



HAL
open science

Modélisation et simulation du comportement des milieux plastiques mous: mousses liquides, émulsions

Sylvain Benito

► **To cite this version:**

Sylvain Benito. Modélisation et simulation du comportement des milieux plastiques mous: mousses liquides, émulsions. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2009. Français. NNT: . tel-00525106

HAL Id: tel-00525106

<https://theses.hal.science/tel-00525106>

Submitted on 1 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 3858

THÈSE

présentée le 3 novembre 2009 à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Sylvain BENITO

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Modélisation et simulation du comportement mécanique des milieux plastiques mous :
mousses liquides, émulsions.

Après avis de :

Didier BRESCH, Directeur de Recherche CNRS, Université de Savoie
Isabelle CANTAT, Professeur, Université de Rennes 1

Devant la commission d'examen formée de :

M. D. BRESCH , Directeur de Recherche CNRS, U. de Savoie	Rapporteur
M. C.-H. BRUNEAU , Professeur, U. Bordeaux 1	Co-directeur
Mme. I. CANTAT , Professeur, U. Rennes 1	Rapporteur
M. T. COLIN , Professeur, U. Bordeaux 1	Directeur
M. C. GAY , Chargé de recherche CNRS, U. Paris-Diderot	Co-directeur
M. S. LABBÉ , Professeur, U. Joseph Fourier	Président
M. F. MOLINO , Maître de conférences, U. Montpellier 1	Examineur
M. J.-B. SALMON , Chargé de recherche CNRS, U. Bordeaux 1	Examineur

Table des matières

1	Description du modèle	9
1.1	Quelques éléments de rhéophysique des mousses	9
1.1.1	Structure et comportement d'une mousse	9
1.1.2	Mousses et localisation de l'écoulement	11
1.2	Ingrédients du modèle physique et modèle scalaire	11
1.2.1	Perte de mémoire, conséquences	11
1.2.2	Quel modèle rhéologique ?	15
1.3	Description tensorielle	21
1.3.1	Décomposition de la déformation	21
1.3.2	Loi élastique	25
1.3.3	Plasticité	30
1.3.4	Récapitulatif	38
1.4	Hierarchie de systèmes	39
1.4.1	Le système complet	39
1.4.2	Formulation adimensionnelle, hiérarchie des modèles	40
2	Théorèmes d'existence	42
2.1	Notations, rappels	42
2.2	Existence de solutions régulières pour \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2	43
2.2.1	Résolution du problème linéarisé	45
2.2.2	Preuve de l'existence	52
2.3	Problème \mathcal{S}_3	53
2.3.1	Formulation équivalente	54
2.3.2	Un résultat d'ellipticité	55
3	Schémas numériques pour l'étude de quelques écoulements bidimensionnels	62
3.1	Quelques écoulements bidimensionnels	62
3.1.1	Forme bidimensionnelle du système	62
3.1.2	Écoulement de cisaillement	64
3.1.3	Écoulement dans un canal avec des conditions d'injection en entrée	65

3.2	Schéma numérique	66
3.2.1	Equation de Stokes	66
3.2.2	Equation sur B	66
3.2.3	Discrétisation en espace	69
3.2.4	Semi-discrétisation en temps	75
3.2.5	Convergence du schéma	76
4	Résultats numériques	80
4.1	Cisaillement imposé, cas homogène	80
4.1.1	Trajectoires de la déformation et de la contrainte élastiques pour un cisaillement homogène	82
4.1.2	Influence des paramètres du modèle	85
4.2	Cisaillement imposé, cas hétérogène	100
4.2.1	Hétérogénéité de l'état initial des contraintes selon y uniquement	105
4.2.2	Hétérogénéité de l'état initial des contraintes selon x et y simultanément	122
4.3	Canal avec des conditions d'injection en entrée	144
	Bibliographie	149

Introduction

Problématique physique

Couplage entre la structure et la réponse mécanique dans les matériaux complexes

Historiquement, la description mathématique des fluides sous forme d'équations aux dérivées partielles a débuté par celle des fluides simples. En l'absence de toute connaissance sur la structure microscopique de ces fluides, et en identifiant simplement cette structure à celle d'un continu parfaitement homogène, des bilans fondamentaux de conservation de la quantité de matière et d'équilibres locaux des forces ont été écrits, donnant naissance aux équations de l'hydrodynamique classique. La même démarche a également permis d'étudier avec succès les propriétés élastiques des matériaux solides.

Avec l'émergence de l'étude des fluides complexes d'une part et celle des propriétés plastiques des solides d'autre part, ces deux descriptions initiales ont montré leurs limites. D'une part, certains matériaux présentent des inhomogénéités de structure à différentes échelles : un fluide dans lequel se trouvent des objets solides en suspension, un solide cristallin dont la structure est désordonnée aux échelles intermédiaires entre l'atome et le macroscopique en sont des exemples. De telles hétérogénéités rendent problématique le choix d'une échelle pour faire une description continue et peuvent se coupler de façon tout à fait non triviale aux processus de déformations (pour un solide) ou aux écoulements (pour un fluide). Il apparaît donc un problème d'échelle de description ainsi que de couplage entre la structure et la réponse mécanique du matériau.

Mais l'existence de ces échelles intermédiaires (dites "mésoscopiques") de structuration (ordonnée ou désordonnée) peut avoir une autre conséquence plus suprenante encore. L'opposition entre les matériaux élastiques (qui possèdent une "mémoire" parfaite de leur état de repos) et les matériaux visqueux (qui ne sont soumis à aucune contrainte interne élastique de ce genre) fait alors place à tout un spectre de matériaux à la fois élastiques et visqueux, ou à la fois élastiques et plastiques, voire les trois à la fois (voir [28]). Comment construire alors un formalisme continu capable d'inclure une telle multiplicité de réponse mécanique ? En particulier, quel est dans un tel formalisme la place d'un état de référence qui ne peut plus être unique, mais qui au contraire peut évoluer avec les changements structuraux du matériau ?

Le cas exemplaire des mousses

Les mousses constituent un exemple particulièrement clair de l'ensemble des questions énoncées au paragraphe précédent (voir [21]). Précisons qu'ici nous entendons par mousse un matériau constitué de l'empilement

plus ou moins compact de bulles remplies de gaz, séparées par des parois liquides.

L'exemple des mousses est emblématique puisque ces matériaux présentent des hétérogénéités de structure associées à différentes échelles spatiales :

- à l'échelle atomique : on se trouve soit dans la phase liquide (entre les bulles) soit dans la phase gazeuse (dans les bulles), soit à la limite entre les deux. A cette échelle nous avons affaire à des propriétés de fluides simples, mais aussi des propriétés d'interfaces, essentielles et très subtiles à décrire (rappelons qu'une mousse est rendue possible par des molécules tensio-actives qui, incluses dans la phase liquide, stabilisent ces interfaces et sans lesquelles "ça ne mousse pas" !).
- à l'échelle de quelques microns : à cette échelle nous avons par exemple accès à la description hydrodynamique des écoulements de la phase liquide dans les bords de Plateau, c'est-à-dire les réseaux de canaux délimités par trois bulles. De tels transferts liquides au niveau des interfaces peuvent avoir des effets très importants.
- à l'échelle de la bulle (entourée de ses facettes, elles mêmes limitées par des arêtes et des sommets) : la structure de la mousse, à l'échelle de la bulle est le plus souvent désordonnée : des bulles de tailles très différentes coexistent, dans des arrangements locaux variables.

En ce qui concerne la coexistence d'un comportement élastique et d'un comportement visqueux, la mousse est aussi un exemple modèle. Une mousse s'écoule comme un liquide très visqueux si on la sollicite assez fort mécaniquement. Mais pour des sollicitations faibles, elle se comporte comme un solide élastique : elle se déforme, puis revient à l'état initial lorsque la sollicitation cesse. Il existe donc un seuil en dessous duquel la mousse ne coule pas : cette propriété caractérise la plasticité du matériau.

Enfin, le couplage entre structure et écoulement : la structure de la mousse, microscopique ou mésoscopique, influe bien sûr directement sur ses propriétés d'écoulement. Mais réciproquement, lors des écoulements, les arrangements locaux de bulles se modifient et la structure change !

Localisation de l'écoulement

Il s'agit d'un phénomène observé dans de nombreux systèmes de fluides visco-élastiques tels que les micelles géantes (voir [8]) ou certaines solutions de polymères (voir [27]). Un fluide visco-élastique soumis à des contraintes suffisamment fortes peut répondre en concentrant le taux de déformation dans certaines zones de l'échantillon, à cause d'une modification locale de la structure du matériau. Le cas le mieux étudié est sans doute celui des bandes qui apparaissent en géométrie de cisaillement. Dans cette géométrie, le fluide est confiné entre deux plaques parallèles en mouvement relatif et à vitesse constante. Lorsque cette vitesse augmente, une large catégorie de matériaux dits "rhéofluidifiants" possède une réponse non-newtonienne : la contrainte appliquée au système n'est pas proportionnelle à la vitesse, mais augmente bien moins vite, si bien que la viscosité effective (qui est le rapport de la contrainte sur le taux de déformation) diminue. Cette diminution peut-être de plusieurs ordres de grandeur pour des systèmes fortement fluidifiants. L'examen de la structure montre alors que le matériau, initialement homogène, s'est séparé en bandes parallèles aux plaques de cisaillement. Dans certaines bandes, le matériau a pris une mésostructure nouvelle beaucoup plus fluide, et la chute de viscosité moyenne de l'échantillon est en fait due à la nucléation de cette nouvelle mésostructure.

Ce type de comportement est également observé dans les mousses. En effet des expériences ont clairement mis en évidence des phénomènes de localisation de l'écoulement dans la partie médiane de la mousse, aboutissant

à la création de bandes de cisaillements distincts (voir [14], [23] et [25]). Là aussi, cette localisation est associée à un changement de structure, puisque la fraction volumique en eau augmente localement dans la bande fortement cisailée (voir [25]).

Modélisation continue

Propriétés microscopiques et passage au continu

A cause des différentes échelles d'inhomogénéités dans les mousses, il convient de s'interroger à quelle échelle doit s'effectuer la modélisation continue, et quelles propriétés statiques et dynamiques issues de la structure microscopique doivent être traduites dans le modèle.

Pour décrire la mousse en tant que matériau, il faut clairement se placer au dessus de l'échelle de la structure individuelle de chaque bulle. Par ailleurs, comme nous avons mentionné l'existence d'un désordre structurel dans le matériau, nous pouvons soit choisir comme "boîte élémentaire" de passage au continu (taille de boîte sur laquelle sont moyennées les grandeurs caractéristiques de la mousse) une taille assez grande pour échantillonner les fluctuations du désordre, soit incorporer explicitement ce dernier sous forme d'un champ inclus dans le modèle.

C'est la première approche que nous avons choisie : en l'absence d'informations expérimentales plus précises sur le couplage entre désordre et propriétés mécaniques, nous préférons ne pas l'inclure dans un modèle sous forme d'un champ explicite.

Notre modèle comportera donc dans un premier temps des variables purement mécaniques : variables de déformation (d'origine tant élastique que plastiques), contraintes élastiques.

Comme pour tout fluide complexe, la modélisation mécanique sous forme continue comporte d'une part les équations bilans générales valables pour tout milieu continu, à laquelle viendra s'ajouter d'autre part une équation constitutive, propre au matériau, dans laquelle se retrouvent les caractéristiques que nous souhaitons incorporer dans la description.

Ces caractéristiques sont dans notre cas l'élasticité et la plasticité. Elles posent pour les mousses des problèmes particuliers, que nous allons évoquer maintenant.

Plasticité et seuil d'écoulement

Examinons les mécanismes microscopiques responsables de la plasticité dans les mousses. Lorsqu'on déforme une mousse, les bulles individuelles qui la composent se déforment elles mêmes, mais si la mousse est stable, le système se comporte comme un solide. Pour qu'un écoulement se produise, il faut que les contacts entre bulles se réorganisent. Les événements élémentaires responsables de cette réorganisation ont été décrits dans la littérature : il s'agit de processus d'échange de voisins, connus dans la littérature sous le nom de processus $T1$. Lorsque la déformation élastique stockée par un arrangement local de bulles devient suffisamment grande, elle se relaxe via un tel processus local. La combinaison d'une multitude de tels événements produit un écoulement. C'est la raison pour laquelle la mousse peut être considérée comme un fluide à seuil.

En différents points du matériau, l'orientation des arrangements de bulles par rapport aux contraintes élastiques stockées (elles-mêmes tensorielles) peut changer. Nous choisissons là aussi de moyennner sur une

zone d'espace assez grande pour échantillonner différentes orientations des arrangements locaux de bulles : l'écoulement plastique dépend des contraintes élastiques de façon isotrope. D'autre part, tout comme pour le désordre mentionné plus haut, nous avons choisi de ne pas faire intervenir explicitement d'inhomogénéités structurales dans le matériau.

Les seules inhomogénéités seront donc d'origine purement mécanique, puisque les contraintes élastiques stockées dans le matériau peuvent être inhomogènes. La variation de ces contraintes dans l'espace induit une inhomogénéité de la fragilité du matériau (sa "distance" au seuil d'écoulement plastique) et rend la plasticité du matériau variable dans l'espace.

Élasticité aux grandes déformations

La seconde spécificité de la modélisation des mousses, à notre connaissance jamais incluse dans un modèle mécanique de la plasticité, consiste dans l'existence de grandes déformations élastiques. En effet, selon les arrangements locaux de la structure, la déformation stockée par le matériau peut être extrêmement importante.

Il convient donc pour modéliser l'élasticité de la mousse de se placer dans le formalisme de l'élasticité aux grandes déformations. C'est ce que nous avons fait, en nous plaçant ainsi dans le cadre de description le plus général possible. C'est là une des grandes originalités (la principale peut-être) de notre travail, la plupart des travaux de modélisation se contentant du formalisme bien plus simple de l'élasticité classique aux petites déformations, décrite par une simple loi de Hooke.

Objectifs de ce travail et plan du manuscrit

Résumons nos objectifs dans ce travail. Il s'agit d'élaborer une théorie rhéologique purement mécanique des mousses, comprenant la description générale de la réponse élastique de ces matériaux aux grandes déformations ainsi qu'une modélisation de la plasticité et de l'écoulement du matériau une fois le seuil franchi. Tous ces ingrédients seront incorporés dans une loi de comportement que nous pouvons qualifier d'élasto-visco-plastique. Cette loi décrit la réponse mécanique locale du matériau pour une sollicitation mécanique donnée. Bien entendu la donnée seule de la loi de comportement ne permet pas de prédire des écoulements réels sauf dans des cas très particuliers : il faut la coupler aux équations de conservation classiques de la mécanique des milieux continus.

Le chapitre 1 reprend en détail la construction tensorielle de la loi de comportement ainsi que son couplage avec les lois de conservations classiques et les différents régimes d'écoulement qui résultent de l'adimensionnement du système complet.

Le chapitre 2 présente des résultats mathématiques (parfois partiels) d'existence pour le système complet et pour chaque régime d'écoulement.

Le chapitre 3 décrit les méthodes numériques utilisées pour résoudre le système complet et calculer des écoulements dans des géométries bidimensionnelles classiques : cisaillement entre deux plaques, canal avec des conditions aux limites d'injection en entrée.

Le chapitre 4 présente quelques résultats numériques en s'attardant plus particulièrement sur la géométrie de cisaillement, avec une discussion sur l'apparition de bandes bloquées.

Chapitre 1

Description du modèle

La mécanique et la rhéologie des mousses est un domaine de recherche très actif et de nombreuses questions restent non résolues (voir [21] pour un point de vue exhaustif sur l'état des connaissances en mécanique des mousses). Dans ce chapitre nous commençons par évoquer certaines propriétés mécaniques incontournables, en vue de leur incorporation dans le modèle continu.

Pour construire un tel modèle nous partons d'un modèle rhéologique. Il s'agit d'une relation (ponctuelle, différentielle, mixte) entre des grandeurs scalaires, construite sur la base des hypothèses de modélisation retenues. Un modèle rhéologique bien choisi doit reproduire qualitativement la réponse mécanique du matériau et admettre une extension tensorielle. Nous proposons ici un modèle rhéologique pour les mousses liquides. Nous verrons que ce nouveau modèle correspond à une extension non-linéaire d'un modèle déjà connu : le modèle de Maxwell-Bingham.

Vient ensuite l'extension tensorielle du modèle : l'élasticité du matériau aux grandes déformations est traitée dans le détail et une description de la plasticité est également présentée.

Le chapitre se termine avec une description du modèle complet, c'est-à-dire couplé avec les lois de conservation classiques de la mécanique des milieux continus. Une hiérarchie de modèles résultant de l'adimensionnement du système est proposée.

1.1 Quelques éléments de rhéophysique des mousses

1.1.1 Structure et comportement d'une mousse

Une mousse est constituée de bulles de gaz emprisonnées dans un réseau continu de liquide. L'aspect ainsi que les propriétés mécaniques de la mousse dépendent du rapport entre la quantité de liquide et la quantité de gaz. Ce rapport s'appelle la fraction fluide.

Chaque interface liquide/gaz coûte une certaine énergie par unité de surface ; cette énergie est appelée tension de surface. Ainsi chaque bulle cherche à minimiser son énergie interfaciale. Cela explique qu'une bulle isolée prend la forme d'une sphère. Au contraire dans un réseau chaque bulle est contrainte dans sa relaxation par les forces que ses voisines exercent sur elle (figure 1.1).

Une mousse, même au repos, vieillit toujours : sa structure se dégrade dans le temps. Les mécanismes à l'origine du vieillissement (mûrissement, coalescence, drainage) sont complexes à décrire. Toutefois nous savons que pour certaines mousses ces processus ont une dynamique lente, de sorte que nous les omettrons dans le cadre de ce travail.

Mécaniquement une mousse présente des caractéristiques complexes qu'il convient d'évoquer. Prenons l'exemple d'une mousse sèche, c'est-à-dire caractérisée par une faible fraction fluide :

- en l'absence de sollicitation extérieure une telle mousse se maintient, sans s'écouler. De plus un échantillon de mousse soumis à une force modérée se déforme de façon réversible : si la force cesse, le matériau reprend son état originel. Il s'agit d'une propriété de solide élastique ;
- nous avons néanmoins affaire à un solide mou : ses objets constitutifs se déforment facilement et peuvent même changer de place. De tels réarrangements sont connus dans la littérature sous le nom de processus $T1$. Ils correspondent à des glissements des bulles les unes sur les autres.

Un processus $T1$ nécessite une certaine énergie d'activation pour se produire mais est irréversible : le système ne reprendra pas sa configuration initiale spontanément (à moins de lui fournir la quantité d'énergie nécessaire pour lui permettre de "revenir en arrière"). Cette déformation acquise au terme d'un événement $T1$ caractérise la plasticité de la mousse à l'échelle des bulles ;

- enfin une combinaison de très nombreux $T1$ produit un écoulement.

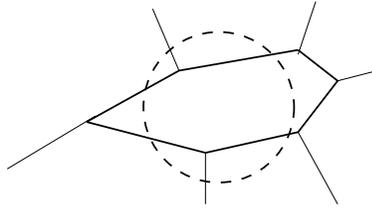


FIGURE 1.1 – Pour une mousse à l'équilibre, les bulles ne sont pas parfaitement sphériques : chaque bulle prend la forme qui minimise son énergie interfaciale tout en étant contrainte par les forces que ses voisines exercent sur elle.

Pour toutes ces raisons, les mousses sont qualifiées de fluides complexes. Notre objectif consiste ici en l'écriture d'une équation constitutive qui prend en compte ces trois ingrédients essentiels : élasticité, seuil de plasticité au-delà duquel le matériau peut s'écouler.

Il faut dès maintenant préciser ce que nous entendons par équation constitutive. Rappelons que de façon très générale, la rhéologie considère deux grandeurs fondamentales : la contrainte et la déformation. Nous appelons équation constitutive (ou loi de comportement) toute relation, au sens large, entre la contrainte et la déformation subie par le système. Il peut par conséquent s'agir d'une relation ponctuelle, différentielle, intégrale, linéaire ou non linéaire.

Notons que cette démarche doit s'appuyer nécessairement sur des hypothèses de modélisation explicites. En d'autres termes il est important de partir d'un cadre qui délimitera clairement le domaine de validité du

modèle obtenu (échelle spatiale, ingrédients retenus, etc...).

1.1.2 Mousses et localisation de l'écoulement

De manière générale, les fluides complexes tels que les cristaux liquides, les solutions de surfactants, les solutions de polymères, les matériaux granulaires, les émulsions, présentent une variété de comportements qui ne sont pas observés dans les fluides newtoniens. En effet tous ces fluides possèdent une échelle spatiale intermédiaire associée à une structure interne dont l'organisation interagit et change avec l'écoulement. Expérimentalement, de tels changements structuraux ont été observés à de multiples reprises dans des expériences où le cisaillement est imposé (voir [14], [23] et [25]) : l'écoulement s'organise en bandes avec des taux de cisaillements distincts. Ce phénomène est connu dans la littérature sous le nom de "bandes de cisaillement" ("shear-banding" en anglais).

Dans les mousses, de tels phénomènes de localisation sont également observés (voir [14]) : des bandes d'écoulement résultant d'une multitude d'événements $T1$, côtoient des bandes dans lesquelles le matériau se déplace en bloc. À l'heure actuelle, les mécanismes conduisant à l'apparition de bandes d'écoulement restent mal identifiés.

Une approche de modélisation de type milieux continus doit pouvoir reproduire, au moins qualitativement, de tels phénomènes de localisation. Les objets constitutifs d'une mousse étant de taille finie, une telle approche suppose d'avoir défini au préalable une échelle spatiale convenable (nécessairement grande devant la taille des bulles et telle que le désordre structural du matériau puisse être échantillonné mais petite par rapport à la taille totale de l'échantillon) pour mesurer des moyennes locales des différentes variables mécaniques (champ de vitesse, champ de contrainte,...).

1.2 Ingrédients du modèle physique et modèle scalaire

1.2.1 Perte de mémoire, conséquences

Comme nous venons de le voir, une mousse s'écoule dès que plusieurs réarrangements $T1$ se produisent. Il en résulte que le matériau perd la mémoire de son état initial. Pour bien illustrer cette notion de mémoire évanescence, nous pouvons considérer un échantillon de mousse soumis à un étirement croissant (figure 1.2). Dans cette expérience, la force appliquée peut être grande (il suffit pour cela d'étirer l'échantillon suffisamment longtemps). Pour autant cela n'implique pas que les déformations des objets le soient aussi. Nous nous attendons bien sûr à ce que certaines régions du matériau soient plus étirées que d'autres, néanmoins en moyenne la déformation des bulles doit rester bornée au cours du temps. En effet si l'étirement appliqué induit localement des contraintes dans le matériau, la plasticité, en provoquant des déplacements irréversibles, soulage localement les excédents de contrainte que les objets subissent. Ces derniers ne peuvent par conséquent pas être trop déformés. A cause de la plasticité, le matériau a donc perdu la mémoire de son état initial, car il n'y a pas de "retour en arrière" possible, même si l'étirement appliqué cesse. Nous en tirons deux conséquences capitales pour la construction du modèle :

- nous utilisons les coordonnées eulériennes pour écrire la loi de comportement.
- nous définissons une nouvelle variable : la déformation stockée.

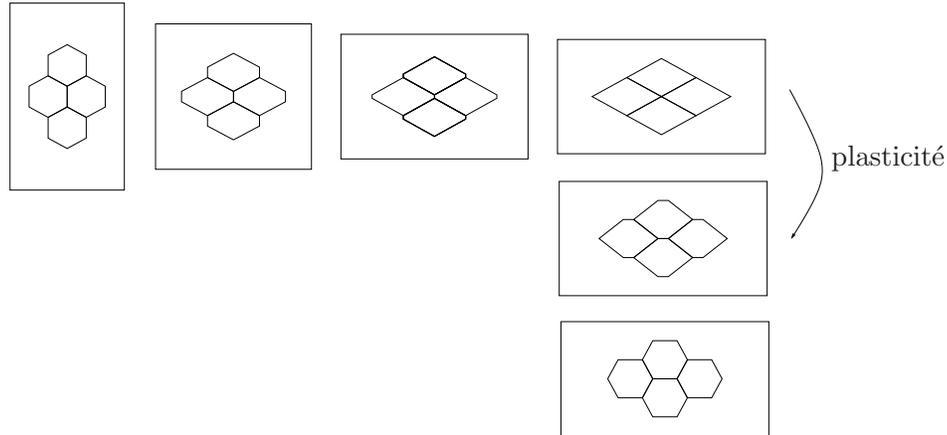


FIGURE 1.2 – Déformation d’un quadruplet de bulles pour un étirement appliqué croissant. En régime élastique, la déformation des bulles suit exactement la force exercée sur l’échantillon (première ligne de la figure). Lorsqu’un événement $T1$ s’est produit (plasticité), la déformation des objets relaxe : il n’y a plus de correspondance entre l’étirement local des bulles et la force exercée sur l’échantillon.

Description eulérienne

Il existe deux façons de paramétrer un milieu continu en mouvement :

- la méthode lagrangienne : il s’agit d’un paramétrage particulière. À l’instant initial, les particules du matériau sont ”marquées” dans un système de coordonnées et gardent les mêmes coordonnées au cours du mouvement.
- la méthode eulérienne : par opposition aux coordonnées lagrangiennes, les coordonnées eulériennes sont des coordonnées spatiales. Le référentiel d’observation est muni d’un système de coordonnées fixe qui permet de repérer la position des particules à chaque instant de temps.

Cinématiquement ces deux descriptions sont équivalentes. En pratique il faut être vigilant :

- pour un matériau élastique qui garde la mémoire d’un état de référence fixe, le choix d’un système de coordonnées n’a pas d’importance particulière dans la description.
- pour un matériau perdant progressivement la mémoire de son état initial, la déformation totale est une grandeur qu’on ne sait en général pas définir expérimentalement, sauf si le matériau perd peu de mémoire, ce qui du point de vue de la mécanique reviendrait à formuler une hypothèse de petitesse de la déformation totale.

La seule grandeur cinématique accessible par l’expérience est le champ de vitesse. Il en résulte que l’approche lagrangienne serait ici inappropriée (figure 1.3).

C’est la raison pour laquelle nous privilégions l’approche eulérienne pour l’écriture de la loi de comportement. Les coordonnées lagrangiennes sont inutiles, à moins d’être considérées comme un intermédiaire purement technique au moment de la construction du modèle.

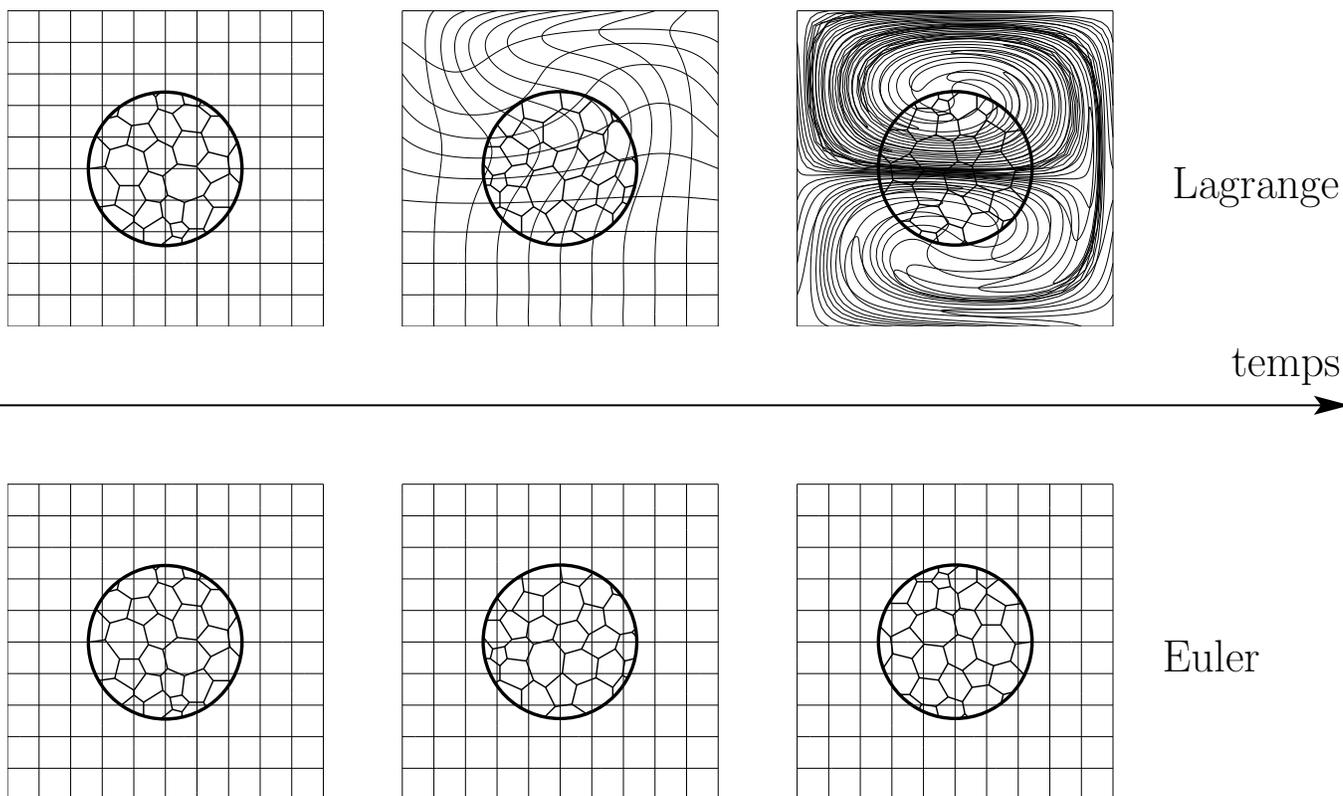


FIGURE 1.3 – Lorsqu’un échantillon de mousse subit de grandes déformations (déformation du maillage), ses objets constitutifs, les bulles, se déforment puisque le matériau perd progressivement la mémoire de son état initial. les coordonnées lagrangiennes (en haut) ne sont pas retenues, les coordonnées eulériennes sont plus pertinentes.

Déformation stockée

Nous avons déjà dit que les bulles exercent des forces les unes sur les autres (forces de pression et de tension interfaciale). Ces forces induisent l'existence d'un champ de contrainte à l'échelle continue (voir [21]).

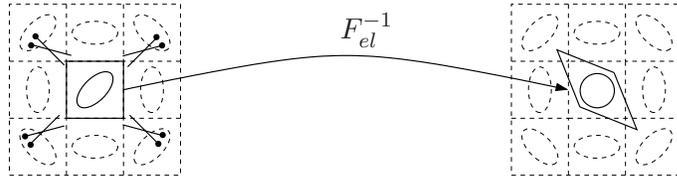


FIGURE 1.4 – La déformation stockée élastiquement correspond à la déformation récupérée en isolant un fragment du matériau de son voisinage.

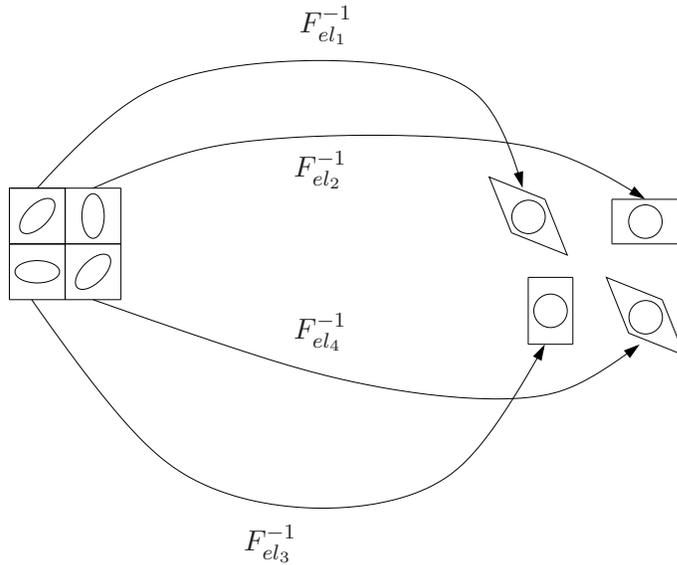


FIGURE 1.5 – L'état relaxé est un état "éclaté" du matériau et n'a donc pas de signification autre que locale.

De telles contraintes sont donc la signature de l'élasticité de la mousse : en effet une bulle change de forme parce qu'elle subit des forces et il y a, du fait de ces contraintes, de la déformation stockée par le matériau. La figure 1.4 nous en donne une image concrète : lorsqu'un fragment du matériau est isolé de son voisinage, il ne subit plus de contraintes, et peut par conséquent relaxer. La déformation récupérée au terme de la relaxation correspond aux facteurs d'étirement de l'ellipse "dessinée" dans le matériau.

Nous appelons état relâché l'état que nous obtiendrions en faisant relaxer tous les fragments du matériau. Nous le notons $\tilde{\Omega}(t)$, par opposition à $\Omega(t)$ qui est l'état réel du milieu à l'instant t .

Nous notons F_{el} le champ (tensoriel) des déformations localement stockées. La connaissance des déformations stockées est équivalente à la connaissance des contraintes qui les génèrent : il existe entre les deux une relation bijective, il s'agit de l'élasticité du matériau.

L'opération décrite ci-dessus ne nous dit rien sur l'orientation des fragments lorsqu'ils ont relaxé. Cette orientation, arbitraire donc non physique, n'intervient pas dans la description de l'élasticité de la mousse. Cette propriété d'indépendance par rotation vis-à-vis de la configuration relâchée caractérise l'isotropie de l'élasticité du matériau.

Nous terminons avec une remarque importante : l'état relâché est un état fictif du matériau. En effet, les fragments, lorsqu'ils ont relaxé, ne s'agencent pas bien entre eux (figure 1.5). En d'autres termes, l'état relâché n'est pas un état global et n'a de sens qu'au niveau local.

1.2.2 Quel modèle rhéologique ?

Nous avons évoqué plus haut les ingrédients à incorporer dans le modèle : élasticité, plasticité et écoulement au-delà du seuil. Pour mieux comprendre comment les articuler au sein d'une équation constitutive tensorielle, il est utile de partir d'un modèle rhéologique. Un modèle rhéologique est une relation qui lie des grandeurs scalaires. Cette relation, qu'elle soit ponctuelle, différentielle ou intégrale, est toujours susceptible d'avoir une extension tensorielle.

Dans un premier temps nous allons rappeler les règles de construction d'un modèle rhéologique, puis nous passons en revue quelques modèles rhéologiques importants pour terminer sur le modèle que nous retiendrons.

Rappels

Les objets de base sont des "cellules". Il y a trois types de cellules (figure 1.6) :

- le ressort
- le piston
- le frottement solide

Chaque cellule subit des forces σ (contrainte) et produit un allongement e (déformation).

- le ressort modélise la composante élastique du comportement. Contrainte et déformation sont liées par la relation :

$$\sigma_{el} = Ge_{el}.$$

- le piston modélise la composante visqueuse du comportement. Nous avons la relation :

$$\sigma_{vi} = \eta \dot{e}_{vi}.$$

- le frottement solide modélise la plasticité. Son interprétation est un peu plus subtile. Dans tous les cas contrainte et déformation sont liées par la relation :

$$\begin{cases} \forall \dot{e}_{pl}, \sigma_{pl} \leq \sigma_y \text{ (l'indice } y \text{ signifie "yield", c'est à dire seuil en anglais),} \\ \sigma_{pl} < \sigma_y \text{ si et seulement si } \dot{e}_{pl} = 0. \end{cases}$$

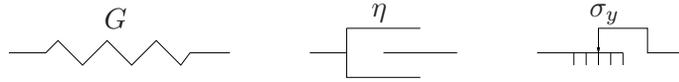


FIGURE 1.6 – Les "briques" de base : le ressort, le piston et le frottement solide.

Un modèle rhéologique correspond à l'assemblage en série et/ou en parallèle de ces cellules élémentaires.

– pour un assemblage en série de deux cellules (figure 1.7) nous avons :

$$e = e_1 + e_2,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

– pour un assemblage en parallèle de deux cellules (figure 1.8) nous avons :

$$e_1 = e_2 = e,$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2.$$

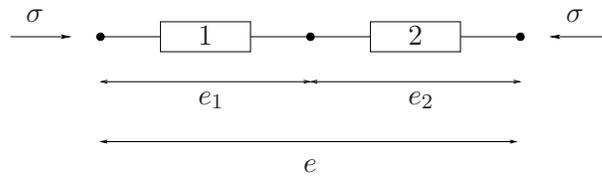


FIGURE 1.7 – Assemblage de deux cellules en série.

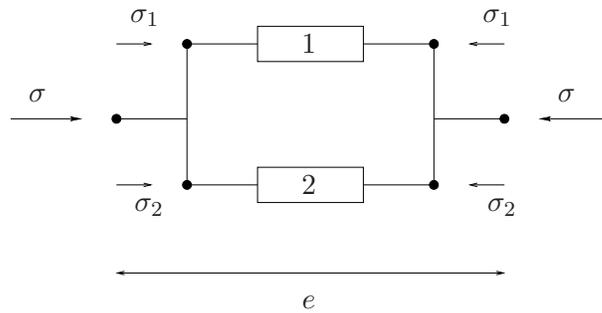


FIGURE 1.8 – Assemblage de deux cellules en parallèle.

Le modèle de Maxwell

Il s'agit de l'assemblage en série d'un ressort et d'un piston (figure 1.9). La cellule de Maxwell peut être complétée par un piston en parallèle auquel cas nous parlons plutôt de modèle de Jeffrey. Les extensions tensorielles de ces modèles sont connues depuis longtemps ([28], [5]).

Pour chaque cellule nous avons :

$$\sigma_{el} = Ge_{el}, \sigma_p = \eta_p \dot{e}_p, \sigma_s = \eta_s \dot{e}_s$$

D'autre part l'assemblage des cellules implique :

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \sigma_p, \sigma = \sigma_s + \sigma_{el} \\ e &= e_{el} + e_p, e_s = e \end{aligned}$$

Posons $\tau = \frac{\eta_p}{G}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{e}_{el} + \dot{e}_p = \dot{e}_{el} + \frac{\sigma_p}{\eta} \\ &= \dot{e}_{el} + \frac{\sigma_{el}}{\eta} = \dot{e}_{el} + \frac{G}{\eta} e_{el} \\ &= \dot{e}_{el} + \frac{e_{el}}{\tau} \end{aligned}$$

Le modèle de Jeffrey s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma = \eta_s \dot{e} + Ge_{el} \\ \dot{e}_{el} + \frac{e_{el}}{\tau} = \dot{e} \end{cases} \quad (1.1)$$

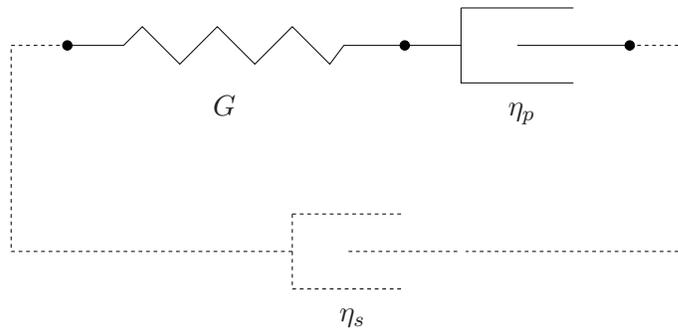


FIGURE 1.9 – le modèle de Maxwell

Le modèle de Bingham

Il s'agit de l'assemblage en parallèle d'un piston et d'un frottement solide (figure 1.10). Pour chaque cellule nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{vi} &= \eta \dot{e}_{vi} \\ \forall \dot{e}_{pl}, \sigma_{pl} \leq \sigma_y, \text{ si } \sigma_{pl} < \sigma_y \text{ alors } \dot{e}_{pl} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

D'autre part l'assemblage des cellules implique :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{vi} + \sigma_{pl} \\ e &= e_{vi} = e_{pl}. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_{pl} &= \sigma_{vi} = \eta \dot{e}_{vi} \\ &= \eta \dot{e}. \end{aligned}$$

Comme $\dot{e}_{pl} = \dot{e}$ la loi de comportement de Bingham s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma - \sigma_{pl} = \eta \dot{e}, \\ \forall \dot{e}, \sigma_{pl} \leq \sigma_y, \text{ si } \sigma_{pl} < \sigma_y \text{ alors } \dot{e} = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons en simplifier la forme. Soit l'application θ telle que :

$$\begin{cases} \theta(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ \theta(x) = 1 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Le modèle de Bingham se réécrit :

$$\theta(\sigma - \sigma_y)(\sigma - \sigma_y) = \eta \dot{e}. \quad (1.4)$$

Le modèle de Maxwell-Bingham

Ce modèle couple les modèles de Maxwell et Bingham (figure 1.11). Il s'agit d'un assemblage en série d'un ressort et d'une cellule de Bingham. Attention : la littérature confond parfois modèles de Bingham et Maxwell-Bingham. Ce modèle étant plus récent que le modèle de Maxwell, ses propriétés sont moins bien étudiées. Une extension tensorielle du modèle a été proposée dans [32] et [33].

La cellule de Maxwell-Bingham peut-être complétée par un piston en parallèle. Pour chaque cellule nous avons :

$$\sigma_{el} = G e_{el}, \theta(\sigma_{bi} - \sigma_y)(\sigma_{bi} - \sigma_y) = \eta_p \dot{e}_{bi}, \sigma_s = \eta_s \dot{e}_s.$$

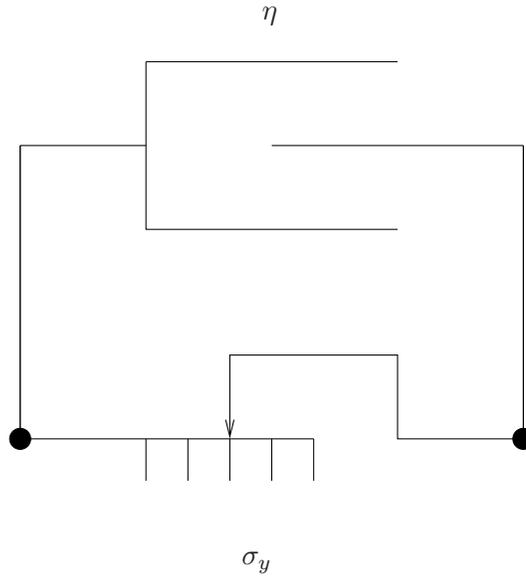


FIGURE 1.10 – Le modèle de Bingham.

D'autre part l'assemblage des cellules implique :

$$\begin{aligned}\sigma_{el} &= \sigma_{bi}, \quad \sigma = \sigma_s + \sigma_{el}, \\ e &= e_{el} + e_{bi}, \quad e_s = e.\end{aligned}$$

Posons :

$$\tau = \frac{\eta p}{G}, \quad e_y = \frac{\sigma_y}{G}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{e}_{el} + \dot{e}_{bi} = \dot{e}_{el} + \frac{\theta(\sigma_{bi} - \sigma_y)}{\eta} (\sigma_{bi} - \sigma_y) \\ &= \dot{e}_{el} + \frac{\theta(\sigma_{el} - \sigma_y)}{\eta} (\sigma_{el} - \sigma_y) \\ &= \dot{e}_{el} + G \frac{\theta(e_{el} - e_y)}{\eta} (e_{el} - e_y) \\ &= \dot{e}_{el} + \frac{\theta(e_{el} - e_y)}{\tau} (e_{el} - e_y).\end{aligned}$$

Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma = \eta_s \dot{e} + G e_{el} \\ \dot{e}_{el} + \frac{\theta(e_{el} - e_y)}{\tau} (e_{el} - e_y) = \dot{e}, \quad \tau = \frac{\eta}{G}. \end{cases} \quad (1.5)$$

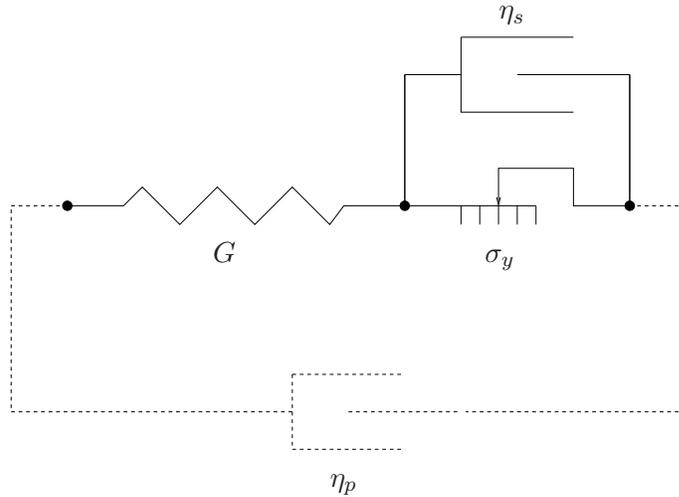


FIGURE 1.11 – Le modèle de Maxwell-Bingham.

Limitations du modèle de Maxwell-Bingham

Compte-tenu des hypothèses de modélisation que nous avons formulées, il semble que le modèle de Maxwell-Bingham soit tout à fait adapté. Ce dernier contient un seuil, produit un comportement purement élastique en dessous du seuil et un écoulement après le seuil.

En fait dans les modèles de type Maxwell une hypothèse de modélisation importante et limitative est toujours sous-entendue : il s'agit d'une hypothèse de petitesse de la déformation élastique e_{el} . En d'autres termes, la loi élastique est toujours une loi linéaire de Hooke. Cette hypothèse s'avère en général satisfaisante pour les fluides qui ne possèdent pas de seuil de contrainte ou pour ceux qui possèdent un seuil σ_y faible devant le module élastique G , ce qui équivaut à dire que $e_y = 0$ ou $e_y \ll 1$.

Les mousses ne rentrent pas toujours dans ce cadre : pour une mousse sèche les bulles subissent de grandes déformations élastiques (disons de l'ordre de l'unité) avant que les premiers réarrangements n'apparaissent.

Il en découle qu'une extension du modèle de Maxwell-Bingham est nécessaire (figure 1.12). A notre connaissance une telle extension n'existe pas. Notre contribution essentielle s'inscrit donc dans le cadre d'une formulation d'un modèle tensoriel de type Maxwell-Bingham valable aux grandes déformations élastiques. D'un point de vue scalaire notre modèle peut s'écrire :

$$\begin{cases} \sigma = \eta_s \dot{e} + \mathcal{E}(e_{el}) \\ e_{el} + \frac{\theta(e_{el} - e_y)}{\tau} (e_{el} - e_y) = \dot{e}. \end{cases} \quad (1.6)$$

\mathcal{E} est l'élasticité du matériau aux grandes déformations.

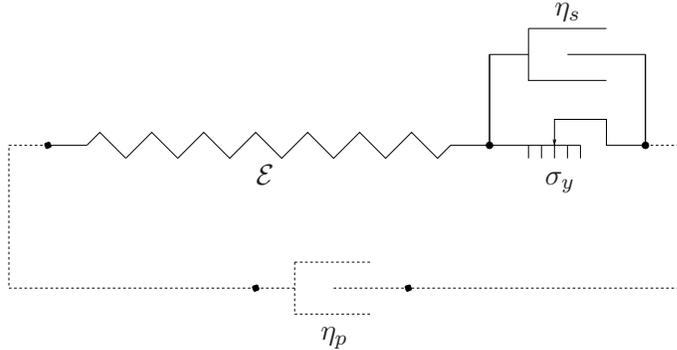


FIGURE 1.12 – Extension du modèle de Maxwell-Bingham. Le long ressort et \mathcal{E} représentent l'élasticité du matériau non-linéaire aux grandes déformations élastiques.

1.3 Description tensorielle

1.3.1 Décomposition de la déformation

Une question générale de mécanique des milieux continus consiste à comprendre comment décrire la cinématique de déformation d'un fluide qui stocke de la déformation : quelles sont les contributions élastiques ? Comment les distingue-t-on des contributions non élastiques ? Nous avons donc affaire à un problème de partition du taux de déformation entre des processus élastiques et des processus anélastiques.

Nous avons vu que les modèles rhéologiques nous suggèrent une décomposition de type additif, les modèles de type Maxwell étant obtenus par l'association en série d'un ressort élastique avec une autre cellule (un piston pour le modèle de Maxwell, une cellule de Bingham pour le modèle de Maxwell-Bingham).

La décomposition du taux de déformation présente de réelles difficultés techniques essentiellement dues à la nature tensorielle des objets manipulés ([26]). Dans ce chapitre nous nous contentons de donner quelques éléments utiles pour l'élaboration du modèle.

L'approche la plus simple consiste à partir d'une décomposition multiplicative de la transformation locale. Si le matériau subit une transformation globale f depuis un certain instant de référence t_0 , Nous appelons transformation locale le champ noté F et tel qu'en coordonnées lagrangiennes :

$$F(t, x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(t, x_0). \quad (1.7)$$

Ce champ décrit à l'ordre 1 le déplacement local des particules ([29]). Ainsi un cercle tracé à l'instant t_0 dans le voisinage d'un point matériel se transforme en ellipse (figure 1.13).

D'autre part, le milieu stocke localement des transformations élastiques. Nous avons noté F_{el} un tel champ. La décomposition multiplicative de la transformation locale repose sur l'hypothèse que tout ce qui dans la transformation locale n'est pas stocké élastiquement est dû à des processus non élastiques.

Il y a donc une transformation anélastique locale notée \tilde{G}_{an} et telle que :

$$F = F_{el} \cdot \tilde{G}_{an} \cdot (F_{el}(t_0))^{-1}.$$

Comme $F_{el}(t_0)$ ne varie pas, nous pouvons aussi définir la transformation anélastique locale comme le champ noté \tilde{F}_{an} et tel que :

$$\tilde{F}_{an} = \tilde{G}_{an} \cdot (F_{el}(t_0))^{-1}.$$

Géométriquement nous interprétons F_{el} et \tilde{F}_{an} comme les contributions élastiques et non élastiques dans la transformation du cercle en ellipse (figure 1.13).

Nous ne saurions nous satisfaire d'une telle description qui fait référence à un état particulier, l'état initial : il s'agit d'un simple intermédiaire de description.

Nous appelons taux de transformation et taux de déformation locaux les champs notés respectivement L et D et tels que :

$$L = \dot{F} \cdot F^{-1}, \quad D = \frac{1}{2} (L + L^t). \quad (1.8)$$

Nous avons noté par un point l'opération de transport, c'est-à-dire la dérivée temporelle en coordonnée lagrangienne. Rappelons que si V est le champ de vitesse local du matériau alors pour tout champ matériel X , l'expression \dot{X} en coordonnées eulériennes est telle que :

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial t} + V \cdot \nabla X.$$

Le champ L est lié au champ de vitesse via la relation :

$$L = \nabla V^t.$$

L'interprétation géométrique des champs L et D est simple (figure 1.13). Soit dx_0 et dx'_0 deux segments matériels dans le voisinage d'un point matériel à l'instant initial. Si nous suivons leur déplacement alors nous avons :

$$dx = F \cdot dx_0, \quad dx' = F \cdot dx'_0,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \dot{dx} &= \overbrace{\dot{F} \cdot dx_0} = \dot{F} \cdot dx_0 = \dot{F} \cdot F^{-1} \cdot dx = L \cdot dx, \\ \overbrace{dx \cdot dx'} &= \dot{dx} \cdot dx' + dx \cdot \dot{dx}' = dx \cdot (L + L^t) \cdot dx' = 2dx \cdot D \cdot dx'. \end{aligned}$$

L mesure donc la vitesse de transformation de l'ellipse tandis que D mesure la variation de la métrique locale.

Nous définissons également des taux de transformation locaux élastique et anélastique, notés respectivement L_{el} et \tilde{L}_{an} , ainsi que des taux de déformation élastique et anélastique, notés respectivement D_{el} et \tilde{D}_{an} , tels

que :

$$\begin{aligned} L_{el} &= \overbrace{\dot{F}_{el}}^{\cdot} \cdot F_{el}^{-1}, \quad D_{el} = \frac{1}{2} (L_{el} + L_{el}^t), \\ \tilde{L}_{an} &= \overbrace{\dot{\tilde{F}}_{an}}^{\cdot} \cdot \tilde{F}_{an}^{-1}, \quad \tilde{D}_{an} = \frac{1}{2} (\tilde{L}_{an} + \tilde{L}_{an}^t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Notons que ni L ni \tilde{L}_{an} ne font référence à la configuration initiale. De plus L , L_{el} et \tilde{L}_{an} sont tels que :

$$\begin{aligned} L &= \dot{F} \cdot F^{-1} \\ &= \overbrace{\dot{F}_{el} \cdot \tilde{F}_{an}}^{\cdot} \cdot \tilde{F}_{an}^{-1} \cdot F_{el}^{-1} = \overbrace{\dot{F}_{el}}^{\cdot} \cdot F_{el}^{-1} + F_{el} \cdot \overbrace{\dot{\tilde{F}}_{an}}^{\cdot} \cdot \tilde{F}_{an}^{-1} \cdot F_{el}^{-1} \\ &= L_{el} + F_{el} \cdot \tilde{L}_{an} \cdot F_{el}^{-1}. \end{aligned}$$

Ce que nous pouvons également écrire :

$$\dot{F}_{el} = L \cdot F_{el} - F_{el} \cdot \tilde{L}_{an} = \nabla V^t \cdot F_{el} - F_{el} \cdot \tilde{L}_{an}. \quad (1.10)$$

Cette équation différentielle ne fait déjà plus référence à la configuration initiale puisque le champ F a disparu. Elle n'est toutefois pas totalement satisfaisante : par construction F_{el} contient des rotations à priori arbitraires et dépourvues de sens physique.

Il est bien plus pertinent d'écrire une équation différentielle sur la déformation élastique. Rappelons que plusieurs points de vue sont possibles pour décrire la déformation :

- avec les conventions de Finger, la déformation élastique est décrite par le champ noté E^+ tel que :

$$E^+ = \frac{1}{2} (B - \text{Id}), \quad B = F_{el} \cdot F_{el}^t. \quad (1.11)$$

- avec les conventions de Cauchy, la déformation élastique est décrite par le champ noté E^- tel que :

$$E^- = \frac{1}{2} (\text{Id} - C), \quad C = F_{el}^{-t} \cdot F_{el}^{-1} = B^{-1}. \quad (1.12)$$

En fait $E^{+,-}$ décrivent la même déformation en adoptant simplement deux points de vue géométriques différents (voir [29], [16]).

L'équation différentielle 1.10 écrite sur F_{el} nous permet d'obtenir celle sur B et C :

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \overbrace{\dot{F}_{el} \cdot F_{el}^t}^{\cdot} = \overbrace{\dot{F}_{el}}^{\cdot} \cdot F_{el}^t + F_{el} \cdot \overbrace{\dot{F}_{el}^t}^{\cdot} \\ &= (L \cdot F_{el} - F_{el} \cdot \tilde{L}_{an}) \cdot F_{el}^t + F_{el} \cdot (F_{el}^t \cdot L^t - \tilde{L}_{an}^t \cdot F_{el}^t) \\ &= L \cdot B + B \cdot L^t - 2F_{el} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^t \\ \dot{B} &= \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - \underbrace{2F_{el} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^t}_{D_{an}^+}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Par définition de E^+ il vient :

$$\begin{aligned} \dot{E}^+ - \nabla V^t \cdot E^+ - E^+ \cdot \nabla V &= D - F_{el} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^t, \\ D &= \underbrace{\dot{E}^+ - \nabla V^t \cdot E^+ - E^+ \cdot \nabla V}_{D_{t,F}^+(E^+)} + F_{el} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^t. \end{aligned} \quad (1.14)$$

De même :

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \widehat{B^{-1}} = -B^{-1} \cdot \dot{B} \cdot B^{-1} \\ &= -B^{-1} \cdot (\nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2F_{el} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^t) \cdot B^{-1} \\ &= -B^{-1} \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot B^{-1} + 2B^{-1} \cdot F_{el} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^t \cdot B^{-1} \\ \dot{C} &= -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C + 2 \underbrace{F_{el}^{-t} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^{-1}}_{D_{an}^-}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Par définition de E^- il vient :

$$\begin{aligned} \dot{E}^- + \nabla V \cdot E^- + E^- \cdot \nabla V^t &= D - F_{el}^{-t} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^{-1} \\ D &= \underbrace{\dot{E}^- + \nabla V \cdot E^- + E^- \cdot \nabla V^t}_{D_{t,F}^-(E^-)} + F_{el}^{-t} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Les relations 1.14 et 1.16 peuvent être considérées comme une généralisation tensorielle de la partition du taux de déformation en une contribution élastique et anélastique.

A ce sujet il y a quelques remarques importantes à faire :

- nous avons envisagé deux façons de décrire la déformation élastique. Il en résulte deux décompositions "concurrentes" qui sont en fait équivalentes, puisque nous pouvons passer de l'une à l'autre via les équations vérifiées par B et C (équations 1.13 et 1.15).

Autrement dit la cinématique de déformation élastique ne dépend pas du champ tensoriel utilisé pour la décrire.

- les contributions élastiques apparaissent sous la forme de dérivées objectives des déformations élastiques, notées $D_{t,F}^{+,-}$ ($E^{+,-}$) (Pour des définitions des dérivées objectives, consulter [22] ou [26]).

Les équations 1.14 et 1.16 montrent clairement qu'à chaque définition de la déformation est associée une unique dérivée objective.

- les champs $F_{el} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^t$ et $F_{el}^{-t} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^{-1}$ sont notés respectivement D_{an}^+ et D_{an}^- . Ils correspondent à des transports du taux de déformation anélastique de la configuration relâchée vers la configuration réelle qui s'écoule.

En fait ces deux tenseurs décrivent la même cinématique de déformation anélastique en adoptant seulement des points de vue géométriques différents liés à la façon dont \tilde{D}_{an} a été transporté.

Prenons l'exemple de $F_{el}^{-t} \cdot \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^{-1}$. Si $\tilde{d}\tilde{x}$, $\tilde{d}\tilde{x}'$, dx et dx' sont tels que :

$$dx = F_{el} \cdot \tilde{d}\tilde{x}, \quad dx' = F_{el} \cdot \tilde{d}\tilde{x}'.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\tilde{d}x \cdot \tilde{d}x'} &= \tilde{d}x \cdot \tilde{D}_{an} \cdot \tilde{d}x \\
 &= (F_{el}^{-1} \cdot dx) \cdot \tilde{D}_{an} \cdot (F_{el}^{-1} \cdot dx') \\
 &= dx \cdot (F_{el}^{-t} \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^{-1}) \cdot dx'.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Le champ $F_{el}^{-t} \tilde{D}_{an} \cdot F_{el}^{-1}$ permet donc d'observer la variation de la métrique due aux processus anélastiques depuis la configuration réelle du matériau.

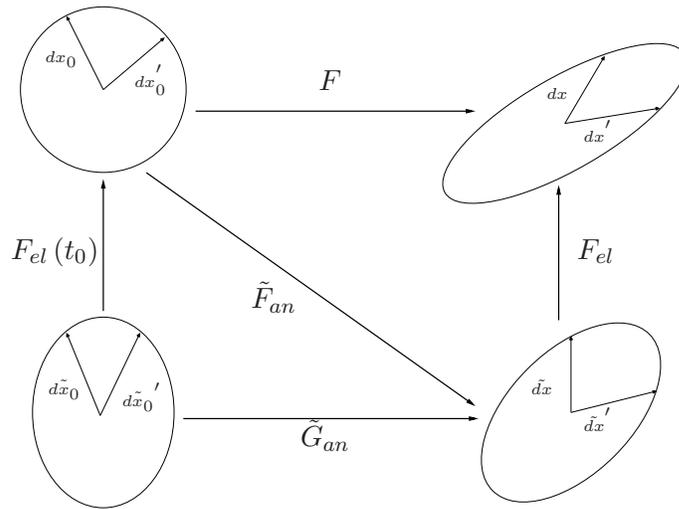


FIGURE 1.13 – Décomposition multiplicative de la tranformation locale. A l'instant t_0 un cercle est tracé dans le voisinage d'un point matériel. L'écoulement déforme le cercle qui à l'ordre 1 se tranforme en une ellipse : le champ F modélise cette transformation. De plus si F admet une décomposition multiplicative alors \tilde{F}_{an} et F_{el} contribuent partiellement à déformer le cercle.

1.3.2 Loi élastique

Nous nous intéressons maintenant à la description de l'élasticité du matériau. L'écriture tensorielle des lois élastiques est décrite dans [6], [11] et [17], [29] et [24]. Nous rappelons ici quelques principes importants et utiles.

Energie élastique

Puisque une mousse est un matériau élastique, nous pouvons lui associer une énergie de déformation élastique notée $w_m(F_{el})$, ici définie par unité de masse (d'où le m en indice).

La transformation élastique locale doit être objective. Cela signifie que deux observateurs placés dans des référentiels notés \mathcal{R} et \mathcal{R}^* observant le même processus de déformation élastique mesurent des transformations notées F_{el} et F_{el}^* telles que :

$$F_{el}^* = Q.F_{el},$$

où Q modélise la rotation de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} . Pour ce qui est de l'énergie élastique, l'objectivité et l'invariance de forme sont en général requises :

- l'objectivité stipule que l'énergie mesurée est invariante par changement de référentiel. Autrement dit nous devons avoir :

$$w_m(F_{el}) = w_m^*(F_{el}^*).$$

- l'invariance de forme se traduit par le fait que la relation mathématique qui permet de calculer l'énergie à partir de la transformation élastique ne dépend pas du référentiel d'observation. Autrement dit :

$$w_m = w_m^*.$$

Ces deux propriétés sont plus conventionnelles que physiques : elles assurent la cohérence d'une théorie générale de l'élasticité. Elles impliquent l'invariance de l'énergie par rotation à gauche :

$$w_m(Q.F_{el}) = w_m(F_{el}).$$

Nous avons également vu que par construction F_{el} n'est définie qu'à une rotation près. Il en découle que l'énergie élastique ne doit pas dépendre des orientations individuelles des éléments de l'état relâché. Cela se traduit par l'invariance de l'énergie par rotation à droite :

$$w_m(F_{el}.Q) = w_m(F_{el}).$$

Cette propriété caractérise l'isotropie matérielle de l'élasticité. L'invariance à droite et à gauche de l'énergie élastique restreint la forme des énergies envisageables : l'énergie élastique peut être décrite comme une fonction isotrope de B ou de C (ce qui est équivalent). Nous avons donc :

$$w_m(F_{el}) = w_m^+(B) = w_m^-(C),$$

l'isotropie des fonctions $w_m^{+,-}$ signifiant que :

$$w_m^+(Q.B.Q^t) = w_m^+(B), \quad w_m^-(Q.C.Q^t) = w_m^-(C).$$

Elle implique que l'énergie ne peut dépendre de B et C que par l'intermédiaire de leurs invariants. Autrement dit il existe des fonctions notées $\bar{w}_m^{+,-}$ définies sur \mathbb{R}^3 et telles que :

$$\begin{aligned} w_m^+(B) &= \bar{w}_m^+(\text{tr}(B), \text{tr}(B^{-1}), \det(B)), \\ w_m^-(C) &= \bar{w}_m^-(\text{tr}(C), \text{tr}(C^{-1}), \det(C)) = \bar{w}_m^+(\text{tr}(C^{-1}), \text{tr}(C), \frac{1}{\det(C)}). \end{aligned}$$

Pour finir des hypothèses de croissance sont faites :

- $w_m^{+,-}$ sont nulles et minimales en $B = \text{Id}$ et $C = \text{Id}$ respectivement.
- $\overline{w}_m^{+,-}$ sont des fonctions strictement convexes sur \mathbb{R}^3 . Pour des élasticités régulières, cela est équivalent à supposer que les matrices hessiennes de $w_m^{+,-}$ sont définies positives.

Cette dernière propriété est connue sous le nom de polyconvexité de l'énergie élastique ([11]).

En général il n'y a pas de risque de confusion sur la variable de déformation utilisée. Dans ce cas nous ne distinguons pas dans les notations w_m , $w_m^{+,-}$ et $\overline{w}_m^{+,-}$, d'où :

$$\begin{aligned} w_m(F_{el}) &= w_m(B) = w_m(C) \\ &= w_m\left(\text{tr}(B), \text{tr}(B^{-1}), \det(B)\right) = w_m\left(\text{tr}(C), \text{tr}(C^{-1}), \det(C)\right). \end{aligned}$$

Contraintes élastiques

Nous avons vu plus haut que le matériau stocke de la déformation élastique parce qu'il subit localement des contraintes. La contrainte, notée Σ_{el} , la déformation et l'énergie sont liées par la relation :

$$\overbrace{\rho w_m(B)}^{\dot{}} = \Sigma_{el} : D_{el}. \quad (1.18)$$

Cette équation nous enseigne que les contraintes élastiques produisent des puissances élastiques qui équilibrent la variation d'énergie élastique au cours du mouvement. Elle nous permet de récupérer explicitement Σ_{el} . En effet nous avons :

$$\overbrace{\rho w_m(B)}^{\dot{}} = \rho \nabla_B w_m(B) : \dot{B}.$$

D'autre part \dot{B} est tel que :

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \overbrace{\dot{F}_{el} \cdot F_{el}^t} \\ &= \dot{F}_{el} \cdot F_{el}^t + F_{el} \cdot \dot{F}_{el}^t \\ &= L_{el} \cdot B + B \cdot L_{el}^t \text{ (relations 1.9)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overbrace{\rho w_m(B)}^{\dot{}} &= \rho \nabla_B w_m(B) : (L_{el} \cdot B + B \cdot L_{el}^t) \\ &= \rho B \cdot \nabla_B w_m(B) : (L_{el} + L_{el}^t) \\ &= 2\rho B \cdot \nabla_B w_m(B) : D_{el}. \end{aligned}$$

La relation 1.18 permet de relier la contrainte à la déformation :

$$\begin{aligned} 2\rho B \cdot \nabla_B w_m(B) : D_{el} &= \Sigma_{el} : D_{el} \\ \Sigma_{el} &= 2\rho \underbrace{B \cdot \nabla_B w_m(B)}_{\mathcal{E}_m^+(B)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Si nous préférons choisir C plutôt que B pour décrire la déformation alors nous avons (attention au signe) :

$$\Sigma_{el} = 2\rho \underbrace{(-C \cdot \nabla_C w_m(C))}_{\varepsilon_m^-(C)}. \quad (1.20)$$

Incompressibilité

Une mousse peut en général être considérée comme un matériau incompressible, à condition que les bulles restent de taille finie et que les modes d'évolution liés au vieillissement soient exclus de la description.

Rappelons que pour un milieu incompressible élastiquement nous avons :

$$\det(F_{el}) = \det(B) = \det(C) = 1.$$

Cette condition qui limite les transformations élastiques admissibles est équivalente à imposer la nullité de la trace du tenseur de taux de déformation élastique D_{el} . En effet :

$$\overbrace{\det(F_{el})} = \det(F_{el}) \operatorname{tr} \left(\overbrace{F_{el}^{-1}} \cdot F_{el} \right) = \det(F_{el}) \operatorname{tr}(L_{el}) = \det(F_{el}) \operatorname{tr}(D_{el}).$$

Dans ces conditions Σ_{el} n'est connue qu'à un facteur sphérique près. En effet si Σ_{el} vérifie la relation 1.18 alors $-p\operatorname{Id} + \Sigma_{el}$ la vérifie aussi puisque par nullité de la trace de D_{el} nous avons :

$$\Sigma_{el} : D_{el} = (-p\operatorname{Id} + \Sigma_{el}) : D_{el}.$$

À partir d'ici nous notons S_{el} la partie de Σ_{el} explicitement donnée par la loi élastique. Si de plus nous imposons à S_{el} d'être nul lorsque il n'y a pas de déformation (convention de l'état relâché) alors nous avons :

$$S_{el} = 2\rho \overbrace{(B \cdot \nabla_B w_m(B) - \nabla_B w_m(\operatorname{Id}))}_{\varepsilon_m^+(B)} = 2\rho \overbrace{(-C \cdot \nabla_C w_m(C) + \nabla_C w_m(\operatorname{Id}))}_{\varepsilon_m^-(C)}$$

$$\Sigma_{el} = -p\operatorname{Id} + S_{el}. \quad (1.21)$$

Un exemple important : élasticité de Mooney-Rivlin

Le modèle de Mooney-Rivlin est un modèle important d'élasticité incompressible. Historiquement la loi élastique de Mooney-Rivlin apparaît pour la première fois dans les années 1950 avec les travaux indépendants de Melvin Mooney sur les élastomères et ceux de Ronald Rivlin sur les adhésifs (voir [3] par exemple).

En pratique la loi de Mooney-Rivlin est utilisée dès que les déformations élastiques ne sont plus petites : les premiers effets non-linéaires apparaissent et la loi de Hooke n'est plus suffisante.

Considérons la déformation stockée comme une perturbation de l'état de repos :

$$B = \operatorname{Id} + \Delta B,$$

$$B^{-1} = C = \operatorname{Id} + \Delta C = (\operatorname{Id} + \Delta B)^{-1}.$$

En supposant que w_m est suffisamment régulière nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
w_m(B) &= \bar{w}_m(\operatorname{tr}(B), \operatorname{tr}(B^{-1})) = \bar{w}_m(\operatorname{tr}(B), \operatorname{tr}(C)) \\
&= \bar{w}_m(\operatorname{tr}(\operatorname{Id} + \Delta B), \operatorname{tr}(\operatorname{Id} + \Delta C)) \\
&= k^+ \operatorname{tr}(\Delta B) + k^- \operatorname{tr}(\Delta C) + o(\Delta B, \Delta C) \\
&= k^+ \operatorname{tr}(B - \operatorname{Id}) + k^- \operatorname{tr}(C - \operatorname{Id}) + o(\Delta B, \Delta C) \\
&= k^+ \operatorname{tr}(B) + k^- \operatorname{tr}(C) - 3(k^+ + k^-) + o(\Delta B, \Delta C).
\end{aligned}$$

Nous avons posé :

$$k^+ = \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial \operatorname{tr}(B)}(\operatorname{tr}(\operatorname{Id})), \quad k^- = \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial \operatorname{tr}(C)}(\operatorname{tr}(\operatorname{Id})), \quad (1.22)$$

avec $k^{+, -} > 0$.

Nous appelons énergie de Mooney-Rivlin la partie principale du développement 1.22 :

$$w_m^{MR}(B) = k^+ \operatorname{tr}(B) + k^- \operatorname{tr}(B^{-1}) - 3(k^+ + k^-).$$

Quelles sont les propriétés mathématiques de l'énergie de Mooney-Rivlin ? Établissons-les rapidement :

- w_m^{MR} est insensible à une éventuelle réorientation de la configuration de référence et est objective.
- \bar{w}_m^{MR} n'est plus strictement convexe mais simplement convexe, sa matrice hessienne étant nulle.
- w_m^{MR} reste positive et minimale en $B = \operatorname{Id}$. Attention : pour démontrer cette minimalité, il faut impérativement tenir compte du fait que $\det(B) = 1$. Plus précisément $B = \operatorname{Id}$ est l'unique solution du problème de minimisation de w_m sous la contrainte $\det(B) = 1$. C'est pour cela que le modèle de Mooney-Rivlin n'est utilisé que dans le cas incompressible.

Il en découle que w_m^{MR} est acceptable mathématiquement.

Posons :

$$\lambda_m = k^+ + k^-, \quad a = \frac{k^+}{k^+ + k^-}. \quad (1.23)$$

Nous avons :

$$w_m^{MR}(B) = \lambda_m \left(a \operatorname{tr}(B) + (1 - a) \operatorname{tr}(B^{-1}) - 3 \right). \quad (1.24)$$

Les formules 1.21 nous donnent le tenseur des contraintes de Mooney-Rivlin, noté S_{el}^{MR} :

$$\begin{aligned}
S_{el}^{MR} &= 2\rho B \cdot \left(\nabla_B w_m^{MR}(B) - \nabla_B w_m^{MR}(\operatorname{Id}) \right) \\
&= 2\rho \lambda_m \left(aB - (1 - a)B^{-1} - (2a - 1)\operatorname{Id} \right).
\end{aligned} \quad (1.25)$$

Notons enfin que la loi de Hooke des petites déformations est une linéarisation de 1.25. Rappelons que dans le cadre des petites déformations, nous faisons l'approximation :

$$\begin{aligned}
\Delta B &= \delta B, \quad |\delta B| \ll 1, \\
B &= \operatorname{Id} + \Delta B = \operatorname{Id} + \delta B, \\
C &= (\operatorname{Id} + \Delta B)^{-1} = \operatorname{Id} - \Delta B + o(\Delta B) \simeq \operatorname{Id} - \delta B.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\Delta C = \delta C \simeq -\delta B.$$

La loi de Hooke s'obtient en linéarisant la relation 1.21 ou, ce qui revient au même, la relation 1.25 :

$$\begin{aligned} \delta S_{el} &= 2\rho\lambda_m (a(\text{Id} + \delta B) - (1-a)(\text{Id} - \delta B) - (2a-1)\text{Id}) \\ &= 2\underbrace{\rho\lambda_m}_G \delta B. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Les lois de Hooke et de Mooney-Rivlin correspondent donc à deux niveaux d'approximation succesifs de la même loi élastique. Dès que les premiers effets non-linéaires apparaissent, mieux vaut utiliser une loi de Mooney-Rivlin.

Terminons avec une remarque utile. Dans le cas incompressible, la relation 1.26 nous enseigne que le module de cisaillement élastique G se récupère à partir de ρ et λ_m :

$$G = \rho\lambda_m = \rho(k^+ + k^-). \quad (1.27)$$

Nous venons de voir de la donnée de G ne caractérise pas entièrement l'élasticité en régime non-linéaire. G sera néanmoins utile pour adimensionner les contraintes élastiques. Nous nous servirons en particulier des fonctions notées $w^{+,-}$ et $\mathcal{E}^{+,-}$ telles que :

$$w^{+,-} = \frac{w_m^{+,-}}{G}, \quad \mathcal{E}^{+,-} = \frac{\mathcal{E}_m^{+,-}}{G}. \quad (1.28)$$

Les relations 1.21 peuvent donc se réécrire :

$$S_{el} = 2G\mathcal{E}^+(B) = 2G\mathcal{E}^-(C). \quad (1.29)$$

Pour une élasticité de Mooney-Rivlin, nous utiliserons des notations un peu différentes mais agréables : $w^+(B)$ et $\mathcal{E}^+(B)$ seront notées $w_a(B, B^{-1})$ et $\mathcal{E}_a(B, B^{-1})$. Nous avons :

$$\begin{aligned} w_a(B, B^{-1}) &= w^+(B) = \text{atr}(B) + (1-a)\text{tr}(B^{-1}) - 3, \\ \mathcal{E}^+(B) &= \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) = aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\text{Id}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

1.3.3 Plasticité

L'élasticité du matériau vient d'être décrite en détail. Il s'agissait d'établir le lien entre la déformation élastique et les contraintes qui la génèrent (équations 1.19, 1.20 et 1.21 dans le cas incompressible).

D'autre part nous avons décrit la cinématique des processus anélastiques et nous avons vu comment de tels processus étaient liés à la cinématique des variables de déformation élastique (équations 1.13 et 1.15).

Pour compléter la description, il reste à décrire l'origine physique des processus anélastiques.

Dans les hypothèses de modélisation que nous avons formulées toute la dynamique est pilotée par les forces élastiques. En effet les premiers processus $T1$ nécessitent une certaine énergie d'activation. Autrement dit, les

forces élastiques doivent avoir atteint une amplitude suffisante correspondant au seuil de fragilité du matériau, c'est à dire au seuil au delà duquel les réarrangements se produisent : c'est le seuil de plasticité du matériau.

D'autre part nous avons supposé qu'une fois le seuil franchi le taux de réarrangements augmentait avec la contrainte élastique, produisant ainsi un écoulement.

Nous allons reprendre tous ces points dans le détail. Avant toute chose, nous allons modifier quelques notations :

- le taux de déformation anélastique \tilde{D}_{an} sera noté \tilde{D}_{pl}
- de même les taux $D_{an}^{+,-}$ seront notés $D_{pl}^{+,-}$

Avec ces nouvelles notations les équations 1.13 et 1.15 se réécrivent :

$$\begin{aligned}\dot{B} &= \nabla V^t . B + B . \nabla V - 2D_{pl}^+, \\ \dot{C} &= -\nabla V . C - C . \nabla V^t + 2D_{pl}^-. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Seuil de plasticité

La notion de seuil de plasticité est liée à celle de domaine élastique ([30]). Le domaine d'élasticité est un domaine ouvert de l'espace des contraintes, noté \mathcal{D}_{el} et tel que :

$$\begin{aligned}\forall \Sigma_{el} \in \overline{\mathcal{D}_{el}}, \quad \tilde{D}_{pl} &= 0, \\ \forall \Sigma_{el} \notin \overline{\mathcal{D}_{el}}, \quad \tilde{D}_{pl} &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Le seuil de plasticité se définit naturellement comme la frontière de \mathcal{D}_{el} , notée $\partial\mathcal{D}_{el}$.

En général le domaine \mathcal{D}_{el} est caractérisé par la donnée d'une application f définie sur l'espace des contraintes, à valeurs dans \mathbb{R}^+ et telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{el} &= f^{-1}([0, K]), \quad K > 0, \\ \partial\mathcal{D}_{el} &= f^{-1}(\{K\}). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Il en découle que le seuil de plasticité correspond à la surface d'isovaleurs K de f .

Ici f et K sont des données matérielles et homogènes à une contrainte. En particulier f ne dépend pas du référentiel d'observation et possède l'invariance de forme. Il en résulte que f doit être isotrope : elle ne peut dépendre de S_{el} que par l'intermédiaire de ses invariants. Cela est équivalent à dire que f peut être décrite comme une fonction symétrique des valeurs propre de S_{el} . Notons $\sigma(S_{el}) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ le spectre de S_{el} . L'isotropie de f implique l'existence de fonctions notées \bar{f} et f^{eigen} telles que :

$$\begin{aligned}f(S_{el}) &= \bar{f}\left(\text{tr}(S_{el}), \frac{1}{2}\left(\text{tr}^2(S_{el}) - \text{tr}(S_{el}^2)\right), \det(S_{el})\right) \\ &= f^{eigen}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f^{eigen}(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3) = f^{eigen}(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1). \end{aligned}$$

Conventionnellement f et K sont définis de façon à être sans dimension (ce qui est toujours possible, quitte à diviser par G par exemple). Voici quelques critères célèbres en théorie de la plasticité (voir [30]) :

– critère de Tresca. Ce critère s'exprime naturellement en fonction de f^{eigen} :

$$f^{eigen}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sup \{\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3 - \sigma_1\} - K.$$

– critère de Von Miseses. Ce critère s'exprime naturellement en fonction de f :

$$f(S_{el}) = \left| \overline{S_{el}} \right| - K.$$

Notons maintenant $\mathcal{D}_{el}^{+,-}$ les sous ensembles tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{el}^+ &= \mathcal{E}_m^{+,-1} \left(\left\{ \frac{\Sigma_{el}}{2\rho}, \Sigma_{el} \in \mathcal{D}_{el} \right\} \right), \\ \mathcal{D}_{el}^- &= \mathcal{E}_m^{-,-1} \left(\left\{ \frac{\Sigma_{el}}{2\rho}, \Sigma_{el} \in \mathcal{D}_{el} \right\} \right). \end{aligned} \quad (1.34)$$

$\mathcal{D}_{el}^{+,-}$ correspondent à des domaines d'élasticité dans les espaces de déformation de Finger et Cauchy respectivement. En effet nous avons :

$$\begin{aligned} \forall B \in \overline{\mathcal{D}_{el}^+}, \tilde{D}_{pl} = 0, \forall B \notin \overline{\mathcal{D}_{el}^+}, \tilde{D}_{pl} \neq 0, \\ \forall C \in \overline{\mathcal{D}_{el}^-}, \tilde{D}_{pl} = 0, \forall C \notin \overline{\mathcal{D}_{el}^-}, \tilde{D}_{pl} \neq 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Posons $f^{+,-} = f \circ \mathcal{E}_m^{+,-}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{el}^+ &= f^{+,-1}([0, K[), \partial \mathcal{E}_m^+ = f^{+,-1}(\{K\}), \\ \mathcal{D}_{el}^- &= f^{-,-1}([0, K[), \partial \mathcal{E}_m^- = f^{-,-1}(\{K\}). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Il est en fait parfois plus pratique de définir le domaine d'élasticité directement dans l'espace des déformations élastiques. C'est notamment le cas lorsque l'élasticité est incompressible.

Écoulement après le seuil : forme tensorielle

Une fois le seuil franchi le matériau s'écoule. Nous avons vu que la contrainte pilotait cet écoulement. Cela signifie qu'il existe des applications, notées $\lambda^{+,-}$ et telles que :

$$D_{pl}^{+,-} = \underbrace{\theta(f(\Sigma_{el}) - K)}_{\text{préfacteur scalaire}} \underbrace{\frac{f(\Sigma_{el}) - K}{\tau}}_{\text{facteur tensoriel}} \overbrace{\lambda^{+,-}(\Sigma_{el})}^{\text{facteur tensoriel}}. \quad (1.37)$$

Il y a plusieurs commentaires à faire. Tout d'abord le préfacteur scalaire est tel que :

– l'application θ a déjà été définie plus haut (équation 1.3).

Ainsi lorsque $\Sigma_{el} \in \mathcal{D}_{el}$, $\theta(f(\Sigma_{el}) - K) = 0$. Autrement dit il n'y a pas de plasticité en dessous du seuil.

– le terme $f(\Sigma_{el}) - K$ ajuste l'intensité de l'écoulement en fonction de l'écart au seuil de plasticité, c'est-à-dire en fonction de l'état de fragilité du matériau.

- Le paramètre τ est homogène à un temps et rend l'expression de droite homogène à une vitesse de déformation.

Concernant les facteurs tensoriels il y a aussi quelques remarques à faire :

- les fonctions $\lambda^{+,-}$ sont sans dimension. Elles pilotent seulement la direction prise par l'écoulement dans l'espace des taux de déformation plastiques.
- physiquement λ^+ et λ^- décrivent le même écoulement. Le choix de l'une ou de l'autre est seulement lié au choix de D_{pl}^+ ou D_{pl}^- pour décrire la cinématique des déformations plastiques. Rappelons qu'un tel choix est lié au choix de la variable de déformation choisie pour décrire l'élasticité du matériau (équations 1.31).
- $\lambda^{+,-}$ possèdent l'invariance de forme et sont objectives. Il en découle que $\lambda^{+,-}$ sont des fonctions isotropes de Σ_{el} .

Les équations 1.31 nous suggèrent d'exprimer l'écoulement plastique en fonction des variables de déformation plutôt qu'en fonction de la contrainte. Pour cette raison nous posons :

$$l^{+,-} = \lambda^{+,-} \circ \mathcal{E}^{+,-}.$$

Les fonctions $l^{+,-}$ sont évidemment des fonctions isotropes. Elles nous permettent de réécrire les relations 1.37 :

$$\begin{aligned} D_{pl}^+ &= \theta (f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} l^+(B), \\ D_{pl}^- &= \theta (f^-(C) - K) \frac{f^-(C) - K}{\tau} l^-(C). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Nous utiliserons une forme factorisée des relations 1.38. Cette factorisation repose sur le fait que :

$$B^{-1}.l^+(B) = l^-(C).C^{-1}. \quad (1.39)$$

En effet les équations 1.31 impliquent :

$$\begin{aligned} -\nabla V.C - C.\nabla V^t + 2D_{pl}^- &= \dot{C} \\ &= \overbrace{B^{-1}}^{\dot{}} \\ &= -B^{-1}.\dot{B}.B^{-1} \\ &= -B^{-1}.\left(\nabla V^t.B + B.\nabla V - 2.D_{pl}^+\right).B^{-1} \\ &= -\nabla V.B^{-1} - B^{-1}\nabla V^t + 2B^{-1}.D_{pl}^+.B^{-1}. \end{aligned}$$

B et C étant inverse l'un de l'autre nous avons :

$$\begin{aligned} D_{pl}^- &= B^{-1}.D_{pl}^+.B^{-1}, \\ B^{-1}.D_{pl}^+ &= D_{pl}^-.C, \\ B^{-1}.l^+(B) &= l^-(C).C^{-1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc définir le noyau \mathcal{G} tel que :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(B, B^{-1}) &= \mathcal{G}(C^{-1}, C) \\ &= B^{-1}.l^+(B) \\ &= l^-(C).C^{-1}.\end{aligned}\tag{1.40}$$

Les équations 1.38 se réécrivent :

$$\begin{aligned}D_{pl}^+ &= \theta (f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} B.\mathcal{G}(B, B^{-1}), \\ D_{pl}^- &= \theta (f^-(C) - K) \frac{f^-(C) - K}{\tau} \mathcal{G}(C^{-1}, C).C.\end{aligned}\tag{1.41}$$

Plasticité et incompressibilité

Les transformations élastiques et plastiques contribuent à faire changer conjointement le volume matériel. En effet Les équations 1.31 et 1.41 impliquent :

$$\begin{aligned}\overbrace{\det(B)}^{\dot{}} &= \det(B) \operatorname{tr} \left(B^{-1} \cdot (\dot{B})^t \right) = \det(B) \operatorname{tr} \left(B^{-1} \cdot \dot{B} \right) \\ &= \det(B) \operatorname{tr} \left(B^{-1} \cdot \left(\nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2D_{pl}^+ \right) \right) \\ &= 2\det(B) \operatorname{tr} \left(D - B^{-1} \cdot D_{pl}^+ \right) \\ &= 2\det(B) \left(\nabla \cdot V - \operatorname{tr} \left(B^{-1} \cdot D_{pl}^+ \right) \right) \\ &= 2\det(B) \left(\nabla \cdot V + 2\theta (f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} \operatorname{tr} \left(\mathcal{G}(B, B^{-1}) \right) \right).\end{aligned}\tag{1.42}$$

Remarquons qu'à l'intérieur du domaine d'élasticité \mathcal{D}_{el}^+ , $D_{pl}^+ = 0$ et :

$$\overbrace{\det(B)}^{\dot{}} = 2\det(B) \nabla \cdot V.$$

Il est donc équivalent d'imposer l'incompressibilité de l'écoulement et celle de l'élasticité.

D'autre part l'équation 1.42 nous enseigne qu'en dehors du domaine élastique, pour imposer l'incompressibilité de l'écoulement il faut d'une part imposer l'incompressibilité de l'élasticité mais aussi imposer la nullité de la trace du noyau \mathcal{G} .

Plasticité et dissipation

Nous avons vu que physiquement la plasticité doit faire relaxer les contraintes élastiques. Nous allons voir que cela se traduit par une condition simple sur champs $D_{pl}^{+,-}$. En effet le second principe de la thermodynamique

nous impose :

$$\Sigma_{el} : D - \overbrace{\rho w_m^+ (B)} \geq 0, \quad (1.43)$$

ce qui est équivalent à :

$$\Sigma_{el} : D - \overbrace{\rho w_m^- (C)} \geq 0. \quad (1.44)$$

Nous allons exploiter l'inégalité 1.43. L'équation 1.19 implique :

$$\Sigma_{el} : D = 2\rho \mathcal{E}_m^+ (B) : D = 2\rho B \cdot \nabla_B w_m^+ (B) : D.$$

D'autre part d'après les équations 1.31 nous avons :

$$\begin{aligned} \overbrace{\rho w_m^+ (B)} &= \rho \nabla_B w_m^+ (B) : \dot{B} \\ &= \rho \nabla_B w_m^+ (B) : \left(\nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2D_{pl}^+ \right) \\ &= 2\rho \left(B \cdot \nabla_B w_m^+ (B) : \nabla V - \nabla_B w_m^+ (B) : D_{pl}^+ \right) \\ &= 2\rho \left(B \cdot \nabla_B w_m^+ (B) : D - \nabla_B w_m^+ (B) : D_{pl}^+ \right). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Finalement la condition de dissipation s'écrit :

$$\nabla_B w^+ (B) : D_{pl}^+ \geq 0 \quad (1.46)$$

Si nous avons mené le même calcul en choisissant l'équation sur C plutôt que celle sur B nous aurions eu la condition équivalente suivante :

$$\nabla_B w^- (C) : D_{pl}^- \leq 0 \text{ (attention au sens de cette égalité!)}. \quad (1.47)$$

Remarquons que les conditions 1.46 et 1.47 se réécrivent en utilisant le noyau \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} \nabla_B w^+ (B) : D_{pl}^+ \geq 0 &\Leftrightarrow \nabla_B w^+ (B) : \left(B \cdot \mathcal{G} \left(B, B^{-1} \right) \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow B \cdot \nabla_B w^+ (B) : \mathcal{G} \left(B, B^{-1} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{E}^+ (B) : \mathcal{G} \left(B, B^{-1} \right) \geq 0, \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \nabla_B w^+ (B) : D_{pl}^+ \geq 0 &\Leftrightarrow \nabla_C w^- (C) : D_{pl}^- \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \nabla_C w^- (C) : \left(\mathcal{G} \left(C^{-1}, C \right) \cdot C \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -C \cdot \nabla_C w^- (C) : \mathcal{G} \left(C^{-1}, C \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{E}^- (C) : \mathcal{G} \left(C^{-1}, C \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Dans le cas où la plasticité ne provoque pas de changements du volume élastique, la trace de \mathcal{G} est nulle, les conditions 1.48 et 1.49 deviennent :

$$\nabla_B w^+(B) : D_{pl}^+ \geq 0 \Leftrightarrow \overline{\mathcal{E}^+(B)} : \mathcal{G}(B, B^{-1}) \geq 0 \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \nabla_C w^-(C) : D_{pl}^- \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{\mathcal{E}^-(C)} : \mathcal{G}(C^{-1}, C) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Notons qu'ici \overline{X} désigne la partie déviatoire (c'est-à-dire à trace nulle) de X :

$$\overline{X} = X - \frac{1}{3} \text{tr}(X) \text{Id}.$$

Les conditions 1.48 et 1.49 sont très précieuses : elles nous permettent de mettre en évidence des formes simples de noyaux satisfaisant le second principe. Par exemple pour respecter la condition 1.48 il suffit de se donner une application \mathcal{H} telle que :

- $\mathcal{H}(B, B^{-1})$ est toujours symétrique et défini-positif
- \mathcal{G} et \mathcal{H} sont liés par la relation :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(B, B^{-1}) &= \mathcal{H}(B, B^{-1}) \cdot \mathcal{E}^+(B), \\ \mathcal{G}(C^{-1}, C) &= \mathcal{H}(C^{-1}, C) \cdot \mathcal{E}^-(C). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Dans ce cas la dissipation vaut :

$$\begin{aligned} D_{pl}^+ : \nabla_B w^+(B) &= \theta (f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} \mathcal{G}(B, B^{-1}) : \mathcal{E}^+(B) \\ &= \theta (f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} \mathcal{H}(B, B^{-1}) : (\mathcal{E}^+(B))^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Si le noyau de plasticité \mathcal{G} est à trace nulle alors la relation 1.52 doit être un peu modifiée :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(B, B^{-1}) &= \overline{\overline{\mathcal{H}(B, B^{-1}) \cdot \mathcal{E}^+(B)}}, \\ \mathcal{G}(C^{-1}, C) &= \overline{\overline{\mathcal{H}(C^{-1}, C) \cdot \mathcal{E}^-(C)}}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Dans ce cas la dissipation vaut :

$$\begin{aligned} D_{pl}^+ : \nabla_B w^+(B) &= \theta (f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} \mathcal{G}(B, B^{-1}) : \mathcal{E}^+(B) \\ &= \theta (f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} \mathcal{H}(B, B^{-1}) : \overline{(\mathcal{E}^+(B))^2} \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Quelques exemples

Nous terminons la description de la plasticité avec quelques exemples de noyaux \mathcal{G} et \mathcal{H} .

Pour que la condition 1.46 soit trivialement réalisée il suffit de choisir D_{pl}^+ aligné sur $\nabla_B w^+(B)$ ce qui revient à imposer :

$$\begin{aligned} l^+(B) &= \nabla_B w^+(B), \\ B.\mathcal{G}(B, B^{-1}) &= B^{-1}.\mathcal{E}^+(B), \\ \mathcal{G}(B, B^{-1}) &= B^{-2}.\mathcal{E}^+(B). \end{aligned} \tag{1.56}$$

Dans ce cas nous avons :

$$\mathcal{H}(B, B^{-1}) = B^{-2}. \tag{1.57}$$

Nous qualifions de sur-convecté ce type de plasticité. D'un autre côté la condition 1.47 est évidemment réalisée lorsque D_{pl}^- aligné sur $\nabla_C w^-(C)$ ce qui revient à imposer (attention au signe!) :

$$\begin{aligned} l^-(C) &= -\nabla_C w^-(C), \\ C.\mathcal{G}(C^{-1}, C) &= C^{-1}.\mathcal{E}^-(C), \\ \mathcal{G}(C^{-1}, C) &= C^{-2}.\mathcal{E}^-(C). \end{aligned} \tag{1.58}$$

Dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(C^{-1}, C) &= C^{-2}, \\ \mathcal{H}(B, B^{-1}) &= B^2. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Nous qualifions de sous-convecté ce type de plasticité.

Il est clair que les modèles de plasticité sur-convectée et sous-convectée ne sont pas équivalents (nous avons deux noyaux \mathcal{H} distincts) alors même que les conditions 1.46 et 1.47 le sont ! En fait nous pouvons prendre une interpolation de ces deux cas :

$$\mathcal{H}_b(B, B^{-1}) = bB^{-2} + (1-b)B^2, \quad b \in [0, 1]. \tag{1.60}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} D_{pl}^+ &= \theta(f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} B.\mathcal{H}_b(B, B^{-1}).\mathcal{E}^+(B) \\ D_{pl}^- &= \theta(f^-(C) - K) \frac{f^-(C) - K}{\tau} \mathcal{H}_b(C^{-1}, C).\mathcal{E}^-(C).C. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Lorsque la plasticité ne fait pas varier le volume élastique ces formules nécessitent une correction :

$$\begin{aligned} D_{pl}^+ &= \theta(f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} \overline{\overline{B.\mathcal{H}_b(B, B^{-1}).\mathcal{E}^+(B)}} \\ D_{pl}^- &= \theta(f^-(C) - K) \frac{f^-(C) - K}{\tau} \overline{\overline{\mathcal{H}_b(C^{-1}, C).\mathcal{E}^-(C).C}}. \end{aligned} \tag{1.62}$$

1.3.4 Récapitulatif

Nous terminons cette section avec une rapide synthèse. L'objectif était de formuler des lois de comportement incluant les mêmes ingrédients physiques que le modèle scalaire 1.6.

Ici la loi de comportement correspond à la donnée conjointe :

- de la loi élastique caractérisée par une énergie élastique $w^{+,-}$
- du domaine d'élasticité caractérisé par la donnée des applications $f^{+,-}$ et du seuil K
- de l'écoulement au-delà du seuil, caractérisé par le noyau \mathcal{G} .

Il y a deux cas à considérer :

- cas compressible. Nous avons :

$$\begin{cases} \Sigma_{el} = 2\rho\lambda_m\mathcal{E}^+(B) \\ \partial_t B + V.\nabla B = \nabla V^t.B + B.\nabla V - 2\theta(f^+(B) - K)\frac{f^+(B)-K}{\tau}B.\mathcal{G}(B, B^{-1}), \end{cases} \quad (1.63)$$

ou la formulation équivalente (formulation en C) :

$$\begin{cases} \Sigma_{el} = -2\rho\lambda_m\mathcal{E}^-(C) \\ \partial_t C + V.\nabla C = -\nabla V.C - C.\nabla V^t + 2\theta(f^-(C) - K)\frac{f^-(C)-K}{\tau}.\mathcal{G}(C^{-1}, C).C. \end{cases} \quad (1.64)$$

- cas incompressible. Dans ce cas $\text{tr}(\mathcal{G}) = 0$. Nous avons :

$$\begin{cases} \Sigma_{el} = -p\text{Id} + S_{el} \\ S_{el} = 2\rho\lambda_m\mathcal{E}^+(B) \\ \partial_t B + V.\nabla B = \nabla V^t.B + B.\nabla V - 2\theta(f^+(B) - K)\frac{f^+(B)-K}{\tau}B.\mathcal{G}(B, B^{-1}), \end{cases} \quad (1.65)$$

ou :

$$\begin{cases} \Sigma_{el} = -p\text{Id} + S_{el} \\ S_{el} = -2\rho\lambda_m\mathcal{E}^-(C) \\ \partial_t C + V.\nabla C = -\nabla V.C - C.\nabla V^t + 2\theta(f^-(C) - K)\frac{f^-(C)-K}{\tau}\mathcal{G}(C^{-1}, C).C. \end{cases} \quad (1.66)$$

Dans le cadre de notre travail nous n'étudions que le cas incompressible. Pour prendre en compte les effets non-linéaires de l'élasticité nous considérerons des modèles élastiques de Mooney-Rivlin :

$$\begin{aligned} w^+(B) &= w_a(B, B^{-1}) = a\text{tr}(B) + (1-a)\text{tr}(B^{-1}) - 3, \\ \mathcal{E}^+(B) &= \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) = aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\text{Id}. \end{aligned}$$

Rappelons que le tenseur des contraintes total peut contenir une contribution purement visqueuse associée au piston en parallèle dans le modèle rhéologique 1.12. Si Σ est le tenseur des contraintes totales alors nous avons :

$$\begin{aligned} \Sigma &= S_{el} + 2\eta D - p\text{Id} \\ &= 2G\mathcal{E}^+(B) + \eta(\nabla V + \nabla V^t) - p\text{Id}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Le modèle contient beaucoup de paramètres :

- G , a , η peuvent être mesurés expérimentalement, avec des valeurs qui dépendent de variables structurelles telles que la taille de bulles, la fraction fluide ([12], [21]).
- Le paramètre K peut également être mesuré dans des cas où un modèle purement scalaire suffit à décrire, au moins qualitativement, la réponse du matériau. Dans une description tensorielle cela n'est malheureusement plus possible : il faut au préalable connaître la forme de la fonction critère et à notre connaissance une telle étude n'existe pas. De même nous ne disposons d'aucune donnée nous permettant de fixer une forme du noyau d'écoulement \mathcal{G} adaptée à la description de l'écoulement d'une mousse après le seuil. En l'absence de toute indication expérimentale sur les paramètres de plasticité, ces derniers doivent être considérés comme libres. Néanmoins dans le cadre de ce travail nous nous intéresserons plus spécifiquement aux modèles dont les non-linéarités plastiques sont telles que :

$$\begin{aligned}
f^+(B) &= w^+(B) \\
&= w_a(B, B^{-1}) = a \operatorname{tr}(B) + (1-a) \operatorname{tr}(B^{-1}) - 3, \\
\mathcal{G}(B, B^{-1}) &= \overline{\overline{\mathcal{H}_b(B, B^{-1}) \cdot \mathcal{E}_a(B, B^{-1})}} \\
&= \overline{\overline{(bB^{-2} + (1-b)B^2) \cdot aB - (1-a)B^{-1}}}.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

La fonction seuil est donc décrite par l'énergie élastique du matériau tandis que le noyau plastique est décrit comme une interpolation des cas purement sur-convectés et sous-convectés.

Finalement la loi de comportement se réécrit :

$$\begin{cases} \Sigma = 2G\mathcal{E}_a(B, B^{-1}) + 2\eta D - p\operatorname{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta (f^+(B) - K) \frac{f^+(B) - K}{\tau} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}). \end{cases} \tag{1.69}$$

1.4 Hiérarchie de systèmes

1.4.1 Le système complet

Pour décrire l'écoulement il faut coupler la loi de comportement du matériau aux équations de conservation de la mécanique des milieux continus. Il faut également compléter le système par des conditions aux limites et des conditions initiales convenables, choisies en fonction du contexte d'écoulement retenu. Nous décrivons ce couplage.

Soit Ω le domaine d'observation fixe de \mathbb{R}^3 . Nous notons n la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Nous nous restreignons à l'étude d'écoulements incompressibles. De plus nous supposons que la densité du milieu est homogène. Nous avons donc :

$$\nabla \cdot V = 0, \exists \bar{\rho} > 0, \forall t, \forall x, \rho(t, x) = \bar{\rho}. \tag{1.70}$$

Pour presque toutes nos applications nous nous retrouvons à des conditions aux limites de cisaillement au bord pour V :

$$V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \tag{1.71}$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\partial_t V + V \cdot \nabla V) &= \nabla \cdot \Sigma \\
&= \nabla \cdot S_{el} + 2\eta \nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^t) - \nabla p \\
&= 2\bar{\rho} \lambda_m \nabla \cdot \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) + \eta \Delta V - \nabla p.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Il reste à imposer des conditions initiales. Nous choisissons un champ de déformation élastique B_0 et un champ de vitesse V_0 tels que :

$$\det(B_0) = 1, \nabla \cdot V_0 = 0.$$

Le système complet s'écrit :

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l}
\bar{\rho}(\partial_t V + V \cdot \nabla V) = \nabla \cdot S_{el} + \eta \Delta V - \nabla p \\
S_{el} = 2\bar{\rho} \lambda_m \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) \\
\partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta (w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{\tau} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\
\nabla \cdot V = 0 \\
B(t=0) = B_0 \\
V(t=0) = V_0 \\
V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0.
\end{array} \right. \tag{1.73}$$

Remarquons que dans l'équation sur B la seule partie à être non locale en B correspond au transport de B selon V . Avec des conditions aux limites de glissement pour V il est inutile de prescrire des conditions aux limites pour B .

1.4.2 Formulation adimensionnelle, hiérarchie des modèles

L'adimensionnement d'un système permet d'apprécier l'importance des différentes contributions du système. Cet adimensionnement doit toujours dépendre du contexte d'écoulement. Ici nous considérons le cas le plus simple : l'écoulement est caractérisé par une unique vitesse caractéristique \bar{V} et une unique longueur caractéristique \bar{L} . Posons :

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{V}}{\bar{L}}, \bar{T} = \frac{1}{\bar{\gamma}}.$$

Nous définissons les nombres sans dimension Re , α et We tels que :

$$Re = \frac{\bar{\rho} \bar{V} \bar{L}}{\eta}, \alpha = \frac{2\bar{\rho} \lambda_m}{\eta \bar{\gamma}}, We = \frac{\tau}{\bar{T}}.$$

Si nous effectuons les adimensionnements suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\bar{L}} &\text{ devient } x, \frac{t}{\bar{T}} &\text{ devient } t, \frac{V}{\bar{V}} &\text{ devient } V, \\
\frac{S_{el}}{\eta \bar{\gamma}} &\text{ devient } \alpha S, \frac{p}{\eta \bar{\gamma}} &\text{ devient } p.
\end{aligned}$$

alors le système \mathcal{S} se réécrit :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} Re(\partial_t V + V \cdot \nabla V) = \alpha \nabla \cdot S + \Delta V - \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) = aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\text{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta(w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ V(t=0) = V_0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \end{cases}$$

Dans l'approximation de Stokes ($Re \ll 1$) les termes de transport dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement sont négligeables devant les termes visqueux. Le système \mathcal{S}_1 devient :

$$\mathcal{S}_2 \begin{cases} -\Delta V = \alpha \nabla \cdot S - \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) = aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\text{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta(w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant que les effets élastiques soient dominants et les effets visqueux négligeables. L'équation de Stokes est remplacée par une équation de conservation des contraintes élastiques. Le système \mathcal{S}_2 devient :

$$\mathcal{S}_3 \begin{cases} \nabla \cdot S = \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) = aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\text{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta(w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \end{cases}$$

Chapitre 2

Théorèmes d'existence

Dans le chapitre précédent nous avons construit un nouveau modèle mécanique pour décrire le comportement mécanique de matériaux tels que les mousses liquides. La loi de comportement mécanique a ensuite été couplée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Un adimensionnement du système complet nous a permis de mettre en évidence trois régimes d'écoulement.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'existence de solutions régulières du système pour chacun de ces régimes. Nous verrons que si les deux premiers se traitent par des méthodes mathématiques classiques (point fixe de Schauder), le troisième régime est plus difficile à traiter. Pour ce dernier nous établissons un résultat partiel d'ellipticité. Nous pensons néanmoins qu'un tel résultat devrait ouvrir ultérieurement des perspectives numériques.

2.1 Notations, rappels

Nous nous contentons ici d'établir quelques notations et rappeler des outils classiques couramment utilisés dans l'analyse des équations de Navier-Stokes incompressibles. Pour plus de détails le lecteur pourra par exemple consulter les ouvrages [7], [36] et [37].

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion nous utilisons les mêmes notations pour des espaces fonctionnels correspondant à des champs scalaires, vectoriels et tensoriels :

- $(\cdot, \cdot)_p$ et $|\cdot|_p$ pour le produit scalaire et la norme sur $L^p(\Omega)$;
- $((\cdot, \cdot))_s$ et $\|\cdot\|_s$ pour le produit scalaire et la norme sur $H^s(\Omega)$.

Nous notons $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ et à support compact dans Ω . Nous définissons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\Omega) &= \{U \in \mathcal{D}(\Omega), \nabla \cdot U = 0 \text{ et } U = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \\ U^s(\Omega) &= \overline{\mathcal{U}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}. \end{aligned}$$

Les espaces $U^0(\Omega)$ et $U^1(\Omega)$ constituent le cadre fonctionnel classique pour les équations de Navier-Stokes incompressibles.

Si $s = 1$ alors nous avons :

$$U^1(\Omega) = \left\{ U \in H^1(\Omega), \nabla \cdot U = 0 \text{ et } U = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

tandis que si $s = 0$:

$$U^0(\Omega) = \left\{ U \in L^2(\Omega), \nabla \cdot U = 0 \text{ et } U \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

n étant le normal unitaire sortant.

Dans ce cadre fonctionnel, la décomposition de Leray joue un rôle très important. Nous avons en effet la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2(\Omega)^d = U^0(\Omega) \oplus \nabla H^1(\Omega).$$

Nous notons \mathbb{P} le projecteur de Leray, c'est-à-dire le projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega)$ sur $U^0(\Omega)$.

Nous terminons cette section par quelques rappels sur l'opérateur de Stokes. Il s'agit d'un opérateur non-borné $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A}U &= -\mathbb{P}\Delta U. \end{aligned}$$

Autrement dit nous avons $\mathcal{A} = \mathbb{P} \circ \Delta$. \mathcal{A} est un opérateur auto-adjoint positif à résolvante compacte. 0 étant dans l'ensemble résolvant, \mathcal{A}^{-1} est continu. De plus nous avons l'important résultat de régularité (voir [7]) :

$$\forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap H^{s+2}(\Omega), \|U\|_{s+2} \leq M \|\mathcal{A}U\|_s. \quad (2.1)$$

2.2 Existence de solutions régulières pour \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2

L'objectif de la section est d'étudier l'existence de solutions régulières pour les systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(\partial_t V + V \cdot \nabla V) = \alpha \nabla \cdot S + \Delta V - \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) = aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\operatorname{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta(w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{W_e} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ V(t=0) = V_0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \end{array} \right. \\ \mathcal{S}_2 &\left\{ \begin{array}{l} -\Delta V = \alpha \nabla \cdot S - \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) = aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\operatorname{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta(w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{W_e} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Mathématiquement, ces deux systèmes se traitent exactement de la même façon. Le système \mathcal{S}_2 est même plus simple que \mathcal{S}_1 : l'équation de Navier-Stokes qui contient des non linéarités liées au terme de transport est remplacée par une simple équation elliptique de Stokes.

Nous allons donc nous focaliser sur le système \mathcal{S}_1 . Les énoncés ainsi que leurs preuves étant exactement les mêmes lorsque l'équation de Navier-Stokes est remplacée par l'équation de Stokes.

Pour simplifier nous prendrons dès maintenant :

$$Re = \alpha = We = K = 1.$$

D'autre part pour faciliter le traitement mathématique du système il faut approcher la fonction d'Heavyside θ par une fonction plus régulière. Nous la remplaçons par une fonction de type tangente hyperbolique toujours notée θ et telle que :

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right), \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Nous avons :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} \partial_t V + V \cdot \nabla V = \nabla \cdot S + \Delta V - \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, C) = aB - (1-a)C - (2a-1)\text{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta(w_a(B, B^{-1}) - 1)(w_a(B, B^{-1}) - 1)B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ V(t=0) = V_0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Le terme de contrainte élastique \mathcal{E}_a est non-linéaire en B . Pour se éliminer la non-linéarité dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, il suffit de poser :

$$C := B^{-1}.$$

Comme l'équation sur C s'écrit :

$$\partial_t C + V \cdot \nabla C = -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C + 2\theta(w_a(B, C) - 1)(w_a(B, C) - 1)\mathcal{G}(B, C) \cdot C.$$

Il reste à rajouter l'équation sur C au système \mathcal{S}_1 qui se réécrit :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} \partial_t V + V \cdot \nabla V = \nabla \cdot S + \Delta V - \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, C) = aB - (1-a)C - (2a-1)\text{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta(w_a(B, C) - 1)(w_a(B, C) - 1)B \cdot \mathcal{G}(B, C) \\ \partial_t C + V \cdot \nabla C = -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C + 2\theta(w_a(B, C) - 1)(w_a(B, C) - 1)\mathcal{G}(B, C) \cdot C \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ C(t=0) = C_0 = B_0^{-1} \\ V(t=0) = V_0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce problème est non homogène sur $\partial\Omega$. Pour le transformer en un problème homogène au bord, il suffit de relever les conditions aux limites sur la vitesse. Nous supposons que la régularité sur V^{bord} l'autorise et nous notons H un relèvement de V^{bord} sur Ω :

$$H = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, \nabla \cdot H = 0.$$

Il suffit de poser $V = U + H$ et \mathcal{S}_1 se réécrit :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} V = U + H \\ \partial_t U - \Delta U + \nabla p = \alpha \nabla \cdot S - V \cdot \nabla V + \Delta H \\ S = \mathcal{E}_a(B, C) = aB - (1-a)C - (2a-1) \text{Id} \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta (w_a(B, C) - 1) (w_a(B, C) - 1) B \cdot \mathcal{G}(B, C) \\ \partial_t C + V \cdot \nabla C = -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C + 2\theta (w_a(B, C) - 1) (w_a(B, C) - 1) \mathcal{G}(B, C) \cdot C \\ \nabla \cdot U = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ C(t=0) = C_0 = (B_0)^{-1} \\ U(t=0) = U_0 = V_0 - H \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans cette section notre objectif sera de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Supposons que :*

$$\begin{aligned} U_0 &\in U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ B_0 &\in H^2(\Omega), C_0 \in H^2(\Omega), \\ V^{bord} &\in H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Alors il existe $T > 0$ et (U, B, C) solution de \mathcal{S}_1 , avec :

$$\begin{aligned} U &\in L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)), \\ \partial_t U &\in L^\infty(0, T; U^0(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega)), \\ B &\in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), C \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \\ \partial_t B &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \partial_t C \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Nous allons résoudre \mathcal{S}_1 par une méthode de type point fixe de Schauder. Cette approche n'est pas nouvelle : dans [31] et [10], des méthodes de points fixes sont utilisées pour obtenir des solutions régulières pour des systèmes comportant une loi de comportement visco-élastique de Maxwell couplée à une équation de Navier-Stokes.

2.2.1 Résolution du problème linéarisé

Supposons que \tilde{V} , \tilde{B} et \tilde{C} sont connus. Nous posons :

$$\tilde{S} = \mathcal{E}_a(\tilde{B}, \tilde{C}),$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}(\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{V}, H) &= \nabla \cdot \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{V} + \Delta H, \\ \tilde{\mathcal{G}} &= -2\theta \left(w_a(\tilde{B}, \tilde{C}) - 1 \right) \left(w_a(\tilde{B}, \tilde{C}) - 1 \right) \mathcal{G}(\tilde{B}, \tilde{C}).\end{aligned}$$

Le problème linéarisé s'écrit :

$$\mathcal{S}_1^{lin} \begin{cases} V = U + H \\ \partial_t U - \Delta U + \nabla p = \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{V}, H) \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V + B \cdot \tilde{\mathcal{G}} \\ \partial_t C + V \cdot \nabla C = -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C - \tilde{\mathcal{G}} \cdot C \\ \nabla \cdot U = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ C(t=0) = C_0 = (B_0)^{-1} \\ U(t=0) = U_0 = V_0 - H \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous commençons par résoudre \mathcal{S}_1^{lin} . Ce système se résout en cascade :

- l'équation de Stokes donne U connaissant $\tilde{\mathcal{S}}$ et U_0 .
- la première équation sur le tenseur de Cauchy donne B connaissant $\tilde{\mathcal{G}}$, $V = U + H$ et B_0 . Il en est de même pour l'équation sur le tenseur de Cauchy.

Nous allons préciser les conditions sous lesquelles chaque équation est convenablement résolue.

Equation de Stokes

Considérons le système suivant :

$$\mathcal{S}_1^{Stokes} \begin{cases} \partial_t U - \Delta U + \nabla p = \tilde{\mathcal{S}} \\ \nabla \cdot U = 0 \\ U(t=0) = U_0 \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous rappelons que le terme de pression n'est pas une inconnue à proprement parler. En effet la pression s'ajuste à chaque instant de façon à équilibrer les contributions du laplacien et du terme source et respecter ainsi la contrainte de divergence nulle. Pour s'en débarrasser il est usuel de projeter l'équation sur U sur $U^0(\Omega)$. \mathcal{S}_1^{Stokes} se réécrit :

$$\mathcal{S}_1^{Stokes} \begin{cases} \partial_t U + \mathcal{A}U = \mathbb{P}\tilde{\mathcal{S}} \\ \nabla \cdot U = 0 \\ U(t=0) = U_0 \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pour commencer, nous nous intéressons à la régularité du terme $\tilde{\mathcal{S}}$. Rappelons que par définition, $\tilde{\mathcal{S}}$ est tel que :

$$\tilde{\mathcal{S}}(\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{V}, H) = \nabla \cdot \mathcal{E}_a(B, C) - \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{V} + \Delta H$$

$$= \nabla \cdot (a\tilde{B} - (1-a)\tilde{C}) - \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{V} + \Delta H. \quad (2.8)$$

Laurent Chupin démontre et utilise dans sa thèse (voir [10]) un lemme très similaire au lemme qui suit (nous ne le démontrons pas, voir [10]) :

Lemme 2.2.1 *supposons que :*

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \tilde{U} + H, \quad H \in U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega), \\ \tilde{U} &\in L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)), \quad \partial_t \tilde{U} \in L^\infty(0, T; U^0(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega)), \\ \tilde{B} &\in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \quad \tilde{C} \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \quad \partial_t \tilde{B} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \partial_t \tilde{C} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Alors \tilde{S} est tel que :

$$\tilde{S} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \partial_t \tilde{S} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \tilde{S} \cdot \partial_t \tilde{S} \in L^1(0, T; L^1(\Omega)), \quad \tilde{S}(0) \in L^2(\Omega).$$

Avec dépendance continue (et dépendante en T) par rapport aux données. Autrement dit il existe une application M_1 continue, croissante, positive et telle que $M_1(0) = 0$, avec :

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{S} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \left\| \partial_t \tilde{S} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} + \left\| \tilde{S} \cdot \partial_t \tilde{S} \right\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))} + \left\| \tilde{S}(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq & M_1(T) \left(\left\| \tilde{U} \right\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega))} + \left\| \partial_t \tilde{U} \right\|_{L^\infty(0, T; U^0(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega))} \right. \\ & \left. + \left\| \tilde{B} \right\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \left\| \tilde{C} \right\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \left\| \partial_t \tilde{B} \right\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} + \left\| \partial_t \tilde{C} \right\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

Ce lemme signifie que les normes de \tilde{S} , $\partial_t \tilde{S}$, $\tilde{S} \cdot \partial_t \tilde{S}$ et $\tilde{S}(0)$ dans leurs espaces respectifs sont contrôlées par les normes des différentes données, à une constante $M_1(T)$ près qui dépend du temps de façon continue et croissante. Nous verrons plus tard que cette dépendance sera exploitée de façon cruciale dans la partie point fixe.

Pour contrôler la solution du problème de Stokes par rapport aux données, indépendamment du temps, nous aurons besoin de la proposition suivante, également démontrée dans [10] :

Lemme 2.2.2 *Si \tilde{S} est tel que :*

$$\tilde{S} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \partial_t \tilde{S} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \tilde{S} \cdot \partial_t \tilde{S} \in L^1(0, T; L^1(\Omega)), \quad \tilde{S}(0) \in L^2(\Omega).$$

Alors $\tilde{S} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, avec dépendance continue (et indépendante en T) par rapport aux données. Autrement dit il existe $M_2 > 0$ tel que :

$$\left\| \tilde{S} \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq M_2 \left(\left\| \partial_t \tilde{S} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \left\| \tilde{S} \cdot \partial_t \tilde{S} \right\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))} + \left\| \tilde{S}(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Remarquons qu'en fait les deux premières hypothèses impliquent déjà que $\tilde{\mathcal{S}} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Néanmoins elles sont insuffisantes pour assurer l'indépendance de l'estimation par rapport à T d'où la nécessité de considérer les deux dernières hypothèses du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat de régularité qui suit pour l'équation de Stokes :

Proposition 2.2.1 *Supposons que :*

$$U_0 \in U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \tilde{\mathcal{S}} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \partial_t \tilde{\mathcal{S}} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \tilde{\mathcal{S}} \cdot \partial_t \tilde{\mathcal{S}} \in L^1(0, T; L^1(\Omega)), \tilde{\mathcal{S}}(0) \in L^2(\Omega).$$

\mathcal{S}_1^{Stokes} possède une solution unique notée U et telle que :

$$\|U\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} + \|U\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega))} + \|\partial_t U\|_{L^\infty(0, T; U^0(\Omega))} + \|\partial_t U\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega))} \leq k_1(U_0, \tilde{\mathcal{S}}).$$

où k_1 ne dépend pas de T et est une fonction croissante de :

$$\|U_0\|_2, \|\tilde{\mathcal{S}}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}, \|\partial_t \tilde{\mathcal{S}}\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}, \|\tilde{\mathcal{S}}(0)\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))}.$$

Preuve: nous nous contentons de donner un aperçu de la preuve. Le système \mathcal{S}_1^{Stokes} est de type parabolique, l'existence de solutions régulières peut se montrer par la méthode de Galerkin, dont nous rappelons rapidement l'esprit :

- \mathcal{S}_1^{Stokes} est approché par une suite de problèmes obtenus en projetant le système sur des sous-espaces de dimensions finies de $U^0(\Omega)$. Typiquement ces sous-espaces sont engendrés par les vecteurs propres de l'opérateur de Stokes. Chaque problème approché est donc un système différentiel qui possède une unique solution, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz sur les systèmes différentiels ;
- l'énergie des solutions est estimée, indépendamment de la dimension de l'espace de projection. La solution se récupère ensuite par des arguments classiques de compacité (voir [37], [13]).

La spécificité de la proposition réside dans la régularité requise. Or des estimations directes sur l'équation nous permettraient au mieux de récupérer de la régularité sur U dans $L^\infty(0, T; U^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. Pour monter en régularité, nous procédons de la façon suivante (conformément à l'esprit de la méthode de Galerkin, les estimations qui vont suivre s'obtiennent d'abord sur les solutions approchées du problème \mathcal{S}_1^{Stokes} pour lesquelles elles sont parfaitement justifiées) :

- nous écrivons l'équation vérifiée par $W := \partial_t U$:

$$\begin{cases} \partial_t W + \mathcal{A}W = \mathbb{P} \partial_t \tilde{\mathcal{S}} \\ \nabla \cdot W = 0 \\ W(t=0) = \partial_t U(t=0) = \mathbb{P} \tilde{\mathcal{S}}(t=0) - \mathcal{A}U(t=0) \\ W = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Il faut remarquer qu'ici $\partial_t \tilde{\mathcal{S}} \notin L^2(\Omega)$, donc $\mathbb{P} \partial_t \tilde{\mathcal{S}}$ est dépourvu de sens. Il est donc nécessaire d'approcher au préalable $\partial_t \tilde{\mathcal{S}}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ par une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$, d'estimer le problème approché puis de passer à la limite.

Toutes précautions prises, nous estimons W dans $L^\infty(0, T; U^0(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega))$:

$$\|W\|_{L^\infty(0, T; U^0(\Omega))} + \|W\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega))} \leq M \left(|W_0|_2 + \left\| \partial_t \tilde{S} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \right). \quad (2.10)$$

- nous concluons en remarquant que dans \mathcal{S}_1^{stokes} U est solution du problème de Stokes :

$$\begin{cases} \mathcal{A}U = \mathbb{P}\tilde{S} - W \\ \nabla \cdot U = 0 \\ U(t=0) = U_0 \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.11)$$

La propriété 2.1 de régularité de l'opérateur de Stokes nous permet d'avoir la régularité et l'estimation annoncées pour U :

- $W \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et d'après le lemme 2.2.1, $\tilde{S} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, d'où la régularité dans $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$.
- $W \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\tilde{S} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, d'où la régularité dans $L^2(0, T; H^3(\Omega))$. ♣

Pour terminer nous énonçons le corollaire suivant que nous exploiterons de façon cruciale dans la partie point fixe :

Corollaire 2.2.1 *supposons \tilde{S} est donné par la relation 2.8. Si les hypothèses de régularité du lemme 2.2.1 sont vérifiées alors la solution de \mathcal{S}_1^{Stokes} est telle que :*

$$\|U\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} + \|U\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega))} + \|\partial_t U\|_{L^\infty(0, T; U^0(\Omega))} + \|\partial_t U\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega))} \leq k_1 \left(T, U_0, \tilde{U}, H, \tilde{B}, \tilde{C} \right).$$

k_1 est une fonction continue positive et croissante de :

$$\begin{aligned} & T, \|U_0\|_3, \|H\|_3, \\ & \left\| \tilde{U} \right\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))}, \left\| \tilde{U} \right\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega))}, \left\| \partial_t \tilde{U} \right\|_{L^\infty(0, T; U^0(\Omega))}, \left\| \partial_t \tilde{U} \right\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega))}, \\ & \left\| \tilde{B} \right\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))}, \left\| \tilde{C} \right\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))}, \left\| \partial_t \tilde{B} \right\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))}, \left\| \partial_t \tilde{C} \right\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

De plus, $k_1(T=0) = 0$.

Preuve: il s'agit d'une application directe du lemme 2.8 et de la proposition 2.2.1. ♣

Equation sur B et C

Nous considérons maintenant le système suivant :

$$\mathcal{S}_1^{B,C} \begin{cases} \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V + B \cdot \tilde{\mathcal{G}} \\ \partial_t C + V \cdot \nabla C = -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C - \tilde{\mathcal{G}} \cdot C \\ B(t=0) = B_0 \\ C(t=0) = C_0 = B_0^{-1}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Rappelons que pour un modèle de plasticité interpolé nous avons :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}} &= \theta \left(w_a(\tilde{B}, \tilde{C}) - 1 \right) \overline{\overline{\mathcal{H}_b(\tilde{B}, \tilde{C}) \cdot \mathcal{E}_a(\tilde{B}, \tilde{C})}} \\ &= \theta \left(\text{atr}(\tilde{B}) + (1-a) \text{tr}(\tilde{C}) - 4 \right) \overline{\overline{\left(\text{atr}(\tilde{B}) + (1-a) \text{tr}(\tilde{C}) - 4 \right) \left((1-b)\tilde{B}^2 + b\tilde{C}^2 \right) \cdot a\tilde{B} - (1-a)\tilde{C}}}.\end{aligned}$$

En dimension 3 d'espace, $H^2(\Omega)$ est une algèbre (voir [2]). Les non-linéarités de $\tilde{\mathcal{G}}$ étant polynômiales il en découle que si \tilde{B} et \tilde{C} sont dans $H^2(\Omega)$ alors $\tilde{\mathcal{G}}$ est aussi dans $H^2(\Omega)$. Nous nous intéressons aux solutions régulières de $\mathcal{S}_1^{B,C}$:

Proposition 2.2.2 *supposons que :*

$$\begin{aligned}V &= U + H, \quad H \in H^3(\Omega), \quad \nabla \cdot H = 0 \\ U &\in L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^1(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)) \\ \tilde{\mathcal{G}} &\in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)).\end{aligned}$$

Alors il existe (B, C) solution unique de $\mathcal{S}_1^{B,C}$, avec :

$$\begin{aligned}& \|B\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \|C\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} \\ &+ \|\partial_t B\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega))} + \|\partial_t C\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega))} \\ &\leq k_2(B_0, C_0, H, U, \tilde{\mathcal{G}}).\end{aligned}\tag{2.13}$$

où k_2 ne dépend pas de T et est une fonction croissante de :

$$\begin{aligned}& \|B_0\|_2, \quad \|C_0\|_2, \quad \|H\|_3, \\ & \|U\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))}, \quad \|U\|_{L^1(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega))}, \\ & \|\tilde{\mathcal{G}}\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))}, \quad \|\tilde{\mathcal{G}}\|_{L^1(0, T; H^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Preuve: les équations sur B et C sont découplées. Il suffit donc de se limiter au cas de B , celui de C se traite exactement de la même façon :

$$\mathcal{S}_1^B \begin{cases} \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V + B \cdot \tilde{\mathcal{G}} \\ B(t=0) = B_0. \end{cases}\tag{2.14}$$

L'existence et l'unicité de solutions se montrent par la méthode des caractéristiques. En général, cette méthode est utilisée lorsque le champ de vitesse est supposé régulier, disons de classe C^∞ en temps et en espace.

Il faut donc approcher V par une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ telle que :

$$\begin{aligned}V_n &\longrightarrow V \text{ dans } L^1(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)), \\ V_n \cdot n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Nous approchons également B_0 par une suite $(B_{0_n})_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que :

$$B_{0_n} \longrightarrow B_0 \text{ dans } H^3(\Omega).$$

Pour chaque n , la méthode des caractéristiques donne une unique solution, notée B_n , du système :

$$\mathcal{S}_1^{B_n} \begin{cases} \partial_t B_n + V_n \cdot \nabla B_n = \nabla V_n^t \cdot B_n + B_n \cdot \nabla V_n + B_n \cdot \tilde{\mathcal{G}} \\ B_n(t=0) = B_{0_n}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Nous allons montrer que les estimations de la proposition sont établies lorsque nous remplaçons V par V_n .

Commençons par l'estimation de B_n dans $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$. Nous effectuons le produit scalaire dans $H^2(\Omega)$ de l'équation sur B_n par B_n :

$$\begin{aligned} ((\partial_t B_n, B_n))_2 &= -((V_n \cdot \nabla B_n, B_n))_2 \\ &+ \left((\nabla V_n^t \cdot B_n + B_n \cdot \nabla V_n, B_n) \right)_2 \\ &+ \left((B_n \cdot \tilde{\mathcal{G}}, B_n) \right)_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Par application des inégalités de Hölder classiques puis des injections de Sobolev classiques (voir [2]) nous avons :

$$\begin{aligned} |((V_n \cdot \nabla B_n, B_n))_2| &\leq M \|V_n\|_3 \|B_n\|_2^2 \\ |((\nabla V_n^t \cdot B_n + B_n \cdot \nabla V_n, B_n))_2| &\leq M \|V_n\|_3 \|B_n\|_2^2. \end{aligned}$$

D'autre part puisque $H^2(\Omega)$ est une algèbre nous avons :

$$\left| \left((B_n \cdot \tilde{\mathcal{G}}, B_n) \right)_2 \right| \leq M \|\tilde{\mathcal{G}}\|_2 \|B_n\|_2^2.$$

Il vient alors :

$$\frac{d \|B_n\|_2^2}{dt} \leq M \left(\|V_n\|_3 + \|\tilde{\mathcal{G}}\|_2 \right) \|B_n\|_2^2.$$

L'inégalité de Gronwall nous donne l'estimation voulue sur B_n :

$$\|B_n\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} \leq \|B_{0_n}\|_2 \exp \left(M \left(\|V_n\|_{L^1(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega))} + \|\tilde{\mathcal{G}}\|_{L^1(0, T; H^2(\Omega))} \right) \right).$$

Pour estimer $\partial_t B_n$ dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, il suffit de revenir à l'équation :

$$\begin{aligned} \partial_t B_n &= -V_n \cdot \nabla B_n + \nabla V_n^t \cdot B_n + B_n \cdot \nabla V_n + B_n \cdot \tilde{\mathcal{G}}, \\ \|\partial_t B_n\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} &\leq M \left(\|V_n\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} + \|\tilde{\mathcal{G}}\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} \right) \|B_n\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

L'existence de solutions et les estimations ont donc été établies pour les problèmes approchés $(\mathcal{S}_1^{B_n})_n$. La solution de \mathcal{S}_1^B s'obtient par des arguments classiques de compacité. En effet, quitte à extraire des sous-suites, il existe B telle que :

$$\begin{aligned} B_n &\rightharpoonup B \text{ dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \text{ faible-}\star, \\ \partial_t B_n &\rightharpoonup \partial_t B \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ faible-}\star, \\ B_n &\longrightarrow B \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pour vérifier que B est bien solution de \mathcal{S}_1^B il suffit de passer à la limite faible dans $\mathcal{S}_1^{B_n}$. Les termes bilinéaires ne posent pas de problèmes : par construction nous avons de la convergence forte sur la vitesse, donc il est toujours possible de passer à la limite faible.

Le problème étant linéaire, la solution est unique. Enfin, par semi-continuité inférieure des normes pour les topologies faibles- \star , les estimations restent vérifiées par B et $\partial_t B$. ♣

2.2.2 Preuve de l'existence

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème \mathcal{S}_1 . Nous nous donnons des données initiales telles que :

$$\begin{aligned} U_0 &\in U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \nabla \cdot U_0 = 0, U_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ B_0 &\in H^2(\Omega), \det B_0 = 1, C_0 = B_0^{-1} \in H^2(\Omega). \end{aligned}$$

Soit $T > 0$. Considérons l'espace de Banach X_T :

$$X_T := C^0(0, T; L^2(\Omega)) \times C^0(0, T; L^2(\Omega)) \times C^0(0, T; L^2(\Omega)).$$

Soient $M_1, M_2, M_3 > 0$. On définit l'ensemble $R(T, M_1, M_2)$ comme le sous-ensemble de X_T tel que :

$$\begin{aligned} U &\in L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)), \partial_t U \in L^\infty(0, T; U^0(\Omega)) \cap L^2(0, T; U^1(\Omega)), \\ \|U\|_{L^\infty(0, T; U^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} + \|U\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega) \cap H^3(\Omega))} + \|\partial_t U\|_{L^\infty(0, T; U^0(\Omega))} + \|\partial_t U\|_{L^2(0, T; U^1(\Omega))} &\leq M_1, \\ B, C &\in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \partial_t B, \partial_t C \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ \|B\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \|\partial_t B\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} &\leq M_2, \quad \|C\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \|\partial_t C\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} \leq M_3. \end{aligned}$$

La proposition suivante est classique (voir [35]) :

Proposition 2.2.3 *Si M_1, M_2, M_3 sont suffisamment grands alors $R(T, M_1, M_2, M_3)$ est non vide. De plus $R(T, M_1, M_2, M_3)$ est convexe et compact dans X_T .*

Soit l'application Θ telle que :

$$\begin{aligned} \Theta : R(T, M_1, M_2, M_3) &\longmapsto X_T \\ (\tilde{U}, \tilde{B}, \tilde{C}) &\longmapsto (U, B, C). \end{aligned}$$

Ici, U est solution du problème de Stokes :

$$\mathcal{S}_1^{Stokes} \begin{cases} \tilde{\mathcal{S}} = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{V} + \Delta H \\ \partial_t U - \Delta U + \nabla p = \tilde{\mathcal{S}} \\ \nabla \cdot U = 0 \\ U(t=0) = U_0 \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

Tandis que (B, C) sont solutions du problème $\mathcal{S}_1^{B,C}$:

$$\mathcal{S}_1^{B,C} \begin{cases} \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(\tilde{B}, \tilde{C}) \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V + B \cdot \tilde{\mathcal{G}} \\ \partial_t C + V \cdot \nabla C = -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C - \tilde{\mathcal{G}} \cdot C \\ B(t=0) = B_0 \\ C(t=0) = C_0 = (B_0)^{-1}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Il est important de voir que \mathcal{S}_1^{stokes} est résolu en premier. Une fois que la vitesse est actualisée, nous résolvons $\mathcal{S}_1^{B,C}$.

Proposition 2.2.4 Θ est continue. De plus il existe $T^* > 0$ tel que $R(T^*, M_1, M_2, M_3)$ est stable par Θ .

Preuve: commençons par établir la continuité de Θ . Nous avons vu que U dépend continûment de $(\tilde{U}, \tilde{B}, \tilde{C})$ (corollaire 2.2.1); de même :

- $\tilde{\mathcal{G}}$ dépend continûment de (\tilde{B}, \tilde{C}) .
- (B, C) dépendent continûment de $(V, \tilde{\mathcal{G}})$ (corollaire 2.2.2) donc de $(U, \tilde{\mathcal{G}})$.

Il en découle que (B, C) dépendent également continûment de $(\tilde{U}, \tilde{B}, \tilde{C})$, la continuité de Θ est établie.

Il reste à prouver la stabilité de $R(T, M_1, M_2, M_3)$ par Θ pour T suffisamment petit. Le point clef est le corollaire 2.2.1 : ce dernier nous enseigne que la dépendance de U en $(\tilde{U}, \tilde{B}, \tilde{C})$ est croissante en T . Autrement dit la norme de U peut être contrôlée à condition de prendre T suffisamment petit.

Comme la dépendance de (B, C) en V (donc en U) ne dépend pas de T (cela découle de la proposition 2.2.2), la dépendance de (B, C) en $(\tilde{U}, \tilde{B}, \tilde{C})$ est également croissante en T . Finalement, en contrôlant T nous pouvons contrôler les normes de (U, B, C) dans leurs espaces respectifs :

$$\exists T^*, \forall T \leq T^* (U, B, C) \in R(T, M_1, M_2, M_3).$$

La stabilité de $R(T, M_1, M_2, M_3)$ par Θ est donc établie. ♣

Pour conclure, il suffit de remarquer que tout point fixe de Θ est solution de \mathcal{S}_1 . Cela est assuré par le théorème de Schauder (nous ne rappelons pas l'énoncé qui est classique, voir [7]).

2.3 Problème \mathcal{S}_3

Nous nous intéressons maintenant au problème \mathcal{S}_3 :

$$\mathcal{S}_3 \begin{cases} \nabla \cdot S = \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V + B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega, V^{bord} \cdot n = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Nous rappelons encore une fois que :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) &= aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\text{Id}, \\ w_a(B, B^{-1}) &= a\text{tr}(B) + (1-a)\text{tr}(B^{-1}) - 3, \\ \mathcal{G}(B, B^{-1}) &= -2\theta(w_a(B, B^{-1}) - 1)(w_a(B, B^{-1}) - 1) \overline{\overline{\mathcal{H}_b(B, B^{-1}) \cdot \mathcal{E}_a(B, B^{-1})}}. \end{aligned}$$

La méthode utilisée pour construire des solutions de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 ne s'applique clairement pas. La principale difficulté est l'absence d'équation explicite sur la vitesse V .

Nous détaillons un résultat qui montre que si la déformation élastique B est donnée alors la vitesse est bien définie. Plus précisément nous verrons que la vitesse satisfait une équation qui est elliptique à condition que B reste "proche" de l'identité (dans un sens qu'il faut préciser, voir le corollaire 2.3.1 ainsi que la proposition 2.3.2). Il s'agit du résultat central de cette section.

Malheureusement il n'est pas possible d'obtenir un résultat d'existence pour \mathcal{S}_3 : la méthode du point fixe développée dans la section précédente ne marche plus ici, nous verrons plus loin pourquoi. Nous pensons néanmoins que cette propriété d'ellipticité devrait être utile en vue d'une résolution numérique : en effet si nous utilisons un schéma de Splitting (chapitre 3) par lequel V et B sont successivement calculées, le calcul de V par des méthodes usuelles devient possible tant que la condition d'ellipticité reste respectée.

2.3.1 Formulation équivalente

Nous posons toujours $C = B^{-1}$. Après relèvement, \mathcal{S}_3 se réécrit :

$$\mathcal{S}_3 \begin{cases} V = U + H \\ \nabla \cdot S = \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, C) \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V + B \cdot \mathcal{G}(B, C) \\ \partial_t C + V \cdot \nabla C = -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C - \mathcal{G}(B, C) \cdot C \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ C(t=0) = C_0 = B_0^{-1} \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.21)$$

Multiplions l'équation sur B par a , celle sur C par $-(1-a)$, puis additionnons les deux équations. En utilisant la définition de S , il vient :

$$\begin{aligned} \partial_t S + V \cdot \nabla S &= a \left(\nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V \right) + (1-a) \left(C \cdot \nabla V + \nabla V^t \cdot C \right) \\ &+ a \cdot B \cdot \mathcal{G}(B, C) + (1-a) \mathcal{G}(B, C) \cdot C. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nous définissons les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+(B, U) &:= \nabla \cdot (\nabla U^t \cdot B + B \cdot \nabla U), \quad \mathcal{L}_-(C, U) := \nabla \cdot (C \cdot \nabla U + \nabla U^t \cdot C), \\ \mathcal{L}_a(B, C, U) &:= a \mathcal{L}_+(B, U) + (1-a) \mathcal{L}_-(C, U). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nous posons également :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_a(B, C, S, H) &:= a \nabla \cdot (B \cdot \mathcal{G}(B, C)) + (1-a) \nabla \cdot (\mathcal{G}(B, C) \cdot C) \\ &- \nabla \cdot (H \cdot \nabla S) + \mathcal{L}_a(B, C, H). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Formellement nous prenons la divergence de l'équation 2.22. A cause de l'équation d'équilibre des contraintes élastiques, il vient :

$$-\mathcal{L}_a(B, C, U) + \nabla \cdot (U \cdot \nabla S) + \nabla \partial_t p = \mathcal{R}_a(B, C, S, H). \quad (2.25)$$

Il s'agit d'une nouvelle équation sur la vitesse. Nous allons voir que sous certaines conditions qu'il faudra préciser, elle s'apparente à une équation de Stokes, c'est à dire une équation de type elliptique sur U . \mathcal{S}_3 admet la reformulation suivante, notée \mathcal{S}_3^{bis} :

$$\mathcal{S}_3^{bis} \left\{ \begin{array}{l} V = U + H \\ S = \mathcal{E}_a(B, C) \\ -\mathcal{L}_a(B, C, U) + \nabla \cdot (U \cdot \nabla S) + \nabla \partial_t p = \mathcal{R}_a(B, C, S, H) \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V + B \cdot \mathcal{G}(B, C) \\ \partial_t C + V \cdot \nabla C = -C \cdot \nabla V^t - \nabla V \cdot C - \mathcal{G}(B, C) \cdot C \\ \nabla \cdot V = 0 \\ B(t=0) = B_0 \\ C(t=0) = C_0 = B_0^{-1} \\ U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

2.3.2 Un résultat d'ellipticité

Dans cette sous-section nous nous intéressons à l'équation sur U . Nous supposons que :

$$B \in H^2(\Omega), \quad C \in H^2(\Omega), \quad C = B^{-1}. \quad (2.27)$$

Nous rappelons que l'équation sur U s'écrit :

$$-\mathcal{L}_a(B, C, U) + \nabla \cdot (U \cdot \nabla S) + \nabla \partial_t p = \mathcal{R}_a(B, C, S, H). \quad (2.28)$$

Formellement cette équation ressemble à une équation de Stokes. Sous forme variationnelle, elle s'écrit :

$$\forall U \in U^1(\Omega), -(\mathcal{L}_a(B, C, U), U)_2 - (U \cdot \nabla S, \nabla U)_2 = (\mathcal{R}_a(B, C, S, H), U)_2.$$

Nous notons \mathcal{B} la forme quadratique du membre de gauche :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(U, U) &= -(\mathcal{L}_a(B, C, U), U)_2 - (U \cdot \nabla S, \nabla U)_2 \\ &= \mathcal{B}_a(U, U) + \mathcal{B}_S(U, U). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Notre objectif consiste ici à établir l'ellipticité de \mathcal{B} . Pour y parvenir nous montrons d'abord l'ellipticité de \mathcal{B}_a sous des conditions que nous précisons. Nous verrons que l'ellipticité de \mathcal{B} se récupère simplement à condition de contrôler la norme de S .

Ellipticité de \mathcal{B}_a

Soit A un champ tensoriel symétrique tel que $A \in L^\infty(\Omega)$. Nous rappelons que :

$$|A| = \left(\text{tr}(A \cdot A^t) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |A|_\infty = \text{supess } |A|.$$

Nous notons $\sigma(A)$ le spectre de A . Par symétrie A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. Nous notons également $|\cdot|_\sigma$ le rayon spectral, et $|\cdot|_{\infty, \sigma}$ sa norme associée :

$$|A|_\sigma = \sup \sigma(A), \quad |A|_{\infty, \sigma} = \text{supess } |A|_\sigma.$$

Puisque $|\cdot|$ et $|\cdot|_\sigma$ sont équivalentes, $|\cdot|_\infty$ et $|\cdot|_{\infty, \sigma}$ le sont aussi et nous avons :

$$\frac{|A|_\infty}{\sqrt{3}} \leq |A|_{\infty, \sigma} \leq |A|_\infty.$$

Pour établir l'ellipticité de $\mathcal{L}_a(B, C, \cdot)$ nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.1 *soient A, X, Y trois champs tensoriels tels que :*

$$\begin{aligned} A > 0, \quad A^t = A, \quad A \in L^\infty(\Omega), \quad A^{-1} \in L^\infty(\Omega), \\ X, Y \in L^2(\Omega), \quad (X, Y)_2 = 0, \quad |X|_2 = |Y|_2. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$|(X \cdot A, Y)_2| \leq k(A, A^{-1}) |X|_2^2, \quad |(A \cdot X, Y)_2| \leq k(A, A^{-1}) |X|_2^2,$$

avec :

$$k(A, A^{-1}) = \frac{1}{2} \left(|A|_{\infty, \sigma} - \frac{1}{|A^{-1}|_{\infty, \sigma}} \right) \geq 0.$$

Preuve: nous démontrerons seulement la première inégalité, la deuxième se démontre exactement de la même façon. Les spectres de A et A^{-1} s'écrivent :

$$\sigma(A) = \{0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3\}, \sigma(A^{-1}) = \left\{0 < \frac{1}{\alpha_3} \leq \frac{1}{\alpha_2} \leq \frac{1}{\alpha_1}\right\}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} |A|_\sigma &= \sup \sigma(A) = \alpha_3, \quad |A|_{\infty, \sigma} = \supess |A|_\sigma = \supess \alpha_3, \\ |A^{-1}|_\sigma &= \sup \sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\alpha_1}, \quad |A^{-1}|_{\infty, \sigma} = \supess |A^{-1}|_\sigma = \supess \frac{1}{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\frac{1}{|A^{-1}|_{\infty, \sigma}} \leq \frac{1}{|A^{-1}|_\sigma} \leq A \leq |A|_\sigma \leq |A|_{\infty, \sigma}.$$

Les encadrements à venir nécessitent l'introduction des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha^-(\mu) &= \frac{1}{|A^{-1}|_{\infty, \sigma}} + \mu, \quad \alpha^+(\mu) = |A|_{\infty, \sigma} + \mu, \\ \alpha(\mu) &= \max(-\alpha^-(\mu), \alpha^+(\mu)). \end{aligned}$$

Nous vérifions facilement que :

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \alpha(\mu) &\geq 0, \\ \min_{\mu \in \mathbb{R}} (\alpha(\mu)) &= \frac{1}{2} \left(|A|_{\infty, \sigma} - \frac{1}{|A^{-1}|_{\infty, \sigma}} \right) = k(A, A^{-1}). \end{aligned}$$

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Nous introduisons les deux formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} (X, Y)_2^A &= (X.A, Y)_2, \\ (X, Y)_2^{A, \mu} &= (X.(A + \mu \text{Id}), Y)_2 = (X, Y)_2^A + \mu (X, Y)_2. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que les hypothèses sur A impliquent que $(\cdot, \cdot)_2^A$ et $(\cdot, \cdot)_2^{A, \mu}$ sont bornées pour la norme $|\cdot|_2$. Si $X \in L^2(\Omega)$ alors localement $\text{tr}(X.A.X^t)$ est borné. En effet, sur la base diagonale de A , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{tr}(X.A.X^t) &= \sum_{i,j=1}^3 \alpha_j x_{ij}^2, \\ \frac{1}{|A^{-1}|_\sigma} |X|^2 &= \alpha_1 |X|^2 \leq \text{tr}(X.A.X^t) \leq \alpha_3 |X|^2 = |A|_\sigma |X|^2. \end{aligned}$$

En intégrant sur Ω il vient :

$$\frac{1}{|A^{-1}|_{\infty, \sigma}} |X|_2^2 \leq (X, X)_2^A \leq |A|_{\infty, \sigma} |X|_2^2.$$

Il en résulte que $(\cdot, \cdot)_2^A$ est bien bornée. Cette inégalité nous permet d'établir immédiatement que $(\cdot, \cdot)_2^{A, \mu}$ est également bornée :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|A^{-1}|_{\infty, \sigma}} + \mu \right) |X|_2^2 &\leq (X, X)_2^A + \mu (X, X)_2 \leq (|A|_{\infty, \sigma} + \mu) |X|_2^2, \\ \alpha^-(\mu) |X|_2^2 &\leq (X, X)_2^{A, \mu} \leq \alpha^+(\mu) |X|_2^2. \end{aligned}$$

Donc $(\cdot, \cdot)_2^{A, \mu}$ est également bornée. En utilisant la définition de $\alpha(\mu)$ nous pouvons même écrire que :

$$\left| (X, X)_2^{A, \mu} \right| \leq \alpha(\mu) |X|_2.$$

Cette relation nous donne un encadrement de la forme quadratique associée à $(\cdot, \cdot)_2^{A, \mu}$. Cet encadrement implique un encadrement de la forme bilinéaire puisque :

$$\begin{aligned} (X, Y)_2^{A, \mu} &= \frac{1}{4} \left((X + Y, X + Y)_2^{A, \mu} - (X - Y, X - Y)_2^{A, \mu} \right) \\ \left| (X, Y)_2^{A, \mu} \right| &\leq \frac{\alpha(\mu)}{4} \left(|X + Y|_2^2 + |X - Y|_2^2 \right) \\ &= \frac{\alpha(\mu)}{2} \left(|X|_2^2 + |Y|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Pour conclure, il faut exploiter les hypothèses faites sur X et Y . Rappelons que nous avons en effet supposé que :

$$(X, Y)_2 = 0, \quad |X|_2 = |Y|_2.$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} (X, Y)_2^A &= (X, Y)_2^{A, \mu} \\ \left| (X, Y)_2^A \right| &\leq \frac{\alpha(\mu)}{2} \left(|X|_2^2 + |Y|_2^2 \right) \\ &= \alpha(\mu) |X|_2^2. \end{aligned}$$

Nous venons d'obtenir une famille d'encadrements sur la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_2^A$. L'encadrement optimal s'obtient en prenant le minimum sur μ :

$$\begin{aligned} \left| (X, Y)_2^A \right| &\leq \min_{\mu \in \mathbb{R}} (\alpha(\mu)) |X|_2^2 \\ &= k(A, A^{-1}) |X|_2^2. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Nous avons besoin des formes quadratiques suivantes :

$$\mathcal{B}_+(U, U) = -(\mathcal{L}_+(B, U), U)_2, \quad \mathcal{B}_-(U, U) = -(\mathcal{L}_-(B^{-1}, U), U)_2.$$

Bien entendu, \mathcal{B}_a s'exprime en fonction de \mathcal{B}_+ et \mathcal{B}_- :

$$\mathcal{B}_a = a\mathcal{B}_+ + (1 - a)\mathcal{B}_-.$$

Rappelons qu'en dimension 3 d'espace nous avons les injections de Sobolev suivantes :

Lemme 2.3.2 *il existe $M > 0$ tel que pour tout $X \in H^2(\Omega)$:*

$$|X|_3 \leq M \|X\|_1, \quad |X|_6 \leq M \|X\|_1, \quad |X|_\infty \leq M \|X\|_2.$$

Ces injections nous serviront pour établir les majorations à venir.

Proposition 2.3.1 \mathcal{B}_+ , \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_a sont semi-bornées inférieurement, pour des constantes valant respectivement :

$$k_+(B, B^{-1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{M \|B^{-1}\|_2} - M \|B\|_2 \right), \quad k_-(B, B^{-1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{M \|B\|_2} - M \|B^{-1}\|_2 \right),$$

$$k_a(B, B^{-1}) = ak_+(B, B^{-1}) + (1-a)k_-(B, B^{-1}).$$

Preuve: il s'agit d'une simple application du lemme précédent. Pour commencer, nous pouvons remarquer que ∇U et ∇U^t ont la même norme et sont orthogonaux :

$$\forall U \in U^1(\Omega), \quad (\nabla U^t, \nabla U)_2 = 0 \quad \text{et} \quad |\nabla U^t|_2 = |\nabla U|_2.$$

Nous pouvons commencer par établir la borne associée à \mathcal{B}_+ :

$$\mathcal{B}_+(U, U) = -(\mathcal{L}_+(B, U), U)_2 = (\nabla U^t \cdot B, \nabla U)_2 + (B \cdot \nabla U, \nabla U)_2.$$

$(B \cdot \nabla U, \nabla U)_2$ est clairement elliptique :

$$(B \cdot \nabla U, \nabla U)_2 \geq \frac{1}{|B^{-1}|_{\infty, \sigma}} |\nabla U|_2^2.$$

Tandis que $(\nabla U^t \cdot B, \nabla U)_2$ n'est que semi-borné inférieurement. Le lemme 2.3.1 appliqué avec $A = B$, $X = \nabla U^t$ et $Y = \nabla U$ nous donne la borne optimale :

$$(\nabla U^t \cdot B, \nabla U)_2 \geq -k(B, B^{-1}) |\nabla U|_2^2.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+(U, U) &\geq \left(\frac{1}{|B^{-1}|_{\infty, \sigma}} - k(B, B^{-1}) \right) |\nabla U|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{|B^{-1}|_{\infty, \sigma}} - |B|_{\infty, \sigma} \right) |\nabla U|_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{M \|B^{-1}\|_2} - M \|B\|_2 \right) |\nabla U|_2^2 \\ &= k_+(B, B^{-1}) |\nabla U|_2^2. \end{aligned}$$

\mathcal{B}_- se traite de la même façon :

$$\mathcal{B}_-(U, U) = -(\mathcal{L}_-(B^{-1}, U), U)_2 = (B^{-1} \cdot \nabla U^t, \nabla U)_2 + (\nabla U \cdot B^{-1}, \nabla U)_2,$$

$$(\nabla U \cdot B^{-1}, \nabla U)_2 \geq \frac{1}{|B|_{\infty, \sigma}} |\nabla U|_2^2,$$

$$(B^{-1} \cdot \nabla U^t, \nabla U)_2 \geq -k(B^{-1}, B) |\nabla U|_2^2 \quad (\text{lemme 2.3.1, avec } A = B^{-1}, X = \nabla U^t \text{ et } Y = \nabla U),$$

$$(-\mathcal{L}_-(B^{-1}, U), U)_2 \geq \left(\frac{1}{|B|_{\infty, \sigma}} - k(B^{-1}, B) \right) |\nabla U|_2^2 \geq k_-(B, B^{-1}) |\nabla U|_2^2.$$

Enfin, par définition de \mathcal{B}_a :

$$\begin{aligned} -\left(\mathcal{L}_a\left(B, B^{-1}, U\right), U\right)_2 &= -a\left(\mathcal{L}_+\left(B, U\right), U\right)_2 - (1-a)\left(\mathcal{L}_-\left(B^{-1}, U\right), U\right)_2 \\ &\geq ak_+\left(B, B^{-1}\right)|\nabla U|_2^2 + (1-a)k_-\left(B, B^{-1}\right)|\nabla U|_2^2 \\ &= k_a\left(B, B^{-1}\right)|\nabla U|_2^2. \clubsuit \end{aligned}$$

Corollaire 2.3.1 *supposons que :*

$$\|B\|_2 \|B^{-1}\|_2 < \frac{3}{M^2}.$$

\mathcal{B}_+ , \mathcal{B}_- et \mathcal{B}_a sont $U^1(\Omega)$ elliptiques, de constantes d'ellipticités respectivement égales à $k_+(B, B^{-1})$, $k_-(B, B^{-1})$ et $k_a(B, B^{-1})$.

Preuve: par définition de $k_+(B, B^{-1})$, $k_-(B, B^{-1})$ et $k_a(B, B^{-1})$, nous avons :

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_+(B, \cdot), \mathcal{L}_-(B^{-1}, \cdot), \mathcal{L}_a(B, B^{-1}, \cdot) \text{ } U^1(\Omega)\text{-elliptiques} \\ \Leftrightarrow &k_+(B, B^{-1}), k_-(B, B^{-1}), k_a(B, B^{-1}) > 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que l'ellipticité est vérifiée dès lors que :

$$\|B\|_2 \|B^{-1}\|_2 < \frac{3}{M^2}. \clubsuit$$

Ellipticité de \mathcal{B} et résolution du problème de Stokes

Pour conclure, il ne reste qu'à étudier l'ellipticité de \mathcal{B} . Elle est établie par la propriété suivante :

Proposition 2.3.2 *supposons que :*

$$\|B\|_2 \|B^{-1}\|_2 < \frac{1}{K^2}.$$

\mathcal{B} est $U^1(\Omega)$ elliptique, de constante d'ellipticité notée $k(a, B, B^{-1})$ et telle que :

$$k\left(a, B, B^{-1}\right) = \frac{3a}{2} \left(\frac{1}{K \|B^{-1}\|_2} - K \|B\|_2 \right) + \frac{3(1-a)}{2} \left(\frac{1}{K \|B\|_2} - K \|B^{-1}\|_2 \right).$$

Preuve: nous allons établir que \mathcal{B} est semi bornée inférieurement de constante $k(a, B, B^{-1})$.

Posons $K = \max(M, CM^2)$, où C est la constante associée à l'inégalité de Poincaré. Nous avons établi que \mathcal{B}_a est semi-borné, de borne :

$$\begin{aligned} k_a\left(B, B^{-1}\right) &= ak_+\left(B, B^{-1}\right) + (1-a)k_-\left(B, B^{-1}\right) \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{3}{M \|B^{-1}\|_2} - M \|B\|_2 \right) + \frac{(1-a)}{2} \left(\frac{3}{M \|B\|_2} - M \|B^{-1}\|_2 \right) \\ &\geq \frac{a}{2} \left(\frac{3}{K \|B^{-1}\|_2} - K \|B\|_2 \right) + \frac{(1-a)}{2} \left(\frac{3}{K \|B\|_2} - K \|B^{-1}\|_2 \right). \end{aligned}$$

Il reste à majorer $\mathcal{B}_S(U, U)$. Rappelons que par définition de l'élasticité, $S = aB - (1 - a)B^{-1} - (2a - 1)\text{Id}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_S(U, U)| &\leq |U|_3 |\nabla S|_6 |\nabla U|_2 \\ &\leq K \left(a \|B\|_2 + (1 - a) \|B^{-1}\|_2 \right) |\nabla U|_2^2 \\ \mathcal{B}_S(U, U) &\geq -K \left(a \|B\|_2 + (1 - a) \|B^{-1}\|_2 \right) |\nabla U|_2^2. \end{aligned}$$

Il reste à additionner les deux inégalités :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(U, U) &\geq \left(\frac{3a}{2} \left(\frac{1}{K \|B^{-1}\|_2} - K \|B\|_2 \right) + \frac{3(1-a)}{2} \left(\frac{1}{K \|B\|_2} - K \|B^{-1}\|_2 \right) \right) |\nabla U|_2^2 \\ &= k(a, B, B^{-1}) |\nabla U|_2^2. \end{aligned}$$

\mathcal{B} est bien semi-bornée. De plus si $\|B\|_2 \|B^{-1}\|_2 < \frac{1}{K^2}$ alors $k(a, B, B^{-1}) > 0$ et \mathcal{B} est $U^1(\Omega)$ elliptique. ♣
La proposition 2.3.2 nous permet de mettre en évidence des solutions à l'équation 2.25 :

Théorème 2.3.1 *supposons que $\mathcal{R}_a(B, C, S, H) \in H^{-1}(\Omega)$.*

Si $B \in H^2(\Omega)$, $C \in H^2(\Omega)$ et $\|B\|_2 \|B^{-1}\|_2 < \frac{1}{K^2}$ alors l'équation :

$$-\mathcal{L}_a(B, C, U) + \nabla \cdot (U \nabla S) + \nabla \partial_t p = \mathcal{R}_a(B, C, S, H)$$

admet une unique solution $U \in U^1(\Omega)$

Preuve: puisque \mathcal{B} est elliptique le théorème de Lax-Milgram affirme que le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } U \in U^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \forall W \in U^1(\Omega), \mathcal{B}(U, W) = (\mathcal{R}_a(B, C, S, H), W)_2 \end{array} \right.$$

a une solution unique. ♣

Remarquons que ce résultat présente l'intérêt d'être indépendant de l'élasticité : en effet si la constante d'ellipticité $k(a, B, B^{-1})$ dépend de a , la condition assurant sa positivité ne dépend pas de a ! Une question ouverte consiste à établir si la même condition d'ellipticité pourrait être obtenue pour des modèles hyperélastiques plus généraux que celui de Mooney-Rivlin.

D'autre part ce résultat d'ellipticité ne nous permet pas de mettre en évidence des solutions régulières pour le système \mathcal{S}_3 en utilisant la même méthode que celle employée pour \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . Le point clef de la preuve d'existence pour le système \mathcal{S}_1 repose sur le fait que Θ conserve la régularité en espace de ses arguments. Cette conservation est fondamentale : elle justifie les inégalités utilisées tout au long de la preuve. Avec \mathcal{S}_3 tout cela n'est plus possible :

- si $\tilde{B}(t), \tilde{C}(t) \in H^2(\Omega)$ alors $\mathcal{R}_a(\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{S}, H)(t) \in L^2(\Omega)$. Donc nous aurons au mieux $U(t) \in H^2(\Omega)$.
- la résolution de $\mathcal{S}_1^{B, C}$ par la méthode des caractéristiques avec $V(t) \in H^2(\Omega)$ nous conduit au mieux à $B(t), C(t) \in H^1(\Omega)$.

Nous avons donc perdu un cran de régularité. Dans ces conditions il n'est plus question de parler de stabilité de Θ , la technique du point fixe de Schauder est ici inopérante.

Chapitre 3

Schémas numériques pour l'étude de quelques écoulements bidimensionnels

Dans ce chapitre nous nous intéressons à quelques écoulements bidimensionnels de fluides décrits par le système \mathcal{S}_2 :

$$\mathcal{S}_2 \begin{cases} -\Delta V = \alpha \nabla \cdot S - \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta (w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ V(t=0) = V_0, B(t=0) = B_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous rappelons que :

$$\begin{aligned} w_a(B, B^{-1}) &= a \operatorname{tr}(B) + (1-a) \operatorname{tr}(B^{-1}) - 3, \\ \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) &= aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1) \operatorname{Id}, \\ \mathcal{G}(B, B^{-1}) &= \overline{\overline{\mathcal{H}_b(B, B^{-1}) \mathcal{E}_a(B, B^{-1})}}, \\ \det(B_0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Après avoir décrit le passage de \mathcal{S}_2 à un système purement bidimensionnel $\tilde{\mathcal{S}}_2$, nous détaillerons deux contextes d'écoulements typiques ainsi que les conditions aux limites qui leurs sont associées. Nous décrirons ensuite le schéma numérique utilisé pour approcher $\tilde{\mathcal{S}}_2$. Le chapitre se terminera par une étude de convergence en maillage du schéma proposé.

3.1 Quelques écoulements bidimensionnels

3.1.1 Forme bidimensionnelle du système

Notons $b_{ref} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ une base orthonormée fixe liée au référentiel d'observation de l'écoulement.

Le système \mathcal{S}_2 est écrit en dimension 3 d'espace. Pour pouvoir étudier des écoulements bidimensionnels, nous imposons l'invariance de l'écoulement suivant un axe, l'axe \vec{e}_z par exemple. Il s'agit d'une hypothèse réaliste lorsque le matériau est cisailé entre deux plaques parallèles au plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) et infinies dans la direction de \vec{e}_z . Le champ V s'écrit :

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \tilde{V}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{V}(x, y) &= \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

tandis que le champ B s'écrit :

$$\begin{aligned} B(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \tilde{B}(x, y) & 0 \\ 0 & B_{zz}(x, y) \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}(x, y) &= \begin{pmatrix} B_{xx}(x, y) & B_{xy}(x, y) \\ B_{yx}(x, y) & B_{yy}(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notons que B_{zz} s'exprime en fonction de \tilde{B} . En effet puisque $\det(B_0) = 1$, $\text{tr}(\mathcal{G}(B, B^{-1})) = 0$ et $\nabla \cdot V = 0$, B doit rester à déterminant 1, d'où :

$$B_{zz}(x, y) = \frac{1}{\det(\tilde{B}(x, y))}. \quad (3.5)$$

Considérons l'opérateur d'extension (défini sur les champs tensoriels inversibles) :

$$e : \tilde{X} \mapsto X = \begin{pmatrix} \tilde{X} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det(\tilde{X})} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

ainsi que l'opérateur de restriction :

$$r : X \mapsto \tilde{X} = \begin{pmatrix} X_{xx} & X_{xy} \\ X_{yx} & X_{yy} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

e et r permettent de définir \tilde{w}_a , $\tilde{\mathcal{E}}_a$ et $\tilde{\mathcal{G}}$ à partir de w_a , \mathcal{E}_a et \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a(\tilde{B}, \tilde{B}^{-1}) &:= w_a(e(\tilde{B}), e(\tilde{B}^{-1})), \\ \tilde{\mathcal{E}}_a(\tilde{B}, \tilde{B}^{-1}) &:= r(\mathcal{E}_a(e(\tilde{B}), e(\tilde{B}^{-1}))), \\ \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{B}, \tilde{B}^{-1}) &:= r(\mathcal{G}(e(\tilde{B}), e(\tilde{B}^{-1}))). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le système \mathcal{S}_2 se réécrit :

$$\mathcal{S}_2 \begin{cases} -\Delta \tilde{V} = \alpha \nabla \cdot \tilde{S} - \nabla p \\ \tilde{S} = \tilde{\mathcal{E}}_a(\tilde{B}, \tilde{B}^{-1}) \\ \partial_t \tilde{B} + \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{B} = \nabla \tilde{V}^t \cdot \tilde{B} + \tilde{B} \cdot \nabla \tilde{V} - 2\theta \left(w_a(\tilde{B}, \tilde{B}^{-1}) - K \right) \frac{w_a(\tilde{B}, \tilde{B}^{-1}) - K}{We} B \cdot \tilde{\mathcal{G}}(B, \tilde{B}^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ \tilde{V}(t=0) = \tilde{V}_0, \tilde{B}(t=0) = \tilde{B}_0. \end{cases}$$

Dans la suite nous omettrons les $\tilde{}$ sur $V, S, p, B, w_a, \mathcal{E}_a$ et \mathcal{G} , de sorte qu'en dimension 2 $\tilde{\mathcal{S}}_2$ s'écrit exactement comme \mathcal{S}_2 . Dorénavant nous parlerons de \mathcal{S}_2 pour désigner $\tilde{\mathcal{S}}_2$.

3.1.2 Écoulement de cisaillement

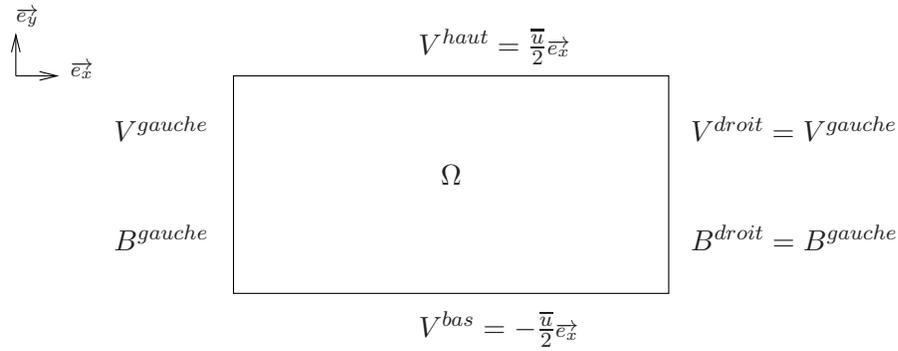


FIGURE 3.1 – Écoulement de cisaillement dans un canal $[0, L] \times [0, l]$, avec des conditions aux limites périodiques.

La premier cas envisagé est celui d'un écoulement de cisaillement dans un canal avec des conditions aux limites périodiques en entrée et en sortie (figure 3.1). Le fluide subit un cisaillement apparent dû au mouvement relatif des la paroi supérieures à des vitesses opposées et égales à imposées $\frac{u}{2}$, sur une hauteur l .

Pour cet écoulement, nous prenons comme longueur caractéristique la hauteur du canal et pour vitesse caractéristique la vitesse imposée en haut :

$$\bar{L} := l, \bar{V} := \bar{u}, \bar{\gamma} := \frac{\bar{V}}{\bar{L}}. \quad (3.9)$$

Lorsque la donnée initiale B_0 est homogène, \mathcal{S}_2 possède une solution particulière explicite. Nous avons en effet la proposition suivante :

Proposition 3.1.1 *Supposons que la donnée initiale B_0 soit homogène. Alors la solution de \mathcal{S}_2 est donnée par :*

$$(V(t, x, y), B(t, x, y)) = (V(y), B(t)). \quad (3.10)$$

Avec :

$$\begin{cases} V(y) = y \\ \nabla V^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.11)$$

et B solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{B} = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta (w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{W_e} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ B(t=0) = B_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Dans ce cas, il n'y a pas de couplage entre l'hydrodynamique et l'équation sur B : B évolue dans un champ de vitesse fixé et l'étude \mathcal{S}_2 se ramène à l'étude du système différentiel 3.12. Dans le prochain chapitre les cas homogène et hétérogène seront étudiés séparément.

3.1.3 Écoulement dans un canal avec des conditions d'injection en entrée

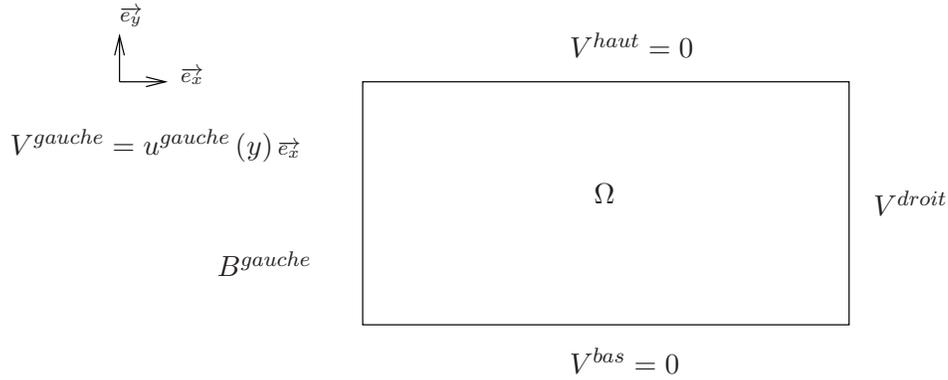


FIGURE 3.2 – Écoulement dans un canal $[0, L] \times [0, l]$, avec des conditions aux limites d'injection en entrée.

La deuxième cas envisagé est celui d'un écoulement dans un canal avec conditions aux limites d'injection en entrée (figure 3.2). A gauche nous supposons que le fluide rentre avec un profil de Poiseuille :

$$V^{gauche} = u^{gauche}(y) \vec{e}_x = 4\bar{u} \frac{y}{l} \left(1 - \frac{y}{l}\right) \vec{e}_x. \quad (3.13)$$

Il faut noter que ce cas est plus difficile à traiter que le précédent. En effet il est clair que physiquement seule la condition d'injection importe. Numériquement pour calculer le champ de vitesse il faut compléter les conditions aux limites par une condition en sortie d'écoulement. Cette condition supplémentaire doit donc être choisie de façon à perturber le moins possible la dynamique de l'écoulement en amont. Dans tous les cas nous supposons que :

$$V^{droit} = u^{droit}(t, y) \vec{e}_x, \quad u^{droit} \geq 0. \quad (3.14)$$

Plusieurs choix sont possibles :

– u^{droit} est stationnaire. Cela revient à imposer une condition aux limites de Dirichlet en sortie de l'écoulement. Nous pouvons prendre par exemple $u^{droit} = u^{gauche}$.

– $\partial_t u^{droit} + (u \cdot \partial_x u)^{droit} = 0$. Cela revient à modéliser une sortie "libre" du fluide en aval de l'écoulement. Nous privilégions la deuxième option. Pour cet écoulement, nous prenons comme longueur caractéristique la hauteur du canal et pour vitesse caractéristique le maximum de la vitesse à l'entrée :

$$\bar{L} := l, \bar{V} := \bar{u}, \bar{\gamma} := \frac{\bar{V}}{\bar{L}}. \quad (3.15)$$

3.2 Schéma numérique

3.2.1 Equation de Stokes

Nous supposons que B (et donc S) sont fixés. Posons $f := \nabla \cdot S$. Soit à résoudre le problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\Delta V = \alpha f - \nabla p \\ \nabla \cdot V = 0 \\ V = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.16)$$

Pour résoudre le système 3.16, on utilise l'algorithme d'Uzawa (voir [37]). Il s'agit d'un algorithme itératif convergent vers la solution (V, p) du problème de Stokes. Nous rappelons brièvement sa description :

Soient ϵ et s deux réels strictement positifs et k_{max} un entier.

1. initialisation : (V_0, p_0) fixés.
2. tant que $\frac{|\nabla \cdot V_k|_2}{|V_k|_2} > \epsilon$ et $k < k_{max}$ nous résolvons :

$$\begin{cases} -\Delta V_{k+1} = \alpha f - \nabla p_k \\ V_{k+1} = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Puis nous posons : $p_{k+1} := p_k - s \nabla \cdot V_{k+1}$, $k := k + 1$

3. la solution est : $(V, p) := (V_k, p_k)$.

En principe l'algorithme converge à condition que $0 < s < 2$. Nous avons choisi des valeurs qui semblent minimiser le nombre d'itérations : $s = 0.75$ pour l'écoulement de cisaillement et $s = 1.7$ pour l'écoulement avec les conditions aux limites d'injection.

3.2.2 Equation sur B

Pas fractionnaires

Nous supposons maintenant que V est fixé et stationnaire. Nous cherchons à résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t B + V \cdot \nabla B = -2\theta (w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ B(t=0) = B_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Pour résoudre un tel système, nous utilisons la méthode des pas fractionnaires. Pour ce faire l'équation est séparée en trois parties. Partant de B_0 on obtient $B(t = dt)$ (dt est ici fixé) par la résolution successive des trois systèmes suivants :

$$\text{Etape 1} \begin{cases} \partial_t B_{\frac{1}{3}} + V \cdot \nabla B_{\frac{1}{3}} = 0 \\ B_{\frac{1}{3}}(t = 0) = B_0, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\text{Etape 2} \begin{cases} \partial_t B_{\frac{2}{3}} = \nabla V^t \cdot B_{\frac{2}{3}} + B_{\frac{2}{3}} \cdot \nabla V \\ B_{\frac{2}{3}}(t = 0) = B_{\frac{1}{3}}(dt), \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\text{Etape 3} \begin{cases} \partial_t B = -2\theta (w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{W_e} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ B(t = 0) = B_{\frac{2}{3}}(dt). \end{cases} \quad (3.21)$$

Il faut donc se donner une méthode pour résoudre chacune des étapes de la méthode.

Transport

Notons $\mathcal{T}(V) : B \mapsto -V \cdot \nabla B$. Pour résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t B = -\mathcal{T}(V)(B) \\ B(t = 0) = B_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

nous utilisons un schéma d'Euler explicite. Ce schéma (d'ordre 1 en temps) s'écrit :

$$B(dt) = B_0 - dt \mathcal{T}(V)(B_0). \quad (3.23)$$

Termes de dérivées objectives

Notons $\mathcal{L}(V)$ l'opérateur tel que :

$$\mathcal{L}(V) : B \mapsto \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V \quad (3.24)$$

Pour résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t B = \mathcal{L}(V)(B) \\ B(t = 0) = B_0 \end{cases} \quad (3.25)$$

nous utilisons un θ -schéma. Si nous choisissons $\theta = \frac{1}{2}$ alors nous avons :

$$\frac{B(dt) - B_0}{dt} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}(V)(B(dt) + B_0)), \quad (3.26)$$

ce qui se réécrit :

$$B(dt) = \left(1 - \frac{dt}{2} \mathcal{L}(V)\right)^{-1} \circ \left(1 + \frac{dt}{2} \mathcal{L}(V)\right)(B_0). \quad (3.27)$$

Cette formule nous donne une approximation de $B(dt)$ (d'ordre 2 en temps), à condition que $1 - \frac{dt}{2} \mathcal{L}(V)$ soit inversible.

Proposition 3.2.1 *les deux conditions suivantes garantissent l'inversibilité de $1 - \frac{dt}{2}\mathcal{L}(V)$:*

- si $\det(\nabla V) \leq 0$ alors $1 - \frac{dt}{2}\mathcal{L}(V)$ est inversible sans restriction sur dt .
- si $\det(\nabla V) > 0$ alors $1 - \frac{dt}{2}\mathcal{L}(V)$ est inversible à condition que dt soit tel que :

$$dt < dt_{obj} := \frac{1}{|\det(\nabla V)|^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.28)$$

Preuve: soit l'application J telle que :

$$J : \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{pmatrix} = B \mapsto b = (B_{xx}, B_{yx}, B_{yy}).$$

Considérons l'opérateur $J \circ \mathcal{L}(V) \circ J^{-1}$ que nous noterons toujours $\mathcal{L}(V)$. Sous la condition $\nabla \cdot V = 0$ son polynôme caractéristique est :

$$X \left(4(\det(\nabla V)) - X^2 \right).$$

Par conséquent son rayon spectral vaut :

$$2|\det(\nabla V)|^{1/2}.$$

- si $\det(\nabla V) \leq 0$ alors toutes les valeurs propres de $1 - \frac{dt}{2}\mathcal{L}(V)$ sont de partie réelle égale à 1, $1 - \frac{dt}{2}\mathcal{L}(V)$ est inversible sans restriction sur dt .
- au contraire si $\det(\nabla V) > 0$ alors $1 - \frac{dt}{2}\mathcal{L}(V)$ reste inversible pourvu que :

$$dt < dt_{obj} := \frac{1}{|\det(\nabla V)|^{\frac{1}{2}}}. \quad \clubsuit$$

Plasticité

Pour terminer il faut s'intéresser à la résolution approchée de :

$$\begin{cases} \partial_t B = -2\theta(w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{W_e} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ B(t=0) = B_0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Notons que :

- si B_0 est à l'intérieur du domaine élastique alors $\theta(w_a(B_0, B_0^{-1}) - K) = 0$ et B_0 est un point d'équilibre pour 3.29. Autrement dit :

$$B(t) = B_0.$$

- Puisque la plasticité fait décroître l'énergie élastique du système, w_a est une fonction de Lyapounov pour le système différentiel.

Il est important de choisir une méthode numérique qui reproduit la décroissance de l'énergie le long de la trajectoire. Nous avons choisi une méthode explicite de Runge Kutta d'ordre 4. Nous avons pu constater que cette méthode d'ordre 4 en temps reproduit convenablement cette décroissance.

3.2.3 Discrétisation en espace

Pour discrétiser les équations en espace nous nous inspirons des schémas MAC (voir [19]). En effet nous utilisons une grille cartésienne de taille $M \times N$, avec un placement décalé des inconnues (figure 3.3).

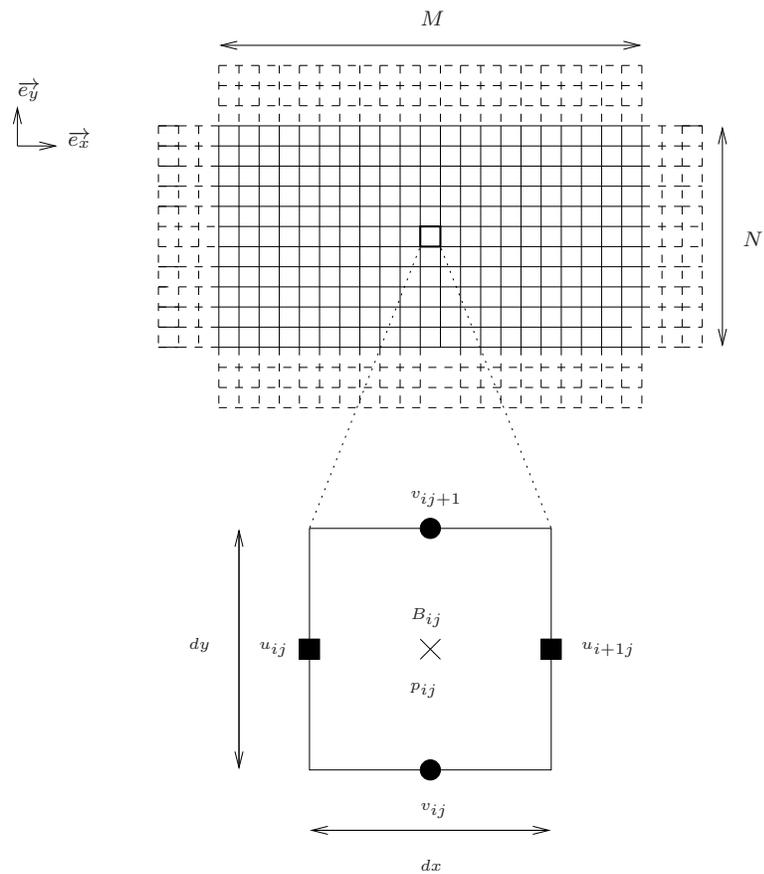


FIGURE 3.3 – Domaine de calcul, placement des inconnues. La partie de la grille en traits discontinus correspond aux extrapolations hors du domaine de calcul.

Équation de Stokes

On peut écrire le système 3.16 sous la forme développée suivante :

$$\begin{cases} -\left(\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u\right) = \alpha (\partial_x S_{xx} + \partial_y S_{xy}) - \partial_x p \\ -\left(\partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v\right) = \alpha (\partial_x S_{yx} + \partial_y S_{yy}) - \partial_y p \\ \partial_x u + \partial_y v = 0 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{bord} \\ v^{bord} \end{pmatrix} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.30)$$

Nous discrétisons 3.30 en espace par la méthode des volumes finis. Etant donné le placement des inconnues donné par 3.3, les premières et deuxièmes équations de 3.30 s'intègrent sur des volumes de contrôle différents :

- Le volume de contrôle générique associé à la première équation (noté R_{ij}^u) est un rectangle centré en $\left((i-1) dx, \left(j - \frac{1}{2}\right) dy\right)$ (figure 3.4).
- Le volume de contrôle générique associé à la deuxième équation (noté R_{ij}^v) est un rectangle centré en $\left(\left(i - \frac{1}{2}\right) dx, (j-1) dy\right)$ (figure 3.4).

L'intégration de la première équation de 3.30 sur R_{ij}^u donne :

$$\int_{\partial R_{ij}^u} \partial_x u n_x + \int_{\partial R_{ij}^u} \partial_y u n_y = \alpha \int_{\partial R_{ij}^u} S_{xx} n_x + \alpha \int_{\partial R_{ij}^u} S_{xy} n_y + \int_{\partial R_{ij}^u} p n_x, \quad (3.31)$$

dont la forme discrète est :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} (u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}) + \frac{dx}{dy} (u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}) &= \alpha dy (S_{xx_{ij}} - S_{xx_{i-1j}}) \\ &+ \alpha dx (S_{xy_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} - S_{xy_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}) \\ &+ dy (p_{ij} - p_{i-1j}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Notons que $S_{xy_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}$ et $S_{xy_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}$ ne sont pas dans la grille, nous les calculons par moyennisation (figure 3.4) :

$$\begin{aligned} S_{xy_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{4} (S_{xy_{i-1j+1}} + S_{xy_{ij+1}} + S_{xy_{i-1j}} + S_{xy_{ij}}), \\ S_{xy_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{4} (S_{xy_{ij}} + S_{xy_{i-1j}} + S_{xy_{i-1j-1}} + S_{xy_{ij-1}}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

De même, la deuxième équation intégrée sur R_{ij}^v puis discrétisée donne :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} (v_{i-1j} - 2v_{ij} + v_{i+1j}) + \frac{dx}{dy} (v_{ij-1} - 2v_{ij} + v_{ij+1}) &= \alpha dy (S_{yx_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}} - S_{yx_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}) \\ &+ \alpha dx (S_{yy_{ij}} - S_{yy_{ij-1}}) \\ &+ dx (p_{ij} - p_{ij-1}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Comme précédemment $S_{yx_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}$ et $S_{yx_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}$ sont calculés par moyennisation (figure 3.4) :

$$\begin{aligned} S_{yx_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{4} \left(S_{yx_{i+1j}} + S_{yx_{ij}} + S_{yx_{i+1j-1}} + S_{yx_{ij-1}} \right), \\ S_{yx_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{4} \left(S_{yx_{ij}} + S_{yx_{i-1j}} + S_{yx_{ij-1}} + S_{yx_{i-1j-1}} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Équation sur B

Transport

Nous nous intéressons à la discrétisation du terme $\mathcal{T}(V)(B)$. En dimension deux d'espace, nous avons :

$$\mathcal{T}(V)(B) = u\partial_x B + v\partial_y B \quad (3.36)$$

Pour discrétiser ce terme nous utilisons un schéma Upwind. Il s'agit d'un schéma décentré qui tient compte du sens de l'écoulement pour l'évaluation de $\partial_x B$ et $\partial_y B$. Ainsi pour l'approximation de $\partial_x B$:

$$\begin{cases} (\partial_x B)_{ij} = \frac{B_{ij} - B_{i-1j}}{dx} \text{ si } u_{i+\frac{1}{2}j} > 0 \\ (\partial_x B)_{ij} = \frac{B_{i+1j} - B_{ij}}{dx} \text{ si } u_{i+\frac{1}{2}j} < 0 \\ (\partial_x B)_{ij} = 0 \text{ si } u_{i+\frac{1}{2}j} = 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Etant donnée le placement particulier de u et v sur la grille, le schéma nécessite l'interpolation de u et v aux points $\left(\left(i - \frac{1}{2} \right) dx, \left(j - \frac{1}{2} \right) dy \right)$ (figure 3.5) :

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}j} &= \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2}, \\ v_{ij+\frac{1}{2}} &= \frac{v_{ij} + v_{ij+1}}{2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Enfin précisons que ce schéma est stable sous la condition de CFL classique :

$$dt < dt_{cfl} := \frac{1}{\frac{\max_{i,j} \left(\left| u_{i+\frac{1}{2}j} \right| \right)}{dx} + \frac{\max_{i,j} \left(\left| v_{ij+\frac{1}{2}} \right| \right)}{dy}}. \quad (3.39)$$

Termes de dérivées objectives

La résolution de 3.25 nécessite le calcul de produits matriciels. Pour pouvoir les évaluer, il faut que les composantes de ∇V^t et B soient définies aux mêmes endroits, c'est-à-dire aux points de coordonnées $\left(\left(i - \frac{1}{2} \right) dx, \left(j - \frac{1}{2} \right) dy \right)$ (figure 3.5). Cela ne pose pas de problème pour les composantes diagonales de ∇V^t :

$$\begin{cases} \nabla V^t_{xx_{ij}} := \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{dx} \\ \nabla V^t_{yy_{ij}} := \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{dy} \end{cases} \quad (3.40)$$

En revanche pour les composantes extra-diagonales de ∇V^t il est nécessaire de procéder à des calculs de moyennes (figure 3.5) :

$$\begin{aligned}
\nabla V_{xy_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t &= \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{dy} \\
\nabla V_{xy_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t &= \frac{u_{i+1j+1} - u_{i+1j}}{dy} \\
\nabla V_{xy_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}^t &= \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{dy} \\
\nabla V_{xy_{i+1\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}^t &= \frac{u_{i+1j} - u_{i+1j-1}}{dy} \\
\nabla V_{xy_{ij}}^t &= \frac{1}{4} \left(\nabla V_{xy_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t + \nabla V_{xy_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t + \nabla V_{xy_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}^t + \nabla V_{xy_{i+1\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}^t \right), \tag{3.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla V_{yx_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t &= \frac{v_{ij+1} - v_{i-1j+1}}{dx} \\
\nabla V_{yx_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t &= \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij+1}}{dx} \\
\nabla V_{yx_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}^t &= \frac{v_{ij} - v_{i-1j}}{dx} \\
\nabla V_{yx_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t &= \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{dx} \\
\nabla V_{xy_{ij}}^t &= \frac{1}{4} \left(\nabla V_{yx_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t + \nabla V_{yx_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}^t + \nabla V_{yx_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}^t + \nabla V_{yx_{i+1\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}^t \right). \tag{3.42}
\end{aligned}$$

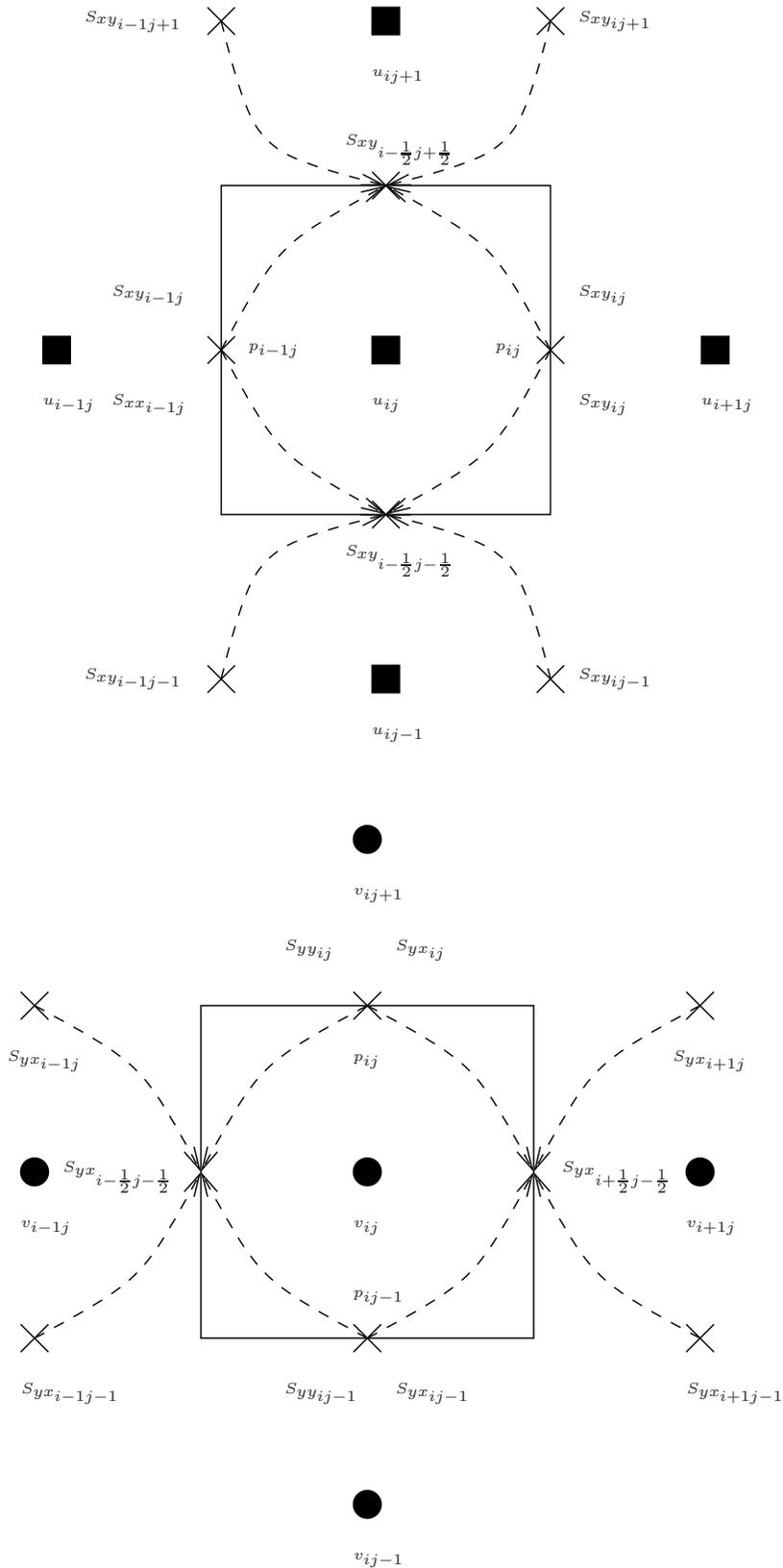


FIGURE 3.4 – Volumes de contrôle R_{ij}^u et R_{ij}^v

3.2.4 Semi-discrétisation en temps

Nous proposons une discrétisation temporelle explicite de \mathcal{S}_2 (figure 3.6) :

– connaissant B^n , (donc S^n) au temps t^n , l'équation de Stokes donne (V^n, p^n)

$$\begin{cases} -\Delta V^n = \alpha \nabla \cdot S^n - \nabla p^n \\ \nabla \cdot V^n = 0 \\ V^n = V^{bord} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.43)$$

– l'équation sur B donne B^{n+1} au temps $t^{n+1} := t^n + dt^n$ à partir de (B^n, V^n, p^n) . Plus précisément, $B_{n+1} = B(dt^n)$ avec :

$$\begin{cases} \partial_t B + V^n \cdot \nabla B = \nabla V^n \cdot B + B \cdot \nabla V^n - 2\theta (w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{W_e} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ B(t=0) = B^n. \end{cases} \quad (3.44)$$

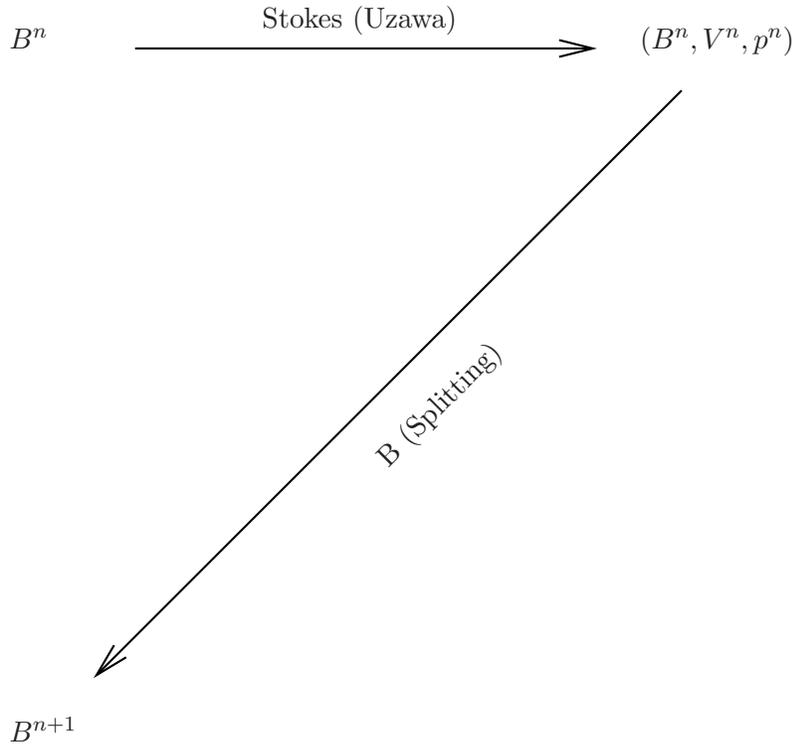


FIGURE 3.6 – semi-discrétisation temporelle de \mathcal{S}_2

Notons qu'à chaque pas de temps dt^n a été choisi tel que :

$$dt^n < \min \left(dt_{cfl}^n, dt_{obj}^n, \frac{1}{\alpha} \right). \quad (3.45)$$

3.2.5 Convergence du schéma

Nous proposons une étude de la convergence en maillage de la méthode. Pour une telle étude nous considérons le cas d'un écoulement de cisaillement pour lequel nous faisons les choix suivants :

$$l = 1, L = 2, a = 0.5, b = 0.5, We = 1, K = 1, \alpha = 7.5.$$

D'autre part le système est initialisé en contrainte avec une distribution de contraintes élastiques telles que :

$$S(t = 0, x, y) = \begin{pmatrix} \sigma(x, y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\sigma(x, y) = \left(1 + \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi x))\right) (1 - 4(y(1 - y))).$$

La relation élastique de Mooney-Rivlin étant explicitement inversible, nous avons :

$$B(t = 0, x, y) = \begin{pmatrix} \beta(x, y) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\beta(x, y) = \sigma(x, y) + \sqrt{(\sigma(x, y))^2 + 1}.$$

Notons $|V|$ et $|B|$ les normes euclidiennes discrètes de V et B respectivement :

$$\begin{aligned} |V|^2 &:= \sum_{i,j} u_{ij}^2 + \sum_{i,j} v_{ij}^2, \\ |B|^2 &:= \sum_{i,j} \text{tr}(B_{ij} \cdot B_{ij}^t). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Nous considérons cinq grilles de tailles :

$$\begin{aligned} M_1 \times N_1, M_1 &= N_1, \\ M_2 \times N_2, M_2 &= N_2, N_2 = 2N_1, \\ M_3 \times N_3, M_3 &= N_3, N_3 = 2N_2, \\ M_4 \times N_4, M_4 &= N_4, N_4 = 4N_2. \end{aligned}$$

Nous prendrons $N_1 = 25$. A chaque grille est associée sa solution notée $(V_i(t), B_i(t))$. L'étude de la convergence en maillage du schéma suppose en principe la connaissance d'une solution analytique de référence, ce qui est ici exclu. Par conséquent la solution de référence est calculée numériquement, sur la grille de plus grande taille. Nous prendrons par exemple :

$$(V_{ref}(t), B_{ref}(t)) := (V_4(t), B_4(t)). \tag{3.47}$$

Nous définissons l'erreur relative par la relation :

$$\epsilon_i(t) := \left(\frac{|V_i(t) - V_{ref}(t)|^2 + |B_i(t) - B_{ref}(t)|^2}{|V_{ref}(t)|^2 + |B_{ref}(t)|^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.48}$$

Nous dirons que le schéma est d'ordre s si $\frac{\epsilon_{i'}(t)}{\epsilon_i(t)}$ est de l'ordre de $\left(\frac{N_i}{N_{i'}}\right)^s$. Ici nous avons :

$$\frac{N_3}{N_2} = \frac{N_2}{N_1} = 2.$$

Un schéma d'ordre s devrait donc produire des rapports d'erreurs de l'ordre de 2^s . Les courbes d'erreurs 3.7, 3.8, 3.9 et 3.10 nous indiquent que le schéma doit être d'ordre 1.

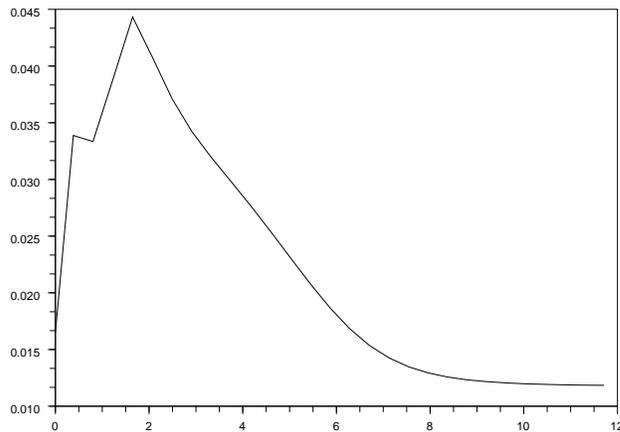


FIGURE 3.7 – Évolution de l'erreur ϵ^1 au cours du temps.

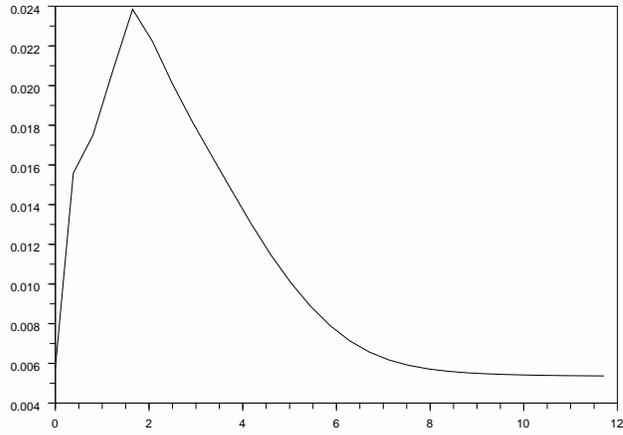


FIGURE 3.8 – Évolution de l'erreur ϵ^2 au cours du temps.

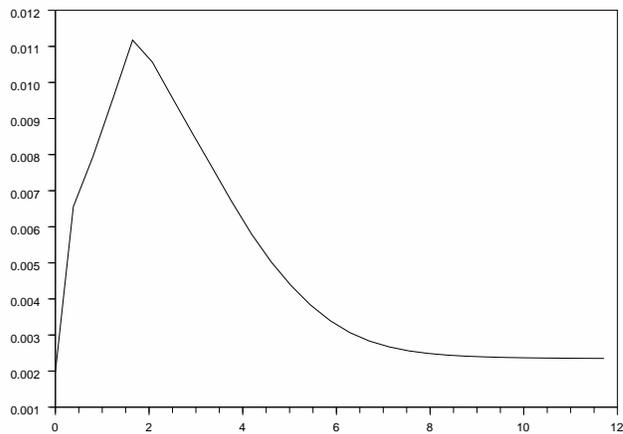


FIGURE 3.9 – Évolution de l'erreur ϵ^3 au cours du temps.

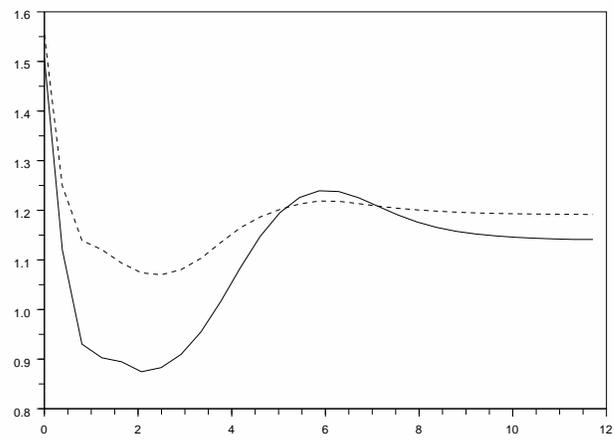


FIGURE 3.10 – Évolution des logarithmes des rapports d’erreurs $\frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{\epsilon^1}{\epsilon^2}\right)$ (en trait plein) et $\frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^3}\right)$ (en pointillés) au cours du temps.

Chapitre 4

Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous présentons les premiers résultats numériques obtenus pour des écoulements bidimensionnels en régime de Stokes c'est-à-dire décrits par le système \mathcal{S}_2 :

$$\mathcal{S}_2 \begin{cases} -\Delta V = \alpha \nabla \cdot S - \nabla p \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) \\ \partial_t B + V \cdot \nabla B = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta (w_a(B, B^{-1}) - K) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ \nabla \cdot V = 0 \\ V(t=0) = V_0, B(t=0) = B_0. \end{cases}$$

La géométrie de cisaillement est d'abord envisagée. Rappelons que dans le chapitre 3 nous avons distingué deux cas :

- si l'état de déformation initial est spatialement homogène alors il n'y a pas de couplage avec la vitesse : la déformation reste homogène et n'induit pas de fluctuation spatiale du gradient de vitesse.
- en revanche une inhomogénéité de la déformation initiale induit un couplage entre l'équation sur la déformation B et l'équation de Stokes sur la vitesse V .

Nous allons étudier séparément ces deux situations. Dans chaque cas nous proposons une description de la dynamique de l'écoulement ainsi qu'une discussion rhéologique de l'influence des paramètres du modèle sur la réponse stationnaire.

Le chapitre se termine avec la présentation sur un exemple de la dynamique de l'écoulement dans la configuration du canal avec des conditions aux limites d'injection.

4.1 Cisaillement imposé, cas homogène

Lorsque la déformation est initialement homogène, le modèle local suffit à fournir la réponse mécanique du matériau. Nous avons déjà évoqué ce point au chapitre précédent et c'est cette première situation que nous envisageons maintenant.

Rappelons que nous nous intéressons à des modèles hyperélastiques de Mooney-Rivlin :

$$\begin{aligned} w_a(B, B^{-1}) &= a \operatorname{tr}(B) + (1-a) \operatorname{tr}(B^{-1}) - 3, \\ S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) &= aB - (a-1)B^{-1} - (2a-1)\operatorname{Id}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

D'autre part nous nous intéressons à des modèles de plasticités interpolés. Ces modèles ont été construits au chapitre 1 et sont tels que :

$$\begin{aligned} D_{pl}^+ &= \theta \left(w_a(B, B^{-1}) - K \right) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ &= \theta \left(w_a(B, B^{-1}) - K \right) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \overline{\overline{\mathcal{H}_b(B, B^{-1}) \cdot \overline{S}}} \\ &= \theta \left(w_a(B, B^{-1}) - K \right) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \overline{\overline{(bB^{-2} + (1-b)B^2) \cdot \mathcal{E}_a(B, B^{-1})}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

La géométrie de cisaillement ainsi que la réduction du système S^{hom} par invariance selon la direction \vec{e}_z sont décrits dans le chapitre 3. Rappelons simplement que dans les conditions d'écoulement qui nous intéressent ici, seules les équations sur B_{xx} , B_{xy} et B_{zz} importent. A partir d'ici, B , S et ∇V^t désignent respectivement les tenseurs :

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{pmatrix}, \\ S &= aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\operatorname{Id}, \\ \nabla V^t &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

les composantes de la déformation et la contrainte élastique selon \vec{e}_z se récupérant simplement :

$$B_{zz} = \frac{1}{\det(B)}, \quad S_{zz} = \frac{a}{\det(B)} - (1-a)\det(B) - (1-2a). \quad (4.4)$$

L'étude du cas homogène revient à explorer les propriétés du système différentiel sur B auquel vient s'ajouter la loi élastique de Mooney-Rivlin. Nous avons :

$$\mathcal{S}^{hom} \begin{cases} \dot{B} = \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V - 2\theta \left(w_a(B, B^{-1}) - K \right) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}) \\ B(t=0) = B_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Nous rappelons que les équations sont sans dimension : la variable t est la variable de déformation appliquée au système (les physiciens ont l'habitude de la noter γ). La vitesse $\dot{\gamma}$ à laquelle cette déformation s'applique est incluse dans la définition de We , puisque :

$$We = \dot{\gamma}\tau, \quad (4.6)$$

τ étant un temps caractéristique lié au terme de plasticité (voir le chapitre 1).

Nous nous proposons de faire une étude rhéologique du cas homogène. Une étude du même type (mais avec des non-linéarités plastiques moins générales) a été publiée dans notre premier article sur le sujet ([1]).

4.1.1 Trajectoires de la déformation et de la contrainte élastiques pour un cisaillement homogène

Ecriture du système dans le référentiel propre de la déformation élastique

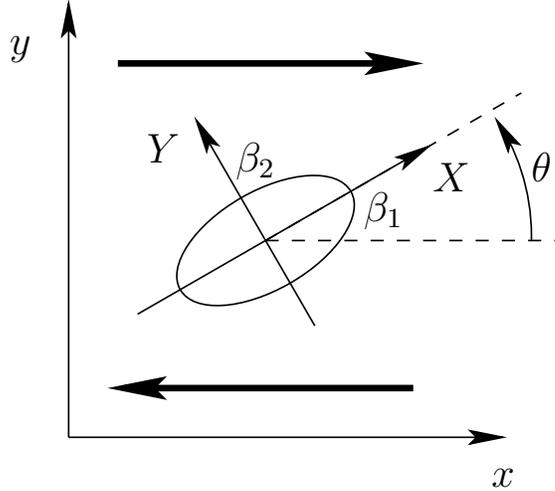


FIGURE 4.1 – Le cisaillement homogène imposé dans la base xyz attachée au laboratoire (z étant la direction de la vorticité) entraîne une inclinaison (base XYZ) des axes principaux du tenseur B par rapport au cisaillement. La dimension des axes de l’ellipse représente les valeurs propres β_1 et β_2 de B .

Dans l’article, une représentation de type spectral a été adoptée pour la déformation élastique : plutôt que d’écrire l’équation différentielle sur B dans le repère fixe de l’écoulement, nous avons préféré l’écrire dans le référentiel lié à la base des vecteurs propres de B (figure 4.1). Autrement dit, le système \mathcal{S}^{hom} peut s’écrire comme un système différentiel dont les trois inconnues sont d’une part les deux valeurs propres de B notées β_1 et β_2 (la troisième s’en déduisant par la condition d’incompressibilité : $\beta_1\beta_2\beta_3 = 1$), d’autre part le cosinus $u = \cos(2\theta)$ lié à l’inclinaison θ de la base propre par rapport à la base de l’écoulement. Les détails de l’obtention de ce système sont donnés dans l’appendice C.1 de l’article [1]. Rappelons simplement que la plasticité étant une fonction isotrope de la déformation élastique D_{pl}^+ et B sont coaxiaux.

L’équation sur B du système \mathcal{S}^{hom} se r ecrit :

$$\mathcal{S}^{eigen} \begin{cases} \dot{\beta}_1 = \sqrt{1-u^2}\beta_1 - 2\frac{\delta_1(\beta_1,\beta_2)}{W_e} \\ \dot{\beta}_2 = -\sqrt{1-u^2}\beta_2 - 2\frac{\delta_2(\beta_1,\beta_2)}{W_e} \\ \dot{u} = \sqrt{1-u^2} \left(1 - u\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\right) \end{cases} \quad (4.7)$$

Dans le système d’équations ci-dessus, les fonctions $\delta_1(\beta_1,\beta_2)$ et $\delta_2(\beta_1,\beta_2)$ sont les valeurs propres de la plasticité adimensionnelle τD_{pl}^+ .

Cette représentation est commode : elle nous permet par exemple de tracer le portrait de phase de \mathcal{S}^{hom} dans le plan (β_1, β_2) des valeurs propres de la déformation. Néanmoins il faut l'utiliser avec précaution : tout état de déformation possédant une valeur propre de multiplicité plus grande que 1 est une singularité du système lorsqu'il est décrit dans son référentiel propre, comme le montre l'équation sur u du système \mathcal{S}^{eigen} .

Régime élastique

A l'intérieur du domaine d'élasticité \mathcal{S}^{hom} est résolu de façon exacte. En effet lorsqu'il n'y a pas de plasticité l'équation sur B est linéaire. De plus si $\nabla V^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors l'opérateur $\mathcal{L}(V)$ tel que :

$$\mathcal{L}(V) : B \longmapsto \nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V$$

est nilpotent d'ordre 2. Nous avons :

$$\begin{cases} B_{xx}(t) = B_{yy}(0)t^2 + 2B_{xy}(0)t + B_{xx}(0) \\ B_{xy}(t) = B_{xy}(0) + B_{yy}(0)t \\ B_{yy}(t) = B_{yy}(0). \end{cases} \quad (4.8)$$

Si l'état de déformation élastique initial est tel que :

$$B(t=0) = \text{Id}$$

alors les valeurs propres de B et l'orientation de la base propre ne peuvent pas s'obtenir en résolvant directement \mathcal{S}^{eigen} à cause de la singularité initiale (il y a une unique valeur propre de multiplicité plus grande que 1) : il faut diagonaliser B à posteriori. Nous avons :

$$\begin{cases} B_{xx}(t) = t^2 + 1, \\ B_{xy}(t) = t, \\ B_{yy}(t) = 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Puis :

$$\begin{cases} \beta_1(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t\sqrt{t^2+4}}{2}, \\ \beta_2(t) = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t\sqrt{t^2+4}}{2}, \\ u(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Notons qu'en régime élastique il n'y a pas d'effet de dilatation dans la direction \vec{e}_z orthogonale au plan de l'écoulement puisque :

$$B_{zz}(t) = \frac{1}{\det(B(t))} = \frac{1}{\beta_1(t)\beta_2(t)} = 1. \quad (4.11)$$

Intéressons-nous aux contraintes élastiques. Rappelons que nous avons :

$$S = \mathcal{E}_a(B, B^{-1}) = aB - (1-a)B^{-1} - (2a-1)\text{Id}. \quad (4.12)$$

B s'inverse facilement :

$$\begin{aligned} B^{-1}(t) &= \frac{1}{\det(B(t))} \begin{pmatrix} B_{yy}(t) & -B_{xy}(t) \\ -B_{xy}(t) & B_{xx}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1+t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où :

$$S(t) = \begin{pmatrix} at^2 & t \\ t & (a-1)t^2 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Nous avons aussi d'après l'équation 4.4 :

$$S_{zz}(t) = 0.$$

Nous appelons premières et secondes différences de contraintes normales les quantités notées N_1 et N_2 et telles que :

$$\begin{aligned} N_1(t) &= S_{xx}(t) - S_{yy}(t), \\ N_2(t) &= S_{yy}(t) - S_{zz}(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ces contraintes sont importantes puisqu'elles sont responsables de certains effets dynamiques propres aux fluides visco-élastiques (voir [28]). Nous avons :

$$\begin{aligned} N_1(t) &= t^2, \\ N_2(t) &= (a-1)t^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

En régime élastique la puissance des contraintes élastiques est telle que :

$$\begin{aligned} S(t) : D &= S(t) : \nabla V^t \\ &= S_{sy}(t) = t. \end{aligned}$$

Pour finir l'énergie élastique stockée le long de la trajectoire élastique s'obtient simplement :

$$\begin{aligned} w_a(B(t), B^{-1}(t)) &= a(\operatorname{tr}(B(t)) + B_{zz}(t)) \\ &+ (1-a) \left(\operatorname{tr}(B^{-1}(t)) + B_{zz}^{-1}(t) \right) - 3 \\ &= t^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cette équation permet d'évaluer la déformation totale appliquée au système depuis l'instant initial lorsque le seuil de plasticité est atteint :

$$w_a(B(t), B(t)^{-1}) = K \Leftrightarrow t = \sqrt{K}. \quad (4.17)$$

Régime transitoire et réponse stationnaire

Une fois le seuil franchi, un écoulement d'origine plastique se produit. Un régime transitoire d'abord observé, un état stationnaire s'établit ensuite progressivement. Cet état stationnaire est caractérisé par l'équilibre des termes d'entraînement avec l'écoulement plastique :

$$\nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V = 2\theta \left(w_a(B, B^{-1}) - K \right) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}). \quad (4.18)$$

Dans [1] nous avons montré que dans le plan de phase des valeurs propres de la déformation élastique les états stationnaires sont caractérisés par l'équation :

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} = We, \quad (4.19)$$

l'orientation de B dans le plan de l'écoulement étant telle que :

$$\tan(\theta) = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}. \quad (4.20)$$

4.1.2 Influence des paramètres du modèle

Nous allons nous intéresser maintenant à l'influence des différents paramètres du modèle dans la réponse en régime transitoire et stationnaire.

Influence de We

Intéressons-nous à l'influence de We . a , b et K sont fixés :

$$a = b = 0.5, K = 1.$$

Nous prenons trois valeurs de We :

$$We = 0.4, We = 2 \text{ et } We = 10.$$

La figure 4.2 représente l'évolution de la déformation dans le plan de phase des valeurs propres pour les différentes valeurs de We . Dans le domaine élastique les trajectoires sont confondues : il n'y a pas de plasticité, We n'intervient pas. En revanche lorsque le seuil de plasticité est franchi, un écoulement plastique se produit. Au cours du régime transitoire les trois trajectoires se séparent progressivement. Pour chaque valeur de We un régime stationnaire est atteint. Cela est prédit par l'équation 4.19.

La figure 4.3 retrace l'évolution de l'orientation de B dans le référentiel d'écoulement. En régime élastique la déformation s'aligne progressivement avec l'écoulement, indépendamment de We . Dès que de la plasticité se produit, l'orientation change avec We . Les équations 4.19 et 4.20 décrivent l'orientation asymptotique de B en fonction de We . L'influence de We est représentée dans la figure 4.4.

La figure 4.5 décrit l'évolution de la composante de cisaillement S_{sy} de la contrainte élastique. Pour chaque valeur de We nous observons successivement :

- une croissance linéaire et indépendante de We de S_{sy} en régime élastique. Cette croissance a déjà été calculée de façon exacte (équation 4.13).
- un pic de contrainte au cours du régime transitoire, dont l'amplitude varie en fonction de We (Les physiciens appellent "overshoot" ce pic de contrainte).
- une phase de relaxation vers l'état stationnaire.

Notons qu'asymptotiquement notre modèle produit une réponse rhéofluidifiante : à l'état stationnaire la courbe d'écoulement qui relie S_{xy} à We est concave.

Enfin les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 décrivent l'évolution des contraintes normales élastiques ainsi que l'influence du We sur leur amplitude à l'état stationnaire.

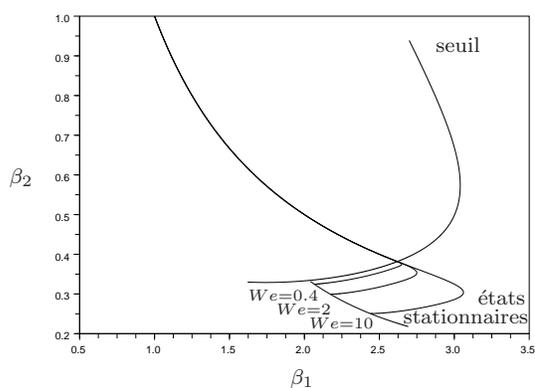


FIGURE 4.2 – Évolution de la déformation élastique dans le plan de phase des valeurs propres pour différentes valeurs de We .

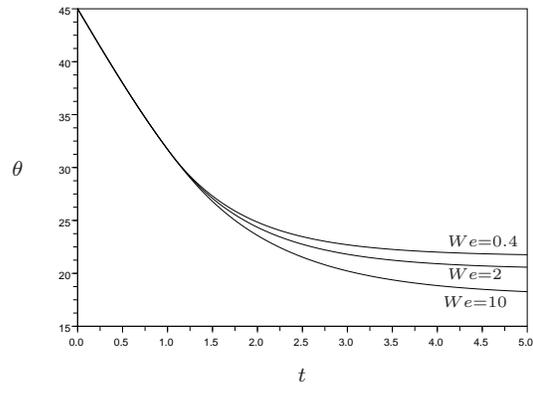


FIGURE 4.3 – Évolution de l'orientation de la base propre de la déformation élastique pour différentes valeurs de We .

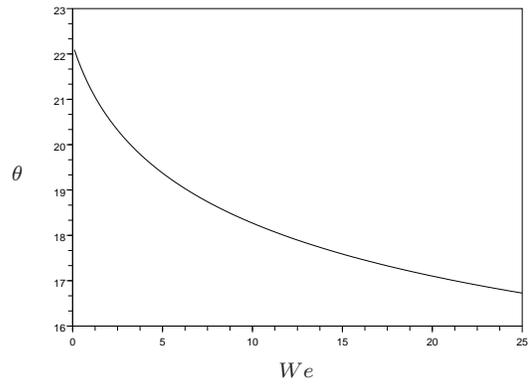


FIGURE 4.4 – Orientation de la base propre en fonction de We en régime stationnaire.

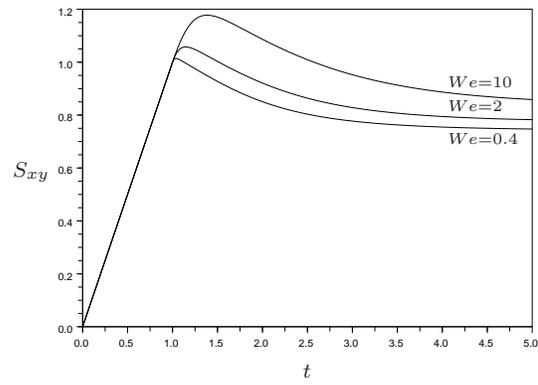


FIGURE 4.5 – Évolution de la composante de cisaillement de la contrainte élastique pour différentes valeurs de We .

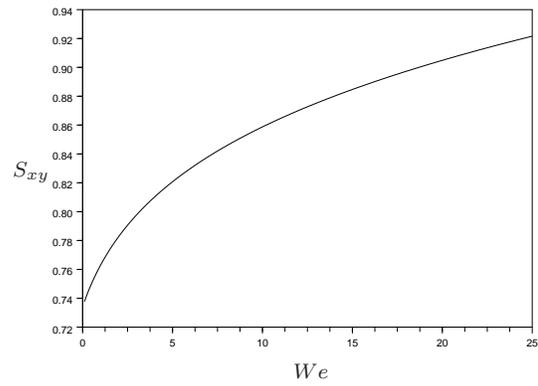


FIGURE 4.6 – Composante de cisaillement de la contrainte élastique en fonction de We en régime stationnaire.

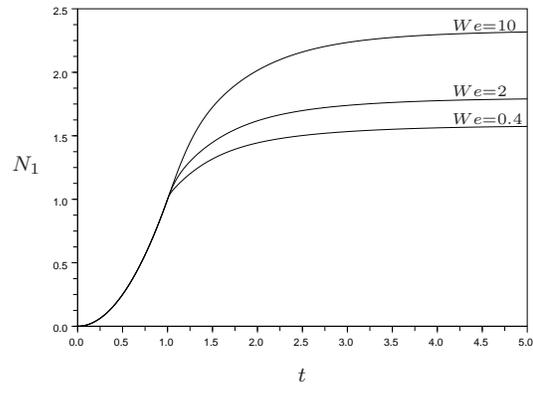


FIGURE 4.7 – Évolution de la première différence de contraintes normales élastiques pour différentes valeurs de We .

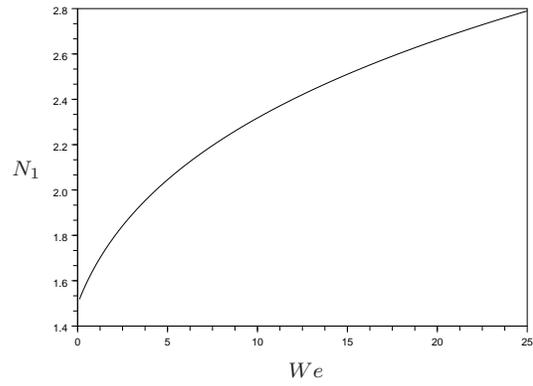


FIGURE 4.8 – Première différence de contraintes normales élastiques en fonction de We en régime stationnaire.

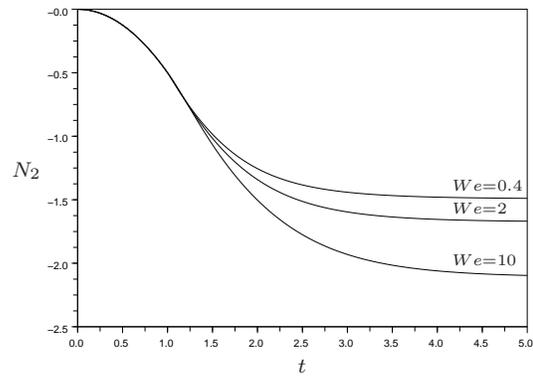


FIGURE 4.9 – Évolution de la deuxième différence de contraintes normales élastiques pour différentes valeurs de We .

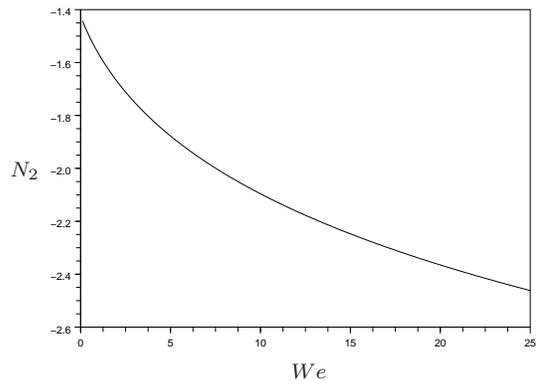


FIGURE 4.10 – Deuxième différence de contraintes normales élastiques en fonction de We en régime stationnaire.

Influence de K

La même discussion peut être menée pour comprendre l'influence de K . Nous avons choisi :

$$a = b = 0.5, We = 1.$$

Nous pouvons remarquer que :

- la transition du régime élastique vers le régime d'écoulement semble devenir moins régulière (figure 4.14) lorsque K augmente.
- en régime stationnaire les forces normales ont une croissance linéaire par rapport à K .

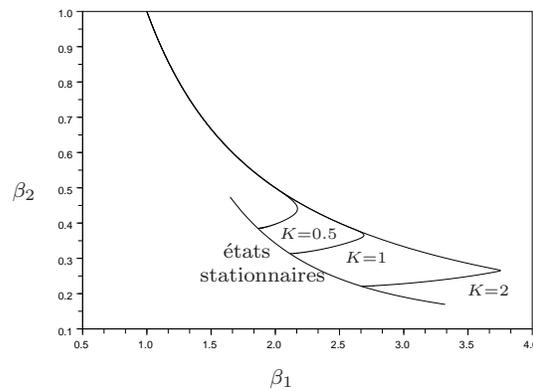


FIGURE 4.11 – Évolution de la déformation élastique dans le plan de phase des valeurs propres pour différentes valeurs du seuil K .

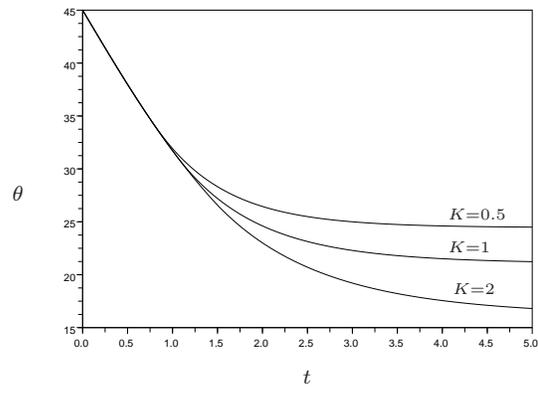


FIGURE 4.12 – Évolution de l'orientation de la base propre de la déformation élastique pour différentes valeurs de K .

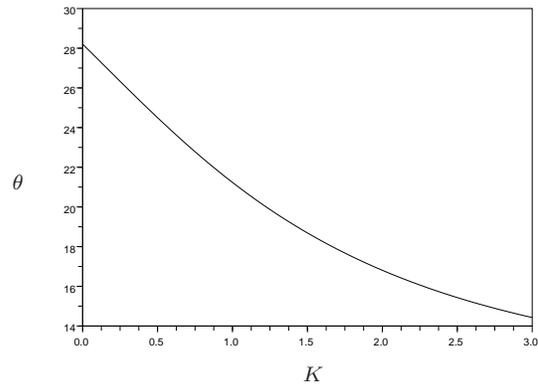


FIGURE 4.13 – Orientation de la base propre en fonction de K en régime stationnaire.

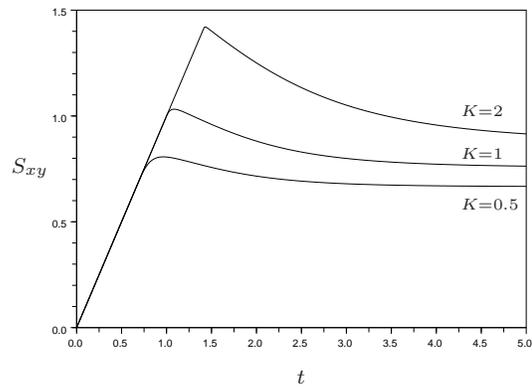


FIGURE 4.14 – Évolution de la composante de cisaillement de la contrainte élastique pour différentes valeurs de K .

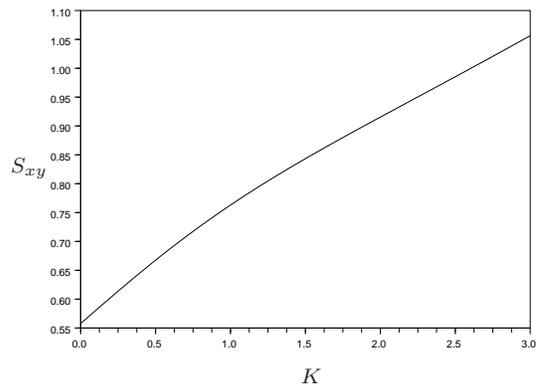


FIGURE 4.15 – Composante de cisaillement de la contrainte élastique en fonction de K en régime stationnaire.

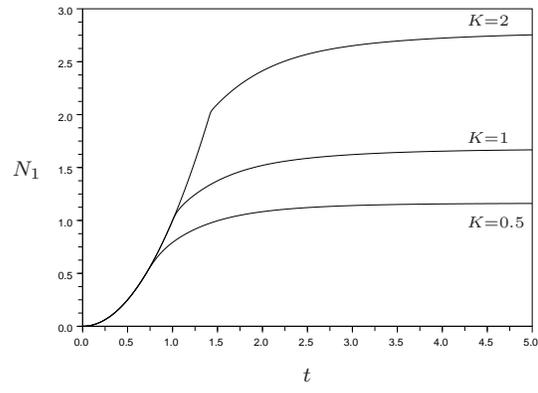


FIGURE 4.16 – Évolution de la première différence de contraintes normales élastiques pour différentes valeurs de K .

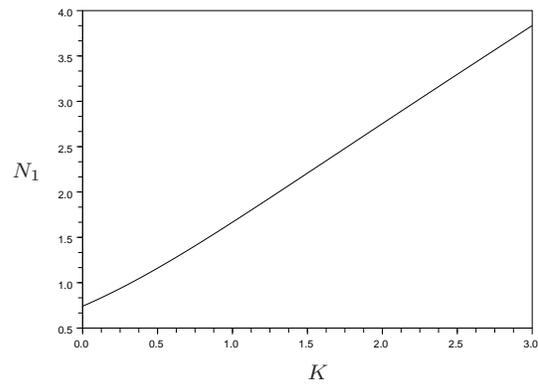


FIGURE 4.17 – Première différence de contraintes normales élastiques en fonction de K en régime stationnaire.

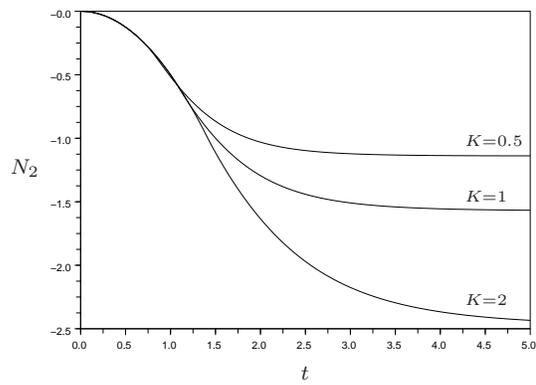


FIGURE 4.18 – Évolution de la deuxième différence de contraintes normales élastiques pour différentes valeurs de K .

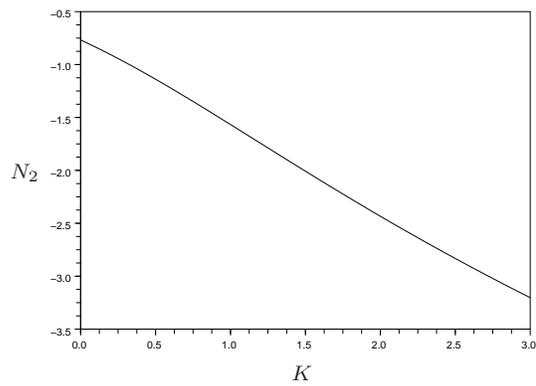


FIGURE 4.19 – Deuxième différence de contraintes normales élastiques en fonction de K en régime stationnaire.

Influence de a

Examinons maintenant l'influence de a . Nous avons choisi :

$$b = 0.1, We = K = 1.$$

Le paramètre a joue un rôle nuancé : par exemple son effet sur la valeur des contraintes de cisaillement et la première différence de contraintes normales en régime stationnaire n'est pas spectaculaire (figures 4.23 et 4.25). Son influence apparaît plus marquée sur la deuxième différence de contraintes normales (figure 4.27) : il s'agit d'un véritable effet tensoriel.

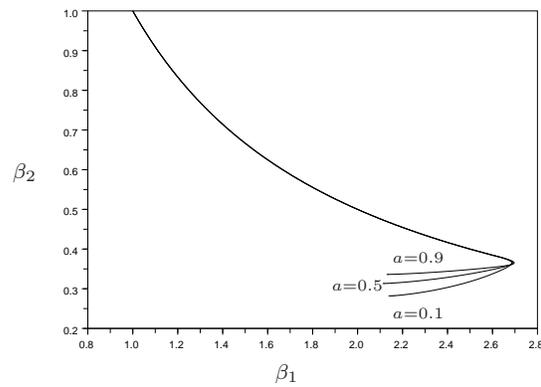


FIGURE 4.20 – Évolution de la déformation élastique dans le plan de phase des valeurs propres pour différentes valeurs de a .

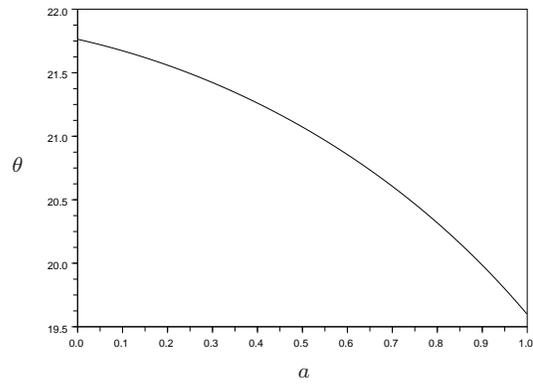


FIGURE 4.21 – Orientation de la base propre en fonction de a en régime stationnaire.

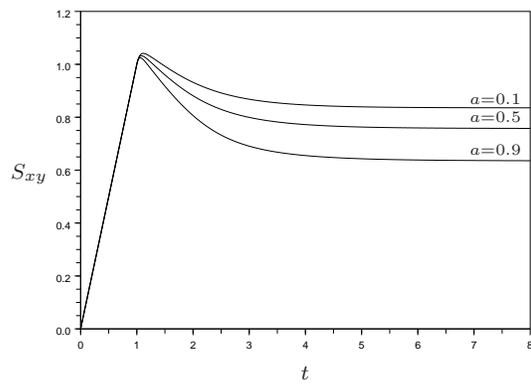


FIGURE 4.22 – Évolution de la composante de cisaillement de la contrainte élastique pour différentes valeurs de a .

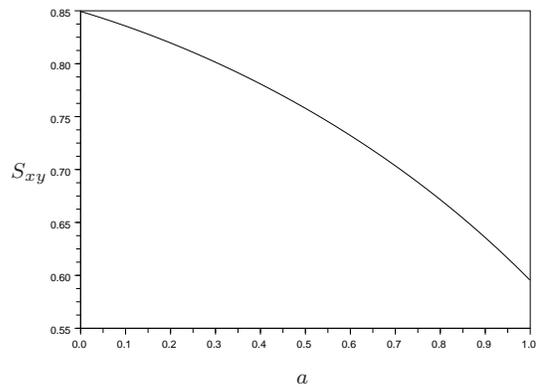


FIGURE 4.23 – Composante de cisaillement de la contrainte élastique en fonction de a en régime stationnaire.

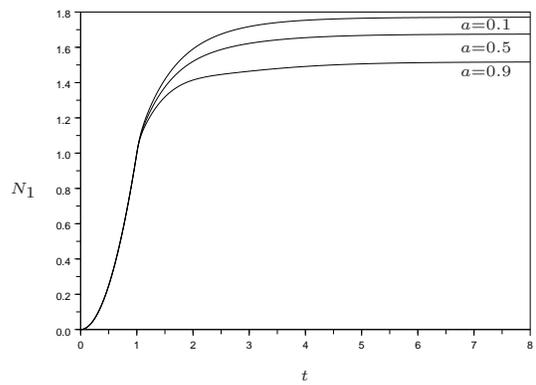


FIGURE 4.24 – Évolution de la première différence de contraintes normales élastiques pour différentes valeurs de a .

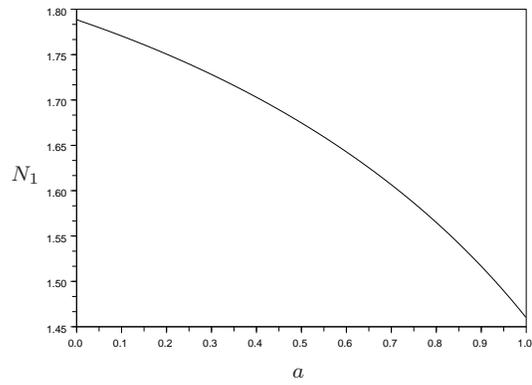


FIGURE 4.25 – Première différence de contraintes normales élastiques en fonction de a en régime stationnaire.

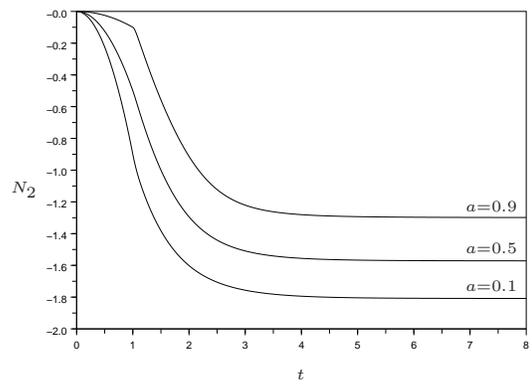


FIGURE 4.26 – Évolution de la deuxième différence de contraintes normales élastiques pour différentes valeurs de a .

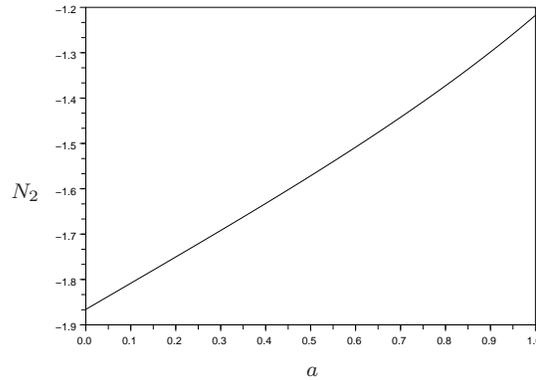


FIGURE 4.27 – Deuxième différence de contraintes normales élastiques en fonction de a en régime stationnaire.

Influence de b

Nous terminons avec l'influence de b . Nous avons fait les choix suivants :

$$a = 0.1, We = K = 1.$$

Nous pouvons faire les mêmes commentaires que pour l'influence de a , puisque les effets de cette non-linéarité sont particulièrement marqués sur la figure 4.35 qui décrit l'évolution de N_2 avec b à l'état stationnaire.

4.2 Cisaillement imposé, cas hétérogène

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une donnée initiale hétérogène. Dans ce cas l'équation sur la déformations est couplée à l'équation de Stokes sur la vitesse V :

$$\begin{cases} -\Delta V = \alpha \nabla \cdot S - \nabla p \\ \nabla \cdot V = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Nous avons considéré deux types d'hétérogénéités de l'état de contraintes élastiques initial :

- des hétérogénéités dépendant de y uniquement.
- des hétérogénéités dépendant de x et y simultanément.

Il est important de faire cette dissociation puisque physiquement des hétérogénéités selon y sont un ingrédient nécessaire pour produire de la localisation dans l'écoulement. Après avoir décrit le type d'hétérogénéités initiales choisies pour les simulations, nous présentons sur deux cas quelques profils de vitesse et de contraintes observés en régime dynamique. Comme l'écoulement peut présenter des bandes bloquées à l'état stationnaire, nous proposons une étude de la largeur de ces bandes en fonctions des paramètres inclus dans le modèle : a , b , α , We et K .

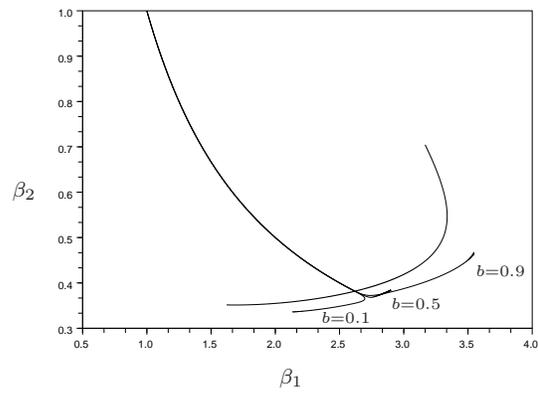


FIGURE 4.28 – Évolution de la déformation élastique dans le plan de phase des valeurs propres pour différentes valeurs de b .

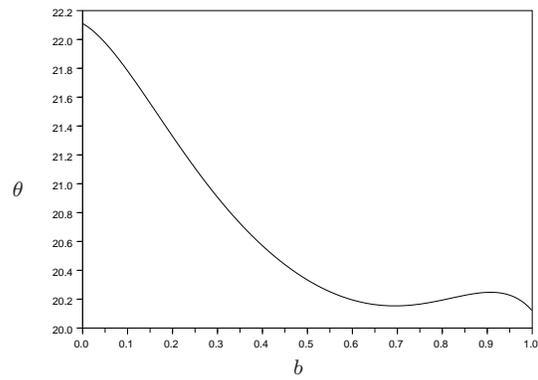


FIGURE 4.29 – Orientation de la base propre en fonction de b en régime stationnaire

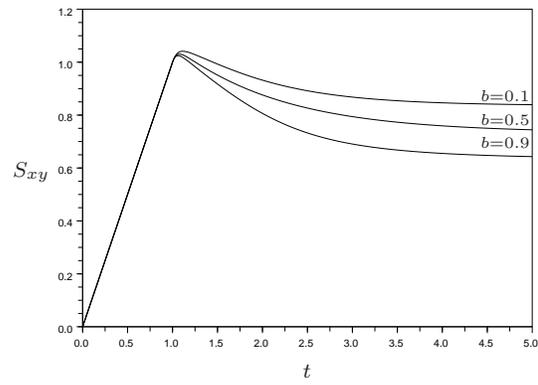


FIGURE 4.30 – Évolution de la composante de cisaillement de la contrainte élastique pour différentes valeurs de b .

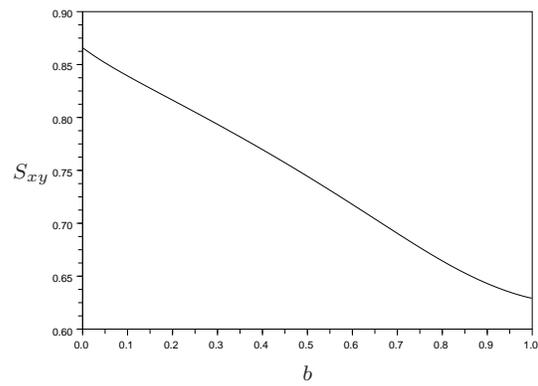


FIGURE 4.31 – Composante de cisaillement de la contrainte élastique en fonction de b en régime stationnaire.

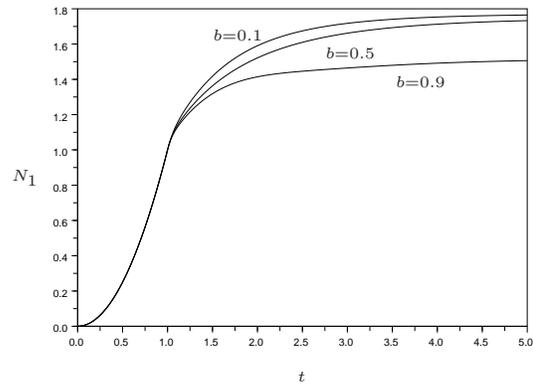


FIGURE 4.32 – Évolution de la première différence de contraintes normales élastiques pour différentes valeurs de b .

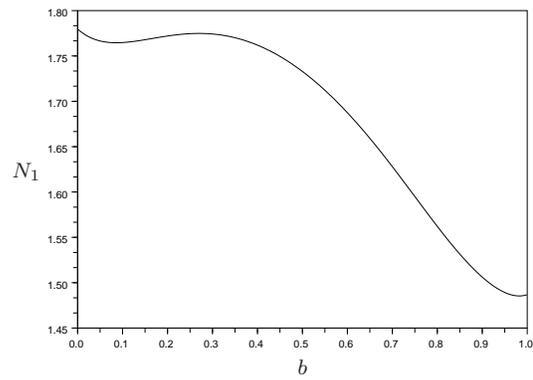


FIGURE 4.33 – Première différence de contraintes normales élastiques en fonction de b en régime stationnaire.

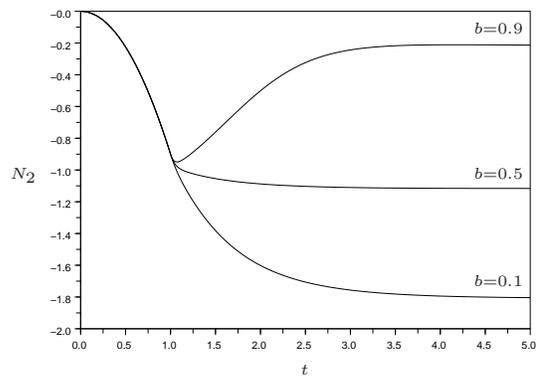


FIGURE 4.34 – Évolution de la deuxième différence de contraintes normales élastiques pour différentes valeurs de b .

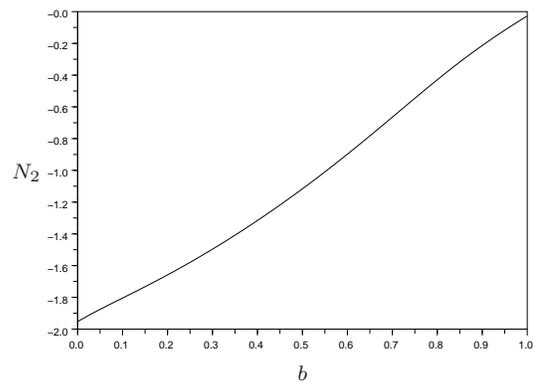


FIGURE 4.35 – Deuxième différence de contraintes normales élastiques en fonction de b en régime stationnaire.

L'ajout d'hétérogénéités selon x sera pour nous l'occasion de mesurer leur importance dans la dynamique de l'écoulement. Nous verrons que de telles hétérogénéités jouent un rôle subtil dans la dynamique de l'écoulement et peuvent interagir avec des hétérogénéités selon y de façon tout à fait non triviale dans les phénomènes de localisation.

4.2.1 Hétérogénéité de l'état initial des contraintes selon y uniquement

Dans un premier temps nous nous limitons à l'étude d'un écoulement invariant selon x . Nous allons voir que pour simuler un tel cas il suffit de considérer des hétérogénéités de la donnée initiale dépendant de y uniquement.

Distribution initiale des contraintes élastiques, conséquences

Puisque l'élasticité est inversible, prescrire la déformation initiale est équivalent à prescrire la contrainte initiale. Pour une élasticité de Mooney-Rivlin l'inversion s'obtient simplement. En effet si les spectres de B et S sont notés $(\beta_i)_i$ et $(\sigma_i)_i$ alors un simple calcul permet d'exprimer β_i en fonction de σ_i :

$$\sigma_i = a\beta_i - \frac{(1-a)}{\beta_i} - (2a - 1),$$

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{1}{1-\sigma_i} & \text{si } a = 0 \\ \frac{1}{2a} \left(\sigma_i + 2a - 1 + \sqrt{(\sigma_i + 2a - 1)^2 + 4a(1-a)} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons vu plus haut que l'invariance des équations dans la direction de \vec{e}_z implique :

$$S_{xz} = S_{yz} = 0.$$

Les contraintes élastiques initiales induisent des forces qui se superposent aux forces générées par le mouvement des parois. Pour simplifier nous considérons le cas de contraintes élastiques initialement à l'équilibre, c'est-à-dire n'induisant pas de forces à l'instant $t = 0$:

$$\nabla \cdot S(t = 0) = 0. \quad (4.22)$$

Dans un premier temps nous nous limitons à l'étude d'hétérogénéités dépendant de y uniquement. Pour les simulations nous avons choisi :

$$S(t = 0, y) = \underbrace{\left(1 - (4y(1-y))^\beta\right)}_{S_{xx}(t=0,y)} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x.$$

Le paramètre β fixe l'hétérogénéité de la donnée initiale : si $\beta = 0$ alors $S(t = 0)$ est homogène. Il faut donc prendre $\beta > 0$. Dans les simulations qui suivent nous avons choisi $\beta = 1$.

Notons qu'à cause de l'homogénéité $S(t = 0)$ selon x il est clair que l'écoulement reste homogène selon x :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t, x, y) = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x}(t, x, y) = 0.$$

Puisque $V(t, y) = u(t, y) \vec{e}_x + v(t, y) \vec{e}_y$ la condition d'incompressibilité se réécrit :

$$\frac{\partial v}{\partial y}(t, y) = 0.$$

La composante v est donc nulle à cause des conditions aux limites de cisaillement, d'où :

$$V(t, y) = u(t, y) \vec{e}_x.$$

L'équation de Stokes peut alors être réécrite :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, y) = \alpha \frac{\partial S_{xy}}{\partial y}(t, y) \\ \frac{\partial S_{yy}}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial p}{\partial y}(t, y). \end{cases}$$

Cela amène quelques commentaires :

- seule la composante de cisaillement de la contrainte élastique pilote l'évolution de u . Attention : comme l'élasticité est non-linéaire toutes les composantes du tenseur de déformation élastique B ont en fait une contribution.
- le gradient de pression se récupère simplement à partir de la composante S_{yy} de la contrainte.

Nous terminons avec une remarque pratique : le code de calcul que nous avons développé pour la géométrie de cisaillement est un code bidimensionnel capable de gérer des hétérogénéités de la donnée initiale selon x , pour des écoulements résolus sur le domaine $\left[0, \frac{L}{l}\right] \times [0, 1]$, L et l étant les tailles du domaine physique.

Dans le cas d'hétérogénéités selon y seulement, les profils de vitesse et de contrainte restent les mêmes quelque soit L , l'écoulement étant invariant selon x . Il est donc inutile de simuler l'écoulement pour des domaines possédant un grand rapport d'aspect. Pour limiter la taille du problème à résoudre et optimiser les temps des calculs, nous avons donc choisi d'adapter la taille du domaine selon \vec{e}_x en fonction de la finesse du maillage dy selon \vec{e}_y , en prenant par exemple :

$$dx = dy, \frac{L}{l} = 3dx.$$

Bien entendu cela n'affecte en rien l'exactitude des profils calculés.

Évolutions des profils de vitesse et de contrainte

Nous présentons maintenant l'évolution des profils de vitesse et de contrainte pour deux valeurs de α :

- les figures 4.36, 4.37 4.38 et 4.39 correspondent au cas $\alpha = 5$.
- les figures 4.40, 4.41 4.42 et 4.43 correspondent au cas $\alpha = 10$.

Les autres paramètres prennent les valeurs suivantes :

$$\beta = 1, We = 1, K = 1, a = 0.5, b = 0.5.$$

Les profils ont tous été obtenus pour un nombre N de points de discrétisation selon y égal à 240.

Nous constatons que le premier cas ($\alpha = 5$) ne produit pas de localisation d'écoulement, le profil de vitesse stationnaire étant régulier et le cisaillement constant (figure 4.36).

Au contraire le deuxième cas ($\alpha = 10$) conduit à la formation d'une bande bloquée coincée entre deux bandes de cisaillement constant (figure 4.40). Le profil de vitesse étant simplement continu, le cisaillement est discontinu et les différentes composantes de la contrainte élastique présentent un saut à l'interface entre la bande centrale bloquée et les bandes en écoulement (figures 4.41, 4.42 et 4.43).

Attention : lorsque l'écoulement a produit de la localisation et que le régime stationnaire est atteint, des oscillations sur S_{xy} (mais aussi sur N_1 et N_2) apparaissent et se propagent depuis les interfaces et à l'intérieur des bandes bloquées. Il s'agit d'un phénomène numérique : les schémas que nous avons développés ne sont pas capables de gérer une discontinuité telle que celle qui apparaît lorsque l'écoulement a produit de la localisation. Bien entendu cela peut avoir des conséquences néfastes sur le calcul, dans le cas d'un écoulement qui aurait commencé à localiser avec la formation d'une interface mais qui continuerait à évoluer avec une dynamique très lente. Pour simuler des écoulements plus réalistes, il faudrait dans l'avenir envisager des solutions numériques à ce problème.

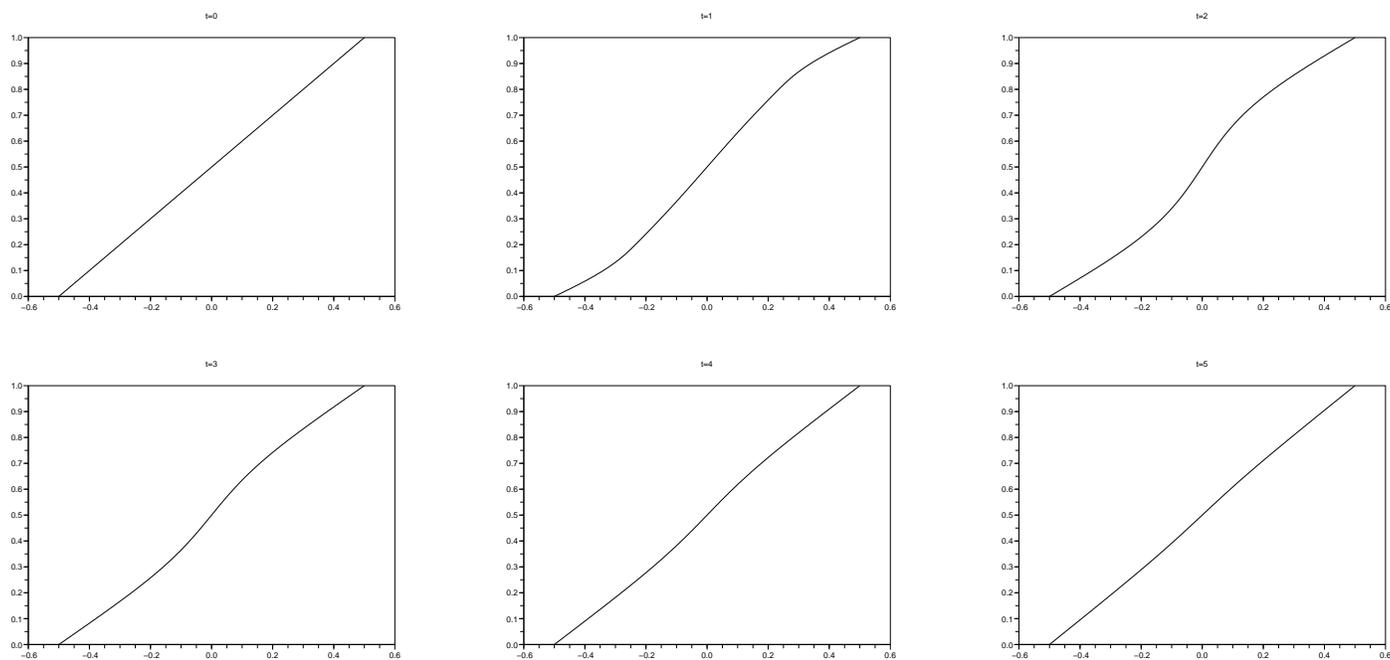


FIGURE 4.36 – Évolution du profil de vitesse u ($a = b = 0.5$, $We = K = 1$, $\alpha = 5$).

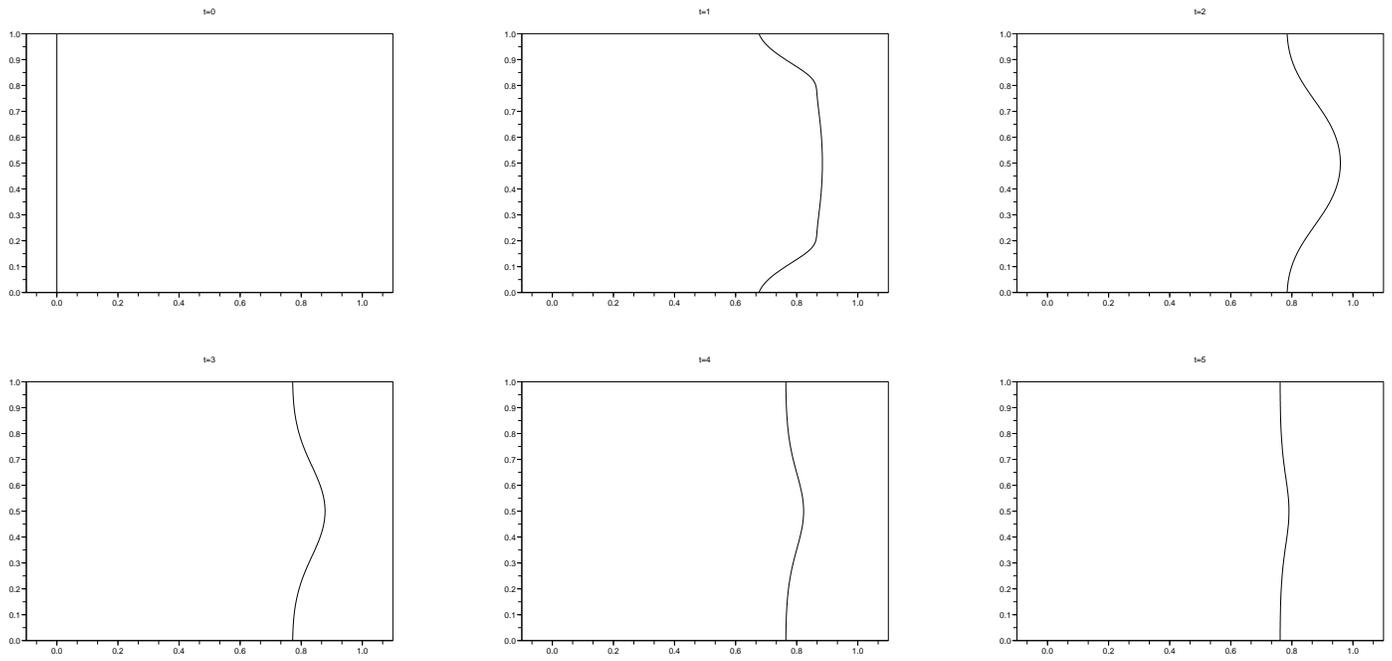


FIGURE 4.37 – Évolution de la contrainte de cisaillement élastique S_{xy} ($a = b = 0.5$, $We = K = 1$, $\alpha = 5$).

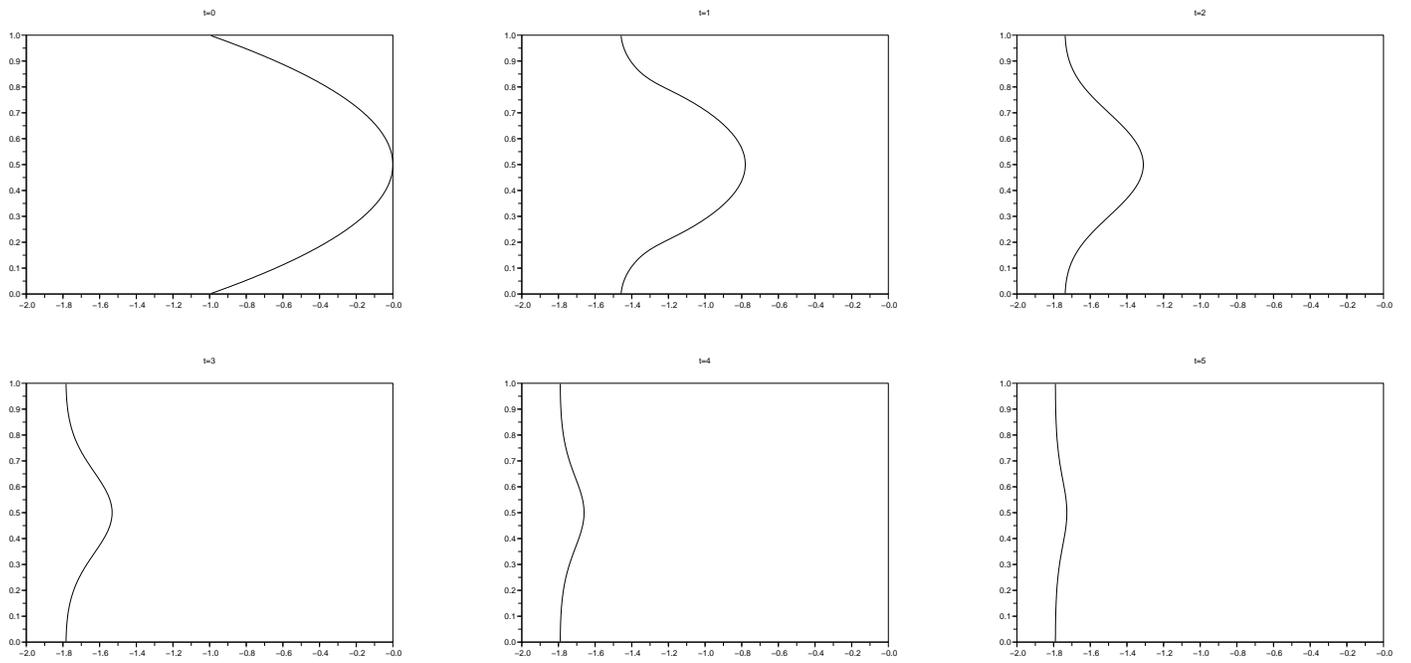


FIGURE 4.38 – Évolution de la première différence de contraintes normales élastiques N_1 ($a = b = 0.5$, $We = K = 1$, $\alpha = 5$).

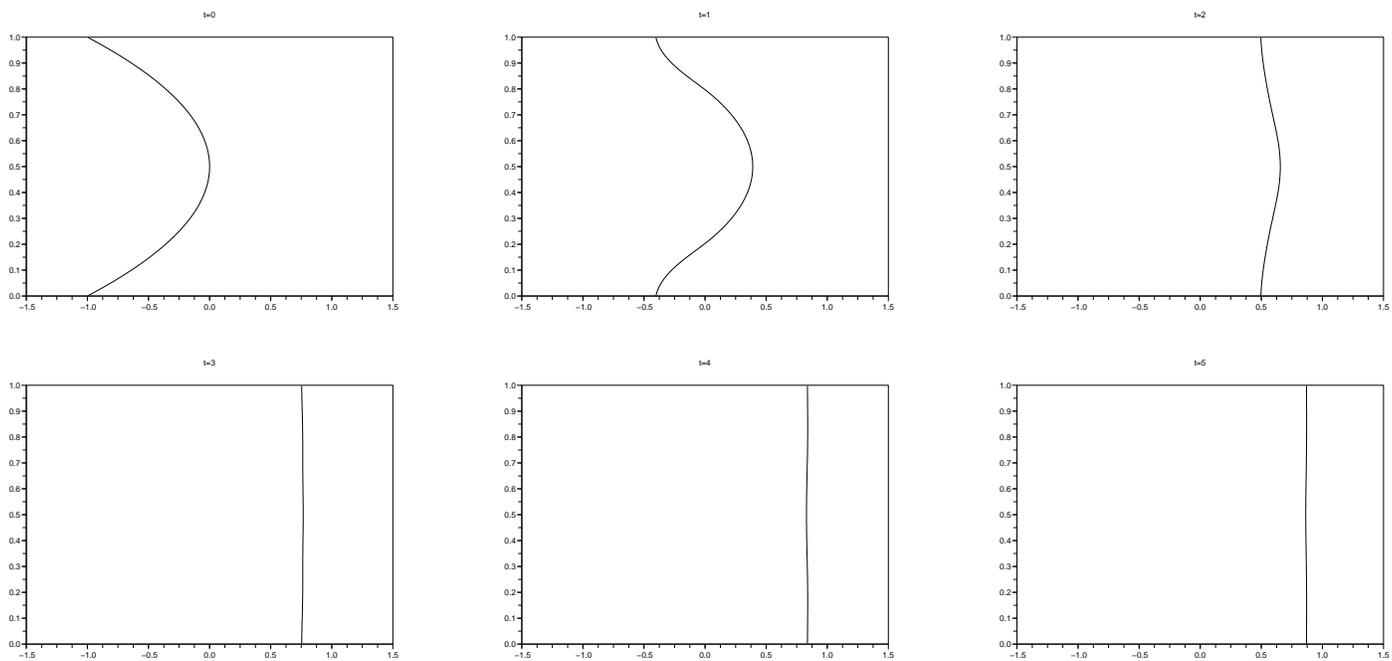


FIGURE 4.39 – Évolution de la deuxième différence de contraintes normales élastiques N_2 ($a = b = 0.5$, $We = K = 1$, $\alpha = 5$).

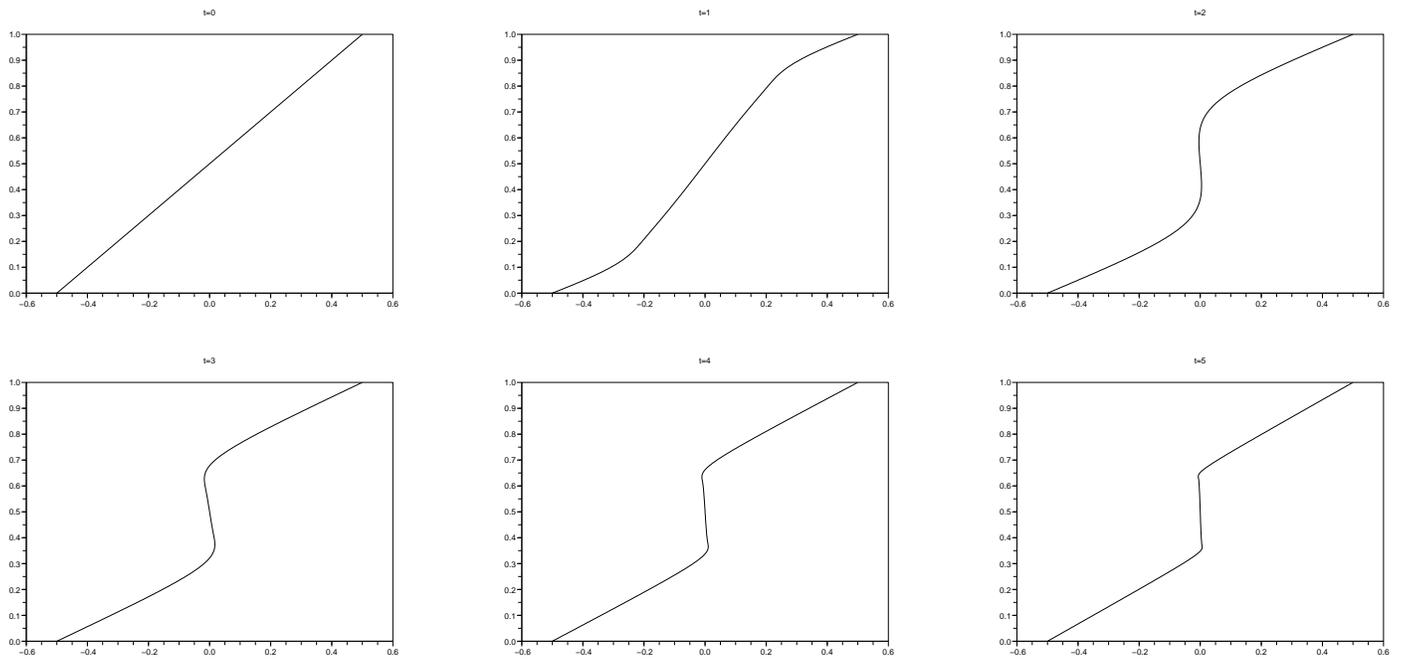


FIGURE 4.40 – Évolution du profil de vitesse u ($a = b = 0.5$, $We = K = 1$, $\alpha = 10$).

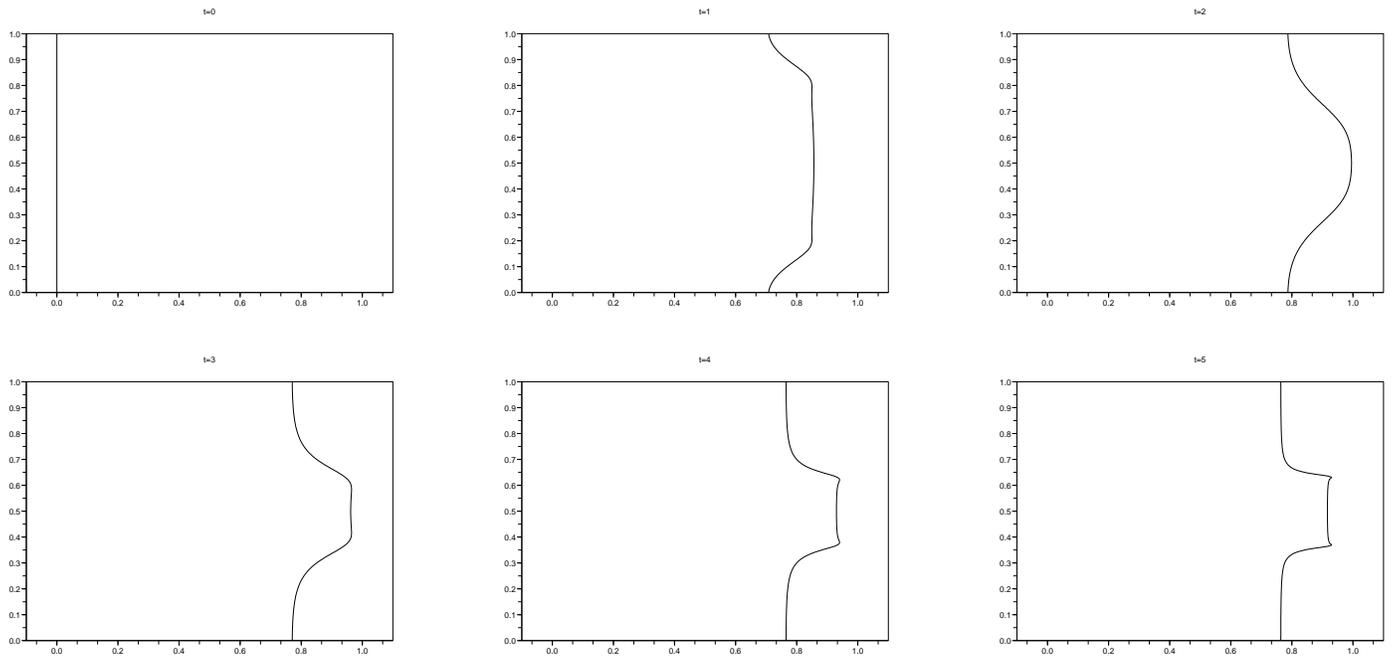


FIGURE 4.41 – Évolution de la contrainte de cisaillement élastique S_{xy} ($a = b = 0.5$, $We = K = 1$, $\alpha = 10$).

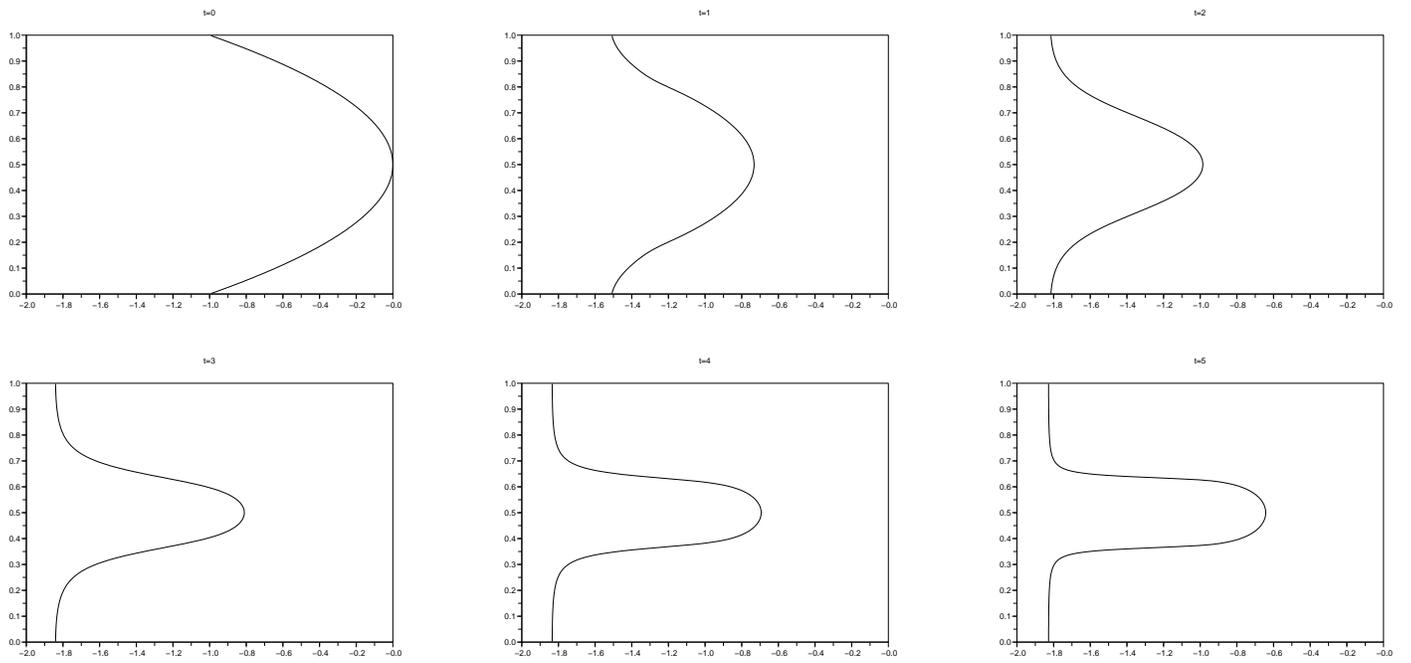


FIGURE 4.42 – Évolution de la première différence de contraintes normales élastiques N_1 ($a = b = 0.5$, $We = K = 1$, $\alpha = 10$).

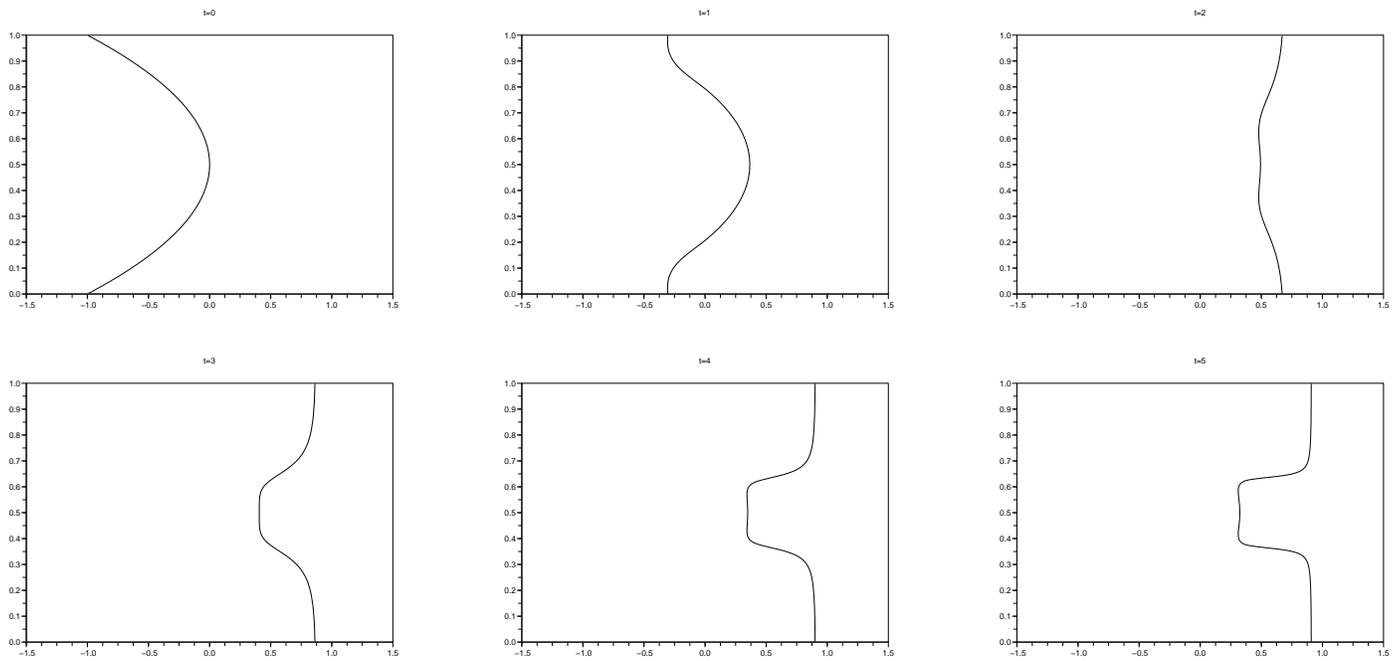


FIGURE 4.43 – Évolution de la deuxième différence de contraintes normales élastiques N_2 ($a = b = 0.5$, $We = K = 1$, $\alpha = 10$).

Etude de la largeur de la bande bloquée en régime stationnaire

Rappelons que notre modèle comporte cinq paramètres : α , We , K , a et b . Il est intéressant d'essayer de mieux comprendre le rôle de chacun de ces paramètres dans l'apparition de bandes bloquées. Tel est l'objectif de la discussion qui suit.

Les figures 4.44 à 4.53 représentent la largeur de bande obtenue à l'état stationnaire en fonction d'un jeu de deux paramètres du modèle :

- α et b pour les figures 4.44 et 4.45.
- α et We pour les figures 4.46 et 4.47.
- a et b pour les figures 4.48 et 4.49.
- α et K pour les figures 4.50 et 4.51.
- K et We pour les figures 4.52 et 4.53.

Chaque plan d'étude est simulé deux fois avec deux précisions distinctes ($N = 120$ et $N = 240$).

Ces simulations nous donnent une première idée sur le rôle joué par les paramètres du modèle :

- une augmentation de α provoque une augmentation assez nette de la taille de la bande bloquée (figures 4.45, 4.47 et 4.51).
- une diminution de We provoque une augmentation de la taille de la bande bloquée (figures 4.47 et 4.53).
- une augmentation de K provoque une augmentation de la taille de la bande bloquée (figures 4.51 et 4.53).
- l'effet des non-linéarités d'origines élastique et plastique est plus complexe à interpréter. La surface 4.49 est à cet égard édifiante : une augmentation de b provoque une croissance de la bande dans le cas $a = 0.1$ et une diminution de la bande dans le cas $a = 0.9$!

Il semble plus judicieux de confronter séparément ces paramètres aux autres paramètres du modèle. Par exemple la figure 4.45 suggère que l'augmentation de b précipiterait l'apparition de bandes lorsque α augmente aussi.

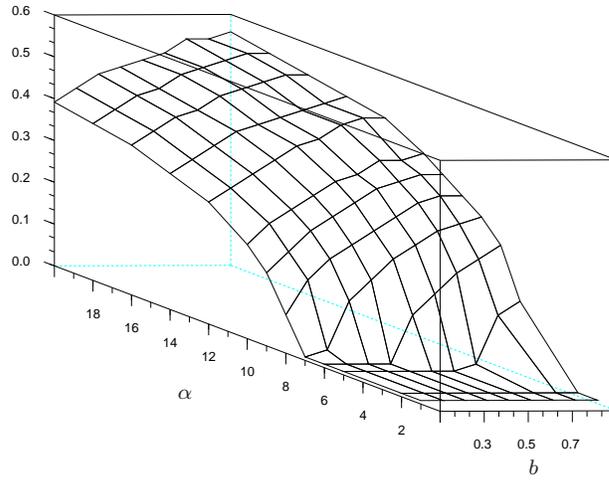


FIGURE 4.44 – Largeur de la bande bloquée en fonction de b variant de 0.1 à 0.9 et α variant de 1 à 20 ($a = \frac{1}{7}$, $We = K = 1$, $N = 120$).

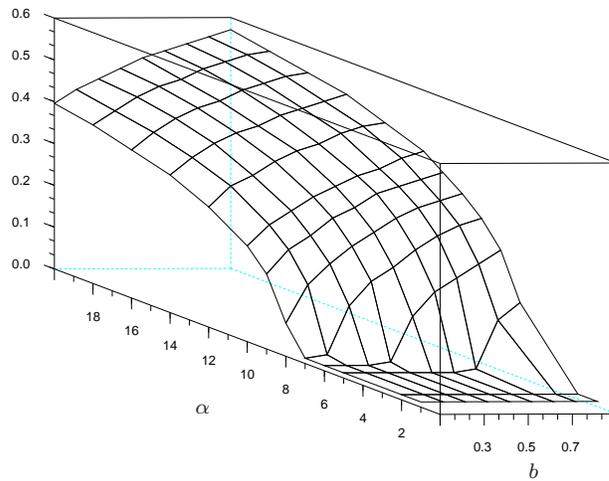


FIGURE 4.45 – Largeur de la bande bloquée en fonction de b variant de 0.1 à 0.9 et α variant de 1 à 20 ($a = \frac{1}{7}$, $We = K = 1$, $N = 240$).

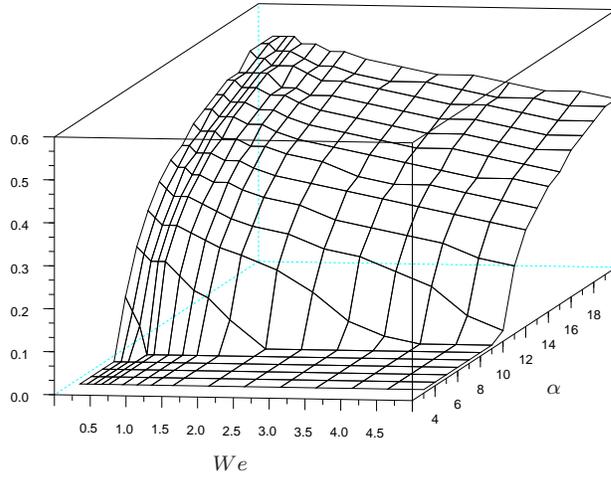


FIGURE 4.46 – Largeur de la bande bloquée en fonction de α variant de 3 à 20 et We variant de 0.2 à 5 ($K = 1$, $a = b = 0.5$, $N = 120$).

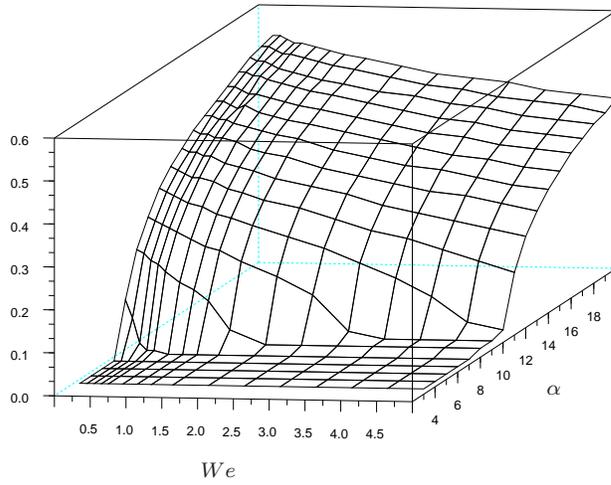


FIGURE 4.47 – Largeur de la bande bloquée en fonction de α variant de 3 à 20 et We variant de 0.2 à 5 ($K = 1$, $a = b = 0.5$, $N = 240$).

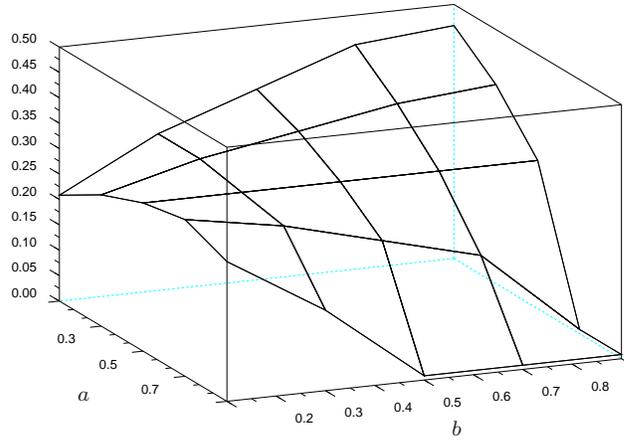


FIGURE 4.48 – Largeur de la bande bloquée en fonction de a variant de 0.1 à 0.9 et b variant de 0.1 à 0.9 ($\alpha = 10$, $We = K = 1$, $N = 120$).

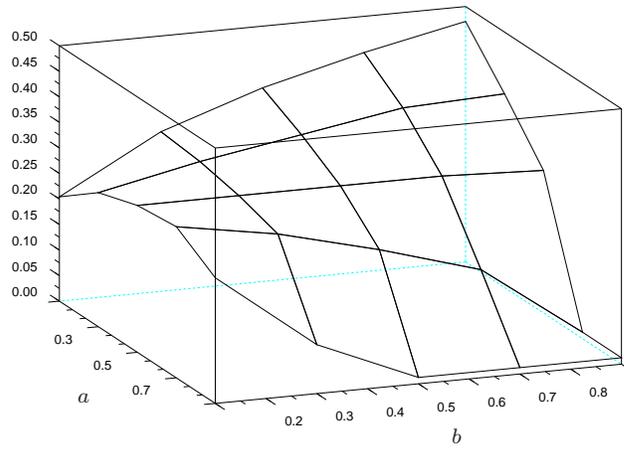


FIGURE 4.49 – Largeur de la bande bloquée en fonction de a variant de 0.1 à 0.9 et b variant de 0.1 à 0.9 ($\alpha = 10$, $We = K = 1$, $N = 240$).

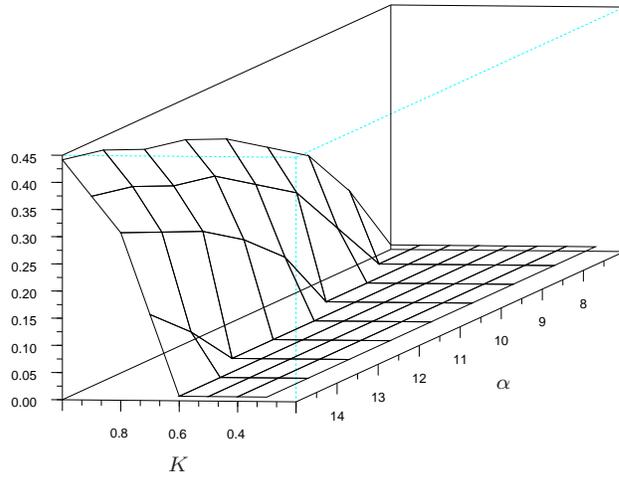


FIGURE 4.50 – Largeur de la bande bloquée en fonction de α variant de 7 à 15 et K variant de 0.3 à 1 ($We = 1$, $a = b = 0.5$, $N = 120$).

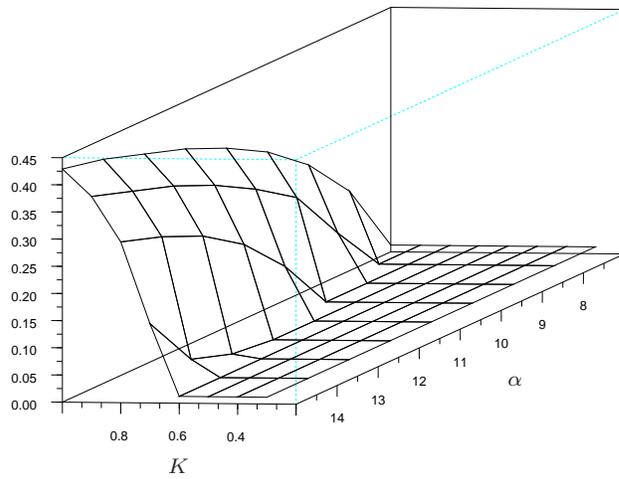


FIGURE 4.51 – Largeur de la bande bloquée en fonction de α variant de 7 à 15 et K variant de 0.3 à 1 ($We = 1$, $a = b = 0.5$, $N = 240$).

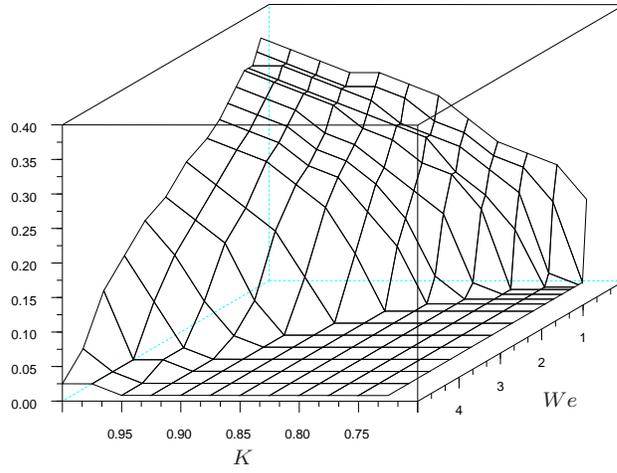


FIGURE 4.52 – Largeur de la bande bloquée en fonction de K variant de 0.725 à 1 et We variant de 0.2 à 5 ($\alpha = 10$, $a = b = 0.5$, $N = 120$).

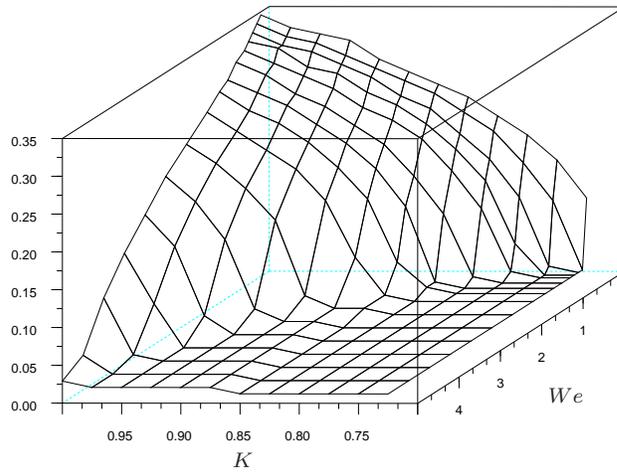


FIGURE 4.53 – Largeur de la bande bloquée en fonction de K variant de 0.725 à 1 et We variant de 0.2 à 5 ($\alpha = 10$, $a = b = 0.5$, $N = 240$).

Influence des non linéarités de la donnée initiale et stabilité de l'état stationnaire

Nous avons vu que l'introduction dans la donnée initiale d'hétérogénéités selon y est un ingrédient nécessaire pour que le modèle puisse produire de la localisation à l'état stationnaire. Nous nous proposons d'étudier plus précisément l'influence de ces hétérogénéités. Les valeurs prises par les paramètres du modèle ne doivent donc pas varier. Nous avons choisi :

$$\alpha = 16, We = K = 1, a = b = 0.5.$$

Rapplons que l'état de contraintes élastique initial est tel que :

$$S(t = 0, y) = \left(1 - (4y(1 - y))^\beta\right) \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x.$$

La figure 4.54 décrit l'influence de β sur la largeur de la bande bloquée. Dans la figure 4.55 la même étude a été menée en prenant une perturbation du type :

$$S(t = 0, y) = (1 - 4\epsilon y(1 - y)) \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x.$$

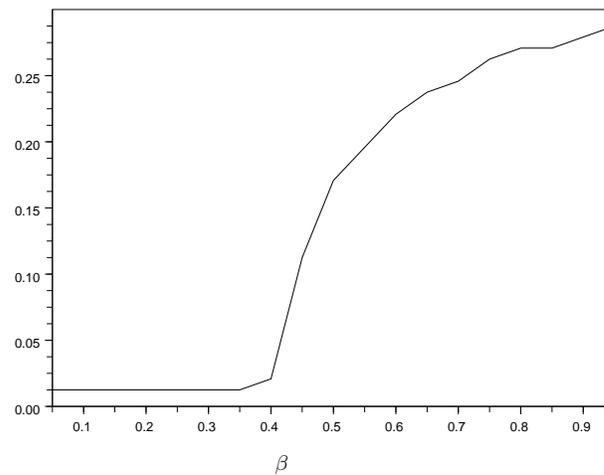


FIGURE 4.54 – Largeur de la bande bloquée en fonction de β ($\alpha = 16, We = K = 1, a = b = 0.5$).

Dans les deux cas, il y a une valeur critique des paramètres β^c et ϵ^c en-deçà de laquelle il n'y a pas de blocage. Le taux de cisaillement est homogène :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t = +\infty, y) = 1.$$

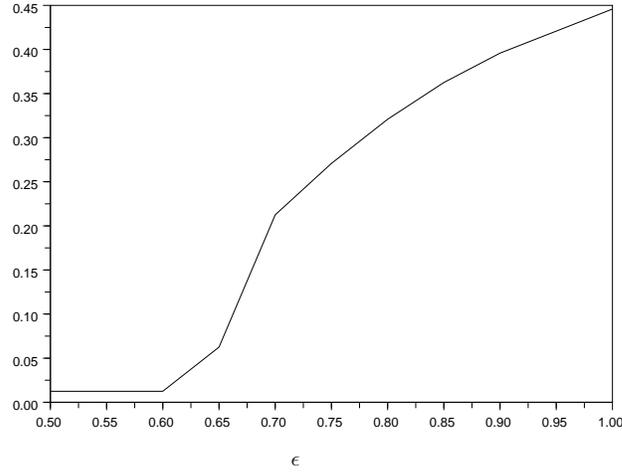


FIGURE 4.55 – Largeur de la bande bloquée en fonction de ϵ ($\alpha = 16$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

Il est relié à B via l'équation d'équilibre 4.18 que nous rappelons :

$$\nabla V^t \cdot B + B \cdot \nabla V = 2\theta \left(w_a(B, B^{-1}) - K \right) \frac{w_a(B, B^{-1}) - K}{We} B \cdot \mathcal{G}(B, B^{-1}).$$

En l'absence de blocage l'état stationnaire est donc un état stable : de petites perturbations d'un état initial qui ne produit pas de localisation conduisent au même état stationnaire.

Au-delà de β^c et ϵ^c des bandes bloquées apparaissent. Puisque leur taille croît avec β et ϵ , l'état asymptotique n'est plus stable.

4.2.2 Hétérogénéité de l'état initial des contraintes selon x et y simultanément

Nous venons de voir que la présence d'hétérogénéités selon y de l'état initial des contraintes élastiques est un ingrédient nécessaire dans l'apparition de bandes de cisaillement. Pour simuler des écoulements plus réalistes il faut également introduire des hétérogénéités selon x . C'est cette situation plus générale que nous envisageons maintenant. Notre objectif sera d'examiner sur quelques cas simples comment des fluctuations de la donnée initiale selon x et y interagissent entre elles. L'idée de la courte étude qui suit est donc de déterminer si l'ajout d'hétérogénéités selon x peut jouer de façon cruciale dans l'organisation de l'écoulement et l'apparition de bandes de cisaillement.

Distribution initiale des contraintes élastiques

Nous nous restreignons à l'étude d'hétérogénéités de l'état initial des contraintes élastiques telles que :

$$S(t=0, x, y) = \underbrace{p(x)q(y)}_{S_{xx}(t=0, x, y)} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x. \quad (4.23)$$

A cause des conditions aux limites périodiques p doit respecter :

$$p(0) = p\left(\frac{L}{l}\right), p'(0) = p'\left(\frac{L}{l}\right).$$

Nous avons choisi de tester deux familles simples de fonctions :

- $p(x) = 1 - (4x(1-x))^\beta$, $\beta > 1$ (à cause des conditions aux limites périodiques).
- $p(x) = 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi l \omega}{L} x\right)\right)$, $\omega \in \mathbb{N}^*$ (toujours à cause des conditions aux limites périodiques).

Dans chaque famille un paramètre permet d'ajuster la non linéarité de la donnée initiale.

D'autre part la fonction q est toujours telle que :

$$q(y) = 1 - (4y(1-y))^\gamma, \gamma > 0. \quad (4.24)$$

Résultats

Nous présentons maintenant quelques résultats. Ces derniers ont tous été obtenus avec :

$$L = l, M = N = 120.$$

D'autre part nous ne faisons pas varier les valeurs prises par les paramètres β , We , K , a et b :

$$\beta = 1, We = 1, K = 1, a = 0.5, b = 0.5.$$

Les figures qui suivent représentent :

- l'évolution du profil de vitesse en différentes abscisses ($x = \frac{L}{4l}$, $x = \frac{2L}{4l}$ et $x = \frac{3L}{4l}$, figures 4.56, 4.76 4.60, 4.62, 4.64, 4.66, 4.68, 4.70, 4.72 et 4.74).
- l'évolution de la distribution d'énergie élastique (figures 4.57, 4.77, 4.61, 4.63, 4.65, 4.67, 4.69, 4.71, 4.73 et 4.75).

La fonction p est telle que :

- $p(x) = 1 - (4x(1-x))^\beta$ dans les figures 4.56, 4.57 et 4.60 à 4.67.
- $p(x) = 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi l \omega}{L} x\right)\right)$ dans les figures 4.76, 4.77 et 4.68 à 4.75.

L'idée consiste à cerner l'effet des d'hétérogénéités selon x sur l'organisation de l'écoulement et l'apparition de bandes bloquées. Pour ce faire nous avons considéré deux valeurs de α égales à 7.5 (figures 4.56 à 4.77) et 10 (figures 4.60 à 4.75). En l'absence d'hétérogénéité selon x pour la donnée initiale, le cas $\alpha = 7.5$ ne provoque pas de localisation d'écoulement tandis que le cas $\alpha = 10$ conduit à l'apparition de bandes bloquées.

A la lumière de ces résultats il semble que :

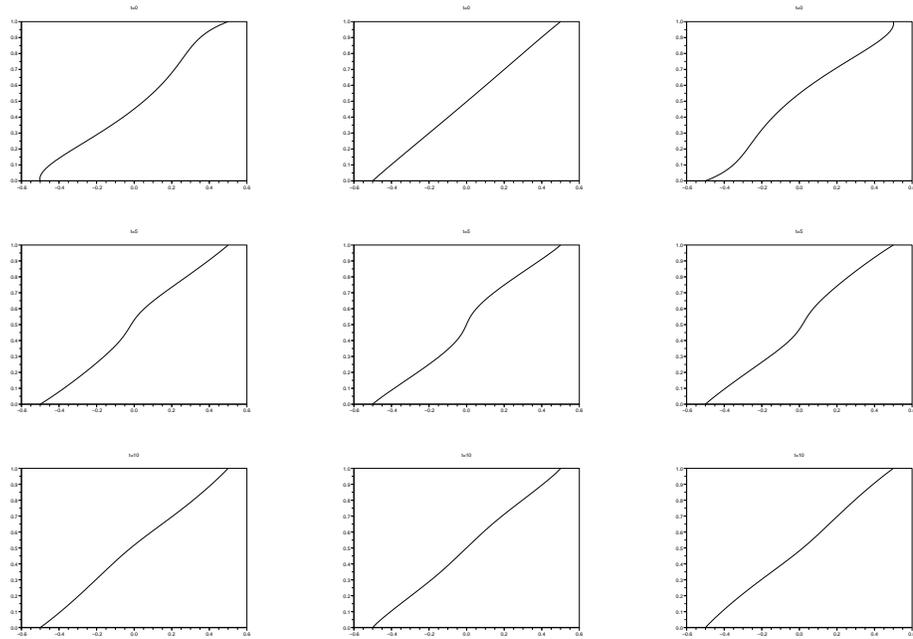


FIGURE 4.56 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4}$ au centre et $x = \frac{3L}{4}$ à droite ($\beta = 2$, $\alpha = 7.5$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

- l’ajout d’hétérogénéités suivant x ne précipite pas la formation de bandes de cisaillement pour des cas qui normalement ne conduisent pas à l’apparition de bandes (cas $\alpha = 7.5$).
- au contraire pour des cas conduisant à de la localisation d’écoulement (cas $\alpha = 10$) l’ajout d’hétérogénéité suivant x a un effet nettement plus subtil, puisque la bande bloquée peut soit disparaître progressivement (figures 4.60 et 4.61, 4.62 et 4.63), soit se maintenir, (figures 4.64 et 4.65, 4.66 et 4.67, 4.68 et 4.69, 4.70 et 4.71) ou même à se séparer en deux bandes de cisaillement nul mais évoluant à des vitesses constantes (figures 4.72 et 4.73, 4.74 et 4.75).

Actuellement nous ne sommes pas capables de dire si de telles tendances sont réellement persistantes ou au contraire transitoires, voire soumises à des mouvements cycliques, la raison étant que le schéma numérique que nous avons utilisé est incapable de gérer les transitions discontinues de la déformation élastique entre les régions solides et les régions en écoulement. Comme nous l’avons signalé plus haut des oscillations finissent par se propager dans les zones en dessous du seuil d’écoulement.

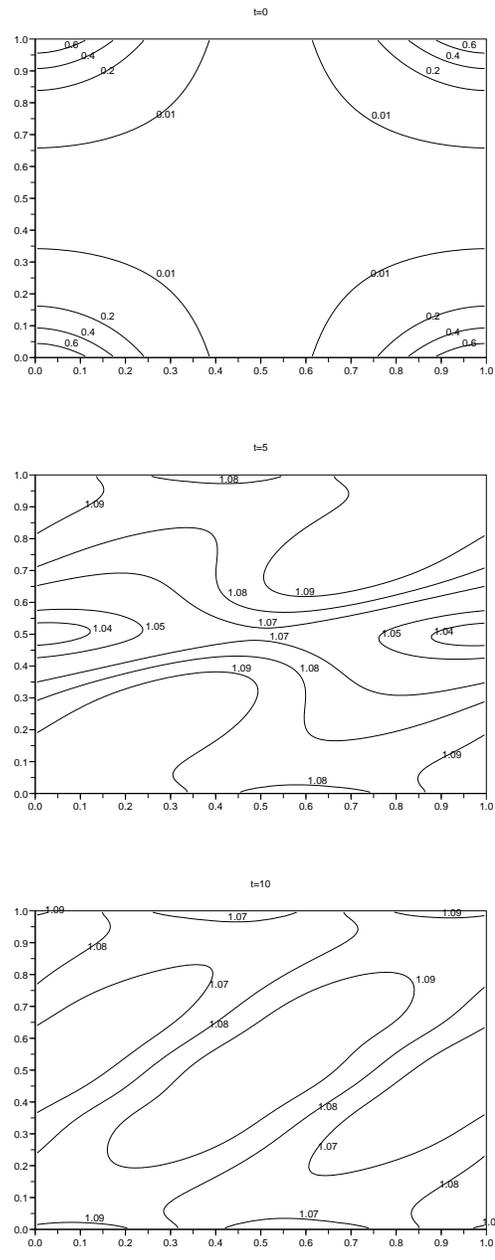


FIGURE 4.57 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\beta = 2$, $\alpha = 7.5$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

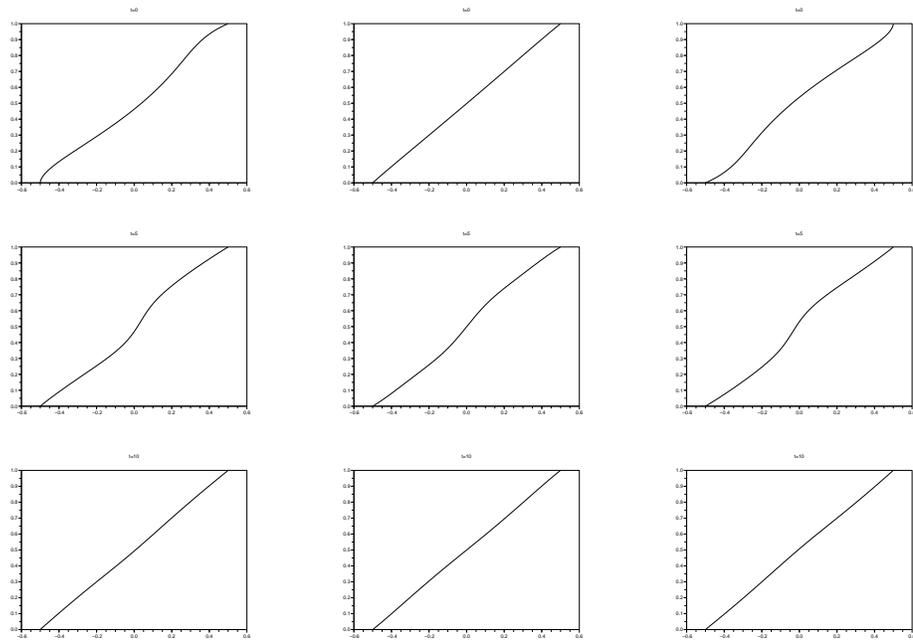


FIGURE 4.58 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4}$ au centre et $x = \frac{3L}{4}$ à droite ($\omega = 1$, $\alpha = 7.5$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

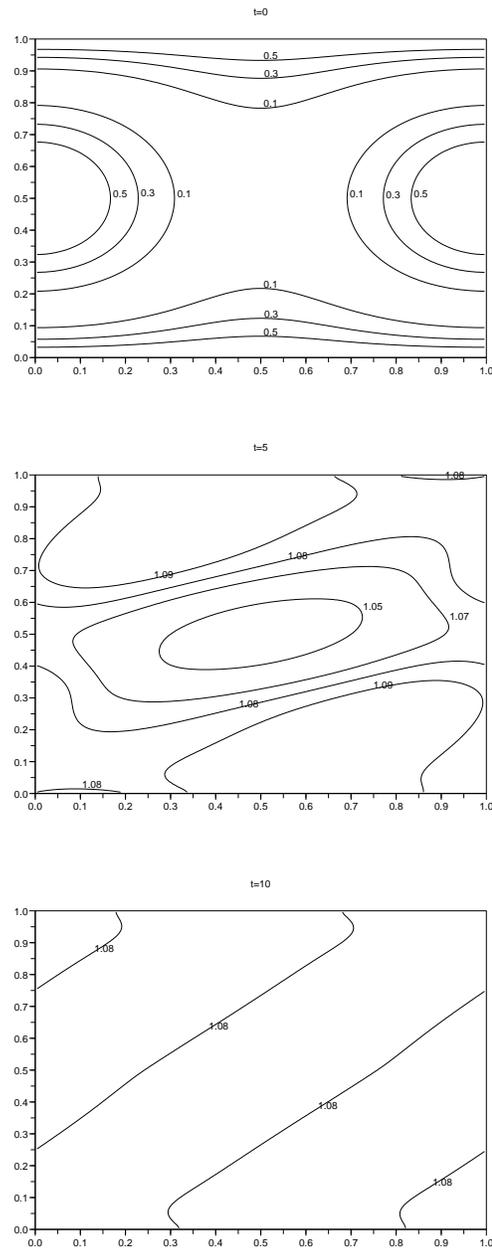


FIGURE 4.59 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\omega = 1$, $\alpha = 7.5$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

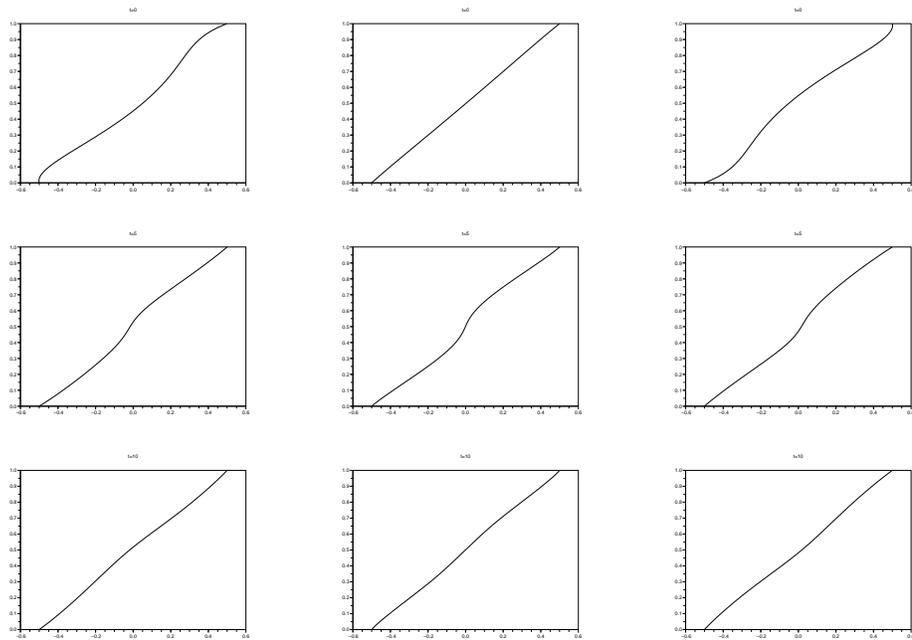


FIGURE 4.60 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4}$ au centre et $x = \frac{3L}{4}$ à droite ($\beta = 2$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

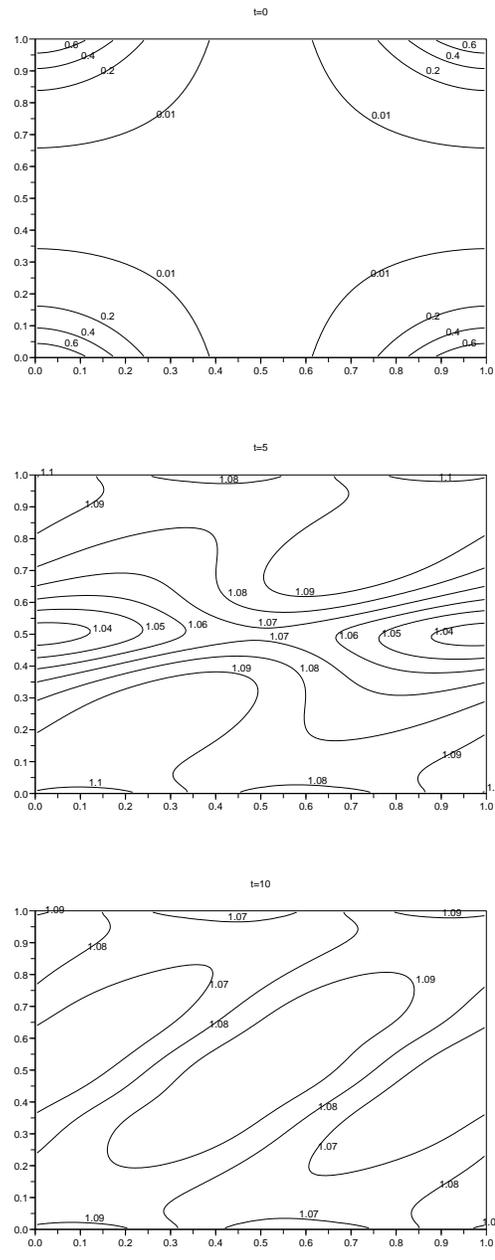


FIGURE 4.61 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\beta = 2$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

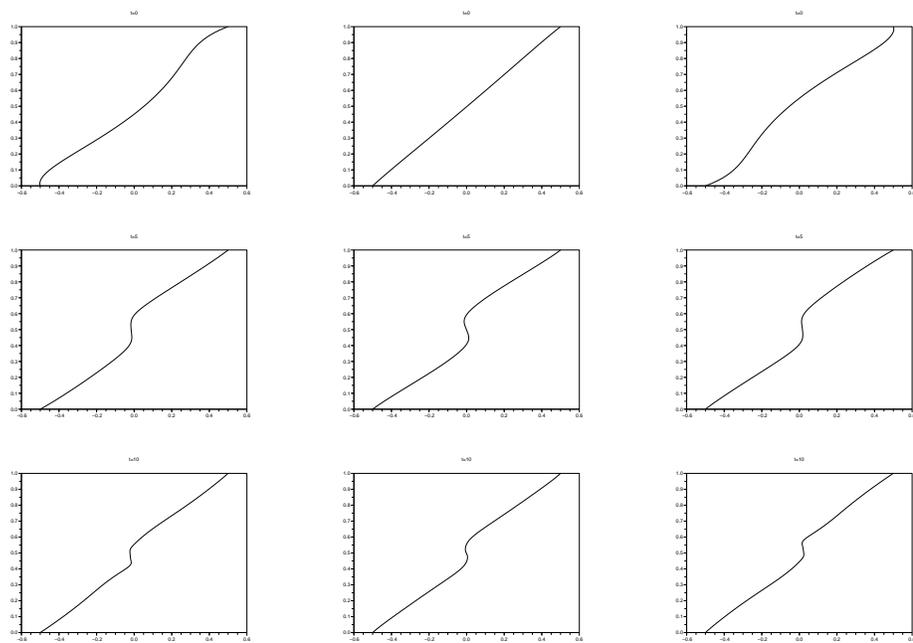


FIGURE 4.62 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4}$ au centre et $x = \frac{3L}{4}$ à droite ($\beta = 4$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

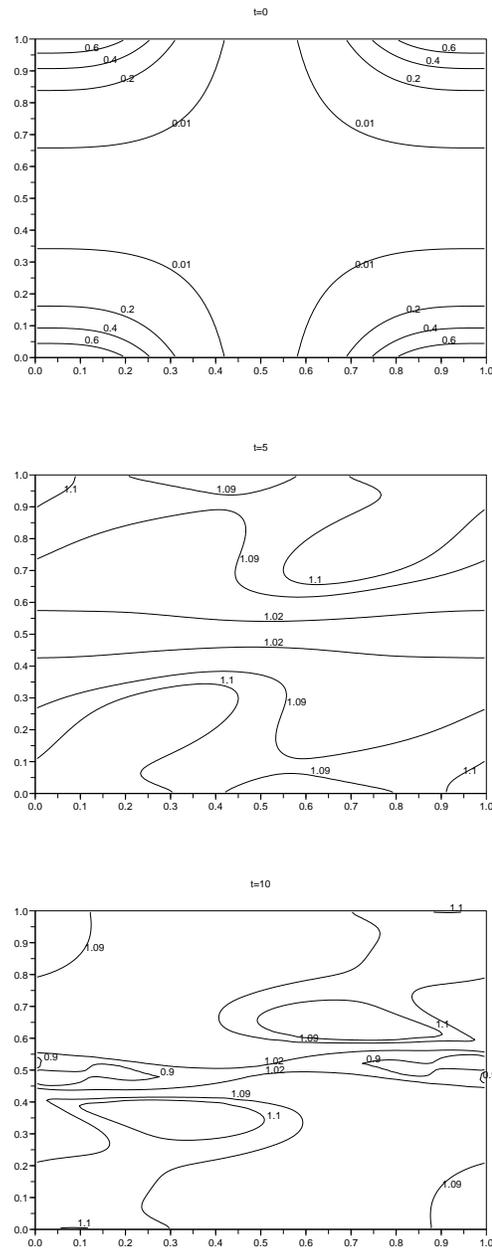


FIGURE 4.63 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\beta = 4$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

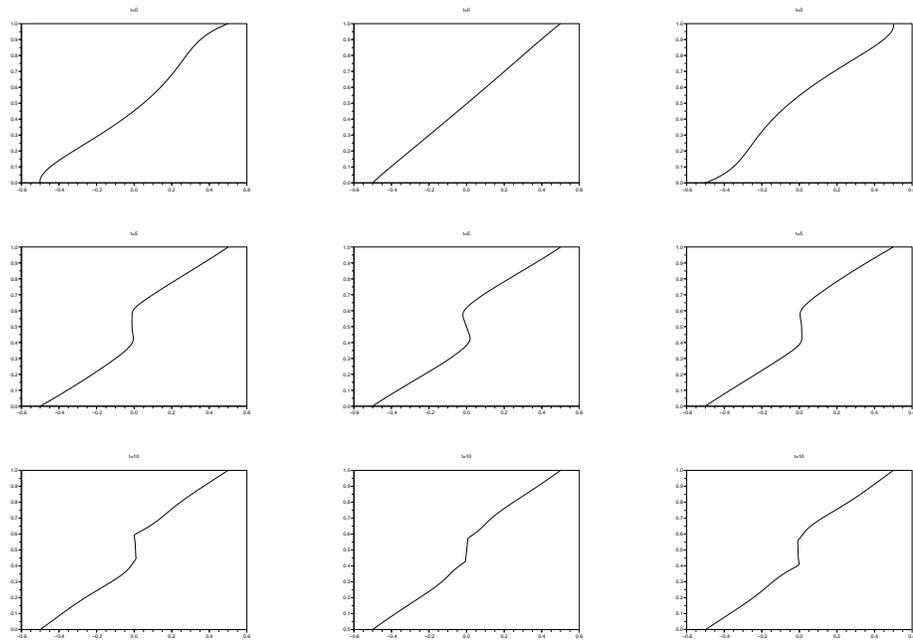


FIGURE 4.64 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4}$ au centre et $x = \frac{3L}{4}$ à droite ($\beta = 6$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

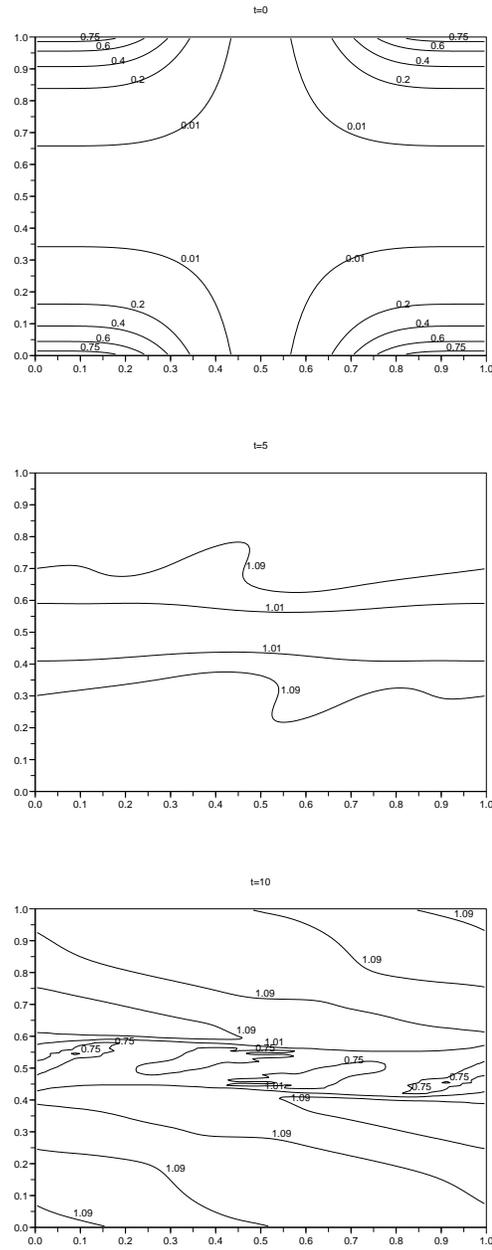


FIGURE 4.65 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\beta = 6$, $\alpha = 7.5$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

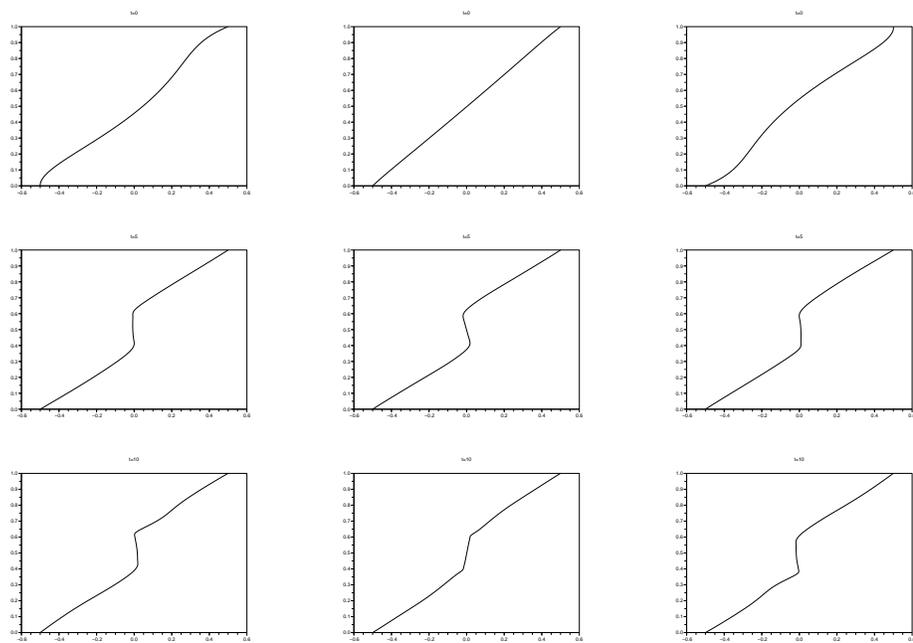


FIGURE 4.66 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4l}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4l}$ au centre et $x = \frac{3L}{4l}$ à droite ($\beta = 8$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

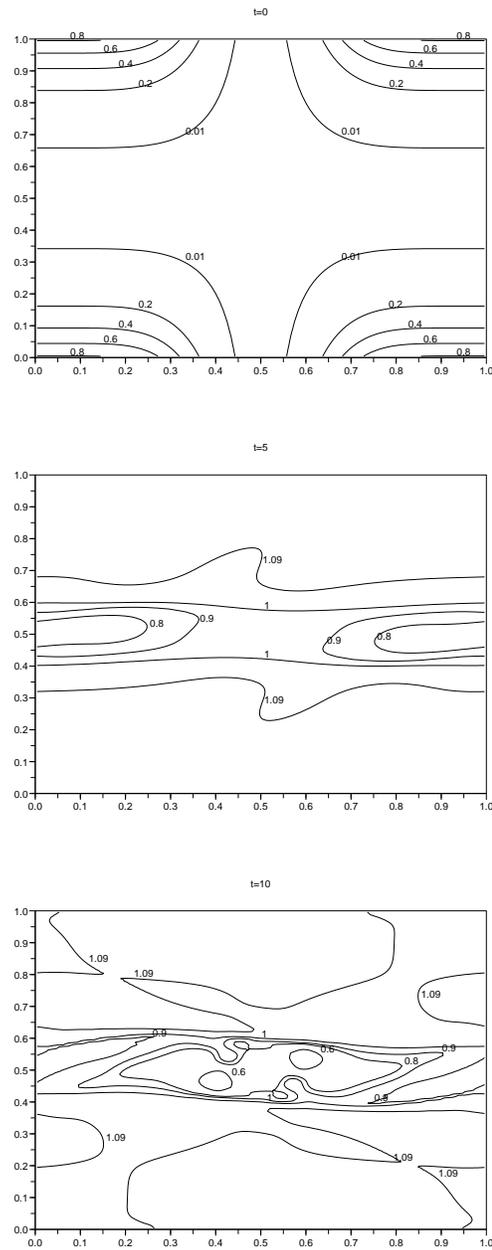


FIGURE 4.67 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\beta = 8$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

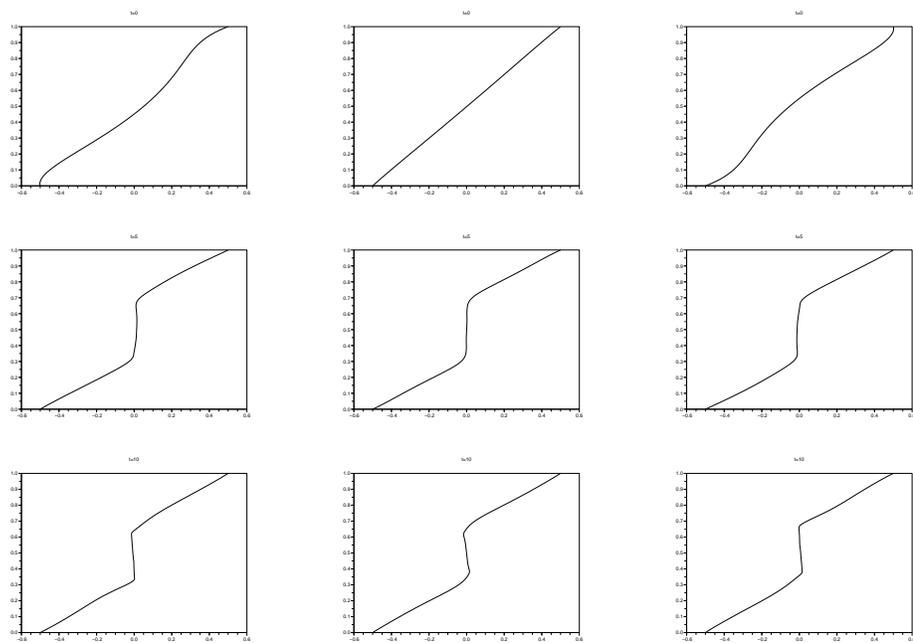


FIGURE 4.68 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4l}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4l}$ au centre et $x = \frac{3L}{4l}$ à droite ($\omega = 1$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

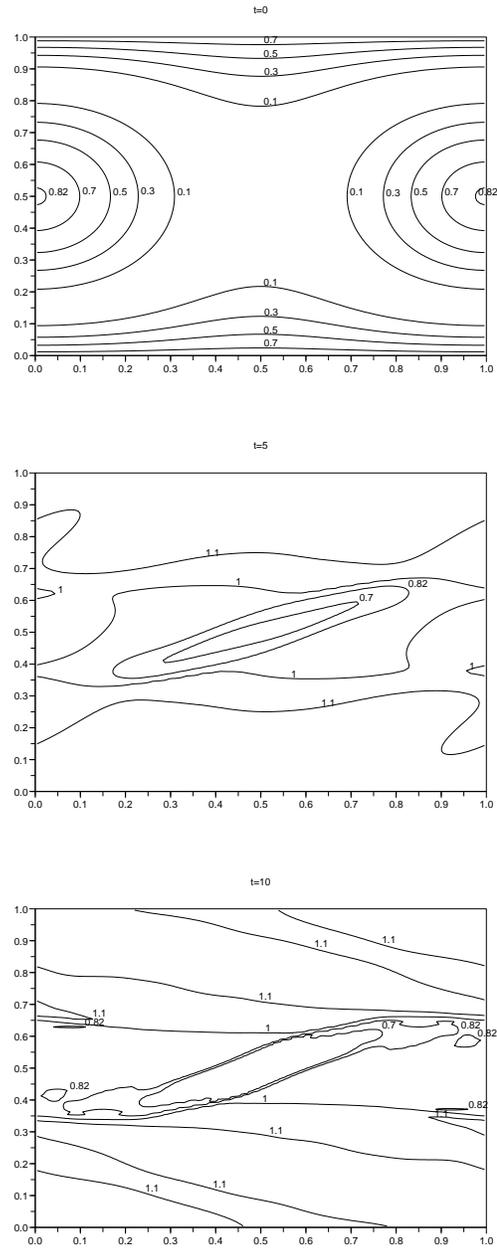


FIGURE 4.69 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\omega = 1$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

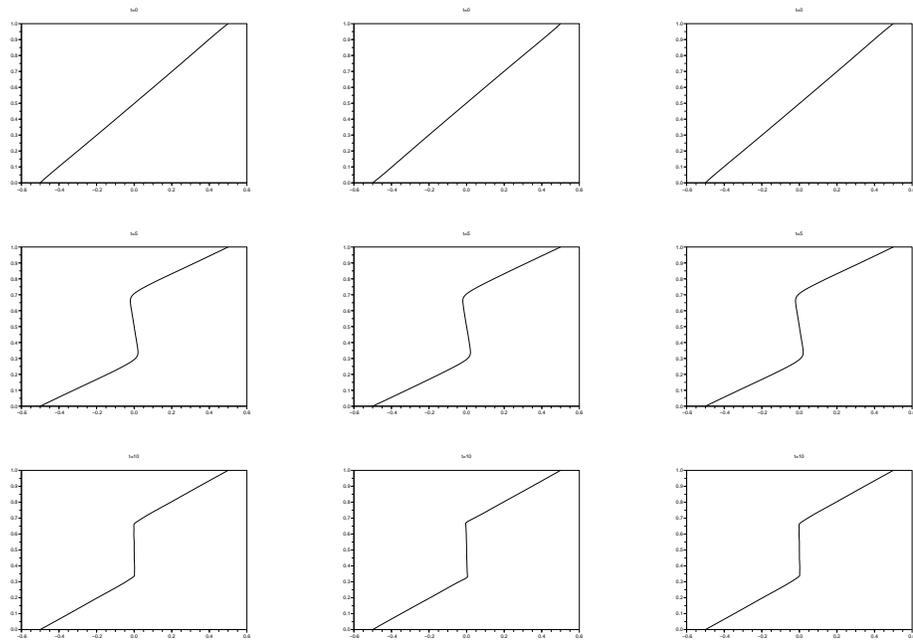


FIGURE 4.70 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4}$ au centre et $x = \frac{3L}{4}$ à droite ($\omega = 2$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

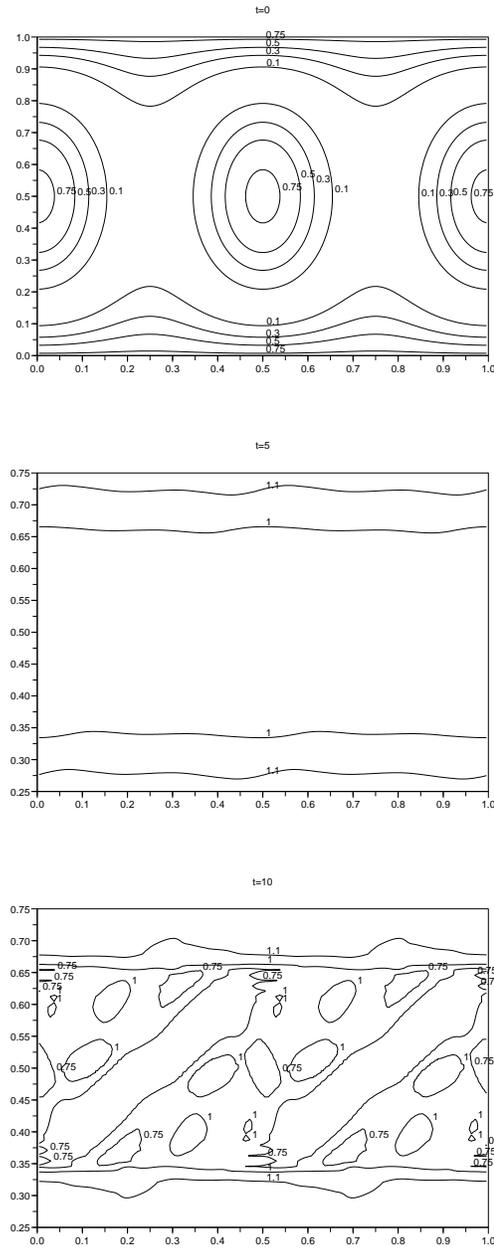


FIGURE 4.71 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\omega = 2$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

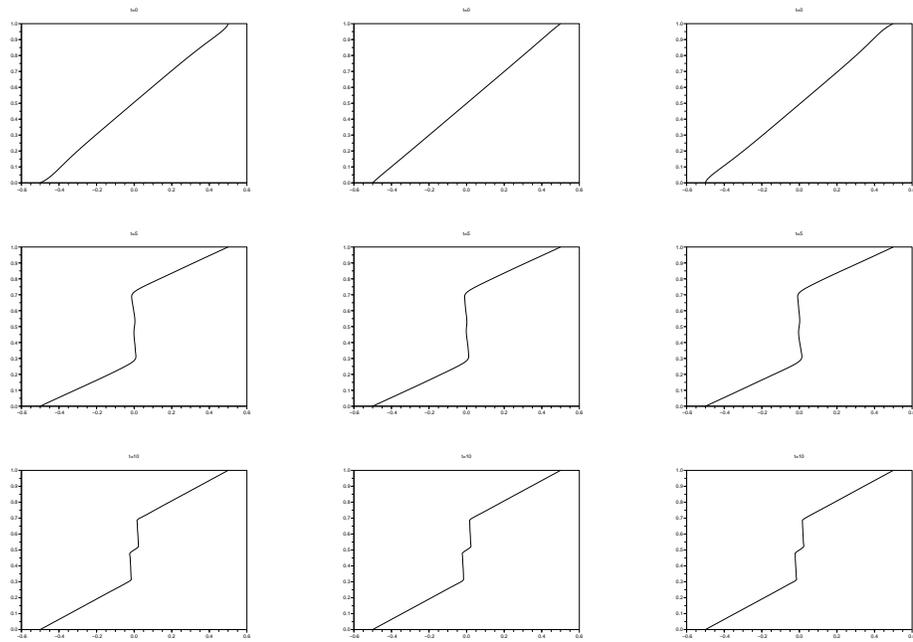


FIGURE 4.72 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4l}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4l}$ au centre et $x = \frac{3L}{4l}$ à droite ($\omega = 3$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

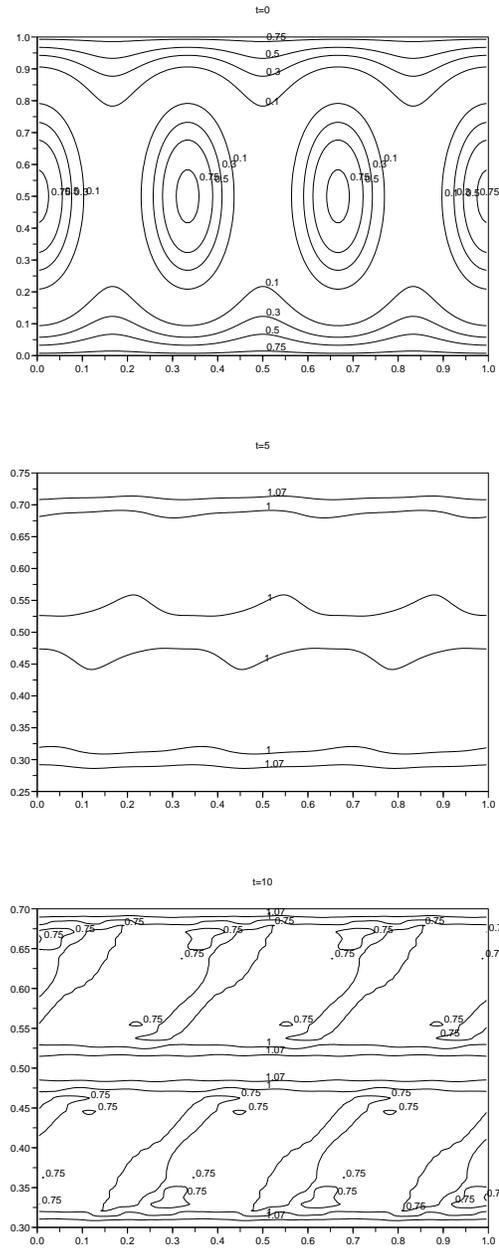


FIGURE 4.73 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\omega = 3$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

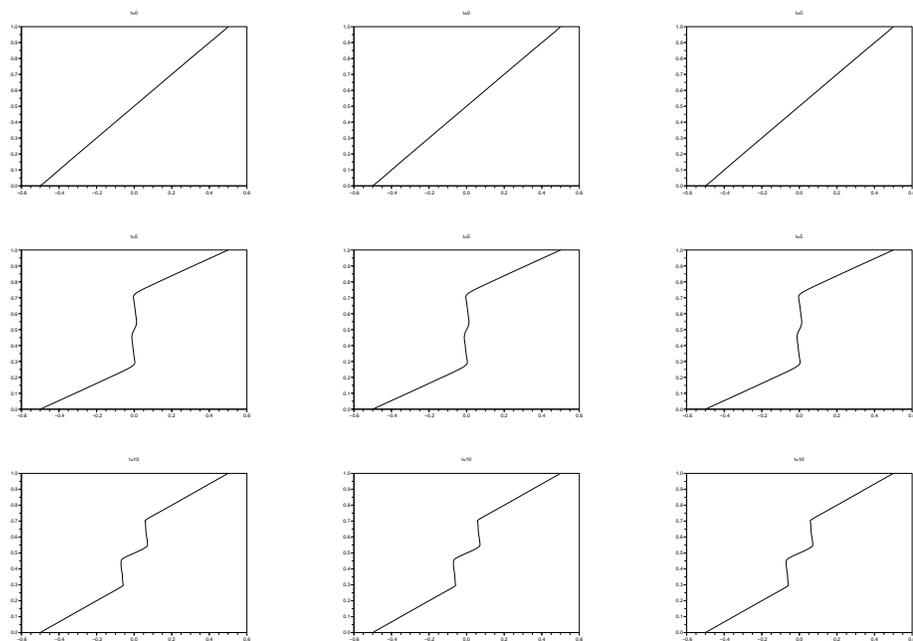


FIGURE 4.74 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4}$ au centre et $x = \frac{3L}{4}$ à droite ($\omega = 4$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

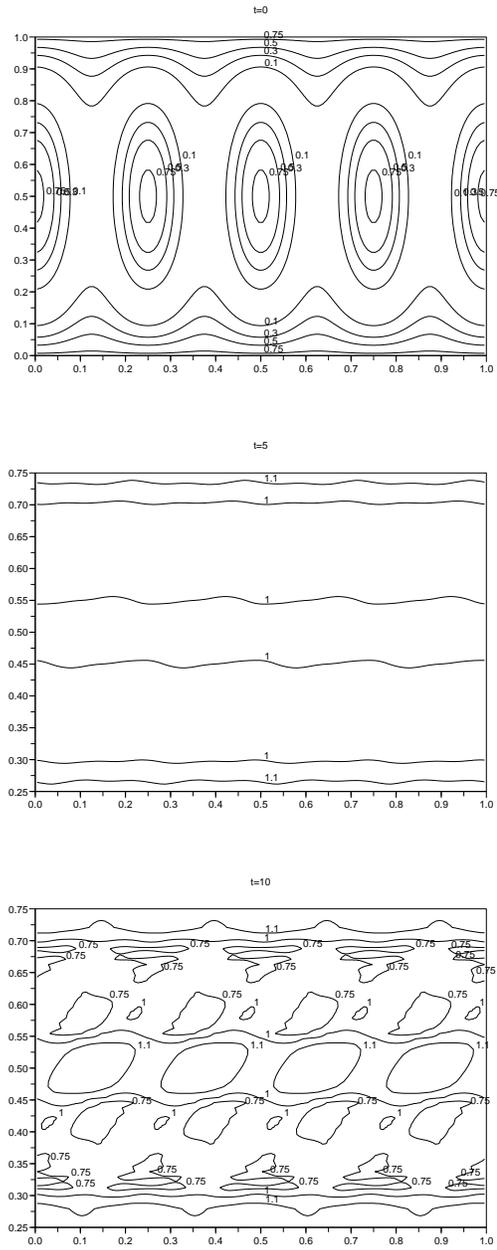


FIGURE 4.75 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\omega = 4$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

4.3 Canal avec des conditions d'injection en entrée

Il nous reste à considérer le cas du canal avec des conditions aux limites d'injection en entrée. Rappelons que le fluide rentre avec un profil de Poiseuille :

$$V^{gauche}(t, x, y) = 4\frac{y}{l} \left(1 - \frac{y}{l}\right) \vec{e}_x. \quad (4.25)$$

Rappelons que le domaine de calcul est un rectangle de taille $\left[0, \frac{L}{l}\right] \times [0, 1]$. Nous avons choisi :

$$L = 2l.$$

Ce cas du canal avec conditions aux limites d'injection en entrée est important puisqu'il peut servir de base à de nombreux tests rhéologiques (obstacles, contraction d'un canal, etc...). Son étude fera l'objet d'un travail ultérieur, nous nous contentons ici de présenter l'évolution de quelques profils de vitesse et de l'énergie élastique obtenus pour un jeu de paramètres suivant :

$$\alpha = 10, We = K = 1, a = b = 0.5.$$

Nous avons d'autre part choisi une distribution initiale d'énergie élastique telle que :

$$B(t = 0, x, y) = \text{Id}. \quad (4.26)$$

Pour finir rappelons qu'à cause des conditions aux limites d'injection il faut prescrire la valeur de B à gauche. Nous avons choisi :

$$B^{gauche}(t, x = 0, y) = \text{Id} \quad (4.27)$$

Nous constatons que :

- au voisinage des parois, le seuil de plasticité finit par être franchi. Les régions proches du bord s'écoulent tandis qu'un "mur" élastique, de cisaillement nul, se forme progressivement au centre du canal.
- l'écoulement finit par être invariant en x à condition d'être suffisamment loin des bords droit et gauche (à cause des conditions aux limites d'entrée et de sortie).

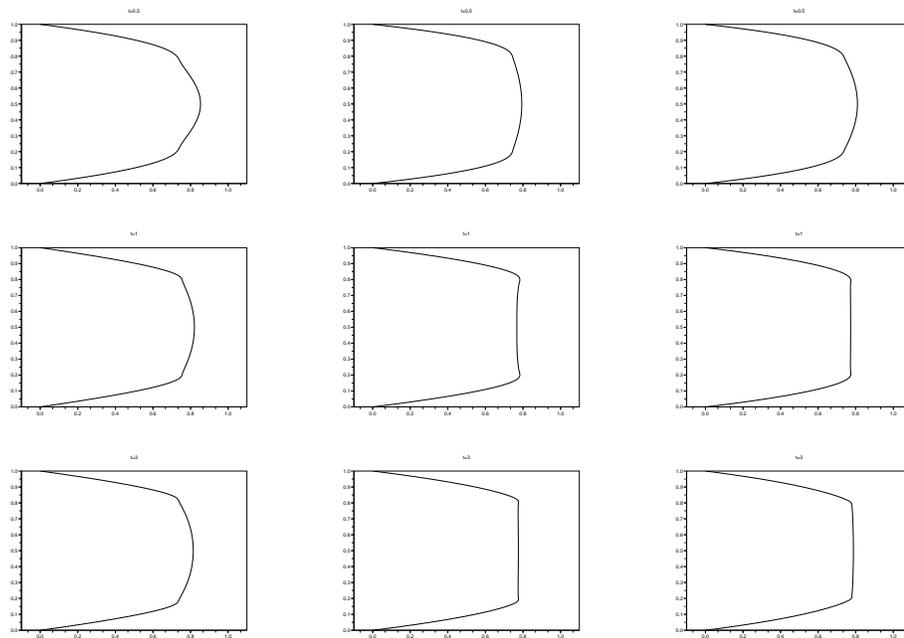


FIGURE 4.76 – Évolution des profils de vitesse en $x = \frac{L}{4l}$ à gauche, $x = \frac{2L}{4l}$ au centre et $x = \frac{3L}{4l}$ à droite ($\alpha = 10$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

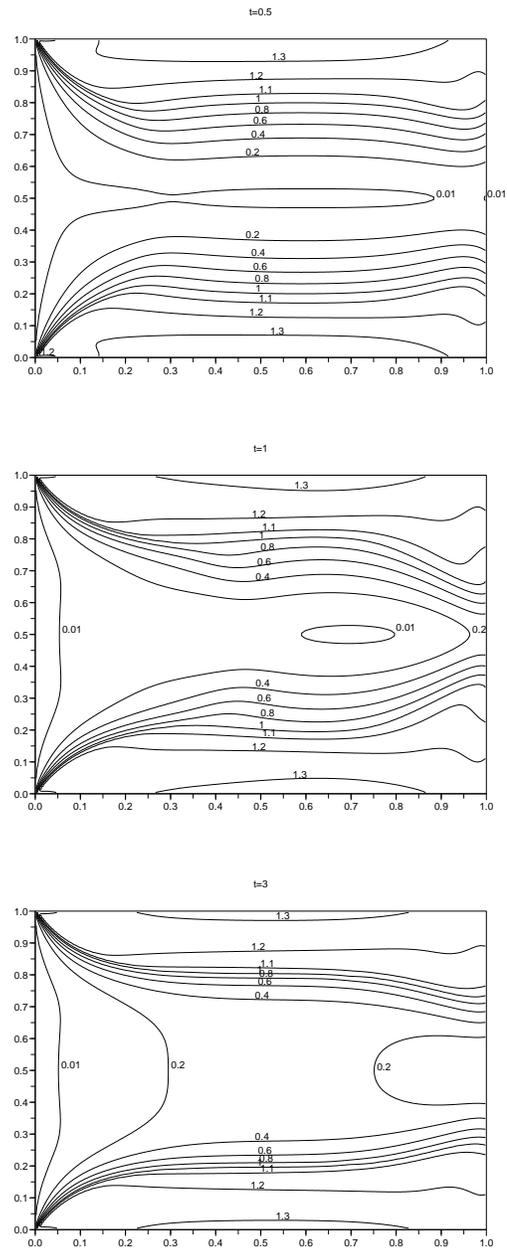


FIGURE 4.77 – Lignes de niveau de la distribution d'énergie élastique au cours du temps ($\alpha = 10$, $We = K = 1$, $a = b = 0.5$).

Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la formulation de modèles adaptés pour la description des écoulements de fluides élasto-visco-plastiques tels que les mousses liquides. Il s'inscrit dans un cadre assez large d'étude d'écoulements de fluides capables de stocker élastiquement de la déformation et de concentrer le taux de déformation (dans un contexte d'écoulement tel que le cisaillement entre deux plaques par exemple).

Le premier chapitre expose la méthodologie suivie pour la construction de la loi de comportement mécanique du matériau. Après avoir établi les mécanismes physiques à inclure dans notre modélisation, un modèle rhéologique scalaire a été proposé. Ce modèle contient les principaux ingrédients à incorporer dans l'équation constitutive : une élasticité valable pour de grandes déformations élastiques, un seuil de plasticité, un écoulement au delà du seuil. L'extension tensorielle du modèle a été décrite en détail. Pour finir une hiérarchie de systèmes résultant du couplage de l'équation constitutive avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement a été proposée. Ces différents systèmes correspondent à différents régimes d'écoulements.

Le deuxième chapitre contient des résultats mathématiques d'existence de solutions régulières et locales en temps. Nous avons vu que pour un des régimes d'écoulement il n'est malheureusement pas possible de conclure par des méthodes usuelles. Dans ce cas un résultat partiel d'ellipticité a été proposé.

Dans le troisième chapitre nous avons décrit les méthodes numériques utilisées pour les calculs d'écoulements bidimensionnels en régime de Stokes, c'est-à-dire sans transport dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, avec des conditions aux limites classiques (cisaillement entre deux plaques parallèles, canal avec des conditions aux limites d'injection). L'équation de Stokes est résolue à l'aide d'un algorithme de lagrangien augmenté tandis que la loi de comportement est résolue avec une méthode de pas fractionnaires (avec des méthodes spécifiques pour chacune des étapes). Dans ce chapitre une étude de la convergence en maillage du schéma a été proposée sur un exemple.

Le dernier chapitre expose quelques résultats de simulations numériques. Nous nous sommes principalement intéressés au cas du cisaillement entre deux plaques. Une étude de la réponse du matériau sous cisaillement appliqué constant a donc été menée avec une discussion sur l'influence des paramètres du modèle d'une part, et celle des hétérogénéités de la condition initiale d'autre part. Plus précisément nous avons tenté de comprendre sous quelles conditions des bandes bloquées (c'est-à-dire possédant un taux de cisailment nul) pouvaient apparaître.

Ce travail soulève d'intéressantes questions sur lesquelles nous souhaiterions nous pencher. Concernant les modèles les points suivants méritent d'être approfondis :

- nous avons vu que notre principale contribution a consisté en l'incorporation de non linéarités d'origine

élastique dans la loi de comportement du matériau. Il en résulte que l'équation constitutive se présente comme une extension des modèles de Maxwell-Bingham, valables pour de grandes déformations élastiques. La spécificité de notre modèle réside dans le fait qu'il s'agit d'un modèle écrit sur la déformation élastique. Il nous semble possible de réécrire le même modèle sous la forme d'une équation sur les contraintes élastiques. Mais cela est bien plus compliqué que pour les modèles de Maxwell-Bingham usuels. En effet puisque ces derniers sont valables aux petites déformations élastiques, la déformation et la contrainte élastiques sont liées via une simple relation de Hooke : il n'y a pas de non linéarités spécifiques à l'élasticité et le passage d'une formulation en déformation à une formulation en contrainte est immédiat.

- notre modèle suppose l'homogénéité des caractéristiques mécaniques du matériau : loi élastique, description du seuil de plasticité, loi d'écoulement au delà du seuil, viscosité des contraintes d'origine purement hydrodynamique. La réalité est en fait plus complexe à décrire, puisque pour les mousses liquides nous savons que certains de ces paramètres varient avec la fraction fluide. Ils sont donc soumis à des fluctuations en espaces et en temps dès lors que des écoulements de la phase continue au travers des bords de Plateau de la mousse se produisent. L'incorporation de la fraction fluide comme variable supplémentaire du modèle (couplée aux caractéristiques mécaniques du matériau via des lois spécifiques) nous apparaît donc comme un problème important à traiter.

Ce dernier point ouvre d'ailleurs des perspectives de recherche aussi bien sur le plan mathématique (établir des théorèmes d'existence lorsque la fraction fluide varie) que sur le plan des méthodes numériques (développer un solveur de résolution de l'équation de Stokes lorsque la viscosité des contraintes hydrodynamiques varie avec la fraction fluide) et de l'interprétation physique des résultats (quel est le rôle joué par une hétérogénéité de la distribution initiale de la fraction fluide dans l'apparition de bandes de cisaillement ?).

Bibliographie

- [1] S. Bénito, C.-H. Bruneau, T. Colin, C. Gay, F. Molino, *An elasto-visco-plastic model for immortatl foams and emulsions*, European Physical Journal E, 25, 2008.
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.
- [3] G.I. Barenblatt et D. Joseph, *Collected Papers of R.S. Rivlin*, Springer, 1997.
- [4] J. Baranger, C. Guillopé, J.C. Saut, *Mathematical analysis of diffrential models for viscoelastic fluids*, Rheology for polymer melt processing, 1996.
- [5] D. Bernardin, *Introduction è la rhéologie des fluides*, Notes de cours, 2003.
- [6] A. Bertram, *Elasticity and plasticity of large deformations*, Springer, 2005.
- [7] F. Boyer, P.Fabrie, *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, Mathématiques et Applications, Springer, 2006.
- [8] M. E. Cates, S. M. Fielding, *Rheology of giant micelles*, Advances in Physics 55, 2006.
- [9] I. Cheddadi, P. Saramito, C. Raufaste, P. Marmottant and F. Graner, *Numerical modelling of foam Couette flows*, European Physical Journal - E. Soft matter, 27(2) :123-133, 2008
- [10] L. Chupin, *Contribution è l'étude des mélanges de fluides visco-élastiques*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 2003
- [11] P.G. Ciarlet, *Elasticité tridimensionnelle*, Masson, 1986.
- [12] S. Cohen-Addad, R. Höhler, Y. Khidas, *Origin of the slow viscoelastic response of aqueous foams*, Physical Review Letter, 93 :028302, 2004.
- [13] R. Danchin *Analyse non linéaire* Notes de cours disponibles è l'adresse [http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/](http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/).
- [14] G. Debrégeas, J. M. di Meglio, H. Tabuteau, *Deformation and Flow of a Two-Dimensional Foam under Continuous Shear*, Physical Review Letters, 87, 2001.
- [15] B. Dollet, *Ecoulements bidimensionnels de mousses autours d'obstacles*, Thes de Doctorat, Université Joseph Fourier, 2005.
- [16] J. Garrigues. *Fondements de la mécanique des milieux continus* Hermes, 2007.
- [17] M.E.Gurtin, *Topics in Finite Elasticity*, Society for indutrial and applied mathmatics, 1981.

- [18] F. Graner, B. Dollet, C. Raufaste, P. Marmottant, *statistical tools to characterize discrete rearranging patterns, in two or in tree dimensions : cellular materials, assemblies of particules*, Preprint, 2007.
- [19] F.H. Harlow, J.E. Welch, *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluids with free surface*, Physics of fluids, 8 (12), 1965.
- [20] J. Hladik, P.E. Hladik, *le calcul tensoriel en physique*, Dunod, 1999.
- [21] R. Höhler, S. Cohen-Addad, Rheology of liquid foams, Journal of Physics :Condensed Matter, 17, 2005.
- [22] D. Joseph, *Fluid dynamics of viscoelastic liquids*, Springer, 1990.
- [23] G. Debrégeas, A. Kabla, *Local stress relaxation and shear banding in a dry foam under shear*, Physical Review Letters, 90, 2003.
- [24] P. Le Tallec, *Mécanique des milieux continus*, notes de cours, 2006.
- [25] S. Marze, A. Saint-Jalmes, D. Langevin, *Protein and surfactant foams : linear rheology and dilatancy effects*, Colloids and Surface A, 263, 2005.
- [26] V. Mora, *Etude de l'integration temporelle du taux de déformation, Application à la modélisation de l'élastoplasticité en grandes déformations*, Thèse de Doctorat, Université Bretagne Sud, 2004.
- [27] P.D. Olmsted, *Dynamics and flow-induced phase separation in polymeric fluids*, Current Opinion in Colloid and Interface Science, 4 (1999) 95-100.
- [28] P. Oswald, *Rhéophysique ou comment coule la matière*, Belin, 2005.
- [29] J. Salençon, *Mécanique des milieux continus*, Les Edition de l'Ecole Polytechnique, 2002.
- [30] J. Salençon, *De l'élastoplasticité au calcul de la rupture*, Les Edition de l'Ecole Polytechnique, 2002.
- [31] J.C. Saut, C. Guillopé. *Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential law*, Nonlinear Analysis, Vol.15 n.9, 1990.
- [32] P. Saramito, *A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows*, Journal of non-newtonian fluids mechanics, 2007.
- [33] P. Saramito, *A new elastoviscoplastic model based on the Herschel-Bulkley viscoplasticity*, Journal of non-newtonian fluids mechanics, 2009.
- [34] S. Tancogne, *Calcul numérique et stabilité d'écoulements diphasiques tridimensionnels en microfluidique*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 2007.
- [35] J. Simon, *compact set in $L^p(0, T; B)$* Ann. Mat. Pura Appl. (4), 146, (1987).
- [36] R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functionnal Analysis*, Society for indutrial and applied mathmatics, 1983.
- [37] R. Temam, *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*, North Holland, 1977.