C*-álgebras associadas a certas dinâmicas e seus estados KMS

Gilles de Castro

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Laboratoire MAPMO/Instituto de Matemática

THÈSE EN COTUTELLE INTERNATIONALE présentée par :

Gilles DE CASTRO

soutenue le : 18 décembre 2009

pour obtenir le grade de :

Docteur de l'Université d'Orléans
et de l'Université Fédérale du Rio Grande do Sul

Discipline : Mathématiques

C*-Algèbres associées à certains systèmes dynamiques et leurs états KMS

THÈSE dirigée par :

M. Artur Oscar LOPES	Professeur, Universidade Federal do Rio - Grande do Sul
M. Jean RENAULT	Professeur, Université d'Orléans

JURY :

M. Artur Oscar LOPES	Professeur, Universidade Federal do Rio - Grande do Sul Président du jury
M. Jean RENAULT	Professeur, Université d'Orléans
M. Danilo ROYER	Professeur Assistant, Universidade Federal de Santa Catarina

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CO-TUTELA COM A UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

C*-ÁLGEBRAS ASSOCIADAS A CERTAS DINÂMICAS E SEUS ESTADOS KMS

Tese de Doutorado

Gilles Gonçalves de Castro

Porto Alegre, 18 de dezembro de 2009.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus três professores orientadores, Artur, Jean e Ruy, por todas as discussões, as ideias e o apoio nesses quatro anos. Agradeço a minha noiva Aishameriane, pela comapanhia, amor e paciência. Agradeço a minha família por estarem sempre disponíveis. Agradeço a todos os professores que fizeram parte de minha formação matemática. Agradeço aos amigos por todas as conversas e momentos juntos. Agradeço à UFRGS pelo curso de doutorado e pela estrutura. Agradeço à Universidade de Orléans e ao laboratório MAPMO pela excelente hospitalidade. Agradeço aos colegas franceses por criarem um ambiente de trabalho agradável. Agradeço ao gato Lilo pelos arranhões de brincadeira e o pêlo na roupa depois de sair do colo. Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro tanto no Brasil quanto na França.

Resumo

Primeiramente, estudamos três formas de associar uma C*-álgebra a uma transformação contínua. Em seguida, damos uma nova definição de entropia. Relacionamos, então, os estados KMS das álgebras anterioremente definidas com os estados de equílibro, vindos de um princípio variacional. Na segunda parte, estudamos as álgebras de Kajiwara-Watatani associadas a um sistema de funções iteradas. Comparamos tais álgebras com a álgebra de Cuntz e a álgebra do produto cruzado. Finalmente, estudamos os estados KMS das álgebras de Kajiwara-Watatani para ações vindas de um potencial e relacionamos tais estados KMS com medidas encontradas numa versão do teorema de Ruelle-Perron-Frobenius para sistemas de funções iteradas.

Palavras-Chave: *C*-álgebras, sistemas dinâmicos, entropia, estados KMS, sistemas de funções iteradas.*

Abstract

First, we study three ways of associating a C*-algebra to a continuous map. Then, we give a new definition of entropy. We relate the KMS states of the previously defined algebras with the equilibrium states, given by a variational principle. In the second part, we study the Kajiwara-Watatani algebras associated to iterated function system. We compare these algebras with the Cuntz algebra and the crossed product. Finally, we study the KMS states of the Kajiwara-Watatani algebras for actions coming from a potential and we relate such states with measures found in a version of the Ruelle-Perron-Frobenius theorem for iterated function systems.

Keywords: *C*-algebras, dynamical systems, entropy, KMS states, iterated function systems.*

Résumé

D'abord, on étudie trois façons d'associer une C*-algèbre à une transformation continue. Ensuite, nous donnons une nouvelle définition de l'entropie. Nous trouvons des relations entre les états KMS des algèbres préalablement définies et les états d'équilibre, donné par un principe variationnel. Dans la seconde partie, nous étudions les algèbres de Kajiwara-Watatani associées à un système des fonctions itérées. Nous comparons ces algèbres avec l'algèbre de Cuntz et le produit croisé. Enfin, nous étudions les états KMS des algèbres de Kajiwara-Watatani pour les actions provenant d'un potentiel et nous trouvouns des relations entre ces états et les mesures trouvée dans une version de le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius pour les systèmes de fonctions itérées.

Mots-clés: *C*-algèbres, systèmes dynamiques, entropie, étas KMS, systèmes de fonctions itérées.*

Conteúdo

Introdução

A interação entre álgebra de operadores e sistemas dinâmicos existe desde a década de 1930, quando Murray e von Neumann construíram uma álgebra, o produto cruzado, a partir de um automorfismo de um espaço de medidas [32]. Esperava-se que a estrutura algébrica desse informações a respeito da dinâmica em questão. Tal teoria foi amplamente estudada e generalizada de diversas formas.

O tipo de álgebra contruída por Murray e von Neumann é do tipo que hoje é conhecida como álgebra de von Neumann. São álgebras de operadores limitados num espaço de Hilbert H que são fechadas em $B(H)$ na topologia fraca de operadores. Quando ela é fechada na topologia uniforme, temos uma C*-álgebra, que foi descrita de forma abstrata na década de 1940 por Gelfand e Naimark [19].

O produto cruzado foi generalizado para o caso de um homeomorfismo resultando numa C*-álgebra. Também para os casos de um automorfismo de uma álgebra ao invés de uma transformação, e finalmente para o caso de uma ação de um grupo na álgebra. Ver por exemplo [34] para diversos resultados na área.

Quando a transformação não é bijetora, as técnicas utilizadas não funcionam diretamente. Existem várias tentativas de generalizar tanto a construção da álgebra a partir de uma transformação quanto a construção de produto cruzado para o caso de endomorfismos. Ver [15] para uma descrição mais detalhada do histórico da teoria assim como algumas referências.

Neste trabalho, vamos nos focar em três das abordagens. O produto cruzado por endomorfismo de Exel [11], a C*-álgebra de uma relação de equivalência aproximadamente própria [14] e a C*-álgebra de um grupoide

[37], [9]. Nas três técnicas, para lidar com a falta de reversibilidade do sistema, utilizamos uma medida (de probabilidade) para a imagem inversa de cada ponto. Isso pode ser interpretado como termos uma probabilidade de estarmos em cada um dos possíveis passos anteriores.

Tal abordagem está intimamente relacionada com o operador de Ruelle, também conhecido como operador de transferência, vindo do formalismo termodinâmico. O estudo desse operador permitiu generalizar o teorema de Perron-Frobenius, além de auxiliar no problema de encontrar medidas invariantes para algumas transformações e de medidas de equilíbrio para determinados sistemas.

Um problema de grande interesse em álgebra de operadores é o estudos dos estados KMS, que estão intimamente ligados aos estados de equilíbrio em mecânica quântica estatística [3]. Os estados KMS das álgebras vindas de uma transformação estão ligadas com as medidas vindas do formalismo termodinâmico [13], [14], [26].

Em [31], Lopes mostrou que, em certos casos, podemos calcular a entropia de uma medida através de um operador de transferência. O princípio variacional fica reescrito como um princípio min-max.

O primeiro objetivo da tese é dar uma nova definição de entropia baseado em operadores de transferência e relacionar os estados KMS com o princípio variacional.

Numa outra direção, estudamos as álgebras de Kajiwara-Watatani vindas de um sistema de funções iteradas (IFS) [23]. Tais sistemas nasceram da teoria de fractais e vários exemplos conhecidos caem nesse contexto.

Jorgensen e colaboradores juntaram as teorias de sistema de funções iteradas, álgebra de operadores e ondeletas [2], [28]. Entre outros resultados, eles definiram certas represenções da álgebra de Cuntz a partir de um IFS e partir daí construíram uma base de ondeletas através do formalismo de multi-resoluções.

A álgebra de Cuntz é um exemplo de uma C*-álgebra de grupoide, cuja teoria de representações está bem estabelecida [37]. Ionescu e Muhly utlizaram a teoria de grupoides para tentar generalizar os resultados de Jorgensen et al. [21]. Para o caso de um IFS, eles sugerirarm levantar o sistema para um que satisfaz a condição de separação forte. Neste caso o sistema são os ramos inversos de um homeomorfismo local e podemos considerar a álgebra de grupoide. Acontece que tal álgebra nada mais é que a álgebra de Cuntz.

O segundo objetivo da tese é relacionar as álgebras de Kajiwara-Watatani com as álgebras de Cuntz via o levantamento de um IFS.

Para ligar com as álgebras acima, podemos pensar que o sistema de funções iteradas funciona como a dinâmica quando revertemos a flecha do tempo. Isso não é sempre verdade, mas, em alguns casos, os ramos inversos de uma transformação formam um IFS.

O terceiro objetivo da tese é mostrar que, nesse caso, as álgebras de Kajiwara-Watatani e o produto cruzado de Exel são isomorfas.

Izumi, Kajiwara e Watatani estudaram os estados KMS das álgebras provenientes de sistemas de funções iteradas para o caso da ação de gauge [24], [20]. Eles mostraram que certas obstruções na dinâmica estão refeletidas na estrutura do espaço dos estados KMS.

O quarto objetivo da tese é generalizar os resultados de estados KMS das álgebras de Kajiwara-Watatani para ações provenientes de um potencial e relacionar com as medidas vindas de teorema análogo ao de Ruelle-Perron-Frobenius para o caso de IFS.

A tese segue a seguinte estrutura. O primeiro capítulo contém alguns pré-requisitos tanto da teoria de sistemas de funções iteradas como da teoria de C*-álgebras. No segundo capítulo, revemos três das formas de associar uma C*-álgebra a uma transformação contínua. Na última seção estudamos os estados KMS e como relacioná-los com o princípio variacional. No terceiro capítulo estudamos as álgebras de Kajiwara-Watatani e mostramos os resultados mencionados acima. O quarto capítulo é um resumo substancial em francês de acordo com a convenção de co-tutela para obtenção de dupla diplomação.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, revisaremos as definições e resultados que serão utilizados ao longo da tese. Começamos com a teoria de sistemas de funções iteradas. Na segunda seção revemos algumas partes da teoria de C*-álgebras e seus estados KMS. Na última seção, estudamos as álgebras de Cuntz-Pimsner, que apresenta uma técnica bastante utilizada para a construção de C*-álgebras.

1.1 Sistemas de funções iteradas

Nesta seção, revemos uma parte da teoria básica de sistemas de funções iteradas e conjuntos auto-similares (veja por exemplo [1], [10] e [16]). Fixe (X, ρ) um espaço métrico compacto.

Definição 1.1.1 *Dizemos que uma função* $\gamma : X \to X$ *é*

- *uma contração se* $\exists c \in (0,1)$ *tal que* $\rho(\gamma(x), \gamma(y)) \leq c\rho(x,y)$*;*
- *uma contração própria se* $\exists c_1, c_2 \in (0,1)$ *tal que* $c_1\rho(x,y) \leq \rho(\gamma(x), \gamma(y)) \leq c_2\rho(x,y)$*;*
- *uma similaridade se* $\exists c > 0$ *tal que* $\rho(\gamma(x), \gamma(y)) = c\rho(x,y)$*.*

Definição 1.1.2 *Um sistema de funções iteradas (IFS - do inglês: Iterated Function System) sobre* X *é um conjunto finito de funções contínuas* $\{\gamma_i : X \to X\}_{i=1}^d$*. Dizemos que o sistema é hiperbólico se todas as funções do IFS são contrações.*

Neste trabalho, vamos sempre assumir que o IFS é hiperbólico a menos que dito o contrário.

Proposição 1.1.3 *Dado um IFS* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$*, existe um único subespaço compacto não vazio* K *of* X *tal que*

$$K = \cup_{i=1}^d \gamma_i(K). \tag{1.1}$$

Chamaremos tal conjunto de atrator do IFS e diremos que K *é um conjunto auto-similar.*

Exemplo 1.1.4

1. *Sejam* $X = [0,1]$*,* $\gamma_1(x) = x/3$ *e* $\gamma_2(x) = (x+2)/3$*, então o conjunto atrator* K *é o conjunto de Cantor.*

2. *Seja* X *o triângulo cheio no plano complexo cujos vértices são* 1*,* $e^{2\pi i/3}$ *e* $e^{4\pi i/3}$*. Defina as funções* $\gamma_1(z) = (z+1)/2$*,* $\gamma_2(z) = (z + e^{2\pi i/3})/2$ *e* $\gamma_3(z) = (z + e^{4\pi i/3})/2$*. O atrator* K *é o triângulo de Sierpinski.*

Note que por causa de (1.1) o atrator é invariante por todos γ_i e podemos restringir o IFS para seu atrator. De agora em diante, assumiremos que $X = K$.

Definição 1.1.5 *Dizemos que um IFS* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ *satisfaz:*

- *a condição de separação forte se a união em (1.1) é uma união disjunta;*
- *a condição do conjunto aberto se* $\exists U \subseteq K$ *aberto e denso tal que*

$$U \subseteq \dot\cup_{i=1}^d \gamma_i(U)$$

  onde a união acima é disjunta.

Denotemos $\Omega = \{1,\ldots,d\}^{\mathbb{N}}$ com a topologia produto, $\sigma : \Omega \to \Omega$ a translação à esquerda e $\sigma_i : \Omega \to \Omega$ a função dada por

$$\sigma_i(i_0, i_1, \ldots) = (i, i_0, i_1, \ldots)$$

onde $i \in \{1,\ldots,d\}$.

Proposição 1.1.6 *Seja* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ *um IFS e* K *seu atrator, então existe uma sobrejeção contínua* $F : \Omega \to K$ *tal que* $F \circ \sigma_i = \gamma_i \circ F$*. Esta aplicação é dada pela fórumla*

$$F(i_0, i_1, \ldots) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{i_0} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x)$$

para $x \in K$ *arbitrário. Se o IFS satisfaz a condição de separação forte então* F *é um homeomorfismo. A aplicação* F *é chamada de aplicação de codificação.*

Observação 1.1.7 *Note que sob a condição de separação forte, podemos definir a função* $\gamma = F \circ \sigma \circ F^{-1}$ *e neste caso as funções* γ_i *são exatamente os ramos inversos de* γ*. Além disso* F *nos dá uma conjugação topológica entre* γ *e o shift* σ*.*

Para um IFS arbitrário $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$, podemos sempre construir um novo IFS satisfazendo a condição de separação forte e que compartilha algumas propriedades com o original [1]. Definimos $\widetilde{X} = K \times \Omega$ e as funções $\widetilde{\gamma}_i : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ por $\widetilde{\gamma}_i(x, \omega) = (\gamma_i(x), \sigma_i(\omega))$. Seja $\widetilde{K} = \{(x, \omega) \in X \times \Omega | F(\omega) = x\}$ então

$$\widetilde{K} = \cup_{i=1}^d \widetilde{\gamma}_i(\widetilde{K}).$$

É fácil checar que $\{\widetilde{\gamma}_i : \widetilde{K} \to \widetilde{K}\}_{i=1}^d$ satisfaz a condição de separação forte.

Definição 1.1.8 *O IFS* $\{\widetilde{\gamma}_i\}_{i=1}^d$ *como acima é chamado de sistema levantado de* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$.

1.2 C*-álgebras e estados KMS

Definição 1.2.1 *Uma C*-álgebra* A *é uma álgebra de Banach complexa munida de uma involução* $* : A \to A$ *satisfazendo:*

- $(a + \lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*$;
- $(ab)^* = b^* a^*$;
- $\|aa^*\| = \|a\|^2$,

para $a, b \in A$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

Uma C*-álgebra que estaremos interessados em particular é a álgebra de Cuntz [8].

Definição 1.2.2 *Tome* $d \in \mathbb{N}\backslash 0$*. A álgebra de Cuntz* $\mathcal{O}_d$ *é a C*-álgebra gerada por d isometrias* S_i *sujeitas a relação* $\sum_{i=1}^{d} S_i S_i^* = 1$*.*

Definição 1.2.3 *Um estado numa C*-álgebra A é um funcional linear positivo* $\phi : A \to \mathbb{C}$ *de norma 1. Se A tem unidade então* $\phi(1) = 1$*.*

Definição 1.2.4 *Um grupo a um parâmetro de automorfismos em uma C*-álgebra A é uma família de automorfismos* $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *tal que* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(A)$ *é um homomorfismo de grupos fortemente contínuo. Dizemos que elemento* $a \in A$ *é analítico se a função* $t \mapsto \sigma_t(a)$ *pode ser estendida para uma função analítica em* $\mathbb{C}$

Pode-se provar que o conjunto dos elementos analíticos para σ é denso em A [34].

Definição 1.2.5 *Dado um grupo a um parâmetro de automorfismos* σ *de* A *e um número* $\beta \in \mathbb{R}$*, dizemos que um estado* $\phi : A \to \mathbb{C}$ *é um estado* (σ, β)*-KMS se*

$$\phi(ab) = \phi(b\sigma_{i\beta}(a))$$

para todo $b \in B$ *e a elemento analítico.*

Para mais detalhes a respeito dos estados KMS e suas relações com a mecânica quântica estatística ver [3].

Definição 1.2.6 *Sejam A uma C*-álgebra com unidade e B uma sub-C*-álgebra também com unidade. Uma esperança condicional* $E : A \to B$ *é uma aplicação linear positiva sobrejetora que satisfaz:*

(i) $E(ab) = E(a)b$*;*

(ii) $E(ba) = bE(a)$*;*

(iii) $E(b) = b$;

(iv) $E(a)^* = E(a^*)$,

para $a \in A$ *e* $b \in B$. *Dizemos que* E *é fiel se* $E(a^*a) = 0$ *implica que* $a = 0$.

Definição 1.2.7 *Uma esperança condicional é de índice finito se existe um conjunto finito* $\{u_i\}_{i=1,\dots,n}$ *de elementos de* A *tal que para todo* $a \in A$ *vale*

$$a = \sum_{i=1}^{n} E(au_i)u_i^*.$$

O índice de E *é dado por* $\operatorname{Ind}(E) = \sum_i u_i u_i^*$.

Pode-se mostrar que o índice pertence ao centro de A e não depende da escolha dos u_i.

1.3 Álgebras de Cuntz-Pimsner

Fixe A uma C*-álgebra.

Definição 1.3.1 *Um* C*-módulo de Hilbert (à direita) sobre A *é um* A-*módulo (à direita)* M *com uma aplicação sesquilinear* $\langle\ ,\ \rangle : M \times M \to A$ *tal que:*

(i) $\langle \xi, \eta a\rangle = \langle \xi, \eta\rangle a$;

(ii) $(\langle \xi, \eta\rangle)^* = \langle \eta, \xi\rangle$;

(iii) $\langle \xi, \xi\rangle \geq 0$;

(iv) M *é completo com respeito à norma* $||\xi||_2 = ||\langle \xi, \xi\rangle||^{1/2}$

para $a \in A$ *e* $\xi, \eta \in M$. *Dizemos que* M *é* cheio *se* $\langle M, M\rangle$ *é denso em* A.

Seja M um C*-módulo de Hilbert e denote por $\mathcal{L}(M)$ o espaço dos operadores em M que possuem adjunto. Temos que $\mathcal{L}(M)$ é uma C*-álgebra [30]. Para $\xi, \eta \in M$ definimos o operador $\theta_{\xi,\eta} : M \to M$ por $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \xi\langle \eta, \zeta\rangle$. Estes operadores possuem adjunto e denotamos por $\mathcal{K}(M)$ o subespaço fechado de $\mathcal{L}(M)$ gerado por todos $\theta_{\xi,\eta}$.

Definição 1.3.2 *Uma C*-correspondência sobre A é um C*-módulo de Hilbert M junto com um C*-homomorfismo $\phi : A \to \mathcal{L}(M)$.*

Seja (M,ϕ) uma C*-correspondência sobre A e por simplicidade suponha que ϕ é fiel. Denote por J_M o ideal $\phi^{-1}(\mathcal{K}(M))$.

Definição 1.3.3 *Um par (ι, ψ) de aplicações $\iota : A \to B$, $\psi : M \to B$, onde B é uma C*-álgebra e ι um C*-homomorfismo, é dito ser uma* representação covariante de M *se:*

(i) $\psi(\phi(a)\xi b) = \iota(a)\psi(\xi)\iota(b)$;

(ii) $\psi(\xi)^*\psi(\eta) = \iota(\langle \xi, \eta \rangle)$;

(iii) $(\psi, \iota)^{(1)}(\phi(c)) = \iota(c)$ *onde a aplicação* $(\psi, \iota)^{(1)} : \mathcal{K}(M) \to B$ *é dada por* $(\psi, \iota)^{(1)}(\theta_{\xi,\eta}) = \psi(\xi)\psi(\eta)^*$,

para $a, b \in A$, $\xi, \eta \in M$ *e* $c \in J_M$.

Para uma C*-correspondência (M,ϕ), existe uma álgebra $\mathcal{O}(M)$ e uma representação covariante (k_A, k_M) que é universal, no sentido que se (ι, ψ) é uma representação covariante de M numa C*-álgebra B, exite um único C*-homomorfismo $\iota \times \psi : \mathcal{O}(M) \to B$ tal que $\iota = (\iota \times \psi) \circ k_A$ e $\psi = (\iota \times \psi) \circ k_M$.

Definição 1.3.4 ([35], [22]) *A álgebra $\mathcal{O}(M)$ é chamada de álgebra de Cuntz-Pimsner de M.*

Para o estudo de estados KMS nas álgebras de Cuntz-Pimsner, vamos rever alguns dos resultados de [29] para o caso de ações de gauge genereliza-das, as quais logo definiremos. Seguiremos tanto [29] quanto as simplificações feitas em [20]. Seja (M, ϕ) uma C*-correspondência fiel e cheia sobre A. Precisamos de um grupo a um parâmetro de automorfismos δ_t de A e de um grupo a um parâmetro de isometrias υ_t of M tal que $\upsilon_t(a\xi) = \delta_t(a)\upsilon_t(\xi)$ e $\langle \upsilon_t(\xi), \upsilon_t(\eta) \rangle = \delta_t(\langle \xi, \eta \rangle)$.

Em nosso caso, iremos supor que $\delta_t(a) = a$ e $\upsilon_t(\xi) = h^{it}\xi$ onde h é um elemento positivo e inversível do centro de A. Esses igredientes nos dão um grupo a um parâmetro de automorfismos σ_t de $\mathcal{O}(M)$. Vamos denotar por $K_\beta(\sigma)$ para $\beta \geq 0$ o conjunto dos estados (σ, β)-KMS.

Definição 1.3.5 *Defina a aplicação* $\mathcal{F} : A^* \to A^*$ *por*

$$\mathcal{F}(\omega)(a) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\xi\in I_k} \omega(\langle \xi, a\xi\rangle)$$

onde $\{e_k = \sum_{\xi\in I_k} \theta_{\xi,\xi}\}$ *é uma unidade aproximada de* $\mathcal{K}(M)$*. Para* h *elemento positivo e inversível no centro de* A *e* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$*, definimos* $\mathcal{F}_{h,\beta} : A^* \to A^*$ *por*

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\omega)(a) = \mathcal{F}(\omega)(h^{-\beta}a).$$

Segue de [29] que as aplicações acima estão bem definidas e não dependem da escolhar da unidade aproximada.

Teorema 1.3.6 *Nas condições acima, existe um isomorfismo entre* $K_\beta(\sigma)$ *e o conjunto* $\mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ *dos estados traciais* τ *de* A *satisfazendo as seguintes condições:*

(K1) $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(a)$ *para* $a \in J_M$*;*

(K2) $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) \leq \tau(a)$ *para* $a \in A^+$*.*

A correspondência de $K_\beta(\sigma)$ *para* $\mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ *é dada pela restrição.*

Definição 1.3.7 *Dizemos que um traço finito positivo* τ *é do tipo finito (com respeito a* (h, β)*) se existe um traço finito* τ_0 *tal que* $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)$ *na topogia fraca*. Dizemos que* τ *é do tipo infinito (com respeito a* (h, β)*) se* $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau) = \tau$*.*

Definição 1.3.8 *Dizemos que* $\phi \in K_\beta(\sigma)$ *é do tipo finito (resp. infinito) se* $\phi|_A$ *é do tipo finito (resp. infinito). Denotamos por* $K_\beta(\sigma)_f$ *(resp.* $K_\beta(\sigma)_i$*) o conjunto dos estados* (σ, β)*-KMS do tipo finito (resp. infinito).*

Proposição 1.3.9 *Todo elemento de* $\tau \in \mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ *pode ser decomposto de forma única como* $\tau = \tau_1 + \tau_2$ *onde* τ_1 *é do tipo finito e* τ_2 *é do tipo infinito. Temos que* τ_1 *é dado por* $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)$ *onde* $\tau_0 = \tau - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)$ *e* $\tau_2 = \lim \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau)$ *na topologia fraca*.*

Corolário 1.3.10 *Se* $\phi \in K_\beta(\sigma)$ *então existe uma única combinação convexa* $\phi = \lambda\phi_1 + (1 - \lambda)\phi_2$ *onde* $\phi_1 \in K_\beta(\sigma)_i$ *e* $\phi_2 \in K_\beta(\sigma)_f$*.*

Segue do corolário que para estudar o conjunto dos estados (σ, β)-KMS, é suficiente estudar os conjuntos $K_\beta(\sigma)_i$ e $K_\beta(\sigma)_f$.

Capítulo 2

C*-álgebras associadas a uma transformação contínua

Neste capítulo começamos com três das formas para construírmos uma C*-álgebra a partir de um transformação contínua. A primeira seção lida com o produto cruzado, a segunda com relações de equivalência aproximadamente próprias e o terceiro com grupoides. Na terceira seção, também estudamos como a álgebra de Cuntz pode ser vista como uma álgebra de grupoide, o que nos facilitará em algumas provas do capítulo seguinte.

Na útlima seção apresentamos uma nova definição de entropia e vemos como relacionar os estados KMS com o princípio variacional. Os resultados dessa seção foram publicados em [6].

2.1 Produto cruzado

Seja A uma C*-álgebra com unidade e suponha que sejam dados:

- Um endomorfismo unital injetor $\alpha : A \to A$.
- Um operador de transferência $L : A \to A$ para α, isto é, um aplicação linear positiva contínua tal que $L(\alpha(a)b) = aL(b)$ para $a, b \in A$. Supomos que $L(1) = 1$.

Seja $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ a C*-álgebra universal gerada por uma cópia de A e um elemento $\widehat{S}$ com as relações:

(i) $\widehat{S}a = \alpha(a)\widehat{S}$,

(ii) $\widehat{S}^*a\widehat{S} = L(a)$,

para $a \in A$. Note que a aplicação canônica de A em $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ é injetiva.

Definição 2.1.1 *Uma redundância é um par* $(a, k) \in A \times \overline{A\widehat{S}\widehat{S}^*A}$ *tal que* $ab\widehat{S} = kb\widehat{S}$ *para todo* $b \in A$.

Definição 2.1.2 *O produto cruzado de Exel* $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ *é o quociente de* $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ *pelo ideal bi-lateral fechado gerado pelo conjunto de todas as diferenças* $a - k$ *onde* (a, k) *é uma redundância.*

Uma outra maneira de constuir o produto cruzado é através das álgebras de Cuntz-Pimsner. Seja A_L a álgebra A vista como um pré módulo de Hilbert à direita cujos elementos serão denotatos por $\overline{a}$. A multiplicação por escalar à direita é dada por $\overline{a} \cdot b = \overline{a\alpha(b)}$, e defina o produto interno A-valuado $\langle , \rangle_L : A_L \times A_L \to A$ por $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle_L = \overline{L(a^*b)}$.

Seja $N = \{\overline{a} \in A_L | \langle \overline{a}, \overline{a} \rangle_L = 0\}$ e defina o módulo de Hilbert $M_L = A_L/N$. Considerando o homorfismo $\phi : A \to \mathcal{L}(M_L)$ dado por $\phi(a)(\overline{b} + N) = \overline{ab} + N$, temos uma C*-correspondência (M_L, ϕ).

Teorema 2.1.3 ([4]) *As álgebras* $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{O}(M_L)$ *são isomorfas.*

Uma das álgebras que podemos associar a uma transformação contínua é o produto cruzado.

Sejam X um espaço compacto Hausdorff e $T : X \to X$ um homeomorfismo local sobrejetivo. Definimos $A = C(X)$ e $\alpha : A \to A$ por $\alpha(f) = f \circ T$. Dada a função contínua $\rho : X \to (0, \infty)$, podemos definir o operador de transferência $L_\rho : C(X) \to C(X)$ por

$$L_\rho(f)|_x = \sum_{T(y)=x} \rho(y) f(y)$$

para $f \in C(X)$ e $x \in X$ [27]. Como queremos que $L_\rho(1) = 1$, supomos que $\sum_{T(y)=x} \rho(y) = 1$ para todo $x \in X$. Para a transformação T, associamos a álgebra $A \rtimes_{\alpha,L_\rho} \mathbb{N}$.

Proposição 2.1.4 *A álgebra $A \rtimes_{\alpha,L_\rho} \mathbb{N}$ acima não depende de ρ.*

Demonstração. Se $\widetilde{\rho} : X \to (0,\infty)$ é outra função contínua tal que $\sum_{T(y)=x} \widetilde{\rho}(y) = 1$ então

$$L_{\widetilde{\rho}}(f) = L_\rho(\rho^{-1}\widetilde{\rho}f).$$

Segue que a aplicação $\Phi : A \rtimes_{\alpha,L_{\widetilde{\rho}}} \mathbb{N} \to A \rtimes_{\alpha,L_\rho} \mathbb{N}$ que manda os elementos de A neles mesmos e $\widetilde{S}$ em $\rho^{-1/2}\widetilde{\rho}^{1/2}S$ é um isomorfismo. ■

Fixe ρ como acima e vamos denotar L_ρ simplesmente por L.

Suponha agora que exista uma medida μ que é positiva nos abertos e que satisfaz $L^*(\mu) = \mu$ onde L^* é operador dual de L. Neste caso podemos construir uma representação π em $B(L^2(X,\mu))$ por:

- $\pi(f)(\xi) = f\xi$ para $f \in C(X)$ e $\xi \in L^2(X,\mu)$;
- $\pi(S)(\xi)(x) = \xi(T(x))$ para $\xi \in L^2(X,\mu)$ e $x \in X$.

Pensando em $f, g \in C(X)$ como elementos de $L^2(X,\mu)$, temos que $\pi(S)(f) = \alpha(f)$ e

$$\langle \pi(S)(f), g\rangle = \int \alpha(f) g d\mu = \int L(\alpha(f)g) d\mu = \int f L(g) d\mu,$$

ou seja, $\pi(S^*)(g) = L(g)$.

2.2 Álgebra de relações de equivalência aproximadamente próprias

Uma outra álgebra que podemos associar a uma transformação é a definida em [14].

Fixe A uma C*-álgebra com unidade.

Definição 2.2.1 *Uma relação de equivalência aproximadamente própria em A é uma sequência decrescente de subálgebras com unidade $\mathcal{R} = \{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Para a construção a seguir, precisamos também de uma sequência de esperanças condicionais fiéis $\mathcal{E} = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $E_n(A) = R_n$ e $E_{n+1} \circ E_n = E_{n+1}$ para todo n.

Definimos $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ como sendo a C*-álgebra universal gerada por A e um conjunto de projeções $\{\hat{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sujeitos a:

(i) $\hat{e}_0 = 1$,

(ii) $\hat{e}_{n+1}\hat{e}_n = \hat{e}_{n+1}$,

(iii) $\hat{e}_n a \hat{e}_n = E_n(a)\hat{e}_n$

para todo $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}$. Pode-se mostrar que a inclusão canônica de A em $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ é injetora.

Para cada n defina o conjunto $\hat{K}_n = \overline{\text{span}}\{a\hat{e}_n b : a, b \in A\}$. Temos que, se $i \leq n$, então $\hat{K}_i\hat{K}_n$ e $\hat{K}_n\hat{K}_i$ estão contidos em $\hat{K}_n$ e, em particular, $\hat{K}_n$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.

Definição 2.2.2 *Para $n \in \mathbb{N}$, uma n-redundância é um elemento $(k_0, \ldots, k_n) \in \prod_{i=0}^{n} \hat{K}_i$ tal que $\sum_i k_i x = 0$ para todo $x \in \hat{K}_n$. O ideal bi-lateral fechado de $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ gerado pelos elementos $\sum_i k_i$ para todas n-redundâncias $(k_0, \ldots, k_n)$ e todo n é chamado de ideal das redundâncias.*

Definição 2.2.3 *A álgebra $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ é o quociente de $\mathcal{T}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ pelo ideal das redundâncias.*

Um caso particular da construção acima se dá quando temos um endomorfismo injetivo $\alpha : A \to A$ e um operador de transferência $L : A \to A$. Nesse caso, definimos $R_n = \alpha^n(A)$ e $E_n = \alpha_n \circ L^n$. Se $\gamma : \mathbb{S}^1 \to A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ é a ação de gauge dada por $\gamma_z(a) = a$ e $\gamma_z(S) = zS$, então $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ é exatamente a sub-C*-álgebra de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ dos pontos fixos de γ.

Suponha agora que X é um espaço Hausdorff compacto, $T : X \to X$ é um homeomorfismo local sobrejetivo e $\rho : X \to (0, \infty)$ é uma função contínua tal que $L_\rho(1) = 1$. Se $\alpha(f) = f \circ T$ e $L = L_\rho$, então podemos construir a álgebra $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.

Se existir uma medida μ que é positiva nos abertos e que satisfaz $L^*(\mu) = \mu$, podemos construir a representação $\pi : A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N} \to B(L^2(X,\mu))$ como na seção anterior e restringi-lá para $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$. Teremos neste caso que $\pi(e_n) = \pi(S^n)\pi(S^n)^*$.

2.3 A álgebra de uma transformação via grupoides

Para facilitar algumas provas no capítulo seguinte, vamos rever a construção da álgebra de Cuntz como uma C*-álgebra de grupoide [9], [37]. Esse construção é um caso particular da álgebra de um grupoide para um homeomorfismo local.

Definição 2.3.1 *Um grupoide é um conjunto G munido de uma aplicação $^{-1} : G \to G$, chamada de inversa, e uma uma operação parcialmente definida $* : G^{(2)} \to G$ chamada produto, onde $G^{(2)}$ é um subconjunto de $G \times G$, satisfazendo:*

(i) Se $(a,b) \in G^{(2)}$ e $(b,c) \in G^{(2)}$ então $(a*b,c) \in G^{(2)}$ e $(a,b*c) \in G^{(2)}$. Além disso $(a*b)*c = a*(b*c)$.

(ii) $(a,a^{-1}) \in G^{(2)}$ para todo $a \in G$.

(iii) Se $(a,b) \in G^{(2)}$ então $a^{-1}*a*b = b$ e se $(b,a) \in G^{(2)}$ então $b*a*a^{-1} = b$.

Um grupoide topológico é um grupoide munido de uma topologia de forma que a inversa e o produto sejam contínuos.

Sejam agora X um espaço compacto Hausdorff e $T : X \to X$ um homeomorfismo local. Defina

$$G = \{(\omega, m-n, \tau) \in X \times \mathbb{Z} \times X : m,n \in \mathbb{N}; T^m(\omega) = T^n(\tau)\}$$

com produto e inversa dados por

$$(\omega, m-n, \tau)(\tau, k-l, \nu) = (\omega, (m+k)-(n+l), \nu)$$

$$(\omega, m-n, \tau)^{-1} = (\tau, n-m, \omega).$$

A base para a topologia em G é dada pelos conjuntos

$$B(U, V, m, n) := \{(\omega, m-n, \tau) \in G : \omega \in U, \tau \in V\}$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ e U e V são abertos de X tais que $T^m|_U$, $T^n|_V$ são homeomorfismos com $T^m(U) = T^n(V)$.

A multiplicação em $C_c(G)$ é dada por

$$(p * q)(\omega, m-n, \tau) = \sum p(\omega, k-l, \nu) q(\nu, (n+k)-(m+l), \tau)$$

onde a soma é sobre todos $k, l \in \mathbb{N}$ and $\nu \in X$ tais que $T^k(\omega) = T^l(\nu)$ e $T^{n+k}(\nu) = T^{m+l}(\tau)$; e a involução é dada por

$$p^*(\omega, m-n, \tau) = \overline{p(\tau, n-m, \omega)}$$

para $p, q \in C_c(G)$.

Ver a referência [37] para a construção da norma em $C_c(G)$. Para nós, é suficiente saber que tal norma existe e que o completamento de $C_c(G)$ é a C*-álgebra do grupoide G denotada por $C^*(G)$.

Dada $h \in C(X)$ definimos a função $h \in C_c(G)$ por

$$h(\omega, m-n, \tau) = [m = n][\omega = \tau] h(\omega)$$

onde $[\cdot]$ é a função booleana que vale 1 se seu argumento é verdadeiro e 0 caso contrário.

Também definimos a função $S \in C_c(G)$ por

$$S(\omega, m-n, \tau) = [m-n = 1][T(\omega) = \tau].$$

Teorema 2.3.2 ([15]) *Nas condições desta seção, se $\alpha : C(X) \to C(X)$ é dado por $\alpha(f) = f \circ T$ e $L : C(X) \to C(X)$ é um operador de transferência para α, então $C(X) \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ é isomorfa a $C^*(G)$.*

Um outro grupoide que podemos construir a partir de T é o grupoide da relação de equivalência

$$R_\infty = \{(x, y) \in X \times X | \, \exists n \in \mathbb{N} : T^n(x) = T^n(y)\}$$

cujo produto é dado por $(x,y)(y,z) = (x,z)$ e inversa dada por $(x,y)^{-1} = (y,x)$. A álgebra $C^*(R_\infty)$ é a sub-C*-álgebra dos pontos fixos pela ação de gauge e portanto isomorfa a $C^*(\mathcal{R},\mathcal{E})$.

Agora, para acharmos a álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_d$, tomamos por X, o conjunto $\Omega = \{1,\ldots,d\}^{\mathbb{N}}$ e por T, a translação à esquerda $\sigma(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots) = (\omega_1,\omega_2,\ldots)$.

Note que se $\chi_{\bar{i}}$ é a função característica do cilindro $\bar{i} := \{\omega \in X : \omega_0 = i\}$ então $S_i = d^{1/2}\chi_{\bar{i}} * S$ para $i \in \{1,\ldots,d\}$ são d isometrias que satisfazem a relação de Cuntz e geram $C^*(G)$.

2.4 Estados KMS

Em [31], Lopes mostrou que em certos casos podemos definir a entropia a partir de um operador de transferência. Motivados por tais resultados, iremos dar uma nova definição de entropia.

Suponha que X é um espaço compacto Hausdorff e $T : X \to X$ é um homeomorfismo local Indicaremos por L_ρ o operador de transferencia definido por ρ e $A = C(X)$. Queremos definir uma noção de entropia para um estado $\phi : A \to \mathbb{C}$ utilizando o operador de transferência. Para isso defina $A_+ := \{a \in A \mid \sigma(a) \in (0,\infty)\}$, onde $\sigma(a)$ é o espectro de a.

Definição 2.4.1 *Dado um estado ϕ em A, definiremos a entropia de ϕ por:*

$$\mathsf{h}(\phi) = \inf_{a \in A_+} \left\{ \phi\left(\ln\left(\frac{L_\rho(a)}{\rho a} \right) \right) \right\} \tag{2.1}$$

onde L_ρ é um operador de transferência para $\rho : X \to (0,\infty)$.

Note que a definição acima independe da escolha de ρ. De fato, se $\rho' : X \to (0,\infty)$ é outra função contínua, então definindo $a' = a\rho(\rho')^{-1}$ para algum $a \in A$ arbitrário, temos que $a' \in A_+$ e

$$\frac{L_{\rho'}(a')}{\rho' a'} = \frac{1}{\rho a} \sum_{y=T(x)} \rho'(x) a(x) \rho(x) \rho'(x)^{-1} = \frac{L_\rho(a)}{\rho a},$$

e portanto estamos tomando o ínfimo sobre o mesmo conjunto.

Definição 2.4.2 *Diremos que um estado ϕ é α-invariante se $\phi \circ \alpha = \phi$.*

Definição 2.4.3 *Dada um elemento $b \in A_+$, definiremos a pressão topológica de b por*

$$p(b) = \sup_{\phi \text{ inv}} \left\{ \mathsf{h}(\phi) + \phi(\ln b) \right\}.$$

Se ϕ é um estado invariante tal que $\mathsf{h}(\phi) + \phi(\ln b) = p(b)$, diremos que ϕ é um estado de equilíbrio.

Proposição 2.4.4 *Se $L_\rho(1) = 1$ então existe um estado ϕ tal que $\phi \circ L_\rho = \phi$.*

Demonstração. Como $L_\rho(1) = 1$, temos que $L_\rho^*(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ onde $\mathcal{S}$ é o conjunto dos estados de A. Usando o teorema de Tychonoff-Schauder, temos que $L_\rho^*|_{\mathcal{S}}$ tem um ponto fixo. ■

Proposição 2.4.5 *Se $L_\rho(1) = 1$ então $p(\rho) = 0$. Além disso os estados ϕ que satisfazem $\phi \circ L_\rho = \phi$ são estados de equilíbrio para ρ.*

Demonstração. Note que utilizando o próprio L_ρ na definição de entropia temos que

$$p(\rho) = \sup_{\phi \text{ inv}} \left\{ \inf_{a \in A_+} \left\{ \phi\left(\ln\left(\frac{L_\rho(a)}{a} \right) \right) \right\} \right\}.$$

Escolhendo $a = 1$ dentro do ínfimo, segue fácil que $p(\rho) \leq 0$.

Por outro lado, como L_ρ é normalizado temos que $L_\rho \circ \alpha = Id$ e se $\phi \circ L_\rho = \phi$ então $\phi \circ \alpha = \phi \circ L_\rho \circ \alpha = \phi$. Como ln é uma função côncava, temos que $\ln(L_\rho(a)) \geq L_\rho(\ln a)$ e portanto

$$\phi\left(\ln\left(\frac{L_\rho(a)}{a} \right) \right) = \phi\left(\ln(L_\rho(a)) - \ln a \right) \geq \phi\left(L_\rho(\ln a) - \ln a \right).$$

Se $\phi \circ L_\rho = \phi$, o lado direito da desigualdade acima se anula e portanto $\inf_{a \in A_+} \left\{ \phi\left(\ln\left(\frac{L_\rho(a)}{a} \right) \right) \right\} = 0$. Segue que $p(\rho) \geq 0$ e no caso do auto-estado, temos $h(\phi) + \phi(\rho) = \inf_{a \in A_+} \left\{ \phi\left(\ln\left(\frac{L_\rho(a)}{a} \right) \right) \right\} = 0 = p(\rho)$. ■

Queremos relacionar os estados KMS de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ [12] e $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ [14] com os estados de equilíbrio (em A) do potencial $h^{-\beta}$. Como a álgebra

A é comutativa, temos únicas esperanças condicionais $F : A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N} \to A$ e $G : C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E}) \to A$. Além disso $E := \alpha \circ L : A \to \alpha(A)$ for uma esperança condicional de índice finito, pois T é um homeomorfismo local. Neste caso, os estados KMS ψ de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ podem ser decompostos como $\psi = \phi \circ F$ onde ϕ é um estado em A satisfazendo

$$\phi(a) = \phi(L(\Lambda a)), \ \forall a \in A$$

com $\Lambda = h^{-\beta}\text{ind}(E)$ e os estados KMS ψ de $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ podem ser decompostos da forma $\psi = \phi \circ G$ onde ϕ é um estado em A satisfazendo

$$\phi(a) = \phi(\Lambda^{-[n]} E_n(\Lambda^{[n]} a)), \ \forall a \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$$

com $E_n = \alpha^n \circ L^n$ e $\Lambda^{[n]} = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i(h^{-\beta}\text{ind}(E))$.

Proposição 2.4.6 *Se $\psi = \phi \circ F$ é um estado (h, β)-KMS de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ e $L(\Lambda 1) = 1$ então ϕ é um estado de equilíbrio (em A) para o potencial $h^{-\beta}$.*

Demonstração. A condição $L(\Lambda 1) = 1$ implica que $L_{h^{-\beta}}$ é um operador de transferência normalizado e portanto $p(h^{-\beta}) = 0$. Além disso, a condição KMS nos diz que $\phi(a) = \phi(L_{h^{-\beta}}(a))$, o que implica que $\phi(\alpha(a)) = \phi(a)$. Segue da proposição 2.4.5 que ϕ é um estado de equilíbrio para $h^{-\beta}$. ■

Como vimos nas seções anteriores, na construção das álgebras de interesse, a escolha de dois operadores de transferência normalizados nos dão álgebras isomorfas, de forma que a escolha do operador pode ser feita de forma arbitrária.

Suponha agora, que $L_\rho(k) = \lambda k$ para algum $\lambda > 0$ e $k \in A_+$. Definindo $\widetilde{\rho} = \frac{\rho k}{\lambda \alpha(k)}$ temos que $L_{\widetilde{\rho}}$ é um operador de transferência normalizado para α e portanto podemos utilizá-lo para construir $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.

Proposição 2.4.7 *Suponha que $\psi = \phi \circ G$ seja um estado (h, β)-KMS de $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$. Seja $\rho = h^{-\beta}$ e suponha que $L_\rho(k) = \lambda k$ para algum $\lambda > 0$ e $k \in A_+$. Seja $\widetilde{\rho} = \frac{\rho k}{\lambda \alpha(k)}$ e $\widetilde{\phi}$ estado de A dado por $\widetilde{\phi}(a) = \phi(ka)$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} \left\| L^n_{\widetilde{\rho}}(a) - \widetilde{\phi}(a) \right\| = 0 \ \forall a \in A$, então $\widetilde{\phi}$ é um estado de equilíbrio para $\widetilde{\rho}$.*

Demonstração. Podemos supor que a construção de $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ foi feita a partir de $L_{\widetilde{\rho}}$, de forma que $\mathrm{ind}(E) = \widetilde{\rho}^{-1}$. Temos que

$$\Lambda^{[1]} = \left(\rho\widetilde{\rho}^{-1}\right) = \rho\frac{\lambda\alpha(k)}{\rho k} = \frac{\lambda\alpha(k)}{k}$$

e mais geralmente

$$\Lambda^{[n]} = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i \left(\rho\widetilde{\rho}^{-1}\right) = \lambda^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \alpha^{i+1}(k)}{\prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i(k)} = \frac{\lambda^n\alpha^n(k)}{k}$$

A condição KMS nos dá

$$\phi(a) = \phi\left(\frac{k}{\lambda^n\alpha^n(k)}\alpha^n L_{\widetilde{\rho}}^n\left(\frac{\lambda^n\alpha^n(k)}{k}a\right)\right) =$$

$$= \phi\left(k\alpha^n L_{\widetilde{\rho}}^n\left(\frac{a}{k}\right)\right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\widetilde{\phi}(a) = \phi(ak) = \phi\left(k\alpha^n L_{\widetilde{\rho}}^n\left(\frac{a}{k}k\right)\right) = \widetilde{\phi}\left(\alpha^n L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\right).$$

Agora,

$$\left|\widetilde{\phi}(L_{\widetilde{\rho}}(a) - a)\right| = \left|\widetilde{\phi}(\alpha^n(L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a) - L_{\widetilde{\rho}}^n(a))\right| \leq$$

$$\leq \widetilde{\phi}\left(\left\|\alpha^n(L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a) - L_{\widetilde{\rho}}^n(a))\right\|\right) \leq \widetilde{\phi}\left(\left\|L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a) - L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\right\|\right)$$

$$\leq \widetilde{\phi}\left(\left\|L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a) - \widetilde{\phi}(a)\right\|\right) - \widetilde{\phi}\left(\left\|\widetilde{\phi}(a) - L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\right\|\right) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

e assim $\widetilde{\phi} \circ L_{\widetilde{\rho}} = \widetilde{\phi}$. Pela proposição 2.4.5, o resultado segue. ∎

Capítulo 3

C*-álgebras associadas a sistemas de funções iteradas

Neste capítulo, revisamos a construção das álgebras de Kajiwara-Watatani. Em seguida, relacionamos as álgebras de Kajiwara-Watatani com a álgebra de Cuntz e com o produto cruzado de Exel, no caso do IFS vir das imagens inversas de uma função contínua. Os resultados da primeira seção aparecem em [8].

Na última seção, ampliamos alguns dos resultados encontrados por Izumi, Kajiwara e Watatni e encontramos os estados KMS das álgebras de Kajiwara-Watani para ações mais gerais que a ação de gauge. Também relacionamos os estados KMS com auto-medidas do dual de um operador de Ruelle para o caso de IFS.

3.1 Álgebras de Kajiwara-Watatani

Seja $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^d$ um sistema de funções iteradas e K seu atrator. Vamos relembrar a C*-correspondência definida em [23]. Sejam $A = C(K)$, $E = C(\mathcal{G})$ onde

$$\mathcal{G} = \cup_{i=1}^d \mathcal{G}_i$$

com

$$\mathcal{G}_i = \{(x, y) \in K \times K : x = \gamma_i(y)\}$$

sendo os co-gráficos na terminologia de [23]. A estrutura de C*-correspondência é dada por

$$(\phi(a)\xi b)(x,y) = a(x)\xi(x,y)b(y)$$

e

$$\langle \xi, \eta \rangle_A (y) = \sum_{i=1}^{d} \overline{\xi(\gamma_i(y), y)}\eta(\gamma_i(y), y)$$

para $a, b \in A$ e $\xi, \eta \in E$.

Proposição 3.1.1 ([23]) *$(E = C(\mathcal{G}), \phi)$ é uma C*-correspondência cheia sobre $A = C(K)$ e $\phi : A \to \mathcal{L}(E)$ é fiel e unital. Além disso, a norma de módulo de Hilbert é equivalente à norma do sup em $C(\mathcal{G})$.*

Definição 3.1.2 *A álgebra de Kajiwara-Watatani $\mathcal{O}_\Gamma$ associada a Γ é a álgebra de Cuntz-Pimsner associada à C*-correspondência definida acima.*

Enxergando $\mathcal{O}_d$ como $C^*(G)$ como na seção 2.3 e recordando a aplicação de codificação F dado na proposição 1.1.6, definimos $\iota : A \to \mathcal{O}_d$ por

$$\iota(a)(\omega, m-n, \tau) = [m = n][\omega = \tau]a(F(\omega)) \tag{3.1}$$

e $\psi : E \to \mathcal{O}_d$ by

$$\psi(\xi)(\omega, m-n, \tau) = [m-n = 1][\sigma(\omega) = \tau]\xi(F(\omega), F(\tau)) \tag{3.2}$$

Note que se $\sigma(\omega) = \tau$, então $\sigma_{\omega_0}(\tau) = \omega$ and $F(\omega) = \gamma_{\omega_0}(F(\tau))$ de forma que $(F(\omega), F(\tau)) \in \mathcal{G}$ e ψ está bem definida.

Antes de mostrarmos que isto nos dá uma representação covariante de Cuntz-Pimsner, vamos relembrar algumas definições e resultados de [23] and [24].

Definição 3.1.3 *Seja $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ um IFS, definimos os seguintes conjutos*

$$B(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{x \in K | \exists y \in K \ \exists i \neq j : x = \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\};$$

$$C(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{y \in K | \exists i \neq j : \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\}.$$

$$I(x) := \{i \in \{1, ..., d\}; \exists y \in K : x = \gamma_i(y)\}.$$

Chamamos os pontos de $B(\Gamma)$ pontos ramificados e os pontos de $C(\Gamma)$ valores ramificados. E dizemos que Γ satisfaz a condição dos ramos finitos se $C(\Gamma)$ é finito.

Temos que $B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$ é um subconjunto fechado, pois

$$B(\gamma_1, ..., \gamma_d) = \cup_{i \neq j}\{x \in \gamma_i(K) \cap \gamma_j(K); \gamma_i^{-1}(x) = \gamma_j^{-1}(x)\}$$

e cada conjunto da união é claramente fechado.

Lemma 3.1.4 ([23]) *Na situação acima, se $x \in K \backslash B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$, então existe uma vizinhança aberta U_x of x satisfazendo:*

(i) $U_x \cap B = \emptyset$;

(ii) Se $i \in I(x)$, então $\gamma_j(\gamma_i^{-1}(U_x)) \cap U_x = \emptyset$ para $j \neq i$;

(iii) Se $i \notin I(x)$, então $U_x \cap \gamma_i(K) = \emptyset$.

Lemma 3.1.5 ([23],[24]) *Se Γ satisfaz a condição dos ramos finitos ou a condição do conjunto aberto e $J_E = \phi^{-1}(\mathcal{K}(E))$ é definido como na seção 1.3, então $J_E = \{a \in A = C(K); a \text{ se anula em } B(\gamma_1, ..., \gamma_d)\}$.*

Observação 3.1.6 *Na prova a seguir, precisaremos de uma descrição explícita de $\phi(a)$ para certos elementos de J_E. Fazemos como em [23]. Seja $B = B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$ e tomemos $a \in A$ tal que $Y := \mathrm{supp}(a) \subseteq K \backslash B$. Claramente $a \in J_E$.*

Para cada $x \in Y$ escolha uma vizinhaça aberta U_x como no lema 3.1.4. Uma vez que Y é compacto, existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\}$ tal que $Y \subseteq \cup_{k=1}^m U_{x_k}$. Seja $U_k = U_{x_k}$ para $k = 1, \ldots, m$ e $U_{m+1} = K \backslash Y$, então $\{U_k\}_{k=1}^{m+1}$ é uma cobertura aberta de K. Seja $\{\varphi_k\}_{k=1}^{m+1} \subseteq C(K)$ uma partição da unidade subordinada a essa cobertura aberta. Defina $\xi_k, \eta_k \in C(\mathcal{G})$ por $\xi_k(x, y) = a(x)\sqrt{\varphi_k(x)}$ e $\eta_k(x, y) = \sqrt{\varphi_k(x)}$ então $\phi(a) = \sum_{k=1}^m \theta_{\xi_k, \eta_k}$ (o somatório vai somente até m pois $\xi_{m+1} = 0$).

Observação 3.1.7 *Por causa do lema 3.1.5, nossos resultados vão precisar que o IFS satisfaça a condição dos ramos finitos ou a condição do conjunto aberto, e note que essas condições são independentes.*

Proposição 3.1.8 *Se o IFS Γ satisfaz a condição dos ramos finitos ou a condição do conjunto aberto, então o par (ι, ψ) definido pelas equações (3.1) é (3.2) é uma representação covariante de Cuntz-Pimsner de (A, E) em $\mathcal{O}_d$.*

Demonstração. A maior parte dos cálculos são parecidos então mostraremos apenas alguns deles. Seja $a \in A$ e $\xi \in E$. Temos que

$$\psi(a\xi)(\omega, m-n, \tau) = [m-n=1][\sigma(\omega)=\tau]a(F(\omega))\xi(F(\omega), F(\tau)) \tag{3.3}$$

Por outro lado

$$(\iota(a) * \psi(\xi))(\omega, m-n, \tau) = \sum \iota(a)(\omega, k-l, \nu)\psi(\xi)(\nu, (m+l)-(n+k), \tau) =$$

$$a(F(\omega))\psi(\xi)(\omega, m-n, \tau) \tag{3.4}$$

onde a segunda igualdade é verdadeira pelo fato que $\iota(a)$ é zero a não ser que $k = l$ e $\omega = \nu$. Podemos facilmente ver que (3.3) e (3.4) coincidem.

Para o produto escalar A-valuado, seja $\xi, \eta \in E$. Então

$$\iota(\langle \xi, \eta \rangle_A)(\omega, m-n, \tau) = [m=n][\omega=\tau] \langle \xi, \eta \rangle_A (F(\omega)) =$$

$$[m=n][\omega=\tau] \sum_{i=1}^{d} \overline{\xi(\gamma_i(F(\omega)), F(\omega))}\eta(\gamma_i(F(\omega)), F(\omega)) \tag{3.5}$$

e por outro lado

$$(\psi(\xi)^* * \psi(\eta))(\omega, m-n, \tau) = \sum \psi(\xi)^*(\omega, k-l, \nu)\psi(g)(\nu, (m+l)-(n+k), \eta) =$$

$$\sum \overline{\psi(\xi)(\nu, l-k, \omega)}\psi(g)(\nu, (m+l)-(n+k), \tau) =$$

$$[m=n][\omega=\tau] \sum_{\sigma(\nu)=\omega} \overline{\xi(F(\nu), F(\omega))}\eta(F(\nu), F(\omega)) \tag{3.6}$$

e note que $\sigma(\nu) = \omega$ se e somente se $\nu = \sigma_i(\omega)$ para algum $i = 1, \ldots, d$ e neste caso $F(\nu) = \gamma_i(F(\omega))$. Segue que podemos reescrever (3.6) como (3.5).

Finalmente, temos que mostrar que $(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(a)) = \iota(a)$ para $a \in J_E$ onde $J_E = \left\{a \in A : a|_{B(\gamma_1,\ldots,\gamma_d)} = 0\right\}$ pelo lema 3.1.5. Tome $a \in J_E$ tal que $Y := \mathrm{supp}(a) \subseteq K \backslash B$ e ξ_k e η_k como na observação 3.1.6, então

$$(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(a))(\omega, m-n, \tau) = \sum_k (\psi(\xi_k) * \psi(\eta_k)^*)(\omega, m-n, \tau) =$$

$$\sum_k \sum \psi(\xi_k)(\omega, k-l, \nu)\psi(\eta_k)^*(\nu, (m+l)-(n+k), \tau) =$$

$$[m=n][\sigma(\omega)=\sigma(\tau)] \sum_k \xi_k(F(\omega), F(\sigma(\omega)))\eta_k(F(\tau), F(\sigma(\omega))) =$$

$$[m=n][\sigma(\omega)=\sigma(\tau)] \sum_k a(F(\omega))\sqrt{\varphi_k(F(\omega))}\sqrt{\varphi_k(F(\tau))}. \tag{3.7}$$

Note que $F(\omega) = \gamma_{\omega_0}(F(\sigma(\omega)))$ e $\sigma(\omega) = \sigma(\tau)$ implica que $F(\tau) = \gamma_{\tau_0}(F(\sigma(\omega)))$ onde ω_0, τ_0 são as coordenadas zero de ω e τ respectivamente. Agora, se $F(\omega) \in U_{x_k}$ então $\omega_0 \in I(x_k)$ por causa da propriedade (iii) do lema 3.1.4 e $F(\sigma(\omega) \in \gamma_{\omega_0}^{-1}(U_{x_k})$. Temos que $F(\tau) \in \gamma_{\tau_0}(\gamma_{\omega_0}^{-1}(U_{x_k}))$ e se $\omega_0 \neq \tau_0$ então pela propriedade (ii) do lema 3.1.4, temos que $F(\tau) \notin U_{x_k}$. Como o suporte de φ_k está contido em U_{x_k} e se $\omega_0 = \tau_0$ então $\omega = \tau$, temos de (3.7) que

$$(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(a))(\omega, m-n, \tau) = [m=n][\omega=\tau]a(F(\omega)) =$$

$$\iota(a)(\omega, m-n, \tau).$$

Como o conjunto dos elementos $a \in C(K)$ tais que $\mathrm{supp}(a) \subseteq K \backslash B$ é denso em J_E, a igualdade $(\psi,\iota)^{(1)}(\phi(a)) = \iota(a)$ é válida para $a \in J_E$ arbitrário. ■

Lemma 3.1.9 ([18]) *Suponha que (ψ,ι) é uma representação covariante isométrica de E numa C*-álgebra B. Então $\psi \times \iota$ é fiel se e somente se ι é fiel e existe uma ação (fortemente contínua) $\beta : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{Aut}(B)$ tal que $\beta_z \circ \iota = \iota$ e $\beta_z \circ \psi = z\psi$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$.*

Proposição 3.1.10 *Se o IFS Γ satisfaz a condição dos ramos finitos ou a condição do conjunto aberto, então homomorfismo $\psi \times \iota$ dado pela representação covariante definida por (3.1) and (3.2) é fiel.*

Demonstração. Dado $a \in C(K)$,

$$(\iota(a)^* * \iota(a))(\omega, m-n, \tau) = [m=n][\omega=\tau]|a(F(\omega))|^2$$

e como F é sobrejetiva, temos que ι é fiel. Seja $\beta : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_d)$ a ação de gauge dada por

$$\beta_z(f)(\omega, m-n, \tau) = z^{m-n} f(\omega, m-n, \tau)$$

então $\beta_z(\iota(a)) = \iota(a)$ pois $\iota(a)$ é zero para $m \neq n$; e dado $\xi \in E$, $\beta_z(\psi(\xi)) = z\psi(\xi)$ pois $\psi(\xi)$ é zero para $m - n \neq 1$. ■

Concluímos com essa proposição que $\mathcal{O}_\Gamma$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{O}_d$.

Observação 3.1.11 *Como $\mathcal{G}$ é um subconjunto fechado, e portanto compacto, de $K \times K$, todas funções contínuas em $\mathcal{G}$ podem ser vistas como restrições de funções contínuas de $K \times K$. E observando que $C(K \times K) = C(K) \otimes C(K)$, temos que toda função contínua em $\mathcal{G}$ pode ser escrita como um limite de somas de elementos do tipo $a \otimes b$ onde $a, b \in C(K)$. Podemos fazer isso tanto com respeito à norma do sup quanto à norma de módulo de Hilbert por causa da proposição 3.1.1.*

Também notamos que a aplicação de codificação $F : \Omega \to K$ definida na proposição1.1.6 induz uma injeção de $C(K)$ em $C(\Omega)$.

Proposição 3.1.12 *Se o IFS Γ satisfaz a condição dos ramos finitos ou a condição do conunto aberto, então $\mathcal{O}_\Gamma$ é a sub-C*-álgebra de $\mathcal{O}_d$ gerada por $C(K)$ e S.*

Demonstração. Como uma álgebra de Cuntz-Pimsner é gerada por cópias dos elementos da álgebra e cópias dos elementos do módulo, temos que $\mathcal{O}_\Gamma$ é gerado por todos elementos $a \in C(K)$ e $\xi \in C(\mathcal{G})$. Basta notar que $\psi(\mathbf{1}) = S$ onde $\mathbf{1}$ é a identidade de $C(\mathcal{G})$ e $\psi(a \otimes b) = \iota(a)\psi(\mathbf{1})\iota(b)$ para $a, b \in C(K)$. ■

Vamos relembrar algumas definições de [23] e dar uma prova diferente para isomorfismo entre $\mathcal{O}_\Gamma$ e $\mathcal{O}_d$ para uma certa classe de IFS.

Definição 3.1.13 *Dizemos que o IFS* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ *satisfaz a condição de separação dos co-gráficos se os co-gráficos definidos por*

$$\mathcal{G}_i = \{(\gamma_i(y), y) \in K \times K : y \in K\}$$

são disjuntos.

Note que os co-gráficos de um IFS são sempre subconjuntos fechados de $\mathcal{G}$ e se o IFS satisfaz a condição de separação dos co-gráficos então eles também são subconjuntos abertos. Neste caso, não existem pontos ramificados e em particular, o IFS satisfaz a condição dos ramos finitos.

Proposição 3.1.14 *Se o IFS* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ *satisfaz a condição de separação dos co-gráficos então* $\mathcal{O}_\gamma \simeq \mathcal{O}_d$.

Demonstração. Se $\chi_{\mathcal{G}_i}$ é a função característica de $\mathcal{G}_i$ então ela pertence a $C(\mathcal{G})$ e note que $\psi(\chi_{\mathcal{G}_i}) = \chi_{\bar{i}} * S$ onde $\chi_{\bar{i}}$ é a função característica do cilindro $\bar{i}$. Como vimos na seção 2.3, os elementos $S_i = d^{1/2}\chi_{\bar{i}} * S = d^{1/2}\psi(\chi_{\mathcal{G}_i})$ são d isometrias que satisfazem as relações de Cuntz e geram $\mathcal{O}_d$. ■

3.2 Estados KMS nas álgebras de Kajiwara-Watatani

Sejam $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\}$ um IFS sobre seu atrator K, $\mathcal{O}_\Gamma$ a álgebra definida na seção anterior, $h \in C(K)$ uma função estritamente positiva e σ o grupo a um parâmetro de automorfismos definido a partir de h como na seção 1.3. Sejam $B(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ e $C(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ os conjuntos definidos em (3.1.3) e suponha que Γ satisfaça a condição dos ramos finitos, isto é, B e C são finitos.

Para um ponto $(x, y) \in K \times K$ defina

$$e(x, y) = \#\{j \in \{1, \ldots, d\} : \gamma_j(y) = x\}$$

e para $a \in C(K)$, seja $\widetilde{a}$ a função definida por

$$\widetilde{a}(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{e(\gamma_j(x), x)} a(\gamma_j(x)).$$

Note que a função $\widetilde{a}$ não precisa ser contínua.

Proposição 3.2.1 *Se μ é uma medida positiva não nula em K então*

$$\mathcal{F}(\mu)(a) = \int_K \widetilde{a} d\mu$$

para todo $a \in C(K)$.

Se $\omega \in C(K)^*$ é dado pela medida μ, iremos abusar a notação e escreveremos o lado direito da equação acima como $\omega(\widetilde{a})$.

Definição 3.2.2 *Para cada número real $\beta > 0$, definimos o operador de Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}_{h,\beta} : C(K) \to C(K)$ por*

$$\mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x) = \sum_{j=1}^{d} h^{-\beta}(\gamma_j(x))a(\gamma_j(x)).$$

Para $x \in K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, temos que $e(\gamma_j(x), x) = 1$ para todo $j = 1, \ldots, d$ e neste caso $\mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x) = \widetilde{h^{-\beta}a}(x)$.

Lemma 3.2.3 *Se $a \in J_E$ então $\widetilde{h^{-\beta}a}(x) = \mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x)$ para todo $x \in K$.*

Demonstração. A igualdade é trivial para $x \in K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Então suponha que $x \in C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Para $i \in \{1, \ldots, d\}$, se $\exists j \neq i$ tal que $\gamma_i(x) = \gamma_j(x)$ então $\gamma_i(x) \in B(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ e neste caso $a(\gamma_i(x)) = 0$. Se não existe tal j então $e(\gamma_i(x), x) = 1$. Comparando as fórmulas, é fácil ver que a igualdade também é válida para $x \in C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. ∎

Proposição 3.2.4 *Seja $\tau \in C(K)^*$ estado tracial, se $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ então τ satisfaz (K1) e (K2) do teorema (1.3.6). Além disso, se* $\mathrm{supp}(\tau) \subseteq K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *então $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ se e somente se τ é do tipo infinito com repeito a (h, β).*

Demonstração. Tome $a \in J_E$, então pelo lema anterior

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(\widetilde{h^{-\beta}a}) = \tau(\mathcal{L}_{h,\beta}(a)) = \tau(a)$$

o que mostra (K1). Agora, tome $a \in A^+$, então

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(\widetilde{h^{-\beta}a}) \leq \tau(\mathcal{L}_{h,\beta}(a)) = \tau(a)$$

o que prova (K2).

Se $\text{supp}(\tau) \subseteq K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ então

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(\widetilde{h^{-\beta}a}) = \tau(\mathcal{L}_{h,\beta}(a))$$

para todo $a \in C(K)$, e a equivalência entre $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ e ser do tipo infinito segue. ■

Agora, vamos restringir nossa atenção a uma certa classe de funções h para a qual temos um resultado análogo ao teorema de Ruelle-Perron-Frobenius [17].

Definição 3.2.5 *Para uma função $f : K \to \mathbb{R}$ definimos o módulo de continuidade por $\omega(f,t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : d(x,y) \leq t\}$. E diremos que f satisfaz a condição de Dini se*

$$\int_0^1 \frac{\omega(f,t)}{t} dt < \infty.$$

Note que se h satisfaz a condição de Dini então $h \circ \gamma_i$ também satisfaz pois γ_i é uma contração.

Denote por $\rho(\beta)$ o raio espectral de $\mathcal{L}_{h,\beta}$. Como $\mathcal{L}_{h,\beta}$ é um operador positivo, então $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$ também o é e seus raios espectrais coincidem. Também temos a seguinte fórmula:

$$\rho(\beta) = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{L}^n_{h,\beta}\|^{1/n}.$$

Teorema 3.2.6 ([17]) *Suponha que $\log h$ satisfaz a condição de Dini, então para cada β existe uma única função positiva $k_\beta = k \in C(K)$ e um único estado $\tau_\beta = \tau \in C(K)^*$ tal que*

$$\mathcal{L}_{h,\beta}(k) = \rho(\beta)k, \qquad \mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \rho(\beta)\tau, \qquad \tau(k) = 1.$$

Além disso, para cada $a \in C(K)$, $\rho(\beta)^{-n}\mathcal{L}^n_{h,\beta}(a)$ converge uniformemente para $\tau(a)k$ e para todo estado $\theta \in C(K)^*$, $\rho(\beta)^{-n}(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\theta)$ converge para $\theta(k)\tau$ na topologia fraca. Em particular, $\rho(\beta)$ é o único auto-valor tanto para $\mathcal{L}_{h,\beta}$ como para $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$.*

Proposição 3.2.7 ([17]) *Suponha que* $\log h$ *satisfaz a condição de Dini, então a função real* $\beta \mapsto \log(\rho(\beta))$ *é analítica e portanto estritamente decrescente.*

Dividiremos o estudo dos estados KMS para β tal que $\rho(\beta) < 1$, $\rho(\beta) = 1$ e $\rho(\beta) > 1$.

Lemma 3.2.8 *Para cada funcional positivo não nulo* $\omega \in C(K)^*$, $a \in C(K)^+$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *temos que*

$$\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\omega)(a) \leq (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\omega)(a).$$

Demonstração. Como $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$ é um operador positivo, é suficiente mostrar para $n = 1$, mas neste caso

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\omega)(a) = \omega(\widetilde{h^{-\beta}a}) \leq (\mathcal{L}^*_{h,\beta})(\omega)(a).$$

■

Proposição 3.2.9 *Se* $\rho(\beta) < 1$, *então* $K_\beta(\sigma)_i = \emptyset$ *e existe uma correspondência biunívoca entre os pontos extremos de* $K_\beta(\sigma)$ *e os pontos de* $B(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$.

Demonstração. Seguimos algumas das ideias de [20]. Primeiro mostramos que $K_\beta(\sigma)_i = \emptyset$. Suponha que τ é um estado tracial do tipo infinito com respeito a (h, β), então pelo lema anterior

$$1 = \tau(1) = \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau)(1) \leq (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\tau)(1) = |(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\tau)(1)| \leq$$

$$\|(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n\|\|\tau\|\|1\| = \|(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n\|$$

e assim

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \|(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n\|^{1/n} = \rho(\beta) < 1$$

o que é uma contradição.

Segue que $K_\beta(\sigma)_f = K_\beta(\sigma)$.

Seja $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$ o conjunto dos estados traciais que se anulam em J_E que é igual a $\{a \in A = C(K); a \text{ se anula em } B(\gamma_1, ..., \gamma_d)\}$ pelo lema 3.1.5.

Segue que um elemento τ de $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$ deve ter o suporte contido em $B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$, que é finito como suposto no início desta seção. Podemos facilmente ver que neste caso os pontos extremos de $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$ são exatamente os deltas de Dirac δ_y para $y \in B$.

É suficiente mostrar agora que existe uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$ e $K_\beta(\sigma)_f$ preservando os pontos extremos. Dado $\phi \in K_\beta(\sigma)_f$, seja $\tau = \phi|_A$ então $\tau_0 = (\tau - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau))/(\tau(1) - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(1)) \in \mathcal{T}(C(K)/J_E)$ pela condição (K1) do teorema (1.3.6).

Para a recíproca, vamos mostrar que dado $\tau_0 \in \mathcal{T}(C(K)/J_E)$, temos que a soma $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)$ converge para um elemento $\omega \in C(K)^*$ na topologia fraca*. Tome um elemento $a \in C(K)^+$, então pelo lema anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{L}_{h,\beta}^*)^n(\tau_0)(a).$$

Agora

$$\lim_{n\to\infty} (|(\mathcal{L}_{h,\beta}^*)^n(\tau_0)(a)|)^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \|(\mathcal{L}_{h,\beta}^*)^n\|^{1/n} \|a\|^{1/n} = \rho(\beta) < 1$$

e pelo teste da raiz, a séria acima converge. Para uma função $a \in C(K)$ arbitrária, podemos escrevê-la como a diferença entre a parte positiva e a parte negativa.

Se $\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)$, então o estado tracial do tipo finito $\tau = \omega/\omega(1)$ satisfaz as condições (K1) and (K2) do teorema (1.3.6) e desta forma podemos associar a ele um elemento $\phi \in K_\beta(\sigma)_f$.

As construções acima, τ_0 a partir de ϕ e a recíproca, são inversas uma da outra. Vejamos que os pontos extremos são preservados nessas construções.

Suponha que $\phi = \lambda\phi' + (1-\lambda)\phi''$ para $\lambda \in (0,1)$ e $\phi, \phi', \phi'' \in K_\beta(\sigma)_f$. Sejam τ, τ' e τ'' as restrições em A e C, C' e C'' as constantes dadas por $C^{()} = \tau^{()}(1) - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau^{()})(1)$ onde $()$ pode ser substituído por nada, $'$ ou $''$. Então

$$\tau_0 = \frac{\tau - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)}{\tau(1) - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(1)} =$$

$$\frac{\lambda(\tau' - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau')) + (1-\lambda)(\tau'' - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau''))}{C} =$$

$$\frac{\lambda C'(\tau - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau))}{CC'} + \frac{(1-\lambda)C''(\tau'' - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau''))}{CC''} =$$

$$\frac{\lambda C'}{C}\tau_0' + \frac{(1-\lambda)C''}{C}\tau_0''.$$

Note que
$$\frac{\lambda C'}{C} + \frac{(1-\lambda)C''}{C} = \frac{\lambda C' + (1-\lambda)C''}{C} = \frac{C}{C} = 1$$
e portanto τ_0 é uma combinação convexa de dois elementos de $\mathcal{T}(C(K)/J_E)$.

De maneira similar, podemos provar que se τ_0 pode ser escrita como uma combinação convexa, então o ϕ correspondente também pode. ■

Para $\rho(\beta) \geq 1$, imporemos uma condição extra como feito em [20]. Se $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos a n-ésima orbita de x por

$$O_n(x) = \{\gamma_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x) \in K : 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq d\}$$

e definimos a órbita por

$$O(x) = \cup_{n=0}^{\infty} O_n(x).$$

Lemma 3.2.10 *Sejam τ um estado tracial satisfazendo (K2) e μ a medida definida por τ. Se μ tem massa pontual em x então tem massa pontual em y para todo $y \in O(x)$.*

Demonstração. Se μ satisfaz (K2) então, $\mu \geq \mathcal{F}_{h,\beta}(\mu) \geq \mu(\{x\})\mathcal{F}_{h,\beta}(\delta_x)$. Para $a \in C(K)$, temos

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\delta_x)(a) = \delta_x(\widetilde{h^{-\beta}a}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{h^{-\beta}(\gamma_i(x))}{e(\gamma_i(x), x)} a(\gamma_i(x))$$

de forma que

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\delta_x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{h^{-\beta}(\gamma_i(x))}{e(\gamma_i(x), x)} \delta_{\gamma_i(x)}.$$

Segue que

$$\mu(\{\gamma_j(x)\}) \geq \mu(\{x\})\mathcal{F}_{h,\beta}(\delta_x)(\{\gamma_j(x)\}) = \mu(\{x\}) \frac{h^{-\beta}(\gamma_j(x))}{e(\gamma_j(x), x)}$$

de forma que se $\mu(\{x\}) > 0$ então $\mu(\{\gamma_j(x)\}) > 0$. ■

Lemma 3.2.11 *Se $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$ então*

$$\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\delta_x) = (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\delta_x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Se $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$ então para todo $y \in O(x)$ temos que $e(\gamma_i(y), y) = 1$. Por causa disso, podemos calcular ambos os lados da equação do enunciado e chegamos a

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{d} h^{-\beta}(\gamma_{i_1}(x))h^{-\beta}(\gamma_{i_1} \circ \gamma_{i_2}(x)) \cdots h^{-\beta}(\gamma_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x))\delta_{\gamma_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x)}.$$

■

Lemma 3.2.12 *Se $\mu(C) = 0$ então $\mathcal{F}_{h,\beta}(\mu)(C) = 0$.*

Proposição 3.2.13 *Suponha que para todo $y \in K$ existe $x \in O(y)$ tal que $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$. Então*

(i) Se $\rho(\beta) > 1$ então $K_\beta(\sigma) = \emptyset$.

(ii) Se $\rho(\beta) = 1$ então existe único estado (σ, β)-KMS, que é do tipo infinito e é dado pelo único τ tal que $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$.

Demonstração. (i) Vamos mostrar primeiro que se $\rho(\beta) > 1$ e se τ satisfaz (K1) e (K2) então $\operatorname{supp}(\tau) \subseteq K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Como C é finito, se supormos que $\operatorname{supp}(\tau)$ não está contido em $K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ então τ teria massa pontual em algum $y \in C$. Tome $x \in O(y)$ tal que $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$, seja μ a medida associada a τ e seja k dado como no teorema (3.2.6), então pelo lema anterior

$$\tau(k) \geq \mu(\{x\})\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\delta_x)(k) = \mu(\{x\})(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\delta_x)(k) = \mu(\{x\})\delta_x(\mathcal{L}^n_{h,\beta}(k)) =$$

$$\mu(\{x\})\delta_x(\rho(\beta)^n k) = \rho(\beta)^n \mu(\{x\})k(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$$

o que é uma contradição.

Agora, se τ é do tipo infinito, então pela proposição (3.2.4), $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$, o que não é possível uma vez que $\rho(\beta) > 1$ é o único auto-valor de $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$.

Se τ é do tipo finito então $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)$ onde τ_0 é um traço finito. Note que $\tau_0(C) = 0$, então pelo lema anterior aplicado n vezes, $\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)(C) = 0$ e isso implica que $\mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0) = (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\tau_0)$ para todo n. Agora, aplicando τ em k, temos

$$\tau(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n_{h,\beta}(\tau_0)(k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\tau_0)(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_0(\mathcal{L}^n_{h,\beta}(k)) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_0(\rho(\beta)^n k) = \tau_0(k) \sum_{n=0}^{\infty} \rho(\beta)^n = \infty \tag{3.8}$$

de modo que não temos convergência na topologia fraca*, o que é uma contradição.

(ii) Primeiro note que a equação (3.8) também é válida para $\rho(\beta) = 1$ de modo que não temos estados KMS to tipo finito neste caso. Agora, mostremos que se τ satisfaz $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$ então ele nos dá um estado KMS, que necessariamente é do tipo infinito.

Para (K1), seja $a \in J_E$ e note que

$$\widetilde{h^{-\beta}a}(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{e(\gamma_i(x), x)} h^{-\beta}(\gamma_i(x)) a(\gamma_i(x)) = \mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x)$$

porque ou $e(\gamma_i(x), x) = 1$ ou $\gamma_i(x) \in B(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ e neste caso $a(\gamma_i(x)) = 0$.

Para (K2), tome $a \in A^+$, então

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(\widetilde{h^{-\beta}a}) \leq \tau(\mathcal{L}_{h,\beta}(a)) = \tau(a).$$

Finalmente, temos que mostrar que a restrição de τ em A de um estado KMS do tipo infinito satisfaz $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$. Isso segue facilmente uma vez que mostrarmos que neste caso $\tau(C) = 0$. Para k a auto-função de $\mathcal{L}_{h,\beta}$, temos

$$0 = \tau(k) - \mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(k) = \tau(k - \widetilde{h^{-\beta}k}) = \tau(\mathcal{K}_{h,\beta}(k) - \widetilde{h^{-\beta}k}) =$$

$$\int \sum_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{1}{e(\gamma_j(x), x)}\right) h^{-\beta}(\gamma_j(x)) k(\gamma_j(x)) d\tau(x)$$

o que implica que $\tau(C) = 0$ e assim $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$. ∎

Capítulo 4

Résumé en Français

Le but de la thèse est d'étudier des algèbres issues de certaines dynamiques et leurs états KMS. On va rappeler quelques définitions et les résultats principaux obtenus.

4.1 Préliminaires

4.1.1 Systèmes des fonctions itérées

Soit (X, ρ) un espace métrique compact.

Définition 4.1.1 *Un système des fonctions itérées (IFS) sur X est un ensemble fini des fonctions continues $\{\gamma_i : X \to X\}_{i=1}^{d}$. On dit que le système est hyperbolique si toutes les fonctions sont des contractions, c'est-à-dire, il existe une constante $c \in (0,1)$ telle que $\rho(\gamma_i(x), \gamma_i(y)) \leq c\rho(x,y)$ $\forall x, y \in X$.*

Proposition 4.1.2 *Soit $\{\gamma_i\}_{i=1}^{d}$ un IFS, alors il existe un seul sous-espace compact non vide K de X tel que*

$$K = \cup_{i=1}^{d} \gamma_i(K). \tag{4.1}$$

On appelle l'attracteur du IFS.

Définition 4.1.3 *On dit que le IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^{d}$ satisfait*

- *la condition de séparation forte si l'union en 4.1 est disjointe.*

- *la condition de l'ensemble ouvert si* $\exists U \subseteq K$ *ouvert et dense tel que*

$$U \subseteq \dot{\cup}_{i=1}^{d} \gamma_i(U)$$

où $\dot{\cup}$ *représente l'union disjointe.*

4.1.2 Algèbres de Cuntz-Pimsner

Soit A une C*-algèbre.

Définition 4.1.4 *Un C*-module de Hilbert (à droite) sur* A *est un* A*-module (à droite)* M *avec une application sesquilinéaire* $\langle\ ,\ \rangle : M \times M \to A$ *tel que:*

(i) $\langle \xi, \eta a\rangle = \langle \xi, \eta\rangle\, a$*;*

(ii) $(\langle \xi, \eta\rangle)^* = \langle \eta, \xi\rangle$*;*

(iii) $\langle \xi, \xi\rangle \geq 0$*;*

(iv) M *est complet avec la norme* $||\xi||_2 = ||\, \langle \xi, \xi\rangle\, ||^{1/2}$

pour $a \in A$ *et* $\xi, \eta \in M$*. On dit que* M *est plein si* $\langle M, M\rangle$ *est dense dans* A*.*

Soit M un C*-module de Hilbert, on note par $\mathcal{L}(M)$ l'espace des opérateurs dans M qui ont un adjoint. L'espace $\mathcal{L}(M)$ est une C*-algèbre /citeLan1. Pour $\xi, \eta \in M$, on définit l'opérateur $\theta_{\xi,\eta} : M \to M$ par $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \xi \langle \eta, \zeta\rangle$.Ces opérateurs ont un adjoint et on note par $\mathcal{K}(M)$ l'espace fermé de $\mathcal{L}(M)$ engendré par tous $\theta_{\xi,\eta}$.

Définition 4.1.5 *Une C*-correspondance sur* A *é un C*-module de Hilbert* M *avec un C*-homomorphisme* $\phi : A \to \mathcal{L}(M)$*.*

Soit (M, ϕ) une C*-correspondance sur A et on suppose que ϕ est fidèle. Note par J_M l'idéal $\phi^{-1}(\mathcal{K}(M))$.

Définition 4.1.6 *Une paire* (ι, ψ) *des application* $\iota : A \to B$*,* $\psi : M \to B$*, où* B *est une C*-algèbre et* ι *un C*-homomorphisme, est une représentation covariante de* M *si:*

(i) $\psi(\phi(a)\xi b) = \iota(a)\psi(\xi)\iota(b)$;

(ii) $\psi(\xi)^*\psi(\eta) = \iota(\langle \xi, \eta \rangle)$;

(iii) $(\psi, \iota)^{(1)}(\phi(c)) = \iota(c)$ *où l'application* $(\psi, \iota)^{(1)} : \mathcal{K}(M) \to B$ *est donnée par* $(\psi, \iota)^{(1)}(\theta_{\xi,\eta}) = \psi(\xi)\psi(\eta)^*$,

pour $a, b \in A$, $\xi, \eta \in M$ *et* $c \in J_M$.

Etant donnée une C*-correspondance (M, ϕ), il existe une C*-algèbre $\mathcal{O}(M)$ et une représentation covariante (k_A, k_M) qui est universelle, au sens que si (ι, ψ) est une représentation covariante de M dans une C*-algèbre B, il existe un seul C*-homomorphisme $\iota \times \psi : \mathcal{O}(M) \to B$ tel que $\iota = (\iota \times \psi) \circ k_A$ et $\psi = (\iota \times \psi) \circ k_M$.

Définition 4.1.7 ([35], [22]) *L'algèbre* $\mathcal{O}(M)$ *est appelée l'algèbre de Cuntz-Pimsner de* M.

4.2 C*-algèbres associées à une transformation continue

Soit A une C*-algèbre commutative. Motivé par [31], on va donner une nouvelle définition d'entropie.

Définition 4.2.1 *Soit* ϕ *un état dans* A, *on définit l'entropie de* ϕ *par:*

$$\mathsf{h}(\phi) = \inf_{a \in A_+} \left\{ \phi \left(\ln \left(\frac{L_\rho(a)}{\rho a} \right) \right) \right\} \tag{4.2}$$

où L_ρ *est un opérateur de transfert pour* $\rho : X \to (0, \infty)$.

On note par A_+ l'ensemeble des eléments $a \in A$ auto-adjoint et tel que le spectre $\sigma(a)$ est contenu dans $(0, \infty)$.

Définition 4.2.2 *On dit qu'un état* ϕ *est* α*-invariant si* $\phi \circ \alpha = \phi$.

Définition 4.2.3 *Soit $b \in A_+$, on définit la pression topologique de b par*

$$p(b) = \sup_{\phi \text{ inv}} \{\mathsf{h}(\phi) + \phi(\ln b)\}.$$

Si ϕ est un état invariant tel que $\mathsf{h}(\phi) + \phi(\ln b) = p(b)$, on dit que ϕ est un état d'équilibre de b.

Proposition 4.2.4 *Si $L_\rho(1) = 1$ alors $p(\rho) = 0$. De plus, les états ϕ qui satisfont $\phi \circ L_\rho = \phi$ sont des états d'équilibre de ρ.*

On veut trouver des relations entre les états KMS de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ [12] et $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ [14] et les états d'équilibre (dans A) du potentiel $h^{-\beta}$. Comme on a supposé que l'algèbre A est commutative, on a des uniques espérances conditionnelles $F : A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N} \to A$ et $G : C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E}) \to A$. De plus si $E := \alpha \circ L : A \to \alpha(A)$ est une espérance conditionnelle d'indice fini, les états KMS ψ de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ peuvent être décomposés de la façon $\psi = \phi \circ F$ où ϕ est un état dans A qui satisfait

$$\phi(a) = \phi(L(\Lambda a)), \ \forall a \in A$$

où $\Lambda = h^{-\beta}\text{ind}(E)$ et les états KMS ψ de $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ peuvent être décomposés de la façon $\psi = \phi \circ G$ où ϕ est un état dans A qui satisfait

$$\phi(a) = \phi(\Lambda^{-[n]} E_n(\Lambda^{[n]} a)), \ \forall a \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $E_n = \alpha^n \circ L^n$ et $\Lambda^{[n]} = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i(h^{-\beta}\text{ind}(E))$.

Proposition 4.2.5 *Si $\psi = \phi \circ F$ est un état (h, β)-KMS de $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ et $L(\Lambda 1) = 1$ alors ϕ est un état d'équilibre (dans A) du potentiel $h^{-\beta}$.*

Proposition 4.2.6 *Supposons que $\psi = \phi \circ G$ soit un état (h, β)-KMS de $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$. Soit $\rho = h^{-\beta}$ et supposons que $L_\rho(k) = \lambda k$ pour un $\lambda > 0$ et $k \in A_+$. Soient $\widetilde{\rho} = \frac{\rho k}{\lambda \alpha(k)}$ et $\widetilde{\phi}$ un état A donné par $\widetilde{\phi}(a) = \phi(ka)$. Supposons que $\lim_{n\to\infty} \left\| L^n_{\widetilde{\rho}}(a) - \widetilde{\phi}(a) \right\| = 0 \ \forall a \in A$, alors $\widetilde{\phi}$ est un état d'équilibre de $\widetilde{\rho}$.*

4.3 C*-algèbres associées à des systèmes de fonctions itérées

4.3.1 C*-algèbres de Kajiwara-Watatani

Soit $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^d$ un système de fonctions itérées hyperbolique et K son attracteur. On rappele la C*-correspondance définie dans [23]. Soient $A = C(X)$ et $E = C(\mathcal{G})$ où

$$\mathcal{G} = \cup_{i=1}^d \mathcal{G}_i$$

et les ensembles $\mathcal{G}_i$ sont définis par

$$\mathcal{G}_i = \{(x, y) \in K \times K : x = \gamma_i(y)\}.$$

La multiplication à droite et l'homomorphisme ϕ sont donés par

$$(\phi(a)\xi b)(x, y) = a(x)\xi(x, y)b(y)$$

et le produit scalaire est donné par

$$\langle \xi, \eta \rangle_A (y) = \sum_{i=1}^d \overline{\xi(\gamma_i(y), y)}\eta(\gamma_i(y), y)$$

où $a, b \in A$ et $\xi, \eta \in E$.

Définition 4.3.1 *L'algèbre de Kajiwara-Watatani $\mathcal{O}_\Gamma$ associée à Γ est l'algèbre de Cuntz-Pimsner associée à la C*-correspondance définit ci-dessus.*

Définition 4.3.2 *Soit $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ un IFS, on définit les ensembles:*

$$B(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{x \in K | \exists y \in K \ \exists i \neq j : x = \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\};$$

$$C(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{y \in K | \exists i \neq j : \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\}.$$

On appelle les éléments de $B(\gamma_1, ..., \gamma_d)$ les points de branchement et les points de $C(\Gamma)$ les valeurs de branchement. On dit que Γ satisfait la conditions des branches finies si $C(\gamma_1, ..., \gamma_d)$ est fini.

Théorème 4.3.3 *Soit $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ un IFS qui satisfait la condition de l'ensemble ouvert ou la condition des branches finies. Il existe un C*-homomorphisme injectif $\Phi : \mathcal{O}_\Gamma \to \mathcal{O}_d$ tel que l'image de Φ est engendrée par $\Phi(A)$ et $\Phi(\mathbf{1})$, où $\mathbf{1} \in C(\mathcal{G})$ et la fonction constant égale à 1 et $\mathcal{O}_d$ est l'algèbre de Cuntz.*

Théorème 4.3.4 *Soit $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ un IFS qui satisfait la condition de l'ensemble ouvert ou la condition des branches finies. Supposons qu'il existe une fonction continue $\gamma : K \to K$ telle que $\gamma \circ \gamma_i = id$ pour tous $i \in \{1, \ldots, d\}$, alors $\mathcal{O}_\Gamma$ est isomorphe à $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ où $\alpha : A \to A$ est donné par $\alpha(a) = a \circ \gamma$ et $L : A \to A$ est donné par $L(a)(x) = \sum_{i=1}^{d} a(\gamma_i(x))$.*

4.3.2 États KMS dans l'algèbre de Kajiwara-Watatani

D'abord, on va rappeler quelques définitions et résultat de [29] avec les simplifications faites dans [24] et [20].

Soient $A = C(K)$ et $E = C(\mathcal{G})$ comme dans la sous-section précédente. Si $h \in A$ est une fonction strictement positive, on peut définir un groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t : \mathcal{O}_\Gamma \to \mathcal{O}_\Gamma$ par $\sigma_t(a) = a$ si $a \in A$ et $\sigma_t(\xi) = h^{it}\xi$ si $\xi \in E$.

Définition 4.3.5 *On définit l'application $\mathcal{F} : A^* \to A^*$ par*

$$\mathcal{F}(\omega)(a) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\xi \in I_k} \omega(\langle \xi, a\xi \rangle)$$

où $\{e_k = \sum_{\xi \in I_k} \theta_{\xi,\xi}\}$ est une unité approchée de $\mathcal{K}(M)$. Etant donnée $h \in A$ strictement positive et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $\mathcal{F}_{h,\beta} : A^* \to A^*$ par

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(\omega)(a) = \mathcal{F}(\omega)(h^{-\beta}a).$$

On note $K_\beta(\sigma)$ l'ensemble des états (σ, β)-KMS de $\mathcal{O}_\Gamma$.

Théorème 4.3.6 *Il existe un isomorphisme entre $K_\beta(\sigma)$ et l'ensemble $\mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ des états τ de A qui satisfont les conditions*

(K1) $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) = \tau(a)$ pour tout $a \in J_M$;

(K2) $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau)(a) \leq \tau(a)$ *pour tout* $a \in A^+$.

La correspondance entre $K_\beta(\sigma)$ *et* $\mathcal{T}_{h,\beta}(A)$ *est donnée par la restriction.*

Définition 4.3.7 *On dit qu'une trace positive* τ *est de type fini (par rapport à* (h,β)*) s'il existe une trace* τ_0 *telle que* $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{h,\beta}^n(\tau_0)$ *dans la topologie faible-*. On dit que* τ *est de type infini (par rapport à* (h,β)*) si* $\mathcal{F}_{h,\beta}(\tau) = \tau$.

Définition 4.3.8 *On dit que* $\phi \in K_\beta(\sigma)$ *est de type fini (resp. infini) si* $\phi|_A$ *est de type fini (resp. infini). On note* $K_\beta(\sigma)_f$ *(resp.* $K_\beta(\sigma)_i$*) l'ensemble des états* (σ,β)*-KMS de type fini (resp. infini).*

Définition 4.3.9 *Etant donné un nombre réel* $\beta > 0$*, on définit l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius* $\mathcal{L}_{h,\beta} : C(K) \to C(K)$ *par*

$$\mathcal{L}_{h,\beta}(a)(x) = \sum_{j=1}^{d} h^{-\beta}(\gamma_j(x))a(\gamma_j(x)).$$

Proposition 4.3.10 *Soit* $\tau \in C(K)^*$ *un état, si* $\mathcal{L}_{h,\beta}^*(\tau) = \tau$ *alors* τ *satisfait (K1) et (K2) du théorème (4.3.6). De plus, si* $\operatorname{supp}(\tau) \subseteq K \backslash C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *alors* $\mathcal{L}_{h,\beta}^*(\tau) = \tau$ *si et seulement si* τ *est de type infini par rapport à* (h,β).

Pour les résultats suivants, on va utiliser une version du théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Définition 4.3.11 *Pour une fonction* $f : K \to \mathbb{R}$ *on définit le module de continuité par* $\omega(f,t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : d(x,y) \leq t\}$*. On dit que* f *satisfait la condition de Dini si*

$$\int_0^1 \frac{\omega(f,t)}{t} dt < \infty.$$

Théorème 4.3.12 ([17]) *Supposons que* $\log h$ *satisfasse la condition de Dini, alors pour chaque* β *il existe une seule fonction positive* $k_\beta = k \in C(K)$ *et un seul état* $\tau_\beta = \tau \in C(K)^*$ *tels que*

$$\mathcal{L}_{h,\beta}(k) = \rho(\beta)k, \qquad \mathcal{L}_{h,\beta}^*(\tau) = \rho(\beta)\tau, \qquad \tau(k) = 1.$$

De plus, si $a \in C(K)$ alors $\rho(\beta)^{-n}\mathcal{L}^n_{h,\beta}(a)$ converge uniformément vers $\tau(a)k$ et si $\theta \in C(K)^*$ est un état alors $\rho(\beta)^{-n}(\mathcal{L}^*_{h,\beta})^n(\theta)$ converge vers $\theta(k)\tau$ dans la topologis faible-. En particulier, $\rho(\beta)$ est le seule valeur propre de $\mathcal{L}_{h,\beta}$ et de $\mathcal{L}^*_{h,\beta}$.*

Proposition 4.3.13 *Si $\rho(\beta) < 1$, alors $K_\beta(\sigma)_i = \emptyset$ et il existe une bijection entre les points extrêmes de $K_\beta(\sigma)$ et les éléments de $B(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$.*

Pour $\rho(\beta) \geq 1$, on impose une autre condition comme a été fait dans [20]. Soient $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit n-ième orbite de x par

$$O_n(x) = \{\gamma_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x) \in K : 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq d\}$$

et on définit l'orbite de x par

$$O(x) = \cup_{n=0}^{\infty} O_n(x).$$

Proposition 4.3.14 *Supposons que pour tout $y \in K$ il existe $x \in O(y)$ tel que $O(x) \cap C(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \emptyset$. Alors*

(i) Si $\rho(\beta) > 1$ alors $K_\beta(\sigma) = \emptyset$.

(ii) Si $\rho(\beta) = 1$ alors il existe un seul état (σ, β)-KMS, qui est de type infini et est donné par le seule τ tel que $\mathcal{L}^*_{h,\beta}(\tau) = \tau$.

Bibliografia

[1] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., 1988.

[2] O. Bratteli and P. Jorgensen *Wavelets through a looking glass. The world of the spectrum.*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser (2002).

[3] O. Bratteli; D. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Second Edition.* Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag (1997). (Texts and Monographs in Physics).

[4] N. Brownlowe; I. Raeburn, *Exel's crossed product and relative Cuntz-Pimsner algebras*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **141** (2006), 497-508.

[5] G. de Castro, *C*-algebras associated with iterated function systems*, Contemp. Math. **503**, Operator Structures and Dynamical Systems (2009), 27-38.

[6] G. de Castro; A. Lopes, *KMS States, Entropy, and a Variational Principle for Pressure*, Real Anal. Exch. *34* (2009), 333-346.

[7] A. Connes *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).

[8] J. Cuntz, *Simple C*-algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. **57** (1977), 173-185.

[9] V. Deaconu, *Groupoids associated with endomorphisms*, Trans. Am. Math. Soc. **347** (1995), 1779-1786.

[10] G. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry. 2nd ed.*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.

[11] R. Exel, *A new look at the crossed-product of a C*-algebra by an endomorphism*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **23** (2003), 1733-1750.

[12] R. Exel, *Crossed-products by finite index endomorphisms and KMS states*, J. Funct. Anal. **199** (2003), 153-188.

[13] R. Exel, *KMS states for generalized gauge actions on Cuntz-Krieger algebras. (An application of the Ruelle-Perron-Frobenius theorem)*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **35** (2004), 1-12.

[14] R. Exel; A. Lopes, *C^*-algebras, approximately proper equivalence relations, and Thermodynamic Formalism*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **24** (2004), 1051-1082.

[15] R. Exel; A. Vershik, *C*-algebras of irreversible dynamical systems*, Can. J. Math. **58** (2006), 39-63.

[16] K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. 2nd ed.*, Wiley, 2003.

[17] A. Fan; K-S Lau, *Iterated function system and Ruelle operator*, J. Math. Anal. Appl. **231** (1999), 319-344.

[18] N. Fowler; P. Muhly; I. Raeburn, *Representations of Cuntz-Pimsner algebras*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 569-605.

[19] I. Gelfand; M. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Mat. Sbornik **12** (1943), 197-213.

[20] M. Izumi; T. Kajiwara; Y. Watatani, *KMS states and branched points*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **27** (2007), 1887-1918.

[21] M. Ionescu; P. Muhly *Groupoid methods in wavelet analysis*, preprint, [arXiv:0709.2294v1].

[22] T. Katsura, *A construction of C*-algebras from C*-correspondences*, Contemp. Math. **335** (2003), 173-182.

[23] T. Kajiwara; Y. Watatani, *C*-algebras associated with self-similar sets*, J. Oper. Theory **56** (2006), 225-247.

[24] T. Kajiwara; Y. Watatani, *KMS states on C*-algebras associated with self-similar sets*, preprint [arXiv:math/0405514v1].

[25] D. Kerr and C. Pinzari, *Noncommutative pressure and the variational principle in Cuntz-Krieger-type C^*-algebras*, J. Funct. Anal., **188** (2002), 156–215.

[26] A. Kumjian; J. Renault, *KMS states on C^*-algebras associated to expansive maps*, Proc. Am. Math. Soc. **134** (2006), 2067-2078.

[27] Kwaśniewski, B. K. *On transfer operators for C*-dynamical systems*, preprint [arXiv:math/0703798].

[28] P. Jorgensen *Analysis and probability. Wavelets, signals, fractals.*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (2006).

[29] M. Laca; S. Neshveyev, *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras*, J. Funct. Anal. **211** (2004), 457-482.

[30] E. Lance, *Hilbert C*-modules, A toolkit for operator algebraists*, Cambridge University Press (1995).

[31] A. Lopes, *An analogy of the charge distribution on Julia sets with the Brownian motion*, J. Math. Phys., **30** (1989), no. 9, 2120-2124.

[32] F.Murray; J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. Of Math. **37** (1936), 116-229.

[33] S. Neshveyev and E. Størmer, *Dynamical Entropy in Operator Algebras*, Springer-Verlag (2006).

[34] G. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press Inc. (1979).

[35] M. Pimsner, *A class of C*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by* $\mathbb{Z}$, Fields Inst. Commun. **12** (1997), 189-212.

[36] C. Pinzari; Y. Watatani; K. Yonetani, *KMS states, entropy and the variational principle in full* C^**-dynamical systems*, Comm. Math. Phys., **213** (2000), 331-379.

[37] J. Renault, *A groupoid approach to C*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer-Verlag, 1980.

[38] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium.* Statistical mechanics, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 5, Addison-Wesley Publishing Company, (1978).

Anexos

Real Analysis Exchange

Gilles G. de Castro,[*] Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91509-900 Porto Alegre, Brazil.
email: gillescastro@gmail.com
Artur O. Lopes,[†] Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91509-900 Porto Alegre, Brazil.
email: arturoscar.lopes@gmail.com

KMS STATES, ENTROPY, AND A VARIATIONAL PRINCIPLE FOR PRESSURE

Abstract

We relate the concepts of entropy and pressure to that of KMS states for C^*-algebras. Several different definitions of entropy are known in our days: the one we present here is quite natural, extending the usual one for Dynamical Systems in Thermodynamic Formalism Theory, being basically obtained from transfer operators (also called Ruelle operators) and having the advantage of being very easily introduced. We also present a concept of pressure as a min-max principle.

Later on, we consider the concept of a KMS state as an equilibrium state for a potential, in the context of C^*-algebras, and we show that there is a relation between equilibrium measures and KMS states for certain algebras arising from a continuous transformation.

1 Introduction and Main Result

We want to relate equilibrium measures from the theory of Thermodynamic Formalism with KMS states, their analogues in the C^*-algebras theory. Nowadays, several different definitions of entropy are known (see [19]). The definition we present here is quite natural and extends the usual one for Dynamical

Mathematical Reviews subject classification: Primary 37A35, 37A55, 46L55; Secondary: 47B48
Key words: Entropy, Pressure, KMS States, Transfer Operator
[*]Partially supported by CNPq, PRONEX – Sistemas Dinâmicos, Instituto do Milênio, and beneficiary of CAPES financial support.
[†]Partially supported by CNPq, PRONEX – Sistemas Dinâmicos, Instituto do Milênio, and beneficiary of CAPES financial support.

Systems in Thermodynamic Formalism Theory (see [14]), being basically obtained from transfer operators, and having the advantage of being very easily introduced. Later on (Section 3), we interpret the concepts of entropy and pressure in the setting of commutative C^*-algebras.

Finally, we consider the concept of a KMS state as an equilibrium state for a potential (in the context of C^*-algebras) and show that they are related to the equilibrium measures of the Thermodynamic Formalism Theory. This problem, in a similar context, was also considered in [22], and [11].

In the next section we describe briefly the main prerequisites for the statement of our main result, which is stated and proved in the last section.

2 Review of Thermodynamic Formalism and C^*-algebras

First we present the main concepts of the theory of Thermodynamic Formalism, a mathematical theory initially developed by D. Ruelle and Y. Sinai and inspired by problems borrowed from Statistical Mechanics.

We denote by $C(X)$ the space of continuous real functions of X, where (X, d) is a compact metric space and consider the Borel sigma-algebra over X. Given a continuous transformation $T : X \to X$, we denote by $\mathcal{M}(T)$ the set of invariant probabilities ν for T, that is, those probabilities satisfying $\int f \circ T \, d\nu = \int f \, d\nu$, for every $f \in C(X)$.

From now on, suppose that T is an expanding map (see definition in [26]). We refer the reader to [24], [26], and [25] for general definitions and properties of Thermodynamic Formalism, as well as expanding maps; for these maps there are many nice results (see [26]).

Typical examples of such expanding maps are the shift transformation T of the Bernoulli space $\Omega = \{1, 2, \dots, d\}^{\mathbb{N}}$, as well as the $C^{1+\alpha}$-transformations of the unit circle satisfying $|T'(x)| > c > 1$, for some constant c, where $|\cdot|$ denotes the usual norm (associating the unit circle to the interval $[0, 1)$ in a standard way).

Our results also apply to the following type of expanding maps (see [1], and [16]): the geodesic flow of a compact constant negative curvature surface induces a Markov transformation G of the boundary of the Poincaré disk such that, for some n, the iterate $G^n = T$ is a continuous expanding transformation acting on the unit circle.

For each $\nu \in \mathcal{M}(T)$, let $h(\nu)$ denote the Shannon-Kolmogorov entropy of ν (see [20]). This entropy measures the dynamic complexity of the action of the transformation T on sets of measure one. One interesting problem is to consider the maximal entropy among invariant probabilities, that is, $h(T) =$

$\sup\{h(\nu)\,|\,\nu \in \mathcal{M}(T)\}$, called the topological entropy of T. A probability that attains such a supremum value is called a measure of maximal entropy.

This way, we are looking for the probability with the largest complexity. In the case of the Bernoulli space $\Omega = \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$, the maximal value of the entropy of invariant probabilities is $\log d$, and there is a unique probability μ that attains such a value. In this case, the maximal entropy measure μ is the independent probability with weights $1/d$.

One of the main principles of Physics is that Nature maximizes entropy. In Statistical Mechanics, the maximal entropy measure μ corresponds to what is to be expected at infinite temperature (see [24], and [26]). When the temperature is finite, Nature maximizes pressure. A probability that maximizes pressure is called a Gibbs probability (or state). In fact, there exists an external potential $A : \Omega \to \mathbb{R}$ which describes the interaction $A(w) = A(w_0, w_1, w_2, \ldots)$, with $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots) \in \Omega$, around neighborhoods in the lattice $\Omega = \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$.

The simplest case occurs with this potential being a function $A(w)$ which depends only on a finite number of coordinates; for example, on two coordinates, $A(w) = A(w_0, w_1)$, when we get a finite range iteration potential. These types of potentials are more easily dealt with, but the more important potentials, for mathematical applications, are those that depend on entire sequences $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots) \in \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$.

A common example in Statistical Mechanics occurs with $d = 2$, when we associate 1 to the spin $+$ and 2 to the spin $-$. An element w in this Bernoulli space could be, for instance, $w = (+ - - + - + - + + \ldots)$, that is, an element with spin up or down in different positions of a lattice over the set $\mathbb{N}$. The Gibbs probability for A describes the probabilities of the Borel sets of the space $\{+, -\}^{\mathbb{N}}$ that are determined by the interactions given by A.

As in Statistical Mechanics, we may also consider an extra real parameter $\beta = 1/\tau$, where τ represents the temperature.

Definition 1. *Given a potential A, the pressure of A at temperature $\tau = 1/\beta$ is given by*

$$P(\beta\, A) = \sup\left\{ h(\nu) \,+\, \beta \int A\, d\nu \,\middle|\, \nu \in \mathcal{M}(T) \right\}.$$

A measure $\mu = \mu_A$ satisfying such a supremum is called a Gibbs state for A at temperature τ. This probability μ_A, also called an equilibrium state for A, describes what is physically observable, in probabilistic terms (see [24]). When $\beta = 1$, we simply write $P(A)$. When $\beta = 0$, which corresponds to $A = 0$, we get the case of infinite temperature, and the Gibbs state is the independent probability mentioned earlier.

If the potential A is Hölder, which corresponds to a fast decay of interaction between neighborhoods, the Gibbs state μ_A is unique (see [25], and [20]).

For a differentiable transformation $T : S^1 \to S^1$ of the unit circle S^1 (or an interval), a very important potential to consider is $A(x) = -\log T'(x)$, when $-\int \log T'(x)\, d\mu(x)$ measures the μ-mean sensibility with respect to initial conditions. In this case, the measure μ that maximizes pressure is called the Bowen-Ruelle-Sinai probability (see [18]).

For more general transformations of the unit circle we may consider an extra parameter β (which now has nothing to do with temperature) and the potentials $\beta(-\log T')$. A special value of β, namely the one for which $P(-\beta \log T') = 0$, is associated to the Hausdorff dimension of sets that are important for the dynamical viewpoint (see [26], and [17]).

Applications to Geometry, the dimension of fractals, zeta functions, as well as others, may be found in [3], [1], [17], [20], and [16].

The main tool for obtaining the Gibbs probability is the Ruelle operator, which is called the transfer operator in Statistical Physics. Let us consider the general setting.

Definition 2. *Given a potential $A : X \to \mathbb{R}$, the Ruelle operator, or transfer operator, $\mathcal{L}_A : C(X) \to C(X)$ is given by*

$$\mathcal{L}_A(f)(x) = \sum_{T(z)=x} e^{A(z)}\, f(z),$$

for each continuous $f : X \to \mathbb{R}$, and any $x \in X$.

We may also consider the dual Ruelle operator $\mathcal{L}_A^*$, acting on measures over the Borel sigma-algebra of X. When A is such that $\mathcal{L}_A(1) = 1$, we say that the potential A is normalized; in this case, if ν is a probability, $\mathcal{L}_A^*(\nu)$ is also a probability. If A is Hölder, then the Ruelle operator also acts on the space $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\alpha$ of α-Hölder functions taking complex values (with fixed $0 < \alpha \leq 1$).

We will now state a main result of this theory in the particular setting of Bernoulli spaces (see [25], and [20]), which is a more advanced version of the Perron Theorem for positive matrices.

Theorem 3 (Ruelle)**.** *If $A : \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ is Hölder, then there exist a maximal eigenvalue λ and an associated Hölder eigenfunction ϕ for $\mathcal{L}_A$, that is, $\mathcal{L}_A(\phi) = \lambda\, \phi$. Moreover, λ is isolated in the spectrum of the operator $\mathcal{L}_A$, and there exists an eigen-probability ν such that $\mathcal{L}_A^*(\nu) = \lambda\, \nu$. Finally, the Gibbs state probability μ_A for A is given by $\mu_A = \phi\, \nu$ (after suitable normalization).*

We point out that when A depends only on two coordinates, Ruelle's Theorem is a consequence of Perron's Theorem for positive matrices (see [20]).

There is a different way to compute the entropy, via the Perron operator acting on different potentials.

Theorem 4 ([14])**.** *Let $\mathbb{B}^+$ denote the set of Borel positive functions of Ω. Given $\mu \in \mathcal{M}(T)$ and a Hölder potential A, the entropy of μ is given by*

$$h(\mu) = \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \log\left(\frac{P_A f}{A\, f}\right) d\nu.$$

This result shows that we may avoid the dynamical viewpoint of entropy (considering partitions of the Bernoulli space, refinements of the partition by iterations, and so on) and address all the computations to the action of the Ruelle operator. This turns out to be quite useful for the generalization to C^*-algebras, where there is no natural dynamics involved, and where a dynamics based definition would be quite complicated.

There is also a different way to compute pressure, via a min-max principle.

Theorem 5 ([14])**.** *Let $\mathbb{B}^+$ denote the set of Borel positive functions on Ω. Given a Hölder potential A, the topological pressure is given by*

$$P(A) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(T)} \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \log\left(\frac{P_A\, f}{f}\right) d\mu.$$

Now we briefly describe some basic results concerning the theory of C^*-algebras, which was initially developed by I. M. Gelfand and J. von Neumann, and is presented, quite elegantly, in [21], and [2]. We refer the reader to [12], [23], [6], [7], [9], [8] and [10] for a more thorough description of the relation between Thermodynamic Formalism and C^*-algebras.

The role that KMS states play in Quantum Statistical Mechanics is very important, being, as we will see, that of equilibrium states in C^*-algebras. In Quantum Mechanics, the potential $A : X \to \mathbb{C}$, also called an observable, is replaced by an operator acting on the complex Hilbert space $\mathcal{L}^2(\mu)$. Thus, the commutative algebra of functions (with the usual complex product structure) gives place to the non-commutative algebra of bounded operators B of $\mathcal{L}^2(\mu)$ (where the product structure is the composition of operators). The norm of the algebra is the operator norm and, for the operation $*$ of the algebra, we consider the adjoint operator B^* of each operator B.

We refer the reader to [2] for more detailed definitions and the main properties of C^*-algebras (see therein, for instance, Definition 2.1.1 and Example 2.1.2). Here we will only recall some terminology. Firstly, a C^*-algebra is a complete normed algebra $\mathcal{A}$ over $\mathbb{C}$ with an involution operation $*$ satisfying

$$\|a\, a^*\| = \|a\|^2,$$

for all $a \in \mathcal{A}$. We say that an element $a \in \mathcal{A}$ is positive, if it is given by $a = b\,b^*$, for some element $b \in \mathcal{A}$.

A state of a C^*-algebra $\mathcal{A}$ with unit 1 is a linear functional $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ such that $\phi(1) = 1$ and $\phi(a)$ is a positive real number, whenever a is a positive element of $\mathcal{A}$. The states ϕ of a C^*-algebra play the role of the probabilities ν in Thermodynamic Formalism.

A one-parameter group of automorphisms in a C^*-algebra $\mathcal{A}$ is a strongly continuous group homomorphism $\sigma : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, which we interpret as a dynamic temporal evolution in the C^*-algebra. We write σ_t for the automorphism $\sigma(t)$ and we say that an element $a \in \mathcal{A}$ is analytic for σ if $\sigma_t(a)$ has an analytic extension from $t \in \mathbb{R}$ to all $z \in \mathbb{C}$. We remark that the set of analytic elements is always dense in $\mathcal{A}$.

Definition 6. *Let σ be a one-parameter group of automorphisms of $\mathcal{A}$ and let $\beta \in \mathbb{R}$ be given. We say that a state ϕ of $\mathcal{A}$ is a (σ, β)-KMS state if*

$$\phi(a\,b) = \phi(b\,\sigma_{\beta i}(a)),$$

for any $a, b \in \mathcal{A}$, with a analytic.

From now on, $C(X)$ denotes the space of continuous functions defined on the compact metric space X and taking values in $\mathbb{C}$. Also, T is an expanding map of X and μ is a Gibbs measure for a fixed potential $\tilde{A}$. For the Bernoulli space $\Omega = \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$ (our main case of interest), this potential may be taken as the constant potential $-\log d$; it follows that μ is the independent probability, with weights $1/d$, over $\{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$ and the dual of Ruelle operator of $\tilde{A}$, acting on probabilities, satisfies $\mathcal{L}^*_{\tilde{A}}(\mu) = \mu$ (see [9], and [20]).

An important class of linear operators of $\mathcal{L}^2(\mu)$ is obtained as follows: for any fixed $f \in C(X)$, the operator $M_f : \mathcal{L}^2(\mu) \to \mathcal{L}^2(\mu)$, sometimes denoted simply by f, is defined by

$$M_f(\eta)(x) = f(x)\eta(x),$$

for any η in $\mathcal{L}^2(\mu)$, $x \in X$. The product operation satisfies $M_f \circ M_g = M_{f \cdot g}$, for $f, g \in C(X)$, where the dot $\cdot$ denotes the complex multiplication, and the involution operation $*$ is given by $M_f^* = M_{\overline{f}}$, where $\overline{z}$ denotes the complex conjugate of $z \in \mathbb{C}$. Thus, $M_{\overline{f}}$ is the adjoint operator of M_f over $\mathcal{L}^2(\mu)$.

In Thermodynamic Formalism it is usual to consider the Koopman operator S acting on $\mathcal{L}^2(\mu)$, that is, the bounded linear operator $S : \mathcal{L}^2(\mu) \to \mathcal{L}^2(\mu)$ given by $(S\eta)(x) = \eta(T(x))$, for any $\eta \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $x \in X$. It is well known that its adjoint S^* over $\mathcal{L}^2(\mu)$ is the operator $\mathcal{L}_{\tilde{A}}$, acting on $\mathcal{L}^2(\mu)$ (which is well defined, as can be seen in [20]). The main point for our choice of μ is precisely the assertion $\mathcal{L}_{\tilde{A}} = S^*$.

Now we have all elements to define our two C^*-subalgebras $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$ of the C^*-algebra of bounded operators $B : \mathcal{L}^2(\mu) \to \mathcal{L}^2(\mu)$.

Let $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{T}, \mu)$ denote the C^*-subalgebra generated by S and M_f, for all $f \in C(X)$, and $\mathcal{U} = \mathcal{U}(T, \mu)$ the C^*-subalgebra generated by the elements $M_f S^n (S^*)^n M_g$, for all $n \in \mathbb{N}$ and $f, g \in C(X)$.

The algebra $\mathcal{U}$ is a C^*-subalgebra of $\mathcal{V}$. In fact, it suffices to observe that each element of $\mathcal{V}$ is the limit of finite sums $\sum_i M_{f_i} S^{n_i} (S^*)^{m_i} M_{g_i}$, whereas an element of $\mathcal{U}$ is the limit of finite sums $\sum_i M_{f_i} S^{n_i} (S^*)^{n_i} M_{g_i}$, with identical exponents for S and S^*.

We now consider certain dynamical evolutions in the C^*-algebras $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$. Given a strictly positive function $H : X \to \mathbb{R}$, we define an associated one-parameter group of automorphisms $\sigma : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{V})$ as follows: for each fixed $t \in \mathbb{R}$, σ_t is given by $\sigma_t(M_f) = M_f$, for $f \in C(X)$, and $\sigma_t(S) = M_{H^{it}} \circ S$, in the following sense:

$$(\sigma_t(S)(\eta))(x) = H^{i\,t}(x)\eta(T(x)) \in \mathcal{L}^2(\mu),$$

for any $\eta \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $x \in X$. Since $\sigma_t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ for each $t \in \mathbb{R}$, we may restrict σ to $\mathcal{U}$.

In terms of C^*-dynamical systems formalism, the shift transformation T here simply plays the role of spatial translation in the lattice, while the positive function H defines the dynamics of the evolution with time $t \in \mathbb{R}$, corresponding to the potential A in Thermodynamic Formalism, via $H = e^A$. If we introduce a parameter β, we will have to consider the potential H^β.

Given H and β, we let $\phi_{H,\beta}$ denote a KMS state, leaving the letter ϕ for a general C^*-dynamical system state. The state $\phi_{H,\beta}$ is what is expected, from the Quantum Statistical point of view, of a system governed by H, under temperature $\tau = 1/\beta$ (see [2]).

Our purpose is to analyze these KMS states $\phi_{H,\beta}$. Given a pair (H, β), it is easy to see that the condition

$$\phi(a \cdot b) = \phi(b \cdot \sigma_{\beta i}(a)), \quad \text{for all} \quad a, b \in \mathcal{A}$$

is equivalent to

$$\phi(\sigma_\tau(a) \cdot b) = \phi(b \cdot \sigma_{\tau+\beta i}(a)), \quad \text{for all} \quad a, b \in \mathcal{A} \text{ and } \tau \in \mathbb{R}.$$

It follows (see Section 8.12 of [20]) that if ϕ is a KMS state for (H, β), then, for any analytic $a \in \mathcal{U}$, the extension of $\tau \to \phi(\sigma_\tau(a))$ to $z \to \phi(\sigma_z(a))$ is a bounded entire function, and therefore constant. In this sense, ϕ is stationary.

A natural question arises: for given β and H, when does the KMS state $\phi_{H,\beta}$ exist, and when is it unique? This question is considered in [7], for the C^*-algebra $\mathcal{V}$, and in [9], for the C^*-algebra $\mathcal{U}$. Another presentation of the uniqueness part of this question appears in [10].

Notice that the action of the linear functional ϕ on the set of operators M_f (with f ranging over all continuous functions) defines a measure ν over X, via the Riesz Theorem, that is, we have $\phi(M_f) = \int f\, d\nu$, for each $f \in C(X)$. In fact, ν is a probability, by the hypotheses we imposed on the C^*-states ϕ.

One of the main points in [9] is that for the KMS state of $\mathcal{U}$ associated to H and β, this measure ν is the eigen-measure $\nu_{H,\beta}$ for the dual Ruelle operator $\mathcal{L}_A^*$, where $A = -\beta \log H$. Thus, we associate, in a unique way, each KMS state $\phi_{H,\beta}$ to an eigen-measure $\nu_{H,\beta}$, establishing an interesting relation between the Thermodynamic Formalism and C^*-algebras.

For the KMS states in $\mathcal{V}$, there exists the extra condition that the pressure of $H^{-\beta}$ is zero, therefore the KMS states exist for only one value of β [8] [6].

3 Statement and Proof of Our Results

In this section we will present our results: a definition of entropy and pressure for states in the C^*-algebra and a proof of the existence of a state with maximum pressure.

Suppose that $\mathcal{A}$ is a commutative C^*-algebra with unit and that $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is an injective unit preserving endomorphism. We say that a state ϕ in $\mathcal{A}$ is α-invariant if $\phi \circ \alpha = \phi$.

In the special case $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{X})$, the Gelfand-Naimark Theorem yields a continuous transformation $T : X \to X$ satisfying $\alpha(a) = a \circ T$, for each $a \in \mathcal{A}$. In the general case, we say that a linear transformation $L : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is a transfer operator for α if

$$L\big(\alpha(a)b\big) = a\, L(b),$$

for every $a, b \in \mathcal{A}$. Moreover, we say that such a transfer operator is normalized if $L(1) = 1$.

If $\mathcal{A}$ is a commutative algebra, the transfer operator takes the form of a Ruelle operator (see [20], [5], [4], [12], and [6]).

Proposition 7 ([13])**.** *If L is a transfer operator for α, then $L(1)$ is a central positive element of $\mathcal{A}$, and*

$$L(a\, \alpha(b)) = L(a)\, b,$$

for every $a, b \in \mathcal{A}$.

Proposition 8 ([13]). *If T is a local homeomorphism, then every transfer operator L for α is of the form L_ρ, given, for every $a \in \mathcal{A}$, and $x \in X$, by*

$$L_\rho(a)(x) = \sum_{T(y)=x} \rho(y)\, a(y),$$

where $\rho : X \to [0,\infty)$ is some continuous function. Moreover, for any continuous function $\rho : X \to [0,\infty)$, the sum on the right side defines a transfer operator. (In the notation of the previous section, $\rho = e^A$.)

From now on, we will assume that T is a local homeomorphism and we will write $\mathcal{A}_+ := \{a \in \mathcal{A} \mid \sigma(a) \in (0,\infty)\}$.

Generalyzing the viewpoint of [14], and [15], we now introduce a notion of entropy for a state $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, using the transfer operator L_ρ defined by ρ.

Definition 9. *Given a state ϕ in $\mathcal{A}$, we say that*

$$h(\phi) = \inf_{a \in \mathcal{A}_+} \phi\left[\log\left(\frac{L_\rho(a)}{\rho\, a}\right)\right]$$

is the entropy of ϕ.

Our definition is independent of the choice of ρ. Indeed, if $\rho' : X \to [0,\infty)$ is another continuous function, then $a' = a\,\rho\,(\rho')^{-1} \in \mathcal{A}_+$, for any $a \in \mathcal{A}_+$, implying

$$\frac{L_{\rho'}(a')}{\rho' a'} = \frac{1}{\rho\, a} \sum_{y=T(x)} \rho'(x) a(x) \rho(x) \rho'(x)^{-1} = \frac{L_\rho(a)}{\rho\, a}$$

and showing that the infimum is taken over the same set.

Definition 10. *Given an element $b \in \mathcal{A}_+$, we say that*

$$p(b) = \sup\left\{h(\phi) + \phi(\log b) \mid \alpha\text{-invariant } \phi\right\}$$

is the topological pressure of b. We say that ϕ is a C^*-equilibrium state for b if ϕ is an α-invariant state such that $p(b) = h(\phi) + \phi(\log b)$.

Proposition 11. *If $L_\rho(1) = 1$, there exists a state ϕ such that $\phi \circ L_\rho = \phi$.*

Proof. Let $\mathcal{S}$ denote the set of all states of $\mathcal{A}$. From $L_\rho(1) = 1$, it follows that $L_\rho^*(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Now the Tychonoff-Schauder Theorem yields a fixed point for $L_\rho^*\big|_{\mathcal{S}}$. □

Proposition 12. *If $L_\rho(1) = 1$, then $p(\rho) = 0$. Moreover, every state ϕ that satisfies $\phi \circ L_\rho = \phi$ is an equilibrium state for ρ.*

Proof. Using our definitions of entropy and pressure, we obtain

$$p(\rho) = \sup_{\phi \text{ inv}} \inf_{a \in \mathcal{A}_+} \phi\left[\log\left(\frac{L_\rho(a)}{a}\right)\right]$$

and, therefore, a choice of $a = 1$ inside the infimum, guarantees that $p(\rho) \leq 0$.

On the other hand, $L_\rho \circ \alpha = Id$, because L_ρ is normalized, and $\phi \circ L_\rho = \phi$ implies $\phi \circ \alpha = \phi \circ L_\rho \circ \alpha = \phi$. Since log is concave, $\log(L_\rho(a)) \geq L_\rho(\log a)$ and, therefore,

$$\phi\left[\log\left(\frac{L_\rho(a)}{a}\right)\right] = \phi\big(\log(L_\rho(a)) - \log a\big) \geq \phi\big(L_\rho(\log a) - \log a\big).$$

If $\phi \circ L_\rho = \phi$, the right hand side of this inequality equals zero, and therefore, $\inf\left\{\phi\left[\log\left(\frac{L_\rho(a)}{a}\right)\right] \mid a \in \mathcal{A}_+\right\} = 0$. It follows that $p(\rho) \geq 0$ and, therefore,

$$h(\phi) + \phi(\rho) = \inf_{a \in \mathcal{A}_+} \phi\left[\log\left(\frac{L_\rho(a)}{a}\right)\right] = 0 = p(\rho)$$

holds for eigen-states. □

In the context of an algebra $\mathcal{A}$, an injective unit preserving endomorphism α, and a normalized transfer operator L, we may consider, among others, two different C^*-algebras, namely, the cross-product endomorphism $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ and the C^*-algebra given by approximately proper equivalence relations $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ (see [6], and [9]). The second algebra is related to the equivalence relation $x \sim y \iff$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $T^n(x) = T^n(y)$, and the first considers the broader equivalence relation $x \sim y \iff$ there exist $n, m \in \mathbb{N}$ such that $T^n(x) = T^m(y)$.

The algebra $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ generalizes the algebra $\mathcal{U}$ of the previous section, whereas $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ generalizes the algebra $\mathcal{V}$. In fact, in the context of the previous section, for each Gibbs measure μ, we find representations of $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ and $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ in the Hilbert space $\mathcal{L}^2(\mu)$ with images $\mathcal{V}$ and $\mathcal{U}$, respectively.

We want to relate the KMS states of $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ and $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ with the equilibrium states (in $\mathcal{A}$) of the potential $h^{-\beta}$, where β, again, represents the reciprocal of temperature.

If the algebra $\mathcal{A}$ is commutative, we have unique conditional expectations $F : \mathcal{A} \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ and $G : C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E}) \to \mathcal{A}$. Moreover, if $E := \alpha \circ L : \mathcal{A} \to \alpha(\mathcal{A})$, for some conditional expectation with finite index, then the KMS states ψ of

$\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ can be decomposed as $\psi = \phi \circ F$, where ϕ is a state of $\mathcal{A}$ which satisfies

$$\phi(a) = \phi\big(L(\Lambda\, a)\big), \quad \text{for all } a \in \mathcal{A},$$

with $\Lambda = h^{-\beta}\mathrm{ind}(E)$. The KMS state ψ of $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ can be decomposed as $\psi = \phi \circ G$, where ϕ is a state of $\mathcal{A}$ which satisfies

$$\phi(a) = \phi\big(\Lambda^{-[n]} E_n(\Lambda^{[n]} a)\big), \quad \text{for all } a \in \mathcal{A} \text{ and } n \in \mathbb{N},$$

with $E_n = \alpha^n \circ L^n$, and $\Lambda^{[n]} = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i\big(h^{-\beta}\mathrm{ind}(E)\big)$.

Proposition 13. *If $\psi = \phi \circ F$ is an (h, β)-KMS state for $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$, and $L(\Lambda 1) = 1$, then ϕ is an equilibrium state (in $\mathcal{A}$) for the potential $h^{-\beta}$.*

PROOF. The condition $L(\Lambda 1) = 1$ implies that $L_{h^{-\beta}}$ is a normalized transfer operator, and, therefore, $p(h^{-\beta}) = 0$. Moreover, the KMS condition says that $\phi(a) = \phi(L_{h^{-\beta}}(a))$, which implies that $\phi(\alpha(a)) = \phi(a)$. By Proposition 12, it follows that ϕ is an equilibrium state for $h^{-\beta}$. □

In the constructions of the algebras that interest us, the choice of the normalized transfer operator is arbitrary, since two such operators define isomorphic algebras. If we suppose that $L_\rho(k) = \lambda\, k$, for some $\lambda > 0$ and $k \in \mathcal{A}_+$, and write $\widetilde{\rho} = \frac{\rho\, k}{\lambda \alpha(k)}$, it therefore follows that $L_{\widetilde{\rho}}$ is a normalized transfer operator for α, which can be used to construct $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.

Theorem 14. *Let $\psi = \phi \circ G$ be an (h, β)-KMS state of $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$. Let $\rho = h^{-\beta}$, suppose that $L_\rho(k) = \lambda\, k$, for some $\lambda > 0$ and $k \in \mathcal{A}_+$, and denote $\widetilde{\rho} = \frac{\rho\, k}{\lambda \alpha(k)}$. Finally, let $\widetilde{\phi}$ be the state of $\mathcal{A}$ given by $\widetilde{\phi}(a) = \phi(ka)$. If, for every $a \in \mathcal{A}$,*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| L^n_{\widetilde{\rho}}(a) - \widetilde{\phi}(a) \right\| = 0,$$

then $\widetilde{\phi}$ is an equilibrium state for $\widetilde{\rho}$.

PROOF. Without loss of generality, we may assume that $C^*(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ has been obtained from $L_{\widetilde{\rho}}$ in such a way that $\mathrm{ind}(E) = \widetilde{\rho}^{\,-1}$. Then,

$$\Lambda^{[1]} = \big(\rho \widetilde{\rho}^{\,-1}\big) = \rho\, \frac{\lambda\, \alpha(k)}{\rho\, k} = \frac{\lambda\, \alpha(k)}{k}\,,$$

and, more generally,

$$\Lambda^{[n]} = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i\big(\rho \widetilde{\rho}^{\,-1}\big) = \lambda^n\, \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \alpha^{i+1}(k)}{\prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i(k)} = \frac{\lambda^n\, \alpha^n(k)}{k}\,.$$

The KMS condition implies that, for every $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(a) = \phi\Big[\frac{k}{\lambda^n \alpha^n(k)}\,\alpha^n L_{\widetilde{\rho}}^n\Big(\frac{\lambda^n \alpha^n(k)}{k}\,a\Big)\Big] = \phi\Big[k\,\alpha^n L_{\widetilde{\rho}}^n\Big(\frac{a}{k}\Big)\Big]\,,$$

and it follows that, for every $n \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{\phi}(a) = \phi(a\,k) = \phi\Big[k\,\alpha^n L_{\widetilde{\rho}}^n\Big(\frac{a}{k}k\Big)\Big] = \widetilde{\phi}\Big[\alpha^n L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\Big]\,.$$

Now,

$$\begin{aligned}
\Big|\widetilde{\phi}\big(L_{\widetilde{\rho}}(a) - a\big)\Big| &= \Big|\widetilde{\phi}\big[\alpha^n\big(L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a) - L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\big)\big]\Big| \\
&\le \widetilde{\phi}\Big(\big\|\alpha^n\big(L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a) - L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\big)\big\|\Big) \\
&\le \widetilde{\phi}\Big(\big\|L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a) - L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\big\|\Big) \\
&\le \widetilde{\phi}\Big(\big\|L_{\widetilde{\rho}}^{n+1}(a) - \widetilde{\phi}(a)\big\|\Big) - \widetilde{\phi}\Big(\big\|\widetilde{\phi}(a) - L_{\widetilde{\rho}}^n(a)\big\|\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

and, therefore $\widetilde{\phi} \circ L_{\widetilde{\rho}} = \widetilde{\phi}$. The claim follows by Proposition 12. □

Notice that our main hypothesis, namely, the convergence of $L_{\widetilde{\rho}}^n$, is one of the conclusions of the Ruelle-Perron-Frobenius Theorem (see [20], [9], and [4]), which means that the classical setting satisfies the hypotheses of our result.

Acknowledgment. The authors wish to thank the referees for their constructive criticism of the first draft.

References

[1] R. Bowen and C. Series, *Markov maps associated with a Fuchsian group*, IHES Publ. Math., **50** (1979), 153–170.

[2] O. Bratelli and W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Springer-Verlag (1994).

[3] J.-P. Conze, J.-P. and A. Raugi, *Fonctions harmoniques pour un operateur de transition e applications*, Bull. Soc. Math. France, **118** (1990), no. 4, 273-310.

[4] D. E. Dutkay and P. E. T. Jorgensen, P. E. T., *Iterated function systems, Ruelle operators, and invariant projective measures*, Math. Comp., **75** (2006), no. 256, 1931–1970.

[5] D. E. Dutkay and P. E. T. Jorgensen, *Disintegration of projective measures*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), no. 1, 169–179.

[6] R. Exel, *A new look at the crossed-product of a C^*-algebra by an endomorphism*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **23** (2003), no. 6, 1733–1750.

[7] R. Exel, *Crossed-products by finite index endomorphisms and KMS states*, J. Funct. Anal., **199** (2003), no. 1, 153–188.

[8] R. Exel, *KMS states for generalized Gauge actions on Cuntz-Krieger Algebras*, Bull. Braz. Math. Soc., **35** (2004), no. 1, 1–12.

[9] R. Exel and A. O. Lopes, *C^*-algebras, approximately proper equivalence relations, and Thermodynamic Formalism*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **24** (2004), 1051–1082.

[10] R. Exel and A. O. Lopes, *C^*-algebras and Thermodynamic Formalism*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences, **2** (2008), 285–307.

[11] D. Kerr and C. Pinzari, *Noncommutative pressure and the variational principle in Cuntz-Krieger-type C^*-algebras*, J. Funct. Anal., **188** (2002), 156–215.

[12] A. Kumjian and J. Renault, *KMS states on C^*-algebras associated to expansive maps*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), no. 7, 2067–2078.

[13] B. K. Kwaśniewski, *On transfer operators for C^*-dynamical systems*, arXiv:math/0703798.

[14] A. O. Lopes, *An analogy of the charge distribution on Julia sets with the Brownian motion*, J. Math. Phys., **30** (1989), no. 9, 2120–2124.

[15] A. O. Lopes and E. R. Oliveira, *Entropy and variational principles for holonomic probabilities of IFS*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A, **23** (2009), no. 3, 937–955.

[16] A. O. Lopes and P. Thieullen, *Mather measures and the Bowen-Series transformation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **23** (2006), 663–682.

[17] D. Mauldin and M. Urbanski, *Graph Directed Markov Systems: Geometry and Dynamics of Limit Sets*, Cambridge Press (2003).

[18] W. de Melo and S. Van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag (1993).

[19] S. Neshveyev and E. Størmer, *Dynamical Entropy in Operator Algebras*, Springer-Verlag (2006).

[20] W. Parry and M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque, **187-188** (1990).

[21] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their Automorphic Groups*, Academic Press (1979).

[22] C. Pinzari, Y. Watatani, and K. Yonetani, *KMS states, entropy and the variational principle in full C^*-dynamical systems*, Comm. Math. Phys., **213** (2000), 331–379.

[23] J. Renault, *KMS states on C^*-algebras associated to expansive maps*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), no. 7, 2067–2078.

[24] D. Ruelle, *Statistical Mechanics of a one-dimensional lattice gas*, Comm. Math. Phys., **9** (1968), 267–278.

[25] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, Addison Wesley (1978).

[26] D. Ruelle, *The Thermodynamic Formalism for expanding maps*, Comm. Math. Phys., **125** (1989), 239–262.

C*-ALGEBRAS ASSOCIATED WITH ITERATED FUNCTION SYSTEMS

Gilles G. de Castro

ABSTRACT. We review Kajiwara and Watatani's construction of a C*-algebra from an iterated function system (IFS). If the IFS satisfies the finite branch condition or the open set condition, we build an injective homomorphism from Kajiwara-Watatani algebras to the Cuntz algebra, which can be thought as the algebra of the lifted system, and we give the description of its image. Finally, if the IFS admits a left inverse we show that the Kajiwara-Watatani algebra is isomorphic to an Exel's crossed product.

1. Introduction

In [**16**], Kajiwara and Watatani defined a C*-algebra defined from an iterated function system (IFS). Although their paper was entitled C*-algebras associated with self-similar sets, they gave examples of different iterated function systems which give rise to the same self-similar set but which associated algebras are not isomorphic. So their algebra depends not only on the self-similar set but on the dynamics of the iterated function system.

If the IFS satisfies the strong separation condition, then the system can be interpreted as the inverses branches of a local homeomorphism. For an arbitrary IFS we can lift it to a new one that satisfies the strong separation condition [**1**]. Ionescu and Muhly suggested in [**13**] the construction of a C*-algebra from an IFS by lifting it and using Renault-Deaconu construction [**6**], [**19**] of a groupoid C*-algebra from a local homeomorphism. As we will see this local homeomorphism we find is topologically conjugate to the left shift on $\{1,\dots,d\}^{\mathbb{N}}$ and the algebra we find is the Cuntz algebra $\mathcal{O}_d$.

From the relations between an IFS and its lifted system, we will build a natural homomorphism from the Kajiwara-Watatani algebra to the Cuntz algebra and thus connect Kajiwara anda Watatani's construction with Ionescu and Muhly's suggestion. We show that this homomorphism is injective and show that its image is generated by the algebra of the self-similar set associated to the IFS and an isometry S similar to a crossed product description.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46L55, 37B99; Secondary 28A80, 37B10, 46L08.

Key words and phrases. Iterated function systems, C*-algebras, crossed products, groupoids.

Partially supported by CAPES.

The interplay between IFS and Cuntz algebras have been deeply studied by Jorgensen and collaborators. Among other thing, they established some relationships between certain representations of Cuntz algebras coming from IFS and certain wavelet basis. See [**2**], [**14**] and references therein for details and other results.

It may happen that the IFS admits a left inverse which is not necessarily a local homeomorphism. In this case Renault-Deaconu's construction no longer works and we have different approaches to build a C*-algebra. In this paper, we show that under some assumptions, the algebra considered by Kajiwara and Watatani can be seen as an Exel's crossed product [**8**].

2. Iterated function systems

In this section, we review some of the basic theory of iterated function systems and self-similar sets (see for instance [**1**], [**7**] and [**11**]). Fix (X,ρ) be a compact metric space.

Definition 2.1. We say that a function $\gamma : X \to X$ is

- a contraction if $\exists c \in (0,1)$ such that $\rho(\gamma(x),\gamma(y)) \leq c\rho(x,y)$;
- a proper contraction if $\exists c_1, c_2 \in (0,1)$ such that $c_1\rho(x,y) \leq \rho(\gamma(x),\gamma(y)) \leq c_2\rho(x,y)$;
- a similarity if $\exists c > 0$ such that $\rho(\gamma(x),\gamma(y)) = c\rho(x,y)$.

Definition 2.2. An iterated function system (IFS) over X is a finite set of continuous functions $\{\gamma_i : X \to X\}_{i=1}^d$. We say that the IFS is hyperbolic if all functions are contractions.

Throughout this paper we will always assume that the system is hyperbolic unless stated otherwise.

Proposition 2.3. *Given an IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$, there is a unique compact nonempty subset K of X such that*

$$K = \cup_{i=1}^d \gamma_i(K). \tag{2.1}$$

We will call this set the attractor of the IFS and say it is self-similar.

Note that because of (2.1) the attractor is invariant by all γ_i and we can restrict the IFS to its attractor. From now on, we assume that $X = K$.

Definition 2.4. We say that an IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ satisfies:

- the strong separation condition if the union in (2.1) is a disjoint union;
- the open set condition if $\exists U \subseteq K$ open and dense such that
$$U \subseteq \dot{\cup}_{i=1}^d \gamma_i(U)$$
where $\dot{\cup}$ represents the disjoint union.

Let's denote $\Omega = \{1,\ldots,d\}^{\mathbb{N}}$ with the product topology, $\sigma : \Omega \to \Omega$ the left shift and $\sigma_i : \Omega \to \Omega$ the function given by

$$\sigma_i(i_0, i_1, \ldots) = (i, i_0, i_1, \ldots)$$

where $i \in \{1,\ldots,d\}$.

PROPOSITION 2.5. *Let* $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ *be an IFS and* K *its attractor then there is a continuous surjection* $F : \Omega \to K$ *such that* $F \circ \sigma_i = \gamma_i \circ F$. *This map is given by the formula*

$$F(i_0, i_1, \ldots) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{i_0} \circ \cdots \circ \gamma_{i_n}(x)$$

for an arbitrary $x \in K$. *If the IFS satisfies the strong separation condition* F *is a homeomorphism.*

REMARK 2.6. Note that under the strong separation condition, we can define the function $\gamma = F \circ \sigma \circ F^{-1}$ and in this case the functions γ_i are exactly the inverse branches of γ. Moreover F gives us a topological conjugacy between γ and the shift σ.

For an arbitrary IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$, we can always build a new one that satisfies the strong separation condition and which share some properties with the original one [**1**]. We define $\widetilde{X} = K \times \Omega$ and define the functions $\widetilde{\gamma}_i : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ by $\widetilde{\gamma}_i(x,\omega) = (\gamma_i(x), \sigma_i(\omega))$. Let $\widetilde{K} = \{(x,\omega) \in X \times \Omega | F(\omega) = x\}$ then

$$\widetilde{K} = \cup_{i=1}^d \widetilde{\gamma}_i(\widetilde{K}).$$

And it's easily checked that $\{\widetilde{\gamma}_i : \widetilde{K} \to \widetilde{K}\}_{i=1}^d$ satisfy the strong separation condition.

DEFINITION 2.7. The IFS $\{\widetilde{\gamma}_i\}_{i=1}^d$ as above is called the lifted system of $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$.

3. C*-algebras associated with an IFS

We start this section by giving a description of the Cuntz algebra as a groupoid C*-algebra which will be useful in some proofs. We review some of the key elements of Cuntz-Pimsner algebras which will be used to build Kajiwara-Watatani algebras. We build the homomorphism from Kajiwara-Watatani algebras to the Cuntz algebra from a very natural covariant representation. We give some basic properties of this homomorphism. Finally, in the last subsection, we compare the Kajiwara-Watatani algebra to a crossed product construction.

3.1. Cuntz algebras.

DEFINITION 3.1. [**5**] For $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, the Cuntz algebra $\mathcal{O}_d$ is the C*-algebra generated by d isometries satisfying the relation $\sum_{i=1}^d S_i S_i^* = 1$.

For the sake of some proofs, we review the construction of the Cuntz algebra as a groupoid C*-algebra [**6**], [**19**]. Let

$$G = \{(\omega, m-n, \tau) \in \Omega \times \mathbb{Z} \times \Omega : m, n \in \mathbb{N}; \sigma^m(\omega) = \sigma^n(\tau)\}$$

with the product and the inverse given by

$$(\omega, m-n, \tau)(\tau, k-l, \nu) = (\omega, (m+k)-(n+l), \nu)$$
$$(\omega, m-n, \tau)^{-1} = (\tau, n-m, \omega).$$

We give a basis for the topology on G by the sets

$$B(U, V, m, n) := \{(\omega, m-n, \tau) \in G : \omega \in U, \tau \in V\}$$

where $m, n \in \mathbb{N}$ and U and V are open subsets of Ω such that $\sigma^m|_U$, $\sigma^n|_V$ are homeomorphisms with $\sigma^m(U) = \sigma^n(V)$. With this topology G is étale and so admits a Haar system by the counting measures.

The multiplication in $C_c(G)$ is given by

$$(p * q)(\omega, m-n, \tau) = \sum p(\omega, k-l, \nu) q(\nu, (n+k)-(m+l), \tau)$$

where the sum is taken over all $k, l \in \mathbb{N}$ and $\nu \in \Omega$ such that $\sigma^k(\omega) = \sigma^l(\nu)$ and $\sigma^{n+k}(\nu) = \sigma^{m+l}(\tau)$; and the involution by

$$p^*(\omega, m-n, \tau) = \overline{p(\tau, n-m, \omega)}$$

for $p, q \in C_c(G)$.

We refer to [**19**] for the construction of a norm in $C_c(G)$. For us, it suffices to know that there exists a norm in $C_c(G)$ such that its completion with respect to this norm is $\mathcal{O}_d$.

Finally, given $h \in C(\Omega)$ we define a function $h \in C_c(G)$ by

$$h(\omega, m-n, \tau) = [m = n][\omega = \tau]h(\omega)$$

where $[\cdot]$ is the boolean function that gives 1 if its argument is true and 0 otherwise.

We also define a function $S \in C_c(G)$ by

$$S(\omega, m-n, \tau) = [m-n = 1][\sigma(\omega) = \tau].$$

And we note that if $\chi_{\bar{i}}$ is the characteristic function of the cylinder $\bar{i} := \{\omega \in \Omega : \omega_0 = i\}$ then $S_i = d^{1/2}\chi_{\bar{i}} * S$ for $i \in \{1, \dots, d\}$ are d isometries that satisfies the Cuntz relation and generates $C^*(G)$.

3.2. Cuntz-Pimsner algebras. We briefly recall the key elements for the construction of Cuntz-Pimsner algebras ([**15**], [**18**]) that will be used throughout the paper. For that fix A a C*-algebra.

Definition 3.2. A *(right) Hilbert C*-module over* A is a (right-)A-module E with a sesquilinear map $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to A$ such that:

(i) $\langle \xi, \eta a\rangle = \langle \xi, \eta\rangle a$;
(ii) $(\langle \xi, \eta\rangle)^* = \langle \eta, \xi\rangle$;
(iii) $\langle \xi, \xi\rangle \geq 0$;
(iv) E is complete with respect to the norm $||\xi||_2 = ||\langle \xi, \xi\rangle||^{1/2}$

for $a \in A$ and $\xi, \eta \in E$. We say that E is *full* if $\langle E, E\rangle$ is dense in A.

Let E be a Hilbert C*-module and denote by $\mathcal{L}(E)$ the space of adjointable operators in E. We note that $\mathcal{L}(E)$ is a C*-algebra. For $\xi, \eta \in E$ we define an operator $\theta_{\xi,\eta} : E \to E$ by $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \xi\langle \eta, \zeta\rangle$. This is an adjointable operator and we denote by $\mathcal{K}(E)$ the closed subspace of $\mathcal{L}(E)$ generated by all $\theta_{\xi,\eta}$.

Definition 3.3. A *C*-correspondence* over A is a Hilbert C*-module E together with a C*-homomorphism $\phi : A \to \mathcal{L}(E)$.

Let (E,ϕ) be a C*-correspondence over A and for simplicity suppose that ϕ is faithful. We denote by J_E the ideal $\phi^{-1}(\mathcal{K}(E))$.

Definition 3.4. A pair (ι, ψ) of maps $\iota : A \to B$, $\psi : E \to B$, where B is a C*-algebra and ι a C*-homomorphism, is said to be a *covariant representation of* E if:

(i) $\psi(\phi(a)\xi b) = \iota(a)\psi(\xi)\iota(b)$;
(ii) $\psi(\xi)^*\psi(\eta) = \iota(\langle \xi, \eta\rangle)$;
(iii) $(\psi, \iota)^{(1)}(\phi(c)) = \iota(c)$ where the function $(\psi, \iota)^{(1)} : \mathcal{K}(E) \to B$ is given by $(\psi, \iota)^{(1)}(\theta_{\xi,\eta}) = \psi(\xi)\psi(\eta)^*$,

for $a, b \in A$, $\xi, \eta \in E$ and $c \in J_E$.

For a C*-correspondence (E,ϕ), there exists an algebra $\mathcal{O}(E)$ and a covariant representation (k_A, k_E) that is universal, in the sense that if (ι, ψ) is a covariant representation of E in a C*-algebra B, there is a unique C*-homomorphism $\iota \times \psi : \mathcal{O}(E) \to B$ such that $\iota = (\iota \times \psi) \circ k_A$ and $\psi = (\iota \times \psi) \circ k_E$

Definition 3.5. The algebra $\mathcal{O}(E)$ is called the *Cuntz-Pimsner algebra* of E.

3.3. Kajiwara-Watatani algebras. Let $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^d$ be an iterated function system and K its attractor. We recall the C*-correspondence defined in [**16**]. We let $A = C(K)$, $E = C(\mathcal{G})$ where

$$\mathcal{G} = \cup_{i=1}^d \mathcal{G}_i$$

with

$$\mathcal{G}_i \, \{(x, y) \in K \times K : x = \gamma_i\}$$

being the cographs in the terminology of [**16**]. The structure of C*-correspondence is given by

$$(\phi(a)\xi b)(x, y) = a(x)\xi(x, y)b(y)$$

and

$$\langle \xi, \eta \rangle_A (y) = \sum_{i=1}^d \overline{\xi(\gamma_i(y), y)}\eta(\gamma_i(y), y)$$

for $a, b \in A$ and $\xi, \eta \in E$.

Proposition 3.6 ([**16**]). *$(E = C(\mathcal{G}), \phi)$ is a full C*-correspondence over $A = C(K)$ and $\phi : A \to \mathcal{L}(E)$ is faithful and unital. Moreover, the Hilbert module norm is equivalent to the sup norm in $C(\mathcal{G})$.*

Definition 3.7. The Kajiwara-Watatani algebra $\mathcal{O}_\Gamma$ associated to Γ is the Cuntz-Pimsner algebra associated to the C*-correspondence defined above.

Regarding $\mathcal{O}_d$ as $C^*(G)$ as in subsection 3.1 and recalling the code map F given in proposition 2.5, we define $\iota : A \to \mathcal{O}_d$ by

$$\iota(a)(\omega, m - n, \tau) = [m = n][\omega = \tau]a(F(\omega)) \tag{3.1}$$

and $\psi : E \to \mathcal{O}_d$ by

$$\psi(\xi)(\omega, m - n, \tau) = [m - n = 1][\sigma(\omega) = \tau]\xi(F(\omega), F(\tau)) \tag{3.2}$$

Note that if $\sigma(\omega) = \tau$, then $\sigma_{\omega_0}(\tau) = \omega$ and $F(\omega) = \gamma_{\omega_0}(F(\tau))$ so that $(F(\omega), F(\tau)) \in \mathcal{G}$ and ψ is well defined.

Before showing that this give us a Cuntz-Pimsner covariant representation, let us recall some definitions and results from [**16**] and [**17**].

Definition 3.8. Let $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_d\}$ be an IFS, we define the following sets

$$B(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{x \in K | \exists y \in K \ \exists i \neq j : x = \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\};$$

$$C(\gamma_1, ..., \gamma_d) := \{y \in K | \exists i \neq j : \gamma_i(y) = \gamma_j(y)\}.$$

$$I(x) := \{i \in \{1, ..., d\}; \exists y \in K : x = \gamma_i(y)\}.$$

We call the points of $B(\Gamma)$ branched points and the points of $C(\Gamma)$ branched values. And we say that Γ satisfies the finite branch condition if $C(\Gamma)$ is finite.

Then $B(\gamma_1,...,\gamma_d)$ is a closed set, because

$$B(\gamma_1,...,\gamma_d) = \cup_{i\neq j}\{x \in \gamma_i(K)\cap\gamma_j(K); \gamma_i^{-1}(x) = \gamma_j^{-1}(x)\}$$

and each of the union is clearly closed.

Lemma 3.9. *In the above situation, if $x \in K\backslash B(\gamma_1,...,\gamma_d)$, then there exists an open neighborhood U_x of x satisfying the following:*

(i) $U_x \cap B = \emptyset$;
(ii) *If $i \in I(x)$, then $\gamma_j(\gamma_i^{-1}(U_x)) \cap U_x = \emptyset$ for $j \neq i$;*
(iii) *If $i \notin I(x)$, then $U_x \cap \gamma_i(K) = \emptyset$.*

Lemma 3.10. *If Γ satisfies the finite branch condition or the open set condition then $J_E = \{a \in A = C(K); a \text{ vanishes on } B(\gamma_1,...,\gamma_d)\}$ where $J_E = \phi^{-1}(\mathcal{K}(E))$ as in the previous subsection.*

Remark 3.11. In the following proof, we will need an explicit description of $\phi(a)$ for certain elements in J_E. We do as in [**16**]. Let $B = B(\gamma_1,...,\gamma_d)$ and take $a \in A$ such that $Y := \mathrm{supp}(a) \subseteq K\backslash B$. Clearly $a \in J_E$.

For each $x \in Y$ choose an open neighborhood U_x as in lemma 3.9. Since Y is compact, there exists a finite set $\{x_1,\ldots,x_m\}$ such that $Y \subseteq \cup_{k=1}^m U_{x_k}$. Let $U_k = U_{x_k}$ for $k = 1,\ldots,m$ and $U_{m+1} = K\backslash Y$, then $\{U_k\}_{k=1}^{m+1}$ is an open cover of K. Let $\{\varphi_k\}_{k=1}^{m+1} \subseteq C(K)$ be a partition of unity subordinate to this open cover. Define $\xi_k, \eta_k \in C(\mathcal{G})$ by $\xi_k(x,y) = a(x)\sqrt{\varphi_k(x)}$ and $\eta_k(x,y) = \sqrt{\varphi_k(x)}$ then $\phi(a) = \sum_{k=1}^m \theta_{\xi_k,\eta_k}$ (the summation goes to m only because $\xi_{m+1} = 0$).

Remark 3.12. Because of the lemma 3.10, our results will need that the IFS satisfies the finite branch condition or the open set condition, but we note that these conditions are independent.

Proposition 3.13. *If the IFS Γ satisfies the finite branch condition or the open set condition, then the pair (ι,ψ) defined by equations (3.1) and (3.2) is a Cuntz-Pimsner covariant representation of (A,E) in $\mathcal{O}_d$.*

Proof. Most calculations are very similar so we only show some of them. Let $a \in A$ and $\xi \in E$. We have

$$\psi(a\xi)(\omega, m-n, \tau) = [m-n=1][\sigma(\omega)=\tau]a(F(\omega))\xi(F(\omega),F(\tau)) \tag{3.3}$$

On the other hand

$$(\iota(a)*\psi(\xi))(\omega,m-n,\tau) = \sum \iota(a)(\omega,k-l,\nu)\psi(\xi)(\nu,(m+l)-(n+k),\tau) =$$

$$a(F(\omega))\psi(\xi)(\omega,m-n,\tau) \tag{3.4}$$

where the second equality is true due to the fact that $\iota(a)$ is zero unless $k = l$ and $\omega = \nu$. We can easily see then that (3.3) and (3.4) coincide.

For the A-valued scalar product, let $\xi, \eta \in E$. Then

$$\iota(\langle\xi,\eta\rangle_A)(\omega,m-n,\tau) = [m=n][\omega=\tau]\left\langle\xi,\eta\right\rangle_A(F(\omega)) =$$

$$[m=n][\omega=\tau]\sum_{i=1}^d \overline{\xi(\gamma_i(F(\omega)),F(\omega))}\eta(\gamma_i(F(\omega)),F(\omega)) \tag{3.5}$$

and on the other hand

$$(\psi(\xi)^* * \psi(\eta))(\omega,m-n,\tau) = \sum \psi(\xi)^*(\omega,k-l,\nu)\psi(g)(\nu,(m+l)-(n+k),\eta) =$$

$$\sum \overline{\psi(\xi)(\nu, l-k, \omega)}\psi(g)(\nu, (m+l)-(n+k), \tau) =$$

$$[m=n][\omega=\tau] \sum_{\sigma(\nu)=\omega} \overline{\xi(F(\nu), F(\omega))}\eta(F(\nu), F(\omega)) \tag{3.6}$$

and we note that $\sigma(\nu) = \omega$ iff $\nu = \sigma_i(\omega)$ for some $i = 1, \ldots, d$ and in this case $F(\nu) = \gamma_i(F(\omega))$. It follows that we can rewrite (3.6) as (3.5).

Finally, we have to show that $(\psi, \iota)^{(1)}(\phi(a)) = \iota(a)$ for $a \in J_E$ where $J_E = \left\{a \in A : a|_{B(\gamma_1,\ldots,\gamma_d)} = 0\right\}$ by lemma 3.10. We take $a \in J_E$ such that $Y := \mathrm{supp}(a) \subseteq K \backslash B$ and ξ_k and η_k as in remark 3.11, then

$$(\psi, \iota)^{(1)}(\phi(a))(\omega, m-n, \tau) = \sum_k (\psi(\xi_k) * \psi(\eta_k)^*)(\omega, m-n, \tau) =$$

$$\sum_k \sum \psi(\xi_k)(\omega, k-l, \nu)\psi(\eta_k)^*(\nu, (m+l)-(n+k), \tau) =$$

$$[m=n][\sigma(\omega)=\sigma(\tau)] \sum_k \xi_k(F(\omega), F(\sigma(\omega)))\eta_k(F(\tau), F(\sigma(\omega))) =$$

$$[m=n][\sigma(\omega)=\sigma(\tau)] \sum_k a(F(\omega))\sqrt{\varphi_k(F(\omega))}\sqrt{\varphi_k(F(\tau))}. \tag{3.7}$$

Note that $F(\omega) = \gamma_{\omega_0}(F(\sigma(\omega)))$ and $\sigma(\omega) = \sigma(\tau)$ implies that $F(\tau) = \gamma_{\tau_0}(F(\sigma(\omega)))$ where ω_0, τ_0 are the coordinates zero of ω and τ respectively. Now if $F(\omega) \in U_{x_k}$ then $\omega_0 \in I(x_k)$ because of property (iii) of lemma 3.9 and $F(\sigma(\omega) \in \gamma_{\omega_0}^{-1}(U_{x_k})$. We have that $F(\tau) \in \gamma_{\tau_0}(\gamma_{\omega_0}^{-1}(U_{x_k}))$ and if $\omega_0 \neq \tau_0$ then by property (ii) of lemma 3.9, we have $F(\tau) \notin U_{x_k}$. Since the support of φ_k is contained in U_{x_k} and if $\omega_0 = \tau_0$ then $\omega = \tau$, we have from (3.7) that

$$(\psi, \iota)^{(1)}(\phi(a))(\omega, m-n, \tau) = [m=n][\omega=\tau]a(F(\omega)) =$$

$$\iota(a)(\omega, m-n, \tau).$$

As the elements $a \in C(K)$ such that $\mathrm{supp}(a) \subseteq K \backslash B$ are dense in J_E, the equality $(\psi, \iota)^{(1)}(\phi(a)) = \iota(a)$ holds for an arbitrary $a \in J_E$. □

Lemma 3.14 ([**12**]). *Suppose that (ψ, ι) is an isometric covariant representation of E into a C*-algebra B. Then $\psi \times \iota$ is faithful if and only if ι is faithful and there is a (strongly continuous) action $\beta : \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(B)$ such that $\beta_z \circ \iota = \iota$ and $\beta_z \circ \psi = z\psi$ for all $z \in \mathbb{T}$.*

Proposition 3.15. *If the IFS Γ satisfies the finite branch condition or the open set condition, then the homomorphism $\psi \times \iota$ given by the covariant representation defined by (3.1) and (3.2) is faithful.*

Proof. Given $a \in C(K)$,

$$(\iota(a)^* * \iota(a))(\omega, m-n, \tau) = [m=n][\omega=\tau]|a(F(\omega))|^2$$

and as F is surjective, we have that ι is faithful. Let $\beta : \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(C^*(G))$ be the gauge action given by

$$\beta_z(f)(\omega, m-n, \tau) = z^{m-n}f(\omega, m-n, \tau)$$

then $\beta_z(\iota(a)) = \iota(a)$ because $\iota(a)$ is zero for $m \neq n$; and for $\xi \in E$, $\beta_z(\psi(\xi)) = z\psi(\xi)$ because $\psi(\xi)$ is zero for $m - n \neq 1$. □

We conclude with this proposition that $\mathcal{O}_\Gamma$ is a subalgebra of $\mathcal{O}_d$.

REMARK 3.16. As $\mathcal{G}$ is a closed, and therefore compact, subset of $K \times K$, all continuous functions in $\mathcal{G}$ can be seen as restrictions of continuous functions in $K \times K$. And viewing $C(K \times K) = C(K) \otimes C(K)$, we have that every continuous function in $\mathcal{G}$ can be written as a limit of sums of elements of the type $a \otimes b$ where $a, b \in C(K)$. We can do this both with respect to the sup norm and to the Hilbert-module norm because of proposition 3.6.

We also note that the code map $F : \Omega \to K$ defined in proposition 2.5 induces an injection of $C(K)$ in $C(\Omega)$.

PROPOSITION 3.17. *If the IFS Γ satisfies the finite branch condition or the open set condition, then $\mathcal{O}_\Gamma$ is the sub-C*-algebra of $\mathcal{O}_d$ generated by $C(K)$ and S.*

PROOF. As a Cuntz-Pimsner algebra is generated by copies of elements of the algebra and copies of elements of the module, we have that $\mathcal{O}_\Gamma$ is generated by all elements $a \in C(K)$ and $\xi \in C(\mathcal{G})$. It suffices to note that $\psi(\mathbf{1}) = S$ where $\mathbf{1}$ is the identity of $C(\mathcal{G})$ and $\psi(a \otimes b) = \iota(a)\psi(\mathbf{1})\iota(b)$ for $a, b \in C(K)$. $\square$

We recall a definition from [**16**] and give a different proof of the isomorphism between $\mathcal{O}_\gamma$ and $\mathcal{O}_d$ for a certain class of IFS.

DEFINITION 3.18. We say that the IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ satisfies the cograph separation condition if the cographs

$$\mathcal{G}_i = \{(\gamma_i(y), y) \in K \times K : y \in K\}$$

are disjoint.

We note that the cographs of an IFS are always closed subsets of $\mathcal{G}$ and if the IFS satisfies the cograph separation condition then they are also open. In this case, there are no branched points and in particular, it satisfies the finite branch condition.

PROPOSITION 3.19. *If the IFS $\{\gamma_i\}_{i=1}^d$ satisfies the cograph separation condition then $\mathcal{O}_\gamma \simeq \mathcal{O}_d$.*

PROOF. If $\chi_{\mathcal{G}_i}$ is the characteristic function of $\mathcal{G}_i$ then it belongs to $C(\mathcal{G})$ and we note that $\psi(\chi_{\mathcal{G}_i}) = \chi_{\bar{i}} * S$ where $\chi_{\bar{i}}$ is the characteristic function of the cylinder $\bar{i}$. As we've seen in subsection 3.1, the elements $S_i = d^{1/2}\chi_{\bar{i}} * S = d^{1/2}\psi(\chi_{\mathcal{G}_i})$ are d isometries that satisfies the Cuntz relations and generates $\mathcal{O}_d$. $\square$

3.4. The case of inverse branches of a continuous function. In this subsection we suppose that there exists a continuous function $\gamma : K \to K$ such that $\gamma \circ \gamma_i = id$ for all $i \in \{1, \dots, d\}$. Our goal is to show that if the IFS satisfies the finite branch condition than we can see $\mathcal{O}_\Gamma$ as an Exel's crossed product by endomorphism [**8**].

We note that γ needs not to be a local homeomorphism and in this case we cannot use the construction by Renault [**19**] and Deaconu [**6**]. But when it does, their construction is isomorphic to Exel's one [**10**].

We begin by recalling the ingredients to build Exel's crossed product. Let A be a unital C*-algebra and suppose we're given:

- An unital injective endomorphism $\alpha : A \to A$.
- A transfer operator $L : A \to A$ for α, that is, a positive continuous linear map such that $L(\alpha(a)b) = aL(b)$ for $a, b \in A$. We suppose that $L(1) = 1$.

Let $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ be the universal C*-algebra generated by a copy of A and an element $\widehat{S}$ with relations:

(i) $\widehat{S}a = \alpha(a)\widehat{S}$,

(ii) $\widehat{S}^* a \widehat{S} = L(a)$,

for $a \in A$. Note that the canonical map from A to $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ is injective.

Definition 3.20. A redundancy is a pair $(a, k) \in A \times \overline{A\widehat{S}\widehat{S}^*A}$ such that $ab\widehat{S} = kb\widehat{S}$ for all $b \in A$.

Definition 3.21. The Exel's crossed product $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ is the quotient of $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ by the closed two-sided ideal generated by the set of differences $a - k$ for all redundancies (a, k).

In our case, let $A = C(K)$ and $\alpha : A \to A$ be given by

$$\alpha(a) = a \circ \gamma.$$

Then $L : A \to A$ defined by

$$L(a) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} a \circ \gamma_i$$

is a transfer operator for α.

Theorem 3.22. *Let $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^d$ be an IFS satisfying the finite branch condition or the open set condition, and let A, α and L be as above then $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ is isomorphic to $\mathcal{O}_\Gamma$.*

Proof. The steps of the proof are similar to what we have done last subsection. Let $(A = C(K), E = C(\mathcal{G}))$ be the C*-correspondence given in last subsection. We start by giving a covariant representation of (A, E) in $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$.

Let $\iota : A \to A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ be the canonical inclusion and $\psi : E \to A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ be given by

$$\psi(a \otimes b) = aSb$$

for $a, b \in A$. To show that ψ is well defined in all $C(\mathcal{G})$, we let $\sum_j a_j \otimes b_j$ be a finite sum where $a_j, b_j \in A$, then

$$\left\| \psi \left(\sum_j a_j \otimes b_j \right) \right\| = \left\| \sum_j a_j S b_j \right\| = \left\| \sum_j a_j \alpha(b_j) S \right\| \leq \left\| \sum_j a_j \alpha(b_j) \right\| =$$

$$= \sup_{x \in K} \left| \sum_j a_j(x) b_j(\gamma(x)) \right| \leq \left(\sup_{x \in K} \sum_{i=1}^{d} \left| \sum_j a_j(\gamma_i(x)) b_j(x) \right|^2 \right)^{1/2} = \left\| \sum_j a_j \otimes b_j \right\|_2$$

where $\|\cdot\|_2$ is the norm in $C(\mathcal{G})$ thinking of $C(\mathcal{G})$ as an A-Hilbert module. To justify that the second inequality above holds, we note that because K is self-similar, for any $x \in K$ there is $y \in K$ such that $x = \gamma_i(y)$ for some $i = 1, \ldots, d$.

We have to show that (ι, ψ) is a Cuntz-Pimsner covariant representation, i.e., it satisfies conditions (i)-(iii) of definition 3.4. Condition (i) is easily verified. For (ii), it suffices to show for monomials $a \otimes b, e \otimes f \in C(\mathcal{G})$ because of linearity and continuity. We have

$$\langle a \otimes b, e \otimes f \rangle (y) = \sum_i \overline{a(\gamma_i(y))b(y)} e(\gamma_i(y)) f(y) = b^*(y) L(a^* e)(y) f(y)$$

and then

$$\iota(\langle a\otimes b, e\otimes f\rangle) = b^*L(a^*e)f = b^*S^*a^*eSf = \psi(a\otimes b)^*\psi(e\otimes f).$$

Finally, for condition (iii), we take $a \in J_E$ such that $\mathrm{supp}(a) \subseteq K\backslash B$ and ξ_k, η_k as in remark 3.11. Then

$$(\iota,\psi)^{(1)}(\phi(a)) = \sum_k \psi(\xi_k)\psi(\eta_k)^* = \sum_k a\sqrt{\varphi_k}SS^*\sqrt{\varphi_k}$$

and we have to show that this equals a inside $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$. For that, we show that the pair $(a, \sum a\sqrt{\varphi_k}\widehat{S}\widehat{S}^*\sqrt{\varphi_k})$ is a redundancy. We let $b \in A$, then

$$\sum a\sqrt{\varphi_k}\widehat{S}\widehat{S}^*\sqrt{\varphi_k}b\widehat{S} = \sum a\sqrt{\varphi_k}(\alpha\circ L)(\sqrt{\varphi_k}b)\widehat{S}.$$

To show that the pair above is a redundancy, it suffices to show that

$$b(x) = \sum \sqrt{\varphi_k}(x)(\alpha\circ L)(\sqrt{\varphi_k}b)(x)$$

for $x \in \mathrm{supp}(a)$. For such x, we have that $x \notin B$ and hence, there is a unique i_0 and a unique y such that $\gamma_{i_0}(y) = x$. If $\varphi_k(x) = \varphi_k(\gamma_{i_0}(y)) \neq 0$ then $i_0 \in I(x_k)$ because of (iii) of lemma 3.9 and because of (ii) we have that $\gamma_i(y) \notin U_{x_k}$ for $i \neq i_0$. It follows that

$$\sum \sqrt{\varphi_k}(x)(\alpha\circ L)(\sqrt{\varphi_k}b)(x) = \sum \sqrt{\varphi_k}(x)\sum_{i=1}^{d}\sqrt{\varphi_k}(\gamma_i(\gamma(x)))b(\gamma_i(\gamma(x))) =$$

$$\sum \sqrt{\varphi_k}(x)\sum_{i=1}^{d}\sqrt{\varphi_k}(\gamma_i(y))b(\gamma_i(y)) = \sum \sqrt{\varphi_k}(x)\sqrt{\varphi_k}(\gamma_{i_0}(y))b(\gamma_{i_0}(y)) =$$

$$\sum \varphi_k(x)b(x) = b(x).$$

By the universality of $\mathcal{O}_\Gamma$, we have a homomorphism $\iota\times\psi : \mathcal{O}_\Gamma \to A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$. Since $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ is generated by A and S, and $\iota(A) = A$, $\psi(\mathbf{1}) = S$, where $\mathbf{1}$ is the unity of $C(\mathcal{G})$, we have that $\iota\times\psi$ is surjective.

To show that $\iota\times\psi$ is injective, we first note that ι is faithful [**9**]. Then we see that $\beta : \mathbb{T} \to A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ given by $\beta_z(a) = a$ and $\beta_z(S) = zS$ is an action of the circle in $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ [**9**] which clearly satisfies the conditions of lemma 3.14. □

Remark 3.23. It was pointed out by the referee two references close related to this work. In [**3**], it's studied the construction of an algebra from a shift space using Exel's crossed product. The dynamics of a IFS is closed related to a symbolic dynamic (proposition 2.5) and the Cuntz algebra can be thought as the algebra associated to the full shift. In [**4**], it's proved that some dynamical properties can be translated into algebraic ones in the case of cover maps, which in our context is related to IFS that have no branched points. A result similar to theorem 6 in [**4**] to the context of IFS is an interesting problem for future work.

Acknowledgements. The author would like to thank his three advisors: Ruy Exel, Artur Lopes and Jean Renault. The author would also like to thank the Université d'Orléans and the MAPMO for their hospitality.

References

1. M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., 1988.
2. O. Bratteli and P. Jorgensen *Wavelets through a looking glass. The world of the spectrum.*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, 2002.
3. T. Carlsen and S. Silvestrov, *C*-crossed products and shift spaces*, Expo. Math. **25** (2007), 275-307.
4. T. Carlsen and S. Silvestrov, *On the Exel crossed product of topological covering maps*, arxiv:[math.OA]/0811.0056.
5. J. Cuntz, *Simple C*-algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. **57** (1977), 173-185.
6. V. Deaconu, *Groupoids associated with endomorphisms*, Trans. Am. Math. Soc. **347** (1995), 1779-1786.
7. G. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry. 2nd ed.*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.
8. R. Exel, *A new look at the crossed-product of a C*-algebra by an endomorphism*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **23** (2003), 1733-1750.
9. R. Exel, *Crossed-products by finite index endomorphisms and KMS states*, J. Funct. Anal. **199** (2003), 153-188.
10. R. Exel and A. Vershik, *C*-algebras of irreversible dynamical systems*, Can. J. Math. **58** (2006), 39-63.
11. K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. 2nd ed.*, Wiley, 2003.
12. N. Fowler, P. Muhly and I. Raeburn, *Representations of Cuntz-Pimsner algebras*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 569-605.
13. M. Ionescu and P. Muhly *Groupoid methods in wavelet analysis*, preprint, [arXiv:0709.2294v1].
14. P. Jorgensen *Analysis and probability. Wavelets, signals, fractals.*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2006.
15. T. Katsura, *A construction of C*-algebras from C*-correspondences*, Contemp. Math. **335** (2003), 173-182.
16. T. Kajiwara and Y. Watatani, *C*-algebras associated with self-similar sets*, J. Oper. Theory **56** (2006), 225-247.
17. T. Kajiwara and Y. Watatani, *KMS states on C*-algebras associated with self-similar sets*, preprint [arXiv:math/0405514v1].
18. M. Pimsner, *A class of C*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by* $\mathbb{Z}$, Fields Inst. Commun. **12** (1997), 189-212.
19. J. Renault *A groupoid approach to C*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer-Verlag, 1980.

Département de Mathématiques, Université d'Orléans, B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 2, France

Current address: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Bento Gonçalves, 9500, 91509-900 Porto Alegre, RS - Brazil

E-mail address: gillescastro@gmail.com

[Gilles DE CASTRO]

[C*-ALGÈBRE ASSOCIÉES À CERTAINS SYSTÈMES DYNAMIQUES ET LEURS ÉTATS KMS]

D'abord, on étudie trois façons d'associer une C*-algèbre à une transformation continue. Ensuite, nous donnons une nouvelle définition de l'entropie. Nous trouvons des relations entre les états KMS des algèbres préalablement définies et les états d'équilibre, donné par un principe variationnel. Dans la seconde partie, nous étudions les algèbres de Kajiwara-Watatani associées à un système des fonctions itérées. Nous comparons ces algèbres avec l'algèbre de Cuntz et le produit croisé. Enfin, nous étudions les états KMS des algèbres de Kajiwara-Watatani pour les actions provenant d'un potentiel et nous trouvouns des relations entre ces états et les mesures trouvée dans une version de le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius pour les systèmes de fonctions itérées.

Mots-clés : C*-algèbres, systèmes dynamiques, entropie, étas KMS, systèmes de fonctions itérées

[C*-ALGEBRAS ASSOCIATED WITH CERTAIN DYNAMICAL SYSTEMS AND THEIR KMS STATES]

First, we study three ways of associating a C*-algebra to a continuous map. Then, we give a new definition of entropy. We relate the KMS states of the previously defined algebras with the equilibrium states, given by a variational principle. In the second part, we study the Kajiwara-Watatani algebras associated to iterated function system. We compare these algebras with the Cuntz algebra and the crossed product. Finally, we study the KMS states of the Kajiwara-Watatani algebras for actions coming from a potential and we relate such states with measures found in a version of the Ruelle-Perron-Frobenius theorem for iterated function systems.

Keywords: C*-algebras, dynamical systems, entropy, KMS states, iterated function systems

Laboratoire de Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans
(MAPMO)

Université d'Orléans, UFR Sciences
Bâtiment de mathématiques - Route de Chartres
B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2
FRANCE