Quelques aspects de la positivité du fibré tangent des variétés projectives complexes

Matthieu Paris

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité Mathématiques

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée et soutenue publiquement par

Matthieu PARIS

le 14 décembre 2010

Quelques aspects de la positivité du fibré tangent des variétés projectives complexes

---

Thèse dirigée par Stéphane DRUEL, co-encadrée par Laurent BONAVERO

JURY

Marian APRODU	(Senior Researcher, Bucharest Institute of Math.)	Rapporteur
Laurent BONAVERO	(Enseignant en classes préparatoires, Lycée Champollion, Grenoble)	Examinateur
Stéphane DRUEL	(CR CNRS, Université Grenoble 1)	Directeur de thèse
Laurent MANIVEL	(DR CNRS, Université Grenoble 1)	Examinateur
Christophe MOUROUGANE	(Professeur, Université Rennes 1)	Examinateur
Matei TOMA	(Professeur, Université Nancy 1)	Rapporteur

Thèse préparée au sein de l'Institut Fourier, dans l'École Doctorale MSTII

Remerciements

Je veux tout d'abord remercier vivement mon directeur de thèse Stéphane Druel. Les nombreux conseils qu'il m'a donné tout au long de ces trois années m'ont été d'une aide extrêmement précieuse. C'est grâce à sa très grande disponibilité pour répondre à mes questions, et à son soutien indéfectible dans les moments difficiles que cette thèse a pu être menée à terme.

Malgré la date tardive à laquelle je leur ai remis le premier exemplaire, Marian Aprodu et Matei Toma ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je leur suis très reconnaissant de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Un grand merci également à Laurent Bonavero, Laurent Manivel et Christophe Mourougane, pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie en particulier Laurent Bonavero pour les échanges que l'on a eu au début de ma thèse, car ses conseils et encouragements m'ont beaucoup aidé pour la suite.

Enfin je remercie tous les membres de l'Institut Fourier, chercheurs comme personnels administatifs et techniques, grâce à qui j'ai pu préparer ma thèse dans d'excellentes conditions.

Table des matières

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des liens entre la positivité du fibré tangent d'une variété projective complexe et la géométrie de cette variété. On sait en effet que si l'on impose des hypothèses de positivité suffisamment fortes sur le fibré tangent, alors la variété sous-jacente est complètement déterminée. Commençons par rappeler deux résultats illustrant ce phénomène : le premier, répondant à une conjecture d'Hartshorne, a été démontré par Mori à la fin des années 70.

Théorème. *[Mo79] Soit X une variété projective complexe lisse. Si T_X est ample, alors $X \cong \mathbb{P}^n$.*

Le second résultat est également une caractérisation des espaces projectifs, dûe à Wahl quelques années plus tard.

Théorème. *[Wa83] Soit X une variété projective complexe lisse. Si T_X contient un sous-faisceau inversible ample L, alors ou bien $(X, L) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ avec $n \geq 1$, ou bien $(X, L) \cong (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$.*

Si on veut s'inscrire dans la lignée de ces deux résultats, il y a au moins deux directions à explorer. La première consiste à affaiblir l'hypothèse de positivité du théorème de Mori : on peut par exemple se demander si on peut caractériser les variétés dont le fibré tangent est nef. À la suite des travaux de Campana et Peternell ([CP91]), Demailly, Peternell et Schneider ([DPS94]) ont étudiés ces variétés. Ils montrent qu'une variété X ayant cette propriété admet un revêtement étale fini $\tilde{X} \to X$, tel que l'application d'Albanese $\tilde{X} \to \mathrm{Alb}(\tilde{X})$ soit une fibration lisse dont les fibres sont des variétés de Fano ayant un fibré tangent nef. Par conséquent il ne reste qu'à étudier le cas de ces variétés de Fano ayant un fibré tangent nef. Il est conjecturé que de telles variétés sont homogènes, et cette conjecture a été vérifiée en dimension ≤ 3. En revanche la question reste ouverte en dimensions supérieures.

On peut continuer ainsi en affaiblissant encore l'hypothèse de positivité, par exemple en supposant seulement le fibré tangent pseudo-effectif. C'est ce que font Demailly, Peternell et Schneider dans [DPS01], où ils obtiennent quelques résultats de structure, moins complets que ceux obtenus dans le cas nef : on donnera dans l'introduction à la première partie un aperçu de ces résultats. On dispose entre autres d'un début de classification des surfaces dont le fibré tangent est pseudo-effectif : si S est une telle surface, alors soit S admet un revêtement étale fini par une surface abélienne, soit S est rationnnelle, soit S est une surface réglée sur une courbe elliptique. L'objectif de la première partie de cette thèse sera d'apporter des compléments à cette classification. On montrera les deux théorèmes suivants.

Théorème. *On note $\mathbb{F}_m = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m))$ les surfaces de Hirzebruch ($m \geq 0$).*

1. *Soit S l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en r points généraux. Alors T_S est pseudo-effectif si et seulement si $r \leq 5$. Donc pour $m = 0$ ou $m = 1$, l'éclatement de $\mathbb{F}_m$ en r points généraux a un fibré tangent pseudo-effectif si et seulement si $r \leq 4$.*
2. *Soit S l'éclatement de $\mathbb{F}_m$ en r points généraux, avec $m \geq 2$.*
   - *Si $r \leq 3$, alors T_S est pseudo-effectif.*
   - *Si $r \geq 5$, alors T_S n'est pas pseudo-effectif.*

Théorème. *Soit C une courbe elliptique, et E un fibré vectoriel de rang 2 sur C. Si $S = \mathbb{P}(E)$, alors T_S est pseudo-effectif.*

La deuxième direction, qui est celle suivie dans la deuxième partie, a pour origine la conjecture de Beauville suivante, généralisant le théorème de Wahl : si pour un entier $p \geq 1$ la puissance extérieure p-ème du fibré tangent d'une variété projective complexe lisse contient la puissance p-ème d'un faisceau inversible ample, alors la variété est soit un espace projectif, soit une quadrique. Araujo, Druel et Kovács ont démontré dans [ADK08] que cette conjecture est vraie. Il est naturel de se demander si la conclusion reste vraie quand on remplace dans les hypothèses les puissances extérieures par des puissances tensorielles. On sait, toujours d'après [ADK08], que la réponse est positive sous l'hypothèse supplémentaire que le nombre de Picard de la variété est égal à 1. On montrera dans la deuxième partie de cette thèse que c'est toujours vrai sans faire d'hypothèse préalable sur le nombre de Picard. Le théorème principal de cette deuxième partie est donc le suivant.

Théorème. *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$, et L un fibré en droites ample sur X. Soit $p \geq 1$ un entier. On suppose que*

$$H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes L^{-p}) \neq 0.$$

Alors ou bien $(X, L) \cong (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$, ou bien $(X, L) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, ou bien $(X, L) \cong (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$, où $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ est une quadrique lisse de dimension n.

Passons maintenant aux conventions et notations utilisées tout au long de ce texte, les introductions aux parties I et II fourniront des renseignements plus précis sur les résultas démontrés dans cette thèse ainsi qu'un aperçu des méthodes employées.

Conventions et notations

On appellera variété un schéma séparé et réduit, de type fini sur $\mathbb{C}$. Une variété sera toujours supposé irréductible si le contraire n'est pas spécifié. Les courbes seront des schémas séparés et réduits, de type fini sur $\mathbb{C}$, de dimension 1, connexes mais pas nécessairement irréductibles. Si X est une variété et si $x \in X$ on notera $\mathbf{k}(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ le corps résiduel, et $K(X)$ le corps des fonctions de X. Par diviseur on entendra diviseur de Cartier, sauf mention du contraire. On confondra faisceaux localement libres et fibrés vectoriels. Si L est un fibré en droites on notera $L^p = L^{\otimes p}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Si E est un fibré vectoriel sur X, $\mathbb{P}(E)$ désignera le fibré projectif des hyperplans dans les fibres de E, autrement dit $\mathbb{P}(E) = \mathbf{Proj}(\mathrm{Sym}(E))$. On notera S^nE la n-ième puissance symétrique de E.

Première partie

Variétés dont le fibré tangent est pseudo-effectif

Introduction à la première partie

Si X est une variété projective, un diviseur sur X est dit pseudo-effectif si sa classe d'équivalence numérique appartient à l'adhérence du cône engendré par les classes de diviseurs effectifs de X. Un diviseur pseudo-effectif D est caractérisés par le fait que son ensemble base restreint $\mathbf{B}_-(D)$, qui est la réunion des ensembles base stables $\mathbf{B}(D+A)$ où A est un $\mathbb{Q}$-diviseur ample, ne recouvre pas la variété X. Dans [BDPP04], Boucksom, Demailly, Paŭn, et Peternell proposent de généraliser la définition de pseudo-effectivité à un fibré vectoriel de la façon suivante.

Définition. Soient E un fibré vectoriel sur une variété projective X, et $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ le fibré projectif associé à E. On dit que E est pseudo-effectif si le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est pseudo-effectif sur $\mathbb{P}(E)$, et si de plus $\pi(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))) \neq X$.

Intéressons nous maintenant aux variétés projectives X dont le fibré tangent est pseudo-effectif. Il est facile de voir qu'une telle variété vérifie $\kappa(X) \leq 0$. Dans le cas où $\kappa(X) = 0$, on peut montrer que le diviseur canonique de X est numériquement trivial, et Demailly, Peternell et Schneider démontrent dans [DPS01] le résultat suivant.

Proposition. *[DPS01, Proposition 6.11] Soit X une variété projective lisse avec T_X pseudo-effectif et $\kappa(X) \geq 0$. Alors il existe une variété abélienne A et un revêtement étale fini $A \to X$.*

Réciproquement, si on a un revêtement étale fini $A \to X$ avec A une variété abélienne, alors T_X est nef, donc pseudo-effectif.

Dans le cas où $\kappa(X) = -\infty$, on peut montrer que X est uniréglée. Toujours grâce à [DPS01], on sait de plus que l'application d'Albanese de X est surjective et lisse. Par conséquent, si on suppose que X est une surface, alors deux cas sont possibles : soit X est rationnelle, soit X est une surface réglée sur une courbe elliptique.

On se propose dans cette première partie d'affiner ce résultat, en se posant la question suivante : quelles sont, parmi les surfaces rationnelles et les surfaces réglées sur une courbe elliptique, celles dont le fibré tangent est pseudo-effectif ?

Une surface rationnelle est isomorphe à l'éclatement d'un nombre fini de points sur une surface de Hirzebruch. On ne peut pas espérer obtenir de résultat décrivant toutes les configurations de points éclatés, comme le montre l'exemple des éclatements de $\mathbb{P}^2$. En effet on verra que si $r \geq 6$, le fibré tangent de l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en

r points n'est pas pseudo-effectif si les points sont en position générale, alors qu'il l'est si les points sont alignés. C'est pourquoi on ne s'intéressera qu'aux éclatements de points en position générale. On démontre le résultat partiel suivant.

Théorème 1. *On note $\mathbb{F}_m = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m))$ les surfaces de Hirzebruch ($m \geq 0$).*

1. *Soit S l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en r points généraux. Alors T_S est pseudo-effectif si et seulement si $r \leq 5$. Donc pour $m = 0$ ou $m = 1$, l'éclatement de $\mathbb{F}_m$ en r points généraux a un fibré tangent pseudo-effectif si et seulement si $r \leq 4$.*
2. *Soit S l'éclatement de $\mathbb{F}_m$ en r points généraux, avec $m \geq 2$.*
   – *Si $r \leq 3$, alors T_S est pseudo-effectif.*
   – *Si $r \geq 5$, alors T_S n'est pas pseudo-effectif.*

La démonstration de ce théorème passe par l'étude des puissances symétriques du fibré tangent de S. En effet la pseudo-effectivité d'un fibré vectoriel est caractérisée de la manière suivante.

Proposition. *[BDPP04, Proposition 7.2] Soit E un fibré vectoriel sur une variété projective lisse X. Alors E est pseudo-effectif si et seulement s'il existe un point $x \in X$ et un fibré en droites ample H sur X tels que pour tout $n \geq 1$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que l'application d'évaluation des sections*

$$H^0(X, S^{kn}E \otimes H^k) \xrightarrow{ev_x} S^{kn}E \otimes H^k \otimes \mathbf{k}(x) \text{ soit surjective.}$$

Si $\pi : \tilde{X} \to X$ est l'éclatement d'un point sur une surface, on peut décrire de façon précise les conditions d'annulation au voisinage du point éclaté qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'une section globale de S^nT_X induise une section globale de $S^nT_{\tilde{X}}$. Cette description permet, dans les cas où l'on éclate quelques points sur une surface, de construire de façon explicite suffisamment de sections de $S^nT_{\tilde{X}}$ pour en déduire que $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif. Quand le nombre de points éclatés augmente, ces conditions d'annulation deviennent plus fortes et ceci permet de montrer dans certains cas que $T_{\tilde{X}}$ n'est plus pseudo-effectif.

Après l'étude des surfaces rationnelles, on traite le cas des surfaces réglées sur une courbe elliptique. On obtient le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit C une courbe elliptique, et E un fibré vectoriel de rang 2 sur C. Si $S = \mathbb{P}(E)$, alors T_S est pseudo-effectif.*

L'idée permettant d'établir ce résultat est de construire des sections de S^nT_S par la méthode suivante : si $\Lambda = \pi_1(C)$ est le groupe fondamental de C et si $p : V \to C$ est son revêtement universel, on peut voir S comme le quotient de $V \times \mathbb{P}^1$ par une action de Λ. On identifie alors les sections de S^nT_S avec les sections de $S^nT_{V\times\mathbb{P}^1}$ invariantes sous l'action de Λ. Une construction explicite de telles sections permet d'obtenir une minoration de $h^0(S, S^nT_S)$. Par ailleurs, si on note $\pi : S \to C$ l'application naturelle, alors la suite exacte

$$0 \to T_{S/C} \to T_S \to \pi^*T_C \to 0$$

définit une section σ de la projection naturelle $\mathbb{P}(T_S) \to S$. Si on note Z son image, alors on peut voir que T_S est pseudo-effectif si et seulement si $\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1))$ ne contient pas Z, ce qui est équivalent à ce que l'ordre d'annulation asymptotique de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ le long de Z soit nul. Or il est possible de calculer cet ordre d'annulation asymptotique grâce à la minoration de $h^0(S, S^nT_S)$ évoquée ci-dessus, ce qui permet de conclure.

Contenu des chapitres

Le premier chapitre est composé principalement de rappels sur les ensembles bases restreints, les diviseurs et fibrés vectoriels pseudo-effectifs : on donnera leur définitions et principales propriétés. À la fin du chapitre on illustre par des exemples le fait que la pseudo-effectivité d'un fibré vectoriel n'a pas de bonnes propriétés vis à vis des déformations de la variété sous-jacente.

Dans le chapitre 2, on commence par rappeler quelques résultats concernant les variétés dont le fibré tangent est pseudo-effectif, avant de passer à l'étude des puissances symétriques du fibré tangent d'un éclatement de centre lisse. On montre au passage que dans un éclatement $\tilde{X} \to X$, si $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif alors T_X l'est aussi.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des surfaces dont le fibré tangent est pseudo-effectif. On utilise d'abord les résultats obtenus dans le chapite 2 pour démontrer le théorème 1. On termine par la démonstration du théorème 2.

Chapitre 1

Diviseurs et fibrés vectoriels pseudo-effectifs

Dans ce chapitre on rappelle les définitions et principales propriétés des ensembles bases restreints, ainsi que des diviseurs et fibrés vectoriels pseudo-effectifs. Enfin on donnera des exemples montrant que la propriété de pseudo-effectivité se comporte mal vis à vis des déformations de la variété sous-jacente.

1.1 Ensemble base restreint

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1. Si D est un diviseur sur une variété projective X, on note $\mathrm{Bs}\,|D| = \bigcap_{D' \in |D|} \mathrm{Supp}(D')$ l'ensemble base du système linéaire $|D|$, avec la convention que $\mathrm{Bs}\,|D| = X$ si $|D| = \emptyset$.

L'ensemble base n'est pas invariant par multiplication par un entier, c'est pourquoi on introduit l'ensemble base stable, qui lui aura cette propriété.

Définition 1.1.2. Soit D un diviseur sur une variété projective X. L'ensemble base stable de D est

$$\mathbf{B}(D) = \bigcap_{m \geq 1} \mathrm{Bs}\,|mD|$$

La proposition qui suit explique pourquoi $\mathbf{B}(D)$ est appelé ensemble base stable.

Proposition 1.1.3. *[La04, Proposition I.2.1.21] L'ensemble base stable $\mathbf{B}(D)$ est l'unique élément minimal de la famille $\{\mathrm{Bs}\,|mD|\}_{m \geq 1}$. De plus il existe un entier m_0 tel que*

$$\mathbf{B}(D) = \mathrm{Bs}\,|km_0D| \quad \forall k >> 0$$

La deuxième partie de cet énoncé entraîne immédiatement que $\mathbf{B}(D) = \mathbf{B}(pD)$ pour tout entier $p \geq 1$, ce qui permet de définir l'ensemble base stable d'un $\mathbb{Q}$-diviseur D : on choisit un entier $p \geq 1$ tel que pD soit un diviseur entier et on pose $\mathbf{B}(D) = \mathbf{B}(pD)$. Cela ne dépend pas de l'entier $p \geq 1$ choisi.

Remarque 1.1.4. L'ensemble base stable n'est pas un invariant numérique du diviseur : il existe des exemples de diviseurs nefs et grands numériquement équivalents mais avec des ensembles base stables différents (*cf* [La04, Example II.10.3.3]). Pour résoudre ce problème on peut définir l'ensemble base restreint.

Définition 1.1.5. Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur sur une variété projective X. L'ensemble base restreint de D est

$$\mathbf{B}_{-}(D) = \bigcup_{A} \mathbf{B}(D + A)$$

où la réunion porte sur l'ensemble des $\mathbb{Q}$-diviseurs amples A sur X.

Remarque 1.1.6. On reprend ici la terminologie de [ELMNP03]. Dans [BDPP04] cet ensemble est appelé lieu non-nef de D. On verra plus loin qu'un diviseur a un ensemble base restreint vide si et seulement s'il est nef, et qu'un diviseur admet la variété toute entière pour ensemble base restreint si et seulement s'il n'est pas pseudo-effectif.

Contrairement à l'ensemble base stable, l'ensemble base restreint ne dépend que de la classe d'équivalence numérique du diviseur.

Proposition 1.1.7. *[ELMNP03, Proposition 1.15.ii] Si D_1 et D_2 sont des $\mathbb{Q}$-diviseurs numériquement équivalents alors $\mathbf{B}_{-}(D_1) = \mathbf{B}_{-}(D_2)$.*

On ne sait pas si l'ensemble base restreint d'un diviseur est fermé en général. Cependant, c'est une réunion au plus dénombrable de fermés d'après la proposition suivante.

Proposition 1.1.8. *[ELMNP03, Proposition 1.19] Soient D un $\mathbb{Q}$-diviseur sur une variété projective X, et H un diviseur ample sur X. Alors*

$$\mathbf{B}_{-}(D) = \bigcup_{n \geq 1} \mathbf{B}(nD + H)$$

En particulier, $\mathbf{B}_{-}(D)$ est une réunion au plus dénombrable de fermés de X.

Dans le cas où D est un diviseur associé au fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$, où E est un fibré vectoriel sur X, on a la description suivante de l'ensemble base restreint de D.

Proposition 1.1.9. *Soient E un fibré vectoriel sur une variété projective X, et H un $\mathbb{Q}$-diviseur ample sur X. Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ le fibré projectif associé à E et D un diviseur sur $\mathbb{P}(E)$ associé au fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. Alors*

$$\mathbf{B}_{-}(D) = \bigcup_{A} \mathbf{B}(D + \pi^* A) = \bigcup_{n \geq 1} \mathbf{B}(nD + \pi^* H)$$

où la première réunion est prise sur l'ensemble des $\mathbb{Q}$-diviseurs amples A sur X.

Démonstration. Notons $\mathbf{B}_1 = \bigcup_A \mathbf{B}(D + \pi^* A)$ et $\mathbf{B}_2 = \bigcup_{n\geq 1} \mathbf{B}(nD + \pi^* H)$. L'inclusion $\mathbf{B}_2 \subset \mathbf{B}_1$ est claire.

Si A est un $\mathbb{Q}$-diviseur ample sur X alors il existe un entier $m \geq 2$ tel que $H := D + m\pi^* A$ soit ample sur $\mathbb{P}(E)$, car D est π-ample. On a alors :

$$\mathbf{B}(D + \pi^* A) = \mathbf{B}(mD + m\pi^* A) = \mathbf{B}((m-1)D + H) = \mathbf{B}(D + \frac{1}{m-1}H),$$

ce qui prouve que $\mathbf{B}(D + \pi^* A) \subset \mathbf{B}_-(D)$, d'où l'inclusion $\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_-(D)$.

Enfin pour la dernière inclusion $\mathbf{B}_-(D) \subset \mathbf{B}_2$, il suffit d'observer que si on choisit un diviseur H ample sur X tel que $\tilde{H} := D + \pi^* H$ soit ample sur $\mathbb{P}(E)$, alors d'après (1.1.8)

$$\mathbf{B}_-(D) = \bigcup_{n\geq 1} \mathbf{B}(nD + \tilde{H}) = \bigcup_{n\geq 1} \mathbf{B}((n+1)D + \pi^* H)$$

□

Le résultat suivant explique dans une certaine mesure l'appellation de «lieu non-nef» pour désigner $\mathbf{B}_-(D)$.

Proposition 1.1.10. *[BDPP04, Theorem 6.2] Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur sur une variété projective X. Alors $\mathbf{B}_-(D)$ contient toutes les courbes irréductibles $C \subset X$ telles que $D \cdot C < 0$.*

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 1.1.11. *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur sur une variété projective X. On a l'équivalence suivante :*

$$\mathbf{B}_-(D) = \emptyset \iff D \textit{ est nef}$$

Remarque 1.1.12. L'inclusion réciproque de (1.1.10) :

$$\mathbf{B}_-(D) \subset \bigcup_{D\cdot C<0} C$$

est fausse en général. Il existe un exemple d'un diviseur D sur une surface S, et d'une courbe irréductible $C \subset S$ tels que $D \cdot C > 0$ et $C \subset \mathbf{B}_-(D)$ (*cf* [BDPP04, Remark 6.3]).

1.1.2 Liens avec l'ordre d'annulation asymptotique

On introduit ici la notion d'ordre d'annulation asymptotique d'un diviseur le long d'une sous-variété, qui permet de donner une description alternative de l'ensemble base restreint d'un $\mathbb{Q}$-diviseur grand sur une variété lisse.

Étant donnée une sous-variété Z d'une variété projective lisse X, on note ν_Z la valuation discrète sur le corps des fonctions $K(X)$ qui donne l'ordre d'annulation le long de Z. Si D est un diviseur sur X et si m est un entier tel que $|mD| \neq \emptyset$, on note $\nu_Z(|mD|) := \nu_Z(f)$, où f est une équation d'un élément général de $|mD|$ au point générique de Z. On a alors la propriété suivante :

Lemme 1.1.13. *[ELMNP03, Lemma 2.1] Si m et n sont deux entiers tels que $|mD| \neq \emptyset$ et $|nD| \neq \emptyset$, alors*

$$\nu_Z(|(m+n)D|) \leq \nu_Z(|mD|) + \nu_Z(|nD|)$$

Ce lemme assure l'existence de la limite dans la définition suivante.

Définition 1.1.14. Soit D un diviseur grand sur X. L'ordre d'annulation asymptotique de D le long de Z est

$$\nu_Z(||D||) = \lim_{m \to \infty} \frac{\nu_Z(|mD|)}{m}$$

Remarque 1.1.15. On a pour tout entier m : $\nu_Z(||mD||) = m \cdot \nu_Z(||D||)$, donc on peut étendre de façon naturelle la définition à des $\mathbb{Q}$-diviseurs.

Avec cette définition on peut décrire l'ensemble base restreint d'un $\mathbb{Q}$-diviseur grand de la manière suivante.

Proposition 1.1.16. *[ELMNP03, Proposition 2.8] Soit X une variété projective lisse, et D un $\mathbb{Q}$-diviseur grand sur X. Alors pour toute sous-variété Z de X, on a l'équivalence suivante :*

$$Z \subset \mathbf{B}_-(D) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu_Z(||D||) > 0$$

Remarque 1.1.17. On peut étendre la notion d'ordre d'annulation asymptotique à un diviseur pseudo-effectif, et la proposition ci-dessus est encore vraie (*cf* [Na04]).

1.2 Diviseurs pseudo-effectifs

1.2.1 Définitions

On rappelle ici les notions de diviseurs pseudo-effectifs, presque nefs, et génériquement nefs. On expliquera le lien entre ces trois notions par la suite.

Définition 1.2.1. Soit X une variété projective. On note $\mathrm{N}^1(X)$ le groupe de Néron-Severi de X constitué des classes d'équivalence numérique de diviseurs sur X, et $\mathrm{N}^1(X)_\mathbb{R} = \mathrm{N}^1(X) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. On note $\mathrm{Big}(X) \subset \mathrm{N}^1(X)_\mathbb{R}$ le cône convexe constitué des classes de $\mathbb{R}$-diviseurs grands sur X.

Le cône pseudo-effectif

$$\overline{\mathrm{Eff}}(X) \subset \mathrm{N}^1(X)_{\mathbb{R}}$$

est l'adhérence du cône convexe $\mathrm{Eff}(X)$ engendré par les classes d'équivalence numérique des $\mathbb{R}$-diviseurs effectifs. Un $\mathbb{R}$-diviseur est dit pseudo-effectif si sa classe est dans $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$.

Définition 1.2.2. Soit X une variété projective. Un diviseur D est dit presque nef s'il existe une famille dénombrable $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-variétés propres de X telle que $D \cdot C \geq 0$ pour toute courbe irréductible C non contenue dans $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Définition 1.2.3. Soit X une variété projective. Un diviseur D est dit génériquement nef si pour tous diviseurs amples $H_1, \ldots, H_{n-1}$, on a $D \cdot H_1 \cdots H_{n-1} \geq 0$

1.2.2 Propriétés

On rappelle ici des propriétés connues des diviseurs pseudo-effectifs. La première est que le cône pseudo-effectif est l'adhérence du cône des diviseurs grands, et le cône des diviseurs grands est l'intérieur du cône pseudo-effectif.

Proposition 1.2.4. *[La04, Proposition I.2.2.26] Soit X une variété projective.*

$$\mathrm{Big}(X) = \mathrm{int}\left(\overline{\mathrm{Eff}}(X)\right) \quad , \quad \overline{\mathrm{Eff}}(X) = \overline{\mathrm{Big}(X)}$$

Les diviseurs pseudo-effectifs peuvent être caractérisés de la façon suivante.

Proposition 1.2.5. *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur sur une variété projective X. Alors D est pseudo-effectif si et seulement si pour tout $\mathbb{Q}$-diviseur ample (ou grand) H, et pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $knD + kH$ soit un diviseur entier et*

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(knD + kH)) \neq 0$$

Démonstration. Si D est pseudo-effectif et si H est ample (ou grand), alors la proposition 1.2.4 entraîne que $nD+H$ est grand pour tout $n \geq 1$. En particulier il existe $k \geq 1$ tel que $knD + kH$ soit un diviseur entier et $H^0(X, \mathcal{O}_X(k(nD + H))) \neq 0$. Réciproquement, si cette condition est satisfaite, alors la classe de $D + \frac{1}{n}H$ dans $\mathrm{N}^1(X)_{\mathbb{R}}$ appartient au cône $\mathrm{Eff}(X)$ pour tout $n \geq 1$, donc la classe de D est dans son adhérence $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$. $\square$

On peut donc caractériser la pseudo-effectivité d'un diviseur par son ensemble base restreint.

Corollaire 1.2.6. *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur sur une variété projective X. Alors D est pseudo-effectif si et seulement si $\mathbf{B}_-(D) \neq X$.*

Démonstration. Soit H un diviseur ample sur X. Alors d'après (1.1.8),

$$\mathbf{B}_{-}(D) = X \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \geq 1, \quad \forall k \geq 1, \quad \mathrm{Bs}\,|knD + kH| = X$$

Or par définition $\mathrm{Bs}\,|knD+kH| = X$ signifie que $H^0(X, \mathcal{O}_X(knD+kH)) = 0$, donc (1.2.5) permet de conclure. □

Boucksom, Demailly, Paŭn et Peternell ont montré que le cône des courbes dual du cône pseudo-effectif est le cône des courbes mobiles au sens de la définition suivante.

Définition 1.2.7. Soit X une variété projective de dimension n. Une courbe C est dite mobile si elle appartient à une famille couvrante de courbes $(C_t)_{t\in T}$, c'est à dire qu'il existe une variété projective T telle que $X = \bigcup_{t\in T} C_t$, avec C_t est irréductible pour $t \in T$ général.
Le cône $\overline{\mathrm{Mob}}(X) \subset N_1(X)_{\mathbb{R}}$ est le cône convexe fermé engendré par toutes les classes de courbes mobiles.

Théorème 1.2.8. *[BDPP04, Theorem 2.2] Soit X une variété projective lisse. Alors les cônes $\overline{\mathrm{Mob}}(X)$ et $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ sont duaux.*

Corollaire 1.2.9. *Soit X une variété projective lisse. Un diviseur D est presque nef si et seulement s'il est pseudo-effectif.*

Démonstration. Si D est pseudo-effectif, alors $\mathbf{B}_{-}(D)$ est une une réunion dénombrable de sous-variétés propres de X telle que $D \cdot C \geq 0$ pour toute courbe irréductible C non contenue dans $\mathbf{B}_{-}(D)$, d'après (1.1.10). Donc D est presque nef. Réciproquement, si D est presque nef, alors $D \cdot C \geq 0$ pour toute courbe mobile C, donc D est pseudo-effectif d'après (1.2.8). □

Remarque 1.2.10. Un diviseur pseudo-effectif est génériquement nef, mais la réciproque est fausse : on déduit l'existence d'un diviseur génériquement nef et non pseudo-effectif de [DPS96, Example 4.8].

1.3 Fibrés vectoriels pseudo-effectifs

On peut étendre les notions introduites précédemment à des fibrés vectoriels de rang quelconque.

Définition 1.3.1. Soient E un fibré vectoriel sur une variété projective X, et $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ le fibré projectif associé à E . On dit que E est pseudo-effectif si le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est pseudo-effectif sur $\mathbb{P}(E)$, et si de plus $\pi(\mathbf{B}_{-}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))) \neq X$.

Remarque 1.3.2. En fait la première condition est une conséquence de la deuxième d'après (1.2.6).

Définition 1.3.3. Soit E un fibré vectoriel sur une variété projective X. E est dit presque nef s'il existe une famille dénombrable (A_i) de sous-variétés propres de X telle que $E|_C$ soit nef pour toute courbe irréductible C non contenue dans $\bigcup_i A_i$.

Remarque 1.3.4. De façon équivalente, E est presque nef si et seulement s'il n'existe pas de famille couvrante de courbes (C_t) telle que $E|_{C_t}$ soit non-nef pour t général.

Remarque 1.3.5. On peut définir également une notion de fibré vectoriel génériquement nef (voir [Pe08]).

Présentons maintenant quelques propriétés des fibrés vectoriels pseudo-effectifs et presque nef. On commence par une caractérisation des fibrés vectoriels pseudo-effectifs.

Proposition 1.3.6. *[BDPP04, Proposition 7.2] Soient E un fibré vectoriel sur une variété projective lisse X. Alors E est pseudo-effectif si et seulement s'il existe un point $x \in X$ et un fibré en droites ample H sur X tels que pour tout $n \geq 1$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que l'application d'évaluation des sections*

$$H^0(X, S^{kn}E \otimes H^k) \xrightarrow{ev_x} S^{kn}E \otimes H^k \otimes \mathbf{k}(x) \text{ soit surjective.}$$

Démonstration. Ce résultat est démontré dans [BDPP04] par des méthodes analytiques ; on en donne ici une démonstration algébrique.

On note d la dimension de X, r le rang du fibré E, $\pi : Y = \mathbb{P}(E) \to X$ la projection canonique, et D un diviseur tel que $\mathcal{O}_Y(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$.

On suppose qu'il existe un fibré en droites ample H sur X et un point $x \in X$, tels que pour tout $n \geq 1$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que l'application $H^0(X, S^{kn}E \otimes H^k) \to S^{kn}E \otimes H^k \otimes \mathbf{k}(x)$ soit surjective. Comme $S^{kn}E = \pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn)$, ceci est équivalent à dire que l'application de retriction des sections

$$H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn) \otimes \pi^*H^k) \longrightarrow H^0(f_x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn) \otimes \pi^*H^k\big|_{f_x})$$

est surjective, en notant $f_x = \pi^{-1}(x)$. De plus $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn) \otimes \pi^*H^k\big|_{f_x} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn)|_{f_x}$ est engendré par ses sections globales donc pour tout $y \in f_x$ l'application d'évaluation des sections

$$H^0(f_x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn) \otimes \pi^*H^k)\big|_{f_x}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn) \otimes \pi^*H^k \otimes \mathbf{k}(y)$$

est surjective. Par conséquent l'application obtenue en composant les deux précédentes :

$$H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn) \otimes \pi^*H^k) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn) \otimes \pi^*H^k \otimes \mathbf{k}(y)$$

est surjective, ce qui prouve que $y \notin \mathrm{Bs}\left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(kn) \otimes \pi^*H^k\right|$. On en déduit que $f_x \cap \mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) = \emptyset$, donc E est pseudo-effectif.

Réciproquement, on suppose que E est pseudo-effectif. Il existe alors une fibre f de π telle que $f \cap \mathbf{B}_-(D) = \emptyset$. On choisit A' un diviseur ample sur X tel que $D + \pi^*A'$ soit ample sur Y, et on pose $A := p(D + \pi^*A')$ avec $p \geq 1$ un entier suffisamment grand pour que le faisceau $\mathcal{O}_Y(A) \otimes \mathcal{I}_f$ soit engendré par ses sections globales. Étant donné $n \geq 1$, on a pour tout entier $k \geq 1$

$$f \cap \mathbf{B}(knD + A) = \emptyset$$

donc il existe un entier $m \geq 1$ tel que $f \cap \mathrm{Bs}\,|m(knD + A)| = \emptyset$. On notera dans la suite $V := Y \setminus \mathrm{Bs}\,|m(knD + A)|$.

On considère maintenant $\mu : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ l'éclatement de f, et on note F le diviseur exceptionnel de μ. Soient $\widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_{d+1}} \in |\mu^*A - F|$ des diviseurs généraux, et $A_i = \mu_*(\widetilde{A_i}) \in |A|$. On prend G un élément général du système linéaire $|m(knD + A)|$, et on pose $B := \frac{d}{d+1}(A_1 + \cdots + A_{d+1}) + \frac{n-1}{mn}G$. On va voir que si $\mathcal{I}(B)$ désigne l'idéal multiplicateur associé à B, alors

$$\mathcal{I}(B)|_V = \mathcal{I}_f|_V \tag{1.1}$$

Admettons pour l'instant cette égalité, et voyons comment on en déduit le résultat. On a :

$$B = \frac{d}{d+1}(A_1 + \cdots + A_{d+1}) + \frac{n-1}{mn}G \equiv_{\mathrm{lin}} dA + \frac{n-1}{n}(knD + A),$$

donc

$$B \equiv_{\mathrm{lin}} k(n-1)D + (d + \frac{n-1}{n})A.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(knD + k\pi^*A') - K_Y - B \quad &\equiv_{\mathrm{lin}} \quad knD + k\pi^*A' - K_Y - k(n-1)D - (d + \tfrac{n-1}{n})A \\ &\equiv_{\mathrm{lin}} \quad \left[k - (d + \tfrac{n-1}{n})p\right](D + \pi^*A') - K_Y.\end{aligned}$$

Si on prend k suffisamment grand, $(knD + k\pi^*A') - K_Y - B$ est donc ample, ce qui permet d'affirmer d'après le théorème d'annulation de Nadel (*cf* [La04, Theorem II.9.4.8]) que :

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y(knD + k\pi^*A') \otimes \mathcal{I}(B)) = 0, \quad \forall i > 0.$$

En particulier, l'application naturelle

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(knD + k\pi^*A')) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(knD + k\pi^*A') \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}(B))$$

est surjective. Comme $f \subset V$, l'égalité (1.1) entraîne que le sous-schéma de Y défini par $\mathcal{I}(B)$ admet f pour composante connexe, donc $H^0(f, \mathcal{O}_Y(knD + k\pi^*A')|_f)$ est facteur direct de $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(knD + k\pi^*A') \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}(B))$. Ceci entraîne la surjectivité de l'application suivante :

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(knD + k\pi^*A')) \longrightarrow H^0(f, \mathcal{O}_Y(knD + k\pi^*A')|_f)$$

En posant $x = \pi(f)$ et $H = \mathcal{O}_X(A')$ on en déduit la surjectivité de l'application

$$H^0(X, S^{kn}E \otimes H^k) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} S^{kn}E \otimes H^k \otimes \mathbf{k}(x)$$

Il reste à démontrer l'égalité (1.1). On note $\tilde{V} = \mu^{-1}(V)$. On a choisi le diviseur A de sorte que $\mathcal{O}_Y(A) \otimes \mathcal{I}_f$ soit engendré par ses sections globales, donc le système linéaire $|\mu^*A - F|$ est sans point base. D'après [La04, Lemma II.9.1.9], comme $\widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_{d+1}} \in |\mu^*A - F|$ sont des diviseurs généraux, le diviseur $F + \widetilde{A_1} + \cdots + \widetilde{A_{d+1}}$ est à croisements normaux simples. De même G est un élément général du système linéaire $|m(knD + A)|$, qui est sans point base dans l'ouvert V, donc le diviseur $F + \mu^*G + \widetilde{A_1} + \cdots + \widetilde{A_{d+1}}$ est à croisements normaux simples dans l'ouvert $\tilde{V}$. Ceci prouve que $\mu : \tilde{V} \to V$ est une log-résolution de $B|_V$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(B)|_V &= \mu_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}\left(K_{\tilde{V}/V} - \lfloor \mu^*(B|_V) \rfloor\right) \\
&= \mu_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}\left((d-1)F|_{\tilde{V}} - \left\lfloor \tfrac{d}{d+1}(\widetilde{A_1} + \cdots + \widetilde{A_{d+1}} + (d+1)F) + \tfrac{n-1}{mn}\mu^*G \right\rfloor\Big|_{\tilde{V}}\right) \\
&= \mu_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}\left(-F|_{\tilde{V}}\right) \qquad \left(\text{ car } \tfrac{d}{d+1} < 1 \text{ et } \tfrac{n-1}{mn} < 1\right) \\
&= \mathcal{I}_f|_V
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.7. On en déduit que si E est pseudo-effectif, la propriété suivante est vraie pour tout fibré en droites grand L sur X.

$$\exists x \in X,\ \forall n \geq 1,\ \exists k \geq 1, \quad H^0(X, S^{kn}E \otimes L^k) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} S^{kn}E \otimes L^k \otimes \mathbf{k}(x) \text{ est surjective}$$

En effet, si H est le fibré en droite ample de l'énoncé, il existe un diviseur effectif N, et un entier $m \geq 1$ tels que $L^m = H \otimes \mathcal{O}_X(N)$ (*cf* [La04, Corollary I.2.2.7]). On a donc une injection pour tous $k, n \geq 1$:

$$H^0(X, S^{knm}E \otimes H^k) \hookrightarrow H^0(X, S^{knm}E \otimes L^{km})$$

Soit $n \geq 1$. Comme E est pseudo-effectif, il existe $k \geq 1$ et $x \in X$ tels que l'application suivante soit surjective :

$$H^0(X, S^{knm}E \otimes H^k)) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} S^{knm}E \otimes H^k \otimes \mathbf{k}(x)$$

Cette propriété étant toujours vraie au voisinage de x, on peut toujours supposer que $x \notin \mathrm{Supp}(N)$. Dans ce cas le morphisme naturel $H \to L^m$ induit un isomorphisme $S^{knm}E \otimes H^k \otimes \mathbf{k}(x) \cong S^{knm}E \otimes L^{km} \otimes \mathbf{k}(x)$, ce qui entraîne facilement le résultat.

Remarque 1.3.8. Un fibré vectoriel pseudo-effectif est presque nef. Cependant, contrairement au cas des fibrés en droites, on ne sait pas si la réciproque est vraie ou fausse. A priori, un fibré presque nef ne possède que la propriété suivante, plus faible que la propriété (1.3.6).

Proposition 1.3.9. *[BDPP04, Corollary 7.4] Soient E un fibré vectoriel sur une variété projective lisse X, et H un fibré en droites grand sur X. Si E est presque nef, alors $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est pseudo-effectif, donc pour tout $n \geq 1$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que :*

$$H^0(X, S^{kn}E \otimes H^k) \neq 0$$

Démonstration. Si E est presque nef, alors pour toute famille couvrante (C_t) de courbes sur $\mathbb{P}(E)$ on a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \cdot C_t \geq 0$, donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est pseudo-effectif d'après (1.2.8). La suite de l'énoncé est une conséquence de (1.2.5). □

On note enfin les deux propriétés suivantes.

Proposition 1.3.10. *[DPS01, Theorem 6.7.a] Soit E un fibré vectoriel sur une variété projective lisse X. Si E est presque nef (respectivement pseudo-effectif), alors pour tout $m \geq 1$, $\bigotimes^m E$, $S^m E$ et $\bigwedge^m E$ sont presque nefs (respectivement pseudo-effectifs).*

1.4 Pseudo-effectivité et déformations

On s'intéresse maintenant au comportement par déformation de la propriété, pour un fibré vectoriel, d'être pseudo-effectif.

1.4.1 Le cas d'un fibré en droites

Proposition 1.4.1. *Soit $f : X \to T$ un morphisme projectif plat entre variétés, et L un fibré en droites sur X. Pour $t \in T$ on pose*

$$X_t = f^{-1}(t) \quad , \quad L_t = L_{|X_t}$$

Si L_0 n'est pas pseudo-effectif pour un $0 \in T$ donné, alors il existe une réunion dénombrable $B \subset T$ de fermés ne contenant pas 0, telle que L_t ne soit pas pseudo-effectif pour tout $t \in T \setminus B$. Autrement dit l'ensemble des $t \in T$ tels que L_t soit pseudo-effectif est réunion au plus dénombrable de fermés de T.

Démonstration. Soit H un fibré en droites ample sur X. Comme L_0 n'est pas pseudo-effectif, d'après 1.2.5 il existe un entier $n \geq 1$ tel que pour tout entier $k \geq 1$ on ait :

$$H^0(X_0, L_0^{kn} \otimes H_0^k) = 0$$

Donc d'après le théorème de semi-continuité ([Ha77, Theorem III.12.8]) il existe pour tout k un ouvert U_k tel que

$$\forall t \in U_k \quad , \quad H^0(X_t, L_t^{kn} \otimes H_t^k) = 0$$

On en déduit que pour tout $t \in \bigcap_{k \geq 1} U_k$, L_t n'est pas pseudo-effectif car :

$$\forall k \geq 1 \quad , \quad H^0(X_t, L_t^{kn} \otimes H_t^k) = 0$$

Il suffit donc pour conclure de poser $B = \bigcup_{k \geq 1} T \setminus U_k$. □

La propriété d'être pseudo-effectif n'est pas une propriété ouverte : il est possible de construire une famille de fibrés en droites L_t sur des variétés X_t, paramétrées disons par une courbe T, telle que L_0 soit pseudo-effectif pour un point spécial $0 \in T$, alors que L_t n'est pas pseudo-effectif pour $t \in T$ général, comme le montre l'exemple suivant (construit à partir de [La04, Example I.2.2.13]).

Exemple 1.4.2. Soit $S \subset \mathbb{P}^2$ un ensemble fini de points. Soient $\pi_S : X_S \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ le long de S, E_S le diviseur exceptionnel, et $H_S = \pi_S^*(d)$ où $d \subset \mathbb{P}^2$ est une droite. On pose $D_S = 2H_S - E_S$.

Si on suppose que les points de S sont tous alignés, alors $D_S - H_S = H_S - E_S$ est effectif, ce qui entraîne que D_S est grand, donc pseudo-effectif.

Par ailleurs, si on suppose que les points de S sont en position générale et en nombre suffisamment grand, alors pour tout $m \geq 1$, il n'existe aucune courbe de degré $3m$ ayant une multiplicité plus grande que m en chacun des points de S. On en déduit que D_S n'est pas pseudo-effectif. En effet, pour tout $m \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(m(D_S + H_S)) &= H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(3mH_S - mE_S)) \\ &= H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3m) \otimes \mathcal{I}_S^m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et ceci est suffisant d'après 1.2.5

1.4.2 Le cas général

Si l'on s'intéresse cette fois à un fibré vectoriel de rang plus grand, la proposition (1.4.1) n'est plus valable, comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 1.4.3. On a la suite exacte suivante sur $\mathbb{P}^1$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \to 0$$

Les extensions de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ sont paramétrées par

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) \cong \mathbb{C}$$

On en déduit qu'il existe une famille de fibrés vectoriels E_t sur $\mathbb{P}^1$, paramétrée par $\mathbb{C}$, telle que $E_0 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, et telle que $E_t \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ pour $t \neq 0$.

Or $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ est nef, donc pseudo-effectif, alors que $E_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ ne l'est pas. En effet si on note S l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en un point, et D le diviseur exceptionnel, alors $\mathbb{P}(E_0)$ est isomorphe à S, et *via* cet isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_0)}(1) \cong \mathcal{O}_S(D)$, donc $\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_0)}(1)) = \mathrm{Supp}(D)$. Si on note $\pi : \mathbb{P}(E_0) \to \mathbb{P}^1$ la projection canonique, on a donc $\pi\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_0)}(1))\right) = \mathbb{P}^1$, donc E_0 n'est pas pseudo-effectif.

La leçon à tirer de ces exemples est que l'on ne pourra pas utiliser des arguments de déformation pour déterminer si une variété a un fibré tangent pseudo-effectif : en effet si on a une famille $(X_t)_{t \in T}$ et qu'on a des informations sur la pseudo-effectivité de T_{X_t} pour t général, on ne pourra en tirer aucune conclusion sur la pseudo-effectivité de T_{X_0} pour un $0 \in T$ spécial. En particulier lorsqu'on étudiera les éclatements de surfaces rationnelles en des points en position générale, cela ne nous dira rien sur les éclatements en des points en position spéciale.

Chapitre 2

Pseudo-effectivité du fibré tangent d'une variété

Dans ce chapitre on commence par rappeler quelques propriétés générales des variétés dont le fibré tangent est pseudo-effectif, avant d'aborder le problème des éclatements : si $\pi : \tilde{X} \to X$ est un éclatement, il est naturel de se demander s'il existe un lien entre la pseudo-effectivité de T_X et la pseudo-effectivité de $T_{\tilde{X}}$. Pour répondre à cette question, on fait le lien entre les sections de $S^n T_{\tilde{X}}$ et celles de $S^n T_X$. Les résultats obtenus seront utilisés dans le chapitre suivant pour étudier les éclatements de surfaces rationnelles.

2.1 Variétés dont le fibré tangent est pseudo-effectif : propriétés générales

On présente ici quelques propriétés des variétés dont le fibré tangent est pseudo-effectif. On renvoie le lecteur aux articles [DPS01] et [BDPP04] pour plus de détails.

Rappelons pour commencer un résultat à propos des variétés dont le diviseur anticanonique est génériquement nef.

Théorème 2.1.1. *[De01, Theorem 3.10] Soit X une variété projective lisse avec $-K_X$ génériquement nef. Alors*
- *soit K_X est numériquement trivial,*
- *soit X est uniréglée.*

Si on considère maintenant une variété projective lisse X dont le fibré tangent est pseudo-effectif, alors d'après (1.3.10), le diviseur anticanonique de X est pseudo-effectif, donc génériquement nef. On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.2. *Soit X une variété projective lisse avec T_X pseudo-effectif. Alors*
- *soit K_X est numériquement trivial,*
- *soit X est uniréglée.*

Dans le premier cas, on a dans [DPS01] une description plus précise.

Proposition 2.1.3. *[DPS01, Proposition 6.11] Soit X une variété projective lisse avec T_X presque nef et K_X numériquement trivial. Alors il existe une variété abélienne A et un revêtement étale fini $A \to X$.*

Pour l'étude du deuxième cas, il est intéressant d'avoir des informations sur l'application d'Albanese de X.

Proposition 2.1.4. *[DPS01, Proposition 6.15(a)] Soit X une variété projective lisse avec T_X presque nef. Alors l'application d'Albanese de X est surjective et lisse.*

Enfin on note la propriété suivante.

Proposition 2.1.5. *[DPS01, Proposition 6.15(b)] Soit X une variété projective lisse avec T_X presque nef, et $f : X \to Y$ un morphisme surjectif vers une variété projective. Alors $\kappa(Y) \leq 0$.*

2.2 Étude des éclatements de centre lisse et cas des surfaces

On considère X une variété projective lisse, et $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement d'une sous-variété lisse Z. On étudie ici des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une section globale de $S^n T_X$ se relève en une section globale de $S^n T_{\tilde{X}}$. On commence par introduire les notations qui seront utilisées tout au long de cette section.

2.2.1 Notations

Soit X une variété projective lisse, et $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement d'une sous-variété lisse Z. Soient $p : \mathbb{P}(T_{\tilde{X}}) \to \tilde{X}$, $q : \mathbb{P}(\pi^* T_X) \to \tilde{X}$ et $r : \mathbb{P}(T_X) \to X$ les applications naturelles. On note $\psi : \mathbb{P}(\pi^* T_X) \to \mathbb{P}(T_X)$ le morphisme naturel tel que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(1) = \psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1)$. On alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(T_{\tilde{X}}) \arrow[dr, "p"'] & \mathbb{P}(\pi^* T_X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{P}(T_X) \arrow[d, "r"] \\
& \tilde{X} \arrow[r, "\pi"] & X
\end{tikzcd}$$

On définit un morphisme de faisceaux sur $\mathbb{P}(\pi^* T_X)$

$$\alpha : q^* T_{\tilde{X}} \to q^* \pi^* T_X \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(1)$$

où la première flèche est obtenue en appliquant q^* à la différentielle de π, et la deuxième flèche est la surjection canonique. A partir de α on obtient un morphisme

$$q^* T_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}$$

dont l'image est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}$, que l'on notera $\mathcal{I}$.

Remarque 2.2.1. Si E est le diviseur exceptionnel de π, alors la différentielle $\mathrm{d}\,\pi$ est un isomorphisme au dessus de $\tilde{U} := \tilde{X} \setminus E$, donc induit un isomorphisme entre $q^{-1}(\tilde{U})$ et $p^{-1}(\tilde{U})$. Autrement dit, la différentielle de π induit une application birationnelle

$$\mathbb{P}(\pi^* T_X) \overset{\varphi}{\dashrightarrow} \mathbb{P}(T_{\tilde{X}})$$

Le sous-ensemble fermé de $\mathbb{P}(\pi^* T_X)$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ n'est autre que le lieu où cette application rationnelle n'est pas définie.

Soit $\varepsilon : Y \to \mathbb{P}(\pi^* T_X)$ l'éclatement de $\mathcal{I}$. On notera D le diviseur exceptionnel de ε.

A partir de $\alpha : q^* T_{\tilde{X}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(1)$, on obtient un morphisme surjectif de faisceaux sur Y

$$\varepsilon^* q^* T_{\tilde{X}} \longrightarrow \varepsilon^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(1) \otimes \varepsilon^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$$

qui permet de définir un morphisme $f : Y \to \mathbb{P}(T_{\tilde{X}})$ prenant place dans le diagramme commmutatif suivant (*cf* [Ha77, Proposition II.7.12]).

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
\mathbb{P}(T_{\tilde{X}}) \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{P}(\pi^* T_X) \arrow[ll, dashed, "\varphi"'] \arrow[dl, "q"] \\
 & \tilde{X} &
\end{tikzcd}$$

et tel que

$$f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1) = \varepsilon^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(1) \otimes \varepsilon^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y \tag{2.1}$$

On a finalement le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \\
\mathbb{P}(T_{\tilde{X}}) \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{P}(\pi^* T_X) \arrow[ll, dashed, "\varphi"'] \arrow[dl, "q"] \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}(T_X) \arrow[d, "r"] \\
 & \tilde{X} \arrow[rr, "\pi"] & & X
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.2.2. Pour tout $n \geq 1$ on a les isomorphismes suivants.

$$\begin{aligned}
H^0(\tilde{X}, S^n T_{\tilde{X}}) &\cong H^0(\mathbb{P}(T_{\tilde{X}}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(n)) \\
&\cong H^0(Y, f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(n)) \\
&\cong H^0(Y, \epsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(n) \otimes (\epsilon^{-1}\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_Y)^{\otimes n}) \\
&\cong H^0(\mathbb{P}(\pi^*T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(n) \otimes \mathcal{I}^n) \\
&\cong H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n) \otimes \psi_*\mathcal{I}^n)
\end{aligned}$$

On va maintenant calculer les sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n) \otimes \psi_*\mathcal{I}^n$ dans le cas où X est une surface.

2.2.2 Calculs en coordonnées locales dans le cas d'une surface

On suppose que X est une surface et que $Z = \{\mathrm{P}\}$. On fixe un entier $n \geq 1$. La première étape consiste à calculer les sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(n) \otimes \mathcal{I}^n$.

Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(n) \otimes \mathcal{I}^n$

Comme X est lisse, il existe un ouvert affine U de X, et $x = (x_1, x_2)$ un système de paramètres sur U (*i.e.* des éléments de $\mathcal{O}_X(U)$ dont les différentielles forment une base de $\Omega^1_X(U)$) vérifiant $\mathfrak{m}_{X,\mathrm{P}}(U) = (x_1, x_2)$. On a alors un isomorphisme :

$$\tilde{U} := \pi^{-1}(U) \cong \{(x, Y) \in U \times \mathbb{P}^1 \mid x_1Y_2 = x_2Y_1\},$$

et on peut identifier la restriction de π à $\tilde{U}$ avec la restriction de la première projection :

$$U \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow U.$$

On considère ensuite l'ouvert :

$$V = \tilde{U} \cap \{Y_1 \neq 0\} \cong \{(x, y) \in U \times \mathbb{A}^1 \mid x_2 = x_1 y\} \qquad (\text{où } y = \frac{Y_2}{Y_1}).$$

La trivialisation de π^*T_X au-dessus de V associée au système de paramètres (x_1, x_2) donne lieu à un isomorphisme $q^{-1}(V) \cong V \times \mathbb{P}^1$; on notera $[Z_1 : Z_2]$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^1$, de sorte que $H^0(q^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(n))$ s'identifie à l'espace $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]_n$ des polynômes homogènes de degré n en (Z_1, Z_2) à coefficients dans $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)$. On a alors l'identification suivante.

Lemme 2.2.3.

$$H^0(q^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(n) \otimes \mathcal{I}^n) = (x_1, Z_1 + yZ_2)^n \cap \ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]_n$$

Remarque 2.2.4. La démonstration de ce lemme entraînera en particulier que le membre de droite de l'égalité ci-dessus ne dépend pas du choix des coordonnées locales.

Démonstration. On a un système de paramètres (x_1, y) sur V, et un système de paramètres (x_1, x_2) sur U. Dans les bases $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y})$ de $T_{\tilde{X}}(V)$ et $(\pi^*(\frac{\partial}{\partial x_1}), \pi^*(\frac{\partial}{\partial x_2}))$ de $\pi^* T_X(V)$ associées, la différentielle de π a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x_1 \end{pmatrix}$$

Les sections $q^*(\frac{\partial}{\partial x_1})$ et $q^*(\frac{\partial}{\partial y})$ trivialisent le fibré $q^* T_{\tilde{X}}$ sur l'ouvert $q^{-1}(V)$ et le morphisme α s'écrit de la façon suivante au-dessus de cet ouvert :

$$\begin{array}{rccl} \alpha_{q^{-1}(V)}: & H^0(q^{-1}(V), q^* T_{\tilde{X}}) & \longrightarrow & H^0(q^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(1)) \\ & q^*(\frac{\partial}{\partial x_1}) & \longmapsto & Z_1 + y Z_2 \\ & q^*(\frac{\partial}{\partial y}) & \longmapsto & x_1 Z_2 \end{array}$$

On en déduit l'inclusion

$$(x_1 Z_2, Z_1 + y Z_2) \cap \ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]_1 \subset H^0(q^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(n) \otimes \mathcal{I}).$$

Or $x_1 Z_1 = x_1(Z_1 + y Z_2) - y(x_1 Z_2)$, donc

$$(x_1 Z_2, Z_1 + y Z_2) \cap \ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]_1 = (x_1, Z_1 + y Z_2) \cap \ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]_1.$$

On a donc

$$(x_1, Z_1 + y Z_2)^n \cap \ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]_n \subset H^0(q^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(n) \otimes \mathcal{I}^n).$$

Pour l'inclusion réciproque on considère l'ouvert affine $W := \{Z_1 \neq 0\} \subset q^{-1}(V)$, et on note $z := \frac{Z_2}{Z_1}$. De la description de $\alpha_{q^{-1}(V)}$ ci-dessus on déduit que

$$\mathcal{I}(W) = (1 + yz, x_1 z).$$

En écrivant $x_1 = x_1(1 + yz) - y(x_1 z)$ on voit que $x_1 \in \mathcal{I}(W)$, donc $\mathcal{I}(W) = (x_1, 1 + yz)$.

Soit $F(Z_1, Z_2) \in H^0((q^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(n) \otimes \mathcal{I}^n) \subset \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]$. Alors la restriction de cette section à l'ouvert W s'identifie à $F(1, z)$ et on a

$$F(1, z) \in \mathcal{I}(W)^n = (x_1, 1 + yz)^n,$$

donc il existe des fonctions $f_{i,j} \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[z]$ telles que :

$$F(1,z) = \sum_{i+j=n} f_{i,j}(z) x_1^i (1+yz)^j.$$

Comme F est homogène de degré n on en déduit que pour tout couple (i,j) le degré en z de $f_{i,j}$ est inférieur ou égal à i, donc que $Z_1^i f_{i,j}(\frac{Z_2}{Z_1}) \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]$, et on a :

$$F(Z_1, Z_2) = \sum_{i+j=n} Z_1^i f_{i,j}(\frac{Z_2}{Z_1}) x_1^i (Z_1 + yZ_2)^j.$$

On a donc :

$$F(Z_1, Z_2) \in (x_1, Z_1 + yZ_2)^n,$$

ce qui permet de conclure que :

$$H^0(q^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(n) \otimes \mathcal{I}^n) \subset (x_1, Z_1 + yZ_2)^n \cap \ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]_n.$$

$\square$

Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n) \otimes \psi_* \mathcal{I}^n$

La trivialisation de T_X au-dessus de U associée au système de paramètres (x_1, x_2) donne lieu à un isomorphisme $r^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^1$. On note $[T_1 : T_2]$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^1$. Ceci permet d'identifier $H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n))$ avec l'espace $\mathcal{O}_X(U)[T_1, T_2]_n$ des polynômes homogènes de degré n en (T_1, T_2) à coefficients dans $\mathcal{O}_X(U)$. Avec cette identification, on peut donner une description des sections du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n) \otimes \psi_* \mathcal{I}^n$ sur l'ouvert $r^{-1}(U)$. On suppose ici pour simplifier que $\mathcal{O}_X(U) \cong \mathbb{C}[x_1, x_2]$, ce qui sera vrai dans les cas qui nous intéressent.

Proposition 2.2.5. *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2n) \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2n}) = \\ \big((x_1 T_1 + x_2 T_2) + (x_1, x_2)^2\big)^n \cap \ \mathbb{C}[x_1, x_2][T_1, T_2]_{2n};$$

$$H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2n-1) \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2n-1}) = \\ (x_1, x_2) \cdot \big((x_1 T_1 + x_2 T_2) + (x_1, x_2)^2\big)^{n-1} \cap \ \mathbb{C}[x_1, x_2][T_1, T_2]_{2n-1}.$$

En particulier une section du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2n) \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2n}$ (ou bien du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2n-1) \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2n-1}$) s'annule au moins à l'ordre n le long de $r^{-1}(\mathrm{P})$.

Remarque 2.2.6. La démonstration qui suit a pour conséquence que les membres de droite des égalités ci-dessus ne dépendent pas du choix des coordonnées locales.

Démonstration. On démontre seulement la première égalité, la deuxième se démontrant de façon similaire. On rappelle qu'il y a un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}}(V) \cong \mathbb{C}[x_1, x_2, y]/(x_2 - x_1 y)$$

Si $F \in \left((x_1T_1 + x_2T_2) + (x_1, x_2)^2\right)^n \cap \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_{2n}$, on peut écrire :

$$F = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{2n-2i} f_{ij}(T_1, T_2)(x_1T_1 + x_2T_2)^i x_1^j x_2^{2n-2i-j} \qquad \text{avec } f_{ij} \in \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_{2n-i},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\psi^* F &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{2n-2i} \psi^*[f_{ij}(T_1, T_2)](x_1Z_1 + x_1yZ_2)^i x_1^j (x_1y)^{2n-2i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2n-2i} \psi^*[f_{ij}(T_1, T_2)] y^{2n-2i-j} \right) (Z_1 + yZ_2)^i x_1^{2n-i}
\end{aligned}$$

On a donc $\psi^* F \in (x_1, Z_1 + yZ_2)^{2n} \cap \mathcal{O}_{\tilde{X}}(V)[Z_1, Z_2]_{2n}$. On en déduit grâce au lemme (2.2.3) que

$$\psi^* F \in H^0((q^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(2n) \otimes \mathcal{I}^{2n})$$

et ceci démontre l'inclusion :

$$\left((x_1T_1 + x_2T_2) + (x_1, x_2)^2\right)^n \cap \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_{2n} \subset H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2n) \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2n}).$$

Réciproquement, soit $F \in H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2n) \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2n}) \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_{2n}$. Il est possible de décomposer F de la façon suivante :

$$F = \sum_{r=0}^{2n-1} F_r + F_{2n}$$

avec F_r des polynômes homogène de degré r en (x_1, x_2), à coefficients dans $\mathbb{C}[T_1, T_2]$, pour $r \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, et $F_{2n} \in (x_1, x_2)^{2n} \cap \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_{2n}$.

Supposons par l'absurde que $F \notin \left((x_1T_1 + x_2T_2) + (x_1, x_2)^2\right)^n$, et considérons le plus petit entier $m \geq 0$ tel que $F_m(x_1, x_2) \notin \left((x_1T_1 + x_2T_2) + (x_1, x_2)^2\right)^n$. Alors d'après la première partie de la démonstration on a

$$F_0, \ldots, F_{m-1}, F_{2n} \in H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2n) \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2n}),$$

donc

$$\sum_{r=m}^{2n-1} F_r(x_1, x_2, T_1, T_2) \in H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2n) \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2n}).$$

D'après le lemme (2.2.3), on en déduit que :

$$\sum_{r=m}^{2n-1} F_r(x_1, x_1 y, Z_1, Z_2) = \sum_{r=m}^{2n-1} F_r(1, y, Z_1, Z_2) x_1^r \in (x_1, Z_1 + yZ_2)^{2n} .$$

Ceci permet d'écrire :

$$\sum_{r=m}^{2n-1} F_r(1, y, Z_1, Z_2) x_1^r = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j \geq 2n-i} a_{ij} (Z_1 + yZ_2)^i x_1^j \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{C}[y, Z_1, Z_2].$$

On a donc

$$F_m(1, y, Z_1, Z_2) = \sum_{i=2n-m}^{2n} a_{im} (Z_1 + yZ_2)^i$$

Le degré en y de $F_m(1, y, Z_1, Z_2)$ étant au plus égal à m, on en déduit que pour tout $i \in \{2n - m, \ldots, 2n\}$:

$$\deg_y(a_{im}) \leq m - i$$

Si $m < n$, on voit donc que $a_{im} = 0$ pour tout $i \in \{2n - m, \ldots, 2n\}$, d'où $F_m = 0$, et on a une contradiction.

On a donc $m \geq n$, et

$$x_1^{m-i} a_{im}(\frac{x_2}{x_1}, T_1, T_2) \in (x_1, x_2)^{m-i} \quad \forall i \in \{2n - m, \ldots, m\}$$

On a finalement :

$$F_m(x_1, x_2, T_1, T_2) = x_1^m F_m(1, \frac{x_2}{x_1}, T_1, T_2) = \sum_{i=2n-m}^{m} x_1^{m-i} a_{im}(\frac{x_2}{x_1}, T_1, T_2)(x_1 T_1 + x_2 T_2)^i$$

d'où

$$F_m(x_1, x_2, T_1, T_2) \in \sum_{i=2n-m}^{m} (x_1, x_2)^{m-i} (x_1 T_1 + x_2 T_2)^i \subset \big((x_1 T_1 + x_2 T_2) + (x_1, x_2)^2\big)^n$$

ce qui donne encore une contradiction.

□

2.3 Pseudo-effectivité du fibré tangent d'un éclatement

Proposition 2.3.1. *Soit X une variété projective lisse, et $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement d'une sous-variété lisse Z. Si $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif, alors T_X est pseudo-effectif.*

Cette proposition est, on le verra, la conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.3.2. *Avec les notations introduites dans la section 2.2.1 on a l'inclusion suivante dans Y :*

$$\varepsilon^{-1}\psi^{-1}\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1))\right) \subset f^{-1}\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1)) \cup p^{-1}(E)\right)$$

Démonstration. Soient A un fibré en droites ample sur X. Alors :

$$\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1)) = \bigcup_{n\geq 1} \mathbf{B}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n) \otimes r^*A) = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq 1} \mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(kn) \otimes r^*A^k|$$

On rappelle qu'on est dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \\
\mathbb{P}(T_{\tilde{X}}) \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{P}(\pi^*T_X) \arrow[ll, dashed, "\varphi"'] \arrow[dl, "q"] \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}(T_X) \arrow[d, "r"] \\
 & \tilde{X} \arrow[rr, "\pi"] & & X
\end{tikzcd}$$

avec

$$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1) = \varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(1) \otimes \varepsilon^{-1}\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_Y \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(1) = \psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1)$$

Pour tous $n, k \geq 1$, on a un isomorphisme induit par le morphisme f :

$$H^0(\mathbb{P}(T_{\tilde{X}}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(kn) \otimes p^*\pi^*A^k) \cong H^0(Y, f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(kn) \otimes f^*p^*\pi^*A^k)$$

d'où

$$\mathrm{Bs}\,|f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(kn) \otimes f^*p^*\pi^*A^k| = f^{-1}\left(\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(kn) \otimes p^*\pi^*A^k|\right)$$

De plus si D est le diviseur exceptionnel de ε, on a :

$$\begin{aligned}
&H^0(Y, f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(kn) \otimes f^*p^*\pi^*A^k) \\
&\qquad = H^0(Y, f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(kn) \otimes \varepsilon^*q^*\pi^*A^k) \\
&\qquad = H^0(Y, \varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(kn) \otimes (\varepsilon^{-1}\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_Y)^{\otimes kn} \otimes \varepsilon^*q^*\pi^*A^k) \\
&\qquad = H^0(Y, \varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(kn) \otimes \mathcal{O}_Y(-knD) \otimes \varepsilon^*q^*\pi^*A^k)
\end{aligned}$$

Ceci permet de voir qu'on a l'inclusion suivante pour tous $n, k \geq 1$:

$$\mathrm{Bs}\,|\varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(kn) \otimes \varepsilon^*q^*\pi^*A^k| \subset f^{-1}\left(\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(kn) \otimes p^*\pi^*A^k|\right) \cup D$$

Par ailleurs on a des isomorphismes induits par les morphismes ε et ψ :

$$\begin{aligned} H^0(Y, \varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(kn) \otimes \varepsilon^* q^* \pi^* A^k)) &\cong H^0(\mathbb{P}(\pi^* T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(kn) \otimes q^*\pi^* A^k) \\ &\cong H^0(\mathbb{P}(\pi^* T_X), \psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(kn) \otimes \psi^* r^* A^k) \\ &\cong H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(kn) \otimes r^* A^k) \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Bs}\,|\varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(kn) \otimes \varepsilon^* q^* \pi^* A^k)| = \varepsilon^{-1}\psi^{-1}(\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(kn) \otimes r^* A^k|)$$

On obtient donc :

$$\varepsilon^{-1}\psi^{-1}(\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(kn) \otimes r^* A^k|) \subset f^{-1}\left(\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(kn) \otimes p^*\pi^* A^k|\right) \cup D$$

Par ailleurs le diviseur exceptionnel D est contenu dans $\varepsilon^{-1}q^{-1}(E) = f^{-1}p^{-1}(E)$, on en déduit donc que pour tout $n \geq 1$:

$$\varepsilon^{-1}\psi^{-1}(\mathbf{B}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n) \otimes r^* A)) \subset f^{-1}\left(\mathbf{B}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(n) \otimes p^*\pi^* A)\right) \cup f^{-1}p^{-1}(E)$$

Enfin on peut supposer que $\pi^* A = H \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)$ avec H un fibré en droites ample sur $\tilde{X}$. On a donc $\mathbf{B}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(n) \otimes p^*\pi^* A) \subset \mathbf{B}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(n) \otimes p^* H) \cup p^{-1}(E)$. Finalement :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}\psi^{-1}(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1))) &\subset f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathbf{B}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(n) \otimes p^* H)\right) \cup f^{-1}p^{-1}(E) \\ &\subset f^{-1}\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1)) \cup p^{-1}(E)\right) \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 2.3.1. Soit $\tilde{x} \in \tilde{X} \setminus E$. Si T_X n'est pas pseudo-effectif, $r\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1))\right) = X$ donc il existe $v \in \mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1)) \cap r^{-1}(\pi(\tilde{x}))$. On choisit un point

$$y \in \varepsilon^{-1}\left(\psi^{-1}(v) \cap q^{-1}(\tilde{x})\right)$$

On a alors $p(f(y)) = q(\varepsilon(y)) = \tilde{x}$, donc $f(y) \notin p^{-1}(E)$. Grâce au résultat précédent on en déduit que $f(y) \in \mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))$, d'où $\tilde{x} \in p\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))\right)$. On a donc l'inclusion $\tilde{X} \setminus E \subset p\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))\right)$. Mais comme $p\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))\right)$ est une réunion dénombrable de fermés ceci entraîne que $\tilde{X} = p\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))\right)$, donc $T_{\tilde{X}}$ n'est pas pseudo-effectif. □

Chapitre 3

Surfaces dont le fibré tangent est pseudo-effectif

On rappelle la classification des surfaces dont le fibré tangent est nef, que le lecteur pourra retrouver dans [CP91] ou [DPS94].

Théorème 3.0.3. *Soit X une surface projective lisse, avec T_X nef. Alors X est minimale et on est dans l'un des cas suivants :*

- *X est une surface abélienne*
- *X est hyperellipique*
- *$X = \mathbb{P}^2$*
- *$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*
- *$X = \mathbb{P}(E)$, avec E un fibré vectoriel de rang 2 sur une courbe elliptique C, et*
  - *soit $E = \mathcal{O}_C \oplus L$ avec $L \in \mathrm{Pic}^0(C)$,*
  - *soit E est donné par une extension non-scindée $0 \to \mathcal{O}_C \to E \to L \to 0$ avec $L = \mathcal{O}_C$ ou bien $\deg L = 1$.*

Réciproquement, si X fait partie de cette liste , alors T_X est nef.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux surfaces dont le fibré tangent est pseudo-effectif. Le but est de se rapprocher d'un résultat du même type que le théorème ci-dessus, sachant qu'on ne pourra pas être aussi précis : en effet il n'est pas possible d'étudier tous les éclatements de surfaces rationnelles, mais seulement ceux où les points éclatés sont en position générale. On commence par donner une première classification à l'aide des propriétés rappelées dans la section 2.1. On étudie ensuite les éclatements de surfaces rationnelles en utilisant les calculs effectués dans le chapitre précédent. On termine en démontrant que le fibré tangent d'une surface réglée sur une courbe elliptique est pseudo-effectif.

3.1 Une première classification

Soit S une surface projective lisse, on suppose que T_S est pseudo-effectif. D'après (2.1.2) on a $\kappa(S) \leq 0$.

Premier cas : $\kappa(S) = 0$.

Si $\kappa(S) = 0$ il existe d'après (2.1.3) un revêtement étale fini $A \to S$, avec A une surface abélienne. Le résultat suivant a pour conséquence que S est minimale :

Proposition 3.1.1. *Soit S une surface admettant un revêtement étale fini $f : A \to S$ par une surface abélienne, et soit $\pi : \tilde{S} \to S$ l'éclatement d'un point $p \in S$. Alors $T_{\tilde{S}}$ n'est pas pseudo-effectif.*

Démonstration. Comme S n'est pas uniréglée, si $T_{\tilde{S}}$ était pseudo-effectif, alors d'après (2.1.2) $K_{\tilde{S}}$ serait numériquement trivial. Ceci est impossible, puisque $K_{\tilde{S}} = \pi^* K_S + E$ avec E le diviseur exceptionnel de l'éclatement, donc $K_{\tilde{S}} \cdot E = -1$. □

On en déduit donc que S est soit une surface abélienne, soit une surface hyperelliptique. Réciproquement, si S est une surface abélienne ou une surface hyperelliptique, alors T_S est nef, donc pseudo-effectif. Pour résumer, on a :

Proposition 3.1.2. *Soit S une surface projective lisse avec $\kappa(S) = 0$. Alors T_S est pseudo-effectif si et seulement si S est une surface abélienne ou une surface hyperelliptique.*

Deuxième cas : $\kappa(S) = -\infty$

Si $\kappa(S) = -\infty$, alors la proposition (2.1.4) entraîne que l'irrégularité $q(S)$ est inférieure ou égale à 1 :

1. Si $q(S) = 0$, alors S est rationnelle. L'étude du fibré tangent des surfaces rationnelles fera l'objet de la sous-section 3.2.
2. Si $q(S) = 1$, alors la proposition (2.1.4) entraîne que S est une surface réglée sur une courbe elliptique. On montre dans la section 3.3 que réciproquement, toute surface réglée sur une courbe elliptique a un fibré tangent pseudo-effectif.

3.2 Surfaces rationnelles

On cherche maintenant à déterminer quelles sont les surfaces rationnelles dont le fibré tangent est pseudo-effectif. On rappelle qu'une surface de Hirzebruch est une surface de la forme $\mathbb{F}_m = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m))$, avec $m \geq 0$. Une surface rationnelle est isomorphe soit à $\mathbb{P}^2$, soit à l'éclatement d'une surface de Hirzebruch en un nombre fini de points.

Étant donné que l'on ne sait pas comment se comporte la propriété d'avoir un fibré tangent pseudo-effectif par déformation, on n'obtiendra des résultats que dans le cas des éclatements en des points en position générale. On donne juste un exemple de ce qui peut arriver si les points sont en position spéciale :

Exemple 3.2.1. Soient $d \geq 1$ un entier, $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{P}^2$ des points alignés sur une droite ℓ, et $\pi : \tilde{X} \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement de ces points. Alors $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif. En effet le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{p_1,\dots,p_d}$ contient $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-\ell) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$, donc les sections globales du fibré $T_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ se relèvent en des sections globales de $T_{\tilde{X}}$. Or le fibré $T_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ est engendré par ses sections globales, comme on peut le voir grâce à la suite exacte d'Euler par exemple. On en déduit facilement le résultat.

On commence par traiter à part les cas de $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $\mathbb{F}_1 \cong \mathbb{P}^2$ (on rappelle que l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en deux points est isomorphe à l'éclatement de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en un point). On verra ensuite le cas de $\mathbb{F}_m$ pour $m \geq 2$.

3.2.1 Éclatements de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en 4 points généraux

Proposition 3.2.2. *Soit $\tilde{X}$ l'éclatement de $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en 4 points généraux p_1, p_2, p_3, p_4. Alors $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif.*

Démonstration. Soient $([X_0 : X_1], [X'_0 : X'_1])$ des coordonnées bihomogènes sur $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Soit $U \subset X$ l'ouvert affine $\{X_0 \neq 0, X'_0 \neq 0\}$. On note $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, et $x_2 = \frac{X'_1}{X'_0}$ les coordonnées sur cet ouvert. Le groupe des automorphismes de X contient le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \cong PGL_2(\mathbb{C}) \times PGL_2(\mathbb{C})$, donc on peut supposer quitte à changer les coordonnées que $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (\infty, \infty)$, $p_3 = (a,b)$, et $p_3 = (c,d)$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{C}^*$. De plus comme les points sont généraux on peut supposer $a \neq c$ et $b \neq d$.

Le but de ce qui suit est de construire des sections de S^2T_X qui se relèvent en des sections de $S^2T_{\tilde{X}}$. On reprend les notations de la section 2.2, à quelques modifications près : on note $\pi_i : \tilde{X}_i \to X$ l'éclatement de X en p_i, pour $i \in \{1,2,3,4\}$; on note $\pi_{ij} : \tilde{X}_{ij} \to X$ l'éclatement de X en p_i et p_j, pour $i \neq j \in \{1,2,3,4\}$; on note $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X en p_1, p_2, p_3, p_4. Comme dans la sous-section 2.2.1, on associe à ces éclatements π_i, π_{ij} et π des faisceaux d'idéaux notés respectivement $\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_{ij}$ et $\mathcal{I}$ contenus respectivement dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi_i^*T_X)}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi_{ij}^*T_X)}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}$. On a aussi des morphismes notés respectivement $\psi_i : \mathbb{P}(\pi_i^*T_X) \to \mathbb{P}(T_X)$, $\psi_{ij} : \mathbb{P}(\pi_{ij}^*T_X) \to \mathbb{P}(T_X)$ et $\psi : \mathbb{P}(\pi^*T_X) \to \mathbb{P}(T_X)$.

On note $p : \mathbb{P}(T_{\tilde{X}}) \to \tilde{X}$ et $r : \mathbb{P}(T_X) \to X$ les projections naturelles. La trivialisation de T_X au-dessus de U associée au système de coordonnées (x_1, x_2) donne un isomorphisme $r^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^1$: dans la suite on identifiera $H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n))$ avec l'espace $\mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_n$ des polynômes homogènes de degré n en (T_1, T_2) à coefficients dans $\mathbb{C}[x_1, x_2]$. De plus on fera l'abus de confondre $H^0(X, S^nT_X)$ avec $H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(n))$.

On note $p_1 : X \to \mathbb{P}^1$ et $p_2 : X \to \mathbb{P}^1$ les deux projections. On a alors

$$T_X \cong p_1^*T_{\mathbb{P}^1} \oplus p_2^*T_{\mathbb{P}^1} \cong p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2).$$

Si $\partial \in H^0(X, T_X)$ est un champ de vecteurs sur X on peut donc écrire

$$\partial|_U(x_1, x_2) = P_1(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + P_2(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

avec P_1, P_2 deux polynômes de degré au plus 2. Réciproquement, une expression de ce type définit un unique champ de vecteurs sur X. On note ∂_{12} l'unique champ de vecteurs qui donne $x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ en restriction à U. Le polynôme $F_{12} \in H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1)) \cong \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_1$ qui correspond à ce champ de vecteurs est :

$$F_{12} = x_1T_1 + x_2T_2.$$

D'après la proposition (2.2.5) on a

$$H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_{1*}\mathcal{I}_1^2) = [(x_1T_1 + x_2T_2) + (x_1, x_2)^2] \cap \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_2,$$

donc pour tout polynôme $F \in \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_1$ on a $F_{12}F \in H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_{1*}\mathcal{I}_1^2)$. On en déduit donc que pour tout champ de vecteur ∂ sur X, on a

$$\partial_{12} \otimes \partial \in H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_{1*}\mathcal{I}_1^2)$$

On remarque ensuite, en échangeant dans ce qui précède le rôle du couple (X_0, X_0') et celui du couple (X_1, X_1'), que

$$\partial_{12} \otimes \partial \in H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_{2*}\mathcal{I}_2^2)$$

et on a donc :

$$\partial_{12} \otimes \partial \in H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_{12*}\mathcal{I}_{12}^2).$$

Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, $(i, j) \neq (1, 2)$, on considère un automorphisme ϕ_{ij} de X qui envoie p_1 sur p_i et p_2 sur p_j. On définit ensuite le champ de vecteurs

$$\partial_{ij} := \phi_{ij*}(\partial_{12}).$$

On déduit alors de ce qui précède que pour tout champ de vecteur ∂ sur X,

$$\partial_{ij} \otimes \partial \in H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_{ij*}\mathcal{I}_{ij}^2).$$

En particulier si $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ on a :

$$\partial_{ij} \otimes \partial_{kl} \in H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_*\mathcal{I}^2).$$

Considérons maintenant le choix suivant pour les automorphismes ϕ_{ij} :

$$\phi_{34} := \left(\begin{bmatrix} c & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \ , \ \phi_{13} := \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \ ,$$

$$\text{et} \quad \phi_{24} := \left(\begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Un calcul en coordonnées locales donne les champs de vecteurs suivants sur l'ouvert U :

$$\begin{cases} \partial_{12}|_U &=& x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \partial_{34}|_U &=& \frac{1}{c-a}(x_1-a)(x_1-c)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{d-b}(x_2-b)(x_2-d)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \partial_{13}|_U &=& \frac{1}{a}(x_1-a)x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{b}(x_2-b)x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \partial_{24}|_U &=& (x_1-c)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2-d)\frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases}$$

On pose $s := \partial_{12} \otimes \partial_{34}$, et $t := \partial_{13} \otimes \partial_{24}$, qui sont comme on l'a vu précédemment deux sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_* \mathcal{I}^2$. Les polynômes $F_s, F_t \in H^0(r^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2)) \cong \mathbb{C}[x_1, x_2, T_1, T_2]_2$ correspondant à $s|_U$ et $t|_U$ sont $F_s = F_{12}F_{34}$ et $F_t = F_{13}F_{24}$ avec :

$$\begin{cases} F_{12} &=& x_1T_1 + x_2T_2 \\ F_{34} &=& \frac{1}{c-a}(x_1-a)(x_1-c)T_1 + \frac{1}{d-b}(x_2-b)(x_2-d)T_2 \\ F_{13} &=& \frac{1}{a}(x_1-a)x_1T_1 + \frac{1}{b}(x_2-b)x_2T_2 \\ F_{24} &=& (x_1-c)T_1 + (x_2-d)T_2 \end{cases}$$

Soit $x = (x_1, x_2) \in U$ tel que les polynômes $F_s(x_1, x_2, T_1, T_2)$ et $F_t(x_1, x_2, T_1, T_2)$ aient un zéro commun $[T_1 : T_2] \in \mathbb{P}^1$. Alors un des facteurs du produit

$$F_s(x_1, x_2, T_1, T_2) = F_{12}(x_1, x_2, T_1, T_2)F_{34}(x_1, x_2, T_1, T_2)$$

s'annule en $[T_1 : T_2]$, de même qu'un facteur du produit

$$F_t(x_1, x_2, T_1, T_2) = F_{13}(x_1, x_2, T_1, T_2)F_{24}(x_1, x_2, T_1, T_2).$$

Disons par exemple qu'on a $F_{12}(x_1, x_2, T_1, T_2) = F_{13}(x_1, x_2, T_1, T_2) = 0$, c'est à dire

$$x_1T_1 + x_2T_2 = \frac{1}{a}(x_1-a)x_1T_1 + \frac{1}{b}(x_2-b)x_2T_2 = 0.$$

Ceci entraîne facilement que $\frac{1}{a}(x_1-a)x_1x_2 = \frac{1}{b}(x_2-b)x_2x_1$, donc $x_1x_2(bx_1-ax_2) = 0$, ce qui est l'équation d'une courbe dans U (réunion de droites). On voit donc que pour un point général $x = (x_1, x_2) \in U$, $F_{12}(x_1, x_2, T_1, T_2)$ et $F_{13}(x_1, x_2, T_1, T_2)$ n'ont pas de zéro commun. On peut faire la même vérification pour les autres couples de polynômes F_{ij}, et on obtient finalement un ouvert $W \subset U$ tel que pour pour tout $x = (x_1, x_2) \in W$ les polynômes $F_s(x_1, x_2)$ et $F_t(x_1, x_2)$ n'ont pas de zéro commun.

En résumé, on a construit deux éléments de $H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2) \otimes \psi_* I^2)$ qui ne s'annulent jamais simultanément au-dessus de l'ouvert W. D'après la remarque 2.2.2, ces deux sections se relèvent en des sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(2)$, et ces sections ne s'annulent pas simultanément au-dessus de l'ouvert $\pi^{-1}(W)$. Autrement dit,

$$p\left(\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(2)|\right) \cap \pi^{-1}(W) = \emptyset.$$

Enfin $\mathbf{B}_{-}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1)) \subset \mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(2)|$, ce qui permet de conclure que

$$p\left(\mathbf{B}_{-}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))\right) \neq \tilde{X},$$

et donc que $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif. □

3.2.2 Éclatements de $\mathbb{P}^2$ en 5 points généraux

Pour traiter le cas des éclatements de $\mathbb{P}^2$, on rappelle le fait suivant : l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en deux points est isomorphe à l'éclatement de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en un point. On déduit donc immédiatement de la proposition 3.2.2 le résultat suivant.

Proposition 3.2.3. *Soit $\tilde{X}$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en 5 points généraux. Alors $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif.*

3.2.3 Champs de vecteurs sur une surface de Hirzebruch

On calcule maintenant l'expression d'un champ de vecteur sur une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_m$ en coordonnées locales, en vue de construire des sections de $S^nT_{\tilde{X}}$, où $\tilde{X}$ est un éclatement de $\mathbb{F}_m$.

On considère un recouvrement de $\mathbb{P}^1$ par deux droites affines U, $V \cong \mathbb{A}^1$, munies de coordonnées affines x_1, y_1 respectivement, telles que $x_1y_1 = 1$ sur $U \cap V$. Le fibré vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ est trivialisé sur le recouvrement (U, V), et il a pour matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1^m \end{pmatrix}$$

On a un isomorphisme $\mathbb{F}_m \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$, donc $\mathbb{F}_m$ peut être construit en recollant les deux ouverts $U \times \mathbb{P}^1$ et $V \times \mathbb{P}^1$ le long de $(U \cap V) \times \mathbb{P}^1$ via l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & (U \cap V) \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & (U \cap V) \times \mathbb{P}^1 \\ & (x_1, [X_0 : X_1]) & \longmapsto & (\frac{1}{x_1}, [X_0 : x_1^m X_1]) =: (y_1, [Y_0 : Y_1]) \end{array}$$

Sur l'ouvert $U' := (U \times \mathbb{P}^1) \cap \{X_1 \neq 0\}$ on utilisera les coordonnées x_1 et $x_2 := \frac{X_0}{X_1}$, et sur l'ouvert $V' := (V \times \mathbb{P}^1) \cap \{Y_1 \neq 0\}$ on utilisera les coordonnées y_1 et $y_2 := \frac{Y_0}{Y_1}$. On aura donc sur l'ouvert $U' \cap V'$ les relations suivantes :

$$x_1 y_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = x_1^m y_2$$

Par ailleurs en notant $p_1 : U \times \mathbb{P}^1 \to U$ et $p_2 : U \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ les deux projections on a

$$T_{U\times\mathbb{P}^1} \cong p_1^* T_U \oplus p_2^* T_{\mathbb{P}^1} \cong p_1^* \mathcal{O}_U \oplus p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2),$$

donc pour tout $s \in H^0(\mathbb{F}_m, T_{\mathbb{F}_m})$ on peut donc écrire

$$s|_{U'}(x_1, x_2) = a(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(b_0(x_1) + b_1(x_1)x_2 + b_2(x_1)x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

avec $a, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{C}[x_1]$. De façon analogue, on peut écrire :

$$s|_{V'}(y_1, y_2) = \alpha(y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\beta_0(y_1) + \beta_1(y_1)y_2 + \beta_2(y_1)y_2^2\right)\frac{\partial}{\partial y_2}$$

avec $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}[y_1]$.

Des relations $x_1y_1 = 1$ et $x_2 = x_1^m y_2$, on déduit que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_1} &= -x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} - mx_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} &= x_1^m\frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases}$$

Par conséquent sur $(U \cap V) \times \mathbb{P}^1$ on a :

$$\begin{aligned} s|_{V'}(y_1, y_2) = \alpha(y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} &+ \left(\beta_0(y_1) + \beta_1(y_1)y_2 + \beta_2(y_1)y_2^2\right)\frac{\partial}{\partial y_2} \\ &= \alpha(\frac{1}{x_1})\left(-x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} - mx_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\ &+ \left(\beta_0(\frac{1}{x_1}) + \beta_1(\frac{1}{x_1})x_1^{-m}x_2 + \beta_2(\frac{1}{x_1})(x_1^{-m}x_2)^2\right)\left(x_1^m\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\ = -\alpha(\frac{1}{x_1})x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + &\left(\beta_0(\frac{1}{x_1})x_1^m + \left(-m\alpha(\frac{1}{x_1})x_1 + \beta_1(\frac{1}{x_1})\right)x_2 + \beta_2(\frac{1}{x_1})x_1^{-m}x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

En comparant les coefficients ci-dessus avec les coefficients de

$$s|_{U'}(x_1, x_2) = a(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(b_0(x_1) + b_1(x_1)x_2 + b_2(x_1)x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

on obtient

$$\begin{cases} a(x_1) &= -\alpha(\frac{1}{x_1})x_1^2 \\ b_0(x_1) &= \beta_0(\frac{1}{x_1})x_1^m \\ b_1(x_1) &= -m\alpha(\frac{1}{x_1})x_1 + \beta_1(\frac{1}{x_1}) \\ b_2(x_1) &= \beta_2(\frac{1}{x_1})x_1^{-m} \end{cases}$$

On en déduit que a est un polynôme de degré 2, b_0 est un polynôme de degré m,

b_1 est un polynôme de degré 1, et $b_2 = 0$ (car $m \geq 1$). De plus si λ est le coefficient dominant de a, alors le coefficient dominant de b_1 est λm. On note également que les polynômes α_i, β_j sont uniquement déterminés par le choix des polynômes a_i, b_j.

On obtient finalement pour $s|_{U'}$ un résultat de la forme :

$$s|_{U'}(x_1, x_2) = \left(\lambda x_1^2 + \mu x_1 + \eta\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + (b_0(x_1) + (\lambda m x_1 + \nu) x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

et par suite :

$$s|_{V'}(y_1, y_2) = -\left(\eta y_1^2 + \mu y_1 + \lambda\right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(y_1^m b_0\left(\frac{1}{y_1}\right) + [-m\eta y_1 + \nu - m\mu] y_2\right) \frac{\partial}{\partial y_2}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que de telles expressions définissent une section globale de $T_{\mathbb{F}_m}$.

3.2.4 Éclatements de $\mathbb{F}_m$ en 3 points généraux ($m \geq 2$)

Maintenant que l'on sait construire des champs de vecteurs sur $\mathbb{F}_m$ on peut démontrer le résultat suivant, de manière analogue à ce qu'on a fait pour la proposition (3.2.2) :

Proposition 3.2.4. *Soit $m \geq 2$. Soit $\tilde{X}$ l'éclatement de $X = \mathbb{F}_m$ en 3 points généraux p_1, p_2, p_3. Alors $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif.*

Démonstration. On reprend les notations introduites précédemment : on a deux ouverts U' et V' munis de coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2) respectivement.

On rappelle quelques propriétés des automorphismes de $X = \mathbb{F}_m$ (voir par exemple [Akh95]). Un automorphisme de X permute les fibres de la projection naturelle $\rho : X \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \to \mathbb{P}^1$, et le morphisme de groupes $\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ induit par ρ est surjectif. De plus les automorphismes $\phi \in \mathrm{Aut}(X)$ qui induisent l'identité sur $\mathbb{P}^1$ stabilisent l'ouvert U' et sont tous de la forme suivante en restriction à U' :

$$\phi|_{U'}(x_1, x_2) = (x_1, P_m(x_1) + \lambda x_2)$$

avec $P_m \in \mathbb{C}[x_1]$ un polynôme de degré au plus m, et $\lambda \in C^*$.

Comme les points p_1, p_2, p_3 sont généraux, on peut supposer qu'ils sont sur trois fibres distinctes de ρ. Quitte à permuter ces fibres à l'aide d'un automorphisme on peut donc supposer que que dans les coordonnées (x_1, x_2) on a $p_1 = (0, z_1)$, $p_2 = (\infty, z_2)$ et $p_3 = (1, z_3)$, avec $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Enfin comme $m \geq 2$, quitte à appliquer un automorphisme qui induit l'identité sur $\mathbb{P}^1$ on peut supposer que $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (\infty, 0)$ et $p_3 = (1, 0)$.

- **Premier cas :** $m > 2$

D'après les calculs effectués en 3.2.3, on sait qu'il existe des sections globales $\partial_{12}, \partial_{32} \in H^0(\mathbb{F}_m, T_{\mathbb{F}_m})$ telles que :

$$\begin{cases} \partial_{12}|_{U'}(x_1, x_2) &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \partial_{32}|_{U'}(x_1, x_2) &= (x_1 - 1)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases}$$

En changeant de coordonnées on obtient alors que :

$$\begin{cases} \partial_{12}|_{V'}(y_1, y_2) &= -y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - (m-1) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \partial_{32}|_{V'}(y_1, y_2) &= y_1(y_1 - 1)\frac{\partial}{\partial y_1} + (m y_1 - m + 1) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \end{cases}$$

ce qui permet de s'apercevoir que ces deux champs de vecteurs s'annulent au point p_2, car dans les coordonnées (y_1, y_2) on a $p_2 = (0, 0)$.

On note $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de $p_1, \ldots, p_3$, et on reprend les notations introduites dans la section 2.2 : on associe à cet éclatement un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}$, et un morphisme $\psi : \mathbb{P}(\pi^* T_X) \to \mathbb{P}(T_X)$. Puis on pose $s := \partial_{12} \otimes \partial_{32}$. On obtient alors une section globale du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{F}_m})}(2) \otimes \psi_* \mathcal{I}^2$, d'après la proposition (2.2.5) : en effet, ∂_{12} est «de type $x_1 T_1 + x_2 T_2$ »au voisinage du point p_1, ∂_{32} est «de type $x_1 T_1 + x_2 T_2$ »au voisinage du point p_3, et s est le produit de deux sections nulles au point p_2, donc elle s'annule à l'ordre 2 en p_2.

On construit une deuxième section globale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{F}_m})}(2) \otimes \psi_* \mathcal{I}^2$ de manière analogue, en échangeant les rôles de (x_1, x_2) et de (y_1, y_2) : il existe $\partial_{21}, \partial_{31} \in H^0(\mathbb{F}_m, T_{\mathbb{F}_m})$ tel que

$$\begin{cases} \partial_{21}|_{V'}(y_1, y_2) &= y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \partial_{31}|_{V'}(y_1, y_2) &= (y_1 - 1)\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \end{cases}$$

et ceci donne dans les coordonnées (x_1, x_2) :

$$\begin{cases} \partial_{21}|_{U'}(x_1, x_2) &= -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - (m-1) x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \partial_{31}|_{U'}(x_1, x_2) &= x_1(x_1 - 1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (m x_1 - m + 1) x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases}$$

On pose alors $t := \partial_{21} \otimes \partial_{31}$, et on a bien $t \in H^0(\mathbb{P}(T_{\mathbb{F}_m}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{F}_m})}(2) \otimes \psi_* \mathcal{I}^2)$.

Enfin on vérifie, de la même façon que dans la proposition (3.2.2), qu'il existe un ouvert non vide $W \subset \mathbb{F}_m$ tel que les deux sections s et t construites ci-dessus ne s'annulent pas simultanément au-dessus de W (on utilise le fait que $m > 2$). On en tire ensuite la même conclusion, à savoir que $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif.

• **Deuxième cas :** $m = 2$

Dans ce cas la construction ci-dessus ne convient pas car on a $\partial_{12} = -\partial_{21}$. Par contre l'avantage est que l'on peut multiplier ∂_{12} par n'importe quel champ de vecteurs qui s'annule à l'ordre deux en p_3 pour obtenir une section globale du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{F}_m})}(2) \otimes \psi_* \mathcal{I}^2$. De même on obtient d'autres sections globales de ce faisceau en multipliant ∂_{32} et ∂_{31} par des champs de vecteurs qui s'annulent à l'ordre deux en p_1 et p_2 respectivement. On peut prendre par exemple ∂_1 et ∂_2 définis par :

$$\begin{cases} \partial_1|_{U'}(x_1, x_2) &= x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \partial_2|_{U'}(x_1, x_2) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \end{cases}$$

On voit aisément que ∂_1 et ∂_2 s'annulent à l'ordre deux en p_1 et p_2 respectivement. On pose ensuite $s := \partial_1 \otimes \partial_{32}$ et $t := \partial_2 \otimes \partial_{31}$, et on peut encore une fois vérifier qu'il existe un ouvert non vide $W \subset \mathbb{F}_m$ tel que s et t ne s'annulent pas simultanément au-dessus de W, et en déduire que $T_{\tilde{X}}$ est pseudo-effectif.

$\square$

3.2.5 Éclatements de $\mathbb{F}_m$ en 5 points généraux ($m \geq 1$)

Proposition 3.2.5. *Soit $m \geq 1$. Soit $\tilde{X}$ l'éclatement de $X = \mathbb{F}_m$ en 5 points généraux $p_1, \ldots, p_5$. Alors $T_{\tilde{X}}$ n'est pas pseudo-effectif.*

Démonstration. On a par définition $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m))$. On note $L = \mathcal{O}_X(1)$ et $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ la surjection canonique. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_{X/\mathbb{P}^1} \cong L^2 \otimes \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \longrightarrow T_X \xrightarrow{d\phi} \phi^* T_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$$

Au morphisme surjectif de faisceaux $d\phi$ on associe une section σ de $r : \mathbb{P}(T_X) \to X$ telle que $\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1) = \phi^* T_{\mathbb{P}^1} = \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Notons Z l'image de X par cette section. On considère le fibré en droites $H = L \otimes \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m+1)$ sur X. D'après [Ha77, Thm.V.2.17], H est très ample.

On note $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de $p_1, \ldots, p_5$, et on reprend encore une fois les notations introduites dans la section 2.2 : on associe à cet éclatement un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}$, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \\ \mathbb{P}(T_{\tilde{X}}) \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{P}(\pi^* T_X) \arrow[ll, dashed, "\varphi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[dl, "q"] & \mathbb{P}(T_X) \arrow[d, "r"] \\ & \tilde{X} \arrow[rr, "\pi"] & & X \end{tikzcd}$$

avec $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1) = \varepsilon^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^* T_X)}(1) \otimes \varepsilon^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$. On a alors la suite d'isomorphismes suivante.

$$
\begin{aligned}
&H^0(\mathbb{P}(T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2kn) \otimes r^*H^k \otimes \psi_*\mathcal{I}^{2kn}) \\
&\qquad\qquad \cong H^0(\mathbb{P}(\pi^*T_X), \psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2kn) \otimes \mathcal{I}^{2kn} \otimes \psi^*r^*H^k) \\
&\qquad\qquad \cong H^0(\mathbb{P}(\pi^*T_X), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(2kn) \otimes \mathcal{I}^{2kn} \otimes \psi^*r^*H^k) \\
&\qquad\qquad \cong H^0(Y, \varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi^*T_X)}(2kn) \otimes (\varepsilon^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y)^{\otimes 2kn} \otimes \varepsilon^*\psi^*r^*H^k) \\
&\qquad\qquad \cong H^0(Y, f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(2kn) \otimes f^*p^*\pi^*H^k)
\end{aligned}
$$

On en déduit que :

$$
\varepsilon^{-1}\psi^{-1}\left(\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2kn) \otimes r^*H^k \otimes \psi_*\mathcal{I}^{2kn}|\right) = f^{-1}\left(\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(2kn) \otimes p^*\pi^*H^k|\right). \tag{3.1}
$$

On va maintenant démontrer que pour $n \geq m+4$, et pour tout entier $k \geq 1$, une section globale du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2kn) \otimes r^*H^k \otimes \psi_*\mathcal{I}^{2kn}$ doit s'annuler le long de la surface Z. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, il doit donc exister une section non nulle :

$$
s \in H^0(Z, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2kn) \otimes r^*H^k \otimes \psi_*\mathcal{I}^{2kn})|_Z)
$$

Notons D le diviseur des zéros de s. On a des isomorphismes

$$
\begin{aligned}
H^0(Z, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2kn) \otimes r^*H^k)|_Z) &\cong H^0(X, \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2kn) \otimes L^k \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k(m+1))) \\
&\cong H^0(X, L^k \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4kn + k(m+1)))
\end{aligned}
$$

donc si on note C_0 le diviseur correspondant à $L = \mathcal{O}_X(1)$ et f une fibre de ϕ on a :

$$
D \equiv_{\mathrm{lin}} kC_0 + (4kn + k(m+1))f.
$$

On va utiliser ensuite le résultat suivant :

Lemme 3.2.6. *Il existe un entier $p \leq m+2$ ayant la propriété suivante : si $C \in |C_0 + pf|$ est une courbe générale passant par $p_1, \ldots, p_5$, alors C est irréductible, et n'est pas une composante du support de D.*

Supposons pour le moment que ce lemme soit vrai : par conséquent, si $C \in |C_0 + pf|$ est une courbe générale passant par les points $p_1, \ldots, p_5$, on a :

$$
D \cdot C \geq \sum_{i=1}^{5} (D \cdot C)_{p_i} \geq 5kn
$$

En effet d'après la proposition (2.2.5), pour tout i le diviseur D a une multiplicité en p_i au moins égale à kn.

Par ailleurs, sachant que $C_0^2 = -m$, $C_0 \cdot f = 1$, et $f^2 = 0$, on a :

$$D \cdot C = (kC_0 + (4kn + k(m+1))f) \cdot (C_0 + pf) = 4kn + k(p+1)$$

On obtient alors $4kn + k(p+1) \geq 5kn$, d'où $n \leq p+1 \leq m+3$, ce qui est une contradiction.

On a donc obtenu le résultat suivant pour tout $n \geq m+4$, et pour tout entier k :

$$Z \subset \mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(2kn) \otimes r^*H^k \otimes \psi_* \mathcal{I}^{2kn}|$$

d'où grâce à (3.1) :

$$f(\varepsilon^{-1}\psi^{-1}(Z)) \subset \mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(2kn) \otimes p^*\pi^*H^k|.$$

Par ailleurs on peut écrire $\pi^*H = A \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(qE)$ avec A un fibré en droites ample sur $\tilde{X}$ et $q \geq 1$ un entier. On a donc

$$f(\varepsilon^{-1}\psi^{-1}(Z)) \subset \mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(2kn) \otimes p^*A^k| \cup p^{-1}(E),$$

d'où

$$f(\varepsilon^{-1}\psi^{-1}(Z)) \subset \left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k \geq 1} \mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(2kn) \otimes p^*A^k| \right) \cup p^{-1}(E),$$

et finalement grâce à la proposition (1.1.9) on a :

$$f(\varepsilon^{-1}\psi^{-1}(Z)) \subset \mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1)) \cup p^{-1}(E)$$

ce qui permet de conclure que $p\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))\right) \supset \tilde{X} \backslash E$. Comme $p\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))\right)$ est une réunion dénombrable de fermés, ceci entraîne que $p\left(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\tilde{X}})}(1))\right) = \tilde{X}$, donc $T_{\tilde{X}}$ n'est pas pseudo-effectif.

$\square$

Démonstration du lemme 3.2.6. On a $\phi_* L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)$, donc pour tout entier p :

$$H^0(X, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p-m))$$

On en déduit en particulier que si $p \geq m$, alors $h^0(X, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p)) = 2p - m + 2$. Comme les points $p_1, \ldots, p_5$ sont en position générale on a donc

$$h^0(X, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p) \otimes \mathcal{I}_{p_1,\ldots,p_5}) = 2p - m - 3.$$

Supposons pour commencer que $m \geq 5$, on va voir que $p = m$ convient.

Considérons une courbe $C \in |C_0 + mf|$ et supposons qu'elle n'est pas irréductible. On peut donc écrire $C = \sum_i C_i'$ avec des courbes irréductibles $C_i' \in |\epsilon_i C_0 + \gamma_i f|$, où $\epsilon_i \in \{0,1\}$ et $\gamma_i \in \{0, \ldots, m\}$. D'après [Ha77, Corollary V.2.18] on a pour chaque i : ou bien $\epsilon_i = 0$ et $\gamma_i = 1$; ou bien $\epsilon_i = 1$ et $\gamma_i = 0$; ou bien $\epsilon_i = 1$ et $\gamma_i \geq m$. Le dernier cas est impossible car C n'est pas irréductible, donc la courbe C est de la forme $C_0 \cup f_1 \cup \cdots \cup f_m$ où les f_i sont des fibres de ϕ. Les points $p_1, \ldots, p_5$ étant en position générale, on peut supposer que leurs images par ϕ sont cinq points distincts de $\mathbb{P}^1$. L'ensemble des courbes réductibles de $|C_0 + mf|$ passant par $p_1, \ldots, p_5$ est donc égal à

$$\{\ C' \cup \phi^{-1}(\phi(p_1)) \cup \cdots \cup \phi^{-1}(\phi(p_5))\ ,\ C' \in |C_0 + (m-5)f|\ \}$$

Or on a

$$h^0(X, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-5)) = m-4 < m-3 = h^0(X, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes \mathcal{I}_{p_1,\ldots,p_5}),$$

on en déduit donc qu'une courbe générale dans $|C_0+mf|$ passant par $p_1, \ldots, p_5$ est irréductible. Enfin puisqu'on a supposé que $m \geq 5$, on a

$$h^0(X, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes \mathcal{I}_{p_1,\ldots,p_5}) = m-3 \geq 2,$$

donc une courbe générale dans $|C_0+mf|$ passant par $p_1, \ldots, p_5$ n'est pas une composante du support de D.

On traite ensuite le cas $m = 1$, en prenant $p = 3$. Si $C \in |C_0+3f|$ est une courbe réductible passant par $p_1, \ldots, p_5$, alors avec le même raisonnement que ci-dessus on obtient une décomposition de C d'un des deux types suivants (quitte à permuter les points) :

1. $C = C' \cup \phi^{-1}(\phi(p_5))$, avec $C' \in |C_0 + 2f|$ passant par $p_1, \ldots, p_4$;
2. $C = C' \cup \phi^{-1}(\phi(p_4)) \cup \phi^{-1}(\phi(p_5))$, avec $C' \in |C_0 + f|$ passant par $p_1, \ldots, p_3$.

Or on a

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{F}_1, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \otimes \mathcal{I}_{p_1,\ldots,p_5}) &= 2 \\ h^0(\mathbb{F}_1, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \otimes \mathcal{I}_{p_1,\ldots,p_4}) &= 1 \\ h^0(\mathbb{F}_1, L \otimes \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes \mathcal{I}_{p_1,\ldots,p_3}) &= 0 \end{aligned}$$

On voit donc qu'une courbe générale $C \in |C_0 + 3f|$ passant par $p_1, \ldots, p_5$ est irréductible, et n'est pas une composante du support de D.

Enfin on obtient le résultat par un raisonnement identique dans les autres cas : on prend $p = 4$ si $m = 2$ ou 3 ; et on prend $p = 5$ si $m = 4$. □

3.3 Surfaces réglées sur une courbe elliptique

Dans la suite C désigne une courbe elliptique. Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur C, et soit $S = \mathbb{P}(E)$. On se propose dans cette section de démontrer que T_S est pseudo-effectif. On commence par traiter les cas simples où le fibré tangent est nef.

Proposition 3.3.1. *Si E est indécomposable, ou si $E = \mathcal{O}_C \oplus L$ avec $L \in \mathrm{Pic}^0(C)$, alors T_S est nef.*

Démonstration. Rappelons que si E est indécomposable, alors grâce à [Ha77, Thm.V.2.15] on peut supposer que l'on a une suite exacte non scindée

$$0 \to \mathcal{O}_C \to E \to L \to 0$$

avec $\deg(L) = 0$ ou $\deg(L) = 1$. Dans le cas où $E = \mathcal{O}_C \oplus L$ avec $L \in \mathrm{Pic}^0(C)$, on a également une suite exacte comme ci-dessus, donc le raisonnement qui suit est encore valable.

On voit alors que T_S est nef de la façon suivante : si on note $p : S \to C$ la fibration canonique, on a la suite exacte

$$0 \to T_{S/C} \to T_S \to p^*T_C \cong \mathcal{O}_S \to 0$$

donc il suffit de voir que $T_{S/C}$ est nef. En prenant le déterminant dans cette suite exacte on obtient $T_{S/C} \cong \mathcal{O}_S(-K_S) \cong \mathcal{O}_S(2) \otimes p^*L^{-1}$. Si $\deg(L) = 0$, alors $\mathcal{O}_S(2) \otimes p^*L^{-1}$ est nef d'après [Ha77, Proposition V.2.20], et si $\deg(L) = 1$, alors $\mathcal{O}_S(2) \otimes p^*L^{-1}$ est nef d'après [Ha77, Proposition V.2.21]. $\square$

Le dernier cas à traiter est le suivant.

Théorème 3.3.2. *Soit L un fibré en droites sur C de degré $e > 0$ et soit $S = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus L^{-1})$. Alors T_S est pseudo-effectif.*

On commence par quelques rappels sur les facteurs d'automorphie et leurs liens avec les fibrés vectoriels sur C (pour plus de détails on renvoie par exemple à [BL92]).

3.3.1 Facteurs d'automorphie et fibrés vectoriels sur C

Soit $\Lambda = \pi_1(C)$ le groupe fondamental de C et $p : V \cong \mathbb{C} \to C$ son revêtement universel.

Définition 3.3.3. Soit $r \geq 1$. Une application régulière $f : \Lambda \times V \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est appelée facteur d'automorphie si elle vérifie :

$$f(\lambda + \mu, v) = f(\lambda, v + \mu) f(\mu, v) \ , \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall v \in V.$$

Deux facteurs d'automorphie f_1 et f_2 sont dits équivalents s'il existe une fonction régulière $h : V \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ telle que $f_1(\lambda, v) = h(v + \lambda) f_2(\lambda, v) h(v)^{-1}$.

Etant donné un facteur d'automorphie f, on définit une action de Λ sur $V \times \mathbb{C}^r$ comme suit :

$$\lambda \cdot (v, z) := (v + \lambda, f(\lambda, v) z)$$

Cette action permet de définir un fibré vectoriel $p_f : E_f \to C$, où $E_f := (V \times \mathbb{C}^r)/\Lambda$ et p_f est le morphisme induit par $p : V \to V/\Lambda \cong C$. La correspondance $f \mapsto E_f$ induit alors une bijection entre les classes d'équivalence de facteurs d'automorphie, et les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur C. Cette correspondance possède entre autres les deux propriétés suivantes :

Lemme 3.3.4. *Soient $f_1 : \Lambda\times V \to \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{C})$ et $f_2 : \Lambda\times V \to \mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{C})$ deux facteurs d'automorphie. Alors $f_1 \otimes f_2 : \Lambda \times V \to \mathrm{GL}_{r_1 r_2}(\mathbb{C})$ est un facteur d'automorphie, et $E_{f_1\otimes f_2} = E_{f_1} \otimes E_{f_2}$*

Lemme 3.3.5. *Soient $f_1 : \Lambda\times V \to \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{C})$ et $f_2 : \Lambda\times V \to \mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{C})$ deux facteurs d'automorphie, et $g : \Lambda \times V \to \mathcal{M}_{r_2,r_1}(\mathbb{C})$ une application régulière tels que :*

$$g(\lambda + \mu, v) = g(\lambda, v + \mu)f_1(\mu, v) + f_2(\lambda, v + \mu)g(\mu, v) \ , \quad \forall\lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall v \in V$$

Soit $f : \Lambda \times V \to \mathrm{GL}_{r_1+r_2}(\mathbb{C})$ l'application définie par :

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ g & f_2 \end{pmatrix}$$

Alors f est un facteur d'automorphie, et on a une suite exacte de fibrés vectoriels sur C :

$$0 \to E_{f_2} \to E_f \to E_{f_1} \to 0$$

Rappelons enfin la notion de fonction thêta :

Définition 3.3.6. Soit $f : \Lambda \times V \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ un facteur d'automorphie. Alors $H^0(C, E_f)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des applications régulières $\vartheta : V \to \mathbb{C}^r$ vérifiant :

$$\vartheta(v + \lambda) = f(\lambda, v)\vartheta(v) \ , \quad \forall\lambda \in \Lambda,\ \forall v \in V$$

Une telle application est appelée fonction thêta pour f.

3.3.2 Estimation de $h^0(S, S^nT_S)$

Pour démontrer le théorème (3.3.2), le principal ingrédient sera l'inégalité suivante :

Proposition 3.3.7. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$h^0(S, S^nT_S) \geq \frac{n(n + 1)(n + 2)e}{6}$$

Soit $f : \Lambda \times V \to \mathbb{C}^*$ un facteur d'automorphie tel que $E_f = L^{-1}$. En notant $[x : y]$ des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^1$, on définit une action de Λ sur $V \times \mathbb{P}^1$ par :

$$\lambda \cdot (v, [x : y]) := (v + \lambda, [x : f(\lambda, v)y])$$

On a alors un isomorphisme $S \cong (V \times \mathbb{P}^1)/\Lambda$. De plus l'action de Λ sur $V \times \mathbb{P}^1$ induit une action sur le fibré tangent $T_{V\times\mathbb{P}^1}$ ainsi que sur toutes ses puissances symétriques, et on a un isomorphisme :

$$H^0(S, S^n T_S) \cong H^0(V \times \mathbb{P}^1, S^n T_{V\times\mathbb{P}^1})^\Lambda$$

On va donc s'intéresser aux invariants de $H^0(V \times \mathbb{P}^1, S^n T_{V\times\mathbb{P}^1})$ sous l'action de Λ.

Action de Λ sur $H^0(V \times \mathbb{P}^1, T_{V\times\mathbb{P}^1})$

Commençons par décrire précisément l'action de Λ sur $H^0(V \times \mathbb{P}^1, T_{V\times\mathbb{P}^1})$. Pour déterminer l'action d'un élément $\lambda \in \Lambda$ sur un champ de vecteurs $s \in H^0(V \times \mathbb{P}^1, T_{V\times\mathbb{P}^1})$, il suffit de calculer $\lambda \cdot s$ en restriction à l'ouvert stable $U = \{x \neq 0\} \cong V \times \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$: on note v et $z = \frac{y}{x}$ les coordonnées sur U. L'action de λ sur U est décrite dans ces coordonnées par l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi_\lambda : & U & \longrightarrow & U \\ & (v, z) & \longmapsto & (v + \lambda, f(\lambda, v)z) \end{array}$$

dont la différentielle est la suivante :

$$\mathrm{d}\,\phi_\lambda(v, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(\lambda, v)z & f(\lambda, v) \end{pmatrix}$$

Pour tout champ de vecteur s sur l'ouvert U, l'action de λ sur s est définie par :

$$(\lambda \cdot s)(v, z) = (\phi_{\lambda *} s)(v, z) = \mathrm{d}\,\phi_\lambda(\phi_\lambda^{-1}(v, z)) \cdot s(\phi_\lambda^{-1}(v, z))$$

avec $\phi_\lambda^{-1}(v, z) = (v - \lambda, f(\lambda, v - \lambda)^{-1} z)$. On en déduit en particulier :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial v})(v, z) & = & \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}(\lambda, v - \lambda) f(\lambda, v - \lambda)^{-1} z \frac{\partial}{\partial z} \\ (\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial z})(v, z) & = & f(\lambda, v - \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \\ (\lambda \cdot z\frac{\partial}{\partial z})(v, z) & = & z\frac{\partial}{\partial z} \\ (\lambda \cdot z^2\frac{\partial}{\partial z})(v, z) & = & f(\lambda, v - \lambda)^{-1} z^2 \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

En notant $\partial_v, \partial_0, \partial_1$ et ∂_2 les champs de vecteurs globaux sur $V \times \mathbb{P}^1$ qui étendent respectivement $\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial z}$ et $z^2\frac{\partial}{\partial z}$, on a donc

$$\begin{cases} \lambda \cdot \partial_v &= \partial_v + g(\lambda, \cdot - \lambda)\partial_1 \\ \lambda \cdot \partial_0 &= f(\lambda, \cdot - \lambda)\partial_0 \\ \lambda \cdot \partial_1 &= \partial_1 \\ \lambda \cdot \partial_2 &= f(\lambda, \cdot - \lambda)^{-1}\partial_2 \end{cases}$$

où l'on a posé $g(\lambda, v) := \dfrac{\partial f}{\partial v}(\lambda, v) f(\lambda, v)^{-1}$.

Construction d'invariants de $H^0(V \times \mathbb{P}^1, S^n T_{V\times\mathbb{P}^1})$ sous l'action de Λ

Fixons un entier $i \in \{1, \ldots, n\}$. On définit $M_{i,n} : \Lambda \times V \to \mathrm{GL}_{n-i+1}(\mathbb{C})$ par :

$$M_{i,n} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{n-i}{1} g & 1 & & & \vdots \\ \binom{n-i}{2} g^2 & \binom{n-i-1}{1} g & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-i}{n-i-1} g^{n-i-1} & \binom{n-i-1}{n-i-2} g^{n-i-2} & \cdots & 1 & 0 \\ g^{n-i} & g^{n-i-1} & \cdots & g & 1 \end{pmatrix}$$

On montre alors le fait suivant :

Lemme 3.3.8. *Pour tout $n \geq 1$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $M_{i,n}$ est un facteur d'automorphie. De plus pour $i \leq n-1$ on a une suite exacte :*

$$0 \to E_{M_{i+1,n}} \to E_{M_{i,n}} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

Démonstration. Si $i = n$, $M_{n,n} = (1)$ et il n'y a rien à démontrer.
Si $i \leq n-1$, on remarque alors que :

$$M_{i,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G_i & M_{i+1,n} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad G_i := \begin{pmatrix} \binom{n-i}{1} g \\ \binom{n-i}{2} g^2 \\ \vdots \\ g^{n-i} \end{pmatrix}$$

En procédant par récurrence descendante sur i, il suffit donc d'après le lemme 3.3.5

de montrer que pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$, et pour tout $v \in V$:

$$G_i(\lambda + \mu, v) = G_i(\lambda, v + \mu) + M_{i+1,n}(\lambda, v + \mu)G_i(\mu, v)$$

Pour $k \in \{1, n - i\}$, la k-ème ligne de cette égalité est :

$$\binom{n-i}{k} g(\lambda+\mu, v)^k = \binom{n-i}{k} g(\lambda, v+\mu)^k + \sum_{p=1}^{k} \binom{n-i-p}{k-p} g(\lambda, v+\mu)^{k-p} \binom{n-i}{p} g(\mu, v)^p$$

En remarquant que $\binom{n-i-p}{k-p}\binom{n-i}{p} = \binom{n-i}{k}\binom{k}{p}$ l'égalité à montrer devient :

$$g(\lambda + \mu, v)^k = g(\lambda, v + \mu)^k + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} g(\lambda, v + \mu)^{k-p} g(\mu, v)^p$$

ou encore $g(\lambda + \mu, v)^k = [g(\lambda, v + \mu) + g(\mu, v)]^k$.
Or en dérivant l'égalité $f(\lambda + \mu, v) = f(\lambda, v + \mu)f(\mu, v)$ par rapport à v on obtient facilement la relation :

$$g(\lambda + \mu, v) = g(\lambda, v + \mu) + g(\mu, v),$$

ce qui donne le résultat. □

D'après le lemme 3.3.4, $f^{-i}M_{i,n}$ est donc un facteur d'automorphie, auquel est associé le fibré vectoriel $L^i \otimes E_{M_{i,n}}$ sur C. A une section globale de ce fibré est associée une fonction thêta $\vartheta_i = (\vartheta_i^1, \ldots, \vartheta_i^{n-i+1}) : V \to \mathbb{C}^{n-i+1}$, vérifiant pour tout $\lambda \in \Lambda$:

$$\vartheta_i = f(\lambda, \cdot - \lambda)^{-i} M_{i,n}(\lambda, \cdot - \lambda)\vartheta_i(\cdot - \lambda)$$

On a donc pour tout $j \in \{1, \cdots, n - i + 1\}$:

$$\vartheta_i^j = f(\lambda, \cdot - \lambda)^{-i} \sum_{k=1}^{j} \binom{n-i-k+1}{j-k} g(\lambda, \cdot - \lambda)^{j-k} \vartheta_i^k(\cdot - \lambda)$$

On considère alors la section globale de $S^n T_{V\times\mathbb{P}^1}$ suivante :

$$s_i = \sum_{k=1}^{n-i+1} \vartheta_i^k \cdot \partial_1^{k-1} \cdot \partial_2^i \cdot \partial_v^{n-i-k+1}$$

On vérifie alors que s_i est Λ-invariante. En effet pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot s_i &= \sum_{k=1}^{n-i+1} \vartheta_i^k(\cdot - \lambda) \cdot \partial_1^{k-1} \cdot (f(\lambda, \cdot - \lambda)^{-i} \partial_2^i) \cdot (\partial_v + g(\lambda, \cdot - \lambda)\partial_1)^{n-i-k+1} \\
&= f(\lambda, \cdot - \lambda)^{-i} \sum_{k=1}^{n-i+1} \sum_{l=0}^{n-i-k+1} \binom{n-i-k+1}{l} g(\lambda, \cdot - \lambda)^l \vartheta_i^k(\cdot - \lambda) \cdot \partial_1^{k-1+l} \cdot \partial_2^i \cdot \partial_v^{n-i-k+1-l} \\
&= f(\lambda, \cdot - \lambda)^{-i} \sum_{k=1}^{n-i+1} \sum_{j=k}^{n-i+1} \binom{n-i-k+1}{j-k} g(\lambda, \cdot - \lambda)^{j-k} \vartheta_i^k(\cdot - \lambda) \cdot \partial_1^{j-1} \cdot \partial_2^i \cdot \partial_v^{n-i+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n-i+1} \left(f(\lambda, \cdot - \lambda)^{-i} \sum_{k=1}^{j} \binom{n-i-k+1}{j-k} g(\lambda, \cdot - \lambda)^{j-k} \vartheta_i^k(\cdot - \lambda) \right) \cdot \partial_1^{j-1} \cdot \partial_2^i \cdot \partial_v^{n-i+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n-i+1} \vartheta_i^j \cdot \partial_1^{j-1} \cdot \partial_2^i \cdot \partial_v^{n-i+1-j} = s_i
\end{aligned}$$

De plus comme s_i est de degré i en ∂_2, l'application suivante est injective.

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{i=1}^n H^0(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}}) & \longrightarrow & H^0(V \times \mathbb{P}^1, S^n T_{V \times \mathbb{P}^1}) \\
(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n s_i
\end{array}$$

Conclusion

Démonstration de la proposition 3.3.7. On a construit ci-dessus une application linéaire injective de $\bigoplus_{i=1}^n H^0(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}})$ dans $H^0(V \times \mathbb{P}^1, S^n T_{V \times \mathbb{P}^1})^\Lambda \cong H^0(S, S^n T_S)$, et on en déduit l'inégalité :

$$h^0(S, S^n T_S) \geq \sum_{i=1}^n h^0(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}})$$

Le lemme qui suit entraîne alors

$$h^0(S, S^n T_S) \geq \sum_{i=1}^n (n-i+1)ie = \frac{n(n+1)(n+2)e}{6} ,$$

ce qui est l'inégalité souhaitée. □

Il ne reste plus qu'à calculer $h^0(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}})$, ce qui fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.3.9. $h^0(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}}) = (n-i+1)ie, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Démonstration. On fixe $i \geq 1$ et on montre par récurrence sur n que

$$H^0(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}}) = H^0(C, L^i)^{\oplus n-i+1} \quad \text{et que} \quad H^1(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}}) = 0$$

Pour conclure il suffira ensuite d'observer que $h^0(C, L^i) = \deg(L^i) = ie$ d'après le théorème de Riemann-Roch.
Si $n = i$, on a bien $H^0(C, L^n \otimes E_{M_{n,n}}) = H^0(C, L^n)$ et $H^1(C, L^n \otimes E_{M_n}) = H^1(C, L^n) = 0$ (car L est de degré $e > 0$).
Si $n > i$, on suppose que $H^0(C, L^i \otimes E_{M_{i,n-1}}) = H^0(C, L^i)^{\oplus n-i}$ et que $H^1(C, L^i \otimes E_{M_{i,n-1}}) = 0$. La suite exacte du lemme 3.3.8 tensorisée par L^i induit la suite exacte longue en cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(C, L^i \otimes E_{M_{i+1,n}}) \to \quad & H^0(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}}) \to H^0(C, L^i) \to \\ & H^1(C, L^i \otimes E_{M_{i+1,n}}) \to H^1(C, L^i \otimes E_{M_{i,n}}) \to 0 \end{aligned}$$

En remarquant que $M_{i+1,n} = M_{i,n-1}$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et la suite exacte ci-dessus permet de conclure. $\square$

3.3.3 Pseudo-effectivité de T_S

Démonstration du théorème 3.3.2. Notons $X = \mathbb{P}(T_S)$. La projection $\pi : X \to S$ admet une section $\sigma : S \to X$, d'image D, correspondant à la suite exacte :

$$0 \to T_{S/C} \to T_S \to \mathcal{O}_S \to 0$$

On a $\sigma^*\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_S$, et $\pi^*T_{S/C} \cong \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_X(-D)$. En prenant le déterminant de la suite exacte ci-dessus, on note de plus que $T_{S/C} \cong \mathcal{O}_S(-K_S)$, et donc que $\mathcal{O}_X(1) \cong \mathcal{O}_X(D + \pi^*(-K_S))$.

Soient $n \geq 1$, et $k \in \{0, \dots, n\}$. On considère la suite exacte suivante.

$$0 \to \mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-(k+1)D) \to \mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-kD) \to \mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-kD)|_D \to 0$$

On a

$$\begin{aligned} R^1\pi_*(\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X((-(k+1)D))) &= R^1\pi_* \left[\mathcal{O}_X(n-(k+1)) \otimes \pi^*\mathcal{O}_S(-(k+1)K_S)\right] \\ &= R^1\pi_* \left[\mathcal{O}_X(n-(k+1))\right] \otimes \mathcal{O}_S(-(k+1)K_S) \\ &= 0 \qquad (\text{ car } \ n-(k+1) > -2) \end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$\pi_*(\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-kD)|_D) = \pi_*(\mathcal{O}_X(n-k) \otimes \pi^*\mathcal{O}_S(-kK_S)|_D) = \mathcal{O}_S(-kK_S)$$

car $\pi_*(\mathcal{O}_X(1)|_D) = \sigma^*(\mathcal{O}_X(1)|_D) = \mathcal{O}_S$. En appliquant π_* à la suite exacte ci-dessus on obtient donc :

$$0 \to \pi_*(\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-(k+1)D)) \to \pi_*(\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-kD)) \to \mathcal{O}_S(-kK_S) \to 0$$

On a donc une filtration de S^nT_S :

$$0 = F^{n+1} \subset F^n \subset \cdots \subset F^1 \subset F^0 = S^nT_S$$

avec

$$F^k := \pi_*(\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-kD)) \quad \text{et} \quad F^k/F^{k+1} \cong \mathcal{O}_S(-kK_S) \quad \forall k \in \{0, \cdots, n\}.$$

Montrons maintenant que T_S est pseudo-effectif. On a $\mathcal{O}_X(1) \cong \mathcal{O}_X(D+\pi^*(-K_S))$, et $D + \pi^*(-K_S)$ est un diviseur effectif ($-K_S$ est effectif d'après [Ha77, Lemma V.2.10]). $\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_X(1))$ est donc contenu dans le support de ce diviseur.

Pour montrer que $\pi(\mathbf{B}_-(\mathcal{O}_X(1))) \neq S$ il suffit donc de voir que $D \not\subset \mathbf{B}_-(\mathcal{O}_X(1))$. Or la proposition (3.3.7) entraîne en particulier que $\mathcal{O}_X(1)$ est grand, donc il nous suffira d'après (1.1.16) de démontrer que l'ordre d'annulation asymptotique de $\mathcal{O}_X(1)$ le long de D est nul :

$$\nu_D(||\mathcal{O}_X(1)||) = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_D(|\mathcal{O}_X(n)|)}{n} = 0.$$

Si on pose $k_n := \nu_D(|\mathcal{O}_X(n)|)$, on a pour tout $n \geq 1$ un isomorphisme

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-k_nD))$$

donc

$$H^0(S, S^nT_S) \cong H^0(S, \pi_*(\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-k_nD))) = H^0(S, F^{k_n})$$

On en déduit que

$$h^0(S, S^nT_S) = h^0(S, F^{k_n}) \leq \sum_{i=k_n}^{n} h^0(S, F^i/F^{i+1}) = \sum_{i=k_n}^{n} h^0(S, \mathcal{O}_S(-iK_S))$$

Si on note $p : S \to C$ la projection canonique, alors d'après [Ha77, Lemma V.2.10], on a $\mathcal{O}_S(-K_S) \cong \mathcal{O}_S(2) \otimes p^*L$, donc

$$\begin{aligned} H^0(S, \mathcal{O}_S(-iK_S)) &\cong H^0(S, \mathcal{O}_S(2i) \otimes p^*L^i) \\ &\cong H^0(C, S^{2i}(\mathcal{O}_C \oplus L^{-1}) \otimes L^i) \\ &\cong \bigoplus_{j=-i}^{i} H^0(C, L^j) \end{aligned}$$

Comme $h^0(C, L^j) = je$ si $j > 0$, et $h^0(C, L^j) = 0$ si $j < 0$, on a donc

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(-iK_S)) = 1 + \sum_{j=1}^{i} je = 1 + \frac{i(i+1)e}{2}$$

puis

$$\begin{aligned} h^0(S, S^n T_S) &\leq \sum_{i=k_n}^{n} \left(1 + \frac{i(i+1)e}{2}\right) \\ &\leq (n - k_n + 1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)e}{2} - \sum_{i=1}^{k_n - 1} \frac{i(i+1)e}{2} \\ &\leq (n - k_n + 1) + \frac{n(n+1)(n+2)e}{6} - \frac{(k_n - 1)k_n(k_n + 1)e}{6} \end{aligned}$$

Avec la proposition 3.3.7, on obtient donc l'inégalité :

$$\frac{(k_n - 1)k_n(k_n + 1)e}{6} \leq (n - k_n + 1)$$

d'où

$$\frac{(k_n - 1)k_n(k_n + 1)e}{6n^3} + \frac{k_n}{n^3} \leq \frac{n+1}{n^3}$$

Ceci entraîne que $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 0$, d'où $\nu_D(||\mathcal{O}_X(1)||) = 0$, ce qui prouve que T_S est pseudo-effectif. □

3.4 Conclusion

Les résultats de ce chapitre mis bout à bout donnent la classification suivante.

Théorème 3.4.1. *Soit X une surface projective lisse, avec T_X pseudo-effectif. Alors on est dans l'un des cas suivants :*
- *X est une surface abélienne ;*
- *X est hyperelliptique ;*
- *X est une surface réglée sur une courbe elliptique ;*
- *X est rationnelle.*

Réciproquement, si X fait partie de l'une des trois premières catégories de cette liste, alors T_X est pseudo-effectif.

Le cas des surfaces rationnelles est traité par le théorème suivant, de façon incomplète pour deux raisons : d'une part on ne sait pas si l'éclatement d'une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_m$ en 4 points généraux a un fibré tangent pseudo-effectif pour $m \geq 2$; d'autre part on ne peut rien dire à propos de l'éclatement d'une surface rationnelle en des point spéciaux.

Théorème 3.4.2.
1. *Soit S l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en r points généraux. Alors T_S est pseudo-effectif si et seulement si $r \leq 5$. Donc pour $m = 0$ ou $m = 1$, l'éclatement de $\mathbb{F}_m$ en r points généraux a un fibré tangent pseudo-effectif si et seulement si $r \leq 4$.*
2. *Soit S l'éclatement de $\mathbb{F}_m$ en r points généraux, avec $m \geq 2$.*

– *Si* $r \leq 3$, *alors* T_S *est pseudo-effectif.*
– *Si* $r \geq 5$, *alors* T_S *n'est pas pseudo-effectif.*

Deuxième partie

Caractérisations des espaces projectifs et des quadriques

Introduction à la deuxième partie

L'objectif de cette deuxième partie est de caractériser les espaces projectifs et les quadriques par des propriétés de positivité de leur fibré tangent. De nombreux résultats existent déjà en ce sens : on a vu dans l'introduction les caractérisations de l'espace projectif de Mori et de Wahl ; on doit à Andreatta et Wiśniewski un résultat englobant ces deux caractérisations.

Théorème. *[AW01] Soit X une variété projective lisse. Si T_X contient un sous-faisceau localement libre ample E de rang $r \geq 1$, alors $X \cong \mathbb{P}^n$. De plus on a soit $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus r}$, soit $r = n$ et $E \cong T_{\mathbb{P}^n}$.*

Notons que Campana et Peternell avaient obtenu ce résultat précédemment dans le cas où $r \geq n-2$ (voir [CP98]).

Dans leur article [ADK08], Araujo, Druel et Kovács démontrent la caractérisation suivante, issue d'une conjecture de Beauville ([Be00]).

Théorème. *[ADK08, Theorem 1.1, Theorem 6.3] Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$, et L un fibré en droites ample sur X. Soit $p \geq 1$ un entier. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

1. $H^0(X, \wedge^p T_X \otimes L^{-p}) \neq 0$;
2. $H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes L^{-p}) \neq 0$ *et* $\rho(X) = 1$.

Alors ou bien $(X, L) \cong (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$, ou bien $(X, L) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, ou bien $(X, L) \cong (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$, où $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ est une quadrique lisse de dimension n.

Notre but est de généraliser ce résultat en affaiblissant ses hypothèses de la façon suivante.

Théorème 3. *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$, et L un fibré en droites ample sur X. Soit $p \geq 1$ un entier. On suppose que*

$$H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes L^{-p}) \neq 0.$$

Alors la conclusion du théorème ci-dessus est encore vraie.

Pour démontrer ce théorème, on commence par supposer que $\rho(X) \geq 2$, puisque le cas où $\rho(X) = 1$ est déjà connu. On remarque par ailleurs que X est uniréglée d'après un théorème de Miyaoka (voir la section 5.5). On choisit alors sur X une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles H, dont on montre dans un premier temps qu'elle est de degré 1 relativement à L, donc complète. Pour cela, on suppose par l'absurde qu'elle est de degré 2 (on voit facilement que c'est la seule alternative), et on construit à l'aide de la section non nulle de $T_X^{\otimes p} \otimes L^{-p}$ un feuilletage en courbes sur X dont les feuilles sont les courbes paramétrées par la famille H. À l'aide de ce feuilletage on démontre l'existence d'une surface réglée S, munie d'un fibré en droites L_S grand et nef, de degré relatif 2, et tel que $T_S^{\otimes p} \otimes L_S^{-p}$ ait une section non nulle, ce qui contredit la proposition suivante.

Proposition. *(= Proposition 7.1.3) Soit $\pi : S \to C$ une surface réglée, avec C une courbe projective lisse. On note f une fibre de π. Si L est un fibré en droites nef et grand tel que $L \cdot f = 2$, alors pour tout $p \geq 1$*

$$H^0(S, T_S^{\otimes p} \otimes L^{-p}) = 0.$$

Une fois acquis le fait que H est complète, on procède à l'étude du quotient H-rationnellement connexe $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ de X, qui est bien défini en codimension un (voir la section 5.3 pour les définitions). Un des éléments clés de cette étude est une généralisation du théorème de Miyaoka évoqué ci-dessus (démontrée dans la section 5.5) qui nous permet dans certains cas de montrer que la variété Y_0 est uniréglée. Le travail effectué permet de se ramener à deux cas particuliers simples : le cas où X est un fibré projectif sur une courbe C, et le cas où X est un fibré en quadriques sur une courbe C. Dans les deux cas on montre que la section de $T_X^{\otimes p} \otimes L^{-p}$ est en fait une section de $T_{X/C}^{\otimes p} \otimes L^{-p}$, sauf si X est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On obtient alors la conclusion grâce à deux théorèmes d'annulation qui font l'objet du chapitre 6. On n'énonce ici que le premier, le second (théorème 6.3.5) étant très similaire :

Théorème. *(= Théorème 6.2.2) Soient C une courbe projective lisse et E un fibré vectoriel ample sur C de rang $r+1 \geq 2$. Soient $\pi : X = \mathbb{P}(E) \to C$ le fibré projectif associé à E et G un fibré vectoriel nef sur X. Alors*

$$\forall p \geq 1 \ , \ H^0(X, T_{X/C}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-p) \otimes G^*) = 0$$

On démontrera également par des méthodes analogues la caractérisation des espaces projectifs suivante, qui constitue un outil important dans la démonstration du théorème 3.

Théorème 4. *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$, et L un fibré en droites ample sur X. Soient $p \geq 1$ et $k > p$ deux entiers. On suppose que*

$$H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes L^{-k}) \neq 0$$

Alors $X \cong \mathbb{P}^n$, $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, et $k \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) p$.

Contenu des chapitres

Les chapitres 4 et 5 sont principalement constitués de rappels. On traite dans le chapitre 4 des faisceaux sans torsion, des faisceaux réflexifs, et de la notion de semistabilité d'un faisceau sans torsion. On démontre en fin de chapitre (section 4.3) que le fibré vectoriel $T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)$ a des sections non nulles si et seulement si $k \leq \frac{p(n+1)}{n}$, un fait qui sera utile au chapitre 7 pour démontrer les deux théorèmes principaux.

Dans le chapitre 5 on rappelle des définitions et propriétés en lien avec les familles de courbes rationnelles sur les variétés uniréglées, et les quotients rationnellement connexes associés. Après quelques rappels sur les feuilletages, on démontre dans la section 5.5 un critère pour qu'une variété soit uniréglée, qui généralise celui démontré par Miyaoka.

Le chapitre 6 est consacré à la preuve de deux théorèmes d'annulation sur les fibrés projectifs et fibrés en quadriques (théorèmes 6.2.2 et 6.3.5). On y rappelle également les caractérisations des fibrés projectifs et des fibrés en quadriques dûes à Fujita.

Enfin le chapitre 7 contient les démonstrations des deux résultats principaux. On commence ce chapitre par des résultats préliminaires, dont la proposition 7.1.3 sur les surfaces réglées. Puis la démonstration du théorème 4 occupe la section 7.2, et pour finir on démontre le théorème 3 dans la dernière section.

Chapitre 4

Faisceaux sans torsion, Faisceaux réflexifs, Semistabilité

Ce chapitre est essentiellement composé de rappels sur les faisceaux sans torsion, les faisceaux réflexifs, et sur la notion de semistabilité d'un faisceau sans torsion. A la fin du chapitre on détermine les conditions nécessaires et suffisantes pour que le fibré vectoriel $T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)$ admette des sections globales non nulles.

4.1 Faisceaux sans torsion et faisceaux réflexifs

On rappelle ici quelques propriétés des faisceaux sans torsion et des faisceaux réflexifs. Le lecteur pourra trouver les démonstrations de la plupart des résultats qui suivent dans [Ha82].

Définition 4.1.1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur une variété X. On note $\mathcal{F}^* := \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ le dual de $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est sans torsion si l'application naturelle

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$$

est injective. On note $\mathrm{Tor}(\mathcal{F})$ le noyau de cette application. On dit que $\mathcal{F}$ est réflexif si c'est un isomorphisme.

Définition 4.1.2. On dit qu'une propriété est vraie en codimension un dans une variété X, s'il existe un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins deux dans X, et sur lequel la propriété est vraie.

Remarque 4.1.3. Si X est une variété lisse, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau sans torsion sur X, alors $\mathcal{F}$ est localement libre en codimension un (voir [Kob87, Corollary V.5.15]).

Notons également que si la variété X est normale, alors elle est lisse en codimension un, donc un faisceau sans torsion sur X est localement libre en codimension un.

Proposition 4.1.4. *[Ha82, Proposition 1.1] Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété X est réflexif si et seulement s'il prend place (au moins localement) dans une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{G} \to 0$$

avec $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre et $\mathcal{G}$ un faisceau sans torsion.

Corollaire 4.1.5. *[Ha82, Corollary 1.2] Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur une variété X. Alors $\mathcal{F}^*$ est un faisceau réflexif.*

Définition 4.1.6. Si $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sans torsion sur une variété X, on dit qu'un sous-faisceau $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ est saturé dans $\mathcal{F}$ si le quotient $\mathcal{Q} := \mathcal{F}/\mathcal{G}$ est sans torsion. On appelle saturation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$ le noyau de l'application

$$\mathcal{F} \to \mathcal{Q}/\operatorname{Tor}(\mathcal{Q}).$$

C'est le plus petit sous-faisceau saturé de $\mathcal{F}$ contenant $\mathcal{G}$.

La proposition 4.1.4 entraîne immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.7. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur une variété X, et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau. Alors la saturation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$ est un faisceau réflexif.*

Définition 4.1.8. Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété X est dit normal si pour tout ouvert $U \subset X$ et tout fermé $Y \subset U$ de codimension au moins deux, l'application de restriction

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U \setminus Y)$$

est bijective.

La proposition suivante donne une caractérisation utile des faisceaux réflexifs sur une variété normale.

Proposition 4.1.9. *[Ha82, proposition 1.6] Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur une variété normale X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *$\mathcal{F}$ est réflexif ;*
- *$\mathcal{F}$ est sans torsion et normal ;*
- *$\mathcal{F}$ est sans torsion et pour tout ouvert $U \subset X$ et tout fermé $Y \subset U$ de codimension au moins deux, $\mathcal{F}|_U \cong i_*\mathcal{F}|_{U \setminus Y}$, où $i : U \setminus Y \to U$ est l'inclusion.*

En particulier si $U \subset X$ est un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins deux, alors deux faisceaux réflexifs sont égaux si et seulement si leurs restrictions à U sont égales.

Corollaire 4.1.10. *Soient X une variété normale, $U \subset X$ un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins deux, et $i : U \to X$ l'inclusion. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau réflexif sur U. Alors $i_*\mathcal{F}$ est réflexif. De plus c'est l'unique faisceau réflexif sur X dont la restriction à U est égale à $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Le faisceau $i_*\mathcal{F}$ est cohérent d'après [Ser66, Théorème 1]. De plus on voit facilement qu'il est sans torsion. Enfin le fait que $\mathcal{F}$ soit normal entraîne que $i_*\mathcal{F}$ est normal grâce à l'hypothèse $\operatorname{codim}(X \setminus U) \geq 2$. La proposition précédente entraîne donc le résultat. □

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur une variété X, il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $\mathcal{F}|_U$ soit localement libre. On appelle rang de $\mathcal{F}$ le rang de $\mathcal{F}|_U$. On termine ces rappels par un résultat sur les faisceaux cohérent de rang un.

Proposition 4.1.11. *[Ha82, Proposition 1.9] Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de rang un sur une variété localement factorielle X. Alors $\mathcal{F}$ est réflexif si et seulement s'il est inversible.*

4.2 Semistabilité

Cette section regroupe divers résultats sur les faisceaux semistables. Le lecteur pourra trouver plus de détails dans [HL97].

Définition 4.2.1. Soient X une variété projective normale de dimension $n \geq 1$, et H un diviseur ample sur X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. On définit la pente de $\mathcal{F}$ relativement à H par

$$\mu_H(\mathcal{F}) := \frac{c_1(\mathcal{F}) \cdot H^{n-1}}{\operatorname{rg}(\mathcal{F})}.$$

Notation 4.2.2. Dans la suite toutes les variétés projectives seront munies implicitement d'un diviseur ample H, et on notera $\mu(\mathcal{F}) := \mu_H(\mathcal{F})$.

Remarque 4.2.3. Si on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

de faisceaux sans torsion, on a $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}(\mathcal{E}) + \operatorname{rg}(\mathcal{G})$ et $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{G})$, donc $\mu(\mathcal{F})$ est le barycentre de $\mu(\mathcal{E})$ et $\mu(\mathcal{G})$ affectés des coefficients $\frac{\operatorname{rg}(\mathcal{E})}{\operatorname{rg}(\mathcal{E})+\operatorname{rg}(\mathcal{G})}$ et $\frac{\operatorname{rg}(\mathcal{G})}{\operatorname{rg}(\mathcal{E})+\operatorname{rg}(\mathcal{G})}$.

Définition 4.2.4. Soient X une variété projective normale.

Un faisceau sans torsion $\mathcal{F}$ sur X est dit semistable si pour tout sous-faisceau $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tel que $0 < \operatorname{rg}(\mathcal{G}) \leq \operatorname{rg}(\mathcal{F})$, on a $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F})$.

Un faisceau sans torsion $\mathcal{F}$ sur X est dit stable si pour tout sous-faisceau $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tel que $0 < \operatorname{rg}(\mathcal{G}) < \operatorname{rg}(\mathcal{F})$, on a $\mu(\mathcal{G}) < \mu(\mathcal{F})$.

Il suffit pour tester la semistabilité d'un faisceau de considérer ses sous-faisceaux saturés.

Proposition 4.2.5. *[HL97, Proposition 1.2.6] Soient X une variété projective normale et $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *$\mathcal{F}$ est semistable ;*
- *pour tout sous-faisceau saturé $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tel que $0 < \mathrm{rg}(\mathcal{G}) \leq \mathrm{rg}(\mathcal{F})$, on a $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F})$;*
- *pour tout quotient sans torsion $\mathcal{F} \to \mathcal{Q}$ on a $\mu(\mathcal{Q}) \geq \mu(\mathcal{F})$.*

Corollaire 4.2.6. *Soient X une variété projective normale et $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. Si $\mathcal{F}$ est semistable, alors $\mathcal{F}^*$ est semistable.*

Un faisceau sans torsion peut être filtré par des sous-faisceaux dont les quotients sont semistables.

Définition 4.2.7. Soient X une variété projective normale et $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. Une filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{F}$ est une filtration par des sous-faisceaux saturés dans $\mathcal{F}$

$$0 = HN_0(\mathcal{F}) \subset HN_1(\mathcal{F}) \subset \cdots \subset HN_l(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$

telle que les quotients $\mathcal{G}_i := HN_i(\mathcal{F})/HN_{i-1}(\mathcal{F})$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, soient semistables, et telle que

$$\mu(\mathcal{G}_1) > \mu(\mathcal{G}_2) > \cdots > \mu(\mathcal{G}_l).$$

Théorème 4.2.8. *[HN75, Proposition 1.3.9],[HL97, Theorem 1.3.4] Soient X une variété projective normale et $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. Alors $\mathcal{F}$ admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.*

Remarque 4.2.9. Le premier terme $HN_1(\mathcal{F})$ de la filtration de Harder-Narasimhan est le sous-faisceau déstabilisant maximal de $\mathcal{F}$, c'est à dire le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ maximal parmi les sous-faisceaux de plus grande pente.

La propriété de semistabilité se comporte bien vis à vis de la restriction à une courbe, à condition que la courbe en question soit suffisamment générale.

Définition 4.2.10. Soit H un diviseur ample sur une variété projective X de dimension $n \geq 1$. On appelle courbe générale au sens de Mehta-Ramanathan, ou encore courbe MR-générale (relativement à H), toute courbe de la forme $C = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}$, où les $H_i \in |m_i H|$ sont généraux, et les m_i sont des entiers arbitrairement grands.

L'importance de ces courbes vient du théorème de Mehta-Ramanathan.

Théorème 4.2.11. *[MR82, Theorem 6.1],[Fl84, Theorem 1.2] Soient X une variété projective normale et $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. Si $\mathcal{F}$ est semistable, alors $\mathcal{F}|_C$ est semistable pour toute courbe MR-générale $C \subset X$.*

Corollaire 4.2.12. *Soient X une variété projective normale, et $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. Alors $HN_i(\mathcal{F}|_C) = HN_i(\mathcal{F})|_C$, pour toute courbe MR-générale $C \subset X$, et pour tout $i \geq 0$.*

L'énoncé qui suit, tiré de [KSCT07], donne une propriété de la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel sur une courbe, qui nous sera utile pour construire un feuilletage sur certaines variétés.

Proposition 4.2.13. *[KSCT07, Proposition 29, Proposition 30] Soit C une courbe lisse, et E un fibré vectoriel sur C. Soient $(E_i)_{1\leq i\leq l} := (HN_i(E))_{1\leq i\leq l}$ la filtration de Harder-Narasimhan de E et $\mu_i := \mu(E_i/E_{i-1})$ pour tout i. On suppose que $\mu_1 > 0$, et on pose $k := \max\{i,\ \mu_i > 0\}$.*

Alors pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, les fibrés E_i et $E_i \otimes E_i \otimes (E/E_i)^*$ sont amples. En particulier $\mathrm{Hom}(E_i \otimes E_i, E/E_i) = 0$.

On clôt cette section par un lemme technique (démontré dans [ADK08]) dont on se servira pour démontrer le théorème 4 caractérisant l'espace projectif.

Lemme 4.2.14. *[ADK08, Lemma 6.2] Soit X une variété projective lisse, E un fibré vectoriel sur X, et $p \geq 1$ un entier. Si $\mathcal{N}$ est un sous-faisceau inversible de $E^{\otimes p}$, alors il existe un sous-faisceau sans torsion $\mathcal{F} \subset E$ tel que*

$$\mu(\mathcal{F}) \geq \frac{\mu(\mathcal{N})}{p}$$

4.3 Sections globales de $T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)$

On étudie maintenant les conditions nécessaires et suffisantes sur des entiers n, p, k pour que le fibré vectoriel $T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)$ ait des sections globales non nulles. On va pour cela utiliser la semistabilité de ce fibré, qui est la conséquence des deux résultats suivants.

Proposition 4.3.1. *[HL97, Lemma 1.4.5] Soit $n \geq 1$ un entier. Alors $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}$ est stable.*

Proposition 4.3.2. *[HL97, Theorem 3.1.4] Soit X une variété projective normale. Si F_1 et F_2 sont des fibrés vectoriels semistables, alors $F_1 \otimes F_2$ est semistable.*

Étant donné que le dual d'un fibré semistable est semistable, on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.3. *Soient n, p, k trois entiers, avec $n \geq 1$ et $p \geq 1$. Alors $T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)$ est semistable.*

Remarque 4.3.4. Si F_1 et F_2 sont deux fibrés vectoriels sur une variété projective, alors $\mu(F_1 \otimes F_2) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$. On en déduit que pour des entiers n, p, k, avec $n \geq 1$ et $p \geq 1$, on a

$$\mu(T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)) = p\mu(T_{\mathbb{P}^n}) - k = p\left(\frac{n+1}{n}\right) - k$$

On est maintenant en mesure de donner les conditions pour que $T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)$ ait des sections non nulles.

Proposition 4.3.5. *Soient n, p, k trois entiers, avec $n \geq 1$ et $p \geq 1$. Alors*

$$H^0(\mathbb{P}^n, T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \leq \frac{p(n+1)}{n}$$

Démonstration. Supposons que $H^0(\mathbb{P}^n, T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)) \neq 0$. On a alors un morphisme de faisceaux injectif

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k).$$

Le fibré $T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)$ étant semistable d'après le corollaire 4.3.3, il doit donc avoir une pente positive ou nulle, d'où

$$\mu(T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)) = p\left(\frac{n+1}{n}\right) - k \geq 0.$$

Réciproquement, supposons que $k \leq \frac{p(n+1)}{n}$. On considère alors la division euclidienne de p par n : $p = nq + r$, avec $q \geq 0$ et $0 \leq r < n$. On a

$$H^0(\mathbb{P}^n, T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)) = H^0(\mathbb{P}^n, [T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes n}(-n-1)]^{\otimes q} \otimes T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes r}(-l)),$$

où l'on a posé $l = k - q(n+1)$. Il existe un morphisme injectif

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1) \cong \det(T_{\mathbb{P}^n}) \hookrightarrow T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes n},$$

ce qui permet d'affirmer que $H^0(\mathbb{P}^n, [T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes n}(-n-1)]^{\otimes q}) \neq 0$.

De plus

$$l = k - q(n+1) \leq \frac{p(n+1)}{n} - q(n+1) = r + \frac{r}{n},$$

et comme $r < n$, on en tire l'inégalité $l \leq r$. Sachant que le fibré vectoriel $T_{\mathbb{P}^n}(-1)$ a des sections non nulles (il est même engendré par ses sections globales), on a donc

$$H^0(\mathbb{P}^n, T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes r}(-l)) = H^0(\mathbb{P}^n, [T_{\mathbb{P}^n}(-1)]^{\otimes r}(r-l)) \neq 0,$$

et on obtient avec ce qui précède que $H^0(\mathbb{P}^n, T_{\mathbb{P}^n}^{\otimes p}(-k)) \neq 0$. □

Chapitre 5

Courbes rationnelles sur les variétés projectives

Dans ce chapitre on propose quelques rappels sur les familles de courbes rationnelles sur les variétés projectives, les quotients rationnellement connexes et les variétés des tangentes associés à ces familles. On rappelle ensuite quelques résultats sur les feuilletages, puis on démontre une généralisation de la caractérisation des variétés uniréglées par Miyaoka.

5.1 Variétés uniréglées et rationnellement connexes

On rappelle rapidement quelques faits bien connus sur les variétés uniréglées et les variétés rationnellement connexes. On renvoie à [De01] ou [AK03] pour plus de détails.

Définition 5.1.1. Une variété projective X de dimenson $n \geq 1$ est dite uniréglée s'il existe une variété Y de dimension $n-1$ et une application rationnelle dominante $\mathbb{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$.

Définition 5.1.2. Une variété projective X est dite rationnellement connexe s'il existe une variété Y et une application rationnelle $\mu : \mathbb{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$ telle que l'application rationnelle suivante soit dominante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times Y & \dashrightarrow & X \times X \\ (t, t', y) & \mapsto & (\mu(t, y), \mu(t', y)) \end{array}$$

Remarque 5.1.3. Une variété projective X est uniréglée si et seulement si par un point général de X passe une courbe rationnelle, et elle est rationnellement connexe si et seulement si deux points généraux de X peuvent être reliés par courbe rationnelle (voir [De01, Remarks 4.2, Remarks 4.4]).

Définition 5.1.4. Soient X une variété projective lisse, $\ell \subset X$ une courbe rationnelle, et $n : \tilde{\ell} \cong \mathbb{P}^1 \to \ell$ la normalisation de ℓ. On note $T_X|_{\tilde{\ell}} := n^*T_X$. On dit que ℓ est libre si $T_X|_{\tilde{\ell}}$ est nef, et très libre si $T_X|_{\tilde{\ell}}$ est ample.

Remarque 5.1.5. Dans une variété projective lisse X, les déformations d'une courbe libre recouvrent un sous-ensemble dense de X, de même que les déformations d'une courbe très libre passant par un point fixé (voir [De01, Proposition 4.8]).

On en déduit qu'un variété projective lisse X est uniréglée (respectivement rationnellement connexe) si et seulement si elle contient une courbe rationnelle libre (respectivement très libre) (voir[De01, Corollary 4.11, Corollary 4.17]).

5.2 Familles complètes et presque complètes de courbes rationnelles

On fait brièvement ici quelques rappels sur les familles de courbes rationnelles, le lecteur pouvant trouver dans [Kol96] une exposition plus détaillée. Dans cette section X désigne une variété projective.

Définition 5.2.1. Soit A un diviseur ample sur X. Soient $k, d \geq 1$ deux entiers. On note $\mathrm{Chow}_{k,d}(X)$ la variété projective paramétrant les cycles effectifs sur X de dimension k (c'est à dire les combinaisons linéaires formelles de sous-variétés irréductibles de X de dimension k, avec des coefficients entiers positifs) qui sont de degré d relativement à A. On pose

$$\mathrm{Chow}(X) := \bigsqcup_{k \geq 1, d \geq 1} \mathrm{Chow}_{k,d}(X)$$

Soient $\mathrm{RatCurves}(X) \subset \mathrm{Chow}(X)$ la variété quasi-projective dont les points correspondent aux 1-cycles irréductibles et réduits de support une courbe rationnelle, et $\mathrm{RatCurves}^n(X)$ sa normalisation. Soit enfin $\mathrm{Univ}^{rc}(X)$ la normalisation de la famille universelle au-dessus de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Univ}^{rc}(X) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ \mathrm{RatCurves}^n(X) & \end{tikzcd}$$

Remarque 5.2.2. Le morphisme de normalisation $\mathrm{RatCurves}^n(X) \to \mathrm{Chow}(X)$ est fini et génériquement injectif, mais pas nécessairement injectif. C'est pourquoi il est possible que les points de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$ ne soient pas en correspondance bijective avec les courbes rationnelles de X, plusieurs points de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$ pouvant correspondre à la même courbe rationnelle. On utilisera la notation $[\ell]$ pour les points de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$, et ℓ pour les courbes correspondantes dans X.

On peut aussi décrire les familles de courbes rationnelles via le schéma des morphismes.

Définition 5.2.3. On note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ le schéma qui paramètre les morphismes génériquement injectifs de $\mathbb{P}^1$ dans X, et $\mathrm{Hom}^n_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ sa normalisation. On a un morphisme d'évaluation :

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathrm{Hom}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1 & \to & X \\ & (f, p) & \mapsto & f(p) \end{array}$$

Le théorème suivant fait le lien entre les deux approches.

Théorème 5.2.4. *[Kol96, Theorem II.2.15] On a le diagramme commutatif suivant.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\textit{Quotient par}", "\textit{l'action de } \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)"'] \arrow[d, "\textit{Projection}"'] \arrow[rr, bend left, "\mu"] & \mathrm{Univ}^{rc}(X) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "\textit{Quotient par}", "\textit{l'action de } \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)"'] & \mathrm{RatCurves}^n(X) & \end{tikzcd}$$

Si $f \in \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ on notera $[f]$ le point de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$ correspondant.

Remarque 5.2.5. Dans le théorème ci-dessus, le morphisme $\pi : \mathrm{Univ}^{rc}(X) \to \mathrm{RatCurves}^n(X)$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$, *i.e.* π est un morphisme propre et lisse avec des fibres isomorphes à $\mathbb{P}^1$. De plus la restriction de e à chaque fibre de π est birationnelle sur son image.

Définition 5.2.6. Une famille de courbes rationnelles sur X est une composante irréductible H de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$. Si A est un diviseur ample sur X, le nombre d'intersection $A \cdot \ell$ est indépendant du choix de $[\ell] \in H$, on l'appelle le degré de la famille H (relativement à A).

Soit $\mathcal{U} := \pi^{-1}(H) \subset \mathrm{Univ}^{rc}(X)$ la famille universelle associée à H. On notera abusivement π et e les restrictions des morphismes du même nom définis ci-dessus, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ H & \end{tikzcd}$$

Une famille H de courbes rationnelles sur X est dite dominante si l'application $e : \mathcal{U} \to X$ ci-dessus est dominante.

Remarque 5.2.7. Notons qu'il existe une famille dominante de courbes rationnelles sur X si et seulement si X est uniréglée.

Proposition 5.2.8. *[Kol96, Proposition II.3.7, Proposition II.3.10] Soit X une variété projective lisse, $U \subset X$ un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins deux et H une famille dominante de courbes rationnelles sur X. Si $[\ell] \in H$ est un élément général, alors ℓ est une courbe libre, et elle est entièrement contenue dans l'ouvert U.*

Les familles de courbes les plus intéressantes sont les familles presque complètes, et les familles complètes, au sens suivant.

Définition 5.2.9. Une famille H de courbes rationnelles sur X est dite complète (*unsplit* en anglais) si H est une variété propre sur $\mathbb{C}$. Elle est dite presque complète (*generically unsplit* en anglais) si pour un point général $x \in e(\mathcal{U})$, la variété

$$H_x := \pi(e^{-1}(x)) = \{[\ell] \in H \ , \ x \in \ell\}$$

est propre sur $\mathbb{C}$.

Remarque 5.2.10. Soit H une famille de courbes rationnelles sur X et $W \subset \mathrm{Chow}(X)$ son image par le morphisme naturel $\mathrm{RatCurves}^n(X) \to \mathrm{Chow}(X)$. Si W n'est pas fermé, et si $\sum_i m_i[C_i] \in \overline{W} \setminus W$ alors pour tout i, C_i est une courbe rationnelle d'après [Kol96, Proposition II.2.2].

On en déduit qu'une famille de courbes rationnelles de degré minimal (relativement à un diviseur ample A fixé) est complète. De même, une famille dominante de courbes rationnelles de degré minimal parmi les familles dominantes de courbes rationnelles sur X est dominante et presque complète (voir [Kol96, Theorem IV.2.4]).

Par conséquent si X est un variété uniréglée, il existe toujours sur X une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles. En revanche, une famille dominante et complète de courbes rationnelles n'existe pas en général.

Pour décrire une courbe rationnelle dans une variété lisse X il est souvent utile d'étudier la restriction de T_X à la courbe en question. On rappelle que tout fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ est une somme directe de fibrés en droites d'après un théorème de Grothendieck (voir [OSS80, Theorem 2.1.1]). Dans le cas où la courbe est le membre général d'une famille presque complète, on a le résultat suivant.

Proposition 5.2.11. *[Kol96, Corollary IV.2.9] Soient H une famille dominante presque complète de courbes rationnelles sur X, $[\ell] \in H$ élément général, et $\tilde{\ell} \cong \mathbb{P}^1$ la normalisée de ℓ. Alors*

$$T_X|_{\tilde{\ell}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-d-1},$$

avec $n := \dim(X)$ et $d := -K_X \cdot \ell - 2$.

5.3 Quotient rationnellement connexe

On présente maintenant la notion de quotient rationnellement connexe associé à des familles dominantes de courbes rationnelles, qui aura un rôle central dans les démonstrations des théorèmes de caractérisation 3 et 4. Cette notion a été introduite par Campana et par Kollár, Mori, et Miyaoka afin de prouver la connexité rationnelle des variétés de Fano (voir [Ca92] et [KMM92b]).

Définition 5.3.1. Soient X une variété projective, Y une variété quasi-projective et $\pi : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle. On dit que π est presque régulière s'il existe des ouverts denses $X_0 \subset X$ et $Y_0 \subset Y$ tels que la restriction $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ de π à X_0 soit propre et surjectif.

Définition 5.3.2. Soient $H_1, \ldots, H_k$ des familles dominantes de courbes rationnelles sur une variété projective X. Pour tout i on note $\overline{H_i}$ l'adhérence de l'image de H_i dans $\mathrm{Chow}(X)$. Deux points $x, y \in X$ sont dits $(H_1, \ldots, H_k)$-équivalents s'ils peuvent être reliés par une chaîne connexe de 1-cycles appartenant à la réunion $\overline{H_1} \cup \cdots \cup \overline{H_k}$.

Les classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence ne sont pas nécessairement fermées, donc il n'existe pas de structure de variété algébrique sur l'ensemble des classes d'équivalence faisant de l'application naturelle de X sur cet ensemble un morphisme de variétés algébriques. Cependant le résultat suivant montre que la classe d'équivalence d'un point général de X est fermée.

Théorème 5.3.3. *[Ca92],[KMM92a] Soit X une variété projective lisse. Il existe une variété quasi-projective normale Y et une application rationnelle presque régulière $\pi : X \dashrightarrow Y$ dont les fibres générales sont des classes de $(H_1, \ldots, H_k)$-équivalence. De plus $\pi : X \dashrightarrow Y$ est unique à équivalence birationnelle près.*

Si $X_0 \subset X$ et $Y_0 \subset Y$ sont deux ouverts denses tels que la restriction $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ de π à X_0 soit propre et surjectif, on appelle $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ le quotient $(H_1, \ldots, H_k)$-rationnellement connexe de X, ou quotient $(H_1, \ldots, H_k)$-rc de X. On dit que X est $(H_1, \ldots, H_k)$-rationnellement connexe si Y_0 est réduite à un point.

Dans le cas où les familles $H_1, \ldots, H_k$ considérées sont complètes, il est possible d'en dire plus sur ce quotient $(H_1, \ldots, H_k)$-rc. On dispose d'abord d'un critère simple pour qu'il soit trivial, dans le cas d'une famille seule.

Proposition 5.3.4. *[AW01, Proposition 1.1] Soient X une variété projective lisse et H une famille dominante et complète de courbes rationnelles sur X et $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ le quotient H-rc de X. Alors $\dim(Y_0) = 0$ si et seulement si $\rho(X) = 1$.*

Par ailleurs on peut étendre le quotient $(H_1, \ldots, H_k)$-rc en codimension un, toujours sous l'hypothèse que les familles $H_1, \ldots, H_k$ sont complètes.

Théorème 5.3.5. *[BCD07, Proposition 1], [ADK08, Lemma 2.2] Soient X une variété projective lisse et $H_1, \dots, H_k$ des famille dominantes et complètes de courbes rationnelles sur X. Alors il existe un ouvert X_0 de X dont le complémentaire est de codimension au moins deux, une variété quasi-projective lisse Y_0 et un morphisme propre, surjectif et équidimensionnel $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ avec des fibres irréductibles et réduites, qui est le quotient $(H_1, \dots, H_k)$-rc de X.*

5.4 Variété des tangentes associée à une famille presque complète de courbes rationnelles

Définition 5.4.1. Soient X une variété projective lisse, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X, et $x \in X$ un point général. Soient $\tilde{H}_x$ la normalisation de H_x, et $\tau_x : \tilde{H}_x \dashrightarrow \mathbb{P}(T^*_{X,x})$ l'application rationnelle qui à une courbe lisse en x associe sa direction tangente en x. On appelle variété des tangentes en x associée à H, et on note C_x, l'adhérence de l'image de τ_x dans $\mathbb{P}(T^*_{X,x})$.

Le théorème suivant exprime le fait qu'une courbe rationnelle correspondant à un élément général de H_x est déterminée de façon unique par sa tangente au point x.

Théorème 5.4.2. *[Ke02],[HM04] Soient X une variété projective lisse, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X, et $x \in X$ un point général. Alors l'application rationnelle τ_x est un morphisme fini et birationnel.*

Dans certains cas la variété des tangentes C_x encode des propriétés géométriques importantes de la variété X, c'est le cas par exemple si C_x est un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}(T^*_{X,x})$ pour un point général $x \in X$.

Théorème 5.4.3. *[Ar06], Soient X une variété projective lisse, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X, et $x \in X$ un point général. On suppose que la variété des tangentes en x associée à H est un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}(T^*_{X,x})$ de dimension $d \geq 0$.*

Alors il existe un ouvert $X_0 \subset X$, une variété quasi-projective lisse Y_0, et une fibration en $\mathbb{P}^d$ $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ tels que toutes les courbes paramétrées par H et rencontrant X_0 soient des droites dans les fibres de π_0. En particulier cette application est le quotient H-rc de X.

Si de plus la famille H est complète, alors on peut choisir l'ouvert X_0 de sorte que $\operatorname{codim}(X \setminus X_0) \geq 2$.

Ce théorème a en particulier la conséquence suivante.

Théorème 5.4.4. *[ADK08, Proposition 2.7] Soient X une variété projective lisse, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X, et*

$\pi_0 : X_0 \to Y_0$ le quotient H-rc de X. On suppose qu'il existe un sous-faisceau $\mathcal{F} \subset T_X$ tel que $f^*\mathcal{F}$ soit un fibré vectoriel ample pour $[f] \in H$ général. Alors en restreignant X_0 et Y_0 si nécessaire, $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ devient une fibration en $\mathbb{P}^d$, pour un entier $d \geq 1$.

5.5 Feuilletages et théorème de Miyaoka

5.5.1 Feuilletages

Définition 5.5.1. Soit X une variété lisse. On appelle feuilletage sur X un sous-faisceau saturé $\mathcal{F} \subset T_X$ qui est intégrable, c'est à dire qu'il est stable par crochet de Lie. On dit que c'est un feuilletage en courbes si $\mathcal{F}$ est de rang un.

Remarque 5.5.2. Si $\mathcal{F} \subset T_X$ est un sous-faisceau saturé, alors le crochet de Lie induit un morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ dans $T_X/\mathcal{F}$, qui est identiquement nul si et seulement si $\mathcal{F}$ est intégrable. Pour que $\mathcal{F}$ soit un feuilletage il suffit donc que

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, T_X/\mathcal{F}) = 0$$

Lemme 5.5.3. *Soient X une variété lisse, $U \subset X$ un ouvert non vide et $\mathcal{F} \subset T_X$ un sous-faisceau saturé. Alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur X si et seulement si $\mathcal{F}|_U$ est un feuilletage sur U.*

Démonstration. Soit $\alpha : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \to T_X/\mathcal{F}$ le morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire induit par le crochet de Lie. L'ouvert U est dense, et $T_X/\mathcal{F}$ est sans torsion, donc $\alpha|_U$ est nul si et seulement si α est nul. □

Définition 5.5.4. Le lieu régulier de $\mathcal{F}$ est le plus grand ouvert sur lequel $\mathcal{F}$ et $T_X/\mathcal{F}$ sont localement libres, et le lieu singulier de $\mathcal{F}$ est son complémentaire. Comme un faisceau sans torsion sur une variété normale est localement libre en codimension un, le lieu singulier d'un feuilletage est un fermé de codimension au moins deux.

Définition 5.5.5. Une feuille de $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble $\mathcal{F}$-invariant connexe maximal du lieu régulier de $\mathcal{F}$. Une feuille est dite algébrique si elle est localement fermée, autrement dit si elle est ouverte dans son adhérence.

On dispose grâce au théorème suivant d'une condition suffisante pour qu'un feuilletage ait des feuilles algébriques et rationnellement connexes.

Théorème 5.5.6. *[KSCT07, Theorem 1], [BM01, Theorem 0.1] Soit X une variété projective lisse, $C \subset X$ une courbe complète irréductible, et $\mathcal{F} \subset T_X$ un feuilletage qui est régulier le long de C. On suppose que la restriction $\mathcal{F}|_C$ est un fibré vectoriel ample sur C. Alors pour tout $x \in C$ la feuille de $\mathcal{F}$ passant par C est algébrique, et si $x \in C$ est un point général alors l'adhérence de la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x est rationnellement connexe.*

On termine cette section en définissant une notion de feuilletage en courbe pour des variétés qui ne sont pas nécessairement lisses, ce qui nous sera utile plus tard.

Définition 5.5.7. Soit X une variété. On appelle feuilletage en courbes sur X tout quotient inversible $\eta : \Omega^1_X \to \mathcal{Q}$ du faisceau cotangent.

Un feuilletage en courbe défini sur une variété quelconque se relève de manière unique en un feuilletage en courbe sur la normalisation de cette variété.

Proposition 5.5.8. *[Dr04, Lemme 1.2] Soient X une variété et $\eta : \Omega^1_X \to \mathcal{Q}$ un feuilletage en courbes sur X. Soit $n : X^n \to X$ la normalisation de X. Il existe alors une unique application $\eta_n : \Omega^1_{X^n} \to n^*\mathcal{Q}$ étendant $n^*\eta : n^*\Omega^1_X \to n^*\mathcal{Q}$.*

5.5.2 Une généralisation du théorème de Miyaoka

On commence par rappeler la caractérisation des variétés uniréglées démontrée par Miyaoka (voir aussi [SB92]).

Théorème 5.5.9. *[Mi87, Corollary 8.6] Soit X une variété projective lisse. Si $\Omega^1_X|_C$ n'est pas nef, pour toute courbe MR-générale $C \subset X$, alors X est uniréglée.*

Remarque 5.5.10. Si $U \subset X$ est un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins deux, alors une courbe MR-générale est contenue dans U, ce qui donne un sens à l'énoncé qui suit.

Proposition 5.5.11. *Soient X une variété projective lisse, $X_0 \subset X$ un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins deux, Y_0 une variété lisse, et $f : X_0 \to Y_0$ un morphisme équidimensionnel propre et dominant. On suppose que $f^*\Omega^1_{Y_0}|_C$ n'est pas nef, pour toute courbe MR-générale $C \subset X$. Alors toute compactification projective lisse de Y_0 est uniréglée.*

Démonstration. Soit H un diviseur ample sur X. On note n et p les dimensions de X et Y respectivement. Soient $m_1, \dots m_{n-1}$ des entiers positifs, et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, soit $H_i \in |m_i H|$. On pose $Z = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-p}$, $Z_0 = X_0 \cap Z$, et on note $i : Z_0 \hookrightarrow Z$ l'inclusion, et $g : Z_0 \to Y_0$ la restriction de f à Z_0.

Pour m_i suffisamment grand, et pour $H_i \in |m_i H|$ généraux, la variété Z est lisse de dimension p, le morphisme $g : Z_0 \to Y_0$ est équidimensionnel, et même fini, et $C := H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1} \subset Z_0$ est une courbe MR-générale. Par hypothèse le fibré vectoriel $g^*\Omega^1_{Y_0}|_C$ n'est pas nef, donc il admet un quotient de degré strictement négatif d'après [La04, Theorem II.6.4.15]. Par conséquent il existe un sous-faisceau de $g^*T_{Y_0}|_C$ de degré strictement positif, donc de pente strictement positive.

On note $\mathcal{F} := i_*g^*T_{Y_0}$. Comme $\mathrm{codim}(Z \setminus Z_0) \geq 2$ ce faisceau est réflexif d'après le corollaire 4.1.10. Sa restriction à C contient un sous-faisceau de pente strictement positive, on a donc $\mu(HN_1(\mathcal{F}|_C)) > 0$, puisque le premier terme $HN_1(\mathcal{F}|_C)$ de la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{F}|_C$ est le sous-faisceau de $\mathcal{F}|_C$ de plus grande pente. Or comme C est une courbe MR-générale, on a $HN_1(\mathcal{F}|_C) = HN_1(\mathcal{F})|_C$ grâce au théorème de Mehta-Ramanathan (théorème 4.2.11), ce qui entraîne que le faisceau $\mathcal{E} := HN_1(\mathcal{F})$ est de pente strictement positive.

Soient K une clôture galoisienne du corps de fonctions $K(Z_0)$ sur $K(Y_0)$, et $h : T \to Z$ la normalisation de Z dans K. On note $T_0 := h^{-1}(Z_0)$, $j : T_0 \hookrightarrow T$ l'inclusion, et $h_0 : T_0 \to Z_0$ la restriction de h à T_0. On a donc le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "h_0"] & T \arrow[d, "h"] \\ Z_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & Z \\ Y_0 & \end{tikzcd}$$

Notons que comme h est fini, on a $\operatorname{codim}(T \setminus T_0) \geq 2$, et le diviseur h^*H est ample. On pose $\mathcal{F}' := (h^*\mathcal{F})^{**}$. Ce faisceau est réflexif d'aprés le corollaire 4.1.5, et sa restriction à T_0 est égale à $h_0^* g^* T_{Y_0}$. On en déduit grâce au corollaire 4.1.10 que $\mathcal{F}' = j_*(h_0^* g^* T_{Y_0})$.

Par ailleurs $\mathcal{F}'$ contient le faisceau $(h^*\mathcal{E})^{**}$ qui est de pente strictement positive (relativement à h^*H). En effet, $(h^*\mathcal{E})^{**}$ et $h^*\mathcal{E}$ sont localement libres en codimension un et on a

$$c_1((h^*\mathcal{E})^{**}) \cdot h^*H^{p-1} = c_1(h^*\mathcal{E}) \cdot h^*H^{p-1} = \deg(h) c_1(\mathcal{E}) \cdot H^{p-1} > 0.$$

Ainsi on voit que $\mathcal{E}' := HN_1(\mathcal{F}')$ est de pente strictement positive.

Quitte à remplacer Z et Z_0 par T et T_0, g par $g \circ h_0$, et enfin $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ et H par $\mathcal{F}'$, $\mathcal{E}'$ et h^*H, on peut donc supposer que $K(Z_0) \supset K(Y_0)$ est une extension galoisienne de groupe de Galois G.

Par unicité de la filtration de Harder-Narasimhan, le faisceau $\mathcal{E}$ est alors invariant sous l'action de G. Il existe donc un sous-faisceau $\mathcal{G}$ de T_{Y_0} tel que $\mathcal{E}$ soit isomorphe à $i_* g^* \mathcal{G}$ en codimension un. Par ailleurs Y_0 est lisse et $g_*\mathcal{O}_{Z_0}$ est sans torsion, donc $g_*\mathcal{O}_{Z_0}$ est localement libre en codimension un, ce qui entraîne que g est plat en codimension un. On a donc un isomorphisme en codimension un entre le faisceau $g^*(T_{Y_0}/\mathcal{G})$ et le faisceau $g^*T_{Y_0}/g^*\mathcal{G} = (\mathcal{E}/\mathcal{F})|_{Z_0}$, qui est sans torsion puisque $\mathcal{E}$ est saturé dans $\mathcal{F}$. On en déduit que $T_{Y_0}/\mathcal{G}$ est sans torsion en codimension un. Quitte à remplacer Z_0 par un autre ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins deux dans Z, on peut donc supposer que $\mathcal{E} \cong i_* g^* \mathcal{G}$, et que $\mathcal{G}$ est saturé dans T_{Y_0}.

Comme $\mu(\mathcal{E}) > 0$, on sait grâce à la proposition 4.2.13 et au théorème de Mehta-Ramanathan que les fibrés vectoriels $\mathcal{E}|_C$ et $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes (\mathcal{F}/\mathcal{E})^*|_C$ sont amples. Le morphisme g étant fini on en déduit que les fibrés $\mathcal{G}|_{g(C)}$ et $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes (T_{Y_0}/\mathcal{G})^*|_{g(C)}$ sont amples, et en particulier que le fibré $\mathcal{H}om(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}, T_{Y_0}/\mathcal{G})|_{g(C)}$ est anti-ample. De plus les déformations de $g(C)$ recouvrent la variété Y_0, par conséquent on a

$\mathrm{Hom}(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}, T_{Y_0}/\mathcal{G}) = 0$. On a donc montré que $\mathcal{G}$ est un feuilletage.

On a finalement un feuilletage $\mathcal{G} \subset T_{Y_0}$ qui est ample en restriction à $g(C)$. Comme le lieu singulier d'un feuilletage est un fermé de codimension au moins deux, on peut supposer de plus supposer que $\mathcal{G}$ est régulier le long de $g(C)$. Enfin grâce au lemme 5.5.3 on peut étendre ce feuilletage à une compactification projective lisse Y de Y_0, et le théorème 5.5.6 entraîne alors que la feuille de ce feuilletage passant par un point général de $g(C)$ est rationnellement connexe. Ceci démontre en particulier que Y est uniréglée.

$\square$

Chapitre 6

Deux théorèmes d'annulation

Dans ce chapitre on démontre deux théorèmes d'annulation, l'un concernant le fibré tangent relatif d'un fibré projectif sur une courbe, et l'autre le fibré tangent relatif d'un fibré en quadriques sur une courbe. Avant cela on établit quelques résultats préliminaires, puis on rappelle le théorème de Campana et Flenner caractérisant les fibrés vectoriels amples sur une courbe. On rappelle également les caractérisations des fibrés projectifs et des fibrés en quadriques dûes à Fujita.

6.1 Résultats préliminaires

Le premier lemme de cette section décrit les puissances tensorielles d'un fibré vectoriel apparaissant au milieu d'une suite exacte courte.

Lemme 6.1.1. *Soit X une variété, et K, F, G des fibrés vectoriels sur X. On suppose qu'on a une suite exacte*

$$0 \to K \to F \xrightarrow{\pi} G \to 0.$$

Alors il existe pour tout entier $p \geq 1$ une filtration de $F^{\otimes p}$ par des sous-fibrés vectoriels

$$F^{\otimes p} = F_p^0 \supset F_p^1 \supset \cdots \supset F_p^m \supset F_p^{m+1} = 0$$

ayant la propriété suivante :

$$\forall l \in \{0, \ldots, m\} \ , \ \exists i \in \{0, \ldots, p\} \ , \ F_p^l / F_p^{l+1} \cong K^{\otimes i} \otimes G^{\otimes p-i}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur p. Si $p = 1$ on obtient la filtration voulue en posant $F_1^0 := F$, $F_1^1 := K$, et $F_1^2 := 0$.

Si $p \geq 2$ on suppose qu'il existe une filtration $F^{\otimes p-1}$ par des sous-fibrés vectoriels

$$F^{\otimes p-1} = F_{p-1}^0 \supset F_{p-1}^1 \supset \cdots \supset F_{p-1}^m \supset F_{p-1}^{m+1} = 0$$

ayant la propriété demandée. En tensorisant la suite exacte

$$0 \to K \to F \xrightarrow{\pi} G \to 0.$$

par $F^{\otimes p-1}$ on obtient la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \to K \otimes F^{\otimes p-1} \to F^{\otimes p} \xrightarrow{\varphi} G \otimes F^{\otimes p-1} \to 0.$$

On pose alors pour tout $l \in \{0, \dots m+1\}$,

$$F_p^l := \varphi^{-1}(G \otimes F_{p-1}^l),$$

et pour tout $l \in \{m+1, \dots 2m+2\}$,

$$F_p^l := K \otimes F_{p-1}^{l-m-1}$$

On notera que pour $l = m+1$ les deux définitions coïncident, on a $F_p^{m+1} = K \otimes F^{\otimes p-1}$.

On a alors si $l \in \{0, \dots m\}$

$$F_p^l / F_p^{l+1} \cong \varphi^{-1}(G \otimes F_{p-1}^l)/\varphi^{-1}(G \otimes F_{p-1}^{l+1}) \cong G \otimes (F_{p-1}^l / F_{p-1}^{l+1}) \cong G \otimes K^{\otimes i} \otimes G^{\otimes p-i-1},$$

pour un entier $i \in \{0, \dots, p-1\}$.

De même si $l \in \{m+1, \dots 2m+1\}$ on a

$$F_p^l / F_p^{l+1} \cong (K \otimes F_{p-1}^{l-m-1})/(K \otimes F_{p-1}^{l-m}) \cong K \otimes (F_{p-1}^{l-m-1} / F_{p-1}^{l-m}) \cong K \otimes K^{\otimes j} \otimes G^{\otimes p-j-1},$$

pour un entier $j \in \{0, \dots, p-1\}$.

On a donc une filtration

$$F^{\otimes p} = F_p^0 \supset F_p^1 \supset \dots \supset F_p^{2m+1} \supset F_p^{2m+2} = 0$$

avec des quotients de la forme voulue. □

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 6.1.2. *Soient $\pi : X \to Y$ un morphisme lisse entre deux variétés lisses, et E un fibré vectoriel sur X. Soit $p \geq 1$ un entier tel que*

$$H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes E) \neq 0.$$

Alors il existe un entier $i \in \{0, \dots, p\}$ tel que

$$H^0(X, T_{X/Y}^{\otimes i} \otimes (\pi^* T_Y)^{\otimes p-i} \otimes E) \neq 0.$$

Démonstration. On a la suite exacte suivante

$$0 \to T_{X/Y} \to T_X \to \pi^* T_Y \to 0.$$

Par conséquent d'après le lemme 6.1.1 il existe une filtration de $T_X^{\otimes p} \otimes E$

$$T_X^{\otimes p} \otimes E = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^m \supset F^{m+1} = 0$$

vérifiant que pour tout $l \in \{0, \ldots, m\}$ il existe $i \in \{0, \cdots p\}$ tel que $F^l/F^{l+1} \cong T_{X/Y}^{\otimes i} \otimes (\pi^* T_Y)^{\otimes p-i} \otimes E$. Or on a $H^0(X, F^0) \neq 0$, donc il existe un entier $l \in \{0, \ldots, m\}$ tel que $H^0(X, F^l/F^{l+1}) \neq 0$, ce qui donne le résultat. □

Enfin on rappelle le théorème de Campana et Flenner caractérisant les fibrés vectoriels amples sur une courbe, qui joue un rôle essentiel dans les démonstrations des théorèmes d'annulation qui vont suivre.

Théorème 6.1.3. *[CF90, Theorem] Soit C une courbe projective lisse, et E un fibré vectoriel sur C. Alors E est ample si et seulement s'il existe une courbe projective lisse $\tilde{C}$, un morphisme fini $f : \tilde{C} \to C$, un fibré en droites $\tilde{M}$ ample sur $\tilde{C}$ et un entier $s \geq 1$ tel que f^*E soit un quotient de $\tilde{M}^{\oplus s}$.*

6.2 Premier théorème d'annulation : fibrés projectifs

On rappelle d'abord la caractérisation des fibrés projectifs prouvée par Fujita dans [Fu75].

Proposition 6.2.1. *[Fu75, Corollary 5.4] Soient X et Y deux variétés quasi-projectives, et $\pi : X \to Y$ un morphisme propre et plat dont toutes les fibres sont irréductibles et réduites. On suppose qu'une fibre générale de π est isomorphe à $\mathbb{P}^r$ pour un entier $r \geq 1$ et qu'il existe un fibré en droites π-ample L sur X, tel que pour une fibre générale $f \cong \mathbb{P}^r$ on ait $L|_f \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$.*

Alors π est un fibré projectif. Plus précisément, si on pose $E := \pi_* L$ on a $(X, L) \cong (\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.2.2. *Soient C une courbe projective lisse et E un fibré vectoriel ample sur C de rang $r+1 \geq 2$. Soient $\pi : X = \mathbb{P}(E) \to C$ le fibré projectif associé à E et G un fibré vectoriel nef sur X. Alors*

$$\forall p \geq 1 \ , \ H^0(X, T_{X/C}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-p) \otimes G^*) = 0$$

Démonstration. D'après le théorème 6.1.3, il existe une courbe projective lisse $\tilde{C}$, un morphisme fini $f : \tilde{C} \to C$, un fibré en droites $\tilde{M}$ ample sur $\tilde{C}$ et un entier $s \geq 1$ tel que f^*E soit un quotient de $\tilde{M}^{\oplus s}$. Quitte à faire le changement de base $\tilde{C} \to C$ on peut donc supposer qu'il existe un fibré en droites M ample sur C tel que $E \otimes M^{-1}$ soit engendré par ses sections globales.

On en déduit que le fibré en droites $N := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \otimes \pi^* M^{-1}$ est lui aussi engendré par ses sections globales. Considérons $Z \in |N|$ un élément général du système linéaire sans point base $|N|$. Il suffira pour obtenir le résultat de montrer que

$$H^0(Z, (T_{X/C}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-p) \otimes G^*)|_Z) = 0.$$

Procèdons par récurrence sur r. Dans le cas où $r = 1$, Z est une section de $\pi : X \to C$, donc $(T_{X/C})|_Z \cong N_{Z/X} \cong N|_Z$. Si π_Z désigne la restriction de π à Z on a donc

$$H^0(Z, (T_{X/C}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-p) \otimes G^*)|_Z) = H^0(Z, (\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z)^*) = 0,$$

car $\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z$ est ample.

Si $r \geq 2$, on a pour une fibre générale f de π :

$$(Z \cap f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)|_{Z \cap f}) \cong (\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(1)),$$

donc d'après la proposition 6.2.1 il existe un fibré vectoriel F de rang r sur C tel que

$$(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)|_Z) \cong (\mathbb{P}(F), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)).$$

De plus on a la suite exacte suivante

$$0 \to T_{Z/C} \to (T_{X/C})|_Z \to N_{Z/X} \cong N|_Z \to 0.$$

D'après le lemme 6.1.1 il suffira donc de montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$ on a

$$H^0(Z, T_{Z/C}^{\otimes i} \otimes N|_Z^{\otimes p-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(-p) \otimes G^*)|_Z) = 0.$$

ou encore

$$H^0(Z, T_{Z/C}^{\otimes i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(-i) \otimes (\pi_Z^* M^{p-i} \otimes G|_Z)^*) = 0.$$

Si $i \geq 1$, le résultat est donné par l'hypothèse de récurrence, car $\pi_Z^* M^{p-i} \otimes G|_Z$ est un fibré vectoriel nef sur Z.

Si $i = 0$, on a encore

$$H^0(Z, (\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z)^*) = 0,$$

car pour toute courbe irréductible $C' \subset Z$ non contractée par π_Z, la restriction de $\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z$ à C' est ample. $\square$

6.3 Deuxième théorème d'annulation : fibrés en quadriques

Définition 6.3.1. On appellera fibré en quadriques un morphisme propre et plat $\pi : X \to Y$ entre deux variétés quasi-projectives, et dont toutes les fibres sont isomorphes à des quadriques irréductibles et réduites (mais pas nécessairement lisses).

On dira qu'un fibré en quadriques est un fibré en quadriques géométrique s'il existe un fibré vectoriel E sur Y et un plongement de X dans $\mathbb{P}(E)$ au dessus de Y :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}(E) \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

tel que X soit une hypersurface de $\mathbb{P}(E)$ de degré relatif 2. Dans ce cas on note $\mathcal{O}_X(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)|_X$.

On rappelle la caractérisation des fibrés en quadriques dûe à Fujita.

Proposition 6.3.2. *[Fu75, Corollary 5.5] Soient X et Y deux variétés quasi-projectives, et $\pi : X \to Y$ un morphisme propre et plat dont toutes les fibres sont irréductibles et réduites. On suppose qu'une fibre générale de π est isomorphe à une quadrique et qu'il existe un fibré en droites π-ample L sur X, tel que pour une fibre générale $f \cong Q_r \subset \mathbb{P}^{r+1}$ on ait $L|_f \cong \mathcal{O}_{Q_r}(1)$.*

Alors π est un fibré en quadriques géométrique. Plus précisément, si on pose $E := \pi_* L$ on a un plongement de X dans $\mathbb{P}(E)$ au-dessus de Y tel que $L \cong \mathcal{O}_X(1)$.

Remarque 6.3.3. Si X et Y sont lisses, et si π est équidimensionnel, alors l'hypothèse de platitude est automatiquement vérifiée d'après [Gr65, Proposition 6.1.5].

Pour énoncer notre théorème, il est nécessaire d'introduire quelques notations.

Définition 6.3.4. Soient X une variété normale et $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. Soient $X' \subset X$ le plus grand ouvert sur lequel $\mathcal{F}$ est localement libre, et $i : X' \hookrightarrow X$ l'inclusion. Pour tout entier $p \geq 1$ on pose $\mathcal{F}^{[\otimes p]} := i_*[(\mathcal{F}|_{X'})^{\otimes p}]$.

Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés quasi-projectives. On pose $T_{X/Y} := (\Omega^1_{X/Y})^*$.

Théorème 6.3.5. *Soient C une courbe projective lisse et E un fibré vectoriel ample sur C de rang $r + 2 \geq 3$. Soient*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}(E) \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd}$$

un fibré en quadriques géométrique et G un fibré vectoriel nef sur X. On a alors

$$\forall p \geq 1 \ , \ H^0(X, T_{X/C}^{[\otimes p]} \otimes \mathcal{O}_X(-p) \otimes G^*) = 0$$

Remarque 6.3.6. Le faisceau $T_{X/C}$ est localement libre en codimension un, ce qui donne sens à l'expression $T_{X/C}^{[\otimes p]}$. En effet les fibres de π sont des quadriques irréductibles et réduites, elles sont donc lisses en codimension un. Ainsi le lieu singulier de π est de codimension au moins deux dans X.

De plus la variété X est normale. En effet X est lisse en codimension un d'après ce qui précède ; c'est par ailleurs une hypersurface dans la variété lisse $\mathbb{P}(E)$, donc une variété de Cohen-Macaulay. Le résultat est donc donné par [Ha77, Proposition II.8.23].

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème 6.2.2.

On note X' l'ouvert de X où le morphisme π est lisse. Le faisceau $(T_{X/C})|_{X'} = T_{X'/C}$ est localement libre, par conséquent on a $(T_{X/C}^{[\otimes p]})|_{X'} = T_{X'/C}^{\otimes p}$. Ainsi, comme $\mathrm{codim}(X \setminus X') \geq 2$, il suffira de montrer que

$$H^0(X', T_{X'/C}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_X(-p)|_{X'} \otimes G|_{X'}^*) = 0.$$

Soit $h : \tilde{C} \to C$ un morphisme fini, avec $\tilde{C}$ une courbe projective lisse. On considère le changement de base

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(f^*E) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathbb{P}(E) \arrow[d] \\ \tilde{C} \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

On note $\tilde{X} := g^{-1}(X)$, $\tilde{X'} := g^{-1}(X')$, et $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to \tilde{C}$ la restriction de la projection $\mathbb{P}(f^*E) \to \tilde{C}$. Alors $\tilde{\pi}$ est un fibré en quadriques géométrique, $\tilde{\pi}$ est lisse sur l'ouvert $\tilde{X'}$, et on a $g^*T_{X'/C} = T_{\tilde{X}'/\tilde{C}}$, et $g^*\mathcal{O}_X(-p) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(f^*E)}(1)|_{\tilde{X}}$.

Grâce au théorème 6.1.3, on peut donc supposer, quitte à faire un changement de base, qu'il existe un fibré en droites M ample sur C tel que $E \otimes M^{-1}$ soit engendré par ses sections globales. Le fibré en droites $N := \mathcal{O}_X(1) \otimes \pi^*M^{-1}$ est alors engendré par ses sections globales, et on considère $Z \in |N|$ un élément général. On pose $Z' := Z \cap X'$. Il suffira pour démontrer le résultat de voir que

$$H^0(Z', (T_{X'/C}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_X(-p)|_{X'} \otimes G|_{X'}^*)|_{Z'}) = 0.$$

On procède par récurrence sur r. Dans le cas où $r = 1$, les fibres de π sont des coniques irréductibles et réduites, donc sont lisses. On a donc $X = X'$, et $Z = Z'$. De plus $(T_{X/C})|_Z \cong N_{Z/X} \cong N|_Z$, donc si π_Z désigne la restriction de π à Z on a

$$H^0(Z, (T_{X/C}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_X(-p) \otimes G^*)|_Z) = H^0(Z, (\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z)^*) = 0,$$

car $\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z$ est ample.

Si $r \geq 2$, on a la suite exacte suivante

$$0 \to T_{Z'/C} \to (T_{X'/C})|_{Z'} \to N_{Z'/X'} \cong N|_{Z'} \to 0.$$

D'après le lemme 6.1.1 il suffira donc de montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$ on a

$$H^0(Z', T_{Z'/C}^{\otimes i} \otimes N|_{Z'}^{\otimes p-i} \otimes \mathcal{O}_X(-p)|_{Z'} \otimes G|_{Z'}^*) = 0.$$

ou encore

$$H^0(Z', T_{Z'/C}^{\otimes i} \otimes \mathcal{O}_X(-i)|_{Z'} \otimes (\pi_Z^* M^{p-i} \otimes G|_Z)|_{Z'}^*) = 0.$$

Or on a pour une fibre générale f de π :

$$(Z \cap f, \mathcal{O}_X(1)|_{Z \cap f}) \cong (Q_{r-1}, \mathcal{O}_{Q_{r-1}}(1)),$$

donc la proposition 6.2.1 entraîne que $\pi_Z : Z \to C$ est un fibré en quadriques géométrique, avec $\mathcal{O}_X(1)|_Z = \mathcal{O}_Z(1)$. Le résultat est donc donné par l'hypothèse de récurrence si $i \geq 1$, car $\pi_Z^* M^{p-i} \otimes G|_Z$ est un fibré vectoriel nef sur Z.

Si $i = 0$, on a

$$H^0(Z', (\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z)|_{Z'}^*) = H^0(Z, (\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z)^*)$$

car $\operatorname{codim}(Z \backslash Z') \geq 2$. De plus pour toute courbe irréductible $C' \subset Z$ non contractée par π_Z, la restriction de $\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z$ à C' est ample, donc le terme de droite de l'égalité ci-dessus est nul. On a donc

$$H^0(Z', (\pi_Z^* M^p \otimes G|_Z)|_{Z'}^*) = 0,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 7

Caractérisation des espaces projectifs et des quadriques : démonstrations

Dans ce chapitre on démontre les théorèmes 3 et 4 caractérisant les espaces projectifs et les quadriques. Commençons par quelques préliminaires.

7.1 Résultats préliminaires

7.1.1 Un résultat sur les les fibrés projectifs sur $\mathbb{P}^1$

On commence cette section par un lemme technique sur les fibrés projectifs sur $\mathbb{P}^1$. Il sera utilisé à plusieurs reprises pour démontrer les théorèmes 3 et 4.

Lemme 7.1.1. *Soient E un fibré vectoriel ample de rang $r+1 \geq 2$ sur $\mathbb{P}^1$, et N un fibré en droites nef sur $\mathbb{P}^1$. On note $\pi : X = \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^1$ le fibré projectif associé à E. Soit $T := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_m)$ avec des entiers $2 \geq \alpha_0 \geq \ldots \geq \alpha_m$. étant donnés deux entiers $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p \geq 1$, on suppose qu'il existe un entier $i \in \{0, \ldots, p\}$ tel que*

$$H^0(X, T_{X/\mathbb{P}^1}^{\otimes i} \otimes \pi^* T^{\otimes p-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-p-q) \otimes \pi^* N^{-1}) \neq 0$$

Alors $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, $p = 2i$, $q = 0$, et $N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. En particulier $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Démonstration. Notons d'abord que l'hypothèse entraîne en se restreignant à une fibre générale f de π que

$$H^0(f, T_f^{\otimes i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-p-q)|_f) \neq 0.$$

Comme $f \cong \mathbb{P}^r$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-p-q)|_f \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-p-q)$, on en déduit que $i \geq \frac{r}{r+1}(p+q)$ d'après la proposition 4.3.5. En particulier on notera que $2i \geq p$.

Comme E et N sont respectivement ample et nef on peut écrire $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r)$ avec $1 \leq a_0 \leq \cdots \leq a_r$, et $N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ avec $n \geq 0$. Le morphisme surjectif de faisceaux $E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r)$ donne lieu à une section σ de la projection naturelle $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ telle que $\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r)$. Notons ℓ l'image de $\mathbb{P}^1$ par cette section.

On a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_{r-1}) \to E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r) \to 0,$$

donc $N_{\ell/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r - a_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r - a_{r-1})$ d'après le lemme 7.1.2 démontré ci-dessous. Ce fibré vectoriel est nef, on voit donc en particulier que la courbe rationnelle ℓ est libre : ses déformations dominent la variété X.

On a donc

$$H^0(\ell, (T_{X/\mathbb{P}^1}^{\otimes i} \otimes \pi^*T^{\otimes p-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-p-q) \otimes \pi^*N^{-1})|_\ell) \neq 0. \tag{7.1}$$

Comme ℓ est l'image de $\mathbb{P}^1$ par une section de $\pi : X \to \mathbb{P}^1$, on a

$$(T_{X/\mathbb{P}^1})|_\ell \cong N_{\ell/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r - a_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r - a_{r-1}).$$

Par ailleurs on a $\pi^*T|_\ell \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_m)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)|_\ell \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r)$, et $\pi^*N|_\ell \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$.

La non-annulation (7.1) entraîne donc que

$$(a_r - a_0)i + \alpha_0(p-i) + a_r(-p-q) - n \geq 0,$$

et comme $\alpha_0 \leq 2$ on a

$$(a_r - a_0)i + 2(p-i) + a_r(-p-q) - n \geq 0, \tag{7.2}$$

d'où

$$(a_r - a_0)i + 2(p-i) - a_r p \geq 0.$$

On en déduit d'une part que $i < p$, car

$$2(p-i) \geq a_r p - (a_r - a_0)i = a_r(p-i) + a_0 i > 0,$$

et d'autre part que $(a_r - a_0)i - (a_r - 1)p \geq 0$, car $2i \geq p$.

Comme $a_0 \geq 1$ on a donc

$$(a_r - 1)(i-p) \geq (a_r - a_0)i - (a_r - 1)p \geq 0,$$

d'où $a_r - 1 \leq 0$ puisque $i - p < 0$. On a donc

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_r = 1.$$

En tenant compte de cette information, l'inégalité (7.2) donne alors

$$p = 2i \quad \text{et} \quad q = n = 0.$$

Par ailleurs comme $i \geq \frac{r}{r+1}(p+q)$, on doit avoir $r = 1$. Finalement on a $N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ et $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$.

□

Lemme 7.1.2. *Soient Y une variété lisse, E un fibré vectoriel sur Y, et $\pi : \mathbb{P}(E) \to Y$ le fibré projectif associé à E. Soient L un fibré en doites, $E \to L$ une surjection, et $\sigma : Y \to \mathbb{P}(E)$ la section de π associée à cette surjection, telle que $\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) = L$. On note $Y' := \sigma(Y)$ et $K := \ker(E \to L)$. Alors le fibré normal de Y' dans $\mathbb{P}(E)$ est isomorphe à $K^* \otimes L$.*

Démonstration. Comme Y' est l'image de Y par une section de π on a

$$N_{Y'/\mathbb{P}(E)} \cong (T_{\mathbb{P}(E)/Y})|_{Y'}. \tag{7.3}$$

Par ailleurs on a la suite exacte d'Euler

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \to \pi^*E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \to T_{\mathbb{P}(E)/Y} \to 0.$$

En tensorisant par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$, puis en appliquant σ^* on obtient la suite exacte

$$0 \to \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \to \sigma^*\pi^*E^* \to \sigma^*T_{\mathbb{P}(E)/Y} \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \to 0,$$

ce qui entraîne, puisque $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_Y$ et $\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) = L$, que l'on a la suite exacte

$$0 \to L^{-1} \to E^* \to \sigma^*T_{\mathbb{P}(E)/Y} \otimes L^{-1} \to 0.$$

Par définition $K = \ker(E \to L)$, donc on a une suite exacte

$$0 \to L^{-1} \to E^* \to K^* \to 0,$$

ce qui donne un isomorphisme $\sigma^*T_{\mathbb{P}(E)/Y} \otimes L^{-1} \cong K^*$. Enfin grâce à l'isomorphisme (7.3) on obtient que

$$N_{Y'/\mathbb{P}(E)} \cong K^* \otimes L.$$

□

7.1.2 Un résultat sur les surfaces réglées

Comme on l'a vu dans l'introduction, la démonstration de la proposition qui suit constitue une étape importante pour prouver le théorème 3.

Proposition 7.1.3. *Soit $\pi : S \to C$ une surface réglée, avec C une courbe projective lisse. On note f une fibre de π. Si L est un fibré en droites nef et grand tel que*

$L \cdot f = 2$, *alors pour tout* $p \geq 1$

$$H^0(S, T_S^{\otimes p} \otimes L^{-p}) = 0.$$

Démonstration. On suppose par l'absurde que $H^0(S, T_S^{\otimes p} \otimes L^{-p}) \neq 0$. D'après le corollaire 6.1.2 il existe alors un entier $i \in \{0, \ldots, p\}$ tel que

$$H^0(S, T_{S/C}^{\otimes i} \otimes (\pi^* T_C)^{p-i} \otimes L^{-p}) \neq 0. \tag{7.4}$$

On écrit $S \cong \mathbb{P}(E)$, avec E un fibré vectoriel de rang deux normalisé (voir [Ha77, 2.8.1]). On note $e = \deg(\det E^*)$. Soit C_0 l'image d'une section de π telle que $\mathcal{O}_S(C_0) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. On a $C_0^2 = -e$, et $C_0 \cdot f = 1$. Comme $L \cdot f = 2$, on a $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2) \otimes \pi^* A$ avec $A \in \mathrm{Pic}(C)$. De plus L étant nef et grand on a $L^2 > 0$, donc $(2C_0 + \deg(A)f)^2 = 4(-e + \deg(A)) > 0$.

Par ailleurs d'après [Ha77, Lemma V.2.10] on a $T_{S/C} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2) \otimes \pi^*(\det E^*)$, donc on a d'après (7.4)

$$H^0(S, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2i - 2p)) \otimes \pi^*(\det(E)^{-i} \otimes T_C^{p-i} \otimes A^{-i})) \neq 0.$$

On en déduit que $2i - 2p \geq 0$, d'où $i = p$. On a alors

$$\begin{aligned} H^0(S, T_{S/C}^{\otimes p} \otimes L^{-p}) &\cong H^0(S, \pi^*(\det(E)^{-p} \otimes A^{-p})) \\ &\cong H^0(C, (\det(E) \otimes A)^{-p}). \end{aligned}$$

Or le faisceau $(\det(E) \otimes A)^{-p}$ est de degré $-p(-e + \deg(A)) < 0$, donc n'a pas de section non nulle, et on a une contradiction. □

7.2 Démonstration du théorème 4

On démontre maintenant la caractérisation de l'espace projectif suivante.

Théorème. *(= Théorème 4) Soient* X *une variété projective lisse complexe de dimension* $n \geq 1$, *et* L *un fibré en droites ample sur* X. *Soient* $p \geq 1$ *et* $k > p$ *deux entiers. On suppose que*

$$H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes L^{-k}) \neq 0$$

Alors $X \cong \mathbb{P}^n$, $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, *et* $k \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) p$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, on voit facilement que $X \cong \mathbb{P}^1$ et $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$.

Si $n \geq 2$, X est uniréglée d'après le théorème de Miyaoka (théorème 5.5.9). Soit $H \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X. Soit $[g] \in H$ un élément général, on peut alors écrire $g^* T_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus d'}$ avec $d, d' \geq 0$ d'après la proposition 5.2.11. Par ailleurs

L étant ample on a $g^*L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l)$ avec $l \geq 1$. Comme $H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes L^{-k}) \neq 0$ on a $2p - lk \geq 0$, on en déduit que $l = 1$ car $k > p$ par hypothèse. Par conséquent $g^*L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, et H est complète puisqu'elle est de degré minimal relativement à L.

La première étape consiste à montrer que X a un nombre de Picard $\rho(X)$ égal à 1. Supposons par l'absurde que $\rho(X) \geq 2$. On considère $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ le quotient H-rc de X, où X_0 est un ouvert dense de X. On a alors $\dim Y_0 \geq 1$ d'après la proposition 5.3.4. Quitte à remplacer Y_0 par un ouvert plus petit, on peut supposer que Y_0 et π_0 sont lisses.

Le corollaire 6.1.2 entraîne l'existence d'un entier $i \in \{0, \dots, p\}$ tel que

$$H^0(X_0, T_{X_0/Y_0}^{\otimes i} \otimes (\pi_0^* T_{Y_0})^{\otimes p-i} \otimes L|_{X_0}^{-k}) \neq 0. \tag{7.5}$$

En restriction à une fibre f de π_0 on obtient donc :

$$H^0(f, T_f^{\otimes i} \otimes L|_f^{-k}) \neq 0$$

On remarque d'abord que ceci implique que $i \geq 1$. De plus, comme $\dim Y_0 \geq 1$ on a $d := \dim f < n$, donc l'hypothèse de récurrence entraîne que $f \cong \mathbb{P}^d$ et $L|_f \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)$. Si on pose $E := \pi_{0*}(L|_{X_0})$, on a donc $X_0 \cong \mathbb{P}(E)$ et $L|_{X_0} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. De plus d'après le théorème 5.4.3 on peut supposer que $\operatorname{codim}(X \setminus X_0) \geq 2$ puisque la famille H est complète.

Soit Y une compactification projective lisse de Y_0. Montrons par l'absurde que Y est uniréglée. Si ce n'est pas le cas, alors la proposition 5.5.11 entraîne que pour une courbe MR-générale $C \subset X_0$, le fibré vectoriel $\pi_0^* \Omega_{Y_0}^1|_C$ est nef. Soient $\phi : C \to Y_0$ la restriction de π_0 à C, et $E_C := \phi^* E$. On considère le changement de base

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E_C) & \xrightarrow{\psi} & X_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_C} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ C & \xrightarrow{\phi} & Y_0 \end{array}$$

Le fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(E_C)$

$$G := (\psi^* \pi_0^* \Omega_{Y_0}^1)^{\otimes p-i} \otimes \psi^*(L|_{X_0})^{k-i}$$

est nef (en fait il est même ample) car $\psi^* \pi_0^* \Omega_{Y_0}^1$ est nef et $\psi^*(L|_{X_0})$ est ample. Par ailleurs grâce à la non-annulation (7.5) on a

$$H^0(\mathbb{P}(E_C), \psi^*(T_{X_0/Y_0}^{\otimes i} \otimes (\pi_0^* T_{Y_0})^{\otimes p-i} \otimes L|_{X_0}^{-k})) \neq 0.$$

d'où

$$H^0(\mathbb{P}(E_C), T_{\mathbb{P}(E_C)/C}^{\otimes i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_C)}(-i) \otimes G^*) \neq 0.$$

On obtient donc une contradiction avec le théorème 6.2.2.

La variété Y est donc uniréglée. Soit $H' \subset \operatorname{RatCurves}^n(Y)$ une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur Y. Comme π_0 est une fibration en $\mathbb{P}^d$, on peut trouver sur X une famille dominante de courbes rationnelles $H'' \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ telle que pour une courbe générale $[\ell] \in H''$ on ait $\left[\overline{\pi_0(\ell \cap X_0)}\right] \in H'$. Étant donné que $\mathrm{codim}(X \setminus X_0) \geq 2$, on a $\ell \subset X_0$ pour $[\ell] \in H''$ générale d'après la proposition 5.2.8, donc une courbe générale de la famille H' est entièrement contenue dans Y_0.

Soit $[h] \in H'$ un élément général, on peut alors écrire $h^*T_{Y_0} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus e} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus e'}$ avec $e, e' \geq 0$ d'après la proposition 5.2.11. Notons $Z := \mathbb{P}(h^*E)$, et considèrons le changement de base suivant.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & X_0 \arrow[d, "\pi_0"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "h"] & Y_0 \end{tikzcd}$$

Comme $[h] \in H'$ est un élément général, on déduit de (7.5) que

$$H^0(Z, T_{Z/\mathbb{P}^1}^{\otimes i} \otimes \rho^*(h^*T_{Y_0})^{\otimes p-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(h^*E)}(-k)) \neq 0.$$

Enfin en appliquant le lemme 7.1.1 on obtient $k = p$, ce qui contredit nos hypothèses.

On a donc $\rho(X) = 1$. D'après le lemme 4.2.14, T_X contient un sous-faisceau sans torsion $\mathcal{F}$ tel que $\mu(\mathcal{F}) \geq \frac{\mu(L^k)}{p}$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est localement libre en codimension un, donc pour un élément général $[g] \in H$, $g^*\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel d'après la proposition 5.2.8. De plus on a

$$\frac{\deg(g^*\mathcal{F})}{\mathrm{rg}(\mathcal{F})} \geq \frac{\deg(g^*L^k)}{p} = \frac{k}{p} > 1.$$

Comme $g^*\mathcal{F}$ est un sous-faisceau de $g^*T_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus d'}$ on en déduit que $g^*\mathcal{E}$ est ample. D'après le théorème 5.4.4, on peut supposer que le quotient H-rc $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ de X est une fibration en $\mathbb{P}^n$ pour un entier $n \geq 1$, d'où $X \cong \mathbb{P}^n$ puisque $\rho(X) = 1$. Enfin on en déduit facilement que $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, et l'inégalité $k \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) p$ résulte de la proposition 4.3.5. □

7.3 Démonstration du théorème 3

La première étape consiste à montrer que sous les hypothèses du théorème 3, une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X est complète.

Proposition 7.3.1. *Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$, L un fibré en droites ample sur X. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes L^{-p}) \neq 0$. Si $H \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ est une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X, alors H est de degré* 1 *relativement à L, et en particulier H est complète.*

Remarque 7.3.2. Sous les hypothèses du théorème, la variété X est uniréglée d'après le théoréme de Miyaoka (théorème 5.5.9), ce qui justifie l'existence de la famille dominante H.

Démonstration. Soit $[\ell] \in H$ un élément général et $\tilde{\ell} \cong \mathbb{P}^1$ sa normalisée. On a alors $T_X|_{\tilde{\ell}} \cong T_{\tilde{\ell}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus d'}$ pour des entiers $d, d' \geq 0$, avec $T_{\tilde{\ell}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ d'après la proposition 5.2.11. Comme $H^0(\tilde{\ell}, (T_X|_{\tilde{\ell}})^{\otimes p} \otimes (L|_{\tilde{\ell}})^{-p}) \neq 0$, on a un morphisme non nul de faisceaux :

$$\alpha : (L|_{\tilde{\ell}})^p \to (T_X|_{\tilde{\ell}})^{\otimes p}.$$

Comme $(T_X|_{\tilde{\ell}})^{\otimes p} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2p) \oplus \bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ avec des entiers $a_i < 2p$, le degré de $(L|_{\tilde{\ell}})^p$ est inférieur ou égal à $2p$. De plus L est ample, deux cas peuvent donc se présenter : soit $L|_{\tilde{\ell}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ (auquel cas H est complète car de degré minimal relativement à L), soit $L|_{\tilde{\ell}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

On va montrer que le deuxième cas est exclu : supposons par l'absurde que $L|_{\tilde{\ell}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. On a alors pour $x \in \tilde{\ell}$ général $\operatorname{Im} \alpha_x \cong T_{\tilde{\ell},x}^{\otimes p}$, et on en déduit en particulier que $T_{\tilde{\ell},x}$ ne dépend pas de la courbe générale $\tilde{\ell}$ passant par x.

On considère $\pi : \mathcal{U} \to H$ la famille universelle associée à H, et $e : \mathcal{U} \to X$ le morphisme naturel. On a un morphisme de faisceaux $e^*\Omega_X^1 \to \Omega_{\mathcal{U}}^1$ induit par la différentielle de e, qui composé avec la surjection $\Omega_{\mathcal{U}}^1 \to \Omega_{\mathcal{U}/H}^1$ donne un morphisme $e^*\Omega_X^1 \to \Omega_{\mathcal{U}/H}^1$. Comme $\operatorname{Hom}(e^*\Omega_X^1, \Omega_{\mathcal{U}/H}^1) \cong \operatorname{Hom}(\Omega_X^1, e_*\Omega_{\mathcal{U}/H}^1)$ on a donc un morphisme

$$\varphi : \Omega_X^1 \to e_*\Omega_{\mathcal{U}/H}^1.$$

Notons $\mathcal{F}$ l'image de ce morphisme. Soit $x \in X$ un point général, on note $\mathcal{U}_x := e^{-1}(x)$. On a alors un isomorphisme

$$e_*\Omega_{\mathcal{U}/H}^1 \otimes \mathbf{k}(x) \cong H^0(\mathcal{U}_x, \Omega_{\mathcal{U}/H}^1|_{\mathcal{U}_x}).$$

Si $\omega \in \Omega_X^1 \otimes \mathbf{k}(x)$, alors l'image de ω par $\varphi_x : \Omega_X^1 \otimes \mathbf{k}(x) \to H^0(\mathcal{U}_x, \Omega_{\mathcal{U}/H}^1|_{\mathcal{U}_x})$ s'identifie à l'application qui à $u \in \mathcal{U}_x$ associe $(\omega \circ d_u e)|_{T_{\mathcal{U}/H} \otimes \mathbf{k}(u)}$. Or $d_u e(T_{\mathcal{U}/H} \otimes \mathbf{k}(u)) \cong T_{\tilde{\ell}} \otimes \mathbf{k}(x)$ est engendré par un vecteur v_x qui ne dépend pas de la courbe générale $\tilde{\ell}$ passant par x. On a donc

$$\varphi_x(\omega) = 0 \ \Leftrightarrow \ \omega(v_x) = 0,$$

ce qui entraîne en particulier que le faisceau $\mathcal{F}$ est de rang un. Si G est la saturation du faisceau $\mathcal{F}^*$ dans T_X, alors G est de rang un, et il est réflexif d'après le corollaire 4.1.7. C'est donc un faisceau inversible d'après la proposition 4.1.11. De plus d'après ce qui précède si $x \in X$ est un point général, et si $\tilde{\ell}$ est la normalisée d'une courbe générale de la famille H passant par x, alors on a $G_x \cong T_{\tilde{\ell},x}$.

On a construit de cette manière un feuilletage en courbes $G \subset T_X$ sur X dont les feuilles sont les courbes de la famille H. De plus on a $L^p \subset G^p \subset T_X^{\otimes p}$. En effet pour $x \in X$ général on a $L_x^p \cong G_x^p$, donc le morphisme naturel $L^p \to T_X^{\otimes p}/G^p$ est nul sur un ouvert dense, et $T_X^{\otimes p}/G^p$ étant sans torsion ce morphisme est identiquement nul. Enfin on a $G\cdot\tilde{\ell} = L\cdot\tilde{\ell} = 2$: en effet on a d'une part $G\cdot\tilde{\ell} \leq 2$ car $G|_{\tilde{\ell}} \hookrightarrow T_X|_{\tilde{\ell}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus d'}$, et d'autre part $G^p \cdot \tilde{\ell} \geq L^p \cdot \tilde{\ell} = 2p$.

Le but de ce qui suit est d'obtenir une contradiction en se ramenant au cas d'une surface lisse. On rappelle qu'on a le diagramme commutatif suivant (voir théorème 5.2.4).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "U"'] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\mu"] & \mathrm{Univ}^{rc}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \\
\mathrm{Hom}^n_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "u"'] & \mathrm{RatCurves}^n(X) &
\end{tikzcd} \tag{7.6}$$

Soit T la normalisée d'une courbe irréductible contenue dans $u^{-1}(H)$ et non contractée par u (une telle courbe existe car $\dim(X) \geq 2$), et soit C une compactification projective lisse de T. On peut choisir la courbe C de sorte que $g(C) \geq 1$. Le morphisme μ induit une application rationnelle

$$\mathbb{P}^1 \times C \overset{\varphi}{\dashrightarrow} X \times C\,.$$

On note $S \subset X \times C$ l'adhérence de l'image de φ, $p : X \times C \to X$ et $q : X \times C \to C$ les deux projections. Par construction de G, si $\tilde{\ell}$ est la normalisation d'une courbe générale $[\ell] \in H$ l'application composée

$$\mathcal{I}_{\tilde{\ell}}/\mathcal{I}_{\tilde{\ell}}^2 \to \Omega^1_X|_{\tilde{\ell}} \to G^{-1}|_{\tilde{\ell}}$$

est identiquement nulle. L'application composée

$$\mathcal{I}_S/\mathcal{I}_S^2 \to \Omega^1_{X\times C}|_S \cong p^*\Omega^1_X|_S \oplus q^*\Omega^1_C|_S \to p^*\Omega^1_X|_S \to p^*G^{-1}|_S$$

est donc nulle sur un ouvert dense de S, et comme le faisceau $p^*G^{-1}|_S$ est sans torsion, elle est identiquement nulle. Il existe donc une factorisation

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{X\times C}|_S \arrow[rr] \arrow[dr] & & p^*G^{-1}|_S \\
& \Omega^1_S \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On obtient un feuilletage en courbes $\Omega^1_S \to G_S^{-1} := p^*G^{-1}|_S$ sur la surface S. On notera dans la suite $L_S := p^*L|_S$. Comme L est ample et $p|_S$ est génériquement fini, L_S est nef et grand. On remarque de plus que l'on a $L_S^p \subset G_S^p$. Si f est une fibre générale de $q|_S$, la restriction de p à f est birationnelle sur son image, que l'on note C', et on a

$$L_S \cdot f = (p^*L|_S)\cdot f = L \cdot C' = 2.$$

On a donc également $G_S \cdot f = 2$.

Soit $n : S' \to S$ la normalisation de S. D'après la proposition 5.5.8 il existe un unique feuilletage $\Omega^1_{S'} \to n^*G_S^{-1}$ sur S' qui étend $n^*\Omega^1_S \to n^*G_S^{-1}$. De plus d'après [BW74, Proposition 1.2], il existe une désingularisation $d : \bar{S} \to S'$ de S' telle que l'on ait un isomorphisme naturel $d_*T_{\bar{S}} \tilde{\to} (\Omega^1_{S'})^*$. On en déduit qu'il existe un unique feuilletage $\Omega^1_{\bar{S}} \to d^*n^*G_S^{-1}$ sur $\bar{S}$ qui étend $d^*\Omega^1_{S'} \to d^*n^*G_S^{-1}$. Notons $G_{\bar{S}} := d^*n^*G_S$, $L_{\bar{S}} := d^*n^*L_S$, $p_{\bar{S}} := p \circ n \circ d : \bar{S} \to X$ et $q_{\bar{S}} := q \circ n \circ d : \bar{S} \to C$. Le morphisme $n \circ d$ étant génériquement fini, le fibré $L_{\bar{S}}$ est encore nef et grand.

En résumé, on a fabriqué un feuilletage $G_{\bar{S}} \subset T_{\bar{S}}$ sur la surface lisse $\bar{S}$, et un fibré en droites nef et grand $L_{\bar{S}}$ tels que $L^p_{\bar{S}} \subset G^p_{\bar{S}}$. On a donc

$$H^0(\bar{S}, T_{\bar{S}}^{\otimes p} \otimes L_{\bar{S}}^{-p}) \neq 0.$$

De plus pour $f \cong \mathbb{P}^1$ une fibre générale de $q_{\bar{S}}$ on a $L_{\bar{S}} \cdot f = G_{\bar{S}} \cdot f = 2$.

Supposons que $\bar{S}$ n'est pas minimale, et considèrons $\varepsilon : \bar{S} \to S_1$ la contraction d'une (-1)-courbe. La (-1)-courbe contractée ne domine pas C car $g(C) \geq 1$, elle est donc contenue dans une fibre de $q_{\bar{S}}$, et on a une factorisation :

$$\begin{tikzcd} \bar{S} \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "q_{\bar{S}}"'] & & S_1 \arrow[dl, "q_1"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Il existe un fibré en droites L_1 sur S_1 et un entier k tel que $L_{\bar{S}} = \varepsilon^*L_1(-kE)$, où l'on a noté E le diviseur exceptionnel de ε. Si f est une fibre générale de q_1, on a $L_1 \cdot f = 2$. Comme $L_{\bar{S}}$ est nef, on a $k \geq 0$, et L_1 est nef. De plus comme $L_{\bar{S}}$ est grand on a $L^2_{\bar{S}} = L_1^2 - k^2 > 0$, d'où $L_1^2 > 0$, donc L_1 est grand.

On a une injection $T_{\bar{S}} \hookrightarrow \varepsilon^*T_{S_1}$ donc

$$H^0(\bar{S}, \varepsilon^*T_{S_1}^{\otimes p} \otimes \varepsilon^*L_1^{-p} \otimes \mathcal{O}_{S_1}(pkE)) \neq 0,$$

et comme $\varepsilon_*\mathcal{O}_{\bar{S}}(pkE) \cong \mathcal{O}_{S_1}$ on en déduit que

$$H^0(S_1, T_{S_1}^{\otimes p} \otimes L_1^{-p}) \neq 0.$$

On peut donc supposer que $\bar{S}$ est minimale, et que

$$H^0(\bar{S}, T_{\bar{S}}^{\otimes p} \otimes L_{\bar{S}}^{-p}) \neq 0,$$

ce qui contredit la proposition (7.1.3) et termine la démonstration.

□

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème principal.

Théorème. *(= Théorème 3) Soient X une variété projective lisse complexe de dimension $n \geq 1$, et L un fibré en droites ample sur X. Soit $p \geq 1$ un entier. On suppose que*

$$H^0(X, T_X^{\otimes p} \otimes L^{-p}) \neq 0.$$

Alors ou bien $(X,L) \cong (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$*, ou bien* $(X,L) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$*, ou bien* $(X,L) \cong (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$*, où* $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ *est une quadrique lisse de dimension* n*.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, on voit facilement que $X \cong \mathbb{P}^1$ et que $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ ou $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

Si $n \geq 2$, X est uniréglée d'après le théorème de Miyaoka (théorème 5.5.9). Soit $H \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X. D'après la proposition 7.3.1, H est de degré 1 relativement à L, donc H est complète.

Si $\rho(X) = 1$, on a vu que le résultat est déjà connu grâce à [ADK08]. On suppose donc $\rho(X) \geq 2$, le but de ce qui suit étant de démontrer que $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Considérons $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ le quotient H-rc de X, on a $\dim Y_0 \geq 1$ d'après la proposition 5.3.4. Quitte à remplacer Y_0 par un ouvert plus petit, on peut supposer que Y_0 et π_0 sont lisses. D'après le corollaire 6.1.2 il existe $i \in \{0, \dots, p\}$ tel que

$$H^0(X_0, T_{X_0/Y_0}^{\otimes i} \otimes (\pi_0^* T_{Y_0})^{\otimes p-i} \otimes L|_{X_0}^{-p}) \neq 0.$$

En restriction à une fibre f de π_0 on obtient donc :

$$H^0(f, T_f^{\otimes i} \otimes L|_f^{-p}) \neq 0$$

- **Premier cas :** $i = p$

Montrons que ce cas est impossible. On a

$$H^0(X_0, T_{X_0/Y_0}^{\otimes p} \otimes L|_{X_0}^{-p}) \neq 0$$

et

$$H^0(f, T_f^{\otimes p} \otimes L|_f^{-p}) \neq 0,$$

donc par hypothèse de récurrence $f \cong \mathbb{P}^d$ ou $f \cong Q_d$ pour un entier $d \geq 1$. De plus d'après la proposition 7.3.1 le cas où $f \cong \mathbb{P}^1$ et $L|_f \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ est exclu, on a donc $L|_f \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)$ ou $L|_f \cong \mathcal{O}_{Q_d}(1)$.

Dans le cas où $f \cong \mathbb{P}^d$, $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ est un fibré projectif, et on peut supposer d'après le théorème 5.4.3 que $\mathrm{codim}(X \setminus X_0) \geq 2$ puisque la famille H est complète. Notons C la normalisation d'une courbe complète passant par un point général de Y_0, et $X_C := X_0 \times_{Y_0} C$. Soient $\pi_C : X_C \to C$ la projection naturelle et L_C le tiré en arrière à X_C du fibré L. Il existe alors un fibré vectoriel E_C sur C tel que $X_C \cong \mathbb{P}(E_C)$ et $L_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_C)}(1)$, et on a

$$H^0(X_C, T_{X_C/C}^{\otimes p} \otimes L_C^{-p}) \neq 0,$$

ce qui entre en contradiction avec le théorème 6.2.2.

Dans le cas où $f \cong Q_d$, d'après le théorème 5.3.5 on peut étendre π_0 en un morphisme propre, surjectif et équidimensionnel $\pi' : X' \to Y'$ avec des fibres irréductibles et réduites, et $\operatorname{codim}(X \setminus X') \geq 2$.

Soit C la normalisation d'une courbe complète passant par un point général de Y', et soit $X_C := X' \times_{Y'} C$. On note $\pi_C : X_C \to C$ la projection naturelle, et L_C le tiré en arrière à X_C du fibré L. Si f_C est une fibre générale de π_C, on a $(f_C, L_C|_{f_C}) \cong (Q_d, \mathcal{O}_{Q_d}(1))$.D'après la proposition 6.3.2, π_C est donc un fibré en quadriques géométrique, or on a

$$H^0(X_C, T_{X_C/C}^{[\otimes p]} \otimes L_C^{-p}) \neq 0,$$

ce qui contredit la conclusion du théorème 6.3.5.

• **Deuxième cas :** $i < p$

Dans ce cas on a $f \cong \mathbb{P}^d$ et $L|_f \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)$ d'après le théorème 4. Si $E = \pi_{0*}(L|_{X_0})$ on a alors $X_0 \cong \mathbb{P}(E)$ et $L|_{X_0} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. De plus d'après le théorème 5.4.3 on peut supposer que $\operatorname{codim}(X \setminus X_0) \geq 2$ puisque la famille H est complète.

De même que dans la démonstration du théorème 4 on peut voir que si Y est une compactification projective lisse de Y_0, alors Y est uniréglée, et qu'il existe une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles K sur Y telle qu'une courbe générale de la famille K soit entièrement contenue dans Y_0. Si $[g] \in K$ un élément général, si $Z_g := \mathbb{P}(g^*E)$, et si $\rho_g : Z_g \to \mathbb{P}^1$ est la projection naturelle on a

$$H^0(Z, T_{Z_g/\mathbb{P}^1}^{\otimes i} \otimes \rho_g^*(g^*T_{Y_0})^{\otimes p-i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(g^*E)}(-p)) \neq 0.$$

Par conséquent le lemme 7.1.1 entraîne que $g^*E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, et que $Z_g \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. En particulier on note que le quotient H-rc $\pi_0 : X_0 \to Y_0$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$.

On définit alors une famille dominante de courbes rationnelles H' sur X en prenant toutes les droites horizontales dans $Z_g \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (c'est à dire les droites non contractées par ρ_g), pour $[g]$ général dans H. Cette famille est complète car elle est de degré 1 relativement à L : en effet on a $L|_{Z_g} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1,1)$. En appliquant le même raisonnement que ci-dessus à la famille H', on voit que le quotient H'-rc $\pi'_0 : X'_0 \to Y'_0$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$.

Ceci entraîne que la fibre générale du quotient (H, H')-rc de X, que l'on note $\phi : X' \to Y'$, est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

On peut supposer, quitte à réduire Y', que Y' et ϕ sont lisses. Une nouvelle application du corollaire 6.1.2 entraîne l'existence d'un entier $j \in \{0, \ldots, p\}$ tel que

$$H^0(X', T_{X'/Y'}^{\otimes j} \otimes (\phi^*T_{Y'})^{\otimes p-j} \otimes L|_{X'}^{-p}) \neq 0.$$

Si $f' \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est une fibre générale de ϕ on a donc

$$H^0(f', T_{f'}^{\otimes j} \otimes L|_{f'}^{-p}) \neq 0.$$

On a donc $j = p$ d'après le théorème 4, d'où

$$H^0(X', T_{X'/Y'}^{\otimes p} \otimes L|_{X'}^{-p}) \neq 0.$$

D'après le théorème 5.3.5 on peut étendre ϕ en un morphisme propre, surjectif et équidimensionnel $\phi'' : X'' \to Y''$, avec des fibres irréductibles et réduites, où X'' est un ouvert de X dont le complémentaire est de codimension au moins deux, et où Y'' est lisse.

Supposons que $\dim Y'' \geq 1$. On considère alors la normalisation C d'une courbe complète passant par un point général de Y'', et on pose $X_C := X'' \times_{Y''} C$. On note $\phi_C : X_C \to C$ la projection naturelle et L_C le tiré en arrière à X_C du fibré L. Si f_C est une fibre générale de ϕ_C, on a $(f_C, L_C|_{f_C}) \cong (Q_2, \mathcal{O}_{Q_2}(1))$. D'après la proposition 6.3.2, ϕ_C est donc un fibré en quadriques géométrique, or on a

$$H^0(X_C, T_{X_C/C}^{[\otimes p]} \otimes L_C^{-p}) \neq 0,$$

ce qui contredit cette fois encore le théorème 6.3.5. Y'' est donc réduit à un point, et on a $X \cong Q_2 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

$\square$

Bibliographie

[ADK08] C. Araujo, S. Druel, S.J. Kovács. *Cohomological characterizations of projective spaces and hyperquadrics*, Invent. Math. 174 (2008), 233-253.

[Akh95] D. Akhiezer. *Lie Group Actions in Complex Analysis*, Aspects of math. Vol. E 27 , Friedr. Viehweg and Sohn, 1995.

[AK03] C. Araujo, J. Kollár. *Rational curves on varieties*, in Higher Dimensional Varieties and Rational Points (Budapest 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, 2003.

[Ar06] C. Araujo. *Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces*, Math. Ann. 335, $n^o 4$ (2006), 937-951.

[AW01] M. Andreatta, J.A. Wiśniewski. *On manifolds whose tangent bundle contains an ample subbundle*, Invent. Math. 146 (2001), 209-217.

[BCD07] L. Bonavero, C. Casagrande, S. Druel. *On covering and quasi-unsplit families of curves*, J. Eur. Math. Soc. 9, $n^o 1$ (2007), 45-57.

[BDPP04] S. Boucksom, J.P. Demailly, M. Paŭn, T. Peternell. *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, arXiv :math/0405285 (2004).

[Be00] A. Beauville. *Symplectic singularities*, Invent. Math. 139 (2000), 541-549.

[BL92] C. Birkenhake, H. Lange. *Complex abelian varieties*, Springer-Verlag, 1992.

[BM01] F. Bogomolov, M. McQuillan. *Rational curves on foliated varieties*, IHES Preprint (2001).

[BW74] D.M. Burns Jr., J.M. Wahl. *Local contributions to global deformations of surfaces*, Invent. Math. 26 (1974), 67-88.

[Ca92] F. Campana. *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. ENS 25 (1992), 539-545.

[CF90] F. Campana, H. Flenner. *A characterization of ample vector bundles on a curve*, Math. Ann. 287 (1990), 571-575.

[CP91] F. Campana, T. Peternell. *Projective manifolds whose tangent bundle are numerically effective*, Math. Ann. 289 (1991), 169-187.

[CP98] F. Campana, T. Peternell. *Rational curves and ampleness properties of the tangent bundle of algebraic varieties.* Manuscripta Math. 97, $n^o 1$ (1998), 59-74.

[De01] O. Debarre. *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2001.

[DPS94] J.P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider. *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Alg. Geom. 3, $n^o 2$ (1994), 295-345.

[DPS96] J.P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider. *Holomorphic line bundles with partially vanishing cohomology*, Conf. in honor of F. Hirzebruch, Israel Mathematical conference Proceedings, Vol. 9 (1996), 165-198.

[DPS01] J.P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider. *Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds*, Int. J. Math. 12, $n^o 6$ (2001), 689-741.

[Dr04] S. Druel. *Caractérisation de l'espace projectif*, Manuscripta Math. 115, $n^o 1$ (2004), 19-30.

[ELMNP03] L. Ein, R. Lazarsfeld, M. Mustaţă, M. Nakamaye, M. Popa. *Asymptotic invariants of base loci*, arXiv :math/0308116 (2003).

[Fl84] H. Flenner. *Restrictions of semistable bundles on projective varieties*, Commentarii Mathematici Helvetici 59 (1984).

[Fu75] T. Fujita. *On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 22 (1975), 103-115.

[Gr65] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. tome 24 (1965), 5-231.

[Ha77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.

[Ha82] R. Hartshorne. *Stable reflexive sheaves*, Invent. Math. 66 (1982), 165-190.

[HL97] D. Huybrechts, M. Lehn. *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of math. Vol. E 31, Friedr. Viehweg and Sohn, 1997.

[HM04] J.-M. Hwang, N. Mok. *Birationality of the tangent map for minimal rational curves*, Asian J. Math. 8, $n^o 1$ (2004), 51-63.

[HN75] G. Harder, M.S. Narasimhan. *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann. 212 (1975), 215-248.

[Ke02] S. Kebekus. *Families of singular rational curves* , J. Algebr. Geom. 11, $n^o 2$ (2002), 245-256.

[KMM92a] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori. *Rationally connected varieties*, J. Algebr. Geom. 1, $n^o 3$ (1992), 429-448.

[KMM92b] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori. *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. 36, $n^o 3$ (1992), 765-779.

[Kob87] S. Kobayashi. *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Publications of the Math. Society of. Japan 15, Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press, 1987.

[Kol96] J. Kollár. *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Springer-Verlag, 1996.

[KSCT07] S. Kebekus, L. Solá Conde, M. Toma. *Rationally connected foliations after Bogomolov and McQuillan*, J. Algebr. Geom. 16 n^o1 (2007), 65-81.

[La04] R.Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry I-II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Springer-Verlag, 2004.

[Mi87] Y. Miyaoka. *Deformations of a morphism along a foliation and applications*, in Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. Sympos. Pure Math., Vol.46 (p.245-268), Am. Math.Soc., 1987.

[Mo79] S. Mori. *Projective manifolds with ample tangent bundle*, Ann. of Math. 110 n^o3 (1979), 593-606.

[MR82] V.B. Mehta, A. Ramanathan. *Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves*, Math. Ann. 258 (1982), 213-224.

[Na04] N. Nakayama. *Zariski decomposition and abundance*, MSJ Memoirs 14, Mathematical society of Japan, 2004.

[OSS80] C. Okonek, M. Schneider, H. Splinder. *Vector bundles on projective spaces*, Progress in Math. 3, Birkhäuser, 1980.

[Pe08] T. Peternell. *Varieties with generically nef tangent bundles*, arXiv : 0807.0982 (2008).

[SB92] N. I. Shepherd-Barron. *Miyaoka's theorems on the generic seminegativity of T_X*, in Flips and abundance for algebraic threefolds, Astérisque 211 (1992), 103-115.

[Ser66] J.P. Serre. *Prolongement de faisceaux analytiques cohérents*, Annales de l'Institut Fourier, tome 16, n^o1 (1966), 363-374.

[Wa83] J.M. Wahl. *A cohomological characterization of $\mathbb{P}^n$* , Invent. Math. 72 n^o2 (1983), 315-322.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, on étudie comment la positivité du fibré tangent d'une variété projective complexe influence la géométrie de la variété sous-jacente. Dans la première partie, on étudie les variétés (principalement les surfaces) dont le fibré tangent est pseudo-effectif. Dans la deuxième partie on montre que pour un entier strictement positif p, si la puissance tensorielle p-ème du fibré tangent d'une variété projective contient la puissance p-ème d'un fibré en droites ample, alors la variété est isomorphe à un espace projectif ou à une quadrique.

ABSTRACT

In this thesis, we study how the positivity of the tangent bundle of a complex projective variety influences the geometry of the underlying variety. In the first part, we study varieties (mostly surfaces) whose tangent bundle is pseudo-effective. In the second part we show that for a positive integer p, if the p-th tensor power of the tangent bundle of a projective variety contains the p-th power of an ample line bundle, then the variety is isomorphic to a projective space or a quadric.

MOTS-CLÉS

Géométrie algébrique complexe, fibrés vectoriels pseudo-effectifs, surfaces rationnelles, variétés uniréglées, théorèmes d'annulation

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14J26, 14M20, 14F17