



HAL
open science

ETUDE DE LA MAGNETOELASTICITE EN CHAMP MAGNETIQUE FAIBLE ET CONTRAINTES MECANIQUES FORTES

Antoine Viana

► **To cite this version:**

Antoine Viana. ETUDE DE LA MAGNETOELASTICITE EN CHAMP MAGNETIQUE FAIBLE ET CONTRAINTES MECANIQUES FORTES. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2010. Français. NNT : . tel-00543772

HAL Id: tel-00543772

<https://theses.hal.science/tel-00543772>

Submitted on 10 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Soutenir une thèse était un vieux rêve. Je l'ai même perdu de vue un moment. Un rêve d'enfant devenu réalité quelques trente années plus tard. La vie réserve parfois de belles surprises aux rêveurs.

Merci aux membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ces travaux. La lecture qu'ils en ont faite est également une source d'idées pour la poursuite de l'étude.

Je remercie mes encadrants de thèse : Laure-Line Rouve, Gilles Cauffet et Jean-Louis Coulomb. Je vous dois énormément, et en tout premier lieu, d'avoir cru en moi et de me donner cette grande chance que de pouvoir travailler sur un sujet qui me passionne, et me questionne au quotidien. Merci à vous pour tout ce que vous m'avez appris, pour votre accueil, et votre disponibilité sans faille.

Les travaux de cette thèse comportaient une importante partie expérimentale. L'équipe ERT-CMF a la chance d'être épaulée par Florian Dumas. Ses compétences techniques et ses qualités humaines ont considérablement fait avancer ce travail. Merci donc Florian.

Jean-Paul, évidemment. Parti trop tôt, et trop brutalement.

De nombreuses personnes ont également contribué, en particulier à travers le temps qu'elles ont bien voulu m'accorder. Merci en particulier à Olivier Chadebec et à Yannick Vuillermet pour l'aide qu'ils m'ont apportée, sur l'utilisation de Locapi, mais pas seulement.

Je tiens également à remercier tout le personnel administratif, en charge de tâches parfois ingrates, mais vitales pour le bon déroulement d'une thèse.

Merci à ma mère, pour son exigence et son inflexibilité sur les résultats scolaires. Je sais qu'aujourd'hui elle est fière et je suis heureux de pouvoir la remercier de cette manière.

Merci à mes proches : à Valérie, Anne, Tiago, et Aymée pour leur soutien et leur aide.

Et puis Louis, mon fils. 10 ans maintenant. Plein d'envies, de questions, de bonne humeur. Plein de vie. Et de conseils avisés : « si tu rates ta thèse, un bon conseil papa : tu révises là où tu as eu une mauvaise note, et puis tu recommences. »
J'espère que sa curiosité et son goût pour le questionnement ne le quitteront jamais.

Les remerciements... on oublie du monde, et puis surtout, il est impossible de résumer en quelques mots tout ce qu'on doit aux gens.

Je vous dois à tous beaucoup. Surtout de m'avoir donné la possibilité de changer de vie. Et je vous en remercie du fond du cœur.

A mon fils Louis.

Table des matières

Introduction générale à l'étude	10
A. Contexte de l'étude	10
B. Présentation de nos travaux	11
Chapitre I - La magnétostriction à l'échelle cristalline.....	14
A. Quelques rappels de cristallographie.....	14
I. Réseaux périodiques d'atomes	14
II. Coordonnées d'un point dans un cristal	16
III. Monocristal et polycristal.....	16
B. La magnétostriction : approche cristalline	17
I. Introduction.....	17
II. Bilan énergétique	17
III. L'effet Villari ou le couplage magnétoélastique inverse	24
C. Inconvénients de l'approche cristalline.....	26
Chapitre II - Un modèle global de la magnétoélasticité	29
A. Les modèles globaux antérieurs à Jiles	30
I. Le modèle de Brown.....	30
II. Le modèle de Brown mis en défaut.....	32
B. L'approche phénoménologique de Jiles et Atherton	34
I. La variation irréversible de l'aimantation : la loi d'approche (1984)	34
II. L'effet des contraintes sur l'aimantation anhystérique.....	36
III. Trois conditions à intégrer dans une modélisation de la loi d'approche	38
IV. L'expression analytique de la loi d'approche (1995).....	39
V. Cadre d'application du modèle de Jiles-Atherton & cycles HPP complexes	41
VI. Le choix du modèle de Jiles-Atherton pour notre étude	48
C. Résolution numérique de l'équation en aimantation M.....	49
I. Résolution numérique de l'équation de Jiles-Atherton	49
II. Etude qualitative de la solution numérique à l'équation de Jiles-Atherton	49
III. Conclusion sur le modèle de Jiles et Atherton	51
D. Descriptif expérimental	52
I. Le LMMCF.....	52
II. Le prototype	53
III. Etude mécanique du cylindre.....	55
IV. Conclusion de l'étude mécanique	60
V. Intérêt et caractère général du prototype	61

Chapitre III - Un modèle en induction.....	64
A. Les mesures réalisées	64
I. Mesures de signature magnétique en passage et mesure de cycle HPP	64
II. Principe de lecture des mesures	66
B. Caractérisation magnétique en passage	68
I. Protocole expérimental de mesures	68
II. Résultats de la caractérisation magnétique	71
III. Conclusion sur la caractérisation magnétique	78
C. Mesures en cycle HPP.....	79
I. Protocole expérimental de mesure des cycles HPP	79
II. Analyse des résultats de cycles HPP.....	81
D. Vers une solution analytique en induction B à l'équation de Jiles.....	83
I. L'induction extérieure B est l'image de l'aimantation M	83
II. Construction d'une solution analytique	85
E. Conclusion	90
Chapitre IV - Un modèle en aimantation	92
A- Mise en œuvre d'un algorithme d'inversion	92
I. Locapi, logiciel de calcul des aimantations permanentes et induites	92
II. Utilisation des symétries du problème pour la duplication de capteurs	96
III. Inversion de cycles HPP	98
IV. Inversion de signatures en passage à pression maintenue.....	99
V. Caractérisation magnétique du cylindre en aimantation.....	100
B. Un modèle en aimantation.....	102
I. Inversion en des points remarquables	102
II. Une solution analytique approchée par une méthode d'adaptation	106
III. Validation du modèle par une procédure d'adaptation	108
IV. Une solution phénoménologique privilégiée	112
C. Conclusion	126
Conclusion générale de l'étude et perspectives.....	128
A. Résultats obtenus	128
B. Extension de l'étude	129
ANNEXES	132
I - L'importance du protocole de désaimantation	133
II - Les effets magnétoélastiques sont connus depuis l'antiquité.....	135

III - Le champ magnétique terrestre présente des fluctuations de la composante verticale sous un même hémisphère 137

Bibliographie 139

Introduction générale à l'étude

A. Contexte de l'étude

Notre objectif est de produire un modèle prédictif des effets magnétoélastiques inverses¹, capable d'anticiper les variations d'aimantation subies par un matériau ferromagnétique en fonction de contraintes mécaniques croissantes qui lui sont appliquées, sous un champ inducteur faible.

Notre étude s'inscrit dans le cadre des champs magnétiques faibles (de l'ordre de 50 μT ou 40 A/m) et des contraintes mécaniques fortes (jusqu'à 300 MPa, soit environ 40% de la limite d'élasticité de la nuance d'acier HLES 80). C'est un domaine sur lequel l'équipe ERT-CMF² et la Marine Nationale ont souvent collaboré, pour la réalisation et l'étude de mesures des variations d'aimantation sur des navires ou des sous-marins. En effet, l'anomalie magnétique³ (figure 1) créée par la coque ferromagnétique des navires les rend détectables, et donc vulnérables vis-à-vis de dispositifs tels que des mines multi-influences, dont la mise à feu repose sur des algorithmes de décision prenant en compte des mesures acoustiques, dépressionnaires et magnétiques entre autres. La décision ultime de mise à feu repose néanmoins, généralement, sur une information magnétique. Le deuxième risque majeur est spécifique aux sous-marins et consiste en une détection par un capteur magnétique aéroporté (MAD pour Magnetic Anomaly Detection). Il s'agit notamment de la seule méthode de détection d'un sous-marin immergé, et dont tous les systèmes sont coupés (aucun son émis, pas de rayonnement électromagnétique dynamique). L'évolution des techniques de localisation et les progrès réalisés sur les mines font que la discrétion magnétique est toujours un sujet d'actualité.

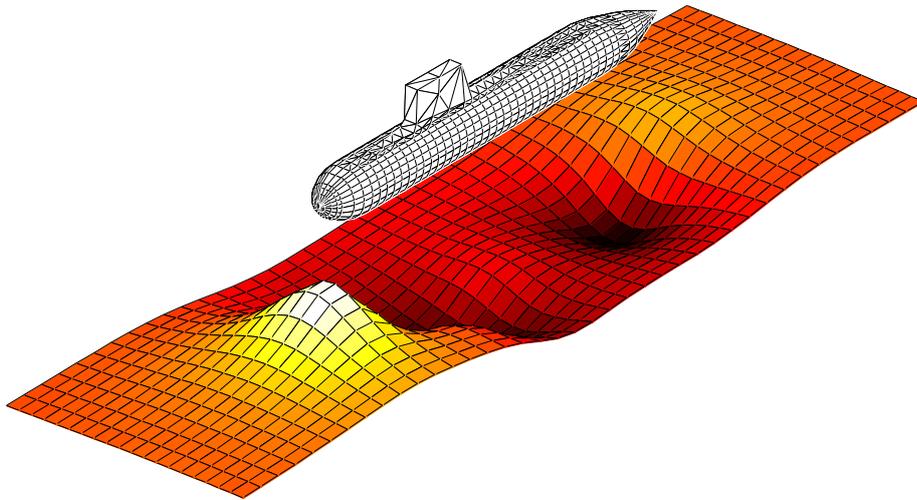


figure 1. Module de l'anomalie magnétique créée par une maquette de sous-marin sur un plan de référence.

L'anomalie magnétique a deux origines. La première est l'aimantation induite (c'est-à-dire réversible) résultante du champ magnétique terrestre. Elle est déterministe. Pour les champs magnétiques faibles, son comportement est gouverné par la loi de Rayleigh.

La seconde est l'aimantation permanente de la coque. Elle dépend de l'histoire magnétique du matériau, et elle n'est pas déterministe.

¹ Le terme exact est l'effet Villari. Néanmoins, nous utiliserons le terme de magnétoélasticité inverse, ou magnétoélasticité, à l'instar de la majorité des études portant sur le sujet.

² Les travaux présentés ici ont été menés au sein du laboratoire G2ELab (Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble), dans l'équipe ERT-CMF (Equipe de Recherche Technologique en Champ magnétique Faible), anciennement LMN (Laboratoire du Magnétisme du Navire, créé en 1948 par Louis Néel).

³ Variation du champ magnétique par rapport au champ magnétique local (souvent le champ magnétique terrestre, de l'ordre de 50 μT).

La méthode classique utilisée par la Marine Nationale pour limiter l'anomalie magnétique a été inventée par Louis Néel. Elle consiste à mesurer l'anomalie magnétique à l'aide de capteurs magnétiques extérieurs immergés, puis à utiliser des bobines de courant disposées à proximité de la coque pour en changer l'aimantation permanente, de manière à compenser exactement l'anomalie mesurée. Des systèmes embarqués peuvent ensuite, pendant la navigation, adapter l'intensité des courants dans des boucles disposées dans le navire, en fonction de l'intensité du champ magnétique terrestre local, supposée connue, et du cap du bâtiment.

Toutefois, ce système suppose que l'aimantation permanente du navire n'évolue pas. Or, les chocs mécaniques subis par la coque (effets de la houle [MONPETIT_1962], les chocs contre les pontons d'amarrage, et pour des sous-marins, les effets de la pression hydrostatique) peuvent considérablement faire varier l'aimantation permanente.

Un système plus évolué de gestion de l'indiscrétion magnétique peut alors être imaginé. Il s'agit de l'immunisation en boucle fermée (IBF), qui à partir de la mesure en temps réel de l'anomalie magnétique avec des capteurs non pas externes au bâtiment, mais installés à bord de celui-ci, asservit les courants dans des boucles embarquées de manière à compenser exactement l'anomalie. De cette manière, un système disposant d'une IBF devrait théoriquement rester indétectable.

Toutefois, la mise en œuvre de ce système suppose que l'on soit capable d'évaluer l'aimantation de la coque. Or, sauf dans de très rares cas, la mesure directe de l'aimantation dans un matériau est impossible.

L'approche classique en magnétisme du navire, et en particulier de l'ERT-CMF, consiste à déduire des mesures d'induction extérieures \mathbf{B} lues sur des capteurs déportés, la distribution d'aimantation \mathbf{M} au sein du matériau. C'est un problème inverse. Cette approche a conduit à Locapi, un logiciel de résolution de problème magnétostatique inverse développé par Olivier Chadebec [CHADEBEC_2001] durant ses travaux de thèse, et dont il sera fait largement usage dans nos travaux.

Une approche complémentaire consiste à établir un modèle déterministe pour l'aimantation, capable de prendre en compte l'histoire magnétique du navire, en particulier l'effet des plongées sur des sous-marins. C'est l'objet de notre étude.

Cette approche du problème est originale, car elle s'est appuyée sur des mesures sur maquette présentant une forme géométrique pour laquelle l'effet de forme est important - un cylindre ferromagnétique creux soumis à une pression interne variable, et présentant un champ démagnétisant inhomogène - à la différence des études classiques. De plus, les contraintes mises en jeu ne sont pas nécessairement parallèles à l'aimantation dans le matériau.

Enfin, la grande majorité des études traitant des effets de couplage magnéto-mécanique est dédiée à l'effet Joule⁴, et porte sur les actionneurs mécaniques. Leur domaine d'application est donc celui des champs magnétiques forts et des contraintes mécaniques faibles. Le domaine d'application de nos travaux est en le dual. Ce déficit de publications confère une forte composante expérimentale à notre étude.

B. Présentation de nos travaux

Dans un premier temps, les modèles classiques de magnétostriction directe sont présentés. Tout d'abord, nous introduirons des modèles à l'échelle d'un monocristal, basés sur des considérations énergétiques, à partir desquelles il est possible de déduire les valeurs des coefficients de magnétostriction, mesurant l'allongement subi par un matériau lorsqu'il est soumis à un champ magnétique inducteur.

⁴ L'effet Joule ou effet magnétostrictif direct, est la variation constatée de la longueur d'un échantillon ferromagnétique lorsqu'il est soumis à un champ inducteur variable.

Nous présentons ensuite les premiers modèles macroscopiques de la magnétoélasticité inverse, basés sur l'expression d'un champ équivalent à une contrainte mécanique. Ces modèles conduisent à la loi d'approche de Jiles et Atherton, qui fait l'objet de notre étude.

Nous montrons d'abord que ce modèle, donné en termes d'aimantation \mathbf{M} dans le matériau, peut être étendu à l'induction \mathbf{B} mesurée à l'extérieur du matériau. Ceci nous permet de dériver une loi analytique de variation de l'induction \mathbf{B} mesurée en fonction de la contrainte, c'est-à-dire un modèle de magnétoélasticité prédictif.

Toutefois, ce modèle en induction comporte des faiblesses. En particulier, il ne détermine pas le champ d'aimantation dans le matériau. Or, la connaissance de la variation de \mathbf{M} dans le matériau, en fonction de la contrainte appliquée, permettrait le calcul de la variation de l'induction \mathbf{B} mesurée en tout autre point à l'extérieur du cylindre (c'est-à-dire la prédiction de l'anomalie magnétique, clef de voûte de l'IBF).

L'utilisation d'un algorithme de résolution de problème inverse nous a permis de résoudre ce point. Ainsi, un modèle de variation de l'aimantation \mathbf{M} en fonction de la contrainte mécanique appliquée est présenté. A partir de la connaissance de l'état d'aimantation initial, et du champ inducteur, ce modèle permet de prédire la variation d'aimantation occasionnée par une mise en contrainte mécanique, mais aussi de calculer l'induction \mathbf{B} prédite en tout point à l'extérieur du matériau. Ce modèle présente l'originalité d'être analytique et vectoriel. Les résultats de la modélisation sont comparés aux mesures réalisées sur notre prototype.

Nous concluons ce document en mettant en évidence les points forts de nos travaux et les questions soulevées par notre étude, qui à notre sens, mériteraient d'être développées dans le futur.

Chapitre I - La magnétostriction à l'échelle cristalline

Sous l'effet de son aimantation, une substance magnétique subit une variation de certaines de ses distances caractéristiques, telles que les distances interatomiques. C'est l'effet magnétostrictif, ou magnétoélastique direct. Le comportement dual, c'est-à-dire la variation de l'aimantation d'un matériau magnétique lorsque celui-ci est soumis à une contrainte externe, c'est-à-dire à une variation imposée de ses dimensions, est désigné par effet magnétoélastique inverse.

Nous présentons ici les fondements théoriques qui permettent d'établir les lois régissant ce couplage entre contraintes mécaniques et variation d'aimantation, dans le cadre des matériaux magnétiques cristallins.

L'approche classique présentée ci-après est une approche basée sur un bilan énergétique. Le lecteur trouvera dans [HERPIN_1968], dont nous nous sommes largement inspirés, un exposé très clair, et d'une grande rigueur mathématique de cette approche traditionnelle.

A. Quelques rappels de cristallographie

I. Réseaux périodiques d'atomes

Un cristal idéal ou *monocristal* se définit par une répétition régulière dans l'espace d'unités structurales identiques, appelées bases [KITTEL_2005]. Dans le cas de cristaux simples tels que le cuivre, les unités structurales sont composées d'un seul atome. Toutefois, elles peuvent être composées de plusieurs atomes ou molécules. Toutes les bases sont identiques entre elles : même composition, même orientation, et même position des atomes.

La structure d'un cristal est décrite par un réseau spatial périodique. En associant à chaque nœud de ce réseau abstrait une base, on obtient la structure cristalline (figure 2).

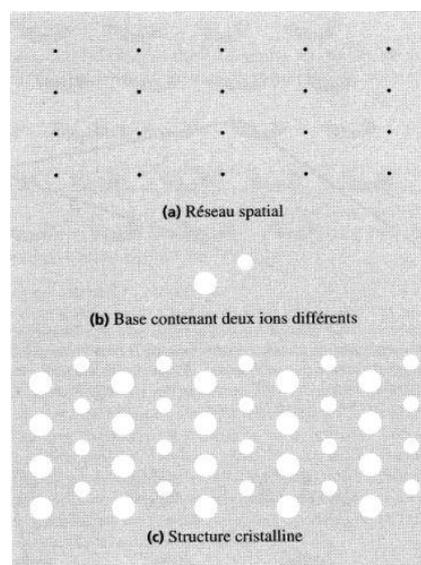


figure 2. La structure cristalline (c) est formée de l'addition de la base (b) à chaque nœud (a) du réseau (d'après Kittel_2005).

Soient deux points R et R' du réseau, on appelle *axes de translation* ou de *transmission* un triplé de vecteurs (\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3) permettant de passer de R à R' par une combinaison linéaire entière :

$$\forall (R, R'), \exists (u_i) \in \mathbb{N}^3 / R' = R + \sum_i u_i \mathbf{e}_i \quad (1)$$

Les 3 axes de translation vérifiant (1) pour tout couple (R, R') sont appelés *axes primitifs du réseau* (\mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3). De plus, (1) étant vérifiée pour tout couple de nœuds, le parallélépipède décrit par (\mathbf{a}_1 ,

$\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$) est nécessairement de volume minimal, et définit une *maille primitive ou élémentaire*. Cette dernière permet de reconstruire tout le réseau en lui appliquant des translations de base ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$). Une maille primitive ne contient qu'un seul nœud. Chacun des 8 sommets du parallélépipède de la figure 3b appartient à 8 mailles distinctes. Elle n'est pas unique. Ainsi, les parallélogrammes 1,2 et 3 de la figure 3a peuvent être choisis comme maille élémentaire.

La maille conventionnelle est une maille dont les axes sont parallèles aux directions de symétrie du réseau mais qui ne permet pas de décrire tout le cristal. La maille conventionnelle n'est donc pas nécessairement une maille primitive: on ne peut définir le vecteur \mathbf{T} de la figure 3a par une combinaison linéaire entière de \mathbf{a}'''_1 et \mathbf{a}'''_2 . Il n'est donc pas possible de reconstituer la structure cristalline à l'aide de ce choix de vecteurs de translation. Toutefois, les 3 autres paires ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$), ($\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$), ($\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2$) de cette même figure peuvent être choisies comme paire de vecteurs primitifs du réseau.

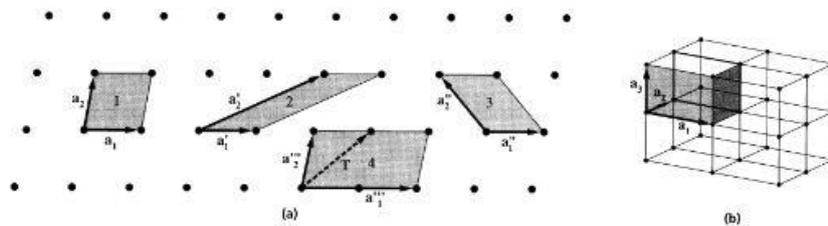


figure 3. (a) Réseau cristallin à deux dimensions. Les 3 paires de vecteurs (1,2,3) peuvent être définis comme vecteurs élémentaires et définissent ainsi 3 mailles élémentaires. Les vecteurs définissant le parallélogramme 4 ne peuvent être pris pour vecteurs élémentaires. (b) une maille élémentaire pour un réseau à 3 dimensions (d'après Kittel_2005).

Dans l'espace à 3 dimensions, il existe 14 réseaux différents, recouvrant 7 types de mailles distinctes. Dans le système cubique, on trouve 3 réseaux : cubique simple (cs), cubique centré (cc), et cubique à faces centrées (cfc). La figure 4 est la représentation de ces 3 réseaux.

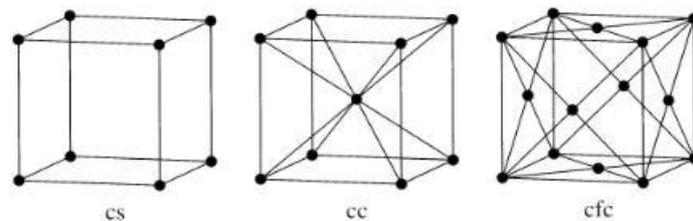


figure 4. Le système cubique admet 3 réseaux possibles : cubique simple (cs), cubique centré (cc), et cubique à faces centrées (cfc). Seule la maille du réseau (cs) est élémentaire. Pour les deux autres types de réseaux, il est possible d'exhiber une maille de taille inférieure permettant de reconstruire le réseau cristallin par des translations.

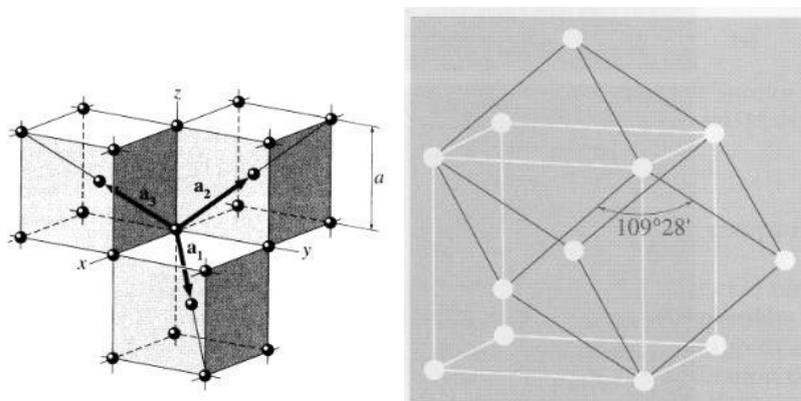


figure 5. Gauche: vecteurs de translation fondamentaux pour un réseau cc. Ces vecteurs relient un sommet aux centres des cubes adjacents. Droite : une maille élémentaire pour le réseau cc. C'est un rhomboèdre.

II. Coordonnées d'un point dans un cristal

Pour repérer un point dans le repère de la maille, on introduit des *axes cristallins*. Ceux-ci peuvent être les vecteurs primitifs, mais il arrive que des vecteurs de translation non primitifs soient utilisés lorsqu'ils sont plus simples. C'est le cas avec le fer, de structure cubique centrée (figure 5) pour lequel on utilisera par la suite les axes (x,y,z) cartésiens comme axes cristallins. Ce sont les axes quaternaires du cristal quand celui-ci n'est pas déformé: la maille élémentaire est invariante pour toute rotation de $2\pi/4$ autour d'un de ces 3 axes. On les note $[100]$, $[010]$, et $[001]$.

Les 3 axes ternaires sont les axes autour desquels la maille élémentaire est invariante par rotation de $2\pi/3$. Il s'agit donc, en utilisant les notations précédentes, des axes $[111]$ et similaires. On définit également des plans caractéristiques du réseau (figure 6).

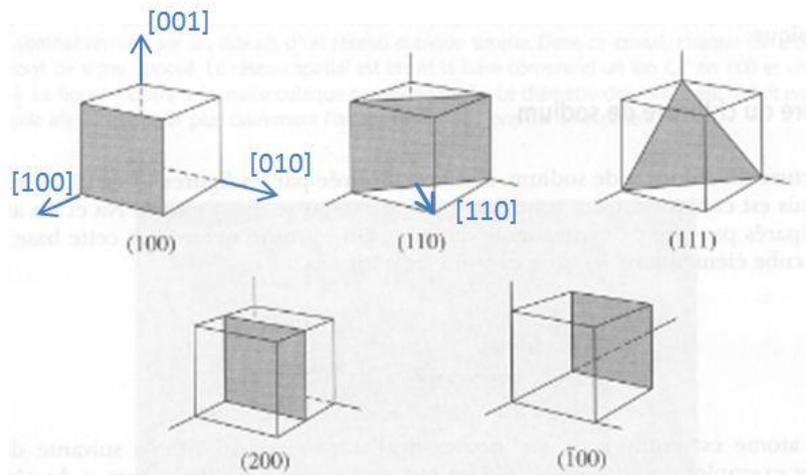


figure 6. Quelques plans remarquables dans un cristal cubique simple (cs). La plan (200) signifie le plan de coordonnées $x=1/2$: on prend l'inverse des coordonnées lorsqu'elles sont des fractions. Le signe '-' apposé au-dessus d'un indice d'axe désigne son opposé.

III. Monocristal et polycristal

Un monocristal est une structure cristalline idéale. Elle est constituée de mailles élémentaires possédant toutes les mêmes axes cristallins. Il est donc orienté, et la connaissance d'une maille élémentaire, ainsi que celle des axes primitifs ou cristallins permet de déduire la structure cristalline globale. Un monocristal s'obtient essentiellement en laboratoire, et requiert des processus de croissance par épitaxie.

Un polycristal est un empilement de mailles élémentaires dont les directions d'empilement sont différentes. A l'état naturel, on trouve des polycristaux et non des monocristaux.

Aussi, pour un monocristal, le passage de l'échelle microscopique (celui de la maille) à l'échelle macroscopique (taille d'un échantillon) se fait naturellement. On pourra donc définir l'orientation du moment magnétique \mathbf{m} dans un monocristal en utilisant la base cristalline, commune à toutes les mailles du domaine magnétique qui renferme \mathbf{m} .

Le passage des lois physiques établies pour un monocristal vers un polycristal est délicat et nécessite un traitement statistique pour définir des grandeurs moyennes représentatives. En effet, l'orientation des mailles varie dans le polycristal. De plus, les nombreux défauts de structure et les impuretés qu'on rencontre dans un polycristal complexifient davantage le changement d'échelle.

B. La magnétostriction : approche cristalline

I. Introduction

Joule découvrit en 1844 que la longueur d'un barreau de fer variait avec son aimantation. De plus, la variation de section mesurée était telle que le volume du barreau restait inchangé (transformation isochoire) [JOULE_1844]. Ce phénomène est la magnétostriction de Joule, ou magnétostriction spontanée.

Le traitement théorique de ce phénomène est basé sur une approche phénoménologique. En effet, l'origine de la déformation spontanée du réseau cristallin est encore mal comprise.

L'approche classique se fait à l'échelle atomique. Elle consiste, dans un premier temps, à exprimer l'énergie d'anisotropie magnétocristalline, responsable de l'alignement selon des directions préférentielles des moments magnétiques dans un monocristal aimanté, en fonction de l'angle que fait l'aimantation avec les axes de symétrie du cristal. Cette énergie exprime donc le couplage anisotrope qui existe entre des atomes magnétiques.

On inclut ensuite dans le terme d'énergie d'anisotropie l'effet des déformations mesurées. En effet, si l'énergie d'interaction entre deux atomes dépend de la direction de leur moment magnétique, la distance à l'équilibre entre ces atomes en dépend aussi. On introduit alors un terme de couplage dans l'expression de l'énergie d'anisotropie, qui lie l'angle que fait l'aimantation dans un domaine magnétique par rapport aux axes cristallins, avec les déformations mesurées : c'est l'énergie magnétoélastique.

De plus, ces déformations génèrent une variation de l'énergie mécanique élastique, propre à tout matériau déformé par des contraintes mécaniques.

La minimisation de l'énergie libre F du monocristal par rapport aux déformations conduit à l'expression de celles-ci à l'équilibre, c'est à dire à l'expression de la magnétostriction pour un monocristal aimanté.

II. Bilan énergétique

L'approche la plus générale pour la détermination des états d'équilibre magnétique d'un système consiste à minimiser l'énergie libre totale du système [TREMOLLET_2000]. C'est l'objet de cette partie.

1. L'énergie d'anisotropie magnétocristalline

Dans un cristal magnétique, les moments magnétiques s'alignent préférentiellement selon certaines directions cristallographiques, qui sont nécessairement des axes de symétrie du réseau. Ainsi, pour un monocristal ou un polycristal, à l'état désaimanté, au sein de chaque maille élémentaire, le moment magnétique est selon un des axes dits *de facile aimantation*. Au niveau de l'échantillon, chaque direction étant équiprobable, l'aimantation globale est nulle (figure 7).

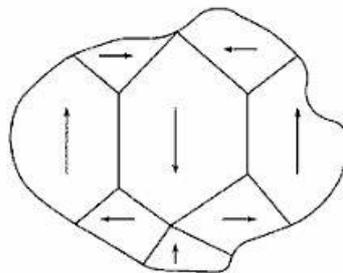


figure 7. Dans un monocristal de fer à l'état désaimanté, les moments magnétiques sont selon l'un des 3 axes quaternaires. Le monocristal est divisé en 6 parts égales de domaines magnétiques. Ces 6 types de domaines correspondent aux 6 orientations possibles des moments magnétiques. L'aimantation globale est nulle.

Lorsqu'un échantillon est aimanté, l'orientation des moments magnétiques dans chaque domaine tend à s'aligner avec celle du champ inducteur, s'écartant ainsi des axes de facile aimantation des mailles. Cette anisotropie résultante de l'écart entre la direction de facile

aimantation et celle du moment magnétique génère un accroissement d'énergie interne globale, et en particulier de la densité d'énergie d'anisotrope magnétocristalline E_{AN} : l'aimantation peut s'approcher d'un axe de difficile aimantation, et augmente l'énergie du système, qui s'écarte de la position d'équilibre que représente l'état désaimanté.

2. Expression de l'énergie d'anisotropie pour un cristal cubique

Dans le cas d'un cristal de symétrie cubique, tel que le fer, on utilise les axes quaternaires [100], [010] et [001] comme axes cristallins. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les cosinus directeurs du moment magnétique $\mathbf{m}(m_1, m_2, m_3)$ avec les axes quaternaires. Ainsi, $\alpha_i = m_i / |\mathbf{m}|$, et $\sum \alpha_i^2 = 1$.

On montre que la densité d'énergie d'anisotropie s'écrit comme un polynôme de puissances croissantes paires (compte tenu de la symétrie) des cosinus directeurs α_i de la direction du moment élémentaire avec les axes cristallins [HERPIN_1968]. E_{AN} fait intervenir des constantes intrinsèques au matériau, les constantes d'anisotropie K_j . On note alors :

$$E_{AN} = f(\alpha_i, K_j) \quad (2)$$

En se limitant au sixième degré pour l'expression polynomiale de E_{AN} , le calcul aboutit à :

$$E_{AN} = K_0 + K_1(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2) + K_2(\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2) \quad (3)$$

L'énergie étant définie à une constante près $K_0 \geq 0$.

a. Cas où K_2 est négligeable devant K_1

Dans ce cas, l'expression de l'énergie d'anisotropie E_{AN} vaut :

$$E_{AN} = K_0 + K_1(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2) \quad (4)$$

Si $K_1 > 0$, la minimisation de E_{AN} impose qu'il existe (i, j) tels que $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0$. Par exemple $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0$. Alors, nécessairement $\alpha_3 = 1$: le moment magnétique, à l'état désaimanté, est selon un axe quaternaire : $\pm \mathbf{x}$, $\pm \mathbf{y}$ ou $\pm \mathbf{z}$.

Si $K_1 < 0$, la minimisation de E_{AN} conduit à $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1/3$: le moment magnétique est orienté selon un axe ternaire [111].

La figure 8 est une représentation polaire de la variation de E_{AN} avec la direction de l'aimantation.

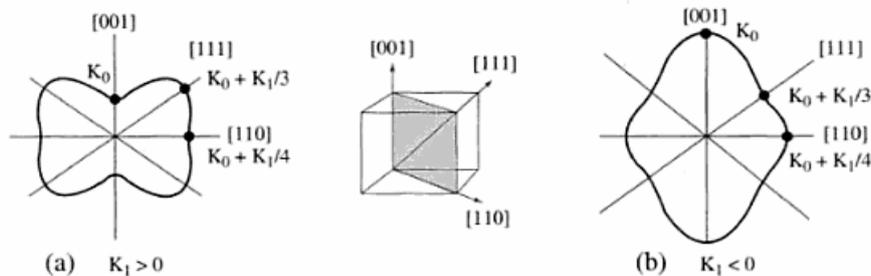


figure 8. Représentation polaire de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline E_{AN} , d'après [TREMOLLET_2000]

a) pour $K_1 > 0$, les axes de facile aimantation sont les axes quaternaires [100], [010] et [001] et leur opposé

b) pour $K_1 < 0$, les axes ternaires [111] sont de facile aimantation.

b. Cas général : K_1 et K_2 non négligeables

Dans le cas général, la valeur de E_{AN} dépend du rapport K_1/K_2 . Le tableau 1 résume les différentes configurations possibles.

$K_1 > 0$	K_2/K_1	K_2/K_1		
		$-\infty$	-9	$-\frac{9}{4}$ $+\infty$
Facile aimantation		[111]	[100]	[100]
Moyenne aimantation		[100]	[111]	[110]
Difficile aimantation		[110]	[110]	[111]
$K_1 < 0$	$K_2/ K_1 $	$K_2/ K_1 $		
		$-\infty$	$\frac{9}{4}$	9 $+\infty$
Facile aimantation		[111]	[110]	[110]
Moyenne aimantation		[110]	[111]	[100]
Difficile aimantation		[100]	[100]	[111]

Tableau 1. Valeurs des axes de facile, moyenne et difficile aimantation en fonction des constantes d'anisotropie K_1 et K_2 , d'après [HERPIN_1968]

Ainsi, pour le fer, $K_1 \approx 42.7 \text{ kJ/m}^3$ et $K_2 \approx 15 \text{ kJ/m}^3$: les axes quaternaires sont axes de facile aimantation, les axes ternaires sont de difficile aimantation. Pour le nickel, dont les constantes d'anisotropie sont faibles et fortement variables avec la température, les valeurs moyennes obtenues à température ambiante sont $K_1 \approx -3.4 \text{ kJ/m}^3$ et $K_2 \approx 5.3 \text{ kJ/m}^3$: les axes ternaires sont de facile aimantation, les axes quaternaires sont de difficile aimantation. La figure 9 est une représentation tridimensionnelle de cette densité d'énergie, en fonction des α_i , pour ces 2 matériaux. La figure 10 donne les courbes d'aimantation des cristaux de fer et de nickel en fonction de la direction du champ inducteur appliqué B_a .

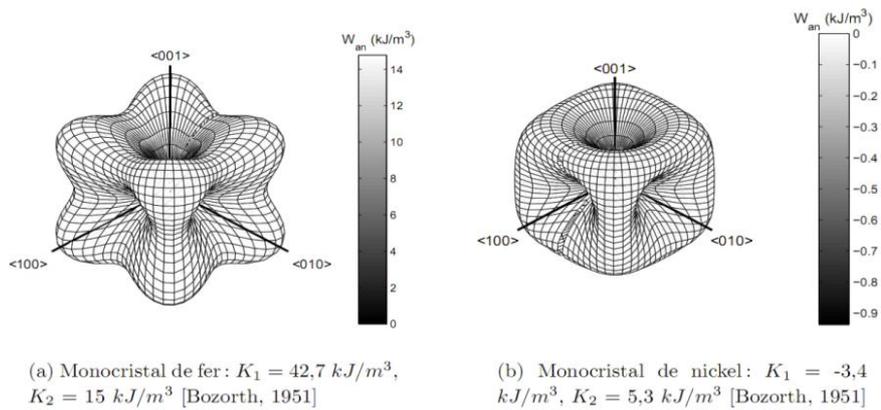


figure 9. Densité d'énergie d'anisotropie cristalline pour le fer et le nickel, en fonction de la direction de l'aimantation. Pour le fer, les axes de facile aimantation sont les axes quaternaires [100], [010] et [001] et leur opposé. Pour le nickel, ce sont les axes ternaires (noter que $W_{AN} < 0$ pour le nickel).

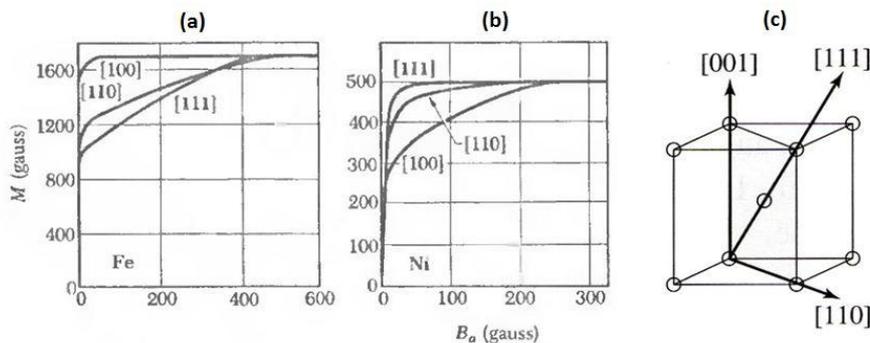


figure 10. Courbes d'aimantation pour des monocristaux de fer (a) et de nickel (b). Pour le fer, les axes quaternaires [100] sont de facile aimantation, les axes ternaires [111] de difficile aimantation.

3. Effets de la magnétostriction

a. Les effets magnétostrictifs subis par un cristal ont deux origines

La première est qualifiée de magnétostriction isotrope: tout cristal, dès lors qu'il est magnétique, subit une dilatation élastique isotrope de forme. Cet effet est présent même sur un échantillon désaimanté. En effet, dans ce cas, l'énergie d'anisotropie impose que les moments magnétiques des atomes soient alignés avec des axes de facile aimantation du monocristal. Il s'ensuit une variation de volume de la maille élémentaire, liée au gradient de l'aimantation, et caractérisée par un coefficient de magnétostriction en volume $\lambda_0 = \delta V/V$. Ce coefficient est négligeable en regard des coefficients de magnétostriction forcés, et cet effet est par conséquent négligé dans les calculs qui suivent.

La seconde forme de magnétostriction est observée lorsque l'échantillon est, cette fois-ci, aimanté. C'est la magnétostriction forcée de Joule. Elle est anisotrope et isochore. Sous l'effet d'un champ inducteur \mathbf{H} , il apparaît alors une déformation de la maille dépendant de la direction du champ appliqué. On mesure cette déformation *selon* une direction donnée \mathbf{y} par rapport au référentiel non déformé, définie par ses cosinus directeurs γ_i . Anisotrope et isochore, la déformation relative selon la direction \mathbf{y} est donnée par $\lambda = dl/l$, où l est la longueur mesurée selon la direction \mathbf{y} lorsque l'échantillon n'est pas déformé, et dl la variation de longueur relevée selon \mathbf{y} . λ se calcule à l'aide du tenseur des déformations (ϵ_{ij}). On rappelle (figure 11) la signification des termes ϵ_{ij} du tenseur de déformations.

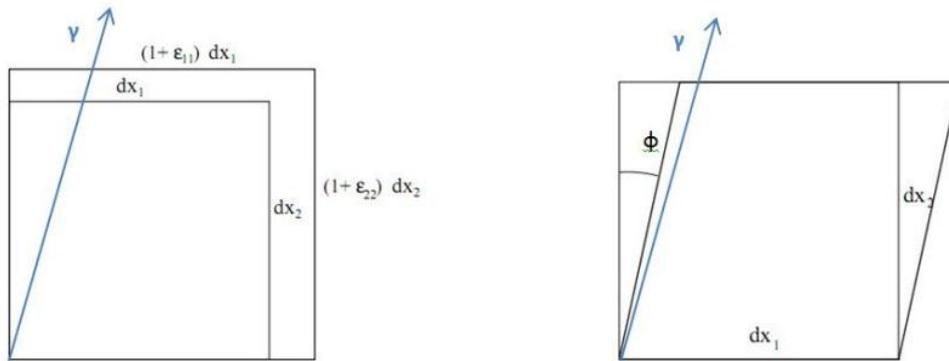


figure 11. Cas d'une déformation plane. Avant déformation, le carré a pour dimensions (dx_1, dx_2). Après déformation, ses dimensions sont (dx_1', dx_2'). Ce dernier a subi un allongement relatif $\epsilon_{ii} = (dx_i' - dx_i)/dx_i$. Les termes non diagonaux ($i \neq j$) représentent la déformation angulaire: $\epsilon_{ij} = \phi/2$. Ce tenseur est symétrique.

Le tenseur ϵ_{ij} permet de calculer la déformation, selon n'importe quelle direction \mathbf{y} , mesurée en un point du milieu :

$$\lambda = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} \gamma_i \gamma_j \quad (5)$$

b. Le couplage magnétoélastique

L'expression de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline (3) est valable pour un cristal *non déformé*. Lorsque des déformations ont lieu (spontanées par magnétostriction de Joule, ou imposées par une contrainte mécanique extérieure), des variations d'énergie libre apparaissent.

Au niveau microscopique, les distances interatomiques varient nécessairement au sein d'une maille du cristal. Un nouvel état d'équilibre s'établit donc. Le nouvel équilibre est déterminé par la minimisation de l'énergie d'anisotropie magnétique. Or, si entre deux atomes, celle-ci dépend de la direction α de leur moment magnétique, la distance interatomique à l'équilibre doit aussi être prise en compte. Par conséquent, il convient d'introduire, via un couplage magnétoélastique, un terme exprimant l'effet des déformations ϵ_{ij} sur l'énergie d'anisotropie donnée par (3).

La variation de la distance interatomique est donnée par (5). Il est alors possible d'exprimer la variation, due à la déformation, de l'angle θ que fait l'aimantation avec l'axe reliant deux atomes proches. Elle s'exprime en fonction de α , des déformations ε_{ij} , et de constantes dites de *couplage magnétoélastique* B_i .

Pour un cristal de symétrie cubique, on montre que l'énergie magnétoélastique E_{MEL} à ajouter au terme d'énergie d'anisotropie E_{AN} s'écrit :

$$E_{MEL} = B_1(\alpha_1^2 \varepsilon_{xx} + \alpha_2^2 \varepsilon_{yy} + \alpha_3^2 \varepsilon_{zz}) + B_2(\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon_{xy} + \alpha_1 \alpha_3 \varepsilon_{xz} + \alpha_2 \alpha_3 \varepsilon_{yz}) \quad (6)$$

E_{MEL} décrit les interactions entre l'énergie d'anisotropie (via les constantes B_i), et l'énergie élastique mécanique (via les déformations ε_{ij}).

c. *Energie mécanique élastique*

Les déformations ε_{ij} induisent une densité d'énergie mécanique élastique E_{EL} dans le matériau, caractéristique de toute déformation élastique subie par un milieu déformable. Cette énergie s'exprime à l'aide du tenseur symétrique des déformations ε et du tenseur d'élasticité \mathbb{C} . La loi de Hooke traduit une relation linéaire entre le tenseur des déformations ε_{ij} dues à la contrainte et le tenseur des contraintes σ_{ij} , via le tenseur d'élasticité \mathbb{C}_{ijkl} :

$$E_{EL} = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon \quad (7)$$

Pour un cristal de symétrie cubique, les symétries du cristal simplifient l'expression du tenseur \mathbb{C} qui est alors défini par 3 valeurs C_{11} , C_{12} et C_{44} . Le calcul donne alors :

$$E_{EL} = \frac{1}{2} \left(C_{11} \sum_i \varepsilon_{ii}^2 + \frac{1}{2} C_{44} \sum_{i \neq j} \varepsilon_{ij}^2 + C_{12} \sum_{i \neq j} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \right) \quad (8)$$

4. *Expression de la magnétostriction à l'équilibre*

La détermination des déformations ε_{ij} selon une direction \mathbf{y} s'obtient alors en minimisant l'énergie libre F , somme des 3 contributions énergétiques $E_{AN} + E_{MEL} + E_{EL}$. On est alors en mesure d'exprimer la déformation λ , selon une direction donnée en fonction des coefficients d'élasticité C , des coefficients de couplage magnétoélastique B_i , et des cosinus directeurs α_i de l'aimantation.

$$Equilibre \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \quad \forall (i, j) \quad (9)$$

La solution de ce problème donne les valeurs des ε_{ij} en fonction des constantes B_1 , B_2 , C_{ij} , et de la direction d'aimantation α :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{-B_1 \alpha_i^2}{C_{11} - C_{12}} \quad \text{pour } i = j \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{B_2 \alpha_1 \alpha_2}{2C_{44}} \quad \text{pour } i \neq j \quad (11)$$

En utilisant ces valeurs dans (5), on obtient :

$$\lambda = \frac{dl}{l} = f(B_1, B_2, C_{11}, C_{12}, C_{44}, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \quad (12)$$

Pour un cristal de symétrie cubique :

$$\lambda = \frac{dl}{l} = \frac{-B_1}{C_{11} - C_{12}} \left(\alpha_1^2 \gamma_1^2 + \alpha_2^2 \gamma_2^2 + \alpha_3^2 \gamma_3^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{B_2}{C_{44}} (\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_1 \alpha_3 \gamma_1 \gamma_3 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3) \quad (13)$$

Il est d'usage d'exprimer cette déformation avec les coefficients à saturation magnétique λ_{100} et λ_{111} . Ces derniers s'expriment en fonction des constantes B et C. Ils correspondent aux déformations maximales mesurées, dans la direction \mathbf{v} , sur un monocristal, selon les axes [100] (resp. [111]), lorsque l'aimantation est amenée à saturation selon [100] (resp. [111]).

Ainsi, pour un barreau monocristallin d'axe longitudinal $\mathbf{Z}=[100]$, la déformation longitudinale ($\mathbf{v}=\mathbf{Z}$) lorsque le barreau est amené à saturation magnétique selon [100] ($\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{v}$) est calculée par (13) avec $\alpha_2=\alpha_3=\gamma_2=\gamma_3=0$, et $(\alpha_1\gamma_1)^2=1$:

$$\left(\frac{dl}{l} \right)_{100} = \lambda_{100} = \frac{-2}{3} \frac{B_1}{C_{11} - C_{12}} \quad (14)$$

Pour ce même barreau, la déformation mesurée selon une direction $\mathbf{v}=[111]$, lorsque le barreau est amené à saturation magnétique selon [111] est calculée par (13) avec $\alpha_i=\gamma_i=1/\sqrt{3}$:

$$\left(\frac{dl}{l} \right)_{111} = \lambda_{111} = \frac{-B_2}{3C_{44}} \quad (15)$$

On peut alors réécrire (13) :

$$\lambda = \frac{dl}{l} = \frac{3}{2} \lambda_{100} \left(\alpha_1^2 \gamma_1^2 + \alpha_2^2 \gamma_2^2 + \alpha_3^2 \gamma_3^2 - \frac{1}{3} \right) + 3 \lambda_{111} (\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_1 \alpha_3 \gamma_1 \gamma_3 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3) \quad (16)$$

Selon le signe des coefficients, l'échantillon se dilate ($\lambda>0$) ou se rétrécit ($\lambda<0$).

Dans le cas du fer, $\lambda_{100}=2.10^{-5}$ et $\lambda_{111}=-2.10^{-5}$. C'est cette différence de signe qui explique l'effet Villari. Les axes de facile aimantation sont les axes quaternaires. A l'état désaimanté, l'aimantation est donc selon un axe quaternaire : deux des trois termes α_i sont nuls, et d'après (16), λ ne dépend que de $\lambda_{100}>0$: allongement positif.

En augmentant le champ, l'aimantation va devoir quitter l'axe facile quaternaire pour s'aligner avec le champ inducteur. Donc, elle va se rapprocher d'une axe ternaire : par conséquent, le second terme de (16) n'est plus nul, et la constante $\lambda_{111}<0$ entre en jeu, et peut conduire à $\lambda<0$ avec le champ qui croît.

On appelle $\lambda_{//}$ la déformation mesurée selon toute direction parallèle à l'aimantation à saturation ($\boldsymbol{\alpha}=\pm\mathbf{v}$), et λ_{\perp} la déformation mesurée selon toute direction qui lui est perpendiculaire ($\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}=0$). La déformation étant isochore :

$$\lambda_{//} + 2 \lambda_{\perp} = 0 \quad (17)$$

La relation (17) traduit l'observation de Joule sur la conservation du volume de l'échantillon.

Si l'échantillon est *isotrope d'un point de vue magnétostrictif*, la déformation est indépendante de la direction de mesure⁵. A saturation magnétique, pour une direction de mesure parallèle au champ :

$$\lambda_{//} = -2 \lambda_{\perp} = \lambda_s \quad (18)$$

5. Application à des cas simples

La formule (16) exprime l'allongement relatif λ mesuré selon une direction \mathbf{v} , pour un monocristal de symétrie cubique, dont l'aimantation est dirigée selon $\mathbf{\alpha}$.

Si l'aimantation est selon [100], $\alpha^2_1=1$, et l'allongement selon cette direction est, d'après (16) :

$$\lambda_{//} = \lambda_{100} \quad (19)$$

La magnétostriction mesurée selon une direction orthogonale ($v_1=0$) s'écrit

$$\lambda_{\perp} = -\frac{1}{2} \lambda_{100} \quad (20)$$

Supposons maintenant que l'aimantation soit selon une direction ternaire [111]. Alors, $\alpha^2_i=1/3$. La magnétostriction $\lambda_{//}$ est alors donnée par (16) en prenant $\alpha^2_i = v^2_i$:

$$\lambda_{//} = \lambda_{111} \quad (21)$$

La magnétostriction mesurée selon une direction \mathbf{v} perpendiculaire à [111], lorsque l'aimantation est amenée à saturation dans cette direction (donc $\mathbf{\alpha} // \mathbf{v}$), s'obtient de la même manière en prenant cette fois-ci $\sum \alpha_i v_i = 0$ (puisque $\mathbf{v} \perp \mathbf{\alpha}$) dans (16) :

$$\lambda_{\perp} = -\frac{1}{2} \lambda_{111} \quad (22)$$

⁵ C'est à dire que le résultat de (16) dépend plus de l'orientation du cristal par rapport à un repère de référence : $\lambda=3/2 \cdot \lambda_s (\cos^2 \Psi - 1/3)$, avec Ψ l'angle entre l'aimantation et la direction d'observation.

III. L'effet Villari ou le couplage magnétoélastique inverse

1. Méthode de calcul

Lorsqu'un matériau ferromagnétique est soumis à des contraintes mécaniques, on constate une variation de son aimantation. Cet effet a été mis en évidence par Villari [VILLARI_1865]. On le qualifie parfois de magnétostriction inverse.

Soit α la direction de l'aimantation dans le monocristal, soumis à des contraintes élastiques σ_{ij} . La contrainte appliquée dans la direction β s'écrit:

$$\sigma_{ij} = \sigma \beta_i \beta_j \quad (23)$$

De plus, la loi de Hooke relie de manière linéaire la contrainte et les déformations ε^σ résultant de la contrainte :

$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon^\sigma \quad (24)$$

Alors, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\sigma + \varepsilon_{ij}^\lambda$, où les ε_{ij}^λ sont les déformations liées à la magnétostriction libre, et dont les expressions sont données par (10) et (11). On est alors en mesure d'exprimer la densité d'énergie libre $F = E_{AN} + E_{MAL} + E_{EL}$ en fonction de la contrainte.

Le calcul de la partie E de F dépendant de la direction de l'aimantation, et de l'angle que font les contraintes avec cette dernière vaut alors, après calcul :

$$E = K_1(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2) + K_2(\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2) - \frac{3}{2} \lambda_{100}(\sigma_{11} \alpha_1^2 + \sigma_{22} \alpha_2^2 + \sigma_{33} \alpha_3^2) - 3 \lambda_{111}(\sigma_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \sigma_{13} \alpha_1 \alpha_3 + \sigma_{23} \alpha_2 \alpha_3) \quad (25)$$

Théoriquement, il est donc possible de déduire les valeurs de α correspondant à des minimums d'énergie de E. Or, on constate que (25) dépend de manière complexe des valeurs de K_1 , K_2 , λ_{100} , λ_{111} et σ : cette approche n'est aisée que pour des cas particuliers dont on donne des exemples ci-après.

2. Application à un matériau magnétostrictif isotrope

Pour un matériau isotrope du point de vue magnétostrictif, l'allongement mesuré est indépendant de la direction de la mesure : $\lambda_{100} = \lambda_{111} = \lambda_s$. On distingue alors les cas suivants :

- Si les constantes K_1 et K_2 sont petites, on peut négliger l'énergie d'anisotropie, et l'orientation de l'aimantation est fixée par l'énergie magnétoélastique seule, qui ne dépend plus que du terme λ_s . On dit alors que c'est la contrainte qui détermine l'axe de facile aimantation, et (25) peut se réécrire, en notant ψ l'angle entre l'aimantation et la direction de la contrainte :

$$E \sim Em = \frac{3}{2} \lambda_s \sigma \cdot \sin^2 \psi + Cte \quad (26)$$

- Si $\lambda_s > 0$, soumise à un champ magnétique, on mesure un allongement positif selon la direction d'application du champ, c'est-à-dire selon laquelle s'orientent les moments magnétiques.

Si l'on soumet l'échantillon à un effort de traction ($\sigma > 0$), la minimisation de E conduit à $\psi = 0$: l'aimantation s'aligne avec la contrainte.

Si l'on soumet maintenant l'échantillon à une compression ($\sigma < 0$), la minimisation de E conduit à $|\psi| = \pi/2$: la contrainte s'opposera à un alignement des moments magnétiques dans sa direction, et favorisera leur migration dans un plan perpendiculaire à la contrainte.

- Si $\lambda_s < 0$, une compression ($\sigma < 0$) favorisera également une direction d'aimantation parallèle à la direction de la contrainte, tandis qu'une traction ($\sigma > 0$) favorisera une direction d'aimantation perpendiculaire à la direction de la contrainte. Ainsi, en augmentant la valeur de la contrainte de traction, on fait progressivement tourner le moment magnétique dans ce plan perpendiculaire, ce qui conduit à une dégradation du comportement magnétique du matériau. C'est par exemple le cas du verre métallique, à magnétostriction négative, dont la courbe d'aimantation est représentée figure 12.

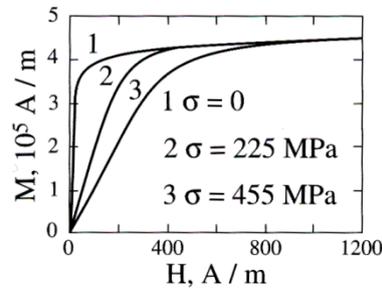


figure 12. Courbe d'aimantation sous traction d'un verre métallique à magnétostriction négative [TREMOLLET_2000]

- Dans le cas où ce sont les constantes d'anisotropies qui gouvernent (25), l'approximation consiste à dire que l'aimantation est déterminée par l'énergie d'anisotropie, la faible variation de l'énergie magnétoélastique ne pouvant changer un état représentant un minima d'énergie magnétocristalline.

3. Application à un matériau magnétostrictif anisotrope

Dans le cas du fer, les 2 constantes $\lambda_{100} > 0$ et $\lambda_{111} < 0$ sont de signes opposés. Le comportement magnétique sous contrainte n'est pas monotone. Selon le niveau de contrainte appliqué, le coefficient de magnétostriction change de signe : au-delà d'un niveau de contrainte appliqué, l'aimantation du matériau décroît (figure 13).

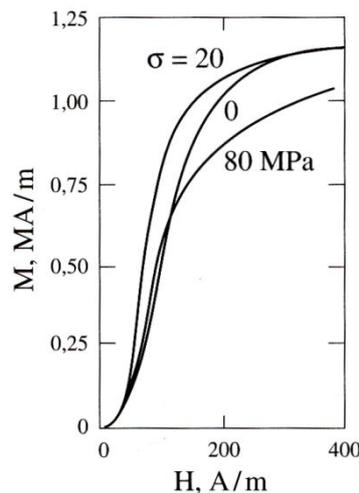


figure 13. Courbes de première aimantation d'un échantillon de fer, sous différents niveaux de traction. La contrainte σ est donnée en MPa (1MPa=10 bar). Sous 200 A/m, une contrainte de traction de 20MPa augmente l'aimantation, tandis qu'une contrainte de 80MPa la diminue. Au-delà de 300 A/m, une contrainte de traction, quelle que soit sa valeur, diminue toujours l'aimantation [TREMOLLET_2000].

C. Inconvénients de l'approche cristalline

Les relations exprimées précédemment sont vérifiées expérimentalement au niveau monocristallin, et ne s'expriment qu'en fonction de l'angle que fait l'aimantation avec les axes de symétrie du cristal. S'il est possible d'évaluer cet angle en fonction du degré d'aimantation du matériau, à l'aide d'hypothèses simplificatrices [HERPIN_1968], la véritable difficulté réside dans la transition d'échelle. Le passage d'une maille élémentaire à un échantillon polycristallin, c'est-à-dire à un matériau texturé, nécessiterait la connaissance de la distribution d'orientation des différentes mailles cristallines, ainsi que celle des énergies contenues au niveau des interfaces entre mailles.

Une modélisation théorique de ces effets a été effectuée [BUIRON_2001] mais leur application reste délicate dans le cadre de notre prototype. En effet, la mise en œuvre de cette approche multi-échelle requiert :

- la connaissance des constantes de magnétostriction λ et d'anisotropie K du matériau
- la caractérisation de la texture du polycristal
- enfin, Il s'agit d'un modèle de comportement local, à implanter dans un code de calcul de structure qui prendra en compte les effets de structure et la non homogénéité du champ. Mais le modèle de Buiron est complexe et coûteux en calcul pour être effectivement utilisé dans un calcul complet de structure, il n'est donc pas adapté à notre problématique.

Le premier point nécessite une caractérisation à l'échelle microscopique du matériau. Celle-ci est extrêmement délicate, et elle est généralement réalisée sous des champs très forts et des contraintes faibles. Dans notre cas, il aurait été nécessaire de caractériser le matériau sous des champs magnétiques faibles, et des contraintes fortes. Ceci aurait nécessité la réalisation d'une éprouvette de traction ou de compression, dont nous ne disposons pas. En effet, l'alliage d'acier utilisé pour la réalisation du cylindre est employé par la Marine Nationale, et sa diffusion est restreinte.

La caractérisation de la texture du cristal est elle aussi une mesure difficile à réaliser.

Enfin, le troisième point est pénalisant pour notre étude, qui met en œuvre une géométrie à fort champ démagnétisant. Il faudrait donc calculer la matrice de champ démagnétisant pour notre prototype.

Surtout, nous souhaitons favoriser une approche phénoménologique, plus proche des résultats expérimentaux dont nous disposons, nous permettant d'exprimer des relations entre des grandeurs caractéristiques du magnétisme du navire, les aimantations anhystérique et induite. C'est la raison pour laquelle l'approche au niveau de la structure⁶, basée sur la mesure de l'induction magnétique extérieure au matériau a été favorisée dans les travaux présentés ici. Cette approche globale a pour but d'étudier les effets magnétostrictifs à l'échelle macroscopique du prototype, afin de pouvoir établir une loi de variation de l'aimantation en fonction de la contrainte appliquée. La mesure de l'induction magnétique à l'extérieur du matériau a été favorisée, car elle nous donne une image des phénomènes internes liés à la magnétostriction. Cette approche est celle classiquement utilisée au

⁶ Précision sur les différentes échelles :

- échelle microscopique : cristal, grains et domaines
- échelle macroscopique : comportement moyen mesuré (courbe $B(H)$ ou $M(H)$) en configuration homogène. C'est donc le comportement intrinsèque du matériau
- échelle de la structure : échelle du dispositif fabriqué avec le matériau considéré. Les grandeurs macroscopiques ne sont plus uniformes. La prévision du champ dans la structure nécessite de résoudre les équations d'équilibre (Maxwell en électromagnétisme), couplées avec le modèle de comportement macroscopique du matériau.

sein de l'équipe ERT-CMF. De plus, elle répond notamment à l'étude d'une problématique très appliquée en magnétisme du navire : la variation de l'aimantation des coques avec la houle, ou avec la pression en plongée.

Chapitre II - Un modèle global de la magnétoélasticité

L'approche traditionnelle dans l'équipe ERT-CMF est de s'appuyer sur des mesures de l'induction externe \mathbf{B} mesurée par des capteurs positionnés au voisinage de la structure étudiée. L'induction \mathbf{B} est en effet l'image de la distribution de l'aimantation \mathbf{M} au sein du matériau. Ainsi, de nombreuses mesures de variation d'induction extérieure ont été effectuées sur des navires, en particulier des mesures dites en passage, pour lesquelles un bâtiment se déplace sous un cap donné au-dessus de capteurs magnétiques. Ces mesures montrent l'évolution de la signature magnétique (c'est-à-dire la mesure de l'induction extérieure) résultant des deux composantes de l'aimantation : induite et permanente.

Ces deux composantes sont très importantes en magnétisme du navire.

La première est l'induction induite. Elle résulte de l'interaction directe du champ magnétique terrestre sur la coque et les masses magnétiques présentes dans un navire. Son origine est l'aimantation induite qui correspond à des processus réversibles (mouvements réversibles des parois des domaines magnétiques). Elle est déterministe et dépend du cap et du champ magnétique ambiant, dont l'orientation et l'intensité varient aux différents points du globe.

La seconde grandeur fondamentale qui apparaît dans les mesures est l'aimantation permanente. Cette composante de l'aimantation est présente même en champ ambiant nul. Elle dépend de l'histoire du bâtiment. Suite à sa construction et aux chocs liés aux navigations successives, la signature magnétique d'un navire présente une partie permanente. Les mesures montrent que la composante verticale de l'induction mesurée évolue vers celle de son induction anhystérétique. Or celle-ci est un majorant de l'induction. Par conséquent, l'aimantation du bâtiment augmente, ainsi que l'anomalie magnétique qui en est la conséquence mesurable à l'extérieur.

Nous verrons que les travaux de Jiles et Atherton pour la modélisation des effets magnétoélastiques placent, comme les praticiens du magnétisme du navire l'ont expérimenté, l'aimantation anhystérétique au cœur de leur modèle. C'est la raison pour laquelle l'approche globale, en induction extérieure, est celle choisie pour notre étude. Elle nécessitera des mesures d'induction en passage, qui seront réalisées au Laboratoire de Métrologie Magnétique en Champ Faible d'Herbeys (LMMCF).

Nous présentons ici les bases de l'élaboration du modèle de Jiles et Atherton à partir des premiers modèles globaux de la magnétoélasticité, en particulier celui de Brown. Ce dernier tentait de modéliser le comportement magnétique à long terme des navires soumis à des contraintes répétées de faible amplitude, en champ magnétique faible.

Il est remarquable de noter la contribution majeure des différents laboratoires de recherche en magnétisme du navire dans ce domaine : Brown [BROWN_1948] a produit son modèle au sein du centre de recherches navales du Maryland. Les travaux de Lliboutry [LLIBOUTRY_1950], Brugel et Rimet [BRUGEL_1960] ont été effectués au Laboratoire de Magnétisme du Navire de Grenoble. Pitman [PITMAN_1990] travaillait pour le Centre de Recherche de l'Amirauté au Royaume Uni, Schneider [SCHNEIDER_1981] pour le département de physique de l'Académie Navale des Etats-Unis, et Robertson [ROBERTSON_1993] pour le ministère de la défense australien : la connaissance et la modélisation des effets magnétoélastiques est de toute première importance pour les marines du monde dans le cadre de la recherche de discrétion magnétique depuis l'apparition des mines magnétiques, dont le déclenchement est assujéti à une mesure d'anomalie magnétique locale du champ magnétique terrestre. Il est donc capital de prédire les variations d'aimantation engendrées, à long terme, par les contraintes mécaniques.

A. Les modèles globaux antérieurs à Jiles

Par la suite, nous utiliserons la notation usuelle du magnétisme du navire mise en place par Néel, Brugel et Rimet pour définir sans ambiguïté les processus opératoires. Une première majuscule désigne l'application du facteur qu'elle désigne. Une seconde sa suppression. Ainsi, un cycle $H\sigma$ désigne, depuis un état initial désaimanté, une mise en champ inducteur H , suivi d'une mise en contrainte mécanique croissante jusqu'à σ Pa, puis le relâchement de la contrainte mécanique. L'état magnétique initial implicite, sauf mention du contraire, est un état désaimanté réalisé en absence de contraintes.

I. Le modèle de Brown

Le processus modélisé par Brown est appelé cycle HPP par Brugel et Rimet: il consiste donc à désaimanter l'échantillon en contrainte nulle, à le mettre en champ inducteur H , puis à appliquer une contrainte mécanique croissante de valeur P (P en Pa), puis à la relâcher. Le modèle de Brown s'appuie sur des mesures réalisées sur un barreau de fer (polycristal), dont les dimensions permettent de négliger le champ démagnétisant, et pour lequel la contrainte et le champ inducteur sont parallèles.

L'idée originale de Brown [BROWN_1949] fut d'assimiler l'effet d'une contrainte mécanique sur une paroi de domaine magnétique à l'effet d'un champ magnétique. Il est supposé que la contrainte et champ H sont de faibles amplitudes, et colinéaires.

Pour Brown, une contrainte mécanique est sans effet sur des parois magnétiques à 180° .

En effet, nous avons vu que pour une substance à magnétostriction isotrope, l'énergie magnétoélastique dépendait de l'angle ψ entre l'aimantation et la direction de la contrainte.

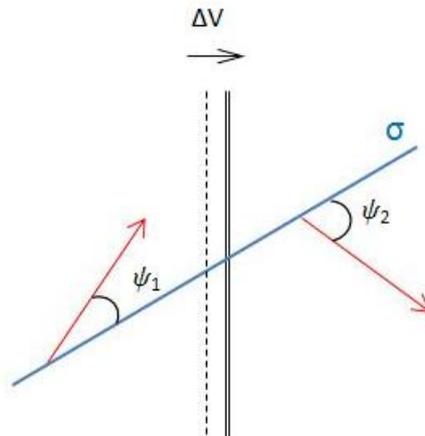


figure 14. Déplacement d'une paroi de domaine magnétique. La paroi, en se déplaçant, balaye un volume ΔV .

Le déplacement d'une paroi engendre une variation d'énergie magnétoélastique ΔE_M par unité de volume ΔV égale à $\Delta E_M = \frac{3}{2} \lambda_S \sigma (\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1)$

Si les angles ψ_1 et ψ_2 sont égaux entre eux, cette variation d'énergie est nulle.

Brown sépare alors en deux catégories de tailles égales les parois à 90° soumises au champ H_0 coaxial à la contrainte. Pour la première, la contrainte provoque un mouvement de parois dans le même sens que celui du champ (parois dites positives). Pour la seconde, le mouvement de la paroi est opposé au sens du champ (parois dites négatives). C'est une hypothèse ayant une conséquence importante sur le modèle : en inversant le signe de la contrainte, on inverse le rôle des 2 types de parois à 90° , qui sont supposées en parts égales. Aussi, le champ équivalent calculé est-il identique, et les comportements prédits par le modèle en traction et en compression sont nécessairement identiques.

De manière à pouvoir appliquer ce modèle à un polycristal, Brown réalise une moyenne spatiale sur ce dernier de manière à estimer la proportion de parois affectées par la contrainte. Il postule ensuite que lorsque le matériau aimanté sous un champ inducteur H est soumis à une contrainte croissante P , la variation de l'aimantation est donnée par 2 termes réversible et irréversible. La partie réversible est directement proportionnelle à la contrainte et au champ. La partie irréversible suit une loi de similaire à la loi de Rayleigh. Enfin, Brown estima que lors du retour vers un état non contraint, l'aimantation ne variait pas. Cette seconde hypothèse sera aussi invalidée par des mesures en contraintes plus importantes.

La variation de l'aimantation dans le modèle de Brown est alors exprimée de la manière suivante pour un cycle HPP :

- i. Mise en champ inducteur H : $M = \chi_0 \cdot H$
- ii. Montée en contrainte jusqu'à P : $\Delta M = \gamma_1 \cdot H \cdot |P| + \gamma_2 P^2$
- iii. Retour à un état non contraint : $\Delta M = 0$

Les variations d'aimantation prédites par ce modèle pour un cycle HPP sont présentées figure 15. Brown valide son modèle pour des champs faibles ($H < 4 \cdot 10^{-4}$ T) et des contraintes faibles (environ 400 bar sont appliqués en traction sur le barreau, soit environ 10 fois moins que pour notre application).

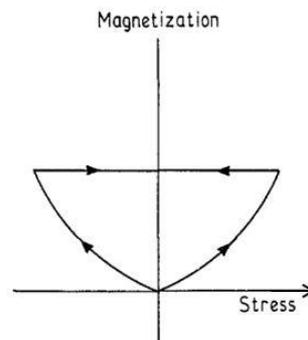


figure 15. Courbe d'aimantation théorique en contrainte d'après Brown.

II. Le modèle de Brown mis en défaut

Les mesures de Brugel et Rimet [BRUGEL_1966], toutes réalisées sur des barreaux d'acier valident assez bien l'approche de Brown, *mais en traction seulement* et pour des contraintes faibles.

Ce point est important. Si de nombreuses séries de mesures furent réalisées depuis celles de Matteucci [MATTEUCCI_1847], Thomson [THOMSON_1879], Ewing [EWING_1888], quasiment aucune d'entre elles ne présentait de données relatives à des essais en *compression*. Les rares données en compression sont issues des travaux de Néel et Lliboutry [LLIBOUTRY_1951], et elles montraient déjà des comportements très différents en traction et compression. Néanmoins, l'originalité de cette étude n'émergea pas de la somme de celles réalisées en traction.

Ce déficit de mesures en compression s'explique par le dilemme auquel l'expérimentateur était alors soumis: l'échantillon ne devait pas présenter de champ démagnétisant important, de manière à permettre, via un fluxmètre, la lecture d'une induction homogène dans le matériau. Or, ceci nécessite une géométrie particulière pour un barreau: la longueur doit être très supérieure au rayon, de manière à minimiser l'effet de forme. Par conséquent, l'échantillon était exposé à un risque de flambage mécanique lors d'une compression. Ce phénomène est irréversible, aussi les auteurs des études se contentaient d'études en traction.

Aussi, cette anomalie à l'une des prédictions essentielles du modèle de Brown, la symétrie de comportement de l'aimantation en tension ou en compression, ne fut pas relevée, même dans des travaux de Brugel et Rimet [BRUGEL_1966], pourtant postérieurs à ceux de Lliboutry (1951). Les auteurs y enrichissent le modèle de Brown, en énumérant toutes les séquences expérimentales possibles résultant de la permutation de l'ordre d'application des variables du problème: application de la contrainte, diminution de la contrainte, mise en champ inducteur, mise à zéro du champ inducteur. Il existe ainsi 14 manières d'arranger l'ordre d'application des variables contrainte et champ. Brugel et Rimet calculèrent alors qu'il ne pouvait résulter que 6 états d'aimantation possibles. Leurs mesures, toutes réalisées pour des contraintes de traction, confirmèrent cette approche théorique.

En 1970, Craik et Wood [CRAIK_1970] puis Birss, Faunce et Isaac [BIRSS_1970] réalisèrent les seconde et troisième études exhaustives des comportements en traction et compression, depuis celle de Lliboutry. Pour prévenir tout risque de flambage mécanique, l'échantillon utilisé par Craik et Wood, un barreau très fin, était inséré dans un guide en plexiglas, ajusté et lubrifié de manière à minimiser les frottements. Ces derniers furent mesurés et négligés en conséquence.

Les résultats obtenus dans ces deux études montraient de manière indiscutable, à l'instar de ceux de Lliboutry, que dès que la contrainte dépassait $2 \cdot 10^6$ Pa, en champ faible (80 A/m), les comportements en traction et compression divergeaient (figure 16).

Une seconde anomalie flagrante était également relevée. Les modèles de Brown, puis de Brugel et Rimet s'accordaient sur un autre point: leur théorie prédisait que lorsque la contrainte était ramenée à zéro, l'aimantation ne devait pas évoluer. Or, les mesures de Craik et Wood [CRAIK_1970], Birss [BIRSS_1970], Schneider et Semcken [SCHNEIDER_1981], Schneider et Richardson [SCHNEIDER_1982], montraient le contraire (figure 16 pour les mesures de Craik et Wood). La figure 16 est à comparer avec la figure 15. Elle montre que le modèle de Brown n'est pas validé en compression, et que le comportement prédit par l'aimantation lors du retour vers un état non contraint est en désaccord avec les prédictions.

La loi d'approche présentée par Jiles et Atherton [JILES_1984] apporte une réponse phénoménologique à ces observations inconciliables avec la loi de Brown.

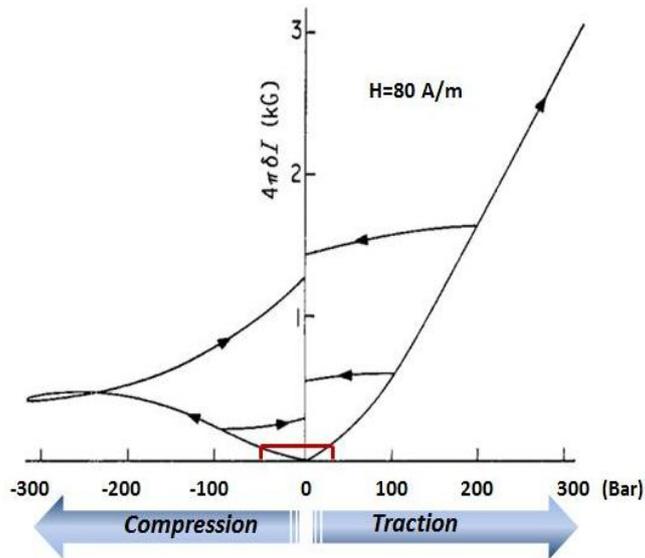


figure 16. Variation d'aimantation d'un barreau de fer en traction ou compression sous 80 A/m. 4 cycles HPP d'après Craik et *al.* [CRAIK_1970]. Note : 1kG=0.1 T. Les comportements en traction et compression divergent pour des contraintes supérieures à 20 bar. De plus, le retour à un état non contraint s'accompagne de variations d'aimantation non négligeables.

B. L'approche phénoménologique de Jiles et Atherton

Jiles et Atherton ont produit un modèle de magnétostriction à l'échelle macroscopique en 3 étapes.

Dans un premier temps, les auteurs mettent en évidence l'effet maître d'une contrainte croissante sur l'aimantation d'un matériau ferromagnétique soumis à un champ magnétique induit constant : la contrainte fait tendre l'aimantation vers sa valeur anhystérétique. C'est la loi phénoménologique d'approche [JILES_1984].

En utilisant les travaux de H.E Stanley [STANLEY_1971], il est possible de prédire l'effet d'une contrainte constante sur l'aimantation anhystérétique. Ainsi, les auteurs disposent d'un couplage magnéto-mécanique pour l'aimantation anhystérétique.

Enfin, ces derniers proposent une expression analytique de la loi d'approche, incorporant le couplage précédent, et permettant de modéliser l'effet d'une contrainte variable sur l'aimantation en champ magnétique ambiant constant [JILES_1995].

I. La variation irréversible de l'aimantation : la loi d'approche (1984)

Jiles et Atherton [JILES_1984] établirent un modèle qui tentait d'expliquer des séries de mesures montrant des comportements en aimantation contradictoires avec le modèle de Brown. Les études de Craik et Wood, ainsi que celles de Birss et Isaac montraient que l'aimantation semblait tendre vers une valeur déterminée par le champ inducteur. Mais les auteurs n'ayant pas mesuré les aimantations anhystérétiques, ils ne purent déduire une loi phénoménologique de cette observation.

Les mesures de Pitman [PITMAN_1990], qui valideront la loi d'approche de Jiles-Atherton, montrent que sous un même champ inducteur, et sous la même variation de contrainte appliquée, l'aimantation peut croître ou décroître (figure 17). Par conséquent, l'histoire magnétique du matériau est un facteur devant être pris en compte dans toute tentative de modélisation.

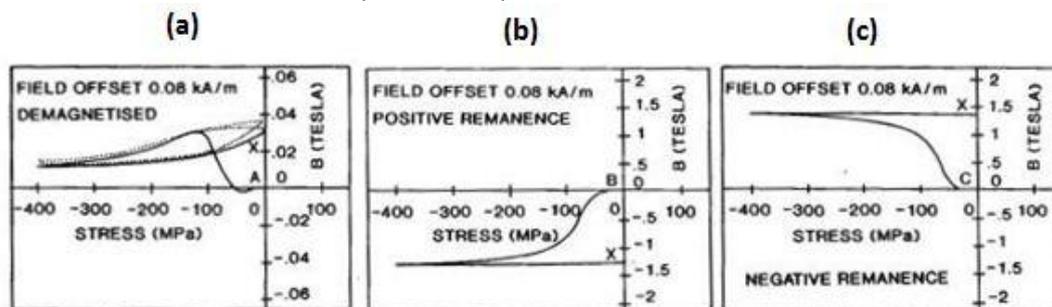


figure 17. Variation de l'induction ΔB mesurée en compression à partir d'états initiaux différents, sous un champ inducteur $H_0=80$ A/m [PITMAN_1990]. (a) état initial désaimanté (b) aimantation rémanente positive (c) aimantation rémanente négative. Les mesures montrent que la variation de l'aimantation dépend de l'état initial magnétique du matériau, donc de son histoire magnétique.

Jiles et Atherton expliquent ces comportements par la loi d'approche [JILES_1984] : la variation de l'aimantation d'un matériau ferromagnétique soumis à des contraintes mécaniques externes est de migrer de manière irréversible vers sa valeur anhystérétique. Ce comportement est une conséquence du transfert d'énergie élastique mécanique qui s'opère depuis l'extérieur vers le matériau, et qui vient accroître l'énergie libre de ce dernier.

Afin de trouver un nouvel état d'équilibre, le matériau reconfigure son aimantation. Les mesures de cycles HP montrent que la variation d'aimantation est essentiellement irréversible : lorsque la contrainte est relâchée (HPP), la variation d'aimantation mesurée est généralement faible en regard de celle occasionnée par la mise en contrainte (HPP) (figure 17).

Or les variations irréversibles d'aimantation sont essentiellement dues à des mouvements irréversibles des parois des domaines magnétiques. Ceux-ci sont rendus possibles par la conversion

de l'énergie mécanique élastique fournie au matériau en énergie interne. Pouvant ainsi s'affranchir des puits de potentiel des sites de piégeage, l'aimantation évolue vers la valeur qu'elle atteindrait sous le même champ inducteur, mais pour un matériau idéal, sans défaut et donc sans site de piégeage de l'aimantation. Cette valeur est donnée par l'aimantation anhystérétique (figure 18).

Ce modèle expliquait les comportements en apparence contradictoires des séries de mesures des différents auteurs. Bozorth et Williams [BOZORTH_1945] avaient déjà noté que l'aimantation avait tendance à migrer vers sa valeur anhystérétique lors de l'application d'une contrainte croissante, mais sans relever l'importance de ce fait. Les mesures de Pitman [PITMAN_1990] confirment la loi d'approche de Jiles.

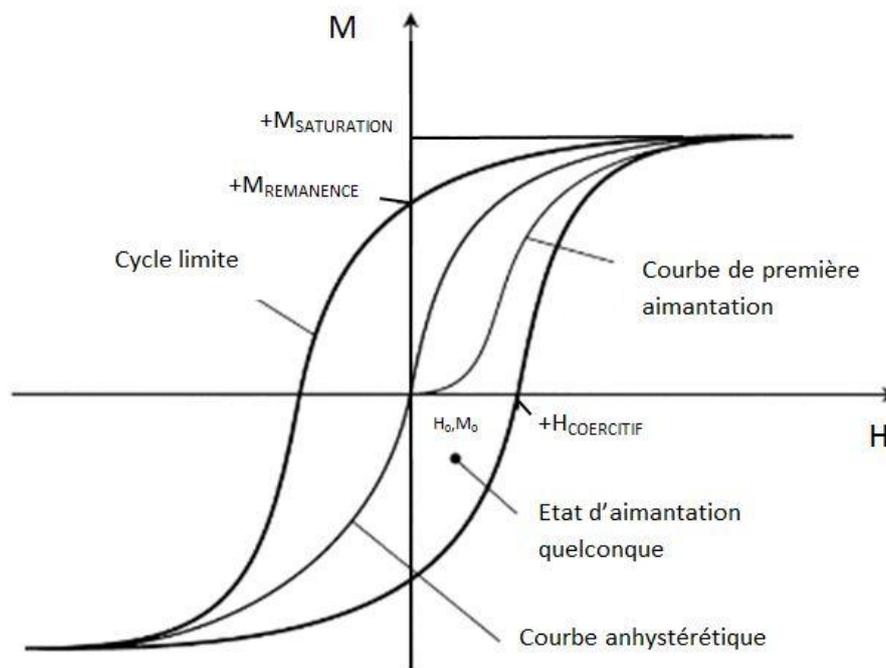


figure 18. L'application d'un champ H fait varier l'aimantation M dans le matériau de manière complexe (hystérésis). La courbe anhystérétique est la médiane du cycle d'hystérésis. Elle est située au-dessus de toute courbe expérimentale partant de l'origine (y compris la courbe de première aimantation) et en dessous de toute courbe mesurée à champ décroissant à partir d'un champ supérieur au champ de saturation. En tout point de cette courbe, la configuration magnétique de l'échantillon réalise un minima d'énergie. Cette courbe est déterministe. C'est la courbe d'aimantation qui serait obtenue pour un matériau idéal, ne présentant pas de défaut (sites de piégeage de l'aimantation créant l'hystérésis magnétique).

II. L'effet des contraintes sur l'aimantation anhystérétique

1. Approche thermodynamique du champ équivalent

La loi d'approche postule que l'aimantation migre, avec une contrainte croissante, vers son minimum d'énergie, l'aimantation anhystérétique. Or cette dernière dépend de l'état de contrainte mécanique sous laquelle elle est mesurée (figure 19). Il est donc nécessaire de prendre en compte cet effet de la contrainte sur l'aimantation anhystérétique dans toute expression analytique de la variation de l'aimantation avec la contrainte.

Pour cela, Jiles et Sablik [SABLIK_1993] utilisent les résultats de H.E Stanley [STANLEY_1971]. Ce dernier reprend l'idée de Brown, l'équivalence entre une contrainte mécanique et un champ additionnel, mais par une approche thermodynamique du problème, en calculant l'énergie libre A^7 le long de la courbe d'aimantation anhystérétique réversible $M_{ANH}(H)$. Stanley montra que l'effet sur l'aimantation anhystérétique de la contrainte, appliquée sous un champ H , est identique à l'effet d'un champ additionnel H_{EFF} :

$$H_{EFF} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{dA}{dM} \right)_T \quad (27)$$

A est l'énergie libre et T la température.

Sablik et Jiles [STANLEY_1993] ont alors étendu la formulation (27) et ont montré que H_{EFF} pouvait s'écrire sous la forme :

$$H_{EFF} = H + \alpha M + H_\sigma \quad (28)$$

avec

$$H_\sigma = \frac{3\sigma}{2\mu_0} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial M} \right)_\sigma (\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta) \quad (29)$$

On suppose dans cette formule scalaire que le champ \mathbf{H} et l'aimantation \mathbf{M} sont colinéaires, et que la déformation λ est mesurée selon la direction du champ \mathbf{H} . σ la contrainte, α la constante de couplage de Néel [NEEL_1957], θ l'angle entre le champ interne \mathbf{H} et la contrainte, et ν le coefficient de Poisson du matériau.

L'équation (29) permet donc de prendre en compte les effets des contraintes sur l'aimantation anhystérétique.

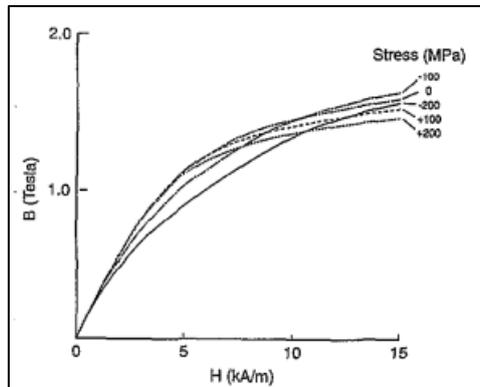


figure 19. Aimantation anhystérétique mesurée sous différents niveaux de contraintes (d'après [JILES_1995]).

⁷ L'énergie libre A est, en thermodynamique, une fonction d'état extensive dont la variation permet d'obtenir le travail utile susceptible d'être fourni par un système thermodynamique fermé, à température constante. Elle correspond à l'énergie libre de Helmholtz des anglo-saxons.

2. Approximation des coefficients de magnétostriction

λ est la valeur de la magnétostriction mesurée selon la direction d'application du champ. Ici, λ doit être interprété comme le *coefficient de magnétostriction globale* λ_{global} de l'échantillon polycristallin, et non pas la magnétostriction pour une maille de l'échantillon. C'est à dire que λ_{global} donne la déformation mesurée sur tout l'échantillon, lorsque les directions de la contrainte uniaxiale σ et de l'aimantation \mathbf{M} , supposée homogène dans l'échantillon, coïncident.

La détermination théorique de λ_{global} , telle qu'on a pu la calculer dans le chapitre I de l'approche cristalline, demanderait la connaissance de la configuration des domaines dans le matériau. En effet, la déformation λ au sein d'un domaine dépend de l'angle que fait l'aimantation avec l'axe de facile aimantation, et s'exprime (16) à l'aide des coefficients λ_{100} et λ_{111} . En moyennant ces déformations à l'échelle d'un polycristal, on pourrait donc théoriquement expliciter la loi $\lambda_{\text{global}}(\mathbf{M})$. Mais ceci nécessiterait la connaissance, a priori impossible, de la configuration magnétique de l'échantillon polycristallin. Pour pallier cette méconnaissance, on développe un modèle empirique pour l'expression de λ_{global} en fonction de l'aimantation, en utilisant un développement polynômial, qui tient compte de la symétrie par rapport à M du coefficient de magnétostriction :

$$\lambda(M) = \gamma_1 M^2 + \gamma_2 M^4 + \dots \quad (30)$$

Toutefois, il est nécessaire d'intégrer à ce modèle simple la dépendance de M vis-à-vis de la contrainte : en effet, celle-ci, en modifiant l'aimantation, modifie également le coefficient de magnétostriction mesuré (c'est-à-dire la déformation λ). On introduit ce couplage magnétomécanique en écrivant la dépendance en σ des coefficients γ :

$$\gamma_i(\sigma) = \gamma_i(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!} \gamma_i^{(n)}(0) \quad (31)$$

On peut noter que ce modèle empirique suffit, au premier ordre, à décrire l'effet Villari du fer : le coefficient de magnétostriction s'inverse pour $M = \sqrt{\frac{-\gamma_1}{\gamma_2}}$, et la dérivée de la magnétostriction change en $M = \sqrt{\frac{-\gamma_1}{2\gamma_2}}$.

III. Trois conditions à intégrer dans une modélisation de la loi d'approche

Jiles et Atherton estimaient qu'une faiblesse intrinsèque à la théorie de Brown était qu'un champ magnétique (vectoriel dans l'approche classique) était considéré équivalent à un tenseur (de contraintes). Or ces deux entités ont des symétries différentes. La contrainte devrait être assimilée à l'imposition d'une énergie d'anisotropie additionnelle.

Les asymétries de comportement en traction et compression impliquent que le sens de variation de l'aimantation ne peut dépendre directement du signe de la contrainte, mais d'une quantité physique afférente, indépendante du signe de σ . Jiles et Atherton ont postulé que cette variation dépendait non pas de σ , mais de σ^2 , qui, de plus, est homogène à la densité d'énergie élastique mécanique $W=\sigma^2/2E$ (E est le module d'Young).

Nous avons vu que l'idée sous-jacente est que l'énergie élastique mécanique fournie au système permet à l'aimantation de s'affranchir des barrières de potentiel des parois des domaines. Aussi, le comportement magnétique du matériau approche celui d'un matériau idéal, pour lequel la courbe de première aimantation s'apparente à la courbe d'aimantation anhystérétique.

Or, la valeur de l'aimantation anhystérétique sous un même champ H diffère selon le niveau de contraintes sous lequel elle a été mesurée. Il faut donc inclure dans le modèle théorique un couplage entre la contrainte, et l'aimantation anhystérétique.

De plus, les variations d'aimantation observées sont essentiellement irréversibles. Partant de ce constat, le modèle de la magnétoélasticité inverse proposé par Jiles et Atherton [JILES_1995] postule que l'effet magnéto-mécanique dépend de 3 facteurs :

1. De l'écart séparant l'aimantation initiale de sa valeur anhystérétique sous le même champ et sous la contrainte σ ,
2. D'un facteur représentant la vitesse d'évolution de la partie irréversible de l'aimantation M_{IRR} par rapport à la contrainte σ ,
3. De l'évolution de l'aimantation anhystérétique $M_{ANH}(\sigma, H)$ avec la contrainte σ (couplage).

IV. L'expression analytique de la loi d'approche (1995)

1. Le modèle d'hystérésis magnétique de Jiles et Atherton (1986)

Lors de leurs travaux sur l'hystérésis magnétique [JILES_1986], Jiles et Atherton avaient développé une idée que Néel avait introduite pour la modélisation du processus d'aimantation [NEEL_1946]. Néel estimait que les modèles d'aimantation proposés par Becker et Döring [DÖRING_1936], et Kondorsky se heurtaient à une limite, en supposant que les parois des domaines magnétiques étaient rigides. Cette hypothèse ne permettait pas la prise en compte de phénomènes réversibles.

De manière à permettre à un domaine magnétique de croître sans quitter un site de piégeage d'aimantation, il était nécessaire d'introduire dans les modèles l'idée de parois flexibles, qui sous l'action d'un faible champ inducteur, se déforment de manière élastique et réversible, jusqu'à ce que le champ inducteur leur permette de gagner un autre site par un déplacement irréversible.

Jiles et Atherton ont alors modélisé l'élasticité des parois par un paramètre c compris dans $[0,1]$. Ce paramètre lie la partie réversible de l'aimantation à sa partie irréversible. De plus, lorsque l'aimantation est à sa valeur anhystérétique, le matériau est dans un état d'équilibre local, donc dans un état minimal d'énergie. Par conséquent, lorsque $M=M_{ANH}$, les parois des domaines ne peuvent être en flexion : il y aurait alors dans le bilan énergétique une contribution provenant de l'énergie potentielle élastique contenue dans la paroi. Or cette contribution est nulle si la paroi est à l'équilibre mécanique. Ainsi, pour un état d'aimantation anhystérétique, $M=M_{ANH}=M_{IRR}$, et $M_{REV}=0$.

De ces considérations, Jiles et Atherton expriment une relation entre l'aimantation, l'aimantation anhystérétique, et le paramètre c :

$$M_{REV} = c(M_{ANH} - M_{IRR}) \quad (32)$$

Nous savons cependant que sous un champ inducteur faible, $M_{ANH}=M_{PER_ANH} + M_{IND_ANH}$. M_{IND_ANH} est un terme réversible correspondant à des mouvements réversibles de paroi.

2. L'expression mathématique de la loi d'approche

La loi d'approche de Jiles et Atherton réside déjà dans leur modèle d'hystérésis magnétique. Elle en est une extension. Elle introduit la contrainte mécanique comme une source d'énergie alternative à l'énergie magnétique apportée par un champ inducteur, et permet ainsi le mouvement des parois par une contrainte mécanique appliquée au système, même en présence d'un champ extérieur constant.

Le modèle de Jiles et Atherton postule que si la contrainte appliquée est suffisamment importante, l'aimantation atteint sa valeur anhystérétique essentiellement par évolution de la composante irréversible M_{irr} . Une fois l'aimantation anhystérétique atteinte, l'aimantation suit la loi $M=M_{ANH}(\sigma)$. La variation d'aimantation observée lors du retour vers un état non contraint (HPP) n'est alors que la variation de l'aimantation anhystérétique liée à la suppression de la contrainte. La nécessité du couplage magnétomécanique entre la contrainte et l'aimantation anhystérétique réside dans cette hypothèse, et permet ainsi des comportements asymétriques en traction et compression si la courbe d'aimantation anhystérétique n'est pas donnée par une fonction paire par rapport à la contrainte (figure 27).

En différentiant (32) par rapport à la densité d'énergie mécanique élastique W , et en exprimant cette différentielle en fonction de M_{REV} , on obtient une équation différentielle décrivant l'évolution de M_{REV} avec la densité d'énergie mécanique élastique W :

$$\frac{dM_{REV}}{dW} = c \left(\frac{dM_{ANH}}{dW} - \frac{dM_{IRR}}{dW} \right) \quad (33)$$

Considérons maintenant les 3 facteurs qui ont guidé l'approche de Jiles et Atherton.

Le premier porte sur l'écart entre l'aimantation et l'aimantation anhystérétique, sous le champ H et la contrainte σ . Or, le modèle doit exprimer que l'aimantation irréversible évolue vers l'aimantation anhystérétique. C'est-à-dire que l'aimantation totale évolue de manière à minimiser l'écart ($M_{IRR} - M_{ANH}$) en faisant tendre M_{IRR} vers M_{ANH} . Le terme ($M_{irr} - M_{ANH}$) doit donc apparaître dans le modèle.

Le second facteur : la partie irréversible de l'aimantation évolue d'autant plus vite que sa valeur est éloignée de la valeur anhystérétique. De plus, ce taux de variation (dM_{IRR}/dW) doit également dépendre d'un paramètre noté ξ , dépendant du matériau, puisque tous les matériaux n'ont pas le même comportement magnétique lors d'un cycle de contraintes.

Ces deux facteurs peuvent être exprimés sous la forme suivante :

$$\frac{dM_{IRR}}{dW} = \frac{1}{\xi} (M_{ANH} - M_{irr}) \quad (34)$$

W est la densité d'énergie mécanique (J/m^3), E le module d'Young du matériau (Pa), ξ un paramètre homogène à une densité d'énergie (J/m^3). ξ permet de caractériser la vitesse d'évolution de l'aimantation avec l'énergie mécanique.

Enfin, le troisième facteur implique d'intégrer la dépendance de M_{ANH} vis-à-vis de la contrainte σ . On suppose donc un terme $dM_{ANH}(H,\sigma)/d\sigma$.

Finalement, en sommant (33) et (34), avec $dW = d(\sigma^2/2E) = (\sigma/E) d\sigma$, on obtient une expression de la variation de l'aimantation avec la contrainte :

$$\frac{dM}{d\sigma} = \frac{\sigma}{\xi E} (M_{ANH} - M) + c \frac{dM_{ANH}}{d\sigma} \quad (35)$$

V. Cadre d'application du modèle de Jiles-Atherton & cycles HPP complexes

1. *Domaine d'application du modèle de Jiles-Atherton*

Il est important de noter que Jiles [JILES_1995] obtient l'équation (35) à partir de considérations physiques relatives, entre autres, à l'élasticité des parois de domaines magnétiques. L'échelle implicite dans laquelle l'auteur se place est donc l'échelle microscopique, au sein d'un domaine magnétique, dans lequel l'aimantation est uniforme.

Toutefois, l'auteur valide (35) en comparant les prédictions en aimantation du modèle avec des mesures d'aimantation (par des mesures en induction, supposées réalisées sur une structure sans champ démagnétisant). Or, les mesures d'induction obtenues mesurent l'effet global des contributions individuelles des aimantations de chacun des domaines magnétiques. Cette induction globale mesurable tient compte des interactions entre les aimantations élémentaires de chacun des domaines. Ces interactions définissent le champ réduit, ou champ du à la matière aimantée. Le champ réduit n'a de sens qu'à l'échelle de la structure. Par conséquent, l'auteur fait un changement implicite d'échelle, et considère que la loi obtenue pour les aimantations individuelles en chaque domaine (échelle microscopique) est applicable à l'aimantation globale \mathbf{M} , qui est une grandeur définie à l'échelle de la structure.

C'est donc dans l'hypothèse d'une extension du modèle de Jiles à l'échelle de la structure que nous nous plaçons ici. Nous verrons au chapitre III en utilisant la méthode des moments, et dans le cadre de l'approximation dipolaire, qu'il est possible de justifier le changement de l'échelle, et de réécrire la loi de Jiles en termes de grandeurs globales mesurables \mathbf{M} ou \mathbf{B} .

Nous écrivons donc :

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)_{H_0} = \frac{\sigma}{\xi E} (M_{ANH} - M) + c \left(\frac{\partial M_{ANH}}{\partial \sigma}\right)_{H_0} \quad (36)$$

M représente l'aimantation mesurable à l'échelle de la structure. Pour une structure sans champ démagnétisant, elle peut être obtenue par une mesure d'induction \mathbf{B} .

Cette différentielle est réalisée à \mathbf{H}_0 constant, avec \mathbf{H}_0 le champ appliqué (i.e. le champ inducteur). Ce point est important et source de confusions. Il ne peut s'agir en effet du champ interne total \mathbf{H} , somme du champ appliqué \mathbf{H}_0 , et du champ réduit \mathbf{H}_{RED} . Or, le champ \mathbf{H}_{RED} en un point P du matériau est lié à l'aimantation par la relation $\mathbf{H}_{RED}(P) = -\{\mathbf{N}(P)\} \cdot \mathbf{M}(P)$, où $\{\mathbf{N}(P)\}$ est le tenseur de forme au point P .

Ainsi, dériver \mathbf{M} à \mathbf{H} constant n'a pas de sens, puisque la variation d'aimantation exprimée par $d\mathbf{M}/d\sigma$ génère inévitablement une variation de champ réduit \mathbf{H}_{RED} , et donc du champ total $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{RED}$. En d'autres termes, l'énergie mécanique modifie l'aimantation en faisant varier les susceptibilités réversibles et anhystérétiques d'un matériau ferromagnétique.

Outre le commentaire précédent, le modèle de Jiles appelle plusieurs autres remarques.

C'est une loi de variation scalaire, valable uniquement en contrainte croissante. La généralisation de la loi pour un champ inducteur quelconque nécessiterait une écriture tensorielle de (36).

La dissymétrie en traction et en compression est autorisée par le couplage de l'aimantation anhystérétique avec la contrainte. Si l'aimantation anhystérétique ne varie pas avec la contrainte, le terme $dM_{ANH}/d\sigma$ est nul dans (36), et l'équation admet une solution analytique paire par rapport à σ ,

décrivant par conséquent des comportements identiques en traction ($\sigma > 0$) et en compression ($\sigma < 0$). Cette solution sera présentée dans le chapitre suivant, traitant du modèle en induction.

La loi est formulée sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre, à coefficients non constants, pour laquelle il n'existe pas de solution analytique. La solution d'une équation différentielle est la somme d'une solution générale, et d'une solution particulière. Les conditions initiales sont prises en compte dans la solution particulière.

Or, physiquement, l'aimantation et l'aimantation anhystérique admettent une limite quand la contrainte tend vers $\pm\infty$. Par conséquent, les deux dérivées partielles dans (36) tendent vers 0 quand $\sigma \rightarrow \infty$. Il en résulte que le terme $\frac{\sigma}{\xi_E}(M_{ANH} - M)$ doit tendre vers 0 lorsque σ tend vers $\pm\infty$, indépendamment de l'état magnétique initial. Cela implique que M tend vers M_{ANH} quand σ tend vers $\pm\infty$.

Ainsi, l'équation de Jiles–Atherton prédit que le comportement de l'aimantation d'un matériau avec la contrainte est de tendre vers son aimantation anhystérique limite, indépendamment de l'état initial magnétique du matériau. Les mesures confirmeront ce point.

Il est capital d'insister sur le fait que la loi décrit des variations d'aimantation conséquentes à une mise en contraintes mécaniques strictement croissante, et depuis un état magnétique initial quelconque.

Nous avons réalisé de nombreuses mesures avec des protocoles expérimentaux qui dépassaient ce cadre. En particulier, nous nous sommes attachés à caractériser les variations d'aimantation subies par le cylindre lorsque celui-ci était soumis à des cycles HPP consécutifs à un premier cycle. Ces cycles subséquents ont été réalisés avec un champ inducteur qui pouvait différer du champ inducteur utilisé lors du cycle initial. Ce type de mesures revêt un intérêt particulier dans le cadre du magnétisme du navire. En particulier, la réalisation de cycles secondaires réalisés sous des champs inducteurs différents du cycle initial est représentative du comportement de l'aimantation suivie par un sous-marin, lorsque celui effectue des plongées successives sous des différents caps.

Nous présentons ici les résultats obtenus. Ils montrent des comportements complexes, en particulier lorsque le champ inducteur varie d'un cycle à l'autre. Des résultats phénoménologiques sont présentés. A notre connaissance, aucune publication ne fait état de ce type d'expérimentations.

Toutefois, le cadre applicatif des modèles que nous introduisons dans cette étude est celui du modèle de Jiles-Atherton.

2. Les reptations

Les reptations se définissent par des cycles HPP secondaires, réalisés sous le même champ inducteur qu'un premier cycle HPP.

Leur analyse nécessite dans un premier temps la compréhension du comportement de l'aimantation lorsque le niveau de contraintes est ramené à 0. Or, la modélisation de cette loi de retour n'est pas détaillée par Jiles et Atherton. La loi (36) est valable uniquement en contraintes croissantes, l'équation différentielle divergeant pour σ décroissant [JILES_1995_ERR]. Le comportement phénoménologique de l'aimantation lors du retour n'est d'ailleurs que très rarement évoqué dans la littérature (à l'exception de [ATHERTON_1988]). Nos mesures mettent en évidence que la valeur obtenue après relaxation de la contrainte est dépendante de la valeur obtenue en pression maximale. Si la contrainte n'a pas été suffisante pour permettre à l'aimantation d'atteindre sa valeur anhystérétique, la variation de l'aimantation occasionnée par le retour en pression nulle est supérieure à celle mesurée lorsque l'anhystérétique a été rejointe.

Atherton [ATHERTON_1988] a néanmoins détaillé dans son étude une méthode expérimentale d'évaluation des parties réversible et irréversible de la variation d'aimantation engendrée par des contraintes cycliques appliquées en champ ambiant constant. L'auteur postule que lors du premier cycle HPP, l'évolution de l'aimantation peut être décomposée en une partie réversible et irréversible. Toutefois, lorsque le nombre de cycles augmente (on les appelle des reptations), le changement observé dans la partie irréversible diminue. A partir d'un certain nombre de cyclages, la variation de l'aimantation se fait essentiellement par des variations réversibles (figure 20).

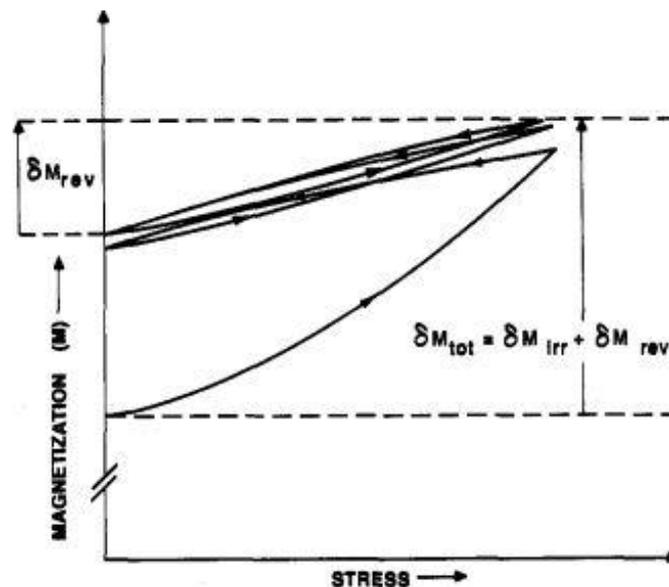


figure 20. Représentation des parties réversible et irréversible de l'aimantation lors de cyclages HPP successifs [ATHERTON_1988]. Lors des reptations, la variation de l'aimantation se fait essentiellement par des variations réversibles.

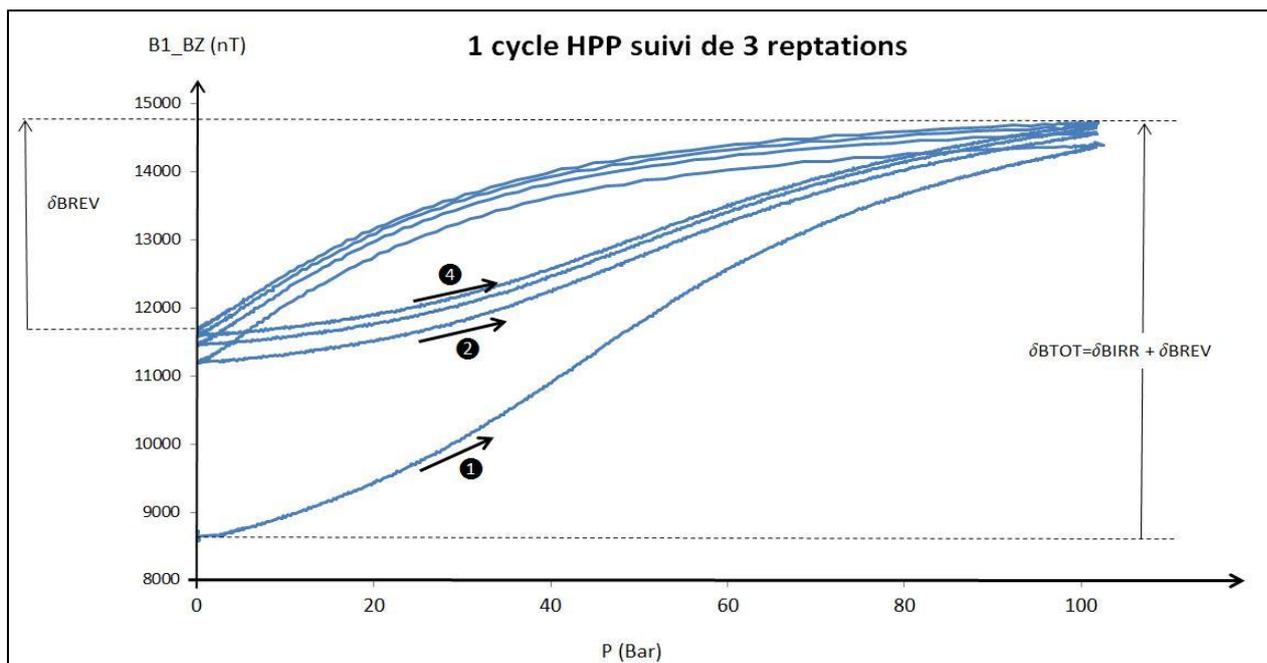


figure 21. Détermination des parties réversibles et irréversibles de la variation de l'induction B , selon le principe d'Atherton. Cette figure est à comparer avec la figure 20.

Nous avons également vérifié ce comportement en induction externe (figure 21). Les cycles HPP subséquents à un cycle initial (les reptations) montrent que les valeurs d'induction obtenues sous contrainte maximale (fin de la phase HP) et lorsque la pression est ramenée à 0 bar se stabilisent avec le nombre de cycles. Les figures 22 et 23 montrent les écarts $\delta B_{\text{INITIAL}}$ et δB_{FINAL} obtenus pour deux séries de 3 et 4 reptations sous un champ inducteur croisé $\mathbf{BL}=20\mu\text{T} + \mathbf{BV}=20\mu\text{T}$. L'écart entre ces valeurs d'induction s'amenuise avec le nombre de cycles.

Ce phénomène suggère que les reptations sont des phénomènes essentiellement réversibles⁸. Une première approche pour la modélisation de l'aimantation lors du retour à un état non contraint pourrait donc être d'utiliser une loi de variation linéaire, à l'aide de la droite passant par les états magnétiques initiaux et finaux obtenus lors des reptations. C'est une première approximation qui, si elle ne donne pas une modélisation correcte du comportement de l'aimantation entre 0 et P_{MAX} , présente l'avantage, outre d'être simple, de donner des valeurs d'aimantation initiale et finale approchées correctes.

⁸ Pas au sens thermodynamique, puisqu'il y a dissipation d'énergie. On exprime par ce terme la quasi égalité des valeurs d'induction mesurées en début et en fin d'une reptation.

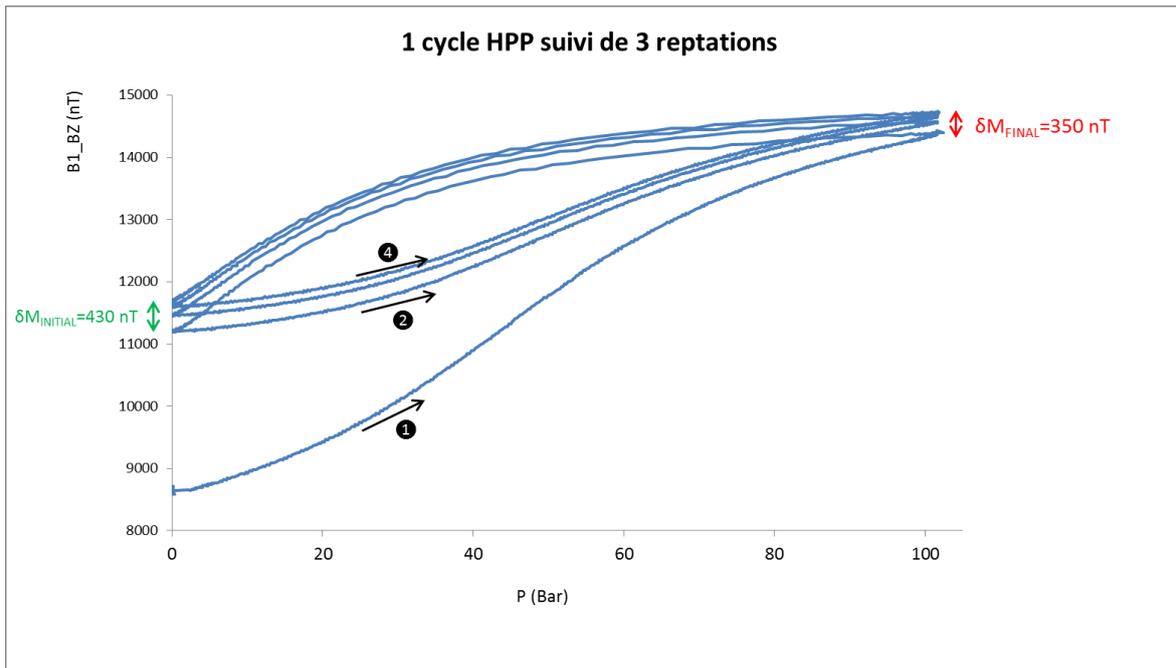


figure 22. Des cycles consécutifs à un cycle HPP initial font évoluer les valeurs de l'aimantation à P=0 bar et P=100 bar : lors de la première montée en pression, l'aimantation n'a pas encore atteint sa valeur anhystérique.

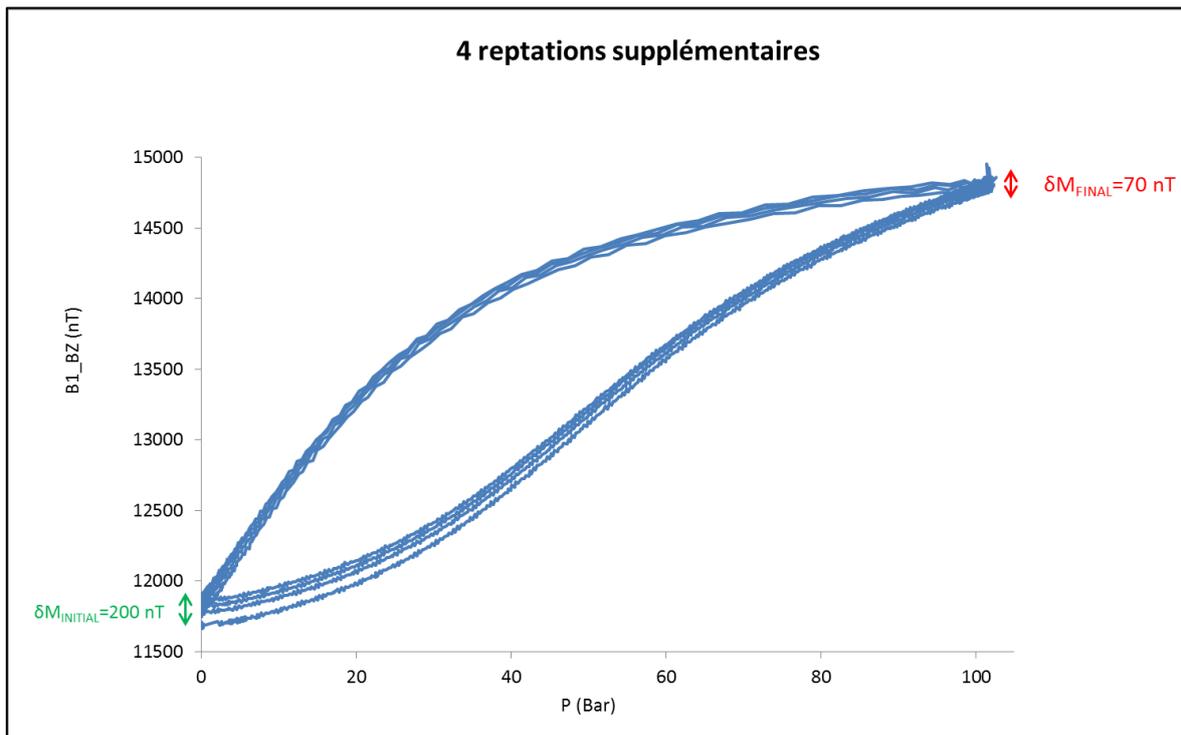


figure 23. 4 reptations supplémentaires montrent que les variations des valeurs d'aimantation à P=0 bar et P=100 bar s'amenuisent : l'aimantation est maintenant proche de sa valeur limite.

3. Les cycles secondaires réalisés sous un champ inducteur différent du cycle initial

Nous avons également effectué de nombreuses mesures portant sur des cycles secondaires réalisés sous des champs inducteurs différents du champ utilisé pour le cycle HPP initial. La figure 24 montre un cycle HPP réalisé sous un champ inducteur $BL = -20\mu T$ subséquent à un premier cycle réalisé sous un champ inducteur $BL = +20\mu T$. On constate que l'allure des courbes est différente entre les deux cycles, et que de plus, la valeur d'aimantation finale obtenue en fin de montée en pression est également différente de sa valeur anhystérétique théorique. Dans le cas d'un champ inducteur vertical (figure 25), l'allure des courbes d'induction est également fortement perturbée, mais la valeur finale de l'induction obtenue à pression maximale lors du second cycle est très proche de la valeur d'induction anhystérétique obtenue lors de la caractérisation magnétique du cylindre.

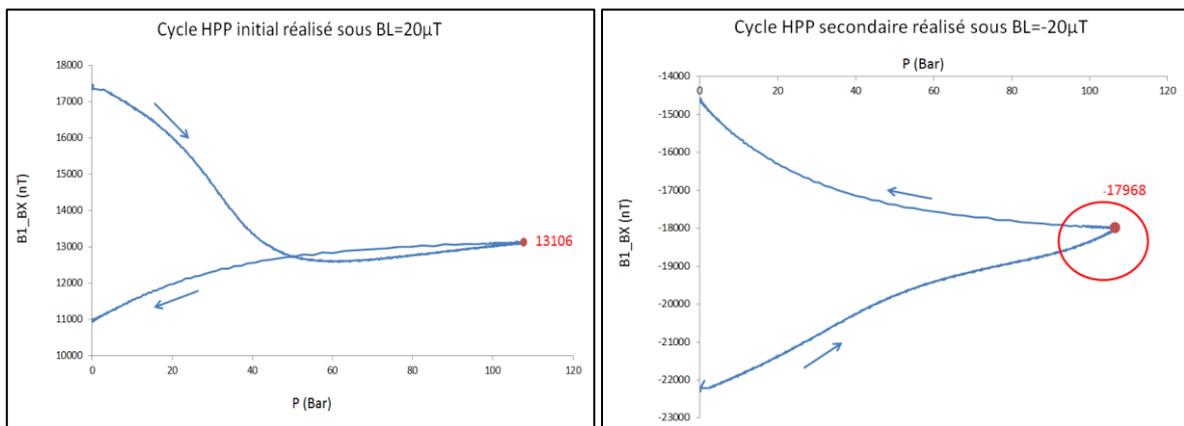


figure 24. Gauche : réalisation d'un cycle HPP initial sous $BL = 20\mu T$. La valeur atteinte en fin de cycle HPP est cohérente avec nos mesures (environ 13500 nT pour l'anhystérétique sous $BL = 20\mu T$). Droite : un cycle subséquent à ce premier cycle, réalisé sous $BL = -20\mu T$. L'allure de la courbe est relativement différente de celle d'un cycle initial. En outre, la valeur obtenue en fin de cycle est différente de la valeur anhystérétique sous $BL = -20\mu T$. Une explication pourrait être la modification de la valeur de l'aimantation anhystérétique du matériau après qu'il a été précontraint.

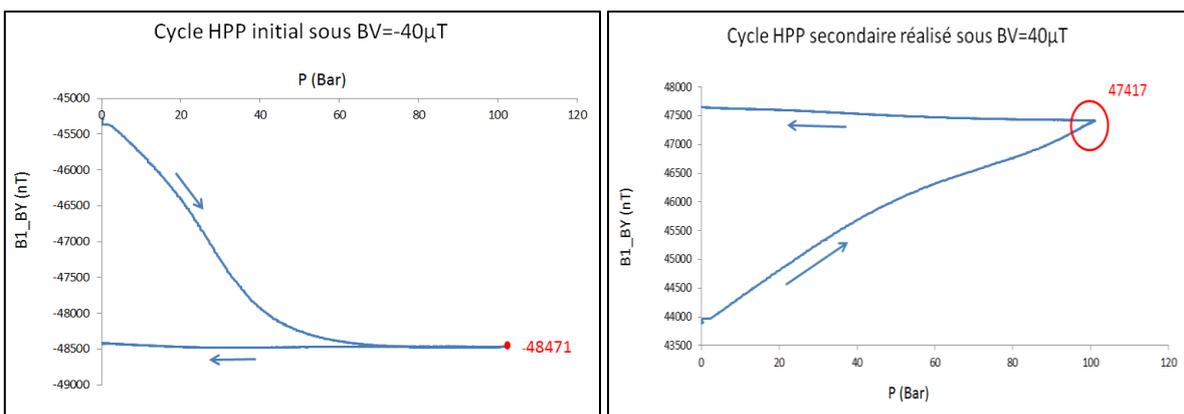


figure 25. Gauche : réalisation d'un cycle HPP initial sous $BV = -40\mu T$. La valeur obtenue en fin de cycle est cohérente avec nos mesures (-48400 nT). Droite : un cycle subséquent à ce premier cycle. L'allure de la courbe est, comme en champ inducteur longitudinal, différent, mais la valeur obtenue en fin de cycle est très proche de la valeur d'induction anhystérétique mesurée.

Ainsi, dans le cadre de cette thèse, nous avons mis en évidence ces phénomènes qui nous paraissent très intéressants, mais n'avons pu dégager une loi permettant de les décrire. Néanmoins, des tendances phénoménologiques ont été dégagées (mesure des variations de perméabilité réversible consécutives à un premier cycle HPP, évolution de la valeur d'induction permanente avec les cycles consécutifs) qui nous permettront sans doute d'établir, à terme, une loi analytique capable de

décrire ces comportements, sur la même base et avec des outils proches de ceux que nous avons développés dans ce travail. Nous reviendrons sur ces points dans les perspectives.

Nous précisons que la suite de l'étude a porté sur des cycles HPP obtenus à partir d'un état non précontraint, cadre d'application privilégié de la loi de Jiles-Atherton.

VI. Le choix du modèle de Jiles-Atherton pour notre étude

Nous avons déjà mentionné l'impossibilité, durant notre étude, de disposer d'une éprouvette de caractérisation magnétique de l'alliage d'acier dont est constitué le cylindre.

Nous verrons dans la partie D, traitant du dispositif expérimental, qu'un dispositif de mesures constitué d'un cylindre, pouvant être mis en pression interne, avait été élaboré pour des études antérieures à la nôtre.

Il nous est apparu comme un choix judicieux d'opter alors pour un modèle global de description des effets magnétoélastiques basé sur ce prototype de cylindre. Ce choix valorisait un dispositif existant. D'autre part, il inscrivait notre étude dans la continuité de l'approche globale classiquement utilisée par l'ERT-CMF pour l'étude des effets magnétiques sur les navires. Cette approche est basée sur des mesures d'induction externe. L'adoption d'un modèle global nous permettait donc de bénéficier de la grande expérience des membres de ce laboratoire, issue des résultats et du savoir-faire acquis par les nombreuses mesures effectuées sur différents navires pour des études commandées par la Marine Nationale.

De plus, l'expertise de ce laboratoire a conduit au développement d'un logiciel de résolution de problème magnéto-statique inverse [CHADEBEC_2001], qui nous a permis de caractériser l'aimantation dans le cylindre, à partir de la connaissance de l'induction mesurée sur des capteurs externes.

Néanmoins, des liens peuvent être établis entre le modèle de Jiles-Atherton, et les résultats issus de l'approche microscopique de la magnétoélasticité.

Une caractérisation magnétique intrinsèque du matériau aurait pu permettre la détermination de la loi $\lambda(\mathbf{M},\sigma)$ (30) lorsque le champ et la contrainte principale sont orthogonaux ou parallèles⁹. La modélisation des effets des contraintes mécaniques sur l'aimantation anhystérétique dans ces deux configurations de champ inducteur aurait alors pu être déterminée grâce à l'équation de Langevin modifiée. L'utilisation du modèle de Jiles-Atherton, postulant la migration de l'aimantation vers sa valeur anhystérétique lors de l'application d'une contrainte mécanique de valeur croissante, aurait pu alors être numériquement déterminée par la résolution de l'équation de Jiles-Atherton.

La partie suivante présente cette approche du problème. Elle suppose connue la loi $\lambda(\mathbf{M},\sigma)$.

⁹ Nous verrons que notre prototype présente ces deux configurations.

C. Résolution numérique de l'équation en aimantation M

La première étape de nos travaux a consisté à résoudre numériquement (36) et de vérifier que le comportement phénoménologique de la solution suit la loi d'approche, c'est-à-dire sa migration vers l'aimantation anhystérétique lors de l'application d'une contrainte croissante, uniaxiale, et parallèle à l'aimantation.

On présente donc ici une méthode de résolution numérique de (36). Pour cela, il est nécessaire de connaître la loi de l'aimantation anhystérétique avec la contrainte $M_{ANH}(H, \sigma)$. Celle-ci peut être mesurée, ou modélisée. Pour la résolution de (36), on choisit ici la seconde option, et on utilise le modèle de Langevin modifié pour la modélisation de l'aimantation anhystérétique [JILES_1983]. On résout l'équation de Langevin pour l'aimantation anhystérétique en utilisant son expression différentielle. Il est important de noter que l'aimantation anhystérétique $M_{ANH}(H)$ n'étant pas couplée avec l'aimantation M , mais avec la contrainte σ , il sera légitime de réintégrer la loi $M_{ANH}(H)$ obtenue après cette résolution dans l'équation de Jiles et Atherton.

I. Résolution numérique de l'équation de Jiles-Atherton

Le second terme de l'équation (36) de Jiles-Atherton réalise le couplage entre l'aimantation anhystérétique et la contrainte. La connaissance de la loi $M_{ANH}(\sigma, H)$ est donc nécessaire à la résolution de cette équation.

Le modèle de Langevin pour décrire l'aimantation anhystérétique peut être étendu pour prendre en compte l'effet des contraintes mécaniques, en introduisant le terme supplémentaire de champ équivalent défini dans [SABLIK_1993]. L'aimantation anhystérétique est alors définie par :

$$\frac{M_{ANH}}{M_s} = \coth\left(\frac{H + \alpha M_{ANH} + H_\sigma}{a}\right) - \frac{a}{H + \alpha M_{ANH} + H_\sigma} \quad (37)$$

Kuruzar et Cullity [KURUZAR_1971] ont effectués des mesures de magnétostriction sur un barreau de fer, libre des effets de champ démagnétisant. Ils ont ainsi pu déterminer la valeur des coefficients de magnétostriction globaux selon différentes directions (direction \mathbf{y} , avec \mathbf{M} , \mathbf{H} et σ colinéaires).

En prenant les mesures en champ et contraintes parallèles, il est possible de déterminer $\gamma_1(0)$, $\gamma'_1(0)$, $\gamma_2(0)$, $\gamma'_2(0)$, par fitting de (30) et (31) sur ces valeurs. Ces coefficients ont été utilisés pour la résolution présentée figure 26. Les paramètres α , M_s , et a ont sont ceux utilisés par Jiles et Atherton [JILES_1995].

Une première méthode consiste alors à résoudre (37) par une recherche de zéros. Cette méthode est coûteuse en termes de temps de calcul.

Une alternative consiste à exprimer l'équation modifiée de Langevin sous une forme différentielle. On obtient ainsi directement l'expression analytique de $dM_{ANH}/d\sigma$ [VIANA_2010], et le temps de calcul est divisé d'un facteur supérieur à 25 en fonction de la discrétisation du champ et de la contrainte. Si on résout cette équation pour différentes valeurs du champ H , on obtient la surface anhystérétique $M_{ANH}(\sigma, H)$ (figure 26).

La loi de l'aimantation anhystérétique $M_{ANH}(\sigma, H)$ étant maintenant connue, on peut procéder à la résolution de (36). Les résultats obtenus sont présentés et évalués qualitativement.

II. Etude qualitative de la solution numérique à l'équation de Jiles-Atherton

Le comportement de l'aimantation prédit est en accord avec les constatations expérimentales. L'aimantation migre vers l'aimantation anhystérétique. Lorsque l'état initial (i.e. $\sigma=0$) se situe au-dessus ou en dessous de l'aimantation anhystérétique, le même comportement est observé, en compression comme en traction (figure 27).

En faisant varier ξ , on constate bien que ce paramètre représente la facilité avec laquelle l'aimantation migre vers l'anhystrétique (figure 28).

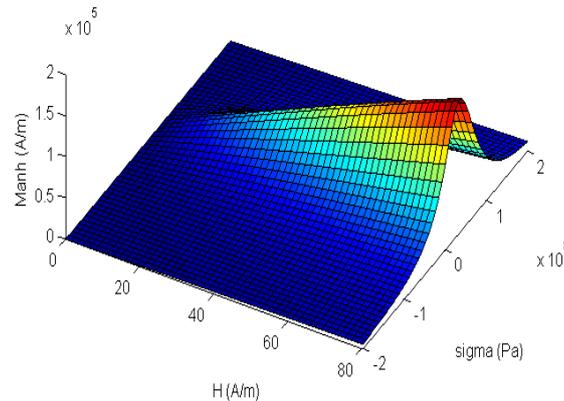


figure 26. Calcul analytique de l'aimantation anhysterétique en fonction du champ H et de la contrainte σ en utilisant une expression différentielle de l'équation de Langevin. On boucle sur le champ H, et on résout ainsi à chaque pas $dM_{anh}/d\sigma$ à H constant. On remarque que $M_{ANH}(\sigma)$ n'est pas paire par rapport à σ .

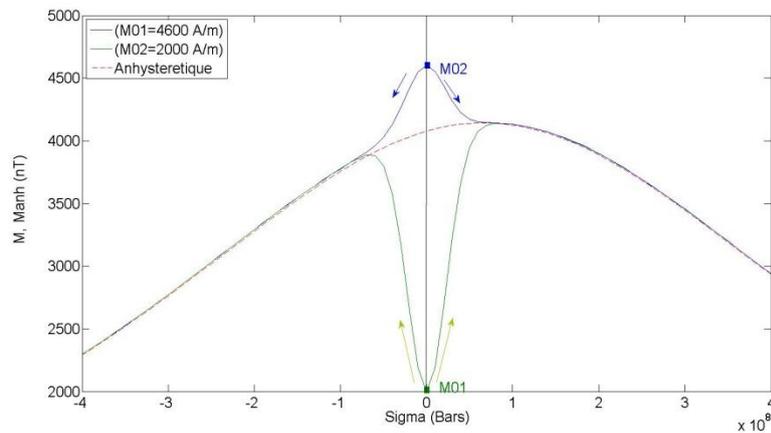


figure 27. Variation de l'aimantation pour 2 états d'aimantation initiaux (2000 A/m et 4600 A/m) Modélisation en traction ($\sigma > 0$) et en compression ($\sigma < 0$), sous $H_0 = 80$ A/m. Quel que soit l'état magnétique initial, l'aimantation migre vers l'anhystrétique.

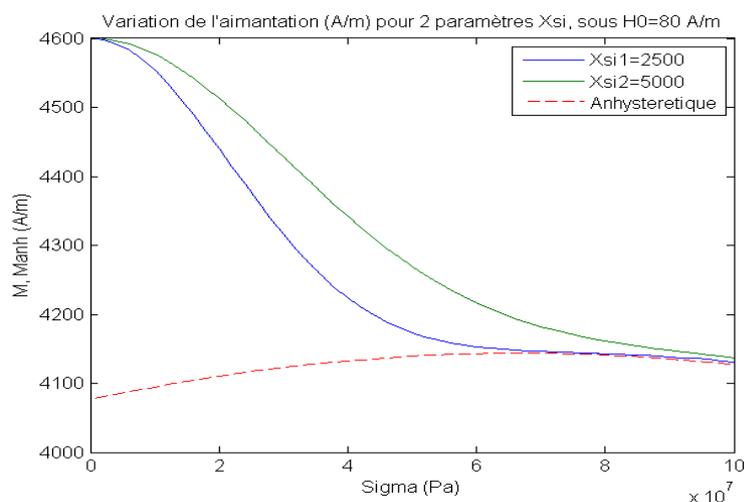


figure 28. Evolution de l'aimantation en fonction du paramètre ξ (X_{si}). On vérifie bien qu'il caractérise (son inverse) la vitesse d'évolution de l'aimantation avec la contrainte.

III. Conclusion sur le modèle de Jiles et Atherton

La résolution numérique de l'équation de Jiles-Atherton produit une solution qui répond aux lacunes du modèle de Brown, en désaccord avec de nombreuses mesures. De plus, le modèle proposé par les auteurs place l'aimantation anhystérétique au cœur du phénomène de magnétoélasticité, en accord avec les mesures effectuées au LMN sur des coques de navires après des navigations successives, et qui montrent que la composante verticale de l'induction extérieure évolue vers sa valeur anhystérétique. Ce modèle est donc un bon candidat pour répondre aux attentes de cette étude.

En exploitant l'idée que l'induction magnétique \mathbf{B} mesurée à l'extérieur d'un échantillon aimanté est l'image de la distribution du champ d'aimantation \mathbf{M} en son sein, il paraît naturel d'essayer d'étendre le modèle de Jiles-Atherton à l'induction \mathbf{B} mesurée à l'extérieur d'un matériau soumis à des contraintes croissantes.

Cette approche n'impose pas de contraintes sur la géométrie du matériau étudié, à la différence des mesures réalisées à même le matériau, et qui nécessitent une forme particulière rendant possible la mesure indirecte de l'aimantation \mathbf{M} via celle de l'induction \mathbf{B} grâce à l'absence de champ démagnétisant (un barreau de fer était souvent utilisé dans les études classiques).

Ce modèle présenterait de nombreux avantages. En particulier, l'induction \mathbf{B} à l'extérieur d'un matériau peut être facilement mesurée à l'aide d'un magnétomètre tri-axes. Un capteur positionné au point P à proximité du prototype permet de relever les 3 composantes de \mathbf{B} en P . De plus, l'utilisation simultanée de plusieurs capteurs permet des mesures en plusieurs points.

Nous allons nous baser sur ces mesures d'induction \mathbf{B} pour établir une loi expérimentale $\mathbf{B}(\sigma)$, étant donné qu'il n'existe pas de solution analytique générale à l'équation de Jiles-Atherton.

Cependant, une approche en induction \mathbf{B} présente des faiblesses. Notamment, elle ne permet pas de modéliser la source magnétique, c'est-à-dire le champ d'aimantation \mathbf{M} dans le matériau. C'est un handicap, puisqu'un modèle établissant une loi de variation de l'induction magnétique \mathbf{B} en un point P de l'espace ne permet pas de déduire la variation de \mathbf{B} en tout autre point.

La connaissance de l'aimantation \mathbf{M} depuis l'induction \mathbf{B} est néanmoins possible : il s'agit alors d'un problème inverse, qui sera présenté dans un deuxième temps (voir le chapitre IV).

D. Descriptif expérimental

I. Le LMMCF

Le Laboratoire de Métrologie Magnétique en Champ Faible (LMMCF) a été construit en 1993 à Herbeys, à 10 km de Grenoble, dans un environnement magnétique stable. Unique en Europe, ce centre de mesure permet de plonger des dispositifs dans des champs magnétiques contrôlés et uniformes afin de mesurer très précisément la perturbation qu'ils génèrent sous n'importe quel champ magnétique terrestre. Celui-ci varie à la surface du globe en module et en orientation. Il peut donc avoir une direction quelconque par rapport au dispositif. Le simulateur permet notamment de se placer en champ magnétique ambiant nul, configuration impossible à la surface du globe, et de mesurer ainsi l'aimantation permanente du dispositif. Le bâtiment est orienté, selon la longueur, dans le sens Nord-Sud. L'intérêt majeur du LMMCF est d'offrir, dans l'intervalle $[-70 \mu\text{T}, +70 \mu\text{T}]$ une homogénéité de champ allant jusqu'à $5 \cdot 10^{-4}$, sur un volume de $6 \times 2 \times 2 \text{ m}^3$ (voir¹⁰). Il permet ainsi le contrôle très précis d'un champ inducteur selon les 3 axes (environ 1nT de bruit). Ce système est basé sur un ensemble de bobines tri-axes, pilotées par des générateurs bipolaires [BONGIRAUD_1999]. L'ensemble du bâtiment est bien entendu réalisé en matériaux amagnétiques, bois et aluminium pour l'essentiel.

Un chemin de roulement sur lequel peuvent être fixées les maquettes de masse inférieure à une tonne permet d'effectuer des mesures d'induction en passage, dans la direction Nord \leftrightarrow Sud (figure 29).



figure 29. Le bâtiment principal du LMMCF, dédié aux mesures. Il est orienté dans la direction Nord-Sud. On distingue au premier plan les rails sur lesquels sont fixées les maquettes. L'ossature en aluminium contient les bobines qui permettent le contrôle du champ ambiant selon les 3 directions.

¹⁰ Pour comparaison, le dispositif expérimental utilisé en 1971 par Birss et *al.* pour le contrôle du champ extérieur était constitué d'une paire de bobines de Helmholtz. Elles permettaient la compensation de la composante verticale du champ magnétique terrestre (environ $40 \mu\text{T}$) dans un volume de $3 \text{ cm}^2 \times 15 \text{ cm}$, avec une homogénéité de 1% [Birss_1971].

II. Le prototype

C'est un cylindre creux, fait d'un alliage d'acier utilisé pour les constructions navales. Il s'agit d'un d'acier à haute limite élastique. Le cylindre a une longueur $L=0.5$ m, un diamètre intérieur $R_{INT}=0.057$ m, et une épaisseur $e=2.10^{-3}$ m. Le cylindre est placé dans le simulateur de façon à ce que son axe de révolution soit orienté Nord-Sud.

Le choix d'un cylindre en pression interne et non externe a été d'abord guidé par une considération pratique : la réalisation d'un cylindre mince, soumis à une pression externe, est très délicate. En effet, le moindre défaut de cylindricité entraînerait l'affaissement irréversible du cylindre lorsqu'il serait soumis à une pression extérieure importante.

Ce cylindre a été usiné dans la masse. Par conséquent, il n'a pas subi les effets subséquents à une soudure. Celle-ci peut en effet entraîner une modification locale irréversible des caractéristiques magnétiques et mécaniques du matériau. De plus, le cylindre a subi un recuit de manière à minimiser les contraintes résiduelles internes qu'entraîne chaque usinage.

Le cylindre a été conçu de manière à travailler dans un état de contraintes planes. Il peut alors être assimilé, d'un point de vue mécanique, à un cylindre infiniment long. Pour obtenir cet état de contraintes, il est nécessaire que les extrémités du cylindre soient libres en déplacement. Un système de flasques étanches, maintenues par des tirants, a donc été réalisé en matériau amagnétique (figure 30).

Un système hydraulique de mise en pression interne (figure 31) permet d'appliquer une pression de 0 à 10^7 Pa, soit de 0 à 100 bar. Un capteur de pression inséré dans le cylindre permet la lecture et l'enregistrement de la pression appliquée en temps réel.

Le cylindre est inséré dans un solénoïde produisant un champ longitudinal. Le solénoïde sera utilisé pour procéder à la polarisation du cylindre vers son aimantation anhystérétique. Les désaimantations seront réalisées à l'aide d'une bobine portable orientable.



figure 30. Le cylindre seul, puis présenté avec le système de flasques.



figure 31. La pompe hydraulique. On voit le cylindre sur le chemin de roulement, inséré dans le solénoïde.

8 capteurs magnétiques sont disposés le long du chemin de roulement. 5 d'entre eux sont disposés sous le cylindre, sur un axe parallèle à son axe de révolution, dans son plan méridien vertical. Nous verrons que cette duplication de capteurs, inutile pour des mesures en passage, s'avère nécessaire pour procéder à des mesures en cycle HPP, pour lesquelles le cylindre est immobile. 2 types de

capteurs sont utilisés : Mayer [MAYER] et bartington. Ce sont des capteurs tri-axes de type Fluxgate, de bande passante [0,1] KHz, et dont l'amplitude de mesure est $\pm 100 \mu T$. La figure 32 présente la disposition des capteurs.

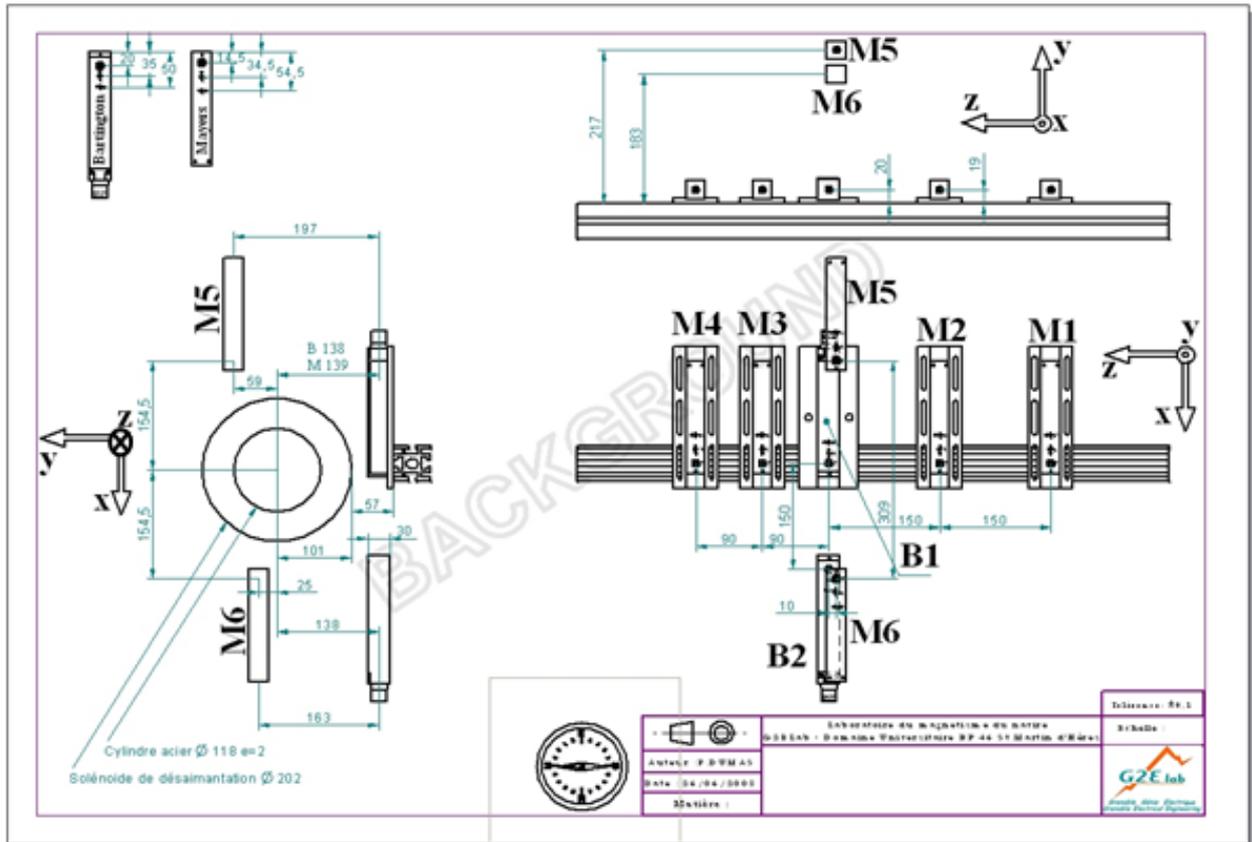


figure 32. Le cylindre, et la disposition des 8 capteurs (Plan F. Dumas). Noter que dans le référentiel du laboratoire, utilisé dans notre étude, l'axe longitudinal est donné par Z, l'axe vertical par Y et l'axe transverse par X.

III. Etude mécanique du cylindre

1. Un rappel de mécanique des milieux continus

Nous présentons ici quelques rappels essentiels à la compréhension de la répartition des contraintes dans le cylindre [ENSMP_COURS].

La mécanique des milieux continus est une généralisation de la mécanique des solides (ou des milieux indéformables). Elle prend en compte les déformations d'un milieu soumis à des contraintes, et permet de calculer les efforts *internes* qui se développent dans un milieu, en réaction à l'application d'une contrainte *externe*.

La somme de ces efforts internes est nulle, ce qui explique que leur bilan n'est pas pris en compte dans le cadre de la mécanique des solides. Ces forces internes s'expriment à l'aide du tenseur de contraintes de Cauchy (σ_{ij}), avec (i,j) dans $\{1;2;3\} \times \{1;2;3\}$. Les composantes σ_{ij} sont homogènes à une pression (en Pa). Ce tenseur se définit par rapport à un plan passant par le point M considéré. Il existe donc une infinité de tenseurs en un point M, un par plan. Le tenseur σ ne peut donc pas être représenté dans le solide. Il définit, par rapport à un plan choisi, un état de contraintes en un point M de ce plan.

Il est néanmoins possible d'attribuer au tenseur σ une signification physique à l'aide du principe de coupure.

On trace un plan de coupe Π passant par M. Dans la notation σ_{ij} , le second indice j indique que le plan d'étude Π est normal à l'axe j, tandis que le premier indice i indique de quelle composante du vecteur contrainte il s'agit.

Prenons Π orthogonal à \mathbf{e}_i : ce plan, qui découpe le volume en deux parties Ω_A et Ω_B , définit donc σ_{11} , σ_{21} et σ_{31} . Ce sont les trois composantes, par rapport au plan Π , du vecteur des contraintes \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}_{B \rightarrow A} = \sigma(M) \cdot \mathbf{n}_{A \rightarrow B} \quad (38)$$

$\mathbf{T}_{B \rightarrow A}$ définit les efforts internes surfaciques que Ω_B exerce sur Ω_A , et $\mathbf{n}_{A \rightarrow B}$ est la normale qui définit le plan, dirigée de A vers B. L'effort de cohésion $\mathbf{F}_{B \rightarrow A}$ que Ω_B exerce sur Ω_A , en M, définit par rapport à Π , est alors donné par :

$$\mathbf{F}_{B \rightarrow A} = \mathbf{T}_{B \rightarrow A} \cdot dS \quad (39)$$

dS est l'élément de surface autour de M.

La résolution d'un problème de mécanique des milieux continus consiste à appliquer le principe fondamental de la mécanique au tenseur des contraintes : à l'équilibre, $\text{div}(\sigma) + \mathbf{f} = 0$, \mathbf{f} représentant la densité des forces appliquées au système depuis l'extérieur (forces électromagnétiques, gravité,...).

2. Exemple

Dans le cas de la traction considéré figure 33, le tenseur de contraintes s'écrit, avec $\sigma \approx F_1/S > 0$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Soumises à ces contraintes externes, les deux parties auraient tendance à se disloquer. La « pression de recollement » que doit exercer Ω_2 sur M_0 de Ω_1 pour maintenir les deux parties jointives est alors donnée par (38) : c'est le vecteur contrainte $\mathbf{T} : \mathbf{T}_{2 \rightarrow 1} = \sigma(M_0) \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$.

La partie Ω_2 exerce donc sur la partie Ω_1 un effort dirigé selon $+\mathbf{x}$ puisque $\sigma(M_0) = \sigma > 0$: Ω_2 « retient » Ω_1 .

Selon que l'on se place d'un côté ou de l'autre d'un même plan de coupe, les efforts calculés seront de signes opposés puisque d'après (38), $\mathbf{T}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{T}_{2 \rightarrow 1}$: pour tout le solide, la somme des efforts internes sera nulle¹¹.

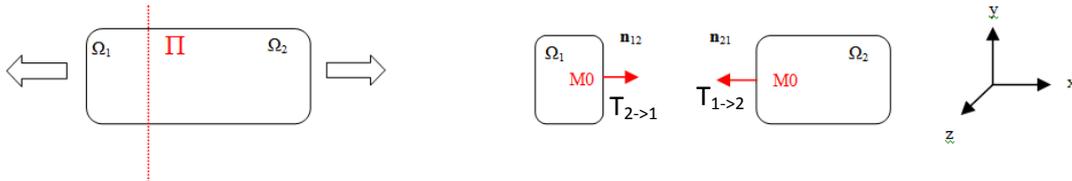


figure 33. Signification du tenseur de Cauchy à l'intérieur d'un matériau soumis à une traction.

Dans le cas de la traction présentée figure 33, puisque $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} = (1, 0, 0)$:

$$\mathbf{T}_{2 \rightarrow 1} = \sigma(M_0) \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Ainsi, M_0 subit de la part de Ω_2 une densité d'effort interne dans le sens $+\mathbf{x}$: $\mathbf{T}_{2 \rightarrow 1}(M_0) = +\sigma \mathbf{x}$

Ce même point subit de la part de Ω_1 une densité d'effort interne dans le sens $-\mathbf{x}$: $\mathbf{T}_{1 \rightarrow 2}(P) = -\sigma \mathbf{x}$

3. Application à notre prototype

Plaçons-nous maintenant dans le cas du cylindre en pression interne. Nous nous plaçons dans le repère cylindre classique (r, θ, z) et posons $P_{INT} > 0$ (bar) la pression interne appliquée au cylindre. On appelle $P_{ATM} > 0$ (bar) la pression atmosphérique.

La résolution du problème mécanique se fait en tenant compte des hypothèses suivantes :

1. Hypothèses des petites déformations : justifiée car les contraintes appliquées sont bien en deçà des limites élastiques de l'acier.
2. Cylindre en contraintes planes : le cylindre est libre à ses extrémités, par conséquent les composantes σ_{iz} sont nulles pour i dans $\{1; 2; 3\}$.
3. Cylindre supposé infini : les effets de bords mécaniques ne sont pas pris en compte. Les conditions appliquées aux limites sont les suivantes :

¹¹ L'hypothèse de Cauchy est en fait que les efforts calculés ne dépendent pas de Π , mais de la normale à Π .

- i. En $r=R_{INT}$, $\sigma_{RR} = -P_{INT}$. En effet, la pression isostatique¹² est appliquée selon $+e_r$, et la contrainte se définit par rapport à la normale extérieure à la surface considérée, soit ici $-e_r$. On retrouve bien ainsi qu'en $r=R_{INT}$:

$$dF = T \cdot dS = \sigma_{RR} \cdot n \cdot dS = -P_{INT} \cdot (-e_r) \cdot dS = P_{int} dS e_r.$$

Avec $P_{INT} > 0$, dF est bien orientée selon $+e_r$.

- ii. De même, en $r=R_{EXT}$, $\sigma_{RR} = -P_{ATM}$

La solution de ce problème est donnée par le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{RR} < 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} > 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

avec, en négligeant P_{ATM} :

$$\sigma_{RR}(r) = \frac{P_i \cdot R_{INT}^2}{R_{EXT}^2 - R_{INT}^2} \left(1 - \frac{R_{EXT}^2}{r^2} \right) \quad (43)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{P_i \cdot R_{INT}^2}{R_{EXT}^2 - R_{INT}^2} \left(1 + \frac{R_{EXT}^2}{r^2} \right) \quad (44)$$

Appliquons le principe de coupure 2 fois (figure 34).

- i. Une première fois avec le plan $\Pi_1 \perp e_r$: ce plan définit les 3 composantes σ_{iR} .

En appliquant (38) et (42), on trouve $T_{2 \rightarrow 1} = \sigma(M) \cdot n_{12} = \sigma(M) \cdot e_r = \sigma_{RR} e_r$. Ainsi, la partie 2 exerce sur la partie 1 une force dirigée vers $-e_r$: ceci est cohérent. En effet, si la partie 2 n'exerçait aucun effort sur la partie 1, sous l'effet de la pression, les deux parties s'écarteraient. Ainsi, la partie 2 doit exercer un effort qui tend à maintenir la partie 1 dans sa position d'origine : cet effort doit donc être dirigé de la partie 1 vers la partie 2.

¹² Dans ce document, on notera P la pression interne appliquée dans le cylindre. Par conséquent, $P = -\sigma_{RR}(R_{INT})$ en $R=R_{INT}$, c'est-à-dire la pression interne à laquelle est soumis le cylindre. On l'exprimera en bar (1 bar = 10^5 Pa).

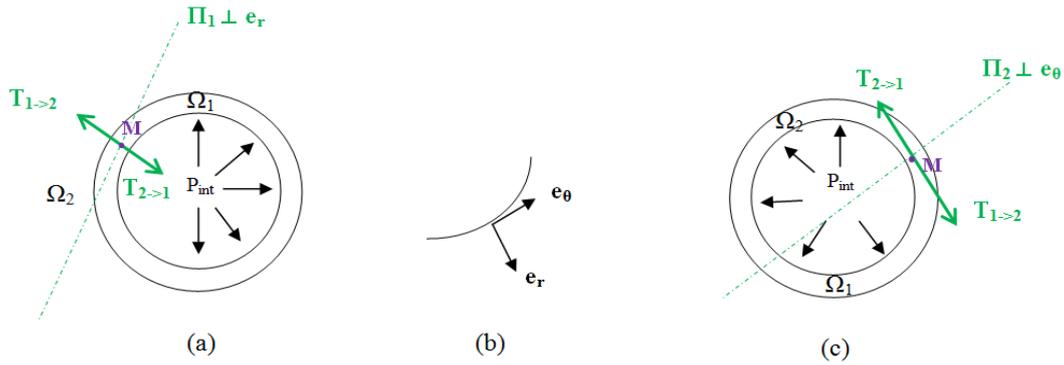


figure 34. Cylindre en pression interne a) le plan $\Pi_1 \perp e_r$. b) le repère de travail c) le plan Π_2 définit $\sigma_{i\theta}$

ii. Une seconde fois avec le plan $\Pi_2 \perp e_\theta$: ce plan définit les 3 composantes $\sigma_{i\theta}$.

Alors, $T_{2 \rightarrow 1} = \sigma(M) \cdot n_{12} = \sigma(M) \cdot e_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} e_{\theta\theta}$. De même, $T_{1 \rightarrow 2} = \sigma(M) \cdot n_{21} = -\sigma(M) \cdot e_{\theta\theta} = -\sigma_{\theta\theta} e_{\theta\theta}$

Ainsi, la partie 2 (resp. la partie 1) exerce sur la partie 1 (resp. la partie 2) une force dirigée vers $+e_\theta$ (resp. $-e_\theta$). En effet, les 2 parties doivent être maintenues en compression de manière à ce que le cylindre n'éclate pas vers l'extérieur.

Application numérique :

En utilisant les dimensions du cylindre, avec $P_{INT}=10^7$ Pascal, (100 bar), les valeurs obtenues par (44) pour $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de l'épaisseur e sont représentées figure 35.

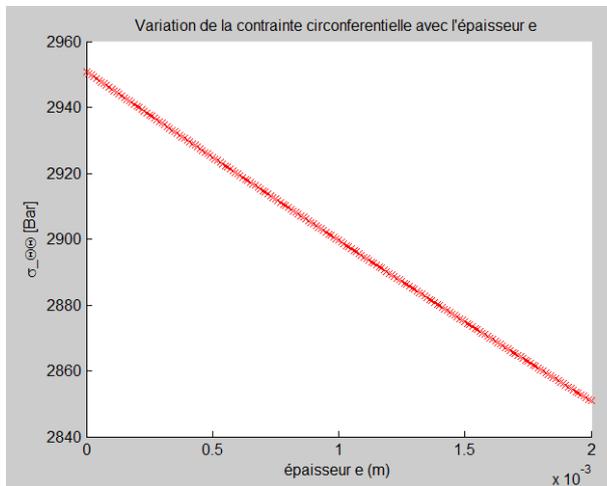


figure 35. Variation de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ selon l'épaisseur e du cylindre d'après (44) : la contrainte est homogène dans l'épaisseur (elle est de plus indépendante de l'abscisse Z).

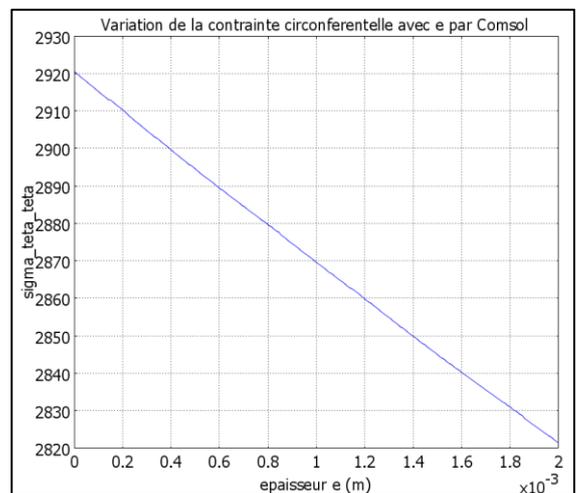


figure 36. Variation de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ par Comsol. Les résultats théoriques (44) sont cohérents avec ceux de la modélisation par éléments finis.

Le calcul montre que la contrainte orthoradiale est homogène selon l'épaisseur du cylindre. De plus, elle est supérieure à la contrainte radiale d'un facteur 30. Notons que $\sigma_{\theta\theta}$ peut-être approchée, dans le cas où l'épaisseur e est très inférieure au rayon moyen R_{MOY} , par :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P \cdot R_{MOY}}{e} \quad (45)$$

Une simulation par éléments finis a été réalisée sur Comsol, avec les hypothèses utilisées pour la résolution analytique précédente.

La figure 36 représente la solution calculée par Comsol pour $\sigma_{\theta\theta}$, en fonction de l'épaisseur e du cylindre. Les valeurs des contraintes obtenues par le calcul analytique (figure 35) et le logiciel sont identiques. La contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ est bien homogène selon l'épaisseur e . Son expression (44) montre qu'elle est de plus indépendante de l'abscisse z (hypothèse des contraintes planes).

IV. Conclusion de l'étude mécanique

Tout d'abord, le calcul de (43) et (44) avec les données de notre cylindre montre que la contrainte circonférentielle est environ 30 fois plus importante que la contrainte radiale. Cette dernière varie dans l'intervalle $[-10^7, 0]$ Pa. Par conséquent, les effets magnétostrictifs liés à cette contrainte seront négligés devant ceux liés à la contrainte circonférentielle. Le cadre de notre étude est donc celui d'une contrainte uniaxiale couplée à une aimantation tangentielle d'orientation quelconque.

Notons que l'angle formé entre la contrainte circonférentielle et l'aimantation dépend du champ inducteur. Notre étude présente donc la particularité de ne pas considérer uniquement le cas où le champ \mathbf{H} et la contrainte σ sont colinéaires.

Sous un champ inducteur vertical, la symétrie du problème et la géométrie en coque mince du cylindre imposent que l'aimantation est tangentielle au cylindre en tout point. Elle est donc orthoradiale. Dans ce cas, l'angle entre l'aimantation et la contrainte vaut $0(\pi)$ (figure 37).

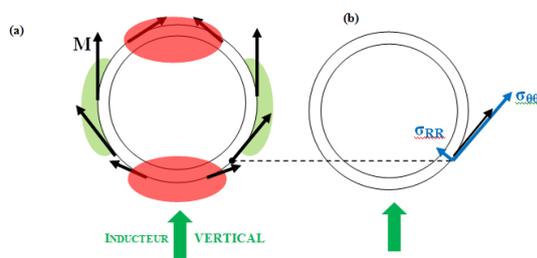


figure 37. (a) Distribution attendue de l'aimantation en champ inducteur vertical. En rouge (resp. vert), les zones de fort (resp. faible) champ démagnétisant. (b) La répartition des contraintes : en champ inducteur vertical, \mathbf{M} et σ_{RR} sont parallèles.

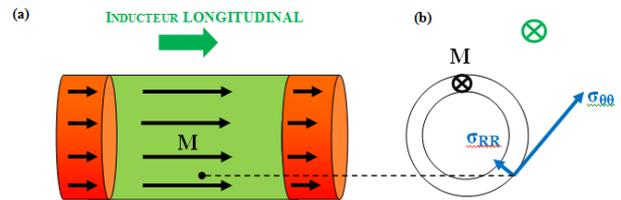


figure 38. (a) Distribution attendue de l'aimantation en champ inducteur longitudinal. En rouge (resp. vert), les zones de fort (resp. faible) champ démagnétisant. (b) La répartition des contraintes : en champ inducteur longitudinal, \mathbf{M} et σ_{RR} sont orthogonales.

Sous un champ inducteur longitudinal, l'aimantation sera longitudinale compte tenu de la symétrie du problème. Par conséquent, la contrainte et l'aimantation seront orthogonales (figure 38).

Dans le cas d'un champ inducteur croisé, nous verrons que l'aimantation se décompose en 2 composantes tangentielles au cylindre, l'une d'elle parallèle à la contrainte orthoradiale, l'autre lui étant orthogonale. Un modèle non scalaire mais vectoriel devra donc être établi.

Enfin, l'étude a également montré que dans le cas où la pression est appliquée depuis l'extérieur, les efforts de cohésion seront des contraintes de compression. C'est un point important à considérer pour l'extension de cette étude à un sous-marin en plongée. En effet, nous avons vu que les effets magnétoélastiques du fer sont différents en compression et en traction. Néanmoins, la démarche de modélisation des effets magnétoélastiques que nous introduisons dans les parties III et IV reste en tout point identique dans les deux cas. Par conséquent, elle est applicable en pression externe, mais les valeurs d'induction et d'aimantation obtenues seront différentes, ainsi que les coefficients des deux modèles présentés.

V. Intérêt et caractère général du prototype

1. Point de vue magnétique

Le cylindre présente des effets de champ démagnétisant importants.

Ainsi, sous un champ inducteur vertical, cet effet de forme doit conduire à un fort champ démagnétisant en dessous et au-dessus de l'axe longitudinal du cylindre ($Y=\pm R_{INT}$). A contrario, l'effet de champ démagnétisant sera moins important en $Y=0$: en effet, l'aimantation a tendance à rester tangentielle à la surface dans le cas d'une coque mince (figure 37).

De même, sous un champ inducteur longitudinal, l'aimantation, en raison de la symétrie du problème, doit être indépendante de l'angle polaire θ , et le champ démagnétisant doit être très faible au centre du cylindre. On s'attend néanmoins à trouver un champ démagnétisant plus important aux extrémités du cylindre, en raison des effets de bord (figure 38).

Ainsi, ce prototype, bien qu'extrêmement simplifié, met en évidence des effets de forme de même type que sur un sous-marin : il présente un champ démagnétisant différent en champ inducteur longitudinal et vertical. Sa géométrie ouverte ne présente qu'une seule contrainte mécanique principale : le système de flasques et la géométrie du dispositif sont tels que l'état de contrainte est approximativement uniaxial, avec une contrainte principale circonférentielle. Il simplifie donc la compréhension des interactions entre champ et contraintes. Pour une structure de type sous-marin, d'un point de vue uniquement magnétique, la géométrie fermée engendrerait un champ démagnétisant modifié essentiellement à ses extrémités, mais elle ne remettrait pas en cause notre démarche.

2. Point de vue mécanique

Le cylindre peut être considéré comme la première étape de la modélisation d'une coque, pour lequel une seule contrainte serait active. La prise en compte d'une structure de type sous-marin impose de fermer cylindre en soudant les flasques à ses extrémités¹³.

Dans ce cas, si le cylindre est en déplacement longitudinal libre (c'est-à-dire que le cylindre peut se dilater en longueur), des contraintes longitudinales σ_{zz} (dans l'axe z du cylindre) se développent. A la différence des contraintes radiales σ_{RR} qui restent toujours négligeables, les contraintes longitudinales ne pourront être négligées dans ce cas¹⁴.

Toutefois, l'étude du couplage entre les contraintes et l'aimantation mettrait en jeu 2 contraintes orthogonales entre elles (contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ et longitudinale σ_{zz}), couplées à une aimantation \mathbf{M} , qui, dans le cas d'une coque mince, restera tangentielle à la géométrie. On augmenterait alors la complexité de l'étude en combinant deux grandeurs vectorielles. Ainsi, notre approche permet de caractériser simplement un seul type de contrainte, sans altérer le caractère général de l'étude.

Pour le sous-marin, et comme mentionné dans la partie précédente, il faudrait également tenir compte des signes opposés des contraintes

En conclusion, ce prototype nous permet donc d'étudier différentes combinaisons de champs et de contraintes sans entrer dans la complexité d'un sous-marin, mais en étant suffisamment général pour poser les bases d'une éventuelle extension à son étude. Notons que pour réaliser une maquette, le calcul des dimensions de celle-ci doit respecter d'une part, une contrainte d'équivalence magnétique (même niveau d'aimantation), et d'autre part, une contrainte d'équivalence mécanique

¹³ Ceci nécessite de souder les flasques au cylindre. De manière à isoler les effets magnétoélastiques du cylindre, il faut, comme pour le cylindre ouvert, utiliser des flasques amagnétiques. Or, la réalisation de cette soudure est techniquement très délicate, de l'acier devant être soudé à un matériau de type laiton.

¹⁴ Si le cylindre est fermé et bloqué à ses extrémités, ces contraintes longitudinales seront plus faibles (rapport \approx 4) que dans le cas précédent. Si le cylindre est fermé et libre à ses extrémités, le rapport est de l'ordre de 2. Dans les 2 cas, les contraintes longitudinales σ_{zz} ne pourront être négligées devant les contraintes orthoradiales $\sigma_{\theta\theta}$.

(même niveau de contraintes). Les deux dimensions de maquette obtenues ne seront pas nécessairement compatibles entre elles. Dans ce cas, l'utilisation d'un matériau de perméabilité magnétique différente pourrait résoudre ce point.

Chapitre III - Un modèle en induction

Le modèle de Jiles et Atherton est un modèle en aimantation \mathbf{M} . En particulier, il nécessite la connaissance de la loi $\mathbf{M}_{ANH}(\sigma, H)$. Or, la distribution de l'aimantation \mathbf{M} au sein d'un matériau ne peut généralement être mesurée que sur des structures sans champ démagnétisant.

Néanmoins, les courbes produites par ce modèle pour la variation de l'aimantation \mathbf{M} en un point du matériau sont en tous points similaires à celles mesurées à ERT-CMF pour la variation de l'induction extérieure \mathbf{B} , mesurée sur des capteurs déportés. Il semble donc que le modèle de Jiles-Atherton puisse être utilisé pour la modélisation de l'induction extérieure \mathbf{B} au voisinage d'un matériau soumis à des contraintes mécaniques croissantes.

Dans cette partie, nous introduisons les différents types de mesures réalisés au LMMCF sur notre prototype, en particulier la caractérisation magnétique du cylindre. Celle-ci a consisté d'une part à mesurer les inductions induites et anhystérétiques sous différents champs inducteurs, et sous différentes pressions, et d'autre part, à réaliser des cycles HPP sous différents champs inducteurs. Les mesures montrent que l'induction mesurée est, dans les deux cas, une fonction linéaire du champ inducteur.

De plus, lors des cycles HPP, l'induction \mathbf{B} , sur chacun des capteurs, migre vers sa valeur anhystérétique. Cette similarité de comportement que nous allons démontrer trouve une justification théorique dans le cadre des coques ferromagnétiques minces. Ainsi, le modèle de Jiles et Atherton peut être également utilisé pour modéliser l'induction magnétique extérieure.

Ceci étant posé, nous présentons tout d'abord une solution analytique de l'équation de Jiles-Atherton pour le cas d'un champ inducteur vertical. Dans le cas d'un champ inducteur longitudinal, il est possible de déduire une solution analytique approchée à l'équation de Jiles-Atherton. L'induction étant linéaire vis-à-vis du champ inducteur, une solution analytique à la loi de variation de l'induction avec la contrainte mécanique est proposée pour un champ inducteur quelconque.

A. Les mesures réalisées

I. Mesures de signature magnétique en passage et mesure de cycle HPP

Deux types de mesures seront réalisés sur notre prototype : des mesures en passage, et des mesures lors d'un cycle HPP.

Dans le cas d'une mesure de signature en passage, le cylindre est déplacé au-dessus des capteurs magnétiques à l'aide du chemin de roulement, sur une distance de 3.4 m. On effectue 99 acquisitions pendant le déplacement du cylindre. Le centre du cylindre parcourt donc l'axe longitudinal z depuis l'abscisse $z=-1.7\text{m}$ jusqu'à $z=1.7\text{ m}$. Ainsi, au 50^{ème} échantillon, le centre du cylindre est approximativement au-dessus du noyau correspondant à l'axe vertical du capteur B1¹⁵.

Le résultat de cette mesure est donc équivalent à celui qui serait obtenu par déplacement des capteurs le long du cylindre. On obtient alors, pour chacun des 8 capteurs, 3 courbes représentant l'évolution, selon l'axe z , des 3 composantes de l'induction mesurée. Ce type de courbe est représenté figure 39. Sur cette figure, le cylindre a été désaimanté, puis soumis à un champ inducteur croisé de composantes longitudinale $B_{0L}=-30\mu\text{T}$ et verticale $B_{0V}=-58\mu\text{T}$ ¹⁶. On réalise ensuite une mesure en passage de l'induction induite par ce champ.

L'autre type de mesures réalisé est dédié à l'étude des cycles HPP. Lorsque le cylindre est mis sous pression, on souhaite suivre l'évolution de l'induction mesurée sur chacun des capteurs. Dans ce cas, le cylindre est immobile, son centre est alors aligné à la verticale du capteur B1 ($z=0$). On effectue 2000 échantillonnages sur les capteurs, pendant un cycle HP ou HPP de 30s.

¹⁵ Voir la partie A-II pour les problèmes d'alignement du centre du cylindre avec le noyau vertical du capteur B1.

¹⁶ Dans ce document, un champ inducteur croisé fait référence à un champ inducteur possédant une composante longitudinale et une composante verticale non nulles : $\mathbf{H}=\mathbf{H}_L + \mathbf{H}_V$. Un inducteur mono axial désignera un champ inducteur ayant une seule composante non nulle : $\mathbf{H}=\mathbf{H}_L$ ou $\mathbf{H}=\mathbf{H}_V$. On parlera indifféremment d'un champ inducteur \mathbf{H} (A/m) ou d'une induction appliquée $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ (T).

On obtient ainsi l'évolution de l'induction en fonction de la pression, mesurée sur chacun des capteurs. La figure 40 représente les 3 courbes obtenues sur le capteur central B1, lors d'un cycle HPP, sous le même champ inducteur que figure 39. Des courbes similaires sont obtenues sur les autres capteurs.

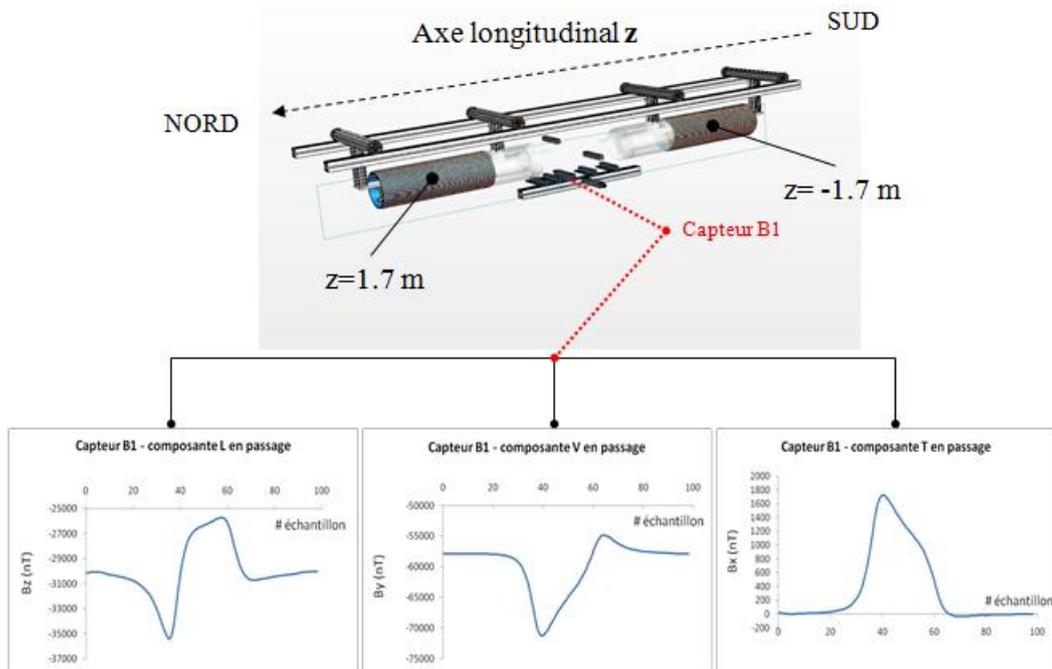


figure 39. Composantes longitudinale (L), verticale (V) et transverse (T) de l'induction relevée sur le capteur B1 lors d'une mesure en passage. Ici, le cylindre, initialement désaimanté, est soumis à un champ inducteur croisé $B_{0L} = -30 \mu\text{T}$ + $B_{0V} = -58 \mu\text{T}$. Les échantillons 0 et 99 correspondent au cylindre positionné respectivement en $Z = -1,7 \text{ m}$ et $Z = 1,7 \text{ m}$.

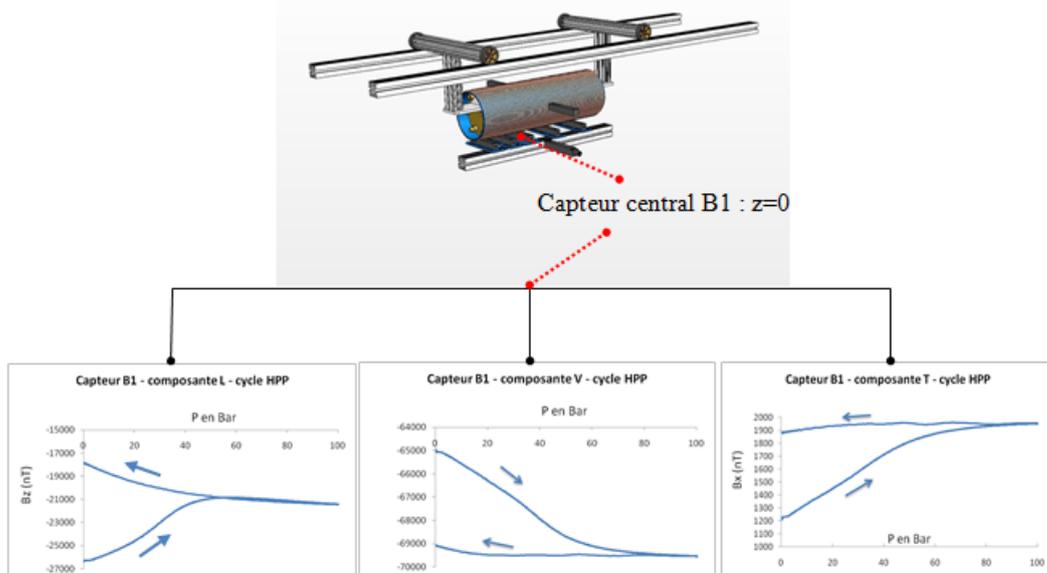


figure 40. Evolution des 3 composantes (longitudinale, verticale et transverse) de l'induction mesurée sur le capteur B1 lors d'un cycle HPP. Le champ inducteur croisé est le même que sur la figure 39. Le cylindre est fixe. 2000 échantillons sont réalisés en 30 secondes.

II. Principe de lecture des mesures

Une signature magnétique en passage nous renseigne sur l'évolution spatiale de l'induction magnétique externe **B**. Elle ne renvoie donc pas une valeur unique mais plusieurs mesures dont le nombre correspond à la fréquence d'échantillonnage choisie sur le trajet parcouru par le cylindre lors de la mesure. Il est donc important de préciser quelles sont les valeurs que nous choisissons dans cette étude pour caractériser une induction induite ou une induction anhystérétique.

Une valeur caractéristique de la signature en passage est celle de l'induction mesurée sur un capteur lorsque le cylindre est centré à sa verticale. En pratique, ceci est délicat à réaliser. En effet, pour obtenir une mesure en passage, le déplacement du cylindre se fait à l'aide d'un moteur d'entraînement. Il est en pratique difficile de positionner parfaitement le centre géométrique du cylindre au-dessus du noyau vertical d'un capteur. Or, une très légère erreur de positionnement entraîne une forte variation de la mesure relevée (figure 41).

Néanmoins, à l'échantillon 50, le centre du cylindre est très proche de la verticale du noyau Y (vertical) du capteur B1.

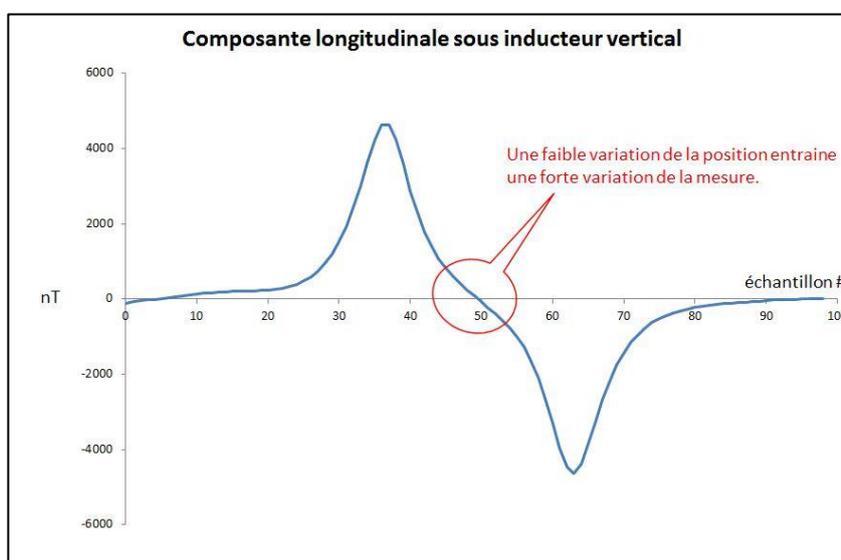


figure 41. Composante longitudinale B1_BZ lors de la mesure en passage sous un champ inducteur vertical $BV=80\mu T$. La composante longitudinale mesurée sur le capteur B1 en champ inducteur vertical varie fortement avec la position de la mesure. Lorsque le cylindre est dans la zone centrale des capteurs, un échantillonnage est réalisé tous les 2 cm. 200 nT séparent alors la mesure 49 de la mesure 50.

Les figures 42 et 43 représentent les 3 courbes caractéristiques d'un dipôle magnétique d'axe **Z**. Sur ces figures, le cylindre est soumis à un champ inducteur longitudinal $BOL=40\mu T$.

En effet, sous un champ inducteur longitudinal, l'invariance du problème par rotation autour de l'axe z impose une aimantation longitudinale, et invariante par rotation autour de l'axe **Z** en tous points du cylindre. Par conséquent, l'aimantation globale du cylindre, somme des aimantations ponctuelles, est longitudinale. Le cylindre peut donc être assimilé à un dipôle magnétique d'axe **Z**.

Les mêmes considérations de symétrie en champ inducteur vertical conduisent à une aimantation globale verticale (il y a compensation des composantes transverses de part et d'autre du plan d'équation $X=0$, et la composante longitudinale de l'aimantation est nulle en tout point). Le cylindre est donc assimilable à un dipôle magnétique d'axe vertical **Y**.

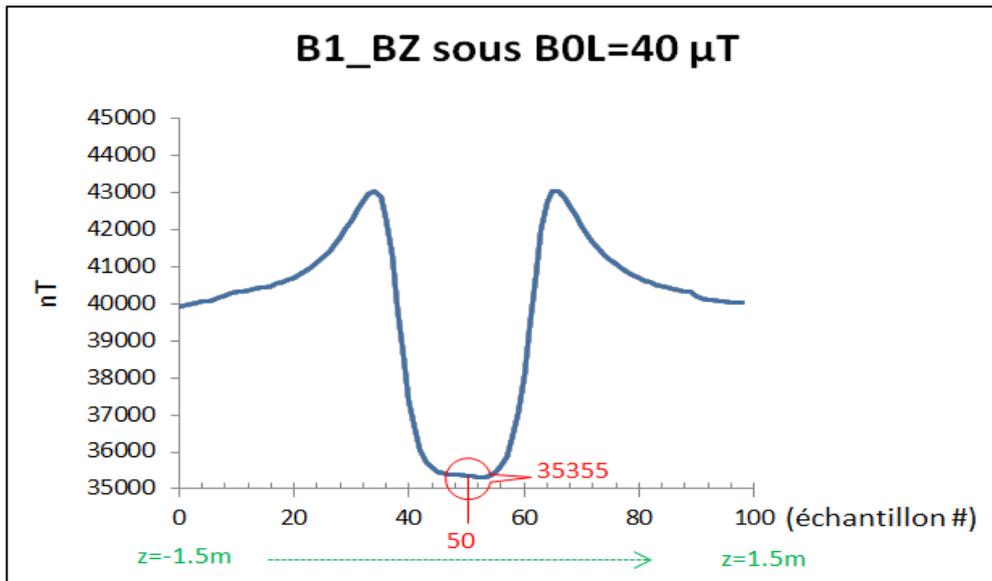


figure 42. Composante longitudinale $B1_BZ$ de l'induction relevée sur le capteur central B1, sous 0 bar, et sous un champ inducteur $BOL=40\mu T$. La valeur de l'induit est $B_{IND}=35355$ nT. La valeur de l'induit net¹⁷ est donc -4645 nT. En effet, au point où se situe le capteur B1, l'induction créée par la matière aimantée est de sens opposé à l'induction appliquée.

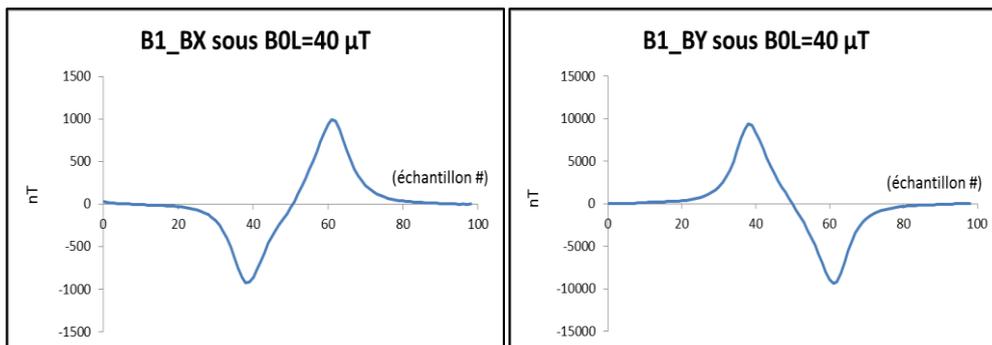


figure 43. Composantes transverse $B1_BX$ et verticale $B1_BY$ lorsque le cylindre est soumis à un champ inducteur longitudinal $BOL=40\mu T$. Les deux figures sont caractéristiques des composantes en signature d'un dipôle d'axe orthogonal à X et Y . En toute rigueur, $B1_BX$, faible devant les autres composantes, devrait être nul. Il ne l'est pas du fait de la non-homocentricité des noyaux de mesure BX et BZ, qui sont décalés respectivement de 15 et 30 mm par rapport au plan vertical médian du cylindre (figure 32). On constate la quasi nullité attendue des composantes transverse et verticale de l'induction mesurée sur le capteur central B1, sous le centre du cylindre (échantillon 50) : le cylindre est assimilable à un dipôle magnétique d'axe Z .

¹⁷ La mesure lue sur le capteur est la somme de l'induction $B0$ appliquée par le simulateur, et de l'anomalie magnétique B_M créée par la matière aimantée. L'induit net est la valeur de l'anomalie magnétique B_M sans permanent. Une géométrie sans champ démagnétisant ne produit pas d'anomalie magnétique.

B. Caractérisation magnétique en passage

Dans un premier temps, le cylindre a été caractérisé d'un point de vue magnétique. Les mesures en passage des inductions induites et anhystérétiques relevées sur chaque capteur ont été réalisées sous différentes pressions.

En effet, la connaissance de l'induction induite est une donnée fondamentale en magnétisme du navire. Elle contribue à l'anomalie magnétique qui rend détectable un navire.

La connaissance des inductions anhystérétiques est également une donnée primordiale. En effet, les mesures réalisées par la Marine montrent que l'aimantation permanente verticale des navires tend vers la composante verticale de l'aimantation anhystérétique. En effet, dans l'hémisphère Nord, la composante verticale du champ magnétique terrestre est de sens constant, indépendamment du cap suivi lors des navigations¹⁸. Les navires sont donc toujours soumis à un champ magnétique vertical de même sens, et sous l'effet des contraintes mécaniques, leur aimantation tend vers la valeur anhystérétique en champ vertical. Or, l'aimantation anhystérétique est un majorant de l'aimantation (figure 18). Par conséquent, le risque de détection magnétique du navire est maximum. Des bobines d'immunisation sont alors utilisées de manière à compenser exactement cette anomalie prédictible.

Les deux autres composantes du champ magnétique terrestre (transverse et longitudinale) sont fonctions du cap suivi, et donc variables. Par conséquent, on ne mesure pas sur l'aimantation permanente des navires des composantes transverse et longitudinale égales à celles de l'aimantation anhystérétique correspondante au champ magnétique terrestre. Néanmoins, les mesures effectuées par l'ERT-CMF en champ contrôlé confirment que ces deux composantes évoluent bien, sous l'effet des contraintes mécaniques, vers leur valeur anhystérétique.

Ce comportement est donc en accord avec la loi d'approche de Jiles-Atherton.

I. Protocole expérimental de mesures

1. Protocole de désaimantation

L'état magnétique initial du cylindre avant les mesures des inductions induites et anhystérétiques est un état désaimanté, réalisé en pression interne nulle.

Dans un premier temps, le champ magnétique ambiant est annulé grâce au simulateur. Il est alors nécessaire de positionner le cylindre le plus loin possible des capteurs, à l'extrémité Sud du bâtiment. Ainsi déplacé, une éventuelle anomalie magnétique créée par l'aimantation permanente¹⁹ du cylindre est alors négligeable lors de la mise en champ ambiant nul sur les capteurs de mesure qui servent au contrôle du champ ambiant.

La nullité du champ est vérifiée par la mesure de l'induction sur chaque capteur.

Le cylindre est ensuite désaimanté grâce à une bobine d'induction portable reliée à une alimentation de courant alternatif, produisant un champ variable.

On rappelle que la désaimantation consiste à soumettre le matériau à un champ magnétique sinusoïdal d'amplitude lentement décroissante, en champ inducteur nul. L'amplitude initiale doit être la plus grande possible pour pouvoir effacer l'aimantation permanente maximale du cylindre, et la décroissance lente. Il est nécessaire que la fréquence du cyclage reste modérée de manière à se prévenir des courants de Foucault qui empêcheraient le champ interne d'atteindre sa valeur maximale. Le cyclage serait alors moins efficace, et la décroissance du champ mal contrôlée.

Une mesure en passage de l'aimantation du cylindre est enfin réalisée afin de contrôler l'induction résiduelle mesurée sur les capteurs. Idéalement, celle-ci doit être nulle. En pratique, ce n'est pas rigoureusement le cas. Dans nos mesures, le cylindre est considéré comme désaimanté si les

¹⁸ En fait, ce n'est pas tout à fait le cas. Voir l'annexe III.

¹⁹ Nous rappelons que l'aimantation permanente est l'aimantation résiduelle dans un matériau lorsque le champ *externe* H_0 est nul. L'aimantation rémanente est l'aimantation résiduelle lorsque le champ *interne* H_I est nul. Ces deux valeurs ne sont égales que pour une géométrie sans champ démagnétisant H_D pour laquelle le champ interne et le champ externe sont identiques : $H_I = H_0 + H_D = H_0$

valeurs des amplitudes crête à crête des 3 composantes de l'induction relevées sur le capteur B1 de la mesure en passage sont toutes les trois inférieures à 200nT. Cette valeur correspond à une très bonne désaimantation (inférieure à 5% de l'induit).

La figure 44 représente, pour le capteur central B1, la signature magnétique en passage réalisée après une désaimantation.

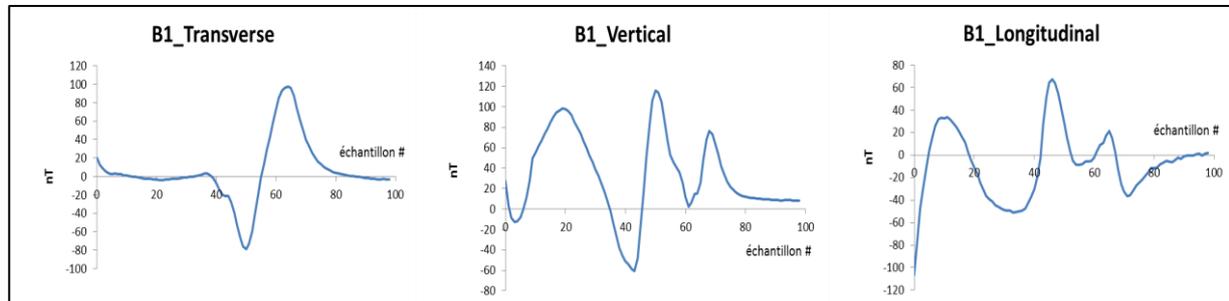


figure 44. Signature en passage relevée sur le capteur central B1 après une désaimantation.

2. Protocole de mesure des induits

Toutes les mesures ont été réalisées en pression statique : pour une valeur de pression interne donnée, les mesures d'induit et d'anhystrétique étaient réalisées pour divers champs.

Le début du protocole de mesures consistait donc à mesurer les inductions induites, puis anhystrétiques, sous une pression interne maintenue à 0 bar, puis à faire varier le champ (inducteur ou de polarisation pour les anhystrétiques). Une fois la série de mesures terminée, la pression était ramenée à 0 bar, puis le protocole de désaimantation réalisé. La pression était alors augmentée par paliers de 10 bar, et une nouvelle série de mesures était réalisée. Ce protocole a été répété jusqu'à la pression interne maximale de 100 bar.

Ce protocole nous est apparu comme le plus judicieux d'un point de vue pratique. En effet, toutes les mesures étant réalisées en champ faible, l'aimantation interne du cylindre suit la loi de Rayleigh. Deux mesures successives d'induits réalisées à pression constante, sous des champs inducteurs croissants ne nécessitent pas une désaimantation intermédiaire : l'aimantation étant linéaire dans la zone de Rayleigh, aucun des champs inducteurs ne peut conférer au cylindre une aimantation permanente. Il est ainsi possible d'enchaîner, à pression interne maintenue dans le cylindre, les mesures des induits sous des champs inducteurs d'amplitude croissante.

Pour les anhystrétiques, le principe d'obtention de la courbe permet également d'enchaîner plusieurs mesures à pression fixe. Le protocole d'obtention des inductions anhystrétiques est décrit plus tard.

Dans un premier temps, les mesures des induits ont été réalisées avec des champs inducteurs mono axiaux. Celles-ci produisent des signatures magnétiques proches de celle d'un dipôle magnétique. Ce résultat était attendu.

Les mesures réalisées ensuite avec des champs inducteurs croisés nous ont permis de conclure sur la linéarité de l'induction mesurée sur les capteurs par rapport au champ inducteur. Ceci est un résultat classique en magnétisme de navire. Cependant, ces résultats vont être validés expérimentalement quel que soit le niveau de contraintes.

Les valeurs des champs inducteurs mono axiaux verticaux sont comprises dans l'intervalle $[-80,80]$ μ T. Celles des champs inducteurs mono axiaux longitudinaux dans l'intervalle $[-40,40]$ μ T. L'amplitude plus faible choisie pour les champs inducteurs longitudinaux s'explique par la dynamique des capteurs. Celle-ci est limitée à $[-100,100]$ μ T. Or, le champ démagnétisant qui se développe dans le cylindre pour un champ inducteur longitudinal est moindre que dans le cas d'un champ inducteur vertical (figure 37). Par conséquent, l'aimantation dans le cylindre en champ inducteur longitudinal est plus importante qu'avec un champ inducteur vertical de même intensité. Si la somme de l'induction

mesurée résultante de cette aimantation, et de l'induction appliquée par le simulateur dépasse $100 \mu\text{T}$ en norme, le capteur sature. C'est le cas avec un champ inducteur longitudinal $B_{OL}=80\mu\text{T}$.

3. Protocole de mesure des inductions anhystériques

Le protocole expérimental d'obtention de la courbe anhystérique $B_{ANH}(P_0, H)$, où P_0 est la pression interne constante, et H le champ inducteur, est très semblable à celui d'une désaimantation, mais le champ inducteur (ou champ de polarisation dans ce cas) n'est pas nul.

La pression interne dans le cylindre, et le champ de polarisation étant maintenus constants, on procède à un cyclage en champ sinusoïdal décroissant. Ce cyclage était réalisé à l'aide du solénoïde longitudinal que l'on peut voir figure 31. L'aimantation anhystérique est atteinte lorsque l'augmentation de l'amplitude du champ de cyclage H_{MAX} conduit à la même mesure de l'induction anhystérique relevée.

La courbe anhystérique ne peut être construite que point par point (figure 45). Chacun de ces points correspond à la valeur de l'aimantation anhystérique M_{ANH} sous un champ de polarisation H_{ANH} fixe. On augmente par paliers le champ H_{ANH} jusqu'à sa valeur maximale souhaitée.

Pour notre part, nous obtenons la courbe anhystérique $B_{ANH}(P_0, H)$ sur un capteur, en prenant par exemple la valeur lue sur le capteur central B1 lorsque le cylindre est à sa verticale.

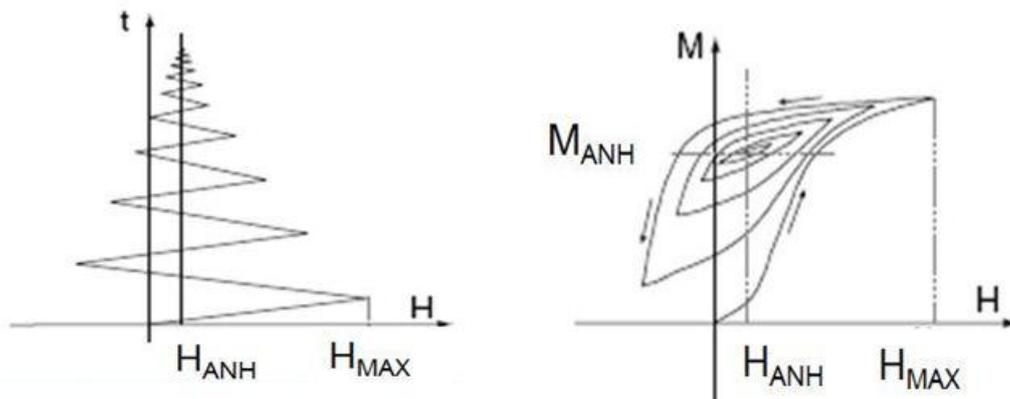


figure 45. Méthode d'obtention d'une courbe anhystérique sous une pression interne P_0 constante.

II. Résultats de la caractérisation magnétique

1. Analyse des résultats pour les induits

a. Les induits suivent la loi de Rayleigh des champs faibles

Les induits ont été mesurés pour des pressions variant de 0 à 100 bar.

Les résultats montrent, en champ inducteur vertical ou longitudinal, que l'induction suit bien la loi des champs faibles (figures 46 et 47) : elle est bien proportionnelle au champ inducteur. Par conséquent :

$$\mathbf{B}_{IND}(\lambda \mathbf{BOL}) = \lambda \mathbf{B}_{IND}(\mathbf{BOL}) \quad (46)$$

$$\mathbf{B}_{IND}(\rho \mathbf{BOV}) = \rho \mathbf{B}_{IND}(\mathbf{BOV}) \quad (47)$$

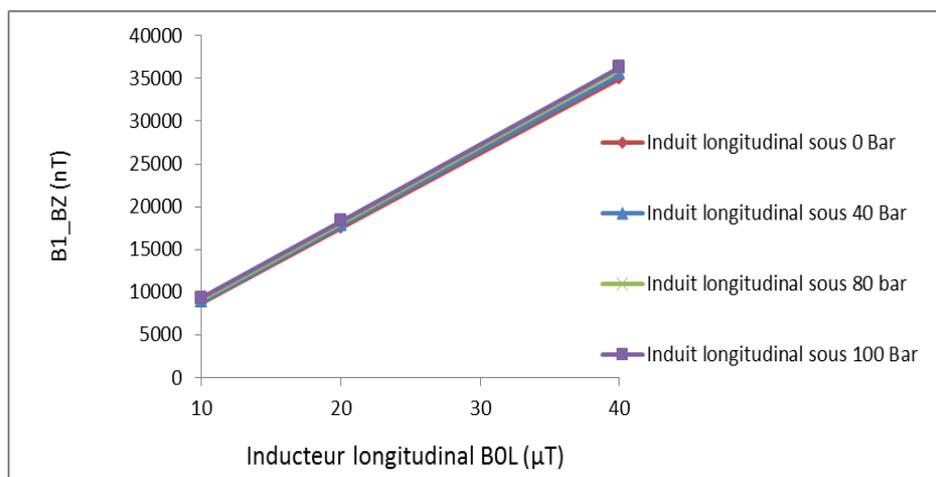


figure 46. Induits longitudinaux mesurés sous différentes pressions : l'induction mesurée a un comportement linéaire vis à vis du champ inducteur pour toutes les pressions. Néanmoins, les induits varient avec la pression : voir figure 49.

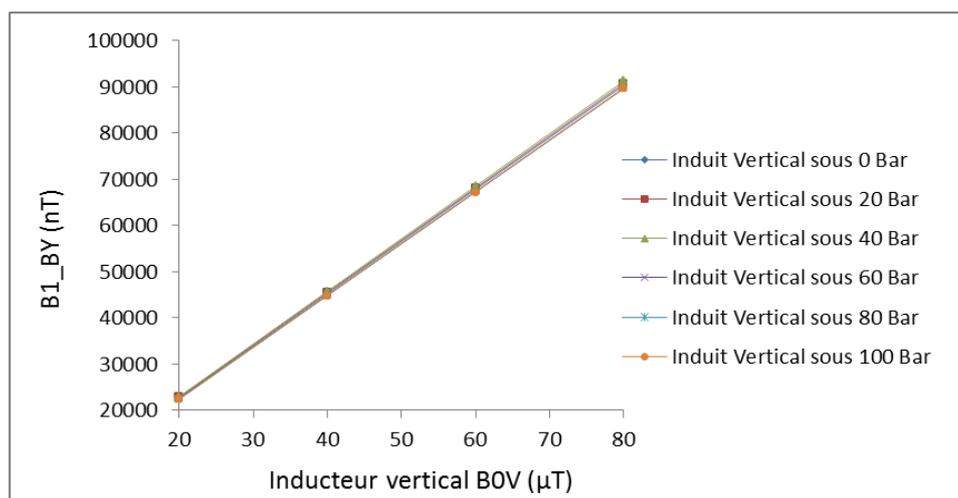


figure 47. Induits verticaux mesurés pour des pressions différentes : l'induction mesurée a un comportement linéaire vis à vis du champ inducteur pour toutes les pressions.

b. Les inductions mesurées varient avec la pression

D'autre part, les inductions induites sont modifiées avec la pression (figures 48 et 49). Les variations relevées sont plus importantes en champ inducteur longitudinal. Les mêmes tendances seront constatées pour les anhystérétiques : ceci est dû à l'effet de forme en longitudinal, moindre qu'en vertical, et qui amplifie toutes les variations mesurées d'une caractéristique magnétique du matériau [JILES_1998]. En effet, rappelons que le champ démagnétisant **HD** est lié à l'aimantation **M** par le tenseur de forme [N] :

$$\mathbf{HD} = -[\mathbf{N}] \cdot \mathbf{M} \quad (48)$$

Dans le cas particulier d'une sphère, le tenseur [N] est diagonal, et ses 3 composantes égales à 1/3. On les appelle les facteurs de forme. Plaçons-nous dans ce cas simplificateur. Il va nous permettre de mettre en évidence les effets de compétition entre les perméabilités et l'effet de forme.

En notant μ_r la perméabilité réversible, **HO** le champ appliqué, et **HI** le champ interne :

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\mathbf{HI} = (\mu_r - 1)(\mathbf{HO} + \mathbf{HD}) \quad (49)$$

Par conséquent :

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{HO}}{N + \frac{1}{\mu_r - 1}} \quad (50)$$

Considérons alors deux cas distincts :

- Si le facteur de forme N vérifie $N \gg 1/\mu_r$, alors :

$$\mathbf{M} \sim \frac{\mathbf{HO}}{N} \text{ pour } N \gg \frac{1}{\mu_r} \quad (51)$$

En champ inducteur vertical, nous sommes proches de cette configuration (figure 48) : le facteur de forme limite la variation de l'aimantation dans le cylindre, et une variation de perméabilité magnétique réversible sera moins visible par une mesure d'induction externe que dans le cas d'un champ inducteur longitudinal.

- Si le facteur de forme vérifie $N \ll 1/\mu_r$, alors

$$\mathbf{M} \sim \mu_r \mathbf{HO} \text{ pour } N \ll \frac{1}{\mu_r} \quad (52)$$

En champ inducteur longitudinal, nous sommes proches²⁰ du cas (52). Par conséquent, dans cette configuration, une faible variation de μ_r modifiera davantage l'aimantation dans le cylindre, est donc la valeur de l'induction externe mesurée (figure 49). Les écarts relatifs d'induits entre 0 et 100 bar sont plus importants qu'en champ inducteur vertical (26.2% contre 6.4% en champ vertical).

²⁰ Nous ne sommes pas exactement dans ce cas ; néanmoins, le facteur de forme vaut ici $4 \cdot 10^{-2}$ (cf. mesures d'inductions anhystérétiques).

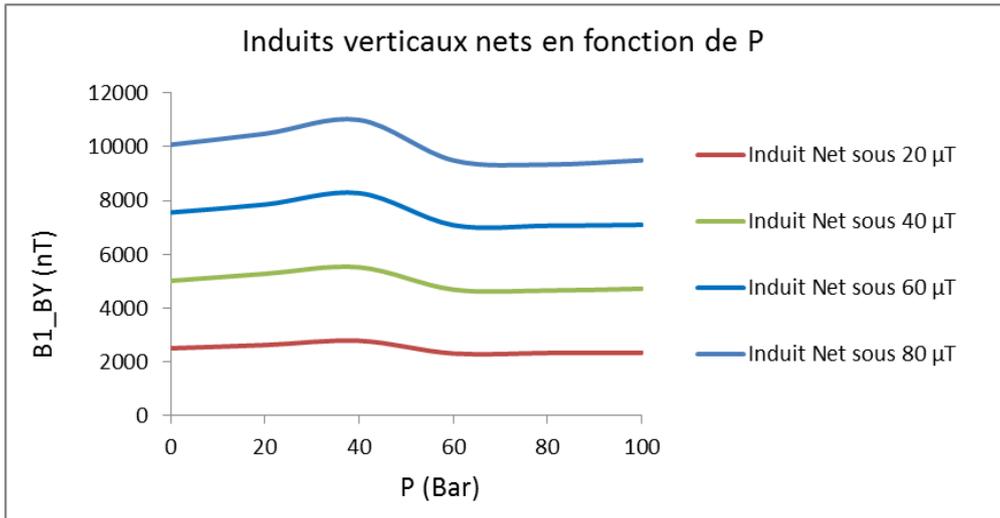


figure 48. Induits en champ inducteur vertical **BV**, en fonction de la pression. On a soustrait la valeur du champ inducteur. Les variations d'induits mesurées avec la pression sont bien proportionnelles à la valeur du champ inducteur : la variation maximale se situe entre les valeurs à 40 bar et 100 bar pour toutes les valeurs du champ inducteur. Cette variation a une valeur moyenne de 600 nT sous **BV**=80 µT, correspondant à une variation relative maximale de 6.4 % par rapport à la valeur sous 100 bar.

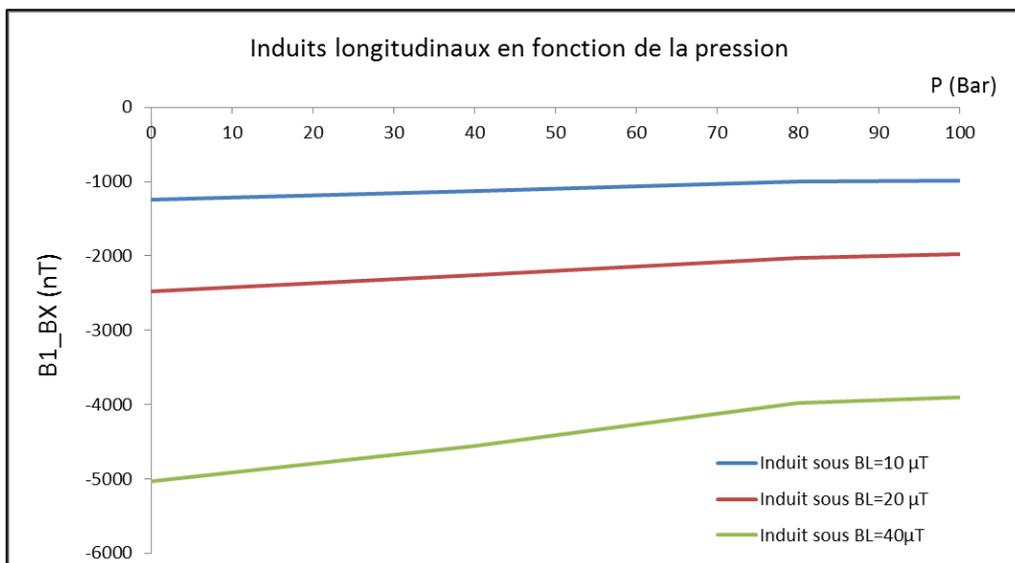


figure 49. Induits longitudinaux en fonction de la pression sous différents champs inducteurs. On a soustrait la valeur du champ inducteur. Les variations d'induits mesurées entre 0 et 100 bar sont bien proportionnelles à la valeur du champ inducteur : 248 nT sous **BL**=10 µT, et 1046 sous **BL**=40 µT. Les écarts moyens relatifs mesurés entre 0 et 100 bar sont de 26.2 % par rapport à la valeur mesurée sous 0 bar.

c. Caractérisation des perméabilités magnétiques avec la pression

Il est possible de caractériser les variations des perméabilités magnétiques réversibles $\mu_r(P)$ en champ inducteur vertical ou longitudinal. La méthode consiste à utiliser un algorithme de résolution de problème magnétostatique direct, tel que Flux3D ou Locapi. Ce dernier, développé au sein du laboratoire ERT-CMF [CHADEBEC_2001] est introduit dans la partie IV. Il permet la résolution de problèmes magnétostatiques inverses et directs.

De manière à déterminer la valeur de la perméabilité magnétique $\mu_r(P)$, nous calculons la signature magnétique prédite sur les capteurs par Locapi pour différentes valeurs de μ_r . Par un algorithme basé sur une méthode des moindres carrés, minimisant l'écart entre la signature prédite et la signature mesurée, nous obtenons la valeur de la perméabilité magnétique pour une valeur de pression P donnée (figure 50). Les valeurs obtenues pour des inducteurs verticaux et longitudinaux, pour des

pressions variant de 0 à 100 bar sont présentées (figure 51). Ils confirment les résultats théoriques prédits par (51) et (52).

En champ inducteur longitudinal, la perméabilité magnétique passe de 115 sous 0 bar, à 102 sous 100 bar. Ces valeurs sont cohérentes avec les mesures de l'induction présentées : la perméabilité diminuant avec la pression, l'aimantation qui se développe dans le matériau est moindre. Par conséquent, la valeur de la composante longitudinale de l'induction **BM** due à la matière aimantée mesurée sur le capteur B1 diminue. Cette valeur étant de signe opposé au champ inducteur sur ce capteur, la valeur totale de l'induction **B0 + BM** mesurée diminue avec la pression.

Les variations de perméabilité magnétique en inducteur vertical sont elles aussi en accord avec les mesures d'induction réalisées sur ce même champ. Les valeurs sont $\mu_r=118$ sous 0 bar, pour atteindre leur maximum sous 40 bar où la valeur calculée est $\mu_r =157$ (figure 50). Le minimum de perméabilité est atteint pour 100 bar avec une valeur calculée $\mu_r =102$.

Les perméabilités magnétiques sont des grandeurs intrinsèques, donc indépendantes du champ démagnétisant qui masque leur variation lors des mesures d'induction externe en passage. C'est pourquoi les résultats présentés (figure 51) montrent de manière marquée des variations de perméabilité magnétique, moins notables avec des mesures d'induction externe.

On note également que $\mu_r(P)$ n'a pas la même variation en vertical qu'en longitudinal. On interprète cela en considérant que la contrainte active est soit parallèle, soit orthogonale au champ, comme peut en témoigner l'expression de H_o développée pour l'aimantation anhystérétique, mais qui reste valide pour l'aimantation induite, qui met aussi en jeu des phénomènes réversibles.

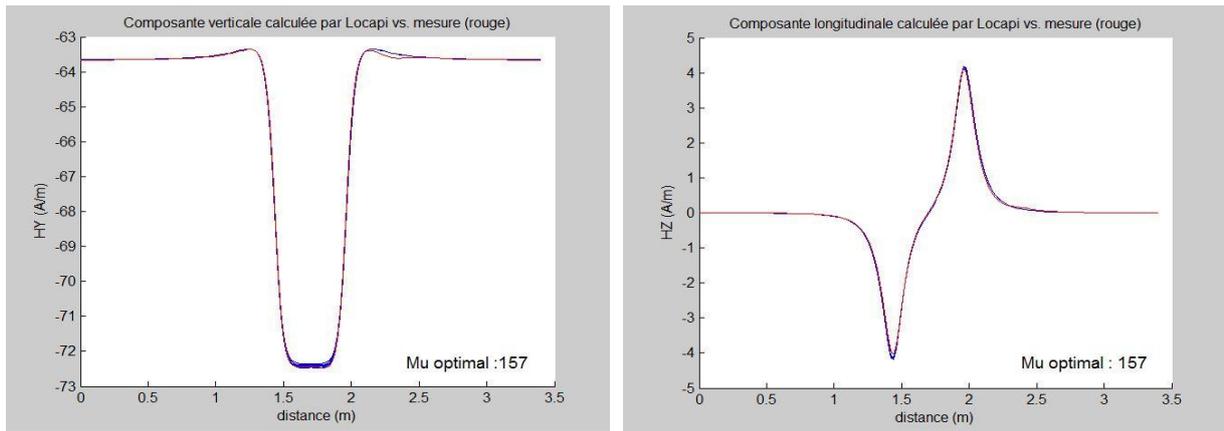


figure 50. P=40 bar, **BV**=80 μ T. Détermination de la perméabilité réversible verticale par identification de la signature magnétique obtenue par résolution du problème direct (courbes bleues), avec les mesures réalisées en passage (courbe rouge). En inducteur vertical, l'optimisation est réalisée sur la composante verticale.

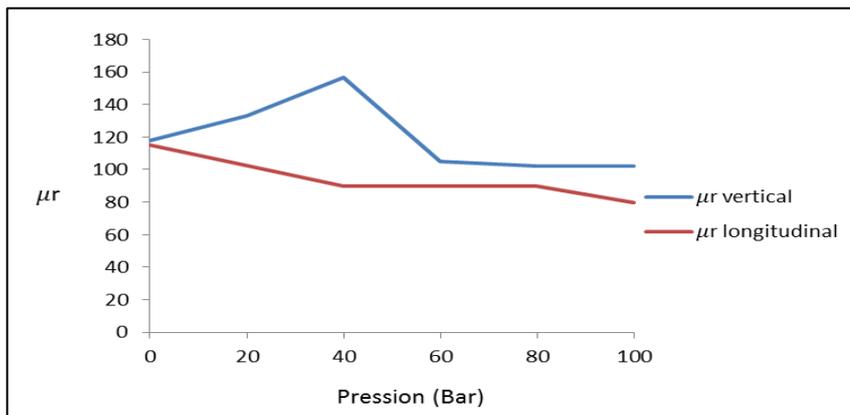


figure 51. Valeurs des perméabilités magnétiques réversibles de 0 à 100 bar, en champs inducteurs vertical et longitudinal, calculées par une méthode des moindres carrés.

d. *Linéarité de l'induction induite vis-à-vis du champ inducteur*

La linéarité²¹ de l'induction induite vis-à-vis du champ inducteur a été constatée. Pour cela, on a procédé aux mesures des induits sous deux champs inducteurs mono axiaux : un champ inducteur longitudinal **BOL**, et un champ inducteur vertical **BOV**.

Ensuite, la mesure de l'induit sous le champ inducteur croisé **BOL+BOV** a été comparée à la signature reconstituée par addition des deux signatures en champ inducteur mono axiaux (figures 52 et 53). Cette opération a été réalisée sous différentes pression, et les écarts relevés entre la signature mesurée et la signature reconstituée sont toujours négligeables pour tous les capteurs :

$$B_{IND}(BOL + BOV) = B_{IND}(BOL) + B_{IND}(BOV) \quad (53)$$

Par conséquent, étant données (46) et (47), l'induction est une fonction linéaire du champ inducteur quelle que soit la pression :

$$B_{IND}(\lambda BOL + \rho BOV) = \lambda B_{IND}(BOL) + \rho B_{IND}(BOV) \quad (54)$$

Ce résultat est très important : il nous permettra de reconstituer un modèle de variation de l'induction avec la pression, pour un champ inducteur quelconque, par combinaison linéaire de deux modèles de référence, établis pour deux champs inducteurs mono axiaux longitudinal et vertical.

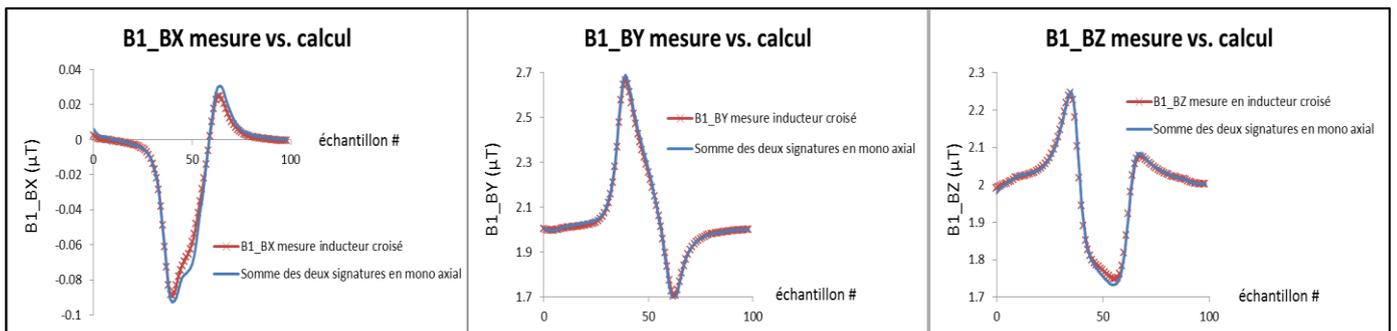


figure 52. Capteur B1 - vérification du découplage de l'induction mesurée vis à vis du champ inducteur à P=0 bar. Signatures en passage prédites et calculées par (48) pour BOL=20μT + BOV=20 μT.

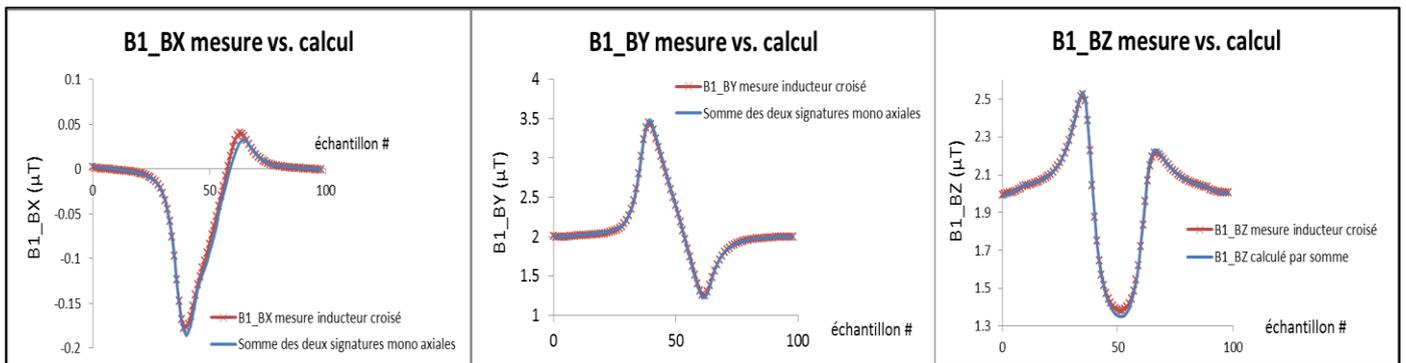


figure 53. Capteur B1 - vérification du découplage de l'induction mesurée vis à vis du champ inducteur à P=100 bar pour BOL=20μT + BOV=20 μT. On note d'ores et déjà les variations d'induction occasionnées par la pression en comparant avec la figure 52.

²¹ La linéarité au sens mathématique du terme : $f(\rho u + \lambda v) = \rho f(u) + \lambda f(v)$. Précédemment (46, 47), nous avons uniquement vérifié la proportionnalité de l'induction mesurée vis-à-vis du champ inducteur. La linéarité implique la proportionnalité et le découplage.

2. Analyse des résultats pour les mesures d'induction anhystérétique

La linéarité de l'induction anhystérétique vis-à-vis du champ inducteur a été vérifiée. Ce résultat est présenté dans le cadre des mesures en cycles HPP (figure 59).

En champ inducteur vertical, les mesures montrent que l'induction anhystérétique mesurée est quasiment indépendante de la pression : les variations relatives entre 0 et 100 bar sont de -0.6 % quelle que soit la valeur du champ inducteur comprise entre 0 et 80 μT (figure 54). Il est important de rappeler que ceci est lié à l'effet de forme, très défavorable dans le cas d'un champ inducteur vertical. Dans le cas des perméabilités anhystérétiques, cet effet est encore amplifié (51) en raison des grandes valeurs de perméabilités mises en jeu.

En champ inducteur longitudinal, la variation mesurée de l'induction anhystérétique pour des champs entre 0 et 40 μT est de l'ordre de 31 %.

Les mesures d'induction anhystérétiques mettent une nouvelle fois en évidence l'effet de compétition qui s'opère entre la géométrie (le facteur de forme), et les perméabilités magnétiques du matériau.

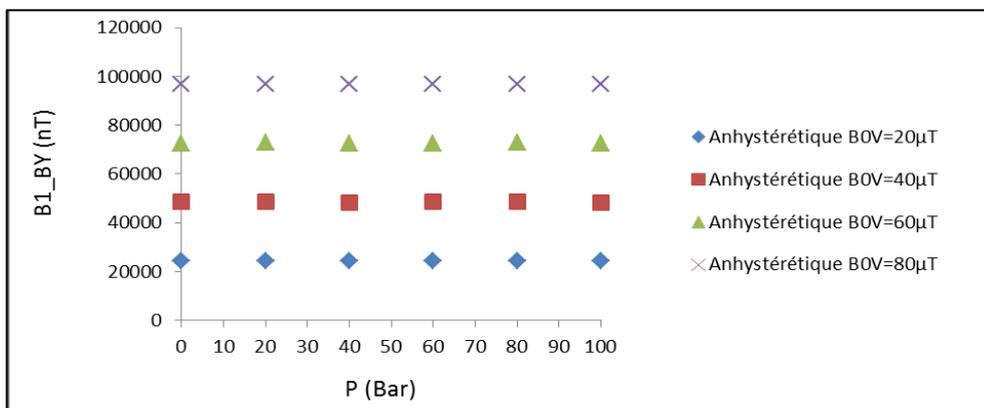


figure 54. Induction anhystérétique en polarisation verticale mesurée sur le capteur central B1, en fonction de la pression. Les variations mesurées *en induction externe* sont négligeables : pour un champ de polarisation vertical $BV=80\mu\text{T}$, l'écart entre la mesure à 0 bar et à 100 bar est de -573 nT, soit -0.59 % de la valeur sous 0 bar.

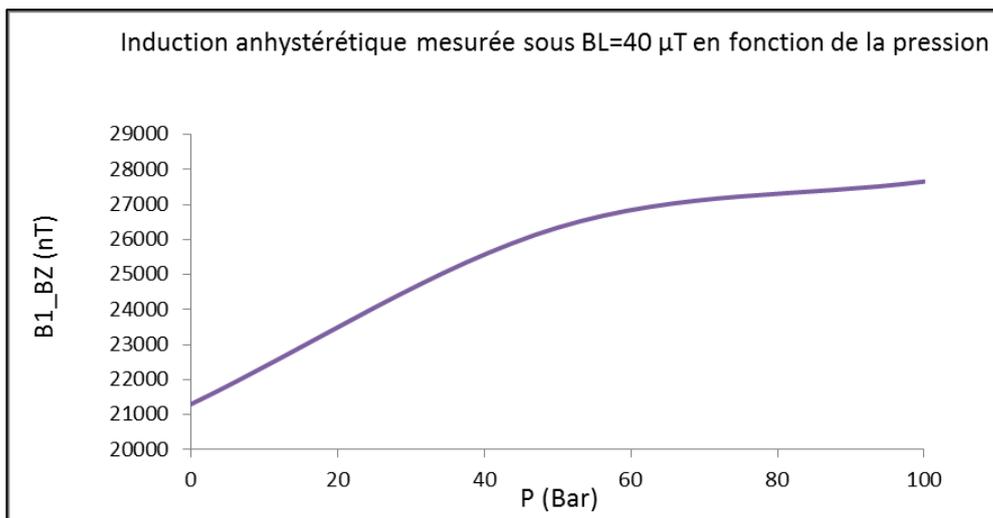


figure 55. Induction anhystérétique en polarisation longitudinale sur le capteur central B1 en fonction de la pression. Dans cette configuration, l'effet de forme favorable amplifie les variations mesurées de l'induction externe. L'écart entre l'induction anhystérétique pour un champ inducteur longitudinal $BL=40\mu\text{T}$ est de +6360 nT, soit 31 % de la valeur sous 0 bar. Les différences entre les écarts en champ inducteur vertical ou longitudinal s'expliquent par l'effet de forme.

Nous n'avons pu déterminer les perméabilités anhystériques μ_{ANH} par la méthode présentée dans le cadre des mesures d'inductions induites, c'est-à-dire par un algorithme d'adaptation des mesures en passage sur les signatures prédites par un modèle direct, du fait du facteur de forme. En effet, la démarche conduisant à (50) reste valable pour l'étude de la perméabilité anhystérique. En réécrivant (49) pour l'aimantation anhystérique, il vient :

$$M_{ANH} = (\mu_{ANH} - 1)HI = (\mu_{ANH} - 1)(HO + HD) \quad (55)$$

Et de manière similaire à (50) :

$$M_{ANH} = \frac{HO}{N + \frac{1}{\mu_{ANH} - 1}} \quad (56)$$

Pour un alliage d'acier utilisé dans les constructions navales, la valeur typique de μ_{ANH} est de 1000. Par conséquent, pour notre cylindre, la compétition qui a lieu entre l'effet de forme et la perméabilité magnétique anhystérique est systématiquement en faveur de l'effet de forme (56).

En effet, dans le cas de notre cylindre, le rapport longueur/diamètre est de l'ordre de 4. Pour une telle géométrie, lorsque le champ inducteur est parallèle à l'axe de révolution du cylindre, le facteur de forme vaut environ $4 \cdot 10^{-2}$ [JILES_1998], à comparer avec $1/\mu_{ANH} \approx 10^{-3}$. Par conséquent, pour des valeurs supérieures à une valeur seuil de μ_{ANH} , les inductions prédites par un solveur de problème direct seront identiques. Cet effet asymptotique de la solution du problème direct est représenté sur la figure 56. Dans le cas d'un champ inducteur vertical, l'effet de forme est encore plus défavorable ($N \gg 4 \cdot 10^{-2}$), et cet effet a lieu pour des valeurs de seuil inférieures au cas d'un inducteur longitudinal.

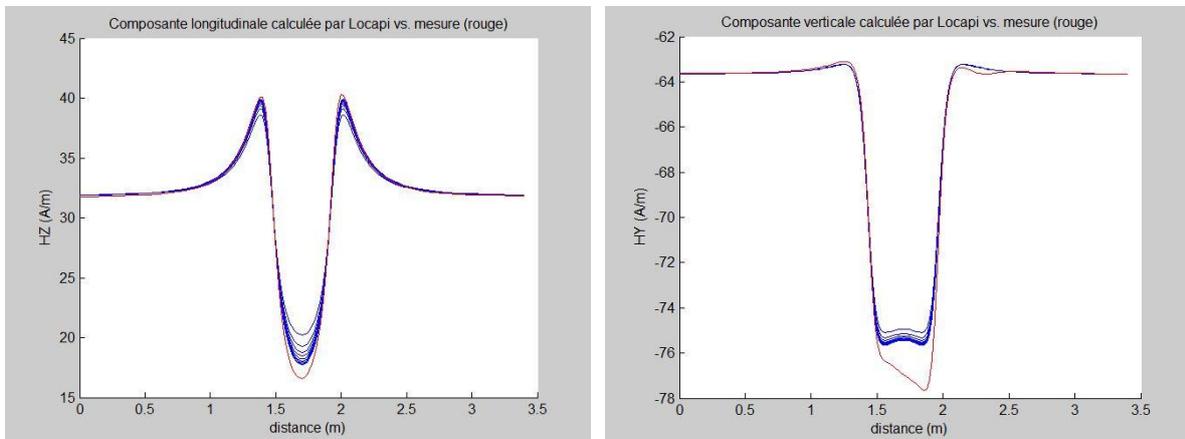


figure 56. La détermination des variations des perméabilités anhystériques longitudinale (gauche) ou verticale (droite) ne peut être effectuée au moyen d'une résolution de problème direct, en raison des valeurs trop fortes des perméabilités par rapport au facteur de forme en champ inducteur vertical et longitudinal. Les courbes rouges représentent les signatures en passage, sous 0 bar, des inductions anhystériques longitudinale (gauche, $BL=40 \mu T$) et verticale (droite, $BV=80 \mu T$). Les deux figures montrent les inductions prédites (courbes bleues) par la résolution du problème direct pour des valeurs de μ_{ANH} variant de 1000 à 5000 : on constate que les signatures prédites n'évoluent plus avec μ_r . L'induction extérieure mesurée est déterminée par la géométrie.

III. Conclusion sur la caractérisation magnétique

Cette première série de mesures nous a permis de caractériser l'évolution avec la pression des inductions induite et anhystérique. Les perméabilités réversibles intrinsèques ont pu être calculées dans le cas des mesures d'inductions induites. Ces calculs montrent que les caractéristiques magnétiques intrinsèques du matériau changent avec la pression. La magnétoélasticité réside dans ces variations : nous avons vu dans l'approche microscopique que les contraintes mécaniques provoquent des variations d'énergie d'anisotropie cristallines. Par conséquent, l'énergie mécanique provoque des variations de grandeurs intrinsèques des substances ferromagnétiques, dont une des conséquences mesurables est la variation des susceptibilités réversibles et anhystériques.

La connaissance des inductions induite et anhystérique est fondamentale en magnétisme du navire pour prévoir la discrétion magnétique des bâtiments. De plus, la pression a un effet plus notable sur l'induction extérieure à champ externe fixe dans le cas où le champ démagnétisant est plus faible (c'est-à-dire en champ inducteur longitudinal).

La connaissance de la loi d'évolution de ces deux grandeurs va nous permettre de valider quantitativement le modèle de Jiles-Atherton en comparant les valeurs mesurées de l'induction en fin de phase HP avec les mesures des inductions anhystériques mesurées sous la pression P.

Les mesures ont également montré le découplage, vis-à-vis du champ appliqué des inductions induites mesurées sur des capteurs extérieurs. Ce résultat était connu en magnétisme du navire, mais uniquement pour des pressions nulles. Nous avons donc mis en évidence cette propriété pour tous les niveaux de pression. En d'autres termes, sous une pression quelconque donnée, les variations d'aimantation sont réversibles et suivent la loi de Rayleigh des champs faibles. Nous verrons ci-après que les mesures réalisés sur des cycles HPP montrent aussi le découplage de l'induction anhystérique vis-à-vis du champ externe. C'est un résultat très important dans le cadre de notre étude car il va nous permettre d'établir un modèle vectoriel de magnétostriction.

C. Mesures en cycle HPP

Notre hypothèse de travail est que la loi de Jiles, formulée pour l'aimantation M , peut être appliquée à l'induction magnétique B mesurée à l'extérieur du cylindre lorsque ce dernier subit un cycle HPP. La série de mesures présentée ici valide qualitativement cette hypothèse : différents cycles HPP ont été réalisés, sous des champs inducteurs mono axiaux et croisés. Dans tous les cas, l'induction mesurée sur les capteurs migre vers sa valeur anhystérétique, mesurée lors de la campagne de mesures en passage.

Dans la partie II, nous présentons les résultats de mesures de cycles HPP réalisés suivant un protocole expérimental pour lequel la loi de Jiles-Atherton s'applique, c'est-à-dire un état magnétique initial désaimanté, suivi d'un seul cycle HPP.

Toutefois, nous avons réalisé de nombreuses autres mesures, présentées dans la partie III, qui sortent de ce cadre expérimental. Ces mesures mettent en évidence d'une part l'importance critique de l'état magnétique initial du cylindre, et d'autre part, des comportements qui ne peuvent être décrits par la loi de Jiles-Atherton telle que formulée par ses auteurs.

I. Protocole expérimental de mesure des cycles HPP

Les désaimantations précédant tout cycle HPP ont été réalisées avec le protocole décrit pour les mesures en passage : il s'agit d'une désaimantation dans un état de contraintes mécaniques nulles. Il est essentiel de noter qu'une désaimantation réinitialise le matériau d'un point de vue mécanique : les effets des précédents cycles HPP sont ainsi annulés. C'est la différence entre un cycle HPP initial et des cycles HPP qui lui succèdent sans désaimantation intermédiaire, et dont nous avons vu (chapitre II – partie B) les effets mesurés très différents.

Rappelons qu'un cycle HPP désigne une désaimantation suivie de la mise en champ inducteur H , d'une élévation de la pression jusqu'à la valeur P (HP), puis une diminution de la pression jusqu'à 0 bar (HPP). A contrario, le protocole PHP réalise la mesure de l'induction induite du cylindre lorsqu'il est soumis à la pression P (PH), cette dernière étant ensuite ramenée à 0 (PHP). Les effets mesurés en induction d'un cycle PHP et HPP sont très différents [RIMET_1967].

Dans le cas d'un cycle HPP, l'aimantation (et donc l'induction) sont régies par la loi d'approche lors de la phase HP. Elles migrent vers leur valeur anhystérétique, donc vers des majorants. Pour un processus PH, l'induction et l'aimantation suivent la loi de Rayleigh en champ faible. Aussi, la variation d'induction conséquente d'un cycle HPP est-elle très supérieure à celle obtenue par un cycle PHP.

Il faut noter que la mise en pression sous un champ nul du cylindre initialement désaimanté ne fait quasiment pas varier son aimantation. D'une manière générale, et conformément au comportement prédit par la loi d'approche, elle permet de ramener un état d'aimantation initial quelconque vers la valeur de l'aimantation anhystérétique en champ nul. Par conséquent, la signature mesurée suite à un cycle HPP en champ nul ($H=0$) conduit elle à des valeurs d'induction mesurées nulles. Nous noterons un tel cycle OPP dans cette étude.

Il est important de noter que le processus OPP ne réalise pas a priori une désaimantation magnétique du cylindre, mais une désaimantation «mécanique ».

1. Positionnement du cylindre pendant une mesure de cycle HPP

Dans le cas d'un cycle HPP, il est nécessaire de définir une position de référence du cylindre, celui-ci étant immobile lors de la mesure.

La position de référence choisie est celle qui correspond au cylindre centré à la verticale du capteur B1. Rappelons que la mesure est très sensible au positionnement du cylindre, une faible variation de la position du cylindre selon l'axe Z pouvant induire un écart d'induction important (figure 41).

2. Deux types de mesures peuvent être réalisés lors d'un cycle HPP

Deux types de mesures peuvent être réalisés pour les cycles HPP.

Le premier est celui décrit figure 40, où le cylindre est immobile dans sa position de référence. On visualise alors la variation de l'induction avec la pression.

Il est également possible d'interrompre le cycle HPP en maintenant la pression à une valeur P_{MES} , puis d'effectuer une mesure en passage de l'induction sous cette pression. On obtient alors la signature magnétique du cylindre sous la pression P_{MES} . Ce type de mesures est d'un grand intérêt. Il nous permettra par la suite de valider notre modèle en aimantation (cf. chapitre IV) par comparaison de la signature magnétique prédite à une pression donnée avec la mesure relevée. Nous nous référerons à ce type de mesures en passage et en pression sous le terme de signature en pression. La figure 53 est ainsi un exemple de signature sous une pression de 100 bar.

II. Analyse des résultats de cycles HPP

Des mesures de cycle HPP ont été effectuées pour des champs inducteurs mono axiaux dans un premier temps. Nous les présentons ici. Les résultats des cycles HPP réalisés en champ inducteur croisé seront introduits dans le cadre de la validation des modèles numériques proposés aux chapitres III et IV.

1. L'induction B suit la loi d'approche formulée pour M

En champ inducteur vertical ou longitudinal, le comportement de l'induction est de migrer vers sa valeur anhystérétique (figures 57 et 58). De plus, le comportement est indépendant de l'état initial magnétique du cylindre. De manière à valider ce point, l'aimantation du cylindre a été amenée à différents états par des polarisations initiales anhystérétiques. Ainsi, sur la figure 57, le cylindre a été amené à deux états d'aimantation initiaux correspondant à l'aimantation anhystérétique sous un champ de polarisation $B_L = -20\mu T$, puis $B_L = -40\mu T$. Les valeurs obtenues en fin de process HP sont les mêmes qu'après une montée en pression HP réalisée après une désaimantation.

Le découplage de l'aimantation vis-à-vis du champ inducteur a déjà été vérifié pour différentes pressions entre 0 et 100 bar.

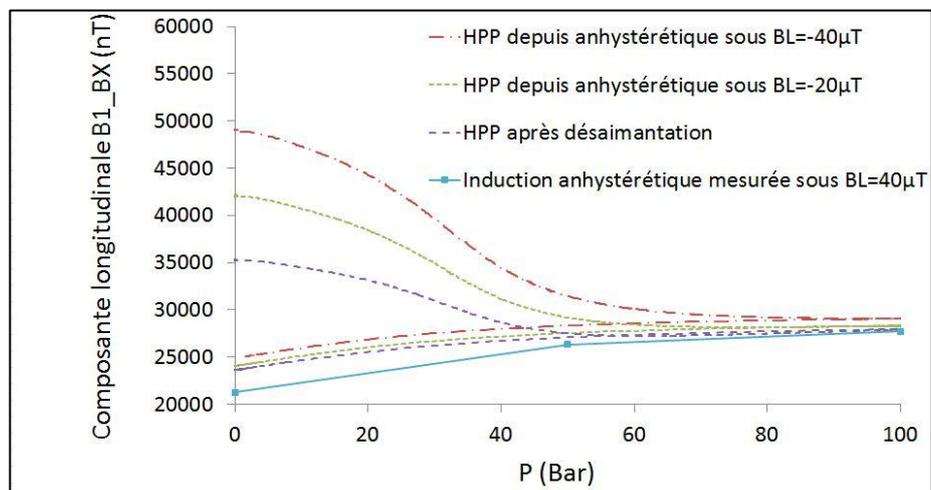


figure 57. 3 cycles HPP avec 3 états initiaux différents, réalisés sous un champ inducteur longitudinal $B_L = 40\mu T$. Dans les 3 cas, l'induction migre vers sa valeur anhystérétique. L'aimantation dans le cylindre augmente : l'induction mesurée semble diminuer. Le capteur tri axes mesure 3 grandeurs algébriques. Au niveau du capteur B1, une aimantation selon $+Z$ dans le cylindre donne lieu à une composante longitudinale de l'induction mesurée négative. On remarque que plus l'état magnétique initial du cylindre est loin de l'état magnétique attendu (c'est-à-dire de la valeur de l'aimantation anhystérétique sous le champ inducteur de cyclage), plus l'écart entre la valeur anhystérétique et la valeur d'aimantation à 100 bar se creuse. Cet écart reste très contenu, aussi l'avons-nous négligé dans les modélisations qui vont être présentées.

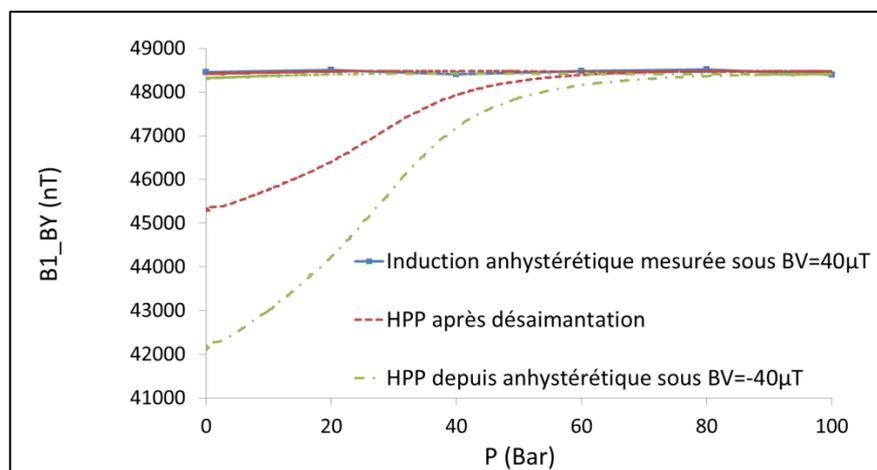


figure 58. 2 cycles HPP avec 2 états initiaux différents, réalisés sous un champ inducteur vertical $B_V = 40\mu T$.

2. L'induction anhystérétique est découplée vis-à-vis du champ inducteur

Les mesures effectuées sur des cycles HPP réalisés en champ inducteur croisé confirment que l'aimantation anhystérétique est découplée par rapport au champ inducteur.

Les mesures d'induction anhystérétiques donnent sur le capteur B1, à P=100 bar, $M_{ANH}(BL=40\mu T)=27760$ nT, et $M_{ANH}(BV=80\mu T)=96780$ nT.

Par conséquent, si l'induction anhystérétique est découplée vis-à-vis du champ, les valeurs attendues en fin d'un cycle HPP réalisé sous un inducteur croisé $BL=10\mu T + BV=40\mu T$ sont, sur le capteur B1, 6940 nT pour la composante longitudinale, et 48390 nT pour la composante verticale (puisque les mesures précédentes ont montré que les inductions migrent bien vers leur valeurs anhystérétique lors d'une montée en pression). La mesure de l'induction à P=100 bar donne pour ces deux valeurs 6874 nT et 48612 nT. Par conséquent, on vérifie bien le découplage de l'induction anhystérétique par rapport au champ inducteur.

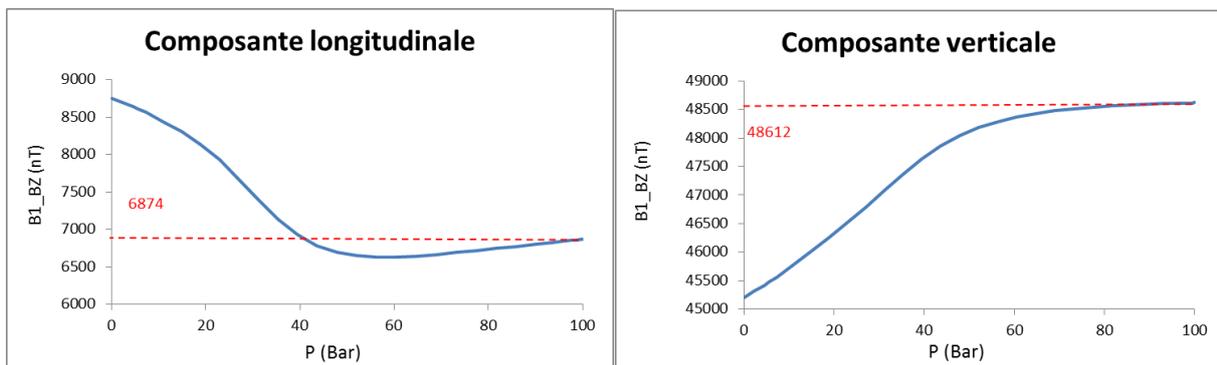


figure 59. Composantes longitudinale et verticale au capteur B1, pendant une montée en pression P de 0 à 100 bar sous un champ inducteur croisé. Les valeurs d'induction anhystérétique sont indiquées en rouge. Les valeurs des composantes de l'induction relevées correspondent à celle calculées par combinaison linéaire des inductions mesurées sous les champs mono axiaux : l'aimantation anhystérétique est découplée vis-à-vis du champ inducteur.

D. Vers une solution analytique en induction \mathbf{B} à l'équation de Jiles

I. L'induction extérieure \mathbf{B} est l'image de l'aimantation \mathbf{M}

D'une manière générale, l'induction est l'effet mesurable extérieur de l'aimantation au sein d'un matériau ferromagnétique. Il n'est donc pas surprenant que le comportement phénoménologique de la loi d'approche formulée en aimantation soit également vérifié par l'induction.

Une justification théorique réside dans la méthode des moments.

Soit V un volume de matière ferromagnétique, possédant ou non une aimantation rémanente initiale, soumis à un champ inducteur extérieur \mathbf{H}_0 constant. Le champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{P})$ mesuré au point P extérieur au matériau est donné par

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{RED}}(\mathbf{P}) \quad (57)$$

$\mathbf{H}_{\text{RED}}(\mathbf{P})$ est le champ magnétique (dit 'réduit') dû à la matière aimantée, et mesuré au point P .

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, son expression est donnée par :

$$\mathbf{H}_{\text{RED}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) dV \quad (58)$$

En maillant le volume V en N éléments volumiques possédant chacun une aimantation constante \mathbf{m}_j , et en se plaçant dans le cadre de l'approximation dipolaire, (58) peut être exprimée sous forme matricielle :

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}) = \mathbf{H}_0 + \{g(\mathbf{P})\}\{\mathbf{m}\} \quad (59)$$

$\{g\}$ est une matrice géométrique de taille $(3 \times N)$ permettant de calculer les effets des interactions dipolaires dans le matériau vues au point P . Ses éléments ne dépendent que de la géométrie du matériau, et de la position du point P

$\{\mathbf{m}\}$ est une matrice de taille $(N \times 3)$ décrivant l'aimantation \mathbf{m}_j en chaque volume élémentaire J du matériau. \mathbf{m}_j est la somme d'une aimantation induite et d'une aimantation rémanente.

Par conséquent :

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{P})}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \{g(\mathbf{P})\}\{\mathbf{m}\} \quad (60)$$

Notons qu'au point P , $\{g\}$ est indépendante de la contrainte.

On suppose que les 3 composantes de l'aimantation élémentaire \mathbf{m}_j dans un élément J suivent chacune l'équation scalaire de Jiles-Atherton. Ainsi, chacune des 3 composantes du champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{P})$ s'écrit, à l'aide de (60), comme une combinaison linéaire des solutions de l'équation pour l'aimantation de chaque volume élémentaire.

Or, l'équation de Jiles-Atherton est une équation différentielle linéaire par rapport à \mathbf{m}_j . Par conséquent, elle sera vérifiée par les 3 composantes du champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{P})$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{P})}{\partial \sigma} \Big|_{\mathbf{H}_0} = \frac{\sigma}{\xi E} (\mathbf{H}_{\text{ANH}} - \mathbf{H}(\mathbf{P})) + c \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{anh}}}{\partial \sigma} \Big|_{\mathbf{H}_0} \quad (61)$$

Avec $\mathbf{B}(P)=\mu_0\mathbf{H}(P)$ et $\mathbf{B}_0=\mu_0\mathbf{H}_0$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \sigma} \Big|_{\mathbf{B}_0} = \frac{\sigma}{\xi E} (\mathbf{B}_{\text{ANH}} - \mathbf{B}) + c \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ANH}}}{\partial \sigma} \Big|_{\mathbf{B}_0} \quad (62)$$

L'équation (62) est l'équation de Jiles-Atherton, exprimée en induction extérieure \mathbf{B} plutôt qu'en aimantation \mathbf{M} . Il faut noter que les valeurs des paramètres c et ξ sont implicitement définies de manière intrinsèque dans l'équation originale (36) de Jiles et Atherton : ils s'appliquent à l'aimantation \mathbf{M} dans le cylindre. Or l'aimantation \mathbf{M} d'un matériau ferromagnétique ne dépend que du champ interne \mathbf{H} et du tenseur de susceptibilité magnétique χ . C'est donc une grandeur intrinsèque au matériau.

La réécriture de l'équation originale de Jiles et Atherton s'est faite en introduisant un paramètre extrinsèque (les coordonnées physiques des capteurs) dans l'équation (36) via la matrice géométrique $\{g\}$ de (59). On suppose donc, en exprimant les lois en termes d'induction externe \mathbf{B} , que les effets mesurables de ces paramètres sont identiques à l'intérieur et à l'extérieur du matériau. Le modèle en aimantation nous permettra de conclure sur ce point.

Nous allons montrer maintenant qu'il est possible de trouver une solution analytique vectorielle à l'équation (62) dans le cas d'un champ inducteur vertical. Cette solution nous permettra dans un second temps d'obtenir une solution analytique approchée pour le cas d'un champ inducteur longitudinal.

II. Construction d'une solution analytique

1. Les symétries du problème

Un capteur BJ positionné dans le plan d'équation $X=0$ (capteurs M1, M2, B1, M3, M4) mesure une composante transverse B_J_{BX} nulle en champ inducteur vertical ou longitudinal (figures 60 a et c).

Sous un champ inducteur longitudinal, un capteur BJ positionné dans le plan d'équation $Z=0$ (tel que le capteur B1 ou B2), la composante transverse B_J_{BX} sera constante et nulle (figure 60 c). D'une manière générale, sous un champ inducteur longitudinal, la composante orthoradiale de l'induction mesurée doit être nulle pour tous les capteurs²².

Sous un champ inducteur vertical, ce capteur mesurera une composante B_J_{BZ} constante nulle.

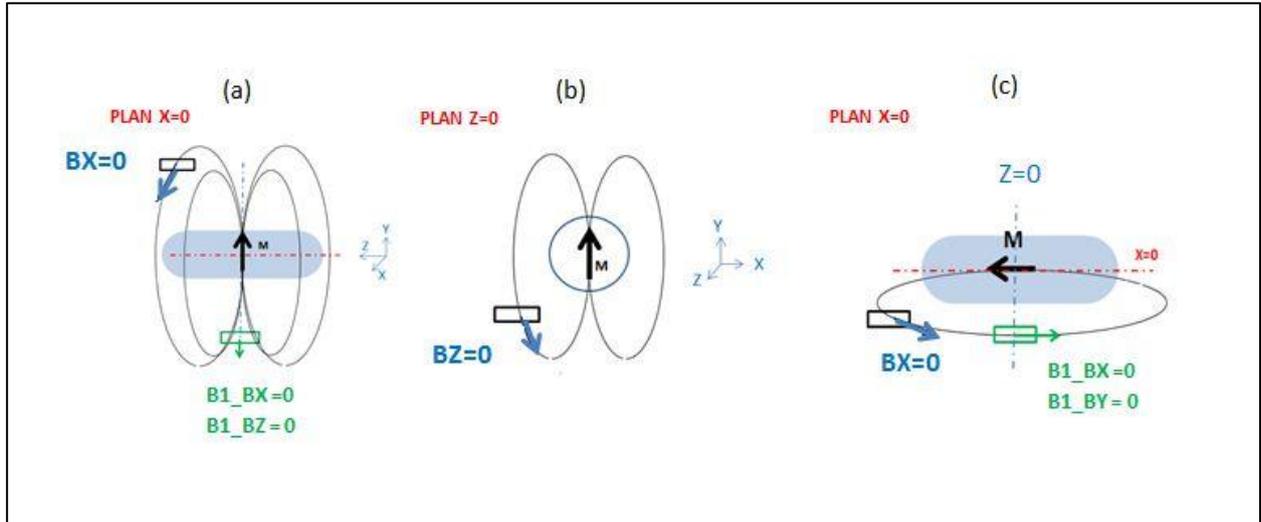


figure 60. Champ inducteur vertical **(a)** Le cylindre est assimilable à un dipôle magnétique d'axe y . Un capteur vérifiant $X=0$ ne voit pas de composante transverse BX . **(b)** Un capteur vérifiant $Z=0$ ne voit pas de composante longitudinale BZ . Le capteur centré B1 vérifie $X=Z=0$ et ne voit donc qu'une composante verticale $B1_{BY}$. **(c)** Champ inducteur longitudinal : le cylindre aimanté est assimilable à un dipôle magnétique d'axe z . Un capteur vérifiant $X=0$ ne voit donc pas de composante transverse BX . Le capteur B1 vérifie $X=Z=0$ et ne voit donc pas de composante verticale BY .

La loi de modélisation de la variation de l'induction que nous présentons ici s'applique à tout capteur. Néanmoins, nous en présenterons les résultats pour le capteur B1. L'extension de la solution aux autres capteurs est immédiate par ajout des composantes adéquates de la forme (63).

2. Solution analytique en champ inducteur vertical

Dans le cas d'un champ inducteur vertical, les mesures nous ont montré que l'induction anhystérétique relevée sur les capteurs J était indépendante de la pression. Par conséquent, le second terme de l'équation (62) est nul. En posant $l=X, Y$ ou Z , une solution analytique à (62) existe sous la forme :

$$B_J_{BI}(P, \mathbf{BOV}) = B_J_{B_{ANH}I}(\mathbf{BOV}) + [B_J_{BI}(0, \mathbf{BOV}) - B_J_{B_{ANH}I}(\mathbf{BOV})]e^{-P^2/2E\xi} \quad (63)$$

$B_J_{BI}(P, \mathbf{BOV})$ est la valeur modélisée de la composante I de l'induction, \mathbf{BOV} est l'induction verticale appliquée, $B_J_{BI}(0, \mathbf{BOV})$ est la composante I de l'induction relevée sur le capteur J en début de cycle HPP ($P=0$ bar), et $B_J_{B_{ANH}I}(\mathbf{BOV})$ la composante I de l'induction anhystérétique en champ inducteur vertical, donc indépendante de la pression, et mesurée sur le capteur J.

²² Par rapport au repère cylindrique (r, Θ, z) du cylindre.

Par conséquent, la solution analytique vectorielle de (62) pour un champ inducteur vertical est donnée par :

$$\mathbf{BJ}(P, \mathbf{BOV}) = BJ_{BX}(P, \mathbf{BOV})\mathbf{X} + BJ_{BY}(P, \mathbf{BOV})\mathbf{Y} + BJ_{BZ}(P, \mathbf{BOV})\mathbf{Z} \quad (64)$$

De manière à expliciter complètement (64), il est nécessaire de connaître la valeur de ξ . Ceci peut être réalisé au moyen d'un algorithme de fitting, en utilisant (63) comme fonction objectif, et en utilisant les mesures issues d'un cycle HPP réalisé sous champ inducteur vertical.

La valeur de ξ a été déterminée avec les mesures relevées par le capteur B1 lors de la phase de montée en pression (HP) d'un cycle HPP réalisé sous $\mathbf{BOV}=80\mu\text{T}$, soit sur environ 1500 mesures (le nombre d'échantillons obtenus lors de la phase de montée en pression est variable : il dépend des instants de mise en fonctionnement et de mise en arrêt de la pompe hydraulique). Le résultat de cette méthode produit $1/2E\xi=9.5632.10^{-4} \text{ J/m}^3$ pour P exprimé en bar, et \mathbf{B} en nT. La figure 61 montre le résultat de l'algorithme de fitting, pour le capteur B1. L'erreur relative maximale²³ calculée est de 4.96%.

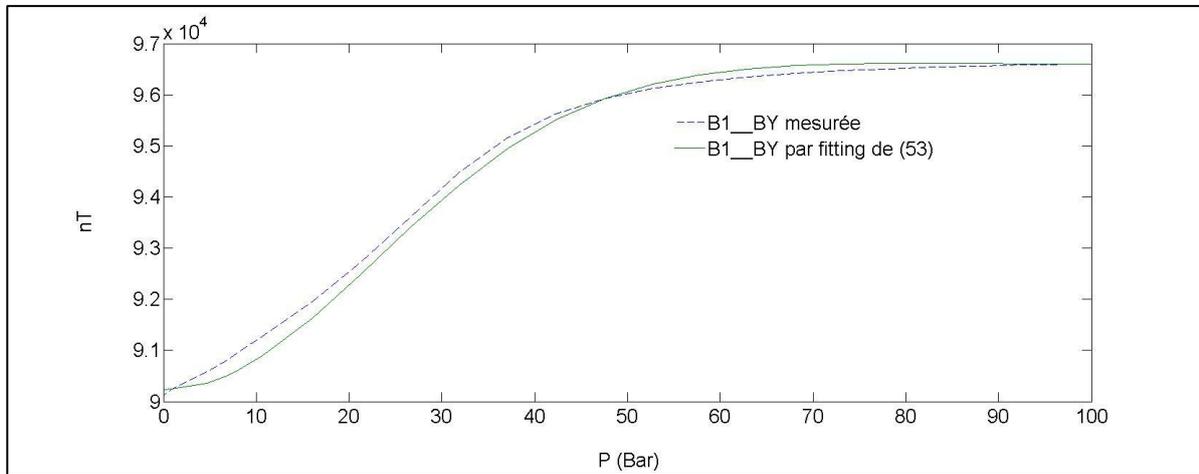


figure 61. Détermination par fitting de la valeur de ξ par identification de (63) sur les mesures issues d'une montée en pression HP réalisé sous un champ inducteur vertical $\mathbf{BOV}=80\mu\text{T}$. On trouve $\xi=2.526 \cdot 10^{-9} \text{ J/m}^3$ pour P exprimé en bar, et B en nT. L'erreur relative maximale calculée est de 4.96%.

3. Champ inducteur longitudinal

a. Une solution analytique approchée à l'équation de Jiles-Atherton

Nous avons vu que l'induction anhystérétique varie avec la pression dans le cas d'un champ inducteur longitudinal. Le second terme de (62) n'est alors plus nul, et il n'existe pas de solution analytique à cette équation.

Toutefois, dès que la pression interne P atteint 70 bar, la courbe d'induction anhystérétique peut être assimilée à une droite (figure 55). L'induction mesurée a de plus quasiment atteint sa valeur anhystérétique dès 80 bar. Pour cette pression, l'écart mesuré entre ces deux valeurs d'induction vaut 101 nT, soit 1.57% de la variation nette de l'induction générée par le process HP (figure 57). Elle suit alors la loi linéaire de variation de l'aimantation anhystérétique.

²³ L'erreur relative maximale est calculée par $\Delta\max(B_{\text{MESURE}} - B_{\text{MODELISE}})/|B_{\text{MAX}} - B_{\text{MIN}}|$, avec $\Delta\max(B_{\text{MESURE}} - B_{\text{MODELISE}})$ l'écart maximal constaté entre la mesure et la modélisation, B_{MIN} et B_{MAX} les valeurs extrêmes mesurées lors du cycle HPP. En inducteur vertical, $\Delta\max=315 \text{ nT}$, et $|B_{\text{MAX}} - B_{\text{MIN}}|=6350 \text{ nT}$.

Au-dessous de cette valeur de 80 bar, la loi de variation de l'induction est similaire à la loi de variation exponentielle obtenue pour un champ inducteur vertical (63) (figures 57 et 58).

Il paraît donc naturel de chercher une solution analytique approchée à l'équation (62) pour chacune des deux composantes verticale et longitudinale de l'induction sous la forme d'une somme de deux termes.

Le premier terme, qui décrit une loi de variation affine, doit pouvoir s'exprimer sous la forme $\lambda P + \rho$. λ représente donc la pente de droite décrivant l'induction anhystérétique au voisinage de la pression maximale ($P > 70$ bar).

Le second terme, de forme exponentielle, décrira la variation de l'induction pour $P < 80$ bar, et doit donc avoir une expression similaire à (63).

Nous supposons que la valeur de ξ trouvée pour la solution en champ inducteur vertical décrit également le comportement en champ inducteur longitudinal. C'est une hypothèse qui suggère un comportement magnétoélastique isotrope du matériau à l'échelle de la structure.

Nous cherchons donc une solution générale pour les composantes B_{J_BI} ($I=X, Y$ ou Z) de \mathbf{B} au capteur J sous la forme :

$$B_{J_BI}(P, \mathbf{BOL}) = a_{J,I}(\mathbf{BOL})e^{-\frac{P^2}{2E\xi}} + b_{J,I}(\mathbf{BOL})P + c_{J,I}(\mathbf{BOL}) \quad (65)$$

Les coefficients a , b et c dépendent de la position du capteur (indice J) et de la composante I décrite ($I=X, Y$ ou Z).

b. Validation en champ inducteur longitudinal

Pour le capteur B1, les composantes transverse et verticale mesurées sont nulles, puisqu'il y a, par symétrie de plan $Z=0$, compensation des composantes verticales de part et d'autre du plan, et nullité de la composante transverse. L'algorithme de fitting appliqué à (65) donne alors pour ce capteur B1 ($J=1$) :

$$a_{1,Z} = 9575 \quad b_{1,Z} = 20.31 \quad \text{et} \quad c_{1,Z} = 25840 \quad (66)$$

La solution analytique est comparée à la mesure en cycle HPP sous un champ inducteur $\mathbf{BL}=40\mu\text{T}$ sur la figure 62. Elle montre que le coefficient ξ décrit correctement le comportement en champ inducteur longitudinal : l'erreur relative maximale relevée est de 7.5%. Par conséquent, nous disposons également d'une modélisation de la variation de l'induction avec la pression pour un champ inducteur longitudinal.

D'autres validations ont été réalisées sur différents capteurs. La figure 63 montre le résultat obtenu sur la composante longitudinale B_{2_BZ} du capteur B2 pour lequel $X \neq 0$.

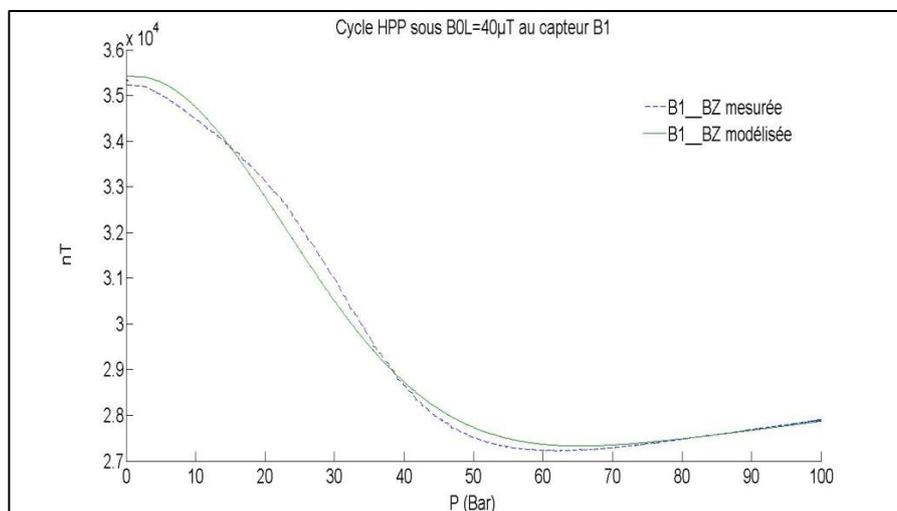


figure 62. Modélisation de la composante longitudinale B_{1_BZ} avec la valeur de ξ trouvée à l'aide d'un champ inducteur vertical. L'erreur relative maximale est inférieure à 7.5%.

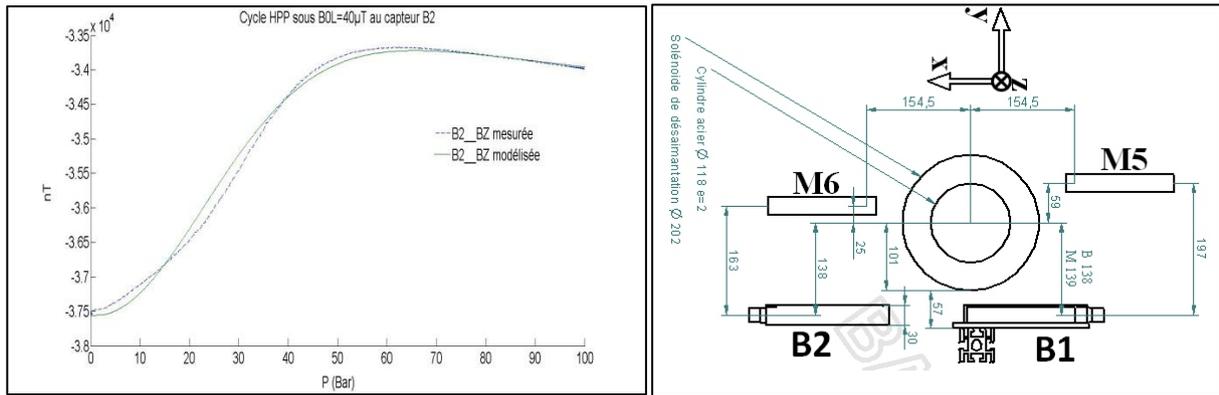


figure 63. Composantes longitudinales modélisée et mesurée sur le capteur B2. L'erreur relative maximale est de 6.7%. Droite : rappel de la position du capteur B2.

4. Validation du modèle en champ inducteur croisé $BL+BV$

Pour la modélisation de l'induction avec un champ inducteur croisé, nous utilisons la propriété de linéarité de l'induction vis-à-vis du champ inducteur (54).

La validation a été effectuée sur plusieurs cycles HP. Nous présentons ici 2 de ces cycles, le premier pour un champ inducteur $BL=15\mu T + BV=-40\mu T$, le second pour un champ inducteur $BL=10\mu T + BV=40\mu T$.

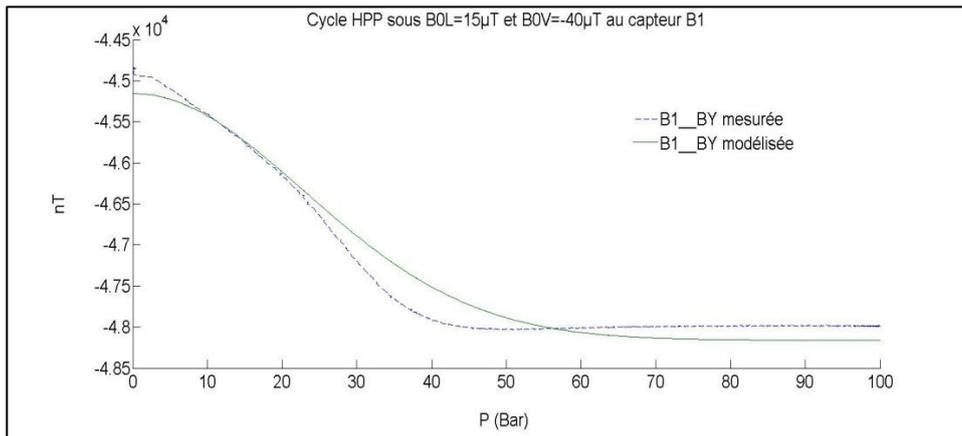


figure 64. Modélisation de la composante verticale $B1_{BY}$ au capteur B1 sous un champ inducteur croisé $BL=15\mu T + BV=-40\mu T$. L'erreur relative maximale est de 13.9 %.

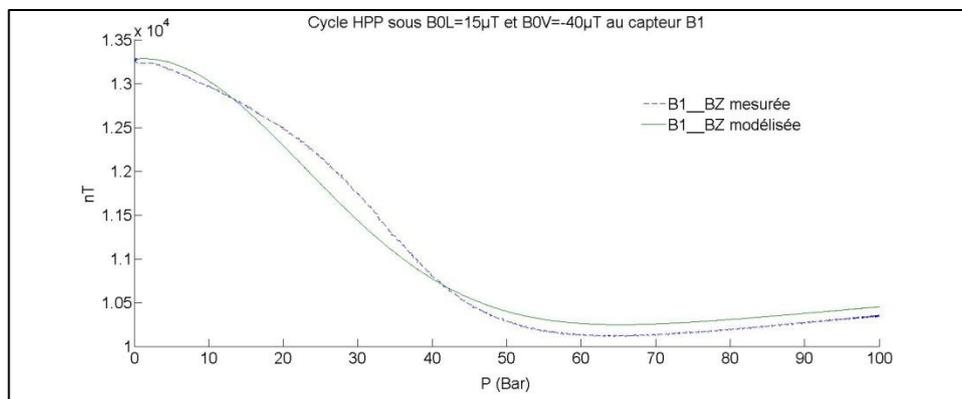


figure 65. Modélisation de la composante longitudinale $B1_{BZ}$ au capteur B1 sous un champ inducteur croisé $BL=15\mu T + BV=-40\mu T$. L'erreur relative maximale est de 12.1 %.

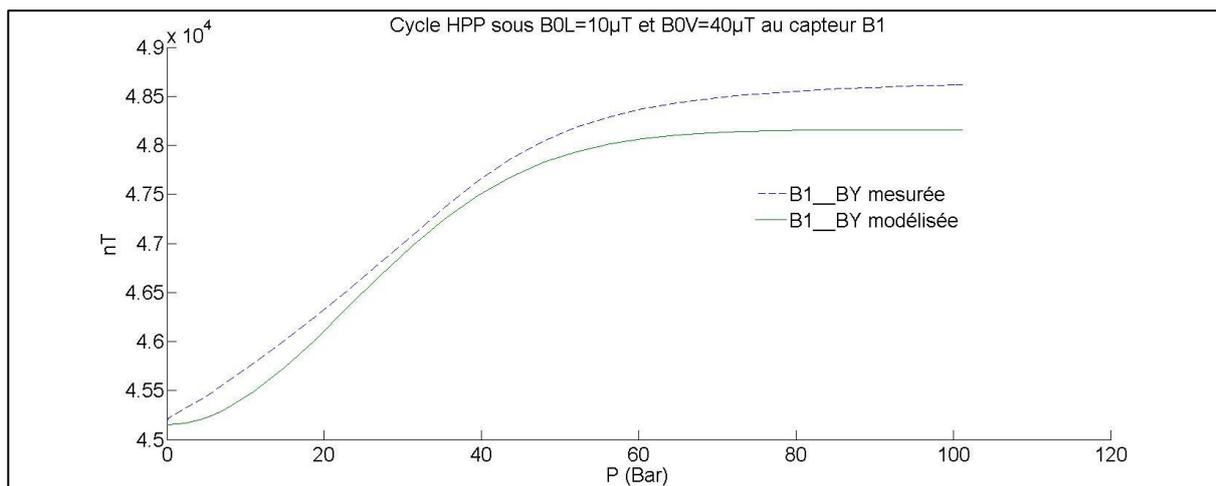


figure 66. Modélisation de la composante verticale B1_BY au capteur B1 sous un champ inducteur croisé $\mathbf{BL}=10\mu\text{T} + \mathbf{BV}=40\mu\text{T}$. L'erreur relative maximale est de 15.3 %.

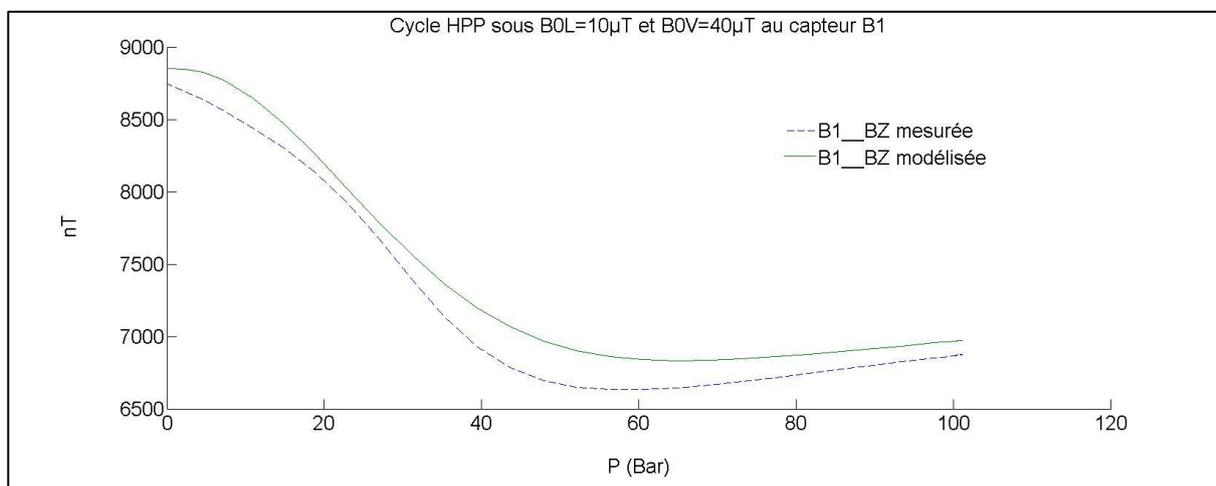


figure 67. Modélisation de la composante longitudinale B1_BZ au capteur B1 sous un champ inducteur croisé $\mathbf{BL}=10\mu\text{T} + \mathbf{BV}=40\mu\text{T}$. L'erreur relative maximale est de 12 %.

Les résultats montrent que l'erreur relative maximale est comprise entre 10 et 15 %. Cet écart entre le modèle et les mesures a une origine principale. Elle est liée à une difficulté expérimentale : la mesure est très sensible au positionnement du cylindre. Par conséquent, si le cylindre n'est pas parfaitement centré sur le capteur B1, ce dernier mesure des composantes non nulles sur les 3 axes quel que soit le champ inducteur auquel il est soumis. Ainsi, en champ inducteur longitudinal, un écart minime du centre du cylindre par rapport à la verticale du capteur B1 va entraîner des mesures non nulles sur le noyau vertical du capteur. De même sous un champ inducteur vertical, un positionnement imprécis du cylindre va générer une composante longitudinale mesurée non nulle. La figure 41 montre qu'un écart de 2 cm entraîne une valeur sur la composante longitudinale B1_BZ de 200 nT par rapport à la valeur théorique nulle. En pratique, il est très difficile de positionner le centre géométrique du cylindre à la verticale du noyau vertical du capteur B1. En dépit de cette imprécision, le modèle donne des résultats satisfaisants sous un champ inducteur d'orientation quelconque.

E. Conclusion

Au terme de cette partie, un protocole de mesures dédié à l'étude des effets magnétoélastiques subis par notre cylindre a été établi. Les mesures ont montré que le comportement phénoménologique de l'induction suit la loi d'approche de Jiles-Atherton. Nous avons pu établir un modèle analytique vectoriel de magnétoélasticité global, déterminé à partir de deux cycles HPP réalisés en champs inducteurs mono axiaux. En utilisant la propriété de linéarité de l'induction vis-à-vis du champ inducteur, il a été possible de produire, par une méthode d'adaptation, un modèle prédictif pour l'induction extérieure en champ inducteur quelconque.

Les résultats obtenus présentent une erreur relative inférieure à 15% vis-à-vis de la mesure, ce qui est très satisfaisant compte tenu des erreurs induites par un repositionnement imparfait du cylindre par rapport aux capteurs lors des mesures.

Ce modèle nous paraît notamment pertinent pour prédire la variation d'induction due à la pression sur les capteurs placés proches de la coque dans le cadre de la mise en place d'une immunisation en boucle fermée.

L'approche en induction nous a permis de caractériser le comportement du cylindre lors de cycles HPP, mais cette approche n'est valide qu'au niveau du capteur considéré.

Un modèle en aimantation permettrait de s'affranchir de cette limitation. Un modèle permettant de prédire les variations d'aimantation $\mathbf{M}(P)$ en tout point du cylindre P permettrait, par la résolution d'un problème direct, de connaître les variations d'induction extérieure \mathbf{B} en tout point de l'espace.

C'est l'objet de la partie suivante. Nous montrons qu'il est possible de produire un tel modèle, capable de modéliser la variation de l'aimantation du cylindre avec la pression, c'est à dire de prédire la variation de la source magnétique avec la contrainte mécanique. Or, la détermination d'une source en fonction de la mesure de ses effets extérieurs définit un problème inverse.

Chapitre IV - Un modèle en aimantation

Un modèle en induction externe est dédié à une configuration expérimentale particulière. Notamment, il est dépendant de la position des capteurs. De plus, il ne donne pas la variation de la source magnétique, l'aimantation \mathbf{M} dans le cylindre.

Un modèle en aimantation présenterait donc l'avantage de prédire en tout point de l'espace la variation attendue de l'induction sur un capteur, et donc, le calcul de l'anomalie magnétique en tout point.

Il est nécessaire pour produire un tel modèle de résoudre un problème inverse. Nous introduisons dans un premier temps Locapi, un logiciel de résolution de problème inverse développé au sein du laboratoire par Olivier Chadebec, dans le cadre de sa thèse. A l'aide de ce logiciel, il est possible de caractériser en tout point du cylindre la variation de l'aimantation à partir de mesures externes d'induction magnétique.

Nous procédons alors à une modélisation analytique des résultats issus de l'inversion. Nous montrons que la variation de l'aimantation en tout point du cylindre peut-être décrite à l'aide de lois similaires à celles utilisées pour le modèle en induction.

Deux variantes de ce modèle en aimantation sont alors introduites. Leur précision est équivalente, mais la seconde offre l'avantage d'une mise en œuvre rapide, et montre que les coefficients du modèle peuvent être déterminés par une approche physique pouvant notamment être basée sur des cycles HPP.

A- Mise en œuvre d'un algorithme d'inversion

Nous introduisons Locapi, Logiciel de Calcul des Aimantations Permanentes et Induites. Ce logiciel permet le calcul de l'aimantation dans une tôle ferromagnétique à partir de mesures d'induction externes.

I. Locapi, logiciel de calcul des aimantations permanentes et induites

Considérons une coque ferromagnétique mince. Elle est assimilable à une surface S d'épaisseur e , limitée par un contour L . Soit \mathbf{n} un vecteur normal à l'épaisseur, et V le volume de la coque (figure 68).

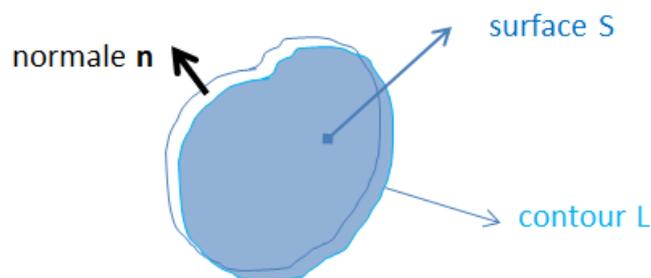


figure 68. Schéma de principe de la coque.

Soit P un point dans l'air. Le champ magnétique $\mathbf{H}(P)$ créé en P par la coque est due au champ magnétique inducteur $\mathbf{H0}(P)$ au point P , et au champ créé par l'objet. Soit $\mathbf{HM}(P)$ ce champ :

$$\mathbf{H}(P) = \mathbf{H0}(P) + \mathbf{HM}(P) \quad (67)$$

Le champ créé par la coque d'épaisseur e et de surface S est donné par :

$$\mathbf{HM}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \nabla \left(\frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) dV \quad (68)$$

\mathbf{r} est le vecteur \mathbf{QP} , où Q est le point courant d'intégration sur le volume.

Supposons la coque maillée en N éléments surfaciques. Chaque élément est alors délimité par le contour L_i . Soit \mathbf{M}_i l'aimantation dans l'élément i . L'aimantation est supposée tangentielle dans chaque élément, et peut donc être décrite, en chaque point de la coque, par 2 composantes dans la base tangentielle locale.

L'hypothèse des coques minces est de postuler que l'aimantation est uniforme selon l'épaisseur e dans chacun de ces éléments. L'équation (68) peut alors se réécrire pour un élément de contour L_i et d'épaisseur e [CHADEBEC_2001] :

$$\mathbf{HMi}(P) = -\frac{e}{4\pi} \int_{L_i} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}_i \frac{\mathbf{r}}{r^3} dL \quad (69)$$

Soit, d'après (67), pour l'ensemble de la coque :

$$\mathbf{H}(P) = \mathbf{HO}(P) - \frac{e}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} dL_i \quad (70)$$

avec $\mathbf{r}_i = \mathbf{Q}_i P$, Q_i étant le point courant d'intégration sur le contour L_i .

D'une manière générale, l'aimantation \mathbf{M} dans un matériau ferromagnétique soumis à un champ inducteur externe \mathbf{HO} peut s'écrire comme la somme d'une aimantation induite \mathbf{M}^{IND} , et d'une éventuelle aimantation rémanente \mathbf{M}^{REM} . Cette dernière contribution existe dans le cas où le matériau n'est pas désaimanté avant d'être soumis au champ inducteur \mathbf{HO} .

1. Cas où $\mathbf{M}^{REM} = \mathbf{0}$

La loi d'aimantation dans un point P_j du matériau s'écrit :

$$\mathbf{M}^{IND}(P_j) = (\mu_r - 1)\mathbf{H}(P_j) \quad (71)$$

Dans ce cas, (70) s'écrit, en posant $\mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j^{IND}$ l'aimantation induite dans l'élément j :

$$\mathbf{M}^{IND}(P_j) = (\mu_r - 1) \left(\mathbf{HO}_j - \frac{e}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \mathbf{M}_i^{IND} \cdot \mathbf{n}_i \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} dL_i \right) \quad (72)$$

\mathbf{HO}_j est la projection, dans la base tangentielle locale de l'élément j du champ inducteur \mathbf{HO} , \mathbf{n}_i la normale extérieure à l'épaisseur de l'élément i .

Pour chaque élément, (72) contient 2 inconnues (les 2 composantes de \mathbf{M}_i^{IND}) et 2 équations distinctes (avec les deux composantes de \mathbf{HO}_j). Au total, (72) définit donc $2N$ équations et $2N$ inconnues. C'est un système matriciel de la forme :

$$[C + I_d] \mathbf{M}^{IND} = [D] \quad (73)$$

[C] est une matrice dépendant de la géométrie de l'objet (et donc de son maillage), I_d est la matrice identité, \mathbf{M}^{IND} est le vecteur représentant l'aimantation induite de chaque élément surfacique, et [D] une matrice dépendant du champ inducteur $\mathbf{H0}$ et de la perméabilité réversible μ_r .

Ce système a en général un bon conditionnement, est peut être résolu avec des techniques classiques d'inversion de matrices. C'est un problème que Locapi, ou un logiciel du type Flux 3D est capable de résoudre. Sa résolution produit la valeur de l'aimantation induite en chaque élément du cylindre.

2. Cas où $\mathbf{M}^{REM} \neq \mathbf{0}$.

Dans ce cas, (72) s'écrit :

$$\mathbf{M}^{IND}(P_j) = (\mu_r - 1) \left(\mathbf{H0}_j - \frac{e}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} (\mathbf{M}_i^{IND} + \mathbf{M}_i^{REM}) \cdot \mathbf{n}_i \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} dL_i \right) \quad (74)$$

L'écriture matricielle de ce système est :

$$[C + I_d \quad C] \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{IND} \\ \mathbf{M}^{REM} \end{bmatrix} = [D] \quad (75)$$

[C] est une matrice représentant l'influence de l'aimantation (induite et permanente) de chaque élément sur les autres éléments.

Le système (75) comporte alors 4N inconnues et seulement 2N équations. C'est donc un système sous déterminé.

L'originalité de Locapi réside dans l'introduction de nouvelles équations provenant, non pas d'une approche mathématique, mais de la connaissance physique du problème, à travers des mesures d'induction extérieures réalisées sur K capteurs positionnés en des points P_K au voisinage de la coque. L'induction $\mathbf{B}(P_K)$ dans l'air, mesurée sur un capteur P_K s'écrit alors :

$$\mathbf{B}(P_K) = \mu_0(\mathbf{H0}) + \mu_0 \mathbf{HM}(P_K) \quad (76)$$

Le champ $\mathbf{HM}(P_K)$ créé par la matière est ici dû à l'aimantation induite et à l'aimantation rémanente.

En introduisant $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_i^{IND} + \mathbf{M}_i^{REM}$ dans (70), (76) s'écrit :

$$\mathbf{B}(P_K) = \mu_0(\mathbf{H0} - \frac{e}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} (\mathbf{M}_i^{IND} + \mathbf{M}_i^{REM}) \cdot \mathbf{n}_i \frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}^3} dL_i) \quad (77)$$

L'écriture matricielle de ce système est :

$$[A \quad A] \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{IND} \\ \mathbf{M}^{REM} \end{bmatrix} = [B] \quad (78)$$

[A] est une matrice qui dépend de la position des capteurs et du maillage, [B] une matrice construite à l'aide de l'induction réduite mesurée sur le capteur, c'est-à-dire de $\mathbf{B}(P_K) - \mathbf{B0}$.

L'écriture matricielle du problème inverse ainsi défini par (75) et (78) est donc :

$$\begin{bmatrix} C + I_d & C \\ A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{IND} \\ \mathbf{M}^{REM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (79)$$

Ce système se compose de $3K+2N$ équations (3 composantes de l'induction par capteur), et de $4N$ inconnues. N est très largement supérieur à K . Dans notre cas, notre cylindre est maillé en 320 éléments, donc $N=320$, et $K=8$. Le nombre d'inconnues est donc supérieur au nombre d'équations, et le système a une infinité de solution. Néanmoins, l'utilisation d'un algorithme de décomposition en valeurs singulières (SVD) permet d'exhiber la solution physique du problème. On montre qu'elle coïncide avec la solution de norme minimale.

S'il n'est pas nécessaire d'égaliser le nombre d'équations et d'inconnues pour résoudre ce système, sa résolution est favorisée par une disposition judicieuse des capteurs autour de la coque, c'est-à-dire par des capteurs régulièrement répartis. Nous verrons dans la partie suivante que l'utilisation des symétries physiques du problème permet de dupliquer les mesures des capteurs dont nous disposons sur des capteurs virtuels. Cette technique permet, outre d'augmenter le nombre de mesures, de faciliter la résolution par Locapi du problème inverse, et favorise une solution qui respecte les symétries du problème.

Dans le cadre de nos travaux, nous ferons usage de Locapi de 2 manières.

Le solveur de problème inverse nous permettra de caractériser l'aimantation dans la matériau à partir des mesures d'induction externes.

Nous utiliserons aussi Locapi pour vérifier si le modèle en aimantation que nous proposons prédit une distribution d'aimantation en accord avec les mesures réalisées sur les capteurs. Pour cela, nous calculerons la signature magnétique prédite par Locapi avec l'aimantation du modèle, et nous la comparerons avec les mesures en passage réalisées sur les capteurs. La signature prédite par Locapi est obtenue en introduisant dans (78) l'aimantation totale $\mathbf{M}^{REM} + \mathbf{M}^{IND}$ issue du modèle²⁴, conduisant à la détermination de $\mathbf{B}(P_K)$. On procède alors à la résolution d'un problème direct, pour lequel le terme source (l'aimantation) est connu.

²⁴ On résout alors le système $[A][M]=[B]$, avec $[A]$ et $[M]$ connues. On ne sépare pas les termes induit et rémanent de l'aimantation.

II. Utilisation des symétries du problème pour la duplication de capteurs

Nous disposons de mesures provenant de 8 capteurs. Seuls 6 d'entre eux ont été utilisés pour l'inversion. Deux autres capteurs (notés M5 et M6) servent à valider l'aimantation obtenue par inversion. En effet, Locapi produit une solution qui vérifie nécessairement les conditions imposées au système. Celles-ci sont définies par les mesures de l'induction sur chaque capteur. Par conséquent, il est impératif de réserver des capteurs pour la validation de la solution, en comparant la signature prédite sur les capteurs non utilisés, avec les mesures relevées sur ces derniers.

Pour les inversions de mesures en passage, nous disposons de 100 échantillons réalisés pendant la translation du cylindre. Il convient de rappeler que la disposition des capteurs M1, M2, B1, M3 et M4 conduit à des valeurs identiques, mais décalées dans le temps, lors d'une mesure d'induction en passage. Ainsi, les inversions de mesure en passage sont réalisées à partir des mesures relevées sur les capteurs B1 et B2. On utilise un sous échantillon de 5 à 10 mesures relevées lorsque le cylindre est proche des capteurs, c'est-à-dire lorsque le centre géométrique du cylindre est dans l'intervalle $[-0.3, +0.3]$ m.

Dans le cas d'un cycle HPP, le cylindre est statique. 2000 échantillonnages sont réalisés. Chaque échantillon donne les 3 composantes de l'induction extérieure mesurée sur chacun des 6 capteurs pour une valeur de la pression comprise dans l'intervalle $[0, P_{MAX}]$. Nous ne disposons donc que de 6 mesures pour une pression donnée (2 capteurs étant réservés à la validation).

Dans tous les cas, il est nécessaire de procéder à des duplications de capteurs en utilisant les symétries du problème pour augmenter le nombre de mesures. En assignant à des capteurs virtuels obtenus par des opérations de symétrie sur les capteurs en place les mesures issues des capteurs originaux, la résolution du problème est considérablement simplifiée, et la solution produite par Locapi respecte de fait les symétries physiques du problème.

Ainsi, en champ inducteur longitudinal, le problème étant invariant par rotation autour de l'axe de symétrie du cylindre, l'aimantation dans le cylindre est nécessairement longitudinale. Il est alors possible de dupliquer les capteurs M1, M2, B1, M3 et M4 par une symétrie de plan $Y=0$ ou $Z=0$. Les mesures issues des capteurs initiaux sont alors attribuées aux capteurs dupliqués après inversion des composantes verticales (figure 69).

Sous un champ inducteur vertical, l'aimantation ne possède pas de composante longitudinale. Il faut dans ce cas inverser les composantes longitudinales pour les mêmes symétries (figure 70).

Enfin, pour un champ inducteur croisé, la seule symétrie du problème est celle du plan $X=0$. Les seuls capteurs qu'il est possible de dupliquer sont alors B2, M5 et M6. Il faut dans ce cas inverser les composantes transverses. Les capteurs M5 et M6 étant réservés à la validation de l'inversion, seul le capteur B2 peut être dupliqué dans cette configuration de champ inducteur croisé.

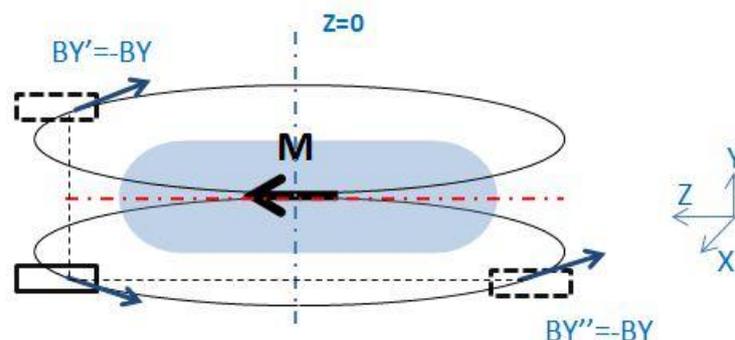


figure 69. Duplication de capteurs en champ inducteur longitudinal par symétrie de plan $Y=0$ ou $Z=0$: il faut inverser la composante verticale de l'induction mesurée sur le capteur initial.

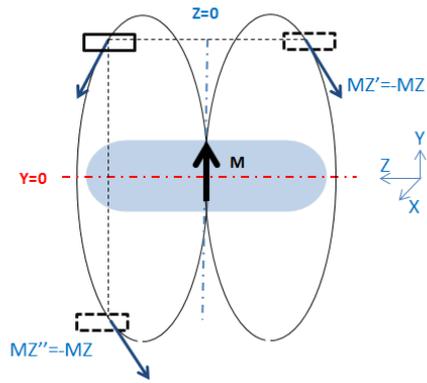


figure 70. Duplication de capteurs en champ inducteur vertical par une symétrie de plan $Y=0$ ou $Z=0$. Il faut inverser la composante longitudinale de l'induction mesurée sur le capteur initial.

III. Inversion de cycles HPP

D'une part, l'inversion d'un cycle HPP à une pression donnée conduit à la connaissance de la distribution de l'aimantation dans le cylindre à cette pression.

D'autre part, il est possible, par des inversions successives réalisées pour des valeurs de pression croissantes (et décroissantes pour la variation de l'aimantation en retour), de visualiser, à partir du même fichier de mesures HPP, l'évolution avec la pression de chacune des composantes de l'aimantation en un point donné du cylindre. Pour cela, on prélève dans le fichier de mesures d'un cycle HPP les mesures d'induction à une pression donnée. On procède ensuite à la duplication des mesures par des symétrisations de capteurs décrites précédemment. Enfin, on inverse les mesures ainsi obtenues à l'aide de Locapi. On obtient ainsi, en chaque élément du cylindre, les valeurs de chaque composante de l'aimantation. En réitérant ce procédé pour différentes pressions, on construit les courbes d'évolution des 3 composantes de l'aimantation en chaque élément du cylindre (figure 71).

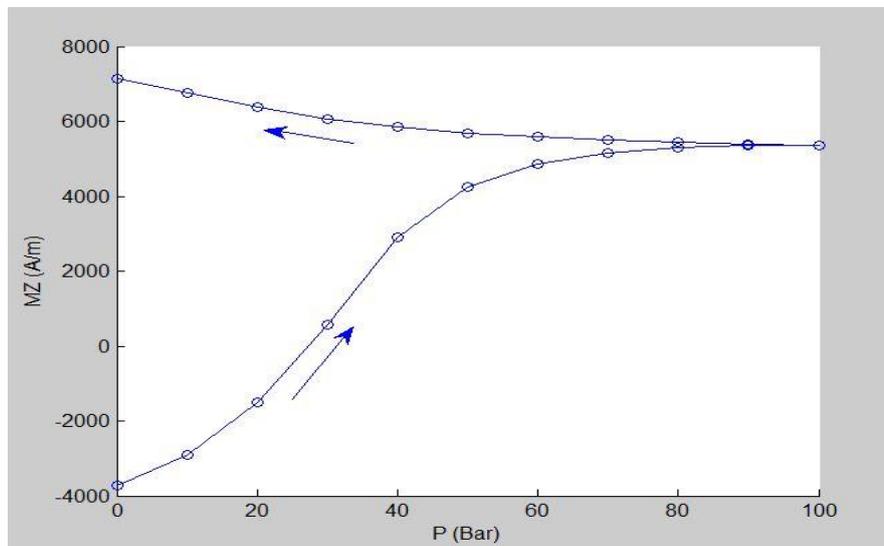


figure 71. Evolution de la composante longitudinale de l'aimantation M_z en un point du cylindre, soumis à un champ inducteur $B_L=40\mu T$. Le cylindre a été initialement polarisé à la valeur anhystérique $M_{ANH}(-40\mu T)$, ce qui explique le changement de signe de la composante longitudinale de l'aimantation. Pour obtenir cette figure, 21 inversions portant sur un même cycle HPP ont été nécessaires. On note d'ores et déjà que lors de la montée en pression interne, la composante de l'aimantation semble suivre la loi de Jiles-Atherton.

IV. Inversion de signatures en passage à pression maintenue

Ce deuxième type de mesures provient d'une signature en passage réalisée lorsque la pression est maintenue dans le cylindre à une valeur P comprise entre 0 et P_{MAX} . L'objectif de ce type de relevé est double.

Tout d'abord, il permet, par inversion avec Locapi, de caractériser l'aimantation dans le cylindre lorsque ce dernier est soumis à une pression interne constante. Cette aimantation calculée par Locapi pourra être comparée avec celle prédite par le modèle en aimantation. Mais cette comparaison n'est pas suffisante pour une validation précise du modèle. Elle ne permet en effet que de valider globalement la cohérence de l'aimantation prédite avec l'aimantation calculée par Locapi, par comparaison de la distribution des deux champs d'aimantation.

Une validation plus rigoureuse du modèle peut être obtenue en comparant la signature mesurée en pression (et utilisée pour le calcul de l'aimantation par inversion avec Locapi), avec celle prédite par l'aimantation calculée par le modèle, en particulier sur les capteurs M5 et M6 n'ayant pas servi à l'identification du modèle. La signature prédite par le modèle est calculée à l'aide du solveur de problème direct de Locapi (résolution d'un problème direct prenant comme terme source l'aimantation modélisée). La figure 72 montre l'aimantation calculée par Locapi lorsque le cylindre, pressurisé à 100 bar, est amené à son aimantation anhystérétique sous un champ inducteur vertical $BV=80\mu T$.

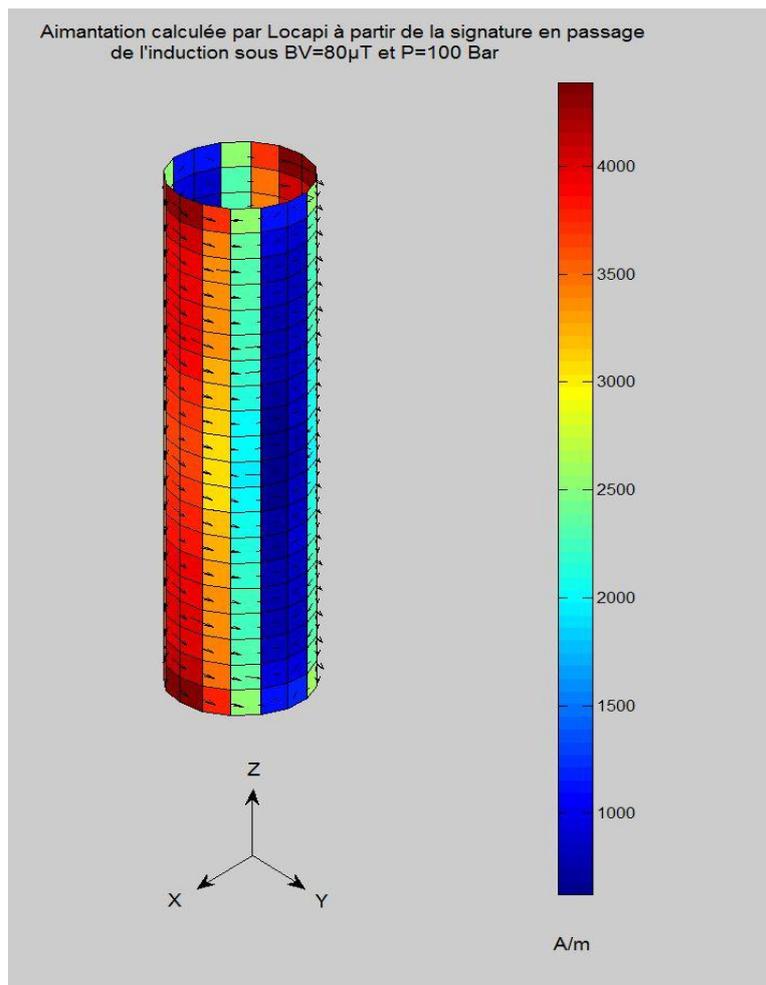


figure 72. Distribution de l'aimantation anhystérétique (en A/m) calculée par Locapi, sous un champ inducteur $BV=80\mu T$ et $P=100$ bar, à partir d'un fichier de mesures en passage. On constate que l'aimantation est bien symétrique par rapport au plan $X=0$. De plus, l'effet de forme variable est visible : l'aimantation est minimale en $Y=Y_{MIN}$ et $Y=Y_{MAX}$, c'est-à-dire pour les zones de forts champs démagnétisant (figure 37)

V. Caractérisation magnétique du cylindre en aimantation

Dans un premier temps, les aimantations induites depuis un état désaimanté ont été calculées à l'aide de Locapi. Elles ont tout d'abord confirmé les symétries attendues dans le cas de champs inducteurs mono axiaux.

D'autre part, le découplage de l'aimantation vis-à-vis du champ inducteur a également été vérifié pour tout niveau de pression. La figure 73 montre ce découplage pour un champ inducteur croisé $\mathbf{BL} = -30\mu\text{T} + \mathbf{BV} = -58\mu\text{T}$ sous une pression de 0 bar. Dans un premier temps, les aimantations $\mathbf{M}_{\text{IND}}(\mathbf{BL} = 40\mu\text{T})$ et $\mathbf{M}_{\text{IND}}(\mathbf{BV} = 80\mu\text{T})$ obtenues sous les champs inducteurs respectifs mono axiaux $\mathbf{BL} = 40\mu\text{T}$ et $\mathbf{BV} = 80\mu\text{T}$ ont été calculées par Locapi. L'aimantation attendue sous un champ inducteur croisé $\mathbf{BL} = -30\mu\text{T} + \mathbf{BV} = -58\mu\text{T}$, a ensuite été reconstituée par combinaison linéaire de ces 2 aimantations. Enfin, la signature prédite par l'aimantation reconstituée a été comparée aux mesures. La comparaison montre le découplage de l'aimantation vis-à-vis du champ inducteur.

Les mêmes vérifications ont été menées sous une pression de 100 bar, avec un champ inducteur croisé de valeur $\mathbf{BL} = -20\mu\text{T} + \mathbf{BV} = 40\mu\text{T}$ (figure 74).

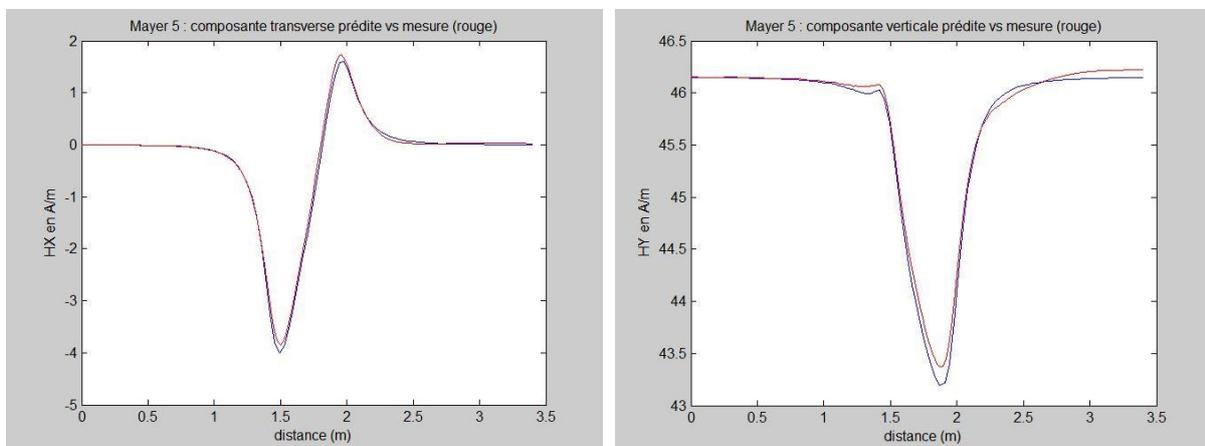


figure 73. Vérification du découplage à 0 bar de l'aimantation vis à vis du champ inducteur (ici pour un champ inducteur croisé $\mathbf{BV} = -58\mu\text{T}$ (-46 A/m) + $\mathbf{BL} = -30\mu\text{T}$ (-23.85 A/m), sur les composantes transverse et verticale du capteur M5 en signature. La même concordance est observée sur tous les capteurs, sur les 3 composantes : l'aimantation est découplée par rapport au champ inducteur sous 0 bar.

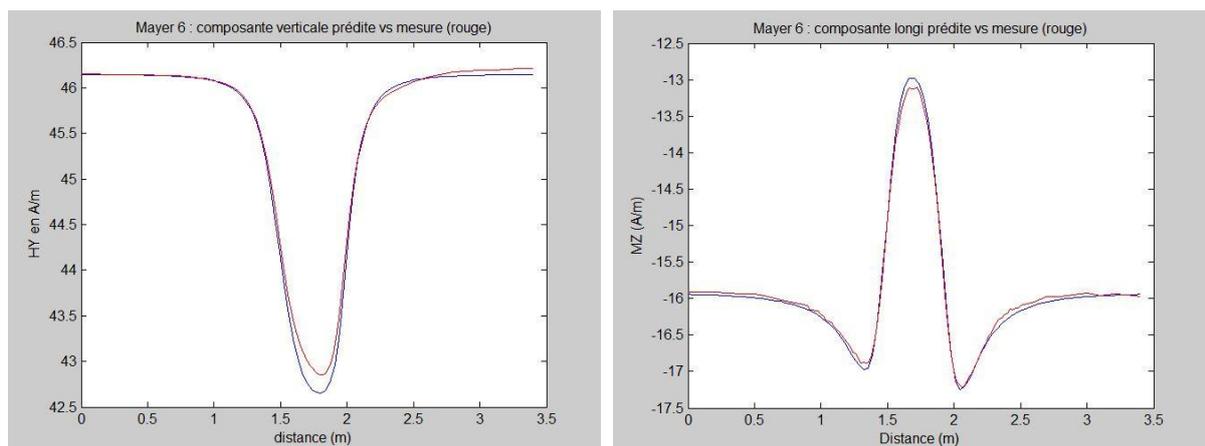


figure 74. Vérification du découplage à 100 bar de l'aimantation vis à vis du champ inducteur (ici pour un champ inducteur croisé $\mathbf{BL} = 40\mu\text{T}$ (31.8 A/m) + $\mathbf{BV} = -20\mu\text{T}$ (-16 A/m), sur les composantes verticale et longitudinale du capteur M6 en signature. La même concordance sera observée sur tous les capteurs, sur les 3 composantes : l'aimantation est découplée par rapport au champ inducteur sous 100 bar.

Les aimantations anhystérétiques en champs inducteurs mono axial vertical et longitudinal ont été calculées pour des pressions dans l'intervalle [0,100] bar, par pallier de 10 bar. Les résultats sont cohérents avec le comportement phénoménologique attendu de l'aimantation : les symétries sont constatées en champ inducteur mono axial. Nous disposons ainsi des valeurs de l'aimantation anhystérétique en chaque élément du cylindre pour ces champs et ces pressions. C'est une donnée fondamentale pour établir un modèle en aimantation.

B. Un modèle en aimantation

I. Inversion en des points remarquables

Nous avons tout d'abord procédé à des inversions de cycles HPP sous différents champs inducteurs, mono axiaux ou croisés, de manière à s'assurer de la cohérence des résultats produits par Locapi par comparaison des signatures prédites par Locapi et mesurées.

Pour un champ inducteur donné, les distributions d'aimantation calculées sous différentes pressions, par inversion du cycle HPP, ont ainsi permis de caractériser l'évolution de l'aimantation en tout point du cylindre. La figure 71 est représentative des 3x320 courbes obtenues par inversions successives d'un cycle HPP.

Ces courbes montrent que l'aimantation migre vers une valeur limite pour chaque élément du cylindre maillé (figure 75). De plus, cette variation semble suivre une loi similaire à celle présentée pour le modèle en champ inducteur longitudinal, donnée par (65) (figures 76 et 77).

D'autre part, le comportement phénoménologique des composantes de l'aimantation est cohérent avec les effets de forme attendus. Considérons en effet la figure 75.

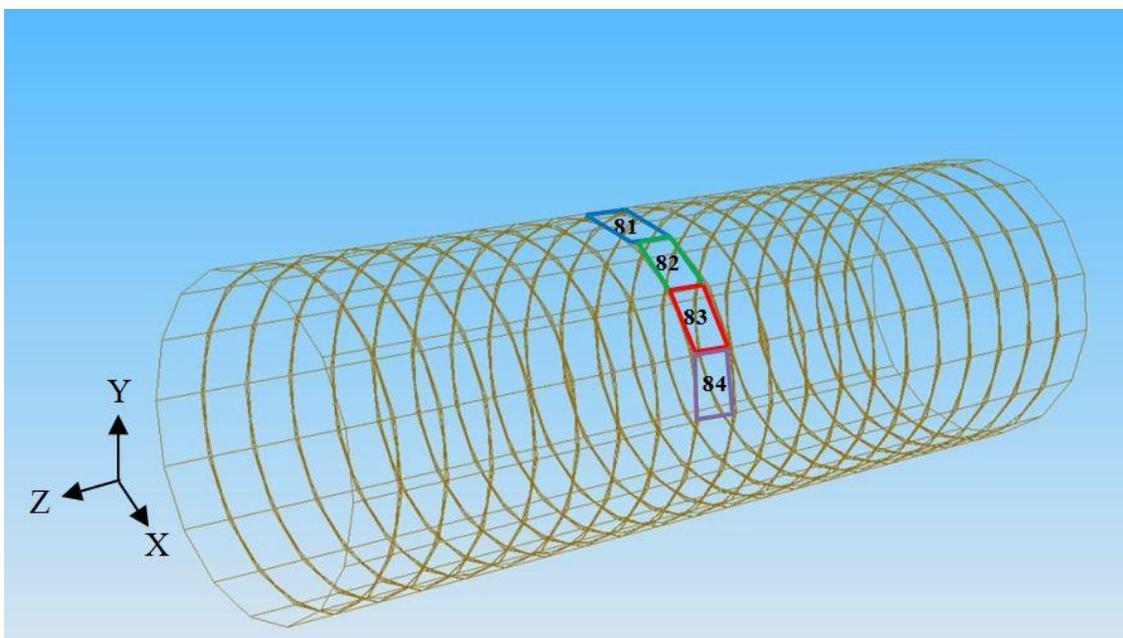


figure 75. Le cylindre maillé. On a représenté 4 des 320 éléments du maillage.

Sous un champ inducteur vertical, l'effet de forme va favoriser l'aimantation dans l'élément 84 plutôt que dans l'élément 82 (figure 37). Par conséquent, la composante verticale attendue de l'aimantation à l'élément 84 doit être supérieure à celle dans l'élément 82.

De même, l'aimantation étant tangentielle au cylindre, la valeur de la composante transverse à l'élément 82 doit être supérieure à celle de l'élément 84.

Enfin, les composantes longitudinales doivent être nulles. Les figures 76 à 79 confirment ces points.

Sous un champ inducteur longitudinal, les composantes verticales doivent être proches de 0. De plus, l'aimantation doit être favorisée au centre du cylindre, là où l'effet de forme est moins important. En effet, les extrémités du cylindre présentent une zone de fort champ démagnétisant. La visualisation de l'aimantation, obtenue à $P=0$ bar, sous un champ inducteur $\mathbf{BL}=40\mu\text{T}$ valident ce phénomène (figure 79).

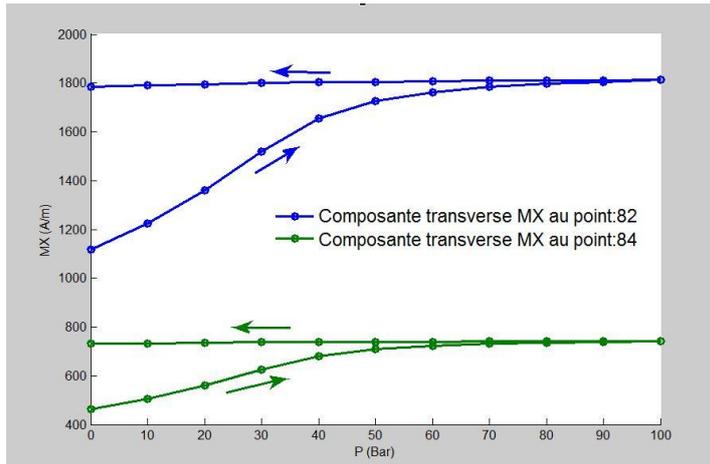


figure 76. Evolution des composantes transverse MX de l'aimantation aux éléments 82 et 84 du cylindre, sous un champ inducteur vertical. Comme attendue, la composante à l'élément 82 est prépondérante.

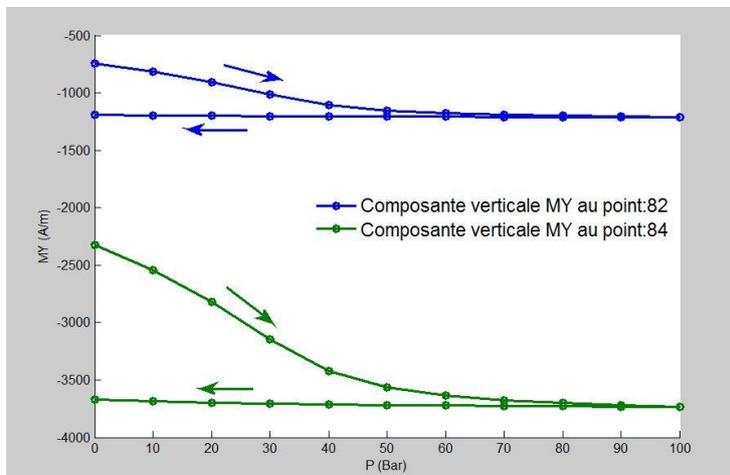


figure 77. Evolution des composantes verticales MY de l'aimantation aux éléments 82 et 84 du cylindre, sous un champ inducteur vertical. La composante à l'élément 84 est prépondérante.

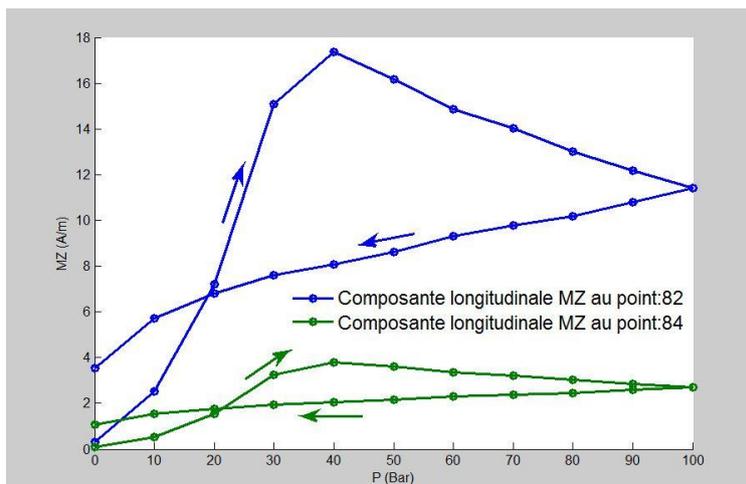


figure 78. Evolution des composantes longitudinales MZ de l'aimantation aux éléments 82 et 84 du cylindre, sous un champ inducteur vertical. Les valeurs des composantes sont proches de 0.

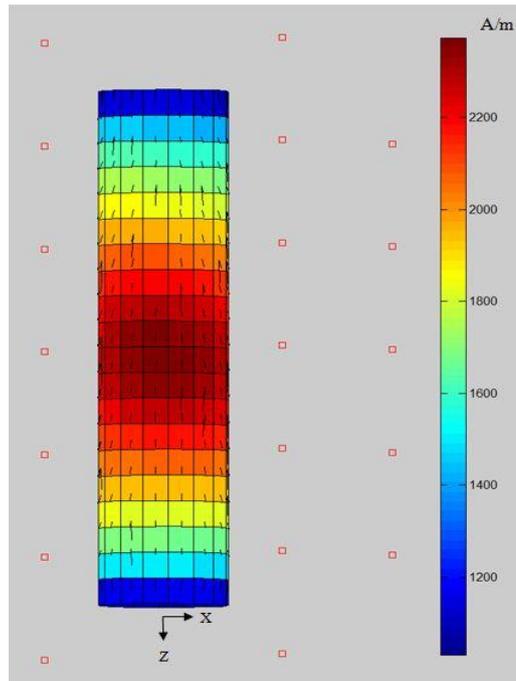


figure 79. $P=0$ bar. Aimantation induite, en A/m, sous un champ inducteur longitudinal $BL=40\mu T$ (31.8 A/m). Le champ démagnétisant est prépondérant aux extrémités du cylindre, pour lesquelles l'aimantation est par conséquent moindre qu'au centre.

Le comportement de l'aimantation suit la loi de Jiles. La figure 80 montre deux distributions d'aimantation obtenues par inversion avec Locapi. La première (figure 80 gauche) est issue de l'inversion du fichier de mesures d'un cycle HPP réalisé sous un champ inducteur $BL=40\mu T$ à 100 bar. La seconde (figure 80 droite) est le résultat de l'inversion de la mesure en passage sous le même champ inducteur, lorsque le cylindre est polarisé à son aimantation anhystérique sous la même pression.

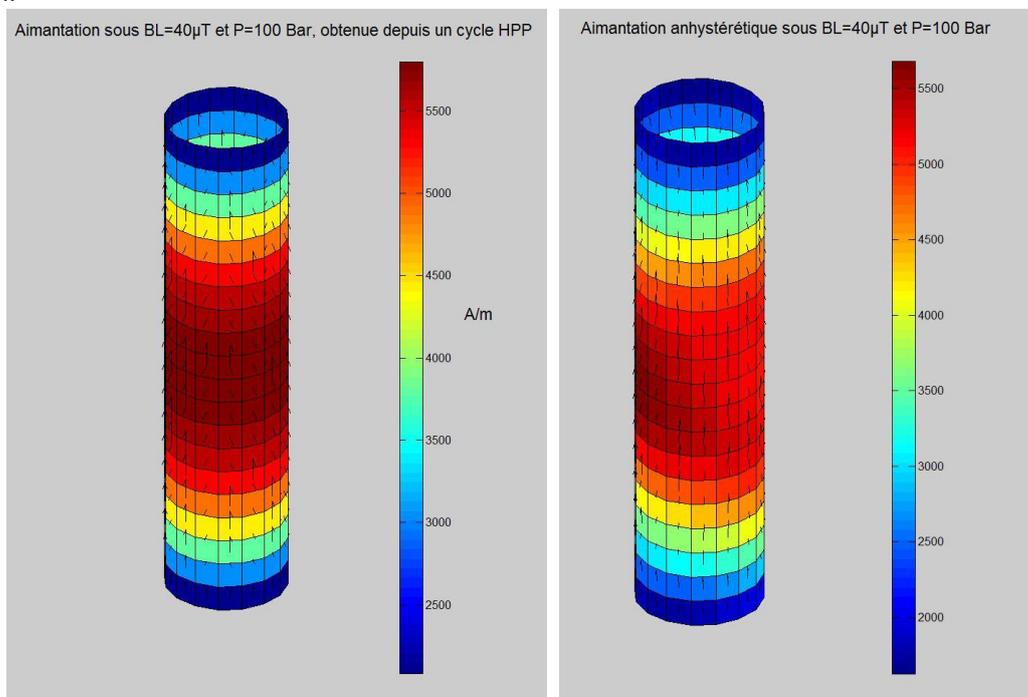


figure 80. $P=100$ bar et $BL=40\mu T$ (31.8 A/m). Les aimantations sont ici calculées par Locapi. Gauche: depuis une mesure d'un cycle HPP. Droite : par inversion de la mesure en passage de l'induction anhystérique sous $BL=40\mu T$. Les aimantations sont quasiment identiques : l'aimantation dans le cylindre migre vers sa valeur anhystérique avec la pression.

On constate que les aimantations sont quasiment identiques : l'aimantation a migré vers sa valeur anhystérétique avec la pression. Ce résultat était prévisible puisque nous avons vu que l'induction migre vers sa valeur anhystérétique lors d'une montée en contrainte. Nécessairement, dans le cas d'une tôle mince ferromagnétique, l'aimantation doit faire de même (60).

II. Une solution analytique approchée par une méthode d'adaptation

1. Forme générale de la solution vectorielle en aimantation

L'approche utilisée pour le modèle en induction extérieure a été utilisée pour établir le modèle en aimantation. En effet, l'analyse des courbes d'évolution de l'aimantation en différents éléments du cylindre confirme la loi d'approche en aimantation, pour chaque composante de l'aimantation.

Par conséquent, nous cherchons une loi vectorielle de description de l'évolution de l'aimantation de la forme (65), pour un champ inducteur vertical ou longitudinal.

Compte tenu des invariances du problème lorsque le cylindre est soumis à un champ inducteur vertical **BV**, la loi vectorielle de l'aimantation **M** à l'élément J du cylindre soumis à une pression P doit s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}_J(P, \mathbf{BV}) = M_{J,X}(P, \mathbf{BV})\mathbf{X} + M_{J,Y}(P, \mathbf{BV})\mathbf{Y} \quad (80)$$

Sous un champ inducteur longitudinal **BL**, nous écrivons :

$$\mathbf{M}_J(P, \mathbf{BL}) = M_{J,Z}(P, \mathbf{BL})\mathbf{Z} \quad (81)$$

$M_{J,X}$, $M_{J,Y}$ et $M_{J,Z}$ sont les lois scalaires d'évolution des composantes transverse X, verticale Y et longitudinale Z à l'élément J du cylindre.

Nous faisons l'hypothèse forte que ξ étant un paramètre intrinsèque du matériau, la valeur utilisée pour la loi en induction doit être également utilisée pour la loi que nous postulons en aimantation. Par conséquent, nous écrivons, avec $l=X, Y$ ou Z , et $\mathbf{B}=\mathbf{BV}$ ou $\mathbf{B}=\mathbf{BL}$:

$$M_{J,l}(P, \mathbf{B}) = a_{J,l} e^{-\frac{P^2}{2E\xi}} + b_{J,l}P + c_{J,l} \quad (82)$$

L'aimantation étant découplée par rapport au champ inducteur, la loi de variation vectorielle de l'aimantation avec la pression, pour un champ inducteur quelconque, peut donc être construite par combinaison linéaire des deux lois (80) et (81), données pour des champs inducteurs mono axiaux. Ces deux lois peuvent être caractérisées à l'aide de deux cycles HPP de référence, réalisés par exemple sous un champ inducteur longitudinal **BOL**=40μT, puis sous un champ inducteur vertical **BOV**=80μT.

Nous écrivons donc pour un champ inducteur croisé quelconque $\mathbf{B}=\rho\mathbf{BOV} + \lambda\mathbf{BOL}$:

$$\mathbf{M}_J(P, \mathbf{B}) = \rho[M_{J,X}(P, \mathbf{BOV})\mathbf{X} + M_{J,Y}(P, \mathbf{BOV})\mathbf{Y}] + \lambda[M_{J,Z}(P, \mathbf{BOL})\mathbf{Z}] \quad (83)$$

Il faut alors utiliser un algorithme d'adaptation, de manière à déduire des variations des composantes de l'aimantation en chaque élément du cylindre (obtenues par inversions successives d'un cycle HPP en champ inducteur longitudinal, puis vertical) les valeurs des coefficients $a_{J,l}$, $b_{J,l}$ et $c_{J,l}$ de (82). Les inversions réalisées sous un champ inducteur mono axial longitudinal de référence **BOL** produiront les 3 valeurs $a_{J,Z}$, $b_{J,Z}$ et $c_{J,Z}$. Les inversions réalisées sous un champ inducteur mono axial vertical de référence **BOV** donneront les 6 valeurs $a_{J,X}$, $b_{J,X}$, $c_{J,X}$, $a_{J,Y}$, $b_{J,Y}$ et $c_{J,Y}$.

Pour notre étude, nous avons réalisé les inversions par pallier de 10 bar, pour des montées en pression de 0 à 100 bar. 22 inversions ont donc été nécessaires pour pouvoir mettre en œuvre les algorithmes d'adaptation.

2. Détermination des coefficients de l'équation par une procédure d'adaptation

Le nombre de coefficients à déterminer pour expliciter la loi (83) est important, chacun des 320 éléments du cylindre mettant en jeu 9 coefficients : 6 pour la loi (80), et 3 pour la loi (81). Au total, il y a donc 9×320 coefficients à déterminer, soit 2880 coefficients.

Les symétries du problème réduisent considérablement ce nombre.

Sous un champ inducteur longitudinal, le problème est invariant par rotation autour de l'axe longitudinal **Z**. Il n'est donc utile de terminer que les 3 coefficients de chacun des 20 éléments d'une ligne d'éléments quelconque : le maillage se compose en effet de 16 lignes de 20 éléments chacune (figure 75). De plus, le problème admet un plan d'antisymétrie $Z=0$. La loi en aimantation pour un champ inducteur longitudinal ne nécessite donc que la détermination de 30 coefficients, à l'aide de 10 procédures de fitting : chacune de ces opérations adapte la solution (82) à l'évolution avec la pression de l'unique composante longitudinale de l'aimantation, obtenue par l'inversion du cycle HPP sous un champ inducteur longitudinal **BOL**=40 μ T, et produit donc 3 coefficients.

Sous un champ inducteur vertical **BOV**, le plan d'équation $Y=0$ est un plan d'antisymétrie pour les composantes transverses, et divise donc par 2 le nombre de coefficients à déterminer.

De plus, le plan d'équation $X=0$ est un plan de symétrie pour les composantes transverses. Il y a donc au final 40 procédures de fitting à effectuer pour la loi en champ inducteur vertical.

De plus, les procédures d'adaptation nécessitent la connaissance de l'évolution des composantes de l'aimantation sur les 90 éléments. Il est donc nécessaire d'effectuer au préalable 22 inversions.

11 inversions (en faisant varier la pression de 0 à 100 bar par palier de 10 bar) pour un champ inducteur longitudinal produiront la courbe d'évolution des composantes longitudinales de l'aimantation sur chacun des 10 éléments d'une génératrice du cylindre maillé, et vont donc permettre de déterminer les coefficients de la fonction objectif (82). De la même manière, 11 inversions effectuées sur un cycle HPP réalisé sous un champ inducteur vertical conduiront aux courbes d'évolution des composantes transverses et verticales de l'aimantation sur les 40 éléments nécessaires à la détermination de la loi (82).

Ainsi, si la validation de ce modèle en fitting, présentée ci-après, donne des résultats satisfaisants, elle reste très coûteuse en termes de calcul. Nous verrons qu'une méthode plus rapide permet d'obtenir les coefficients de la loi (82) de manière directe et présentant de plus l'avantage de donner une signification physique à ces derniers.

La détermination des coefficients a été effectuée à l'aide de deux cycles de référence réalisés sous des inducteurs mono axiaux **BOL**=40 μ T et **BOV**=80 μ T. Les résultats sont maintenant présentés.

III. Validation du modèle par une procédure d'adaptation

1. Validation sous un champ inducteur mono axial

Pour la validation en champ inducteur mono axial, des cycles HPP ont été réalisés sous les champs inducteurs de référence **BOL**=40 μ T et **BOV**=80 μ T.

Dans un premier temps, la cohérence du champ d'aimantation calculé par le modèle est vérifiée par comparaison avec l'aimantation obtenue par inversion des signatures en passage. Pour les deux champs inducteurs mono axiaux **BOL**=40 μ T et **BOV**=80 μ T, et pour des pressions P=0 bar ou P=100 bar, les aimantations sont très similaires. C'est une première validation du modèle. Les résultats sont cohérents. On note sur l'aimantation obtenue par le modèle (figure 84 gauche) les symétries imposées, en observant l'homogénéité de l'aimantation sur une couronne (i.e. à Z=C^{te}).

Les signatures mesurées lors d'une signature en passage sont ensuite superposées aux signatures prédites par le modèle en fitting, et montrent que l'écart entre les mesures et les prédictions sont inférieures à 6%. Les résultats valident donc l'approche pour des champs inducteurs mono axiaux.

Nous présentons ici les résultats de la validation pour un champ inducteur **BOL**=40 μ T sous une pression de 100 bar. Les signatures présentées (figures 81 à 83) sont celles des capteurs M5 et M6, les plus éloignés du cylindre et non utilisés pour les inversions.

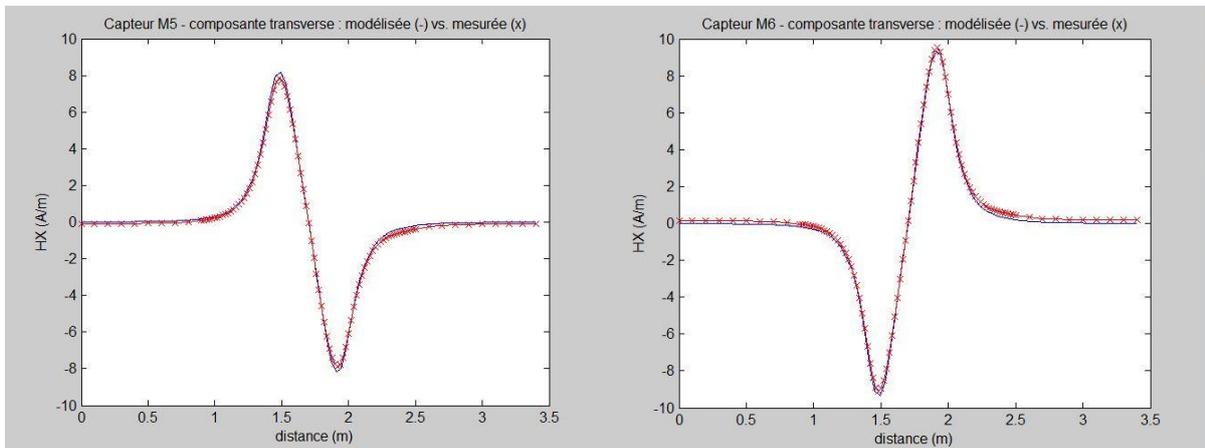


figure 81. P=100 bar. Composantes transverses : comparaison entre les signatures prédites et mesurées, sous **BOL**=40 μ T (32 A/m), sur les capteurs M5 et M6.

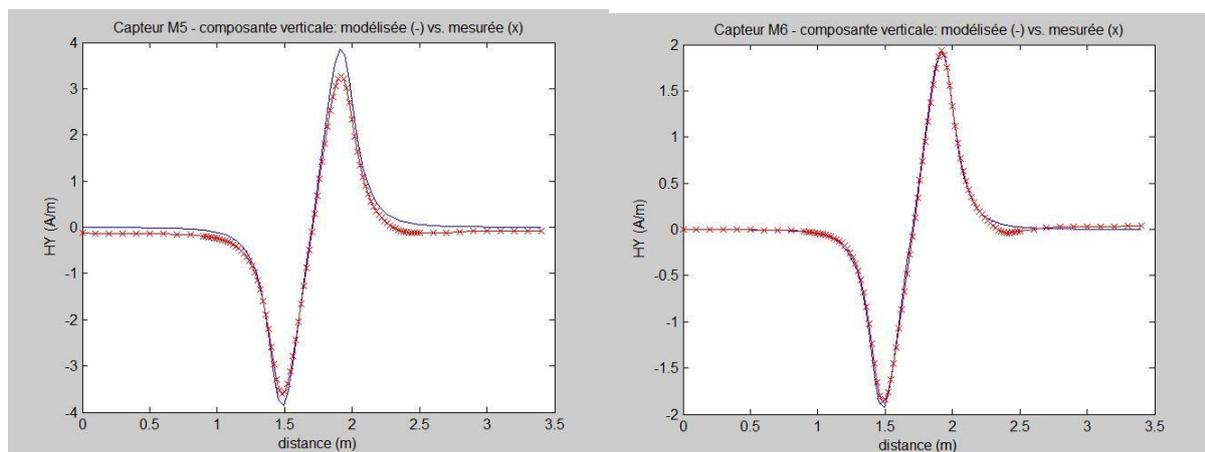


figure 82. P=100 bar. Composantes verticales : comparaison entre les signatures prédites et mesurées, sous **BOL**=40 μ T (32 A/m), sur les capteurs M5 et M6.

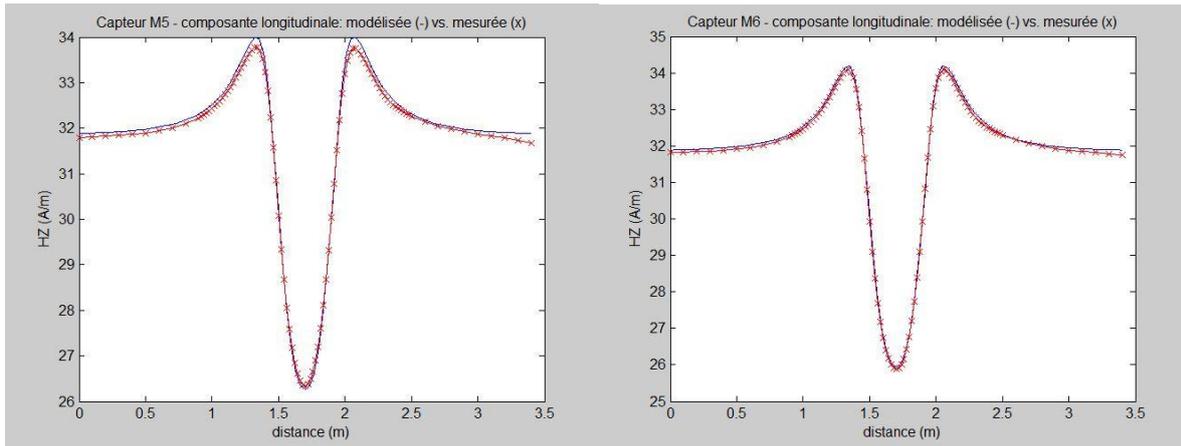


figure 83. P=100 bar. Composantes longitudinales : comparaison entre les signatures prédites et mesurées, sous $BOL=40\mu T$ (32 A/m), sur les capteurs M5 et M6.

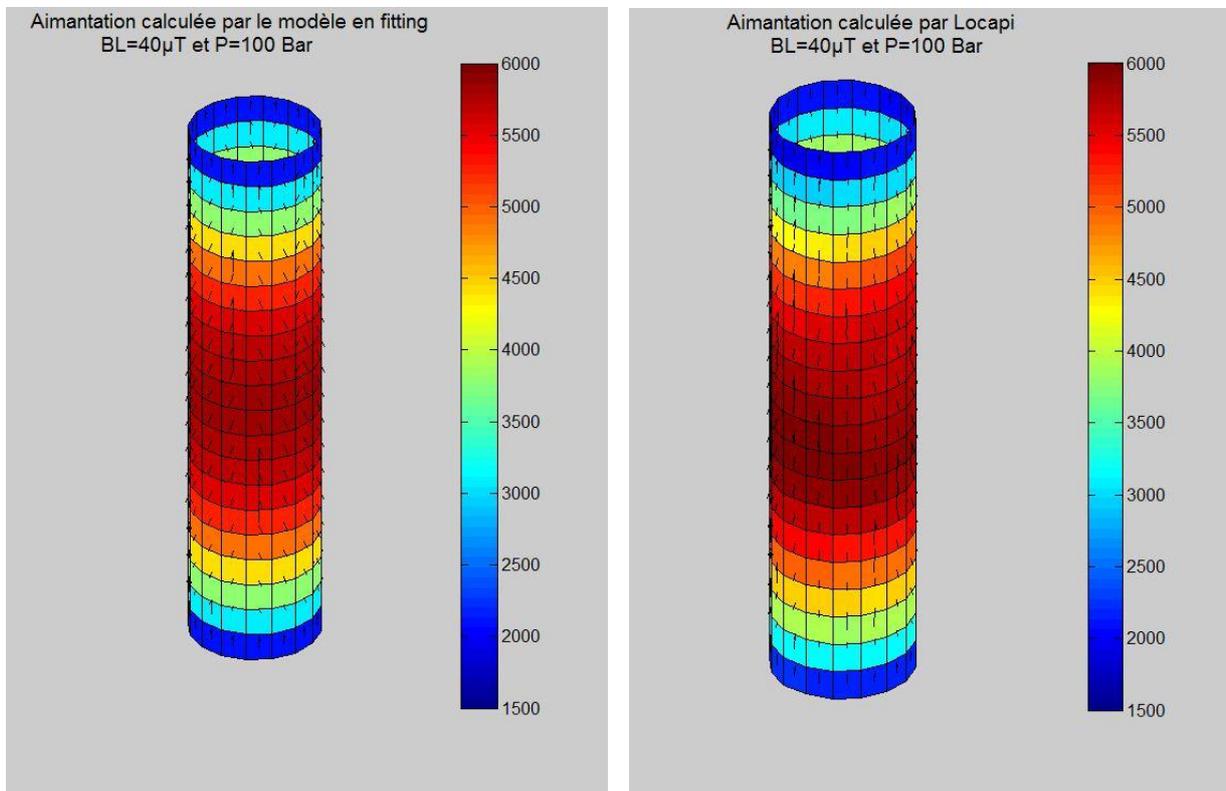


figure 84. P=100 bar. Comparaison de l'aimantation calculée par le modèle en adaptation (gauche) avec l'aimantation obtenue par inversion à l'aide de Locapi (droite), pour un champ inducteur $BOL=40\mu T$ (32 A/m). On note les symétries imposées au modèle par comparaison des aimantations sur une couronne.

2. Validation sous un champ inducteur croisé

Le modèle a ensuite été validé pour des champs inducteurs croisés. Nous présentons ici les résultats pour un champ inducteur croisé $\mathbf{BL}=-30\mu\text{T} + \mathbf{BV}=-58\mu\text{T}$, sous $P=0$ bar et $P=50$ bar. Les champs d'aimantation prédits par le modèle sont en accord avec ceux calculés par Locapi. Les extrema sont identiques. Les symétries imposées au modèle en fitting sont visibles par comparaison des aimantations sur les extrémités du cylindre.

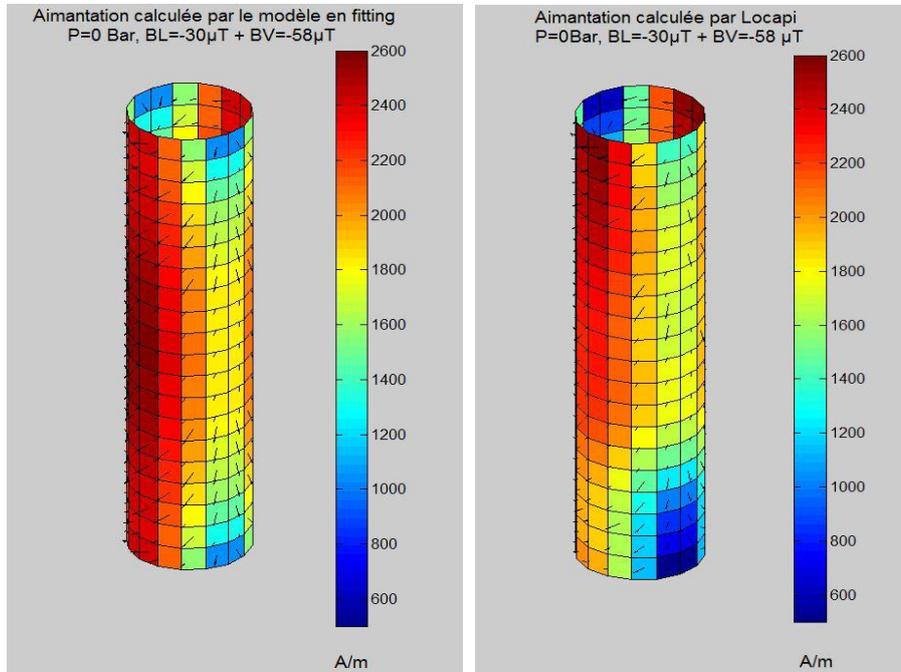


figure 85. $P=0$ bar. Comparaison de l'aimantation calculée par le modèle en fitting (gauche) avec l'aimantation obtenue par inversion à l'aide de Locapi (droite), pour un champ inducteur $\mathbf{BOL}=-30\mu\text{T} + \mathbf{BOV}=-58\mu\text{T}$ ($\mathbf{HOL}=-23.85$ A/m + $\mathbf{HOV}=-46.4$ A/m).

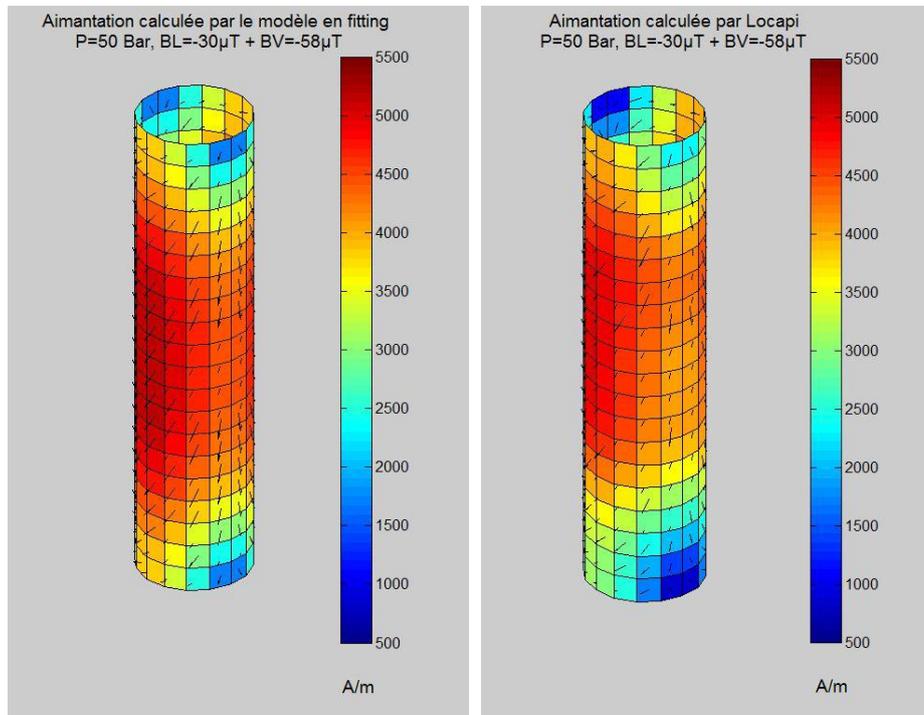


figure 86. $P=50$ bar. Comparaison de l'aimantation calculée par le modèle en fitting (gauche) avec l'aimantation obtenue par inversion à l'aide de Locapi (droite), pour un champ inducteur $\mathbf{BOL}=-30\mu\text{T} + \mathbf{BOV}=-58\mu\text{T}$ ($\mathbf{HOL}=-23.85$ A/m + $\mathbf{HOV}=-46.4$ A/m).

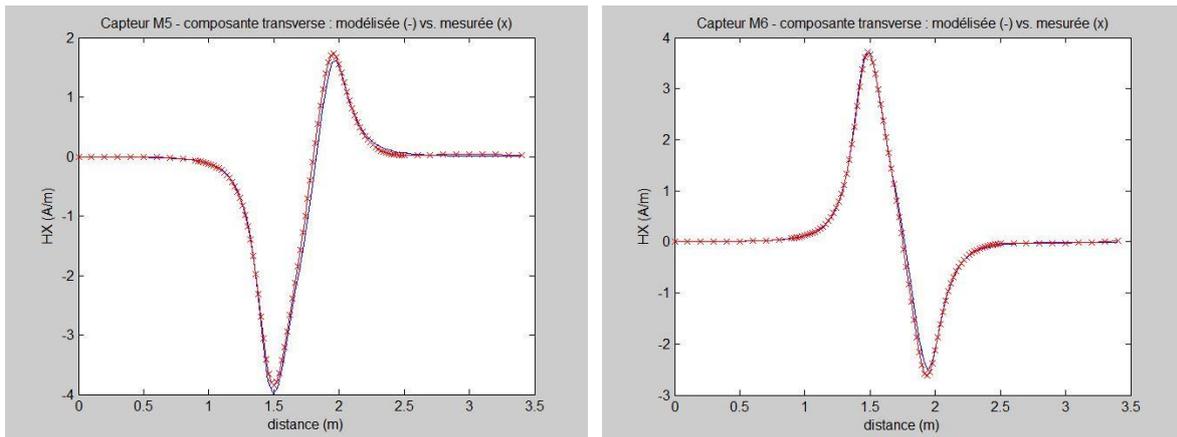


figure 87. P=0 bar. Composantes transverses : comparaison entre les signatures prédites et mesurées, sous $\mathbf{BOL}=-30\mu\text{T} + \mathbf{BOV}=-58\mu\text{T}$ ($\mathbf{HOL}=-23.85 \text{ A/m} + \mathbf{HOV}=-46.4 \text{ A/m}$), sur les capteurs M5 et M6.

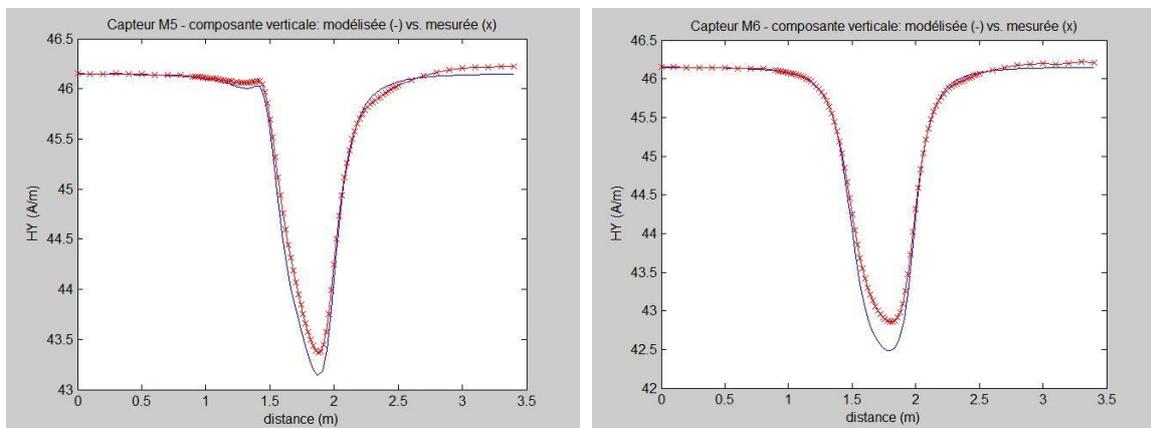


figure 88. P=0 bar. Composantes verticales : comparaison entre les signatures prédites et mesurée, sous $\mathbf{BOL}=-30\mu\text{T} + \mathbf{BOV}=-58\mu\text{T}$ ($\mathbf{HOL}=-23.85 \text{ A/m} + \mathbf{HOV}=-46.4 \text{ A/m}$), sur les capteurs M5 et M6. L'erreur relative maximale est de 6 %.

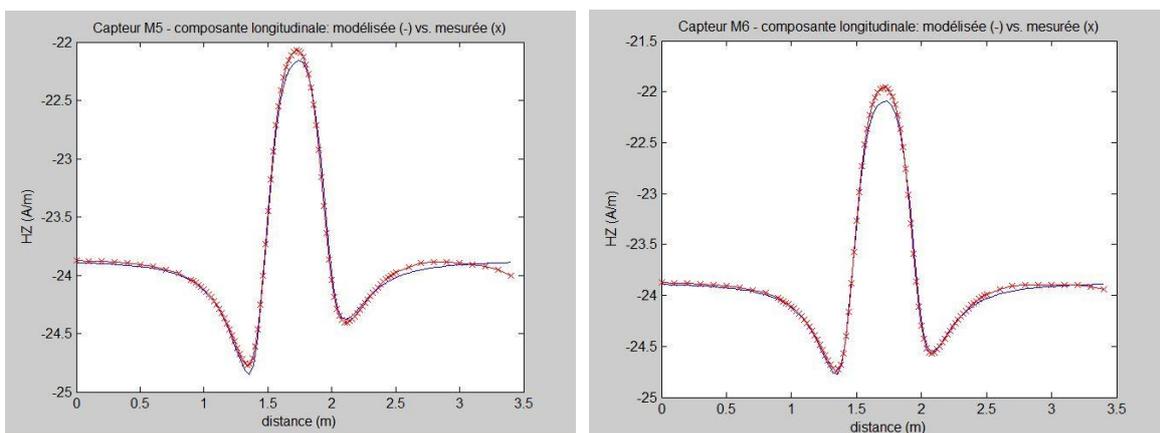


figure 89. P=0 bar. Composantes longitudinales : comparaison entre les signatures prédites et mesurées, sous $\mathbf{BOL}=-30\mu\text{T} + \mathbf{BOV}=-58\mu\text{T}$ ($\mathbf{HOL}=-23.85 \text{ A/m} + \mathbf{HOV}=-46.4 \text{ A/m}$), sur les capteurs M5 et M6.

Pour tous les champs inducteurs, l'erreur relative maximale calculée par comparaison des signatures reste inférieure à 12 %. Le modèle donne donc des résultats satisfaisants.

IV. Une solution phénoménologique privilégiée

1. Détermination des coefficients du modèle par une approche physique

La méthode utilisant une procédure d'adaptation (ou méthode en fitting) est validée par les mesures. Cette méthode nécessite toutefois un nombre important d'opérations de fitting. Il existe une méthode plus avantageuse d'un point de vue algorithmique, mais qui offre également l'avantage d'être plus proche de la physique du phénomène étudié.

Notons que cette méthode aurait pu être utilisée pour le modèle en induction. Néanmoins, elle revêt tout son intérêt dans le cadre d'une modélisation de l'aimantation.

Considérons la loi (82), utilisée pour modéliser le comportement de chacune des composantes I de l'aimantation à l'élément J :

$$M_{J,I}(P, \mathbf{B}) = a_{J,I} e^{-\frac{P^2}{2E\xi}} + b_{J,I}P + c_{J,I} \quad (84)$$

Phénoménologiquement, cette loi traduit le comportement exponentiel de l'aimantation pour des pressions inférieures à 80 bar, puis son évolution linéaire au-delà. La linéarité décrit l'approche de la composante vers sa limite donnée par la composante de l'aimantation anhystérétique. Cette composante linéaire peut donc être définie par les valeurs de l'aimantation anhystérétique à 90 bar et 100 bar. En effet, pour ces pressions, l'induction mesurée est confondue avec l'induction anhystérétique. Par conséquent, la pente de la droite décrite par le terme linéaire $b_{J,I}(\mathbf{B0})P + c_{J,I}(\mathbf{B0})$ vaut (figure 90) :

$$b_{J,I} = \frac{M_{J,I}(100 \text{ Bar}) - M_{J,I}(90 \text{ Bar})}{100 - 90} \quad (85)$$

De plus, lorsque $P=100$ bar, la composante de l'aimantation peut être décrite par le terme linéaire, le terme en exponentiel devenant négligeable, étant donnée la valeur trouvée pour $1/2E\xi$ ($9.5632.10^{-4}$). Par conséquent, pour $P=100$ bar :

$$M_{J,I}(100 \text{ Bar}) = 100b_{J,I} + c_{J,I} \quad (86)$$

Enfin, pour $P=0$ bar :

$$M_{J,I}(0 \text{ Bar}) = a_{J,I} + c_{J,I} \quad (87)$$

La résolution de ce système conduit à :

$$b_{J,I} = \frac{M_{J,I}(100 \text{ Bar}) - M_{J,I}(90 \text{ Bar})}{100 - 90} \quad (88)$$

$$c_{J,I} = \frac{100M_{J,I}(90 \text{ Bar}) - 90M_{J,I}(100 \text{ Bar})}{100 - 90} \quad (89)$$

$$a_{J,I} = M_{J,I}(0 \text{ Bar}) - c_{J,I} \quad (90)$$

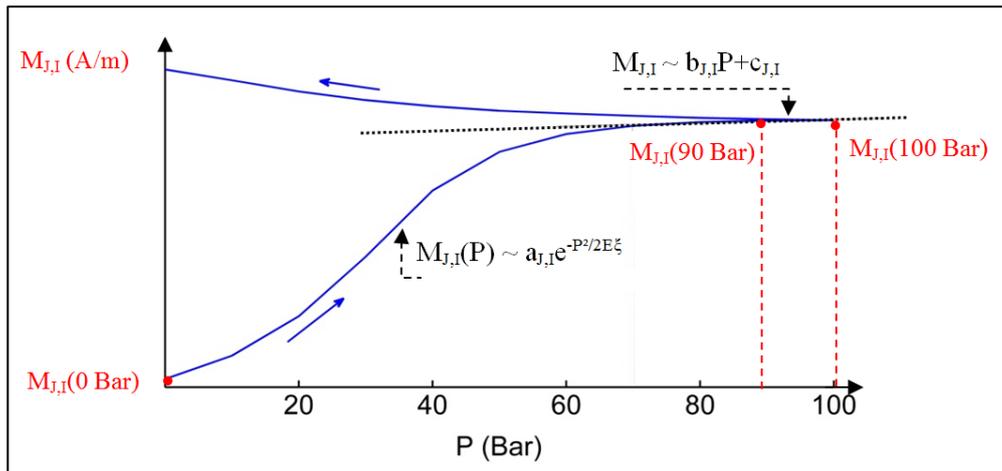


figure 90. Détermination des coefficients à partir des valeurs de l'aimantation à 0 bar, 90 bar et 100 bar.

La détermination des coefficients de ce modèle, qualifié de phénoménologique par la suite, peut donc être effectuée sans procédure d'adaptation. Notons qu'aucune symétrie n'a été implémentée pour ce modèle : le calcul des coefficients étant réalisé de manière automatique, nous n'avons pas contraint la solution.

2. Mise en œuvre du modèle phénoménologique

La mise en œuvre du modèle comporte deux étapes.

La première est une phase d'initialisation, servant à caractériser les valeurs des paramètres du modèle. Elle définit les coefficients $b_{J,i}$ à partir de 4 inversions de cycles HPP.

Les deux premières inversions sont réalisées sous un champ inducteur longitudinal de référence **BOL**. Dans cette configuration, nous avons vu que l'aimantation en tout point du cylindre était longitudinale. Par conséquent, ces deux premières inversions définissent les coefficients $b_{J,z}$ et $c_{J,z}$ pour tous les éléments J du cylindre à partir des valeurs $M_{J,z}(90 \text{ bar})$ et $M_{J,z}(100 \text{ bar})$.

Les deux inversions suivantes sont réalisées sous un champ inducteur vertical de référence **BOV**. Dans ce cas, l'aimantation possède deux composantes transverse (selon **X**) et verticale (selon **Y**). Les deux inversions définissent donc les coefficients $b_{J,x}$, $c_{J,x}$, $b_{J,y}$ et $c_{J,y}$ pour tous les éléments J du cylindre à partir des valeurs $M_{J,x}(90 \text{ bar})$, $M_{J,y}(90 \text{ bar})$, $M_{J,x}(100 \text{ bar})$ et $M_{J,y}(100 \text{ bar})$.

Les valeurs de ces coefficients sont indépendantes de l'état magnétique initial du cylindre (87,88) : en champ inducteur longitudinal ou vertical, il a été vérifié (figures 57 et 58) que les aimantations, dès 80 bar, sont égales à leur valeur anhystérétique. Aussi, ces 4 inversions ne doivent être effectuées qu'une seule fois, indépendamment de l'état initial.

La seconde étape consiste en la prise en compte de l'état magnétique initial du cylindre. Ceci est réalisé par le calcul des coefficients $a_{J,i}$. Ces coefficients (90) sont déterminés par inversion de l'aimantation sous 0 bar, qui produit les $M_{J,i}(0 \text{ bar})$.

Dans notre étude, nous avons utilisé les champs inducteurs de référence mono axiaux **BOV**=80μT et **BOL**=40μT pour l'initialisation des coefficients $b_{J,i}$ et $c_{J,i}$. La caractérisation terminée, ce modèle permet donc la modélisation de cycles HPP depuis un état d'aimantation initial quelconque à l'aide d'une seule inversion.

3. Remarques sur le modèle phénoménologique

Nous avons vu que dès 80 bars, l'aimantation anhystérétique était atteinte en champ inducteur vertical ou longitudinal. Par conséquent, les valeurs $M_{J,I}(90 \text{ bar})$ et $M_{J,I}(100 \text{ bar})$ sont les valeurs de l'aimantation anhystérétique sous 90 bar et 100 bar. Il est donc possible de déterminer les coefficients $b_{J,I}$ et $c_{J,I}$ du modèle par 4 inversions s'appuyant sur deux signatures en passage d'induction à 90 bar et 100 bar : deux inversions sur la signature de l'induction anhystérétique sous un inducteur mono axial longitudinal (90 bar et 100 bar), et deux autres sur la signature de l'induction anhystérétique sous un inducteur mono axial vertical (90 bar et 100 bar). Ce procédé permet ainsi d'éviter des inversions réalisées sur des cycles HPP, au profit d'inversion réalisées sur des signatures en passage. Dans le cas où peu de capteurs sont disponibles, cette alternative peut s'avérer intéressante pour l'identification du modèle.

D'autre part, dans le cas d'un champ inducteur vertical, un champ démagnétisant important se développe sur une grande partie du cylindre (figure 91). Certaines zones du cylindre présentent toutefois localement un faible champ démagnétisant, mais la mesure de l'induction extérieure représente la valeur moyennée sur tout le cylindre de ces effets locaux. Il en résulte que les valeurs des inductions anhystérétiques réalisées sur les capteurs extérieurs en champ inducteur vertical sont indépendantes de la pression.

Or, l'approche en aimantation présentée dans cette partie n'est pas une approche globale : elle donne les valeurs de l'aimantation en chaque élément du cylindre. Néanmoins, en tout point du cylindre, il existe un champ démagnétisant local qui s'oppose aux variations de l'aimantation. Par conséquent, pour les zones du cylindre où l'effet de forme est important, et donc le champ démagnétisant, nous anticipons des variations d'aimantation moindres que dans les zones à faible effet de forme. Supposons que tel est le cas.

Alors, pour les éléments J présentant localement un fort effet de forme, la variation d'aimantation étant minime par hypothèse, nous écrivons

$$M_{J,I}(90 \text{ Bar}) \approx M_{J,I}(100 \text{ Bar}) \quad (91)$$

Le calcul des coefficients $a_{J,I}$, $b_{J,I}$ et $c_{J,I}$ (88 à 90) donne alors :

$$b_{J,I} \approx 0 \quad (92)$$

$$c_{J,I} \approx M_{J,I}(100 \text{ Bar}) \quad (93)$$

$$a_{J,I} \approx M_{J,I}(0 \text{ Bar}) - M_{J,I}(100 \text{ Bar}) \quad (94)$$

Les lois de variation des composantes de l'aimantation avec la pression pour les éléments à fort champ démagnétisant sont alors données (84) par :

$$M_{J,I} \approx [M_{J,I}(0 \text{ Bar}) - M_{J,I}(100 \text{ Bar})]e^{-\frac{p^2}{2E\xi}} + M_{J,I}(100 \text{ Bar}) \quad (95)$$

L'équation (95) n'est autre que l'expression en aimantation, de la solution analytique de l'équation de Jiles-Atherton pour la variation de l'induction avec la pression, dans le cas d'un champ inducteur vertical (63).

De manière à valider cette approche, nous avons calculé les coefficients $b_{j,x}$ et $b_{j,y}$ pour les éléments où un fort champ démagnétisant est attendu (figure 91). Les résultats sont comparés aux valeurs $b_{j,z}$ pour ces mêmes éléments (figure 92).

Rappelons que les coefficients $b_{j,z}$ ont été calculés sous le champ inducteur de référence $BOL=40\mu T$ et interviennent dans la définition de la loi décrivant la variation de la composante longitudinale de l'aimantation. Les coefficients $b_{j,x}$ et $b_{j,y}$ ont été calculés sous le champ inducteur de référence $BOV=80\mu T$, et participent à la définition des composantes transverses X et verticales Y de l'aimantation attendue dans le cylindre sous ce champ inducteur mono axial.

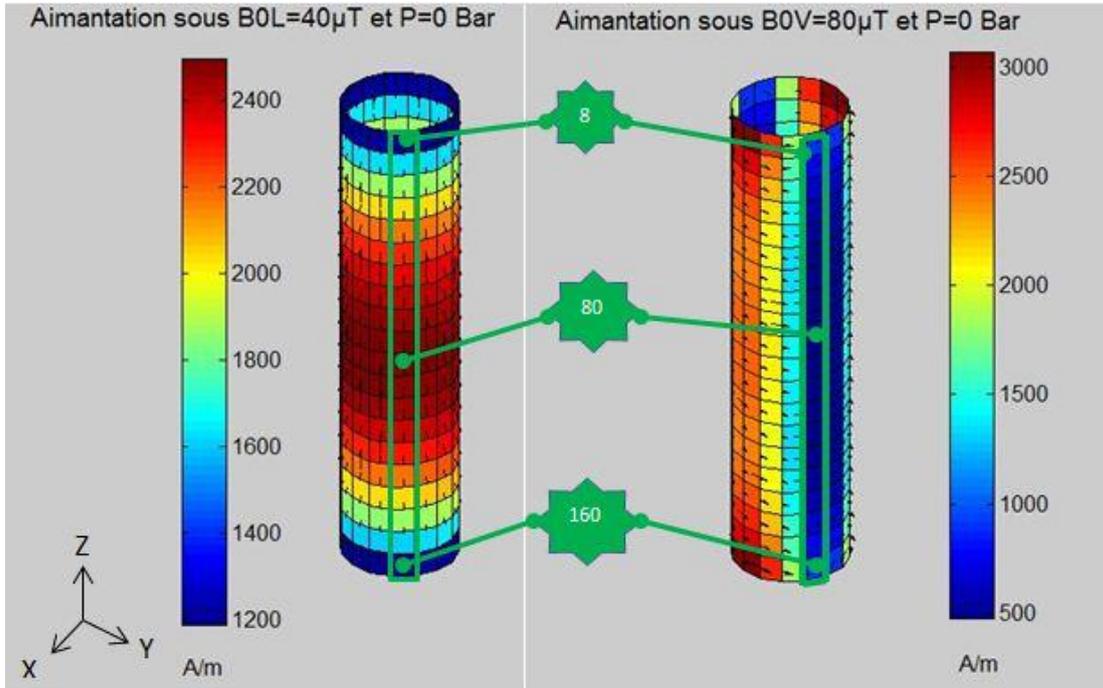


figure 91. Les 20 éléments (numéros 8, 16,...,160) pour lesquels on présente les valeurs des coefficients $b_{j,i}$. En champ inducteur longitudinal (gauche), le champ démagnétisant est moindre au centre du cylindre. En champ inducteur vertical (droite), le champ démagnétisant est maximum en $Y=Y_{MIN}$ et $Y=Y_{MAX}$. On trouve dans ce cas des valeurs minimales pour les coefficients $b_{j,x}$ et $b_{j,y}$.

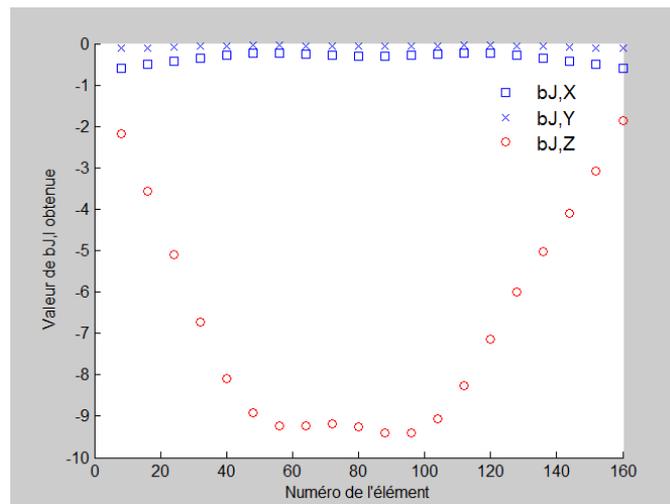


figure 92. Valeurs des coefficients $b_{j,x}$, $b_{j,y}$ et $b_{j,z}$ pour les éléments $J=8, 16, \dots, 160$. On constate que les valeurs des coefficients $b_{j,x}$ et $b_{j,y}$ définis par un champ inducteur vertical, sont négligeables devant celles des coefficients $b_{j,z}$ calculées sous un inducteur longitudinal : dans les zones de fort champ démagnétisant, les lois analytiques décrivant les variations des composantes verticales de l'aimantation sont les solutions exactes de l'équation de Jiles-Atherton.

Les valeurs obtenues pour les coefficients $b_{i,j}$ confirment l'approche. Aux extrémités du cylindre, les valeurs des coefficients $b_{j,z}$ sont très inférieures à celles obtenues au centre du cylindre, où le champ démagnétisant est moindre. De même, en champ inducteur vertical, les valeurs obtenues pour les coefficients $b_{j,x}$ et $b_{j,y}$ en $Y=Y_{\text{MIN}}$ et $Y=Y_{\text{MAX}}$ sont toujours faibles : dans ce cas, les lois décrivant les composantes transverse et verticale de l'aimantation sont assimilables à la solution analytique exacte de l'équation de Jiles-Atherton.

4. Validation du modèle phénoménologique

Nous présentons ici trois validations réalisées pour différents champs inducteurs.

- La première est effectuée sous un champ inducteur mono axial. Le cylindre a d'abord été amené à son aimantation anhystérétique sous un champ inducteur longitudinal $BL=40\mu\text{T}$.
- La seconde simulation est réalisée avec un champ inducteur croisé de composantes $BL=20\mu\text{T}$ et $BV=20\mu\text{T}$, depuis un état magnétique initial désaimanté.
- La troisième est effectuée sous un champ inducteur croisé, de composantes $BL=20\mu\text{T}$ et $BV=40\mu\text{T}$. Le cylindre a initialement été polarisé à son aimantation anhystérétique sous un champ inducteur longitudinal $BL=-10\mu\text{T}$.

a. Validation en champ inducteur mono axial, et pour un état initial non désaimanté

Pour cette validation, le cycle HPP a été réalisé sous un champ inducteur $BL=40\mu\text{T}$. Le cylindre a été initialement polarisé à son aimantation anhystérétique $M_{\text{ANH}}(BL=-40\mu\text{T})$. Nous présentons, outre la comparaison entre les signatures prédites et mesurées sous 100 bar, les champs d'aimantation prédits par le modèle et calculé par Locapi pour des pressions de 10, 40 et 80 bar.

La concordance des prédictions montre la validité du modèle phénoménologique pour des états magnétiques initiaux non désaimantés (figures 93 à 98).

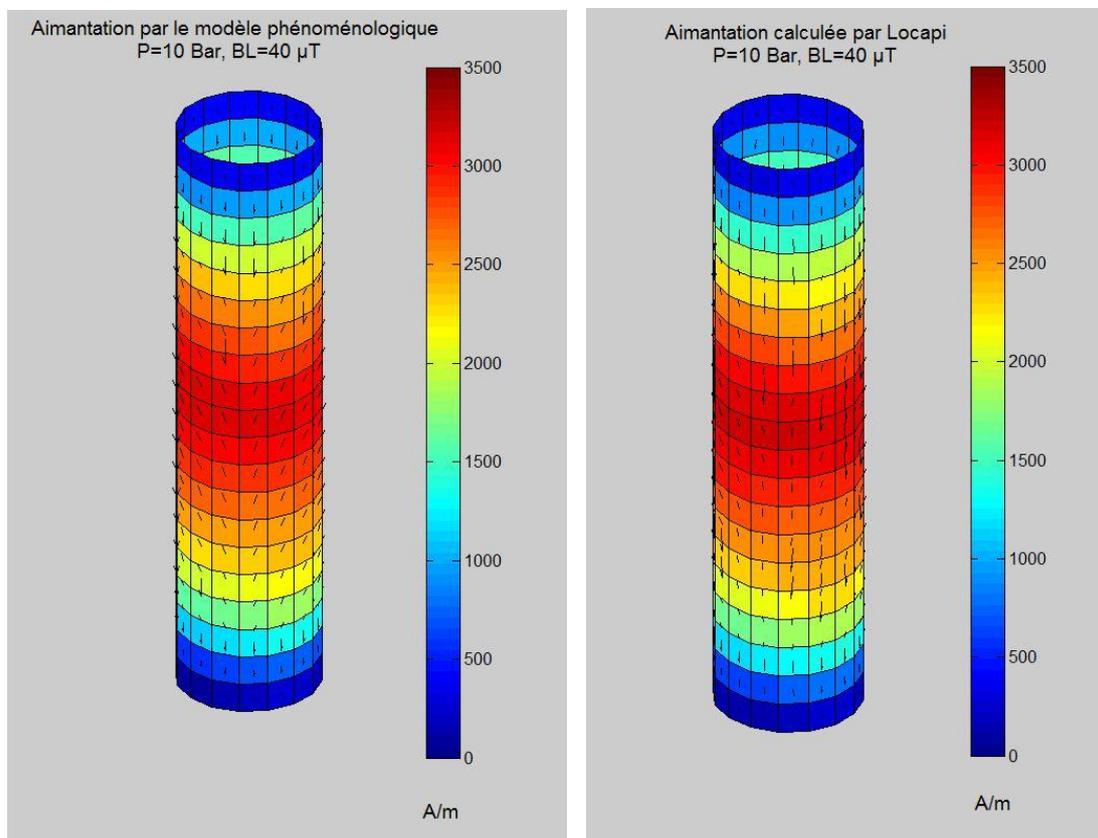


figure 93. $P=10$ bar. Aimantations (en A/m) prédite par le modèle phénoménologique (gauche), et calculée par Locapi (droite) pour un champ inducteur $BL=40\mu\text{T}$ ($HL=32$ A/m), depuis un état polarisé $M_{\text{ANH}}(BL=-40\mu\text{T})$.

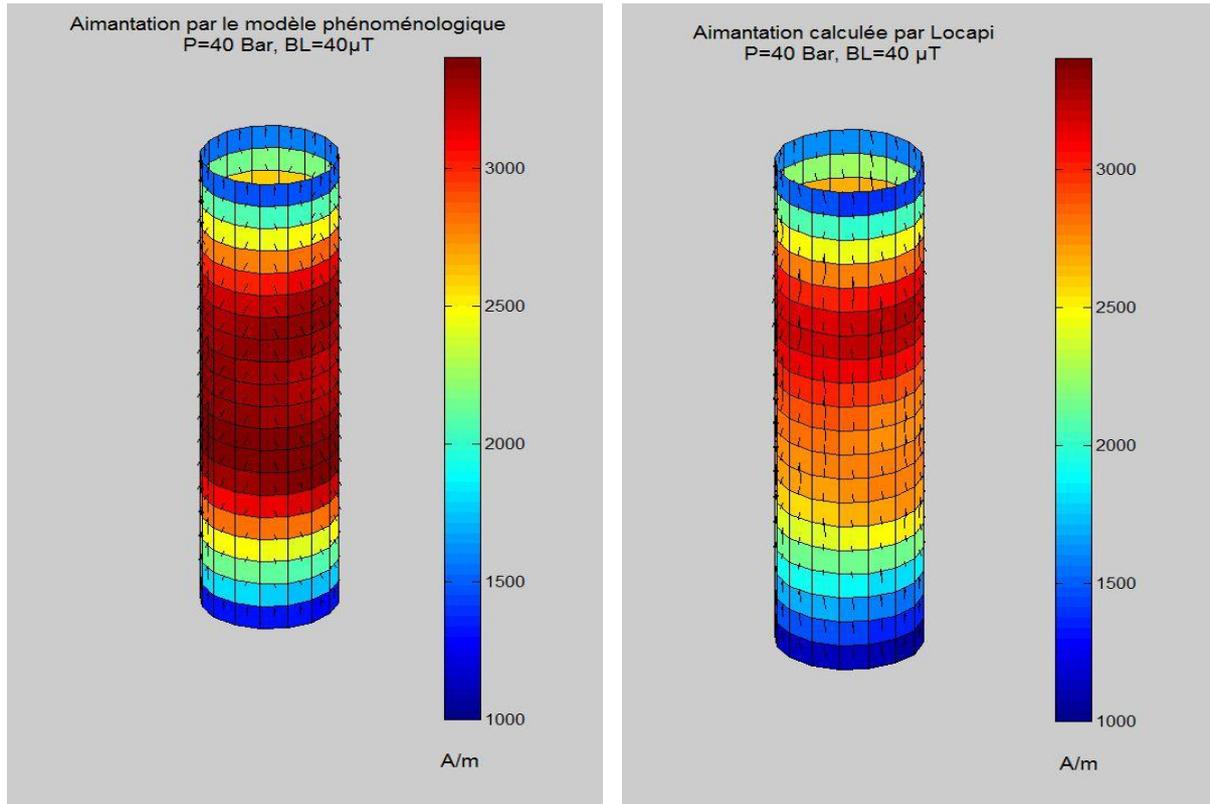


figure 94. P=40 bar. Aimantations (en A/m) prédite par le modèle phénoménologique (gauche), et calculée par Locapi (droite) pour un champ inducteur $BL=40\mu T$ ($HL=32$ A/M), depuis un état polarisé $M_{ANH}(BL=-40\mu T)$. On note que le sens de l'aimantation s'est inversé dans le cylindre entre P=10 bar et P=40 bar.

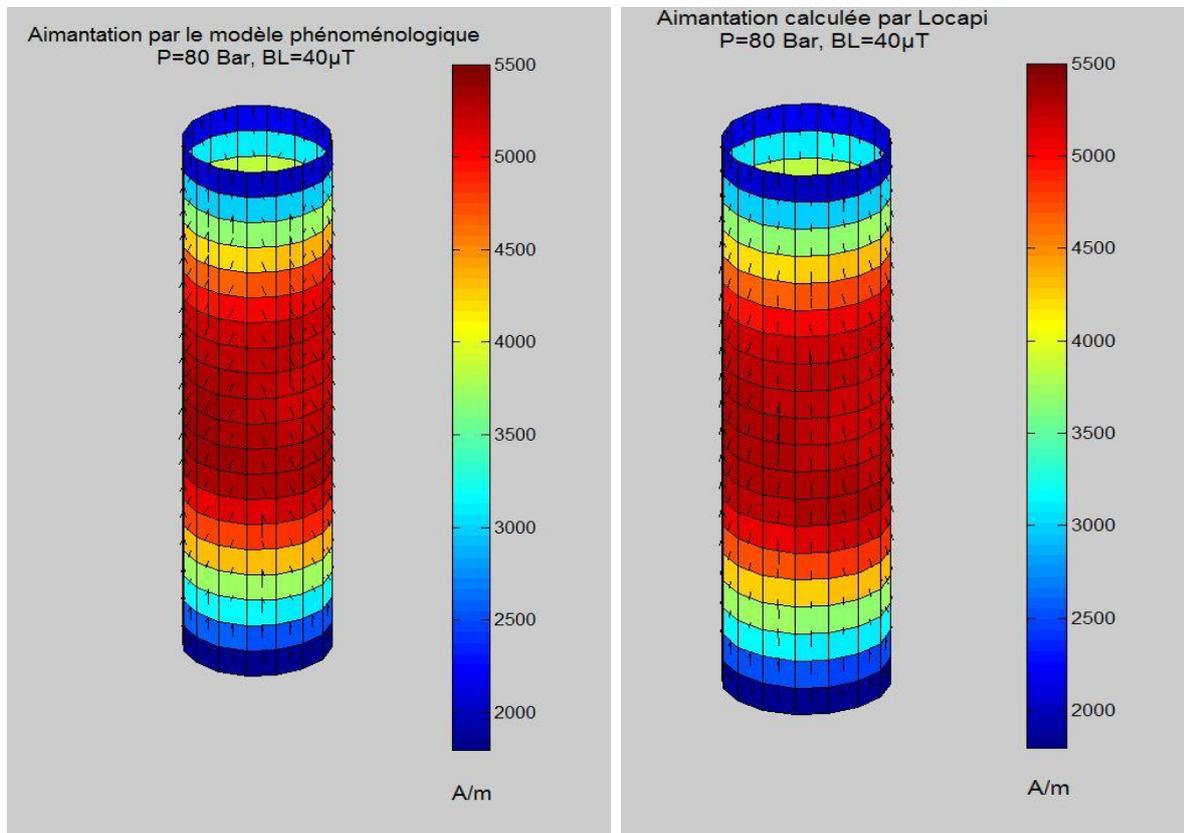


figure 95. P=80 bar. Aimantations (en A/m) prédite par le modèle phénoménologique (gauche), et calculée par Locapi (droite) pour un champ inducteur $BL=40\mu T$ ($HL=32$ A/m), depuis un état polarisé $M_{ANH}(BL=-40\mu T)$.

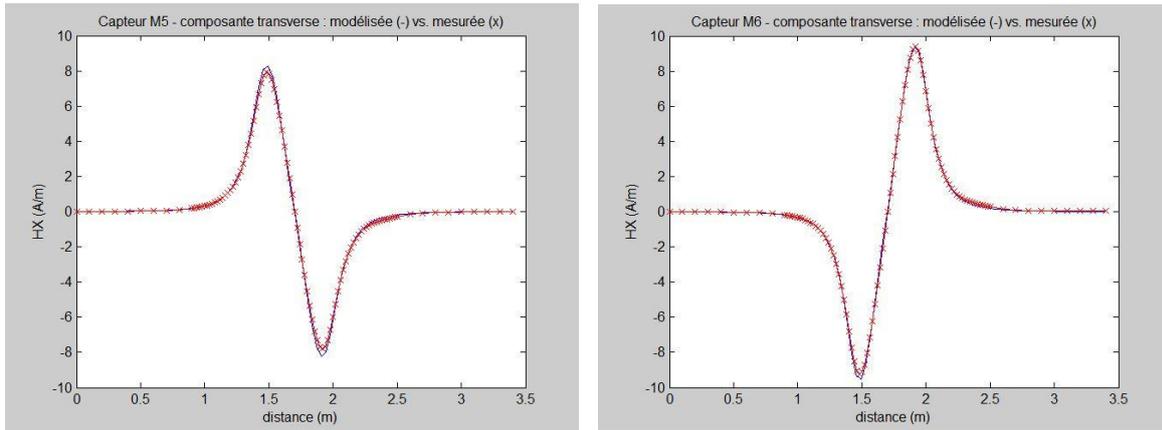


figure 96. P=100 bar. Comparaison des composantes transverses de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $BL=40\mu T$ ($HL=32$ A/m), pour un état initial de polarisation $M_{ANH}(BL=-40\mu T)$.

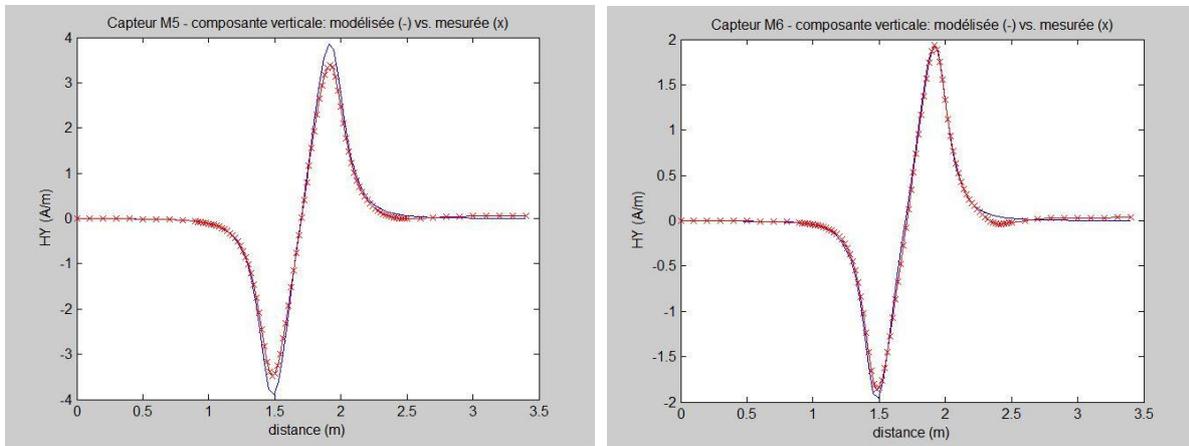


figure 97. P=100 bar. Comparaison des composantes verticales de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $BL=40\mu T$ ($HL=32$ A/m), pour un état initial de polarisation $M_{ANH}(BL=-40\mu T)$.

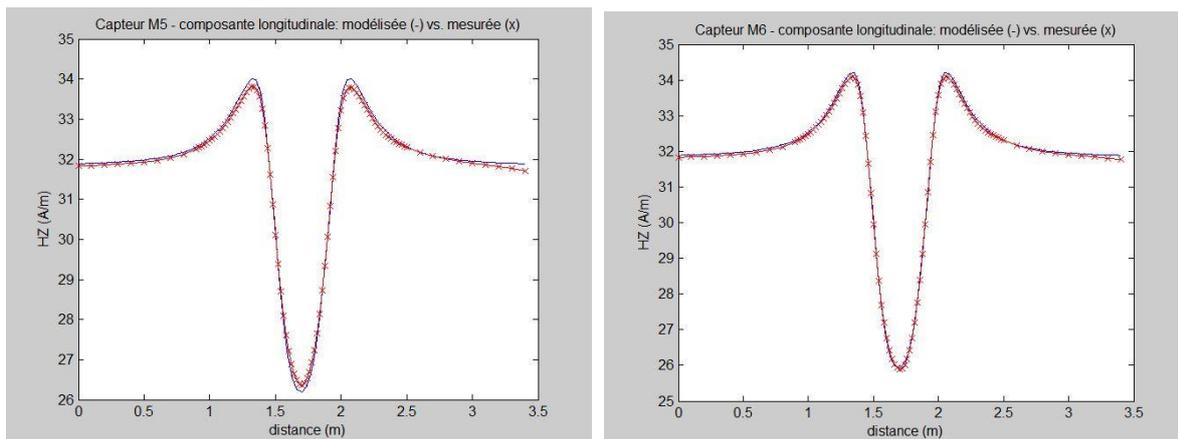


figure 98. P=100 bar. Comparaison des composantes longitudinales de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $BL=40\mu T$ ($HL=32$ A/m), pour un état initial de polarisation $M_{ANH}(BL=-40\mu T)$.

b. Validation en champ inducteur croisé depuis un état désaimanté

Pour la validation, le cycle HPP a été réalisé sous un champ inducteur croisé $\mathbf{BL}=20\mu\text{T} + \mathbf{BV}=20\mu\text{T}$, le cylindre étant initialement désaimanté. Nous présentons les résultats pour une pression de 100 bars. Les résultats montrent que le modèle prédit correctement la distribution d'aimantation dans le cylindre, ainsi que les signatures attendues sur chacun des capteurs (figures 99 à 105).

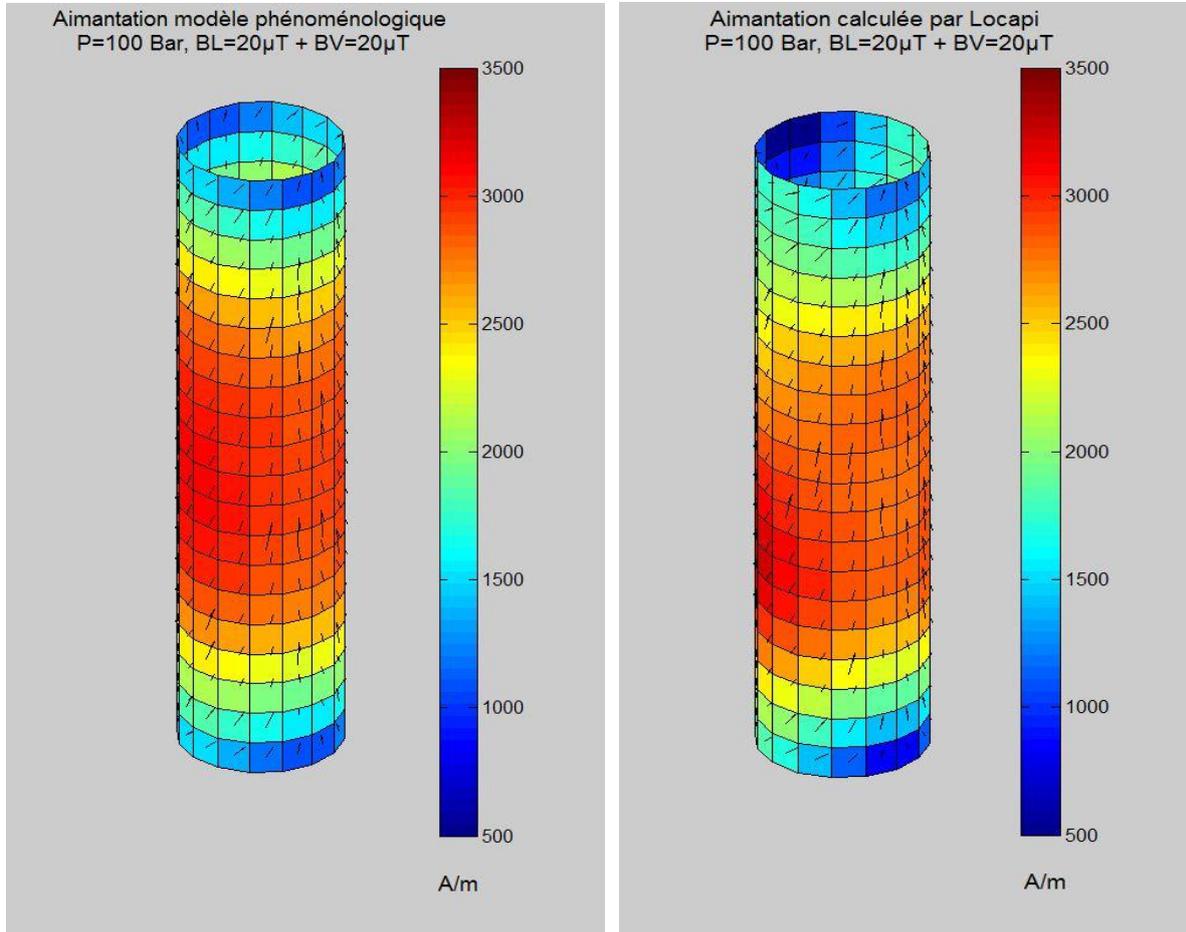


figure 99. P=100 bar. Comparaison entre l'aimantation prédite par le modèle phénoménologique (gauche) et calculée par Locapi (droite) pour un champ inducteur $\mathbf{BL}=20\mu\text{T} + \mathbf{BV}=20\mu\text{T}$ ($\mathbf{HL}=16 \text{ A/m} + \mathbf{HV}=16 \text{ A/m}$). La prédiction en aimantation est concordante avec le calcul par inversion issu de Locapi.

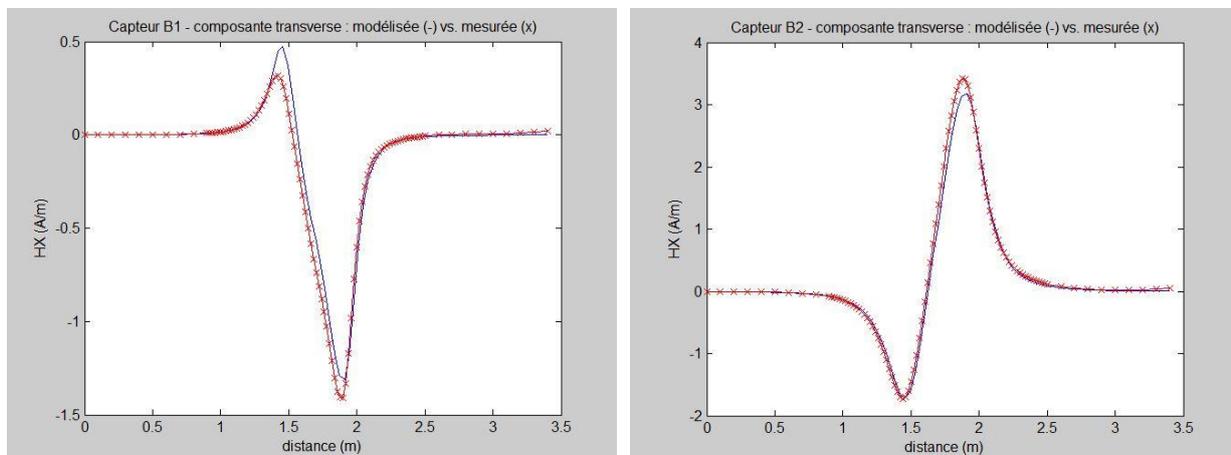


figure 100. P=100 bar. Comparaison des composantes transverses de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $\mathbf{BL}=20\mu\text{T} + \mathbf{BV}=20\mu\text{T}$ ($\mathbf{HL}=16 \text{ A/m} + \mathbf{HV}=16 \text{ A/m}$) sur les capteurs B1 et B2.

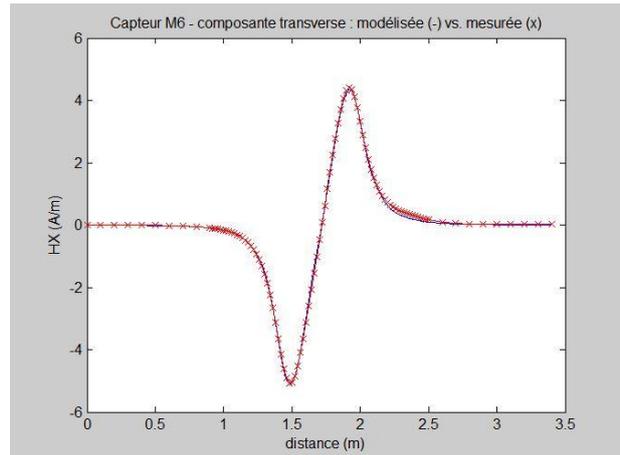
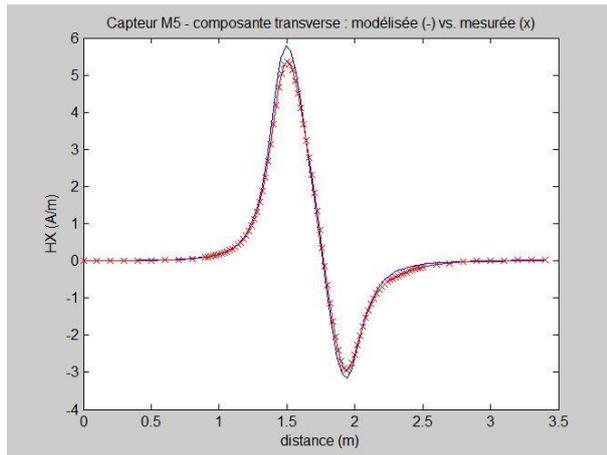


figure 101. P=100 bar. Comparaison des composantes transverses de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $BL=20\mu T + BV=20\mu T$ ($HL=16$ A/m + $HV=16$ A/m) sur les capteurs M5 et M6.

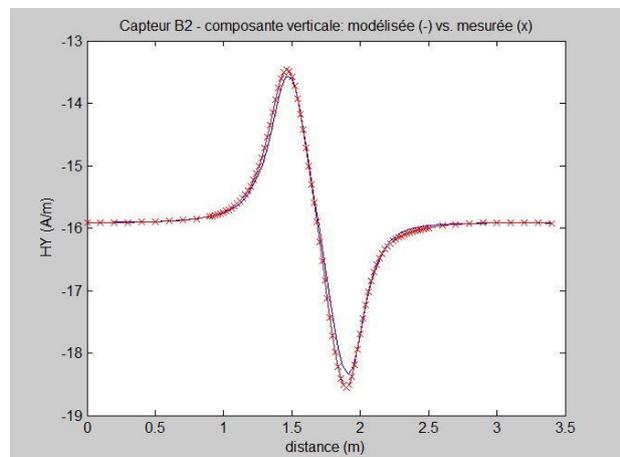
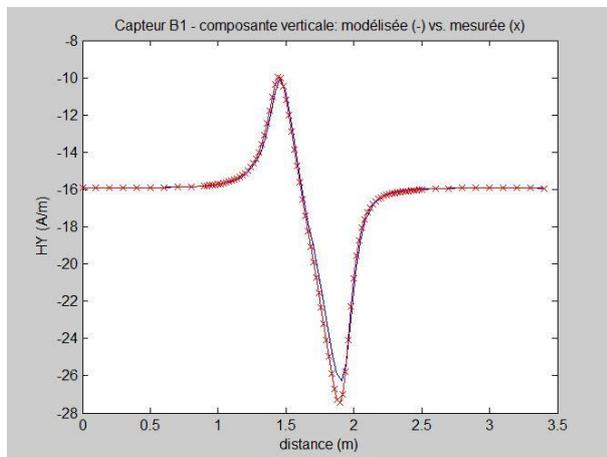


figure 102. P=100 bar. Comparaison des composantes verticales de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $BL=20\mu T + BV=20\mu T$ ($HL=16$ A/m + $HV=16$ A/m) sur les capteurs B1 et B2

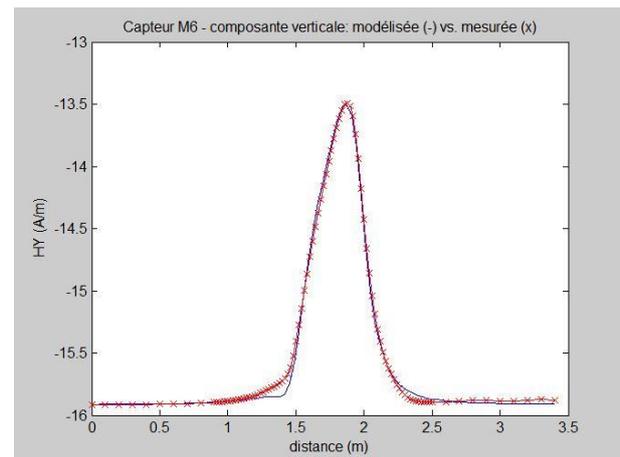
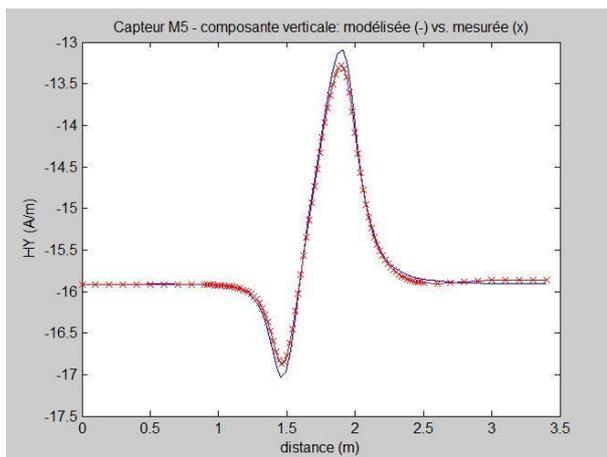


figure 103. P=100 bar. Comparaison des composantes verticales de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $BL=20\mu T + BV=20\mu T$ ($HL=16$ A/m + $HV=16$ A/m) sur les capteurs M5 et M6.

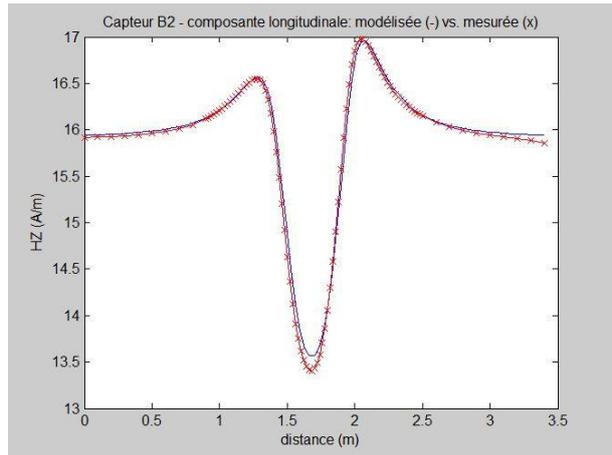
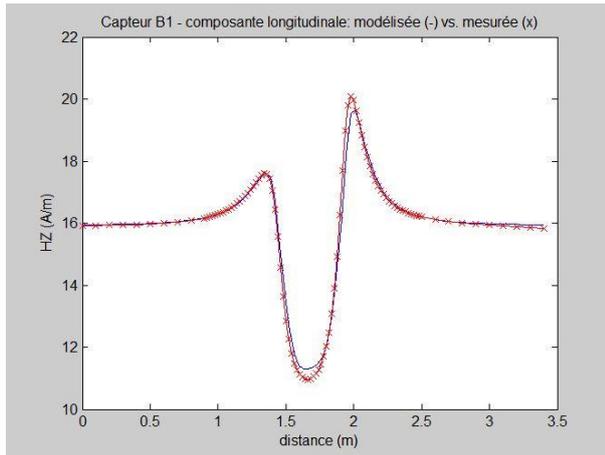


figure 104. P=100 bar. Comparaison des composantes longitudinales de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $\mathbf{BL}=20\mu\mathbf{T} + \mathbf{BV}=20\mu\mathbf{T}$ ($\mathbf{HL}=16 \text{ A/m} + \mathbf{HV}=16 \text{ A/m}$) sur les capteurs B1 et B2.

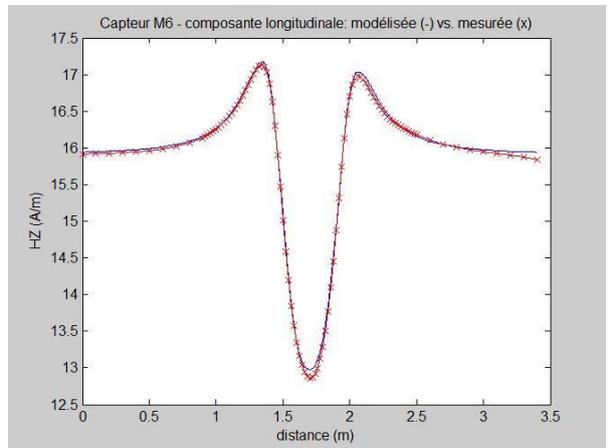
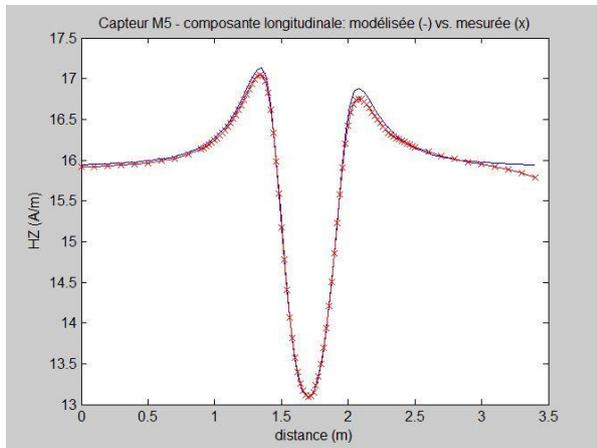


figure 105. P=100 bar. Comparaison des composantes longitudinales de l'induction prédites et mesurées pour un champ inducteur $\mathbf{BL}=20\mu\mathbf{T} + \mathbf{BV}=20\mu\mathbf{T}$ ($\mathbf{HL}=16 \text{ A/m} + \mathbf{HV}=16 \text{ A/m}$) sur les capteurs M5 et M6.

c. Validation en champ inducteur croisé depuis un état polarisé

Pour cette validation, le cycle HPP a été réalisé sous un champ inducteur croisé $BL=20\mu\text{T} + BV=40\mu\text{T}$, donc d'amplitude similaire à celle du champ magnétique terrestre. Le cylindre était préalablement à son aimantation anhystérétique sous $BL=-10\mu\text{T}$ (-8 A/m).

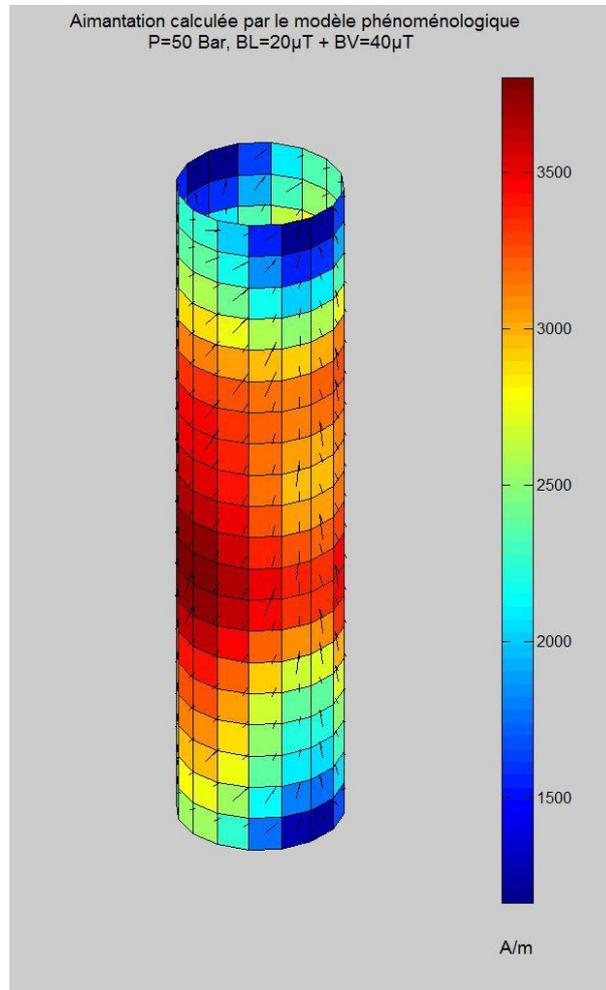


figure 106. P=50 bar. Aimantation calculée par le modèle phénoménologique pour un champ inducteur $BL=20\mu\text{T} + BV=40\mu\text{T}$ ($HL=16\text{ A/m} + HV=32\text{ A/m}$). Le cylindre a initialement été polarisé à son aimantation anhystérétique sous un champ inducteur longitudinal $BL=-10\mu\text{T}$ ($HL=-8\text{ A/m}$).

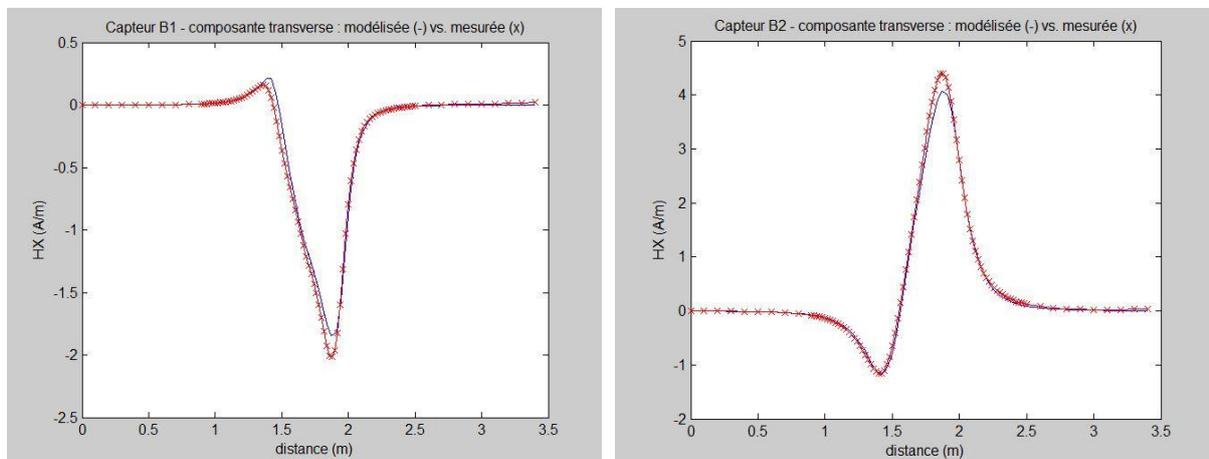


figure 107. P=50 bar. $BL=20\mu\text{T} + BV=40\mu\text{T}$ ($HL=16\text{ A/m} + HV=32\text{ A/m}$). Comparaison des composantes transverses prédites et mesurées sur les capteurs B1 et B2.

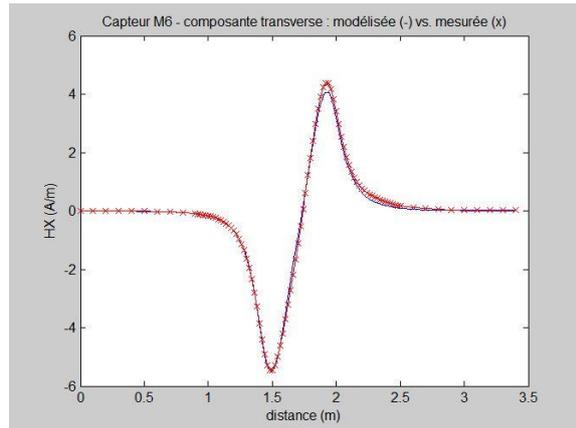
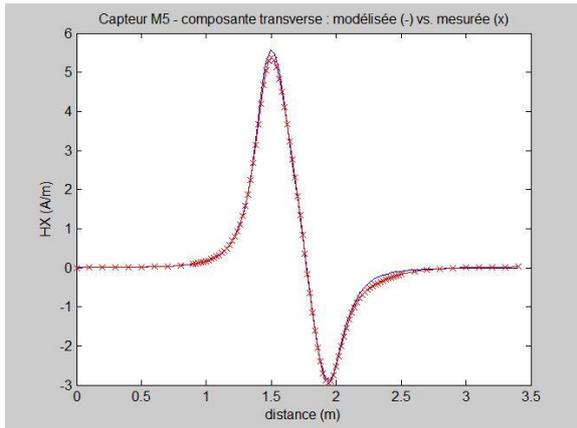


figure 108. $P=50$ bar. $BL=20\mu T + BV=40\mu T$ ($HL=16$ A/m + $HV=32$ A/m). Comparaison des composantes transverses prédites et mesurées sur les capteurs M5 et M6.

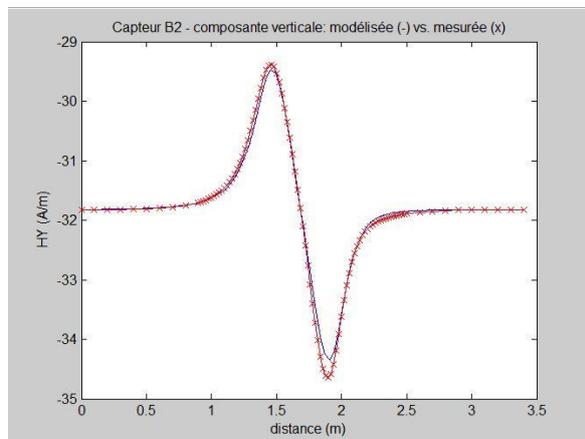
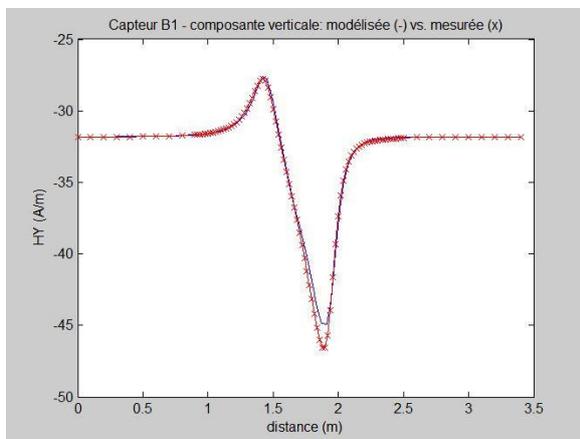


figure 109. $P=50$ bar. $BL=20\mu T + BV=40\mu T$ ($HL=16$ A/m + $HV=32$ A/m). Comparaison des composantes verticales prédites et mesurées sur les capteurs B1 et B2.

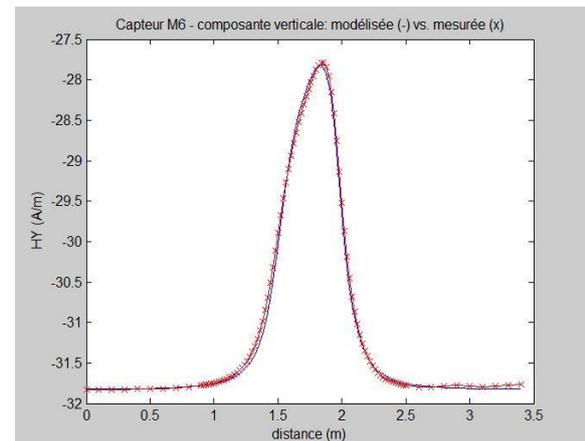
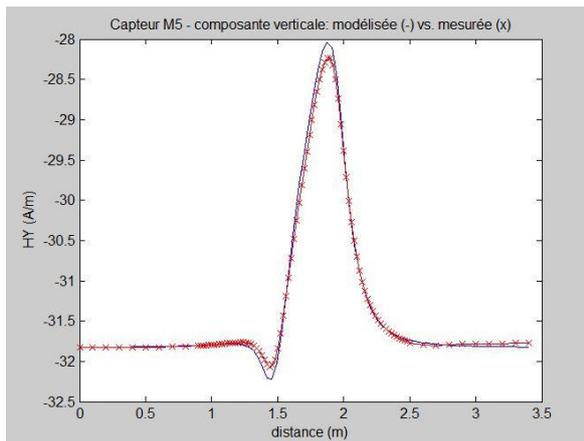


figure 110. $P=50$ bar. $BL=20\mu T + BV=40\mu T$ ($HL=16$ A/m + $HV=32$ A/m). Comparaison des composantes verticales prédites et mesurées sur les capteurs M5 et M6.

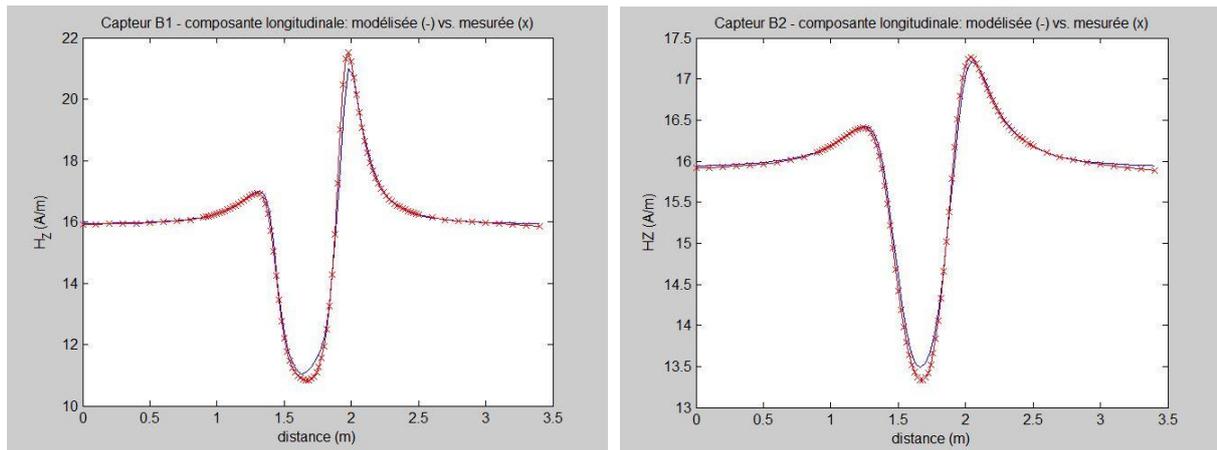


figure 111. $P=50$ bar. $BL=20\mu T + BV=40\mu T$ ($HL=16$ A/m + $HV=32$ A/m). Comparaison des composantes longitudinales prédites sur les capteurs B1 et B2.

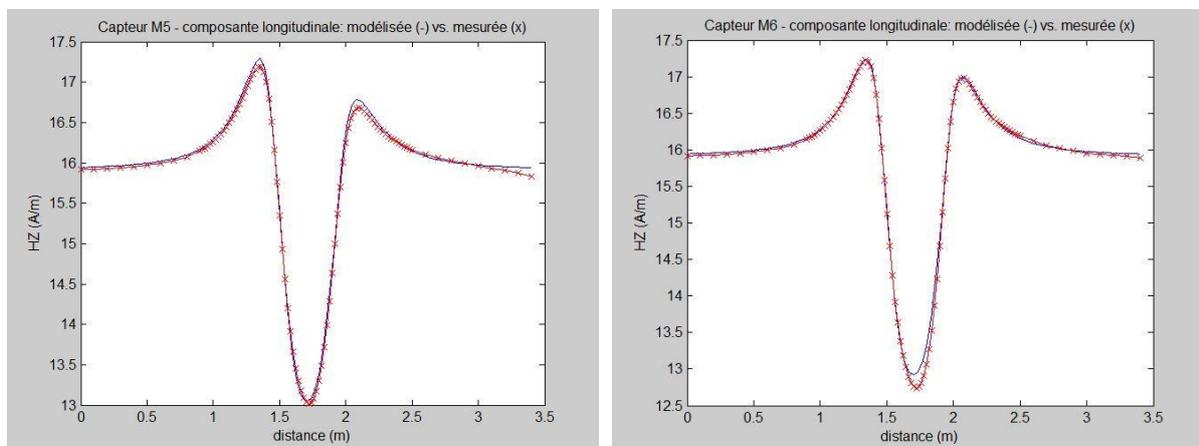


figure 112. $P=50$ bar. $BL=20\mu T + BV=40\mu T$ ($HL=16$ A/m + $HV=32$ A/m). Comparaison des composantes longitudinales prédites sur les capteurs M5 et M6.

Les résultats montrent que le modèle prédit correctement les signatures sur les capteurs. L'écart maximal relatif constaté est de 8.48 % sur la composante verticale de l'induction prédite au capteur B1.

5. Conclusion des validations

Les résultats (figures 107 à 112) montrent que les prédictions sont proches des mesures. L'erreur relative maximale constatée est de 8.48 % sur la composante transverse du capteur B1 (figure 107) pour le cas présenté. Les autres modélisations ont montré des erreurs inférieures à 12%. Par conséquent, la précision du modèle phénoménologique est du même ordre que celle du modèle en adaptation, mais pour un coût en temps de calcul beaucoup plus avantageux.

La difficulté de positionnement du cylindre est une première source d'erreur. Ainsi, pour effectuer une mesure en passage à pression maintenue, le cylindre est translaté le long des rails. Idéalement, il faudrait repositionner le cylindre à la position exacte où il se situait avant la signature en passage de manière à achever la montée en pression. Pour faire cela, il est possible d'utiliser des valeurs caractéristiques de l'induction relevée en passage, par exemple la valeur de l'induction à l'échantillon 50. Mais le mouvement du cylindre engendre des modifications légères de la pression interne, qui viennent s'ajouter à celles liées aux défauts de la pompe hydraulique, qui ne peut maintenir pendant les 2 ou 3 minutes nécessaires à la réalisation de la signature et au repositionnement du cylindre, une pression parfaitement constante. De plus le mouvement des tuyaux

lors de la mesure en passage affecte également la pression, et par conséquent l'aimantation dans le cylindre. Il est donc en pratique très difficile de repositionner correctement le cylindre. Cette erreur de positionnement a des conséquences sur la comparaison entre la signature mesurée à une pression intermédiaire, et la signature prédite par le modèle, lorsque différentes signatures en passage sont effectuées à partir du même cycle HPP.

Le modèle en aimantation tient dans l'utilisation de deux cycles HPP de référence, l'un en champ inducteur vertical, l'autre en champ inducteur longitudinal, puis dans une inversion qui définit l'état d'aimantation initial. Pour cette caractérisation du modèle, 4 inversions depuis des cycles HPP en champs inducteurs mono axiaux sont requises (80 bar et 100 bar en champ inducteur longitudinal, puis vertical). L'utilisation de signatures en passage est préférable à des inversions réalisées depuis les mesures de ces cycles. On s'affranchit ainsi des erreurs liées au repositionnement du cylindre entre l'inversion du cycle en inducteur vertical et en inducteur longitudinal. De même, la définition de l'état magnétique initial se fera préférentiellement à l'aide d'une mesure en passage. De cette manière, le modèle est alors entièrement caractérisé par des mesures en passage exemptes de possibles erreurs de positionnement du cylindre. La seule erreur de mesure liée à la position du cylindre ne pourra provenir que de la réalisation du cycle HPP que l'on souhaite comparer avec le modèle. En effet, les composantes de l'induction qui voient une variation rapide autour du centre du cylindre restent très sensibles à une erreur de positionnement. En pratique, l'erreur de placement du cylindre est de l'ordre de 0.5 cm, et peut générer des gradients de l'ordre de quelques centaines de nT.

La seconde source d'erreur est que nous avons utilisé une solution analytique approchée de l'équation de Jiles-Atherton. En supposant que cette dernière décrive exactement le comportement de l'aimantation avec les contraintes mécaniques, nous avons introduit une erreur en utilisant une solution approchée. Une solution alternative à l'utilisation d'une approximation de la solution est d'utiliser un algorithme de fitting sur l'équation différentielle de Jiles-Atherton, de manière à déterminer les valeurs des coefficients c et ξ à partir de mesures en cycles HPP. Dans un premier temps, l'utilisation des mesures provenant d'un cycle HPP en champ inducteur vertical (pour lequel le coefficient c n'intervient pas dans l'équation de Jiles-Atherton) pourrait permettre la détermination du paramètre ξ , par comparaison des solutions numériques produites, pour différentes valeurs de ξ , par un solveur d'équation différentielle, avec les mesures issues du cycle HPP. La détermination de ξ étant réalisée, le même procédé pourrait permettre celle du paramètre c en se plaçant cette fois-ci en champ inducteur longitudinal.

C. Conclusion

Nous disposons désormais d'un modèle analytique vectoriel direct, capable de prédire les variations d'aimantation dans le cylindre, occasionnées par une montée en pression sous un champ inducteur croisé, depuis un état magnétique initial quelconque et non précontraint.

Une première caractérisation du modèle (modèle en adaptation, ou fitting) requiert 22 inversions à l'aide de Locapi, puis 50 procédures d'adaptation sur les mesures obtenues. Il s'agit donc, pour l'aspect algorithmique, d'un modèle coûteux (et pénible) à mettre en œuvre. La seconde caractérisation offre l'avantage d'être explicitée au moyen de seulement 5 inversions, et ne nécessite aucune procédure de fitting. De plus, elle donne aux coefficients des lois de modélisation une signification physique.

Il est remarquable que le paramètre ξ soit commun aux modèles en induction et en aimantation, et qu'il soit de plus indépendant de l'orientation du champ inducteur par rapport à la contrainte. Il s'agit donc d'un paramètre intrinsèque au matériau, qui traduit la sensibilité du matériau à des contraintes mécaniques. En d'autres termes, la vitesse de réaction mesurée du matériau à des contraintes mécaniques est la même en induction externe et en aimantation, et indépendamment de la direction du champ inducteur. Ce résultat pouvait être prédit par la méthode des moments [CHADEBEC_2006]. En effet, le passage de l'équation originale de Jiles-Atherton, exprimée en aimantation, vers l'expression que nous avons dérivée en induction, s'est fait avec une matrice géométrique $\{g\}$ qui n'affecte pas le coefficient ξ de l'équation originale.

Ces deux modèles ont été validés pour des champs inducteurs d'orientation quelconque, et dans tous les cas, les signatures prédites sur les capteurs diffèrent de moins de 12% avec les mesures effectuées, ce qui est un résultat satisfaisant. Ce taux d'erreur peut être diminué en privilégiant des signatures en passage pour la caractérisation du modèle.

Conclusion générale de l'étude et perspectives

L'objectif de ces travaux était de produire un modèle de magnétoélasticité global, capable de prédire les anomalies magnétiques engendrées par des contraintes mécaniques sur un prototype de cylindre ferromagnétique, soumis à une pression interne.

A. Résultats obtenus

Notre étude portait sur la modélisation des effets magnétoélastiques en champ magnétique faible et en contraintes fortes.

Nous avons privilégié une approche globale, et avons choisi le modèle de Jiles–Atherton, particulièrement bien adapté à l'approche classiquement utilisée en magnétisme du navire, qui place l'aimantation anhystérétique comme valeur d'équilibre vers laquelle l'aimantation, notamment verticale des navires, tend naturellement.

Nous avons fait le choix d'une caractérisation du modèle à partir de mesures d'induction externe, et appliqué le modèle de Jiles-Atherton pour la description de cycles HPP initiaux, c'est à dire non précontraints.

Un premier modèle, en induction, a été établi. Ce modèle donne la variation de l'induction magnétique attendue sur des capteurs magnétiques extérieurs au cylindre. Il est dépendant de la position des capteurs. C'est donc un modèle intéressant dans le cadre de l'immunisation en boucle fermée, pour laquelle les capteurs de mesure sont fixes.

L'originalité de ce résultat tient dans l'utilisation de mesures d'induction externe. Ces mesures nous ont permis de produire une solution à l'équation de Jiles-Atherton, exprimée en termes d'induction extérieure.

A notre connaissance, il s'agit de la première solution analytique vectorielle apportée à cette équation. Elle est de plus validée sur une géométrie présentant un champ démagnétisant non homogène, avec une configuration où la contrainte et le champ sont orthogonaux.

Néanmoins, ce modèle ne permet pas de déduire de la valeur d'induction prédite en un point, les valeurs d'induction en tout autre point au voisinage de la structure.

Un second modèle a alors été décliné. Il prédit la variation de l'aimantation dans le cylindre, et s'affranchit par conséquent des limites du modèle en induction. Ce modèle donne la loi analytique vectorielle de variation de l'aimantation en tout point du cylindre. Il a été obtenu par la résolution d'un problème inverse.

Deux caractérisations ont été proposées.

La première, dite en fitting, fait largement appel à des algorithmes d'adaptation. Son coût en termes de calcul est élevé.

Une seconde déclinaison du modèle, dite phénoménologique, ne nécessite pas l'utilisation de tels algorithmes. Sa mise en œuvre est uniquement conditionnée par 5 inversions, qui permettent d'ajuster les constantes du modèle sur les valeurs de l'aimantation dans le cylindre lorsque celui-ci est soumis à 3 niveaux de pression différents sous deux champs inducteurs mono axiaux de référence.

Les précisions des deux modèles développés étant équivalentes, l'utilisation du modèle phénoménologique est donc préférable.

Ce modèle en aimantation présente deux intérêts.

Tout d'abord, il montre que Locapi peut être utilisé pour caractériser l'évolution de l'aimantation dans une structure soumise à des contraintes mécaniques, à partir de mesures d'induction externes.

De plus, il apporte la première solution analytique vectorielle du modèle original de Jiles-Atherton, en aimantation. Cette grandeur n'étant pas mesurable dans le cas général, l'utilisation d'un algorithme de résolution de problème inverse nous a permis de contourner cette difficulté.

Une des faiblesses du modèle présenté tient dans son caractère non intrinsèque. En effet, le modèle est proposé sous la forme $\mathbf{M}=f(\text{Pression}, \mathbf{H}_0)$, où \mathbf{H}_0 est le champ externe appliqué. Un modèle totalement indépendant de la géométrie devrait être exprimable sous la forme $\mathbf{M}=f(\text{Pression}, \mathbf{H}_i)$, où \mathbf{H}_i est le champ interne dans la tôle. Des résultats ont été obtenus dans ce sens, mais Locapi se heurte à des limites numériques lors du calcul du champ interne dans certaines configurations d'aimantation. En effet, Locapi produit une solution en aimantation qui comporte déjà une erreur numérique. Or, le calcul du champ démagnétisant se fait par une méthode d'intégration numérique basée sur les valeurs de l'aimantation en chaque élément. Par conséquent, l'erreur initiale obtenue lors du calcul de l'aimantation est amplifiée. Dans les zones à effet de forme important, le champ démagnétisant est de norme sensiblement égale au champ inducteur, mais de sens opposé. Par conséquent, afin de calculer le champ interne dans la tôle, somme du champ démagnétisant et du champ inducteur, Locapi est confronté à un problème de soustraction de nombres de valeurs très proches, qui dans la majorité des cas, ne donne pas de bons résultats. L'utilisation d'un algorithme basé sur le calcul des potentiels magnétiques, récemment implémenté dans Locapi, permettra peut-être de résoudre ce problème, et d'aboutir à une caractérisation intrinsèque du modèle.

B. Extension de l'étude

Les modélisations proposées peuvent servir de base à une étude portant sur les variations d'aimantation subies par un sous-marin en plongée.

La géométrie est alors différente. Elle donnera lieu à des distributions de contraintes et d'aimantation différentes dans la structure. En particulier, nous avons mentionné dans le cadre de l'étude mécanique que sur un cylindre fermé à ses extrémités, les contraintes longitudinales qui se développent ne peuvent être négligées. Par conséquent, le problème est complexifié par l'apparition d'une seconde contrainte orthogonale à la contrainte circonférentielle. Dans ce cas, et indépendamment de la direction du champ inducteur, il existe toujours deux contraintes dont l'une est orthogonale à l'aimantation.

De plus, l'aimantation n'obéira plus aux symétries énumérées dans le cadre de notre étude, mais présentera trois composantes indépendamment de la direction du champ inducteur, en particulier aux extrémités du navire : en ces endroits, l'augmentation du rayon de courbure va entraîner une accumulation de charges magnétiques équivalente à un effet de pointe en électrostatique. Il sera donc nécessaire de modéliser chacune des composantes de l'aimantation pour un inducteur mono axial.

La démarche suivie et la loi proposée pour l'aimantation devraient être adaptables à une géométrie plus complexe. Nous pensons que l'impact sur le modèle sera limité aux hypothèses de symétrie, et à une modification de la solution analytique approchée de l'équation de Jiles-Atherton. Considérons en effet la solution approchée présentée dans notre étude. Cette solution est donnée sous la forme d'une somme de deux termes.

Le premier terme (exponentiel) domine le second terme (linéaire dans notre cas) pour des contraintes inférieures à un seuil σ_0 . C'est-à-dire que l'aimantation dans le matériau suit une loi entièrement déterminée par la connaissance d'un unique paramètre intrinsèque ξ , et de manière indépendante de l'évolution de l'aimantation anhystérétique avec la contrainte. En d'autres termes, jusqu'à un seuil de

contrainte σ_0 , l'aimantation d'un matériau magnétostrictif réagira à des contraintes mécaniques en évoluant suivant une loi de la forme $ae^{-b\sigma^2} + c$.

Quand le seuil σ_0 est atteint, l'évolution de l'aimantation anhystérétique va gouverner la variation de l'aimantation, via le couplage magnétomécanique, introduit par le second terme de l'équation de Jiles-Atherton. Il est alors nécessaire d'introduire dans une solution approchée de l'équation de Jiles-Atherton un terme décrivant cette évolution pour les fortes pressions. C'est ce que nous avons fait via un terme linéaire, représentatif de l'évolution mesurée de l'aimantation anhystérétique dans le cylindre.

Pour une géométrie différente, cette approche restera valable.

Ainsi, une adaptation de la solution approchée par la modification du second terme devrait être capable de modéliser les variations d'aimantation dans une coque, en particulier à ses extrémités, où se situent les différences les plus fortes en termes mécaniques et magnétiques par rapport à un cylindre fermé.

D'autre part, dans le cas d'un sous-marin, la pression est bien entendu appliquée depuis l'extérieur. Mécaniquement, cela se traduira par une inversion du signe de toutes les contraintes. Or, nous avons vu que les effets magnétostrictifs du fer sont différents en traction et compression. Ces différences conduiront uniquement à des valeurs de constantes différentes dans le modèle, mais la démarche que nous avons suivie ne devrait pas être remise en cause.

La suite de ce travail sera la modélisation des cycles secondaires, c'est-à-dire la modélisation de l'aimantation lorsque la coque aura déjà subi une plongée.

Plusieurs séries de mesures ont été effectuées sur le cylindre. En particulier, des mesures réalisées sur des cycles HPP consécutifs, avec des champs inducteurs différant d'un cycle à l'autre ont été conduites. Nous n'avons trouvé aucune mention de ce type de mesures dans la littérature.

Elles nous ont permis d'acquérir une connaissance phénoménologique de ces comportements qui facilitera l'extension de notre étude à ce cas plus général.

Il sera dans un premier temps nécessaire de déterminer analytiquement l'état magnétique final de la coque à la fin d'un cycle HPP. La détermination de cet état magnétique est conditionnée par la connaissance d'une loi de variation d'aimantation en retour.

La résolution de ce problème nécessitera une étude approfondie des phénomènes réversible et irréversible mis en jeu lors des cycles HPP. En effet, certaines caractéristiques magnétiques du matériau sont modifiées de manière irréversible par la réalisation d'un premier cycle. Nos mesures montrent en particulier des variations de la perméabilité magnétique, ainsi que du paramètre ξ décrivant le taux de variation de l'aimantation avec la contrainte.

Enfin, la mesure des inductions et des aimantations anhystérétiques consécutives à un cycle HPP initial devra être conduite. Elle permettra de déterminer si la loi d'approche reste valable. Nous avons en effet présenté les différences majeures (allure et valeurs finales obtenues) que présentaient les courbes représentatives des cycles HPP secondaires. Ceci n'implique pas nécessairement une remise en cause du modèle de Jiles-Atherton : une explication pourrait résider dans la variation des valeurs anhystérétiques, ainsi que du paramètre ξ , modifiés par le premier cycle HPP.

En conclusion, la démarche que nous avons suivie lors de cette étude nous semble transposable à l'étude de cas plus complexes.

I - L'importance du protocole de désaimantation

A l'exception de l'étude publiée par Atherton [ATHERTON_1990], les articles traitant des effets magnétoélastiques, en particulier l'article original de Jiles et Atherton [JILES_1995], ne font aucune mention des conditions sous lesquelles les grandeurs magnétiques du matériau soumis à des contraintes sont mesurées.

Ainsi, il n'est fait aucune mention dans les études publiées du protocole d'obtention des mesures des inductions induites sous une contrainte fixe.

De même, aucun protocole expérimental n'est décrit pour la mesure de l'aimantation anhystérétique du matériau lorsque celui-ci est soumis à une contrainte mécanique. Or, nous avons vu que cette donnée est fondamentale dans le modèle proposé par les auteurs, puisque le comportement de l'aimantation avec la contrainte est de migrer vers sa valeur anhystérétique sous contrainte.

Lors de la première série de mesures, nous nous sommes interrogés sur la définition de ces grandeurs magnétiques, en particulier sur le protocole à mettre en œuvre en vue de leur mesure.

La signification que nous avons donnée à l'induction induite (et anhystérétique) sous un champ inducteur **H₀**, et sous une pression **P** fixe, était la mesure de l'induction après que le matériau eut été désaimanté sous la pression **P**. Ce raisonnement nous apparaissait logique, car il considérait le matériau magnétique soumis à une pression **P1**, et le même matériau soumis à une pression **P2** comme deux matériaux magnétiques différents, qu'il fallait donc caractériser depuis les états contraints **P1** ou **P2**.

En conséquence, les mesures d'inductions induites (resp. anhystérétiques) à la pression **P** ont été réalisées dans un premier temps avec le cylindre désaimanté (resp. polarisé) à la pression **P** à l'aide du solénoïde d'axe longitudinal. Ce protocole a conduit à des mesures de variation d'induction avec la pression qui invalidaient systématiquement la loi de Jiles-Atherton.

Rappelons que le comportement de l'aimantation prédit par cette dernière, lorsque le cylindre est soumis à une pression croissante en champ inducteur nul, et de tendre vers sa valeur anhystérétique en champ nul, c'est-à-dire vers un état désaimanté²⁵. Or, nos mesures montraient que le cylindre, initialement désaimanté sous 100 bar à l'aide du solénoïde, s'il produisait une signature magnétique nulle lors du retour à 0 bar, se ré-aimantait sous une valeur de pression de 100 bar sous le même champ inducteur nul (figure 113). Cette valeur d'aimantation permanente sous 100 bar décalait systématiquement toutes les mesures en pression.

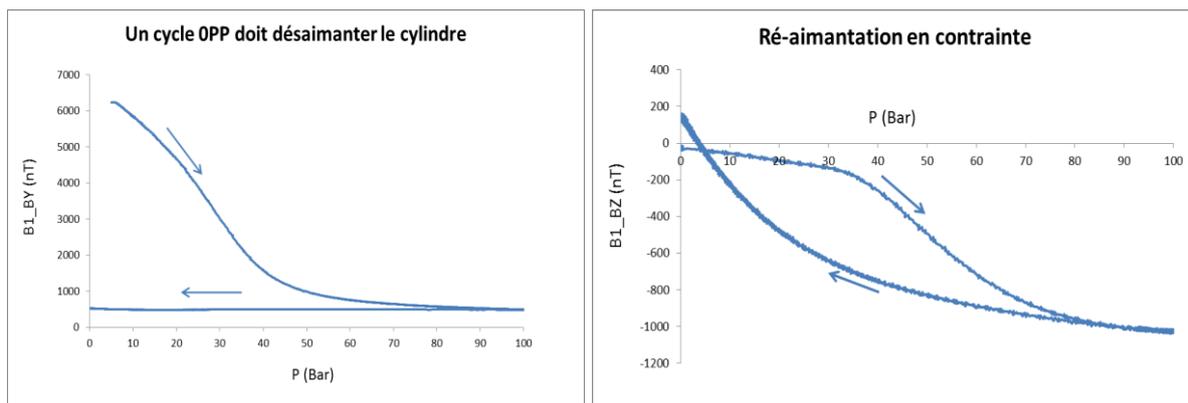


figure 113. D'après la loi de J-A, un cycle OPP doit désaimanter le cylindre quelle que soit l'état magnétique initial. A gauche, ce comportement est vérifié. A droite, le cylindre initialement désaimanté en pression à l'aide du solénoïde, se ré-aimante sous 100 bar.

²⁵ Notons que ceci est une interprétation communément admise. Il n'existe pas de définition exacte de l'état désaimanté. Deux états magnétiques différents peuvent conduire aux mêmes mesures d'induction sur les capteurs. Ainsi, un tore uniformément et fortement polarisé selon sa direction orthoradiale produira une signature magnétique nulle sur tout capteur extérieur, puisqu'il ne développe pas de champ démagnétisant. Il est impossible, à l'aide d'une quelconque mesure extérieure, de le différencier d'un tore « désaimanté ».

En vue de comprendre l'origine du phénomène, toute la chaîne d'acquisition a été vérifiée. Nous suspicions dans un premier temps un champ induit par la pompe hydraulique, alimentée en courant triphasé, qui aurait pu aimanter le cylindre lorsqu'elle délivrait sa puissance maximale. Les mesures d'induction à proximité de la pompe ont invalidé cette hypothèse.

Les alimentations ont alors été ré-étalonnées de manière très précise. Les aimantations rémanentes de tous les matériaux et matériels environnants mesurées. En vain.

Il a fallu plusieurs semaines d'investigation pour comprendre que l'origine du phénomène résidait dans l'utilisation conjointe du solénoïde et d'une pression élevée lors du procédé de désaimantation.

En conséquence, nous avons opté pour l'utilisation d'une bobine de désaimantation portable et d'une pression nulle pour les désaimantations préalables à toutes mesures d'induction induite ou anhystérique. Aussi, les valeurs données dans cette étude pour les inductions induites et anhystériques sous une pression P sont obtenues en désaimantant le cylindre sous 0 bar à l'aide de la bobine portable. La pression est alors élevée à P en champ nul (permettant au passage de vérifier que le cylindre ne se ré-aimante pas). Le champ inducteur (ou de polarisation) est alors réglé à la valeur désirée.

Une explication théorique de ce phénomène pourrait sans doute être établie par une approche microscopique. Il est possible que l'utilisation d'un champ de cyclage purement longitudinal, sous une forte pression, aligne les moments magnétiques dans une direction privilégiée sous 100 bar. En faisant diminuer la pression, la reconfiguration magnétique des domaines pourrait donner lieu à une signature nulle. Toutefois, une seconde mise en pression pourrait provoquer un ré-arrangement différent des domaines, qui, s'il minimise l'énergie interne totale, produit une signature magnétique non nulle.

II - Les effets magnétoélastiques sont connus depuis l'antiquité



figure 114. Fabrication d'un aimant dans le "De Magnete" de William Gilbert (1544-1603).

Cette gravure est un témoignage saisissant de la capacité de découverte de l'esprit humain bien avant la formulation de toute théorie scientifique.

Tout d'abord, Gilbert, un médecin anglais, est le découvreur du géomagnétisme. Avant lui, on pensait les forces magnétiques gouvernées depuis les cieux. Il eut l'intuition qu'elles résidaient au centre de la Terre. Il confectionna alors un aimant permanent sphérique (appelé Terrela) à l'aide de magnétite, et montra que des aiguilles de fer se positionnaient en reproduisant la déclinaison et l'inclinaison d'une boussole. « C'est un fait naturel, avéré, concluait Gilbert, que, au sein même des Pôles, trône un grand et magnifique pouvoir ».

Le forgeron représenté sur la gravure ignorait donc le géomagnétisme. Mais le procédé qu'il utilisait prouve que les connaissances empiriques de cette époque étaient très avancées. En chauffant un morceau de fer, cet artisan le désaimantait par passage de la température de Curie. Il le modelait alors sous la forme d'un barreau, de manière à minimiser le champ démagnétisant. Le point remarquable est qu'il alignait le barreau dans le sens Nord-Sud (Auster est le vent du Sud en latin, et Septentrio celui du Nord). Dans cette configuration, le champ magnétique terrestre est aligné avec le barreau; le champ est donc parallèle avec l'axe de facile aimantation.

Enfin, en martelant le morceau de fer, le forgeron faisait migrer l'aimantation vers sa valeur anhystérique. Il n'existe pas aujourd'hui de procédé permettant de fabriquer un aimant de plus forte aimantation avec les moyens dont il disposait à l'époque. La découverte de la magnétostriction inverse

n'est pas le fait de Joule. C'est sans doute celui d'un artisan anonyme, semblable à celui représenté sur cette gravure.

Quant à Gilbert, il étudia l'électricité statique produite à l'aide d'ambre. L'ambre se dit Elektron en grec, et Electrum en latin, nom qu'il choisit pour décrire les phénomènes mis en évidence. Il postula aussi que la gravité tenait son origine dans la force magnétique, et que la Lune tournait autour de la Terre grâce à elle. Son « De Magnete » se compose de six livres :

1. Etude du magnétisme et du champ magnétique terrestre.
2. Différences entre l'électricité et le magnétisme. Arguments contre le mouvement perpétuel.
3. Expériences sur *Terrela*.
4. Déclinaison (écart entre les pôles Nord géographique et magnétique).
5. Aiguille magnétique – réalisation d'un inclinomètre magnétique.
6. Théorie magnétique des mouvements terrestre et stellaire – Précession de l'équinoxe.



figure 115. La couverture de l'édition originale du "De Magnete", de Gilbert. Le texte original est en latin. En haut, à gauche, l'illustrateur a placé une représentation de la *Terrela*. On y voit les aiguilles de fer utilisées par Gilbert.

III - Le champ magnétique terrestre présente des fluctuations de la composante verticale sous un même hémisphère

Si globalement le champ magnétique terrestre pointe vers l'extérieur dans l'hémisphère Sud, et vers l'intérieur dans l'hémisphère Nord, des régions atypiques présentent des polarités inverses, qui ont évoluées entre 1980 et 2000 (figure 116). Dans ces zones, un sous-marin en plongée verrait la composante verticale de son aimantation permanente s'inverser (en supposant la profondeur de plongée suffisante), et passer de sa valeur anhystérétique négative à sa valeur positive.

Rappelons que le champ magnétique terrestre s'inverse en moyenne tous les 150 millions d'années.

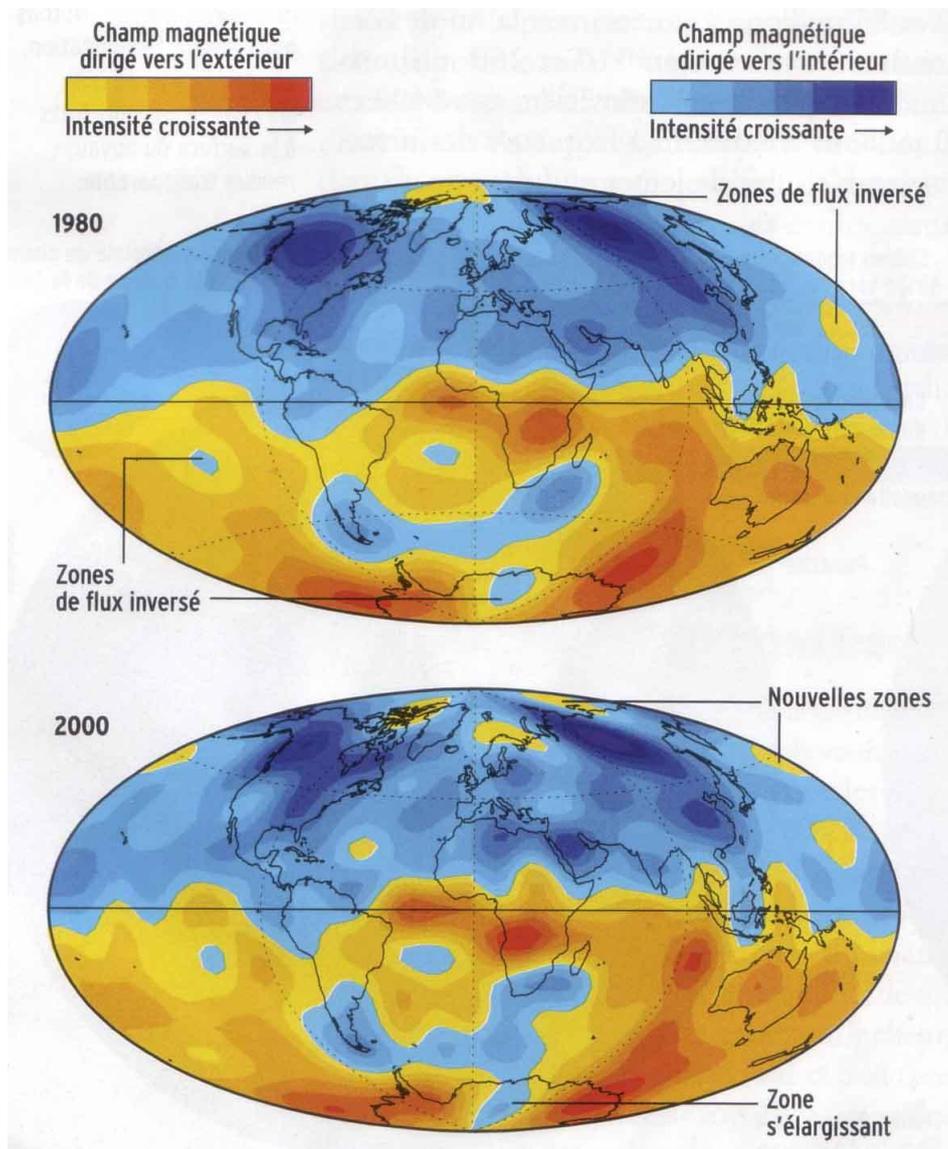


figure 116. Champ magnétique terrestre cartographié par les satellites Magsat et Oersted en 1980 et 2000. [G. Hulot et al. Nature, 2002]

Bibliographie

- [ATHERTON_1990] Atherton D. L., Ton V. (1990). Effect of Order of Stress and Field Application on Changes in An hysteretic Magnetization. *26(3)*, 1157-1159.
- [BIRSS_1971] Birss R., Faunce C. A., & Isaac E. D. (1971). Magnetomechanical effects in iron and iron-carbon alloys. *J. Phys. D: Appl. Phys.* *4*, 1040.
- [BONGIRAUD_1999] Bongiraud J-P., Cauffet G., Jeandey C., & Le Thiec P. (s.d.). An optimization Method for Magnetic Field Generator. *Marelec 1999, Conference Proceedings*, (pp. 161-168).
- [BOZORTH_1945] Bozorth R., & Williams H. Effects of small stresses on magnetic properties. *Rev. Mod. Phys.*, *17*, 72.
- [BRUGEL_1966] Brugel L., & Rimet G. (1966). Interprétation des effets irréversibles des contraintes au moyen d'un modèle d'hystérésis dans l'espace. *J. Phys. Radium, Paris* *27*, pp. 589-598.
- [CHADEBEC_2001] Chadebec O. (s.d.). *Modélisation du champ magnétique induit par des tôles - Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique. Thèse de doctorat INPG, 2001.*
- [CHADEBEC_2006] Chadebec O., Coulomb J-L., Janet F. A review of Magnetostatic Moment Method, *IEEE Trans. Mag*, Vol. *42*, NO. *4*, April 2006
- [CHREE_1890] Chree C. (1890). *Phil. Transac. R. Soc.*, *181*, 329.
- [CRAIK_1970] Craik D. J., & Wood M. J. (1970). Magnetization changes induced by stress in a constant applied field. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, *1970*, Vol. *3*, 1009-1016.
- [DÖRING_1936] Döring W., 1936, *Z. Phys.*, *103*, 560
- [EWING_1890] Ewing J. A. (1890). *Phil. Transac. R. Soc.*, *179*, 325.
- [FAUNCE] Faunce C. (1970). Magneto Mechanical Effects in Ferromagnetic Materials. *PhD Thesis, University of Salford.*
- [GILBERT_1600] Gilbert W. (1600). *De Magnete* (Première édition, en latin.). Londres: éd. Peter Short.
- [HERPIN_1968] Herpin A. (1968). *Théorie du magnétisme*. PUF.
- [JILES_1983] Jiles D. C., & Atherton D. L. (1983). *IEEE Trans. Magn.*, *19*, 2183.
- [JILES_1984] Jiles D.C., & Atherton D. L. (1984). Theory of the magnetisation process in ferromagnets and its application to the magnetomechanical effect. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, *17*, 1265-1281.
- [JILES_1998] Jiles D. (1998). *Magnetism and Magnetic Materials, Second Edition*. Chapman Hall.
- [JILES_1992] Jiles D. C., Thielke J. B., & Devine M. K. (1992). Determination of theoretical parameters for modelling bulk magnetic hysteresis properties using the theory of ferromagnetic hysteresis. *IEEE Trans. Magn.* *28*, 27.
- [JILES_1995] Jiles D. C., & Atherton D. L. (1995). Theory of the magnetomechanical effect. *J. Phys. D: Appl. Phys.* *28*, 1537-1546.
- [JILES_1995_ERR] Jiles D. C. (1995). Theory of the magnetomechanical effect - Erratum. *J. Phys. D: Appl. Phys.* *32*, 1945.
- [KITTEL_1949] Kittel C. (1949). Physical Theory of Ferromagnetic domains, Vol 21, Number 4. *Reviews of Modern Physics*, 541-590.
- [KITTEL_2005] Kittel C. (2005). *Physique de l'état solide - 7ème édition*. Dunod.
- [KURUZAR_1971] Kuruzar M. E., & Cullity B. D. The magnetostriction of iron under tensile and compressive stress. 1971, *Int. J. Magn.*, *1*, 323.
- [LEE_1955] Lee E. W. (1955). Magnetostriction and Magnetomechanical effects. *Rep. Prog. Phys.* *18*, 184.
- [LLIBOUTRY_1950] Lliboutry L. (1950). *These de Doctorat*. Université de Grenoble.
- [LLIBOUTRY_1951] Lliboutry L. (1951). *Ann. Phys.*, *6*, p731.
- [MATTEUCCI_1847] Matteucci C. (1847). *C.R. Acad. Sci., Paris.* *24*, 301.

- [MAYER] Mayer S. (2010). *3-axis Fluxgate Magnetic Field Sensor FL3-100*. Récupéré sur Stefan Mayer Instruments: <http://www.stefan-mayer.com/Datasheet%20FL3-100.pdf>
- [MONPETIT_1962] E. Monpetit, E. Carcénac de Torné, « Considération générales sur le magnétisme du navire », Rapport interne Gesma, 1962.
- [NEEL_1957] Néel L. Le champ moléculaire de Weiss et le champ moléculaire local. 1957, *CNRS, éd.*
- [ENSMP_COURS] Récupéré sur http://mms2.ensmp.fr/ressources/ens_polycopies.php
- [PITMAN_1990] Pitman K. C. (1990). The influence of stress on ferromagnetic hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics, Vol 26, NO. 5., 1978-1980.*
- [RIMET_1967] Rimet G. (1967). Les variations d'aimantation provoquées par les contraintes mécaniques élastiques sur les substances ferromagnétiques. *Thèse de doctorat, Grenoble.*
- [ROBERTSON_1993] Robertson I. A. (1993). Direction of change of magnetization of a ferromagnet subjected to stress. *IEEE Transactions on Magnetics, 29(3).*
- [SABLIK_1993] Sablik M. J., Rubin S. W., Riley L. A., Jiles D. C., Kaminski D. A., & Biner S. B. (1993). A model for hysteretic magnetic properties under the application of noncoaxial stress and field. *J. Appl. Phys. 74 (1), 480-488.*
- [SCHNEIDER_1981] Schneider C. S., & Semcken E. A. (1981). Vibration induced magnetization. *J. Appl. Phys. 52, 2425.*
- [SCHNEIDER_1982] Schneider C. S., & Richardson J. M. (1982). Biaxial magnetoelasticity in steels. *J. Appl. Phys. 53, 8136.*
- [STANLEY_1971] Stanley H. E. (1971). *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford: Clarendon Press.
- [THOMSON_1879] Thomson W. (1879). *Phil. Transac. R. Soc., 170, 555.*
- [TREMOLET_2000] du Trémolet de Lacheisserie E. (2000). *Magnétisme - I - Fondements*. Grenoble Sciences.
- [VIANA_2009] Viana A., Rouve L. L., Cauffet G., Coulomb J. L. Magneto-mechanical effects under low fields and high stresses - Application to a ferromagnetic cylinder under pressure in a vertical field. *IEEE Trans. Mag., vol.46, no.8, august 2010*
- [VIANA_2010] Viana A., Coulomb J. L., Rouve L. L., & Cauffet G. Numerical Resolution of the Modified Langevin Equation Using a Differential Expression. Application to the Jiles Magnetostriction Law of Approach. *JMMM, 322(2010), 186-189.*
- [VIANA_2010_B] Viana A., Rouve L. L., Cauffet G., Coulomb J. L. Analytical Model for External Induction Variations of a Ferromagnetic Cylinder Undergoing High Mechanical Stresses in a Low Magnetic Field of any Orientation. *CEFC 2010 Proceedings.*
- [VIANA_2010_C] Viana A., Rouve L. L., Cauffet G., Coulomb J. L. Inverse Problem Approach to Characterize and Model Magnetization Changes in a Thin Shell Structure Undergoing Magneto-Mechanical effects. *CEFC 2010 Proceedings.*
- [VILLARI_1865] Villari E. (1865). *Ann. Phys., Lpz., 126, 87.*

