



HAL
open science

Transition superfluide et potentiels géométriques dans le gaz de Bose bidimensionnel

Marc Cheneau

► **To cite this version:**

Marc Cheneau. Transition superfluide et potentiels géométriques dans le gaz de Bose bidimensionnel. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT: . tel-00556002

HAL Id: tel-00556002

<https://theses.hal.science/tel-00556002>

Submitted on 14 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie

Spécialité physique quantique

Présentée par

Marc CHENEAU

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'université Pierre et Marie Curie

**Transition superfluide
et potentiels géométriques
dans le gaz de Bose bidimensionnel**

Soutenue le 3 juillet 2009

devant le jury composé de

M. Vincent LORENT Rapporteur
M. Philippe BOUYER Examineur
M. Benoît DOUCOT Examineur
M. Jean DALIBARD Directeur de thèse

Introduction générale

Dans les premières années qui ont suivi la réalisation expérimentale de la condensation de Bose–Einstein (Anderson *et al.*, 1995; Bradley *et al.*, 1995; Davis *et al.*, 1995), la grande majorité des travaux sur les gaz ultra-froids avaient pour but d’explorer leurs propriétés « à un corps ». Lorsqu’ils sont constitués de bosons, ces systèmes constituent en effet la réalisation idéale des modèles de gaz en interaction faible développés dans les années 50 pour donner une assise microscopique à la théorie de la superfluidité (Bogoliubov, 1947). Cette dernière représente la fraction superfluide par un paramètre d’ordre complexe $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \exp(i\phi(\mathbf{r}))$, introduit de manière phénoménologique par Ginzburg et Landau (1950), dont le module au carré ρ représente la densité superfluide et dont la phase ϕ est reliée au champ de vitesse par la relation $\mathbf{v} = (\hbar/M)\nabla\phi$. Dans la théorie du gaz dilué, ce paramètre d’ordre a une interprétation microscopique simple : il s’agit du mode du condensat de Bose–Einstein. Son évolution dynamique est régie par l’équation de Gross–Pitaevskii (Gross, 1961; Pitaevskii, 1961), une équation de Schrödinger non linéaire. Les confirmations expérimentales de la théorie du gaz de Bose dilué sont nombreuses et spectaculaires. Parmi les plus importantes figurent la mise en évidence de la cohérence de phase (Andrews *et al.*, 1997; Bloch *et al.*, 2000), la caractérisation des modes collectifs d’excitation (Pitaevskii et Stringari, 2003; Pethick et Smith, 2008), ou encore la nucléation de vortex et l’observation de leur arrangement en un réseau d’Abrikosov (Matthews *et al.*, 1999; Madison *et al.*, 2000; Abo-Shaeer *et al.*, 2001).

Deux éléments clés ont toutefois réorienté la recherche menée sur les gaz ultra-froids ces dernières années : la possibilité de varier la force et le signe des interactions grâce aux résonances de Feshbach et la possibilité de réduire la dimensionnalité du système en le confinant dans un potentiel optique. La mise en œuvre de ces techniques permet de produire des gaz en interaction forte, dans lesquels les corrélations entre particules sont importantes, une caractéristique jusqu’alors réservée à certains systèmes de matière condensée. Les expérimentateurs sont par exemple en mesure de réaliser précisément le modèle de Hubbard, qui décrit la compétition entre l’interaction de contact et l’effet tunnel dans une assemblée de particules réparties sur les nœuds d’un potentiel périodique, et qui constitue l’un des paradigmes de la physique de la matière condensée. Cette idée, proposée par Jaksch *et al.* (1998), a été mise en œuvre avec un grand succès par Greiner *et al.* (2002), qui ont pu observer la transition de Mott entre un état superfluide et un état isolant. Une autre illustration spectaculaire de l’utilisation des gaz ultra-froids pour sonder des états fortement corrélés est l’exploration de la transition entre un condensat de molécules et un état de type BCS dans les gaz de fermions polarisés (Leggett, 1980; Nozières et Schmitt-Rink, 1985). Les expériences menées sur des gaz ultra-froids ont ainsi four-

nit les premières observations de cette transition (Bartenstein *et al.*, 2004; Bourdel *et al.*, 2004; Regal *et al.*, 2004; Zwierlein *et al.*, 2004; Chin *et al.*, 2004). Elles ont également permis de résoudre des problèmes laissés ouverts par la théorie, comme la question de la superfluidité à la limite unitaire (Zwierlein *et al.*, 2005).

Il existe d'autres points de convergence entre la physique des atomes froids et la physique de la matière condensée. L'un d'entre eux est la possibilité de simuler avec un gaz d'atomes neutres le comportement d'un gaz d'électrons plongés dans un champ magnétique. Que ce soit par rotation du système (voir les revues de Lewenstein *et al.*, 2007; Bloch *et al.*, 2008) ou par couplage entre les degrés de liberté externes et internes des atomes (Dum et Olshanii, 1996; Ho et Shenoy, 1996; Visser et Nienhuis, 1998), il est en effet possible de générer des champs de jauge artificiels, dont l'action sur les atomes est formellement identique à celle d'un champ magnétique sur des particules chargées. Wilkin et Gunn (2000) ont ainsi montré que la physique de l'effet Hall quantique fractionnaire était en principe accessible dans un gaz de Bose dégénéré en rotation rapide. Par rapport à la rotation, le couplage entre degrés de liberté externes et internes, associé à la notion de phase de Berry (Berry, 1984; Simon, 1983), offre une plus grande flexibilité et probablement un meilleur contrôle expérimental. Cette idée a inspiré de nombreuses propositions de réalisation expérimentale (Jaksch et Zoller, 2003; Juzeliūnas *et al.*, 2006; Günter *et al.*, 2009), mais peu d'expériences à ce jour l'ont effectivement mise en pratique (Dutta *et al.*, 1999; Lin *et al.*, 2009b). La génération de champs de jauge non abéliens est également possible et ouvre la voie à l'étude de systèmes originaux (Mueller, 2004; Ruseckas *et al.*, 2005; Osterloh *et al.*, 2005; Goldman *et al.*, 2009).

Le travail de thèse exposé dans le présent manuscrit a été effectué au laboratoire Kastler Brossel, sous la direction de Jean Dalibard, entre septembre 2005 et mai 2009. Il a été consacré pour une part à l'étude expérimentale de la transition entre l'état superfluide et l'état normal du gaz de Bose bidimensionnel, ainsi qu'à l'utilisation des potentiels géométriques dans le but de générer un champ magnétique fictif. Il s'inscrit ainsi pleinement dans le contexte actuel de la recherche sur les gaz ultra-froids. Les expériences sur le gaz bidimensionnel décrites ici ont été réalisées pour l'essentiel au début de mon séjour au laboratoire. Elles ont été menées sur un gaz de rubidium 87 confiné dans un piège magnétique sur lequel était superposé un potentiel optique assurant le confinement dans un plan. Elles nous ont permis d'observer sans ambiguïté la transition BKT, caractérisée par un changement de nature de l'ordre à longue portée présent dans le système et par l'apparition de vortex libres lorsque la température dépasse une certaine valeur critique (Stock *et al.*, 2005; Hadzibabic *et al.*, 2006). La localisation précise du point critique (Krüger *et al.*, 2007) et la confrontation quantitative des données avec un modèle fondé sur l'approximation de densité locale (Hadzibabic *et al.*, 2008) nous ont amenés à cerner l'influence de l'excitation résiduelle du mouvement axial et à clarifier le rôle du potentiel de confinement transverse. De ce dernier point il est notamment ressorti l'idée que la condensation de Bose-Einstein dans un système de taille finie correspond à la limite de la transition BKT lorsque la force des interactions tend vers zéro.

En janvier 2006, nous avons entrepris la construction d'un nouveau montage expérimental, avec pour principal objectif de disposer d'un très bon accès optique aux atomes. Ce montage est opérationnel depuis l'été 2008, le premier condensat ayant été obtenu en février 2008. Nous y produisons des gaz bidimensionnels de rubidium

87 dans un piège mixte, magnétique et optique. Le potentiel optique, qui assure le confinement axial, est réalisé en façonnant par optique de Fourier le profil d'intensité d'un faisceau laser. Cette technique nous offre un contrôle étendu de la géométrie du système, qui peut être constitué soit par un plan, soit par deux plans jumeaux. Elle permet également d'observer le système après différents types d'expansion, à une, deux ou trois dimensions, suivant l'ordre dans lequel les deux pièges sont éteints. Lors de nos premières expériences, nous avons étudié le comportement d'un gaz bi-dimensionnel lorsque celui-ci s'étend librement dans son plan. Une expansion de ce type est fortement influencée par la nature des interactions. Si l'on modélise celles-ci par un potentiel de contact, [Kagan *et al.* \(1996\)](#), puis [Pitaevskii et Rosch \(1997\)](#), ont montré notamment que la dilatation du gaz correspond à une simple homothétie à partir de la situation initiale. Un tel modèle pose en principe des difficultés car les prédictions que l'on en tire sont affectées de divergences ultraviolettes, qui nécessitent l'introduction d'une énergie de coupure. L'observation de la loi d'échelle de [Pitaevskii et Rosch](#) pour nos paramètres expérimentaux nous permet ainsi de valider l'utilisation du modèle du potentiel de contact, dans un régime où les interactions jouent un rôle essentiel. Ceci constitue un résultat important, sur lequel les études à venir pourront s'appuyer.

En parallèle de l'étude de la transition BKT, nous avons porté notre attention sur l'utilisation des potentiels géométriques pour générer un champ magnétique fictif dans notre gaz dégénéré. Le premier objectif consistait à comprendre en termes semi-classiques l'origine de ces potentiels en optique quantique, lorsque l'état magnétique interne des atomes est couplé à leur position par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique. Nous avons pu ainsi mettre en évidence, derrière les forces qui dérivent des potentiels géométriques, les forces radiatives liées aux interactions entre atomes et photons ([Cheneau *et al.*, 2008](#)). Cette connexion est particulièrement intéressante car elle permet d'utiliser l'intuition acquise en optique quantique pour concevoir des schémas de couplage efficaces. Dans un deuxième temps, nous avons cherché à concevoir un schéma de réalisation expérimentale qui soit directement applicable dans notre expérience, c'est-à-dire qui prenne en compte en particulier la structure hyperfine des atomes ([Günter *et al.*, 2009](#)). À partir de ce schéma, nous avons vérifié par des simulations numériques que l'hypothèse de suivi adiabatique de l'état interne sur lequel repose le formalisme des potentiels géométriques est justifiée dans une situation expérimentale typique. Nous avons ensuite vérifié que l'état fondamental d'un condensat de Bose–Einstein dans ce schéma contenait bien un nombre de vortex compatible avec ce que l'on peut attendre par analogie avec la supraconductivité. Les résultats obtenus sont donc particulièrement encourageants et laissent présager une observation expérimentale prochaine ¹.

1. Quelques mois après la soutenance de cette thèse, une équipe du NIST a pour la première fois généré des vortex dans un condensat de Bose–Einstein en couplant le nuage à un potentiel vecteur géométrique selon une méthode similaire à celle proposée dans la troisième partie de ce manuscrit ([Lin *et al.*, 2009a](#)).

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale | i |
| I Le point critique du gaz de Bose bidimensionnel | 1 |
| Introduction | 3 |
| 1 Le gaz de Bose bidimensionnel homogène | 7 |
| 1.1 Rappel sur le gaz idéal | 7 |
| 1.2 Hamiltonien bidimensionnel effectif pour le gaz en interaction | 8 |
| 1.2.1 Dérivation « naïve » | 8 |
| 1.2.2 Régimes de diffusion à deux corps | 9 |
| 1.3 Propriétés de cohérence du gaz bidimensionnel | 10 |
| 1.3.1 Condensation de Bose–Einstein à température nulle | 10 |
| 1.3.2 Quasi-condensat à température finie | 11 |
| 1.3.3 Fluctuations de phase et ordre à longue portée | 12 |
| 1.3.4 Lien avec le modèle XY | 13 |
| 1.4 Transition de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless | 14 |
| 1.4.1 Superfluidité et vortex | 14 |
| 1.4.2 Le point critique | 15 |
| 1.4.3 Région critique | 16 |
| 1.4.4 Effets de taille finie et limite thermodynamique | 16 |
| 2 Transition BKT dans le gaz quasi-bidimensionnel piégé | 19 |
| 2.1 Quels effets attendre du confinement harmonique ? | 19 |
| 2.1.1 Condensation du gaz parfait | 20 |
| 2.1.2 Effet des interactions : vers le système uniforme | 20 |
| 2.2 Observation de la transition BKT | 21 |
| 2.2.1 Description de l’expérience | 21 |
| 2.2.2 Principe des mesures | 22 |
| 2.2.3 Cohérence de phase | 23 |
| 2.2.4 Prolifération de vortex | 26 |
| 2.3 Détermination expérimentale du point critique | 28 |
| 2.3.1 Bimodalité | 28 |
| 2.3.2 Cohérence de phase | 28 |
| 2.3.3 Comparaison avec la condensation dans un gaz idéal | 29 |
| 2.4 Prévisions du modèle de champ moyen | 29 |
| 2.4.1 Modèle purement bidimensionnel | 29 |
| 2.4.2 Excitation thermique résiduelle dans la direction z | 32 |

| | |
|--|------------|
| Conclusion | 35 |
| Publications | 39 |
| Stock <i>et al.</i> , <i>Phys. Rev. Lett.</i> 95 , 190403 (2005) | 39 |
| Hadzibabic <i>et al.</i> , <i>Nature</i> 441 , 1118 (2006) | 44 |
| Hadzibabic <i>et al.</i> , <i>New J. Phys.</i> 10 , 045006 (2008) | 48 |
| | |
| II Nouveau montage expérimental | 71 |
| Introduction | 73 |
| | |
| 3 Vers le condensat de Bose–Einstein | 75 |
| 3.1 Le piège magnéto-optique | 75 |
| 3.2 Le piège magnéto-optique comprimé | 77 |
| 3.3 Le pompage optique | 77 |
| 3.4 Transfert dans le piège magnétique et transport | 78 |
| 3.4.1 Transfert dans le piège magnétique | 78 |
| 3.4.2 Transport | 78 |
| 3.5 Chargement du piège TOP et évaporation | 80 |
| 3.5.1 Principe du piège TOP | 80 |
| 3.5.2 Chargement du piège TOP | 81 |
| 3.5.3 Évaporation dans le piège TOP | 81 |
| | |
| 4 Confinement axial pour la production de gaz bidimensionnels | 85 |
| 4.1 Réalisation d'un plan unique | 85 |
| 4.1.1 Principe | 85 |
| 4.1.2 Faisceau incident | 85 |
| 4.1.3 Masque de phase | 86 |
| 4.1.4 Potentiel de confinement axial | 87 |
| 4.1.5 Quelques chiffres | 88 |
| 4.1.6 Le chargement du piège optique en pratique | 89 |
| 4.2 Réalisation de deux plans | 90 |
| 4.3 Potentiel à fond plat pour le confinement radial | 90 |
| | |
| 5 Premières observations et projets d'expériences | 93 |
| 5.1 Invariance d'échelle dans l'expansion d'un gaz bidimensionnel | 93 |
| 5.1.1 L'invariance d'échelle dans le cadre de l'équation de Gross–Pitaevskii | 93 |
| 5.1.2 Généralisation au problème à N corps | 94 |
| 5.1.3 Confrontation à l'expérience | 95 |
| 5.2 Propositions d'expériences | 96 |
| 5.2.1 Révéler le profil de phase d'un gaz bidimensionnel | 96 |
| 5.2.2 Dynamique de la décohérence | 97 |
| | |
| III Potentiels géométriques en optique quantique | 99 |
| | |
| Introduction | 101 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Phase de Berry et potentiels géométriques | 105 |
| 6.1 | La phase de Berry | 105 |
| 6.1.1 | Approximation adiabatique | 105 |
| 6.1.2 | Origine de la phase de Berry | 106 |
| 6.1.3 | Transformations de jauge | 107 |
| 6.1.4 | Rôle des dégénérescences | 108 |
| 6.2 | Potentiels géométriques | 109 |
| 6.2.1 | Choix de la base de l'espace de Hilbert | 109 |
| 6.2.2 | Recherche des états stationnaires | 110 |
| 6.2.3 | Approximation adiabatique | 111 |
| 6.2.4 | Phase de Berry et vortex | 112 |
| 7 | Exemples de potentiels géométriques | 113 |
| 7.1 | Potentiels géométriques induits par un piège magnétique | 113 |
| 7.1.1 | Piège à symétrie cylindrique | 114 |
| 7.1.2 | Application au piège de Ioffe–Pritchard | 115 |
| 7.1.3 | Effet des potentiels géométriques | 117 |
| 7.2 | Potentiels géométriques induits par un champ laser | 117 |
| 7.2.1 | Définition du système | 117 |
| 7.2.2 | Potentiels géométriques et champ magnétique fictif | 119 |
| 7.2.3 | Effet des potentiels géométriques | 120 |
| 7.A | Calcul des potentiels géométriques dans un piège magnétique | 120 |
| 7.A.1 | Potentiel vecteur | 120 |
| 7.A.2 | Potentiel scalaire | 121 |
| 7.A.3 | Calcul direct du champ magnétique effectif | 122 |
| 8 | Interprétation semi-classique | 125 |
| 8.1 | Origine du potentiel scalaire | 125 |
| 8.1.1 | Fluctuations de la force | 126 |
| 8.1.2 | Énergie cinétique associée au micro-mouvement | 127 |
| 8.2 | Origine de la force de Lorentz | 127 |
| 8.3 | Illustration dans le contexte de l'optique quantique | 129 |
| 8.3.1 | Potentiel scalaire | 130 |
| 8.3.2 | Potentiel vecteur | 131 |
| 9 | Proposition de réalisation expérimentale | 133 |
| 9.1 | Génération d'un champ magnétique effectif | 133 |
| 9.1.1 | Principe de la configuration | 133 |
| 9.1.2 | Restriction à la structure fine | 135 |
| 9.1.3 | Rôle de la structure hyperfine | 138 |
| 9.2 | Nucléation de vortex | 141 |
| 9.2.1 | Équation de Gross-Pitaevskii spinorielle | 141 |
| 9.2.2 | Choix des paramètres | 142 |
| 9.2.3 | État fondamental | 143 |
| 9.2.4 | Passage adiabatique dans l'état avec vortex | 144 |
| | Publications | 147 |
| | Cheneau <i>et al.</i> , <i>EPL</i> 83 , 60001 (2008) | 147 |

| | |
|--|------------|
| Günter <i>et al.</i> , <i>Phys. Rev. A</i> 79 , 011604 (2008) | 154 |
| Conclusion générale et perspectives | 159 |
| Bibliographie | 172 |

Première partie

Le point critique
du gaz de Bose bidimensionnel

Introduction

La dimensionnalité est un paramètre clé qui conditionne l'existence de nombreuses transitions de phase ou détermine leurs propriétés. Ainsi [Peierls](#) a-t-il réalisé dès 1935 qu'il ne peut exister d'ordre cristallin à température finie dans les solides unidimensionnels et bidimensionnels. Dans ces systèmes, la dimensionnalité réduite modifie la densité d'états par rapport au cas tridimensionnel et les modes collectifs de basse énergie sont toujours suffisamment peuplés pour détruire l'ordre à longue portée ([Mermin, 1968](#)). Le même phénomène se produit d'ailleurs dans le modèle de Heisenberg isotrope et le fluide de Bose : à une et deux dimensions, le premier ne connaît pas de transition ferromagnétique ou antiferromagnétique ([Mermin et Wagner, 1966](#)) et la condensation de Bose–Einstein est absente du second ([Reatto et Chester, 1967](#); [Kane et Kadanoff, 1967](#); [Hohenberg, 1967](#)).

L'absence d'ordre à longue portée dans les systèmes évoqués ne signifie par pour autant que ceux-ci n'ont aucune propriété de cohérence : le fluide de Bose par exemple est malgré tout superfluide à suffisamment basse température ([Berezinskii, 1972](#); [Popov, 1972](#)). La perte de superfluidité lorsque la température augmente est associée à une transition de phase, dont les principales propriétés ont été découvertes par [Berezinskii \(1972\)](#) et surtout par [Kosterlitz et Thouless \(1972, 1973\)](#). Son mécanisme microscopique implique un type d'excitation particulier : les vortex. Ceux-ci sont présents dans le système à basse température sous forme de paires neutres qui n'ont que peu d'effet sur les propriétés de cohérence ; au-dessus de la température critique, les paires se brisent et la prolifération des vortex libres détruit la superfluidité.

La transition de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless (BKT) a été observée dès 1978 par [Bishop et Reppy](#) dans des films d'hélium 4 adsorbés sur un substrat oscillant, suspendu à un pendule de torsion : en mesurant la période d'oscillation du pendule, [Bishop et Reppy](#) ont pu observer l'apparition d'une fraction superfluide lorsque la température était abaissée au-dessous d'une certaine température critique. La transition BKT a également été étudiée dans d'autres systèmes, comme des films supraconducteurs ([Minnhagen, 1987](#)), des réseaux bidimensionnels de jonctions Josephson ([Martinoli *et al.*, 1987](#)) ou encore des films d'hydrogène polarisé ([Safonov *et al.*, 1998](#)). Tous ces systèmes ont en commun d'appartenir à la classe d'universalité du modèle XY , qui représente le modèle paradigmatique pour la transition BKT. Bien que de nombreuses propriétés de la transition BKT aient pu être vérifiées ainsi, l'observation directe des vortex impliqués dans son mécanisme microscopique est restée pendant longtemps difficile.

Après la réalisation de la condensation de Bose–Einstein dans les gaz dilués ultra-froids, il était tentant d'utiliser ce nouvel outil pour explorer la transition

BKT. Les techniques expérimentales disponibles avaient en effet permis aussi bien de mesurer les propriétés de cohérence de ces gaz (Andrews *et al.*, 1997; Bloch *et al.*, 2000) que d’observer avec une précision sans précédent les vortex associés à la superfluidité (Matthews *et al.*, 1999; Madison *et al.*, 2000; Abo-Shaeer *et al.*, 2001). Les premiers gaz dégénérés dans une géométrie quasi-bidimensionnelle ont été produits dans le groupe de Wolfgang Ketterle au MIT (Görlitz *et al.*, 2001), dans le groupe de Massimo Inguscio à Florence (Burger *et al.*, 2002), dans le groupe de Rudolph Grimm à Innsbruck (Rychtarik *et al.*, 2004) puis dans le groupe de Christopher J. Foot à Oxford (Smith *et al.*, 2005). Dans ces quatre expériences, la géométrie quasi-bidimensionnelle était réalisée à l’aide d’un potentiel optique, à même d’assurer un fort confinement selon une direction. Il existe également d’autres moyens de produire des gaz ultra-froids bidimensionnels. Une solution prometteuse a été explorée dans le groupe de Vincent Lorent et Hélène Perrin à l’université Paris 13 (Colombe *et al.*, 2004) : le confinement est assuré par le potentiel adiabatique généré par le couplage de l’atome à un champ radiofréquence dans un champ magnétique inhomogène, sur un principe similaire à celui utilisé pour l’évaporation dans un piège magnétique. Dans aucune des expériences citées toutefois la transition BKT n’a été explorée.

Le groupe de Jean Dalibard à l’École normale supérieure a fait du gaz de Bose bidimensionnel son sujet d’étude à partir de 2004. Le système était préparé en chargeant un gaz dégénéré de ^{87}Rb dans un réseau optique unidimensionnel de grand pas. La distribution de phase était ensuite révélée par interférence entre les ondes de matière provenant du petit nombre de plans peuplés (Hadzibabic *et al.*, 2004). C’est ainsi que nous avons pu observer pour la première fois directement l’excitation thermique de vortex libres (Stock *et al.*, 2005).

L’objectif de la présente partie est de mettre en relation quelques propriétés bien connues du gaz de Bose bidimensionnel avec les résultats expérimentaux obtenus dans notre groupe. Le cas du gaz homogène est abordé dans le premier chapitre. Nous y exposons la manière dont les interactions peuvent être prises en compte dans un hamiltonien effectif bidimensionnel. Les propriétés de cohérence du système à basse température sont discutées en détail, avec notamment une dérivation de la forme asymptotique de la fonction de corrélation à un corps. Enfin, la transition BKT est décrite dans les aspects directement pertinents pour comprendre les résultats expérimentaux.

Par rapport aux échantillons de matière condensée, les systèmes étudiés dans les laboratoires de physique atomique sont essentiellement inhomogènes, souvent piégés dans des potentiels harmoniques. Cette différence a des conséquences potentiellement importantes, car elle modifie profondément la densité d’états et réintroduit la condensation de Bose–Einstein, pour le gaz idéal tout du moins. Le second chapitre est consacré à l’étude de ces systèmes piégés, sur la base des observations expérimentales réalisées dans notre groupe (Hadzibabic *et al.*, 2006; Krüger *et al.*, 2007). Nous avons pu tout d’abord mettre en évidence expérimentalement une transition de type BKT dans notre système, en observant simultanément l’apparition de vortex libres et un changement des propriétés de cohérence du système lorsque la température est variée autour d’une valeur critique. L’étude expérimentale précise du point critique et la comparaison des données avec un modèle de champ moyen dans lequel le point critique BKT est introduit dans une approximation de densité

locale confirment que la transition observée correspond bien à la transition BKT.

Définition du système et notations Nous considérons dans cette partie un gaz dilué d'atomes bosoniques indiscernables dans une géométrie quasi-bidimensionnelle. Pour caractériser l'état macroscopique du système, nous utiliserons sa température T , sa surface Ω et, indifféremment, son nombre d'atomes N ou son potentiel chimique μ . Ces grandeurs apparaîtront parfois sous la forme du facteur $\beta = 1/k_B T$, de la densité $n = N/\Omega$ et de la fugacité $Z = \exp(\beta\mu)$. Nous serons également appelés à exprimer certains résultats en fonction de deux longueurs caractéristiques du système : la longueur d'onde thermique $\lambda = \sqrt{\hbar^2/2\pi k_B T M}$ (M désigne la masse des atomes) et la longueur de corrélation (*healing length*) $\xi = \hbar/\sqrt{M\mu}$. Le caractère dilué du gaz se traduit par l'inégalité $n\xi^2 \gg 1$. La dégénérescence du gaz est mesurée par la densité dans l'espace des phases $n\lambda^2$. Par géométrie quasi-bidimensionnelle, nous entendons la chose suivante : le gaz évolue bien entendu dans un espace à trois dimensions mais il est possible de confiner la dynamique externe des atomes à deux dimensions x, y à l'aide d'un potentiel extérieur $V_z(z)$ suffisamment raide. Dans la pratique, nous choisirons ce potentiel harmonique : $V_z(z) = M\omega_z^2 z^2/2$. La condition à remplir pour réaliser le confinement se traduit alors par $k_B T, \mu \ll \hbar\omega_z$.

Chapitre 1

Le gaz de Bose bidimensionnel homogène

L'originalité du gaz de Bose bidimensionnel homogène en interaction tient au fait suivant : la condensation de Bose–Einstein n'y a pas lieu mais il subit néanmoins une transition de phase vers un état superfluide en dessous d'une certaine température critique. À basse température, le système peut être décrit comme un quasi-condensat caractérisé par des fluctuations de densité réduites par rapport au gaz idéal et une phase fluctuant à grande échelle. Ces fluctuations de phase sont responsables de l'absence d'un véritable ordre à longue portée. Un certain ordre subsiste toutefois dans le système, caractérisé par le fait que la fonction de corrélation à un corps tend vers zéro algébriquement, et non exponentiellement. Cet ordre rémanent est suffisant pour que le gaz de Bose bidimensionnel fortement dégénéré soit superfluide. La transition vers l'état superfluide, dite de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless (BKT), est un sujet d'étude en soi. Nous nous contenterons d'en localiser le point critique et d'en décrire qualitativement le mécanisme microscopique. Celui-ci implique des excitations typiques des superfluides, les vortex, qui sont facilement détectables dans les expériences d'atomes froids.

1.1 Rappel sur le gaz idéal

La condensation de Bose–Einstein est définie comme l'accumulation d'une fraction macroscopique des atomes dans l'état fondamental du système, suite à la saturation de la population des états excités. La densité dans les états excités peut être calculée à l'aide de l'intégrale semi-classique

$$n' = \frac{1}{\Omega} \int_0^{+\infty} \frac{\rho(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp(\beta\varepsilon)/Z - 1} ; \quad (1.1)$$

sa valeur est entièrement déterminée par l'expression de la densité d'états $\rho(\varepsilon)$, qui dépend elle-même de la dimensionnalité d . Dans le système homogène on a $\rho_{\text{hom}}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{(d-2)/2}$. À trois dimensions, on trouve ainsi que l'intégrale (1.1) converge lorsque $Z \rightarrow 1$ vers la valeur $n_c^{3D} \lambda^3 = \zeta(3/2)$ (ζ est la fonction de Riemann). Au-dessus de cette densité critique, la condensation se produit. À deux dimensions par contre, le calcul de l'intégrale (1.1) conduit au résultat

$$n' \lambda^2 = -\ln(1 - Z) \quad (1.2)$$

qui diverge lorsque $Z \rightarrow 1$, indiquant l'absence de condensation.

1.2 Hamiltonien bidimensionnel effectif pour le gaz en interaction

Le hamiltonien d'un gaz dilué soumis au potentiel de confinement $V_z(z) = M\omega_z^2/2$ s'écrit en seconde quantification

$$\hat{H}^{3\text{D}} = \int dx dy dz \hat{\Psi}^\dagger \left[\frac{-\hbar^2}{2M} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + V_z(z) + \frac{\kappa^{3\text{D}}}{2} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right] \hat{\Psi}, \quad (1.3)$$

où $\hat{\Psi}(x,y,z)$ représente l'opérateur champ à trois dimensions. Aux basses énergies, la constante de couplage (ou d'interaction) $\kappa^{3\text{D}}$ est entièrement déterminée par la longueur de diffusion en onde s , suivant la relation

$$\kappa^{3\text{D}} = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{M}. \quad (1.4)$$

Dans le régime quasi-bidimensionnel $\mu, k_B T \ll \hbar\omega_z$, la dynamique axiale est « gelée » et il est naturel de chercher à écrire un hamiltonien bidimensionnel effectif, qui gouvernerait la dynamique réduite au plan x,y .

1.2.1 Dérivation « naïve »

Nous allons considérer ici que l'opérateur champ est factorisé sous la forme

$$\hat{\Psi}(x,y,z) = \phi_0(z) \hat{\Psi}(x,y), \quad (1.5)$$

où $\phi_0(z)$ désigne l'état fondamental du potentiel de confinement axial. Il est clair alors que le hamiltonien obtenu à partir de (1.3) en effectuant l'intégration selon z est celui que nous cherchons. Il s'écrit simplement :

$$\hat{H}^{2\text{D}} = \int dx dy \hat{\Psi}^\dagger \left[\frac{-\hbar^2}{2M} (\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{\kappa^{2\text{D}}}{2} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right] \hat{\Psi}, \quad (1.6)$$

où $\hat{\Psi}(x,y)$ désigne cette fois l'opérateur champ dans le plan radial. Comme dans le hamiltonien tridimensionnel, les interactions apparaissent sous la forme d'un champ moyen. La constante de couplage $\kappa^{2\text{D}}$ est définie par l'équation

$$\kappa^{2\text{D}} = \kappa^{3\text{D}} \frac{\int dz |\phi_0|^4}{(\int dz |\phi_0|^2)^2}; \quad (1.7)$$

avec $\phi_0(z) \propto \exp(-z^2/2\ell_z^2)$, elle prend la forme simple :

$$\kappa_0^{2\text{D}} = \frac{\hbar^2}{M} \tilde{\kappa}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\kappa} = \frac{\sqrt{8\pi} a_s}{\ell_z}. \quad (1.8)$$

La limite du gaz dilué que nous considérons dans cette partie signifie que $\tilde{\kappa} \ll 1$. Pour les paramètres expérimentaux de Krüger *et al.* (2007), on trouve par exemple $\tilde{\kappa} = 0,13$; pour ceux de Cladé *et al.* (2009), on a $\tilde{\kappa} = 0,02$.

Le hamiltonien effectif (1.6) avec la constante de couplage (1.8) décrit très bien les expériences sur les gaz d'atomes froids quasi-bidimensionnel menées jusqu'ici. La dérivation que nous en avons donné nécessite toutefois une justification a posteriori, que nous exposons maintenant.

1.2.2 Régimes de diffusion à deux corps

D'après [Petrov *et al.* \(2000\)](#), la constante de couplage du champ moyen est donnée par l'amplitude de diffusion correspondant à une collision d'énergie $\varepsilon = 2\mu$:

$$\kappa^{2D} = \frac{\hbar^2}{M} f(\varepsilon = 2\mu) . \quad (1.9)$$

Le calcul de l'amplitude de diffusion en géométrie quasi-bidimensionnelle a été effectué par [Petrov et Shlyapnikov \(2001\)](#). Nous en reproduisons ici les principaux résultats. Pour une onde incidente caractérisée par l'impulsion relative q pour le mouvement dans le plan x,y , et par le nombre quantique ν pour l'état dans la direction z , l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\left[\frac{-\hbar^2}{M} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + U(r) + V_z(z) - \frac{\hbar\omega_z}{2} \right] \psi(\mathbf{r}) = \varepsilon \psi(\mathbf{r}) , \quad (1.10)$$

où $U(r)$ désigne le potentiel d'interaction. L'énergie de la collision est alors simplement $\varepsilon = \hbar^2 q^2 / M + \nu \hbar \omega_z$. Il est important de noter que le caractère harmonique du potentiel de confinement axial est essentiel pour pouvoir isoler le mouvement du centre de masse du mouvement relatif. Nous considérons ici la limite de basse énergie

$$R_U \ll \Lambda(\varepsilon) = \hbar / \sqrt{M(\varepsilon + \hbar\omega_z/2)} , \quad (1.11)$$

où R_U désigne la portée du potentiel d'interaction et $\Lambda(\varepsilon)$ la longueur d'onde de Broglie. Cette condition implique à la fois $R_U \ll 1/q$ et $R_U \ll \ell_z$. Dans cette limite, seule la diffusion en onde s est significative et la forme asymptotique de la fonction d'onde est

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) \simeq \phi_\nu(z) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} - \sum_{\nu'} f_{\nu\nu'}(\varepsilon) \phi_{\nu'}(z) \sqrt{\frac{i}{8\pi q_{\nu'} \rho}} e^{iq_{\nu'} \rho} , \quad (1.12)$$

où $\boldsymbol{\rho}$ désigne le vecteur position relative des deux particules dans le plan x,y . Les fonctions $\phi_{\nu'}(z)$ désignent les modes propres du potentiel axial. Pour chaque onde diffusée, l'impulsion $q_{\nu'}$ vérifie la conservation de l'énergie : $\hbar^2 q_{\nu'}^2 / M = \varepsilon - \hbar\omega_z \nu'$.

À la limite quasi-bidimensionnelle, l'onde incidente et l'onde diffusée sont toutes deux dans le mode fondamental du potentiel axial et [Petrov et Shlyapnikov](#) ont montré que l'amplitude de diffusion prend la forme

$$f_{00}(\varepsilon) = \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi} \ell_z / a_s + i\pi + \ln(B\hbar\omega_z/\varepsilon)} , \quad (1.13)$$

avec $B \simeq 0,915$. La longueur de diffusion a_s apparaît dans le problème suite à l'hypothèse (1.11) : il existe un domaine $R_U \ll r \ll \hbar/\sqrt{M\varepsilon}$ dans lequel la fonction d'onde $\phi(\mathbf{r})$ prend la forme asymptotique tridimensionnelle d'énergie nulle : $\psi(r) \propto 1 - a_s/r$. D'après l'équation (1.13), nous pouvons distinguer deux régimes de diffusion, suivant la valeur du rapport ℓ_z/a_s :

- si $\varepsilon \gg \hbar\omega_z \exp(-\sqrt{2\pi} \ell_z / a_s)$, alors l'amplitude de diffusion prend la forme asymptotique bien connue : $f_{00}(\varepsilon) \propto 1/\ln(\hbar\omega_z/\varepsilon)$. Ce régime est celui de la diffusion rigoureusement bidimensionnelle ;

- si au contraire $\varepsilon \ll \hbar\omega_z \exp(-\sqrt{2\pi}\ell_z/a_s)$, alors l'amplitude de diffusion est une simple constante : $f_{00} = \sqrt{8\pi}a_s/\ell_z$. Dans ce régime les collisions sont essentiellement tridimensionnelles et l'on retrouve la constante de couplage obtenue par l'approche naïve.

Dans toutes les expériences menées jusqu'à présent avec des gaz dilués ultra-froids, le rapport ℓ_z/a_s était grand devant 1 et la forme (1.8) de la constante de couplage était adaptée. À proximité d'une résonance de Feshbach, la situation pourrait toutefois être différente.

1.3 Propriétés de cohérence du gaz bidimensionnel

1.3.1 Condensation de Bose–Einstein à température nulle

Pour prouver l'existence d'un condensat à température nulle, nous pouvons commencer par en supposer l'existence puis évaluer selon la procédure de Bogoliubov l'importance de la déplétion quantique et son influence sur la fonction de corrélation à un corps. Cette procédure a été exposée en détail par [Petrov *et al.* \(2004\)](#) et nous n'en présentons ici que les grandes lignes. À supposer donc que le mode fondamental du système soit macroscopiquement peuplé, nous l'isolons dans l'opérateur champ et le traitons comme un champ classique :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}), \quad |\psi_0(\mathbf{r})|^2 = n_0(\mathbf{r}). \quad (1.14)$$

À l'ordre le plus bas en $\hat{\Psi}'$, la fonction d'onde du condensat vérifie l'équation de Gross–Pitaevskii

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \kappa^{2D} |\psi_0(\mathbf{r})|^2 - \mu \right] \psi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.15)$$

dont la solution est simplement $\psi_0 = \text{constante}$. L'opérateur $\hat{\Psi}'$, qui décrit les modes d'excitation, obéit dans le point de vue de Heisenberg à l'équation linéarisée

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2M} \nabla^2 + 2\kappa^{2D} |\psi_0|^2 \right] \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) + \kappa^{2D} \psi_0^2 \hat{\Psi}'^\dagger(\mathbf{r}, t), \quad (1.16)$$

avec $\mu = \kappa^{2D} n_0$. On déduit de (1.16) les modes propres de la partie non condensée :

$$\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t \hbar} \sum_{\mathbf{k}} \left[u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}} t / \hbar} - v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\varepsilon_{\mathbf{k}} t / \hbar} \right] \quad (1.17)$$

avec

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{E_{\mathbf{k}}^2 + 2\mu E_{\mathbf{k}}}, \quad (1.18)$$

$E_{\mathbf{k}}$ représentant l'énergie $\hbar^2 k^2 / 2M$ d'une particule libre. Les amplitudes $u_{\mathbf{k}}$ et $v_{\mathbf{k}}$ sont quant à elles déterminées par la relation

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \pm v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right)^{\pm 1/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.19)$$

Des expressions précédentes on déduit la population des modes excités :

$$n' = \langle \hat{\Psi}'^\dagger \hat{\Psi}' \rangle = \Omega \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} |v_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{M \kappa^{2D}}{4\pi \hbar^2} n_0. \quad (1.20)$$

On constate immédiatement que la déplétion quantique est faible puisque $n'/n_0 = \tilde{\kappa}/4\pi \ll 1$ dans le régime d'interaction faible. Son effet sur la fonction de corrélation à un corps $g^{(1)}(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(0) \rangle$ est également limité et l'on vérifie que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g^{(1)}(\mathbf{r}) = n_0, \quad (1.21)$$

ce qui confirme l'hypothèse de départ sur la présence d'un condensat.

1.3.2 Quasi-condensat à température finie

Le théorème de Hohenberg

Si les fluctuations quantiques ne détruisent pas la cohérence à longue distance dans le gaz bidimensionnel, il n'en va pas de même des fluctuations thermiques. Une belle démonstration en a été apportée par [Hohenberg \(1967\)](#) sur la base d'une inégalité formelle exacte initialement prouvée par Bogoliubov. Hohenberg a montré que la présence d'un condensat dans un fluide uniforme contraint la population du mode de vecteur d'onde \mathbf{k} à vérifier l'inégalité

$$n_{\mathbf{k}} \geq \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{1}{2} + \frac{MT}{k^2} \frac{n_0}{n} \right), \quad (1.22)$$

n_0 désignant la densité du condensat. La population totale n' des modes excités étant par ailleurs déterminée par la relation

$$n' = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} n_{\mathbf{k}}, \quad (1.23)$$

il est clair que l'hypothèse initialement faite de la présence d'un condensat est mise en défaut : l'intégrale précédente diverge lorsque $k \rightarrow 0$. Ainsi la population thermique des modes de grande longueur d'onde détruit-elle la cohérence nécessaire à la condensation de Bose–Einstein. Ce résultat constitue ce que l'on a coutume d'appeler le théorème de Hohenberg¹.

Réduction des fluctuations de densité

Pour caractériser les fluctuations à basse température, nous exprimons l'opérateur champ sous la forme :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \exp(i\hat{\varphi}(\mathbf{r}))\sqrt{\hat{n}(\mathbf{r})}, \quad \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sqrt{\hat{n}(\mathbf{r})}\exp(-i\hat{\varphi}(\mathbf{r})), \quad (1.24)$$

les opérateurs densité et phase, \hat{n} et $\hat{\varphi}$, vérifiant la relation de commutation

$$[\hat{n}(\mathbf{r}), \hat{\varphi}(\mathbf{r}')] = i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.25)$$

Une telle description nécessite en principe l'introduction d'une coupure ultraviolette en énergie car elle peut poser des problèmes de divergence (voir par exemple [Caruthers et Nieto, 1968](#); [Mora et Castin, 2003](#)). Comme nous ne sommes intéressés

1. Les noms de Mermin et Wagner y sont souvent associés, ceux-ci ayant utilisé un argument semblable pour montrer l'absence de propriétés ferromagnétique ou antiferromagnétique dans le modèle de Heisenberg unidimensionnel et bidimensionnel ([Mermin et Wagner, 1966](#)).

que par les modes de basse énergie, nous n’aurons cependant pas de précaution particulière à prendre ici.

Lorsque le gaz est suffisamment dégénéré, sa longueur de cohérence ξ_φ devient grande devant la longueur de corrélation ξ_n caractéristique des fluctuations de densité². À une échelle intermédiaire, $\xi_n \ll r \ll \xi_\varphi$, le gaz présente les caractéristiques d’un condensat de Bose–Einstein et l’amplitude des fluctuations de densité est réduite par rapport à celles d’un gaz thermique : $\langle n^2 \rangle < 2\langle n \rangle^2$ (Kagan *et al.*, 1987, 2000). À une échelle supérieure à ξ_φ , le système est décrit comme un quasi-condensat, ou condensat avec une phase fluctuante.

Pour obtenir les équations vérifiées par les modes d’excitation des opérateurs \hat{n} et $\hat{\varphi}$, il est d’usage d’introduire l’opérateur $\delta\hat{n} = \hat{n} - \bar{n}$, où $\bar{n} = \langle \hat{n} \rangle$. Partant de l’équation vérifiée par l’opérateur champ en représentation de Heisenberg :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \kappa^{2D} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (1.26)$$

on obtient au premier ordre en $\delta\hat{n}$ des équations couplées linéaires pour $\delta\hat{n}$ et $\hat{\varphi}$. Leurs solutions de plus basse énergie sont des phonons :

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} -i \left(\frac{Mc}{2\Omega\hbar\bar{n}k} \right)^{1/2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \varepsilon_{\mathbf{k}}t/\hbar)} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}, \quad (1.27)$$

$$\delta\hat{n}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{M\bar{n}\hbar k}{2\Omega} \right)^{1/2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \varepsilon_{\mathbf{k}}t/\hbar)} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}, \quad (1.28)$$

avec $c = \sqrt{\mu/M}$ et $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar ck$. Nous pouvons signaler dès à présent que les vortex constituent également des modes d’excitations de l’équation (1.26). Du fait de leur énergie finie, leur population peut toutefois être négligée aux basses températures considérées ici. À partir de l’équation (1.28), on peut montrer que les fluctuations de densité sont négligeables dès lors que $\kappa^{2D} \neq 0$ et $n\lambda^2 \gg 1$ (voir par exemple Petrov *et al.*, 2004), de sorte que l’opérateur densité peut partout être assimilé au nombre réel \bar{n} :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{\bar{n}} \exp(i\hat{\varphi}(\mathbf{r})). \quad (1.29)$$

1.3.3 Fluctuations de phase et ordre à longue portée

L’étude de l’ordre à longue portée dans le gaz de Bose en dimension réduite a débuté au milieu des années 1960, dans le contexte de l’hélium superfluide. Les résultats que nous dérivons ici ont été obtenus initialement par Kane et Kadanoff (1967) ainsi que Reatto et Chester (1967). Ayant négligé les fluctuations de densité, la fonction de corrélation $g^{(1)}(\mathbf{r})$ est maintenant entièrement déterminée par les fluctuations de phase :

$$g^{(1)}(\mathbf{r}) = \bar{n} \langle \exp [i(\hat{\varphi}(0) - \hat{\varphi}(\mathbf{r}))] \rangle \quad (1.30)$$

$$= \bar{n} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle (\hat{\varphi}(0) - \hat{\varphi}(\mathbf{r}))^2 \rangle \right]. \quad (1.31)$$

2. Cette dernière est estimée à $2\hbar^2/M(\kappa^{2D}k_B T)^{1/2}$ par Prokof’ev *et al.* (2001).

À partir de (1.27), il est facile de montrer que les fluctuations apparaissant dans (1.31) prennent la forme

$$\frac{1}{2} \langle (\hat{\varphi}(0) - \hat{\varphi}(\mathbf{r}))^2 \rangle = \frac{Mc}{\Omega \hbar \bar{n}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k} (N_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}), \quad (1.32)$$

avec $N_{\mathbf{k}} = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle$. Puisque nous ne sommes intéressés que par les grandes longueurs d'onde et que la température est finie, nous pouvons transformer cette somme en intégrale et considérer que $N_{\mathbf{k}} \simeq k_B T / \hbar c k \gg 1/2$. Il vient alors

$$\frac{1}{2} \langle (\hat{\varphi}(0) - \hat{\varphi}(\mathbf{r}))^2 \rangle \simeq \frac{2\pi}{\bar{n} \lambda^2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2}. \quad (1.33)$$

La borne inférieure de l'intégrale est fixée par $1/r$ et la borne supérieure par ξ_n . En remarquant que le laplacien de $\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2}$ est $\delta(\mathbf{r})$, nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{2} \langle (\hat{\varphi}(0) - \hat{\varphi}(\mathbf{r}))^2 \rangle \simeq \frac{1}{\bar{n} \lambda^2} \ln(r/\xi_n), \quad (1.34)$$

d'où finalement

$$g^{(1)}(\mathbf{r}) \simeq \bar{n} \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^{1/\bar{n} \lambda^2}. \quad (1.35)$$

Cette fonction de corrélation appelle deux commentaires. Premièrement, sa limite à grande distance est nulle et nous retrouvons la prédiction du théorème de Hohenberg : le système ne présente pas de condensat à température finie car il contient toujours une population thermique de phonons suffisante pour détruire l'ordre à longue portée. Deuxièmement, sa décroissance est particulièrement lente puisqu'elle est algébrique et non exponentielle. Le gaz fortement dégénéré possède donc certaines propriétés de cohérence qui le distinguent clairement du gaz thermique. Nous verrons plus loin que cette cohérence rémanente est maintenue jusqu'aux températures pour lesquelles l'excitation de vortex devient possible.

1.3.4 Lien avec le modèle XY

Puisque le comportement du gaz aux grandes distances est déterminé par les fluctuations thermiques, les fluctuations quantiques ne jouant qu'un rôle marginal, on peut en pratique considérer que le système est décrit par un champ classique

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\bar{n}} \exp(i\varphi(\mathbf{r})) \quad (1.36)$$

et obéit au hamiltonien

$$H = \frac{\hbar^2 \bar{n}}{2M} \int d^2 \mathbf{r} [\nabla \varphi(\mathbf{r})]^2 + \text{cte}. \quad (1.37)$$

Le champ complexe $\psi(\mathbf{r})$ représente alors la « fonction d'onde » du quasi-condensat. Il se trouve que ce hamiltonien est formellement analogue à la limite continue du modèle XY :

$$H_{XY} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (1.38)$$

Ce modèle représente un réseau bidimensionnel de spins classiques \mathbf{S}_i , contenus dans le plan du réseau et couplés à leurs plus proches voisins avec une énergie J . Les angles θ_i servent à repérer l'orientation des spins dans le plan. Si l'on ne s'intéresse qu'aux fluctuations de longueur d'onde grande devant le pas a du réseau, on peut développer le hamiltonien (1.38) en fonction du petit paramètre $\theta_i - \theta_j$. On obtient ainsi au premier ordre non nul le hamiltonien

$$H_{\text{XY}} = \frac{J}{2a^2} \int d^2\mathbf{r} [\nabla\theta(\mathbf{r})]^2 + \text{cte} , \quad (1.39)$$

qui est formellement identique à (1.37).

1.4 Transition de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless

Le fait que la fonction de corrélation à un corps ne tende vers 0 qu'algébriquement signifie qu'un certain ordre subsiste qui distingue l'état du système à basse température de celui d'un simple gaz thermique. Comme il a été montré par [Berezinskii \(1972\)](#) et [Popov \(1972\)](#), cet ordre rémanent est suffisant pour que le système soit superfluide à basse température.

1.4.1 Superfluidité et vortex

Pour un gaz de Bose à trois dimensions, la superfluidité apparaît avec la condensation de Bose–Einstein. Le paramètre d'ordre est un nombre complexe :

$$\psi = \sqrt{n_s} \exp(i\varphi) , \quad (1.40)$$

où n_s représente la densité du superfluide et φ la phase du condensat. Les courants qui peuvent apparaître dans le système sont liés aux variations spatiales de la phase, le champ de vitesse étant donné par la relation

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{M} \nabla\varphi . \quad (1.41)$$

Le lien entre la densité de superfluide et la densité du condensat est loin d'être trivial. À température nulle par exemple, la totalité du système est superfluide mais seule une fraction est condensée du fait des fluctuations quantiques. Cette fraction est proche de 100 % dans les gaz dilués, mais elle chute à 10 % dans l'hélium 4 par exemple.

À deux dimensions, la notion de paramètre d'ordre perd un peu de son intérêt car aucune brisure de symétrie n'est associée à la transition de phase. À des échelles intermédiaires toutefois, une certaine cohérence de phase est préservée et l'on peut définir un paramètre d'ordre local : $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_s} \exp(i\varphi(\mathbf{r}))$. Là encore, la densité du superfluide et la densité du quasi-condensat sont deux quantités à distinguer. Si l'on suit la définition du quasi-condensat proposée par [Prokof'ev et al.](#) : $\bar{n}^2 = 2\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$, on peut montrer ainsi que $\bar{n} > n_s$ ([Prokof'ev et al., 2001](#)). Le mécanisme microscopique de la transition a été élucidé par [Berezinskii \(1972\)](#) et [Kosterlitz et Thouless \(1972, 1973\)](#). Il implique des excitations particulières du système, les

vortex, qui correspondent à des singularités (ponctuelles) du champ de phase autour desquelles le champ de vitesse a la forme

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\hbar}{Mr} \mathbf{e}_\theta, \quad (1.42)$$

où \mathbf{e}_θ est le vecteur unitaire orthoradial. Le signe \pm définit ce que l'on appelle la *charge* du vortex. Au centre du vortex, où la vitesse diverge, la densité s'annule et l'énergie de l'excitation reste finie. À basse température, les vortex forment des paires globalement neutres qui n'ont qu'une faible influence sur les corrélations à longue portée dans le système. Au-dessus de la température critique, les paires se dissocient et la prolifération de vortex libres détruit tout ordre à longue portée et donc la superfluidité.

1.4.2 Le point critique

Discontinuité de la densité superfluide

La température critique T_c de la transition BKT est le point au-dessus duquel les vortex libres, non associés en paires, prolifèrent dans le système. La probabilité d'excitation d'un vortex est proportionnelle au facteur statistique $\exp(-\beta F)$, qui dépend de l'énergie libre $F(T)$. La prolifération de vortex se produit lorsque l'énergie libre devient négative; la température critique est donc déterminée par la condition

$$F(T_c) = E - T_c S = 0, \quad (1.43)$$

E étant l'énergie d'un vortex et S son entropie. L'énergie d'un vortex correspond à l'énergie cinétique du champ de vitesse associé (1.42) dans le superfluide :

$$E = \int d^2\mathbf{r} \frac{1}{2} M n_s \mathbf{v}^2 = \frac{\pi \hbar^2}{2M} n_s \ln(\Omega/\xi^2), \quad (1.44)$$

où nous avons introduit comme coupure la longueur de corrélation $\xi = \hbar/\sqrt{M\mu}$, qui détermine la taille du cœur d'un vortex. L'entropie est quant à elle déterminée par le nombre de configurations accessibles à un système contenant un vortex. Chaque configuration correspondant à une position du vortex dans le système, ce nombre est simplement le rapport de la taille du système à la taille d'un vortex :

$$S = k_B \ln(\Omega/\xi^2). \quad (1.45)$$

La combinaison de (1.43), (1.44) et (1.45) conduit finalement à la relation

$$k_B T_c = \frac{\pi \hbar^2}{2M} n_s \quad \text{ou} \quad n_{s,c} \lambda^2 = 4. \quad (1.46)$$

Celle-ci prédit une discontinuité de la densité superfluide qui passe de 0 à $4/\lambda^2$ lorsque la température critique est franchie (Kosterlitz, 1974; Nelson et Kosterlitz, 1977).

Localisation du point critique

La relation (1.46) ne permet pas de localiser le point critique puisque la température critique y est exprimée en fonction de la densité superfluide n_s et non de la densité totale $n = n_{\text{tot}}$. Dans la limite du gaz en interaction faible, il a été montré que le point critique est déterminé par une relation de la forme (Popov, 1983; Fisher et Hohenberg, 1988; Prokof'ev *et al.*, 2001)

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{M} \frac{n_{\text{tot}}}{\ln(\gamma/\tilde{\kappa})} \quad \text{ou} \quad n_{\text{tot},c} \lambda^2 = \ln(\gamma/\tilde{\kappa}). \quad (1.47)$$

La valeur de la constante γ a été évaluée numériquement par Prokof'ev *et al.* (2001), qui trouvent

$$\gamma = 380 \pm 3. \quad (1.48)$$

La relation (1.47), contrairement à (1.46), n'est pas universelle car elle fait intervenir la constante de couplage. La position du point critique dépend donc du système particulier considéré. Pour $\tilde{\kappa} = 0,13$ par exemple, on trouve $n_c \lambda^2 = 8$. Prokof'ev *et al.* (2001) ont également dérivé l'équation déterminant le potentiel chimique critique en fonction de la température :

$$\mu_c = \frac{\tilde{\kappa}}{\pi} k_B T \ln(\gamma_\mu/\tilde{\kappa}), \quad \gamma_\mu = 13,2 \pm 0,4. \quad (1.49)$$

1.4.3 Région critique

La description théorique du gaz de Bose dilué bidimensionnel ne pose pas de problèmes particuliers dans la limite $T \ll T_c$, où les propriétés essentielles du système sont déterminées par les phonons, ni dans la limite $T \gg T_c$, où une description semi-classique en champ moyen est possible. La région qui sépare ces deux régimes, où les fluctuations sont importantes, reste toutefois hors de portée des traitements analytiques. Or il se trouve que l'extension de cette région critique est singulièrement grande et pratiquement indépendante de la constante de couplage (Fisher et Hohenberg, 1988) :

$$\frac{\Delta T}{T_c} \sim \frac{1}{\ln(1/\tilde{\kappa})}. \quad (1.50)$$

La possibilité d'explorer avec une bonne résolution la région critique est l'une des raisons de l'intérêt porté à la transition BKT dans les gaz dilués. À l'heure actuelle, les seules observations expérimentales de la région critique concernent la réduction des fluctuations de densité dans les expériences pionnières de Safonov *et al.* (voir également Kagan *et al.*, 2000).

1.4.4 Effets de taille finie et limite thermodynamique

Pour terminer ce chapitre, nous examinons la question des effets de taille finie. La décroissance de la fonction de corrélation $g^{(1)}(r)$ lorsque $r \rightarrow \infty$ étant algébrique, on s'attend en effet à ce qu'une certaine cohérence subsiste à travers tout système « réaliste ». Pour en examiner les conséquences, nous partons de l'expression de la fonction de corrélation à un corps en première quantification

$$g^{(1)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \bar{n} \sum_{\mathbf{k}} \pi_{\mathbf{k}} \exp [i(\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'))], \quad (1.51)$$

où $\varphi_{\mathbf{k}}$ désigne le mode de vecteur d'onde \mathbf{k} apparaissant dans (1.26) et où $\pi_{\mathbf{k}}$ représente la probabilité d'exciter ce mode. Nous intégrons ensuite l'équation obtenue sur \mathbf{r} et \mathbf{r}' en remplaçant $g^{(1)}$ par sa forme asymptotique (1.35). Le membre de gauche de l'équation obtenue s'écrit

$$\int_{\Omega^2} d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \bar{n} \left(\frac{\xi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)^{1/\bar{n}\lambda^2} = 2\pi\Omega \xi^{1/\bar{n}\lambda^2} \int_{r_c}^{\sqrt{\Omega}} dr r^{1-1/\bar{n}\lambda^2} \quad (1.52)$$

$$\simeq \pi\Omega^2 \bar{n} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Omega}} \right)^{1/\bar{n}\lambda^2}. \quad (1.53)$$

Nous avons introduit dans (1.52) une coupure $r_c \ll \sqrt{\Omega}$ par souci d'exactitude puis avons utilisé pour obtenir (1.53) le fait que $\bar{n}\lambda^2 \gg 1$. Pour le membre de droite nous pouvons tout d'abord expliciter les fonctions $\varphi_{\mathbf{k}}$:

$$\sum_{\mathbf{k}} \exp [i(\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'))] = \sum_{\mathbf{k}, k_y > 0} \exp [4i\alpha_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))], \quad (1.54)$$

où $\alpha_{\mathbf{k}}$ désigne l'amplitude du mode \mathbf{k} . On constate alors que l'intégrale de chacun des termes de la somme est nulle si $\mathbf{k} \neq 0$. Seul l'état fondamental contribue, avec

$$\int d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \bar{n} \pi_0 = 4\Omega^2 \bar{n} \pi_0. \quad (1.55)$$

L'égalité entre (1.52) et (1.55) se traduit finalement par la relation

$$\pi_0 \simeq \frac{\pi}{4} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Omega}} \right)^{1/\bar{n}\lambda^2}. \quad (1.56)$$

Ainsi l'état fondamental d'un système de taille finie fortement dégénéré est-il macroscopiquement peuplé, avec une densité $n_0 \sim g^{(1)}(\sqrt{\Omega})$. L'apparition de ce « condensat » peut même être considéré comme une signature de la transition BKT :

$$\begin{array}{ccccc} \text{transition} & & \text{décroissance} & & \text{population} \\ \text{BKT} & \implies & \text{algébrique de } g^{(1)} & \implies & \text{macroscopique de} \\ & & & & \text{l'état fondamental} \end{array}$$

L'apparition d'une fraction condensée dans un système de taille finie n'est toutefois pas propre au gaz en interaction. On montre en effet pour un gaz parfait dans une boîte que la population des états excités sature lorsque $n'\lambda^2 \sim -\ln(\hbar^2/2Mk_B T\Omega)$. La différence entre le gaz parfait et le gaz en interaction réside dans le mécanisme qui conduit à l'apparition de la fraction condensée : pour le premier il s'agit simplement de la condensation de Bose–Einstein et à la limite thermodynamique la température critique T_c^{id} tend vers 0 ; pour le second il s'agit de la transition BKT et à la limite thermodynamique la population de l'état fondamental tend vers 0³. Ce point est représenté schématiquement sur la figure 1.1.

3. Il faut prendre garde au fait que les limites $\Omega \rightarrow +\infty$ et $T \rightarrow 0$ ne commutent pas pour le gaz en interaction : si l'on prend la limite thermodynamique d'abord, alors la fraction condensée est nulle à toute température, y compris à $T = 0$; si l'on prend la limite $T \rightarrow 0$ d'abord, alors on trouve une fraction condensée importante, même à la limite thermodynamique, comme nous l'avons montré plus haut dans ce chapitre.

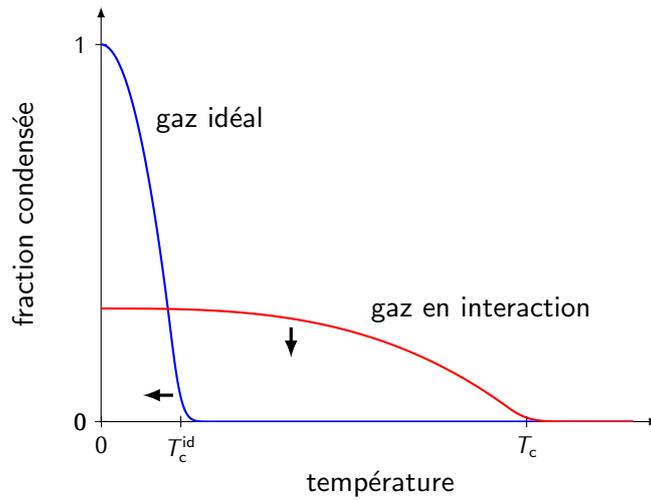


FIGURE 1.1 Effets de taille finie. Sur ce schéma est représentée la population du mode fondamental pour un système homogène de taille finie, dans le cas d'un gaz parfait et d'un gaz en interaction. La limite thermodynamique est figurée par les flèches.

Pour compléter la discussion, il nous faut poser la question de la rapidité avec laquelle la limite thermodynamique est atteinte. Il est important de savoir en effet si les systèmes expérimentaux doivent être ou non considérés comme de taille finie. [Reatto et Chester \(1967\)](#) ont donné un premier élément de réponse en évaluant l'exposant $1/\bar{n}\lambda^2$ pour l'hélium superfluide. À $T = 0,1$ K pour la masse et la densité de l'hélium, ils trouvent $1/\bar{n}\lambda^2 = 0,009$. Ce nombre est si petit que, du point de vue de la population de l'état fondamental, aucun système réalisable ne peut atteindre la limite thermodynamique. [Bramwell et Holdsworth \(1994\)](#) ont également étudié les effets de taille finie dans le contexte du modèle XY bidimensionnel. Ils ont montré que pour que la magnétisation soit réellement négligeable ($< 10^{-2}$ en unités réduites) en dessous de la température critique, le système devrait avoir une taille extrêmement grande (*bigger than the state of Texas*), et ce même à proximité du point critique.

Chapitre 2

Transition BKT dans le gaz quasi-bidimensionnel piégé

Par rapport aux échantillons de matière condensée, les systèmes étudiés dans les laboratoires de physique atomique sont essentiellement inhomogènes, souvent piégés dans des potentiels harmoniques. Cette différence a des conséquences potentiellement importantes, car elle modifie profondément la densité d'états et réintroduit la condensation de Bose–Einstein, pour le gaz idéal tout du moins. Deux séries d'expériences ont été menées à l'École normale supérieure sur des gaz quasi-bidimensionnels de ^{87}Rb confinés dans un piège mixte magnétique et optique. Dans la première, nous avons pu observer une transition du type BKT, caractérisée par un changement des propriétés de cohérence à longue portée, associée à l'apparition de vortex dans le système (Hadzibabic *et al.*, 2006). Si l'analyse qualitative et, dans une certaine mesure quantitative, des données est un bon accord avec la théorie BKT, une comparaison précise est néanmoins délicate. Ce constat a motivé la seconde série d'expériences, menées par Krüger *et al.* (2007) dans le but de localiser et de caractériser précisément le point critique. Les observations sont quantitativement en désaccord avec la théorie du gaz parfait. Il est par contre possible d'en rendre compte de manière satisfaisante grâce à un modèle semi-classique, où les interactions sont prises en compte dans l'approximation de Hartree–Fock par un terme de champ moyen et le point critique est identifié à celui de la transition BKT dans une approximation de densité locale (Hadzibabic *et al.*, 2008). Ce modèle simple est également en bon accord avec les simulations Monte-Carlo quantique de Holzmann et Krauth (2008).

2.1 Quels effets attendre du confinement harmonique ?

Le système que nous considérons maintenant n'est plus homogène mais au contraire soumis à un potentiel extérieur harmonique $V_{\perp}(\mathbf{r}) = M(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)/2$. Cette situation correspond à celle rencontrée dans les expériences menées sur les gaz dilués ultra-froids. Bien que nous considérons a priori un potentiel anisotrope, dans de nombreuses expressions seule la moyenne géométrique $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_x \omega_y}$ interviendra.

2.1.1 Condensation du gaz parfait

Pour illustrer l'effet de la modification de la densité d'états, nous revenons au cas du gaz idéal. La population des états excités est déterminée par l'expression générale (1.1), où la densité d'états $\rho_{\text{har}}(\varepsilon)$ est maintenant proportionnelle à ε^{d-1} en dimension d (Bagnato et Kleppner, 1991). À deux dimensions, la population des états excités est alors donnée par

$$N' = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_{\perp}} \right)^2 g_2(Z), \quad (2.1)$$

où g_2 désigne le polylogarithme d'ordre 2. La limite de la fonction g_2 étant finie lorsque $Z \rightarrow 1$, égale à $\zeta(2) = \pi^2/6$, on en conclut que la condensation de Bose–Einstein se produit lorsque le nombre d'atomes dans le gaz dépasse la valeur critique

$$N_c^{\text{id}} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_{\perp}} \right)^2. \quad (2.2)$$

Il est instructif de considérer également la densité dans l'espace des phases. On obtient celle-ci dans l'approximation semi-classique par l'équation

$$n'(\mathbf{r})\lambda^2 = \int \frac{\rho_{\text{hom}}(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp[\beta(\varepsilon + V_{\perp}(\mathbf{r}))] / Z - 1}, \quad (2.3)$$

dont la solution ressemble fort à celle du gaz homogène :

$$n'(\mathbf{r})\lambda^2 = -\ln \left(1 - Z e^{-\beta V_{\perp}(\mathbf{r})} \right). \quad (2.4)$$

La condensation dans ce système apparaît donc comme fragile car elle requiert au point critique une densité infinie au centre du piège. Il faut s'attendre à ce que les interactions entre atomes, aussi petites soient-elles, aient un effet dramatique sur le processus décrit ici.

2.1.2 Effet des interactions : vers le système uniforme

Nous décrivons le gaz dans l'approximation semi-classique et prenons en compte les interactions dans l'approximation de Hartree–Fock via le potentiel effectif

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V_{\perp}(\mathbf{r}) + 2\kappa^{2D} n(\mathbf{r}). \quad (2.5)$$

Le facteur 2 devant le terme de champ moyen correspond aux fluctuations de densité gaussiennes d'un gaz thermique. Le modèle proposé n'est donc valide qu'au-dessus du point critique. Dans un modèle strictement bidimensionnel, la densité dans l'espace des phases est alors donnée par la relation implicite

$$n(\mathbf{r})\lambda^2 = -\ln \left(1 - Z e^{-\beta V_{\text{eff}}(\mathbf{r})} \right). \quad (2.6)$$

Contrairement au cas du gaz idéal, on peut montrer que cette équation admet une solution pour un nombre d'atomes arbitrairement grand (Bhaduri *et al.*, 2000), ce qui signifie que la condensation de Bose–Einstein n'a pas lieu. Pour en comprendre

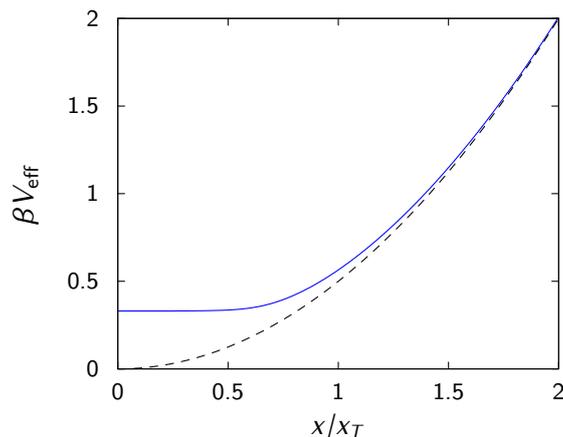


FIGURE 2.1 Profil du potentiel effectif $V_{\text{eff}} = V_{\perp} + 2\kappa^{2D}n$ le long de l'axe x , pour $N = 1,8 N_c^{\text{id}}$. Près du centre du piège, le terme de champ moyen compense le potentiel de confinement et le potentiel effectif apparaît aplani. La coordonnée x est réduite par $x_T = (\omega_x^2 M \beta)^{-1/2}$.

intuitivement la raison, il est intéressant d'observer le profil du potentiel effectif (2.5), représenté sur la figure 2.1 pour un nombre d'atomes égal à $1,8 N_c^{\text{id}}$. On constate que le potentiel de champ moyen compense le potentiel de confinement au centre du piège et tend à aplanir ce dernier. L'effet du potentiel de piégeage, en particulier son influence sur la densité d'états, est donc réduit par les interactions.

Par ailleurs, [Petrov *et al.* \(2000\)](#) ont pu calculer l'amplitude des fluctuations de phase dans le gaz piégé en adaptant la méthode exposée au chapitre précédent. Ils ont montré qu'à suffisamment basse température la fonction de corrélation $g^{(1)}$ a la même forme asymptotique que dans le système homogène : une décroissance algébrique avec l'exposant $1/n_m \lambda^2$, où n_m désigne la densité au centre du nuage. Ces résultats suggèrent que la transition BKT doit se produire dans le gaz quasi-bidimensionnel piégé de manière essentiellement identique au cas homogène.

2.2 Observation de la transition BKT

Les résultats présentés ici ont été publiés dans la référence : [Hadzibabic *et al.* \(2006\)](#). Le lecteur pourra trouver dans cette référence ainsi que dans les thèses de [Sabine Stock](#) et [Baptiste Battelier](#) une description détaillée du montage expérimental et des méthodes employées pour analyser les données.

2.2.1 Description de l'expérience

Le point de départ de l'expérience consiste à produire un gaz dégénéré de ^{87}Rb confiné dans un piège magnétique oblong à symétrie cylindrique (Ioffe–Pritchard). À ce piège est ensuite superposée la figure d'interférence produite à l'intersection de deux faisceaux lasers ; la longueur d'onde de ces faisceaux est de 532 nm, de sorte qu'ils apparaissent désaccordés vers le bleu par rapport à la transition atomique (785 nm). Le pas du réseau est fixé à $d = 3 \mu\text{m}$ en ajustant l'angle avec lequel les

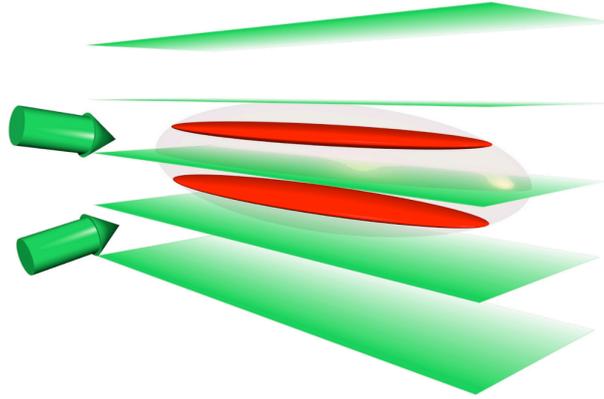


FIGURE 2.2 Production expérimentale de gaz dégénérés quasi-bidimensionnels. Un réseau optique de pas $d = 3 \mu\text{m}$ est formé par l'intersection avec un petit angle de deux faisceaux laser de longueur d'onde 532 nm. Le réseau sépare un gaz dégénéré tridimensionnel en deux plans indépendants. L'ellipsoïde transparent représente le profil du gaz avant chargement dans le réseau optique.

faisceaux se croisent ; ainsi seuls 2 à 4 des nœuds du réseau optique sont significativement peuplés (voir la figure 2.2). Chacun de ces plans constitue pour les atomes un piège quasi-bidimensionnel harmonique de fréquences 11, 130 et 3,6 kHz dans les directions x , y et z . La constante d'interaction correspondante est $\tilde{\kappa} = 0,14$. La barrière de potentiel entre deux plans est suffisamment haute pour que l'effet tunnel puisse être négligé et les différents plans considérés comme indépendants ; les atomes les plus énergétiques connectent néanmoins les plans entre eux, assurant par là que l'équilibre thermodynamique dans chacun nuages s'effectue au même potentiel chimique et à la même température.

Pour varier la température du système, nous varions la température du gaz tridimensionnel avant superposition du réseau optique par évaporation radiofréquence. Le domaine de température exploré s'étend de 0 à 150 nK, qui correspond à la température critique de condensation de notre gaz tridimensionnel initial. En termes de fréquence, 150 nK correspond à 3,1 kHz ce qui n'assure que marginalement le caractère bidimensionnel du gaz ; à plus basse température toutefois, le critère $k_B T < \hbar \omega_z$ est bien vérifié. Dans chacun des deux plans les plus peuplés, le nombre d'atomes total est de l'ordre de 10^5 et le nombre d'atomes dans le quasi-condensat varie de 0 à $5 \cdot 10^4$ en fonction de la température. Les rayons de Thomas–Fermi des quasi-condensats les plus grands sont de $60 \mu\text{m}$ dans la direction x et $5 \mu\text{m}$ dans la direction y . Le potentiel chimique correspondant est de 1,7 kHz. La condition $\mu < \hbar \omega_z$ étant remplie, les quasi-condensats peuvent bien être considérés comme bidimensionnels.

2.2.2 Principe des mesures

Le signal dont sont extraites toutes les mesures consiste en une image par absorption du gaz après temps de vol : les pièges magnétique et optique sont éteints brusquement et simultanément ; les gaz quasi-bidimensionnels s'étendent alors pendant une durée $\tau = 20 \text{ ms}$ et se recouvrent ; une image par absorption est finalement

prise avec un faisceau laser résonant, donnant accès au profil d'interférence intégré le long de l'axe de propagation (y) du faisceau : $n_{\text{int}}(x, z, \tau)$. Deux exemples de tels profils sont représentés sur la figure 2.3.

L'expansion axiale est très rapide et emporte pratiquement la totalité de l'énergie d'interaction du nuage. L'expansion radiale est donc essentiellement libre et la variation de la taille du nuage dans le plan horizontal est donnée par $\Delta x(y) = \hbar\tau / (MR_{\text{TF},x(y)})$, où R_{TF} représente le rayon de Thomas–Fermi in-situ. On trouve $\Delta x = 0,2 \mu\text{m} \ll R_{\text{TF},x}$ et $\Delta y = 3 \mu\text{m} < R_{\text{TF},y}$, ce qui nous autorise à considérer que la fonction d'onde d'un gaz dégénéré après temps de vol est confondue avec celle du même système in-situ.

Le profil d'interférence $n_{\text{int}}(x, z, \tau)$ révèle la distribution de phase au sein de chaque nuage. Nous verrons bientôt que l'on peut en extraire le comportement asymptotique de la fonction de corrélation à un corps après un moyennage statistique. Les vortex sont également clairement visibles sur le profil d'interférence : ils apparaissent comme des dislocations, dont des exemples sont visibles sur la figure 2.5. L'interférence de deux nuages donne donc accès aux principales propriétés qui caractérisent la transition BKT, à l'exception de la superfluidité.

2.2.3 Cohérence de phase

Modélisation du profil d'interférence observé

Nous considérons que seuls deux pièges quasi-bidimensionnels sont créés par la superposition du piège magnétique et du réseau optique. Ceux-ci sont situés en $z = \pm d/2$ et supposés peuplés du même nombre d'atomes. Dans chacun des pièges, la fonction d'onde du quasi-condensat est de la forme

$$\psi_{\pm}(x, y, z) = f(z \pm d/2) \times \sqrt{n(x, y)} \exp(i\varphi_{\pm}(x, y)) \quad (2.7)$$

et nous supposons par souci de simplicité que

$$f(z) = \frac{1}{\pi^{1/4} \ell_z^{1/2}} \exp(-z^2/2\ell_z^2) . \quad (2.8)$$

Pendant le temps de vol, chacune de ces fonctions d'onde se propage librement dans le temps. La durée τ de cette propagation vérifiant la condition $\ell_z^4 \ll (2\hbar\tau/M)^2$, les ondes de matière au moment de l'observation prennent la forme asymptotique

$$\psi_{\pm}(x, y, z, \tau) \simeq f'(z, \tau) e^{-iM(z \pm d/2)^2/2\hbar\tau} \times \sqrt{n(x, y)} e^{i\varphi_{\pm}(x, y)} \quad (2.9)$$

avec

$$f'(z, \tau) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sigma^{1/2}} \exp(-z^2/2\sigma^2) , \quad \sigma(\tau) = \sqrt{2\hbar\tau/M} \ell_z . \quad (2.10)$$

Le profil de densité résultant de la superposition de ces deux ondes de matières manifeste alors une figure d'interférence :

$$n(x, y, z, \tau) = |\psi_+(x, y, z, \tau) + \psi_-(x, y, z, \tau)|^2 \quad (2.11)$$

$$= f'(z, \tau)^2 \times 2n(x, y) \left[1 + \text{Re} \left\{ e^{iMzd/\hbar\tau} e^{i(\varphi_+(x, y) - \varphi_-(x, y))} \right\} \right] . \quad (2.12)$$

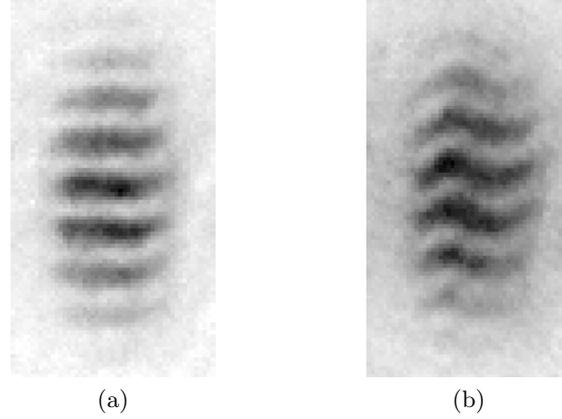


FIGURE 2.3 Exemples d’images d’interférence obtenues après temps de vol. L’image (a) a été prise à une température relativement basse et l’image (b) à température relativement haute.

Une image par absorption prise le long de l’axe y fournit donc le signal

$$n_{\text{int}}(x, z, \tau) = \int_{-L_y}^{L_y} \frac{dy}{2L_y} n(x, y, z, \tau) \quad (2.13)$$

$$\propto f'(z, \tau)^2 \times [1 + c(x) \cos(Mzd/\hbar\tau + \phi(x))] , \quad (2.14)$$

où L_y désigne le rayon de Thomas–Fermi du profil de densité dans la direction y . Le contraste c et la phase ϕ sont reliés aux profils de phase des quasi-condensats par la relation

$$C(x) = c(x) e^{i\phi(x)} = \int_{-L_y}^{L_y} \frac{dy}{2L_y} \exp(i(\varphi_+(x, y) - \varphi_-(x, y))) . \quad (2.15)$$

À basse température, le contraste est élevé et la phase varie peu le long de l’image, indiquant une bonne cohérence de phase (voir figure 2.3a). À plus haute température, la présence accrue d’excitations fait varier fortement la phase relative des deux nuages dans le plan x, y . Le contraste des interférences est diminué à cause de l’intégration le long de l’axe d’imagerie et la phase ϕ varie de manière importante avec x (voir figure 2.3b).

Lien avec la fonction de corrélation à un corps

Afin de faire apparaître la fonction de corrélation $g^{(1)}$, Polkovnikov *et al.* (2006) ont proposé d’étudier la quantité

$$|C'(L_x)|^2 = \left[\int_{-L_x}^{L_x} \frac{dx}{2L_x} C^*(x) \right] \times \left[\int_{-L_x}^{L_x} \frac{dx'}{2L_x} C(x') \right] , \quad (2.16)$$

où L_x représente une longueur d'intégration variable. Partant de (2.16) et (2.15), on obtient du fait de l'indépendance statistique des deux nuages :

$$\langle |C'(L_x)|^2 \rangle = \int \frac{dx}{2L_x} \frac{dx'}{2L_x} \frac{dy}{2L_y} \frac{dy'}{2L_y} \langle \exp(i(\varphi_+(x,y) - \varphi_+(x',y'))) \rangle \quad (2.17)$$

$$\times \langle \exp(i(\varphi_-(x',y') - \varphi_-(x,y))) \rangle$$

$$= \int \frac{dx}{2L_x} \frac{dx'}{2L_x} \frac{dy}{2L_y} \frac{dy'}{2L_y} \frac{|g^{(1)}(x-x', y-y')|^2}{n(x,y)n(x',y')}, \quad (2.18)$$

les intégrales sur $x(y)$ étant prises entre $-L_{x(y)}$ et $L_{x(y)}$. Dans un système spatialement uniforme et avec $L_x \ll L_y$, l'équation précédente est réduite à

$$\langle |C'(L_x)|^2 \rangle \simeq \int_{-L_x}^{L_x} \frac{dx}{2L_x} \frac{|g^{(1)}(x,0)|^2}{n^2} \propto L_x^{-2\alpha}. \quad (2.19)$$

Tout l'intérêt de la méthode proposée par Polkovnikov *et al.* réside dans le paramètre α , qui suffit à caractériser le comportement du système vis-à-vis de l'ordre à longue portée. Dans le régime fortement dégénéré, α se confond avec l'exposant $1/n_m \lambda^2 \ll 1$ de la décroissance algébrique de $g^{(1)}$. Dans le régime faiblement dégénéré au contraire la fonction de corrélation $g^{(1)}$ décroît exponentiellement avec une longueur de cohérence petite devant L_x et on montre aisément que $\alpha = 1/2$. À la température critique de la transition BKT, le saut de la densité superfluide doit se traduire par une variation brutale du paramètre α , qui doit passer de $1/2$ à $1/4$.

Résultats expérimentaux

Sur une image d'interférence atomique donnée, le contraste complexe $C(x)$ est obtenu par ajustement d'une colonne avec la fonction $S(x,z)$ définie par l'équation (2.14). Le domaine de variation de L_x est choisi de manière à n'utiliser que la partie centrale pratiquement uniforme des nuages, tout en vérifiant la condition $L_x \ll L_y \simeq 10 \mu\text{m}$. Le paramètre α est ensuite extrait d'un ajustement de la fonction $\langle |C'(L_x)|^2 \rangle$ résultant d'une moyenne sur un grand nombre d'expériences à T, μ donnés. La mesure de la température dans le réseau optique étant difficile, nous utilisons le contraste au centre du nuage $c_0 = \langle c(0) \rangle$ pour déterminer le degré de dégénérescence des atomes. La relation entre c_0 et T est bien entendue univoque. Lorsque $T \rightarrow 0$, le contraste tend idéalement vers 1, en pratique vers une valeur inférieure ($\simeq 0,5$) à cause de la résolution finie du système d'imagerie. Lorsque la température augmente, le contraste diminue régulièrement jusqu'à s'annuler lorsque le quasi-condensat disparaît.

La courbe $\alpha(c_0)$ finalement obtenue est présentée sur la figure 2.4. On y distingue clairement deux régimes. Aux températures les plus élevées, pour $c_0 < 0,13$, le paramètre α est approximativement constant, autour de 0,5. Aux températures les plus basses, pour $c_0 > 0,22$, α est également constant, mais autour de 0,25. La connexion entre ces deux régimes est relativement brutale et centrée en $c_0 \simeq 0,15$. Les valeurs de α de chaque côté de cette transition concordent avec les prédictions théoriques pour la transition BKT dans un système uniforme. L'accord quantitatif doit toutefois être pris avec précaution puisque les effets liés à la géométrie allongée des gaz étudiés pourraient être importants.

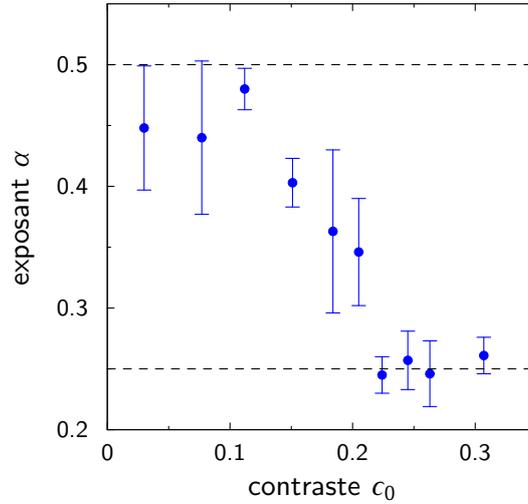


FIGURE 2.4 Exposant α caractérisant la décroissance de la fonction de corrélation $g^{(1)}$, en fonction du contraste au centre c_0 . Les lignes tiretées indiquent les prédictions théoriques pour le système uniforme. Les barres d'erreur représentent la déviation standard sur l'échantillon statistique.

2.2.4 Prolifération de vortex

Les vortex impliqués dans le mécanisme microscopique de la transition BKT sont clairement visibles sur un profil d'interférence lorsqu'ils sont libres car ils apparaissent alors comme des dislocations facilement identifiables¹. La figure 2.5 en montre deux exemples. Il nous a donc été possible, à partir des mêmes images qui ont servi à mesurer l'exposant α , d'étudier la probabilité d'excitation d'au moins un vortex en fonction du contraste c_0 . Le résultat de ces mesures est représenté sur la figure 2.6 et coïncide avec le scénario de la transition BKT : la probabilité d'excitation d'un vortex est très faible aux basses températures et croît rapidement lorsque $c_0 < 0,15$. Ce changement drastique de comportement du système intervient donc au moment même où la décroissance de $g^{(1)}$ passe du régime algébrique au régime exponentiel.

Il est bien entendu tentant d'estimer la densité dans l'espace des phases à laquelle se produit la transition observée pour la comparer avec la prédiction pour la transition BKT. Même sans thermométrie précise, nous pouvons estimer la température par ajustement des ailes du profil de densité après temps de vol. Pour $c_0 = 0,15$, nous obtenons ainsi $T = 290 \pm 40$ nK. Le nombre d'atomes est déterminé à partir de la taille du quasi-condensat à $N_c = 11\,000 \pm 3\,000$, correspondant à une densité au centre du nuage $n_{m,c} = (5 \pm 1) 10^9 \text{ cm}^{-2}$. Il vient alors $n_{m,c}\lambda^2 = 6 \pm 2$, en accord raisonnable avec la prédiction $n_{s,c}\lambda^2 = 4$.

1. Battelier (2007, chap. 2) propose une étude détaillée des profils d'interférence attendus en fonction de la position et du nombre de vortex.

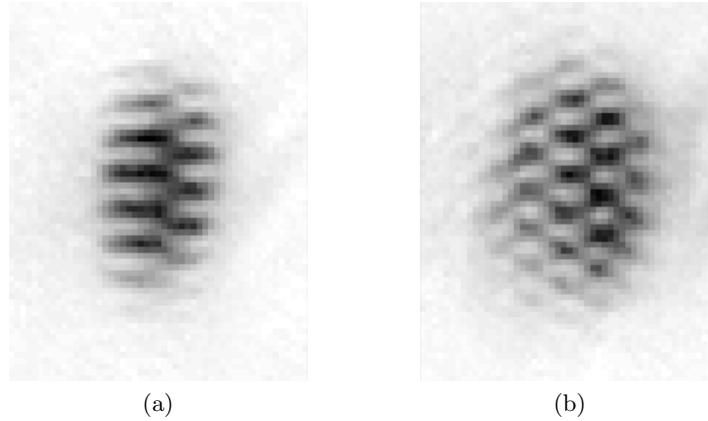


FIGURE 2.5 Exemples d’images d’interférence sur lesquelles sont visibles des dislocations que nous attribuons à des vortex libres. Sur l’image (a) un seul vortex est visible, présent dans l’un des deux nuages ayant interféré. L’image (b), relativement anecdotique, donne à voir plusieurs vortex régulièrement espacés.

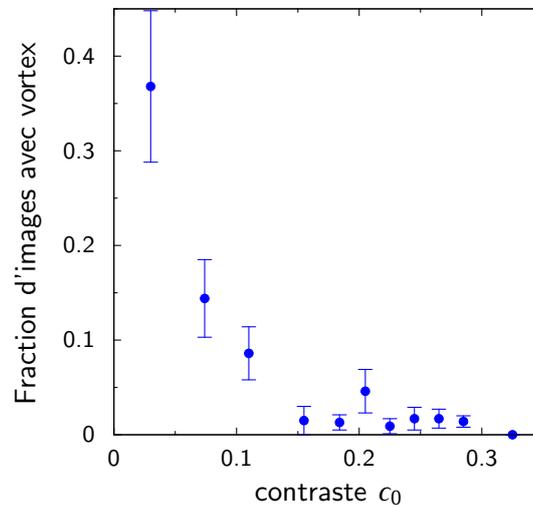


FIGURE 2.6 Probabilité d’observer au moins un vortex dans une image d’interférence en fonction du contraste central c_0 . Alors que pratiquement aucun vortex n’est visible pour $c_0 > 0,15$, ceux-ci prolifèrent dès que $c_0 < 0,15$. Les barres d’erreur représentent l’incertitude statistique, égale à la racine carré du nombre d’échantillons. Le critère retenu pour identifier les vortex est détaillé dans la référence [Hadzibabic *et al.* \(2006\)](#).

2.3 Détermination expérimentale du point critique

À la suite de ces observations, notre groupe a mis l'accent sur la détermination précise, quantitative, du point critique (Krüger *et al.*, 2007). Les expériences ont été réalisées sur le même montage et avec un protocole de préparation identique. Le pas du réseau optique a été ajusté de manière à ne charger que deux plans à basse température, conduisant à des fréquences de piégeage de 9,4, 125 et 3,0 kHz dans les directions x , y et z ; la constante d'interaction correspondante est $\tilde{\kappa} = 0,13$. La procédure suivie afin de mesurer le nombre d'atomes critique N_c consiste tout d'abord à charger dans le réseau optique un gaz très dégénéré, tel que $N > N_c$. Les atomes sont confinés dans le piège combiné pendant une durée variable de 1 à 10 s, la température étant maintenue constante à l'aide d'un champ radiofréquence de fréquence fixe. Pendant cette phase, le nombre d'atomes décroît progressivement sous l'effet des pertes inélastiques et la transition BKT est éventuellement franchie lorsque $N = N_c$. Enfin, le profil de densité après un temps de vol de 22 ms est enregistré grâce à une image par absorption.

2.3.1 Bimodalité

Pour les nombres d'atomes explorés, le profil de densité le long de l'axe z est bien représenté par une gaussienne dont la largeur correspond à l'énergie de point zéro, confirmant le caractère quasi-bidimensionnel des nuages. Pour $N < N_c$, le profil de densité selon x est lui aussi bien représenté par une gaussienne. Pour $N > N_c$ par contre, ce dernier montre clairement un caractère bimodal dont on peut rendre compte par la somme d'une gaussienne et d'une parabole, attendue à la limite de Thomas–Fermi. L'ajustement du profil bimodal permet de mesurer le nombre d'atomes total N et le nombre d'atomes dans le profil parabolique N_0 . La largeur de la partie gaussienne du profil est déterminée entièrement par la fréquence du champ radiofréquence. Par analogie avec le profil d'un gaz thermique, il en a été extrait une température effective T_{eff} : une gaussienne $\exp(-x^2/2x_T^2)$ correspond à une température $k_B T_{\text{eff}} = M\omega_x^2 x_T^2$. L'apparition de la bimodalité lorsque le nombre d'atomes total varie à température constante est facile à localiser avec précision et fournit une mesure du nombre d'atomes critique. Par exemple, pour $T_{\text{eff}} = 92 \pm 6$ nK, Krüger *et al.* trouvent $N_c^{\text{exp}} = 85\,000$. Ce nombre correspond au nombre total d'atomes dans le réseau.

2.3.2 Cohérence de phase

La transition observée dans l'expérience de Krüger *et al.* s'accompagne également de l'apparition de franges d'interférence dans le profil de densité. Le poids de la fréquence spatiale $k_0 = Md/\hbar\tau$ dans la transformée de Fourier selon z : $\tilde{n}(x, k_z, \tau) \propto \int dz n(x, z, \tau) \exp(-ik_z z)$, constitue une mesure quantitative permettant de déterminer le nombre d'atomes critique correspondant à l'apparition des franges. À la précision des mesures près, Krüger *et al.* le trouvent identique à celui correspondant à l'apparition de la bimodalité, conduisant à une localisation univoque du point critique.

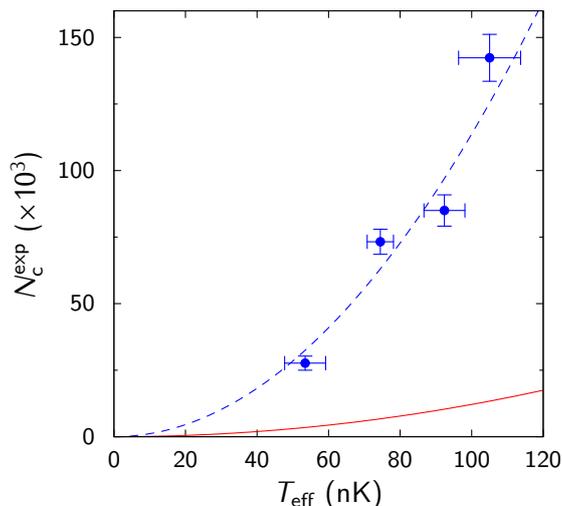


FIGURE 2.7 Nombre d’atomes critiques mesuré par Krüger *et al.* (2007) en fonction de la température effective. La courbe en trait plein représente la prédiction pour un gaz idéal dans un piège harmonique. La courbe en trait tireté figure un ajustement des données expérimentales par une parabole.

2.3.3 Comparaison avec la condensation dans un gaz idéal

Les nombres critiques ainsi obtenus sont visibles sur la figure 2.7 pour différentes températures. Nous avons également représenté le nombre critique pour la condensation dans le gaz idéal, en supposant d’une part que la température effective est égale à la température réelle, et d’autre part que seuls deux nœuds du réseau optique sont peuplés, et de manière égale, quelle que soit la température. Le désaccord est frappant, mettant clairement en évidence la nature spécifique de la transition de phase dans le gaz quasi-bidimensionnel en interaction. Une estimation beaucoup plus soignée du nombre critique pour la condensation du gaz idéal est détaillée dans la référence Hadzibabic *et al.* (2008) : le problème tridimensionnel est considéré, le potentiel réellement vu par les atomes est inclus et l’effet de la température finie est pris en compte. Le nombre $N_c^{\text{id,rés}}$ obtenu reste très éloigné de la valeur mesurée expérimentalement : supposant là encore $T = T_{\text{eff}}$, il est observé que $N_c^{\text{exp}}/N_c^{\text{id,rés}} = 5,3 \pm 1,2$.

2.4 Prévisions du modèle de champ moyen

Nous cherchons maintenant à rendre compte des observations de Krüger *et al.* par le biais d’un modèle semi-classique de champ moyen.

2.4.1 Modèle purement bidimensionnel

Les équations (2.6) et (2.5) fournissent un modèle théorique simple qui doit décrire convenablement un gaz quasi-bidimensionnel dans le régime faiblement dégénéré, où les fluctuations de densité sont celles d’un gaz thermique. Nous allons

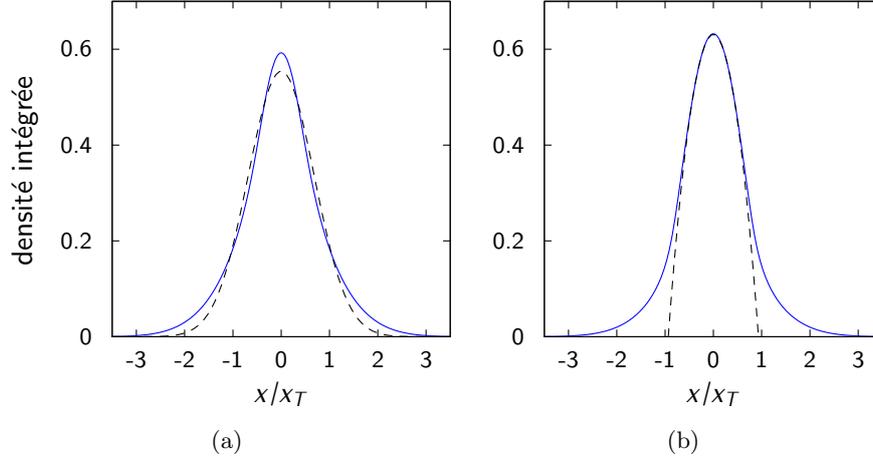


FIGURE 2.8 Profils de densité prédits par le modèle de champ moyen, intégrés selon l'axe y et normalisés à l'unité. (a) Profil pour un nombre d'atomes $N = 1,5 N_c^{\text{id}}$; contrairement aux observations de Krüger *et al.* (2007), son allure s'éloigne sensiblement d'une gaussienne (tracée en trait tireté). (b) Profil pour un nombre d'atomes $N = 3 N_c^{\text{id}}$; la bimodalité y est clairement apparente (le trait tireté représente la limite de Thomas–Fermi). Le système est supposé dans le niveau fondamental du potentiel V_z , la constante d'interaction réduite $\tilde{\kappa}$ est prise égale à 0,13 et les distances sont rapportées à la longueur caractéristique $x_T = (\omega_x^2 M \beta)^{-1/2}$.

étudier ici quelques prédictions de ce modèle jusqu'au point critique de la transition BKT.

Profil de densité

Réécrivant l'équation (2.6) sous la forme

$$n(\mathbf{r})\lambda^2 = -\ln \left(1 - Z e^{-\tilde{\kappa}n(\mathbf{r})\lambda^2/\pi} e^{-\beta V_\perp(\mathbf{r})} \right), \quad (2.20)$$

il apparaît clairement que la densité dans l'espace des phases ne dépend que du paramètre R défini par $R^2 = x^2/x_T^2 + y^2/y_T^2$, où $x_T = (\omega_x^2 M \beta)^{-1/2}$ et $y_T = (\omega_y^2 M \beta)^{-1/2}$. Le nombre total d'atomes pour une fugacité donnée est déterminé par la relation

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_\perp} \right)^2 \int_0^{+\infty} dR R n(R)\lambda^2, \quad (2.21)$$

le profil de densité étant solution de

$$n(R)\lambda^2 = -\ln \left(1 - Z e^{-\tilde{\kappa}n(R)\lambda^2/\pi} e^{-R^2/2} \right). \quad (2.22)$$

Il est intéressant de faire apparaître dans l'équation (2.21) le nombre d'atomes critique (2.2) pour la condensation dans le gaz idéal. On constate alors que le rapport N/N_c^{id} est déterminé uniquement par la fugacité et la constante de couplage.

Il est aisé de vérifier que le profil de densité que nous considérons se confond avec une gaussienne à la limite $n\lambda^2 \ll 1$. Lorsque l'on se rapproche du point critique, il s'en écarte toutefois notablement. Nous avons tracé sur la figure 2.8a le profil intégré, tel que vu sur une image par absorption, pour un nombre d'atomes égal à $1,5 N_c^{\text{id}}$: celui-ci apparaît plus piqué au centre, avec des ailes plus étendues. Ce modèle simple ne reproduit donc pas de manière satisfaisante les profils de densité observés par Krüger *et al.* (2007). Nous verrons bientôt que l'on peut rendre compte des profils expérimentaux en incluant dans le modèle l'excitation thermique résiduelle dans la direction z .

À titre de remarque, il est intéressant de noter que le profil (2.6) devient bimodal à la limite $n(0)\lambda^2 \gg 1$ (figure 2.8b). En effet le centre du nuage suit alors le profil de Thomas–Fermi :

$$\mu - 2\kappa^{2\text{D}}n(\mathbf{r}) = V_{\perp}(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

alors que les ailes sont gaussiennes. Un tel profil ne reproduit pas pour autant les données expérimentales car il surestime l'effet des interactions dans le régime fortement dégénéré. En effet, à la limite $n(0)\lambda^2 \gg 1$, les fluctuations de densité sont réduites et la limite de Thomas–Fermi prend en fait la forme $\mu - \kappa^{2\text{D}}n(\mathbf{r}) = V_{\perp}(\mathbf{r})$, sans le facteur 2.

Point critique

Dans une approximation de densité locale, le point critique de la transition BKT est atteint lorsque la densité au centre du système atteint la valeur critique n_c définie par (1.47). En intégrant le profil de densité correspondant, on peut en déduire le nombre d'atomes critique N_c^{cm} . Holzmann *et al.* (2007) ont ainsi établi la relation suivante, qui exprime le nombre d'atomes critique en fonction de la densité critique dans l'espace des phases et de la constante de couplage :

$$\frac{N_c^{\text{cm}}}{N_c^{\text{id}}} = 1 + \zeta n_c^2 \lambda^4, \quad \zeta = \frac{3\tilde{\kappa}}{\pi^3}. \quad (2.24)$$

Cette relation, initialement démontrée dans la limite des très faibles interactions $\tilde{\kappa} \ll 1$ grâce à un développement autour de la solution pour le gaz idéal, a pu être étendue par Holzmann (2008) à des valeurs arbitraires de $\tilde{\kappa}$. Son interprétation est claire dans les cas limites $\zeta = 0$ et $\zeta n_c \lambda^2 \gg 1$. Dans le premier cas, le gaz est idéal et la transition BKT se confond avec celle de Bose–Einstein. Le second cas correspond à la limite de Thomas–Fermi, où le profil de densité est donné par l'équation (2.23). Il est facile alors de constater que l'équation (2.24) exprime simplement notre hypothèse de départ, à savoir que la densité n_m au sommet de la parabole de Thomas–Fermi correspond à la densité critique n_c . La valeur expérimentale $\tilde{\kappa} = 0,13$ se trouve dans le régime intermédiaire : $N_c^{\text{cm}}/N_c^{\text{id}} = 1,80$; en termes de température, on obtient $T_c^{\text{cm}}/T_c^{\text{id}} = 0,75$. Enfin, il est important de noter que la relation (2.24) a été obtenue dans l'approximation de Hartree–Fock, c'est-à-dire avec un terme de champ moyen égal à $2\kappa^{2\text{D}}n$. Or il est connu qu'au point critique de la transition BKT les fluctuations de densité sont réduites (Safonov *et al.*, 1998; Kagan *et al.*, 2000; Prokof'ev *et al.*, 2001). La prédiction de Holzmann *et al.*, d'usage pratique, ne doit donc pas être considérée comme exacte.

2.4.2 Excitation thermique résiduelle dans la direction z

Profil de densité

Au voisinage du point critique, le désaccord entre les profils de densité expérimentaux, d'allure gaussienne, et ceux prédits par notre modèle, plus piqués, tiennent pour une part importante à l'excitation thermique résiduelle dans la direction z (Hadzibabic *et al.*, 2008; Holzmann *et al.*, 2008). Pour modéliser celle-ci nous avons proposé une approche mixte dans laquelle :

- les directions x, y sont traitées de manière semi-classique ;
- la direction z est traitée de manière quantique et dans l'approximation de Born-Oppenheimer, les variables x, y jouant le rôle de variables lentes.

Le profil de densité tridimensionnel est alors donné par l'équation

$$n^{3\text{D}}(x, y, z) = \sum_{\nu} |\phi_{\nu}(z|x, y)|^2 n_{\nu}^{2\text{D}}(x, y), \quad (2.25)$$

avec

$$n_{\nu}^{2\text{D}}(x, y) = -\frac{1}{\lambda^2} \ln \left(1 - Z e^{-\beta E_{\nu}(x, y)} \right). \quad (2.26)$$

Les modes propres axiaux $\phi_{\nu}(z|x, y)$, normalisés à 1, et leurs énergies $E_{\nu}(x, y)$ vérifient l'équation aux valeurs propres :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dz^2} + V_{\text{eff}}(x, y, z) \right] \phi_{\nu}(z|x, y) = E_{\nu}(x, y) \phi_{\nu}(z|x, y), \quad (2.27)$$

avec

$$V_{\text{eff}}(x, y, z) = V_{\perp}(x, y) + V_z(z) + 2\kappa^{3\text{D}} n^{3\text{D}}(x, y, z). \quad (2.28)$$

Nous avons résolu ce système d'équations couplées par itération, en partant d'une fonction d'essai pour le profil de densité tridimensionnel. Le profil de densité qui en résulte peut effectivement être bien ajusté par une gaussienne (Hadzibabic *et al.*, 2008). La validité de ce traitement théorique simple est confirmée par comparaison avec des simulations Monte-Carlo quantiques « exactes » effectuées par Holzmann et Krauth (2008) ; ces simulations traitent le problème tridimensionnel complet et prennent donc intrinsèquement en compte l'excitation dans la direction z .

Température effective

La méthode que nous venons de présenter nous permet également de relier à la température réelle la température effective déterminée à partir de la largeur de l'ajustement gaussien des profils de densité. Pour ce faire, nous avons modélisé le potentiel créé par le réseau optique au-delà de l'approximation harmonique (voir Hadzibabic *et al.*, 2008). Pour des températures réelles comprises entre 100 et 200 nK, nous observons que le rapport T_{eff}/T est égal à $0,65 \pm 0,05$. L'incertitude de 0,05 affecte la prédiction du nombre d'atomes critique avec l'équation (2.24) d'environ 15 %.

Point critique

Le fait que quelques niveaux d'énergie soient peuplés dans la direction z affecte dans une moindre mesure le nombre d'atomes critique pour atteindre la densité critique au centre du piège. Celui-ci s'en trouve augmenté d'environ 15 % et l'on trouve maintenant d'après (2.24) $N_c^{\text{cm}}/N_c^{\text{id}} = 2,1$ (Holzmann et Krauth, 2008; Holzmann *et al.*, 2008). Les données expérimentales s'accordent relativement bien avec cette prédiction si le nombre critique pour le gaz idéal est estimé à la température effective obtenue au paragraphe précédent, et non à la température réelle (Hadzibabic *et al.*, 2008).

Méthodes dérivées

À la limite des très faibles interactions, lorsque $\mu \ll k_B T$, l'équation (2.27) peut être résolue à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations en a_s . Les fonctions $\phi_\nu(z)$ correspondent alors simplement aux modes propres de l'oscillateur harmonique et les énergies $E_\nu(x, y)$ vérifient

$$E_\nu(x, y) = V_\perp(x, y) + \hbar\omega_\nu + 2\kappa^{3\text{D}} \int dz n^{3\text{D}}(x, y, z) |\phi_\nu(z)|^2 \quad (2.29)$$

$$= V_\perp(x, y) + \hbar\omega_\nu + \sum_{\nu'} 2\kappa^{3\text{D}} n_{\nu'}^{2\text{D}}(x, y) \int dz |\phi_{\nu'}(z)|^2 |\phi_\nu(z)|^2. \quad (2.30)$$

L'énergie de champ moyen tridimensionnel $2\kappa^{3\text{D}} n^{3\text{D}}$ apparaît alors comme la somme des énergies de champ moyen bidimensionnel $2\kappa_{\nu\nu'}^{2\text{D}} n_{\nu'}^{2\text{D}}$ liées à l'interaction des modes entre eux, les constantes de couplage étant définies par

$$\kappa_{\nu\nu'}^{2\text{D}} = \kappa^{3\text{D}} \int dz |\phi_\nu(z)|^2 |\phi_{\nu'}(z)|^2. \quad (2.31)$$

Pour les paramètres expérimentaux présentés dans ce chapitre, cette approche simplifiée donne des résultats très similaires à ceux obtenus dans l'approximation de Born–Oppenheimer (Hadzibabic *et al.*, 2008). Signalons que Bisset *et al.* (2009) ont développé la même approche.

Holzmann *et al.* (2008) ont utilisé une approximation supplémentaire à partir de l'équation (2.30). Les constantes de couplage $\kappa_{\nu\nu'}^{2\text{D}}$ sont supposées indépendantes des modes axiaux, ce qui conduit à la substitution

$$\sum_{\nu'} 2\kappa_{\nu\nu'}^{2\text{D}} n_{\nu'}^{2\text{D}} \longrightarrow 2\kappa_{\text{eff}}^{2\text{D}} \sum_{\nu'} n_{\nu'}^{2\text{D}}. \quad (2.32)$$

La constante de couplage effective est définie par

$$\kappa_{\text{eff}}^{2\text{D}} = \kappa^{3\text{D}} \int dz n_z^2(z), \quad (2.33)$$

où n_z représente le profil de densité selon z , normalisé à l'unité. Dans le régime faiblement dégénéré, ce dernier est très proche du profil de Boltzmann pour un gaz parfait : $n_z(z) \propto \exp(-\beta M \omega_z^2 z^2 / 2)$.

Conclusion

Nous avons tenté dans cette partie de dresser un portrait cohérent du gaz de Bose bidimensionnel, fondé sur les observations expérimentales réalisées dans notre groupe. Nous avons clairement mis en évidence l'existence d'une transition entre deux états aux propriétés de cohérence distinctes au voisinage d'un certain nombre d'atomes critique N_c . Au-dessus de N_c , l'état du système se caractérise à la fois par une structure bimodale dans le profil de densité et par une certaine cohérence de phase, qui se manifeste par des interférences marquées entre les nuages après temps de vol. Au-dessous de N_c , des vortex libres sont excités et la cohérence de phase est perdue. Le rôle essentiel joué par les interactions dans cette transition se manifeste par le fait que le nombre d'atomes critique est notablement plus grand que celui pour lequel le gaz parfait condense ; la prolifération de vortex au-dessus du nombre critique indique plutôt que la transition rencontrée est celle de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless.

Pour modéliser la transition, une approche simple consiste à supposer qu'elle se produit lorsque la densité au centre du nuage atteint la valeur critique calculée par Prokof'ev *et al.* (2001). Si l'on modélise le profil de densité dans l'approximation semi-classique, les interactions étant prises en compte par un terme de champ moyen dans l'approximation de Hartree–Fock, il est possible alors d'en déduire la position du point critique. Cette prédiction s'accorde bien aux observations mais la difficulté à mesurer avec précision la température du système empêche une comparaison des nombres d'atomes critiques à mieux que 15 %. Finalement, il faut noter que la forme exacte des profils de densité observés au voisinage du point critique diffère sensiblement de celle prédite par le modèle de champ moyen. Nous avons pu montrer que la principale raison en est l'excitation thermique résiduelle du mouvement le long de l'axe de fort confinement. Pour cela, nous avons développé un modèle mixte dans lequel le mouvement dans le plan radial est traité de manière semi-classique et le mouvement axial de manière quantique, dans l'approximation de Born–Oppenheimer. Les interactions y sont prises en compte au niveau tridimensionnel, évitant ainsi la difficulté à écrire une énergie de champ moyen bidimensionnelle entre les différents modes axiaux.

Peu après nos travaux, l'équipe de William D. Phillips au NIST a également mené des expériences sur le gaz de Bose bidimensionnel (Cladé *et al.*, 2009). Par rapport à celui dont nous disposons à l'École normale supérieure, le système du NIST présente trois différences importantes : la constante de couplage y est beaucoup plus faible (0,02 au lieu de 0,13), le système est marginalement bidimensionnel du point de vue de la température ($k_B T \sim 2\hbar\omega_z$) et la géométrie dans le plan radial est isotrope. Leur montage expérimental leur permet en outre d'observer le profil de

densité d'un système unique selon l'axe perpendiculaire au nuage, évitant l'intégration le long d'un axe du plan qui caractérise nos observations. Cette équipe observe également la transition entre une phase présentant une certaine cohérence à longue portée et une phase sans cohérence avec des vortex libres. La transition est précédée de l'apparition d'une structure bimodale dans le profil de densité in-situ. Lorsque le nombre d'atomes augmente, la largeur de la structure centrale commence par diminuer, puis, après un point d'inflexion, elle finit par augmenter. L'équipe du NIST situe le point critique au niveau de ce point d'inflexion. La valeur de la constante de couplage joue certainement un rôle important dans ce comportement, apparemment plus complexe que celui que nous avons observé. Au NIST, celle-ci est très petite et le système est proche d'un gaz parfait. On s'attend donc à ce que la densité au centre du piège augmente rapidement à l'approche de N_c^{id} , rappelant la divergence attendue pour le gaz parfait ; le profil de densité peut ainsi apparaître bimodal pour $N = N_c^{\text{id}}$, c'est-à-dire avant la transition BKT. À l'ENS, la constante de couplage est beaucoup plus grande et le comportement du système est éloigné de celui du gaz parfait. Les interactions élargissent le profil de densité, qui apparaît nettement moins piqué que celui du NIST pour $N = N_c^{\text{id}}$. Si l'on ajoute à cela l'intégration du profil par l'imagerie, on comprend que la bimodalité n'apparaisse qu'au point critique dans notre expérience. La figure 2.9 résume cet argument ; y sont représentés les profils de densité prédits par le modèle de champ moyen (2.6) pour les deux valeurs des constantes de couplage, à la fois pour $N = N_c^{\text{id}}$ et pour $N = N_c^{\text{cm}}$.

L'étude quantitative de la région critique reste l'une des principales tâches à accomplir, et fait l'objet d'expériences en cours dans notre équipe. À l'heure actuelle, les modèles et prédictions voient leur domaine de validité restreints à des valeurs de la constante de couplage très inférieures à celle qui caractérise notre système. Les expériences ont donc un rôle particulièrement important à jouer pour caractériser la transition. D'autres aspects de la transition de phase du gaz bidimensionnels restent à explorer par ailleurs. Le rôle exact du potentiel de confinement dans le plan doit par exemple être précisé. Les expériences récentes ont été menées dans un potentiel harmonique, qui modifie la densité d'états et rend le système inhomogène ; nous prévoyons à moyen terme de réaliser des expériences dans un potentiel à fond plat, plus proche des modèles théoriques. Un tel potentiel peut être produit par un faisceau laser dont le profil d'intensité est façonné par optique de Fourier, selon une technique déjà mise en œuvre dans notre nouveau montage expérimental (voir le chapitre 4). Une autre question ouverte concerne les aspects temporels de la cohérence de phase : comment l'ordre rémanent apparaît ou disparaît-il lorsque la dimensionnalité du système est changée brutalement ? Ces interrogations sont suffisamment pressantes pour que de nouvelles expériences soient dédiées au gaz de Bose bidimensionnel : à Harvard par exemple dans le groupe de Markus Greiner (Gillen *et al.*, 2009), ainsi qu'au JILA dans le groupe d'Eric Cornell, qui a déjà observé de très belle manière la transition BKT dans un réseau optique simulant un réseau bidimensionnel de jonctions Josephson (Schweikhard *et al.*, 2007).

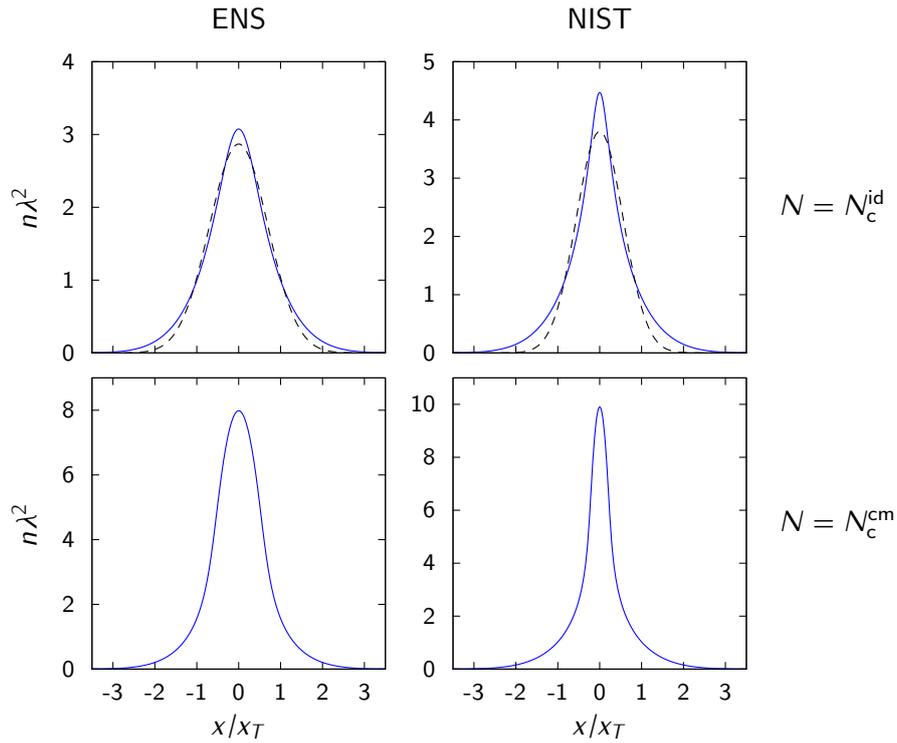


FIGURE 2.9 Profils de densité prédit par le modèle de champ moyen. Première colonne : constante de couplage de l'ENS ($\tilde{\kappa} = 0.13$). Seconde colonne : constante de couplage du NIST ($\tilde{\kappa} = 0.02$). Première ligne : nombre d'atomes correspondant au seuil de condensation du gaz parfait N_c^{id} ; le trait tiré est un ajustement par une gaussienne. Seconde ligne : nombre d'atomes correspondant au seuil de la transition BKT N_c^{id} , prédit par la relation (2.26). Du fait de la très faible constante de couplage, le gaz du NIST est assez proche du gaz parfait et la densité au centre croît très vite à l'approche de N_c^{id} . À l'ENS, les interactions jouent un rôle plus important et le profil de densité est proche d'une gaussienne au seuil de condensation du gaz parfait.

Publications

Observation of Phase Defects in Quasi-Two-Dimensional Bose-Einstein Condensates

Sabine Stock, Zoran Hadzibabic, Baptiste Battelier, Marc Cheneau, and Jean Dalibard

Laboratoire Kastler Brossel, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France

(Received 22 June 2005; published 1 November 2005)

We have observed phase defects in quasi-2D Bose-Einstein condensates close to the condensation temperature. Either a single or several equally spaced condensates are produced by selectively evaporating the sites of a 1D optical lattice. When several clouds are released from the lattice and allowed to overlap, dislocation lines in the interference patterns reveal nontrivial phase defects.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.95.190403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.190403)

PACS numbers: 03.75.Lm, 32.80.Pj, 67.40.Vs

Low-dimensional bosonic systems have very different coherence properties than their three-dimensional (3D) counterparts. In a spatially uniform one-dimensional (1D) system, a Bose-Einstein condensate (BEC) cannot exist even at zero temperature. In two dimensions (2D) a BEC exists at zero temperature, but phase fluctuations destroy the long range order at any finite temperature. At low temperatures the system is superfluid but it contains a finite density of bound vortex-antivortex pairs. At the Kosterlitz-Thouless (KT) transition temperature [1–3] the unbinding of the pairs becomes favorable and the system enters the normal state.

In recent years, great efforts have been made to study the effects of reduced dimensionality in trapped atomic gases [4]. In both 1D and 2D, the density of states in a harmonic trap allows for Bose-Einstein condensation at finite temperature. In contrast to 1D and elongated 3D systems [5–13], the coherence properties of 2D atomic BECs have so far been explored only theoretically [14–17]. In previous experiments, quasi-2D BECs [6,18–20] or ultracold clouds [21] were produced in specially designed “pancake” trapping potentials. The sites of a 1D optical lattice usually also fulfill the criteria for 2D trapping [22–25]; the difficulty in these systems is to suppress tunneling between the sites, and to address or study them independently [26,27].

In this Letter, we report the production of an array of individually addressable quasi-2D BECs. By selectively evaporating the atoms from the sites of a 1D optical lattice, we can produce either a single or several equally spaced condensates. The distinct advantage of this approach is that it opens the possibility to study the phase structures in quasi-2D BECs interferometrically. We have observed interference patterns which clearly reveal the presence of phase defects in condensates close to the ideal gas Bose-Einstein condensation temperature. We discuss the possible underlying phase configurations.

Our experiments start with an almost pure ^{87}Rb condensate with 4×10^5 atoms in the $F = m_F = 2$ hyperfine state, produced by radio-frequency (rf) evaporation in a cylindrically symmetric Ioffe-Pritchard (IP) magnetic trap. The trapping frequencies are $\omega_z/2\pi = 12$ Hz axially, and $\omega_\perp/2\pi = 106$ Hz radially, leading to cigar-shaped con-

densates with a Thomas-Fermi length of $90 \mu\text{m}$ and a diameter of $10 \mu\text{m}$.

After creation of the BEC we ramp-up the periodic potential of a 1D optical lattice, which splits the 3D condensate into an array of independent quasi-2D BECs [see Fig. 1(a) and [24]]. The lattice is superimposed on the magnetic trapping potential along the long axis (z) of the cigar. Two horizontal laser beams of wavelength $\lambda = 532$ nm intersect at a small angle θ to create a standing wave with a period of $d = \lambda/[2 \sin(\theta/2)]$. The blue-detuned laser light creates a repulsive potential for the atoms, which accumulate at the nodes of the standing wave, with the radial confinement being provided by the magnetic potential. Along z , the lattice potential has the shape $V(z) = V_0 \cos^2(\pi z/d)$, with $V_0/h \approx 50$ kHz.

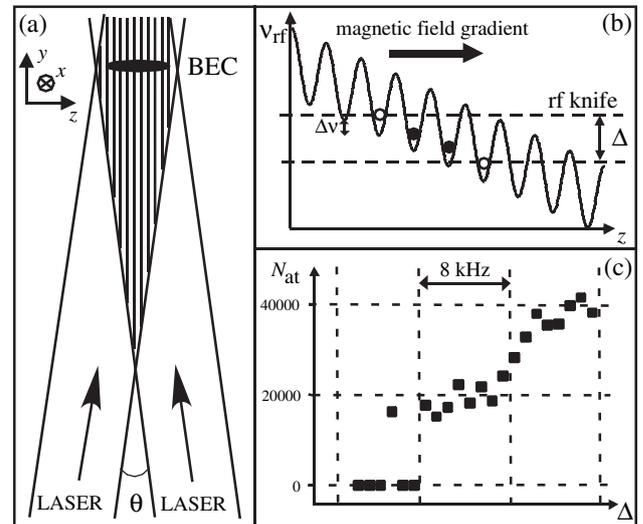


FIG. 1. An array of individually addressable quasi-2D BECs. (a) A 1D optical lattice splits a cigar-shaped 3D condensate into 15–30 independent quasi-2D BECs. (b) A magnetic field gradient along the lattice axis allows us to selectively address the sites by an rf field. We evaporate the atoms from all the sites except those within a frequency gap Δ . (c) Steps in the BEC atom number N_{at} as a function of Δ , corresponding to 0, 1, and 2 sites spared from evaporation. Each data point represents a single measurement.

For the work presented here we have used two lattice periods, $d_1 = 2.7 \mu\text{m}$ and $d_2 = 5.1 \mu\text{m}$. The respective oscillation frequencies along z are $\omega_1/2\pi = 4.0 \text{ kHz}$ and $\omega_2/2\pi = 2.1 \text{ kHz}$. At the end of the experimental cycle (described below), the BEC atom numbers in the most populated, central sites are $N_1 \approx 10^4$ and $N_2 \approx 2 \times 10^4$. We numerically solve the Gross-Pitaevskii equation to get the corresponding chemical potentials $\mu_1/h = 2.2 \text{ kHz}$ and $\mu_2/h = 2.5 \text{ kHz}$, where the $\hbar\omega_{1,2}/2$ zero-point offset is suppressed in our definition of μ . In the smooth cross-over from 3D to 2D, the condensates in the shorter period lattice are thus well in the 2D regime with $\mu_1/(\hbar\omega_1) = 0.6$, while for the clouds in the longer period lattice this ratio is 1.2.

Since the radial trapping is purely magnetic, we can remove atoms from the lattice by rf induced spin flips to untrapped Zeeman states. In order to address the lattice sites selectively, we apply a magnetic field gradient b' along z [27,28]. This creates an energy gradient along the lattice direction, and splits the resonant frequencies for evaporation of atoms from two neighboring sites by $\Delta\nu_{1,2} = \mu_B b' d_{1,2}/(2\hbar)$, where μ_B is the Bohr magneton [Fig. 1(b)]. We use gradients up to 26 G/cm, corresponding to $\Delta\nu_1 = 5 \text{ kHz}$ and $\Delta\nu_2 = 9 \text{ kHz}$. These splittings are larger than the chemical potentials $\mu_{1,2}$, and the rf Rabi frequency ($\approx 2 \text{ kHz}$). The lattice sites can thus be addressed individually.

The experimental routine to produce an adjustable number of condensates starts with a slow, 200 ms ramp-up of the gradient b' . As illustrated in Fig. 1(b), we then evaporate the atoms from both ends of the cigar, sparing only the central sites within a variable rf frequency gap Δ . We perform this evaporation in 100 ms, switch off the rf field, and ramp b' back to zero in another 200 ms [29]. During this time, some heating of the remaining clouds occurs, and they reach a temperature slightly below the condensation temperature, as we discuss in detail below.

To verify that we can address the lattice sites individually, we measure the total number of condensed atoms left in the trap as a function of Δ . An example of such a plot is shown in Fig. 1(c) for $d_2 = 5.1 \mu\text{m}$ and $b' = 22 \text{ G/cm}$. The magnetic and optical trap were switched off simultaneously and the atomic density distribution was recorded by absorption imaging along z after 18 ms of time-of-flight (TOF) expansion. The atom number increases in steps of $N_2 = 2 \times 10^4$ every 8 kHz, in agreement with the expected $\Delta\nu_2$. We see three clear plateaus corresponding to 0, 1, and 2 sites spared from evaporation. For the shorter lattice period the frequency splitting is comparable to the chemical potential. This results in some rounding off of the steps, but the plateaus remain visible.

In the first set of experiments, we have characterized the free expansion of a single quasi-2D BEC [30]. The clouds were released from the $5.1 \mu\text{m}$ period lattice and imaged after up to 18 ms of TOF. We extract the axial (l) and the radial (w) rms size of the cloud from Gaussian fits to the

density distribution. As might be expected, the observed expansion is predominantly one dimensional, along the axial direction. For short expansion times, $t \leq 3 \text{ ms}$, the apparent axial size is limited by our imaging resolution, but for longer times it follows the linear scaling $l = vt$, with $v = 2.7 \text{ mm/s}$. This value is comparable to the calculated velocity in the harmonic oscillator ground state along z , $v_g = \sqrt{\hbar\omega_2/(2m)} = 2.1 \text{ mm/s}$, where m is the atomic mass. We find that the radial expansion can be described by the empirical law $w = w_0\sqrt{1 + (t/t_0)^2}$, with $w_0 = 4.4 \mu\text{m}$ and $t_0 = 5.7 \text{ ms}$. The same law describes the radial expansion of a cigar-shaped 3D condensate, with $t_0 = \omega_{\perp}^{-1}$ [31], where $\omega_{\perp}^{-1} = 1.5 \text{ ms}$ for our trap. The radial expansion of our 2D gas is slower by a factor of ≈ 4 compared to the 3D case, because the fast axial expansion results in an almost sudden ($\omega_2^{-1} = 76 \mu\text{s}$) decrease of the atomic density, and only a small fraction of the interaction energy is converted into radial velocity.

In the second set of experiments, we have studied interference of independent quasi-2D BECs. Between two and eight clouds were released from the $2.7 \mu\text{m}$ period lattice and allowed to expand and overlap [32]. The resulting interference patterns were recorded by absorption imaging along the radial direction y . Because of the finite imaging resolution we observe only the first harmonic of the interference pattern with period $\hbar t/(md_1)$. Each image is thus the incoherent sum of the pairwise interferences of nearest-neighbor condensates [24].

Interference of equally spaced, independent BECs produces straight interference fringes [Fig. 2(a)] as long as each BEC has a spatially uniform phase [24,33]. The main result of this Letter is the observation of topologically different patterns, which reveal the presence of phase defects in quasi-2D condensates. Striking examples are ‘‘zipper’’ patterns [Fig. 2(b)], where the fringe phase changes abruptly by π across a dislocation line parallel to z . On both sides of the dislocation, the fringe contrast is as high as in Fig. 2(a). We also observe ‘‘comb’’ patterns [Fig. 2(c)], which show a dislocation with high fringe

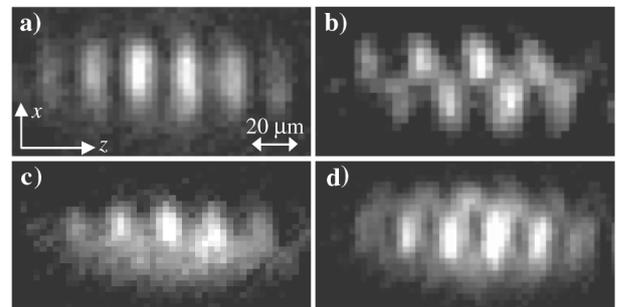


FIG. 2. Phase defects in quasi-2D condensates. Interference of four (a)–(c) and seven (d) independent BECs is observed 12 ms after release from the $2.7 \mu\text{m}$ period lattice. Dislocation lines in the interference patterns (b)–(d) reveal the presence of phase defects in quasi-2D condensates.

contrast on one side of the line, and vanishing on the other. Finally, we sometimes see “braid” structures with two dislocation lines [Fig. 2(d)]. Single dislocations (zippers and combs) are clearly visible in about 15% of 200 experiments with four interfering clouds [34]. To verify that the occurrence of defects is an equilibrium property of the system, we have checked that dislocations are still observed when holding the clouds in the lattice for 500 ms after ramping down the gradient b' .

The simplest phase configuration which can produce a sharp dislocation line is a single vortex in one of the condensates [see also [35–39]]. In the case of two interfering BECs, one can show that a centered vortex always leads to a zipper pattern [see a simulation of the expected pattern in Fig. 3(a)]. The zipper is indeed the only type of dislocation we clearly observe with two clouds. When more than two BECs interfere, the presence of a single vortex can result both in a zipper and in a comb pattern, depending on the phases of the other condensates. In Fig. 3(b) we show a numerical simulation with four BECs leading to a comb. Increasing the number of interfering BECs enhances the probability that some of them contain defects [40], but the interpretation of images also becomes increasingly difficult. Further, for a large number of clouds, a single defect will not produce a clear dislocation line in the first harmonic of the interference pattern, because it affects only the interference with the two neighboring BECs. Already with four clouds, only half of 100 simulations with a vortex show clear zipper- or comb-type dislocations. The other half shows weaker dislocations which are not easily distinguishable from straight interference fringes.

Despite the agreement between simulations involving a vortex and the observed patterns, we point out that it is in general not possible to unambiguously deduce the underlying phase configuration from an interference image. For example, a dislocation line could also come from a dark soliton, where the phase of one of the BECs changes by π across a line parallel to the imaging axis. In future experiments simultaneous imaging along a second radial direction could allow us to discriminate between different possible phase structures leading to the observed interference patterns.

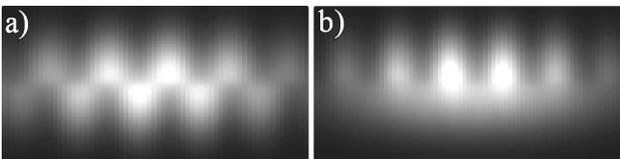


FIG. 3. Examples of numerical simulations of two (a) and four (b) interfering condensates. In both cases one randomly chosen BEC has a phase factor $e^{i\varphi}$ corresponding to a centered vortex, and the others have randomly chosen uniform phases. For simplicity, we model the clouds as Gaussian wave packets and neglect interactions during the expansion. The images are convolved with a Gaussian of $4 \mu\text{m}$ rms width to simulate the finite imaging resolution.

So far we could not observe a clear signature of vortices in images of single condensates taken along the axial direction z . We suspect that this is difficult because of the expansion properties of a 2D gas. Rotating 3D BECs, in which vortices are readily detected after TOF [41], expand mostly radially, while our clouds expand mostly axially. Therefore, any small misalignment with the imaging axis will significantly reduce the contrast. Interferometric detection along a radial direction offers a fundamentally superior signal, because a localized defect affects the appearance of the whole image.

It is important to assess the temperature of the clouds in which the observed phase defects appear. Precise thermometry at the end of the experimental cycle is difficult, because the thermal cloud is very dilute. However, we can estimate lower and upper bounds for the temperature. During the 500 ms selective evaporation routine, the clouds are heated due to three-body recombination, and the only constant source of cooling is the finite lattice depth; atoms with an energy larger than V_0 are accelerated away by the magnetic field gradient [Fig. 1(b)]. Assuming the largest realistic evaporation parameter $\eta = V_0/(kT) = 10$, we get a lower bound for the temperature $T_{\min} \approx 250$ nK. To get an upper bound we note that at the beginning of the experiment the condensed fraction is certainly above 50%. During the experimental cycle the number of condensed atoms in the remaining sites drops by a factor of ≈ 2 . This means that, even if we neglect losses in the total atom number, the final condensed fraction cannot be less than 25%. Using the measured number of condensed atoms and integrating the Bose distribution over the density of states in the lattice, we get $T_{\max} \approx 500$ nK. Since the number of thermal atoms is different at T_{\min} and T_{\max} , the two bounds correspond to different condensation temperatures T_c , and the estimated temperature range is more clearly expressed as $0.7 \leq T/T_c \leq 0.9$. In this temperature range $kT \gtrsim \hbar\omega_{1,2}$, so the thermal clouds are not fully in the 2D regime.

The fact that the clouds are close to T_c is probably essential for the understanding of our observations, and a systematic temperature study will be the subject of future work. The probability for a thermal excitation of the system into a vortex state is $\propto e^{-F/kT}$, where $F = E - TS$ is the free energy associated with the excitation, E the energy, and S the entropy. Here we estimate the conditions for F/kT to be of order unity. For a vortex in the center of the condensate, $E \sim N[(\hbar\omega_{\perp})^2/\mu] \ln(R/\xi)$ [37], where N is the BEC atom number, R the size of the condensate, and $\xi = \hbar/\sqrt{2m\mu}$ the size of the vortex core. Equivalently, $E/(kT) \sim (1/2)n_0\lambda^2 \ln(R/\xi)$, where n_0 is the peak 2D density of the BEC and λ is the thermal wavelength $\hbar/\sqrt{2\pi mkT}$. The number of distinguishable positions for a straight vortex of size ξ in a region of size R is $\sim R^2/\xi^2$, and the associated entropy is $S/k \sim 2 \ln(R/\xi)$. In this estimate $F/kT \propto (n_0\lambda^2 - 4)$ vanishes for $n_0\lambda^2 = 4$. In our experiment $n_0\lambda^2 \sim 10\text{--}20$ is a few times higher than

this value. However, already this crude agreement suggests that the thermal excitation of vortices might be possible in our system.

Thermal excitation of a tightly bound vortex-antivortex pair [17] is more likely than that of a single vortex. In that case the entropy is comparable and the energy is typically lower by the logarithmic factor $\ln(R/\xi)$, in our case ~ 4 . These pairs are difficult to detect with our interferometric scheme since they create only small phase slips in the fringe pattern. However, they can play a significant role by screening the velocity field of a single vortex, thus lowering its energy and making its appearance more likely [1].

The fact that $\ln(R/\xi)$ is not large compared to 1 underlines the mesoscopic nature of our system. In a homogeneous 2D system with $R \rightarrow \infty$, both the energy and the entropy of a free vortex diverge as $\ln(R)$, and the two contributions to the free energy cancel at the KT transition temperature T_{KT} . Below T_{KT} only vortex-antivortex pairs are present, while above T_{KT} a large density of free vortices appears and suppresses superfluidity. In our case, we expect this phase transition to be replaced by a gradual increase of the average number of free vortices with temperature. For $F \sim kT$, the vortex number can show large fluctuations and two condensates produced under identical experimental conditions can have qualitatively different wave functions.

In conclusion, by selectively addressing individual sites of a 1D lattice, we have produced both a single and several equally spaced quasi-2D BECs. We have characterized the free expansion of a single BEC, and have interferometrically observed clear evidence for the presence of phase defects in about 10% of 800 condensates. While our observations can be explained by the presence of thermally excited vortices in the system, this does not exclude other scenarios and we hope that our experiments will stimulate further theoretical work.

We thank the ENS ‘‘cold atoms’’ group for useful discussions. S. S. acknowledges support from the Studienstiftung des deutschen Volkes and the DAAD, and Z. H. from a Chateaubriand grant and the EU (Contract No. MIF1-CT-2005-00793). This work is partially supported by CNRS, Région Ile de France, and ACI Nanoscience. Laboratoire Kastler Brossel is a Unité de Recherche de l’Ecole normale supérieure et de l’Université Pierre et Marie Curie, associée au CNRS.

-
- [1] J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973).
 [2] D.J. Bishop and J.D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1727 (1978).
 [3] A. I. Safonov, S. A. Vasilyev, I. S. Yasnikov, I. I. Lukashevich, and S. Jaakkola, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4545 (1998).
 [4] *Quantum Gases in Low Dimensions*, edited by L. Pricoupenko, H. Perrin, and M. Olshanii [*J. Phys. IV (France)* **116**, 1 (2004)].

- [5] F. Schreck *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
 [6] A. Görlitz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
 [7] S. Dettmer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160406 (2001).
 [8] I. Shvarchuck *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270404 (2002).
 [9] S. Richard *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010405 (2003).
 [10] B. Laburthe Tolra *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 190401 (2004).
 [11] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 130403 (2004).
 [12] B. Paredes *et al.*, *Nature (London)* **429**, 277 (2004).
 [13] T. Kinoshita, T. Wenger, and D.S. Weiss, *Science* **305**, 1125 (2004).
 [14] D.S. Petrov, M. Holzmann, and G.V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2551 (2000).
 [15] Y. Kagan *et al.*, *Phys. Rev. A* **61**, 043608 (2000).
 [16] J.O. Andersen, U.A. Khawaja, and H.T.C. Stoof, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 070407 (2002).
 [17] T.P. Simula, M.D. Lee, and D.A.W. Hutchinson, *cond-mat/0412512*.
 [18] V. Schweikhard *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040404 (2004).
 [19] D. Rychtarik, B. Engeser, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 173003 (2004).
 [20] N.L. Smith, W.H. Heathcote, G. Hechenblaikner, E. Nugent, and C.J. Foot, *J. Phys. B* **38**, 223 (2005).
 [21] Y. Colombe, E. Knyazchyan, O. Morizot, B. Mercier, V. Lorent, and H. Perrin, *Europhys. Lett.* **67**, 593 (2004).
 [22] C. Orzel, A.K. Tuchman, M.L. Fenselau, M. Yasuda, and M.A. Kasevich, *Science* **291**, 2386 (2001).
 [23] S. Burger *et al.*, *Europhys. Lett.* **57**, 1 (2002).
 [24] Z. Hadzibabic, S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 180403 (2004).
 [25] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, C. Schori, and T. Esslinger, *J. Low Temp. Phys.* **138**, 635 (2005).
 [26] H. Ott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 120407 (2004).
 [27] D. Schrader *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 150501 (2004).
 [28] The gradient is produced by a pair of coils in anti-Helmholtz configuration. Their quadrupole field splits the radial trap frequencies $\omega_{x,y}$ by 20% for $b' = 26$ G/cm.
 [29] To improve addressability we reduce the gravitational sag to 6 μm for the evaporation of individual sites. This is achieved by ramping the axial bias field of the IP trap simultaneously with the gradient ramps.
 [30] G. Hechenblaikner, J.M. Krueger, and C.J. Foot, *Phys. Rev. A* **71**, 013604 (2005).
 [31] Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
 [32] Comparable results were obtained in experiments performed with the lattice of period $d_2 = 5.1$ μm .
 [33] M.R. Andrews *et al.*, *Science* **275**, 637 (1997).
 [34] Another 15% of images show significantly reduced contrast or patterns which are hard to classify.
 [35] E.L. Bolda and D.F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5477 (1998).
 [36] J. Tempere and J.T. Devreese, *Solid State Commun.* **108**, 993 (1998).
 [37] Y. Castin and R. Dum, *Eur. Phys. J. D* **7**, 399 (1999).
 [38] S. Inouye *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080402 (2001).
 [39] F. Chevy, K. Madison, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. A* **64**, 031601(R) (2001).
 [40] For example, the braid patterns with two dislocation lines were observed only with more than four clouds.
 [41] K.W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).

LETTERS

Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas

Zoran Hadzibabic¹, Peter Krüger¹, Marc Cheneau¹, Baptiste Battelier¹ & Jean Dalibard¹

Any state of matter is classified according to its order, and the type of order that a physical system can possess is profoundly affected by its dimensionality. Conventional long-range order, as in a ferromagnet or a crystal, is common in three-dimensional systems at low temperature. However, in two-dimensional systems with a continuous symmetry, true long-range order is destroyed by thermal fluctuations at any finite temperature^{1,2}. Consequently, for the case of identical bosons, a uniform two-dimensional fluid cannot undergo Bose–Einstein condensation, in contrast to the three-dimensional case. However, the two-dimensional system can form a ‘quasi-condensate’ and become superfluid below a finite critical temperature. The Berezinskii–Kosterlitz–Thouless (BKT) theory^{3,4} associates this phase transition with the emergence of a topological order, resulting from the pairing of vortices with opposite circulation. Above the critical temperature, proliferation of unbound vortices is expected. Here we report the observation of a BKT-type crossover in a trapped quantum degenerate gas of rubidium atoms. Using a matter wave heterodyning technique, we observe both the long-wavelength fluctuations of the quasi-condensate phase and the free vortices. At low temperatures, the gas is quasi-coherent on the length scale set by the system size. As the temperature is increased, the loss of long-range coherence coincides with the onset of proliferation of free vortices. Our results provide direct experimental evidence for the microscopic mechanism underlying the BKT theory, and raise new questions regarding coherence and superfluidity in mesoscopic systems.

The BKT mechanism is very different from the usual finite-temperature phase transitions. It does not involve any spontaneous symmetry-breaking and emergence of a spatially uniform order parameter. Instead, the low-temperature phase is associated with a quasi-long-range order, with the correlations of the order parameter (for example, the macroscopic wavefunction of a Bose fluid) decaying algebraically in space. Above the critical temperature this quasi-long-range order is no longer maintained, and the correlations decay exponentially. This picture is applicable to a wide variety of two-dimensional (2D) phenomena, including superfluidity in liquid helium films⁵, the superconducting transition in arrays of Josephson junctions⁶, and the collision physics of 2D atomic hydrogen⁷. These experiments have provided evidence for the BKT phase transition by looking at the macroscopic properties of the system, but could not reveal its microscopic origin—the binding and unbinding of vortex–antivortex pairs^{3,4}.

Harmonically trapped atomic gases generally provide an excellent testing ground for the theories of many-body physics. In particular, they are well suited for the preparation of low-dimensional systems and the detection of individual vortices. Quasi-2D quantum degenerate Bose gases have been produced in single ‘pancake’ traps or at the nodes of one-dimensional (1D) optical lattice potentials^{8–15}. Recently, matter wave interference between small disk-shaped

quasi-condensates has revealed the occasional presence of free vortices¹⁶, but a systematic temperature study was not possible. Theoretically, because the density of states in a 2D harmonic trap allows for finite temperature Bose–Einstein condensation in an ideal gas¹⁷, the nature of the superfluid transition in an interacting gas has been a topic of some debate^{18–24}. Our results indicate that the BKT picture is applicable to these systems, even though in our finite-size system the transition occurs as a finite-width crossover rather than a sharp phase transition²⁵.

We start our experiments with a quantum degenerate three-dimensional (3D) cloud of ⁸⁷Rb atoms, produced by radio-frequency evaporation in a cylindrically symmetric magnetic trap. Next, a 1D optical lattice with a period of $d = 3 \mu\text{m}$ along the vertical direction z is used to split the 3D gas into two independent clouds and to

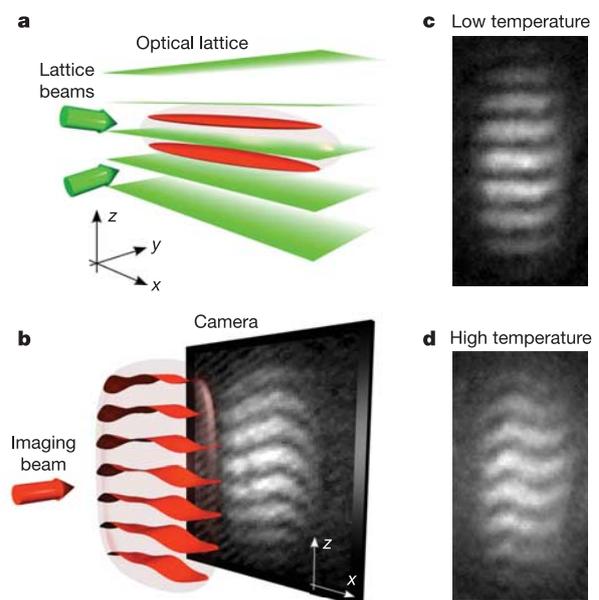


Figure 1 | Probing the coherence of 2D atomic gases using matter wave heterodyning. **a**, An optical lattice potential of period $d = 3 \mu\text{m}$ along the vertical direction z is formed by two laser beams with a wavelength of 532 nm intersecting at a small angle. It is used to split a quantum degenerate 3D gas into two independent planar systems. The transparent ellipsoid indicates the shape of the gas before the lattice is ramped up. **b**, After the confining potential is abruptly switched off, the two atomic clouds expand, overlap and interfere. The interference pattern is recorded onto a CCD camera using the absorption of a resonant probe laser. The waviness of the interference fringes contains information about the phase patterns in the two planar systems. **c, d**, Examples of interference patterns obtained at a low and a high temperature, respectively.

¹Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris CEDEX 05, France.

compress them into the 2D regime (Fig. 1a). To minimize heating and ensure thermal equilibrium, the lattice potential is ramped up slowly over 500 ms, and the clouds are allowed to equilibrate for another 200 ms. At full laser power, the height of the lattice potential is $V_0/h = 50$ kHz, where h is Planck's constant. At this lattice height, the tunnelling between the two planes is negligible on the timescale of the experiment, and the motion along the tight confining direction z is 'frozen out'^{14,16}. The two clouds form parallel, elongated 2D strips, characterized by the harmonic trapping frequencies of 11 Hz, 130 Hz and 3.6 kHz along the x , y and z directions, respectively. The number of condensed atoms per plane is a function of temperature and varies between 0 and 5×10^4 , whereas the total atom number per plane is $\sim 10^5$. For the largest (quasi-)condensates, the Thomas–Fermi approximation yields 120 μm and 10 μm for the x and y lengths of the strips, respectively. The corresponding chemical potential and healing length are respectively $\mu/h = 1.7$ kHz and $\xi = 0.2$ μm .

After the trapped 2D gases have equilibrated, all confining potentials are abruptly turned off. The two clouds expand predominantly perpendicular to the x – y plane and, as they overlap, a 3D matter wave interference pattern forms²⁶. After $t = 20$ ms of 'time-of-flight' (TOF) expansion, the projection of the 3D interference pattern onto the x – z plane is recorded on a CCD camera, using a resonant probe laser directed along y (Fig. 1b). At any fixed position x , the interference pattern along z is characterized by its contrast $c(x)$ and phase $\varphi(x)$. To extract these two parameters, we fit the density distribution with a function:

$$F(x, z) = G(x, z)[1 + c(x)\cos(2\pi z/D + \varphi(x))]$$

where $G(x, z)$ is a gaussian envelope, $D = h/mv$ is the period of the interference fringes, and m is the atomic mass. The function $c(x)$ is a measure of the local coherence in the 2D clouds (with some coarse grain averaging due to the integration along the imaging axis y), while the variation of $\varphi(x)$ with x is a measure of the long-range coherence. With increasing temperature, the presence of phase fluctuations in the two planes increases the waviness of the interference fringes, that is, the fluctuations in $\varphi(x)$ (compare Fig. 1c and d).

In order to explore different temperature regimes for the 2D gas, we vary the final radio frequency ν_{rf} used in the evaporative cooling of the initial 3D gas. The temperature $T^{3\text{D}}$ is proportional to $\Delta\nu = \nu_{\text{rf}} - \nu_{\text{rf}}^{(\text{min})}$, where $\nu_{\text{rf}}^{(\text{min})}$ is the final radio frequency that completely empties the trap. We explore the range between the onset of condensation in the 3D gas ($T^{3\text{D}} = 150$ nK) and a quasi-pure 3D Bose–Einstein condensate. As the lattice is ramped up, the temperature of the compressed gas can increase significantly (2–3 times), but precise direct thermometry in the lattice is difficult. Instead, in order to quantify the degeneracy of the 2D system, we measure the local contrast in the centre of the interference pattern, $c_0 = \langle c(0) \rangle$, where $\langle \dots \rangle$ denotes an average over many images recorded under the same experimental conditions (temperature and atom number).

The dependence of c_0 on the initial $T^{3\text{D}}$ (that is, $\Delta\nu$) is shown in Fig. 2. The interference fringes are visible for $\Delta\nu < 35$ kHz, which closely corresponds to the range of condensation in the initial 3D gas. As $\Delta\nu$ is lowered, c_0 grows smoothly. For $\Delta\nu$ below ~ 12 kHz, the initial 3D Bose–Einstein condensate is essentially pure and c_0 saturates at about 30%. In an ideal experiment, the expected contrast at zero temperature is $c_0 = 1$. The finite resolution of our imaging system limits the maximal observable contrast to about 60%. We attribute the difference between expected and measured maximal contrasts to the residual heating of the gas in the optical lattice, caused in particular by the three-body recombination processes. This hypothesis is supported by the fact that the atoms experience the lattice potential over 700 ms, which is not negligible compared to the measured lifetime of 2.5 s for the atom cloud in the lattice. In the following, we use c_0 rather than $T^{3\text{D}}$ as a direct measure of the degeneracy of the 2D gas.

We now turn to a quantitative analysis of long-range correlations

as a function of temperature. The coherence in the system is encoded in the first-order correlation function:

$$g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') \rangle$$

where $\psi(\mathbf{r})$ is the fluctuating bosonic field at position \mathbf{r} . From interference signals recorded at different positions along the x axis, one can extract information about g_1 , as well as higher-order correlation functions²⁷. Here we adopt an analysis method proposed in ref. 28. The idea is to partially integrate the 3D interference pattern over lengths L_x and L_y , along the x and y directions respectively, and study how the resulting contrast C decays with the integration lengths. Specifically, in a uniform system and for $L_x \gg L_y$, the average value of C^2 should behave as:

$$\langle C^2(L_x) \rangle \approx \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} dx [g_1(x, 0)]^2 \propto \left(\frac{1}{L_x}\right)^{2\alpha} \quad (1)$$

The long-range physics is then captured in a single parameter, the exponent α , which describes the decay of $\langle C^2 \rangle$ with L_x . The expected values of α may be understood in two simple limits. In a system with true long-range order, g_1 would be constant and the interference fringes would be perfectly straight. In this case $\alpha = 0$, corresponding to no decay of the contrast upon integration. In the opposite limit, if g_1 decays exponentially on a length scale much shorter than L_x , the integral in equation (1) is independent of L_x . In this case $\alpha = 0.5$, corresponding to adding up local interference fringes with random phases¹⁴. One of the central predictions of the BKT theory is that at the transition, the superfluid density should suddenly jump to a finite value that is a universal function of the transition temperature²⁹. When adapted to the interference measurements with uniform 2D Bose gases²⁸, this 'universal jump in superfluid density' corresponds to a sudden drop in α from 0.5 to 0.25.

In our experiments, integration along y is automatically performed in absorption imaging, with $L_y \approx 10$ μm fixed by the size of the quasi-condensates. Our system is also not uniform along x , and the average local contrast $c_x = \langle c(x) \rangle$ decreases smoothly towards the edges of the quasi-condensate owing to the increasing effects of thermal excitations. For comparison with theory, we consider the integrated contrast:

$$\tilde{C}(L_x) = \frac{1}{L_x} \left| \int_{-L_x/2}^{L_x/2} c(x) e^{i\varphi(x)} dx \right|$$

This would exactly coincide with C in a uniform system. We extract the exponent α using only the quasi-uniform region where $c_x > 0.5c_0$. Figure 3a shows examples of the measured $\langle \tilde{C}^2 \rangle$ as a

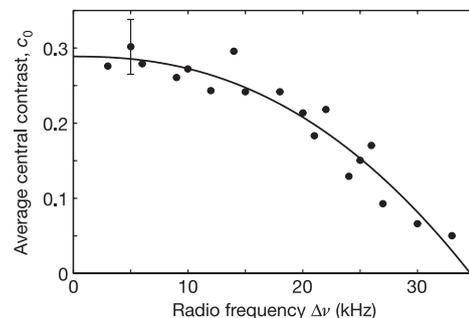


Figure 2 | Local coherence as a thermometer. The average central contrast c_0 of the interference patterns is plotted as a function of the parameter $\Delta\nu$ controlling the temperature of the 3D gas before loading the optical lattice. The solid line is a fit to the data using the empirical function $c_0 = c_{\text{max}} [1 - (\Delta\nu/\Delta\nu_0)^\gamma]$, with $c_{\text{max}} = 0.29 \pm 0.2$, $\Delta\nu_0 = 35 \pm 1$ kHz and $\gamma = 2.3 \pm 0.4$. The total number of images used for the plot is 1,200, corresponding to 41 measurements of c_0 . Different measurements of c_0 taken at equal $\Delta\nu$ have been averaged. The displayed error bar indicates the largest standard deviation.

function of L_x at a low and a high temperature, along with the fits by a power-law decaying function.

Figure 3b summarizes the fitted values of the exponent α in different temperature regimes, and constitutes the first main result of this Letter. Starting at high temperatures, for values of c_0 up to about 13%, α is approximately constant and close to 0.5. When the temperature is reduced further, α rapidly drops to about 0.25, and for even lower temperatures (larger c_0) it levels off. We thus clearly observe a transition between two qualitatively different regimes at high and low temperatures. The values of α above and below the transition are in agreement with the theoretically expected jump in the superfluid density at the BKT transition in a uniform system. However, this quantitative agreement might be partly fortuitous. Even though we concentrated on the quasi-uniform part of the images, the geometrical effects in our elongated samples could still be important. Ultimately, at extremely low temperature, α should slowly tend to zero and the gas should become a pure, fully coherent Bose–Einstein condensate. We could not reach this regime in the present experiments owing to the residual heating discussed above.

Even without precise thermometry, we can estimate the cloud's temperature and density at the onset of quasi-long-range coherence. For images with $c_0 = 0.15$, the temperature inferred from the wings of the atom distribution after TOF is 290 ± 40 nK, corresponding to a thermal wavelength of $\lambda = 0.3 \mu\text{m}$. From the length of the quasi-condensate we deduce the number of condensed atoms $N_C = 11,000 \pm 3,000$, and the peak condensate density (in the trap centre) $\rho_C = (5 \pm 1) \times 10^9 \text{cm}^{-2}$. This gives $\rho_C \lambda^2 = 6 \pm 2$. BKT theory for a uniform system predicts the transition at

$\rho_S \lambda^2 = 4$, where ρ_S is the superfluid density. The two values are in fair agreement, but we note that the exact relation between ρ_C and ρ_S in 2D atomic gases will require further experimental and theoretical investigation. For example, our observation of $\alpha \approx 0.5$ for a finite value of c_0 suggests that the superfluid density ρ_S might be zero even if the condensate density ρ_C is finite.

The key role in the microscopic BKT theory is played by vortices, localized topological defects in the phase of the condensate. In contrast to the smooth variation of the fringe phase $\varphi(x)$ created by long-wavelength phonons (Fig. 1d), a free vortex in one of the condensates should appear as a sharp dislocation in the interference pattern^{16,24}, with $\varphi(x)$ changing abruptly across a dislocation line parallel to the expansion axis z . We indeed occasionally observe such dislocations. Examples of images containing one and several dislocations are shown in Fig. 4a and b, respectively. The tightly bound vortex–antivortex pairs are not detectable in our experiments because they create only infinitesimal phase slips in the interference pattern. Other phase configurations which could mimic the appearance of a vortex, such as a dark soliton aligned with the imaging direction, can be discarded on theoretical grounds²⁴.

Figure 4c shows the frequency with which we detect sharp dislocations at different temperatures. For the count we consider only the central, 30- μm -wide region of each image, which is smaller than the length of our smallest quasi-condensates. We note that we detect only a subset of vortices—those that are well isolated and close to the centre of the cloud. We also note that thermally activated phonon modes with a very short wavelength along x can in principle contribute to the count. Their contribution is expected to be non-negligible only at the highest temperatures, at which a detailed theoretical analysis would be needed to separate their effect from that of the vortices.

The observed sudden onset of vortex proliferation with increasing temperature constitutes the second main result of this Letter. Further, this onset coincides with the loss of quasi-long-range coherence (Fig. 3b). These two observations together provide conclusive evidence for the observation of the BKT crossover in this system.

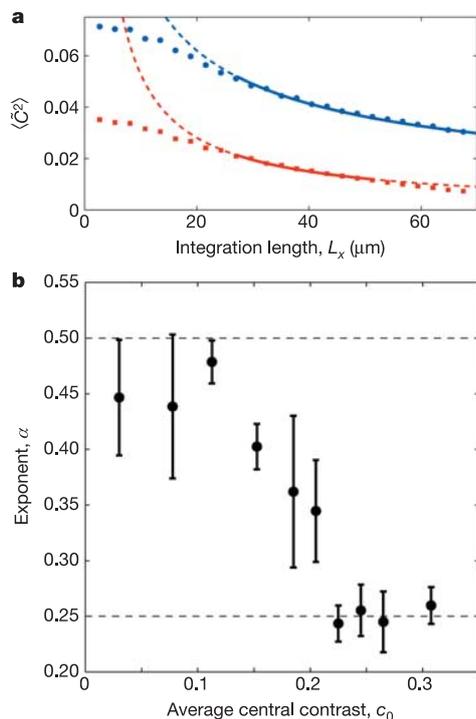


Figure 3 | Emergence of quasi-long-range order in a 2D gas. **a**, Examples of average integrated interference contrasts $\langle \tilde{C}^2(L_x) \rangle$ are shown for a low (blue circles, $c_0 = 0.24$) and a high (red squares, $c_0 = 0.13$) temperature; L_x is the integration length. The lines are fits to the data by the power-law function $1/(L_x)^{2\alpha}$, and give $\alpha = 0.29 \pm 0.01$ (low temperature) and $\alpha = 0.46 \pm 0.01$ (high temperature). The fitting range, indicated by the solid part of the line, is constrained by the conditions $L_x \gg L_y$ on the left and $c_x > c_0/2$ on the right. **b**, Decay exponent α as a function of c_0 . Dashed lines indicate the theoretically expected values of α above and below the BKT transition in a uniform system. Error bars indicate the standard deviation of the results from different experimental runs.

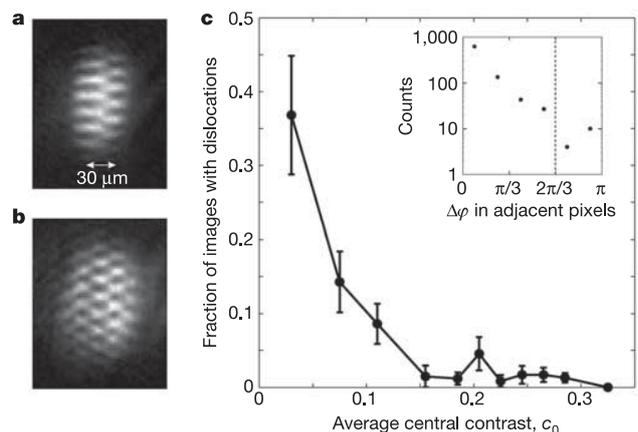


Figure 4 | Proliferation of free vortices at high temperature. **a**, Example of an interference pattern showing a sharp dislocation that we attribute to the presence of a free vortex in one of the interfering clouds. **b**, Interference pattern showing several dislocations. **c**, Fraction of images showing at least one dislocation in the central, 30- μm -wide region, plotted as a function of c_0 . The error bars show the statistical uncertainty, given by the square root of the number of images with dislocations. Inset, histogram of the phase jumps $\Delta\varphi_i = |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})|$ between adjacent CCD pixel columns, for the set of images in the bin $c_0 = 0.08$. An image is counted as showing a dislocation if at least one of the $\Delta\varphi_i$ exceeds $2\pi/3$ (threshold indicated by the dashed line). The distance between adjacent columns is $2.7 \mu\text{m}$ and the count runs over the 10 central columns. There are 97 images contributing to this histogram, hence 970 counts, among which 16 counts (corresponding to 13 different images) exceed the threshold.

Our experiments support the notion that the unbinding of vortex–antivortex pairs is the microscopic mechanism destroying the quasi-long-range coherence in 2D systems. The related question of the superfluidity of the sample remains open. It could be addressed in the future by setting the planar gases in rotation and studying the ordering of the vortex lattice. Alternatively, a study of the damping of the collective eigenmodes of the gas could be used to infer its viscosity. Our experiments may also raise new theoretical questions related to the geometry and the mesoscopic nature of the system.

Received 18 March; accepted 2 May 2006.

- Mermin, N. D. & Wagner, H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133–1136 (1966).
- Hohenberg, P. C. Existence of long-range order in 1 and 2 dimensions. *Phys. Rev.* **158**, 383–386 (1967).
- Berezinskii, V. L. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems possessing a continuous symmetry group. II. Quantum systems. *Sov. Phys. JETP* **34**, 610–616 (1972).
- Kosterlitz, J. M. & Thouless, D. J. Ordering, metastability and phase-transitions in 2 dimensional systems. *J. Phys. C* **6**, 1181–1203 (1973).
- Bishop, D. J. & Reppy, J. D. Study of the superfluid transition in two-dimensional ⁴He films. *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1727–1730 (1978).
- Resnick, D. J., Garland, J. C., Boyd, J. T., Shoemaker, S. & Newrock, R. S. Kosterlitz-Thouless transition in proximity-coupled superconducting arrays. *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1542–1545 (1981).
- Safonov, A. I., Vasilyev, S. A., Yasnikov, I. S., Lukashevich, I. I. & Jaakkola, S. Observation of quasicondensate in two-dimensional atomic hydrogen. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4545–4548 (1998).
- Görlitz, A. *et al.* Realization of Bose-Einstein condensates in lower dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
- Schweikhard, V., Coddington, I., Engels, P., Mogendorff, V. P. & Cornell, E. A. Rapidly rotating Bose-Einstein condensates in and near the lowest Landau level. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040404 (2004).
- Rychtarik, D., Engeser, B., Nägerl, H.-C. & Grimm, R. Two-dimensional Bose-Einstein condensate in an optical surface trap. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 173003 (2004).
- Smith, N. L., Heathcote, W. H., Hechenblaikner, G., Nugent, E. & Foot, C. J. Quasi-2D confinement of a BEC in a combined optical and magnetic potential. *J. Phys. B* **38**, 223–235 (2005).
- Orzel, C., Tuchman, A. K., Fenselau, M. L., Yasuda, M. & Kasevich, M. A. Squeezed states in a Bose-Einstein condensate. *Science* **291**, 2386–2389 (2001).
- Burger, S. *et al.* Quasi-2D Bose-Einstein condensation in an optical lattice. *Europhys. Lett.* **57**, 1–6 (2002).
- Hadzibabic, Z., Stock, S., Battelier, B., Bretin, V. & Dalibard, J. Interference of an array of independent Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 180403 (2004).
- Köhl, M., Moritz, H., Stöferle, T., Schori, C. & Esslinger, T. Superfluid to Mott insulator transition in one, two, and three dimensions. *J. Low Temp. Phys.* **138**, 635–644 (2005).
- Stock, S., Hadzibabic, Z., Battelier, B., Cheneau, M. & Dalibard, J. Observation of phase defects in quasi-two-dimensional Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 190403 (2005).
- Bagnato, V. & Kleppner, D. Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps. *Phys. Rev. A* **44**, 7439–7441 (1991).
- Petrov, D. S., Holzmann, M. & Shlyapnikov, G. V. Bose-Einstein condensation in quasi-2D trapped gases. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2551–2554 (2000).
- Fernandez, J. P. & Mullin, W. J. The two-dimensional Bose-Einstein condensate. *J. Low Temp. Phys.* **128**, 233–249 (2002).
- Andersen, J. O., Al Khawaja, U. & Stoof, H. T. C. Phase fluctuations in atomic Bose gases. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 070407 (2002).
- Petrov, D. S., Gangardt, D. M. & Shlyapnikov, G. V. Low-dimensional trapped gases. *J. Phys. IV (France)* **116**, 5–44 (2004).
- Simula, T. P., Lee, M. D. & Hutchinson, D. A. Transition from the Bose-Einstein condensate to the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase. *Phil. Mag. Lett.* **85**, 395–403 (2005).
- Holzmann, M., Baym, G., Blaizot, J.-P. & Laloë, F. The Kosterlitz-Thouless-Berezinskii transition of homogeneous and trapped Bose gases in two dimensions. Preprint at (<http://arxiv.org/cond-mat/0508131>) (2005).
- Simula, T. P. & Blakie, P. B. Thermal activation of vortex-antivortex pairs in quasi-two-dimensional Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 020404 (2006).
- Bramwell, S. T. & Holdsworth, P. C. W. Magnetization: A characteristic of the Kosterlitz-Thouless-Berezinskii transition. *Phys. Rev. B* **49**, 8811–8814 (1994).
- Andrews, M. R. *et al.* Observation of interference between two Bose condensates. *Science* **275**, 637–641 (1997).
- Hellweg, D. *et al.* Measurement of the spatial correlation function of phase fluctuating Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010406 (2003).
- Polkovnikov, A., Altman, E. & Demler, E. Interference between independent fluctuating condensates. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **103**, 6125–6129 (2006).
- Nelson, D. R. & Kosterlitz, J. M. Universal jump in superfluid density of 2-dimensional superfluids. *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1201–1205 (1977).

Acknowledgements We thank E. Altman, E. Demler, M. Lukin, A. Polkovnikov, P.-S. Rath, D. Stamper-Kurn and S. Stock for discussions. We acknowledge financial support by IFRAF, ACI Nanoscience, ANR, the Alexander von Humboldt foundation (P.K.) and the EU (Marie-Curie fellowships to Z.H. and P.K.). Laboratoire Kastler Brossel is a research unit of Ecole Normale Supérieure and Université Paris 6, associated with CNRS.

Author Information Reprints and permissions information is available at npg.nature.com/reprintsandpermissions. The authors declare no competing financial interests. Correspondence and requests for materials should be addressed to J.D. (jean.dalibard@lkb.ens.fr).

The trapped two-dimensional Bose gas: from Bose–Einstein condensation to Berezinskii–Kosterlitz–Thouless physics

Z Hadzibabic^{1,2}, P Krüger^{1,3,4}, M Cheneau¹, S P Rath¹
and J Dalibard^{1,5}

¹ Laboratoire Kastler Brossel, CNRS, École Normale Supérieure,
24 rue Lhomond, 75005, Paris, France

² Cavendish Laboratory, University of Cambridge,
Cambridge CB3 0HE, UK

³ Kirchhoff Institut für Physik, Universität Heidelberg,
69120 Heidelberg, Germany

⁴ Midlands Centre for Ultracold Atoms, School of Physics and Astronomy,
University of Nottingham, Nottingham NG7 2RD, UK
E-mail: jean.dalibard@lkb.ens.fr

New Journal of Physics **10** (2008) 045006 (22pp)

Received 7 December 2007

Published 30 April 2008

Online at <http://www.njp.org/>

doi:10.1088/1367-2630/10/4/045006

Abstract. We analyze the results of a recent experiment with bosonic rubidium atoms harmonically confined in a quasi-two-dimensional (2D) geometry. In this experiment a well-defined critical point was identified, which separates the high-temperature normal state characterized by a single component density distribution, and the low-temperature state characterized by a bimodal density distribution and the emergence of high-contrast interference between independent 2D clouds. We first show that this transition cannot be explained in terms of conventional Bose–Einstein condensation of the trapped ideal Bose gas. Using the local density approximation (LDA), we then combine the mean-field (MF) Hartree–Fock theory with the prediction for the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless (BKT) transition in an infinite uniform system. If the gas is treated as a strictly 2D system, the MF predictions for the spatial density profiles significantly deviate from those of a recent quantum Monte Carlo (QMC) analysis. However, when the residual thermal excitation of the strongly confined

⁵ Author to whom any correspondence should be addressed.

degree of freedom is taken into account, excellent agreement is reached between the MF and the QMC approaches. For the interaction strength corresponding to the experiment, we predict a strong correction to the critical atom number with respect to the ideal gas theory (factor ~ 2). Quantitative agreement between theory and experiment is reached concerning the critical atom number if the predicted density profiles are used for temperature calibration.

Contents

| | |
|--|-----------|
| 1. Introduction | 2 |
| 2. Bose–Einstein condensation in an ideal 2D Bose gas | 4 |
| 2.1. The uniform case | 4 |
| 2.2. The ideal 2D Bose gas in harmonic confinement | 4 |
| 3. Condensation of an ideal Bose gas in a harmonic + periodic potential | 5 |
| 3.1. The confining potential | 5 |
| 3.2. Renormalization of the trapping frequency ω_x by the optical lattice | 6 |
| 3.3. The critical atom number in a ‘Born–Oppenheimer’ type approximation | 7 |
| 3.4. Comparison with experimental results | 9 |
| 4. Interactions in a quasi 2D trapped Bose gas | 10 |
| 4.1. Criticality within MF solutions: 3D versus 2D | 10 |
| 4.2. The BKT transition and the LDA | 11 |
| 4.3. Density profile in the 2D MF theory | 12 |
| 4.4. Critical atom number in the 2D MF approach | 13 |
| 4.5. The hybrid 3D MF approach | 15 |
| 4.6. MF approach for the lattice configuration and comparison with experiment | 16 |
| 5. Summary and concluding remarks | 17 |
| Acknowledgments | 19 |
| Appendix. The time-of-flight in the 2D MF approximation | 19 |
| References | 21 |

1. Introduction

As first noticed by Peierls [1], collective physical phenomena in an environment with a reduced number of dimensions can be dramatically changed with respect to our experience in three dimensions (3D). The example of Bose–Einstein condensation in a uniform gas is a good illustration of the crucial role of dimensionality. In 3D, condensation occurs at a finite temperature, and the phase of the macroscopic wavefunction exhibits long range order [2]. In 2D, such long range order is destroyed by thermal fluctuations at any finite temperature, both for an ideal and for an interacting Bose gas [3, 4].

In the presence of repulsive interactions between particles, a uniform 2D Bose gas can nevertheless undergo a phase transition from a normal to a superfluid state at a finite critical temperature. This transition was predicted by Berezinskii [5] and by Kosterlitz and Thouless [6] (BKT), and it has been observed in several macroscopic quantum systems, such as helium films adsorbed on a substrate [7]. The superfluid state exhibits quasi-long range order, such that the

one-body correlation function decays algebraically at large distance. By contrast the decay is exponential in the normal phase.

The recent advances in the manipulation of quantum atomic gases have made it possible to address the properties of low-dimensional Bose gases with novel tools and diagnostic techniques [8]–[18] (for recent reviews, see [19, 20]). A recent cold atom experiment also addressed the BKT problem by realizing a 2D array of atomic Josephson junctions [21]. All these systems bring new questions, since one is now dealing with a harmonically trapped, instead of a uniform, fluid. In particular, due to a different density of states, even in 2D one expects to recover the Bose–Einstein condensation phenomenon in the ideal Bose gas case [22]. The total number of atoms in the excited states of the trap is bounded from above, and a macroscopic population of the ground state appears for large enough atom numbers. However real atomic gases do interact. It is therefore a challenging question to understand whether in the presence of atomic interactions, a trapped Bose gas will undergo a BKT superfluid transition like in the uniform case, or whether conventional Bose–Einstein condensation will take place, as for an ideal system.

In recent experiments performed in our laboratory [17, 18], a gas of rubidium atoms was trapped using a combination of a magnetic trap providing harmonic confinement in the xy -plane, and an optical lattice, ensuring that the third degree of freedom (z) of the gas was frozen. The analysis of the atomic density profile revealed a critical point, between a high temperature phase with a single component density distribution, and a low temperature phase with a clear bimodal distribution [18]. This critical point also corresponded to the onset of clearly visible interferences between independent gases, which were used to study the coherence properties of the system [17]. Surprisingly, the density profile of the normal component was observed to be close to a Gaussian all the way down (in temperature) to the critical point. This density profile is strikingly different from the one expected for the ideal gas close to the BEC critical temperature. Furthermore, if the width of the observed quasi-Gaussian distribution is interpreted as an empirical measure of the temperature, this leads to a critical atom number at a given temperature which is about five times larger than that needed for conventional Bose–Einstein condensation in the ideal gas. These two facts showed that, in sharp contrast to the 3D case, interactions in 2D cannot be treated as a minor correction to the ideal gas BEC picture, but rather qualitatively change the behavior of the system.

The main goal of the present paper is to analyze this critical point. We start in section 2 with a brief review of the properties of an ideal Bose gas in the uniform case and in the case of harmonic confinement. In section 3, we adapt the ideal gas treatment to the experimental geometry of [18], and provide a detailed calculation showing that the experimental results cannot be explained by this theory. Next, in section 4, we take interactions into account at the mean-field (MF) level and we combine this analysis with the numerically known threshold for the BKT transition in the uniform case [23]. We first present a MF treatment for a strictly 2D gas. For the parameter range explored experimentally, it leads to a critical atom number in good agreement with the prediction of the most recent quantum Monte Carlo (QMC) calculations [24]. However the predicted MF density profiles significantly differ from the QMC ones in the vicinity of the critical point. In a second step, we take into account the residual excitation of the z motion in the MF model and we obtain excellent agreement with the QMC calculation. The predicted density distribution near the critical point has a quasi-Gaussian shape and the ‘empirical’ temperature extracted from this distribution is in fact somewhat lower than the real temperature. Taking this into account we obtain good quantitative agreement between

experimental results and theoretical predictions. Finally we summarize our findings and discuss the connection between the BEC and the BKT transition in a 2D gas. While in a uniform, infinite system only the latter can occur at finite temperature, in a trapped gas both are possible, and the BEC transition can be viewed as a special, non-interacting limit of the more general BKT behavior.

2. Bose–Einstein condensation in an ideal 2D Bose gas

This section is devoted to a review of well-known results concerning the ideal Bose gas in 2D. We first address the case of a uniform system at the thermodynamic limit, and we then consider a gas confined in a harmonic potential.

2.1. The uniform case

In the thermodynamic limit a uniform, ideal Bose gas does not undergo Bose–Einstein condensation when the temperature T is reduced, or the 2D spatial density n is increased. Bose–Einstein statistics leads to the following relation between the phase space density $D = n\lambda^2$ and the fugacity $Z = \exp(\beta\mu)$

$$D = g_1(Z), \quad g_\alpha(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} Z^j / j^\alpha. \quad (1)$$

Here $\lambda = \hbar(2\pi/(mk_B T))^{1/2}$ is the thermal wavelength, m is the atomic mass, $\beta = 1/(k_B T)$ and μ is the chemical potential. The function $g_\alpha(Z)$ is the polylogarithm, that takes the simple form $g_1(Z) = -\ln(1 - Z)$ for $\alpha = 1$. Because $g_1(Z) \rightarrow +\infty$ when $Z \rightarrow 1$, (1) has a solution in Z for any value of D . Hence no singularity appears in the distribution of the population of the single particle levels, even when the gas is strongly degenerate ($D \gg 1$). This is to be contrasted with the well-known 3D case: the relation $D^{(3D)} = g_{3/2}(Z)$ ceases to have a solution for a phase space density above the critical value $D_c^{(3D)} = g_{3/2}(1) \simeq 2.612$, where the 3D Bose–Einstein condensation phenomenon takes place.

2.2. The ideal 2D Bose gas in harmonic confinement

We now consider an ideal gas confined in a harmonic potential $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$. We assume that thermal equilibrium has been reached, so that the population of each energy level is given by Bose–Einstein statistics. Since the chemical potential μ is always lower than the energy $\hbar\omega$ of the ground state of the trap, the number of atoms N' occupying the excited states of the trap cannot exceed the critical value $N_c^{(\text{id})}$

$$N_c^{(\text{id})} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j+1}{\exp(j\beta\hbar\omega) - 1}. \quad (2)$$

This expression can be evaluated in the so-called *semi-classical limit* $k_B T \gg \hbar\omega$ by replacing the discrete sum by an integral over the energy ranging from 0 to $+\infty$ [22]:

$$N_c^{(\text{id})} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 g_2(1), \quad (3)$$

with $g_2(1) = \pi^2/6$. This result also holds in the case of an anisotropic harmonic potential in the xy -plane, in which case ω is replaced by the geometric mean $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_x \omega_y}$, where ω_x, ω_y are the two eigenfrequencies of the trap. The saturation of the number of atoms in the excited states is a direct manifestation of Bose–Einstein condensation: any total atom number N above $N_c^{(\text{id})}$ must lead to the accumulation of at least $N - N_c^{(\text{id})}$ in the ground state of the trap.

Equation (3) is very reminiscent of the result for the harmonically trapped 3D gas, where the saturation number is $N_c^{(3\text{D},\text{id})} = (k_B T / (\hbar \bar{\omega}))^3 g_3(1)$. However, an important difference arises between the 2D and the 3D cases for the spatial density profile. In 3D the phase space density in \mathbf{r} is given by $D^{(3\text{D})}(\mathbf{r}) = g_{3/2}(Z e^{-\beta V(\mathbf{r})})$ in the limit $k_B T \gg \hbar \bar{\omega}$. The threshold for Bose–Einstein condensation is reached for $Z = 1$; at this point N is equal to the critical number $N_c^{(3\text{D},\text{id})}$ and simultaneously the phase space density at the center of the trap $D^{(3\text{D})}(0)$ equals the critical value $g_{3/2}(1)$. This allows for a simple connection between the BEC thresholds for a homogeneous gas and for a trapped system in the semi-classical limit $k_B T \gg \hbar \bar{\omega}$. In 2D, such a simple connection between global properties (critical atom number $N_c^{(\text{id})}$) and local properties (critical density at center $n(0)$) does not exist. Indeed the semi-classical expression of the 2D phase space density is

$$D(\mathbf{r}) = g_1(Z e^{-\beta V(\mathbf{r})}). \quad (4)$$

Because $g_1(1) = +\infty$ this leads to a diverging value at the center of the trap when Z approaches 1. Therefore, although the integral of $D(\mathbf{r})$ over the whole space converges for $Z = 1$ and allows to recover (3), the semiclassical result (4) cannot be used to derive a local criterion for condensation at the center of the trap.

One can go beyond the semi-classical approximation and calculate numerically the central phase space density as a function of the total number of atoms. We consider as an example the trap parameters used in [18], where $\omega_x/(2\pi) = 9.4$ Hz and $\omega_y/(2\pi) = 125$ Hz. In the typical case $k_B T / (\hbar \bar{\omega}) = 50$ ($T \simeq 80$ nK), the discrete summation of the Bose–Einstein occupation factors for $Z = 1$ gives $N_c \simeq 4800$ (the value obtained from the semi-classical result (3) is 4100). Using the expression for the energy eigenstates (Hermite functions), we also calculate the phase space density at the origin and we find $D(0) \simeq 13$. Let us emphasize that this value is a mere result of the finite size of the system, and does not have any character of universality.

3. Condensation of an ideal Bose gas in a harmonic + periodic potential

In order to produce a quasi 2D gas experimentally, one needs to freeze the motion along one direction of space, say z . In practice, this is conveniently done using the potential $V^{(\text{lat})}(z) = V_0 \sin^2(kz)$ created by an optical lattice along this direction. A precise comparison between the measured critical atom number and the prediction for an ideal gas requires to properly model the confining potential and find its energy levels. This is the purpose of the present section.

3.1. The confining potential

The optical lattice is formed by two running laser waves of wavelength λ_L , propagating in the yz -plane with an angle $\pm\theta/2$ with respect to the y -axis. The period $\ell = \pi/k = \lambda_L/(2\sin(\theta/2))$ of the lattice along the z -direction can be adjusted to any value above $\lambda_L/2$ by a proper choice of the angle θ . For a blue-detuned lattice (λ_L is smaller than the atomic resonance wavelength), V_0 is positive and the atoms accumulate in the vicinity of the nodal planes $z = 0$ and $z = \pm\pi/k$,

etc. The oscillation frequency at the bottom of the lattice wells is $\omega_z^{(\text{lat})} = 2\sqrt{V_0 E_r}/\hbar$, where $E_r = \hbar^2 k^2/(2m)$. In order for the quasi-2D regime to be reached, $\hbar\omega_z^{(\text{lat})}$ must notably exceed the typical thermal energy $k_B T$ as well as the interaction energy per particle for a non-ideal gas.

For a blue detuned lattice an additional confinement in the xy -plane must be added to the optical lattice potential. This is conveniently achieved using a magnetic trap, that creates a harmonic potential with frequencies ω_x and ω_y . The magnetic trap also provides an additional trapping potential $m\omega_z^2 z^2/2$ along the z -direction. The oscillation frequency ω_z created by the magnetic trap is usually much lower than the one created by the lattice $\omega_z^{(\text{lat})}$. The main effect of the magnetic confinement along the z -direction is to localize the atoms in the \mathcal{N} central lattice planes, where the effective number of planes $\mathcal{N} \sim 4 k_B T/(m\omega_z^2 \ell^2)$. As we see below this number is on the order of 2–4 for the range of parameters explored in [18]. The fact that more than just one plane is populated is an important ingredient of the experimental procedure used in [17, 18]. It allows one to look for interferences between planes, and to access in this way the spatial coherence of the quasi-2D gas.

In order to extract thermodynamic information from the interference between planes, one must ensure that the various populated planes have the same temperature. This is achieved by using finite size lattice beams in the xy -plane, so that atoms in the high energy tail of the thermal distribution can actually travel quasi freely from one plane to the other, thus ensuring thermalization. In the experiments described in [17, 18], the waist W_x of the lattice beams along the x -direction was chosen accordingly. The total trapping potential can then be written in the following way

$$V(\mathbf{r}) = V^{(\text{mag})}(\mathbf{r}) + V^{(\text{lat})}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

with

$$V^{(\text{mag})}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (6)$$

$$V^{(\text{lat})}(\mathbf{r}) = V_0 e^{-2x^2/W_x^2} \sin^2(k(z - z_0)). \quad (7)$$

Note that we have included here the offset z_0 between the optical lattice and the bottom of the magnetic potential; this quantity was not set to a fixed value in the experiments [17, 18]. We consider below two limiting situations: (i) $kz_0 = \pi/2$, with two principal equivalent minima at $kz = \pm\pi/2$; (ii) $kz_0 = 0$, with one principal minimum at $z = 0$ and two side minima at $kz = \pm\pi$. At very low temperatures, we expect that A will lead to two equally populated planes whereas configuration B will lead to one populated plane. For the temperature range considered in practice, the differences between the predictions for A and B are minor, as we will see below.

3.2. Renormalization of the trapping frequency ω_x by the optical lattice

In order to use the Bose–Einstein statistics for an ideal gas, one needs to know the position of the single particle energy levels. For the potential (5) it is not possible to find an exact analytical expression of these levels. However, if the extension of the atomic motion along the x -direction is smaller than the laser waist, an approximate expression can be readily obtained, as we show now.

The frequencies of the magnetic trap used in [17, 18] are $\omega_x = 2\pi \times 10.6$ Hz and $\omega_y = \omega_z = 2\pi \times 125$ Hz. The optical lattice has a period $\pi/k = 3 \mu\text{m}$ ($E_r = \hbar^2 k^2/(2m) = h \times 80$ Hz) and a potential height at center $U_0/h = 35$ kHz ($1.7 \mu\text{K}$). The lattice oscillation frequency at center ($x = 0$) is thus $\omega_z^{(\text{lat})}(x = 0) = 2\pi \times 3$ kHz ($\hbar\omega_z^{(\text{lat})}/k_B = 150$ nK). When the atoms

occupy the ground state of the z -motion, they acquire the zero-point energy $\hbar\omega_z^{(\text{lat})}(x)/2$ from the z -degree of freedom. The dependence on x of $\omega_z^{(\text{lat})}(x)$, due to the Gaussian term e^{-2x^2/W_x^2} in the laser intensity, causes a renormalization of the x -frequency:

$$\omega_x^2 \rightarrow \omega_x'^2 = \omega_x^2 - \frac{2\sqrt{V_0 E_r}}{m W_x^2}. \quad (8)$$

The waist of the lattice beams is $W_x = 120 \mu\text{m}$ which leads to $\omega_x' = 2\pi \times 9.4 \text{Hz}$. A similar effect should in principle be taken into account for the frequency ω_y . However the scale of variation of the laser intensity along the y -axis is the Rayleigh length, which is much larger than the waist W_x , and the effect is negligible.

This simple way of accounting for the finiteness of the waist W_x is valid when the extension of the motion along x is small compared to W_x . For $T = 100 \text{nK}$, the width of the thermal distribution along x is $\sqrt{k_B T / m \omega_x^2} \sim 50 \mu\text{m}$, which is indeed notably smaller than W_x . Taking into account the finiteness of W_x by a mere reduction of the trapping frequency along x is therefore valid for the major part of the energy distribution.

We note however that atoms in the high energy tail of the distribution ($E > 5 k_B T$ for our largest temperatures) can explore the region $|x| > W_x$, where the influence of the lattice beams is strongly reduced. In this region, the atoms can move from one lattice plane to the other. As explained above these atoms play an important role by ensuring full thermalization between the various planes. We now turn to an accurate treatment of the critical atom number required for Bose–Einstein condensation, taking into account these high energy levels for which the 2D approximation is not valid.

3.3. The critical atom number in a ‘Born–Oppenheimer’ type approximation

In order to get the single particle energy eigenstates in the lattice+harmonic potential confinement, and thus the critical atom number, one could perform a numerical diagonalization of the 3D Hamiltonian with the potential (5). This is however a computationally involved task and it is preferable to take advantage of the well-separated energy scales in the problem.

We first note that the trapping potential (5) is the sum of a term involving the variables x and z , and a quadratic component in y . The motion along the y -axis can then be separated from the xz problem, and it is easily taken into account thanks to its harmonic character. For treating the xz problem we use a ‘Born–Oppenheimer’ type approximation. We exploit the fact that the characteristic frequencies of the z -motion are at any point x notably larger than the frequency of the x -motion. This is of course true inside the lattice laser waist, since $\omega_z^{(\text{lat})}/\omega_x \sim 300$, and it is also true outside the laser waist as the x -direction corresponds to the weak axis of our magnetic trap. Therefore we can proceed in two steps:

1. For any fixed x , we numerically find the eigenvalues $E_j(x)$, $j = 0, 1, \dots$, of the z -motion in the $(V^{(\text{mag})} + V^{(\text{lat})})(x, z)$ potential. We determine the E_j s up to the threshold $6 k_B T$ above which the thermal excitation of the levels is negligible. The result of this diagonalization is shown in figure 1 for the configurations A and B.
2. We then treat semi-classically the x motion on the various potential curves $E_j(x)$. Adding the result for the independent harmonic y -motion—also treated semi-classically—we obtain the surface density $n(x, y)$ (integral of the spatial density $n_3(\mathbf{r})$ along the

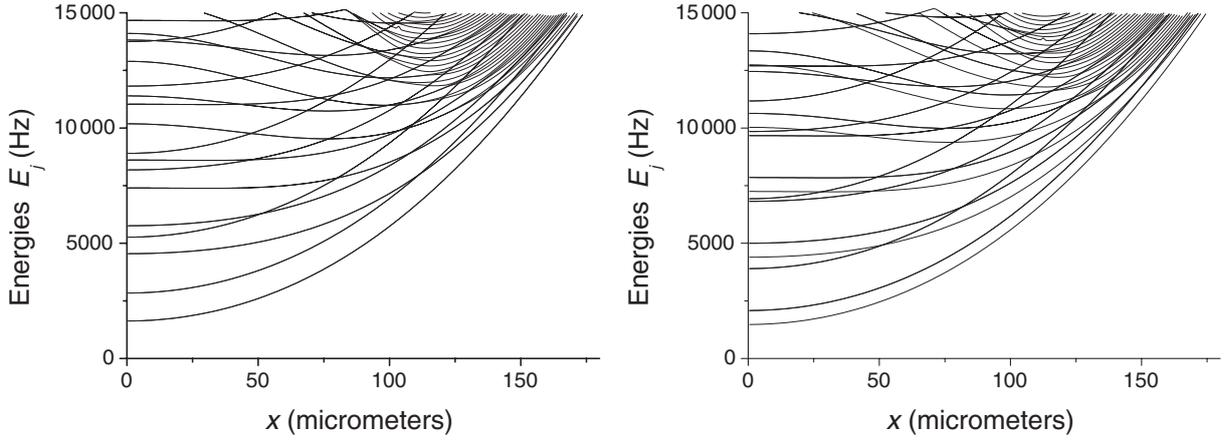


Figure 1. Eigenvalues of the z motion in the magnetic+optical x - z -potential, for fixed values of the x -coordinate (left: configuration A and right: configuration B).

direction z)

$$n(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_j g_1 \left(Z e^{-\beta(E_j(x) + V^{(\text{mag})}(y))} \right). \quad (9)$$

This procedure yields a result that is identical to the semi-classical prediction in two limiting cases:

1. The pure 2D case, that is recovered for large waists and low temperatures. In this case the restriction to the closest-to-center lattice plane and to the first z -level is legitimate, and the sum over j contains only one significant term corresponding to (4).
2. The pure 3D harmonic case with zero lattice intensity where $E_j(x) = m\omega_x^2 x^2/2 + (j + 1/2)\hbar\omega_z$. In this case the sum over j in (9) leads to $n(x, y) \lambda^2 = g_2(Z e^{-\beta V^{(\text{mag})}(x, y)})/(\beta\hbar\omega_z)$, which coincides with the 3D result $D^{(3D)}(\mathbf{r}) = g_{3/2}(Z e^{-\beta V(r)})$ when integrated along z .

Of course this procedure also allows to interpolate between these two limiting cases, which is the desired outcome. The integral of n in the xy -plane for $\mu = \min(E_j(x) + V^{(\text{mag})}(y))$ gives the critical atom number $N_c^{(\text{lat, id})}(T)$ in the ideal gas model for this lattice geometry. It is shown in figure 2(a) for the two configurations A and B.

The critical atom number $N_c^{(\text{lat, id})}$ can be compared with the result for a single plane $N_c^{(\text{id})}$ with eigenfrequencies ω'_x and ω_y . The ratio gives the effective number of planes \mathcal{N}_{eff} , shown as a function of temperature in figure 2(b) for the two configurations A and B. This ratio increases with temperature, which means that $N_c^{(\text{lat, id})}$ increases faster than T^2 with temperature in the temperature domain considered here. For example, in the range 50–110 nK, the variation of $N_c^{(\text{lat, id})}$ is well represented by T^β , with $\beta = 2.8$.

Three phenomena contribute significantly to this ‘faster than T^2 ’ increase of $N_c^{(\text{lat, id})}$. Firstly, in the lattice + harmonic potential geometry, the number of contributing planes increases with temperature, even if the atomic motion in each plane remains 2D (i.e. the atom number per plane increasing strictly as T^2). Secondly, we are exploring here a region of temperature where $k_B T$ becomes non negligible with respect to $\hbar\omega_z^{(\text{lat})}$ (the two quantities are equal for $T = 150$ nK), and the thermal excitations of the z motion in each lattice plane cannot be fully

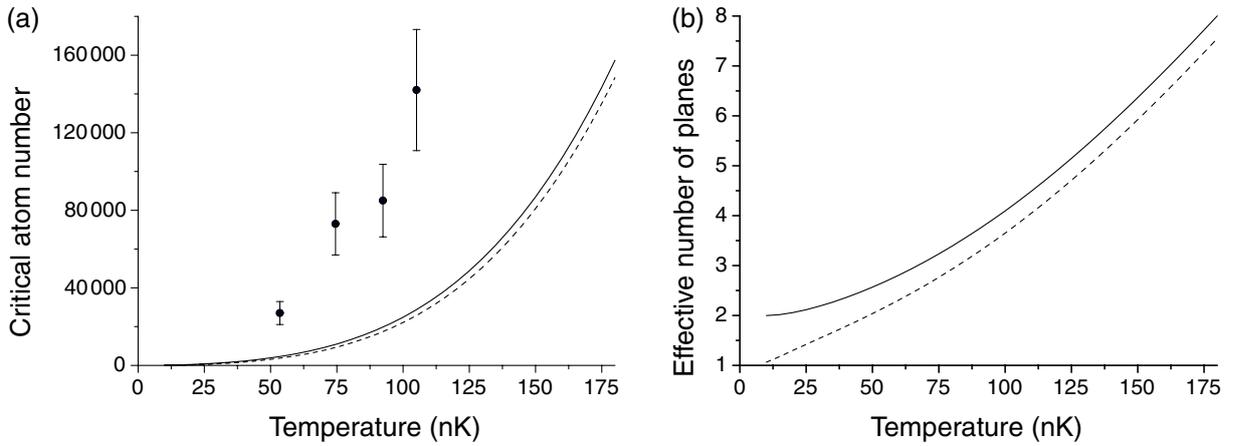


Figure 2. (a) Critical atom number $N_c^{(\text{lat, id})}$ in the ideal gas model for the optical lattice + magnetic trap configuration, as a function of temperature. The points represent the experimental results of [18], and the error bars combine the systematic and statistical uncertainties on atom numbers. (b) Effective number of planes $\mathcal{N}_{\text{eff}} = N_c^{(\text{lat, id})} / N_c^{(\text{id})}$ as a function of temperature. In both panels the continuous (dashed) line is for configuration A (B). The calculation is performed using the first 100 eigenvalues of the z -motion, and the first neglected levels $E_j(x)$ are 22 kHz ($1 \mu\text{K}$) above the bottom of the trap.

neglected. Thirdly, for the largest considered temperatures, the extension of the atomic motion along x becomes comparable to the laser waist, and the lattice strength is then significantly reduced.

3.4. Comparison with experimental results

In [18] the critical atom number in the lattice + magnetic trap configuration was measured for various ‘effective’ temperatures, deduced from the width of the quasi-Gaussian atomic distribution. Each critical point ($N_c^{(\text{exp})}$, $T_c^{(\text{exp})}$) was defined as the place where a bimodal spatial distribution appeared, if the atom number was increased beyond this point at constant temperature, or the temperature reduced at constant atom number. The critical point also corresponded to the threshold for the appearance of interferences with a significant contrast between adjacent planes. The experimental measurements of critical points, taken over the effective temperature range 50–110 nK, are shown as dots in figure 2(a). The systematic + statistical uncertainty of the atom number calibration is 25%. Assuming that the effective temperatures coincide with the true ones (this point will be examined in section 4.6) we find $N_c^{(\text{exp})} / N_c^{(\text{lat, id})} \sim 5.3 (\pm 1.2)$.

In addition to this large discrepancy between experiment and ideal gas model for the critical atom numbers, one also finds a strong mismatch concerning the functional shape of the column density $\int n(x, y) dy$ that was measured in absorption imaging in [17, 18]. While the experimental result is quasi-Gaussian, the column density profiles calculated for an ideal gas at the critical point are much ‘peakier’. An example is given in the appendix for a single plane, and we checked that a similar shape remains valid for our harmonic + lattice potential.

We, therefore, conclude that the experimental results of [18] cannot be accounted for with this ideal gas prediction for ‘conventional’ BEC.

4. Interactions in a quasi 2D trapped Bose gas

To improve the agreement between the experimental results and the theoretical modeling we now take repulsive atomic interactions into account. In a first stage we present a 2D MF analysis, in which the motion along z is assumed to be completely frozen whereas the xy motion is treated semi-classically. In order to model interactions in this case, we start from the 3D interaction energy $(g^{(3D)}/2) \int n_3^2(\mathbf{r}) d^3r$, where $g^{(3D)} = 4\pi\hbar^2 a/m$ and a is the scattering length. The z -degree of freedom is restricted to the Gaussian ground state of the confining potential, with an extension $a_z = \sqrt{\hbar/(m\omega_z^{(\text{lat})})}$, and the interaction energy is

$$E_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int n^2(\mathbf{r}) d^2r .$$

We set $g = \hbar^2 \tilde{g}/m$, where the dimensionless parameter $\tilde{g} = \sqrt{8\pi} a/a_z$ characterizes the strength of the 2D interaction (for a more elaborate treatment of atomic interactions in a quasi-2D geometry, see [25, 26]). For the optical lattice used in [18], we find $\tilde{g} = 0.13$. In a second stage, we take into account the residual excitation of the z motion in a ‘hybrid’ 3D MF approximation. We calculate in a self-consistent way the quantum levels of the z -motion, whereas the motion in the xy -plane is still treated semi-classically.

4.1. Criticality within MF solutions: 3D versus 2D

We start our discussion with a brief reminder of the role of (weak) interactions in a trapped 3D Bose gas [27]. One often uses the MF Hartree–Fock approximation, that gives in particular a relatively accurate value for the shift of the critical temperature for Bose–Einstein condensation. In order to calculate this shift, one assumes that above the critical temperature, the atoms evolve in the effective potential $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + 2g^{(3D)}n_3(\mathbf{r})$. The phase space density in \mathbf{r} is thus a solution of $D^{(3D)}(\mathbf{r}) = g_{3/2}(Ze^{-\beta V_{\text{eff}}(\mathbf{r})})$. As for the ideal case this equation ceases to have a solution when the central phase space density goes above $g_{3/2}(1)$. The mere effect of repulsive interactions within the MF approximation is to increase the number of atoms for which this threshold is met. The increase is typically $\sim 10\%$ for standard trap and interaction parameters [27].

For a trapped 2D gas this treatment based on a local criterion (phase space density at center) cannot be used. Indeed as explained in section 2.2, it is not possible to identify a critical phase space density at which BEC of the 2D gas is expected. On the contrary the semiclassical approximation leads to an infinite central density at the critical point, and it is unclear whether one can achieve an arbitrarily large spatial density in the presence of repulsive interactions.

One could also look for a global criterion for criticality based on the total atom number. The starting point is the solution of the MF equation

$$D(\mathbf{r}) = g_1 (Ze^{-\beta V_{\text{eff}}(\mathbf{r})}) \quad (10)$$

with $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r})$. When $g = 0$, we saw in section 2 that the solution of (10) can only accommodate a finite number of atoms (3). However the situation is dramatically changed

in the presence of repulsive interactions. Indeed for any nonzero g , a solution to (10) exists for arbitrarily large atom numbers [28]. Consequently no critical point can be found by simply searching for a maximal atom number compatible with (10). In the following we will therefore turn to a different approach, starting from the known exact (i.e. non-MF) results concerning the critical BKT point in a uniform interacting 2D Bose gas. The MF approximation will be used in a second stage, in combination with the local density approximation (LDA), to determine the critical atom number in the trapped system.

Note that it is also possible to pursue the search for a critical point only within the MF approach, by looking for example whether its solution exhibits a thermodynamical or dynamical instability above a critical atom number [29, 30]. This instability would be an indication that the system tends to evolve towards a different kind of state, with a non-zero quasi-condensed and/or superfluid component, and quasi-long range order [31, 32].

4.2. The BKT transition and the LDA

In an infinite uniform 2D Bose fluid, repulsive interactions have a dramatic effect since they can induce a transition from the normal to the superfluid state, when the temperature is lowered below a critical value. The superfluid density jumps from 0 to $4/\lambda^2$ at the transition point [33]. The microscopic mechanism of the 2D superfluid transition has been elucidated by BKT. For a temperature larger than the critical temperature, free vortices proliferate in the gas, destroying the superfluidity. Below the transition, vortices exist only in the form of bound pairs involving two vortices of opposite circulations, which have little influence on the superfluid properties of the system.

In a uniform system the phase space density D is a function of the chemical potential and temperature $D = F(\mu, T)$. For any given T , the superfluid transition occurs when μ is equal to a critical value $\mu_c(T)$. The corresponding critical value D_c for the phase space density depends on the interaction strength as [34]–[36]

$$D_c = \ln(\xi/\tilde{g}), \quad (11)$$

where ξ is a dimensionless number. A recent Monte Carlo analysis provided the result $\xi = 380 \pm 3$ [23] (see also [37]). For $\tilde{g} = 0.13$ this gives a critical phase space density $D_c = 8.0$.

We now consider a trapped gas whose size is large enough to be well described by the LDA. The phase space density in \mathbf{r} is given by $D(\mathbf{r}) = F(\mu - V(\mathbf{r}), T)$ and a superfluid component forms around the center of the trap if the central phase density $D(0)$ is larger than D_c [38]. The edge of the superfluid region corresponds to the critical line where $\mu - V(\mathbf{r}) = \mu_c$. The phase space density along this line is equal to D_c , independently of the total number of atoms in the trap. This can be checked experimentally and constitutes a validation of the LDA. The integration of the experimental data along the line of sight y does not lead to any complication because the trapping potential is separable, $V(\mathbf{r}) = V_1(x) + V_2(y)$. Therefore the edges of the superfluid region along the x -axis are located in $\pm x_c$ such that $V_1(x_c) = \mu - \mu_c$ (see figure 3(a)), and the column density along the line of sight passing in $x = x_c$ is

$$n_{\text{col}}(x_c) = \frac{1}{\lambda^2} \int D(x_c, y) dy = \frac{1}{\lambda^2} \int F(\mu_c - V_2(y), T) dy \quad (12)$$

which is also independent of the total atom number N . This is confirmed experimentally, as shown in figure 3(b) where we plot $n_{\text{col}}(x_c)$ as a function of N . The slight increase (10%) of

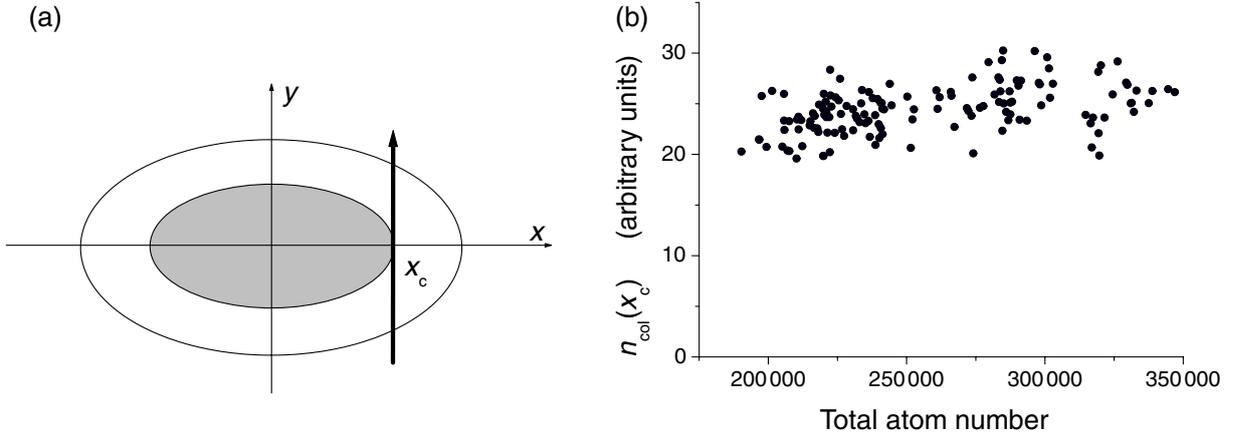


Figure 3. Check of the LDA. (a) The column density n_{col} is measured at the edge $x = x_c$ of the central part (in gray) of the bimodal distribution. (b) $n_{\text{col}}(x_c)$ is plotted as a function of the total atom number N in the harmonic trap + lattice configuration. Within the LDA for a single plane, $n_{\text{col}}(x_c)$ should be independent of N , which is indeed nearly the case. The small variation of $n_{\text{col}}(x_c)$ for large N may be due to the appearance of a nonnegligible population in side planes of the optical lattice potential. The data have been taken for the effective temperature $T = 105$ nK. Each point is extracted from a single image.

$n_{\text{col}}(x_c)$ for atom numbers larger than 3×10^5 may be due to the fact that the population of additional planes becomes non-negligible for such large N .

The possibility to use the LDA to study the BKT critical point in a harmonically trapped quasi-2D Bose gas has been checked recently by Holzmann and Krauth using a QMC analysis [24]. For trap parameters close to the ones of [18] they have shown that a superfluid component, characterized by a reduced moment of inertia, indeed appears at the center of the trap when the local phase space density reaches a critical value close to the prediction (11).

4.3. Density profile in the 2D MF theory

In this section, we use the MF Hartree–Fock approximation (10) to calculate the density profile of the trapped atomic cloud. As we mentioned above, this equation admits a solution for any value of the fugacity Z , and therefore for an arbitrarily large number of particles. Rewriting (10) as

$$D(\mathbf{r}) = -\ln(1 - Ze^{-\tilde{g}D(\mathbf{r})/\pi} e^{-\beta V(\mathbf{r})}) \quad (13)$$

we see that the value of D for any temperature and at any point in space depends only on the parameter R defined by $R^2 = (x/x_T)^2 + (y/y_T)^2$, where $x_T = (\omega_x^2 m \beta)^{-1/2}$ and $y_T = (\omega_y^2 m \beta)^{-1/2}$. The total atom number is given by

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^2 \int_0^\infty \tilde{D}(R) R \, dR, \quad (14)$$

where $\tilde{D}(R)$ is the solution of the reduced equation

$$\tilde{D}(R) = -\ln(1 - Ze^{-\tilde{g}\tilde{D}(R)/\pi} e^{-R^2/2}). \quad (15)$$

Quite remarkably this result for $\tilde{D}(R)$ neither depends on the trap parameters, nor on the temperature. The only relevant parameters are the fugacity Z and the reduced interaction strength \tilde{g} . The scaling of the atom number N with the temperature and the trap frequency in (14) is therefore very simple. In particular it does not depend on the trap anisotropy ω_y/ω_x but only on the geometric mean $\bar{\omega}$.

For atom numbers much larger than $N_c^{(\text{id})}$ it is interesting to note that the radial density profile deduced from the MF equation (13) exhibits a clear bi-modal shape, with wings given by $n(r)\lambda^2 \simeq Ze^{-\beta V(\mathbf{r})}$ and a central core with a Thomas–Fermi profile $2gn(r) \simeq \mu - V(\mathbf{r})$. However, this prediction of a bi-modal distribution using the Hartree–Fock approximation cannot be quantitatively correct. Indeed the Hartree–Fock treatment assumes a MF energy $2gn$. The factor 2 in front of this energy originates from the hypothesis that density fluctuations are those of a Gaussian field $\langle n^2 \rangle = 2 \langle n \rangle^2$. Actually when the phase space density becomes significantly larger than 1, density fluctuations are reduced and one approaches a situation closer to a quasi-condensate in which $\langle n^2 \rangle \sim \langle n \rangle^2$ [23]. Taking into account this reduction could be done for example using the equation of state obtained from a classical field Monte Carlo analysis in [39].

4.4. Critical atom number in the 2D MF approach

We now use the solution of the MF equation (13) to evaluate the critical atom number $N_c^{(\text{mf})}$ that is needed to reach the threshold (11) for the BKT transition at the center of the trap $D(0) = \ln(\xi/\tilde{g})$. For a given interaction strength \tilde{g} we vary the fugacity Z and solve numerically (13) at any point in space. Examples of spatial density profiles at the critical point are given in the appendix, both before and after time-of-flight. The integration of the density profile over the whole xy -plane gives the total atom number N . From (14) and (15), it is clear that the scaling of $N_c^{(\text{mf})}$ with the frequencies $\omega_{x,y}$ and with the temperature is identical to the one expected for an ideal trapped gas.

We have plotted in figure 4(a) the variation of $D(0)$ as a function of $N/N_c^{(\text{id})}$ for various interaction strengths. For a given atom number the phase space density at the center decreases when the strength of the interactions increases, as expected. The numerical result for $N_c^{(\text{mf})}$ is plotted as a dashed line in figure 4(a). We find that it is in excellent agreement—to better than 1%—with the result of [38]

$$\frac{N_c^{(\text{mf})}}{N_c^{(\text{id})}} = 1 + \frac{3\tilde{g}}{\pi^3} D_c^2, \quad (16)$$

over the whole range $\tilde{g} = 0-1$. This analytical result was initially derived in [38] for $g \ll 1$ using an expansion around the solution for the ideal Bose gas, but this approximation can actually be extended to an arbitrary value of \tilde{g} [40]. The strongly interacting limit ($3\tilde{g}D_c^2/\pi^3 > 1$) can be easily understood by noticing that in this case, the atomic distribution (10) nearly coincides with the Thomas–Fermi profile $2gn(r) = \mu - V(r)$. Using the relation between the total atom number and the central density for this Thomas–Fermi distribution $N = 2\pi\tilde{g}(n(0)a_{\text{ho}}^2)^2$ (with $a_{\text{ho}} = (\hbar/(m\omega))^{1/2}$), one then recovers the second term of the right-hand side of (16).

Let us emphasize that figure 4(a) is a mix of two approaches: (i) the MF model, that does not lead in itself to a singularity along the dashed line of figure 4(a). (ii) The BKT theory for a uniform system, which is beyond a MF treatment and which has been adapted to the trapped case using the LDA in order to obtain the critical number indicated by the dashed line.

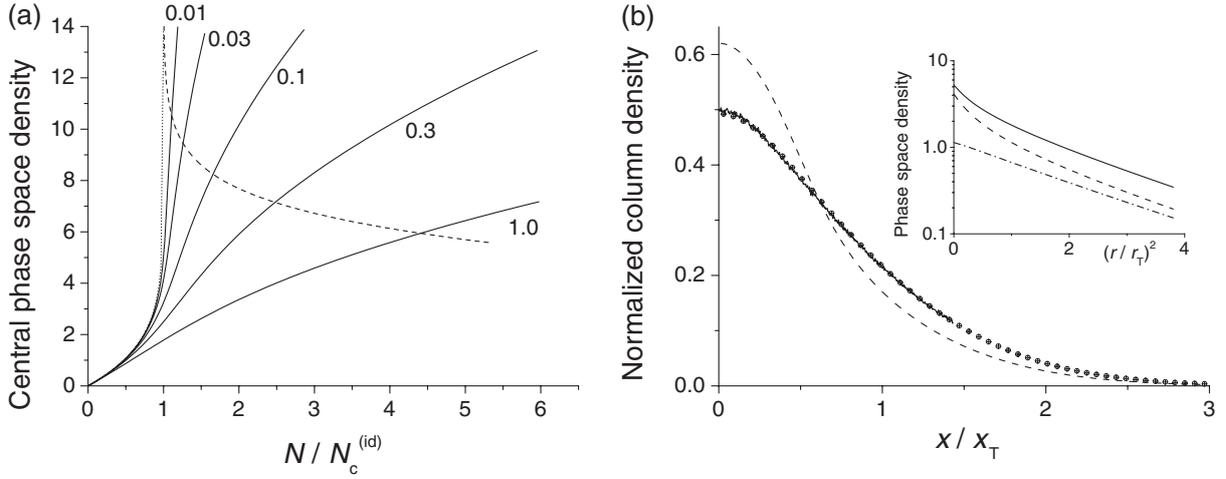


Figure 4. (a) Central phase space density predicted by the 2D MF theory, as a function of the atom number for various interaction strengths \tilde{g} . The dotted line represents the semi-classical prediction for the ideal gas. The dashed line indicates where the threshold for superfluidity (11) is met at the center of the trap. (b) Column density for $N = N_c^{(mf)} = 36\,000$ atoms in an isotropic trap ($\omega_x = \omega_y = \omega$, $\tilde{g} = 0.13$, $k_B T = 110\omega$). The dashed line is the result of the 2D MF analysis of section 4.3. The continuous line is the 3D QMC result obtained in [24], with $\omega_z = 83\omega$ and $a = \tilde{g}a_z/\sqrt{8\pi}$. The dots are the result of the hybrid 3D MF calculation of section 4.5 for the same parameters. Inset: Prediction of the hybrid 3D MF approach for the phase space density (log scale) as a function of r^2 (a Gaussian distribution leads to a straight line). Continuous line: total phase space density; dashed line: phase space density associated with the ground state φ_1 of the z -motion; dash-dotted line: phase space density associated with all other states $\varphi_j, j \geq 2$.

We now compare the 2D MF prediction with the results of the QMC calculation of [24], looking first at the critical atom number and then at the density profiles. For $\tilde{g} = 0.13$ the MF prediction for the critical number (16) is $N_c^{(mf)}/N_c^{(id)} = 1.8$. This is in relatively good agreement with the QMC calculation of [24], which gives $T_c^{(QMC)} = 0.70 T_c^{(id)}$ or equivalently $N_c^{(QMC)}/N_c^{(id)} = 2.0$. The QMC calculation has been performed for various atom numbers N , for a 3D harmonic trap such that $\omega_z/\omega = 0.43\sqrt{N}$ and a 3D scattering length $a = \tilde{g}a_z/\sqrt{8\pi}$, with $\tilde{g} = 0.13$.

The agreement between the 2D MF and the QMC approaches is not as good for the density profiles close to the critical point. An example is shown in figure 4(b), where we take $k_B T = 110\hbar\omega$ ($N_c^{(id)} = 20\,000$). We choose $N = N_c^{(mf)} = 36\,000$ and we plot the column density $n_{col}(x)$ obtained by integrating the spatial density along the directions y and z . The MF result is shown as a dashed line, and it notably differs from the QMC result, plotted as a continuous line. As we show below this disagreement is essentially a consequence of the residual excitation of the z -motion ($k_B T/(\hbar\omega_z) = 1.4$), that is neglected in the 2D MF approach, whereas it is implicitly taken into account in the 3D QMC calculation.

4.5. The hybrid 3D MF approach

In this section, we extend the 2D MF treatment to take into account the residual excitation of the z -motion. As pointed out to us by the authors of [24], this is necessary for a quantitative analysis of the experiment [18], since the temperature and the chemical potential at the critical point were not very small compared to $\hbar\omega_z^{(\text{lat})}$, but rather comparable to it.

We follow here a method related to the one developed in section 3 to analyze the ideal gas case. We start from a trial 3D density distribution $n_3(\mathbf{r})$. At any point (x, y) , we treat the z -motion quantum mechanically and solve the eigenvalue problem for the z -variable

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \right] \varphi_j(z|x, y) = E_j(x, y) \varphi_j(z|x, y), \quad (17)$$

where $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)/2 + 2g^{(3D)}n_3(\mathbf{r})$ and $\int |\varphi_j(z|x, y)|^2 dz = 1$. Treating the xy -degrees of freedom semi-classically, we obtain a new spatial density

$$n'_3(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_j |\varphi_j(z|x, y)|^2 \ln(1 - e^{\beta(\mu - E_j(x, y))}). \quad (18)$$

We then iterate this calculation until the spatial density $n_3(\mathbf{r})$ reaches a fixed point [41]. With this method, we fulfill two goals. (i) We take into account the residual thermal excitation of the levels in the z -direction. (ii) Even at zero temperature we take into account the deformation of the z -ground state due to interactions.

This ‘hybrid 3D MF’ method is different from the standard MF treatment used to describe 3D Bose gases. In the latter case, all three degrees of freedom are treated semi-classically, which is valid when the particle population is distributed smoothly over several quantum states. This standard 3D MF would not be applicable in our case, where a significant part of the total population accumulates in the lowest state φ_1 .

An example is shown in figure 4(b), where we plot the column density $n_{\text{col}}(x)$ obtained with this hybrid MF method, taking into account the first 5 eigenstates φ_j . The agreement between the hybrid 3D MF prediction and the ‘exact’ QMC prediction of [24] is excellent. This shows that the predictions of this hybrid 3D MF approach are reliable as long as the superfluid transition has not been reached at the center of the trap.

We show in the inset the variations of the phase space density $D(r)$. We plot $\ln(D)$ as a function of r^2 , so that a Gaussian distribution would appear as a straight line. The dashed line is the phase-space density associated with the ground state of the z motion φ_1 , and the dash-dotted line corresponds to the excited states φ_j , $j \geq 2$. The continuous line is the total phase-space density. At the center of the trap, as a consequence of Bose statistics, most of the population (80%) accumulates in the ground state φ_1 . For $r \geq r_T$, the repartition of the population among the eigenstates of the z motion follows the Boltzmann law, and $\sim 50\%$ of the atoms occupy the excited states φ_j , $j \geq 2$. A practical consequence of this increasing influence of excited states of the z motion with increasing r is that the total phase space density profile is notably closer to a Gaussian distribution than when only the ground state of the z motion is retained in the calculation, as is the case in the 2D MF approach.

Finally we mention that we have also developed a simpler version of this hybrid 3D MF analysis, in which the φ_j levels are not calculated self-consistently, but are assumed to coincide with the energy eigenstates in the potential $m\omega_z^2 z^2/2$ (see also [42]). For the domain of parameters relevant for the experiment, the two approaches lead to very similar results.

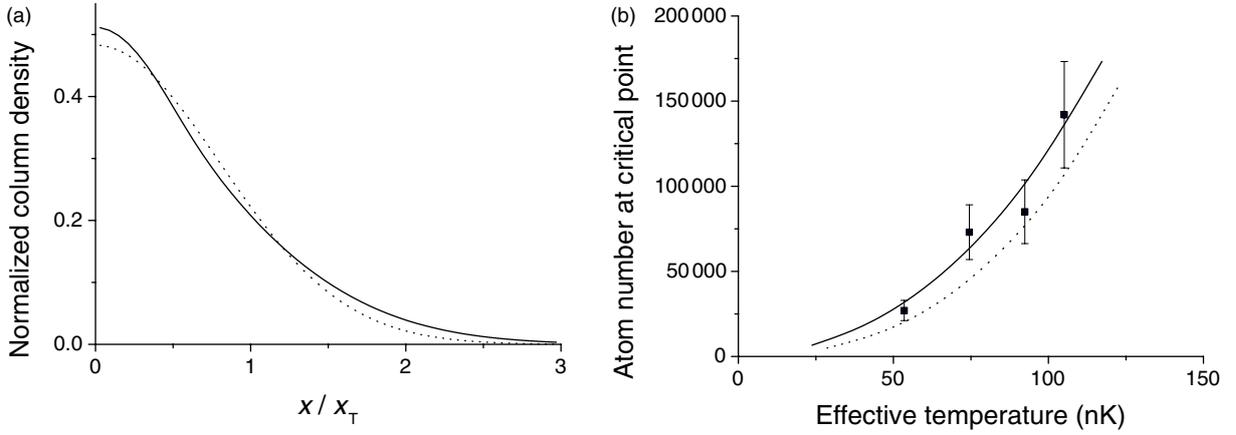


Figure 5. (a) Hybrid 3D MF prediction for the normalized column density for the lattice configuration A, $T = 150$ nK and $N = 110\,000$ atoms. For these parameters the phase space density associated with the lowest eigenvalue of the z motion reaches the critical value D_c at the center of the most populated planes. The dotted line is a Gaussian fit which gives the effective temperature $T_{\text{eff}} = 0.64 T = 96$ nK. (b) Critical atom number as a function of the effective temperature obtained from a Gaussian fit of the MF result. The continuous line (resp. dashed line) is for configuration A (resp. B). The points are the experimental results of [18], already shown in figure 2.

4.6. MF approach for the lattice configuration and comparison with experiment

In order to compare the predictions of the MF approach with the experimental results, we now turn to the lattice geometry, corresponding to a stack of parallel planes located in $z_j = z_0 + j\ell$, j integer. For simplicity we assume that the laser waist W_x is large compared to the spatial extent of the atomic cloud, so that we can treat the gas as a superposition of independent harmonically trapped systems. Each system is located in the vicinity of a nodal plane of the optical lattice, and is treated as a harmonic trap with frequencies ω'_x , ω_y and $\omega_z^{(\text{lat})}$. Note that we include here ‘by hand’ the renormalization $\omega_x \rightarrow \omega'_x$ of the x -frequency due to the finiteness of the laser waist, that we discussed in section 3.2. The magnetic trap adds an extra confinement along the z -axis with a frequency ω_z so that the chemical potential for the plane z_j is $\mu_j = \mu - m\omega_z^2(z_0 + j\ell)^2/2$. We assume that the critical point is reached when the phase space density associated with the lowest eigenstate φ_1 in the most populated plane reaches the critical value (11). Once the corresponding fugacity is determined, we calculate the spatial distribution in each plane, sum up the various contributions, and integrate the spatial distribution over the line of sight y to obtain the column density $n_{\text{col}}(x)$.

A typical result for n_{col} is given in figure 5(a) for the temperature $T = 150$ nK and for the lattice configuration A. The total atom number is 1.1×10^5 . It is well fitted by a Gaussian distribution $\exp(-x^2/2x_0^2)$ (dotted line), so that we can assign an effective temperature to this distribution $T_{\text{eff}} = m\omega_x^2 x_0^2/k_B$. In the example of figure 5(a), we find $T_{\text{eff}} = 0.64 T$ (96 nK). For the same T and a lattice in configuration B, the effective temperature obtained with a Gaussian fit is $T_{\text{eff}} = 0.69 T$ (103 nK) and the total atom number is $N = 1.0 \times 10^5$. We have repeated this

procedure for temperatures T in the range 100–200 nK and consistently found the ratio T_{eff}/T in the range 0.6–0.7, with a quality of the Gaussian fit similar to what is shown in figure 5(a).

We have plotted in figure 5(b) the calculated total number of atoms in the lattice at the critical point, as a function of the effective temperature deduced from the Gaussian fit to the column density. We have also plotted the experimental points of [18] already shown in figure 2. We remind the reader that the experimental ‘effective’ temperature is also deduced from a Gaussian fit to the measured column density. One reaches in this way good agreement between the experimental results and the hybrid 3D MF prediction. The predicted density profiles with the 3D MF approach therefore provide a satisfactory means for temperature calibration. They indicate in particular that for the experiment [18], the effective temperatures are typically 30–40% below the real ones. To improve on the comparison between theory and experiment, a more controlled set-up will be needed with an accurate independent measurement of temperature, as well as the possibility of addressing only a single or a fixed number of planes.

5. Summary and concluding remarks

In this paper, we have analyzed the critical point of a trapped quasi-2D Bose gas. We have shown that the experimental results of [18] are not in agreement with the ideal Bose gas theory. The differences are found first at the qualitative level: the predicted shape for the ideal gas distribution is ‘peaky’ around its center, which clearly differs from the quasi-Gaussian measured profile. Also the measured critical atom numbers $N_c(T)$ do not agree with the predictions for the ideal gas. Using the ‘effective’ temperatures obtained by treating the Gaussian profiles as Boltzmann distributions, the measured $N_c(T)$ are larger by a factor ~ 5 than the predicted ones. We then discussed the predictions of a hybrid approach based on the LDA. It combines the density profile calculated using a MF Hartree–Fock treatment, and the known result for the critical phase space density for the BKT transition in an infinite, uniform 2D Bose gas [23]. We compared the predictions of this approach with the results of a recent QMC calculation [24] and reached the following conclusions: (i) if one is interested only in the critical atom number, it is sufficient to use a strictly 2D MF approach. It leads to the approximate analytical result (16), in good agreement with the QMC prediction. For the experimental parameters of [18] the critical atom number is $N_c \sim 2N_c^{(\text{id})}$. (ii) In order to calculate accurately the density profiles for the experimental temperature range ($k_B T$ between $0.5 \hbar\omega_z$ and $\hbar\omega_z$), it is important to take into account the residual excitation of the z degree of freedom (the same conclusion has been reached in [42]). We have presented a hybrid 3D MF approximation which leads to density distributions in excellent agreement with the QMC predictions close to the critical point. When generalized to the lattice geometry used in the experiment, the predicted density profiles are close to a Gaussian distribution, and good agreement between theory and experiment is reached concerning the critical number $N_c(T)$ when the predicted density profile is used for temperature calibration.

We now briefly discuss the nature of the critical point that appears in the trapped 2D Bose gas and compare it with ‘standard’ Bose–Einstein condensation. For a harmonically trapped ideal gas, we recall that conventional Bose–Einstein condensation is expected in the thermodynamic limit $N \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ and $N\omega^2$ constant. This is a consequence of the density of states for a quadratic Hamiltonian around the zero energy. The price to pay for this condensation in a 2D system is a diverging atomic density at the center of the trap. In contrast, when interactions are taken into account, the MF approximation leads to the potential $V(\mathbf{r}) + 2g n(\mathbf{r})$

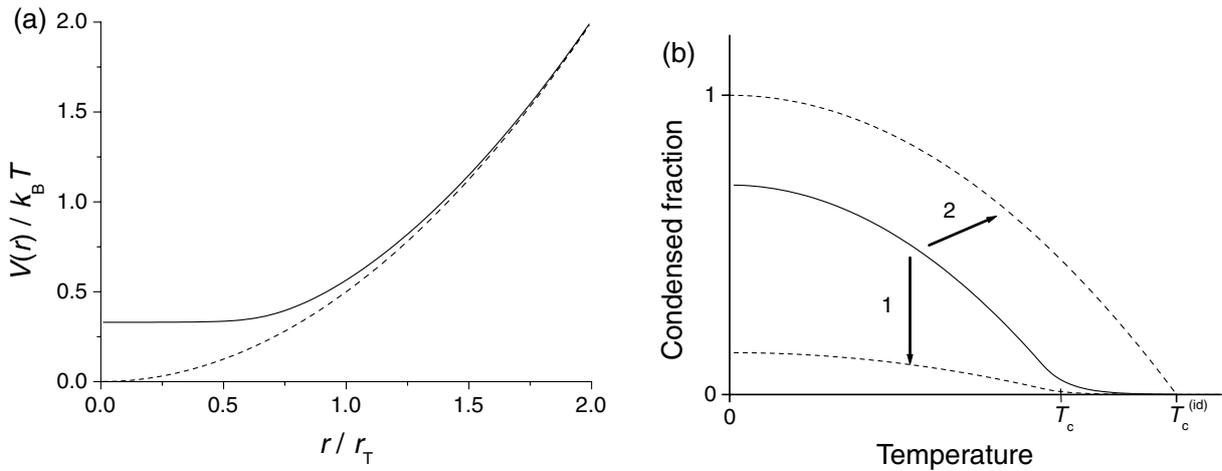


Figure 6. (a) Trapping potential $V(r)$ (dashed line) and effective MF potential $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + 2gn(r)$ (continuous line), for $\tilde{g} = 0.13$ and a central phase space density equal to the critical value (11). (b) Schematic representation of the condensed fraction in a finite 2D Bose gas for a given interaction strength \tilde{g} (continuous line). Two limits can be considered: (1) thermodynamic limit $N \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0, N\omega^2$ constant; the condensed fraction tends to zero for any nonzero value of \tilde{g} , (2) ideal gas limit $\tilde{g} \rightarrow 0$.

that is flat at the origin (figure 6(a) and [38]). The ‘benefit’ of the harmonic trapping potential is lost and the physics of the trapped interacting gas is very similar to that of a uniform system. In particular one expects in the thermodynamic limit the appearance of quasi-long range order only, with no true Bose–Einstein condensate [25].⁶ The transition between the ideal and the interacting case is explicit in equations (11) and (16), where the limit $\tilde{g} \rightarrow 0$ gives $D_c \rightarrow +\infty$ and $N_c^{(\text{mf})}/N_c^{(\text{id})} \rightarrow 1$. In particular (16) can be used to separate a ‘BEC-dominated’ regime where $\eta = 3\tilde{g}D_c^2/\pi^3 \ll 1$ and $N_c \simeq N_c^{(\text{id})}$, and a ‘BKT-dominated’ regime, where the contribution of η is dominant and $N_c \gg N_c^{(\text{id})}$. In the latter case, the spatial distribution in the MF approximation is a Thomas–Fermi disk with radius R_{TF} and (16) is equivalent (within a numerical factor) to the BKT threshold (11) for a uniform gas with density $n = N/(\pi R_{\text{TF}}^2)$. The rubidium gas studied in [17, 18] is at the border of the ‘BKT-dominated’ regime ($\eta \simeq 1$), whereas previous experiments performed on quasi-2D gases of sodium atoms [8] corresponded to $\eta \sim 0.1$, well inside the ‘BEC-dominated’ regime.

Finally, we must take into account the finite size of the gas in our discussion. It is known from simulations of 2D spin assemblies that for a finite size system, the average magnetization increases rapidly around the BKT transition [43]. It is at first sight surprising that this magnetization can be used as a signature of BKT physics, since it would not exist in an infinite system where a genuine BKT transition takes place. However, it is relevant for all practical 2D situations: as emphasized in [43] one would need extremely large systems (‘bigger than the state of Texas’) to avoid a significant magnetization even just below the transition point. A similar phenomenon occurs for a finite size Bose gas. A few states acquire a large

⁶ A similar flattening of the MF potential occurs in 3D, but it has no important consequence in this case since true BEC is possible in an infinite, uniform 3D system.

population around the transition point, and this allows for the observation of good contrast interferences between two independent gases. In particular the condensed fraction f_0 (largest eigenvalue of the one-body density matrix) is expected to grow rapidly at the critical point, and this has been quantitatively confirmed by the QMC calculation of [24]. To illustrate this point we have schematically plotted in figure 6(b) the expected variations of f_0 with the parameters of the problem. For given \tilde{g} and N , f_0 takes significant values for $T < T_c$ (continuous line). If the strength of the interactions \tilde{g} is kept constant, the condensed fraction f_0 tends to zero for any finite temperature if the thermodynamic limit is taken (arrow 1 in figure 6(b)). Note that the superfluid fraction should tend to a finite value in this limiting procedure. Now one can also keep N constant and decrease \tilde{g} to zero (arrow 2 in figure 6(b)). In this case one expects to recover the ideal gas result $f_0 = 1 - (T/T_c^{(\text{id})})^2$ for any value of N . Therefore, we are facing here a situation where two limits do not commute: $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{g \rightarrow 0} \neq \lim_{g \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty}$. Of course this does not cause any problem in practice since none of these limits are reached. In this sense the phenomenon observed in our interacting, trapped 2D Bose gas is hybrid: the transition point is due to BKT physics (the density of states of the ideal 2D harmonic oscillator does not play a significant role because of the flattening of the potential), but thanks to the finite size of the system, some diagnoses of the transition such as the appearance of interferences, take benefit of the emergence of a significant condensed fraction.

Acknowledgments

We are indebted to Markus Holzmann and Werner Krauth for numerous discussions, for providing the quantum Monte Carlo data shown in figure 4 and for pointing out the significant role of the excitation of the z motion in our experiments. We also thank Yvan Castin and Pierre Cladé for helpful discussions. PK and SPR acknowledge support from EU (contract MEIF-CT-2006-025047) and from the German Academic Exchange Service (DAAD, grant D/06/41156), respectively. This work is supported by Région Île de France (IFRAF), CNRS, the French Ministry of Research, ANR (Project GASCOR, NT05-2-42103) and the EU project SCALA. Laboratoire Kastler Brossel is a research unit of École Normale Supérieure, Université Pierre and Marie Curie and CNRS.

Appendix. The time-of-flight in the 2D MF approximation

We have emphasized in this paper that the measured density profiles differ from those calculated for an ideal gas or within the 2D MF theory. The profiles calculated in steady-state in the trap are found to be much ‘peakier’ than the experimental ones. As the experimental profiles were actually measured after a time-of-flight of $t = 22$ ms ($\omega_x t = 1.3$), it is important to check that this mismatch between predicted and observed profiles remain valid when the ballistic expansion of the atoms is taken into account. Also the atom distributions were measured using an absorption imaging technique, with an imaging beam propagating along the y -axis. Therefore the measurement gave access to the column density $n_{\text{col}}(x, t)$, obtained by integrating the total density along y . In this appendix, we take into account the time-of-flight and the integration along the y -direction, both for an ideal and for an interacting gas within the 2D MF approximation.

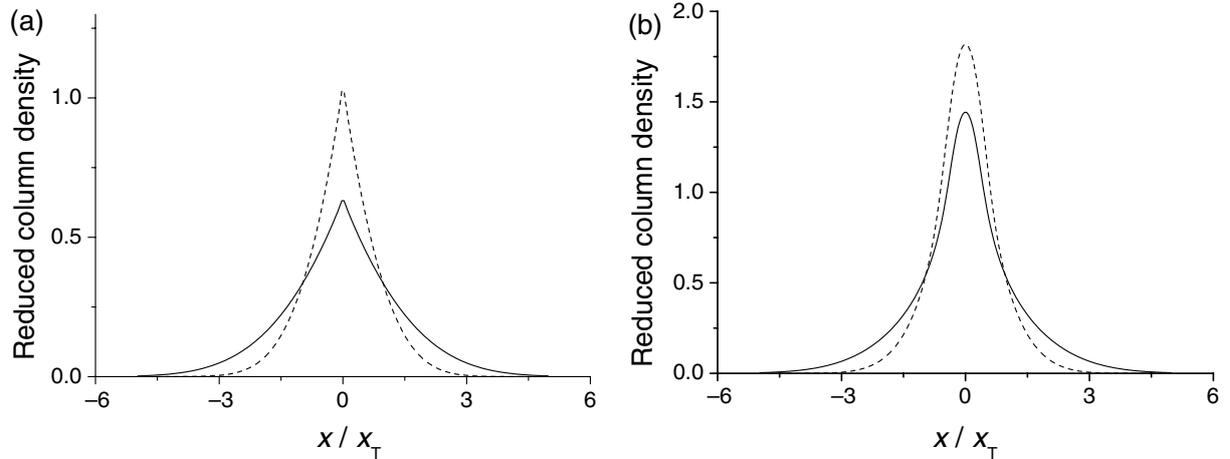


Figure A1. Reduced column density F in the trap (dashed line) and after a time-of-flight t such that $\omega_x t = 1.3$ (continuous line). (a) Ideal gas case, for an atom number equal to the critical value (3). (b) MF result for $\tilde{g} = 0.13$. The fugacity is chosen such that the threshold for superfluidity (11) is met at the center of the trap.

The spatial distribution $n(\mathbf{r}, t)$ at time t can be calculated from the phase space distribution $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ at initial time using

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \rho(\mathbf{r} - \mathbf{p}t/m, \mathbf{p}) d^2 p. \quad (\text{A.1})$$

In the semi-classical approximation the in-trap phase space density is given by

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{h^2} \left\{ \exp \left[\left(\frac{p^2}{2m} + V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) - \mu \right) / k_B T \right] - 1 \right\}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

where $V_{\text{eff}} = V(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r})$ and $n(\mathbf{r})$ is obtained by solving (13). The result for the column density can be written as

$$n_{\text{col}}(x, t) = \frac{1}{x_T} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 F(X, Z, \tilde{g}, \tau), \quad X = \frac{x}{x_T}, \quad \tau = \omega_x t. \quad (\text{A.3})$$

The results for F are shown in figure A1(a) for an ideal gas, and in figure A1(b) for an interacting gas in the MF approximation. In the ideal gas case, the initial column density can be calculated analytically:

$$F(X, Z, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{3/2} \left(Z e^{-X^2/2} \right) \quad (\text{A.4})$$

and the column density after time-of-flight is deduced from the initial value by a simple dilatation

$$F(X, Z, 0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} F \left(\frac{X}{\sqrt{1+\tau^2}}, Z, 0, 0 \right). \quad (\text{A.5})$$

In figure A1(a), the fugacity is such that the atom number equals the critical number (3). In the interacting case of figure A1(b), the number of atoms is such that the criterion for superfluidity is met at the center of the trap. In all cases, it is clear that the observed profiles are very different from a Gaussian, in clear disagreement with the experimental observation.

References

- [1] Peierls R E 1935 Quelques propriétés typiques des corps solides *Ann. Inst. H Poincaré* **5** 177
- [2] Penrose O and Onsager L 1956 Bose–Einstein condensation and liquid helium *Phys. Rev.* **104** 576
- [3] Hohenberg P C 1967 Existence of long-range order in one and two dimensions *Phys. Rev.* **158** 383
- [4] Mermin N D and Wagner H 1966 Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models *Phys. Rev. Lett.* **17** 1307
- [5] Berezinskii V L 1971 Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional system possessing a continuous symmetry group - ii. Quantum systems *Sov. Phys.—JETP* **34** 610
- [6] Kosterlitz J M and Thouless D J 1973 Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6** 1181
- [7] Bishop D J and Reppy J D 1978 Study of the superfluid transition in two-dimensional ^4He films *Phys. Rev. Lett.* **40** 1727–30
- [8] Görlitz A *et al* 2001 Realization of Bose–Einstein condensates in lower dimensions *Phys. Rev. Lett.* **87** 130402
- [9] Rychtarik D, Engeser B, Nägerl H-C and Grimm R 2004 Two-dimensional Bose–Einstein condensate in an optical surface trap *Phys. Rev. Lett.* **92** 173003
- [10] Smith N L, Heathcote W H, Hechenblaikner G, Nugent E and Foot C J 2005 Quasi-2D confinement of a BEC in a combined optical and magnetic potential *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38** 223
- [11] Colombe Y, Knyazchyan E, Morizot O, Mercier B, Lorent V and Perrin H 2004 Ultracold atoms confined in rf-induced two-dimensional trapping potentials *Europhys. Lett.* **67** 593
- [12] Burger S, Cataliotti F S, Fort C, Maddaloni P, Minardi F and Inguscio M 2002 Quasi-2D Bose–Einstein condensation in an optical lattice *Europhys. Lett.* **57** 1
- [13] Köhl M, Moritz H, Stöferle T, Schori C and Esslinger T 2005 Superfluid to Mott insulator transition in one, two, and three dimensions *J. Low Temp. Phys.* **138** 635
- [14] Orzel C, Tuchmann A K, Fenselau K, Yasuda M and Kasevich M A 2001 Squeezed states in a Bose–Einstein condensate *Science* **291** 2386
- [15] Spielman I B, Phillips W D and Porto J V 2007 The Mott insulator transition in two dimensions *Phys. Rev. Lett.* **98** 080404
- [16] Hadzibabic Z, Stock S, Battelier B, Bretin V and Dalibard J 2004 Interference of an array of independent Bose–Einstein condensates *Phys. Rev. Lett.* **93** 180403
- [17] Hadzibabic Z, Krüger P, Cheneau M, Battelier B and Dalibard J 2006 Berezinskii–Kosterlitz–Thouless crossover in a trapped atomic gas *Nature* **441** 1118–21
- [18] Krüger P, Hadzibabic Z and Dalibard J 2007 Critical point of an interacting two-dimensional atomic Bose gas *Phys. Rev. Lett.* **99** 040402
- [19] Posazhennikova A 2006 Weakly interacting, dilute Bose gases in 2D *Rev. Mod. Phys.* **78** 1111
- [20] Bloch I, Dalibard J and Zwirger W 2007 Many-body physics with ultracold gases *Preprint* 0704.3011
- [21] Schweikhard V, Tung S and Cornell E A 2007 Vortex proliferation in the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless regime on a two-dimensional lattice of Bose–Einstein condensates *Phys. Rev. Lett.* **99** 030401
- [22] Bagnato V S and Kleppner D 1991 Bose–Einstein condensation in low-dimensional traps *Phys. Rev. A* **44** 7439–41
- [23] Prokof'ev N V, Ruebenacker O and Svistunov B V 2001 Critical point of a weakly interacting two-dimensional Bose gas *Phys. Rev. Lett.* **87** 270402
- [24] Holzmann M and Krauth W 2007 Kosterlitz–Thouless transition of the quasi two-dimensional trapped Bose gas *Preprint* 0710.5060
- [25] Petrov D S, Holzmann M and Shlyapnikov G V 2000 Bose–Einstein condensation in quasi-2D trapped gases *Phys. Rev. Lett.* **84** 2551
- [26] Petrov D S and Shlyapnikov G V 2001 Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas *Phys. Rev. A* **64** 012706

- [27] Dalfovo F S, Pitaevkii L P, Stringari S and Giorgini S 1999 Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [28] Bhaduri R K, Reimann S M, Viefers S, Ghose Choudhury A and Srivastava M K 2000 The effect of interactions on Bose–Einstein condensation in a quasi two-dimensional harmonic trap *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **33** 3895
- [29] Fernández J P and Mullin W J 2002 The two-dimensional Bose–Einstein condensate *J. Low Temp. Phys.* **128** 233
- [30] Gies C and Hutchinson D A W 2004 Coherence properties of the two-dimensional Bose–Einstein condensate *Phys. Rev. A* **70** 043606
- [31] Petrov D S, Gangardt D M and Shlyapnikov G V 2004 Low-dimensional trapped gases *J. Physique IV* **116** 5–44
- [32] Simula T P and Blakie P B 2006 Thermal activation of vortex–antivortex pairs in quasi-two-dimensional Bose–Einstein condensates *Phys. Rev. Lett.* **96** 020404
- [33] Nelson D R and Kosterlitz J M 1977 Universal jump in the superfluid density of two-dimensional superfluids *Phys. Rev. Lett.* **39** 1201
- [34] Popov V N 1983 *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Dordrecht: Reidel)
- [35] Kagan Y, Svistunov B V and Shlyapnikov G V 1987 Influence on inelastic processes of the phase transition in a weakly collisional two-dimensional Bose gas *Sov. Phys.—JETP* **66** 314
- [36] Fisher D S and Hohenberg P C 1988 Dilute Bose gas in two dimensions *Phys. Rev. B* **37** 4936
- [37] Al Khawaja U, Andersen J O, Proukakis N P and Stoof H T C 2002 Low dimensional Bose gases *Phys. Rev. A* **66** 013615
- [38] Holzmann M, Baym G, Blaizot J P and Laloë F 2007 Superfluid transition of homogeneous and trapped two-dimensional Bose gases *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **104** 1476
- [39] Prokof'ev N V and Svistunov B V 2002 Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region *Phys. Rev. A* **66** 043608
- [40] Holzmann M 2007 private communication
- [41] Kadanoff L P and Baym G 1963 *Quantum Statistical Mechanics* (New York: Benjamin-Cummings)
- [42] Holzmann M, Chevalier M and Krauth W 2008 Semiclassical theory of the quasi two-dimensional trapped gas *Preprint* 0801.2758
- [43] Bramwell S T and Holdsworth P C W 1994 Magnetization: a characteristic of the Kosterlitz–Thouless–Berezinskii transition *Phys. Rev. B* **49** 8811–4

Deuxième partie

Nouveau montage expérimental

Introduction

Afin d'exploiter tout le potentiel des atomes ultra-froids comme simulateurs quantiques, les expérimentateurs sont amenés à introduire de nombreux moyens de contrôle et de manipulation du nuage, aussi bien pour les degrés de liberté externes que pour les degrés de liberté internes. Tous ces outils nécessitent entre autre un accès optique important, rarement disponible sur les montages de « première génération ». Ainsi la décision a-t-elle été prise dès 2004 de construire un nouveau montage, plus flexible que celui sur lequel ont été réalisées les expériences présentées au chapitre 2.

La conception de notre nouveau montage est due à Baptiste Battelier. Le lecteur trouvera dans [sa thèse](#) une discussion détaillée des choix techniques qui ont été faits et de leur motivation. Il a été décidé de travailler sur le ^{87}Rb , dans un montage à deux chambres. Les atomes sont déplacés par transport magnétique de la chambre du piège magnéto-optique à la chambre de condensation, où ils sont confinés dans un piège TOP. La construction de ce montage a commencé au début de l'année 2006 et le premier condensat a été obtenu en février 2008, après plusieurs modifications des plans initiaux. Depuis l'été 2008, le montage est entré dans une phase de fonctionnement stabilisé nous permettant d'obtenir de manière reproductible des condensats de Bose-Einstein contenant quelques 10^5 atomes avec un cycle de 60 s. Nous exposons dans le chapitre 3 les détails du montage dans sa version actuelle et la séquence qui nous permet de produire un gaz dégénéré.

Les expériences en cours concernent le gaz de Bose bidimensionnel. Nous réalisons maintenant le confinement axial à l'aide d'un faisceau laser dont le profil d'intensité est façonné par optique de Fourier. La méthode employée, inspirée par [Smith *et al.* \(2005\)](#), est décrite dans le chapitre 4. Elle nous permet de réaliser un plan unique, que nous pouvons ensuite observer selon l'axe qui lui est perpendiculaire. Nous avons donc maintenant accès au profil de densité complet dans le plan. La grande flexibilité offerte par l'optique de Fourier nous autorise également à confiner les atomes dans deux plans indépendants ; nous sommes donc en mesure de réaliser des expériences d'interférence et de révéler le profil de phase relative entre les deux nuages. Nous envisageons aussi, toujours avec la même technique, de remplacer le confinement radial dû au piège magnétique par un potentiel à fond plat. Il serait alors possible de préciser quantitativement le rôle du confinement dans la transition BKT.

Finalement, le chapitre 5 expose les premières observations du gaz bidimensionnel que nous avons réalisées sur ce nouveau montage. Elle concernent l'expansion libre du gaz dans son plan, lorsque le confinement radial est supprimé. Si les interactions sont modélisées par un potentiel de contact, l'expansion des parties cohérente et thermique du nuage doit suivre une même loi d'échelle, déterminée par une sy-

métrie cachée du hamiltonien à N corps ([Pitaevskii et Rosch, 1997](#); [Castin, 2004](#)). Nos observations confirment ce résultat important. Nous proposons également dans ce chapitre deux expériences possibles sur le gaz bidimensionnel, qui reposent sur l'utilisation des deux plans.

Chapitre 3

Vers le condensat de Bose–Einstein

Notre montage est constitué de deux chambres à vide, séparées de 50 cm et reliées par un tube de pompage différentiel. Dans la première chambre, le piège magnéto-optique (PMO) est chargé à partir de la vapeur de rubidium ambiante. Les atomes sont ensuite transférés dans un piège magnétique quadrupolaire, dont le centre est déplacé jusqu'à la deuxième chambre à l'aide d'une chaîne de bobines. C'est dans cette deuxième chambre, une cellule en verre, qu'a lieu l'évaporation radiofréquence. Au cours de l'évaporation, un champ magnétique tournant est ajouté au piège quadrupolaire de manière à former un piège TOP (*time-orbiting potential*, [Petrich et al., 1995](#)), dans lequel la condensation est possible. Il nous est ainsi possible d'obtenir en 60 s un condensat contenant quelques 10^5 atomes, confiné dans un piège harmonique de fréquences 36 Hz dans le plan horizontal et 101 Hz selon la verticale. Le lecteur trouvera la description détaillée du montage dans la [thèse de Baptiste Battelier](#). Nous ne présentons ici que les éléments originaux, mis en place à partir de septembre 2007.

3.1 Le piège magnéto-optique

Le PMO fonctionne sur la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ de la raie D_2 . Le repompage est effectué sur la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$ de la même raie. Les deux fréquences sont injectées dans une même fibre optique, reliant les diodes lasers à la chambre à vide. En sortie de fibre, nous disposons d'environ 300 mW pour la fréquence principale¹ et 15 mW pour la fréquence de repompage. Les six faisceaux nécessaires au PMO sont dérivés de cette unique fibre. Le diamètre du col² des faisceaux est $w = 12$ mm. L'intensité par bras au niveau du piège est donc de 22 mW/cm² pour la fréquence principale et 2,2 mW/cm² pour la fréquence de repompage. Le PMO fonctionne dans un gradient de champ magnétique égal à 6,8 G/cm (sur l'axe des bobines) et avec un désaccord égal à $-3,5 \Gamma$, où $\Gamma/2\pi = 6$ MHz est la largeur naturelle de la transition de refroidissement $F = 2 \rightarrow F' = 3$. Le piège se charge en 5 à

1. Cette puissance est fournie par un *tapered amplifier* de 1 W injecté par la diode laser de la transition principale.

2. Le diamètre du col w (ou *waist*) est défini selon la convention habituelle en optique, où l'intensité d'un faisceau gaussien est de la forme $I(r) \propto \exp(-2r^2/w^2)$.

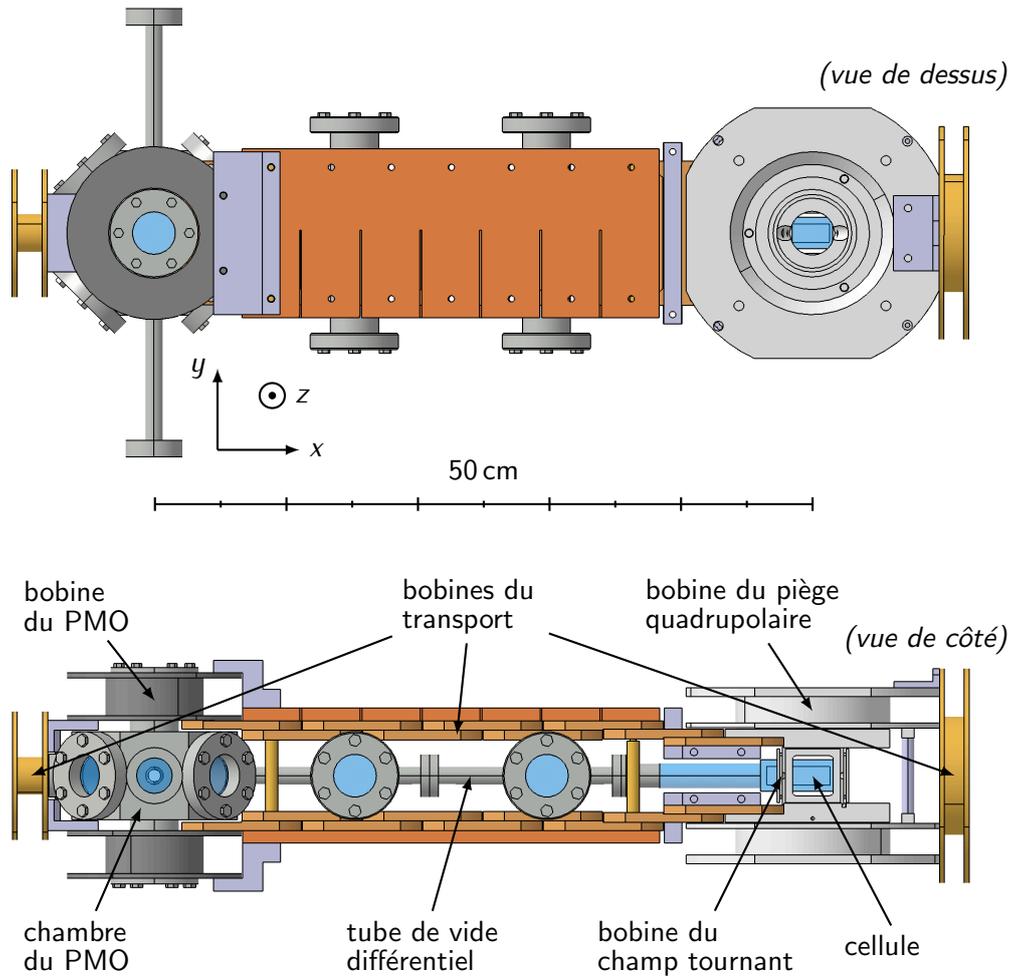


FIGURE 3.1 Schéma du nouveau montage. Le piège magnéto-optique est réalisé dans la chambre de gauche à partir de la vapeur ambiante. Les atomes sont ensuite transférés dans un piège quadrupolaire puis transportés au travers d'un tube de vide différentiel jusqu'à la cellule en verre, à droite. L'évaporation est réalisée dans cette deuxième chambre.

10 s et contient quelques 10^9 atomes à une température proche de la limite Doppler, égale à $140 \mu\text{K}$.

3.2 Le piège magnéto-optique comprimé

À température égale, la taille du nuage dans le PMO est nettement plus importante que dans le piège magnétique. Afin de limiter le chauffage lors du transfert dans le piège magnétique, nous avons donc mis en place une phase de compression du PMO (Townsend *et al.*, 1995). La taille du nuage dans le PMO correspond au point d'équilibre entre la force de rappel du piège et la force de pression de radiation issue de la diffusion multiple. Plusieurs paramètres sont à disposition pour déplacer ce point d'équilibre :

- le gradient de champ magnétique. Il agit directement sur la force de rappel : l'augmenter diminue la taille du nuage ;
- le désaccord du faisceau principal. Il influence la force de rappel, mais plus encore la force liée à la diffusion multiple : l'augmenter diminue la taille du nuage ;
- la puissance du faisceau principal. Elle a un effet similaire à celui du désaccord, mais en sens inverse ;
- la puissance du faisceau de repompage. La diminuer entraîne une diminution du nombre de photons diffusés et donc une diminution de la taille du nuage. Pour reprendre les mots de David Guéry-Odelin, on réalise ainsi un PMO sombre temporel, par opposition au PMO sombre spatial classique (*dark SPOT*, Ketterle *et al.*, 1993).

À condition de ne pas trop augmenter le gradient de champ magnétique, il est possible de combiner diminution du volume et refroidissement. En effet, augmenter le désaccord et diminuer la puissance du faisceau principal permet d'entrer dans le régime du refroidissement sub-Doppler (Lett *et al.*, 1988; Dalibard et Cohen-Tannoudji, 1989). La solution qui s'est avérée la plus utile pour nous suit cette approche. En 10 ms, le désaccord du faisceau principal est amené à -10Γ , sa puissance est abaissée à 100 mW et la puissance du faisceau de repompage est abaissée à $300 \mu\text{W}$; le gradient de champ magnétique est quant à lui maintenu constant. 10 ms supplémentaires sont ensuite laissées au système pour atteindre son état d'équilibre. Les paramètres du faisceau principal permettent de diviser le rayon du nuage par un facteur 3 (de 1,8 à 0,6 mm) et d'atteindre une température d'environ $40 \mu\text{K}$. Ce processus se produit essentiellement sans perte d'atomes.

Le point clé de la compression est donc la réduction de la diffusion multiple grâce la baisse importante de l'intensité des faisceaux de repompage. L'effet sur le profil de densité du nuage est particulièrement visible : d'une forme chahutée due à la forte non linéarité introduite par les diffusions multiples, le profil devient quasiment gaussien et isotrope.

3.3 Le pompage optique

Nous souhaitons pomper les atomes dans l'état $F = 2, m_F = 2$, dont le moment magnétique est le plus élevé. Or à l'issue de la phase de compression du PMO, la plupart des atomes se trouvent dans l'état interne $F = 1$ du fait de la très faible

intensité du faisceau de repompage. Notre pompage optique commence donc par une phase de repompage, utilisant les faisceaux des six bras du PMO. Cette phase est mise à profit pour allumer le champ magnétique directeur nécessaire au pompage optique ; elle dure environ 1 ms, soit le temps nécessaire pour que le champ directeur atteigne une valeur de l'ordre de 1 G.

Le pompage proprement dit débute alors. Celui-ci se déroule en deux phases. Pendant la première, les transitions de pompage ($F = 2 \rightarrow F' = 2$) et de repompage ($F = 1 \rightarrow F' = 2$) sont excitées simultanément. Le faisceau de repompage utilisé alors est superposé au faisceau de pompage et polarisé de la même manière : il participe ainsi activement au pompage. Cette phase dure 500 μs . Lors de la seconde phase, qui dure également 500 μs , le faisceau de repompage est laissé seul. La coupure du champ directeur est commandée dès le début de la phase de pompage et le champ décroît ensuite progressivement pendant 2 à 3 ms. En utilisant cette procédure, nous pouvons transférer de 70 à 80 % des atomes dans l'état souhaité.

3.4 Transfert dans le piège magnétique et transport

3.4.1 Transfert dans le piège magnétique

Le piège magnétique quadrupolaire est produit par la même paire de bobine que celle utilisée pour le PMO. Il est allumé aussi vite que possible à la fin du pompage optique : 5 ms sont nécessaires pour que le courant atteigne un premier maximum et 20 ms pour qu'il relaxe vers sa valeur stationnaire. Initialement, le gradient du champ magnétique est de 140 G/cm selon l'axe des bobines. Le transfert dans le piège magnétique conduit à un chauffage du nuage, dont la température passe de 40 à 115 μK . Plusieurs facteurs contribuent à l'élévation de température : le profil de densité initial du nuage, dont le centre et la forme ne correspondent pas tout à fait au profil à l'équilibre dans le piège à la même température (*center et mode matching*), la vitesse d'ensemble acquise par le nuage lors de la phase de pompage optique³ et les oscillations du courant dans les bobines au moment de leur branchement. La perte d'atomes lors du chargement est par contre négligeable.

3.4.2 Transport

Le centre du piège magnétique est ensuite déplacé jusque dans la cellule où l'évaporation aura lieu. Le transport est effectué selon une méthode introduite par Greiner *et al.* (2001) : une chaîne de paires de bobines est disposée le long du tube différentiel, chaque paire recouvrant en partie ses deux voisines (voir la figure 3.1). En alimentant successivement les paires de bobine, il est possible de déplacer le centre du piège magnétique. La procédure est décrite en détail dans la thèse de Baptiste Battelier. Du fait de la géométrie des bobines qui constituent le début et la fin de la chaîne (bobines du PMO et du piège quadrupolaire sur la figure 3.1), nous avons dû ajouter en ces deux endroits une bobine supplémentaire, dont l'axe

3. Il est possible en principe de limiter ce transfert d'impulsion en rétro-réfléchissant le faisceau de pompage sur les atomes. Nous n'avons cependant pas rencontré un grand succès dans la mise en œuvre de cette technique.

correspond à celui du transport. Leur rôle est d'assurer localement le contrôle du rapport d'aspect du piège.

Un transport efficace doit être le plus adiabatique possible mais il doit également quitter la première chambre le plus rapidement possible, car le vide n'y est pas très poussé (la durée de vie dans le piège quadrupolaire y est de 2 à 4 s). Ces deux contraintes ne sont que partiellement contradictoires : la condition d'adiabaticité dépend certes de l'accélération que subit le centre du piège, mais également de la raideur du piège ; plus le gradient de champ magnétique sera élevé, plus le transport pourra être effectué rapidement ⁴. En pratique, les courants nécessaires pour un gradient, un rapport d'aspect et une position donnés du piège sont calculés numériquement. Si la valeur exacte du rapport d'aspect importe peu, nous avons cherché à maximiser le gradient au cours du transport, en tenant compte des contraintes imposées par chaque paire de bobine et son alimentation. La valeur du gradient en fonction de la position le long du transport est représentée sur la figure 3.2.

La trajectoire du centre du piège comporte trois phases : une phase d'accélération (durée τ_a), une phase à vitesse constante (durée τ_c) et une phase de décélération (durée τ_d) ; la vitesse et la position pendant chacune de ces phases ont les formes suivantes :

$$\text{accélération : } \begin{cases} v(t) = \frac{V}{2} [1 - \cos(\pi t / \tau_a)] , \\ x(t) = \frac{V}{2} \left[t - \frac{\tau_a}{\pi} \sin(\pi t / \tau_a) \right] + \text{cte} , \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{vitesse constante : } \begin{cases} v(t) = V , \\ x(t) = V t + \text{cte} , \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{décélération : } \begin{cases} v(t) = \frac{V}{2} [1 - \cos(\pi(\tau_a + \tau_c + \tau_d - t) / \tau_d)] , \\ x(t) = \frac{V}{2} \left[t + \frac{\tau_d}{\pi} \sin(\pi(\tau_a + \tau_c + \tau_d - t) / \tau_d) \right] + \text{cte} . \end{cases} \quad (3.3)$$

Les durées des trois phases sont ajustées indépendamment pour optimiser le transport. T représente la durée totale. La longueur X à parcourir étant connue (50 cm), la vitesse V est fixée par la relation : $V = 2X / (\tau_a + 2\tau_c + \tau_d)$. Les paramètres vers lesquels nous avons convergé sont : $\tau_a = 0,1$ s, $\tau_c = 0,5$ s et $\tau_d = 5$ s ; ils favorisent donc clairement la sortie rapide de la chambre du PMO. La courbe représentant la vitesse en fonction de la position le long du transport est représentée pour ces paramètres sur la figure 3.2. Avec ces paramètres nous conservons 60 % des atomes au prix d'une élévation de température de 40 à 50 μK ; autrement dit, le nuage à l'arrivée dans la cellule contient quelques 10^9 atomes à une température de 160 μK , correspondant à une extension ⁵ dans le plan xy de 1,9 mm pour un gradient de 108 G/cm.

4. On peut attendre un autre gain d'un gradient élevé : en diminuant la taille du nuage, on limite l'évaporation sur les parois du tube de pompage différentiel, dont le diamètre est relativement petit

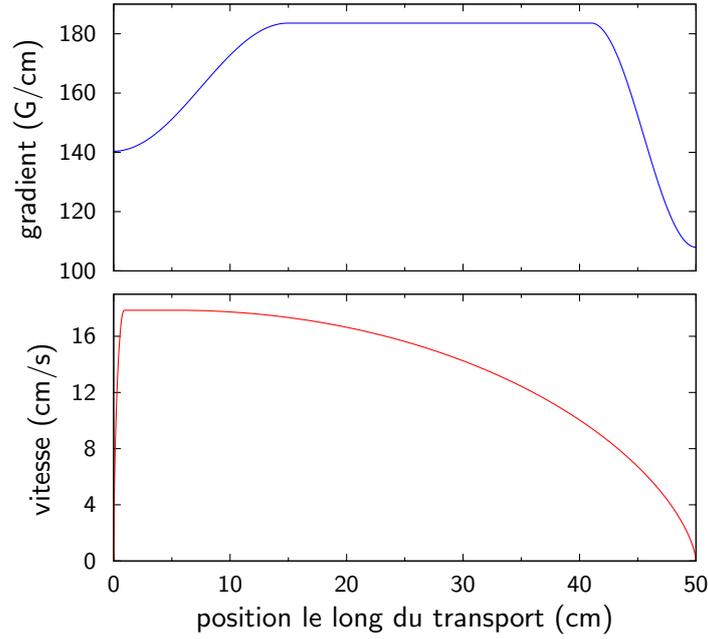


FIGURE 3.2 Principales caractéristiques du transport : vitesse du centre du piège et gradient du champ magnétique en fonction de la position le long du transport. Ces courbes offrent le meilleur compromis entre une sortie rapide de la chambre du PMO et un transport adiabatique. La durée totale du transport pour ce tracé est de 5,6 s.

3.5 Chargement du piège TOP et évaporation

3.5.1 Principe du piège TOP

Le piège TOP est réalisé par la superposition d'un piège quadrupolaire et d'un champ magnétique homogène tournant (Petrich *et al.*, 1995). Dans notre montage, le champ tournant est contenu dans le plan perpendiculaire à l'axe des bobines formant le piège quadrupolaire (plan xy). À un instant donné, le champ magnétique vu par les atomes est donc de la forme

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} bx/2 \\ by/2 \\ -bz \end{pmatrix} + B_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

b désignant le gradient du piège quadrupolaire et B_0 l'amplitude du champ tournant (de l'ordre de quelques Gauss). Le centre du piège quadrupolaire décrit un cercle dans le plan xy , de rayon $r_0 = 2B_0/b$. La vitesse angulaire ω du champ tournant étant suffisamment élevée, le mouvement du centre de masse des atomes peut être séparé en un mouvement séculaire et un micro-mouvement (Müller *et al.*, 2000).

(9 mm).

5. Cette extension est définie comme la largeur σ de l'ajustement du profil de densité par une gaussienne : $\exp(-(x^2 + y^2)/2\sigma^2)$.

Le mouvement séculaire a lieu dans le potentiel effectif que constitue la moyenne temporelle de l'énergie de couplage magnétique $\langle \mu \|\mathbf{B}\| \rangle$, μ désignant le moment magnétique d'un atome. Pour $x, y \ll r_0$, ce potentiel effectif est donné par

$$V(x, y, z) = \mu B_0 + \frac{1}{2} M \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} M \omega_z^2 z^2, \quad (3.5)$$

où nous avons défini

$$\omega_{\perp}^2 = \frac{\mu b^2}{8MB_0} \quad \text{et} \quad \omega_z^2 = \frac{\mu b^2}{MB_0}. \quad (3.6)$$

Avec $b = 156 \text{ G/cm}$ et $B_0 = 3,9 \text{ G}$ on obtient par exemple

$$\omega_{\perp}/2\pi = 36 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \omega_z/2\pi = 101 \text{ Hz}. \quad (3.7)$$

Cette description du mouvement du centre de masse repose sur les deux contraintes $\omega \gg \omega_{\perp}, \omega_z$ et $\omega \ll \mu B_0/\hbar$; la première condition doit être vérifiée pour pouvoir séparer le mouvement séculaire du micro-mouvement et la seconde pour assurer le suivi adiabatique du spin. Pour $B_0 \sim 5 \text{ G}$, la fréquence de Larmor est de l'ordre de 10 MHz , ce qui laisse une grande liberté pour choisir la fréquence du champ tournant. Nous avons pris $\omega/2\pi = 10 \text{ kHz}$.

3.5.2 Chargement du piège TOP

Sur le cercle de rayon r_0 l'amplitude du champ magnétique est nulle et des pertes par retournement de spin peuvent se produire. La zone de confinement est donc limitée à $x, y < r_0$. Avec un gradient de 156 G/cm et un champ tournant de 8 G , ce « rayon de la mort » n'est que de $510 \mu\text{m}$, ce qui fait du piège TOP un piège de petit volume. En outre, l'augmentation du volume de piégeage se fait au détriment de la raideur du piège; or une évaporation efficace requiert un piège le plus raide possible. Afin de charger le piège TOP dans de bonnes conditions, une étape d'évaporation dans le piège quadrupolaire s'avère donc nécessaire. En pratique, le chargement du piège TOP est effectué de la manière suivante :

- le piège quadrupolaire est comprimé après l'arrivée des atomes dans la cellule, le gradient étant porté à 180 G/cm ;
- une évaporation radiofréquence est réalisée dans le piège quadrupolaire, entre 32 MHz pour la fréquence initiale et $6,5 \text{ MHz}$ pour la fréquence finale. La durée de l'évaporation est de 10 s ;
- l'amplitude du champ tournant est amenée de 0 à $8,2 \text{ G}$ en 8 ms , puis maintenue à cette valeur pendant 1 s . Pendant ce temps, le gradient du champ magnétique est descendu à 156 G/cm ⁶.

3.5.3 Évaporation dans le piège TOP

Une fois le piège TOP chargé, nous poursuivons l'évaporation radiofréquence jusqu'à atteindre la densité dans l'espace des phases souhaitée et, éventuellement, la

6. La raison de cette diminution du gradient est très prosaïque : le système de refroidissement des bobines du piège quadrupolaire ne peut maintenir une température raisonnable en régime permanent à 180 G/cm .

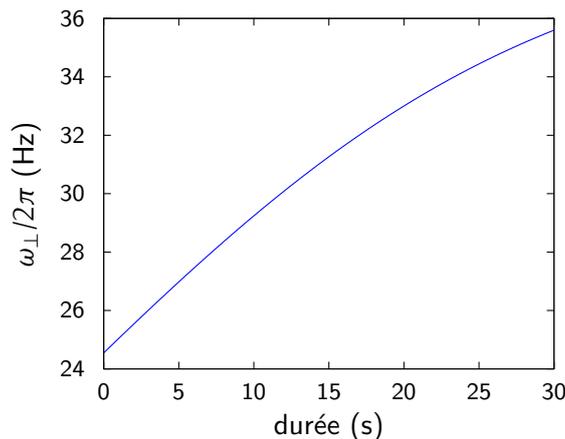


FIGURE 3.3 Compression du piège TOP pendant l'évaporation. En augmentant le taux de collision, la compression du piège rend l'évaporation plus efficace.

condensation. Simultanément à l'évaporation, nous réduisons l'amplitude du champ tournant de manière à augmenter la raideur du piège TOP (voir la figure 3.3) : le taux de collisions s'en trouve ainsi augmenté et l'évaporation est plus efficace. Plus quantitativement : le taux de collision γ est proportionnel à la densité n et à la vitesse quadratique moyenne \bar{v} :

$$\gamma \propto n \bar{v} ; \quad (3.8)$$

lors de la compression adiabatique d'un piège harmonique, la constante du mouvement est la densité dans l'espace des phases : $n \bar{v}^3$. Comme on a par ailleurs la relation $\bar{v} \propto \bar{\omega} n^{-1/3}$, où $\bar{\omega} = (\omega_{\perp}^2 \omega_z)^{1/3}$, il vient

$$\gamma \propto \bar{\omega}^2 . \quad (3.9)$$

Nous avons trouvé nécessaire de réaliser cette compression en maintenant à chaque instant le rayon r_0 supérieur au rayon d'évaporation. En effet, les atomes à proximité du point où le champ magnétique s'annule peuvent également subir des retournements de spin mais l'évaporation qui en résulte est moins efficace : d'une part le retournement n'est pas contrôlé et d'autre part l'évaporation a lieu dans ce cas au voisinage d'une ligne alors que le couplage au champ radiofréquence permet l'évaporation sur une surface. Nous avons finalement convergé vers une amplitude finale du champ tournant de 3,9 G, une fréquence d'évaporation initiale de 13 MHz et une fréquence finale au seuil de condensation voisine de 2,8 MHz. La durée de l'évaporation dans le piège TOP est de 30 s.

Plage de condensation

La fréquence d'évaporation ν_c au seuil de condensation, ainsi que la fréquence d'évaporation ν_0 qui « vide » le piège TOP, dépendent de l'amplitude du champ tournant. En effet, le rayon d'évaporation correspondant à une fréquence d'évaporation

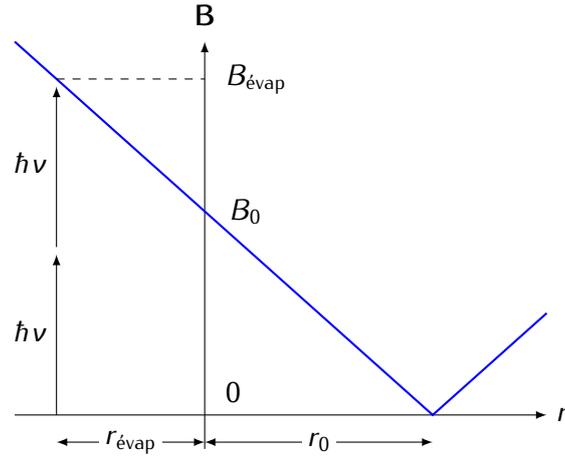


FIGURE 3.4 Situer la surface d'évaporation dans le piège TOP. L'amplitude instantanée du champ magnétique dans le plan xy est représentée en trait plein. La surface d'évaporation est la surface parcourue par la courbe $\mu\|\mathbf{B}\| = 2\hbar\nu$ sur une période de rotation du champ tournant.

donnée ν vérifie la relation (voir la figure 3.4)

$$\mu b(r_{\text{évap}} + r_0) = 2\hbar\nu, \quad (3.10)$$

où le facteur 2 rend compte du nombre de photons qu'un atome dans l'état $F = 2, m_F = +2$ doit absorber pour basculer dans l'état non piégé $F = 2, m_F = 0$. Or la fréquence ν_0 correspond à $r_{\text{évap}}(\nu_0) = 0$, donc

$$\nu_0 = \mu B_0 / 2\hbar. \quad (3.11)$$

D'autre part, la fréquence ν_c est telle que

$$\frac{1}{2} M \omega_{\perp}^2 [r_{\text{évap}}(\nu_c)]^2 = \eta k_B T_c, \quad (3.12)$$

où η représente le paramètre d'évaporation et T_c la température de condensation. On tire finalement des relations (3.12) et (3.11) que

$$\hbar(\nu_c - \nu_0) = \sqrt{\eta k_B T_c B_0}. \quad (3.13)$$

En pratique, la différence $\nu_c - \nu_0$ est légèrement inférieure à 200 kHz.

Chapitre 4

Confinement axial pour la production de gaz bidimensionnels

4.1 Réalisation d'un plan unique

4.1.1 Principe

Pour réaliser un gaz quasi-bidimensionnel, nous superposons au piège TOP un potentiel dipolaire fortement confinant dans la direction z . Ce potentiel est généré par un faisceau laser dont le profil d'intensité est façonné par optique de Fourier. Le principe est simple : le faisceau est focalisé sur les atomes à l'aide d'une lentille de focale $f > 0$; si $E(\mathbf{r})$ désigne le champ électrique du faisceau à son arrivée sur la lentille, le champ électrique au niveau des atomes est alors donné par l'expression bien connue :

$$E(\mathbf{r}') = \frac{e^{-ikr'^2/2f}}{\lambda f} \int d^2\mathbf{r} e^{ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/f} E(\mathbf{r}) , \quad (4.1)$$

où $\lambda = 2\pi/k$ désigne la longueur d'onde du faisceau. En imprimant une phase adéquate sur le faisceau avant la lentille : $E(\mathbf{r}) \rightarrow E(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r}))$, il est donc possible d'obtenir un profil d'intensité pratiquement arbitraire sur les atomes. La figure 4.1 représente schématiquement le montage autour de la cellule. Cette méthode a déjà été employée par [Smith *et al.* \(2005\)](#) pour produire des gaz quasi-bidimensionnels.

4.1.2 Faisceau incident

Le faisceau incident sur la lentille est un faisceau gaussien anisotrope, de diamètres w_x et w_z et de puissance P . Le champ électrique est donc de la forme

$$E(x,z) = \sqrt{\frac{2P}{\pi w_x w_z}} e^{-x^2/w_x^2} e^{-z^2/w_z^2} . \quad (4.2)$$

Le faisceau est préparé de manière à être collimaté avant la lentille selon l'axe z et collimaté après la lentille selon l'axe x . Le champ dans le plan focal image de la lentille est alors

$$E(x',z') = \sqrt{\frac{2P}{\pi w'_x w'_z}} e^{-x'^2/w'_x{}^2} e^{-z'^2/w'_z{}^2} , \quad (4.3)$$

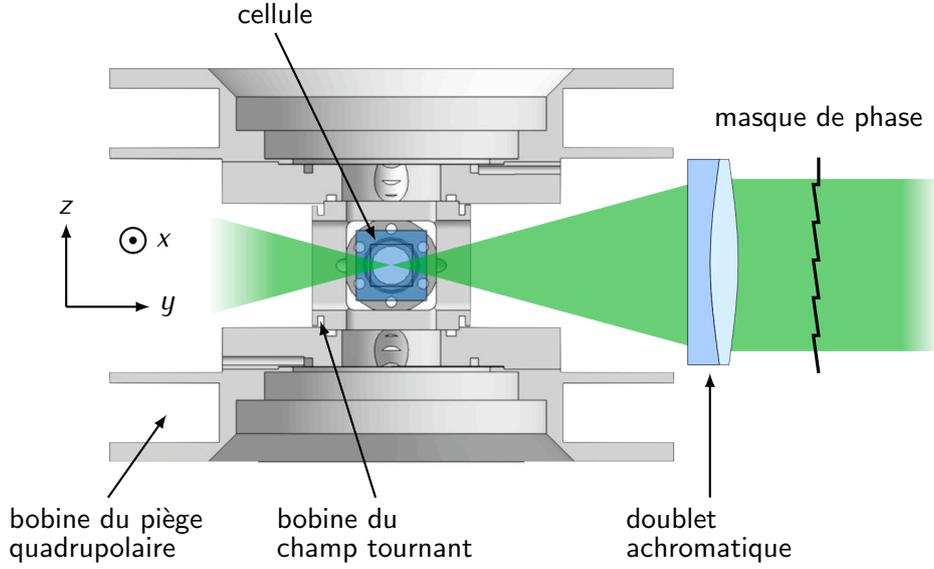


FIGURE 4.1 Génération du potentiel de confinement axial par optique de Fourier. Le schéma représente une vue en coupe verticale du plan contenant les atomes. Un faisceau gaussien collimaté est focalisé sur les atomes après avoir traversé un masque de phase. Le profil d'intensité vu par les atomes est donc la transformée de Fourier du profil de phase imprimé par le masque.

avec

$$w'_x = w_x \quad \text{et} \quad w'_z = \frac{\lambda f}{\pi w_z}. \quad (4.4)$$

Au point focal image de la lentille, l'intensité est donc

$$I_0 = \frac{2P}{\pi w'_x w'_z}. \quad (4.5)$$

4.1.3 Masque de phase

Un masque de phase est placé avant la lentille. Il imprime sur le faisceau une phase

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \geq 0, \\ \pi & \text{si } z < 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Dans le plan focal image, seul le champ selon l'axe z' est affecté par le masque de phase. Le champ diffracté y est donné par la relation :

$$E(x', z') = \sqrt{I_0} e^{-x'^2/w_x'^2} \times \frac{-i}{\sqrt{\lambda f}} \left[\int_0^{+\infty} - \int_{-\infty}^0 \right] dx e^{ikzz'/f} e^{-z^2/w_z^2} \quad (4.7)$$

$$= \sqrt{I_0} e^{-x'^2/w_x'^2} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \sin(2uz'/w'_z) e^{-u^2}, \quad (4.8)$$

où l'on a utilisé la relation (4.4) pour w'_z et omis le facteur de phase apparent dans (4.1). En dehors du plan focal, mais dans la limite $R^2 y'^2 \ll \lambda f^3$ (R est le rayon de

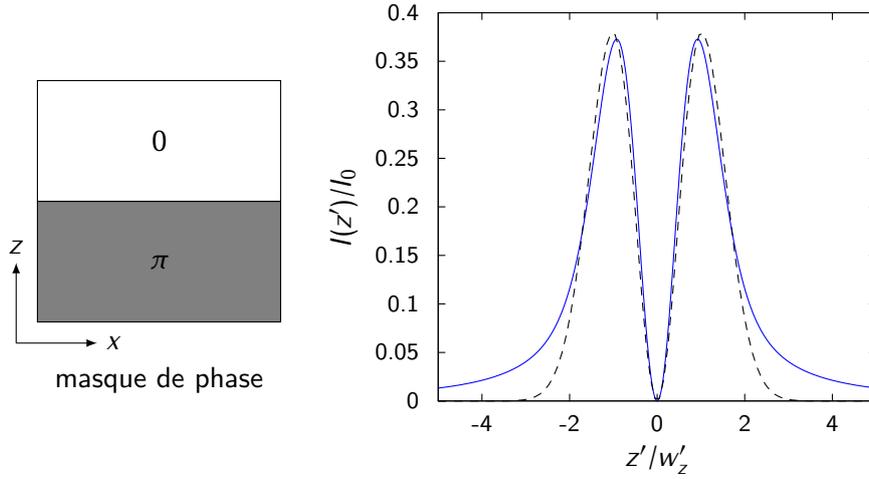


FIGURE 4.2 Profil d'intensité produit par le masque de phase « $0/\pi$ ». Le trait tireté représente un ajustement par le profil d'un mode TEM_{01} . On montre que les ailes du profil réel décroissent algébriquement, et non exponentiellement comme pour le mode gaussien.

la lentille), on peut montrer que l'expression (4.8) devient pour $x' = 0$:

$$E(y', z') \simeq 2\sqrt{\frac{I_0}{\pi}} \int_0^{+\infty} du \sin(2uz'/w'_z) e^{iu^2 y'/y_{Rz}} e^{-u^2}, \quad (4.9)$$

où $y_{Rz} = \pi w_z^2/\lambda$ désigne la longueur de Rayleigh associée au diamètre du col selon z . On constate immédiatement sur l'expression précédente que le plan $z' = 0$ n'est jamais éclairé au voisinage du point focal. Cette propriété assure que le potentiel dipolaire n'affectera que très faiblement le confinement radial (ce point est discuté plus loin).

4.1.4 Potentiel de confinement axial

Le profil d'intensité $I(z')/I_0$ obtenu à partir de l'équation (4.8) pour $x' = 0$ est représenté sur la figure 4.2. L'intensité maximale est proche de $0,37 I_0$. Le potentiel engendré par ce profil d'intensité est

$$V_z(x', z') = \alpha I(x', z'), \quad (4.10)$$

avec, d'après Grimm *et al.* (2000),

$$\alpha = \frac{\hbar\Gamma}{8I_s} \left(\frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} - \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right). \quad (4.11)$$

Dans l'expression précédente, ω représente la pulsation du laser et ω_0 celle de la transition atomique ; la différence $|\omega - \omega_0|$ est supposée grande devant la structure fine. Γ est la largeur de la transition et I_s son intensité de saturation.

Au voisinage de l'origine, pour $|z'| \ll w'_z$, l'intégrale (4.8) se calcule analytiquement. L'intensité du faisceau sur la droite $x' = 0$ est alors donnée par la relation

$$I(x' = 0, z') = \frac{4I_0}{\pi} \frac{z'^2}{w_z'^2}. \quad (4.12)$$

La fréquence de piégeage obtenue est donc

$$M\omega_z^2 = \frac{16}{\pi^2} \frac{\alpha P}{w_x' w_z'^3}. \quad (4.13)$$

Quand on s'éloigne de l'origine selon x' ou y' , la fréquence de piégeage ω_z diminue. Selon x' , l'expression (4.12) de l'intensité est affectée du coefficient

$$\exp(-2x'^2/w_x'^2) \simeq 1 - 2x'^2/w_x'^2. \quad (4.14)$$

De même, lorsqu'on s'éloigne du plan focal image, on trouve que l'intensité est réduite par le coefficient

$$(1 + y'^2/y_{Rz}^2)^{-1} \simeq 1 - y'^2/y_{Rz}^2. \quad (4.15)$$

Cette diminution de la fréquence du confinement axial entraîne une diminution de l'énergie de point zéro $\hbar\omega_z/2$ et vient au premier ordre renormaliser la fréquence de piégeage dans le plan $x'y'$. Cette modification du confinement radial peut être rendue isotrope si l'on réalise la condition $w_x' = \sqrt{2}y_{Rz}$.

4.1.5 Quelques chiffres

Le faisceau utilisé pour réaliser le confinement est issu d'un laser Verdi™, de longueur d'onde 532 nm, et sa puissance ne dépasse pas 2 W en pratique. La paramètre de proportionnalité entre l'intensité lumineuse et le potentiel vu par les atomes est alors

$$\alpha = 8,1 \cdot 10^{-37} \frac{\text{J}}{\text{W/m}^2} \quad (4.16)$$

$$= 1,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Hz}}{\text{W/m}^2} \quad (4.17)$$

$$= 5,9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{nK}}{\text{W/m}^2}, \quad (4.18)$$

où nous avons pris $\lambda_0 = 785 \text{ nm}$ ¹, $\Gamma/2\pi = 6 \text{ MHz}$ et $I_s = 1,67 \text{ mW/cm}^2$. Le faisceau se présente comme une nappe de lumière sur les atomes, de dimensions

$$w_z' \simeq 5 \mu\text{m}, \quad y_{Rz} \simeq 150 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad w_x' \simeq 160 \mu\text{m}. \quad (4.19)$$

À une puissance $P = 1 \text{ W}$ correspondent alors une fréquence de piégeage

$$\omega_z/2\pi = 3,4 \text{ kHz} \quad (4.20)$$

et une hauteur de barrière $V_m = 0,37 \alpha I_0$ de 380 kHz, ou 19 μK .

1. Étant donné le grand désaccord entre la fréquence du champ laser et les résonances atomiques, les raies D_1 et D_2 contribuent indépendamment au potentiel dipolaire. Ce dernier est ainsi déterminé par les formules (4.10) et (4.11), où la longueur d'onde $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ correspond à la moyenne pondérée des raies D_1 et D_2 : $\lambda_0 = \frac{1}{3}\lambda_{D_1} + \frac{2}{3}\lambda_{D_2} = 785 \text{ nm}$.

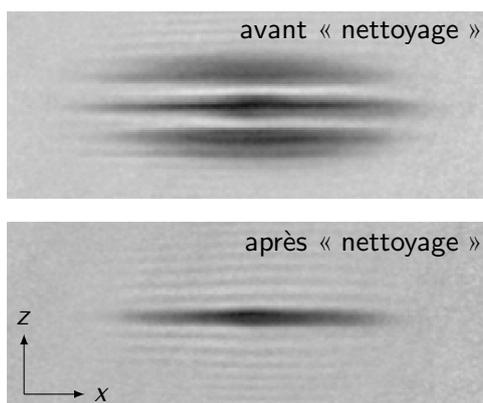


FIGURE 4.3 « Nettoyage » du piège à un puits. Le potentiel vu par les atomes présente deux minima secondaires de part et d'autre du puits central. Nous éliminons les atomes qui y sont piégés en imageant l'ombre d'une corde de piano sur le plan central avec un faisceau de dépompage, qui fait basculer les atomes dans un état non piégé.

4.1.6 Le chargement du piège optique en pratique

Le rayon de Thomas–Fermi d'un gaz bidimensionnel confiné dans son plan par un potentiel harmonique de pulsation ω_{\perp} est donné par la relation

$$R_{\text{TF}} = \left(\frac{2\mu}{M\omega_{\perp}^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{4N\hbar^2\tilde{\kappa}}{\pi M^2\omega_{\perp}^2} \right)^{1/4}, \quad (4.21)$$

où N est le nombre d'atomes. $\tilde{\kappa}$ désigne la constante de couplage réduite, égale ici à 0,14 (voir le chapitre 1). Avec $\omega_{\perp}/2\pi = 36$ Hz et $N = 10^5$, on trouve $R_{\text{TF}} = 21$ μm . Afin d'augmenter la résolution spatiale de nos observations, nous procédons à une décompression du piège TOP avant le chargement du potentiel optique. Pendant les 4 dernières secondes de l'évaporation, nous abaissons la valeur du gradient de 156 à 96 G/cm. La fréquence transverse du piège TOP à la fin de l'évaporation passe ainsi de 36 à 22 Hz et le rayon de Thomas–Fermi est augmenté de 30 %, à 27 μm .

Le piège optique est branché adiabatiquement en 500 ms après la phase de décompression. Le potentiel vu par les atomes, somme du potentiel magnétique et du potentiel optique, présente deux minima secondaires de part et d'autre du puits central. Une fraction relativement importante des atomes y est piégée et constitue un fond parasite qui perturbe l'observation du plan central. Pour éliminer ces atomes indésirables, nous imageons l'ombre d'une corde piano (diamètre 200 μm , grandissement 1/10) sur le plan central avec un faisceau laser accordé sur la transition de pompage optique, qui fait basculer les atomes dans un état interne non piégé. L'effet de ce « nettoyage » est illustré sur la figure 4.3. On peut y voir deux images in-situ du nuage dans le piège mixte (magnétique et optique), prises le long de l'axe y : la première montre le nuage juste après le branchement du piège optique et la seconde montre le nuage après l'action du faisceau de dépompage.

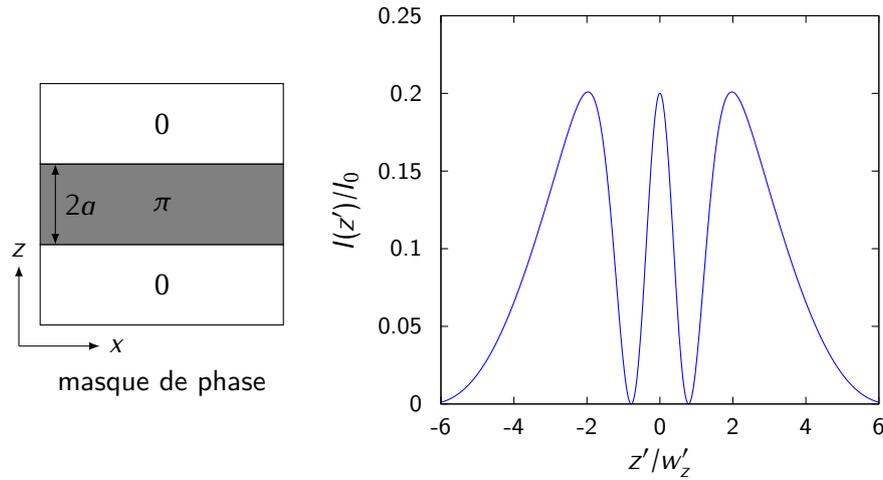


FIGURE 4.4 Profil d'intensité produit par le masque de phase « $0/\pi/0$ » avec $a = w_z/4$. Le double puits permet de réaliser des expériences d'interférence atomiques telles que celles présentées au chapitre 2.

4.2 Réalisation de deux plans

Un potentiel à deux puits peut être réalisé grâce à un masque de phase « $0/\pi/0$ », de motif

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \geq a \\ \pi & \text{si } |z| < a . \end{cases} \quad (4.22)$$

Le champ diffracté dans le plan focal image de la lentille est donné par la relation

$$E(x', z') = \sqrt{I_0} e^{-x'^2/w_x'^2} \left[e^{-z'^2/w_x'^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/w_z} du \cos(2z'u/w'_z) e^{-u^2} \right]. \quad (4.23)$$

Pour $a = w_z/4$, on obtient un profil d'intensité avec trois maxima d'intensité voisine, égale $0,2 I_0$, et deux puits situés en $z' = \pm 0,8 w'_z$. Ce profil est représenté sur la figure 4.4. Disposer de ces deux plans nous permet d'accéder à la distribution de phase par des mesures d'interférences en imagerie horizontale, telles que celles réalisées sur l'ancien montage. Une image d'interférence, préliminaire, obtenue avec le potentiel à deux puits est visible sur la figure 4.5.

4.3 Potentiel à fond plat pour le confinement radial

Afin d'étudier les effets du confinement radial sur la transition BKT, il serait intéressant de remplacer le potentiel harmonique produit par le piège TOP par un potentiel à fond plat. Un tel potentiel peut également être réalisé par optique de Fourier, à l'aide d'un masque de phase de motif

$$\phi(x, y) = n \theta , \quad (4.24)$$

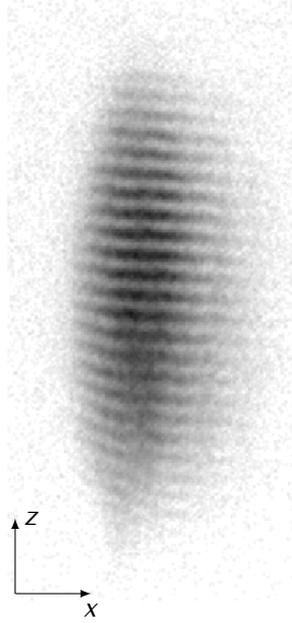


FIGURE 4.5 Franges d'interférence entre deux plans. L'image, présentée couchée, a été prise après un temps de vol tridimensionnel de 33 ms. L'interfrange est de $15,6 \mu\text{m}$, correspondant à un écart entre les puits de $4,8 \mu\text{m}$.

où θ désigne l'angle polaire dans le plan horizontal x,y et n est un nombre entier. Il s'agit donc d'imprimer sur le faisceau un enroulement de phase de n tours. Le faisceau choisi est maintenant isotrope, de diamètre w sur la lentille, et le champ diffracté dans le plan focal s'écrit

$$E(r',\theta') = \frac{\sqrt{I_0}}{\lambda f} \int dr d\theta r e^{ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/f} e^{-r^2/w^2}. \quad (4.25)$$

Il est utile de décomposer le facteur de Fourier à l'aide des fonctions de Bessel :

$$e^{ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/f} = e^{ikrr' \cos(\theta-\theta')/f} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^p J_p(krr'/f) e^{-ip(\theta-\theta')}. \quad (4.26)$$

Dans l'intégrale sur θ de (4.25), seul le terme $n = p$ a une contribution non nulle et on trouve :

$$E(r',\theta') = i^n \sqrt{I_0} e^{in\theta'} \int_0^{+\infty} du u J_n(2ur'/w') e^{-u^2}, \quad (4.27)$$

où $w' = \lambda f/\pi w$. Le profil d'intensité correspondant pour $n = 6$ est représenté sur la figure 4.6. Au voisinage du point focal, pour $r' \ll nw'$, la fonction de Bessel prend la forme $J_n(2ur'/w') \sim (ur'/w')^n/n!$ et le profil d'intensité est donné par

$$I(r') \propto I_0 \left(\frac{r'}{w'} \right)^{2n}, \quad \text{pour } r' \ll nw'. \quad (4.28)$$

Ainsi plus le nombre de tours n est grand, plus le puits apparaît comme proche d'une « boîte » cylindrique aux parois verticales.

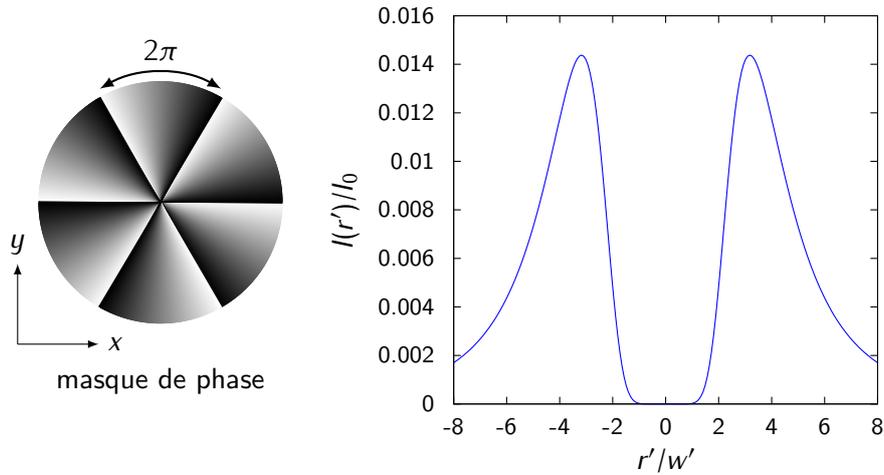


FIGURE 4.6 Profil d'intensité produit par le masque de phase « vortex » avec $n = 6$. On réalise ainsi dans le plan radial une « boîte » cylindrique aux parois pratiquement verticales. La comparaison avec le potentiel harmonique produit par le piège TOP permettrait d'étudier les effets du confinement sur la transition BKT.

Enfin, il est important de noter que la hauteur de la barrière de potentiel est fortement réduite par rapport aux potentiels à un ou deux plans. La raison en est que les ailes de la figure d'interférence sont bien plus étendues, et ce d'autant plus que n est grand. Ainsi, pour $n = 6$ l'intensité maximale de la figure d'interférence n'est que de $0,014 I_0$, correspondant à 640 nK.

Chapitre 5

Premières observations et projets d'expériences

Le montage dont nous disposons à présent nous permet de poursuivre l'étude du gaz bidimensionnel sous des angles nouveaux. Un premier point particulièrement important est la possibilité d'imager un gaz selon la direction qui lui perpendiculaire (par au-dessus). Nous avons ainsi potentiellement accès à toute l'information nécessaire pour caractériser le gaz. Ensuite, l'utilisation de pièges indépendants pour assurer les confinements transverse et axial permet de réaliser différents types d'expansion avant de prendre une image du système, suivant l'ordre dans lequel les pièges sont éteints. Si l'on coupe par exemple le piège axial tout en maintenant le piège radial, on réalise une expansion unidimensionnelle, le long de ce qui était l'axe de confinement fort. Si à l'inverse on coupe seulement le piège transverse, on réalise plutôt une expansion bidimensionnelle dans le plan du gaz. Enfin, si on coupe simultanément le piège transverse et le piège axial, on réalise une expansion tridimensionnelle. Chacune de ces expansions donne accès à des informations différentes sur le système étudié. Ainsi, lors des expansions unidimensionnelle et tridimensionnelle, la densité du gaz chute fortement avec l'expansion rapide dans la direction axiale et la dynamique dans le plan transverse est pratiquement libre de toute interaction. À l'inverse, les interactions jouent un rôle important dans l'expansion bidimensionnelle : suivant la nature de ces dernières, la dilatation du gaz lors d'une telle expansion peut suivre ou non une loi d'échelle simple. Nous discutons ce point en particulier dans le présent chapitre. Nous confrontons ainsi les prédictions théoriques aux premières observations réalisées sur notre nouveau montage, à l'intérieur de la région critique de la transition BKT. Enfin, nous proposons deux expériences à réaliser également sur notre nouveau montage, afin d'en illustrer la flexibilité.

5.1 Invariance d'échelle dans l'expansion d'un gaz bidimensionnel

5.1.1 L'invariance d'échelle dans le cadre de l'équation de Gross–Pitaevskii

Castin et Dum (1996) et Kagan *et al.* (1996) ont montré que dans le cadre de l'équation de Gross–Pitaevskii, la dynamique d'un gaz confiné dans un potentiel harmonique dont la fréquence $\omega(t)/2\pi$ dépend du temps vérifie une simple loi

d'échelle. Plus précisément, considérons un système de dimension d confiné dans un piège harmonique isotrope de fréquence $\omega(0)/2\pi$ et préparé initialement dans un état stationnaire $\psi_0(\mathbf{r})$ d'énergie E . Si le gaz est initialement dans le régime de Thomas–Fermi où l'énergie cinétique est petite devant l'énergie d'interaction, on peut alors montrer que la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r},t)$ à un instant $t > 0$ prend la forme

$$\psi(\mathbf{r},t) \simeq \frac{e^{-i\beta(t)}}{\lambda^{d/2}(t)} e^{iM\mathbf{r}^2\dot{\lambda}(t)/2\hbar\lambda(t)} \psi_0(\mathbf{r}/\lambda(t)), \quad (5.1)$$

où le facteur de phase $\exp(-i\beta)$ vérifie la relation $\hbar\dot{\beta}(t) = \mu/\lambda^2(t)$ (μ est le potentiel chimique). Quelle que soit la dimension d , toute la dynamique du système est contenue dans le facteur d'échelle $\lambda(t)$, qui obéit à l'équation

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\omega^2(0)}{\lambda^3(t)} - \omega^2(t)\lambda(t). \quad (5.2)$$

Bien que nous ayons pris ici le potentiel extérieur isotrope, l'extension au cas anisotrope ne pose aucune difficulté. Enfin, il est important de noter que dans le cas $d = 2$, l'équation (5.1) est exacte (Kagan *et al.*, 1996).

5.1.2 Généralisation au problème à N corps

La validité de la loi d'échelle (5.1) dépasse en réalité le cadre de l'équation de Gross–Pitaevskii : tant que les interactions sont décrites par un potentiel $V(\mathbf{r})$ possédant la propriété

$$V(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2}V(\mathbf{r}), \quad (5.3)$$

elle s'applique de manière générale à la fonction d'onde à N corps $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Un potentiel d'interaction de ce type donne au hamiltonien hors potentiel extérieur

$$H_0 = \sum_i \frac{-\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{r}_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (5.4)$$

la propriété d'invariance d'échelle :

$$H_0 \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow \lambda\mathbf{r}} \frac{1}{\lambda^2} \left[\sum_i \frac{-\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{r}_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]. \quad (5.5)$$

Pitaevskii et Rosch (1997) ont montré que, du fait de cette invariance d'échelle, le hamiltonien total

$$H = H_0 + \sum_i \frac{1}{2} M \omega^2 \mathbf{r}_i^2 \quad (5.6)$$

manifeste une propriété de symétrie particulière (voir également Werner et Castin, 2006). La loi d'échelle (5.1) se trouve être une conséquence de cette symétrie. La propriété (5.3) est vérifiée par exemple pour un potentiel d'interaction en $1/r^2$ quelle que soit la dimension. Elle l'est aussi dans un gaz à la limite unitaire (Castin, 2004). La force de la généralisation de l'invariance d'échelle soulignée par Pitaevskii et Rosch est qu'elle s'applique non seulement à un état pur, mais également à un mélange statistique tel que réalisé dans les expériences.

D’un intérêt direct pour nous, le potentiel de contact à deux dimensions proportionnel à la distribution de Dirac $\delta^{(2)}(\mathbf{r})$ satisfait également la condition (5.3). C’est en modélisant les interactions de la sorte que l’on aboutit au hamiltonien effectif introduit au chapitre 1 pour décrire le gaz bidimensionnel. Il nous faut toutefois remarquer que la modélisation des interactions par un potentiel de contact conduit à un problème mathématiquement mal posé, ce qui se traduit par l’apparition de divergences ultraviolettes dans la théorie (voir par exemple [Mora et Castin, 2003](#)). L’introduction d’une énergie de coupure permet de régulariser ces divergences, mais l’échelle de longueur qui lui est associée brise l’invariance d’échelle du hamiltonien. Cette dernière ne sera préservée en pratique qu’à la condition que cette échelle de longueur soit petite devant toutes les longueurs caractéristiques du système.

5.1.3 Confrontation à l’expérience

D’un point de vue expérimental, si on laisse s’étendre un gaz bidimensionnel dans son plan, en éteignant le piège TOP mais pas le piège optique, le profil de densité à un instant t est relié au profil de densité in-situ initial par une simple homothétie. Ce comportement est attendu pour un gaz fortement dégénéré, vérifiant l’équation de Gross–Pitaevskii. Il l’est aussi pour un gaz dans la région critique de la transition BKT, présentant à la fois une fraction superfluide et une fraction thermique, si l’on fait abstraction des difficultés liées au potentiel de contact. Une vérification expérimentale de cette loi d’échelle permettrait de tester le domaine de validité du modèle utilisé pour décrire le gaz bidimensionnel dilué.

Nous avons enregistré récemment de nombreux temps de vol bidimensionnels de systèmes présentant un profil de densité in-situ bimodal. Nous avons pu constater que, pour un nombre d’atomes et une température donnés in-situ, les profils de densité obtenus après différentes durées d’expansion τ vérifient effectivement une loi d’échelle du type

$$n(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{\lambda^2(\tau)} n(\mathbf{r}/\lambda(\tau), 0) . \quad (5.7)$$

La figure 5.1 illustre ces observations pour un nuage initial contenant environ $2 \cdot 10^4$ atomes à une température de 66 nK, confiné dans un piège de fréquence transverse égale à 18 Hz. La densité dans l’espace des phases au centre du système est ainsi égale à 13, ce qui situe ce dernier dans la région critique de la transition BKT, avec une fraction superfluide et une fraction thermique. Trois images sont visibles dans la partie haute de la figure ; elle ont été obtenues en imagerie verticale (selon z) après des temps de vol $\tau = 3, 6$ et 12 ms. De chacune de ces images, nous extrayons un profil radial $n(r) = \int (d\theta/2\pi) n(r, \theta)$. Après une moyenne statistique sur plusieurs répétitions, nous obtenons les trois courbes représentées sur le graphe situé à gauche dans la partie basse de la figure. L’invariance d’échelle se manifeste de la manière suivante : on peut trouver pour chaque temps de vol τ un facteur d’échelle $\lambda(\tau)$ permettant, après renormalisation selon (5.7), de superposer tous les profils radiaux. Le graphe de droite de la figure 5.1 représente justement cette superposition. Ce premier résultat est assez important. Il semble confirmer que la prise en compte des interactions par un potentiel de contact est possible même dans la région critique de la région BKT. En outre, l’existence de cette loi d’échelle simplifie l’observation

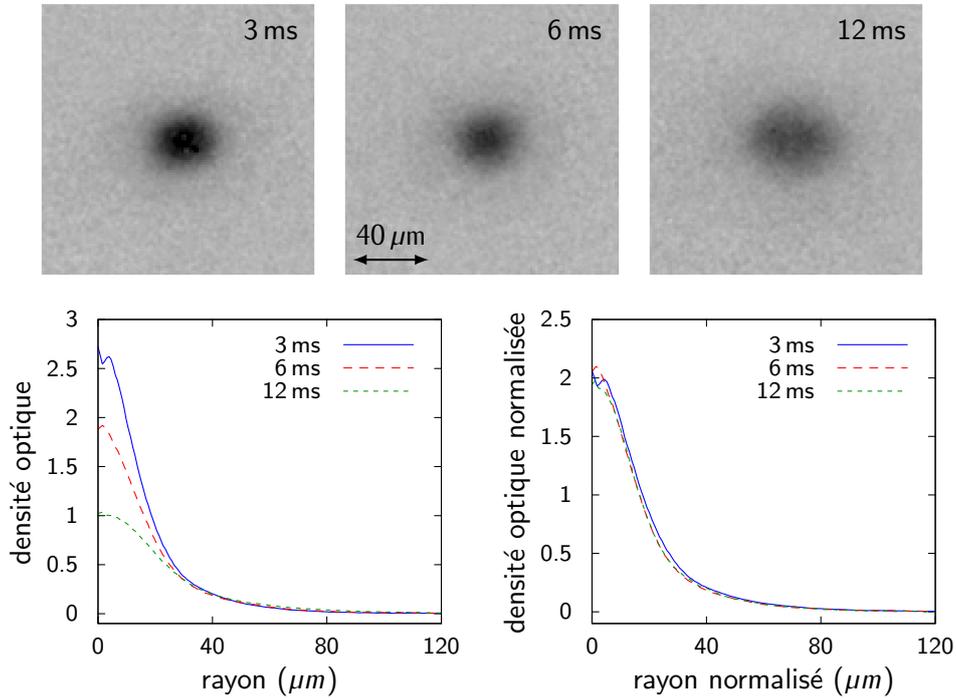


FIGURE 5.1 Invariance d'échelle dans l'expansion d'un gaz bidimensionnel. Les données correspondent à des nuages dont la densité dans l'espace des phases au centre est égale à 13. En haut : trois images prises en imagerie verticale après un temps de vol bidimensionnel $\tau = 3, 6$ et 12 ms. En intégrant sur la variable angulaire, on tire de chacune de ces images un profil radial, représenté sur le graphe de gauche après moyennage statistique sur plusieurs répétitions. Il est alors possible de superposer tous ces profils si on leur fait subir une transformation d'échelle $n(r, \tau) = n(r/\lambda(\tau), 0)/\lambda^2(\tau)$. Le résultat est visible sur le graphe de droite.

des profils de densité car il suffit pour atteindre une meilleure résolution spatiale de laisser le gaz bidimensionnel s'étendre dans son plan.

5.2 Propositions d'expériences

Pour clore ce chapitre, nous souhaitons maintenant exposer deux propositions d'expériences sur le gaz bidimensionnel, réalisables en principe sur le nouveau montage. Elles reposent toutes deux sur l'utilisation du potentiel à deux puits présenté au chapitre précédent.

5.2.1 Révéler le profil de phase d'un gaz bidimensionnel

Une méthode simple, du moins sur le papier, permet de remonter au profil de phase complet de la figure d'interférence. Supposons que nous ayons préparé deux gaz bidimensionnels dans le potentiel à double puits représenté sur la figure 4.4. Après temps de vol tridimensionnel (coupure simultanée du piège TOP et du potentiel

de confinement axial), le profil de densité tridimensionnel est de la forme (voir le chapitre 2)

$$n(x,y,z) \propto 2 \exp(-z^2/2\sigma^2) n(x,y) \left[1 + \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\pi z/z_i} e^{i\phi(x,y)} \right\} \right], \quad (5.8)$$

où $n(x,y)$ désigne le profil de densité in-situ des deux nuages, $\phi(x,y)$ leur phase relative et z_i l'interfrange de la figure d'interférence. Pour accéder à l'information $\phi(x,y)$, il est nécessaire de démoduler le signal $n(x,y,z)$. En pratique, on peut superposer à la figure d'interférence atomique une figure d'interférence lumineuse, de profil d'intensité $I(z) \propto \sin^2(\pi z/z_i)$ et de fréquence telle que les atomes éclairés sont transférés dans un état invisible à l'imagerie. Une image prise le long de l'axe vertical verra ainsi le profil de densité

$$n'(x,y) = \int dz n(x,y,z) \sin^2(\pi z/z_i) \quad (5.9)$$

$$= n(x,y) [1 - \operatorname{Re} \{ \exp(i\phi(x,y)) \}] + \int dz [\text{fonctions périodiques de } z/z_i]. \quad (5.10)$$

Si le nombre de franges dans l'enveloppe du nuage est suffisamment grand ($z_i \ll \sigma$), l'intégrale des fonctions périodiques de z sera négligeable et le profil de phase $\phi(x,y)$ sera directement visible sur l'image.

5.2.2 Dynamique de la décohérence

Si nous nous sommes concentrés jusqu'à présent sur les propriétés de cohérence à l'équilibre thermodynamique, nous n'en oublions pas moins que le comportement hors de l'équilibre est tout aussi important. L'une des questions que l'on peut se poser à ce sujet est la suivante : qu'advient-il de la cohérence de phase si l'on change brutalement la dimensionnalité du système ? Supposons qu'à un instant $t = 0$ nous séparions un condensat de Bose–Einstein tridimensionnel en deux sous-systèmes dans une géométrie de dimension réduite d , tout en préservant la cohérence de phase entre eux. Nous aurions alors préparé un état cohérent fortement hors d'équilibre et le système tendrait à relaxer avec le temps vers son état d'équilibre incohérent. Il est possible en principe d'observer la dynamique de ce processus dans une expérience d'interférences. Si $\phi(\mathbf{r})$ désigne la phase relative entre les deux nuages, donc également la phase du profil d'interférence, on peut quantifier la cohérence grâce au « facteur de cohérence »

$$C = \frac{1}{\Omega} \operatorname{Re} \int d^d \mathbf{r} \langle \exp(i\phi(\mathbf{r})) \rangle, \quad (5.11)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne statistique et Ω le volume des nuages (surface si $d = 2$, longueur si $d = 1$). Pour l'état initial cohérent, $C = 1$ et pour l'état d'équilibre totalement incohérent, $C = 0$. [Burkov *et al.* \(2007\)](#) ont prédit le comportement de la fonction $C(t > 0)$, aussi bien pour des systèmes bidimensionnels qu'unidimensionnels. [Hofferberth *et al.* \(2007\)](#) ont réalisé l'expérience à une dimension et leurs observations sont en très bon accord avec les prédictions de [Burkov *et al.*](#) À deux

dimensions, la décroissance prévue pour le facteur de cohérence est tout à fait singulière, puisqu'elle est algébrique, et non exponentielle ; aux temps longs, [Burkov et al.](#) prédisent ainsi que la dépendance temporelle du facteur de cohérence est de la forme

$$C(t) \propto \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-T/8T_c}, \quad (5.12)$$

où t_0 est un certain temps de coupure, et T_c est la température critique de la transition BKT. Réaliser l'expérience à deux dimensions dans notre système est possible en pratique : il suffirait pour cela de brancher soudainement le potentiel à deux puits sur un condensat, puis de laisser le système relaxer un temps variable. On accéderait alors au facteur de cohérence en prenant la moyenne statistique sur plusieurs répétitions du profil d'interférence vu en imagerie horizontale (selon y), puis en intégrant l'image résultante selon x . En pratique, l'expérience est délicate car la brusque modification du potentiel vu par les atomes peut créer de nombreuses excitations qui perturbent la cohérence initiale.

Troisième partie

**Potentiels géométriques
en optique quantique**

Introduction

L'étude des fluides quantiques en rotation intervient pour une part importante dans la compréhension de la superfluidité. Elle est pertinente dans des systèmes aussi variés que l'hélium liquide, les noyaux atomiques en rotation, les étoiles à neutrons et pulsars, ainsi que les supraconducteurs en champ magnétique. Le club des superfluides en rotation compte depuis dix ans un nouveau membre : les atomes froids. Les premières expériences sur des condensats de Bose–Einstein en rotation ont apporté une spectaculaire mise en évidence de la notion de vortex quantifié (Matthews *et al.*, 1999; Madison *et al.*, 2000; Abo-Shaeer *et al.*, 2001). Plus récemment, les gaz de Fermi dégénérés sont également entrés dans la ronde (Zwierlein *et al.*, 2005). Dans ces systèmes, un ou plusieurs vortex peuvent être observés en fonction de la vitesse angulaire de rotation Ω_r . Lorsque le nombre de vortex est suffisamment grand, ils cristallisent en un réseau d'Abrikosov, la densité de vortex étant $\rho_v = M\Omega_r/\pi\hbar$. Cette configuration minimise en effet l'énergie en permettant de reproduire à grande échelle le champ de vitesse d'un corps solide (Feynman, 1955).

Dans ces systèmes expérimentaux, confinés par un potentiel harmonique de pulsation ω_\perp , on atteint un régime de rotation rapide lorsque Ω_r s'approche de ω_\perp . La force centrifuge compense alors pratiquement la force de rappel et le système est gouverné dans le plan x, y perpendiculaire à l'axe de rotation par la force de Coriolis et par les interactions entre particules. Cette situation est similaire à celle rencontrée par un gaz d'électron dans un champ magnétique car la force de Lorentz est formellement identique à la force de Coriolis. Elle présente une analogie forte avec l'effet Hall quantique, l'intensité du champ magnétique équivalent étant $B = 2M\Omega_r/q$, avec $q = 1$. Lorsque $\Omega_r \simeq \omega$, le système devient fortement corrélé et sa description relève de l'effet Hall quantique fractionnaire (Cooper *et al.*, 2001). Cette connexion avec un domaine de la physique de la matière condensée dans lequel de nombreuses questions sont encore ouvertes a motivé de nombreux travaux, aussi bien théoriques qu'expérimentaux (pour une revue récente, voir Bloch *et al.*, 2008). Une des principales difficultés rencontrées par les expérimentateurs réside dans l'anisotropie résiduelle du potentiel de confinement, qui rend délicate l'approche du régime fortement corrélé. La recherche de moyens alternatifs de générer un champ magnétique fictif, ne reposant pas sur le passage dans un référentiel en rotation, est par conséquent essentielle.

La phase de Berry constitue une telle alternative. Cette phase est accumulée par tout système dont le hamiltonien dépend de paramètres variant lentement dans le temps, lorsque ces paramètres sont amenés à décrire adiabatiquement une trajectoire fermée (Berry, 1984). Sa principale caractéristique est d'être une quantité entièrement déterminée par la *géométrie* de la trajectoire parcourue. Les paramètres

dépendant du temps peuvent être simplement les coordonnées du centre de masse du système; dans une description de type Born–Oppenheimer, la phase de Berry peut alors être associée à un potentiel vecteur qui participe à l’impulsion du centre de masse à la manière d’un potentiel vecteur magnétique (Mead, 1980). Le centre de masse est alors couplé à un champ magnétique effectif, dérivant du potentiel vecteur géométrique, comme s’il était porteur d’une charge électrique. Au potentiel vecteur géométrique est par ailleurs associé un potentiel scalaire, qui s’ajoute à l’énergie de l’état interne dans le hamiltonien du centre de masse.

La possibilité d’utiliser ce mécanisme pour générer des champs magnétiques fictifs dans le contexte des atomes froids a été perçue avant même la réalisation expérimentale de gaz fortement dégénérés (Dum et Olshanii, 1996; Ho et Shenoy, 1996) et l’utilisation de champs laser comme moyen de réaliser le couplage requis entre les états interne et externe des atomes s’est rapidement imposée (Dum et Olshanii, 1996; Visser et Nienhuis, 1998). Ce couplage laser associe en effet des champs magnétiques élevés grâce aux variations spatiales rapides de leur phase et la facilité de manipulation des moyens optiques. Depuis ces premiers travaux, de nombreux schémas de réalisation expérimentale ont été proposés, parmi lesquels ceux de Jaksch et Zoller (2003), Juzeliūnas et Öhberg (2004), Mueller (2004), Sørensen *et al.* (2005), Zhang *et al.* (2005) et Juzeliūnas *et al.* (2005, 2006). Les réalisations expérimentales sont toutefois restées rares (Dutta *et al.*, 1999; Lin *et al.*, 2009b).

Mon travail de thèse sur les potentiels géométrique s’inscrit dans la suite de ce développement récent du domaine des atomes froids. Il est l’objet de la présente partie. Le chapitre 6 propose une introduction à la phase de Berry et aux potentiels géométriques. Le lecteur familier de ces concepts pourra ne le parcourir que pour identifier les notations employées par la suite. Nous présentons dans le chapitre 7 deux situations concrètes dans lesquels les potentiels géométriques sont présents dans le contexte des atomes froids. La première concerne le cas d’un gaz polarisé confiné dans un piège magnétique. Ce système est si fréquemment rencontré dans les laboratoires qu’il mérite en soi une attention particulière; nous verrons toutefois que la phase de Berry y est très petite et de peu d’intérêt pratique. La seconde a été proposée par Juzeliūnas *et al.* (2006) et illustre l’usage du couplage entre les atomes et un champ laser pour générer un champ magnétique effectif important. Dans le chapitre 8, nous exposons l’interprétation semi-classique des forces dérivant des potentiels géométriques dans le contexte de l’optique quantique. Nous y montrons de quelle manière ces forces sont associées aux forces radiatives et mettons en évidence les échanges de photons impliqués sur le second exemple présenté au chapitre précédent. Ce travail a fait l’objet d’une publication (Cheneau *et al.*, 2008) jointe en fin de partie. Enfin, le chapitre 9 est consacré à une proposition détaillée de réalisation expérimentale, bien adaptée aux contraintes expérimentales associées à la structure hyperfine des transitions habituellement utilisées pour manipuler les atomes alcalins. Y figurent également les résultats d’une analyse numérique destinée à vérifier la présence de vortex dans l’état fondamental de la fonction d’onde du centre de masse et à tester la validité de l’approximation de suivi adiabatique de l’état interne. La possibilité de passer adiabatiquement d’un état avec vortex à un état sans vortex, interdite dans les expériences de rotation, est également étudiée numériquement. Le contenu de ce chapitre a lui aussi fait l’objet d’une publication (Günter *et al.*, 2009), également jointe en fin de partie. La physique des fluides quantiques en rotation

rapide étant une physique fondamentalement bidimensionnelle, dans laquelle la dynamique le long de l'axe de rotation peut être traitée séparément, l'ensemble des situations décrites dans les chapitres de cette partie sont à comprendre dans le plan x, y perpendiculaire à l'axe du champ magnétique effectif.

Chapitre 6

Phase de Berry et potentiels géométriques

Nous introduisons dans ce premier chapitre les concepts de phase de Berry et de potentiels géométriques. Nous suivons dans un premier temps le raisonnement exposé par Berry dans son article pionnier (Berry, 1984) pour mettre en évidence l'existence d'une phase géométrique accumulée lorsqu'un système quantique dépendant du temps est déplacé adiabatiquement le long d'une trajectoire fermée. Nous adaptons dans un deuxième temps le formalisme au contexte d'un système complètement quantique, constitué d'un jeu de variables « rapides » couplées à un jeu de variable « lentes ». Nous montrons qu'une approximation de type Born–Oppenheimer conduit à introduire dans le hamiltonien effectif gouvernant les variables lentes un potentiel vecteur analogue à un potentiel vecteur magnétique, ainsi qu'un potentiel scalaire qui s'ajoute à l'énergie de l'état interne. Le potentiel vecteur y apparaît comme étant à l'origine de la phase de Berry accumulée par les variables rapides sur une trajectoire fermée des variables lentes.

6.1 La phase de Berry

Considérons un système quantique couplé à son environnement par l'intermédiaire d'un ensemble de paramètres représenté par le vecteur \mathbf{R} . Le hamiltonien \hat{H} du système, ainsi que ses vecteurs propres $|m\rangle$ et valeurs propres ε_m sont alors des fonctions de ces paramètres : $\hat{H}(\mathbf{R})$, $|m(\mathbf{R})\rangle$ et $\varepsilon(\mathbf{R})$, que nous supposons régulières. Nous supposons dans tout ce qui suit que le système est préparé initialement dans un certain état stationnaire $|n(\mathbf{R})\rangle$. Le problème qui va nous intéresser survient lorsque le jeu de paramètres \mathbf{R} est dépendant du temps : $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$.

6.1.1 Approximation adiabatique

Si le hamiltonien est indépendant du temps, l'évolution temporelle du système se réduit à l'accumulation d'une phase *dynamique* δ_n :

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(i\delta_n) |n(\mathbf{R})\rangle, \quad \delta_n = -\varepsilon_n(\mathbf{R}) t/\hbar. \quad (6.1)$$

Lorsque au contraire les paramètres de couplage à l'environnement sont dépendants du temps, l'évolution du système est plus complexe. En effet, les axes propres

$|m(\mathbf{R}(t))\rangle$ du hamiltonien tournent maintenant au cours de l'évolution temporelle, ce qui peut entraîner des transitions du système entre son état initial $|n(\mathbf{R})\rangle$ et des états adjacents en énergie. Il reste néanmoins un cas simple à étudier : celui d'une évolution adiabatique, pour laquelle de telles transitions peuvent être négligées. Le théorème adiabatique (voir par exemple [Messiah, 1995](#)) garantit alors que l'état du système est à chaque instant parallèle au vecteur propre instantané $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ du hamiltonien $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$, obtenu par continuité à partir de $|n(\mathbf{R}(0))\rangle$. En termes formels, l'approximation adiabatique contraint l'état du système à vérifier la relation

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t)) |\Psi(t)\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R}(t)) |\Psi(t)\rangle, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.2)$$

ou de manière équivalente

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(i\zeta_n(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (6.3)$$

La validité du théorème adiabatique requiert que les probabilités $p_{n \rightarrow m}(t)$ de trouver le système à l'instant t dans l'état $|m(\mathbf{R}(t))\rangle$ soient faibles. On peut montrer ([Messiah, 1995](#), chap. 17) que cette condition se met sous la forme

$$\left| \langle m(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} n(\mathbf{R}(t)) \rangle \right|^2 \ll \frac{1}{\hbar^2} (\varepsilon_n(\mathbf{R}(t)) - \varepsilon_m(\mathbf{R}(t)))^2, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.4)$$

où la notation $|\frac{d}{dt} n(\mathbf{R}(t))\rangle$ représente le vecteur $\frac{d}{dt} |n(\mathbf{R}(t))\rangle$. Il va de soi que cela implique notamment que le spectre ne soit à aucun moment dégénéré.

6.1.2 Origine de la phase de Berry

Berry s'est demandé ce que contenait la phase $\zeta_n(t)$ qui apparaît dans l'expression (6.3). Dans le cas indépendant du temps celle-ci se confond avec la phase dynamique δ_n . La phase dynamique sera également présente dans le problème dépendant du temps, quoique sous sa forme généralisée

$$\delta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \varepsilon_n(\mathbf{R}(t')). \quad (6.5)$$

Nous écrirons ainsi

$$\zeta_n(t) = \delta_n(t) + \gamma_n(t), \quad (6.6)$$

la question étant maintenant de déterminer la contribution $\gamma_n(t)$. C'est cette contribution qui constitue la phase de Berry.

La dérivée par rapport au temps de $\gamma_n(t)$ est fixée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(\mathbf{R}(t)) |\Psi(t)\rangle. \quad (6.7)$$

Faisant usage de (6.3) et remarquant que la dérivée par rapport au temps agit également sur $\mathbf{R}(t)$, il vient :

$$-\hbar \dot{\zeta}_n(t) |n(\mathbf{R}(t))\rangle + i\hbar \left| \frac{d}{dt} n(\mathbf{R}(t)) \right\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle, \quad (6.8)$$

où l'on a éliminé le facteur $\exp(i\zeta_n)$ apparaissant dans les deux membres. En combinant (6.6) et (6.5), on peut simplifier l'équation précédente et obtenir, après projection sur $|n(\mathbf{R})\rangle$,

$$\dot{\gamma}_n(t) = i \langle n(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} n(\mathbf{R}(t)) \rangle . \quad (6.9)$$

L'intégration de cette relation entre 0 et t fournit l'expression recherchée :

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t dt' \langle n(\mathbf{R}(t')) | \frac{d}{dt'} n(\mathbf{R}(t')) \rangle , \quad (6.10a)$$

ou de manière équivalente

$$\gamma_n(\mathbf{R}(t)) = i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} d\mathbf{R}' \cdot \langle n(\mathbf{R}') | \nabla_{\mathbf{R}'} n(\mathbf{R}') \rangle . \quad (6.10b)$$

Sous la forme (6.10b), toute référence au temps ayant disparu, il est clair que la contribution γ_n n'est pas dynamique, mais *géométrique*¹. Il faut noter enfin que le caractère réel de γ_n est assuré par le fait que la norme de $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ est conservée lors du déplacement $\mathbf{R}(0) \rightarrow \mathbf{R}(t)$:

$$\nabla_{\mathbf{R}} \langle n(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle = \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle = 0 . \quad (6.11)$$

6.1.3 Transformations de jauge

La définition que nous avons donné de la phase de Berry repose sur l'équation (6.3) ; or celle-ci nécessite un choix, arbitraire, de la phase du vecteur de base $|n(\mathbf{R})\rangle$ en tout point \mathbf{R} . Un tel choix ne doit en principe changer aucune des propriétés observables du système, ce qui pose naturellement la question de l'univocité de la phase de Berry. Dans toute situation concrète, la phase de Berry ne peut se manifester que si la trajectoire $\mathbf{R}(t)$ est fermée. Sur une trajectoire particulière \mathcal{C} , la phase de Berry est alors donnée par l'intégrale

$$\gamma_n(\mathbf{R}(t)) = \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{R}' \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{R}') , \quad (6.12)$$

où nous avons introduit le vecteur

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \equiv i\hbar \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle . \quad (6.13)$$

Changer le choix de l'origine des phases en tout point consiste à effectuer une transformation de jauge

$$|n(\mathbf{R})\rangle \rightarrow \exp(if(\mathbf{R})) |n(\mathbf{R})\rangle , \quad (6.14)$$

où le facteur de phase $\exp(if(\mathbf{R}))$ est une fonction monovaluée. Après une telle transformation, la phase de Berry est toujours donnée par la relation (6.12), à condition d'effectuer la substitution

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) - \nabla_{\mathbf{R}} f(\mathbf{R}) . \quad (6.15)$$

1. L'interprétation géométrique de la phase de Berry a été formulée très peu de temps après le travail de Berry par [Simon \(1983\)](#).

Le terme $\nabla_{\mathbf{R}}f$ ne modifiant en rien l'intégrale sur le contour fermé \mathcal{C} , nous pouvons donc conclure que la phase de Berry est bien définie de manière univoque.

La possibilité d'effectuer des transformations de jauge soulève un autre point essentiel. Si l'on suppose que le vecteur $|n(\mathbf{R})\rangle$ est une fonction monovaluée de \mathbf{R} sur un domaine de l'espace des paramètres incluant le contour \mathcal{C} , il est toujours possible de définir un choix de jauge tel que la phase de Berry sur le contour \mathcal{C} soit identiquement nulle. Il suffit pour cela de définir la fonction $f(\mathbf{R})$ telle que la fonction d'onde associée à l'état $\exp(if(\mathbf{R}))|n(\mathbf{R})\rangle$ soit réelle sur l'ensemble de la trajectoire. La fonction $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ est alors complètement réductible à un gradient. La phase de Berry ne se manifeste donc qu'à la condition que la fonction $|n(\mathbf{R})\rangle$ soit multivaluée.

Le vecteur $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ prend une signification particulière à la lumière de la discussion précédente : il apparaît comme l'analogie directe du potentiel vecteur magnétique. Dans le cas où le jeu de paramètres \mathbf{R} représente une position dans l'espace, nous verrons bientôt que cette analogie peut être poussée assez loin. Pour cette raison, nous ferons référence au vecteur \mathbf{A}_n en tant que potentiel vecteur géométrique.

6.1.4 Rôle des dégénérescences

Nous considérons ici que la trajectoire parcourue par le jeu de paramètres \mathbf{R} est un contour fermé \mathcal{C} . Dans le cas tridimensionnel, le théorème de Stokes permet alors de reformuler l'équation (6.12) et d'obtenir, avec une notation allégée :

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = -\text{Im} \iint d\mathbf{S} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \wedge \langle n | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle \quad (6.16a)$$

$$= -\text{Im} \iint d\mathbf{S} \cdot \langle \nabla_{\mathbf{R}} n | \wedge | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle \quad (6.16b)$$

$$= -\text{Im} \iint d\mathbf{S} \cdot \sum_{m \neq n} \langle \nabla_{\mathbf{R}} n | m \rangle \wedge \langle m | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle, \quad (6.16c)$$

où l'intégration est effectuée sur une surface sous-tendue par le contour \mathcal{C} , $d\mathbf{S}$ désignant un élément infinitésimal de cette surface. L'exclusion dans la somme est justifiée par l'équation (6.11). En utilisant le fait que les vecteurs $|m\rangle$ sont des états stationnaires d'énergie ε_m , on obtient pour les éléments de matrice non diagonaux la relation :

$$\langle m | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle = \frac{\langle m | \nabla_{\mathbf{R}} H | n \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \quad (m \neq n). \quad (6.17)$$

Nous disposons donc finalement d'une nouvelle expression de la phase de Berry sur un contour fermé, à savoir

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \iint_{\mathcal{C}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_n, \quad (6.18)$$

où nous avons introduit

$$\mathbf{B}_n \equiv -\hbar \times \text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \nabla_{\mathbf{R}} \hat{H} | m \rangle \wedge \langle m | \nabla_{\mathbf{R}} \hat{H} | n \rangle}{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2}. \quad (6.19)$$

L'expression (6.18) est intéressante pour deux raisons. Elle permet tout d'abord de s'affranchir d'un choix de jauge $f(\mathbf{R})$ explicite, puisque les vecteurs $|\nabla_{\mathbf{R}} m\rangle$ n'y

apparaissent plus. Le vecteur $\mathbf{B}_n = \nabla \wedge \mathbf{A}_n$ est en fait le champ « magnétique » dérivant du potentiel vecteur \mathbf{A}_n (nous parlerons de champ magnétique effectif). La phase de Berry est donnée par le flux de ce champ à travers toute surface sous-tendue par le contour fermé \mathcal{C} . Un second avantage de cette expression est de faire apparaître clairement le rôle important joué par les dégénérescences « accidentelles » du spectre (par opposition à celles liées à une symétrie du hamiltonien). Supposons ainsi qu’une telle dégénérescence survienne en $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$ entre l’état $|n\rangle$ et un état $|m_0\rangle$. Il est clair d’après (6.19) que la phase de Berry associée à une trajectoire proche de \mathbf{R}_0 est dominée par le terme faisant intervenir $|m_0\rangle$, puisqu’alors le dénominateur $(\varepsilon_n - \varepsilon_{m_0})^2$ tend vers 0. Dans le cas particulier des dégénérescences coniques², Berry (1984) a pu montrer que la contribution à la phase adiabatique géométrique donnée par $|\gamma_n| = i\Omega(\mathcal{C})/2$, où $\Omega(\mathcal{C})$ est l’angle solide sous-tendu par \mathcal{C} en \mathbf{R}_0 . La phase de Berry associée aux dégénérescences coniques a été extensivement étudiée en chimie théorique (pour une revue, voir par exemple Yarkony, 1996).

6.2 Potentiels géométriques

Dans le raisonnement de Berry, les paramètres \mathbf{R} sont considérés comme classiques et mus par un opérateur extérieur. Il est néanmoins possible de suivre un raisonnement similaire dans le cadre d’une description complètement quantique incluant les variables \mathbf{R} dans le système. Le système que nous allons considérer ici est celui d’une molécule polyatomique. Il s’agit du système « historique » sur lequel ces idées se sont développées mais il ne nous servira finalement qu’à rendre concret un raisonnement et un formalisme général, initialement développé par Moody *et al.* (1989).

Notre système est constitué par un ensemble de noyaux, dont les positions \mathbf{R}_i sont regroupées en un seul vecteur \mathbf{R} , et par un ensemble d’électrons, dont les positions \mathbf{r}_i relatives au centre de masse sont également regroupées en un seul vecteur \mathbf{r} . Les noyaux jouent le rôle de variables lentes et les électrons celui de variables rapides. L’espace de Hilbert associé à la molécule est le produit tensoriel de ceux associés aux noyaux et aux électrons : $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\text{nu}} \otimes \mathcal{H}^{\text{él}}$. L’état de la molécule évolue sous l’influence du hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{T}^{\text{nu}} + \hat{T}^{\text{él}} + \hat{V}, \quad (6.20)$$

où \hat{T}^{nu} et $\hat{T}^{\text{él}}$ désignent les énergies cinétiques des noyaux et des électrons et $\hat{V}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{R}})$ désigne l’énergie potentielle du système. Nous laissons de côté sans perte de généralité les degrés de liberté de spin.

6.2.1 Choix de la base de l’espace de Hilbert

Suivant Bohm *et al.* (2003, chap. 8) nous choisissons pour base de l’espace de Hilbert \mathcal{H} l’ensemble des vecteurs orthonormés $|\mathbf{R}, n(\mathbf{R})\rangle$, tels que

$$\hat{\mathbf{R}} |\mathbf{R}, n(\mathbf{R})\rangle = \mathbf{R} |\mathbf{R}, n(\mathbf{R})\rangle \quad (6.21a)$$

2. Au voisinage d’une dégénérescence conique, dites aussi de Jahn–Teller, le hamiltonien dépend linéairement de $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$. Cette propriété les distingue des dégénérescences « tangentielles », dites de Renner–Teller, au voisinage desquelles le hamiltonien dépend quadratiquement de ce même paramètre.

$$\left[\hat{T}^{\text{él}} + \hat{V}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{R}}) \right] |\mathbf{R}, n(\mathbf{R})\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R}) |\mathbf{R}, n(\mathbf{R})\rangle . \quad (6.21b)$$

Ces états correspondent à une position \mathbf{R} du centre de masse de la molécule et à un état interne n , choisi comme étant un état propre d'énergie ε_n du hamiltonien électronique dans le point de vue de Born–Oppenheimer. Si $|\Psi\rangle$ désigne un vecteur de l'espace de Hilbert \mathcal{H} , la décomposition de $|\Psi\rangle$ dans la base $\{|\mathbf{R}, n(\mathbf{R})\rangle\}$ prend donc la forme

$$|\Psi(\mathbf{R})\rangle = \sum_n \psi_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle , \quad (6.22)$$

où les fonctions $\psi_n(\mathbf{R})$ jouent le rôle de fonctions d'onde nucléaires associées aux différents états internes.

6.2.2 Recherche des états stationnaires

Notre objectif est maintenant de déterminer les états propres du hamiltonien total. L'état $|\Psi(\mathbf{R})\rangle$ sera un état stationnaire du système total à la condition qu'il vérifie l'équation aux valeurs propres :

$$\sum_n \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + \varepsilon_n(\mathbf{R}) \right] \psi_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle = E \sum_n \psi_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle , \quad (6.23)$$

où nous avons explicité l'opérateur \hat{T}^{nu} (M représente la masse totale des noyaux). Il est possible d'obtenir un jeu d'équations pour les fonctions d'onde $\psi_n(\mathbf{R})$ en projetant l'équation précédente sur chacun des états électroniques $|m(\mathbf{R})\rangle$. Il vient ainsi :

$$\sum_n \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \langle m | \nabla_{\mathbf{R}}^2 \psi_n | n \rangle \right] + \varepsilon_m(\mathbf{R}) \psi_m = E \psi_m , \quad (6.24)$$

où l'on a omis certaines dépendances en \mathbf{R} pour alléger la notation. L'opérateur d'énergie cinétique nucléaire agit aussi bien sur les fonctions d'onde ψ_m que sur les états $|m\rangle$, de sorte que l'élément de matrice impliqué dans (6.24) est proportionnel à

$$\langle m | \nabla_{\mathbf{R}}^2 \psi_n | n \rangle = [\delta_{mn} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + 2 \langle m | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{R}} + \langle m | \nabla_{\mathbf{R}}^2 n \rangle] \psi_n \quad (6.25a)$$

$$= \sum_k [(\delta_{mk} \nabla_{\mathbf{R}} + \langle m | \nabla_{\mathbf{R}} k \rangle) \cdot (\delta_{kn} \nabla_{\mathbf{R}} + \langle k | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle)] \psi_n . \quad (6.25b)$$

La relation (6.25b) est obtenue à partir de (6.25a) en insérant la relation de fermeture $\sum_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k| = 1$ entre les deux opérateurs $\nabla_{\mathbf{R}}$ du terme $\langle \phi_m | \nabla_{\mathbf{R}}^2 \phi_n \rangle$ puis en factorisant. À partir de (6.24) et (6.25b), nous pouvons ainsi résumer l'équation aux valeurs propres vérifiée par $|\Psi(\mathbf{R})\rangle$ de la manière suivante :

$$\hat{H}_{mn}(\mathbf{R}) \psi_n = E \psi_m , \quad (6.26a)$$

les opérateurs \hat{H}_{mn} étant définis par

$$\hat{H}_{mn} = \frac{1}{2M} \sum_k [(i\hbar \delta_{mk} \nabla_{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_{mk}) \cdot (i\hbar \delta_{kn} \nabla_{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_{kn})] + \delta_{mn} \varepsilon_n , \quad (6.26b)$$

avec

$$\mathbf{A}_{mn} \equiv i\hbar \langle m | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle . \quad (6.27)$$

6.2.3 Approximation adiabatique

L'équation (6.26) vérifiée par un état propre de la molécule a été obtenue de manière exacte. Nous allons toutefois nous concentrer maintenant sur un cas particulier : celui où le spectre du hamiltonien électronique défini par la relation (6.21b) est non dégénéré. Il est alors possible de procéder à une approximation adiabatique similaire à celle présentée en 6.1.1, conduisant à négliger les éléments du tenseur (6.27) pour lesquels $m \neq n$, qui représentent des transitions réelles entre des états électroniques distincts. Dans le cadre de cette approximation, les vecteurs $|\mathbf{R}, n(\mathbf{R})\rangle$ sont les états propres du hamiltonien total (6.20) et les fonctions d'onde nucléaires $\psi_n(\mathbf{R})$ sont déterminées par l'équation aux valeurs propres

$$\hat{H}_n^{\text{ad}}(\mathbf{R}) \psi_n = E_n \psi_n, \quad (6.28)$$

où le hamiltonien effectif est défini par :

$$\hat{H}_n^{\text{ad}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2M} (i\hbar \nabla_{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_n(\mathbf{R}))^2 + \varepsilon_n(\mathbf{R}) + U_n(\mathbf{R}). \quad (6.29)$$

L'approximation adiabatique considérée ici apparaît comme une première correction à l'approximation de Born–Oppenheimer couramment utilisée³. Le terme \mathbf{A}_{nn} n'est autre que le potentiel vecteur géométrique. Il joue dans pour le centre de masse des noyaux le même rôle qu'un potentiel vecteur magnétique pour une particule de charge unité, rendant très concrète l'analogie évoquée à la section 6.1.3. Si le rotationnel du potentiel vecteur géométrique est non nul, on pourra lui associer un champ magnétique fictif afin de discuter de son influence sur la dynamique des noyaux.

Le potentiel vecteur géométrique est accompagné d'un potentiel scalaire $U_n(\mathbf{R})$, lequel, ajouté à l'énergie de l'état électronique $\varepsilon_n(\mathbf{R})$, constitue une énergie potentielle pour les noyaux. Ce potentiel scalaire géométrique peut être explicité de différentes manières :

$$\frac{2M}{\hbar^2} U(\mathbf{R}) = - \sum_{k \neq n} [\langle n | \nabla_{\mathbf{R}} k \rangle \cdot \langle k | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle] \quad (6.30a)$$

$$= \sum_{k \neq n} [\langle \nabla_{\mathbf{R}} n | k \rangle \cdot \langle k | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle] \quad (6.30b)$$

$$= \langle \nabla_{\mathbf{R}} n | \cdot | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle + \langle n | \nabla_{\mathbf{R}} n \rangle^2, \quad (6.30c)$$

où l'on a fait usage de la relation (6.11) pour passer de (6.30a) à (6.30b)⁴.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les éléments non-diagonaux du tenseur \mathbf{A}_{mn} qui apparaissent dans l'expression (6.30b) du potentiel scalaire apportent au hamiltonien (6.29) une contribution du même ordre que les éléments diagonaux \mathbf{A}_{nn} . Sous la forme (6.30b), ils jouent le rôle de transitions virtuelles qui renormalisent simplement l'énergie potentielle effective $\varepsilon_n(\mathbf{R})$.

3. Bien que cette correction soit connue depuis longtemps –la théorie de la molécule originale de Born et Oppenheimer (1927) consiste en un développement perturbatif–, il s'est écoulé plus de trois décennies avant que l'on prenne la mesure de ses effets potentiels (Herzberg et Longuet-Higgins, 1963).

4. On notera que ce résultat diffère par son signe de celui présenté par Moody *et al.* (1989).

6.2.4 Phase de Berry et vortex

L'existence d'un champ magnétique fictif $\mathbf{B}_n = \nabla \wedge \mathbf{A}_n$ permet d'envisager la présence de vortex dans un système superfluide par analogie avec un supraconducteur. Le flux ϕ du champ magnétique au travers d'un supraconducteur de type II est proportionnel au nombre de vortex, un quantum de flux $\phi_0 = h/2e$ étant associé à chaque vortex :

$$N_v^{\text{supra}} = \phi/\phi_0 = 2e\phi/h . \quad (6.31)$$

En utilisant la relation (6.18), qui lie le flux du champ magnétique fictif à la phase de Berry, nous obtenons le nombre de vortex que l'état fondamental de notre système peut contenir :

$$N_v^{\text{géom}} = \gamma_n/2\pi . \quad (6.32)$$

En supposant un champ magnétique fictif uniforme, on obtient la relation correspondante pour la densité de vortex :

$$\rho_v^{\text{géom}} = \|\mathbf{B}_n\|/h . \quad (6.33)$$

Il nous est également possible de prévoir le sens de rotation du superfluide autour d'un vortex : puisque le champ de vitesse est proportionnel au gradient de la phase de la fonction d'onde, le vecteur tourbillon sera orienté dans le même sens que le champ magnétique fictif.

Chapitre 7

Exemples de potentiels géométriques

Nous illustrons ici les concepts introduits au chapitre précédent par deux exemples dans le contexte de l'optique quantique. Le premier est constitué un atome polarisé confiné dans un piège magnétique. Sa principale vertu est son caractère pédagogique, puisque le couplage entre l'état interne des atomes, représentant les variables rapides, et la position du centre de masse, représentant les variables lentes, est directement matérialisé par la direction du champ magnétique. Le second exemple est une proposition de [Juzeliūnas *et al.* \(2006\)](#) pour générer un champ magnétique fictif en employant le couplage Raman entre un atome possédant une transition en Λ et deux faisceaux laser. Ce type de schéma, prometteur pour observer expérimentalement des vortex induits par un potentiel vecteur géométrique, nous servira ici à introduire les idées détaillées au chapitre 9. Le lecteur est invité à noter le changement de notation qui intervient ici, la position du centre de masse étant dorénavant désignée par \mathbf{r} et non plus \mathbf{R} .

7.1 Potentiels géométriques induits par un piège magnétique

Le système considéré ici est celui constitué par un atome alcalin, polarisé et confiné dans un piège magnétique. L'espace de Hilbert de l'atome est le produit de ceux associés à la position et au spin du noyau ainsi qu'à la position et au spin de l'électron périphérique. Pour une espèce comme le ^{87}Rb et avec les champs magnétiques utilisés habituellement dans les laboratoires, le déplacement en énergie dû au champ magnétique est petit devant ceux introduits par le couplage hyperfin, de sorte que la forme la plus appropriée du hamiltonien d'interaction entre l'atome et le champ magnétique \mathbf{B} est

$$\hat{V}^{\text{mag}} = -\mu_F \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{B} , \quad (7.1)$$

où $\hat{\mathbf{F}}$ désigne l'opérateur de moment cinétique « total », somme du moment cinétique orbital de l'électron externe, de son spin et du spin nucléaire.

Dans un piège magnétique, le champ magnétique n'est pas uniforme mais dépend en norme et en direction de la position \mathbf{r} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}) \mathbf{w}(\mathbf{r}) , \quad (7.2a)$$

B et \mathbf{w} désignant respectivement la norme et le vecteur directeur de \mathbf{B} :

$$B(\mathbf{r}) = \|\mathbf{B}(\mathbf{r})\| \quad (7.2b)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})/B(\mathbf{r}) . \quad (7.2c)$$

Ainsi, le hamiltonien d'interaction \hat{V}^{mag} agit sur l'ensemble de l'espace de Hilbert et pas seulement sur l'espace interne. Nous nous retrouvons avec un système complètement analogue à celui décrit dans la section 6.2 du chapitre 6. Les états propres $|n(\mathbf{r})\rangle = |F, m_F\rangle_{\mathbf{w}(\mathbf{r})}$ du hamiltonien électronique sont entièrement caractérisés par la donnée de la norme F du moment cinétique et de sa projection m_F le long du champ magnétique :

$$\hat{\mathbf{F}}^2 |n\rangle = \hbar F(F+1) |n\rangle \quad (7.3a)$$

$$\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{w} |n\rangle = \hbar m_F |n\rangle . \quad (7.3b)$$

Ils dépendent de la position du noyau par l'intermédiaire de l'axe de quantification $\mathbf{w}(\mathbf{r})$, parallèle au champ magnétique local. Polariser un atome signifie le préparer dans un de ces états propres du hamiltonien électronique.

Dans les expériences d'atomes froids, le champ magnétique est choisi tel que les énergies mises en jeu dans la dynamique externe sont petites devant les écarts en énergie entre états internes. De cette manière, l'hypothèse adiabatique présentée en 6.2.3 est justifiée. Nous pouvons donc écrire les états propres de l'atome sous la forme factorisée

$$|\Psi_n(\mathbf{r})\rangle = \psi_n(\mathbf{r}) |n(\mathbf{r})\rangle ,$$

où $\psi_n(\mathbf{r})$ désigne la fonction d'onde du centre de masse. Le hamiltonien effectif dont $\psi_n(\mathbf{r})$ est solution est celui donné en (6.29), contenant les potentiels vecteur et scalaire géométriques :

$$\hat{H}_n^{\text{ad}} = \frac{1}{2M} (i\hbar \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{A}_n)^2 + \varepsilon_n(\mathbf{r}) + U_n(\mathbf{r}) .$$

7.1.1 Piège à symétrie cylindrique

Le calcul explicite des potentiels vecteurs nécessite d'exprimer l'état interne $|n(\mathbf{r})\rangle$ dans une base fixe de l'espace des états électroniques, c'est-à-dire indépendante de \mathbf{r} . Nous choisissons celle constituée par les vecteurs $|n_z\rangle$, définis par

$$\hat{\mathbf{F}}^2 |n_z\rangle = \hbar F(F+1) |n_z\rangle \quad (7.4a)$$

$$\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{e}_z |n_z\rangle = \hbar m_F |n_z\rangle . \quad (7.4b)$$

Le vecteur \mathbf{e}_z est un vecteur unitaire fixe de l'espace réel, à partir duquel nous définissons un trièdre $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ également fixe. La direction locale du champ magnétique est alors déterminée par la donnée de deux angles $\beta(\mathbf{r})$ et $\alpha(\mathbf{r})$ représentés sur la figure 7.1 et définis par la relation

$$\mathbf{w} = \cos \beta \mathbf{e}_z + \sin \beta (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) \quad (7.5a)$$

avec

$$\alpha(\mathbf{r}) \in [0; 2\pi[, \quad \beta(\mathbf{r}) \in [0; \pi] , \quad \forall \mathbf{r} . \quad (7.5b)$$

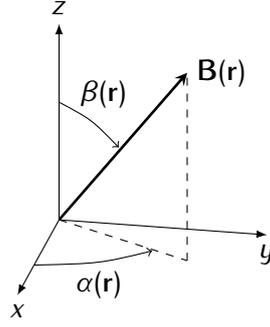


FIGURE 7.1 La direction du champ magnétique est définie en un point quelconque \mathbf{r} de l'espace par les angles $\alpha(\mathbf{r})$ et $\beta(\mathbf{r})$.

La même opération permettant de passer de \mathbf{e}_z à $\mathbf{w}(\mathbf{r})$, à savoir rotation de $\beta(\mathbf{r})$ autour de \mathbf{e}_y puis rotation de $\alpha(\mathbf{r})$ autour de \mathbf{e}_z , permet également de passer de $|n_z\rangle$ à $|n(\mathbf{r})\rangle$. Ceci permet d'écrire la relation explicite

$$|n(\mathbf{r})\rangle = \exp(-i\alpha(\mathbf{r})\hat{F}_z) \exp(-i\beta(\mathbf{r})\hat{F}_y) \exp(im_F\alpha(\mathbf{r})) |n_z\rangle, \quad (7.6)$$

à partir de laquelle le calcul des potentiels vecteurs est possible (voir l'appendice 7.A). Le résultat de ce calcul pour un piège à symétrie cylindrique est le suivant :

$$\mathbf{A}_n = \hbar m_F (\cos \beta - 1) \nabla \alpha. \quad (7.7)$$

$$U_n = \frac{\hbar^2 ((F(F+1) - m_F^2))}{4M} ((\sin \beta \nabla \alpha)^2 + (\nabla \beta)^2). \quad (7.8)$$

Le champ magnétique fictif s'exprime quant à lui

$$\mathbf{B}_n^{\text{géom}} \equiv \nabla \wedge \mathbf{A}_n = \hbar m_F \nabla (\cos \beta) \wedge \nabla \alpha. \quad (7.9)$$

Le choix de jauge qui consiste à faire apparaître la phase $m_F \alpha(\mathbf{r})$ permet de régulariser la limite $\beta \rightarrow 0$. Nous avons distingué explicitement le champ magnétique fictif afin de ne pas risquer la confusion avec le champ magnétique du piège.

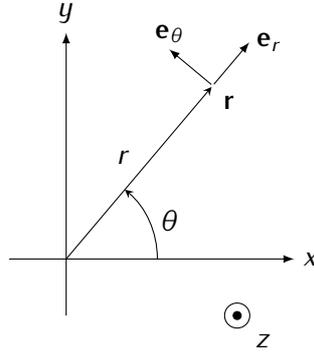
Il est également possible de calculer directement le champ magnétique effectif en utilisant l'expression (6.19). Il n'est alors pas nécessaire de détailler l'état interne $|n\rangle$ dans une base fixe. Ce calcul est présenté en appendice dans la section 7.A.3 et fournit le résultat suivant, valable pour toute configuration de champ magnétique :

$$\mathbf{B}_n^{\text{géom}} = \frac{-\hbar m_F}{B^2} [w_x \nabla B_y \wedge \nabla B_z + w_y \nabla B_z \wedge \nabla B_x + w_z \nabla B_x \wedge \nabla B_y]. \quad (7.10)$$

7.1.2 Application au piège de Ioffe–Pritchard

Nous considérons maintenant que le champ du piège magnétique est de type Ioffe–Pritchard, donné à l'ordre le plus bas en \mathbf{r} par la relation

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \mathbf{e}_z + b(y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y). \quad (7.11)$$


 FIGURE 7.2 Coordonnées et base polaires dans le plan $z = 0$.

Le champ directeur B_0 et le gradient b sont les deux paramètres qui déterminent le champ magnétique, définissant une échelle de longueur

$$r_0 = B_0/b. \quad (7.12)$$

Ce champ est à symétrie cylindrique d'axe \mathbf{e}_z et présente un minimum en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, ce qui assure son caractère confinant autour de l'origine dans le plan radial.

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) associées à (x, y) (voir figure 7.2), on obtient pour les fonctions $\alpha(\mathbf{r})$ et $\beta(\mathbf{r})$ les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} - \theta, \quad \tan \beta = r/r_0. \quad (7.13)$$

Les gradients sont quant à eux donnés par les relations

$$\nabla \alpha = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \nabla \beta = \frac{1/r_0}{1 + (r/r_0)^2} \mathbf{e}_r. \quad (7.14)$$

Ainsi, pour un piège de type Ioffe–Pritchard, les potentiels vecteur et scalaire géométriques prennent la forme

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \frac{\hbar m_F}{r} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r/r_0)^2}} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (7.15)$$

et

$$U_n(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 (F(F+1) - m_F^2)}{4Mr_0^2} \left(\frac{1}{1 + (r/r_0)^2} + \left(\frac{1}{1 + (r/r_0)^2} \right)^2 \right). \quad (7.16)$$

Le champ magnétique effectif se déduit quant à lui soit de la relation $\mathbf{B}^{\text{géom}} = \nabla \wedge \mathbf{A}^{\text{géom}}$, soit directement de (7.11) et (7.10). On obtient ainsi

$$\mathbf{B}_n^{\text{géom}} = \frac{\hbar m_F}{r_0^2} \left(\frac{1}{1 + (r/r_0)^2} \right)^{3/2} \mathbf{e}_z. \quad (7.17)$$

7.1.3 Effet des potentiels géométriques

Dans pratiquement toutes les expériences d'atomes froids, l'extension ℓ de la fonction d'onde externe est petite devant la longueur caractéristique r_0 des variations du champ magnétique du piège ; on a ainsi souvent $\ell \sim 10 \mu\text{m}$, $B_0 \sim 10 \text{ G}$ et $b \sim 100 \text{ G/cm}$. Dans cette limite, la phase de Berry associée au champ magnétique fictif (7.17) est de l'ordre de $m_F(\ell/r_0)^2 \sim 10^{-2} \times \pi$. On est donc loin de pouvoir observer un vortex dans l'état fondamental. Le potentiel scalaire géométrique est lui de l'ordre du pK, ou de la centaine de Hz, pour la masse du ^{87}Rb ; il est donc négligeable dans la plupart des cas.

On peut considérer, au moins formellement, la limite $B_0 \rightarrow 0$. La phase de Berry est alors égale à $m_F \times 2\pi$, c'est-à-dire qu'un condensat de Bose–Einstein dans un tel piège magnétique serait susceptible de contenir m_F vortex. Dans cette limite, malheureusement, le suivi adiabatique est impossible à réaliser au centre du piège, où le champ magnétique s'annule.

7.2 Potentiels géométriques induits par un champ laser

La recherche de moyens versatiles pour réaliser des champs magnétiques fictifs importants dans les systèmes d'atomes froids a motivé ces dernières années de nombreux travaux. À la suite de [Dum et Olshanii \(1996\)](#) et [Visser et Nienhuis \(1998\)](#), la plupart des propositions utilisent le couplage de l'état interne à la position de l'atome via un champ laser non uniforme. Nous allons dans la section présente exposer celle faite par [Juzeliūnas *et al.* \(2006\)](#).

7.2.1 Définition du système

Le système étudié ici consiste en un atome à trois niveaux en configuration Λ . Les deux niveaux fondamentaux, notés g_+ et g_- , sont supposés dégénérés en l'absence de champ électromagnétique. Le niveau excité est noté e . Les transitions $g_+ \rightarrow e$ et $g_- \rightarrow e$ sont excitées par deux lasers résonnants, de fréquence de Rabi Ω_+ et Ω_- (voir la figure 7.3a). Il s'agit en fait d'une configuration donnant lieu au phénomène de transparence électromagnétique induite (voir par exemple [Arimondo, 1996](#); [Harris, 1997](#)). La configuration géométrique des faisceaux laser Ω_+ et Ω_- est particulière : les faisceaux sont contra-propageant et leurs axes de propagation sont décalés d'une distance b (voir la figure 7.3b). Les champs électriques des deux faisceaux laser sont donc données par l'expression :

$$E_{\pm} = \text{Re}[\mathcal{E}_{\pm} \exp(-i\omega_{\pm}t)] , \quad (7.18)$$

avec

$$\mathcal{E}_{\pm} = E \exp(\pm iky) \exp(-(x \mp b/2)^2/w^2) . \quad (7.19)$$

Dans cette dernière équation, nous avons noté k et w le vecteur d'onde et le col (*waist*) des lasers et avons défini l'amplitude E comme positive. Nous avons également négligé la courbure le long de l'axe y car les distances explorées par l'atome seront en pratique petites devant la longueur de Rayleigh.

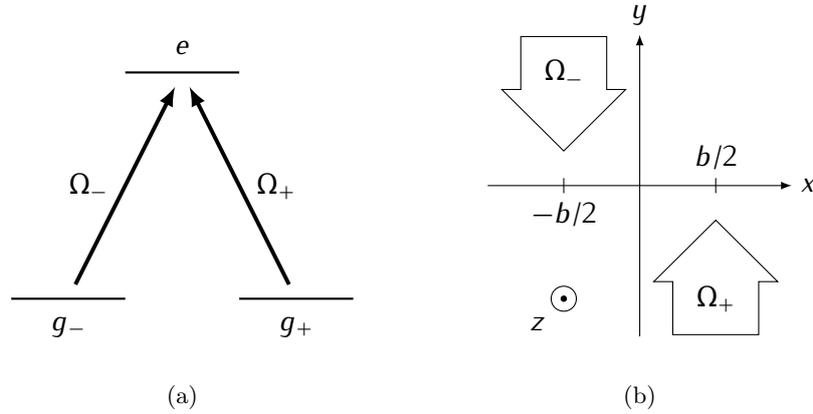


FIGURE 7.3 Schéma des niveaux atomiques (a) et configuration des faisceaux laser (b) proposés par Juzeliūnas *et al.* (2006) pour générer un champ magnétique effectif.

Le hamiltonien d'interaction atome-champ est le hamiltonien dipolaire électrique. Dans l'approximation des champs tournants (voir par exemple Cohen-Tannoudji *et al.*, 2001, chap. 5), il prend la forme

$$\hat{V} = -\frac{d\mathcal{E}_+}{2} \exp(-i\omega_L t) |e\rangle\langle g_+| - \frac{d\mathcal{E}_-}{2} \exp(-i\omega_L t) |e\rangle\langle g_-| + \text{h. c.}, \quad (7.20)$$

où d désigne les éléments de matrice de l'opérateur moment dipolaire électrique entre les états $|g_{\pm}\rangle$ et l'état $|e\rangle$. L'expression matricielle du hamiltonien d'interaction dans le référentiel tournant $\{|g_+\rangle, |g_-\rangle, \exp(i\omega_L t)|e\rangle\}$ est

$$\hat{V} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_+^* \\ 0 & 0 & \Omega_-^* \\ \Omega_+ & \Omega_- & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

où les fréquences de Rabi sont définies par les relations

$$\hbar\Omega_{\pm} = -d\mathcal{E}_{\pm}/2. \quad (7.22)$$

La présence du champ laser modifie le hamiltonien électronique de deux façons : il lève la dégénérescence du multiplet fondamental d'une part et il introduit un couplage entre l'état interne et la position de l'atome d'autre part. Parmi les nouveaux états propres, nous serons intéressés par l'état

$$|n\rangle = \frac{\Omega_-}{\Omega} |g_+\rangle - \frac{\Omega_+}{\Omega} |g_-\rangle, \quad (7.23)$$

où nous avons introduit la quantité $\Omega = \sqrt{|\Omega_+|^2 + |\Omega_-|^2}$. Cet état a été baptisé « état noir » car il n'est pas couplé au champ laser : sa projection sur l'état excité ainsi que son énergie sont nulles. Son intérêt pour nous est double ; d'une part sa dynamique n'est pas perturbée par des processus d'émission spontanée et d'autre part sa préparation expérimentale est facilitée par le fait que tout atome relaxant dans cet état ne pourra plus en sortir.

7.2.2 Potentiels géométriques et champ magnétique fictif

Si l'on introduit les angles de mélange α et β , définis de telle sorte que l'état noir (7.23) s'écrive

$$|n\rangle = \cos(\beta/2)|g_+\rangle + e^{i\alpha} \sin(\beta/2)|g_-\rangle, \quad (7.24)$$

on obtient pour les potentiels géométriques des expressions formellement identiques à celles que nous avons dérivées pour un atome polarisé dans un piège magnétique :

$$\mathbf{A}_n = \frac{\hbar}{2}(\cos\beta - 1)\nabla\alpha, \quad (7.25)$$

$$U_n = \frac{\hbar^2}{8M} \left((\sin\beta \nabla\alpha)^2 + (\nabla\beta)^2 \right). \quad (7.26)$$

Le champ magnétique se déduit directement de l'expression du potentiel vecteur :

$$\mathbf{B}_n = \frac{\hbar}{2} \nabla(\cos\beta) \wedge \nabla\alpha. \quad (7.27)$$

Juzeliūnas *et al.* donnent une interprétation simple de l'équation précédente : le premier terme du produit vectoriel étant proportionnel au vecteur qui relie les « centre de masse » des deux faisceaux, et le second étant proportionnel à leur impulsion relative, il ne peut exister de champ magnétique effectif non nul que si les faisceaux présentent un moment angulaire relatif.

Les expressions (7.25), (7.26) et (7.27) ont le mérite d'être indépendantes de la géométrie et du profil spatial des faisceaux. Nous les explicitons maintenant pour la géométrie particulière présentée ici. Après avoir exprimé les angles de mélange en fonction des fréquences de Rabi :

$$\alpha = \pi + \arg(\Omega_+/\Omega_-) \quad \text{et} \quad \tan\beta = \frac{2|\Omega_+\Omega_-|}{|\Omega_-|^2 - |\Omega_+|^2}, \quad (7.28)$$

nous obtenons¹

$$\mathbf{A}_n = -\hbar k \frac{\exp(x/x_0)}{\cosh(x/x_0)} \mathbf{e}_y, \quad (7.29)$$

$$U_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \frac{1 + 1/x_0^2 k^2}{\cosh^2(x/x_0)} \quad (7.30)$$

et

$$\mathbf{B}_n = \frac{-\hbar k}{x_0} \frac{1}{\cosh^2(x/x_0)} \mathbf{e}_z, \quad (7.31)$$

où l'on a introduit l'échelle de longueur $x_0 = w^2/2b$.

1. Les expressions (7.30) et (7.31) diffèrent de celles de Juzeliūnas *et al.* (2006) par un facteur numérique.

7.2.3 Effet des potentiels géométriques

Nous constatons sur les expressions (7.29) et (7.30) que l'amplitude des potentiels géométriques au centre de la configuration est directement fixée par l'impulsion et l'énergie associées à l'absorption d'un photon. Nous verrons au chapitre suivant que ceci traduit l'implication des forces radiatives dans la dynamique de l'atome.

Nous mesurons l'amplitude du champ magnétique fictif (7.31) à l'aune du nombre de vortex qui lui seraient associés dans un condensat de Bose–Einstein. Nous considérons pour simplifier $b = w$. Dans la limite où l'extension ℓ du condensat vérifie $x_0 \gg \ell$, le champ magnétique apparaît comme essentiellement homogène et la phase de Berry qui lui est associée est simplement $\gamma_n \simeq k\ell^2/x_0$. On prend conscience alors de l'intérêt de coupler l'atome à des faisceaux laser, ceux-ci offrant deux échelles de longueurs très différentes : $1/k$ et x_0 . Il est ainsi aisé de rendre la phase de Berry importante : en prenant typiquement $x_0 \sim 100 \mu\text{m}$, $1/k \sim 100 \text{nm}$ et $\ell \sim 10 \mu\text{m}$, on obtient par exemple $\gamma_n \sim 10$. Une telle configuration est donc favorable à la nucléation de plusieurs vortex.

Pour terminer, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'état couplé du multiplet fondamental subit également l'effet d'un champ magnétique fictif $\mathbf{B}_c = -\mathbf{B}_n$. Le sens de rotation des vortex est opposé dans les deux états : les vortex de l'état couplé tournent dans le sens « naturel », associé à la pression de radiation des faisceaux, alors que ceux de l'état noir tournent dans le sens inverse.

Annexe 7.A Calcul des potentiels géométriques dans un piège magnétique

7.A.1 Potentiel vecteur

Nous commençons par le calcul de $|\nabla n\rangle$ en fonction des angles $\alpha(\mathbf{r})$ et $\beta(\mathbf{r})$. À partir de (7.6), nous obtenons directement

$$|\nabla n\rangle = i \left[\nabla\alpha - \nabla\alpha \hat{F}_z e^{-i\alpha\hat{F}_z} e^{-i\beta\hat{F}_y} - \nabla\beta e^{-i\alpha\hat{F}_z} \hat{F}_y e^{-i\beta\hat{F}_y} \right] |n_z\rangle. \quad (7.32)$$

Il vient donc, moyennant l'usage des commutations possibles,

$$\langle n|\nabla n\rangle = i \nabla\alpha \left[1 - \langle n_z| e^{i\beta\hat{F}_y} \hat{F}_z e^{-i\beta\hat{F}_y} |n_z\rangle \right], \quad (7.33)$$

On voit apparaître dans la relation précédente le vecteur $|n_{z'}\rangle = \exp(-i\beta\hat{F}_y) |n_z\rangle$, ce qui suggère d'introduire le trièdre $(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_{z'})$ déduit de $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ par rotation de l'angle β autour de \mathbf{e}_y . En notant que $\hat{F}_z = \cos\beta \hat{F}_{z'} + \sin\beta \hat{F}_{x'}$, on obtient pour l'élément de matrice de (7.33) :

$$\langle n_z| e^{i\beta\hat{F}_y} \hat{F}_z e^{-i\beta\hat{F}_y} |n_z\rangle = m_F \cos\beta. \quad (7.34)$$

La combinaison de (7.33) et (7.34) fournit directement l'expression du potentiel vecteur $\mathbf{A}_n = i\hbar\langle n|\nabla n\rangle$, à savoir :

$$\mathbf{A}_n = \hbar m_F (\cos\beta - 1) \nabla\alpha. \quad (7.35)$$

7.A.2 Potentiel scalaire

Nous rappelons pour commencer l'expression du potentiel scalaire géométrique :

$$U_n = \frac{\hbar^2}{2M} (\langle \nabla n | \cdot | \nabla n \rangle + \langle n | \nabla n \rangle^2) .$$

Le second terme de cette relation est égal à $-\mathbf{A}_n^2$ et n'est plus à calculer. Pour le calcul du premier terme, nous allons supposer par soucis de simplicité que le champ magnétique est à symétrie cylindrique, de sorte que les vecteurs $\nabla\alpha$ et $\nabla\beta$ sont perpendiculaires. Cette symétrie est présente dans la plupart des pièges utilisés dans les laboratoires. En utilisant (7.32) puis en effectuant les commutations possibles, il vient simplement

$$\langle \nabla n | \cdot | \nabla n \rangle = (\nabla\alpha)^2 \langle n_z | e^{i\beta\hat{F}_y} \hat{F}_z^2 e^{-i\beta\hat{F}_y} | n_z \rangle + (\nabla\beta)^2 \langle n_z | \hat{F}_y^2 | n_z \rangle . \quad (7.36)$$

Pour expliciter cette équation, il va nous être utile d'introduire les opérateurs \hat{F}_\pm définis par

$$\hat{F}_\pm |F, m_F\rangle = \sqrt{F(F+1) - m_F(m_F \pm 1)} |F, m_F \pm 1\rangle \quad (7.37)$$

et vérifiant les relations

$$\hat{F}_x = \frac{1}{2}(\hat{F}_+ + \hat{F}_-) , \quad (7.38a)$$

$$\hat{F}_y = \frac{1}{2i}(\hat{F}_+ - \hat{F}_-) . \quad (7.38b)$$

Pour calculer le premier terme du membre de droite de (7.36), nous passons momentanément dans la base $(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_{z'})$:

$$\begin{aligned} \langle n_{z'} | \hat{F}_z^2 | n_{z'} \rangle &= \cos^2 \beta \langle n_{z'} | \hat{F}_{z'}^2 | n_{z'} \rangle + \sin^2 \beta \langle n_{z'} | \hat{F}_{x'}^2 | n_{z'} \rangle \\ &= m_F^2 \cos^2 \beta + \frac{1}{2} [F(F+1) - m_F^2] \sin^2 \beta , \end{aligned} \quad (7.39)$$

où nous avons utilisé les relations (7.37) et (7.38) et le fait que $\langle n_z | \hat{F}_z \hat{F}_x | n_z \rangle = 0$. Le second terme s'obtient quant à lui directement en utilisant 7.38b :

$$\begin{aligned} \langle n_z | \hat{F}_y^2 | n_z \rangle &= \frac{1}{4} [\langle n_z | \hat{F}_+ \hat{F}_- | n_z \rangle + \langle n_z | \hat{F}_- \hat{F}_+ | n_z \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [F(F+1) - m_F^2] , \end{aligned} \quad (7.40)$$

où nous avons fait usage du fait que $\langle n_z | \hat{F}_+ \hat{F}_+ | n_z \rangle = \langle n_z | \hat{F}_- \hat{F}_- | n_z \rangle = 0$. En rassemblant (7.33), (7.39) et (7.40), on obtient finalement l'expression recherchée :

$$U_n = \frac{\hbar^2 (F(F+1) - m_F^2)}{4M} \left((\sin \beta \nabla\alpha)^2 + (\nabla\beta)^2 \right) . \quad (7.41)$$

7.A.3 Calcul direct du champ magnétique effectif

Le point de départ du calcul du champ magnétique effectif est la relation

$$\mathbf{B}_n^{\text{géom}} = -\hbar \times \text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \nabla \hat{H}^{\text{él}} | m \rangle \wedge \langle m | \nabla \hat{H}^{\text{él}} | n \rangle}{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2}, \quad (7.42)$$

$\hat{H}^{\text{él}}(\mathbf{r}) = T^{\text{él}} + \hat{V}^{\text{coul}} + \hat{V}^{\text{mag}}(\mathbf{r})$ désigne le hamiltonien électronique et ε_m l'énergie de l'état interne $|m\rangle$: $\hat{H}^{\text{él}}|m\rangle = \varepsilon_m|m\rangle$. Puisque seule l'énergie potentielle magnétique (7.1) dépend des coordonnées \mathbf{r} , le terme $\nabla \hat{H}^{\text{él}}$ est donné par :

$$\nabla \hat{H}^{\text{él}} = -\mu_F \nabla (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{B}). \quad (7.43)$$

Pour les prochaines étapes du calcul, nous utilisons comme axe de quantification le vecteur directeur du champ magnétique au point \mathbf{r} , $\mathbf{w}(\mathbf{r})$. Nous y associons les vecteurs $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ afin de former le trièdre direct local $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Cette base est considérée comme fixe. L'équation (7.43) devient alors

$$\nabla \hat{H}^{\text{él}} = -\mu_F \left(\nabla B_u \hat{F}_u + \nabla B_v \hat{F}_v + \nabla B_w \hat{F}_w \right), \quad (7.44)$$

où les indices u, v et w désignent les composantes des vecteurs sur les axes \mathbf{u}, \mathbf{v} et \mathbf{w} . Puisque les états $|m\rangle$ sont des états propres de \hat{F}_w , seuls les deux premiers termes de l'équation (7.44) vont contribuer au champ magnétique effectif. Le produit vectoriel apparaissant dans (7.42) est ainsi réduit à :

$$\begin{aligned} \langle n | \nabla \hat{H}^{\text{él}} | m \rangle \wedge \langle m | \nabla \hat{H}^{\text{él}} | n \rangle &= \mu_F^2 \nabla B_u \wedge \nabla B_v \\ &\times 2i \text{Im} \left[\langle n | \hat{F}_u | m \rangle \langle m | \hat{F}_v | n \rangle \right], \end{aligned} \quad (7.45)$$

où nous avons utilisé le fait que les opérateurs \hat{F}_u et \hat{F}_v sont hermitiens. Les opérateurs \hat{F}_u et \hat{F}_v peuvent maintenant être exprimés en fonctions des opérateurs \hat{F}_+ et \hat{F}_- selon les relations (7.38). Le produit d'éléments de matrices de (7.45) s'écrit alors

$$\begin{aligned} 4i \langle n | \hat{F}_u | m \rangle \langle n | \hat{F}_v | m \rangle &= \langle n | \hat{F}_+ | m \rangle \langle m | \hat{F}_+ | n \rangle - \langle n | \hat{F}_- | m \rangle \langle m | \hat{F}_- | n \rangle \\ &\quad - \langle n | \hat{F}_+ | m \rangle \langle m | \hat{F}_- | n \rangle + \langle n | \hat{F}_- | m \rangle \langle m | \hat{F}_+ | n \rangle. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Clairement, parmi les quatre termes présents, seuls les deux derniers peuvent ne pas être nuls. En utilisant les relations (7.37), nous obtenons alors

$$4i \langle n | \hat{F}_u | m \rangle \langle m | \hat{F}_v | n \rangle = \begin{cases} -F(F+1) + n(n+1) & \text{si } m = n+1, \\ F(F+1) - n(n-1) & \text{si } m = n-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7.47)$$

La notation $m = n \pm 1$ signifie que si n représente les nombres quantiques (F, m_F) , alors m représente $(F, m_F \pm 1)$. En rassemblant finalement (7.47), (7.44) et (7.42) et en remarquant que pour $m = n \pm 1$ on a $(\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2 = \mu_F^2 B^2$, il vient

$$\mathbf{B}_n^{\text{géom}} = -\hbar m_F \frac{\nabla B_u \wedge \nabla B_v}{B^2}. \quad (7.48)$$

Pour rendre cette expression utilisable en pratique, il faut la formuler en fonction de B_x , B_y et B_z et non en fonction de B_u et B_v . Ceci peut être réalisé concrètement en commençant par fixer l'orientation de u et v dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, puis en exprimant B_u et B_v en fonction de B_x , B_y et B_z . Si l'on choisi par exemple l'orientation

$$\mathbf{e}_u = \cos \beta (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) - \sin \beta \mathbf{e}_z, \quad (7.49a)$$

$$\mathbf{e}_v = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y, \quad (7.49b)$$

$$\mathbf{e}_w = \sin \beta (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) + \cos \beta \mathbf{e}_z, \quad (7.49c)$$

il vient :

$$B_u = B_x \sin \alpha \sin \beta + B_y \sin \alpha \cos \beta - B_z \sin \beta, \quad (7.50a)$$

$$B_v = -B_x \sin \alpha + B_y \cos \alpha. \quad (7.50b)$$

Ainsi, le produit vectoriel $\nabla B_u \wedge \nabla B_v$ s'exprime :

$$\begin{aligned} \nabla B_u \wedge \nabla B_v &= \sin \beta \cos \alpha \nabla B_y \wedge \nabla B_z \\ &\quad + \sin \beta \sin \alpha \nabla B_z \wedge \nabla B_x + \cos \beta \nabla B_x \wedge \nabla B_y. \end{aligned} \quad (7.51)$$

En remarquant que les facteurs de projection faisant intervenir les angles α et β ne sont rien d'autre que les composantes du vecteur unitaire $\mathbf{w}(\mathbf{r})$, on peut mettre la relation 7.51 sous la forme plus robuste

$$\nabla B_u \wedge \nabla B_v = w_x \nabla B_y \wedge \nabla B_z + w_y \nabla B_z \wedge \nabla B_x + w_z \nabla B_x \wedge \nabla B_y. \quad (7.52)$$

En insérant cette équation dans (7.48) on obtient la relation (7.10), directement applicable à une configuration de champ magnétique donné.

Chapitre 8

Interprétation semi-classique des potentiels géométriques

Dans une approche semi-classique, l'équation du mouvement qui découle de hamiltonien adiabatique (6.29) implique trois forces :

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \varepsilon_n - \nabla U_n + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_n . \quad (8.1)$$

La première dérive de l'énergie de l'état interne $|n\rangle$, qui joue le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement du centre de masse. Elle est en générale utilisée dans les expériences d'atomes froids à des fins de confinement. La seconde est donnée par le gradient du potentiel scalaire géométrique et la troisième prend la forme d'une force de Lorentz, produit vectoriel de la vitesse par le champ magnétique fictif associé au potentiel vecteur géométrique, $\mathbf{B}_n = \nabla \wedge \mathbf{A}_n$. Bien qu'une interprétation de ces deux forces dans un contexte purement classique ait été donnée par [Aharonov et Stern \(1992\)](#), elle faisait encore défaut dans ce contexte semi-classique. Dans ce chapitre, nous proposons une telle interprétation en termes des forces radiatives.

Nous ferons largement usage de l'opérateur force qui dérive du hamiltonien électronique $\hat{H}^{\text{él}}(\mathbf{r}) = \hat{T}^{\text{él}} + \hat{V}(\mathbf{r})$. Cette opérateur peut être exprimé sous la forme

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \equiv -\nabla \hat{H}^{\text{él}} = -\sum_n \left[(\nabla \varepsilon_n) \hat{Q}_n + \varepsilon_n (\nabla \hat{Q}_n) \right] , \quad (8.2)$$

\hat{Q}_n désignant le projecteur sur l'état propre $|n\rangle$ de $\hat{H}^{\text{él}}$ et ε_n l'énergie de cet état. Cette approche a été utilisée avec succès en optique quantique pour l'étude des forces radiatives agissant sur un atome dans un champ laser ([Gordon et Ashkin, 1980](#)) et sa justification à partir d'un traitement complètement quantique est bien établie ([Dalibard et Cohen-Tannoudji, 1985](#)).

8.1 Origine du potentiel scalaire

Nous supposons dans cette section que l'atome est au repos, de sorte que la force de Lorentz dans (8.1) est nulle. Si l'atome est initialement préparé dans l'état interne $|n\rangle$, la moyenne de l'opérateur force (8.2) est simplement

$$\langle \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \langle n | \hat{\mathbf{F}} | n \rangle = -\nabla \varepsilon_n . \quad (8.3)$$

Nous retrouvons ainsi la force dérivant de l'énergie interne, mais pas celle dérivant du potentiel scalaire géométrique. Il n'aurait d'ailleurs pu en être autrement puisque l'expression (6.30) du potentiel scalaire fait intervenir la masse M du centre de masse, ce qui n'est pas le cas de l'expression (8.2) de l'opérateur force. La raison pour laquelle la valeur moyenne de l'opérateur force n'est pas la « bonne » quantité à observer vient du fait que l'état interne $|n\rangle$ de l'atome n'est un état propre de $\hat{\mathbf{F}}$. En conséquence, la force qui agit sur un atome dans l'état $|n\rangle$ est fluctuante autour de sa valeur moyenne : $\langle \hat{\mathbf{F}}^2 \rangle \neq \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle^2$.

8.1.1 Fluctuations de la force

Nous nous intéressons maintenant à ces fluctuations et cherchons en particulier à en estimer la fonction de corrélation. Nous nous plaçons pour cela dans le point de vue de Heisenberg, où l'opérateur force est dépendant du temps : $\hat{\mathbf{F}}(t) = \exp(i\hat{H}^{\text{élec}}t/\hbar) \hat{\mathbf{F}} \exp(-i\hat{H}^{\text{élec}}t/\hbar)$, et nous introduisons l'opérateur $\delta\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}} - \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$. Sous sa forme symétrisée, la fonction de corrélation de l'opérateur force prend la forme

$$C(t, t') = \frac{1}{2} \langle \delta\hat{\mathbf{F}}(t) \cdot \delta\hat{\mathbf{F}}(t') + \delta\hat{\mathbf{F}}(t') \cdot \delta\hat{\mathbf{F}}(t) \rangle . \quad (8.4)$$

Puisque la moyenne est prise sur un état propre de $\hat{H}^{\text{élec}}$, la fonction de corrélation ne dépend pas de t et t' indépendamment, mais plutôt de la différence $\tau = t - t'$. Considérons le premier terme de la somme. En développant $\delta\hat{\mathbf{F}}$, on obtient tout d'abord

$$\langle \delta\hat{\mathbf{F}}(t) \cdot \delta\hat{\mathbf{F}}(t') \rangle = \langle \hat{\mathbf{F}}(t) \cdot \hat{\mathbf{F}}(t') \rangle - \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle^2 . \quad (8.5)$$

En insérant une relation de fermeture $\sum_m |m\rangle\langle m| = 1$ entre les deux opérateurs de $\langle \hat{\mathbf{F}}(t) \cdot \hat{\mathbf{F}}(t') \rangle$ et en isolant le terme $m = n$, il vient

$$\langle \delta\hat{\mathbf{F}}(t) \cdot \delta\hat{\mathbf{F}}(t') \rangle = \sum_{m \neq n} \langle n | \hat{\mathbf{F}}(t) | m \rangle \cdot \langle m | \hat{\mathbf{F}}(t') | n \rangle . \quad (8.6)$$

Chacun des éléments de matrice apparaissant dans cette expression se calcule de la même manière :

$$\langle n | \hat{\mathbf{F}}(t) | m \rangle = \sum_k \varepsilon_k \langle n | \nabla \hat{Q}_k(t) | m \rangle \quad (8.7)$$

$$= \sum_k \varepsilon_k \exp(i(\varepsilon_n - \varepsilon_m)t/\hbar) \langle n | [|\nabla k\rangle\langle k| + |k\rangle\langle \nabla k|] | m \rangle \quad (8.8)$$

$$= (\varepsilon_m - \varepsilon_n) \exp(i(\varepsilon_n - \varepsilon_m)t/\hbar) \langle n | \nabla m \rangle . \quad (8.9)$$

Nous obtenons ainsi finalement, en faisant une fois de plus usage du fait que $\langle \nabla n | m \rangle + \langle n | \nabla m \rangle = 0$,

$$C(\tau) = \sum_{m \neq n} C_m \cos(\omega_{mn}\tau) , \quad (8.10)$$

avec $\hbar\omega_{mn} = (\varepsilon_m - \varepsilon_n)$ et

$$C_m = \hbar^2 \omega_{mn}^2 |\langle m | \nabla n \rangle|^2 . \quad (8.11)$$

8.1.2 Énergie cinétique associée au micro-mouvement

Pour comprendre les conséquences de ces fluctuations, nous considérons une particule classique soumise à une force fluctuante $\mathbf{F}(t)$ telle que $\overline{\mathbf{F}(t)} = 0$ et $\overline{\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t')} = C(t - t')$, le symbole $\overline{\quad}$ désignant la moyenne d'ensemble. La transformée de Fourier $\mathbf{f}(\omega)$ de $\mathbf{F}(t)$ vérifie alors les relations

$$\overline{\mathbf{f}(\omega)} = 0, \quad (8.12a)$$

$$\overline{\mathbf{f}^*(\omega) \cdot \mathbf{f}(\omega')} = \delta(\omega - \omega') B(\omega), \quad (8.12b)$$

où $B(\omega)$ désigne la transformée de Fourier de $C(\tau)$:

$$B(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{m \neq n} C_m (\delta(\omega + \omega_{mn}) + \delta(\omega - \omega_{mn})). \quad (8.13)$$

La solution de l'équation du mouvement $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ peut être mise sous la forme

$$\mathbf{p}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\mathbf{f}(\omega)}{i\omega} \exp(i\omega t). \quad (8.14)$$

D'après (8.12a), on a $\overline{\mathbf{p}} = 0$. L'énergie cinétique moyenne est donnée quant à elle par

$$\frac{\overline{\mathbf{p}^2(t)}}{2M} = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \frac{\overline{\mathbf{f}^*(\omega) \cdot \mathbf{f}(\omega')}}{2M\omega\omega'} \exp(i(\omega - \omega')t) \quad (8.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{B(\omega)}{2M\omega^2} \quad (8.16)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{m \neq n} |\langle m | \nabla | n \rangle|^2. \quad (8.17)$$

Cette énergie cinétique traduit l'existence d'un micro-mouvement de la particule sous l'effet des fluctuations de la force, dont les fréquences caractéristiques sont données par les pulsations de Bohr ω_{mn} . Conformément à notre hypothèse de suivi adiabatique de l'état interne, l'énergie cinétique du micro-mouvement joue pour le mouvement du centre de masse le rôle d'une énergie potentielle. Son expression (8.17) étant identique à celle du potentiel scalaire géométrique, nous tenons là l'interprétation semi-classique de ce dernier. De ce point de vue, le terme $M\hat{\mathbf{v}}^2/2$, avec $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}_n$, apparaissant dans le hamiltonien effectif (6.29) peut être interprété comme l'énergie cinétique du mouvement lent du centre de masse.

8.2 Origine de la force de Lorentz

Nous considérons maintenant le cas d'un atome en mouvement lent à la vitesse \mathbf{v} et nous calculons la moyenne de l'opérateur force au premier ordre en \mathbf{v} . Plus précisément, nous supposons que l'atome, initialement au repos dans l'état interne $|n\rangle$, a été mis adiabatiquement en mouvement. En pratique, nous considérons qu'il a été uniformément accéléré entre l'instant $t = 0$ et l'instant T : $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}t/T$, pour $0 \leq t \leq T$.

Pour $t \geq T$, l'état interne de l'atome est une superposition des états propres du hamiltonien $\hat{H}^{\text{él}}$:

$$|\phi(t)\rangle = \sum_m \alpha_m(t) |m(\mathbf{r}(t))\rangle, \quad (8.18)$$

de sorte que la moyenne de l'opérateur force s'exprime

$$\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle = - \sum_m \nabla \varepsilon_m |\alpha_m|^2 + \sum_{m,k} (\varepsilon_k - \varepsilon_m) \alpha_k^* \alpha_m \langle k | \nabla m \rangle. \quad (8.19)$$

Pour calculer $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$ au premier ordre en \mathbf{v} , il nous faut donc tout d'abord obtenir les coefficients α_m au même ordre. Pour ce faire, nous procédons de la même manière que pour obtenir la phase de Berry via les équations (6.7–6.10) : nous substituons la décomposition (8.18) dans l'équation de Schrödinger, en n'oubliant pas que la dérivée par rapport au temps agit également sur $\mathbf{r}(t)$. Il vient ainsi

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\phi\rangle = i\hbar \sum_m (\dot{\alpha}_m |m\rangle + \alpha_m \mathbf{v} \cdot |\nabla m\rangle) \quad (8.20)$$

$$= \sum_m \varepsilon_m \alpha_m |m\rangle, \quad (8.21)$$

ce qui fournit après projection les équations du mouvement¹ :

$$\dot{\alpha}_k = -\frac{i\varepsilon_k}{\hbar} \alpha_k - \sum_m \alpha_m \langle k | (\mathbf{v} \cdot |\nabla m\rangle). \quad (8.22)$$

À l'ordre zéro en \mathbf{v} , tous les α_k sont nuls excepté $\alpha_n(t) = \exp(-i\varepsilon_n t/\hbar)$. À l'ordre un, nous obtenons pour $k \neq n$

$$\alpha_k(T) = -\langle k | (\mathbf{v} \cdot |\nabla m\rangle) e^{-i\varepsilon_k T/\hbar} \int_0^T dt e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_n)t/\hbar} \frac{t}{T} \quad (8.23)$$

$$= i\hbar \frac{\langle k | (\mathbf{v} \cdot |\nabla m\rangle)}{\varepsilon_k - \varepsilon_n} e^{-i\varepsilon_n T/\hbar} \left(1 - \frac{1 - e^{i(\varepsilon_n - \varepsilon_k)T/\hbar}}{T(\varepsilon_k - \varepsilon_n)/\hbar} \right), \quad (8.24)$$

où $|k\rangle$, $|n\rangle$, ε_k et ε_n sont pris à l'ordre zéro, c'est-à-dire pour un atome à la position $\mathbf{r}(T)$. Puisque nous avons supposé que l'atome était mis en mouvement adiabatique-ment, c'est-à-dire que $T|\varepsilon_k - \varepsilon_n|/\hbar \gg 1$, il est légitime de négliger le second terme de l'intégration par partie dans (8.24). On obtient alors pour $k \neq n$:

$$\alpha_k(T) = i\hbar \frac{\langle k | (\mathbf{v} \cdot |\nabla m\rangle)}{\varepsilon_k - \varepsilon_n} \exp(-i\varepsilon_n T/\hbar). \quad (8.25)$$

Pour $k = n$, (8.22) se simplifie à l'ordre un pour donner

$$\dot{\alpha}_n = \frac{1}{i\hbar} (\varepsilon_n - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_n) \alpha_n, \quad (8.26)$$

d'où l'on peut conclure que $\alpha_n(t)$ est un nombre complexe de module égal à 1. Des relations (8.25) et (8.26) il découle par conséquent que le premier terme de (8.19)

1. On prendra garde à l'erreur de frappe sur le signe de la somme qui s'est glissée dans l'équation équivalente de la référence [Cheneau et al. \(2008\)](#)

n'a pas de contribution à l'ordre un en \mathbf{v} , puisque si $k \neq n$, alors sa contribution la plus basse est d'ordre deux et si $k = n$, alors il est indépendant de \mathbf{v} . Par ailleurs, dans le second terme de (8.19) les seuls termes contribuant à l'ordre un sont ceux dans lesquels l'un des deux indices k ou m est égal à n . Nous pouvons donc écrire

$$\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle = \sum_m (\varepsilon_n - \varepsilon_m) \alpha_n^* \alpha_m \langle n | \nabla m \rangle + \sum_k (\varepsilon_k - \varepsilon_n) \alpha_k^* \alpha_n \langle k | \nabla n \rangle \quad (8.27)$$

$$= i\hbar \alpha_n^* \exp(-i\varepsilon_n t/\hbar) \sum_m [\langle \nabla n | m \rangle \langle m | (\mathbf{v} \cdot |\nabla n \rangle)] + c. c. , \quad (8.28)$$

où nous avons utilisé (8.25) et la relation $\langle \nabla n | m \rangle + \langle n | \nabla m \rangle = 0$ pour passer de (8.27) à (8.28). Il suffit maintenant pour obtenir la moyenne de l'opérateur force au premier ordre de substituer à α_n son expression à l'ordre zéro. Il vient ainsi finalement

$$\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle = i\hbar \langle \nabla n | (\mathbf{v} \cdot |\nabla n \rangle) \rangle + c. c. \quad (8.29)$$

Il est important de remarquer ici que, malgré l'expansion (8.18) qui semble à première vue être une correction à l'hypothèse du suivi adiabatique de l'état interne, le résultat (8.29) s'inscrit lui pleinement dans le cadre de cette approximation car il ne dépend plus des éléments de matrice $\langle m | \nabla n \rangle (m \neq n)$. Comme pour le potentiel scalaire géométrique dans les équations (6.30), ces éléments de matrices apparaissent comme des transitions virtuelles, dont la somme contribue à la force à l'ordre un en \mathbf{v} .

Il nous reste pour terminer à vérifier que l'expression ci-dessus correspond bien à la force de Lorentz $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_n = i\hbar \mathbf{v} \wedge \nabla \wedge \langle n | \nabla n \rangle$ qui apparaît dans (8.1). Ceci peut être fait par exemple en explicitant les produits vectoriels à l'aide du symbole de Levi-Civita ϵ_{ijk} :

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_n = i\hbar \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}^2 v_i (\langle \partial_k n | \partial_i n \rangle - \langle \partial_i n | \partial_k n \rangle) \mathbf{e}_k \quad (8.30)$$

$$= i\hbar \sum_{ik} [\langle \partial_k n | (v_i | \partial_i n \rangle) \mathbf{e}_k] + c. c. , \quad (8.31)$$

où nous avons utilisé pour obtenir (8.30) le fait que $\langle n | \partial_i \partial_j n \rangle = \langle n | \partial_j \partial_i n \rangle$ et pour obtenir (8.31) la propriété de ϵ_{ijk} de s'annuler si deux indices sont égaux. L'équation (8.31) est clairement identique à (8.27).

Cette manière de dériver la force de Lorentz est très similaire à celle permettant de calculer les forces radiatives dépendant de la vitesse (Gordon et Ashkin, 1980; Dalibard et Cohen-Tannoudji, 1985). Nous observons cependant une différence essentielle : ces forces radiatives sont généralement telles que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, ce qui est à l'origine du refroidissement laser (de type Doppler ou Sisyphe par exemple). La force issue du potentiel vecteur géométrique est quant à elle toujours perpendiculaire à la vitesse, de sorte qu'elle n'engendre aucune dissipation d'énergie.

8.3 Illustration dans le contexte de l'optique quantique

Nous nous attachons dans cette section à interpréter les forces géométrique que peut subir un atome plongé dans un champ laser en termes d'échanges de photons.

Nous allons considérer en particulier la configuration proposée par [Juzeliūnas et al. \(2006\)](#) et présentée dans la section 7.2 du chapitre 7. Un atome présentant une structure interne de type Λ est éclairé par deux faisceaux laser, excitant chacun de manière résonnante l'une des transitions. Ces faisceaux se propagent tout deux dans la direction y mais en sens contraire; leurs axes sont décalés d'une distance b dans la direction x (voir figure 7.3).

8.3.1 Potentiel scalaire

Nous commençons notre examen par le potentiel scalaire. Le fait qu'il tende vers zéro à la limite $x \rightarrow \pm\infty$ est clairement la conséquence de son interprétation comme micro-mouvement, puisque le champ laser y est nul. Sa valeur en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ peut elle aussi être comprise sans trop de peine. En ce point, les deux composantes de l'opérateur force prennent la forme simple

$$\hat{F}_x = -F_0 (|e\rangle\langle g_a| + |g_a\rangle\langle e|) , \quad F_0 = \hbar\Omega b/w^2 \quad (8.32a)$$

$$\hat{F}_y = -iF_1 (|e\rangle\langle g_a| - |g_a\rangle\langle e|) , \quad F_1 = \hbar\Omega k , \quad (8.32b)$$

où nous avons introduit la combinaison antisymétrique $|g_a\rangle = (|g_+\rangle - |g_-\rangle)/\sqrt{2}$. En $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ l'état du système est confondu avec $|g_a\rangle$, de sorte que $\langle \hat{F}_{x,y} \rangle = 0$, ce qui est finalement la conséquence de la propriété $\epsilon_n(\mathbf{r}) = 0$. Le calcul de la fonction de corrélation de la force et de l'énergie cinétique associée au micro-mouvement en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ est aisé dès lors que l'on dispose des deux autres états propres du hamiltonien d'interaction atome-champ (7.20) et des valeurs propres associées :

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle \pm |g_s\rangle) , \quad \hat{V} |\psi_{\pm}\rangle = \pm\sqrt{2}\Omega |\psi_{\pm}\rangle . \quad (8.33)$$

L'état $|g_s\rangle$ désigne la combinaison symétrique $(|g_+\rangle + |g_-\rangle)/\sqrt{2}$. L'application directe des formules (8.10) et (8.11) fournit ainsi

$$C(\tau) = (F_0^2 + F_1^2) \cos(\sqrt{2}\Omega\tau) , \quad (8.34)$$

alors que l'on obtient à partir de (8.17) l'énergie cinétique

$$\frac{\overline{\mathbf{p}^2}}{2M} = \frac{F_0^2 + F_1^2}{4M\Omega^2} . \quad (8.35)$$

On identifie sans peine cette dernière à l'expression générale (7.30) prise en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Avec des paramètres réalistes d'un point de vue expérimental, le diamètre du col w et le décalage b sont grands devant $1/k$. La contribution principale au potentiel scalaire vient alors de F_1 et le micro-mouvement a lieu essentiellement le long de l'axe de propagation y des faisceaux laser.

Les opérateurs \hat{F}_x et \hat{F}_y nous sont en fait familiers : le premier correspond à la force dipolaire et le second à la force de pression de radiation. La force dipolaire est proportionnelle au gradient de l'intensité lumineuse, orienté selon l'axe x . Elle peut être interprétée en termes d'échange de photons entre les différentes ondes planes qui construisent le champ laser (voir par exemple [Cohen-Tannoudji, 1992](#)). La force de pression de radiation est quant à elle proportionnelle au gradient de la

phase, orienté selon l'axe y . Elle conduit à des variations d'impulsion de $\pm\hbar k$ lorsque l'atome absorbe un photon de l'un des faisceaux laser.

Il est intéressant également de noter que le fait que la valeur moyenne de l'opérateur force soit nulle en $\mathbf{r} = 0$ est dû à une interférence destructive. Par exemple, $\langle \hat{F}_x \rangle = 0$ car l'état $|g_a\rangle$ est une superposition à poids égal des deux états propres $|\chi_{\pm}\rangle = (|g_a\rangle \pm |e\rangle)/\sqrt{2}$ de l'opérateur force, dont les valeurs propres $\mp F_0$ sont de signe opposé. Il en va de même pour \hat{F}_y .

8.3.2 Potentiel vecteur

Nous considérons maintenant un atome en mouvement à la vitesse \mathbf{v} et nous étudions séparément les mouvements selon x et y .

Mouvement le long de l'axe y

Nous nous intéressons donc tout d'abord à un atome se déplaçant le long de l'axe y avec la vitesse v_y . Au premier ordre en \mathbf{v} , son état interne $|\phi\rangle$ est donné par les relations (8.18) et (8.25), où les différents états $|m\rangle$ sont les états propres du hamiltonien de couplage atome-champ. En $\mathbf{r} = 0$ on obtient ainsi²

$$|\phi\rangle = |g_a\rangle + \frac{kv_y}{\Omega}|e\rangle. \quad (8.36)$$

Dans le référentiel de l'atome, il est facile de vérifier que cet état n'est autre que l'état noir du hamiltonien d'interaction atome-champ, qui contient maintenant la perturbation $\delta\hat{V} = kv_y(\hat{Q}_- - \hat{Q}_+)$, où \hat{Q}_{\pm} désignent les projecteurs sur les états $|g_{\pm}\rangle$. La valeur moyenne de l'opérateur force dans l'état (8.36) n'est plus nulle car l'interférence destructive entre les états $|\chi_{\pm}\rangle$ est « déséquilibrée » par la présence de l'état excité dans la superposition. Si $v_y > 0$, le poids de $|\chi_+\rangle$ (de valeur propre $-F_0$) est le plus important et $\langle \hat{F}_x \rangle < 0$. Si au contraire $v_y < 0$, le poids de $|\chi_-\rangle$ (de valeur propre $+F_0$) est le plus important et $\langle \hat{F}_x \rangle > 0$. Plus précisément, le calcul exact de $\langle \hat{F}_x \rangle$ donne

$$\langle \phi | \hat{F}_x | \phi \rangle = -2\hbar kbv_y/w^2, \quad (8.37)$$

ce qui correspond bien à la force $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_n$ calculée à partir de (7.31). Pour le mouvement le long de l'axe y , la force de Lorentz est donc directement liée à la force dipolaire. Il faut également noter que la force de Lorentz est indépendante de Ω , et donc de l'intensité du champ laser. En effet, si F_0 est bien proportionnel à Ω , l'angle de « rotation » de l'état $|\phi\rangle$ par rapport à l'état non couplé $|g_a\rangle$, visible dans (8.36), est lui inversement proportionnel à Ω .

Mouvement le long de l'axe x

Dans le cas d'un mouvement à la vitesse v_x le long de l'axe x , la force de Lorentz est dirigée selon l'axe y ; il s'agit donc de la force de pression de radiation. Pour calculer la force de Lorentz, nous pourrions procéder comme pour le mouvement le

2. Si l'on suit la procédure détaillée dans la section 8.2, on trouve en toute rigueur un facteur de phase comme coefficient de $|g_a\rangle$. Ce facteur de phase peut en fait être absorbé dans la définition de Ω_{\pm} sans rien changer à notre discussion.

long de l'axe y , mais il est en fait plus instructif de considérer l'effet de la force lorsque l'atome traverse les deux faisceaux. Nous supposons donc que l'atome est situé à l'instant initial t_1 en $x_1 < 0$ avec $|x_1| \gtrsim w$. À cet endroit, l'intensité du faisceau Ω_- est grande devant celle du faisceau Ω_+ , de sorte que l'état interne de l'atome est pratiquement confondu avec $|g_+\rangle$. À un instant ultérieur t_2 , nous supposons que l'atome a atteint le point $x_2 > 0$, avec $x_2 \gtrsim w$. En ce point, l'état interne de l'atome est pratiquement confondu avec $|g_-\rangle$. La variation d'impulsion causée par la force de Lorentz entre les instants t_1 et t_2 est simplement donnée par

$$\Delta p_y = - \int_{t_1}^{t_2} dt B_z v_x = - \int_{x_1}^{x_2} dx B_z \quad (8.38)$$

$$= \hbar k [\tanh(x_2/x_0) - \tanh(x_1/x_0)] . \quad (8.39)$$

Puisque nous avons choisi $|x_1|$ et $x_2 \gtrsim w$, et en supposant en outre que $b \sim w$, il vient

$$\Delta p_y \simeq 2\hbar k . \quad (8.40)$$

L'interprétation de cette relation est évidente : lorsque l'atome se déplace de x_1 à x_2 , son état interne tourne de $|g_+\rangle$ à $|g_-\rangle$ en absorbant un photon du faisceau Ω_+ , qui se propage selon $+\mathbf{e}_y$, puis en émettant de manière stimulée un photon dans le faisceau Ω_- , qui se propage selon $-\mathbf{e}_y$. L'échange d'impulsion résultant est bien égal à $2\hbar k$. Le processus qui donne lieu à la force de Lorentz dans ce cas est ainsi très similaire au STIRAP (*stimulated Raman adiabatic passage*, voir par exemple Bergmann *et al.*, 1998).

Chapitre 9

Proposition de réalisation expérimentale

De nombreuses propositions ont été faites visant à générer des potentiels vecteurs par couplage avec un champ laser (Jaksch et Zoller, 2003; Juzeliūnas et Öhberg, 2004; Mueller, 2004; Sørensen *et al.*, 2005; Zhang *et al.*, 2005; Juzeliūnas *et al.*, 2005, 2006); les réalisations expérimentales sont toutefois restées rares (Dutta *et al.*, 1999; Lin *et al.*, 2009b). Nous avons présenté la proposition de Juzeliūnas *et al.* (2006) au chapitre 7; celle-ci repose sur deux faisceaux laser contra-propageant en résonance avec les deux transitions d'une configuration de type Λ . Il est possible de réaliser expérimentalement ce schéma si l'état fondamental g et l'état excité e de l'atome sont tous deux des multiplets de moment angulaire total $F_g = F_e = 1$ et en choisissant pour les deux faisceaux une polarisation circulaire et des hélicités opposées. L'état interne naturel est alors l'état noir non couplé au champ, qui est une superposition des états $|g: F_g, m = \pm 1\rangle$. Cette configuration, particulièrement simple, n'est malheureusement pas applicable telle quelle aux atomes alcalins, familiers des laboratoires. En effet la séparation entre les différents sous-niveaux hyperfins du niveau excité y est typiquement de l'ordre d'une centaine de largeurs de raie, trop peu pour pouvoir négliger le couplage résiduel à d'autres états hyperfins avec $F_e \neq 1$. Or ce couplage peut d'une part détruire les cohérences de l'état interne et d'autre part provoquer un chauffage néfaste à l'observation expérimentale des effets recherchés. Ce constat a motivé l'étude présentée dans ce chapitre. Nous proposons une configuration inspirée de celle de Juzeliūnas *et al.* (2006), mais bien adaptée aux atomes alcalins : les faisceaux lasers y sont largement désaccordés par rapport aux transitions atomiques, permettant ainsi de préserver la cohérence de l'état interne en rendant les processus d'émission spontanée extrêmement rares.

9.1 Génération d'un champ magnétique effectif

9.1.1 Principe de la configuration

Le point clé du schéma que nous considérons est le désaccord $\Delta = \omega_L - \omega_A$ entre la pulsation ω_L des lasers et celle ω_A de la transition atomique, que nous choisissons grand devant la séparations entre les sous-niveaux hyperfins du niveau excité. Dans une telle situation, les éléments de matrice de l'interaction dipolaire électrique ne

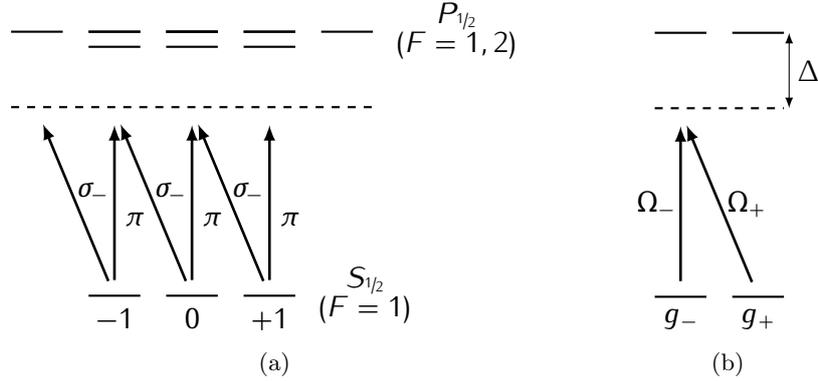


FIGURE 9.1 (a) Schéma complet des niveaux d'énergie internes impliqués dans la raie D_1 pour une espèce atomique de spin nucléaire $3/2$, comme le ^{87}Rb ou le ^{23}Na . (b) Configuration effective lorsque le désaccord Δ des lasers est grand par rapport à la structure hyperfine de l'état excité.

dépendent plus de l'état de spin du noyau et seuls comptent les moments cinétiques de l'électron dans l'état fondamental et dans l'état excité, J_g et J_e . Ceci impose toutefois une contrainte sur la polarisation des lasers. Considérant par exemple la transition D_1 entre les états $S_{1/2}$ et $P_{1/2}$, représentée sur la figure 9.1a dans le cas d'un spin nucléaire $I = 3/2$ comme pour le ^{87}Rb ou le ^{23}Na . Le couplage atome-champ s'effectue alors sur le schéma de niveaux effectif en X, $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$ (voir figure 9.1b). La création d'un état interne qui serait une superposition cohérente des états Zeeman $|g: J_g, m = \pm 1/2\rangle$ nécessite la présence de photons polarisés à la fois linéairement (π) et circulairement (σ), puisqu'il faut faire varier le moment cinétique de l'atome de $\Delta m = \pm 1$ pour le faire passer d'un état à l'autre. Cette contrainte sur la polarisation entraîne une autre contrainte, sur la direction de propagation des faisceaux cette fois. Pour que l'axe de quantification convienne aux deux polarisations, il est en effet nécessaire¹ que les photons π et les photons σ se propagent le long d'axes perpendiculaires. La configuration que nous considérons, représentée sur la figure 9.2, contient par conséquent deux faisceaux lasers gaussiens dont les axes de propagation sont orthogonaux. Ils sont en outre décalés d'une distance a par rapport à la position des atomes, ces derniers étant confinés au voisinage de l'origine par un potentiel extérieur. Les deux faisceaux forment un plan auquel nous restreignons toute l'étude qui va suivre. Le faisceau qui se propage le long de l'axe x est polarisé linéairement et celui qui se propage le long de l'axe y est polarisé σ_- . Ainsi, les champs électriques des deux lasers sont-ils donnés par

$$\mathbf{E}_+ = \text{Re} [\mathcal{E}_+ \mathbf{e}_-] , \quad \text{avec } \mathcal{E}_+ = E \exp(iky - (x+a)^2/w^2) \quad (9.1a)$$

1. Il est en fait possible d'utiliser également des faisceaux parallèles et de polarisations linéaires perpendiculaires. L'application d'un champ magnétique important le long de l'une des polarisations et le choix d'un désaccord judicieux pour l'autre faisceaux permet alors des transitions $\Delta m_J = \pm 1$ (Lin *et al.*, 2009b). L'inconvénient de cette méthode est le risque de collisions ne conservant pas le spin dues à l'effet Zeeman quadratique, qui produiraient un chauffage néfaste de l'échantillon.

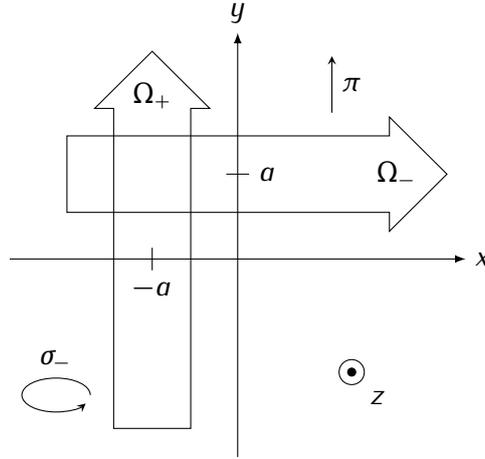


FIGURE 9.2 Configurations de faisceaux lasers proposée pour générer un champ magnétique effectif. Les deux faisceaux sont grandement désaccordés, leurs axes de propagation sont perpendiculaires et déplacés d’une distance a par rapport à la position du nuage atomique et leur polarisation est linéaire pour l’un et circulaire pour l’autre. Les atomes sont confinés au voisinage de l’origine par un potentiel extérieur.

$$\mathbf{E}_- = \text{Re}[\mathcal{E}_- \mathbf{e}_y], \quad \text{avec } \mathcal{E}_- = E \exp(ikx - (y - a)^2/w^2), \quad (9.1b)$$

où $E > 0$ et $\mathbf{e}_- = (\mathbf{e}_z - i\mathbf{e}_x)/\sqrt{2}$. Il est important de noter que le désaccord de la fréquence des lasers ne doit pas être grand devant la structure fine. Si tel était le cas, l’interaction atome-champ ne dépendrait plus que du moment angulaire orbital L de l’électron et la transition effective serait réduite à $L_g = 0 \rightarrow L_e = 1$. Or dans une telle transition aucune superposition cohérente d’état n’est possible dans l’état fondamental, qui n’apparaît pas dégénéré.

9.1.2 Restriction à la structure fine

Pour mettre en évidence les potentiels géométriques induits par notre configuration, nous commençons par ignorer la structure hyperfine des niveaux fondamental et excité. Comme nous l’avons déjà signalé, cette structure ne devrait pas modifier profondément les potentiels géométriques puisque les éléments de matrice du couplage atome-champ dans la limite des grands désaccords ne dépendent pas de l’état de spin du noyau.

Transition $1/2 \rightarrow 1/2$

Notre point de départ consiste donc, si l’on s’intéresse à la transition D_1 , en un système en X, $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$. Grâce au grand désaccord Δ , il est possible d’éliminer adiabatiquement la population des états excités dans l’approximation des ondes tournantes et de ne considérer qu’un couplage effectif entre les états du niveau fondamental. L’expression matricielle de l’opérateur résultant sur la base

$\{|g_+\rangle, |g_-\rangle\}$, avec $|g_\pm\rangle = |g: J_g, m = \pm 1/2\rangle$, est alors simplement

$$\hat{V} = \frac{\hbar}{\Delta} \begin{pmatrix} |\Omega_-|^2 + |\Omega_+|^2 & \Omega_+^* \Omega_- \\ \Omega_-^* \Omega_+ & |\Omega_-|^2 \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Ω_\pm représentent les fréquences de Rabi des deux faisceaux :

$$\hbar\Omega_+ = -\sqrt{\frac{2}{3}} \langle J_e \|\hat{d}\| J_g \rangle \frac{\mathcal{E}_+}{2}, \quad \hbar\Omega_- = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle J_e \|\hat{d}\| J_g \rangle \frac{\mathcal{E}_-}{2}, \quad (9.3)$$

où $\langle J_e \|\hat{d}\| J_g \rangle$ est l'élément de matrice réduit de l'opérateur dipolaire électrique. Il est possible de mettre cet opérateur sous la forme plus maniable

$$\hat{V} = V_0 \hat{I} + V_1 \begin{pmatrix} \cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \\ e^{i\alpha} \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

où l'on a introduit les scalaires

$$V_0 = \frac{\hbar}{2\Delta} (|\Omega_+|^2 + 2|\Omega_-|^2) \quad (9.5a)$$

et

$$V_1 = \frac{\hbar}{2\Delta} \sqrt{|\Omega_+|^4 + 4|\Omega_+ \Omega_-|^2}. \quad (9.5b)$$

Les angles α et β sont quant à eux définis par

$$\alpha = \arg(\mathcal{E}_- / \mathcal{E}_+), \quad \tan \beta = \sqrt{2} |\mathcal{E}_- / \mathcal{E}_+|. \quad (9.6)$$

Nous supposons ici l'atome dans l'état propre

$$|n\rangle = \cos(\beta/2) |g_+\rangle + e^{i\alpha} \sin(\beta/2) |g_-\rangle, \quad (9.7)$$

pour lequel les potentiels géométriques et le champ magnétique fictif sont donnés en fonction des angles α et β par les relations (7.25), (7.26) et (7.27). En y substituant les expressions (9.6) et (9.1), nous obtenons :

$$\mathbf{A}_n = \frac{\hbar k}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y), \quad (9.8)$$

$$U_n \simeq \frac{\hbar^2 k^2}{4M} \frac{\tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta} \quad (9.9)$$

et

$$\mathbf{B}_n = \frac{\hbar k}{w} \frac{\tan^2 \beta}{(1 + \tan^2 \beta)^{3/2}} \frac{x - y + 2a}{w} \mathbf{e}_z. \quad (9.10)$$

Dans l'expression du potentiel scalaire, nous avons négligé le terme en $(\nabla\beta)^2$, gradient de l'intensité, devant le terme en $(\nabla\alpha)^2$, gradient de la phase. Dans le cas considéré où les deux faisceaux laser ont la même intensité, le champ magnétique à l'origine a donc pour valeur

$$\mathbf{B}_n(0) = \frac{4\hbar k a}{3\sqrt{3}w^2} \mathbf{e}_z. \quad (9.11)$$

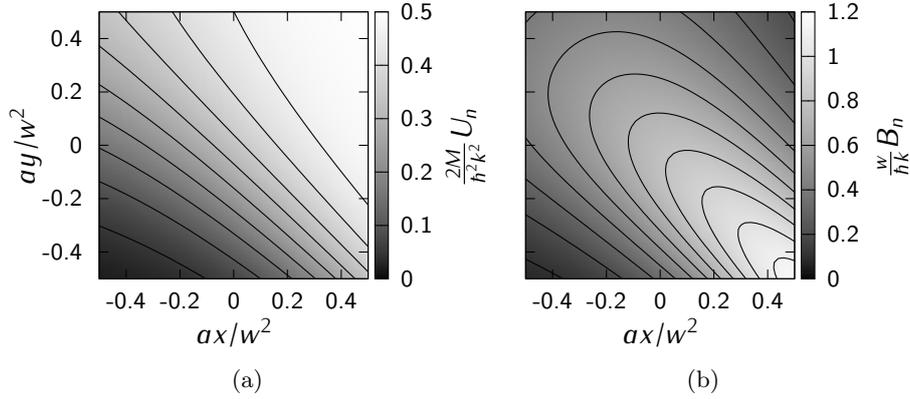


FIGURE 9.3 Profils du potentiel scalaire (a) et du champ magnétique effectif (b) au voisinage de l'origine pour la configuration $1/2 \leftrightarrow 1/2$. Nous avons fixé $a = w$ pour les besoins du graphe.

Les expressions (9.10) et (9.9) du champ magnétique fictif et du potentiel scalaire géométrique sont représentées graphiquement sur les figures 9.1a et 9.1b. Nous constatons d'une part que le champ magnétique n'est pas uniforme et d'autre part que le potentiel scalaire géométrique n'est pas à symétrie cylindrique, comme on pouvait le supposer, ni même harmonique au voisinage de l'origine. Afin de minimiser ces complications par rapport à une situation idéale, il faudra donc s'assurer que le déplacement a et le diamètre w des faisceaux restent suffisamment grands devant la taille du nuage.

Transition en Λ

Nous proposons maintenant, à des fins de comparaison, une version des potentiels géométriques obtenue en considérant une transition en Λ . Le couplage effectif à l'intérieur du doublet fondamental est

$$\hat{V} = \frac{\hbar}{\Delta} \begin{pmatrix} |\Omega_+|^2 & \Omega_+^* \Omega_- \\ \Omega_-^* \Omega_+ & |\Omega_-|^2 \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

Il peut également être mis sous la forme (9.4), avec cette fois

$$V_0 = V_1 = \frac{\hbar}{2\Delta} (|\Omega_+|^2 + |\Omega_-|^2) \quad (9.13)$$

et

$$\alpha = \arg(\mathcal{E}_+/\mathcal{E}_-) \quad \text{et} \quad \tan \beta = \frac{2|\mathcal{E}_+\mathcal{E}_-|}{|\mathcal{E}_+|^2 - |\mathcal{E}_-|^2}. \quad (9.14)$$

Considérant le même état propre (9.7) de l'opérateur \hat{V} , l'expression des potentiels vecteurs géométriques en fonction de $\tan \beta$ est inchangée par rapport à (9.8) et (9.9), si ce n'est que le signe du potentiel vecteur est inversé. Finalement, l'expression du champ magnétique peut être mise sous la forme :

$$\mathbf{B}_n = f \times \frac{\hbar k}{w^2} \frac{\tan^2 \beta}{(1 + \tan^2 \beta)^{3/2}} \frac{x - y + 2a}{w} \mathbf{e}_z \quad (9.15a)$$

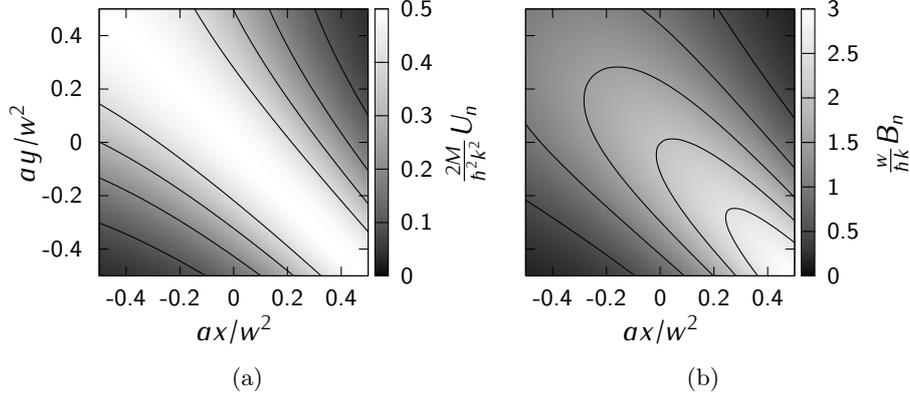


FIGURE 9.4 Profils du potentiel scalaire (a) et du champ magnétique effectif (b) au voisinage de l'origine pour la configuration en Λ . Nous avons fixé $a = w$ pour les besoins du graphe.

avec

$$f = -\frac{|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2}{|\mathcal{E}_+|^2 - |\mathcal{E}_-|^2}. \quad (9.15b)$$

Le champ magnétique est maximum pour des faisceaux laser d'intensités égales ; sa valeur à l'origine est alors

$$\mathbf{B}_n(0) = \frac{-2\hbar ka}{w^2} \mathbf{e}_z. \quad (9.16)$$

Le profil du potentiel scalaire et du champ magnétique effectif sont représenté sur les figures 9.4a et 9.4b. On peut pour cette transition exposer les même remarques que pour la transition $1/2 \leftrightarrow 1/2$ quant au caractère non uniforme du champ magnétique effectif et à l'asymétrie du potentiel scalaire.

9.1.3 Rôle de la structure hyperfine

Bien que l'on s'attende à ce que les potentiels géométriques restent peu affectés par la présence de la structure hyperfine, il s'agit maintenant de le démontrer. Pour ce faire, nous allons de nouveau considérer le hamiltonien effectif agissant sur le multiplet fondamental, obtenu après élimination adiabatique des états excités. Ce hamiltonien, aussi connu sous le nom d'opérateur de déplacement lumineux s'écrit (Cohen-Tannoudji, 1962)

$$\hat{V} = -\mathcal{E}^* \cdot \hat{\alpha} \cdot \mathcal{E}, \quad (9.17)$$

où \mathcal{E} désigne le champ électrique complexe total :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \mathbf{e}_- + \mathcal{E}_- \mathbf{e}_y \quad (9.18)$$

et $\hat{\alpha}$ représente le tenseur de polarisabilité électrique. Si l'on restreint l'opérateur \hat{V} au sous-espace constitué par un niveau hyperfin F_g donné, le tenseur de polarisabilité s'exprime

$$\hat{\alpha}_{ij} = -\sum_{F_e} \hat{Q}_{F_g} \frac{\hat{d}_i \hat{Q}_{F_e} \hat{d}_j}{\hbar \Delta_{F_g, F_e}} \hat{Q}_{F_g}, \quad (9.19)$$

où nous avons noté \hat{d}_i les composantes spatiales de l'opérateur moment dipolaire électrique et où

$$\hat{Q}_{F_{g(e)}} = \sum_m |g(e): F_{g(e)}, m\rangle \langle g(e): F_{g(e)}, m| \quad (9.20)$$

désignent les projecteurs sur un sous-niveau hyperfin donné de l'état fondamental et de l'état excité. Les quantités Δ_{F_g, F_e} représentent le désaccord entre la pulsation du laser et celle de la transition $F_g \rightarrow F_e$. Lorsque ce désaccord est grand devant les déplacement hyperfins, ces désaccords sont tous pratiquement identiques. Dans ce cas, l'équation (9.19) se réduit à

$$\hat{\alpha}_{ij} \simeq \hat{Q}_{F_g} \hat{\alpha}_{ij}(J_g \rightarrow J_e) \hat{Q}_{F_g} \quad (9.21)$$

où $\hat{\alpha}_{ij}(J_g \rightarrow J_e)$ désigne le tenseur de polarisabilité de la transition $J_g \rightarrow J_e$. Dans le cas qui nous intéresse où $J_g = 1/2$, l'opérateur $\hat{\alpha}_{ij}(1/2 \rightarrow J_e)$ agit sur un espace de Hilbert à deux dimensions et l'on peut montrer que (Deutsch et Jessen, 1998)

$$\hat{\alpha}_{ij}(1/2 \rightarrow J_e) = \tilde{\alpha}(1/2 \rightarrow J_e) \left(f(J_e) \delta_{ij} - \frac{i}{3} \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k \right). \quad (9.22)$$

Dans cette relation, $\hat{\sigma}_k$ représente les matrices de Pauli, le facteur $f(J_e)$ est donné par

$$f = \begin{cases} 1/3 & \text{pour } J_e = 1/2 \\ 2/3 & \text{pour } J_e = 3/2 \end{cases}, \quad (9.23)$$

et la polarisabilité scalaire $\tilde{\alpha}(J_g \rightarrow J_e)$ est définie par

$$\tilde{\alpha}(J_g \rightarrow J_e) \equiv \frac{\langle J_e \| \hat{d} \| J_g \rangle^2}{\hbar \Delta_{F_g^{\max}, F_e^{\max}}}, \quad (9.24)$$

$F_{g(e)}^{\max}$ désignant le sous-niveaux hyperfin tel que $F_{g(e)} = J_{g(e)} + I$. Ainsi, le hamiltonien effectif (9.17) peut-il être mis sous la forme compacte

$$\hat{V} = V_0 \hat{I} + \sum_{F_g} \hat{Q}_{F_g} \mathbf{B}_{\text{eff}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \hat{Q}_{F_g}. \quad (9.25)$$

Le potentiel scalaire V_0 et le champ magnétique effectif \mathbf{B}_{eff} sont donnés par les relations

$$V_0 = -\frac{2}{3} \tilde{\alpha} |\mathcal{E}|^2 \quad (9.26a)$$

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \frac{i}{3} \tilde{\alpha} (\mathcal{E}^* \wedge \mathcal{E}). \quad (9.26b)$$

Nous soulignons ici que le potentiel scalaire et le champ magnétique effectif qui apparaissent dans l'opérateur de déplacement lumineux n'ont rien à voir avec leurs homonymes géométriques. Il s'agit ni plus ni moins d'une reformulation de l'opérateur de couplage atome-champ. On peut donner du terme $\mathbf{B}_{\text{eff}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ une expression indépendante du sous-niveau Zeeman en utilisant le théorème de projection de Landé :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\langle \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{F}} \rangle}{\hbar^2 F(F+1)} \hat{\mathbf{F}} / \hbar. \quad (9.27)$$

La valeur moyenne $\langle \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{F}} \rangle$ peut être calculée dans n'importe quel sous-niveau Zeeman. Pour en obtenir la valeur, nous remarquons tout d'abord que l'opérateur $\hat{\sigma}$ est simplement proportionnel à l'opérateur de spin électronique qui se confond avec l'opérateur de moment cinétique électronique $\hat{\mathbf{J}}$ puisque le moment orbital électronique est nul dans l'état fondamental : $\hat{\sigma} = 2\hat{\mathbf{J}}$. Comme nous disposons par ailleurs de l'égalité $\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{J}}^2 + (\hat{\mathbf{F}}^2 - \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{I}}^2)/2$, il vient

$$\hat{\sigma} = \frac{F_g(F_g + 1) - I(I + 1) + J_g(J_g + 1)}{F_g(F_g + 1)} \hat{\mathbf{F}} . \quad (9.28)$$

Pour l'atome alcalin que nous avons considéré, on identifie directement le facteur de proportionnalité au facteur de Landé g_{F_g} . On peut ainsi également écrire l'opérateur de déplacement lumineux sous la forme

$$\hat{V} = V_0 \hat{I} + \sum_{F_g} \hat{Q}_{F_g} g_{F_g} \mathbf{B}_{\text{eff}} \cdot \hat{\mathbf{F}} \hat{Q}_{F_g} . \quad (9.29)$$

Une fois obtenue l'expression (9.29) du hamiltonien effectif pour l'état interne, nous n'avons plus qu'à appliquer les résultats généraux présentés dans le chapitre 7 pour un atome dans un champ magnétique. La substitution de (9.1) dans (9.26b) conduit à

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \frac{\tilde{\alpha}}{3} \left[|\mathcal{E}_+|^2 \mathbf{e}_y - \sqrt{2} (\text{Re}(\mathcal{E}_+/\mathcal{E}_-) \mathbf{e}_z + \text{Im}(\mathcal{E}_+/\mathcal{E}_-) \mathbf{e}_x) \right] . \quad (9.30)$$

La direction du champ magnétique effectif est définie par la donnée de deux angles α et β :

$$\mathbf{B}_{\text{eff}}/\|\mathbf{B}_{\text{eff}}\| = \cos \beta \mathbf{e}_y + \sin \beta (\cos \alpha \mathbf{e}_z + \sin \alpha \mathbf{e}_x) . \quad (9.31)$$

On trouve facilement par identification

$$\alpha = -\arg(\mathcal{E}_-/\mathcal{E}_+) , \quad \tan(\beta) = \sqrt{2} |\mathcal{E}_-/\mathcal{E}_+| , \quad (9.32)$$

expressions identiques à celles de l'équation (9.6), au signe de α près. Nous constatons avec une certaine satisfaction que les angles α et β définis ici peuvent être identifiés à ceux qui apparaissent dans le hamiltonien effectif (9.4) de la transition $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$. Les potentiels vecteurs associés à l'état $|g: F_g, m_F\rangle$ soumis au champ magnétique effectif (9.31) sont donnés par

$$\mathbf{A}_n = \hbar m_F \cos \beta \nabla \alpha$$

et

$$U_n = \frac{\hbar^2 ((F(F + 1) - m_F^2))}{4M} [(\sin \beta \nabla \alpha)^2 + (\nabla \beta)^2] .$$

Comparant ces expressions à (9.8) et (9.9), il apparaît que les potentiels géométriques obtenus par la méthode générale présentée ici sont simplement proportionnels à ceux obtenus pour la transition en X , la constante de proportionnalité dépendant du sous-niveau Zeeman considéré. Pour l'état $|g: F_g, m_F = F_g\rangle$, le potentiel vecteur, et donc le champ magnétique associé, sera ainsi $2F_g$ fois plus grand que celui obtenu sans prendre en compte la structure hyperfine et $4F_g/3\sqrt{3}$ fois plus grand que celui obtenu pour la transition en Λ ².

2. Le facteur $8F_g/3\sqrt{3}$ mentionné dans Günter *et al.* (2009) est erroné.

9.2 Nucléation de vortex

Nous disposons finalement d'une configuration qui, dans l'hypothèse du suivi adiabatique de l'état interne, génère pour la fonction d'onde du centre de masse un champ magnétique effectif relativement important, associé en principe à la présence de plusieurs vortex dans l'état fondamental. Il nous faut maintenant vérifier deux choses : que le suivi adiabatique est justifié d'une part, et que l'état fondamental contient bien les vortex prévus. La question du suivi adiabatique se pose car lorsque l'on se rapproche du cœur d'un vortex, le champ de vitesse diverge. Pour assurer le caractère fini de l'énergie associée au vortex, la densité tend simultanément vers zéro, mais nous ne savons pas à ce stade si le mécanisme à l'origine des vortex est compatible avec cette description. Pour éclairer ces questions, nous avons procédé à des simulations numériques « exactes », c'est-à-dire ne supposant pas le suivi adiabatique, sur le système constitué par un gaz d'atomes dégénérés en interaction, maintenus au centre de la configuration laser par un piège harmonique. Plus précisément, nous avons directement résolu les équations couplées vérifiées par les composantes du spineur dans le cas d'une transition en Λ .

9.2.1 Équation de Gross-Pitaevskii spinorielle

Dans l'approche de Gross-Pitaevskii, le gaz dégénéré est décrit par un spineur

$$|\Psi(\mathbf{r})\rangle = \psi_+(\mathbf{r})|g_+\rangle + \psi_-(\mathbf{r})|g_-\rangle + \psi_e(\mathbf{r})|e\rangle, \quad (9.33)$$

la densité du nuage en tout point étant donnée par $|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2 + |\psi_e|^2$. Ce spineur obéit à l'équation d'évolution bien connue

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\mathbf{r})\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V^{\text{piège}}(\mathbf{r}) + \hat{V}^{\text{int}}(\mathbf{r}) + \hat{V}^{\text{at-ch}}(\mathbf{r}) \right] |\Psi(\mathbf{r})\rangle, \quad (9.34)$$

qui représente en fait un jeu de trois équations couplées pour les coefficients ψ_+ , ψ_- et ψ_e . Outre l'énergie cinétique du centre de masse, cette équation fait intervenir trois termes. Le premier est le potentiel de piégeage, dont le rôle est de confiner le nuage. Nous le supposons indépendant de l'état interne des atomes et harmonique :

$$V^{\text{piège}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} M \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (9.35)$$

Le terme suivant décrit l'interaction entre les atomes sous la forme d'un champ moyen. En négligeant la densité dans l'état excité et en supposant les constantes d'interaction identiques pour toutes les combinaisons +/- (ce qui est relativement bien justifié dans le cas du ^{87}Rb par exemple), on peut écrire

$$\hat{V}^{\text{int}}(\mathbf{r}) = \kappa (|\psi_+(\mathbf{r})|^2 + |\psi_-(\mathbf{r})|^2). \quad (9.36)$$

Enfin, le troisième terme n'est autre que le couplage atome-champ pour la transition considérée :

$$\hat{V}^{\text{at-ch}}(\mathbf{r}) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_-^* \\ 0 & 0 & \Omega_+^* \\ \Omega_- & \Omega_+ & -\Delta - i\Gamma/2 \end{pmatrix}. \quad (9.37)$$

Nous laissons apparaître dans celui-ci l'amortissement de la population de l'état excité due à l'émission spontanée, Γ désignant la largeur de raie de la transition. Dans la pratique, et afin de nous épargner du temps de calcul, nous avons souvent réduit cet opérateur au couplage effectif entre les états $|g_+\rangle$ et $|g_-\rangle$ par élimination adiabatique de l'état excité. Nous avons bien entendu vérifié que cette approximation ne changeait rien d'observable aux résultats des simulations, traduisant le fait que la population de l'état excité est toujours très faible avec les grands désaccords choisis. L'équation spinorielle considérée ici ne suppose pas l'approximation adiabatique et les potentiels géométriques n'y apparaissent pas. Seul le couplage entre l'état interne et l'état externe est présent.

9.2.2 Choix des paramètres

Nous avons considéré comme atome de référence le ^{87}Rb et sa raie D_1 . Ses caractéristiques pertinentes sont la masse $M = 1,45 \cdot 10^{-25}$ kg, la longueur de diffusion $a_s = 5,2$ nm, la largeur spectrale $\Gamma/2\pi = 6$ MHz et la longueur d'onde de la transition $\lambda = 795$ nm.

Potentiel de confinement

Nous considérons une fréquence $\omega/2\pi = 40$ Hz aisément produite par un piège dipolaire peu focalisé. À cette fréquence est associée la longueur $\ell_\perp = \sqrt{\hbar/M\omega} = 1,7$ μm , qui représente la largeur de l'état fondamental du piège. Cette longueur ainsi que la pulsation ω nous serviront à adimensionner les paramètres des simulations.

Constante d'interaction

Pour un gaz bidimensionnel, fortement confiné dans la direction z par un potentiel extérieur harmonique de fréquence $\omega_z/2\pi$, la constante de couplage κ est reliée à la longueur de diffusion par la relation $\kappa = \sqrt{8\pi}\hbar^2 a_s / M \ell_z$, où $\ell_z = \sqrt{\hbar/M\omega_z}$ (voir le chapitre 1). Nous notons K la forme adimensionnée de κ pour une fonction d'onde du gaz normalisée à 1 :

$$K = \frac{\sqrt{8\pi} N a_s}{a_z} . \quad (9.38)$$

La fréquence transverse atteignant facilement quelques kHz, la constante de couplage K pour des nombres d'atomes typiques varie entre 100 et 1000. L'effet principal des interactions sera d'accroître la taille du nuage, ce qui est a priori favorable pour observer des vortex puisque le flux du champ magnétique effectif à travers le nuage s'en trouvera augmenté.

Déplacement et diamètre des faisceaux laser

Le déplacement spatial a des faisceaux par rapport à l'origine et le diamètre du col w sont pris égaux et leur valeur est variée afin de trouver un compromis entre un champ magnétique effectif important, atteint pour des faisceaux de petits diamètres, et un potentiel scalaire modifiant peu le profil de densité du nuage, ce qui requiert des faisceaux de grand diamètre.

Désaccord des faisceaux laser

Nous choisissons le désaccord de façon que les déplacements lumineux des multiplets fondamentaux de la raie D_1 et de la raie D_2 se compensent, ce qui se produit pour

$$\Delta \equiv \Delta_1 = -\Delta_2/2 \simeq 4 \cdot 10^5 \Gamma. \quad (9.39)$$

Ce désaccord amène la longueur d'onde du laser à 790 nm. Un tel choix est dicté par le souci d'éviter d'introduire un potentiel extérieur supplémentaire venant perturber le profil de densité du nuage.

Fréquences de Rabi des faisceaux laser

Borne inférieure Finalement, les fréquences de Rabi, donc l'intensité des faisceaux, doivent être suffisantes pour que le suivi adiabatique soit assuré, au moins en l'absence de vortex. Nous avons déjà vu que la condition de ce suivi pour un état interne $|n\rangle$, formulée d'après le théorème adiabatique, s'exprime $|\mathbf{v} \cdot \langle m | \nabla n \rangle|^2 \ll (\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2 / \hbar^2$ où \mathbf{v} est une vitesse caractéristique des atomes (voir la section 6.1.1 du chapitre 6). Pour la transition modèle en Λ , l'état $|n\rangle$ est l'état noir, d'énergie nulle, et l'état $|m\rangle$ est la superposition de $|g_+\rangle$ et $|g_-\rangle$ perpendiculaire à $|n\rangle$, d'énergie $\hbar(|\Omega_+|^2 + |\Omega_-|^2)/\Delta$. À l'origine, cette condition se traduit par

$$v \ll \frac{4\Omega_0^2}{k\Delta} e^{-2a^2/w^2}, \quad (9.40)$$

où Ω_0 est la fréquence de Rabi de chaque faisceau sur son axe. On peut choisir comme vitesse caractéristique v la vitesse du son $\sqrt{\mu/M}$. Pour un potentiel chimique $\mu/h \sim 1$ kHz, cette vitesse est de l'ordre de 1 mm/s ; la fréquence de Rabi Ω_0 associée par la relation (9.40) est alors $\sim 10\Gamma$. Nous choisissons donc des fréquences de Rabi vérifiant $\Omega_0 \gg \Gamma$.

Borne supérieure La borne supérieure des valeurs de Ω_0 est fixée par la contrainte de garder l'émission spontanée aussi basse que possible. Il est heureusement possible de garder le taux d'émission spontanée suffisamment bas tout en assurant le suivi adiabatique. Une fréquence de Rabi $\Omega_0 = 140\Gamma$ conduit par exemple à un taux par atome de 0,15 photons/s, négligeable pendant la durée typique des expériences.

9.2.3 État fondamental

Une première partie des simulations à consister à rechercher la fonction d'onde de l'état fondamental de l'équation de Gross-Pitaevskii spinorielle exacte pour un certain jeu de paramètres et à vérifier s'il contient bien des vortex. On obtient cette fonction d'onde en faisant évoluer un spineur tiré aléatoirement sous l'effet de l'opérateur d'évolution en temps imaginaire $\hat{U}(\tau) = \exp(-\hat{H}_{\text{GP}}\tau/\hbar)$, où \hat{H}_{GP} est l'opérateur entre crochets dans l'équation (9.34).

Les résultats obtenus sont rassurants pour ce qui concerne la validité de l'approximation adiabatique. Les profils de densité pour les paramètres $K = 800$,

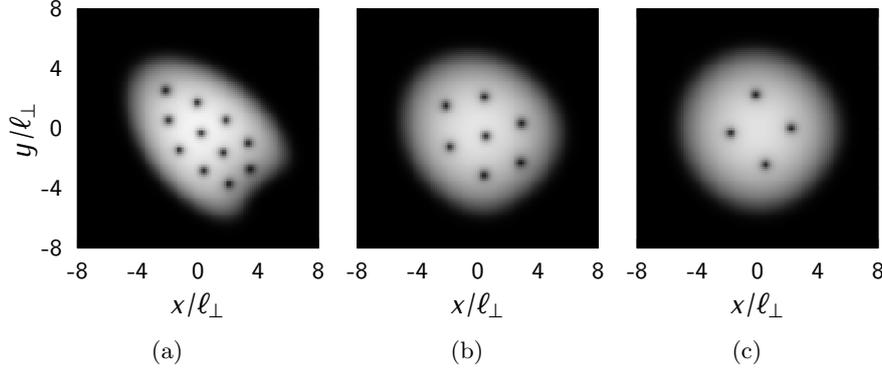


FIGURE 9.5 Profils de densité de l'état fondamental du nuage atomique pour les paramètres $K = 800$, $\Omega_0 = 140\Gamma$ et $a = w = 15\ell_\perp$ (a), $a = w = 25\ell_\perp$ (b) et $a = w = 35\ell_\perp$ (c). Ces profils, obtenus en résolvant l'équation de Gross-Pitaevskii spinorielle exacte, montrent la présence de vortex induits par le couplage entre l'état interne et l'état externe.

$\Omega_0 = 140\Gamma^3$ et $a = w = 15, 25, 35\ell_\perp$ sont visibles sur la figure 9.5 ; ils montrent clairement la présence de vortex. L'état interne des atomes est quant à lui donné à une excellente approximation par l'état noir, la population de l'état excité restant toujours $\lesssim 10^{-5}$. Comme attendu, le nombre de vortex présents, mais aussi l'asymétrie du nuage, augmentent lorsque le diamètre des faisceaux diminue. Pour une valeur intermédiaire $w = 25\ell_\perp$, on peut observer (figure 9.5b) que les vortex sont approximativement agencés sur les nœuds d'un réseau triangulaire. Le nombre de ces vortex est également en accord raisonnable avec ce que prévoit le critère (6.33). Ainsi, au moins pour le petit nombre de vortex présents ici, la divergence du champ de vitesse près du cœur des vortex ne perturbe pas de manière sensible l'application du formalisme adiabatique. La raison en est certainement l'annulation concomitante de la densité.

9.2.4 Passage adiabatique dans l'état avec vortex

Dans les expériences menées sur les gaz en rotation, les vortex sont nucléés lors du régime turbulent qui suit le branchement soudain du champ magnétique effectif. Cette phase, qui dure quelques centaines de millisecondes, est suivie par la relaxation dans l'état fondamental par l'intermédiaire d'un processus dissipatif (Madison *et al.*, 2001; Tsubota *et al.*, 2002; Lobo *et al.*, 2004). Dans ces expériences, le passage adiabatique d'un état sans vortex à un état avec vortex est interdit au niveau d'une théorie de champ moyen car ces deux états sont de parité opposée. Le système que nous proposons pour générer un champ magnétique ne possède quant à lui pas de parité bien définie et la transition adiabatique doit y être possible, au moins en principe.

3. Par rapport à la convention adoptée par Günter *et al.* (2009), la définition de Ω_0 diffère d'un facteur 2.

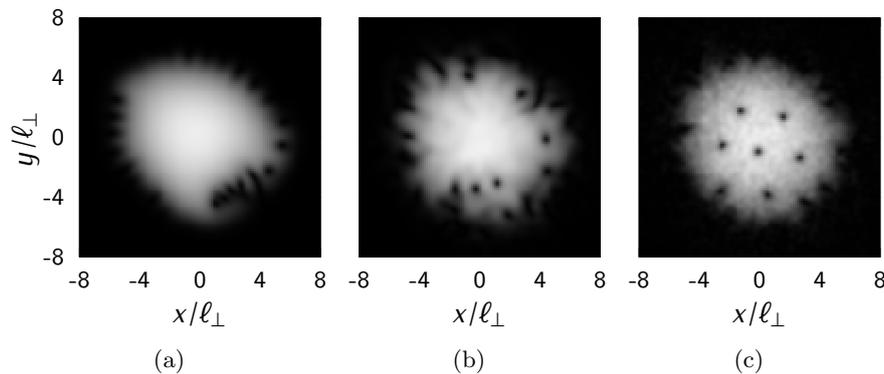


FIGURE 9.6 Profils de densité de l'état du nuage atomique pour les paramètres $K = 800$, $\Omega_0 = 140 \Gamma$ et $a = w = 25 \ell_\perp$ obtenus après un branchement linéaire de l'intensité de l'un des deux faisceaux, l'autre étant déjà à son intensité nominale à l'instant initial (voir texte). La durée de la rampe est de $50 \omega^{-1}$ (a), $200 \omega^{-1}$ (b) et $1000 \omega^{-1}$ (c). Seul le branchement le plus long permet de passer quasi adiabatiquement de l'état initial sans vortex à l'état final avec vortex régulièrement disposés.

Pour le vérifier, nous avons simulé la situation suivante. Nous supposons qu'initialement un seul des deux faisceaux lasers est présent, à son intensité nominale, et que le nuage atomique se trouve à l'équilibre dans son état fondamental. La présence de ce faisceau est nécessaire afin de lever la dégénérescence entre les deux sous-niveaux de l'état fondamental. Nous allumons ensuite le second faisceau de telle sorte que son intensité croisse linéairement avec le temps, atteignant sa valeur nominale en un temps T . Pendant cette phase, nous résolvons numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii en faisant évoluer l'état initial sous l'effet de l'opérateur d'évolution $\hat{U}(t) = \exp(i\hat{H}_{\text{GP}}t/\hbar)$. Les paramètres auxquels cette étude a été réalisée sont ceux présentés auparavant : $K = 800$, $a = w = 25 \ell_\perp$ et $\Omega_0 = 140 \Gamma$. Les résultats peuvent être résumés de la manière suivante : pour des branchements de durée $T \lesssim 200 \omega^{-1}$, de nombreux vortex apparaissent à la périphérie du nuage mais ne pénètrent pas vers son centre (voir figures 9.6a et 9.6b). Pour $T \sim 1000 \omega^{-1}$, l'état obtenu ressemble raisonnablement à l'état fondamental, le nombre attendu de vortex étant présents au cœur du nuage et régulièrement disposés, mais la convergence n'est toujours pas achevée, notamment à la périphérie (figure 9.6c). Cette tendance permet de conclure que le passage adiabatique vers l'état fondamental avec vortex nécessite des temps de branchements $\gtrsim 1000 \omega^{-1}$ ($\simeq 44$ s pour $\omega/2\pi = 40$ Hz) qui semblent trop longs pour toute réalisation expérimentale. Le recours à une phase turbulente après le branchement soudain des lasers apparaît donc, comme pour les expériences en rotation, comme le plus sûr moyen de nucléer les vortex.

Publications

Geometric potentials in quantum optics: A semi-classical interpretation

M. CHENEAU¹, S. P. RATH¹, T. YEFSAH¹, K. J. GÜNTER¹, G. JUZELIŪNAS² and J. DALIBARD^{1(a)}

¹ *Laboratoire Kastler Brossel and CNRS, Ecole Normale Supérieure - 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France*

² *Institute of Theoretical Physics and Astronomy of Vilnius University - A. Gostauto 12, Vilnius 01108, Lithuania*

received 25 July 2008; accepted by M. Lewenstein on 6 August 2008

published online 22 August 2008

PACS 03.65.Vf – Phases: geometric; dynamic or topological

PACS 37.10.Vz – Mechanical effects of light on atoms, molecules, and ions

PACS 03.75.-b – Matter waves

Abstract – We propose a semi-classical interpretation of the geometric scalar and vector potentials that arise due to Berry's phase when an atom moves slowly in a light field. Starting from the full quantum Hamiltonian, we turn to a classical description of the atomic centre-of-mass motion while still treating the internal degrees of freedom as quantum variables. We show that the scalar potential can be identified as the kinetic energy of an atomic micro-motion caused by quantum fluctuations of the radiative force, and that the Lorentz-type force appears as a result of the motion-induced perturbation of the internal atomic state. For a specific configuration involving two counter-propagating Gaussian laser beams, we relate the geometric forces to the radiation pressure and dipole forces known from quantum optics. The simple physical pictures provided by the present analysis may help for the design and the implementation of novel geometric forces.

Copyright © EPLA, 2008

Cold atomic gases are considered as efficient simulators of quantum condensed matter systems (for a review, see *e.g.* [1]). The confinement potential and the atomic interactions can be tailored almost at will, allowing, for example, to mimic with atomic vapours situations encountered for electrons in solid state materials. A major step in the implementation of these simulators is the possibility to apply a gauge field to the cold atomic gas in order to model the vector potential appearing when charged particles are placed in a magnetic field. Up to now such gauge fields have been mostly obtained by rotating the gas [2]. In this case the transformation to the rotating frame indeed corresponds to giving the particles a fictitious charge, and applying an effective uniform magnetic field. Another method consists in using so-called geometric potentials which can considerably extend the range of gauge fields realisable in neutral gases. In particular, they offer the possibility to produce non-homogeneous or time-dependent effective orbital magnetism.

Geometric potentials [3–6] generally result from Berry's phase [7] that appears when particles with an internal structure move slowly enough that their fast internal

dynamics adiabatically adjusts to the centre-of-mass motion. In quantum optics such geometric potentials can be generated using laser beams to split the atomic internal energy levels. This was suggested in [8,9], and a first experimental investigation was presented in [10]. The concept of geometric potentials can be extended to simulate gauge fields that are more elaborate than the $U(1)$ -symmetry of electromagnetism. Using appropriate laser configurations, one can in principle implement the general ideas outlined in [11] to generate non-Abelian gauge fields [12,13].

In spite of numerous investigations of possible geometric potentials in quantum optics, a simple physical interpretation of the forces appearing due to the gauge fields seems still to be lacking. Of course these forces ultimately arise from the exchange of momentum between light and atoms, but this generic process can lead to different physical mechanisms. Since identifying these mechanisms may help to design future configurations, we propose in this letter a semi-classical analysis of geometric potentials. Our approach is directly inspired by the formalism used to calculate the standard radiative forces acting on an atom placed in a laser beam. We first present the general semi-classical derivation of the two (scalar and vector) geometric potentials acting on an atom. We then discuss the

^(a)E-mail: jean.dalibard@lkb.ens.fr

various physical pictures that emerge for the concrete implementation that has been proposed in [14].

We start with a brief reminder of the standard formalism of geometric potentials, in which both internal and external (centre-of-mass) atomic degrees of freedom are treated using quantum mechanics. The relevant internal dynamics is described in an N -dimensional Hilbert space. The atom can be submitted to static electric or magnetic fields as well as to time-dependent electromagnetic fields. The fields are supposed to be in a coherent state so that they can be described by classical functions. Assuming that the time-dependence of the atom-field interaction can be eliminated using the rotating-wave approximation, the eigenstates of the atom-field coupling form an orthogonal basis $\{|\psi_j(\mathbf{r})\rangle, j = 1, \dots, N\}$ of the internal Hilbert space of the atom at any point \mathbf{r} . We denote $E_j(\mathbf{r})$ the corresponding energies. The Hamiltonian of the problem is thus

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \hat{V}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N E_j(\mathbf{r}) \hat{Q}_j(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Here, M is the atomic mass, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ the centre-of-mass momentum operator and $\hat{Q}_j(\mathbf{r}) = |\psi_j(\mathbf{r})\rangle\langle\psi_j(\mathbf{r})|$ the projector onto the j -th internal eigenstate. Suppose now that the energy of one of the internal eigenstates, say $|\psi_1\rangle$, is well separated from the other ones. We choose the initial internal atomic state equal to $|\psi_1(\mathbf{r})\rangle$ at any point \mathbf{r} and suppose that the atom moves slowly enough for the adiabatic theorem to hold. The internal state then remains equal to $|\psi_1\rangle$ at any time, and the energy $E_1(\mathbf{r})$ plays the role of a potential energy for the centre-of-mass motion. In addition, the geometric phase accumulated by the atom gives rise to additional vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ and scalar $U(\mathbf{r})$ potentials so that the atom Hamiltonian in the adiabatic approximation [3–6] reads

$$\hat{H}_{\text{adiab.}} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M} + E_1(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}), \quad (3)$$

with

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = i\hbar \langle\psi_1(\mathbf{r})|\nabla\psi_1(\mathbf{r})\rangle, \quad (4)$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{j \neq 1} |\langle\psi_1(\mathbf{r})|\nabla\psi_j(\mathbf{r})\rangle|^2, \quad (5)$$

where we note by convention $|\nabla\psi(\mathbf{r})\rangle = \nabla(|\psi(\mathbf{r})\rangle)$.

The goal of this letter is to provide a simple physical interpretation of these potentials within the framework of a *semi-classical* analysis. Here, the term *semi-classical* refers to the fact that we describe the atomic internal degrees of freedom using quantum mechanics, but we treat classically the centre-of-mass motion. Within this approximation we want to recover the equation of motion

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla E_1(\mathbf{r}) - \nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

corresponding to the Hamiltonian (3). This equation of motion involves three forces. The first one is simply the gradient of the energy E_1 of the occupied level. The second one originates from the scalar potential $U(\mathbf{r})$, and the third one has the structure of a Lorentz force for a charge $q = 1$ in an effective magnetic field $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

The main tool for the semi-classical analysis is the force operator acting on the N -dimensional Hilbert space:

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = -\nabla \hat{V} = -\sum_j \left(\nabla(E_j) \hat{Q}_j + E_j \nabla(\hat{Q}_j) \right). \quad (7)$$

Knowing the internal state $|\phi\rangle$ for an atom at point \mathbf{r} (a concept which is valid within the semi-classical approach), we will be able to calculate the average force $\langle\phi|\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r})|\phi\rangle$ and the correlation functions of the force operator. This semi-classical approach has been very fruitful for the study of the radiative forces acting on an atom irradiated by laser beams [15], and its connection with a full quantum description of the atomic motion in laser light is well established [16].

Origin of the scalar potential. – In this section we consider an atom with zero centre-of-mass velocity, so that the Lorentz force in (6) is also zero. The atom internal state is supposed to be $|\phi\rangle = |\psi_1\rangle$ and we immediately get from (7)

$$\langle\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r})\rangle = -\nabla E_1, \quad (8)$$

where we used that the states $\{|\psi_j(\mathbf{r})\rangle\}$ form a normalised orthogonal basis at any point \mathbf{r} . We thus recover the first term in eq. (6) but not the force originating from the scalar potential $U(\mathbf{r})$. This could be expected since expression (5) of the scalar potential involves the atomic mass M , which does not enter in expression (7) of the force operator $\hat{\mathbf{F}}$. The scalar potential can still be recovered within the semi-classical approach, as we show now, provided one goes one step beyond the mere calculation of the average force.

The starting point of our reasoning consists in noting that the state $|\psi_1\rangle$ occupied by the atom is an eigenstate of the coupling Hamiltonian \hat{V} , but *not* an eigenstate of the force operator $\hat{\mathbf{F}}$. Hence, $\langle\hat{\mathbf{F}}^2\rangle \neq \langle\hat{\mathbf{F}}\rangle^2$ or, in physical terms, the force acting on the atom undergoes quantum fluctuations around its average value. As we will see, these fluctuations occur at the typical Bohr frequencies $\omega_{j1} = (E_j - E_1)/\hbar$ of the internal atomic motion. For the adiabatic approximation to hold, these frequencies have to be much larger than the characteristic frequencies of the external atomic motion. Consequently, the quantum fluctuations of the force cause a fast micro-motion of the atom, similar to the one arising for charged particles in a Paul trap [17]. The kinetic energy of the micro-motion then plays the role of a potential for the slow motion of the atomic centre of mass [18]. We demonstrate below that this kinetic energy coincides with the scalar potential $U(\mathbf{r})$.

The fluctuations of the force operator $\hat{\mathbf{F}}$ are characterised by the symmetrised correlation function of the operator $\delta\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}} - \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$, calculated in the Heisenberg picture:

$$C(t, t') = \frac{1}{2} \langle \delta\hat{\mathbf{F}}(t) \cdot \delta\hat{\mathbf{F}}(t') + \delta\hat{\mathbf{F}}(t') \cdot \delta\hat{\mathbf{F}}(t) \rangle. \quad (9)$$

Since the average is taken in an eigenstate of the Hamiltonian, $C(t, t')$ depends only on the time difference $\tau = t - t'$ and we obtain after some algebra

$$C(\tau) = \sum_{j \neq 1} C_j \cos(\omega_{j1}\tau), \quad (10)$$

with

$$C_j = \hbar^2 \omega_{j1}^2 |\langle \psi_1 | \nabla \psi_j \rangle|^2. \quad (11)$$

In order to understand the consequences of these fluctuations, consider a classical particle submitted to a stochastic force $\mathbf{F}(t)$ such that $\overline{\mathbf{F}(t)} = 0$ and $\overline{\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t')} = C(t - t')$. The Fourier transform $\mathbf{f}(\omega)$ of $\mathbf{F}(t)$ is such that $\overline{\mathbf{f}(\omega)} = 0$ and $\overline{\mathbf{f}^*(\omega) \cdot \mathbf{f}(\omega')} = \delta(\omega - \omega') B(\omega)$, where

$$B(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq 1} C_j (\delta(\omega + \omega_{j1}) + \delta(\omega - \omega_{j1})) \quad (12)$$

is the Fourier transform of $C(\tau)$. The solution of the equation of motion $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ is

$$\mathbf{p}(t) = \int \frac{\mathbf{f}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad (13)$$

and has a zero average. However, the average kinetic energy is strictly positive and equal to

$$\frac{\overline{\mathbf{p}^2}}{2M} = \int \frac{B(\omega)}{2M\omega^2} d\omega. \quad (14)$$

In the explicit calculation of (14), the contribution of the ω^{-2} denominator cancels out the transition frequencies ω_{j1} that appear in expression (11) of C_j . Finally one exactly recovers the result (5) for the scalar potential. This validates the interpretation of this potential in terms of the kinetic energy of the atomic micro-motion.

The above result sheds new light on the Hamiltonian (3) of the full quantum description. We can now interpret the term $M\hat{\mathbf{v}}^2/2$, with $M\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}$, as the kinetic energy of the slow centre-of-mass motion, whereas the kinetic energy of the fast micro-motion builds the scalar potential $U(\mathbf{r})$. It is also interesting to connect the present analysis of the scalar geometric potential with the intriguing problem of a two-level atom moving around the node of a standing wave. In the latter case, it is found that the average force acting on the atom is zero, as expected since the light intensity vanishes at the nodes. However, the atomic momentum diffusion coefficient, which is also related to the correlation function of the force operator, is non-zero [15,19].

Origin of the Lorentz force. – We now consider the case of a slowly moving atom and calculate the average of the force operator (7) at first order in velocity. More precisely, we assume an atom initially at rest in the internal state $|\phi\rangle = |\psi_1\rangle$, that is adiabatically set in motion to reach a velocity \mathbf{v} . Because of this motion the internal atomic state contains some admixture of the other eigenstates $|\psi_j\rangle$ and the average force is different from the zero-velocity result.

We write the internal state as $|\phi\rangle = \sum_j \alpha_j |\psi_j\rangle$ and solve the Schrödinger equation as a power series in velocity. The procedure detailed in the appendix gives the coefficients α_j at first order in v :

$$\alpha_j(t) \simeq i\hbar \frac{\mathbf{v} \cdot \langle \psi_j | \nabla \psi_1 \rangle}{E_j - E_1} e^{-iE_1 t/\hbar} \quad (j \neq 1). \quad (15)$$

The calculation of the average force at first order in v is also outlined in the appendix and leads to

$$\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle = i\hbar \langle \nabla \psi_1 | (\mathbf{v} \cdot | \nabla \psi_1 \rangle) + \text{c.c.} \quad (16)$$

One can readily check that this expression coincides with the Lorentz force $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ appearing in eq. (6).

This way of recovering the Lorentz force is very reminiscent of the general semi-classical calculation of the velocity-dependent radiative forces [15,16]. There is one important difference, however. In the latter case one generally finds $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, which is at the origin of laser cooling (for example via the Doppler or Sisyphus mechanisms). In the particular case considered here, no photon spontaneous emission process occurs, dissipation is absent, and we are left with a Lorentz force of geometric origin.

Illustration for a particular atom-laser configuration. – We now relate the geometric forces in quantum optics to the known radiative forces that generally act on an atom irradiated by one or several laser beams. We thus explain the mechanisms at the origin of the geometric potentials in terms of exchange of momentum between atoms and light. For this purpose, we turn to the specific configuration sketched in fig. 1, which has been proposed in [14]. A three-level atom with two degenerate ground states $|g_{\pm}\rangle$ and an excited state $|e\rangle$ is irradiated by two counter-propagating laser beams. The beam propagating in the $+y$ (respectively, $-y$) direction drives the transition $g_+ \leftrightarrow e$ (respectively, $g_- \leftrightarrow e$). The two beams have the same waist w and the same intensity. They are offset with respect to the y -axis by a distance $\pm b/2$, where b is typically of the order of w .

Using the rotating-wave approximation the atom-light coupling can be written as

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \sum_{j=\pm} (\hbar\kappa_j(\mathbf{r}) |e\rangle\langle g_j| + \text{h.c.}). \quad (17)$$

The Rabi frequencies κ_{\pm} are given by

$$\kappa_{\pm}(\mathbf{r}) = \kappa e^{\pm iky} e^{-(x \mp b/2)^2/w^2}, \quad (18)$$

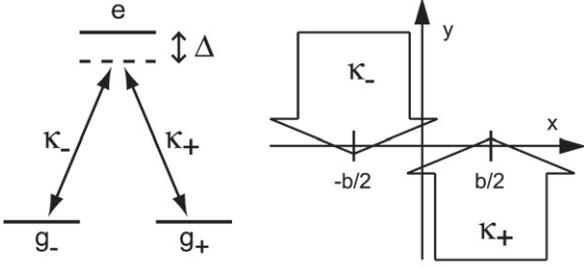


Fig. 1: Atomic level scheme and laser configuration proposed in [14] to generate a vector and a scalar potential.

where k is the modulus of the wave vector of the laser beams. We assume that the Raman resonance condition is satisfied between the two ground levels g_{\pm} , and we denote Δ the detuning of the laser frequency with respect to the $g_{\pm} \leftrightarrow e$ transition.

A well-known characteristic of this configuration is that one of the three eigenstates of $\hat{V}(\mathbf{r})$ involves only the two ground states $|g_{\pm}\rangle$ and has zero overlap with the excited state $|e\rangle$ [20–22]. An atom prepared in this so-called *non-coupled* or *dark* state will not undergo any spontaneous emission process, which is a key feature for the practical use of geometric potentials. The non-coupled state is

$$|\psi_1\rangle = \frac{\kappa_-}{\Omega}|g_+\rangle - \frac{\kappa_+}{\Omega}|g_-\rangle, \quad (19)$$

where we set $\Omega = (|\kappa_-|^2 + |\kappa_+|^2)^{1/2}$. The corresponding energy at any point is $E_1(\mathbf{r}) = 0$ so that the first term on the right-hand side of (6) vanishes. The scalar potential and the effective magnetic field are [14]

$$U(x) = \frac{\hbar^2(k^2 + b^2/w^4)}{2M} G(x), \quad (20)$$

$$\mathbf{B}(x) = -\frac{2\hbar k b}{w^2} G(x) \mathbf{u}_z, \quad (21)$$

where $G(x) = \cosh^{-2}(2xb/w^2)$.

We start our analysis with the scalar potential $U(\mathbf{r})$. When $x \rightarrow \pm\infty$, it tends to zero as expected from its interpretation as the energy of a micro-motion, which vanishes when the atom sits outside the laser beams. The value of U at $\mathbf{r} = 0$ can also be recovered easily. At this point the two components of the force operator are

$$\hat{F}_x = -F_0 (|e\rangle\langle g_a| + |g_a\rangle\langle e|), \quad (22)$$

$$\hat{F}_y = -iF_1 (|e\rangle\langle g_a| - |g_a\rangle\langle e|), \quad (23)$$

where $F_0 = \sqrt{2}\hbar\kappa b/w^2$, $F_1 = \sqrt{2}\hbar k\kappa$ and where we have introduced the antisymmetric combination $|g_a\rangle = (|g_+\rangle - |g_-\rangle)/\sqrt{2}$. At $\mathbf{r} = 0$, $|\psi_1\rangle = |g_a\rangle$ so that $\langle\hat{F}_{x,y}\rangle = 0$, which directly follows from $E_1(\mathbf{r}) = 0$. The correlation function of the force is readily calculated; choosing $\Delta = 0$ for simplicity, we find $C(\tau) = (F_0^2 + F_1^2) \cos(\sqrt{2}\kappa\tau)$. The kinetic energy of the micro-motion induced by this oscillating force is $(F_0^2 + F_1^2)/(4M\kappa^2)$ and indeed coincides

with the general result (20) at $x = 0$. For realistic laser configurations the waist w and the offset b are large compared to k^{-1} so that the dominating contribution is due to F_1 , corresponding to a micro-motion directed along the propagation axis y of the beams.

The two operators \hat{F}_x and \hat{F}_y given in (22), (23) are the so-called *dipole force* operator and *radiation pressure force* operator, respectively. The dipole force \hat{F}_x originates from the intensity gradient of the laser beams along the x -axis. In terms of photon momentum exchange, it can be understood as a redistribution of photons between the various plane waves that contribute to the formation of the intensity gradient (see, *e.g.*, [19]). The radiation pressure force \hat{F}_y originates from the phase variation $e^{\pm ik_y y}$ of the laser beams along the y -axis. It leads to changes of atomic momentum by $\pm\hbar k$ when the atom absorbs a photon from one of the laser beams. Interestingly, the cancellation of the average force acting on an atom at rest at $\mathbf{r} = 0$ in the internal state $|g_a\rangle$ results from a destructive interference. For example, $\langle\hat{F}_x\rangle = 0$ because the state $|g_a\rangle$ is a combination with equal weights of the two eigenvectors $|\chi_{\pm}\rangle = (|g_a\rangle \pm |e\rangle)/\sqrt{2}$ of the force operator \hat{F}_x . The dipole force felt by an atom in state $|\chi_{\pm}\rangle$ is $\mp F_0$, so that the average force vanishes for an atom prepared in $|g_a\rangle$.

We now turn to the case of a moving atom and to the interpretation of the Lorentz force. As the force is linear in velocity, we can study separately the cases of a motion parallel to the x - and to the y -axis. We first consider an atom moving along the y -axis with velocity v_y . Its internal state differs from the value $|g_a\rangle$ of an atom at rest, and its expression at first order in v_y , as deduced from (15), is

$$|\phi\rangle = |g_a\rangle + \frac{kv_y}{\sqrt{2}\kappa}|e\rangle, \quad (24)$$

where we have again chosen $\Delta = 0$ for simplicity. This state can also be calculated directly by switching to the atom rest frame, which amounts to adding the small perturbation $\delta\hat{V} = kv_y(\hat{Q}_- - \hat{Q}_+)$ to the atom-light coupling, where \hat{Q}_{\pm} is the projector on the state $|g_{\pm}\rangle$. One can check that the state $|\phi\rangle$ is an eigenstate of the perturbed coupling $\hat{V} + \delta\hat{V}$ with the same eigenvalue 0. The average force acting on an atom in the state (24) is not zero anymore. The perfect balance between the two dipole forces $\pm F_0$ is now broken to the benefit of $-F_0$ ($+F_0$) if $v_y > 0$ ($v_y < 0$). The explicit calculation of $\langle\phi|\hat{F}_x|\phi\rangle$ is immediate and yields exactly the Lorentz force value $-2\hbar k b v_y/w^2$ obtained from eq. (21). In the case of a motion along the y -axis, the Lorentz force is therefore a direct consequence of the dipole potential. Remarkably, the Lorentz force is independent of the Rabi frequency κ although the dipole force amplitude F_0 is proportional to κ . The reason is that the “rotation” angle of the state $|\phi\rangle$ with respect to the non-coupled state scales as κ^{-1} (see eq. (24)) and this scaling exactly compensates for the κ -dependence of F_0 .

We finally consider an atomic motion along the x -axis, with a Lorentz force along the y -axis, originating thus from

the radiation pressure force operator \hat{F}_y . This case could be analysed along the lines of eqs. (15), (16), but it is actually more instructive to look at the cumulative effect of the Lorentz force, *i.e.* the change of momentum along y , when the atom crosses the two laser beams. Suppose that the atom is initially located at time t_1 at a point $x_1 < 0$ with $|x_1| \gg w$. At this location $\kappa_+/\kappa_- = \exp(2x_1b/w^2) \ll 1$, so that eq. (19) leads to $|\psi_1\rangle \simeq |g_+\rangle$. At a later time t_2 the atom has reached the point $x_2 = -x_1$, where $|\psi_1\rangle \simeq |g_-\rangle$. The momentum change caused by the Lorentz force is aligned with the y -axis and its value is

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= - \int_{t_1}^{t_2} B_z v_x dt = - \int_{x_1}^{x_2} B_z(x) dx \\ &= \hbar k [\tanh(2x_2b/w^2) - \tanh(2x_1b/w^2)]. \end{aligned} \quad (25)$$

With the above assumption that $|x_1| = |x_2| \gg w$ and $b \sim w$, we obtain

$$\Delta p_y \simeq 2\hbar k. \quad (26)$$

This expression has a clear physical interpretation in terms of photon absorption and stimulated emission. When the atom moves from x_1 to x_2 , its internal state rotates adiabatically from $|g_+\rangle$ to $|g_-\rangle$. This happens by the absorption of a photon from the wave propagating in the $+y$ -direction, driving the $g_+ \rightarrow e$ transition, and the stimulated emission of a photon in the wave propagating in the $-y$ -direction, driving the $e \rightarrow g_-$ transition. The origin of the Lorentz force in this case is therefore closely related to the so-called STIRAP process (Stimulated Raman Adiabatic Passage) [23].

Discussion and conclusion. – We have given here a semi-classical interpretation of the geometric forces that act on a slowly moving particle with multiple, spatially varying, internal energy levels. Such a situation is encountered in quantum optics when an atom moves in the light field created by several quasi-resonant laser beams. The main assumption is that the atom follows adiabatically one of its internal energy levels which is supposed to be well separated from all the other ones. Under these conditions the atomic centre-of-mass motion involves a scalar and a vector potential. The scalar potential originates from the kinetic energy of the micro-motion of the atom, under the action of the quantum fluctuations of the radiative force operator. The Lorentz-type force associated with the vector potential results from the perturbation of the atomic internal state due to the slow atomic motion. This changes the expectation value of the force with respect to an atom at rest, but does not induce any dissipation. The way we obtain our results is very reminiscent of the general derivation of the radiative forces created by quasi-resonant laser beams. Taking as an example the configuration proposed in [14], we have related the intervening geometric forces with either the radiation pressure force or the dipole force.

Our approach can be viewed as a quantum version (for the internal degrees of freedom) of the fully classical results of [24], where the authors analysed the motion of a

particle with a permanent magnetic moment placed in a strong, non-homogeneous magnetic field. There, a rapid oscillation of the magnetic moment superimposed onto a slow secular motion was found. This rapid oscillation gives rise to a scalar potential similar to the one of interest here. When the particle with its magnetic moment initially aligned with the magnetic field was set in motion, it was found that the magnetic moment acquires a non-zero component in a direction perpendicular to the magnetic field. The Lorentz-type force that emerged in this situation is also very similar to the present one.

To conclude, geometric potentials may constitute in the future a key ingredient for the realisation of a general “quantum gas toolbox” that allows one to address various open problems of many-body physics. We hope that the simple physical pictures provided by the present analysis may help for the design and the implementation of novel geometric forces in this context.

We are grateful to C. COHEN-TANNOUJJI, F. GERBIER and A. STERN for useful discussions. KJG and SPR acknowledge support from EU (contract IEF/219636) and from the German Academic Exchange Service (DAAD, grant D/06/41156), respectively. This work is supported by Région Île de France (IFRAF), CNRS, the French Ministry of Research, ANR (Project Gascor, NT05-2-42103) and the EU project SCALA. Laboratoire Kastler Brossel is a *Unité mixte de recherche* of CNRS, Ecole Normale Supérieure and Université Pierre et Marie Curie.

APPENDIX

Derivation of the Lorentz force. – In this appendix we detail the calculation of the perturbed state $|\phi\rangle$ of a slowly moving atom and the resulting force $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$. At time 0 the atom is at rest in the internal state $|\phi\rangle = |\psi_1\rangle$. We suppose that it is uniformly accelerated during a time T to a velocity \mathbf{v} : $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v} t/T$ for $0 \leq t \leq T$. Our aim is to calculate $|\phi\rangle$ and $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$ at time T .

The general expression of the internal atomic state is $|\phi(t)\rangle = \sum_j \alpha_j(t) |\psi_j(\mathbf{r}(t))\rangle$, leading to the average of the force operator (7):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle &= - \sum_j \nabla E_j |\alpha_j|^2 \\ &+ \sum_{j,k} (E_k - E_j) \alpha_k^* \alpha_j \langle \psi_k | \nabla \psi_j \rangle. \end{aligned} \quad (A.1)$$

To calculate the force at first order in v , we need all coefficients α_j also at first order. Using the Schrödinger equation $i\hbar|\dot{\phi}\rangle = \hat{V}(\mathbf{r}(t))|\phi\rangle$ and $|\dot{\phi}\rangle = \sum_j \dot{\alpha}_j |\psi_j\rangle + \alpha_j \mathbf{v} \cdot \nabla \psi_j$, we get the corresponding equations of motion:

$$\dot{\alpha}_j = -iE_j \alpha_j / \hbar + \sum_k \alpha_k \mathbf{v} \cdot \langle \psi_j | \nabla \psi_k \rangle. \quad (A.2)$$

At order zero all α_j 's are zero except $\alpha_1(t) = \exp(-iE_1 t/\hbar)$.

At order one we obtain for $j \neq 1$

$$\alpha_j(T) = -\mathbf{v} \cdot \langle \psi_j | \nabla \psi_1 \rangle e^{-iE_j T/\hbar} \int_0^T e^{i(E_j - E_1)t/\hbar} \frac{t}{T} dt, \quad (\text{A.3})$$

where $|\psi_j\rangle$, $|\psi_1\rangle$, E_j and E_1 are taken at order zero in v , hence at the location \mathbf{r} of the atom at time T . Assuming that the atom is adiabatically set into motion, *i.e.* $T(E_j - E_1)/\hbar \gg 1$, we get

$$\alpha_j(T) \simeq i\hbar \frac{\mathbf{v} \cdot \langle \psi_j | \nabla \psi_1 \rangle}{E_j - E_1} e^{-iE_1 T/\hbar}. \quad (\text{A.4})$$

At order one in v the equation of motion for α_1 is

$$\dot{\alpha}_1 = -i(E_1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \alpha_1/\hbar, \quad (\text{A.5})$$

whose solution is a number of modulus 1. The two results (A.4) and (A.5) entail that the first part of $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$ in (A.1) has no first-order component in v since the contributions of the α_j 's for $j \neq 1$ are at least of order 2, and the contribution of α_1 is independent of v . In the second part of (A.1), the only relevant terms are those where one of the two indices k or j equals 1. Applying the closure relation and keeping the terms linear in velocity, we finally reach the result (16) for the average force. We note that our procedure is similar to the original derivation of the geometric phase [7], which emerges from the term $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ in (A.5).

REFERENCES

- [1] BLOCH I., DALIBARD J. and ZWERGER W., *Rev. Mod. Phys.*, **80** (2008) 885.
- [2] FETTER A. L., arXiv:arXiv:0801.2952 (2008).
- [3] MEAD C. A. and TRUHLAR D. G., *J. Chem. Phys.*, **70** (1979) 2284.
- [4] BERRY M. V., *The quantum phase, five years after*, in *Geometric Phases in Physics*, edited by SHAPER A. and WILCZEK F. (World Scientific, Singapore) 1989, pp. 7–28.
- [5] MOODY J., SHAPER A. and WILCZEK F., *Adiabatic Effective Lagrangians*, in *Geometric Phases in Physics*, edited by SHAPER A. and WILCZEK F. (World Scientific, Singapore) 1989, pp. 160–183.
- [6] BOHM A., MOSTAFAZADEH A., KOIZUMI H., NIU Q. and ZWANZIGER J., *The Geometric Phase in Quantum Systems* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York) 2003.
- [7] BERRY M. V., *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **392** (1984) 45.
- [8] DUM R. and OLSHANI M., *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996) 1788.
- [9] VISSER P. M. and NIENHUIS G., *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 4581.
- [10] DUTTA S. K., TEO B. K. and RAITHEL G., *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999) 1934.
- [11] WILCZEK F. and ZEE A., *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 2111.
- [12] OSTERLOH K., BAIG M., SANTOS L., ZOLLER P. and LEWENSTEIN M., *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005) 010403.
- [13] RUSECKAS J., JUZELIŪNAS G., ÖHBERG P. and FLEISCHHAUER M., *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005) 010404.
- [14] JUZELIŪNAS G., RUSECKAS J., ÖHBERG P. and FLEISCHHAUER M., *Phys. Rev. A*, **73** (2006) 025602.
- [15] GORDON J. P. and ASHKIN A., *Phys. Rev. A*, **21** (1980) 1606.
- [16] DALIBARD J. and COHEN-TANNOUDI C., *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **18** (1985) 1661.
- [17] PAUL W., *Rev. Mod. Phys.*, **62** (1990) 531.
- [18] LANDAU L. D. and LIFSHITZ E. M., *Mechanics*, 3rd edition (Butterworth-Heinemann, Oxford) 1982.
- [19] COHEN-TANNOUDI C., *Atomic motion in laser light*, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, edited by DALIBARD J., RAIMOND J.-M. and ZINN-JUSTIN J. (North-Holland, Amsterdam) 1992, pp. 1–164.
- [20] ARIMONDO E., *Coherent population trapping in laser spectroscopy*, in *Prog. Opt.*, edited by WOLF E., Vol. **35** (Elsevier) 1996, p. 259.
- [21] LUKIN M. D., *Rev. Mod. Phys.*, **75** (2003) 457.
- [22] FLEISCHHAUER M., IMAMOGLU A. and MARANGOS J. P., *Rev. Mod. Phys.*, **77** (2005) 633.
- [23] BERGMANN K., THEUER H. and SHORE B. W., *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 1003.
- [24] AHARONOV Y. and STERN A., *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 3593.

Practical scheme for a light-induced gauge field in an atomic Bose gas

Kenneth J. Günter,^{*} Marc Cheneau, Tarik Yefsah, Steffen P. Rath, and Jean Dalibard
Laboratoire Kastler Brossel and CNRS, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France
 (Received 24 November 2008; published 21 January 2009)

We propose a scheme to generate an Abelian gauge field in an atomic gas using two crossed laser beams. If the internal atomic state follows adiabatically the eigenstates of the atom-laser interaction, Berry's phase gives rise to a vector potential that can nucleate vortices in a Bose gas. The present scheme operates even for a large detuning with respect to the atomic resonance, making it applicable to alkali-metal atoms without significant heating due to spontaneous emission. We test the validity of the adiabatic approximation by integrating the set of coupled Gross-Pitaevskii equations associated with the various internal atomic states, and we show that the steady state of the interacting gas indeed exhibits a vortex lattice, as expected from the adiabatic gauge field.

DOI: 10.1103/PhysRevA.79.011604

PACS number(s): 03.75.Nt, 03.65.Vf, 37.10.Vz, 03.75.-b

A major motivation of current research with atomic quantum gases is the prospect of simulating the physics of condensed matter systems (see, for example, [1]). One objective is to gain new insight into strongly correlated states of matter such as the fractional quantum Hall effect exhibited by electrons in a magnetic field [2]. To study such systems with cold atoms, one needs to mimic a gauge field with which the neutral atoms interact as if they were charged. A well-known method consists in setting the gas into rotation and transforming to the corotating reference frame, where the physics is governed by the same Hamiltonian that describes charged particles in a magnetic field. At the mean-field level the corresponding gauge field leads to the nucleation of vortices, which has been observed experimentally (see [3] and references therein). However, technical difficulties have so far prevented the strongly correlated regime from being reached, and it is worthwhile to contemplate alternative approaches.

A promising possibility is the use of geometric potentials induced by laser fields. To comprehend the underlying mechanism, consider atoms with a ground state g , which is degenerate in the absence of any external perturbation (angular momentum $J_g > 0$). Neglecting in a first step the population of excited levels, the atomic energy eigenstates $|\psi_\alpha\rangle$ ($\alpha=0, \dots, 2J_g$) in the presence of the laser fields are linear combinations of the Zeeman substates $|g, J_g, m\rangle$ ($m = -J_g, \dots, J_g$). Both the eigenenergies E_α and the states $|\psi_\alpha\rangle$ depend on position via the spatial variation of the light fields. If the center-of-mass (c.m.) motion is slow enough, an atom initially prepared in one of these internal states, say $|\psi_0\rangle$, will remain in this state and its c.m. wave function will acquire a geometric phase [4]. This so-called Berry phase [5] corresponds to a gauge field $\{A, U\}$ appearing in the effective Hamiltonian of the c.m. motion:

$$H = \frac{[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2M} + E_0(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}), \quad (1)$$

where M is the atomic mass,

^{*}kenneth.guenter@lkb.ens.fr

$$\mathbf{A} = i\hbar \langle \psi_0 | \nabla (|\psi_0\rangle), \quad U = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{\alpha \neq 0} |\langle \psi_0 | \nabla (|\psi_\alpha\rangle)|^2, \quad (2)$$

and with the charge $q=1$. Several configurations to create gauge fields with laser beams have been proposed and analyzed [6–14], and experimental evidence of these potentials has been provided in the context of cold atomic gases [15,16]. In particular, the proposal of [13] uses two counter-propagating beams driving the two transitions of an atom with a Λ level scheme [Fig. 1(a)]. Such a configuration emerges when the two beams are circularly polarized with positive and negative helicity, respectively, and both the ground (g) and the excited (e) states have unit angular momentum ($J_g = J_e = 1$) [17]. In this case $|\psi_0\rangle$ can be chosen as the “dark” superposition state of $|g, J_g, m = \pm 1\rangle$. Unfortunately, this scheme is not applicable to the commonly used alkali-metal atoms even though they may have some hyperfine states with the proper angular momenta. The hyperfine splitting of the relevant excited manifold being typically smaller than 100 linewidths, nonresonant coupling to other hyperfine states with $J_e \neq 1$ will destabilize the superposition state, and heating due to spontaneous emission will eventually mask the effect searched for.

In this Rapid Communication we first propose a simple planar scheme which overcomes the above-mentioned handicap. It incorporates two crossed laser beams whose frequencies are far detuned from the atomic resonance transition, which reduces the rate of spontaneous emission processes to a negligible value. Our scheme produces an effective gauge field that varies smoothly over the area of the atomic cloud

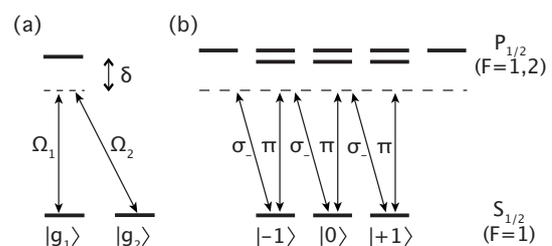


FIG. 1. (a) Λ -type system used for a simple modeling of the atom-laser coupling. (b) Atomic scheme relevant for a $3/2$ nuclear spin, as for ^{87}Rb or ^{23}Na .

and allows for the observation of several vortices in a cold interacting spinor Bose gas. In a second step, we determine the ground state of the gas by solving numerically the coupled set of Gross-Pitaevskii equations (GPEs) associated with the various internal (ground and excited) atomic states. We show that the ground state of the system indeed contains several vortices with the predicted surface density. In contrast to previous approaches [18] where the gauge fields (2) were explicitly included in the Hamiltonian, we do not *a priori* assume the adiabatic limit to be valid. Hence, our study can be considered as a validity check of this approximation for an interacting gas. In the last part of this paper we investigate whether the vortices can be nucleated by slowly turning on the geometric light potential.

The necessity of using off-resonant lasers strongly limits the choice of schemes that lead to a nontrivial gauge field. To be explicit, we first remark that a frequency detuning large compared to the hyperfine splitting of the excited manifold causes the nuclear spin to become irrelevant for the description of the excited state. Consider, for example, the D_1 transition between the states $S_{1/2}$ and $P_{1/2}$ of an alkali-metal atom, which is sketched in Fig. 1(b) for the case of a nuclear spin $3/2$, as for ^{87}Rb or ^{23}Na . Since only the electronic angular momentum is relevant for evaluating the matrix elements of the atom-laser coupling, the energy level structure can be regarded as a simple $J_g=1/2 \leftrightarrow J_e=1/2$ system. At the same time this restricts the polarizations of the laser beams that can be applied to create the internal superposition state: A spin flip from $m=-1/2$ to $m=+1/2$, for instance, corresponds to an angular momentum transfer of $+\hbar$, so a two-photon transition requires light with circular (σ_- or σ_+) as well as linear (π) polarization. Such a configuration cannot be achieved with counterpropagating waves as in [13] for which the change $\Delta m=0, \pm 2$.¹ Note that it is important that the detuning is not large compared to the *fine* structure splitting between the $P_{1/2}$ and $P_{3/2}$ manifolds. Otherwise the electronic spin S loses its significance, and one is left with an effective $J_g=0 \leftrightarrow J_e=1$ transition where no coherent level superposition is generated by the atom-light interaction.

For the sake of simplicity, we first treat the case of a three-level Λ system. The transposition to a realistic internal level structure will be discussed later on. The two ground states $|g_1\rangle$ and $|g_2\rangle$ are coupled to the excited state by laser fields with spatially varying Rabi frequencies $\Omega_1(\mathbf{r})$ and $\Omega_2(\mathbf{r})$, respectively [Fig. 1(a)]. The Hamiltonian for an atom in the light field at any point \mathbf{r} reads

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(\mathbf{r}) + H_{\text{AL}}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

The atom is confined in a two-dimensional trapping potential $V(\mathbf{r}) = (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)/2M$. The part H_{AL} of the Hamiltonian acts on the internal degrees of freedom only and describes

¹Counterpropagating beams can induce a $\Delta m = \pm 1$ transition if a comparatively large magnetic field is applied and the frequencies of the two beams are properly shifted. Yet, the nonlinear Zeeman effect may in that case lead to spurious exothermic spin-changing collisions.

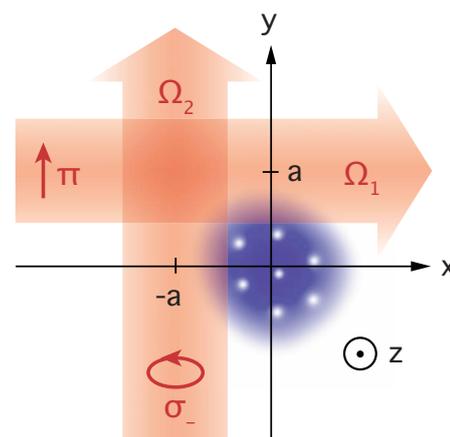


FIG. 2. (Color online) Planar scheme to create a gauge field for atoms with two crossed far-detuned laser beams which are displaced by a distance $\pm a$ from the center position of the atomic cloud.

the atom-laser coupling. Using the rotating wave approximation, it can be written as

$$H_{\text{AL}} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_1/2 \\ 0 & 0 & \Omega_2/2 \\ \Omega_1^*/2 & \Omega_2^*/2 & -\delta \end{pmatrix}, \quad (4)$$

where $\delta = \omega_L - \omega_A$ is the detuning of the laser frequency ω_L with respect to the atomic resonance frequency ω_A . We suppose that the atom is prepared in the eigenstate

$$|\psi_0(\mathbf{r})\rangle = \cos(\theta/2)|g_1\rangle + e^{-i\phi} \sin(\theta/2)|g_2\rangle \quad (5)$$

of H_{AL} , where we have set $\cos \theta = (|\Omega_1|^2 - |\Omega_2|^2)/\Omega^2$, $e^{i\phi} \sin \theta = -2\Omega_1^* \Omega_2 / \Omega^2$, and $\Omega = (|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2)^{1/2}$. Here $|\psi_0\rangle$ is a noncoupled (dark) state, separated from the next eigenstate by an energy given by $\varepsilon = \hbar \Omega^2 / 4\delta$ in the low-intensity limit $\Omega \ll |\delta|$. The general expressions (2) for the gauge potentials yield in this case

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2}(1 - \cos \theta) \nabla \phi, \quad (6)$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{8M} [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \phi)^2]. \quad (7)$$

We now introduce a simple implementation scheme to generate a gauge field with two far-detuned Gaussian laser beams. As the beams will in practice need to be σ_- and π polarized (or equivalently σ_+ and π), we choose a crossed-beam configuration. Our beams are displaced by a distance $\pm a$ (of the order of the beam waists) from the x and the y axis, respectively, as shown in Fig. 2, in order to obtain a nonvanishing magnetic field at the origin. The Rabi frequencies thus read $\Omega_1(\mathbf{r}) = \Omega_0 \exp[ikx - (y-a)^2/w^2]$ and $\Omega_2(\mathbf{r}) = \Omega_0 \exp[iky - (x+a)^2/w^2]$, where w denotes the waist of the beams and k the wave vector. Expanding the elements of the matrix (4) up to second order around the origin and plugging

the results into Eq. (6), we obtain the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hbar k(\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_x)[1/2 - a(x+y)/w^2]$, yielding the effective magnetic field to lowest order:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2\hbar ka}{w^2} \mathbf{e}_z. \quad (8)$$

An important quantity characterizing the effect of the magnetic field is the cyclotron frequency $\omega_c = q|\mathbf{B}|/M$, with $q=1$ in the present case. For our configuration we get $\omega_c = 2\hbar ka/Mw^2$ close to the origin. For comparison, in a gas rotating with angular frequency Ω_{rot} one has $\omega_c = 2\Omega_{\text{rot}}$. In the situation where several vortices are present in the ground state, the surface density of vortices is related to ω_c by [3]

$$\rho_v = \frac{M\omega_c}{2\pi\hbar} = \frac{ka}{\pi w^2}. \quad (9)$$

The typical radius of the atom cloud can be chosen such that $R \sim a \sim w$ so that the number of vortices inside the cloud is $\pi R^2 \rho_v \sim ka$. Owing to the fast phase variation $\sim k \gg 1/a$ of the light field we may thus expect a significant number of vortices to be present in a steady state cloud. This number is ultimately limited by the higher-order terms in the expansion of the gauge field. If the displacement a is chosen too large compared to the waist w , the magnetic field will be inhomogeneous and the scalar potential anharmonic.

To obtain the scalar potential, we note that the first term in expression (7) is small compared to the second one $\sim (\nabla\phi)^2 = 2k^2$ and can therefore be neglected. An expansion around the origin up to second order then leads to

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{4M} - \frac{1}{2} M \omega_c^2 \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad (10)$$

which reduces the trapping frequency along the axis $x=y$. This anisotropy can be compensated for by adapting the initial trapping potential V .

Up to now our scheme (like other previous proposals) relies on the assumption that the atomic motion is slow enough so that the atoms follow adiabatically the state $|\psi_0(\mathbf{r})\rangle$. Although reasonable, this approximation could be questioned in the vicinity of a vortex core, where the velocity field can become arbitrarily large. To settle this point we have numerically determined the ground state of a trapped gas of interacting bosonic atoms with a Λ -type internal structure irradiated by lasers in the configuration of Fig. 2. The gas is assumed to move only in the xy plane, and the third motional degree of freedom is assumed to be frozen to the ground state of a strongly confining potential along the z direction (frequency ω_z). Spontaneous emission processes are included by adding the complex term $-i\hbar\Gamma$ to the energy of the excited state. For simplicity we take the same s -wave scattering length a_s for all internal states and hence disregard spin-spin interactions which could lead to spin exchange collisions. This approximation is reasonable for the hyperfine ground states of ^{87}Rb but not necessarily for other atomic species. For the excited state it should in general be unproblematic as the atoms spend their time primarily in the ground state manifold. The interactions are treated at the mean-field level, and the ground state of the system is obtained using an

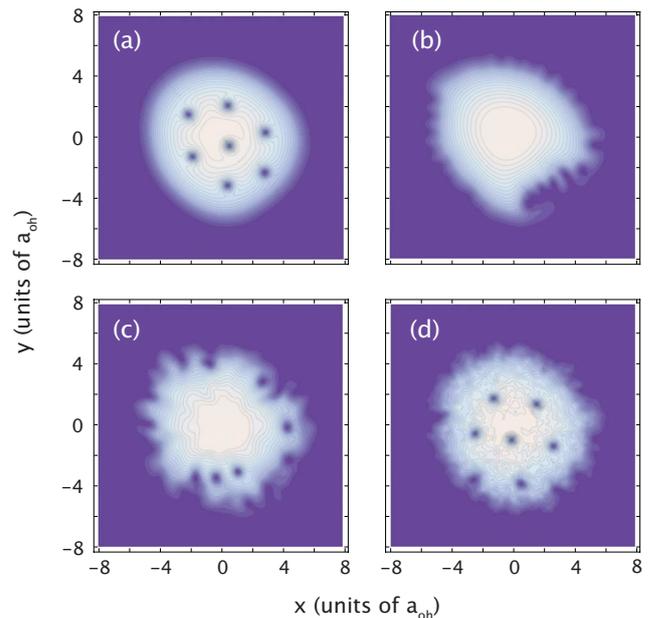


FIG. 3. (Color online) Density distributions of a two-dimensional (2D) gas of bosonic atoms with a Λ level scheme and rubidiumlike parameters: resonance wavelength 795 nm, $M=1.45 \times 10^{-25}$ kg, natural linewidth of the excited state $\Gamma/2\pi=6$ MHz. The harmonic trapping potential in the xy plane, including the scalar potential U , is isotropic with a trapping frequency $\omega/2\pi=40$ Hz and a ground state extension $a_{\text{ho}}=(\hbar/M\omega)^{1/2}=1.7 \mu\text{m}$. Atomic interactions are chosen such that $G=Na_s(8\pi M\omega_z/\hbar)^{1/2}=800$. The laser configuration is as sketched in Fig. 2, with $a=w=25a_{\text{ho}}$, $\Omega_0/\Gamma=280$, and $\delta/\Gamma=4 \times 10^5$. (a) Steady state distribution. (b)–(d) Distributions obtained after ramp durations of the second laser beam of (b) $50\omega^{-1}$, (c) $200\omega^{-1}$, and (d) $1000\omega^{-1}$.

evolution in imaginary time of the three coupled GPEs associated with the three internal atomic states. A typical result is shown in Fig. 3(a). We find that the atoms accumulate as expected in the noncoupled internal state $|\psi_0(\mathbf{r})\rangle$ while the population of states other than $|\psi_0\rangle$ is evanescent (fraction below 2×10^{-5} for the parameters of Fig. 3). Furthermore, the equilibrium c.m. distribution indeed exhibits a vortex lattice whose vortex density at the center is in good agreement with the prediction of Eq. (9). The slight asymmetry of the cloud shape stems from nonharmonic contributions to the scalar potential (7).

Vortex nucleation following the sudden application of a gauge field usually occurs through a turbulent phase which lasts a fraction of a second, followed by a relaxation to the ground state via a dissipative process [19–21]. Another possible route could be a smooth evolution from a no-vortex state to a state with vortices as the gauge field is slowly turned on. Usually this process is forbidden, at least at the mean-field level, because of the different parities of the initial and final states. However, the gauge field generated in the present scheme does not have any definite parity property and such a smooth evolution should in principle be possible. To test whether it can be implemented in practice, we assume that one laser beam is switched on first in order to lift the degeneracy between the two ground state levels. Once it has reached its full intensity, we ramp up linearly the intensity of

the second laser beam in an adjustable time T . Starting with a trapped gas in its ground state in the presence of one beam (a Bose-Einstein condensate without vortices), we propagate the wave function in real time using the GPEs. The resulting density distributions are shown in Fig. 3(bcd). For short ramp times $T \lesssim 200\omega^{-1}$ many vortices are situated around the border of the cloud but they have barely moved toward the center [see Figs. 3(b) and 3(c)]. For slower ramps [Fig. 3(d)] the final state looks closer to the expected ground state shown in Fig. 3(a), although the convergence is not perfect. We conclude that for these parameters the time scale for a smooth turn-on of the geometric potential must be longer than $1000\omega^{-1}$ (≈ 4 s for $\omega/2\pi=40$ Hz), which seems too long for a practical implementation. Probably vortex nucleation in these geometric potentials will be more easily achieved by following the same route as for a rotating trap, i.e., by suddenly applying the gauge field to a condensate at rest and by letting the cloud evolve to its new steady state through a transient turbulent phase [19–21].

The analytical derivation presented above for a three-level system can be straightforwardly extended to the case of a realistic atomic transition. Although the results remain qualitatively unchanged, it is instructive to identify some minor differences. First, unlike for a Λ system, the eigenstates of the atom-laser coupling are not “dark” in the sense that they all contain a nonzero admixture of the excited level. However, the residual photon scattering rate can be made very small. The parameters given in the caption of Fig. 3 lead to a scattering rate of 0.15 photons/s per atom, which is negligible on the time scale of a typical experiment. Second, we

note that the level scheme of Fig. 1(b) leads to some modifications of the geometric gauge field with respect to the Λ system. After optimization of the relative intensities of the σ_- - and π -polarized laser beams, one obtains that the effective magnetic field at the origin is multiplied by the factor $8J_g/(3\sqrt{3})$ with respect to the result (8). For the $J_g=1$ ground state of ^{87}Rb , for example, this leads to a 50% increase of the vortex density at the trap center.

In conclusion, we have proposed in this Rapid Communication a scheme to create a gauge field in a cold atomic gas with negligible heating due to photon scattering. We have also validated the adiabatic approximation from which this gauge field emerges by solving the set of coupled Gross-Pitaevskii equations associated with the atomic internal levels. In particular, the ground state of a trapped 2D Bose gas indeed contains several regularly arranged vortices, with the density predicted from the gauge field in the adiabatic approximation. The feasibility of our simple scheme should render possible an experimental observation of a light-induced magnetic field.

K.J.G. and S.P.R. acknowledge support from the EU (Contract No. IEF/219636) and from the German Academic Exchange Service (DAAD, Grant No. D/06/41156), respectively. This work is supported by Région Ile de France (IF-RAF), CNRS, the French Ministry of Research, ANR (projects Gascor and BOFL), and the EU project SCALA. Laboratoire Kastler Brossel is a Unité mixte de recherche of CNRS, Ecole Normale Supérieure, and Université Pierre et Marie Curie.

-
- [1] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
 - [2] H. L. Stormer, D. C. Tsui, and A. C. Gossard, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S298 (1999).
 - [3] A. L. Fetter, e-print arXiv:0801.2952, *Rev. Mod. Phys.* (to be published).
 - [4] R. Dum and M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1788 (1996).
 - [5] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **392**, 45 (1984).
 - [6] D. Jaksch and P. Zoller, *New J. Phys.* **5**, 56 (2003).
 - [7] G. Juzeliūnas and P. Öhberg, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 033602 (2004).
 - [8] E. J. Mueller, *Phys. Rev. A* **70**, 041603(R) (2004).
 - [9] A. S. Sørensen, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 086803 (2005).
 - [10] P. Zhang, Y. Li, and C. P. Sun, *Eur. Phys. J. D* **36**, 229 (2005).
 - [11] G. Juzeliūnas, P. Öhberg, J. Ruseckas, and A. Klein, *Phys. Rev. A* **71**, 053614 (2005).
 - [12] K. Osterloh, M. Baig, L. Santos, P. Zoller, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010403 (2005).
 - [13] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, P. Öhberg, and M. Fleischhauer, *Phys. Rev. A* **73**, 025602 (2006).
 - [14] M. Cheneau *et al.*, *Europhys. Lett.* **83**, 60001 (2008).
 - [15] S. K. Dutta, B. K. Teo, and G. Raithel, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1934 (1999).
 - [16] Y.-J. Lin *et al.*, e-print arXiv:0809.2976.
 - [17] E. Arimondo, *Prog. Opt.* **35**, 257354 (1996).
 - [18] D. R. Murray *et al.*, e-print arXiv:0709.0895.
 - [19] K. W. Madison, F. Chevy, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4443 (2001).
 - [20] M. Tsubota, K. Kasamatsu, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **65**, 023603 (2002).
 - [21] C. Lobo, A. Sinatra, and Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 020403 (2004).

Conclusion générale et perspectives

Les deux premières parties du présent manuscrit ont été consacrées au gaz de Bose bidimensionnel dans son état d'équilibre. L'étude de ce problème dans les assemblées d'atomes ultra-froids n'en est encore qu'à ses débuts. D'une certaine manière, on peut considérer que les observations présentées dans ce manuscrit, confrontées à celles réalisées au NIST (Cladé *et al.*, 2009), fournissent la preuve que la physique de la transition BKT est accessible dans les laboratoires de physique atomique. Cette transition a été en effet observée sans ambiguïté, avec mise en évidence directe des vortex responsables de la perte de superfluidité au-dessus du point critique. Le rôle du potentiel de confinement harmonique dans le plan transverse a également été clarifié, au moins de manière qualitative. La condensation de Bose-Einstein apparaît ainsi, pour un système de taille finie, comme un cas limite de la transition BKT, atteint lorsque la force des interactions entre atomes tend vers zéro. Enfin, la prise en compte de l'excitation résiduelle du mouvement axial dû à la température finie du système a nettement progressé ces deux dernières années et son effet sur les profils de densité est maintenant bien compris.

L'objectif affiché des expériences en cours est d'apporter des éléments nouveaux permettant de mieux décrire le gaz bidimensionnel. Le nouveau montage expérimental dont nous disposons, opérationnel depuis l'été 2008, nous offre les moyens de mener à bien ces travaux dans d'excellentes conditions. Le confinement axial y est réalisé par un potentiel optique, dont la forme exacte est façonnée de manière pratiquement arbitraire par optique de Fourier. Nous sommes ainsi en mesure de produire de manière bien contrôlée des gaz bidimensionnels dans différentes géométries, comme par exemple dans un plan unique ou dans des plans doubles. Ce piège optique est associé à un piège magnétique pour le confinement transverse. En variant l'ordre dans lequel nous éteignons ces deux pièges, nous pouvons ensuite observer les gaz, par le côté ou par le dessus, après différents types d'expansion libre, à une, deux ou trois dimensions. Chacune de ces expansions donne accès à des informations physiques différentes. Par exemple, les expansions unidimensionnelle et tridimensionnelle se caractérisent par une dynamique transverse pratiquement libre d'interactions, et permettent de remonter entre autres à la distribution d'impulsion initiale du gaz. À l'inverse, la nature des interactions joue un rôle important dans l'expansion bidimensionnelle. Par des mesures précises des profils de densité après une expansion de ce type, nous avons ainsi pu tester la validité de la modélisation des interactions par un potentiel de contact dans la région critique de la transition BKT. Une telle modélisation pose en principe des difficultés car elle engendre des divergences ultraviolettes dans la théorie, qui nécessitent l'introduction d'une coupure en énergie. Nos observations indiquent que dans les conditions expérimentales

actuelles, cette coupure n'affecte pas le comportement du système. Il s'agit là d'un premier résultat original, sur lequel les prochaines expériences pourront s'appuyer.

À l'heure où ces lignes sont écrites, notre équipe concentre ses travaux sur l'étude de la région critique de la transition BKT, encore mal décrite d'un point de vue théorique. Nous souhaitons tout d'abord vérifier la validité de l'approximation de densité locale dans ce régime. Celle-ci est en effet largement utilisée pour décrire le comportement du gaz piégé à partir de celui du gaz homogène. Si ce lien est possible, nous espérons ensuite extraire des profils de densité l'équation d'état du gaz dans la région critique. Ces questions seront traitées en détail dans la thèse de Steffen P. Rath et nous invitons le lecteur à s'y référer ultérieurement. La grande flexibilité de notre méthode de confinement axial nous permet également de songer à d'autres expériences, à réaliser à moyen terme. Dans un piège à deux plans, il devrait par exemple être possible de remonter au profil de phase complet dans le plan transverse en « démodulant » le signal que constitue la figure d'interférence atomique entre les nuages à l'aide d'une figure d'interférence lumineuse, de pas convenablement choisi. L'observation du profil de densité résultant révélerait alors directement l'information recherchée. Le potentiel axial à deux plans pourrait également nous offrir le moyen d'observer certains aspects dynamiques de la cohérence de phase. L'idée consiste à séparer à l'instant initial un condensat tridimensionnel en deux nuages de dimensionnalité réduite, tout en maintenant la cohérence de phase entre eux. Le système va ensuite relaxer vers un état incohérent, suivant une dynamique profondément marquée par la dimensionnalité (Burkov *et al.*, 2007). Nous envisageons d'observer cette dynamique singulière à deux dimensions en mesurant la moyenne statistique du contraste de la figure d'interférence, comme cela a été réalisé par Hofferberth *et al.* (2007) à une dimension.

Nous avons dédié la troisième et dernière partie de ce manuscrit aux potentiels géométriques et à leurs manifestations dans un gaz d'atomes ultra-froids. Le couplage avec un champ laser est apparu comme un moyen particulièrement adapté à la génération d'un champ magnétique artificiel. D'un point de vue pratique tout d'abord, il offre naturellement deux échelles de variations spatiales très différentes liées à la phase et à l'amplitude du champ laser, ce qui permet d'obtenir des champs magnétiques importants et relativement homogènes. La large panoplie de techniques à la disposition des expérimentateurs n'impose que peu de contraintes de mise en œuvre ; de nombreuses géométries devraient ainsi être expérimentalement réalisables. Un autre atout des potentiels géométriques induits par couplage avec un champ laser est l'interprétation claire de leur action en termes des processus radiatifs élémentaires. Nous avons montré en effet que les forces qui dérivent des potentiels vecteurs, force de Lorentz et gradient du potentiel scalaire, peuvent être exprimées simplement en termes de la force dipolaire et de la force de pression de radiation. On peut ainsi penser que l'intuition acquise en optique quantique « traditionnelle » sera directement profitable.

Nous espérons générer prochainement dans l'équipe un champ magnétique fictif dans un gaz de Bose dégénéré bidimensionnel et observer les vortex induits par ce champ. Pour cela, nous avons mis au point un schéma de réalisation expérimentale bien adapté aux conditions expérimentales qui sont celles des atomes froids. Son principe est inspiré de celui de Juzeliūnas *et al.* (2006) : l'état interne d'un atome alcalin est placé dans une superposition cohérente des états du multiplet fondamental par

couplage Raman avec deux faisceaux laser ; l'état interne dépend de la position de l'atome par l'intermédiaire de la phase et de l'amplitude du champ électrique. Notre schéma se distingue des propositions publiées jusqu'alors car il prend en compte la structure interne complète de l'atome alcalin. La proximité des niveaux hyperfins est potentiellement néfaste car elle rend difficile l'excitation de manière quasi-résonante d'une transition spécifique. Or le couplage résiduel aux niveaux voisins se traduirait par un taux d'émission spontanée incompatible avec la production d'un état cohérent. Pour remédier à ce problème, nous avons considéré un désaccord des faisceaux laser comparable à la structure fine. Nous avons montré qu'il est alors possible d'induire un champ magnétique important tout en gardant un taux d'émission spontanée négligeable.

Nous avons également effectué des simulations numériques afin de déterminer l'état fondamental d'un gaz en interaction dans ce schéma de couplage. La particularité de cette simulation est de n'avoir pas supposé a priori le suivi adiabatique de l'état interne, dont dérivent les potentiels géométriques. Nous avons pu ainsi vérifier que l'état fondamental contient bien des vortex, disposés régulièrement sur un réseau triangulaire. Leur nombre, 5 à 10, est également compatible avec ce que l'on peut attendre par analogie avec la supraconductivité. Enfin, nous avons appliqué le même algorithme afin d'étudier la possibilité de passer adiabatiquement d'un état sans vortex à un état avec vortex, en branchant successivement les deux faisceaux laser. Nous avons observé la possibilité d'un tel passage, mais sur des temps si longs qu'il semble difficile de le mettre en œuvre en pratique. Le recours à la méthode « classique » de nucléation des vortex en passant par une phase turbulente semble donc nécessaire. L'ensemble de ces résultats nous rend optimistes quant à la prochaine observation expérimentale de vortex induits par un champ magnétique artificiel. Elle constituerait une superbe illustration des possibilités nouvelles offertes par les potentiels géométriques pour explorer dans les systèmes d'atomes froids des propriétés longtemps réservées aux systèmes de matière condensée.

Il existe d'autres types de propositions pour générer des potentiels géométriques. [Goldman *et al.* \(2009\)](#) en ont établi la liste et donnent de chacun une description succincte. Un certain nombre d'entre elles concernent des atomes dans un réseau optique bidimensionnel ([Jaksch et Zoller, 2003](#); [Mueller, 2004](#); [Sørensen *et al.*, 2005](#)). L'idée consiste à contrôler l'effet tunnel de telle sorte qu'un atome décrivant une boucle autour d'une cellule élémentaire du réseau acquiert une phase de Berry. Sous réserve de vérifier le rôle joué par les interactions, cette méthode pourrait s'avérer prometteuse pour atteindre des régimes fortement corrélés.

Tous les champs de jauge auxquels nous avons fait référence jusqu'à présent sont abéliens, c'est-à-dire qu'ils relèvent d'une symétrie $U(1)$. Si le sous-espace dans lequel évolue l'état interne des atomes consiste en un multiplet dégénéré de dimension N , le champ de jauge impliqué par le couplage entre l'état interne et l'état externe relève de la symétrie $U(N)$ ([Wilczek et Zee, 1984](#)). La plupart des méthodes permettant de créer des champs de jauge abéliens peuvent être généralisées afin de créer des champs de jauge non abéliens ([Ruseckas *et al.*, 2005](#); [Osterloh *et al.*, 2005](#); [Goldman *et al.*, 2009](#)), ouvrant un vaste terrain d'exploration, tant théorique qu'expérimental.

Bibliographie

- J. R. ABO-SHAEER, C. RAMAN, J. M. VOGELS et W. KETTERLE : Observation of Vortex Lattices in Bose–Einstein Condensates. *Science*, 292(5516):476–479, 2001.
- Y. AHARONOV et A. STERN : Origin of the Geometric Forces Accompanying Berry’s Geometric Potentials. *Physical Review Letters*, 69(25):3593–3597, 1992.
- M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL : Observation of Bose–Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- M. R. ANDREWS, C. G. TOWNSEND, H.-J. MIESNER, D. S. DURFEE, D. M. KURN et W. KETTERLE : Observation of Interference Between Two Bose Condensates. *Science*, 275(5300):637–641, 1997.
- E. ARIMONDO : Coherent population trapping in laser spectroscopy. In E. WOLF, éditeur : *Progress in Optics*, volume 35, chapitre 5, page 259. Elsevier, Amsterdam, 1996.
- V. S. BAGNATO et D. KLEPPNER : Bose–Einstein condensation in low-dimensional traps. *Physical Review A*, 44(11):7439–7441, 1991.
- M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOACHIM, C. CHIN, J. HECKER-DENSCHLAG et R. GRIMM : Crossover from a Molecular Bose–Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas. *Physical Review Letters*, 92(12):120401, 2004.
- B. BATTELIER : *Gaz bidimensionnel de bosons ultrafroids. Nouvelle expérience de condensation de Bose–Einstein*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2007. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00180679/en/>.
- V. L. BEREZINSKII : Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems possessing a continuous symmetry group. - II. Quantum systems. *Soviet Physics, Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 34(1):610–616, 1972.
- K. BERGMANN, H. THEUER et B. W. SHORE : Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):1003–1025, 1998.
- M. V. BERRY : Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society A*, 392(1802):45–57, 1984.

- R. K. BHADURI, S. M. REIMANN, S. VIEFERS, A. GHOSE CHOUDHURY et M. K. SRIVASTAVA : The effect of interactions on Bose–Einstein condensation in a quasi two-dimensional harmonic trap. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 33(19):3895–3903, 2000.
- D. J. BISHOP et J. D. REPPY : Study of the Superfluid Transition in Two-Dimensional ^4He Films. *Physical Review Letters*, 40(26):1727–1730, 1978.
- R. N. BISSET, M. J. DAVIS, T. P. SIMULA et P. B. BLAKIE : Quasicondensation and coherence in the quasi-two-dimensional trapped Bose gas. *Physical Review A*, 79(3):033626, 2009.
- I. BLOCH, J. DALIBARD et W. ZWERGER : Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):885–964, 2008.
- I. BLOCH, T. W. HÄNSCH et T. ESSLINGER : Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition. *Nature*, 403(6766):166–170, 2000.
- N. N. BOGOLIUBOV : On the theory of superfluidity. *Journal of Physics (USSR)*, 11:23, 1947.
- A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU et J. ZWANZIGER : *The Geometric Phase in Quantum Systems*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, 2003.
- M. BORN et R. OPPENHEIMER : Zur Quantentheorie der Molekeln. *Annalen der Physik*, 389(20):457–484, 1927.
- T. BOURDEL, L. KHAYKOVICH, J. CUBIZOLLES, J. ZHANG, F. CHEVY, M. TEICHMANN, L. TARRUELL, S. J. J. M. F. KOKKELMANS et C. SALOMON : Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in Lithium 6. *Physical Review Letters*, 93(5):050401, 2004.
- C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT et R. G. HULET : Evidence of Bose–Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions. *Physical Review Letters*, 75(9):1687–1690, 1995.
- S. T. BRAMWELL et P. C. W. HOLDSWORTH : Magnetization : A characteristic of the Kosterlitz–Thouless–Berezinskii transition. *Physical Review B*, 49(13):8811–8814, 1994.
- S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, C. FORT, P. MADDALONI, F. MINARDI et M. INGUSCIO : Quasi-2D Bose–Einstein condensation in an optical lattice. *Europhysics Letters*, 57(1):1–6, 2002.
- A. A. BURKOV, M. D. LUKIN et E. A. DEMLER : Decoherence Dynamics in Low-Dimensional Cold Atom Interferometers. *Physical Review Letters*, 98(20):200404, 2007.
- P. CARRUTHERS et M. NIETO : Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 40(2):411–440, 1968.

- Y. CASTIN : Exact scaling transform for a unitary quantum gas in a time dependent harmonic potential. *Comptes Rendus Physique*, 5(3):407–410, 2004.
- Y. CASTIN et R. DUM : Bose–Einstein Condensation in Time Dependent Traps. *Physical Review Letters*, 77(27):5315–5319, 1996.
- M. CHENEAU, S. P. RATH, T. YEFSAH, K. J. GÜNTER, G. JUZELIŪNAS et J. DALIBARD : Geometric potentials in quantum optics : A semi-classical interpretation. *Europhysics Letters*, 83(6):60001, 2008.
- C. CHIN, M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, J. HECKER-DENSCHLAG et R. GRIMM : Observation of the Pairing Gap in a Strongly Interacting Fermi Gas. *Science*, 305(5687):1128, 2004.
- P. CLADÉ, C. RYU, A. RAMANATHAN, K. HELMERSON et W. D. PHILLIPS : Observation of a 2D Bose Gas : From Thermal to Quasicondensate to Superfluid. *Physical Review Letters*, 102(17):170401, 2009.
- C. COHEN-TANNOUJDI : Théorie quantique du cycle de pompage optique. Vérification expérimentale des nouveaux effets prévus. (Thèse d’État). *Annales de physique*, 7:423 & 469, 1962.
- C. COHEN-TANNOUJDI : Atomic motion in laser light. In J. DALIBARD, J.-M. RAIMOND et J. ZINN-JUSTIN, éditeurs : *Fundamental Systems in Quantum Optics*, pages 1–164. Les Houches summer school session LIII, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- C. COHEN-TANNOUJDI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG : *Processus d’interaction entre photons et atomes*. Savoirs actuels. EDP Sciences/CNRS Éditions, 2ème édition, 2001.
- Y. COLOMBE, E. KNYAZCHYAN, O. MORIZOT, B. MERCIER, V. LORENT et H. PERRIN : Ultracold atoms confined in rf-induced two-dimensional trapping potentials. *Europhysics Letters*, 67(4):593–599, 2004.
- N. R. COOPER, N. K. WILKIN et J. M. F. GUNN : Quantum Phases of Vortices in Rotating Bose–Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 87(12):120405, 2001.
- J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUJDI : Atomic motion in laser light : connection between semiclassical and quantum descriptions. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 18(8):1661–1683, 1985.
- J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUJDI : Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models. *Journal of the Optical Society of America B*, 6(11):2023, 1989.
- K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. van DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN et W. KETTERLE : Bose–Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Physical Review Letters*, 75(22):3969–3973, 1995.
- I. H. DEUTSCH et P. S. JESSEN : Quantum-state control in optical lattices. *Physical Review A*, 57(3):1972–1986, 1998.

- R. DUM et M. OLSHANII : Gauge Structures in Atom-Laser Interaction : Bloch Oscillations in a Dark Lattice. *Physical Review Letters*, 76(11):1788–1791, 1996.
- S. K. DUTTA, B. K. TEO et G. RAITHEL : Tunneling Dynamics and Gauge Potentials in Optical Lattices. *Physical Review Letters*, 83(10):1934–1937, 1999.
- R. P. FEYNMAN : Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium. In C. J. GORTER, éditeur : *Progress in Low Temperature Physics*, volume 1, chapitre 2, pages 17–53. Elsevier, Amsterdam, 1955.
- D. S. FISHER et P. C. HOHENBERG : Dilute Bose gas in two dimensions. *Physical Review B*, 37(10):4936–4943, 1988.
- J. I. GILLEN, W. S. BAKR, A. PENG, P. UNTERWADITZER, S. FÖLLING et M. GREINER : Two-dimensional quantum gas in a hybrid surface trap. *Physical Review A*, 80(2):021602, 2009.
- V. L. GINZBURG et L. D. LANDAU : Theory of superconductivity. *Soviet Physics, Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 20:1064, 1950.
- N. GOLDMAN, A. KUBASIAK, P. GASPARD et M. LEWENSTEIN : Ultracold atomic gases in non-Abelian gauge potentials : The case of constant Wilson loop. *Physical Review A*, 79(2):023624, 2009.
- J. P. GORDON et A. ASHKIN : Motion of atoms in a radiation trap. *Physical Review A*, 21(5):1606–1617, 1980.
- A. GÖRLITZ, J. M. VOGELS, A. E. LEANHARDT, C. RAMAN, T. L. GUSTAVSON, J. R. ABO-SHAER, A. P. CHIKKATUR, S. GUPTA, S. INOUE, T. ROSENBERG et W. KETTERLE : Realization of Bose–Einstein Condensates in Lower Dimensions. *Physical Review Letters*, 87(13):130402, 2001.
- M. GREINER, I. BLOCH, T. W. HÄNSCH et T. ESSLINGER : Magnetic transport of trapped cold atoms over a large distance. *Physical Review A*, 63(3):031401, 2001.
- M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH et I. BLOCH : Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415(6867):39–44, 2002.
- R. GRIMM, M. WEIDEMÜLLER et Yu. B. OVCHINNIKOV : Optical Dipole Traps for Neutral Atoms. In B. BEDERSON et H. WALTHER, éditeurs : *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, volume 42, pages 95–170. Academic Press, 2000.
- E. P. GROSS : Structure of quantized vortex. *Il Nuovo Cimento*, 20:454, 1961.
- K. J. GÜNTER, M. CHENEAU, T. YEFSAH, S. PATRICK RATH et J. DALIBARD : A practical scheme for a light-induced gauge field in an atomic Bose gas. *Physical Review A*, 79(1):011604(R), 2009.
- Z. HADZIBABIC, P. KRÜGER, M. CHENEAU, B. BATTELIER et J. DALIBARD : Berezinskii–Kosterlitz–Thouless crossover in a trapped atomic gas. *Nature*, 441(7097):1118, 2006.

- Z. HADZIBABIC, P. KRÜGER, M. CHENEAU, S.P. RATH et J. DALIBARD : The trapped two-dimensional Bose gas : from Bose–Einstein condensation to Berezinskii-Kosterlitz-Thouless physics. *New Journal of Physics*, 10:045006, 2008.
- Z. HADZIBABIC, S. STOCK, B. BATTELIER, V. BRETIN et J. DALIBARD : Interference of an Array of Independent Bose–Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 93(18):180403, 2004.
- S. E. HARRIS : Electromagnetically Induced Transparency. *Physics Today*, 50(7):36, 1997.
- G. HERZBERG et H. C. LONGUET-HIGGINS : Intersection of potential energy surfaces in polyatomic molecules. *Discussions of the Faraday Society*, 35:77–82, 1963.
- T.-L. HO et V. B. SHENOY : Local Spin-Gauge Symmetry of the Bose–Einstein Condensates in Atomic Gases. *Physical Review Letters*, 77(13):2595–2599, 1996.
- S. HOFFERBERTH, I. LESANOVSKY, B. FISCHER, T. SCHUMM et J. SCHMIEDMAYER : Non-equilibrium coherence dynamics in one-dimensional Bose gases. *Nature*, 449(7160):324–327, 2007.
- P. C. HOHENBERG : Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions. *Physical Review*, 158(2):383–386, 1967.
- M. HOLZMANN : *non publié*, 2008.
- M. HOLZMANN, G. BAYM, J.-P. BLAIZOT et F. LALOË : Superfluid transition of homogeneous and trapped two-dimensional Bose gases. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(5):1476–1481, 2007.
- M. HOLZMANN, M. CHEVALLIER et W. KRAUTH : Semiclassical theory of the quasi two-dimensional trapped gas. *Europhysics Letters*, 82(3):30001, 2008.
- M. HOLZMANN et W. KRAUTH : Kosterlitz-Thouless Transition of the Quasi-Two-Dimensional Trapped Bose Gas. *Physical Review Letters*, 100(19):190402, 2008.
- D. JAKSCH, C. BRUDER, J. I. CIRAC, C. W. GARDINER et P. ZOLLER : Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices. *Physical Review Letters*, 81(15):3108–3111, 1998.
- D. JAKSCH et P. ZOLLER : Creation of effective magnetic fields in optical lattices : the Hofstadter butterfly for cold neutral atoms. *New Journal of Physics*, 5:56.1–56.11, 2003.
- G. JUZELIŪNAS et P. ÖHBERG : Slow Light in Degenerate Fermi Gases. *Physical Review Letters*, 93(3):033602, 2004.
- G. JUZELIŪNAS, P. ÖHBERG, J. RUSECKAS et A. KLEIN : Effective magnetic fields in degenerate atomic gases induced by light beams with orbital angular momenta. *Physical Review A*, 71(5):053614, 2005.
- G. JUZELIŪNAS, J. RUSECKAS, P. ÖHBERG et M. FLEISCHHAUER : Light-induced effective magnetic fields for ultracold atoms in planar geometries. *Physical Review A*, 73(2):025602, 2006.

- Yu. KAGAN, V. A. KASHURNIKOV, A. V. KRASAVIN, N. V. PROKOF'EV et B. V. SVISTUNOV : Quasicondensation in a two-dimensional interacting Bose gas. *Physical Review A*, 61(4):043608, 2000.
- Yu. KAGAN, E. L. SURKOV et G. V. SHLYAPNIKOV : Evolution of a Bose gas under variations of the confining potential. *Physical Review A*, 54(3):R1753–R1756, 1996.
- Yu. KAGAN, B. V. SVISTUNOV et G. V. SHLYAPNIKOV : Influence on inelastic processes of the phase transition in a weakly collisional two-dimensional Bose gas. *Soviet Physics, Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 66(1):314–323, 1987.
- J. W. KANE et L. P. KADANOFF : Long-Range Order in Superfluid Helium. *Physical Review*, 155(1):80–83, 1967.
- W. KETTERLE, K. B. DAVIS, M. A. JOFFE, A. G. MARTIN et D. E. PRITCHARD : High-Densities of Cold Atoms in a Dark Spontaneous-Force Optical Trap. *Physical Review Letters*, 70(15):2253–2256, 1993.
- J. M. KOSTERLITZ : The critical properties of the two-dimensional xy model. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 7(6):1046–1060, 1974.
- J. M. KOSTERLITZ et D. J. THOULESS : Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids. (Application of dislocation theory). *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 5(11):L124–L126, 1972.
- J. M. KOSTERLITZ et D. J. THOULESS : Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 6(7):1181–1203, 1973.
- P. KRÜGER, Z. HADZIBABIC et J. DALIBARD : Critical Point of an Interacting Two-Dimensional Atomic Bose Gas. *Physical Review Letters*, 99(4):040402, 2007.
- A. J. LEGGETT : Cooper pairing in spin-polarized fermi systems. *Le Journal de Physique Colloques*, 41(C7):19–26, 1980.
- P. D. LETT, R. N. WATTS, C. I. WESTBROOK, W. D. PHILLIPS, P. L. GOULD et H. J. METCALF : Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit. *Physical Review Letters*, 61(2):169–172, 1988.
- M. LEWENSTEIN, A. SANPERA, V. AHUFINGER, B. DAMSKI, A. SEN(DE) et U. SEN : Ultracold atomic gases in optical lattices : mimicking condensed matter physics and beyond. *Advances in Physics*, 56(2):243, 2007.
- Y.-J. LIN, R. L. COMPTON, K. JIMENEZ-GARCIA, J. V. PORTO et I. B. SPIELMAN : Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms. *Nature*, 462(7273):628–632, 2009a.
- Y.-J. LIN, R. L. COMPTON, A. R. PERRY, W. D. PHILLIPS, J. V. PORTO et I. B. SPIELMAN : Bose–Einstein Condensate in a Uniform Light-Induced Vector Potential. *Physical Review Letters*, 102(13):130401, 2009b.

- C. LOBO, A. SINATRA et Y. CASTIN : Vortex Lattice Formation in Bose–Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 92(2):020403, 2004.
- K. W. MADISON, F. CHEVY, V. BRETIN et J. DALIBARD : Stationary States of a Rotating Bose–Einstein Condensate : Routes to Vortex Nucleation. *Physical Review Letters*, 86(20):4443–4446, 2001.
- K. W. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN et J. DALIBARD : Vortex Formation in a Stirred Bose–Einstein Condensate. *Physical Review Letters*, 84(5):806–809, 2000.
- P. MARTINOLI, Ph. LERCH, Ch. LEEMANN et H. BECK : Arrays of Josephson Junctions : Model Systems for Two-Dimensional Physics. *Japanese Journal of Applied Physics*, 26S3(Supplement 26-3-3):1999–2004, 1987.
- M. R. MATTHEWS, B. P. ANDERSON, P. C. HALJAN, D. S. HALL, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL : Vortices in a Bose–Einstein Condensate. *Physical Review Letters*, 83(13):2498–2501, 1999.
- C. A. MEAD : The molecular Aharonov–Bohm effect in bound states. *Chemical Physics*, 49(1):23–32, 1980.
- N. D. MERMIN : Crystalline Order in Two Dimensions. *Physical Review*, 176(1):250–254, 1968.
- N. D. MERMIN et H. WAGNER : Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models. *Physical Review Letters*, 17(22):1133–1136, 1966.
- A. MESSIAH : *Mécanique quantique*, volume 2 de *Les cours de référence*. Dunod, Paris, 2ème édition, 1995.
- P. MINNHAGEN : The two-dimensional Coulomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films. *Reviews of Modern Physics*, 59(4):1001–1066, 1987.
- J. MOODY, A. SHAPERRE et F. WILCZEK : *Adiabatic Effective Lagrangians*, pages 160–183. World Scientific, Singapore, 1989.
- C. MORA et Y. CASTIN : Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates. *Physical Review A*, 67(5):053615, 2003.
- E. J. MUELLER : Artificial electromagnetism for neutral atoms : Escher staircase and Laughlin liquids. *Physical Review A*, 70(4):041603, 2004.
- J. H. MÜLLER, O. MORSCH, D. CIAMPINI, M. ANDERLINI, R. MANNELLA et E. ARIMONDO : Atomic Micromotion and Geometric Forces in a Triaxial Magnetic Trap. *Physical Review Letters*, 85(21):4454–4457, 2000.
- D. R. NELSON et J. M. KOSTERLITZ : Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids. *Physical Review Letters*, 39(19):1201–1205, 1977.

- P. NOZIÈRES et J. SCHMITT-RINK : Bose condensation in an attractive fermion gas : From weak to strong coupling superconductivity. *Journal of Low Temperature Physics*, 59(3-4):195–211, 1985.
- K. OSTERLOH, M. BAIG, L. SANTOS, P. ZOLLER et M. LEWENSTEIN : Cold Atoms in Non-Abelian Gauge Potentials : From the Hofstadter "Moth" to Lattice Gauge Theory. *Physical Review Letters*, 95(1):010403, 2005.
- R. PEIERLS : Quelques propriétés typiques des corps solides. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 5(3):177–222, 1935.
- C. J. PETHICK et H. SMITH : *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2ème édition, 2008.
- W. PETRICH, M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER et E. A. CORNELL : A Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms. *Physical Review Letters*, 74(17):3352–3355, 1995.
- D. S. PETROV, D. M. GANGARDT et G. V. SHLYAPNIKOV : Low-dimensional trapped gases. In L. PRICOUPENKO, H. PERRIN et M. OLSHANII, éditeurs : *Quantum Gases in Low Dimensions*, volume 116 de *Journal de Physique IV (Proceedings)*, pages 5–44, Les Ulis, 2004. EDP Sciences.
- D. S. PETROV, M. HOLZMANN et G. V. SHLYAPNIKOV : Bose–Einstein Condensation in Quasi-2D Trapped Gases. *Physical Review Letters*, 84(12):2551–2555, 2000.
- D. S. PETROV et G. V. SHLYAPNIKOV : Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas. *Physical Review A*, 64(1):012706, 2001.
- L. P. PITAEVSKII : Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Soviet Physics, Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 13:451, 1961.
- L. P. PITAEVSKII et A. ROSCH : Breathing mode and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions. *Physical Review A*, 55(2):R853–R856, 1997.
- L. P. PITAEVSKII et S. STRINGARI : *Bose–Einstein Condensation*. Oxford University Press, 2003.
- A. POLKOVNIKOV, E. ALTMAN et E. A. DEMLER : Interference between independent fluctuating condensates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(16):6125–6129, 2006.
- V. N. POPOV : On the theory of the superfluidity of two- and one-dimensional Bose systems. *Theoretical and Mathematical Physics*, 11(3):565–573, 1972.
- V. N. POPOV : *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1983.
- N. V. PROKOF'EV, O. RUEBENACKER et B. V. SVISTUNOV : Critical Point of a Weakly Interacting Two-Dimensional Bose Gas. *Physical Review Letters*, 87(27):270402, 2001.

- L. REATTO et G. V. CHESTER : Phonons and the Properties of a Bose System. *Physical Review*, 155(1):88–100, 1967.
- C. A. REGAL, M. GREINER et D. S. JIN : Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs. *Physical Review Letters*, 92(4):040403, 2004.
- J. RUSECKAS, G. JUZELIŪNAS, P. ÖHBERG et M. FLEISCHHAUER : Non-Abelian Gauge Potentials for Ultracold Atoms with Degenerate Dark States. *Physical Review Letters*, 95(1):010404, 2005.
- D. RYCHTARIK, B. ENGESER, H.-C. NÄGERL et R. GRIMM : Two-Dimensional Bose–Einstein Condensate in an Optical Surface Trap. *Physical Review Letters*, 92(17):173003, 2004.
- A. I. SAFONOV, S. A. VASILYEV, I. S. YASNIKOV, I. I. LUKASHEVICH et S. JAAKKOLA : Observation of Quasicondensate in Two-Dimensional Atomic Hydrogen. *Physical Review Letters*, 81(21):4545–4548, 1998.
- V. SCHWEIKHARD, S. TUNG et E. A. CORNELL : Vortex Proliferation in the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless Regime on a Two-Dimensional Lattice of Bose–Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 99(3):030401, 2007.
- B. SIMON : Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry’s Phase. *Physical Review Letters*, 51(24):2167–2170, 1983.
- N. L. SMITH, W. H. HEATHCOTE, G. HECHENBLAIKNER, E. NUGENT et C. J. FOOT : Quasi-2D confinement of a BEC in a combined optical and magnetic potential. *Journal of Physics B*, 38(3):223–235, 2005.
- A. S. SØRENSEN, E. A. DEMLER et M. D. LUKIN : Fractional Quantum Hall States of Atoms in Optical Lattices. *Physical Review Letters*, 94(8):086803, 2005.
- S. STOCK, Z. HADZIBABIC, B. BATTELIER, M. CHENEAU et J. DALIBARD : Observation of Phase Defects in Quasi-Two-Dimensional Bose–Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 95(19):190403, 2005.
- C. G. TOWNSEND, N. H. EDWARDS, C. J. COOPER, K. P. ZETIE, C. J. FOOT, A. M. STEANE, P. SZRIFTGISER, H. PERRIN et J. DALIBARD : Phase-space density in the magneto-optical trap. *Physical Review A*, 52(2):1423–1440, 1995.
- M. TSUBOTA, K. KASAMATSU et M. UEDA : Vortex lattice formation in a rotating Bose–Einstein condensate. *Physical Review A*, 65(2):023603, 2002.
- P. M. VISSER et G. NIENHUIS : Geometric potentials for subrecoil dynamics. *Physical Review A*, 57(6):4581–4591, 1998.
- F. WERNER et Y. CASTIN : Unitary gas in an isotropic harmonic trap : Symmetry properties and applications. *Physical Review A*, 74(5):053604, 2006.
- F. WILCZEK et A. ZEE : Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems. *Physical Review Letters*, 52(24):2111–2114, 1984.

- N. K. WILKIN et J. M. F. GUNN : Condensation of "Composite Bosons" in a Rotating BEC. *Physical Review Letters*, 84(1):6–9, 2000.
- D. R. YARKONY : Diabolical conical intersections. *Reviews of Modern Physics*, 68(4):985–1013, 1996.
- P. ZHANG, Y. LI et C. P. SUN : Induced magnetic monopole from trapped λ -type atom. *The European Physical Journal D*, 36(2):229–233, 2005.
- M. W. ZWIERLEIN, J. R. ABO-SHAER, A. SCHIROTZEK, C. H. SCHUNCK et W. KETTERLE : Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas. *Nature*, 435(7045):1047–1051, 2005.
- M. W. ZWIERLEIN, C. A. STAN, C. H. SCHUNCK, S. M. F. RAUPACH, A. J. KERMAN et W. KETTERLE : Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance. *Physical Review Letters*, 92(12):120403, 2004.

Résumé

Le travail de thèse exposé dans ce manuscrit porte sur le gaz de Bose bidimensionnel. La première partie présente l'observation de la transition de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless dans un gaz de rubidium 87 ultra-froid, confiné dans un piège mixte magnétique et optique. La localisation précise du point critique et la confrontation des données expérimentales à un modèle théorique permettent de clarifier le rôle de l'excitation résiduelle du mouvement axial et l'influence du potentiel de confinement transverse. La deuxième partie décrit le nouveau montage expérimental, sur lequel les prochaines expériences auront lieu. Les premières observations réalisées sur celui-ci concernent l'expansion libre à deux dimensions d'un gaz de rubidium 87 bidimensionnel. Cette expansion se caractérise par une invariance d'échelle, qui révèle la nature des interactions entre atomes. La troisième partie illustre l'utilisation de potentiels géométriques dans un gaz neutre ultra-froid afin de simuler l'action d'un champ magnétique sur des particules chargées. Ces potentiels, associés à la notion de phase de Berry, peuvent être générés par couplage des atomes à un champ laser. Une proposition de réalisation expérimentale devant conduire à la nucléation de vortex est détaillée.

Mots-clé : condensation de Bose–Einstein ; dimension réduite ; superfluidité ; transition de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless ; vortex ; phase de Berry ; potentiels géométriques.

Abstract

This thesis manuscript is devoted to the two-dimensional Bose gas. The first part reports on the observation of the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless transition in a rubidium 87 ultracold gas confined in a combined magnetic and optical potential. The precise localisation of the critical point and the comparison of the data with a theoretical model lead to a better understanding of the role of both the transverse confining potential and the residual excitation of the axial motion. The second part describes a new experimental setup, with which the forthcoming experiments will be performed. The first observations on this setup concern the free expansion in two dimensions of a two-dimensional rubidium 87 gas. This expansion is characterised by a scaling law, which reveals the nature of the interactions between atoms. The third part explains the use of geometric potentials in a neutral ultracold gas to mimic the action of a magnetic field on charged particles. One can generate these potentials, which are associated with the concept of Berry phase, by coupling the atoms to a laser field. A proposal for an experimental realisation is detailed, which should lead to the nucleation of vortices.

Keywords: Bose–Einstein condensation; low dimension; superfluidity ; Berezinskii–Kosterlitz–Thouless transition; vortex; Berry phase; geometric potentials.