



HAL
open science

Modélisation et simulation numérique de matériaux microstructurés pour l'isolation acoustique des cabines d'avion

Adeline Augier

► **To cite this version:**

Adeline Augier. Modélisation et simulation numérique de matériaux microstructurés pour l'isolation acoustique des cabines d'avion. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2010. Français. NNT: . tel-00562015v2

HAL Id: tel-00562015

<https://theses.hal.science/tel-00562015v2>

Submitted on 24 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ
PARIS-SUD 11**



N° d'ordre : 10027

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Adeline AUGIER

**Modélisation et simulation numérique de matériaux
microstructurés pour l'isolation acoustique des cabines
d'avion.**

Soutenue le 25 Novembre 2010 devant la Commission d'examen :

M. GRÉGOIRE ALLAIRE	(Président)
M. FRANÇOIS ALOUGES	(Directeur de thèse)
M. ERIC BONNETIER	(Rapporteur)
M. FRANÇOIS DUBOIS	(Examineur)
M. BENJAMIN GRAILLE	(Directeur de thèse)
M. ANDRO MIKELIĆ	(Rapporteur)
M. NICOLAS VUKADINOVIC	(Examineur)

Remerciements

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mes directeurs de thèse François Alouges et Benjamin Graille. François, je te suis très reconnaissante pour cette relation simple et fructueuse que tu as su instaurer entre nous. J'ai été honorée que tu me proposes d'être ton étudiante, et je te remercie pour ce passionnant sujet de thèse tant pour ses aspects mathématiques que pour ses applications. Tu as toujours été très disponible pour me soutenir en cas de problème tant au niveau scientifique qu'administratif. J'ai beaucoup apprécié ta manière de prendre du recul par rapport au sujet ainsi que la pédagogie dont tu as fait preuve, tout paraît si simple quand on discute avec toi!

Je suis très fière d'être ta première étudiante Benjamin, et je souhaite pour toi, mais surtout pour tes futurs "enfants", que tu aies beaucoup d'autres doctorants. Ta rigueur, ta disponibilité et tes encouragements constants m'ont été très précieux tout au long de ces années.

Tout au long de la thèse, j'ai savouré le plaisir d'être encadrée par votre duo si parfaitement complémentaire! Un énorme merci à vous deux pour votre constante bonne humeur et votre patience. Je dois aussi rendre hommage à votre gentillesse et à votre humanité. C'est en grande partie grâce à vous que mon désir d'enseigner en classe préparatoire s'est peu à peu transformé en volonté de rester dans la recherche. Je souhaite également exprimer ma reconnaissance aux ingénieurs de Dassault-Aviation Dominique Trentin et Nicolas Vukadinovic et de l'ONERA Fabrice Boust et Laurent Leylekian pour les discussions très profitables que nous avons pu avoir. Je les remercie pour leur capacité à adapter leur discours à la non-physicienne que je suis et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. Sans cette collaboration, le lien entre mes travaux et la physique n'aurait pas pu être fait. Je souhaite remercier particulièrement Nicolas pour sa disponibilité et sa gentillesse.

J'adresse mes sincères remerciements à Eric Bonnetier et à Andro Mikelić pour le temps qu'ils ont consacré à rapporter sur cette thèse. Merci à eux de s'être ainsi intéressés à mon travail. Je remercie particulièrement Andro Mikelić pour ses remarques très précieuses qui m'ont permis d'améliorer le manuscrit. Je suis très reconnaissante à Grégoire Allaire pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être membre de mon jury. Ma gratitude se tourne aussi vers François Dubois qui a toujours su me porter un regard bienveillant que ce soit pendant la préparation à l'agrégation, en acceptant de faire partie de mon jury de thèse, ou en m'acceptant comme étudiante post-doctorale.

D'un point de vue plus pragmatique, je remercie le pôle de compétitivité system@tic, et en particulier la région Ile de France qui ont financé les travaux de thèse de façon très généreuse : grâce à cet argent, nous avons facilement pu suivre des formations, aller aux congrès SMAI et CANUM et acheter du matériel. Cependant, le caractère inhabituel et le retard de ce financement m'ont permis de comprendre tout le raffinement de la 8^{ème} épreuve d'Astérix et Obélix : résister à la maison qui rend fou! Celle que j'ai dû traverser ne contenait que trois étages et je dois avouer que je

n'y serais jamais arrivée seule. Je tiens donc à exprimer ma profonde reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont aidée d'une façon ou d'une autre à voler par dessus cet obstacle. Je pense en particulier à Céline Mariel, figure si compétente du SAIC, à David Harari, Valérie Lavigne et Pierre Pansu pour leur soutien constant au niveau de l'école doctorale, et enfin à Christine Bailleul pour son aide, ses précieux conseils, son infinie disponibilité et son expérience sans prix de l'éducation nationale. Il est évident que sans votre travail je n'aurais pas pu terminer ma thèse autrement que devant des lycéens certes attachants mais très chronophages !

Mon travail doit beaucoup à l'environnement exceptionnel offert par le laboratoire de mathématiques d'Orsay, et plus précisément je voudrais dire le plaisir que j'ai eu à faire partie de l'équipe Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles. Merci aux membres de cette équipe pour votre sympathie et votre dynamisme (Hervé : à quand le prochain concours de foie gras ?). En particulier je voudrais remercier Sylvain Faure pour son extrême disponibilité, sa patience et surtout ses lumières sans lesquelles la partie numérique de cette thèse ne serait vraiment pas ce qu'elle est. Je remercie Catherine Poupon pour son efficacité et son sourire très accueillant, elle a le don de rendre toute formalité si simple ! Je suis heureuse que le hasard géographique de l'emplacement des bureaux m'ai permis de mieux connaître Sylvain Faure, Benjamin Graille et plus récemment Loïc Gouarin et Frédéric Lagoutière qui par leurs taquineries, leurs conseils et leur joie de vivre m'ont beaucoup aidée. Je dois beaucoup aux anciens et nouveaux doctorants qui ont fait du bureau 256 un havre de travail, de bonne humeur et une réserve de sucreries ! En particulier, je remercie très chaleureusement Frédéric Bernicot, Aline Lefèbvre-Lepot et Juliette Venel pour l'exemple qu'ils me donnent, pour leurs conseils. Merci à vous trois de m'épauler et de me soutenir de manière si active. Je voudrais aussi faire un clin d'oeil à Aude qui a réussi à nous cacher une si bonne nouvelle pendant autant de temps, et à Benoît qui accepte avec tant de gentillesse nos brimades.

Une thèse, Juliette me l'a appris très rapidement, est une manière de se trouver une nouvelles famille. Je voudrais donc ici saluer mes sœurs Jennifer Bourguignon-Mirebeau et Séverine Molko-Daugas que j'ai appris à connaître et à apprécier. Merci à vous pour toutes les discussions que nous avons pu avoir, mathématiques ou non ! Je souhaite aussi remercier de tout mon cœur mon grand frère Benoît Merlet qui, sous ses dehors bourrus, a toujours su me prendre sous son aile, me conseiller et m'aider tant d'un point de vue mathématique que moral. Je souhaite aussi remercier ceux qui m'ont permis de sortir de l'univers des mathématiques et de m'aérer l'esprit : merci notamment aux HX3207, à Marie-Claire et à sa grande famille, à Sophie et aux membres du ciné club Folaïe !

Il me reste à rendre hommage à ma famille sans laquelle tout cela n'aurait pas été envisageable. Merci à vous tous d'avoir suivi et encouragé mon parcours dès mon plus jeune âge. En particulier, c'est pour moi l'occasion d'adresser enfin toute ma gratitude à mes parents. C'est l'éducation que vous m'avez offerte, votre soutien inconditionnel et aussi votre fierté qui m'ont portée depuis bien des années. Merci aussi à vous pour m'avoir aidée financièrement quand il l'a fallu. Un grand merci à toi Alain pour ta présence discrète à mes côtés, quelle chance j'ai de pouvoir toujours

Remerciements

compter sur toi! Je ne t'oublie pas Bertrand, toi qui a su me montrer l'exemple, me de-stresser, accepter et comprendre les inévitables sautes d'humeur. Merci à toi de m'aimer comme tu le fais, je sais maintenant que notre couple est assez solide pour résister au temps.

Résumé

Dans cette thèse, nous souhaitons modéliser le passage d'une onde acoustique à travers un matériau poreux, type mousse ou laine de verre. Pour cela, nous souhaitons établir un système d'équations macroscopiques sur un matériau homogène équivalent, ces équations prenant en compte la microstructure du domaine. Pour mieux comprendre le problème physique, nous considérons que le matériau poreux est de la laine de verre. Nous travaillons à une fréquence de vibration fixée et nous supposons que le matériau est périodique. Cette hypothèse permet de se placer dans le cadre mathématique de l'homogénéisation périodique et de la convergence double échelle.

La première partie est consacrée à la modélisation du problème. Nous commençons par étudier séparément la fibre de verre et l'air et nous écrivons les équations de déplacement correspondantes. L'air est assimilé à un fluide parfait incompressible, ce qui permet de modéliser son déplacement par un système de Stokes. La fibre de verre est quant-à elle soumise à un déplacement élastique. Cette modélisation donne lieu à un système fluide-structure $(F - S)$. Une fois ce modèle physique établi, nous prenons en compte la périodicité du matériau grâce à un adimensionnement et obtenons le système $((F - S)_\varepsilon)$, où le paramètre ε correspond à la taille de la cellule de périodicité.

Dans la deuxième partie, nous étudions le système $((F - S)_\varepsilon)$ d'un point de vue théorique. Nous commençons en effet par établir le caractère bien posé de ce système. Cette étude n'est pas triviale parce que le système, écrit en fréquence, n'est pas coercif : il est de type Helmholtz mais sans fréquence interdite grâce au fait que ε tend vers 0. Pour établir le résultat d'existence et d'unicité, nous utilisons l'alternative de Fredholm. Nous faisons ensuite converger double échelle le système en suivant la démarche classique suivante : estimations *a priori*, explicitation et caractérisation des limites double échelle des inconnues, obtention des systèmes de cellule puis du système macroscopique. L'étape difficile consiste à obtenir les estimations *a priori* puisque la non-coercivité du système $((F - S)_\varepsilon)$ rend les inégalité d'énergie inutilisables. Nous obtenons deux systèmes de cellule : un système de Stokes pour le fluide et un système de type élasticité linéaire pour décrire le déplacement du matériau. Au niveau macroscopique, nous obtenons un système couplé non intuitif. Dans le dernier chapitre de cette partie théorique, nous comparons le modèle que nous avons obtenu avec le modèle de Biot-Allard utilisé par les physiciens et industriels pour traiter ce type de problèmes.

Dans la troisième partie, nous illustrons le travail précédent grâce à des résultats numériques. Pour cela, nous travaillons avec les systèmes donnés par la convergence double échelle. Nous avons obtenu des résultats numériques 3D, via la librairie éléments finis *LibMesh* et un code élaboré en *C++*, tant au niveau du fluide que du solide. Les résultats de ces deux codes sont utilisés dans un code 2D *Matlab* écrit pour l'équation macroscopique. Nous présentons les résultats obtenus pour différentes valeurs de fréquence de vibration.

Abstract

Table des matières

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xv
Introduction	1

Partie I Modélisation

Chapitre 1

Propagation du son dans la laine de verre

1.1	Cadre et notations	10
1.1.1	Structure microscopique du matériau	10
1.1.2	Variables et quantités physiques	12
1.2	Le problème rigide	15
1.3	Le problème couplé fluide-structure	18
1.3.1	Obtention du problème couplé fluide-structure	19
1.3.2	Périodicité	20
1.3.3	Conditions de bord	24

Partie II Résultats théoriques

Chapitre 2

Etude des problèmes issus de la modélisation

2.1	Introduction	32
2.2	Etude du problème rigide	34
2.2.1	Le cadre théorique	34
2.2.2	Etude de la partie fluide du système complet	37
2.3	Etude du problème couplé fluide-structure	40
2.3.1	Le cadre théorique	40
2.3.2	Résolution dans H_f	45
2.3.3	Résolution dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$	49

Chapitre 3

Convergence double échelle

3.1	Introduction	54
3.2	Cadre théorique	57
3.3	Convergence double échelle des problèmes	64
3.3.1	Prolongement de la pression	64
3.3.2	Estimations <i>a priori</i>	66
3.3.3	Limites double échelle des inconnues	70
3.3.4	Limites double échelle des systèmes d'équations	76
3.4	Existence et unicité des systèmes homogénéisés	82
3.4.1	Existence et unicité de la solution des problèmes homogénéisés microscopiques	82
3.4.2	Existence et unicité de la solution du problème homogénéisé macroscopique	83

Chapitre 4

Lien avec le modèle de Biot

4.1	Introduction	92
4.2	Le modèle de Biot-Allard	93
4.3	Comparaison formelle entre les deux modèles	96

Partie III Résultats numériques

Chapitre 5

Au niveau microscopique

5.1	Introduction	104
5.2	Le problème microscopique fluide	107
5.2.1	Etude des conditions de bord dans Y_1	107
5.2.2	Etude de la matrice d'impédance relative à Y	108
5.2.3	Eléments finis	109
5.2.4	Code <i>Matlab</i>	112
5.2.5	Code <i>C++</i>	115
5.3	Le problème microscopique solide	119
5.3.1	Etude des conditions de bord dans Y_1	119
5.3.2	Tenseur d'impédance solide	120
5.3.3	Eléments finis	122
5.3.4	Code <i>C++</i>	123

Chapitre 6

Au niveau macroscopique

6.1	Introduction	128
6.2	Code <i>Matlab</i> 2D	128
6.2.1	Formulation variationnelle	129
6.2.2	Ecriture sous forme matricielle	129

Annexes

Annexe B Compléments sur l'étude du problème rigide	137
Bibliographie	147

Table des figures

1.1	Laine de verre dans la paroi d'un avion.	10
1.2	CAO laine de verre microscopique.	10
1.3	Exemple de la cellule de référence Y	12
1.4	Cellule élémentaire.	16
1.5	Calcul des ordres de grandeurs entre l_{verre} et les longueurs caractéristiques fluides en fonction de ω	21
5.1	Symétries de la cellule Y	104
5.2	Exemple de cellule Y_1	104
5.3	Labels proposés pour les faces du cube Y_1	105
5.4	Repère utilisé pour l'étude des symétries.	107
5.5	Cellule Y permettant d'étudier les périodicités.	112
5.6	Cellule F sur laquelle on trace les solutions.	112
5.7	Pression pour un second membre vertical.	114
5.8	Pression pour un second membre horizontal.	114
5.9	Vecteurs déplacement pour un second membre vertical.	115
5.10	Vecteurs déplacement pour un second membre horizontal.	115
5.11	Maillage de la partie fluide Y_1 vu de face.	116
5.12	Pression pour un second membre vertical.	117
5.13	Déplacement pour un second membre vertical.	117
5.14	Partie réelle de la pression pour un second membre horizontal et pour $\omega = 100$	118
5.15	Partie complexe de la pression pour un second membre horizontal et pour $\omega = 100$	118
5.16	Partie réelle du déplacement pour un second membre horizontal et pour $\omega = 100$	118
5.17	Partie complexe du déplacement pour un second membre horizontal et pour $\omega = 100$	118
5.18	Maillage de la partie solide de Y_1 vu de face.	123
5.19	Déplacement pour le second membre $\mathbf{G} = E_{11}$	124
5.20	Grossissement de la déformation pour $\mathbf{G} = E_{11}$	124
5.21	Déplacement pour le second membre $\mathbf{G} = (E_{12} + E_{21})/2$	124
5.22	Grossissement de la déformation pour $\mathbf{G} = (E_{12} + E_{21})/2$	124
6.1	Parties réelles des vecteurs déplacement.	130
6.2	Partie réelle du déplacement pour $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$	130
6.3	Partie réelle du déplacement pour $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$	131

Table des figures

6.4	Partie imaginaire du déplacement pour $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$	131
6.5	Partie réelle de la pression macroscopique pour $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$	131
6.6	Partie imaginaire de la pression macroscopique pour $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$. . .	131
6.7	Partie réelle de la pression pour $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$	131
6.8	Partie imaginaire de la pression pour $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$	131

Liste des tableaux

1.1	Récapitulatif des variables du problème.	13
1.2	Valeurs à l'équilibre des variables.	14
1.4	Correspondances entre les unités.	14
1.3	Constantes physiques.	15
4.1	Récapitulatif des coefficients de Biot.	94
4.2	Définition des coefficients intervenant dans le modèle de Biot.	95
4.3	Récapitulatifs des constantes physiques utiles.	95
5.1	Récapitulatif des conditions de bord pour la cellule Y_1 pour (MicroF).	109
5.2	Solutions $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ de (MicroF) dans Y_k , $2 \leq k \leq 8$, exprimées en fonction de $(\mathbf{u}_j^i)_{1 \leq i, j \leq 3}$ et de p^i , $1 \leq i \leq 3$	110
5.3	Récapitulatif des conditions de bord relatives à la cellule Y_1 pour l'étude de (MicroS).	120
5.4	Solutions (MicroS) dans Y_k , $2 \leq k \leq 8$, exprimées en fonction de $(\langle \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1)^{i,j} \rangle_{Y_1})_{1 \leq j \leq 3}$	121
5.5	Description du tenseur d'impédance solide obtenu numériquement.	125

Introduction

La maîtrise du confort acoustique dans les avions d'affaires fait largement appel aux solutions passives et en particulier aux matériaux poreux (laine de verre, mousses, tissus) pour leurs qualités de légèreté, d'absorption phonique et de souplesse de matériau. Ces deux dernières qualités sont essentielles dans les applications d'isolation acoustique où le matériau est placé entre deux parois. De plus, elles permettent de réduire la conduction des vibrations par le squelette tout en absorbant et en réfléchissant les ondes acoustiques qui se propagent dans la phase fluide du matériau poreux. L'objectif de cette thèse est de proposer et d'étudier des modèles décrivant la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu poreux.

Ce travail rentre dans le cadre du projet EHPOC du pôle de compétitivité System@tic, plus précisément nous avons travaillé pour le sous-projet Simulation et Conception de nouveaux matériaux. Ce projet est cofinancé par la Direction Générale des Entreprises, le Conseil Régional Ile de France et le Conseil Général des Yvelines. Il est le fruit d'une collaboration entre Dassault-Aviation, l'ONERA et le LAUM (Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine).

Afin de comprendre la propagation d'ondes dans un milieu poreux type fluide-structure, nous choisissons de travailler à fréquence fixée. Nous souhaitons en effet obtenir les caractéristiques d'un matériau donné à une fréquence donnée, ces caractéristiques se réduisent à une matrice d'impédance qui relie le comportement macroscopique au comportement microscopique.

Un savoir-faire d'ingénieur existe pour la conception de matériaux avec de bonnes propriétés acoustiques, et de nombreux tests ont été effectués sur des matériaux pour évaluer leurs impédances acoustiques et coefficients de Biot en fonction de la fréquence de vibration. Ces expériences sont cependant coûteuses et difficiles à réaliser pour certains matériaux et certaines fréquences. Au niveau théorique, des travaux préliminaires ont également été réalisés par L. Leylekian¹. Dans les rapports internes [Ley01], [Ley03] et [LHB04], le cas d'un matériau non vibrant est étudié, c'est-à-dire que seules les équations relatives aux paramètres de l'air sont étudiées, le squelette du matériau étant considéré comme immobile. En effet, dans [Ley01], les équations vérifiées par la température, la vitesse et la pression de l'air passant à travers le matériau poreux sont établies. Par la suite nous reprenons ce modèle en l'appelant modèle rigide. Dans [Ley03] le comportement du matériau homogénéisé est décrit par des équations macroscopiques qui voient la microstructure du modèle. Les équations microscopiques sont obtenues par développement asymptotique de type Chapmam-Enskog.

1. Onera

Dans [Ley03] et [LHB04] L. Leylekian *et al* décrivent le code CelPer2 écrit par Hadji Hassan, il s'agit d'un code éléments finis *C++* pour le problème rigide. Ce code permet de calculer les matrices d'impédances selon différents modèles pour un maillage et un fichier de paramètres donnés. Les maillages fournis par l'ONERA proposent des exemples de matériaux poreux ayant des géométries très complexes.

Notre objectif est d'une part de compléter le travail de modélisation et de simulation fourni par l'ONERA en autorisant les vibrations du squelette et d'autre part de justifier le développement asymptotique. Pour cela, nous travaillons à une fréquence de vibration fixée et nous considérons un seul matériau à la fois. Afin de se placer dans le cadre mathématique de l'homogénéisation périodique et plus particulièrement celui de la convergence double échelle, nous considérons que les matériaux sur lesquels on travaille sont périodiques. L'hypothèse de périodicité est cohérente soit parce que le matériau est périodique par construction, soit parce que sa structure au niveau microscopique est très complexe. Dans ce dernier cas, nous ne connaissons alors que des propriétés moyennées du matériau. D'un point de vue mathématique, il faut alors prendre en compte deux types de domaines : un pour l'air et l'autre pour le matériau. Pour établir les équations relatives au problème, nous assimilons l'air à un fluide parfait incompressible dont le déplacement vérifie des équations de Stokes et la température une équation de diffusion. Le matériau, quant-à-lui est régi par les équations de l'élasticité linéaire. Nous obtenons ainsi un système complet qui prend en compte les vibrations du squelette. Ce système est composé d'un premier système d'équations couplées fluide-structure écrites en déplacement et pression, et d'un second système complètement indépendant du premier qui est écrit en température et pression sur le domaine fluide.

La théorie de l'homogénéisation est un outils très performant pour étudier notre modèle. En effet, elle permet d'établir les équations décrivant le comportement macroscopique d'un matériau homogénéisé à partir des équations écrites sur le matériau poreux dont la structure est microscopique. Ces équations peuvent aussi être obtenues de manière formelle grâce à un développement asymptotique comme le proposent A. Bensoussan *et al* dans [BLP78], E. Sanchez-Palencia dans [SP80] et J. L. Auriault dans [Aur02]. La théorie de l'homogénéisation a été introduite par L. Tartar (voir par exemple [Tar89] et [Gru]) et utilise les H-mesures. Afin de simplifier les calculs, il est intéressant de se placer en milieu périodique puisqu'on peut alors entrer dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Des résultats généraux sur l'homogénéisation périodique sont présentés par G. Allaire, G. Nguetseng *et al* et A. Bensoussan *et al* respectivement dans [All92], [LNW02] et [BLP78].

Les milieux poreux ont été beaucoup étudiés en homogénéisation et pour différents types de problèmes. Une homogénéisation de différentes équations (Stokes, élasticité, Helmholtz) est proposée par A. Bensoussan *et al* dans [BLP78]. Dans [EP95], J. Saint Jean Paulain et I. A. Ene présentent l'étude d'une structure élastique périodique immergée dans un fluide visqueux. Les équations obtenues prennent en compte deux paramètres : la taille de la cellule de référence et l'épaisseur du solide. L'étude d'équations de Stokes stationnaires en milieu périodique est proposée

par G. Allaire dans [All89a], [All91c], [All91a] et [All91b]. Il y est notamment prouvé que le système limite obtenu est très différent suivant le rapport entre la taille de la cellule de périodicité et le diamètre des fibres du squelette du matériau. Un exemple d'équations couplées dont les coefficients s'écrivent en fonction de deux quantités physiques liées entre elles par la taille de la cellule de périodicité du domaine est résolu par A. Mikelić *et al* dans [FMP98]. Une autre approche consiste à étudier des milieux composés de deux domaines constitués par des cercles inclus ou non l'un dans l'autre, c'est l'objet de M. F. Ben Hassen et E. Bonnetier dans [HB05].

La validation physique de l'homogénéisation périodique intéresse A. M. Meirmanov et S. A. Sazhenkov dans [MS07], et A. M. Meirmanov dans [Mei08a], [Mei08b] et [Mei08c] puisqu'ils font notamment le lien entre le système obtenu par convergence double échelle et le modèle de Biot qui sert de référence aux physiciens. Dans ces publications sont étudiés des problèmes fluide-structure écrits en temps et dont les équations couplent la température, la pression et le déplacement. D'autre part, cette volonté de trouver un modèle satisfaisant d'un point de vue physique est aussi présente par J. L. Ferrin et A. Mikelić dans [FM03] et dans [Mik94] où les limites double échelle de systèmes écrits en temps sont comparés avec le modèle de Biot ou la loi de Darcy.

Le problème couplé fluide-structure pour un fluide incompressible et un matériau élastique a été très étudié en homogénéisation périodique. Cependant, à notre connaissance les équations sont toujours posées en temps ou en régime stationnaire, ce qui différencie ces travaux des nôtres où les équations sont écrites en régime harmonique et font donc intervenir la fréquence. Par exemple on peut citer S. Dasser dans [Das96] et [Das95] qui étudie ce type de problème par pénalisation. Le travail présenté par A. Mikelić *et al* dans [GM00] et [CFGM01] consiste à étudier ce problème couplé fluide-structure en temps. Il est intéressant de noter que A. Mikelić et J. L. Ferrin dans [FM03] remarquent que la géométrie du matériau intervient dans l'étude des système d'équations, c'est d'ailleurs une propriété que nous retrouvons dans la thèse.

Notre travail a porté sur les trois aspects du problème : la modélisation, l'analyse mathématique et la simulation numérique. Nous consacrons une première partie à la modélisation du problème. Nous commençons par définir le cadre de travail : description du domaine périodique et des données physiques utiles. Nous pouvons ainsi obtenir le modèle rigide déjà décrit par L. Leylekian dans [Ley01], puis nous en déduisons un modèle décrivant le déplacement du matériau poreux pour lequel le fluide et la structure entrent en vibration. Nous obtenons donc deux modèles différents : le premier, que nous appelons problème rigide, est composé d'une équation de type Stokes sur le fluide et d'une équation de diffusion pour la température ; le second, que nous appelons problème complet, est composé d'un système de type fluide-structure appelé problème couplé et de la même équation de diffusion pour la température. Afin d'obtenir ce dernier modèle, nous étudions séparément les équations relatives au fluide et celles relatives au matériau et nous utilisons des hypothèses proposées par A. Miranville and R. Temam dans [MT03]. Il reste à prendre en compte la périodicité

du matériau poreux et les conditions de bord. Une analyse dimensionnelle permet de comprendre comment la périodicité intervient dans le système d'équations et il en ressort que les inconnues relatives au fluide ont un comportement microscopique alors que le déplacement solide est macroscopique. Enfin, nous imposons des conditions au bord du domaine qui sont compatibles avec le problème physique étudié.

La seconde partie est consacrée à l'étude théorique des systèmes obtenus et à l'utilisation de la théorie de la convergence double échelle qui nous permet d'obtenir le système d'équations sur le domaine homogénéisé. Nous commençons par un chapitre dédié à l'étude des systèmes obtenus afin de montrer l'existence et l'unicité des solutions. L'étude du problème rigide est une généralisation à des systèmes complexes de résultats classiques sur les équations de diffusion ou sur le problème de Stokes, se référer par exemple à D. Braess [Bra01]. En revanche, le problème couplé ne s'étudie pas de manière classique puisque la formulation en fréquence rend la forme sesquiliénaire associée non coercive, nous ne pouvons donc pas suivre la démarche proposée par A. Mikelić *et al* dans [CFGM01]. Pour l'étude de l'existence et de l'unicité, nous avons donc recours à un corollaire de l'alternative de Fredholm. Le second chapitre constitue la partie homogénéisation de ce travail. Nous commençons par rappeler les théorèmes fondamentaux de la théorie de la convergence double échelle. Pour les appliquer selon la méthode proposée par G. Allaire et G. Nguetseng *et al* respectivement dans [All92] et [LNW02], nous établissons des estimations *a priori* que nous utilisons pour écrire que les inconnues ainsi que certaines de leurs dérivées ont des limites double échelle. Pour obtenir ces estimations en déplacement, il faut encore une fois contourner le problème de la formulation en fréquence qui nous empêche d'utiliser les inégalités d'énergies classiques. Pour cela, nous utilisons un raisonnement par l'absurde comme cela est proposé dans [BF04], [AGMR08] et [ACPDMP92] pour des systèmes plus simples que celui que nous étudions. L'estimation de la pression nécessite un prolongement de celle-ci du domaine fluide au domaine général, et se fait en suivant la démarche proposée par L. Tartar dans [Tar]. Nous utilisons ensuite ces limites double échelle pour faire converger les systèmes obtenus dans la première partie en testant leurs formulations variationnelles contre des fonctions test bien choisies. Nous obtenons de cette manière le système homogénéisé : il s'agit d'un système macroscopique qui voit la microstructure du domaine puisqu'il est écrit en fonction des inconnues tant macroscopiques que microscopiques. Ce système macroscopique s'exprime en les seules variables macroscopiques si on remarque que les variables microscopiques sont elles-mêmes solutions de systèmes linéaires microscopiques dont le second membre s'exprime en fonction du déplacement et de la pression macroscopiques. Nous terminons ce chapitre par une étude d'existence et d'unicité des solutions des problèmes microscopiques et macroscopique. Les systèmes microscopiques obtenus sont très classiques et leur étude ne nécessite que l'application de résultats classiques, en revanche le système macroscopique est écrit en fréquence ce qui complique son étude. Comme pour le système couplé précédemment étudié, nous faisons appel à l'alternative de Fredholm pour obtenir l'unicité de la solution du système homogénéisé. Cependant cette étude fait apparaître une restriction sur le domaine d'étude : il faut en effet que la cellule de périodicité du domaine étudié contienne un domaine solide connexe et touchant tous les bords de la cellule pour qu'il y ait unicité. Nous terminons cette étude théorique par un lien vers le problème

physique initialement étudié en nous intéressant aux coefficients de Biot : définition et calcul des coefficients de Biot du système homogénéisé.

La troisième partie est une illustration numérique du travail théorique et est constituée de deux chapitres, l'un consacré à l'étude des problèmes microscopiques et l'autre à l'étude du problème macroscopique. Effectivement, seule la résolution du système macroscopique décrivant le problème sur le matériau homogénéisé nous intéresse mais il fait intervenir des variables microscopiques que nous devons déterminer dans un premier temps. Pour l'étude microscopique, nous commençons par écrire la formulation variationnelle discrète associée aux deux problèmes fluide et solide, puis la formulation matricielle associée. Nous choisissons ensuite de travailler sur un domaine symétrique afin de ne pas gérer des conditions de périodicité sur les bords du domaine mais plutôt des conditions de Dirichlet et de Neumann plus faciles à mettre en œuvre. Nous continuons en résolvant un problème bidimensionnel afin d'obtenir les premiers résultats via un code éléments finis *Matlab* utilisant la Toolbox Triangle de F. Alouges. Nous terminons l'étude numérique en présentant les résultats obtenus via un code éléments finis *C++* écrit à partir de la librairie *Lib-Mesh*. Ce dernier code prend en argument un maillage tridimensionnel de la cellule élémentaire que nous avons généré à partir du mailleur *gms*. La sortie est constituée d'un fichier contenant les matrices d'impédances qui caractérisent le comportement microscopique du matériau en fonction de son comportement macroscopique ainsi que des fichiers *gmv* permettant de visualiser les résultats via le logiciel *ParaView*. Dans le dernier chapitre, nous étudions numériquement le système macroscopique en écrivant sa formulation variationnelle discrète et la formulation matricielle associée. Nous présentons enfin les résultats obtenus par le code éléments finis *Matlab* bidimensionnel que nous avons écrit et les comparons avec ceux obtenus empiriquement par Dassault-Aviation. La sortie du code est une représentation du déplacement et de la pression du matériau homogénéisé ainsi que des coefficients de Biot correspondants à ce matériau.

Première partie

Modélisation

Chapitre 1

Propagation du son dans la laine de verre

Sommaire

1.1	Cadre et notations	10
1.1.1	Structure microscopique du matériau	10
1.1.2	Variables et quantités physiques	12
1.2	Le problème rigide	15
1.3	Le problème couplé fluide-structure	18
1.3.1	Obtention du problème couplé fluide-structure	19
1.3.2	Périodicité	20
1.3.3	Conditions de bord	24

Dans ce chapitre, nous décrivons les équations modélisant le passage de l'air à travers des matériaux poreux type laine de verre ou mousse (dans les applications et les figures représentées, nous nous sommes concentrés sur le cas de la laine de verre). Pour cela, nous commençons par donner un contexte mathématique à savoir définition des espaces et des variables que nous utilisons dans toute la suite de ce travail. Nous verrons que les inconnues permettant de décrire le problème physique sont la pression p , le déplacement \mathbf{U} et la température Θ . Dans un second temps, nous établissons les systèmes étudiés dans les chapitres suivants. Ces équations sont obtenues grâce à modélisation classique du problème physique, puis à la prise en compte de la périodicité et des conditions de bord.

1.1 Cadre et notations

1.1.1 Structure microscopique du matériau

Actuellement, les industriels disposent à l'intérieur de la paroi du fuselage de l'avion des matériaux poreux type mousse ou laine de verre afin de réduire le bruit transmis par le frottement du vent contre la paroi du fuselage de l'avion. Le but de l'étude est de comprendre comment se propage le son dans ces matériaux poreux. Nous travaillons à fréquence ω fixée, et nous étudions les vibrations d'un seul matériau : la laine de verre. La laine de verre est composée d'une part de fibres de verre (le squelette solide ou matériau) et d'autre part, de l'air qui la traverse (le fluide). Nous cherchons en fait à obtenir les équations de mouvement sur un matériau homogénéisé de la laine de verre : c'est-à-dire un matériau qui contient une seule matière et pour lequel il n'est plus nécessaire de différencier l'air du squelette.



FIGURE 1.1 - Laine de verre dans la paroi d'un avion.

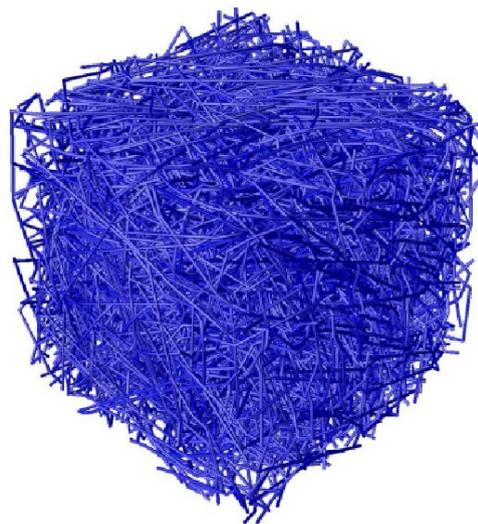


FIGURE 1.2 - CAO laine de verre microscopique.

Pour mieux comprendre la nature d'un tel objet, le lecteur peut se référer à la FIG. 1.1 qui représente la laine de verre utilisée dans le fuselage de l'avion et à la

FIG. 1.2 qui donne une représentation de la laine de verre en CAO (Conception Assistée par Ordinateur) au niveau microscopique, figure proposée par D. Trentin dans [Tre07].

Tout ce travail repose sur les hypothèses suivantes :

- la fréquence de vibration ω est fixée,
- le matériau poreux est périodique,
- la taille des fibres du matériau est petite devant les longueurs caractéristiques de l'air et de la fibre de verre,
- l'air est assimilé à un fluide parfait incompressible,
- les parties fluides et solides du matériau sont connexes et touchent le bord du domaine.

L'hypothèse de périodicité, en plus de simplifier l'étude, a une justification physique. En effet, la structure fine des matériaux poreux auxquels cette théorie doit s'appliquer est soit réellement périodique (car sa fabrication industrielle met en jeu des procédés périodiques) soit extrêmement complexe et, dans ce cas, décrite par des quantités moyennées (taux d'air, longueur et largeur caractéristiques des fibres ou des trous,...). Par conséquent il paraît justifié de faire une étude macroscopique du matériau et donc de considérer les moyennes des quantités recherchées sur des cellules élémentaires.

Nous définissons donc un domaine général Ω correspondant au matériau poreux vu dans sa globalité. Ce matériau est défini par ε -périodicité d'une cellule de périodicité de taille ε . Nous en déduisons une cellule de référence Y correspondant à la cellule de périodicité remise à l'échelle 1. Cela nous permet de définir le domaine global Ω par périodicité de la manière suivante

$$\Omega = \left(\bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \varepsilon(Y + \mathbf{k}) \right) \cap \Omega,$$

où Ω est un ouvert borné, connexe et lipschitzien de \mathbb{R}^3 . La cellule Y est le cube de taille $[0, 1]^3$, elle est composée du domaine solide S et du domaine fluide F . Un exemple de cellule de référence Y sur laquelle S est représenté par trois fibres de verre qui s'intersectent et où le fluide s'écoule autour des fibres est représentée sur la FIG. 1.3.

Remarque 1.1 (Importance de la composition de Y)

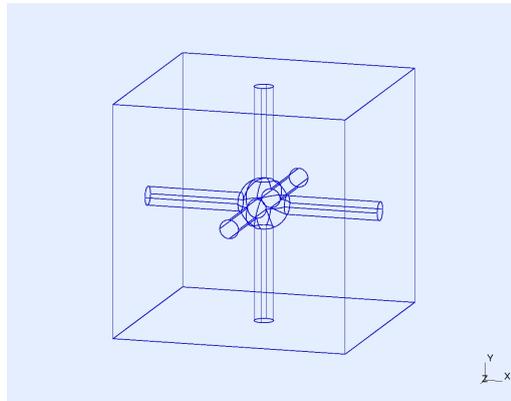
Il faut noter que nous proposons une cellule de référence contenant un domaine solide connexe et touchant tous les bords du cube. Ce choix a une importance cruciale par la suite pour établir l'unicité de la solution du système modélisant la propagation du son dans le matériau homogénéisé.

Afin de définir le domaine par périodicité, nous introduisons les notations suivantes :

$$S_{\mathbf{k}} = S + \mathbf{k}, \quad S_{\mathbf{k}}^\varepsilon = \varepsilon S_{\mathbf{k}} \cap \Omega, \quad F_{\mathbf{k}} = F + \mathbf{k}, \quad F_{\mathbf{k}}^\varepsilon = \varepsilon F_{\mathbf{k}} \cap \Omega, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3. \quad (1.1)$$

Nous différencions aussi les domaines Ω_f relatif au fluide (l'air) et Ω_s relatif au solide (fibre de verre), ce qui permet d'écrire

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f,$$

FIGURE 1.3 - Exemple de la cellule de référence Y .

où, grâce aux notations données en (1.1)

$$\Omega_f = \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} F_{\mathbf{k}}^\varepsilon, \quad \Omega_s = \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} S_{\mathbf{k}}^\varepsilon.$$

Nous définissons ensuite le bord extérieur Γ^{ext} et le bord intérieur Γ^{int} entre les deux phases fluide et solide par

$$\Gamma^{\text{ext}} = \partial\Omega, \quad \Gamma^{\text{int}} = (\partial\Omega_s \cap \partial\Omega_f) \setminus \partial\Omega.$$

De même, nous définissons le bord intérieur du domaine Y par

$$Y_{\text{int}} = (\partial S \cap \partial F) \setminus \partial Y.$$

Remarque 1.2 (Conditions de bord)

Il est important de bien différencier les bords intérieurs des bords extérieurs parce que les conditions relatives à ces bords ne sont pas de même nature.

1.1.2 Variables et quantités physiques

Dans cette section, nous présentons les données physiques utilisées pour écrire les équations modélisant le passage de l'air à travers la laine de verre. Les inconnues permettant de décrire le problème physique sont la pression, le déplacement et la température et dépendent de la variable spatiale $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ et du temps t . Pour comprendre comment on peut se ramener à l'étude de systèmes vérifiés par ces seules inconnues, nous utilisons un ensemble plus vaste d'inconnues. Afin de simplifier la compréhension de l'étude physique, nous récapitulons dans le TAB. 1.1 toutes les variables utilisées dans la suite.

Remarque 1.3

L'impédance acoustique est une variable utilisée par les industriels et les physiciens pour déterminer les caractéristiques du matériau et constitue la motivation physique de ce travail. Elle s'exprime en fonction de la pression et du déplacement du matériau homogénéisé. Pour la connaître, nous devons tout d'abord obtenir des équations en déplacement, pression et température et les résoudre.

Notation	Signification	Relation intéressante
$p(\mathbf{x}, t)$	Champ de pression qui caractérise le phénomène propagatif	$p = -K \nabla \cdot \mathbf{U}$ où $\nabla \cdot \mathbf{U}$ est la dilatation d'un élément de volume $Z = \frac{p}{(\mathbf{U})_{\Gamma^{\text{ext}}}}$
$\mathbf{V}_f(\mathbf{x}, t)$	Champ de vitesse du fluide qui caractérise le phénomène propagatif	
$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$	Champ de déplacement qui caractérise le phénomène propagatif global	
$\mathbf{U}_s(\mathbf{x}, t)$	Champ de déplacement qui caractérise le phénomène propagatif solide	
$\mathbf{U}_f(\mathbf{x}, t)$	Champ de déplacement qui caractérise le phénomène propagatif fluide	
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$	Champ de déplacement nul sur Γ^{ext}	
$\rho(\mathbf{x}, t)$	Densité du fluide	
$E(\mathbf{x}, t)$	Entropie	
$\Theta(\mathbf{x}, t)$	Température fluide globale	
$\theta(\mathbf{x}, t)$	Température fluide nulle sur $\partial\Omega_f$	
$K(\mathbf{x}, t)$	Module de compressibilité	
$Z(\mathbf{x}, t)$	Impédance acoustique caractérisant la résistance qu'un milieu oppose à sa mise en mouvement lorsqu'il est traversé par une onde acoustique	

TABLE 1.1 - Récapitulatif des variables du problème.

Remarque 1.4

Toutes ces grandeurs sont des variables qui sont en fait calculées par rapport à un état d'équilibre. Nous donnons dans le TAB. 1.2 les unités des différentes variables ainsi que leur valeur à l'équilibre.

Notation	Variable correspondante	Valeur	Unité
P_0	p	10^5	Pa
\mathbf{V}_0	\mathbf{V}	0	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
ρ_f	ρ	1.213	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
E_0	E		$\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$
T_0	Θ	273	K
K_0	K	1.42×10^5	Pa
Z_0	Z	415.1	$\text{Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$

TABLE 1.2 - Valeurs à l'équilibre des variables.

Énumérons les ondes acoustiques intervenant dans l'étude. Dans notre cas (milieu conservatif), il n'y a que trois types d'ondes :

- une onde dite de compression telle que la vitesse soit proportionnelle au gradient de pression (on lui associe le deuxième coefficient de viscosité dynamique noté ζ),
- deux ondes dites de cisaillement telles que la vitesse soit orthogonale au gradient de pression (on leur associe le premier coefficient de viscosité dynamique noté η , avec $\eta = 1.84 \times 10^{-5}$ Poise).

Nous utilisons aussi beaucoup de constantes physiques, que nous récapitulons dans le TAB. 1.3 dans lequel les coefficients de Lamés μ et λ sont calculés à partir du coefficient de Poisson $\nu = 0.2$ et du module d'Young E valant 6910^9 Pa grâce aux relations habituelles

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Unité	Unité équivalente
Pascal	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Joule	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$
Watt	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$
Newton	$\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
Poiseuille	Pa·s

TABLE 1.4 - Correspondances entre les unités.

Finalement, afin de pouvoir vérifier si les équations que nous obtenons par la suite sont homogènes, il est utile de rappeler les correspondances d'unités dans le TAB. 1.4.

Notation	Signification	Valeur
ω	Fréquence considérée	$\omega \in \mathbb{R}^+$ unité : s^{-1}
c_p	Chaleur massique à pression constante	$c_p = 1005 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
κ	Conductivité thermique	$\kappa = 0.02547 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
c	Vitesse du son	$c = 342.2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
η	Viscosité dynamique	$\eta = 1.84 \cdot 10^{-5} \text{ Pois}$
ρ_f	Densité du fluide	$\rho_f = 1.213 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ρ_s	Densité du solide	$\rho_s = 16 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
γ	Rapport des chaleurs spécifiques	$\gamma = 1.4$
λ	Premier coefficient de Lamé	$\lambda = 19\,166\,666\,666 \text{ Pa}$
μ	Deuxième coefficient de Lamé	$\mu = 31\,363\,363\,363 \text{ Pa}$

TABLE 1.3 - Constantes physiques.

1.2 Le problème rigide

Dans cette section nous établissons les équations modélisant le passage de l'air dans un matériau poreux type laine de verre, matériau dont le squelette ne peut pas bouger. Cette première étape dans la modélisation nous permet de comprendre que le découplage des équations en température d'une part, et en déplacement d'autre part, est dû à l'hypothèse d'incompressibilité du fluide.

Pour cette étude, nous commençons par admettre les propriétés suivantes

- le système est conservatif ce qui justifie l'utilisation d'une équation de conservation de la masse,
- l'air est assimilé à un gaz parfait, ce qui nous permet d'utiliser la formule des gaz parfaits $PV = nRT$,
- on se place en situation adiabatique afin de pouvoir utiliser la formule $K = \gamma p$,
- l'air est assimilé à un milieu incompressible, ce qui se traduit par la nullité de la divergence de la vitesse.

Remarque 1.5 (Sur incompressibilité du fluide)

Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe. L'air n'est donc pas un fluide incompressible, mais dans notre étude, la vitesse, la pression et la température oscillent autour d'un état d'équilibre, ce qui va rendre cette hypothèse plus justifiable d'un point de vue physique. En effet, nous étudions les oscillations de la cellule de périodicité Y plus que les variations de volume de cette même cellule. Cela revient à considérer que le domaine est assez grand pour que le volume de fluide déplacé par la pression exercée par une paroi reste constant mais change de place.

D'autre part, d'un point de vue mathématique, cette hypothèse simplifie grandement les calculs puisqu'elle a pour conséquence le découplage des équations en vitesse et en température.

On assimile l'air à un gaz qui vérifie cinq équations linéarisées autour d'un état d'équilibre : la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, la conservation de l'énergie écrite en variable entropique, et deux équations

issues de la thermodynamique. On obtient ainsi le système (1.2)-(1.6) suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_f \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{V} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}), \quad (1.3)$$

$$T_0 \rho_f \frac{\partial E}{\partial t} = \kappa \Delta \Theta, \quad (1.4)$$

$$\Theta = \frac{1}{\rho_f c_p} p + \frac{T_0}{c_p} E, \quad (1.5)$$

$$\rho = \frac{1}{c^2} p - \left(\frac{\rho_f}{c_p} \right) E. \quad (1.6)$$

Comme cela est expliqué par J. F. Allard et N. Atalla dans [AA09] au chapitre 4, Kirchhoff et Rayleigh ont résolu ces équations dans le cas du modèle canonique : domaine périodique dont la cellule de référence Y est traversée par un cylindre dans la direction z des côtes, une telle cellule est représentée en FIG. 1.4.

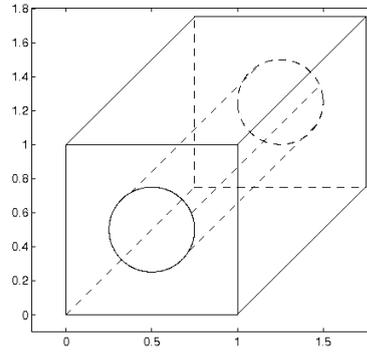


FIGURE 1.4 - Cellule élémentaire.

Cependant, les résultats obtenus sont compliqués et difficiles à exploiter physiquement dans notre cas puisqu'un matériau comme la laine de verre est composé *a priori* de fibres de verres dans toutes les directions (voir la FIG. 1.2 à la page 10 pour s'en convaincre).

Nous reformulons donc les équations données par (1.2)-(1.6) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{V} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}), \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{P_0} - \frac{\Theta}{T_0} \right), \\ \rho_f c_p \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta \Theta. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Remarque 1.6 (Sur la reformulation (1.7))

Cette reformulation du système (1.2)-(1.6) est intéressante puisque nous résolvons le même problème avec pour seules inconnues la pression, la température et la vitesse.

Nous choisissons de travailler sur le système d'équations en vue de le simplifier, plutôt que de simplifier les solutions obtenues par Kirchhoff et Rayleigh.

Montrons que (1.7) découle de (1.2)-(1.6).

Tout d'abord, la première équation de (1.7) est exactement (1.3).

Ensuite l'équation (1.5) permet d'écrire

$$T_0 E = c_p \Theta - \frac{p}{\rho_f}. \quad (1.8)$$

En dérivant l'équation (1.8) par rapport à t et en utilisant l'équation (1.4) on obtient la dernière équation.

Enfin, on obtient la deuxième équation de (1.7) à partir de (1.2) si on montre que

$$\frac{\rho}{\rho_f} = \frac{p}{P_0} - \frac{\Theta}{T_0}.$$

Les équations (1.5) et (1.6) nous donnent ρ grâce au calcul suivant :

$$\rho = \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{T_0 c_p} \right) p - \rho_f \frac{\Theta}{T_0}.$$

Il nous reste donc à montrer que

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{T_0 c_p} = \frac{\rho_f}{P_0}. \quad (1.9)$$

D'une part, le module de compressibilité à l'équilibre K_0 est tel que $K_0 = \gamma P_0$ et $c = \sqrt{K_0/\rho_f}$. On obtient alors

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho_f}{\gamma P_0}. \quad (1.10)$$

D'autre part, pour exprimer $1/(T_0 c_p)$, il faut utiliser des propriétés de l'air assimilé à un gaz parfait. Ainsi, on a la relation $PV = nRT$ où R est la constante des gaz parfaits, n est la quantité de matière et V est le volume de l'air. En écrivant $n = m/M$, où m est la masse de l'air et M sa masse molaire, et en remarquant que $\rho = m/V$, on obtient

$$P_0 = \rho_f \frac{RT_0}{M}. \quad (1.11)$$

Enfin une dernière relation thermodynamique relie M , à γ , c_p et R

$$M \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{R}{c_p}. \quad (1.12)$$

En combinant (1.11) et (1.12), on obtient que

$$\frac{1}{T_0 c_p} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\rho_f}{P_0}. \quad (1.13)$$

Finalement en mettant (1.10) et (1.13) bout-à-bout, on obtient (1.9), ce qui donne la deuxième équation. \square

Remarque 1.7

Les résultats précédents ne nous permettent pas, a priori, de dire que la divergence de la vitesse est nulle. Cependant, afin de suivre la démarche proposée par Laurent Leylekian dans [Ley01], nous allons considérer que celle-ci est nulle (c'est-à-dire que le fluide est incompressible). Cette approximation peut se justifier physiquement en étudiant les quotients p/P_0 et Θ/T_0 qui varient peu en espace et en temps parce que les oscillations de p (respectivement de Θ) sont faibles autour de l'état d'équilibre P_0 (respectivement T_0).

En fait cette hypothèse est primordiale d'un point de vue mathématique puisque les équations peuvent alors se découpler et donc se résoudre beaucoup plus simplement. Cela nous permet de faire l'étude du problème physique dans un domaine plus général (et donc plus physique) que celui proposé par Kirchhoff et Rayleigh.

Enfin, on traduit le fait que nous travaillons à fréquence fixée en écrivant que la pression, la vitesse et la température sont harmoniques en temps c'est-à-dire que nous pouvons découpler les variables temporelle et d'espace en écrivant :

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x})e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \Theta(\mathbf{x}, t) = \Theta(\mathbf{x})e^{i\omega t}. \quad (1.14)$$

Cette modélisation donne alors de manière formelle, d'une part le système mécanique

$$\begin{cases} \eta\Delta\mathbf{V} - i\omega\rho_f\mathbf{V} - \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \end{cases} \quad (\text{V})$$

et d'autre part l'équation thermique

$$i\omega\rho_f c_p \Theta - i\omega p = \kappa\Delta\Theta. \quad (\text{T})$$

Nous avons finalement obtenu deux systèmes (V) et (T) découplés qui modélisent le problème rigide. Cette modélisation est faite à partir de l'hypothèse très restrictive selon laquelle le squelette est immobile, et ne correspond donc pas à la réalité. C'est pourquoi nous consacrons la section suivante à la modélisation de la vibration des matériaux poreux en autorisant le déplacement (élastique) du squelette.

1.3 Le problème couplé fluide-structure

Dans cette section, nous établissons le système complet tenant compte du couplage entre les équations fluides et les équations solides écrites en déplacement, température et pression. Ce système s'obtient assez facilement en supposant que l'air est un fluide incompressible. En effet, comme dans le cas rigide traité à la section 1.2, on montre que le système complet s'écrit au moyen d'équations qui découpent le déplacement et la température. La majorité du travail de cette section consiste donc à écrire les conditions d'interface entre le problème fluide et le problème solide en pression et en déplacement, problème que nous appelons système couplé fluide-structure. Ainsi le système complet est totalement décrit avec le système couplé fluide-structure en pression et en déplacement, et avec l'équation en température reliant la pression et la température. Nous étudions ensuite comment prendre en compte la périodicité dans les équations du système couplé et dans l'équation en température. Enfin nous mettons en évidence les conditions de bord que nous utilisons, afin d'obtenir une formulation variationnelle écrite dans des espaces de Banach.

1.3.1 Obtention du problème couplé fluide-structure

Pour écrire le modèle couplé fluide-structure, nous établissons séparément les équations d'une part sur le fluide et d'autre part sur le solide. Pour différencier les deux domaines, nous utilisons la variable \mathbf{V}_f pour décrire la vitesse fluide et \mathbf{U}_s pour décrire le déplacement solide. Dans un premier temps, nous faisons les mêmes hypothèses sur le fluide que dans la section 1.2 c'est-à-dire que nous travaillons en variables conservatives et nous assimilons l'air à un gaz parfait incompressible placé en situation adiabatique. La conséquence de ces hypothèses est la même que dans la section 1.2 : les équations décrivant la vitesse et la température sont complètement découplées.

La température vérifie donc l'équation de diffusion (T) et la vitesse fluide est solution du système de Stokes incompressible que nous écrivons avec le tenseur des contraintes visqueuses

$$\begin{cases} \rho_f \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{V}_f, p)), & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{V}_f = 0, & \text{sur } \Omega_f, \end{cases}$$

où le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\sigma}^f$ est donné par

$$\boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{V}_f, p) = \eta (\nabla \mathbf{V}_f + {}^t \nabla \mathbf{V}_f) - p \mathbf{Id}.$$

Pour décrire le déplacement solide et les conditions à l'interface entre les domaines fluide et solide, nous supposons que le matériau est élastique et nous nous inspirons de [MT03]. On obtient ainsi que le déplacement solide vérifie l'équation suivante :

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{U}_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{U}_s)) \quad \text{sur } \Omega_s,$$

où le tenseur des contraintes de déformation $\boldsymbol{\sigma}^s$ est donné par

$$\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{U}_s) = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{U}_s) \mathbf{Id} + \mu (\nabla \mathbf{U}_s + {}^t \nabla \mathbf{U}_s).$$

Enfin pour les conditions au bord, nous imposons d'une part la continuité de la vitesse, ce qui signifie

$$\mathbf{V}_f = \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma^{\text{int}},$$

et d'autre part, la continuité des contraintes normales à l'interface, ce qui se traduit par

$$\boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{V}_f, p) \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{U}_s) \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma^{\text{int}},$$

où \mathbf{n} représente la normale extérieure au solide (on aurait le même résultat en choisissant la normale extérieure au fluide). Finalement, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{V}_f - \nabla p, & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{V}_f = 0, & \text{sur } \Omega_f, \\ \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{U}_s}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \mu \Delta \mathbf{U}_s, & \text{sur } \Omega_s, \\ \mathbf{V}_f = \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t}, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \\ (\eta \mathbf{G}(\mathbf{V}_f) - p \mathbf{Id}) \mathbf{n} = (\lambda \nabla \cdot \mathbf{U}_s \mathbf{Id} + \mu \mathbf{G}(\mathbf{U}_s)) \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \end{array} \right.$$

où l'on a noté

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U}. \quad (1.15)$$

Remarque 1.8

On obtient les équations sur la vitesse du fluide et le déplacement du solide en remarquant que

$$\nabla \cdot (\mathbf{G}(\mathbf{V})) = \Delta \mathbf{V} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{V},$$

et en utilisant l'incompressibilité du fluide.

Ce système fait intervenir à la fois la vitesse \mathbf{V}_f du fluide et le déplacement \mathbf{U}_s du matériau. Afin de considérer le même type de quantités, nous allons introduire une nouvelle variable : le déplacement du fluide \mathbf{U}_f . Nous le définissons comme le fait S. Dasser dans [Das95] par

$$\mathbf{U}_f(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{V}_f(\mathbf{x}, s) ds. \quad (1.16)$$

En utilisant le fait que les variables \mathbf{U}_s , \mathbf{V}_f et p sont harmoniques en temps c'est-à-dire écrites comme en (1.14) à la page 18, et en utilisant (1.16) c'est-à-dire

$$\mathbf{U}_f(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_f(\mathbf{x}) (e^{i\omega t} - 1), \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}_f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{V}_f(\mathbf{x})}{i\omega}.$$

on obtient le système couplé fluide-structure suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \omega^2 \mathbf{U}_f = -i\omega \eta \Delta \mathbf{U}_f + \nabla p, & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{U}_f = 0, & \text{sur } \Omega_f, \\ \rho_s \omega^2 \mathbf{U}_s = -(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}_s - \mu \Delta \mathbf{U}_s, & \text{sur } \Omega_s, \\ \mathbf{U}_f = \mathbf{U}_s, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \\ (i\omega \eta \mathbf{G}(\mathbf{U}_f) - p \mathbf{Id}) \mathbf{n} = (\lambda \nabla \cdot \mathbf{U}_s \mathbf{Id} + \mu \mathbf{G}(\mathbf{U}_s)) \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \end{array} \right. \quad (\text{F-S})$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au solide.

1.3.2 Périodicité

Nous souhaitons prendre en compte la périodicité du matériau dans les équations, et obtenir un système vérifié par des fonctions périodiques. Pour cela, nous avons déjà défini le domaine Ω par ε -périodicité dans la section 1.1.1. Comme cela est fait par J. L. Auriault *et al* par exemple dans [Aur02], nous précisons ceci en assimilant ε à la longueur caractéristique minimale des inconnues définissant le système, avec la définition suivante :

Définition 1.9 (Longueur caractéristique)

On appelle longueur caractéristique la taille minimale du domaine à prendre en considération pour observer une variation dans la quantité étudiée (ici température, déplacement du fluide et déplacement du solide).

Remarque 1.10 (Calcul des longueurs caractéristiques)

Cette longueur se calcule à partir des coefficients de l'équation pour la température et à partir des coefficients du système (F-S) pour les déplacements solide et fluide. Ainsi, par exemple, l'équation (T), montre que

$$\frac{\kappa}{\text{longueur}^2} \text{ est homogène à } \omega \rho_f c_p,$$

puisque le laplacien, dérivation d'ordre deux en espace, revient à une division par une longueur au carré.

Nous obtenons ainsi les trois longueurs caractéristiques suivantes

$$l_{\text{temp}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\omega \rho_f c_p}},$$

$$l_{\text{air}} = \sqrt{\frac{\eta}{\omega \rho_f}},$$

$$l_{\text{verre}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\omega^2 \rho_s}} = \sqrt{\frac{\mu}{\omega^2 \rho_s}}.$$

Sur la FIG. 1.5, on trouvera une représentation en trait plein de $l_{\text{temp}}/l_{\text{verre}}$ et en pointillé de $l_{\text{air}}/l_{\text{verre}}$.

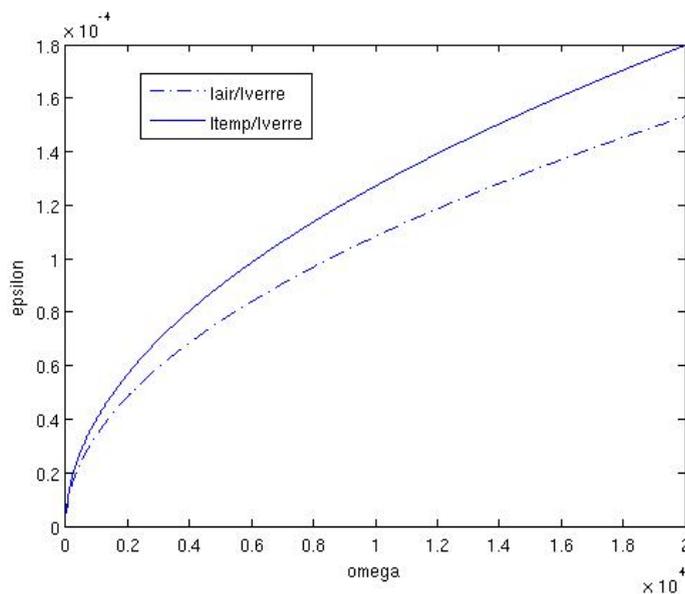


FIGURE 1.5 - Calcul des ordres de grandeurs entre l_{verre} et les longueurs caractéristiques fluides en fonction de ω .

On observe donc que la longueur l_{verre} est au moins 1000 fois plus grande que les longueurs caractéristiques fluides, ce qui montre que le déplacement et la température du fluide ont des variations à l'échelle microscopique et que le déplacement du verre s'observe au niveau macroscopique. Nous assimilons alors la taille ε des cellules de périodicité $Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon$ à $l_{\text{air}}/l_{\text{verre}}$ ou à $l_{\text{temp}}/l_{\text{verre}}$ (ces deux longueurs sont du même ordre).

Remarque 1.11 (Sur la cellule Y)

Il est rassurant de savoir que le diamètre d'une fibre de verre est de l'ordre de $50 \mu\text{m}$, c'est-à-dire plus petite que la taille de la cellule de périodicité ε . La cellule représentée sur la FIG. 1.3, est donc cohérente.

L'idée est de faire tendre la taille ε de la cellule de périodicité vers 0 pour faire converger les systèmes en un sens que nous préciserons ultérieurement. Pour comprendre comment se comportent les systèmes lorsque la taille de la cellule de périodicité tend vers 0, on effectue un adimensionnement en notant les grandeurs g qui interviennent comme suit

$$g = \overline{g\hat{g}},$$

où g possède une unité du système international, \overline{g} est la moyenne de cette grandeur exprimée dans la même unité et où \hat{g} est une expression sans unité.

Le calcul des longueurs caractéristiques suggère de faire les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\eta}}{\overline{x^2 \overline{\omega} \overline{\rho_f}}} &= \frac{l_{\text{air}}^2}{\overline{x^2}} = \varepsilon^2, & \frac{\overline{\kappa}}{\overline{x^2 \overline{\omega} \overline{\rho_f} \overline{c_p}}} &= \frac{l_{\text{temp}}^2}{\overline{x^2}} = \varepsilon^2, & \overline{U_f} &= l_{\text{air}}, \\ \frac{\overline{\lambda}}{\overline{x^2 \overline{\omega}^2 \overline{\rho_s}}} &= 1, & \frac{\overline{\mu}}{\overline{x^2 \overline{\omega}^2 \overline{\rho_s}}} &= 1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

D'autre part, on suppose que la vitesse fluide $\overline{V_f}$ et la vitesse thermique (vitesse du son) $\overline{c_f}$ sont liées entre elles par la relation suivante

$$\overline{\omega} \overline{U_f} = \overline{V_f} = \varepsilon \overline{c_f} = \sqrt{\frac{\overline{p}}{\overline{\rho_f}}}. \quad (1.18)$$

En utilisant les hypothèses (1.18) puis (1.17), on obtient la relation suivante

$$\overline{p} = \frac{\overline{\omega}^2 \overline{\rho_f} \overline{U_f}^2}{\varepsilon} = \overline{\omega}^2 \overline{\rho_f} \overline{U_f} \overline{x} \underbrace{\frac{\overline{U_f}}{\varepsilon \overline{x}}}_{\frac{l_{\text{air}}}{\overline{x}} \frac{1}{\varepsilon}} = \overline{\omega}^2 \overline{\rho_f} \overline{U_f} \overline{x}. \quad (1.19)$$

D'autre part, l'équation (1.5) donnée à la page 16, permet de voir que \overline{p} et $\overline{\rho_f} \overline{c_p}$ sont de même ordre, ce qui motive cette dernière hypothèse

$$\overline{p} = \overline{\Theta} \overline{\rho_f} \overline{c_p}. \quad (1.20)$$

L'adimensionnement permet ainsi d'obtenir les systèmes respectivement équivalents à (F-S) et (T) suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\overline{p}}{\overline{x \overline{\omega}^2 \overline{\rho_f} \overline{U_f}}} \nabla_{\hat{x}} \hat{p} + \hat{\omega}^2 \hat{\rho}_f \hat{U}_f &= i \frac{\overline{\eta}}{\overline{x^2 \overline{\omega} \overline{\rho_f}}} \hat{\omega} \hat{\eta} \Delta_{\hat{x}\hat{x}} \hat{U}_f, & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla_{\hat{x}} \cdot \hat{U}_f &= 0, & \text{sur } \Omega_f, \\ - \left(\frac{\overline{\lambda} \hat{\lambda} + \overline{\mu} \hat{\mu}}{\overline{x^2 \overline{\omega}^2 \overline{\rho_s}}} \right) \nabla_{\hat{x}} \nabla_{\hat{x}} \cdot \hat{U}_s - \frac{\overline{\mu}}{\overline{x^2 \overline{\omega}^2 \overline{\rho_s}}} \hat{\mu} \Delta_{\hat{x}\hat{x}} \hat{U}_s &= \hat{\omega}^2 \hat{\rho}_s \hat{U}_s, & \text{sur } \Omega_s, \end{array} \right.$$

et

$$i\widehat{\omega}\widehat{\rho}_f\widehat{c}_p\widehat{\Theta} - i\frac{\overline{p}\overline{\omega}}{\Theta\overline{\omega}\overline{\rho}_f\overline{c}_p}\widehat{\omega}\widehat{p} = \frac{\overline{\kappa}}{\overline{x}^2\overline{\omega}\overline{\rho}_f\overline{c}_p}\widehat{\kappa}\Delta_{\widehat{x}\widehat{x}}\widehat{\Theta}, \quad \text{sur } \Omega_f.$$

Les hypothèses (1.17) sur la définition de ε permettent de proposer les nouvelles définitions suivantes pour la viscosité et pour la conductivité thermique

$$\eta = \varepsilon^2\widehat{\eta} \quad \text{et} \quad \kappa = \varepsilon^2\widehat{\kappa}. \quad (1.21)$$

De plus, en utilisant les hypothèses (1.19) et (1.20) sur la pression, on obtient les écritures simplifiées des systèmes (F-S) et (T)

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla_{\widehat{x}}\widehat{p} - \widehat{\omega}^2\widehat{\rho}_f\widehat{\mathbf{U}}_f = i\varepsilon^2\widehat{\omega}\widehat{\eta}\Delta_{\widehat{x}\widehat{x}}\widehat{\mathbf{U}}_f, & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla_{\widehat{x}} \cdot \widehat{\mathbf{U}}_f = 0, & \text{sur } \Omega_f, \\ -(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu})\nabla_{\widehat{x}}\nabla_{\widehat{x}} \cdot \widehat{\mathbf{U}}_s - \widehat{\mu}\Delta_{\widehat{x}\widehat{x}}\widehat{\mathbf{U}}_s = \widehat{\omega}^2\widehat{\rho}_s\widehat{\mathbf{U}}_s, & \text{sur } \Omega_s \end{array} \right.$$

et

$$i\widehat{\omega}\widehat{\rho}_f\widehat{c}_p\widehat{\Theta} - i\widehat{\omega}\widehat{p} = \varepsilon^2\widehat{\kappa}\Delta_{\widehat{x}\widehat{x}}\widehat{\Theta}, \quad \text{sur } \Omega_f.$$

Remarque 1.12 (Sur la puissance de ε)

Le calcul des longueurs caractéristiques l_{temp} et l_{air} fait naturellement intervenir une longueur au carré, c'est ce qui induit la puissance 2 sur le ε dans les définitions (1.21).

Remarque 1.13 (Sur le positionnement des facteurs ε)

Faire tendre la taille de la cellule périodique vers 0, revient à faire disparaître l'espace entre les fibres de verre et donc à contraindre l'écoulement de l'air. Le coefficient ε placé devant la viscosité permet d'adapter la viscosité de l'air à la géométrie.

Nous avons donc deux échelles dans le modèle : l'une microscopique et l'autre macroscopique. L'échelle microscopique, sur laquelle on parlera de la variable \mathbf{y} élément de Y , ne gère pas la périodicité mais c'est sur cette variable, que nous observons les différences de comportements entre les domaines solide et fluide. En revanche, la variable macroscopique $\mathbf{x} \in \Omega$ prend en compte la périodicité du domaine Ω , mais ne différencie pas les domaines fluide et solide. En fait les deux variables sont reliées entre elles par la relation

$$Y \ni \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \quad \text{où } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Il reste à prendre en compte la périodicité au niveau fonctionnel, pour cela commençons par rappeler la définition de la ε -périodicité.

Définition 1.14 (ε -périodicité)

On dit que la fonction \mathbf{U}_ε est ε -périodique sur Ω si pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{e}_i) = \mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

où $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Par analogie, nous souhaitons distinguer par une notation une fonction périodique $\Omega \rightarrow \mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$ d'une fonction non périodique $Y \rightarrow \mathcal{C}_\#^\infty(Y)$ par la notation

$$\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \mathbf{U}(\mathbf{y}).$$

Remarque 1.15

Cette définition du changement de variable fonctionnel entre le domaine macroscopique et le domaine microscopique permet de donner une autre interprétation de la nouvelle définition (1.21). En effet, un calcul rapide montre que

$$\varepsilon^2 \Delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \mathbf{U}(\mathbf{y}).$$

Cependant pour que la justification de (1.21) par changement de variable soit complète, il faut aussi introduire un changement de variable pour la pression. Celui n'est pas trivial puisqu'on doit choisir

$$p_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon} p(\mathbf{y}),$$

pour ne pas voir apparaître de coefficient ε sur d'autres coefficients que la viscosité.

En notant de manière générale \mathbf{U}_ε le déplacement périodique à la fois du solide et du fluide et en n'utilisant plus la notation $\hat{\cdot}$ pour les expressions sans dimension (pour simplifier les notations), nous obtenons le système en déplacement suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \omega^2 \mathbf{U}_\varepsilon = -i\varepsilon^2 \omega \eta \Delta \mathbf{U}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon, & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{U}_\varepsilon = 0, & \text{sur } \Omega_f, \\ \rho_s \omega^2 \mathbf{U}_\varepsilon = -(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}_\varepsilon - \mu \Delta \mathbf{U}_\varepsilon, & \text{sur } \Omega_s, \\ \mathbf{U}_\varepsilon = \mathbf{U}_\varepsilon, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \\ \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{U}_\varepsilon, p_\varepsilon) \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{U}_\varepsilon) \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \end{array} \right. \quad (1.22)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au solide, les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f$ et $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s$ sont définis par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{U}_\varepsilon, p_\varepsilon) &= \varepsilon \eta i \bar{\omega} \mathbf{G}(\mathbf{U}_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} p_\varepsilon \mathbf{Id}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{U}_\varepsilon) &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{Id} + \mu \mathbf{G}(\mathbf{U}_\varepsilon), \end{aligned}$$

où \mathbf{G} est définie en (1.15) à la page 20.

Au niveau thermique, nous obtenons l'équation suivante :

$$i\omega \rho_f c_p \Theta_\varepsilon - \varepsilon^2 \kappa \Delta \Theta_\varepsilon = i\omega p_\varepsilon, \quad \text{sur } \Omega_f. \quad (1.23)$$

1.3.3 Conditions de bord

La température Θ_ε et le déplacement \mathbf{u}_ε sont des inconnues *a priori* non nulles sur le bord Γ^{ext} . Nous souhaitons introduire de nouvelles inconnues qui, elles, sont nulles sur Γ^{ext} , afin de travailler dans un espace de Banach où les intégrales des formulations variationnelles sont bien définies. Nous commençons par différencier

deux parties dans le bord $\Gamma^{\text{ext}} : \Gamma_D^{\text{ext}}$ qui contient les conditions de Dirichlet et Γ_N^{ext} qui contient les conditions de Neumann. Nous avons ainsi

$$\Gamma^{\text{ext}} = \Gamma_D^{\text{ext}} \cap \Gamma_N^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \Gamma_D^{\text{ext}} \cup \Gamma_N^{\text{ext}} = \emptyset.$$

Nous imposons donc que le déplacement \mathbf{U}_ε et que la température Θ_ε valent respectivement \mathbf{g} et Θ_0 sur le bord Γ_D^{ext} . Puisque les inconnues \mathbf{U}_ε et Θ_ε sont périodiques en temps (on les a supposés harmoniques en temps, voir (1.14)), il faut aussi que le déplacement \mathbf{g} et la température Θ_0 soient périodiques en temps. Plusieurs choix de \mathbf{g} sont possibles, ils correspondent à différentes configurations physiques. En effet, le solide peut être considéré comme fixé à la paroi du fuselage, c'est-à-dire soumis au même déplacement que celui de l'air près de la paroi : condition de Dirichlet non homogène, ou bien le solide peut aussi être considéré comme flottant : condition de Neumann.

Nous considérons ici que le déplacement imposé s'applique à la paroi de la carlingue, et donc ne prend pas en compte le caractère périodique du matériau, ce qui se traduit sous forme d'une condition au bord de Dirichlet, cette condition étant indépendante de ε . Le système (1.22) se complète donc ainsi

$$\mathbf{U}_\varepsilon = \mathbf{g} \quad \text{sur} \quad \Gamma_D^{\text{ext}},$$

où, afin de pouvoir en extraire un relèvement, $\mathbf{g} \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^{\text{ext}})]^3$ et vérifie la condition de compatibilité suivante :

$$\int_{\Gamma^{\text{ext}}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} \mathbf{g}.$$

De même pour la température, l'équation (1.23) se complète ainsi

$$\Theta_\varepsilon = \Theta_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D^{\text{ext}}, \quad \text{avec} \quad \Theta_0 \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^{\text{ext}})].$$

Remarque 1.16 (Sur les différents bords)

Il est primordial de différencier les bords Γ^{ext} et Γ^{int} au niveau macroscopique et ∂Y et Y_{int} au niveau microscopique. En effet, le bord ∂Y contient des conditions de périodicité alors que Y_{int} gère une condition de Dirichlet du côté fluide et de Neumann du côté solide. D'autre part, pour le domaine macroscopique Ω , le bord Γ^{ext} contient une condition de Dirichlet et ne voit pas la périodicité, alors que le bord Γ^{int} contient les conditions d'interface de couplage entre le domaine fluide et le domaine solide qui prend en compte la périodicité du domaine.

Par la surjectivité de l'opérateur de trace, il existe $\mathbf{h} \in [H^1(\Omega)]^3$ un relèvement de \mathbf{g} à divergence nulle sur Ω . En écrivant $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{U}_\varepsilon - \mathbf{h}$, on obtient que le déplacement \mathbf{u}_ε et la pression p_ε vérifient le système fluide-structure suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon + i\varepsilon^2 \omega \eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon^f, & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & \text{sur } \Omega_f, \\ \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon + \mu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon^s, & \text{sur } \Omega_s, \\ \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_D^{\text{ext}}, \quad ((\text{F-S})_\varepsilon) \\ \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_N^{\text{ext}}, \\ \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}, p_\varepsilon) \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon \quad \text{continu} & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \end{array} \right.$$

où

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}, p_\varepsilon) = i\varepsilon\omega\eta\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) - \frac{1}{\varepsilon}p_\varepsilon\mathbf{Id}, \quad (1.24)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) = \lambda\nabla \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h})\mathbf{Id} + \mu\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}), \quad (1.25)$$

et où

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\varepsilon^f &= -\rho_f\omega^2\mathbf{h} - i\varepsilon^2\omega\eta\Delta\mathbf{h}, \\ \mathbf{f}_\varepsilon^s &= -\rho_s\omega^2\mathbf{h} - (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{h} - \mu\Delta\mathbf{h}. \end{aligned}$$

Remarque 1.17 (Sur le relèvement \mathbf{h})

Il suffirait que relèvement \mathbf{h} soit nul uniquement sur le fluide pour obtenir $((\text{F-S})_\varepsilon)$. Cependant, imposer une propriété particulière à l'un des domaines pour le relèvement, revient à lui faire prendre en compte la micro-structure du domaine, ce qui n'est pas cohérent avec le choix de la condition au bord \mathbf{g} .

De la même manière, on peut expliciter le problème rigide prenant en compte la périodicité du matériau

$$\begin{cases} \varepsilon^2\eta\Delta\mathbf{v}_\varepsilon - i\omega\rho_f\mathbf{v}_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon = -\varepsilon^2\eta\Delta\mathbf{h} + i\omega\rho_f\mathbf{h}, & \text{sur } \Omega_f \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_\varepsilon = 0, & \text{sur } \Omega_f. \end{cases} \quad (V_\varepsilon)$$

Afin de pouvoir écrire les formulations variationnelles issues de $((\text{F-S})_\varepsilon)$ et (V_ε) , nous introduisons la définition du produit contracté suivante.

Définition 1.18 (Produit contracté)

Soient A et B deux tenseurs d'ordre 3, on appelle produit contracté de ces deux tenseurs, le nombre complexe défini par

$$A : B = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} A_{i,j} B_{i,j}.$$

Remarque 1.19

En utilisant les propriétés $A : B = {}^t A : {}^t B$ et que $\nabla\mathbf{v} + {}^t\nabla\mathbf{v}$ est symétrique, on obtient l'égalité suivante

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) : \overline{\nabla\mathbf{v}} = \mathbf{G}(\mathbf{u}) : {}^t\overline{\nabla\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\mathbf{G}(\mathbf{u}) : \overline{\mathbf{G}(\mathbf{v})}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3, \quad (1.26)$$

où \mathbf{G} est défini en (1.15) à la page 20.

Définissons l'espace $H_{\text{Dir}}^1(\Omega)$ par

$$H_{\text{Dir}}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma_D^{\text{ext}}\}.$$

Cet espace est bien un Hilbert comme sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. En exprimant $\Delta\mathbf{v} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{v}$ en fonction de $\mathbf{G}(\mathbf{v})$, et en utilisant la remarque 1.19, on obtient la formulation variationnelle suivante du problème $((\text{F-S})_\varepsilon)$

Trouver $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega_f)$ tels que $\forall (\mathbf{v}, q) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega)$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \rho_s \int_{\Omega_s} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon) : \overline{(\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v})} - \lambda \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} \\ \quad + \omega^2 \rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} - i \frac{\omega \bar{\eta} \varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_f} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon) : \overline{(\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v})} + \int_{\Omega_f} p_\varepsilon \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} \\ \hspace{20em} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^1 \cdot \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_\varepsilon^2 : \overline{\nabla \mathbf{v}}, \\ \int_{\Omega_f} q \cdot \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{FV (F-S)}_\varepsilon)$$

avec \mathbf{f}^1 et \mathbf{f}_ε^2 définies par les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{f}^1 \cdot \bar{\mathbf{v}} = -\omega^2 \rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \omega^2 \rho_s \int_{\Omega_s} \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{f}_\varepsilon^2 : \nabla \mathbf{v} = -\varepsilon \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{h}, 0) : \overline{\nabla \mathbf{v}} - \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{h}) : \overline{\nabla \mathbf{v}}, \end{array} \right. \quad (1.27)$$

où les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f$ et $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s$ sont définis en (1.24) et (1.25).

Remarque 1.20 (Dépendance en ε de \mathbf{f}_ε)

On remarque que nous avons exprimé \mathbf{f}_ε comme la somme d'une constante indépendante de ε et d'un terme proportionnel à ε . Cela nous permet d'exclure le cas des puissances négatives de ε pour lequel le calcul de la limite (en un sens que nous précisons dans la partie théorique) du problème ((F-S) $_\varepsilon$) que nous proposons n'est plus valable. En effet, dans le cas où \mathbf{f}_ε s'exprime avec des puissances négatives de ε , l'estimation de \mathbf{f}_ε indépendamment de ε ne peut pas se faire, ce qui contrarie l'existence d'une limite pour \mathbf{f}_ε .

Remarque 1.21 (Propriété microscopique de \mathbf{f}_ε)

Il est intéressant de noter que nous avons choisi un relèvement \mathbf{h} macroscopique, mais que la fonction second membre \mathbf{f}_ε prend en compte la micro-structure du domaine. En effet, elle est définie différemment sur le fluide et sur le solide, ce qui permet de prendre en compte la structure du domaine. Cette remarque a son importance lors du calcul de la limite de \mathbf{f}_ε puisque la limite dépend des deux variables \mathbf{x} et \mathbf{y} .

De manière analogue, la formulation variationnelle relative à (V_ε) s'écrit :

Trouver $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)]^3 \times L^2(\Omega_f)$ tels que $\forall (\mathbf{v}, q) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)]^3 \times L^2(\Omega)$, on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\omega \rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} - \varepsilon^2 \eta \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \overline{\nabla \mathbf{v}} + \int_{\Omega_f} p_\varepsilon \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} \\ \hspace{10em} = i\omega \rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \varepsilon^2 \eta \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{h} : \overline{\nabla \mathbf{v}}, \\ \int_{\Omega_f} q \cdot \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{FV (V}_\varepsilon))$$

D'autre part, on peut également exhiber Θ_1 , un relèvement régulier de Θ_0 , grâce à la surjectivité de l'opérateur trace. En écrivant $\theta_\varepsilon = \Theta_\varepsilon - \Theta_1$, on obtient le système thermique suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \kappa \Delta \theta_\varepsilon - i\omega \rho_f c_p \theta_\varepsilon + i\omega p_\varepsilon &= -\varepsilon^2 \kappa \Delta \Theta_1 + i\omega \rho_f c_p \Theta_1, & \text{sur } \Omega_f, \\ \theta_\varepsilon &= 0, & \text{sur } \Gamma^{\text{ext}}; \end{cases} \quad (T_\varepsilon)$$

La formulation variationnelle associée à (T_ε) s'écrit :

Trouver $(\theta_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)]^3 \times L^2(\Omega_f)$ tels que $\forall (\theta, q) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)]^3 \times L^2(\Omega)$, on ait

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \kappa \int_{\Omega_f} \nabla \theta_\varepsilon \cdot \nabla \theta - i\omega \rho_f c_p \int_{\Omega_f} \theta_\varepsilon \theta + i\omega \int_{\Omega_f} p_\varepsilon \theta \\ = \varepsilon^2 \kappa \int_{\Omega_f} \nabla \Theta \nabla \theta + i\omega \rho_f c_p \int_{\Omega_f} \Theta \theta. \quad (\text{FV } (T_\varepsilon)) \end{aligned}$$

Deuxième partie
Résultats théoriques

Chapitre 2

Etude des problèmes issus de la modélisation

Sommaire

2.1	Introduction	32
2.2	Etude du problème rigide	34
2.2.1	Le cadre théorique	34
2.2.2	Etude de la partie fluide du système complet	37
2.3	Etude du problème couplé fluide-structure	40
2.3.1	Le cadre théorique	40
2.3.2	Résolution dans H_f	45
2.3.3	Résolution dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$	49

2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes obtenus après modélisation. Dans un premier temps, les notations et hypothèses utilisées par la suite sont décrites. Dans un second temps, nous proposons une démonstration de l'existence et de l'unicité du problème rigide écrit sous une forme qui découple l'équation en température du système en déplacement. Cette étude est une adaptation au cas complexe de théorèmes classiques, c'est pourquoi la plupart des démonstrations se trouve dans l'annexe B. Dans un troisième temps, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème couplé fluide-structure qui ne contient que les inconnues en déplacement et en pression. Cette dernière étude fait appel à des outils mathématiques différents de ceux utilisés pour l'étude du problème rigide, notamment parce que nous nous plaçons en régime harmonique.

Pour les propriétés générales, nous avons recours à un ouvert \mathcal{O} indépendant de la géométrie décrite ci-dessus, et vérifiant les hypothèses suivantes.

Hypothèse (H 2.1)

L'ouvert \mathcal{O} est connexe, borné, de bord lipschitzien dans \mathbb{R}^3 .

On différencie les bords de l'ouvert \mathcal{O} suivant la condition qu'on lui attribue par la notation suivante :

Notation (N 2.1)

On note $\partial\mathcal{O}_D$ la partie du bord de \mathcal{O} sur laquelle portent les conditions de Dirichlet, et $\partial\mathcal{O}_N$ la partie du bord de \mathcal{O} sur laquelle portent les conditions de Neumann.

Hypothèse (H 2.2)

L'ouvert \mathcal{O} contient des conditions de Dirichlet, c'est-à-dire $\partial\mathcal{O}_D$ est de mesure non nulle.

Nous travaillons sur le domaine périodique Ω qui est constitué d'une partie fluide Ω_f et d'une partie solide Ω_s , toutes deux périodiques de période ε . La cellule de périodicité, appelée Y est un cube composé d'une partie fluide F et d'une partie solide S . On fait les hypothèses suivantes sur la composition du domaine Ω .

Hypothèse (H 2.3)

Les domaines Ω_f , Ω_s et Ω sont des ouverts connexes bornés de \mathbb{R}^3 tels que $\partial\Omega_f$, $\partial\Omega_s$ et $\partial\Omega$ sont lipschitziens.

L'hypothèse suivante contraint le domaine Ω_s mais n'est utile que pour la démonstration d'une égalité de type Korn (corollaire 2.28).

Hypothèse (H 2.4)

Le domaine Ω_s est inclus dans une réunion de petits cubes de taille fixe.

Hypothèse (H 2.5)

Les domaines Ω_f , Ω_s et Ω sont liés par la relation

$$\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \cup \Gamma^{\text{int}}.$$

où

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon^f(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}, p_\varepsilon) &= i\varepsilon\omega\eta\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) - \frac{1}{\varepsilon}p_\varepsilon\mathbf{Id}, \\ \sigma_\varepsilon^s(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) &= \lambda\nabla \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h})\mathbf{Id} + \mu\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}),\end{aligned}$$

et où

$$\mathbf{f}_\varepsilon^f = -\rho_f\omega^2\mathbf{h} - i\varepsilon^2\omega\eta\Delta\mathbf{h}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{f}_\varepsilon^s = -\rho_s\omega^2\mathbf{h} - (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{h} - \mu\Delta\mathbf{h}. \quad (2.3)$$

Pour cette étude, nous utilisons plutôt la formulation variationnelle (FV (F-S) $_\varepsilon$) :

Trouver $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega_f)$ tels que $\forall(\mathbf{v}, q) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega)$ on ait

$$\left\{ \begin{aligned} &\omega^2\rho_s \int_{\Omega_s} \overline{\mathbf{u}_\varepsilon} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_s} \overline{(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon)} : (\nabla\mathbf{v} + {}^t\nabla\mathbf{v}) - \lambda \int_{\Omega_s} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &+ \omega^2\rho_f \int_{\Omega_f} \overline{\mathbf{u}_\varepsilon} \cdot \mathbf{v} + i\frac{\omega\eta\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_f} \overline{(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon)} : (\nabla\mathbf{v} + {}^t\nabla\mathbf{v}) + \int_{\Omega_f} \overline{p_\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_{\Omega} \overline{\mathbf{f}^1} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \overline{\mathbf{f}_\varepsilon^2} : \nabla\mathbf{v}, \\ &\int_{\Omega_f} \overline{q} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, \end{aligned} \right. \quad (\text{FV (F-S)}_\varepsilon)$$

avec \mathbf{f}^1 et \mathbf{f}_ε^2 définies par les relations suivantes

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \overline{\mathbf{f}^1} \cdot \mathbf{v} &= -\omega^2\rho_f \int_{\Omega_f} \overline{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{v} - \omega^2\rho_s \int_{\Omega_s} \overline{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{v}, \\ \int_{\Omega} \overline{\mathbf{f}_\varepsilon^2} : \nabla\mathbf{v} &= -\varepsilon \int_{\Omega_f} \overline{\sigma_\varepsilon^f(\mathbf{h}, 0)} : \nabla\mathbf{v} - \int_{\Omega_s} \overline{\sigma_\varepsilon^s(\mathbf{h})} : \nabla\mathbf{v}.\end{aligned} \quad (2.4)$$

Ce dernier problème est similaire à celui traité par A. Mikelić *et al* dans [CFGM01] mais le système obtenu dans cet article diffère de ((F-S) $_\varepsilon$) parce qu'il est écrit avec le déplacement qui dépend du temps, ce qui a plusieurs conséquences

- les inégalités d'énergies qui découlent naturellement du système écrit en temps ne sont plus valables dans le système ((F-S) $_\varepsilon$) écrit pour des fonctions harmoniques en temps,
- le système obtenu est associé à une forme sesquilinéaire qui n'est pas coercive,
- le fait de travailler à fréquence ω fixée ne se traduit pas, comme on pourrait le penser, par une valeur de fréquence de vibrations interdite, et ce parce que ε tend vers 0.

Pour toutes ces raisons, l'étude théorique de ce système fait appel à des objets complètement différents de ceux utilisés pour la formulation variationnelle (FV (V $_\varepsilon$)).

2.2 Etude du problème rigide

2.2.1 Le cadre théorique

Dans toute la section, nous utilisons les notations de D. Braess [Bra01] que nous adaptons au cas complexe. Nous commençons par définir les espaces utilisés dans les notations (N 2.2) et (N 2.3).

Notation (N 2.2)

Les espaces X et M sont deux espaces de Hilbert d'anti-duaux respectifs X' et M' , c'est-à-dire les espaces des formes anti-linéaires continues sur X et M . On note respectivement $(\cdot, \cdot)_X$ et $(\cdot, \cdot)_M$ les produits scalaires sur X et M et ${}_{X'}\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et ${}_{M'}\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ sont les produits de dualité (X', X) et (M', M) .

Notation (N 2.3)

Le produit scalaire associé à $H^m(\mathcal{O})$ est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m, \mathcal{O}}$ et la norme associée se note $\|\cdot\|_{m, \mathcal{O}}$.

Nous introduisons ensuite les formes qui agissent sur ces espaces avec

Notation (N 2.4)

Les formes a et b sont sesquilinéaires continues et définies respectivement sur $X \times X$ et $X \times M$.

Nous avons maintenant les outils pour définir le problème point-selle que nous souhaitons résoudre

Etant donné $(f, g) \in X' \times M'$ trouver $(u, \lambda) \in X \times M$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + \overline{b(v, \lambda)} = {}_{X'}\langle f, v \rangle_X, & \forall v \in X, \\ b(u, \mu) = {}_{M'}\langle g, \mu \rangle_M, & \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour résoudre le problème (2.5), il suffit de montrer que l'application associée, et que l'on note \mathcal{L} , est un isomorphisme.

Notation (N 2.5)

L'application associée à (2.5) s'écrit

$$\mathcal{L} : \begin{cases} X \times M & \longrightarrow & X' \times M' \\ (u, \lambda) & \longmapsto & (\mathcal{F}, \mathcal{G}), \end{cases} \quad (2.6)$$

où les formes linéaires \mathcal{F} et \mathcal{G} sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v) &= a(u, v) + \overline{b(v, \lambda)}, & v \in X, \\ \mathcal{G}(\mu) &= b(u, \mu), & \mu \in M. \end{aligned}$$

En vue de réécrire le problème point-selle (2.5) sous une forme équivalente mais exprimée avec des opérateurs plutôt qu'avec les formes linéaires continues a et b définies à la notation (N 2.4), nous utilisons la notation suivante pour les opérateurs déduits de a et b .

Notation (N 2.6)

L'opérateur A associé à la forme sesquilinéaire a est défini par

$$A : X \longrightarrow X'; u \longmapsto \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ v & \longmapsto & {}_{X'}\langle Au, v \rangle_X = a(u, v) \end{cases} \quad (2.7)$$

De la même manière, nous définissons l'opérateur B associé à la forme sesquilinéaire b ainsi que son dual :

$$B : X \longrightarrow M'; u \longmapsto \begin{cases} M & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \mu & \longmapsto & {}_{M'}\langle Bu, \mu \rangle_M = b(u, \mu) \end{cases}, \quad (2.8)$$

$$B' : M \longrightarrow X'; \lambda \longmapsto \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{C} \\ v & \longmapsto {}_{X'}\langle B'\lambda, v \rangle_X = b'(\lambda, v) = \overline{b(v, \lambda)} \end{cases} . \quad (2.9)$$

Remarque 2.1

Comme a et b sont des formes sesquilinéaires continues, les opérateurs A , B et B' sont continus.

Nous obtenons ainsi la reformulation suivante du problème point-selle (2.5)

$$\begin{aligned} Au + B'\lambda &= f \\ Bu &= g \end{aligned}$$

Nous utilisons un théorème classique d'algèbre, que nous adaptons au cas complexe.

Théorème 2.2 (Brezzi)

Pour le problème point-selle (2.5), l'application \mathcal{L} (définie en (2.6)) définit un isomorphisme si les conditions i) et ii) sont vérifiées

i) $\exists \alpha > 0$ tel que $\Re(a(v, v)) \geq \alpha \|v\|^2$, $\forall v \in V$.

ii) La forme sesquilinéaire b satisfait à la condition Inf-sup suivante : il existe $\beta > 0$ tel que

$$\inf_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \sup_{\substack{\mu \in M \\ \mu \neq 0}} \frac{|b(v, \mu)|}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta > 0.$$

Enfin, rappelons ici le théorème de Lax-Milgram (voir par exemple [All05]) dans le cas complexe.

Théorème 2.3 (Lax-Milgram)

Soient H un espace de Hilbert complexe, $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $H \times H$, et L une forme linéaire continue sur H . On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in H, \quad (2.10)$$

ou tel que

$$\Re(a(v, v)) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in H. \quad (2.11)$$

Alors le problème suivant

$$\text{Trouver } u \text{ tel que } \forall v \in H, a(u, v) = L(v) \quad (2.12)$$

admet une unique solution.

Nous finissons cette section par des propriétés sur les normes.

Définition 2.4 (Normes négatives)

Soit $m \geq 1$. Etant donné $u \in L^2(\mathcal{O})$, on définit la norme du dual $H^{-m}(\mathcal{O})$ de $H_0^m(\mathcal{O})$ par :

$$\|u\|_{-m, \mathcal{O}} = \sup_{v \in H_0^m(\mathcal{O})} \frac{(u, v)_{0, \mathcal{O}}}{\|v\|_{m, \mathcal{O}}}.$$

Remarque 2.5

Cette définition, peut s'étendre au cas $\mathbf{u} \in [L^2(\mathcal{O})]^3$.

Théorème 2.6

Soit \mathcal{O} un ouvert vérifiant l'hypothèse (**H 2.1**), alors

1. L'image de l'application linéaire

$$\nabla : L^2(\mathcal{O}) \longrightarrow [H^{-1}(\mathcal{O})]^3$$

est un fermé de $[H^{-1}(\mathcal{O})]^3$.

2. Il existe une constante $c = c(\mathcal{O})$ telle que

$$\|p\|_{0,\mathcal{O}} \leq c(\|\nabla p\|_{-1,\mathcal{O}} + \|p\|_{-1,\mathcal{O}}) \quad \forall p \in L^2(\mathcal{O}), \quad (2.13)$$

$$\|p\|_{0,\mathcal{O}} \leq c\|\nabla p\|_{-1,\mathcal{O}} \quad \forall p \in L^2_{\text{moy}}(\mathcal{O}). \quad (2.14)$$

Remarque 2.7

En particulier, la constante $c(\mathcal{O})$ est strictement positive.

2.2.2 Etude de la partie fluide du système complet

Nous cherchons à résoudre les problèmes (V_ε) et (T_ε) définis aux pages 26 et 28.

Le problème fluide en déplacement

Les solutions classiques $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ sont des éléments de

$$[\mathcal{C}^2(\Omega_f) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_f})]^3 \times \mathcal{C}^1(\Omega_f).$$

Nous cherchons à résoudre la formulation faible dans $[H^1_{\text{Dir}}(\Omega_f)]^3 \times L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ où l'espace $L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ est donné par

$$L^2_{\text{moy}}(\Omega_f) = \left\{ q_\varepsilon \in L^2(\Omega_f), \frac{1}{|\Omega_f|} \int_{\Omega_f} q_\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (2.15)$$

Pour utiliser la théorie qui précède, on choisit de poser

$$X = [H^1_{\text{Dir}}(\Omega_f)]^3, \quad M = L^2_{\text{moy}}(\Omega_f). \quad (2.16)$$

On remarque que $L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ s'identifie à $L^2(\Omega_f)/\mathbb{R}$ (puisque le problème précédent ne permet une définition de q qu'à une constante près). On définit les formes séquentielles continues a et b par :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 \eta \int_{\Omega_f} \overline{\nabla \mathbf{u}_\varepsilon} : \nabla \mathbf{v}_\varepsilon \, d\mathbf{x} - i\omega \rho_f \int_{\Omega_f} \overline{\mathbf{u}_\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon \, d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{v}_\varepsilon, q_\varepsilon) &= - \int_{\Omega_f} \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}_\varepsilon} q_\varepsilon \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon) \in X^2$ et $q_\varepsilon \in M$. Grâce au théorème de Cauchy-Schwarz, les applications a et b sont continues respectivement sur $X \times X$ et sur $X \times M$. On obtient donc la formulation point-selle suivante pour la formulation variationnelle (FV (F-S) $_\varepsilon$) définie à la page 34 :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon) + b(\mathbf{v}_\varepsilon, p_\varepsilon) = {}_{X'}\langle f, \mathbf{v}_\varepsilon \rangle_X & \forall \mathbf{v}_\varepsilon \in X, \\ b(\mathbf{u}_\varepsilon, q_\varepsilon) = 0 & \forall q_\varepsilon \in M, \end{cases}$$

où

$${}_{X'}\langle f, \mathbf{v}_\varepsilon \rangle_X = -\varepsilon^2 \eta \int_{\Omega_f} \overline{\nabla \mathbf{h}} : \nabla \mathbf{v}_\varepsilon \, d\mathbf{x} + i\omega \rho_f \int_{\Omega_f} \overline{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon \, d\mathbf{x}. \quad (2.17)$$

On définit alors V par

$$V = \{ \mathbf{v}_\varepsilon \in X, (\nabla \cdot \mathbf{v}_\varepsilon, q_\varepsilon)_{0, \Omega_f} = 0, \quad \forall q_\varepsilon \in L^2_{\text{moy}}(\Omega_f) \}. \quad (2.18)$$

De plus si on munit X du produit scalaire

$$(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon)_X = \varepsilon^2 \int_{\Omega_f} \overline{\nabla \mathbf{u}_\varepsilon} : \nabla \mathbf{v}_\varepsilon \, d\mathbf{x},$$

on obtient la définition suivante pour V^\perp

$$V^\perp = \{ \mathbf{u}_\varepsilon \in X, (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{v}_\varepsilon)_{0, \Omega_f} = 0, \quad \forall \mathbf{v}_\varepsilon \in V \}.$$

Théorème 2.8

Sous les hypothèses du théorème 2.6, le problème (V_ε) satisfait aux conditions du théorème 2.2 de Brezzi.

Démonstration :

Tout d'abord, calculons $a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ pour $\mathbf{u}_\varepsilon \in V$

$$a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon) = \varepsilon^2 \eta \int_{\Omega_f} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 + i\omega \rho_f \int_{\Omega_f} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2.$$

Ensuite vérifions la V -coercivité de a

$$\Re(a(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon)) = \varepsilon^2 \int_{\Omega_f} |\nabla \mathbf{v}_\varepsilon|^2 = \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_f)}^2.$$

D'où l'ellipticité de a .

Montrons que b vérifie la condition Inf-sup. Pour $p_\varepsilon \in L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$, (2.14) implique que

$$c^{-1} \|p_\varepsilon\|_{0, \Omega_f} \leq \|\nabla p_\varepsilon\|_{-1, \Omega_f}.$$

Par définition de la norme négative, pour tout $\gamma > 0$, il existe $\mathbf{v}_\varepsilon^\gamma$ élément de $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)]^3$ tel que $\|\mathbf{v}_\varepsilon^\gamma\|_{1, \Omega_f} = 1$ et

$$\frac{(\mathbf{v}_\varepsilon^\gamma, \nabla p_\varepsilon)_{0, \Omega_f}}{\|\mathbf{v}_\varepsilon^\gamma\|_{1, \Omega_f}} \geq (1 - \gamma) \|\nabla p_\varepsilon\|_{-1, \Omega_f}.$$

En choisissant $\gamma = 1/2$, on obtient

$$(\mathbf{v}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \nabla p_\varepsilon)_{0, \Omega_f} \geq \frac{1}{2} \|\nabla p_\varepsilon\|_{-1, \Omega_f} \left\| \mathbf{v}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\|_{1, \Omega_f} = \frac{1}{2} \|\nabla p_\varepsilon\|_{-1, \Omega_f}.$$

Enfin l'inégalité (2.14) donne

$$\left(\mathbf{v}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \nabla p_\varepsilon \right)_{0, \Omega_f} \geq \frac{1}{2c} \|p_\varepsilon\|_{0, \Omega_f},$$

ce qui montre que la condition Inf-sup est vérifiée. \square

Proposition 2.9

Le problème (V_ε) de formulation variationnelle (FV (V_ε)) donnée à la page 33 admet une unique solution $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V \times M$, où les espaces V et M sont définis en (2.18) et (2.16).

Démonstration :

Il s'agit d'une conséquence du théorème 2.8. \square

Le problème fluide en température

On souhaite utiliser à nouveau le théorème 2.3 pour résoudre le problème (T_ε) de formulation variationnelle (FV (T_ε)) donnée à la page 33.

Proposition 2.10

Le problème (T_ε) admet une unique solution θ_ε dans $H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)$.

Démonstration :

Posons

$$a(\theta_\varepsilon, \varphi) = \varepsilon^2 \kappa \int_{\Omega_f} \overline{\nabla \theta_\varepsilon} \cdot \nabla \varphi - i\omega \rho_f c_p \int_{\Omega_f} \overline{\theta_\varepsilon} \varphi, \quad \forall \theta_\varepsilon, \varphi \in H_0^1(\Omega_f)$$

et

$$L(\varphi) = -\varepsilon^2 \kappa \int_{\Omega_f} \overline{\nabla \Theta} \cdot \nabla \varphi + i\omega \rho_f c_p \int_{\Omega_f} \overline{\Theta} \varphi - i\omega \int_{\Omega_f} \overline{p_\varepsilon} \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_f)$$

On munit $H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)$ du produit scalaire

$$(\theta_\varepsilon, \varphi) = \varepsilon^2 \int_{\Omega_f} \overline{\nabla \theta_\varepsilon} \cdot \nabla \varphi.$$

Alors a est une forme sesquilinéaire continue définie sur $H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f) \times H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)$ et L est une forme linéaire continue de $H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)$. De plus

$$\Re(a(\theta_\varepsilon, \theta_\varepsilon)) = \kappa \|\theta_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_f)}^2.$$

Le théorème de Lax-Milgram donne la coercivité de a et la proposition. \square

2.3 Etude du problème couplé fluide-structure

L'objectif de ce chapitre est de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème $((F-S)_\varepsilon)$ rappelé dans l'introduction faite à la section 2.1. Suivant une méthode classique, on se place dans l'espace H_f défini par

$$H_f = \{ \mathbf{u} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Omega_f \}. \quad (2.19)$$

La pression est alors le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'être dans H_f . La démonstration se fait en deux étapes, on commence par montrer l'existence et l'unicité d'un déplacement $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_f$ solution de $((F-S)_\varepsilon)$, puis on revient à l'étude de $((F-S)_\varepsilon)$ sur $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ afin d'obtenir la pression p_ε .

Remarque 2.11 (H_f est un espace de Banach)

L'espace H_f est un espace de Banach puisqu'il est fermé dans l'espace $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ qui est lui-même un Banach.

La première étape de la démonstration consiste à écrire la formulation variationnelle associée à $((F-S)_\varepsilon)$ dans H_f sous la forme

Pour $0 < \varepsilon < \varepsilon(\omega)$, trouver $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_f$ tel que quelque soit $\mathbf{v} \in H_f$ on ait

$$a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \quad (2.20)$$

où $\varepsilon(\omega)$ est à déterminer. La difficulté de cette étape réside dans le fait que la forme sesquilinéaire a n'est pas coercive. Pour contourner ce problème, nous écrivons l'opérateur A associé à la forme sesquilinéaire a sous la forme $A = B + C$ où B est coercif et bijectif, C est compact et $B + C$ est injectif. L'alternative de Fredholm permet alors de conclure que A est bijectif, ce qui donne l'existence et l'unicité de $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_f$ solution de $((F-S)_\varepsilon)$.

On termine la démonstration en déterminant l'orthogonal de H_f .

2.3.1 Le cadre théorique

Dans cette section, nous allons détailler les lemmes donnant des résultats d'analyse utiles pour la suite. Commençons par donner les hypothèses que nous utilisons dans toute la section.

Dans un premier temps, nous nous intéressons particulièrement à l'inégalité de Korn et à l'un de ses premiers corollaires permettant d'affirmer qu'une fonction de $[H_0^1(\mathcal{O})]^3$ dont le tenseur de déformation est nul, est nulle sur \mathcal{O} . Afin d'établir ce dernier résultat, nous caractérisons les fonctions de $[H^1(\mathcal{O})]^3$ dont le tenseur des contraintes est nul. Dans un second temps, nous rappelons la théorie des opérateurs de Fredholm.

Inégalité de Korn

Afin de donner les définitions et propriétés proposées ici, nous utilisons les références suivantes : F. Boyer et P. Fabrie [BF06] essentiellement aux chapitres III et VII, D. Braess [Bra01] et G. Allaire [All92].

Définition 2.12 (Définition de $\mathcal{R}(\mathcal{O})$)

Soit \mathcal{O} un ouvert vérifiant l'hypothèse **(H 2.1)**. On note $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions $\mathbf{u} \in [H^1(\mathcal{O})]^3$ telles que $\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} = 0$ presque partout.

Définition 2.13

Pour un ouvert \mathcal{O} vérifiant les hypothèses **(H 2.1)** et **(H 2.2)**, on peut définir l'espace $[H_{\text{Dir}}^1(\mathcal{O})]^3$ par :

$$[H_{\text{Dir}}^1(\mathcal{O})]^3 = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3, \text{ tel que } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}. \quad (2.21)$$

Lemme 2.14

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathcal{O})$ alors il existe deux vecteurs constants $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}, \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (2.22)$$

Réciproquement, si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , \mathbf{u} défini par $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}$ appartient à $\mathcal{R}(\mathcal{O})$.

Démonstration :

On introduit le vecteur \mathbf{b} défini par

$$\mathbf{b} = \nabla \wedge \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_2 \mathbf{u}_3 - \partial_3 \mathbf{u}_2 \\ \partial_3 \mathbf{u}_1 - \partial_1 \mathbf{u}_3 \\ \partial_1 \mathbf{u}_2 - \partial_2 \mathbf{u}_1 \end{pmatrix}.$$

La démonstration se fait en trois étapes. Tout d'abord, on calcule $\nabla \mathbf{u}$ en fonction de \mathbf{b} , en prenant en compte le fait que le tenseur des contraintes de \mathbf{u} est nul, puis on en déduit que \mathbf{b} est constant. Enfin, on montre l'existence de \mathbf{a} constant tel que (2.22) soit vérifiée.

Tout d'abord, comme $\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} = 0$, on sait que

$$\partial_i \mathbf{u}_j + \partial_j \mathbf{u}_i = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq 3. \quad (2.23)$$

En particulier, $\partial_i \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_i = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$ et la diagonale de $\nabla \mathbf{u}$ est nulle. Ensuite grâce à (2.23), on a

$$2\partial_2 \mathbf{u}_1 = \partial_2 \mathbf{u}_1 + \partial_1 \mathbf{u}_2 - \partial_1 \mathbf{u}_2 + \partial_2 \mathbf{u}_1 = -\mathbf{b}_3,$$

ce qui donne l'expression suivante

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 & 0 & -\mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que \mathbf{b} est constant, il suffit de montrer que son gradient est nul, c'est-à-dire

$$\partial_i \mathbf{b}_j = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq 3.$$

Faisons le calcul pour $i = 1$, les autres cas étant similaires. En utilisant (2.23) et le fait que la diagonale de $\nabla \mathbf{u}$ est nulle, on a

$$\begin{aligned}\partial_1 \mathbf{b}_2 &= 2\partial_1 (\partial_3 \mathbf{u}_1) = 2\partial_3 (\partial_1 \mathbf{u}_1) = 0, \\ \partial_1 \mathbf{b}_3 &= 2\partial_1 (\partial_2 \mathbf{u}_1) = 2\partial_2 (\partial_1 \mathbf{u}_1) = 0.\end{aligned}$$

Cette méthode de calcul permet de montrer que $\partial_i \mathbf{b}_j = 0$ pour tous $1 \leq i \neq j \leq 3$. Il reste donc à déterminer le cas où $i = j$, toujours en utilisant (2.23)

$$\partial_1 \mathbf{b}_1 = 2\partial_1 (\partial_2 \mathbf{u}_3) = -2\partial_1 (\partial_3 \mathbf{u}_2) = -2\partial_2 \partial_3 \mathbf{u}_1. \quad (2.24)$$

On montre de même que $\partial_2 \mathbf{b}_2 = 2\partial_2 \partial_3 \mathbf{u}_1 = -\partial_1 \mathbf{b}_1$ et $\partial_3 \mathbf{b}_3 = 2\partial_1 \partial_2 \mathbf{u}_3 = -\partial_1 \mathbf{b}_1$. D'autre part, on a $\partial_2 \mathbf{b}_2 = -2\partial_3 \partial_2 \mathbf{u}_1 = \partial_1 \mathbf{b}_1$, ce qui permet d'affirmer que

$$\partial_1 \mathbf{b}_1 = \partial_2 \mathbf{b}_2 = \partial_3 \mathbf{b}_3 = 0,$$

et donc \mathbf{b} est constant par connexité de \mathcal{O} .

Il nous reste alors à montrer l'existence de \mathbf{a} . Pour cela, un simple calcul montre que

$$\nabla \left(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \mathbf{b} \wedge \mathbf{x} \right) = 0.$$

Ainsi, par connexité, il existe une constante \mathbf{a} telle que (2.22) soit vérifiée. \square

Lemme 2.15 (Lien entre le tenseur de déformation et le gradient)

Soit \mathbf{u} une fonction de $[H_0^1(\mathcal{O})]^3$, alors on a la relation suivante

$$\|\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}}^2 = 2\|\nabla \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}}^2 + 2\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}}^2.$$

Démonstration :

Par linéarité de l'intégrale, on obtient tout d'abord que

$$\|\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}}^2 = 2\|\nabla \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}}^2 + 2 \int_{\mathcal{O}} {}^t \nabla \mathbf{u} : \overline{\nabla \mathbf{u}}.$$

Il suffit donc de montrer que $\int_{\mathcal{O}} {}^t \nabla \mathbf{u} : \overline{\nabla \mathbf{u}} = \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}}^2$. Ce résultat s'obtient en explicitant le produit contracté et en écrivant une intégration par parties, ce qui donne

$$\int_{\mathcal{O}} {}^t \nabla \mathbf{u} : \overline{\nabla \mathbf{u}} = - \int_{\mathcal{O}} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \partial_i (\partial_j \mathbf{u}_i) \overline{\mathbf{u}_j}.$$

On utilise ensuite le fait que $\partial_i (\partial_j \mathbf{u}_i) \overline{\mathbf{u}_j} = \partial_j (\partial_i \mathbf{u}_i) \overline{\mathbf{u}_j}$ et on conclut en faisant une dernière intégration par parties. \square

Lemme 2.16

Soit \mathcal{O} un ouvert vérifiant les hypothèses (H 2.1) et (H 2.2), alors

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) \cap [H_{\text{Dir}}^1(\mathcal{O})]^3 = \{0\},$$

c'est-à-dire que si $\mathbf{u} \in [H_{\text{Dir}}^1(\mathcal{O})]^3$, alors $\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} = 0$ implique que $\mathbf{u} = 0$ presque partout.

Démonstration :

En effet, si $\|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}} = 0$, alors d'après le lemme **2.14**, il existe deux vecteurs complexes \mathbf{a} et \mathbf{b} tels que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}$ (on dit que \mathbf{u} est un déplacement rigide infinitésimal). Si de plus \mathbf{u} est dans $[H_{\text{Dir}}^1(\mathcal{O})]^3$, il est nul sur le bord de Dirichlet, ce qui implique que l'objet dont le déplacement est décrit par \mathbf{u} ne peut pas tourner sur lui même, i.e. $\mathbf{b} = 0$. Donc le déplacement \mathbf{u} est constant égal à \mathbf{a} et nul sur le bord de Dirichlet, d'où $\mathbf{u} = 0$. \square

Proposition 2.17 (Inégalité de Korn)

Soit \mathcal{O} un ouvert vérifiant les hypothèses **(H 2.1)** et **(H 2.1)**. Alors il existe une constante $c(\mathcal{O}) > 0$ telle que, pour tout $\mathbf{u} \in [H_{\text{Dir}}^1(\mathcal{O})]^3$, où $[H_{\text{Dir}}^1(\mathcal{O})]^3$ est défini en (2.21), alors on a

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{O}} \leq c(\mathcal{O}) \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}}.$$

Le théorème **2.17** est démontré par G. Duvaut et J.L. Lions dans [DL76] (chapitre 3) et par D. Braess dans [Bra01] comme étant une conséquence du théorème **2.18** plus général dont on trouvera aussi une démonstration dans [DL76] (chapitre 3) et du lemme **2.16**.

Théorème 2.18

Soit \mathcal{O} un ouvert borné de frontière régulière. Il existe un réel $c(\mathcal{O})$ strictement positif tel que

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{O}} \leq c(\mathcal{O}) \left(\|\mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}} + \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}} \right).$$

Ces deux théorèmes sont valables pour une fonction à valeur complexe, il n'y a donc pas à adapter la démonstration.

Opérateurs de Fredholm

Introduisons la théorie des opérateurs de Fredholm au moyen de la définition **2.19** et du théorème **2.20** suivants.

Définition 2.19 (Opérateurs de Fredholm)

Pour E et F deux espaces de Banach, un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit de Fredholm s'il vérifie les deux propriétés suivantes

1. Le noyau $\ker(T)$ est de dimension finie dans E .
2. L'image $\mathfrak{S}(T)$ est fermée et de codimension finie dans F .

On définit alors l'indice de T noté $\text{ind}(T)$ par

$$\text{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \text{codim}(\mathfrak{S}(T)).$$

Théorème 2.20 (Alternative de Fredholm)

Si T est un opérateur de Fredholm d'indice $\text{ind}(T)$, et si C est un opérateur compact, alors $T + C$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\text{ind}(T)$.

En fait, nous n'allons pas utiliser directement ce théorème, mais l'un de ses corollaires.

Corollaire 2.21

Soit A un opérateur injectif tel qu'il existe deux opérateurs B et C tels que $A = B + C$, avec B bijectif et C compact. Alors l'opérateur A est lui aussi bijectif.

Démonstration :

Comme B est bijectif, $\dim(\ker B) = \text{codim}(\Im B) = 0$ et de plus $\Im B$ est fermé dans H_f , par conséquent, B est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Comme C est compact, le théorème 2.20 montre que A est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Or par hypothèse, A est injectif, on a donc $\text{codim}(\Im A) = 0$, ce qui implique que A est surjectif. D'où la bijectivité de A . \square

Définition 2.22

Soit X un espace de Banach complexe, on dit que $f \in X'$ est une forme anti-linéaire si :

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$, pour tout $(x, y) \in X^2$,
- $f(\lambda x) = \bar{\lambda}f(x)$, pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times X$.

Comme pour le dual, la norme de l'anti-dual X' de l'espace de Banach X s'écrit :

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|{}_{X'}\langle f, x \rangle_X|}{\|x\|_X}.$$

De plus comme \mathbb{C} est complet, et que X est un espace borné, l'espace $(X', \|\cdot\|_{X'})$ est un Banach.

Théorème de De Rham

Dans cette sous-section, nous introduisons les lemmes et notations nécessaires à la démonstration du théorème de De Rham qui permet de résoudre le problème couplé (FV (F-S) $_\varepsilon$) de la page 34 à partir de la résolution faite dans H_f .

Remarque 2.23

- Soit E un espace de Banach et A une partie de E . Alors l'orthogonal A^\perp de A est un sous-espace vectoriel fermé de E' . Lorsque E est réflexif, $A^{\perp\perp}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de E . C'est alors le plus petit sous-espace fermé de E contenant A , c'est-à-dire que $A^{\perp\perp} = \bar{A}$. On a donc

$$A \text{ est fermé} \iff A^{\perp\perp} = A.$$

- Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Lemme 2.24 (Peetre)

Soient E_1, E_2, E_3 trois espaces de Banach. Soient A une application linéaire continue de E_1 dans E_2 et B une application linéaire de E_1 dans E_3 compacte. On suppose que l'application

$$N : u \in E_1 \mapsto \|Au\|_{E_2} + \|Bu\|_{E_3} \tag{2.25}$$

définit une norme sur E_1 équivalente à la norme initiale. Alors $\ker A$ est de dimension finie dans E_1 et l'image de A est fermée dans E_2 .

Démonstration :

On pourra se référer par exemple à F. Boyer et P. Fabrie dans [BF06] (Lemme III.1.15). \square

Lemme 2.25

Soient E et F deux espaces de Banach et S une application linéaire compacte de E dans F . Alors l'application adjointe tS de F' dans E' est compacte.

Démonstration :

On pourra se référer par exemple à F. Boyer et P. Fabrie dans [BF06] (Lemme II.2.6). \square

2.3.2 Résolution dans H_f

Dans cette section, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (2.20) dans l'espace H_f défini en (2.19). Pour cela, nous écrivons l'opérateur A associé à la forme linéaire a définie dans (2.20), sous la forme $A = B + C$, avec B bijectif et C compact. Puis nous appliquons un corollaire du théorème de Fredholm selon lequel si A est injectif, alors A est bijectif. Nous commençons la démonstration en établissant le corollaire du théorème de Fredholm. Puis nous montrons que B est coercif, en utilisant l'inégalité de Korn sur le domaine Ω , et donc bijectif grâce au théorème de Lax-Milgram. La compacité de C vient du théorème de Rellich. Enfin, pour démontrer l'injectivité de A , on écrit la formulation variationnelle (2.19) en \mathbf{u}_ε . On applique successivement l'inégalité de Korn sur les domaines Ω_f et Ω_s et on utilise le fait que ε tend vers 0.

Nous commençons par écrire le problème sous la forme $a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v})$.

Proposition 2.26

Le problème (FV (F-S) $_\varepsilon$) donné à la page 34, pour des fonctions tests dans H_f , peut s'écrire sous la forme

Trouver $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_f$ tel que :

$$a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_f,$$

où H_f est défini en (2.19) à la page 40, où b et c sont des formes sesquilinéaires continues sur $H_f \times H_f$ définies par

$$b(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla \mathbf{u}_\varepsilon) : \overline{(\nabla \mathbf{v} + {}^t\nabla \mathbf{v})} + \lambda \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} - i\omega\eta\varepsilon^2 \int_{\Omega_f} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla \mathbf{u}_\varepsilon) : \overline{\nabla \mathbf{v}}, \quad (2.26)$$

et

$$c(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = -\omega^2 \rho_s \int_{\Omega_s} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \overline{\mathbf{v}} - \omega^2 \rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \overline{\mathbf{v}},$$

et où F est la forme anti-linéaire continue $H_f \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$F(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \mathbf{f}^1 \cdot \overline{\mathbf{v}} - \int_{\Omega} \mathbf{f}_\varepsilon^2 : \overline{(\nabla \mathbf{v} + {}^t\nabla \mathbf{v})},$$

où \mathbf{f}^1 et \mathbf{f}_ε^2 sont définies en (2.2) et en (2.3) à la page 34.

On peut ensuite définir les opérateurs A , B et C par

$$A : \begin{cases} H_f & \longrightarrow (H_f)' \\ \mathbf{u} & \longmapsto A(\mathbf{u}) : \begin{cases} H_f & \rightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{v} & \mapsto {}_{H^{-1}}\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H_0^1} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{cases} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$B : \begin{cases} H_f & \longrightarrow (H_f)' \\ \mathbf{u} & \longmapsto B(\mathbf{u}) : \begin{cases} H_f & \rightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{v} & \mapsto {}_{H^{-1}}\langle B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H_0^1} = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{cases} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$C : \begin{cases} H_f & \longrightarrow (H_f)' \\ \mathbf{u} & \longmapsto C(\mathbf{u}) : \begin{cases} H_f & \rightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{v} & \mapsto {}_{H^{-1}}\langle C\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H_0^1} = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{cases} \end{cases} \quad (2.29)$$

Etudions la dépendance en ε de la constante de Korn dans le cas du domaine solide (pour le domaine fluide nous avons le même type de résultat). Pour cela, nous différencions les cas où Ω_s puis S_k^ε vérifient ou non l'hypothèse **(H 2.2)**.

Corollaire 2.27 (Inégalité de Korn sur le domaine Ω_s)

Si Ω_s vérifie l'hypothèse **(H 2.2)**, il existe une constante M qui ne dépend pas de ε telle que

$$\forall \mathbf{u} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega_s)]^3, \quad \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega_s} \leq M \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega_s}.$$

Ce corollaire est par exemple démontré par A. O. Oleinik *et al* dans [OCY92].

Corollaire 2.28 (Inégalité de Korn sur le domaine Ω_s avec conditions de Dirichlet sur le fluide)

Si \mathbf{u} est nulle sur Ω_f (et donc si S_k^ε vérifie l'hypothèse **(H 2.2)** pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$) et si Ω_s vérifie l'hypothèse **(H 2.4)**, il existe une constante N qui ne dépend pas de ε telle que

$$\forall \mathbf{u} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega_s)]^3, \quad \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega_s} \leq \varepsilon N \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega_s}.$$

Démonstration :

On commence par découper le domaine Ω_s suivant les domaines S_k^ε donnés en (2.1) à la page 33, puis on utilise le changement de variable

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$$

pour obtenir

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega_s}^2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \int_{S_k^\varepsilon} |\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \varepsilon^3 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \int_{S_k} |\mathbf{u}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}.$$

On utilise ensuite l'inégalité de Korn sur chacun des domaines S_k et on fait le changement de variable inverse pour obtenir

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega_s}^2 \leq \varepsilon^3 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} C(S_k) \int_{S_k} |\mathbf{G}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{y} \leq \varepsilon^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} C(S_k) \int_{S_k^\varepsilon} |\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon)|^2 d\mathbf{x}.$$

Comme Ω_s vérifie l'hypothèse **(H 2.4)**, chaque domaine S_k^ε est totalement inclus dans Ω_s (dès que ε est assez petit) et les constantes $C(S_k)$ sont toutes égales entre elles. On obtient donc le résultat annoncé avec $N = C(S)$. \square

Pour utiliser l'alternative de Fredholm, il suffit de montrer que B est bijectif, C compact et A injectif.

Lemme 2.29

L'opérateur B défini en (2.28) est coercif sur H_f au sens où il existe un réel strictement positif $c(\varepsilon)$ tel que

$$\forall \mathbf{u} \in H_f, \quad |{}_{H^{-1}}\langle B\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{H_0^1}| = |b(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq c(\varepsilon) \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2.$$

Démonstration :

En utilisant l'égalité (1.26) et la définition de b donnée en (2.26), on note que

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega_s}^2 + \lambda \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{0,\Omega_s}^2 - i \frac{\omega \eta \varepsilon^2}{2} \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega_f}^2.$$

On peut alors minorer $|b(\mathbf{u}, \mathbf{u})|$ en ne faisant intervenir que la norme du tenseur $\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}$ sur Ω tout entier. En notant $c(\varepsilon) = \min(\mu/2, \omega \eta \varepsilon^2/2)$, on obtient l'inégalité

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq c(\varepsilon) \|(\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u})\|_{\Omega}^2,$$

Comme Ω est un ouvert borné, connexe, et régulier de \mathbb{R}^3 , et que de plus la mesure superficielle de Γ^{ext} est non nulle (i.e. la mesure superficielle du bord de Ω soumis aux conditions de Dirichlet est non nulle), on peut appliquer la proposition **2.17**. On obtient ainsi la coercivité de B . \square

Remarque 2.30

On voit dans la démonstration l'utilité de considérer le module de $b(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ plutôt que sa partie réelle. En effet, la partie réelle de $b(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ fait intervenir uniquement le domaine solide, ce qui rend alors l'inégalité de Korn impossible à exploiter sur le domaine Ω entier.

Proposition 2.31

L'opérateur B défini en (2.28) est bijectif.

Démonstration :

Montrer que B est bijectif revient à montrer que pour toute forme linéaire continue L donnée, il existe une unique fonction $\mathbf{u} \in H_f$ telle que

$${}_{H^{-1}}\langle B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H_0^1} = L(\mathbf{v}), \quad \text{pour tous } \mathbf{v} \in H_f.$$

Il faut donc appliquer le théorème **2.3** pour la forme b définie en (2.26). L'espace H_f est hilbertien pour la même norme que celle de $[H^1(\Omega)]^3$. De plus, b est sesquilinéaire par linéarité de l'intégrale et est continue par Cauchy-Schwarz. Nous avons enfin vu que B et donc b sont coercifs dans le lemme **2.29**. Le théorème **2.3** de Lax-Milgram s'applique donc, et B est bijectif. \square

Proposition 2.32

L'opérateur C défini en (2.29) est compact.

Démonstration :

Tout d'abord, on note que les espaces $(H_f, \|\cdot\|_{1,\Omega})$ et $(H'_f, \|\cdot\|_{H'_f})$ sont des espaces de Banach. La théorie des opérateurs compacts s'applique donc, et il suffit de montrer que l'image $C(U)$ de la boule unité U de H_f par C est précompacte. Cela revient à montrer que toute suite de l'adhérence de $C(U)$ admet une sous-suite convergente.

Soit donc $(C\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $C(U)$. Alors $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée (puisque dans U) de $H_0^1(\Omega)$. Par le théorème de Rellich, il existe une sous-suite de $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (encore notée $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) convergente dans $[L^2(\Omega)]^3$. Notons \mathbf{u} la limite de $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il reste donc à montrer que la suite $(C\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (à sous-suite près) vers $C\mathbf{u}$. Or par Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\|_{\infty, \Omega} \leq \omega^2 \max(\rho_f, \rho_s) \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{0, \Omega}.$$

Donc pour n assez grand, la norme $\|C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\|_{\infty, \Omega}$ tend vers 0, ce qui montre la convergence voulue. \square

Proposition 2.33

L'opérateur A défini en (2.27) est injectif.

Démonstration :

Soit $\mathbf{u} \in \ker A$, alors en utilisant les définitions de B et C données en (2.28) et (2.29) et l'égalité (1.26), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &=_{[H^{-1}(\Omega)]^3} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3} = \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_s}^2 + \lambda \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{0, \Omega_s}^2 \\ &\quad - i \frac{\omega \eta \varepsilon^2}{2} \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_f}^2 - \omega^2 \rho_s \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega_s}^2 - \omega^2 \rho_f \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega_f}^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

En considérant la partie imaginaire, on obtient $\|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{\Omega_f}^2 = 0$. Le lemme **2.16** page 42 montre alors que le déplacement \mathbf{u} est nul sur le domaine fluide Ω_f . L'équation (2.30) s'écrit donc

$$\frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_s}^2 + \lambda \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{0, \Omega_s}^2 - \omega^2 \rho_s \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega_s}^2 = 0. \quad (2.31)$$

En minorant la divergence par 0 et en utilisant l'inégalité de Korn pour un domaine perforé avec condition au bord de Dirichlet (vue au corollaire **2.28**) dans (2.31), on obtient

$$\left(\frac{\mu N}{2\varepsilon^2} - \omega^2 \rho_s \right) \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega_s}^2 \leq 0, \quad (2.32)$$

où N est une constante indépendante de ε . Or on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu N}{2\varepsilon^2} - \omega^2 \rho_s = +\infty.$$

Par conséquent, pour ε assez petit ($\varepsilon < \varepsilon(\omega)$), la quantité $\mu N/2\varepsilon^2 - \omega^2 \rho_s$ est strictement positive. On déduit donc de (2.32) que \mathbf{u} est nulle aussi sur le domaine solide. Ce qui montre que A est injectif. \square

Théorème 2.34 (Existence et unicité dans H_f)

Il existe une unique solution \mathbf{u}_ε dans H_f du problème fluide-structure $((F-S)_\varepsilon)$, dès que $\varepsilon < \varepsilon(\omega)$, pour ω fixé.

Démonstration :

C'est une application du corollaire 2.21, de la bijectivité de B donnée par la proposition 2.31, de la compacité de C donnée par la proposition 2.32 et de l'injectivité de A donnée par la proposition 2.33. \square

2.3.3 Résolution dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$

Dans la section précédente, nous avons montré l'existence et l'unicité de $\mathbf{u} \in H_f$ telle que (FV (F-S) $_\varepsilon$) soit vraie pour tout $\mathbf{v} \in H_f$ (dès que ε est assez petit). Pour montrer qu'il existe une pression p_ε solution de $((F-S)_\varepsilon)$, nous avons besoin d'un argument type théorème de De Rham. Le théorème suivant, adapté d'un théorème cité par F. Boyer et P. Fabrie dans [BF06], permet en effet de conclure.

Proposition 2.35

Soit Ω un ouvert lipschitzien connexe et borné de \mathbb{R}^3 et H_f l'espace défini en (2.19) à la page 40. Alors son orthogonal est l'espace

$$H_f^\perp = \left\{ \mathbf{g} \in [H^{-1}(\Omega)]^3, \exists p \in L^2(\Omega_f), \right. \\ \left. \text{telle que } {}_{H^{-1}}\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = - \int_{\Omega_f} p(\mathbf{x}) \overline{\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \right\}.$$

Démonstration :

Soit Y le sous-espace de $[H^{-1}(\Omega)]^3$ défini par

$$Y = \left\{ \mathbf{g} \in [H^{-1}(\Omega)]^3, \exists p \in L^2(\Omega_f), \right. \\ \left. \text{telle que } {}_{H^{-1}}\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = - \int_{\Omega_f} p(\mathbf{x}) \overline{\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right\}. \quad (2.33)$$

Comme $Y \in H_f^\perp$, le théorème est démontré si on établit que $H_f^\perp \subset Y$. D'après le lemme 2.36, Y est un sous-espace fermé de $[H^{-1}(\Omega)]^3$. Or $[H^{-1}(\Omega)]^3$ est réflexif car c'est un espace de Hilbert donc la remarque 2.23 assure que $Y^{\perp\perp} = Y$. Ainsi, il suffit de montrer que $Y^\perp \subset H_f$ (toujours d'après la remarque 2.23) pour terminer la démonstration.

Soit donc $\boldsymbol{\varphi} \in Y^\perp$. Alors pour toute fonction \mathbf{g} de Y , ${}_{H^{-1}}\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = 0$. Ou encore, pour toute fonction $p \in L^2(\Omega_f)$, $\int_{\Omega_f} p(\mathbf{x}) \overline{\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = 0$. Ce qui signifie que $\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}$ est nulle sur Ω_f , et donc que $\boldsymbol{\varphi}$ est dans H_f . \square

Lemme 2.36

Soit Ω un ouvert vérifiant les hypothèses (H 2.3) et (H 2.5), alors l'ensemble Y défini en (2.33) est fermé dans $[H^{-1}(\Omega)]^3$.

Démonstration :

On définit les espaces $E_1 = L^2(\Omega)$, $E_2 = [H^{-1}(\Omega)]^3$ et $E_3 = H^{-1}(\Omega)$. Soient A et B les applications suivantes

$$A : \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 \\ u & \longmapsto & \begin{cases} \nabla u & \text{sur } \Omega_f \\ 0 & \text{sur } \Omega_s \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad B : \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_3 \\ u & \longmapsto & u \end{array} .$$

L'objectif est de montrer que le lemme **2.24** s'applique, nous allons donc montrer que les hypothèses de ce lemme sont vérifiées. Tout d'abord, A est linéaire continue.

L'injection canonique ${}^t B$ est linéaire compacte. En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\{v \in H^1(\Omega), \|v\|_{1,\Omega} \leq 1\}$. Alors par le théorème de Rellich, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant fortement $L^2(\Omega)$ vers u . De plus

$$\|{}^t B u_n - {}^t B u\|_{0,\Omega} = \|u_n - u\|_{0,\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi $({}^t B u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (à sous-suite près) et ${}^t B$ est compacte. Le lemme **2.25** montre alors que B est elle aussi compacte.

Enfin l'application N définie en (2.25) est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ grâce au théorème **2.6** (l'autre inégalité nécessaire pour obtenir l'équivalence des normes vient de la définition des normes négatives).

L'application du lemme **2.24** montre que Y est fermé. \square

Lemme 2.37 (Unicité de p)

Soit $\mathbf{g} \in H_f^\perp$, alors il existe une unique fonction $p \in L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ telle que

$${}_{H^{-1}} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = - \int_{\Omega_f} p(\mathbf{x}) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3,$$

où $L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ est défini par

$$L^2_{\text{moy}}(\Omega_f) = \left\{ p \in L^2(\Omega_f), \frac{1}{|\Omega_f|} \int_{\Omega_f} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (2.34)$$

Démonstration :

Dans la proposition **2.35**, nous avons vu que pour toute fonction $\mathbf{g} \in H_f^\perp$ il existe une fonction $p \in L^2(\Omega_f)$ telle que

$${}_{H^{-1}} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = - \int_{\Omega_f} p(\mathbf{x}) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3.$$

Soient $\mathbf{g} \in H_f^\perp$ et p la pression donnée par la définition de H_f^\perp . Nous définissons alors $\tilde{p} = p - \oint_{\Omega_f} p$. D'après le théorème de la divergence, toute fonction $\boldsymbol{\varphi}$ de $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ est un élément de $L^2_{\text{moy}}(\Omega)$. Par conséquent, nous avons la propriété

$${}_{H^{-1}} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = - \int_{\Omega_f} \tilde{p}(\mathbf{x}) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3.$$

Ainsi, il suffit de montrer que \tilde{p} est unique. Soient donc deux fonctions \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 de $L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ telles que

$$\begin{aligned} {}_{H^{-1}}\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} &= - \int_{\Omega_f} \tilde{p}_1(\mathbf{x}) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \\ {}_{H^{-1}}\langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} &= - \int_{\Omega_f} \tilde{p}_2(\mathbf{x}) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \end{aligned}$$

Grâce au lemme **3.14**, on sait que pour toute fonction $f \in L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$,

$$\int_{\Omega_f} (\tilde{p}_1(\mathbf{x}) - \tilde{p}_2(\mathbf{x})) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Une application du lemme **3.15** montre alors que la différence $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ est presque partout constante. Comme \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 sont à moyenne nulle, la constante est nulle. Finalement, on obtient $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$. \square

Théorème 2.38

Le problème (FV (F-S) $_{\varepsilon}$) défini à la page 34 admet une unique solution $(\mathbf{u}_{\varepsilon}, p_{\varepsilon}) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$.

Démonstration :

Nous avons montré qu'une fois les conditions de bord (c'est-à-dire la fonction \mathbf{f}_{ε}) définies, il existe un unique vecteur $\mathbf{u}_{\varepsilon} \in H_f$ tel que la formulation variationnelle (FV (F-S) $_{\varepsilon}$)

$$a(\mathbf{u}_{\varepsilon}, \boldsymbol{\varphi}) = F(\boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in H_f,$$

soit vérifiée sur H_f . La proposition **2.35** et le lemme **2.37** donnent alors l'existence et l'unicité du couple $(\mathbf{u}_{\varepsilon}, p_{\varepsilon}) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times L^2_{\text{moy}}(\Omega)$ solution de ((F-S) $_{\varepsilon}$). \square

Chapitre 3

Convergence double échelle

Sommaire

3.1	Introduction	54
3.2	Cadre théorique	57
3.3	Convergence double échelle des problèmes	64
3.3.1	Prolongement de la pression	64
3.3.2	Estimations <i>a priori</i>	66
3.3.3	Limites double échelle des inconnues	70
3.3.4	Limites double échelle des systèmes d'équations	76
3.4	Existence et unicité des systèmes homogénéisés	82
3.4.1	Existence et unicité de la solution des problèmes homogénéisés microscopiques	82
3.4.2	Existence et unicité de la solution du problème homogénéisé macroscopique	83

3.1 Introduction

Pour les propriétés générales, nous avons recours à un ouvert \mathcal{O} indépendant de la géométrie décrite ci-dessus, et vérifiant les hypothèses suivantes.

Hypothèse (H 3.1)

L'ouvert \mathcal{O} est connexe, borné, de bord lipschitzien dans \mathbb{R}^3 .

On différencie les bords de l'ouvert \mathcal{O} suivant la condition qu'on lui attribue par la notation suivante :

Notation (N 3.1)

On note $\partial\mathcal{O}_D$ la partie du bord de \mathcal{O} sur laquelle portent les conditions de Dirichlet, et $\partial\mathcal{O}_N$ la partie du bord de \mathcal{O} sur laquelle portent les conditions de Neumann.

Hypothèse (H 3.2)

L'ouvert \mathcal{O} contient des conditions de Dirichlet, c'est-à-dire $\partial\mathcal{O}_D$ est de mesure non nulle.

Nous travaillons sur le domaine périodique Ω qui est constitué d'une partie fluide Ω_f et d'une partie solide Ω_s , toutes deux périodiques de période ε . La cellule de périodicité, appelée Y est un cube composé d'une partie fluide F et d'une partie solide S . On obtient ainsi les hypothèses suivantes sur la composition du domaine Ω .

Hypothèse (H 3.3)

Les domaines Ω_f , Ω_s et Ω sont des ouverts bornés de \mathbb{R}^3 tels que $\partial\Omega_f$, $\partial\Omega_s$ et $\partial\Omega$ sont lipschitziens.

L'hypothèse suivante contraint le domaine Ω_s mais n'est utile que pour la démonstration d'une égalité de type Korn (corollaire 2.28).

Hypothèse (H 3.4)

Le domaine Ω_s est inclus dans une réunion de petits cubes de taille fixe.

Hypothèse (H 3.5)

Les domaines Ω_f , Ω_s et Ω sont liés par la relation

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f \cup \Gamma^{\text{int}}.$$

Hypothèse (H 3.6)

Les domaines Ω_f et Ω_s sont définis par ε -périodicité de la cellule de référence Y comme suit

$$\Omega_f = \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} F_{\mathbf{k}}^\varepsilon, \quad \Omega_s = \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} S_{\mathbf{k}}^\varepsilon,$$

où

$$S_{\mathbf{k}} = S + \mathbf{k}, \quad S_{\mathbf{k}}^\varepsilon = \varepsilon S_{\mathbf{k}} \cap \Omega, \quad F_{\mathbf{k}} = F + \mathbf{k}, \quad F_{\mathbf{k}}^\varepsilon = \varepsilon F_{\mathbf{k}} \cap \Omega, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1

L'hypothèse (H 3.3) et la définition de Ω_f et de Ω_s implique notamment que les intersections $\partial\Omega \cap \partial\Omega_f$ et $\partial\Omega \cap \partial\Omega_s$ sont non vides.

Définissons l'espace $H_{\text{Dir}}^1(\Omega)$ par

$$H_{\text{Dir}}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma_D^{\text{ext}}\}.$$

Nous étudions le problème complet écrit sous forme découplée en température et en déplacement, dont nous rappelons les formulations variationnelles (FV (V_ε)) et (FV (T_ε)) :

Trouver $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)]^3 \times L^2(\Omega_f)$ tels que $\forall(\mathbf{v}, q) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f)]^3 \times L^2(\Omega)$ on ait

$$\begin{cases} -i\omega\rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \overline{\mathbf{v}} - \varepsilon^2\eta \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \overline{\nabla \mathbf{v}} + \int_{\Omega_f} p_\varepsilon \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} \\ \qquad \qquad \qquad = i\omega\rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{h} \cdot \overline{\mathbf{v}} + \varepsilon^2\eta \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{h} : \overline{\nabla \mathbf{v}}, \\ \int_{\Omega_f} q \cdot \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon} = 0, \end{cases} \quad (\text{FV } (V_\varepsilon))$$

et

Trouver $(\theta_\varepsilon, p_\varepsilon) \in H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f) \times L^2(\Omega_f)$ tels que $\forall(\theta, q) \in H_{\text{Dir}}^1(\Omega_f) \times L^2(\Omega)$ on ait

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2\kappa \int_{\Omega_f} \nabla \theta_\varepsilon \cdot \nabla \theta - i\omega\rho_f c_p \int_{\Omega_f} \theta_\varepsilon \theta + i\omega \int_{\Omega_f} p_\varepsilon \theta \\ = \varepsilon^2\kappa \int_{\Omega_f} \nabla \Theta \nabla \theta + i\omega\rho_f c_p \int_{\Omega_f} \Theta \theta. \end{aligned} \quad (\text{FV } (T_\varepsilon))$$

Nous étudions simultanément le problème couplé fluide-structure ((F-S) $_\varepsilon$) suivant :

$$\begin{cases} \rho_f \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon + i\varepsilon^2 \omega \eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon^f, & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & \text{sur } \Omega_f, \\ \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon + \mu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon^s, & \text{sur } \Omega_s, \\ \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_D^{\text{ext}}, \\ \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_N^{\text{ext}}, \\ \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}, p_\varepsilon) \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon \text{ continu} & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \end{cases} \quad ((\text{F-S})_\varepsilon)$$

où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}, p_\varepsilon) &= i\varepsilon\omega\eta \mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) - \frac{1}{\varepsilon} p_\varepsilon \mathbf{Id}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) &= \lambda \nabla \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) \mathbf{Id} + \mu \mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}, \quad (3.3)$$

et où

$$\mathbf{f}_\varepsilon^f = -\rho_f \omega^2 \mathbf{h} - i\varepsilon^2 \omega \eta \Delta \mathbf{h}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{f}_\varepsilon^s = -\rho_s \omega^2 \mathbf{h} - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{h} - \mu \Delta \mathbf{h}. \quad (3.5)$$

Pour cette étude, nous utilisons la formulation variationnelle (FV (F-S) $_\varepsilon$) suivante :

Notation (N 3.3)

Les espaces $L^2_{\text{moy}}(\Omega)$ et $H^1_{\text{moy}}(\mathcal{O})$ sont donnés par :

$$L^2_{\text{moy}}(\mathcal{O}) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \text{ telle que } \int_{\mathcal{O}} f = 0 \right\}$$

$$\text{et } H^1_{\text{moy}}(\mathcal{O}) = \left\{ f \in H^1(\mathcal{O}), \text{ telle que } \int_{\mathcal{O}} f = 0 \right\} \quad (3.8)$$

Définition 3.2 (Définition de $\mathcal{R}(\mathcal{O})$)

Soit \mathcal{O} un ouvert vérifiant l'hypothèse **(H 3.1)**. On note $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions $\mathbf{u} \in [H^1(\mathcal{O})]^3$ telles que $\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} = 0$ presque partout.

Dans ce chapitre, nous exposons une méthode permettant d'obtenir des résultats de convergence des systèmes (T_ε) , (V_ε) et $((\text{F-S})_\varepsilon)$ sans faire l'hypothèse (3.7) sur l'écriture des solutions. Ces résultats sont obtenus grâce à la théorie de l'homogénéisation introduite par L. Tartar (voir par exemple [Tar89] et [Gru]), et plus précisément à la convergence double échelle développée notamment par G. Allaire [All92] et par G. Nguetseng *et al* [LNW02]. Dans la théorie de la convergence double échelle, l'hypothèse de périodicité est primordiale et permet de simplifier les calculs.

Dans un premier temps, nous présentons le cadre théorique relatif à ce chapitre. Dans un second temps, nous appliquons les résultats de la convergence double échelle afin de faire converger les systèmes d'équations étudiés. Enfin, nous démontrons des résultats d'existence et d'unicité pour chacun des systèmes obtenus par convergence double échelle.

3.2 Cadre théorique

Dans cette section, nous commençons par introduire la théorie de la convergence double échelle. Puis nous donnons des résultats d'analyse qui sont utiles pour prolonger la pression au domaine Ω tout entier. Nous terminons en établissant des inégalités qui nous permettent de démontrer un résultat d'unicité pour la limite double échelle macroscopique de $((\text{F-S})_\varepsilon)$.

Introduction à la convergence double échelle

Tout ce qui suit provient de G. Allaire [All92] et de D. Lukkassen *et al* [LNW02]. Soient l'ouvert \mathcal{O} et \mathcal{Y} le cube $[0; 1]^3$ vérifiant l'hypothèse **(H 3.1)**. On définit ensuite plusieurs notations d'ensembles nécessaires pour la suite.

Notation (N 3.4)

On note $\mathcal{C}^\infty_{\#}(\mathcal{Y})$ l'ensemble des fonctions de la variable microscopique $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{Y})$ qui sont 1-périodiques, $L^2_{\#}(\mathcal{Y})$ et $H^1_{\#}(\mathcal{Y})$ les complétés de $\mathcal{C}^\infty_{\#}(\mathcal{Y})$ respectivement pour les normes L^2 et H^1 . Enfin, par analogie avec les espace non périodiques, on note $L^2_{\text{moy},\#}(\mathcal{Y})$ l'espace des fonctions de $L^2_{\#}(\mathcal{Y})$ qui sont à moyenne nulle et $H^1_{0,\#}(\mathcal{Y})$ l'espace des fonctions de $H^1_{\#}(\mathcal{Y})$ ayant des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord de \mathcal{Y} .

Définition 3.3 (Fonctions test)

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y}))$, on appelle fonction test pour la convergence double échelle les fonctions

$$\varphi : \mathbf{x} \mapsto \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$$

qui sont $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ en la première variable et $\mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y})$ en la deuxième.

Hypothèse (H 3.7)

Dans toute la section, $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite de fonctions de $L^2(\mathcal{O})$.

Définition 3.4 (Convergence double échelle)

On dit que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge double échelle vers $u_0 \in L^2(\mathcal{O} \times \mathcal{Y})$ si pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y}))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_\varepsilon(\mathbf{x}) \psi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{Y}} u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

On note alors $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$.

Définition 3.5 (Norme $L^2(\mathcal{O}, L^2_\#(\mathcal{Y}))$)

On définit la norme de $L^2(\mathcal{O}, L^2_\#(\mathcal{Y}))$ pour $\psi \in L^2(\mathcal{O}, L^2_\#(\mathcal{Y}))$ par

$$\|\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{L^2(\mathcal{O}, L^2_\#(\mathcal{Y}))} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathcal{O}} \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} |\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rappelons ici le théorème 3.6 suivant

Théorème 3.6 (Théorème fondamental de la convergence double échelle)

Si $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^2(\mathcal{O})$, alors on peut en extraire une sous-suite (toujours notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$) qui converge double échelle vers une fonction u_0 de $L^2(\mathcal{O} \times \mathcal{Y})$.

Remarque 3.7

Le même type de preuve démontre le théorème 3.6 dans le cas où $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite de $[L^2(\mathcal{O})]^3$.

Théorème 3.8

La limite double échelle est unique.

Nous utilisons ensuite des résultats de régularisation énoncés dans [Bre99].

Définition 3.9

On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ de fonctions telle que

$$\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \text{Supp} \rho_n \subset B\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3.$$

Remarque 3.10 (Exemple de suite régularisante)

Par exemple la suite de fonctions

$$\rho_n = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho \right)^{-1} n^3 \rho(n\mathbf{x}), \quad \text{avec} \quad \rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2 - 1}} & \text{si } \|\mathbf{x}\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{x}\| \geq 1. \end{cases}$$

Théorème 3.11 (Régularisation)

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\rho_n * f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^3)$.

Théorème 3.12 (Interversion de limites)

Soit X un espace topologique, A une partie de X , a un point de l'adhérence de A . Soit (E, d) un espace métrique, et enfin soit f_n une suite d'applications de A dans E , et f une application de A de E . Supposons que :

- $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = e_n$,
- f_n converge uniformément vers f sur A ,
- E est complet.

Alors il existe un certain e limite de e_n et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e$.

Corollaire 3.13

Soit o un ouvert inclus dans \mathcal{O} vérifiant l'hypothèse **(H 3.1)** avec la cellule de périodicité z incluse dans \mathcal{Y} . Soit $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une suite de $[L^2(\mathcal{O})]^3$ à support dans o convergeant double échelle vers \mathbf{u}_0 . Alors \mathbf{u}_0 est à support dans $\mathcal{O} \times z$.

Démonstration :

Tout d'abord, comme $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge double échelle vers \mathbf{u}_0 dans \mathcal{O} , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} \chi_o(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{Y}} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad (3.9)$$

pour toute fonction test $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y}))$. Pour la suite de la démonstration, l'idée est de choisir une fonction test qui régularise la fonction χ_o . Commençons par définir précisément l'expression analytique de χ_o en fonction de z :

$$\chi_o(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \chi_z\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} + \mathbf{k}\right).$$

On définit ρ_n une suite régularisante sur \mathcal{Y} puis

$$\chi_o^n(\mathbf{x}) = \psi^n\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \rho_n * \chi_z\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} + \mathbf{k}\right),$$

$$\text{avec } \rho_n * \chi_z(\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{Y}} \rho_n(\mathbf{z}) \chi_z(\mathbf{y} - \mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

D'après le théorème **3.11**, on a la convergence forte suivante pour $1 \leq p < \infty$:

$$\chi_o^n \rightarrow \chi_o, \quad \text{dans } L^p(\mathcal{O}). \quad (3.10)$$

La limite (3.9) s'écrit alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} \chi_o(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{O}} \chi_o^n(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x},$$

en utilisant la limite (3.9), puisque la convergence forte implique la convergence faible. L'étape suivante consiste à intervertir les deux limites en utilisant le théorème **3.12** pour les suites de fonctions $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ suivantes

$$f_n(\varepsilon) = \int_{\mathcal{O}} \chi_o^n(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x}.$$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\varepsilon) = \int_{\mathcal{O}} \chi_o(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x}.$$

Alors le théorème de Cauchy-Schwarz et (3.10) permettent d'affirmer que f_n converge uniformément vers f sur \mathbb{R}^+ . L'utilisation du théorème **3.12** est donc possible et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} \chi_o(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_n(\varepsilon).$$

Comme les fonctions $\rho_n * \chi_o^n(\mathbf{x})$ sont régulières, on utilise la limite double échelle pour la fonction test $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) \chi_o^n(\mathbf{x})$ pour obtenir le résultat

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_n(\varepsilon) = \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{Y}} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi^n(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = e_n.$$

Enfin par limite simple, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{Y}} \chi_z(\mathbf{y}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y},$$

ce qui permet de montrer que

$$\chi_o(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \rightharpoonup \chi_z(\mathbf{y}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad \square$$

Pour faire converger double échelle les problèmes que nous étudions, nous devons tout d'abord estimer les inconnues ainsi que certaines de leurs dérivées indépendamment de ε afin de pouvoir utiliser le théorème **3.6**. Nous en déduisons l'existence de limites double échelle aux inconnues \mathbf{u}_ε , p_ε et θ_ε , et nous caractérisons ces limites (grâce à l'étude des dérivées des inconnues). En étudiant les formulations variationnelles correspondant aux problèmes étudiés, contre des fonctions test bien choisies, nous exhibons les problèmes microscopiques et macroscopiques recherchés.

Prolongement de pression

Pour prolonger la pression à Ω entier, on suit la démarche proposée par L. Tartar dans [Tar]. Pour cela, on commence par rappeler quelques résultats d'analyse.

Lemme 3.14

Soit \mathcal{O} un ouvert vérifiant l'hypothèse (**H 3.1**), localement situé d'un seul côté de sa frontière $\partial\mathcal{O}$. Alors pour toute fonction $\varphi \in L^2_{\text{moy}}(\mathcal{O})$, il existe $\mathbf{f} \in [H_0^1(\mathcal{O})]^3$ telle que

1. $\nabla \cdot \mathbf{f} = \varphi$ sur \mathcal{O} ,
2. l'application $\varphi \mapsto \mathbf{f}$ est linéaire telle que $\|\mathbf{f}\|_{1,\mathcal{O}} \leq c \|\varphi\|_{0,\mathcal{O}}$.

Une démonstration de ce lemme est proposée par R. Temam dans [Tem77] (chapitre I, remarque 2.4).

Lemme 3.15

Soit $g \in L^2(\mathcal{O})$ telle que pour toute f de $L^2_{\text{moy}}(\mathcal{O})$ on ait $\int_{\mathcal{O}} fg = 0$. Alors g est presque partout constante sur \mathcal{O} .

Démonstration :

Posons $\widehat{f} = f - \oint_{\mathcal{O}} f$ pour toute fonction $f \in L^2(\mathcal{O})$. Alors $\oint_{\mathcal{O}} \widehat{f} = 0$ et par hypothèse, $\int_{\mathcal{O}} g \widehat{f} = 0$. Ce qui s'écrit aussi

$$\int_{\mathcal{O}} g f = \int_{\mathcal{O}} g \oint_{\mathcal{O}} f.$$

Il vient alors

$$\int_{\mathcal{O}} f \left(g - \oint_{\mathcal{O}} g \right) = 0, \quad \forall f \in L^2(\mathcal{O}).$$

Ce qui permet d'écrire que g est presque partout égale à $\oint_{\mathcal{O}} g$ sur \mathcal{O} , autrement dit, g est presque partout constante sur \mathcal{O} . \square

Le lemme **3.14** est une version de lemme **3.16** dans le cas périodique qui est démontré par G. Nguetseng dans [Ngu82].

Lemme 3.16

Soit \mathcal{O} un ouvert vérifiant l'hypothèse **(H 3.1)**, localement situé d'un seul côté de sa frontière $\partial\mathcal{O}$. Alors pour toute fonction $\varphi \in L^2_{\text{moy},\sharp}(\mathcal{O})$, il existe $\mathbf{f} \in [H^1_{\text{Dir},\sharp}(\mathcal{O})]^3$ telle que

1. $\nabla \cdot \mathbf{f} = \varphi$ sur \mathcal{O} ,
2. l'application $\varphi \mapsto \mathbf{f}$ est linéaire telle que $\|\mathbf{f}\|_{1,\mathcal{O}} \leq c \|\varphi\|_{0,\mathcal{O}}$.

Inégalités

Dans cette section, nous rappelons des inégalités pour les problèmes issus de l'élasticité linéaire adaptées au cas complexe. Afin de ne pas faire de confusion entre une dérivation par rapport à la variable microscopique ou par rapport à la variable macroscopique, nous introduisons les notations suivantes pour les tenseurs de déformation solide :

Notation (N 3.5)

Soit \mathbf{w} un vecteur de variable macroscopique élément de $[H^1(\mathcal{O})]^3$, on note son tenseur de déformation solide par

$$\mathbf{G}_x(\mathbf{w}) = \nabla \mathbf{w} + {}^t \nabla \mathbf{w}.$$

Soit \mathbf{w}_1 un vecteur de $\mathcal{D}(\mathcal{O}, H^1_{\sharp}(\mathcal{S}))$ dont la variable macroscopique est fixée, alors on note son tenseur de déformation solide au niveau microscopique par

$$\mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) = \nabla \mathbf{w}_1 + {}^t \nabla \mathbf{w}_1.$$

De même on différencie les écritures du tenseur de déformations élastiques suivant la variable considérée.

Notation (N 3.6)

Soit \mathbf{w} un vecteur de variable macroscopique élément de $[H^1(\mathcal{O})]^3$, on note son tenseur de déformation élastique par

$$\boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{w}) = \mu \mathbf{G}_x \mathbf{w} + \lambda \nabla_x \cdot \mathbf{w} \mathbf{Id}.$$

Soit \mathbf{w}_1 un vecteur de $\mathcal{D}(\mathcal{O}, H_{\sharp}^1(\mathcal{S}))$ dont la variable macroscopique est fixée, alors on note son tenseur de déformation microscopique par

$$\boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) = \mu \mathbf{G}_y \mathbf{w}_1 + \lambda \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1 \mathbf{Id}.$$

Hypothèse (H 3.8)

La cellule de référence \mathcal{Y} est constituée de deux types de domaines \mathcal{S} et \mathcal{F} . On suppose que \mathcal{S} est connexe et touche tous les bords (qui contiennent des conditions de périodicité) de \mathcal{Y} .

Lemme 3.17

Pour tout $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, H_{\sharp}^1(\mathcal{S}))$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_{\mathcal{S}} \left(\boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) - \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|} \right) : \left(\mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) - \frac{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|} \right) \geq 0. \quad (3.11)$$

Démonstration :

Il suffit de développer le membre de gauche de l'inégalité (3.11) en utilisant la définition du tenseur de déformations, on trouve

$$\int_{\mathcal{S}} \lambda \left| \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) - \frac{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|} \right|^2 + \mu \left| \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1 \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|} \right|^2,$$

qui est un terme positif (où l'on a noté $|A|^2$ pour $A : A$). □

On introduit des hypothèses supplémentaires sur \mathbf{w}_1 :

Hypothèse (H 3.9)

Le vecteur \mathbf{w}_1 de $[L^2(\mathcal{O}, H_{\sharp}^1(\mathcal{S})/(R))]^3$ est 1-périodique sur \mathcal{S} et est solution du problème d'élasticité linéaire suivant

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) = 0, & \text{sur } \mathcal{S}, \\ \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) \mathbf{n} = \mathbf{M} \mathbf{n}, & \text{sur } \partial \mathcal{S}_N. \end{cases} \quad (3.12)$$

où \mathbf{n} représente la normale extérieure à \mathcal{S} et où \mathbf{M} est une matrice complexe indépendante de la variable microscopique \mathbf{y} .

En procédant de même que pour le lemme 3.17, on obtient le lemme suivant

Lemme 3.18

Pour tout $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^3$ et \mathbf{w}_1 vérifiant l'hypothèse 3.9, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\left(\boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{w}) - \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{w}) \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|} \right) : \left(\mathbf{G}_x(\mathbf{w}) - \frac{\langle \mathbf{G}_x(\mathbf{w}) \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|} \right) \geq 0. \quad (3.13)$$

Lemme 3.19

Soient $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^3$ et \mathbf{w}_1 vérifiant l'hypothèse (H 3.9) Alors la quantité

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) : \overline{\mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1)} = M : \overline{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}, \quad (3.14)$$

est réelle.

Démonstration :

En effet on utilise le fait que \mathbf{w}_1 est solution du problème d'élasticité (3.12), pour écrire grâce à une intégration par parties

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) : \overline{\mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1)} = 2 \int_{\partial\mathcal{S}} (M \mathbf{n}) \cdot \overline{\mathbf{w}_1}. \quad (3.15)$$

Le membre de gauche de (3.15) est clairement réel et une intégration par parties du second membre donne

$$2 \int_{\partial\mathcal{S}} M \mathbf{n} \overline{\mathbf{w}_1} = M : \overline{\langle \mathbf{G}(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}. \quad \square$$

Finalement, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.20

Soient $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^3$ et \mathbf{w}_1 vérifiant l'hypothèse **(H 3.9)** avec $M = \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{w})$. Alors

$$\left(|\mathcal{S}| \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{w}) - \langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}} \right) : \overline{\mathbf{G}_x(\mathbf{w})} \geq 0. \quad (3.16)$$

Démonstration :

On développe (3.11) pour obtenir :

$$0 \leq \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) : \overline{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}} - \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|} : \overline{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}.$$

On utilise ensuite le fait que \mathbf{w}_1 vérifie l'hypothèse **(H 3.9)** avec $M = \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{w})$ et (3.14), ce qui donne :

$$0 \leq \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{w}) : \overline{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}} - \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|} : \overline{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}.$$

On conclut en utilisant la propriété (3.13). □

Remarque 3.21 (Cas d'égalité)

Le cas d'égalité dans (3.16) a lieu lorsqu'on a égalité dans (3.11) et dans l'inégalité donnée par le lemme **3.18**. Lorsque de plus, \mathcal{S} vérifie l'hypothèse **(H 3.8)**, alors (3.16) est nulle implique que $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ où $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ est défini en (3.2) page 57.

Démonstration :

On cherche quels sont les vecteurs \mathbf{w}_1 qui vérifient l'égalité dans (3.11), c'est-à-dire tels que

$$\mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) = \frac{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}{\mathcal{S}}.$$

Un calcul (facile mais fastidieux) montre qu'alors

$$\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n A_i(\mathbf{x}) \mathbf{y} + C_i(\mathbf{x}), \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{O} \times \mathcal{S}, \quad (3.17)$$

où n est le nombre de composantes connexes de \mathcal{S} , les A_i et C_i sont respectivement des matrices et vecteurs complexes constants. Comme de plus \mathcal{S} vérifie l'hypothèse **(H 3.8)**, on sait que $n = 1$. Le fait que \mathbf{w}_1 soit 1-périodique implique que $A_1 \mathbf{e}_i = 0$, où les \mathbf{e}_i forment la base de \mathbb{C}^3 . On obtient donc que A_1 est nulle et que \mathbf{w}_1 , qui ne dépend pas de \mathbf{y} , est un élément de $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ défini par la définition **3.2** à la page 57. De plus, comme on a aussi égalité dans (3.13), on a

$$\mathbf{G}_x(\mathbf{w}) = \frac{\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{w}_1) \rangle_{\mathcal{S}}}{|\mathcal{S}|},$$

ce qui montre que \mathbf{w} est un déplacement solide dans Ω . Comme Ω vérifie les hypothèses **(H 3.2)** et **(H 3.1)**, le lemme **2.16** montrent que \mathbf{w} est nul presque partout. \square

3.3 Convergence double échelle des problèmes

Dans cette section, nous vérifions que les hypothèses du théorème **3.6** sont vérifiées afin de pouvoir appliquer ce théorème. Pour cela, nous devons commencer par prolonger la pression au domaine Ω entier (l'estimation sur Ω est plus facile que sur Ω_f). Nous estimons ensuite les inconnues \mathbf{u}_ε et p_ε indépendamment de ε afin de montrer que ces fonctions ont une limite double échelle. Nous montrons aussi des estimations sur $(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon)$ afin de pouvoir caractériser les limites double échelle. Dans un troisième temps, nous utilisons les résultats obtenus pour faire converger double échelle les systèmes (FV (V_ε)), (FV (T_ε)) et (FV (F-S) $_\varepsilon$). Suivant les fonctions tests que nous choisissons, nous obtenons deux systèmes microscopiques et un macroscopique.

3.3.1 Prolongement de la pression

Nous souhaitons utiliser les résultats de la convergence double échelle pour faire converger au sens double échelle la formulation variationnelle (FV (F-S) $_\varepsilon$). Nous allons donc en particulier chercher à estimer $\|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_f}$ indépendamment de ε . La méthode de L. Tartar exposée dans [Tar] consiste à utiliser le théorème **2.6** énoncé à la page 37. L'intérêt de ce théorème est que l'on obtient une estimation de $\|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_f}$ en fonction de $\|\nabla p\|_{-1,\Omega_f}$. La difficulté est que la constante qui relie ces deux quantités dépend du domaine Ω_f et donc de ε . Il faut donc obtenir une estimation de ∇p_ε sur Ω entier, ce qui revient à définir un opérateur de prolongement pour p_ε .

Cet opérateur de prolongement est obtenu tout d'abord en définissant un prolongement de ∇p_ε noté $F_\varepsilon(p_\varepsilon)$. On montre ensuite qu'il existe une fonction $Q_\varepsilon(p_\varepsilon)$ de $L^2(\Omega)$ telle que $F_\varepsilon(p_\varepsilon)$ s'écrit sous la forme $F_\varepsilon(p_\varepsilon) = \nabla Q_\varepsilon(p_\varepsilon)$. On obtient enfin l'opérateur de prolongement $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ de p_ε à Ω en définissant $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ comme étant la somme de $Q_\varepsilon(p_\varepsilon)$ et d'une constante bien choisie.

Le prolongement de la fonction $p_\varepsilon \in L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ à $L^2_{\text{moy}}(\Omega)$, où les espaces $L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ et $L^2_{\text{moy}}(\Omega)$ sont définis en (3.8) à la page 57, est inspiré d'une méthode de G. Allaire lue dans [All91a] et dans [All89b].

Définition 3.22

On définit le prolongement de ∇p_ε à Ω par la fonction F_ε de la manière suivante

$${}_{H^{-1}}\langle F_\varepsilon(p_\varepsilon), \varphi \rangle_{H_0^1} = - \int_{\Omega_f} p_\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla \cdot \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3.$$

Lemme 3.23

Pour toute pression p_ε de $L_{\text{moy}}^2(\Omega_f)$, il existe $Q_\varepsilon(p_\varepsilon)$ élément de $L^2(\Omega)$ tel que

$$F_\varepsilon(p_\varepsilon) = \nabla Q_\varepsilon(p_\varepsilon).$$

Démonstration :

On vérifie facilement que pour $\varphi \in H_f$, où H_f est défini en (2.19) à la page 40, on a ${}_{H^{-1}}\langle F_\varepsilon(p_\varepsilon), \varphi \rangle_{H_0^1} = 0$. La démonstration est donc une conséquence de la proposition 2.35. \square

Définition 3.24

On définit l'opérateur $P_\varepsilon : L_{\text{moy}}^2(\Omega_f) \rightarrow L_{\text{moy}}^2(\Omega)$ par

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) = Q_\varepsilon(p_\varepsilon) + \frac{1}{|\Omega_f|} \int_{\Omega_f} (p_\varepsilon - Q_\varepsilon(p_\varepsilon)) = Q_\varepsilon(p_\varepsilon) - \frac{1}{|\Omega_f|} \int_{\Omega_f} Q_\varepsilon(p_\varepsilon). \quad (3.18)$$

Proposition 3.25

L'opérateur $P_\varepsilon : L_{\text{moy}}^2(\Omega_f) \rightarrow L_{\text{moy}}^2(\Omega)$ est un opérateur linéaire continu qui prolonge p_ε sur Ω , c'est-à-dire $P_\varepsilon(p_\varepsilon) = p_\varepsilon$ sur $L_{\text{moy}}^2(\Omega_f)$.

Démonstration :

Tout d'abord, par linéarité de l'intégrale, il est clair que P_ε est un opérateur linéaire de $L_{\text{moy}}^2(\Omega_f)$ dans $L_{\text{moy}}^2(\Omega)$. De plus P_ε est continu. En effet, par définition de F_ε , on a pour tout p_ε de $L_{\text{moy}}^2(\Omega_f)$,

$$\|F_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{-1,\Omega} \leq \|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_f}. \quad (3.19)$$

Or on a vu au lemme 3.23, que $\|F_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{-1,\Omega} = \|\nabla Q_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{-1,\Omega}$, et d'après le théorème 2.6, on sait que $\|Q_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \|\nabla Q_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{-1,\Omega}$. D'où (3.19) s'écrit

$$\|Q_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_f}. \quad (3.20)$$

D'autre part, l'inégalité triangulaire donne

$$\|P_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \leq \|Q_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{|\Omega|}{|\Omega_f|} \left(\int_{\Omega_f} Q_\varepsilon(p_\varepsilon) \right)^2. \quad (3.21)$$

En utilisant le fait que

$$\frac{1}{|\Omega_f|} \left(\int_{\Omega_f} f \right)^2 \leq \|f\|_{0,\Omega_f}^2, \quad \forall f \in L^2(\Omega),$$

et en injectant (3.20) dans (3.21), on obtient

$$\|P_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \sqrt{1 + |\Omega|} \|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_f},$$

ce qui montre que P_ε est un opérateur continu.

Pour montrer que la propriété de prolongement est vraie, on cherche à établir que la quantité $p_\varepsilon - Q_\varepsilon(p_\varepsilon)$ est constante égale à $\int_{\Omega_f} (p_\varepsilon - Q_\varepsilon(p_\varepsilon))/|\Omega_f|$, ce qui donne le résultat en utilisant la définition (3.18). Pour cela, on souhaite utiliser le lemme **3.15**. Soit donc $f \in L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ et on cherche à évaluer la quantité

$$E = \int_{\Omega_f} (p_\varepsilon - Q_\varepsilon(p_\varepsilon)) f.$$

Or le lemme **3.14** assure qu'il existe une fonction $\varphi \in [H^1_{\text{Dir}}(\Omega_f)]^3$ telle que $f = \nabla \cdot \varphi$. L'expression E s'écrit alors

$$E = \int_{\Omega_f} (p_\varepsilon - Q_\varepsilon(p_\varepsilon)) \nabla \cdot \varphi.$$

Or en utilisant la définition **3.22** et le lemme **3.23**, on obtient

$$\begin{aligned} {}_{H^{-1}}\langle F_\varepsilon(p_\varepsilon), \varphi \rangle_{H^1_0} &= - \int_{\Omega_f} p_\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla \cdot \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in [H^1_{\text{Dir}}(\Omega_f)]^3 \\ \text{et } {}_{H^{-1}}\langle F_\varepsilon(p_\varepsilon), \varphi \rangle_{H^1_0} &= - \int_{\Omega_f} Q_\varepsilon(p_\varepsilon)(\mathbf{x}) \nabla \cdot \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in [H^1_{\text{Dir}}(\Omega_f)]^3. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'expression E est nulle et par le lemme **3.15**, $p_\varepsilon - Q_\varepsilon(p_\varepsilon)$ est constante égale à $\int_{\Omega_f} (p_\varepsilon - Q_\varepsilon(p_\varepsilon))/|\Omega_f|$. Finalement, l'égalité (3.18) montre que $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ vaut p_ε pour tout $p_\varepsilon \in L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$. \square

Remarque 3.26 (Sur la formulation de $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$)

D'après la démonstration précédente,

$$\frac{1}{|\Omega_f|} \int_{\Omega_f} (p_\varepsilon - Q_\varepsilon(p_\varepsilon))$$

est une constante. On peut même voir que cette constante est indépendante de ε (la dépendance en ε de l'intégrale est du même ordre que celle de $|\Omega_f|$). On obtient donc que $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ dépend uniquement de $Q_\varepsilon(p_\varepsilon)$, c'est-à-dire

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) = Q_\varepsilon(p_\varepsilon) + C, \quad \text{où } C \text{ est indépendante de } \varepsilon. \quad (3.22)$$

Remarque 3.27 (Simplification du prolongement de la pression)

D'après les travaux de G. Allaire dans [All91c], il est possible de montrer que dans notre cas le prolongement $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ est en fait un prolongement par une constante, puisque nous supposons que le volume du squelette matériau est indépendant de ε . C'est ce type de prolongement qui est utilisé par A. Mikelić par exemple dans [Mik94].

3.3.2 Estimations a priori

L'objectif de cette section est d'obtenir des estimations a priori sur les inconnues du système $((F-S)_\varepsilon)$ afin de pouvoir appliquer le théorème **3.6**.

La principale difficulté est d'obtenir l'estimation de $\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega}$ toujours à cause du fait que la forme sesquilineaire associée à la formulation variationnelle (FV (F-S) $_\varepsilon$) est non coercive. L'astuce initialement proposée dans [BF04] consiste à raisonner par l'absurde en supposant fausses les estimations des normes de \mathbf{u}_ε , $\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ sur le solide et $\varepsilon\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ sur le fluide en fonction de \mathbf{h} . On suppose donc que la somme des normes recherchées vaut 1 alors que le donnée du second membre \mathbf{h} tend vers 0. Cela nous permet en particulier de faire converger double échelle les inconnues ainsi estimées, en utilisant les résultats de la convergence double échelle développés par la suite. Comme on sait que les systèmes microscopiques et macroscopique sont bien posés, et que le second membre \mathbf{h} tend vers 0, on obtient que les limites double échelle sont nulles. Il reste maintenant à établir que les limites des normes estimées tendent chacune vers 0 afin d'obtenir la contradiction.

Enfin pour estimer $\|P_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{0,\Omega}$, nous suivons la méthode de L. Tartar exposée dans [Tar].

Nous commençons par utiliser le prolongement suivant qui est un cas particulier de celui proposé par Yosifian dans [Yos02].

Proposition 3.28

Il existe un prolongement $P^s : H^1(\Omega_s) \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que :

$$\|\nabla(P^s(\chi_{\Omega_s}\mathbf{u}_\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq C\|\nabla(\chi_{\Omega_s}\mathbf{u}_\varepsilon)\|_{0,\Omega_s} \quad \text{et} \quad \|P^s(\chi_{\Omega_s}\mathbf{u}_\varepsilon)\|_{0,\Omega} \leq C\|\chi_{\Omega_s}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega_s},$$

avec C indépendante de ε .

La proposition suivante est le fruit de discussions avec B. Merlet [Mer09].

Proposition 3.29

Il existe $\varepsilon_0 > 0$, il existe $C > 0$ des constantes telles que pour tous $\varepsilon < \varepsilon_0$ et pour toutes $\mathbf{h} \in H^1(\Omega)$ la solution \mathbf{u}_ε de (FV (F-S) $_\varepsilon$) dans H_f vérifie la propriété

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon)\|_{0,\Omega_s}^2 + \varepsilon^2\|\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon)\|_{0,\Omega_f}^2 \leq C\|\mathbf{h}\|_{1,\Omega}^2, \quad (3.23)$$

avec C indépendante de ε .

Démonstration :

Supposons par l'absurde que (3.23) soit fausse. Alors la négation de (3.23) pour $C = n$ consiste à écrire que pour tous $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de paramètres tous inférieurs à $1/n$, des fonctions $\mathbf{h}^n \in H^1(\Omega)$ et \mathbf{u}_ε^n solution de ((F-S) $_\varepsilon$) tels que

$$\|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{0,\Omega_s}^2 + \varepsilon_n^2\|\mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{0,\Omega_f}^2 > n\|\mathbf{h}^n\|_{1,\Omega}^2, \quad (3.24)$$

où, quitte à renormaliser, on peut supposer que

$$\|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{0,\Omega_s}^2 + \varepsilon_n^2\|\mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{0,\Omega_f}^2 = 1. \quad (3.25)$$

On souhaite obtenir une contradiction avec (3.24). Soit $\nu > 0$.

Première étape : pour contredire (3.24), il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega}^2 = 0. \quad (3.26)$$

En effet, la formulation variationnelle (FV (F-S) $_{\varepsilon}$) en $\mathbf{u}_{\varepsilon_n}$ et on obtient la relation

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega_s}^2 - \lambda \|\nabla \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega_s}^2 - i \frac{\omega \eta \varepsilon_p^2}{2} \|\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega_f}^2 \\ + \omega^2 \rho_s \|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega_s}^2 + \omega^2 \rho_f \|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega_f}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{f}^1 \cdot \overline{\mathbf{u}_{\varepsilon_n}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon_n}^2 : \overline{(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n})}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

où \mathbf{f}^1 et $\mathbf{f}_{\varepsilon_n}^2$ sont définies en (3.6) à la page 56. En observant successivement les parties imaginaire et réelle de la formulation variationnelle (3.27) et en utilisant la propriété (3.25), on obtient deux estimations de la forme

$$\varepsilon^2 \|\mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{0,\Omega_f}^2 \leq \alpha \|\mathbf{h}^n\|_{1,\Omega}, \quad (3.28)$$

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{0,\Omega_s}^2 \leq \beta \left(\|\mathbf{h}^n\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega}^2 \right), \quad (3.29)$$

où les constantes α et β dépendent uniquement des données physiques : coefficients de Lamé λ et μ , fréquence ω , viscosité η et densités ρ_f et ρ_s . Si (3.26) est établie, les relations (3.28) puis (3.29) montrent une contradiction avec (3.25) (pour montrer que $\|\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0,\Omega_s}$ tend vers 0, on utilise l'inégalité de Korn donnée dans le corollaire 2.27 dans le domaine solide).

Deuxième étape : utilisation de la convergence double échelle.

Par (3.25), les estimations *a priori* sont vraies pour les suites $(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon \mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\chi_{\Omega_s} \mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}))_{n \in \mathbb{N}}$. Par la proposition 3.32, on sait aussi que l'estimation *a priori* de la suite $(p_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ces suites admettent donc des limites double échelle que l'on peut caractériser exactement comme cela est fait dans la proposition 3.36 et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \text{sur } \Omega \times Y, \\ \varepsilon_n \mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}) &\rightharpoonup \mathbf{G}_y(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), & \text{sur } \Omega \times F, \\ \mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}) &\rightharpoonup \mathbf{G}_x(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{G}_y(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})), & \text{sur } \Omega \times S, \\ p_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup p(\mathbf{x}) + \chi_S(\mathbf{y})q(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \text{sur } \Omega \times Y. \end{aligned}$$

Grâce aux proposition 3.42, proposition 3.44, et proposition **Macro**, nous savons de plus que les limites double échelle sont solutions des problèmes microscopiques (MicroF) et (MicroS) donnés à la page 78, et du problème macroscopique (Macro) donné page 80. Or le théorème 3.70 assure que la problème macroscopique admet une unique solution (on se place dans le cas où les hypothèses sur le domaine sont suffisantes) et on a alors une estimation de la forme

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} \leq C \|\mathbf{h}^n\|_{1,\Omega} \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

Troisième étape : estimation de la norme du déplacement sur le solide.

On utilise le prolongement proposé dans la proposition 3.28 et on le note P^s . L'estimation (3.25) montre alors que $\|P^s(\chi_{\Omega_s} \mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{1,\Omega}$ est borné pour tout n , la suite $(P^s(\chi_{\Omega_s} \mathbf{u}_{\varepsilon_n}))_{p \in \mathbb{N}}$ converge donc fortement dans $L^2(\Omega)$, notons $\widetilde{\mathbf{u}}_0$ sa limite. Comme d'autre part,

$$\chi_{\Omega_s} P^s(\chi_{\Omega_s} \mathbf{u}_{\varepsilon_n}) \rightharpoonup \chi_S(\mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

on sait que $\chi_{\Omega_s} P^s(\chi_{\Omega_s} \mathbf{u}_{\varepsilon_n})$ converge faiblement $L^2(\Omega)$ vers $|S|\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Par unicité de la limite, on obtient donc que $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = |S|\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0, \Omega_s} = \|\chi_{\Omega_s} P^s(\chi_{\Omega_s} \mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{0, \Omega_s} = 0. \quad (3.31)$$

Quatrième étape : estimation de la norme du déplacement sur le fluide.

On considère la fonction $\mathbf{v}_{\varepsilon_n}^n = \mathbf{u}_{\varepsilon_n} - P^s(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})$. La fonction $\mathbf{v}_{\varepsilon_n}^n$ est alors nulle sur l'interface Γ^{int} entre les domaines fluide et solide. Nous utilisons donc l'inégalité de Korn démontrée dans le corollaire **2.28** et on obtient l'existence d'une constante N indépendante de ε telle que

$$\|\mathbf{v}_{\varepsilon_n}^n\|_{0, \Omega_f} \leq N \varepsilon_n \left(\|\mathbf{G}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n})\|_{0, \Omega_f} + \|\mathbf{G}(P^s(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}))\|_{0, \Omega_f} \right). \quad (3.32)$$

Or par (3.28), (3.25), et par propriété du prolongement, $\lim_{n \rightarrow 0} \|\mathbf{v}_{\varepsilon_n}^n\|_{0, \Omega_f} = 0$. Finalement, Cauchy-Schwarz donne

$$\|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0, \Omega_f} \rightarrow 0, \quad (3.33)$$

où C est la constante induite par le prolongement.

Cinquième étape : conclusion.

Les inégalités (3.31) et (3.33) montrent que pour tout $\nu > 0$, il existe un rang n_5 à partir duquel

$$\|\mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{0, \Omega} \rightarrow 0,$$

ce qui permet de montrer (avec la *première étape*) que (3.25) est absurde. \square

Corollaire 3.30 (Estimation de $\|\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0, \Omega_s}$)

La suite $(\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega_s)$.

Démonstration :

On remarque tout d'abord que $\text{Tr}(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon) = 2 \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon$ puis on utilise le résultat de la proposition **3.29**. \square

Remarque 3.31 (Estimation de $\varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0, \Omega}$)

Quitte à majorer ε par 1 sur le domaine solide, on déduit de la proposition **3.29** que $\varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0, \Omega}$ est uniformément bornée en ε .

Proposition 3.32 (Estimation a priori de $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$)

La famille $(P_\varepsilon(p_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration :

Cette démonstration est adaptée de la démarche proposée par L. Tartar dans [Tar].

On a vu en (3.22) que $P_\varepsilon(p_\varepsilon) = Q_\varepsilon(p_\varepsilon) + C$, où C est une constante indépendante de ε . Il suffit donc d'estimer $\|Q_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{0, \Omega}$ indépendamment de ε pour montrer que $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$.

En reprenant les notations de la section 3.3.1, on a vu que

$$H^{-1} \langle F_\varepsilon(p_\varepsilon), \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = H^{-1} \langle \nabla Q_\varepsilon(p_\varepsilon), \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = - \int_{\Omega_f} p_\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}.$$

On utilise alors la formulation variationnelle (FV (F-S) $_{\varepsilon}$) et les estimations a priori de la proposition **3.29** et de la remarque **3.31** pour montrer qu'il existe une constante C_2 indépendante de ε telle que

$$|_{H^{-1}}\langle \nabla Q_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}), \varphi \rangle_{H_0^1}| \leq C_2 \|\varphi\|_{1,\Omega}.$$

Par définition des normes négatives, on obtient pour toute fonction test φ non nulle,

$$\|\nabla Q_{\varepsilon}(p_{\varepsilon})\|_{-1,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq |_{H^{-1}}\langle \nabla Q_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}), \varphi \rangle_{H_0^1}|,$$

et donc que $\|\nabla Q_{\varepsilon}(p_{\varepsilon})\|_{-1,\Omega} \leq C_2$. De plus, le théorème **2.6** montre qu'il existe une constante C_3 indépendante de ε (mais dépendante de Ω) telle que

$$\|Q_{\varepsilon}(p_{\varepsilon})\|_{0,\Omega} \leq C_3 \|\nabla Q_{\varepsilon}(p_{\varepsilon})\|_{-1,\Omega}.$$

Par conséquent, $\|Q_{\varepsilon}(p_{\varepsilon})\|_{0,\Omega}$ est estimée indépendamment de ε , et donc $\|P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon})\|_{0,\Omega}$ l'est aussi. \square

3.3.3 Limites double échelle des inconnues

On souhaite appliquer le théorème **3.6**, c'est-à-dire expliciter les limites double échelle des inconnues (maintenant que nous les avons estimées indépendamment de ε). En manipulant les définitions comme G. Allaire et A. Mikelić *et al* respectivement dans [All92] et dans [CFGM01], on obtient des caractérisations des limites double échelle des inconnues.

En particulier, nous obtenons l'existence de fonctions $\mathbf{u}_0 \in [L^2(\Omega, H_{\sharp}^1(Y))]^3$, $\mathbf{u} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ et $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega, H_{\text{Dir},\sharp}^1(F))]^3$, telles que

$$\mathbf{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rightharpoonup \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{sur } \Omega \times Y. \quad (3.34)$$

Nous pouvons aussi caractériser la limite double échelle du tenseur des contraintes du déplacement sous la forme suivante

$$\varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon}) \rightharpoonup \boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad \text{sur } \Omega \times F, \quad (3.35)$$

$$\varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon}) \rightharpoonup \boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times S, \quad (3.36)$$

$$(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon}) \rightharpoonup \boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad \text{sur } \Omega \times S, \quad (3.37)$$

où $\mathbf{u}_1 \in [L^2(\Omega, H_{\sharp}^1(S))]^3$ est 1-périodique dans la deuxième variable et où \mathbf{G} est l'opérateur défini en (1.15) page 20. La démonstration consiste à exhiber \mathbf{u}_0 , $\boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\mu}_0$ grâce à l'application du théorème **3.6**. La caractérisation (3.36) découle de l'unicité de la limite double échelle et du fait que $\varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})$ et $(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})$ sont estimés sur Ω_s . La propriété (3.34) est alors un corollaire de (3.36). La caractérisation (3.35) résulte de l'étude de la limite double échelle de $\varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})$ calculée directement puis après une intégration par parties. Enfin la caractérisation (3.37) s'obtient en montrant que $\boldsymbol{\mu}_0 - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + {}^t \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})$ est un élément de H_s^{\perp} , où H_s est défini par

$$H_s = \left\{ \boldsymbol{\Phi} \in [H_0^1(\Omega, H_{\sharp}^1(S))]^9, \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\Phi} = 0 \right\}. \quad (3.38)$$

Nous pouvons aussi caractériser la limite double échelle de la pression de la manière suivante

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}) + p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{sur } \Omega \times Y,$$

où $p \in H^1(\Omega)$ et où $p_1 \in [L^2(\Omega, H_\#^1(S))]^3$ est périodique en \mathbf{y} . Cette propriété s'obtient en étudiant la deuxième équation de (FV (F-S) $_\varepsilon$) multipliée par ε , pour des fonctions test à support dans le fluide.

Proposition 3.33

Il existe une sous-suite de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et de $(\varepsilon(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ et une fonction \mathbf{u}_0 de $[L^2(\Omega, H_\#^1(Y))]^3$ telle que la suite $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge double échelle vers \mathbf{u}_0 , la suite $(\varepsilon(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converge double échelle vers $(\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_0 + {}^t\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_0)$ sur $\Omega \times Y$ avec $(\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_0 + {}^t\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_0) = 0$ sur $\Omega \times S$.

Démonstration :

Par les estimations a priori données par les proposition 3.29 et remarque 3.31, $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\varepsilon(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$. En appliquant le résultat fondamental de la théorie de la convergence double échelle vu au théorème 3.6 à la page 58, on sait qu'il existe deux fonctions \mathbf{u}_0 dans $[L^2(\Omega, L_\#^2(Y))]^3$ et $\boldsymbol{\eta}_0$ dans $[L^2(\Omega, L_\#^2(Y))]^9$ telles que les suites $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\varepsilon(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ convergent (à une sous-suite près) double échelle respectivement vers \mathbf{u}_0 dans $[L^2(\Omega, L_\#^2(Y))]^3$ et vers $\boldsymbol{\eta}_0 \in [L^2(\Omega, L_\#^2(Y))]^9$. Donc pour toutes fonctions test Φ dans $[\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))]^9$ et $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))]^3$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \int_Y \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) : \Phi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \int_Y \boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

On explicite ensuite le produit tensoriel afin de pouvoir intégrer par parties. Il reste à écrire les intégrales obtenues sous forme d'un produit scalaire dont on connaît la limite double échelle. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) : \Phi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} \\ = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\Phi + {}^t\Phi)\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} \\ - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\Phi + {}^t\Phi)\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En passant à la limite double échelle on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y \boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ = - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega \times Y} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\Phi + {}^t\Phi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Une nouvelle intégration par parties sur cette égalité nous donne

$$\int_{\Omega} \int_Y \boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} = - \int_{\Omega} \int_Y (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_0 + {}^t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_0) : \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y},$$

et ce, pour toute fonction $\boldsymbol{\Phi}$. Donc par unicité de la limite,

$$\boldsymbol{\eta}_0 = (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_0 + {}^t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_0), \quad \text{sur } \Omega \times Y. \quad (3.40)$$

Il reste à montrer que la limite double échelle de $\varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})$ est nulle sur le domaine solide. Pour cela on commence par traduire le fait que $(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ est uniformément bornée en ε dans $L^2(\Omega_s)$ d'après la proposition **3.29**. Par le résultat fondamental de la théorie de la convergence double échelle vu au théorème **3.6** à la page 58, on sait qu'il existe une fonction $\boldsymbol{\mu}_0 \in [L^2(\Omega, L^2_{\#}(S))]^9$ telle que la suite $(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ converge double échelle (éventuellement à une sous-suite près) vers $\boldsymbol{\mu}_0 \in [L^2(\Omega, L^2_{\#}(S))]^9$. Donc pour toutes $\boldsymbol{\Phi} \in [\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega, \mathcal{C}_{\#}^{\infty}(S))]^9$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_S \boldsymbol{\mu}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \quad (3.41)$$

On déduit en particulier de (3.41) que pour toutes $\boldsymbol{\Phi} \in [\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega, \mathcal{C}_{\#}^{\infty}(S))]^9$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_s} \varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.42)$$

Donc par unicité de la limite double échelle et en considérant (3.39), (3.42) et (3.40), on obtient que

$$(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_0 + {}^t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_0) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times S. \quad \square$$

Remarque 3.34

Il faut faire bien attention au fait que nous obtenons une caractérisation du tenseur $(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_0 + {}^t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_0)$ et non de $\boldsymbol{\mu}_0$.

Proposition 3.35 (Limite double échelle de $(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$)

La famille de fonctions $(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ converge double échelle à une sous-suite près vers $\text{Tr}(\boldsymbol{\mu}_0)/2$.

Démonstration :

Nous avons vu au corollaire **3.30** que $\|\nabla \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon}\|_{0, \Omega_s}$ est borné indépendamment de ε . Il existe donc une fonction $\zeta_0 \in L^2(\Omega, L^2_{\#}(S))$ telle que $(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ converge double échelle vers ζ_0 . Nous obtenons ainsi l'égalité suivante pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega, \mathcal{C}_{\#}^{\infty}(S))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_S \zeta_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y}. \quad (3.43)$$

D'autre part, la proposition **3.29** nous assure que $\|(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon})\|_{0, \Omega_s}$ est borné indépendamment de ε . En particulier, $\|\partial_{x_i} \mathbf{u}_{\varepsilon}^j\|$ est borné indépendamment de ε pour tous $1 \leq i, j \leq 3$, où $\mathbf{u}_{\varepsilon}^j$ est la j -ème coordonnée du vecteur \mathbf{u}_{ε} . Par conséquent, il

existe 9 fonctions $\zeta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 3$ telles que $\partial_{x_i} \mathbf{u}_\varepsilon^j$ converge double échelle vers $\zeta_{i,j}$ pour tous $1 \leq i, j \leq 3$. Nous obtenons ainsi pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(S))$ et pour tous $1 \leq i, j \leq 3$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_s} \partial_{x_i} \mathbf{u}_\varepsilon^j(\mathbf{x}) \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_S \zeta_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (3.44)$$

De plus, en choisissant $\Phi = \varphi E_{i,j}$ (où φ est une fonction régulière et $E_{i,j}$ sont les matrices de base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) dans l'égalité (3.39), par unicité de la limite double échelle et par linéarité de l'intégrale, (3.44) montre que l'on a

$$\zeta_{i,j} + \zeta_{j,i} = \boldsymbol{\mu}_{0,i,j} \quad \text{sur } \Omega \times S, \quad \forall 1 \leq i, j \leq 3, \quad (3.45)$$

où $\boldsymbol{\mu}_{0,i,j}$ est défini par $\boldsymbol{\mu}_0 = (\boldsymbol{\mu}_{0,i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$. De même, (3.43) et (3.44) montrent que par unicité de la limite double échelle et par linéarité de l'intégrale, on a la convergence double échelle de $\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon$ vers $\sum_{i=1}^3 \zeta_{i,i}$. L'équation (3.45) permet alors d'écrire que $\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon$ converge double échelle vers $\text{Tr}(\boldsymbol{\mu}_0)/2$. \square

La proposition suivante, due à G. Allaire dans [All92], permet de caractériser les limites double échelle suivant leur partie microscopique et macroscopique.

Proposition 3.36 (Caractérisation des limites double échelle)

Il existe trois fonctions \mathbf{u} dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$, \mathbf{v} dans $[L^2(\Omega, H_{\text{Dir},\#}^1(F))]^3$ et \mathbf{u}_1 élément de $[L^2(\Omega, H_{\#}^1(S)/\mathbb{R})]^3$ telles que

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{sur } \Omega \times Y, \quad (3.46)$$

$$\varepsilon \mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{G}_y(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \text{sur } \Omega \times F, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{G}_x(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{G}_y(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \text{sur } \Omega \times S. \quad (3.48)$$

Démonstration :

D'après la proposition 3.29 et le lemme 2.15, on sait que $\|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega_s}$ et $\|\varepsilon \nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega}$ sont bornés uniformément en ε . De même que dans la démonstration de la proposition 3.33, l'unicité de la limite double échelle montre que $\nabla_y \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ sur $\Omega \times S$. Cela implique que $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est égale à une fonction macroscopique $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sur $\Omega \times S$. De plus par unicité de la limite double échelle, on peut remarquer que $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}_0 \rangle_F$. En notant $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}$, on obtient alors que \mathbf{v} dans $[L^2(\Omega, H_{\text{Dir},\#}^1(F))]^3$ est telle que

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times Y. \quad (3.49)$$

Pour obtenir la propriété (3.47), il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3.33 avec la définition de \mathbf{u}_0 donnée en (3.49).

Pour terminer la démonstration de (3.46), il faut encore montrer que \mathbf{v} est nulle sur ∂S . Pour cela, on calcule de deux façons différentes la limite double échelle de $\varepsilon (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon)$. Nous avons déjà (3.47), l'autre manière de calculer consiste à intégrer par partie $\int_{\Omega} \varepsilon (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) : \Phi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x}$, pour toute $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$, et à écrire sa limite double échelle, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F (\nabla_y \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + {}^t \nabla_y \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) : \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= - \int_{\Omega} \int_Y \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_y \cdot \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_{\Omega} \int_F \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nabla_y \cdot \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

En intégrant par parties le second membre, et en utilisant le fait que $\mathbf{u}\Phi$ et $\mathbf{v}\Phi$ sont périodiques en \mathbf{y} sur Y , on obtient $\mathbf{v} = 0$ sur ∂S .

La propriété (3.48) s'obtient en calculant la limite de $\int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla \mathbf{u}_\varepsilon) : \Phi$ pour toute fonction test Φ de H_s où l'espace H_s est défini (3.38) à la page 70. En effet, on sait d'une part que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla \mathbf{u}_\varepsilon) (\mathbf{x}) : \Phi \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \int_S \boldsymbol{\mu}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad \forall \Phi \in H_s. \end{aligned}$$

D'autre part, en faisant une intégration par parties, on obtient que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla \mathbf{u}_\varepsilon) (\mathbf{x}) : \Phi \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{x} = \\ - \int_{\Omega_s} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\Phi \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + {}^t\Phi \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right) d\mathbf{x}, \quad \forall \Phi \in H_s. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans cette dernière équation, on obtient que

$$\int_{\Omega} \int_S \boldsymbol{\mu}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\Phi + {}^t\Phi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y},$$

puisque la fonction \mathbf{u}_0 est égale à la fonction macroscopique \mathbf{u} sur le domaine solide. Une dernière intégration par parties montre alors que la fonction donnée par la différence $\boldsymbol{\mu}_0 - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + {}^t\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})$ est dans l'espace H_s^\perp , où H_s est défini en (3.38) et où on calcule H_s^\perp de la même manière que H_f^\perp dans la proposition 2.35. Il existe donc une fonction $\mathbf{u}_1 \in [L^2(\Omega, H_{\#}^1(S)/\mathbb{R})]^3$ telle que

$$\boldsymbol{\mu}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + {}^t\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) (\mathbf{x}) + (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1 + {}^t\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1) (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times S,$$

ce qui montre la propriété (3.48). \square

Remarque 3.37

D'après le lemme 3.35 et la proposition 3.36, on obtient que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}_1.$$

Remarque 3.38 (Ordre de la limite double échelle du déplacement)

Les notations \mathbf{u}_0 et \mathbf{u}_1 ressemblent à celles utilisées dans le développement asymptotique de Chapman-Enskog présenté en introduction de ce chapitre de manière intentionnelle. En effet, nous avons vu dans la section 1.3 du chapitre 1.1, que le déplacement fluide s'observe au niveau microscopique alors que le déplacement solide s'observe au niveau macroscopique. C'est ce que nous retrouvons par le calcul si l'on admet que le développement asymptotique

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$$

est vrai (ce que nous n'avons pas démontré).

Proposition 3.39 (Limite double échelle de la pression)

Il existe deux fonctions $p \in L^2(\Omega)$ et $q \in L^2(\Omega, L^2_{\sharp}(S))$ telles que la famille de fonctions $(P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}))_{\varepsilon>0}$ converge double échelle (à sous-suite près) vers $p_0 = p + q$.

Démonstration :

On écrit la première équation de (FV (F-S) $_{\varepsilon}$) vue à la page 56 pour une fonction test $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega, C_{\sharp}^{\infty}(F))$ et on multiplie l'équation obtenue par ε . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} & \varepsilon \omega^2 \rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} d\mathbf{x} \\ & - \varepsilon^2 \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^f(\mathbf{u}_{\varepsilon}, p_{\varepsilon}) : \overline{\nabla \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} d\mathbf{x} - \varepsilon \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^f(\mathbf{u}_{\varepsilon}, p_{\varepsilon}) : \overline{\nabla \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} d\mathbf{x} \\ & = \varepsilon \left(\int_{\Omega} \mathbf{f}^1 \cdot \overline{\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon}^2 : \overline{\left(\nabla \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + {}^t \nabla \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right)} d\mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Cette équation reste vraie pour le prolongement de la pression $P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon})$ puisque φ est à support dans $\Omega \times F$. De plus dans le théorème 3.33 et dans la proposition 3.39, nous avons vu que les familles de fonctions $(\mathbf{u}_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, $(\varepsilon(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon}))_{\varepsilon>0}$ et $(P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}))_{\varepsilon>0}$ sont bornées et donc convergent double échelle par le théorème 3.6. Par unicité de la limite double échelle, $(\varepsilon \mathbf{u}_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, $(\varepsilon^2(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon} + {}^t \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon}))_{\varepsilon>0}$ et $(\varepsilon P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}))_{\varepsilon>0}$ convergent double échelle vers la fonction nulle. Par conséquent, la limite de (3.50) lorsque ε tend vers 0 est

$$\int_{\Omega \times F} p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overline{\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} d\mathbf{x} = 0. \quad (3.51)$$

Comme φ est à support sur le fluide, une intégration par parties dans (3.51) montre que

$$\nabla_{\mathbf{y}} p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times F,$$

et donc que p_0 est une fonction macroscopique sur $\Omega \times F$. Selon la méthode utilisée dans la démonstration de la proposition 3.36, nous définissons alors p comme étant cette fonction macroscopique. Enfin, la fonction q définie par $q = p_0 - p$ est bien une fonction de $L^2(\Omega, L^2_{\sharp}(S))$. \square

Remarque 3.40 (Limite double échelle de \mathbf{f}_{ε})

On a vu dans (FV (F-S) $_{\varepsilon}$) que le second membre s'exprime sous la forme

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^1 \cdot \overline{\mathbf{v}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon}^2 : \overline{(\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v})}$$

avec \mathbf{f}^1 et $\mathbf{f}_{\varepsilon}^2$ définies par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f}^1 \cdot \overline{\mathbf{v}} &= -\omega^2 \rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{h} \cdot \overline{\mathbf{v}} - \omega^2 \rho_s \int_{\Omega_s} \mathbf{h} \cdot \overline{\mathbf{v}} \\ \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\varepsilon}^2 : \overline{\nabla \mathbf{v}} &= -\varepsilon \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^f(\mathbf{h}, 0) : \overline{\nabla \mathbf{v}} - \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^s(\mathbf{h}) : \overline{\nabla \mathbf{v}}, \end{aligned}$$

où \mathbf{h} est un relèvement régulier de la condition aux bords et est donc une fonction macroscopique. Grâce à Cauchy-Schwarz, cette écriture nous permet de vérifier que $\|\mathbf{f}^1\|_{0,\Omega}$ et $\|\mathbf{f}_\varepsilon^2\|_{0,\Omega}$ sont bornées indépendamment de ε . Les familles de fonctions $(\mathbf{f}^1)_{\varepsilon>0}$ et $(\mathbf{f}_\varepsilon^2)_{\varepsilon>0}$ admettent donc une limite double échelle que nous notons respectivement \mathbf{f}_0^1 et \mathbf{f}_0^2 . Comme la limite double échelle de \mathbf{h} est elle-même (c'est une fonction macroscopique), on peut expliciter les limites \mathbf{f}_0^1 et \mathbf{f}_0^2 comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\omega^2 \rho_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \chi_F(\mathbf{y}) - \omega^2 \rho_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) \chi_S(\mathbf{y}), \\ \int_{\Omega} \mathbf{f}_0^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \nabla \varphi &= - \int_{\Omega \times Y} \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \chi_S(\mathbf{y}) : \nabla \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y)). \end{aligned}$$

Pour la deuxième limite, il faut écrire le fait que \mathbf{f}_ε^2 converge double échelle vers \mathbf{f}_0^2 , et que $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{h}(\mathbf{x})))$ converge double échelle vers elle-même. Puis il faut tester \mathbf{f}_ε^2 contre $\nabla \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$ et utiliser l'unicité de la limite double échelle.

3.3.4 Limites double échelle des systèmes d'équations

L'objectif de ce travail est d'obtenir les équations macroscopiques vérifiées par les fonctions limites quand ε tend vers 0. Pour cela, nous choisissons une fonction test macroscopique pour les formulations variationnelles (FV (F-S) $_\varepsilon$) et nous calculons les limites double échelle de ces équations. On trouve alors deux équations d'inconnues p et \mathbf{u} qui sont les parties macroscopiques des limites double échelle respectivement de la pression et du déplacement. Ces équations font aussi intervenir les moyennes $\langle \mathbf{G}_y(\mathbf{u}_1) \rangle_S$ et $\langle \mathbf{v} \rangle_F$ où \mathbf{v} et $\mathbf{G}_y(\mathbf{u}_1)$ sont les parties microscopiques des limites double échelle du déplacement et de son tenseur des contraintes respectivement sur le fluide et sur le solide. Cela justifie le fait qu'il faut d'abord étudier les problèmes microscopiques sur le fluide et sur le solide.

Proposition 3.41 (Problème microscopique solide)

La limite double échelle $\boldsymbol{\mu}_0 \in L^2(\Omega, L_\#^2(S))$ sur le domaine solide de la suite de fonctions $(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifie le système d'équations suivant (en considérant la variable macroscopique \mathbf{x} fixée)

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \left(\mu \boldsymbol{\mu}_0 + \frac{\lambda}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\mu}_0) \text{Id} \right) = 0 & \text{sur } S, \\ \left(\mu \boldsymbol{\mu}_0 + \frac{\lambda}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\mu}_0) \text{Id} \right) \mathbf{n} = (-p \mathbf{Id} + \mathbf{f}_0^2) \mathbf{n} & \text{sur } \partial S, \end{cases} \quad (3.52)$$

où \mathbf{n} représente la normale extérieure au solide.

Démonstration :

On écrit la première équation de (FV (F-S) $_\varepsilon$) vue à la page 56 pour une fonction test φ de $[\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))]^3$ et on multiplie l'équation obtenue par ε . En faisant

intervenir $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \varepsilon\omega^2\rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \overline{\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} + \varepsilon\omega^2\rho_s \int_{\Omega_s} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \overline{\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} d\mathbf{x} \\
& - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}), P_\varepsilon(p_\varepsilon)(\mathbf{x})) : \left(\overline{\varepsilon\mathbf{G}_x\left(\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right) + \mathbf{G}_y\left(\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right)} \right) d\mathbf{x} \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})) : \left(\overline{\varepsilon\mathbf{G}_x\left(\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right) + \mathbf{G}_y\left(\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right)} \right) d\mathbf{x} \\
& = \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{f}^1 \cdot \overline{\varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} + \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{f}_\varepsilon^2 : \overline{\nabla_x \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_\varepsilon^2 : \overline{\nabla_y \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)} d\mathbf{x}. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Dans le théorème 3.33 et dans la proposition 3.39, nous avons vu que les familles de fonctions $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\varepsilon(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ et $(P_\varepsilon(p_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ convergent double échelle sur Ω . Par unicité de la limite double échelle, $(\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\varepsilon^2(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ et $(\varepsilon P_\varepsilon(p_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ convergent double échelle vers la fonction nulle sur Ω . De plus, dans (3.41) nous avons noté $\boldsymbol{\mu}_0$ la limite double échelle de $(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + {}^t\nabla\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sur le domaine solide et nous avons vu dans la proposition 3.35 que sur ce domaine $\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon$ converge vers $\text{Tr}(\boldsymbol{\mu}_0)/2$. Par conséquent, la limite de (3.53) lorsque ε tend vers 0 est

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_F p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overline{\nabla_y \cdot \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
& - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \int_S \boldsymbol{\mu}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \overline{(\nabla_y \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + {}^t\nabla_y \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
& - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \int_S \text{Tr}(\boldsymbol{\mu}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \overline{\nabla_y \cdot \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
& = - \int_{\Omega} \int_S \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{h}) : \overline{\nabla_y \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Le choix d'une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(S))$ donne l'équation aux dérivées partielles sur S proposée dans l'énoncé. L'équation sur le bord est alors donnée par une intégration par parties de (3.54), lue au sens des distributions. \square

Proposition 3.42

Grâce à la caractérisation (3.48) donnée à la page 73, le système limite sur le solide est l'équation d'élasticité linéaire suivante vérifiée par $\mathbf{u}_1 \in [L^2(\Omega, H_\#^1(S))]^3$:

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot (\boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1)) = 0 & \text{sur } S, \\ \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} = -(\boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) + p\mathbf{Id}) \mathbf{n} & \text{sur } \partial S, \\ \mathbf{u}_1 \mathbf{y} - \text{périodique} & \text{sur } \partial Y, \end{cases} \quad (\text{MicroS})$$

où

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1) &= \mu(\nabla_y \mathbf{u}_1 + {}^t\nabla_y \mathbf{u}_1) + \lambda \nabla_y \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{Id}, \\
\boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u}) &= \mu(\nabla_x \mathbf{u} + {}^t\nabla_x \mathbf{u}) + \lambda \nabla_x \cdot \mathbf{u} \mathbf{Id},
\end{aligned}$$

et où \mathbf{n} représente la normale extérieure au solide.

Remarque 3.43 (Tenseur d'impédance solide)

Par linéarité il existe un tenseur M_s tel que

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1) \right\rangle_S = M_s (-\boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - p\mathbf{Id}), \quad (3.55)$$

qui donne une relation entre la moyenne de $\mathbf{G}_y(\mathbf{u}_1)$ et les fonctions macroscopiques p et $\mathbf{G}_x(\mathbf{u})$. Ce tenseur est symétrique et réel.

Démonstration :

Le tenseur est réel puisqu'on peut complètement découper le système (MicroS) en parties réelle et complexe.

Soient E un second membre pour (MicroS) et \mathbf{u}_1 la solution correspondante, alors on a $|S|M_s E = \langle \nabla_y \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_y \mathbf{u}_1 \rangle_S$. Comme E et $(\nabla_y \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_y \mathbf{u}_1)$ sont symétriques, l'égalité précédente montre que M_s l'est aussi. \square

Ensuite pour trouver le problème vérifié par \mathbf{v} sur F , on considère une fonction test de H_f , espace défini en (2.19) à la page 40, ce qui permet d'obtenir le système de Stokes donné dans la proposition suivante.

Proposition 3.44

Le système limite sur le fluide vérifié par le déplacement $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega, H_{\text{Dir}, \#}^1(F))]^3$, est le système de Stokes suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega^2 \rho_f \mathbf{v} + i\omega\eta \Delta_{yy} \mathbf{v} - \nabla_y p_1 & = -\omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \nabla_x p & \text{sur } F, \\ \nabla_y \cdot \mathbf{v} & = 0 & \text{sur } F, \\ \mathbf{v} & = 0 & \text{sur } \partial F_D, \\ \mathbf{v} \mathbf{y} - \text{périodique} & & \text{sur } \partial Y. \end{array} \right. \quad (\text{MicroF})$$

Démonstration :

On considère la fonction test

$$\boldsymbol{\varphi} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = \varphi_1(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varphi}_2 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \text{ telle que } \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 = 0, \\ \text{avec } \varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{\varphi}_2 \in [H_{\#}^1(F)]^3.$$

On fait tendre ε vers 0 dans cette équation et on trouve

$$\omega^2 \rho_f \int_{\Omega \times F} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{h}) \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}} - \frac{i\omega\eta}{2} \int_{\Omega \times F} \mathbf{G}_y(\mathbf{u}_0) : \overline{\mathbf{G}_y(\boldsymbol{\varphi})} + \int_{\Omega \times F} p_0 \overline{\nabla_x \cdot \boldsymbol{\varphi}} = 0. \quad (3.56)$$

Pour obtenir une équation sur la cellule F uniquement, on sépare l'intégrale sur Ω de celle sur F en écrivant (3.56) sous la forme

$$\int_{\Omega} \varphi_1 \left(\int_F \omega^2 \rho_f (\mathbf{u}_0 + \mathbf{h}) \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}_2} - \frac{i\omega\eta}{2} \mathbf{G}_y(\mathbf{u}_0) : \overline{\mathbf{G}_y(\boldsymbol{\varphi}_2)} + p_0 \overline{\nabla_x \cdot \boldsymbol{\varphi}_2} \right) = 0. \quad (3.57)$$

En faisant une intégration par parties pour $\boldsymbol{\varphi}_2$ à support dans F , et en utilisant les caractérisations de \mathbf{u}_0 et de p_0 vues en (3.36) et en (3.39) on obtient que

$$\mathbf{g} = \omega^2 \rho_f \mathbf{v} + \omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + i\omega\eta \Delta_{yy} \mathbf{v} - \nabla_x p \in [[H_{\#}^1(F)]^3]^\perp. \quad (3.58)$$

D'après le lemme **3.45**, il existe donc p_1 unique dans $L^2_{\text{moy}}(\Omega)$ telle que la première équation de (MicroF) soit vérifiée.

La deuxième équation de (MicroF) s'obtient en testant la deuxième équation de (FV (F-S) $_{\varepsilon}$) pour une fonction test $q \in C_0^\infty(\Omega, C_{\#}^\infty(F))$, on multiplie cette équation par ε et on l'intègre par parties. On obtient alors

$$\varepsilon \int_{\Omega_f} \overline{\nabla_{\mathbf{x}} q \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} \overline{\nabla_{\mathbf{y}} q \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.59)$$

En faisant converger double échelle (3.59) et en faisant une nouvelle intégration par parties, on obtient

$$\int_{\Omega} \int_Y \overline{q(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 0, \quad \forall q \in C_0^\infty(\Omega, C_{\#}^\infty(F)),$$

ce qui donne le résultat.

La troisième équation découle de la caractérisation donnée par la proposition **3.36**. \square

Lemme 3.45

L'orthogonal de $[H_{\#}^1(F)]^3$ est

$$[[H_{\#}^1(F)]^3]^{\perp} = \left\{ \mathbf{g} \in H_{\#}^{-1}(F), \right.$$

$$\left. \text{telle que } \exists p_1 \in L_{2,0}(F), \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_{\#}^1(F)]^3, {}_{H^{-1}} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_0^1} = - \int_F p_1 \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right\}. \quad (3.60)$$

Démonstration :

La démonstration se fait exactement comme dans la proposition **2.35** et le lemme **2.37**. \square

Lemme 3.46 (Y-Périodicité de p_1)

La fonction p_1 donnée par (3.60) est Y-périodique.

Démonstration :

Nous avons vu qu'il existe une unique fonction $p_1 \in L_0^2(F)$ telle qu'au sens des distributions $\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{y}} p_1$ sur F , où \mathbf{g} est la fonction définie en (3.59). De même, il existe une unique fonction $p_1^i \in L_0^2(F + \mathbf{e}_i)$ telle qu'au sens des distributions, $\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{y}} p_1$ sur $F + \mathbf{e}_i$, pour $1 \leq i \leq 3$. Pour montrer que p_1 est Y-périodique, il suffit de montrer que p_1 est égale à chacune des \tilde{p}_1^i où $\tilde{p}_1^i(\cdot) = p_1^i(\cdot + \mathbf{e}_i)$.

Pour cela, on souhaite commencer par montrer que $\tilde{p}_1^i - p_1$ est constante en utilisant le lemme **3.15**. Mais par le lemme **3.16**, il suffit de tester $\tilde{p}_1^i - p_1$ contre $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in [H_{\text{Dir},\#}^1(F)]^3$. Or

$$\begin{aligned} & \int_F (\tilde{p}_1^i - p_1) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \\ &= - {}_{H_{\#}^{-1}(F+\mathbf{e}_i)} \langle p_1^i, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_{\#}^1(F+\mathbf{e}_i)} + {}_{H_{\#}^{-1}(F)} \langle p_1, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H_{\#}^1(F)}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_{\text{Dir},\#}^1(F)]^3. \end{aligned}$$

Le second membre est nul par périodicité de \mathbf{g} et de $\boldsymbol{\varphi}$, ce qui permet d'établir qu'il existe une constante C telle que pour tout $\mathbf{y} \in F$, $\tilde{p}_1^i - p_1^i = C$.

Il reste alors à montrer que C est nul. Pour cela, on intègre $\tilde{p}_1^i - p_1^i$ sur F et on utilise le fait que p_1^i et p_1 sont à moyenne nulle. \square

Remarque 3.47 (Matrice d'impédance fluide)

Par linéarité il existe une matrice M_f telle que

$$\langle \mathbf{v} \rangle_F = M_f (\nabla p - \omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h})), \quad (3.61)$$

qui donne une relation entre l'intégrale de \mathbf{v} sur F (notée $\langle \mathbf{v} \rangle_F$) et les fonctions macroscopiques ∇p et \mathbf{u} . Cette matrice est une constante dépendant de $|F|$, la taille du domaine fluide.

Remarque 3.48 (Lien avec le cas rigide sur le fluide)

On obtient le même problème microscopique fluide que dans le cas rigide à ceci près que le second membre diffère d'un terme contenant la donnée macroscopique \mathbf{u} .

Remarque 3.49 (Déplacement au niveau microscopique)

Notons bien qu'au niveau microscopique le déplacement $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ est totalement déterminé d'une part par la solution du système (MicroF) et d'autre part, par le fait que sur le solide $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$ et est donc constant en \mathbf{y} . La constante \mathbf{u} est déterminée par les systèmes macroscopiques.

Proposition 3.50

Le système d'équations macroscopiques limite double échelle de (FV (F-S) $_\varepsilon$) s'écrit

$$\begin{cases} \omega^2 \rho (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \omega^2 \rho_f \langle \mathbf{v} \rangle_F + \nabla \cdot \left(|S| \boldsymbol{\sigma}_x^s (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \left\langle \boldsymbol{\sigma}_y^s (\mathbf{u}_1) \right\rangle_S \right) - |F| \nabla p = 0, \\ |F| \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_F - \langle \nabla_y \cdot \mathbf{u}_1 \rangle_S = 0, \end{cases} \quad (\text{Macro})$$

où $\rho = \rho_s |S| + \rho_f |F|$.

Démonstration :

Pour la première équation, on écrit l'équation couplée de la formulation variationnelle (FV (F-S) $_\varepsilon$) pour une fonction test macroscopique, et on la fait converger double échelle.

Pour la deuxième équation, on écrit la deuxième équation de la formulation variationnelle (FV (F-S) $_\varepsilon$) pour une fonction test q à variable macroscopique, on obtient alors

$$\int_{\Omega} \overline{q(\mathbf{x})} \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \overline{q(\mathbf{x})} \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.62)$$

L'intérêt de cette écriture réside dans le fait que la limite double échelle de $\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon$ est connue sur Ω_s . En revanche pour traiter l'intégrale sur Ω , il faut faire une intégration par parties dans (3.62). On cherche donc à évaluer la limite double échelle de

$$- \int_{\Omega} \overline{\nabla_x q(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \overline{q(\mathbf{x})} \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.63)$$

L'équation (3.63) converge double échelle vers

$$- \int_{\Omega \times Y} \overline{\nabla_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} - \frac{1}{2} \int_{\Omega \times S} \overline{q(\mathbf{x})} \text{Tr}(\boldsymbol{\mu}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\mathbf{x} = 0.$$

On obtient le résultat annoncé en faisant une intégration par parties. \square

Remarque 3.51

La première équation de (Macro) (issue du problème couplé) est une équation vectorielle de type élasticité linéaire forcée par la pression. La deuxième équation de (Macro) (issue de l'incompressibilité) est une équation scalaire qui rend compte de l'incompressibilité du fluide.

Remarque 3.52 (Méthodologie)

On résout de manière indépendante les systèmes (MicroS) et (MicroF) et grâce aux relations (3.61) et (3.55) on écrit les problèmes macroscopiques en fonction des seules inconnues macroscopiques \mathbf{u} et p et on les résout.

Proposition 3.53 (Une reformulation)

Le système (Macro) s'écrit aussi sous la forme suivante

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(|S| \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \langle \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S \right) = \int_{\partial F_D} \boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{v}, p_1) \mathbf{n} - \omega^2 \rho_s |S| (\mathbf{u} + \mathbf{h}), \\ |F| \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_F - \langle \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}_1 \rangle_S = 0, \end{cases}$$

Démonstration :

On part de l'équation microscopique fluide vue au sens des distributions et on l'intègre sur F . Une intégration par parties donne alors

$$\omega^2 \rho_f \langle \mathbf{v} \rangle_F + \int_{\partial F} i\omega\eta \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \int_{\partial F} p_1 \mathbf{n} = |F| (\nabla p - \omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h})),$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à F . En remarquant que ∂F est composé du bord périodique (qui touche le bord de Y) et du bord avec conditions de Dirichlet, et en utilisant le fait que $\nabla \mathbf{v}$ et p_1 sont Y -périodiques (cf le lemme 3.46), on obtient alors

$$\omega^2 \rho_f \langle \mathbf{v} \rangle_F - \int_{\partial F_D} \boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{v}, p_1) \mathbf{n} = |F| (\nabla p - \omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h})), \quad (3.64)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à S . On injecte alors (3.64) dans la première équation de (Macro) et on a le résultat. \square

Remarque 3.54

Cette écriture permet de comprendre que le déplacement macroscopique est essentiellement géré par le solide (la contribution fluide ne se voit que sur le bord de Y).

3.4 Existence et unicité des systèmes homogénéisés

L'objectif de cette section est de montrer que les problèmes limite double échelle que nous avons obtenus ont chacun une unique solution dans des domaines à déterminer. Les problèmes microscopiques sont faciles à traiter puisqu'il s'agit d'équations aux dérivées partielles linéaires bien connues. En revanche, le problème macroscopique n'est pas classique et nous ne pouvons pas utiliser la méthode proposée dans [CFGM01]. Encore une fois la difficulté de l'étude vient du fait que nous travaillons à fréquence fixée et indépendamment du temps : le système n'est pas coercif. Les résultats que nous obtenons pour ce système macroscopique sont différents de ceux obtenus dans [CFGM01] puisque nous n'avons unicité que pour certains types de cellule de périodicité.

3.4.1 Existence et unicité de la solution des problèmes homogénéisés microscopiques

Nous commençons par étudier le système (MicroS).

Proposition 3.55

Si p et $\mathbf{G}_x(\mathbf{u})$ sont connus et si on a

$$\int_{\partial S} \varphi (\mu \mathbf{G}_y(\mathbf{u}_1) + \lambda (\nabla_y \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{Id}) \mathbf{n} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}(S), \quad (3.65)$$

où $\mathcal{R}(S)$ est défini en (2.12) à la page 41, alors le problème (MicroS) admet une solution $\mathbf{u}_1 \in [L^2(\Omega, H_{\#}^1(S)/\mathbb{R})^3]$ unique à un déplacement rigide près (à un élément de $\mathcal{R}(S)$ près).

Démonstration :

On considère que la variable macroscopique \mathbf{x} est fixée, par conséquent les inconnues de (MicroS) ne dépendent que de la variable microscopique \mathbf{y} . La démonstration de cette proposition est une conséquence du théorème 2.3 de Lax-Milgram. Nous commençons donc par définir l'espace de Hilbert W par

$$W = [H_{\#}^1(S)/\mathcal{R}(S)]^3, \quad \text{avec le produit scalaire } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_W = \int_S G_y(\mathbf{u}) : G_y(\mathbf{v}).$$

Puis nous exprimons (MicroS) sous la forme

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_1 \in W \text{ tel que } a(\mathbf{u}_1, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in W,$$

où a est une forme bilinéaire continue sur $W \times W$ et $L \in W'$ est une forme linéaire continue sur W .

Nous suivons la démarche de G. Allaire dans [All07] pour montrer que a est coercive. Nous commençons par écrire

$$a(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \mu \left\| (\nabla_y \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_y \mathbf{u}_1) \right\|_{0,S}^2 + \lambda \left\| \nabla_y \cdot \mathbf{u}_1 \right\|_{0,S}^2.$$

Étudions ensuite la matrice $A = G_y(\mathbf{u}_1)$ en remarquant que

$$A = A^d + A^h, \quad \text{avec } A^d = \frac{1}{3} \text{Tr} A \mathbf{Id} \quad \text{et} \quad A^h = A - \frac{1}{3} (\text{Tr} A) \mathbf{Id}.$$

En particulier, on a $A^d : \overline{A^h} = A^h : \overline{A^d} = 0$ et $A : \overline{A} = A^d : \overline{A^d} + A^h : \overline{A^h}$. On obtient ainsi,

$$\mu \|A\|_{0,S}^2 + \frac{\lambda}{2} \|(\text{Tr}A)\mathbf{Id}\|_{0,S}^2 = \mu \|A^h\|_{0,S}^2 + \left(\mu + \frac{3}{2}\lambda\right) \|A^d\|_{0,S}^2 \geq \nu \|A\|_{0,S}^2,$$

avec $\nu = \min(\mu, \mu + 3\lambda/2)$. En écrivant A en fonction de \mathbf{u}_1 , on obtient

$$a(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \geq \nu \|(\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_1 + {}^t\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_1)\|_{0,S}^2 = \nu \|\mathbf{u}_1\|_W^2,$$

ce qui donne la coercivité de a . Le théorème de Lax-Milgram nous assure donc l'existence et l'unicité d'une fonction $\mathbf{u}_1 \in W$ au problème (MicroS). \square

Remarque 3.56

La propriété (3.65) sert à comprendre qu'il faut travailler dans l'espace W , et à définir correctement la forme linéaire L .

Remarque 3.57

La propriété (3.65) se vérifie en appliquant la formule de Stokes, ou en remarquant qu'on intègre une constante multipliée à une fonction périodique.

Nous terminons par l'étude du système (MicroF).

Proposition 3.58 (Existence et unicité du problème (MicroF))

Le système (MicroF) rappelé ci-dessous admet une unique solution (\mathbf{v}, p_1) dans $[L^2(\Omega, H_{\text{Dir},\#}^1(F))]^3 \times L^2(\Omega, L_{\#, \text{moy}}^2(F))$.

$$\begin{cases} \omega^2 \rho_f \mathbf{v} + i\omega\eta \Delta_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{y}} p_1 = -\omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \nabla_{\mathbf{x}} p & \text{sur } F, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{sur } F, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \partial F_D. \end{cases} \quad (\text{MicroF})$$

Démonstration :

La démonstration est classique et se fait comme la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution de (V_ε) . \square

Remarque 3.59 (Restriction de l'étude à Y)

Les variations de la fonction $\nabla_{\mathbf{x}} p$ sont macroscopiques. Cette fonction est considérée comme connue sur chaque cellule $Y_{\mathbf{k}}^\varepsilon$, on peut donc faire l'étude de ce système seulement en la variable microscopique \mathbf{y} .

3.4.2 Existence et unicité de la solution du problème homogénéisé macroscopique

L'existence de la solution du problème (Macro), comme de tout problème issu d'une convergence double échelle, est une conséquence de la convergence double échelle, il nous reste donc à étudier l'unicité de ce problème. Pour cela, nous commençons par écrire le problème macroscopique uniquement dans les inconnues \mathbf{u} et p qui sont respectivement le déplacement et la pression macroscopique. Nous additionnons alors les deux équations obtenues afin d'obtenir une écriture du système sous la forme

$$A(\mathbf{u}, p) = F(\mathbf{u}, p).$$

Nous écrivons alors l'opérateur A comme la somme d'un opérateur bijectif et d'un opérateur compact. L'alternative de Fredholm permet alors de conclure. Nous montrons aussi que p est en fait une fonction de $H_{\text{moy}}^1(\Omega)$.

Proposition 3.60 (Reformulation du problème (Macro))

Le système macroscopique peut s'écrire uniquement en fonction des inconnues macroscopiques \mathbf{u} et p de la manière suivante

$$\begin{cases} Z_1(\mathbf{u} + \mathbf{h}) + Z_2 \nabla p + \nabla \cdot (Z_3 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \nabla \cdot (Z_4 p \mathbf{Id}) = 0, \\ -\nabla \cdot (Z_2(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \nabla \cdot (M_f \nabla p) + \text{Tr}(Z_5 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \text{Tr}(Z_5 p \mathbf{Id}) = 0, \end{cases} \quad (3.66)$$

avec

$$\begin{aligned} Z_1 &= \omega^2 \rho \mathbf{Id} - (\omega^2 \rho_f)^2 M_f, & Z_2 &= \omega^2 \rho_f M_f - |F| \mathbf{Id}, \\ Z_3 &= |S| \mathbf{Id} - M_s, & Z_4 &= -M_s \quad \text{et} \quad Z_5 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} M_s \end{aligned}$$

Démonstration :

Il suffit d'utiliser les matrices et tenseurs d'impédance définis respectivement en (3.61) page 80 et en (3.55) page 78 dans les équations données en (Macro) à la page 80. \square

Remarque 3.61

Pour montrer l'unicité de la solution de (3.66), il suffit de montrer l'unicité dans l'équation obtenue en faisant la somme des deux équations de (3.66)

$$\begin{aligned} &Z_1(\mathbf{u} + \mathbf{h}) + Z_2 \nabla p + \nabla \cdot (Z_3 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \nabla \cdot (Z_4 p \mathbf{Id}) \\ &- \nabla \cdot (Z_2(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \nabla \cdot (M_f \nabla p) + \text{Tr}(Z_5 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \text{Tr}(Z_5 p \mathbf{Id}) = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Afin de pouvoir utiliser l'alternative de Fredholm, on écrit (3.67) sous forme d'opérateur en séparant les termes d'ordre 2 des autres. L'objectif est de montrer que les termes d'ordre 2 donnent un opérateur inversible alors que la somme des autres termes donne un opérateur compact.

Définition 3.62 (Écriture sous forme d'opérateurs)

L'équation (3.67), s'écrit sous la forme

$$A(\mathbf{u}, p) = B(\mathbf{u}, p) + C(\mathbf{u}, p) = L(\mathbf{h}), \quad (3.68)$$

où A , B et C sont des opérateurs $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \mathbf{u} \times L_{\text{moy}}^2(\Omega) \rightarrow [H^{-1}(\Omega)]^3 \times L_{\text{moy}}^2(\Omega)$ définis par :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p) &= -\nabla \cdot (Z_3 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u})) - \nabla \cdot (M_f \nabla p), \\ C(\mathbf{u}, p) &= -Z_1 \mathbf{u} - Z_2 \nabla p - \nabla(Z_4 p \mathbf{Id}) \\ &\quad + \nabla \cdot (Z_2 \mathbf{u}) - \text{Tr}(Z_5 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u})) - \text{Tr}(Z_5 p \mathbf{Id}). \end{aligned}$$

Définition 3.63

On note b et c les formes sesquilinéaires associées à B et C .

On souhaite maintenant montrer que p est en fait une fonction de $[H^1(\Omega)]^3$ à moyenne nulle (i.e une fonction de $H_{\text{moy}}^1(\Omega)$). Nous commençons par montrer que M_f est coercive, cela nous permet, en étudiant la deuxième équation de (3.66), de montrer que p est dans $[H^1(\Omega)]^3$. Le fait que p est à moyenne nulle est une conséquence de la limite double échelle.

Lemme 3.64 (Coercivité des matrices et tenseurs d'impédance.)

La matrice d'impédance M_f est coercive, i.e. il existe une constante α_f telle que pour tout vecteur $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^3$,

$$\Re({}^t\bar{\mathbf{e}}M_f\mathbf{e}) \geq \alpha_f|\mathbf{e}|^2.$$

Soit Z_s le tenseur qui relie la déformation de \mathbf{u}_1 , solution de (MicroS), au second membre de (MicroS) i.e.

$$\langle \mathbf{G}(\mathbf{u}_1) \rangle_S = Z_s(-\boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - p\mathbf{Id}).$$

Alors il existe une constante β strictement positive telle que pour toute matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\bar{M} : (Z_s M) \geq \beta M : \bar{M}.$$

Démonstration :

Dans les deux cas, la démonstration se fait en deux étapes : on commence par réexprimer $\Re({}^t\bar{\mathbf{e}}M_f\mathbf{e})$ (respectivement $\bar{M} : (Z_s M)$) en fonction de l'équation aux dérivées partielles (MicroF) (respectivement (MicroS)) puis on conclut grâce à un raisonnement par l'absurde.

Au niveau fluide, on considère l'équation (MicroF) définie à la page 78 avec \mathbf{e} pour second membre, on la multiplie par $\bar{\mathbf{v}}$ et on l'intègre sur F . En utilisant le fait que \mathbf{v} est à divergence nulle et nulle au bord de F , on obtient alors

$$\omega^2 \rho_f \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle_F - i\omega\eta \langle |\nabla \mathbf{v}|^2 \rangle_F = \mathbf{e} \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle_F.$$

D'après la définition de M_f donnée en (3.61) à la page 80, on sait que $M_f\mathbf{e} = \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle_F$. Cela donne alors que

$$\Re({}^t\bar{\mathbf{e}}M_f\mathbf{e}) = \Re({}^t\mathbf{e} \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle_F) = \omega^2 \rho_f \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle_F. \quad (3.69)$$

On suppose par l'absurde que M_f n'est pas coercive. Cela s'écrit comme suit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^3, \Re({}^t\bar{\mathbf{e}}_n M_f \mathbf{e}_n) < \frac{1}{n} |\mathbf{e}_n|^2. \quad (3.70)$$

Quitte à renormaliser \mathbf{e}_n , on peut supposer que $|\mathbf{e}_n|^2 = 1$ dans (3.70). Par conséquent, $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans \mathbb{C}^3 , elle admet donc une sous-suite convergent vers $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^3$. Mais alors $\Re({}^t\bar{\mathbf{e}}M_f\mathbf{e}) = 0$ et $|\mathbf{e}|^2 = 1$. D'après (3.69), la solution \mathbf{v} de (MicroF) avec second membre \mathbf{e} , est nulle. Le vecteur \mathbf{v} est donc une solution nulle de (MicroF) avec second membre non nul, ce qui contredit l'existence et l'unicité de la solution de (MicroF). Ainsi, M_f est coercive.

Au niveau solide, on procède de même : on considère l'équation (MicroS) avec pour condition de bord sur ∂S

$$\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} = M\mathbf{n}.$$

La multiplication de (MicroS) par \mathbf{u}_1 et son intégration sur S donne

$$\frac{1}{2} \int_S \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{G}(\mathbf{u}_1) = \int_{\partial S} (\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{n}) \mathbf{u}_1.$$

Or par symétrie de M et de $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1)$, on a

$$\int_{\partial S} (\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{n}) \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} M : \langle \mathbf{G}(\mathbf{u}_1) \rangle_S.$$

Supposons par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), (\overline{M_n} M_f M_n) < \frac{1}{n} M_n : \overline{M_n}, \quad (3.71)$$

avec $M_n : \overline{M_n} = 1$. Il existe donc une sous-suite convergeant vers $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, ce qui implique par passage à la limite $\overline{M_n} M_f M_n = 0$ et $M_n : \overline{M_n} = 1$. Grâce à l'étude préliminaire, la solution \mathbf{u}_1 de (MicroS) est à déplacement solide nul. Comme le second membre M est non nul, cela contredit l'unicité (à déplacement solide près) de la solution de (MicroS). \square

Proposition 3.65 (La pression est dans $[H^1(\Omega)]^3$)

La pression solution du problème macroscopique (3.66) est un élément de $[H^1(\Omega)]^3$ à moyenne nulle.

Démonstration :

On sait déjà que la pression p_ε solution du problème ((F-S) $_\varepsilon$) est unique dans $L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ et que la restriction de son prolongement $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ à Ω_f converge double échelle vers p sur $\Omega \times F$. On choisit alors $\boldsymbol{\varphi}$ élément de $\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$ définie par $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{1}(\mathbf{x})$. Comme p_ε est à moyenne nulle, on a d'une part

$$\int_\Omega p_\varepsilon(\mathbf{x}) \chi_{\Omega_f} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varphi} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.72)$$

D'autre part, en utilisant le fait que $p_\varepsilon = \chi_{\Omega_f} P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ converge double échelle vers p sur $\Omega \times F$ et le corollaire **3.13**, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega p_\varepsilon(\mathbf{x}) \chi_{\Omega_f} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varphi} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{x} = \int_\Omega |F| p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.73)$$

En combinant (3.72) et (3.73), on obtient que p est à moyenne nulle.

Comme $(\mathbf{u}, p) \in [H^1_{\text{Dir}}(\Omega)]^3 \times L^2_{\text{moy}}(\Omega)$, la deuxième équation de (3.66) affirme que $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (M_f \nabla_{\mathbf{x}} p)$ est dans $L^2(\Omega)$, et donc $M_f \nabla_{\mathbf{x}} p$ (lue au sens des distributions) l'est aussi. Comme M_f est coercive, on a $\nabla_{\mathbf{x}} p \in [L^2(\Omega)]^3$ et donc $p \in H^1(\Omega)$. \square

Nous souhaitons utiliser l'alternative de Fredholm, pour cela nous devons établir que B est inversible et que C est compact.

Proposition 3.66 (Compacité de C)

L'opérateur C est compact.

Démonstration :

Tout d'abord, on note que les espaces $([H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3, \|\cdot\|_{1,\Omega})$, $([H^{-1}(\Omega)]^3, \|\cdot\|_{-1,\Omega})$ et $(H_{\text{moy}}^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega})$ sont des espaces de Banach. La théorie des opérateurs compacts s'applique donc, et il suffit de montrer que l'image $C(U)$ de la boule unité U de $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times H_{\text{moy}}^1(\Omega)$ par C est précompacte. Cela revient à montrer que toute suite de $\overline{C(U)}$ admet une sous-suite convergente.

Soit donc $(C(\mathbf{u}_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $C(U)$. Alors $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites bornées (puisque dans U) de $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times H_{\text{moy}}^1(\Omega)$. Par le théorème de Rellich, il existe une sous-suite de $(\mathbf{u}_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (encore notée $(\mathbf{u}_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$) convergeant dans $[L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3$. Notons (\mathbf{u}, p) la limite de $(\mathbf{u}_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il reste donc à montrer que la suite $(C(\mathbf{u}_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (à sous-suite près) vers $C(\mathbf{u}, p)$. On écrit alors $C(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}, p_n - p)$ sous forme variationnelle pour (\mathbf{v}, q) élément de $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times H_{\text{moy}}^1(\Omega)$ et on fait des intégrations par parties pour obtenir des intégrales en $\mathbf{u}_n - \mathbf{u}$ et $p_n - p$ contre des dérivées d'ordre 0 ou 1 de \mathbf{v} et q . Comme $(\mathbf{u}_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (\mathbf{u}, p) , l'inégalité de Hölder permet de conclure. \square

La démonstration de l'injectivité de B se fait en plusieurs étapes que nous subdivisons en lemmes pour plus de lisibilité.

Lemme 3.67

Dans le cas où S vérifie l'hypothèse 3.8, il existe $\alpha_s > 0$ tel que pour tout élément \mathbf{u} de $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ et \mathbf{u}_1 solution du problème d'élasticité solide dont le second membre est $\sigma_x^s(\mathbf{u})$,

$$\left(|S| \sigma_x^s(\mathbf{u}) - \left\langle \sigma_y^s(\mathbf{u}_1) \right\rangle_S \right) : \overline{\mathbf{G}_x(\mathbf{u})} \geq \alpha_s |\mathbf{G}_x(\mathbf{u})|^2. \quad (3.74)$$

Démonstration :

On utilise la proposition 3.20 pour obtenir

$$\left(|S| \sigma_x^s(\mathbf{u}) - \left\langle \sigma_y^s(\mathbf{u}_1) \right\rangle_S \right) : \overline{\mathbf{G}_x(\mathbf{u})} \geq 0. \quad (3.75)$$

De plus d'après la remarque 3.21, il n'y a égalité dans (3.75) que si $\mathbf{u} = 0$ presque partout.

Supposons par l'absurde que (3.74) est fautive. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe \mathbf{u}^n et \mathbf{u}_1^n tels que

$$\left(|S| \sigma_x^s(\mathbf{u}^n) - \left\langle \sigma_y^s(\mathbf{u}_1^n) \right\rangle_S \right) : \overline{\mathbf{G}_x(\mathbf{u}^n)} \leq \frac{1}{n} |\mathbf{G}_x(\mathbf{u}^n)|^2. \quad (3.76)$$

Sans perdre en généralité, on peut supposer $\|\mathbf{u}^n\|_{1,\Omega} = 1$. Les suites $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathbf{G}_x(\mathbf{u}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc bornées dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ et convergent respectivement vers \mathbf{u} dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ et $\mathbf{G}_x(\mathbf{u})$. Comme de plus $\left\langle \sigma_y^s(\mathbf{u}_1^n) \right\rangle_S = M_s \sigma_x^s(\mathbf{u}^n)$, on obtient que $\mathbf{G}_y(\mathbf{u}_1^n)$ est borné dans $L^2(\Omega_s)$ et par la proposition 2.17 (inégalité de Korn rappelée à la page 43) \mathbf{u}_1^n est borné dans $[H_{\text{Dir}}^1(S)/\mathbb{R}]^3$ et converge vers \mathbf{u}_1 . En passant à la limite dans (3.76), on obtient donc

$$\left(|S| \sigma_x^s(\mathbf{u}) - \left\langle \sigma_y^s(\mathbf{u}_1) \right\rangle_S \right) : \overline{\mathbf{G}_x(\mathbf{u})} = 0. \quad (3.77)$$

D'après l'étude précédente, la conséquence de (3.77) est que $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\Omega)$. Or par passage à la limite, les conditions de Dirichlet sont conservées, et donc \mathbf{u} est nul presque partout, ce qui contredit la propriété $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} = 1$.

Remarque 3.68 (Importance de l'hypothèse **(H 3.3)**)

Sans l'hypothèse **(H 3.3)** et la définition de Ω_s par périodicité, il n'est pas garanti que $\partial\Omega_s$ soit en contact avec le bord de Dirichlet de Ω . Or cette propriété est primordiale pour pouvoir appliquer l'inégalité de Korn, comme on peut le voir aussi dans [FM03].

Proposition 3.69 (Bijektivité de B)

Dans le cas où S vérifie l'hypothèse 3.8, l'opérateur B est coercif et donc inversible par Lax-Milgram.

Démonstration :

On souhaite montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que

$$\forall (\mathbf{u}, p) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times H_{\text{moy}}^1(\Omega), \quad \Re(B((u, p), (u, p))) \geq \alpha \left(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} \right).$$

Or d'après le lemme 3.64 et l'inégalité de Korn, on sait qu'il existe α_f tel que

$$\Re \left(\int_{\Omega} M_f \nabla p \cdot \overline{\nabla p} \right) \geq \alpha_f \|p\|_{1,\Omega}^2.$$

Il reste donc à traiter l'intégrale

$$\int_{\Omega} (Z_3 \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u})) : \overline{\nabla \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|S| \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u}) - \langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S \right) : \overline{\mathbf{G}_x(\mathbf{u})},$$

où \mathbf{u}_1 est la solution du problème d'élasticité microscopique ayant pour second membre $\boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u})$. D'après l'inégalité de Korn et le lemme 3.67, on a

$$\Re \left(\int_{\Omega} (Z_3 \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u})) : \overline{\nabla \mathbf{u}} \right) = \int_{\Omega} (Z_3 \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u})) : \overline{\nabla \mathbf{u}} \geq \alpha_s \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2,$$

Ce qui donne le résultat attendu avec $\alpha = \min(\alpha_f, \alpha_s)$. □

Théorème 3.70

Dans le cas où S vérifie l'hypothèse 3.8, le problème macroscopique défini à la page 80 admet une unique solution dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times H_{\text{moy}}^1(\Omega)$, où $H_{\text{moy}}^1(\Omega)$ est défini par (3.8).

Démonstration :

L'existence de la solution est obtenue par définition même de la limite double échelle.

Pour l'unicité, il suffit de montrer que A est injectif (cela est plus restrictif que de montrer que le système (Macro) admet une unique solution). Or, nous avons montré que $A = B + C$ avec B bijectif et donc d'indice nul et C compact. Donc, par Fredholm, A est lui aussi d'indice nul. Mais on sait déjà que $\text{codim}(\Im A) = 0$ puisque A est surjectif, ainsi A est injectif et on obtient l'unicité. □

Théorème 3.71

Dans le cas où S ne vérifie pas l'hypothèse 3.8, le problème macroscopique défini à la page 80 n'admet pas une unique solution dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times H_{\text{moy}}^1(\Omega)$, où $H_{\text{moy}}^1(\Omega)$ est défini par (3.8).

Démonstration :

En effet, dans le cas où S ne vérifie pas l'hypothèse 3.8, le lemme **3.67** est faux. Pour nous convaincre de ceci, nous allons exhiber un contre exemple pour chacun des cas possibles.

Si S ne touche pas le bord de Y , alors pour tout \mathbf{u} non presque partout nul, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{y} + C(\mathbf{x})$ est une solution du problème de l'élasticité microscopique qui annule (3.75) et qui est non nulle.

Si S est non connexe, on choisit par exemple

$$\mathbf{u}_1 = A_x \mathbf{y} + A_y \mathbf{y} + A_z \mathbf{y},$$

où A_x , A_y et A_z sont les trois matrices qui donnent \mathbf{u}_1 sur les tuyaux selon les trois directions (ces tuyaux ne se coupent pas et définissent S). Ces matrices sont définies par

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = {}^t(z, 0, x)$ est non nul et annule (3.75). □

Chapitre 4

Lien avec le modèle de Biot

Sommaire

4.1	Introduction	92
4.2	Le modèle de Biot-Allard	93
4.3	Comparaison formelle entre les deux modèles	96

L'objectif de ce chapitre est de vérifier la cohérence du modèle homogénéisé que nous proposons en le confrontant au modèle de Biot-Allard actuellement utilisé par les physiciens pour étudier les problèmes couplés fluide-structure. Ce modèle de Biot-Allard a été établi de manière empirique et est très satisfaisant dans le cas des basses fréquences et des hautes fréquences. Nous souhaitons établir que le modèle (Macro) est cohérent avec le modèle de Biot-Allard dans ces cas de fréquences particulières. Dans un premier temps, nous rappelons les équations qui décrivent le modèle de Biot-Allard. Dans un second temps nous comparons de manière formelle les deux modèles : (BA) et (Macro).

4.1 Introduction

Nous étudions les vibrations d'un matériau poreux type laine de verre, nous avons vu dans la partie modélisation que ce problème peut s'écrire sous la forme du problème ((F-S) $_\varepsilon$) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon + i\varepsilon^2 \omega \eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon^f, & \text{sur } \Omega_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & \text{sur } \Omega_f, \\ \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}_\varepsilon + \mu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon^s, & \text{sur } \Omega_s, \\ \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_D^{\text{ext}}, \\ \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_N^{\text{ext}}, \\ \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}, p_\varepsilon) \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon \text{ continu} & \text{sur } \Gamma^{\text{int}}, \end{array} \right. \quad ((\text{F-S})_\varepsilon)$$

où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^f(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}, p_\varepsilon) &= i\varepsilon \omega \eta \mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) - \frac{1}{\varepsilon} p_\varepsilon \mathbf{Id}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^s(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) &= \lambda \nabla \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}) \mathbf{Id} + \mu \mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{h}), \end{aligned}$$

et où

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\varepsilon^f &= -\rho_f \omega^2 \mathbf{h} - i\varepsilon^2 \omega \eta \Delta \mathbf{h}, \\ \mathbf{f}_\varepsilon^s &= -\rho_s \omega^2 \mathbf{h} - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{h} - \mu \Delta \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Dans les chapitres précédents, nous avons montré que le système ((F-S) $_\varepsilon$) a trois limites double échelle : deux microscopiques aux niveaux fluide et solide et une macroscopique. Pour $\mathbf{u}_1 \in [L^2(\Omega, H_{\sharp}^1(S))]^3$, le problème limite microscopique solide s'énonce comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1)) = 0 & \text{sur } S, \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} = -(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) + p \mathbf{Id}) \mathbf{n} & \text{sur } \partial S, \end{array} \right. \quad (\text{MicroS})$$

où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) &= \mu (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1) + \lambda \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{Id}, \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{u}) &= \mu (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + {}^t \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) + \lambda \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \mathbf{Id}, \end{aligned}$$

et où \mathbf{n} représente la normale extérieure au solide.

Pour \mathbf{v} élément de $[L^2(\Omega, H_{\text{Dir},\sharp}^1(F))]^3$, le problème microscopique fluide s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} \omega^2 \rho_f \mathbf{v} + i\omega\eta \Delta_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{y}} p_1 &= -\omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \nabla_{\mathbf{x}} p & \text{sur } F, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} &= 0 & \text{sur } F, \\ \mathbf{v} &= 0 & \text{sur } \partial F_D. \end{cases} \quad (\text{MicroF})$$

Nous avons aussi remarqué qu'il existe une matrice d'impédance M_f et un tenseur d'impédance M_s tels que

$$\langle \mathbf{v} \rangle_F = M_f (\nabla_{\mathbf{x}} p - i\omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h})) \quad \text{et} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S = -M_s (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) + p \mathbf{I}d).$$

Enfin, rappelons le système (Macro) homogénéisé obtenu par convergence double échelle :

$$\begin{cases} \omega^2 \rho (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \omega^2 \rho_f \langle \mathbf{v} \rangle_F + \nabla \cdot \left(|S| \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \langle \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S \right) - |F| \nabla p &= 0, \\ |F| \nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_F - \langle \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}_1 \rangle_S &= 0, \end{cases} \quad (\text{Macro})$$

où $\rho = \rho_s |S| + \rho_f |F|$.

4.2 Le modèle de Biot-Allard

Les milieux poro-élastiques ont été étudiés d'un point de vue physique sans l'outil mathématique de l'homogénéisation. C'est Biot qui le premier proposa un modèle pour les basses fréquences en 1956. Les hypothèses, lois de comportement et équations du mouvement proposées par Biot sont rappelées par exemple par C. Chiavassa dans [Chi09]. Nous retenons surtout que, dans ce modèle, une loi de comportement relie la pression et la divergence du déplacement. Les équations de mouvement font intervenir une pression fluide, et deux déplacements : l'un solide et l'autre relatif de la phase fluide par rapport à la phase solide (il s'agit d'une combinaison linéaire des déplacements solide et fluide). Cette mise en équation n'est pas très satisfaisante parce qu'elle fait intervenir 3 inconnues et 7 degrés de liberté (dans le cas tri-dimensionnel), alors que les deux équations de mouvement sont vectorielles, le problème est donc trop contraint. Nos collaborateurs de Dassault-Aviation et de l'ONERA préfèrent donc travailler avec la formulation dite de Biot-Allard proposée par J. F. Allard et N. Atalla dans le chapitre 6 de [AA09].

Comme dans le modèle de Biot, le modèle de Biot-Allard a pour objectif de décrire le comportement d'un matériau poreux. Un matériau est totalement décrit d'un point de vue physique lorsque l'on connaît ses coefficients de Biot, coefficients que nous définissons dans le TAB. 4.1.

Le modèle de Biot-Allard que nous étudions comporte deux lois de mouvement formulées au moyen d'une équation scalaire et d'une équation vectorielle d'inconnues la pression fluide et le déplacement solide. Cette formulation dite (\mathbf{U}, p) est présentée en (BA) :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \omega^2 \tilde{\rho}_s \mathbf{U} + \tilde{\gamma} \nabla p &= 0, \\ \frac{\Phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \Delta p + \frac{\Phi^2}{\tilde{R}} p &= \tilde{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{U}, \end{cases} \quad (\text{BA})$$

Symbole	Propriétés / Description	
Porosité Φ	Proportion de fluide dans le volume total	
Tortuosité α_∞	Coefficient s'appliquant sur la masse volumique du fluide, permettant de décrire le caractère tortueux du matériau	
Résistivité σ	Description des interactions visqueuses à basse fréquence	N.s.m ⁻⁴
Longueur caractéristique visqueuse Λ	Variation des effets visqueux à haute fréquence	m
Longueur caractéristique thermique Λ'	Echanges thermiques entre les phases à haute fréquence	m

TABLE 4.1 - Récapitulatif des coefficients de Biot.

où les coefficients notés avec le symbole $\tilde{\cdot}$ dépendent de ω (pas forcément linéairement) et sont récapitulés dans le TAB. 4.2.

Afin d'évaluer les coefficients de Biot, nous utilisons les constantes physiques définies dans le TAB. 4.3.

On calcule le nombre de Prandtl grâce à la formule

$$N_{Pr} = \frac{\eta c_p}{\kappa},$$

où les constantes ν , c_p et κ sont définies dans le TAB. 1.3 de la page 15.

Nous souhaitons vérifier la validité de notre modèle (Macro) issu de l'homogénéisation à la formulation de (BA). Pour cela, nous exprimons les coefficients de Biot en fonction des coefficients des équations de mouvement données en (BA). En effet, dans un second temps, cette nouvelle écriture des coefficients de Biot nous permettra de comparer les coefficients de Biot calculés empiriquement à ceux calculés par (Macro).

Nous souhaitons déterminer totalement les coefficients de Biot en fonction des coefficients du système (BA), mais cela n'est malheureusement pas possible. En effet, il y a trop de degrés de liberté pour résoudre ce problème. En revanche il est possible de déterminer l'expression de la longueur caractéristique thermique, et on peut mettre en valeur des relations entre les différents coefficients de l'équation.

Proposition 4.1 (Relation entre coefficients)

En travaillant à partir du TAB. 4.2, il est possible d'exprimer la longueur caractéristique thermique en fonction du coefficient correspondant à la pression grâce à la formule :

$$\Lambda' = \pm \sqrt{-i \frac{8\eta}{\omega N_{Pr} \rho_f \beta}}, \text{ avec } \beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16 \frac{(\Phi - C_p \gamma P)^2}{(\gamma C_p P - \gamma \Phi)^2}}}{4} \text{ et } C_p = \frac{\Phi^2}{\tilde{R}}. \quad (4.1)$$

D'autre part, les coefficients du système (BA) sont liés entre eux par les relations suivantes :

$$C_{\nabla \cdot p} = 1 - \Phi - C_{\nabla \cdot U}, \quad (4.2)$$

Coefficient	Valeur	Unité
$\tilde{\sigma}$	$\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{U}) + (1 - \Phi)p\mathbf{Id}$	Pa
$\tilde{\rho}_s$	$\tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}}$	kg.m ⁻³
$\tilde{\rho}_{11}$	$\rho_s + \Phi\rho_f(\alpha_\infty - 1) - i\frac{\tilde{b}}{\omega}$	kg.m ⁻³
$\tilde{\rho}_{12}$	$-\Phi\rho_f(\alpha_\infty - 1) + i\frac{\tilde{b}}{\omega}$	kg.m ⁻³
$\tilde{\rho}_{22}$	$\Phi\rho_f\alpha_\infty - i\frac{\tilde{b}}{\omega}$	kg.m ⁻³
\tilde{b}	$\Phi^2\sigma\sqrt{1 + i\frac{4\alpha_\infty^2\eta\rho_f\omega}{\sigma^2\Lambda^2\Phi^2}}$	N.s.m ⁻⁴
$\tilde{\gamma} = C_{\nabla \cdot \mathbf{U}}$	$\Phi\left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{1 - \Phi}{\Phi}\right)$	
$\frac{\Phi^2}{\tilde{R}} = C_p$	$\frac{\Phi\gamma\beta\sqrt{1 + \frac{1}{2\beta}} + \Phi}{\gamma P\left(\beta\sqrt{1 + \frac{1}{2\beta}} + 1\right)}$	
β	$-i\frac{8\eta}{\omega\Lambda'^2 N_{Pr}\rho_f}$	

TABLE 4.2 - Définition des coefficients intervenant dans le modèle de Biot.

Constante	Description	Valeur
ρ_s	Densité du matériau	16 kg.m ⁻³
γ	Rapport des chaleurs spécifiques	1.4
N_{Pr}	Nombre de Prandtl	0.71
P	Pression du milieu	101320 Pa

TABLE 4.3 - Récapitulatifs des constantes physiques utiles.

et

$$\frac{\rho_f}{1 + C_{\nabla.U}} = \frac{1}{\omega^2 C_{\Delta p}} = -\frac{\omega^2 \rho_f^2}{C_U - \omega^2 \rho_s - \omega^2 \rho_f \Phi}. \quad (4.3)$$

Démonstration :

Commençons par expliciter Λ' . D'après le TAB. 4.2, il est clair que

$$\Lambda' = \pm \sqrt{-i \frac{8\eta}{\omega N_{Pr} \rho_f \beta}}.$$

Il reste donc à évaluer β grâce à l'expression du coefficient situé devant la pression : C_p . On obtient que β est solution de l'équation du second degré à coefficient complexes suivante :

$$\beta^2 + \frac{\beta}{2} - A^2 = 0, \quad \text{avec} \quad A = \frac{\Phi - C_p \gamma P}{\gamma C_p P - \gamma \Phi},$$

ce qui donne (4.1).

La relation (4.2) découle directement de l'observation du système (BA). Pour obtenir la relation (4.3), commençons par étudier séparément les coefficients $C_{\nabla.U}$, C_U et $C_{\Delta p}$ en fonction des données du TAB. 4.2. On obtient alors

$$\widetilde{\rho}_{22} = \frac{\Phi^2 \rho_f}{1 + C_{\nabla.U}} = \frac{\Phi^2 \rho_f}{\omega^2 C_{\Delta p}} = -\frac{\omega^2 \rho_f^2 \Phi^2}{C_U - \omega^2 \rho_s - \omega^2 \rho_f \Phi},$$

ce qui donne le résultat. \square

4.3 Comparaison formelle entre les deux modèles

Le système (Macro) défini à la page 93 est plus compliqué que le système proposé par Biot et Allard dans (BA) à cause (notamment) des dérivées croisées venant du terme $\langle \boldsymbol{\sigma}^s \mathbf{y}(\mathbf{u}_1) \rangle$. Pour simplifier les expériences, les calculs empiriques des coefficients de Biot ont été effectués pour une condition de bord unidirectionnelle :

$$\mathbf{h}(x, y, z) = {}^t(h_1(x), 0, 0). \quad (4.4)$$

Etudions quelles sont alors les propriétés de la solution (\mathbf{u}, p) de (Macro). On peut voir formellement que si $\mathbf{h}(x, y, z) = {}^t(h(x), 0, 0)$, alors la solution (\mathbf{u}, p) de $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times H_{\text{moy}}^1(\Omega)$ est telle que

$$\mathbf{u}(x, y, z) = {}^t(u(x), 0, 0) \quad \text{et} \quad p(x, y, z) = p(x).$$

De plus la pression et le déplacement sont reliés par la relation

$$p' = \omega^2 \rho_f (u + h). \quad (4.5)$$

En effet, on commence par montrer que la solution $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ du problème $((\text{F-S})_\varepsilon)$ est telle que

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x, y, z) = {}^t(u_\varepsilon(x), 0, 0) \quad \text{et} \quad p_\varepsilon(x, y, z) = p_\varepsilon(x).$$

Nous avons vu dans les chapitres précédents que pour \mathbf{h} donnée, $((\text{F-S})_\varepsilon)$ admet une unique solution. Notons alors $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ la solution du problème $((\text{F-S})_\varepsilon)$ avec pour second membre \mathbf{h} vérifiant la condition (4.4). Soit alors le couple $(\mathbf{v}_\varepsilon, q_\varepsilon)$ défini par

$$\mathbf{v}_\varepsilon(x, y, z) = {}^t(u_\varepsilon^1(x, y, z), 0, 0) \quad \text{et} \quad q_\varepsilon(x, y, z) = p_\varepsilon(x, y, z).$$

Un rapide calcul montre que $(\mathbf{v}_\varepsilon, q_\varepsilon)$ est encore solution de $((\text{F-S})_\varepsilon)$, ainsi on obtient que $u_\varepsilon^2(x, y, z) = u_\varepsilon^3(x, y, z) = 0$. Pour simplifier, on note u_ε au lieu de u_ε^1 .

Pour montrer que $u_\varepsilon(x, y, z) = u_\varepsilon(x)$ et que $p_\varepsilon(x, y, z) = p_\varepsilon(x)$, il faut tout d'abord montrer que si h est assez régulière, on a en fait $u_\varepsilon \in [H^2(\Omega)]^3$ et p_ε dans $[H^1(\Omega)]^3$. Ensuite, si la solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est assez régulière, considérons le couple $(v_\varepsilon, q_\varepsilon)$, avec

$$\mathbf{v}_\varepsilon(x, y, z) = \partial_y u_\varepsilon \quad \text{et} \quad q_\varepsilon = \partial_y p_\varepsilon(x, y, z).$$

Alors en dérivant $((\text{F-S})_\varepsilon)$ par rapport à la variable y , on trouve que $(v_\varepsilon, q_\varepsilon)$ est solution de $((\text{F-S})_\varepsilon)$ avec second membre nul. Par unicité de la solution, on trouve que \mathbf{v}_ε et q_ε sont nuls, ce qui implique que u_ε et p_ε sont indépendants de la variable y . on fait le même raisonnement pour la variable z pour conclure.

Finalement le problème $((\text{F-S})_\varepsilon)$ est lui aussi uni-directionnel. En testant u_ε contre les fonctions tests $\varepsilon \nabla_y \varphi$ et contre $\varepsilon \nabla_y \varphi$, on voit que la limite double échelle \mathbf{u}_0 ne dépend que de l'abscisse x au niveau macroscopique.

Enfin la relation (4.5) s'obtient en écrivant la deuxième coordonnée de la première équation de (Macro) dans le cas où $u = u(x)$ et $p = p(x)$.

Il est maintenant possible de simplifier le modèle de Biot et (Macro) en les écrivant pour un couple (u, p) uni-directionnel.

Proposition 4.2 (Modèle de Biot-Allard en 1D)

Le modèle de Biot-Allard écrit en 1D s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)\partial_x^2 U + \omega^2 \tilde{\rho}_s U + (|S| + \tilde{\gamma})\partial_x p = 0, \\ \frac{\Phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \partial_x^2 p + \frac{\Phi^2}{\tilde{R}} p = \tilde{\gamma} \partial_x U, \end{cases} \quad (4.6)$$

Proposition 4.3 (Modèle homogénéisé en 1D)

Le modèle (Macro) s'écrit en 1D comme suit :

$$\begin{cases} \alpha \partial_x^2 u + \beta u + \gamma \partial_x p = -\alpha \partial_x^2 h - \beta h, \\ \delta \partial_x^2 p + \eta p + \zeta \partial_x u = (|F| - \zeta) \partial_x h, \end{cases} \quad (4.7)$$

où les coefficients du système sont définis par

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(|S|(2\mu + \lambda)\delta_{i1} - 2\mu M_{11}^{i1} - \lambda \sum_{1 \leq j \leq 3} M_{jj}^{i1} \right)_{1 \leq i \leq 3}, \\ \beta &= (\omega^2 \rho \delta_{i1} - M_f^{i1} (\omega^2 \rho_f)^2)_{1 \leq i \leq 3}, \\ \gamma &= \left(\omega^2 \rho_f M_f^{i1} - |F|\delta_{i1} - \sum_{1 \leq j \leq 3} M_{jj}^{i1} \right)_{1 \leq i \leq 3}, \\ \delta &= \sum_{1 \leq i \leq 3} M_f^{i1}, \\ \eta &= \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \sum_{i=1}^3 \text{Tr} M_{ii}, \\ \zeta &= \left(|F| - \omega^2 \rho_f \sum_{1 \leq i \leq 3} M_f^{i1} + \frac{2\mu}{2\mu + 3\lambda} \text{Tr} M_{11} + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \sum_{1 \leq i \leq 3} \text{Tr} M_{ii} \right),\end{aligned}$$

où $M_{ii} = M_s E_{ii}$ et où M_f^{kl} et M_{ii}^{kl} sont respectivement les coordonnées (k, l) de M_f et de M_{ii} .

Démonstration :

En effet, pour $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = {}^t(u(x), 0, 0)$, on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u', \quad \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda)u' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda u' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda u' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda)u'' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi exprimer $\langle \mathbf{v} \rangle_F$ et ses dérivées :

$$\langle \mathbf{v} \rangle_F = (M_f^{i1}(p' - \omega^2 \rho_f u))_{1 \leq i \leq 3} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_F = \sum_{1 \leq i \leq 3} M_f^{i1} p'' - \omega^2 \rho_f \sum_{1 \leq i \leq 3} M_f^{i1} u'.$$

Et finalement, avec les notations de la proposition,

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S &= -2\mu u' M_{11} - \lambda \sum_{1 \leq j \leq 3} (u' + p) M_{jj}, \\ \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S &= \left(-2\mu u'' M_{11}^{i1} - \lambda \sum_{1 \leq j \leq 3} (u'' + p) M_{jj}^{i1} \right)_{1 \leq i \leq 3}, \\ \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \rangle_S &= -\frac{1}{2\mu + 3\lambda} \left(2\mu \text{Tr}(M_{11})u' + \lambda \sum_{1 \leq j \leq 3} \text{Tr} M_{jj}(u' + p) \right).\end{aligned}$$

En mettant ces résultats bout-à-bout, on trouve facilement le système proposé. \square

Remarque 4.4 (Fréquence critique)

Comme on l'a vu dans la partie théorique, le système (Macro) ne contient pas de fréquence critique contrairement à ce qui est observé avec le modèle de Biot.

Remarque 4.5

Même si le modèle (BA) et le système (Macro) sont très proches en 1D, ils sont différents dans le cadre tri-dimensionnel. En effet, (Macro) est plus riche que (BA) puisqu'il prend en compte les dérivées croisées, au contraire de (BA). D'autre part, la microstructure du domaine est prise en compte dans les deux modèles. Dans le cas de (BA), elle intervient dans le calcul des coefficients de Biot, ce qui pose problème parce que ces coefficients peuvent être difficilement mesurables. L'intérêt industriel est ici de trouver une formulation où la connaissance des coefficients de Biot n'est pas nécessaire. En revanche, dans le système (Macro), la microstructure est prise en compte dans le calcul des matrices d'impédances, plus simple à effectuer, qui interviennent dans les coefficients des équations.

Troisième partie
Résultats numériques

Chapitre 5

Au niveau microscopique

Sommaire

5.1	Introduction	104
5.2	Le problème microscopique fluide	107
5.2.1	Etude des conditions de bord dans Y_1	107
5.2.2	Etude de la matrice d'impédance relative à Y	108
5.2.3	Eléments finis	109
5.2.4	Code <i>Matlab</i>	112
5.2.5	Code <i>C++</i>	115
5.3	Le problème microscopique solide	119
5.3.1	Etude des conditions de bord dans Y_1	119
5.3.2	Tenseur d'impédance solide	120
5.3.3	Eléments finis	122
5.3.4	Code <i>C++</i>	123

L'objectif de cette partie est de décrire les résultats numériques obtenus. Comme on l'a vu dans l'étude théorique, c'est le résultat au niveau macroscopique qui est intéressant d'un point de vue physique. Afin de l'obtenir, nous devons en premier lieu étudier les comportements microscopiques du déplacement et de la pression. Nous étudions donc dans ce chapitre le comportement microscopique de la pression et du déplacement. Nous divisons cette étude en deux parties : une première section s'attarde sur le comportement microscopique sur le domaine fluide F et dans une seconde section nous étudions le comportement microscopique sur le domaine solide S . L'étude du comportement macroscopique fait l'objet d'un autre chapitre.

5.1 Introduction

Au niveau microscopique, nous travaillons sur la cellule de périodicité Y , contenant les domaines fluide F et solide S . Pour l'étude numérique, on utilise l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H 5.1)

La cellule de périodicité Y est symétrique suivant les trois directions \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} . Autrement dit, la cellule tridimensionnelle Y se subdivise en 8 cellules identiques numérotées sur la FIG. 5.1. Nous appelons Y_i la cellule représentant le huitième de Y et représentée dans le cube numéro i , pour $1 \leq i \leq 8$, sur la FIG. 5.1.

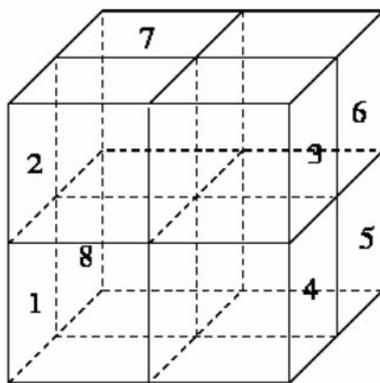


FIGURE 5.1 - Symétries de la cellule Y .

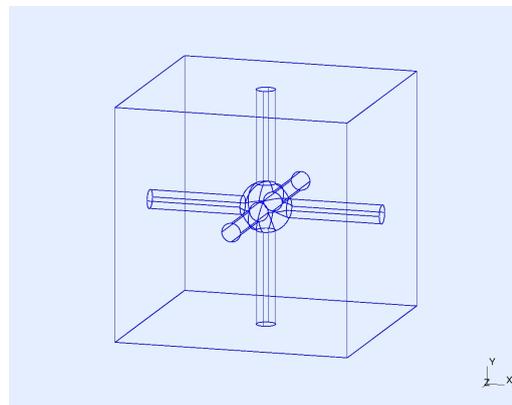


FIGURE 5.2 - Exemple de cellule Y_1 .

Comme on l'a vu dans la partie théorique, pour qu'il y ait unicité de la solution macroscopique du problème homogénéisé, nous recourons à l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H 5.2)

Le domaine solide S est connexe et touche toutes les parois du cube Y .

Nous définissons donc Y_1 , le huitième de cube Y , situé dans la partie sud-ouest et touchant la face de devant de Y . Ce petit cube vérifie l'hypothèse (H 5.2) et est représenté sur la FIG. 5.2.

Enfin, le fait que Y soit la cellule de périodicité implique que sur le bord du cube formé par Y , les conditions de bord utilisées sont des conditions de périodicité. En revanche, sur le bord du cube formé par un huitième de la cellule Y , nous avons des conditions de symétrie qui se traduisent par des conditions de Dirichlet et de Neumann que nous expliciterons dans la suite. Nous devons donc différencier chacun des bords du cube Y_1 par des labels et par des noms. Pour cela, on pourra se référer à la FIG. 5.3 sur laquelle on a noté les faces comme suit :

- la face 1 correspond à la face de derrière,
- la face 2 correspond à la face ouest,
- la face 3 correspond à la face sud,
- la face 4 correspond à la face est,
- la face 5 correspond à la face nord,
- la face 6 correspond à la face de devant.

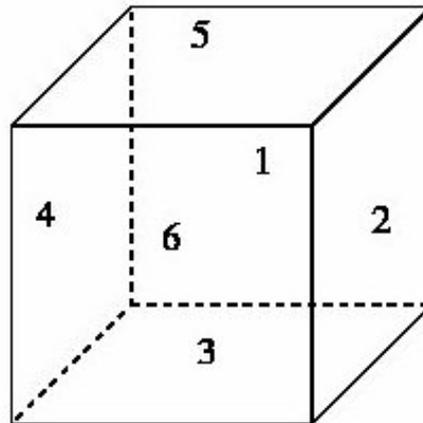


FIGURE 5.3 - Labels proposés pour les faces du cube Y_1 .

Les domaines fluide et solide sont situés dans un cube comportant des conditions de périodicité sur ses bords. Il est donc naturel de différencier les bords de S et de F suivant la condition qu'on leur attribue. En effet, le bord du domaine solide contient des conditions de périodicité et des conditions de Neumann alors que le bord du domaine fluide contient des conditions de périodicité et des conditions de Dirichlet. Dans la suite, nous utilisons donc la notation suivante :

Notation (N 5.1)

On note ∂F_D la partie du bord de F sur laquelle portent les conditions de Dirichlet, et ∂S_N la partie du bord de S sur laquelle portent les conditions de Neumann.

Sur les domaines microscopiques fluide et solide, nous étudions respectivement les problèmes de Stokes et d'élasticité linéaires suivants pour $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega, H_{\text{Dir},\#}^1(F))]^3$

et $p_1 \in L^2(\Omega, L^2_{\#, \text{moy}}(F))$:

$$\begin{cases} \omega^2 \rho_f \mathbf{v} + i\omega\eta \Delta \mathbf{v} - \nabla p_1 = \mathbf{g} & \text{sur } F, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{sur } F, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \partial F_D. \end{cases} \quad (\text{MicroF})$$

où \mathbf{g} est un vecteur constant sur F (fonction qui ne dépend que de la variable macroscopique \mathbf{x}) et

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1)) = 0 & \text{sur } S, \\ \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} = \mathbf{G} \mathbf{n} & \text{sur } \partial S, \end{cases} \quad (\text{MicroS})$$

où

$$\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1) = \mu (\nabla \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla \mathbf{u}_1) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{Id},$$

et où \mathbf{n} représente la normale extérieure au solide et \mathbf{G} est une matrice constante sur S (fonction qui ne dépend que de la variable macroscopique \mathbf{x}).

Nous rappelons aussi que par linéarité des systèmes (MicroF) et (MicroS), il existe une matrice d'impédance fluide M_f et un tenseur d'impédance solide M_s tels que

$$\langle \mathbf{v} \rangle_F = M_f \mathbf{g}, \quad \text{et} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S = M_s \mathbf{G}. \quad (5.1)$$

Remarque 5.1 (Lien entre la limite double échelle du problème rigide et celle du problème couplé)

L'étude du problème rigide, où l'on interdit le déplacement du matériau est intéressante puisqu'elle permet de travailler avec un système simple et non couplé avec le système élastique. On remarque d'ailleurs que la limite double échelle de (V_ε) est le système (MicroF) avec un second membre macroscopique différent de celui de (MicroF). Par conséquent, les matrices d'impédances sont les mêmes pour les deux problèmes.

On énonce enfin la propriété suivante :

Lemme 5.2

Soit f une fonction dérivable en x_0 alors

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(2x_0 - x)}{2(x - x_0)}.$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{1}{2} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

et on utilise la définition de la dérivabilité en x_0 . La deuxième égalité résulte du changement de variable $x = x_0 + h$. \square

5.2 Le problème microscopique fluide

Dans cette section, nous établissons le code utilisé pour résoudre le problème microscopique fluide. Nous commençons par faire l'hypothèse **(H 5.1)** sur la cellule de référence, ce qui nous permet de gérer des conditions de Dirichlet et de Neumann sur le bord plutôt que des conditions de périodicité. Nous étudions ensuite l'influence sur la matrice d'impédance qu'a une telle hypothèse. Nous terminons l'étude en deux parties : le cas 2D qui nous a donné les premières validations et que nous avons codé en *Matlab* en utilisant une boîte à outils éléments finis écrite par F. Alouges et M. Tajchman, et le cas 3D plus réaliste que nous avons codé en *C++* avec la librairie *libMesh*.

5.2.1 Etude des conditions de bord dans Y_1

Nous commençons en effet par symétriser la cellule Y grâce à l'hypothèse **(H 5.1)**. Ceci nous permet d'obtenir des conditions de Dirichlet et de Neumann sur les bords de Y_1 plutôt que de travailler avec des conditions de périodicité sur le bord de Y . En effet, les conditions de périodicité sont plus difficiles à étudier d'un point de vue numérique puisqu'elles obligent à créer un maillage périodique, et à repérer les points du bords reliés entre eux par la condition de périodicité.

Pour comprendre d'où viennent les conditions de Dirichlet et de Neumann que nous devons imposer sur le bord de Y_1 , nous cherchons quelles sont les fonctions \tilde{v} solutions de (MicroF) après les changements de variables induits par les symétries selon les trois axes directeurs. Par exemple considérons que le repère de l'espace est celui proposé sur la FIG. 5.4.

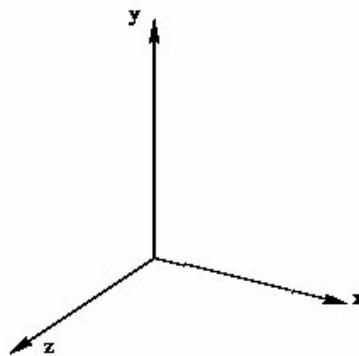


FIGURE 5.4 - Repère utilisé pour l'étude des symétries.

Détaillons comment trouver les conditions de bord de Y_1 . Soient \mathbf{v} et $\tilde{\mathbf{v}}$ les solutions de (MicroF) avec $\mathbf{g} = \mathbf{e}_1$ respectivement dans Y_1 et dans Y_2 , où les Y_i sont représentés sur la FIG. 5.1. On passe du cube Y_1 au cube Y_2 grâce au changement de variable $(x, y, z) \mapsto (x, 1 - y, z)$. Les fonctions

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1(x, 1 - y, z) \\ -\mathbf{v}_2(x, 1 - y, z) \\ \mathbf{v}_3(x, 1 - y, z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{p}(x, y, z) = p(x, 1 - y, z), \quad (5.2)$$

où \mathbf{v}_i est la i -ème coordonnée de \mathbf{v} , $1 \leq i \leq 3$, sont solutions de (MicroF) avec $\mathbf{g} = \mathbf{e}_1$ dans Y_2 . En faisant tendre y vers $1/2$, on trouve que l'ordonnée \mathbf{v}_2 est soumise à une condition de Dirichlet sur le bord nord de Y_1 , alors que l'abscisse \mathbf{v}_1 , la cote \mathbf{v}_3 et la pression p vérifient des conditions de Neumann sur ce bord. En effet, par exemple $\partial \mathbf{v}_1 / \partial \mathbf{n} = 0$ sur le bord nord, où \mathbf{n} est la normale extérieure au bord nord, si $\partial_y \mathbf{v}_1(x, 1/2, z) = 0$. Or le lemme 5.2 nous assure que

$$\partial_y \mathbf{v}_1 \left(x, \frac{1}{2}, z \right) = \lim_{y \rightarrow 1/2} \frac{\mathbf{v}_1(x, 1 - y, z) - \mathbf{v}_1(x, y, z)}{2y - 1},$$

et la condition de bord (5.2) nous permet alors de conclure que \mathbf{v}_1 vérifie une condition de Neumann sur le bord nord.

Pour les conditions sur le bord sud, on fait le changement de variable

$$(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$$

permettant de passer du cube Y_1 au cube Y_2 du cube situé en dessous de Y . On obtient alors que les fonctions

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1(x, -y, z) \\ -\mathbf{v}_2(x, -y, z) \\ \mathbf{v}_3(x, -y, z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{p}(x, y, z) = p(x, -y, z)$$

sont solutions de (MicroF) avec $\mathbf{g} = \mathbf{e}_1$ dans Y_2 . En faisant tendre y vers 0, on comprend que les conditions de bord sont les mêmes sur le bord sud que sur le bord nord. On procède de même pour les bords est et ouest avec les changements de variables respectifs $(x, y, z) \mapsto (1 - x, y, z)$ et $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$ et pour les faces de devant et de derrière, en utilisant les changements de variable $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ et $(x, y, z) \mapsto (x, y, 1 - z)$. On récapitule les conditions de bord relatives aux différents bords et aux différents seconds membres dans le TAB. 5.1 où on a noté D pour condition de Dirichlet et N pour condition de Neumann.

5.2.2 Etude de la matrice d'impédance relative à Y

Dans cette sous-section, nous souhaitons obtenir une expression de la matrice d'impédance M_f sur la cellule de référence Y en fonction de celle calculée sur le huitième de cellule Y_1 . Notons $(\mathbf{v}_j^i)_{1 \leq j \leq 3}$ la solution de (MicroF) sur Y avec second membre \mathbf{e}_i et définissons la matrice d'impédance fluide :

$$M_f = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1^1 \rangle_Y & \langle \mathbf{v}_1^2 \rangle_Y & \langle \mathbf{v}_1^3 \rangle_Y \\ \langle \mathbf{v}_2^1 \rangle_Y & \langle \mathbf{v}_2^2 \rangle_Y & \langle \mathbf{v}_2^3 \rangle_Y \\ \langle \mathbf{v}_3^1 \rangle_Y & \langle \mathbf{v}_3^2 \rangle_Y & \langle \mathbf{v}_3^3 \rangle_Y \end{pmatrix}.$$

Second membre	sud/nord	est/ouest	devant/derrière
$\mathbf{g} = \mathbf{e}_1$	abscisse : N ordonnée : D cote : N pression : N	abscisse : N ordonnée : D cote : D pression : D	abscisse : N ordonnée : N cote : D pression : N
$\mathbf{g} = \mathbf{e}_2$	abscisse : D ordonnée : N cote : D pression : D	abscisse : D ordonnée : N cote : N pression : N	abscisse : N ordonnée : N cote : D pression : N
$\mathbf{g} = \mathbf{e}_3$	abscisse : N ordonnée : D cote : N pression : N	abscisse : D ordonnée : N cote : N pression : N	abscisse : D ordonnée : D cote : N pression : D

TABLE 5.1 - Récapitulatif des conditions de bord pour la cellule Y_1 pour (MicroF).

Pour la calculer, il suffit de connaître la matrice d'impédance sur chaque cube Y_k , $2 \leq k \leq 8$ et de sommer termes à termes les 8 matrices obtenues. On note $(\mathbf{u}_j^i)_{1 \leq j \leq 3}$ le déplacement solution de (MicroF) avec second membre \mathbf{e}_i (l'un des trois vecteurs de base) sur Y_1 et p^i la pression solution du même problème. On établit les solutions sur chacun des cubes Y_k pour $2 \leq k \leq 8$ en fonction de \mathbf{u} . Pour cela on procède comme pour l'étude des symétries, en explicitant le changement de variable relatif aux passages de Y_1 à Y_k , $2 \leq k \leq 8$, et on en déduit les signes des coordonnées de la solution sur Y_k .

Les solutions obtenues dans les Y_k sont récapitulées dans le TAB. 5.2.

Finalement, en additionnant les coordonnées des solutions dans chaque cube Y_k , $1 \leq k \leq 8$, on obtient la valeur de la matrice d'impédance M_f suivante :

$$M_f = \begin{pmatrix} 8\langle \mathbf{u}_1^1 \rangle_Y & 0 & 0 \\ 0 & 8\langle \mathbf{u}_2^2 \rangle_Y & 0 \\ 0 & 0 & 8\langle \mathbf{u}_3^3 \rangle_Y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, lors de l'exécution du code, on résout le problème (MicroF) sur le huitième de cellule Y_1 pour chacun des trois seconds membres, avec les conditions aux bords données dans le TAB. 5.1. Puis on calcule la matrice d'impédance sur Y entier en s'intéressant uniquement aux termes diagonaux fournis par la matrice d'impédance calculée sur Y_1 .

5.2.3 Eléments finis

Ecriture de la formulation variationnelle

Pour qu'il y ait existence et unicité de la solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ au problème discret, il est suffisant que celui-ci vérifie les hypothèses du théorème de Brezzi 2.2 page 36. Or d'après [Alo07], toutes les combinaisons d'espaces d'éléments finis pour la vitesse et la pression ne permettent pas que les solutions \mathbf{u}_h et p_h vérifient la

Cube	Changement de variable	$\mathbf{g} = \mathbf{e}_1$	$\mathbf{g} = \mathbf{e}_2$	$\mathbf{g} = \mathbf{e}_3$
Y_2	$(x, -y, z)$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^1 = \mathbf{u}_1^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^1 = -\mathbf{u}_2^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^1 = \mathbf{u}_3^1$ $\widetilde{p}^1 = p^1$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^2 = -\mathbf{u}_1^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^2 = \mathbf{u}_2^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^2 = -\mathbf{u}_3^2$ $\widetilde{p}^2 = -p^2$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^3 = \mathbf{u}_1^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^3 = -\mathbf{u}_2^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^3 = \mathbf{u}_3^3$ $\widetilde{p}^3 = p^3$
Y_3	$(-x, -y, z)$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^1 = \mathbf{u}_1^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^1 = \mathbf{u}_2^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^1 = -\mathbf{u}_3^1$ $\widetilde{p}^1 = -p^1$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^2 = \mathbf{u}_1^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^2 = \mathbf{u}_2^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^2 = -\mathbf{u}_3^2$ $\widetilde{p}^2 = -p^2$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^3 = -\mathbf{u}_1^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^3 = -\mathbf{u}_2^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^3 = \mathbf{u}_3^3$ $\widetilde{p}^3 = p^3$
Y_4	$(-x, y, z)$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^1 = \mathbf{u}_1^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^1 = -\mathbf{u}_2^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^1 = -\mathbf{u}_3^1$ $\widetilde{p}^1 = -p^1$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^2 = -\mathbf{u}_1^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^2 = \mathbf{u}_2^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^2 = \mathbf{u}_3^2$ $\widetilde{p}^2 = p^2$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^3 = -\mathbf{u}_1^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^3 = \mathbf{u}_2^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^3 = \mathbf{u}_3^3$ $\widetilde{p}^3 = -p^3$
Y_5	$(-x, y, -z)$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^1 = \mathbf{u}_1^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^1 = -\mathbf{u}_2^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^1 = \mathbf{u}_3^1$ $\widetilde{p}^1 = -p^1$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^2 = -\mathbf{u}_1^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^2 = \mathbf{u}_2^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^2 = -\mathbf{u}_3^2$ $\widetilde{p}^2 = p^2$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^3 = \mathbf{u}_1^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^3 = -\mathbf{u}_2^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^3 = \mathbf{u}_3^3$ $\widetilde{p}^3 = -p^3$
Y_6	$(-x, -y, -z)$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^1 = \mathbf{u}_1^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^1 = \mathbf{u}_2^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^1 = \mathbf{u}_3^1$ $\widetilde{p}^1 = -p^1$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^2 = \mathbf{u}_1^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^2 = \mathbf{u}_2^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^2 = \mathbf{u}_3^2$ $\widetilde{p}^2 = -p^2$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^3 = \mathbf{u}_1^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^3 = \mathbf{u}_2^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^3 = \mathbf{u}_3^3$ $\widetilde{p}^3 = -p^3$
Y_7	$(x, -y, -z)$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^1 = \mathbf{u}_1^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^1 = -\mathbf{u}_2^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^1 = -\mathbf{u}_3^1$ $\widetilde{p}^1 = p^1$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^2 = -\mathbf{u}_1^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^2 = \mathbf{u}_2^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^2 = \mathbf{u}_3^2$ $\widetilde{p}^2 = -p^2$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^3 = -\mathbf{u}_1^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^3 = \mathbf{u}_2^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^3 = \mathbf{u}_3^3$ $\widetilde{p}^3 = -p^3$
Y_8	$(x, y, -z)$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^1 = \mathbf{u}_1^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^1 = \mathbf{u}_2^1$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^1 = -\mathbf{u}_3^1$ $\widetilde{p}^1 = p^1$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^2 = \mathbf{u}_1^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^2 = \mathbf{u}_2^2$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^2 = -\mathbf{u}_3^2$ $\widetilde{p}^2 = p^2$	$\widetilde{\mathbf{u}}_1^3 = -\mathbf{u}_1^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_2^3 = -\mathbf{u}_2^3$ $\widetilde{\mathbf{u}}_3^3 = \mathbf{u}_3^3$ $\widetilde{p}^3 = -p^3$

TABLE 5.2 - Solutions $(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{p})$ de (MicroF) dans Y_k , $2 \leq k \leq 8$, exprimées en fonction de $(\mathbf{u}_j^i)_{1 \leq i, j \leq 3}$ et de p^i , $1 \leq i \leq 3$.

condition Inf-sup donnée dans le théorème de Brezzi. Nous choisissons de travailler avec des éléments finis \mathbb{P}_2 pour la vitesse et \mathbb{P}_1 en pression. On veut alors résoudre le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in [X_h]^3 \text{ et } p_h \in M_h \text{ tels que :} \\ - \int_F \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h + \int_F p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h = \int_F \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h & \forall \mathbf{v}_h \in [X_h]^3, \\ - \int_F q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0 & \forall q_h \in M_h, \end{cases}$$

où

$$\mathbf{v}_h = (v_{1,h}, v_{2,h}, v_{3,h}), \quad \text{avec } v_{i,h} \in X_h, \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

et

$$X_h = \left\{ v_{i,h} \in \mathbb{P}_2, v_{i,h}|_{\partial F_D} = 0 \right\} \quad \text{et} \quad M_h = \{ q_h \in \mathbb{P}_1, q_h(x_0) = 0 \},$$

où x_0 est un point de F à fixer.

Remarque 5.3

On obtient bien cette formulation variationnelle puisque les conditions de périodicité et de symétrie annulent tous les termes de bord.

Remarque 5.4 (Réciproquement)

D'autre part, on sait qu'il existe une unique solution au problème (MicroF) (rappelé page 106) d'après le théorème 3.58 énoncé à la page 83. Comme de plus on sait que ce système admet une solution périodique dans le cas particulier du domaine périodique que nous étudions, cette solution est la seule. Par conséquent, la formulation variationnelle que nous étudions admet bien comme unique solution $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in X_h \times M_h$.

Écriture sous forme matricielle

On note $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ les éléments de la base de X_h et $(\psi_i)_{1 \leq i \leq M}$ ceux de la base de M_h . On note $u_{j,i}$ la valeur de u_j en le i -ème point d'intégration pour $1 \leq i \leq M$, en chaque coordonnée j pour $1 \leq j \leq 3$. On obtient ainsi les écritures

$$u_{j,h}(x, y) = \sum_{i=1}^N u_{j,i} \varphi_i(x, y), \quad g_{j,h}(x, y) = \sum_{i=1}^M g_{j,i} \psi_i(x, y) \quad 1 \leq j \leq 3$$

et

$$p_h(x, y) = \sum_{i=1}^M p_i \psi_i(x, y).$$

Finalement, en appelant U_j les vecteurs ${}^t(u_{j,i})_{1 \leq i \leq N}$, $1 \leq j \leq 3$ et P le vecteur ${}^t(p_i)_{1 \leq i \leq M}$, on obtient l'écriture matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & A & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & A & B_3 \\ {}^tB_1 & {}^tB_2 & {}^tB_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$A = \left(-i\omega\eta \int_F \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j + \omega^2\rho_f \int_F \varphi_i\varphi_j \right)_{1 \leq i,j \leq 3},$$

et $B_k = \left(\int_F \partial_k\varphi_i\psi_j \right)_{1 \leq i,j \leq 3}, \quad 1 \leq k \leq 3.$

5.2.4 Code *Matlab*

Le domaine à étudier

Nous commençons la mise en œuvre du code par l'écriture d'un code *Matlab* 2D. Pour cela, nous devons tout d'abord adapter la cellule de référence à étudier en choisissant de travailler sur la cellule Y proposée dans la FIG. 5.5. De même que dans le cas tri-dimensionnel, on cherche à symétriser cette cellule de référence afin de gérer des conditions de Dirichlet et de Neumann sur le bord plutôt que des conditions de périodicité. Nous nous restreignons donc à l'étude du carré proposé sur la FIG. 5.6.

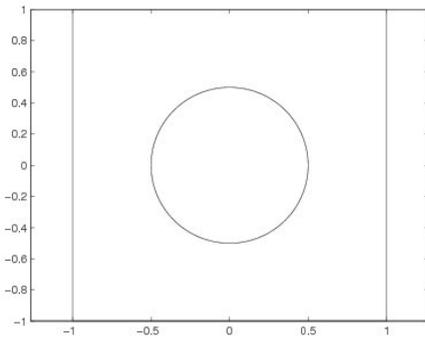


FIGURE 5.5 - Cellule Y permettant d'étudier les périodicités.

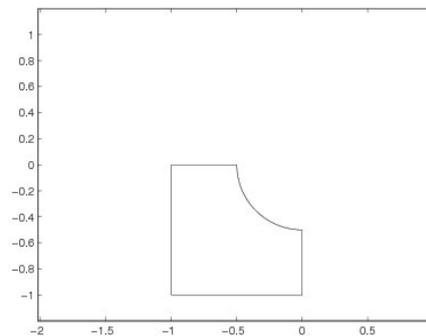


FIGURE 5.6 - Cellule F sur laquelle on trace les solutions.

Remarque 5.5 (Cohérence du domaine étudié)

Il est à noter que dans le cas bi-dimensionnel, il n'est pas possible de respecter l'hypothèse (H 5.2) tout en ayant un fluide connexe (hypothèse nécessaire d'un point de vue physique). Dans la cellule représentée sur la FIG. 5.5, les parties fluide et solide sont bien connexes mais en revanche, le solide ne touche pas tous les bords du domaine Y . Néanmoins, nous avons jugé intéressant de faire nos premiers tests sur ce type de domaine afin de confronter nos résultats avec ceux trouvés par les équipes de Dassault-Aviation et de l'ONERA.

La Toolbox

Le programme va être très simplifié par l'utilisation de la Toolbox éléments finis de F. Alouges et M. Tajchman. En effet, il suffit de définir un maillage pour que la fonction `mef` nous retourne (notamment) les coordonnées des noeuds du maillage, un

tableau faisant correspondre à chaque triangle ses numéros de sommets, et surtout les matrices creuses $(\varphi_j(\tilde{x}_i))_{i,j}$, $(\partial_x \varphi_j(\tilde{x}_i))_{i,j}$, $(\partial_y \varphi_j(\tilde{x}_i))_{i,j}$, où les fonctions φ_i sont les fonctions de base et les points \tilde{x}_i sont les points d'intégration. Cela nous permet d'obtenir en une seule ligne l'écriture de la matrice A par exemple.

Un algorithme modifié du gradient conjugué

L'algorithme classique du gradient conjugué sert à résoudre une équation de type $MU = F$, où M est réelle symétrique et définie positive. La matrice que nous devons inverser pour résoudre (MicroF) vérifie bien ces propriétés mais nous allons adapter l'algorithme afin de prendre en compte les conditions de Dirichlet dans la résolution du système.

Dans notre algorithme du gradient conjugué nous avons pris en compte les conditions aux limites de Dirichlet, ce qui donne ALG. 5.1.

- Initialisation du résidu $r^n = F - MU^0$.
- On repère les lignes de U , et donc de r^n , qui contiennent les valeurs de U en des points situés dans l'ensemble soumis aux conditions de Dirichlet,
- Annulation du résidu r^n sur ces lignes,
- Initialisation du vecteur descente : $p^n = r^n$,
- Tant que le module du résidu est grand :
 - Calcul de Mp^n ,
 - Annulation de Mp^n sur les lignes correspondantes aux conditions de Dirichlet,
 - Itération de U : $U^{n+1} = U^n - \frac{\|r^n\|^2}{(Mp^n, p^n)} p^n$,
 - Itération du résidu : $r^{n+1} = r^n - \frac{\|r^n\|^2}{(Mp^n, p^n)} Mp^n$,
 - Itération du vecteur descente : $p^{n+1} = r^{n+1} + \frac{\|r^{n+1}\|}{\|r^n\|} p^n$.

ALG. 5.1: Gradient conjugué avec prise en compte des conditions de Dirichlet.

Résolution du système final

On veut résoudre le système suivant

$$\begin{cases} A_1 U_1 + B_1 P = G_1, \\ A_2 U_2 + B_2 P = G_2, \\ {}^t B_1 U_1 + {}^t B_2 U_2 = 0. \end{cases}$$

On réécrit alors le système sous la forme

$$\begin{cases} U_1 = A_1^{-1}(F_1 - B_1 P), \\ U_2 = A_2^{-1}(F_2 - B_2 P), \\ \underbrace{({}^t B_1 A_1^{-1} B_1 + {}^t B_2 A_2^{-1} B_2)}_{\tilde{M}} P = \underbrace{{}^t B_1 A_1^{-1} F_1 + {}^t B_2 A_2^{-1} F_2}_{\tilde{F}}. \end{cases}$$

- Calcul du second membre de $\widetilde{M}P = \widetilde{F}$ grâce à l'algorithme du gradient conjugué ALG. 5.1 qui nous permet de calculer $A_1^{-1}F_1$ et $A_2^{-1}F_2$,
- Initialisation du résidu r^n à la valeur du second membre calculé ci-dessus,
- Annulation du résidu à la ligne correspondant au point $(1/2, 1/2)$,
- Initialisation la pression à 0,
- Initialisation du vecteur descente $d^n = r^n$,
- Tant que le module du résidu est grand :
 - Calcul de $\widetilde{M}d^n = {}^tB_1A_1^{-1}B_1d^n + {}^tB_2A_2^{-1}B_2d^n$. On utilise à nouveau le gradient conjugué pour calculer $A_1^{-1}B_1d^n$ et $A_2^{-1}B_2d^n$ en résolvant les deux équations $A_1U_1 = B_1d^n$ et $A_2U_2 = B_2d^n$ avec pour conditions initiales $U_{1,0} = 0$ et $U_{2,0} = 0$,
 - Annulation du vecteur $\widetilde{M}d^n$ sur les lignes correspondantes aux conditions de Dirichlet,
 - Itération de P : $P^{n+1} = P^n - \frac{\|r^n\|^2}{(\widetilde{M}d^n, d^n)}d^n$,
 - Itération du résidu : $r^{n+1} = r^n - \frac{\|r^n\|^2}{(\widetilde{M}d^n, d^n)}\widetilde{m}d^n$,
 - Itération du vecteur descente : $d^n = r^{n+1} + \frac{\|r^{n+1}\|}{\|r^n\|}d^n$.

ALG. 5.2: Gradient conjugué pour la pression adapté à la matrice du système.

Cela revient donc à résoudre une équation $\widetilde{M}P = \widetilde{F}$. Pour cela, on commence par calculer la pression grâce à ALG. 5.2.

On obtient ensuite les vecteurs U_1 et U_2 grâce à l'algorithme du gradient conjugué ALG. 5.1 et aux deux premières équations du nouveau système d'équations.

Résultats

On observe les résultats tracés sur la cellule F représentée sur la FIG. 5.6 à la page 112 sur les FIG. 5.7, 5.8, 5.9 et 5.10.

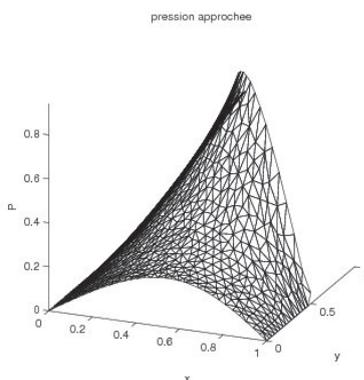


FIGURE 5.7 - Pression pour un second membre vertical.

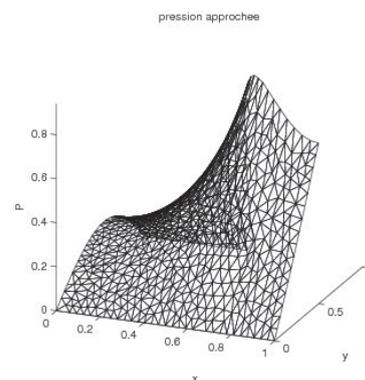


FIGURE 5.8 - Pression pour un second membre horizontal.

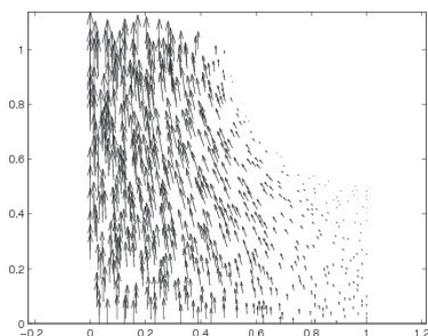


FIGURE 5.9 - Vecteurs déplacement pour un second membre vertical.

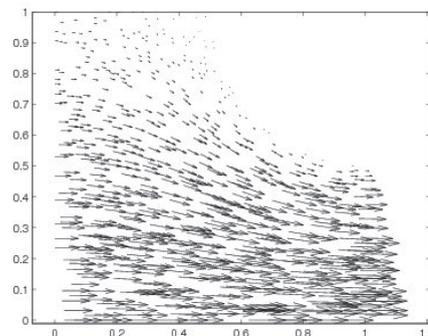


FIGURE 5.10 - Vecteurs déplacement pour un second membre horizontal.

La matrice d'impédance obtenue pour $\omega = 100$ est la suivante :

$$Z_f = 10^{-8} \begin{pmatrix} 32.24 + 539.2i & 0 \\ 0 & 32.24 + 539.2i \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice est proportionnelle à l'identité, ce qui rend bien compte de la symétrie de la cellule de référence.

Remarque 5.6

Les résultats obtenus coïncident avec ceux obtenus par l'ONERA avec le code Cel-Per2.

5.2.5 Code C++

Le travail exposé dans cette section a été réalisé en collaboration avec S. Faure².

Le domaine à étudier

Nous choisissons de travailler sur la cellule de référence Y constituée des 8 cubes représentés dans la FIG. 5.2 à la page 104. Nous souhaitons comparer nos résultats avec ceux obtenus expérimentalement au LAUM (Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine). Nous imposons donc que la forme géométrique constituée par les cylindres reliés entre eux par la sphère centrale et qui représente le volume solide, ne contienne que 1% du volume total du cube.

Nous utilisons le mailleur *gms* afin d'obtenir le maillage de la cellule Y_1 . Les paramètres à définir sont donc le côté du carré $2M$, le rayon r_s de la sphère centrale, le rayon r_c des cylindres et la longueur L de ces cylindres. Ils sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$r_c = \frac{r_s}{2}, \quad M = L + r_s, \quad 2M = 0.5,$$

². Université Paris Sud 11, Orsay

on impose en effet $2M = 0.5$ parce que nous maillons seulement le huitième de cube. En écrivant que le volume du solide correspond à 1% du volume de Y_1 , on obtient

$$\pi r_s^2 \frac{16r_s + 18L}{12} = 0.01 \times 8M^3.$$

On utilise ensuite le fait que $r_s + L = M = 0.25$, pour obtenir une équation de degré trois dont est solution r_s . Comme $0 < r_x < 0.5$, la seule solution possible est $r_s = 0.03281365$ m, cela nous permet d'obtenir la cellule Y_1 représentée (vue de face) sur la FIG. 5.11.

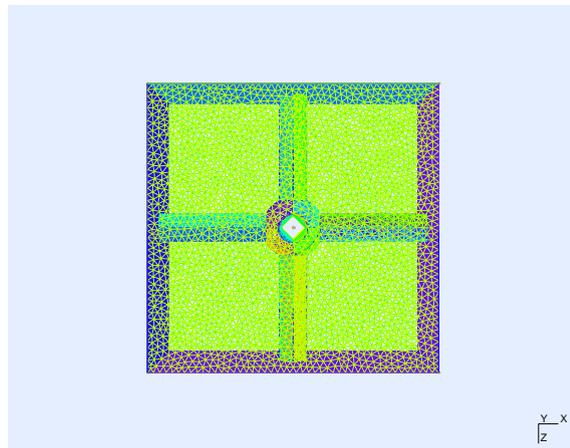


FIGURE 5.11 - Maillage de la partie fluide Y_1 vu de face.

La librairie *libMesh*

Afin de mettre en œuvre un code *C++* qui résout le problème (MicroF) nous utilisons la librairie *libMesh*. Il s'agit d'une librairie éléments finis compatible avec les complexes, disponible librement et possédant une bonne documentation. Cette librairie a été actuellement développée par Dr. Benjamin S. Kirk³, Steffen Petersen⁴, Dr. John W. Peterson⁵, Dr. Roy Stogner⁶ et Derek Gaston⁷. Dans la librairie il existe un exemple dans lequel est résolu le problème de Stokes en deux dimensions et pour le cas réel. Le code que nous avons élaboré est donc un enrichissement de cet exemple puisque nous lui avons apporté les modifications suivantes :

- prise en compte d'un maillage créé avec le mailleur *gms* (la librairie *libMesh* permet de faire des maillages simples mais à notre connaissance, il est plus facile de passer par un mailleur extérieur pour mailler et labéliser un domaine tel que Y_1 qui est représenté sur la FIG. 5.2),
- passage à la dimension 3,

3. NASA Lyndon B. Johnson Space Center

4. Hamburg University of Technology

5. University of Texas at Austin

6. University of Texas at Austin

7. UT-Austin, Sandia Nat'l Lab

- passage au cas complexe,
- écriture de la matrice du système,
- résolution du système : on regarde si la matrice est diagonale ou non, si elle est préconditionnée ou non et on utilise la méthode *GMRES* via *LASPack*,
- écriture de la sortie dans un format lisible par *vtk* (cette partie a été délicate puisque la sortie prévue par la librairie ne prend pas en compte le cas complexe, nous avons dû très légèrement modifier la librairie). Nous visualisons les résultats via le logiciel *ParaView*.

On commence par tester le code sur un maillage équivalent au maillage 2D utilisé pour le code *Matlab*. On obtient les résultats présentés en FIG. 5.12 pour la pression et en FIG. 5.13 pour le déplacement. Ces résultats correspondent à ceux trouvés avec le code *Matlab* : dépression au niveau du solide causé par le fait qu'on empêche le fluide de passer (on impose un déplacement nul à ce niveau) et le fluide s'écoule d'autant mieux qu'il est éloigné du matériau.

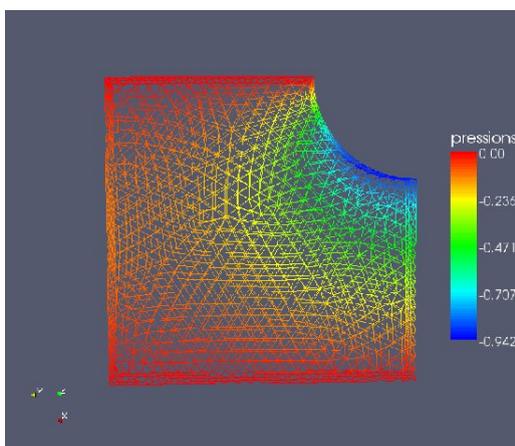


FIGURE 5.12 - Pression pour un second membre vertical.

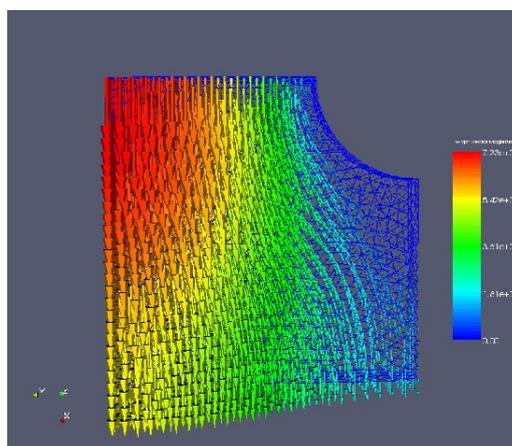


FIGURE 5.13 - Déplacement pour un second membre vertical.

Remarque 5.7 (La pression est donnée à une constante près)

Pour le code C++, nous n'avons pas imposé la valeur de la pression en un point donné. L'échelle de valeurs de la pression est donc indicative mais pas significative.

Les résultats tri-dimensionnels pour un second membre selon la direction \vec{x} et pour une fréquence $\omega = 100$ sont présentés en FIG. 5.14, FIG. 5.15, FIG. 5.16 et FIG. 5.17. Sur la FIG. 5.14, on observe une dépression au niveau de la croix formée par les cylindres représentant le matériau, là où le fluide arrive, et une surpression là où il repart. Cela vient des conditions de bord nulles imposées sur la croix. D'ailleurs au niveau des vecteurs de déplacement représentés sur la FIG. 5.16, on obtient bien que celui-ci est quasi nul au niveau de la fibre de verre.

Enfin nous obtenons la matrice d'impédance suivante :

$$\begin{pmatrix} 0.0528481 + i0.0196472 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0528274 + i0.0196563 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0505321 + i0.021576 \end{pmatrix}.$$

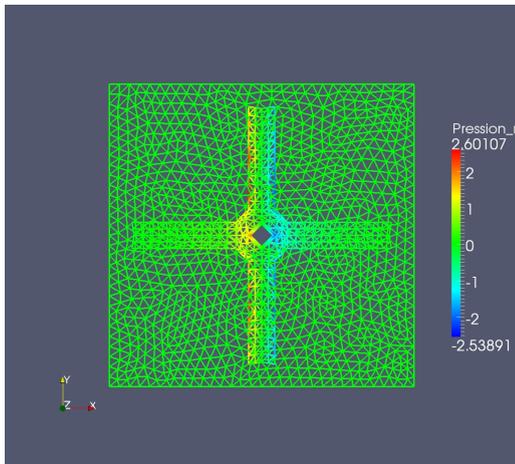


FIGURE 5.14 - Partie réelle de la pression pour un second membre horizontal et pour $\omega = 100$.

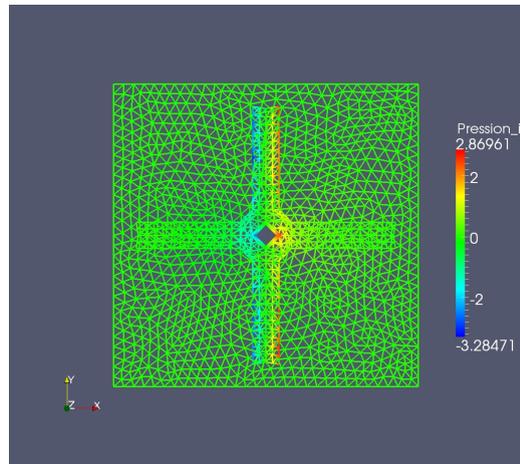


FIGURE 5.15 - Partie complexe de la pression pour un second membre horizontal et pour $\omega = 100$.

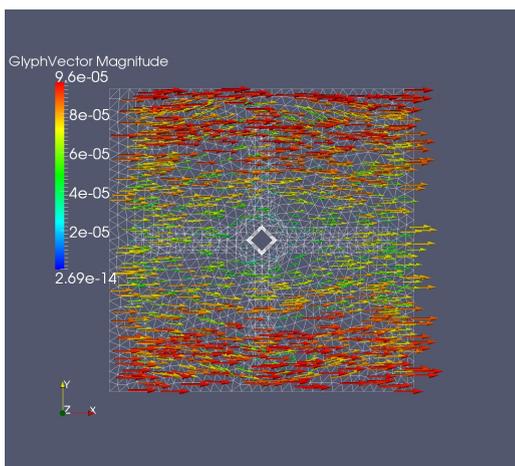


FIGURE 5.16 - Partie réelle du déplacement pour un second membre horizontal et pour $\omega = 100$.

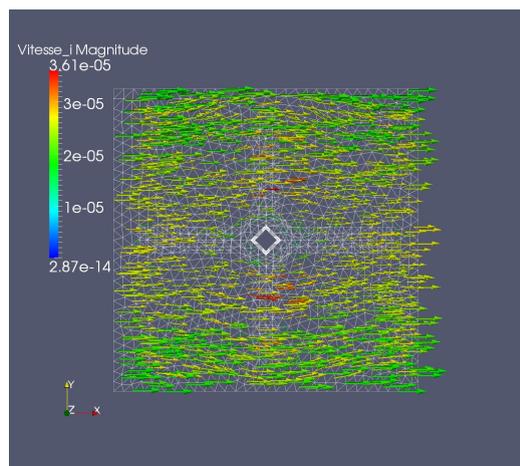


FIGURE 5.17 - Partie complexe du déplacement pour un second membre horizontal et pour $\omega = 100$.

Cette matrice est proportionnelle à l'identité parce que nous avons choisi de faire le calcul sur une cellule Y_1 symétrique.

5.3 Le problème microscopique solide

Dans cette section, nous établissons le code utilisé pour résoudre le problème microscopique solide. Nous commençons par faire l'hypothèse **(H 5.1)** sur la cellule de référence, ce qui nous permet de gérer des conditions de Dirichlet et de Neumann sur le bord plutôt que des conditions de périodicité. Nous étudions ensuite l'influence sur la matrice d'impédance qu'a une telle hypothèse. Nous terminons l'étude par des résultats numériques obtenus *via* un code 3D écrit en *C++* toujours avec la librairie *libMesh*.

5.3.1 Etude des conditions de bord dans Y_1

Nous commençons en effet par symétriser la cellule Y grâce à l'hypothèse **(H 5.1)**. Ceci nous permet d'obtenir des conditions de Dirichlet et de Neumann sur les bords de Y_1 plutôt que de travailler avec des conditions de périodicité sur le bord de Y .

Pour comprendre d'où viennent les conditions de Dirichlet et de Neumann que nous devons imposer sur le bord de Y_1 , nous cherchons quelles sont les fonctions $\widetilde{\mathbf{u}}_1$ solutions de (MicroF) après les changements de variables induits par les symétries selon les trois axes directeurs pour le repère proposé dans la FIG. 5.4.

Détaillons comment trouver les conditions de bords de Y_1 . Soient \mathbf{u}_1 et $\widetilde{\mathbf{u}}_1$ les solutions de (MicroS) avec $\mathbf{G} = E_{11}$ respectivement dans Y_1 et dans Y_2 (à un déplacement solide près), où les Y_i sont représentés sur la FIG. 5.1. On passe du cube Y_1 au cube Y_2 grâce au changement de variable $(x, y, z) \mapsto (x, 1 - y, z)$. Les fonctions

$$\widetilde{\mathbf{u}}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^1(x, 1 - y, z) \\ -\mathbf{u}_1^2(x, 1 - y, z) \\ \mathbf{u}_1^3(x, 1 - y, z) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

où \mathbf{u}_1^i est la i -ème coordonnée de \mathbf{u}_1 , $1 \leq i \leq 3$, sont solutions de (MicroF) avec $\mathbf{G} = E_{11}$ dans Y_2 . Pour les mêmes raisons que dans le cas fluide, en faisant tendre y vers $1/2$, on trouve que l'ordonnée \mathbf{u}_1^2 est soumise à une condition de Dirichlet sur le bord nord de Y_1 , alors que l'abscisse \mathbf{u}_1^1 et la cote \mathbf{u}_1^3 vérifient des conditions de Neumann sur ce bord.

Remarque 5.8 (Seconds membres à étudier)

Il est à noter que par linéarité de (MicroS), il suffit d'étudier les éléments de base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Le nombre de seconds membres à tester peut encore être réduit si on remarque que les seuls seconds membres qui nous intéressent sont les matrices symétriques. En effet, on souhaite in fine tester la matrice d'impédance contre la matrice symétrique $\mathbf{G}(\mathbf{u}) + P\mathbf{Id}$. Dans l'étude qui suit, les seuls seconds membres qui nous intéressent sont donc les matrices normalisées suivantes : E_{11} , $(E_{12} + E_{21})/2$, $(E_{13} + E_{31})/2$, E_{22} , $(E_{23} + E_{32})/2$ et E_{33} .

On peut ainsi obtenir le TAB. 5.3 qui récapitule les conditions de bord relatives aux différents bords et aux différents seconds membres. Pour simplifier la lecture du tableau, on note D pour condition de Dirichlet et N pour condition de Neumann.

Second membre	sud/nord	est/ouest	devant/derrière
$\mathbf{G} = E_{11}$	abscisse : N ordonnée : D cote : N	abscisse : D ordonnée : N cote : N	abscisse : N ordonnée : N cote : D
$\mathbf{G} = (E_{12} + E_{21})/2$	abscisse : D ordonnée : N cote : D	abscisse : N ordonnée : D cote : D	abscisse : N ordonnée : N cote : D
$\mathbf{G} = (E_{13} + E_{31})/2$	abscisse : N ordonnée : D cote : N	abscisse : N ordonnée : D cote : D	abscisse : D ordonnée : D cote : N
$\mathbf{G} = E_{22}$	abscisse : N ordonnée : D cote : N	abscisse : D ordonnée : N cote : N	abscisse : N ordonnée : N cote : D
$\mathbf{G} = (E_{23} + E_{32})/2$	abscisse : D ordonnée : N cote : D	abscisse : D ordonnée : N cote : N	abscisse : D ordonnée : D cote : N
$\mathbf{G} = E_{33}$	abscisse : N ordonnée : D cote : N	abscisse : D ordonnée : N cote : N	abscisse : N ordonnée : N cote : D

TABLE 5.3 - Récapitulatif des conditions de bord relatives à la cellule Y_1 pour l'étude de (MicroS).

5.3.2 Tenseur d'impédance solide

Dans cette sous-section, nous souhaitons obtenir une expression du tenseur d'impédance M_s sur la cellule de référence Y en fonction de celui calculé sur le huitième de cellule Y_1 . Notons $(\langle \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1)^{i,j} \rangle_{Y_1})_{1 \leq i,j \leq 3} = (M_s E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ les matrices que nous recherchons pour déterminer M_s . Comme dans la partie fluide, nous établissons les matrices que nous obtenons sur chaque domaine Y_k , $1 \leq k \leq 8$ en fonction des éléments de la matrice $(\langle \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1)^{i,j} \rangle_{Y_1})_{1 \leq i,j \leq 3}$. Pour cela, on procède comme dans la section précédente en établissant le vecteur $\widetilde{\mathbf{u}}_1$ solution de (MicroS) sur chacun des cubes Y_k , pour les seconds membres matrices de la base de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$. Les matrices définissant le tenseur d'impédance sur Y tout entier sont les sommes des matrices définissant le tenseur d'impédance sur chaque Y_k , $1 \leq k \leq 8$. Nous récapitulons les solutions de (MicroS) pour les différents seconds membres dans le TAB. 5.4 en notant $\sigma_{k,l}^{i,j}$ les coordonnées de la matrice $(\langle \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_1)^{i,j} \rangle_{Y_1})_{1 \leq i,j \leq 3}$. D'autre part, il y a seulement deux résultats possibles par cubes : une matrice et son opposée. Nous améliorons donc la lisibilité du tableau en donnant cette matrice de référence pour chaque cube et en notant pour chaque second membre un signe + si la matrice donnée par le calcul est la matrice de référence et un signe - s'il s'agit de son opposé.

Cube	Matrice de référence	E_{11}	$\frac{E_{12}+E_{21}}{2}$	$\frac{E_{13}+E_{31}}{2}$	E_{22}	$\frac{E_{23}+E_{32}}{2}$	E_{33}
Y_2	$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{ij} & -\sigma_{12}^{ij} & \sigma_{13}^{ij} \\ -\sigma_{12}^{ij} & \sigma_{22}^{ij} & -\sigma_{23}^{ij} \\ \sigma_{31}^{ij} & -\sigma_{32}^{ij} & \sigma_{33}^{ij} \end{pmatrix}$	+	-	+	+	-	+
Y_3	$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{ij} & \sigma_{12}^{ij} & -\sigma_{13}^{ij} \\ \sigma_{12}^{ij} & \sigma_{22}^{ij} & -\sigma_{23}^{ij} \\ -\sigma_{31}^{ij} & -\sigma_{32}^{ij} & \sigma_{33}^{ij} \end{pmatrix}$	+	+	-	+	-	+
Y_4	$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{ij} & -\sigma_{12}^{ij} & -\sigma_{13}^{ij} \\ -\sigma_{12}^{ij} & \sigma_{22}^{ij} & \sigma_{23}^{ij} \\ -\sigma_{31}^{ij} & \sigma_{32}^{ij} & \sigma_{33}^{ij} \end{pmatrix}$	+	-	-	+	+	+
Y_5	$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{ij} & -\sigma_{12}^{ij} & \sigma_{13}^{ij} \\ -\sigma_{12}^{ij} & \sigma_{22}^{ij} & -\sigma_{23}^{ij} \\ \sigma_{31}^{ij} & -\sigma_{32}^{ij} & \sigma_{33}^{ij} \end{pmatrix}$	+	-	+	+	-	+
Y_6	$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{ij} & \sigma_{12}^{ij} & \sigma_{13}^{ij} \\ \sigma_{12}^{ij} & \sigma_{22}^{ij} & \sigma_{23}^{ij} \\ \sigma_{31}^{ij} & \sigma_{32}^{ij} & \sigma_{33}^{ij} \end{pmatrix}$	+	+	+	+	+	+
Y_7	$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{ij} & -\sigma_{12}^{ij} & -\sigma_{13}^{ij} \\ -\sigma_{12}^{ij} & \sigma_{22}^{ij} & \sigma_{23}^{ij} \\ -\sigma_{31}^{ij} & \sigma_{32}^{ij} & \sigma_{33}^{ij} \end{pmatrix}$	+	-	-	+	+	+
Y_8	$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{ij} & \sigma_{12}^{ij} & -\sigma_{13}^{ij} \\ \sigma_{12}^{ij} & \sigma_{22}^{ij} & -\sigma_{23}^{ij} \\ -\sigma_{31}^{ij} & -\sigma_{32}^{ij} & \sigma_{33}^{ij} \end{pmatrix}$	+	+	-	+	-	+

TABLE 5.4 - Solutions (MicroS) dans Y_k , $2 \leq k \leq 8$, exprimées en fonction de $(\langle \sigma^s(\mathbf{u}_1)^{i,j} \rangle_{Y_1})_{1 \leq j \leq 3}$.

Finalement, en additionnant les coordonnées des solutions dans chacun des cubes Y_k , $1 \leq k \leq 8$, on obtient les valeurs suivantes pour les matrices données par le tenseur d'impédance M_s :

$$\begin{aligned} M_s E_{11} &= \begin{pmatrix} 8\sigma_{11}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 8\sigma_{22}^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 8\sigma_{33}^{11} \end{pmatrix}, & M_s E_{22} &= \begin{pmatrix} 8\sigma_{11}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 8\sigma_{22}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 8\sigma_{33}^{22} \end{pmatrix}, \\ M_s E_{33} &= \begin{pmatrix} 8\sigma_{11}^{33} & 0 & 0 \\ 0 & 8\sigma_{22}^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 8\sigma_{33}^{33} \end{pmatrix}, & M_s E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 8\sigma_{12}^{12} & 0 \\ 8\sigma_{12}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_s E_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8\sigma_{13}^{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 8\sigma_{13}^{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{et } M_s E_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8\sigma_{23}^{23} \\ 0 & 8\sigma_{23}^{23} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, lors de l'exécution du code, on résout le problème (MicroF) sur le huitième de cellule Y_1 pour chacun des six seconds membres, avec les conditions aux bords données dans le TAB. 5.3. Puis on calcule la matrice d'impédance sur Y entier en s'intéressant uniquement aux termes diagonaux fournis par la matrice d'impédance calculée sur Y_1 .

5.3.3 Éléments finis

Écriture de la formulation variationnelle

On travaille en éléments finis \mathbb{P}_2 pour le déplacement microscopique sur le solide afin de travailler avec un déplacement de même régularité que dans le cas fluide.

En intégrant par parties deux fois, on obtient le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u}_h \in [\mathbb{P}_2]^3 \text{ tel que :} \\ &\mu \int_S (\nabla \mathbf{u}_h + {}^t \nabla \mathbf{u}_h) : \nabla \mathbf{v}_h = \int_S \mathbf{G} : \nabla \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in [\mathbb{P}_2]^3. \end{aligned}$$

Écriture sous forme matricielle

On note $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ les éléments de la base de X_h et $u_{j,i}$ la valeur de u_j en le i -ème point d'intégration et de même pour les autres fonctions. On obtient ainsi l'écriture

$$u_{j,h}(x, y) = \sum_{i=1}^N u_{j,i} \varphi_i(x, y), \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Finalement, en appelant U_j les vecteurs ${}^t(u_{j,i})_{1 \leq i \leq N}$, $1 \leq j \leq 3$, on obtient l'écriture matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \mu A + (\lambda + \mu) B_{11} & \mu B_{12} + \lambda B_{21} & \mu B_{13} + \lambda B_{31} \\ \mu B_{21} + \lambda B_{12} & \mu A + (\lambda + \mu) B_{22} & \mu B_{31} + \lambda B_{13} \\ \mu B_{31} + \lambda B_{13} & \mu B_{32} + \lambda B_{23} & \mu A + (\lambda + \mu) B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix},$$

avec

$$A = \left(- \int_S \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \right)_{i,j}, \quad B_{ij} = \left(\int_S \partial_j \varphi_m \partial_i \varphi_l \right)_{1 \leq m, l \leq 3}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

et

$$G_i = \left(\sum_{1 \leq j \leq 3} \mathbf{G}_{ij} \int_S \partial_i \varphi_m \varphi_l \right)_{1 \leq m, l \leq 3}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

5.3.4 Code C++

Le travail exposé dans cette section a été réalisé en collaboration avec S. Faure⁸.

Le domaine à étudier

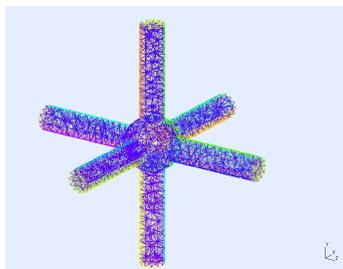


FIGURE 5.18 - Maillage de la partie solide de Y_1 vu de face.

Nous choisissons de travailler sur la cellule de référence Y constituée des 8 cubes représentés dans la FIG. 5.2 à la page 104. De même que pour le maillage fluide, nous utilisons le mailleur *gmsh* et nous contraignons les paramètres du domaine afin d'obtenir le volume souhaité. On obtient le maillage représenté vu de face sur la FIG. 5.18.

La librairie *libMesh*

On utilise à nouveau la librairie *libMesh* et on lit le résultat *via* le logiciel *ParaView*.

Les résultats tridimensionnels pour un second membre égal à la matrice E_{11} sont présentés en FIG. 5.19 pour les vecteurs déplacement et en FIG. 5.20 pour un grossissement (de 10^5) de la déformation. Pour un second membre qui touche deux directions comme la matrice E_{12} , on obtient les résultats présentés en FIG. 5.21 pour les vecteurs déplacement et en FIG. 5.22 pour un grossissement (de 10^3) de la déformation. Les résultats obtenus pour le tenseur d'impédance solide sont notés dans le TAB. 5.5. Les résultats obtenus semblent cohérents parce que pour les matrices $M_s E_{ii}$, la contribution la plus forte est portée par la coordonnée (i, i) et est

8. Université Paris Sud 11, Orsay

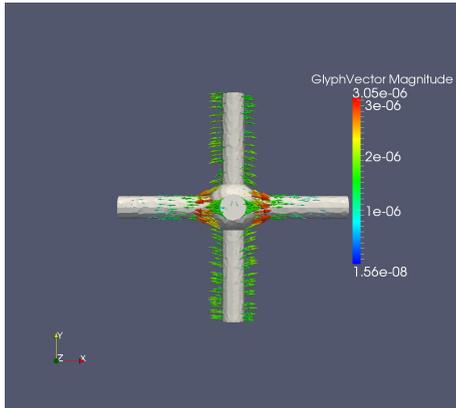


FIGURE 5.19 - Déplacement pour le second membre $\mathbf{G} = E_{11}$.

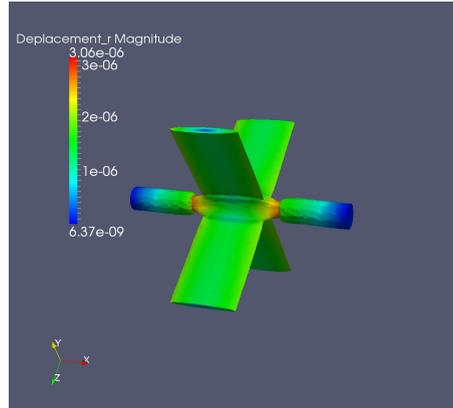


FIGURE 5.20 - Grossissement de la déformation pour $\mathbf{G} = E_{11}$.

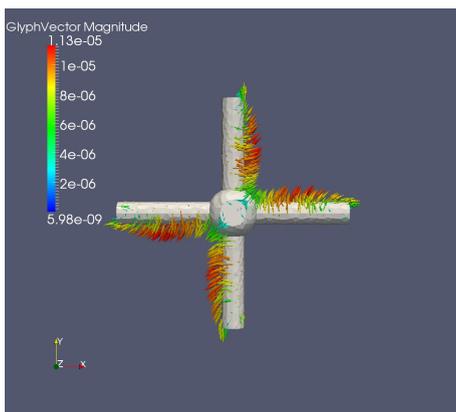


FIGURE 5.21 - Déplacement pour le second membre $\mathbf{G} = (E_{12} + E_{21})/2$.

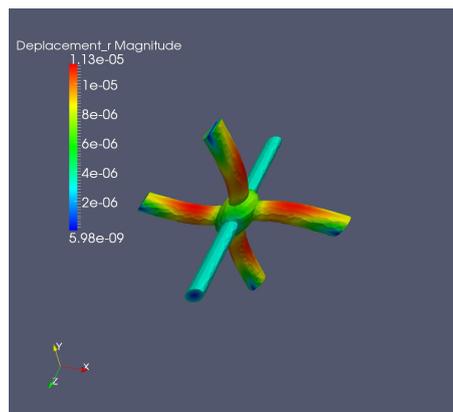


FIGURE 5.22 - Grossissement de la déformation pour $\mathbf{G} = (E_{12} + E_{21})/2$.

sensiblement la même pour tout $1 \leq i \leq 3$ à cause de la symétrie de la cellule (les cylindres sont de même dimension et coupent tous le cube par le centre d'une face. De même les contributions des autres coordonnées de $M_s E_{ii}$ et des coordonnées des $M_s E_{ij}$, $1 \leq i \neq j \leq 3$ se retrouvent par symétrie.

Matrice	Résultat obtenu numériquement
$M_s E_{11}$	$\begin{pmatrix} 0.986148 & 0 & 0 \\ 0 & 0.209556 & 0 \\ 0 & 0 & 0.209616 \end{pmatrix}$
$M_s E_{12}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.755646 & 0 \\ 0.755646 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$M_s E_{13}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.75561 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.75561 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$M_s E_{22}$	$\begin{pmatrix} 0.209435 & 0 & 0 \\ 0 & 0.985958 & 0 \\ 0 & 0 & 0.209499 \end{pmatrix}$
$M_s E_{23}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.755633 \\ 0 & 0.755633 & 0 \end{pmatrix}$
$M_s E_{33}$	$\begin{pmatrix} 0.209377 & 0 & 0 \\ 0 & 0.209383 & 0 \\ 0 & 0 & 0.985725 \end{pmatrix}$

TABLE 5.5 - Description du tenseur d'impédance solide obtenu numériquement.

Chapitre 6

Au niveau macroscopique

Sommaire

6.1	Introduction	128
6.2	Code <i>Matlab</i> 2D	128
6.2.1	Formulation variationnelle	129
6.2.2	Ecriture sous forme matricielle	129

6.1 Introduction

L'objectif de cette partie est de montrer que le modèle homogénéisé que nous avons exhibé en (Macro) est représentatif. Pour cela, nous testons ce modèle dans un cas déjà connu de manière empirique : la laine de verre. Nous calculons le déplacement et la pression macroscopique donnés par le modèle pour en déduire l'impédance acoustique. Nous nous plaçons dans un cas très simplifié afin de disposer de données obtenues empiriquement par Dassault.

Le système d'équations macroscopiques que nous étudions est le suivant :

$$\begin{cases} \omega^2 \rho (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \omega^2 \rho_f \langle \mathbf{v} \rangle_F + \nabla \cdot \left(|S| \boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \left\langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1) \right\rangle_S \right) - |F| \nabla p = 0, \\ |F| \nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_F - \langle \nabla_y \cdot \mathbf{u}_1 \rangle_S = 0, \end{cases} \quad (\text{Macro})$$

où $\rho = \rho_s |S| + \rho_f |F|$.

Nous avons vu dans la partie théorique que ce problème admet une solution mais qu'elle n'est unique que lorsque la cellule de référence est constituée de milieux fluide et solide tous deux connexes et tels que le solide vérifie l'hypothèse **(H 5.2)**. On peut alors chercher à résoudre le problème (Macro) de manière numérique. Pour cela, nous devons tout d'abord résoudre les problèmes (MicroF) et (MicroS) et calculer les matrice et tenseur d'impédance qui découlent de ces problèmes pour utiliser les propriétés

$$\langle \mathbf{v} \rangle_F = M_f (\nabla p - \omega^2 \rho_f (\mathbf{u} + \mathbf{h})), \quad \text{et} \quad \left\langle \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1) \right\rangle_S = M_s (-\boldsymbol{\sigma}_x^s(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - p \mathbf{Id}). \quad (6.1)$$

Il est alors possible de reformuler (Macro) en fonction de M_f et de M_s et de façon à obtenir un système de deux équations (l'une vectorielle et l'autre scalaire) en les deux inconnues macroscopiques $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{h}$ et p . Ce système devient alors

$$\begin{cases} Z_1 (\mathbf{u} + \mathbf{h}) + Z_2 \nabla p + \nabla \cdot (Z_3 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \nabla \cdot (Z_4 p \mathbf{Id}) = 0, \\ -\nabla \cdot (Z_2 (\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \nabla \cdot (M_f \nabla p) + \text{Tr} (Z_5 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \text{Tr} (Z_5 p \mathbf{Id}) = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

avec

$$\begin{aligned} Z_1 &= \omega^2 \rho \mathbf{Id} - (\omega^2 \rho_f)^2 M_f, & Z_2 &= \omega^2 \rho_f M_f - |F| \mathbf{Id}, \\ Z_3 &= |S| \mathbf{Id} - M_s, & Z_4 &= -M_s \quad \text{et} \quad Z_5 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} M_s. \end{aligned}$$

6.2 Code *Matlab* 2D

Pour résoudre le problème macroscopique (Macro), nous devons utiliser les résultats des codes résolvant les systèmes (MicroF) et (MicroS) afin de connaître les valeurs des coefficients des matrices d'impédances. Pour cela, nous déterminons le tenseur d'impédance solide et les matrices d'impédance fluide pour chaque valeur de la fréquence que nous souhaitons tester et nous l'écrivons dans un fichier *Matlab*. Ces fichiers sont ensuite lus par le code macroscopique *Matlab* qui résout le problème (Macro) en deux dimensions. On choisit de travailler en éléments finis \mathbb{P}_2 pour le déplacement et \mathbb{P}_1 pour la pression.

6.2.1 Formulation variationnelle

On écrit la formulation variationnelle de (Macro) pour l'inconnue u plutôt que pour l'inconnue $U = u + h$. On obtient alors le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in X_h \text{ et } p_h \in M_h \text{ tels que } : \forall (v_h, q_h) \in [X_h]^3 \times M_h \\ \int_{\Omega} (Z_1 \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (Z_2 \nabla p_h) \cdot \mathbf{v}_h - \int_{\Omega} (Z_3 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_h)) : \nabla \mathbf{v}_h \\ \quad + \int_{\Omega} \nabla \cdot (Z_4 p_h \mathbf{Id}) \cdot \mathbf{v}_h = - \int_{\Omega} (Z_1 \mathbf{h}_h) \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (Z_3 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{h}_h)) : \nabla \mathbf{v}_h, \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot (Z_2 \mathbf{u}_h) q_h - \int_{\Omega} (M_f \nabla p_h) \cdot \nabla q_h + \int_{\Omega} \text{Tr}(Z_5 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_h)) q_h \\ \quad + \int_{\Omega} \text{Tr}(Z_5 p_h \mathbf{Id}) q_h = \int_{\Omega} \nabla \cdot (Z_2 \mathbf{h}_h) q_h - \int_{\Omega} \text{Tr}(Z_5 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{h}_h)) q_h, \end{array} \right.$$

où

$$X_h = \left\{ v_h \in \mathbb{P}_2, v_{i,h/\partial\Omega_D} = 0 \right\} \quad \text{et} \quad M_h = \left\{ q_h \in \mathbb{P}_1, q_h(x_0) = 0 \right\},$$

où x_0 est un point de Ω à fixer.

6.2.2 Ecriture sous forme matricielle

On note $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ les éléments de la base de X_h et $(\psi_i)_{1 \leq i \leq M}$ les éléments de la base de M_h . Finalement, on résout le problème matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & Q_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & Q_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & Q_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & Q_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où les matrices sont définies pour $1 \leq i \neq j \leq 3$ par

$$\begin{aligned} A_{ii} &= (\omega^2 \rho - (\omega^2 \rho_f)^2 M_f^{ii}) M_u - \lambda \left(1 - \Phi - \sum_{1 \leq j \leq 3} M_{jj}^{ii} \right) S_{ii} \\ &\quad - \mu \sum_{1 \leq j \leq 3} (1 - \Phi - 2M_{ji}^{ji}) S_{jj} - \mu(1 - \Phi) S_{ii}, \\ A_{ij} &= -\lambda(1 - \Phi - M_{ij}^{ij}) S_{ij} - \mu(1 - \Phi - 2M_{ji}^{ji}) S_{ji} \\ Q_i &= ((\omega^2 \rho_f) M_f^{ii} - \Phi) C_i - \sum_{1 \leq j \leq 3} M_{ii}^{jj} D_j, \\ R_i &= (-(\omega^2 \rho_f) M_f^{ii} + \Phi) C'_i + \left(\frac{2\mu}{2\mu + 3\lambda} \text{Tr}(M_{ii}) + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \sum_{1 \leq j \leq 3} \text{Tr}(M_{jj}) \right) D'_i, \\ T &= - \sum_{1 \leq j \leq 3} M_f^{jj} T_{jj} + \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \sum_{1 \leq j \leq 3} \text{Tr}(M_{jj}) M_p, \end{aligned}$$

où les matrices intermédiaires M_u , S_{ij} , C_i , D_i , M_p et T_{ii} pour $1 \leq i, j \leq 3$ sont données par

$$M_u = \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad M_p = \left(\int_{\Omega} \psi_i \psi_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \quad C_i = \left(\int_{\Omega} \varphi_k \partial_i \psi_l \right)_{1 \leq k, l \leq N}$$

et

$$D_i = \left(\int_{\Omega} \psi_k \partial_i \varphi_l \right)_{1 \leq k, l \leq N}, \quad S_{ij} = \left(\int_{\Omega} \partial_i \varphi_k \partial_j \varphi_l \right)_{1 \leq k, l \leq M},$$

$$T_{ii} = \left(\int_{\Omega} \partial_i \psi_k \partial_i \psi_l \right)_{1 \leq k, l \leq M}.$$

Dans les expressions ci-dessus, on a noté M_f^{ij} la coordonnée (i, j) de la matrice d'impédance fluide et M_{kl}^{ij} la coordonnée (i, j) de la matrice $M_s E_{kl}$ où M_s est le tenseur d'impédance solide.

Les résultats du code pour $\mathbf{h} = {}^t(1, 0, 0)$ et $\omega = 1000$ sont visibles sur un domaine rectangulaire de largeur 0.1 m et de longueur 1 m en FIG. 6.1 et en FIG. 6.2 pour le déplacement. En effet, sur FIG. 6.1 sont représentées les parties réelles des vecteurs déplacement, ce qui permet de voir que le déplacement ne dépend que de l'abscisse puisque la conditions de bord \mathbf{h} ne dépend que de l'abscisse. C'est pourquoi nous avons ensuite choisi de représenter la partie réelle de l'abscisse du déplacement en FIG. 6.1. Sur cette figure, où le calcul est effectué pour $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ on observe une couche limite au niveau du bord où le déplacement est imposé. Pour comprendre que cette couche limite n'est pas un effet numérique, nous avons représenté la partie réelle de déplacement calculé pour une fréquence de vibration $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$ en FIG. 6.3 pour la partie réelle et en FIG. 6.4 pour la partie imaginaire. Sur cette figure aussi on observe une couche limite mais elle se crée sur plus de mailles que dans le cas $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$.

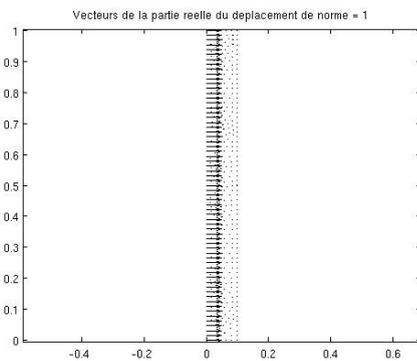


FIGURE 6.1 - Parties réelles des vecteurs déplacement.

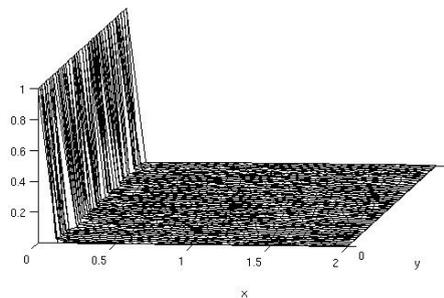


FIGURE 6.2 - Partie réelle du déplacement pour $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$.

Sur FIG. 6.5 et FIG. 6.6 sont respectivement représentées les parties réelle et imaginaire de la pression divisées par 10^5 afin que les résultats soient facilement observables puisque la pression de l'air est de l'ordre de 10^5 Pa . Ces résultats sont aussi obtenus pour une fréquence de $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$. De même que pour le déplacement, on observe que la pression ne dépend que de l'abscisse, ce qui s'explique par le choix du déplacement imposé sur le bord. Nous comparons ces résultats avec ceux obtenus pour une fréquence $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$: partie réelle en FIG. 6.7 et partie imaginaire en FIG. 6.8 (divisées par 100). Pour cette fréquence plus grande, on observe une vibration de la pression.

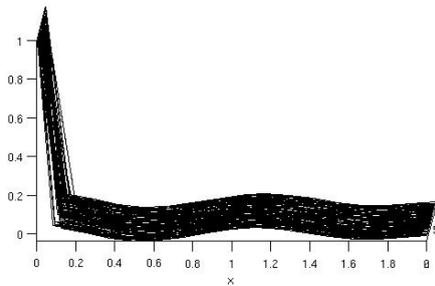


FIGURE 6.3 - Partie réelle du déplacement pour $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$.

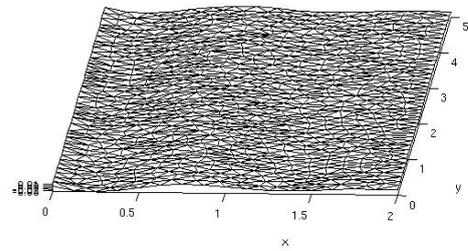


FIGURE 6.4 - Partie imaginaire du déplacement pour $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$.

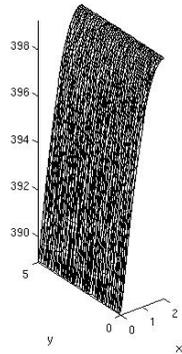


FIGURE 6.5 - Partie réelle de la pression macroscopique pour $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$.
(à une sous-suite près)

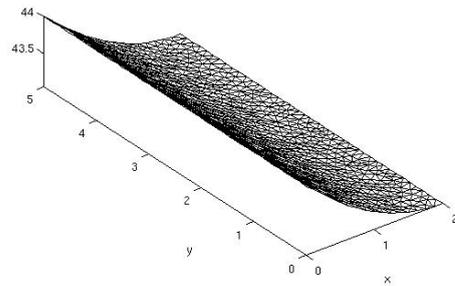


FIGURE 6.6 - Partie imaginaire de la pression macroscopique pour $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$.

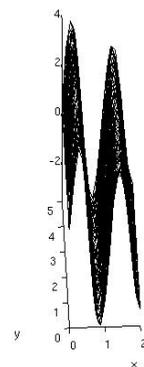


FIGURE 6.7 - Partie réelle de la pression pour $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$.

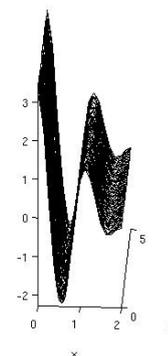


FIGURE 6.8 - Partie imaginaire de la pression pour $\omega = 4980 \text{ s}^{-1}$.

Annexes

Annexe A

Propriétés de p_ε

L'objectif de cette annexe est de caractériser une fonction dont le gradient est périodique, ce qui est le cas de la pression p_ε que nous avons été amenés à manipuler.

L'énoncé de la proposition ci-dessous m'a été suggéré par la lecture de C. Le Bris [Bri05] à la page 60.

Proposition A.1

Soit Λ un pavé de taille $T_1 \times T_2 \times T_3$ et donc la mesure de Lebesgue de Λ vaut $|\Lambda| = T_1 T_2 T_3$. Soit $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\int_\Lambda \nabla p = \mathbf{e}_i$, où \mathbf{e}_i est un vecteur de la base canonique. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- i) La fonction ∇p est \mathbf{T} -périodique.
- ii) Il existe $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathbf{T} -périodique telle que $p(\mathbf{x}) = x_i/|\Lambda| + w(\mathbf{x})$.

Démonstration :

Pour la réciproque, il suffit de remarquer que le gradient de p vaut $\mathbf{e}_i/|\Lambda| + \nabla w$, fonction qui est bien \mathbf{T} -périodique.

L'autre sens correspond à montrer que la fonction $w(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) - x_i/|\Lambda|$ est \mathbf{T} -périodique. Pour cela remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que

$$w(\mathbf{x} + t_j \mathbf{e}_j) - w(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq 3, \quad \forall \mathbf{x} \in \Lambda.$$

Soit donc $1 \leq j \leq 3$. Alors

$$w(\mathbf{x} + t_j \mathbf{e}_j) - w(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x} + t_j \mathbf{e}_j) - p(\mathbf{x}) - \frac{T_j \delta_{i,j}}{|\Lambda|},$$

où $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Or la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$p(\mathbf{x} + t_j \mathbf{e}_j) - p(\mathbf{x}) = \int_{x_j}^{x_j + T_j} \partial_j p(\mathbf{x} + (t - x_j) \mathbf{e}_j) dt.$$

Il faut maintenant faire le lien entre cette intégrale et celle vérifiée par ∇p en hypothèse. En fait la fonction $\partial_j p$ apparaissant dans l'intégrale ne dépend que d'une variable d'espace. Quitte à diviser par des constantes, on peut donc se ramener à une intégrale sur Λ . D'où

$$p(\mathbf{x} + t_j \mathbf{e}_j) - p(\mathbf{x}) = \frac{T_j}{T_1 T_2 T_3} \int_{x_j}^{x_j + T_j} \partial_j p(\mathbf{x} + (t - x_j) \mathbf{e}_j) dt.$$

Ensuite une manière de traduire l'hypothèse $\int_\Lambda \nabla p = \mathbf{e}_i$, consiste à écrire l'égalité $\int_\Lambda \partial_j p = \delta_{i,j}$. Finalement, on obtient

$$w(\mathbf{x} + t_j \mathbf{e}_j) - w(\mathbf{x}) = \frac{T_j}{T_1 T_2 T_3} \delta_{i,j} - \frac{T_j \delta_{i,j}}{|\Lambda|} = 0.$$

Donc la fonction w est périodique. □

Corollaire A.2

Soit Λ un pavé de taille $T_1 \times T_2 \times T_3$ et donc la mesure de Lebesgue de Λ vaut $|\Lambda| = T_1 T_2 T_3$. Soit $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\int_\Lambda \nabla p = C_i \mathbf{e}_i$, où \mathbf{e}_i est un vecteur de la base canonique et C_i une constante. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- i) La fonction ∇p est \mathbf{T} -périodique.
- ii) Il existe $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathbf{T} -périodique telle que

$$p(\mathbf{x}) = \frac{C_i x_i}{|\Lambda|} + w(\mathbf{x}).$$

Démonstration :

On utilise le théorème précédent avec la fonction $q = p/C_i$. □

Corollaire A.3

Soit Λ un pavé de taille $T_1 \times T_2 \times T_3$ et donc la mesure de Lebesgue de Λ vaut $|\Lambda| = T_1 T_2 T_3$. Soit $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\int_\Lambda \nabla p = \sum_{i=1}^3 C_i \mathbf{e}_i$, où \mathbf{e}_i est un vecteur de la base canonique et C_i une constante. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- i) La fonction ∇p est \mathbf{T} -périodique.
- ii) Il existe $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathbf{T} -périodique telle que

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{C_i x_i}{|\Lambda|} + w(\mathbf{x}).$$

Démonstration :

On utilise le corollaire précédent avec $q(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) - C_1 x_1/|\Lambda| - C_2 x_2/|\Lambda|$. □

Remarque A.4

En particulier on a montré que si p est une fonction telle que ∇p est \mathbf{T} -périodique, alors il existe une fonction w , \mathbf{T} -périodique, telle que

$$\nabla p(\mathbf{x}) = \nabla w(\mathbf{x}) + \int_\Lambda \nabla p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Remarque A.5

Dans nos applications de cette propriété à la fonction $p_\varepsilon(\mathbf{x})$, on choisira $\Lambda = F_{\mathbf{k}}^\varepsilon$ et $\mathbf{T} = \varepsilon^t(1, 1, 1)$.

Annexe B

Compléments sur l'étude du problème rigide

Dans cette annexe, nous souhaitons détailler les résultats présentés dans la section 2.2.1. Ces résultats sont classiques dans le cas réel et notre travail a consisté à les adapter au cas complexe.

Hypothèse (H B.1)

L'ouvert \mathcal{O} est connexe, borné, de bord lipschitzien dans \mathbb{R}^3 .

Nous utilisons les notations de D. Braess [Bra01] que nous adaptons au cas complexe. Nous commençons par définir les espaces utilisés dans les notations (NB.1) et (NB.2).

Notation (N B.1)

Les espaces X et M sont deux espaces de Hilbert d'anti-duaux respectifs X' et M' , c'est-à-dire les espaces des formes anti-linéaires continues sur X' et M' . On note respectivement $(\cdot, \cdot)_X$ et $(\cdot, \cdot)_M$ les produits scalaires sur X et M et ${}_{X'}\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et ${}_{M'}\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ sont les produits de dualité (X', X) et (M', M) .

Notation (N B.2)

Le produit scalaire associé à $H^m(\mathcal{O})$ est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m, \mathcal{O}}$ et la norme associée se note $\|\cdot\|_{m, \mathcal{O}}$.

Nous introduisons ensuite les formes qui agissent sur ces espaces avec

Notation (N B.3)

Les formes a et b sont sesquilinéaires continues et définies respectivement sur $X \times X$ et $X \times M$.

Nous avons maintenant les outils pour définir le problème point-selle que nous souhaitons résoudre

Etant donné $(f, g) \in X' \times M'$ trouver $(u, \lambda) \in X \times M$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + \overline{b(v, \lambda)} = {}_{X'}\langle f, v \rangle_X, & \forall v \in X, \\ b(u, \mu) = {}_{M'}\langle g, \mu \rangle_M, & \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Pour résoudre le problème (2.5), il suffit de montrer que l'application associée, et que l'on note \mathcal{L} , est un isomorphisme.

Notation (N B.4)

L'application associée à (2.5) s'écrit

$$\mathcal{L} : \begin{cases} X \times M \longrightarrow X' \times M' \\ (u, \lambda) \longmapsto (\mathcal{F}, \mathcal{G}), \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où les formes linéaires \mathcal{F} et \mathcal{G} sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v) &= a(u, v) + \overline{b(v, \lambda)}, \quad v \in X, \\ \mathcal{G}(\mu) &= b(u, \mu), \quad \mu \in M. \end{aligned}$$

En vue de réécrire le problème point-selle (2.5) sous une forme équivalente mais exprimée avec des opérateurs plutôt qu'avec les formes linéaires continues a et b définies à la notation (N B.3), nous utilisons la notation suivante pour les opérateurs déduits de a et b .

Notation (N B.5)

L'opérateur A associé à la forme sesquilinéaire a est défini par

$$A : X \longrightarrow X'; \quad u \longmapsto \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{C} \\ v \longmapsto {}_{X'}\langle Au, v \rangle_X = a(u, v) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

De la même manière, nous définissons l'opérateur B associé à la forme sesquilinéaire b ainsi que son dual :

$$B : X \longrightarrow M'; \quad u \longmapsto \begin{cases} M \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mu \longmapsto {}_{M'}\langle Bu, \mu \rangle_M = b(u, \mu) \end{cases}, \quad (\text{B.4})$$

$$B' : M \longrightarrow X'; \quad \lambda \longmapsto \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{C} \\ v \longmapsto {}_{X'}\langle B'\lambda, v \rangle_X = b'(\lambda, v) = \overline{b(v, \lambda)} \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

Remarque B.1

Comme a et b sont des formes sesquilinéaires continues, les opérateurs A , B et B' sont continus.

Nous obtenons ainsi la reformulation suivante du problème point-selle (2.5)

$$\begin{aligned} Au + B'\lambda &= f \\ Bu &= g \end{aligned}$$

Nous introduisons ensuite des notations relatives aux espaces étudiés : l'espace affine des fonctions admissibles, l'espace linéaire correspondant, l'espace complémentaire orthogonal et l'ouvert polaire correspondants à un opérateur linéaire borné (ici B).

Notation (N B.6)

Nous définissons l'espace affine des fonctions admissibles $V(g)$ et l'espace linéaire correspondant V par

$$\begin{aligned} V(g) &= \{v \in X, \quad \forall \mu \in M \quad b(v, \mu) = {}_{M'}\langle g, \mu \rangle_M\}, \\ V &= \{v \in X, \quad \forall \mu \in M \quad b(v, \mu) = 0\}. \end{aligned}$$

Soient deux espaces de Banach H_1 et H_2 de duaux respectifs H'_1 et H'_2 et H un sous espace vectoriel de H_1 . On différencie le complémentaire orthogonal de H dans H_1 et l'orthogonal de H par les notations suivantes :

Notation (N B.7)

L'orthogonal de H dans H'_1 s'écrit

$$H^\circ = \{f_1 \in H'_1, {}_{H'_1}\langle f_1, h \rangle_{H_1} = 0, \quad \forall h \in H\},$$

alors que lorsqu'on travaille dans des espaces de Hilbert (qui sont réflexifs), le complémentaire orthogonal de H est l'espace H^\perp défini par

$$H^\perp = \{x_1 \in H_1, (x_1, h)_{H_1} = 0, \quad \forall h \in H\}.$$

Commençons par citer quelques théorème d'algèbre dont on a besoin pour la suite.

Théorème B.2

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $F : H_1 \rightarrow H_2$ une application linéaire bornée. Les assertions i) et ii) sont équivalentes.

- i) *L'image $F(H_1)$ de F est fermée dans H_2 .*
- ii) *$F(H_1) = (\ker F')^\circ$.*

La démonstration de ce théorème est celle proposée par Braess dans [Bra01], il n'y a pas besoin ici d'adapter au cas complexe mais pour plus de lisibilité nous avons choisi de la donner quand même.

Démonstration :

Commençons par remarquer qu'il est suffisant de démontrer que l'adhérence dans H_2 de $F(H_1)$ est égale à l'espace $(\ker F')^\circ$. Par définition de l'opérateur adjoint, nous avons

$$\begin{aligned} \ker F' &= \{f_2 \in H'_2, F'(f_2) = 0\}, \\ &= \{f_2 \in H'_2, \quad \forall x_1 \in H_1 \quad {}_{H'_1}\langle F'(f_2), x_1 \rangle_{H_1} = 0\}, \\ &= \{f_2 \in H'_2, \quad \forall x_1 \in H_1 \quad {}_{H'_2}\langle f_2, F(x_1) \rangle_{H_2} = 0\}. \end{aligned}$$

Dans le cas où l'on travaille avec H_2 hilbertien, on identifie H''_2 à H_2 , ce qui permet d'exprimer ainsi $(\ker F')^\circ$:

$$\begin{aligned} (\ker F')^\circ &= \{x_2 \in H_2, {}_{H'_2}\langle f_2, x_2 \rangle_{H_2} = 0, \quad \forall f_2 \in \ker F'\}, \\ &= \{x_2 \in H_2, {}_{H'_2}\langle f_2, x_2 \rangle_{H_2} = 0, \quad \forall f_2 \in H'_2, \\ &\quad \text{tel que } {}_{H'_2}\langle f_2, F(x_1) \rangle_{H_2} = 0, \quad \forall x_1 \in H_1\}. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Ainsi, l'inclusion $F(H_1) \subset (\ker F')^\circ$ est claire. De plus, comme l'orthogonal $(\ker F')^\circ$ est un sous-espace fermé de H_2 , on obtient la première inclusion.

Montrons l'inclusion réciproque par l'absurde. Soit x_2 un élément de $(\ker F')^\circ$, tel que x_2 ne soit pas dans l'adhérence de $F(H_1)$. Alors la distance entre x_2 et $F(H_1)$ est strictement positive et il existe une sphère centrée en x_2 et disjointe de l'ouvert

convexe $F(H_1)$. Par le théorème de séparation des ouverts convexes, il existe $f_2 \in H'_2$ et un scalaire a tel que

$$\begin{aligned} {}_{H'_2}\langle f_2, x_2 \rangle_{H_2} &> a, \\ {}_{H'_2}\langle f_2, F(x_1) \rangle_{H_2} &\leq a \quad \forall x_1 \in H_1. \end{aligned}$$

Comme F est linéaire, cette propriété n'est vérifiée que si ${}_{H'_2}\langle f_2, F(x_1) \rangle_{H_2} = 0$ pour tout $x_1 \in H_1$, ce qui implique $a > 0$ et en particulier ${}_{H'_2}\langle f_2, x_2 \rangle_{H_2} \neq 0$. Or cette dernière relation contredit (B.6), et donc l'inclusion réciproque de est vraie et nous donne le fait que l'adhérence de $F(H_1)$ est l'espace $(\ker F')^\circ$. \square

Les démonstrations suivantes sont inspirées de ce que l'on peut lire dans [Bra01] mais nous avons ici pris en compte le cas complexe.

Théorème B.3

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.

1. L'application linéaire $F : H_1 \rightarrow H'_2$ est un isomorphisme continu d'inverse continu si et seulement si la forme associée

$$l : \begin{cases} H_1 \times H_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & {}_{H'_2}\langle F(x_1), x_2 \rangle_{H_2}, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

vérifie les conditions suivantes

- i) (Continuité). Il existe $C \geq 0$ tel que

$$|l(x_1, x_2)| \leq C \|x_1\|_{H_1} \|x_2\|_{H_2}, \quad \forall x_1 \in H_1, \forall x_2 \in H_2.$$

- ii) (Condition Inf-sup). Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{\substack{x_2 \in H_2 \\ x_2 \neq 0}} \frac{|l(x_1, x_2)|}{\|x_2\|_{H_2}} \geq \alpha \|x_1\|_{H_1}, \quad \forall x_1 \in H_1.$$

- iii) Pour tout élément x_2 de H_2 , il existe $x_1 \in H_1$ tel que $l(x_1, x_2) \neq 0$.

2. Si on suppose seulement que les hypothèses i) et ii) sont vérifiées, alors

$$F : H_1 \rightarrow \{x_2 \in H_2, l(x_1, x_2) = 0, \quad \forall x_1 \in H_1\}^\circ \subset H'_2$$

est un isomorphisme continu d'inverse continu. De plus, la condition Inf-sup est équivalente à

$$\|F(x_1)\|_{H'_2} \geq \alpha \|x_1\|_{H_1}, \quad \forall x_1 \in H_1. \quad (\text{B.8})$$

Remarque B.4

Le nom de condition Inf-sup vient du fait qu'une formulation équivalente à la condition ii) est

$$\inf_{\substack{x_1 \in H_1 \\ x_1 \neq 0}} \sup_{\substack{x_2 \in H_2 \\ x_2 \neq 0}} \frac{|l(x_1, x_2)|}{\|x_1\|_{H_1} \|x_2\|_{H_2}} \geq \alpha > 0.$$

Démonstration :

Montrons que les propriétés *i*), *ii*) et *iii*) impliquent que F est un isomorphisme continu d'inverse continu.

La propriété *i*) implique immédiatement la continuité.

Montrons maintenant que la condition Inf-sup implique l'injectivité de F . Par linéarité, il suffit de vérifier que si $x_1 \in H_1$ est tel que $F(x_1) = 0$, alors $x_1 = 0$. Soit un tel x_1 , alors par définition de l , pour tout élément x_2 de H_2 , on a l'égalité $l(x_1, x_2) = 0$. En particulier, la propriété $\sup_{x_2 \in H_2} l(x_1, x_2) = 0$ est vérifiée et la condition Inf-sup implique donc que $x_1 = 0$, d'où l'injectivité de F .

Montrons que la condition Inf-sup implique la continuité de F^{-1} . Supposons donc que F est injective et soit f_2 un élément de $F(H_1)$. Il existe donc un unique élément x_1 de H_1 tel que $x_1 = F^{-1}(f_2)$. La condition Inf-sup donne alors la continuité de F^{-1} :

$$\begin{aligned} \alpha \|F^{-1}(f_2)\|_{H_1} = \alpha \|x_1\|_{H_1} &\leq \sup_{\substack{x_2 \in H_2 \\ x_2 \neq 0}} \frac{|l(x_1, x_2)|}{\|x_2\|_{H_2}} = \sup_{\substack{x_2 \in H_2 \\ x_2 \neq 0}} \frac{|{}_{H_2'} \langle f_2, x_2 \rangle_{H_2}|}{\|x_2\|_{H_2}}, \\ &\leq \|f_2\|_{H_2'} = \|F(x_1)\|_{H_2'}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Pour la surjectivité de F , il faut d'abord montrer la deuxième partie du théorème. On remarque tout d'abord que l'égalité (B.9) donne (B.8). On peut conclure en remarquant que les continuités de F et de F^{-1} impliquent que $F(H_1)$ est fermé, et comme H_2 est un Hilbert, il est réflexif ce qui donne la définition suivante de $\ker F'$:

$$\ker F' = \{x_2 \in H_2, l(x_1, x_2) = 0, \quad \forall x_1 \in H_1\},$$

on conclut en utilisant le théorème **B.2**.

Ensuite, l'hypothèse *iii*) montre que $\{x_2 \in H_2, l(x_1, x_2) = 0, \quad \forall x_1 \in H_1\}^\circ$ est l'orthogonal dans H_2' de l'élément nul. Il s'agit donc exactement de H_2' .

La réciproque est plus simple. En effet on obtient facilement *i*) grâce à la continuité de F et à Cauchy-Schwarz. La relation *iii*) s'obtient grâce à l'injectivité de F' . Enfin la condition Inf-sup *ii*) découle de la continuité et de la surjectivité de F^{-1} . En effet, pour tout $x_1 \in H_1$, la surjectivité de F^{-1} assure qu'il existe $f_2 \in H_2'$ tel que $F^{-1}(f_2) = x_1$ et on obtient ainsi $f_2 = F(x_1)$ puisque F est un isomorphisme. D'autre part, la continuité de F^{-1} assure l'existence d'une constante α strictement positive telle que

$$\alpha \|x_1\|_{H_1} = \alpha \|F^{-1}(f_2)\|_{H_1} \leq \|f_2\|_{H_2'} = \|F(x_1)\|_{H_2'},$$

la définition de la norme dans H_2' permet de conclure. □

Lemme B.5

Pour b , B et B' (définies en (2.8), et (2.9)), les assertions *i*), *ii*) et *iii*) sont équivalentes.

i) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\inf_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \sup_{\substack{\mu \in M \\ \mu \neq 0}} \frac{|b(v, \mu)|}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta > 0.$$

- ii) L'opérateur $B : V^\perp \rightarrow M'$ est un isomorphisme et $\|Bv\|_{M'} \geq \beta\|v\|_X$ pour tout élément v de V^\perp .
- iii) L'opérateur $B' : M \rightarrow V^\circ \subset X'$ est un isomorphisme et $\|B'\mu\|_{X'} \geq \beta\|\mu\|_M$ pour tout élément μ de M .

Démonstration :

La propriété $i) \Rightarrow iii)$ vient de la deuxième partie du théorème **B.3** avec $F = B'$ et $f = b$ puisque b est continu par hypothèse et que $b'(\mu, x) = \overline{b(x, \mu)}$, pour tous $x \in X$ et $\mu \in M$.

Pour montrer $iii) \Rightarrow ii)$, on souhaite à nouveau utiliser le théorème **B.3** dont la propriété $i)$ est vraie par hypothèse. Pour montrer que la propriété $ii)$ du théorème **B.3** est vérifiée, on choisit $v \in V^\perp$ quelconque et on souhaite établir la propriété Inf-sup. On considère alors la fonction g de V° définie par $g : w \mapsto {}_{X'}\langle g, w \rangle_X = (v, w)$, cette dernière égalité étant une conséquence du théorème de représentation de Riesz-Fréchet. Comme B' est un isomorphisme, il existe $\lambda \in M$ tel que $B'\lambda = g$ ou encore

$$\overline{b(w, \lambda)} = (v, w), \quad \forall w \in X.$$

Par définition de g , on a $\|g\|_{X'} = \|v\|_X$. D'autre part, par hypothèse, on sait que $\|B'\lambda\|_{X'} \geq \beta\|\lambda\|_M$. On obtient alors $\|v\|_X \geq \beta\|\lambda\|_M$. Enfin, grâce à l'identification de $B'\lambda$ et g , on peut écrire que $\overline{b(v, \lambda)} = (v, v) = \|v\|_X^2$. On trouve donc l'inégalité suivante

$$\sup_{\substack{\mu \in M \\ \mu \neq 0}} \frac{|b(v, \mu)|}{\|\mu\|_M} \geq \frac{|b(v, \lambda)|}{\|\lambda\|_M} = \frac{\|v\|_X^2}{\|\lambda\|_M} \geq \beta\|v\|_X.$$

On a donc montré que $B : V^\perp \rightarrow M'$ satisfait à la condition Inf-sup du théorème **B.3**. D'autre part, la condition $iii)$ de ce même théorème est vérifiée puisque B' est un isomorphisme. La première partie du théorème **B.3** s'applique alors (puisque b est continu par hypothèse) et montre que B est un isomorphisme, l'inégalité annoncée vient de la deuxième partie du théorème.

Enfin montrons $ii) \Rightarrow i)$. Soit μ un élément quelconque de M , sa norme s'écrit

$$\|\mu\|_M = \sup_{\substack{g \in M' \\ g \neq 0}} \frac{{}_{M'}\langle g, \mu \rangle_M}{\|g\|_{M'}}.$$

Pour tout $g \in M'$, on utilise le fait que B est un isomorphisme pour exhiber $v \in V^\perp$ tel que $g = Bv$ ou encore tel que ${}_{M'}\langle g, \mu \rangle_M = {}_{M'}\langle Bv, \mu \rangle_M$ pour tout $\mu \in M$. On peut alors écrire

$$\|\mu\|_M = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{{}_{M'}\langle Bv, \mu \rangle_M}{\|Bv\|_{M'}} = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{|b(v, \mu)|}{\|Bv\|_{M'}}.$$

Enfin grâce à l'inégalité donnée dans l'hypothèse $ii)$, on peut écrire que

$$\|\mu\|_M \leq \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{|b(v, \mu)|}{\beta\|v\|_X},$$

ce qui correspond à la condition Inf-sup donnée dans l'assertion *i*). \square

De même qu'auparavant, nous allons utiliser un théorème classique mais en l'adaptant au cas complexe, c'est pourquoi une démonstration est proposée.

Théorème B.6 (Brezzi)

Pour le problème point-selle (2.5), l'application \mathcal{L} (définie en (2.6)) définit un isomorphisme si les conditions *i*) et *ii*) sont vérifiées

- i*) $\exists \alpha > 0$ tel que $\Re(a(v, v)) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V.$
- ii*) La forme sesquilinéaire b satisfait à la condition Inf-sup donnée dans le théorème **B.3**.

Démonstration :

On suppose que les deux conditions *i*) et *ii*) sont vraies. Commençons par démontrer un résultat plus fort que la surjectivité : non seulement tout $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in X' \times M'$ admet un antécédent $(u, \lambda) \in X \times M$ par L mais de plus u et λ vérifient les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \alpha^{-1} \|\mathcal{F}\|_{X'} + \beta^{-1} \left(1 + \frac{c}{\alpha}\right) \|\mathcal{G}\|_{M'}, \\ \|\lambda\|_M &\leq \beta^{-1} \left(1 + \frac{c}{\alpha}\right) \|\mathcal{F}\|_{X'} + c \left(1 + \frac{c}{\alpha}\right) \|\mathcal{G}\|_{M'}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{G} \in M'$ alors le lemme **B.5** nous assure d'une part qu'il existe $u_0 \in V^\perp$ tel que $Bu_0 = \mathcal{G}$ et d'autre part que $\beta \|u_0\|_X \leq \|Bu_0\|_{M'} = \|\mathcal{G}\|_{M'}$. On obtient alors l'inégalité

$$\|u_0\|_X \leq \beta^{-1} \|\mathcal{G}\|_{M'}. \quad (\text{B.10})$$

Maintenant, en réécrivant le problème point-selle (2.5), défini à la page 35, en posant $w = u - u_0$, on obtient le problème équivalent

$$\begin{aligned} a(w, v) + b(v, \lambda) &= {}_{X'}\langle f, v \rangle_X - a(u_0, v) \quad \forall v \in X, \\ b(w, \mu) &= 0 \quad \forall \mu \in M. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Mais $V = \ker B$ est un espace de Hilbert en tant que sous-espace vectoriel fermé du Hilbert X (n'oublions pas que B est une application linéaire continue). De plus a est sesquilinéaire et la forme linéaire $v \mapsto {}_{X'}\langle f, v \rangle_X - a(u_0, v)$ est continue (Cauchy-Schwarz et continuité de a). Donc la propriété *i*) et le théorème **B.8** de Lax-Milgram nous assurent de l'existence d'un unique $w \in V$ tel que

$$a(w, v) = {}_{X'}\langle f, v \rangle_X - a(u_0, v) \quad \forall v \in X. \quad (\text{B.12})$$

En considérant la partie réelle de l'inégalité (B.12) avec $v = w$, en utilisant à nouveau la propriété *i*), le théorème de Cauchy-Schwarz, et la continuité de a , on obtient l'inégalité suivante

$$\|w\|_X \leq \alpha^{-1} (\|\mathcal{F}\|_{X'} + c \|u_0\|_X). \quad (\text{B.13})$$

Par conséquent, le nouveau problème point-selle (B.11) est vérifié si on peut trouver un élément λ de M tel que

$$b(v, \lambda) = {}_{X'}\langle f, v \rangle_X - a(u_0 + w, v) \quad \forall v \in X. \quad (\text{B.14})$$

Le second membre de l'équation (B.14) définit une fonction de X' incluse dans V° par (B.12). Grâce à la partie *iii*) du lemme **B.5**, on sait que $B' : M \rightarrow V^\circ$ est un isomorphisme tel que $\|B'\mu\|_{M'} \geq \beta\|\mu\|_M$ pour tous μ éléments de M . Il existe donc $\lambda \in M$ tel que pour tous v de X , la fonction définie par (B.14) puisse s'écrire $b(v, \lambda) = {}_{X'}\langle B'\lambda, v \rangle_X$. En utilisant de plus Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité

$$\|\lambda\|_M \leq \beta^{-1}(\|\mathcal{F}\|_{X'} + c\|u\|_X). \quad (\text{B.15})$$

On obtient les inégalités annoncées en injectant l'inégalité (B.10) dans les inégalités (B.13) et (B.15).

Démontrons maintenant l'injectivité. Soient (u, λ) et (u', λ') deux solutions au problème point-selle (2.5). On obtient alors le problème suivant

$$\begin{aligned} a(u - u', v) + b(v, \lambda - \lambda') &= 0 & \forall v \in X, \\ b(u - u', \mu) &= 0 & \forall \mu \in M. \end{aligned}$$

En choisissant $v = u - u'$ et $\mu = \lambda - \lambda'$ et en utilisant les deux équations, on obtient $a(u - u', u - u') = 0$. La V -ellipticité de a impose $u = u'$ puisque $u - u' \in V$. D'autre part, la démonstration de la surjectivité montre que $B'(\lambda - \lambda')$ est un élément de V° . Cela impose donc $\sup_{v \in V} |b(v, \lambda - \lambda')| = 0$. La condition Inf-sup du lemme **B.5** permet alors de conclure que $\|\lambda - \lambda'\|_M = 0$.

Enfin la continuité vient des inégalités obtenues dans la démonstration de la surjectivité. \square

Remarque B.7

A priori, Braess dans [Bra01] montre une réciproque à ce théorème dans le cas réel. Cependant, il doit falloir des hypothèses supplémentaires sur a pour obtenir la réciproque dans le cas complexe. D'ailleurs, Girault dans [GR79] ne montre pas de réciproque à ce théorème dans le cas complexe.

Enfin, rappelons ici le théorème de Lax-Milgram (voir par exemple [All05]), nous citons et démontrons le théorème puisque nous l'avons adapté au cas complexe par rapport à sa version originale.

Théorème B.8 (Lax-Milgram)

Soient H un espace de Hilbert complexe, $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $H \times H$, et L une forme linéaire continue sur H . On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|a(v, v)| \geq \alpha\|v\|_V^2, \quad \forall v \in H, \quad (\text{B.16})$$

ou tel que

$$\Re(a(v, v)) \geq \alpha\|v\|_V^2, \quad \forall v \in H. \quad (\text{B.17})$$

Alors le problème suivant

$$\text{Trouver } u \text{ tel que } \forall v \in H, a(u, v) = L(v) \quad (\text{B.18})$$

admet une unique solution.

Démonstration :

La démonstration se fait en deux étapes, on commence en effet par reformuler le problème sous la forme

$$\text{Montrer qu'il existe un unique } u \in H \text{ tel que } Au = f,$$

où A et f sont respectivement un opérateur $H \times H \rightarrow H'$ et une fonction de H obtenus grâce au théorème de Riesz. La démonstration se termine en établissant la bijectivité de A .

On commence par remarquer que L et $v \mapsto a(u, v)$ sont linéaires continues et on utilise deux fois le théorème de représentation de Riesz. On obtient ainsi l'existence d'une unique fonction $f \in H'$ et d'un unique élément A_u de H' tels que

$$L(v) = {}_{V'}\langle f, v \rangle_V \quad \text{et} \quad a(u, v) = (A_u, v)_V.$$

On vérifie ensuite que l'opérateur $A : u \mapsto \overline{A_u}$, où $\overline{A_u} \in H'$ est défini par

$$\overline{A_u} : v \mapsto \overline{{}_{V'}\langle A_u, v \rangle_V} = \overline{a(u, v)},$$

est un endomorphisme linéaire continu sur H . Dans le problème (2.12), nous cherchons donc à montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $Au = f$. Cela revient à montrer que A est à la fois injectif et surjectif.

Par la propriété de coercivité de a donnée en (2.10), et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq |a(v, v)| = |\langle A_v, v \rangle| \leq \|Av\|_{H'} \|v\|_V, \quad \forall v \in H, \quad (\text{B.19})$$

si on a la propriété (2.10) et dans le cas où on a l'égalité (2.11) cela fonctionne pareillement puisque $\Re(a(v, v)) \leq |a(v, v)|$. Ce qui montre que A est injectif.

Notons I l'image de A dans H' et soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de I , on note par la suite $y_n = Au_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après (B.19), on obtient alors que

$$\alpha \|u_n - u_p\|_V \leq \|Au_n\|_{H'} \|u_n - u_p\|_V, \quad \forall n < p \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet H , elle converge donc vers $u \in H$. De plus, par continuité de A , Au_n converge vers Au . On obtient ainsi que I est un sous-espace fermé de H' . Le théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé affirme alors que $H' = I \oplus I^\perp$. Pour montrer que $I^\perp = \emptyset$, choisissons $w \in I^\perp$ et montrons qu'il s'agit de l'élément nul. Par définition, ${}_{V'}\langle Aw, w \rangle_V = {}_{V'}\langle A_w, w \rangle_V = 0$. Donc l'inégalité (B.19) donne $w = 0$. D'où A surjectif.

Finalement A est injectif et surjectif, il est donc bijectif. Cela montre l'existence et l'unicité de la solution au problème (2.12). \square

Nous finissons cette section par des propriétés sur les normes.

Définition B.9 (Normes négatives)

Soit $m \geq 1$. Etant donné $u \in L^2(\mathcal{O})$, on définit la norme du dual $H^{-m}(\mathcal{O})$ de $H_0^m(\mathcal{O})$ par :

$$\|u\|_{-m, \mathcal{O}} = \sup_{v \in H_0^m(\mathcal{O})} \frac{(u, v)_{0, \mathcal{O}}}{\|v\|_{m, \mathcal{O}}}.$$

Remarque B.10

Cette définition, peut s'étendre au cas $\mathbf{u} \in [L^2(\mathcal{O})]^3$.

Théorème B.11

Soit \mathcal{O} un ouvert vérifiant l'hypothèse **(HB.1)**, alors

1. L'image de l'application linéaire

$$\nabla : L^2(\mathcal{O}) \longrightarrow [H^{-1}(\mathcal{O})]^3$$

est un fermé de $[H^{-1}(\mathcal{O})]^3$.

2. Il existe une constante $c = c(\mathcal{O})$ telle que

$$\|p\|_{0,\mathcal{O}} \leq c(\|\nabla p\|_{-1,\mathcal{O}} + \|p\|_{-1,\mathcal{O}}) \quad \forall p \in L^2(\mathcal{O}), \quad (\text{B.20})$$

$$\|p\|_{0,\mathcal{O}} \leq c\|\nabla p\|_{-1,\mathcal{O}} \quad \forall p \in L^2_{\text{moy}}(\mathcal{O}). \quad (\text{B.21})$$

Remarque B.12

En particulier, la constante $c(\mathcal{O})$ est strictement positive.

Pour démontrer le théorème **B.11**, on pourra se référer par exemple à G. Duvaut et J. L. Lions dans [DL76].

Bibliographie

- [AA09] J. F. Allard and N. Atalla. *Propagation of Sound in Porous Media, Modelling Sound Absorbing Materials*. Wiley, 2009.
- [ACPDMP92] E. Acerbi, V. Chiadò Piat, G. Dal Maso, and D. Percivale. An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains. *Nonlinear Anal.*, 18(5) :481–496, 1992.
- [AGMR08] A. Ávila, G. Griso, B. Miara, and E. Rohan. Multiscale modeling of elastic waves : theoretical justification and numerical simulation of band gap. *Multiscale Model. Simul.*, 7(1) :1–21, 2008.
- [All89a] G. Allaire. Homogénéisation des équations de Stokes dans un domaine perforé de petits trous répartis périodiquement. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309(I) :741–746, 1989.
- [All89b] G. Allaire. *Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes*. PhD thesis, Paris 6, 1989.
- [All91a] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113 :209–259, 1991.
- [All91b] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes II. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113 :261–298, 1991.
- [All91c] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations with a slip boundary condition. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLIV :605–641, 1991.
- [All92] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. MATH. ANAL.*, 23 :1482–1518, November 1992.
- [All05] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Editions de l’Ecole Polytechnique, 2005.
- [All07] G. Allaire. *Conception optimale de structures*, volume 58 of *Collection Mathématiques et Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [Alo07] F. Alouges. Méthodes des éléments finis pour les écoulements stationnaires. Cours de M2, 2007.
- [Aur02] J. L. Auriault. Filtration law for power-law fluids in anisotropic porous media. *International Journal of Engineering Science*, 40 :1151–1163, 2002.

- [BF04] Guy Bouchitte and Didier Felbacq. Homogenization near resonances and artificial magnetism from dielectrics. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 339 :377â382, 2004.
- [BF06] F. Boyer and P. Fabrie. *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques & Applications*. Springer, 2006.
- [BLP78] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [Bra01] D. Braess. *Finite elements. Theory, fast solver, and applications in solid mechanics*. Cambridge, University Press, 2001.
- [Bre99] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [Bri05] C. Le Bris. *Système multi-échelle, modélisation et simulation*. Springer, 2005.
- [CFGM01] Th. Clopeau, J.L. Ferrín, R.P. Gilbert, and A. Mikelić. Homogenizing the acoustic properties of the seabed, part II. *Mathematical and Computer Modelling*, 33 :821–841, 2001.
- [Chi09] G. Chiavassa. *Développements et applications de méthodes numériques pour des problèmes à caractère hyperbolique*. Habilitation à diriger des recherches, Ecole Centrale de Marseille, 2009.
- [Das95] S. Dasser. Méthode de pénalisation pour l'homogénéisation d'un problème de couplage fluide-structure. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 320(I) :759–764, 1995.
- [Das96] S. Dasser. *Homogénéisation d'un problème de couplage fluide-structure par pénalisation*. Thèse, U.F.R. des Sciences et Technologies de l'Université de Franche-Comté, 1996.
- [DL76] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1976.
- [EP95] I. A. Ene and J. Saint Jean Paulin. Homogénéisation et convergence double échelle pour un écoulement de Stokes dans un milieu poreux élastique de faible épaisseur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 321(II b) :221–216, 1995.
- [FM03] J. L. Ferrín and A. Mikelić. Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluid. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 26(10) :831–859, 2003.
- [FMP98] A. Fasano, A. Mikelić, and M. Primicerio. Homogenization of flow through porous media with permeable grains. *Advanced in Mathematical Sciences ans Applications*, 8(1) :1–31, 1998.
- [GM00] R. P. Gilbert and A. Mikelić. Homogenizing the acoustic properties of the seabed, part I. *Nonlinear Analysis*, 40 :185–212, 2000.
- [GR79] V. Girault and P-A. Raviart. *Finite Elements Approximation of the Navier-Stokes equation*. BE, Springer, 1979.

- [Gru] I. Gruais. Homogénéisation et H-mesures, Notes du cours de L. Tartar.
- [HB05] M. F. Ben Hassen and E. Bonnetier. Asymptotic formulas for the voltage potential in a composite medium containing close or touching disks of small diameter. *Multiscale Model. Simul.*, 4(1) :250–277, 2005.
- [Ley01] L. Leylekian. Notions élémentaires d’acoustique des milieux poreux. Département Matériaux et Systèmes Composites, ONERA, Décembre 2001. RTI 1/05691 DMSC.
- [Ley03] L. Leylekian. Design and validation of a object oriented code to compute the acoustical properties of porous media. Département Matériaux et Systèmes Composites, ONERA, January 2003. RT 1/06875 DMSC.
- [LHB04] L. Leylekian, H. Hadji, and F. Boust. Logiciel pour le calcul de la perméabilité et de l’impédance acoustique de milieux poreux. Département Matériaux et Systèmes Composites, ONERA, Décembre 2004. RTI 1/08983 DMSC.
- [LNW02] D. Lukkassen, G. Nguetseng, and P. Wall. Two-scale convergence. *J. of Pure and Appl. Math.*, 2(1) :35–86, 2002.
- [Mei08a] A. M. Meirmanov. Acoustic and filtration properties of a thermoelastic porous medium : Biot’s equations of thermo-poroelasticity. *Electronic Journal of Differential Equations*, 199(3) :45–68, 2008.
- [Mei08b] A. M. Meirmanov. Darcy’s law for a compressible thermofluid. *Asymptotic Analysis*, 58(4) :191–209, 2008.
- [Mei08c] A. M. Meirmanov. Homogenized models for a short-time filtration in elastic porous media. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2008(14) :1–18, 2008.
- [Mer09] B. Merlet. Discussion informelle, 2009.
- [Mik94] A. Mikelić. Mathematical derivation of the darcy-type law with memory effects, governing transient flow through porous media. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 29(49) :57–77, 1994.
- [MS07] A. M. Meirmanov and S. A. Sazhenkov. Generalized solutions to linearized equations of thermoelastic solid and viscous thermofluid. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2007(41) :1–29, Mars 2007.
- [MT03] A. Miranville and R. Temam. *Modélisation mathématique des milieux continus*. Springer, 2003.
- [Ngu82] G. Nguetseng. Espace de distributions sur des ouverts périodiques et applications. Centre de Rocquencourt, INRIA, Novembre 1982.
- [OCY92] A. O. Oleĭnik, A. S. Chamaev, and G. A. Yosifian. *Mathematical problems in elasticity and homogenization*. North-Holland, Amsterdam New-York, 1992.

- [SP80] E. Sanchez-Palencia. *Non homogeneous media and vibration theory*, volume 127 of *Lectures Notes in Physics*. Springer-Verlag, 1980.
- [Tar] L. Tartar. Convergence of the homogenization process. Appendix de [SP80].
- [Tar89] L. Tartar. Nonlocal effects induced by homogenization. *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, II :925–938, 1989.
- [Tem77] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. North-Holland, 1977.
- [Tre07] D. Trentin. EHPOC, Problématique, bruit interne Falcon. Technical report, Dassault Aviation, octobre 2007.
- [Yos02] G. A Yosifian. Some unilateral boundary value problems for elastic bodies with rugged boundaries. *Journal of mathematical sciences*, 108(4) :574–607, 2002.

