



Quelques problèmes de contrôlabilité

Thierry Horsin

► To cite this version:

Thierry Horsin. Quelques problèmes de contrôlabilité. Mathématiques [math]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2010. tel-00569968

HAL Id: tel-00569968

<https://theses.hal.science/tel-00569968>

Submitted on 25 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Versailles Saint-Quentin en Yvelines
Laboratoire de Mathématiques de Versailles
UMR8100

Mémoire présenté en vue de l'habilitation à diriger des recherches.
Spécialité: mathématiques appliquées.

Quelques problèmes de contrôlabilité.

Thierry HORSIN

Le vendredi 11 juin 2010, devant le jury composé de

Pierre ROUCHON, Professeur, examinateur, président du jury
Otared KAVIAN, Professeur, rapporteur,
Jean-Pierre RAYMOND, Professeur, rapporteur,
Enrique ZUAZUA, Professeur, rapporteur,
Fatiha ALABAU, Professeur, examinatrice,
Jean-Michel CORON, Professeur, examinateur,
Jean-Pierre PUEL, Professeur émérite, examinateur,
Marius TUCSNAK, Professeur, examinateur.

Remerciements

Dans les quelques lignes qui suivent, j'ai probablement oublié beaucoup de ceux qui m'ont soutenu, écouté, encouragé, aidé. Un jour, peut-être, j'écirai un autre mémoire avec leur noms. En attendant...

Je suis redevable à Jean-Pierre Raymond et Enrique Zuazua d'avoir accepté de rapporter sur ce mémoire. Je les en remercie beaucoup. C'est un honneur pour moi, j'essaierai de me montrer digne de leur personnalité scientifique.

Je voudrais témoigner ma profonde reconnaissance à Jean-Michel Coron, qui n'a jamais manqué de gentillesse, de bienveillance, surtout de confiance à mon égard et ce depuis le début de mes pas en recherche. Il ne s'en est pas départi depuis l'obtention mon D.E.A jusqu'à maintenant.

Mes remerciements vont également à Fatiha Alabau, Pierre Rouchon et Marius Tucsnak pour avoir accepté de faire partie du jury.

Il m' est difficile d'exprimer ici la quantité de choses que j' ai apprises en écrivant sur le tableau d' Otared Kavian, en opposant mes calculs à la clarté qu'il a toujours exigée de ses explications, de ses idées et, depuis quelques temps des miennes au travers de ce manuscrit, dont il a accepté de faire la présentation. Je crains que les relectures de ce mémoire ne furent pas une affaire simple, mais je lui sais gré de l'avoir fait de A jusqu' Z, de un jusqu'à.... et de toujours me témoigner, depuis, de la confiance et de l'amitié. Merci Otared.

Avoir eu Jean-Pierre Puel comme collègue et autre pilier fondateur de cette équipe d'analyse du LMV, a toujours été pour moi un très grand soutien. J'ai également appris beaucoup de choses au cours de discussions mathématiques avec lui, une partie des travaux présentés dans ce mémoire en est le reflet. Son amitié n'est pas des moindres, et il me fait l'honneur de délaissier Tokyo quelques jours pour être dans le jury. Je lui suis très reconnaissant de tout cela.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Yvan Martel et Luc Robbiano pour leur sympathie, leur confiance et pour m' avoir plusieurs fois encouragé à soutenir une habilitation, et pour avoir fait plusieurs fois semblant de me croire quand je prétendais que j' allais le faire.

L'ensemble des mes collègues du département voudra, je l'espère, recevoir l'expression de ma sympathie et de mes remerciements. Mentions spéciales à Christophe, Eric, Philippe, Marie-France, Liliane, Fatima, Chantal, Laure, Catherine, Stéphanie et le personnel de l'UFR, qui me rendent ou m'ont rendu parfois le travail plus facile. Un grand merci à C. Scafarto du SDRV. Son efficacité égale sa disponibilité.

Mentions spéciales à mes co-auteurs également : Alexis, Ioannis, Olivier, Patrick, Stéphane, Thanassis.

Merci à mes enfants Jeanne, Louis, Thibaut, Romain et mon épouse, Hélène, ils me sont tout simplement indispensables.

Table des matières

Remerciements	3
1. Introduction aux problèmes de contrôlabilité	7
1.1. Une remarque naïve sur des vieux travaux	7
1.2. Position du problème	7
1.3. La méthode du retour de J.M. Coron	11
2. Contrôlabilité des équations de Maxwell	13
2.1. Le modèle	13
2.2. Résultats concernant l'approximation de Drude-Borne-Fedorov en régime non harmonique.	16
2.3. L'approximation Drude-Born-Fedorov en régime harmonique.	19
2.4. Avec des relations constitutives plus générales.	25
2.5. Contrôlabilité des équations de Maxwell avec une source stochastique.	26
3. Contrôlabilités lagrangiennes de modèles fluides.	29
3.1. Introduction du problème sur un exemple	29
3.2. Contrôlabilité lagrangienne associée à l'équation de la chaleur.	31
3.3. Contrôlabilité locale lagrangienne de l'équation de Burgers dissipative.	37
3.4. Au sujet de la contrôlabilité de (3.26) (3.27)	42
3.5. Contrôlabilité Lagrangienne en dimension 2.	43
3.6. Contrôlabilité Lagrangienne en dimension 3.	47
3.7. Vers la simulation	71
4. Une digression sur l'équation de Boltzmann	87
4.1. Le modèle	87
4.2. Discrétisation	88
4.3. La preuve	89
Bibliographie	91

Introduction aux problèmes de contrôlabilité

On renvoie au livre de J.M. Coron [26] pour des références précises sur les notions décrites dans ce paragraphe.

1.1. Une remarque naïve sur des vieux travaux

Je me suis intéressé aux problèmes de contrôlabilité, après ma thèse, sur une proposition de J.M. Coron qui m’ avait encadré, jusque là, sur des problèmes relatifs à des équations aux dérivées partielles non-linéaires elliptiques ou paraboliques, que l’on peut qualifier d’ “issues” de la géométrie. Cela concernait, en effet, l’évolution des surfaces à courbure moyenne prescrite¹

$$u : (0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \partial_t u - \Delta u = 2H(u) \partial_x u \wedge \partial_y u,$$

l’évolution des applications harmoniques²

$$u : (0, +\infty) \times \Omega \rightarrow N \quad \partial_t u - \Delta u \perp T_u N,$$

et l’équation de R. Emden

$$-\Delta u = e^u,$$

proche du problème de H. Yamabe³. Je renvoie à [77] [78] [58] [59] [60] pour les travaux effectués sur ces équations, mais je ne les détaillerai pas.

Les travaux récents de S. Ervedoza dans [40], sur la contrôlabilité de l’équation de la chaleur avec singularités, ont néanmoins un lien avec l’équation de Emden.

Par ailleurs, la présence, d’une part, de singularités dans certaines applications harmoniques minimisantes entre variétés, et, d’autre part, l’importance des termes non linéaires dans la méthode du retour, reflètent l’utilité de jouer sur les échelles de temps pour faire apparaître les termes fondamentaux dans les équations considérées. C’est également le cas dans le dernier travail présenté dans ce mémoire.

1.2. Position du problème

On considère un système gouverné par une équation différentielle, ou aux dérivées partielles, que l’on écrit sous la forme d’un système dynamique de dimension finie ou infinie suivant le cas :

E désigne un espace de Banach, que l’on appelle espace des états,

¹ $H(u)$ est la courbure moyenne au point u de la surface définie par u .

² N une sous-variété de $\mathbb{R}^M$, $T_u N$ est l’espace tangent en u à N .

³qui consiste à chercher une métrique conformément équivalente à une métrique donnée, mais ayant une courbure scalaire constante.

$T > 0$ un temps de référence,
 $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur à domaine, éventuellement non linéaire,
 F un espace de Banach, que l'on appelle espace des contrôles,
 $B : F \rightarrow E$ un opérateur linéaire continu,
et $x : (0, T) \rightarrow E$ une application à qui l'on demande de vérifier

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

$$(1.2) \quad x(0) = x_0.$$

Ici x_0 désigne un état initial dans E et u désigne un élément de F qui dépend du temps.

DÉFINITION 1.2.1. On dira que l'équation (1.1) est exactement contrôlable en temps T , si, pour tout choix de $(x_0, x_1) \in E^2$, on peut trouver $u : [0, T] \rightarrow F$ tel que la solution⁴ de (1.1)–(1.2) satisfasse $x(T) = x_1$.

En dimension finie (i.e $\dim(E) < \infty$ et $\dim(F) < \infty$) la situation pour les systèmes linéaires est bien comprise et on dispose du critère de R.E. Kalman (voir E. Sontag [92]) :

THÉORÈME 1.2.2. *L'équation (1.1) est contrôlable en temps arbitraire T si et seulement*

$$\text{rang}\{B, AB, \dots, A^{N-1}B\} = N$$

avec $N = \dim(E)$.

Lorsque le système dépend du temps — i.e. A et B dépendent du temps — on dispose, toujours en dimension finie, d'un critère généralisant le précédent.

Pour les systèmes non linéaires, par exemple

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

la situation est plus complexe, même en dimension finie.

1.2.1. Cas de la dimension finie. L'idée première —une des seules qui soit à disposition —est d'utiliser le théorème d'inversion locale :

On considère $f : E \times F \rightarrow E$ une application de classe C^1 et on suppose que l'on dispose d'un point d'équilibre $(x_e, u_e) \in E \times F$ de f , c'est-à-dire vérifiant $f(x_e, u_e) = 0$.

On considère le système

$$(1.3) \quad \frac{dx}{dt} = A_e x + B_e u,$$

$$(1.4) \quad x(0) = x_0$$

⁴dans la classe de solutions cherchées.

où $A_e = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $B_e = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$.

On a alors (voir J.M. Coron [26])

THÉORÈME 1.2.3. *On suppose que l'équation (1.3) est contrôlable, alors il existe un voisinage V_0 de x_0 , et un voisinage V_1 de x_1 , tels que :*

si $x_0 \in V_0$ et $x_1 \in V_1$, on peut trouver u telle que la solution de

$$(1.5) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

$$(1.6) \quad x(0) = x_0$$

vérifie $x(T) = x_1$.

Un tel résultat ne règle pas la situation des systèmes non linéaires en général. Il existe en effet des systèmes non linéaires qui sont globalement contrôlables mais, pour lesquels, le linéarisé, au voisinage d'un point d'équilibre, n'est pas contrôlable.

Un exemple de tels systèmes est fourni par le guidage d'une poussette. Un couple et une vitesse sont nécessaires pour contrôler le problème suivant :

$$(1.7) \quad \frac{dx_1}{dt} = u \cos(x_3),$$

$$(1.8) \quad \frac{dx_2}{dt} = u \sin(x_3),$$

$$(1.9) \quad \frac{dx_3}{dt} = v.$$

Par ailleurs, on peut vérifier facilement, que le linéarisé en $(x_1, x_2, x_3) = 0, u_0 = 0$ n'est pas contrôlable.

Néanmoins le système est globalement contrôlable : pour cela on utilise le théorème suivant démontré indépendamment par W.L. Chow [20] et P.K. Rasthevski [89] :

Rappelons que pour X et Y deux champs de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, on note $[X, Y]$ le crochet de Lie défini par

$$[X, Y](x) := \left(\sum_{i=1}^N X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(x) - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x) \right)_{j=1, \dots, N}.$$

THÉORÈME 1.2.4. *Soit le système*

$$(1.10) \quad \frac{d}{dt}x = \sum_{j=0}^k u_j X_j(x),$$

où les champs de vecteurs X_j sont de classe C^∞ . On note

$$\text{Lie}(0, x) := \text{vect}\{X_j(x), j = 0, \dots, k\},$$

puis par récurrence,

$$Lie(k, x) := Lie(k-1, x) + \text{vect}\{[X_j, U](x), j = 0, \dots, k, U \in Lie(k-1, x)\}.$$

Si

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Lie(k, x) = \mathbb{R}^N$$

alors (1.10) est exactement contrôlable.

Notons que ce résultat possède une réciproque partielle lorsque tous les termes X_j sont analytiques (voir les articles de R. Hermann [55] et T. Nagano [80]).

1.2.2. Et en dimension infinie ? Si le résultat donné dans le théorème 1.2.4 est très utile en dimension finie, il ne semble pas exister sous forme simple en dimension infinie et il semble malcommode de l'adapter pour des systèmes de dimension infinie.

Pour argumenter en ce sens, on peut considérer, par exemple, l'équation de transport :

$$(1.11a) \quad \frac{\partial}{\partial t} y + \frac{\partial}{\partial x} y = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$(1.11b) \quad y(t, 0) = u(t) \text{ est le contrôle.}$$

$$(1.11c) \quad y(0, x) = 0.$$

Le système (1.11) s'interprète comme un système de la forme

$$\frac{d}{dt} x = X_0(x) + u(t) X_1(x),$$

faisant partie de la famille des systèmes avec dérive, pour lesquels les crochets de Lie jouent également un rôle dans la contrôlabilité.

Pour $\varepsilon \in (0, 1/2)$ on définit

$$u(t) = -1, \quad t \in (0, \varepsilon)$$

puis

$$u(t) = 1, \quad t \in (\varepsilon, 2\varepsilon).$$

Si ε est assez petit, on a

$$y(2\varepsilon, x) = 1, \quad x \in (0, \varepsilon),$$

$$y(2\varepsilon, x) = -1, \quad x \in (\varepsilon, 2\varepsilon),$$

et

$$y(2\varepsilon, x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in (2\varepsilon, 1).$$

Par ailleurs on vérifie que

$$\int_0^1 y(2\varepsilon, x)^2 dx = 4\varepsilon^2.$$

Un simple calcul, que l'on peut identifier à l'évaluation du crochet de Lie $[X_0, X_1]$, montre que pour toute fonction $\phi \in H^2(0, 1)$

$$\int_0^1 \phi(x) \frac{y(2\varepsilon, x) - y(0, x)}{\varepsilon^2} \rightarrow -\phi'(0),$$

ce qui semble peu utilisable en terme de contrôlabilité.

Pour ce qui est de la linéarisation, la situation peut sembler plus claire, mais la difficulté devient alors de choisir les bons espaces dans lesquels faire un théorème d'inversion locale, en particulier en présence de perte de dérivées. Des exemples de telles situations sont donnés par K. Beauchard (voir [9]) et K. Beauchard et J.M. Coron (voir [10]).

1.3. La méthode du retour de J.M. Coron

Introduite par J.M. Coron pour un problème de stabilisation dans [22], cette méthode consiste à linéariser autour d'une trajectoire non constante de l'équation (1.5) allant d'un point d'équilibre (x_e, u_e) (*i.e.* $f(x_e, u_e) = 0$) à lui-même.

Dans la situation modèle de la poussette, c'est à dire du système donné par (1.7), (1.8), (1.9), où le linéarisé autour de la trajectoire nulle n'est pas contrôlable, on peut procéder de la façon suivante : on considère

$$(\bar{u}, \bar{v}) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

vérifiant

$$\bar{u}(T - t) = -\bar{u}(t),$$

et

$$\bar{v}(T - t) = -\bar{v}(t).$$

Si l'on résout le système correspondant (1.7) - - (1.9), donnant une solution $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, et que l'on évalue le linéarisé autour de $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}, \bar{v})$, on obtient le système

$$(1.12a) \quad \frac{dx_1}{dt} = u \cos(\bar{x}_3) - \bar{u} \sin(\bar{x}_3)x_3,$$

$$(1.12b) \quad \frac{dx_2}{dt} = u \sin(\bar{x}_3) + \bar{u} \cos(\bar{x}_3)x_3,$$

$$(1.12c) \quad \frac{dx_3}{dt} = u,$$

auquel on peut appliquer le critère suivant des systèmes linéaires dépendants du temps (voir *e.g.* E. Sontag [92]) :

THÉORÈME 1.3.1. *Soit le système*

$$(1.13) \quad \frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

où les matrices A et B sont respectivement $C^\infty([0, T], \mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R}))$, et $C^\infty([0, T], \mathcal{M}^{N \times M}(\mathbb{R}))$. On définit par récurrence les matrices

$$B_0(t) = B(t),$$

et

$$B_{i+1}(t) = \frac{d}{dt}B_i(t) - A(t)B_i(t).$$

Si, pour un certain $\bar{t} \in [0, T)$, et un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\text{vect}\{B_0(\bar{t}), B_1(\bar{t}), \dots, B_k(\bar{t})\} = \mathbb{R}^N,$$

le système (1.13) est contrôlable.

On peut voir aisément que si $(\bar{u}, \bar{v}) \neq 0$, alors le système (1.12) est contrôlable —grâce à ce résultat —et, visiblement, si $(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ alors il ne l'est pas.

Ainsi on voit que l'existence de trajectoires non triviales, joignant deux points d'équilibre, peut permettre de rétablir la situation.

Contrôlabilité des équations de Maxwell

Il s'agit de travaux ou de collaborations avec P. Ciarlet Jr, P. Courilleau, G. Legendre, I. G. Stratis, A. Yannacopoulos.

2.1. Le modèle

On se donne Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et on considère (E, H) un couple de champs de vecteurs vérifiant

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}(t, x) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\text{curl} \\ \text{curl} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A cela s'ajoutent des conditions de bord, que l'on précisera par la suite, et parmi lesquelles, on spécifiera le contrôle.

Dans l'équation (2.1), le couple (E, H) désigne le champ électro-magnétique généré dans la cavité Ω par la densité de courant J .

Le choix de l'opérateur $\mathcal{A}(t, x)$ correspond à différents modèles, plus ou moins communément utilisés.

2.1.1. Milieu linéaire constant. Le modèle le plus courant est

$$\mathcal{A}(t, x) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Le paramètre ε désigne la permittivité électrique¹, μ désigne la perméabilité magnétique², dans le milieu considéré. Lorsque le milieu de propagation ambiant est le vide, ces paramètres sont liés par la relation

$$\varepsilon \mu c^2 = 1$$

où c est la vitesse de propagation de la lumière.

2.1.2. Les milieux chiraux dans l'approximation dite de Drude-Born-Fedorov. On peut également considérer le cas, dit de l'approximation de P. Drude, M. Born et F.I. Fedorov (notée DBF dans la suite) dans lequel un nouveau paramètre $\beta > 0$, appelé paramètre de chiralité est introduit.

¹La permittivité électrique mesure le rapport entre le champ de déplacement électrique et le champ électrique provoquant le déplacement.

²Tout champ magnétique induit une différence de potentiel dans tout conducteur électrique se mouvant dans ce champ, provoquant du même coup, un champ magnétique induit dont le rapport au champ initial est appelé perméabilité.

On prend

$$(2.2) \quad \mathcal{A} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(E + \beta \operatorname{curl}(E)) \\ \mu(H + \beta \operatorname{curl}(H)) \end{pmatrix}$$

Une hypothèse communément admise, sur le lien entre ces paramètres, intervient lorsque l'on considère des solutions harmoniques en temps de (2.1), *i.e.* de la forme

$$E(t, x) =: E_0(x)e^{i\omega t}, \quad H(t, x) =: H_0e^{i\omega t},$$

Dans ce cas, on impose

$$(2.3) \quad \beta^2 \omega^2 \varepsilon \mu \ll 1.$$

La condition (2.3) conduit souvent à ne considérer l'approximation DBF que dans le cas des milieux chiraux, pour des solutions harmoniques, mais des considérations plus phénoménologiques que mathématiques ont parfois conduit à considérer le modèle (2.2) comme étant également valable en régime non harmonique, où l'hypothèse (2.3) est remplacée par l'hypothèse “ β est assez petit”. On peut néanmoins donner des justifications formelles de l'utilisation de l'approximation DBF (voir par exemple A. Lakhtakia [71] et K. Liaskos-I.G. Stratis-A. Yanacopoulos [74] pour des relations constitutives légèrement différentes de (2.5)).

2.1.3. Relations de constitutions plus générales.

Au niveau macroscopique, on peut écrire le système suivant, plus général que celui donné par (2.1),

$$(2.4a) \quad \operatorname{div}(B) = 0,$$

$$(2.4b) \quad \operatorname{curl}(E) = -\frac{\partial}{\partial t}B,$$

$$(2.4c) \quad \operatorname{div}(D) = \rho(t, x),$$

$$(2.4d) \quad \operatorname{curl}(H) = \frac{\partial}{\partial t}D.$$

où, lorsque le milieu est isotrope et chiral, la densité de flux électrique D et la densité de flux magnétique B satisfont

$$\begin{aligned}
(2.5a) \quad D(t, x) &= \varepsilon E(t, x) + \varepsilon \int_0^{+\infty} \chi^e(\tau) E(t - \tau, x) d\tau \\
&+ \int_0^{+\infty} \chi^c(\tau) B(t - \tau, x) d\tau, \\
(2.5b) \quad H(t, x) &= \frac{1}{\mu_0} B(x, t) - \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty \chi^m(\tau) B(t - \tau, x) d\tau \\
&+ \int_0^\infty \chi^c(\tau) E(t - \tau, x) d\tau,
\end{aligned}$$

où χ^e est la susceptibilité diélectrique³, χ^m la susceptibilité magnétique⁴ et χ^c désigne la chiralité⁵

Le paramètre de chiralité a été introduit pour étudier l'activité optique d'un matériau. L'absence de symétrie bilatérale a été historiquement reconnue au travers de la complémentarité par symétrie de molécules énantiomères⁶ et la prédominance d'un seul isomère⁷. Cette prévalence d'un certain énantiomère et les dissymétries qui en découlent ont été postulées initialement par L. Pasteur [85] à la lecture des résultats de J.B. Biot [12].

REMARQUE 2.1.1. Le problème de Cauchy associé à (2.4), avec les relations constitutives (2.5), et des données initiales $E(t = 0) = E_0$ et $H(t = 0) = H_0$ posent des difficultés de modélisation dans le choix des conditions de bord.

Il est d'usage d'imposer, lorsqu'on ne s'intéresse pas aux questions de contrôlabilité,

$$n \wedge H = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

et

$$E.n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Or, dans le cas où $\chi^m = 0$, et χ^c est une masse de Dirac, cela entraîne également

$$H.n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

et donc finalement

$$H = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

ce qui est trop rigide dans l'usage de la physique.

³ce paramètre mesure en première approximation la déviation de la permittivité électrique réelle par rapport à la permittivité supposée.

⁴l'interprétation est similaire à celle concernant la permittivité électrique.

⁵Chiralité : du grec kheir, la main, par déformation du mot signifiant instrument (en général utilisé par la main). Une molécule est dite chirale si on ne peut pas la superposer à son image dans un miroir.

⁶Enantiomère : se dit de deux molécules d'un même composé mais disposées symétriquement.

⁷Isomère : les énantiomères en sont des cas particuliers, se dit de deux molécules qui ont la même constitution atomique mais disposées différemment.

2.2. Résultats concernant l'approximation de Drude-Borne-Fedorov en régime non harmonique.

Dans cette partie, on décrit les résultats de [28]. Sauf mention contraire, les quantités ε , μ et β sont constantes.

On considère donc le système de Maxwell dans l'approximation DBF, mais en régime non harmonique :

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(E + \beta \operatorname{curl}(E)) - \operatorname{curl}(H) = 0,$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mu(H + \beta \operatorname{curl}(H)) + \operatorname{curl}(E) = 0.$$

Ce système est posé sur un ouvert Ω , borné, régulier⁸, simplement connexe, pendant un intervalle de temps $[0, T]$ avec $T > 0$, on prescrit alors les conditions suivantes : on impose

$$(2.8) \quad H \wedge n = J \text{ sur } (0, T) \times \Gamma \text{ où } J \text{ est le contrôle,}$$

où Γ est une partie de $\partial\Omega$, et

$$(2.9) \quad E \wedge n = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega.$$

On impose également des conditions initiales :

$$(2.10) \quad H(0, \cdot) = H_0 \text{ et } E(0, \cdot) = E_0 \text{ sur } \Omega.$$

Il a été prouvé par P. Jr. Ciarlet & G. Legendre [21] que le système est (2.6)–(2.10) est bien posé pourvu que H_0 , E_0 , et J aient une certaine régularité et β soit dans le complémentaire d'une suite. On renvoie à [21] pour les conditions exactes sur β .

En particulier quand $J = 0$ le système est bien posé. Nous basant sur ces deux remarques, nous prouvons dans [28] que

THÉORÈME 2.2.1. *Pour une infinité de valeur de β (le complémentaire d'une suite), le système (2.6)–(2.10) n'est pas approximativement contrôlable.*

La preuve est élémentaire, mais on peut tenter de comprendre ce résultat en utilisant la remarque suivante : l'opérateur $\operatorname{Id} + \beta \operatorname{curl}$ est inversible dans les espaces adéquats pour certaines valeurs de β par exemple assez petites.

Plus précisément rappelons la définition des espaces suivants :

$$(2.11) \quad H(\operatorname{div}, \Omega) := \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)^3, \text{ tel que } \operatorname{div}(u) \in L^2(\Omega, \mathbb{R})\},$$

$$(2.12) \quad H_0(\operatorname{div}, \Omega) := \{u \in H(\operatorname{div}, \Omega), \text{ tel que } u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

$$(2.13) \quad H(\operatorname{div} = 0, \Omega) := \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)^3, \text{ tel que } \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega\},$$

⁸Nous n'avons pas cherché à déterminer la régularité minimale de Ω qui permet de conduire aux résultats de ce paragraphe. Nous supposons pour simplifier que Ω est de classe C^1 .

$$(2.14) \quad H_0(\operatorname{div} = 0, \Omega) := \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)^3, \text{ tel que } \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega, u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

$$(2.15) \quad H(\operatorname{curl}, \Omega) := \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)^3, \text{ tel que } \operatorname{curl}(u) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)^3\},$$

$$(2.16) \quad H_0(\operatorname{curl}, \Omega) := \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)^3, \text{ tel que } \operatorname{curl}(u) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)^3, u \wedge n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

$$(2.17) \quad W(\Omega) := H(\operatorname{curl}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div} = 0, \Omega),$$

$$(2.18) \quad W_{\operatorname{curl}}(\Omega) := \{u \in W(\Omega), \text{ tel que } \operatorname{curl}(u) \in W(\Omega)\}.$$

On doit alors à Y. Giga & T. Yosida Lemme 2 & Prop. 2 dans [100] le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2.2. *Lorsque Ω est simplement connexe, pour un ensemble dense (le complémentaire d'une suite) de valeurs de β , non nulles, l'opérateur*

$$I + \beta \operatorname{curl} : W_{\operatorname{curl}}(\Omega) \rightarrow W(\Omega)$$

est inversible.

En se basant sur le théorème 2.2.2 et la proposition 2 de [100], on vérifie que le système

$$(2.19a) \quad \partial_t(\phi + \beta \operatorname{curl}(\phi)) - \operatorname{curl}(\psi) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$(2.19b) \quad \partial_t(\psi + \beta \operatorname{curl}(\psi)) + \operatorname{curl}(\phi) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$(2.19c) \quad \phi(T) = \phi_T,$$

$$(2.19d) \quad \psi(T) = \psi_T,$$

$$(2.19e) \quad \psi \cdot n = \operatorname{curl}(\psi) \cdot n = \phi \cdot n = \operatorname{curl}(\phi) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

est bien posé sur $(0, T) \times \Omega$, pourvu que $(\phi_T, \psi_T) \in W_{\operatorname{curl}}(\Omega)^2$.

On obtient alors la relation

$$(2.20) \quad \int_{\Omega} (E_0 \cdot (\phi(0) + \beta \operatorname{curl}(\phi(0))) + H_0 \cdot (\psi(0) + \beta \operatorname{curl}(\psi(0)))) dx = \int_{\Omega} (E(T) \cdot (\phi_T + \beta \operatorname{curl}(\phi_T)) + H(T) \cdot (\psi_T + \beta \operatorname{curl}(\psi_T))) dx,$$

en prenant $(\phi_T, \psi_T) \in a(\beta)^{-1}(S \setminus \nabla H_0^2(\Omega))^2$, ce qui prouve la non contrôlabilité approchée de (2.6)–(2.9).

Remarque : pour $\beta = 0$, la contrôlabilité en domaine borné a été étudiée dans de nombreux articles. Les premiers résultats, dans le cas de coefficients constants, sont dus à J. Lagnese dans [70]. Le cas de coefficients variables, mais non réguliers, est traité par S. Nicaise dans [83]. Ces deux travaux concernent le cas de

contrôle sur tout le bord. Pour le contrôle sur une partie du bord, citons O. Nalin cf. [81], K. D. Phung cf. [87], C. Pignotti cf. [88], N. Weck cf. [99].

2.3. L'approximation Drude-Born-Fedorov en régime harmonique.

On rappelle ici les résultats décrits dans [29].

On considère le système (2.6)–(2.7) en régime harmonique, c'est à dire quand les solutions cherchées sont de la forme

$$E(t, x) := E_0(x)e^{i\omega t}, \quad H(t, x) := H_0e^{i\omega t}.$$

(*Remarque* : Pour l'approximation DBF en régime harmonique, on peut voir que E et H se décomposent en deux champs $E = E_g + E_r$ et $H = H_g + H_r$ qui correspondent à une polarisation spécifique des ondes. A ce sujet, et pour plus de détails, on pourra consulter *e.g.* H. Ammari & al [2], H. Ammari & J.-C. Nédélec [3], Y. Athanasiadis & al [6], et A. Lakhtakia [71]).

On obtient deux nouvelles équations :

$$\begin{aligned} i\varepsilon\omega E + i\varepsilon\beta\omega \operatorname{curl}(E) - \operatorname{curl}(H) &= 0 \\ i\mu\omega H + i\mu\beta\omega \operatorname{curl}(H) + \operatorname{curl}(E) &= 0, \end{aligned}$$

où tous les coefficients sont ici supposés constants.

En écrivant

$$E = \frac{\operatorname{curl}(H) - i\varepsilon\beta\omega \operatorname{curl}(E)}{i\varepsilon\omega},$$

on obtient le système

$$(2.21a) \quad H + 2\beta \operatorname{curl}(H) + \left(\beta^2 - \frac{1}{\varepsilon\mu\omega^2}\right) \operatorname{curl}\operatorname{curl}(H) = 0,$$

$$(2.21b) \quad E = -i\omega\beta\mu H + i\left(\frac{1}{\varepsilon\mu\omega} - \beta^2\omega\mu\right) \operatorname{curl}(H).$$

On peut obtenir un système équivalent en permutant le rôle de E et H .

Par ailleurs, l'équation (2.21b) montre qu'il n'est pas possible, dans un problème de contrôlabilité, de contrôler E et H séparément (indépendamment l'un de l'autre).

Notons également, qu'en séparant partie réelle et imaginaire, on peut toujours supposer que le champ H est réel, le champ E correspondant donné par (2.21b), étant alors imaginaire pur.

Le résultat principal que nous démontrons dans [29] est le

THÉORÈME 2.3.1. *On considère un sous-ensemble d'intérieur non vide $\Gamma \subset \partial\Omega$, où Ω est un ouvert borné connexe et lipschitzien. On considère le problème constitué de l'équation (2.21a) à laquelle on ajoute les conditions de bord*

$$(2.22) \quad H \wedge n = J \text{ sur } \Gamma,$$

$$(2.23) \quad H \wedge n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma.$$

Il existe un ouvert dense $\mathfrak{D}$ de $\mathbb{R}$ tel que si $\frac{1}{\varepsilon\mu\omega^2} \in \mathfrak{D}$ et si $\beta \geq 0$ est assez petit par rapport à ε , μ et ω , alors, lorsque J varie dans $L_T^2(\Gamma)$ l'ensemble des champs tangentiels de carré intégrable sur Γ , la trace de $\text{curl}(H)$ sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$ décrit un ensemble dense dans $L_T^2(\partial\Omega \setminus \Gamma)$.

Rappelons (voir R. Dautray & J.L. Lions [31], P. Monk [79]) que la formule suivante, valable pour des fonctions H_1 et H_2 de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^3$,

$$(2.24) \quad \int_{\Omega} \text{curl}(H_1) \cdot H_2 dx - \int_{\Omega} H_1 \cdot \text{curl}(H_2) dx = \int_{\partial\Omega} (n \wedge H_1) \cdot H_2 d\sigma,$$

se généralise à $H(\text{curl}, \Omega)$ (voir (2.15) page 17 pour la définition) en notant que le membre de droite de (2.24), peut également s'écrire

$$\int_{\gamma} (n \wedge H_1) \cdot ((n \wedge H_2) \wedge n) d\sigma.$$

Rappelons également, que si $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est supposée lipschitzienne, il existe une application linéaire continue

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\mathcal{O}) &\mapsto L^2(\partial\mathcal{O}) \\ u &\mapsto u|_{\partial\mathcal{O}}, \end{aligned}$$

dont l'image est exactement $H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$. Pour une exposition systématique, on renvoie e.g. au livre de P. Grisvard [52] et à celui de J. Nečas [82]. En considérant deux ouverts bornés de frontière lipschitzienne $\mathcal{O}_{i=1,2}$, avec $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, dont les frontières ont une intersection commune Γ , et un opérateur d'extension

$$H^1(\mathcal{O}_1) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_2),$$

on peut alors considérer $H^{1/2}(\Gamma)$, pour une partie d'intérieur non vide $\Gamma \subset \mathcal{O}_1$.

On définit alors (voir R. Dautray & J.L. Lions [31] et P. Monk [79]), en notant $\nabla_{|\partial\Omega}$ le gradient surfacique, et $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ le dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ —l'espace des trace des fonctions de $H^1(\Omega)$ —, n la normale extérieure unitaire à Ω , et $\nabla_{|\partial\Omega} \cdot u$ la divergence surfacique⁹

$$H^{-1/2}(\text{div}, \partial\Omega) := \{u \in H^{-1/2}(\partial\Omega), u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \nabla_{|\partial\Omega} \cdot u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)\}.$$

⁹Pour définir la divergence surfacique, par exemple sur une sous-variété S de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ on procède comme suit : on choisit au voisinage d'un point p , un système de coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto Z := (z_1, z_2, z_3)$ d'un voisinage de $(0, 0)$ sur un voisinage de p —on a dans ces notations, $Z(0, 0) = p$ —. La structure euclidienne sur S hérite de celle de $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire sur $T_p S$ (le plan tangent en p à S) est alors donné par la matrice $G := (\langle \frac{\partial Z(p)}{\partial x_i} | \frac{\partial Z(p)}{\partial x_j} \rangle_{\mathbb{R}^3})_{i,j=1,2}$. Si l'on note $g := \det(G)$, pour $v : S \rightarrow TS$ on note $\nabla_{|S} \cdot v := \frac{1}{\sqrt{g}} (\frac{\partial(\sqrt{g}v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\sqrt{g}v_2)}{\partial x_2})$, où $v = v_1 \frac{\partial Z}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial Z}{\partial x_2}$

On prouve alors (voir P. Monk [79]) que les applications

$$\begin{aligned} H(\text{curl}, \Omega) &\rightarrow H^{-1/2}(\text{div}, \partial\Omega) \\ H &\mapsto n \wedge H|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H(\text{curl}, \Omega) &\rightarrow (H^{-1/2}(\text{div}, \partial\Omega))', \text{ (le dual topologique de } H^{-1/2}(\text{div}, \partial\Omega)) \\ H &\mapsto (n \wedge H|_{\partial\Omega}) \wedge n, \end{aligned}$$

sont continues et surjectives et que la formule (2.24) s'étend pour $(H_1, H_2) \in H(\text{curl}, \Omega)^2$ de la façon suivante :

$$(2.25) \quad \int_{\Omega} H_2 \cdot \text{curl}(H_1) dx - \int_{\Omega} H_1 \cdot \text{curl}(H_2) dx = \langle (n \wedge H_2) \wedge n | n \wedge H_1 \rangle,$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne ici le crochet de dualité entre $H^{-1/2}(\text{div}, \partial\Omega)$ et son dual topologique $H^{-1/2}(\text{div}, \partial\Omega)'$. Pour ne pas alourdir les notations, on remplacera plus loin la notation $\langle \cdot | \cdot \rangle$ par l'intégrale sur le bord.

REMARQUE 2.3.2. Soit $W \in H(\text{curl}, \Omega)$ (voir (2.11) et (2.15) page 16). Si $n \wedge W = 0$ sur une partie A du bord, alors $\text{curl}(W) \cdot n = 0$ sur A .

En effet, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, nulle sur un voisinage de $\partial\Omega \setminus A$, comme

$$\text{div}(\text{curl}(W)) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et

$$\text{curl}(\nabla\phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

en utilisant la relation (2.25)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \text{curl}(W) \cdot n \phi d\sigma &= \int_{\Omega} \text{curl}(W) \cdot \nabla\phi dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla\phi \cdot [n \wedge W] d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\text{curl}(W)|_{\partial\Omega}$ est un champ tangentiel (dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$) sur toute partie du bord où $W \wedge n = 0$.

Sous des hypothèses assez fortes sur ε, μ, β , on peut démontrer un résultat similaire au théorème 2.3.1 dans le cas où ces coefficients sont variables. Voir [29].

REMARQUE 2.3.3. L'hypothèse communément admise dans l'approximation DBF est, ainsi que nous l'avons dit plus haut, de supposer que

$$\beta\varepsilon\mu\omega^2 \ll 1,$$

ce que l'on fera toujours ici.

Néanmoins cette hypothèse n'est pas nécessaire, et nous montrons dans [29] le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3.4. *Il existe un ensemble dense de valeurs de β dans $[0, +\infty)$ et un sous-ensemble $\mathfrak{S}$ dense de $(\beta^2, +\infty)$ tel que si $\frac{1}{\varepsilon\mu\omega^2} \in \mathfrak{S}$ alors le résultat final du théorème 2.3.1 est vrai.*

Lorsque $\beta = 0$, le résultat du théorème 2.3.1 signifie, grâce à la remarque 2.3.2, que l'on peut presque prescrire le champ E (qui est alors tangentiel sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$). Cela peut sans doute être utile dans des phénomènes de piège à particules, c'est à dire où l'on veut prescrire un champ électrique autour d'une cavité pour empêcher toute particule s'y trouvant, d'en sortir.

Pour des valeurs de β petites, le premier terme du membre de droite de (2.21b) est probablement physiquement négligeable : en effet il existe une constante $C > 0$ (uniforme en β assez petit) telle que si H vérifie (2.21a), (2.22) et (2.23) alors

$$\|H\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq C \|J\|_{L_T^2(\Gamma)},$$

ce qui prouve que le terme prédominant dans le membre de droite de (2.21b) est $\frac{i}{\varepsilon\mu\omega} \text{curl}(H)$.

2.3.1. Sur un domaine intérieur ? Dans l'esprit de l'article de A. Osses & J.P. Puel [84] (voir aussi la section 3.7), on peut se demander si, pour un sous-domaine de Jordan de Ω donné bordé par une surface γ on a un résultat analogue, i.e. prescrire (approximativement) les valeurs tangentielles de $\text{curl}(H)$ sur γ . On note ν la normale extérieure unitaire à γ . On note $\frac{1}{A} = \beta^2 - \frac{1}{\varepsilon\mu\omega^2}$. On supposera que $\text{int}(\gamma)$ (la composante connexe bornée du complémentaire de γ) ne contient pas de composantes connexes de $\partial\Omega$. Effectuons formellement (voir la figure 2.3.1 pour les notations) :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (\nu \wedge \text{curl}(H)) \cdot \phi d\sigma &= \int_{\Omega_2} \text{curl} \text{curl}(H) \phi dx - \int_{\Omega_2} \text{curl}(H) \text{curl}(\phi) dx \\ (2.26) \quad &= \int_{\Omega_2} (-AH - 2\beta A \text{curl}(H)) \phi dx - \int_{\Omega_2} H \text{curl} \text{curl}(\phi) dx \\ &\quad - \int_{\gamma} \nu \wedge \text{curl} \phi \cdot H d\sigma \\ &= \int_{\Omega_2} H (-A\phi - 2\beta A \text{curl}(\phi) - \text{curl} \text{curl}(\phi)) dx \\ (2.27) \quad &\quad - \int_{\gamma} H \cdot (\nu \wedge (2\beta A \phi + \text{curl} \phi)) d\sigma. \end{aligned}$$

Si l'on peut trouver $\phi \in H(\text{curl}, \Omega)$ vérifiant

$$(2.28a) \quad -A\phi - 2\beta A\text{curl}(\phi) - \text{curlcurl}(\phi) = 0 \text{ dans } \Omega_2$$

$$(2.28b) \quad \phi \wedge \nu \text{ donné sur } \gamma,$$

il découle de (2.28a) que $\text{curl}(\phi) \in H(\text{curl}, \Omega_2)$. Le deuxième terme du membre de droite de (2.27), définit alors une forme linéaire continue L_ϕ sur $H(\text{curl}, \Omega)$.

Si l'on peut résoudre dans $H(\text{curl}, \Omega)$,

$$(2.29a) \quad -A\psi - 2\beta A\text{curl}(\psi) - \text{curlcurl}(\psi) = L_\phi \text{ dans } \Omega$$

$$(2.29b) \quad \psi \wedge n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

on obtient (puisque H satisfait (2.21a), et en utilisant (2.25))

$$(2.30) \quad \int_{\gamma} \text{curl}(H) \wedge \nu \cdot \psi d\sigma = \int_{\Gamma} J \cdot (\nu \wedge \text{curl}(\psi)) d\sigma,$$

Soit $\widehat{\Omega}$ un ouvert inclus dans Ω , tel que $\partial\Omega \subset \partial\widehat{\Omega}$, $\gamma \subset \Omega \setminus \widehat{\Omega}$.

Comme $\text{div}(\psi) = 0$ loin de γ , on a alors $\psi \in H^1(\widehat{\Omega})$ (voir R. Dautray & J.L. Lions [31]), puis on a également $\text{curl}(\psi) \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc

$$\text{curl}(\psi) \in H^1(\widehat{\Omega}).$$

Donc $\text{curl}(\psi) \wedge n$ est bien défini sur $\partial\Omega$, et le membre de droite de (2.30) existe pour une solution ψ de (2.29). Or, on peut prouver, comme pour le théorème 2.3.1, que, pour beaucoup de valeurs de $\varepsilon, \mu, \beta, \omega$, les systèmes (2.28a)–(2.28b) et (2.29a)–(2.29b) possèdent des solutions uniques et on obtient de même

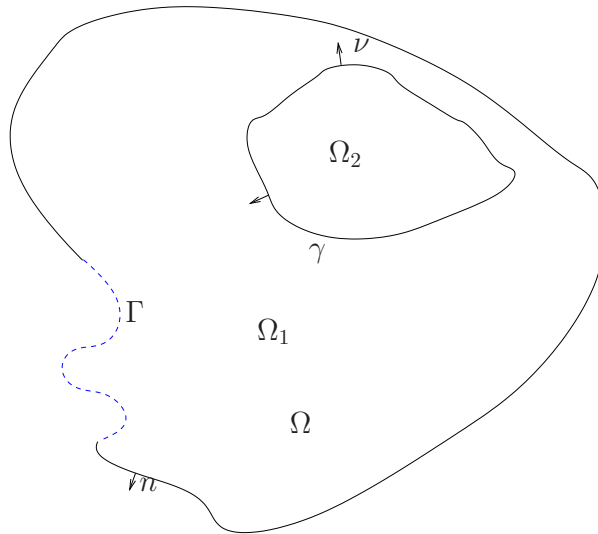


FIG. 2.3.1: Sur le bord d'un domaine intérieur

THÉORÈME 2.3.5. *Il existe un ouvert dense $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}$ tel que, si*

$$\frac{1}{\varepsilon\mu\omega^2} \in \mathcal{O}',$$

et si β est assez petit alors, lorsque J varie dans $L_T^2(\Gamma)$, $\text{curl}(H)$ où H est la solution de (2.21a) (2.22) (2.23) a une partie tangentielle dense dans $L_T^2(\gamma)$.

Pour des raisons de régularité, il est clair, aussi bien dans le théorème 2.3.1 que dans le théorème 2.3.5, que l'on ne peut pas parcourir tous les champs tangentiels L^2 sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$ et respectivement γ . Par ailleurs l'intérêt physique du théorème 2.3.5 est moins clair que celui du théorème 2.3.1 puisque pour ce dernier on sait déjà que $\text{curl}(H)$ est tangentiel sur la partie à contrôler.

Remarquons aussi que E et H jouent des rôles parfaitement symétriques, il s'ensuit qu'on peut énoncer des résultats similaires sur E .

REMARQUE 2.3.6. L'usage des équations de Maxwell en régime harmonique est fréquent chez les physiciens, et, on peut penser que des résultats de contrôlabilité dans ce type de régime peuvent être intéressants.

REMARQUE 2.3.7. On pourrait se poser la question de prescrire approximativement E ou H sur une partie ouverte $\omega \subset \Omega$.

Plus exactement, on considère H vérifiant (2.21a) (2.22) (2.23). On cherche J pour que $H|_\omega$ soit donné.

Un calcul formel montre que

$$\int_\omega H \phi dx$$

s'exprime en fonction de $\int_\Gamma J \cdot (\text{curl}(\theta) \wedge n) d\sigma$ où θ vérifie

$$\theta + 2\beta \text{curl}(\theta) + \left(\beta^2 - \frac{1}{\varepsilon\mu\omega^2}\right) \text{curlcurl}(\theta) = \phi \chi_\omega$$

$$\theta \wedge n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Mais on voit, en choisissant $\theta \in \mathfrak{D}(\omega)^3$, que l'on peut avoir $\int_\omega H \phi dx \neq 0$ alors que $\text{curl}(\theta) \wedge n = 0$. Ainsi la contrôlabilité approchée n'a pas lieu.

2.4. Avec des relations constitutives plus générales.

On s'intéresse ici au cas où dans (2.4a)–(2.4d) on prend $\rho = 0$, et on simplifie (2.5a) (2.5b) de la façon suivante :

$$(2.31a) \quad D(t, x) = \varepsilon E(t, x) + \varepsilon \int_0^t \chi^e(\tau) E(t - \tau, x) d\tau,$$

$$(2.31b) \quad H(t, x) = \frac{1}{\mu} B(t, x) - \int_0^t \chi^m(\tau) H(t - \tau, x) d\tau.$$

Cette approximation est donnée dans [30]. Elle décrit un effet de retard dans les équations de Maxwell classiques. Contrairement à (2.5a) et (2.5b), où il est supposé qu'il y a une mémoire sur $(-\infty, t)$, on suppose ici que la mémoire existe seulement sur $(0, t)$. Nous prenons Γ un sous-ensemble de $\partial\Omega$, $T > 0$ et on ajoute des conditions de bords à (2.4a)–(2.4d), (2.31a) (2.31b) qui sont

$$(2.32) \quad H \wedge n = J \text{ sur } (0, T) \times \Gamma$$

$$(2.33) \quad H \wedge n = 0 \text{ on } (0, T) \times (\partial\Omega \setminus \Gamma)$$

$$(2.34) \quad E \cdot n = 0 \text{ on } (0, T) \times \partial\Omega.$$

Le résultat principal de [30] est le suivant :

THÉORÈME 2.4.1. *Supposons que $\Gamma = \partial\Omega$, alors si T est assez grand et $\|\chi^{e,m}\|_{2,\infty}$ sont assez petits le système (2.4a)–(2.4d) (2.31a) (2.31b)–(2.34) est contrôlable exactement aux trajectoires dans $H(\operatorname{div} = 0, \Omega) \times H_0(\operatorname{div} = 0, \Omega)$.*

La preuve est essentiellement la même que celle donnée par S. Nicaise dans [83] avec un argument de perturbations.

2.5. Contrôlabilité des équations de Maxwell avec une source stochastique.

Dans cette partie, on s'intéresse aux équations de Maxwell classiques, auxquelles on ajoute un terme source de type stochastique et un contrôle distribué. On décrit les résultats de [65] qui ont été inspirés par ceux de J. U. Kim (voir [68]).

Plus précisément on considère le système d'équations

$$(2.35) \quad d(A\mathcal{E}(t)) = (\mathcal{M}\mathcal{E}(t) + \mathcal{J}(t) + Bu(t))dt + \sum_{j=1}^N g_j dW_j(t)$$

$$(2.36) \quad \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_0,$$

$$\text{où } \mathcal{E} := \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} 0 & -\text{curl} \\ \text{curl} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \text{diag}(\varepsilon, \mu),$$

où les coefficients ε et μ sont supposés constants.

Dans le membre de droite de (2.35), W_j désigne la j ème composante d'un processus de Wiener de dimension N , défini sur un espace de probabilité

$$(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Il en résulte une filtration $\mathcal{F}_t$ ¹⁰. On note $\mathbb{P}$ la mesure de Wiener associée au processus W et à la filtration $\mathcal{F}_t$. On a également N fonctions vectorielles $g_j :=$

$\begin{pmatrix} g_j^{(1)} \\ g_j^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$, ne dépendant que de la variable d'espace $x \in O$ (O est un ouvert connexe régulier de $\mathbb{R}^3$) telles que $\forall j = 1, \dots, N$ on a $\text{div}(g_j^{(1)}) = \text{div}(g_j^{(2)}) = 0$. $\mathcal{J}$ est une source de "courant".

Ici on impose les conditions suivantes

$$H \wedge n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial O,$$

et

$$E \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial O,$$

c'est-à-dire que l'on imposera $(E, H) \in \mathcal{H}$ avec

$$\mathcal{H} := (H_0(\text{curl}) \cap H(\text{div} = 0, \Omega)) \times (H(\text{curl}) \cap H_0(\text{div} = 0)).^{11}$$

Notons $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$.

La lettre u désigne un contrôle que l'on prend dans

$$L^2(0, T, L^2(\mathbb{P}, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}),$$

B est une matrice définie positive.

¹⁰ $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendré par les $W_j(u)$ pour $u \leq t$.

¹¹voir page 17 pour une définition de ces espaces.

Si l'on suppose que $\mathcal{J} \in L^2((0, T), L^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}) \otimes \mathcal{H})$ on a

THÉORÈME 2.5.1. *Sous les hypothèses ci-dessus le système (2.35) (2.36) est bien posé dans $\mathcal{H}$.*

Nous prouvons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2.5.2. *Le système (2.35) (2.36) est approximativement contrôlable dans $\mathcal{H}$ en temps arbitrairement petit. Plus précisément, étant donné $\varepsilon > 0$, et $\mathcal{E}_0 \in L^2(\mathbb{P}, \mathcal{F}_0, \mathcal{H})$ et $\mathcal{E}_T \in L^2(\mathbb{P}, \mathcal{F}_T, \mathcal{H})$, il existe*

$$u \in L^2(0, T, L^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}) \otimes \mathcal{H}),$$

tel que la solution de (2.35) (2.36) vérifie

$$\mathbb{E}(\|\mathcal{E}_T - \mathcal{E}(T)\|_{\mathcal{H}}) < \varepsilon.$$

Il n'y a pas d'obstruction, contrairement au cas déterministe, sur le temps de contrôlabilité car le contrôle agit sur tout le domaine O . En revanche comparée aux résultats déterministes, la filtration pose des problèmes pour la définition correcte du problème adjoint. Nous devons alors utiliser un argument d'approximation sur un temps arbitrairement petit prouvé dans [68] et ne pas “changer” de $\mathcal{F}_t$. De fait nous devons avoir un temps arbitrairement petit pour contrôler, il en découle qu'il est “nécessaire” (par cette méthode) de contrôler sur tout O . On renvoie à [65] pour plus de détails.

Contrôlabilités lagrangiennes de modèles fluides.

3.1. Introduction du problème sur un exemple

Le point de départ de ces travaux est un déjeuner en compagnie de J.P. Puel, dans une brasserie bien connue des locataires de “Chevaleret”, au cours duquel nous nous demandions si on pouvait mélanger la notion de transport optimal (*i.e.* le problème de Monge-Kantorovich, voir *e.g.* L.C. Evans [41]) et la contrôlabilité. Ce problème a également été suggéré par G. Leugering au cours des rencontres de Benasque.

Le problème du contrôle des transports se pose déjà en lui-même de la façon suivante :

Considérons l'équation d'Euler bi ou tridimensionnelle posée dans un ouvert régulier borné et connexe Ω , dont la normale unitaire extérieure est notée n .

$$(3.1a) \quad \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega,$$

$$(3.1b) \quad \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega,$$

$$(3.1c) \quad u \cdot n = 0 \text{ on } (0, T) \times (\partial\Omega \setminus \Gamma),$$

avec une condition initiale

$$(3.2) \quad u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans } \Omega.$$

Dans cette formulation, le contrôle n'est pas spécifié, mais on peut par exemple choisir

$$(3.3) \quad u \cdot n = g(t) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma, \text{ avec } \int_{\Gamma} g d\sigma = 0$$

$$(3.4) \quad \operatorname{curl}(u) = h(t) \text{ sur } \{\sigma \in \Gamma, u \cdot n(\cdot, \sigma) < 0\}.$$

En dimension 3, (3.4) doit être remplacé par

$$(3.5) \quad \operatorname{curl}(u) \wedge n \text{ sur } \{\sigma \in \Gamma, u \cdot n(\cdot, \sigma) < 0\}.$$

Muni des conditions (3.3) et (3.4) en dimension 2 ou (3.5) en dimension 3, le système (3.1) est bien posé (voir V. I. Yudovich [101] et A.V. Kazhikov [67]).

DÉFINITION 3.1.1. La contrôlabilité eulérienne en temps T du système d'Euler est la possibilité pour tout couple

$$(u_0, u_1) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad N = 2, 3,$$

de trouver une solution de (3.1) vérifiant $u(0, \cdot) = u_0$ et $u(T, \cdot) = u_1$.

Ce problème posé initialement par J.L. Lions a été résolu en dimension 2 par J.M. Coron dans [23], et en dimension 3, par O. Glass dans [49]. En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte est que Γ rencontre toute composante connexe de $\partial\Omega$.

Dans les deux cas, la preuve repose sur la construction d'un flot potentiel adapté à la situation, d'une part, et à l'utilisation de la méthode du retour d'autre part.

Rappelons que si l'on a

$$\theta \in C^0([0, 1], C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)), \quad N = 2, 3,$$

satisfaisant

$$(3.6) \quad \forall t \in [0, 1] \quad x \mapsto \theta(t, x) \text{ est harmonique dans } \Omega,$$

alors le couple $(u, p) = (\nabla\theta, p)$ où

$$p = -\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{|\nabla\theta|^2}{2}$$

est solution de (3.1a) (3.1b). Une telle solution est appelée solution potentielle. On a bien sûr

$$(3.7) \quad \text{curl}(u) = 0.$$

On peut introduire un autre type de contrôlabilité : pour motiver la définition suivante, on note que la description lagrangienne d'un fluide situé dans un ouvert Ω et de champ des vitesses

$$(t, x) \mapsto u(t, x)$$

consiste à suivre la trajectoire des particules de fluides, c'est à dire à considérer les trajectoires du flot ϕ^u de u (voir (3.10) (3.11) page 31 pour la définition de ϕ^u).

DÉFINITION 3.1.2. Considérons un ensemble de particules situées à l'instant 0 dans une partie ω_0 de Ω et soit ω_1 un sous-ensemble de Ω . Peut-on agir sur le fluide, par exemple sur une partie de $\partial\Omega$, pour que à un instant donné T fixé toutes les particules initialement dans ω_0 remplissent ω_1 ? Ce problème est défini comme la *contrôlabilité lagrangienne du fluide* entre ω_0 et ω_1 en temps T .

Bien sûr le modèle utilisé pour décrire le comportement du fluide peut entraîner des contraintes sur T , sur ω_0 , et sur ω_1 .

Par exemple, pour un fluide incompressible, *i.e.* vérifiant (3.1b), la contrôlabilité lagrangienne entre ω_0 et ω_1 , impose

$$(3.8) \quad |\omega_0| = |\omega_1|.$$

Dans le cas de l'équation d'Euler bi et tridimensionnelle, la méthode employée par J.M. Coron et O. Glass, dans le cas respectif de la dimension 2 et 3, voir

les travaux de J.M. Coron [23] et O. Glass [49], permet de montrer, par exemple, que la condition (3.8) est suffisante pour des topologies raisonnables de ω_0 et ω_1 (par exemple si ω_0 et ω_1 sont des boules) pourvu que Γ rencontre toutes les composantes connexes de $\partial\Omega$.

Il est important de noter ici (voir également [51]) que dans les deux travaux [23] et [49], les flots potentiels sont utilisés pour faire sortir et rentrer la totalité du fluide de et dans Ω . Ne disposant pas de modèles pour le fluide à l'extérieur de Ω , l'opérateur agit tel qu'il le souhaite pour modifier la configuration des particules de fluide.

Néanmoins, le problème de la contrôlabilité lagrangienne reste posé si l'on impose de plus que les trajectoires des particules à déplacer restent dans la zone de modèle fluide, ici Ω .

Dans les paragraphes suivants on décrit quelques équations pour lesquelles on peut prouver des résultats de contrôlabilité lagrangienne.

3.2. Contrôlabilité lagrangienne associée à l'équation de la chaleur.

3.2.1. Cas de la dimension 1. Considérons pour $T > 0$ l'équation de la chaleur contrôlée sur un intervalle $\omega :=]a, b[$ avec $[a, b] \subset (0, 1)$,

$$(3.9a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h\chi_\omega \text{ sur } (0, T)_t \times (0, 1)_x,$$

$$(3.9b) \quad u(t, x) = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = 1, \forall t > 0,$$

$$(3.9c) \quad u(t = 0, x) = u_0(x), x \in (0, 1).$$

Pour un sous-ensemble F d'un ensemble E , χ_F désigne la fonction caractéristique de F .

L'équation (3.9a) peut se voir comme un cas particulier, en prenant $\lambda = 0$, de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h\chi_\omega \text{ sur } (0, T)_t \times (0, 1)_x,$$

qui est l'équation de Burgers dissipative. Cette équation est souvent considérée comme la version mono-dimensionnelle des équations de Navier-Stokes.

On peut donc grossièrement considérer que (3.9a) est un modèle fluide pour lequel le problème de la contrôlabilité lagrangienne pour le système (3.9) peut se poser.

Dans [62] nous démontrons le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.1. *Supposons que $u_0 = 0$. Étant donné I_1 et I_2 deux intervalles de même nature (ouverts, fermés,...) tels que $\overline{I_j} \subset [0, 1]$, $j = 1, 2$. Il existe $h \in L^2(0, T, L^2(\omega))$ tel que le flot de u défini par*

$$(3.10) \quad \frac{\partial \phi^u}{\partial t}(s, t, x) = u(t, \phi^u(s, t, x)), (s, t) \in [0, T]^2$$

$$(3.11) \quad \phi^u(s, s, x) = x$$

vérifie

$$(3.12) \quad \phi^u(0, T, I_1) = I_2,$$

où u vérifie (3.9).

La preuve de ce résultat consiste en la construction de solutions ad-hoc, u_1 et u_2 , u_2 étant indépendante du temps, de l'équation (3.9a), pour lesquelles on a

$$\phi^{u_1}(0, T/3, I_1) \subset \omega,$$

et

$$\phi^{u_2}(2T/3, T, I_2) \subset \omega.$$

Pour ce faire, on utilise la contrôlabilité exacte à zéro de l'équation de la chaleur (voir H. Fattorini & D. Russel [42] et G. Lebeau & L. Robbiano [72]) pour “recoller” les solutions u_1 et u_2 de (3.9a) et cette méthode s'apparentant à la méthode du retour.

Par ailleurs, pour définir correctement le flot de u , on utilise la régularité locale des solutions de (3.9a) dans tout ouvert où h est régulière (et en particulier en dehors du “support” de h).

La méthode employée dans [62] permet de démontrer que

PROPOSITION 3.2.2 ([62]). *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, supposons que*

$$\overline{I_k} \subset (0, 1) \quad \text{pour } k = 1, 2,$$

alors, pour tout difféomorphisme $D : I_1 \rightarrow I_2$ croissant, il existe

$$h \in L^2(0, T; L^2(\omega))$$

tel que la solution de (3.9) satisfasse

$$(3.13) \quad \forall x \in I_1, \phi^u(0, T, x) = D(x)$$

REMARQUE 3.2.3. Au vu des problèmes de contrôlabilité “classiques” (i.e. quand l'état à contrôler est u), on peut remarquer que la condition $u_0 = 0$ n'est pas indispensable. En particulier, on dispose du résultat suivant en utilisant les mêmes méthodes :

PROPOSITION 3.2.4. *Si $u_0 \neq 0$ et $\overline{I_k} \subset (0, 1)$, $k = 1, 2$, pour tout difféomorphisme $D : I_1 \rightarrow I_2$ croissant, il existe $T > 0$ et $h \in L^2(0, T, L^2(\omega))$ tels que (3.13) ait lieu pour la solution u de (3.9).*

De même, on peut également imposer la condition finale $u(T, \cdot) = 0$ et obtenir

PROPOSITION 3.2.5. *Si on a $\overline{I_k} \subset (0, 1)$, $k = 1, 2$, il existe $T > 0$ et $h \in L^2(0, T, L^2(\omega))$ tels que (3.12) ait lieu pour la solution u de (3.9a) (3.9b) (3.9c) et $u(T, \cdot) = 0$.*

REMARQUE 3.2.6. Il est à noter que pour $h \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ le flot de u est bien défini.

En effet, on sait que

$$u \in L^2(0, T, H^2(0, 1) \cap H_0^1(\Omega))$$

donc la théorie de R. DiPerna & P.L. Lions s'applique puisqu'on est en dimension 1 (voir [34] pour les hypothèses).

Notons, néanmoins, qu'il n'est pas nécessaire de l'utiliser dans notre situation, puisqu'on sait que $u(t, \cdot)$ est lipschitz.

REMARQUE 3.2.7. On peut également procéder de la manière suivante :

Soit $u_0 \in C_0^\infty(0, 1)$ et $u_2 \in H_0^1(0, 1)$ tel que

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = h_2 \chi_{\omega_1}$$

pour que $\phi^{u_2}(2T/3, T, I_2) \subset \omega_1$ avec

$$\overline{\omega_1} \subset \omega.$$

D'après un résultat de G. Lebeau & L. Robbiano [72], pour tout $T > 0$ il existe

$$h \in L^2(0, T, L^2(\omega_1))$$

tel que la solution de (3.9a), (3.9b) et (3.9c) satisfasse

$$u(T, \cdot) = u_2.$$

Prenons, en effet, $\tilde{h}$ tel que la solution $\tilde{u}$ de (3.9a)–(3.9b) avec ω remplacé par ω_1 , (3.9b) et $u(t = 0, \cdot) = u_0 - u_2(t = 0, \cdot)$, satisfasse $u(t = T) = 0$. Alors, $u = \tilde{u} + u_2$ répond à la question.

Prenons alors $\phi \in C^\infty([0, 1])$ tel que

$$\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \omega_1$$

et

$$\phi = 1 \quad \text{sur} \quad {}^c\omega.$$

Alors $u\phi$ satisfait (3.9a), (3.9b) pour un certain h et vaut, $u_0\phi$ en $t = 0$, $u_2\phi$ en $t = 1$, et est C^∞ en espace.

Le cas d'un contrôle frontière (en $x = 0$ ou en $x = 1$) peut être également considéré, voir le paragraphe 3.3.

3.2.2. Cas de la dimension supérieure. En utilisant des méthodes similaires au cas de la dimension 1, on peut, en toute dimension, établir le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.8. *Soit $T > 0$, Ω un ouvert connexe et régulier de $\mathbb{R}^N$, un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, et $I \in C([0, T], C^3(\Omega, \Omega))$ une application réalisant une isotopie¹ entre deux fermés F_1 et F_2 inclus dans $\Omega \setminus \omega$. Si $N = 2$ ou bien, lorsque $N > 2$, en supposant que Ω est convexe, il existe $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$ tel que la solution de*

$$(3.14) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = h_\chi \omega \text{ dans } (0, T) \times \Omega$$

$$(3.15) \quad \begin{aligned} u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

satisfait

$$(3.16) \quad \phi^{\nabla u}(0, T, F_1) \subset F_2$$

Si $N = 2$ et F_1 et F_2 sont les intérieurs de deux domaines dont les frontières sont deux courbes de Jordan entourant des surfaces d'aires égales et assez petites, alors on peut trouver h pour que (3.16) soit une égalité.

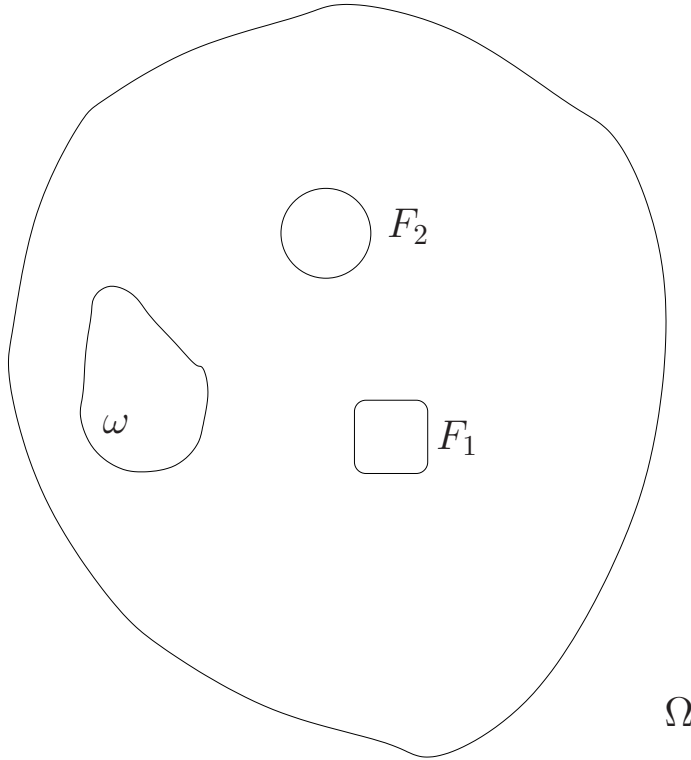


FIG. 3.2.1: Contrôle lagrangien de l'équation de la chaleur.

¹Pour la définition d'une isotopie voir page 36.

Dans le cas où Ω est convexe : on procède comme suit : soit B une boule incluse dans ω . Considérons u_B (appelée fonction capacité de B relative à Ω) vérifiant

$$\begin{aligned} -\Delta u_B &= 0 \text{ dans } \Omega \setminus B, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ u &= 1 \text{ sur } \partial B, \end{aligned}$$

la capacité étant $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$.

Grâce aux résultats de J. Lewis (voir [73]), on montre que le flot rétrograde de ∇u_B , c'est à dire les trajectoires sur un intervalle $[s_1, s_2]$ avec $s_1 < s_2$ de

$$\frac{dx}{dt} = \nabla u_B(x(t)), \quad x(s_2) \in F_1$$

vérifient

$$x(s_1) \in \omega.$$

En dimension 2 on utilise des solutions stationnaires de (3.14) que l'on recolle par le théorème de Lebeau-Robbiano [72].

Ces solutions, dont on reparlera dans les sections 3.5 et 3.6, ont été introduites par J.M. Coron dans les deux articles [23] et [24]. Elles sont construites par une méthode d'extension de domaine et utilisent les points singuliers des applications harmoniques. Cette partie n'est pas détaillée dans [62] mais la preuve de J.M. Coron dans [24] pour faire sortir tout le fluide du domaine s'applique ici.

En dimension plus grande, ces solutions stationnaires ont des points singuliers (voir O. Glass [49]), et, l'argument de J.M. Coron dans [24] pour faire sortir le fluide est remplacé par des fonctions du temps et de l'espace, harmoniques en espace pour chaque t , et qui ne vérifient plus (3.14). On ne peut donc pas *a priori* les utiliser. On les remplace comme indiqué ci-dessus par les fonctions capacités.

REMARQUE 3.2.9. Dès la dimension 2, comme la solution de (3.14), (3.15) est dans

$$L^2(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$$

et a cette régularité maximale, on ne peut plus utiliser les résultats de R. DiPerna & P.L. Lions (voir [34]) et, *a priori*, le flot de ∇u n'est plus défini. Néanmoins on peut utiliser la même méthode que celle décrite dans la remarque 3.2.7.

REMARQUE 3.2.10. Lorsque $N = 2$, deux courbes de Jordan homotopes dans un ouvert sont isotopes dans cet ouvert (voir les références à ce sujet dans les paragraphes 3.5 et 3.6).

DÉFINITION 3.2.11. Deux applications continues $f_i : E \rightarrow F$ $i = 1, 2$ sont dites homotopes s'il existe $f : [0, 1] \times E \rightarrow F$ continue tels que $f(0, \cdot) = f_0$ et $f(1, \cdot) = f_1$. Dans les cas particuliers des courbes de Jordan $E = \mathbb{S}^1$ et f_i est un plongement de E c'est à dire un difféomorphisme sur son image.

DÉFINITION 3.2.12. Deux plongements $f_i : E \rightarrow F$ $i = 1, 2$ sont isotopes si l'on peut réaliser une homotopie $f : [0, 1] \times E \rightarrow F$ telle que $\forall t \in [0, 1]$ $f(t, \cdot)$ est un plongement. Cette homotopie est alors appelée isotopie.

REMARQUE 3.2.13. En ce qui concerne les motivations éventuelles à considérer le flot de ∇u , certains modèles de déplacement des particules font apparaître des équations de la forme

$$(3.17) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha(x, \nabla u, t) \cdot \nabla_x \rho = 0,$$

où ρ représente la densité de particules (par exemple de la poussière) dans un gaz de température u .

Ainsi dans un gaz parfait, la relation $pV = nRT$ montre que pour un volume donné, un gradient de température donne un gradient de pression qui va engendrer un mouvement opposé au gradient de température, en l'absence d'autres forces significatives. Tel serait le cas à la surface du globe en l'absence des forces de Coriolis.

L'équation (3.17) se résout heuristiquement par la méthode des caractéristiques et l'on voit que le flot de ∇u correspond au choix $\alpha(x, \nabla u, t) = \nabla u$.

3.3. Contrôlabilité locale lagrangienne de l'équation de Burgers dissipative.

3.3.1. Et si on linéarisait ? Remarquons que le flot de u solution de (3.9a) et (3.9b) peut être introduit (comme dans R. DiPerna & J.L. Lions [34]) via l'équation de transport associée et on peut considérer le système formel suivant (écrit ici, dans le cadre d'un contrôle au bord) posé sur $[0, T]_t \times [0, 1]_x$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ u(t, 0) &= 0, \\ u(t, 1) &= h(t), \quad \text{où } h \text{ est le contrôle,} \\ u(0, x) &= u_0(x), \\ v(0, x) &= v_0(x). \end{aligned}$$

Si nous linéarisons autour d'une solution $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{h})$, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= 0, \\ \hat{u}(t, 0) &= 0, \\ \hat{u}(t, 1) &= \hat{h}(t), \\ \hat{u}(0, x) &= 0, \\ \hat{v}(0, x) &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

On voit sur l'équation (3.18) que si $\bar{v}$ est constante sur un intervalle I , $\hat{v}$ est parfaitement déterminé sur

$$\bigcup_{t \in [0, T]} \phi^{\bar{v}}(0, t, I),$$

il semble donc difficile de prescrire, au moins sur le linéarisé, la trajectoire de tous les points d'un intervalle et ce, localement.

De même, si $\bar{u} = 0$, alors $\bar{v}$ ne dépend pas du temps, et donc, tout point de maximum ou de minimum de $\bar{v}$, est l'origine d'une caractéristique de $\bar{v}$, le long de laquelle on ne peut pas changer $\hat{v}$.

Il s'ensuit que pour espérer déplacer un intervalle sur un autre, par le flot d'une solution de (3.9a) "localement", on ne peut guère espérer prescrire que les déplacements des extrémités de ces intervalles en considérant des v_0 qui sont des fonctions caractéristiques d'intervalles.

Dans les paragraphes 3.5 et 3.6, on verra que l'on peut prescrire approximativement le déplacement d'une zone d'un fluide incompressible mais qu'il est sans doute illusoire, comme cela semble être "montré" ci-dessus, de prescrire le mouvement de chacune des particules de cette zone.

3.3.2. Pourquoi la contrôlabilité locale ? Dans la partie 3.2, on a étudié la contrôlabilité lagrangienne de l'équation de la chaleur en dimension 1.

L'inconvénient de la méthode utilisée est que, pour deux intervalles arbitrairement proches, I_1 et I_2 (avec les notations du théorème 3.2.1), pendant un intervalle de temps $(\tau, T - \tau)$, où $0 < \tau < T/2$, le flot de u envoie les points de I_1 loin de I_1 et I_2 , *i.e.* le flot des points de I_1 rencontre ω . On pourrait qualifier ce type de contrôlabilité lagrangienne comme étant globale (*i.e.* il n'y a pas d'hypothèse de proximité entre I_1 et I_2), non locale (*i.e.* même si I_1 et I_2 sont proches, le contrôle déplace les particules le long de chemins qui rencontrent ω).

On peut donc tenter de voir si on ne peut pas obtenir un résultat de contrôlabilité locale entre deux intervalles I_1 et I_2 .

Rappelons les notions suivantes pour un système de dimension finie :

DÉFINITION 3.3.1. Soit

$$(3.19) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, h)$$

un système de contrôle non-linéaire où $(x, h) \in \mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

Soit également $(\bar{x}, \bar{h})$ un point d'équilibre de (3.19), et $T > 0$.

On dit que (3.19) est localement contrôlable au voisinage de $(\bar{x}, \bar{h})$, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tels que pour tous x_0, x_1 , tel que $|x_0 - \bar{x}| < \eta$ et $|x_1 - \bar{x}| < \eta$, il existe $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^M$ tel que

$$\begin{aligned} |h(t) - \bar{h}| &\leq \varepsilon, \\ \frac{dx}{dt} &= f(x, h), \quad x(0) = x_0, \implies x(T) = x_1. \end{aligned}$$

Dans notre situation, la question est la suivante : si la distance des bornes inférieures de I_1 et I_2 et la distance des bornes supérieures de I_1 et I_2 sont assez petites, peut-on trouver, pour tout $T > 0$, $h \in L^2(0, T, L^2(\omega))$ de norme assez petite, tel que le flot ϕ^u (u est la solution de (3.9a)–(3.9c) avec $u_0 = 0$) vérifie

$$\phi^u(0, T, I_1) = I_2 ?$$

Comme on l'a indiqué dans le paragraphe précédent, on peut tenter de linéariser le problème mais au prix de la perte probable de pouvoir fixer le difféomorphisme de I_1 sur I_2 .

3.3.3. Résultats.

3.3.3.1. *Condition initiale nulle.*

On s'intéresse au système de contrôle suivant ($\nu \geq 0$) :

$$(3.20) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \frac{\partial}{\partial x} u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } (0, T)_t \times (0, 1)_x$$

$$(3.21) \quad u(t, 0) = 0$$

$$(3.22) \quad u(t, 1) = g(t), \text{ } g \text{ est le contrôle}$$

$$(3.23) \quad u(0, x) = u_0(x), \text{ } x \in (0, 1)$$

Il est démontré dans [63] le résultat suivant :

THÉORÈME 3.3.2. *Soit I_k ($k = 1, 2$) deux intervalles tels que $\overline{I_k} \subset (0, 1)$. Notons $I_1 :=]a_1, b_1[$ et $I_2 :=]a_2, b_2[$. Pour tout $T > 0$, si $|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$ est assez petit, il existe une solution de (3.20)–(3.23) avec $u_0 = 0$ telle que $\phi^u(0, T, I_1) = I_2$.*

Dès lors que la régularité de u dans $(0, 1)$ est assurée, ce qui est le cas dans [63], il suffit de trouver un contrôle dans (3.22) tel que $\phi^u(0, T, a_1) = a_2$ et $\phi^u(0, T, b_1) = b_2$.

Pour ce faire, on applique le théorème d'inversion locale à l'application

$$(3.24) \quad (s_1, s_2) \mapsto (\phi^{u_{s_1, s_2}}(0, T, a_1), \phi^{u_{s_1, s_2}}(0, T, b_1))$$

au voisinage de $(0, 0)$ où l'on note u_{s_1, s_2} la solution de (3.20)–(3.22) dans lesquelles on prend

$$u(t, 1) = s_1 h_1(t) + s_2 h_2(t)$$

et de (3.23) avec $u_0 = 0$, en s'assurant que, pour des h_1 et h_2 correctement choisis, la différentielle de (3.24) est inversible en 0 (voir [63]) pour les détails).

3.3.3.2. Condition initiale non nulle. Lorsque dans (3.23) on ne prend plus $u_0 = 0$, on a (en prenant dans (3.22) $u(t, 1) = 0$), une dérive : la solution du système sans contrôle u_{sc} n'est pas une solution stationnaire. Ainsi pour envisager de la contrôlabilité locale, il faut remplacer la condition “ I_1 et I_2 proches” par la condition naturelle qui apparaît avec la dérive : “ I_2 est proche de $\phi^{u_{sc}}(0, T, I_1)$ ”.

A ce sujet, on démontre précisément dans [63] :

THÉORÈME 3.3.3. *Considérons $u_0 \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$ vérifiant $u_0(0) = 0$ et $u_0(1) = 0$. On note $\bar{u}$ la solution de (3.20)–(3.21)–(3.23) et*

$$\forall t \in [0, T], \bar{u}(t, 1) = 0.$$

Soit

$$\tilde{I}_2 :=]\bar{a}_1, \bar{b}_1[:= \phi^{\bar{u}}(0, T, I_1).$$

Si $|\bar{a}_1 - a_2| + |\bar{b}_1 - b_2|$ est assez petit, il existe une solution u de (3.20)–(3.23) telle que

$$\phi^u(0, T, I_1) = I_2,$$

où

$$I_2 :=]a_2, b_2[.$$

La preuve de ce résultat est similaire à celle du théorème 3.3.2.

Dans les deux théorèmes 3.3.2 et 3.3.3, on peut prendre g dans (3.22) très régulière, par exemple $g \in C_0^\infty(0, T)$.

REMARQUE 3.3.4. Dans le théorème 3.3.2 et le théorème 3.3.3, on peut bien sûr prendre $\nu = 0$, ce qui répond à la question de la contrôlabilité locale lagrangienne pour l'équation de la chaleur. En revanche, pour la contrôlabilité globale lagrangienne de l'équation de Burgers dissipative, le problème est à ma connaissance ouvert.

A ce sujet, l'argument permettant de conclure dans le cas de la section 3.2 est la contrôlabilité exacte à zéro de l'équation de la chaleur (voir G. Lebeau & L. Robbiano [72]) (encore appelée contrôlabilité exacte aux trajectoires pour les systèmes linéaires-voir J.M. Coron [26]). Cette contrôlabilité à zéro a lieu pour l'équation de Burgers dissipative en temps grand (voir également J.M. Coron [25]), mais par le caractère non-linéaire de (3.20) ce n'est bien sûr pas équivalent à la contrôlabilité aux trajectoires.

Pour un système de contrôle de dimension finie, donné par (1.5), page (1.5), on considère

$$t \mapsto (x_r(t), u_r(t))$$

une solution, dite de référence, de (1.5). La contrôlabilité à la trajectoire (x_r, u_r) en temps T est la possibilité de trouver pour tout x_0 , un contrôle u tel que la solution x de (1.5) et (1.6) vérifie au temps T ,

$$x(T) = x_r(T).$$

La contrôlabilité aux trajectoires de (3.20) a été prouvée par A. Fursikov & O. Imanuvilov (voir [45] et [44]).

D'autres résultats sur la contrôlabilité de (3.20) ont été obtenus par S. Guerrero & O. Imanuvilov dans [53], E. Fernandez-Cara & S. Guerrero dans [43], J.I. Dias dans [35]. La limite non visqueuse est étudiée, dans le cadre de la contrôlabilité, dans [50] par O. Glass et S. Guerrero.

REMARQUE 3.3.5. La méthode de [63] ne permet pas *a priori* d'obtenir $u(T, \cdot) = 0$ même en temps grand et même pour $u_0 = 0$.

3.3.4. Prescrire le difféomorphisme. Nous avons vu que prescrire la trajectoire de tous les points de I_1 , aussi bien dans le théorème 3.3.2 que le 3.3.3, semble plus problématique à cause de la forme du linéarisé. On peut cependant, en reprenant simplement les preuves de ces théorèmes, établir :

PROPOSITION 3.3.6. *Considérons $u_0 \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$ vérifiant $u_0(0) = 0$ et $u_0(1) = 1$. On note $\bar{u}$ la solution de (3.20)–(3.23) et*

$$\bar{u}(t, 1) = 0.$$

Soit

$$\widetilde{I}_2 :=]\overline{a_1}, \overline{b_1}[:= \phi^{\overline{u}}(0, T, I_1)$$

et soit $c_1, \dots, c_j$ j points de I_1 . On définit

$$\overline{c}_i = \phi^{\overline{u}}(0, T, c_i), \quad i = 1, \dots, j.$$

Si

$$|\overline{a_1} - a_2| + |\overline{b_1} - b_2| + \sum_{i=1}^j |d_i - \overline{c}_i|$$

est assez petit, il existe alors une solution u de (3.20) (3.21) (3.22) (3.23) telle que

$$\phi^u(0, T, I_1) = I_2,$$

et

$$\phi^u(0, T, c_i) = d_i, \quad i = 1, \dots, j.$$

3.3.5. D'autres modèles. Aussi bien les résultats de [62], que ceux de [63], s'appliquent dans la situation de l'équation de la chaleur non-linéaire, *i.e.* lorsque (3.20) est remplacée par

$$(3.25) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pm |u|^{p-1} u.$$

En effet, le h_1 et le h_2 utilisés dans la preuve du théorème 3.3.2 peuvent être pris arbitrairement petits, ce qui a pour conséquence, que la solution de (3.25) n'explose pas en temps fini.

Notons également que les résultats de la section 3.2, en ce qui concerne la dimension 1, s'étendent aussi à l'équation (3.25), pourvu que l'on travaille en temps grand, en utilisant les résultats de J.M. Coron & E. Trélat dans [27].

En revanche, en ce qui concerne l'équation de Burgers non dissipative (équation de Burgers-Hopf), où (3.20) est remplacée par

$$(3.26) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0,$$

et (3.22) est remplacée par

$$(3.27) \quad u(t, 0) \text{ et } u(t, 1) \text{ sont les contrôles,}$$

la contrôlabilité lagrangienne frontière est clairement fausse dans la classe des solutions entropiques de (3.26).

En effet, dans cette classe de solution, on ne peut pas imposer une décroissance de la borne inférieure de I_1 et imposer en même temps la croissance de la borne supérieure de I_1 .

3.4. Au sujet de la contrôlabilité de (3.26) (3.27)

Au sujet du problème de contrôle de (3.26) et (3.27) en variable eulérienne, dans [61] le problème est étudié via la méthode du retour. Il y est prouvé essentiellement que (3.26) n'est pas contrôlable, même en temps grand.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On note

$$BV(I) := \{u \in L^1(I), \text{ tel que, } \sup_{\phi \in C_0^1(I, \mathbb{R}), \|\phi\|_\infty \leq 1} \int_I u(x) \phi'(x) dx < \infty\}.$$

On définit

$$BV([0, 1]) := \{u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable, telle que } \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } [0, 1] \subset (a, b), \text{ et } v \in BV((a, b)) \text{ telle que } u = v \text{ sur } (0, 1)\}.$$

THÉORÈME 3.4.1. *Soit z_0 un élément de $BV([0, 1]) \cap L^\infty([0, 1])$ and $\varepsilon > 0$ and $T > 2$. Soit z_1 un élément de $BV([0, 1])$ satisfaisant*

$$(3.28) \quad \forall x \in [0, 1], z_1(x-) \geq z_1(x+) \\ (3.28) \text{ est stricte pour au plus une suite } (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$$

et, tel que

- (i) $\forall x_0 \in (0, 1)$, si $z_1(x_0-) > 0$ alors $z_1(x) > \frac{x}{T}$ pour $x \in [0, x_0)$,
- (ii) $\forall x_0 \in (0, 1)$, si $z_1(x_0+) < 0$ on a $z_1(x) < \frac{x-1}{T}$ pour $x \in (x_0, 1]$,
- (iii) Il existe au plus un $x_1 \in (0, 1)$ tel que $z_1 > 0$ sur $[0, x_1)$ et $z_1 < 0$ sur $(x_1, 1]$; de plus pour tout $x \in (0, 1]$ point de continuité de z_1 tel que $z_1(x) \neq 0$ on a

$$\frac{d^+}{dx} z_1(x) \leq \frac{1}{T}.$$

L'équation (3.26) a une solution entropique faible telle que

$$u(0, \cdot) = z_0$$

et

$$(3.29) \quad u(T, \cdot) = z_1$$

a lieu.

Ici $\frac{d^+}{dt}$ signifie la dérivée à droite.

Un résultat similaire au théorème 3.4.1 est donné par F. Ancona & A. Marson dans [5], traitant du problème de la contrôlabilité sur un demi-espace.

Ce n'est pas tout à fait le théorème 3.4.1 qui est démontré dans [61], sauf quand la donnée initiale est nulle. Lorsque la donnée initiale est non nulle, on peut éliminer la dérive produite pendant l'intervalle de temps $(0, T)$ en ajustant le contrôle donné dans le cas non nul. Cette simple modification à ce sujet m' a été suggérée par Fabio Ancona.

Dans l'article [50] de O. Glass & S. Guerrero, la condition initiale est aussi éliminée par une solution allant de 0 à presque 0 (ici en temps infini). Autour de

celle-ci, on linéarise (en fait on construit directement une solution du problème non-linéaire) de façon à avoir (3.29).

On peut bien sûr considérer des lois de conservations plus générales que (3.26), mais toujours pour des flux strictement convexes.

Pour d'autres types de contrôles sur (3.26), on renvoie aux travaux de M. Chapouly [16] [17].

3.5. Contrôlabilité Lagrangienne en dimension 2.

Dans cette partie on décrit les résultats de [51].

3.5.1. Contrôlabilité lagrangienne approchée. On considère donc Ω un ouvert connexe borné et régulier de $\mathbb{R}^2$. Cet ouvert est occupé par un fluide dont la vitesse u , et la pression p , satisfont (3.1a) (3.1b) (3.1c) avec une donnée initiale (3.2).

Rappelons que, pour $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on définit son rotationnel scalaire par

$$\text{curl}(u) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

En prenant le rotationnel de l'équation (3.1a) on voit que $\omega := \text{curl}(u)$ satisfait l'équation de transport

$$(3.30) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega$$

Ainsi la vorticité ($= \text{curl}(u)$) est transportée le long des caractéristiques de u c'est à dire le long des trajectoires des particules du fluide.

On se donne donc γ_0 et γ_1 deux courbes de Jordan C^∞ incluses dans Ω , et entourant deux domaines de même aire. Notons qu'on ne suppose pas que $\pi_1(\Omega)$ est nul² (i.e. Ω n'est pas supposé simplement connexe).

Supposons que, pour tout u_0 , il existe un couple (u, p) répondant aux problèmes de la contrôlabilité lagrangienne entre γ_0 et γ_1 en temps T , c'est à dire que

$$\phi^u(0, T, \gamma_0) = \gamma_1$$

avec (u, p) solution de (3.1) et (3.2), et supposons de plus que $\phi^u(0, t, \gamma_0) \subset \Omega$ pour tout $t \in [0, T]$.

Si u_0 est choisi pour que $\text{curl}(u_0) = 0$ au voisinage de γ_0 alors

$$(3.31) \quad \forall t \in [0, T], \text{curl}(u(t, \cdot)) = 0 \text{ au voisinage de } \phi^u(0, t, \gamma_0).$$

Mais, par (3.1b) et (3.31), on en déduit que $u(t, \cdot)$ est harmonique, pour tout $t \in [0, T]$, au voisinage de $\phi^u(0, t, \gamma_0)$.

Il s'ensuit que si γ_0 est une variété analytique réelle de dimension 1, alors il en est de même pour $\phi^u(0, t, \gamma_0)$, et γ_1 doit donc être une variété analytique réelle.

² $\pi^1(\Omega)$ est le premier groupe d'homotopie de Ω .

On voit donc qu'il n'est pas possible d'envisager un théorème de contrôlabilité lagrangienne exacte pour l'équation d'Euler dès lors que l'on impose à la partie du fluide dont on veut prescrire le mouvement de rester dans Ω .

Se pose alors la question de la contrôlabilité lagrangienne approchée entre γ_0 et γ_1 , lorsqu'on impose à la partie du fluide concernée de rester dans Ω . Pour cela on introduit la

DÉFINITION 3.5.1. On dira qu'il y a contrôlabilité lagrangienne approchée entre γ_0 et γ_1 en temps T et en norme C^k , $k \in \mathbb{N}^*$ pour le système d'Euler, si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une solution (u, p) de (3.1) et (3.2) telle que

$$(3.32) \quad \|\phi^u(0, T, \gamma_0) - \gamma_1\|_{C^k(\mathbb{S}^1)} \leq \varepsilon$$

à une reparamétrisation près (*i.e.* étant donné une paramétrisation de γ_0 il existe une paramétrisation de γ_1 telle que (3.32) soit vraie).

Dans [51] nous démontrons le résultat suivant :

THÉORÈME 3.5.2. *Supposons que γ_0 et γ_1 soient deux courbes de Jordan dans Ω , de classe C^∞ , entourant des sous-ensembles de même aire. Si Γ est une partie de $\partial\Omega$, et si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω , alors, pour tout $T > 0$, $\varepsilon > 0$, et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une solution (u, p) de (3.1) et (3.2) telle que (3.32) soit vraie (à une reparamétrisation près) et telle que*

$$(3.33) \quad \phi^u(0, [0, T], \gamma_0) \subset \Omega$$

REMARQUE 3.5.3. La preuve repose sur la méthode du retour qui consiste, dans cette situation, à faire circuler le fluide très rapidement dans Ω , à l'aide d'une solution potentielle de l'équation (3.1b) allant de 0 à 0, et réalisant (3.2). On constate ensuite que le linéarisé du problème de contrôle lagrangien, autour de cette trajectoire, est contrôlable. Si on exprime de cette façon l'idée générale de la méthode du retour, dans la preuve du théorème 3.5.2, on construit directement la solution adaptée.

REMARQUE 3.5.4. Afin de parler de flots, même en utilisant la théorie de R. Diperna & P.L. Lions [34], un minimum d'hypothèses sont requises. Dans [51], la solution du problème est de classe C^∞ , et on n'a pas de difficultés pour définir flot. En particulier, le flot définit une difféotopie (*i.e.* une isotopie différentiable par rapport à la variable d'espace—voir la définition 3.2.12 d'une isotopie page 36), et toute la partie du fluide entourée par γ_0 est envoyée dans $\text{int}(\phi^u(0, T, \gamma_0))$, mais on ne prescrit pas le mouvement de chacune des particules.

REMARQUE 3.5.5. Il est bien évident que la mise en œuvre de la contrôlabilité lagrangienne pour un fluide pose des problèmes technologiques sans doute très délicats. On peut néanmoins imaginer des applications de la contrôlabilité lagrangienne à des déplacements d'espèces animales, biologiques ou de polluants, éventuellement en considérant d'autres modèles fluides.

Pour pouvoir démontrer le théorème 3.5.2, nous mimons, via une solution potentielle de (3.5.2), une difféotopie entre γ_0 et γ_1 . Une telle isotopie existe toujours dès lors que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω (voir [39]). Bien que cela semble naturel, nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'indications sur l'existence d'une isotopie conservant l'aire entourée. Nous démontrons donc le résultat suivant

THÉORÈME 3.5.6 ([51]). *Soit γ_0 et γ_1 deux courbes lisses de Jordan homotopes dans Ω , et entourant des domaines de même aire, il existe une difféotopie entre γ_0 et γ_1 dans Ω conservant l'aire.*

Ce théorème se démontre en produisant explicitement la difféotopie cherchée et en se ramenant par le théorème de R. Thom (voir *e.g.* M. W. Hirsch [56]) au cas où γ_0 et γ_1 ont une intersection transverse.

3.5.2. Poches de tourbillon. Le problème des poches de tourbillons remonte aux travaux de V. I. Yudovich dans [101], avec l'important résultat prouvant l'existence et l'unicité de solutions de (3.1b) dans $\mathbb{R}^2$ avec vorticité initiale dans L^∞ *seulement*.

En particulier on peut considérer le système (3.1a), (3.1b) avec (3.2) où u_0 satisfait

$$(3.34) \quad \text{curl}(u_0) = \chi_{\omega_0},$$

où $\omega_0 \subset \Omega$ est un ouvert (dans lequel le fluide tourbillonne).

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, il ressort que pour tout t on a

$$(3.35) \quad \text{curl}(u(t)) = \chi_{\omega_t}.$$

On doit à J. Y. Chemin dans [18] [19] (initialement), d'une part, et A. Bertozzi & P. Constantin [11] d'autre part, le fait que la régularité du bord de ω_0 se propage tout au long du temps. Le cas d'un domaine borné est dû à N. Depauw dans [32].

Dans le cadre de la contrôlabilité, toute la difficulté revient à ne pas faire entrer de vorticité dans Ω , afin de conserver le caractère régulier du bord de la poche de tourbillon —ainsi la solution de (3.1b) reste une poche de tourbillon. Cela sera possible si on peut remplacer (3.4) par

$$(3.36) \quad \text{curl}(u) = 0 \text{ sur } \{\sigma \in \Gamma, \text{ tel que } u \cdot n(\cdot, \sigma) < 0\},$$

ce qui exprime l'idée que, le long de $\partial\Omega$, lorsque le fluide est entrant, il doit être irrotationnel.

Dans cette situation nous démontrons dans [51]

THÉORÈME 3.5.7 ([51]). *Supposons que γ_0 et γ_1 soient deux courbes de Jordan dans Ω , bordant des domaines de même aire, et homotopes dans Ω , et telles que Γ ne soit pas inclus dans $\text{int}(\gamma_0)$. Soit $u_0 \in \mathcal{Lip}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, tel que*

$$u_0 \cdot n \in C^\infty(\partial\Omega)$$

et satisfaisant

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}(u_0) &= \chi_{\operatorname{int}(\gamma_0)} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u_0) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_0 \cdot n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma.\end{aligned}$$

Pour tout $T > 0$, tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution (u, p) de (3.1) (3.2) et (3.36) avec $u \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}ip(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2))$ dont le flot (qui est bien défini) vérifie (3.32) (à une reparamétrisation près) et (3.33).

Ici $\mathcal{L}ip(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ désigne les fonctions lipschitziennes sur $\overline{\Omega}$.

En particulier grâce aux résultats de N. Depauw et J.Y. Chemin cités plus hauts, à chaque instant on a une poche de tourbillon.

3.5.3. Un mot sur les preuves. Comme il a déjà été dit, la pierre angulaire des preuves des théorèmes 3.5.2 et 3.6.4 est la méthode du retour, appliquée à des solutions potentielles, par un argument de point fixe.

Pour ce faire, on peut voir que le système (3.1a) (3.1b) peut se ré-écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega &= 0 \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \operatorname{curl} u &= \omega \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) \cdot \tau(\sigma) d\sigma &= 0 \text{ sur } [0, T] \text{ pour } i = 1, \dots, s,\end{aligned}$$

où, pour $i = 1, \dots, s$, les Γ_i désignent les composantes connexes “intérieures” de $\partial\Omega$.

C’est sous cette formulation (légèrement modifiée) que l’on démontre le théorème 3.5.2 par l’utilisation d’un théorème de point fixe adéquat.

Pour démontrer le théorème 3.5.7, on raisonne directement sur u , et pour les questions de flot, on utilise la dynamique du contour donnée par la loi de J.B. Biot & F. Savart, que l’on a adaptée aux domaines bornées.

Rappelons simplement la loi de J.B. Biot & F. Savart dans $\mathbb{R}^2$: si une famille de courbes lisses $\gamma(t)$ est le bord d’une poche de tourbillon, la vitesse $V_{\gamma(t)}$ de cette poche satisfait

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}(V_{\gamma(t)}) &= \chi_{\operatorname{int}(\gamma(t))}, \\ \operatorname{div}(V_{\gamma(t)}) &= 0, \\ V_{\gamma}(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |x - \gamma(t, \sigma)| \tau(\sigma) d\sigma,\end{aligned}$$

τ désignant la tangente unitaire à $\gamma(t)$.

On renvoie plus précisément à A. L. Bertozzi & P. Constantin [11] pour le cas des poches de tourbillon dans le plan et à [51] en domaine borné, pour une utilisation explicite de cette loi.

3.6. Contrôlabilité Lagrangienne en dimension 3.

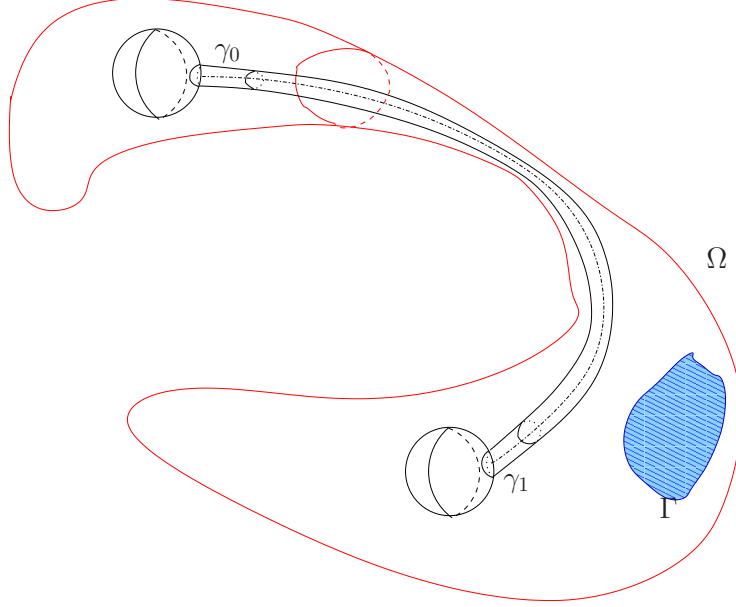


FIG. 3.6.2: Le tuyau entre γ_0 et γ_1 .

Ce paragraphe présente des résultats de travaux communs avec O. Glass.

Des difficultés émergent lors de l'étude de la contrôlabilité lagrangienne en dimension 3, concernant le système d'Euler : deux plongements homotopes ne sont pas nécessairement isotopes, comme le montre le contre-exemple de S. Smale du retournement de la sphère -voir S. Smale [91] —(cette difficulté n'en est pas vraiment une si l'on se contente d'homotopie de surfaces) —, la construction d'une isotopie conservant le volume n'est pas évidente, les arguments de la dimension 2 ne fonctionnant pas, et par ailleurs, concernant l'existence en temps, le système d'Euler peut exploser en dimension 3.

En particulier, les résultats sur les poches de tourbillons décrits dans le cas de la dimension 2 ne sont *a priori* plus vrais.

Le but serait donc de prouver

META-THÉORÈME 3.6.1. *Si γ_0 et γ_1 sont deux plongements de $\mathbb{S}^2$ homotopes dans Ω , alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $T > 0$, il existe une solution (u, p) de (3.1) et (3.2) vérifiant*

$$\|\phi^u(0, T, \gamma_0) - \gamma_1\|_\infty \leq \varepsilon.$$

La méthode que nous employons ne permet pas, en fait, d'imposer le temps T , ni de considérer le cas où γ_0 et γ_1 ont une intersection non vide et ne sont pas

contractiles³ dans Ω , et pour l'instant, nous ne sommes pas en mesure de prouver complètement le théorème 3.6.1, qui est donc ouvert, à ma connaissance. Nous donnerons donc plus loin (théorème 3.6.18) un énoncé précis du résultat que nous sommes en mesure de prouver.

Indiquons, dans les paragraphes suivants, la démarche suivie qui reprend celle de la dimension 2, dans le but d'essayer de prouver le théorème 3.6.1 : on commence par construire sous certaines hypothèses, une isotopie entre γ_0 et γ_1 qui préservent le volume. Puis on imitera le mouvement de γ_0 , induit par cette isotopie, avec le flot d'une solution potentielle de (3.1). Enfin, par une méthode du retour, nous pourrions considérer des flots plus généraux.

3.6.1. Isotopie à volume constant. Soit f_0 et f_1 deux plongements de $\mathbb{S}^2$ dans Ω de classe C^k pour $k \geq 1$. On suppose que les $f_i(\mathbb{S}^2)$, $i = 1, 2$ sont contractiles dans Ω , que

$$f_0(\mathbb{S}^2) \cap f_1(\mathbb{S}^2) = \emptyset$$

et enfin, que

$$|\text{int}(f_0(\mathbb{S}^2))| = |\text{int}(f_1(\mathbb{S}^2))| = 1.$$

On utilise ici la notation $|A|$ qui pour un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^3$ désigne

$$\int_A dx.$$

Nous démontrons

THÉORÈME 3.6.2. *Il existe une isotopie $h \in C^1([0, 1], C^k(\mathbb{S}^2, \Omega))$ faisant passer de*

$$\gamma_0 := f_0(\mathbb{S}^2)$$

à

$$\gamma_1 := f_1(\mathbb{S}^2),$$

telle que

$$\forall t \in [0, 1], |\text{int}(h(t, \gamma_0))| = 1.$$

Démonstration : on renvoie aux figures 3.6.3, 3.6.4–3.6.10, pour éclairer le propos.

Avant de prouver le théorème 3.6.2, expliquons sur la figure 3.6.3, la méthode dans le cas particulier où γ_0 et γ_1 sont des sphères disjointes de même aire, que l'on peut joindre dans Ω par un segment : on commence par épaissir le segment en un tuyau, puis on emprisonne le fluide initialement dans γ_0 entre deux membranes, représentées sur la figure 3.6.3 par des plans verticaux. L'écartement entre ces membranes est choisi pour qu'elles délimitent un volume égal à celui de l'espace délimité par γ_0 (ou γ_1). En déplaçant, de cette manière, ces membranes de gauche à droite, on transfère le fluide de γ_0 vers γ_1 , en conservant la condition

³c'est-à-dire homotopes à un point

d'incompressibilité. Bien sûr, les surfaces obtenues contenant le fluide ne sont pas de classe C^k . On recollera donc les deux membranes et le tuyau de façon à obtenir des surfaces avec la régularité voulue.

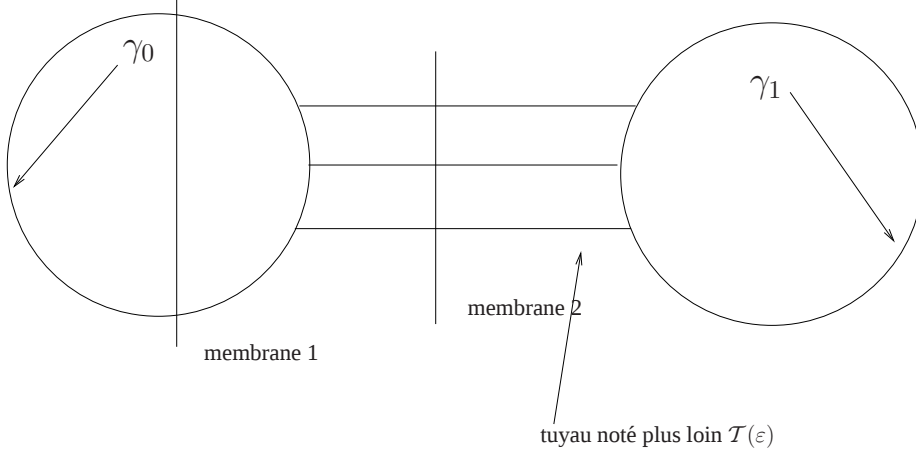


FIG. 3.6.3: Description de la construction dans un cas simple.

L'idée, dans le cas plus général, est de pousser tout le fluide, initialement situé dans γ_0 , dans un tuyau $\mathcal{T}'(\varepsilon)$ défini plus loin jusque dans γ_1 . Ce fluide est poussé par une membrane (initialement $f_0(P_0(t))$) jusqu'à occuper γ_1 .

Passons à la preuve du théorème 3.6.2 proprement dite.

Remarquons qu'en utilisant les résultats de E. Baiada & W. Morse dans [7], puisque pour $i = 1, 2$, γ_i est contractile dans Ω , on peut supposer que f_i s'étend en un plongement de $\mathbb{D}^3$.

Par ailleurs, en utilisant également les résultats mentionnés dans l'ouvrage de W. M. Hirsch [56], on peut étendre f_i à un voisinage V de $\mathbb{D}^3$.

Etape 1. Cette étape consiste en la construction d'un tuyau ($\mathcal{T}'(\varepsilon)$) joignant γ_0 à γ_1 . Ce tuyau est recollé de manière régulière à γ_0 et γ_1 .

Choisissons une courbe $c \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R}^3)$, sans point double ni stationnaire, rencontrant transversalement γ_0 et γ_1 en seulement et respectivement deux points p et q . On peut toujours supposer que $p = f_0(A)$ et $q = f_1(B)$ où $A = (1, 0, 0)$ et $B = (-1, 0, 0)$, et, comme f_0 et f_1 sont des plongements, on peut également supposer que $f'_0(A) \cdot \overrightarrow{OA} = c'$ au point p , et $f'_1(B) \cdot \overrightarrow{OB} = -c'$ au point q .

On peut également supposer, quitte à modifier c dans $\text{int}(\gamma_0)$ et dans $\text{int}(\gamma_1)$, que

$$f_0^{-1}(c \cap \overline{\text{int}(\gamma_0)})$$

et que

$$f_1^{-1}(c \cap \overline{\text{int}(\gamma_1)})$$

sont des paramétrisations du segment $[BA]$.

Par ailleurs, grâce à l'existence d'une fonction de Morse ayant seulement deux points critiques, si l'on considère un voisinage tubulaire (voir M. W. Hirsch [56])

pour une définition) $\mathcal{T}(\varepsilon)$ de c de taille ε autour de c , en supposant ε assez petit, on peut supposer que $\partial\mathcal{T}(\varepsilon) \cap \gamma_0$ et $\partial\mathcal{T}(\varepsilon) \cap \gamma_1$ sont C^k -difféomorphes à $\mathbb{S}^1$.

Quitte à modifier légèrement $\mathcal{T}(\varepsilon)$, on peut donc supposer que pour respectivement $i = 1$ et $i = 2$, $\mathcal{T}(\varepsilon) \cap \gamma_i$ est l'image par f_i d'un cercle de $\mathbb{S}^2$ situé dans un voisinage de A et B et dans un plan normal à $[AB]$.

Le long de $f_0^{-1}(\gamma_0 \cap \mathcal{T}(\varepsilon))$ on choisit deux applications vectorielles de classe C^k sur $\mathbb{S}^1$, e_1 et e_2 , telles que e_1 et e_2 sont de norme β que l'on précisera plus loin, (e_1, e_2) est une famille libre, e_1 est tangent à $\mathbb{S}^2$, e_2 est tangent à $f_0^{-1}(\mathcal{T}(\varepsilon))$.

Quitte à changer e_1 en $-e_1$ et e_2 en $-e_2$, on peut supposer que

$$\langle e_1 | \overrightarrow{AB} \rangle_{\mathbb{R}^3} > 0$$

et

$$\langle e_2 | \overrightarrow{BA} \rangle_{\mathbb{R}^3} > 0.$$

On suppose enfin que, e_1 et e_2 sont à symétrie axiale⁴ autour de (AB) , voir la figure 3.6.4.

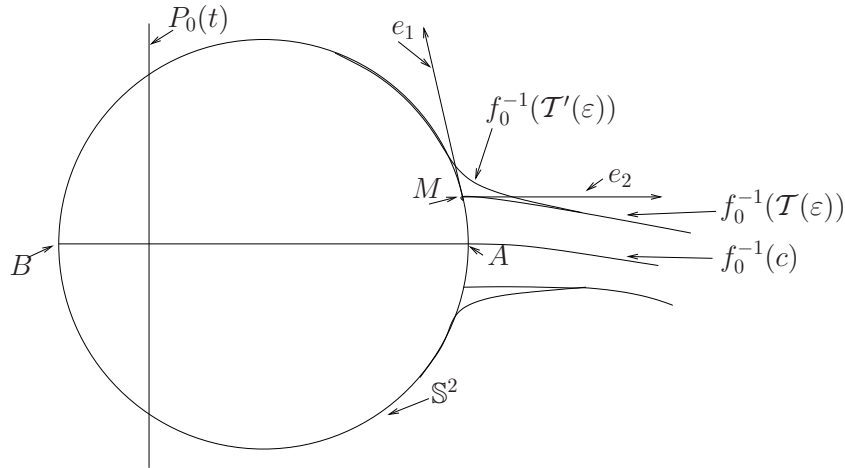


FIG. 3.6.4: γ_0 vu dans $\mathbb{S}^2$. Vue de e_1 , e_2 et de $P_0(t)$.

Considérons $\rho \in C^\infty([0, 1], [0, 1])$ croissante, valant 0 dans un voisinage de 0, et 1 dans un voisinage de 1.

Pour $M \in f_0^{-1}(\gamma_0 \cap \mathcal{T}(\varepsilon))$, on recolle alors $\mathcal{T}(\varepsilon)$ et γ_0 par

$$t \mapsto f_0(\exp_{M, \mathbb{S}^2}((1-t)\rho(1-t)e_1) + \exp_{M, \partial f_0^{-1}(\mathcal{T}(\varepsilon))}(t\rho(t)e_2)),$$

puis par symétrie axiale.

Ici, $\exp_{M, \mathbb{S}^2}$ est l'application exponentielle qui envoie l'espace tangent en M à $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{S}^2$.

DÉFINITION 3.6.3. Plus précisément, soit $\mathcal{M}$ une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^N$. En chaque point $p \in \mathcal{M}$, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}$ est muni du produit scalaire induit, par exemple, par le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^N$. Le

⁴i.e. e_1 et e_2 sont des champs invariants par rotation autour de la droite (AB) .

théorème de Cauchy-Lipschitz permet de montrer que, pour tout $v \in T_p\mathcal{M}$, il existe une unique géodésique, tracée sur $\mathcal{M}$, partant de p en $t = 0$, avec la vitesse v . Cette géodésique est par définition, l'application

$$t \mapsto \exp_{p,\mathcal{M}}(tv).$$

On montre, voir *e.g.* M. Do Carmo [37], qu'il existe $\beta > 0$ tel que si

$$\|v\|_{T_p\mathcal{M}} \leq \beta,$$

alors $t \mapsto \exp_{p,\mathcal{M}}(tv)$ est défini jusqu'au temps $t = 1$, et que

$$v \mapsto \exp_{p,\mathcal{M}}(v)$$

est un difféomorphisme local de classe C^k d'un voisinage de 0 dans $T_p\mathcal{M}$ sur un voisinage de p dans $\mathcal{M}$.

On note, de même, $\exp_{M,\partial f_0^{-1}(\mathcal{T}(\varepsilon))}$ l'application exponentielle sur $\partial f_0^{-1}(\mathcal{T}(\varepsilon))$. On choisit $\beta > 0$, assez petit pour que ces deux applications soient définies, et réalisent un difféomorphisme, sur les vecteurs de l'espace tangent de norme inférieure à β . Voir les figures 3.6.4 et 3.6.5.

Par une construction similaire à la précédente, on recolle de même $\mathcal{T}(\varepsilon)$ et γ_1 .

On note $\mathcal{T}'(\varepsilon)$ le nouveau voisinage de c ainsi construit. Quitte à diminuer ε , on peut toujours supposer que ce recollement a lieu dans $f_0(V)$ et $f_1(V)$ respectivement.

Notons que la surface constituée de $\partial(f_0(\overline{\mathbb{D}^3}) \cup f_1(\overline{\mathbb{S}^2}) \cup \mathcal{T}'(\varepsilon))$ est de classe C^k . Voir la figure 3.6.10.

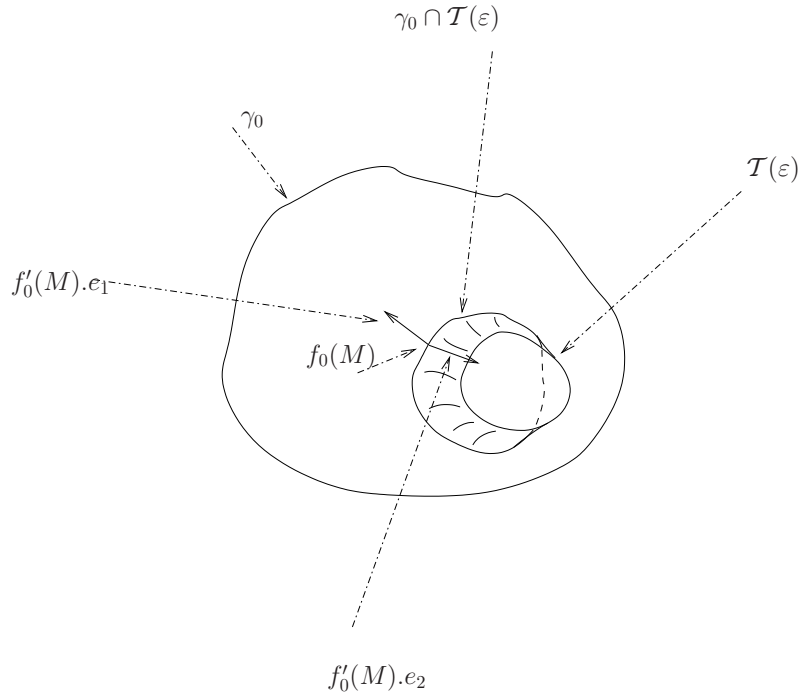


FIG. 3.6.5: Construction de e_1, e_2 (image par f_0).

Etape 2. Dans cette étape nous construisons une membrane qui va faire sortir le fluide de γ_0 . Cette membrane sera l'image par f_0 d'une surface (un disque $P_0(t)$) construite dans $\mathbb{D}^3$. Cette membrane est recollée de deux façons à γ_0 puis à $\mathcal{T}'(\varepsilon)$. Pour t assez petit la surface qui pousse le fluide est notée (via f_0) $P_0^{0-}(t)$ tant qu'elle rencontre seulement $\mathbb{S}^2$, puis $P_0^{1-}(t)$ quand elle rencontre $\mathcal{T}'(\varepsilon)$. Pour $t' > t$ bien choisi, on freine la sortie du fluide de γ_0 par (toujours via f_0) $P_0^{0+}(t')$, de façon à conserver le volume occupée par le fluide —on fait également une construction analogue dans γ_1 — ;

Pour $t \in [0, 1]$ assez petit, soit $P_0(t)$ le plan normal à $f_0^{-1}(c(t))$, et pour $t \in [0, 1]$ assez proche de 1, $P_1(t)$ le plan normal à $f_1^{-1}(c(t))$.

On peut supposer, par reparamétrisation, que $P_0(t)$ n'a pas d'intersection avec $f_0^{-1}(f_0(V) \cap \mathcal{T}'(\varepsilon))$ pour $t \in [0, 1/4)$, que pour $t \in [1/4, 1/3)$ le plan $P_0(t)$ a une intersection avec $f_0^{-1}(\mathcal{T}'(\varepsilon))$ et $f_0^{-1}(\gamma_0)$, et que $P_0(1/3)$ est le plan normal à $f_0^{-1}(c)$ au point A (et donc en particulier $f_0^{-1}(c(1/3)) = A$, on imposera de même $f_1^{-1}(c(2/3)) = B$).

Pour $t \in (0, 1/4]$ on définit $P_0^{0-}(t)$ la surface à bord obtenue en recollant $P_0(t)$ à $\mathbb{S}^2$ comme ci-dessus (pour définir $\mathcal{T}'(\varepsilon)$) : plus précisément, pour $t \in (0, 1/4]$, soit e'_1 et e'_2 des champs de vecteurs le long de $P_0(t) \cap \mathbb{S}^2$, à symétrie axiale par rapport à $[AB]$, et de norme $\beta > 0$ assez petit. On peut supposer, puisque $t > 0$ que $\langle e'_1 | \overrightarrow{BA} \rangle_{\mathbb{R}^3} > 0$, et que e'_2 est dirigé vers ${}^c\mathbb{D}^2$, l'extérieur de la boule.

Pour $\tau \in [0, 1]$ et $M \in P_0(t) \cap \mathbb{S}^2$ appartenant à la droite affine $\mathfrak{D}_a(t, e_2)$ engendrée par e_2 et passant par (AB) , on pose

$$(3.37) \quad s(t, \tau) := t(-(1 - \tau)\rho(1 - \tau)e'_2 + \exp_{M, \mathbb{S}^2}(\tau\rho(\tau)e'_1)),$$

qui permet de recoller $P_0(t)$ à $\mathbb{S}^2$ par symétrie axiale (voir figure 3.6.6).

Comme on peut supposer que

$$\text{supp}\rho(1 - \rho) = [\delta, 1 - \delta],$$

pour un certain $\delta \in (0, 1)$, pour $\tau \leq \delta$ on a

$$s(t, \tau) \in P_0(t).$$

On définit alors $P_0^{0-}(t)$ comme étant la surface de révolution engendrée par

$$\begin{aligned} & \bigcup_{M \in P_0(t) \cap \mathbb{S}^2 \cap \mathfrak{D}_a(t, e_2)} \{m \in P_0(t) \cap \mathfrak{D}_a(t, e_2), \text{ t.q. } d(m, (AB)) \leq d(s(t, 0), (AB))\} \\ & \cup s(t, [0, 1 - \delta]). \end{aligned}$$

En remplaçant e'_1 par $-e'_1$ dans (3.37), on obtient une autre surface à bord notée $P_0^{0+}(t)$.

On construit de même, pour $t \in (1/4, 1/3]$, et par le même procédé, la surface à bord $P_0^{1+}(t)$, que l'on se contente de décrire par f_0^{-1} :

soit W un voisinage A dans $\mathbb{S}^2$ tel que, tout plan passant par un point de W et normal à (AB) rencontre $\mathbb{S}^2$ et $\partial\mathcal{T}'(\varepsilon)$. On recolle $P_0(t)$ avec $\mathcal{T}'(\varepsilon)$ dans W avec une concavité tournée vers l'intérieur de $(\mathbb{D}^3)$, et $P_0(t)$ avec $\mathbb{S}^2$ avec une concavité tournée vers ${}^c\text{int}(\mathbb{D}^3)$, et avec une symétrie axiale par rapport à $[AB]$, on note $P_0^{1+}(t)$ la surface C^∞ obtenue (voir la figure 3.6.7). Pour $t > 1/3$ et $t - 1/3$ assez petit pour que $c(t) \in f_0(V)$, on prolonge cette définition comme ci-avant, mais $P_0(t)$ n'a plus d'intersection avec $\mathbb{S}^2$.

Définissons, pour $t \in [1/4, 1/3] \cap c^{-1}(V)$, une autre surface à bord : $P_0^{1-}(t)$. Elle est obtenue par recollement de $P_0(t)$ avec $\mathcal{T}'(\varepsilon)$ et par symétrie axiale par rapport à $[AB]$, la concavité étant tournée vers ${}^c\text{int}(\mathbb{S}^2)$ (voir figure 3.6.9).

Etape 3. Cette étape permet de contrôler la circulation du fluide dans le tuyau $\mathcal{T}'(\varepsilon)$. Il nous faut déformer les membranes $f_0(P_0^{0\pm}(t))$ et $f_0(P_0^{1+(t)}(t))$ en des membranes $\pi^\pm(t')$ qui définissent $\mathcal{T}'(\varepsilon)$.

Rappelons (voir M. Hirsch [56])) que $\mathcal{T}(\varepsilon)$ est diffeomorphe à $c([0, 1]) \times \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)}$, où l'on note

$$\mathbb{D}^2(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } |x| < \varepsilon\};$$

le bord de celui-ci, sera, quant à lui, noté $\mathbb{S}^1(\varepsilon)$.

Notons

$$\mathcal{D} : c([0, 1]) \times \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)} \rightarrow \mathcal{T}(\varepsilon)$$

le diffeomorphisme définissant $\mathcal{T}(\varepsilon)$. Plus précisément, on note

$$\mathcal{D}(c(t) \times \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)})$$

l'intersection avec $\mathcal{T}(\varepsilon)$, du plan passant par $c(t)$ et de vecteur normal $c'(t)$.

On peut, quitte à reparamétriser c , choisir μ_1 tel que $1/3 > \mu_1 > 0$, avec

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{T}'(\varepsilon) \cap {}^c(\mathcal{T}(\varepsilon))) = \\ f_0^{-1}(\mathcal{D}(c(1/3 + \mu) \times \mathbb{S}^1(\varepsilon))) \cup f_1^{-1}(\mathcal{D}(c(2/3 - \mu) \times \mathbb{S}^1(\varepsilon))), \end{aligned}$$

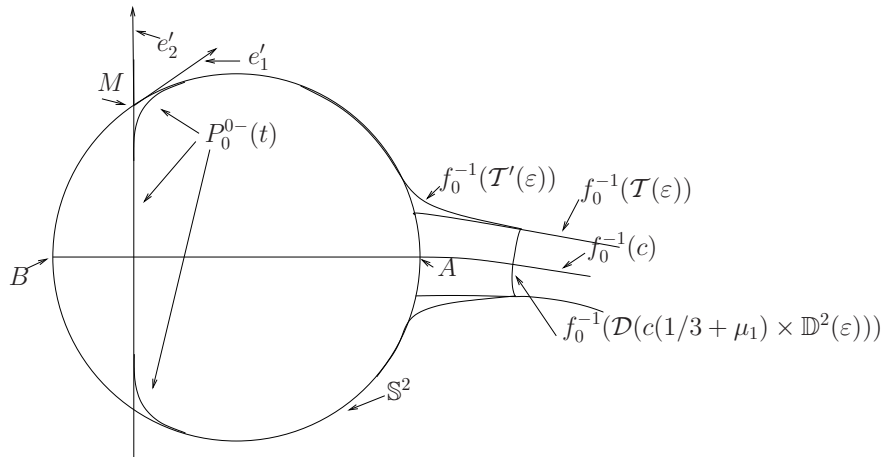


FIG. 3.6.6: Construction de $P_0^{0-}(t)$.

voir figure 3.6.6.

Choisissons μ_2 pour que $1/3 > \mu_2 > \mu_1$.

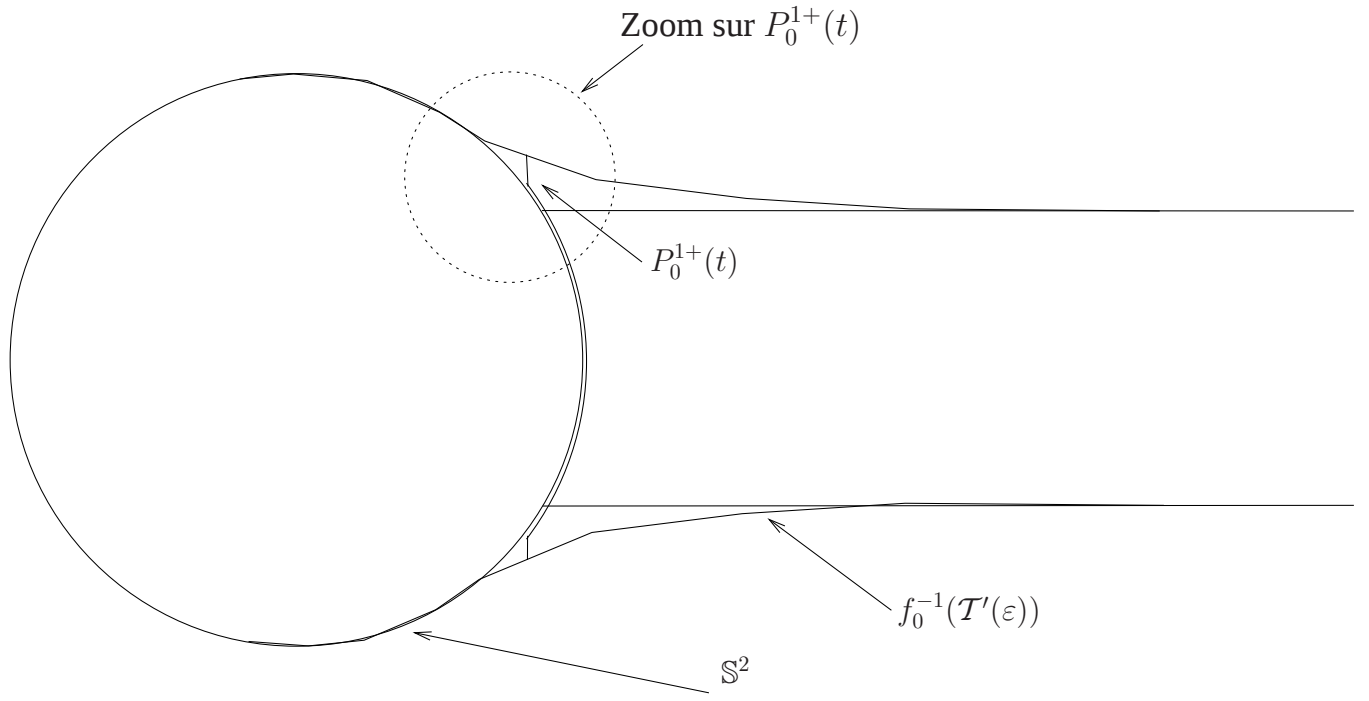


FIG. 3.6.7: Construction de $P_0^{1+}(t)$.

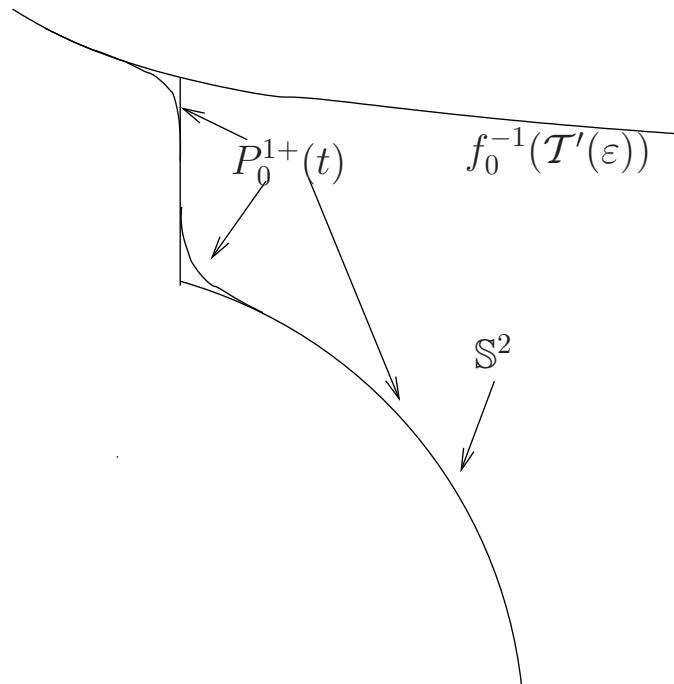


FIG. 3.6.8: Zoom sur $P_0^{1+}(t)$.

Pour $t \in [1/3 + \mu_1, 1/3 + \mu_2]$ et $a \in \mathcal{D}(c(t) \times \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)})$, on définit $N(a)$ le vecteur unitaire normal à

$$\mathcal{D}(c(t) \times \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)})$$

au point a et tel que

$$\langle N(a) | c'(t) \rangle_{\mathbb{R}^3} < 0.$$

Nous allons maintenant construire une déformation régulière (nous en précisons le sens plus loin) de $\mathcal{D}(c(1/3 + \mu_2) \times \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)})$ sur $f_0(P_0(t) \cap \mathcal{T}(\varepsilon))$ pour un t convenable.

Considérons ϕ^N le flot de N , et choisissons μ'_1 tel que $\mu_1 < \mu'_1 < \mu_2$.

On prend v tel que $|v| \leq \min(\frac{\mu_2 - \mu'_1}{3}, \frac{\mu'_1 - \mu_1}{3})$.

Pour un tel v et un $\alpha \in \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)}$, si ε , μ_2 et v sont assez petits, il existe un unique $\tau(v, \alpha) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \phi^N(\tau(v, \alpha), 1/3 + \mu_2 + v, \mathcal{D}((c(1/3 + \mu_2 + v), \alpha))) \in \\ f_0(P_0(1/3 + \mu'_1 + v) \cap \mathcal{T}(\varepsilon)), \end{aligned}$$

et l'application

$$t \mapsto \phi^N(t, 1/3 + \mu_2 + v, \mathcal{D}((c(1/3 + \mu_2 + v), \alpha))),$$

est transverse à

$$f_0(P_0(1/3 + \mu'_1 + v) \cap \mathcal{T}(\varepsilon))$$

en

$$t = \tau(v, \alpha).$$

Donc, par transversalité, l'application

$$(v, \alpha) \mapsto \tau(v, \alpha)$$

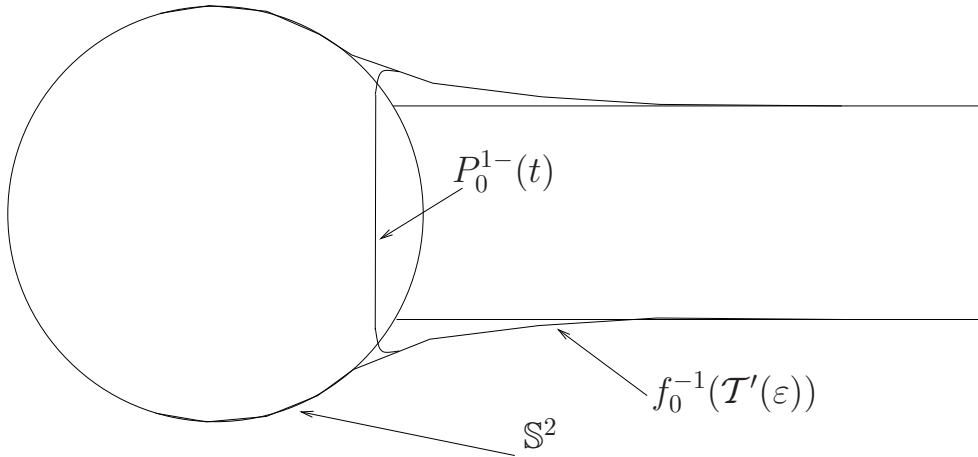


FIG. 3.6.9: Construction de $P_0^{1-}(t)$.

est de classe C^k (rappelons que f_0 est *seulement* de classe C^k), et

$$\alpha \mapsto \phi^N(\tau(v, \alpha), 1/3 + \mu_2 + v, \mathcal{D}((c(1/3 + \mu_2 + v), \alpha)))$$

est un C^k difféomorphisme de

$$\mathcal{D}((c(1/3 + \mu_2 + v), \alpha))$$

sur

$$f_0(P_0(1/3 + \mu'_1 + v) \cap \mathcal{T}(\varepsilon)).$$

Ainsi, pour tout v assez petit, l'application

$$(3.38) \quad [0, 1] \times \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)} \mapsto \mathcal{T}(\varepsilon)$$

$$(3.39) \quad (t, \alpha) \rightarrow \mathcal{I}(t, \alpha, v),$$

où

$$\mathcal{I}(t, \alpha, v) :=$$

(3.40)

$$\phi^N(t\tau(v, \alpha) + (1 - t)(1/3 + \mu_2 + v), 1/3 + \mu_2 + v, \mathcal{D}((c(1/3 + \mu_2 + v), \alpha))),$$

est une isotopie (dans $C^1([0, 1], C^k(\overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)}))$), de

$$\mathcal{D}((c(1/3 + \mu_2 + v), \overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)}))$$

vers

$$f_0(P_0(1/3 + \mu'_1 + v) \cap \mathcal{T}(\varepsilon)).$$

Grâce à l'isotopie (3.40), en considérant, pour $v_0 > 0$ assez petit, quitte à modifier la fonction ρ , les intersections de

$$P_0^{1\pm}(1/3 + \mu'_1)$$

avec les

$$P_0(1/3 + \mu'_1 + v), \text{ pour } |v| < v_0,$$

nous obtenons une isotopie dans

$$C^1([0, 1], C^k(\overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)})),$$

entre

$$f_0(P_0^{1\pm}(1/3 + \mu'_1))$$

et

$$\pi^\pm(1/3 + \mu_2),$$

où les deux disques topologiques, $\pi^\pm(1/3 + \mu_2)$ sont obtenus en recollant le plan $\pi(1/3 + \mu_2)$ passant par $c(1/3 + \mu_2)$ de vecteur normal $c'(1/3 + \mu_2)$ et $\mathcal{T}(\varepsilon)$. Voir figure 3.6.10.

En reparamétrant l'isotopie précédente, nous obtenons deux isotopies

$$\mathcal{I}^\pm \in C^1([1/3 + \mu'_1, 1/3 + \mu_2], C^k(\overline{\mathbb{D}^2(\varepsilon)}, \Omega))$$

entre

$$f_0(P_0^{1\pm}(1/3 + \mu'_1))$$

et

$$\pi^\pm(1/3 + \mu_2).$$

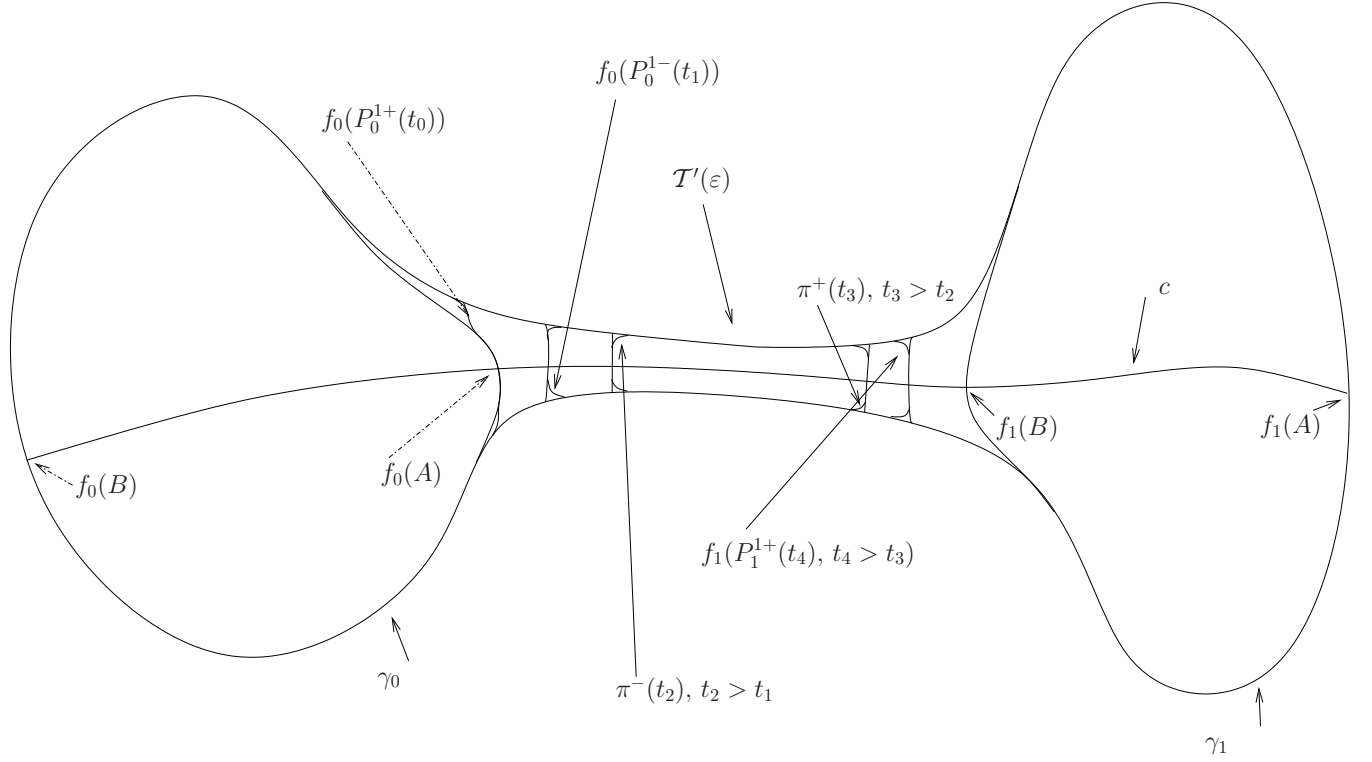


FIG. 3.6.10: $\pi^\pm(t)$, $f_0(P_0^{1-}(t))$ et $f_1(P_1^{1+}(t))$ pour différentes valeurs de t .

On adopte des notations symétriques pour des constructions analogues aux précédentes dans $f_1^{-1}(\gamma_1)$.

Etape 4. Dans cette étape nous faisons le bilan des constructions : le fluide est poussé par les membranes dont l'exposant est négatif et freiné par les membranes dont l'exposant est positif. Il ne reste qu'à adapter la vitesse de la membrane freinante par rapport à la membrane poussante de façon à former une surface entourant un volume de fluide constant.

Posons $P_0(0) = P_1(1) = \emptyset$, cette convention permet de considérer l'instant initial où tout le fluide est dans γ_0 et l'instant final où tout le fluide est dans γ_1 .

Nous avons une isotopie

$$\mathcal{I}^+ \in C^1([1/4, 1/3 + \mu_2] \cup [2/3 - \mu_2, 1), C^k(\overline{\mathbb{D}^2}, \Omega))$$

entre $f_0(P_0^+(t_1))$ et $\pi^+(t_1)$, pour tout (t_1, t_2) tels que

$$0 < t_1 < t_2 \leq 1/3 + \mu_2,$$

et entre $\pi^+(t_3)$ et $f_1(P_1^+(t_4))$, pour tout (t_3, t_4) tels que

$$2/3 - \mu_2 \leq t_3 < t_4 < 1.$$

Nous avons également une isotopie

$$\mathcal{I}^- \in C^1([0, 1/3 + \mu_2] \cup [2/3 - \mu_2, 3/4], C^k(\overline{\mathbb{D}^2}, \Omega))$$

entre $f_0(P_0^-(t_1))$ et $\pi^-(t_1)$ pour tout (t_1, t_2) tels que $0 < t_1 < t_2 \leq 1/3 + \mu_2$, et entre $\pi^-(t_3)$ et $f_1(P_1^-(t_4))$ pour tout (t_3, t_4) tels que $2/3 - \mu_2 \leq t_3 < t_4 < 1$.

Par ailleurs, nous pouvons également supposer, quitte à faire une reparamétrisation et modifier la fonction ρ , que $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ s'étendent à $[1/3 + \mu_2, 2/3 - \mu_2]$ en des isotopies de

$$C^1([1/3 + \mu_2, 2/3 - \mu_2], C^k(\overline{\mathbb{D}^2}))$$

entre

$$\pi^\pm(1/3 + \mu_2)$$

et

$$\pi^\pm(2/3 - \mu_2),$$

et telles que, pour tout $t \in [1/3 + \mu_2, 2/3 - \mu_2]$,

$$\mathcal{I}^\pm(t, \cdot) \text{ est un plongement de } \overline{\mathbb{D}^2} \text{ sur } \pi^\pm(t).$$

Nous prolongeons $\mathcal{I}^-$ en 0, par $\mathcal{I}^-(0) = \emptyset$, et $\mathcal{I}^+$ en 1, par $\mathcal{I}^+(1) = \emptyset$.

Grâce à ces constructions, nous pouvons considérer pour (t_0, t_1) tels que

$$0 \leq t_0 < t_1 \leq 1,$$

où $t_0 \leq 3/4$, et $t_1 > 1/4$, la surface $S(t_0, t_1)$ suivante :

$S(t_0, t_1)$ est la surface délimitée par $\mathcal{I}^-(t_0, \overline{\mathbb{D}^2})$, γ_0 , $\partial\mathcal{T}'(\varepsilon)$, γ_1 , $\mathcal{I}^+(t_1, \overline{\mathbb{D}^2})$. C'est clairement une sphère par le théorème de Morton Brown (voir [36] problème 16.2 pour le résultat utilisé, et voir [14] pour la version générale).

Par ailleurs, pour $t_0 \in [0, 3/4]$ fixé, l'application

$$t_1 \in [\max(t_0, 1/4), 1] \mapsto |\text{int}(S(t_1, t_2))|$$

est C^1 et strictement croissante.

Par le théorème d'inversion locale, on peut alors choisir pour tout $t_0 \in [0, 3/4]$, un unique $\tau_2(t_0) \in [1/4, 1]$ tel que

$$|\text{int}(S(t_1, \tau_2))| = 1,$$

et l'application

$$t_0 \mapsto \tau_2(t_0)$$

est alors de classe C^1 .

Ainsi la famille de sphères $\{S(t_0, \tau_2(t_0)), t_0 \in [0, 3/4]\}$, chacune d'entre elles étant une surface de classe C^k , réalise une isotopie entre γ_0 et γ_1 préservant le volume, ce qui achève la preuve du théorème 3.6.2.

De plus quitte à faire une reparamétrisation, nous pouvons supposer que $t \mapsto S(t, \tau_2(t))$ est une famille de classe C^1 .

3.6.2. Construction d'un flot.

Grâce au théorème 3.6.2, nous pouvons considérer une isotopie

$$h : [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \Omega$$

telle que

$$t \mapsto h(t, \cdot) \in C^1([0, 1], C^k(\mathbb{S}^2, \Omega))$$

et telle que

$$h(0)(\mathbb{S}^2) = \gamma_0,$$

$$h(1)(\mathbb{S}^2) = \gamma_1,$$

et,

$$(3.41) \quad |\text{int}(h(t, \mathbb{S}^2))| = 1.$$

On définit, pour $t \in [0, 1]$,

$$\gamma_t := h(t, \mathbb{S}^2).$$

Pour $t \in [0, 1]$, $p \in \gamma_t$, on considère

$$X(t, p) := \partial_t h(t, h^{-1}(t, p)),$$

qui est bien défini, car, pour tout $t \in [0, 1]$ $h(t, \cdot)$ est un C^k difféomorphisme de $\mathbb{S}^2$ sur γ_t . Notons que, quitte à faire un changement de paramétrage, on peut supposer que X est identiquement nulle au voisinage de $t = 0$ et $t = 1$.

Il est à noter que (3.41) implique que

$$\int_{\gamma_t} X \cdot \nu d\sigma = 0.$$

Cette information est un résultat classique de la mécanique des fluides, et s'obtient en dérivant $\int_{\text{int}(\gamma_t)} dx$. Nous pouvons résoudre

$$(3.42) \quad \begin{aligned} -\Delta v(t) &= 0 \text{ dans } \text{int}(\gamma_t), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= X \cdot \nu \text{ sur } \gamma_t, \\ \int_{\text{int}(\gamma_t)} v(t) dx &= 0. \end{aligned}$$

La famille de surface $t \mapsto \gamma_t$ étant dans

$$C^1([0, 1], C^k(\mathbb{S}^2)),$$

nous avons, par les résultats de régularité de Schauder (D. Gilbarg & N.S. Trüdinger [47]),

$$v \in C([0, 1], C^k(\overline{\text{int}(\gamma_t)})).$$

Comme $\text{int}(\gamma_t)$ est contractile dans Ω , on sait (voir e.g. X. Wang [98]) qu'il existe

$$\xi \in C([0, 1], C^{k+1}(\overline{\text{int}(\gamma_t)}, \mathbb{R}^3)),$$

tel que

$$\nabla v(t, \cdot) = \text{curl}(\xi(t, \cdot)) \text{ dans } \text{int}(\gamma_t).$$

On s'appuie alors sur les théorèmes d'extension et d'approximation de H. Whitney suivants (voir S. G. Krantz & H. R. Pratz [69] th. 2.3.6 et th. 2.3.7 et les remarques qui suivent) : Pour cela, nous devons définir pour un ensemble E fermé, la C^k différentiabilité sur E . On renvoie à l'ouvrage précité [69] pour une discussion sur cette notion. Dans la situation présente, où E sera toujours une surface de classe C^k de $\mathbb{R}^3$, ou l'adhérence d'un ouvert ayant pour bord une telle surface, cette notion coïncide avec celle obtenue, par exemple, en raisonnant par cartes locales.

THÉORÈME 3.6.4 (H. Whitney). *Soit E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$. Soit f une fonction de classe C^k sur E avec $k \in \mathbb{N}$, alors il existe une fonction $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ dont la restriction à E soit f , et qui soit analytique réelle sur le complément de E .*

THÉORÈME 3.6.5 (H. Whitney). *Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \in \mathbb{N}^*$.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, analytique réelle, telle que

$$\sup_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in K} |f^{(j)}(x) - G^{(j)}(x)| < \varepsilon.$$

Ces théorèmes, démontrés essentiellement par l'utilisation de noyaux de convolution, s'étendent au cas où f (apparaissant dans leurs énoncés respectifs) dépend du temps, comme on peut le vérifier, en examinant les preuves données dans les références.

En utilisant le théorème 3.6.4, on commence par étendre ξ en une fonction

$$\widehat{\xi} \in C([0, 1], C^{k+1}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)).$$

Par la construction de l'isotopie h , il est clair qu'il existe un compact $K \subset \Omega$, tel que

$$\forall t \in [0, 1], \gamma_t \subset K.$$

Prenons une fonction $\zeta \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, telle que $\zeta = 1$ sur K , et de support inclus dans Ω .

La fonction $\zeta \widehat{\xi}$ vérifie⁵

$$\zeta \widehat{\xi} \in C([0, 1], C_0^{k+1}(\Omega, \mathbb{R}^3)),$$

et coïncide avec $\widehat{\xi}$ sur $[0, 1] \times K$.

⁵L'indice 0 dans la notation qui suit signifie que l'on parle de fonctions à support compact.

Si l'on définit $V \in C_0([0, 1], C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^3))$ par

$$V(t, x) := \operatorname{curl}(\zeta(x)\widehat{\xi}(t, x)),$$

V satisfait

$$\operatorname{div}(V(t, \cdot)) = 0 \text{ dans } [0, 1] \times \Omega.$$

Compte tenu de la relation (3.42), et puisque f_0 est un plongement de $\mathbb{S}^2$ sur γ_0 , alors pour tout $t \in [0, 1]$,

$$x \mapsto \phi^V(0, t, f_0(x))$$

est un plongement de classe C^k de $\mathbb{S}^2$ sur γ_t . Ici s'exprime le fait que, le mouvement de “l'ensemble” $\operatorname{int}(\gamma_t)$, est régi par la composante normale de la vitesse en chaque point de γ_t .

Nous avons donc prouvé :

PROPOSITION 3.6.6. *Sous les hypothèses du théorème 3.6.2, il existe un champ de vecteurs $V \in C_0([0, 1], C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^3))$ tel que*

$$(3.43) \quad \operatorname{div}(V(t, \cdot)) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ pour tout } t \in [0, 1],$$

et tel que⁶

$$(3.44) \quad \phi^V(0, t, \gamma_0) = \gamma_t, \forall t \in [0, 1]$$

Pour des situations similaires aux hypothèses de la proposition 3.6.6, on pourra consulter l'article de F. Sueur [93] et celui de T. Kato & al [66].

3.6.3. Réductions du problème. Dans la suite nous allons démontrer partiellement le résultat annoncé dans le théorème 3.6.1. Pour cela, nous allons commencer par supposer que γ_0 et V (V est donné dans la proposition 3.6.6) sont plus réguliers.

3.6.3.1. Réduction au cas analytique. Nous supposons ici que le plongement f_0 est analytique réel. On suppose également qu'il existe

$$V \in C_0([0, 1], C^\omega(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3))$$

tel que (3.43) soit satisfaite, et tel que

$$(3.45) \quad \phi^V(0, t, \gamma_0) \subset \Omega, \forall t \in [0, 1].$$

Comme

$$\gamma_t = \phi^V(0, t, \gamma_0)$$

et, comme f_0 et V sont analytiques, alors γ_t est aussi analytique.

Nous prouvons alors :

⁶la relation (3.44) signifie que $\phi^V(0, t, f_0)$ est une plongement de $\mathbb{S}^2$ sur γ_t .

LEMME 3.6.7. Soit $t \mapsto \gamma(t) \in C([0, 1], C^\omega(\mathbb{S}^2, \Omega))$ une famille dans de sphères plongées dans Ω , et $X \in C([0, 1], C^\omega(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3))$ tels que

$$(3.46) \quad \forall t \in [0, 1], \int_{\gamma(t)} X \cdot \nu d\sigma = 0.$$

Il existe alors $\eta > 0$ et pour tout $t \in [0, 1]$ un voisinage de $\gamma(t)$,

$$\mathcal{V}_\eta(\gamma(t)) := \{x \in \Omega, d(x, \gamma(t)) \leq \eta\},$$

et

$$\psi \in C^0([0, 1]; C^\infty(\text{int}((\gamma(t) \cap \overline{\Omega}) \cup \mathcal{V}_\eta(\gamma(t))))),$$

vérifiant⁷

$$\forall t \in [0, 1], \Delta_x \psi(t, x) = 0 \text{ dans } (\text{int}(\gamma(t) \cap \Omega) \cup \mathcal{V}_\eta(\gamma(t)))$$

$$\nabla_x \psi \cdot \nu = X \cdot \nu \text{ sur } \gamma(t), \forall t \in [0, 1],$$

$$\nabla_x \psi \cdot \nu = 0 \text{ sur les composantes connexes de } \partial\Omega \\ \text{incluses dans } \text{int}(\gamma(t)).$$

La preuve est exactement la même qu'en dimension 2, voir [51] lemme 3. Notons qu'ici, il n'est pas nécessaire de supposer que γ_0 soit le bord d'un plongement de $\mathbb{B}^3$ dans Ω , mais seulement l'image d'un plongement de $\mathbb{S}^2$, γ_0 pouvant ici entourer alors une composante connexe de $\partial\Omega$.

Grâce à ce lemme, nous pouvons prouver :

THÉORÈME 3.6.8. Soit γ_0 l'image d'un plongement analytique de $\mathbb{S}^2$ dans Ω , et $X \in C^0([0, 1]; C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^3))$ un champ de vecteurs satisfaisant

$$X \cdot n = 0 \text{ sur } [0, 1] \times \partial\Omega,$$

et $\text{div}(X) = 0$ dans $[0, 1] \times \Omega$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe

$$\theta \in C^\infty([0, 1] \times \overline{\Omega})$$

satisfaisant (3.1c), (3.6) et telle que

$$(3.47) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \|\phi^{\nabla\theta}(0, t, \gamma_0) - \phi^X(0, t, \gamma_0)\|_{C^k} \leq \varepsilon.$$

La preuve de la proposition 3 dans [51] s'applique pourvu que l'on dispose de l'équivalent en dimension 3 du théorème de Runge sur l'approximation des fonctions holomorphes par des fonctions rationnelles⁸. Or les résultats suivants vont dans ce sens :

THÉORÈME 3.6.9 (voir J. Gardiner-[46], pp 16). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et K un compact inclus dans Ω . Notons Ω^* le compactifié d'Alexandroff de Ω . Si $\Omega^* \setminus K$ est connexe, alors pour toute fonction u harmonique au voisinage de K et tout $\varepsilon > 0$, il existe v harmonique sur Ω tel que $|v - u| < \varepsilon$ sur K .

⁷On n'a pas besoin de supposer que $\gamma(t)$ est contractile dans Ω

⁸On renvoie à l'ouvrage de W. Rudin [90] pour un énoncé précis.

Plus précisément, la preuve du théorème 3.6.9 donnée dans le livre de J. Gardiner [46], repose sur le

LEMME 3.6.10. *On peut choisir, pour chaque entier $i = 1, \dots, p$, un point $x_i \notin \Omega$, dans chacune des p composantes connexes de $\mathbb{R}^N \setminus K$, tels que la fonction v donnée dans le théorème 3.6.9 soit harmonique sur $\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^p \{x_i\}$.*

On peut alors conclure comme dans [51].

3.6.3.2. *Lorsque γ_0 n'est pas analytique.* En dimension 2, l'argument consiste à approcher γ_0 , via le théorème de l'application conforme de Riemann, par une courbe analytique située dans $\Omega \setminus \text{int}(\gamma_0)$.

En dimension 3 on procède de la manière suivante :

Rappelons que f_0 est le plongement de $\mathbb{S}^2$ dans Ω tel que

$$\gamma_0 = f_0(\mathbb{S}^2).$$

Puisque f_0 est de classe C^k , γ_0 possède un voisinage tubulaire obtenu par le flot de ν de la normale unitaire extérieure à γ_0 . Comme $k \geq 2$ ce flot est bien défini (ν étant de classe C^{k-1}).

Choisissons $\rho > 0$ tel que $t \mapsto \phi^\nu(0, t, f_0(p))$ soit défini sur $[0, \rho]$, pour tout $p \in \mathbb{S}^2$. Ainsi pour $t > 0$ assez petit, $\phi^\nu(0, t, f_0)$ est un plongement de $\mathbb{S}^2$ sur une surface notée γ_0^ρ .

Puisque ν est la normale unitaire extérieure à γ_0 , pour $t > 0$ assez petit on a

$$\text{int}(\gamma_0) \subset \text{int}(\phi^\nu(0, t, f_0(\mathbb{S}^2))).$$

Il est par ailleurs clair que

$$\|\phi^\nu(0, t, f_0) - f_0\|_{C^{k-1}(\mathbb{S}^2)} \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow 0.$$

Fixons $t > 0$ assez petit. Soit

$$\kappa := \inf_{(x,y) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} |f_0(x) - \phi^\nu(0, t, f_0(y))|.$$

On utilise le résultat du théorème 3.6.5. On choisit $\varepsilon < \frac{\kappa}{2}$ comme dans le théorème 3.6.5. Il existe alors $f_\varepsilon \in C^\omega(\mathbb{R}^3; \Omega)$ (en considérant chaque coordonnée) telle que

$$\max_{0 \leq i \leq k-1} \|f_\varepsilon^{(i)} - (y \mapsto \phi^\nu(0, t, f_0(y)))^{(i)}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\gamma_0 \subset \text{int}(f_\varepsilon(\mathbb{S}^2)),$$

et

$$\|f_0 - f_\varepsilon\|_{C^{k-1}(\mathbb{S}^2)} \leq 2\varepsilon.$$

3.6.3.3. Lorsque X n'est pas non plus analytique. Dans cette situation on peut reproduire le même argument qu'en dimension 2. Rappelons le résultat suivant : Notons

$$\partial\Omega = \cup_{i=0}^p (\partial\Omega)_i,$$

où, pour $i = 1, \dots, p$, $(\partial\Omega)_i$ désigne la i ème composante connexe de $\partial\Omega$ et $(\partial\Omega)_0$ est la composante connexe de $\partial\Omega$ qui est aussi la frontière de la composante connexe non bornée de ${}^c\Omega$.

THÉORÈME 3.6.11 (Voir V. Girault & P. A. Raviart [48]). *Soit $X_1 \in C^k(\overline{\Omega})$ un champ de vecteurs de classe $\overline{\Omega}$, satisfaisant $\operatorname{div}(X_1) = 0$ et*

$$\int_{(\partial\Omega)_i} X_1 \cdot n dx = 0,$$

pour $i = 1, \dots, p$. Il existe alors $Y \in C^{k+1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ tel que

$$X_1 = \operatorname{curl}(Y).$$

On applique ce résultat à $V \in C_0([0, 1], C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^3))$ donné par la proposition 3.6.6.

Il existe $Y \in C_0([0, 1], C^k(\overline{\Omega}))$ tel que

$$V = \operatorname{curl}(Y).$$

En utilisant encore le résultat du théorème 3.6.5 on peut approcher Y par

$$Y_\varepsilon \in C_0([0, 1], C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^3)),$$

et donc approcher V par $V_\varepsilon \in C_0([0, 1], C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^3))$. On est alors ramené au paragraphe précédent. Notons que l'on aura alors

$$\phi^{V_\varepsilon}(0, \cdot, f_0) \rightarrow \phi^V(0, \cdot, f_0) \quad \text{dans} \quad C^1([0, 1], C^k(\mathbb{S}^2, \Omega)).$$

On conclut comme dans [51]. Ainsi le théorème 3.6.5 est vrai quand γ_0 et X sont seulement C^∞ .

3.6.4. La méthode du retour. Lorsque, dans la condition initiale (3.2), on prend $u_0 = 0$, le théorème 3.6.8 donne la contrôlabilité lagrangienne approchée. Lorsque $u_0 \neq 0$, contrairement à ce qui se passe en dimension 2, la solution de (3.1a) (3.1b) et

$$(3.48) \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

peut exploser en temps fini. Pour pallier cette difficulté, on peut envisager d'utiliser la méthode du retour : pendant un temps $[0, \delta]$, où $\delta > 0$ est destiné à être petit, si u_0 est assez petit on ne contrôle pas, *i.e.* sur $(0, \delta) \times \Gamma$ on prend $u \cdot n = 0$, la solution de (3.1a) (3.1b) (3.48) n'explose pas sur $[0, \delta]$, et pendant le temps $[\delta, 1]$, on utilise la solution donnée par le théorème 3.6.8, faisant passer de γ_0 à γ_1 à ε près.

Plus précisément, on s'inspire de l'article d'O. Glass [49] où, on construit une solution de (3.1) et (3.3) avec, en filigrane, la condition (3.5) introduite par A.V. Kazhikov dans [67] dans lequel une méthode itérative similaire à la suivante est décrite.

On choisit $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ valant 1 au voisinage de 0 et à support dans $[-\delta, \delta]$.

Notons $(\bar{y}, \bar{p})$ la solution donnée par le théorème 3.6.5, on définit pour $\rho > 0$ destiné à être petit, et $\alpha \in (0, 1)$,

$$X_\rho := \{u \in C^0([0, 1], C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{B}^3)), \operatorname{div}(u) = 0, \|u - \bar{y}\|_{C^0([0,1] \times \bar{\Omega})} < \rho, \\ u(t, x).n = \mu(t)u_0(x).n(x) + \bar{y}.n \text{ sur } [0, 1] \times \partial\Omega\}$$

On prend $R > 0$ tel que $\bar{\Omega} \subset B(0, R)$ et on prend, pour $k \in (0, 3)$

$$\pi : C^{[k], k-[k]}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \rightarrow C_0^{[k], k-[k]}(B(0, R), \mathbb{R}^3)$$

un opérateur continu d'extension⁹. On a donc

$$\pi(u)|_\Omega = u.$$

Pour $u \in X_\nu$, on pose

$$\tilde{u} := \bar{y} + \pi(u - \bar{y}).$$

Notons que l'on a prolongé $\bar{y}$ en une fonction C^∞ à support inclus dans $B(0, R)$, par exemple on peut prendre $\pi(\bar{y})$.

Pour éviter d'alourdir les notations, on confondra dans la suite $\bar{y}$ et $\pi(\bar{y})$.

Pour $u \in X_\rho$ on définit ω par

$$(3.49) \quad \omega(., 0) = \operatorname{curl}(\pi(u_0)) \text{ dans } \overline{B(0, R)},$$

$$(3.50) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \tilde{u} - \operatorname{div}(\tilde{u}) \omega \text{ dans } (0, 1) \times B(0, R).$$

Notons que (3.50) implique que ω est défini le long des caractéristiques de $\tilde{u}$, et que, compte tenu des hypothèses sur le support de $\bar{y}$ et de π le système (3.49) (3.50) admet une solution unique

$$\omega \in C([0, 1], C^{1,\alpha}(\overline{B(0, R)}, \mathbb{R}^3)).$$

Grâce au lemme 3.1 de l'article [49] d'O. Glass, compte-tenu du fait que

$$\operatorname{div}(\tilde{u}) = 0 \text{ dans } \overline{B(0, R)},$$

et compte-tenu de (3.49), il existe

$$\hat{v} \in C([0, 1], C^{2,\alpha}(\overline{B(0, R)}, \mathbb{R}^3))$$

tel que

$$\omega(t) = \operatorname{curl}(\hat{v}(t)).$$

⁹Un tel opérateur est construit dans l'article [54] de R.S. Hamilton.

Grâce à cela, il y a existence de $\mathbf{v} \in C([0, 1], C^{2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^3))$ tel que

$$(3.51) \quad \text{curl}(\mathbf{v}) = \omega \text{ dans } [0, 1] \times \Omega,$$

$$(3.52) \quad \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } [0, 1] \times \Omega,$$

$$(3.53) \quad \mathbf{v}.n = \mu(t)u_0.n + \bar{y}.n \text{ sur } [0, 1] \times \Omega.$$

Comme dans l'article d'O. Glass [49] (voir également les appendices du livre de R. Temam [95], ou M. Dauge & al [4]), on considère $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$ des surfaces telles que $\Omega \setminus \cup_{i=1}^s \Sigma_i$ est simplement connexe.

Pour une fonction $\psi \in H^1(\Omega \setminus \cup_{i=1}^s \Sigma_i)$, on peut définir la trace de ψ sur chaque Σ_i en fonction de la composante connexe de $\Omega \setminus \cup_{i=1}^s \Sigma_i$: la fonction ψ peut éventuellement avoir un saut, en traversant chaque Σ_i , que l'on note $[\psi]_i$.

On résout, pour tout $i = 1, \dots, s$, dans $\Omega \setminus \Sigma_i$,

$$(3.54) \quad \begin{aligned} q_i &\in H^1(\Omega \setminus \cup_{j=1}^s \Sigma_j), \\ \Delta q_i &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma_i, \\ \frac{\partial q_i}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ [q_i]_i &= 1, \\ [q_i]_j &= 0 \quad \text{pour } j \neq i, \\ [\frac{\partial q_i}{\partial n}]_i &= 0, \end{aligned}$$

et on définit

$$Q_i := \nabla q_i.$$

On montre alors la propriété suivante : Si $Y \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ satisfait

$$\text{curl}(Y) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

il existe des réels

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s$$

tels que

$$Y - \sum_{i=1}^s \alpha_i Q_i \in \nabla(C^\infty(\Omega, \mathbb{R})).$$

On définit alors $v \in C([0, 1], C^{2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^3))$ par ($\mathbf{v}$ est donnée par (3.51)–(3.53))

$$(3.55) \quad v := \mathbf{v} + \sum_{i=1}^s \lambda_i(t) Q_i$$

où $\lambda_i(t)$ est choisi pour que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(0) \cdot Q_i dx &= \int_{\Omega} u_0 \cdot Q_i dx \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \tilde{u} \wedge \omega \right) \cdot Q_i dx &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est toujours possible, car la matrice

$$\left(\int_{\Omega} Q_i \cdot Q_j dx \right)_{i=1 \dots s, j=1 \dots s}$$

est inversible. En effet, la condition (3.54) montre que les fonctions $(Q_i)_{1 \leq i \leq s}$ forment une famille libre et donc la matrice $\left(\int_{\Omega} Q_i \cdot Q_j dx \right)_{i=1 \dots s, j=1 \dots s}$ est une matrice de Gram-Schmidt inversible.

On a donc construit, à partir d'un élément

$$u \in C([0, 1], C^{2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^3)),$$

l'élément

$$v \in C([0, 1], C^{2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^3))$$

défini par (3.55). On pose alors

$$F(u) := v.$$

La même méthode que celle employée par O. Glass dans [49], permet de montrer le

THÉORÈME 3.6.12. *F possède un point fixe dans X_{ν} pourvu que ν soit assez petit et que $\|u_0\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}$ soit assez petit,*

essentiellement grâce au

LEMME 3.6.13 (Voir C. Bardos & U. Frisch [8]). *Soit u, v et g trois fonctions de classe $C^0([0, 1], C^{1,\alpha}(\overline{B(0, R)}, \mathbb{R}^3))$ telles que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla)u = g, \quad v \cdot n_{|[0,1] \times \overline{\partial B(0,R)}} = 0$$

alors on a ¹⁰

$$\frac{d}{dt^+} \|u\|_{0,\alpha}(t) \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0,\alpha}(t) \leq \|g\|_{0,\alpha}(t) + \alpha \|\nabla v\|_{0,\alpha}(t) \|u\|_{0,\alpha}(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Pour faire la preuve annoncée, comme dans l'article d'O. Glass [49], on dispose des deux propositions suivantes :

¹⁰ $\frac{d}{dx^+}$ désigne la dérivée supérieure.

PROPOSITION 3.6.14. *Pour tout $\mathcal{R} > 0$ il existe ρ_0 et ρ_1 tels que si*

$$\|u_0\|_{1,\alpha,\Omega} < \rho_1$$

alors pour tout $\rho < \rho_0$ et tout $u \in X_\rho \cap B(\mathcal{R})$ on a $F(u) \in X_\rho$, où $B_{\mathcal{R}}$ désigne la boule de centre 0 et rayon $\mathcal{R}$ dans $C^0([0, 1], C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3))$.

et

PROPOSITION 3.6.15. *Il existe $\rho_2 > 0$ tel que si*

$$\|u_0\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)} < \rho_2,$$

la suite définie par

$$\begin{cases} u^0(t, x) = \mu(t)u_0(x) + \overline{y}(t, x) \\ u^{m+1} = F(u^m) \end{cases}$$

est bornée, uniquement en fonction de Ω et ρ_2 , dans $C^0([0, 1], C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3))$.

Prouvons la proposition 3.6.14. On se contente d'écrire la preuve dans le cas simplement connexe. Pour le cas multi-connexe voir l'article d'O. Glass [49]. Notons $\tilde{\Omega} = B(0, R)$. Grâce au lemme 3.6.13 et (3.48), nous avons

$$\frac{d}{dt^+} \|\omega\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}} \leq (2 + \alpha) \|\tilde{u}\|_{1,\alpha,\tilde{\Omega}}(t) \|\omega\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}.$$

Ainsi, grâce au lemme de Gronwall, nous obtenons

$$(3.56) \quad \|\omega\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t) \leq \|\omega\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(0) \exp((2 + \alpha)t \|\tilde{u}\|_{C^0([0,1], C^{1,\alpha}(\tilde{\Omega}))})$$

Il s'ensuit que

$$\|\omega\|_{0,\alpha,\Omega}(t) \leq C \|u_0\|_{1,\alpha,\overline{\Omega}} \exp((2 + \alpha) \|\tilde{u}\|_{C^0([0,1], C^{1,\alpha}(\tilde{\Omega}))})$$

et donc, par la régularité elliptique dans (3.53), et la continuité de l'opérateur π , on obtient :

$$\|F(u(t)) - \overline{y}(t)\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C (\|u\|_{1,\alpha,\Omega}) \|u_0\|_{1,\alpha,\Omega},$$

d'où le résultat de la proposition 3.6.14.

Laissons la preuve de la proposition 3.6.15 qui est également une redite des résultats d'O. Glass [49] et indiquons l'existence d'un point fixe à F en suivant l'article de C. Bardos & U. Frisch [8].

A chaque u^m élément de la suite, on associe ω^{m+1} , solution de (3.49) et (3.50) avec $\tilde{u}^m$ à la place $\tilde{u}$.

On a

$$(3.57) \quad \frac{\partial(\omega^p - \omega^m)}{\partial t} + (\tilde{u}^m \cdot \nabla)(\omega^p - \omega^q) = ((\tilde{u}^p - \tilde{u}^m) \cdot \nabla) \omega^p + ((\omega^p - \omega^m) \cdot \nabla) \tilde{u}^m \\ + (\omega^m \cdot \nabla)(\tilde{u}^p - \tilde{u}^m) - \operatorname{div}(\tilde{u}^m)(\omega^p - \omega^m) - (\operatorname{div}(\tilde{u}^m) - \operatorname{div}(\tilde{u}^p)) \omega^m.$$

Ainsi grâce au lemme 3.6.13 et à l'opérateur π , on a

$$\left\| \frac{\partial(\omega^p - \omega^m)}{\partial t} \right\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t) \leq C(\|\tilde{u}^p - \tilde{u}^m\|_{0,\alpha,\Omega}(t) + \|\omega^p - \omega^m\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t)),$$

qui donne grâce, à (3.53),

$$\left\| \frac{\partial(\omega^p - \omega^m)}{\partial t} \right\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t) \leq C(\|\omega^{p-1} - \omega^{m-1}\|_{0,\alpha,\Omega}(t) + \|\omega^p - \omega^m\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t)).$$

Grâce encore au lemme 3.6.13, nous obtenons en posant,

$$\mathcal{G}^{m,p}(t) := \|\omega^p - \omega^m\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t),$$

$$\frac{d}{dt^+} \mathcal{G}^{m,p}(t) \leq C \mathcal{G}^{m,p}(t) + \mathcal{G}^{m-1,p-1}(t)$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient

$$\mathcal{G}^{m,p}(t) \leq C \int_0^t e^{Ct_1} \mathcal{G}^{m-1,p-1}(t_1) dt_1$$

qui se propage pour donner finalement, pour une constante $C' > 0$, en

$$\mathcal{G}^{m+k,p+k}(t) \leq C' \frac{e^{kCt}}{k!} \max_{s \in [0,1]} \mathcal{G}^{m,p}(s)$$

Ceci prouve que la suite (ω^p) est de Cauchy dans

$$C([0, 1], C^{0,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}}, \mathbb{R}^3)).$$

Comme sa convergence implique la convergence de (u^m) dans

$$C([0, 1], C^{1,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})),$$

vers un point fixe de F dans X_ρ , on obtient finalement une solution de l'équation (3.1a) (3.1b) (3.1c).

Notons y_ρ le point fixe trouvé.

Soit $x \in \gamma_0$. Posons $x(t) := \phi^{\bar{y}}(0, T, x)$ et $z(t) := \phi^{y_\rho}(0, T, x)$, et $w(t) := x(t) - z(t)$.

On a alors

$$\begin{aligned} z'(t) &= \bar{y}(t, x(t)) - y_\rho(t, z(t)) = \\ &\bar{y}(t, x(t)) - y_\rho(t, x(t)) + y_\rho(t, x(t)) - y_\rho(t, z(t)), \end{aligned}$$

puis

$$(3.58) \quad |z'(t)| \leq \rho + R|z(t)|,$$

et donc, le lemme de Gronwall, appliqué à (3.58), implique que si ρ est assez petit

$$\|\phi^{y_\rho}(0, T, \gamma_0) - \phi^{\bar{y}}(0, T, \gamma_0)\|_\infty \text{ l'est aussi.}$$

On a donc prouvé le résultat suivant :

THÉORÈME 3.6.16. *Soit γ_0 et γ_1 l'image de $\mathbb{S}^2$ par deux plongements f_0 et f_1 de classe C^k , contractiles dans un ouvert régulier connexe Ω , tels que $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$. Soit $T > 0$ et $\varepsilon > 0$, et soit*

$$u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3).$$

Si $\|u_0\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)}$ est suffisamment petite, alors il existe une solution (u, p) de (3.1a)–(3.1c), (3.2) (voir page 29) telle que

$$\|\phi^u(0, T, \gamma_0) - \gamma_1\|_\infty < \varepsilon.$$

REMARQUE 3.6.17. Lorsque $\|u_0\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}$ n'est pas petite, on procède comme suit :

pour toute (u, p) solution de (3.1a), alors pour tout $\lambda > 0$, l'application

$$(t, x) \mapsto (\lambda u(\lambda t, x), \lambda^2 p(\lambda t, x))$$

en est une aussi.

Choisissons $T = 1$, $\varepsilon > 0$ dans le théorème précédent, et $u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

On choisit λ pour que $\|\lambda u_0\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}$ satisfasse les hypothèses du théorème 3.6.16.

Soit (u, p) la solution donnée par ce résultat ; alors $(t, x) \mapsto \frac{1}{\lambda} u(\frac{t}{\lambda}, x)$ est solution de (3.1a) (3.1b) (3.1c) et (3.2) (voir page 29).

On obtient alors :

THÉORÈME 3.6.18. *Pour tout $u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ ($T = 1/\lambda$ avec les notations ci-dessus) et (u, p) solution de (3.1a)–(3.1c) et (3.2) (voir page 29), tels que*

$$\|\phi^u(0, T, \gamma_0) - \gamma_1\|_\infty < \varepsilon.$$

REMARQUE 3.6.19. Il n'est pas clair que l'on puisse ramener u à 0 tout en respectant l'objectif du contrôle lagrangien, même pour u_0 petit. Il s'ensuit que l'on n'a pas pu prouver la contrôlabilité lagrangienne approchée de (3.1) en temps T arbitraire, en adaptant la méthode correspondante dans l'article d'O. Glass [49]. Notons que nous n'avons pas su prouver, non plus, un tel résultat, en dimension 2.

3.7. Vers la simulation

Cette section est consacrée à des travaux en cours avec O. Kavian et O. Glass, qui permettent des simulations numériques —pour l’instant imparfaite— de la contrôlabilité lagrangienne.

La pierre angulaire des résultats des deux parties précédentes, est l’observation que, la trajectoire d’une courbe n’est pas donnée par la vitesse de chaque point la constituant, mais de la vitesse normale de chacun de ses points.

Il ressort le théorème suivant qui est prouvé de deux façons différentes (en dimension 2, par la variable complexe et en dimension 3 par l’équivalent du théorème de Runge (th. 3.6.9)).

Pour l’énoncer, nous introduisons quelques notations.

Considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est lipschitzienne. Soit Γ une partie fermée de $\partial\Omega$ d’intérieur non vide. On définit

$$(3.59) \quad \begin{aligned} H_m^{-1/2}(\Gamma) &:= \{v \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \text{ tel que } v = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega \setminus \Gamma), \\ &\text{et tel que } \langle v, 1 \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0\}. \end{aligned}$$

Bien sûr, lorsque Γ une composante connexe de $\partial\Omega$, on a

$$H_m^{-1/2}(\Gamma) := \{v \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \text{ tel que } \langle v, 1 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} = 0\}.$$

On notera ν la normale extérieure à γ , une courbe intérieure à l’ouvert sur lequel on travaille et n la normale extérieure à Ω .

THÉORÈME 3.7.1. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, et soit Γ une partie fermée de $\partial\Omega$, d’intérieur non vide (dans $\partial\Omega$). On considère γ une hypersurface de Jordan¹¹ de classe C^∞ , incluse dans Ω , et que l’on suppose contractile dans Ω . Soit*

$$(3.60) \quad \begin{aligned} \Psi : H_m^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H_m^{-1/2}(\gamma) \\ v &\mapsto \frac{\partial\phi}{\partial\nu}|_\gamma \end{aligned}$$

où ϕ est solution de

$$(3.61a) \quad \Delta\phi = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$(3.61b) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = v \text{ sur } \Gamma,$$

$$(3.61c) \quad \int_\Omega \phi dx = 0.$$

Alors Ψ a une image dense.

¹¹c’est à dire définissant un intérieur et un extérieur.

Dans la suite un indice m sur les espaces de fonctions considérés indique que ces fonctions ont une moyenne nulle.

REMARQUE 3.7.2. L'espace $H^{-1/2}$ ne possède pas de propriétés élémentaires de localisation ou d'extension (voir J.L. Lions & E. Magenes [75]). Pour cette raison, il est utile d'introduire l'espace (3.59). Lorsque Γ est une composante connexe de $\partial\Omega$, l'espace $H_m^{-1/2}(\Gamma)$ est le dual des fonctions de $H_m^{1/2}(\Gamma)$ constitué des fonctions de $H^{1/2}(\Gamma)$ de moyenne nulle sur Γ , comme il est facile de le voir.

On peut donner une autre preuve du théorème 3.7.1 en dimension 2 et 3, en utilisant des arguments comme ceux proposés par A. Calderon dans [15]. Pour être précis, nous n'avons écrit les preuves, en utilisant cette méthode, que dans des géométries particulières.

Nous présentons ici une preuve écrite avec O. Kavian, ainsi qu'une variante proposée par J.P. Puel, similaire à celle utilisée par A. Osses & J.P. Puel [84].

Pour prouver le théorème 3.7.1 on peut se ramener au cas où Γ est une composante connexe de $\partial\Omega$. Pour cela, on utilise une méthode d'extension décrite sur la figure 3.7.11.

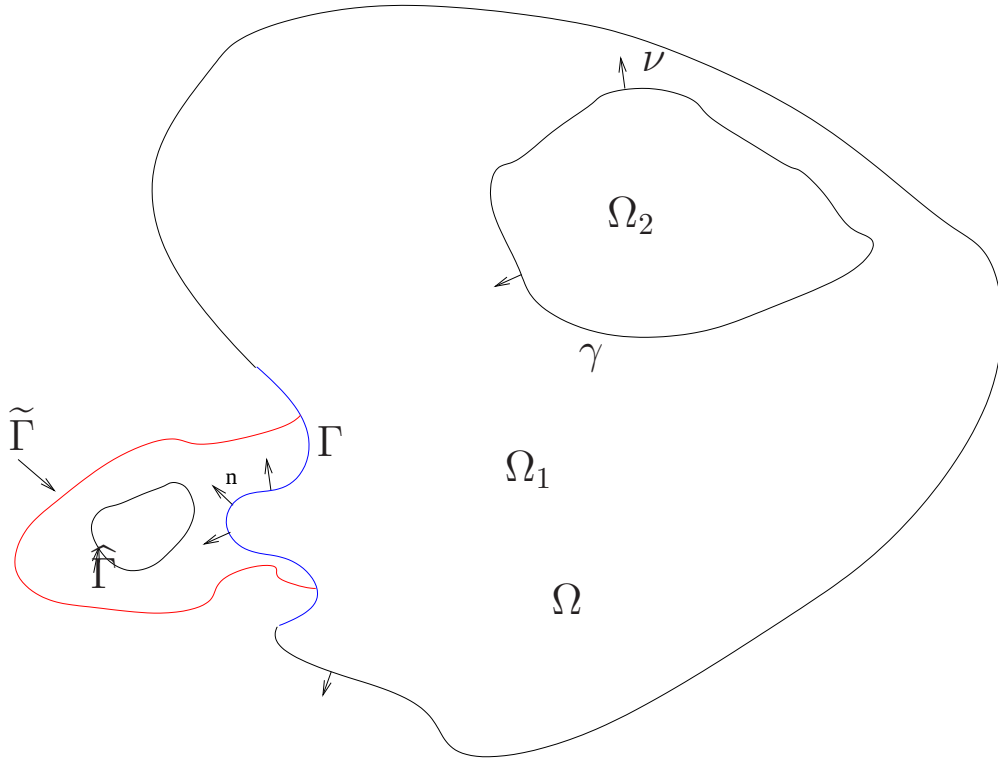


FIG. 3.7.11: Extension de Ω

Soit $\tilde{\Gamma}$ une surface extérieure à Ω , qui rencontre Γ transversalement.

Soit, également, $\hat{\Gamma}$ une surface de Jordan incluse dans le domaine borné par Γ et $\tilde{\Gamma}$. Notons également $\tilde{\Omega}$ le domaine étendu.

Si l'on sait démontrer le théorème 3.7.1 avec $\widehat{\Gamma}$ à la place de Γ , et $\widetilde{\Omega}$ à la place de Ω , alors la dérivée normale sur Γ de ϕ qui satisfait (3.61a) (3.61b), est bien définie et appartient à $H_m^{-1/2}(\Gamma)$.

Nous supposons donc que Γ est une composante connexe de $\partial\Omega$.

Nous considérons donc une situation et utilisons des notations conformes à la figure 3.7.12 :

$$\begin{aligned}\Omega_2 &:= \text{int}(\gamma), \\ \Omega_1 &:= \Omega \setminus \overline{\text{int}(\gamma)}.\end{aligned}$$

Pour éviter les confusions on note ν_{21} la normale extérieure unitaire à Ω_2 et

$$\nu_{12} := -\nu_{21}.$$

Notons que, d'après la remarque 3.7.2, $(H_m^{1/2}(\gamma))' = H_m^{-1/2}(\gamma)$ puisque γ est le

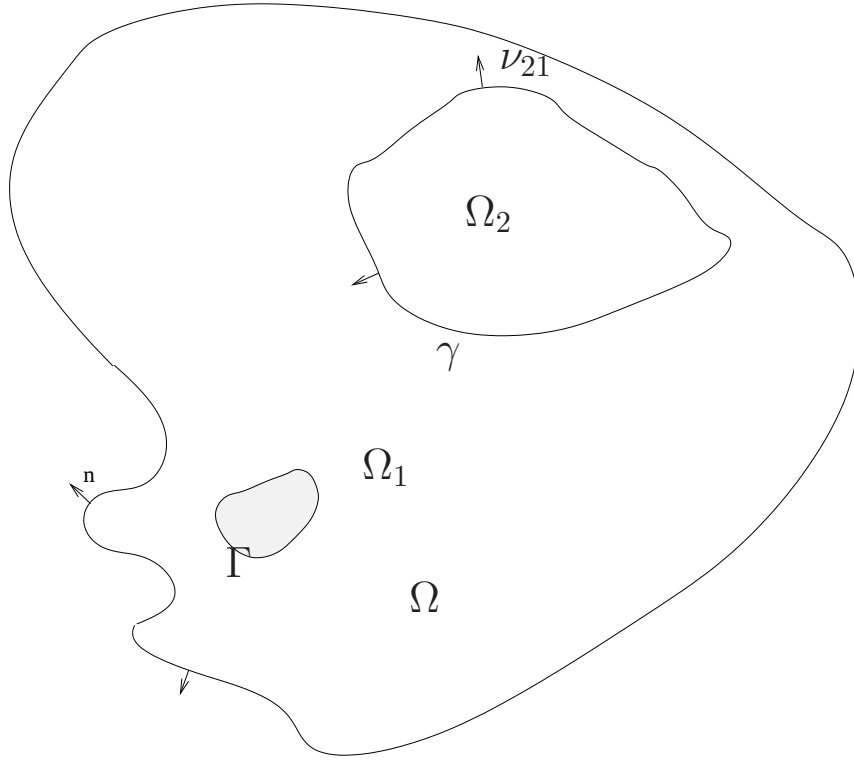


FIG. 3.7.12: Situation utilisée pour prouver le théorème 3.7.1.

bord de Ω_2 .

Prenons $f \in H_m^{1/2}(\gamma)$ et soit θ_2 solution de

$$\begin{aligned}(3.62a) \quad & \theta_2 \in H^1(\Omega_2), \\ & \Delta\theta_2 = 0 \text{ dans } \Omega_2,\end{aligned}$$

$$(3.62b) \quad \theta_2 = f \text{ sur } \gamma.$$

On considère également ϕ définie par (3.61a), (3.61b).

Nous avons alors, par des intégrations par parties, en multipliant (3.61a) par θ_2 et (3.62a) par ϕ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} f d\sigma &= - \int_{\Omega_2} \nabla \phi \cdot \nabla \theta_2 dx \\ (3.63) \quad &= - \int_{\gamma} \phi \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{21}} d\sigma, \end{aligned}$$

Soit θ_1 la fonction définie par¹²

$$\begin{aligned} (3.64a) \quad &\theta_1 \in H^1(\Omega_1), \\ &\Delta \theta_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1, \end{aligned}$$

$$(3.64b) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \nu_{12}} = - \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{21}} \text{ sur } \gamma,$$

$$(3.64c) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega,$$

$$(3.64d) \quad \int_{\gamma} \theta_1(\sigma) d\sigma = 0.$$

En multipliant (3.64a) par ϕ et (3.61a) par θ_1 , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} f d\sigma &= \int_{\Omega_1} \nabla \phi \cdot \nabla \theta_1 dx \\ &= \int_{\partial \Omega} \theta_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma + \int_{\gamma} \theta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} d\sigma. \end{aligned}$$

Ainsi l'on obtient

$$(3.65) \quad \int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} (f - \theta_1) d\sigma = \int_{\Gamma} v \theta_1 d\sigma,$$

car $v \in H_m^{-1/2}(\Gamma)$.

Montrons que l'application Λ définie par

$$\begin{aligned} \Lambda : H_m^{1/2}(\gamma) &\rightarrow H_m^{1/2}(\gamma) \\ f &\mapsto f - \theta_1|_{\gamma} \end{aligned}$$

est bijective. Noter que le choix de l'espace d'arrivée est possible grâce à (3.64d).

Vérifions d'abord que Λ est injective. En effet si $f - \theta_1|_{\gamma}$ est nulle, la fonction θ définie par

$$\theta = \begin{cases} \theta_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \theta_2 & \text{sur } \Omega_2, \end{cases}$$

est, grâce à (3.62b), dans $H^1(\Omega)$, et, grâce à (3.64b), (3.64a) et (3.62a), harmonique dans Ω .

¹²le choix de la normalisation (3.64d) apparaîtra dans la suite

La relation (3.64c) implique alors que θ est constante dans Ω . Par (3.64d), on en déduit que θ , et donc f , est nulle, et donc, que Λ est injective.

Prouvons que Λ est surjective. Pour ce faire, nous allons montrer que l'application

$$(3.66) \quad f \mapsto \theta_{1|\gamma}$$

est fortement coercive, ce qui, grâce au théorème de G. Stampacchia (voir H. Brézis [13] théorème V.6), montrera que Λ est surjective (et en fait aussi injective, ce que l'on sait déjà).

On commence par exprimer Λ en fonction de deux opérateurs de type Poincaré-Neumann et Neumann-Poincaré sur les ouverts Ω_1 et Ω_2 .

Pour cela, on définit deux opérateurs Λ_1 et Λ_2 comme suit :

Soit Λ_1 l'opérateur donné par

$$(3.67a) \quad H_m^{-1/2}(\gamma) \mapsto H_m^{1/2}(\gamma)$$

$$(3.67b) \quad v \mapsto \Lambda_1(v) := \xi_{1|\gamma},$$

où

$$(3.67c) \quad \xi_1 \in H^1(\Omega_1),$$

$$(3.67d) \quad \Delta \xi_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1,$$

$$(3.67e) \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu_{12}} = v \quad \text{sur} \quad \gamma,$$

$$(3.67f) \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega$$

$$(3.67g) \quad \int_{\gamma} \xi_1(\sigma) d\sigma = 0.$$

On définit l'opérateur Λ_2 de la manière suivante :

$$(3.68a) \quad H_m^{1/2}(\gamma) \mapsto H_m^{-1/2}(\gamma)$$

$$(3.68b) \quad \phi \mapsto \Lambda_2(\phi) := \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial \nu_{2,1}} \right)_{|v},$$

où

$$(3.68c) \quad \xi_2 \in H^1(\Omega_2),$$

$$(3.68d) \quad \Delta \xi_2 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_2,$$

$$(3.68e) \quad \xi_2 = \phi \quad \text{sur} \quad \gamma.$$

Grâce aux opérateurs Λ_1 et Λ_2 , nous pouvons écrire,

$$\Lambda = I + \Lambda_1 \circ \Lambda_2.$$

Définissons sur $H_m^{-1/2}(\gamma)$ et $H_m^{1/2}(\gamma)$ les normes suivantes :

Pour $v \in H_m^{-1/2}(\gamma)$, on pose

$$|v|_{-1/2,m} := \|\nabla \xi_1\|_{L^2(\Omega_1)},$$

et pour $\phi \in H_m^{1/2}(\gamma)$, on pose

$$|\phi|_{1/2,m} := \|\nabla \xi_2\|_{L^2(\Omega_2)}.$$

Nous allons montrer que $|\cdot|_{-1/2,m}$ et $|\cdot|_{1/2,m}$ sont des normes équivalentes aux normes usuelles sur $H^{1/2}(\gamma)$ et $H^{-1/2}(\gamma)$, notées respectivement $\|\cdot\|_{-1/2}$ et $\|\cdot\|_{1/2}$, celles-ci étant respectivement restreintes à $H_m^{1/2}(\gamma)$ et $H_m^{-1/2}(\gamma)$.

Dans les arguments suivants, C et C' désignent diverses constantes ne dépendant que de la géométrie des ouverts considérés.

Soit, pour $\varphi \in H_m^{1/2}(\gamma)$ μ_1 la solution de

$$(3.69a) \quad \mu_1 \in H^1(\Omega_1)$$

$$(3.69b) \quad \Delta \mu_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1$$

$$(3.69c) \quad \mu_1 = \varphi \quad \text{sur} \quad \gamma$$

$$(3.69d) \quad \mu_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Rappelons d'abord que

$$\|\varphi\|_{1/2} \sim \|\zeta_1\|_{H^1(\Omega_1)},$$

où ζ_1 est défini par

$$(3.70) \quad \begin{aligned} \zeta_1 &\in H^1(\Omega_1), \\ -\Delta \zeta_1 + \zeta_1 &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1, \\ \zeta_1 &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ \zeta_1 &= \varphi \quad \text{sur} \quad \gamma. \end{aligned}$$

Or, par l'inégalité de Poincaré-Friedrich (voir *e.g.* R. Adams [1]) et par (3.70)

$$\|\zeta_1\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C \|\nabla \zeta_1\|_{L^2(\Omega_1)}.$$

Nous pouvons alors en déduire, en multipliant (3.69b) par ξ_1 et (3.67d) par μ_1 que, pour $v \in H_m^{-1/2}(\gamma)$ et ξ_1 donnée par (3.67)

$$\|v\|_{-1/2} \leq C \left(\sup_{\varphi \in H_m^{1/2}(\gamma) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla \mu_1\|_{L^2(\Omega_1)}}{\|\varphi\|_{1/2}} \right) \|\nabla \xi_1\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C |v|_{-1/2,m},$$

par continuité de l'application $\phi \mapsto \mu_1$

Nous obtenons également

$$\|\nabla \xi_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq \|\xi_1\|_{1/2} \|v\|_{-1/2} \leq C \|v\|_{-1/2}^2,$$

par continuité de l'application $v \mapsto \xi_1$.

Procédons de même pour $|\cdot|_{1/2,m}$. Considérons $v \in H_m^{-1/2}(\gamma)$. Définissons μ_2 par

$$\begin{aligned}\mu_2 &\in H^1(\Omega_2), \\ \Delta\mu_2 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \\ \frac{\partial\mu_2}{\partial\nu_{21}} &= v \quad \text{sur } \gamma \\ \int_{\gamma} \mu_2(\sigma) d\sigma &= 0.\end{aligned}$$

On a alors pour $\varphi \in H_m^{1/2}(\gamma)$

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{1/2} &:= \sup_{v \in H_m^{-1/2}(\gamma), v \neq 0} \frac{\int_{\gamma} v\varphi d\sigma}{\|v\|_{-1/2,m}} \\ &\leq \sup_{v \in H_m^{-1/2}(\gamma), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega_2} \nabla\mu_2 \nabla\xi_2 dx}{\|v\|_{-1/2,m}} \leq C|\varphi|_{1/2,m}\end{aligned}$$

par continuité de $v \mapsto \mu_2$.

Réciproquement, en multipliant (3.68d) par ξ_2 , et en intégrant sur Ω_2 , on obtient

$$|\varphi|_{1/2,m} \leq C' \|\varphi\|_{1/2}.$$

Ainsi nous avons bien les équivalences des normes annoncées.

Prenons maintenant $\varphi \in H_m^{1/2}(\gamma)$. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle_{1/2,m}$ le produit scalaire associé à la norme $|\cdot|_{1/2,m}$, et $\langle \cdot | \cdot \rangle_{-1/2,m}$ le produit scalaire associé à la norme $|\cdot|_{-1/2,m}$.

On a alors, pour $\varphi_i \in H_m^{1/2}(\gamma)$, $i = 1, 2$,

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{1/2,m} = \int_{\Omega_2} \nabla\xi_2(\varphi_1) \nabla\xi_2(\varphi_2) dx,$$

où $\xi_2(\varphi_i)$ est donné par la solution de (3.68) en prenant $\phi := \varphi_i$ dans (3.68e), ainsi qu'une formule similaire pour $\langle \cdot | \cdot \rangle_{-1/2,m}$. Nous avons par construction

$$\begin{aligned}\langle \Lambda\varphi | \varphi \rangle_{1/2,m} &= \langle \varphi | \varphi \rangle_{1/2,m} + \langle \Lambda_1 \Lambda_2 \varphi | \varphi \rangle_{1/2,m} \\ &= \langle \varphi | \varphi \rangle_{1/2,m} + \langle \Lambda_1 \Lambda_2 \varphi | \Lambda_2 \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\gamma), H^{1/2}(\gamma)} \\ &= \langle \varphi | \varphi \rangle_{1/2,m} + \langle \Lambda_2 \varphi | \Lambda_2 \varphi \rangle_{-1/2,m},\end{aligned}$$

ce qui prouve la positivité de Λ . Notons que ce calcul montre que, si $\Lambda\varphi = 0$, alors $\varphi = 0$.

Nous avons donc montré que Λ est inversible. Remarquons, au passage, que nous avons également prouvé que (3.66) est un opérateur positif au sens où

$$\forall f \in H_m^{1/2}(\gamma), \quad \langle \theta_{1|\gamma} | f \rangle_{1/2,m} \geq 0.$$

Rappelons que θ_1 est défini par (3.64).

Reprenons

$$(3.65) \quad \int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} (f - \theta_1) d\sigma = \int_{\Gamma} v \theta_1 d\sigma,$$

où $f \in H_m^{1/2}(\gamma)$ et θ_1 est défini par (3.64). Nous noterons $\theta_1(f)$ la solution de (3.64) lorsque θ_2 vérifie (3.62)

L'identité (3.65) s'écrit, compte-tenu de l'inversibilité de Λ , en notant $F := f - \theta_1(f)$

$$(3.71) \quad \int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} F d\sigma = \int_{\Gamma} v \theta_1(\Lambda^{-1}(F)) d\sigma.$$

La relation (3.71) permet d'identifier l'adjoint Ψ^* de Ψ où Ψ est donné par (3.60).

Nous allons pouvoir, à l'aide du théorème de Hahn-Banach, en déduire la densité de l'image de Ψ .

Supposons l'existence d'un $F \in H_m^{1/2}(\gamma)$ tel que le membre de gauche de (3.71) soit nul pour tout $v \in H_m^{-1/2}(\Gamma)$.

Nous avons alors $\theta_1(\Lambda^{-1}(F)) = 0$ sur Γ . Compte tenu de (3.64c) et du principe de continuation unique pour le laplacien (voir L. Hörmander [57] Thm. 8.6.5), nous en déduisons que

$$\theta_1(\Lambda^{-1}(F)) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1,$$

ce qui, compte tenu de (3.62) conduit à $\Lambda^{-1}(F) = 0 = F$, et finit de prouver le théorème 3.7.1.

REMARQUE 3.7.3. La preuve du théorème 3.7.1 permet d'identifier l'adjoint de Ψ . Une fois cet adjoint déterminé, le théorème 3.7.1 permet de résoudre le problème suivant :

Étant donné $V \in H_m^{-1/2}(\gamma)$, et $\varepsilon > 0$, déterminer v_ε tel que

$$(3.72) \quad \|v_\varepsilon\|_{H_m^{-1/2}(\Gamma)} = \inf \{ \|v\|_{H_m^{-1/2}(\Gamma)}, \text{ avec } \|\Psi(v) - V\|_{H_m^{-1/2}(\gamma)} \leq \varepsilon \}.$$

En effet d'après le théorème de I. Ekeland & R. Temam (voir [38]), voyons que l'on peut trouver v_ε en calculant

$$\min_{H_m^{1/2}(\gamma)} T$$

où, pour $\varphi \in H_m^{1/2}(\gamma)$, on définit

$$T(\varphi) := \frac{1}{4} \|\Psi^*(\varphi)\|_{H_m^{1/2}(\Gamma)}^2 + \varepsilon \|\varphi\|_{H_m^{1/2}(\gamma)} - \langle V, \varphi \rangle_{H_m^{-1/2}(\gamma), H_m^{1/2}(\gamma)}.$$

Soit ϕ_ε tel que $T(\phi_\varepsilon) = \min_{H_m^{1/2}(\gamma)} T$, on a alors

$$(3.73) \quad v_\varepsilon = \Psi^*(\phi_\varepsilon).$$

Si l'on poursuit un objectif de simulation numérique de la contrôlabilité lagrangienne, on devra, le long du mouvement des particules de fluides, résoudre (3.72), γ variant au cours du temps. La dépendance de v_ε , par rapport à γ et V , doit alors être étudiée. Or, le calcul de Ψ^* semble mal commode (rappelons que $\Psi^*(f) = \theta_1(\Lambda^{-1}(f))$). Grâce à une remarque de Jean-Pierre Puel, on peut déterminer Ψ^* d'une autre façon, qui est présentée ci-après.

Reprenons à partir de (3.63). Notons ϑ_1 la solution de

$$(3.74) \quad \begin{aligned} \vartheta_1 &\in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \vartheta_1 dx &= 0, \\ \forall u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \vartheta_1 \nabla u dx &= \int_{\gamma} \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} u d\sigma. \end{aligned}$$

L'existence de ϑ_1 découle bien sûr du fait que $\int_{\gamma} \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} d\sigma = 0$.

Par abus de notation, nous noterons $\frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} \delta_\gamma$, la distribution définie par

$$\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_{\gamma} \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} \phi d\sigma.$$

Ici δ_γ est l'élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \delta_\gamma, \phi \rangle := \int_{\gamma} \phi(\sigma) d\sigma.$$

On a clairement, en prenant dans (3.74), $u \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(3.75) \quad -\Delta \vartheta_1 = \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} \delta_\gamma \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De plus, la formulation variationnelle (3.74), et le fait que $\nabla u \in H(\text{div}, \Omega')$ pour tout ouvert Ω' d'adhérence incluse dans $\Omega \setminus \gamma$, impliquent, en prenant $u \in H^1(\Omega)$ nulle sur un voisinage de γ , que l'on a

$$(3.76) \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Reportant (3.74) dans (3.63) on obtient

$$(3.77) \quad \begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} f d\sigma &= - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \vartheta_1 \\ \int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} f d\sigma &= - \int_{\Gamma} \vartheta_1 v d\sigma. \end{aligned}$$

On a donc identifié l'adjoint de Ψ :

$$(3.78) \quad \begin{aligned} \Psi^* : H_m^{1/2}(\gamma) &\mapsto H_m^{1/2}(\Gamma) \\ f &\rightarrow -(\vartheta_1)|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Si

$$\int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{12}} f d\sigma = 0$$

pour tout choix de v , d'après (3.77) on a $(\vartheta_1)|_{\Gamma} = 0$. Finalement par le théorème de continuation unique pour le laplacien (voir L. Hörmander [57]) on conclut que $\vartheta_1 = 0$ dans Ω .

Il suit compte tenu de (3.64b) que

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} = 0 \text{ sur } \gamma,$$

donc que θ_2 est constante et donc nulle, donc f l'est.

On a donc prouvé, à nouveau, le théorème 3.7.1.

Sans rentrer dans les détails, au vu de (3.78), (3.62), (3.75) et (3.76), et en utilisant les résultats de dépendance des solutions d'équations elliptiques par rapport au domaine, donnés dans l'ouvrage de D. Gilbarg et N. Trüdinger [47], on voit que la dépendance de v_{ε} donné par (3.73) par rapport à γ et f découle plus naturellement de la formulation de Ψ^* par (3.78).

Remarquons que, par analyticité de ϕ loin de $\partial\Omega$, il est clair que Ψ a une image strictement incluse dans $H_m^{-1/2}(\gamma)$.

3.7.1. Densité dans des espaces plus réguliers. Les éléments de l'espace $H_m^{-1/2}(\gamma)$ ont une faible régularité, on peut donc se poser la question de la densité de l'image de Ψ dans des espaces de fonctions plus régulières, d'autant que, comme on l'a vu au paragraphe précédent, ϕ , la solution de (3.61) est analytique dans Ω . Il s'ensuit que si γ est "seulement" de classe C^k , $\Psi(v)$ sera, pour tout $v \in H_m^{1/2}(\Gamma)$, de classe C^{k-1} .

Reprenons la définition de Ψ^* .

Pour $f \in H_m^{-1/2}(\gamma)$, on peut donner un sens, par la méthode de transposition, à θ_2 solution de (3.62a), (3.62b).

Rappelons brièvement de quelle façon :

Pour $v \in L^2(\Omega_2)$, on résout

$$(3.79) \quad \begin{aligned} W &\in H^1(\Omega_2), \\ \Delta W &= v \text{ dans } \Omega_2, \end{aligned}$$

$$(3.80) \quad W = 0 \text{ sur } \gamma.$$

On a alors formellement (rappelons que θ_2 est défini par (3.62), page 73)

$$(3.81) \quad \int_{\Omega_2} w \theta_2 dx = \int_{\gamma} \frac{\partial W}{\partial \nu_{21}} f d\sigma.$$

Or, si γ est une surface de classe C^∞ —ce que l'on suppose désormais—, on a

$$W \in H^2(\Omega_2) \cap H_0^1(\Omega_2).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial W}{\partial \nu_{21}} \in H_m^{1/2}(\gamma),$$

et donc, le second membre de (3.81) a un sens.

On considère alors l'application

$$v \in L^2(\Omega_2) \mapsto \int_{\gamma} \frac{\partial W}{\partial \nu_{21}} f d\sigma,$$

où W est définie par (3.79), (3.80).

C'est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega_2)$, et, par conséquent, il existe un unique $\tilde{\theta}_2 \in L^2(\Omega_2)$ tel que

$$\forall v \in L^2(\Omega_2) \quad \int_{\Omega_2} v \tilde{\theta}_2 dx = \int_{\gamma} \frac{\partial W}{\partial \nu_{21}} f d\sigma.$$

En prenant $W \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ et en en définissant $w := \Delta W$, on vérifie sans peine que $\tilde{\theta}_2$ est harmonique, et que lorsque $f \in H_m^{1/2}(\gamma)$ on a $\tilde{\theta}_2 = \theta_2$.

Par ailleurs si $\mu \in H_m^{3/2}(\gamma)$, soit $\theta_2(\mu)$ la solution correspondante de (3.62a), (3.62b) avec μ à la place de f . On a alors $\theta_2(\mu) \in H^2(\Omega_2)$, il s'ensuit que l'application

$$\mu \mapsto \int_{\gamma} \frac{\partial \theta_2(\mu)}{\partial \nu_{21}} f d\sigma$$

est une forme linéaire continue et donc que l'on peut donner un sens à

$$\frac{\partial \theta_2(f)}{\partial \nu_{21}}$$

dans $H_m^{-3/2}(\gamma)$. Rappelons que l'application linéaire continue surjective

$$\begin{aligned} H^1(\Omega_2) &\rightarrow H^{1/2}(\gamma), \\ u &\mapsto u|_{\gamma}, \end{aligned}$$

envoie $H^2(\Omega_2)$ sur $H^{3/2}(\gamma)$. Le dual de ce dernier est $H^{-3/2}(\gamma)$.

Par la méthode des transpositions, on peut également résoudre (3.74) avec

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} \in H^{-3/2}(\gamma) \cap H_m^{-1/2}(\gamma).$$

Pour cela, prenons $v \in L_m^2(\Omega)$ on résout $-\Delta W = v$ dans Ω avec $\frac{\partial W}{\partial \nu_{21}} = 0$ sur γ .

Par intégrations formelles par parties, on a

$$(3.82) \quad \int_{\Omega} w \vartheta_1 dx = \int_{\gamma} \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} W d\sigma$$

Or, par régularité de γ , on a

$$W \in H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{3/2}(\gamma).$$

Il s'ensuit que le membre de droite de (3.82) définit une forme linéaire continue sur $L_m^2(\Omega)$, et, par conséquent, qu'il existe un unique $\tilde{\vartheta}_1 \in L_m^2(\Omega)$ tel que

$$(3.83) \quad \forall v \in L_m^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} v \tilde{\vartheta}_1 dx = \int_{\gamma} \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} W d\sigma$$

En prenant encore une fois dans $W \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $v = -\Delta W$ on voit que¹³

$$-\Delta \tilde{\vartheta}_1 = \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}} \delta_{\gamma} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

En considérant, cette fois, $W \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_2})$ et de dérivée normale nulle sur $\partial\Omega$ (une telle fonction s'obtient en intégrant localement le flot de la normale et en déplaçant une fonction lisse défini sur $\partial\Omega$ le long de ce flot, puis en multipliant par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ valant 1 près de $\partial\Omega$), on obtient que $\frac{\partial \tilde{\vartheta}_1}{\partial n} = 0$ sur $\mathcal{D}'(\partial\Omega)$.

Il s'ensuit que $\tilde{\vartheta}_1$ est C^∞ sur $\overline{\Omega} \setminus \Omega_2$.

Pour $\alpha \in H_m^{-1/2}(\gamma)$, on résout

$$\begin{aligned} U &\in H^1(\Omega) \\ \Delta U &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= \alpha \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Soit alors $\mathcal{P} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, à support dans un voisinage de $\partial\Omega$ et valant 1 sur $\partial\Omega$.

On a alors

$$0 = \int_{\Omega} \tilde{\vartheta}_1 \Delta(\mathcal{P}U) dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\vartheta}_1 \frac{\partial \mathcal{P}U}{\partial n}.$$

Il s'ensuit que $\tilde{\vartheta}_1|_{\partial\Omega}$ dépend de $\frac{\partial \theta_2}{\partial \nu_{12}}$, continûment dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

¹³Noter que $W \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $v = -\Delta W$ implique que $v \in L_m^2(\Omega)$.

Ainsi on voit que l'on peut exprimer le problème de la densité de l'image de

$$\Psi : H_m^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_m^{1/2}(\gamma)$$

en terme d'adjoint et on a bien

$$\Psi^* : H_m^{-1/2}(\gamma) \rightarrow H_m^{1/2}(\Gamma).$$

L'argument qui nous a permis de conclure à la densité dans le cas précédent fonctionne encore ici.

En reprenant le même type de raisonnement, on peut démontrer la densité dans $H_m^{k+1/2}(\gamma)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3.7.2. Applications à la simulation de la contrôlabilité lagrangienne. Supposons que l'on veuille déplacer γ , le long d'une trajectoire donnée par un champ de vecteur X , à l'aide d'une solution de (3.1a) (3.1b), on peut utiliser une solution potentielle et les résultats de 3.5 et 3.6. On va donc chercher une fonction θ harmonique sur Ω telle que

$$\|\Lambda(\nabla\theta.n_{/\Gamma}) - X.n\| < \varepsilon,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme adéquate et $\varepsilon > 0$.

Dans [51], cette construction repose sur le théorème de Runge, concernant l'approximation des fonctions holomorphes par des fractions rationnelles (voir le chapitre à ce sujet dans le livre de W. Rudin [90]), et l'approximation de courbes de Jordan de classe C^∞ par des courbes analytiques (réelles). Lorsque la courbe est simplement de classe C^∞ , on peut se passer de cette construction pour prescrire la vitesse normale, et, par exemple, utiliser soit les résultats de la section précédente, soit, en dimension 2, le théorème de Mergelyan (voir également le dernier chapitre du livre de W. Rudin [90]) sur l'approximation des fonctions holomorphes sur un ouvert jusqu'au bord de cet ouvert.

Néanmoins l'approximation qui est donnée par ce théorème, à moins de travailler sur un ouvert dont le bord est une courbe analytique, explosera hors de cet ouvert, et ce de plus en plus près de l'ouvert, quand on requiert une approximation la meilleure possible. Cela signifie sans doute que des instabilités vont apparaître dans une simulation du contrôle lagrangien.

Pour tenter d'éviter au maximum ces instabilités on va considérer le cas d'une courbe de classe C^∞ et le cas d'un champ X constant en espace (à chaque instant).

Prenons une telle courbe γ . On prend $\tilde{\gamma}$ une courbe de classe C^∞ telle que

$$\gamma \subset \text{int}(\tilde{\gamma}).$$

On se donne $\varepsilon > 0$

On cherche $v \in H_m^{-1/2}(\Gamma)$ tel que

$$\|\psi(v) - X.n\|_{H_m^{-1/2}(\tilde{\gamma})} \leq \varepsilon.$$

Un tel v existe bien sûr.

Or comme X est constant (en espace) on peut écrire $X = \nabla \Phi$ où Φ vérifie $\Delta \Phi = 0$ et $\int_{\Omega} \Phi(x) dx = 0$, il s'ensuit que si ϕ est la solution de (3.61a) (3.61b) (3.61c) on a

$$\|\phi - \Phi\|_{C^k(\overline{\text{int}(\gamma)})} \leq C(\varepsilon, k)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, où $C(\varepsilon, k) \rightarrow 0$ avec ε mais $C(\varepsilon, k) \rightarrow \infty$ quand $\tilde{\gamma} \rightarrow \gamma$.

Malgré ces précautions, les simulations faites laissent apparaître des instabilités.

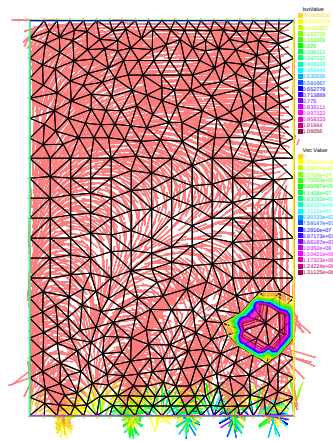
3.7.3. Implémentation. On se donne X vecteur constant. On cherche $h_X \in H_m^{-1/2}(\Gamma)$ de norme minimale tel que

$$\|\Psi(h_X) - X.n\|_{H^{-1/2}(\gamma)} < \varepsilon.$$

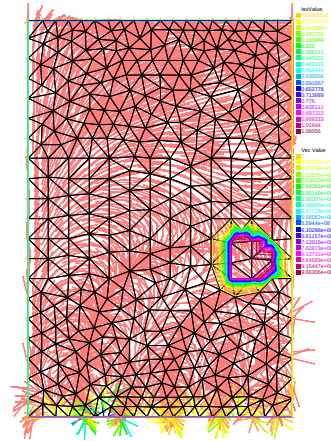
Notons ϕ_{h_X} la solution de (3.61) avec $v = h_X$.

Ce h_X étant donné, on translate la courbe γ de $\tau \nabla \phi_{h_X}$ pour un pas de temps τ donné et on réitère.

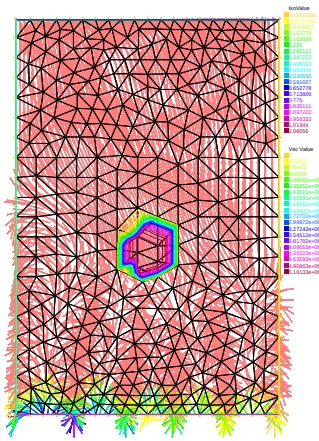
Comme on l'a dit plus haut, cela ne fonctionne pas très bien. Pour régulariser le processus, on remplace $\nabla \phi_{h_X}$ en chaque point de γ par sa moyenne sur $\tilde{\gamma}$, et on considère le déplacement d'une partie interne de la courbe, au vu des remarques précédentes sur la preuve. Le mouvement obtenu est alors un peu meilleur.



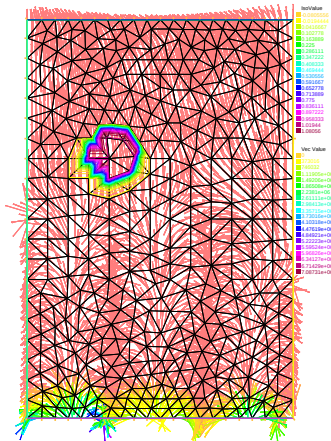
(a) Position initiale, itération 1



(b) contrôle sur le segment du bas (ité. 15).



(c) déplacement vers le nord-ouest, ité. 30



(d) Position finale, ité. 131

Une digression sur l'équation de Boltzmann

Ce chapitre ne concerne pas la contrôlabilité. Nous présentons brièvement un travail en commun avec S. Mischler et A. Vasseur, concernant la discrétisation complète de l'équation de Boltzmann [64].

4.1. Le modèle

On considère sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ l'équation

$$(4.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f),$$

$$(4.2) \quad f(0, x, v) = f_{\text{in}}(x, v).$$

Le terme de gauche de l'équation (4.1) correspond à un transport de la donnée initiale, tandis que le terme de droite correspond à un opérateur de collision.

Plus précisément (voir *e.g.* L. Tartar [94]) on peut écrire

$$Q(f, f) = Q^+(f, f) - Q^-(f, f),$$

où

$$(4.3) \quad Q^-(f, f)(x, v, t) := \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} k(v, w, \alpha) f(x, v, t) f(x, w, t) dw d\alpha,$$

et

$$(4.4) \quad Q^+(f, f)(x, v, t) := \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} k(v, w, \alpha) f(x, v', t) f(x, w', t) dw d\alpha,$$

avec $v' = v + \langle w - v | \alpha \rangle_{\mathbb{R}^N} \alpha$ et $w' = w - \langle w - v | \alpha \rangle_{\mathbb{R}^N} \alpha$. Ici k désigne un noyau, qui, par des considérations de symétries, est de la forme

$$k(v, w, \alpha) = K(|v - w|, \theta),$$

pour une certaine fonction K , sachant que $\langle (w - v) | \alpha \rangle_{\mathbb{R}^N} = |w - v| \cos(\theta)$.

Notons que $Q(f, f) = A \star f$, on supposera que

$$0 \leq A(z) \leq \frac{C}{|z|^\gamma}$$

avec $C > 0$ et $\gamma \in (-N, 1]$.

Nous n'entrerons pas dans les détails mais le cas des sphères dures ou de la condition de “cut-off” dite de Grad (voir encore L. Tartar [94]) satisfont cette hypothèse.

4.2. Discrétisation

Plusieurs stratégies sont envisageables pour la discrétisation de (4.1).

Divers travaux ont été consacrés à ce sujet, combinant des méthodes comportant des formules de Trotter (voir L. Desvillettes et S. Mischler [33]), et des discrétisations en vitesse (voir e.g. S. Mischler [76]).

Nous avons proposé un schéma, pour lequel les méthodes de renormalisation de R. Diperna & P.L. Lions, qui sont pourtant valables dans les méthodes dites de “splitting” de L. Desvillettes & S. Mischler proposées dans [33], et de discrétisations en vitesse décrites par S. Mischler dans [76], ne s'appliquent pas ici, car nous perdons des bornes d'entropie, et la discrétisation temps-espace leur est mal adaptée.

Notre algorithme est fondé sur la remarque suivante : lorsque l'on prend une fonction dite maxwellienne

$$M(v) := \exp(a|v|^2 + b.v + c)$$

définie pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^N$ et $c \in \mathbb{R}$, on a,

$$(4.5) \quad Q^+(M, M) = Q^-(M, M).$$

Il s'ensuit que si l'on transporte $M(v)$ par la partie $\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f$ de (4.1), on a encore une maxwellienne, qui satisfait donc également (4.5).

Précisément nous démontrons

THÉORÈME 4.2.1. *On suppose que f_{in} satisfait*

$$0 \leq f_{in} \leq M^0 = C^0 \xi,$$

avec

$$\xi(x, v) := \exp(-\alpha|x|^2 - \beta|v|^2)$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, et que,

(1) soit $\gamma \in (-N, 0]$,

(2) soit $\gamma \in (-N + 1, 0]$, C_0 assez petit (en fonction de α et β) $\gamma \in (0, 1]$, et α assez grand (en fonction de C_0 et β).

Il existe alors $T^*(M^0)$, il existe des nombres positifs $\Delta_{t,n}$, $\Delta_{x,n}$, $R_{x,n}$, $R_{v,n}$, T_n vérifiant

$$\Delta_{(t,x),n} \rightarrow 0, \quad R_{(x,v),n} \rightarrow +\infty, \quad T_n \rightarrow T^*,$$

et, dans le cas (2), on peut prendre $T^* = +\infty$, tels que la suite (f_n) définie par

$$f_n(t, x, v) = \sum_k f_n^k(x - v(t - \Delta_{t,n}), v) \chi_{[k\Delta_{t,n}, (k+1)\Delta_{t,n})}(t) \chi_{[0, T_n]}(t)$$

où l'on a posé :

$$(4.6) \quad f_n^0 = (P_n f_{in}) \chi_{B_{R_{v,n}}}(v) \chi_{B_{R_{x,n/4}}}(x)$$

$$(4.7) \quad f_n^{k+1/3}(x + \Delta_{t,n}v, v) := f_n^k(x, v)$$

$$(4.8) \quad f_n^{k+2/3} := P_n f_n^{k+1/3}$$

$$(4.9) \quad f_n^{k+1} - f_n^{k+2/3} = Q_{R_{v,n}}(f_n^{k+2/3}, f_n^{k+2/3})$$

vérifie

$$\sup_n \sup_{[0, T^*]} \|f_n \xi^{-1}\|_{L^\infty} < +\infty$$

De plus, quitte à extraire une sous-suite, (f_n) converge faiblement vers une solution f de (4.1).

Le même résultat est valable si l'on remplace le passage de f_n^k à f_n^{k+1} (donné par (4.6)–(4.9) avec

$$(f_n^{k+1})^\# = P_n(f_n^k) + \Delta_{t,n} Q_{R_{v,n}}(P_n(f_n^k), P_n(f_n^k)),$$

l'opération $\#$ étant donné par

$$f^\#(x, v) = f(x - \Delta_{t,n}v, v).$$

Remarque : on a noté P_n l'opérateur de projection sur les fonctions constantes (en x) sur chacune des cellules d'une x de $\mathbb{R}^N$ en cubes de côté $\Delta_{x,n}$, toute fonction étant alors remplacée sur chaque cellule par sa moyenne sur celle-ci. Par ailleurs $Q_{R_{v,n}}$ est un opérateur de Boltzmann de noyau $A_{R_{n,v}}$ satisfait

$$A_{R_{v,n}}(z) \leq A(z) \chi_{|z| \leq R_{v,n}}.$$

4.3. La preuve

Pour démontrer le théorème 4.2.1, nous construisons une sursolution discrète correspondant au schéma donné dans ce théorème suivant également que l'on considère le cas des potentiels mous $\gamma \leq 0$, ou des potentiels durs $\gamma > 0$. Cette étape est motivée par la notion de solution de (4.1) dans ces différents cas.

Ceci nous donne des bornes fortes pour la suite (f_n) .

On utilise ensuite des versions discrètes du lemme de B. Perthame & P. Souganidis (voir [86]), ces versions sont des modifications de travaux de A. Vasseur ([96] [97]).

Ainsi on prouve

THÉORÈME 4.3.1. *Soit $\Delta_{t,n} \rightarrow 0$ et une suite (f_n) uniformément bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2N})$ qui satisfait*

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{i \Delta_{t,n}} \left(\int_{i \Delta_{t,n}}^{(i+1) \Delta_{t,n}} H_n(\tau, x, v) d\tau \right) =: J_n.$$

On suppose que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2N})^*$, J_n est relativement compact dans $W^{-1,p}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2N})$ pour un $p > 1$, qu'il existe une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ avec $\frac{\varepsilon_n}{\Delta_{t,n}} \rightarrow +\infty$ telle que

$$\varepsilon_n^2 \|H_n\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

alors pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(t, x, v) \psi(v) dv \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v) \psi(v) dx,$$

fortement dans $L_{loc}^q((0, T) \times \mathbb{R}^N) \forall q \in [1, +\infty)$.

Notons que nous n'avons pas pu effectuer une discrétisation complète en temps, espace et vitesse.

Bibliographie

- [1] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press —A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers—, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [2] H. Amari, K. Hamdache, and J. C. Nédélec. Chirality in the maxwell equations by the dipole approximation. *SIAM J. Appl. Math.*, 59 :2045–2059, 1999.
- [3] Habib Amari and Jean-Claude Nédélec. Small chirality behavior of solutions to electromagnetic scattering problems in chiral media. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 21 :327–359, 1998.
- [4] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 21(9) :823–864, 1998.
- [5] Fabio Ancona and Andrea Marson. On the attainable set for scalar nonlinear conservation laws with boundary control. *SIAM J. Control Optim.*, 36(1) :290–312, 1998.
- [6] C. Athanasiadis, G Costakis, and I. G. Stratis. Electromagnetic scattering by a homogeneous chiral obstacle in a chiral environment. *IMA J. Appl. Math.*, 64 :245–258, 2000.
- [7] E. Baiada and M. Morse. Homotopy and homology related to the schoenflies problem. *Ann. of Math.*, 58 :142–165, 1953.
- [8] C. Bardos and U. Frisch. Finite-time regularity for bounded and unbounded ideal incompressible fluids using hölder estimate. In *Proceedings of the conference held at the university of Paris-Sud Orsay, France*, volume 565 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–13. Springer-Verlag, 1975.
- [9] K Beauchard. Local controllability of a 1-D Schrödinger equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 84(7) :851–956, 2005.
- [10] Karine Beauchard and Jean-Michel Coron. Controllability of a quantum particle in a moving potential well. *J. Funct. Anal.*, 232(2) :328–389, 2006.
- [11] A. L. Bertozzi and P. Constantin. Global regularity for vortex patches. *Comm. Math. Phys.*, 152(1) :19–28, 1993.
- [12] J.B. Biot. Mémoire sur un nouveau genre d’oscillation que les molécules de la lumière éprouvent en traversant certains cristaux. *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l’Institut impérial de France*, Part 1 :1, 1812.
- [13] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1987. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [14] Morton Brown. A proof of the generalized schoenflies theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 :74–76, 1960.
- [15] A. P. Calderon. On an inverse boundary value problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics*, pages 106–121, Soc Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro Brazil, 1986.
- [16] Marianne Chapouly. Global controllability of nonviscous and viscous burgers type equations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 344 :241–246, 2007.
- [17] Marianne Chapouly. Global controllability of nonviscous and viscous burgers type equations. *SIAM J. Contro. Optim.*, 48(3) :1567–1599, 2009.
- [18] Jean-Yves Chemin. Sur le mouvement des particules d’un fluide parfait incompressible bidimensionnel. *Invent. Math.*, 103(3) :599–629, 1991.
- [19] Jean-Yves Chemin. Persistance de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 26(4) :517–542, 1993.
- [20] Wei-Liang Chow. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann.*, 117 :98–105, 1939.
- [21] Patrick Jr. Ciarlet and Guillaume Legendre. Well-posedness of the drude-born-fedorov model for chiral media. *M3AS*, 3 :461–484, 2007.

- [22] Jean-Michel Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3) :295–312, 1992.
- [23] Jean-Michel Coron. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317 :271–276, 1993.
- [24] Jean-Michel Coron. On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures Appl.* (9), 75(2) :155–188, 1996.
- [25] Jean-Michel Coron. Some open problems on the control of nonlinear partial differential equations. *A.M.S.*, 2006. Perspectives in Nonlinear partial differential equations : In honor of Haim Brezis (H. Berestycki, M. Bertsch, B. Peletier, and L. Vérons, eds).
- [26] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [27] Jean-Michel Coron and Emmanuel Trélat. Global steady-state controllability of one-dimensional semilinear heat equations. *SIAM J. Control Optim.*, 43(2) :549–569 (electronic), 2004.
- [28] Patrick Courilleau and Thierry Horsin Molinaro. On the controllability for maxwell equations in specific media. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 341 :665–668, 2005.
- [29] Patrick Courilleau, Thierry Horsin Molinaro, and Iannis G. Stratis. On the controllability of time-harmonic electromagnetic fields in chiral media. *A.M.S.A.*, 16(2) :491–502, 2006.
- [30] Patrick Courilleau, Thierry Horsin Molinaro, and Iannis G. Stratis. On the controllability of maxwell's equations in a class of complex media. *Bull. Greek Math. Soc.*, 54 :97–114, 2007. Proceeding in Modern Mathematical Methods in Science and Technology.
- [31] R. Dautray and J.L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 3*. Springer Berlin, 1990.
- [32] N. Depauw. Poche de tourbillon pour euler 2d dans un ouvert à bord. *J. Math. Pures. Appl.*, 75(3) :313–351, 1996.
- [33] Laurent Desvillettes and Stéphane Mischler. About the splitting algorithm for boltzmann and b.g.k. equations. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 6(8) :1079–1101, 1996.
- [34] Ronald Di Perna and Pierre-Louis Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98 :511–547, 1989.
- [35] Jesús Ildefonso Díaz. Obstruction and some approximate controllability results for the Burgers equation and related problems. In *Control of partial differential equations and applications (Laredo, 1994)*, volume 174 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 63–76. Dekker, New York, 1996.
- [36] Jean Dieudonné. *Éléments d'analyse. Tome III : Chapitres XVI et XVII*. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIII. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1970.
- [37] M. P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990.
- [38] Y Ekeland and R Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [39] D. B. A. Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta. Math.*, 115 :83–107, 1966.
- [40] Sylvain Ervedoza. Control and stabilization properties for a singular heat equation with an inverse square potential. *Comm. Partial. Diff. Equ.*, 33(11) :1996–2019, 2008.
- [41] C. Lawrence Evans. Partial differential equations and monge-kantorovich mass transfer. 2001. Lecture Note for graduate courses.
- [42] Hector O. Fattorini and David L. Russell. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43 :272–292, 1971.
- [43] Enrique Fernández-Cara and Sergio Guerrero. Remarks on the controllability of the Burgers equation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 341 :229–232, 2005.
- [44] Andrei V. Fursikov and Oleg Yu. Imanuvilov. On controllability of certain systems simulating a fluid flow. In *Flow control (Minneapolis, MN, 1992)*, volume 68 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 149–184. Springer, New York, 1995.
- [45] Andrei V. Fursikov and Oleg Yu. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [46] Stephen J. Gardiner. *Harmonic approximation*. London Mathematical Society Lecture Note Series 221. Cambridge university press, 1995.

- [47] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [48] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, volume 749 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1979.
- [49] Olivier Glass. Exact boundary controllability of 3-D Euler equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5 :1–44 (electronic), 2000.
- [50] Olivier Glass and Sergio Guerrero. On the uniform controllability of the burgers equation. *Siam J. Control. Optim.*, 46(4) :1211–1238, 2007.
- [51] Olivier Glass and Thierry Horsin. Approximate lagrangian controllability for the 2-d euler equations. application to the control of the shape of vortex patch. *J. Math. Pures Appl.*, 93 :61–90, 2010.
- [52] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, Boston London Melbourne, 1985.
- [53] Sergio Guerrero and Oleg Yu. Imanuvilov. Remarks on global controllability for the Burgers equation with two control forces. *Annales de l'I.H.P., Analyse non linéaire*, 24(6) :897–906, 2007.
- [54] Richard S. Hamilton. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(1) :65–222, 1982.
- [55] Robert Hermann. On the accessibility problem in control theory. In *Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, pages 325–332. Academic Press, New York, 1963.
- [56] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*, volume 33. Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [57] Lars Hörmander. *The Analysis of linear Partial differential operators. I, 2nd edition*, volume 256 of *A Series of Comprehensive studies in mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [58] Thierry Horsin Molinaro. Solutions globales du flot des applications harmoniques avec des données initiales de degré quelconque. *In my Ph. D. independantly published by Ma Li*, 1994.
- [59] Thierry Horsin Molinaro. Construction of some solutions of a nonlinear elliptic partial differential equations having a nonpunctual prescribed singular set. *Comm. Part. Diff. Equ.*, 20(3) :357–365, 1995.
- [60] Thierry Horsin Molinaro. Multiple singular sets for solutions of an elliptic nonlinear scalar partial differential equation. *Nonlinear Anal.*, 28(4) :595–610, 1997.
- [61] Thierry Horsin Molinaro. On the controllability of the Burgers equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 3 :83–95 (electronic), 1998.
- [62] Thierry Horsin Molinaro. Application of the exact null controllability of the heat equation to moving sets. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 342 :849–852, 2006.
- [63] Thierry Horsin Molinaro. Local exact lagrangian controllability of the burgers equation. *Ann. I. H. P., Analyse non linéaire*, 25(2), 2008.
- [64] Thierry Horsin Molinaro, Stéphane Mischler, and Alexis Vasseur. On the discretization of the boltzmann equation. *Ann. I.H.P.*, 5 :731–758, 2003.
- [65] Thierry Horsin Molinaro, Iannis G. Stratis, and Athanasiadis N. Yannacopoulos. On the approximate controllability of the stochastic maxwell equations. *IMA Jour. Math. Control and Inform.*, 27 :103–118, 2010.
- [66] Tosio Kato, Marius Mitrea, Gustavo Ponce, and Micheal Taylor. Extension and representation of divergence-free vector fields on bounded domains. *Math. Res. Letters*, 7 :643–650, 2000.
- [67] Alexandre Kazhikov. Note on the formulation of the problem of flow through a bounded region using equations of perfect fluid. *PMM USSR*, 44 :672–674, 1981.
- [68] J. U. Kim. Approximate controllability of a stochastic wave equation. *Appl. Math. & Optim.*, 49 :81–98, 2004.
- [69] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. *A Primer of Real Analytic Functions*. Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 1992.
- [70] John E. Lagnese. Exact boundary controllability of maxwell's equations in a general region. *SIAM J. Control Optim.*, 27 :374–388, 1989.
- [71] A. Lakhtakia. *Beltrami Fields in Chiral Media*. World Scientific, Singapore, 1994.
- [72] Gilles Lebeau and Luc Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(1-2) :335–356, 1995.
- [73] James Lewis. Capacitary function in convex rings. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 66 :201–224, 1977.
- [74] K.B. Liaskos, I.G. Stratis, and A.N. Yannacopoulos. A priori estimates for a singular limit approximation of the constitutive laws for chiral media in the time domain. *J. Math. Anal. Appl.*, 335 :288–302, 2009.

- [75] Jacques Louis Lions and Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.* Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
- [76] Stéphane Mischler. Convergence of discrete velocities schemes for the boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 140 :53–77, 1997.
- [77] Thierry Horsin Molinaro. Régularité à la frontière pour l'évolution des surfaces à courbure moyenne prescrite. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(1) :33–36, 1991.
- [78] Thierry Horsin Molinaro. Long-time existence for a solution of the equation of evolution of harmonic maps into an ellipsoid. *Manuscripta Math.*, 78(3) :317–333, 1993.
- [79] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [80] Tadashi Nagano. Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras. *J. Math. Soc. Japan*, 18 :398–404, 1966.
- [81] O. Nalin. Contrôlabilité exacte sur une partie du bord des équations de maxwell. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I Math*, 309 :811–815, 1989.
- [82] Jindrich Necas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris, 1967.
- [83] Serge Nicaise. Exact boundary controllability of maxwell's equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem. *SIAM J. Control Optim.*, 38 :1145–1170, 2000.
- [84] Axel Osses and Jean-Pierre Puel. On the controllability of the laplace equation observed on an interior curve. *Rev. Mat. Complut.*, 11(2) :403–441, 1998.
- [85] Louis Pasteur. Sur les relations qui peuvent exister entre la forme cristalline, la composition chimique et le sens de la polarisation rotatoire. *Annales de chimie et de physique*, 24 :442, 1848.
- [86] B. Perthame and P.E. Souganidis. A limiting case for velocity averaging. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 31(4) :591–598, 1998.
- [87] K. D. Phung. Contrôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5 :87–137 (electronic), 2000.
- [88] C. Pignotti. Observability and controllability of maxwell's equations. *Rendiconti di Mathematica Serie VII*, 19 :523–546, 2000.
- [89] P.K. Rashevski. About connecting two points of complete nonholonomic space by admissible curve. *Uch Zapiski ped. inst. Libknexa*, 2 :83–94, 1938.
- [90] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, second edition, 1974. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.
- [91] S. Smale. Diffeomorphisms of the 2-sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 :621–626, 1959.
- [92] Eduardo D. Sontag. Mathematical control theory. volume 6 of *Texts in Applied Mathematics*, pages xvi+531. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. Deterministic finite-dimensional systems.
- [93] F. Sueur. Vorticity internal transition layers for the navier-stokes equations. *arXiv*, (0812.2145). preprint.
- [94] Luc Tartar. *From Hyperbolic Systems to Kinetic Theory*, volume 6 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer, UMI, 2008. A Personalized Quest.
- [95] Roger Temam. *Navier-Stokes Equations and numerical analysis*. North-Holland Publications. North-Holland, 1979.
- [96] Alexis Vasseur. Convergence of a semi-discrete kinetic scheme for the system of isentropic gas dynamics with $\gamma = 3$. *Indiana Univ. Math. J.*, 48 :347–364, 1999.
- [97] Alexis Vasseur. Time regularity for the system of isentropic gas dynamics with $\gamma = 3$. *Comm. Part. Diff. Equ.*, 24 :1987–1997, 1999.
- [98] Xiao Ming Wang. A remark on the characterization of the gradient of a distribution. *Appl. Anal.*, 51(1-4) :35–40, 1993.
- [99] N. Weck. Exact boundary controllability of a maxwell problem. *SIAM J. Control Optim.*, 38 :736–750, 2000.
- [100] Z. Yoshida and Y. Giga. Remarks on spectra of operator rot. *Math. Z.*, 204 :235–245, 1990.
- [101] V. I. Yudovich. Non-satationary flows of an ideal incompressible fluid. *Comput. Math & Math. Physics.*, 3 :1407–1456, 1963. English Translation of *Ž. Vu čisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 3 (1963), pp. 1032–1066 (in Russian).