Nappes sous-régulières et équations de certaines compactifications magnifiques

Pascal Hivert

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES-SAINT-QUENTIN
UFR DES SCIENCES

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE VERSAILLES

Spécialité : Mathématiques

par

Pascal HIVERT

Nappes sous-régulières et équations de certaines compactifications magnifiques

Soutenue le 8 octobre 2010 devant la Commission d'examen :

M.	Martin ANDLER	(Directeur de thèse)
M.	Olivier DEBARRE	
M.	Laurent GRUSON	(Directeur de thèse)
M.	Christian PESKINE	
M.	Nicolas RESSAYRE	

Rapporteurs :

M.	Giorgo OTTAVIANI
M.	Nicolas RESSAYRE

Thèse préparée au
Laboratoire de Mathématiques de Versailles
UMR CNRS 8100, Bâtiment Fermat
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
45, avenue des États-Unis
78 035 Versailles Cédex

Table des matières

Introduction

Cette thèse propose l'étude des nappes sous-régulières d'une algèbre de Lie de type G_2 et des équations des compactifications magnifiques minimales des espaces symétriques pour un certain rang. Ces deux thématiques ont un point commun, puisque les principaux résultats exposés dans ce travail reposent sur l'étude d'une forme alternée trilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$, une algèbre de Lie semi-simple complexe.

L'exemple classique de ces applications est $w = \kappa([\cdot,\cdot],\cdot)$, où κ est la forme de Killing. Si $\mathfrak{g}$ est simple, w est l'unique, à multiplication par un scalaire près, forme alternée trilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante : elle est donc complètement déterminée par κ et le crochet. Mais l'inverse est aussi vrai ; en partant de w, nous pouvons retrouver la forme de Killing et le crochet (voir le chapitre 1 pour de plus amples informations). Nous utiliserons la forme w pour la suite de ce travail.

L'étude de w donne une caractérisation des éléments non réguliers qui permet de décrire les *nappes sous-régulières*, ce que nous expliquerons un peu plus loin. Dans un autre registre, nous avons appliqué la méthode dans [DKK06] pour déterminer les sous-espaces vectoriels nilpotents de dimension maximale de $\mathfrak{g}$ aux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ annulant w de dimension maximale (les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ vérifient cette condition d'annulation, mais sont-elles de dimension maximale ?). Nous avons appliqué nos idées à certaines compactifications magnifiques minimales, que nous détaillerons dans le second paragraphe.

Vers les nappes

Notons G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. Une *nappe* est une composante irréductible de la réunion des G-orbites de dimension fixée. Ces nappes donnent lieu à de nombreuses recherches et utilisations. Par exemple, le point fondamental de la preuve, due à Richardson, de l'irréductibilité de la variété commutante

$$\mathcal{C}(\mathfrak{g}) = \{(x,y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \text{ tel que } [x,y]=0\},$$

se traduit en terme de nappes.

Grâce à l'étude faite par Dixmier sur les nappes contenant un élément semi-simple, Kraft établit une paramétrisation de ces nappes dans le cas de $\mathfrak{gl}_N$, puis Borho et Kraft étendent ce résultat aux autres algèbres de Lie réductives. Cette paramétrisation s'appuie sur l'existence d'une unique classe de décomposition dense dans une nappe donnée : la *classe de décomposition* d'un élément x de $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des éléments de

$\mathfrak{g}$ qui ont un centralisateur conjugué à celui de x. Dans le cas de $\mathfrak{gl}_N$, deux matrices sont dans la même classe de décomposition si elles ont leurs blocs de Jordan de même taille.

Ensuite, si $x = s + n$ (n nilpotent, s semi-simple) est la décomposition de Jordan, alors la classe de décomposition de x se « paramétrise » par le couple $(\mathfrak{g}^s, n)$, avec $\mathfrak{g}^s$ le centralisateur de s, qui est une sous-algèbre de Levi.

Une autre façon d'étudier les nappes est de se concentrer sur $\mathfrak{g}^\vee$, le dual de $\mathfrak{g}$. Elles se décrivent comme les composantes irréductibles de l'ensemble des f de $\mathfrak{g}^\vee$ tels que le rang de l'application $(x, y) \mapsto f([x, y])$ soit égal à une valeur donnée. Cette méthode introduite par Kirillov permet de voir les nappes comme des variétés quasi-affines, et plus récemment de déterminer les dimensions possibles de celles-ci (voir [Mor08]).

Attardons-nous sur les nappes de l'ensemble $\mathcal{X}$ des G-orbites de dimension $\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g} - 2$. La clôture de $\mathcal{X}$ pour la topologie de Zariski est plus connue comme l'ensemble des éléments non-réguliers : c'est le lieu d'annulation dans $\mathfrak{g}$ des mineurs de taille $l = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$ de la matrice jacobienne de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ x & \mapsto & (P_1(x), \ldots, P_l(x)) \,, \end{array}$$

où $(P_1, \ldots, P_l)$ sont les générateurs de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$. Cette parenthèse justifie l'utilisation de l'appellation *nappes sous-régulières* pour les composantes de $\mathcal{X}$.

Savoir si la clôture de $\mathcal{X}$ est réduite est une question ouverte. Une réponse positive a été donnée pour les algèbres de Lie de type A_2, B_2, et nous établirons le résultat pour une algèbre de Lie de type G_2 : c'est une conséquence de l'étude des nappes sous-régulières.

Revenons à notre forme trilinéaire. L'identification de $\mathfrak{g}$ et son dual par la forme de Killing induit que, pour k un entier fixé, une nappe est une composante irréductible de

$$\mathfrak{g}(k) = \{x \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \operatorname{rg} w(x, \cdot, \cdot) = k\}.$$

Lorsque $\mathfrak{g}$ est de rang 2, la caractérisation précédente permet de décrire géométriquement les deux *nappes sous-régulières* : les descriptions ont été faites lorsque $\mathfrak{g}$ est de type A_2 ou B_2, et nous le ferons pour une algèbre de Lie de type G_2.

Théorème 1. *Soient V la représentation irréductible de dimension 7 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de type G_2 et q la forme quadratique sur V invariante sous G. L'ensemble $\mathfrak{g}(10)$ a deux composantes irréductibles ; elles se décrivent dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ comme suit.*

- *L'une est l'image par la projection $\mathbb{P}(\wedge^2 V) \to \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ de l'ouvert de la grassmannienne $\mathbb{G}(2, V)$ formé des droites non totalement isotropes pour q.*

- *L'autre est l'intersection de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ avec la réunion des droites de $\mathbb{P}(\wedge^2 V)$ disjointes de $\mathbb{P}(V)$ coupant $\mathbb{G}(2, V)$ en deux points.*

Comme application, nous établirons une nouvelle démonstration d'un résultat de Kraft : la clôture de l'orbite nilpotente sous-régulière est le lieu triple d'une des nappes (celle détaillée dans le premier point du théorème) et l'autre nappe est lisse le long de l'orbite nilpotente sous-régulière (celle détaillée dans le second point du théorème).

Puisque les nappes sont des ouverts des composantes de l'ensemble des éléments non-réguliers de $\mathfrak{g}$, la démonstration de ce théorème repose sur la caractérisation de ces ensembles.

Nous verrons que le projectivisé de l'ensemble des éléments non réguliers est égal à

$$\mathbb{X} = \{[x] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \text{ tel que } w(x, \cdot, \cdot)^6 = 0\},$$

ce qui lui confère une structure de schéma. Nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Le schéma $\mathbb{X}$ est réduit.*

La preuve du théorème et de son corollaire feront l'objet du chapitre 2.

Vers les compactifications magnifiques minimales

Steiner, en 1848, pose et résout le problème suivant : existe-t-il une conique tangente à 5 coniques données ? Si oui, combien ? Cette question marque le début de la géométrie énumérative : compter le nombre d'objets vérifiant certaines propriétés. Celle-ci prend son essor avec le quinzième problème de Hilbert.

La réponse de Steiner se révèle être fausse. En effet, il considère cinq ensembles de coniques, chacun représentant la condition « être tangente à une conique donnée », et suppose que l'intersection de ces ensembles est finie. Cet argument se révèle inexact si nous prenons en compte les droites doubles (en projectif, elles coupent les cinq coniques données et sont tangentes en ces points).

Pour pallier ce problème, *éclatons* cet ensemble de droites doubles, appelé surface de Veronese. L'intérêt de cette opération est que les ensembles correspondant aux conditions de tangence se coupent transversalement dans l'éclaté : la finitude de l'intersection est vérifiée. Cet éclatement peut se décrire comme la clôture dans $\mathbb{P}^5 \times (\mathbb{P}^5)^\vee$ du morphisme de dualité qui envoie une conique sur sa duale. C'est le premier exemple de compactification magnifique minimale.

Une *compactification* d'un espace symétrique $X = G/G^\sigma$ (G un groupe adjoint semi-simple connexe, σ un morphisme involutif de G) est une variété normale irréductible contenant X comme ouvert. Parmi ces compactifications, certaines vérifient que les clôtures de leurs G-orbites sont lisses (la compactification elle-même étant lisse) : elles sont dites *magnifiques*. Dans [DCP83], De Concini et Procesi ont construit la compactification magnifique *minimale* (ou canonique), celle qui permet d'obtenir les autres compactifications magnifiques par une suite d'éclatements. En notant $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, la définition de cette compactification est la clôture de l'orbite de $\mathfrak{g}^\sigma$ (les points fixes de σ dans $\mathfrak{g}$) dans la grassmanienne $\mathbb{G}(d, \mathfrak{g})$ où $d = \dim \mathfrak{g}^\sigma$. Remarquons que X est isomorphe à l'orbite du point $\mathfrak{g}^\sigma$.

Dans l'exemple précédent, les coniques non dégénérées forment l'espace symétrique $PGL(3)/PSO(3)$ en considérant l'involution de $PGL(3)$ définie par $[M] \mapsto [S^{-1t}M^{-1}S]$ avec S une matrice inversible symétrique. La variété des coniques complètes est la compactification magnifique minimale de cet espace symétrique.

Il est bien connu que la compactification magnifique minimale de $PGL(3)/PSO(3)$ est l'intersection de $\mathbb{G}(3, \mathfrak{sl}(3))$ avec un $\mathbb{P}^{27}$ dans $\mathbb{P}(\wedge^3\mathfrak{sl}(3))$; en d'autres termes les équations dans la grassmannienne sont linéaires. Nous généralisons ce résultat.

Théorème 2. *Si X est de rang égal à celui de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ (le rang d'un espace symétrique étant le maximum des dimensions des tores plongés dans celui-ci), alors les équations de la compactification magnifique minimale plongée dans $\mathbb{G}(d, \mathfrak{g})$ sont linéaires.*

Dans le cadre du théorème, il n'y a, à conjugaison près, qu'une seule involution appelée *involution de Cartan*. Pour une algèbre de Cartan bien choisie, elle échange les vecteurs radiciels de racines opposées.

Le lien avec notre forme trilinéaire w apparaît dans la preuve de ce théorème. En effet, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\sigma \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ se décompose en espaces propres pour l'involution σ, alors l'espace $\mathfrak{g}_{-1}$ se caractérise par l'annulation de w sur celui-ci. Cette condition fait apparaître des équations dans la grassmannienne dont nous établirons, premièrement, qu'elles décrivent la compactification magnifique minimale et, deuxièmement, qu'elles sont linéaires. Cette démonstration sera le point essentiel du chapitre 3.

Revenons pour finir à la variété des coniques complètes. Celle-ci est obtenue par éclatement de l'espace projectif $\mathbb{P}^5$ (l'ensemble des coniques) le long de l'orbite fermée sous $PGL(3)$ (la Veronese). Comme application de notre étude des équations à l'aide de w, nous étendons ce résultat à toutes les algèbres de Lie simples de rang 2.

Théorème 3. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de rang 2 de groupe adjoint G et σ une involution de G telle que $X = G/G^\sigma$ soit de rang 2. La compactification magnifique minimale s'obtient par éclatement d'une variété projective G-stable le long de l'orbite fermée.*

Nous expliciterons dans le chapitre 4 les variétés projectives considérées dans le théorème. Pour le cas A_2, nous retrouvons l'éclaté $\mathbb{P}^5$ de l'espace des coniques.

Chapitre 1

Contexte et notations

Ce chapitre introduit les outils nécessaires pour les chapitres suivants. Les notations utilisées ici seront reprises dans la suite de ce travail.

Considérons une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}$, de dimension finie g. La composante connexe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ contenant id est appelée *groupe adjoint* de $\mathfrak{g}$.

1.1 Systèmes de racines

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats utiles sur les algèbres de Lie. Nous nous référons à [Hum72] pour ce sujet.

Prenons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Il existe des sous-algèbres de Lie abéliennes égales à leur normalisateur que l'on appelle plus communément *sous-algèbres de Cartan*. Elles sont toutes de même dimension, et leur dimension commune est appelée *rang* de $\mathfrak{g}$, on le notera l par la suite.

Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, il existe un système de racines Φ (sous-ensemble de $\mathfrak{h}^\vee$) tel que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

avec $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h} \ \mathrm{ad}_h(x) = \alpha(h)x\}$ non réduit à zéro. Ces espaces vérifient les propriétés suivantes :

(i) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$;

(ii) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ si $\alpha + \beta \in \Phi$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$ sinon.

Une *base adaptée à* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi)$ *de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est un ensemble formé d'une base $h_1, \ldots, h_l$ de $\mathfrak{h}$, et $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \smallsetminus \{0\}$ (appelés *vecteurs radiciels*) pour chaque $\alpha \in \Phi$. C'est une base de $\mathfrak{g}$.

Une *base* Δ *de* Φ est une base de $\mathfrak{h}^\vee$ de Φ telle que chaque racine est combinaison linéaire des éléments de Δ, les coefficients de ces combinaisons étant des entiers soit tous positifs (racine dite *positive*), soit tous négatifs (racine dite *négative*). Notons Φ^+ l'ensemble des racines positives.

La sous-algèbre $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ de $\mathfrak{g}$ est résoluble de dimension maximale, c'est donc une *sous-algèbre de Borel*. Elle est déterminée par le choix des racines positives ou d'une base de Φ.

Remarque. Réciproquement, il existe une base de Φ telle que les racines d'une sous-algèbre de Borel contenant $\mathfrak{h}$ forment un ensemble de racines positives.

Nous finissons ce paragraphe par le théorème de classification des algèbres de Lie simples. Nous référons à [Hum72] pour de plus amples informations.

Théorème 4 (Théorème de classification)**.** *Il existe, à isomorphisme près, une unique algèbre de Lie simple de système de racines Φ, de base Δ, donnée par les diagrammes de Dynkin $(A_l)_{l\geq 1}$, $(B_l)_{l\geq 2}$, $(C_l)_{l\geq 3}$, $(D_l)_{l\geq 4}$, E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2. (L'indice l donnant le rang de l'algèbre de Lie).*

Les quatre premiers diagrammes correspondent à des algèbres de Lie dites classiques. Elles existent pour n'importe quel rang.

(i) $(A_l)_{l\geq 1}$ correspond à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(l+1)$.

(ii) $(B_l)_{l\geq 2}$ correspond à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2l+1)$.

(iii) $(C_l)_{l\geq 3}$ correspond à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2l)$.

(iv) $(D_l)_{l\geq 4}$ correspond à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2l)$.

Les autres apparaissent à des rangs spécifiques et sont dites exceptionnelles. Nous les noterons $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$ et $\mathfrak{g}$.

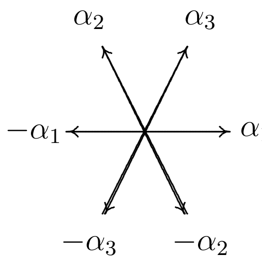
Une grande partie de ce travail se concentre sur l'étude des algèbres de Lie de rang 2. Il résulte de la classification trois cas A_2, B_2 et G_2. Nous allons donner une description dans chacun des cas.

1.1.1 Le diagramme A_2

L'algèbre de Lie correspondante au diagramme de Dynkin A_2 est

$$\mathfrak{sl}(3) = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3) \text{ tels que } \mathrm{tr}(f) = 0\}.$$

Notons (e_1, e_0, e_{-1}) une base de $\mathbb{C}^3$ et $(e_1^\vee, e_0^\vee, e_{-1}^\vee)$ sa base duale, nous identifierons $\mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ avec $\mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}^3)^\vee$. Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Cartan engendrée par $e_1 \otimes e_1^\vee - e_0 \otimes e_0^\vee$ et $e_0 \otimes e_0^\vee - e_{-1} \otimes e_{-1}^\vee$. Les vecteurs radiciels sont donc donnés par $e_i \otimes e_j^\vee$, $i \neq j$ et le système de racines correspondant est :



Une base de ce système est donnée par $\Delta = \{\alpha_1,\alpha_2\}$, et dans ce cas les racines positives sont α_1, α_2 et $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Remarque. D'un point de vue matriciel, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est l'ensemble des matrices diagonales de trace nulle. Les vecteurs radiciels sont les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$, avec $i \neq j$.

L'espace vectoriel $V := \mathbb{C}^3$ est la représentation standard de $\mathfrak{sl}(3)$. Pour l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, les vecteurs e_1, e_0, et e_{-1} sont des vecteurs de poids, e_1 étant associé au plus haut poids. La représentation $V^\vee$ est aussi irréductible, de vecteur de plus haut poids $e_{-1}^\vee$.

1.1.2 Le diagramme B_2

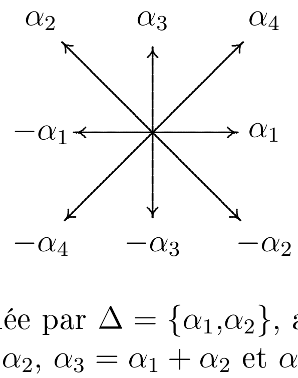
Posons $V = \mathbb{C}^4$ et notons $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sa base canonique. Définissons $S = e_1^\vee \wedge e_3^\vee + e_2^\vee \wedge e_4^\vee$ l'élément de $\bigwedge^2 V^\vee$. Nous pouvons le voir comme une application de V dans $V^\vee$, de matrice

$$S := \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\mathfrak{sp}(4) = \{f \in \mathrm{End}(V) \text{ tels que } S \circ f + {}^t f \circ S = 0\},$$

cet ensemble s'identifie facilement à l'ensemble des matrices carrées M de taille 4 vérifiant ${}^tMS + SM = 0$. C'est une algèbre de Lie avec le crochet issu de $\mathfrak{gl}(4)$. Une sous-algèbre de Cartan est l'espace vectoriel engendré par $e_1 \otimes e_1^\vee - e_3 \otimes e_3^\vee$, $e_2 \otimes e_2^\vee - e_4 \otimes e_4^\vee$ (l'ensemble des matrices diagonales). Le système de racines correspondant est :



Une base de ce système est donnée par $\Delta = \{\alpha_1,\alpha_2\}$, avec α_2 racine longue, et dans ce cas les racines positives sont α_1, α_2, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$.

Naturellement, V est une représentation irréductible de $\mathfrak{sp}(4)$. De plus, l'application $\mathrm{End}(V) \to V^\vee \otimes V^\vee$ qui envoie f sur $S \circ f$ induit un isomorphisme entre $\mathfrak{sp}(4)$ et $S^2V^\vee$.

La représentation $\bigwedge^2 V$ se décompose en $\bigwedge^2 V^\vee = \mathbb{C} \cdot S \oplus W^\vee$ avec W une représentation irréductible de dimension 5 de $\mathfrak{sp}(4)$. De plus, la représentation $\bigwedge^2 W^\vee$ est isomorphe à $S^2V^\vee$.

Remarque. Soit $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base de W, notons $\Omega = (v_0^\vee)^2 + v_1^\vee v_3^\vee + v_2^\vee v_4^\vee$

appartenant à $S^2W^\vee$. C'est une application de $W \to W^\vee$ de matrice

$$\Omega := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

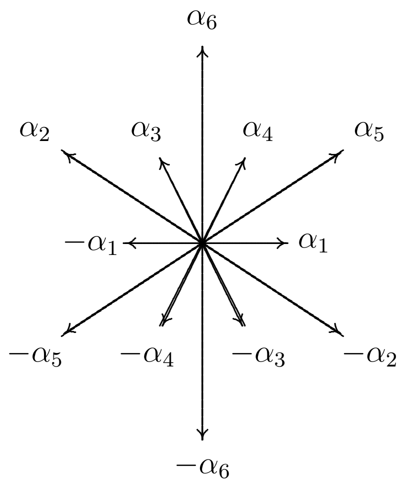
$$\mathfrak{so}(5) = \{f \in \mathrm{End}(W) \text{ tels que } \Omega \circ f +^t f \circ \Omega = 0\},$$

c'est aussi une algèbre de Lie qui s'identifie à $\wedge^2 W^\vee$ par l'application $f \mapsto \Omega \circ f$. Par suite, $\mathfrak{so}(5)$ et $\mathfrak{sp}(4)$ sont des algèbres de Lie isomorphes.

Dans la suite de ce travail, nous identifierons V et $V^\vee$ par S, W et $W^\vee$ par Ω.

1.1.3 Le diagramme G_2

Supposons dans ce paragraphe que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type G_2. Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et notons Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Une base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ de Φ est formée d'une racine longue α_2, et d'une racine courte α_1. Un système de racines positives est donné par α_1, α_2, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_5 = 3\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_6 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$. Les racines de Φ sont représentées par le diagramme suivant.



Nous allons utiliser à plusieurs reprises la représentation simple de $\mathfrak{g}$, notée V, de dimension 7 et de plus haut poids $3\alpha_1 + \alpha_2$. Décrivons la base de V comme dans [FH91]. Le vecteur de plus haut poids est e_2. Notons y_1 (resp. y_2) le vecteur radiciel de racine $-\alpha_1$, (resp $-\alpha_2$).

$$\begin{tikzcd}
 & e_7 \arrow[drrr, "-y_2"] & & e_2 \arrow[ll, "y_1"'] & \\
e_3 \arrow[drrr, "y_2"] & & e_1 \arrow[ll, "\frac{1}{2}y_1"'] & & e_6 \arrow[ll, "y_1"] \\
 & e_5 & & e_4 \arrow[ll, "-y_1"] &
\end{tikzcd}$$

Les flèches représentent l'action de $\mathfrak{g}$ sur V : par exemple, $e_7 = y_1 \cdot e_2$.

Remarque. La forme quadratique $q = -(e_1^\vee)^2 + 2(e_2^\vee e_5^\vee + e_3^\vee e_6^\vee + e_4^\vee e_7^\vee)$ est $\mathfrak{g}$-équivariante ($\{e_i^\vee\}$ base duale de $\{e_i\}$). Ainsi l'application $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ induit-elle un morphisme injectif de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{so}(7)$, l'ensemble des endomorphismes de V préservant la forme quadratique q.

1.2 La forme trilinéaire

Introduisons notre objet d'étude, la forme trilinéaire invariante w, et étudions ses premières propriétés.

Rappel. Soit κ la forme bilinéaire symétrique $\mathfrak{g}$-invariante définie sur $\mathfrak{g}$ par

$$\begin{array}{rccc} \kappa \ : & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathbb{C} \\ & (x, y) & \mapsto & \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) \end{array}$$

où $\mathrm{ad}_x \ : \ y \mapsto [x, y]$. Cette forme est appelée *forme de Killing*. Si l'algèbre de Lie est simple, à un scalaire près, la forme de Killing est la seule forme bilinéaire symétrique $\mathfrak{g}$-invariante sur $\mathfrak{g}$. De plus, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si, et seulement si, la forme de Killing κ est non dégénérée.

Définissons sur $\mathfrak{g}$ la forme trilinéaire alternée $\mathfrak{g}$-invariante :

$$\begin{array}{rccc} w \ : & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathbb{C} \\ & (x, y, z) & \mapsto & \kappa([x, y], z). \end{array}$$

Lemme 1. *Si $\mathfrak{g}$ est simple, alors w est, à multiplication par un scalaire près, l'unique forme trilinéaire alternée $\mathfrak{g}$-invariante.*

Démonstration. Prenons une forme trilinéaire alternée $\mathfrak{g}$-invariante notée w_0. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $h_1, \ldots, h_l$, $(x_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi)$. En utilisant l'action d'un élément de $\mathfrak{h}$ bien choisi, on a :

(i) $w_0(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma) = 0$ si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$;

(ii) $w_0(x_\alpha, x_\beta, h_i) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$;

(iii) $w_0(h_i, h_j, \cdot) = 0$.

D'autre part, si α, β et $\alpha + \beta$ sont dans Φ, il est facile de montrer, en posant $h_\alpha := [x_\alpha, x_{-\alpha}]$, que :

(1) $w_0(x_\alpha, x_\beta, x_{-\alpha-\beta}) = \frac{-1}{a} w_0(x_\beta, x_{-\beta}, h_\alpha)$ avec $[x_{-\alpha}, x_{-\beta}] = a x_{-\alpha-\beta}$;

(2) $w_0(x_\alpha, x_{-\alpha}, h_\beta) = w_0(x_\beta, x_{-\beta}, h_\alpha)$.

Pour chaque $\alpha \in \Phi$, il existe un nombre complexe u_α tel que $w_0(x_\alpha, x_{-\alpha}, \cdot) = u_\alpha w(x_\alpha, x_{-\alpha}, \cdot)$. La simplicité de $\mathfrak{g}$ et la relation (2) prouvent que tous les u_α sont égaux à un même nombre complexe u. Grâce à (1), on obtient $w_0 = uw$. $\square$

Remarque. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p$ est une somme de p idéaux simples, alors $(\bigwedge^3 \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = (\bigwedge^3 \mathfrak{g}_1)^{\mathfrak{g}_1} \oplus \cdots \oplus (\bigwedge^3 \mathfrak{g}_p)^{\mathfrak{g}_p}$ est de dimension p, dont une base est donnée par les formes w sur chaque facteur simple.

Ainsi, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple, une forme trilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante est-elle donc uniquement déterminée à scalaire près par la forme de Killing et le crochet. La réciproque est vraie.

Théorème 5. *Une forme trilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante détermine à scalaire près le crochet et la forme de Killing.*

Par souci de simplicité, nous prenons la forme w décrite au début de ce paragraphe. La preuve du théorème est de retrouver la forme de Killing et le crochet à partir de w. Si la forme de Killing κ est déterminée par w, alors la composée

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{w} \mathfrak{g}^{\vee} \xrightarrow{\kappa^{-1}} \mathfrak{g}$$

est le crochet de l'algèbre de Lie. Il suffit donc de retrouver la forme de Killing à partir de w.

Soient $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$ et $P_1, \ldots, P_l$ les invariants principaux de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$. La matrice jacobienne $\left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j}\right)$ est de rang l aux points réguliers de $\mathfrak{g}$, lesquels forment un ouvert dense du cône nilpotent. Ceci signifie que le quotient de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ par l'idéal engendré par $P_1, \ldots, P_l$ est intersection complète et réduit sur un ouvert dense, donc réduit. Le cône nilpotent a, à multiplication par scalaire près, une unique équation de degré 2, qui est donnée par la forme quadratique $x \mapsto \kappa(x, x)$.

Nous devons caractériser les éléments nilpotents, plus particulièrement l'orbite ouverte : les éléments nilpotents réguliers, pour déterminer la forme de Killing. Puisque nous pouvons caractériser $\mathfrak{g}^x$ comme le noyau de $y \mapsto w(x, y, \cdot)$, le lemme suivant permet donc de caractériser l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ à partir de w.

Lemme 2. *L'ensemble $\mathfrak{g}_r$ des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ est égal à*

$$\{x \in \mathfrak{g} \text{ tels que } \operatorname{rg} w(x, \cdot, \cdot) = g - l\},$$

où $w(x, \cdot, \cdot)$ est l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^{\vee}$ définie par $y \mapsto w(x, y, \cdot)$.

Démonstration. Soit x un élément de $\mathfrak{g}$, notons $\mathfrak{g}^x$ le centralisateur de x. La forme bilinéaire alternée

$$\begin{array}{rccc} \beta_x : & \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^x \times \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^x & \to & \mathbb{C} \\ & (y, z) & \mapsto & w(x, y, z) \end{array}$$

est bien définie et non dégénérée. Le rang de β_x est égal à $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^x$, c'est aussi le rang de $w(x, \cdot, \cdot)$. □

Remarque. Cet argument utilisant la forme β_x sera repris plusieurs fois dans le chapitre 3.

Il reste donc à caractériser les éléments nilpotents de $\mathfrak{g}_r$.

Proposition 1. *Soit $x \in \mathfrak{g}_r$, x est nilpotent si, et seulement si, $\mathfrak{g}^x \smallsetminus \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{g}_r$ est un hyperplan de $\mathfrak{g}^x$.*

Nous obtenons une construction des éléments nilpotents réguliers. En prenant sa clôture dans $\mathfrak{g}$, nous retrouvons le cône nilpotent, puis la forme de Killing. Nous achevons donc la démonstration du théorème 5 avec la démonstration de la dernière proposition.

La preuve de la proposition repose sur le lemme suivant.

Lemme 3. *Soient x un élément régulier nilpotent et (y, h, x) un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet correspondant à x. Tout élément z de $\mathfrak{g}^x$ vérifiant $\kappa(y, z) \neq 0$ est régulier.*

Notation. L'élément h induit une $\mathbb{Z}$-graduation $\mathfrak{g} = \oplus_{m\in\mathbb{Z}}\, \mathfrak{g}_m$ avec $\mathfrak{g}_m$ le sous espace propre de h de valeur propre m (le crochet est compatible avec cette graduation). Soit $z = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{(m)}$ un élément non nul de $\mathfrak{g}$ (avec $z^{(m)} \in \mathfrak{g}_m$), posons

$$v(z) = \min \{m \in \mathbb{Z} \text{ tels que } z^{(m)} \neq 0\},$$

et $v(0) = +\infty$. L'application v est bien définie puisque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, et vérifie pour deux éléments z et z' de $\mathfrak{g}$:

(i) $v(z + z') \geq \min(v(z), v(z'))$,

(ii) $v([z, z']) \geq v(z) + v(z')$.

Nous pouvons parler de *valuation* sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Par exemple, la valuation de x est 2. Remarquons que les éléments de valuation strictement positive sont nilpotents.

Donnons les grandes lignes de la démonstration du lemme. Soit $z \in \mathfrak{g}^x$ vérifiant la condition $\kappa(z, y) \neq 0$, il existe z_0 de valuation strictement plus grande que 2 tel que $z = x + z_0$. Par suite, il existe un conjugué de z qui s'écrit $x + z_1$ avec $v(z_1) > v(z_0)$. En réitérant le procédé, nous pouvons augmenter le degré, impliquant nécessairement que z est conjugué à l'élément x, donc régulier.

Démonstration. **Initialisation.** Décomposons $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{sl}(2)$-modules irréductibles (en considérant le triplet (y, h, x) pour la représentation). D'après un théorème de Kostant (voir l'article [Kos59]),

$$\mathfrak{g} = \Gamma_2 \oplus \Gamma_{2n_2-2} \oplus \Gamma_{2n_3-2} \oplus \cdots \oplus \Gamma_{2n_l-2}$$

avec l le rang de $\mathfrak{g}$, Γ_{2n_i-2} la représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(2)$ de plus haut poids $2n_i - 2$, $2 < n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_l$ les degrés des invariants principaux de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ (il n'y en a qu'un seul de degré 2, les autres sont de degré supérieur).

Notons v_i un vecteur de plus haut poids de Γ_{2n_i-2} (x est le vecteur de plus haut poids de Γ_2). Par conséquent, $(x, v_2, v_3, \ldots, v_l)$ est une base de $\mathfrak{g}^x$. De plus, par une considération de poids, nous avons pour tout i, $\kappa(y, v_i) = 0$.

En conclusion, si z vérifie $\kappa(z, y) \neq 0$, quitte à prendre un multiple, il existe z_2, combinaison linéaire de $(v_2, v_3, \ldots, v_l)$, tel que $z = x + z_2$. De plus, nous avons $v(z_2) \geq 4$.

Hérédité. Soit $i \geq 2$, supposons qu'il existe $g \in G$ et $z_i \in \mathfrak{g}$ tel que $g \cdot z = x + z_i$, avec $v(z_i) \geq 2i$.

Il existe donc u de valuation plus grande que $2i-2$ telle que $z_i = [x, u]$. Puisque u est nilpotent, $e^{\mathrm{ad}_u} \in G$. Notons $g' = e^{\mathrm{ad}_u} g$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} g' \cdot z &= e^{\mathrm{ad}_u} \cdot (x + z_i) \\ &= e^{\mathrm{ad}_u} \cdot (1 - \mathrm{ad}_u)(x) \\ &= x + \underbrace{\left(1 - \sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n!} \mathrm{ad}_u^{n-2}\right) \mathrm{ad}_u^2(x)}_{z_{i+1}} . \end{aligned}$$

Or $v(z_{i+1}) \geq v([u,[u,x]]) \geq 4i - 2 \geq 2(i+1)$. La récurrence est établie.

Conclusion. Si z est un élément non nul de $\mathfrak{g}$, alors $v(z)$ est inférieur ou égal à la plus grande valeur propre de h, c'est à dire $2n_l - 2$. Par contraposée si $v(z) > 2n_l - 1$ alors $z = 0$: il existe donc $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $z_{i_0} = 0$. D'où z est conjugué à x, donc régulier. $\square$

Terminons le paragraphe avec la preuve de la proposition.

Démonstration de la proposition 1. D'après le lemme précédent, si x est nilpotent régulier, alors $\mathfrak{g}^x \smallsetminus \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{g}_r = \ker \kappa(y, \cdot)$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}^x \smallsetminus \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{g}_r = \ker \psi$, avec ψ une forme linéaire non nulle sur $\mathfrak{g}^x$ avec, x étant régulier, $\psi(x) \neq 0$. Soit $x = s + n$ la décomposition de Jordan de x ($s \in \mathfrak{g}^x$ semi-simple, $n \in \mathfrak{g}^x$ nilpotent).

Si $\psi(n) = 0$, alors $\psi(s) \neq 0$, c'est-à-dire que s est régulier. Il s'en suit que $\mathfrak{g}^x$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$: l'hypothèse, $\mathfrak{g}^x \smallsetminus \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{g}_r$ est un hyperplan, ne peut être vérifiée. Finalement $\psi(n) \neq 0$, n est donc régulier, et $x = n$. $\square$

1.3 Opérateurs différentiels

Nous introduisons ici les notations sur les opérateurs différentiels utiles pour le chapitre 3. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie.

La multiplication m_v par un élément v de V, définie sur la graduation de $\bigwedge V$ par

$$\begin{array}{cccc} m_v & : & \bigwedge^k V & \rightarrow & \bigwedge^{k+1} V \\ & & \tilde{v} & \mapsto & v \wedge \tilde{v} \end{array}$$

et la dérivation par un élément f de $V^\vee$,

$$\begin{array}{cccc} d_f & : & \bigwedge^{k+1} V & \rightarrow & \bigwedge^k V \\ & & v_0 \wedge \cdots \wedge v_k & \mapsto & \sum_{i=0}^k (-1)^i f(v_i) v_0 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_k, \end{array}$$

engendrent l'anneau des opérateurs différentiels de $\bigwedge V$, que l'on notera par la suite $\mathcal{D}$.

L'anneau $\mathcal{D}$ est isomorphe, comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel à

$$\bigwedge(V \oplus V^\vee) \simeq \bigwedge V \otimes \bigwedge V^\vee.$$

Remarques.

1. L'espace vectoriel $\bigwedge V \otimes \bigwedge V^\vee$ a une graduation naturelle héritée de $\bigwedge(V \oplus V^\vee)$, donc $\mathcal{D}$ possède une filtration naturelle donnée par : $\mathcal{D}_i$ engendré par tous les produits d'au plus i multiplications et dérivations. Mais cette graduation n'est pas compatible avec le produit.

2. L'involution $-\mathrm{id}_{V\oplus V^\vee}$ s'étend à $\bigwedge(V \oplus V^\vee)$, ce qui confère à $\mathcal{D}$ une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation (décomposition en espaces propres), compatible avec la structure d'anneau. Si x et y sont deux éléments homogènes de parité p_x, p_y, posons

$$[x, y] = xy - (-1)^{p_x p_y} yx$$

   que l'on étend bilinéairement à $\mathcal{D}$. Alors $(\mathcal{D}, [.,.])$ est une super-algèbre de Lie.

3. L'espace vectoriel gradué $\bigwedge(V \oplus V^\vee)$ est isomorphe à l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cliff}(V \oplus V^\vee, ev)$ où $ev : \ x + f \mapsto f(x)$ est considérée comme une forme quadratique sur $V \oplus V^\vee$.

Définissons une autre filtration $(F^i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec F^i le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ engendré par les produits de multiplications et d'au plus i dérivations. Il s'en suit que $[F^i, F^j] \subset F^{i+j-1}$. Cette filtration reposent uniquement sur les éléments de $V^\vee$, et sera utilisée dans le paragraphe 3.4.

Lemme 4. *Si χ est un élément de F^i, avec i un entier positif, et χ s'annule sur $\bigwedge^j V$, pour tout $j \leq i$, alors $\chi = 0$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur i.

Si $i = 0$, alors χ est une multiplication par un élément $v \in \bigwedge V$, mais $\chi(1) = 0$ impose $v = 0$.

Supposons le résultat vrai pour i fixé. Soit $\chi \in F^{i+1}$ s'annulant sur $\bigwedge^j V$, pour $j \leq i + 1$. Soit v dans V, l'opérateur $[\chi, m_v] \in F^i$ s'annule sur $\bigwedge^j \mathfrak{g}$, pour $j \leq i$, d'où $[\chi, m_v] = 0$. Finalement, pour tous v, w dans V, $v \wedge \chi(w) = \chi(v \wedge w)$, d'où $\chi = 0$. $\square$

Nous utiliserons ces résultats à plusieurs reprises, en particulier, nous remplacerons V par une algèbre de Lie.

1.4 Sous-groupes à 1 paramètre réguliers

Dans le chapitre 3, nous utiliserons les sous-groupes à 1 paramètre réguliers. Rappelons la définition et quelques propriétés.

Soit T un tore maximal inclus dans le groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$. Un *sous-groupe à 1 paramètre* est un morphisme de groupes $\mu : \mathbb{C}^* \to T$. Cette section est bien détaillée dans [Hum75], avec quelques compléments dans [DKK06].

Prenons une représentation V de G. Soit $v \in V$, décomposons-le en $v = \sum_{i\in I} v_i$ avec v_i des vecteurs propres (non nuls) pour T. Il existe des entiers $(m_i)_{i\in I}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\mu(t)\cdot v = \sum_{i\in I} \mu(t)\cdot v_i = \sum_{i\in I} t^{m_i} v_i.$$

Nous souhaitons prolonger cette expression en $t = 0$ et $t = \infty$, mais c'est impossible dans un cadre général. Pour contourner cette difficulté, nous passons en projectif. Posons $m = \min_{i\in I} m_i$, $M = \max_{i\in I} m_i$, et

$$J_m = \{j \in I \text{ tels que } m_i = m\}, \quad J_M = \{j \in I \text{ tels que } m_i = M\}.$$

Nous définissons les limites suivantes dans $\mathbb{P}(V)$:

$$\lim_{t\to 0} \mu(t)\cdot [v] = \left[\sum_{i\in J_m} v_i\right]$$
$$\lim_{t\to \infty} \mu(t)\cdot [v] = \left[\sum_{i\in J_M} v_i\right].$$

Remarques

1) Puisque $\mu(t)\cdot[v] = [\sum_{i\in I} t^{m_i - m} v_i]$, la notation $\lim_{t\to 0}$ est cohérente :
$$\lim_{t\to 0} \sum_{i\in I} t^{m_i-m} v_i = \sum_{i\in J_m} v_i.$$

2) Le sous-groupe à 1 paramètre s'étend donc en une application $\mu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(V)$ en posant $\mu(0)\cdot[v] = \lim_{t\to 0}\mu(t)\cdot[v]$ et $\mu(\infty)\cdot[v] = \lim_{t\to\infty}\mu(t)\cdot[v]$. C'est un morphisme de variétés algébriques.

3) L'élément $[v]$ est invariant sous $\mu(\mathbb{C}^*)$ si, et seulement si, $\lim_{t\to 0}\mu(t)\cdot[v] = \lim_{t\to\infty}\mu(t)\cdot[v]$.

Étendons cette définition à une limite d'espaces vectoriels par un sous-groupe à un paramètre. Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ de dimension d, posons pour $t \in \mathbb{C}^*$, $\mu(t)\cdot U = \{\mu(t)\cdot v \ \ v \in V\}$. Considérons-les comme des éléments de la grassmannienne $\mathbb{G}(d,\mathfrak{g})$, nous pouvons définir la limite en 0 et ∞. En effet, par le plongement de Plücker, ce sont des éléments décomposables de $\mathbb{P}(\wedge^d \mathfrak{g})$, la limite est aussi un élément décomposable. Posons donc :

$$U_0 = \lim_{t\to 0}\mu(t)\cdot U, \quad U_\infty = \lim_{t\to\infty}\mu(t)\cdot U.$$

Ces deux espaces vectoriels sont μ-stables.

Un sous-groupe à 1 paramètre est dit *régulier* s'il a les mêmes sous-espaces propres dans $\mathfrak{g}$ que T (et donc de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(T)$). Finissons cette partie par quelques propriétés.

Lemme 5. *Soit μ est un sous-groupe à 1 paramètre régulier,*

(i) les espaces vectoriels U_0 et U_∞ sont $\mathfrak{h}$-stables ;

(ii) si x est un vecteur de U invariant sous $\mu(\mathbb{C}^*)$, alors x appartient à U_0 et U_∞.

Chapitre 2

Nappes sous-régulières de G_2

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux nappes sous-régulières de G_2. Expliquons dans un cadre général les objets de notre étude. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de groupe adjoint G.

Définition 1. *Pour k entier positif, les composantes irréductibles d'un ensemble $\mathfrak{g}(k) = \{x \in \mathfrak{g} \text{ t.q. } \dim G.x = k\}$ sont appelées nappes.*

Remarques.

1. La dimension des orbites est paire, donc $\mathfrak{g}(k)$ est vide si k est impair.
2. Si $k > \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}(k)$ est vide. Lorsque $k = \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(k)$ est l'ensemble des éléments réguliers, nous parlerons donc de *nappes régulières.*
3. Notons k_0 la plus petite valeur de k non nulle pour laquelle $\mathfrak{g}(k)$ est non réduit à zéro. Alors $\mathfrak{g}(k_0)$ est l'orbite nilpotente minimale.

Naturellement, l'algèbre de Lie est la réunion finie (non nécessairement disjointe) de ses nappes. De plus, chaque nappe contient une unique orbite nilpotente.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ est de rang 2 ($\mathfrak{g}$ de type A_2, B_2 ou G_2), notons G son groupe adjoint. Nous nous sommes intéressés aux *nappes sous-régulières*, c'est-à-dire aux composantes irréductibles de

$$\mathfrak{g}_{sr} = \{x \in \mathfrak{g} \text{ t.q. } \dim G.x = \dim \mathfrak{g} - 4\}.$$

Elles contiennent donc l'orbite nilpotente sous-régulière. En utilisant les remarques 4 et 5 de [Mor08], nous avons une seule nappe sous-régulière pour A_2 ($\mathfrak{sl}(3)_{sr}$ est donc irreductible), deux pour B_2 (de dimension 7) et G_2 (de dimension 11).

Dans ce chapitre, nous allons donner une description géométrique des nappes sous-régulières de $\mathfrak{sp}(4)$, celles-ci sont connues (voir [OS94]), nous les détaillerons sans faire de preuve.

Nous supposons dorénavant que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de type G_2 et G son groupe adjoint. En particulier elle est de dimension 14 et de rang 2. Nous reprenons les notations de la section 1.1.3.

Notations. Soient $\pi_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ la projection G-linéaire et

$$X = \{x \in \mathfrak{g} \text{ tels que } \operatorname{rg} w(x, \cdot, \cdot) \leq 10\}.$$

Notons $[x] := \pi_{\mathfrak{g}}(x)$ et posons $\mathbb{X} = \pi_{\mathfrak{g}}(X)$, l'ensemble des éléments non réguliers de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

Théorème 6. *Soient V la représentation irréductible de dimension 7 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, q la forme quadratique invariante sous G. Le schéma projectif $\mathbb{X}$ des éléments non réguliers de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ a deux composantes, elles se décrivent comme suit.*

- *L'une est l'image par la projection $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \to \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ de la grassmannienne $\mathbb{G}(2, V)$. Elle est réduite de degré 42.*
- *L'autre est l'intersection de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ avec la réunion des droites de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ coupant la grassmanienne $\mathbb{G}(2, V)$ en deux points. Elle est réduite de degré 14.*

De plus, $\mathbb{X}$ est réduit de degré 56.

Les nappes sous-régulières sont des ouverts de chacune des composantes de $\mathbb{X}$, nous pourrons décrire les nappes sous-régulières de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ *via* π.

Nous allons dans ce chapitre démontrer le théorème ci-dessus. Dans un premier temps, nous définirons le schéma $\mathbb{X}$, puis nous munirons les composantes d'une structure de schéma réduit, issu des descriptions données dans le théorème. Nous finirons la preuve avec la réductivité de $\mathbb{X}$. Le dernier paragraphe établiera un lien entre l'orbite nilpotente sous-régulière et les nappes sous-régulières.

2.1 La description dans le cas A_2

Nous allons, dans cette partie, détailler les orbites apparaissant dans $\mathfrak{sl}(3)_{sr}$. Nous reprenons la base de $V = \mathbb{C}^3$ donnée dans la partie 1.1.1. Par souci de clarté, nous écrirons les éléments sous forme matricielle.

Soient x un élément de $\mathfrak{sl}(3)_{sr}$, $x = s + n$ sa décomposition de Jordan, avec s semi-simple et n nilpotent. Si s est régulier (resp. n régulier) c'est-à-dire correspondant à la partition $(1, 1, 1)$ (resp. (3)), alors le centralisateur de x est inclus dans celui de s (resp. n), d'où x régulier. Contradiction, nous pouvons donc supposer s et n non réguliers.

Quitte à prendre des conjugués, puisque s et n commutent, supposons que $s = aS_0$ et $n = bN_0$, avec a et b deux complexes et

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $ab \neq 0$, alors x est régulier. En conclusion, $a = 0$ ou $b = 0$, nous obtenons

$$sl(3)_{sr} = G \cdot \mathbb{C}^* S_0 \cup G \cdot N_0.$$

Lemme 6. *Les éléments de $\mathfrak{sl}(3)_{sr}$ sont semi-simples ou nilpotents : les deux correspondent à la partition $(2, 1)$.*

Remarque. Nous retrouvons l'irréductibilité de $\mathfrak{sl}(3)_{sr} = \overline{G \cdot \mathbb{C}^* S_0}$.

2.2 La description dans le cas B_2

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(4)$ a deux nappes sous-régulières de dimension 7 notée Sh_1 et Sh_2 (la notation est une abréviation du terme anglais *sheet*), elles s'intersectent suivant l'orbite nilpotente sous-régulière.

Nous allons donner dans ce paragraphe une description géométrique de Sh_1 et Sh_2 projetées dans $\mathbb{P}(\mathfrak{sp}(4))$ par $\pi_{\mathfrak{sp}(4)} : \mathfrak{sp}(4) \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}(\mathfrak{sp}(4))$. Il est naturel de regarder dans un premier temps $\overline{\pi_{\mathfrak{sp}(4)}(Sh_1)}$ et $\overline{\pi_{\mathfrak{sp}(4)}(Sh_2)}$, qui sont les composantes irréductibles de $\overline{\pi_{\mathfrak{sp}(4)}(\mathfrak{sp}(4)_{sr})} = \mathbb{X}$. Ces deux composantes sont connues et décrites dans la table 2 de la Proposition 12 dans l'article [OS94].

Rappel des orbites nilpotentes de $\mathfrak{sp}(4)$. Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{sp}(4)$, un système de racines Φ, et une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi)$. Une base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ de Φ est formée d'une racine longue α_2, et d'une racine courte α_1. Si $x_{\alpha_1} \in \mathfrak{g}^{\alpha_1}$ et $x_{\alpha_2} \in \mathfrak{g}^{\alpha_2}$ sont deux éléments non nuls, alors les orbites nilpotentes peuvent être représentées par le tableau suivant.

dimension	8	6	4	0
orbite	$G \cdot (x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2})$	$G \cdot x_{\alpha_1}$	$G \cdot x_{\alpha_2}$	0

Reprenons les notations de 1.1.2. Soit V (resp. W) la représentation irréductible de dimension 4 (resp. 5) de $\mathfrak{sp}(4)$ (resp. $\mathfrak{so}(5)$). Rappelons que

$$S^2V \simeq \mathfrak{sp}(4) \simeq \mathfrak{so}(5) \simeq \bigwedge^2 W,$$

notons ainsi $\pi_{\mathfrak{so}(5)} : \mathfrak{so}(5) \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}(\bigwedge^2 W)$ et $\pi_{\mathfrak{sp}(4)} : \mathfrak{sp}(4) \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}(S^2V)$ les projections. Décrire les nappes dans $\mathbb{P}(\bigwedge^2 W)$ ou dans $\mathbb{P}(S^2V)$ revient à les décrire dans $\mathbb{P}(\mathfrak{sp}(4))$. Regardons donc l'image de l'élément nilpotent sous-régulier x_{α_1} par ces deux projections.

2.2.1 La première nappe

Le vecteur x_{α_1} s'écrit, dans une base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de W (voir la section 1.1.2 pour plus d'information) sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nous obtenons $\pi_{\mathfrak{so}(5)}(x_{\alpha_1}) = [v_1 \wedge v_4]$, c'est-à-dire un élément de la grassmannienne $\mathbb{G}(2, W)$. Plus précisément, $\mathbb{G}(2, W)$ contient la projection de l'une des nappes sous-régulières, prenons Sh_1 par simplicité. Puisque $\pi_{\mathfrak{sp}(4)}(Sh_1)$ et $\mathbb{G}(2, W)$ ont même dimension, il s'en suit que $\overline{\pi_{\mathfrak{sp}(4)}(Sh_1)} = \mathbb{G}(2, W)$.

La projection de l'orbite minimale $G.x_{\alpha_2}$ donne un fermé de dimension 3 dans $\mathbb{P}(\bigwedge^2 W)$. Ce dernier est l'ensemble des droites de $\mathbb{P}(W)$ incluses dans la quadrique de matrice Ω. Ainsi, pouvons-nous caractériser la nappe sous-régulière Sh_1.

Proposition 2. *La variété* $Y_1 = \{[U] \in \mathbb{G}(2, W) \text{ tels que } U \not\subset U^\perp\}$ *est la projection d'une des nappes sous-régulières de* $\mathfrak{sp}(4)$. *Elle est de degré* 5.

2.2.2 La seconde nappe

Regardons la surface de Veronese $\mathcal{V}_3$, l'image du morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \to & \mathbb{P}(S^2V) \\ [x_1, \dots, x_4] & \mapsto & [x_1^2, x_1x_2, x_2^2, \dots, x_3x_4, x_4^2]. \end{array}$$

Remarque. Le morphisme précédent se décrit abusivement par $[v] \mapsto [v^2]$. Cette surface est donc l'ensemble des points $[v^2]$ de $\mathbb{P}(S^2V)$ pour $[v] \in \mathbb{P}(V)$. Sa dimension est 3, ce qui permet de l'identifier facilement avec l'orbite nilpotente minimale de $\mathbb{P}(S^2V)$.

L'élément x_{α_1} s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de V sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'envoie par $\pi_{\mathfrak{sp}(4)}$ sur un élément $[e_2e_3]$ de $\mathbb{P}(S^2V)$. Finalement c'est une réunion de deux plans de $\mathbb{P}(V^\vee)$ (quadrique de rang 2 sur $\mathbb{P}(V^\vee)$).

Introduisons maintenant l'ensemble

$$B(\mathcal{V}_3) = \{[u_1u_2] \in \mathbb{P}(S^2V) \text{ tels que } [u_1], [u_2] \in \mathbb{P}(V)\ [u_1] \neq [u_2]\}.$$

D'une manière différente, $B(\mathcal{V}_3)$ est l'ensemble des points appartenant à une droite de $\mathbb{P}(S^2V)$ coupant la surface de Veronese $\mathcal{V}_3$ en exactement deux points distincts.

Proposition 3. *La variété* $B(\mathcal{V}_3)$ *est la projection d'une des nappes sous-régulières de* $\mathfrak{sp}(4)$. *Elle est de degré* 10.

Remarque. La variété $\overline{B(\mathcal{V}_3)}$ est l'ensemble des points $[u_1u_2]$ avec u_1 et u_2 deux éléments non nuls de V. En écrivant différemment :

$$u_1u_2 = \frac{1}{4}\left((u_1+u_2)^2 - (u_1-u_2)^2\right),$$

$\overline{B(\mathcal{V}_3)}$ est la réunion des bisécantes à la surface de Veronese.

2.3 Le schéma $\mathbb{X}$

Dans ce paragraphe, nous allons définir le schéma $\mathbb{X}$, calculer son degré et déterminer ses composantes irréductibles.

2.3.1 Éléments réguliers et l'ensemble X

Pour $x \in \mathfrak{g}$, l'application $(y,z) \mapsto w(x,y,z)$ est une forme bilinéaire alternée qui devient non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^x$. Ainsi le rang de $w(x,\cdot,\cdot)$ est-il égal à $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^x$. Par suite, la condition $\operatorname{rg} w(x,\cdot,\cdot) \leq 10$ implique que x est non régulier. La réciproque est vraie, d'où X est l'ensemble des éléments non réguliers. La description des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ permettra donc d'obtenir les orbites de X.

Rappel sur les orbites nilpotentes. Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racines de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, et enfin $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ un système de racines simples de Φ (α_2 la racine longue). Prenons h_1, h_2, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ une base de $\mathfrak{g}$ adaptée à $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\Phi)$. Supposons de plus que pour i dans $\{1,2,\ldots,6\}$, x_{α_i}, h_i, $x_{-\alpha_i}$ forment un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet associé à la racine α_i ($h_i = [x_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}]$). Soient $x_{\alpha_1} \in \mathfrak{g}^{\alpha_1}$ et $x_{\alpha_2} \in \mathfrak{g}^{\alpha_2}$, le cône nilpotent $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{g}$ se découpe en orbites données par le tableau suivant

dimension	12	10	8	6	0
orbite	$G\cdot(x_{\alpha_1}+x_{\alpha_2})$	$G\cdot(x_{\alpha_1}+x_{\alpha_5})$	$G\cdot x_{\alpha_1}$	$G\cdot x_{\alpha_2}$	0

,

avec $\alpha_5 = 3\alpha_1 + \alpha_2$. L'orbite nilpotente sous-régulière est celle de dimension 10. Comme dans l'article [Kra89], nous noterons dorénavant C_i l'orbite nilpotente de dimension i.

Prenons $x = s + n$ un élément régulier. Si $n = 0$, alors x est semi-simple et son centralisateur est une sous-algèbre de Cartan. Si $s = 0$, alors x est nilpotent régulier, il appartient donc à l'orbite ouverte du cône nilpotent : C_{12}. Il reste à caractériser les autres éléments réguliers.

Lemme 7. *Soit x dans $\mathfrak{g}$ de décomposition de Jordan $x = s + n$, avec s semi-simple et n nilpotent, si $s \neq 0$ et $n \neq 0$, alors x est régulier.*

Remarque. Le centralisateur $\mathfrak{g}^x$ de x vérifie $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^n \cap \mathfrak{g}^s$.

Démonstration. Les éléments n et s ne sont pas réguliers. En effet d'un côté, si s est régulier, alors $\mathfrak{g}^s$ est une sous algèbre de Cartan, donc $x \in \mathfrak{g}^s$ est semi-simple : $x = s$. D'un autre côté, si n est régulier alors $x \in \mathfrak{g}^n \subset \mathcal{N}$, c'est-à-dire que x est nilpotent : $x = n$. Supposons $n \in C_{10}$. Quitte à prendre un conjugué, n est égal à $x_{\alpha_1} + x_{\alpha_5}$. Par conséquent,

$$x \in \mathfrak{g}^n = \mathbb{C}(x_{\alpha_1} + x_{\alpha_5}) \oplus \mathbb{C}x_{\alpha_6} \oplus \mathbb{C}x_{\alpha_4} \oplus \mathbb{C}x_{\alpha_3},$$

d'où x est nilpotent. Ceci contredit $s \neq 0$. Finalement n appartient à $C_8 \cup C_6$.

Si $n = x_{\alpha_1}$, $\mathfrak{g}^{x_{\alpha_1}}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ stable par $\mathrm{Stab}(x_{\alpha_1})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{x_{\alpha_1}}$ se décompose en

$$\mathfrak{g}^{x_{\alpha_1}} = \mathfrak{sl}(2) \oplus \tilde{\mathfrak{n}}$$

avec $\mathfrak{sl}(2)$ correspondant au $\mathfrak{sl}(2)$-triplet x_{α_6}, h_6, $x_{-\alpha_6}$ et $\tilde{\mathfrak{n}}$ l'algèbre de Lie nilpotente engendrée par x_{α_5}, x_{α_1} et $x_{-\alpha_2}$. Ainsi $\mathbb{C}s$ et $\mathbb{C}h_6$ sont des sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}(2)$ conjuguées sous le groupe adjoint associé à $\mathfrak{sl}(2)$. Par conséquent, $\mathbb{C}s$ et $\mathbb{C}h_6$ sont conjugués sous $\mathrm{Stab}(x_{\alpha_1})$. Finalement, x est conjugué à un élément de l'ensemble $\mathbb{C}^*(h_1 + 2h_2) + x_{\alpha_1}$ ($h_6 = h_1 + 2h_2$). Ces éléments sont tous réguliers.

Si $n = x_{\alpha_2}$, l'argument est encore vrai si nous remplaçons α_1 par α_2. □

Terminons le paragraphe par un corollaire du lemme dont la démonstration est immédiate.

Corollaire 2. *Si x est régulier non nilpotent, non semi-simple, alors son centralisateur est conjugué sous G à $\mathbb{C}x_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}(h_1 + 2h_2)$ ou $\mathbb{C}x_{\alpha_2} \oplus \mathbb{C}(h_1 + h_2)$.*

Le lemme précédent ainsi que son corollaire restent valables si nous remplaçons $\mathfrak{g}$ par une autre algèbre de Lie simple de rang 2. La démonstration dans les autres cas est plus aisée.

Le lemme précédent montre que l'ensemble des éléments non réguliers est $X = G.\mathbb{C}h_1 \cup G.\mathbb{C}h_2 \cup \overline{C_{10}}$.

2.3.2 Définition du schéma $\mathbb{X}$

Rappelons que $\mathbb{X} = \pi(X)$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{X} = \{[x] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \text{ tels que } \operatorname{rg} w(x, \cdot, \cdot) \leq 10\}.$$

C'est un fermé de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Nous souhaitons munir $\mathbb{X}$ d'une structure de schéma en le considérant comme le lieu d'annulation d'une section donnée par w.

Nous avons la suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ appelée *suite exacte d'Euler*, (cf [Har77]),

$$0 \to \Omega \to \mathcal{O}(-1) \otimes \mathfrak{g}^\vee \to \mathcal{O} \to 0,$$

avec Ω est le faisceau des formes différentielles sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ (localement libre de rang 13) et $\mathcal{O}$ le faisceau structural de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Donc, en prenant la puissance extérieure,

$$0 \to \bigwedge^3 \Omega(3) \to \mathcal{O} \otimes \bigwedge^3 \mathfrak{g}^\vee \to \bigwedge^2 \Omega(3) \to 0. \tag{2.1}$$

L'élément $w \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}^\vee$ donne une section globale w_1 de $\bigwedge^2 \Omega(3)$. Ainsi w_1^6 est-elle une section globale de $\bigwedge^{12} \Omega(18)$, i.e. une section de $\Omega^\vee(4)$ puisque $\bigwedge^{13} \Omega \simeq \mathcal{O}(-14)$.

Lemme 8. *L'ensemble $\mathbb{X}$ peut être muni d'un structure de schéma en le considérant comme le lieu d'annulation de la section w_1^6.*

Rappel et notation. Pour une matrice alternée $A := (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n}$, le *pfaffien* de A est défini par

$$\operatorname{Pf}(A) = \frac{1}{2n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{2n}} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\tau(2i-1),\tau(2i)},$$

avec $\mathcal{S}_{2n}$ le groupe symétrique, et $\varepsilon(\tau)$ la signature de τ. Il vérifie la relation $\det A = \operatorname{Pf}(A)^2$.

Démonstration. Le sous-schéma projectif de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ défini comme le lieu d'annulation de la section w_1^6 a pour support

$$\{[x] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \text{ tels que } w(x, \cdot, \cdot)^6 = 0\},$$

avec $w(x,\cdot,\cdot)^6$ la sixième puissance extérieure de $w(x,\cdot,\cdot)$. Pour montrer le lemme, il suffit de montrer cet ensemble est égal à $\mathbb{X}$.

Prenons $[x]$ dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Notons $\phi_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^\vee$ l'application linéaire qui envoie v sur $w(x,v,.)$, L est un espace vectoriel supplémentaire à $\mathbb{C}x$ dans $\mathfrak{g}$, A_x la matrice de $\phi_{x_{|L}}$ dans une base $(e_1, e_2, \dots, e_{13})$ de L et $(e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_{13}^\vee)$ sa base duale. Le calcul de $w(x,\cdot,\cdot)^6$ donne

$$w(x,\cdot,\cdot)^6 = \sum_{i=1}^{13} \mathrm{Pf}_i(A_x) e_1^\vee \wedge e_2^\vee \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i^\vee} \wedge \cdots e_{13}^\vee,$$

avec $\mathrm{Pf}_i(A_x)$ le pfaffien de la matrice A_x en supprimant la ligne et la colonne correspondant à e_i. Clairement, nous obtenons :

$$\forall i \in \{1, \dots, 13\}\ \mathrm{Pf}_i(A_x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}\, w(x,\cdot,\cdot) = \mathrm{rg}\, \Phi_x \leq 10.$$

En conclusion $\mathbb{X} = \{[x] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \text{ tels que } w(x,\cdot,\cdot)^6 = 0\}$. □

Le corollaire suivant est une conséquence de la preuve du lemme.

Corollaire 3. *Notons $I_{\mathbb{X}}$ l'image de ${}^t w_1^6 \ : \ \Omega(-4) \to \mathcal{O}$. Le faisceau d'idéaux $I_{\mathbb{X}}$ est localement engendré par des pfaffiens.*

Démonstration. En reprenant les notations du lemme précédant et les notations des différentielles de Kähler données dans [Har77], nous avons

$$\begin{array}{cccc} ({}^t w_1^6)_x & : & \Omega(-4)_x & \to & \mathcal{O}_x \\ & & \sum_{i=1}^{13} f_i de_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{13} \mathrm{Pf}_i(A_x) f_i \end{array}$$

avec $(w_1^6)_x = \sum_{i=1}^{13} \mathrm{Pf}_i(A_x) de_1 \wedge de_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{de_i} \wedge \cdots de_{13}$. □

2.3.3 Le degré du schéma

Déterminons une suite exacte de faisceaux dont le dernier terme est $I_{\mathbb{X}}$. Nous l'utiliserons pour calculer le degré du schéma projectif $\mathbb{X}$.

Proposition 4. *La suite*

$$0 \to \mathcal{O}(-4) \to \Omega^\vee \to \Omega(3) \to \mathcal{O}(7) \to \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(7) \to 0$$

est exacte. De plus, $I_{\mathbb{X}}$ est localement de Cohen-Macauley.

Démonstration. Nous avons $w_1^6 \ : \ \mathcal{O}(-4) \to \Omega^\vee$ et $w_1 \ : \ \Omega^\vee \to \Omega^\vee(3)$, puisque w_1 est une section de $\wedge^2\Omega(3)$. La suite suivante est donc bien définie ($w_1^7 = 0$)

$$\mathcal{O}(-4) \to \Omega^\vee \to \Omega(3) \to \mathcal{O}(7). \tag{2.2}$$

Soit maintenant $\xi \in \mathbb{X}$, sur l'anneau local $\mathcal{O}_\xi$, nous avons

$$0 \to \mathcal{O}(-4)_\xi \to \Omega_\xi^\vee \to \Omega(3)_\xi \to \mathcal{O}(7)_\xi.$$

L'image de la dernière flèche est $I_{\mathbb{X}}(7)_\xi$. Puisque Ω_ξ est libre de rang 13 et $\mathrm{codim}\, \mathbb{X} = 3$, le théorème de Buchsbaum-Eisenbud prouve l'exactitude de la suite, et que $\mathbb{X}$ est localement Gorenstein (cf. théorème 3.4.1 [BH93]). □

Remarque. Décrivons la suite exacte sur un ouvert affine U_x et pour $\xi \in U_x$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}(-11)_\xi & \to & \mathcal{O}_\xi(-7)^{13} & \to & \mathcal{O}(-4)_\xi^{13} & \to & \mathcal{O}_\xi \\ f & \longmapsto & f.U & & V & \longmapsto & {}^tU \cdot V \\ & & V & \longmapsto & A_\xi.V & & \end{array}$$

avec A_ξ la matrice définie dans le début de ce paragraphe,
$U = [\mathrm{Pf}_1(A_\xi), \ldots, \mathrm{Pf}_{13}(A_\xi)]$ le vecteur des Pfaffiens, et V un vecteur colonne de longueur 13. L'image de la dernière flèche est $I_{\mathbb{X},\xi}$.

Pour calculer le degré, nous utiliserons un résultat sur les séries de Hilbert (détaillé dans dans [EM07] chapitre 3). Notons $H_{\mathcal{F}}$ la série de Hilbert d'un faisceau $\mathcal{F}$.

Proposition 5. *Soit Y un schéma projectif. Supposons que la série de Hilbert s'écrive sous la forme*

$$H_{\mathcal{O}_Y}(z) = \frac{P(z)}{(1-z)^{\dim Y}},$$

avec P un polynôme en z. Alors $\deg(Y) = P(1)$.

Nous allons appliquer ce résultat pour $\mathbb{X}$.

Proposition 6. *Le degré du schéma $\mathbb{X}$ est* 56.

Démonstration. La suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}(-11) \to \Omega^\vee(-7) \to \Omega(-4) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \to 0$$

induit que

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbb{X}}} = H_{\mathcal{O}} - H_{\Omega(-4)} + H_{\Omega^\vee(-7)} - H_{\mathcal{O}(-11)}.$$

La suite exacte d'Euler donne $H_{\Omega(-4)} = 14H_{\mathcal{O}(-5)} - H_{\mathcal{O}(-4)}$, et en dualisant, $H_{\Omega^\vee(-7)} = 14H_{\mathcal{O}(-6)} - H_{\mathcal{O}(-7)}$. Finalement,

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbb{X}}} = H_{\mathcal{O}} - 14H_{\mathcal{O}(-5)} + H_{\mathcal{O}(-4)} + 14H_{\mathcal{O}(-6)} - H_{\mathcal{O}(-7)} - H_{\mathcal{O}(-11)}.$$

Maintenant, $H_{\mathcal{O}(-d)}(z) = \frac{z^d}{(1-z)^{13}}$ ($\dim \mathbb{P}(\mathfrak{g}) = 13$), la série de Hilbert de $\mathbb{X}$ est, après simplifications, égale à :

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbb{X}}}(z) = \frac{1+3z+6z^2+10z^3+16z^4+10z^5+6z^6+3z^7+z^8}{(1-z)^{10}}.$$

Puisque $\dim \mathbb{X} = 10$, le calcul du degré est évident. □

2.3.4 Description des composantes irréductibles de $\mathbb{X}$

Fixons $i \in \{1,2\}$, le morphisme surjectif $G \times \mathbb{C}^* \to G.\mathbb{C}^* h_i$ prouve que $G.\mathbb{C}^* h_i$ est irréductible. Posons S_i la clôture de $G.\mathbb{C}^* h_i$ dans $\mathfrak{g}$, puisque X est fermé, alors S_i est incluse dans X.

Lemme 9. *Les deux composantes irréductibles de X sont S_1 et S_2. De plus, $S_1 \cap S_2 = \overline{C_{10}}$.*

Démonstration. Soit $i \in \{1,2\}$, nous avons

$$\max(\operatorname{codim}\mathcal{N}, \operatorname{codim} S_i) \leq \operatorname{codim}(\mathcal{N} \cap S_i) \leq \operatorname{codim}\mathcal{N} + \operatorname{codim} S_i.$$

Le fermé G-stable $\mathcal{N} \cap S_i$ est de codimension paire, donc $\operatorname{codim}\mathcal{N} = 2$ et $\operatorname{codim} S_i = 3$ imposent $\operatorname{codim}(\mathcal{N} \cap S_i) = 4$: $\mathcal{N} \cap S_i = \overline{C_{10}}$. Finalement, nous obtenons $X = S_1 \cup S_2$ et $S_1 \cap S_2 = \overline{C_{10}}$ ($h_2 \notin S_1$ et $h_1 \notin S_2$). □

Notons $Sh_1 := S_1 \cap (\mathfrak{g})_{sr}$ et $Sh_2 := S_2 \cap (\mathfrak{g})_{sr}$. Pour $i \in \{1,2\}$, $G.\mathbb{C}^* h_i \subset Sh_i \subset S_i$, Sh_1 et Sh_2 sont donc irréductibles et, puisque $C_{10} \subset (\mathfrak{g})_{sr}$, $(\mathfrak{g})_{sr} = Sh_1 \cup Sh_2$. Ce sont les deux nappes sous-régulières. Nous déduisons du lemme précédent que $Sh_i = G.\mathbb{C}^* h_i \cup C_{10}$ pour $i \in \{1,2\}$.

Remarque. L'application $\mathfrak{g} \to \mathbb{N}$ qui envoie x sur $\dim \mathfrak{g}^x$ est semi-continue supérieurement, donc pour $i \in \{1,2\}$, $Sh_i = \{x \in S_i \text{ tels que } \operatorname{rg} w(x,\cdot,\cdot) = 4\}$ est un ouvert de S_i.

Nous appelerons encore Sh_1 et Sh_2 leurs images par π, ce sont les composantes irréductibles de $\pi((\mathfrak{g}_2)_{sr})$. L'objectif est de décrire ces composantes dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Dans un premier temps, nous allons décrire géométriquement $S_{[1]} := \pi(S_1)$ et $S_{[2]} := \pi(S_2)$ les composantes de $\mathbb{X}$.

Remarquons que $\pi(S_1) \subset \overline{G.[h_1]}$, mais S_1 étant un cône fermé de $\mathfrak{g}$, $\pi(S_1)$ est donc un fermé de même dimension que la variété irréductible $\overline{G.[h_1]}$. Finalement, $S_{[1]} = \overline{G.[h_1]}$ et, de même, $S_{[2]} = \overline{G.[h_2]}$.

2.4 Plongement et projection

Soit V la représentation simple de $\mathfrak{g}$ de dimension 7 et de plus haut poids $3\alpha_1 + \alpha_2$ (cf. 1.1.3). L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut être obtenue à partir de $\mathfrak{so}(7)$, soit par un plongement, soit par une projection. Nous allons comprendre ce qu'il se passe pour les orbites nilpotentes, en particulier la sous-régulière, pour décrire géométriquement les composantes de $\mathbb{X}$.

Soit q la forme quadratique G-équivariante définie par $q = -(e_1^\vee)^2 + 2(e_2^\vee e_5^\vee + e_3^\vee e_6^\vee + e_4^\vee e_7^\vee)$, notons β_V la forme polaire associée à q. Nous identifierons V et son dual *via* la forme bilinéaire non dégénérée β_V. Le groupe adjoint G s'injecte donc dans $SO(7)$, le groupe de Lie des applications linéaires préservant β_V. Ainsi, $\mathfrak{g}$ est-elle une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{so}(7)$, où chaque élément de $\mathfrak{g}$ est vu comme un endomorphisme de V.

Décrivons explicitement cette inclusion. La forme bilinéaire non dégénérée β_V vue comme application de V dans $V^\vee$ induit un isomorphisme entre $\bigwedge^2 V$ et $\mathfrak{so}(7)$. Ainsi, à partir de x dans $\mathfrak{g}$, construisons-nous un élément dans $\bigwedge^2 V$ vu comme l'endomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^\vee \\ v & \mapsto & \beta_V(x.v, \cdot). \end{array}$$

Nous obtenons un plongement $\iota : \mathfrak{g} \hookrightarrow \bigwedge^2 V$. Les images des vecteurs de base de $\mathfrak{g}$ dans $\bigwedge^2 V$ sont rassemblées dans la table suivante.

h_1	$e_2 \wedge e_5 - 2e_3 \wedge e_6 + e_4 \wedge e_7$	h_2	$e_3 \wedge e_6 - e_4 \wedge e_7$
x_{α_1}	$e_1 \wedge e_6 - e_2 \wedge e_4$	$x_{-\alpha_1}$	$e_1 \wedge e_3 - e_5 \wedge e_7$
x_{α_2}	$e_3 \wedge e_7$	$x_{-\alpha_2}$	$e_4 \wedge e_6$
x_{α_3}	$e_1 \wedge e_7 + e_2 \wedge e_3$	$x_{-\alpha_3}$	$e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_6$
x_{α_4}	$e_6 \wedge e_7 - e_1 \wedge e_2$	$x_{-\alpha_4}$	$e_1 \wedge e_5 - e_3 \wedge e_4$
x_{α_5}	$-e_2 \wedge e_6$	$x_{-\alpha_5}$	$e_3 \wedge e_5$
x_{α_6}	$-e_2 \wedge e_7$	$x_{-\alpha_6}$	$e_4 \wedge e_5$

TABLE 2.1 – Le plongement ι

Remarque. La forme trilinéaire alternée z définie par

$$e_1^\vee \wedge e_2^\vee \wedge e_5^\vee + e_1^\vee \wedge e_3^\vee \wedge e_6^\vee + e_1^\vee \wedge e_4^\vee \wedge e_7^\vee + 2e_2^\vee \wedge e_3^\vee \wedge e_4^\vee + 2e_5^\vee \wedge e_6^\vee \wedge e_7^\vee$$

est G-invariante. Si $v \in V$, notons d_v la dérivation induite par v sur $\bigwedge V$ de degré -1 (voir 1.3). La forme quadratique s'obtient donc à partir de z :

$$d_v z \wedge d_v z \wedge z = q(v)\, e_1^\vee \wedge e_2^\vee \wedge e_3^\vee \wedge e_4^\vee \wedge e_5^\vee \wedge e_6^\vee \wedge e_7^\vee.$$

D'après l'isomorphisme de G-modules $\mathfrak{so}(7) \simeq \mathfrak{g} \oplus V$, définissons la projection G-équivariante $p : \mathfrak{so}(7) \to \mathfrak{g}$. Le plongement $V \hookrightarrow \wedge^2 V$ donné par $x \mapsto d_x z$ implique que la fibre de $y = p(x)$ est

$$p^{-1}\{y\} = \{x + d_v z \text{ avec } v \in V\}.$$

Reprenons les notations de [Kra89]. Soient D_{18}, D_{16}, D_{14}, D_{12}, D_{10}, D_8, $\{0\}$, les orbites nilpotentes de $\mathfrak{so}(7)$, avec $\dim D_i = i$. Le plongement et la projection induisent des applications sur les orbites.

$$\begin{array}{ccccc}
C_6 & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & D_8 & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & \overline{C_8} \\
 & & \overline{D_{10}} & \twoheadrightarrow & \overline{C_{10}} \\
C_8 & \hookrightarrow & D_{12} & & \\
C_{10} & \hookrightarrow & D_{14} & & \\
C_{12} & \hookrightarrow & D_{18} & &
\end{array}$$

Notons les projections $p_8 : \overline{D_8} \to \overline{C_8}$, $p_{10} : \overline{D_{10}} \to \overline{C_{10}}$. Kraft démontre la propriété suivante.

Théorème 7. *La projection $\mathfrak{so}(7) \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ induit des morphismes surjectifs finis p_8 et p_{10}. De plus, le morphisme p_8 est bijectif, mais n'est pas un isomorphisme.*

Les deux ensembles $p^{-1}(C_{10})$ et $\iota(C_{10})$ ne sont pas inclus dans la même orbite de $\mathfrak{so}(7)$, nous allons construire les nappes sous-régulières par le même procédé : l'une par projection (le premier point du théorème 6), l'autre par plongement (le second point du théorème 6).

Notations. D'un point de vue projectif, nous avons le morphisme G-équivariant $\mathbb{P}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ et l'application rationnelle $p : \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \cdots \to \mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Notons $C_{[i]} = \pi(C_i)$ et $D_{[i]}$ les projections de D_i par $\mathfrak{so}(7) \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}(\mathfrak{so}(7))$. Nous noterons encore $p_8 : \overline{D_{[8]}} \to \overline{C_{[8]}}$, $p_{10} : \overline{D_{[10]}} \to \overline{C_{[10]}}$ les morphismes finis surjectifs.

2.5 Le schéma $S_{[1]}$

Dans ce paragraphe, nous allons décrire géométriquement la composante $S_{[1]} = \overline{G.[h_1]}$ afin de la munir d'une structure de schéma.

2.5.1 Définition du schéma

Soit $\mathbb{G}(2,V)$ la grassmannienne des espaces vectoriels de dimension 2 dans V, qui se plonge par Plücker dans $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$. Puisque $\overline{D_{[10]}}$ est contenue dans $\mathbb{G}(2,V)$, alors $\overline{C_{[10]}}$ est incluse dans $p(\mathbb{G}(2,V))$.

Proposition 7. *L'ensemble* $p(\mathbb{G}(2,V))$ *est égal à la composante irréductible* $S_{[1]}$ *de* $\mathbb{X}$.

Nous munissons donc le fermé $S_{[1]}$ de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ d'une structure de schéma induite par la projection p.

Démonstration. La grassmannienne est stable sous l'action de G, donc son image par p est une variété G-stable, irréductible. L'image de $[h_1] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ dans $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ donne $[e_2 \wedge e_5 - 2e_3 \wedge e_6 + e_4 \wedge e_7]$. Le calcul de $d_{e_1}z$ permet d'obtenir que $e_2 \wedge e_5 - 2e_3 \wedge e_6 + e_4 \wedge e_7 = -3e_3 \wedge e_6 - d_{e_1}z$. Ainsi la fibre de $[h_1]$ rencontre-t-elle la grassmannienne, c'est-à-dire que $[h_1] \in p(\mathbb{G}(2,V))$. Par suite, $G \cdot [h_1]$ est incluse dans $p(\mathbb{G}(2,V))$. D'un autre côté $\overline{C_{[10]}} \subset p(\mathbb{G}(2,V))$, nous obtenons donc que $S_{[1]} \subset p(\mathbb{G}(2,V))$. Maintenant, nous avons $10 = \dim G \cdot [h_1] \leq \dim p(\mathbb{G}(2,V)) \leq \dim \mathbb{G}(2,V) = 10$, il s'en suit que $p(\mathbb{G}(2,V)) = S_{[1]}$ ($S_{[1]}$ est un fermé de la variété irréductible $p(\mathbb{G}(2,V))$). $\square$

Cette proposition permet de décrire la nappe sous-régulière Sh_1. Commençons par identifier $C_{[8]}$. L'orbite minimale $D_{[8]} \subset \mathbb{G}(2,V)$ peut être décrite par :

$$D_{[8]} = \{U \in \mathbb{G}(2,V) \text{ tels que } U \subset U^{\perp}\}.$$

Puisque p_8 est un morphisme bijectif, alors $\overline{C_{[8]}}$ est la projection des droites de $\mathbb{P}(V)$ incluses dans la quadrique définie par q. Or $S_{[1]}$ est la réunion disjointe de Sh_1 et $\overline{C_{[8]}}$, nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 4. *Une des nappes sous-régulières de* $\mathfrak{g}$ *est donnée par :*

$$Sh_1 = \{U \in \mathbb{G}(2,V) \text{ tels que } U \not\subset U^{\perp}\},$$

c'est-à-dire que c'est la projection dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ *des droites non totalement isotropes de* $\mathbb{P}(V)$.

2.5.2 Le degré de $S_{[1]}$

Le degré de la grassmanienne $\mathbb{G}(2,V)$ est 42 (la formule pour trouver le degré est dans [Har92]). L'orbite $\mathcal{U} := G.[h_1]$ est un ouvert de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$, nous en déduisons un isomorphisme $p\ :\ \mathbb{G}(2,V) \cap p^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$. En effet, il suffit de voir que la fibre de $[h_1]$ donnée par

$$p^{-1}\{[h_1]\} = \{e_3 \wedge e_6 + d_v z \text{ avec } v \in V\} \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V),$$

contient un seul point dans $\mathbb{G}(2,V)$. Finalement, le morphisme $p : \mathbb{G}(2,V) \to S_{[1]}$ est birationnel, le degré de $S_{[1]}$ est égal à 42.

Remarque. Puisque $p : \mathbb{G}(2,V) \cap p^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ est un isomorphisme, alors l'ensemble $\mathbb{G}(2,V) \cap p^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert lisse de $\mathbb{G}(2,V)$ (la grassmanienne est une variété lisse), donc l'ensemble $G.[h_1]$ est un ouvert lisse de $S_{[1]}$: $S_{[1]}$ est réduite.

2.6 Le schéma $S_{[2]}$

L'élément $[h_2]$ s'écrit dans $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ sous la forme $[e_4 \wedge e_7 - e_3 \wedge e_6]$. Puisque $[e_4 \wedge e_7]$ et $[e_3 \wedge e_6]$ sont deux points de la grassmannienne $\mathbb{G}(2,V)$, $[h_2]$ appartient donc à une droite de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ coupant la grassmanienne en deux points distincts.

Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$:

$$B(V) := \{[x] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \text{ tel que } \mathrm{rg}\,(x) \leq 4\}.$$

(Les éléments x de $\bigwedge^2 V$ sont vus comme des applications de $V^\vee$ dans V). Nous appellerons ce fermé G-stable irréductible *le lieu des bisécantes à la grassmannienne* $\mathbb{G}(2,V)$.

Remarques.

1. Les éléments $[x]$ de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ de rang inférieur à 4 s'écrivent sous la forme $[v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4]$, ils appartiennent donc aux droites de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ coupant la grassmanienne en deux points. Ainsi la grassmannienne est incluse dans $B(V)$.

2. Nous pouvons décrire $B(V)$ comme suit :

$$B(V) = \{[x] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \text{ tels que } x \wedge x \wedge x = 0\}.$$

   En effet, si $x = \sum_{i\in I} v_i \wedge w_i$ avec $\{(v_i)_{i\in I}\,,\,(w_i)_{i\in I}\}$ une famille libre, la condition $x \wedge x \wedge x = 0$ entraîne que $\mathrm{card}(I) \leq 2$. La réciproque est immédiate.

Clairement, $B(V)$ contient $S_{[2]}$, identifié à son image par ι. Nous allons utiliser cet ensemble pour décrire géométriquement la composante $S_{[2]}$.

2.6.1 Définition du schéma

Proposition 8. *La composante irréductible $S_{[2]}$ est égale à $B(V) \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$. En d'autres termes,*

$$S_{[2]} = \{[x] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \text{ tels que } \iota(x) \wedge \iota(x) \wedge \iota(x) = 0\}.$$

Démonstration. $S_{[2]} \subset B(V) \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$, montrons l'inclusion réciproque.
D'après le Corollaire 2, Les éléments réguliers sont soit semi-simples, soit conjugués à $x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2}$, à un élément de $\mathbb{C}^*(h_1 + 2h_2) + x_{\alpha_1}$ ou à un élément de $\mathbb{C}^*(2h_1 + 3h_2) + x_{\alpha_2}$. D'après la table 2.4, aucun de ces éléments plongés dans $\mathbb{P}(\wedge^2 V)$ n'appartiennent pas

à $B(V)$. Finalement, $B(V) \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ est un fermé de $\mathbb{X}$. Plus précisément puisque $[h_1]$ n'appartient pas à $B(V)$, $B(V) \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \subset S_{[2]}$.

La seconde partie de la proposition résulte du second point de la remarque précédente. □

Comme pour $\mathbb{X}$, nous obtenons une suite exacte en tensorisant la suite exacte d'Euler par $\bigwedge^2 V(1)$:

$$0 \to \Omega(1) \otimes \bigwedge^2 V \to \mathfrak{g}^\vee \otimes \bigwedge^2 V \to \bigwedge^2 V(1) \to 0.$$

Le morphisme injectif $\iota\,:\,\mathfrak{g} \to \bigwedge^2 V$ induit une section globale ι_1 de $\bigwedge^2 V(1)$. Ainsi ι_1^3 est-elle une section globale de $\bigwedge^6 V(3) \simeq V^\vee(3)$. Le sous-schéma projectif de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ défini comme le lieu de la section ι_1^3 a pour support

$$\{[x] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \text{ tels que } \iota^3(x) = 0\}.$$

C'est-à-dire $S_{[2]}$. Nous munissons donc $S_{[2]}$ d'une structure de schéma en le considérant comme le lieu d'annulation de la section ι_1^3. Nous allons maintenant décrire la nappe sous-régulière Sh_2.

Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des points $[x]$ de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ tels que toute droite de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ bisécante à la grassmannienne passant par $[x]$ n'intersecte pas $\mathbb{P}(V)$. C'est un sous-ensemble de $B(V)$, stable par G.

Corollaire 5. *La nappe sous-régulière Sh_2 est l'ensemble des points de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ tels que toute droite de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ bisécante à la grassmannienne passant par ce point ne coupe pas $\mathbb{P}(V)$ (c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{U}$).*

Remarques.

1. Le fermé G-stable $D_{[8]} \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ contient $C_{[6]}$. Si l'inclusion est stricte, alors $D_{[8]} \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ coupe une autre orbite nilpotente de $\mathfrak{g}$, nécessairement $C_{[8]}$. Mais l'inclusion $C_{[8]} \subset D_{[12]}$ prouve que $D_{[12]}$ et $D_{[8]}$ s'intersectent. Contradiction, $C_{[6]} = D_{[8]} \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

2. Si une bisécante à la grassmannienne coupe $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ en $[x]$, alors les deux points de la grassmannienne se projettent sur $[x]$ par p. Clairement, $[x]$ appartient à $S_{[1]}$.

Démonstration. D'après le premier point de la remarque précédente, le point $[h_2]$ appartient à $\mathcal{U} \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Regardons les autres orbites apparaissant dans $S_{[2]} = B(V) \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire $C_{[10]}$, $C_{[8]}$, $C_{[6]}$.

- Puisque $C_{[6]} \subset \mathbb{G}(2, V)$, alors $C_{[6]}$ n'est pas incluse dans $\mathcal{U} \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$.
- Soit $[x_{\alpha_1}]$ un représentant de $C_{[8]}$. D'après la table 2.1, $[x_{\alpha_1}]$ est de la forme $[e_1 \wedge e_6 - e_2 \wedge e_4]$ dans $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$, mais,

$$e_1 \wedge e_6 - e_2 \wedge e_4 = 3e_4 \wedge e_2 - d_{e_3} z$$
$$e_1 \wedge e_6 - e_2 \wedge e_4 = \frac{3}{2} e_1 \wedge e_6 + \frac{1}{2} d_{e_3} z.$$

  La droite passant par $[x_{\alpha_1}]$ et par $[d_{e_3} z]$ (un point de $\mathbb{P}(V)$) coupe la grassmannienne en deux points. L'orbite $C_{[8]}$ n'est donc pas incluse dans $\mathcal{U} \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

- Soit $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$ un point de $C_{[10]}$, il s'écrit comme élément de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ sous la forme $[e_3 \wedge e_7 - e_2 \wedge e_6]$. Cherchons les antécédents de $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$ par p qui appartiennent à la grassmannienne. Pour cela, soit $v = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + ee_5 + fe_6 + ge_7$, un point de V, cherchons les éléments de $\mathbb{G}(2, V)$ s'écrivant sous la forme $[e_3 \wedge e_7 - e_2 \wedge e_6 + d_v z]$. Il suffit donc de déterminer les conditions sur les scalaires a, b, c, d, e, f, g, pour que la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & e & f & g & -b & -c & -d & \\ -e & 0 & 2d & -2c & a & 1 & 0 & \\ -f & -2d & 0 & 2b & 0 & a & -1 & \\ -g & 2c & -2b & 0 & 0 & 0 & a & \\ b & -a & 0 & 0 & 0 & 2g & -2f & \\ c & -1 & -a & 0 & -2g & 0 & & \\ 2e & d & 0 & 1 & -a & 2f & -2e & 0 \end{pmatrix}$$
soit de rang 2. Par le calcul nous trouvons que tous les coefficients sont nuls exceptés $e = -2d^2$ et $(2d)^3 = 1$. Nous avons donc trouvé trois points dans la fibre. Il suffit, pour montrer que $C_{[10]} \subset \mathcal{U} \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g})$, de noter qu'une droite de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ passant par deux de ces points ne contient pas $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$. □

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous reviendrons sur la fibre de p d'un élément de $\overline{C_{[10]}}$. La quadralité permet de donner une explication naturelle de l'existence de ces trois points.

2.6.2 Le degré du schéma $S_{[2]}$

Pour calculer le degré de $S_{[2]}$, nous suivons la méthode utilisée pour le degré de $\mathbb{X}$. Nous montrerons dans cette partie que $S_{[2]}$ est réduite.

Proposition 9. *La suite*
$$0 \to \mathcal{O}(-3) \to V^\vee \otimes \mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}(4) \to \mathcal{O}_{S_{[2]}}(4) \to 0$$
est exacte.

Démonstration. La section ι_1 induit un morphisme $\iota_1 \ : \ V^\vee \to V(1)$. Puisque ι_1^3 est une section globale de $V(3)$, nous obtenons ($\iota_1^4 = 0$) :
$$\mathcal{O}(-3) \to V^\vee \to V(1) \to \mathcal{O}(4) \to \mathcal{O}_{S_2}(4).$$
Notons $I_{S_{[2]}}(4)$ l'image de $V(1) \to \mathcal{O}(4)$ par cette dernière flèche, c'est le faisceau des équations du schéma $S_{[2]}$. Comme pour $\mathbb{X}$, $\operatorname{codim} S_{[2]} = 3$, par le théorème de Bushsbaum-Eisenbud, la dernière suite est exacte et $I_{S_{[2]}}$ est localement un anneau de Gorenstein (cf. théorème 3.4.1 [BH93]). □

Calculons le degré de $S_{[2]}$:
$$\begin{aligned} H_{S_2}(z) &= H_{\mathcal{O}}(z) - 7H_{\mathcal{O}(-3)}(z) + 7H_{\mathcal{O}(-4)}(z) - H_{\mathcal{O}(-7)} \\ &= \frac{1 - 7z^3 + 7z^4 - z^7}{(1-z)^{13}} \\ &= \frac{1 + 3z + 6z^2 + 3z^3 + z^4}{(1-z)^{10}}, \end{aligned}$$

d'où $\deg(S_2) = 14$.

Remarque. Le calcul du degré peut se faire directement. En effet, le degré de $S_{[2]}$ est égal au produit des degrés de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ et $B(V)$. La première variété est de degré 1 et le degré de la seconde variété s'obtient par une des formules de la Proposition 8 de [HT84] :

$$\deg B(V) = \frac{1}{2^2}\prod_{a=0}^{1}\frac{\begin{pmatrix} 7+a \\ 3-a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2a+1 \\ a \end{pmatrix}} = 14$$

Nous allons montrer que $G.[h_2]$ est un ouvert lisse de $S_{[2]}$, par conséquent que le schéma est réduit ($I_{S_{[2]}}$ est localement de Cohen-Macaulay). Les conjugués sous l'action de G d'un point lisse de $S_{[2]}$ sont lisses, donc il suffit de montrer que $[h_2]$ est un point lisse.

Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que $\phi(h_2) \neq 0$ et $\ker\phi$ soit le sous espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par h_1, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$. Notons U_{h_2} l'ouvert affine de h_2 dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ défini par ϕ. Nous identifions $\ker\phi$ et U_{h_2} par l'isomorphisme $x \mapsto [h_2 + x]$.

L'espace tangent de $S_{[2]}$ en $[h_2]$ est

$$\begin{aligned} T_{[h_2]}S_{[2]} &= T_{h_2}(S_2 \cap U_{h_2}) = \{[x] \in U_{h_2} \ \text{tels que} \ \iota(h_2)\wedge\iota(h_2)\wedge\iota(x) = 0\} \\ &= \{x \in \ker\phi \ \text{tels que} \ \iota(h_2)\wedge\iota(h_2)\wedge\iota(h_2+x) = 0\} \\ T_{[h_2]}S_{[2]} &= \{x \in \ker\phi \ \text{tels que} \ \iota(h_2)\wedge\iota(h_2)\wedge\iota(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Lemme 10. *Avec les notations précédentes, $\iota(h_2)\wedge\iota(h_2)\wedge\iota(x) = 0$ si, et seulement si, x est une combinaison linéaire de x_{α_1}, x_{α_2}, x_{α_3}, x_{α_5}, x_{α_6}, $x_{-\alpha_1}$, $x_{-\alpha_2}$, $x_{-\alpha_3}$, $x_{-\alpha_5}$, $x_{-\alpha_6}$. L'espace tangent en $[h_2]$ est de dimension 10, i.e. $[h_2]$ est lisse.*

Démonstration. Seule la première partie du lemme est difficile. Dans $\bigwedge^2 V$, $\iota(h_2) = e_4\wedge e_7 - e_3\wedge e_6$, donc pour $x \in \ker\phi$, $\iota(h_2)\wedge\iota(h_2)\wedge\iota(x) = -2e_4\wedge e_7\wedge e_3\wedge e_6\wedge\iota(x)$. Comme élément de $\bigwedge^2 V$, $\iota(h_2)\wedge\iota(h_2)\wedge\iota(x) \neq 0$ si, et seulement si, l'un des trois éléments $e_1\wedge e_2$, $e_2\wedge e_5$, $e_1\wedge e_5$, apparait dans la décomposition de x. Grâce à la table 2.4 et l'injectivité de ι, les seuls éléments qui conviennent sont h_1, x_{α_4}, $x_{-\alpha_4}$. □

2.7 Le schéma $\mathbb{X}$ est réduit.

Grâce à la description des composantes données dans les paragraphes précédents, nous allons pouvoir établir le théorème suivant :

Théorème 8. *Le schéma $\mathbb{X}$ est réduit.*

Rappelons que $S_{[1]}$ et $S_{[2]}$ sont deux variétés projectives de degré respectifs 42 et 14. Le degré de $\mathbb{X}$ est 56.

Démonstration. Puisque les schémas $S_{[1]}$ et $S_{[2]}$ sont réduits, et $\mathbb{X} = S_{[1]} \cup S_{[2]}$, nous avons $I_{S_{[1]}} \cap I_{S_{[2]}} = \sqrt{I_{\mathbb{X}}}$. L'équi-dimensionalité des composantes de $\mathbb{X}$ entraine que $\deg \sqrt{I_{\mathbb{X}}} = \deg I_{S_{[1]}} + \deg I_{S_{[2]}} = 42+14 = \deg I_{\mathbb{X}}$. Par conséquent, si l'inclusion $I_{\mathbb{X}} \subset \sqrt{I_{\mathbb{X}}}$ est stricte, alors $I_{\mathbb{X}}$ a des composantes immergées. Ceci contredit le fait que $I_{\mathbb{X}}$ est localement Cohen-Macauley. Finalement $I_{\mathbb{X}} = \sqrt{I_{\mathbb{X}}}$. □

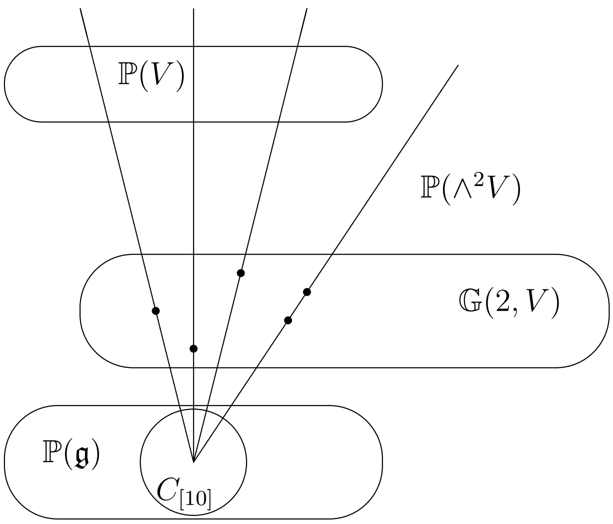
Remarque. Décrivons $\mathbb{X}$ avec d'autres équations. L'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ est polynomiale engendrée par deux éléments homogènes P_2 et P_6 avec $\deg P_i = i$, appelés *invariants principaux.* Soit $J(x)$ la matrice jacobienne en x, de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathbb{C}^2 \\ x & \mapsto & (P_2(x), P_6(x)), \end{array}$$

nous pouvons montrer que x est régulier si, et seulement si, le rang de $J(x)$ est 2. Donc $\mathbb{X}$ est l'ensemble des éléments où la matrice jacobienne est de rang 1, c'est-à-dire que tous les mineurs de taille 2 s'annulent. Plus précisément, Chriss-Ginzburg dans [CG97] (section 6.7) démontre que le faisceau des idéaux engendré par les mineurs est égal à notre idéal $I_{\mathbb{X}}$: ceci donne un autre système d'équations.

2.8 L'orbite sous-régulière et les composantes de $\mathbb{X}$

La remarque 1.3 de [Kra89] annonce que l'une des deux nappes est lisse le long de $C_{[10]}$, et que le lieu singulier de l'autre est $\overline{C_{[10]}}$ et qu'il est triple. Nous allons démontrer ces résultats dans ce paragraphe. Expliquons d'abord ce qu'il se passe sur un dessin.



1. Au dessus d'un point de l'orbite de $C_{[10]}$ (incluse dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$), trois droites de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ passant par ce point intersectent le fermé $\mathbb{P}(V)$. Les points d'intersection de ces droites avec la grassmanienne se projettent donc sur un point de l'orbite sous-régulière. La fibre du morphisme de projection p au dessus d'un point de $C_{[10]}$ comporte trois éléments dans $\mathbb{G}(2, V)$.

2. Une droite de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ passant par deux points de la grassmannienne est une droite bisécante à la grassmannienne, elle est donc incluse dans l'ensemble $B(V)$. Les droites bisécantes à la grassmannienne passant par un point de $C_{[10]}$ ne coupent pas $\mathbb{P}(V)$.

Rappelons que $\mathbb{X} = S_{[1]} \cup S_{[2]}$, avec $S_{[1]}$ et $S_{[2]}$ les composantes irréductibles, telles que $S_{[i]} = \overline{G.[h_i]}$ et $G.[h_i]$ est un ouvert lisse de $S_{[i]}$. De plus, $\mathbb{X} = G.[h_1] \cup G.[h_2] \cup \overline{C_{[10]}}$ et $G.[h_1] \cup G.[h_2]$ est lisse. Par conséquent, le lieu singulier de $\mathbb{X}$ est contenu dans $\overline{C_{[10]}} = S_{[1]} \cap S_{[2]}$.

Théorème 9. *Le lieu singulier de $S_{[1]}$, $\overline{C_{[10]}}$, est triple, et $S_{[2]}$ est lisse le long de $C_{[10]}$.*

Commençons par montrer la partie concernant la composante $S_{[2]}$.

Lemme 11. *L'espace tangent en $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$ de $S_{[2]}$ est de dimension 10, $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$ est un point lisse de $S_{[2]}$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 10, $\iota(x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}) \wedge \iota(x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}) \wedge \iota(x) = 0$ si, et seulement si, x est une combinaison linéaire de $h_2, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, x_{\alpha_4}, x_{\alpha_5}, x_{\alpha_6}, x_{-\alpha_1}, x_{-\alpha_2}, x_{-\alpha_5}, x_{-\alpha_6}$. □

Le lieu singulier de $B(V)$ est

$$\{[x] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \text{ tels que } \mathrm{rg}\,(x) \leq 2\} = \mathbb{G}(2, V).$$

Le point $[x] \in S_{[2]}$ est singulier si, et seulement si, $\mathrm{rg}\,(x) \leq 2$, c'est-à-dire $[x] \in \mathbb{G}(2, V) \cap \mathbb{P}(\mathfrak{g}) = C_{[6]}$.

Nous allons prouver la partie du théorème précédent traitant de la composante $S_{[1]}$ en utilisant la quadralité.

2.8.1 La quadralité

La quadralité (*four-ality* en anglais), introduite par Landsberg et Manivel, donnent des morphismes naturels $\mathfrak{so}(8) \to \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{so}(7) \to \mathfrak{g}$. Nous utiliserons ces morphismes pour décrire la fibre d'un point de $\overline{C_{[10]}}$ dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(8))$ puis dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(7))$. Commençons par définir celle-ci, les notations sont indentiques à l'article [LM04] (p. 18).

Soient A, B, C, D, quatre espaces vectoriels de dimension 2, munis d'une même forme bilinéaire alternée non dégénérée appelée ω. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{sl}(A) \times \mathfrak{sl}(B) \times \mathfrak{sl}(C) \times \mathfrak{sl}(D)$ agit sur $\mathfrak{g}^1 = A \otimes B \otimes C \otimes D$ de manière évidente. En utilisant l'isomorphisme $S^2 A \simeq \mathfrak{sl}(A)$ qui envoie a^2 sur $a' \mapsto \omega(a, a')a$, nous pouvons définir une application bilinéaire alternée $\mathfrak{g}^1 \times \mathfrak{g}^1 \to \mathfrak{g}^0$ qui envoie $(a \otimes b \otimes c \otimes d, a' \otimes b' \otimes c' \otimes d')$ sur

$$\omega(b, b')\omega(c, c')\omega(d, d')aa' + \omega(a, a')\omega(c, c')\omega(d, d')bb' \\ + \omega(a, a')\omega(b, b')\omega(d, d')cc' + \omega(a, a')\omega(b, b')\omega(c, c')dd'$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$ hérite-t-il d'une structure d'algèbre de Lie compatible avec la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation. Cette algèbre de Lie est simple et isomorphe à $\mathfrak{so}(8)$:

$$\mathfrak{so}(8) = \mathfrak{sl}(A) \times \mathfrak{sl}(B) \times \mathfrak{sl}(C) \times \mathfrak{sl}(D) \ \oplus \ A \otimes B \otimes C \otimes D.$$

Les trois représentations irréductibles 2 à 2 non isomorphes de dimension 8 de $\mathfrak{so}(8)$ se décrivent de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} W_1 & = & A \otimes B \ \oplus \ C \otimes D, \\ W_2 & = & A \otimes C \ \oplus \ B \otimes D, \\ W_3 & = & A \otimes D \ \oplus \ B \otimes C. \end{array}$$

Identifions B, C, et D, par l'action du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ sur B, C, D par permutation de ces trois espaces. Notons τ la transposition de C et D, il s'en suit que, τ échangeant W_2 et W_3,

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{so}(8)^\tau & = & \mathfrak{sl}(A) \times \mathfrak{sl}(B) \times \mathfrak{sl}(C) \ \oplus \ A \otimes B \otimes S^2C \simeq \mathfrak{so}(7), \\ W_1^\tau & = & A \otimes B \ \oplus \ \mathfrak{sl}(C). \end{array}$$

Une décomposition de $\mathfrak{so}(8)$ en $\mathfrak{so}(7)$-modules irréductibles est $\mathfrak{so}(8) = \mathfrak{so}(7) \oplus W_1^\tau$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des points fixes sous l'action de $\mathcal{S}_3$:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{so}(8)^{\mathcal{S}_3} & = & \mathfrak{sl}(A) \times \mathfrak{sl}(B) \ \oplus \ A \otimes S^3B \simeq \mathfrak{g}, \\ W_1^{\mathcal{S}_3} & = & A \otimes B \ \oplus \ \mathfrak{sl}(B) \simeq V. \end{array}$$

Comme $\mathfrak{g}$-modules, $\mathfrak{so}(8) = \mathfrak{g} \oplus \ V \otimes U$, où U est la représentation standard de $\mathcal{S}_3$.

2.8.2 Le lieu triple de $S_{[1]}$

D'après [LS88], nous avons

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{so}(8) & \to & \mathfrak{so}(7) & \to & \mathfrak{g} \\ O_{min} & \to & \overline{D_{10}} & \to & \overline{C_{10}}, \end{array}$$

où O_{min} est l'orbite minimale de $\mathfrak{so}(8)$. Pour comprendre le lieu triple de $S_{[1]}$, nous allons, dans un premier temps, déterminer la fibre d'un élément de $\overline{C_{[10]}}$ dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(8))$, puis, dans un second temps, la fibre dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(7))$. Notons Π la projection de $\mathfrak{so}(8)$ dans $\mathfrak{g}$.

Ce procédé montre, qu'au dessus de $\overline{C_{[10]}}$, il y a 6 points dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(8))$ qui se projettent en trois points dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(7))$. Décrivons dans un premier temps O_{min}.

Lemme 12. *L'orbite O_{min} vue dans $\mathfrak{gl}(W_1)$ est l'ensemble des éléments x de rang 2, avec $x^2 = 0$.*

Démonstration. Puisque $\mathfrak{so}(8) = \mathfrak{sl}(A) \times \mathfrak{sl}(B) \times \mathfrak{sl}(C) \times \mathfrak{sl}(D) \ \oplus \ A \otimes B \otimes C \otimes D$, un élément nilpotent de $\mathfrak{sl}(A)$, noté x, appartient à O_{min} et vérifie comme élément de $W_1 \to W_1$:

(i) $x^2 = 0$;

(ii) $\mathrm{rg}\,(x) = 2$.

Réciproquement, si $x \in \mathfrak{so}(8)$, alors il s'écrit dans $\mathfrak{gl}(W_1)$ sous la forme :

$$x = \left[\begin{array}{c|c} v & u \\ \hline u^* & w \end{array}\right],$$

avec $u : A \otimes B \to C \otimes D$, $v : A \otimes B \to A \otimes B$, $w : C \otimes D \to C \otimes D$, tels que v et w soient symétriques. En écrivant les conditions (i) et (ii), quitte à prendre un conjugué par le groupe adjoint de $\mathfrak{so}(8)$, on obtient $u = 0$, $w = 0$, et :

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $x \in O_{min}$. □

Puisque O_{min} est irréductible, il est suffisant de s'intéresser à la fibre d'un élément général de $\overline{C_{[10]}}$ par la projection $\mathbb{P}(\mathfrak{so}_8) \cdots \to \mathbb{P}(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire un élément de $C_{[10]}$. Décrivons donc la fibre de $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$ dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(8))$.

L'élément $x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}$ est décomposable de $A \otimes S^3 B$, par conséquent, la fibre $\Pi^{-1}\{x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}\}$ est incluse dans $U \otimes S^2 B \ \oplus\ A \otimes B \otimes C \otimes D$. D'après le lemme précédent, nous cherchons donc les éléments de rang 2 de $U \otimes S^2 B \ \oplus\ A \otimes B \otimes C \otimes D$ vérifiant $x^2 = 0$.

Caractérisons un élément x appartenant à $U \otimes S^2 B \ \oplus\ A \otimes B \otimes C \otimes D$ et à O_{min}, il se représente dans $\mathfrak{gl}(W_1)$ par :

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 \otimes u & a \\ \hline a^* & v \otimes 1 + 1 \otimes w \end{array}\right],$$

avec a une application linéaire de $C \otimes D$ vers $A \otimes B$, a^* sa duale, et $u \in S^2 B$ un endomorphisme symétrique de B, $v \in S^2 C$, $w \in S^2 D$ de carrés nuls, tels que $u + v + w = 0$. La condition $x^2 = 0$ donne les équations suivantes.

$$\begin{cases} aa^* = 0 \\ (1 \otimes u)a + a^*(v \otimes 1 + 1 \otimes w) = 0 \\ a^*(1 \otimes u) + (v \otimes 1 + 1 \otimes w)a = 0 \\ a^* a = -2v \otimes w. \end{cases}$$

Supposons $u \neq 0$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}\,(1 \otimes u) = \mathrm{rg}\,(x) = 2$, $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Im}(1 \otimes u)$. Puisque u est de carré nul, alors $(1 \otimes u)a = 0$, puis passant au dual, $a^*(1 \otimes u) = 0$. D'où, $a^* a = 0$, ce qui donne $v = 0$ ou $w = 0$.

Ainsi l'un des trois éléments u, v and w est-il nul. Supposons $u = 0$ (les cas $v = 0$ et $w = 0$ se traitent de la même manière), alors la matrice de x est :

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & a \\ \hline a^* & v \otimes 1 - 1 \otimes v \end{array}\right]$$

- Si $v = 0$, x est un élément décomposable de $A \otimes B \otimes C \otimes D$, alors la projection dans $\mathfrak{g}$ donne un élément décomposable de $A \otimes S^3 B$.

- Si $v \neq 0$, dans une base bien choisie α, β de A et e, f de B telles que $v.e = 0$ et $v.f = e$, alors x s'écrit sous la forme $\alpha \otimes e \otimes f \otimes f + \beta \otimes f \otimes f \otimes f$. La projection dans $\mathfrak{g}$ donne l'élément $\alpha \otimes ef^2 + \beta \otimes f^3$.

Appliquons notre analyse à l'élément nilpotent $x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}$ qui s'écrit dans $A \otimes S^3B$ sous la forme $a \otimes b_1b_2b_3$, avec $a \in A$ et b_1, b_2, b_3 trois éléments non colinéaires de B. La fibre de $x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}$ de la projection π a six éléments décomposables dans $A \otimes B \otimes C \otimes D$: $a \otimes b_{\sigma(1)} \otimes b_{\sigma(2)} \otimes b_{\sigma(3)}$ où $\sigma \in S_3$.

Finalement, les trois points de $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(7))$,

$$[a \otimes b_1 \otimes b_2b_3], \quad [a \otimes b_2 \otimes b_1b_3], \quad [a \otimes b_3 \otimes b_1b_2],$$

s'envoient sur $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$ dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ par $p : \mathbb{P}(\mathfrak{so}(7)) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Le groupe $\mathcal{S}_3$ permute ces trois points lisses de $\overline{D_{[10]}}$, qui s'envoient par p_{10} sur $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$.

Pour finir, puisque $[x_{\alpha_2} + x_{\alpha_5}]$ est un point général de $\overline{C_{[10]}}$, la fibre sous $p_{10} : \overline{D_{[10]}} \to \overline{C_{[10]}}$ contient toujours trois points comptés avec multiplicité. Pour les éléments de $\overline{C_{[8]}}$, les points peuvent être confondus, ils sont donc singuliers.

2.8.3 La normalité de $\overline{C_{[10]}}$.

Soit $\mathcal{K}$ le lieu d'annulation dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ défini par la forme quadratique induite par la forme de Killing, c'est-à-dire :

$$\mathcal{K} = \{[x] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \text{ tels que } \kappa(x, x) = 0\}.$$

C'est une variété de degré 2. Naturellement, $\mathcal{K}$ contient tout le cône nilpotent $\mathcal{N}$. La normalité de $\overline{C_{[10]}}$ est une conséquence de la propriété suivante.

Proposition 10. *Les schémas $\overline{C_{[10]}}$ et $B(V) \cap \mathcal{K}$ sont égaux.*

Démonstration. Il est clair que $\overline{C_{[10]}}$ est contenue dans $B(V)$ et $\mathcal{K}$. Puisque $\mathcal{K}$ ne contient pas $[h_2]$, $B(V)$ n'est pas incluse dans $\mathcal{K}$, d'où

$$9 = \dim \overline{C_{[10]}} \leq \dim B(V) \cap \mathcal{K} < \dim B(V) = 10$$

Donc l'égalité de la proposition est vraie ensemblistement. Pour montrer qu'elle reste valable en tant que schéma, il suffit, puisque le schéma $\overline{C_{[10]}}$ est réduit sur un ouvert (c'est-à-dire $C_{[10]}$), de montrer que $\overline{C_{[10]}}$ et $B(V) \cap \mathcal{K}$ ont le même degré.

- Le degré de $B(V) \cap \mathcal{K} = S_{[2]} \cap \mathcal{K}$ est égal au produit des degrés des deux variétés $S_{[2]}$ et $\mathcal{K}$, c'est-à-dire 28.
- Puisque $p_{10} : \overline{D_{[10]}} \to \overline{C_{[10]}}$ est un recouvrement triple, $3 \deg \overline{C_{[10]}} = \deg \overline{D_{[10]}}$. Mais $\overline{D_{[10]}}$ est l'intersection de $\mathbb{G}(2, V)$ avec le lieu d'annulation dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(V))$ de la forme quadratique induite par la forme de Killing de $\mathfrak{so}(7)$, donc son degré est le double du degré de $\mathbb{G}(2, V)$, c'est-à-dire 84. □

Chapitre 3

Équations de certaines compactifications magnifiques minimales

Nous supposerons que G est un groupe semi-simple adjoint et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Posons $g = \dim \mathfrak{g}$ et $l = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$. Soient σ une involution de G et $H = G^\sigma$ le groupe fermé des points fixes de σ. Le *rang de l'espace symétrique* $X = G/H$ est la dimension maximale du sous-espace propre de valeur propre -1 de σ d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ σ-stable de $\mathfrak{g}$ (σ induit une involution sur $\mathfrak{g}$, appelée encore σ, cette involution préservant de plus la forme de Killing κ).

Rappelons la définition de la compactification magnifique minimale d'un espace symétrique construite dans la section 6 de [DCP83], l'objet d'étude de cette partie.

Définition 2. *La compactification magnifique minimale $\bar{X}$ de X est la clôture dans la grassmannienne $\mathbb{G}(\dim \mathfrak{g}^\sigma, \mathfrak{g})$ de l'orbite sous G du point $\mathfrak{g}^\sigma$, l'algèbre de Lie de G^σ.*

Théorème 10. *Avec les notations précédentes, l'action de G sur $\bar{X}$ vérifie les propriétés suivantes.*

1. *La variété $\bar{X}$ est une union d'un nombre fini d'orbites.*
2. *L'ensemble $\bar{X} \smallsetminus G \cdot \mathfrak{g}^\sigma$ est la réunion de r hypersurfaces lisses S_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$.*
3. *Les clôtures des orbites sont en bijection avec les ensembles $S_J = S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k}$, où $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$ est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, r\}$.*
4. *Pour J un sous-ensemble de $\{1, \ldots, r\}$, S_J est lisse de codimension* $\operatorname{codim} S_J = \sharp J$. *De plus $S_{J_1} \cap S_{J_2} = S_{J_1 \cup J_2}$.*

Remarque. L'entier r est égal au rang de X. Le nombre d'orbites de $\bar{X}$ est égal à 2^r.

Nous nous sommes intéressés aux équations de la compactification magnifique minimale $\bar{X}$ dans $\mathbb{G}(\dim \mathfrak{g}^\sigma, \mathfrak{g})$. Dans ce chapitre, nous donnons une réponse lorsque le rang de X est égal à l. Dans ce cas particulier, l'involution est unique à conjugaison près appelée *involution de Cartan*. Pour une algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ telle que $\sigma_{\mathfrak{h}} = -\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$, σ échange les racines opposées du système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Théorème 11. *Si le rang de X est égal à l, alors $\bar{X}$ comme sous-variété de $\mathbb{G}(\frac{g-l}{2}, \mathfrak{g})$ est définie par des équations linéaires.*

Remarque. Le chapitre 4 suivant donne des exemples de ce résultat, lorsque l'algèbre de Lie est de rang 2.

L'idée générale de la preuve est de comprendre l'image de la compactification magnifique minimale via l'isomorphisme entre grassmanniennes : $W \mapsto W^{\perp}$. Dans un premier temps, nous allons décrire cette nouvelle variété. Puisque la somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\sigma} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$, où $\mathfrak{g}_{-1}$ est l'espace propre de valeur propre -1, est orthogonale pour la forme de Killing κ, l'image n'est autre que la clôture de l'orbite de $\mathfrak{g}_{-1}$ dans la grassmannienne. Dans un second temps, nous allons démontrer que cette variété peut être obtenue à partir d'équations linéaires. Enfin, nous finirons avec des résultats sur les sections (utiles pour traiter les exemples du chapitre 4).

Nous supposerons dans tout le chapitre, sauf mention du contraire, que X est un espace symétrique de rang égal à celui de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. De plus, nous appellerons abusivement $\bar{X}$ la compactification magnifique de X (nous omettons minimale).

3.1 Espaces annulateurs maximaux

Reprenons la forme trilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante $w : (x, y, z) \mapsto \kappa([x, y], z)$. Puisque la forme de Killing κ est σ-invariante, w l'est aussi. Définissons l'objet du titre.

Définition 3. *Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$.*

(1) Le sous-espace W est un espace annulateur pour $(\mathfrak{g}, w)$ si w s'annule sur $W \times W \times W$.

(2) Le sous-espace W est un espace annulateur maximal pour $(\mathfrak{g}, w)$ s'il vérifie (1) et est de dimension maximale pour cette propriété.

Le sous-espace propre $\mathfrak{g}_{-1}$ de σ est un espace annulateur pour $(\mathfrak{g}, w)$. En effet, si x, y, z sont trois éléments de $\mathfrak{g}_{-1}$, alors

$$w(x, y, z) = w(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) = -w(x, y, z).$$

L'objectif est de démontrer que $\mathfrak{g}_{-1}$ est un espace annulateur maximal, c'est-à-dire que la dimension maximale est celle de $\mathfrak{g}_{-1}$, que l'on note $d := \frac{g+l}{2}$.

Remarque. Toute sous-algèbre de Borel vérifie le point (1) de la Définition 3. Pour cela, il suffit de constater que pour une base bien choisie de la sous-algèbre de Borel, le calcul de w se résume aux conditions (i), (ii), (iii) de la démonstration du Lemme 1 de la section 1.2.

Notons Y l'ensemble des espaces annulateurs maximaux. C'est un sous-ensemble fermé G-stable de la grassmannienne $\mathbb{G}(d', \mathfrak{g})$, où $d' \geq d$ est la dimension des espaces annulateurs maximaux pour $(\mathfrak{g}, w)$. Nous allons prouver dans cette section que tout espace annulateur maximal de $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre de Cartan, et nous déduirons de ce fait que $d' = d$.

3.1.1 Éléments semi-simples réguliers

Pour montrer qu'un espace annulateur maximal contient une sous-algèbre de Cartan, il suffit de voir qu'il contient un élément régulier semi-simple, puis le centralisateur de cet élément.

Proposition 11. *Tout espace annulateur maximal contient un élément régulier semi-simple.*

Soit V un espace annulateur maximal de $(\mathfrak{g}, w)$. Prenons $\mu : \mathbb{C}^* \to T$ un sous-groupe à un paramètre régulier (voir la section 1.4) et notons $V_0 = \lim_{t\to 0} \mu(t) \cdot V$. L'espace vectoriel V_0 est un espace $\mathfrak{h}$-stable, annulateur maximal pour $(\mathfrak{g}, w)$ (même dimension que V).

Lemme 13. *Si V_0 contient un élément semi-simple régulier, alors V aussi.*

Démonstration. Soit K le fibré tautologique de la grassmannienne $\mathbb{G}(d', \mathfrak{g})$:

$$K = \{(V, x) \in \mathbb{G}(d, \mathfrak{g}) \times \mathfrak{g} \text{ tels que } x \in V\}.$$

Notons p et q les projections suivantes :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{G}(d, \mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} & \end{tikzcd}$$

Soit $\mathfrak{g}_{rs}$ l'ouvert des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$. Puisque p est plat, $p\left(q^{-1}(\mathfrak{g}_{rs})\right)$ est un ouvert de $\mathbb{G}(d', \mathfrak{g})$ contenant V_0, et donc il existe $t_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mu(t_0) \cdot V$ est inclus dans $q\left(p^{-1}(\mathfrak{g}_{rs})\right)$. Finalement, $\mu(t_0) \cdot V$ contient un élément semi-simple régulier, donc V aussi. □

Montrons la Proposition 11 par récurrence descendante sur

$$r = \sup_{\mathfrak{h}} \dim V \cap \mathfrak{h},$$

avec $\mathfrak{h}$ parcourant toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Preuve de la Proposition 11. **Initialisation**. Si $r = l$, alors il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ telle que $\dim \mathfrak{h} \cap V = \dim \mathfrak{h}$, d'où le résultat.

Hérédité. Soit $r < l$, et supposons le résultat vrai pour k tels que $r < k \leq l$. Prenons $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan vérifiant $\dim V \cap \mathfrak{h} = r$, T un tore maximal de G tel que $\mathfrak{h}$ est son algèbre de Lie, μ un sous-groupe à un paramètre régulier de T, et Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Puisque $V_0 = \lim_{t\to 0} \mu(t) \cdot V$ est $\mathfrak{h}$-stable, choisissons $h_1, \ldots, h_r, (x_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi)$. V_0 se décompose alors en vecteurs propres de $\mathfrak{h}$:

$$V_0 = V_0 \cap \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in S} \mathbb{C}x_\alpha,$$

avec S un sous-ensemble de Φ. Posons $R = S \cap (-S)$ et distinguons deux cas.

i) Si $R = \varnothing$, alors $\sharp S \leq \frac{g-l}{2}$, d'où $l \geq \dim V_0 \cap \mathfrak{h} = \dim V_0 - \sharp S \geq l$, ce qui donne $\mathfrak{h} \subset V_0$, c'est-à-dire V_0 contient un élément régulier semi-simple, nous concluons à l'aide du Lemme 13.

ii) Si $R \neq \varnothing$, alors x_α, $x_{-\alpha}$ appartiennent à V_0 pour $\alpha \in R$. La forme linéaire

$$w(x_\alpha, x_{-\alpha}, \cdot) = \kappa(x_\alpha, x_{-\alpha})\alpha$$

s'annule sur $V_0 \cap \mathfrak{h}$, ainsi $V_0 \cap \mathfrak{h} \subset \ker \alpha$. L'espace vectoriel $V_0 \cap \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}(x_\alpha + x_{-\alpha})$ est une algèbre de Lie abélienne incluse dans V_0 ne comportant que des éléments semi-simples, elle est donc contenue dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$: $\dim V_0 \cap \mathfrak{h}_1 > \dim V_0 \cap \mathfrak{h}_0$. Par hypothèse de récurrence, V_0 contient un élément régulier, et il en va de même pour V. □

Corollaire 6. *(a) Un espace annulateur maximal V contient une sous-algèbre de Cartan.*

(b) Il existe un sous-groupe à un paramètre μ tel que V_0 est une sous-algèbre de Borel.

(c) $\dim V = d$.

Démonstration. Soit s un élément semi-simple régulier contenu dans V.

(a) Le centralisateur $\mathfrak{c}(s)$ est une sous-algèbre de Cartan. Soient $\overline{\mathfrak{g}}$ le quotient de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{c}(s)$ et π la projection sur $\overline{\mathfrak{g}}$. Puisque $\psi_s = w(s, ., .)$ est une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $\overline{\mathfrak{g}}$ et $\pi(V)$ est un sous-espace totalement isotrope pour ψ_s, alors

$$\dim \pi(V) \leq \frac{1}{2} \dim \overline{\mathfrak{g}}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcccc} \dim V - \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{c}(s)) & \leq & \dim V \cap \mathfrak{c}(s) & \leq & \dim \mathfrak{c}(s), \\ \frac{g+l}{2} - \frac{g-l}{2} & \leq & \dim V \cap \mathfrak{c}(s) & \leq & l, \\ l & \leq & \dim V \cap \mathfrak{c}(s) & \leq & l. \end{array}$$

Finalement, nous avons $\mathfrak{c}(s) \subset V$.

(b) Soient T le tore maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h} := \mathfrak{c}(s)$, Φ le système de racines correspondant à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $h_1, \ldots, h_r, (x_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi)$ et μ un sous-groupe à un paramètre régulier de T.

Le sous-espace V_0 de $\mathfrak{g}$, limite de V par μ, se décompose de la manière suivante :

$$V_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in S} \mathbb{C} x_\alpha,$$

avec S et $-S$ une partition de Φ. Maintenant, si α, $\beta \in S$ sont tels que $\alpha + \beta$ est une racine, $w(x_\alpha, x_\beta, x_{-\alpha-\beta}) \neq 0$ prouve que $\alpha + \beta \in S$. Il suffit donc de choisir la base de Φ telle que S soit un ensemble de racines positives (voir le corollaire 1 du Chapitre VI, paragraphe 1.7 de [Bou68]).

(c) découle de (b) et $\dim V = \dim V_0$. □

3.1.2 Décomposition des espaces annulateurs maximaux

Soient V un espace annulateur maximal, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan contenue dans celui-ci et Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. L'objectif de ce paragraphe est d'écrire V sous la forme

$$V = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} L_\alpha,$$

avec L_α un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\mathfrak{g}_\alpha$ étant l'espace propre associé à α.

Soit $\alpha_0 \in \Phi$. Puisque $\bigcup_{\alpha\in\Phi^+} \ker \alpha$ est une réunion finie d'hyperplans de $\mathfrak{h}$, nous pouvons choisir $h_0 \in \ker \alpha_0$ qui n'est dans aucun autre hyperplan $\ker \alpha$. Ainsi le centralisateur de h_0 est $\mathfrak{c}(h_0) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Par un raisonnement analogue à la démonstration du Corollaire 6 (le premier point), nous obtenons $\dim V \cap \mathfrak{c}(h) \geq l + 1$. Mais $\mathfrak{h} \subset V$, d'où $\dim V \cap (\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}) \geq 1$. La forme linéaire $w(x_\alpha, x_{-\alpha}, \cdot)$ est non nulle sur $\mathfrak{h}$, donc $\dim V \cap (\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}) = 1$.

Lemme 14. *Soit $V \in Y$. Il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ telle que*

$$V = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} L_\alpha,$$

avec :

- *Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*
- *Φ^+ un choix de racines positives tel que, pour tout $\alpha \in \Phi^+$, L_α est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ vérifiant $L_\alpha \not\subset \mathfrak{g}_{-\alpha}$.*

Démonstration. Soit $V \in Y$. Il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ telle que

$$V = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} L_\alpha,$$

avec Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Φ^+ un choix de racines positives, et L_α sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. La limite par un sous-groupe à 1-paramètre régulier de T (tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$) est une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}_0$. Le choix des racines positives donné par $\mathfrak{b}_0$ répond aux exigences du lemme. □

Remarque. Reprenons les notations du lemme. Soient α, β deux racines positives telles que $\alpha + \beta$ soit une racine. Posons $v_\alpha = x_\alpha + a_\alpha x_{-\alpha}$ une base de L_α avec $a_\alpha \in \mathbb{C}$, de même pour v_β base de L_β et $v_{\alpha+\beta}$ base de $L_{\alpha+\beta}$. Alors la condition $w(v_\alpha, v_\beta, v_{\alpha+\beta}) = 0$ montre que

$$a_{\alpha+\beta} = \frac{w(x_{-\alpha}, x_{-\beta}, x_{\alpha+\beta})}{w(x_\alpha, x_\beta, x_{-\alpha-\beta})} a_\alpha a_\beta.$$

Ainsi $v_{\alpha+\beta}$ est défini, à scalaire près, par v_α, v_β.

Corollaire 7. *Avec les notations précédentes, si $\Delta \subset \Phi^+$ est une base du système de racines Φ, alors la classe de conjugaison de V sous T est déterminée par les L_α, $\alpha \in \Delta$, à savoir si $L_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ ou $L_\alpha \neq \mathfrak{g}_\alpha$.*

Démonstration. Soient $\alpha \in \Delta$, et v_α une base de L_α. Supposons que $v_\alpha = x_\alpha + a_\alpha x_{-\alpha}$, avec $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Quitte à prendre un conjugué de V sous T, nous pouvons nous ramener à deux cas, $a_\alpha = 0$ ou $a_\alpha = 1$. La remarque précédente termine la démonstration. □

3.2 Orbites de Y

L'ensemble Y des espaces annulateurs maximaux de $(\mathfrak{g}, w)$ est un fermé de $\mathbb{G} := \mathbb{G}(d, \mathfrak{g})$, stable sous l'action adjointe de G. Le Corollaire 6 montre qu'il existe une sous-algèbre de Borel dans la clôture de chaque orbite de Y. En particulier une seule orbite est fermée : c'est celle des sous-algèbres de Borel. Dans cette section, nous allons donner une condition pour que deux éléments de Y soient conjugués sous G.

Proposition 12. *(i) La sous-algèbre parabolique de plus petite dimension contenant $V \in Y$ est $\mathfrak{p}_V := V + [V, V]$.*

(ii) Si V_1 et V_2 sont deux éléments de Y tels que $\mathfrak{p}_{V_1} = \mathfrak{p}_{V_2}$, alors V_1 et V_2 sont conjugués sous G.

Démonstration. (i) En reprenant les notations du Lemme 14, V s'écrit sous la forme $V = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} L_\alpha$. Il s'en suit que

$$[V, V] + V = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi^+ \\ L_\alpha \neq \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}}} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

C'est donc une sous-algèbre parabolique. La minimalité de la dimension est immédiate.

(ii) Quitte à prendre un conjugué de V_2 par le groupe adjoint de $\mathfrak{p}_{V_1}$, nous pouvons choisir une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ contenue dans $V_1 \cap V_2$. Soient Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $h_1, \ldots, h_r, (x_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi)$. Il existe donc deux sous-algèbres de Borel $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ telles que, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\mathfrak{p}_{V_i} = \mathfrak{b}_i \oplus \bigoplus_{\alpha\in S_i} \mathbb{C}x_{-\alpha}, \quad V_i = V_i \cap \mathfrak{b}_i \oplus \bigoplus_{\alpha\in S_i} \mathbb{C}(x_\alpha + x_{-\alpha}),$$

où S_i est le sous-ensemble des racines positives (données par $\mathfrak{b}_i$) telles que L_α n'est pas un espace propre.

Il existe g dans le groupe adjoint de $\mathfrak{p}_{V_1} = \mathfrak{p}_{V_2}$ tel que $g \cdot \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$. Ainsi $\mathfrak{h}$ est stable par g. Par conséquent, g envoie un vecteur radiciel sur un autre vecteur radiciel, et en particulier $g \cdot x_\alpha = x_\beta$ avec $\alpha \in S_1$ et $\beta \in S_2$. Nous concluons sans aucune difficulté. □

Remarque. Le nombre d'orbites de G dans Y est égal à 2^l, le nombre d'orbites de l'ensemble des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$. En effet, la Proposition 12 assure que V_1 et V_2 sont dans la même orbite de Y si et seulement si $\mathfrak{p}_{V_1}$ et $\mathfrak{p}_{V_2}$ sont conjugués. Inversement, pour chaque orbite parabolique $G \cdot \mathfrak{p}$, nous pouvons trouver un élément V de Y tel que $\mathfrak{p}_V = \mathfrak{p}$ (il suffit de remonter la preuve de (i) dans la proposition précédente en utilisant les calculs du Lemme 14 et son corollaire).

Il existe une unique orbite de dimension égale à $\dim Y$, donnée par la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{g}$,

$$Y = \overline{G \cdot V},$$

où V est la somme directe $\mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{C}(x_\alpha + x_{-\alpha})$.

Puisque le rang de X est égal à l, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ telle que la restriction de l'involution σ à $\mathfrak{h}$ soit $-\mathrm{id}_\mathfrak{h}$. Donc, pour Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$

et $h_1, \ldots, h_r, (x_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi)$, σ envoie x_α sur $t_\alpha x_{-\alpha}$ avec $t_\alpha t_{-\alpha} = 1$ (Puisque σ préserve le crochet). Comme $\mathfrak{g}^\sigma = \sum_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{C}(x_\alpha + t_\alpha x_{-\alpha})$, nous vérifions que

$$\mathfrak{g}_{-1} = (\mathfrak{g}^\sigma)^\perp = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{C}(x_\alpha - t_\alpha x_{-\alpha})$$

(l'orthogonalité résultant de la forme de Killing). Ainsi, le sous-espace propre $\mathfrak{g}_{-1}$ de σ appartient à l'orbite ouverte de Y. L'isomorphisme entre $\mathbb{G}(d-l, \mathfrak{g})$ et $\mathbb{G}(d, \mathfrak{g})$ défini par $W \mapsto W^\perp$ induit un morphisme bijectif entre les ensembles Y et la compactification magnifique. En conséquence, Y est de dimension d.

Dans la prochaine partie, nous munirons Y d'une structure de schéma lisse dont les équations sont linéaires, et nous prouverons que Y et $\bar{X}$ sont isomorphes.

3.3 Équations de Y

Rappelons que $\mathbb{G} := \mathbb{G}(d, \mathfrak{g})$ possède une suite exacte de faisceaux localement libres ([Wey03]) :

$$0 \to K \to \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \to Q \to 0, \tag{3.1}$$

avec K le faisceau tautologique de rang d et Q le faisceau quotient de rang $\frac{g-l}{2}$. La donnée $w \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}^\vee$ donne une section $w_1 : \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \to \bigwedge^3 K^\vee$ et par transposition, un morphisme ${}^t w_1 : \bigwedge^3 K \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}}$ dont l'image sera notée I.

Lemme 15. *Le fermé Y est le support du schéma défini comme le lieu d'annulation de la section w_1. Par conséquent, nous munissons Y d'une structure de schéma en le considérant comme le lieu d'annulation de cette section.*

Démonstration. Décrivons le morphisme ${}^t w_1 : \bigwedge^3 K \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}}$ localement. Soit $\Lambda \in \mathbb{G}$, choisissons une base $x_1, \ldots, x_d$ de Λ et $y_1, \ldots, y_{g-d}$ une base d'un supplémentaire W de Λ. Identifions $\mathcal{U} = \mathrm{Hom}(\Lambda, W)$ avec un ouvert affine de $\mathbb{G}$ en envoyant $u \in \mathrm{Hom}(\Lambda, W)$ sur le graphe de u vu dans $\Lambda \oplus W = \mathfrak{g}$. Notons par $X_{i,j}$, avec $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq g-d$, les coordonnées par rapport aux bases précédentes. Ainsi ${}^t w_1 : \bigwedge^3 \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G},\Lambda} \to \mathcal{O}_{\mathbb{G},\Lambda}$ envoie $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_3} \otimes 1$ sur

$$F_{i_1,i_2,i_3} := w\left(x_{i_1} + \sum_j X_{i_1,j}\, y_j,\ x_{i_2} + \sum_j X_{i_2,j}\, y_j,\ x_{i_3} + \sum_j X_{i_3,j}\, y_j \right). \tag{3.2}$$

Les polynômes F_{i_1,i_2,i_3} pour $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq d$ engendrent I. Finalement, un élément Λ_1 de $\mathcal{U}$ appartient à Y si et seulement $w_{|\Lambda_1\times\Lambda_1\times\Lambda_1} = 0$ c'est à dire si les polynômes F_{i_1,i_2,i_3} pour $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq d$ s'annulent sur Λ_1. $\square$

Nous noterons par la suite I_Y le faisceau des équations de Y à la place de I. L'objectif de cette partie est de prouver que le schéma Y est lisse, et de montrer que ses équations sont linéaires.

3.3.1 Lissité de Y

Théorème 12. *Le schéma Y est lisse. En particulier, le schéma Y est réduit, c'est donc une variété projective.*

Il est suffisant de montrer la lissité de Y sur l'orbite fermée, donc étudions le rang de Ω^1_Y, le faisceau des différentielles de Kähler, pris en une sous-algèbre de Borel. En effet, s'il est inférieur ou égal à la dimension de Y, alors le schéma est lisse au point considéré.

Utilisons la suite exacte de faisceaux suivante, appelée complexe cotangent ([Har77]) :

$$I_Y/I_Y^2 \to \Omega_{\mathbb{G}} \otimes \mathcal{O}_Y \to \Omega_Y \to 0. \tag{3.3}$$

Évaluons-la en une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$.

Notations. Soient $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Cartan, Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tel que les racines positives soient celles de $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}^-$ la décomposition en sous-espaces propres de $\mathfrak{h}$ en choisissant les bases $x_1, \ldots, x_d$ pour $\mathfrak{b}$ (vecteur associé à une racine positive pour les $d - l$ premiers, un élément de $\mathfrak{h}$ pour les l derniers), $y_1, \ldots, y_{n-d}$ pour $\mathfrak{n}^-$ (vecteur associé à une racine négative) tels que $\kappa(x_i, y_i) \neq 0$, pour $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Localement, nous pouvons calculer les différentielles de F_{i_1,i_2,i_3} dans $\Omega_{\mathbb{G},\mathfrak{b}}$ (image de la première flèche de (3.3)). Nous obtenons donc

$$dF_{i_1,i_2,i_3} = \sum_j w(y_j, x_{i_2}, x_{i_3})\, dX_{i_1,j} + \sum_j w(x_{i_1}, y_j, x_{i_3})\, dX_{i_2,j} + \sum_j w(x_{i_1}, x_{i_2}, y_j) dX_{i_3,j}. \tag{3.4}$$

Mais $\Omega_{\mathbb{G},\mathfrak{b}}$ est isomorphe à $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^\vee \otimes \mathfrak{b}$, en envoyant $dX_{i,j}$ sur $y_i^\vee \otimes x_j$, avec $y_i^\vee = \frac{1}{\kappa(x_i,y_i)}\kappa(x_i, \cdot)$ (la dualité résulte de la forme de Killing κ, et nous normalisons pour avoir $y_i^\vee(y_i) = 1$). Pour la première somme de (3.4), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_j w(y_j, x_{i_2}, x_{i_3})\, y_j^\vee \otimes x_{i_1} &= \kappa\left(\sum_j \frac{\kappa(y_j, [x_{i_2}, x_{i_3}])}{\kappa(y_j, x_j)} x_{i_1}, \cdot\right) \otimes x_{i_1} && (3.5) \\ &= \kappa([x_{i_2}, x_{i_3}], \cdot) \otimes x_{i_1}. && (3.6) \end{aligned}$$

La composée $\bigwedge^3 \mathfrak{b} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G},\mathfrak{b}} \to I_{Y,\mathfrak{b}}/I^2_{Y,\mathfrak{b}} \to \Omega_{\mathbb{G},\mathfrak{b}} \otimes \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{b}}$ envoie $x_{i_1} \bigwedge x_{i_2} \bigwedge x_{i_3}$ sur

$$\kappa([x_{i_2}, x_{i_3}], \cdot) \otimes x_{i_1} + \kappa([x_{i_1}, x_{i_2}], \cdot) \otimes x_{i_3} + \kappa([x_{i_3}, x_{i_1}], \cdot) \otimes x_{i_2}.$$

Lemme 16. *Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. L'application linéaire D définie par*

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^3 \mathfrak{b} & \to & \mathfrak{b} \otimes [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \\ v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 & \mapsto & v_1 \otimes [v_2, v_3] + v_2 \otimes [v_3, v_1] + v_3 \otimes [v_1, v_2] \end{array}$$

a un corang inférieur ou égal à d.

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ une sous-algèbre de Borel. Pour h et k dans $\mathfrak{h}$, α et β dans Φ^+, nous avons

$$\alpha(k)h \otimes x_\alpha = D(h \wedge k \wedge x_\alpha) + \alpha(h)k \otimes x_\alpha, \tag{3.7}$$
$$\alpha(h)x_\alpha \otimes x_\beta = D(h \wedge x_\alpha \wedge x_\beta) + \beta(h)x_\beta \otimes x_\alpha - h \otimes [x_\alpha, x_\beta], \tag{3.8}$$
$$x_{\alpha+\beta} \otimes x_{\alpha+\beta} = D(x_{\alpha+\beta} \wedge x_\alpha \wedge x_\beta) - x_\alpha \otimes [x_\beta, x_{\alpha+\beta}] + x_\beta \otimes [x_\alpha, x_{\alpha+\beta}]. \tag{3.9}$$

Soit W le sous-espace de coker D engendré par $h_\alpha \otimes x_\alpha$ avec $\alpha(h_\alpha) = 2$, $\alpha \in \Phi^+$ et $x_\alpha \otimes x_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. Pour h and k bien choisis,

- $h \otimes x_\alpha$, avec $\alpha(h) = 0$, appartient à $\operatorname{Im} D$, d'après l'égalité (3.7).

- $x_\alpha \otimes x_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$ est dans W d'après (3.8).

- $x_\alpha \otimes x_\alpha \in W$ si α n'est pas simple, d'après (3.9) et les deux points précédents.

Finalement, coker $D \subset W$. Donc le nombre de générateurs est inférieur ou égal à $\frac{g-l}{2} + l = d$. □

Preuve du Théorème 12. Grâce au Lemme 16, le corang de $I_{Y,\mathfrak{b}}/I_{Y,\mathfrak{b}}^2 \to \Omega_{\mathbb{G},\mathfrak{b}} \otimes \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{b}}$ est inférieur ou égal à d, donc $\operatorname{rg} \Omega_{Y,\mathfrak{b}} \leq d$. □

Une conséquence du Théorème 12 est l'isomorphisme de variétés entre Y et la compactification magnifique. En effet, nous avons un morphisme bijectif entre $\bar{X}$ et Y, et ces deux variétés sont lisses et irréductibles, donc d'après le théorème principal de Zariski, ce morphisme devient un isomorphisme. La section suivante montre que les équations de Y dans $\mathfrak{g}$ sont linéaires.

3.3.2 Équations linéaires

Puisque l'isomorphisme entre les grassmanniennes $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}(d-l, \mathfrak{g})$ induit un isomorphisme entre $\bar{X}$ et Y, les équations de Y dans $\mathbb{G}$ sont donc les mêmes que celles de $\bar{X}$ dans $\mathbb{G}(d-l, \mathfrak{g})$. Il suffit donc de montrer le résultat sur les équations de Y pour finir la preuve du Théorème 11.

Théorème 13. *Les équations de Y dans $\mathbb{G}$ sont linéaires.*

Démonstration. Rappelons que $\bigwedge^d K = \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)$, donc $\operatorname{Hom}\left(\bigwedge^d K, \bigwedge^3 K\right) \simeq \bigwedge^{d-3} K^\vee$, puis $\bigwedge^3 K(1) \simeq \bigwedge^{d-3} K^\vee$. De plus, d'après (3.1), nous avons $\bigwedge^{d-3} \mathfrak{g}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \twoheadrightarrow \bigwedge^{d-3} K^\vee$. Ceci force $\bigwedge^{d-3} K^\vee$ à être engendré par ses sections, et il en va de même pour $\bigwedge^3 K(1)$. Grâce au morphisme ${}^t w_1$, $I_Y(1)$ est donc engendré par ses sections. □

3.3.3 Produit de compactifications magnifiques

L'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ (de dimension g et de rang l) se décompose en idéaux simples $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ avec I un ensemble de cardinal fini. Notons, pour chaque $i \in I$, g_i la dimension de $\mathfrak{g}_i$, l_i le rang de $\mathfrak{g}_i$ et $d_i = \frac{g_i + l_i}{2}$. De plus, les idéaux vérifient $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ si $i \neq j$.

Par conséquent, les idéaux sont orthogonaux pour la forme de Killing κ de $\mathfrak{g}$. En notant κ_i la restriction de κ à $\mathfrak{g}_i$, nous avons $\kappa = \oplus_{i \in I} \kappa_i$.

Lemme 17. *La forme trilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante w de $\mathfrak{g}$ s'annule sur $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j \times \mathfrak{g}_k$ dès que deux des indices sont distincts.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la définition de w. □

Notons w_i la restriction à $\mathfrak{g}_i$ de la forme trilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante w de $\mathfrak{g}$. Le plongement de Plücker $\prod_{i \in I} \mathbb{P}(\wedge^{d_i} \mathfrak{g}_i) \to \mathbb{P}(\wedge^d \mathfrak{g})$ induit une immersion fermée

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \prod_{i \in I} \mathbb{G}(d_i, g_i) & \to & \mathbb{G}(d, \mathfrak{g}) \\ & (V_i)_{i \in I} & \mapsto & \oplus_{i \in I} V_i. \end{array}$$

Si nous notons Y_i la variété des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{G}(d_i, g_i)$ tels que w_i soit nulle, alors l'application Φ envoie $\prod_{i \in I} Y_i$ dans Y.

Théorème 14. *$Y \simeq \prod_{i \in I} Y_i$.*

Démonstration. La dimension de Y_i est d_i, donc $\prod_{i \in I} Y_i$ est de même dimension que Y. Φ étant une immersion fermée, $\Phi(\prod_{i \in I} Y_i) = Y$. Comme Y et les Y_i sont lisses, c'est donc un isomorphisme. □

L'isomorphisme montre que la compactification magnifique Y peut être obtenue comme produit des compactifications magnifiques Y_i, avec $i \in I$. Malheureusement, Φ n'est qu'une immersion fermée pour les grassmanniennes, donc nous ne pouvons pas obtenir les équations de Y à partir de celles des Y_i, avec $i \in I$.

Remarque. Puisque nous supposons que le rang de l'espace symétrique est l, l'involution σ se restreint en une involution sur chacun des idéaux simples de $\mathfrak{g}$. Ceci s'avère faux si l'hypothèse du rang n'est plus vérifiée. Par exemple, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple, l'involution σ échangeant les deux facteurs de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ permet de construire la compactification minimale du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$. Le rang de la compactification est l, inférieur à $2l$ le rang de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$.

3.4 Sur les sections globales de $I_Y(1)$

Étudions maintenant les équations de la compactification magnifique de X. Caractérisons dans cette partie certaines équations de Y, c'est-à-dire trouvons une sous-représentation des sections globales de $I_Y(1)$ (le faisceau des équations de Y dans la grassmannienne), que nous pouvons décrire facilement.

Nous allons voir que cette représentation est l'image du morphisme $\wedge^{d-3}\mathfrak{g} \to \wedge^d\mathfrak{g}$ défini par $v \mapsto w \wedge v$ ($\mathfrak{g}$ et son dual sont identifiés par la forme de Killing, donc $w \in \wedge^3\mathfrak{g}$). Pour certains cas, comme nous le verrons sur deux exemples dans le chapitre 4, cette représentation est égale à $H^0(I_Y(1))$, et les équations sont entièrement décrites (localement).

Nous supposerons dans cette partie que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple.

3.4.1 Une inclusion

Reprenons les notations de la partie 1.3. Étendons $w : \bigwedge^3 \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ à $\bigwedge^{k+3} \mathfrak{g} \to \bigwedge^k \mathfrak{g}$ avec k un entier positif, et appelons cette nouvelle application linéaire

$$\begin{array}{cccc} \delta_k^* : & \bigwedge^{k+3} \mathfrak{g} & \to & \bigwedge^k \mathfrak{g} \\ & v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k+3} & \mapsto & \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{k+3}} \varepsilon(\tau) w(v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, v_{\tau(3)}) v_{\tau(4)} \wedge \cdots \wedge v_{\tau(k+3)}. \end{array}$$

Nous définissons donc un opérateur différentiel sur $\bigwedge \mathfrak{g}$, appelé δ^*, construit à partir de la graduation de $\bigwedge \mathfrak{g}$: $\delta^* = \bigoplus_{k \geq 0} \delta_k^*$. De plus, cet opérateur est $\mathfrak{g}$-équivariant (la forme w est $\mathfrak{g}$-invariante) et vérifie $(\delta^*)^2 = 0$.

D'un autre côté, en identifiant $\mathfrak{g}$ et son dual par la forme de Killing, w peut être vu comme un élément de $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$. Les applications linéaires de $\mathfrak{g}$-modules

$$\begin{array}{cccc} \delta_k : & \bigwedge^k \mathfrak{g} & \to & \bigwedge^{k+3} \mathfrak{g} \\ & v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k & \mapsto & w \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, \end{array}$$

avec k un entier positif, définissent un autre opérateur différentiel $\mathfrak{g}$-invariant sur $\bigwedge \mathfrak{g}$: $\delta = \bigoplus_{k \geq 0} \delta_k$. Comme pour δ^*, $\delta^2 = 0$.

Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Choisissons une base de Φ, et posons $\Gamma_{2\rho}$ la représentaton irréductible de plus haut poids 2ρ, où ρ est la demi-somme des racines positives. Le module $\bigwedge \mathfrak{h} \otimes \Gamma_{2\rho}$ représente toutes les occurences de $\Gamma_{2\rho}$ dans $\bigwedge \mathfrak{g}$. Par suite, $\Gamma_{2\rho}$ apparaît dans $\bigwedge^k \mathfrak{g}$, lorsque k parcourt l'ensemble $\{g-d, g-d+1, \ldots, d-1, d\}$.

Remarque. 2ρ est le plus haut poids de $\bigwedge \mathfrak{g}$. Les vecteurs de plus haut poids 2ρ de $\bigwedge \mathfrak{g}$ forment l'espace vectoriel gradué $\bigwedge \mathfrak{h} \wedge \bigwedge_{\alpha \in \Phi^+} x_\alpha$, pour un choix de racines positives et d'une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi)$.

Pour k un entier positif, soit $\overline{\wedge}^k\mathfrak{g}$ le $\mathfrak{g}$-sous-module de $\bigwedge^k \mathfrak{g}$ tel que $\bigwedge^k \mathfrak{g} = \overline{\wedge}^k\mathfrak{g} \oplus \bigwedge^{k-n+d} \mathfrak{h} \otimes \Gamma_{2\rho}$ si $k \in \{g-d, g-d+1, \ldots, d-1, d\}$ et $\overline{\wedge}^k\mathfrak{g} := \bigwedge^k \mathfrak{g}$ sinon. Grâce au fait que δ et δ^* préservent les poids (w est de poids 0), nous pouvons définir les restrictions de δ, δ^* à $\overline{\wedge}\mathfrak{g}$. De plus, les restrictions de δ et δ^* à $\bigwedge \mathfrak{h} \otimes \Gamma_{2\rho}$ sont triviales. En effet, les calculs sont simples en utilisant la remarque précédente et la section 1.4.

Lemme 18. *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit simple. Les suites*

$$0 \to \overline{\wedge}^{m'}\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} \overline{\wedge}^{m'+3}\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \overline{\wedge}^{g-3}\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} \bigwedge^{g} \mathfrak{g} \to 0,$$

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\delta} \overline{\wedge}^3\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \overline{\wedge}^{m-3}\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} \overline{\wedge}^m\mathfrak{g} \to 0,$$

avec $m \in \{g-2, g-1, g\}$ et $m' \in \{0,1,2\}$, sont exactes.

Remarque. Nous pouvons écrire les suites exactes pour δ^* avec une décroissance des puissances extérieures de $\mathfrak{g}$. Nous obtenons alors deux nouvelles suites exactes pour $\overline{\wedge}\mathfrak{g}$: les versions duales de celles du lemme précédent.

Le complexe $(\bigwedge \mathfrak{g}, \delta)$ est la somme directe de deux complexes, le premier $\overline{\wedge}\mathfrak{g}$ est acyclique, et le second $\bigwedge \mathfrak{h} \otimes \Gamma_{2\rho}$ est trivial.

Admettons pour le moment le Lemme 18. Dans la preuve du Théorème 13, ${}^t w_1$: $\bigwedge^3 K(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \simeq \bigwedge^d K$ donne un morphisme $\mathfrak{g}$-invariant sur les sections globales $\bigwedge^{d-3} \mathfrak{g} = \mathrm{H}^0(\bigwedge^3 K(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)) = \bigwedge^d \mathfrak{g}$: c'est simplement δ.

Proposition 13. *Si* $\mathfrak{g}$ *est simple, alors* $\mathrm{H}^0(I_Y(1))$ *contient* $\delta\left(\bigwedge^{d-3} \mathfrak{g}\right)$.

Démonstration. L'image de ${}^t w_1 : \bigwedge^3 K(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$ est $I_Y(1)$. □

Cette proposition montre que nous pouvons plonger la compactification magnifique dans un espace projectif de dimension inférieure à celle de $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathfrak{g})$. En effet, posons $W = \delta\left(\bigwedge^{d-3} \mathfrak{g}\right)$, et W_1 un supplémentaire de W dans $\bigwedge^d \mathfrak{g}$. Alors les équations de $\mathbb{P}(W_1)$ sont définies par W, et puisque $W \subset \mathrm{H}^0(I_Y(1))$, il existe une immersion de Y dans $\mathbb{P}(W_1)$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{P}(W_1) \arrow[d] \\ & \mathbb{P}(\wedge^d \mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

3.4.2 Preuve du Lemme 18

L'idée générale est l'étude de $\zeta = \delta^*\delta + \delta\delta^*$ comme opérateur différentiel $\mathfrak{g}$-invariant.

Reprenons les notations définies dans la section 1.3. Considérons les opérateurs différentiels linéaires $\mathfrak{g}$-invariants suivants. Montrons brièvement qu'ils appartiennent à F^2.

1. $\zeta = [\delta, \delta^*]$. Cela découle de $\delta \in F^0$ et $\delta^* \in F^3$.

2. L'opérateur de Casimir c. L'action d'un élément de x de $\mathfrak{g}$ sur $\wedge^k \mathfrak{g}$ peut être décrite comme
$$\sum_{i=1}^{g} m_{[x,x_i]} d_{x_i}$$
avec $(x_i)_{1 \leq i \leq g}$ une base de $\mathfrak{g}$.

3. Les puissances de l'opérateur d'Euler e : $e^0 = \mathrm{id}$, e, e^2. Pour $p \in \mathbb{N}$, une puissance de l'opérateur d'Euler sur la graduation de $\bigwedge \mathfrak{g}$ s'écrit sous la forme :
$$e^p = \sum_{i \geq 0} i^d \mathrm{id}_{\wedge^i \mathfrak{g}}.$$
Puisque $e = \sum_{i=1}^{g} m_{x_i} d_{x_i}$, avec $(x_i)_{1 \leq i \leq g}$ base de $\mathfrak{g}$, alors $e^p \in F^p$.

Notons $(F^2)^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des opérateurs différentiels $\mathfrak{g}$-invariants.

Lemme 19. *La famille* id, e, e^2, c *est une famille libre de* $(F^2)^{\mathfrak{g}}$.

Démonstration. Soit P un polynôme de degré 2 en une variable et a un complexe tel que $ac = P(e)$. Ainsi, si $a \neq 0$, l'opérateur de Casimir est constant sur chaque représentation $\bigwedge^k \mathfrak{g}$, pour k un entier positif, ce qui est impossible, donc $a = 0$. Par suite, $P(e) = 0$ implique que P a au moins 3 racines distinctes, donc $P = 0$. □

Nous allons montrer que ζ est une combinaison linéaire de c, id, e et e^2. Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 20. *Notons* $\Gamma_{a_1,\dots,a_l}$ *la représentation irréductible de* $\mathfrak{g}$ *de plus haut poids* $a_1\omega_1 + \cdots + a_l\omega_l$, *avec* $\omega_1, \dots, \omega_l$ *les poids fondamentaux. Nous avons :*

(i) $\bigwedge^2 \mathfrak{sl}(n+1) = \mathfrak{sl}(n+1) \oplus \Gamma_{2,0,\dots,0,1,0} \oplus \Gamma_{0,1,0,\dots,0,2}$, *pour* $n \geq 3$, *et* $\bigwedge^2 \mathfrak{sl}(3) = \mathfrak{sl}(3) \oplus \Gamma_{3,0} \oplus \Gamma_{0,3}$.

(ii) $\bigwedge^2 \mathfrak{sp}(2n) = \mathfrak{sp}(2n) \oplus \Gamma_{2,1,0,\dots,0}$, *pour* $n \geq 2$.

(iii) $\bigwedge^2 \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(n) \oplus \Gamma_{1,0,1,0,\dots,0}$, *pour* $n \geq 6$.

(iv) $\bigwedge^2 \mathfrak{f}_4 = \mathfrak{f}_4 \oplus \Gamma_{0,1,0,0}$.

(v) $\bigwedge^2 \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2 \oplus \Gamma_{3,0}$.

(vi) $\bigwedge^2 \mathfrak{e}_6 = \mathfrak{e}_6 \oplus \Gamma_{0,0,0,1,0,0}$.

(vii) $\bigwedge^2 \mathfrak{e}_7 = \mathfrak{e}_7 \oplus \Gamma_{0,0,1,0,0,0,0}$.

(viii) $\bigwedge^2 \mathfrak{e}_8 = \mathfrak{e}_8 \oplus \Gamma_{0,0,0,0,0,0,0,1}$.

Démonstration. Nous traitons uniquement les cas $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ et $\mathfrak{so}(n)$. Les cas exceptionnels s'obtiennent à partir du programme *LIE* (voir [MAAvLL92]).

(i) Écrivons $V = \mathbb{C}^{n+1}$. Nous avons $V \otimes V^\vee = \mathfrak{sl}(n+1) \oplus \mathbb{C}$, donc

$$\bigwedge^2 (V \otimes V^\vee) = \bigwedge^2 V \otimes \mathrm{Sym}^2 V^\vee \oplus \mathrm{Sym}^2 V \otimes \bigwedge^2 V^\vee,$$
$$\bigwedge^2 \mathfrak{sl}(n+1) \oplus \mathfrak{sl}(n+1) = \Gamma_{0,1,0,\dots,0} \otimes \Gamma_{0,\dots,0,2} \oplus \Gamma_{0,\dots,0,1,0} \otimes \Gamma_{2,0,\dots,0}.$$

Le résultat se déduit des règles de branchement (Proposition 15.25 de [FH91]).

(ii) Comme représentations de $GL(\mathbb{C}^{2n})$, $\bigwedge^2 \mathfrak{sp}(2n) = \bigwedge^2 \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^{2n})$ est irréductible de partition $(3,1)$, donc, en utilisant les règles de branchement de [FH91], nous obtenons la formule désirée.

(iii) Le $GL(\mathbb{C}^n)$-module $\bigwedge^2 \mathfrak{so}(n)$ est irréductible de partition $(2,1,1)$. Nous concluons avec les règles de branchement. □

Sauf pour $\mathfrak{sl}(n)$, le $\mathfrak{g}$-module $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ a quatre facteurs irréductibles, et l'espace vectoriel des opérateurs différentiels $\mathfrak{g}$-invariants respectant la graduation de $\bigwedge \mathfrak{g}$ noté E est de dimension 4. En effet, un tel opérateur est constant sur chacun des facteurs irréductibles apparaissant dans $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus \bigwedge^2 \mathfrak{g}$. En conséquence, d'après le lemme 19, c, id, e, e^2 forment une base de E, donc ζ est une combinaison linéaire de c, id, e et e^2.

Pour $\mathfrak{sl}(n)$, $n \geq 3$, remarquons que $\bigwedge^2 \mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{sl}(n) \oplus W \oplus W^\vee$, avec $W = \Gamma_{2,0,\ldots,0,1,0}$, ou $W = \Gamma_{3,0}$ (le cas $\mathfrak{sl}(3)$). En définissant l'action tordue de $\mathfrak{sl}(n)$ sur W par

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}(n) \times W & \rightarrow & W \\ (g, v) & \mapsto & \sigma(g) \cdot v, \end{array}$$

cette nouvelle représentation est isomorphe comme $\mathfrak{sl}(n)$-module à $W^\vee$ (voir la section 1.6 de [DCP83]). Puisque ζ, c, id, e et e^2 commutent avec l'action tordue, il s'en suit que leurs restrictions à $W \oplus W^\vee$ sont des homothéties. Considérons $W \oplus W^\vee$ comme un seul facteur : $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ a donc quatre facteurs. Nous pouvons traiter le cas $\mathfrak{sl}(n)$ comme les autres algèbres de Lie simples : ζ est une combinaison linéaire de c, id, e et e^2.

Il existe un complexe α et un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tels que $\zeta - \alpha c = P(e)$. Appliquons l'expression à $1 \in \mathbb{C}$ et $w \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}$: il s'en suit que $P(0) = P(3) = \delta^*(w)$. Mais l'isomorphisme $\bigwedge^3 \mathfrak{g} \simeq \bigwedge^{g-3} \mathfrak{g}$ montre que $P(g-3) = P(g) = P(3)$. Finalement, P est constant ($g \geq 4$), et par conséquent,

$$\zeta = \alpha c + \delta^*(w)\mathrm{id}. \tag{3.10}$$

Si Γ_λ est une représentation irréductible de plus haut poids λ, posons c_λ le complexe représentant l'action de c sur Γ_λ. Donc, appliquant (3.10) à un vecteur de plus haut poids de $\Gamma_{2\rho}$, nous avons $0 = \alpha c_{2\rho} + \delta^*(w)$, et donc

$$\zeta = \delta^*(w)\left(\mathrm{id} - \frac{1}{c_{2\rho}} c\right).$$

Utilisons un argument de Kostant (voir le Lemme 1 du chapitre 2 de [Ga] : $c_\lambda < c_{2\rho}$, si 2ρ domine le poids dominant λ. Or un $\mathfrak{g}$-module irréductible Γ apparaissant dans $\bigwedge \mathfrak{g}$ a son plus haut poids dominé par 2ρ (cf paragraphe 3.4.1) : la restriction de ζ à Γ est juste une multiplication par un scalaire, nul uniquement pour $\Gamma_{2\rho}$.

Preuve du Lemme 18. Soient k un entier positif et Γ une représentation irréductible apparaissant dans $\mathrm{Ker}(\delta) \cap \overline{\wedge}^k \mathfrak{g}$, $\zeta_{|\Gamma} = \lambda \mathrm{id}_\Gamma$ avec $\lambda \neq 0$. Ceci implique que si $x \in \Gamma$, alors $x = \delta\left(\frac{1}{\lambda}\delta^*(x)\right) \in \mathrm{Im}(\delta)$. Ainsi toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{Ker}(\delta) \cap \overline{\wedge}^k \mathfrak{g}$ sont incluses dans $\mathrm{Im}(\delta) \cap \overline{\wedge}^k \mathfrak{g}$, donc $\mathrm{Ker}(\delta) \cap \overline{\wedge}^k \mathfrak{g} = \mathrm{Im}(\delta) \cap \overline{\wedge}^k \mathfrak{g}$. Par conséquent, la suite est exacte. □

3.5 Clôtures d'orbites et ensembles de racines

Le résultat sur les orbites de Y s'accorde avec les propriétés de la compactification magnifique. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\sigma_{|\mathfrak{h}} = -\mathrm{id}_\mathfrak{h}$. Il s'en suit que $\sigma(\Phi) = -\Phi$ avec Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

1. Notons $\mathfrak{p}_i$ la sous-algèbre parabolique engendrée par $\mathfrak{b}$ avec $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ et par $\mathfrak{g}_{-\alpha_j}$ où j parcourt $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, l\}$, avec $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ la base de Φ en accord avec $\mathfrak{b}$. Les clôtures des orbites correspondant aux $\mathfrak{p}_i$ sont les l hypersurfaces S_{α_i}.

2. Les autres clôtures d'orbites sont données par $S_I = \cap_{\alpha \in I} S_\alpha$ avec $I \subset \Delta$.

Maintenant, expliquons la correspondance entre les clôtures des orbites et les sous-ensembles de Δ. Notons par $\mathfrak{b}^-$ la sous-algèbre de Borel engendrée par $\mathfrak{h}$ et $x_{-\alpha}$ (avec $\alpha \in \Delta$), $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}^-, \mathfrak{b}^-]$, N le groupe adjoint de $\mathfrak{n}$, et T le tore maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Posons

$$Y_{\mathfrak{h}} = \{U \in Y \text{ tel que } U \cap \mathfrak{b}^- = \mathfrak{h}\}.$$

Si U appartient à $Y_{\mathfrak{h}}$, alors le Lemme 14 et son corollaire montre que $U = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{C}(x_\alpha + a_\alpha x_{-\alpha})$. Par conséquent, $Y_{\mathfrak{h}}$ est un voisinage affine de $\mathfrak{b}$, et

$$\begin{array}{cccc} p: & \mathbb{C}^\Delta & \to & Y_{\mathfrak{h}} \\ & (t_\alpha)_{\alpha \in \Delta} & \mapsto & \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{C}(x_\alpha + t_\alpha x_{-\alpha}) \end{array}$$

est un isomorphisme T-équivariant, donc $\dim Y_{\mathfrak{h}} = l$. En effet, l'action de T sur $\mathbb{C}^\Delta$ est définie par $e^h \cdot (t_\alpha)_{\alpha \in \Delta} = (e^{\alpha(h)} t_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$.

Prouvons qu'il existe une correspondance entre les clôtures des G-orbites de Y et les clôtures des T-orbites de $\mathbb{C}^\Delta$. Les T-orbites de $\mathbb{C}^\Delta$ sont de la forme $(\mathbb{C}^*)^I$ avec I un sous-ensemble de Δ. Donc les clôtures de celles-ci sont $\mathbb{C}^I$, avec I un sous-ensemble de Δ.

Proposition 14. *Le morphisme*

$$\begin{array}{cccc} \psi: & N \times Y_{\mathfrak{h}} & \to & Y \\ & (n, U) & \mapsto & n.U \end{array}$$

est une immersion ouverte.

Remarque. Un des résultats principaux de l'article de Brion-Luna-Vust ([BLV86]) appliqué au groupe B^- assure l'existence d'une sous-variété affine A de Y stable par T tel que

1) $N \cdot A$ est un ouvert de Y,

2) l'opération de N dans Y induit un isomorphisme de variétés algébriques $N \times A \to N \cdot A$.

La sous-variété $Y_{\mathfrak{h}}$ est un exemple de ces variétés affines.

Démonstration. Si n_1, n_2 appartiennent à N, et U_1, U_2 sont deux éléments de $Y_{\mathfrak{h}}$ tels que $n_1.U_1 = n_2.U_2$, alors $n_2^{-1} n_1.\mathfrak{h} = (n_2^{-1} n_1.U_1) \cap \mathfrak{b}^- = U_2 \cap \mathfrak{b}^- = \mathfrak{h}$, c'est-à-dire $n_2^{-1} n_1 = 1$ (le normalisateur d'un tore ne contient aucun élément unipotent), donc $U_1 = U_2$: ψ est injective. De plus, $\dim N \times Y_{\mathfrak{h}} = \dim Y$ implique que ψ est dominant, et donc que ψ est birationnelle. Grâce à un corollaire au théorème principal de Zariski, ψ étant birationnelle à fibres finies et Y étant lisse, ψ est un isomorphisme entre X et un ouvert de Y. $\square$

Soient O une orbite de Y et $U \in O$. Rappelons que $\mathfrak{p}_U = U + [U,U]$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, donc il existe un sous-ensemble S de Φ^+ tel que $\mathfrak{p}_U$ est conjuguée à $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \sum_{\alpha\in S} \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Maintenant, construisons un élément V de $Y_{\mathfrak{h}}$ tel que $\mathfrak{p} = V + [V,V]$:

$$V = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+\setminus S} \mathbb{C}x_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha\in S} \mathbb{C}(x_\alpha + x_{-\alpha}).$$

Puisque $\mathfrak{p}_U$ et $\mathfrak{p}$ sont conjugués, la Proposition 12 implique que V et U sont conjugués, donc $O \cap Y_{\mathfrak{h}} \neq \emptyset$.

Proposition 15. *Il existe une bijection entre les clôtures des T-orbites de $Y_{\mathfrak{h}}$ et les clôtures des G-orbites de Y, définie comme suit :*

$$\begin{array}{ccc} \{ \textit{ clôtures des } G\textit{-orbites de } Y \ \} & \longleftrightarrow & \{ \textit{ clôture des } T\textit{-orbites de } Y_{\mathfrak{h}} \ \} \\ \overline{O} & \mapsto & \overline{O} \cap Y_{\mathfrak{h}}. \end{array}$$

Cette application préserve les inclusions. De plus, les clôtures des G-orbites de Y sont lisses.

Nous avons démontré que la variété Y est isomorphe à la compactification magnifique, cette dernière proposition est donc immédiate d'après le théorème 10. Nous proposons ici une démonstration directe avec la variété Y.

Démonstration. Soit $\overline{O}$ une clôture d'une G-orbite de Y. Le fermé $\overline{O} \cap \psi(N \times Y_{\mathfrak{h}})$ de $\psi(N \times Y_{\mathfrak{h}})$ est T-stable et N-stable, donc il existe un sous-ensemble I de Δ tel que $\overline{O} \cap \psi(N \times Y_{\mathfrak{h}}) = \psi(N \times \mathbb{C}^I)$. Mais $\overline{O} \cap \psi(N \times Y_{\mathfrak{h}})$ est un ouvert de $\overline{O}$, donc $\overline{O} = \overline{\psi(N \times \mathbb{C}^I)}$. Ceci implique que $\overline{O} \mapsto \overline{O} \cap Y_{\mathfrak{h}}$ est une injection.

Puisque Y a 2^l orbites et le cardinal de $\mathcal{P}(\Delta)$ est égal à 2^l, nous obtenons une bijection.

Il est clair que $\overline{O} \cap \psi(N \times Y_{\mathfrak{h}}) \simeq N \times \mathbb{C}^I$ est un ouvert lisse de $\overline{O}$. Si le lieu singulier de $\overline{O}$ est non vide, c'est un fermé stable par G, donc il rencontre $\overline{O} \cap \psi(N \times Y_{\mathfrak{h}})$, ce qui impose la lissité de $\overline{O}$. □

Remarque. Soit $\overline{O}$ la clôture d'une G-orbite de Y. Il existe $I \in \mathcal{P}(\Delta)$ tel que $\overline{O} = \overline{\psi(N \times \mathbb{C}^I)}$.

(a) Nous avons codim $\bar{O} = \sharp(\Delta \setminus I)$.

(b) Pour $\alpha \in \Delta$, nous définissons $S_\alpha = \overline{\psi(N \times \mathbb{C}^{\Delta\setminus\{\alpha\}})}$. Tous les fermés S_α sont de codimension 1, et la famille $\{S_\alpha\, ,\, \alpha \in \Delta\}$ est transverse.

Chapitre 4

Exemples de compactifications

Intéressons-nous à appliquer les résultats du chapitre 3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang l, G son groupe adjoint, et σ une involution de G. Supposons qu'il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\sigma_{|\mathfrak{h}} = -\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$. Il existe donc une base de $\mathfrak{g}$ telle que σ échange les vecteurs radiciels correspondant à des racines opposées (ceci se réfère aux automorphismes d'algèbres de Lie *épinglées* décrites dans [Bou90]). L'espace symétrique $X = G/G^{\sigma}$ est donc unique, à isomorphisme près, et son rang est égal à l. Dans ce chapitre, nous allons traiter des compactifications magnifiques minimales de X, de rang 2, dans le cas des algèbres de Lie de type A_2, B_2 et G_2.

Pour les algèbres de Lie classiques, il existe des compactifications naturelles de X. En effet, le paragraphe 1.4 du chapitre 4 de [OVG94]) explicite l'involution de Cartan, le tableau suivant rassemble les compactifications naturelles de X issue de cette description. Celles-ci ne sont pas magnifiques, mais sont birationnellement équivalentes à $\bar{X}$.

$\mathfrak{g}$	Rang	Équivalent birationnel
$\mathfrak{sl}(n+1)$	n	$\mathbb{P}(S^2\mathbb{C}^{n+1})$
$\mathfrak{sp}(2n)$	n	$\mathrm{Hilb}_2\left(I\mathbb{G}(n,2n)\right)$
$\mathfrak{so}(2n)$	n	$\mathbb{G}(n,2n)/\sim$
$\mathfrak{so}(2n+1)$	n	$\mathbb{G}(n,2n+1)$

Pour la seconde ligne, l'équivalent est la variété de Hilbert de deux points sur la grassmannienne isotrope $I\mathbb{G}(n,2n)$, et pour la troisième ligne, l'équivalence $\sim$ sur la grassmanienne $\mathbb{G}(n,2n)$ identifie un sous-espace et son orthogonal.

Remarque. Dans le cas de $\mathfrak{sl}(n+1)$, la compactification magnifique est isormorphe à la variétés des quadriques complète. Nous la détaillerons dans le cas de $\mathfrak{sl}(3)$.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est de rang 2, il existe d'après [Ruz08] une seule compactification lisse G-équivariante de groupe de Picard de rang 1 d'un espace symétrique de rang l, et il donne de plus leurs descriptions géométriques. Plus particulièrement, dans le cas de G_2, nous retrouvons notre compactification magnifique minimale.

4.1 Le cas A_2

Prenons une base (e_1, e_0, e_{-1}) de $V = \mathbb{C}^3$, la représentation standard de $\mathfrak{sl}(3)$ (voir 1.1.1), et considérons la forme quadratique $q = (e_1^\vee)^2 + (e_0^\vee)^2 + (e_{-1}^\vee)^2$. Le morphisme $\sigma : PSL(3) \to PSL(3)$ qui envoie $[g]$ sur $[\beta_V^{-1}\,{}^t g^{-1} \beta_V]$ ($\beta_V : V \to V^\vee$ étant la forme polaire de q) est une involution, et $PSL(3)^\sigma = PSO(3)$. Notons $\bar{X}$ la compactification magnifique (minimale) de l'espace symétrique $PSL(3)/PSO(3)$.

Il est bien connu, d'après [DCP83], que la compactification magnifique minimale de $PSL(3)/PSO(3)$ est la variété des coniques complètes. Nous en rappelons une définition ci-après.

Définition-Propriété 1. *Soit $S^2V^\vee$ l'espace vectoriel des coniques de V. La clôture Z du graphe du morphisme de dualité dans $\mathbb{P}(S^2V^\vee) \times \mathbb{P}(S^2V)$, défini par*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(S^2V^\vee) & \dashrightarrow & \mathbb{P}(S^2V) \\ q & \mapsto & \wedge^2 q, \end{array}$$

est appelée la variété des coniques complètes, et l'application $p : Z \to \mathbb{P}(S^2V^\vee)$ est l'éclatement de $\mathbb{P}(S^2V^\vee)$ le long de la surface de Veronese (coniques de rang 1 sur V).

Nous nous référons à l'annexe de [Tha99] pour plus de détails.

Puisque X est de rang 2, l'application des résultats du chapitre précédent permet de calculer les équations de $\bar{X}$, nous plongerons ainsi $\bar{X}$ dans un espace projectif de dimension 27. D'un autre côté, le calcul des équations de la variété des coniques complètes induit un plongement de Z dans ce même espace projectif. Nous terminerons en construisant un isomorphisme entre $\bar{X}$ et Z. Nous aurons donc démontrer avec un point de vue plus géométrique que la variété des coniques complètes est la compatification magnifique minimale de $PSL(3)/PSO(3)$.

Commençons dans un premier temps par décrire les équations de Z. Appelons la surface de Veronese $\mathcal{V}_2$ l'image par le morphisme $\mathbb{P}(V^\vee) \to \mathbb{P}(S^2V^\vee)$. Si J est le faisceau des équations de $\mathcal{V}_2$ dans $\mathbb{P}(S^2V^\vee)$, alors nous avons la suite exacte

$$0 \to J(3) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2V^\vee)}(3) \to \mathcal{O}_{\mathcal{V}_2}(3) \to 0.$$

Puisque $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2}(3)) = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(6)) = S^6V$, la suite exacte induit en cohomologie

$$0 \to \mathrm{H}^0(J(3)) \to S^3S^2V \to S^6V \to \mathrm{H}^1(J(3)) \to \cdots .$$

Or $S^3S^2V = \Gamma_{6,0} \oplus \Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}$ et $S^6V = \Gamma_{6,0}$, avec $\Gamma_{a,b}$ la représentation irréductible de plus haut poids $aw_1 + bw_2$ (w_1, w_2 étant les poids fondamentaux de $\mathfrak{sl}(3)$), d'où $\mathrm{H}^0(J(3)) = \Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}$. Finalement, nous obtenons une immersion de Z dans $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$ grâce au lemme suivant.

Lemme 21. *Le faisceau $J(3)$ est très ample sur Z.*

Démonstration. D'après [Wey03], nous avons une résolution de la surface de Veronese $\mathcal{V}_2$:

$$0 \to V(-4) \to \mathfrak{sl}(V)(-3) \to S^2V^\vee(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2V^\vee)} \to \mathcal{O}_{\mathcal{V}_2} \to 0.$$

Ainsi $S^2V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2V^\vee)} \twoheadrightarrow J(2)$ montre-t-elle que $J(2)$ est engendré par ses sections $W = \mathrm{H}^0(J(2))$.

L'application surjective $W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2V^\vee)}(1) \twoheadrightarrow J(3)$ induit un morphisme $\mathrm{Proj}(I) \hookrightarrow \mathrm{Proj}(W(1))$, c'est-à-dire $Z \hookrightarrow \mathbb{P}(W^\vee) \times \mathbb{P}(S^2V^\vee)$. Le faisceau $J(3)$ étant l'image réciproque de $W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2V^\vee)}(1)$, faisceau très ample sur $\mathbb{P}(W^\vee) \times \mathbb{P}(S^2V^\vee)$, $J(3)$ est donc très ample sur Z. □

Remarque. Dans un cadre plus général, soient $\mathcal{V}$ une sous-variété de $\mathbb{P}(W)$ et I le faisceau des équations de $\mathcal{V}$. Si I est engendré par ses sections sur $\mathcal{V}$, alors $I \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ est un faisceau très ample sur $\mathrm{Proj}(I)$. La démonstration est analogue à la fin de celle du Lemme 21.

Nous finissons notre description avec le diagramme commutatif suivant (chaque flèche étant un plongement) :

$$\begin{array}{ccc} Z = P \cap S & \to & P := \mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S := \mathbb{P}(S^2V^\vee) \times \mathbb{P}(S^2V) & \to & \mathbb{P}(S^2V^\vee \otimes S^2V) \end{array}$$

Remarque. La variété Z peut être définie par :

$$Z = \{([q \otimes q']) \in \mathbb{P}(S^2V^\vee \otimes S^2V) \,\text{tels que}\, qq' \in \mathbb{C}\mathrm{Id}_{V^\vee}\}$$

avec $qq' \; : \; V^\vee \xrightarrow{q'} V \xrightarrow{q} V^\vee$. Les clôtures des orbites se déduisent facilement de cette description : une s'obtient lorsque $\mathrm{rg}\, q = 1$, une autre avec $\mathrm{rg}\, q' = 1$, et l'intersection des deux (l'orbite fermée).

Nous allons montrer, grâce aux équations, que $\bar{X}$ se plonge dans $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$. Ensuite, nous établirons l'isomorphisme entre Z et $\bar{X}$, puisque les deux variétés sont plongées dans le même espace projectif.

4.1.1 Équation de la compactification

Rappelons que Y est la variété des espaces annulateurs maximaux pour $(\mathfrak{sl}(3), w)$. Nous avons vu dans la section 3.3 que le faisceau des équations de Y dans $\mathbb{G}(5, \mathfrak{sl}(3))$ (et donc de $\bar{X}$ dans $\mathbb{G}(3, \mathfrak{sl}(3))$) est l'image $I_{\bar{X}}$ de $\bigwedge^3 K \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}(5,\mathfrak{sl}(3))}$. Donc, grâce à la proposition 13 pour $\mathfrak{sl}(3)$, $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1))$ est un sous-module de $\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(3)$. De plus, $\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(3)$ est isomorphe à $\bigwedge^2 \mathfrak{sl}(3) \oplus \mathbb{C} \oplus \Gamma_{2,2}$, et $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1))$ contient $\bigwedge^2 \mathfrak{sl}(3)$. Deux cas apparaissent :

i. Si $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1)) = \bigwedge^2 \mathfrak{sl}(3) \oplus \Gamma_{2,2}$, alors $\bar{X}$ vérifie les équations de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, et donc $\bar{X}$ est un point.

ii. Si $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1)) = \bigwedge^2 \mathfrak{sl}(3) \oplus \mathbb{C}$, alors $\bar{X} \subset \mathbb{P}(\Gamma_{2,2})$. Mais les éléments qui ne sont pas dans l'orbite fermée de $\bar{X} \subset \mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(3))$ ont des composantes suivant $\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(3)$ dont l'image par δ est non nulle (voir le Lemme 14 pour plus d'explications).

Par conséquent, $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1)) = \bigwedge^2 \mathfrak{sl}(3)$. En particulier, $\bar{X}$ vérifie les équations de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(3))$. Résumons les résultats obtenus.

Lemme 22. *La compactification magnifique est l'intersection de* $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$ *et* $\mathbb{G}(3, \mathfrak{sl}(3))$ *dans* $\mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(3))$.

4.1.2 Isomorphisme

En utilisant le fait que Z et $\bar{X}$ s'identifient à des sous-variétés de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$, nous allons construire l'isomorphisme entre la compactification magnifique et la variété des coniques complètes.

Théorème 15. *Il existe un automorphisme $PSL(3)$-équivariant de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$ qui induit un isomorphisme entre $\bar{X}$ et Z.*

Résumons les informations des paragraphes précédents dans le diagramme suivant (chaque flèche étant un plongement).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\wedge^3 \mathfrak{sl}(3)) & & \mathbb{P}(S^2V^\vee \otimes S^2V) \\
& \mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\bar{X} \arrow[uu] \arrow[ur] & & Z \arrow[uu] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Expliquons l'idée générale de la preuve du Théorème 15. Nous montrerons qu'il existe une application rationnelle
$\mathbb{P}(\wedge^3 \mathfrak{sl}(3)) \cdots \to \mathbb{P}(S^2V^\vee \otimes S^2V)$ dont la restriction à $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$ est un automorphisme. Ainsi, nous décrirons un point général de $\bar{X}$ et un point général de Z dans les mêmes coordonnées, celles données par $\mathbb{P}(S^2V^\vee \otimes S^2V)$. Il sera donc plus simple de déterminer explicitement un automorphisme $PSL(3)$-équivariant de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$ qui envoie $\bar{X}$ sur Z.

Démonstration. Il est suffisant de construire un automorphisme $PSL(3)$-équivariant de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$ qui envoie un élément de l'orbite ouverte de $\bar{X}$ sur un élément de l'orbite ouverte de Z. Nous allons construire celui-ci comme composée de deux automorphismes.

Le premier automorphisme. Puisque $\mathfrak{sl}(3)$ est un sous-module de $V \otimes V^\vee$, $\wedge^3 \mathfrak{sl}(3)$ s'envoie naturellement dans $\bigwedge^3(V \otimes V^\vee)$. Étudions la composée de morphismes de $\mathfrak{sl}(3)$-modules Ψ définie par

$$\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(3) \to V \otimes V \otimes V \otimes V^\vee \otimes V^\vee \otimes V^\vee \to V \otimes V \otimes V^\vee \otimes V^\vee \to S^2V \otimes S^2V^\vee.$$

Cette application envoie $(x_1 \otimes y_1^\vee) \wedge (x_2 \otimes y_2^\vee) \wedge (x_3 \otimes y_3^\vee)$, un élément de $\wedge^3 \mathfrak{sl}(3)$, sur

$$\sum_{\tau \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\tau)\, y^\vee_{\tau(1)}(x_{\tau(3)})\, x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \otimes y^\vee_{\tau(2)} y^\vee_{\tau(3)},$$

avec $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de trois éléments, ε la signature. Ainsi la restriction $\Psi : \mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}) \to \mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$ est un automorphisme $PSL(3)$-équivariant (il suffit pour cela de montrer que les images de w et d'un vecteur de plus haut poids de $\Gamma_{2,2}$ par Ψ sont non nulles).

Prenons $\mathfrak{so}(q)$, un point de l'orbite ouverte de $\bar{X}$, décrit dans $\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(3)$ sous la forme $(e_1 \otimes e_2^\vee - e_2 \otimes e_1^\vee) \wedge (e_2 \otimes e_3^\vee - e_3 \otimes e_2^\vee) \wedge (e_1 \otimes e_3^\vee - e_3 \otimes e_1^\vee)$. Alors Ψ envoie ce point sur $(e_1^2 + e_0^2 + e_{-1}^2) \otimes ((e_1^\vee)^2 + (e_0^\vee)^2 + (e_{-1}^\vee)^2) + z^2$, avec $z = e_1 \otimes e_1^\vee + e_2 \otimes e_2^\vee + e_3 \otimes e_3^\vee$.

Le second automorphisme. Comme $q = (e_1^\vee)^2 + (e_0^\vee)^2 + (e_{-1}^\vee)^2$ est une conique non dégénérée sur V, et $q^\vee = e_1^2 + e_0^2 + e_{-1}^2$ est sa conique duale, il s'en suit que $q \otimes q^\vee$ est un point de l'orbite ouverte de Z. De plus, la composante de $q \otimes q^\vee$ suivant le facteur $\mathbb{C}$ dans $\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}$ est $1/2z^2$, donc $\phi = \mathrm{id}_{\Gamma_{2,2}} + \frac{1}{3}\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, et l'automorphisme de $\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}$ envoie $q \otimes q^\vee + z^2$ sur $q \otimes q^\vee$.

En conclusion, la composée $\phi \circ \Psi$ est un automorphisme $PSL(3)$- équivariant de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$ qui envoie un point de l'orbite ouverte de $\bar{X}$ sur un point de l'orbite ouverte de Z. Nous obtenons donc un automorphisme de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C})$, qui induit un morphisme bijectif birationnel entre $\bar{X}$ et Z. Par lissité de $\bar{X}$ et Z, c'est un isomorphisme. □

4.1.3 Le gradué de la compactification

Définissons le gradué associé à la compactification magnifique $\bar{X}$ comme étant

$$S_{\bar{X}} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}(n)).$$

Dans ce paragraphe, nous allons établir que le gradué associé à la compactification est un anneau de Gorenstein, quotient du gradué $S_{\mathbb{G}} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,\mathfrak{sl}(3))}(n))$ associé à la grassmannienne $\mathbb{G}(3, \mathfrak{sl}(3))$ par $\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{H}^0(I(n))$.

Proposition 16. *La suite*

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{H}^0(\wedge^3 K(n)) \to S_{\mathbb{G}} \to S_{\bar{X}} \to 0$$

est exacte.

Rappelons la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to I_{\bar{X}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,\mathfrak{sl}(3))} \to \mathcal{O}_{\bar{X}} \to 0.$$

Si, pour tout n entier positif, $H^1(I_{\bar{X}}(n)) = 0$, alors la suite

$$0 \to \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(n)) \to S_{\mathbb{G}} \to S_{\bar{X}} \to 0$$

est exacte. De plus, la surjectivité de $\mathrm{H}^0(\wedge^3 K(n)) \to \mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(n))$ pour n entier positif termine la preuve de la Proposition 16. Nous avons donc établi que la Proposition 16 se déduit du lemme suivant.

Lemme 23. *Soit n un entier positif. Nous avons les résultats suivants :*

(i) $H^i(I_{\bar{X}}(n)) = 0$ *pour* $0 < i \leq \dim \bar{X} = 5$ *et* $n \in \mathbb{Z}$ *;*

(ii) $\mathrm{H}^0(\wedge^3 K(n)) \to \mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(n))$ *est surjective pour* $n \in \mathbb{N}$.

Utilisons la résolution suivante (complexe de Koszul) :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,\mathfrak{sl}(3))}(-6) = \bigwedge^{10} \bigwedge^{3} K \to \bigwedge^{9} \bigwedge^{3} K \to \cdots \to \bigwedge^{2} \bigwedge^{3} K \to \bigwedge^{3} K \to I_{\bar{X}} \to 0. \quad (4.1)$$

Puisque $\operatorname{codim} \bar{X} = \operatorname{rg} \bigwedge^3 K = 10$, la suite est exacte. Ainsi, une condition suffisante pour montrer (ii) est de prouver que les groupes de cohomologies $\mathrm{H}^i(\wedge^i \wedge^3 K(n))$ sont nuls, pour i compris entre 1 et 10, et n entier positif. Dans la preuve, nous allons démontrer un résultat plus fort : $\mathrm{H}^i(\wedge^j \wedge^3 K(n)) = 0$ pour i entier positif non nul différent de 15, $1 \leq j \leq 10$, et $(i,j,n) \notin \{(3,6,2),(12,4,-4)\}$. Nous utiliserons les suites spectrales pour montrer (i).

Démonstration. Chaque terme de la suite exacte (4.1) se décompose en représentations irréductibles de $GL(\mathfrak{sl}(3))$ (notons $\mathbb{S}_\lambda$ le foncteur de Schur de partition λ). Nous utilisons la Proposition 2.3.9 de [Wey03] pour obtenir les résultats suivants.

(1) $\wedge^3 K = \mathbb{S}_{1,1} K^\vee(-1)$.

(2) $\wedge^2 \wedge^3 K = \wedge^2 \wedge^2 K^\vee(-2) = \mathbb{S}_{2,1,1} K^\vee(-2)$.

(3) $\wedge^3 \wedge^3 K = \wedge^3 \wedge^2 K^\vee(-3) = \mathbb{S}_{3,1,1,1} K^\vee(-3) \oplus \mathbb{S}_{2,2,2} K^\vee(-3)$.

(4) $\wedge^4 \wedge^3 K = \mathbb{S}_3 K^\vee(-3) \oplus \mathbb{S}_{3,2,2,1} K^\vee(-4)$.

(5) $\wedge^5 \wedge^3 K = \mathbb{S}_{3,1,1} K^\vee(-4) \oplus \mathbb{S}_{3,3,2,1} K^\vee(-5)$.

(6) $\wedge^6 \wedge^3 K = \mathbb{S}_{3,2,1,1} K^\vee(-5) \oplus \mathbb{S}_{3,3,3,3} K^\vee(-6)$.

(7) $\wedge^7 \wedge^3 K = \mathbb{S}_{2,2} K^\vee(-5) \oplus \mathbb{S}_{3,2,2,2} K^\vee(-6)$.

(8) $\wedge^8 \wedge^3 K = \mathbb{S}_{2,2,1,1} K^\vee(-6)$.

(9) $\wedge^9 \wedge^3 K = \mathbb{S}_{1,1,1} K^\vee(-6)$.

(10) $\wedge^{10} \wedge^3 K = \mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,\mathfrak{sl}(3))}(-6)$.

L'idée est de calculer le i-ième groupe de cohomologie pour chaque représentation irréductible apparaissant dans $\wedge^j \wedge^3 K(n)$, pour chaque n entier positif. La méthode étant analogue pour chaque terme, nous choisirons d'en détailler un seul. Par exemple, calculons $\mathrm{H}^i(\mathbb{S}_{3,3,3,3} K^\vee(n-6))$ pour n entier, i entier positif (ce cas correspondant à $j = 6$).

Puisque $\mathbb{S}_{3,3,3,3} K^\vee(n-6) = \mathbb{S}_\gamma K^\vee$ où $\gamma = (n-3, n-3, n-3, n-3, n-6, 0, 0, 0)$, nous pouvons appliquer le Théorème de Bott (Corollaire 4.1.9 de [Wey03]). Pour cela, notons $\rho = (7,6,5,4,3,2,1,0)$, et remarquons que quatre cas apparaissent.

i. Si $n \geq 6$, alors il n'existe pas d'élément τ du groupe des permutations $\mathcal{S}_8$ différent de 1 tel que $\tau(\gamma+\rho) = \gamma+\rho$. De plus, γ vérifie $\gamma_i \geq \gamma_{i+1}$ pour tout i. Nous obtenons donc que $\mathrm{H}^i(\mathbb{S}_{3,3,3,3} K^\vee(n-6)) = 0$ pour tout $i > 0$.

ii. Si $n \leq -5$, alors $\gamma + \rho = (n+4, n+3, n+2, n+1, n-3, 2, 1, 0)$, et donc aucun élément $\tau \in \mathcal{S}_8$ différent de 1 ne vérifie $\tau(\gamma+\rho) = \gamma+\rho$. De plus, il existe un unique $\tau \in \mathcal{S}_8$ de longueur 15 tel que $\tau(\gamma+\rho) = \lambda+\rho$, vérifiant $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Par suite, $\mathrm{H}^i(\mathbb{S}_{3,3,3,3} K^\vee(n-6)) = 0$ pour tout $i \neq 15$.

iii. Si $-4 \leq n \leq 5$ et $n \neq 2$, alors $\gamma+\rho = (n+4, n+3, n+2, n+1, n-3, 2, 1, 0)$, et donc il existe $\tau \in \mathcal{S}_8$ différent de 1 tel que $\tau(\gamma+\rho) = \gamma+\rho$. Par suite, $\mathrm{H}^i(\mathbb{S}_{3,3,3,3} K^\vee(n-6)) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

iv. Si $n = 2$, alors $\gamma + \rho = (6, 5, 4, 3, -1, 2, 1, 0)$. Il n'existe donc pas d'élément τ du groupe des permutations $\mathcal{S}_8$ différent de 1 tel que $\tau(\gamma + \rho) = \gamma + \rho$. Par suite, $\mathrm{H}^i(\mathbb{S}_{3,3,3,3}K^\vee(-4)) = 0$ pour tout $i \neq 6$, et $\mathrm{H}^6(\mathbb{S}_{3,3,3,3}K^\vee(-4)) = \mathbb{S}_{1,1,1,1,1,1,1,1}\mathfrak{sl}(3) = \mathbb{C}$.

Le dernier cas apparaît si γ vérifie la condition d'existence d'un i dans $\{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\gamma_i \geq \gamma_{i+1} + 3$, ce qui n'est possible que dans (4) et (6).

(i) Notons $E_1^{-j,i}[n] = \mathrm{H}^i(\wedge^{j+1} \wedge^3 K(n))$. En utilisant les suites spectrales à partir du complexe exact (4.1), nous construisons les termes à « l'infini » $E_\infty^{-j,i}[n]$. Nous obtenons donc une filtration de $\mathrm{H}^i(I_{\bar{X}}(n))$ dont le gradué associé est $\oplus_j E_\infty^{-j,j+i}[n]$. Compte tenu des informations $E_1^{-j,i+j}[n] = \mathrm{H}^{i+j}(\wedge^{j+1} \wedge^3 K(n)) = 0$ pour tout $j \geq 0$, $1 \leq i \leq 5$ et n entier, nous concluons que $\mathrm{H}^i(I_{\bar{X}}(n)) = 0$ pour $1 \leq i \leq 5$, $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) découle de $\mathrm{H}^i(\wedge^i \wedge^3 K(n)) = 0$ pour $i > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. □

Corollaire 8. *L'anneau $S_{\bar{X}}$ est un anneau de Gorenstein.*

Démonstration. La variété $\bar{X}$ est définie par l'annulation d'une section d'un fibré de rang 10 et de première classe de Chern $\mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,\mathfrak{sl}(3))}(6)$ (voir (4.1)), donc $\omega_{\bar{X}} = \mathcal{O}_{\bar{X}}(-2)$. De plus, $S_{\mathbb{G}}$ étant un anneau de Gorenstein, il suffit de montrer que $S_{\bar{X}}$ est de Cohen-Macauley pour obtenir le corollaire.

En reprenant la suite exacte

$$0 \to I_{\bar{X}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,\mathfrak{sl}(3))} \to \mathcal{O}_{\bar{X}} \to 0,$$

et puisque $H^i(I_{\bar{X}}(n)) = 0$ pour $0 < i \leq \dim \bar{X} = 5$ et $n \in \mathbb{Z}$, nous obtenons que $H^i(\mathcal{O}_{\bar{X}}(n)) = 0$ pour $0 < i < 5$ et $n \in \mathbb{Z}$. Le second point de l'exercice 18.16 dans [Eis95] achève la démonstration. □

4.2 Le cas B_2

Dans un premier temps, nous décrivons l'espace symétrique X de rang 2, puis la compactification magnifique (minimale) de celui-ci.

Soient V la représentation irréductible de $\mathfrak{sp}(4)$ de dimension 4 (1.1.2) et $PSp(4)$ le groupe adjoint de $\mathfrak{sp}(4)$. Si nous identifions $V = U \oplus U^\vee$ avec U de base (e_1, e_2) et son dual de base (e_3, e_4) (U étant un sous-espace vectoriel isotropique de dimension 2), alors les éléments de $\mathfrak{sp}(4)$ s'écrivent sous la forme

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & -{}^t u \end{pmatrix},$$

avec $u \in \mathrm{Hom}(U, U)$, $v \in \mathrm{Hom}(U^\vee, U)$, et $w \in \mathrm{Hom}(U, U^\vee)$ des applications linéaires, les deux dernières étant symétriques. Soient

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_U & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_{U^\vee} \end{pmatrix}$$

et $\sigma : M \to \Sigma M \Sigma$ une involution de $\mathfrak{sp}(4)$. Ainsi $\mathfrak{sp}(4)^\sigma \simeq U \otimes U^\vee = \mathfrak{gl}(U)$, et $PSp(4)^\sigma \simeq GL(2)$.

La compactification magnifique (minimale) $\bar{X}$ de l'espace symétrique $X = PSp(4)/GL(U)$ (qui est de rang 2) est isomorphe à la variété Y introduite dans la section 3.1. Comme pour le cas A_2, $\bar{X}$ peut s'obtenir à partir d'un éclatement : expliquons ce point de vue.

Reprenons les notations du paragraphe 1.1.2) où W une représentation irréductible de $\mathfrak{so}(5)$ de dimension 5. Notons $v : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^2V)$ le plongement de Veronese. Comme $\mathcal{V} = v(\mathbb{P}(V))$ est $\mathfrak{sp}(4)$-stable de dimension 3 dans $\mathbb{P}(S^2V)$, c'est l'orbite minimale. La variété $\mathcal{V}$ est donc isomorphe à

$$\{[U] \in \mathbb{G}(2, W) \, \text{tel que} \, U \subset U^\perp\},$$

i.e. $\mathcal{V}$ s'identifie à une sous-variété de la grassmannienne $\mathbb{G}(2, W)$ des sous-espaces vectoriels totalement isotropes de W.

Théorème 16. *La compactification magnifique $\bar{X}$ de $\mathfrak{sp}(4)$ est isomorphe à $\tilde{G}$, l'éclatement de la grassmannienne $\mathbb{G}(2, W)$ le long de la Veronese $\mathcal{V}$.*

Notation. Notons $\Gamma_{a,b}$ la représentation irréductible de $\mathfrak{sp}(4)$ de plus haut poids $a\omega_1 + b\omega_2$ (ω_1, ω_2 les poids fondamentaux). Par exemple, $\mathfrak{sp}(4) \simeq \Gamma_{2,0}$.

Les propriétés de l'éclatement montrent que $\tilde{G}$ est lisse (puisque la grassmanienne est lisse) et que $\dim \tilde{G} = 6$. L'idée générale de la preuve est de plonger nos deux variétés dans le même espace projectif $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$, puis de trouver un automorphisme G-équivariant de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$ qui envoie l'une sur l'autre.

Commençons par la compactification magnifique. Si $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1))$, avec $I_{\bar{X}}$ le faisceau des équations de $\bar{X}$ dans $\mathbb{G}(6, \mathfrak{sp}(4))$, contient les équations de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$ dans $\mathbb{P}(\wedge^6 \mathfrak{sp}(4))$, alors $\bar{X}$ est incluse dans cet espace projectif.

Lemme 24. $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1)) = \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{0,3} \oplus \Gamma_{2,1} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{0,1}$.

Démonstration. Rappelons la suite exacte de $\mathfrak{sp}(4)$-modules du Lemme 18 :

$$0 \to \mathbb{C} \to \bigwedge^3 \mathfrak{sp}(4) \xrightarrow{\delta} \bigwedge^6 \mathfrak{sp}(4)/\Gamma_{2,2} \longrightarrow \bigwedge^9 \mathfrak{sp}(4) \to 0.$$

Décomposons chaque terme en modules simples via le programme *LIE* (voir [MAAvLL92]) :

$$\bigwedge^6 \mathfrak{sp}(4) = \Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{0,3} \oplus \Gamma_{2,1} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{0,1} \oplus \mathfrak{sp}(4),$$
$$\bigwedge^3 \mathfrak{sp}(4) = \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{0,3} \oplus \Gamma_{2,1} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{0,1} \oplus \mathbb{C}.$$

Nous obtenons donc que

$$\Gamma := \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{0,3} \oplus \Gamma_{2,1} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{0,1} \subset \mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1)),$$

d'où $Y \subset \mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$. De plus, $\wedge^6 \mathfrak{sp}(4) = \Gamma \oplus \Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4)$.

Choisissons U dans l'orbite ouverte de Y et u un représentant de U dans $\bigwedge^6 \mathfrak{sp}(4)$: u est un élément de $\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4)$. Si c est l'élément de Casimir de $\mathfrak{sp}(4)$, u et $c.u$ sont indépendants (choisir une base convenable de $\mathfrak{sp}(4)$ et calculer les deux éléments). Ainsi u n'appartient-il donc pas à une des deux représentations irréductibles $\mathfrak{sp}(4)$ ou $\Gamma_{2,2}$ (l'action de c est un scalaire sur un module simple). Ceci impose que Y n'est contenu dans aucun sous-espace projectif $\mathfrak{sp}(4)$-stable de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$, ce qui achève la démonstration. □

Regardons maintenant l'éclaté $\tilde{G}$. Notons $I_{\mathcal{V}}$ l'idéal des équations de la Veronese dans $\mathbb{G}(2, W)$. L'image réciproque de $I_{\mathcal{V}}(3)$ est un faisceau très ample sur $\tilde{G}$. En effet, en notant K_1 le faisceau tautologique de la grassmannienne $\mathbb{G}(2, W)$, le morphisme $S^2 K_1^\vee \simeq S^2 K_1(2) \to I_{\mathcal{V}}(2)$ est surjectif, donc $I_{\mathcal{V}}(2)$ est engendré par ses sections, et la remarque à la suite du Lemme 21 permet de conclure.

Nous en déduisons un plongement de $\tilde{G}$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(I_{\mathcal{V}}(3)))$.

Lemme 25. $\mathrm{H}^0(I_{\mathcal{V}}(3)) = \Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4)$.

Démonstration. Comme $GL(W)$-module, $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{G(2,W)}(3))$ est isomorphe à la représentation irréductible de partition $(3, 3)$ (voir la Proposition 3.14 de [Wey03]). Donc, en utilisant les formules de branchement de [FH91], nous avons la décomposition en $\mathfrak{sp}(4)$-modules simples $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{G(2,W)}(3)) = \Gamma_{6,0} \oplus \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{2,2}$. Maintenant, utilisons la suite exacte

$$0 \to I_{\mathcal{V}}(3) \to \mathcal{O}_{G(2,W)}(3) \to \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(3) \to 0,$$

avec $I_{\mathcal{V}}$ le faisceau des idéaux définissant la Veronese $\mathcal{V}$ dans $G(2, W)$. Il s'en suit que

$$0 \to \mathrm{H}^0(I_{\mathcal{V}}(3)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{G(2,W)}(3)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(3)) \to \mathrm{H}^1(I_{\mathcal{V}}(3)) \to \cdots .$$

Comme $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(3)) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(6)) = S^6 V = \Gamma_{6,0}$, alors $\mathrm{H}^0(I_{\mathcal{V}}(3)) = \Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{2,0}$. □

Finissons le paragraphe par la démonstration du théorème.

Preuve du Théorème 16. Les deux variétés $\bar{X}$ et $\tilde{G}$ sont des sous-variétés de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$. Commençons par choisir deux représentants des orbites ouvertes respectives de $\bar{X}$ et $\tilde{G}$. Ils sont naturellement stables sous $GL(U)$.

Comme la Veronese $\mathcal{V}$ et $G(2, W)$ sont G-stables, il en va de même pour $\tilde{G}$. L'assertion $V \simeq U \oplus U^\vee$ induit que $W \simeq \bigwedge^2 U \oplus \bigwedge^2 U^\vee \oplus \mathfrak{sl}(U)$. Par suite, $\bigwedge^2 U \oplus \bigwedge^2 U^\vee$ est un élément de l'orbite ouverte de $G(2, W)$ (puisque l'intersection avec son orthogonal est réduite à 0), provenant d'un unique point de $\tilde{G}$. Notons $[x]$ ce point dans $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$ invariant sous l'action de $GL(U)$.

Puisque $GL(U) \simeq G^\sigma$, $\mathfrak{gl}(U) \subset \mathfrak{sp}(4)$ est un point de l'orbite ouverte de $\bar{X}$, donc $\mathfrak{gl}(U)^\perp$ est un point de l'orbite ouverte de Y, invariant sous l'action de $GL(U)$. Notons $[y]$ ce point dans $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$.

Les deux éléments x et y ont des composantes uniquement sur les $GL(U)$-modules triviaux de $\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4)$: dénombrons-les. Un seul apparaît dans $\mathfrak{sp}(4)$; puis d'après le Lemme 18 et la décomposition en $GL(U)$-modules simples, $\Gamma_{2,2}$ en contient un autre.

Maintenant, x et y ont des composantes non triviales sur chacun de ces facteurs (si ce n'est pas le cas, $\tilde{G}$ ou Y se plongerait dans $\mathbb{P}(\mathfrak{sp}(4))$ ou $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2})$. Nous pouvons donc déterminer deux complexes non nuls α et β tels que $\phi = \alpha \mathrm{id}_{\Gamma_{2,2}} + \beta \mathrm{id}_{\mathfrak{sp}(4)}$ envoie x sur y. Le morphisme ϕ est alors un automorphisme G-équivariant de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \mathfrak{sp}(4))$ qui envoie isomorphiquement l'obite ouverte de $\tilde{G}$ sur celle de $\bar{X}$. Nous obtenons donc un morphisme bijectif birationnel entre $\tilde{G}$ et Y. Puisque $\tilde{G}$ et Y sont lisses, c'est un isomorphisme. □

4.3 Le cas G_2

Dans toute cette partie, nous considérons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de type G_2 de groupe adjoint G. Elle est de dimension 14 et de rang 2.

Décrivons l'espace symétrique en reprenant la quadralité explicitée dans la partie 2.8.1. Soient A et B deux espaces vectoriels de dimension 2, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(A) \times \mathfrak{sl}(B) \oplus A \otimes S^3 B.$$

Introduisons σ une involution de $\mathfrak{g}$, adaptée à cette décomposition : $\ker(\sigma - \mathrm{id}) = \mathfrak{sl}(A) \times \mathfrak{sl}(B)$ et $\ker(\sigma + \mathrm{id}) = A \otimes S^3 B$. La compatibilité avec le crochet résulte de la $\mathfrak{sl}(A) \times \mathfrak{sl}(B)$-graduation de $\mathfrak{g}$. Nous pouvons montrer par le calcul que $A \otimes S^3 B$ contient une sous-algèbre de Cartan, et donc l'espace symétrique $X = G/G^\sigma$ est de rang 2.

Reprenons les notations de 1.1.3, V la représentation de dimension 7 de $\mathfrak{g}$, et $e_1, \ldots, e_7$ la base décrite dans cette section. Appelons Z le fermé de $\mathbb{G}(4, V)$ des espaces annulateurs de

$$z = e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 + e_1 \wedge e_3 \wedge e_6 + e_1 \wedge e_4 \wedge e_7 + 2e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + 2e_5 \wedge e_6 \wedge e_7,$$

c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels de V de dimension 4 tels que la forme trilinéaire G-invariante z soit identiquement nulle. Nous allons montrer dans ce paragraphe le théorème suivant.

Théorème 17. *La compactification magnifique est isomorphe à l'éclatement de Z le long de l'orbite fermée.*

Pour finir, remarquons que $G^\sigma = SL(A) \times SL(B)$. Dans l'article de Ruzzi [Ruz08] figure un théorème sur les équations de $\bar{X}$, mais nous en donnons une preuve différente.

Théorème 18 (Ruzzi)**.** *La compactification $\bar{X}$ de $G/(\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2))$ est lisse de groupe de Picard de rang 1. C'est l'intersection de $\mathbb{G}(3, V)$ avec un sous-espace de $\mathbb{P}^{34}$ de dimension 27.*

4.3.1 Le schéma Z

Dans ce paragraphe, nous allons définir le schéma Z et démontrer qu'il est lisse, irréductible de dimension 8. Nous détaillerons l'orbite fermée de celle-ci (le lieu d'éclatement).

La forme bilinéaire symétrique non dégénérée β_V induit un isomorphisme entre les grassmanniennes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}(3,V) & \to & \mathbb{G}(4,V) \\ U & \mapsto & U^{\perp}. \end{array}$$

Nous identifierons Z et son image par cet isomorphisme. Détaillons les orbites de Z dans $\mathbb{G}(3,V)$ pour en déduire les propriétés sur celle-ci. L'orbite $G \cdot e_2$ est l'orbite du vecteur de plus haut poids de V : c'est l'ensemble des éléments isotropes de V pour $q = -(e_1^\vee)^2 + 2(e_2^\vee e_5^\vee + e_3^\vee e_6^\vee + e_4^\vee e_7^\vee)$. Rappelons le diagramme des vecteurs de poids de V.

$$\begin{tikzcd}
 & e_7 \arrow[drrr, "-y_2"] & & e_2 \arrow[ll, "y_1"'] & \\
e_3 \arrow[drrr, "y_2"'] & & e_1 \arrow[ll, "\frac{1}{2}y_1"'] & & e_6 \arrow[ll, "y_1"] \\
 & e_5 & & e_4 \arrow[ll, "-y_1"] &
\end{tikzcd}$$

Soit A un élément de $Z \subset \mathbb{G}(3,V)$.

(a) Supposons $A \subset A^{\perp}$. Quitte à prendre un conjugué, supposons que $e_2 \in A$. Soit e_2, v_1, v_2 une base de A, avec $v_1\,, v_2 \in \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_6 \oplus \mathbb{C}e_7$. Les conditions $\beta_V(v_1,v_2) = q(v_1) = 0$ permettent de choisir $v_1 = e_3$ et $v_2 \in \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_7$.

Or $q(v_2) = 0$ implique $v_2 = e_4$ ou $v_2 = e_7$. Mais $z(e_2,e_3,e_4) \neq 0$ impose $v_2 = e_7$. En conclusion, A est conjugué à $\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_7$.

(b) Supposons $\dim A \cap A^{\perp} \in \{1,2\}$. Nous pouvons choisir, à conjugaison près, une base v_1, v_2, v_3 de A en imposant $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2 + \lambda e_7$.

Si $\lambda \neq 0$**,** alors nous avons

$$\mathbb{C}v_2 \subset A^{\perp} \subset \mathbb{C}v_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_6 \oplus \mathbb{C}e_7 \oplus \mathbb{C}(\lambda e_5 - e_4).$$

Or $z_{|_{A^\perp}} = 0$ implique que $A^{\perp} = \mathbb{C}v_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_6 \oplus \mathbb{C}e_7$. Nous en déduisons que $v_3 = e_7$.

Si $\lambda = 0$**,** alors

$$\mathbb{C}e_2 \subset A^{\perp} \subset \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus \mathbb{C}e_6 \oplus \mathbb{C}e_7.$$

Or la condition $z_{|_{A^\perp}} = 0$ impose e_6 et e_7 à appartenir à $A^{\perp}$. Finalement $v_3 \in \mathbb{C}e_6 \oplus \mathbb{C}e_7$. Nous revenons au cas précédent en conjuguant par un élément de $\mathrm{Stab}(e_1) \cap \mathrm{Stab}(e_2)$ bien choisi.

Nous avons montré que dans ce cas, A est conjugué à $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_7$.

(c) Supposons $A \cap A^{\perp} = \{0\}$, d'où $A \oplus A^{\perp} = V$. Quitte à prendre un conjugué, choisissons une base de A de la forme : e_1, $v_1 = e_2 + \lambda e_7$, v_2. Dans ce cas, si $\lambda \neq 0$,

$$A^{\perp} \subset \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_6 \oplus \mathbb{C}e_7 \oplus \mathbb{C}(\lambda e_5 - e_4).$$

Puisque $v_1 \notin A^{\perp}$, v_2 a une composante non nulle suivant $\lambda e_5 - e_4$. Par conséquent, $\beta_V(e_7, v_2) \neq 0$ assure que e_7 n'appartient pas à $A^{\perp}$. Ceci est en contradiction avec la dimension de $A^{\perp}$, donc $\lambda = 0$.

v_2 a donc une composante non nulle suivant e_5. Par suite, $A^\perp \subset \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_6 \oplus \mathbb{C}e_7 \oplus \mathbb{C}e_4$, c'est-à-dire $v_2 = e_5$. A est donc conjugué à $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_5$.

Lemme 26. *Le fermé Z est irréductible de dimension 8, et a une unique orbite fermée, celle des sous-espaces totalement isotropes de Z pour β_V.*

Démonstration. En calculant les stabilisateurs, nous obtenons les dimensions des orbites :

Orbite	Dimension
$Z_5 = G \cdot (\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_7)$	5
$Z_7 = G \cdot (\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_7)$	7
$Z_8 = G \cdot (\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_5)$	8

En conséquence, puisque Z_8 est affine ($Z \setminus Z_8$ est donc une hypersurface de Z), $Z = \overline{Z_8}$, et Z_5 est l'orbite fermée de Z. □

Remarque. Définissons un produit vectoriel $\star$ sur V. Pour x et y deux éléments de V, $x \star y$ est l'unique élément de V tel que

$$\forall u \in V, \quad \beta_V(x \star y, u) = z(x, y, u).$$

Alors, pour les représentants des orbites décrites précédemment, nous obtenons

Z_8 : $e_1 \star e_2 = e_2$, $e_1 \star e_5 = -e_5$, $e_2 \star e_5 = 2e_1$. Ainsi $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_5$ avec le produit vectoriel est une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$.

Z_7 : $e_1 \star e_2 = e_2$, $e_1 \star e_7 = -e_7$, $e_2 \star e_7 = 0$. Ainsi $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_7$ avec le produit vectoriel est une algèbre de Lie.

Z_5 : $e_2 \star e_3 = e_7$, $e_3 \star e_7 = e_2 \star e_7 = 0$. Ainsi $\mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_7$ avec le produit vectoriel est une algèbre de Lie isomorphe à une algèbre de Heisenberg (c'est une algèbre de Lie de dimension 3 donnée par une base u, v, w, vérifiant $[u, w] = [v, w] = 0$ et $[u, v] = w$).

Puisque $z \in \wedge^3 V^\vee$, prenons la suite exacte de faisceaux

$$0 \to K_V \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,V)} \to Q_V \to 0,$$

où K_V est le faisceau tautologique et Q_V le quotient tautologique. La forme $z \in \wedge^3 V^\vee = \mathrm{H}^0(\wedge^3 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,V)})$ donne une section globale z_1 de $\mathrm{H}^0(\wedge^3 K_V^\vee)$. Comme pour Y dans la section 3.3, nous munissons Z d'une structure de schéma correspondant au lieu d'annulation de la section z_1.

Notons Q_5 l'orbite fermée de $SO(V, q)$ dans $\mathbb{P}(V)$ (celle correspondant au vecteur de plus haut poids de V) : elle est de dimension 5. En notant $\nu_2 : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^2 V)$ le morphisme de Veronese, il s'en suit que $\nu_2(Q_5)$ est une variété fermée G-stable de $\mathbb{P}(S^2 V)$.

Lemme 27. $Z_5 = \nu_2(Q_5)$.

Démonstration. En dualisant la section z_1, nous obtenons

$$^t z_1 \,:\, \wedge^3 K_V \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,V)}.$$

L'image I_Z de $^t z_1$ est le faisceau des équations de Z dans $\mathbb{G}(3,V)$. Puisque $\wedge^3 K_V(1) \simeq K_V^\vee$, $I_Z(1)$ est donc engendré par ses sections. De plus, l'espace des sections globales $\mathrm{H}^0(I_Z(1))$ est une sous-représentation de

$$\wedge^4 V \simeq S^2 V \oplus V.$$

Si $S^2V \subset \mathrm{H}^0(I_Z(1))$, alors $Z \subset \mathbb{P}(V)$, ce qui contredit $\dim Z = 8$. Ainsi, nous obtenons $\mathrm{H}^0(I_Z(1)) = V$.

Notons ζ l'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}(4,V) & \to & \mathbb{G}(31,\wedge^3 V^\vee) \\ U & \mapsto & N_U, \end{array}$$

où N_U est le noyau de l'application surjective définie au point $[U] : \wedge^3 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}(4,V),[U]} \to \wedge^3 (K_V^\vee)_{[U]}$, c'est-à-dire le noyau de $\wedge^3 V^\vee \to \wedge^3 U^\vee$. Soit

$$\Gamma_z = \{[W] \in \mathbb{G}(31,\wedge^3 V^\vee) \text{ tel que } z \in W\}.$$

C'est un hyperplan de $\mathbb{G}(31,\wedge^3V^\vee)$, lisse puisque z est général. Alors, d'après le théorème de Kleiman (cf. [Har77]), il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $GL(\wedge^3 V^\vee)$ tel que, pour tout $g \in \mathcal{U}$, $\Gamma_{g\cdot z} \times_{\mathbb{G}(31,\wedge^3V^\vee)} \mathbb{G}(4,V)$ est soit vide, soit lisse de codimension 4.

Prenons $g_0 \in \mathcal{U}$. L'isomorphisme $g_0^{-1} \,:\, \Gamma_{g\cdot z} \to \Gamma_z$ s'étend en un isomorphisme entre $\Gamma_{g_0\cdot z} \times_{\mathbb{G}(31,\wedge^3V^\vee)} \mathbb{G}(4,V)$ et $\Gamma_z \times_{\mathbb{G}(31,\wedge^3V^\vee)} \mathbb{G}(4,V)$. Cette dernière variété, non vide, est isomorphe à une variété a fortiori non vide, donc lisse : $\Gamma_z \times_{\mathbb{G}(31,\wedge^3V^\vee)} \mathbb{G}(4,V)$ est lisse. Nous finissons la preuve en remarquant que

$$\Gamma_z \times_{\mathbb{G}(31,\wedge^3V^\vee)} \mathbb{G}(4,V) = \{[U] \in \mathbb{G}(4,V) \text{tel que } z_{|V/U} = 0\} = Z. \qquad \square$$

Intéressons-nous maintenant au lieu d'éclatement de Z. Notons Q_5 l'orbite fermée de $SO(V,q)$ dans $\mathbb{P}(V)$ (celle correspondant au vecteur de plus haut poids de V) : elle est de dimension 5. En notant $\nu_2 \,:\, \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^2V)$ le morphisme de Veronese, il s'en suit que $\nu_2(Q_5)$ est une variété fermée G-stable de $\mathbb{P}(S^2V)$.

Lemme 28. $Z_5 = \nu_2(Q_5)$.

Démonstration. La variété $\nu_2(Q_5)$ est un fermé G-stable de $\mathbb{P}(S^2V)$, donc réunion d'orbites de dimension inférieure ou égale à 5. Comme Z_5 est la seule variété vérifiant cette condition, nous pouvons conclure. $\square$

Remarque. Si $I\mathbb{G}(3,V)$ est la grassmannienne des sous-espaces totalement isotropes pour β_V, alors $Z \cap I\mathbb{G}(3,V) = Z_5$.

Notons I_{Z_5} l'idéal des équations de Z_5 dans Z. Définissons $\tilde{Z}$ l'éclaté de Z le long de Z_5 : $\tilde{Z} = \mathrm{Proj}(I_{Z_5})$. C'est une variété lisse de dimension 8.

Nous allons donc montrer que la compactification magnifique de rang 2 est isomorphe à $\tilde{Z}$. Comme pour $\mathfrak{sp}(4)$, nous allons utiliser un espace projectif intermédiaire $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \mathbb{C})$, où $\Gamma_{a,b}$ désigne la représentation irréductible de plus haut poids $aw_1 + bw_2$ (w_1, w_2 étant les poids fondamentaux).

4.3.2 Un morphisme de $\tilde{Z}$ dans $\mathbb{P}$

Lemme 29. *Le faisceau $I_{Z_5}(3)$ est très ample sur $\tilde{Z}$.*

Démonstration. D'après le lemme de Kostant énoncé dans [Gru00], Q_5 étant l'orbite des vecteurs de plus haut poids de $\Gamma_{2,0}$, elle est intersection de quadriques. En notant $I_{Q_5/\mathbb{P}(S^2V)}$ l'idéal des équations de Q_5 dans $\mathbb{P}(S^2V) = \mathbb{P}(\Gamma_{2,0} \oplus \mathbb{C})$, $I_{Q_5/\mathbb{P}(S^2V)}(2)$ est alors engendré par ses sections. La suite exacte

$$0 \to I_{Z_5/\mathbb{P}(S^2V)}(2) \to I_{Z/\mathbb{P}(S^2V)}(2) \to I_{Z_5}(2) \to 0$$

assure que $I_{Z_5}(2)$ est engendré par ses sections. Par conséquent, la remarque suivant le Lemme 21 assure que $I_{Z_5}(3)$ est un faisceau très ample sur $\tilde{Z}$. □

Il existe donc une immersion notée ψ de $\tilde{Z}$ dans $\mathbb{P}(H^0(I_{Z_5}(3)))$. Il reste à déterminer les sections globales de $I_{Z_5}(3)$.

Lemme 30. $\mathrm{H}^0(I_{Z_5}(3)) = \Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \mathbb{C}$.

Démonstration. Nous avons la suite exacte courte :

$$0 \to I_{Z_5}(3) \to \mathcal{O}_Z(3) \to \mathcal{O}_{Z_5}(3) \to 0. \tag{4.2}$$

L'idée est de calculer les sections globales de $\mathcal{O}_Z(3)$ et $\mathcal{O}_{Z_5}(3)$ pour obtenir celles demandées.

Puisque $\nu_2(Q_5) = Z_5$, nous avons $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{Q_5}(6)) = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{Z_5}(3))$. Or la forme quadratique q est un élément de $S^2V = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(2))$, nous obtenons donc la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(2) \to \mathcal{O}_{Q_5}(2) \to 0.$$

De plus, $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(4)) = S^4V = \mathbb{C} \oplus \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{4,0}$, $\mathrm{H}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(4)) = 0$ et $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(4)) = S^6V = \mathbb{C} \oplus \Gamma_{6,0} \oplus \Gamma_{4,0}$. Il s'en suit que $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{Q_5}(4)) = \Gamma_{6,0}$.

Le complexe de Koszul

$$0 \to \wedge^4 \wedge^3 K_V(3) \to \wedge^3 \wedge^3 K_V(3) \to \wedge^2 \wedge^3 K_V(3) \to \wedge^3 K_V(3) \to I_Z(3) \to 0$$

est exact ($\mathrm{codim}(Z) = 4$). Notons $\mathbb{S}_\lambda$ le foncteur de Schur de partition λ. En utilisant les mêmes méthodes de calcul que dans [FH91], nous avons :

(a) $\wedge^4 \wedge^3 K_V(3) = \mathcal{O}_{\mathbb{G}(3,V)}$,

(b) $\wedge^3 \wedge^3 K_V(3) = \wedge^3 K_V^\vee = \mathbb{S}_{1,1,1} K_V^\vee$,

(c) $\wedge^2 \wedge^3 K_V(3) = \wedge^2 K_V^\vee(1) = \mathbb{S}_{2,2,1,1} K_V^\vee$,

(d) $\wedge^3 K_V(3) = K_V^\vee(2) = \mathbb{S}_{3,2,2,2} K_V^\vee$.

D'après [Wey03], si λ est dominant, $\mathrm{H}^0(\mathbb{S}_\lambda K_V^\vee) = \mathbb{S}_\lambda V$ et $\mathrm{H}^i(\mathbb{S}_\lambda K_V^\vee) = 0$ pour $i > 0$. Calculons les plethysmes via le programme *LIE* (voir [MAAvLL92]). Finalement,

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_Z(3)) = \Gamma_{6,0} \oplus \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C}.$$

La suite exacte (4.2) devient en cohomologie :

$$0 \to \mathrm{H}^0(I_{Z_5}(3)) \to \Gamma_{6,0} \oplus \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{2,2} \oplus \mathbb{C} \to \Gamma_{6,0} \to \mathrm{H}^1(I_{Z_5}(3)) \to \cdots,$$

ce qui achève la démonstration. □

4.3.3 Équations de $\bar{X}$ dans $\mathbb{P}(\wedge^6\mathfrak{g})$

Nous allons montrer que la compactification magnifique peut se plonger dans $\mathbb{P}(\Gamma_{6,0} \oplus \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{2,2})$. Rappelons la suite exacte du Lemme 18 :

$$0 \to \wedge^2\mathfrak{g} \to \wedge^5\mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} \wedge^8\mathfrak{g}/\Gamma_{2,2} \to \wedge^{11}\mathfrak{g} \to \wedge^{14}\mathfrak{g} \to 0. \tag{4.3}$$

De plus,

$$\delta(\wedge^5\mathfrak{g}) \subset \mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1)) \subset \wedge^8\mathfrak{g} = \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{3,0} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \delta(\wedge^5\mathfrak{g}),$$

où $I_{\bar{X}}$ est le faisceau des équations de la compactification magnifique dans la grassmannienne $\mathbb{G}(8,\mathfrak{g})$. En particulier, $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1))$ contient les équations de l'espace $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{3,0})$ dans $\mathbb{P}(\wedge^6\mathfrak{g})$. L'inclusion de $\bar{X}$ dans cet espace projectif en découle.

Lemme 31. $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1)) = \delta(\wedge^5\mathfrak{g}) \oplus \Gamma_{3,0}$.

Démonstration. Le point $\mathfrak{sl}(A) \oplus \mathfrak{sl}(B)$ est un point général de $\bar{X}$. Choisissons un représentant u de cet élément dans $\wedge^6\mathfrak{g}$. D'après la remarque précédente, $u \in \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{4,0} \oplus \Gamma_{0,2} \oplus \Gamma_{2,2} \oplus \Gamma_{3,0}$. Puisque u est $SL(A) \times SL(B)$-invariant, cherchons les facteurs triviaux dans chacune des représentations $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{4,0}$, $\Gamma_{0,2}$, $\Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{3,0}$. Remarquons que la quadralité donne les décompositions en $SL(A) \times SL(B)$-modules de

$$\mathfrak{g} = \tilde{\Gamma}_{2,0} \oplus \tilde{\Gamma}_{0,2} \oplus \tilde{\Gamma}_{1,3} \quad \text{et} \quad V = \tilde{\Gamma}_{0,2} \oplus \tilde{\Gamma}_{1,1},$$

avec $\tilde{\Gamma}_{a,b} = S^a\mathbb{C}^2 \otimes S^b\mathbb{C}^2$ la représentation irréductible de $SL(A) \times SL(B)$ de plus haut poids (a,b). En effectuant les calculs avec le programme *LIE* (voir [MAAvLL92]), nous obtenons les résultats suivants.

- Puisque $S^3V = V \oplus \Gamma_{3,0}$, la décomposition en $SL(A) \times SL(B)$-modules implique que $\Gamma_{3,0}$ ne contient pas de facteur trivial.
- Puisque $S^4V = S^2V \oplus \Gamma_{4,0}$, la décomposition en $SL(A) \times SL(B)$-modules implique que $\Gamma_{4,0}$ contient un facteur trivial.
- Puisque $S^2V = \mathbb{C} \oplus \Gamma_{2,0}$, la décomposition en $SL(A) \times SL(B)$-modules implique que $\Gamma_{4,0}$ contient un facteur trivial.

- Puisque $\wedge^3\mathfrak{g} = \mathbb{C}\oplus\Gamma_{0,2}\oplus\Gamma_{3,0}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{4,0}$, la décomposition en $SL(A)\times SL(B)$-modules implique que $\Gamma_{0,2}$ contient un facteur trivial.
- En décomposant chaque terme de la suite exacte (4.3) en $SL(A)\times SL(B)$-modules, nous obtenons que $\Gamma_{2,2}$ contient un facteur trivial.

En conclusion, u appartient à $\Gamma_{4,0}\oplus\Gamma_{0,2}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{2,2}$, c'est-à-dire $\Gamma_{3,0}\subset \mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1))$. Finalement, $\bar{X}$ est incluse dans $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{0,2}\oplus\Gamma_{4,0})$.

La variété $\bar{X}$ n'est pas incluse dans un espace projectif de dimension plus petite. En effet, si c est le Casimir de $\mathfrak{g}$, nous montrons à l'aide d'un logiciel de calcul que u, $c\cdot u$, $c^2\cdot u$, $c^3\cdot u$ sont indépendants. Par conséquent, u a une composante non nulle dans chacune des représentations irréductibles $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{4,0}$, $\Gamma_{0,2}$, $\Gamma_{2,2}$. Ainsi $\bar{X}$ n'est-il inclus dans aucun sous-espace projectif G-stable de dimension stritement plus petite que celle de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{0,2}\oplus\Gamma_{4,0})$. Finalement, $\mathrm{H}^0(I_{\bar{X}}(1)) = \delta(\wedge^5\mathfrak{g})\oplus\Gamma_{3,0}$. □

4.3.4 Preuve du Théorème 17

Résumons les paragraphes précédents.

$$\begin{tikzcd}
\bar{X} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{P}(\Gamma_{2,2}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{4,0}\oplus\Gamma_{0,2}) \\
\tilde{Z} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}(\Gamma_{2,2}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{4,0}\oplus\Gamma_{0,2}\oplus\mathbb{C}) \arrow[u, "q"]
\end{tikzcd}$$

avec ψ et ϕ deux immersions et q une projection définie sur un ouvert de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{4,0}\oplus\Gamma_{0,2}\oplus\mathbb{C})$. De plus, $\bar{X}$ et $\tilde{Z}$ sont deux variétés lisses de dimension 8, ayant X comme orbite ouverte. Nous identifions $\bar{X}$ et son image par ϕ, $\tilde{Z}$ et son image par ψ.

Dans un premier temps, nous allons montrer que la projection q est bien définie sur $\tilde{Z}$.

Lemme 32. *La variété $\tilde{Z}$ ne contient pas le point $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{4,0}\oplus\Gamma_{0,2}\oplus\mathbb{C})$.*

Démonstration. Supposons le contraire : alors $\tilde{Z}$ contient un point fixe sous G. Par suite, il existe un point fixe sous G dans Z, i.e. une orbite de dimension 0 : ceci contredit la dimension des orbites de Z. □

Ce lemme prouve que q est bien définie sur $\tilde{Z}$. De plus, sa restriction à $\tilde{Z}$ est un morphisme à fibres finies.

Démonstration du Théorème 17. Quitte à utiliser un automorphisme G-équivariant de $\mathbb{P}(\Gamma_{2,2}\oplus\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{4,0}\oplus\Gamma_{0,2})$, supposons que q envoie l'orbite ouverte de $\tilde{Z}$ sur l'orbite ouverte de $\bar{X}$ (les deux étant isomorphes à G/G^σ). Ainsi $q:\tilde{Z}\to\bar{X}$ est un morphisme à fibres finies, birationnel entre deux variétés lisses. C'est donc un isomorphisme. □

Bibliographie

[BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[BLV86] M. Brion, D. Luna, and Th. Vust. Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.*, 84(3) :617–632, 1986.

[Bou68] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.

[Bou90] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 7–8.* Eléments de Mathématiques. Masson, paris, 1990.

[CG97] Neil Chriss and Victor Ginzburg. *Representation theory and complex geometry.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.

[DCP83] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties. In *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, volume 996 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–44. Springer, Berlin, 1983.

[DKK06] Jan Draisma, Hanspeter Kraft, and Jochen Kuttler. Nilpotent subspaces of maximal dimension in semi-simple Lie algebras. *Compos. Math.*, 142(2) :464–476, 2006.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[EM07] Mohamed Elkadi and Bernard Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, volume 59 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications].* Springer, Berlin, 2007.

[FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[Ga]

[Gru00] Caroline Gruson. Sur l'idéal du cône autocommutant des super algèbres de Lie basiques classiques et étranges. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(3) :807–831, 2000.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Har92] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. A first course.

[HT84] Joe Harris and Loring W. Tu. On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties. *Topology*, 23(1) :71–84, 1984.

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag, New York, 1972. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9.

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[Kos59] Bertram Kostant. The principal three-dimensional subgroup and the betti numbers of a complex simple lie group. *American Journal of Mathematics*, 81(4) :973–1032, 1959.

[Kra89] Hanspeter Kraft. Closures of conjugacy classes in G_2. *J. Algebra*, 126(2) :454–465, 1989.

[LM04] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. Representation theory and projective geometry. In *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, volume 132 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 71–122. Springer, Berlin, 2004.

[LS88] T. Levasseur and S. P. Smith. Corrigendum : "Primitive ideals and nilpotent orbits in type G_2" [J. Algebra **114** (1988), no. 1, 81–105 ; MR0931902 (89f :17013)]. *J. Algebra*, 118(1) :261, 1988.

[MAAvLL92] A. M. Cohen M. A. A. van Leeuwen and B. Lisser. "lie, a package for lie group computations". 1992.

[Mor08] Anne Moreau. On the dimension of the sheets of a reductive Lie algebra. *J. Lie Theory*, 18(3) :671–696, 2008.

[OS94] Giorgio Ottaviani and Michał Szurek. On moduli of stable 2-bundles with small Chern classes on Q_3. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 167 :191–241, 1994. With an appendix by Nicolae Manolache.

[OVG94] A.L. Onishchik, E.B. Vinberg, and V.V. Gorbatsevich. *Lie groups and Lie algebras III. Structure of Lie groups and Lie algebras. Transl. from the Russian by V. Minachin.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences. 41. Berlin : Springer-Verlag. 248 p. DM 144.00 ; öS 1123.20 ; sFr. 144.00 , 1994.

[Ruz08] A. Ruzzi. Geometrical description of smooth projective symmetric varieties with Picard number one. *ArXiv e-prints*, December 2008.

[Tha99] Michael Thaddeus. Complete collineations revisited. *Math. Ann.*, 315(3) :469–495, 1999.

[Wey03] Jerzy Weyman. *Cohomology of vector bundles and syzygies*, volume 149 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.