur $p^{-1}(U)$, Π prend la forme :

$$(3.1.3) \quad \Pi = \sum_{i,j=1}^{2s} \Pi_{i,j}^X \partial x_i \wedge \partial x_j + \sum_{\substack{i=1 \dots 2s \\ k=1 \dots n}} 2\Pi_{i,k}^{XY} \partial x_i \wedge \partial y_k + \sum_{k,l=1}^n \Pi_{k,l}^Y \partial y_k \wedge \partial y_l,$$

où $\Pi_{i,j}^X, \Pi_{i,k}^{XY}, \Pi_{k,l}^Y \in C^\infty(E)$ pour tous i, j, k et l , et avec les conditions $\Pi_{i,j}^X = -\Pi_{j,i}^X$, et $\Pi_{k,l}^Y = -\Pi_{l,k}^Y$.

Avec ces notations, on voit que :

$$\begin{aligned} Hor &= \Pi^\sharp(Ver^\circ) \\ &= Vect \left\{ \sum_{j=1 \dots 2s} 2\Pi_{i,j}^X \partial x_j + \sum_{k=1 \dots n} 2\Pi_{i,k}^{XY} \partial y_k, \quad i = 1 \dots 2s \right\}, \end{aligned}$$

mais Π étant horizontalement non-dégénéré, la matrice $(\Pi_{i,j}^X)_{i,j}$ est inversible, et on a, en notant $\Pi_{i,j}^{X^{-1}}$ les coefficients de sa matrice inverse :

$$\begin{aligned} Hor &= Vect \left\{ \partial x_i + \sum_{j=1 \dots 2s, k=1 \dots n} \Pi_{i,j}^{X^{-1}} \Pi_{j,k}^{XY} \partial y_k, \quad i = 1 \dots n \right\} \\ &= Vect \left\{ \partial x_i + \sum_{k=1 \dots n} \beta_{i,k} \partial y_k, \quad i = 1 \dots n \right\}, \end{aligned}$$

où $\beta_{i,k} := \sum_{j=1 \dots 2s} \Pi_{i,j}^{X^{-1}} \Pi_{j,k}^{XY}$. Ainsi, les relèvement horizontaux prennent la forme suivante :

$$hor(\partial x_i) = \partial x_i + \sum_{k=1 \dots n} \beta_{i,k} \partial y_k.$$

Pour l'écriture locale, il sera cependant plus pratique dans les calculs de les noter $X_i := hor(\partial x_i) \quad \forall i = 1 \dots 2s$.

Revenant à la forme locale (3.1.3) de Π , on peut facilement calculer que, si on pose pour tous $p, q = 1 \dots n$:

$$\mathcal{V}_{p,q} := \Pi_{p,q}^Y - \frac{1}{2} \sum_{l=1 \dots 2s} \beta_{l,p} \Pi_{l,q}^{XY} - \beta_{l,q} \Pi_{l,p}^{XY},$$

on a :

$$(3.1.4) \quad \Pi = \sum_{i,j=1 \dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j + \sum_{k,l=1 \dots n} \mathcal{V}_{k,l} \partial y_k \wedge \partial y_l.$$

Ceci correspond localement à la décomposition globale de Π suivante :

$$(3.1.5) \quad \Pi = \Pi_H + \mathcal{V},$$

où $\Pi_H := \Pi - \mathcal{V} = \sum_{i,j=1 \dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j$ est un 2-vecteur horizontal. Le tenseur \mathcal{V} s'écrit donc localement :

$$\mathcal{V} = \sum_{k,l=1 \dots n} \mathcal{V}_{k,l} \partial y_k \wedge \partial y_l,$$

et la 2-forme \mathcal{F} s'exprime comme :

$$\mathcal{F}(\partial x_i, \partial x_j) = -\frac{1}{2} \Pi_{i,j}^{X^{-1}}.$$

Réciproquement, comme le montre cette étude locale, toute donnée géométrique permet de construire un 2-vecteur horizontalement non-dégénéré. Je réfère le lecteur intéressé par une formulation plus canonique de la construction du 2-vecteur Π à partir de la donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$ à [Vo]. \square

Proposition 3.1.2. *Soit Π un 2-vecteur horizontalement non-dégénéré sur le fibré E et $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$ la donnée géométrique correspondante. Alors Π est de Poisson si et seulement si*

$$\begin{aligned} \partial_\Gamma \mathcal{F} &= 0, & (i) \\ \text{Curv}_\Gamma(u, v) &= \mathcal{V}^\#(d\mathcal{F}(u, v)), & (ii) \\ \mathcal{L}_{\text{hor}(X)} \mathcal{V} &= 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}(S), & (iii) \\ [\mathcal{V}, \mathcal{V}] &= 0. & (iv) \end{aligned}$$

preuve :

Le fait que Π soit de Poisson se traduit par l'équation $[\Pi, \Pi] = 0$, suivant l'étude précédente, on développe donc :

$$[\Pi, \Pi] = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 &= \left[\sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j + \sum_{k,l=1\dots n} \mathcal{V}_{u,v} \partial y_u \wedge \partial y_v, \right. \\ &\quad \left. \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{p,q}^X X_p \wedge X_q + \sum_{u,v=1\dots n} \mathcal{V}_{k,l} \partial y_k \wedge \partial y_l \right] \\ \Leftrightarrow 0 &= \left[\sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{p,q}^X X_p \wedge X_q \right] \\ &\quad + 2 \left[\sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \sum_{k,l=1\dots n} \mathcal{V}_{k,l} \partial y_k \wedge \partial y_l \right] \\ &\quad + \left[\sum_{u,v=1\dots n} \mathcal{V}_{u,v} \partial y_u \wedge \partial y_v, \sum_{k,l=1\dots n} \mathcal{V}_{k,l} \partial y_k \wedge \partial y_l \right]. \end{aligned}$$

Dans cette expression il est clair que

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{u,v=1\dots n} \mathcal{V}_{u,v} \partial y_u \wedge \partial y_v, \sum_{k,l=1\dots n} \mathcal{V}_{k,l} \partial y_k \wedge \partial y_l \right] \\ &= 4 \sum_{1 \leq u < k < l \leq n} \left(\mathcal{f}_{u,k,l} \sum_{v=1\dots n} \mathcal{V}_{u,v} \frac{\partial \mathcal{V}_{p,q}}{\partial y_v} \right) \partial y_u \wedge \partial y_k \wedge \partial y_l, \end{aligned}$$

reste à évaluer les autres termes.

On calcule donc dans un premier temps :

$$\left[\sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{p,q}^X X_p \wedge X_q \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,p,q=1\dots 2s} [\Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \Pi_{p,q}^X X_p \wedge X_q] \\
&= \sum_{i,j,p,q=1\dots 2s} [\Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \Pi_{p,q}^X X_p] \wedge X_q - \Pi_{p,q}^X X_p \wedge [\Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, X_q] \\
&= \sum_{i,j,p,q=1\dots 2s} \left(\Pi_{i,j}^X X_i \wedge [X_j, \Pi_{p,q}^X X_p] + [\Pi_{i,j}^X X_i, \Pi_{p,q}^X X_p] \wedge X_j \right) \wedge X_q \\
&\quad - \Pi_{p,q}^X X_p \wedge \left(\Pi_{i,j}^X X_i \wedge [X_j, X_q] + [\Pi_{i,j}^X X_i, X_q] \wedge X_j \right) \\
&= \sum_{i,j,p,q=1\dots 2s} \left(\Pi_{i,j}^X X_i \wedge \left((\mathcal{L}_{X_j} \Pi_{p,q}^X) X_p + \Pi_{p,q}^X [X_j, X_p] \right) \right. \\
&\quad \left. + (\Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_i} \Pi_{p,q}^X) X_p - \Pi_{p,q}^X (\mathcal{L}_{X_p} \Pi_{i,j}^X) X_i + \Pi_{i,j}^X \Pi_{p,q}^X [X_i, X_p]) \wedge X_j \right) \wedge X_q \\
&\quad - \Pi_{p,q}^X X_p \wedge \left(\Pi_{i,j}^X X_i \wedge [X_j, X_q] + (\Pi_{i,j}^X [X_i, X_q] - (\mathcal{L}_{X_q} \Pi_{i,j}^X) X_i) \wedge X_j \right) \\
&= \sum_{i,j,p,q=1\dots 2s} 4 \left(\Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \Pi_{p,q}^X) X_i \wedge X_p \wedge X_q + \Pi_{i,j}^X \Pi_{p,q}^X X_i \wedge [X_j, X_p] \wedge X_q \right).
\end{aligned}$$

Dans cette expression, on calcule que

$$\begin{aligned}
[X_j, X_p] &= [\partial x_j + \sum_{k=1\dots n} \beta_{j,k} \partial y_k, \partial x_p + \sum_{l=1\dots n} \beta_{p,l} \partial y_l] \\
&= \sum_{p=1\dots n} [\partial x_j, \beta_{p,l} \partial y_l] + \sum_{k=1\dots n} [\beta_{j,k} \partial y_k, \partial x_p] + \sum_{k,l=1\dots n} [\beta_{j,k} \partial y_k, \beta_{p,l} \partial y_l] \\
&= \sum_{l=1\dots n} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_j} \partial y_l - \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial x_p} \partial y_p + \sum_{k,l=1\dots n} \beta_{j,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} \partial y_l - \beta_{p,l} \frac{\partial \beta_{j,k}}{\partial y_l} \partial y_k \\
(3.1.6) \quad &= \sum_{l=1\dots n} \left(\frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial x_p} \right) \partial y_l + \sum_{k,l=1\dots n} \left(\beta_{j,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} - \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial y_k} \right) \partial y_l
\end{aligned}$$

et en réinjectant, on en déduit que

$$\left[\sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{p,q}^X X_p \wedge X_q \right]$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \sum_{i,j,p,q=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X(\mathcal{L}_{X_j} \Pi_{p,q}^X) X_i \wedge X_p \wedge X_q \\
&\quad - \Pi_{i,j}^X \Pi_{p,q}^X \left(\sum_{l=1\dots n} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial x_p} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k,l=1\dots n} \beta_{j,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} - \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial y_k} \right) X_i \wedge X_q \wedge \partial y_l \\
&= 4 \sum_{1 \leq i < p < q \leq 2s} \left(\oint_{i,s,t} \sum_{j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X(\mathcal{L}_{X_j} \Pi_{p,q}^X) \right) X_i \wedge X_p \wedge X_q \\
&\quad - 4 \sum_{1 \leq i < q \leq 2s} \sum_{l=1\dots n} \left(\sum_{j,p=1\dots n} 2 \Pi_{i,j}^X \Pi_{p,q}^X \left(\frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial x_p} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=1\dots n} \beta_{j,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} - \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial y_k} \right) \right) X_i \wedge X_q \wedge \partial y_l.
\end{aligned}$$

Dans un second temps, on calcule :

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \sum_{p,q=1\dots n} \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \wedge \partial y_q \right] \\
&= \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p,q=1\dots n} \left[\Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \right] \wedge \partial y_q - \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \wedge \left[\Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \partial y_q \right] \\
&= \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p,q=1\dots n} \left(\Pi_{i,j}^X X_i \wedge [X_j, \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p] + [\Pi_{i,j}^X X_i, \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p] \wedge X_j \right) \wedge \partial y_q \\
&\quad - \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \wedge \left(\Pi_{i,j}^X X_i \wedge [X_j, \partial y_q] + [\Pi_{i,j}^X X_i, \partial y_q] \wedge X_j \right) \\
&= \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p,q=1\dots n} \left(\Pi_{i,j}^X X_i \wedge ((\mathcal{L}_{X_j} \mathcal{V}_{p,q}) \partial y_p + \mathcal{V}_{p,q} [X_j, \partial y_p]) \right. \\
&\quad \left. + (\Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_i} \mathcal{V}_{p,q}) \partial y_p - \mathcal{V}_{p,q} \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_p} X_i + \mathcal{V}_{p,q} \Pi_{i,j}^X [X_i, \partial y_p]) \wedge X_j \right) \wedge \partial y_q \\
&\quad - \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \wedge \left(\Pi_{i,j}^X X_i \wedge [X_j, \partial y_q] + (\Pi_{i,j}^X [X_i, \partial y_q] \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_q} X_i) \wedge X_j \right) \\
&= \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p,q=1\dots n} \Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \mathcal{V}_{p,q}) X_i \wedge \partial y_p \wedge \partial y_q + \Pi_{i,j}^X \mathcal{V}_{p,q} X_i \wedge [X_j, \partial y_p] \wedge \partial y_q \\
&\quad + \Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_i} \mathcal{V}_{p,q}) \partial y_p \wedge X_j \wedge \partial y_p - \mathcal{V}_{p,q} \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_p} X_i \wedge X_j \wedge \partial y_q \\
&\quad + \mathcal{V}_{p,q} \Pi_{i,j}^X [X_i, \partial y_p] \wedge X_j \wedge \partial y_q - \mathcal{V}_{p,q} \Pi_{i,j}^X \partial y_p \wedge X_i \wedge [X_j, \partial y_q] \\
&\quad - \mathcal{V}_{p,q} \Pi_{i,j}^X \partial y_p \wedge [X_i, \partial y_q] \wedge X_j + \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_q} \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \wedge X_i \wedge X_j \\
&= \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p,q=1\dots n} 2 \Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \mathcal{V}_{p,q}) X_i \wedge \partial y_p \wedge \partial y_q + 2 \mathcal{V}_{p,q} \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_q} X_i \wedge X_j \wedge \partial y_p \\
&\quad + 4 \Pi_{i,j}^X \mathcal{V}_{p,q} X_i \wedge [X_j, \partial y_p] \wedge \partial y_q.
\end{aligned}$$

Dans cette expression, on calcule que

$$\begin{aligned} [X_j, \partial y_p] &= [\partial x_j + \sum_{l=1}^n \beta_{j,l} \partial y_l, \partial y_p] \\ &= - \sum_{l=1}^n \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial y_p} \partial y_l, \end{aligned}$$

et en réinjectant, on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p,q=1\dots n} \Pi_{i,j}^X \mathcal{V}_{p,q} X_i \wedge [X_j, \partial y_p] \wedge \partial y_q \\ &= \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p,q,l=1\dots n} \Pi_{i,j}^X \mathcal{V}_{p,q} \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial y_p} X_i \wedge \partial y_l \wedge \partial y_q \\ &= \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p,q=1\dots n} \left(\sum_{l=1\dots n} \Pi_{i,j}^X \mathcal{V}_{l,q} \frac{\partial \beta_{j,pl}}{\partial y_l} \right) X_i \wedge \partial y_p \wedge \partial y_q \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & 2 \left[\sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \sum_{p,q=1\dots n} \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \wedge \partial y_q \right] \\ &= \sum_{i=1\dots 2s} \sum_{p,q=1\dots n} \sum_{j=1\dots 2s} \left(4 \Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \mathcal{V}_{p,q}) + 8 \sum_{l=1\dots n} \Pi_{i,j}^X \mathcal{V}_{l,q} \frac{\partial \beta_{j,pl}}{\partial y_l} \right) X_i \wedge \partial y_p \wedge \partial y_q \\ &+ \sum_{i,j=1\dots 2s} \sum_{p=1\dots n} \sum_{q=1}^n 4 \mathcal{V}_{p,q} \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_q} X_i \wedge X_j \wedge \partial y_p \\ &= \sum_{i=1\dots 2s} \sum_{1 \leq p < q \leq n} \sum_{j=1\dots 2s} \left(8 \Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \mathcal{V}_{p,q}) + 8 \sum_{l=1\dots n} \Pi_{i,j}^X \mathcal{V}_{l,q} \frac{\partial \beta_{j,pl}}{\partial y_l} \right. \\ &\quad \left. - 8 \sum_{l=1\dots n} \Pi_{i,j}^X \mathcal{V}_{l,p} \frac{\partial \beta_{j,lq}}{\partial y_l} \right) X_i \wedge \partial y_p \wedge \partial y_q \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq 2s} \sum_{p=1\dots n} \sum_{q=1}^n 8 \mathcal{V}_{p,q} \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_q} X_i \wedge X_j \wedge \partial y_p \\ &= \sum_{i=1\dots 2s} \sum_{1 \leq p < q \leq n} \sum_{j=1\dots 2s} 8 \left(\Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \mathcal{V}_{p,q}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1\dots n} \Pi_{i,j}^X (\mathcal{V}_{l,q} \frac{\partial \beta_{j,pl}}{\partial y_l} - \mathcal{V}_{l,p} \frac{\partial \beta_{j,lq}}{\partial y_l}) \right) X_i \wedge \partial y_p \wedge \partial y_q \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq 2s} \sum_{l=1\dots n} \sum_{k=1}^n 8 \mathcal{V}_{k,l} \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_k} X_i \wedge X_j \wedge \partial y_l, \end{aligned}$$

et on peut conclure notre calcul : le tenseur Π est de Poisson, $[\Pi, \Pi] = 0$, si et

seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I) \quad \forall i, p, q = 1 \dots 2s \quad \oint_{i,s,t} \sum_{j=1 \dots 2s} \Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \Pi_{p,q}^X) = 0 \\ (II) \quad \forall i, j = 1 \dots 2s \quad \sum_{p,q=1 \dots n} \Pi_{i,p}^X \Pi_{j,q}^X \left(\frac{\partial \beta_{q,l}}{\partial x_p} - \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_q} + \sum_{k=1 \dots n} \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{q,l}}{\partial y_k} - \beta_{q,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} \right) \\ \quad \forall l = 1 \dots n \quad + \sum_{k=1}^n \mathcal{V}_{k,l} \frac{\partial \Pi_{i,j}^X}{\partial y_k} = 0 \\ (III) \quad \forall i = 1 \dots 2s \quad \sum_{j=1 \dots 2s} \left(\Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \mathcal{V}_{p,q}) \right. \\ \quad \forall p, q = 1 \dots n \quad \left. + \sum_{l=1 \dots n} \Pi_{i,j}^X (\mathcal{V}_{l,q} \frac{\partial \beta_{j,p}}{\partial y_l} - \mathcal{V}_{l,p} \frac{\partial \beta_{j,q}}{\partial y_l}) \right) = 0 \\ (IV) \quad \forall u, k, l = 1 \dots n \quad \oint_{u,k,l} \sum_{v=1 \dots n} \mathcal{V}_{u,v} \frac{\partial \mathcal{V}_{p,q}}{\partial y_v} = 0. \end{array} \right.$$

Il s'agit à présent de vérifier que ces quatre conditions correspondent bien à (i), (ii), (iii), et (iv). On voit d'ores et déjà que (IV) est bien équivalente à (iv), c'est-à-dire $[\mathcal{V}, \mathcal{V}] = 0$.

Par $C^\infty(S)$ -bilinéarité, $\partial_\Gamma \mathcal{F} = 0$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, et pour tout matrice inversible $(P_{i,j})_{i,j}$, on a :

$$\partial_\Gamma \mathcal{F} \left(\sum_{p=1 \dots 2s} P_{i,p} \partial x_p, \sum_{q=1 \dots 2s} P_{j,q} \partial x_q, \sum_{r=1 \dots 2s} P_{k,r} \partial x_r \right) (x) = 0$$

Soit donc $x \in E$ fixé, on prend alors $(P_{i,j})_{i,j} = (\Pi_{i,j}(x))_{i,j}^X$ (autrement dit, $\Pi_{i,j}(x)$ sont considérés comme des constantes réelles), on a alors :

$$\begin{aligned} & \partial_\Gamma \mathcal{F} \left(\sum_{p=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \partial x_p, \sum_{q=1 \dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q, \sum_{r=1 \dots 2s} \Pi_{k,r}^X(x) \partial x_r \right) (x) \\ &= \oint_{(i,p),(j,q),(k,r)} \left(\mathcal{L}_{\sum_{p=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) X_p} \mathcal{F} \left(\sum_{q=1 \dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q, \sum_{r=1 \dots 2s} \Pi_{k,r}^X(x) \partial x_r \right) \right) (x), \end{aligned}$$

en effet, dans l'équation (3.1.1), définissant $\partial_\Gamma \mathcal{F}$, les termes

$$\mathcal{F} \left(\left[\sum_{p=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \partial x_p, \sum_{q=1 \dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q \right], \sum_{mr=1 \dots 2s} \Pi_{k,r}^X(x) \partial x_r \right) (x)$$

s'annulent puisque les crochets $[\sum_{p=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \partial x_p, \sum_{q=1 \dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q]$ y sont nuls.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \partial_\Gamma \mathcal{F} \left(\sum_{m=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \partial x_p, \sum_{q=1\dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q, \sum_{m=1\dots 2s} \Pi_{k,r}^X(x) \partial x_r \right) (x) \\
&= \oint_{i,j,k} \sum_{p,q,r=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \Pi_{j,q}^X(x) \Pi_{q,r}^X(x) \mathcal{L}_{X_p} \mathcal{F}(\partial x_q, \partial x_r) (x) \\
&= \oint_{i,j,k} \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \Pi_{j,q}^X(x) \sum_{r=1\dots 2s} \Pi_{k,r}^X(x) (\mathcal{L}_{X_p} - \frac{1}{2} \Pi_{q,r}^{X^{-1}}) (x) \\
&= \frac{1}{2} \oint_{i,j,k} \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \Pi_{j,q}^X(x) \sum_{r=1\dots 2s} \Pi_{q,r}^{X^{-1}}(x) (\mathcal{L}_{X_p} \Pi_{k,r}^X(x)) (x) \\
&= \frac{1}{2} \oint_{i,j,k} \sum_{p,r=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) (\mathcal{L}_{X_p} \Pi_{k,r}^X(x)) (x) \sum_{q=1\dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \Pi_{q,r}^{X^{-1}}(x) \\
&= \frac{1}{2} \oint_{i,j,k} \sum_{p=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) (\mathcal{L}_{X_p} \Pi_{k,j}^X(x)) (x),
\end{aligned}$$

et on voit que :

$$\partial_\Gamma \mathcal{F} = 0 \iff \oint_{i,j,k} \sum_{p=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X (\mathcal{L}_{X_p} \Pi_{k,j}^{X^{-1}}) = 0.$$

Ce qui correspond bien à l'équation (I).

À présent, traduisons localement la condition (iv) :

$$Curv_\Gamma(u, v) = \mathcal{V}^\sharp(dF(u, v)).$$

Comme précédemment, pour $x \in E_0$ fixé, on considère $(\Pi_{i,j}^X(x))_{i,j}$ vue comme matrice à termes constants, comme elle est inversible, la condition (iv) est équivalente à :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in E, \quad \forall i, j = 1 \dots 2s, \\
& Curv_\Gamma \left(\sum_{p=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \partial x_p, \sum_{q=1\dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q \right) (x) \\
&= \mathcal{V}^\sharp \left(dF \left(\sum_{p=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \partial x_p, \sum_{q=1\dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q \right) \right) (x).
\end{aligned}$$

Calculons le membre de gauche de cette dernière expression (rappelons que les crochets $[X_p, X_q]$ sont donnés par la formule 3.1.6) :

$$\begin{aligned}
&= Curv_\Gamma \left(\sum_{p=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \partial x_p, \sum_{q=1\dots 2s} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q \right) (x) \\
&= \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \Pi_{j,q}^X(x) [X_p, X_q] (x) \\
&= \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \Pi_{j,q}^X(x) \left(\sum_{l=1\dots n} \frac{\partial \beta_{q,l}}{\partial x_p} - \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_q} + \sum_{k=1\dots n} \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{q,l}}{\partial y_k} - \beta_{q,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} \right) (x) \partial y_l
\end{aligned}$$

On calcule ensuite le membre de droite :

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{V}^\# \left(dF \left(\sum_{p=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \partial x_p, \sum_{q=1 \dots n} \Pi_{j,q}^X(x) \partial x_q \right) \right) (x) \\
&= \mathcal{V}^\# \left(\sum_{p,q=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \Pi_{j,q}^X(x) d\mathcal{F}(\partial x_p, \partial x_q) \right) (x) \\
&= \sum_{p,q=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \Pi_{j,q}^X(x) \mathcal{V}^\# \left(-\frac{1}{2} d\Pi_{p,q}^{X^{-1}} \right) (x) \\
&= \sum_{p,q=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X(x) \Pi_{j,q}^X(x) \sum_{k,l=1 \dots 2s} 2\mathcal{V}_{k,l}(x) \frac{-1}{2} \frac{\partial \Pi_{p,q}^{X^{-1}}}{\partial y_k}(x) \partial y_l \\
&= \sum_{p,q=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X \Pi_{j,q}^X \sum_{k,l=1 \dots n} \mathcal{V}_{k,l} \frac{-\partial \Pi_{p,q}^{X^{-1}}}{\partial y_k}(x) \partial y_l \\
&= \sum_{p=1 \dots 2s} \sum_{k,l=1 \dots n} \Pi_{i,p}^X \mathcal{V}_{k,l} \sum_{q=1 \dots 2s} \Pi_{j,q}^X \frac{\partial \Pi_{q,p}^{X^{-1}}}{\partial y_k}(x) \partial y_l \\
&= \sum_{p=1 \dots 2s} \sum_{k,l=1 \dots n} \Pi_{i,p}^X \mathcal{V}_{k,l} \sum_{q=1 \dots 2s} -\frac{\partial \Pi_{j,q}^{X^{-1}}}{\partial y_k} \Pi_{q,p}^{X^{-1}}(x) \partial y_l \\
&= \sum_{k,l=1 \dots n} \sum_{q=1 \dots 2s} \mathcal{V}_{k,l} \frac{\partial \Pi_{j,q}^{X^{-1}}}{\partial y_k} \sum_{p=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X \Pi_{p,q}^{X^{-1}}(x) \partial y_l \\
&= -\sum_{k,l=1 \dots n} \mathcal{V}_{k,l} \frac{\partial \Pi_{i,j}^{X^{-1}}}{\partial y_k}(x) \partial y_l.
\end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned}
&Curv_\Gamma(u, v) = \mathcal{V}^\#(dF(u, v)) \\
\iff &\begin{cases} \forall i, j = 1 \dots 2s, \forall l = 1 \dots n \\ \sum_{p,q=1 \dots 2s} \Pi_{i,p}^X \Pi_{j,q}^X \left(\frac{\partial \beta_{q,l}}{\partial x_p} - \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_q} + \sum_{k=1 \dots n} \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{q,l}}{\partial y_k} - \beta_{q,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} \right) \\ + \sum_{k=1 \dots n} \mathcal{V}_{k,l} \frac{\partial \Pi_{i,j}^{X^{-1}}}{\partial y_k} = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien à l'équation (II).

On calcule enfin l'expression locale de la condition (iii) :

$$\mathcal{L}_{hor(X)} \mathcal{V} = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}(S), (iii)$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{hor(X)} \mathcal{V} = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}(S), \\
\iff &\mathcal{L}_{hor(\partial x_i)} \mathcal{V} = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \\
\iff &[X_i, \mathcal{V}] = 0 \quad \forall i = 1 \dots n.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer :

$$\begin{aligned}
& [X_i, \mathcal{V}] \\
= & [X_i, \sum_{p,q=1\dots n} \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \wedge \partial y_q] \\
= & \sum_{p,q=1\dots n} [X_i, \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p] \wedge \partial y_q + \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p \wedge [X_i, \mathcal{V}_{p,q} \partial y_p, \partial y_q] \\
= & \sum_{p,q=1\dots n} (\mathcal{L}_{X_i} \mathcal{V}_{p,q}) \partial y_p \wedge \partial y_q + 2 \mathcal{V}_{p,q} [X_i, \partial y_p] \wedge \partial y_q \\
= & \sum_{p,q=1\dots n} (\mathcal{L}_{X_i} \mathcal{V}_{p,q}) \partial y_p \wedge \partial y_q + 2 \sum_{k=1\dots n} \mathcal{V}_{p,q} \frac{\partial \beta_{i,k}}{\partial y_q} \partial y_k \wedge y_p \\
= & \sum_{1 \leq p < q \leq n} \left(2(\mathcal{L}_{X_i} \mathcal{V}_{p,q}) + 2 \sum_{k=1\dots n} \mathcal{V}_{p,k} \frac{\partial \beta_{i,q}}{\partial y_k} - \mathcal{V}_{q,k} \frac{\partial \beta_{i,p}}{\partial y_k} \right) \partial y_k \wedge y_p.
\end{aligned}$$

Par inversibilité de la matrice $(\Pi_{i,j}^X)_{i,j}$, la condition (iii) est donc bien équivalente à (III), et la proposition démontrée. \square

Dans la décomposition 3.1.5, le tenseur Π_H n'est pas de Poisson en général, cependant, les calculs que l'on vient d'effectuer permettent d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 3.1.3. *Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel, de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$. Dans la décomposition 3.1.5 :*

$$\Pi = \Pi_H + \mathcal{V},$$

le 2-vecteur Π_H est de Poisson si et seulement si Γ est sans courbure.

preuve :

Avec les notations de la démonstration précédente, on a calculé que, localement :

$$\begin{aligned}
& [\Pi_H, \Pi_H] \\
= & \left[\sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X X_i \wedge X_j, \sum_{p,q=1\dots 2s} \Pi_{p,q}^X X_p \wedge X_q \right] \\
= & 4 \sum_{1 \leq i < p < q \leq 2s} \left(\mathcal{L}_{X_i} \sum_{j=1\dots 2s} \Pi_{i,j}^X (\mathcal{L}_{X_j} \Pi_{p,q}^X) \right) X_i \wedge X_p \wedge X_q \\
& - 4 \sum_{1 \leq i < q \leq 2s} \left(\sum_{j,p=1\dots n} 2 \Pi_{i,j}^X \Pi_{p,q}^X \left(\frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial x_p} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1\dots n} \beta_{j,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} - \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial y_k} \right) X_i \wedge X_q \wedge \partial y_l \\
= & -4 \sum_{1 \leq i < q \leq 2s} \left(\sum_{j,p=1\dots n} 2 \Pi_{i,j}^X \Pi_{p,q}^X \left(\frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial x_p} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1\dots n} \beta_{j,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} - \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial y_k} \right) X_i \wedge X_q \wedge \partial y_l,
\end{aligned}$$

la dernière égalité ayant lieu car Π est supposé de Poisson.

Par inversibilité de $(\Pi_{i,j}^X)$, on voit ainsi que Π_H est de Poisson si et seulement si, pour tous $j, p = 1 \dots 2s$:

$$\sum_{l=1 \dots n} \left(\frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial x_p} \right) \partial y_l + \sum_{k,l=1 \dots n} \left(\beta_{j,k} \frac{\partial \beta_{p,l}}{\partial y_k} - \beta_{p,k} \frac{\partial \beta_{j,l}}{\partial y_k} \right) \partial y_l = 0,$$

or cette dernière expression correspond précisément au crochet $[X_j, X_p]$ (voir la formule 3.1.6). \square

Ce résultat est l'équivalent semi-local du *local splitting* de Weinstein (voir [We3]), lequel cependant est toujours vrai. Dans le cadre semi-local, il fait déjà apparaître la condition nécessaire qu'un voisinage tubulaire de S doive admettre une connexion sans courbure. Nous verrons plus tard dans la proposition 3.3.1 sous quelles conditions on peut conclure à l'existence d'un tel *splitting*.

3.1.3 Homotopie de données géométriques

Le résultat qui suit donne des conditions sous lesquelles on saura homotoper deux structures de Poisson ayant même partie verticale \mathcal{V} . Avant celà, précisons les notations suivantes : étant donné $\phi \in \Omega^1(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$, on construit un tenseur, noté $\mathcal{V}^\sharp(d\phi)_h \in \Omega^1(E) \otimes_{C^\infty(E)} \rho(Ver)$ en posant :

$$\forall x \in E, \forall X \in T_x E, \quad \mathcal{V}^\sharp(d\phi)_h(X) := \mathcal{V}_x^\sharp(d_x \phi(p_* X)) \in Ver_x.$$

On peut facilement voir que cette définition point par point assure la $C^\infty(E)$ -linéarité. Par ailleurs, étant données $\phi_1, \phi_2 \in \Omega^1(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ deux 1-formes sur S à valeurs dans $C^\infty(E)$, on définit une 2-forme sur S à valeurs dans $C^\infty(E)$ $\{\phi_1, \phi_2\}_\mathcal{V} \in \Omega^2(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ en posant :

$$\{\phi_1, \phi_2\}_\mathcal{V}(u_1, u_2) := \mathcal{V}(d\phi_1(u_1), d\phi_2(u_2)) - \mathcal{V}(d\phi_1(u_2), d\phi_2(u_1)) \quad \forall u_1, u_2 \in \rho(S).$$

Proposition 3.1.4. *Soient deux structures de Poisson, Π et Π' , horizontalement non-dégénérées sur un fibré vectoriel E au-dessus d'une base compacte S , de données géométriques respectives $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$ et $(\Gamma', \mathcal{V}', \mathcal{F}')$. Supposons que Π et Π' ont même partie verticale et coïncident sur S :*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}' &= \mathcal{V} \\ \mathcal{F}'(u_1, u_2)|_S &= \mathcal{F}(u_1, u_2)|_S \quad \forall u_1, u_2 \in \rho(S).\end{aligned}$$

S'il existe une 1-forme à valeurs dans $C^\infty(E)$, $\phi \in \Omega^1(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ telle que :

$$\begin{aligned}\Gamma' &= \Gamma - \mathcal{V}^\sharp(d\phi)_h \\ \mathcal{F}' &= \mathcal{F} + \partial_\Gamma \phi + \frac{1}{2}\{\phi, \phi\}_\mathcal{V},\end{aligned}$$

alors il existe des voisinages $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ de S dans E et un difféomorphisme $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ tel que

$$\begin{aligned}\Phi_*\Pi &= \Pi' \\ \Phi|_S &= Id_S.\end{aligned}$$

preuve :

Un préliminaire consiste à montrer que l'on peut se ramener au cas où

$$\phi(u)|_S = 0 \quad \forall u \in \rho(S).$$

où S est vue comme la section nulle de E . Pour celà, il suffit de remplacer ϕ par $\hat{\phi}$ définie par

$$\hat{\phi}(u) := \phi(u) - \phi(u) \circ p \quad \forall u \in \rho(S).$$

Puisque $\hat{\phi}(u)$ s'annule clairement sur S , il suffit donc de montrer que $\hat{\phi}$ satisfait aussi les conditions de la proposition, or pour tout $X \in TE$,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^\sharp(d\hat{\phi})_h(X) &= \mathcal{V}^\sharp(d\hat{\phi}(p_*X)) \\ &= \mathcal{V}^\sharp(d(\phi(p_*X) - \phi(p_*X) \circ p)) \\ &= \mathcal{V}^\sharp(d\phi(p_*X)) - \mathcal{V}^\sharp(d\phi(p_*X) \circ p) \\ &= \mathcal{V}^\sharp(d\phi(p_*X)).\end{aligned}$$

Il est facile de voir que, pour les mêmes raisons, on a aussi

$$\{\hat{\phi}, \hat{\phi}\}_\mathcal{V} = \{\phi, \phi\}_\mathcal{V},$$

il reste donc à calculer que, pour tous $u_1, u_2 \in \mathcal{X}(S)$, et tout $x \in E$

$$\begin{aligned}
& \partial_\Gamma \hat{\phi}(u_1, u_2)(x) \\
&= \partial_\Gamma \phi(u_1, u_2)(x) - (\mathcal{L}_{hor(u_1)} \phi(u_2) \circ p)(x) + (\mathcal{L}_{hor(u_2)} \phi(u_1) \circ p)(x) - \phi([u_1, u_2]) \circ p(x) \\
&= \partial_\Gamma \phi(u_1, u_2)(x) - (\mathcal{L}_{hor(u_1)} \phi(u_2)) \circ p(x) + (\mathcal{L}_{hor(u_2)} \phi(u_1)) \circ p(x) - \phi([u_1, u_2]) \circ p(x) \\
&= \partial_\Gamma \phi(u_1, u_2)(x) - \partial_\Gamma \hat{\phi}(u_1, u_2) \circ p(x) \\
&= \partial_\Gamma \phi(u_1, u_2)(x).
\end{aligned}$$

Quelques précisions sur ce calcul avant de continuer : la seconde égalité a lieu car $hor(u_i)$ sont des champs de vecteurs p -projetables et $\phi(u_j) \circ p$ des fonctions basiques, pour la dernière égalité, il suffit de voir que les conditions $\mathcal{F}'_{|S} = \mathcal{F}_{|S}$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} + \partial_\Gamma \phi + \frac{1}{2} \{\phi, \phi\}_\mathcal{V}$ impliquent que $\partial_\Gamma \phi \circ p = \partial_\Gamma \phi_{|S} = 0$.

Construisons maintenant une homotopie entre les tenseurs Π et Π' : on note, pour $t \in [0, 1]$, Π_t le tenseur dont la donnée géométrique $(\Gamma_t, \mathcal{V}_t, \mathcal{F}_t)$ est définie par

$$\begin{aligned}
\Gamma_t &= \Gamma - t\mathcal{V}^\sharp(d\phi)_h \\
\mathcal{V}_t &= \mathcal{V} \\
\mathcal{F}_t &= \mathcal{F} + t\partial_\Gamma \phi + \frac{t^2}{2} \{\phi, \phi\}_\mathcal{V},
\end{aligned}$$

on a ainsi $\Pi_0 = \Pi$ et $\Pi_1 = \Pi'$.

Puisque $\mathcal{F}_{t|S}$ est non-dégénérée pour tout $t \in [0, 1]$, il existe un voisinage E_0 de S dans E sur lequel unique \mathcal{F}_t est non-dégénérée pour tout $t \in [0, 1]$. Nous allons commencer par montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, Π_t définit une structure de Poisson sur E_0 : bien que cela puisse apparaître comme une conséquence de la proposition, ce fait va nous être utile dans la suite de la démonstration. Pour cela, on utilise les conditions données par la proposition 3.1.2. On a d'ores et déjà

$$[\mathcal{V}_t, \mathcal{V}_t] = 0,$$

de manière évidente puisque, pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}$ lequel est de Poisson.

Notons, pour tout $t \in [0, 1]$, $Hor_t := \ker \Gamma_t$ le fibré horizontal associé à Π_t et, pour tout $u \in \mathcal{X}(S)$, $hor_t(u) := X - \Gamma_t(X)$, où $X \in \mathcal{X}(E)$ est quelconque vérifiant $p_*X = u$. On a alors bien :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{hor_t(u)}\mathcal{V}_t &= \mathcal{L}_{X-\Gamma_t(X)}\mathcal{V} \\
&= \mathcal{L}_{X-\Gamma(X)+t\mathcal{V}^\sharp(d\phi)_h(X)}\mathcal{V} \\
&= \mathcal{L}_{hor(u)}\mathcal{V} + t\mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\phi)_h(X)}\mathcal{V} \\
&= \mathcal{L}_{hor(u)}\mathcal{V} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ensuite, on doit vérifier que, pour tous $u_1, u_2 \in \mathcal{X}(S)$:

$$\begin{aligned}
&Curv_{\Gamma_t}(u_1, u_2) \\
:= &\Gamma_t([hor_t(u_1), hor_t(u_2)]) \\
= &\Gamma([hor_t(u_1), hor_t(u_2)]) - t\mathcal{V}^\sharp(d\phi)_h([hor_t(u_1), hor_t(u_2)]) \\
= &\Gamma([hor(u_1) + t\mathcal{V}^\sharp(d\phi)(u_1), hor(u_2) + t\mathcal{V}^\sharp(d\phi)(u_2)]) - t\mathcal{V}^\sharp(d\phi)([u_1, u_2]) \\
= &\Gamma([hor(u_1), hor(u_2)]) + t\Gamma([hor(u_1), \mathcal{V}^\sharp(d\phi)(u_2)]) + t\Gamma([\mathcal{V}^\sharp(d\phi)(u_1), hor(u_2)]) \\
&\quad + t^2\Gamma([\mathcal{V}^\sharp(d\phi)(u_1), \mathcal{V}^\sharp(d\phi)(u_2)]) - t\mathcal{V}^\sharp(d\phi)(u_1, u_2) \\
= &Curv_\Gamma(u_1, u_2) + t\mathcal{V}^\sharp(\mathcal{L}_{hor(u_1)}d\phi u_2) - t\mathcal{V}^\sharp(\mathcal{L}_{hor(u_2)}d\phi u_1) \\
&\quad + \frac{t^2}{2}\mathcal{V}^\sharp(\{\phi, \phi\}_\mathcal{V}(u_1, u_2)) - t\mathcal{V}^\sharp(d\phi([u_1, u_2])) \\
= &\mathcal{V}^\sharp(d\mathcal{F}(u_1, u_2)) + t\mathcal{V}^\sharp\left(\mathcal{L}_{hor(u_1)}d\phi u_2 - \mathcal{L}_{hor(u_2)}d\phi u_1 - d\phi([u_1, u_2]) + \frac{t^2}{2}\{\phi, \phi\}_\mathcal{V}(u_1, u_2)\right) \\
= &\mathcal{V}^\sharp(d\mathcal{F}(u_1, u_2) + t\partial_\Gamma\phi(u_1, u_2) + \frac{t^2}{2}\{\phi, \phi\}_\mathcal{V}(u_1, u_2)) \\
= &\mathcal{V}_t^\sharp(d\mathcal{F}_t(u_1, u_2))
\end{aligned}$$

Enfin, on doit vérifier que, pour tous $u_1, u_2, u_3 \in \rho(B)$:

$$\partial_{\Gamma_t}\mathcal{F}_t(u_0, u_1, u_2) = 0.$$

Or on calcule que

$$\begin{aligned}
& \partial_{\Gamma_t} \mathcal{F}_t(u_0, u_1, u_2) \\
= & \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{hor_t(u_0)} \mathcal{F}_t(u_1, u_2) - \mathcal{F}_t([u_0, u_1], u_2) \\
= & \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{hor(u_0)+t\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0)} \left((\mathcal{F} + t\partial_{\Gamma}\phi + \frac{t^2}{2}\{\phi, \phi\}_{\mathcal{V}})(u_1, u_2) \right) \\
& - \left(\mathcal{F} + t\partial_{\gamma}\phi + \frac{t^2}{2}\{\phi, \phi\}_{\mathcal{V}} \right) ([u_0, u_1], u_2) \\
= & \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{hor(u_0)} \mathcal{F}(u_1, u_2) - \mathcal{F}([u_0, u_1], u_2) \\
& + t \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{hor(u_0)} \partial_{\Gamma}\phi(u_1, u_2) - \partial_{\Gamma}\phi([u_0, u_1], u_2) \\
& + t \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0)} \left(\mathcal{F}(u_1, u_2) \right) \\
& + \frac{t^2}{2} \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{hor(u_0)} \left(\{\phi, \phi\}_{\mathcal{V}}(u_1, u_2) \right) - \{\phi, \phi\}_{\mathcal{V}}([u_0, u_1], u_2) \\
& + t^2 \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0)} \left(\partial_{\Gamma}\phi(u_1, u_2) \right) \\
& + \frac{t^3}{2} \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0)} \left(\{\phi, \phi\}_{\mathcal{V}}(u_1, u_2) \right) \\
= & \partial_{\Gamma} \mathcal{F}(u_0, u_1, u_2) + t \partial_{\Gamma} \circ \partial_{\Gamma} \phi(u_0, u_1, u_2) \\
& - t \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\mathcal{F}(u_1, u_2))} \left(d\phi u_0 \right) \\
& + \frac{t^2}{2} \partial_{\Gamma} \{\phi, \phi\}_{\mathcal{V}}(u_0, u_1, u_2) + t^2 \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0)} \left(\partial_{\Gamma} \phi(u_1, u_2) \right) \\
& + \frac{t^3}{2} \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0)} \left(\{\phi, \phi\}_{\mathcal{V}}(u_1, u_2) \right)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, on a, par hypothèse $\partial_{\Gamma} \mathcal{F} = 0$. D'autre part, puisque

$$\mathcal{V}^\sharp(\mathcal{F}(u_1, u_2)) = \text{Curv}_{\Gamma}(u_1, u_2),$$

il suffit d'appliquer la seconde identité de Bianchi qui nous dit que, pour une connexion quelconque :

$$\partial_{\Gamma} \circ \partial_{\Gamma} \phi(u_0, u_1, u_2) = \oint_{0,1,2} \mathcal{L}_{\text{Curv}_{\Gamma}(u_1, u_2)} \left(d\phi u_0 \right),$$

ce qui montre que les deux premières lignes s'annulent. La dernière s'annule aussi, comme conséquence directe de l'identité de Jacobi pour \mathcal{V} . Il reste donc à vérifier

que l'avant-dernière ligne s'annule bien. On calcule donc

$$\begin{aligned}
& t^2 \mathfrak{f}_{0,1,2}^{\mathcal{L}} \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0)} (\partial_\Gamma \phi(u_1, u_2)) \\
&= t^2 \mathfrak{f}_{0,1,2}^{\mathcal{L}} \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0)} \left(\mathcal{L}_{hor(u_1)} \phi u_2 - \mathcal{L}_{hor(u_2)} \phi u_1 - \phi[u_1, u_2] \right) \\
&= t^2 \mathfrak{f}_{0,1,2}^{\mathcal{L}} [\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0), [hor(u_1), \phi u_2]] - [\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0), [hor(u_2), \phi u_1]] - [\mathcal{V}^\sharp(d\phi u_0), \phi[u_1, u_2]] \\
&= t^2 \mathfrak{f}_{0,1,2}^{\mathcal{L}} \{ \phi u_0, \mathcal{L}_{hor(u_1)} \phi u_2 \}^{\mathcal{V}} - \{ \phi u_0, \mathcal{L}_{hor(u_2)} \phi u_1 \}^{\mathcal{V}} + \{ \phi[u_1, u_2], \phi u_0 \}^{\mathcal{V}} \\
&= t^2 \mathfrak{f}_{0,1,2}^{\mathcal{L}} \{ \phi u_2, \mathcal{L}_{hor(u_0)} \phi u_1 \}^{\mathcal{V}} - \{ \phi u_1, \mathcal{L}_{hor(u_0)} \phi u_2 \}^{\mathcal{V}} + \frac{1}{2} \{ \phi, \phi \}^{\mathcal{V}}([u_1, u_2], u_0) \\
&= t^2 \mathfrak{f}_{0,1,2}^{\mathcal{L}} - \mathcal{L}_{hor(u_0)} \{ \phi, \phi \}^{\mathcal{V}}(u_1, u_2) + \{ \phi, \phi \}^{\mathcal{V}}([u_0, u_1], u_2) \\
&= -\frac{t^2}{2} (\partial_\Gamma \{ \phi, \phi \}^{\mathcal{V}})(u_0, u_1, u_2).
\end{aligned}$$

ici, $\{ , \}^{\mathcal{V}}$ désigne le crochet de Poisson induit par \mathcal{V} sur $C^\infty(E)$. Ce dernier calcul finalise la preuve que Π_t est bien de Poisson pour tout $t \in [0, 1]$.

Construisons à présent le champ de vecteurs X_t^h sur E_0 destiné à tracter les structures Π_t : ce dernier, comme celà est rappelé dans l'annexe A doit vérifier l'équation :

$$\frac{d}{dt} \Pi_t + \mathcal{L}_{X_t^h} \Pi_t = 0.$$

Commençons par calculer $\frac{d}{dt} \Pi_t$, on note $X_i^t = hor_t(\partial x_i)$, et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Pi_t &= \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1,\dots,2s} \Pi_{i,j}^t X_i^t \wedge X_j^t \\
&= \sum_{i,j=1,\dots,2s} \frac{d}{dt} \Pi_{i,j}^t X_i^t \wedge X_j^t + \Pi_{i,j}^t \frac{d}{dt} X_i^t \wedge X_j^t + \Pi_{i,j}^t X_i^t \wedge \frac{d}{dt} X_j^t \\
&= \sum_{i,j=1,\dots,2s} \frac{d}{dt} \Pi_{i,j}^t X_i^t \wedge X_j^t + 2 \Pi_{i,j}^t \frac{d}{dt} X_i^t \wedge X_j^t
\end{aligned}$$

Le formalisme utilisé ne permet pas de calculer facilement $\Pi_{i,j}^t$ à partir de \mathcal{F}_t , puisqu'il faudrait inverser la matrices de ses coefficients. On peut cependant avoir recours à l'astuce suivante : puisque pour tous $i, j \in 1 \dots 2s$, on a :

$$\Pi_{i,j}^t = 2 \sum_{i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \mathcal{F}_{i',j'}^t,$$

où $\mathcal{F}_{i',j'}^t$ désigne $\mathcal{F}_t(\partial x_{i'}, \partial x_{j'})$, on observe que :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \Pi_{i,j}^t \\
&= 2 \sum_{i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \frac{d}{dt} \mathcal{F}_{i',j'}^t + 2 \sum_{i',j'=1}^{2s} \frac{d}{dt} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \mathcal{F}_{i',j'}^t + 2 \sum_{i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \frac{d}{dt} \Pi_{j,j'}^t \mathcal{F}_{i',j'}^t \\
&= 2 \sum_{i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \frac{d}{dt} \mathcal{F}_{i',j'}^t - 2 \sum_{i'=1}^{2s} \frac{d}{dt} \Pi_{i,i'}^t \delta_{j,i'} + 2 \sum_{j'=1}^{2s} \frac{d}{dt} \Pi_{j,j'}^t \delta_{i,j'} \\
&= 2 \sum_{i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \frac{d}{dt} \mathcal{F}_{i',j'}^t - 2 \frac{d}{dt} \Pi_{i,j}^t - 2 \frac{d}{dt} \Pi_{j,i}^t \\
&= 2 \sum_{i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \frac{d}{dt} \mathcal{F}_{i',j'}^t.
\end{aligned}$$

On en conclue que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi_t &= \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} 2\Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \frac{d}{dt} \mathcal{F}_{i',j'}^t X_i^t \wedge X_j^t + 2\Pi_{i,j}^t \frac{d}{dt} X_i^t \wedge X_j^t \\ &= \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} 2\Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \frac{d}{dt} \mathcal{F}_{i',j'}^t X_i^t \wedge X_j^t + 2\Pi_{i,j}^t \mathcal{V}^\#(d\phi(\partial x_i)) \wedge X_j^t \end{aligned}$$

Comme il paraît naturel de chercher X_t^h parmi les champs de vecteurs horizontaux, on calcule $\mathcal{L}_{X_t^h} \Pi_t$ pour un champ horizontal $X_t^h = \sum_{l=1}^{2s} a_l^t X_l^t$, en essayant de se ramener à la forme précédente :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_t^h} \Pi_t &= \sum_{i,j=1}^{2s} [X_t^h, \Pi_{i,j}^t X_i^t \wedge X_j^t] + [X_t^h, \mathcal{V}] \\ &= \sum_{i,j=1}^{2s} \sum_{l=1}^{2s} a_l^t (\mathcal{L}_{X_l^t} \Pi_{i,j}^t) X_i^t \wedge X_j^t \\ &\quad + \Pi_{i,j}^t (\sum_{l=1}^{2s} a_l^t [X_l^t, X_i^t] \wedge X_j^t + a_l^t) X_i^t \wedge [X_l^t, X_j^t] \\ &\quad - (\mathcal{L}_{X_l^t} a_l^t) X_i^t \wedge X_j^t - (\mathcal{L}_{X_j^t} a_l^t) X_i^t \wedge X_l^t \\ &\quad - \sum_{l=1 \dots 2s} \mathcal{V}^\#(da_l^t) \wedge X_l^t \\ &= \sum_{i,j=1}^{2s} \left(\sum_{l=1}^{2s} a_l^t (\mathcal{L}_{X_l^t} \Pi_{i,j}^t) - \Pi_{i,l}^t (\mathcal{L}_{X_l^t} a_j^t) + \Pi_{j,l}^t (\mathcal{L}_{X_l^t} a_i^t) \right) X_i^t \wedge X_j^t \\ &\quad + 2 \sum_{i,j,l=1}^{2s} \Pi_{i,j}^t a_l^t [X_l^t, X_i^t] \wedge X_j^t - \sum_{l=1 \dots 2s} \mathcal{V}^\#(da_l^t) \wedge X_l^t, \end{aligned}$$

avec d'une part, pour tous $i, j = 1 \dots 2s$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1 \dots 2s} \Pi_{i,l}^t (\mathcal{L}_{X_l^t} a_j^t) &= \sum_{i',j,l=1 \dots 2s} \Pi_{i,i'}^t (\mathcal{L}_{X_{j'}^t} a_j^t) \delta_{j,l} \\ &= 2 \sum_{i',j',l=1 \dots 2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\mathcal{L}_{X_{j'}^t} a_l^t) \mathcal{F}_{l,j'}^t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{l=1 \dots 2s} \Pi_{j,l}^t (\mathcal{L}_{X_l^t} a_i^t) &= \sum_{i,j',l=1 \dots 2s} \Pi_{j,j'}^t (\mathcal{L}_{X_{j'}^t} a_i^t) \delta_{i,l} \\ &= 2 \sum_{i',j',l=1 \dots 2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\mathcal{L}_{X_{j'}^t} a_l^t) \mathcal{F}_{l,i'}^t, \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2s} a_l^t (\mathcal{L}_{X_l^t} \Pi_{i,j}^t) &= \sum_{l,j'=1}^{2s} a_l^t (\mathcal{L}_{X_l^t} \Pi_{j',j}^t) \delta_{i,j'} \\ &= -2 \sum_{l,i',j'=1}^{2s} a_l^t (\mathcal{L}_{X_l^t} \Pi_{j',j}^t) \mathcal{F}_{i',j'}^t \Pi_{i,i'}^t \\ &= -2 \sum_{l,i'=1}^{2s} a_l^t (\sum_{j'=1}^{2s} (\mathcal{L}_{X_l^t} \Pi_{j',j}^t) \mathcal{F}_{i',j'}^t) \Pi_{i,i'}^t \\ &= -2 \sum_{l,i'=1}^{2s} a_l^t (\sum_{j'=1}^{2s} -\Pi_{j',j}^t (\mathcal{L}_{X_l^t} \mathcal{F}_{i',j'}^t)) \Pi_{i,i'}^t \\ &= -2 \sum_{l,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t a_l^t (\mathcal{L}_{X_l^t} \mathcal{F}_{i',j'}^t) \\ &= -2 \sum_{l,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t a_l^t (\mathcal{L}_{X_{j'}^t} \mathcal{F}_{l,j'}^t - \mathcal{L}_{X_j^t} \mathcal{F}_{l,i'}^t), \end{aligned}$$

la dernière égalité ayant lieu grâce à la relation $\partial_{\Gamma_t} \mathcal{F}_t = 0$.

On en conclue que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_t^h} \Pi_t &= -2 \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\sum_{l=1\dots 2s} (\mathcal{L}_{X_{i'}^t} a_l^t) \mathcal{F}_{l,j'}^t - (\mathcal{L}_{X_j^t} a_k^t) \mathcal{F}_{l,i'}^t \\
&\quad + a_l^t (\mathcal{L}_{X_{j'}^t} \mathcal{F}_{l,j'}^t - \mathcal{L}_{X_{i'}^t} \mathcal{F}_{l,i'}^t) X_i^t \wedge X_j^t \\
&\quad + 2 \sum_{i,j,l=1}^{2s} \Pi_{i,j}^t a_l^t [X_l^t, X_i^t] \wedge X_j^t + \sum_{l=1\dots 2s} \mathcal{V}^\#(da_l^t) \wedge X_l^t \\
&= -2 \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\sum_{l=1\dots 2s} \mathcal{L}_{X_{j'}^t} (a_l^t \mathcal{F}_{k,j'}^t) - \mathcal{L}_{X_{i'}^t} (a_l \mathcal{F}_{k,i'}^t)) X_i^t \wedge X_j^t \\
&\quad + 2 \sum_{i,j,l=1}^{2s} \Pi_{i,j}^t a_l^t [X_l^t, X_i^t] \wedge X_j^t + \sum_{l=1\dots 2s} \mathcal{V}^\#(da_l^t) \wedge X_l^t.
\end{aligned}$$

Cette écriture présente l'avantage suivant : à tout champ horizontal X_t^h on peut associer l'unique $X_t \in C^\infty(E_0) \otimes_{C^\infty(S)} \rho(B)$ vérifiant :

$$X_t^h(p^* f) = \langle df, X_t \rangle \quad \forall f \in C^\infty(S),$$

\mathcal{F}_t s'étend alors naturellement aux éléments de $C^\infty(E_0) \otimes_{C^\infty(S)} \rho(B)$, plus précisément, avec nos notations, X_t est de la forme $X_t = \sum_{i=1\dots 2s} a_i^t \otimes \partial x_i$, et

$$i_{X_t} \mathcal{F}_t := \sum_{i,j=1\dots 2s} a_i^t \mathcal{F}_{i,j}^t dx_j.$$

$\mathcal{L}_{X_t^h} \Pi_t$ prend ainsi la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_t^h} \Pi_t &= -2 \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\partial_{\Gamma_t} i_{X_t} \mathcal{F}_t) (\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) X_i^t \wedge X_j^t \\
&\quad + 2 \sum_{i,j,l=1}^{2s} \Pi_{i,j}^t a_l^t (\mathcal{V}^\#(d\mathcal{F}_{l,i}^t)) \wedge X_j^t - \sum_{j,l=1\dots 2s} (\mathcal{V}^\#(da_l^t)) \delta_{j,l} \wedge X_j^t \\
&= -2 \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\partial_{\Gamma_t} i_{X_t} \mathcal{F}_t) (\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) X_i^t \wedge X_j^t \\
&\quad + 2 \sum_{i,j,l=1}^{2s} \Pi_{i,j}^t a_l^t (\mathcal{V}^\#(d\mathcal{F}_{l,i}^t)) \wedge X_j^t + 2 \sum_{i,j,l=1\dots n} \Pi_{i,j} \mathcal{F}_{l,i}^t (\mathcal{V}^\#(da_l^t)) \wedge X_j^t \\
&= -2 \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\partial_{\Gamma_t} i_{X_t} \mathcal{F}_t) (\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) X_i^t \wedge X_j^t \\
&\quad + 2 \sum_{i,j,l=1}^{2s} \Pi_{i,j}^t (a_l^t \mathcal{V}^\#(d\mathcal{F}_{l,i}^t) + \mathcal{F}_{l,i}^t (\mathcal{V}^\#(da_l^t))) \wedge X_j^t \\
&= -2 \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\partial_{\Gamma_t} i_{X_t} \mathcal{F}_t) (\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) X_i^t \wedge X_j^t \\
&\quad + 2 \sum_{i,j} \Pi_{i,j}^t (\mathcal{V}^\#(d \sum_{l=1\dots n} a_l^t \mathcal{F}_{l,i}^t)) \wedge X_j^t \\
&= -2 \sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t (\partial_{\Gamma_t} i_{X_t} \mathcal{F}_t) (\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) X_i^t \wedge X_j^t \\
&\quad + 2 \sum_{i,j} \Pi_{i,j}^t \mathcal{V}^\#(d(i_{X_t} \mathcal{F}_t)(\partial x_i)) \wedge X_j^t
\end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer le principe de Moser, il faut donc exhiber un champ horizontal X_t^h satisfaisant :

$$\sum_{i,j,i',j'=1}^{2s} \Pi_{i,i'}^t \Pi_{j,j'}^t \left(\frac{d\mathcal{F}_t}{dt} - \partial_{\Gamma_t} i_{X_t} \mathcal{F} \right) (\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) X_i^t \wedge X_j^t + \sum_{i,j=1}^{2s} \Pi_{i,j}^t \mathcal{V}^\#(d(\phi + i_{X_t} \mathcal{F}_t)(\partial x_i)) \wedge X_j^t = 0,$$

la non-dégénérescence de \mathcal{F}_t sur E_0 nous autorise à prendre X_t^h comme le champ horizontal correspondant à l'unique $X_t \in C^\infty(E_0) \otimes_{C^\infty(S)} \rho(B)$ solution de :

$$(3.1.7) \quad i_{X_t} \mathcal{F}_t = -\phi$$

On a alors :

$$\begin{aligned} (\partial_{\Gamma_t} i_{X_t} \mathcal{F}_t)(\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) &= -\partial_{\Gamma_t} \phi(\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) \\ &= -\mathcal{L}_{X_{i'} + t\mathcal{V}^\# \phi(\partial x_{i'})} \phi(\partial x_{j'}) + \mathcal{L}_{X_{j'} + t\mathcal{V}^\# \phi(\partial x_{j'})} \phi(\partial x_{i'}) \\ &= -\mathcal{L}_{X_{i'}} \phi(\partial x_{j'}) + \mathcal{L}_{X_{j'}} \phi(\partial x_{i'}) - 2t \mathcal{L}_{\mathcal{V}^\# \phi(\partial x_{i'})} \phi(\partial x_{j'}) \\ &= -\partial_{\Gamma} \phi(\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) + 2t \{\phi, \phi\}_{\mathcal{V}}(\partial x_{i'}, \partial x_{j'}). \\ &= -\frac{d\mathcal{F}_t}{dt}(\partial x_{i'}, \partial x_{j'}) \end{aligned}$$

Le champ X_t^h ainsi considéré, réalise donc bien une homotopie entre Π_0 et Π_1 . Pour s'assurer que son flot est bien défini jusqu'au temps $t = 1$ sur tout un voisinage de S , il suffit de remarquer que, puisque Φ a été choisie nulle sur S , il en va de même pour le champ X_t^h , son flot est donc défini jusqu'au temps $t = 1$ sur S . Par compacité de S , et d'après le théorème de dépendance des conditions initiales, ce flot est donc défini jusqu'au temps $t = 1$ sur tout un voisinage \mathcal{U} de S . \square

3.1.4 Quelques résultats classiques sur les structures de Poisson

Il s'agit ici de voir comment on peut utiliser les tenseurs de couplage afin de redémontrer certains résultats de [We3], notamment l'unicité (à isomorphisme près) de la structure transverse, ainsi que le *local splitting*.

Proposition 3.1.5. (*Unicité de la structure transverse*) Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel $p : E \mapsto S$, et $m, m' \in S$. Alors les germes des structures transverses \mathcal{V}_m et \mathcal{V}'_m sont isomorphes.

preuve : L'argument est standard (et justifie à lui seul l'usage des connexions) : puisque \mathcal{V} est invariant par la connexion Γ , il suffit de choisir un chemin $\gamma : [0, 1] \mapsto S$ avec $\gamma(0) = m$ et $\gamma(1) = m'$, sur le pull-back γ^*E du fibré E , $\dot{\gamma}$ peut être considéré comme un champ de vecteurs dépendant du temps, qu'il suffit de relever en un champ horizontal pour le pull-back $\gamma^*\Gamma$ de la connexion Γ , dont le flot au temps 1 réalise

un difféomorphisme d'un voisinage de m dans $p^{-1}(m)$ sur un voisinage de m' dans $p^{-1}(m')$. \square

Nous verrons de manière plus précise dans la proposition 3.2.2 comment la connexion Γ permet de construire localement des systèmes de coordonnées fibrés de E , dans lesquels \mathcal{V} soit indépendante des coordonnées basiques.

Théorème 3.1.1. (*Local splitting [We3]*) *Soit Π une structure de Poisson définie sur une variété de dimension $2s + n$, et m un point sur l'une de ses feuilles symplectiques S de dimension $2s$. Il existe alors un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_{2s}, y_1, \dots, y_n)$, défini sur un voisinage de m , dans lequel Π prend la forme :*

$$\Pi = \sum_{i,j=1\dots 2s} \Pi_{i,j} \partial x_i \wedge \partial x_j + \sum_{k,l=1\dots n} \mathcal{V}_{k,l} \partial y_k \wedge \partial y_l,$$

où $\Pi_{i,j}$ et $\mathcal{V}_{k,l}$ sont des fonctions lisses dépendant respectivement des variables x_i et y_i , avec $(\Pi_{i,j})_{i,j}$ de rang constant égal à $2s$, et $\mathcal{V}_{k,l}$ nulles en 0 (on a alors $S = \{y_i = 0\}$).

preuve : On choisit un voisinage tubulaire E de S , défini autour de m , suffisamment petit pour qu'il existe un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_{2s}) de S centrées en m , et (y_1, \dots, y_n) des coordonnées sur les fibres. On note $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$ la donnée géométrique associée à Π , et on garde les notations locales précédentes pour Γ, \mathcal{V} et \mathcal{F} .

Il s'agit alors, par homotopies successives, de rendre les $\mathcal{F}_{i,j}$ basiques, en effet lorsque c'est le cas, d'après la condition (iv) dans la proposition 3.1.2, les relèvements horizontaux des ∂x_i commutent. On peut alors choisir un système de coordonnées locales dans lequel les relèvements horizontaux soit précisément les ∂x_i , et ce, en ne modifiant que les y_i , ainsi, le fait que \mathcal{F} soit basique reste valide après ce dernier changement de variables. De plus, dans un tel système de coordonnées, la condition (ii) dans la proposition 3.1.2 indique que les constantes de structure de \mathcal{V} ne dépendent pas des x_i , et on peut conclure.

Pour rendre les $\mathcal{F}_{i,j}$ basiques, on procède par récurrence, en commençant par $\mathcal{F}_{1,2}$: on met $\mathcal{F}_{1,2}$ sous la forme :

$$\mathcal{F}_{1,2} = \mathcal{F}_{1,2|_S} + \tilde{\mathcal{F}}_{1,2},$$

où $\mathcal{F}_{1,2|_S}$ désigne la restriction de $\mathcal{F}_{1,2}$ à S , et $\tilde{\mathcal{F}}_{1,2} \in C^\infty(E)$, nulle sur S . Puisque X_1 est non nul en 0, il suffit de le redresser pour voir qu'il existe $\psi \in C^\infty(E)$ telle que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_1}\psi &= \tilde{\mathcal{F}}_{1,2} \\ \psi(0) &= 0,\end{aligned}$$

on pose alors $\phi = \sum_{i=1\dots 2s} \phi_i dx_i$, où

$$\begin{cases} \phi_i = 0 & \text{si } i \neq 2 \\ \phi_2 = -\psi. \end{cases}$$

De cette manière, si on pose aussi :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F} + t\partial_\Gamma\phi + \frac{t}{2}\{\phi, \phi\}^\vee,$$

autrement dit, en termes de constantes de structures :

$$\mathcal{F}_{i,j}^t = \mathcal{F}_{i,j} + t(\mathcal{L}_{X_i}\phi_j - \mathcal{L}_{X_j}\phi_i) + \frac{t}{2}\{\phi_i, \phi_j\}^\vee,$$

vu les valeurs données aux ϕ_i , on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{1,2}^t &= \mathcal{F}_{1,2} + t\mathcal{L}_{X_1}\phi_2 \\ &= \mathcal{F}_{1,2} - t\tilde{\mathcal{F}}_{1,2} \\ \mathcal{F}_{i,2}^t &= \mathcal{F}_{i,2} + t\mathcal{L}_{X_i}\phi_2, & \forall i = 3 \dots 2s \\ \mathcal{F}_{i,j}^t &= \mathcal{F}_{i,j}, & \forall i, j = 3 \dots 2s.\end{aligned}$$

On a construit ϕ de sorte que \mathcal{F}_t coïncide avec \mathcal{F} en m pour tout $t \in [0, 1]$ (il suffit pour celà de vérifier que $\mathcal{L}_{X_i}\phi_2$ s'annulent sur S pour tout $i = 1 \dots 2s$), par continuité, il existe donc un voisinage de m sur lequel \mathcal{F}_t est non-dégénérée pour tout $t \in [0, 1]$. Sur ce voisinage l'équation

$$i_{X_t}\mathcal{F}_t = \phi$$

définit un champ de vecteurs dépendant du temps, nul en m , dont le flot au temps 1 réalise, selon le principe utilisé dans la proposition 3.1.4, une homotopie entre Π et une structure de Poisson dont la constante de structure $\mathcal{F}_{1,2}^1 = \mathcal{F}_{1,2|_S}$ est basique.

Supposons maintenant qu'il existe $r < 2s$ tel que, pour tous $i, j < r$, $\mathcal{F}_{i,j}$ soit basique. D'après la condition (iv) de la proposition 3.1.2, les champs X_i pour $i < r$ commutent. On met $\mathcal{F}_{i,r}$ sous la forme :

$$\mathcal{F}_{i,r} = \mathcal{F}_{i,r|_S} + \tilde{\mathcal{F}}_{i,r} \quad \forall i < r,$$

où $\mathcal{F}_{i,r|_S}$ désigne la restriction de $\mathcal{F}_{i,r}$ à S , et $\tilde{\mathcal{F}}_{i,r} \in C^\infty(E)$, nulle sur S . La condition (iii) de la proposition 3.1.2 s'exprime localement

$$\mathcal{L}_{X_i}\mathcal{F}_{j,r} - \mathcal{L}_{X_j}\mathcal{F}_{i,r} = -\mathcal{L}_{X_r}\mathcal{F}_{i,j},$$

et implique, avec le fait que $\mathcal{F}_{i,j}$ soit basique, que

$$\mathcal{L}_{X_i}\tilde{\mathcal{F}}_{j,r} - \mathcal{L}_{X_j}\tilde{\mathcal{F}}_{i,r} = 0, \quad \forall i, j < r.$$

D'après le lemme de Poincaré, il existe donc une fonction lisse ψ vérifiant

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{X_i}\psi = \tilde{\mathcal{F}}_{i,r} & \forall i < r \\ \psi(0) = 0. \end{cases}$$

De même que précédemment, on pose d'une part $\phi = \sum_{j=1\dots 2s} \phi_j \otimes dx_i$ où :

$$\begin{cases} \phi_i = 0 & \text{si } i \neq r \\ \phi_r = -\psi, \end{cases}$$

et d'autre part :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F} + t\partial_\Gamma\phi + \frac{t}{2}\{\phi, \phi\}_\nu.$$

On voit alors que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i,r}^t &= \mathcal{F}_{i,r} + t\mathcal{L}_{X_i}\phi_r \\ &= \mathcal{F}_{1,2} - t\tilde{\mathcal{F}}_{i,r} & \forall i < r \\ \mathcal{F}_{k,r}^t &= \mathcal{F}_{k,r} + t\mathcal{L}_{X_k}\phi_r, & \forall k > r \\ \mathcal{F}_{i,j}^t &= \mathcal{F}_{i,j}, & \forall i, j \neq r \end{aligned}$$

de sorte que \mathcal{F}_t coïncide avec \mathcal{F} sur S pour tout $t \in [0, 1]$. Le raisonnement précédent permet alors, sur un voisinage de m , d'homotoper Π à une structure de Poisson dont les constantes de structures $\mathcal{F}_{i,j}^1$ sont basiques pour tous $i, j \leq r$. \square

3.2 Linéarisation le long d'une feuille

Le problème de linéarisation d'une structure de Poisson nulle en un point a vu ces dernières années quelques réponses positives, voir [Co1], [Co2], [Co3], [Du1], [Du2], [Du3], [D-Zu1]... L'objet de cette section est de généraliser ce type de linéarisation locale à la partie transverse d'une structure de Poisson, tout le long de la feuille considérée. Nous verrons au cours de cette étude le sens qu'il convient de donner au terme *linéarisation le long d'une feuille*.

3.2.1 Linéarisation de la partie verticale

Le résultat suivant permet de globaliser au voisinage d'une feuille entière tout résultat local de non-dégénérescence de la partie verticale de la structure de Poisson considérée.

Proposition 3.2.1. *Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel $p : E \mapsto S$ au-dessus d'une base S compacte, de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$. Supposons que, pour un quelconque $x \in S$, le germe de \mathcal{V} en x soit linéarisable (en tant que structure de Poisson sur E_x), alors le germe de Π le long de S est équivalent à celui d'une structure associée à une donnée géométrique de la forme $(\Gamma, \mathcal{V}^{(1)}, \mathcal{F}')$ pour un certain \mathcal{F}' , où $\mathcal{V}^{(1)}$ désigne une structure de Poisson linéaire en les fibres.*

preuve :

Le raisonnement est le suivant : plutôt que de linéariser directement \mathcal{V} on construit par partition de l'unité un champ Z satisfaisant :

$$\begin{aligned} [Z, \mathcal{V}] &= -\mathcal{V} \\ Z^{(1)} &= L, \end{aligned}$$

où $Z^{(1)}$ désigne la partie d'ordre 1 en la fibre du champ Z , et $L = \sum_{i=1 \dots n} y_i \partial y_i$ le champ de Liouville. On linéarise ensuite le champ Z le long de S . La condition

$$[L, \mathcal{V}] = -\mathcal{V}$$

implique alors que \mathcal{V} est elle-même linéaire.

Considérons donc $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de S par des ouverts trivialisants pour E , et $\psi_i : p^{-1}(U_i) \mapsto \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^n$ les trivialisations correspondantes. On peut toujours choisir ce recouvrement de sorte que $\mathcal{U}_i = \{x \in \mathbb{R}^{2s} / \sum_{i=1}^{2s} x_i^2 < 1\}$ pour tout $i \in I$.

Soit $i \in I$ fixé, sur $p^{-1}(U_i)$, on construit un champ, noté Z_i , satisfaisant

$$(3.2.1) \quad [Z_i, \mathcal{V}] = -\mathcal{V}$$

$$(3.2.2) \quad Z_i^{(1)} = L$$

comme suit (il s'agit essentiellement de montrer que l'on sait linéariser \mathcal{V} au-dessus de U_i tout entier, et pas seulement au-dessus d'un unique point). Posons $\hat{\mathcal{V}} := (\psi_i)_* \mathcal{V}$, et, pour tout $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{2s}) \in \mathcal{U}_i$, $X^\sigma \in \mathcal{X}(\mathcal{U}_i)$ le champ $X^\sigma := \sum_{i=1}^{2s} \sigma_i \partial x_i$. Notons en outre $\hat{hor}(X^\sigma)$ le relèvement horizontal de X^σ dans $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^n$ (défini par transport de structure, via ψ_i). Le flot $\hat{\phi}^\sigma$ au temps 1 de $\hat{hor}(X^\sigma)$, défini sur un voisinage de $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, est de la forme : $\hat{\phi}^\sigma(x, y) = (x + \sigma, \zeta^\sigma(x, y))$ et, puisque $\mathcal{L}_{\hat{hor}(X^\sigma)} \hat{\mathcal{V}} = 0$, vérifie :

$$\{y_i, y_j\}^{\hat{\mathcal{V}}}(\hat{\phi}^\sigma(x, y)) = \{y_i \circ \zeta^\sigma, y_j \circ \zeta^\sigma\}^{\hat{\mathcal{V}}}(x, y),$$

en particulier, pour $x = 0$:

$$\begin{aligned} \{y_i, y_j\}^{\hat{\mathcal{V}}}(\sigma, \zeta^\sigma(0, y)) &= \{y_i \circ \zeta^\sigma, y_j \circ \zeta^\sigma\}^{\hat{\mathcal{V}}}(0, y) \\ \hat{\mathcal{V}}_{i,j}(\sigma, \zeta^\sigma(0, y)) &= \sum_{k,l=1}^n \hat{\mathcal{V}}_{k,l}(0, y) \frac{\partial y_i \circ \zeta^\sigma}{\partial y_k} \frac{\partial y_j \circ \zeta^\sigma}{\partial y_l}(0, y) \end{aligned}$$

Donc, en posant $\Phi(x, y) := (x, \zeta^x(0, y))$, on obtient un difféomorphisme $\Phi : \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\begin{aligned} \{y_i, y_j\}^{\hat{\mathcal{V}}}(\Phi(x, y)) &= \hat{\mathcal{V}}_{i,j}(x, \zeta^x(0, y)) \\ &= \sum_{k,l=1}^n \hat{\mathcal{V}}_{k,l}(0, y) \frac{\partial y_i \circ \zeta^x}{\partial y_k} \frac{\partial y_j \circ \zeta^x}{\partial y_l}(0, y) \\ &= \sum_{k,l=1}^n \hat{\mathcal{V}}_{k,l}(0, y) \frac{\partial y_i \circ \Phi}{\partial y_k} \frac{\partial y_j \circ \Phi}{\partial y_l}(x, y) \\ &= \{y_i \circ \Phi, y_j \circ \Phi\}^{\hat{\mathcal{V}}_0}(x, y), \end{aligned}$$

autrement dit, en considérant $\hat{\mathcal{V}}_0$ comme 2-vecteur sur $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^n$ entier : $\hat{\mathcal{V}}_0(x, y) = \sum_{k,l=1}^n \mathcal{V}_{k,l}(0, y) \partial y_k \wedge \partial y_l$, on a

$$(\Phi)^* \hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{V}}_0.$$

De manière plus générale, ce qui précède prouve qu' il y a équivalence, pour un tenseur vertical, entre être localement trivial, est être invariant par une connection. Il devient ainsi clair que, puisqu'il existe par hypothèse, $x \in S$ pour lequel \mathcal{V} soit linéarisable, celà est vrai pour tout $x \in S$, il existe donc un difféomorphisme Λ_0 , défini sur un voisinage de 0 dans $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, tel que $(\Lambda_0)^*\hat{\mathcal{V}}_0$ soit linéaire. On a donc : $[L, (\Lambda_0)^*\hat{\mathcal{V}}_0] = -(\Lambda_0)^*\hat{\mathcal{V}}_0$, et par transport de structure $[(\phi \circ \Lambda_0)_*L, \hat{\mathcal{V}}] = \hat{\mathcal{V}}$. Il suffit alors de poser $Z_i = (\psi_i^{-1} \circ \phi \circ \Lambda_0)_*L$. Z_i vérifie alors clairement la condition 3.2.1, la condition 3.2.2 est aussi satisfaite car, comme on peut le vérifier facilement, la partie d'ordre un du champ de Liouville L est invariante par tout difféomorphisme.

Si $(\rho_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité de S subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$, on pose, pour tout $e \in E$:

$$Z_{(e)} := \sum_{i \in I} \rho_i(p(e)) \cdot Z_{i(e)},$$

on a alors, puisque les fonctions $\rho_i \circ p$ sont basiques :

$$\begin{aligned} [Z, \mathcal{V}] &= \sum_{i \in I} [\rho_i \circ p \cdot Z_i, \mathcal{V}] \\ &= \sum_{i \in I} \rho_i \circ p \cdot [Z_i, \mathcal{V}] \\ &= - \sum_{i \in I} \rho_i \circ p \cdot \mathcal{V} \\ &= -\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Puisque $Z^{(1)} = L$, il existe un difféomorphisme fibré Ψ (non-linéaire en les fibres), défini sur un voisinage de S , tel que $(\Psi)_*Z = L$, la partie verticale $(\Psi)_*\mathcal{V}$ de $(\Psi)_*\Pi$ vérifie donc :

$$[L, (\Psi)_*\mathcal{V}] = -(\Psi)_*\mathcal{V},$$

ce qui implique que $(\Psi)_*\mathcal{V}$ est linéaire. \square

Remarque 3.2.1. On a construit au cours de cette démonstration un difféomorphisme fibré Φ tel que, localement :

$$\mathcal{V} = \Phi_*\mathcal{V}_0,$$

où \mathcal{V}_0 est une structure constante. On retrouve ainsi le résultat d'unicité (à difféomorphisme près) de la structure de Poisson transverse à une feuille de Weinstein (voir [We3]).

Remarque 3.2.2. La proposition 3.2.1 permet, d'après la décomposition 3.1.5, d'écrire Π sous la forme

$$\Pi = \Pi_H + \mathcal{V}^{(1)}.$$

La structure induite sur E par un 2-vecteur de Poisson vertical et linéaire est communément appelée structure de fibré en algèbre de Lie (localement triviale). Contre toute attente, relativement peu de choses sont connues sur les invariants des fibrés en algèbres de Lie. Les fibrés en algèbres de Lie semi-simples devraient notamment donner lieu à des développements intéressants.

Pour fixer les idées, supposons que le fibré E soit trivial : $E = S \times \mathbb{R}^n$, et considérons (y_1, \dots, y_n) une paramétrisation de \mathbb{R}^n . Le résultat précédent permet alors d'affirmer que, à un difféomorphisme près, \mathcal{V} prend la forme :

$$\mathcal{V}_x = \sum_{i,j=1\dots n} \mathcal{V}_{i,j}^k(x) y_k \partial y_i \wedge \partial y_j,$$

où $\mathcal{V}_{i,j}^k \in C^\infty(S)$.

Comme nous le verrons plus tard, dans le cas où $\mathcal{V}_x^{(1)}$ est associée à l'algèbre de Lie so_3 , on peut toujours se débrouiller pour que ces fonctions soient constantes. En général, ce n'est pas toujours le cas, car il arrive que la structure \mathcal{V} "tourne sur elle-même". Autrement dit, E peut être trivial en tant que fibré vectoriel, mais non-trivial en tant que fibré en algèbres de Lie. Donnons un tel exemple de fibré en algèbre de Lie, provenant d'une structure de Poisson.

Exemple 2. Notons $T^2 = S^1 \times S^1$ le tore de dimension deux, paramétré par (θ_1, θ_2) , définis modulo 2π . On considère sur le fibré $E := T^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow T^2$ la structure de Poisson dont les crochets sont définis par :

$$\begin{aligned} \{\theta_1, \theta_2\} &= 1, & \{\theta_2, y\} &= \frac{z}{2}, \\ \{\theta_2, z\} &= -\frac{y}{2}, & \{x, y\} &= y \sin \theta_1 - z \cos \theta_1, \\ \{y, z\} &= x, & \{z, x\} &= y \cos \theta_1 + z \sin \theta_1. \end{aligned}$$

La décomposition 3.1.5 de Π prend alors la forme

$$\Pi = \left(\partial \theta_1 - \frac{z}{2} \partial y + \frac{y}{2} \partial z \right) \wedge \theta_2 + (y \sin \theta_1 - z \cos \theta_1) \partial x \wedge \partial y + x \partial y \wedge \partial z + (y \cos \theta_1 + z \sin \theta_1) \partial z \wedge \partial x.$$

avec

$$\mathcal{V} = (y \sin \theta_1 - z \cos \theta_1) \partial x \wedge \partial y + x \partial y \wedge \partial z + (y \cos \theta_1 + z \sin \theta_1) \partial z \wedge \partial x.$$

Ici, $\mathcal{V}_{(\theta_1, \theta_2)}$ est isomorphe à la structure de Poisson sur sl_2^* pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in T^2$, cependant, il est impossible de rendre ses constantes de structures indépendantes de (θ_1, θ_2) car l'axe de révolution de $sl_2^* = \mathcal{V}_{(\theta_1, \theta_2)}$ réalise un ruban de Möbius lorsque θ_1 varie le long de S^1 . La non-trivialité d'une telle structure semble ici liée à la non-connectivité des surfaces de niveau du Casimir de sl_2^* .

3.2.2 Linéarisation de la connection

Le résultat qui suit sera utilisé plus tard afin de linéariser la connection Γ , avant de l'énoncer, introduisons la définition suivante : on dira qu'une structure de Poisson Λ possède un premier espace de cohomologie $H^1(\Lambda)$ *différentiablement* nul si, pour toute famille lisse X_s de champs de vecteurs à paramètres s à valeurs dans un ouvert U de \mathbb{R}^p , laissant Λ invariant (autrement dit satisfaisant $[X_s, \Lambda] = 0 \forall s \in U$) il existe une famille lisse $(f_s)_s$ de fonctions telles que $[\Lambda, f_s] = X_s \quad \forall s \in U$.

Remarque 3.2.3. La question de savoir si toute structure de Poisson dont le premier espace de cohomologie est nul l'est différemment est simple mais subtile sans hypothèses supplémentaires. Dans le cas des algèbres de Lie semi-simples compactes, l'existence d'un opérateur d'homotopie assure que cette condition est vérifiée (voir [Mo-Zu])

Proposition 3.2.2. *Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel $p : E \rightarrow S$ au-dessus d'une base S compacte, de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$, où le premier espace de cohomologie $H^1(\mathcal{V}_x)$ de \mathcal{V} en un quelconque $x \in S$ est différemment trivial, et Γ' une connection laissant \mathcal{V} invariante.*

Alors le germe de Π le long de S est équivalent à celui d'une structure de donnée géométrique $(\Gamma', \mathcal{V}, \mathcal{F}')$, pour un certain \mathcal{F}' .

preuve :

D'après la proposition 3.1.4, il suffit de montrer l'existence d'une 1-forme ϕ sur S à valeurs dans $C^\infty(E)$, $\phi \in \Omega^1(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ telle que :

$$\Gamma = \Gamma' + \mathcal{V}^\sharp(d\phi)^h.$$

Or, si $(\rho_j)_{j \in J}$ est une partition de l'unité de S subordonnée à un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts trivialisants pour le fibré E , localement, sur U_i , Γ et Γ' prennent la forme :

$$\begin{aligned}\Gamma(\partial x_i) &= -\sum_{k=1}^n \beta_{i,k} \partial y_k \\ \Gamma'(\partial x_i) &= -\sum_{k=1}^n \beta'_{i,k} \partial y_k,\end{aligned}$$

et puisque Γ et Γ' laissent tous deux invariants \mathcal{V} , pour tout $i = 1 \dots 2s$:

$$\left[\sum_{k=1}^n (\beta_{i,k} - \beta'_{i,k}) \partial y_k, \mathcal{V} \right] = 0.$$

Ce qui signifie que $\sum_{k=1}^n (\beta_{i,k} - \beta'_{i,k}) \partial y_k$ est un 1-cocycle de la cohomologie de Poisson de \mathcal{V} , par hypothèse, il existe donc $\phi_i \in C^\infty(p^{-1}(U_j))$ telle que

$$[\mathcal{V}, \phi] = \sum_{k=1}^n (\beta_{i,k} - \beta'_{i,k}) \partial y_k.$$

En posant $\phi^j := \sum_{i=1 \dots n} \phi_i \otimes dx_i$ on obtient bien sur $p^{-1}(U_j)$ une 1-forme telle que :

$$\Gamma = \Gamma' + \mathcal{V}^{(1)\sharp}(d\phi^j)^h.$$

On vérifie alors aisément que, par partition de l'unité, $\phi := \sum_{j \in J} \rho_j \circ p.\phi^j$ répond au problème.

□

Corollaire 3.2.1. *Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel $p : E \mapsto S$ au-dessus d'une base S compacte, de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}^{(1)}, \mathcal{F})$, où $\mathcal{V}^{(1)}$ désigne un tenseur vertical linéaire, dont le premier espace de cohomologie $H^1(\mathcal{V}_x^{(1)})$ est différentiablement trivial, pour un quelconque $x \in S$.*

Alors le germe de Π le long de S est équivalent à celui d'une structure de donnée géométrique $(\Gamma^{(1)}, \mathcal{V}^{(1)}, \mathcal{F}')$, où $\Gamma^{(1)}$ désigne la partie linéaire de la connection Γ .

preuve :

Commençons par préciser ce que l'on entend par partie linéaire de la connection Γ : avec les mêmes notations que précédemment, pour (x_1, \dots, x_n) un système de

coordonnées locales sur un ouvert trivialisant pour E de S , et (y_1, \dots, y_n) des coordonnées sur les fibres, on a :

$$\text{hor}(\partial x_i) = \partial x_i + \sum_{j=1 \dots n} \beta_{i,j} \partial y_j.$$

On peut décomposer $\beta_{i,j}$ en partie linéaire et partie d'ordre supérieur à un :

$$\beta_{i,j}(x, y) = \beta_{i,j}^k(x) y_k + \hat{\beta}_{i,j}(x, y).$$

La partie linéaire $\Gamma^{(1)}$ de Γ peut être définie comme la connection dont les relevés horizontaux sont :

$$\text{hor}^{(1)}(\partial x_i) = \partial x_i + \sum_{j=1 \dots n} \beta_{i,j}^k y_k \partial y_j.$$

Notons qu'une telle connection linéaire préserve la structure de fibré vectoriel, et correspond à un opérateur de dérivée covariante ∇ sur E^* , en posant $\nabla_X \alpha = (\mathcal{L}_{\text{hor}(X)} \alpha)^{(1)} \in E^*$.

En isolant les termes d'ordre un dans l'expression :

$$\left[\sum_{j=1 \dots n} \hat{\beta}_{i,j} \partial y_j, \mathcal{V}^{(1)} \right] = 0,$$

on s'aperçoit alors que $\Gamma^{(1)}$ laisse \mathcal{V} invariante, il suffit donc d'appliquer la proposition précédente. \square

On peut aussi formuler un théorème de linéarisation globale le long de S comme suit

Théorème 3.2.1. *Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel $p : E \rightarrow S$ au-dessus d'une base S compacte, de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$, où \mathcal{V} désigne un tenseur vertical, dont la partie linéaire $\mathcal{V}_x^{(1)}$ possède un premier espace de cohomologie $H^1(\mathcal{V}_x^{(1)})$ est différentiablement trivial pour un quelconque $x \in S$, et tel que $\mathcal{V}_{x'}$ soit linéarisable (en tant que structure de Poisson sur $E_{x'}$ pour un quelconque $x' \in S$).*

Alors le germe de Π le long de S est équivalent à celui d'une structure de donnée géométrique $(\Gamma^{(1)}, \mathcal{V}^{(1)}, \mathcal{F}')$, pour un certain \mathcal{F}' .

preuve :

Il suffit d'appliquer successivement la proposition 3.2.1 et le corollaire 3.2.1 \square

3.3 Global splitting

Le théorème précédent permet d'écrire $\Pi = \Pi_H + \mathcal{V}$ sous la forme $\Pi = \Pi_H + \mathcal{V}^{(1)}$, il donne donc bien un résultat de linéarisation globale de la partie verticale \mathcal{V} . Il semble cependant que l'on ne contrôle pas vraiment la 2-forme \mathcal{F} . Il convient de se demander ce que l'on peut attendre de \mathcal{F} , or cette dernière est intimement liée à la courbure de Γ . On a par ailleurs vu dans la proposition 3.1.3 que, dans la décomposition $\Pi = \Pi_H + \mathcal{V}$, le 2-vecteur Π_H est de Poisson si et seulement si Γ est sans courbure. Cette éventualité ne peut donc avoir lieu que si le fibré E admet une connexion plate. On voit ainsi qu'apparaissent des interactions entre la façon dont la feuille S s'injecte dans la variété ambiante et le germe de la structure de Poisson Π le long de S . Dans [Fer1], Fernandes donne un contre-exemple non-trivial de cette situation.

Ce problème, dit de global splitting correspond en fait à la globalisation le long de S du splitting theorem de Weinstein ([We3]). La proposition suivante permet une réponse partielle :

Proposition 3.3.1. *Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel $p : E \mapsto S$ au-dessus d'une base S compacte, de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$, où le premier espace de cohomologie $H^1(\mathcal{V}_x)$ de \mathcal{V} en un quelconque $x \in S$ est différentiablement trivial. S'il existe une connexion plate Γ' laissant \mathcal{V} invariante, alors, modulo un difféomorphisme, au voisinage de S , Π se décompose sous la forme*

$$\Pi_H + \mathcal{V},$$

où Π_H et \mathcal{V} désignent des structures de Poisson, avec Π_H régulière, et \mathcal{V} verticale, nulle sur S .

preuve :

Il suffit d'appliquer les propositions 3.2.2 et 3.1.3. \square

L'intérêt de ce résultat est non seulement de décomposer Π en somme de deux structures de Poisson compatibles, mais il permet aussi de définir l'holonomie stricte (voir [Fer1]) qui correspond à l'holonomie associée à la connexion sans courbure Γ .

3.4 Le cas transversalement semi-simple compact

Comme toujours, le cas des algèbres semi-simples permet des investigations plus poussées de la situation.

3.4.1 Linéarisabilité

Un résultat très difficile de Conn stipule que les algèbres de Lie semi-simples [Co1], [Co3] (respectivement semi-simples compactes [Co2]) sont non-dégénérées en classe analytique (respectivement C^∞) autrement dit, toute structure de Poisson, nulle en un point, et dont la partie linéaire est une algèbre de Lie semisimple (respectivement semi-simple compacte est analytiquement (respectivement C^∞ -) linéarisable. On sait par ailleurs que, dans le cas des algèbres $\mathcal{V}_x^{(1)}$ semi-simples compactes, le premier espace de cohomologie $H^1(\mathcal{V}_x^{(1)})$ est différentiablement nul. Les conditions du théorème 3.2.1 sont ainsi vérifiées, et on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel $p : E \rightarrow S$ au-dessus d'une base S compacte, de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$, où \mathcal{V} désigne un tenseur vertical dont la partie linéaire $\mathcal{V}_x^{(1)}$ est associée à une algèbre semi-simple compacte.*

Alors le germe de Π le long de S est équivalent à celui d'une structure de donnée géométrique $(\Gamma^{(1)}, \mathcal{V}^{(1)}, \mathcal{F}')$, pour un certain \mathcal{F}' .

3.4.2 Invariants semi-locaux de Casimir

On suppose désormais que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(1)}$ est une structure de Poisson linéaire associée à une algèbre de Lie semisimple compacte. Notons $Casim_{\mathcal{V}^{(1)}}^k$ le sous fibré de $S^k(E)$ constitué des polynômes homogènes de degrés k invariants par $\mathcal{V}^{(1)}$. Ces sous fibrés sont de dimension 0 ou 1 pour tout k , engendrés par $tr(ad^k)$, vu comme des sections de $S^k(E)$. Les fibrés de rang 1 ainsi définis sont donc tous triviaux, par ailleurs condition (ii) indique que la formule

$$\nabla_X \alpha := hor^{(1)}(X)(\alpha)$$

définit une connexion ∇ plate sur chacun d'eux. On peut ainsi définir l'holonomie de la connexion ∇ sur ces fibrés. Ceci nous permet de mesurer le comportement

du feuilletage de \mathcal{V} lorsque l'on se déplace suivant les relèvements horizontaux de la connexion ∇ . Autrement dit, si $\gamma : S^1 \rightarrow S$ désigne un lacet dans S , et $\hat{\gamma} : S^1 \rightarrow E$ le relèvement horizontal correspondant, l'accroissement de chaque casimir le long de $\hat{\gamma}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ .

Notons que les invariants ainsi définis nous renseignent plus sur la façon dont le feuilletage de Π s'intègre à celui de \mathcal{V} que sur le feuilletage de \mathcal{V} en lui-même (pour un même \mathcal{V} , deux connexions différentes pouvant mener à des holonomies différentes).

3.4.3 le cas so_3

Intéressons-nous au cas d'une structure de Poisson Π horizontalement non-dégénérée sur un fibré E , de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$, où $\mathcal{V}_x^{(1)}$ est associé à l'algèbre de Lie semi-simple compacte so_3 . Dans le but d'arriver à une forme normale semi-locale la plus synthétique possible, on doit supposer que E admet une connexion plate, nous supposons donc carrément que E est un fibré vectoriel trivial : $E = S \times \mathbb{R}^3$.

Le théorème 3 nous permet de nous ramener à une structure de donnée géométrique $(\Gamma^{(1)}, \mathcal{V}^{(1)}, \mathcal{F}')$, et la forme de Killing k de $\mathcal{V}^{(1)}$ induit sur E^* une structure euclidienne. Commençons par montrer qu'il existe une base de sections orthonormée pour k .

Lemme *Soit F un fibré vectoriel trivial de rang n muni d'une structure Euclidienne k . Il existe une base de sections orthonormées pour k .*

preuve :

Par récurrence sur n , le résultat est évident lorsque $n=1$, et, pour $n > 1$ quelconque, on choisit une section non-nulle y de F et on pose $y_1 := \frac{y}{k(y,y)}$. Il suffit alors de s'assurer que le sous-fibré orthogonal à y_1 , de dimension $n - 1$, est bien trivial, or ce dernier est engendré par des sections $\{y_i - k(y_1, y_i)y_1, i = 2 \dots n\}$ où $\{y_i, i = 1 \dots n\}$ est une base de sections de F . \square

Ce lemme permet de nous assurer de l'existence de sections y_1, y_2, y_3 de E^* pour laquelle la norme $|\cdot|_k$ associée à k prend la forme : $|\cdot|_k^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. À priori

$$\Pi = \Pi_H + \oint_{1,2,3} \left(\sum_{k=1,2,3} \mathcal{V}_1^k(x) y_k \right) \partial y_2 \wedge y_3,$$

mais puisque $\mathcal{V}^{(1)}$ laisse k invariante, on a :

$$[\mathcal{V}^{(1)}, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2] = 0$$

En développant cette expression on s'aperçoit que nécessairement

$$\mathcal{V}^{(1)} = f(x) \oint_{1,2,3} y_1 \partial y_2 \wedge \partial y_3.$$

où $f \in C^\infty(S)$. Ce qui signifie que la structure de Poisson associée à so_3 , sous la forme $\oint_{1,2,3} y_1 \partial y_2 \wedge \partial y_3$, est la seule structure de Poisson linéaire sur \mathbb{R}^3 (à multiplication près) admettant $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ pour casimir. En effet, en notant $\mathcal{V}_i := \sum_{k=1}^3 \mathcal{V}_i^k y_k$, on calcule que :

$$\begin{aligned} [\mathcal{V}_1 \partial y_2 \wedge \partial y_3, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2] &= [\mathcal{V}_1 \partial y_2 \wedge \partial y_3, y_2^2 + y_3^2] \\ &= [\mathcal{V}_1 \partial y_2, y_2^2] y_3 - \mathcal{V}_1 \partial y_2 [\partial y_3, y_3^2] \\ &= 2\mathcal{V}_1 y_2 \partial y_3 - 2y_3 \mathcal{V}_1 \partial y_2, \end{aligned}$$

dont on déduit que :

$$\begin{aligned} [\mathcal{V}, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2] &= [\mathcal{V}_1 \partial y_2 \wedge \partial y_3 + \mathcal{V}_2 \partial y_3 \wedge \partial y_1 + \mathcal{V}_3 \partial y_1 \wedge \partial y_2] \\ &= 2\mathcal{V}_1 y_2 \partial y_3 - 2y_3 \mathcal{V}_1 \partial y_2 + 2\mathcal{V}_2 y_3 \partial y_1 - 2y_1 \mathcal{V}_2 \partial y_3 + 2\mathcal{V}_3 y_1 \partial y_2 - 2y_2 \mathcal{V}_3 \partial y_1 \\ &= 2(\mathcal{V}_3 y_2 - \mathcal{V}_2 y_3) \partial y_1 + 2(\mathcal{V}_1 y_3 - \mathcal{V}_3 y_1) \partial y_2 + 2(\mathcal{V}_2 y_1 - \mathcal{V}_1 y_2) \partial y_3. \end{aligned}$$

On a donc :

$$[\mathcal{V}, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{V}_3 y_2 = \mathcal{V}_2 y_3 \\ \mathcal{V}_1 y_3 = \mathcal{V}_3 y_1 \\ \mathcal{V}_2 y_1 = \mathcal{V}_1 y_2 \end{cases}$$

ainsi, dans la première équation, en remplaçant \mathcal{V}_3 et \mathcal{V}_2 par leurs expressions respectives $\mathcal{V}_3^1 y_1 + \mathcal{V}_3^2 y_2 + \mathcal{V}_3^3 y_3$ et $\mathcal{V}_2^1 y_1 + \mathcal{V}_2^2 y_2 + \mathcal{V}_2^3 y_3$, on a nécessairement :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3^1 = \mathcal{V}_3^2 = \mathcal{V}_3^3 = \mathcal{V}_2^1 = 0 \\ \mathcal{V}_3^3 = \mathcal{V}_2^2. \end{aligned}$$

On déduit de même des autres équations que tous les \mathcal{V}_i^j , $i \neq j$ sont nuls et que :

$$\mathcal{V}_1^1 = \mathcal{V}_2^2 = \mathcal{V}_3^3,$$

on note cette unique fonction f , et on a bien $\mathcal{V}^{(1)} = f(x) \oint_{1,2,3} y_1 \partial y_2 \wedge \partial y_3$. Il suffit ensuite de remplacer y_i par $\frac{y_i}{f}$ pour avoir

$$\mathcal{V}^{(1)} = \oint_{1,2,3} y_1 \partial y_2 \wedge \partial y_3.$$

Le fait que l'expression de $\mathcal{V}^{(1)}$ dans la base (y_1, y_2, y_3) ne dépende pas de $x \in S$ se traduit par le fait que la connexion Γ' induite par la trivilisation (y_1, y_2, y_3) laisse $\mathcal{V}^{(1)}$ invariante. Cette dernière étant plate, en appliquant la proposition 3.2.2, on en déduit que, à un difféomorphisme près, le germe de Π le long de S prend la forme :

$$\Pi = \Pi_H + \oint_{1,2,3} y_1 \partial y_2 \wedge y_3,$$

où Π_H est une structure de Poisson. On peut donc énoncer le résultat combiné de linéarisation et de global splitting comme suit :

Théorème 3.4.2. *Soit Π une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel trivial $p : E \mapsto S$ au-dessus d'une base S compacte, de donnée géométrique $(\Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{F})$, où \mathcal{V} désigne un tenseur vertical dont la partie linéaire $\mathcal{V}_x^{(1)}$ est associée à l'algèbre semi-simple compacte \mathfrak{so}_3 .*

Alors le germe de Π le long de S prend la forme :

$$\Pi = \Pi_H + \oint_{1,2,3} y_1 \partial y_2 \wedge y_3,$$

où Π_H est une structure de Poisson régulière.

Annexe A

Principe d'homotopie de Moser

Le principe d'homotopie de Moser est un puissant outil pour montrer que deux tenseurs sont isomorphes.

Nous le présentons ici dans le cas de champs de 2–vecteurs et de formes symplectiques, ensuite, on montre que la proposition 3.1.4 correspond en fait à une version à paramètres du principe d'homotopie de Moser pour les formes symplectiques.

A.1 Homotopies de champs de vecteurs

Soient $\Pi_1, \Pi_0 \in \chi(\Lambda^2 TM)$ deux champs de 2–vecteurs sur une variété lisse M . Il s'agit de trouver un difféomorphisme Φ de M tel que :

$$\Phi_*\Pi_1 = \Pi_0.$$

Plutôt que de chercher directement Φ , on se donne un chemin

$$\begin{aligned} \Pi : [0, 1] &\longmapsto \chi(\Lambda^2 TM) \\ t &\longmapsto \Pi_t \end{aligned}$$

reliant Π_0 et Π_1 . On se propose alors de trouver une famille $(\Phi_t)_{t \in [0,1]}$ à un paramètre de difféomorphismes tels que :

$$(A.1.1) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \Phi_{t*}\Pi_t = \Pi_0.$$

Pour celà, il suffit de trouver un champ de vecteurs X_t dépendant du temps, pour $t \in [0, 1]$ tel que

$$\mathcal{L}_{X_t}\Pi_t + \frac{d}{dt}\Pi_t = 0.$$

En effet, en différenciant par rapport à t , on voit que l'équation A.1.1 est équivalente à :

$$\begin{cases} \Phi_{0*}\Pi_0 & = \Pi_0 \\ \frac{d}{dt}\Phi_{t*}\Pi_t & = 0. \end{cases}$$

Si Φ_t désigne le flot de X_t , on a alors bien

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t*}\Pi_t = \Phi_{t*}(\mathcal{L}_{X_t}\Pi_t + \frac{d}{dt}\Pi_t) = 0.$$

Le choix du chemin Π_t est évidemment crucial, dans le cas le plus simple, il suffit de prendre le segment entre Π_0 et Π_1 :

$$\Pi_t = (1 - t)\Pi_0 + t\Pi_1,$$

dans ce cas, il faut que $[\Pi_0, \Pi_1] = 0$ afin que Π_t soit bien une structure de Poisson pour tout t , on dit alors que les structures Π_0 et Π_1 sont compatibles. Cette condition, bien que très contraignante, n'assure bien sûr pas l'existence du champ X_t en général.

A.2 Homotopies de formes symplectiques

Le principe d'homotopie de Moser s'applique tel quel pour des formes : afin d'établir un isomorphisme entre deux k -formes ω_0 et ω_1 , il suffit d'exhiber un champ de vecteurs X_t tel que

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega_t = -\frac{d}{dt}\omega_t,$$

où ω_t désigne un chemin entre ω_0 et ω_1 . La démonstration est similaire à celle précédemment présentée pour les champs de vecteurs.

Dans la suite on suppose ω_0 et ω_1 symplectiques : puisqu'il est nécessaire que ω_t le soit, l'équation précédente se ramène alors à

$$di_{X_t}\omega_t = -\frac{d}{dt}\omega_t.$$

Le choix du chemin ω_t est souvent beaucoup plus simple dans le cas des formes, par exemple si, on prend

$$\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1,$$

la 2-forme ω_t est fermée pour tout t sans hypothèse supplémentaire, elle est de plus non-dégénérée pour tout t pourvu que ω_0 et ω_1 soit suffisamment proches (c'est le cas par exemple dans le voisinage d'une sous-variété sur laquelle ω_0 et ω_1 coïncident, voir [Du-Sa]). Pour ce chemin, X_t doit vérifier :

$$di_{X_t}\omega_t = \omega_0 - \omega_1.$$

Le cas le plus simple est lorsque $\omega_1 - \omega_0 = d\lambda$ où $\lambda \in \Omega^1(M)$ (ce qui est toujours vrai localement) : avec le chemin précédent, il suffit de vérifier que

$$(A.2.1) \quad i_{X_t}\omega_t = \lambda,$$

équation qui possède une unique solution dès que ω_t est non-dég'énérée. C'est par exemple ainsi que l'on peut montrer l'équivalence locale de deux formes symplectiques qui coïncident en un point.

On va voir que c'est cette dernière version du principe d'homotopie de Moser, appliquée feuille à feuille, qui se cache derrière la proposition 3.1.4.

A.3 Homotopie de données géométriques

Il s'agit de montrer que, dans la proposition 3.1.4, la forme symplectique ω_t induite par Π_t sur chaque feuille est de la forme

$$\omega_t = \omega_0 + td\lambda,$$

il est alors facile de voir que l'équation 3.1.7, qui définit le champ X_t réalisant l'homotopie, correspond sur chaque feuille à l'équation A.2.1.

Commençons par remarquer que le feuilletage reste invariant par l'homotopie. En effet, pour tout $x \in E$ pour lequel l'homotopie est définie $\forall t \in [0, 1]$, la forme 3.1.4 montre que la distribution caractéristique de Π_t au point x est engendrée par les

champs horizontaux X_i^t et par les champs hamiltoniens de \mathcal{V} , on voit alors que

$$\begin{aligned} \text{Im}(\Pi_t^\sharp)_x &= \text{Vect}\{X_{ix}^t, \mathcal{V}_x^\sharp(dx y_j), i = 1 \dots 2s, j = 1 \dots n\} \\ &= \text{Vect}\{X_{ix} + t\mathcal{V}_x^\sharp(dx \phi_i), \mathcal{V}_x^\sharp(dx y_j), i = 1 \dots 2s, j = 1 \dots n\} \\ &= \text{Vect}\{X_i, \mathcal{V}_x^\sharp(dx y_j), i = 1 \dots 2s, j = 1 \dots n\} \\ &= \text{Im}\Pi_x^\sharp. \end{aligned}$$

On peut donc se fixer une feuille F , et noter ω_t la forme symplectique induite par Π_t sur F . Il s'agit alors dans un premier d'évaluer ω_t sur une famille (indépendante de t) de champs qui engendre l'espace tangent à la feuille. Pour cela, on va calculer

$$\begin{aligned} \omega_0(X_i^0, X_j^0), \\ \omega_0(X_i^0, \mathcal{V}^\sharp(df)), \\ \omega_0(\mathcal{V}^\sharp(df), \mathcal{V}^\sharp(dg)), \end{aligned}$$

on obtient alors aussi des formules similaires pour

$$\begin{aligned} \omega_t(X_i^t, X_j^t), \\ \omega_t(X_i^t, \mathcal{V}^\sharp(df)), \\ \omega_t(\mathcal{V}^\sharp(df), \mathcal{V}^\sharp(dg)), \end{aligned}$$

on pourra alors en déduire

$$\begin{aligned} \omega_t(X_i^0, X_j^0), \\ \omega_t(X_i^0, \mathcal{V}^\sharp(df)), \\ \omega_t(\mathcal{V}^\sharp(df), \mathcal{V}^\sharp(dg)), \end{aligned}$$

et comparer ces dernières expressions à celles pour $\omega_0 + t\lambda$.

Lemme A.3.1. *Soit F une feuille du feuilletage symplectique associé à une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel E , et ω la forme symplectique engendrée par Π sur F . Avec les notations du chapitre 2, on a :*

$$\omega(X_i, X_j) = \mathcal{F}_{i,j}.$$

preuve :

Bien que le résultat semble évident compte tenu de la définition même de \mathcal{F} , il convient de le vérifier en détail. Par définition de ω , on a, pour tous $i, j = 1 \dots 2s$

$$\omega(\Pi^\sharp(dx_i), \Pi^\sharp(dx_j)) = 2\Pi_{i,j}^X.$$

Or les relèvements horizontaux X_i vérifient (voir p.31)

$$\Pi^\sharp(dx_i) = \sum_{r=1\dots 2s} 2\Pi_{i,r}^X \partial x_r + \sum_{l=1\dots n} 2\Pi_{i,l}^{XY} \partial y_l = \sum_{r=1\dots 2s} 2\Pi_{i,r}^X X_r,$$

on en déduit successivement

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s=1\dots 2s} 4\Pi_{i,r}^X \Pi_{j,s}^X \omega(X_r, X_s) &= & 2\Pi_{i,j}^X \\ \Rightarrow & \sum_{r,s,a,b=1\dots 2s} \Pi_{a,i}^X{}^{-1} \Pi_{b,j}{}^{-1} \Pi_{i,r}^X \Pi_{j,s}^X \omega(X_r, X_s) &= & \frac{1}{2} \sum_{a,b=1\dots 2s} \Pi_{a,i}^X{}^{-1} \Pi_{b,j}{}^{-1} \Pi_{i,j}^X \\ \Rightarrow & \omega(X_a, X_b) &= & -\frac{1}{2} \Pi_{a,b}^X \quad \square \end{aligned}$$

Lemme A.3.2. *Soit F une feuille du feuilletage symplectique associé à une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel E , et ω la forme symplectique engendrée par Π sur F . Avec les notations du chapitre 2, on a, pour toute fonction $f \in C^\infty(E)$:*

$$\omega(X_r, \mathcal{V}^\sharp(df)) = 0.$$

preuve :

Ce résultat aussi semble évident, les relevés horizontaux X_i étant définis comme les images par Π^\sharp de l'annulateur Ver^0 du sous-fibré vertical Ver auquel appartiennent les champs de la forme $\mathcal{V}^\sharp(df)$, vérifions-le tout de même par le calcul.

On a par définition, pour tous $i = 1 \dots 2s, p = 1 \dots n$:

$$\omega(\Pi^\sharp(dx_i), \Pi^\sharp(dy_p)) = 2\Pi_{i,p}^{XY},$$

et puisque $\Pi^\sharp(dx_i) = \sum_{r=1\dots 2s} 2\Pi_{i,r}^X X_r$, on en déduit que pour tous $i = 1 \dots 2s, p = 1 \dots n$

$$2 \sum_{r=1\dots 2s} \Pi_{i,r}^X \omega(X_r, \Pi^\sharp(dy_p)) = 2\Pi_{i,p}^{XY},$$

et par inversibilité de la matrice $(\Pi_{i,j}^X)$ on obtient :

$$(A.3.1) \quad \omega(X_r, \Pi^\sharp(dy_p)) = \sum_{i=1\dots 2s} \Pi_{r,i}^X{}^{-1} \Pi_{i,p}^{XY}.$$

Or, d'après la formule définissant \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{p,q} &:= \Pi_{p,q}^Y - \frac{1}{2} \sum_{l=1\dots 2s} \beta_{l,p} \Pi_{l,q}^{XY} - \beta_{l,q} \Pi_{l,p}^{XY} \\ &= \Pi_{p,q}^Y - \frac{1}{2} \sum_{l,j=1\dots 2s} \Pi_{l,j}^X{}^{-1} \Pi_{j,p}^{XY} \Pi_{l,q}^{XY} - \Pi_{l,j}^X{}^{-1} \Pi_{j,q}^{XY} \Pi_{l,p}^{XY} \\ &= \Pi_{p,q}^Y + \sum_{k,l=1\dots 2s} \Pi_{k,l}^X{}^{-1} \Pi_{k,p}^{XY} \Pi_{l,q}^{XY}, \end{aligned}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}\Pi^\sharp(dy_p) &= 2 \sum_{i=1\dots 2s} -\Pi_{i,p}^{XY} \partial x_i + \sum_{l=1\dots n} \Pi_{p,q}^Y \partial y_l \\ &= 2 \sum_{i=1\dots 2s} -\Pi_{i,p}^{XY} \partial x_i - \sum_{k,l=1\dots 2s} \Pi_{k,l}^X{}^{-1} \Pi_{k,p}^{XY} \Pi_{l,q}^{XY} + \mathcal{V}^\sharp(dy_p) \\ &= -2 \sum_{i=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^{XY} \partial X_i + \mathcal{V}^\sharp(dy_p),\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\omega(X_r, \Pi^\sharp(dy_p)) &= \omega(X_r, - \sum_{j=1\dots 2s} \Pi_{j,p}^{XY} \partial X_j + \mathcal{V}^\sharp(dy_p)) \\ &= -2 \sum_{i=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^{XY} \omega(X_i, X_r) + \omega(X_r, \mathcal{V}^\sharp(dy_p)) \\ &= \sum_{i=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^{XY} \Pi_{r,i}^X{}^{-1} \Pi_{i,p}^{XY} + \omega(X_r, \mathcal{V}^\sharp(dy_p)).\end{aligned}$$

Par soustraction avec l'équation A.3.1, on a bien

$$\omega(X_r, \mathcal{V}^\sharp(dy_k)) = 0,$$

d'où le résultat. \square

Lemme A.3.3. *Soit F une feuille du feuilletage symplectique associé à une structure de Poisson horizontalement non-dégénérée sur un fibré vectoriel E , et ω la forme symplectique engendrée par Π sur F . Avec les notations du chapitre 2, on a, pour toutes fonctions $f, g \in C^\infty(E)$:*

$$\omega(\mathcal{V}^\sharp(df), \mathcal{V}^\sharp(dg)) = \{f, g\}_\mathcal{V}.$$

preuve :

Par définition, on a

$$\omega(\Pi^\sharp(dy_p), \Pi^\sharp(dy_q)) = 2\Pi_{p,q}^Y,$$

or on a vu au cours du lemme précédent que :

$$\Pi^\sharp(dy_p) = - \sum_{i=1\dots 2s} \Pi_{i,p}^{XY} X_i + \mathcal{V}^\sharp(dy_p),$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\omega(\mathcal{V}^\sharp(dy_p), \mathcal{V}^\sharp(dy_q)) &= \Pi_{p,q}^Y - \sum_{k,l=1\dots 2s} \Pi_{p,k}^{XY} \Pi_{q,l}^{XY} \omega(X_k, X_l) \\ &= \Pi_{p,q}^Y + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1\dots 2s} \Pi_{p,k}^{XY} \Pi_{q,l}^{XY} \Pi_{k,l}^X{}^{-1} \\ &= \mathcal{V}_{p,q},\end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

On peut maintenant utiliser ces résultats pour nos propos : on déduit du lemme A.3.3 que

$$\omega_t(\mathcal{V}^\sharp(dy_i), \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) = \{y_i, y_j\}_\nu,$$

puis des lemmes A.3.2 et A.3.3 que

$$\begin{aligned} \omega_t(X_i + t\mathcal{V}^\sharp(d\phi_i), \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) &= 0 \\ \omega_t(X_i, \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) &= -t\omega_t(\mathcal{V}^\sharp(d\phi_i), \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) \\ \Rightarrow \omega_t(X_i, \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) &= -t\{\phi_i, y_j\}_\nu. \end{aligned}$$

On en déduit enfin que

$$\begin{aligned} \omega_t(X_i^t, X_j^t) &= \mathcal{F}_{i,j}^t \\ &= \mathcal{F}_{i,j} + t(\mathcal{L}_{X_i}\phi_j - \mathcal{L}_{X_j}\phi_i) + t^2\{\phi_i, \phi_j\}_\nu \\ \omega_t(X_i, X_j) + t^2\{\phi_i, \phi_j\}_\nu &= \mathcal{F}_{i,j} + t(\mathcal{L}_{X_i}\phi_j - \mathcal{L}_{X_j}\phi_i) + t^2\{\phi_i, \phi_j\}_\nu \end{aligned}$$

dont on déduit :

$$\omega_t(X_i, X_j) = \mathcal{F}_{i,j} + t(\mathcal{L}_{X_i}\phi_j - \mathcal{L}_{X_j}\phi_i).$$

Résumons ces résultats :

$$(A.3.2) \quad \begin{cases} \omega_t(X_i, X_j) &= \mathcal{F}_{i,j} + t(\mathcal{L}_{X_i}\phi_j - \mathcal{L}_{X_j}\phi_i) \\ \omega_t(X_i, \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) &= -t\{\phi_i, y_j\} \\ \omega_t(\mathcal{V}^\sharp(dy_i), \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) &= \{y_i, y_j\}_\nu \end{cases}$$

Considérons à présent la 1-forme $\phi \in \Omega^1(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(E)$ de la proposition 3.1.4 : elle induit de manière évidente sur F une 1-forme $\lambda \in \Omega^1(F)$:

$$\lambda_f(X) := \phi(d_f\pi X)(f) \forall X \in \chi(T_f F), \quad \forall f \in F.$$

Dans un système de coordonnées locales de F dont les $2s$ premières coordonnées sont des fonctions basiques x_1, \dots, x_{2s} et les autres verticales, λ prend simplement la forme

$$\lambda = \sum_{i=1 \dots 2s} \phi_i dx_i.$$

Si on calcule $d\lambda$ sur la famille génératrice $\{X_i, \mathcal{V}^\sharp(dy_j), i = 1 \dots 2s, j = 1 \dots n\}$ on voit que

$$\begin{aligned} d\lambda(X_i, X_j) &= \mathcal{L}_{X_i}\phi_j - \mathcal{L}_{X_j}\phi_i - \lambda([X_i, X_j]) \\ &= \mathcal{L}_{X_i}\phi_j - \mathcal{L}_{X_j}\phi_i, \end{aligned}$$

puisque les crochets $[X_i, X_j]$ sont verticaux. On a aussi :

$$\begin{aligned} d\lambda(X_i, \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) &= -\mathcal{L}_{\mathcal{V}^\sharp(dy_j)}\phi_i - \lambda([X_i, \mathcal{V}^\sharp(dy_j)]) \\ &= -\{\phi_i, y_j\}\nu \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} d\lambda(\mathcal{V}^\sharp(dy_i), \mathcal{V}^\sharp(dy_j)) &= -\lambda([\mathcal{V}^\sharp(dy_i), \mathcal{V}^\sharp(dy_j)]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En comparant à A.3.2, on s'aperçoit alors que l'on a bien

$$\omega_t = \omega_0 + td\lambda,$$

comme annoncé.

Bibliographie

- [CW] Anna Cannas da Silva et Alan Weinstein, *Geometric Models for noncommutative Algebras*, Berkeley Mathematics Lectures, vol. 10, American Math. Soc., Providence 1999.
- [Co1] Jack F. Conn, *Normal forms for analytic Poisson structures*, Ann. of Math. (2) 119 (1984), no. 3, p. 577-601.
- [Co2] Jack F. Conn, *Normal forms for smooth Poisson structures*, Ann. of Math. (2) 121 (1985), no. 3, p. 565-593.
- [Co3] Jack F. Conn, *Correction to : "Normal forms for analytic Poisson structures" [Ann. of Math. (2) 119 (1984), no. 3, 577-601]*, Ann. of Math. (2) 125 (1987), no. 2, p. 433-436.
- [Cr-Fer] Marius Crainic et Rui Loja Fernandes, *Integrability of Lie brackets*, Ann. of Math. (2) 157 (2003), 575-620.
- [Du-Sa] D. McDuff et D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, 1998.
- [Du1] Jean-Paul Dufour, *Nondegenerate Lie algebras*, Algebra, 3. J. Math. Sci. 82 (1996), no. 6, p. 3769-3772.
- [Du2] Jean-Paul Dufour, et J.-Ch. Molinier, *Une nouvelle famille d'algèbres de Lie non dégénérées*, Indag. Math. (N.S.) 6 (1995), no. 1, p. 67-82.
- [Du3] Jean-Paul Dufour, *Linéarisation de certaines structures de Poisson*, J. Differential Geom. 32 (1990), no. 2, p. 415-428.
- [D-Ha] Jean-Paul Dufour et Abdeljalil Haraki, *Rotationnels et structures de Poisson quadratiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 312 (1991), no. 1, p. 137-140.

- [D-Zh] Jean-Paul Dufour et M. Zhitomirskii, *Classification of nonresonant Poisson structures*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), no. 3, p. 935-950.
- [D-Zu1] Dufour, Jean-Paul et Nguyen Tien Zung, *Nondegeneracy of the Lie algebra $\mathfrak{aff}(n)$* , C. R. Math. Acad. Sci. Paris 335 (2002), no. 12, p. 1043-1046.
- [Fer1] Rui Loja Fernandes, *Connections in Poisson Geometry I : Holonomy and Invariants*, J. of Differential Geometry 54, (2000) 303-366.
- [Fer2] Rui Loja Fernandes, *Lie Algebroids, Holonomy and Characteristic Classes*, Advances in Mathematics 170, (2002) 119-179.
- [Mo-Zu] Philippe Monnier et Nguyen Tien Zung, *Levi decomposition of smooth Poisson structures*, Preprint 2002, revised 2004, submitted to J. Diff. Geom.
- [Rad1] Olga Radko, *Toward a classification of Poisson structures on surfaces*, Quantization, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001), p. 81-88, Contemp. Math., 315, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [Rad2] Olga Radko, *A classification of topologically stable Poisson structures on a compact oriented surface*, J. Symplectic Geom. 1 (2002), no. 3, p. 523-542.
- [Rou] Robert Roussarie, *Modèles locaux de champs et de formes*, Astérisque, No. 30. Société Mathématique de France, Paris, 1975. 181 pp.
- [Sus] Hector J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973), p. 171-188.
- [Va] Izu Vaismann, *Lectures on the Geometry Of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics, vol. 118, Birkhauser, 1994.
- [Vo] Yurii Vorobjev, *Coupling tensors and Poisson geometry near a single symplectic leaf. Lie algebroids and related topics in differential geometry*, (Warsaw, 2000), p. 249-274, Banach Center Publ., 54, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2001.
- [We1] Alan Weinstein, *The modular automorphism group of a Poisson manifold*, J. Geom. Phys. 23 (1997), no. 3-4, p. 379-394.
- [We2] Alan Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differential Geom. 18 (1983), no. 3, p. 523-557.
- [We3] Alan Weinstein, *Errata and addenda : "The local structure of Poisson manifolds" [J. Differential Geom. 18 (1983), no. 3, p. 523-557]*, J. Differential Geom. 22 (1985), no. 2, 255.

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé les notions élémentaires sur les structures de Poisson, on étudie, dans le second chapitre, ces dernières au voisinage d'un cercle de singularités, sous des hypothèses génériques. On en déduit une forme normale, ainsi qu'un ensemble complet d'invariants, lesquels sont interprétés géométriquement.

Dans le troisième chapitre, on expose et on démontre le formalisme développé par Vorobjev afin d'étudier les structures de Poisson au voisinage d'une feuille symplectique, ainsi que son théorème d'équivalence. On montre alors comment utiliser ces résultats pour redémontrer des résultats classiques sur les structures de Poisson (*local-splitting* de Weinstein et unicité de la structure transverse à difféomorphisme près). On utilise ensuite ces résultats pour obtenir des théorèmes de forme normale, et de linéarisation dans un cadre semi-local le plus général possible. Les cas transversalement semi-simples sont traités avec une attention particulière.

En appendice, on montre que l'équivalence d'homotopie de Vorobjev peut être interprété comme une extension feuille à feuille du principe de Moser.

ABSTRACT

After recalling elementary notions about Poisson structures, one studies them in the neighborhood of a circle of singularities, under generic assumptions. One deduces then a complete set of invariants, that are geometrically interpreted.

In the last chapter, one exposes and proves the formalism developed by Vorobjev in order to study the neighborhood of a symplectic leaf. Then, one deduces normal forms, and linearisation theorems in the most general (semi-local) situation possible.

An appendix is devoted to show that Vorobjev's homotopy equivalence is a leaf-wise version of Moser's path method.

MOTS-CLÉS

Structures de Poisson, Feuilletage symplectique, Voisinage d'une feuille, Tenseurs de couplage, Formes normales, Formes normales semi-locales, Linéarisation.