



Études de problèmes aux limites non linéaires de type pseudo-parabolique

Ngonn Seam

► To cite this version:

Ngonn Seam. Études de problèmes aux limites non linéaires de type pseudo-parabolique. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2010. Français. NNT : 10PAUU305 . tel-00523633

HAL Id: tel-00523633

<https://theses.hal.science/tel-00523633>

Submitted on 5 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Spécialité : Mathématiques Appliquées

préparée au

**Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau
CNRS UMR 5142**

dans le cadre de

l'Ecole Doctorale de Sciences Exactes et de Leurs Applications

présentée publiquement par

Ngonn SEAM

**ÉTUDE DE PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES
DE TYPE PSEUDO-PARABOLIQUE**

soutenue le 14 septembre 2010 devant le jury composé de

M. Gérard GAGNEUX

Mme. Bénédicte ALZIARY-CHASSAT

Mme. Petra WITTBOLD

M. Boris ANDREIANOV

M. Robert LUCE

M. Guy VALLET

Professeur à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, Président

Professeur à l'Université de Toulouse 1, Rapporteur

Professeur à l'université d'Essen, Rapporteur

Maître de Conférences à l'Université de Franche-Comté, Examinateur

Maître de Conférences à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour,
Co-directeur de thèse

Maître de Conférences à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour,
Directeur de thèse

N° 10PAUU305

ACADÉMIE DE BORDEAUX

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Spécialité : Mathématiques Appliquées

préparée au

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau

CNRS UMR 5142

dans le cadre de

l'Ecole Doctorale de Sciences Exactes et de Leurs Applications

présentée publiquement par

Ngonn SEAM

ÉTUDE DE PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES DE TYPE PSEUDO-PARABOLIQUE

soutenue le 14 septembre 2010 devant le jury composé de

M. Gérard GAGNEUX,	Président
Mme. Bénédicte ALZIARY-CHASSAT,	Rapporteur
Mme. Petra WITTBOLD,	Rapporteur
M. Boris ANDREIANOV,	Examineur
M. Robert LUCE,	Co-directeur
M. Guy VALLET ,	Directeur



Angkor Wat (or Angkor Vat) is a temple complex at Angkor, Cambodia, built for the king Suryavarman II in the early 12th century as his state temple and capital city. As the best-preserved temple at the site, it is the only one to have remained a significant religious centre since its foundation—first Hindu, dedicated to the god Vishnu, then Buddhist. The temple is the epitome of the high classical style of Khmer architecture. It has become a symbol of Cambodia, appearing on its national flag, and it is the country's prime attraction for visitors.

Angkor Wat combines two basic plans of Khmer temple architecture : the temple mountain and the later galleried temple, based on early South Indian Hindu architecture, with key features such as the Jagati. It is designed to represent Mount Meru, home of the devas in Hindu mythology : within a moat and an outer wall 3.6 kilometres (2.2 mi) long are three rectangular galleries, each raised above the next. At the centre of the temple stands a quincunx of towers. Unlike most Angkorian temples, Angkor Wat is oriented to the west ; scholars are divided as to the significance of this. The temple is admired for the grandeur and harmony of the architecture, its extensive bas-reliefs and for the numerous devatas (guardian spirits) adorning its walls.

The modern name, Angkor Wat, means "City Temple" ; Angkor is a vernacular form of the word "nokor" which comes from the Sanskrit word "nagara" meaning capital or city. wat is the Khmer word for temple. Prior to this time the temple was known as Preah Pisnulok, after the posthumous title of its founder, Suryavarman II.

Remerciement

Je tiens d'abord à remercier Monsieur Guy Vallet, mon co-directeur de thèse. Sans lui, ce travail n'aurait pas pu aboutir. Je lui suis infiniment reconnaissant d'avoir aussi encadré mon mémoire de Master Recherche (DEA) en 2006 et de m'avoir aidé depuis le début de mon travail.

Je voudrais également remercier profondément Monsieur Robert Luce, mon second co-directeur de thèse, qui m'a beaucoup aidé pour la simulation numérique et pour avoir dirigé mes premiers pas scientifiques vers les méthodes numériques des équations aux dérivées partielles.

Je voudrais présenter mes sentiments très sincères à Monsieur Gérard Gagneux, président du jury qui a accepté de relire ce travail.

Je remercie vivement Madame Petra Wittbold, professeur à l'université d'Essen et Madame Bénédicte Alziary-Chassat, professeur à l'Université de Toulouse 1 d'avoir accepté de rapporter cette thèse et de faire partie du jury.

J'adresse également un grand remerciement à Monsieur Boris Andreianov, maître de conférences à l'Université de Franche-Comté pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Mohamed Amara, ancien Directeur du Directeur du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau et à Monsieur Laurent Bordes, actuel Directeur du même Laboratoire qui m'ont permis de faire mes recherches dans de bonnes conditions.

Je tiens à remercier chaleureusement tous les professeurs, tous les personnels ainsi que tous les collègues doctorants du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau. Je leur souhaite une bonne continuation.

Enfin, je tiens à remercier également l'Ambassade de France au Cambodge pour le financement de mon travail doctoral ainsi que son soutien pour le développement des mathématiques au Cambodge. Je présente ainsi un grand remerciement à Monsieur Michel Jambu, responsable régional du CIMPA et ses collègues qui ont initié le projet d'aide pour l'enseignement des mathématiques à l'Université Royale de Phnom Penh. Je remercie aussi tous les autres organismes qui se sont manifestés lors de cette action. Je remercie toutes les institutions passées ou à venir travaillant au développement durable des mathématiques au Cambodge, notamment à l'Université Royale de Phnom Penh.

Études de problèmes aux limites non linéaires de type pseudo-parabolique

Ngonn SEAM¹ and Guy VALLET

seamngonn@yahoo.fr, guy.vallet@univ-pau.fr

Université de Pau et des Pays de l'Adour

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau

CNRS UMR 5142

IPRA BP 1155

64013 Pau Cedex (FRANCE)

Résumé. L'objectif de ce travail est l'étude du problème non linéaire de type pseudo-parabolique suivant : trouver une fonction mesurable u de $Q :=]0, T[\times \Omega$ à valeur réelle telle que

$$\begin{cases} f(t, x, u_t) - \text{Div} \{a(x, u, u_t) \nabla u + b(x, u, u_t) \nabla u_t\} = g(t, x), & (t, x) \in Q, \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

où l'opérateur de Nemystkii associé à la fonction f est monotone.

Un premier chapitre est consacré à l'étude de l'existence d'une solution pour le problème ci-dessus. Pour cela, on utilise une méthode de semi-discrétisation implicite en temps. L'existence des itérés repose sur le théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov et la convergence du schéma sur un outil de compacité adapté à la situation. À la fin du chapitre, on propose des applications à l'équation de Barenblatt et au cas d'un f multivoque. Dans le second chapitre, on s'intéresse au problème de Barenblatt pseudo-parabolique : rechercher une fonction mesurable u de Q à valeur réelle telle que

$$\begin{cases} f(u_t) - \Delta u - \epsilon \Delta u_t = g(t, x), & (t, x) \in Q, \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

où f n'est pas nécessairement monotone.

Pour $\epsilon > \epsilon_0 > 0$, où ϵ_0 est une valeur critique, on montre que le problème est bien posé en utilisant une méthode similaire à celle du premier chapitre. Pour la valeur critique de $\epsilon = \epsilon_0$, le problème admet au plus une solution ; cette dernière existe moyennant une hypothèse supplémentaire sur f . Enfin, si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, la solution n'est pas unique en général. On propose enfin d'une approche stochastique de l'équation pseudo-parabolique de Barenblatt-Sobolev. Le dernier chapitre propose des simulations numériques monodimensionnelles ; notamment, on s'intéresse à la perturbation singulière pseudo-parabolique lorsque la diffusion moléculaire change de signe.

Mots-Clés : problème pseudo parabolique, équation dégénérée, résultat d'existence, semi-discrétisation implicite en temps, inclusion différentielle, équation de Barenblatt.

Classification Mathématique : 35K65, 35K70.

1. Université Royale de Phnom Penh. Bld de Confédération de la Russie, Phnom Penh, Cambodge.

Study of the nonlinear boundary problems of pseudoparabolic type

Ngonn SEAM² and Guy VALLET

seamngonn@yahoo.fr, guy.vallet@univ-pau.fr

Université de Pau et des Pays de l'Adour

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau

CNRS UMR 5142

IPRA BP 1155

64013 Pau Cedex (FRANCE)

Abstract : The aim of this work is to study the general nonlinear pseudo parabolic problem : find a real valued measurable function u on $Q :=]0, T[\times \Omega$ solution to

$$\begin{cases} f(t, x, u_t) - \text{Div} \{a(x, u, u_t) \nabla u + b(x, u, u_t) \nabla u_t\} = g(t, x), & (t, x) \in Q, \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

where the operator of Nemystkii associated to the function f is monotone.

In a first chapter, one shows the existence of a solution to the above problem by the way of the implicit time-semidiscretization. The existence of the solutions of the discretized equation is based on the Schauder-Tikhonov fixed point theorem and the convergence of the scheme on an adapted compactness argument. At the end of the chapter, one derives some applications to the equation of Barenblatt and to multivoque f . In a second chapter, one is interested in the pseudoparabolic problem of Barenblatt : find a real valued measurable function u such that

$$\begin{cases} f(u_t) - \Delta u - \epsilon \Delta u_t = g(t, x), & (t, x) \in Q, \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

where f is not necessarily monotone.

For $\epsilon > \epsilon_0 > 0$, where ϵ_0 is a critical value, this problem is well posed by using similar arguments. For the critical value, the problem admits at most a solution. Then, the solution exists with some more assumptions on f . When $0 < \epsilon < \epsilon_0$, the solution is not unique in general. One proposes finally a stochastic approach to the pseudoparabolic equation of Barenblatt-Sobolev. The last chapter concerns monodimensional simulations, in particular one is interested in the pseudoparabolic singular perturbation when the molecular diffusion changes sign.

Keywords : Pseudo parabolic problem, degenerated equation, existence resultat, implicit time-semidiscretization, differential inclusion, Barenblatt equation.

Mathematical classification : 35K65, 35K70.

2. Royal University of Phnom Penh. Russian Federation Boulevard, Phnom Penh, Cambodia.

Table des matières

Table des matières	xi
Introduction	1
Introduction	1
1 Etude d'une classe d'équations fortement non linéaires	9
1 Introduction	9
2 Sur les fonctions de Carathéorody	10
3 Etude du problème semi-discrétisé implicite	15
3.1 Existence d'une solution pour f bornée	15
3.2 Unicité de la solution	17
3.3 Existence d'une solution	22
4 Existence d'une solution au problème continu	25
4.1 Cas d'une fonction f continue	25
4.2 Cas général	32
4.3 Sur un relèvement mesurable	34
5 Applications	37
5.1 Application à l'équation de Barenblatt	37
5.2 Vers un problème pseudo-parabolique dégénéré	38
5.3 Le cas multivoque	40
5.4 Pénalisation d'une contrainte portant sur $\partial_t u$	43
2 Étude du problème de Barenblatt pseudo-parabolique	47
1 Introduction	47
2 Existence d'une solution <i>via</i> le théorème de point fixe de Banach	48
3 Le cas sur-critique est bien posé	51
3.1 Unicité et continuité	51
3.2 Quelques lemmes techniques	52
3.3 Existence d'une solution discrète	54
3.4 Existence d'une solution pour la formulation continue	55
4 Cas $\epsilon = \epsilon_0$	57
5 Cas $\epsilon < \epsilon_0$	60
6 Application à l'inclusion différentielle de type de Barenblatt	63
7 Sur l'équation de Barenblatt-Sobolev stochastique	67

3	Simulations numériques	69
1	Introduction	69
2	Résultats numériques	73
2.1	Cas d'un problème linéaire ou équation de Sobolev	73
2.2	Cas d'une viscosité non linéaire positive	78
2.3	Cas d'une viscosité non linéaire qui change de signe.	82
2.4	Cas d'un problème doublement non linéaire	95
2.5	Cas d'un problème fortement non linéaire	100
3	Programme en Matlab	109
A	Outils d'analyse fonctionnelle	119
1	Espaces fonctionnels classiques	119
1.1	Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$	119
1.2	Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	121
2	Fonctions à valeurs vectorielles	122
2.1	Intégration à valeurs vectorielles	122
2.2	Espaces $L^p(0, T; E)$	123
2.3	Espace de Sobolev à valeurs vectorielles	124
2.4	Espace $W^{1,p}(0, T; E)$	124
2.5	Espace $H^1(Q)$	125
3	Théorèmes de points fixes	125
B	Lemmes techniques	127
	Bibliographie	129
	Bibliographie	129

Introduction

De nombreux phénomènes sont modélisés par des équations aux dérivées partielles dont la structure dépend de l'état instantané du système physique, pour prendre en compte des phénomènes d'auto-régulation d'asservissement, lorsque certains seuils sont atteints : par exemple dans des domaines comme la physique, la chimie, la géologie ; mais aussi la biologie, la médecine et les sciences humaines et sociales. Les situations dépendant du temps se traduisent plus particulièrement par des problèmes d'évolution tenant compte d'éventuelles interactions entre objets et évènements. On s'intéresse plus particulièrement dans ce travail aux problèmes aux limites non linéaires de type pseudo-parabolique. L'étude de ce type de problèmes où l'on mêle, dans des opérateurs d'ordre élevé, les dérivées spatiales et temporelle n'est pas récente ; citons par exemple les travaux de S. L. Sobolev en Mécanique et Physique [87] (on parle aussi d'équation de Sobolev), ceux de G. I. Barenblatt au sujet de l'infiltration en milieux fissurés *et al.* [14], de R. E. Showalter [83] (p.202 & 235) concernant des problèmes hystérétiques ou encore R. E. Showalter *et al.* [22, 84] pour des problèmes du type :

$$M\partial_t u + Lu = f,$$

liés principalement à l'écoulement de fluides, où M et L sont des opérateurs différentiels pouvant dépendre de u . Notons aussi l'approche proposée par R. E. Ewing [44, 45] pour la perturbation d'un opérateur parabolique A , rétrograde, par le problème

$$\partial_t u + \epsilon A \partial_t u = -Au$$

et son analyse numérique et l'étude du problème :

$$c(x, u) \partial_t u - \nabla[a(x, u) \nabla u + b(x, u, \nabla u) \nabla(\partial_t u)] = f(x, t, u, \nabla u).$$

Citons, toujours sur ces thématiques, les travaux de G. I. Barenblatt *et al.* [12, 13] pour des problèmes liés à l'écoulement de fluides, du type :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_x \varphi(\partial_x u) + \tau \partial_{xt}^2 \psi(\partial_x u), \\ \text{ou} \quad \partial_t u + \partial_x[f(u) + \tau \partial_t f(u)] &= \partial_{xx}^2[g(u) + \tau \partial_t g(u)]. \end{aligned}$$

On retrouve aussi dans le travail de P. I. Plotnikov [75] l'utilisation d'une perturbation singulière pseudo-parabolique :

$$\partial_t u = \Delta \varphi(u) + \epsilon \Delta \partial_t u$$

afin de mettre en évidence l'existence d'une solution pour des problèmes de transition de phases hystérétiques

$$\partial_t u = \Delta \varphi(u)$$

lorsque la loi de diffusion φ' change de signe. En outre, là-encore, l'étude du comportement limite des solutions de viscosité, lorsque ϵ tend vers 0^+ , permet de définir une formulation bien posée au sens de Hadamard en identifiant par ses propriétés la solution réaliste. La monographie de L. C. Evans [42] (p. 426-430) est à cet égard très éclairante, car le problème

$$\partial_t u = \Delta \varphi(u)$$

avec une condition aux limites et une condition initiale, est mal posé lorsque φ' change de signe. La limite, pour des topologies appropriées, des solutions « visqueuses » du problème pseudo-parabolique associé permet de dégager la notion de solution « physiquement admissible ».

Dans son formalisme, le principe de régularisation par l'introduction d'une perturbation singulière pseudo-parabolique d'une équation abstraite $\partial_t u + Au = 0$ (dans $H^{-1}(\Omega)$ par exemple) consiste à considérer l'opérateur de Green généralisé $T_\epsilon = (Id - \epsilon \Delta)^{-1}$ ($\epsilon > 0$), linéaire et continu de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, autoadjoint et compact dans $L^2(\Omega)$, et à étudier l'équation « de viscosité » $\partial_t u_\epsilon + T_\epsilon A u_\epsilon = 0$, posée *a priori* dans $H_0^1(\Omega)$.

Dans les écoulements en milieu poreux, J. Hulshof *et al.* [59] proposent l'utilisation de problèmes pseudo-paraboliques :

$$\partial_t u = \partial_x(u^\alpha \partial_x u) + \partial_x(u^\beta \partial_{xt}^2 u).$$

par l'introduction d'un terme dynamique dans la relation pression-saturation. L'étude de solutions travelling-waves est proposée.

On retrouve une approche similaire pour une perturbation pseudo-parabolique de l'équation de Burgers :

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + 2u \partial_x u + \epsilon^2 \partial_{xt}^3 u,$$

dans les travaux de C. Cuesta *et al.* [35] justifiée par l'implication d'une pression capillaire dynamique.

C. J. van Duijn *et al.* [95] s'intéressent alors à la façon dont ce type de perturbation singulière viole la condition d'entropie d'Oleinik dans le comportement asymptotique de :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \epsilon \partial_{xx}^2 u + \epsilon^2 \tau \partial_{xt}^3 u.$$

Une motivation physique similaire a aussi conduit J. Garcia-Azorero *et al.* [55] à s'intéresser au problème :

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 \varphi(u) + \tau^2 \partial_{xt}^3 \varphi(u).$$

Pour une approche reposant sur une technique de semi-groupe (une perturbation de l'opérateur linéaire de Sobolev), citons par exemple les papiers :

de E. I. Kaikina [62] pour :

$$\partial_t(u - \partial_{xx}^2 u) - \alpha \partial_{xx}^2 u = \lambda |u|^\sigma u$$

et de G. A. Sviridyuk *et al.* [88] pour :

$$(\lambda - \Delta) \partial_t u = \alpha \Delta u + \beta \operatorname{div}(u \nabla u).$$

Sans prétendre à l'exhaustivité, citons encore quelques papiers illustrant l'utilisation de termes pseudo-paraboliques :

M. O. Korpusov, dans [68], s'intéresse au phénomène d'explosion à temps fini pour des solutions du problème :

$$\partial_t[\Delta u - |u|^{q_1}] + \Delta u + |u|^{q_2}u = 0.$$

A. Bouziani *et al.* [23] où les auteurs considèrent l'équation pseudo-parabolique quasilinéaire :

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + \tau \partial_{xxt}^3 u + F(t, x, u)$$

avec des conditions sur les moments d'ordre 0 et 1, pour décrire la dynamique du transfert de l'humidité dans le sous-sol. Voir aussi D.-Q. Dai *et al.*

T. Benjamin *et al.* [18] concernant des vagues unidirectionnelles où un modèle du même type :

$$\partial_t u + \partial_x u + u \partial_x u - \partial_{xxt} u = 0,$$

est préféré à celui de Korteweg-de Vries. Voir aussi D. D. Ang *et al.* [3].

Dans de son travail de thèse, W.-P. Düll propose dans [39] d'étudier l'action de solvants sur des polymères via la modélisation mathématique :

$$\partial_t u = \partial_x [D(u) \partial_x (u + \eta(u) \partial_t u)].$$

Un autre modèle pseudo-parabolique :

$$\partial_t u = \Delta (\phi(u) - \lambda f(u) + \lambda \partial_t u) + f(u),$$

est proposé par V. Padrón dans [74], en biologie, pour tenir compte du phénomène d'agrégation de populations.

Comme le remarque R. E. Showalter dans son livre [83], les problèmes pseudo-paraboliques peuvent présenter des effets mémoires, rendant difficile l'obtention de résultats d'unicité de la solution. Citons deux études à ce sujet : Z. Wang *et al.* [96] reposant sur une méthode de transposition d'Holmgren pour le problème :

$$\partial_t u - \lambda \partial_{xx}^2 \partial_t u = \partial_{xx}^2 A(u) + \partial_x B(u) + f ;$$

et S. N. Antontsev *et al.* [7] où une méthode directe est utilisée pour justifier l'unicité de la solution du problème liée à l'équation de continuité :

$$\partial_t u - \operatorname{div}[\lambda(u) a(\partial_t u + E) \nabla u] - \tau \operatorname{div}[\lambda(u) \nabla \partial_t u] = 0,$$

grâce à un résultat de régularité L^p , $p > 2$, reposant sur les théorèmes de N. G. Meyers et de J. Nečas. Il est alors intéressant de noter sur cet exemple que la formulation pseudo-parabolique tire son origine d'une correction au premier ordre d'une loi de conservation où le flux n'est pas établi instantanément. En d'autres termes, pour une loi de Darcy générale, le flux est essentiellement proportionnel, à l'instant t , à $\nabla u(t)$, corrigé par un coefficient de diffusion dépendant éventuellement de t , x , $u(t)$ et $\partial_t u(t)$.

Il se peut que la prise en compte d'un équilibre parfait, instantané, soit peu réaliste et que l'on doive recourir à un délai $\tau > 0$, pour modéliser le temps d'atteinte de l'équilibre ; pour cela, $\nabla u(t)$ est remplacé par $\nabla u(t + h)$, puis par un développement au premier ordre par $\nabla u(t) + \tau \nabla \partial_t u(t)$. Un lien peut être ici établi avec le procédé de régularisation elliptique de J.-L. Lions - O. Oleinik [72] car la même démarche conduit à remplacer le terme $\partial_t u(t)$ par $\partial_t u(t - \tau)$ puis par $\partial_t u(t) - \tau \partial_{tt}^2 u(t)$, les termes de diffusion et de transport étant inchangés.

Contrairement à la majorité des papiers ci-dessus, nous allons nous intéresser à des problèmes pseudo-paraboliques faisant intervenir une forte non-linéarité par rapport au terme $\partial_t u$. En effet, ce travail s'inscrit dans la suite des résultats obtenus par S. N. Antontsev, G. Gagneux, R. Luce et G. Vallet dans : S. N. Antontsev *et al.* [4–9] ; G. Gagneux *et al.* [53, 54] et G. Vallet [89, 90, 92], où les auteurs ont travaillé sur des modèles de Géologie stratigraphique développés par l'Institut Français du Pétrole (IFP) ; plus exactement concernant les phénomènes d'érosion-sédimentation dans des bassins sédimentaires.

Le modèle décrit l'évolution, au cours du temps, de u la hauteur des sédiments. Cette dernière satisfait l'équation de conservation de masse $\partial_t u + \text{Div} \{ \vec{q} \} = 0$ où le flux $\vec{q}$ satisfait une loi de type « Darcy » ou « Darcy-Barenblatt » : $\vec{q} = -\lambda (\nabla u + \tau \nabla \partial_t u)$ avec $\tau = 0$ dans le premier cas et $\tau > 0$ dans le second.

De plus, une contrainte d'asservissement est imposée sur le taux d'érosion : $\partial_t u + E \geq 0$ où $E \geq 0$ est fixé. Dès lors, λ joue le rôle d'un multiplicateur adimensionné et doit suivre une certaine relation en vue de rendre compatible la loi de conservation de la masse et la contrainte globale d'érosion maximale ; une relation entre λ et $\partial_t u$ décrit alors un phénomène d'auto-régulation. On invite le lecteur intéressé par ce modèle à consulter, en plus des références ci-dessus citées, R. Eymard *et al.* [46–49], V. Gervais [56] ou encore D. Granjeon [57].

Lorsque $\tau > 0$, l'équation est de type pseudo-parabolique et le modèle ci-dessus devient

$$0 \in \partial_t u - \text{Div} [\lambda \nabla (u + \tau \partial_t u)] \text{ avec } \lambda \in \mathbf{H}(\partial_t u + E),$$

où $\mathbf{H}$ est le graphe maximal monotone de $\mathbb{R}^2$ associé à la fonction de Heaviside. D'où notre intérêt pour l'étude des équations du type :

$$f(t, x, \partial_t u) - \text{div} [a(x, u, \partial_t u) \nabla u + b(x, u, \partial_t u) \nabla \partial_t u] = g ; \quad (1)$$

c'est-à-dire des équations de type pseudo-parabolique, non linéaires, avec un coefficient de diffusivité faisant intervenir $\partial_t u$, et un terme $f(t, x, \partial_t u)$ pouvant s'écrire $f(\partial_t u + E(t, x))$ pour tenir compte de l'effet d'asservissement.

Mentionnons à ce sujet le travail doctoral de M. Ptashnyk [76], publié entre autres dans [77, 78], où une formulation pseudo-parabolique non linéaire similaire :

$$\beta(t, x, \partial_t u) - \text{div} [\alpha(t, x, \nabla \partial_t u)] - \text{div} [d(t, x) h(u) \nabla u] = g(t, x, u)$$

est utilisée pour modéliser des phénomènes de réaction-diffusion entre espèces (biologique, chimique ou physique). L'auteur propose de montrer l'existence d'une solution par l'intermédiaire d'une perturbation hyperbolique d'ordre deux en temps et en s'appuyant sur des hypothèses de stricte monotonie sur α et β . Le manque de monotonie et la présence de $\partial_t u$ dans a ne nous permettent pas de conclure de la même façon.

Bien que, lorsque $f(t, x, u) = f(u)$, l'équation (1) puisse s'écrire sous la forme d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\partial_t u \in f^{-1} \left[g + \operatorname{div} [a(x, u, \partial_t u) \nabla u + b(x, u, \partial_t u) \nabla \partial_t u] \right] - E ;$$

la littérature concernant les problèmes totalement non linéaires faisant intervenir des fonctions d'état non linéaires de l'inconnue $\partial_t u$ est moins fournie. Commençons par l'exemple classique de l'équation de Barenblatt pour les milieux poreux élasto-plastiques (G. I. Barenblatt [11]) : $\partial_t u + \gamma |\partial_t u| = \Delta u$.

S. Kamin *et al.* [63] proposent l'étude de l'équation $F(\partial_t u) = \Delta u$ en remarquant, pour des solutions régulières, que l'on a aussi $\partial_t v = \Delta F^{-1}(v)$ si $v = \Delta u$.

Les auteurs recherchent aussi des solutions auto-similaires, tout comme J. Hulshof *et al.* [60] pour l'équation $\partial_t u + \epsilon(\partial_t u)^+ = \Delta u^m$ et N. Igibida [61] pour l'équation $|\partial_t u|^{m-1}(\partial_t u + \gamma |\partial_t u|) = \Delta_p u$. Voir aussi Ch. Chen *et al.* [32].

G. Schimperna *et al.* [80] et A. Segatti [82] considèrent des problèmes doublement non linéaires abstraits de la forme : $f \in A(\partial_t u) + B(u) + h(u)$ où A et B sont des opérateurs (ou graphes) maximaux monotones (liés au sous-différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement). Les auteurs utilisent les résultats de passage à la limite classiques liés aux propriétés de monotonie des opérateurs (cf. H. Brézis [26] Prop. 2.5 p. 27). Une technique similaire est utilisée par P. Colli *et al.* [33] pour étudier le couplage d'une équation parabolique avec une équation différentielle non linéaire issue de la modélisation de phénomènes de changement de phases en recherchant $\eta \in \beta(\chi)$ et $\xi \in \alpha(\partial_t \chi)$ tels que

$$\begin{aligned} c_s \partial_t \theta + \frac{L}{\theta_c} \theta \partial_t \chi - k \Delta \theta &= \mu (\partial_t \chi)^2 + \xi \partial_t \chi + \delta |\nabla \partial_t \chi|^2, \\ \mu \partial_t \chi + \xi - \delta \Delta \partial_t \chi - \nu \Delta \chi + \eta &= \frac{L}{\theta_c} (\theta - \theta_c) + A. \end{aligned}$$

Notons qu'une étude de ce type avait déjà été présentée antérieurement par Ph. Bénilan *et al.* et D. Blanchard *et al.* dans [16, 20, 21].

Terminons cette présentation par les papiers de A. Beliaev [15] où l'auteur présente l'étude d'une équation du type des milieux poreux à forme non divergente :

$$\partial_t u \in \Delta \{ [1 + \kappa \operatorname{Sign}(\partial_t u)] u^m \} ;$$

et celui de B. Schweizer [81], concernant des milieux poreux aléatoires *via* l'équation

$$\partial_t u \in \operatorname{Div} [a u + b + \gamma \operatorname{sign}(\partial_t u)].$$

Dans notre travail doctoral, nous avons choisi de mener l'étude des problèmes d'évolution non linéaires du type pseudo-parabolique suivant : rechercher une fonction inconnue u de Q à valeur réelle vérifiant l'équation de continuité suivante :

$$\begin{cases} f(t, x, \partial_t u) - \operatorname{Div} [a(x, u, \partial_t u) \nabla u + b(x, u, \partial_t u) \nabla \partial_t u] = g & \text{dans } Q, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

associée à des conditions de bord sur $]0, T[\times \partial\Omega$, où Ω est un domaine borné assez régulier de $\mathbb{R}^d$, $Q =]0, T[\times \Omega$ avec T un réel strictement positif, $f : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de Carathéodory, croissante par rapport à u , avec une condition à l'infini et $a, b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, höldériennes par rapport aux deuxième et troisième variables, d'exposant supérieur à $\frac{1}{2}$. $E, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de $L^2(Q)$ et $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée dans $H_0^1(\Omega)$.

L'originalité de cette étude réside dans la présence de termes non linéaires par rapport à $\partial_t u$. Ceci découle d'une réflexion plus générale sur la prise en compte de contraintes sur $\partial_t u$ et non sur u . Qualifiés de « nouveaux problèmes unilatéraux » par J.-L. Lions dans [72] p. 420, il s'agit de modèles de systèmes physiques avec contraintes d'asservissement sur la vitesse du phénomène physique, pour tenir compte par exemple d'auto-régulation par la vitesse, de lois de comportement régies par la vitesse, de vitesse asservie par des valeurs-seuils ; l'analyse mathématique se fonde sur le chapitre 2 de G. Duvaut et J.-L. Lions [40] traitant de l'asservissement thermique instantané au bord.

Cette contrainte est aussi à l'origine de certains problèmes issus de la géologie des bassins sédimentaires ci-dessus cités ([4]- [9], [53, 54] et [89, 90, 92]).

Ce travail comporte principalement trois parties :

- une première est consacrée à l'analyse théorique d'une équation pseudo-parabolique fortement non linéaire,
- s'ensuit une seconde dédiée à l'équation de Barenblatt-Sobolev avec une remarque sur sa version stochastique,
- la dernière partie est alors orientée vers des illustrations numériques,

que nous proposons de présenter maintenant plus en détail.

Le CHAPITRE 1 est consacré à l'étude théorique (principalement la question de l'existence d'une solution) du problème :

$$f(t, x, \partial_t u) - \text{Div} [a(x, u, \partial_t u) \nabla u + b(x, u, \partial_t u) \nabla \partial_t u] = g \quad \text{dans } Q,$$

avec la condition de Cauchy

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et une condition de bord du type de Dirichlet homogène.

La difficulté principale repose alors sur une dépendance non linéaire en $\partial_t u$.

On propose une méthode de semi-discrétisation implicite en temps, qui nous permet de montrer l'existence d'une « bonne solution » au sens de Ph. Bénilan *et al.* [17].

On remplace ainsi $\partial_t u$ par un quotient différentiel : $\frac{u_n - u_{n-1}}{h}$ et l'étude repose sur celle d'une suite de problèmes elliptiques non linéaires, dont la première itération est : rechercher u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f_h \left(h, x, \frac{u - u_0}{h} \right) v dx + \int_{\Omega} a \left(x, u, \frac{u - u_0}{h} \right) \nabla u \nabla v dx \\ & + \int_{\Omega} b \left(x, u, \frac{u - u_0}{h} \right) \nabla \frac{u - u_0}{h} \nabla v dx = \int_{\Omega} g v dx. \end{aligned}$$

Le résultat d'existence d'une solution découle du théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov dans le cadre réflexif séparable ; la séquence des itérés s'obtient alors par induction.

On peut alors construire une double suite $(\tilde{u}^h) - (u^h)$ telle que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_h(t, x, \partial_t \tilde{u}^h) v dx + \int_{\Omega} a(x, u^h, \partial_t \tilde{u}^h) \nabla u^h \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b(x, u^h, \partial_t \tilde{u}^h) \nabla \partial_t \tilde{u}^h \nabla v dx = \int_{\Omega} g^h v dx. \end{aligned}$$

Les estimations *a priori* ne permettront pas d'obtenir aisément un résultat de compacité forte pour la suite $(\partial_t \tilde{u}^h)$ dans $L^2(Q)$. Il nous faudra alors procéder à un passage à la limite à t fixé, t presque partout dans $]0, T[$, à l'aide de résultats spécifiques de compacité.

Plusieurs compléments d'étude sont proposés en fin de chapitre :

1. On revient sur l'étude d'un problème de Barenblatt qui s'écrit sous la forme :

$$f(t, x, \partial_t u) - \Delta u = g.$$

On propose cette étude *via* l'analyse d'une perturbation singulière pseudo-parabolique.

2. Dans un second paragraphe, on accorde le droit à b de dégénérer, mais moyennant une hypothèse de contrôle de a par b .
3. On envisage ensuite l'étude du même problème lorsque f est un graphe maximal monotone.
4. La dernière étude porte sur la pénalisation d'un problème pseudo-parabolique sous une contrainte du type : $\partial_t u + E \in [a, b]$.

Le CHAPITRE 2 concerne le problème de Barenblatt-Sobolev. Il s'agit de l'analyse mathématique de l'équation :

$$f(\partial_t u) - \Delta u - \epsilon \Delta \partial_t u = g \quad \text{dans } Q, \quad (3)$$

avec les données initiale sur la frontière parabolique :

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad u(t, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

et où f est une fonction lipschitzienne, non monotone *a priori*, lorsque $\epsilon > 0$, avec $f(0) = 0$, $f = f_1 - f_2$ où $f_1 = \int_0^x f'^+(s) ds$ et $f_2 = \int_0^x f'^-(s) ds$.

Pour des valeurs positives de ϵ , on montre qu'il existe un seuil critique, ϵ_0 , reliant la constante de Lipschitz de f_2 et la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$, tel que le problème ci-dessus soit bien posé pour des valeurs de ϵ sur-critiques.

Deux méthodes sont proposées. Une première repose sur le théorème de point fixe de Banach et sur les résultats du chapitre précédent ; alors qu'une seconde reprend la discrétisation en temps du premier chapitre en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder pour établir l'existence des solutions aux problèmes elliptiques : rechercher u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f\left(\frac{u - u_0}{h}\right) v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla \frac{u - u_0}{h} \nabla v dx = \int_{\Omega} g v dx. \quad (5)$$

Dans le cas critique, l'éventuelle unicité de la solution est établie, alors que son existence nécessite une hypothèse supplémentaire sur le support de f'_2 . Cette dernière est établie en passant à la limite sur ϵ vers ϵ_0^+ dans le cas précédent.

Pour des valeurs sous-critiques de ϵ , on illustre par un exemple, l'existence de multiples solutions.

S'ensuit, comme généralisation multivoque des procédés de régularisation par un problème pseudo-parabolique, l'étude de l'inclusion différentielle de type de Barenblatt lorsque $\epsilon = 0$:

$$\Delta u + g \in f(\partial_t u) \quad \text{dans } Q, \text{ et } u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u(t, \cdot) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (6)$$

où f est un graphe maximal monotone de $\mathbb{R}^2$.

La méthode repose sur la théorie générale des semi-groupes non linéaires en introduisant pour $\lambda > 0$ l'approximation univoque Yosida $f_\lambda = \frac{I - (I + \lambda f)^{-1}}{\lambda}$ du graphe de f , lipschitzienne de rapport $1/\lambda$. Alors, il existe d'après l'étude liminaire $u_{\epsilon, \lambda}$ tel que pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f_{\epsilon, \lambda}(\partial_t u_{\epsilon, \lambda}) v dx + \int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon, \lambda} \nabla v dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla \partial_t u \nabla v dx = \int_{\Omega} g v dx, \quad (7)$$

avec

$$u_{\epsilon, \lambda}(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \text{ et } u(t, \cdot) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (8)$$

Ainsi, le passage à la limite sur les paramètres ϵ et λ vers 0^+ permet de conclure à l'existence d'une solution, unique en son genre ; une propriété de stabilité par rapport à la condition initiale est présentée.

On propose enfin de conclure ce chapitre par une approche stochastique de l'équation pseudo-parabolique de Barenblatt-Sobolev sous la forme suivante :

$$f\left(\partial_t[u - \int_0^t g dw(s)]\right) - \Delta u - \epsilon \Delta \partial_t[u - \int_0^t g dw(s)] = 0.$$

Dans le CHAPITRE 3, il s'agit d'illustrer numériquement ce type de problèmes à l'aide de Matlab. Principalement, on portera notre attention sur le traitement de la perturbation singulière pseudo-parabolique lorsque la fonction d'état représentative de la diffusion moléculaire a change de signe. On utilise alors une méthode d'éléments finis monodimensionnels dont le code est développé par J.Alberty *et al.* [27] concernant le problème elliptique non linéaire

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u + u \frac{du}{dx} = f(x).$$

Notre travail est alors de modifier ce code pour effectuer une simulation numérique du problème étudié de façon théorique dans le premier chapitre.

Chapitre 1

Etude d'une classe d'équations fortement non linéaires

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions une équation pseudo-parabolique non linéaire générale. Notre problème présente trois termes non linéaires qui induisent des difficultés techniques (de type compacité) pour passer à la limite.

On s'intéresse au problème suivant : rechercher u dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel que

$$f(t, x, \partial_t u) - \text{Div} [a(x, u, \partial_t u) \nabla u + b(x, u, \partial_t u) \nabla \partial_t u] = g \quad \text{dans } Q, \quad (1.1)$$

avec la condition de Cauchy

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.2)$$

Pour cette étude, on fait les hypothèses suivantes :

Hypothèses (H) :

H₁ : a et b sont deux fonctions continues sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\exists \beta, M > 0, \quad \forall (x, u, v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |a(x, u, v)| \leq M, \quad 0 < \beta \leq b(x, u, v) \leq M,$$

de plus a et b sont respectivement θ_a -höldérienne et θ_b -höldérienne par rapport à u, v , $\theta_a, \theta_b \geq \frac{1}{2}$.

H₂ : f est une fonction de Carathéodory sur $Q \times \mathbb{R}$ telle que $f(L^2(Q)) \subset L^2(Q)$ au sens de l'opérateur de Nemytskii¹ associé. De plus, on considère l'une des deux hypothèses suivantes :

soit **H_{2,1}** : f est strictement croissante par rapport à u ;

soit **H_{2,2}** : f est croissante par rapport à u et a et b sont lipschitziennes , *i.e.* $\theta_a = \theta_b = 1$.

H₃ : $g \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$.

H₄ : u_0 est une fonction de $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, nous dirons que

1. Voir définition 1.3.

Définition 1.1. Une solution du problème de Cauchy est tout élément u de $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$ et presque tout t de $]0, T[$,

$$\int_{\Omega} \left\{ f(\partial_t u + E)v + [a(., u, \partial_t u) \nabla u + b(., u, \partial_t u) \nabla \partial_t u] \nabla v \right\} dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (1.3)$$

avec la condition initiale $u(0, \cdot) = u_0$.

Profitions-en pour faire quelques rappels sur les fonctions de Carathéodory.

2 Sur les fonctions de Carathéodory

On rappelle que

Définition 1.2. f est une fonction de Carathéodory sur $Q \times \mathbb{R}$ lorsque pour tout réel u , $(t, x) \mapsto f(t, x, u)$ est mesurable et pour presque tout (t, x) de Q , $u \mapsto f(t, x, u)$ est continue.

Ainsi (Cf. I. Fonseca *et al.* [50] par exemple, Th 6.34 p.412 puis Th. 6.31 p.407)

Propriété 1.1. Si f est de Carathéodory, alors c'est une intégrande normale, de sorte que f est mesurable de $Q \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Puis, le théorème de Scorza-Dragoni (Cf. H. Berliocchi *et al.* [19] par exemple) affirme que

Théorème 1.1. Si f est de Carathéodory, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie fermée $C_\epsilon \subset Q$ telle que $\text{mesure}(Q \setminus C_\epsilon) < \epsilon$ et la restriction de f à $C_\epsilon \times \mathbb{R}$ est continue.

De plus, (Cf. A. Ambrosetti *et al.* [2] p.5 sqq)

Propriété 1.2. Si f est de Carathéodory, alors, pour tout $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, $f(., ., u)$ est mesurable.

D'où la définition,

Définition 1.3. On appelle opérateur de Nemytskii, l'opérateur qui à u associe $\tilde{f}(u) = f(., ., u)$.

Dès lors, le théorème de Lebesgue et sa réciproque conduisent à montrer que

Propriété 1.3. Si f est de Carathéodory et si

$$\exists a_1 \in L^2(Q), \exists a_2 \in \mathbb{R}, \forall (t, x) \in Q \text{ a.e.}, \forall u \in \mathbb{R}, \quad |\tilde{f}(u)| \leq a_1 + a_2|u|, \quad (1.4)$$

alors l'opérateur de Nemytskii associé à f est continu dans $L^2(Q)$, i.e., si u_n converge vers u dans $L^2(Q)$, alors $\tilde{f}(u_n)$ converge vers $\tilde{f}(u)$ dans $L^2(Q)$.

Preuve. Si u_n converge vers u dans $L^2(Q)$, il existe h dans $L^2(Q)$ et une sous-suite notée u_{n_k} tel que u_{n_k} converge vers u p.p. dans Q et $|u_{n_k}| \leq h$ p.p. pour tout n_k .

Ainsi, $\tilde{f}(u_{n_k})$ converge p.p. vers $\tilde{f}(u)$ et par hypothèses, $|\tilde{f}(u_{n_k})| \leq a_1 + a_2 h$. Le théorème de convergence dominée assure la convergence de $\tilde{f}(u_{n_k})$ vers $\tilde{f}(u)$ dans $L^2(Q)$, et l'unicité de cette limite, la continuité recherchée. $\square$

Une autre condition suffisante de continuité de l'opérateur de Nemytskii est proposée par I. Ekeland *et al.* [41] (Prop. 1.1 p.77).

Propriété 1.4. *Si f est une fonction de Carathéodory telle que « $u \in L^2(Q) \Rightarrow \tilde{f}(u) \in L^2(Q)$ » alors l'opérateur de Nemytskii est continu dans $L^2(Q)$.*

Nous proposons ici une preuve plus simple en utilisant l'hypothèse de croissance dont on dispose ici. Considérons une suite (u_n) qui converge vers u dans $L^2(Q)$. Alors, comme dans la preuve ci-dessus, il existe une sous-suite notée (u_{n_k}) qui converge p.p. vers u et une fonction h de $L^2(Q)$ avec $|u_{n_k}| \leq h$ p.p. dans Q . Comme f est une fonction de Carathéodory, il vient que $\tilde{f}(u_{n_k})$ converge vers $\tilde{f}(u)$ p.p. dans Q . Ensuite, la monotonie de f par rapport à la variable u assure que $|\tilde{f}(u_{n_k})| \leq \max[|\tilde{f}(-h)|, |\tilde{f}(h)|] \in L^2(Q)$ par hypothèse. Ainsi, on est en mesure de conclure comme précédemment.

Enfin, M. A. Krasnosel'skii [69] (Th. 2.1, p.22) propose la condition nécessaire et suffisante suivante :

Théorème 1.2. *Si f est une fonction de Carathéodory, l'opérateur de Nemytskii associé à f est continu dans $L^2(Q)$, si et seulement si (1.4) est vérifié.*

Preuve. Il suffit de montrer la condition nécessaire. Pour cela, reprenons ici la démonstration de M. A. Krasnosel'skii.

-) Supposons tout d'abord que $f(.,.,0) = 0$.

Montrons qu'il existe $a_2 \geq 0$ tel que $\|\tilde{f}(u)\|_{L^2(Q)} \leq a_2$ dès que $\|u\|_{L^2(Q)} \leq 1$.

En effet, comme $\tilde{f}$ est continu, il existe $\eta > 0$ tel que $\|u\|_{L^2} < \eta$ implique $\|\tilde{f}(u)\|_{L^2} < 1$. Dès lors, pour tout u de la boule unité dans $L^2(Q)$, il existe un entier n tel que $\|u\|_{L^2} \in [n\eta, (n+1)\eta]$.

Ainsi, il existe une partition mesurable $(Q_k)_{k=1,\dots,n+1}$ de Q telle que $\|u.1_{Q_k}\|_{L^2(Q)} \leq \eta$, et donc $\|\tilde{f}(u.1_{Q_k})\|_{L^2(Q)} < 1$ et $\|\tilde{f}(u)\|_{L^2(Q)} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \|\tilde{f}(u.1_{Q_k})\|_{L^2(Q)} < n+1 \leq \frac{\|u\|_{L^2}}{\eta} + 1 \leq \frac{1}{\eta} + 1 = a_2$.

Soit maintenant $u \in L^2(Q)$ et $Q_u = \{(t, x) \in Q, |\tilde{f}(u)| > a_2|u|\}$. Suivant l'idée de localisation ci-dessus, il existe un entier n et $\epsilon \in [0, 1]$ tels que $\|u.1_{Q_u}\|_{L^2(Q)}^2 = n + \epsilon$. Alors, il existe une partition mesurable $(Q_k)_{k=1,\dots,n+1}$ de Q_u telle que $\|u.1_{Q_k}\|_{L^2(Q)}^2 \leq 1$, et donc $\|\tilde{f}(u.1_{Q_k})\|_{L^2(Q)} \leq a_2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[(|\tilde{f}(u)| - a_2|u|)^+ \right]^2 dxdt = \int_{Q_u} \left[|\tilde{f}(u)| - a_2|u| \right]^2 dxdt \leq \int_{Q_u} |\tilde{f}(u)|^2 - a_2^2|u|^2 dxdt \\ & \leq \sum_{k=1}^{n+1} \int_{Q_k} |\tilde{f}(u)|^2 dxdt - a_2^2 \int_{Q_u} |u|^2 dxdt \leq (n+1)a_2^2 - (n+\epsilon)a_2^2 \leq a_2^2. \end{aligned}$$

Pour tout entier k , considérons

$$u_k(t, x) \in [-k, k] \text{ tel que } (|\tilde{f}(u_k)| - a_2|u_k|)^+ = \max_{\lambda \in [-k, k]} (|\tilde{f}(\lambda)| - a_2|\lambda|)^+.$$

$u_k \in L^2(Q)$, et le théorème de Beppo Levi, indique que

$$\int_Q \left[\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (|\tilde{f}(\lambda)| - a_2|\lambda|)^+ \right]^2 dxdt = \sup_k \int_Q \left[(|\tilde{f}(u_k)| - a_2|u_k|)^+ \right]^2 dxdt \leq a_2^2.$$

Il suffit alors, pour conclure, de noter $a_1 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (|\tilde{f}(\lambda)| - a_2|\lambda|)^+$

-) Dans le cas général, il suffit de poser $\tilde{f}(u) = \tilde{f}(u) - \tilde{f}(0) + \tilde{f}(0)$, en remarquant que, par hypothèse, $\tilde{f}(0) \in L^2(Q)$. $\square$

Remarque 1.1. Ainsi, $\int_Q \left[\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (|\tilde{f}(\lambda)| - a_1 - a_2|\lambda|)^+ \right]^2 dx dt = 0$ et d'après le théorème de Fubini, il existe un sous-ensemble Z_1 mesurable de $]0, T[$, de pleine mesure, tel que pour tout t de Z_1 , $a_1(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$, $f(t, \cdot, \cdot)$ est une fonction de Carathéodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$ et

$$\int_{\Omega} \left[\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (|f(t, x, \lambda)| - a_1(t, x) - a_2|\lambda|)^+ \right]^2 dx = 0$$

De sorte que pour tout t de Z_1 ,

$$\forall x \in \Omega \text{ a.e.}, \forall u \in \mathbb{R}, \quad |f(t, x, u)| \leq a_1(t, x) + a_2|u|, \quad (1.5)$$

et l'opérateur de Nemytskii associé à $f(t, \cdot, \cdot)$ est continu sur $L^2(\Omega)$.

Notons (ρ_n) la suite classique de régularisation de $\mathbb{R}^{d+1}$ et

$$f_n(t, x, u) = \int_Q f(s, y, u) \rho_n(t - s, x - y) ds dy.$$

Propriété 1.5. Si f est une fonction de Carathéodory telle que l'opérateur de Nemytskii associé est continu dans $L^2(Q)$, alors f_n est globalement continue sur $\overline{Q} \times \mathbb{R}$.

Preuve. Pour le voir, considérons une suite $((t_k, x_k, u_k))$ qui converge vers (t, x, u) dans $\mathbb{R}^{d+2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & |f_n(t_k, x_k, u_k) - f_n(t, x, u)| \\ &= \left| \int_Q f(s, y, u_k) \rho_n(t_k - s, x_k - y) - f(s, y, u) \rho_n(t - s, x - y) dx ds \right| \\ &\leq \left| \int_Q f(s, y, u_k) [\rho_n(t_k - s, x_k - y) - \rho_n(t - s, x - y)] dx ds \right| \\ &\quad + \left| \int_Q [f(s, y, u_k) - f(s, y, u)] \rho_n(t - s, x - y) dx ds \right| \\ &\leq +C(\rho_n) ||(t_k - t, x_k - x)|| \int_Q |f(s, y, u_k)| dx ds \\ &\quad + C(\rho_n) \int_Q |f(s, y, u_k) - f(s, y, u)| dx ds. \end{aligned}$$

Or, si u_k converge vers u dans $\mathbb{R}$, il en est de même dans $L^2(Q)$ où on note de même la constante réelle et la fonction constante. Par continuité de l'opérateur de Nemytskii, $f(s, y, u_k)$ converge vers $f(s, y, u)$ dans $L^2(Q)$, donc dans $L^1(Q)$ et le second terme de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 avec k vers l'infini ; de plus $f(s, y, u_k)$ est borné dans $L^1(Q)$ et le premier terme tend aussi vers 0. $\square$

Remarque 1.2. Si f est une fonction de Carathéodory vérifiant (1.4) alors

$$\forall (t, x, u) \in Q \times \mathbb{R}, \quad |f_n(t, x, u)| \leq a_1 * \rho_n(t, x) + a_2 |u|,$$

où $a_1 * \rho_n$ est une fonction continue sur $\overline{Q}$.

Ainsi, f_n est continu dans $L^2(Q)$ et il existe deux constantes $\bar{a}_1^n$ et $\bar{a}_2^n$ avec, pour tout (t, x, u) , $|f_n(t, x, u)| \leq \bar{a}_1^n + \bar{a}_2^n |u|$.

De plus, quitte à extraire une sous-suite que l'on note de même, il existe une fonction $h \in L^2(Q)$ telle que $0 \leq a_1 * \rho_n \leq h$ p.p. dans Q et $a_1 * \rho_n$ converge p.p. dans Q vers a_1 .

En conséquence, il est possible de supposer que la majoration (1.4) avec a_1 convient, à la fois pour $\tilde{f}$ et pour $\tilde{f}_n$, tout comme dans la remarque 1.1.

Soient k un entier positif strict, $\varphi_k \in C_c(\mathbb{R})$ tel que $1_{[-k, k]} \leq \varphi_k \leq 1_{[-k-1, k+1]}$ et notons $f^k : (t, x, u) \mapsto f(t, x, u)\varphi_k(u)$ et $f_n^k : (t, x, u) \mapsto f_n(t, x, u)\varphi_k(u)$.

Par construction, f^k est une fonction de Carathéodory sur $Q \times [-k-1, k+1]$ et donc, suivant H. Berliocchi *et al.* [19] (Rmq. 5 p.135), $\tilde{f}^k : (t, x) \mapsto [u \mapsto f(t, x, u)\varphi_k(u)]$ est mesurable en tant que fonction de Q à valeurs dans $C([-k-1, k+1])$ pour la norme uniforme.

Or, par hypothèse, f est croissante par rapport à la variable u , ainsi,

$$|f^k(t, x, u)| \leq \max[|f(t, x, -k-1)|, |f(t, x, k+1)|],$$

donc $f^k \in L^2(Q, C[-k-1, k+1])$ et f_n^k converge vers f^k dans $L^2(Q, C[-k-1, k+1])$.

De plus, pour une sous-suite notée de même, pour presque tout t de $]0, T[$, $f_{n_i}^k(t, \cdot, \cdot)$ converge vers $f^k(t, \cdot, \cdot)$ dans $L^2(\Omega, C[-k-1, k+1])$.

Quitte à considérer une extraction diagonale,

Propriété 1.6. Il existe une sous-suite encore notée (f_n^k) et $Z_2 \subset Z_1^{(2)} \subset]0, T[$ de pleine mesure, tel que pour tout t de Z_2 et pour tout entier k , on a la convergence de $f_n^k(t, \cdot, \cdot)$ vers $f^k(t, \cdot, \cdot)$ dans $L^2(\Omega, C[-k-1, k+1])$.

D'où, pour toute suite $(u_n) \subset L^2(\Omega)$ et tout entier k ,

$$\int_{\Omega} \left| f_n^k(t, x, u_n(x)) - f^k(t, x, u_n(x)) \right|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left\| f_n^k(t, x, \cdot) - f^k(t, x, \cdot) \right\|_{\infty}^2 dx$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Soit maintenant une suite (u_n) qui converge faiblement vers un u dans $H^1(\Omega)$. Quitte à extraire une sous-suite notée de même, (u_n) converge p.p. dans Ω vers u et il existe une fonction $v \in$

2. Voir remarque 1.1.

$L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)$ (L^∞ si $d = 1$) telle que $|u_n| \leq v$ p.p. dans Ω . Alors, pour tout t de Z_2 et tout entier k ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} |f_n(t, x, u_n(x)) - f(t, x, u_n(x))|^2 dx \\
 \leq & C \int_{\Omega} \left| f_n^k(t, x, u_n(x)) - f^k(t, x, u_n(x)) \right|^2 dx \\
 & + C \int_{\Omega} |f_n(t, x, u_n(x)) - f(t, x, u_n(x))|^2 (1 - \varphi_k(u_n))^2 dx \\
 \leq & C \int_{\Omega} \left\| f_n^k(t, x, \cdot) - f^k(t, x, \cdot) \right\|_{\infty}^2 dx \\
 & + C \int_{\Omega} |f_n(t, x, u_n(x)) - f(t, x, u_n(x))|^2 (1 - \varphi_k(u_n))^2 dx \\
 \leq & C \int_{\Omega} \left\| f_n^k(t, x, \cdot) - f^k(t, x, \cdot) \right\|_{\infty}^2 dx + C \int_{\Omega} [a_1^2(t, x) + a_2^2|u_n|^2] (1 - \varphi_k(u_n))^2 dx.
 \end{aligned}$$

Et, par convergence dominée, on obtient, pour tout entier k ,

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(t, x, u_n(x)) - f(t, x, u_n(x))|^2 dx \\
 \leq & C \int_{\Omega} [a_1^2(t, x) + a_2^2|u|^2] (1 - \varphi_k(u))^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on est en mesure de remarquer que

Lemme 1.1. *Soit (u_n) une suite qui converge faiblement vers un u dans $H^1(\Omega)$, alors pour tout t de Z_2 , $f_n(t, \cdot, u_n)$ tend vers $f(t, \cdot, u)$ dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve. La convergence, du moins pour une sous-suite, provient des arguments ci-dessus et de la continuité de l'opérateur de Nemytskii pour t fixé décrit dans la remarque 1.1. La convergence de toute la suite repose alors sur une technique classique d'unicité de la valeur d'adhérence. $\square$

3 Etude du problème semi-discrétisé implicite

Pour établir l'existence d'une solution, on utilise une méthode itérative en construisant une suite de solutions approchées en temps dans un espace convenable *via* une fonction en escalier pour l'approximation de la solution en temps et *via* un schéma d'Euler implicite pour l'approximation de la dérivée en temps. Le lecteur intéressé par cette technique pourra consulter par exemple [4–6, 8, 9, 52, 89–92].

On étudie d'abord la première itération et les suivantes se feront par induction. On note

H'₂ : f est une fonction de Carathéodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$ telle que $f(L^2(\Omega)) \subset L^2(\Omega)$ au sens de l'opérateur de Nemytskii associé. De plus, on considère l'une des deux hypothèses suivantes :

soit **H_{2,1}** : f est strictement croissante par rapport à u ;

soit **H_{2,2}** : f est croissante par rapport à u et a et b sont lipschitziennes , *i.e.* $\theta_a = \theta_b = 1$.

On a donc le résultat suivant :

Proposition 1.1. *En supposant les hypothèses H_1 - H'_2 avec f bornée et continue sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ et g des fonctions $L^2(\Omega)$, pour toute donnée u_0 dans $H_0^1(\Omega)$, il existe u unique dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) v dx + \int_{\Omega} a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \nabla u \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \nabla \frac{u - u_0}{h} \nabla v dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

où h est un réel strictement positif tel que $h \leq \frac{\beta}{M+1}$, destiné à tendre vers 0^+ .

Preuve. L'existence d'une solution de (1.6) utilise le théorème de points fixes de Schauder-Tikhonov (cf. G. Gagneux *et al.* [52] p.29-30 par exemple) en considérant un problème linéarisé. L'existence et l'unicité de la solution de l'équation linéarisée sont classiquement obtenues par l'application du théorème de Lax-Milgram.

3.1 Existence d'une solution pour f bornée

Linéarisation de l'équation :

On construit l'application $\Psi : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $S \mapsto u_S$, où u_S est la solution du problème linéaire suivant : pour S de $H_0^1(\Omega)$, rechercher u_S dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f\left(x, \frac{S - u_0}{h}\right) v dx + \int_{\Omega} a\left(x, S, \frac{S - u_0}{h}\right) \nabla u_S \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b\left(x, S, \frac{S - u_0}{h}\right) \nabla \frac{u_S - u_0}{h} \nabla v dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[a \left(x, S, \frac{S - u_0}{h} \right) + \frac{1}{h} b \left(x, S, \frac{S - u_0}{h} \right) \right] \nabla u_S \nabla v dx \\ &= \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f \left(x, \frac{S - u_0}{h} \right) v dx + \int_{\Omega} \frac{1}{h} b \left(x, S, \frac{S - u_0}{h} \right) \nabla u_0 \nabla v dx. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Cette équation linéaire admet trivialement une solution unique u_S par le biais du théorème de Lax-Milgram car $a + \frac{b}{h} \geq 1$. Cela justifie que l'application Ψ est bien construite.

Utilisation du Théorème de point fixe :

On prend la fonction-test $v = u_S$ de $H_0^1(\Omega)$ dans l'équation (1.8) et on obtient

$$\|u_S\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \langle g, u_S \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f \left(x, \frac{S - u_0}{h} \right) u_S dx + \int_{\Omega} \frac{1}{h} b \left(x, S, \frac{S - u_0}{h} \right) \nabla u_0 \nabla u_S dx.$$

Grâce à des majorations élémentaires, puis à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à celle de Poincaré, il vient,

$$\begin{aligned} \|u_S\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \sqrt{1 + C_P^2} \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_S\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + C_P \|f\|_{\infty} \sqrt{|\Omega|} \|u_S\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{M}{h} \|u_S\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où C_P est la constante dans l'inégalité de Poincaré.

On a donc

$$\|u_S\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R, \quad (1.9)$$

avec $R = \sqrt{1 + C_P^2} \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + C_P \|f\|_{\infty} \sqrt{|\Omega|} + \frac{M}{h} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}$.

On obtient ainsi

$$\Psi \left(\overline{B_{H_0^1(\Omega)}(0, R)} \right) \subset \overline{B_{H_0^1(\Omega)}(0, R)},$$

i.e. Ψ conserve une boule fermée.

Soit (S_n) une suite dans $\overline{B_{H_0^1(\Omega)}(0, R)}$, on a bien sûr (u_{S_n}) dans $\overline{B_{H_0^1(\Omega)}(0, R)}$.

Si S_n converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers S , on obtient par compacité,

$$S_n \rightarrow S \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et } p.p. \text{ pour une sous-suite notée de même.}$$

Puisque a, b sont des fonctions continues, on obtient alors pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a \left(x, S_n, \frac{S_n - u_0}{h} \right) \nabla v &\rightarrow a \left(x, S, \frac{S - u_0}{h} \right) \nabla v \quad p.p. \text{ dans } \Omega, \\ b \left(x, S_n, \frac{S_n - u_0}{h} \right) \nabla v &\rightarrow b \left(x, S, \frac{S - u_0}{h} \right) \nabla v \quad p.p. \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

En utilisant le fait que a et b soient bornées, combiné avec le théorème de convergence dominée, on obtient donc pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$a\left(x, S_n, \frac{S_n - u_0}{h}\right) \nabla v \rightarrow a\left(x, S, \frac{S - u_0}{h}\right) \nabla v \quad \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^d, \quad (1.10)$$

$$b\left(x, S_n, \frac{S_n - u_0}{\Delta t}\right) \nabla v \rightarrow b\left(x, S, \frac{S - u_0}{\Delta t}\right) \nabla v \quad \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^d. \quad (1.11)$$

Et, puisque l'opérateur de Nemystkii est continu dans $L^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f\left(x, \frac{S_n - u_0}{h}\right) v dx \rightarrow \int_{\Omega} f\left(x, \frac{S - u_0}{h}\right) v dx. \quad (1.12)$$

Par ailleurs, d'après (1.9), la suite (u_{S_n}) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe un élément χ de $H_0^1(\Omega)$ et une sous-suite extraite de (u_{S_n}) notée de même tel que, u_{S_n} converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers χ . On en déduit alors que, l'opérateur ∇ étant linéaire et continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^d$,

$$\nabla u_{S_n} \rightharpoonup \nabla \chi \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^d, \quad (1.13)$$

$$\nabla \frac{u_{S_n} - u_0}{h} \rightharpoonup \nabla \frac{\chi - u_0}{h} \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^d. \quad (1.14)$$

Les relations (1.12), (1.10), (1.11), (1.13) et (1.14) assurent le passage à la limite sur n vers $+\infty$ dans (1.7) pour une sous-suite de (u_{S_n}) . On obtient donc, pour S de $H_0^1(\Omega)$, que χ est une solution de (1.7). Par unicité de cette dernière, on obtient $\chi = u_S$.

L'unicité de la valeur d'adhérence faible pour la suite (u_{S_n}) assure que toute la suite converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers u_S , *i.e.*

$$u_{S_n} \rightharpoonup u_S \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

L'application Ψ est alors séquentiellement continue dans $H_0^1(\Omega)$ pour la convergence faible.

D'après le théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov, Ψ admet au moins un point fixe, *i.e.* il existe S dans $H_0^1(\Omega)$ tel que $u_S = S$.

3.2 Unicité de la solution

Soit $\hat{u}$ une éventuelle autre solution de (1.6). On obtient par soustraction, pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] v dx \\ & + \int_{\Omega} \left[a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) + \frac{1}{h} b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \right] \nabla (u - \hat{u}) \nabla v dx \\ & + \int_{\Omega} \left[a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) - a\left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] \nabla \hat{u} \nabla v dx \\ & + \int_{\Omega} \left[b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) - b\left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \nabla v dx = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dans le cas où $f(x, \cdot)$ est injective (hypothèse $H_{2,1}$), on note p_μ (cf. [6], [54]) la fonction définie par

$$p_\mu(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq \mu \\ \ln\left(\frac{re}{\mu}\right) & \text{si } \frac{\mu}{e} < r < \mu \\ 0 & \text{si } r \leq \frac{\mu}{e}. \end{cases} \quad (1.16)$$

p_μ est donc une fonction lipschitzienne croissante qui s'annule à l'origine, de constante de lipschitz $\frac{e}{\mu}$ et $p'_\mu(r) = \frac{1}{r} \mathbf{1}_{\{\frac{\mu}{e} < r < \mu\}}(r)$ dans la classe des représentants boréliens bornés de p'_μ .

D'après le lemme de Marcus-Mizel ([31] p.14), si u est dans $H_0^1(\Omega)$, alors $p_\mu(u)$ est dans $H_0^1(\Omega)$ et $\nabla p_\mu(u) = p'_\mu(u) \nabla u$, p.p. dans Ω .

On prend alors comme fonction test $v = p_\mu(u - \hat{u})$ dans (1.15) et il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] p_\mu(u - \hat{u}) dx \\ & + \int_{\Omega} \left[a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) + \frac{1}{h} b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \right] p'_\mu(u - \hat{u}) |\nabla(u - \hat{u})|^2 dx \\ & + \int_{\Omega} \left[a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) - a\left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] p'_\mu(u - \hat{u}) \nabla \hat{u} \nabla(u - \hat{u}) dx \\ & + \int_{\Omega} \left[b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) - b\left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] p'_\mu(u - \hat{u}) \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \nabla(u - \hat{u}) dx = 0. \end{aligned}$$

Puisque $h \leq \frac{\beta}{M+1}$, il en résulte que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] p_\mu(u - \hat{u}) dx + \int_{\Omega} p'_\mu(u - \hat{u}) |\nabla(u - \hat{u})|^2 \\ & \leq - \int_{\Omega} \left[a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) - a\left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] p'_\mu(u - \hat{u}) \nabla \hat{u} \nabla(u - \hat{u}) dx \\ & \quad - \int_{\Omega} \left[b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) - b\left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] p'_\mu(u - \hat{u}) \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \nabla(u - \hat{u}) dx. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] p_\mu(u - \hat{u}) dx + \int_{\Omega} p'_\mu(u - \hat{u}) |\nabla(u - \hat{u})|^2 \\ & \leq \int_{\Omega} \left| a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) - a\left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right| |p'_\mu(u - \hat{u})| |\nabla \hat{u}| |\nabla(u - \hat{u})| dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left| b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) - b\left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right| |p'_\mu(u - \hat{u})| \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right| |\nabla(u - \hat{u})| dx. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions a et b sont höldériennes d'exposants respectifs θ_a et θ_b , on obtient alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right] p_{\mu}(u-\hat{u}) dx + \int_{\Omega} p'_{\mu}(u-\hat{u}) |\nabla(u-\hat{u})|^2 \\
 & \leq k_1 \int_{\Omega} |u-\hat{u}|^{\theta_a} |p'_{\mu}(u-\hat{u})| |\nabla \hat{u}| |\nabla(u-\hat{u})| dx \\
 & \quad + k_2 \int_{\Omega} |u-\hat{u}|^{\theta_b} |p'_{\mu}(u-\hat{u})| \left| \nabla \frac{\hat{u}-u_0}{h} \right| |\nabla(u-\hat{u})| dx \\
 & \leq \int_{\Omega} C |u-\hat{u}|^{\theta_a} |\nabla \hat{u}| |\nabla(u-\hat{u})| p'_{\mu}(u-\hat{u}) dx \\
 & \quad + \int_{\Omega} C |u-\hat{u}|^{\theta_b} \left| \nabla \frac{\hat{u}-u_0}{h} \right| |\nabla(u-\hat{u})| p'_{\mu}(u-\hat{u}) dx.
 \end{aligned}$$

k_1 et k_2 proviennent des constantes de Hölder de a et b et $C = \max(k_1, k_2)$.

D'après l'inégalité de Young, il vient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right] p_{\mu}(u-\hat{u}) dx + \int_{\Omega} p'_{\mu}(u-\hat{u}) |\nabla(u-\hat{u})|^2 dx \\
 & \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(C^2 |u-\hat{u}|^{2\theta_a} |\nabla \hat{u}|^2 + |\nabla(u-\hat{u})|^2 \right) p'_{\mu}(u-\hat{u}) dx \\
 & \quad + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(C^2 |u-\hat{u}|^{2\theta_b} \left| \nabla \frac{\hat{u}-u_0}{h} \right|^2 + |\nabla(u-\hat{u})|^2 \right) p'_{\mu}(u-\hat{u}) dx.
 \end{aligned}$$

Par simplification, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right] p_{\mu}(u-\hat{u}) dx \leq \\
 & \quad \frac{C^2}{2} \int_{\omega_{\mu}} \left[|\nabla \hat{u}|^2 |u-\hat{u}|^{2\theta_a-1} + \left| \nabla \frac{\hat{u}-u_0}{h} \right|^2 |u-\hat{u}|^{2\theta_b-1} \right] dx,
 \end{aligned}$$

avec $\omega_{\mu} = \left\{ \frac{\mu}{e} < u-\hat{u} < \mu \right\}$.

On remarque d'une part, que $\left[f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right] p_{\mu}(u-\hat{u})$ converge presque partout vers $\left[f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right] sgn_0^+(u-\hat{u})$ et que

$\left| \left[f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right] p_{\mu}(u-\hat{u}) \right|$ est presque partout dominée par $\left| f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right|$ qui est un élément de $L^2(\Omega)$ suite à H^2 .

D'après le théorème de convergence dominée, on obtient que

$\left[f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right] p_{\mu}(u-\hat{u})$ converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers $\left[f\left(x, \frac{u-u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u}-u_0}{h}\right) \right] sgn_0^+(u-\hat{u})$.

D'autre part, en notant $I_\mu = \int_{\omega_\mu} \left(|\nabla \hat{u}|^2 |u - \hat{u}|^{2\theta_a-1} + \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right|^2 |u - \hat{u}|^{2\theta_b-1} \right) dx$, comme

$$\left(|\nabla \hat{u}|^2 |u - \hat{u}|^{2\theta_a-1} + \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right|^2 |u - \hat{u}|^{2\theta_b-1} \right) \mathbf{1}_{\omega_\mu} \rightarrow 0 \text{ p.p. dans } \Omega \text{ lorsque } \mu \rightarrow 0^+$$

et, presque partout dans Ω ,

$$\left| \left(|\nabla \hat{u}|^2 |u - \hat{u}|^{2\theta_a-1} + \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right|^2 |u - \hat{u}|^{2\theta_b-1} \right) \mathbf{1}_{\omega_\mu} \right| \leq \left| \left(|\nabla \hat{u}|^2 \mu^{2\theta_a-1} + \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right|^2 \mu^{2\theta_b-1} \right) \right|,$$

le théorème de convergence dominée assure que lorsque $\mu \rightarrow 0^+$, $I_\mu \rightarrow 0$.

Le terme du second membre tend alors vers 0 et on obtient

$$\int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right] \text{sgn}_0^+(u - \hat{u}) dx \leq 0.$$

Cela entraîne que $\int_{\Omega} \left[f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right]^+ dx = 0$.

On a donc $\left[f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \right]^+ = 0$ p.p. dans Ω .

On en déduit que $f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) \leq f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right)$.

De même, par symétrie, on obtient que $\left[f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) \right]^+ = 0$ p.p. dans Ω et que $f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) \leq f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right)$.

On en déduit que $f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right) = f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right)$.

Puisque dans ce cas de figure $f(x, \cdot)$ est strictement croissante, il en résulte que

$$u = \hat{u} \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Montrons maintenant l'unicité de la solution avec l'hypothèse $H_{2,2}$.

Dans ce cas $f(x, \cdot)$ n'est plus *a priori* injective et les fonctions a et b sont supposées lipschitziennes.

La méthode employée ci-dessus ne permet pas de conclure que $u = \hat{u}$; cependant, on a toujours $f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) = f\left(x, \frac{\hat{u} - u_0}{h}\right)$.

Il convient alors d'utiliser une approximation lipschitzienne de la fonction sign_0^+ compatible avec l'hypothèse $H_{2,2}$: i.e., on pose pour $\mu > 0$,

$$p_\mu(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq \mu, \\ \frac{r - \mu}{r} & \text{si } r > \mu. \end{cases} \quad \text{i.e. } p_\mu(r) = \frac{(r - \mu)^+}{r}. \quad (1.17)$$

p_μ est une fonction lipschitzienne croissante et nulle en origine avec $p'_\mu(r) = \frac{\mu}{r^2} \mathbf{1}_{\{r > \mu\}}$. Cette approximation a été utilisée par H. Brézis, D. Kinderlehrer et G. Stampacchia pour des modèles d'écoulements à travers une digue poreuse; elle est modelée pour tirer profit de l'inégalité de Poincaré dans $H_0^1(\Omega)$.

On prend alors la fonction-test $v = p_\mu(u - \hat{u})$ dans (1.15) et on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[a \left(x, u, \frac{u - u_0}{h} \right) + \frac{1}{h} b \left(x, u, \frac{u - u_0}{h} \right) \right] p'_\mu(u - \hat{u}) |\nabla(u - \hat{u})|^2 \\ & + \int_{\Omega} \left[a \left(x, u, \frac{u - u_0}{h} \right) - a \left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right) \right] p'_\mu(u - \hat{u}) \nabla \hat{u} \nabla(u - \hat{u}) dx \\ & + \int_{\Omega} \left[b \left(x, u, \frac{u - u_0}{h} \right) - b \left(x, \hat{u}, \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right) \right] p'_\mu(u - \hat{u}) \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \nabla(u - \hat{u}) dx = 0, \end{aligned}$$

puis, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p'_\mu(u - \hat{u}) |\nabla(u - \hat{u})|^2 dx & \leq \int_{\Omega} Lip(a) |u - \hat{u}| p'_\mu(u - \hat{u}) |\nabla \hat{u}| |\nabla(u - \hat{u})| dx \\ & + \int_{\Omega} Lip(b) |u - \hat{u}| p'_\mu(u - \hat{u}) \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right| |\nabla(u - \hat{u})| dx. \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Young, on obtient,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p'_\mu(u - \hat{u}) |\nabla(u - \hat{u})|^2 dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} p'_\mu(u - \hat{u}) \left(2Lip^2(a) |u - \hat{u}|^2 |\nabla \hat{u}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla(u - \hat{u})|^2 \right) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} p'_\mu(u - \hat{u}) \left(2Lip^2(b) |u - \hat{u}|^2 \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} |\nabla(u - \hat{u})|^2 \right) dx. \end{aligned}$$

puis, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\{u - \hat{u} > \mu\}} \frac{|\nabla(u - \hat{u})|^2}{(u - \hat{u})^2} dx \\ & \leq 2\mu \int_{\{u - \hat{u} > \mu\}} Lip^2(a) |\nabla \hat{u}|^2 dx + 2\mu \int_{\{u - \hat{u} > \mu\}} Lip^2(b) \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

On obtient donc,

$$\int_{\{u - \hat{u} > \mu\}} \frac{|\nabla(u - \hat{u})|^2}{(u - \hat{u})^2} dx \leq C, \text{ où } C = 2Lip^2(a) \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx + 2Lip^2(b) \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\hat{u} - u_0}{h} \right|^2 dx.$$

En notant

$$F_\mu(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq \mu, \\ \int_\mu^r \frac{ds}{s} = \ln\left(\frac{r}{\mu}\right) & \text{si } r > \mu. \end{cases} \quad i.e \quad F_\mu(r) = \ln\left(1 + \frac{(r - \mu)^+}{\mu}\right), \quad (1.18)$$

F_μ est bien une fonction lipschitzienne et nulle en 0, ainsi $F_\mu(u - \hat{u}) \in H_0^1(\Omega)$.

On a alors $\int_{\Omega} |\nabla F_\mu(u - \hat{u})|^2 dx \leq C$.

D'après l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\int_{\Omega} |F_\mu(u - \hat{u})|^2 dx \leq C_P^2 C,$$

où C_P désigne la constante dans l'inégalité de Poincaré.

La suite $(F_\mu(u - \hat{u}))_\mu$ est donc bornée dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de μ .

Or la fonction positive $\mu \mapsto F_\mu(u - \hat{u})$ est décroissante, donc la limite de $F_\mu(u - \hat{u})$ lorsque $\mu \rightarrow 0^+$ est $+\infty \mathbf{1}_{\{u - \hat{u} > 0\}}$.

D'après le théorème de Beppo-Levi, on obtient $+\infty \cdot \text{mes}\{(u - \hat{u})^+ > 0\} < +\infty$.

On en déduit que $(u - \hat{u})^+ = 0$ et par suite $u \leq \hat{u}$.

Puisque, u et $\hat{u}$ jouent le même rôle, on obtient aussi $\hat{u} \leq u$.

Il en résulte que $u = \hat{u}$ presque partout. □

Dans la proposition suivante, on va étudier le cas où f n'est plus *a priori* une fonction bornée. On a le résultat suivant :

Proposition 1.2. *En supposant vraies les hypothèses H_1 - H'_2 et introduisant g une fonction dans $H^{-1}(\Omega)$, pour une donnée u_0 dans $H_0^1(\Omega)$, il existe un unique u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) v dx + \int_{\Omega} a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \nabla u \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \nabla \frac{u - u_0}{h} \nabla v dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où h est un réel strictement positif tel que $h \leq \frac{\beta}{M+1}$ destiné à tendre vers 0^+ .

Preuve.

Concernant l'unicité de la solution, la démonstration ci-dessus reste inchangée.

Le résultat d'existence d'une solution consiste à tronquer f par une suite de fonctions f_n , puis à passer à la limite.

3.3 Existence d'une solution

On considère pour tout n positif, la fonction f_n définie par $f_n = \max(-n, \min(n, f))$.

Pour presque tout x de Ω , $f_n(x, \cdot)$ converge vers $f(x, \cdot)$ simplement et $|f_n(x, r)| \leq |f(x, r)|$ pour tout r .

De plus, pour n fixé, f_n est bornée. On obtient donc d'après la proposition 1.1 qu'il existe u_n dans $H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_n \left(x, \frac{u_n - u_0}{h} \right) v dx + \int_{\Omega} a \left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h} \right) \nabla u_n \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b \left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h} \right) \nabla \frac{u_n - u_0}{h} \nabla v dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

À l'aide de la fonction test $v = u_n$ dans (1.20), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_n \left(x, \frac{u_n - u_0}{h} \right) u_n dx + \int_{\Omega} \left[a \left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h} \right) + \frac{1}{h} b \left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h} \right) \right] |\nabla u_n|^2 dx \\ \leq \langle g, u_n \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{h} \int_{\Omega} b \left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h} \right) \nabla u_0 \nabla u_n dx, \end{aligned}$$

ou bien, par monotonie de $f_n(x, \cdot)$ et car $h \leq \frac{\beta}{M+1}$

$$\begin{aligned} h \underbrace{\int_{\Omega} \left[f_n \left(x, \frac{u_n - u_0}{h} \right) - f_n \left(x, -\frac{u_0}{h} \right) \right] \frac{u_n}{h} dx}_{\geq 0} + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq \langle g, u_n \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ + \frac{1}{h} \int_{\Omega} b \left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h} \right) \nabla u_0 \nabla u_n dx - \int_{\Omega} f_n \left(x, -\frac{u_0}{h} \right) u_n dx. \end{aligned}$$

Puis, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \sqrt{1 + C_P^2} \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{M}{h} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \\ + C_P \left\| f_n \left(x, -\frac{u_0}{h} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par simplification et par le fait que $|f_n(x, r)| \leq |f(x, r)|$, on obtient

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C_P^2} \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{M}{h} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + C_P \left\| f \left(x, -\frac{u_0}{h} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

La suite (u_n) est donc bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe alors un élément u de $H_0^1(\Omega)$ et une suite extraite notée de même tels que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \\ \text{Par compacité, } u_n &\rightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ p.p. \text{ et uniformément majoré par un } \bar{u} &\in L^2(\Omega), \\ &\text{pour une sous-suite notée de même.} \end{aligned} \quad (1.21)$$

À nouveau, a et b étant continues, on obtient donc pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$a \left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h} \right) \nabla v \rightarrow a \left(x, u, \frac{u - u_0}{h} \right) \nabla v \quad p.p. \text{ dans } \Omega,$$

$$b\left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h}\right) \nabla v \rightarrow b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \nabla v \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

De plus, les fonctions a et b sont bornées, on a alors

$$\left| a\left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h}\right) \nabla v \right| \leq M |\nabla v| \in (L^2(\Omega))^d \quad p.p. \text{ dans } \Omega,$$

$$\left| b\left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h}\right) \nabla v \right| \leq M |\nabla v| \in (L^2(\Omega))^d \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$a\left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h}\right) \nabla v \rightarrow a\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \nabla v \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^d, \quad (1.22)$$

$$b\left(x, u_n, \frac{u_n - u_0}{h}\right) \nabla v \rightarrow b\left(x, u, \frac{u - u_0}{h}\right) \nabla v \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^d. \quad (1.23)$$

D'autre part, en écrivant,

$$\begin{aligned} \left| f_n\left(x, \frac{u_n - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) \right| \leq \\ \left| f_n\left(x, \frac{u_n - u_0}{h}\right) - f_n\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) \right| + \left| f_n\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) - f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) \right|, \end{aligned}$$

on obtient donc

$$f_n\left(x, \frac{u_n - u_0}{h}\right) \rightarrow f\left(x, \frac{u - u_0}{h} + E\right) \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

De plus, l'opérateur de Nemytskii conserve $L^2(\Omega)$, ainsi, il existe $a_1 \in L^2(\Omega)$ et $a_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left| f_n\left(x, \frac{u_n - u_0}{h}\right) \right| \leq \left| f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) \right| \leq a_1(x) + a_2 \left| \frac{u - u_0}{h} \right| \leq a_1(x) + a_2 \frac{|\bar{u}| + |u_0|}{h} \in L^2(\Omega),$$

$$\text{ainsi,} \quad f_n\left(x, \frac{u_n - u_0}{h}\right) \rightarrow f\left(x, \frac{u - u_0}{h}\right) \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (1.24)$$

Il résulte de la convergence faible de u_n dans $H_0^1(\Omega)$ que

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^d, \quad (1.25)$$

$$\nabla \frac{u_n - u_0}{h} \rightharpoonup \nabla \frac{u - u_0}{h} \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^d. \quad (1.26)$$

Le passage à la limite dans (1.20) pour cette sous-suite en utilisant (1.22), (1.23), (1.24), (1.25) et (1.26) nous permet de justifier que u est une solution de (1.19).

Remarquons aussi que l'unicité de la valeur d'adhérence faible assure que toute la suite (u_n) converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers u . $\square$

Grâce à ce résultat, on obtient par induction un schéma semi-discrétisé implicite en temps. Cette semi-discrétisation sera ultérieurement utilisée pour justifier l'existence d'une solution du problème continu.

Proposition 1.3. *En supposant (H) et en notant $f_n(t, x, u) = \int_Q f(s, y, u) \rho_n(t - s, x - y) dx dt$, il existe une unique suite (u^k) dans $H_0^1(\Omega)$ avec $u^0 = u_0$ et telle que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_n \left((k+1)h, x, \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right) v dx + \int_{\Omega} a \left(x, u^{k+1}, \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right) \nabla u^{k+1} \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b \left(x, u^{k+1}, \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right) \nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \nabla v dx = \langle g^{k+1}, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

où l'on note $g^{k+1}(x) = \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} g(t, x) dt$.

4 Existence d'une solution au problème continu

Dans cette section, on se propose de passer à la limite sur le pas de temps dans l'équation semi-discrétisée implicite. L'extraction de sous-suite découle d'estimations *a priori* dans un espace de Banach réflexif souhaité. On se propose alors de généraliser ce qui a été fait dans [4–6, 8, 9, 52, 89–92].

Proposition 1.4. *Dans le cadre des hypothèses (H), il existe u dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} f(t, x, \partial_t u) v dx + \int_{\Omega} a(x, u, \partial_t u) \nabla u \nabla v dx + b(x, u, \partial_t u) \nabla \partial_t u \nabla v dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (1.28)$$

avec $u(0, \cdot) = u_0$.

4.1 Cas d'une fonction f continue

Supposons dans ce premier cas que f est continue sur $\overline{Q} \times \mathbb{R}$ et que la fonction a_1 introduite dans la propriété 1.4 soit une constante. L'idée étant d'obtenir le résultat général par régularisation à l'aide de la propriété 1.5 et la remarque qui suit cette propriété.

À l'aide de la suite (u^k) , on construit u^h , fonction en escalier en temps, et $\tilde{u}^h$, fonction continue affine par morceau, suivant le principe :
pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{T}{N}$ le pas de discrétisation uniforme et $t_k = kh$ pour $k = 0, 1, \dots, N$.
On note alors

$$\begin{aligned} u^h &= \sum_{k=0}^{N-1} u^{k+1} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[} \\ \tilde{u}^h &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{u^{k+1} - u^k}{h} (t - t_k) + u^k \right] \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[}. \end{aligned}$$

De même, on note

$$f^h(t, x, u) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_{k+1}, x, u) \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[}, \quad g^h = \sum_{k=0}^{N-1} g^{k+1} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[},$$

de sorte que par construction, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$

$$f^h \rightarrow f \text{ et } g^h \rightarrow g \text{ resp. uniformément dans } \overline{Q} \times K \text{ et dans } L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)), \quad (1.29)$$

et, pour presque tout t ,

$$f^h(t, \cdot, \cdot) \rightarrow f(t, \cdot, \cdot) \text{ et } g^h(t) \rightarrow g(t) \text{ resp. dans } C(\overline{\Omega} \times K) \text{ et } H^{-1}(\Omega). \quad (1.30)$$

Ainsi, on est en mesure de dire que

Lemme 1.2. *Si $h < \min[\frac{\beta^2}{8M^2T}, \frac{\beta}{M+1}]$.*

1. *La suite (u^h) demeure dans un borné de $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $(\tilde{u}^h)$ est bornée dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.*
2. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout t de $[0, T[$, $\|\tilde{u}^h(t) - u^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{h}$.*
3. *Pour presque tout t , il existe $C(t) > 0$ tel que $\|\partial_t \tilde{u}^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(t)$.*

Preuve. On choisit la fonction test $v = \frac{u^{k+1} - u^k}{h}$ dans (1.27) et on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f\left(t_{k+1}, x, \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\right) \frac{u^{k+1} - u^k}{h} dx + \int_{\Omega} a\left(x, u^{k+1}, \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\right) \nabla u^{k+1} \nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h} dx \\ & + \int_{\Omega} b\left(x, u^{k+1}, \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\right) \left| \nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right|^2 dx = \left\langle g^{k+1}, \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire par minoration,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega} \left[f\left(t_{k+1}, x, \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\right) - f(t_{k+1}, x, 0) \right] \frac{u^{k+1} - u^k}{h} dx}_{\geq 0} + \beta \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right|^2 dx \\ & + \int_{\Omega} f(t_{k+1}, x, 0) \frac{u^{k+1} - u^k}{h} dx \leq \left\langle g^{k+1}, \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ & - \int_{\Omega} a\left(x, u^{k+1}, \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\right) \nabla u^{k+1} \nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h} dx, \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} \beta \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 & \leq \left[\sqrt{1 + C_P^2} \|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)} + C_P \|f(t_{k+1}, x, 0)\|_{L^2(\Omega)} \right] \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \\ & + M \|u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\beta \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M \|u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)} + \sqrt{1 + C_P^2} \|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)} + C_P a_1 \sqrt{|\Omega|}.$$

En écrivant $\nabla u^{k+1} = \nabla u_0 + \sum_{p=0}^k \left(h \nabla \frac{u^{p+1} - u^p}{h} \right)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \beta \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq M h \sum_{p=0}^k \left\| \frac{u^{p+1} - u^p}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} + M \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \sqrt{1 + C_P^2} \|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)} + C_P a_1 \sqrt{|\Omega|}, \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} \beta^2 \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq 4M^2 h^2 \left(\sum_{p=0}^k \left\| \frac{u^{p+1} - u^p}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^2 + 4M^2 \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + 4(1 + C_P^2) \left(\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + a_1^2 |\Omega| \right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, il vient

$$\begin{aligned} \beta^2 \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq 4M^2 (k+1) h \sum_{p=0}^k \left\| \frac{u^{p+1} - u^p}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 4M^2 \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + 4(1 + C_P^2) \left(\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + a_1^2 |\Omega| \right), \end{aligned}$$

puis comme $k \leq N - 1$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{h} \left\| u^{k+1} - u^k \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq 4M^2 T h \sum_{p=0}^k \frac{1}{h} \|u^{p+1} - u^p\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 4M^2 h \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + 4(1 + C_P^2) h \left(\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + a_1^2 |\Omega| \right). \end{aligned}$$

Ou encore, si $h < \frac{\beta^2}{8M^2 T}$,

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{h} \left\| u^{k+1} - u^k \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq 8M^2 T h \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{h} \|u^{p+1} - u^p\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 8M^2 h \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + 8(1 + C_P^2) h \left(\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + a_1^2 |\Omega| \right). \quad (1.31) \end{aligned}$$

La sommation sur k nous conduit à

$$\begin{aligned} \beta^2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{h} \|u^{k+1} - u^k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq 8M^2Th \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{h} \|u^{p+1} - u^p\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 8 \sum_{k=0}^{N-1} M^2h \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + 8(1 + C_P^2) \sum_{k=0}^{N-1} h \left(\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + a_1^2 |\Omega| \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{h} \|u^{k+1} - u^k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{8M^2Th}{\beta^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{h} \|u^{p+1} - u^p\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{8M^2T \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{\beta^2} \\ &\quad + \frac{8(1 + C_P^2)}{\beta^2} \left(\|g^h\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))}^2 + a_1^2 |Q| \right). \end{aligned}$$

Or la suite (g^h) est bornée dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ car elle converge vers g dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$.

Ainsi, il existe $\tilde{C} \geq 0$ telle que

$$\frac{8M^2T \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{\beta^2} + \frac{8(1 + C_P^2)}{\beta^2} \left(\|g^h\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))}^2 + a_1^2 |Q| \right) \leq \tilde{C}.$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{h} \|u^{k+1} - u^k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{8M^2Th}{\beta^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{h} \|u^{p+1} - u^p\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \tilde{C}.$$

Ainsi, d'après le lemme de Gronwall discret (cf. D. Bainov [10] p. 165), il vient

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{h} \|u^{k+1} - u^k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \tilde{C} \exp \left(\frac{8M^2T^2}{\beta^2} \right).$$

Il en résulte que $\|\partial_t \tilde{u}^h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \leq C_1$, avec $C_1 = \tilde{C} \exp \left(\frac{8M^2T^2}{\beta^2} \right)$.

Par ailleurs,

$$\|u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2h^2 \left(\sum_{p=0}^k \left\| \frac{u^{p+1} - u^p}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^2 + 2 \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

puis, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète,

$$\|u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2(k+1)h \sum_{p=0}^k \frac{1}{h} \|u^{p+1} - u^p\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2 \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

On obtient donc

$$\|u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2TC_1 + 2 \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Puisque $k < N$, on en déduit que

$$\|u^h\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C_2,$$

avec $C_2 = \sqrt{2TC_1 + 2\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2}$.

Par définition,

$$\|\tilde{u}^h\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} = \sup_{t \in [0,T]} \|\tilde{u}^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)} = \sup_k \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} |t - t_k|.$$

Or, pour

$$t \in [t_k, t_{k+1}[, \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)} |t - t_k| \leq \frac{1}{h} \left(\|u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u^k\|_{H_0^1(\Omega)} \right) h \leq 2C_2.$$

D'où, $\|\tilde{u}^h\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C_3$, avec $C_3 = 2C_2$.

De plus, pour tout t de $[0, T[$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $t \in [t_k, t_{k+1}[$.

On a donc pour tout $t \in [t_k, t_{k+1}[$,

$$\|\tilde{u}^h(t) - u^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} (t - t_{k+1}) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 (t - t_{k+1})^2.$$

Puisque, pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $-h \leq t - t_{k+1} \leq 0$, on a alors

$$\|\tilde{u}^h(t) - u^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq h^2 \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Or

$$\sum_{k=0}^{N-1} h \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\partial_t \tilde{u}^h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \leq C_1$$

et on a donc

$$h \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_1.$$

D'où $\|\tilde{u}^h(t) - u^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{h} C_1$.

Retournons maintenant sur l'estimation (1.31), qui devient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{8M^2 TC_1}{\beta^2} + \frac{8M^2}{\beta^2} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{8(1 + C_P^2)}{\beta^2} \left(\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + a_1^2 |\Omega| \right), \end{aligned}$$

i.e., pour tout $t \in]t_k, t_{k+1}[$,

$$\left\| \partial_t \tilde{u}^h(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_4 \left[1 + \left\| g^h(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right].$$

La fin du lemme découle du fait que pour presque tout t dans $]0, T[$, $g^h(t)$ converge vers $g(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. $\square$

Preuve. [de la proposition 1.4]

i) Existence d'une solution :

Le résultat de la proposition 1.3 permet d'écrire, pour presque tout t et pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^h(t, x, \partial_t \tilde{u}^h) v dx + \int_{\Omega} a(x, u^h, \partial_t \tilde{u}^h) \nabla u^h \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b(x, u^h, \partial_t \tilde{u}^h) \nabla \partial_t \tilde{u}^h \nabla v dx = \left\langle g^h, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

D'après le lemme 1.2, la suite $(\tilde{u}^h)$ est bornée dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$; il existe donc un élément u de $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ et une suite extraite de $(\tilde{u}^h)$ notée de même, tels que

$$\tilde{u}^h \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H^1(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (1.33)$$

On a donc,

$$\begin{aligned} \tilde{u}^h &\rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \partial_t \tilde{u}^h &\rightharpoonup \partial_t u \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Puisque pour tout t fixé dans $[0, T]$, l'application $\mathcal{T} : H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $u \mapsto u(t)$ est linéaire et continue, alors $\mathcal{T}$ est faiblement séquentiellement continue. On a donc pour $t \in [0, T]$,

$$\tilde{u}^h(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

De même, d'après le lemme 1.2, on a pour $t \in [0, T]$,

$$u^h(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Rappelons que d'après le lemme 1.2-iii), il existe un sous ensemble Z mesurable de $]0, T[$ avec $\mathcal{L}(]0, T[\setminus Z) = 0$ tel que pour tout t de Z , il existe $C = C(t)$, $\|\partial_t \tilde{u}^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$. Il existe alors $\xi(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$, $w \in L^2(\Omega)$ et une suite extraite $(\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t))$ tel que

$$\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \rightharpoonup \xi(t) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

$$\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \rightarrow \xi(t) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega), \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } |\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t)| \leq w.$$

Pour une sous-suite encore notée de même, $u^{h_t}(t) \rightarrow u(t)$ dans $L^2(\Omega)$ et p.p. dans Ω .

Les fonctions a, b étant continues, on a donc pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$a \left(x, u^{h_t}(t), \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \right) \nabla v \rightarrow a(x, u(t), \xi(t)) \nabla v \quad p.p.,$$

$$b \left(x, u^{h_t}(t), \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \right) \nabla v \rightarrow b(x, u(t), \xi(t)) \nabla v \quad p.p..$$

a, b étant de plus bornées, on a pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\left| a \left(x, u^{h_t}(t), \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \right) \nabla v \right| \leq M |\nabla v| \quad p.p.,$$

$$\left| b \left(x, u^{h_t}(t), \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \right) \nabla v \right| \leq M |\nabla v| \quad p.p..$$

D'après le théorème de convergence dominée, on obtient

$$a \left(x, u^{h_t}(t), \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \right) \nabla v \rightarrow a(x, u(t), \xi(t)) \nabla v \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad (1.34)$$

$$b \left(x, u^{h_t}(t), \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \right) \nabla v \rightarrow b(x, u(t), \xi(t)) \nabla v \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (1.35)$$

Enfin, comme $f^{h_t}(t, x, \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t)) \rightarrow f(t, x, \xi(t))$ p.p. dans Ω avec $|f^{h_t}(t, x, \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t))| \leq a_1 + a_2 w$, il vient que

$$f^{h_t}(t, x, \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t)) \rightarrow f(t, x, \xi(t)) \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (1.36)$$

On est alors en mesure de passer à la limite sur $N \rightarrow +\infty$ dans (1.32), pour une sous-suite dépendant de t , en utilisant (1.34), (1.35), (1.36) et on obtient, pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(t, x, \xi(t)) v dx + \int_{\Omega} a(x, u(t), \xi(t)) \nabla u(t) \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b(x, u(t), \xi(t)) \nabla \xi(t) \nabla v dx = \langle g(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Montrons que $\xi(t)$ est unique.

Pour cela on suppose que $\hat{\xi}(t)$ est une autre solution de (1.37). On obtient par soustraction,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[f(t, x, \xi(t)) - f(t, x, \hat{\xi}(t)) \right] v dx + \int_{\Omega} \left[a(x, u(t), \xi(t)) - a(x, u(t), \hat{\xi}(t)) \right] \nabla u(t) \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} b(x, u(t), \xi(t)) \nabla (\xi(t) - \hat{\xi}(t)) \nabla v dx + \int_{\Omega} \left[b(x, u(t), \xi(t)) - b(x, u(t), \hat{\xi}(t)) \right] \nabla \hat{\xi}(t) \nabla v dx = 0. \end{aligned}$$

On reprend la démonstration de la proposition 1.2 et on obtient $\xi(t) = \hat{\xi}(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Si l'on suppose que $\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t)$ ne converge pas faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers $\xi(t)$. Il existe une sous-suite $\partial_t \tilde{u}^{h'_t}(t)$ et $\chi \in H^{-1}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\left| \langle \chi, \partial_t \tilde{u}^{h'_t}(t) - \xi(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \geq \varepsilon \quad \forall h'_t.$$

Mais, à partir de cette sous-suite, la même preuve montre que cette sous suite possède une valeur d'adhérence pour la convergence faible dans $H_0^1(\Omega)$ qui sera solution du problème (1.37) dont $\xi(t)$ est la seule solution. C'est absurde et ainsi, pour presque partout t dans $]0, T[$, $\partial_t \tilde{u}^h(t) \rightharpoonup \xi(t)$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

On a alors pour tout $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, la fonction numérique $t \mapsto \langle \varphi, \xi(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$ est mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables $\left(t \mapsto \langle \varphi, \partial_t \tilde{u}^h(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right)$.

Puisque $H_0^1(\Omega)$ est séparable, d'après le théorème de B. J. Pettis (cf. [31], [83], [97]), la fonction $\xi :]0, T[\rightarrow H_0^1(\Omega)$ est donc mesurable.

Ainsi, pour tout v de $H_0^1(\Omega)$, pour presque tout t de $]0, T[$,

$$\int_{\Omega} \nabla \partial_t \tilde{u}^h(t) \cdot \nabla v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \xi(t) \cdot \nabla v \, dx \text{ et } \left| \int_{\Omega} \nabla \partial_t \tilde{u}^h(t) \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \left\| \partial_t \tilde{u}^h(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Comme le second membre de l'inégalité ci-dessus est borné dans $L^2(0, T)$, le lemme 1.3 p.12 de [72] assure, pour tout α de $L^2(0, T)$, la convergence de $\int_0^T \int_{\Omega} \alpha(t) \nabla \partial_t \tilde{u}^h(t) \cdot \nabla v \, dx dt$ vers $\int_0^T \int_{\Omega} \alpha(t) \nabla \xi(t) \cdot \nabla v \, dx dt$.

Puisque $(\partial_t \tilde{u}^h)$ est une suite bornée dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, un argument de densité conduit à la convergence faible dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ de $\partial_t \tilde{u}^h$ vers ξ .

Par unicité de la limite faible, on obtient donc $\partial_t u = \xi$ et il existe une solution. $\square$

Remarque 1.3. *La question de l'unicité de la solution semble délicate. La présence des termes u et $\partial_t u$ induit des phénomènes hystérétiques comme le montrent par exemple Wang Zejia et Yin Jinxue dans [96] ou S. N. Antontsev et al. dans [7].*

4.2 Cas général

On se propose maintenant d'établir le résultat énoncé dans la propriété 1.4.

Pour une fonction de Carathéodory f vérifiant les hypothèses (H), on note f_n la fonction de Carathéodory $f_n(t, x, u) = \int_Q f(s, y, u) \rho_n(t - s, x - y) ds dy$ où (ρ_n) désigne la suite régularisante usuelle.

Suite à la propriété 1.5 et la remarque 1.2, la section précédente nous assure l'existence d'une suite (u_n) de solutions correspondantes en remplaçant f par f_n , c'est-à-dire,

Lemme 1.3. *Pour tout n , il existe u_n dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel que pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} f_n(t, x, \partial_t u_n) v \, dx + \int_{\Omega} a(x, u_n, \partial_t u_n) \nabla u_n \nabla v + b(x, u_n, \partial_t u_n) \nabla \partial_t u_n \nabla v \, dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (1.38)$$

avec $u_n(0, \cdot) = u_0$.

De plus, on a les estimations suivantes :

1. La suite (u_n) demeure dans un borné de $H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

2. Pour presque tout t , il existe $C(t) > 0$ tel que $\|\partial_t u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(t)$.

Preuve. Testons l'équation ci-dessus avec $\partial_t u_n$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f_n(t, x, \partial_t u_n) - f_n(t, x, 0)] \partial_t u_n dx + \int_{\Omega} a(x, u_n, \partial_t u_n) \nabla u_n \nabla \partial_t u_n dx \\ + \int_{\Omega} b(x, u_n, \partial_t u_n) |\nabla \partial_t u_n|^2 dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f_n(t, x, 0) \partial_t u_n dx. \end{aligned}$$

Et donc

$$\int_{\Omega} \frac{\beta}{2} |\nabla \partial_t u_n|^2 dx - \frac{M^2}{2\beta} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq \langle g, \partial_t u_n \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f_n(t, x, 0) \partial_t u_n dx,$$

puis

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_n|^2 dx - \frac{2M^2}{\beta^2} \int_{\Omega} \left[t \int_0^t |\nabla \partial_t u_n|^2 ds + |\nabla u_0|^2 \right] dx \leq \frac{2\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\beta} \|\partial_t u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \\ + \frac{2\|f_n(t, x, 0)\|_{L^2(\Omega)}}{\beta} \|\partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi, à l'aide en particulier de la remarque 1.2,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_n|^2 dx &\leq \frac{4M^2}{\beta^2} \int_{\Omega} \left[t \int_0^t |\nabla \partial_t u_n|^2 ds + |\nabla u_0|^2 \right] dx + \frac{4\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2}{\beta} + \frac{4\|f_n(t, x, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\beta} \\ &\leq \frac{4M^2 T}{\beta^2} \int_{\Omega} \int_0^t |\nabla \partial_t u_n|^2 dx ds + \frac{4M^2}{\beta^2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2}{\beta} + \frac{4\|a_1\|_{L^2(\Omega)}^2}{\beta}. \end{aligned}$$

D'où il vient,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\nabla \partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq \frac{4M^2 T}{\beta^2} \int_0^t \int_0^s \|\nabla \partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau ds + \frac{4TM^2}{\beta^2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{4\|g\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))}^2}{\beta} + \frac{4\|a_1\|_{L^2(Q)}^2}{\beta}, \end{aligned}$$

et, d'après le lemme de Gronwall, pour presque tout t ,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\nabla \partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq C_1 = \left[\frac{4TM^2}{\beta^2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4\|g\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))}^2}{\beta} + \frac{4\|a_1\|_{L^2(Q)}^2}{\beta} \right] e^{\frac{4M^2 T^2}{\beta^2}}, \\ \|\nabla \partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{4M^2 T}{\beta^2} C_1 + \frac{4M^2}{\beta^2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4\|g(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2}{\beta} + \frac{4\|a_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\beta}. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'écrire $u_n(t) = u_0 + \int_0^t \partial_t u_n(s) ds$ pour conclure. $\square$

Preuve. [de la proposition 1.4] Il est alors possible de reprendre le déroulement de la démonstration de la proposition 1.4 telle qu'elle est proposée dans la section précédente. Seule la justification de l'assertion (1.36) diffère, mais cette dernière est décrite dans le lemme 1.1. $\square$

4.3 Sur un relèvement mesurable

Pour terminer cette section, considérons une suite $(u_n) \subset L^2(0, T; H)$ et présentons une réflexion sur la possibilité de construire une fonction mesurable u de $]0, T[$ à valeurs vectorielles dans H lorsque, pour presque tout t , $u(t)$ est créé à partir d'une sous-suite de $(u_n(t))$ qui converge faiblement. L'idée étant de généraliser le résultat de mesurabilité de $\limsup u_n$ ou $\liminf u_n$ du cas scalaire. L'idée de cette démonstration nous a été proposée par L. Thibault [70].

Proposition 1.5. *Soient H un espace de Hilbert séparable et $(u_n)_n$ une suite de $L^2(0, T; H)$ telle qu'il existe une fonction g dans $L^2(0, T)$ avec, t p.p. dans $]0, T[$, $\|u_n\|_H \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une fonction mesurable u de $]0, T[$ à valeurs dans H , telle que pour presque tout t de $]0, T[$, il existe une sous-suite $u_{n_k(t)}$ qui converge faiblement vers $u(t)$. En d'autres termes, il existe une sélection mesurable de la multi-application*

$$U : t \mapsto U(t) = \{v \in H, \exists (n_k), u_{n_k}(t) \rightharpoonup v \text{ in } H\}.$$

Pour la justification de ce résultat, rappelons le résultat Th. III-30, P.80 de C. Castaing et M. Valadier [28]

Théorème 1.3 (Th. III-30, P.80 de C. Castaing et M. Valadier [28]). *Soient $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive σ -finie sur une tribu complète $\mathcal{T}$, X un espace métrique séparable, complet et Γ une multi-application à images non vides et fermées.*

Alors, on a l'équivalence des assertions suivantes :

1. $\Gamma^-(U) = \{t \in T, \Gamma(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$ pour tout ouvert U de X .
2. $d(x, \Gamma(\cdot))$ est mesurable pour tout x de X .
3. Il existe une famille dénombrable (σ_k) de sélections mesurables de Γ telle que $\Gamma(t) = \overline{\{\sigma_k(t)\}}$.
4. Le graphe de $\Gamma = \{(t, x) \in T \times X, x \in \Gamma(t)\}$ est $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X)$ -mesurable.
5. $\Gamma^-(B) \in \mathcal{T}$ pour tout borélien B de X .
6. $\Gamma^-(F) \in \mathcal{T}$ pour tout fermé F de X .

Toutefois, si on ne suppose pas X complet, on a encore :

1. si $\Gamma(t)$ est complet, alors
 - (a) les assertions 1., 2. et 3. sont équivalentes (Th. III.9 p.67 de C. Castaing et M. Valadier [28]).
 - (b) 1., 2. ou 3. implique 4 (Th. III.13 p.69 de C. Castaing et M. Valadier [28]).
2. si X est souslinien³, alors 4. implique 3 (Th. III.22 p.74 de C. Castaing et M. Valadier [28]).

3. C'est-à-dire, si c'est un espace séparé (de Hausdorff), image par une application continue, d'un espace métrique complet séparable (espace polonais).

Considérons dans la suite $(a_m)_m$ une suite dense dans H pour sa norme hilbertienne et notons d_w la distance, définie pour tout x et y de H , par

$$d_w(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \frac{| \langle a_m, x - y \rangle |}{1 + | \langle a_m, x - y \rangle |}.$$

d_w est une distance sur H qui lui confère une structure d'espace métrique séparable. Toutefois, notons à l'aide d'un contre-exemple, que (H, d_w) n'est pas complet en général.

À cette fin, considérons pour $\{a_n\}$ une base hilbertienne de H et posons $x_n = \sum_{k=0}^n k a_k$.

Ainsi, pour tout n et p ,

$$d_w(x_{n+p}, x_n) = \sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^m} \frac{m}{1+m} \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^n}$$

et la suite (x_n) est de Cauchy dans (H, d_w) .

Supposons, par l'absurde, que cette suite converge dans (H, d_w) vers un élément x avec $x = \sum_{k \geq 0} \alpha_k a_k$. Alors,

$$d_w(x_n, x) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{2^m} \frac{|\alpha_m - m|}{1 + |\alpha_m - m|} + \sum_{m > n} \frac{1}{2^m} \frac{|\alpha_m|}{1 + |\alpha_m|}.$$

Comme cette dernière quantité converge vers 0 avec n , il vient que $x = \sum_k k a_k$, ne peut pas être un élément de H . D'où le résultat.

Toutefois, la distance d_w assure la métrisabilité des bornés pour la topologie faible (A. N. Kolmogorov *et al.* [67] P.195 Th. 4) et sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{d_w}(H)$ est identique à la tribu borélienne faible $\mathcal{B}_w(H)$ et à la tribu borélienne (forte) $\mathcal{B}(H)$.

Précisons ceci dans quelques lemmes

Lemme 1.4. *Soit Y un espace de Banach séparable. Alors, la tribu borélienne $\mathcal{B}(Y)$ est la même que la tribu $\mathcal{B}_w(Y)$ engendrée par les ouverts faibles.*

De plus, $\mathcal{B}(Y)$ est aussi engendrée par les boules fermées de Y .

Démonstration. Notons qu'en premier lieu que comme un ouvert faible est un ouvert fort, on a $\mathcal{B}_w(Y) \subset \mathcal{B}(Y)$.

Ensuite, en remarquant que toute boule fermée $\bar{B}(a, r)$ de Y est $\sigma(Y, Y^*)$ -fermée (puisque aussi convexe), il vient que $\bar{B}(a, r) \in \mathcal{B}_w(Y)$.

Mais, comme toute boule ouverte est une réunion dénombrable de boules fermées, il s'ensuit que $\mathcal{B}_w(Y)$ contient les boules ouvertes de Y .

Enfin, la séparabilité de Y assurant que tout ouvert est réunion dénombrable de boules ouvertes, tout ouvert de Y est dans $\mathcal{B}_w(Y)$ et $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}_w(Y)$.

Remarquons que cela prouve aussi que $\mathcal{B}(Y)$ est engendrée par les boules fermées. $\square$

Lemme 1.5. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Alors, la tribu $\mathcal{B}_{d_w}(H)$ engendrée par les ouverts de (H, d_w) est la même que la tribu $\mathcal{B}_w(H)$ engendrée par les ouverts faibles.*

Démonstration. Remarquons que tout ouvert de (H, d_w) est un ouvert faible. En effet, si A est un tel ensemble non vide, il existe a dans A et $r > 0$ avec $B_{d_w}(a, r) \subset A$.

Considérons un réel ϵ tel que $0 < \epsilon < \min(1/2, r/2)$, un entier k tel que $\sum_{m \geq k} 2^{-m} < \epsilon$ et

$$V = \{x \in H, \mid \langle e_i, x - a \rangle \mid < \frac{\epsilon}{2 - \epsilon}, i = 0, \dots, k - 1\}.$$

Ainsi, pour tout x de V , on a

$$\begin{aligned} d_w(x, a) &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{2^m} \frac{\mid \langle e_m, x - a \rangle \mid}{1 + \mid \langle e_m, x - a \rangle \mid} + \sum_{m \geq k} \frac{1}{2^m} \frac{\mid \langle e_m, x - a \rangle \mid}{1 + \mid \langle e_m, x - a \rangle \mid} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{2^m} + \sum_{m \geq k} \frac{1}{2^m} < r, \end{aligned}$$

et le résultat en découle puisque la famille des ensembles de la forme de V est une base de voisinages pour la topologie faible.

Ainsi, $\mathcal{B}_{d_w}(H) \subset \mathcal{B}_w(H)$.

Réciproquement, comme la tribu $\mathcal{B}_w(H)$ est engendrée par les boules fermées (pour la topologie forte), et puisque ces dernières sont aussi fermées pour la distance d_w (en effet, cette distance engendre la même topologie que la topologie faible sur les bornés et ces boules sont faiblement fermées), il vient immédiatement que $\mathcal{B}_w(H) \subset \mathcal{B}_{d_w}(H)$.

On a donc égalité des tribus. $\square$

Remarque 1.4. Notons que sur H , $\mathcal{T}_{d_w}$ la topologie générée par la distance d_w , est moins fine que la topologie faible $\sigma(H, H')$, qui est, à son tour, moins fine que la topologie (forte) $\mathcal{T}$. Ainsi, l'identité est continue de $(H, \mathcal{T})$ dans $(H, \sigma(H, H'))$, puis de $(H, \sigma(H, H'))$ dans $(H, \mathcal{T}_{d_w})$. De sorte que $(H, \sigma(H, H'))$ et $(H, \mathcal{T}_{d_w})$ sont sousliniens.

Remarque 1.5. Un résultat similaire existe avec un espace de Banach réflexif séparable. Il suffit de considérer que la famille $\{e_n\}$ est une famille dénombrable dense dans H' .

Démonstration. [de la proposition 1.5]

Pour presque tout t , notons

$$U(t) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n(t), \quad \text{où} \quad U_n(t) = cl_{weak}\{u_k(t), k \geq n\}^4.$$

Par hypothèse, remarquons que pour presque tout t , $U(t)$ est un compact faible non vide puisque c'est l'intersection d'une famille décroissante de compacts non vides pour la topologie faible.

Notons que pour tout ouvert faible V , donc en particulier tout ouvert de (H, d_w) ,

$$U_n^-(V) := \{t \in]0, T[, U_n(t) \cap V \neq \emptyset\} = \bigcup_{k \geq n} u_k^{-1}(V) \text{ est mesurable.}$$

4. la fermeture faible

De plus, comme $U_n(t)$ est faiblement compact dans H , il est en particulier borné dans H . En effet, pour tout φ du dual H' de H , $\varphi(U_n(t))$ est donc un compact de $\mathbb{R}$ et à ce titre, il est borné. Ainsi, le théorème de Banach-Steinhaus permet de conclure. Comme la topologie faible coïncide, sur les bornés, avec celle engendrée par d_w , $U_n(t)$ est donc non vide et compact, puis complet pour (H, d_w) . Ainsi, d'après le théorème rappelé ci-dessus, le graphe de U_n est dans $\mathcal{B}(]0, T[) \otimes \mathcal{B}(H)$. Tout comme le graphe de U puisqu'il est l'intersection sur n des graphes des U_n . Ainsi, le même théorème assure l'existence d'une sélection mesurable dans U de $]0, T[$ à valeurs dans $(H, \mathcal{B}_{d_w}(H))$, donc $(H, \mathcal{B}(H))$ puisque (H, d_w) est souslinien. D'où le résultat. $\square$

5 Applications

On se propose dans cette section, de détailler des applications ou d'envisager le cas de données plus générales. Nous commençons par envisager l'équation de Barenblatt, thématique qui sera reprise plus en détail dans le chapitre suivant.

On s'intéresse ensuite au cas d'une éventuelle dégénérescence de l'opérateur pseudo-parabolique, *i.e* lorsque b s'annule. On retrouve alors des hypothèses classiques dans l'étude des problèmes paraboliques dégénérés.

Les deux dernières applications généralisent notre étude au cadre de graphes maximaux monotones de $\mathbb{R}^2$.

5.1 Application à l'équation de Barenblatt

L'équation de Barenblatt sous sa forme simplifiée s'écrit $f(\partial_t u) - \Delta u = g$, où $f(r) = r$ si $r > 0$ et $f(r) = \alpha r$ ($\alpha > 0$) si $r \leq 0$; pour la donnée initiale u_0 .

On se propose d'étudier dans cette section le problème de Cauchy suivant dans $H_0^1(\Omega)$:

$$f(t, x, \partial_t u) - \Delta u = g.$$

g est dans $L^2(Q)$, u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ et on suppose que f est une fonction vérifiant les hypothèses (H_2) , de sorte que l'opérateur de Nemystkii $\tilde{f}$ associé est monotone dans $L^2(Q)$, telle qu'il existe $\alpha > 0$ avec $\alpha|u|^2 \leq f(t, x, u)u$ pour tout u réel et presque tout $(t, x) \in Q$.

Ainsi, suivant J.-L. Lions [72] Th. 2.1 p. 171, comme $A = I + \tilde{f}$ est monotone, borné, continu de $L^2(Q)$ dans lui-même, avec $\lim_{\|u\|_{L^2(Q)} \rightarrow \infty} \frac{\int_Q A(u)u dx dt}{\|u\|_{L^2(Q)}} = +\infty$, il s'ensuit que A est surjectif sur $L^2(Q)$ et $\tilde{f}$ est maximal monotone sur $L^2(Q)$.

Montrons que la perturbation singulière pseudo-parabolique converge bien vers une solution du problème de Barenblatt. Considérons pour cela la solution u_ϵ de l'équation pseudo-parabolique (1.1) en posant $a(x, u, \partial_t u) = 1$ et $b(x, u, \partial_t u) = \epsilon$ et g dans $L^2(Q)$.

Suivant la définition 1.1, l'utilisation de la fonction-test $v = \partial_t u_\epsilon$ conduit à l'estimation :

$$\int_{\Omega} f(t, x, \partial_t u_\epsilon) \partial_t u_\epsilon dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_\epsilon|^2 dx = \int_{\Omega} g \partial_t u_\epsilon dx.$$

Ainsi, la suite (u_ϵ) est bornée dans $H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et la suite $(\tilde{f}(\partial_t u_\epsilon))$ est bornée dans $L^2(Q)$. Par suite, pour tout t ,

$$\alpha \int_{]0, t[\times \Omega} |\partial_t u_\epsilon|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon(t)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{]0, t[\times \Omega} g \partial_t u_\epsilon dx dt.$$

Soient u une limite faible dans $H^1(Q)$ et faible-* dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, pour une sous-suite de (u_ϵ) et χ une limite faible dans $L^2(Q)$, pour la même sous-suite, de $f(., ., \partial_t u_\epsilon)$.

D'une part, le passage à la limite nous conduit à :

$$\chi - \Delta u = g$$

ou encore, en introduisant par un artifice l'équation de diffusion de la chaleur,

$$\partial_t u - \Delta u = g + \partial_t u - \chi.$$

Le second membre étant dans $L^2(Q)$ et la donnée initiale dans $H_0^1(\Omega)$, il en résulte que

$$\int_Q \chi \partial_t u dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(T)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_Q g \partial_t u dx dt.$$

D'autre part,

$$\int_Q f(t, x, \partial_t u_\epsilon) \partial_t u_\epsilon dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon(T)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_Q g \partial_t u_\epsilon dx dt ;$$

et comme $u_\epsilon(T)$ converge vers $u(T)$ dans $L^2(\Omega)$ avec $(u_\epsilon(T))$ borné dans $H_0^1(\Omega)$, la convergence est aussi faible dans $H_0^1(\Omega)$. Ainsi, en passant à la limite supérieure, il vient :

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_Q f(t, x, \partial_t u_\epsilon) \partial_t u_\epsilon dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(T)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_Q g \partial_t u dx dt$$

ou encore,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_Q f(t, x, \partial_t u_\epsilon) \partial_t u_\epsilon dx dt \leq \int_Q \chi \partial_t u dx dt.$$

Alors, d'après H. Brézis [26] Prop. 2.5 p. 27 ou encore R. E. Showalter [83] Prop 1.6 p. 159, $\chi = f(t, x, \partial_t u)$ et il existe une solution.

5.2 Vers un problème pseudo-parabolique dégénéré

On considère toujours les hypothèses regroupées dans (H) ; on ne suppose plus $\beta > 0$ mais $\beta \geq 0$. Par contre, on demande l'existence de deux constantes strictement positives C_1, C_2 et d'une fonction mesurable c telles que

$$\forall (x, u, v) \in \mathbb{R}^{d+2}, \quad C_1 |a(x, u, v)| \leq c(v) \leq C_2 b(x, u, v),$$

on suppose $u \mapsto f(t, x, u)$ strictement croissante et

$$\begin{aligned} \forall (x, u, v) \in \mathbb{R}^{d+2}, \quad b(x, u, v) &= \alpha(x, u)\beta(v) \quad \text{en particulier } \alpha(x, u) \geq \epsilon_0 > 0, \\ |a[x, u, B^{-1}(v_1)] - a[x, u, B^{-1}(v_2)]| &\leq \theta(|v_1 - v_2|), \\ \text{où} \quad B(v) &= \int_0^v \beta(s)ds \text{ et } \int_{0+}^1 \frac{ds}{\theta^2(s)} = +\infty, \end{aligned}$$

pour un module de continuité θ , croissant et nul en 0 (on parle de propriété d'Osgood, cf. G. Gagneux *et. al* [52]). Enfin, on impose que $g = f(t, x, 0)$.

Remarque 1.6. On retrouve dans cette étude le cas dégénéré proposé par S. N. Antontsev *et al.* dans [9] pour la modélisation de l'évolution d'un bassin sédimentaire en géologie stratigraphique. Dans ce cas, $a(x, u, v) = b(x, u, v) = c(v - E)$ avec $c = 0$ sur $\mathbb{R}^-$, $f(t, x, u) = u$ et le problème doit dégénérer avec c pour contenir implicitement dans sa formulation la contrainte $\partial_t u \geq E$.

Notre but est de montrer l'existence d'une solution au problème de Cauchy (1.1)-(1.2) au sens de la définition 1.1 avec ces conditions.

Pour cela, considérons la suite (u_ϵ) obtenue pour le même problème avec $b_\epsilon = b + \epsilon$. Une telle suite existe puisque alors $b_\epsilon \geq \epsilon > 0$.

Soit $v = \int_0^{\partial_t u_\epsilon} \frac{ds}{c(s) + C_2\epsilon}$. C'est une fonction-test admissible pour la formulation variationnelle (1.3) qui nous conduit à remarquer que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f(t, x, \partial_t u_\epsilon) - f(t, x, 0)] \int_0^{\partial_t u_\epsilon} \frac{ds}{c(s) + C_2\epsilon} dx + \int_{\Omega} \frac{a(\cdot, u_\epsilon, \partial_t u_\epsilon)}{c(\partial_t u_\epsilon) + C_2\epsilon} \nabla u_\epsilon \nabla \partial_t u_\epsilon dx \\ + \int_{\Omega} \frac{b_\epsilon(\cdot, u_\epsilon, \partial_t u_\epsilon)}{c(\partial_t u_\epsilon) + C_2\epsilon} |\nabla \partial_t u_\epsilon|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$\underbrace{\int_{\Omega} [f(t, x, \partial_t u_\epsilon) - f(t, x, 0)] \int_0^{\partial_t u_\epsilon} \frac{ds}{c(s) + C_2\epsilon} dx}_{\geq 0} + \frac{1}{C_2} \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_\epsilon|^2 dx \leq \frac{1}{C_1} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon| |\nabla \partial_t u_\epsilon| dx.$$

Et donc, puisque f est croissante par rapport à son troisième argument,

$$\frac{C_1}{C_2} \|\nabla \partial_t u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{C_2}{C_1} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{C_2}{C_1} \left[\left\| \int_0^t \nabla \partial_t u_\epsilon ds \right\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^d} \right];$$

puis,

$$\|\nabla \partial_t u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{2C_2^2 T}{C_1^2} \int_0^t \|\nabla \partial_t u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds + \frac{2C_2^2}{C_1^2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Ainsi, la suite (u_ϵ) est bornée dans $W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$ et la démonstration de la section précédente conduisant à l'existence d'une solution est encore applicable, à condition de préciser l'unicité, dans ce cas dégénéré, de la solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème : pour tout v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f(t, x, \xi(t)) v dx + \int_{\Omega} a(x, u(t), \xi(t)) \nabla u(t) \nabla v dx + \int_{\Omega} \alpha(x, u(t)) \nabla B(\xi(t)) \nabla v dx = \int_{\Omega} g v dx.$$

Montrons que $\xi(t)$ est unique.

Pour cela on suppose que $\widehat{\xi}(t)$ est une autre solution et on obtient par soustraction,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[f(t, x, \xi(t)) - f(t, x, \widehat{\xi}(t)) \right] v dx + \int_{\Omega} \left[a(x, u(t), \xi(t)) - a(x, u(t), \widehat{\xi}(t)) \right] \nabla u(t) \nabla v dx \\ + \int_{\Omega} \alpha(x, u(t)) \nabla (B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))) \nabla v dx = 0. \end{aligned}$$

Posons, $v = p_{\mu}[B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))]$, où, pour tout $\mu > 0$, on note $\epsilon(\mu) > 0$ tel que $\int_{\epsilon(\mu)}^{\mu} \frac{dt}{\theta^2(t)} = 1$ et $p_{\mu}(r) = \int_{\max[\min(r, \mu), \epsilon(\mu)]}^{\mu} \frac{dt}{\theta^2(t)}$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[f(t, x, \xi(t)) - f(t, x, \widehat{\xi}(t)) \right] p_{\mu}[B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))] dx \\ + \int_{\Omega} p'_{\mu} (B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))) \alpha(x, u(t)) |\nabla (B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t)))|^2 dx \\ \leq \int_{\Omega} p'_{\mu} [B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))] \theta [B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))] |\nabla u(t)| |\nabla [B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))]| dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[f(t, x, \xi(t)) - f(t, x, \widehat{\xi}(t)) \right] p_{\mu}[B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))] dx \\ \leq C(\epsilon_0) \int_{\Omega} p'[B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))] \theta^2 [B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t))] |\nabla u(t)|^2 dx \\ \leq C(\epsilon_0) \int_{\{\epsilon(\mu) < B(\xi(t)) - B(\widehat{\xi}(t)) < \mu\}} |\nabla u(t)|^2 dx. \end{aligned}$$

En passant à la limite sur μ vers 0, on en déduit que $\xi(t) \leq \widehat{\xi}(t)$, puis de façon similaire que $\xi(t) \geq \widehat{\xi}(t)$. Ainsi la solution est unique et la méthode s'applique.

5.3 Le cas multivoque

On suppose dans ce paragraphe que f n'a qu'un seul argument u et qu'il est un graphe multivoque maximal monotone de $\mathbb{R}^2$ tel que $f[L^2(Q)] \subset L^2(Q)$ dans un sens à préciser. Ainsi, le domaine de f est $\mathbb{R}$ et il existe une application, définie sur $\mathbb{R}$, croissante (au sens large) $\bar{f}$ telle que $f = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [\bar{f}(x^-), \bar{f}(x^+)] \cap \mathbb{R}$.

On s'intéresse alors au problème suivant : rechercher u dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel que

$$g \in f(\partial_t u + E) - \text{Div} [a(x, u, \partial_t u) \nabla u + b(x, u, \partial_t u) \nabla \partial_t u] \quad \text{dans } Q, \quad (1.39)$$

au sens où il existe un relèvement dans $f(\partial_t u + E) \cap L^2(Q)$ que l'on propose de noter $f^{\#}(\partial_t u + E)$ par la suite, tel que

$$g = f^{\#}(\partial_t u + E) - \text{Div} [a(x, u, \partial_t u) \nabla u + b(x, u, \partial_t u) \nabla \partial_t u] \quad \text{dans } Q,$$

avec la condition de Cauchy

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On note f^0 la section principale de f définie pour tout x par $f^0(x) = \text{proj}_{f_x} 0$.

On suppose toujours les hypothèses (H), mais la première partie de H_2 devient : $\mathbf{H}'_2 : f^0[L^2(Q)] \subset L^2(Q)$. De plus, on considère l'une des deux hypothèses suivantes :

ou bien $\mathbf{H}_{2,1} : f$ est injective au sens où $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset \Rightarrow x = y$;

ou bien $\mathbf{H}_{2,2} : a$ et b sont lipschitziennes.

On suppose que E et g sont respectivement des fonctions de $L^2(Q)$ et de $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ et que u_0 est une fonction de $H_0^1(\Omega)$.

Considérons, suivant H. Brezis [26], pour tout $\lambda > 0$, la résolvante $J_\lambda = (Id + \lambda f)^{-1}$ et $f_\lambda = \frac{Id - J_\lambda}{\lambda}$ l'approximation Yosida de f . f_λ est une fonction lipschitzienne croissante, ainsi il existe bien une solution u_λ au problème pseudo-parabolique régularisé en remplaçant f par f_λ .

Rappelons quelques propriétés au sujet de cette approximation :

1. f_λ est le graphe maximal monotone d'une application $\frac{1}{\lambda}$ -lipschitzienne ;
2. Pour tout x dans le domaine de f (qui ici est $\mathbb{R}$), $f_\lambda(x)$ converge vers $f^0(x)$ lorsque λ tend vers 0^+ , avec la propriété supplémentaire : $(|f_\lambda(x)|)$ est une suite croissante.
3. Si x n'est pas dans le domaine de f , alors $(|f_\lambda(x)|)$ est une suite croissante qui tend vers l'infini lorsque λ tend vers 0^+ .

$(t, x, u) \mapsto f_\lambda(u - E(t, x))$ étant compatible avec les hypothèses (H), il existe une suite (u_λ) , solution du problème de Cauchy (1.1)-(1.2) au sens de la définition 1.1.

La fonction-test $v = \partial_t u_\lambda$ nous conduit, pour presque tout t , à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [f_\lambda(\partial_t u_\lambda + E) - f_\lambda(E)] \partial_t u_\lambda \, dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_\lambda|^2 \, dx \\ & \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\partial_t u_\lambda\|_{H^1(\Omega)} + \|f_\lambda(E)\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t u_\lambda\|_{L^2(\Omega)} + M \|\nabla u_\lambda\|_{(L^2(\Omega))^d} \|\nabla \partial_t u_\lambda\|_{(L^2(\Omega))^d} \\ & \leq \left[\sqrt{1 + C_p^2} (\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f^0(E)\|_{L^2(\Omega)}) + M \left\| \int_0^t \nabla \partial_t u_\lambda \, ds \right\|_{(L^2(\Omega))^d} + M \|\nabla u_0\|_{(L^2(\Omega))^d} \right] \times \\ & \quad \|\nabla \partial_t u_\lambda\|_{(L^2(\Omega))^d}, \end{aligned}$$

où on note C_p la constante de Poincaré.

Puis,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [f_\lambda(\partial_t u_\lambda + E) - f_\lambda(E)] \partial_t u_\lambda \, dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_\lambda|^2 \, dx \\ & \leq \frac{2}{\beta} \left[(1 + C_p^2) (\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|f^0(E)\|_{L^2(\Omega)}^2) + M^2 T \int_0^t \|\nabla \partial_t u_\lambda\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \, ds + M^2 \|\nabla u_0\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \right]. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Ainsi, la croissance de f_λ , les hypothèses sur g et f^0 , nous assurent de l'existence d'une constante positive C telle que, pour tout t ,

$$\int_0^t \|\nabla \partial_t u_\lambda\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \, ds \leq C + C \int_0^t \int_0^s \|\nabla \partial_t u_\lambda\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \, dr \, ds.$$

Ceci nous permet de conclure que la suite (u_λ) est bornée dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Pour pouvoir conclure, il nous faut généraliser au cas multivoque, la fin de la démonstration de la proposition 1.4; très exactement à partir de (1.36). On considère une sous-suite, indexée par λ_t telle que $\partial_t u_{\lambda_t}$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, fortement dans $L^2(\Omega)$ et p.p. dans Ω vers une fonction $\xi(t)$.

Commençons par montrer que la suite $(f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t)))$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.

Si ce n'est pas le cas, il est possible d'en extraire une sous-suite, notée de même pour simplifier, telle que la suite $(\|f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t))\|_{L^2(\Omega)})$ est croissante divergente.

Comme la suite $(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t))$ converge dans $L^2(\Omega)$, il existe une sous-suite $(\partial_t u_{\lambda'_t}(t) + E(t))$ et une fonction $\varphi \in L^2(\Omega)$ telle que $|\partial_t u_{\lambda'_t}(t) + E(t)| \leq \varphi$ p.p. dans Ω .

f^0 étant croissante,

$$|f_{\lambda'_t}(\partial_t u_{\lambda'_t}(t) + E(t))| \leq |f^0(\partial_t u_{\lambda'_t}(t) + E(t))| \leq |f^0(\varphi)| + |f^0(-\varphi)| \in L^2(\Omega).$$

Ceci étant en contradiction avec l'hypothèse de travail ci-dessus, la suite est bornée et il est alors possible d'extraire une sous-suite, notée de même, qui converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers un élément noté $\chi(t)$.

Ainsi, $[\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t), f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t))]$ étant dans le graphe de f_{λ_t} , nous avons par équivalence que $[\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t) - \lambda_t f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t)), f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t))]$ est dans le graphe de f .

Sachant que $\partial_t u_{\lambda_t}(t)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $\xi(t)$ et $f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t))$ converge faiblement vers $\chi(t)$ dans $L^2(\Omega)$, $\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t) - \lambda_t f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t))$ converge vers $\xi(t) + E(t)$ dans $L^2(\Omega)$ et ainsi $\int_\Omega (\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t) - \lambda_t f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t))) f_{\lambda_t}(\partial_t u_{\lambda_t}(t) + E(t)) dx$ converge vers $\int_\Omega (\xi(t) + E(t)) \chi(t) dx$. f étant maximal monotone, d'après H. Brézis [26] Prop. 2.5 p. 27, $\chi(t) \in f(\xi(t) + E(t))$.

À nouveau, la monotonie de f avec l'hypothèse H'_2 permet de conclure que $\xi(t)$ est unique et la fin de la démonstration reste inchangée. En effet, si on suppose que $\widehat{\xi}(t)$ est une autre solution envisageable, par soustraction on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left[f^\#(\xi(t) + E(t)) - f^\#(\widehat{\xi}(t) + E(t)) \right] v dx + \int_\Omega \left[a(x, u(t), \xi(t)) - a(x, u(t), \widehat{\xi}(t)) \right] \nabla u(t) \nabla v dx \\ & + \int_\Omega b(x, u(t), \xi(t)) \nabla (\xi(t) - \widehat{\xi}(t)) \nabla v dx + \int_\Omega \left[b(x, u(t), \xi(t)) - b(x, u(t), \widehat{\xi}(t)) \right] \nabla \widehat{\xi}(t) \nabla v dx = 0. \end{aligned}$$

On reprend la démonstration de la proposition 1.1 et on obtient

$$\int_\Omega \left[f^\#(\xi(t) + E(t)) - f^\#(\widehat{\xi}(t) + E(t)) \right] sgn_0^+(\xi(t) - \widehat{\xi}(t)) dx \leq 0.$$

La monotonie de f permet de conclure que $f^\#(\xi(t) + E(t)) = f^\#(\widehat{\xi}(t) + E(t))$ puis que $\xi(t) = \widehat{\xi}(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ d'après H_2 .

5.4 Pénalisation d'une contrainte portant sur $\partial_t u$

On suppose que f est un graphe multivoque maximal monotone de $\mathbb{R}^2$ du même type que ci-dessus qui, de plus, conserve les bornés de $L^2(Q)$, et on considère k_1 et k_2 tels que $-\infty \leq k_1 < k_2 \leq +\infty$ (avec l'un des deux fini pour ne pas retrouver le cas précédent).

On s'intéresse alors au problème suivant : rechercher u dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ correspondant à la pénalisation du problème

$$g \in f(\partial_t u + E) - \Delta u - \text{Div}[b(\partial_t u) \nabla \partial_t u] \quad \text{dans } Q, \quad (1.41)$$

sous la contrainte $k_1 \leq \partial_t u + E \leq k_2$.

Pour cela, on note $f_{[k_1, k_2]} = f + \partial I_{[k_1, k_2]}$ où $\partial I_{[k_1, k_2]}$ désigne le sous-différentiel de la fonction indicatrice de $[k_1, k_2]$: la fonction convexe semi-continue inférieure définie pour tout réel x par $I_{[k_1, k_2]}(x) = 0$ si x est dans $[k_1, k_2]$ et $+\infty$ sinon. En d'autres termes, $f_{[k_1, k_2]}$ est le graphe maximal monotone de domaine $[k_1, k_2]$, correspondant à f dans $]k_1, k_2[$ avec

$$f_{[k_1, k_2]}(k_1) = f(k_1) \cup]-\infty, f^0(k_1)] \text{ et } f_{[k_1, k_2]}(k_2) = f(k_2) \cup [f^0(k_2), +\infty[.$$

Notons $\psi = \partial I_{[k_1, k_2]}$ et ψ_λ son approximation Yosida.

On est ainsi en mesure de considérer la suite (u_λ) des solutions des problèmes :

$$g \in (f + \psi_\lambda)(\partial_t u_\lambda + E) - \Delta u_\lambda - \text{Div}[b(\partial_t u_\lambda) \nabla \partial_t u_\lambda] \quad \text{dans } Q,$$

avec la condition de Cauchy

$$u_\lambda(0, \cdot) = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et d'en étudier le comportement asymptotique (lorsque λ tend vers 0^+).

Pour un problème de compatibilité, on suppose de plus que E est dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ avec $k_1 \leq E \leq k_2$.

On montre alors à l'aide de la fonction-test $\partial_t u_\lambda$ l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\psi_\lambda(\partial_t u_\lambda + E) - \psi_\lambda(E)] \partial_t u_\lambda \, dx &+ \int_{\Omega} [f^\#(\partial_t u_\lambda + E) - f^0(E)] \partial_t u_\lambda \, dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_\lambda|^2 \, dx \\ &+ \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_\lambda|^2 \, dx \leq \frac{2}{\beta} \left[(1 + C_p^2) \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + C_p^2 \|f^0(E)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

La monotonie de f nous permet de conclure que la suite (u_λ) est bornée dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$. On note alors u un point d'accumulation pour la convergence faible dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ de la suite, associé à une sous-suite notée de même. Suite aux hypothèses sur f , il est possible de supposer que pour cette sous-suite, $f^\#(\partial_t u_\lambda + E)$ converge faiblement dans $L^2(Q)$ vers un élément noté χ .

On remarque de plus que

$$\frac{-1}{\lambda} \int_Q [k_1 - \partial_t u_\lambda - E]^+ \partial_t u_\lambda \, dx + \frac{1}{\lambda} \int_Q [\partial_t u_\lambda + E - k_2]^+ \partial_t u_\lambda \, dx \leq Cte.$$

Ou encore, puisque $k_1 \leq E \leq k_2$,

$$\int_Q [k_1 - \partial_t u_\lambda - E]^+ (k_1 - \partial_t u_\lambda - E) dx + \int_Q [\partial_t u_\lambda + E - k_2]^+ (\partial_t u_\lambda + E - k_2) dx \leq Cte\lambda.$$

Dès lors, on est en mesure de conclure que $k_1 \leq \partial_t u + E \leq k_2$.

Pour tout v de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ avec $k_1 \leq v \leq k_2$, la monotonie de ψ_λ nous assure de :

$$\begin{aligned} \int_\Omega f^\#(\partial_t u_\lambda + E)[v - \partial_t u_\lambda - E] dx + \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla [v - \partial_t u_\lambda - E] dx + \int_\Omega b(\partial_t u_\lambda) \nabla \partial_t u_\lambda \nabla [v - \partial_t u_\lambda - E] dx \\ = \langle g, v - \partial_t u_\lambda - E \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega [\psi_\lambda(\partial_t u_\lambda + E) - \psi_\lambda(v)][v - \partial_t u_\lambda - E] dx \\ \geq \langle g, v - \partial_t u_\lambda - E \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite sur λ . On a ainsi, en remarquant que $b(\partial_t u_\lambda) \nabla \partial_t u_\lambda = \nabla B(\partial_t u_\lambda)$ où $B(x) = \int_0^x b(s) ds$,

$$\begin{aligned} \int_Q \chi v dx dt + \int_Q \nabla u \nabla [v - E] dx dt + \int_Q b(\partial_t u) \nabla \partial_t u \nabla [v - E] dx dt \geq \\ \int_0^T \langle g, v - \partial_t u - E \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \left[\int_Q f^\#(\partial_t u_\lambda + E)[\partial_t u_\lambda + E] dx dt \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\lambda(T)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_Q |\nabla \int_0^{\partial_t u_\lambda} \sqrt{b(s)} ds|^2 dx dt \right]. \end{aligned}$$

Les propriétés de semi-continuité inférieure pour la convergence faible nous donnent alors

$$\begin{aligned} \int_Q \chi v dx + \int_Q \nabla u \nabla [v - E] dx dt + \int_Q b(\partial_t u) \nabla \partial_t u \nabla [v - E] dx dt \geq \\ \int_0^T \langle g, v - \partial_t u - E \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \left[\int_Q f^\#(\partial_t u_\lambda + E)[\partial_t u_\lambda + E] dx dt \right] \\ + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(T)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_Q |\nabla \int_0^{\partial_t u} \sqrt{b(s)} ds|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \int_Q \chi v dx dt + \int_Q \nabla u \nabla [v - \partial_t u - E] dx dt + \int_Q b(\partial_t u) \nabla \partial_t u \nabla [v - \partial_t u - E] dx dt \geq \\ \int_0^T \langle g, v - \partial_t u - E \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \left[\int_Q f^\#(\partial_t u_\lambda + E)[\partial_t u_\lambda + E] dx dt \right]. \end{aligned}$$

Pour $v = \partial_t u + E$, on obtient ainsi

$$\int_Q \chi [\partial_t u + E] dx dt \geq \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \left[\int_Q f^\#(\partial_t u_\lambda + E)[\partial_t u_\lambda + E] dx dt \right].$$

Comme les suites $f^\#(\partial_t u_\lambda + E)$ et $\partial_t u_\lambda + E$ convergent faiblement respectivement vers χ et $\partial_t u + E$ dans $L^2(Q)$, et puisque f est maximal monotone, la proposition 2.5 p.27 de H. Brezis [26] permet de conclure que $\chi \in f(\partial_t u + E)$ avec

$$\int_Q \chi[\partial_t u + E] \, dxdt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\int_Q f^\#(\partial_t u_\lambda + E)[\partial_t u_\lambda + E] \, dxdt \right].$$

Cette dernière assertion permet de justifier l'existence d'une solution.

Chapitre 2

Étude du problème de Barenblatt pseudo-parabolique

1 Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à un cas particulier de problème étudié au chapitre précédent. Nous nous intéressons notamment au cas où la fonction f n'est plus monotone. On considère alors le problème pseudo-parabolique de Barenblatt suivant : rechercher une fonction u de Q à valeur dans un espace convenable telle que

$$f(\partial_t u) - \Delta u - \epsilon \Delta \partial_t u = g \text{ dans } Q, \quad (2.1)$$

avec une condition initiale et la condition de bord

$$u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans } \Omega \quad u(t, \cdot) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (2.2)$$

L'objectif du travail est maintenant de présenter certaines techniques pour montrer l'existence d'une solution au problème (2.1)-(2.2) et l'unicité de cette solution si cette dernière existe. Ensuite, certaines applications, lorsque f est un graphe, seront étudiées à la fin du chapitre pour $\epsilon = 0$; notamment, le graphe d'un opérateur maximal monotone de $\mathbb{R}^2$ fera l'objet d'une attention particulière.

Lorsque $f = Id$, on retrouve l'équation de Sobolev ; lorsque $\epsilon = 0$, on a l'équation de Barenblatt.

Cette étude prend racine dans l'analyse des problèmes non linéaires faisant intervenir une fonction de $\partial_t u$. Une telle non-linéarité a été introduite par G. I. Barenblatt dans [11], voir aussi S. Kamin *et al.* [64], dans la modélisation des milieux poreux élasto-plastiques ; ainsi que P. Colli *et al.* [34] pour des problèmes de changement de phases irréversibles. Elle a été revisitée par S. N. Antontsev *et al.* [6–9] ou G. Vallet [90] au sujet de modèles stratigraphiques en Géologie. Mentionnons aussi les papiers de A. Beliaev [15] et B. Schweizer [81] une telle non-linéarité apparaît par l'intermédiaire du graphe de la fonction signe.

Pour cette étude, on fait des hypothèses suivantes :

H₁ : f est une fonction lipschitzienne continue avec $f(0) = 0$ ⁽¹⁾, $f = f_1 - f_2$ où $f_1(x) = \int_0^x f'^+(s)ds$ et $f_2 = f_1 - f = \int_0^x f'^-(s)ds$.

H₂ : $\epsilon > 0$ et $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

H₃ : $g \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$.

Remarque 2.1. L'hypothèse **H₁** permet de conclure que les fonctions f_1, f_2 sont lipschitziennes continues croissantes au sens large.

Définition 2.1. Une solution du problème (2.1)-(2.2) est alors toute fonction $u \in H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ telle que $u(0, \cdot) = u_0$ et pour tout v de $H_0^1(\Omega)$ et presque tout t de $]0, T[$,

$$\int_{\Omega} \left\{ f(\partial_t u) v + \nabla u \nabla v + \epsilon \nabla \partial_t u \nabla v \right\} dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (2.3)$$

Pour des valeurs de ϵ suffisamment grandes ($\epsilon > \epsilon_0$), on montre l'existence d'une solution en utilisant d'une part, le théorème de point fixe de Banach en s'appuyant sur les résultats des chapitres précédents, et d'autre part, directement en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder (cf. A. Ambrosetti *et al.* [2]) dans un schéma discrétisé en temps.

Puis, en passant à la limite sur ϵ vers ϵ_0^+ , on prouve l'existence d'une solution lorsque $\epsilon = \epsilon_0$, en prouvant que cette dernière est unique.

Par contre, lorsque $0 < \epsilon < \epsilon_0$, on donne un exemple d'existence de solutions multiples.

Dans une dernière section, on propose d'étudier l'équation de Barenblatt (*i.e.* $\epsilon = 0$) lorsque f est un graphe maximal monotone de $\mathbb{R}^2$.

Remarquons qu'une dérivation formelle du modèle nous conduit à ce que $v = \partial_t u$ est une solution de l'équation d'évolution dégénérée : $f'(v)\partial_t v - \Delta v = \partial_t g$. En effet, lorsque $f'(v) = 0$, on retrouve un effet amnésique comme étudié par A. Friedman *et al.* dans [51] pour des équations du type $c(t)\partial_t v + Av = h$, $c \geq 0$.

2 Existence d'une solution *via* le théorème de point fixe de Banach

On s'intéresse ici à l'existence d'une solution du problème (2.1)-(2.2) au sens de la définition 2.1 pour des valeurs de ϵ strictement plus grandes qu'un seuil critique ϵ_0 . On applique alors le théorème de point fixe de Banach. On a l'énoncé suivant :

Théorème 2.1. Sous des hypothèses **H₁**-**H₃**, si $\epsilon > \epsilon_0 = \|f'_2\|_{\infty} C_P^2 = \frac{\|f'_2\|_{\infty}}{\lambda_1}$, où C_P représente la constante de Poincaré et λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe un unique élément u de $H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et presque tout t de $]0, T[$,

$$\int_{\Omega} \left\{ f(\partial_t u) v + \nabla u \nabla v + \epsilon \nabla \partial_t u \nabla v \right\} dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad (2.4)$$

avec

$$u(0, \cdot) = u_0. \quad (2.5)$$

1. Sinon, on considère le problème avec $\bar{f} = f - f(0)$ et $\bar{g} = g - f(0)$.

Preuve. Soit $V(u_0) = \{u \in H^1(0, T, H_0^1(\Omega)) \mid u(t=0) = u_0\}$. C'est un espace métrique affine complet pour la distance induite par la semi-norme : $u \mapsto |u|_{V(u_0)} = \|\partial_t u\|_{L^2(]0, T[\times \Omega)}$, équivalente à la norme de $H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ sur $V(0)$.

Pour appliquer le théorème de point fixe de Banach, on considère l'application Ψ , de $V(u_0)$ dans lui-même, qui, pour tout S de $V(u_0)$, associe u_S , l'unique solution du problème : $u_S \in H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ et, pour tout v de $H_0^1(\Omega)$ et presque tout t de $]0, T[$,

$$\int_{\Omega} \left\{ f_1(\partial_t u_S) v + \nabla u_S \nabla v + \epsilon \nabla \partial_t u_S \nabla v \right\} dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} f_2(\partial_t S) v \, dx, \quad (2.6)$$

avec une condition initiale $u_S(t=0) = u_0$.

D'après le chapitre précédent, une telle application existe puisque ici f_1 est une fonction lipschitzienne croissante.

Soient S et $\hat{S}$ deux éléments de $V(u_0)$, d'images respectives u_S et $\hat{u}_S$. Alors, pour tout $t > 0$, on obtient par différence des deux équations vérifiées par u_S et $\hat{u}_S$ et par intégration en temps de 0 à t ,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{]0, t[\times \Omega} [f_1(\partial_t u_S) - f_1(\partial_t \hat{u}_S)] (\partial_t u_S - \partial_t \hat{u}_S) \, dx ds}_{\geq 0 \text{ car } f_1 \text{ est croissante}} + \epsilon \int_{]0, t[\times \Omega} |\nabla \partial_t (u_S - \hat{u}_S)|^2 \, dx ds \\ & \quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla (u_S - \hat{u}_S)|^2(t) \, dx}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla (u_S - \hat{u}_S)(0)|^2 \, dx}_0 \\ & \quad + \int_{]0, t[\times \Omega} [f_2(\partial_t S) - f_2(\partial_t \hat{S})] \partial_t (u_S - \hat{u}_S) \, dx dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par suite

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{]0, t[\times \Omega} |\nabla \partial_t (u_S - \hat{u}_S)|^2 \, dx ds & \leq \int_{]0, t[\times \Omega} [f_2(\partial_t S) - f_2(\partial_t \hat{S})] \partial_t (u_S - \hat{u}_S) \, dx dt \\ & \leq \left\| f_2(\partial_t S) - f_2(\partial_t \hat{S}) \right\|_{L^2(0, t, L^2(\Omega))} \|\partial_t (u_S - \hat{u}_S)\|_{L^2(0, t, L^2(\Omega))} \\ & \leq \frac{1}{2\alpha} \left\| f_2(\partial_t S) - f_2(\partial_t \hat{S}) \right\|_{L^2(0, t, L^2(\Omega))}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\partial_t (u_S - \hat{u}_S)\|_{L^2(0, t, L^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ainsi, pour $\alpha = \frac{\epsilon}{C_P^2}$, il vient

$$\frac{\epsilon}{2} \int_{]0, t[\times \Omega} |\nabla \partial_t (u - \hat{u})|^2 \, dx ds \leq \frac{C_P^2}{2\epsilon} \|f_2(\partial_t S) - f_2(\partial_t \hat{S})\|_{L^2(]0, t[\times \Omega)}^2 \leq \frac{C_P^2 \|f_2'\|_{\infty}^2}{2\epsilon} \|\partial_t (S - \hat{S})\|_{L^2(]0, t[\times \Omega)}^2. \quad (2.9)$$

On obtient donc

$$\int_{]0, t[\times \Omega} |\partial_t (u - \hat{u})|^2 \, dx ds \leq C_P^2 \int_{]0, t[\times \Omega} |\nabla \partial_t (u - \hat{u})|^2 \, dx ds \leq \frac{C_P^4 \|f_2'\|_{\infty}^2}{\epsilon^2} \|\partial_t (S - \hat{S})\|_{L^2(]0, t[\times \Omega)}^2, \quad (2.10)$$

c'est-à-dire, qu'il existe une constante positive $k = \frac{C_P^2 \|f'_2\|_\infty}{\epsilon} < 1$ telle que

$$\left\| \psi(S) - \psi(\hat{S}) \right\|_{V(u_0)} \leq k \left\| S - \hat{S} \right\|_{V(u_0)}.$$

Ainsi, le théorème de point fixe de Banach permet de conclure qu'il existe un unique $S \in H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ tel que $S = u_S$ et qu'il existe une unique solution au problème (2.4)-(2.5).

□

Nous nous intéressons dans la suite à préciser le comportement du problème (2.4)-(2.5) par rapport à la valeur critique ϵ_0 . On va redémontrer l'existence d'une solution dans le cas sur-critique. Cette méthode reprend la méthode d'existence du chapitre précédent et propose l'utilisation de la théorie des degrés topologiques de Leray-Schauder pour établir l'existence d'une solution discrète pour une gamme assez large de données. On propose ensuite de vérifier l'unicité de la solution dans le cas critique, puis de prouver l'existence d'une solution, pour une gamme de fonctions f décroissantes sur un compact, par le biais d'une perturbation singulière de type viscosité-pseudo-parabolique évanescence. Enfin, dans le cas sous-critique, on propose un exemple d'existence de multiples solutions.

Nous terminerons avec l'étude de l'équation de Barenblatt (*i.e.* lorsque $\epsilon = 0$) pour une gamme générale de fonctions croissantes f .

Dans ce qui suit, on note λ_1 la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2.2. Si λ est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\lambda \in \left[\frac{1}{C_P^2}, +\infty \right]$, et en particulier $\lambda_1 = \frac{1}{C_P^2}$.

En effet, soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une fonction propre non nulle associée à la valeur λ , on a $-\Delta u = \lambda u$. On a donc pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega u v dx$. Ainsi

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_\Omega u^2 dx \leq \lambda C_P^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \text{ i.e. } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} (1 - \lambda C_P^2) \leq 0.$$

Par suite, $\lambda \in \left[\frac{1}{C_P^2}, +\infty \right]$.

Enfin, rappelons que λ_1 est caractérisée par le problème d'optimisation suivant :

$$\lambda_1 = \min \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2, u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |u|^2 dx = 1 \right\}.$$

Théorème 2.2. Sous les hypothèses $H_1 - H_3$, soit $\epsilon_0 = \frac{\|f'_2\|_\infty}{\lambda_1}$, on obtient des résultats suivants :

1. si $\epsilon > \epsilon_0 \geq 0$: il existe une solution unique dans $H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ au problème (2.1)-(2.2) au sens de la définition 2.1 vérifiant de plus un principe de dépendance lipschitzienne : si u et $\hat{u}$ sont deux solutions correspondant à deux conditions initiales $u_0, \hat{u}_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et deux seconds membres $g, \hat{g}$ dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$, alors, pour tout t , il vient (C_p désignant la constante de Poincaré)

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - \hat{u})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\epsilon - \epsilon_0) \int_{\Omega \times]0, t[} |\nabla[\partial_t u - \partial_t \hat{u}]|^2 dx &\leq \frac{(1 + C_p^2)}{\epsilon - \epsilon_0} \|g - \hat{g}\|_{L^2(0, t, H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &\quad + \|\nabla(u_0 - \hat{u}_0)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

2. si $\epsilon = \epsilon_0 > 0$: il existe au plus une solution dans $H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ au problème (2.1)-(2.2) au sens de la définition 2.1, vérifiant de plus un principe de contraction : si u et $\hat{u}$ sont deux solutions correspondant à deux conditions initiales $u_0, \hat{u}_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et au même second membre g dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$, alors, pour tout t , il vient

$$\|\nabla(u - \hat{u})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\nabla(u_0 - \hat{u}_0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De plus, si le support de f_2 est borné, il existe une solution unique.

3. si $0 < \epsilon < \epsilon_0$: si il existe une solution dans $H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ au problème (2.1)-(2.2) au sens de la définition 2.1, cette solution n'est pas unique en général.
4. si $\epsilon = 0$:

si g est dans $L^2(Q)$ et $f \subset \mathbb{R}^2$ est le graphe d'un opérateur maximal monotone tel que :

(a) $\exists \mu > 0, \forall (r, a) \in \mathbb{R} \times \{f(r)\}, |a| \geq \mu|r|$.

(b) $f^0(L^2(Q)) \subset (L^2(Q))$ où $f^0(x) = \text{proj}_{[f(x^-), f(x^+)] \cap \mathbb{R}}(0)$ est la section principale de f de norme minimale,

alors il existe une solution unique dans $H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ à l'inclusion différentielle de type de Barenblatt

$$f(\partial_t u) - \Delta u \ni g, \quad u(0, \cdot) = u_0.$$

3 Le cas sur-critique est bien posé

3.1 Unicité et continuité

Soit $w = u - \hat{u}$. Comme $\partial_t w$ est une fonction test admissible, il vient

$$\begin{aligned} \langle g - \hat{g}, \partial_t w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} [f_1(\partial_t u) - f_1(\partial_t \hat{u})] \partial_t w \, dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + (\epsilon - \epsilon_0) \int_{\Omega} |\nabla[\partial_t u - \partial_t \hat{u}]|^2 \, dx \\ &\quad + \epsilon_0 \int_{\Omega} |\nabla[\partial_t u - \partial_t \hat{u}]|^2 \, dx - \int_{\Omega} [f_2(\partial_t u) - f_2(\partial_t \hat{u})] \partial_t w \, dx. \end{aligned}$$

Alors, puisque f_1 est croissante et par définition de ϵ_0 , on a, pour tout α strictement positif,

$$\frac{1}{2\alpha} \|g - \hat{g}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\partial_t w\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\epsilon - \epsilon_0) \int_{\Omega} |\nabla[\partial_t u - \partial_t \hat{u}]|^2 \, dx.$$

Ainsi, en posant $\alpha = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{1 + C_p^2}$, il vient, pour tout t ,

$$\begin{aligned} &\|\nabla(u - \hat{u})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\epsilon - \epsilon_0) \int_{\Omega \times]0, t[} |\nabla[\partial_t u - \partial_t \hat{u}]|^2 \, dx \\ &\leq \frac{1 + C_p^2}{\epsilon - \epsilon_0} \|g - \hat{g}\|_{L^2(0, t, H^{-1}(\Omega))}^2 + \|\nabla(u_0 - \hat{u}_0)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

3.2 Quelques lemmes techniques

On note A_ϵ l'opérateur de domaine $D(-\Delta)$ dans $L^2(\Omega)$ défini par $A_\epsilon u = f(u) - \epsilon \Delta u$. La méthode est basée sur le fait que f et ϵ sont tels que,

$$\exists \delta > 0, \quad \forall \eta \in [\epsilon, \epsilon + \delta], \quad \forall F \in H^{-1}(\Omega), \quad \exists u \in H_0^1(\Omega), \quad A_\eta u = f(u) - \eta \Delta u = F; \quad (2.11)$$

et que, la solution soit unique si $\eta = \epsilon$.

Lemme 2.1. *On considère le cas sur-critique : Si $\|f_2'\|_\infty^2 < \epsilon \lambda_1$, alors, il existe une solution unique du problème (2.11), pour tout $\eta \geq \epsilon$.*

Preuve.

On la propose pour ϵ , il en est de même pour η .

i) Unicité de la solution.

On considère u et $\hat{u}$ deux solutions de (2.11). On obtient par soustraction

$$\langle A_\epsilon(u) - A_\epsilon(\hat{u}), u - \hat{u} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0.$$

On peut écrire alors cette dernière équation sous la forme

$$\underbrace{\int_\Omega [f_1(u) - f_1(\hat{u})](u - \hat{u}) \, dx}_{\geq 0 \text{ car } f_1 \text{ est croissante}} + \epsilon \|\nabla(u - \hat{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega [f_2(u) - f_2(\hat{u})](u - \hat{u}) \, dx. \quad (2.12)$$

Il en résulte que

$$\epsilon \|\nabla(u - \hat{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f_2'\|_\infty \int_\Omega (u - \hat{u})^2 \, dx \leq \|f_2'\|_\infty C_P^2 \|\nabla(u - \hat{u})\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.13)$$

par suite

$$(\epsilon - C_P^2 \|f_2'\|_\infty) \|\nabla(u - \hat{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Puisque $\lambda_1 = \frac{1}{C_P^2}$ alors $\left(\underbrace{\epsilon \lambda_1 - \|f_2'\|_\infty}_{\geq 0} \right) \|\nabla(u - \hat{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$ et donc $u = \hat{u}$.

i) Existence d'une solution.

On utilise le degré topologique de Leray-Schauder.

Pour $u \in L^2(\Omega)$, on note $T(u) = \frac{1}{\epsilon}(-\Delta)^{-1}[F - f(u)]$ dans $L^2(\Omega)$. L'opérateur T est compact. L'équation (2.11) est donc équivalente à $u = \frac{1}{\epsilon}(-\Delta)^{-1}[F - f(u)]$.

On considère $\lambda \in [0, 1]$ et on suppose qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$ solution de $u = \lambda T(u)$. En particulier, $u \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\underbrace{\lambda \int_\Omega f_1(u)u \, dx}_{\geq 0} + \epsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda \int_\Omega f_2(u)u \, dx = \lambda \langle F, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (2.14)$$

Alors, si on note $\beta = \epsilon - \|f'_2\|_\infty C_P^2$, on obtient pour $\alpha > 0$,

$$\beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} (1 + C_P^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.15)$$

et puis,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_P^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_P^2 \frac{1 + C_P^2}{\beta^2} \|F\|_{H^{-1}}^2 = R^2. \quad (2.16)$$

Ainsi, pour $\lambda \in [0, 1]$ et $u \in L^2(\Omega)$ avec $\|u\|_{L^2(\Omega)} = R$, on a $u \neq \lambda T(u)$.

En utilisant l'invariance homotopique de Leray-Schauder (voir [2]), il s'ensuit que

$$\deg(Id - T, B_{L^2}(0, R), 0) = \deg(Id, B_{L^2}(0, R), 0) = 1$$

Il existe donc $u \in B_{L^2}(0, R)$ tel que $u = T(u)$ et il existe une solution.

Puisque $\eta > \epsilon$, le même raisonnement assure que (2.11) est vérifié.

□

Donnons un autre exemple où (2.11) est satisfait, mais pas forcément l'unicité.

En effet, si on suppose par exemple que $f_1 = 0$, $f_2(x) = -\epsilon \lambda_1 T_k(x)$ où $T_k(x) = \max[-k, \min(k, x)]$ et $F = 0$. Nous sommes alors dans les hypothèses du lemme ci-dessous, alors qu'il existe une infinité de solutions au problème (2.11) lorsque $\eta = \epsilon$: toutes les fonctions propres de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ de sup-essentiel inférieur à k .

Lemme 2.2. *Un second cas : si $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f_2(x)|}{|x|} < \lambda_1 \epsilon$, alors il existe une solution à (2.11), pour tout $\eta \geq \epsilon$.*

Preuve.

On utilise des notations de la preuve du lemme précédent. On considère alors $\lambda \in [0, 1]$ et on suppose qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$, solution de $u = \lambda T(u)$. En particulier, $u \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\lambda \int_{\Omega} f_1(u) u \, dx + \epsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \lambda \int_{\Omega} f_2(u) u \, dx = \lambda \langle F, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (2.17)$$

Puisque $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f_2(x)|}{|x|} < \lambda_1 \epsilon$, il existe $A \geq 0$ et $\beta \geq 0$, tels que pour $|x| > A$, on a $\frac{|f_2(x)|}{|x|} \leq \beta < \lambda_1 \epsilon$.

Donc pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \epsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 &\leq \lambda \int_{\Omega} f_2(u) u \, dx + \frac{1 + C_P^2}{2\alpha} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\leq A |\Omega| \max_{|x| \leq A} |f(x)| + \beta \int_{|u| > A} |u|^2 \, dx + \frac{1 + C_P^2}{2\alpha} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\leq A |\Omega| \max_{|x| \leq A} |f(x)| + \frac{1 + C_P^2}{2\alpha} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \left(\beta C_P^2 + \frac{\alpha}{2} \right) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on prend $\alpha = \epsilon - \beta C_p^2 = \epsilon - \frac{\beta}{\lambda_1} > 0$, alors

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2A|\Omega| \max_{|x| \leq A} |f(x)|}{(\epsilon - \beta C_p^2)} + \frac{(1 + C_p^2)}{(\epsilon - \beta C_p^2)^2} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

et il existe une solution.

Puisque $\eta > \epsilon$, le même raisonnement implique que (2.11) est vérifié.

□

Remarque 2.3. *Ce cas correspond par exemple à $f_2(x) = ax + b(x)$ avec $a < \epsilon\lambda_1$ et b est borné.*

Donnons un dernier exemple, où de nouveau, l'unicité n'est pas forcément vérifiée.

Lemme 2.3. *On considère un troisième cas : pour r positif, $f(r) > 0$ et $f(-r) < 0$, alors il existe une solution de (2.11).*

Preuve.

En revenant aux notations précédentes, on considère alors $\lambda \in [0, 1]$ et on suppose qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$ solution de $u = \lambda T(u)$. En particulier, $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \epsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \lambda \int_{\Omega} f(u)u \, dx + \epsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda \langle F, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{1 + C_p^2}{2\alpha} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

On prend $\alpha = \epsilon$, il vient

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1 + C_p^2}{\epsilon^2} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

et il existe donc une solution. □

3.3 Existence d'une solution discrète

On considère un entier naturel positif $N > 0$ et on note $h = \frac{T}{N}$. On s'intéresse au problème discrétisé suivant : pour $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $g \in H^{-1}(\Omega)$, rechercher $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$f\left(\frac{u - u_0}{h}\right) - \Delta u - \epsilon \Delta \frac{u - u_0}{h} = g.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$f\left(\frac{u - u_0}{h}\right) - (h + \epsilon) \Delta \frac{u - u_0}{h} = A_{h+\epsilon}\left(\frac{u - u_0}{h}\right) = g + \Delta u_0 = F. \quad (2.18)$$

Alors, si on suppose (2.11), le problème (2.18) possède une solution lorsque $h < \delta$.

Par induction, on a le résultat suivant :

Théorème 2.3. *Sous l'hypothèse (2.11), si $h < \delta$ et $(g^k) \subset H^{-1}(\Omega)$, il existe une suite $(u^k)_k$ dans $H_0^1(\Omega)$ avec $u^0 = u_0$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} f \left(\frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right) v dx + \int_{\Omega} \nabla u^{k+1} \nabla v dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \nabla v dx = \left\langle g^{k+1}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (2.19)$$

On cherche à passer à la limite pour établir l'existence d'une solution en formulation continue.

3.4 Existence d'une solution pour la formulation continue

On va montrer l'existence d'une solution dans le premier cas décrit par le lemme 2.1, correspondant au cas sur-critique. Dans les deux autres cas (lemme 2.2 et 2.3), au même titre que le premier cas, il sera possible de donner des estimations *a priori* et ainsi obtenir un point d'accumulation pour la suite d'approximations. Par contre, la méthode nécessite le résultat d'unicité dans (2.11) lorsque $\epsilon = \eta$, conjecture non évidente sans adjoindre une condition supplémentaire à la solution pour en discriminer une particulière.

On introduit comme dans le chapitre précédent quelques notations. Pour une suite (v^k) , on pose : $v^h = \sum_{k=0}^{N-1} v^{k+1} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[}$, $\tilde{v}^h = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{v^{k+1} - v^k}{h} (t - t_k) + v^k \right] \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[}$ et $g^h = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t, \cdot) dt \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[}$, où $t_k = kh$.

On obtient alors des résultats suivants :

Lemme 2.4. *Si l'on suppose se placer dans l'un des trois cas décrits dans les lemmes ci-dessus, pour h assez petit, on a*

i) *La suite (u^h) est bornée dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et la suite $(\tilde{u}^h)$ est bornée dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.*

ii) *Il existe $C > 0$ tel que pour tout t dans $[0, T[$, $\|\tilde{u}^h(t) - u^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{h}$.*

iii) *Il existe un ensemble Z mesurable de $]0, T[$ tel que pour t dans Z , $\partial_t \tilde{u}^h(t)$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.*

Preuve. On considère le cas 1. On déduit du lemme 2.1 qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1 + C_p^2}{(\epsilon - \|f_2'\|_\infty C_p^2)} \|g^{k+1} + \Delta u^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq C \left[\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla u^{k+1}\|_{L^2(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Il existe une constante positive K tel que

$$\left\| \nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K \left[\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + Kh \sum_{l=0}^k \left\| \nabla \frac{u^{l+1} - u^l}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.20)$$

On considère le cas 2. On déduit du lemme 2.2 que

$$\|\nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2A|\Omega| \max_{|x| \leq A} |f(x)|}{(\epsilon - \beta C_P^2)} + \frac{1 + C_p^2}{(\epsilon - \beta C_P^2)^2} \|g^{k+1} + \Delta u^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

Alors, de même, il existe une constante positive K tel que

$$\|\nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K \left[1 + \|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + Kh \sum_{l=0}^k \|\nabla \frac{u^{l+1} - u^l}{h}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On considère le cas 3. On déduit du lemme 2.3 que

$$\|\nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1 + C_p^2}{\epsilon^2} \|g^{k+1} + \Delta u^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Alors, il existe une constante positive K tel que

$$\|\nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K \left[\|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + Kh \sum_{l=0}^k \|\nabla \frac{u^{l+1} - u^l}{h}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ainsi, dans tous les cas, il existe une constante positive K avec $Kh < 1$ tel que

$$\|\nabla \frac{u^{k+1} - u^k}{h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K[1 + \|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2] + Kh \sum_{l=0}^{k-1} \|\nabla \frac{u^{l+1} - u^l}{h}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.21)$$

Par sommation, la dernière inégalité devient

$$\sum_{k=0}^n h \|\frac{u^{k+1} - u^k}{h}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq K \sum_{k=0}^n h \|g^{k+1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + K + Kh \sum_{k=1}^n h \sum_{i=0}^{k-1} \|\frac{u^{i+1} - u^i}{h}\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (2.22)$$

D'après le lemme de Gronwall, il existe une constante positive C tel que

$$\sum_{k=0}^n h \|\frac{u^{k+1} - u^k}{h}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C. \quad (2.23)$$

On obtient donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} \|u^{k+1} - u^k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq hC, \quad (2.24)$$

et i)-ii) sont alors vérifiés.

De plus, pour tout $t \in]t_k, t_{k+1}[$, il existe une constante positive C_1 tel que

$$\|\partial_t \tilde{u}^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq K \|g^h(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + C_1. \quad (2.25)$$

D'ailleurs, si t appartient à l'ensemble de Lebesgue de g dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, alors $\partial_t \tilde{u}^h(t)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$ et iii) est aussi vérifié.

On passe maintenant à la limite sur l'équation discrétisée (2.19) et on obtient :

Théorème 2.4. *Sous les hypothèses du cas 1, 2 ou 3 et si de plus la solution de (2.11) est unique lorsque $\eta = \epsilon$ (le cas 1 par exemple), alors il existe u dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel que pour tout v in $H_0^1(\Omega)$ et presque tout t de $]0, T[$,*

$$\int_{\Omega} f(\partial_t u) v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla \partial_t u \nabla v dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (2.26)$$

avec $u(0, \cdot) = u_0$.

Preuve D'après le lemme 2.4-i), il existe u dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel qu'on puisse extraire une sous suite de $(\tilde{u}^h)$ notée de même qui converge faiblement vers u dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$. Ainsi, pour t dans $[0, T]$, $\tilde{u}^h(t)$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers $u(t)$. Le lemme 2.4-ii) assure donc que $u^h(t)$ converge faiblement vers $u(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

D'après le lemme 2.4-iii), il existe un ensemble mesurable Z de $]0, T[$ tel que pour $t \in Z$, la suite $\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t)$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe donc un élément $\xi(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et une sous-suite extraite de $(\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t))$ indexée par h_t tel que $\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t)$ converge faiblement vers $\xi(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$.

D'où, il existe h_t tel que (2.19) puisse s'écrire pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f(\partial_t \tilde{u}^{h_t}(t)) v dx + \int_{\Omega} \nabla u^{h_t}(t) \nabla v dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla \partial_t \tilde{u}^{h_t}(t) \nabla v dx = \langle g^{h_t}(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (2.27)$$

En passant à la limite sur h_t vers 0^+ , on obtient que $\xi(t)$ est une solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème variationnel suivant :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} f(\xi(t)) v dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla \xi(t) \nabla v dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla v dx. \quad (2.28)$$

Par hypothèse, la solution est unique.

Puisque $\partial_t \tilde{u}^h(t)$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on conclut que toute la suite généralisée $\partial_t \tilde{u}^h(t)$ converge faiblement vers $\xi(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Ainsi, la fonction $\xi :]0, T[\rightarrow H_0^1(\Omega)$ est faiblement mesurable ; mais, puisque $H_0^1(\Omega)$ est séparable, d'après le théorème de ([97] p. 131), elle est mesurable.

Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, $\int_{\Omega} \nabla \partial_t u^h(t) \nabla v dx$ converge presque partout dans $]0, T[$ vers $\int_{\Omega} \nabla \xi(t) \nabla v dx$.

Puisque, $|\int_{\Omega} \nabla \partial_t \tilde{u}^h(t) \nabla v dx| \leq \|\partial_t \tilde{u}^h(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, le second membre est borné dans $L^2(0, T)$, alors le lemme 1.3 p.12 dans [72] assure que :

$$\forall \alpha \in L^2(0, T), \quad \int_0^T \int_{\Omega} \alpha(t) \nabla \partial_t \tilde{u}^h(t) \cdot \nabla v dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \alpha(t) \nabla \xi(t) \cdot \nabla v dx dt.$$

De plus $(\partial_t \tilde{u}^h)$ est borné dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Ainsi un argument de densité donne la convergence faible de $\partial_t \tilde{u}^h$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ vers ξ . D'où, par l'unicité de la limite faible, on obtient $\partial_t u = \xi$ et il existe donc une solution.

4 Cas $\epsilon = \epsilon_0$

On montre d'abord l'unicité de solution et la propriété contraction. On considère u et $\hat{u}$ deux solutions du problème (2.3) avec la même condition initiale. On note pour simplifier

$w = u - \hat{u}$. On choisit $\partial_t w$ comme fonction-test dans la formulation variationnelle, et on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\int_{\Omega} [f_1(\partial_t u) - f_1(\partial_t \hat{u})] \partial_t w \, dx}_{\geq 0} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \underbrace{\epsilon_0 \int_{\Omega} |\nabla [\partial_t u - \partial_t \hat{u}]|^2 \, dx - \int_{\Omega} [f_2(\partial_t u) - f_2(\partial_t \hat{u})] \partial_t w \, dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0,$$

puis, par intégration,

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \text{i.e.} \quad u = \hat{u} \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

On suppose maintenant que le support de f_2' est inclus dans $[-M, M]$. Pour $\delta \in]0, \|f_2'\|_{\infty}[$, on note alors f_2^{δ} la fonction $x \mapsto \int_0^x [f_2'(s) - \delta]^+ ds$.

Par construction, $\|(f_2^{\delta})'\|_{\infty} = \|f_2'\|_{\infty} - \delta$. D'après la section précédente, il existe une solution unique au sens de la définition 2.1 au problème :

$$f_1(\partial_t u^{\delta}) - \Delta u^{\delta} - \epsilon_0 \Delta \partial_t u^{\delta} = g + f_2^{\delta}(\partial_t u^{\delta}), \quad u^{\delta}(t=0) = u_0, \quad u^{\delta}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.29)$$

Si $0 < \eta < \delta < \|f_2'\|_{\infty}$, on obtient par soustraction :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [f_1(\partial_t u^{\delta}) - f_1(\partial_t u^{\eta})] (\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}) \, dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{\delta} - u^{\eta}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \epsilon_0 \|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} [f_2^{\delta}(\partial_t u^{\delta}) - f_2^{\delta}(\partial_t u^{\eta})] (\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}) \, dx + \int_{\Omega} [f_2^{\delta}(\partial_t u^{\eta}) - f_2^{\eta}(\partial_t u^{\eta})] (\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}) \, dx \\ &\leq (\|f_2'\|_{\infty} - \delta) \|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\delta - \eta| M \|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|f_2'\|_{\infty} - \delta) \|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{|\delta - \eta|^2}{2\delta} M^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Par définition de ϵ_0 et puisque f_1 est une fonction lipschitzienne-continue, il vient que

$$\begin{aligned} &\|f_1^{\vee}(\partial_t u^{\delta}) - f_1^{\vee}(\partial_t u^{\eta})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{\delta} - u^{\eta}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\|f_2'\|_{\infty}}{\lambda_1} \left(\underbrace{\|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \lambda_1 \|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{L^2(\Omega)}^2}_0 \right) \leq \frac{|\delta - \eta|^2}{2\delta} M^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

où $f_1^{\vee}(x) = \int_0^x \sqrt{f_1'(s)} \, ds$. Par suite,

$$\|f_1^{\vee}(\partial_t u^{\delta}) - f_1^{\vee}(\partial_t u^{\eta})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} \|u^{\delta} - u^{\eta}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \delta \|\partial_t u^{\delta} - \partial_t u^{\eta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{|\delta - \eta|^2}{\delta} M^2. \quad (2.32)$$

Par intégration sur $[0, t]$, il existe une constante positive C telle que pour $t \in [0, T]$

$$\|f_1^\vee(\partial_t u^\delta) - f_1^\vee(\partial_t u^\eta)\|_{L^2([0, t] \times \Omega)}^2 + \|u^\delta - u^\eta\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + \delta \|\partial_t u^\delta - \partial_t u^\eta\|_{L^2([0, T] \times \Omega)}^2 \leq C\delta.$$

Ainsi, la suite $\left(f_1^\vee(\partial_t u^\delta)\right)_\delta$, et donc $(f_1(\partial_t u^\delta))_\delta$, est de Cauchy dans $L^2(Q)$, la suite $(u^\delta)_\delta$ est de Cauchy dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et, d'après (2.5), la suite $\left(\|\partial_t u^\delta - \partial_t u^\eta\|_{L^2([0, T] \times \Omega)}\right)_\delta$ est bornée.

Quitte à extraire une sous-suite, on note u la limite faible de $(u^\eta)_{\eta < \delta}$ dans $H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ et sa limite forte dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ lorsque $\eta \rightarrow 0^+$. Soit χ la limite faible commune de $(f_2^\eta(\partial_t u^\eta))_{\eta < \delta}$ et de $(f_2(\partial_t u^\eta))_{\eta < \delta}$ dans $L^2(Q)$ car $\|f_2 - f_2^\eta\|_\infty \leq M\eta$.

Par la monotonie de f_1 , on a obtenu que $f_1(\partial_t u^\eta)$ converge vers $f_1(\partial_t u)$ dans $L^2(Q)$ lorsque $\eta \rightarrow 0^+$.

On passe alors à la limite dans (2.29) sur $\delta \rightarrow 0^+$, on obtient $u \in H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ solution du problème :

$$f_1(\partial_t u) - \Delta u - \epsilon_0 \Delta \partial_t u = g + \chi, \quad u(t = 0) = u_0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Par suite,

$$\int_Q \left[f_1(\partial_t u) \partial_t u + \nabla u \nabla \partial_t u + \epsilon_0 |\nabla \partial_t u|^2 - \chi \partial_t u \right] dx dt = \int_0^T \langle g, \partial_t u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt. \quad (2.33)$$

On remarque de plus, pour $\eta < \delta$, que

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[f_1(\partial_t u^\eta) \partial_t u^\eta + \nabla u^\eta \nabla \partial_t u^\eta \right] dx dt + \int_Q \left[\epsilon_0 |\nabla \partial_t u^\eta|^2 - f_2(\partial_t u^\eta) \partial_t u^\eta \right] dx dt \\ &= \int_0^T \langle g, \partial_t u^\eta \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_Q [f_2^\eta(\partial_t u^\eta) - f_2(\partial_t u^\eta)] \partial_t u^\eta dx dt. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\eta \rightarrow 0^+$, on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_Q \left[\epsilon_0 |\nabla \partial_t u^\eta|^2 - f_2(\partial_t u^\eta) \partial_t u^\eta \right] dx dt = \int_Q \left[\epsilon_0 |\nabla \partial_t u|^2 - \chi \partial_t u \right] dx dt,$$

de sorte pour tout v dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_Q \left[\epsilon_0 |\nabla(\partial_t u^\eta - v)|^2 - [f_2(\partial_t u^\eta) - f_2(v)] [\partial_t u^\eta - v] \right] dx dt \\ &= \int_Q \left[\epsilon_0 |\nabla(\partial_t u - v)|^2 - [\chi - f_2(v)] (\partial_t u - v) \right] dx dt. \end{aligned}$$

De cette dernière inégalité, il en résulte que pour tout $w \in L^2(0, T; (\Omega))$ et pour tout $\lambda > 0$,

$$0 \leq \int_Q \left[\epsilon_0 \lambda^2 |\nabla w|^2 - \lambda [\chi - f_2(\partial_t u - \lambda w)] w \right] dx dt.$$

Donc pour tout $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, on a nécessairement

$$0 = \int_Q [\chi - f_2(\partial_t u)] w \, dx dt;$$

d'où $\chi = f_2(\partial_t u)$.

5 Cas $\epsilon < \epsilon_0$

Dans ce cas de figure, la solution, si elle existe, n'est pas unique en général. Nous nous proposons dans cette section de donner un exemple où on est en mesure de construire plusieurs solutions.

Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$. Cette dernière est strictement positive et une fonction propre associée, notons la φ_1 , peut être considérée positive et aussi petite que souhaité.

Pour tout $a > 0$, posons,

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_1(1 - \epsilon)t & \text{si } t \leq 0, \\ -\lambda_1(a + \epsilon)t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ \lambda_1(1 - \epsilon)t - (1 + a)\lambda & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Remarque 2.4. Comme $\lambda_1 = \frac{1}{C_p^2}$, il vient $\epsilon_0 = \|f_2'\|_\infty C_p^2 = \lambda_1(a + \epsilon)C_p^2 = a + \epsilon > \epsilon$ dès que $a > 0$.

On recherche alors une solution sous la forme tensorielle $u(t, x) = \alpha(t)\varphi_1(x)$ de sorte $u(t = 0) = \alpha(0)\varphi_1$ et en remplaçant dans (2.1), il vient :

$$f(\dot{\alpha}\varphi_1) - \alpha\Delta\varphi_1 - \epsilon\dot{\alpha}\Delta\varphi_1 = f(\dot{\alpha}\varphi_1) + \lambda\varphi_1[\alpha + \epsilon\dot{\alpha}] = \lambda[\bar{f}(\dot{\alpha}\varphi_1) + \varphi_1\alpha] = 0, \quad (2.34)$$

où $\dot{\alpha}$ est la dérivée de α et la fonction non monotone $\bar{f}$ est définie, pour tout réel t , par

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0, \\ -at & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ t - (1 + a) & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Recherchons alors les solutions de l'équation différentielle : $\bar{f}(\dot{x}) + x = 0$ où x est une fonction absolument continue de la variable t .

Dans la partie $\dot{x} \leq 0$:

les solutions locales issues d'un temps t_0 sont de la forme $x(t) = x(t_0)e^{-t+t_0}$ et donc $x(t_0) \geq 0$. Ainsi, x est décroissante, $\dot{x}$ est croissante et on est en mesure de construire une solution globale à partir de t_0 en restant sur la branche $t \in]-\infty, 0]$ $\mapsto \bar{f}(t)$.

Dans la partie $0 \leq \dot{x} \leq 1$:

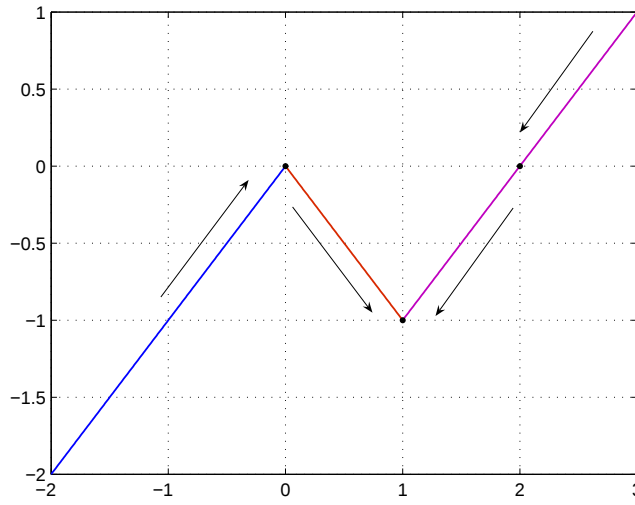
les solutions locales issues d'un temps t_0 sont de la forme $x(t) = x(t_0)e^{\frac{t-t_0}{a}}$ et donc nécessairement $x(t_0) \geq 0$. De plus, la contrainte $\dot{x} \leq 1$ impose que $0 \leq x(t_0) \leq a$, et même que $x(t_0) < a$, pour

construire une solution maximale sur l'intervalle $[t_0, t_0^*]$ où $t_0^* = t_0 + a \ln[\frac{a}{x(t_0)}]$ en restant sur la branche décroissante de la fonction $\bar{f}$ où x et $\dot{x}$ sont des fonctions croissantes.

Dans la partie $\dot{x} \geq 1$:

les solutions locales issues d'un temps t_0 sont de la forme $x(t) = 1 + a + (x(t_0) - (1 + a))e^{-t+t_0}$. x est croissantes et la contrainte $\dot{x} \geq 1$ impose que $x(t_0) \leq a$, et même que $x(t_0) < a$, pour construire une solution maximale sur l'intervalle $[t_0, t_{0*}]$ où $t_{0*} = t_0 + \ln[1 + a - x(t_0)]$ en restant sur la branche $t \in]1, \infty[\mapsto \bar{f}(t)$ où x est croissante et $\dot{x}$ décroissante.

D'où la dynamique de $\dot{x}$ résumée ci-dessous :



Ainsi, à partir d'une donnée initiale $x(t_0)$, il existe une infinité de façons de construire des solutions à l'aide de l'algorithme suivant :

A. si $x(t_0) \leq 0$. Outre les solutions triviales $x(t) = 0$ ou $x(t) = (1 + a)t$ que l'on retrouve par la suite si $x(t_0) = 0$, une solution est donnée par la formule $x(t) = (1 + a) + (x(t_0) - (1 + a))e^{-t+t_0}$. Elle est croissante, $\dot{x}$ décroît, et c'est l'unique solution tant que $x(t)$ est négatif. Ensuite, dès $t_1 = t_0 + \ln[(1 + a) - x(t_0)] - \ln(1 + a)$, par construction $x(t_1) = 0$, $\dot{x}(t_1^-) = (1 + a)$, $\bar{f}[\dot{x}(t_1)] = 0$ et il y a trois possibilités :

1. comme $\bar{f}(0) = 0$, il s'ensuit que $t \mapsto x(t) = \min \{0, (1 + a) + [x(t_0) - (1 + a)]e^{-t+t_0}\}$ est une solution globale.
2. comme $\bar{f}(1 + a) = 0$, il s'ensuit que $t \mapsto x(t) = \min \{0, (1 + a) + [x(t_0) - (1 + a)]e^{-t+t_0}\} + (1 + a)(t - t_1)^+$ est une autre solution globale.
3. comme la solution $t \mapsto x(t) = 2 + (x(t_0) - 2)e^{-t+t_0}$ est prolongeable sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ où $t_2 = t_0 + \ln[(1 + a) - x(t_0)]$, et puisque pour tout $t^* \in]t_1, t_2]$ on a $0 < x(t^*) \leq a$, il est possible de continuer la construction de solutions globales à partir de t^* via les points B et C.

B. si $x(t_0) \geq a$. La dynamique de $\dot{x}$ ne permettant pas de construire une solution locale pour $x(t_0) = a$ et $\dot{x}(t_0^+) = 1$, la solution est donnée par la formule $x(t) = x(t_0)e^{-t+t_0}$. Elle est

décroissante, $\dot{x}$ croît, et c'est l'unique solution tant que $x(t)$ est plus grand que a .

Ensuite, dès $t_1 = t_0 + \ln[x(t_0)/a]$, par construction $x(t_1) = a$, $\dot{x}(t_1^-) = -a$, $\bar{f}[\dot{x}(t_1)] = -a$ et d'après ci-dessus, $\dot{x}$ doit continuer sur cette partie croissante de $\bar{f}$, sans passer à la valeur $\dot{x}(t_1^+) = 1$.

En particulier, la solution $t \mapsto x(t) = x(t_0)e^{-t+t_0}$ est une solution globale sur l'intervalle $[t_1, +\infty[$.

Par contre, d'autres solutions sont possibles puisque pour tout $t^* \in]t_1, +\infty[$ on a $0 < x(t^*) < a$ et il est possible de continuer la construction de solutions globales à partir de t^* via les points A ou C.

C. si $0 < x(t_0) < a$, trois scénarios sont possibles,

1. ou bien la solution est recherchée sous la forme $x(t) = (1+a) + [x(t_0) - (1+a)]e^{-t+t_0}$ suivant le point A.
2. ou bien la solution est recherchée sous la forme $x(t) = x(t_0)e^{-t+t_0}$ suivant le point B.
3. ou bien la solution est recherchée sous la forme $x(t) = x(t_0)e^{\frac{t-t_0}{a}}$. Elle est croissante, tout comme $\dot{x}$, et elle est constructible sur un intervalle maximal $[t_0, t_1]$ où $t_1 = t_0 + a \ln[a/x(t_0)]$.

Par construction $x(t_1) = a$, $\dot{x}(t_1^-) = 1$, $\bar{f}[\dot{x}(t_1)] = -a$ et pour tout $t^* \in [t_0, t_1]$ on a $0 < x(t^*) \leq a$ et il est possible de continuer la construction de solutions globales à partir de t^* via les points A ou B.

Supposons par exemple que la fonction propre φ_1 présentée préalablement vérifie $0 \leq \varphi_1(x) \leq \frac{a}{2}$, alors une solution du problème (2.34) est donnée par $\alpha\varphi_1$, où :

$$\alpha_0 : t \in [0, +\infty[\mapsto x_0 e^{-t},$$

une autre par

$$\alpha_1 : t \mapsto x_0 [e^{t/a} 1_{[0, a \ln(2)[} + 2e^{-t+a \ln(2)} 1_{[a \ln(2), \infty[}],$$

ou encore

$$\begin{aligned} \alpha_2 : t \mapsto x_0 [e^{t/a} 1_{[0, a \ln(2)[} + 2e^{-t+a \ln(2)} 1_{[a \ln(2), (a+1) \ln(2)[} \\ + x_0 [e^{\frac{t-(a+1) \ln(2)}{a}} 1_{[(a+1) \ln(2), (2a+1) \ln(2)[} + 2e^{-t+(2a+1) \ln(2)} 1_{[(2a+1) \ln(2), +\infty[}], \end{aligned}$$

et ainsi de suite, on est en mesure de construire une infinité de solutions absolument continues à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ pour le problème (2.34).

Remarque 2.5.

On suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}^-$ avec $f(0) = 0$, $g \in L^2(\Omega)$ et $g + \Delta u_0 \leq 0$. Désignons par $\bar{f}$ la fonction définie pour tout réel r par $\bar{f}(r) = f(r)$ si $r \leq 0$ et $\bar{f}(r) = 0$ sinon. Alors pour tout réel strictement positif ϵ , il existe une unique solution $\bar{u}_\epsilon$ au problème :

$$\bar{f}(\partial_t \bar{u}_\epsilon) - \Delta \bar{u}_\epsilon - \epsilon \Delta \partial_t \bar{u}_\epsilon = g \quad \text{avec} \quad u(t=0) = u_0.$$

Cette solution est donnée par la méthode itérative présentée dans le théorème 2.3 et le principe du maximum affirme que si $g + \Delta u^k \leq 0$ alors $\frac{u^{k+1} - u^k}{h} \leq 0$.

D'ailleurs,

$$g + \Delta u^{k+1} = \frac{h}{h + \epsilon} \bar{f}\left(\frac{u^{k+1} - u^k}{h}\right) + \frac{\epsilon}{\epsilon + h} (g + \Delta u^k) \leq 0.$$

À la limite sur $h \rightarrow 0^+$, on a $\partial_t u \leq 0$ donc, $\bar{f}(\partial_t u) = f(\partial_t u)$ et il existe alors une solution du problème pseudo-parabolique de Barenblatt.

6 Application à l'inclusion différentielle de type de Barenblatt

Dans cette partie, on s'intéresse au cas $\epsilon = 0$ et f est un graphe maximal monotone de $\mathbb{R}^2$. On considère alors l'inclusion différentielle suivante : rechercher u dans un espace fonctionnel adéquat solution du problème suivant :

$$g \in f(\partial_t u) - \Delta u, \quad u(., 0) = u_0 \quad \text{et} \quad u(t, .)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \quad (2.35)$$

où $f \subset \mathbb{R}^2$ est un graphe maximal monotone de $\mathbb{R}^2$ tel que :

1. On dispose de la propriété de « sectorisation » : $\exists \mu > 0, \forall (r, a) \in \mathbb{R} \times \{f(r)\}, |a| \geq \mu|r|$.
2. $f^0(L^2(Q)) \subset (L^2(Q))$ où f^0 désigne la section principale de f avec une norme minimale (cf. H. Brézis [26] ou R. E. Showalter [83]).
3. $g \in L^2(Q)$ et $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Avant de mener l'étude du problème, donnons quelques propriétés découlant de l'hypothèse 2. ci-dessus.

Lemme 2.5. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $f^0(L^2(Q)) \subset (L^2(Q))$,
2. $\forall \alpha > 0, \exists \beta > 0, f^0(B_{L^2(Q)}(0, \alpha)) \subset (B_{L^2(Q)}(0, \beta))$,
3. $\exists a_1, a_2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f^0(x)| \leq a_1|x| + a_2$.

Démonstration. Notons en premier lieu que 2. ou 3. entraînent 1. et que 3. entraîne 1. et 2.

Supposons 1. et, par l'absurde, que 2. n'est pas vérifiée. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\beta > 0$, il existe $u_\beta \in L^2(Q)$ avec $\|u_\beta\|_{L^2(Q)} < \alpha$ et $\|f(u_\beta)\|_{L^2(Q)} \geq \beta$.

Quitte à encore appeler u_β la fonction prolongée par 0, comme Q est borné, il existe $R > 0$ et il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\beta > 0$, il existe $u_\beta \in L^2(B(0, R))$ avec $\|u_\beta\|_{L^2(B(0, R))} < \alpha$ et $\|f^0(u_\beta)\|_{L^2(B(0, R))} \geq \beta$.

Le changement de variable $y = a + \frac{r}{R}x$ nous conduit à : il existe $R > 0$ et $\alpha > 0$ tel que pour tout $r > 0$ (a priori petit), tout a de $\mathbb{R}^d$ et tout $\beta > 0$, il existe $u_\beta \in L^2(B(a, r))$ avec $\|u_\beta\|_{L^2(B(a, r))} < \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{d}{2}} \alpha$ et $\|f^0(u_\beta)\|_{L^2(B(a, r))} \geq \beta$.

Ainsi, pour un entier positif n et tout ouvert non vide $O_n \subset \Omega$, il existe a_n dans O_n , $r_n > 0$ suffisamment petit et $u_n \in L^2(B(a_n, r_n))$ tel que : $\bar{B}(a_n, r_n) \subset O_n$, $\|u_n\|_{L^2(B(a_n, r_n))} < \left(\frac{r_n}{R}\right)^{\frac{d}{2}} \alpha < \frac{1}{n}$

et $\|f^0(u_n)\|_{L^2(B(a_n, r_n))} \geq 1$.

En notant $O_{n+1} = O_n \setminus \bar{B}(a_n, r_n)$, on montre par récurrence l'existence d'une suite (a_n) de points de Q , d'une suite (r_n) de réels positifs et d'une suite (u_n) avec $u_n \in L^2(B(a_n, r_n))$ tel que $\cup_n B(a_n, r_n) \subset Q$, $B(a_n, r_n) \cap B(a_m, r_m) = \emptyset$ si $n \neq m$, $\|u_n\|_{L^2(B(a_n, r_n))} < \frac{1}{n}$ et $\|f^0(u_n)\|_{L^2(B(a_n, r_n))} \geq 1$.

Dès lors, si $u = u_n$ dans $B(a_n, r_n)$ et 0 ailleurs, u est par construction un élément de $L^2(Q)$ tel que $f^0(u) \notin L^2(Q)$.

Ceci étant absurde, l'assertion 2. est vraie.

Supposons 2. et, par l'absurde que $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f^0(x)|}{|x|} = +\infty$.

Ainsi, pour tout entier k , $\sup_{|x| \geq k} \frac{|f^0(x)|}{|x|} = +\infty$ et il existe une suite $(x_k) \subset \mathbb{R}$ telle que $|x_k| \geq k$ et $|f^0(x_k)| \geq k|x_k|$.

Pour k grand, il existe un ouvert $O_k \subset Q$ de mesure $\frac{\alpha^2}{4x_k^2}$ de sorte que si $u_k = x_k$ dans O_k et 0 sinon, on a $\|u_k\|_{L^2(Q)} = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ mais $\|f^0(u_k)\|_{L^2(Q)} \geq k\frac{\alpha}{2}$; chose incompatible avec 2. et $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f^0(x)|}{|x|} < +\infty$.

Il existe alors $a_1 > 0$ et un entier k_0 tel que $|f^0(x)| \leq a_1|x|$ pour tout $|x| \geq k_0$. Puis, l'assertion 3. est vraie en posant $a_2 = \max(|f^0(k_0)|, |f^0(-k_0)|)$. $\square$

Une solution de l'équation (2.35) sera une fonction $u \in H^1(Q) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ telle que $u(t=0) = u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et presque tout t de $]0, T[$,

$$\int_{\Omega} gv \, dx = \int_{\Omega} \{f^\#(\partial_t u)v + \nabla u \nabla v\} \, dx,$$

où $f^\#(\partial_t u) \in f(\partial_t u) \cap L^2(Q)$.

On envisagera ici de passer à la limite sur le paramètre ϵ vers 0 dans (2.1) pour établir l'existence d'une solution du problème (2.35). On énonce alors sous forme de théorème :

Théorème 2.5. *Soit f un graphe maximal monotone vérifiant 1. et 2. ; alors pour tout $g \in L^2(Q)$ et tout $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, il existe un élément u unique dans $u \in H^1(Q) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ solution de l'inclusion différentielle*

$$g \in f(\partial_t u) - \Delta u \quad \text{et} \quad u(\cdot, 0) = u_0. \quad (2.36)$$

De plus, l'application $u_0 \in H_0^1(\Omega) \mapsto u \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ est contractante.

Et, pour $t \in]0, T[$, on dispose de l'estimation d'énergie :

$$\int_{\Omega \times]0, t[} f^\#(\partial_t u) \partial_t u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 \, dx = \int_{\Omega \times]0, t[} g \partial_t u \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx.$$

Pour prouver ce résultat, on va régulariser le problème en utilisant l'approximation de Yosida de f (Cf. [26, 83]). On rappelle que :

Proposition 2.1. *Pour un réel strictement positif λ , on note $f_\lambda = \frac{I - (I + \lambda f)^{-1}}{\lambda}$ l'approximation de Yosida de f . Si $\lambda < \frac{1}{\mu}$, alors pour tout réel r , $|f_\lambda(r)| \geq \frac{\mu}{2}|r|$.*

Preuve. On prend $y = f_\lambda(r)$, alors $r \in (r - \lambda y) + \lambda f(r - \lambda y)$ et donc $y \in f(r - \lambda y)$. Par hypothèse, on a $|y| \geq \mu|r - \lambda y|$. Ainsi $|y| \geq \frac{\mu}{1+\mu\lambda}|r|$ et le résultat est bien vérifié. $\square$

Preuve. [du théorème 2.5] La fonction f_λ est une fonction lipschitzienne croissante, de sorte que pour les données g et u_0 respectivement dans $L^2(Q)$ et $H_0^1(\Omega)$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite généralisée $(u_{\epsilon,\lambda})$ dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ solution du problème pseudo-parabolique correspondant (2.1)-(2.2). Notre méthode consiste alors à passer à la limite sur ϵ et λ vers 0^+ .

On choisit la fonction-test $v = \partial_t u_{\epsilon,\lambda}$ dans la formulation (2.3), on obtient pour $t \in]0, T]$ l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times]0, t[} f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda}) \partial_t u_{\epsilon,\lambda} + \epsilon |\nabla \partial_t u_{\epsilon,\lambda}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon,\lambda}(t)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega \times]0, t[} g \partial_t u_{\epsilon,\lambda} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

D'après la proposition 2.1, on obtient $f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda}) \partial_t u_{\epsilon,\lambda} \geq \frac{\mu}{2} |\partial_t u_{\epsilon,\lambda}|^2$. Il résulte de (2.37) que la suite $(u_{\epsilon,\lambda})$ est bornée dans $H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Il existe donc un élément u dans $H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et une sous-suite de $(u_{\epsilon,\lambda})$ notée de même tel que $(u_{\epsilon,\lambda})$ converge vers u , faiblement dans $H^1(Q)$, fortement dans $L^2(Q)$ et presque partout dans Q , faiblement-* dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

De plus, $|f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda})| \leq |f^0(\partial_t u_{\epsilon,\lambda})|$ et le lemme 2.5 implique que $(f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda}))$ est borné dans $L^2(Q)$. Il existe alors un élément χ dans $L^2(Q)$ et une sous-suite de $(f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda}))$ indexée par ϵ, λ tel que $f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda})$ converge faiblement vers χ dans $L^2(Q)$.

On passe maintenant à la limite sur ϵ, λ vers 0^+ et on obtient d'une part

$$\chi - \Delta u = g, \text{ i.e. } \partial_t u - \Delta u = g + \partial_t u - \chi := h.$$

Puisque $h \in L^2(Q)$ et la condition initiale est dans $H_0^1(\Omega)$, on a l'estimation d'énergie ⁽²⁾ :

$$\int_Q |\partial_t u|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(T)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_Q [g + \partial_t u - \chi] \partial_t u dxdt. \quad (2.38)$$

D'autre part, puisque la suite $(u_{\epsilon,\lambda}(T))$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et puisque $u_{\epsilon,\lambda}(T)$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$, faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers $u(T)$; on obtient alors en passant à la limite supérieure dans (2.37)

$$\lim_{\epsilon, \lambda \rightarrow 0} \sup \int_Q f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda}) \partial_t u_{\epsilon,\lambda} dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(T)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_Q g \partial_t u dxdt.$$

D'où,

$$\lim_{\epsilon, \lambda \rightarrow 0} \sup \int_Q f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda}) \partial_t u_{\epsilon,\lambda} dxdt \leq \int_Q \chi \partial_t u dxdt.$$

2. $w \in H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0, T], H_0^1(\Omega), \sigma(H_0^1(\Omega), H_0^{-1}(\Omega)))$ (Cf. [73]).

Ainsi , d'après H. Brézis [26] proposition 2.5 p. 27, pour tout $v \in L^2(Q)$, on obtient

$$0 \leq \int_Q [f_\lambda(v) - f_\lambda(\partial_t u_{\epsilon,\lambda})](v - \partial_t u_{\epsilon,\lambda}) dx,$$

de sorte qu'on ait d'après H. Brézis [26] proposition 2.6 p.28 pour tout $v \in L^2(Q)$

$$0 \leq \int_Q [f^0(v) - \chi](v - \partial_t u) dx.$$

Puisque f^0 est la section principale de f , la proposition 2.7 p.29 dans [26] assure que $\chi \in f(\partial_t u)$ et u est alors une solution du problème (2.35).

Concernant l'unicité de la solution, on note u et $\hat{u}$ deux solutions du problème (2.35) pour les conditions initiales u_0 et $\hat{u}_0$ et les seconds membres g et $\hat{g}$. Alors, en prenant $w = u - \hat{u}$, on obtient que w est l'unique solution dans $W^{1,2}(0, T; H_0^1(\Omega))$ du problème $w_t - \Delta w = g - \hat{g} + w_t - [f^\#(u_t) - f^\#(\hat{u}_t)] := F \in L^2(Q)$ avec une condition initiale $w(t=0) = u_0 - \hat{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$. D'après la section précédente, on peut s'écrire

$$\|w_t\|_{L^2([0,t] \times \Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \|w(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{]0,t] \times \Omega} F w_t dx dt.$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(u - \hat{u})(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u_0 - \hat{u}_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{]0,t] \times \Omega} (g - \hat{g})(u - \hat{u})_t dx dt - \int_{]0,t] \times \Omega} [f^\#(u_t) - f^\#(\hat{u}_t)](u - \hat{u})_t dx dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_0 - \hat{u}_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{]0,t] \times \Omega} (g - \hat{g})(u - \hat{u})_t dx dt. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont uniques et de plus pour $t \in]0, T]$, l'application $u_0 \in H_0^1(\Omega) \mapsto u(t) \in H_0^1(\Omega)$ est contractante.

Enfin, pour $t \in]0, T]$, on dispose de l'estimation d'énergie :

$$\int_{\Omega \times]0,t]} f^\#(\partial_t u) \partial_t u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx = \int_{\Omega \times]0,t]} g \partial_t u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx.$$

□

Remarque 2.6. 1. On note d'abord que si Ω est un domaine convexe ou de classe $C^{1,1}$, la solution u satisfait $-\Delta u = g - f(\partial_t u) \in L^2(Q)$. Alors, pour presque tout t dans $]0, T[$, $u(t)$ est la solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème $-\Delta u(t) = g(t) - f(\partial_t u(t)) \in L^2(\Omega)$. La fonction $u(t)$ est donc dans $H^2(\Omega)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f(u_t(t))\|_{L^2(\Omega)}$.

Ainsi, $u \in W^{1,2}(0, T; H^2(\Omega); L^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0, T], H_0^1(\Omega))$.

2. Si f est une fonction lipschitzienne et $g = 0$, l'estimation a priori de la formule (2.37) est suffisante pour la démonstration.

7 Sur l'équation de Barenblatt-Sobolev stochastique

Nous nous intéressons dans cette section à l'étude d'une perturbation stochastique de l'équation de Barenblatt-Sobolev lorsque $\epsilon > \epsilon_0$.

Commençons par préciser ce que l'on entend par perturbation stochastique dans ce cas. Dans la cas linéaire, *i.e.*

$$\partial_t u - \Delta u - \Delta \partial_t u = \partial_t (Id - \Delta)u - \Delta u = g,$$

les auteurs David N. Keck *et al.* [65] ou K. B. Liaskos *et al.* [71] proposent l'étude de la perturbation, *via* le changement d'inconnue suivant :

$$dv - \Delta (Id - \Delta)^{-1} v dt = g dw \text{ où } v = (Id - \Delta)u.$$

Notons que cela revient à étudier

$$\partial_t \left[(Id - \Delta) \left[u - \int_0^t h dw \right] \right] - \Delta u = 0 \text{ où } \int_0^t h dw \text{ est l'intégrale stochastique de } h = (Id - \Delta)^{-1} g.$$

En fait, si l'on considère le problème déterministe suivant :

$$\partial_t u + Au = g$$

où A est un opérateur donné, alors, usuellement, on s'intéresse à la perturbation stochastique informelle suivante :

$$du + Au dt = g dw, \quad \text{où } W = \{w_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$$

représente un processus Brownien standard mono-dimensionnel sur un espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{F}, P)$, avec $w_0 = 0$.

En fait, en suivant la proposition de J. U. Kim [66], B. Ewald, M. Petcu et R. Temam [43], G. Vallet [93] ou G. Vallet et P. Wittbold [94] par exemple, l'écriture formelle de cette équation est :

$$\partial_t \left[u - \int_0^t g dw(s) \right] + Au = 0,$$

où l'on note $\int_0^t g dw(s)$ l'intégrale de Itô de g . Ainsi, $\int_0^t g dw(s)$ correspond à une perturbation de u dans la vitesse donnée par la dérivation en temps.

Aussi, on propose l'écriture suivante pour la version stochastique du problème pseudo-parabolique (2.4) :

$$\begin{aligned} f \left(\partial_t \left[u - \int_0^t g dw(s) \right] \right) - \Delta u - \epsilon \Delta \partial_t \left[u - \int_0^t g dw(s) \right] &= 0 \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad u(t=0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.39}$$

i.e.

$$\begin{aligned} f(\partial_t \Lambda) - \Delta \Lambda - \epsilon \Delta \partial_t \Lambda &= \int_0^t \Delta g dw(s) \\ \Lambda &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad u(t=0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.40}$$

où on note $\Lambda = u - \int_0^t gdw(s)$.

On suppose alors que g est un élément de $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, de sorte que d'après [58] p.34 prop. 3.3, il vient, p.s. dans Θ , que $\Delta \int_0^t gdw(s) = \int_0^t \Delta gdw(s)$ comme élément de $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$.

Ainsi, pour un ω presque sûrement fixé dans Θ , le problème (2.40) est bien posé dans Q . Ensuite, le caractère lipschitzien de l'application décrite dans la proposition 2.2 et la $\mathcal{F}_t$ mesurabilité de $\int_0^t \Delta gdw(s)$ assurent d'une part la mesurabilité progressive de Λ comme solution au problème ci-dessus ; et d'autre part de sa régularité. D'où,

Proposition 2.2. *Il existe une unique solution progressivement mesurable u dans $L^2([0, T] \times \Theta, H_0^1(\Omega))$, telle que $\partial_t \left(u - \int_0^t gdw \right)$ appartient à $L^2([0, T] \times \Theta, H_0^1(\Omega))$, au problème (2.39).*

Chapitre 3

Simulations numériques

Dans cette partie, on présente des illustrations numériques du problème modèle étudié au chapitre 1. Pour cela on utilise une méthode d'éléments finis en dimension un d'espace, implémentée à l'aide de Matlab. Cette étude a pour but d'illustrer numériquement l'influence d'une perturbation pseudo-parabolique sur une équation parabolique non linéaire. Cela fait suite à quelques premières simulations illustrant des phénomènes d'érosion-sédimentation en Géologie stratigraphique, développés récemment par S.N.Antonov *et al.* dans [4], [5] et [6]. Il s'agissait alors de rendre compte d'un « principe du maximum » pour la vitesse $\partial_t u$.

Pour ce travail, on utilise les scripts `fem1d_nonlinear` développés par J. Burkardt dans [27] où l'auteur utilise une méthode d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ -conformes programmée en Matlab pour résoudre des équations de type diffusion-convection-réaction (voir aussi J. Alpert *et al.* [27]). On se propose alors de modifier ces codes pour la résolution de problèmes pseudo-paraboliques non linéaires, par contre, l'analyse de la convergence de la méthode ne fait pas l'objet de ce chapitre. Une première partie sera consacrée à une présentation de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension un d'espace pour l'équation pseudo-parabolique non linéaire. Ensuite, pour différents cas, on propose d'illustrer la convergence de la méthode lorsque la solution exacte est connue, puis d'illustrer l'influence du terme pseudo-parabolique par des choix particuliers de sources ou de données initiales. Les différentes illustrations portent sur : le cas linéaire, autrement appelé problème de Sobolev ; le cas d'une viscosité non linéaire positive, puis changeant de signe ; enfin le cas de l'équation de Barenblatt, c'est-à-dire lorsque $f \neq Id$.

Les modifications principales du code initial résident dans l'assemblage des matrices et proviennent de la discrétisation des termes non linéaires « non classiques » et dans la méthode de Newton employée pour la résolution numérique des systèmes non linéaires (voir [36], [79] et [85]).

1 Introduction

On considère un intervalle ouvert $\Omega =]x_l, x_r[$ de $\mathbb{R}$ et T un réel strictement positif. Rappelons qu'en dimension un d'espace, le problème étudié au chapitre 1 s'écrit : rechercher u dans $H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel que

$$f\left(t, x, \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + b\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] = g \quad \text{dans } Q =]0, T[\times \Omega, \quad (3.1)$$

avec la condition de Cauchy

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.2)$$

Les données seront choisies de sorte que le problème (3.1)-(3.2) admette une solution unique.

Dans ce paragraphe, on suppose que les fonctions a et b sont d'une seule variable réelle et le problème devient : rechercher une fonction $u :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] = g \quad \text{dans } Q =]0, T[\times \Omega, \quad (3.3)$$

$$u(t, x_l) = u(t, x_r) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (3.4)$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.5)$$

Pour la discrétisation temporelle, on utilise la même discrétisation que dans l'étude théorique, à savoir un schéma implicite. Dans le cas parabolique, la convergence d'une telle méthode ne nécessite pas *a priori* de conditions de type CFL, toutefois, on verra par la suite que cette affirmation devient caduque dans le cas pseudo-parabolique.

On note N_t le nombre de sous-intervalles de temps $[0, T]$ et $\Delta t = \frac{T}{N_t}$ le pas, uniforme, de discrétisation en temps. On note $t_k = k\Delta t$ pour $0 \leq k \leq N_t$. Aussi, on note u^k l'approximation de $u(t_k)$. Le schéma implicite d'Euler du problème (3.3)-(3.5) est alors : chercher u^{k+1} , connaissant u^k , tel que

$$f\left(\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u^{k+1}) \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} - b(u^{k+1}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} \right) \right] = g^{k+1} \quad k = 0, 1, \dots, N_t - 1, \quad (3.6)$$

$$u^{k+1}(x_l) = u^{k+1}(x_r) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_t - 1, \quad (3.7)$$

où g^{k+1} est une approximation de g en t_{k+1} .

Ainsi, la formulation variationnelle du problème (3.6)-(3.7) s'écrit : connaissant $u^k \in H_0^1(\Omega)$, rechercher une fonction $u^{k+1} \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} f\left(\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}\right) v dx + \int_{x_l}^{x_r} a(u^{k+1}) \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{x_l}^{x_r} b(u^{k+1}) \frac{\partial}{\partial x} (u^{k+1} - u^k) \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ = \int_{x_l}^{x_r} g^{k+1} v dx, \quad k = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou encore,

$$\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} f\left(\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}\right) v dx + \int_{x_l}^{x_r} \left[a(u^{k+1}) + \frac{b(u^{k+1})}{\Delta t} \right] \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ - \int_{x_l}^{x_r} \frac{b(u^{k+1})}{\Delta t} \frac{\partial u^k}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \int_{x_l}^{x_r} g^{k+1} v dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

On considère maintenant une subdivision spatiale de l'intervalle $[x_l, x_r]$ en N_x sous-intervalles

$$x_l = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{N_x+1} = x_r.$$

On pose $h_i = x_i - x_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq N_x + 1$ et

$$h = \max_{1 \leq i \leq N_x+1} h_i.$$

Pour construire une approximation éléments finis $\mathbb{P}_1$ -conformes u_h de u , on choisit un sous espace de dimension finie V_h de $H_0^1(\Omega)$ constitué de fonctions continues affines par morceaux :

$$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega); \quad v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq i \leq N_x; \quad v_h(x_l) = v_h(x_r) = 0\}.$$

En remplaçant l'espace fonctionnel $H_0^1(\Omega)$ par V_h , la formulation variationnelle approchée du problème (3.9) est alors : rechercher u_h^{k+1} dans V_h , connaissant $u_h^k \in V_h$, tel que pour tout v_h de V_h

$$\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} f \left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t} \right) v_h dx + \int_{x_l}^{x_r} \left[a(u_h^{k+1}) + \frac{b(u_h^{k+1})}{\Delta t} \right] \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} dx \\ - \int_{x_l}^{x_r} \frac{b(u_h^{k+1})}{\Delta t} \frac{\partial u_h^k}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} dx - \int_{x_l}^{x_r} g^{k+1} v_h dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned} \quad (3.10)$$

On introduit les fonctions ϕ_i de V_h , appelées fonctions chapeaux, définies par :

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.11)$$

La formule explicite des ϕ_i est alors définie par

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.12)$$

On vérifie aisément que la famille $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N_x}$ est une base de V_h qui est de dimension N_x .

Par conséquence, on écrit v_h de V_h comme combinaison linéaire des $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N_x}$:

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_x} v_i \phi_i(x) \quad \forall x \in [x_l, x_r], \quad (3.13)$$

La fonction v_h de V_h est donc entièrement déterminée par ses valeurs aux noeuds x_i de la subdivision grâce à la formule (3.11).

On dérive v_h et on obtient alors

$$v_h'(x) = \sum_{i=1}^{N_x} v_i \phi_i'(x) \quad \forall x \in [x_l, x_r]. \quad (3.14)$$

On recherche la solution approchée u_h^{k+1} de V_h du problème (3.10) sous la forme $u_h^{k+1} = \sum_{j=1}^{N_x} u_j^{k+1} \phi_j$, où, pour chaque $k \in [0, N_t - 1]$, les coefficients $(u_j^{k+1})_{1 \leq j \leq N_x}$ sont des constantes à déterminer.

En prenant la fonction test $v = \phi_i$ pour $i = 1, 2, \dots, N_x$ dans la formule (3.10), on obtient alors les u_j^{k+1} ($i = 1, 2, \dots, N_x$) solutions du système non linéaire :

$$\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} f \left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t} \right) \phi_i dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{x_l}^{x_r} b(u_h^{k+1}) (u_h^k)' \phi_i' dx \\ + \int_{x_l}^{x_r} \left[a(u_h^{k+1}) + \frac{b(u_h^{k+1})}{\Delta t} \right] (u_h^{k+1})' \phi_i' dx \\ - \int_{x_l}^{x_r} g^{k+1} \phi_i dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_t - 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

On introduit alors pour $0 \leq k \leq N_t - 1$, $U_h^{k+1} = (u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{N_x}^{k+1})^T$ et on considère une application $F : \mathbb{R}^{N_x} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$, $U_h^{k+1} \mapsto F_i(U_h^{k+1})$ ($1 \leq i \leq N_x$) définie par

$$\begin{aligned} F_i(U_h^{k+1}) = \int_{x_l}^{x_r} f \left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t} \right) \phi_i dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{x_l}^{x_r} b(u_h^{k+1}) (u_h^k)' \phi_i' dx \\ + \int_{x_l}^{x_r} \left[a(u_h^{k+1}) + \frac{b(u_h^{k+1})}{\Delta t} \right] (u_h^{k+1})' \phi_i' dx - \int_{x_l}^{x_r} g^{k+1} \phi_i dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

On a donc à résoudre le système non linéaire $F(U_h^{k+1}) = \mathbf{0}$, où $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N_x}$. Ce système est résolu par la méthode de Newton (cf. [36], [79] et [85]) dont l'algorithme est le suivant :

- Pour $k = 0, 1, \dots, N_t - 1$, on initialise la valeur U_h^k ,
- on calcule alors U_h^{k+1} solution du système linéarisé par la méthode de Newton
- on choisit une estimation initiale $U_h^{k+1,0}$ de U_h^{k+1} ,
- pour $\ell = 0, 1, 2, \dots, \ell_{\max}$, on calcule $\Delta U_h^{k+1,\ell}$ en résolvant le système linéaire

$$F'(U_h^{k+1,\ell}) \Delta U_h^{k+1,\ell} = -F(U_h^{k+1,\ell}),$$

où $F'(U_h^{k+1,\ell})$ est le jacobien de F au point $U_h^{k+1,\ell}$,

- on pose alors $U_h^{k+1,\ell+1} = U_h^{k+1,\ell} + \Delta U_h^{k+1,\ell}$.

Par définition du jacobien, $F'_{ij}(U_h^{k+1,\ell}) = \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{k+1,\ell}}(U_h^{k+1,\ell})$ et on obtient donc

$$\begin{aligned} F'_{ij}(U_h^{k+1,\ell}) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{x_l}^{x_r} f' \left(\frac{u_h^{k+1,\ell} - u_h^{k,\ell}}{\Delta t} \right) \phi_i \phi_j dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{x_l}^{x_r} b'(u_h^{k+1,\ell}) (u_h^{k,\ell})' \phi_i' \phi_j dx \\ &\quad + \int_{x_l}^{x_r} \left[\phi_j a'(u_h^{k+1,\ell}) (u_h^{k+1,\ell})' + a(u_h^{k+1,\ell}) \phi_j' \right] \phi_i' dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int_{x_l}^{x_r} \left[\phi_j b'(u_h^{k+1,\ell}) (u_h^{k+1,\ell})' + b(u_h^{k+1,\ell}) \phi_j' \right] \phi_i' dx. \end{aligned} \quad (3.17)$$

D'où, on peut construire les matrices d'assemblage et on crée ainsi l'algorithme de résolution numérique du problème (3.3)-(3.5) dont le code est présent en annexe.

2 Résultats numériques

Dans chaque cas étudié, on commence par tester le programme de résolution numérique du problème (3.2)-(3.3) dont le code est donné en annexe. Comme la recherche de solution exacte, analytique, pour ce type de problèmes n'est pas triviale, la vérification du script se fera en choisissant une solution exacte arbitraire, notée u_e , de façon à obtenir les fonctions g (second membre) et u_0 (donnée initiale) *ad hoc*. Ensuite, on note u_h la solution approchée.

Dans la suite, on fixe le paramètre de précision dans le test d'arrêt de la méthode de Newton à $\epsilon = 10^{-8}$, le nombre maximal d'itérations acceptées étant de $i_{max} = 25$ et l'estimation initiale dans la méthode de Newton $U_k^{k+1,0} = (0.5)^{N_x}$ pour $0 \leq k \leq N_t - 1$.

2.1 Cas d'un problème linéaire ou équation de Sobolev

Il s'agit de prendre $f(r) = r$, a et b constants. On pourra prendre $a(r) = 1$, $b(r) = \tau$ avec τ un réel positif. Le problème (3.3)-(3.5) posé sur Q s'écrit alors : rechercher une fonction $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = g \text{ dans } Q, \\ u(t, x_l) = 0, \quad u(t, x_r) = 0 \quad t \text{ dans }]0, T[, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

i) Comparaison avec une solution exacte connue. On prend sur $[0, T] \times [-1, 1]$ la solution exacte $u_e(t, x) = e^t \sin(\pi x)$ de sorte qu'il soit possible de définir explicitement la fonction g .

Pour $\tau = 1$, on construit la courbe d'erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps. Pour construire la courbe d'erreur à l'instant $T = 1$ en espace, on fixe le pas du temps en prenant $N_t = 1000$, i.e $\Delta t = 0.001$ et on calcule l'erreur avec différents pas de l'espace. De même, pour construire la courbe d'erreur en temps à l'instant $T = 1$, on fixe le pas d'espace en prenant $N_x = 500$, i.e $\Delta x = 0.0040$ et on calcule l'erreur avec différences pas de temps. Le résultat numérique est résumé dans le tableau de la figure 3.1 pour l'espace et dans le tableau de la figure 3.2 pour le temps, en précisant le nombre d'itérations dans la méthode de Newton.

N_x	Δx	$\ u_e(t, x) - u_h(t, x)\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
20	0.1000	0.0334	2
25	0.0800	0.0212	2
30	0.0667	0.0145	2
35	0.0571	0.0105	2
40	0.0500	0.0080	2

FIGURE 3.1 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace du problème pseudo-parabolique linéaire (3.18) à l'instant $T = 1$.

N_t	Δx	$\ u_e(t, x) - u_h(t, x)\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
5	0.2000	0.1179	2
10	0.1000	0.0598	2
15	0.0667	0.0400	2
20	0.0500	0.0301	2
25	0.0400	0.0241	2
30	0.0333	0.0201	2

FIGURE 3.2 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en temps du problème pseudo-parabolique linéaire (3.18) à l'instant $T = 1$.

En utilisant l'échelle logarithmique, on obtient la droite de régression d'équation $y = 2.0657x + 1.3595$ pour l'espace et la droite de régression d'équation $y = 0.9873x - 0.5466$ pour le temps. L'erreur en norme $L^2(\Omega)$ est donc d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps, ce qui est compatible avec la pratique. Les courbes d'erreurs sont illustrés dans la figure 3.3.

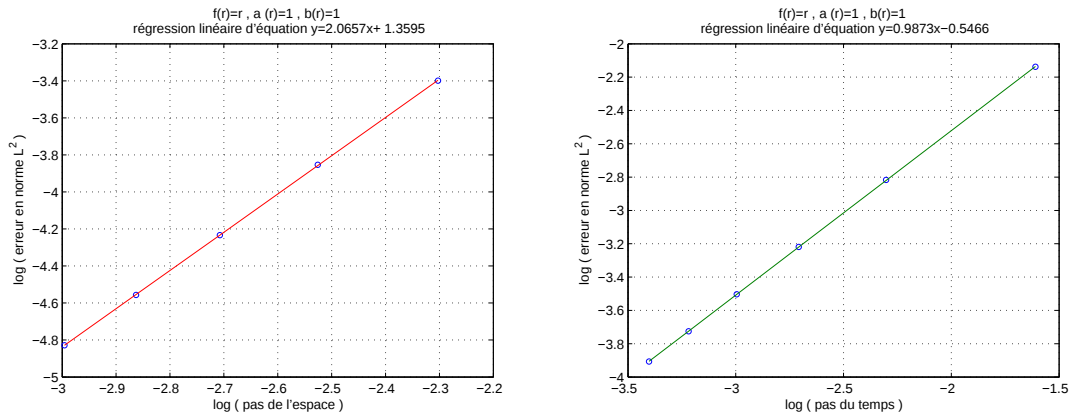


FIGURE 3.3 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps du problème pseudo-parabolique linéaire (3.18) à l'instant $T = 1$.

ii) Cas d'une source non régulière. Pour la donnée initiale nulle *i.e.* $u_0(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$, on prend la source g définie sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$ par $g(t, x) = 1$ si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $g(t, x) = -1$

si $x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ et $g(t, x) = 0$ sinon. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.4 pour différentes valeurs de τ .

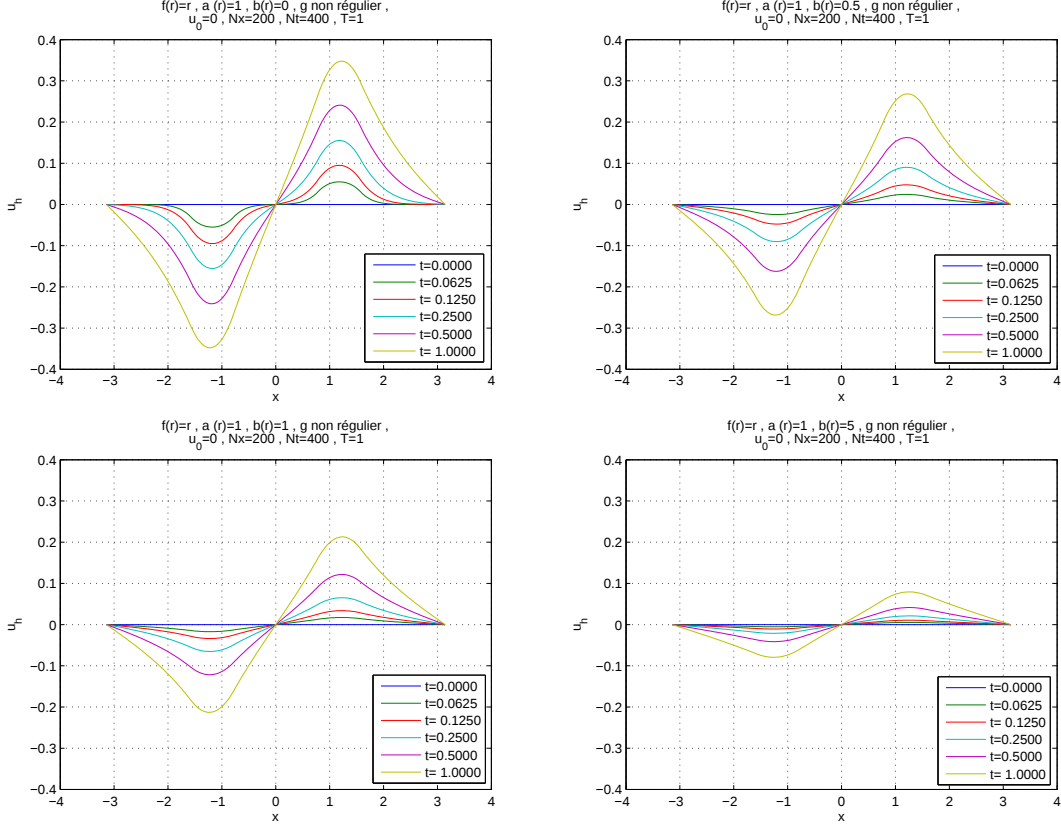


FIGURE 3.4 – Solution approchée du problème pseudo-parabolique linéaire (3.18) pour $\tau = 0$, $\tau = 0.5$, $\tau = 1$ et $\tau = 5$ (g non régulier, antisymétrique).

Remarque 3.1. Une première remarque consiste à observer, pour le problème pseudo-parabolique ($\tau > 0$), une diffusion plus rapide de la source vers les extrémités du domaine, par contre, le phénomène de type « Dirac » de la solution est freiné.

iii) Cas d'une condition initiale antisymétrique. Dans cet exemple, on considère une source nulle, *i.e.* $g(t, x) = 0$ sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$, et on prend comme condition initiale u_0 définie sur $[-\pi, \pi]$ par $u_0(x) = \frac{4}{\pi}x$ si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $u_0(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)$ si $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $u_0(x) = -\frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} + x)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}$ et $u_0(x) = 0$ ailleurs. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.5 pour des valeurs différentes de τ .

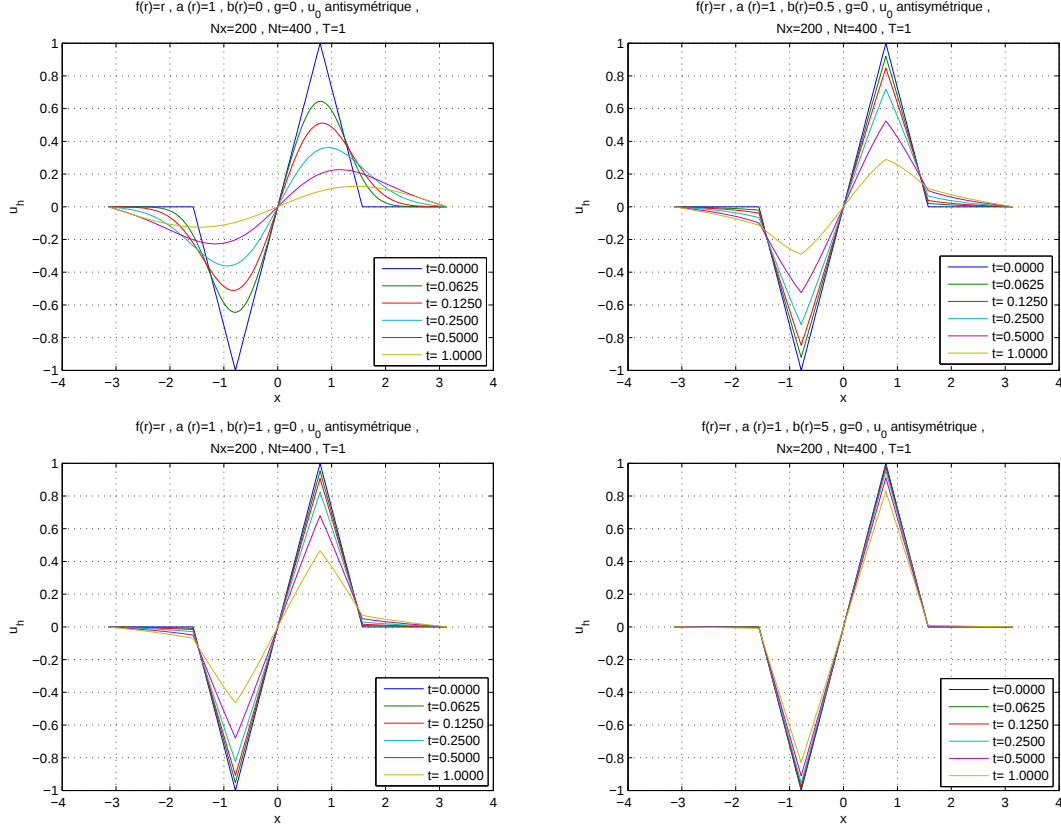


FIGURE 3.5 – Solution approchée du problème pseudo-parabolique linéaire (3.18) pour $\tau = 0$, $\tau = 0.5$, $\tau = 1$ et $\tau = 5$ (u_0 antisymétrique).

Remarque 3.2. On remarque ici que la donnée initiale prédéfinie la régularité de la solution dans le cas pseudo-parabolique. En effet, chaque itération en temps revient à résoudre le problème elliptique suivant : $u - (\Delta t + \tau) \Delta u = u_0 - \tau \Delta u_0$.

Dès lors, si $\tau > 0$ et si u_0 est dans $H_0^1(\Omega)$ et pas plus, il en sera de même pour la solution u .

iv) Cas d'une perturbation pseudo parabolique discontinue. Dans cet exemple, la fonction a reste inchangée i.e. $a(r) = 1$, mais b est constant par morceau i.e. $b(r) = 0.1$ si $r < 0$ et $b(r) = k$ si $r > 0$ pour k un réel positif arbitraire. On illustre des graphiques dans la figure 3.6 pour g antisymétrique avec $u_0 = 0$ comme dans l'exemple ii) et dans la figure 3.7 pour $g = 0$ avec u_0 antisymétrique comme dans l'exemple iii), où on observe la dissymétrie attendue.

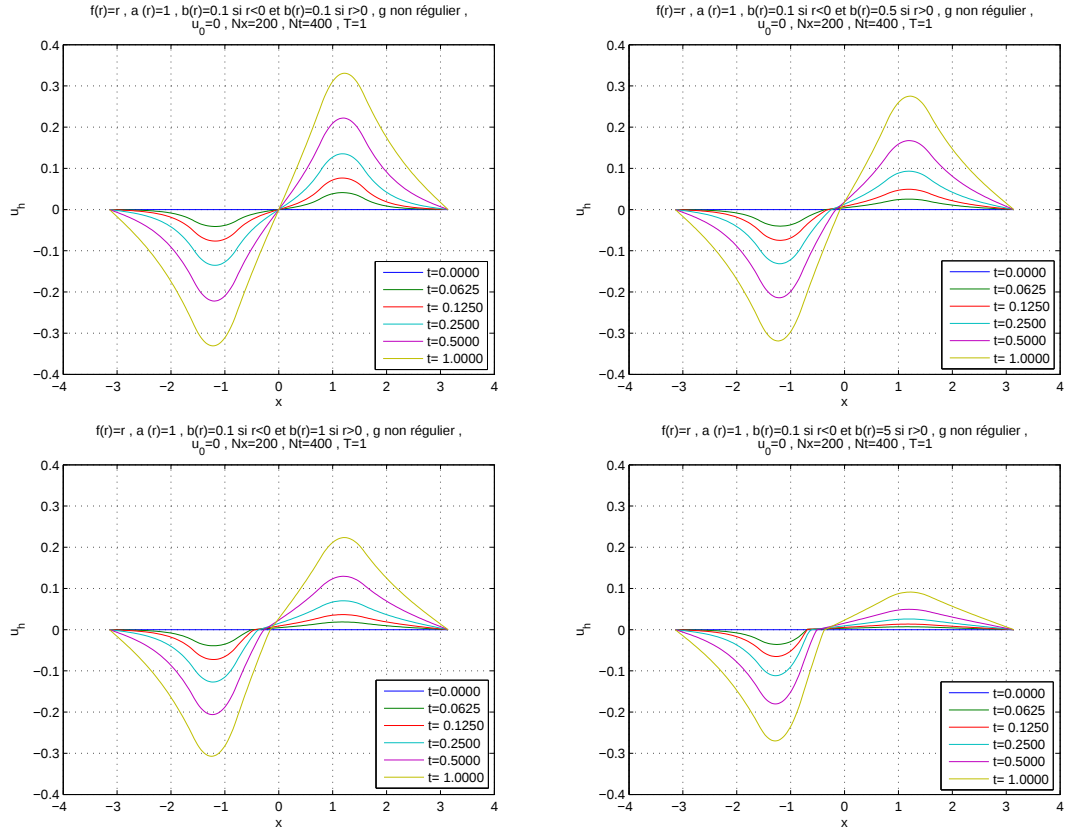


FIGURE 3.6 – Solution approchée du problème pseudo-parabolique linéaire (3.18) pour b discontinu $k = 0.1$, $k = 0.5$, $k = 1$ et $k = 5$ (g antisymétrique).

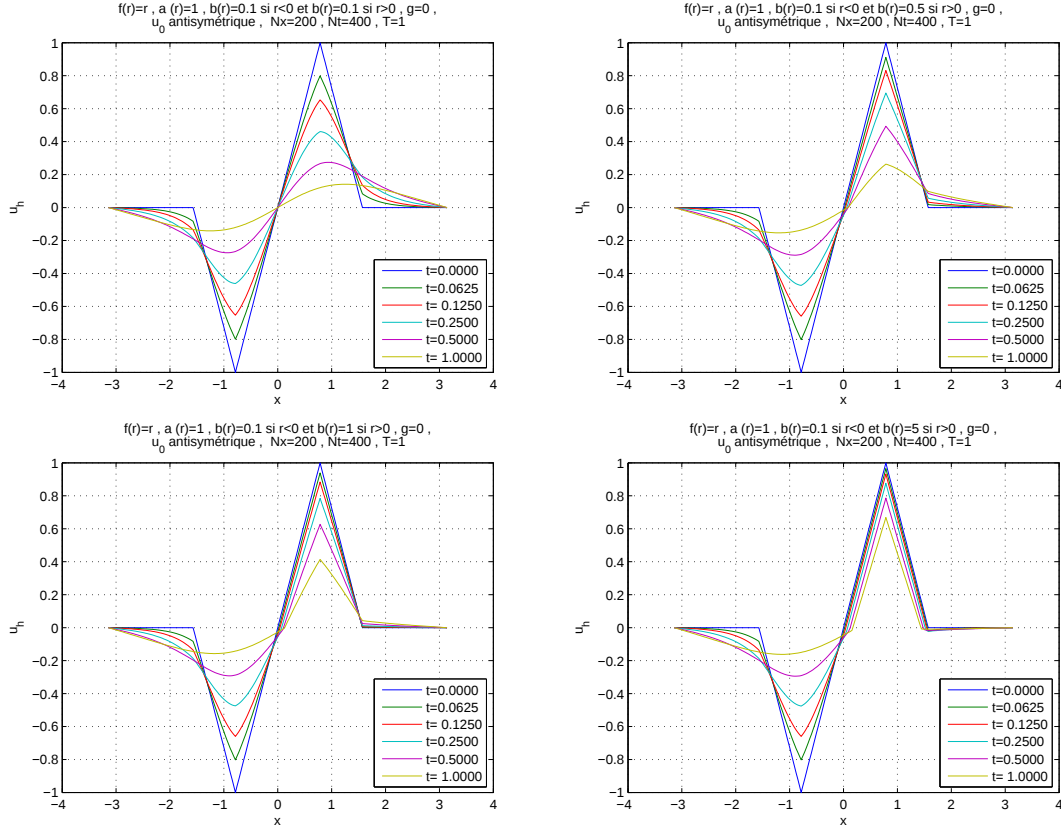


FIGURE 3.7 – Solution approchée du problème pseudo-parabolique linéaire (3.18) pour b discontinu $k = 0.1$, $k = 0.5$, $k = 1$ et $k = 5$ (u_0 antisymétrique).

2.2 Cas d'une viscosité non linéaire positive

Dans ce paragraphe, on conserve $f(r) = r$ et la fonction a est supposée lipschitzienne et strictement positive. On prend par exemple $a(r) = 2 + \arctan(r)$. La fonction b est une constante positive, on pourra prendre $b(r) = \tau$ avec différentes valeurs réelles positives pour τ . Le problème (3.3)–(3.5) posé sur Q s'écrit alors : rechercher une fonction $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = g \text{ dans } Q, \\ u(t, x_l) = 0, \quad u(t, x_r) = 0 \text{ dans }]0, T[, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.19)$$

i) Comparaison avec une solution exacte connue. On considère la solution exacte $u_e(t, x) = e^t \sin(\pi x)$ sur $[0, T] \times [-1, 1]$ et on impose g en conséquence.

Pour $\tau = 1$, on construit la courbe d'erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps à l'instant $T = 1$. Pour l'erreur en espace, on fixe le pas du temps en prenant à l'instant $T = 1$, $N_t = 1000$ *i.e.* $\Delta t = 0.001$ et on calcule l'erreur avec différents pas d'espace. De même, pour l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ en temps, on fixe le pas d'espace en prenant à l'instant $T = 1$, $N_x = 500$ *i.e.*

$\Delta x = 0.0040$ et on calcule l'erreur avec différents pas de temps. Les résultats numériques sont récapitulés dans le tableau de la figure 3.8 pour l'espace et dans le tableau de la figure 3.9 pour le temps.

N_x	Δx	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
20	0.1000	0.0349	3
25	0.0800	0.0224	3
30	0.0667	0.0154	3
35	0.0571	0.0112	3
40	0.0500	0.0085	3

FIGURE 3.8 – Erreur dans $L^2(\Omega)$ en espace du problème pseudo-parabolique (3.19) à l'instant $T = 1$.

N_t	Δt	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
10	0.1000	0.0488	4
15	0.0667	0.0327	4
20	0.0500	0.0245	4
25	0.0400	0.0197	4
30	0.0333	0.0164	4
40	0.0250	0.0123	4

FIGURE 3.9 – Erreur dans $L^2(\Omega)$ en temps du problème pseudo-parabolique (3.19) à l'instant $T = 1$.

En utilisant une échelle logarithmique, on obtient la droite de régression $y = 2.0395x + 1.3463$ pour l'espace et la droite de régression d'équation $y = 0.9935x - 0.7315$ pour le temps. Comme dans l'exemple précédant, l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ est donc d'ordre 2 en espace et est d'ordre 1 en temps. Les courbes d'erreur sont donnés dans la figure 3.10.

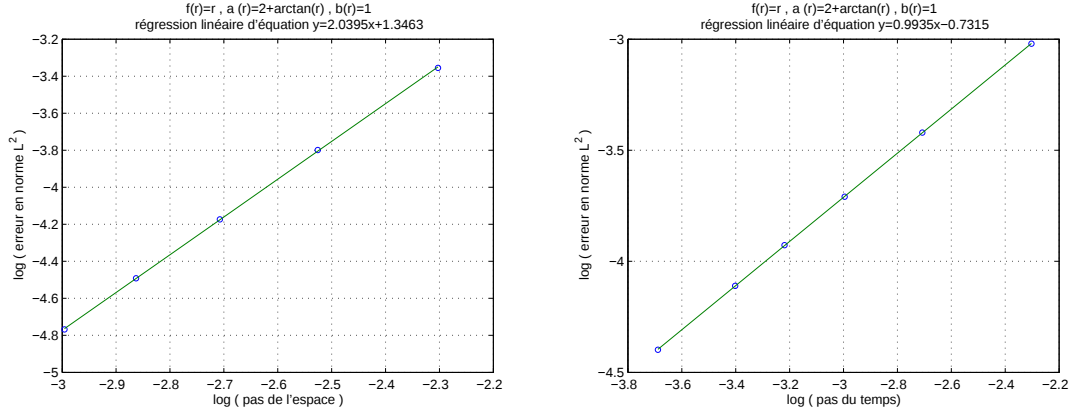


FIGURE 3.10 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps du problème pseudo-parabolique (3.19) à l'instant $T = 1$.

ii) Cas d'une source non régulière. Pour une donnée initiale nulle, *i.e.* $u_0(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$, on considère une source g définie sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$ par $g(t, x) = 1$ si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $g(t, x) = -1$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ et $g(t, x) = 0$ sinon. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.11 pour différentes valeurs de τ .

On est ici dans un cas non linéaire, non dégénéré par rapport à la partie parabolique du problème et les courbes sont comparables au cas linéaire. On observe toutefois une légère dyssymétrie dans les courbes, faible pour t petit, et plus visible à mesure que t augmente.

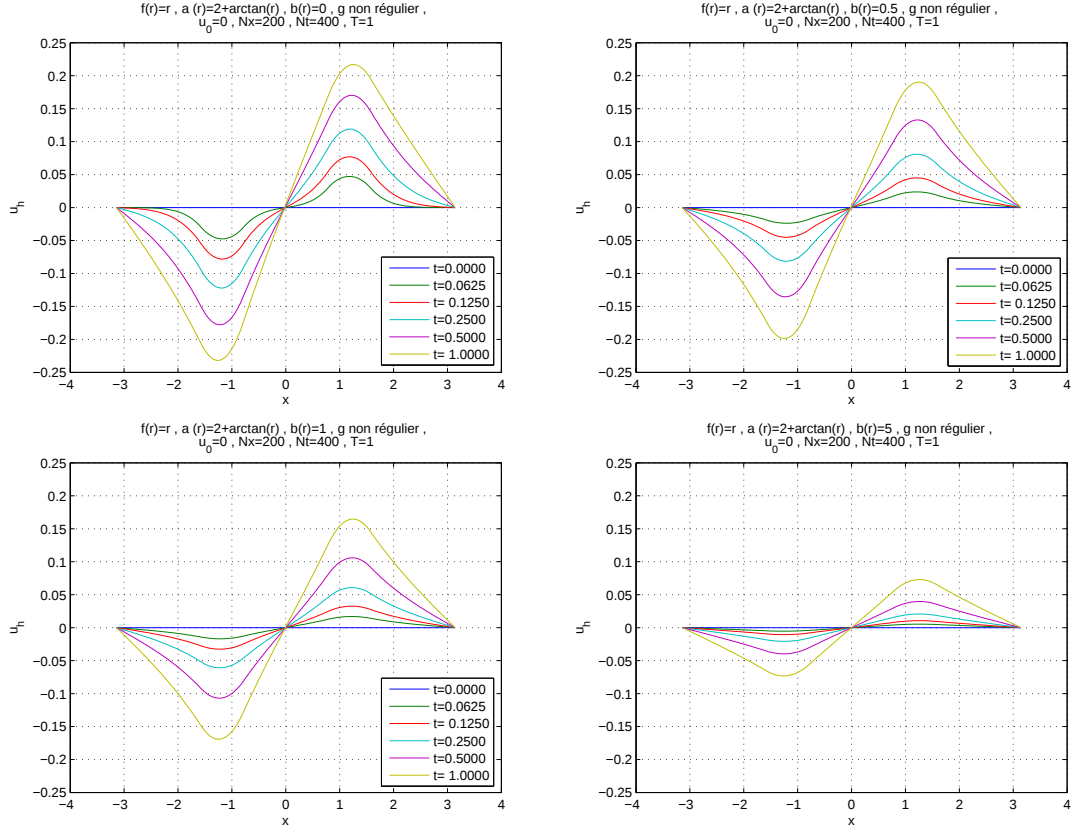


FIGURE 3.11 – Solution approchée du problème pseudo-parabolique (3.19) pour $\tau = 0, \tau = 0.5, \tau = 1$ et $\tau = 5$ (g non régulier et antisymétrique).

iii) **Cas d'une condition initiale antisymétrique.** On considère une source nulle, *i.e.* $g(t, x) = 0$ sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$, et on prend la condition initiale u_0 définie sur $[-\pi, \pi]$ par $u_0(x) = \frac{4}{\pi}x$ si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $u_0(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)$ si $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $u_0(x) = -\frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} + x)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}$ et $u_0(x) = 0$ ailleurs. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.12 pour $\tau = 0, 0.5, 1$ et 5 .

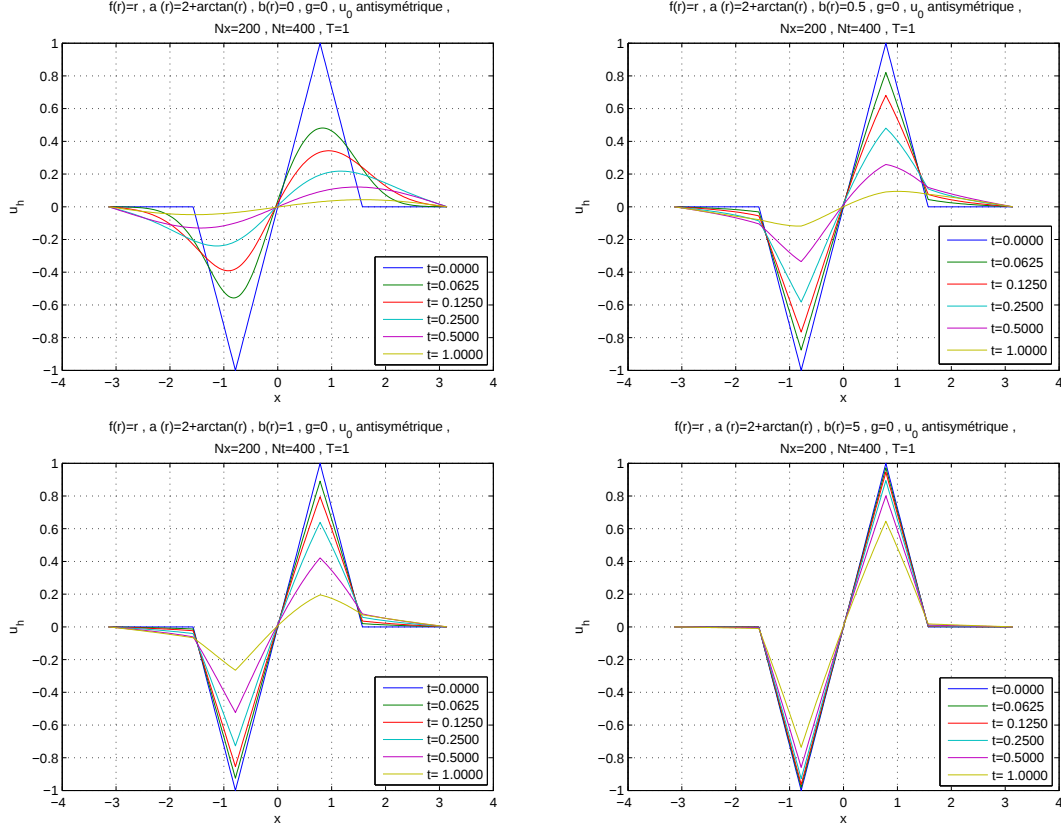


FIGURE 3.12 – Solution approchée du problème pseudo-parabolique (3.19) pour $\tau = 0, \tau = 0.5, \tau = 1$ et $\tau = 5$ (u_0 antisymétrique).

2.3 Cas d'une viscosité non linéaire qui change de signe.

On considère toujours $f(r) = r$ et la fonction a est lipschitzienne et de signe quelconque. Dans ce paragraphe, on prend $a(r) = \arctan(r)$. La fonction b est une constante strictement positive : $b(r) = \tau$, où τ est strictement positif. Le problème (3.3)-(3.5) posé sur Q s'écrit : rechercher une fonction $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [a(u) \frac{\partial u}{\partial x}] - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} = g \text{ dans } Q, \\ u(t, x_l) = 0, u(t, x_r) = 0 \text{ t dans }]0, T], \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.20)$$

i) **Comparaison avec une solution exacte connue.** On prend la solution exacte $u_e(t, x) = e^t \sin(x)$ sur $]0, T[\times]-1, 1[$ et le second membre g associé.

Pour $\tau = 1$, on construit la courbe d'erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps à l'instant $T = 1$. Pour l'erreur en espace, on fixe le pas du temps en prenant à l'instant $T = 1$, $N_t = 1000$ i.e. $\Delta t = 0.001$ et on calcule l'erreur avec différents pas d'espace. De même, pour l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ en temps, on fixe le pas d'espace en prenant à l'instant $T = 1$, $N_x = 500$ i.e. $\Delta x = 0.0040$ et on calcule l'erreur avec des pas de temps différents. Le résultat numérique est

récapitulé dans le tableau de la figure 3.13 pour l'espace et dans le tableau de la figure 3.14 pour le temps.

N_x	Δx	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
20	0.1000	0.0347	3
25	0.0800	0.0223	3
30	0.0667	0.0152	3
35	0.0571	0.0111	3
40	0.0500	0.0084	3

FIGURE 3.13 – Erreur dans $L^2(\Omega)$ en espace du problème pseudo-parabolique (3.20) à l'instant $T = 1$.

N_t	Δt	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
10	0.1000	0.1067	5
15	0.0667	0.0693	4
20	0.0500	0.0514	4
25	0.0400	0.0408	4
30	0.0333	0.0338	4
40	0.0250	0.0252	4

FIGURE 3.14 – Erreur dans $L^2(\Omega)$ en temps du problème pseudo-parabolique (3.20) à l'instant $T = 1$.

En utilisant une échelle logarithmique, on obtient la droite de régression $y = 2.0493x + 1.3636$ pour l'espace et la droite de régression d'équation $y = 1.0402x + 0.1516$ pour le temps. L'erreur en norme $L^2(\Omega)$ est donc d'ordre 2 en espace et est d'ordre 1 en temps. Les courbes d'erreur sont résumées dans la figure 3.15.

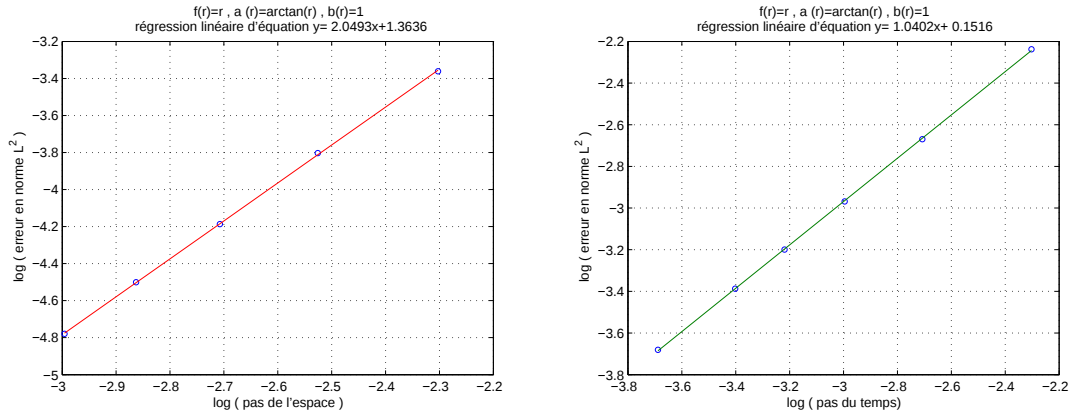


FIGURE 3.15 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps du problème pseudo-parabolique (3.20) à l'instant $T = 1$.

Remarque. En étudiant de plus près la superposition des courbes « solution exacte / solution approchée » lorsque τ est relativement petit, on remarque que dans la partie positive de la solution, la viscosité est positive et les courbes coïncident dès les valeurs grossières de Δx et Δt . Par contre, dans la partie négative de la solution, là où la viscosité est négative, il est nécessaire d'avoir des valeurs faibles de Δx et Δt .

Les simulations numériques ne montrent pas d'amélioration de la qualité de représentation en fixant arbitrairement l'un des pas de discrétisation et diminuant l'autre. Il faut alors réduire simultanément les deux pas de discrétisation, comme si une condition de type CFL était nécessaire. On illustre ceci dans les courbes suivantes lorsque $\Delta x = \Delta t$ ou $\Delta x = 10\Delta t$, avec une représentation meilleure dans le second cas.

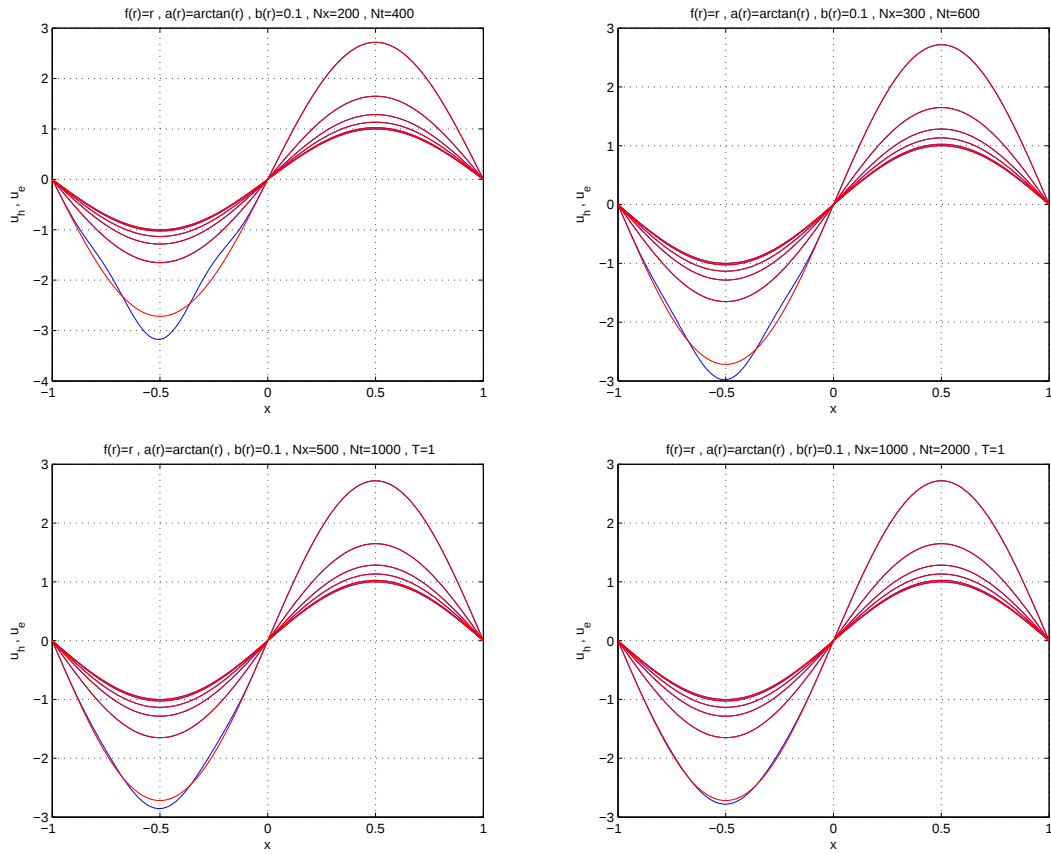
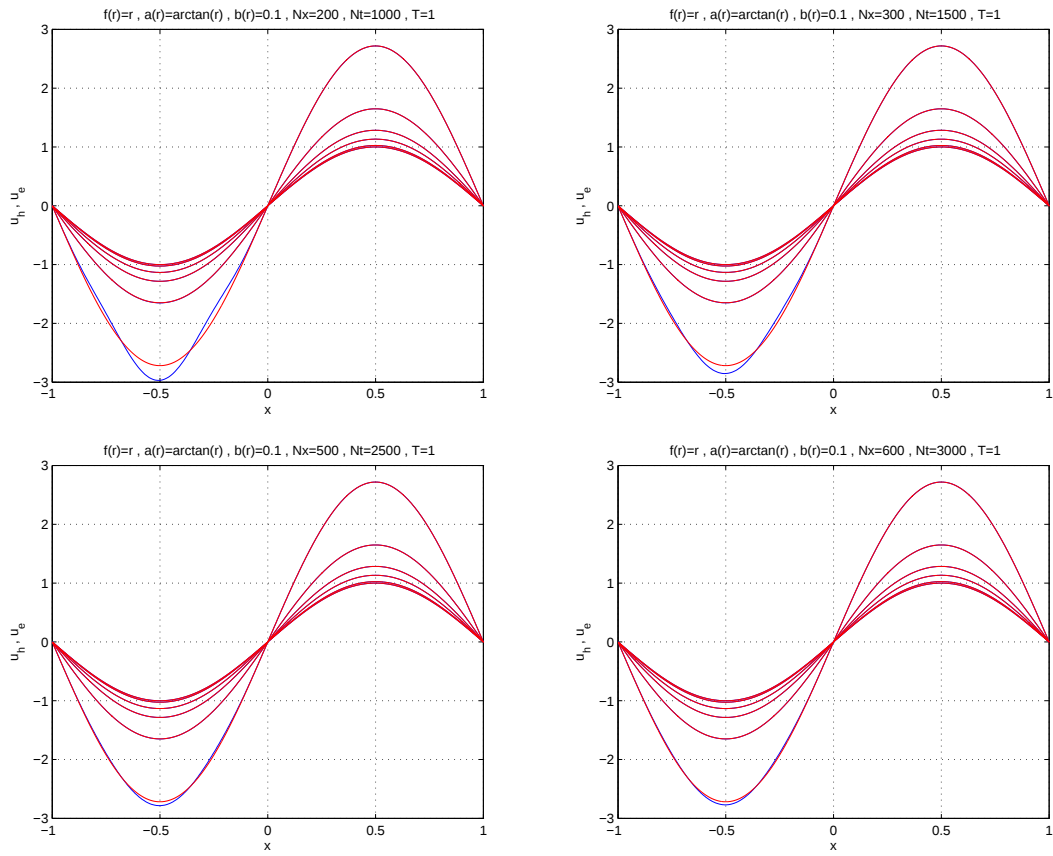


FIGURE 3.16 – Solution exacte (coube en rouge) et approchée (courbe en bleu) du problème (3.20) pour $\tau = 0.1$ (cas $\Delta x = \Delta t$ i.e. $N_t = 2N_x$). Chaque courbe de solutions correspondent à l'instant $t = 0.0000$, $t = 0.0250$, $t = 0.1250$, $t = 0.2500$, $t = 0.5000$ et $t = 1.0000$

t	N_x	N_t	$\ u_e(t, x) - u_h(t, x)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_e(t, x) - u_h(t, x)\ _{H_0^1(\Omega)}$	Nombre d'itérations
1.00	200	400	0.2140	2.2865	4
1.00	300	600	0.1223	1.3032	4
1.00	500	1000	0.0642	0.6835	4
1.00	1000	2000	0.0289	0.3069	4

 FIGURE 3.17 – Tableau d'erreurs dans $L^2(\Omega)$ pour le problème (3.20), pour $\tau = 0.1$ et $\Delta x = \Delta t$.

 FIGURE 3.18 – Étude similaire lorsque $\Delta x = 10\Delta t$ i.e. $N_t = 5N_x$.

t	N_x	N_t	$\ u_e(t, x) - u_h(t, x)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_e(t, x) - u_h(t, x)\ _{H_0^1(\Omega)}$	Nombre d'itérations
1.00	200	1000	0.1201	1.2669	4
1.00	300	1500	0.0643	0.6793	4
1.00	500	2500	0.0312	0.3310	4
1.00	600	3000	0.0245	0.2602	4

 FIGURE 3.19 – Tableau d'erreurs dans $L^2(\Omega)$ pour le problème (3.20), pour $\tau = 0.1$ et $\Delta x = 10\Delta t$.

Une explication à ce phénomène pourrait être la suivante : la discrétisation totale de ce type d'équations pseudo-paraboliques induit une influence plus importante de la matrice de rigidité que dans le cas parabolique. Lorsque la fonction a devient négative, même si d'un point de vue théorique l'opérateur différentiel spatial reste coercitif, sa version discrète ne donne pas une matrice à diagonale inconditionnellement dominante.

ii) Cas d'une source non régulière. On considère une donnée initiale nulle, *i.e.* $u_0(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$, et on prend comme source la fonction g définie sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$ par $g(t, x) = 1$ si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $g(t, x) = -1$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ et $g(t, x) = 0$ sinon. La solution approchée est donnée dans la figure 3.20 pour différentes valeurs de τ .

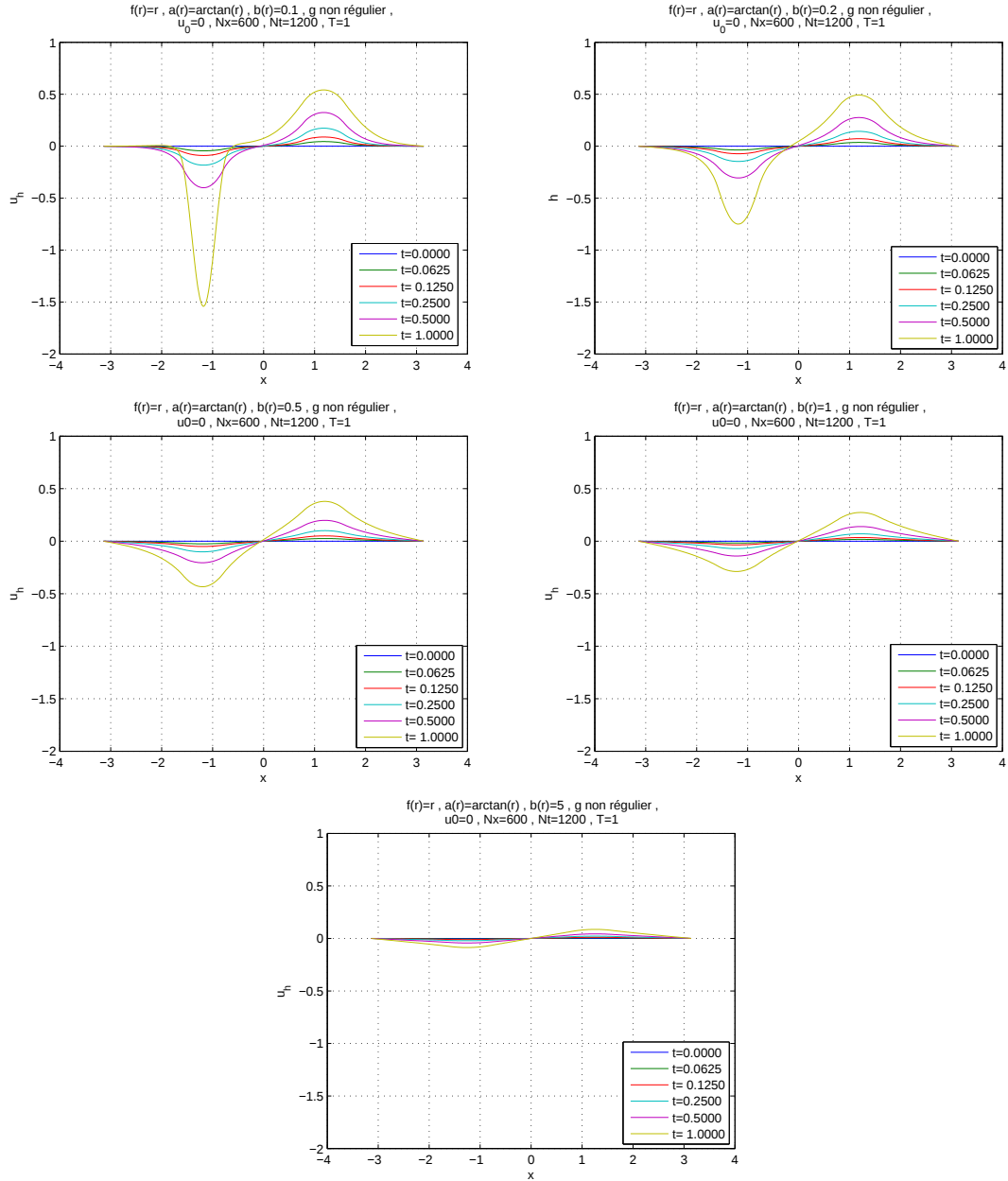


FIGURE 3.20 – Solution approchée du problème (3.20) pour $\tau = 0.1, 0.2, \tau = 0.5, \tau = 1$ et $\tau = 5$ (g non régulier et antisymétrique).

Dans la zone où x est positif, il en est de même pour $a(u)$ et on retrouve des courbes similaires à celles déjà rencontrées. Par contre, dans le cas contraire, et pour de faibles valeurs de τ , on observe une variation de plus en plus forte de la solution.

iii) Cas d'une condition initiale antisymétrique. On considère une source nulle, *i.e.* $g(t, x) = 0$ sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$, et on prend la condition initiale u_0 définie sur $[-\pi, \pi]$ par $u_0(x) = \frac{4}{\pi}x$ si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $u_0(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)$ si $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $u_0(x) = -\frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} + x)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}$ et $u_0(x) = 0$ ailleurs. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.21 pour des valeurs différentes de τ .

Cette explosion rapide s'illustre plus particulièrement dans la figure 3.21 lorsque $\tau = 0.1$. Cette variation est telle que l'on peut penser à un problème de convergence. Aussi, on illustre dans la Figure 3.22 la solution approchée pour des valeurs intermédiaires de t .

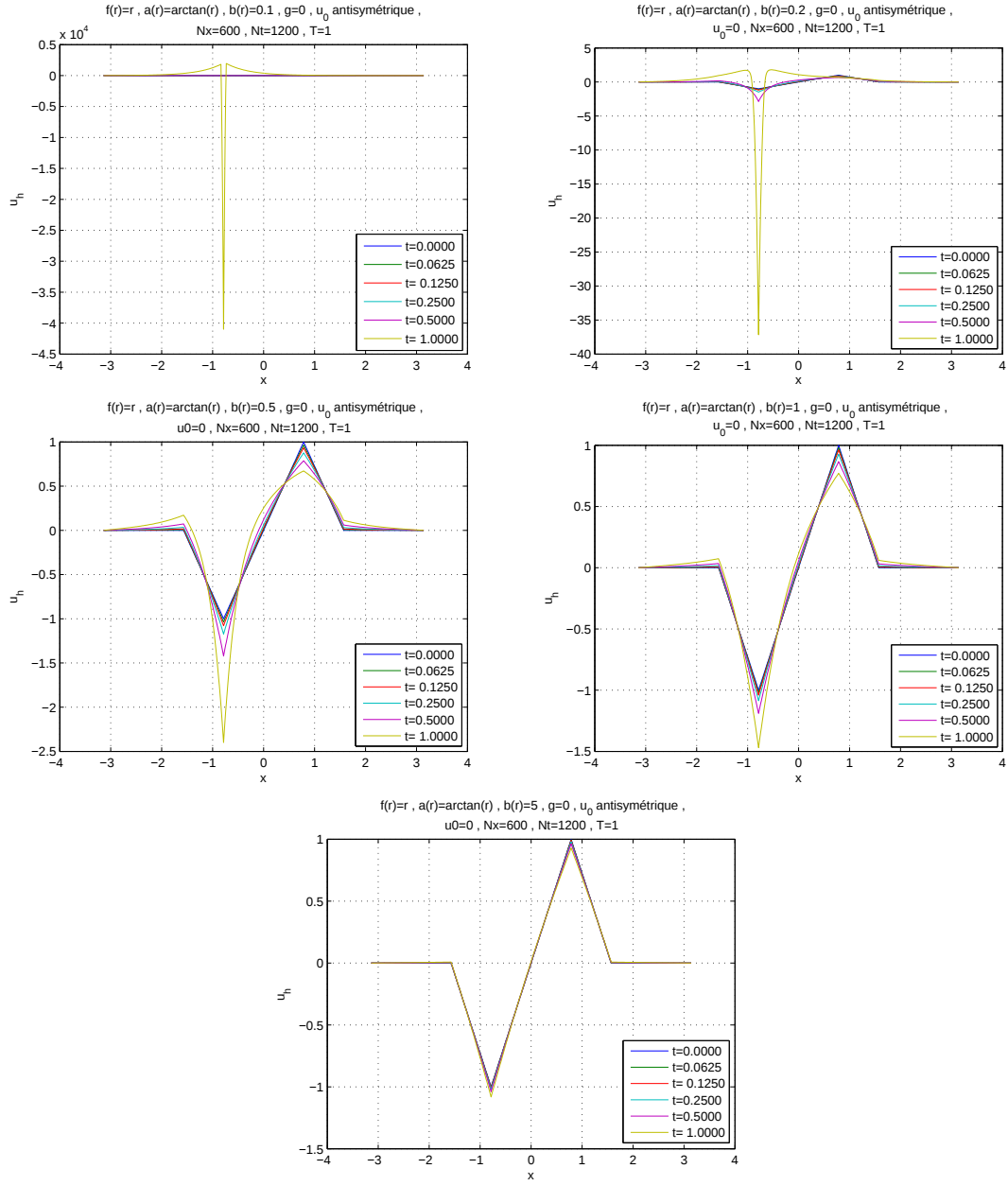


FIGURE 3.21 – Solution approchée du problème (3.20) pour $\tau = 0$, $\tau = 0.5$, $\tau = 1$ et $\tau = 5$ (u_0 antisymétrique) .

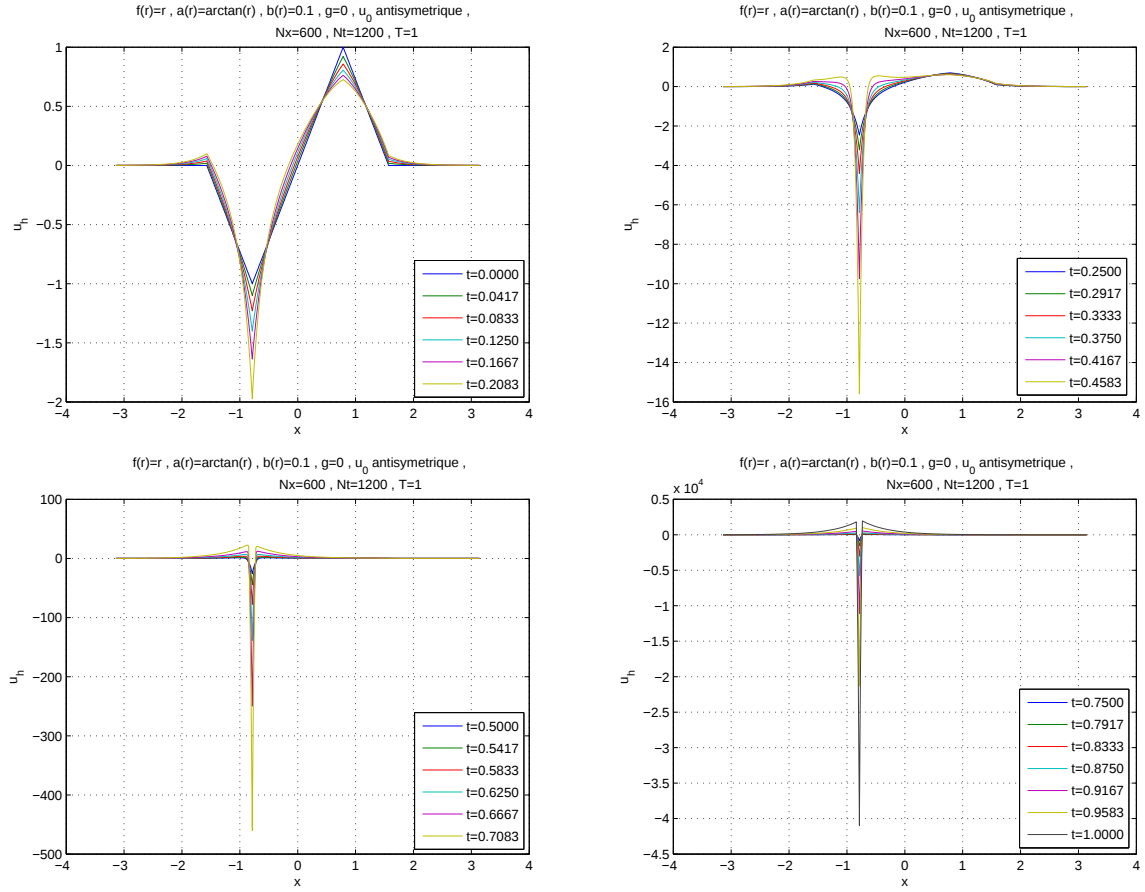
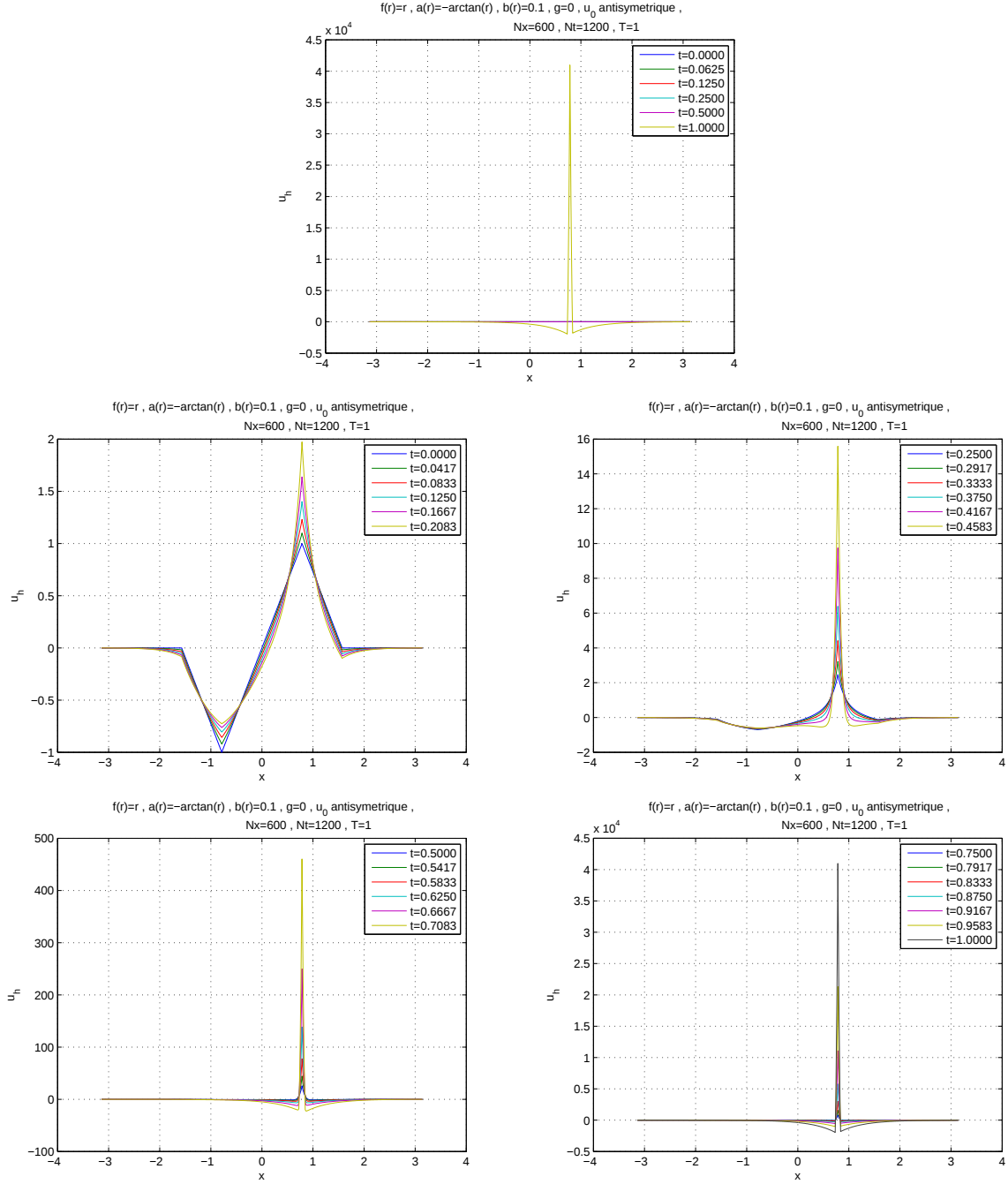


FIGURE 3.22 – Solution approchée du problème (3.20) pour $\tau = 0.1$ (u_0 antisymétrique).

En remplaçant $\arctan$ par $-\arctan$, le comportement similaire, symétrisé (cf. Figure 3.23).


 FIGURE 3.23 – Solution approchée du problème (3.20) pour $\tau = 0.1$ (u_0 antisymétrique).

On pose maintenant, lorsque $\tau = 0, 1$, $a(r) = \arctan(r)$ si $r \leq -2$ et $\arctan(-4 - r)$ sinon. On illustre ainsi numériquement, l'étude de P. I. Plotnikov [75], reprise par L. C. Evans [42], concernant des phénomènes hystérétiques dans les changements de phases.

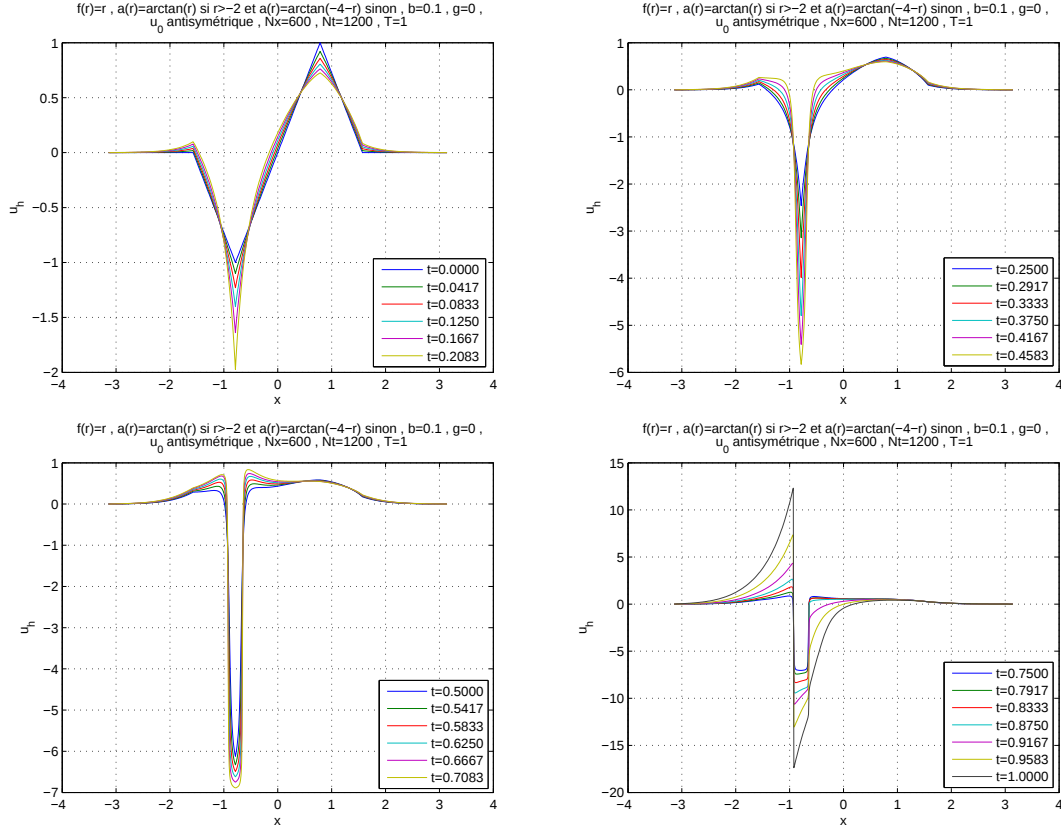


FIGURE 3.24 – Solution approchée du problème (3.20) lorsque $\tau = 0.1$ et $a(r) = \arctg(r)$ si $r > -2$ et $\arctg(-4 - r)$ sinon.

iv) Cas d'une équation dégénérée. Dans cet exemple, d'une part, pour $u_0 = 0$ avec g non régulier symétrique positive *i.e.* $g(t, x) = 1$ si $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et $g(t, x) = 0$ sinon. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.25 pour des valeurs différentes de τ . D'autre part, pour $g = 0$ avec u_0 une fonction en chapeau symétrique *i.e.* u_0 définie sur $[-\pi, \pi]$ par $u_0(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{4} - x)$ si $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$, $u_0(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{4} + x)$ si $-\frac{\pi}{4} < x \leq 0$, et $u_0(x) = 0$ ailleurs. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.26 pour différentes valeurs de τ . Pour $\tau = 0$, on est dans le cas d'une équation dégénérée. La solution approchée présente une petite oscillation sur la zone où la solution s'annule.

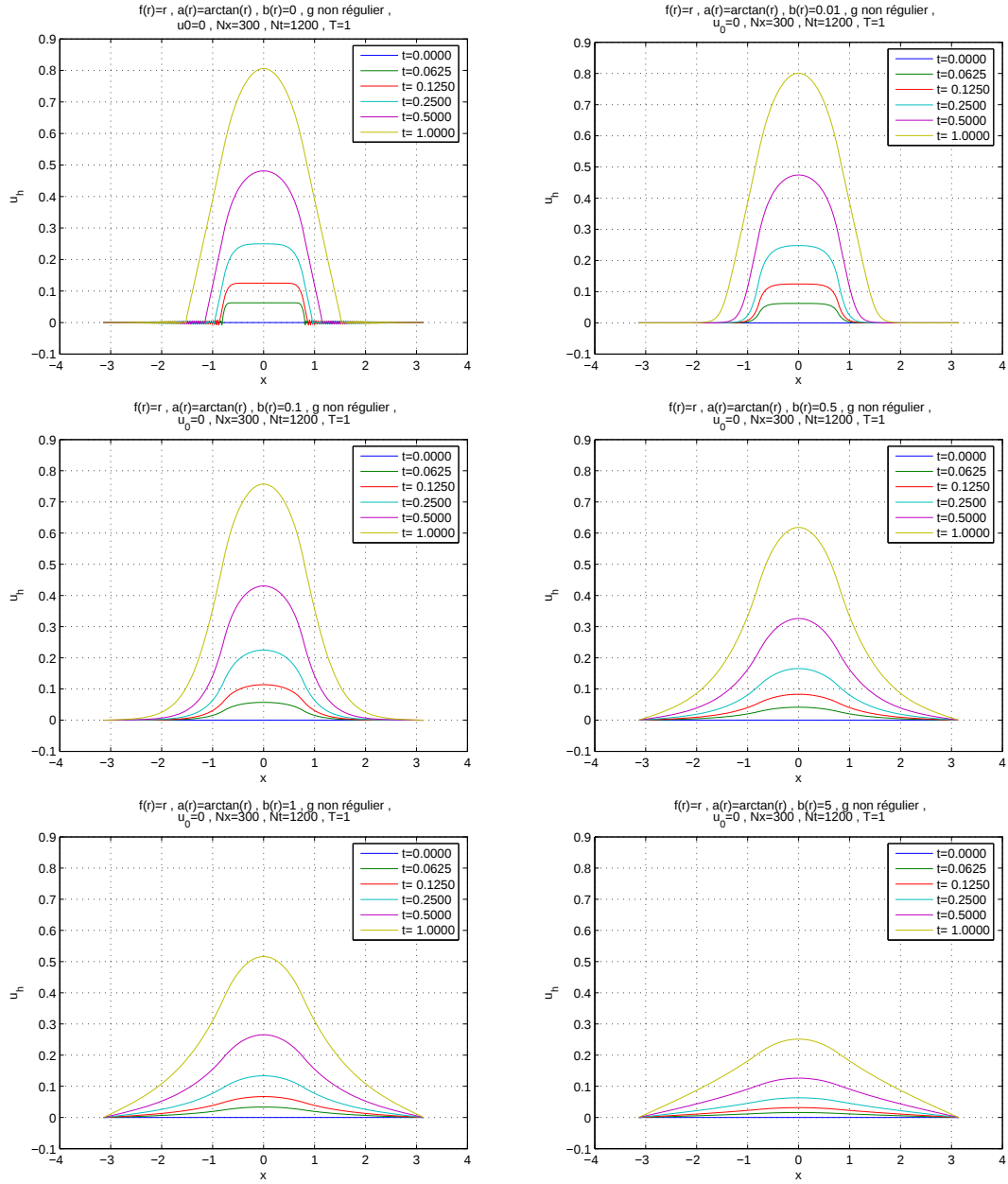


FIGURE 3.25 – Solution approchée du problème (3.20) pour $\tau = 0$, $\tau = 0.01$, $\tau = 0.1$, $\tau = 0.5$, $\tau = 1$ et $\tau = 5$ (g non régulier positif) .

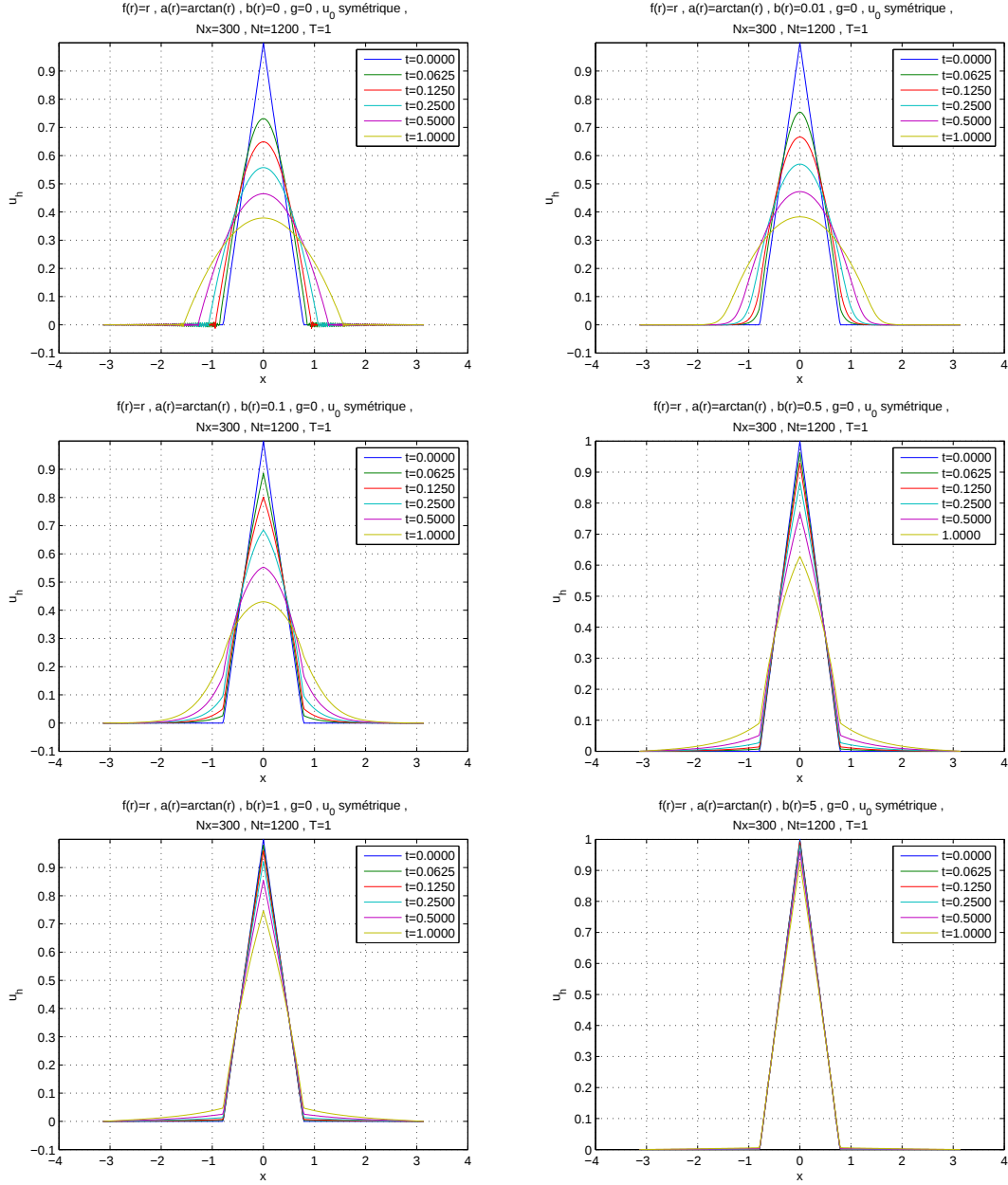


FIGURE 3.26 – Solution approchée du problème (3.20) pour $\tau = 0$, $\tau = 0.01$, $\tau = 0.1$, $\tau = 0.5$, $\tau = 1$ et $\tau = 5$ (u_0 positif symétrique) .

Notons, ici aussi, que du fait de la dégénérescence de l'arctangente en 0, des oscillations apparaissent lorsque le terme pseudo-parabolique est absent, elles disparaissent dans le cas contraire.

2.4 Cas d'un problème doublement non linéaire

On suppose que $f(r) = r$ et que les fonction a et b sont lipschitziennes. On prend $a(r) = \arctan(r)$ et $b(r) = k + \sin(r)$, où k un réel. Le problème (3.3)-(3.5) posé sur $]0, T[\times]x_l, x_r[$ s'écrit : rechercher une fonction $u :]0, T[\times]x_l, x_r[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] = g \text{ dans }]0, T[\times]x_l, x_r[, \\ u(t, x_l) = 0, \quad u(t, x_r) = 0 \quad t \text{ dans }]0, T[, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans }]x_l, x_r[. \end{cases} \quad (3.21)$$

i) Comparaison avec une solution exacte connue. On considère la solution exacte $u_e(t, x) = e^t \sin(\pi x)$ sur $]0, T[\times]-1, 1[$ et on calcule le second membre g en conséquence.

Comme dans les cas précédants, pour $k = 2$ on construit la courbe d'erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps à l'instant $T = 1$. Pour l'erreur en espace, on fixe le pas de temps en prenant $N_t = 1000$ *i.e.* $\Delta t = 0.001$ et on calcule l'erreur avec différents pas d'espace. Pour le temps, on fixe le pas d'espace en prenant $N_x = 500$ *i.e.* $\Delta x = 0.0040$ et on calcule l'erreur avec différents pas de temps. Les résultats numériques sont donnés dans les tableaux : figure 3.27 et 3.28.

N_x	Δx	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
20	0.1000	0.0391	6
25	0.0800	0.0251	6
30	0.0667	0.0172	6
35	0.0571	0.0126	6
40	0.0500	0.0096	6

FIGURE 3.27 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace du problème (3.21) à l'instant $T = 1$.

N_t	Δt	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
10	0.1000	0.1108	6
15	0.0667	0.0724	6
20	0.0500	0.0538	6
25	0.0400	0.0428	6
30	0.0333	0.0355	6
40	0.0250	0.0265	6

FIGURE 3.28 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en temps du problème (3.21) à l'instant $T = 1$.

En utilisant une échelle logarithmique, on obtient la droite de régression $y = 2.0289x + 1.4333$ pour l'espace et la droite de régression d'équation $y = 1.0312x + 0.1699$ pour le temps. L'erreur en norme $L^2(\Omega)$ est donc d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps. Les courbes d'erreurs sont présentées dans la figure 3.29.

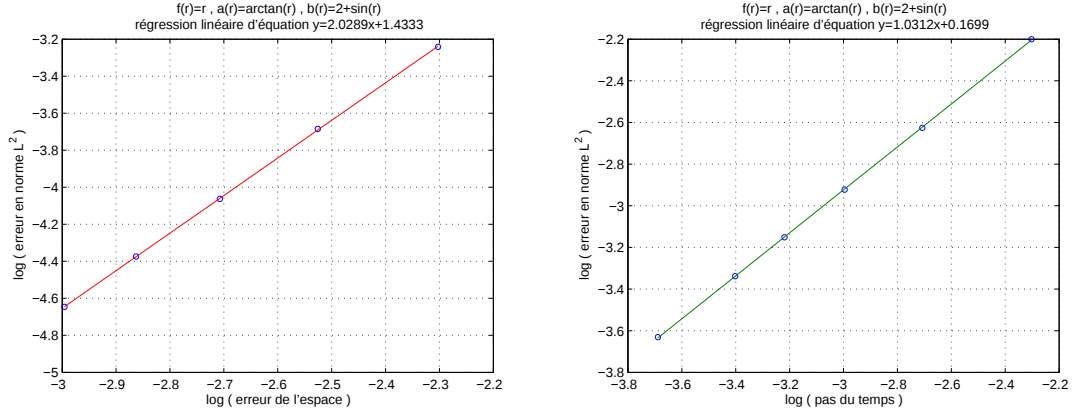


FIGURE 3.29 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps du problème (3.21) à l'instant $T = 1$.

ii) **Cas d'une source non régulière.** Pour une donnée initiale nulle, *i.e.* $u_0(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$, on prend comme source la fonction g définie sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$ par $g(t, x) = 1$ si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $g(t, x) = -1$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ et $g(t, x) = 0$ sinon. La solution approchée est donnée dans la figure 3.30.

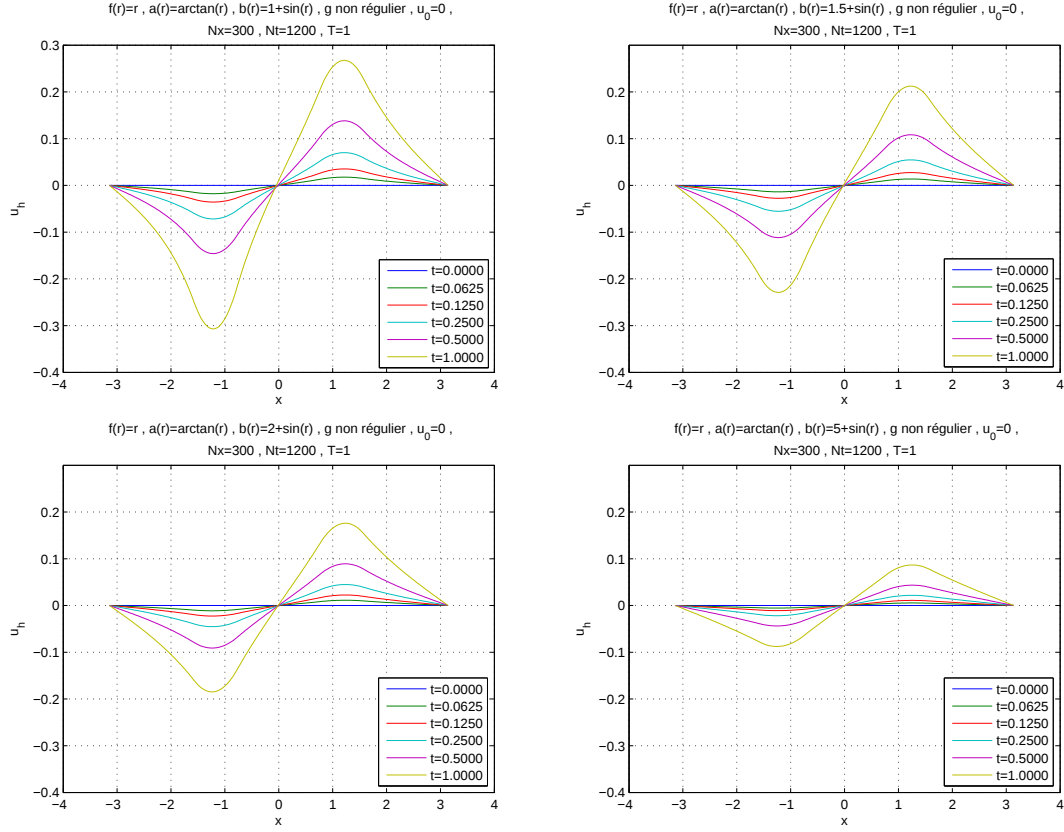


FIGURE 3.30 – Solution approchée du problème (3.21) pour $k = 1$, $k = 1.5$, $k = 2$ et $k = 5$ (g non régulier).

iii) **Cas d'une condition initiale antisymétrique.** Pour une source nulle, *i.e.* $g(t, x) = 0$ sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$, on prend la condition initiale u_0 définie sur $[-\pi, \pi]$ par $u_0(x) = \frac{4}{\pi}x$ si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $u_0(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)$ si $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $u_0(x) = -\frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} + x)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}$ et $u_0(x) = 0$ ailleurs. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.31.

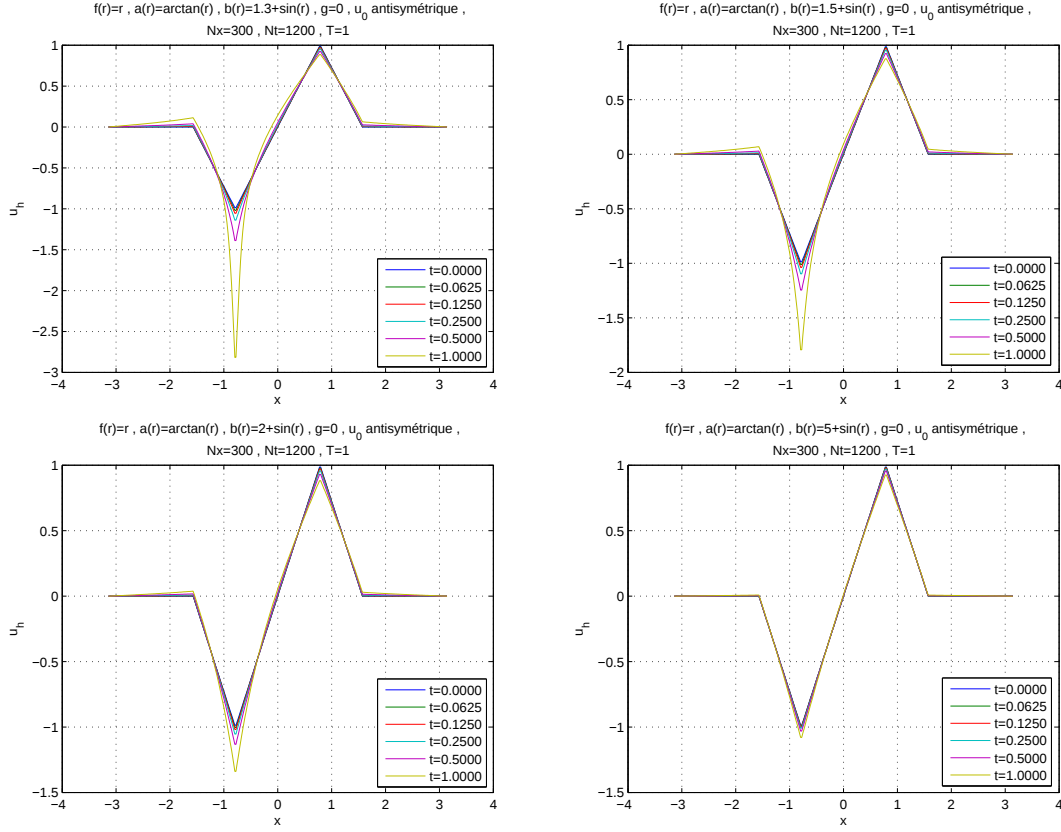


FIGURE 3.31 – Solution approchée du problème (3.21) pour $k = 1.3$, $k = 1.5$, $k = 2$ et $k = 5$ (u_0 non symétrique).

iv) **Cas d'une perturbation pseudo parabolique non symétrique.** Dans cet exemple, les fonctions f et a restent inchangées, mais b est non symétrique, *i.e.* $b(r) = 0.1$ si $r < 0$ et $b(r) = 0.2 + k \arctan(r)$ sinon (k arbitraire). On illustre la solution approchée dans la figure 3.32 pour g non régulière avec $u_0 = 0$ comme dans l'exemple ii) et dans la figure 3.33 pour $g = 0$ avec u_0 antisymétrique comme dans l'exemple iii) .

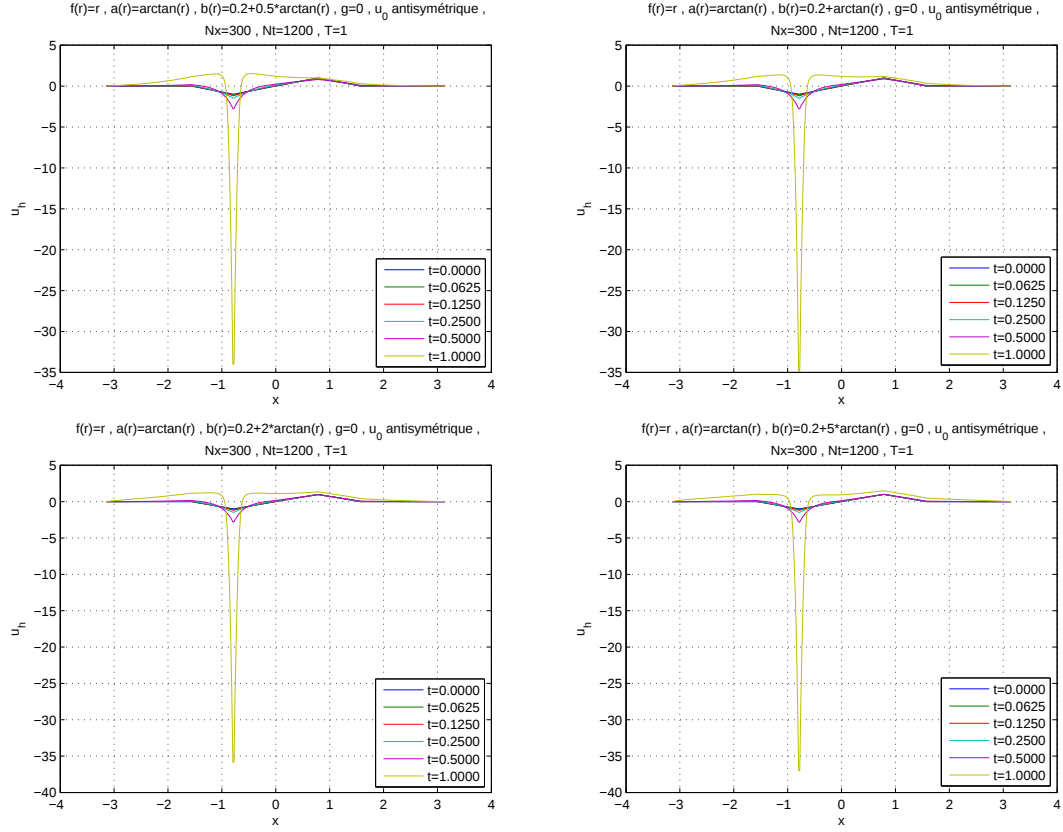


FIGURE 3.32 – Solution approchée du problème (3.21) pour $k = 0.5, k = 1, k = 2$ et $k = 5$ (g non régulier et $u_0 = 0$).

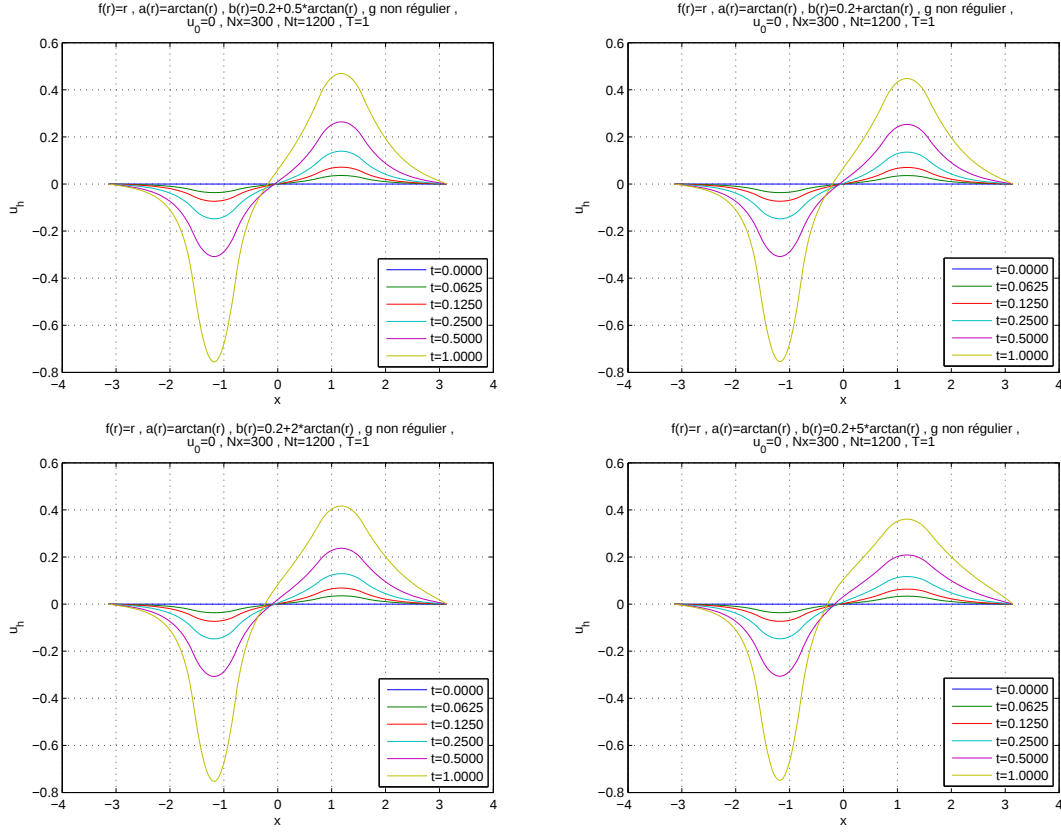


FIGURE 3.33 – Solution approchée du problème (3.21) pour $k = 0.5$, $k = 1$, $k = 2$ et $k = 5$ (u_0 antisymétrique avec $g = 0$).

2.5 Cas d'un problème fortement non linéaire

On considère une fonction f non linéaire et des fonctions a et b sont lipschitziennes. Le problème (3.3)-(3.4) se réécrit alors : rechercher une fonction $u :]0, T[\times]x_l, x_r[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] = g \text{ dans }]0, T[\times]x_l, x_r[, \\ u(t, x_l) = 0, u(t, x_r) = 0 \text{ t dans }]0, T[, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans }]x_l, x_r[. \end{cases} \quad (3.22)$$

A. Le cas de l'équation de type Barenblatt.

On pose $a(r) = 1$ et $b(r) = \tau$, où τ est un réel strictement positif. Le problème (3.22) s'écrit simplement : rechercher une fonction $u :]0, T[\times]x_l, x_r[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = g \text{ dans }]0, T[\times]x_l, x_r[, \\ u(t, x_l) = 0, u(t, x_r) = 0 \text{ t dans }]0, T[, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans }]x_l, x_r[. \end{cases} \quad (3.23)$$

i) Comparaison avec une solution exacte connue. On prend $f(r) = \arctan(r)$ et la solution exacte $u_e(t, x) = e^t \sin(\pi x)$ sur $]0, T[\times]-1, 1[$ de manière à obtenir l'expression de g .

Pour $\tau = 1$, on construit la courbe d'erreur en norme $L^2(\Omega)$ à l'instant $T = 1$ en espace et en temps.

Pour $N_t = 1000$ *i.e.* $\Delta t = 0.001$ et on calcule l'erreur avec différents pas d'espace. On fait de même avec $N_x = 500$ *i.e.* $\Delta x = 0.0040$ et on calcule l'erreur avec différents pas de temps.

Le résultat numérique est résumé dans le tableau de la figure 3.34 pour l'espace et dans le tableau de la figure 3.35 pour le temps.

N_x	Δx	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
20	0.1000	0.0346	4
25	0.0800	0.0219	4
30	0.0667	0.0151	4
35	0.0571	0.0109	4
40	0.0500	0.0083	4

FIGURE 3.34 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace du problème (3.23) à l'instant $T = 1$.

N_t	Δt	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
10	0.1000	0.0583	5
15	0.0667	0.0391	5
20	0.0500	0.0294	5
25	0.0400	0.0235	5
30	0.0333	0.0196	5
40	0.0250	0.0147	4

FIGURE 3.35 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en temps du problème (3.23) à l'instant $T = 1$.

En échelle logarithmique, on obtient la droite de régression $y = 2.0608x + 1.3831$ pour l'espace et la droite de régression d'équation $y = 0.9938x - 0.5518$ pour le temps. L'erreur en norme $L^2(\Omega)$ est donc d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps.

Les courbes d'erreur sont présentées dans la figure 3.36.

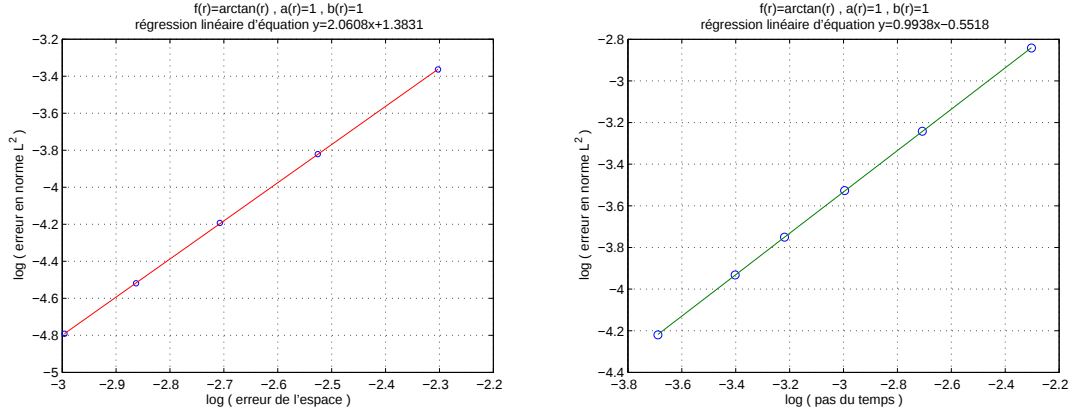


FIGURE 3.36 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps du problème (3.23) à l'instant $T = 1$.

ii) **Cas de l'équation de Sobolev-Barenblatt.** On prend $f(r) = \frac{r}{10}$ si $r > 0$ et $f(r) = 10r$ sinon.

1. Cas d'une source non régulière. Pour une donnée initiale nulle, *i.e.* $u_0(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$, on considère la source g définie sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$ par $g(t, x) = 1$ si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $g(t, x) = -1$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ et $g(t, x) = 0$ sinon. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.37 pour différentes valeurs de τ . Aussi, on illustre la solution approchée dans la figure 3.38 pour T assez grand.

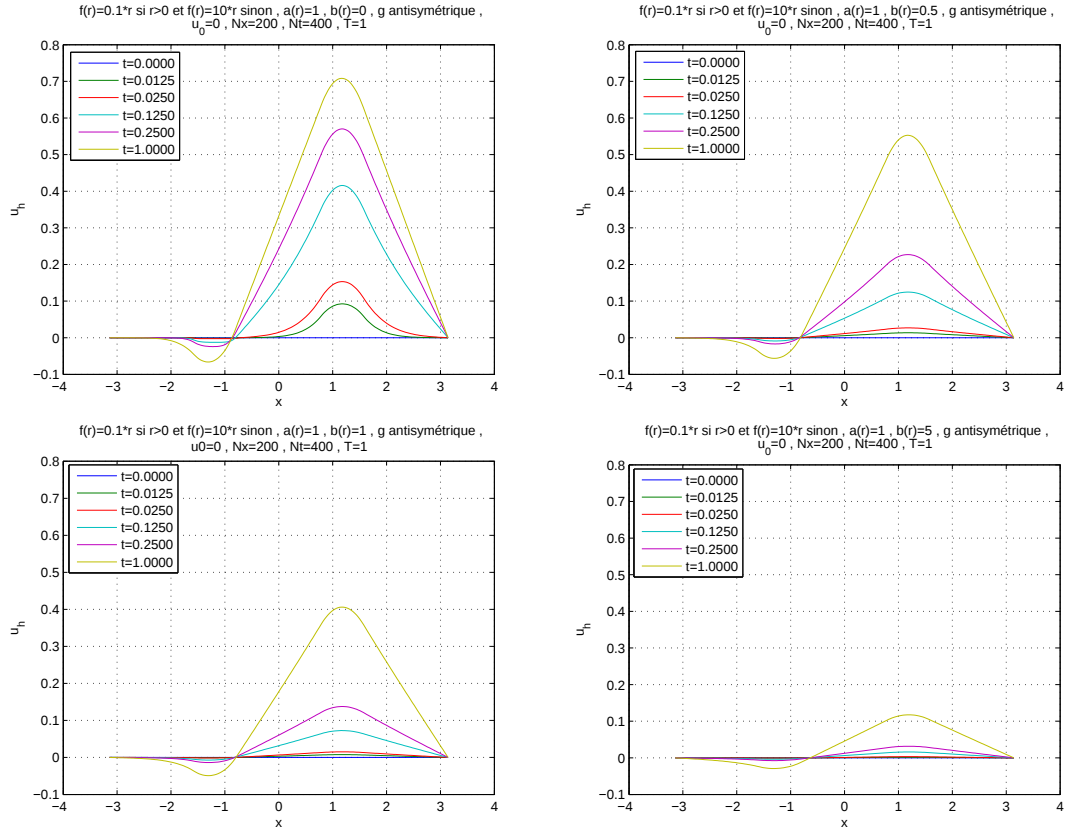


FIGURE 3.37 – Solution approchée du problème (3.23) pour $\tau = 0, 0.5, 1$ et 5 (g non régulier et antisymétrique).

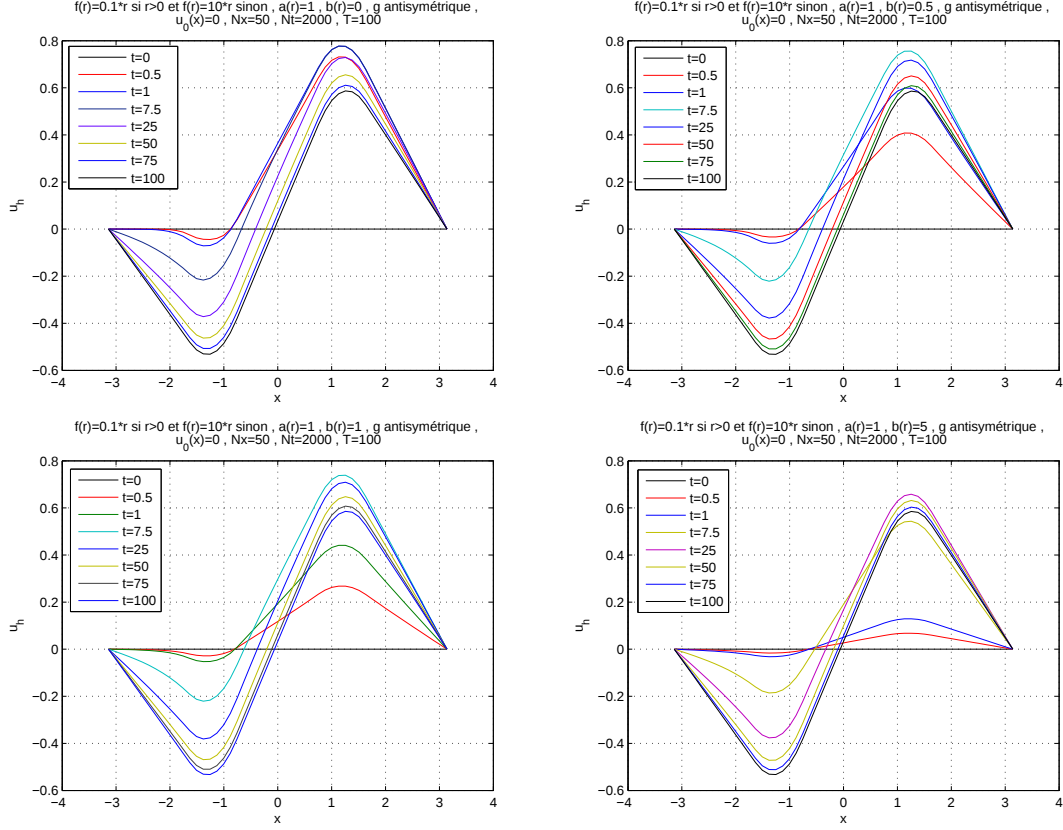
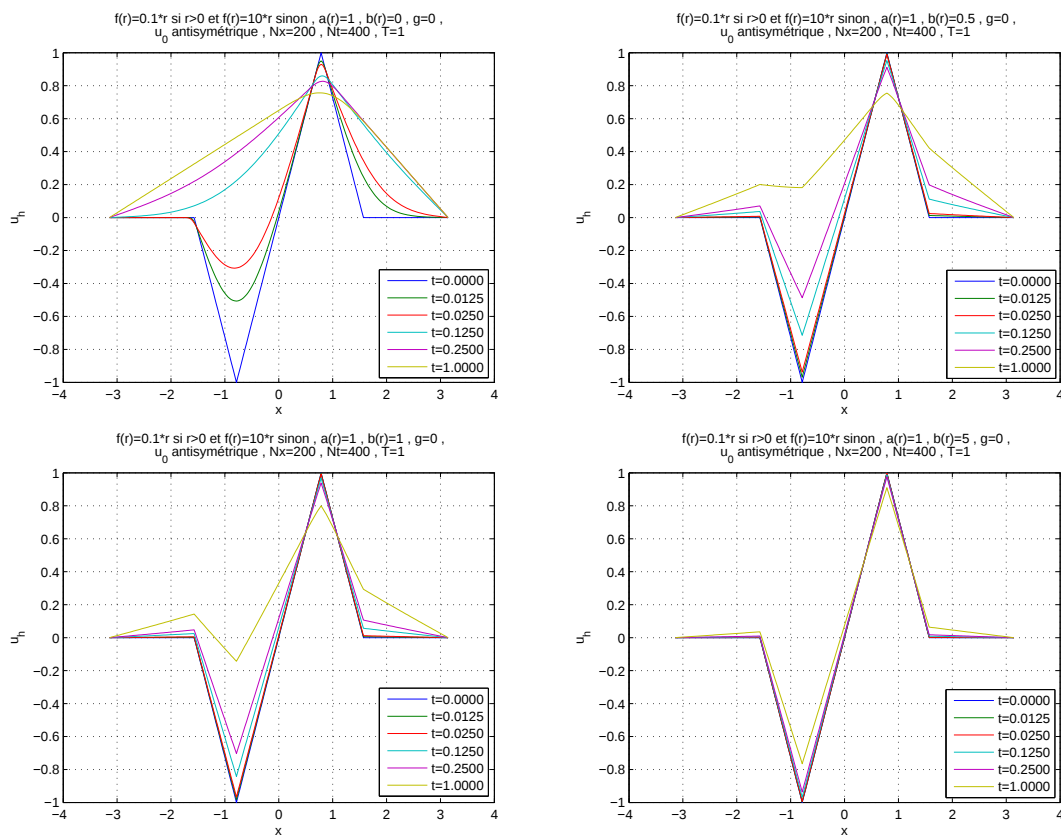
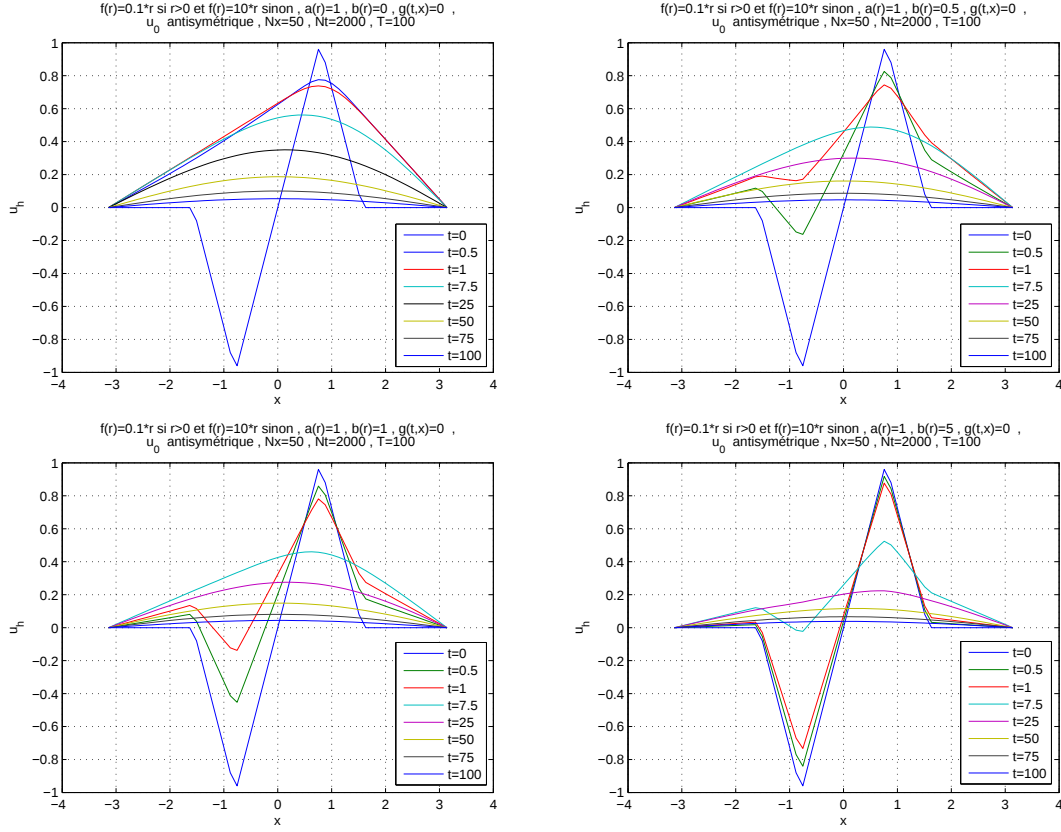


FIGURE 3.38 – Solution approchée du problème (3.23) pour $\tau = 0, 0.5, 1$ et 5 (g non régulier et antisymétrique).

Remarque 3.3. On observe clairement sur les courbes une diffusion différente entre la partie croissante de la solution au cours du temps et la partie décroissante. Enfin, quelque soit l'importance du terme pseudo-parabolique, la seconde partie des courbes illustre un comportement asymptotique en temps vers une solution commune.

2. Cas d'une condition initiale antisymétrique. Pour une source nulle, *i.e.* $g(t, x) = 0$ sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$, on prend la condition initiale u_0 définie sur $[-\pi, \pi]$ par $u_0(x) = \frac{4}{\pi}x$ si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $u_0(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)$ si $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $u_0(x) = -\frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} + x)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}$ et $u_0(x) = 0$ ailleurs. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.39 pour différents valeurs de τ . Aussi, on illustre la solution approchée dans la figure 3.40 pour T assez grand.


 FIGURE 3.39 – Solution approchée du problème (3.23) pour $\tau = 0, 0.5, 1$ et 5 (u_0 antisymétrique).


 FIGURE 3.40 – Solution approchée du problème (3.23) pour $\tau = 0, 0.5, 1$ et 5 (u_0 antisymétrique).

Remarque 3.4. La remarque est similaire à la précédente, avec un comportement asymptotique vers la fonction nulle.

B. Cas totalement non linéaire.

On prend $f(r) = \arctan(r)$, $a(r) = \sin(r)$ et $b(r) = k + \cos(r)$, k arbitraire.

i) Comparaison avec une solution exacte connue. On considère la solution exacte $u_e(t, x) = e^t \sin(\pi x)$ sur $]0, T[\times]-1, 1[$ de manière à obtenir l'expression de g .

Dans le cas $k = 2$, on construit la courbe d'erreur en norme $L^2(\Omega)$ à l'instant $T = 1$ en espace et en temps. Pour $N_t = 1000$ i.e. $\Delta t = 10^{-4}$ et on calcule l'erreur avec différents pas d'espace. De même, on pose $N_x = 500$ i.e. $\Delta x = 0.0040$ et on calcule l'erreur avec différents pas de temps. Les résultats numériques sont donnés dans les tableaux fig. 3.41 et 3.42.

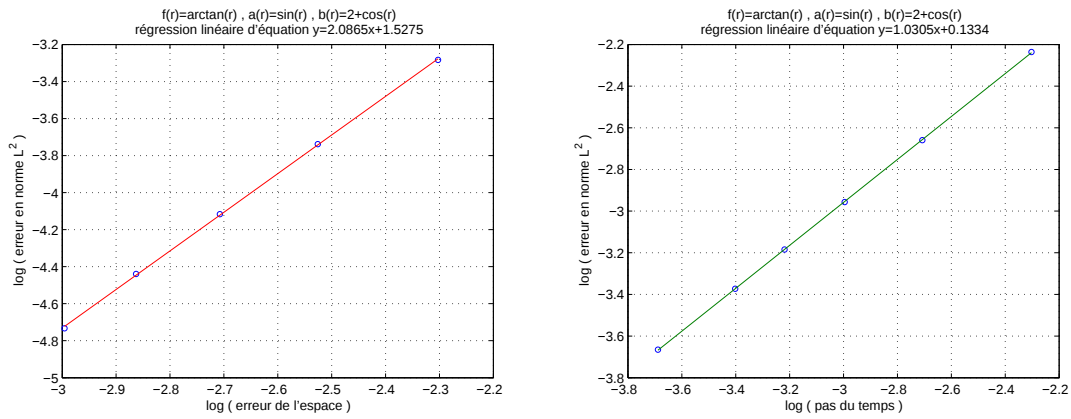
N_x	Δx	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
20	0.1000	0.0375	7
25	0.0800	0.0238	7
30	0.0667	0.0163	7
35	0.0571	0.0118	7
40	0.0500	0.0088	7

 FIGURE 3.41 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace du problème (3.22) à l'instant $T = 1$.

N_t	Δt	$\ u_e - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Nombre d'itérations
10	0.1000	0.1069	6
15	0.0667	0.0700	6
20	0.0500	0.0520	6
25	0.0400	0.0414	6
30	0.0333	0.0343	6
40	0.0250	0.0256	6

 FIGURE 3.42 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en temps du problème (3.22) à l'instant $T = 1$.

Avec une échelle logarithmique, on obtient la droite de régression $y = 2.0865x + 1.5275$ pour l'espace et la droite de régression d'équation $y = 1.0305x + 0.1334$ pour le temps. L'erreur en norme $L^2(\Omega)$ est donc d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps. Les courbes d'erreur sont présentées dans la figure 3.43.


 FIGURE 3.43 – Erreur en norme $L^2(\Omega)$ en espace et en temps du problème (3.22) à l'instant $T = 1$.

ii) Cas d'une source non régulière. Pour une donnée initiale nulle, *i.e.* $u_0(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$, on prend la source g définie sur $]0, T[\times [-\pi, \pi]$ par $g(t, x) = 1$ si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $g(t, x) = -1$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ et $g(t, x) = 0$ sinon. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.44.

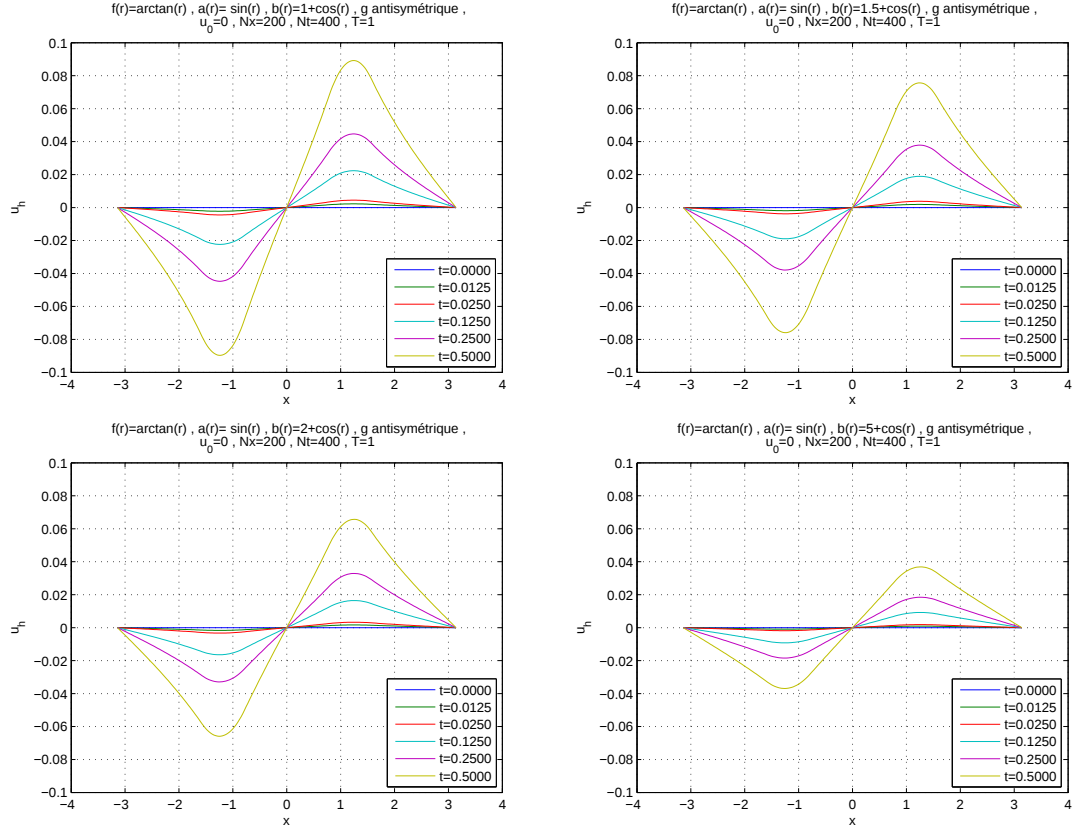


FIGURE 3.44 – Solution approchée du problème (3.22) pour $k = 1$, $k = 1.5$, $k = 2$ et $k = 5$ (g non régulier).

iii) Cas d'une condition initiale non symétrique. Pour une source nulle, *i.e.* $g(t, x) = 0$ sur $]0, T[\times] - \pi, \pi[$, on prend la condition initiale u_0 définie sur $[-\pi, \pi]$ par $u_0(x) = \frac{4}{\pi}x$ si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $u_0(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)$ si $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $u_0(x) = -\frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2} + x)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}$ et $u_0(x) = 0$ ailleurs. La solution approchée est illustrée dans la figure 3.45.

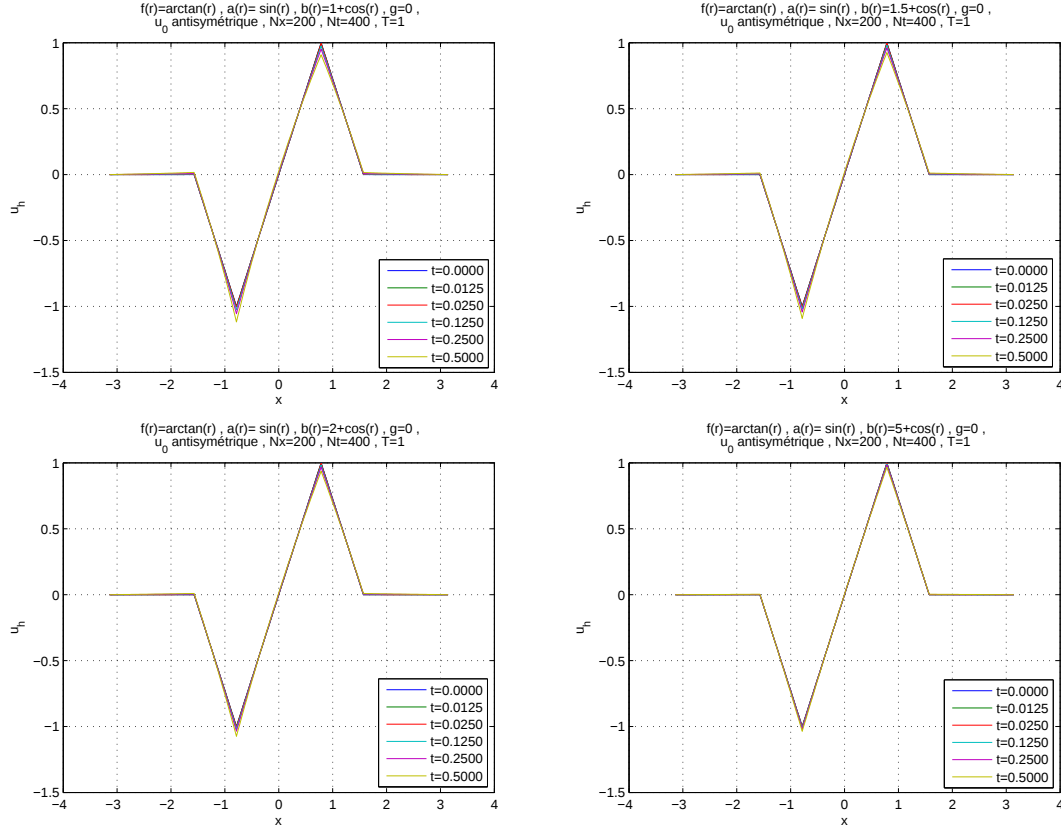


FIGURE 3.45 – Solution approchée du problème (3.22) pour $k = 1$, $k = 1.5$, $k = 2$ et $k = 5$ (u_0 antisymétrique).

3 Programme en Matlab

Dans cette section, on donne les codes que l'on a modifiés. Pour plus de commentaires sur ces codes, le lecteur pourra consulter sur le site internet : [27].

Le programme `nonlinearpseudoparabolic.m` résout le problème pseudo-parabolique non linéaire suivant : rechercher une fonction $u :]0, T[\times]x_l, x_r[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] = g \text{ dans }]0, T[\times]x_l, x_r[, \\ u(t, x_l) = 0, u(t, x_r) = 0 \text{ t dans }]0, T[, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans }]x_l, x_r[. \end{cases} \quad (3.24)$$

Programme 3.1. `nonlinearpseudoparabolic.m`

```

nx =200;
nl=2;
% précision dans le test d'arret dans la méthode de Newton
epsilon = 1.e-8;
```

```
% paramètres de temps
    nt=400;
    t_start=0;
    t_final=1;
    dt=(t_final-t_start)/nt;
    [ ibc, imax, nprint, nquad, ul, ur, xl, xr ] = init ( 'DUMMY',t_start );
    [ h, indx, node, nu, xn, xquad ] = geometry ( ibc, nl, nx, xl, xr );
% initialisation
    U=zeros(nx+1,nt+1);
    U(:,1)=uinitevol(xn);
    t=t_start;
% boucle sur le temps
for i=1:nt
    t=t+dt;
    ul=ulevol(t);
    ur=urevol(t);
    V=U(2:nx,i);
% estimation initiale dans la méthode de Newton
    u(1:nu) = .5;
% itération de la méthode de Newton
    erreur = 1;
    iter = 0 ;
    while (erreur > epsilon && iter < imax)
        [ A, rhs ] = assemblenewton ( u, h, indx, nx, nl ,...
            node,nquad, nu, ul, ur, xn, xquad,t ,dt,V);
        du=A\rhs' ;
        u=u+du' ;
        erreur = norm(du);
        iter = iter+1 ;
    end
    V=u;
    U(2:nx,i+1)=V;
    U(1,i+1)=ul;
    U(nx+1,i+1)=ur;
end
iter
% solution approchée à l'instant t1, t2 , t3 , t4
    uh=U(:,nt+1);
    uh1=U(:,nt+1-300);
    uh2=U(:,nt+1-200);
    uh3=U(:,nt+1-100);
    uh4=U(:,nt+1);
% solution exacte  $u_e(t,x)=e^{-t}\sin(\pi x)$  à l'instant t1 , t2 , t3 , t4
    tn=t_start:dt:t_final;
```

```

xe=xl:0.0001:xr;
ue1=exp(tn(nt+1-300)).*sin(pi*xe);
ue2=exp(tn(nt+1-200)).*sin(pi*xe);
ue3=exp(tn(nt+1-100)).*sin(pi*xe);
ue4=exp(tn(nt+1)).*sin(pi*xe);
% estimation en norme L2 et H1
[normL2,normH1] = erreurnormL2H1 ( uh,h,nx,nquad,xn, xquad,t )
% graphique à l'instant t1 , t2 , t3 , t4
plot(xn,uh1,'b-',xn,uh2,'b-',xn,uh3,'b-',xn,uh4,'b-',...
      xe,ue1,'r',xe,ue2,'r',xe,ue3,'r',xe,ue4,'r')
grid

```

Pour lancer ce programme, on doit ajouter les sous programmes suivants :

init.m : variables initiales.

geometry.m : géométrie du domaine, *i.e.*, la subdivision de l'intervalle $[x_l, x_r]$ en pas uniforme.

phii.m : fonction de base et sa dérivée première.

ff.m : valeur de $f(r)$.

Dff.m : valeur de $f'(r)$.

aa.m : valeur de $a(r)$.

Daa.m : valeur de $a'(r)$.

bb.m : valeur de $b(r)$.

Dbb.m : valeur de $b'(r)$.

gg.m : valeur de $g(x,t)$ en second membre.

uinitevol.m : condition initiale.

ulevol.m : condition de bord.

ulevol.m : condition de bord.

assemblenewton.m : assemblage des matrices.

ue.m : solution exacte.

uex.m : fonction dérivée de la solution exacte.

erreurnormL2H1.m : estimation de l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ et en norme $H_0^1(\Omega)$.

Programme 3.2. *init.m*

```

function [ ibc, imax, nprint, nquad, ul, ur, xl, xr ] = init ( dummy,t_start )
    ibc = 3;
    imax =25;
    nprint = 9;
    nquad = 1;
    ul = ulevol(t_start);
    ur = urevol(t_start);
    xl = -1;

```

```
xr = 1;
```

Programme 3.3. *geometry.m*

```
function [ h, indx, node, nu, xn, xquad ] = geometry ( ibc, nl, nsub, xl, xr )
    for i = 0 : nsub
        xn(i+1) = ( ( nsub - i ) * xl + i * xr ) / ( nsub );
    end
    for i = 1 : nsub
        h(i) = xn(i+1) - xn(i);
    end
    for i = 1 : nsub
        xquad(i) = 0.5 * ( xn(i) + xn(i+1) );
    end
    for i = 1 : nsub
        node(1,i) = i - 1;
        node(2,i) = i;
    end
    nu = 0;
    i = 0;
    if ( ibc == 1 | ibc == 3 )
        indx(i+1) = -1;
    else
        nu = nu + 1;
        indx(i+1) = nu;
    end
    for i = 1 : nsub-1
        nu = nu + 1;
        indx(i+1) = nu;
    end
    i = nsub;
    if ( ibc == 2 | ibc == 3 )
        indx(i+1) = -1;
    else
        nu = nu + 1;
        indx(i+1) = nu;
    end
end
```

Programme 3.4. *phii.m*

```
function [ phii, phiix ] = phi ( il, x, xleft, xrite )
    if ( il == 1 )
        phii = ( xrite - x ) / ( xrite - xleft );
        phiix = -1.0 / ( xrite - xleft );
    else
```

```
    phii = ( x - xleft ) / ( xrite - xleft );
    phiix = 1.0 / ( xrite - xleft );
end
```

Programme 3.5. *ff.m*

```
function value = ff ( x)
value =atan(x);
```

Programme 3.6. *Dff.m*

```
function value = Dff ( x)
value =1/(1+x*x);
```

Programme 3.7. *aa.m*

```
function value = aa ( x )
value = sin(x);
```

Programme 3.8. *Daa.m*

```
function value = Daa ( x )
value = cos(x);
```

Programme 3.9. *bb.m*

```
function value = bb ( x )
value =2+cos(x);
```

Programme 3.10. *Dbb.m*

```
function value = Dbb ( x )
    value = -sin(x);
```

Programme 3.11. *gg.m*

```
function value = gg ( x,t )
    value = atan(exp(t)*sin(pi*x))+(pi*pi*sin(exp(t)*sin(pi*x)) ...
        +2*pi*pi+pi*pi*cos(exp(t)*sin(pi*x))*exp(t)*sin(pi*x)...
        -((pi*exp(t)*cos(pi*x))^2)*(cos(exp(t)*sin(pi*x))...
        -sin( exp(t)*sin(pi*x)));
```

Programme 3.12. *uinitevol.m*

```
function u = uinitevol(xn)
u=sin(pi*xn);
u=u';
```

Programme 3.13. *ulevol.m*

```
function u = ulevol(t)
u=0;
```

Programme 3.14. *urevol.m*

```
function u = urevol(t)
u=0;
```

Programme 3.15. *assemblenewton .m*

```
function [ A, rhs ] = assemblenewton ( u, h, indx, n, nl, ...
                                     node, nquad, nu, ul, ur, xn, xquad, t,dt,V ) ;
    A=spalloc(nu,nu,3*nu);
    rhs(1:nu) = 0.0;
    adiaq(1:nu) = 0.0;
    aleft(1:nu) = 0.0;
    arite(1:nu) = 0.0;
    for ie = 1 : n
        he = h(ie);
        xleft = xn(node(1,ie)+1);
        xrite = xn(node(2,ie)+1);
        for iq = 1 : nquad
            xqe = xquad(ie);
% calcul de l'estimation initale dans la méthode de Newton
% calcul de la condition initiane dans la méthode de Newton
            utotal = 0.0;
            Vtotal = 0.0;
            for il = 1 : nl
                ig = node(il,ie);
                iu = indx(ig+1);
                if ( iu <= 0 )
                    if ( il == 1 )
                        utotal = utotal + ul;
                        Vtotal = Vtotal + ul;
                    else
                        utotal = utotal + ur;
                        Vtotal = Vtotal + ur;
                    end
                else
                    utotal = utotal + u(iu);
                    Vtotal = Vtotal + V(iu);
                end
            end
            uold = utotal / nl;
            Vold = Vtotal / nl;
% calcul de la dérivée de l'estimation initale dans la méthode de Newton
```

```

% calcul de la dérivée de la condition initiane dans la méthode de Newton
jl = node(1,ie);
jr = node(2,ie);
iul = indx(jl+1);
iur = indx(jr+1);
if ( iul <= 0 )
    uoldx = ( u(iur) - ul ) / he;
    Voldx = ( V(iur) - ul ) / he;
elseif ( iur <= 0 )
    uoldx = ( ur - u(iul) ) / he;
    Voldx = ( ur - V(iul) ) / he;
else
    uoldx = ( u(iur) - u(iul) ) / he;
    Voldx = ( V(iur) - V(iul) ) / he;
end
% assemblage de matrice du second membre dans la méthode de Newton
for il = 1 : nl
    ig = node(il,ie);
    iu = indx(ig+1);
    if ( 0 < iu )
        [ phii, phiix ] = phi ( il, xqe, xleft, xrite ) ;
        rhs(iu)=rhs(iu)+he*(gg( xqe,t)*phii...
            -ff((1/dt)*uold-(1/dt)*Vold )*phii...
            +(1/dt)*bb(uold)*Voldx*phiix...
            -aa(uold)*uoldx*phiix- (1/dt)*bb(uold)*uoldx*phiix);
    if ( ig == 0 )
        x = xn(1);
        rhs(iu) = rhs(iu) - pp ( x ) * ul;
    elseif ( ig == n )
        x = xn(n+1);
        rhs(iu) = rhs(iu) + pp ( x ) * ur;
    end
% assemblage de matrice du premier membre la méthode de Newton
for jl = 1 : nl
    jg = node(jl,ie);
    ju = indx(jg+1);
    [ phij, phijx ] = phi ( jl, xqe, xleft, xrite );
    aij = he*( (1/dt)*Dff((1/dt)*uold...
        -(1/dt)*Vold )*phii*phij...
        -(1/dt)*Dbb(uold)*Voldx*phiix*phij...
        +Daa( uold )*uoldx*phiix * phij...
        +aa(uold)*phiix * phijx...
        +(1/dt)*Dbb( uold )* uoldx*phiix * phij...
        + (1/dt)*bb(uold) * phiix * phijx );

```



```
        uhold = uh(ie)*(-0.5*ptint(iq)+0.5)...  
                +uh(ie+1)*(0.5*ptint(iq)+0.5);  
        uholdx = ( uh(ie+1) - uh(ie) ) / he;  
        L2 = L2+he*poids(iq)*(uhold-ue(xqe,t))^2;  
        H1 = H1+he*poids(iq)*(uhold-ue(xqe,t))^2...  
                +he*poids(iq)*(uholdx-uex(xqe,t))^2;  
    end  
    L2;  
    H1;  
    normL2=normL2+L2;  
    normH1=normH1+H1;  
end  
normL2=sqrt(normL2);  
normH1=sqrt(normH1);
```


Annexe A

Outils d'analyse fonctionnelle

Extraits de H. Brézis [25], J. Droniou [37, 38] et J.-L. Lions [72].

1 Espaces fonctionnels classiques

Les outils d'analyse fonctionnelle sont les ingrédients quasiment essentiels à l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment l'espace de Lebesgue et celui de Sobolev. Les espaces de fonctions à valeurs vectorielles sont adaptés à l'étude de problèmes d'évolution. On rappelle dans cette partie des résultats fondamentaux pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Dans tout ce qui suit, Ω étant un domaine non vide de $\mathbb{R}^d$. Donnons immédiatement des définitions, des théorèmes ainsi que des résultats de réflexivité, de séparabilité et de dualité concernant l'espace $L^p(\Omega)$. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter par exemple [1, 24, 25, 29, 37, 38].

Définition A.1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on dit que $f \in L^p(\Omega)$ si f est mesurable et $|f|^p$ est intégrable. On munit cet espace de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On dit $f \in L^\infty(\Omega)$ si f est mesurable et $\exists C \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ p.p x dans Ω . L'espace $L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p } x \text{ dans } \Omega\}$$

Théorème A.1 (Inégalité de Hölder). Soient p et q deux exposants conjugués tels que $1 \leq p, q \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Dans le cas particulier où $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Théorème A.2. *L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ est un espace de Banach et il est de plus un espace de Hilbert si $p = 2$.*

Théorème A.3 (de densité). *L'espace $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, i.e. pour tout élément u de $L^2(\Omega)$, il existe une suite (u_n) de $D(\Omega)$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.*

Théorème A.4 (de convergence dominée de Lebesgue). *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables et g une fonction de $L^p(\Omega)$ ($p < \infty$), alors :*

$$\begin{cases} f_n \rightarrow f & p.p \text{ dans } \Omega \\ |f_n| \leq g & p.p \text{ dans } \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_n, f \in L^p(\Omega) \\ f_n \rightarrow f \text{ dans } L^p(\Omega) \end{cases}$$

Corollaire A.1. *Si une suite (f_n) converge dans $L^p(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$, alors il existe deux éléments f, h de $L^p(\Omega)$ et (f_{n_k}) , une suite extraite de (f_n) , tels que $f_{n_k} \rightarrow f$ et $|f_{n_k}| \leq h$ p.p. dans Ω .*

Réflexivité, séparabilité et dualité de $L^p(\Omega)$. Le tableau suivant récapitule les principales propriétés de $L^p(\Omega)$

	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$	OUI	OUI	$L^p(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$L^1(\Omega)$	NON	OUI	$L^\infty(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	NON	NON	contient strictement $L^1(\Omega)$

Convergence faible dans les $L^p(\Omega)$

Proposition A.1. *Soient (u_n) une suite **bornée** dans $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite faiblement convergente, c'est-à-dire*

$$\exists (u_{n_k}), \exists u \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega), \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_{n_k} \phi dx = \int_{\Omega} u \phi dx$$

Proposition A.2. *Soit (u_n) une suite **bornée** dans $L^\infty(\Omega)$, alors on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite faiblement-* convergente, c'est-à-dire*

$$\exists (u_{n_k}), \exists u \in L^\infty(\Omega), \forall \varphi \in L^1(\Omega), \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_{n_k} \phi dx = \int_{\Omega} u \phi dx$$

Proposition A.3. *Soit p, q et r trois réels dans $[1, \infty[$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.*

Si (u_n) est une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$, (v_n) est une suite de $L^q(\Omega)$ qui converge faiblement vers v dans $L^q(\Omega)$ alors la suite produit $(u_n v_n)$ converge faiblement vers uv dans $L^r(\Omega)$.

En particulier, si $u_n \rightarrow u$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ et $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors $u_n v_n \rightharpoonup uv$ converge faiblement dans $L^1(\Omega)$

Proposition A.4. *Si (u_n) est une suite de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ telle que*

- i) $\|u_n\| \leq C < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 - ii) (u_n) possède qu'un seul point adhérence faible u .
- Alors la suite $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$.*

Lemme A.1. Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, telle que

i) $f_n \rightarrow f$ presque partout dans Ω ,

ii) $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C < +\infty$.

Alors, $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$.

1.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition A.2. Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{R}^d$, m un entier naturel et p un réel de $[1, +\infty[$. On définit les espaces de Sobolev par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \forall |\alpha| \leq m, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\},$$

où pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ on note $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ et $D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f$.

Par convention, on note $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Dans cette définition, les dérivées partielles de f sont prises au sens faible des distributions. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme naturelle

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } p < \infty,$$

et pour $p = \infty$,

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sup_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposition A.5. Pour la norme naturelle, l'espace

i) $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach,

ii) si $p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable,

iii) si $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

Définition A.3. Si Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty[$, on définit $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$, où l'adhérence est prise pour la topologie de $W^{m,p}(\Omega)$.

Proposition A.6. Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ et $\tilde{u}$ est définie par

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \Omega^c \end{cases}$$

alors $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

Notation A.1. Pour $p = 2$, au lieu de $W^{m,p}(\Omega)$, on note souvent $H^m(\Omega)$ i.e. l'espace des classes de fonctions de carré intégrable dont chaque dérivée partielle jusqu'à l'ordre m est aussi de carré intégrable. L'espace $H^m(\Omega)$ est alors de Hilbert, lorsqu'il est muni de sa norme naturelle.

Théorème A.5 (de densité). Si l'ouvert Ω est lipschitzien, l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ i.e. tout élément u de $H^1(\Omega)$ il existe une suite (u_n) de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tel que $\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)}$ converge vers 0.

Proposition A.7. *Si Ω est un domaine borné (ou borné dans au moins une des directions de l'espace), alors la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega} : u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2}$ ou simplement $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire réduit défini par :*

$$(u, v) \mapsto (u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^d}$$

Théorème A.6 (de compacité de Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un domaine régulier borné, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. En conséquence, toutes les suites faiblement convergentes dans $H^1(\Omega)$ convergent fortement dans $L^2(\Omega)$.*

Théorème A.7 (inégalité de Poincaré-Friedrichs). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ (ou borné dans un moins une des directions de l'espace); alors, il existe une constante positive $C_p(\Omega)$ telle que pour tout u de $H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Théorème A.8 (de Lax-Milgram). *Soient H un espace de Hilbert et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur $H \times H$.*

Alors pour tout φ de H' , il existe u de H unique tel que :

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H', H},$$

l'application linéaire $\varphi \mapsto u$ étant continue de H' dans H .

De plus, si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle_{H', H} = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle_{H', H} \right\}$$

2 Fonctions à valeurs vectorielles

Dans la théorie des équations d'évolution, il y a lieu de faire jouer en général des rôles distincts à la variable temporelle et aux variables d'espace, et donc on rencontre en particulier des espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On donnera des propriétés essentielles dont les démonstrations sont présentes dans [24, 31, 37, 72, 83, 97].

2.1 Intégration à valeurs vectorielles

Définition A.4. *Soit E un espace de Banach, T un réel strictement positif et μ une mesure complète sur $]0, T[$. On dit qu'une fonction f de $]0, T[$ dans E est étagé si*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall i = 1, 2, \dots, k \quad \exists x_i \in E, \exists A_i \in \mathcal{B}([0, T]), f = \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{1}_{A_i}$$

où $\mathbf{1}_{A_i}$ est l'indicatrice de l'ensemble A_i .

On dit qu'une fonction f de $]0, T[$ dans E est :

i) mesurable si pour tout borélien B de E , $f^{-1}(B)$ est un borélien de $[0, T]$.

- ii) fortement mesurable si f est la limite p.p. d'une suite de fonctions étagées.
 ii) faiblement mesurable si pour tout x^* de E' (le dual topologie de E), la fonction $\langle x^*, f \rangle$ est mesurable.

En conséquence du théorème de B. J. Pettis, lorsque E est un espace de Banach séparable, les trois notions définies ci-dessus coïncident et on parle de mesurabilité. Par contre, si E n'est pas séparable, il est nécessaire d'avoir des informations sur la séparabilité de f ($]0, T[$).

Théorème A.9 (de B. J. Pettis). *Soit (S, M, μ) un espace mesuré et B un espace de Banach. La fonction $f : S \rightarrow B$ est mesurable si et seulement si f est à valeurs séparables et f est faiblement mesurable. En particulier si B est un espace de Banach séparable, alors f est fortement mesurable si et seulement si elle est faiblement mesurable.*

2.2 Espaces $L^p(0, T; E)$

Définition A.5. *Soit E un espace de Banach et T un réel strictement positif. Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p(0, T; E)$ l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables définies sur $]0, T[$ et à valeurs dans E , telles que $t \rightarrow \|f(t)\|_E^p$ est intégrable sur $]0, T[$. C'est un espace de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{L^p(0, T; E)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

De même façon, pour $p = +\infty$, on définit un espace de Banach $L^\infty(0, T; E)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; E)} = \sup_{t \in]0, T[} \text{ess} \|u(t)\|_E$$

Théorème A.10 (de convergence dominée). *Soit $1 \leq p < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables de $]0, T[$ dans E . Si la suite (f_n) vérifie*

- i) $f_n \rightarrow f$ presque partout sur $]0, T[$,
 ii) Il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ tel que pour tout n , $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq g$ presque partout sur $]0, T[$.
 Alors $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(0, T; E)$.

Proposition A.8. *Si $p < +\infty$, l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(0, T; E)$.*

Proposition A.9. *Si $p < +\infty$, l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans E est dense dans $L^p(0, T; E)$.*

Proposition A.10. *Pour $p \in [1, \infty[$, on a les résultats suivants*

- i) *Si E est séparable, alors $L^p(0, T; E)$ est aussi séparable.*
 ii) *Si E est réflexif (respectivement de Hilbert), alors $L^p(0, T; E)$ est aussi réflexif (respectivement de Hilbert).*

On a alors $L^2(0, T; E)$ est un espace de Hilbert.

Dualité. Soient p et p' deux exposants conjugués, $p \in [1, +\infty[$.

- i) Le dual de $L^p(0, T; E)$ s'identifie à $L^{p'}(0, T; E')$
 ii) $L^p(0, T; L^p(\Omega))$ est naturellement identifiable à $L^p(]0, T[\times \Omega)$.

2.3 Espace de Sobolev à valeurs vectorielles

Soit E un espace de Banach et T un réel strictement positif.

Définition A.6. On note $\mathcal{D}'(0, T; E)$ l'espace des applications linéaires et continues de $\mathcal{D}([0, T[)$ à valeurs dans E , i.e. pour f de $\mathcal{D}'(0, T; E)$,

i) la fonction $\phi \in \mathcal{D}([0, T[) \mapsto \langle f, \phi \rangle$ est linéaire,

ii) pour tout ϕ_n de $\mathcal{D}([0, T[)$ tel que $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}([0, T[)$, alors $\langle f, \phi_n \rangle \rightarrow \langle f, \phi \rangle$ dans E .

La convergence des suites dans $\mathcal{D}'(0, T; E)$ est définie par :

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T; E) \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T; E), \quad \langle f_n, \phi \rangle \rightarrow \langle f, \phi \rangle$$

La dérivée au sens de $\mathcal{D}'(0, T; E)$ est définie par : si $f \in \mathcal{D}'(0, T; E)$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ opère de $\mathcal{D}(0, T)$ dans E par la formule de transposition :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(0, T; E), \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \phi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \text{ égalité dans } E.$$

On montre alors que $\frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{D}'(0, T; E)$.

2.4 Espace $W^{1,p}(0, T; E)$

Définition A.7. Soit E un espace de Banach et T un réel strictement positif. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace

$$W^{1,p}(0, T; E) = \left\{ u \in L^p(0, T; E), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; E) \right\}$$

que l'on munit de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;E)} = \|u\|_{L^p(0,T;E)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(0,T;E)}$$

ou de la norme équivalente, si p est fini, définie par :

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;E)} = \left(\|u\|_{L^p(0,T;E)}^p + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(0,T;E)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition A.11. Pour $p \in [1, +\infty]$ l'espace $W^{1,p}(0, T; E)$ est de Banach.

Proposition A.12. Si E est séparable et $p < +\infty$, alors l'espace $W^{1,p}(0, T; E)$ est séparable.

Proposition A.13. Si $1 < p < +\infty$ et E est séparable réflexif et alors l'espace $W^{1,p}(0, T; E)$ est réflexif.

Proposition A.14. Pour $p = 2$, on note $H^1(0, T; E) = W^{1,2}(0, T; E)$, on a alors $H^1(0, T; E)$ est de Hilbert.

Lemme A.2. Soient E un espace de Banach réflexif et H un espace de Hilbert tels que E s'injecte continûment, et dense dans H . On se donne $f \in L^p(0, T; E)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, T; E')$ où E' est le dual de E et q le nombre conjugué de p . Alors f est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0, T)$, continue de $(0, T)$ dans H .

2.5 Espace $H^1(Q)$

Définition A.8. Soient Ω un ouvert de R^d et T un réel strictement positif. On note Q le cylindre défini par $Q =]0, T[\times \Omega$.

On définit l'espace :

$$H^1(Q) = \left\{ u \in L^2(Q), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q) \right\}$$

que l'on munit de la norme définie par :

$$\|u\|_{H^1(Q)} = \left(\|u\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème A.11. L'espace $H^1(Q)$ est de Hilbert pour la norme définie ci-dessus.

Théorème A.12 (de compacité). L'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compacte.

Le résultat de compacité général dans l'espace de fonction à valeurs vectorielles est donné par le célèbre théorème de Lions-Aubin-Simon (cf. [24, 52, 72, 83, 86]).

Théorème A.13 (de Lions-Aubin). Soient B_0, B et B_1 trois espaces de Banach avec $B_0 \subset B \subset B_1$. On suppose que l'injection $B_0 \hookrightarrow B$ est compacte et celle $B \hookrightarrow B_1$ est continue. Soit $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$. On suppose B_0 et B_1 sont réflexifs et on définit

$$W = \{u \in L^p(0, T; B_0) \text{ tel que } u' \in L^q(0, T; B_1)\}$$

W est un espace de Banach réflexif pour la norme

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^q(0, T; B_1)}$$

et l'inclusion $W \hookrightarrow L^p(0, T; B_0)$ est compacte.

3 Théorèmes de points fixes

En analyse non linéaire, les théorèmes de point fixes s'appliquent pour justifier l'existence d'une solution par une technique de passage au cas non linéaire à partir de cas linéaires « préparatoires » bien maîtrisés. Il existe plusieurs théorèmes de points fixes et leurs applications varient selon le modèle et les hypothèses. On invite le lecteur à consulter [24], [52], [83] et notamment [98].

Théorème A.14 (Théorème de points fixes de Schauder). Soit E un espace vectoriel normé et C une partie convexe fermée de E . Si T est une application continue compacte de C dans C , elle admet au moins un point fixe dans C .

Théorème A.15 (Théorème de points fixes de Tikhonov). Soit $T : K \subseteq X \rightarrow K$ une application continue laissant invariant un ensemble non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Alors, T admet un point fixe dans K .

Corollaire A.2 (Théorème de points fixes de Schauder-Tikhonov). *Soit X un espace de Banach réflexif séparable. On suppose que :*

- i) K est un ensemble non vide , fermé , borné et convexe de X ,*
- ii) l'application $T : K \rightarrow K$ est faiblement faiblement séquentiellement continue, c'est-à-dire pour toute suite (x_n) de K qui converge faiblement vers x , lorsque $n \rightarrow \infty$, la suite $T(x_n)$ de K converge faiblement vers $T(x)$.*

Alors, T admet au moins un point fixe dans K .

Théorème A.16. (Cauty 2001 [30])

Soient E un espace vectoriel topologique séparé, C un sous-ensemble convexe de E et f une fonction continue de C dans C .

Si $f(C)$ est contenu dans un sous-ensemble compact de C , alors f a un point fixe.

Annexe B

Lemmes techniques

Lemme B.1 (Inégalité de Cauchy (cf. [83] p.44)). *Pour tout réel positif a et b et pour tout ε strictement positif on a*

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$$

Lemme B.2 (Inégalité de Young). *Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout réel positif a et b , on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En particulier si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy.

En pratique pour deux réels positifs a et b et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{1-q} b^q}{q}.$$

Lemme B.3 (Inégalité de Young généralisée (cf. [24] p.49)). *Soient $n \geq 2$, et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels positifs. Soient $p_1, p_2, \dots, p_n$ des réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$. Alors*

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \frac{x_1^{p_1}}{p_1} + \frac{x_2^{p_2}}{p_2} + \dots + \frac{x_n^{p_n}}{p_n}.$$

En conséquence de ce lemme, on a le résultat suivant :

Corollaire B.1. *Soient $n \geq 2$, et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels positifs. Soient $p_1, p_2, \dots, p_n$ des réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$. Pour tous réels strictement positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$, on a alors :*

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \varepsilon_1 x_1^{p_1} + \varepsilon_2 x_2^{p_2} + \dots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1}^{p_{n-1}} + C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) x_n^{p_n}.$$

Lemme B.4 (de Gronwall discret (cf. [10] p.221)). *Soient g_0, k_n et p_n des réels strictement positifs tel que*

$$\forall n \geq 1, x_n \leq g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} k_s x_s.$$

Alors :

$$\forall n \geq 1, x_n \leq \left(g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s \right) e^{(\sum_{s=0}^{n-1} k_s)}.$$

Lemme B.5 (de Gronwall [24] p.83, [31] p.55, [83] p.179)). Soient $y \in L^\infty(0, T[)$ et $g \in L^1(0, T[)$ deux fonctions positives et y_0 une constante positive, telles que

$$\text{pour presque tout } t \in]0, T[, y(t) \leq y_0 + \int_0^t g(s)y(s)ds.$$

Alors, on a :

$$\text{pour presque tout } t \in]0, T[, y(t) \leq y_0 \exp \left(\int_0^t g(s)ds \right).$$

Cas intéressant lorsque $y_0 = 0$.

Lemme B.6. Soient $y \in L^\infty(0, T[)$ et $g \in L^1(0, T[)$ deux fonctions positives et y_0 une constante positive. On suppose que pour presque tout $t \in]0, T[, y^2(t) \leq y_0^2 + \int_0^t g(s)y(s)ds$.

Alors, on a :

$$\text{pour presque tout } t \in]0, T[, y(t) \leq y_0 + \frac{1}{2} \int_0^t g(s)ds.$$

Lemme B.7 (de Marcus et Mizel, [31] p.14). Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipchitzienne et $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$.

Alors, pour tout u de $W^{1,p}(\Omega)$, la fonction $F(u)$ est dans $W^{1,p}(\Omega)$.

De plus, si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble négligeable des points où F n'est pas dérivable ($|\mathcal{N}| = 0$ d'après le théorème de Rademacher), on a

$$\begin{aligned} \nabla u &= 0 \text{ p.p. dans } u^{-1}(\mathcal{N}), \\ \nabla F(u) &= \begin{cases} F'(u)\nabla u & \text{p.p. dans } \Omega \setminus u^{-1}(\mathcal{N}), \\ 0 & \text{dans } u^{-1}(\mathcal{N}). \end{cases} \end{aligned}$$

En conséquence, prenant F'^* un représentant borélien borné quelconque dans la classe de F' (définie $\mathcal{L}^1$ p.p. dans $\mathbb{R}$), on dispose de la règle de dérivation à la chaîne :

$$\nabla F(u) = F'^*(u)\nabla u \text{ dans } L^p(\Omega).$$

De plus, si $f(0) = 0$, alors $f(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dès que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

En particulier, on a le résultat suivant.

Corollaire B.2. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors, pour tout u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on a u^+ et u^- , $|u|$ sont dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et presque partout dans Ω , on a :

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{p.p. sur } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{p.p. sur } \{u \leq 0\}. \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] R. A. ADAMS : *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [2] A. AMBROSETTI et A. MALCHIODI : *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, volume 104 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3] D. D. ANG et T. TRAN : A nonlinear pseudoparabolic equations. *Prog. Roy. Sec. Edinburgh*, 114A:119–133, 1990.
- [4] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, R. LUCE et G. VALLET : New unilateral problems in stratigraphy. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(4):765–784, 2006.
- [5] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, R. LUCE et G. VALLET : A non-standard free boundary problem arising from stratigraphy. *Anal. Appl. (Singap.)*, 4(3):209–236, 2006.
- [6] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, R. LUCE et G. VALLET : On a pseudoparabolic problem with constraint. *Differential Integral Equations*, 19(12):1391–1412, 2006.
- [7] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, A. MOKRANI et G. VALLET : Stratigraphic modelling by the way of a pseudoparabolic problem with constraint. *Advances in Mathematical Science and Applications*, 19:195–209, 2009.
- [8] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX et G. VALLET : On some problems of stratigraphic control. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 44(6):85–94, 2003.
- [9] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX et G. VALLET : A compactness result for a pseudoparabolic conservation law with constraint. In *Ninth International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics*, volume 33 de *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano*, pages 403–410. Prensas Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2006.
- [10] D. BAĬNOV et P. SIMEONOV : *Integral inequalities and applications*, volume 57 de *Mathematics and its Applications (East European Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992. Translated by R. A. M. Hoksbergen and V. Covachev [V. Khr. Kovachev].
- [11] G. I. BARENBLATT : Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics. *New York, London : Consultants Bureau. XVII*, 1982.
- [12] G. I. BARENBLATT, M. BERTSCH, R. DAL PASSO et M. UGHI : A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow. *SIAM J. Math. Anal.*, 24(6):1414–1439, 1993.

- [13] G. I. BARENBLATT, J. GARCIA-AZORERO, A. DE PABLO et J.-L. VAZQUEZ : Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata. *Appl. Anal.*, 65(1-2):19–45, 1997.
- [14] G.I. BARENBLATT, Yu.P. ZHELTOV et I.N. KOCHINA : Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata). *PMM, J. Appl. Math. Mech.*, 24:1286–1303, 1960.
- [15] A. BELIAEV : Positive solutions of the porous medium equation with hysteresis. *J. Math. Anal. Appl.*, 281(1):125–137, 2003.
- [16] Ph. BÉNILAN, D. BLANCHARD et H. GHIDOUCE : On a nonlinear system for shape memory alloys. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 2(1):65–76, 1990.
- [17] Philippe BÉNILAN, Michael G. CRANDALL et Ammon PAZY : “Bonnes solutions” d’un problème d’évolution semi-linéaire. (“Mild solutions” of a semilinear evolution problem). *C. R. Acad. Sci., Paris*, 306(13):527–530, 1988.
- [18] T. BENJAMIN, J. BONA et J. MAHONY : Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Tran. Roy. Soc. London*, 272:47–78, 1972.
- [19] Henri BERLIOCCI et Jean-Michel LASRY : Intégrales normales et mesures paramétrées en calcul des variations. *Bull. Soc. Math. France*, 101:129–184, 1973.
- [20] D. BLANCHARD, A. DAMLAMIAN et H. GHIDOUCE : A nonlinear system for phase change with dissipation. *Differential Integral Equations*, 2(3):344–362, 1989.
- [21] D. BLANCHARD et H. GHIDOUCE : A nonlinear system for irreversible phase changes. *European J. Appl. Math.*, 1(1):91–100, 1990.
- [22] Michael BÖHM et R. E. SHOWALTER : A nonlinear pseudoparabolic diffusion equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 16(5):980–999, 1985.
- [23] A. BOUZIANI et N. MERAZGA : Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral conditions. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 115, 18 pp. (electronic), 2006.
- [24] F. BOYER et P. FABRIE : *Eléments d’analyse pour l’étude de quelques modèles d’écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 de *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [25] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [26] Haïm BRÉZIS : *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Mathematics Studies. 5. Notas de matematica (50). Amsterdam-London : North-Holland Publishing Comp. ; New York : American Elsevier Publishing Comp., Inc. 183 p., 1973.
- [27] J. BURKARDT : A finite element program in 50 lines of matlab , <http://www.people.scs.fsu.edu/burkardt>.
- [28] C. CASTAING et M. VALADIER : *Convex analysis and measurable multifunctions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

-
- [29] Y. CAUMEL : *Cours d'analyse fonctionnelle et complexes*. Cours et exercices - Licence et master de mathématiques. CEPADUES, Paris, 2003.
 - [30] Robert CAUTY : Solution du problème de point fixe de Schauder. *Fund. Math.*, 170(3):231–246, 2001.
 - [31] Th. CAZENAVE et A. HARAUX : *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, volume 1 de *Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications]*. Ellipses, Paris, 1990.
 - [32] C. CHEN et G. CHENG : Anomalous dimension in the solution of the Barenblatt's equation. *J. Math. Phys.*, 39(3):1589–1600, 1998.
 - [33] P. COLLI, F. LUTEROTTI, G. SCHIMPERNA et U. STEFANELLI : Global existence for a class of generalized systems for irreversible phase changes. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 9(3):255–276, 2002.
 - [34] Pierluigi COLLI, Fabio LUTEROTTI, Giulio SCHIMPERNA et Ulisse STEFANELLI : Global existence for a class of generalized systems for irreversible phase changes. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 9(3):255–276, 2002.
 - [35] C. CUESTA et J. HULSHOF : A model problem for groundwater flow with dynamic capillary pressure : stability of travelling waves. *Nonlinear Anal.*, 52(4):1199–1218, 2003.
 - [36] J. E. DENNIS, Jr. et Robert B. SCHNABEL : *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations (Classics in Applied Mathematics, 16)*. Soc for Industrial & Applied Math, 1996.
 - [37] J. DRONIOU : Intégration et espaces de sobolev à valeurs vectorielles. [http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/index.html](http://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/index.html), 2001.
 - [38] J. DRONIOU : Quelques résultats sur les espaces de sobolev. [http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-03/index.html](http://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-03/index.html), 2001.
 - [39] W.-P. DÜLL : Some qualitative properties of solutions to a pseudoparabolic equation modeling solvent uptake in polymeric solids. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(7-9):1117–1138, 2006.
 - [40] G. DUVAUT et J.-L. LIONS : *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21.
 - [41] Ivar EKELAND et Roger TÉMAM : *Convex analysis and variational problems*, volume 28 de *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, english édition, 1999. Translated from the French.
 - [42] Lawrence C. EVANS : A survey of entropy methods for partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 41(4):409–438 (electronic), 2004.
 - [43] B. EWALD, M. PETCU et R. TEMAM : Stochastic solutions of the two-dimensional primitive equations of the ocean and atmosphere with an additive noise. *Anal. Appl. (Singap.)*, 5(2):183–198, 2007.
 - [44] R. E. EWING : The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 6:283–294, 1975.

- [45] R. E. EWING : Time-stepping galerkin methods for nonlinear sobolev partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:1125–1150, 1978.
- [46] R. EYMARD et Th. GALLOUËT : Analytical and numerical study of a model of erosion and sedimentation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6):2344–2370 (electronic), 2006.
- [47] R. EYMARD et Th. GALLOUËT : A partial differential inequality in geological models. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 28(6):709–736, 2007.
- [48] R. EYMARD, Th. GALLOUËT, V. GERVAIS et R. MASSON : Convergence of numerical scheme for stratigraphic modeling. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2004.
- [49] R. EYMARD, Th. GALLOUËT, D. GRANJEON, R. MASSON et Q. H. TRAN : Multi-lithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 60(2):527–548, 2004.
- [50] Irene FONSECA et Giovanni LEONI : *Modern methods in the calculus of variations : L^p spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007.
- [51] Avner FRIEDMAN et Zeev SCHUSS : Degenerate evolution equations in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 161:401–427, 1971.
- [52] G. GAGNEUX et M. MADAUNE-TORT : *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, volume 22 de *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. With a preface by Charles-Michel Marle.
- [53] G. GAGNEUX et G. VALLET : Sur des problèmes d'asservissements stratigraphiques. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8:715–739 (electronic), 2002. A tribute to J. L. Lions.
- [54] G. GAGNEUX et G. VALLET : A result of existence for an original convection-diffusion equation. *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 99(1):125–131, 2005.
- [55] J. GARCIA-AZORERO et A. DE PABLO : Finite propagation for a pseudoparabolic equation : two-phase non-equilibrium flows in porous media. *Nonlinear Anal.*, 33(6):551–573, 1998.
- [56] V. GERVAIS et R. MASSON : Mathematical and numerical analysis of a stratigraphic model. *M2AN*, 38(4):585–611, 2004.
- [57] D. GRANJEON : Modélisation stratigraphique déterministe ; conception et applications d'un modèle diffusif 3d multilithologique. Mémoire de D.E.A., Géosciences Rennes, France, 1997.
- [58] W. GRECKSCH et C. TUDOR : *Stochastic evolution equations : A Hilbert space approach*, volume 85 de *Mathematical Research*. Akademie-Verlag, Berlin, 1995.
- [59] J. HULSHOF et J. R. KING : Analysis of a Darcy flow model with a dynamic pressure saturation relation. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(1):318–346 (electronic), 1999.
- [60] J. HULSHOF et J.-L. VÁZQUEZ : Self-similar solutions of the second kind for the modified porous medium equation. *European J. Appl. Math.*, 5(3):391–403, 1994.
- [61] N. IGBIDA : Solutions auto-similaires pour une équation de Barenblatt. *Rev. Mat. Apl.*, 17(1):21–36, 1996.
- [62] E. I. KAIKINA : Nonlinear pseudoparabolic type equations on a half-line with large initial data. *Nonlinear Anal.*, 67(10):2839–2858, 2007.

-
- [63] S. KAMIN, L. A. PELETIER et J. L. VÁZQUEZ : On the Barenblatt equation of elastoplastic filtration. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(4):1333–1362, 1991.
 - [64] S. KAMIN, L. A. PELETIER et J. L. VÁZQUEZ : On the Barenblatt equation of elastoplastic filtration. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(4):1333–1362, 1991.
 - [65] David N. KECK et Mark A. MCKIBBEN : On a McKean-Vlasov stochastic integro-differential evolution equation of Sobolev-type. *Stochastic Anal. Appl.*, 21(5):1115–1139, 2003.
 - [66] J. U. KIM : On a stochastic scalar conservation law. *Indiana Univ. Math. J.*, 52(1):227–256, 2003.
 - [67] A. N. KOLMOGOROV et S. V. FOMIN : *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Mir, Ellipses, Moscow, 2ed édition, 1998.
 - [68] M. O. KORPUSOV : Global solvability of an initial-boundary value problem for a semilinear system of equations. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 42(7):1039–1050, 2002.
 - [69] M. A. KRASNOSEL'SKII : *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Translated by A. H. Armstrong ; translation edited by J. Burlak. A Pergamon Press Book. The Macmillan Co., New York, 1964.
 - [70] Thibault L. : Personal communication. University of Montpellier, 2009.
 - [71] K. B. LIASKOS, I. G. STRATIS et A. N. YANNAKOPOULOS : Pseudoparabolic equations with additive noise and applications. *Math. Methods Appl. Sci.*, 32(8):963–985, 2009.
 - [72] J.-L. LIONS : *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
 - [73] J.-L. LIONS et E. MAGENES : *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
 - [74] V. PADRÓN : Effect of aggregation on population recovery modeled by a forward-backward pseudoparabolic equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(7):2739–2756 (electronic), 2004.
 - [75] P. I. PLOTNIKOV : Passage to the limit with respect to viscosity in an equation with a variable direction of parabolicity. *Differentsial'nye Uravneniya*, 30(4):665–674, 734, 1994.
 - [76] M. PTASHNYK : Nonlinear pseudoparabolic equations and variational inequalities. Mémoire de D.E.A., Heidelberg, 2004.
 - [77] M. PTASHNYK : Nonlinear pseudoparabolic equations as singular limit of reaction-diffusion equations. *Appl. Anal.*, 85(10):1285–1299, 2006.
 - [78] M. PTASHNYK : Degenerate quasilinear pseudoparabolic equations with memory terms and variational inequalities. *Nonlinear Anal.*, 66(12):2653–2675, 2007.
 - [79] Alfio QUARTERONI et Alberto VALLI : *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer Series in Computational Mathematics. 23. Berlin : Springer-Verlag. xvi, 543 p. DM 128.00 ; öS 998.40 ; sFr 128.00 /hbk , 1994.
 - [80] G. SCHIMPERNA, A. SEGATTI et U. STEFANELLI : Well-posedness and long-time behavior for a class of doubly nonlinear equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 18(1):15–38, 2007.
 - [81] Ben SCHWEIZER : Averaging of flows with capillary hysteresis in stochastic porous media. *European J. Appl. Math.*, 18(3):389–415, 2007.

- [82] A. SEGATTI : Global attractor for a class of doubly nonlinear abstract evolution equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 14(4):801–820, 2006.
- [83] R. E. SHOWALTER : *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, volume 49 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [84] R. E. SHOWALTER et T. W. TING : Pseudoparabolic partial differential equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1:1–26, 1970.
- [85] Moïse SIBONY et Jean-Claude MARDON : *Analyse numérique I : Systèmes linéaires et non linéaires. 2^e tirage corr.* Actualités Scientifiques et Industrielles, 1405. Paris : Hermann. IX, 515 p. (pagination non continue) , 1984.
- [86] Jacques SIMON : Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146:65–96, 1987.
- [87] S. L. SOBOLEV : *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. “Nauka”, Moscow, fifth édition, 1992.
- [88] G. A. SVIRIDYUK et A. F. KARAMOVA : On the fold of the phase space of a nonclassical equation. *Differ. Uravn.*, 41(10):1400–1405, 1438, 2005.
- [89] G. VALLET : Sur une loi de conservation issue de la géologie. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(8):559–564, 2003.
- [90] G. VALLET : On a new conservation law resulting from sedimentary basin dynamics. In *VIII Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées et de Statistiques*, volume 31 de *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano*, pages 247–255. Prensas Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2004.
- [91] G. VALLET : Dirichlet problem for a degenerated hyperbolic-parabolic equation. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 15(2):423–450, 2005.
- [92] G. VALLET : On a degenerated parabolic-hyperbolic problem arising from stratigraphy. In *Numerical mathematics and advanced applications*, pages 412–420. Springer, Berlin, 2006.
- [93] G. VALLET : Stochastic perturbation of nonlinear degenerate parabolic problems. *Differential and integral equation*, to appear.
- [94] G VALLET et P WITTBOLD : On a stochastic first-order hyperbolic equation in a bounded domain. *Infinite Dimensional Analysis, QuantumProbability*, 12(4):1–39, 2009.
- [95] C. J. van DUIJN, L. A. PELETIER et I. S. POP : A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(2):507–536 (electronic), 2007.
- [96] Z. WANG et J. YIN : Uniqueness of bounded solutions to a viscous diffusion equation. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, pages No. 17, 8 pp. (electronic), 2003.
- [97] K. YOSIDA : *Functional analysis*. Springer-Verlag, New York, fourth édition, 1974. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 123.
- [98] E. ZEIDLER : *Nonlinear functional analysis and its applications. I*. Springer-Verlag, New York, 1986. Fixed-point theorems, Translated from the German by Peter R. Wadsack.

MOT-CLEFS

Problèmes pseudo paraboliques, semi discrétisation implicite en temps, équation de Barenblatt

TITLE

**ÉTUDE DE PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES
DE TYPE PSEUDO-PARABOLIQUE**

KEYWORDS

Pseudo parabolic problems, implicit time-semidiscretization, Barenblatt equation

ADRR : Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau
UMR CNRS 5142
Bâtiment IPRA - Université de Pau et des Pays de l'Adour
Avenue de l'Université - BP 1155
64013 PAU CEDEX
ISBN : 10PAUU305

ÉTUDES DE PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES DE TYPE PSEUDO-PARABOLIQUE

Ngonn SEAM et Guy VALLET
seamngonn@yahoo.fr, guy.vallet@univ-pau.fr

Université de Pau et des Pays de l'Adour
Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau
CNRS UMR 5142
IPRA BP 1155
64013 Pau Cedex (FRANCE)

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est l'étude du problème non linéaire de type pseudo parabolique suivant : trouver une fonction mesurable u de $Q :=]0, T[\times \Omega$ à valeur réelle, solution du problème

$$\begin{cases} f(t, x, u_t) - \text{Div}\{a(x, u, u_t)\nabla u + b(x, u, u_t)\nabla u_t\} = g(t, x), (t, x) \in Q, \\ u(t, x) = 0, (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

où l'opérateur de Nemystkii associé à la fonction f est monotone.

Un premier chapitre est consacré à l'étude de l'existence d'une solution pour le problème ci-dessus. Pour cela, on utilise une méthode de semi-discrétisation implicite en temps. L'existence des itérés repose sur le théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov et la convergence du schéma sur un outil de compacité adapté à la situation. À la fin du chapitre, on propose des applications à l'équation de Barenblatt et au cas d'un f multivoque.

Dans le second chapitre, on s'intéresse au problème de Barenblatt pseudo-parabolique : rechercher une fonction mesurable u de Q à valeur réelle telle que

$$\begin{cases} f(u_t) - \Delta u - \varepsilon \Delta u_t = g(t, x), (t, x) \in Q, \\ u(t, x) = 0, (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

où f n'est pas nécessairement monotone.

Pour $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$, où ε_0 est une valeur critique, on montre que le problème est bien posé en utilisant une méthode similaire à celle du premier chapitre. Pour la valeur critique, le problème admet au plus une solution ; cette dernière existe moyennant une hypothèse supplémentaire sur f . Enfin, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la solution n'est pas unique en général. On propose enfin d'une approche stochastique de l'équation pseudo-parabolique de Barenblatt-Sobolev. Le dernier chapitre propose des simulations numériques monodimensionnelles ; notamment, on s'intéresse à la perturbation singulière pseudo-parabolique lorsque la diffusion moléculaire change de signe.

Mots-Clés : problème pseudo parabolique, équation dégrénée, résultat d'existence, semi discrétisation implicite en temps, inclusion différentielle, équation de Barenblatt.

Classification Mathématique : 35K65, 35K70.