



**HAL**  
open science

# Etude théorique et expérimentale du flambement des pieux

Emile Youssef

► **To cite this version:**

Emile Youssef. Etude théorique et expérimentale du flambement des pieux. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT: . tel-00523301

**HAL Id: tel-00523301**

**<https://pastel.hal.science/tel-00523301>**

Submitted on 4 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 18 477 (4)

**THESE DE DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : Géotechnique

présentée par

**Emile YOUSSEF**

*pour obtenir le grade de Docteur de  
l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*

sur le sujet

**ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE  
DU FLAMBEMENT DES PIEUX**

soutenue le 1<sup>er</sup> décembre 1994

devant le jury composé de Messieurs

<b>François SCHLOSSER</b>	<b>Président</b>
<b>Marc BOULON</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Isam SHAHROUR</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Eric DEGNY</b>	<b>Examineur</b>
<b>Daniel GOUVENOT</b>	<b>Examineur</b>
<b>Roger FRANK</b>	<b>Directeur de thèse</b>





**Préparer une thèse c'est :**

- se faire centrifuger pendant trois ans minimum ;
  - être un modèle réduit devant l'état de l'art et les chefs ;
  - éviter tout comportement non-linéaire ;
  - ne pas faire de grands déplacements notamment à l'étranger ;
  - avoir un faible module de réaction vis-à-vis des agressions semi-tangentielles ;
- et surtout terminer en vraie grandeur et sans avoir flambé...

***A ma Famille***



## Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) sous la direction de Monsieur Roger FRANK, Directeur du Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sols (CERMES) et Professeur-adjoint à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour sa patience, pour les précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail et enfin pour ses encouragements dans les passages difficiles.

J'exprime également mes vifs remerciements à Monsieur Eric DEGNY, chef de la section Bureautique et Micro-Informatique au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, pour le suivi de mes travaux de recherche, sa disponibilité malgré la nouvelle tâche administrative qui lui incombe, ses conseils scientifiques et la confiance qu'il m'a accordé pendant ces trois années. Qu'il veuille accepter ma sincère reconnaissance.

J'adresse mes remerciements respectueux à Monsieur F. SCHLOSSER, Président Directeur Général de la société TERRASOL et Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à Monsieur M. BOULON, Professeur à l'Université Joseph Fourier, et à Monsieur I. SHAHROUR, Professeur d'Université à l'Ecole Centrale de Lille, qui ont bien voulu accepter d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur D. GOUVENOT, Directeur Technique à l'entreprise SOLETANCHE, qui a accepté d'examiner ce travail.

Je remercie particulièrement Monsieur J. GARNIER, chef de la section Modélisation en Centrifugeuse au LCPC, qui m'a accueilli au sein de son équipe et m'a donné les moyens nécessaires à la réalisation des essais en centrifugeuse. J'exprime aussi mes chaleureux remerciements à Messieurs C. FAVRAUD, L.M. COTTINEAU, J.M. MOLIARD et G. RAULT qui m'ont apporté leur compétence technique. Sans leur collaboration, la partie expérimentale de ma thèse n'aurait jamais été achevée.

Je présente au même titre mes remerciements à Monsieur M. BUSTAMANTE et son équipe constituée de Messieurs B. DOIX et L. GIANESELLI, qui m'ont fait profiter de leur expérience dans le domaine des fondations profondes et m'a donné la possibilité de participer à la réalisation d'un essai de chargement en vraie grandeur. Qu'ils veuillent bien accepter ma sincère reconnaissance et le témoignage de ma profonde admiration.

Je remercie également Monsieur L. DELATTRE, ingénieur à la section Mécanique des Sols et Fondations du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées pour l'aide qu'il m'a apporté.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Directeur du LCPC, à Monsieur le Directeur Scientifique et à Madame TCHANG, pour avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires au bon déroulement de cette thèse.

Je remercie tout spécialement ma famille qui m'a incité à entreprendre ce travail et m'a toujours accordé un soutien morale sans faille, tout en partageant avec moi les moments de doutes et d'angoisses mais aussi les joies qui ont parsemé ces trois années de thèse. Qu'elle en soit remerciée.

Enfin, je remercie l'ensemble des personnes présentes lors de mon séjour au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, plus particulièrement mes collègues doctorants, pour leur enthousiasme et l'ambiance de travail détendue qu'ils ont su instaurer.

## Résumé

En géotechnique, le phénomène du flambement se rencontre principalement dans le cas des micropieux traversant des sols de faibles caractéristiques mécaniques. Pour des pieux plus massifs chargés latéralement et soumis à une charge verticale importante se pose plutôt le problème de l'influence de l'effort normal sur la réponse en flexion des pieux. Ces deux problèmes se traitent mécaniquement en tenant compte des non-linéarités géométriques (effets du second ordre - grands déplacements).

Une synthèse bibliographique est d'abord entreprise. Il ressort que la théorie de Mandel est souvent utilisée dans la pratique.

Une approche théorique appelée "résistance des matériaux locale (RDM locale)" est ensuite développée pour tenir compte des non-linéarités géométriques. Cette approche est mise en oeuvre numériquement par le programme GOUFLA de calcul de la réponse d'un groupe de pieux en tenant compte des grands déplacements. La validation du programme GOUFLA s'appuie, d'une part, sur des résultats analytiques obtenus par la théorie de Mandel et, d'autre part, sur les résultats numériques obtenus par le logiciel CESAR-LCPC (code par éléments finis).

Les principaux résultats d'un programme d'essais de chargement axial sur des modèles réduits de pieux centrifugés sont ensuite présentés, ainsi qu'une confrontation de ces résultats avec les prévisions théoriques de Mandel ; une méthode est ainsi proposée pour une bonne estimation de la force critique à partir de la théorie de Mandel. Les résultats expérimentaux sont aussi comparés avec ceux obtenus numériquement par le programme GOUFLA.

Des prévisions de la force critique de flambement sont calculées par le programme GOUFLA pour le dimensionnement des fondations de plusieurs ouvrages réels. L'interprétation et l'analyse d'un essai de flambement d'un micropieu en vraie grandeur sont présentées.

**Mots - clés :** micropieu - flambement - non-linéarités géométriques - grands déplacements - module de réaction - matrice transfert - modèle réduit - centrifugeuse - sable - argile - essai en vraie grandeur.



## Abstract

The buckling of micropiles can occur especially when they are founded through weak soils. In case of more standard piles, the flexural deformation due to lateral loads is sensitive to the vertical loads acting on the pile.

These two phenomena cannot be taken into account by commonly used theories of strength of materials. The aim of this research is to consider the geometrical nonlinearities of the pile (second order effect, large displacement), in order to better study the pile response due to such phenomena and to better estimate the critical buckling load that it can support.

A bibliographic research is undertaken which concludes that Mandel's theory is the most used in practice.

Secondly, a theoretical approach to take into account the geometric nonlinearities is developed. This approach is implemented into a numerical code "GOUFLA". The code validation is carried out by comparing the results to those obtained by the finite element code CESAR-LCPC and to analytical solutions given by Mandel.

The results of a centrifuge testing program on axially loaded piles is presented. Centrifuge measurements are used to validate the theoretical estimations. A method is proposed to estimate the buckling load when using the Mandel theory. These measurements have also been used to validate the numerical results obtained by GOUFLA.

Finally, the program GOUFLA is used to predict buckling design loads for several existing structures. The analysis of a buckling test on a full scale micropile is presented.

**Key - words :** micropile - buckling - geometric nonlinearities - large displacements - modulus of subgrade reaction - transfer matrix - model test - centrifuge - sand - clay - full scale test.



# TABLE DES MATIERES

	page
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	1
<b>Chapitre I SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE</b> .....	5
<b>I.1 Définition du phénomène de flambement</b> .....	5
<b>I.2 Méthodes de calcul de la force critique de flambement</b> .....	6
I.2.1 Méthode classique.....	7
I.2.2 Méthode énergétique.....	8
<b>I.3 Flambement du mât d'Euler</b> .....	9
I.3.1 Formule d'Euler.....	9
I.3.2 Influence de la déformation due à l'effort tranchant sur la force critique.....	10
<b>I.4 Flambement d'un pieu dans un sol élastique</b> .....	12
<b>I.4.1 Généralités sur l'interaction sol-pieu</b> .....	12
I.4.1.1 Modèle de Winkler.....	12
I.4.1.2 Modèle du continuum élastique.....	13
I.4.1.3 Modèles biparamétriques.....	14
<b>I.4.2 Force critique dans un sol de "type Winkler"</b> .....	20
I.4.2.1 Pieu complètement fiché dans le sol.....	20
a - Cas d'un sol homogène (monocouche).....	20
a-1 Cas d'un module de réaction constant.....	20
a-2 Cas d'une variation linéaire du module de réaction.....	25
a-3 Influence du frottement latéral sur la force critique.....	27
b - Cas d'un sol stratifié (multicouches).....	28
I.4.2.2 Pieu partiellement fiché dans le sol.....	30
a - Cas d'un module de réaction constant.....	30
b - Cas d'une variation linéaire du module de réaction.....	33
c - Influence du frottement latéral sur la force critique.....	34
<b>I.4.3 Force critique dans un "continuum élastique"</b> .....	36
<b>I.4.4 Force critique dans un "sol biparamétrique"</b> .....	38
<b>I.4.5 Charge ultime d'un micropieu</b> .....	43
<b>I.4.6 Détermination du module de réaction du sol</b> .....	44
<b>I.5 Conclusions</b> .....	50

**Chapitre II ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE DU FLAMBEMENT ET DE LA PRISE EN COMPTE DES GRANDS DEPLACEMENTS DANS LE COMPORTEMENT MECANIQUE DU PIEU ..... 53**

<b>II.1 Introduction .....</b>	<b>53</b>
<b>II.2 Résolution numérique des solutions de Mandel ( Programme de calcul FLAMANDEL).....</b>	<b>55</b>
<b>II.3 Modélisation théorique des non-linéarités géométriques (effets du second ordre-grands déplacements).....</b>	<b>57</b>
<b>II.3.1 Rappels de la Résistance des Matériaux (RDM).....</b>	<b>57</b>
II.3.1.1 Problème du mât d'Euler.....	57
II.3.1.2 Equations d'équilibre local dans le repère de Frénet (équations de Navier-Bresse et équations de Bresse).....	57
<b>II.3.2 Présentation de l'approche "RDM locale".....</b>	<b>60</b>
II.3.2.1 Hypothèses de l'approche "RDM locale".....	60
II.3.2.2 Vecteur d'état et matrices-transferts.....	61
II.3.2.3 Concept de rotations semi-tangentielles.....	62
a - Formulation du problème - matrice de rotation.....	63
b - Commutativité de la composition des deux rotations.....	64
c - Concept et commutativité des rotations semi-tangentielles.....	65
II.3.2.4 Principes de l'approche "RDM locale".....	67
a - Traitement des grands déplacements.....	68
b - Matrices-transferts généralisées aux grands déplacements - algorithme itératif.....	69
<b>II.3.3 Application au problème des pieux - Programme GOUFLA.....</b>	<b>74</b>
II.3.3.1 Hypothèses et possibilités du programme GOUFLA.....	74
a - Géométrie des pieux.....	74
b - Courbes de réaction du sol.....	76
c - Conditions aux limites en tête et en pointe de pieux.....	77
II.3.3.2 Principe de résolution.....	78
a - Eléments de rigidité : prise en compte des conditions aux limites.....	78
b - Transfert des éléments de rigidité d'un point à un autre d'une structure.....	79
c - Eléments de rigidité au centre du chevêtre.....	80
d - Résolution au centre du chevêtre.....	82
e - Processus de convergence.....	83
f - Traitement particulier vis - à -vis du flambement.....	83
II.3.3.3 Algorithme de calcul du programme GOUFLA.....	85

<b>II.3.4 Etude de quelques aspects dans le mécanisme du programme GOUFLA</b> .....	86
II.3.4.1 Influence de la discrétisation numérique.....	86
II.3.4.2 Influence de la tolérance de convergence.....	87
<b>II.3.5 Influence des effets du second ordre: comparaison GOUFLA - GOUPIL</b> .....	92
<b>II.3.6 Validation du programme GOUFLA</b> .....	96
II.3.6.1 Comparaison GOUFLA - Mandel.....	96
II.3.6.2 Comparaison GOUFLA - Eléments Finis (CESAR-LCPC).....	97
<b>II.3.7 Influence du type de chargement sur la force critique de flambement</b>	101
<b>II.4 Conclusions</b> .....	103
<b>Chapitre III ESSAIS DE FLAMBEMENT DE MODELES REDUITS DE PIEUX SOUS CHARGES AXIALES</b> .....	105
<b>III.1 Introduction</b> .....	105
<b>III.2 Essais à l'air libre (sans sol) à 1 g</b> .....	106
III.2.1 Caractéristiques géométriques et mécaniques des modèles.....	106
III.2.2 Conditions aux limites.....	106
III.2.3 Dispositif de chargement.....	107
III.2.4 Résultats des essais de flambement.....	108
III.2.5 Mesure du déplacement par analyse d'images.....	112
<b>III.3 Essais dans le sol</b> .....	116
III.3.1 Centrifugation : généralités et conditions de similitude.....	116
III.3.2 Récapitulation des essais dans le sol.....	119
III.3.3 Massifs de sol.....	119
III.3.3.1 Caractéristiques des matériaux utilisés.....	119
III.3.3.2 Constitution des massifs de sol.....	120
III.3.4 Caractéristiques géométriques et mécaniques des modèles.....	123
III.3.5 Caractéristiques des conteneurs.....	124
III.3.6 Mise en place des modèles dans les massifs de sol.....	124
III.3.7 Procédure d'essais et observation des modèles.....	125
III.3.8 Essais au mini-pénétrömètre.....	126
III.3.9 Description et résultats des essais de flambement.....	128
III.3.10 Découpage des massifs - longueur de flambement.....	138
<b>III.4 Conclusions</b> .....	140

## **Chapitre IV CONFRONTATION ENTRE LA THEORIE ET L'EXPERIENCE.**

<b>IV.1 Introduction</b> .....	143
<b>IV.2 Comparaison entre les prévisions théoriques de Mandel et les résultats en centrifugeuse</b> .....	145
IV.2.1 Détermination d'un profil de module de réaction.....	145
IV.2.2 Variation du rapport $F_{cr,Mandel} / F_{cr,centrifugeuse}$ en fonction du module de réaction.....	150
IV.2.3 Choix du module de réaction.....	153
IV.2.4 Extrapolation des résultats obtenus en centrifugeuse.....	158
<b>IV.3 Comparaison entre les calculs numériques de GOUFLA et les résultats en centrifugeuse</b> .....	159
<b>IV.4 Application au cas du pont des remparts à Cahors</b> .....	165
IV.4.1 Présentation de l'ouvrage.....	165
IV.4.2 Hypothèses de calcul.....	165
IV.4.3 Résultats et choix du type de micropieu.....	167
<b>IV.5 Application du programme GOUFLA au cas du quai de Lorient</b>	167
IV.5.1 Description de l'ouvrage.....	169
IV.5.2 Désordres du quai : origines et conséquences.....	171
IV.5.3 Analyse de la résistance des pieux au flambement.....	172
IV.5.4 Essais de chargement de pieux.....	174
IV.5.5 Etude du risque de flambement par le programme GOUFLA.....	176
<b>IV.6 Essai de flambement d'un micropieu en vraie grandeur</b> .....	177
IV.6.1 Coupe géotechnique et caractéristiques du micropieu.....	177
IV.6.2 Prévisions théoriques de la force critique de flambement.....	181
IV.6.3 Réalisation de l'essai et interprétation des résultats.....	182
<b>IV.7 Conclusions</b> .....	187
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	189
<b>ANNEXE A</b> .....	193

ANNEXE A-1.....	195
ANNEXE A-2.....	199
<b>ANNEXE B.....</b>	<b>207</b>
ANNEXE B-1.....	209
ANNEXE B-2.....	213
ANNEXE B-3.....	217
ANNEXE B-4.....	221
ANNEXE B-5.....	233
<b>ANNEXE C.....</b>	<b>243</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>247</b>



## INTRODUCTION GENERALE

Les ingénieurs praticiens affirment souvent que les fondations profondes ne sont pas sujettes au flambement, sauf peut-être, lorsqu'il s'agit de micropieux dans des sols de caractéristiques mécaniques très médiocres. De plus, les règlements sont peu précis quant aux moyens d'étude du flambement. Ce sujet a pourtant fait l'objet de plusieurs études théoriques depuis le début du siècle. Elles mettent à la disposition des projeteurs des solutions analytiques, présentées souvent sous forme d'abaques afin de déterminer la force critique de flambement. En ce qui concerne plus particulièrement les micropieux, des recherches sont actuellement entreprises dans le cadre du projet national FOREVER, dans le but de fournir des règles de dimensionnement et de calcul des micropieux, sous tous leurs aspects, y compris le flambement.

Les études théoriques (par exemple, Mandel 1936), basées sur les hypothèses classiques de la résistance des matériaux, ne permettent cependant pas de traiter le problème de l'influence de la charge verticale sur le calcul en flexion d'un pieu chargé latéralement (effets du second ordre - réponse avant flambement). Le traitement général de ce problème nécessite la prise en compte des non-linéarités géométriques dans les équations de comportement et d'équilibre.

La mise au point d'une méthode de vérification au flambement des fondations profondes nécessite une confrontation de résultats théoriques et de résultats expérimentaux. Bien que les essais de flambement de pieux en vraie grandeur ou en semi-grandeur présentent un intérêt incontestable pour une telle confrontation, la réalisation de tels essais est coûteuse d'où le nombre très modeste des essais réalisés jusqu'à présent. Une autre voie se révèle intéressante; elle consiste à réaliser des essais sur modèles réduits centrifugés. A notre connaissance, si de nombreux essais de fondations profondes ont été réalisés en centrifugeuse, aucun d'eux ne traite l'aspect du flambement.

Le but de la présente recherche, inscrite dans le projet national FOREVER, est donc d'étudier numériquement et expérimentalement le problème du flambement des pieux.

Il s'agit, d'une part, de développer des outils numériques qui permettent de calculer la force critique de flambement et de tenir compte des non-linéarités géométriques (réponse avant flambement) et, d'autre part, de réaliser un programme d'essais de flambement sur des modèles réduits en centrifugeuse, qui permettent la validation de ces outils numériques.

Cette recherche est divisée en quatre chapitres.

Le chapitre I est consacré à une synthèse bibliographique sur les méthodes de calcul de la force critique de flambement. Les solutions analytiques ou numériques établies pour la

détermination de cette force sont présentées pour les différentes hypothèses de l'interaction sol-structure. Ces solutions correspondent aux cas de pieux complètement ou partiellement fichés dans des sols homogènes ou hétérogènes. Un programme a été développé pour calculer numériquement les solutions de Mandel : le programme FLAMANDEL.

Le chapitre II décrit la formulation théorique et les hypothèses de bases d'une approche des problèmes des non-linéarités géométriques, appelée "résistance des matériaux locale (RDM locale)". Cette formulation permet de calculer la réponse des pieux en grands déplacements, avant le flambement. Elle est basée sur l'écriture locale des équations de la résistance des matériaux classique (RDM classique). Les notions de matrice-transfert et de vecteur d'état sont utilisées pour résoudre localement ces équations. On généralise ces notions au cas des grands déplacements (résolution matérielle) au moyen du concept des rotations semi-tangentielles.

Le programme GOUPIL de calcul d'un groupe de pieux (RDM classique), développé au LCPC, a été modifié pour pouvoir tenir compte de cette nouvelle approche. Cette version du programme, mise au point à l'occasion de cette recherche, s'appelle GOUFLA. Une comparaison entre les programmes GOUFLA et GOUPIL est établie afin de mettre en évidence l'importance des effets du second ordre (grands déplacements) dans le calcul de la réponse du pieu, notamment l'influence de la force verticale sur la réponse en flexion d'un pieu sollicité latéralement. La validation du programme GOUFLA est effectuée en confrontant les résultats avec ceux donnés, d'une part, analytiquement par la théorie de Mandel (avec utilisation du programme FLAMANDEL) et, d'autre part, numériquement par le code d'éléments finis CESAR - LCPC. Par ailleurs, des études paramétriques ont été réalisées afin de montrer l'importance de la discrétisation numérique et de la tolérance de convergence sur les résultats obtenus par GOUFLA. En conséquence, des valeurs concernant ces paramètres sont préconisées pour l'utilisation pratique du programme.

Le chapitre III décrit les principaux résultats du programme d'essais de chargement axial sur des modèles réduits de pieux centrifugés. Plusieurs séries d'essais en centrifugeuse ont été effectuées dans des massifs de sol reconstitués (sable de Fontainebleau moyennement dense et argile molle reconstituée à partir de poudre de Kaolin de Speswhite), pour diverses géométries et différentes conditions aux limites. Par ailleurs, une série d'essais est réalisée à l'air libre et dans le sol sous champ de gravitation terrestre (1 g) dans le but de mettre au point le processus expérimental mis en oeuvre. Des essais de caractérisation de sols ont été effectués, au moyen d'un mini-pénétromètre embarqué dans la centrifugeuse.

Le chapitre IV est consacré, d'une part, à la confrontation entre les résultats obtenus en centrifugeuse et ceux obtenus, soit par la théorie de Mandel, soit numériquement par le programme GOUFLA et, d'autre part, à la présentation d'une série d'applications des programmes FLAMANDEL et GOUFLA à des cas réels sur lesquels le LCPC est intervenu. Le premier cas réel traité est celui du renforcement par micropieux du pont des remparts à

Cahors. Ces micropieux traversent des horizons karstiques présentant des remplissages argileux où l'on pouvait craindre le flambement. Des prévisions de la force critique sont effectuées par FLAMANDEL et GOUFLA. Ensuite, une étude du risque de flambement des pieux du quai de Lorient, suite aux désordres observés en 1985, est faite en comparant les résultats obtenus par GOUFLA avec ceux d'une autre étude numérique, réalisée juste après l'apparition des désordres. Enfin, dans le cadre de la réalisation du TGV Lille - Bruxelles, un essai de chargement d'un micropieu en vraie grandeur a été réalisé afin d'en vérifier la force critique de flambement. L'interprétation des mesures effectuées, ainsi que les prévisions de GOUFLA sont présentées.



# Chapitre I

## SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

### I.1 Définition du phénomène de flambement

L'une des hypothèses fondamentales dans le calcul élastique des poutres et des systèmes de poutres consiste à supposer de petites transformations (petits déplacements et petites déformations). En particulier on peut alors appliquer le principe de superposition d'états d'équilibre. En l'absence de cette hypothèse, les conditions d'équilibre doivent être écrites par rapport à la configuration déformée de la structure. Les déplacements ne restent plus proportionnels aux forces extérieures et il est même possible de voir les déplacements devenir très grands sous l'effet de ces forces extérieures.

Pour les structures élancées, on observe aussi des phénomènes d'instabilité, c'est à dire qu'il n'y a plus unicité de la déformée pour un chargement donné. Un exemple de ces phénomènes d'instabilité est celui du flambement d'une poutre élancée sous l'action d'un effort axial de compression (mât d'Euler). Cet effort est d'autant plus faible que l'élançement de la poutre est plus grand.

Euler (1744) a été le premier à expliquer ce phénomène. Lorsqu'une tige mince rectiligne soumise à une force verticale  $F$  inférieure à la force critique  $F_{cr}$ , une seule position d'équilibre stable existe: celle où la tige reste rectiligne. Lorsque  $F$  est supérieure à la force critique, deux positions d'équilibre existent: l'une où la tige est fléchie, l'autre où la tige reste rectiligne mais est alors instable.

Cependant, la théorie d'Euler, relative à des poutres de forme élancée, est restée longtemps sans application pratique. Les principaux matériaux de construction, à son époque, le bois et la pierre étaient utilisés dans des constructions massives où les phénomènes d'instabilité ne se posaient pas. Ce ne fut qu'au début de la construction des ponts en acier que la question du flambement des pièces minces prit une importance pratique. L'emploi de l'acier et des alliages à haute résistance pour toutes les constructions modernes et, en particulier pour les ponts, les navires et les avions, a fait de l'instabilité élastique un problème d'une importance considérable. L'expérience a prouvé que des constructions de ce type peuvent, dans certains cas, subir des dommages allant jusqu'à la rupture provoquée par l'instabilité élastique de pièces trop élancées ou de corps creux dont les parois sont très minces.

Le problème du flambement latéral des poutres, a été repris plus en détail par plusieurs auteurs (Mandel, 1936 ; Timoshenko, 1936 ; Hetenyi, 1946 ; Courbon, 1964, ..). Ainsi, Mandel (1936) définit le flambement comme un phénomène commun à tous les corps minces à une ou deux dimensions. Les corps cylindriques à parois minces, par exemple, peuvent être instables et flamber pour des tensions relativement faibles si l'épaisseur des parois est très faible par rapport au diamètre. Le flambement d'un cylindre mince peut encore se produire sous l'effet de la compression axiale, de la torsion, de la flexion ou d'une combinaison de celles-ci.

Pour les pieux dans le sol, il est généralement admis qu'un pieu ne flambe jamais. Toutefois avec les pieux aiguilles, l'élancement ( $l/B > 50$  où  $l$  est la longueur du pieu et  $B$  est son diamètre) devient tel que la question mérite d'être reconsidérée surtout si l'on envisage des forces portantes relativement fortes (500 à 1000 kN pour un pieu de 150 mm de diamètre). Des essais de chargement et de flambement de pieux aiguilles effectués par Gouvenot (1975), ont montré que pour constater le flambement des pieux, il fallait à la fois des pieux suffisamment élancés ( $l/B = 67$ ) et des sols de faible résistance (vases, argile très molle,...). D'autre part, des essais de chargement classique effectués sur des pieux aiguilles (Mascardi, 1968) dans des sols naturels de caractéristiques mécaniques ordinaires (sable et argile), ont permis de confirmer la bonne tenue de pieux de petits diamètres (10 à 15 cm) même très élancés ( $l/B = 45$  à  $70$ ).

La détermination de la force critique de flambement est d'un intérêt pratique dans le domaine de génie civil, notamment avec des fondations sur pieux chargés à la fois axialement et transversalement. Des méthodes de calcul de la force critique du flambement sont présentées dans les paragraphes suivants, à la fois pour des pieux à l'air libre et pour des pieux dans le sol.

## **1.2 Méthodes de calcul de la force critique de flambement**

Timoshenko (1936), Mandel (1936), Hetenyi (1946) et d'autres auteurs ont trouvé des solutions analytiques de la force critique de flambement. Ces solutions ont été déterminées en utilisant plusieurs méthodes. Dans la méthode classique (Mandel, Hetenyi, etc.), on détermine la solution de l'équation différentielle résultante des équations d'équilibre de la résistance des matériaux. La méthode énergétique (Timoshenko, etc.) détermine le minimum de l'énergie potentielle de la poutre qui signifie mécaniquement l'état d'équilibre stable. Ces méthodes permettent d'étudier la stabilité des pieux vis-à-vis du flambement et de déterminer la force critique de flambement. Mais elles ne permettent pas de calculer la réponse (efforts et déplacements) avant le flambement (préflambement) voire après le flambement (post-flambement). La détermination de ces réponses ainsi que l'étude de l'influence de la charge verticale sur la réponse en flexion de pieux chargés latéralement, font partie de l'étude des non-linéarités géométriques dans le comportement de pieu que nous traitons dans le chapitre suivant.

## I.2.1 Méthode classique

Cette méthode part du principe de la résistance des matériaux en écrivant, dans le repère matériel, les équations d'équilibre d'un tronçon infinitésimal d'une poutre. Dans notre cas, on présente une application de la méthode classique dans le cas d'un pieu droit, d'inertie constante  $I$ , soumis à une force de compression  $F$  et fiché dans un milieu élastique de module de réaction  $E_s$ . On suppose que l'effort normal est égal à la force verticale  $F$ , appliquée en tête du pieu, et qu'il n'y a pas de reprise de l'effort vertical par frottement latéral. C'est à dire que la force verticale  $F$  est constante le long du pieu. On suppose aussi que les déformations sont suffisamment petites pour que la réaction du sol soit toujours horizontale (pas de couplage entre la force verticale et la réaction du sol).

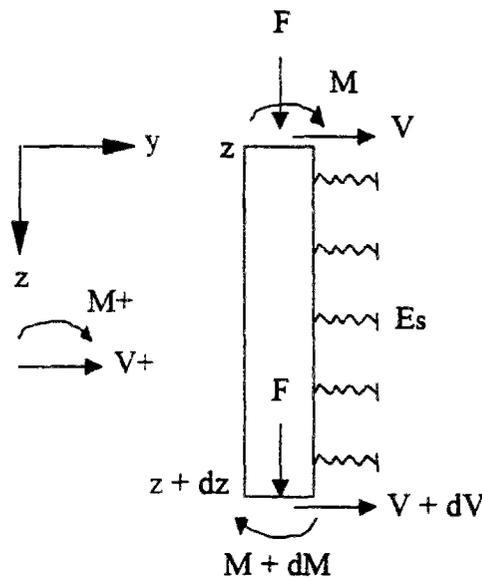


Fig. I.1: Forces agissantes sur un tronçon infinitésimal.

Les équations d'équilibre d'un tronçon infinitésimal de longueur  $dz$  (fig. I.1) s'écrivent:

$$(M + dM) - M + F dy - V dz + E_s y \frac{dz^2}{2} = 0; \quad (I.1)$$

$$(V + dV) - V + E_s y dz = 0, \quad (I.2)$$

où  $M$  est le moment de flexion,  $F$  la force verticale,  $V$  l'effort tranchant et  $E_s$  le module de réaction de sol. La combinaison de ces deux équations, en négligeant le terme du second ordre dans l'équation (I.1), donne :

$$\frac{d^2M}{dz^2} + F \frac{d^2y}{dz^2} + E_s y = 0. \quad (I.3)$$

En remplaçant dans cette relation, le moment  $M$  par son expression définie par l'équation de la courbure de la ligne moyenne du pieu (équation du comportement élastique du pieu)

$$M = E_p I_p \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (I.4)$$

où  $E_p I_p$  est la rigidité à la flexion du pieu, on obtient une équation différentielle du quatrième ordre en déplacement :

$$E_p I_p \frac{d^4 y}{dz^4} + F \frac{d^2 y}{dz^2} + E_s y = 0. \quad (I.5)$$

Pour chaque cas, en introduisant les conditions aux limites (deux conditions en tête et deux en pointe) dans l'équation (I.5), on aboutit à un système d'équations linéaires (quatre équations homogènes) dont les inconnues sont les quatre constantes d'intégration. Pour obtenir une position d'équilibre stable, autre que la position droite de la poutre donnée par la solution triviale (constantes d'intégration nulles), il suffit d'annuler le déterminant formé par les coefficients de ces équations, ce qui conduit à déterminer directement la force critique de flambement. On présente dans les paragraphes suivants, les expressions de la force critique de flambement, dans les cas d'un pieu à l'air libre et d'un pieu dans le sol.

### I.2.2 Méthode énergétique

Cette méthode due à S. Timoshenko (1936) est basée sur le principe de minimum d'énergie. Considérons une poutre droite, soumise à une force de compression  $F$ . La poutre acquiert sous l'action de la force  $F$ , un certain potentiel  $U$ . La poutre est stable et ne flambe pas si le potentiel  $U$  est suffisant pour qu'elle puisse fournir le travail  $T$  nécessaire pour ramener, après suppression de la force  $F$ , la poutre à sa position initiale, c'est à dire, si  $U > T$ . La force critique est atteinte si le travail  $T$  est égal au potentiel  $U$ , soit :  $U = T$ .

Dans le cas d'un pieu à l'air libre (mât d'Euler) de longueur  $l$ , les expressions du travail  $T$  et du potentiel interne  $U$ , sont données par :

$$T = \frac{F}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 dz \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} \int_0^l E_p I_p \left( \frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 dz; \quad (I.6)$$

d'où la force critique :

$$F_{cr} = \frac{\int_0^l E_p I_p \left( \frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 dz} \quad (I.7)$$

Une application de cette méthode, dans le cas d'un pieu fiché dans le sol, est présentée ultérieurement.

La méthode de l'énergie donne la valeur exacte de la force critique, connaissant la forme réelle de la courbe de flexion. Elle permet aussi la détermination de valeurs approchées de la charge critique lorsqu'une solution exacte de l'équation différentielle de la ligne élastique est inconnue ou trop complexe. Dans ces cas, la ligne élastique est représentée par une courbe arbitraire simple compatible avec les conditions aux limites. En adoptant une telle courbe, la méthode de l'énergie donne toujours pour la force critique une valeur plus élevée que la valeur exacte. Timoshenko (1936) a expliqué que cela provenait de l'utilisation d'une courbe hypothétique, ce qui revient à introduire dans la poutre une contrainte additionnelle qui augmente la rigidité de la poutre et la valeur des charges critiques. Dans le cas de plusieurs courbes arbitraires, la courbe retenue est celle qui conduit à la plus faible force critique.

### I.3 Flambement du mât d'Euler

#### I.3.1 Formule d'Euler

Les premiers problèmes d'instabilité élastique, se rapportant au flambement latéral de pièces comprimées, ont été résolus par Euler (1744). Euler a utilisé la méthode classique pour déterminer la force critique de flambement, ou charge d'Euler, d'une poutre droite, de longueur  $l$ , soumise à une force de compression  $F$ , pour différentes conditions aux limites. En l'absence de sol ( $E_s$  est nul), l'équation différentielle (I.5), régissant le déplacement de la poutre, devient:

$$E_p I_p \frac{d^4 y}{dz^4} + F \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad (I.8)$$

soit, en posant

$$k^2 = \frac{F}{E_p I_p} \quad , \quad (I.9)$$

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 ; \quad (I.10)$$

où  $E_p I_p$  est la rigidité à la flexion de la poutre.

La solution générale de l'équation (I.10) est :

$$y = A \sin(kz) + B \cos(kz) + Cz + D. \quad (I.11)$$

Euler a établi une formule générale de la force critique donnée par :

$$F_{\sigma E} = \frac{\pi^2 E_p I_p}{L^2}, \quad (I.12)$$

où  $L$  est une longueur réduite qui dépend des conditions aux limites et de la longueur réelle de la poutre  $l$  :

- poutre dont les deux extrémités sont articulées :  $L = l$  ;
- poutre dont les deux extrémités sont encastées :  $L = l/2$  ;
- poutre encastée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre :  $L = 2l$  ;
- poutre articulée à l'une de ses extrémités et encastée à l'autre :  $L = 0,699l$ .

L'expression (I.11) donnant les valeurs critiques exactes de la force de compression  $F$  est valable dans la mesure où la contrainte de compression  $\sigma_{cr}$ , qui se produit pendant le flambement, reste au-dessous de la limite d'élasticité  $\sigma_e$ . La valeur critique de la contrainte de compression  $\sigma_{cr}$  est :

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{\sigma E}}{A} = \frac{\pi^2 E_p}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (I.13)$$

avec 
$$r = \sqrt{\frac{I_p}{A}} \quad (I.14)$$

$A$  : aire de la section transversale de la poutre,

$r$  : rayon de giration.

Si la poutre est constituée d'un matériau de limite élastique  $\sigma_e$ , elle périt donc, par écrasement si  $\sigma_e < \sigma_{cr}$ , dès que  $(F/A)$  atteindra la valeur  $\sigma_e$ , et par flambement si  $\sigma_{cr} < \sigma_e$ , dès que  $(F/A)$  atteindra la valeur  $\sigma_{cr}$ .

### I.3.2 Influence de la déformation due à l'effort tranchant sur la force critique

Timoshenko (1936) a étudié l'influence de l'effort normal sur la valeur de la force critique. En effet, l'équation différentielle (I.10) suppose que la courbure est proportionnelle au moment fléchissant et elle néglige la déformation due à l'effort tranchant. Si on tient compte de cette déformation, il faut ajouter à la courbure due au moment fléchissant, celle due à l'effort tranchant. La courbure totale s'écrit :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{E_p I_p} + \frac{n}{AG} \frac{dv}{dz} = \frac{M}{E_p I_p} + \frac{nF}{AG} \frac{d^2 y}{dz^2}, \quad (I.15)$$

d'où 
$$\frac{M}{E_p I_p} = \frac{d^2 y}{dz^2} \left( 1 - \frac{nF}{AG} \right) \quad (I.16)$$

avec,

$M$  : moment fléchissant,

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion de la poutre,

$F$  : force verticale appliquée en tête de pieu,

$A$  : aire de la section transversale,

$G$  : module d'élasticité au cisaillement,

$n$  : facteur numérique dépendant de la forme de la section transversale,

pour une section circulaire  $n = 1,11$

pour une section rectangulaire  $n = 1,2$ .

En remplaçant  $M$  par sa nouvelle expression dans l'équation (I.3) avec  $E_s = 0$ , on obtient une équation différentielle de même forme que l'équation (I.10), mais en remplaçant  $k$  par  $k_1$  tel que :

$$k_1^2 = \frac{\frac{F}{E_p I_p}}{1 - \frac{nF}{GA}} \quad (I.17)$$

La forme générale de la déformée du pieu est toujours donnée par l'expression (I.11) mais où  $k$  est remplacé par  $k_1$ . Le même principe de résolution de la solution classique (prise en compte des conditions aux limites) conduit cette fois à une nouvelle expression de la force critique de flambement:

$$F_{cr} = \frac{F_{crE}}{1 + n \frac{F_{crE}}{AG}} \quad (I.18)$$

où  $F_{crE}$  est la charge critique d'Euler.

Par conséquent, l'effet de l'effort tranchant est de diminuer la valeur de la charge critique dans le rapport implicite

$$\frac{1}{1 + n \frac{F_{crE}}{AG}} \quad (I.19)$$

Ce résultat a été obtenu pour la première fois par F. Engesser (1891). D'autre part, Courbon (1964) a montré que cette diminution est relativement plus sensible pour une poutre encadrée

des deux côtés que pour une poutre articulée à ses deux extrémités. Dans le cas de colonnes pleines, ce rapport ne diffère que très peu de l'unité, par conséquent, l'effet de l'effort tranchant est négligeable.

## **I.4 Flambement d'un pieu dans un sol élastique**

### **I.4.1 Généralités sur l'interaction sol-pieu**

La modélisation de l'interaction sol-pieu constitue un facteur d'importance fondamentale dans la détermination de la force critique de flambement d'un pieu fiché dans le sol. Selvadurai (1979) a présenté une analyse détaillée du problème de l'interaction sol-fondation, en exposant les différentes approches proposées pour modéliser cette interaction. Nous nous limitons dans ce rappel aux trois principaux modèles utilisés pour le calcul de la force critique de flambement. Ces modèles supposent que la réaction du sol est une fonction linéaire des déplacements de la couche d'interface sol-fondation. La réponse de chacun de ces modèles est donnée par le tassement de la surface du sol  $w$  sous l'action d'un système de charges extérieures  $q$ . Ce tassement représente, en général, le déplacement de la couche d'interface sol-fondation et il constitue une partie essentielle de l'information nécessaire pour l'analyse de l'interaction sol-fondation.

#### **I.4.1.1 Modèle de Winkler**

La modélisation du sol proposée par Winkler (1867) suppose que la pression de réaction du sol  $q$ , en un point quelconque de coordonnées  $(x, y)$  de la couche d'interface, est directement proportionnelle au tassement  $w$  du sol en ce point et est indépendant des tassements en d'autres points (fig. I.2):

$$q(x, y) = k_s \cdot w(x, y) \quad (I.20)$$

où  $k_s$  représente le coefficient de réaction du sol. Une grandeur équivalente couramment utilisée pour les pieux, est le module de réaction latérale, ou module horizontal, noté  $E_s$ , telle que :

$$E_s = k_s \cdot B \quad (I.21)$$

où  $B$  est le diamètre du pieu ou la largeur de la fondation.

Cette hypothèse a été retenue dans les travaux de Mandel (1936), Koronev (1960), Hetenyi (1966), etc. Physiquement, le modèle de Winkler consiste à assimiler le sol à un système de ressorts élastiques, infiniment rapprochés, indépendants les uns des autres et possédant une raideur constante  $k_s$ . Le tassement du sol se produit dans la zone située au-dessous de la surface de chargement et en dehors de ces zones les tassements sont nuls. D'autre part, les

tassements de la zone chargée dans le cas d'une fondation rigide (fig. I.2.c) restent les mêmes dans le cas d'une fondation flexible (fig. I.2.d).

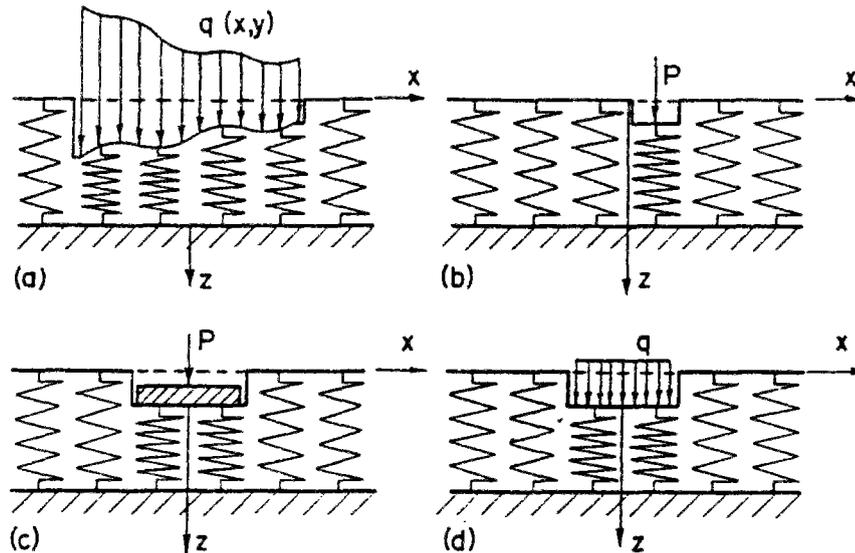


Fig. I.2: Déplacement du sol pour le modèle de Winkler, (a) charge quelconque (b) charge concentrée, (c) fondation rigide, (d) fondation flexible (d'après Selvadurai, 1979).

#### I.4.1.2 Modèle du continuum élastique

Dans le paragraphe précédent, on remarque que, pour le modèle de Winkler, seules les couches de sol en-dessous de la surface de chargement subissent un tassement. Cependant, dans la réalité, le tassement n'est pas limité seulement à la zone située au-dessous de la surface de chargement mais il s'étend aux zones latérales. La modélisation du sol comme un milieu semi-infini, élastique, continu, caractérisé par deux paramètres: le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ , permet de prendre en compte la continuité des tassements. Les premiers travaux dans ce domaine sont les travaux de Boussinesq (1885) qui a étudié le problème d'un milieu semi-infini homogène isotrope linéaire élastique soumis à une charge verticale concentrée  $P$  (fig. I.3). En général l'application de la théorie du continuum élastique pour résoudre le problème de l'interaction sol-fondation aboutit à des problèmes mathématiques complexes. Des solutions à ces problèmes, ont été proposées dans les travaux de Gorbunov-Pasadov (1941,1949), Galin (1961), Lur'e (1964), Harr (1966), Popov (1971), etc.

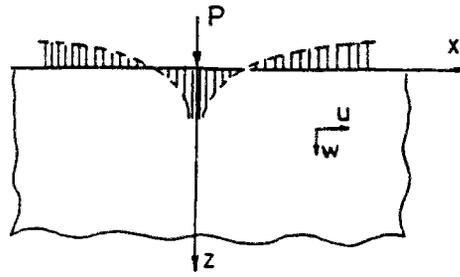


Fig. I.3: Tassement du sol dû à une charge concentrée pour le modèle du continuum élastique (d'après Selvadurai, 1979).

### I.4.1.3 Modèles biparamétriques

Le défaut inhérent au modèle de Winkler de description du comportement continu d'un sol réel et la complexité mathématique du modèle du continuum élastique ont conduit, à introduire des hypothèses simplificatrices, pour le développement d'autres modèles.

Le terme "biparamétrique" signifie que le modèle est défini par deux constantes élastiques indépendantes. On distingue deux familles de modèles biparamétriques. La première famille part du principe du modèle de Winkler en éliminant son comportement discontinu par l'introduction d'une interaction mécanique entre les ressorts. Ces modèles physiques de comportement du sol ont été proposés respectivement par Filonenko-Borodich (1940, 1945), Hetenyi (1946) et Pasternak (1954) où l'interaction entre les ressorts est assurée respectivement par des membranes élastiques, poutres élastiques ou couches élastiques capables d'avoir des déformations tangentielles. La seconde famille part du modèle du continuum élastique ( $E, \nu$ ) en introduisant des contraintes ou des hypothèses simplificatrices par rapport à la distribution des déplacements et des contraintes (Reissner, 1958 ; Vlazov et Leontiev, 1949-1966).

#### a- Modèle du Filonenko-Borodich

Le modèle proposé par Filonenko-Borodich (1940, 1945) assure la continuité entre les ressorts du modèle de Winkler en les reliant à une membrane élastique fine sous une tension constante  $T$  (fig. I.4).

Le tassement  $w$  à la surface du sol sous la pression  $q$  est donné par

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - T \nabla^2 w(x, y) ; \quad (\text{I.22})$$

avec 
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ (Laplacien)}; \quad (I.23)$$

et  $k_s$ , coefficient de réaction du sol.

Les deux constantes élastiques du modèle sont le coefficient de réaction  $k_s$  et la tension  $T$ . La figure (I.4) montre des exemples typiques de profils du tassement dans le cas d'une charge concentrée (fig. I.4.b), d'une fondation rigide (fig. I.4.c) et d'une fondation flexible avec une charge uniformément répartie (fig. I.4.d).

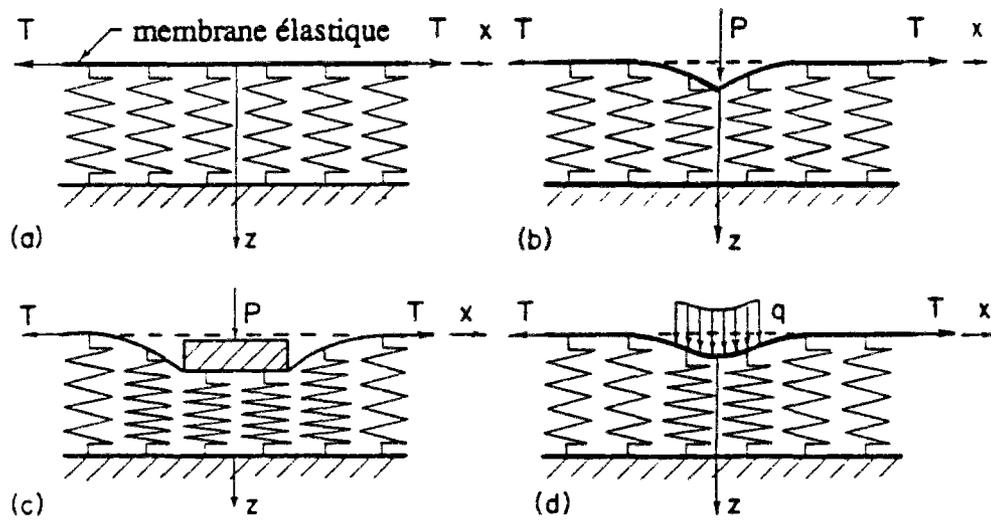


Fig. I.4: Modèle de Filonenko-Borodich (d'après Seivadurai, 1979).

### b- Modèle d'Hetenyi

Dans le modèle proposé par Hetenyi (1946), l'interaction entre les ressorts indépendants du modèle de Winkler se fait par l'intermédiaire d'une plaque élastique, dans le cas tridimensionnel, ou une poutre élastique, dans le cas bidimensionnel. Les deux constantes élastiques du modèle sont le coefficient de réaction  $k_s$  et la rigidité à la flexion  $D$  de la plaque. L'expression reliant le tassement  $w$  à la pression  $q$  est :

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - D \nabla^4 w(x, y); \quad (I.24)$$

avec : 
$$D = \frac{E_p h_p^3}{12(1 - \nu_p^2)} \quad \text{et} \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad (I.25)$$

$E_p$  : module d'élasticité de la plaque,

$h_p$  : hauteur de la plaque,

$\nu_p$  : coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque.

### c- Modèle de Pasternak

Le modèle de comportement du sol proposé par Pasternak (1954), suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les ressorts. Ceci se fait en reliant les ressorts à une couche d'éléments verticaux incompressibles qui peuvent subir uniquement des déformations tangentiellles dues au cisaillement (fig. I.5).

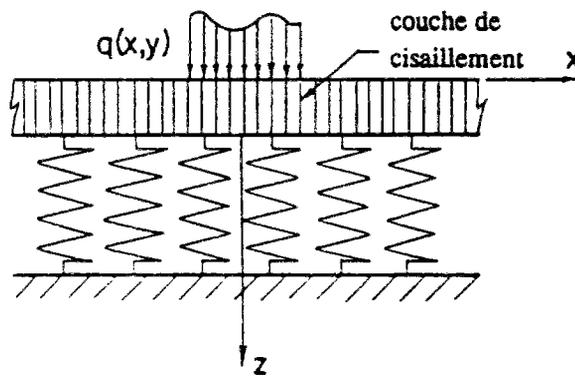


Fig. I.5: Modèle de Pasternak (d'après Selvadurai, 1979).

En supposant que la couche de cisaillement est isotrope dans le plan  $(x, y)$  avec un module de cisaillement  $G_x = G_y = G_p$ , on obtient :

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - G_p \nabla^2 w(x, y). \quad (I.26)$$

Les deux constantes élastiques du modèle de Pasternak sont le coefficient de réaction  $k_s$  et le module de cisaillement  $G_p$ .

Si on remplace  $G_p$  par  $T$  dans l'équation (I.26), on retrouve l'équation (I.22) donnée par le modèle de Filonenko (cf. §. I.4.1.3. a); ceci explique que les tassements ont le même profil pour les modèles de Pasternak et Filonenko-Borodich. Quand les trois constantes  $T$ ,  $D$  et  $G_p$  s'annulent, les équations (I.22), (I.24) et (I.26) se réduisent à l'équation (I.20) du modèle de Winkler (cf. §.I.4.1.1).

#### d- Modèle de Reissner

Reissner (1958) a proposé un modèle biparamétrique, en partant du modèle du continuum élastique. Des hypothèses supplémentaires, concernant les déplacements et les contraintes, sont introduites afin de simplifier la résolution des équations de base d'un milieu continu isotrope élastique et linéaire. Les contraintes normales et tangentielles appliquées sur les faces d'un élément du sol sont supposées négligeables ( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ ). La couche du sol, d'épaisseur  $H$ , repose sur un substratum rigide. Les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ , respectivement dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , sont définis de la façon suivante:

$$u = v = w = 0 \quad \text{au substratum rigide (} z = H \text{),}$$

$$u = v = 0 \quad \text{à la surface du sol (} z = 0 \text{).}$$

La relation entre le tassement vertical  $w$  de la surface du sol et la charge  $q$  devient:

$$c_1 w - c_2 \nabla^2 w = q - \frac{c_2}{4c_1} \nabla^2 q \quad (\text{I.27})$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont les deux constantes du modèle définies par :

$$c_1 = \frac{E}{H} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{HG}{3} \quad (\text{I.28})$$

avec

$E$  : module d'Young du sol,

$G$  : module de cisaillement du sol,

$H$  : épaisseur de la couche de sol.

#### e- Modèle de Vlazov et Leontiev

En partant du modèle du continuum élastique, Vlazov (1949) a proposé une formulation pour la modélisation du sol, basée sur l'application de la méthode variationnelle. La couche de sol, d'épaisseur  $H$ , est considérée comme un milieu élastique linéaire isotrope, reposant sur un substratum rigide (Fig. I.6).

Le déplacement horizontal  $u(x,z)$  est supposé nul dans tout le massif de sol. Par contre, le déplacement vertical est supposé donné par :

$$W(x,z) = w(x) \cdot h(z); \quad (\text{I.29})$$

où  $h(z)$  est une fonction qui décrit la variation du déplacement  $w(x,z)$  selon l'axe  $z$ , telle que :

$$h(0) = 1 \quad \text{et} \quad h(H) = 0.$$

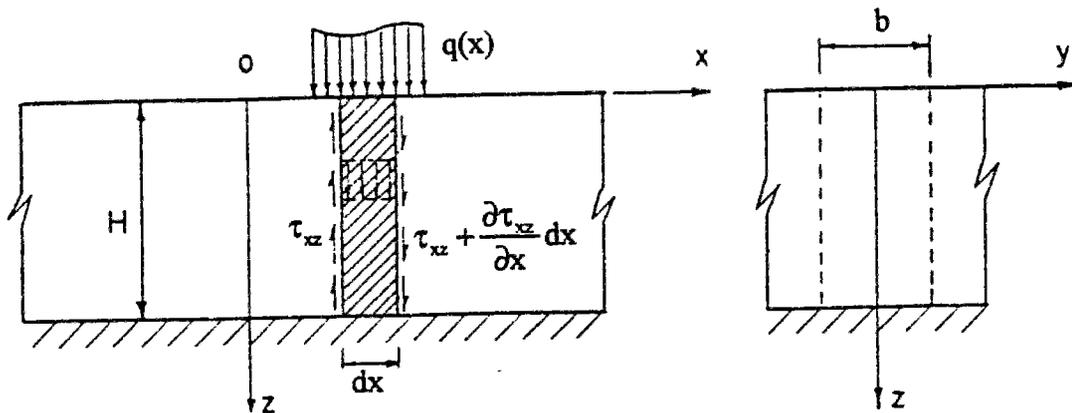


Fig. I.6 : Modèle de Vlazov. Contraintes dans une couche élastique.  
(d'après Selvadurai, 1979).

Plusieurs variations ont été proposées par Vlazov et Leontiev (1966), parmi lesquelles les variations linéaire et exponentielle telles que:

$$h(z) = \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad ; \quad h(z) = \frac{\text{sh} \left[ \frac{\gamma}{L} (H - z) \right]}{\text{sh} \left[ \frac{\gamma H}{L} \right]} \quad (\text{I.30})$$

où  $\gamma$  et  $L$  sont des constantes. Les équations d'équilibre dans la direction  $z$ , sont obtenues en appliquant le principe du travail virtuel. Ainsi, la réponse du sol, sous une charge  $q$ , est donnée par:

$$q(x) = k w(x) - 2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (\text{I.31})$$

$k$  et  $2t$  sont les deux paramètres du modèle de Vlazov, tels que:

$$k = \frac{E}{(1 - \nu^2) [1 - \nu^2 (1 - \nu)^2]} \int_0^H \left( \frac{dh}{dz} \right)^2 dz \quad \text{et} \quad t = \frac{E}{4(1 - \nu^2) [1 + \nu(1 - \nu)]} \int_0^H h^2 dz \quad (\text{I.32})$$

avec

$E$  : module d'Young du sol,

$\nu$  : coefficient de Poisson,

$H$  : épaisseur de la couche de sol.

Pour une couche de sol relativement profonde où les contraintes normales peuvent varier avec la profondeur, il est possible d'utiliser, pour la fonction  $h(z)$ , la variation non linéaire continue définie par l'équation (I.30).

Cependant, dans la pratique, on n'a pas eu souvent recours au modèle de Vlazov. En effet, son utilisation nécessite une estimation du paramètre arbitraire  $\gamma$  dont Vlazov n'a pas précisé la valeur. Il a simplement recommandé des valeurs situées entre 1 et 2.

#### f- Modèle de Vlazov modifié

Vallabhan et Das (1988) ont repris le modèle de Vlazov, en introduisant une nouvelle méthode itérative et unique pour la détermination du paramètre  $\gamma$ . Le nouveau modèle est appelé modèle de Vlazov modifié ou raffiné. Vallabhan et Das ont utilisé la méthode des différences finies pour la résolution des équations différentielles et ils ont comparé leurs résultats avec des solutions déterminées par la méthode des éléments finis.

Dans le cas d'une poutre de longueur  $L$  et de largeur  $b$  reposant sur un continuum élastique (Fig. I.7), l'équation différentielle obtenue en minimisant la fonction d'énergie potentielle, est donnée par:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E_p I_p \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right] - 2t \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + k \bar{w} = q(x) ; \quad (I.33)$$

avec

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion de la poutre,

$q$  : charge répartie sur la poutre,

$\bar{w}$  : déformation de la poutre.

$k$  et  $2t$  sont les deux constantes du modèle.

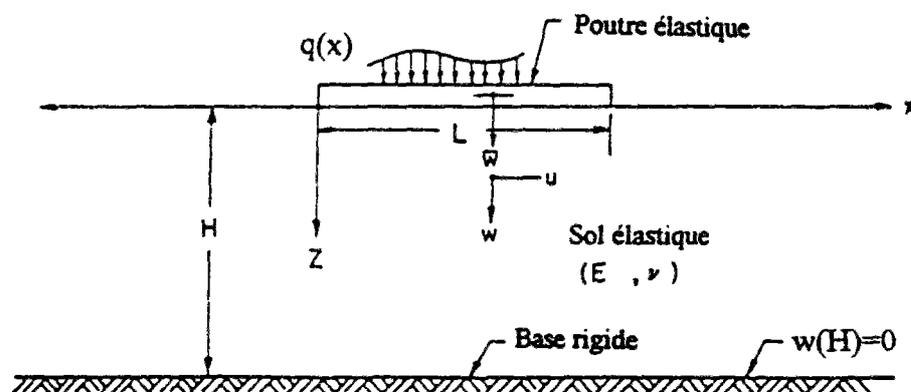


Fig. I.7 : Modèle de Vlazov modifié.(Vallabhan et Das, 1991).

Vallabhan et Das (1987,1988) ont repris les hypothèses faites par Vlazov sur le déplacement vertical :

$$w(x, z) = \bar{w}(x) \cdot h(z) \quad (I.34)$$

où  $w(x,z)$  est le déplacement d'un point quelconque du sol. La fonction  $h(z)$  décrit la variation du déplacement  $w(x,z)$  dans la direction  $z$ . Vallabhan et Das (1988) ont proposé la fonction suivante:

$$h(z) = \frac{\operatorname{sh} \gamma \left(1 - \frac{z}{H}\right)}{\operatorname{sh} \gamma} \quad (I.35)$$

où  $H$  est l'épaisseur de la couche du sol. Il est à noter que le paramètre  $\gamma$  est un paramètre adimensionnel, contrairement au paramètre  $\gamma$ , utilisé par Vlazov, de dimension  $L^{-1}$ . Pour déterminer le paramètre  $\gamma$ , Vallabhan et Das (1988) proposent l'expression suivante:

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2 = \frac{(1-2\nu) \int_0^L \left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{2t}} [\bar{w}^2(0) + \bar{w}^2(L)]}{\int_0^L \bar{w}^2(x) dx + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{2t}} [\bar{w}^2(0) + \bar{w}^2(L)]} \quad (I.36)$$

Le processus de résolution pour déterminer le paramètre  $\gamma$ , est le suivant : à partir d'une valeur initiale arbitraire de  $\gamma$ , on détermine les deux paramètres  $k$  et  $2t$ , ainsi que la déformation de la poutre  $w$  qui est la solution de l'équation différentielle (I.33). Cette déformation est utilisée pour calculer une nouvelle valeur du paramètre  $\gamma$  à partir de l'expression (I.36). Ensuite, on détermine à nouveau les paramètres  $k$  et  $2t$  en utilisant la nouvelle valeur de  $\gamma$ . Ce processus est répété jusqu'à ce que deux valeurs successives de  $\gamma$  soient approximativement égales.

## **I.4.2 Force critique dans un sol de "type Winkler"**

### **I.4.2.1 Pieu complètement fiché dans le sol**

#### **a - Cas d'un sol homogène (monocouche)**

##### ***a-1 Cas d'un module de réaction constant***

Plusieurs recherches ont été entreprises pour étudier le problème du flambement des pieux dans un sol élastique. Mandel (1936), Hetenyi (1946), Davisson (1963), Francis et al. (1965) et Toakley(1965) ont cherché des solutions analytiques à ce problème visant la détermination de

la force critique de flambement. Dans toutes ces études, les auteurs ont utilisé le modèle de Winkler pour la modélisation de l'interaction sol-pieu.

### *a-1-1 Mandel (1936)*

Mandel (1936) a cherché des solutions analytiques de la force critique de flambement, en utilisant la méthode classique (cf. §.I.2.1). Il a traité le cas d'une tige droite d'inertie constante  $I$ , soumise à une force de compression  $F$ . Le module de réaction  $E_s$  est considéré constant ainsi que l'effort normal le long du pieu (pas de frottement latéral). Plusieurs cas ont été étudiés pour des conditions aux limites différentes.

Dans le cas d'une tige articulée aux deux extrémités, Mandel aboutit à une expression explicite de la force critique donnée par :

$$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 E_p I_p}{4l^2} + \frac{4E_s l^2}{n^2 \pi^2} \quad (I.37)$$

où  $n$  est un entier naturel tel que l'expression (I.37) soit minimale. L'entier  $n$  est le nombre d'ondulations en lequel la poutre se déforme au moment du flambement. Dans le cas d'un milieu peu résistant ou d'une poutre de petite longueur,  $n$  est égal à l'unité. La valeur limite de  $E_s$  à laquelle se produit la transition d'un mode de flambement  $n$  à un mode supérieur ( $n+1$ ) est déterminée par la condition

$$n^2(n+1)^2 = \frac{4E_s l^2}{\pi^4 E_p I_p} \quad (I.38)$$

Pour les autres conditions aux limites, Mandel (1936) donne des expressions implicites de la force critique de flambement, dont les solutions sont présentées sous forme d'abaques (fig. I.8). Nous avons réalisé un programme de calcul "FLAMANDEL" pour résoudre numériquement les solutions de Mandel. On présente cet outil dans le deuxième chapitre (cf. §.II.2), ainsi que la comparaison entre les résultats numériques et ceux donnés par l'abaque. Les cas illustrés dans l'abaque (fig. I.8) sont:

- 1- pieu articulé aux deux extrémités,
- 2- pieu encastré aux deux extrémités,
- 3- pieu libre (aucune liaison),
- 4- pieu ayant une extrémité encastrée, l'autre libre.

D'après les abaques, lorsque la demi-longueur réduite  $\lambda$  croît, le nombre des ondulations de la tige croît. Ce nombre est égal à

$$n = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\varphi + 2}. \quad (I.39)$$

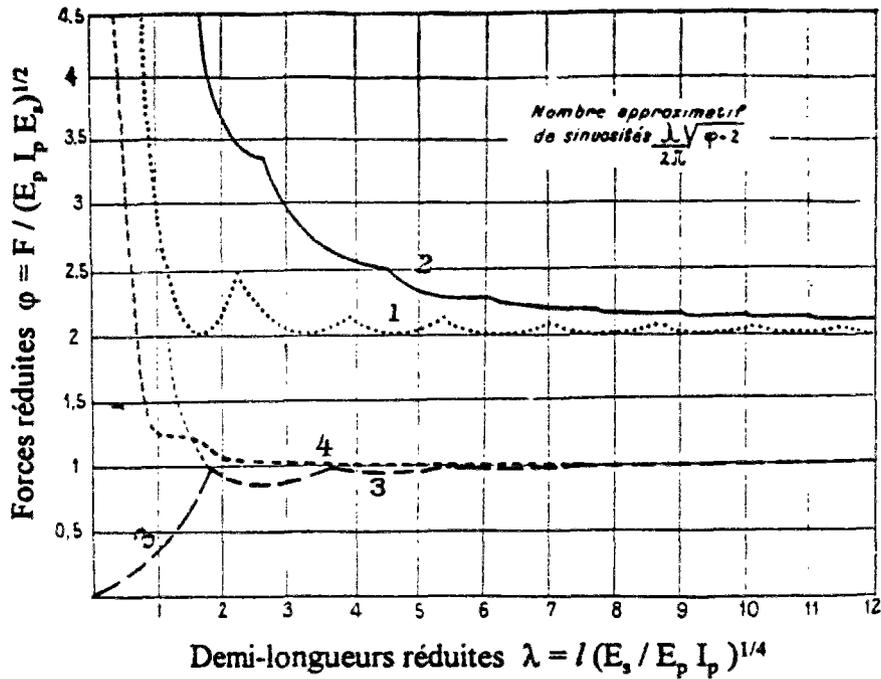


Fig. I.8 : Abaques de Mandel ( Mandel, 1936).

Quand la longueur réduite  $\lambda$  tend vers l'infini, la force réduite  $\phi$  tend vers une limite égale à 2 (liaisons rigides), ou à 1 (pas de liaisons, à une extrémité au moins), ou comprise entre 1 et 2 (liaisons élastiques). D'autre part, pour une faible longueur réduite, la charge critique peut être développée sous la forme :

$$F = F_{\text{crE}} + \rho E_s l^2 + \frac{\rho_1 E_s^2 l^6}{E_p I_p} + \frac{\rho_2 E_s^3 l^{10}}{(E_p I_p)^2} + \dots \quad (\text{I.40})$$

$F_{\text{crE}}$  : charge critique pour une résistance nulle,

$\rho, \rho_1, \rho_2$  : nombres dépendant des liaisons.

#### a-1-2 Hetenyi (1946)

Hetenyi (1946) a repris les hypothèses de Mandel (1936) pour le calcul de la force critique de flambement, en utilisant la méthode classique. Dans le cas d'un pieu articulé aux deux extrémités, Hetenyi aboutit à la même expression de la force critique que Mandel (équ. I.37). Par contre, dans le cas d'un pieu encasté aux deux extrémités, Hetenyi propose une formule approchée de la force critique de flambement, en assimilant l'ensemble des points d'intersection des courbes relatives aux déformations paires et impaires du pieu (fig. I.9), à une droite d'équation :

$$\sqrt{\frac{E_s I^4}{E_p I_p}} = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{F_{cr}}{F_{crE}} - 4 \right), \quad (I.41)$$

d'où

$$F_{cr} = \frac{4\pi^2 E_p I_p}{l^2} + 2\sqrt{E_s E_p I_p}. \quad (I.42)$$

Une comparaison entre les résultats de Mandel (1936) et d'Hetenyi (1949) montre que la formule approchée d'Hetenyi, surestime la force critique d'une valeur moyenne de +5% par rapport à celle calculée par Mandel.

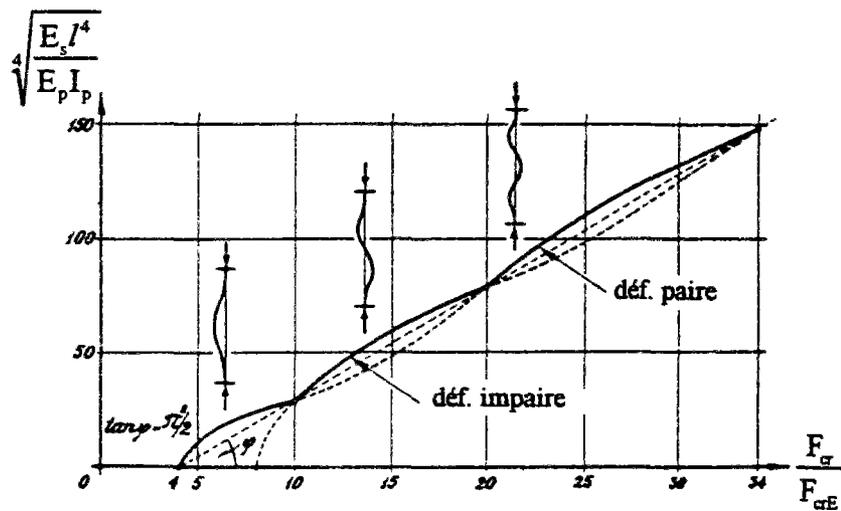


Fig. I.9 : Déformées paire et impaire pour un pieu encasté aux deux extrémités (Hetenyi, 1949)

### a-1-3 Davisson (1963)

Davisson (1963) a repris les mêmes hypothèses que Mandel (1936). Il a traité le cas supplémentaire d'un pieu articulé en pointe et libre en tête. Les résultats sont présentés sous forme d'abaques dépendant des paramètres adimensionnels  $U_{cr}$  et  $l_{max}$  (fig. I.10), tels que

$$U_{cr} = \frac{F_{cr} R^2}{E_p I_p} \quad \text{et} \quad l_{max} = \frac{l}{R} \quad (I.43)$$

avec

$$R = \sqrt[4]{\frac{E_p I_p}{k_s B}} \quad (I.44)$$

$F_{cr}$  : force critique de flambement,

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu,  
 $l$  : longueur du pieu,  
 $B$  : diamètre du pieu,  
 $k_s$  : coefficient de réaction du sol.

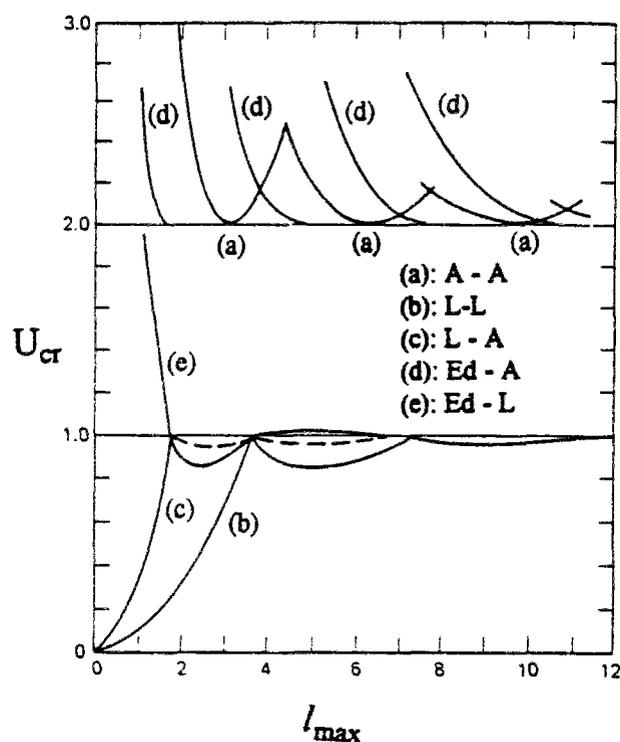


Fig. I.10: Forces critiques pour un coefficient de réaction  $k_s$  constant (Davisson, 1963).

Nota : Les notations qui figurent sur cet abaque (fig. I.10), sont les suivantes :

- A : extrémité articulée,
- E : extrémité encastree,
- L : extrémité libre,
- Ed : extrémité encastree mais libre en déplacement latéral.

Sur la figure (I.10), sont données les conditions aux extrémités (tête-pointe).

**a-1-4 Francis et al. (1965) et Toakley (1965)**

Une autre présentation des solutions de Mandel (1936) et Davisson (1963) est donnée par Francis et al. (1965) et Toakley (1965). La force critique de flambement du pieu dans le sol, est égale à la force critique d'Euler pour un pieu de longueur équivalente  $l_e$ , articulé aux deux extrémités :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E_p I_p}{l_e^2} \quad (I.45)$$

Cette longueur équivalente dépend des conditions aux limites en pointe et en tête du pieu. Les solutions sont présentées sous forme d'abaques dépendant des paramètres adimensionnels  $(l_e/l')$  et  $(l/l')$  (fig. I.11) :

$$l' = \pi \sqrt[4]{\frac{E_p I_p}{E_s}} ; \quad (I.46)$$

$E_s$  : module de réaction du sol;

$l$  : longueur du pieu.

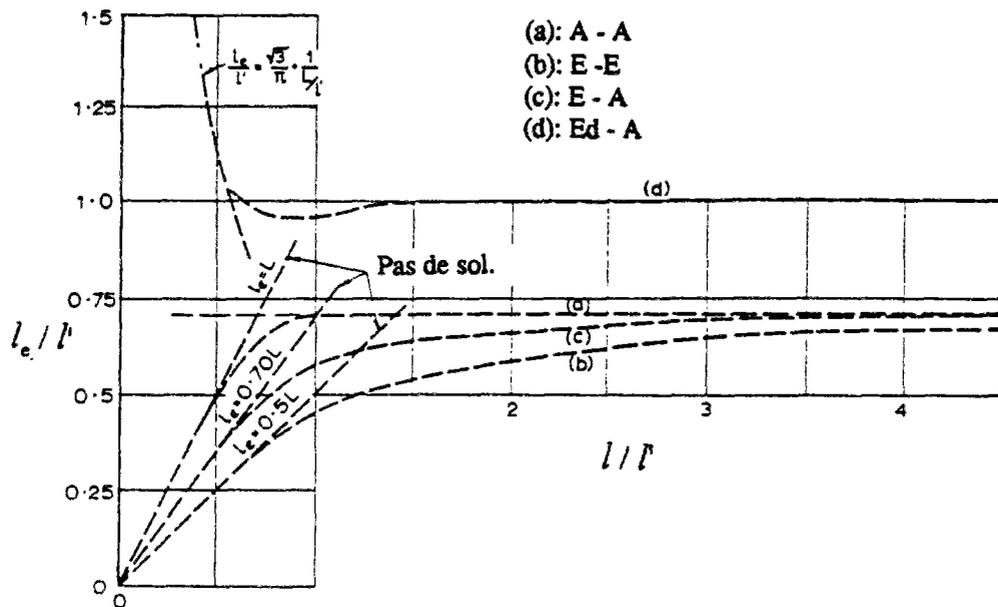


Fig. I.11: Forces critiques pour un coefficient de réaction  $k_s$  constant (Francis et al., 1965).

### a-2 Cas d'une variation linéaire du module de réaction

Davisson (1963) a déterminé aussi des solutions de la force critique de flambement d'un pieu dans un sol élastique, pour plusieurs conditions aux limites, en supposant que le coefficient de réaction  $k_s$  varie linéairement avec la profondeur  $z$ , tel que :

$$k_s = n_h \frac{z}{B} \quad [\text{kN/m}^3] ; \quad (I.47)$$

B : diamètre du pieu,

$n_b$  : paramètre de variation du coefficient de réaction  $k_s$ .

Ces solutions sont présentées sous formes d'abaques dépendant des paramètres adimensionnels  $V_{cr}$  et  $z_{max}$  (fig. I.12) définis par:

$$V_{cr} = \frac{F_{cr} T^2}{E_p I_p} \quad \text{et} \quad z_{max} = \frac{l}{T} \quad (I.48)$$

où 
$$T = \sqrt[5]{\frac{E_p I_p}{n_b}} \quad (I.49)$$

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu,

$l$  : longueur du pieu.

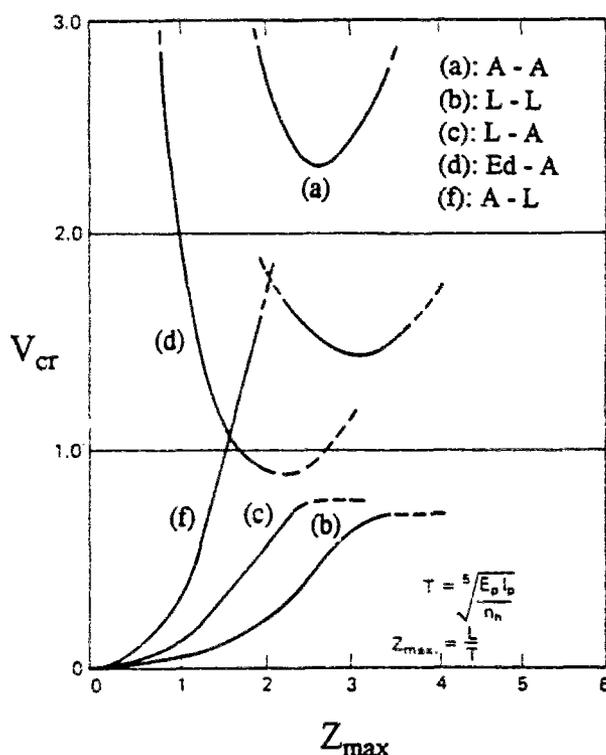


Fig. I.12: Forces critiques pour un coefficient de réaction  $k_s = n_b \cdot z/B$  (Davisson, 1963).

La figure (I.12) montre que la condition en tête du pieu a une importance considérable sur la valeur de la force critique de flambement. On peut justifier cette importance par le fait que les pieux ont tendance à flamber au voisinage du sol, phénomène que nous avons constaté, d'après les résultats des essais de flambement de pieux en centrifugeuse (cf. §.III.3.9). On peut penser aussi que cette importance est due au fait que l'augmentation de la longueur du pieu, au

delà d'une certaine limite, n'a pratiquement pas d'influence sur la force critique du flambement ce qui est conforme avec les résultats de Mandel.

### *a-3 Influence du frottement latéral sur la force critique*

La plupart des études du problème de flambement de pieux dans le sol supposent que l'effort normal est constant le long du pieu, l'effet du frottement latéral étant négligé. D'après Poulos (1980), cette hypothèse est valable pour des pieux relativement courts ou des pieux reposant sur un substratum rigide, mais n'est plus valable pour les pieux flottants et les pieux reposant sur des sols compressibles.

Plusieurs études ont été entreprises pour déterminer des expressions de la force critique de flambement en tenant compte de l'effet du frottement latéral. Ces solutions ont été proposées par Francis et al. (1965), Toakley (1965) et Reddy et Valsangkar (1970). Ces derniers ont étudié le cas d'un pieu dans un sol élastique, à la fois pour un module de réaction constant et pour un module de réaction variant linéairement avec la profondeur. Dans le premier cas, il est supposé une variation linéaire de l'effort normal avec la profondeur, et dans le deuxième cas, deux variations sont adaptées pour l'effort normal. L'une linéaire et l'autre parabolique telles que

$$F = F_0 \left( 1 - \psi \frac{z}{l} \right) \quad \text{et} \quad F = F_0 \left( 1 - \psi \frac{z^2}{l^2} \right) \quad (I.50)$$

$F_0$  : effort normal en tête de pieu,

$l$  : longueur du pieu,

$\psi$  : paramètre qui définit le changement dans la distribution de  $F$  ( $0 < \psi < 1$ ).

Reddy et Valsangkar (1970) ont utilisé la méthode énergétique. Les résultats, pour différentes conditions aux limites sont présentés sous formes d'abaques (fig. I.13). On remarque qu'il y a une augmentation considérable de la force critique de flambement, pour certaines conditions aux limites, même si 50% seulement de l'effort normal sont repris par frottement latéral. Cependant, l'augmentation de la force critique due à une distribution parabolique de l'effort normal est plus petite que celle due à une distribution linéaire. De même, Reddy et Valsangkar (1970) ont montré que l'effet du frottement latéral sur la force critique dépend considérablement des conditions aux limites. Cet effet est maximal dans le cas d'un pieu ayant la pointe libre et la tête encastree mais libre en déplacement latéral, et minimal dans le cas d'un pieu libre.

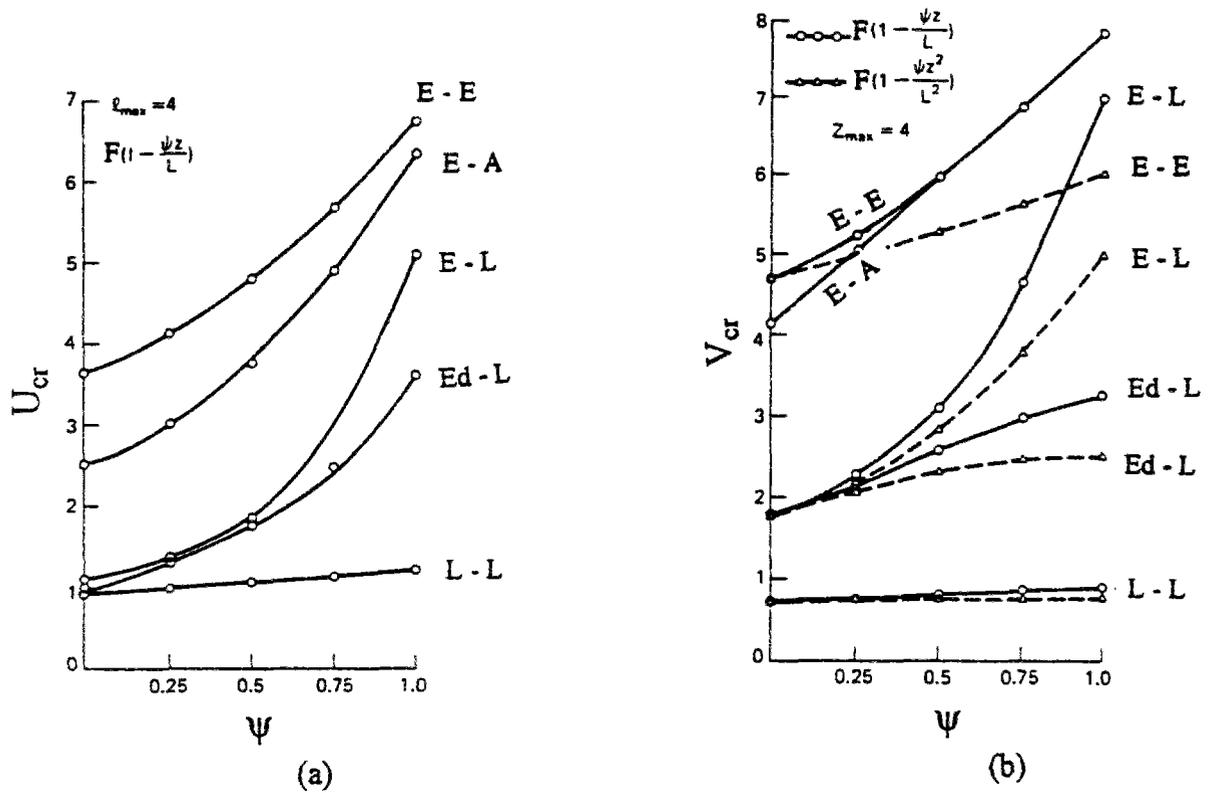


Fig. I.13 : Effet du frottement latéral sur la force critique de flambement, (a) module de réaction constant, (b) variation linéaire du module de réaction (Reddy et Valsangkar, 1970).

#### b - Cas d'un sol stratifié (multicouches)

Fenu et Serra (1990) ont utilisé la méthode énergétique (cf. §.I.2.2) pour déterminer la force critique de flambement d'un pieu fiché dans un sol stratifié. Le sol est modélisé par des ressorts élastiques de rigidités variables (modèle de Winkler) (fig. I.14). Le pieu, articulé aux deux extrémités, est soumis à une force de compression  $F$ . La déformation  $y(z)$  du pieu et le module de réaction  $E_s(z)$  sont représentés par des séries de Fourier, qui vérifient les conditions aux limites, telles que :

$$E_s(z) = \sum_{i=1}^n b_i \sin\left(\frac{\pi i}{l} z\right) \quad \text{et} \quad y(z) = \sum_{j=1}^m a_j \sin\left(\frac{\pi j}{l} z\right) . \quad (I.51)$$

Les expressions du travail  $T$  dû à la déformation, et du potentiel interne  $U$  emmagasiné par le pieu, sont :

$$T = \frac{F}{2} \int_0^l y'^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^l E_s y^2 dz \quad \text{et} \quad U = \int_0^l \frac{E_p I_p}{2} y''^2 dz \quad (I.52)$$

En appliquant la méthode énergétique ( $U = T$ ), on obtient :

$$F = \frac{\int_0^l E_p I_p y''^2 dz + \int_0^l E_s y^2 dz}{\int_0^l y'^2 dz} \quad (I.53)$$

soit

$$F = \frac{\frac{E_p I_p}{l^3} \pi^4 \sum_{j=1}^m a_j^2 j^4 + \frac{1}{8\pi} \left[ \sum_{k_1=1}^m \sum_{j=1}^m a_{k_1} a_j \left( \sum_{i=1}^n b_i \Phi_{ik_1j} \right) \right]}{\frac{\pi^2}{l} \sum_{j=1}^m a_j^2 j^2} \quad (I.54)$$

où :

$$\Phi_{ik_1j} = \Phi_{ijk_1} = \left[ \frac{1 - \cos(i + k_1 - j)}{i + k_1 - j} + \frac{1 - \cos(k_1 + j - i)}{k_1 + j - i} + \frac{1 - \cos(j + i - k_1)}{j + i - k_1} + \frac{1 + \cos(j + i + k_1)}{j + i + k_1} \right]$$

avec

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu,

$l$  : longueur du pieu,

la force critique est donnée par la condition suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0 \quad j=1,2,\dots,m \quad ; \quad (I.55)$$

soit :

$$a_1 \frac{l^2}{2\pi^3 j^2} \left( \sum_i^n b_i \Phi_{i1j} \right) + \dots + a_j \left[ \frac{l^2}{2\pi^3 j^2} \left( \sum_i^n b_i \Phi_{ijj} \right) + \frac{E_p I_p}{l^2} \pi^2 j^2 - F_{cr} \right] + \dots$$

$$+ a_m \frac{l^2}{2\pi^3 j^2} \left( \sum_i^n b_i \Phi_{imj} \right) = 0 \quad (I.56)$$

Le système (I.56) est un système linéaire homogène de  $m$  équations à  $m$  inconnues. La force critique  $F_{cr} = \min(F)$  est la plus petite des valeurs propres obtenues en annulant le déterminant du système. La déformation du pieu est donnée par le vecteur propre correspondant à la plus petite des valeurs propres. A la limite, quand  $m \rightarrow \infty$ , on obtient la solution exacte de la force critique de flambement. Par conséquent, la solution est d'autant plus exacte que le nombre d'équations est grand.

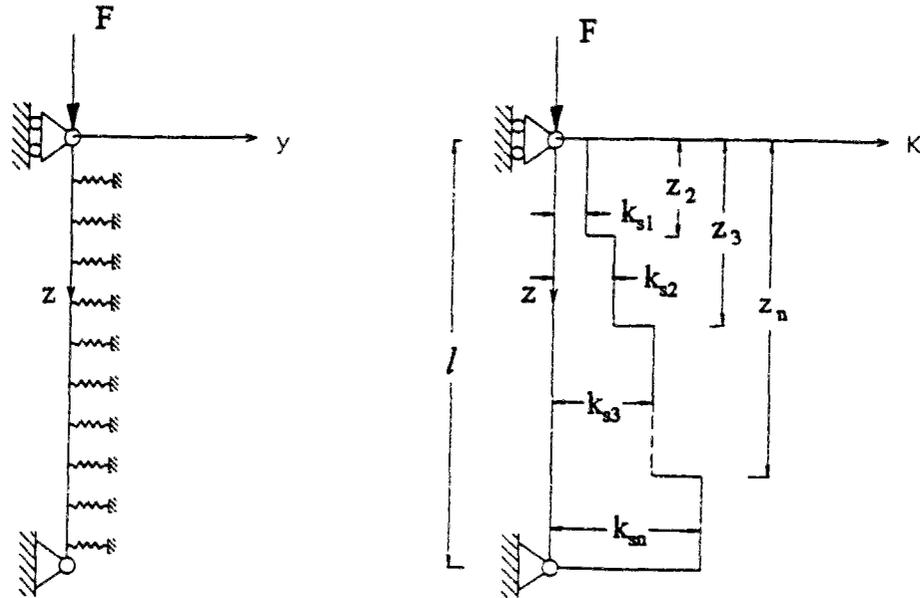


Fig. I.14 : Modélisation d'un sol stratifié. ( Fenu et Serra, 1990).

#### I.4.2.2 Pieu partiellement fiché dans le sol

##### a - Cas d'un module de réaction constant

Le flambement des pieux partiellement fichés dans un sol de type Winkler a fait l'objet de plusieurs études dans le but de la détermination de la force critique. Des études ont été effectuées par Davisson et Robinson (1965), Souche (1984), dans le cas d'un module de réaction constant.

##### a-1 Davisson et Robinson (1965)

Davisson et Robinson (1965) ont étudié le problème du flambement d'un pieu relativement long ( $D/R > 4$ ) partiellement fiché dans le sol, en assimilant le pieu à une poutre équivalente à l'air libre, encastree en pointe et libre en tête (fig. I.15). L'effort normal est supposé constant le long du pieu. La force critique de flambement est déterminée pour deux types de liaisons :

- (a) : pieu libre aux deux extrémités,
- (b) : pieu encastree en pointe, tête encastree mais libre en déplacement latéral.

Il est proposé :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E_p I_p}{4(S_R + J_R)R^2} ; \quad (I.57)$$

avec 
$$R = \sqrt[4]{\frac{E_p I_p}{k_s B}} \quad S_R = \frac{L_s}{R} \quad J_R = \frac{L_u}{R} ; \quad (I.58)$$

$S_R$  : longueur réduite

$E_p I_p$  : rigidité du pieu,  
 $k_s$  : coefficient de réaction du sol,  
 $B$  : diamètre du pieu,  
 $L_u$  : longueur de la partie libre du pieu,  
 $L_s$  : longueur équivalente de la fiche,  
 $D$  : fiche du pieu.

Connaissant  $J_R$ , la valeur de  $S_R$  est déterminée à partir de l'abaque représenté à la figure (I.16).

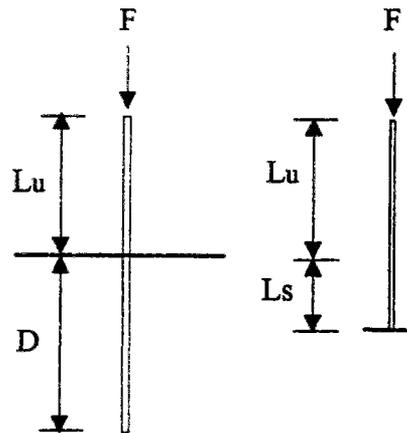


Fig. I.15 : Pieu partiellement fiché dans le sol avec la poutre équivalente (Davisson et Robinson, 1965).

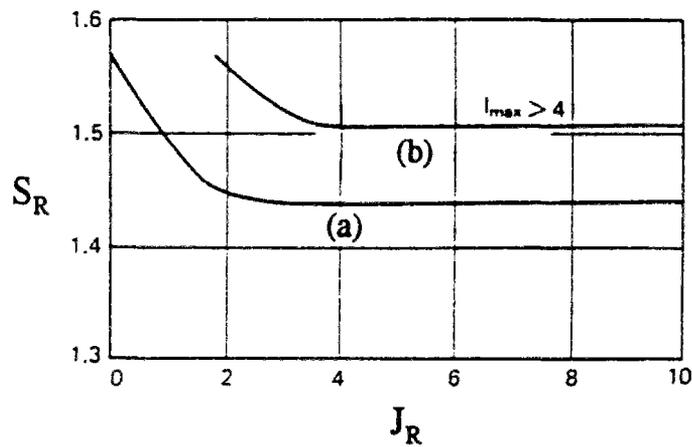


Fig. I.16 : Longueur réduite  $S_R$  pour un pieu partiellement fiché dans le sol ( $k_s = \text{cte}$ ), (Davisson et Robinson, 1965).

**a-2 Souche (1984)**

Souche (1984) a traité le même problème de flambement des pieux partiellement fichés dans le sol, en reprenant les mêmes hypothèses que Davisson et Robinson (1965), mais en traitant d'autres conditions aux limites (huit cas). Les résultats sont présentés sous forme d'une série d'abaques dépendant des paramètres adimensionnels suivants :

$$w = -\frac{z_1}{l} \quad \text{et} \quad \frac{F_{cr} l^2}{\pi^2 E_p I_p} \quad (I.59)$$

avec

$z_1$  : longueur de la partie libre du pieu (Fig. I.17),

$l$  : longueur du pieu,

$F_{cr}$  : force critique de flambement,

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu.

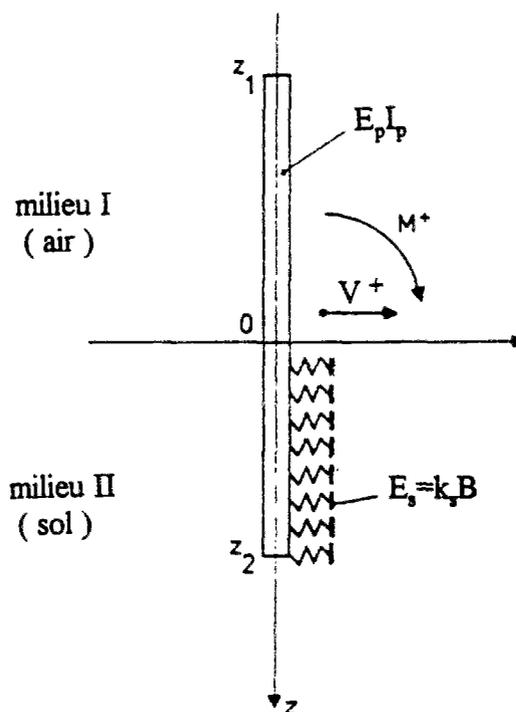


Fig. I.17 : Pieu partiellement fiché dans le sol (Souche 1984).

Ces abaques sont au nombre de huit puisqu'il s'agissait de combiner deux conditions distinctes en pointe avec quatre conditions distinctes en tête. Chaque abaque est constitué de plusieurs courbes dont chacune représente le lieu des points caractérisés par une même valeur quelconque du paramètre  $m$ , tel que

$$m = \frac{1}{\pi} \sqrt[4]{\frac{E_s}{E_p I_p}} \quad (\text{I.60})$$

où  $E_s$  est le module de réaction du sol. Connaissant les paramètres  $w$  et  $m$ , on peut calculer à partir des abaques la valeur de la force critique de flambement.

#### b - Cas d'une variation linéaire du module de réaction

Davisson et Robinson (1965) ont proposé des solutions pour la force critique de flambement dans le cas d'un pieu fiché partiellement dans le sol, relativement long ( $D/T > 4$ ), sans tenir compte du frottement latéral mais en supposant que le coefficient de réaction varie proportionnellement à la profondeur d'après la loi suivante :

$$k_s = n_b \frac{z}{B} \quad [\text{kN} / \text{m}^3] \quad (\text{I.61})$$

$z$  : profondeur repérée à partir de la tête du pieu,

$B$  : diamètre du pieu,

$n_b$  : paramètre de variation du coefficient de réaction  $k_s$ .

Les conditions aux limites sont les mêmes que celles étudiées dans le cas d'un coefficient de réaction constant (cf. §.I.4.2.2.a-1). La force critique est donnée par:

$$F_{cr} = \frac{E_p I_p}{4(S_T + J_T)^2 T^2} \quad (\text{I.62})$$

avec

$$T = \sqrt[5]{\frac{E_p I_p}{n_b}} \quad S_T = \frac{L_s}{T} \quad J_T = \frac{L_u}{T} \quad (\text{I.63})$$

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu,

$D$  : fiche du pieu,

$L_u$  : longueur de la partie libre du pieu,

$L_s$  : longueur équivalente de la fiche (fig. I.15),

$n_b$  : paramètre définissant la variation du coefficient de réaction  $k_s$ .

Le paramètre  $S_T$  est tiré de l'abaque représenté à la figure (I.18).

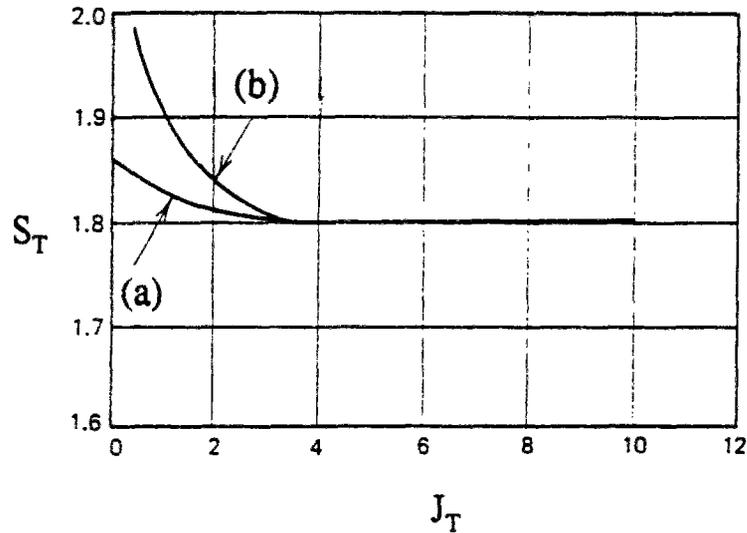


Fig. I.18 : Longueur réduite  $S_T$  pour un pieu partiellement fiché dans le sol ( $k_s = n_h z/B$ ). (Davisson et Robinson, 1965).

### c - Influence du frottement latéral sur la force critique

Reddy et Valsangkar (1970) ont étudié l'effet du frottement latéral sur la détermination de la force critique de flambement d'un pieu partiellement immergé dans un sol élastique, à la fois pour un coefficient de réaction constant et pour une variation linéaire du coefficient de réaction. La variation de l'effort normal avec la profondeur est donnée par

$$F = F_0 \left[ 1 - \psi \left( \frac{z}{l} - n \right) \right] ; \quad (I.64)$$

avec 
$$n = \frac{L_u}{l} ; \quad (I.65)$$

$F_0$  : effort normal en tête du pieu,

$l$  : longueur du pieu,

$z$  : profondeur de la fiche,

$L_u$  : longueur de la partie libre du pieu,

$\psi$  : paramètre qui définit le changement dans la distribution de l'effort normal ( $0 < \psi < 1$ ).

Dans le cas d'un coefficient de réaction constant, la force critique est donnée par :

$$F_{cr} = \frac{U_{cr} E_p I_p}{R^2} \quad (I.66)$$

avec

$$R = \sqrt[4]{\frac{E_p I_p}{k_s B}} ; \quad (I.67)$$

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu,

$k_s$  : coefficient du réaction du sol,

$B$  : diamètre du pieu,

$U_{cr}$  : force réduite déduite de l'abaque représenté à la figure (I.19).

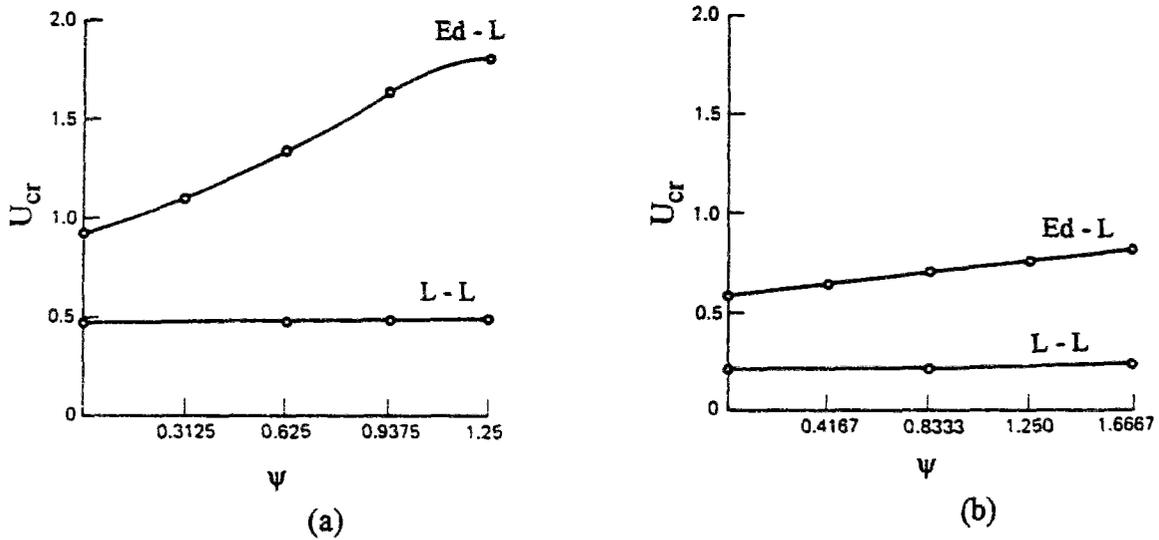


Fig. I.19: Effet du frottement latéral pour des pieux partiellement fichés dans le sol ( $k_s = cte$ ). (a)  $n = 0,2$  (b)  $n = 0,4$  (Reddy et Valsangkar, 1970).

La figure (I.19) montre l'effet du frottement latéral sur la force critique de flambement d'un pieu partiellement fiché dans le sol, dans le cas d'un coefficient de réaction constant. On remarque que, pour des valeurs faibles de  $n$  ( $n = 0,2$ ), l'effet du frottement latéral sur la force critique est important. Quand  $n$  augmente, cet effet devient négligeable.

Dans le cas d'une variation linéaire du coefficient de réaction, la force critique est :

$$F_{cr} = \frac{V_{cr} E_p I_p}{T^2} ; \quad (I.68)$$

avec

$$T = \sqrt[4]{\frac{E_p I_p}{n_h}} ; \quad (I.69)$$

où :

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu;

$n_h$  : paramètre définissant la variation du coefficient de réaction  $k_s$  avec la profondeur,

$V_{cr}$  : force réduite déduite de l'abaque représenté à la figure (I.20).

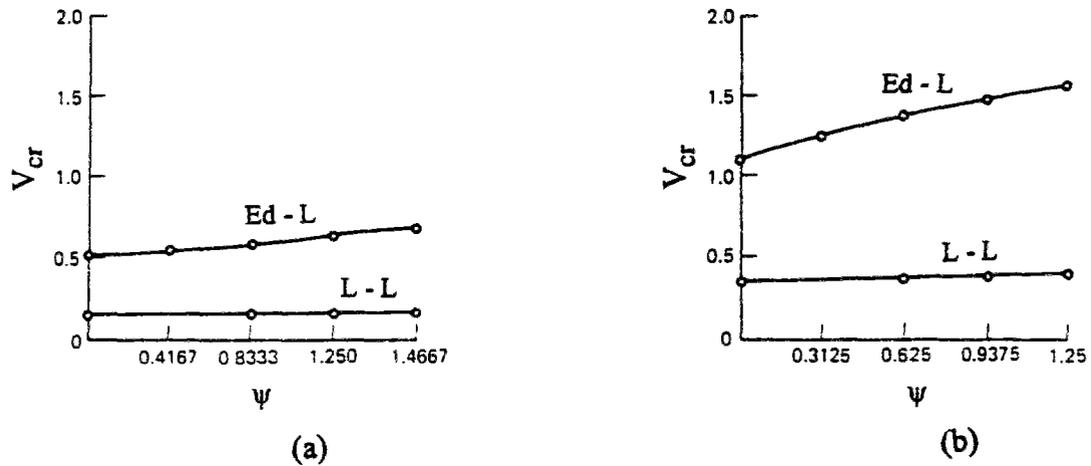


Fig. I.20 : Effet du frottement latéral pour des pieux partiellement fichés dans le sol ( $k_s = n_h \cdot z/D$ ). (a)  $n = 0,2$  (b)  $n = 0,4$  (Reddy et Valsangkar, 1970)

La figure (I.20) montre l'effet du frottement latéral sur la force critique de flambement d'un pieu partiellement fiché dans le sol, dans le cas d'une variation linéaire du coefficient de réaction. Les résultats illustrés dans les figures (I.19) et (I.20) montrent que lorsque la longueur de la partie libre du pieu augmente, ce dernier devient plus vulnérable vis-à-vis du flambement. De plus, l'effet du frottement latéral sur la charge critique est négligeable pour de grandes valeurs de  $n$  ( $n > 0,4$ ).

### I.4.3 Force critique dans un continuum élastique

Madhav et Davis (1974) ont étudié le problème du flambement d'un pieu dans un milieu élastique continu. Il s'agit d'un pieu, reposant sur un substratum rigide, divisé en  $(n+1)$  éléments (fig. I.21). Le déplacement horizontal  $u_i$ , au centre  $i$  d'un élément  $j$ , dû à la pression latérale uniforme  $p_i$  exercée par le sol, est obtenu par intégration des équations de Mindlin (1936). La force critique est donnée par :

$$F_{cr} = F^* E I^2 ; \quad (I.70)$$

$l$  : longueur du pieu,

$E$  : module d'Young du sol,

$F^*$ : la plus petite valeur propre de l'équation différentielle suivante,

$$\left( -[\beta]^{-1}[A] - F^*[I] \right) \{p\} = 0 \quad (I.71)$$

$[I]$  : matrice unité,

$\{u\}$  : vecteur déplacement du pieu,

$[\beta]^{-1}$ ,  $[A]$  : matrices de coefficients relatifs au calcul des moments dûs à la pression latérale et à la force axiale  $F_i$ .

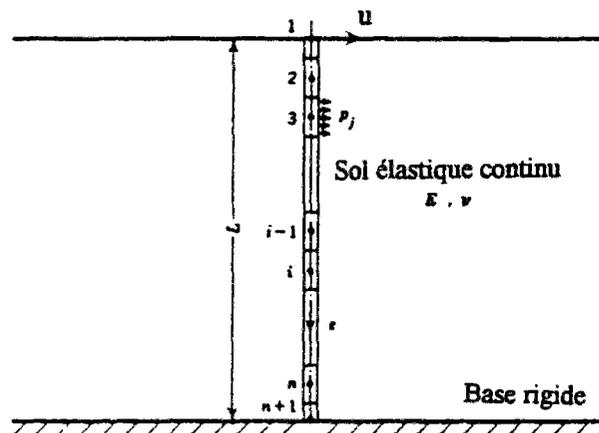


Fig. I.21 : Pieu dans un continuum élastique (Madhav et Davis, 1974).

Madhav et Davis (1974) ont fait des applications numériques pour la détermination de la force critique de flambement, des pieux articulés et encastés aux deux extrémités. La figure (I.22) illustre une comparaison, entre les résultats obtenus avec les théories de Winkler et du continuum élastique, dans le cas d'un pieu articulé aux deux extrémités. Le module de réaction  $E_s$  est lié au module d'Young en supposant  $E_s \approx 0,8E$ .

On remarque que les deux théories donne les mêmes forces critiques de flambement pour des pieux rigides ( $K_R = E_p I_p / (E l^4) > 0,1$ ). Par contre, pour les pieux très souples ( $K_R < 10^{-3}$ ), la théorie du module de réaction sous-estime la force critique de flambement. On pense que ce résultat est logique, parce que le module de Winkler ne tient pas compte de la continuité du sol, ou de la résistance au cisaillement sol-pieu. Quand l'élancement du pieu diminue, la différence entre les solutions des deux théories augmente.

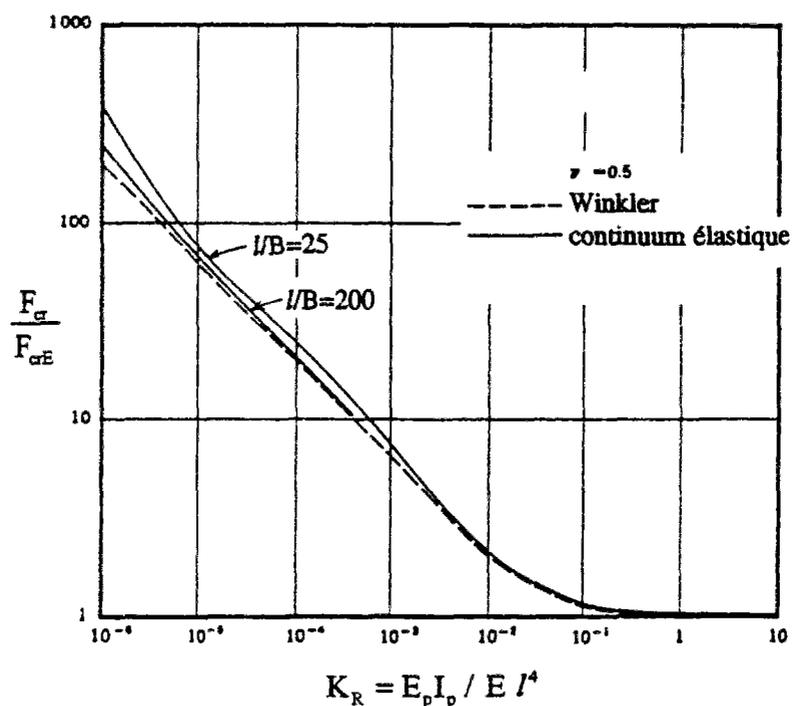


Fig. I.22 : comparaison entre les théories de Winkler et continuum élastique.  
( Madhav et Davis, 1974).

#### I.4.4 Force critique dans un sol biparamétrique

Pantelides (1990) a étudié l'influence des deux constantes du modèle biparamétrique (modèle de Pasternak, cf.§.I.4.1.3.c) sur la détermination de la force critique de flambement des pieux complètement fichés dans un sol élastique pour différentes conditions aux limites. Le module de réaction du sol est supposé constant avec la profondeur. Il a étudié également l'effet de la déformation due à l'effort tranchant, pour un pieu articulé à ses deux extrémités dans un sol élastique, sur la valeur de la force critique. On présente dans ce qui suit les expressions de la force critique de flambement, déterminées par la méthode classique et la méthode de l'énergie, pour différentes conditions aux limites.

##### a - Méthode classique

Pantelides (1990) a utilisé la méthode classique (cf.§.I.2.1), pour déterminer la force critique de flambement d'un pieu dans un sol biparamétrique. Il a utilisé le modèle de Pasternak (1954) (cf.§.I.4.1.3.c) pour la modélisation de l'interaction sol-pieu. Pantelides a étudié le cas d'un pieu soumis à une force de compression  $F$ , articulé aux deux extrémités. L'effet de la déformation due à l'effort tranchant est négligé. La force critique est donnée par

$$F_{cr} = F_{crE} \left[ n^2 + \frac{E_s I^2}{n^2 \pi^2 F_{crE}} + \frac{k_1}{F_{crE}} \right]; \quad (I.72)$$

avec :

$n$  : entier naturel qui détermine le mode de flambement, tel que  $F_{cr}$  soit minimale,

$F_{crE}$  : force critique d'Euler pour un pieu articulé aux deux extrémités,

$E_s$  : module de réaction du sol,

$k_1$  : constante de cisaillement de la couche d'interface sol-pieu reliant les ressorts (fig. I.23) et possédant la dimension d'une force (kN).

Une augmentation du module de réaction  $E_s$  d'une quantité  $\Delta E_s$ , les autres variables étant fixées, entraîne une augmentation de la force critique de flambement d'une valeur

$$\frac{\Delta E_s l^2}{n^2 \pi^2}. \quad (I.73)$$

L'expression (I.73) montre que pour des modes élevés de flambement, la variation de la force critique due à l'augmentation du module de réaction est faible, ce qui rejoint les résultats de Mandel (cf. §.I.4.2.1.a). Une augmentation de la constante de cisaillement  $k_1$  d'une quantité  $\Delta k_1$ , les autres variables étant fixées, entraîne une augmentation de la force critique de flambement de la même quantité  $\Delta k_1$ . Cette augmentation ne dépend pas du mode de flambement.

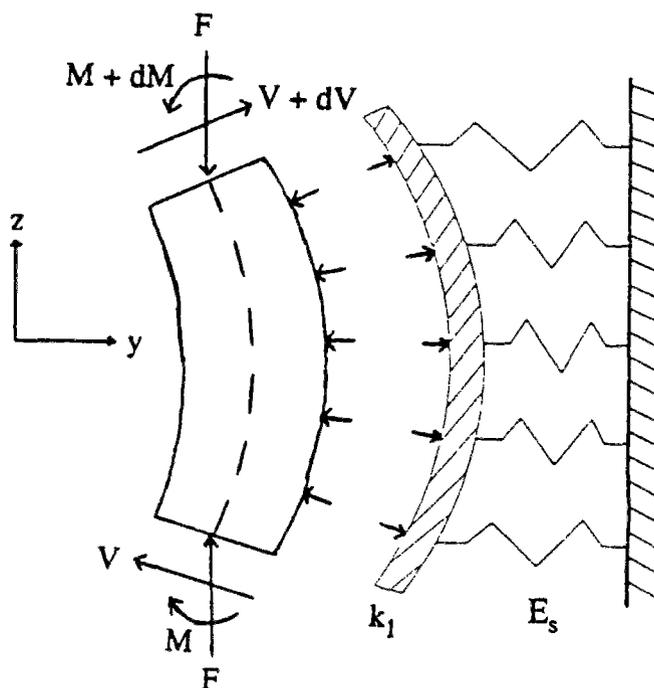


Fig. I.23 : Tronçon de pieu dans un sol biparamétrique (Pantelides, 1990).

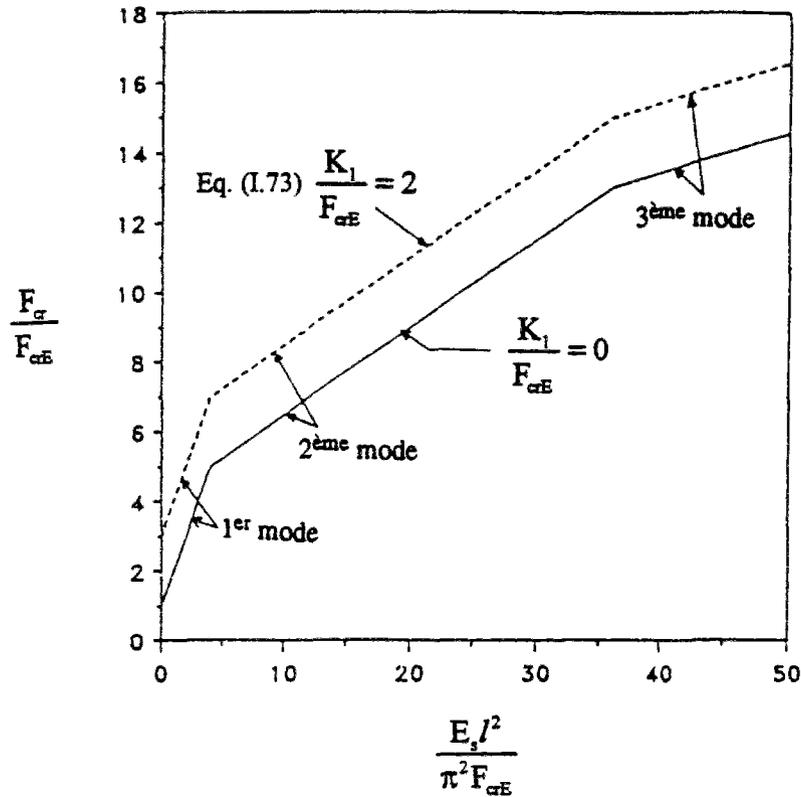


Fig. I.24 : Effet de la constante de cisaillement sur la force critique  
(Pantelides, 1990).

Quand le module de réaction  $E_s$  augmente, le mode de flambement augmente, ce qui est conforme aux résultats de Mandel (1936). Par contre, la constante de cisaillement  $k_1$  n'a aucune influence sur la transition d'un mode de flambement à un autre. La condition de transition est la même que celle donnée par Mandel (cf. §.I.4.2.1.a) dans l'expression (I.38). Dans le cas où  $k_1 = 0$ , on retrouve pour la force critique de flambement l'expression (I.37) donnée par Mandel (1936) (cf. §.I.4.2.1.a). Pour montrer l'effet de la constante de cisaillement, Pantelides (1990) a fait une comparaison entre le cas où on néglige le terme  $k_1$  (Mandel, 1936) et le cas où on tient compte de ce paramètre, pour un pieu articulé aux deux extrémités (fig. I.24).

### b - Méthode énergétique

Pour les autres conditions aux limites, Pantelides (1990) a utilisé la méthode énergétique pour déterminer des valeurs approchées de la force critique de flambement. Le travail  $T$  dû aux forces appliquées, au cours de la déformation, est :

$$T = \frac{F}{2} \int_0^l y'^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^l (E_s y^2 + k_1 y'') dz \quad (I.74)$$

Le potentiel interne U est donné par :

$$U = \int_0^l \frac{E_p I_p}{2} y''^2 dz \quad (I.75)$$

Les principaux résultats obtenus par Pantelides (1990), concernant les valeurs approchées de la force critique et les hypothèses faites sur la ligne élastique y(z), sont les suivants :

- pieu articulé en pointe, fixé en tête avec un déplacement horizontal :

$$y = a \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \quad F_{\alpha} = \frac{F_{\alpha E}}{4} + \frac{4E_s I^2}{\pi^2} + k_1 \quad (I.76)$$

- pieu encastré en pointe, fixé en tête avec un déplacement horizontal :

$$y = a \left(1 - \cos\frac{\pi z}{l}\right) \quad F_{\alpha} = F_{\alpha E} + \frac{3E_s I^2}{\pi^2} + k_1 \quad (I.77)$$

- pieu encastré en tête et articulé en pointe :

$$y = a \left(\frac{z}{l} - \frac{\sin \varepsilon z}{\sin \varepsilon l}\right) \quad F_{\alpha} = 20,19 \frac{E_p I_p}{l^2} + 0,0826 E_s I^2 + k_1 \quad (I.78)$$

a : constante arbitraire,

l : longueur du pieu,

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu,

$F_{\alpha E}$  : force critique d'Euler pour le cas correspondant,

$E_s$  : module de réaction du sol,

$k_1$  : constante de cisaillement.

Pour calculer la valeur de  $\varepsilon$ , Pantelides a proposé l'équation suivante :

$$\varepsilon l = \tan \varepsilon l = 4,4934.$$

Dans tous les cas, on remarque que la force critique de flambement augmente avec la présence du sol et que l'effet de la constante du cisaillement  $k_1$  est d'augmenter la force critique de la valeur  $k_1$ .

### c - Effet de la déformation due à l'effort tranchant

Pantelides (1990) a étudié l'effet de la déformation due à l'effort tranchant sur la valeur de la force critique de flambement en utilisant la méthode classique. Il a étudié le cas du pieu articulé, aux deux extrémités, soumis à une force de compression F. La force critique devient :

$$F_{cr} = F_{crE} \left[ \frac{n^2 + \frac{E_s I}{\pi^2 F_{crE}} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2\pi^2 n(1+\nu)}{\left(\frac{l}{R}\right)^2} \right)}{1 + \frac{2n^2 \pi^2 m(1+\nu)}{\left(\frac{l}{R}\right)^2}} \right] + k_1; \quad (I.79)$$

avec

$F_{crE}$  : force critique d'Euler pour un pieu articulé aux deux extrémités,

$l$  : longueur du pieu,

$R$  : rayon de giration de la section droite du pieu,

$\nu$  : coefficient de Poisson,

$k_1$  : constante de cisaillement,

$E_s$  : module de réaction du sol,

$m$  : facteur de cisaillement, dépendant de la forme de la section transversale ( $m = 1,2$  pour une section rectangulaire et  $1,11$  pour une section circulaire)

$n$  : entier naturel qui détermine le mode de flambement tel que  $F_{cr}$  soit minimale.

Une comparaison des expressions (I.72) et (I.79) qui donnent les forces critiques de flambement, dans le cas où on néglige l'effet de la déformation de l'effort tranchant et celui où on tient compte de ce phénomène, est illustrée à la figure (I.25). On remarque que la déformation due à l'effort tranchant a pour effet de diminuer la force critique de flambement, notamment pour les pieux de faibles élancements.

La condition de transition d'un mode de flambement à un autre devient :

$$\frac{E_s I^2}{\pi^2 F_{crE}} = \frac{n^2(n+1)^2}{1 + Z[(n+1)^2(1 + Z n^2) + n^2]}; \quad (I.80)$$

avec :

$$Z = \frac{2\pi^2 m(1+\nu)}{\left(\frac{l}{R}\right)^2}. \quad (I.81)$$

Cette transition ne dépend pas de la constante de cisaillement  $k_1$ . Quand on néglige l'effet de la déformation due à l'effort tranchant ( $n = 0, Z = 0$ ), l'équation (I.80) devient semblable à l'équation (I.38) calculée par Mandel. La valeur de transition devient petite pour de faibles élancements et l'effet de la déformation devient négligeable pour des élancements très élevés ( $l/R > 200$ ).

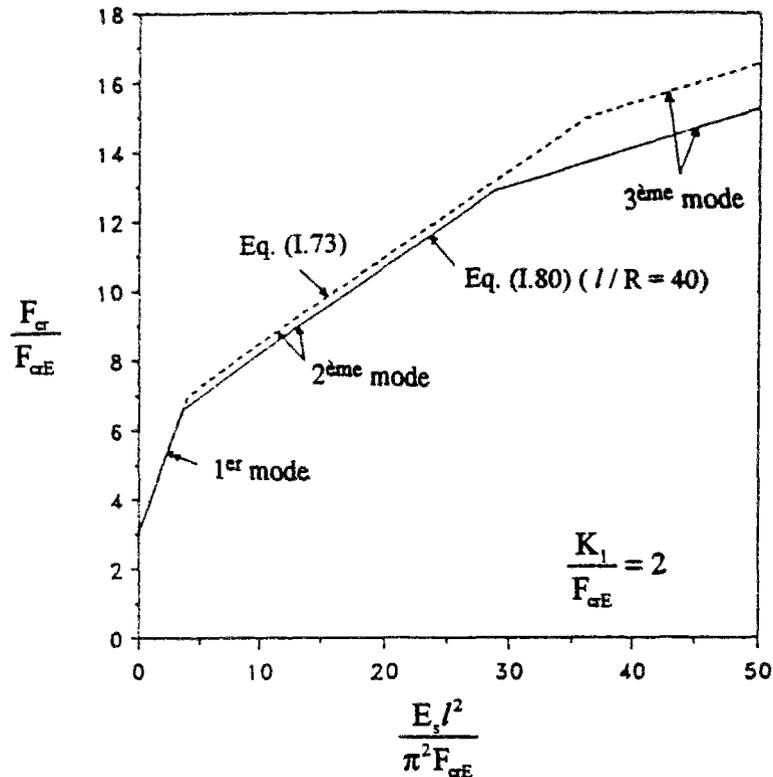


Fig. I.25: Effet de la déformation due à l'effort tranchant (Pantelides, 1990).

#### I.4.5 Charge ultime d'un micropieu

La force critique de flambement, définie dans les formulations précédentes, ne tient compte d'aucune imperfection et d'aucune limite élastique, tandis que la charge ultime est basée sur un défaut de forme initiale de la ligne moyenne. A partir de ce principe, Vezole (1989) a défini une méthode de calcul simple, pour la détermination de la charge ultime que peut supporter un micropieu dans un sol élastique homogène. Il s'agit de la détermination d'une première charge ultime  $N_1$  vis à vis du critère de contrainte de l'acier plafonnée à  $\sigma_e / 1,15$ , et d'une deuxième charge ultime  $N_2$  vis à vis du critère de la pression latérale, plafonnée aux deux tiers de la pression de fluage horizontale du sol. La charge ultime  $N_u$  du micropieu est égale au minimum des deux charges .

$$N_u = \min (N_1 ; N_2 ); \quad (I.82)$$

avec :

$$\frac{\sigma_e}{1,15} = \frac{0,01\delta E_p N_1}{2\sqrt{E_s E_p I_p} - N_1} \quad \text{et} \quad \frac{2P_f}{3} = \frac{0,02\delta N_2}{B \left( 1 - \frac{N_2^2}{4E_s E_p I_p} \right)} ; \quad (I.83)$$

$\sigma_e$  : limite élastique de l'acier constituant le micropieu,

$P_f$  : pression de fluage à l'interface sol-pieu,

$B$  : diamètre de forage,

$E_s$  : module de réaction du sol,

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion de l'armature du micropieu,

$\delta$  : courbure maximale de l'armature du micropieu.

Cette définition est sécuritaire, constituant une approche par valeurs inférieures de la charge de rupture de l'acier du micropieu. Elle peut fournir, pour le calcul pratique, une première estimation de la charge ultime d'un micropieu.

#### 1.4.6 Détermination du module de réaction du sol

L'utilisation des modèles décrits précédemment, notamment le modèle de Winkler et les modèles biparamétriques basés sur le modèle de Winkler, nécessite la détermination du coefficient de réaction du sol  $k_s$ . Ce coefficient de réaction est une grandeur d'interaction sol-pieu. Par contre, il n'est pas une grandeur intrinsèque au sol.

Le module de réaction  $E_s$  ( $E_s = k_s \cdot B$ , où  $B$  est la largeur de la fondation), peut être défini comme la pente de la sécante ou de la tangente de la courbe de réaction élémentaire ( $P, y$ ) où  $P$  est la pression horizontale sur le pieu et  $y$  est le déplacement horizontal du pieu (fig. I.26). Cette courbe de réaction peut être tirée des résultats d'un essai pressiométrique (Ménard, 1962) ou d'un essai triaxial (Matlock, 1970).

Pour déterminer le module de réaction, plusieurs auteurs ont proposé des corrélations empiriques entre ce module et les caractéristiques géotechniques ou élastiques du sol. Hadjadji (1993), dans le cas d'une étude sur les fondations chargées horizontalement, a présenté une synthèse détaillée de ces différentes corrélations que nous rappelons ici.

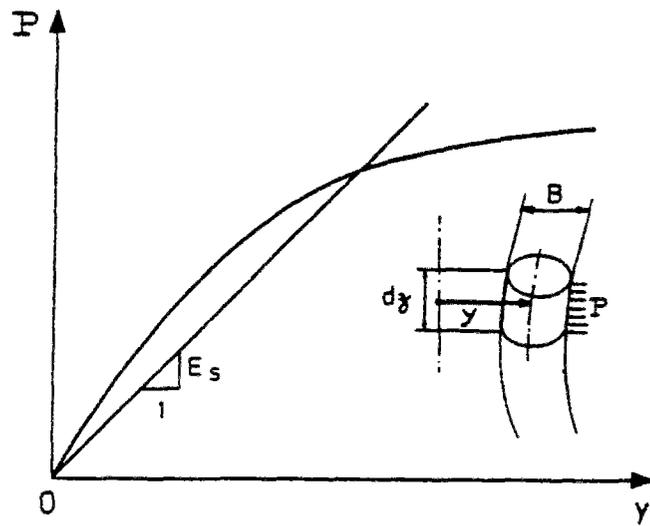


Fig. I.26 : Courbe de réaction : charge répartie-déplacement (Frank, 1984).

**a - Corrélation du module de réaction avec le module pressiométrique du sol**

Ménard (1962) a proposé une courbe de réaction élémentaire sol-pieu dérivée des résultats de l'essai pressiométrique (fig. I.27), à savoir :

- $p_l$  : pression limite donnée directement par l'essai,
- $p_f$  : pression de fluage donnée directement par l'essai.

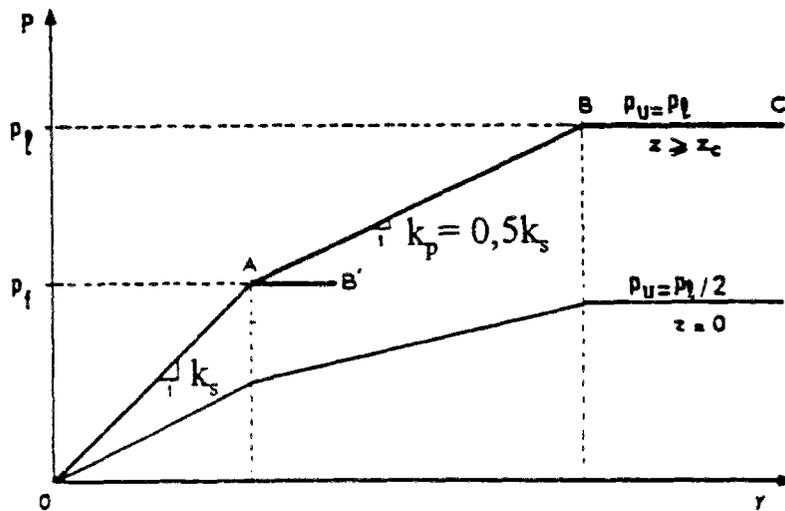


Fig. I.27 : Courbe de réaction à partir du pressiomètre Ménard (d'après Baguelin, Jézéquel et Shields, 1978).

Le coefficient de réaction  $k_s$  de la partie OA est obtenu à partir de la formule semi-empirique des tassements avec des coefficients de forme correspondant à une fondation de grande longueur. Son expression est donnée par la formule suivante :

$$k_s = E_M \frac{18}{4 \left( 2,65 \frac{B}{B_0} \right)^\alpha B_0 + 3\alpha B} \quad \text{pour } B \geq 0,6\text{m} \quad (\text{I.84})$$

$$k_s = E_M \frac{18}{[4(2,65)^\alpha + 3\alpha]B} \quad \text{pour } B \leq 0,6\text{m} \quad (\text{I.85})$$

$E_M$  : module pressiométrique standard,

$\alpha$  : coefficient rhéologique du sol,

$B$  : diamètre du pieu,

$B_0$  : diamètre de référence égal à 0,6m.

Davisson et Donovan (1977) ont proposé, à la suite d'essais sur pieux en vraie grandeur, le rapport suivant :

$$\frac{E_s}{E_M} = 6 \left( \frac{B}{B_0} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{D}{B} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.86})$$

$E_M$  : module pressiométrique,

$D$  : fiche du pieu,

$B$  : diamètre du pieu,

$B_0$  : diamètre de référence égal à 0,305m.

### **b - Corrélation du module de réaction avec les caractéristiques élastiques du sol**

Terzaghi (1955) a déterminé des valeurs expérimentales de  $k_s$  suite à des essais de chargement de plaques dans différents types de sols. Il a montré que  $k_s$  n'était pas une valeur intrinsèque du sol mais qu'elle dépendait de la largeur, la forme et la fiche de la fondation. Il a établi :

$$E_s = n_h \cdot z = \frac{A\gamma}{1,35} z \quad \text{pour le sable} \quad (\text{I.87})$$

$$E_s = \frac{k_{v1}}{1,5} B_0 \quad \text{pour l'argile} \quad (\text{I.88})$$

où  $A$  est un facteur qui dépend de la densité du sol, et  $\gamma$  est le poids volumique.  $k_{v1}$  est le coefficient de réaction verticale du sol pour une plaque carrée de côté égal à  $B_0 = 0,305\text{m}$  reposant sur la surface du sol et chargée verticalement.

Une autre relation, entre le module de réaction  $E_s$  et le module d'Young  $E$ , est proposée par Terzaghi (1955), telle que:

$$\frac{E_s}{E} = 0,74 \quad (I.89)$$

Davisson (1970) propose dans le cas d'une argile molle, de calculer le module de réaction à partir de la cohésion non drainée :

$$E_s = 67 c_u \quad (I.90)$$

Mc Clelland et Focht (1956) relie directement le module de réaction  $E_s$  aux modules de cisaillement à l'appareil triaxial. Poulos (1971) a obtenu une relation entre le module de réaction et le module d'Young en égalant les déplacements horizontaux, d'un pieu vertical chargé horizontalement, calculés suivant l'approche du continuum élastique et celle du modèle de Winkler :

$$\frac{E_s}{E} = 0,82. \quad (I.91)$$

Bowles (1982) propose de calculer le module de réaction à partir d'un module élastique du sol, suivant la formule suivante :

$$E_s = (0,8 \text{ à } 1,3) E. \quad (I.92)$$

D'après Bowles, ce module élastique peut être évalué, à l'aide d'un diagramme contrainte-déformation à partir d'un essai de mécanique des sols.

Imai (1976) a proposé de déterminer le module  $E_s$  à partir du coefficient de Poisson  $\nu$ , en partant de la solution approchée du problème d'un pieu chargé latéralement et situé dans un sol élastique linéaire isotrope :

$$\frac{E_s}{E} = \frac{\pi(3+2\nu)}{4(1+\nu)}. \quad (I.93)$$

Baguelin, Frank et Saïd (1977) ont proposé de calculer le module de réaction  $E_s$  à partir du module d'Young  $E$ , suite à une étude du mécanisme d'interaction sol-pieu avec les différents paramètres, qui peuvent l'affecter, dont le remaniement et la plastification du sol autour de la fondation, la forme du pieu, son élancement et sa rigidité et, enfin, les conditions de chargement et d'encastrement en tête. Le modèle utilisé est un disque représentant le sol, de rayon extérieur  $R$ , au centre duquel est fixée une section rigide circulaire (ou carrée) représentant la section du pieu (étude bidimensionnelle) (fig. I.28). Les résultats sont présentés sous forme d'une grandeur adimensionnelle  $s$  égale au rapport du module d'Young  $E$  au

module de réaction  $E_s$  ( $s = E/E_s$ ). Cette grandeur présente l'intérêt d'avoir des propriétés additives permettant de simplifier la présentation des résultats.

Pour un pieu circulaire, dans un sol entièrement intact, on a :

$$\text{Argile:} \quad s = 0,573 + 0,239 \ln \frac{R}{30r_0} \quad \text{pour } \nu = 0,5 \quad (\text{I.94})$$

$$\text{Sable:} \quad s = 0,808 + 0,265 \ln \frac{R}{30r_0} \quad \text{pour } \nu = 0,33 \quad (\text{I.95})$$

où  $r_0$  est le rayon du pieu.

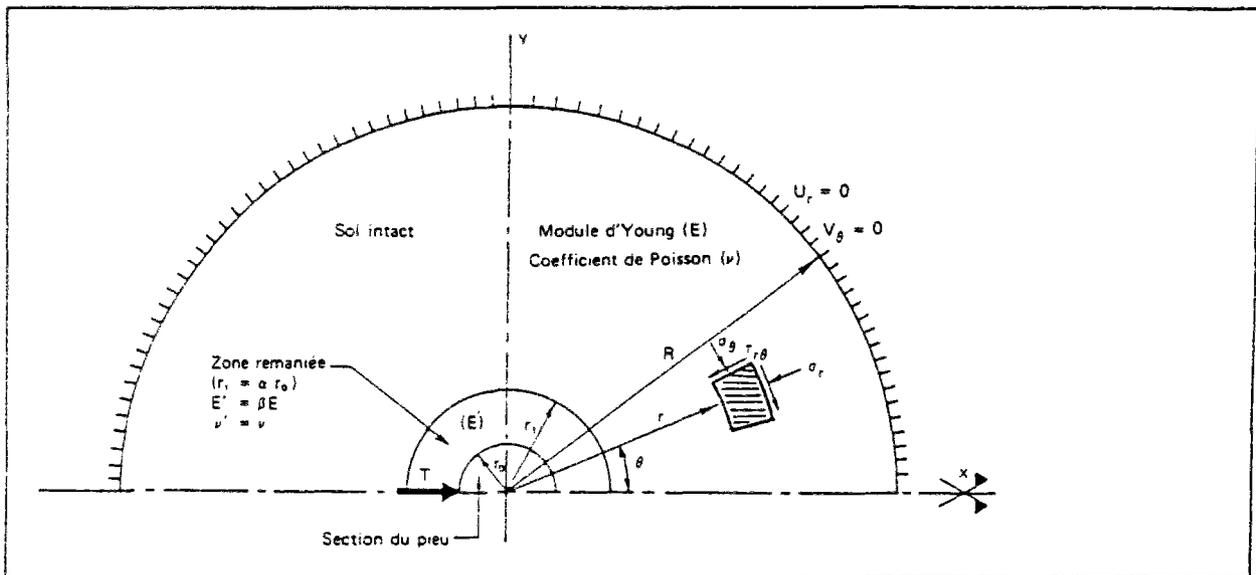


Fig. I.28 : Modèle analytique bidimensionnel pour un pieu circulaire avec un anneau de sol remanié (Saïd, 1975).

Des règles simples de détermination du rayon  $R$  ont été proposées suite à une étude tridimensionnelle en élasticité linéaire isotrope (fil vertical chargé horizontalement dans un massif élastique semi-infini).

- Pieux libres en tête et subissant une charge horizontale  $H$  en tête :  $R = \inf(7l_0 ; 3h)$ ,
- Pieux libres en tête et subissant un moment de renversement :  $R = \inf(3l_0 ; 1,25h)$ ,
- Pieux encastés en tête et subissant une charge  $H$  en tête :  $R = \inf(12l_0 ; 8h)$ ,

où  $h$  est la hauteur de fiche et  $l_0$  est la longueur de transfert, terme représentant la rigidité relative sol-pieu et qui est égale à

$$\sqrt[4]{\frac{4E_p I_p}{E_s}} \quad (I.96)$$

avec :

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu,

$E_s$  : module de réaction du sol supposé constant avec la profondeur.

Ces valeurs de R correspondent aux sols incompressibles ( $\nu = 0,5$ ). Pour les sols compressibles ( $\nu = 0,33$ ) ces valeurs sont trouvées réduites de moitié. Cependant, le rayon R dépend lui-même du module de sol  $E_s$  par l'intermédiaire de  $l_0$ . Pour le calcul pratique de R, Baguelin, Frank et Saïd (1977) proposent de prendre simplement  $E_s = E$  (module d'Young du sol) ce qui n'entraîne pas une erreur supérieure à 5% environ, sur la valeur finale du module de réaction du sol  $E_s$ .

Des abaques et des expressions sont établis pour la détermination du supplément du déplacement adimensionnel  $\Delta S_r$  pour un sol remanié,  $\Delta S_r$  pour tenir compte de l'effet de forme,  $\Delta S_p$  et  $\Delta S_{pr}$  pour l'influence de la plastification dans le cas d'un sol intact et d'un sol remanié.

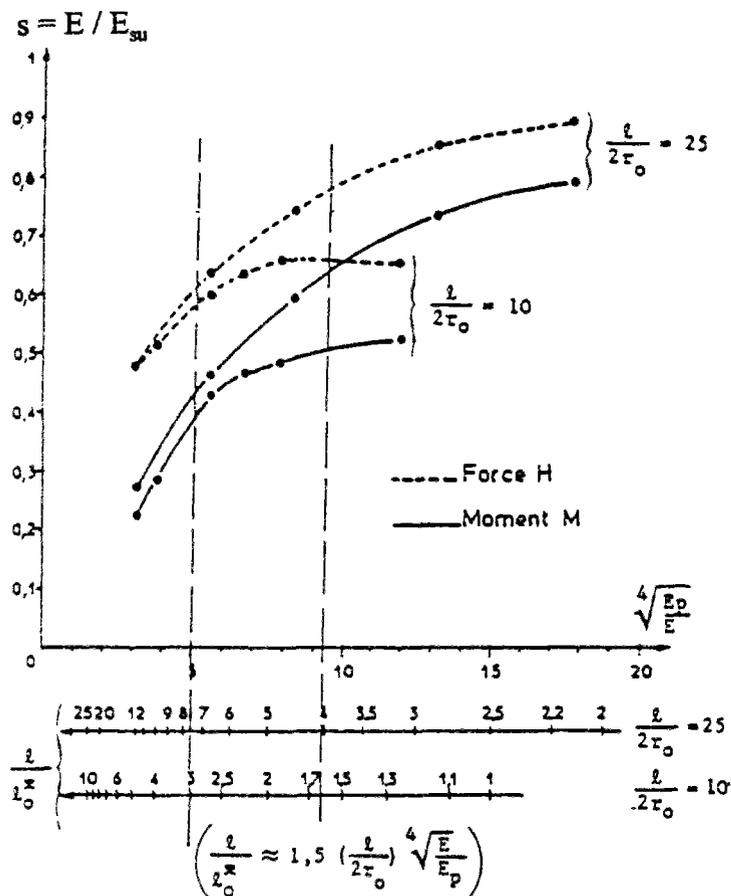


Fig. I.29: Module de réaction  $E_{su}$  (Frank, 1984).

Des pieux circulaires, d'élanement  $l/2r_0 = 10$  et  $25$ , ont été étudiés par la méthode des éléments finis en milieu homogène, élastique, linéaire isotrope pour diverses rigidités relatives sol-pieu  $l/l_0$ , en remplaçant  $E_s$  par  $E$  dans l'équation (I.96).

Des abaques sont établis pour la détermination d'un module de réaction équivalent  $E_{su}$  (fig. I.29) en fonction de l'élanement, la rigidité et le chargement en tête, dans le cas d'un pieu libre, soumis en tête à une force horizontale et à un moment de renversement  $M$ . Les valeurs données par l'abaque (fig. I.29) sont sécuritaires parce qu'elles conduisent à un moment maximal et à un effort tranchant maximal dans le pieu, proche ou supérieur aux valeurs calculées par les éléments finis.

Cette étude, comme celle de Poulos (1971), montre que le module du sol  $E_s$  est non seulement fonction des caractéristiques du sol ( $E$  et  $\nu$ ), mais également, de la rigidité relative sol-pieu, de l'élanement du pieu et des conditions d'encastrement et de chargement en tête.

## I.5 Conclusions

Les différentes approches pour étudier le problème de stabilité des pieux sont basées sur des hypothèses très simplificatrices qui sont peu valides dans la pratique notamment en ce qui concerne le comportement du sol et le problème de l'interaction sol-pieu. En effet, le comportement du sol est supposé élastique linéaire et le frottement latéral est souvent négligé. On suppose aussi qu'il n'y a pas de défauts de réalisation et, par conséquent, que le pieu est parfaitement droit. Deux approches sont utilisées pour étudier le problème de la stabilité du pieu : La méthode du module de réaction (modèle de Winkler), et la méthode du continuum élastique (modèle du continuum élastique). La comparaison entre les résultats obtenus avec les deux méthodes montre qu'il y a une bonne concordance entre les deux résultats dans le cas des pieux souples. Par contre, dans le cas des pieux rigides, la méthode du module de réaction donne des forces critiques supérieures à celles obtenues par la méthode du continuum élastique.

Les solutions trouvées par ces deux méthodes montrent que la force critique de flambement dépend de la rigidité à la flexion du pieu, de sa longueur, des conditions aux limites, et du module de réaction du sol. Quand celui-ci augmente, la force critique augmente, ainsi que le mode de flambement. Pour les pieux très souples, l'augmentation de la longueur ainsi que la condition en pointe, n'ont pas d'influence sur la force critique de flambement. Par contre, la condition en tête de pieu a une importance considérable sur la valeur de la force critique. Il en va de même, pour la variation du module de réaction du sol où la force critique obtenue dans le cas d'un module de réaction constant est supérieure à celle obtenue dans le cas d'une variation linéaire du module de réaction du sol avec la profondeur.

La plupart des solutions analytiques proposées pour déterminer la force critique de flambement, sont basées sur la méthode du module de réaction. De plus, ces solutions sont, en général, présentées sous forme d'abaques dépendant des paramètres adimensionnels, étant donnée la complexité des fonctions mathématiques exprimant la force critique.

Mandel (1936) et Hetenyi (1946) ne donnent que des solutions pour les pieux complètement fichés dans un sol homogène, en négligeant le frottement latéral et en supposant que le module de réaction est constant.

Davisson (1963), Francis et al. (1965),...etc., ont déterminé des solutions de la force critique en tenant compte du frottement latéral et de l'effet de la variation du module de réaction de sol, pour des pieux complètement et partiellement fichés dans un sol homogène. Dans le cas des pieux complètement fichés dans le sol, la prise en compte du frottement latéral entraîne une augmentation de la force critique de flambement. Celle-ci dépend des conditions aux limites ; Elle est maximale dans le cas d'un pieu libre en tête et encasté dans un chevêtre mobile, et minimale dans le cas d'un pieu libre. Par contre, dans le cas des pieux partiellement fichés dans le sol, l'effet du frottement latéral dépend de la hauteur de la partie libre (hors sol) du pieu. Ainsi, cet effet est négligeable à partir d'une hauteur libre supérieure ou égale à la fiche du pieu.

Cependant, ces solutions ne sont guère utilisées dans la pratique, parce que leur application nécessite la détermination des fonctions définissant la variation de l'effort normal et du module de réaction le long du pieu. Il en va de même, pour les solutions proposées par Pantelides (1990) en utilisant le modèle de Pasternak (modèle de Winkler généralisé), où leur application exige la détermination de la constante de cisaillement. Celle-ci a tendance à augmenter la force critique de flambement d'une quantité égale à sa valeur. Pour ces raisons, les abaques de Mandel sont largement appliqués en pratique, étant donné leur facilité d'utilisation, la donnée d'une seule valeur du module de réaction étant nécessaire.



## Chapitre II

### ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE DU FLAMBEMENT ET DE LA PRISE EN COMPTE DES GRANDS DEPLACEMENTS DANS LE COMPORTEMENT MECANIQUE DU PIEU

#### II.1 Introduction

Dans la résolution des équations classiques de la résistance des matériaux, on suppose que les déformations et les déplacements sont petits. Ceci conduit au découplage entre les diverses sollicitations : flexion, compression et torsion. Une telle schématisation ne permet pas de calculer la force critique de flambement ni les réponses pré et post - flambement. Les approches de Mandel (1936) et Hetenyi (1946) permettent d'étudier la stabilité vis - à - vis du flambement et de déterminer la force critique de flambement, mais ne permettent pas la détermination des réponses pré et post-flambement. Un problème que l'on rencontre en géotechnique est l'influence de la charge verticale sur la réponse en flexion des structures sur pieux sollicitées latéralement.

La résolution générale de ces problèmes consiste à écrire les équations d'équilibre et du comportement en tenant compte des non-linéarités géométriques, c'est à dire en tenant compte des grands déplacements et des grandes rotations. Une telle méthode est encore difficile de mise en oeuvre, aussi bien en ce qui concerne l'écriture des équations mécaniques que la résolution numérique du problème.

On présente dans ce chapitre une approche simplifiée appelée " RDM locale " pour tenir compte des non-linéarités géométriques dans le calcul d'un groupe de pieux.

Avant d'expliquer le principe de la méthode " RDM locale ", on présente dans une première partie, un outil appelé FLAMANDEL, pour la résolution numérique des solutions de Mandel (1936).

Dans une seconde partie, on rappelle d'abord les équations générales de la RDM, issues de l'équilibre d'un tronçon infinitésimal de poutre et écrites dans le repère de Frénet. Puis on définit les hypothèses de l'approche " RDM locale " et le concept de rotations semi-tangentielles permettant l'écriture matérielle des équations de la " RDM locale ". On présente ensuite les notions de matrice-transfert et de vecteur d'état généralisés au cas des non-linéarités géométriques, ceci de façon tridimensionnelle. On explicite le principe de résolution des équations de la " RDM locale" basé sur la linéarisation des équations le long d'un tronçon de discrétisation.

Les notions théoriques développées sont ensuite appliquées au cas d'un groupe de pieux reliés par un chevêtre rigide (programme GOUFLA). Les différentes hypothèses et possibilités du programme de calcul GOUFLA ainsi que le principe de résolution sont présentés. On donne l'algorithme général du programme.

On étudie quelques aspects dans le mécanisme du programme GOUFLA, notamment l'influence de la discrétisation numérique et de la tolérance de convergence sur les valeurs des moments et des déplacements. Ensuite, on compare les résultats des programmes GOUPIL (RDM classique) et GOUFLA (" RDM locale "), afin de mettre en évidence l'influence de la force verticale sur la réponse en flexion d'un pieu sollicité latéralement (effets du second ordre).

Dans le cadre de la validation du programme GOUFLA, on présente des comparaisons entre les résultats obtenus par GOUFLA et ceux obtenus, soit analytiquement par la théorie de Mandel (programme FLAMANDEL), soit numériquement par le code d'éléments finis CESAR - LCPC.

Enfin une étude paramétrique est présentée pour étudier l'influence du type de chargement (charge horizontale, déplacement horizontal initial ou déplacement du sol) sur la force critique de flambement.

## II.2 Résolution numérique des solutions de Mandel

### (programme de calcul FLAMANDEL)

Mandel (1936) a proposé des solutions analytiques pour déterminer la force critique de flambement. Le problème traité est celui d'un pieu droit, fiché dans un milieu résistant élastique (Winkler). Il a établi les conditions de flambement pour plusieurs conditions aux limites. Dans le cas d'un pieu articulé aux deux extrémités, la condition de flambement est donnée explicitement par l'expression I.37 (cf. §.I.4.2.1.a) qui permet de déterminer facilement la force critique de flambement. Pour les autres conditions aux limites, la condition au flambement est donnée par des équations implicites faisant intervenir deux paramètres adimensionnels, la force réduite  $\varphi$  et la demi-longueur réduite  $\lambda$ , tels que:

$$\varphi = \frac{F}{\sqrt{E_s E_p I_p}} \quad \text{et} \quad \lambda = l \sqrt[4]{\frac{E_s}{E_p I_p}} \quad \text{où ; (II.1)}$$

$l$  : longueur du pieu,

$E_p I_p$  : rigidité à la flexion du pieu,

$E_s$  : module de réaction du sol,

$F$  : force de compression appliquée en tête du pieu.

Suivant la valeur du paramètre  $\varphi$ , on obtient :

- pour  $\varphi < 2$ , des équations en lignes hyperboliques;
- pour  $\varphi > 2$ , des équations en lignes trigonométriques.

Si le pieu possède la même liaison aux deux extrémités (liaisons symétriques), on obtient deux équations pour chaque valeur de  $\varphi$  : la première correspond à la déformation paire (nombre impair de demi-ondes, signe +), la deuxième correspondant à la déformation impaire (nombre pair de demi-ondes, signe -).

Dans le cas d'un pieu encastré aux deux extrémités, les équations s'écrivent :

$$\text{pour } \varphi < 2 \quad c \sin(\lambda a) \pm a \operatorname{sh}(\lambda c) = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\text{pour } \varphi > 2 \quad b \sin(\lambda a) \pm a \sin(\lambda b) = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\text{où} \quad a = \sqrt{\varphi + 2} \quad , \quad b = \sqrt{\varphi - 2} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{2 - \varphi} .$$

Dans le cas d'un pieu libre, les équations s'écrivent:

$$\text{pour } \varphi < 2 \quad (\varphi + 1)c \sin(\lambda a) \pm (\varphi - 1)a \operatorname{sh}(\lambda c) = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\text{pour } \varphi > 2 \quad (\varphi + 1)b \sin(\lambda a) \pm (\varphi - 1)a \sin(\lambda b) = 0 \quad (\text{II.5})$$

Dans le cas d'un pieu encastré à une extrémité, libre à l'autre, on obtient une équation unique, ne se séparant pas en plusieurs autres comme dans les cas précédents: cela tient à ce que les extrémités ne jouent plus des rôles symétriques, d'où :

$$\text{pour } \varphi < 2 \quad (\varphi - 1)(\varphi + 2)\cos(2\lambda b) + (\varphi + 1)(\varphi - 2)\cos(2\lambda a) - 4 = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\text{pour } \varphi > 2 \quad (\varphi - 1)(\varphi + 2)\text{ch}(2\lambda c) + (\varphi + 1)(\varphi - 2)\cos(2\lambda a) - 4 = 0 \quad (\text{II.7})$$

Nous avons programmé ces équations dans un outil appelé FLAMANDEL. Le but est de trouver les racines  $\varphi$  des équations (II.2) à (II.7). Il y a toujours, pour une valeur déterminée de  $\lambda$ , une infinité de solutions pour  $\varphi$ . C'est la valeur minimale de la force réduite  $\varphi$  qu'il faut prendre pour obtenir la force critique de flambement. Celle-ci est égale à la plus petite racine de l'équation en lignes hyperboliques ( $\varphi < 2$ ) si celle-ci a une solution. Sinon, la solution est la racine la plus petite de l'équation en lignes trigonométriques ( $\varphi > 2$ ). La méthode de résolution adoptée dans le programme FLAMANDEL est la méthode de la bisection (James et al., 1985). La figure (II.1) illustre la comparaison entre les résultats numériques et les abaques établis par Mandel (1936). On retrouve les résultats de Mandel, avec une excellente concordance.

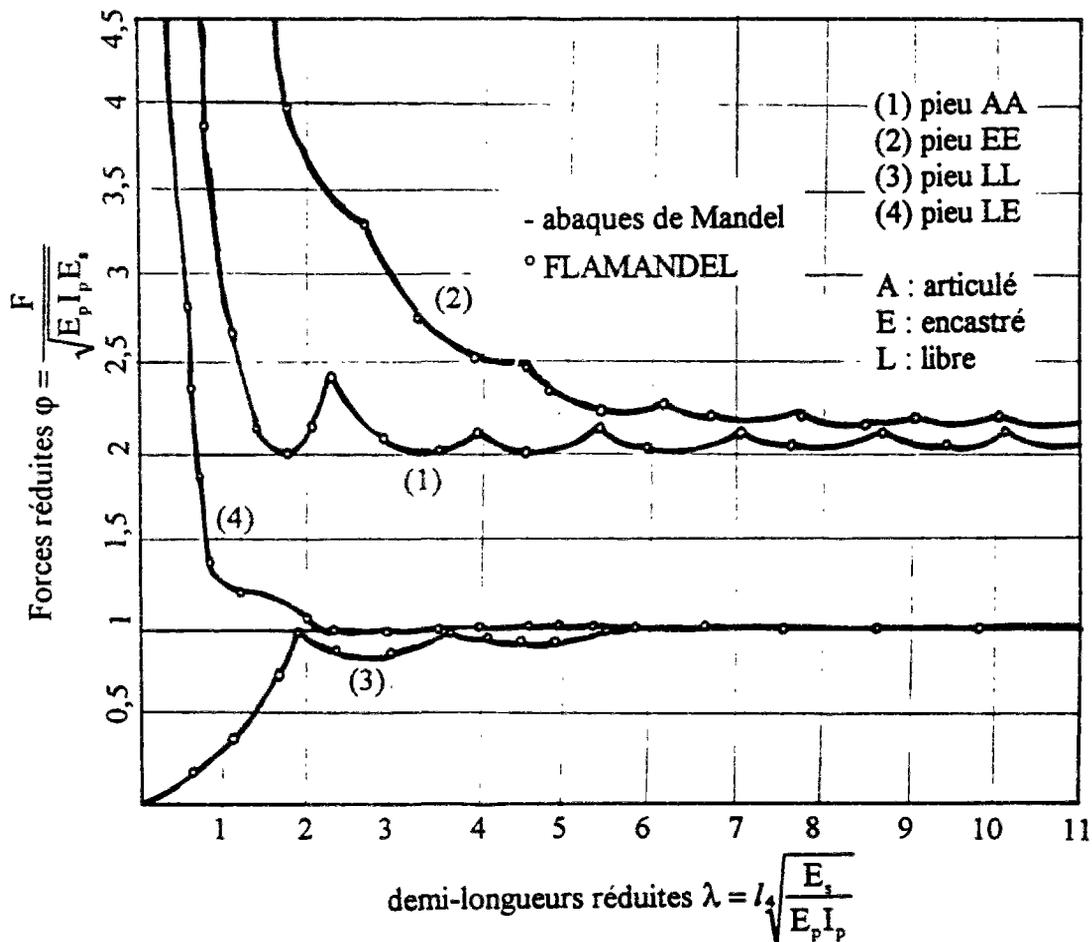


Fig. II.1: Comparaison entre FLAMANDEL et les abaques de Mandel (1936).

## II.3 Modélisation théorique des non-linéarités géométriques (effets du second ordre - grands déplacements)

### II.3.1 Rappels de la Résistance des Matériaux (RDM)

#### II.3.1.1 Problème du mât d'Euler

L'écriture d'un équilibre global (matériel) du mât sous l'effet d'une force verticale  $F$ , dans le cas de petites rotations, conduit à l'équation différentielle du quatrième ordre, régissant le déplacement  $y$ , telle que:

$$E_p I_p \frac{d^4 y}{dz^4} + F \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad (\text{II.8})$$

où  $E_p I_p$  est la rigidité à la flexion du pieu. Cet équilibre est valide, car il y a absence de chargements locaux sur le mât. Dans le cas général, en présence de ces chargements locaux, il faut écrire un équilibre local à la place de l'équilibre global. Il s'agit de l'application du principe d'action locale de la mécanique des milieux continus. Ce principe suppose que l'équilibre en un point d'une structure, ne dépend que du chargement au voisinage de ce point.

#### II.3.1.2 Equations d'équilibre local dans le repère de Frénet

##### (équations de Navier-Bresse et équations de Bresse)

Courbon (1964) a présenté de façon détaillée les formules générales de Navier-Bresse régissant la déformation des poutres de fortes courbures. Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement le principe de détermination de ces équations. On présente les simplifications apportées à ces formules, dans la pratique en géotechnique, pour résoudre le problème du flambement.

Soit un tronçon d'un pieu de longueur infinitésimal  $ds$ . Le repère de Frénet est un repère direct orthonormé  $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$  lié au tronçon du pieu. Les actions sur les facettes  $G(s)$  et  $G'(s)$  sont les torseurs d'efforts de résultantes de force  $\bar{R}$  ( $N, T_n, T_b$ ) et de moment  $\bar{\Gamma}$  ( $M_t, M_n, M_b$ ). Le chargement extérieur est constitué des densités de forces extérieures  $\bar{p}$  ( $p_t, p_n, p_b$ ) et de couples extérieurs  $\bar{\mu}$  ( $\mu_t, \mu_n, \mu_b$ ) appliqués le long du tronçon (fig. II.2).

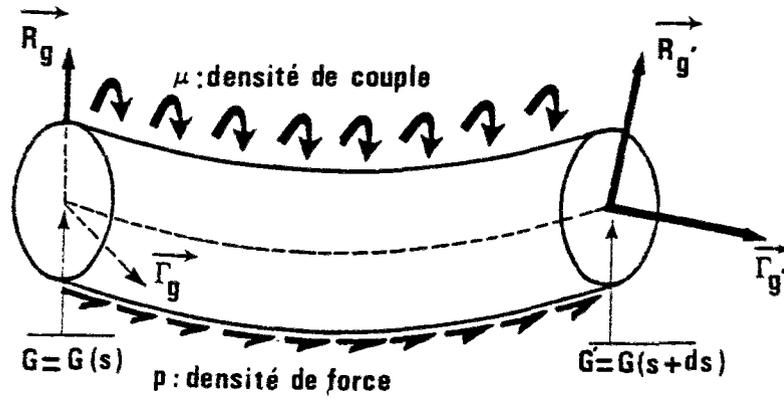


Fig. II.2: équilibre d'un tronçon infinitésimal.

Pour que le tronçon soit en équilibre, la somme des actions doit être nulle, on en déduit les relations dites équations de Navier - Bresse :

$$\sum F_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_t + \frac{dN}{ds} - \frac{T_n}{R} = 0 \\ p_n + \frac{dT_n}{ds} + \frac{N}{R} - \frac{T_b}{T} = 0 \\ p_b + \frac{dT_b}{ds} + \frac{T_n}{T} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

L'équilibre des moments par rapport au point G' donne :

$$\sum M_i (\text{par rapport à } G') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_t + \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{R} = 0 \\ \mu_n + \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R} - \frac{M_b}{T} - T_b = 0 \\ \mu_b + \frac{dM_b}{ds} + \frac{M_n}{R} + T_n = 0 \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Pour un tronçon dont la courbure est dans le plan (t, n), et qui est sollicité dans ce plan ( $p_b$ ,  $\mu_t$  et  $\mu_n$  sont nuls), le système se réduit aux équations suivantes, dites équations de Bresse:

$$\sum F_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_t + \frac{dN}{ds} - \frac{T_n}{R} = 0 \\ p_n + \frac{dT_n}{ds} + \frac{N}{R} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

et

$$\sum M_i = 0 \Leftrightarrow \mu_b + \frac{dM_b}{ds} + T_n = 0 \quad (\text{II.12})$$

Si l'on dérive les équations d'équilibre en supposant que  $\mu_b = 0$  (densité de couple de torsion appliquée nulle), ce qui est généralement le cas, on obtient, en remplaçant le terme  $T_n$  par sa valeur déduite de l'équation II.12 dans le système II.11, un système de deux équations différentielles relatives à la compression et à la flexion, telles que:

$$\text{compression} : \quad \frac{dN}{ds} - \frac{T_n}{R} + p_t = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\text{flexion} : \quad -\frac{d^2M_b}{ds^2} + \frac{N}{R} + p_n = 0 \quad (\text{II.14})$$

Dans ces équations, les paramètres concernant le sol sont  $p_t$  et  $p_n$ , ils représentent respectivement le frottement latéral et la réaction du sol. On remarque que le couplage est double : non seulement l'effort normal  $N$  intervient dans l'équation de la flexion, mais également l'effort tranchant  $T_n$  intervient dans l'équation de la compression. La résolution d'un tel système ne peut pas s'effectuer en résolvant indépendamment chacune des deux équations différentielles.

Dans la pratique en géotechnique, pour traiter le problème du flambement, on suppose que les déformations sont petites d'où  $dz = ds$ . On peut donc écrire  $1/R = d^2y/dz^2$ . Le terme  $1/R$  est négligé dans l'équation de la compression, mais non dans celle de la flexion. De plus, on fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

- le frottement latéral est nul :  $p_t = 0$  ;
- l'effort normal est constant, égal à la force verticale matérielle  $F$ , appliquée en tête de pieu.

En incluant ces hypothèses dans les équations (II.13) et (II.14), on aboutit à l'équation différentielle du quatrième ordre (Mandel, 1936 ; Hetenyi, 1946) dans le cas d'un pieu dans un sol élastique (Winkler), soit :

$$E_p I_p \frac{d^4 y}{dz^4} + F \frac{d^2 y}{dz^2} + E_s = 0 \quad (\text{II.15})$$

Ce raisonnement permet de calculer la force critique de flambement (Mandel, cf. §.I.4.2.1.a), mais ne permet pas la détermination de la réponse préflambement. Le calcul de cette réponse impose, en général, de tenir compte des équations complètes de Bresse. La résolution de ces problèmes non-linéaires, notamment dans le cas tridimensionnel, est difficile aussi bien en ce qui concerne l'écriture des équations mécaniques (le repère de Frénet est différent de celui lié aux axes principaux d'inertie) que la résolution numérique du problème.

Nous proposons une approche simplifiée adaptée aux problèmes particuliers des pieux que nous avons appelée "RDM locale" (Degny, 1988). Cette formulation permet de tenir compte des non-linéarités géométriques pour calculer la réponse préflambement d'un groupe de pieux, et ceci d'une façon tridimensionnelle.

### II.3.2 Présentation de l'approche "RDM locale"

#### II.3.2.1 Hypothèses de l'approche "RDM locale"

Dans le cas de l'étude d'un pieu soumis à un chargement quelconque, on peut supposer que les déformations sont petites et étudier les effets du second ordre en ne retenant que les grands déplacements qui conduisent à dissocier la configuration déformée de la configuration initiale. Ceci a conduit Degny (1988) à proposer une approche simplifiée adaptée aux problèmes plus particuliers des pieux. Cette approche est basée sur l'hypothèse que les déformations du pieu restent petites. Pour un observateur situé dans un repère local lié à la déformation du pieu, le comportement du pieu est supposé toujours vérifier les équations de comportement et d'équilibre de la RDM classique. Dans ce repère local  $(x, y, z)$ , les équations régissant le comportement mécanique d'un tronçon de pieu de longueur infinitésimal sont données dans le tableau II.1.

Tableau II.1 : Equations d'équilibre et de comportement d'un tronçon dans le repère local

	Compression	Flexion		Torsion
		Plan x - z	Plan y - z	
Equations d'équilibre	$\frac{dN}{dz} = -p_z$	$\frac{dM_y}{dz} = -T_x$ $\frac{dT_x}{dz} = -p_x$	$\frac{dM_x}{dz} = -T_y$ $\frac{dT_y}{dz} = -p_y$	$\frac{dM_t}{ds} = -\mu_z$
Equations de comportement	$\frac{dw}{dz} = \frac{N(z)}{E_p S_p}$	$M_y = E_p I_{py} \frac{d\theta_y}{dz}$	$M_x = E_p I_{px} \frac{d\theta_x}{dz}$	$\frac{d\theta_z}{dz} = \frac{M_t}{GI_t}$

avec :

$w$  : allongement de la fibre neutre,

$G$  : module de cisaillement,

$I_t$  : inertie de torsion,

$M_t$  : moment de torsion,

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  : rotations autour des axes  $x, y$  et  $z$ ,

$E_p, S_p$  : module d'Young et section du tronçon.

$I_{py}, I_{px}$  : inertie de flexion autour des axes  $xz$  et  $yz$ ,

Les conditions aux limites, en chacune des extrémités du pieu, ainsi que les charges extérieures appliquées le long du pieu, se traduisent par des conditions exprimées dans un repère fixe que l'on appellera repère matériel. Ce repère est orienté par rapport à l'axe initial du pieu avant l'application du chargement. Il est donc nécessaire afin de résoudre les équations d'équilibre, de projeter dans le repère matériel, les équations de comportement écrites dans le repère local.

Cette projection nécessite de connaître l'orientation du repère local par rapport au repère matériel afin de pouvoir déterminer la matrice de passage. Les déplacements étant finis, les rotations ne peuvent plus être considérées comme petites (problème des grands déplacements, grandes rotations). Le traitement de la rotation définissant l'orientation du repère local s'effectue en utilisant le concept de vecteur rotation semi-tangentiel (Argyris ; 1982). Ce concept appliqué aux matrices transferts, traduisant localement les équations de la RDM, permet de généraliser ces matrices au cas des grands déplacements.

Nous rappelons le principe des matrices transferts, le principe des rotations semi-tangentiels, et l'application de ces deux principes pour l'approche "RDM locale".

### II.3.2.2 Vecteur d'état et matrices-transferts.

Géry et Calgaro (1973) ont développé la notion des matrices transferts et du vecteur d'état pour le calcul des structures chargées dans leurs plans. Bangratz (1983) a généralisé ces notions sur une sollicitation tridimensionnelle en les introduisant dans le programme GOUPIL pour le calcul de la réponse d'un groupe de pieux soumis à des sollicitations tridimensionnelles. Avec l'approche "RDM locale", nous introduisons dans GOUPIL une généralisation du vecteur d'état et des matrices transferts au cas des non-linéarités géométriques, moyennant le concept des rotations semi-tangentiels.

#### a - vecteur d'état

On appelle vecteur d'état en un point de la fibre neutre d'une poutre, le vecteur à treize composantes, dont l'expression générale sous forme d'une matrice colonne est la suivante:

$$V = \begin{bmatrix} D \\ E \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ \Omega \\ F \\ M \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

D est le vecteur torseur des déplacements de dimensions 6, constitué du vecteur déplacement U et du vecteur rotation  $\Omega$ . Les composantes  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  de vecteur rotation  $\Omega$  sont les petites

rotations autour de trois axes du repère (x, y, z) (hypothèses des petites rotations). E est le vecteur torseur des efforts de la RDM ; E est constitué du vecteur force F et du vecteur moment M. La treizième composante toujours égale à 1 est appelée composante d'homogénéité.

### b - Matrice de transfert

Soit un tronçon d'une poutre sollicitée à la flexion composée et à la torsion. On définit deux vecteurs d'état  $[V]^t$  et  $[V]^p$  respectivement en tête et en pointe du tronçon. La résolution des équations d'équilibre relatives aux diverses sollicitations (flexion, compression et torsion) associées aux équations du comportement, permettent d'exprimer sous forme matricielle la relation liant le vecteur d'état en tête du tronçon au vecteur d'état en pointe, telle que :

$$[V]^p = [T][V]^t \quad (\text{II.17})$$

La matrice  $[T]$  est appelée matrice de transfert du tronçon.  $[T]$  est une matrice de dimensions  $13 \times 13$ , telle que :

$$\begin{bmatrix} D \\ E \\ 1 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \alpha \\ T_{21} & T_{22} & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \\ 1 \end{bmatrix}^t \quad (\text{II.18})$$

où  $[T_{ij}]$  sont des sous-matrices de dimensions  $6 \times 6$  ; leurs composantes sont construites à partir des solutions analytiques des équations différentielles correspondant à chacune des sollicitations élémentaires. La treizième colonne, formée des sous-vecteurs  $\alpha$  et  $\beta$  de dimensions 6 et de la constante 1, correspond aux chargements extérieurs du tronçon de poutre (Géry et Calgaro, 1973). Le système (II.18) montre que les composantes du vecteur d'état en pointe s'expriment linéairement en fonction des composantes du vecteur d'état en tête du tronçon. Si la poutre est divisée en n tronçons ayant chacun sa propre matrice-transfert, la matrice-transfert de la poutre entre ses deux extrémités est le produit des matrices-transferts des tronçons qui la composent. Ce résultat présente un intérêt numérique évident.

### II.3.2.3 Concept de rotations semi-tangentielles

Le problème majeur qui se pose lors de l'utilisation des grandes rotations dans l'espace est la non commutativité de ces rotations par rapport à des axes fixes ou mobiles. Argyris (1982) a proposé le concept de rotations semi-tangentielles. L'idée de base de ce concept est de définir un mode de composition des rotations qui rend le résultat vectoriel final, indépendant de l'ordre dans lequel les rotations sont appliquées. Argyris a étudié la commutativité de la composition des rotations dans le cas général et il a montré que cette commutativité est assurée si les

rotations sont composées au sens semi-tangentiel. Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux résultats de cette étude ainsi que la définition du concept de rotations semi-tangentielles. Cariou (1988) a appliqué ce concept pour la résolution par éléments finis des problèmes non-linéaires dans le cas des poutres bidimensionnelles et tridimensionnelles.

#### a - Formulation du problème - matrice de rotation.

Soit  $r$  une rotation d'angle  $r_0$ , autour d'un axe quelconque défini par un vecteur unitaire  $\bar{e}$ , et  $\bar{r}$  le vecteur de cette rotation, tel que  $\bar{r} = r \cdot \bar{e}$ . Le vecteur  $\bar{r}$  peut être représenté par ses trois composantes dans un système cartésien (oxyz) :

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix}. \quad (\text{II.19})$$

Il est important de signaler que, contrairement à l'hypothèse des petites rotations, les composantes  $(r_x, r_y, r_z)$  ne peuvent plus être considérées ici comme des rotations autour des trois axes (x, y, z).

Soit  $\bar{v}$  le vecteur image d'un vecteur  $\bar{v}_0$  par la rotation  $r$ . Argyris montre que la transformation du vecteur  $\bar{v}_0$  peut être caractérisée sous la forme :

$$\bar{v} = R(r) \cdot \bar{v}_0 \quad (\text{II.20})$$

avec

$$[R(r)] = [I] + \frac{\sin r_0}{\|\bar{r}\|} [S] + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \frac{r_0}{2}}{\frac{\|\bar{r}\|}{2}} \right)^2 [s]^2 \quad (\text{II.21})$$

où

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [S]^2 = \begin{pmatrix} -(r_y^2 + r_z^2) & r_x r_y & r_x r_z \\ r_x r_y & -(r_x^2 + r_z^2) & r_y r_z \\ r_x r_z & r_y r_z & -(r_x^2 + r_y^2) \end{pmatrix} \quad (\text{II.22})$$

La matrice  $R$  est appelée matrice de rotation.  $R$  est une matrice orthogonale, soit :

$${}^t[R] \cdot [R] = [R] \cdot {}^t[R] = [I] \quad (\text{II.23})$$

Argyris (1982) définit un vecteur  $\bar{T}(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$  associé à la rotation  $r$ , appelé vecteur rotation semi-tangentielle, tel que :

$$\bar{T} = \text{tg} \frac{r_0}{2} \cdot \bar{e} \quad \text{d'où} \quad \text{tg} \frac{r_0}{2} = \|\bar{T}\| = (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.24})$$

Argyris donne l'expression de la matrice de rotation R en fonction des composantes du vecteur  $\bar{T}$  :

$$[R(T)] = [I] + \frac{2}{1 + \bar{T} \cdot \bar{T}} \{ [\Pi] + [\Pi]^2 \} \quad (\text{II.25})$$

avec

$$[\Pi] = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_z & \tau_y \\ \tau_z & 0 & -\tau_x \\ -\tau_y & \tau_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.26})$$

d'où

$$[R(T)] = \frac{1}{1 + \|\bar{T}\|^2} \begin{bmatrix} 1 + \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2 & 2(\tau_x \tau_y - \tau_z) & 2(\tau_x \tau_z + \tau_y) \\ 2(\tau_x \tau_y + \tau_z) & 1 - \tau_x^2 + \tau_y^2 - \tau_z^2 & 2(\tau_y \tau_z - \tau_x) \\ 2(\tau_x \tau_z - \tau_y) & 2(\tau_y \tau_z + \tau_x) & 1 - \tau_x^2 - \tau_y^2 + \tau_z^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

### b - Commutativité de la composition des deux rotations

Soient deux rotations  $r_1$  et  $r_2$  autour des axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , et leurs vecteurs rotations semi-tangentiels associés  $\bar{T}_1$  et  $\bar{T}_2$ . Nous proposons de chercher le vecteur image  $\bar{v}_2$  d'un vecteur  $\bar{v}$  par l'application successive des rotations  $r_1$  et  $r_2$ .

#### b1 - Rotations autour d'axes fixes.

Dans le cas où les deux axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont fixes, la rotation  $r_2$  s'effectue autour de l'axe  $\Delta_2$  et le vecteur  $\bar{T}_2$  ne sera pas affecté par la rotation  $r_1$ . Soit  $\bar{v}_1$  l'image de  $\bar{v}$  par la rotation  $r_1$ , d'où :

$$\bar{v}_1 = R(T_1) \cdot \bar{v}.$$

D'autre part, on a

$$\bar{v}_2 = R(T_2) \cdot \bar{v}_1 = R(T_2) \cdot R(T_1) \cdot \bar{v}$$

avec

$$[R(T_1)] = [I] + \frac{2}{1 + \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_1} \{ [\Pi_1] + [\Pi_1]^2 \}$$

et

$$[R(T_2)] = [I] + \frac{2}{1 + \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_2} \{ [\Pi_2] + [\Pi_2]^2 \}.$$

Argyris montre que la transformation vectorielle entre  $\bar{v}_2$  et  $\bar{v}$  peut s'écrire :

$$R(\bar{T}_2 \circ \bar{T}_1) = R(\bar{T}_{12}) = I + \frac{2}{1 + \bar{T}_{12} \cdot \bar{T}_{12}} \{ \Pi_{12} + \Pi_{12}^2 \} \quad (\text{II.28})$$

avec

$$\bar{T}_{12} = \frac{1}{1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2 - \Pi_1 \cdot \bar{T}_2) \quad (\text{II.29})$$

et

$$\Pi_{12} = \frac{1}{1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2} \{ \Pi_1 + \Pi_2 - (\Pi_1 \cdot \Pi_2 - \Pi_2 \cdot \Pi_1) \} \quad (\text{II.30})$$

D'après Argyris, la matrice de rotation totale  $R(\bar{T}_{21})$ , résultante de l'application successive des rotations  $r_2$  et  $r_1$ , est établie par simple permutation des indices 1 et 2 dans les expressions (II.28), (II.29) et (II.30). La comparaison des deux matrices  $R(\bar{T}_{12})$  et  $R(\bar{T}_{21})$  montre que la composition des deux rotations autour des axes fixes n'est pas commutative, sauf dans le cas particulier où les axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont parallèles.

### *b2 - Rotations autour d'axes mobiles.*

Dans le cas où les axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont mobiles, le vecteur rotation semi-tangentielle  $\bar{T}_2$  change de position après la rotation  $r_1$  et prend alors la position  $\bar{T}_2^m$ , telle que :

$$\bar{T}_2^m = R(\bar{T}_1) \cdot \bar{T}_2 = \bar{T}_2 + \frac{2}{1 + \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_1} (\Pi_1 + \Pi_1^2) \cdot \bar{T}_2 \quad (\text{II.31})$$

Argyris établit l'expression du vecteur  $\bar{T}_{12}$  :

$$\bar{T}_{12} = \frac{1}{1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2^m} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2^m - \Pi_1 \cdot \bar{T}_2^m) \quad (\text{II.32})$$

En remplaçant  $\bar{T}_2^m$  par sa valeur donnée par l'équation (II.31), on obtient

$$\bar{T}_{12} = \frac{1}{1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \Pi_1 \cdot \bar{T}_2) = \frac{1}{1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2 - \Pi_2 \cdot \bar{T}_1) \quad (\text{II.33})$$

Une simple permutation des indices 1 et 2, permet d'établir le vecteur  $\bar{T}_{21}$ , résultant de l'application successive des rotations  $r_2$  et  $r_1$ . Une comparaison entre  $\bar{T}_{12}$  et  $\bar{T}_{21}$  montre que la commutativité autour des axes mobiles n'est assurée que dans le cas où les axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont parallèles.

### **c - Concept et commutativité des rotations semi-tangentielles**

Lors de l'application de la rotation  $r_1$ , le vecteur  $\bar{T}_2$  reste stationnaire dans le cas des axes fixes, mais il prend la position  $\bar{T}_2^m$  dans le cas des axes mobiles. Le concept de rotations semi-

tangentielles (Argyris, 1982), suppose que la rotation  $r_2$  s'effectue autour d'un axe  $\bar{T}_2^{st}$ , de position moyenne entre  $\bar{T}_2$  et  $\bar{T}_2^m$ , telle que :

$$\bar{T}_2^{st} = \frac{1}{2}(\bar{T}_2 + \bar{T}_2^m) \quad \text{avec} \quad \bar{T}_2^m = R(T_1) \cdot \bar{T}_2 \quad (\text{II.34})$$

d'où

$$\bar{T}_2^{st} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{T}_2 + \bar{T}_2 + \frac{2}{1 + \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_1} (\Pi_1 + \Pi_1^2) \cdot \bar{T}_2 \right\} \quad (\text{II.35})$$

En multipliant scalairement par  $\bar{T}_1$ , on obtient

$$\bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2^{st} = \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 + \frac{1}{1 + \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_1} \left\{ \bar{T}_1 \cdot (\Pi_1 \cdot \bar{T}_2) + \bar{T}_1 \cdot (\Pi_1^2 \cdot \bar{T}_2) \right\} \quad (\text{II.36})$$

Les deux derniers termes sont nuls, parce que

$$\begin{cases} \Pi_1 \cdot \bar{T}_2 = \bar{T}_1 \wedge \bar{T}_2 & \Rightarrow \bar{T}_1 \cdot (\Pi_1 \cdot \bar{T}_2) = 0 \\ \Pi_1^2 \cdot \bar{T}_2 = \bar{T}_1 \wedge (\bar{T}_1 \wedge \bar{T}_2) & \Rightarrow \bar{T}_1 \cdot (\Pi_1^2 \cdot \bar{T}_2) = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2^{st} = \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 \quad (\text{II.37})$$

En remplaçant  $\bar{T}_2^m$  par  $\bar{T}_2^{st}$  dans l'expression (II.32), on obtient le vecteur  $\bar{T}_{12}$  résultant de l'application successive des rotations  $r_1$  et  $r_2$ , tel que :

$$\bar{T}_{12} = \frac{1}{1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2^{st}} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2^{st} - \Pi_1 \cdot \bar{T}_2^{st}) \quad (\text{II.38})$$

Reportons Les expressions (II.34) et (II.37) dans l'équation (II.38) :

$$\begin{aligned} \bar{T}_{12} &= \frac{1}{1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2} \left( \bar{T}_1 + \frac{1}{2}(\bar{T}_2 + \bar{T}_2^m) - \frac{1}{2}\Pi_1(\bar{T}_2 + \bar{T}_2^m) \right) \\ \bar{T}_{12} &= \frac{1}{2(1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2)} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2 - \Pi_1 \cdot \bar{T}_2) + \frac{1}{2(1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2)} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2^m - \Pi_1 \cdot \bar{T}_2^m) \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

d'après l'expression (II.33), on obtient

$$\bar{T}_{12} = \frac{1}{2(1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2)} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2 - \Pi_1 \cdot \bar{T}_2) + \frac{1}{2(1 - \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2)} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \Pi_1 \cdot \bar{T}_2) \quad (\text{II.40})$$

d'où :

$$\bar{\bar{T}}_{12} = \frac{1}{1 - \bar{\bar{T}}_1 \cdot \bar{\bar{T}}_2} (\bar{\bar{T}}_1 + \bar{\bar{T}}_2) . \quad (\text{II.41})$$

La permutation des indices 1 et 2 donne :

$$\bar{\bar{T}}_{21} = \frac{1}{1 - \bar{\bar{T}}_2 \cdot \bar{\bar{T}}_1} (\bar{\bar{T}}_2 + \bar{\bar{T}}_1) = \bar{\bar{T}}_{12} . \quad (\text{II.42})$$

d'où la commutativité des rotations semi-tangentielles. Les matrices auxiliaires  $\Pi_{12}$  et  $\Pi_{21}$  associées à  $\bar{\bar{T}}_{12}$  et  $\bar{\bar{T}}_{21}$ , suivent cette propriété de commutativité et s'écrivent :

$$[\Pi_{12}] = [\Pi_{21}] = \frac{1}{1 - \bar{\bar{T}}_1 \cdot \bar{\bar{T}}_2} ([\Pi_1] + [\Pi_2]) . \quad (\text{II.43})$$

Dans le cas des rotations successives autour des axes orthogonaux, les relations (II.42) et (II.43) deviennent :

$$\bar{\bar{T}}_{12} = \bar{\bar{T}}_{21} = \bar{\bar{T}}_1 + \bar{\bar{T}}_2 ; \quad (\text{II.44})$$

et

$$[\Pi_{12}] = [\Pi_{21}] = [\Pi_1] + [\Pi_2] . \quad (\text{II.45})$$

Dans le cas général de la composition au sens semi-tangentiel, de n rotations successives autour d'axes orthogonaux, on obtient :

$$\bar{\bar{T}}_n = \sum_{i=1}^n \bar{\bar{T}}_i ; \quad (\text{II.46})$$

et

$$[\Pi_n] = \sum_{i=1}^n [\Pi_i] . \quad (\text{II.47})$$

#### II.3.2.4 Principes de l'approche "RDM locale"

Nous avons rappelé dans les paragraphes précédents les notions de matrice-transferts et de vecteur rotation semi-tangentielle. De plus, nous avons expliqué que la notion de vecteur de rotation semi-tangentielle permettait de définir l'orientation du repère local (grande rotation) en un point de la structure. Cette orientation nous permettra ainsi de projeter les équations de la RDM classique dans le repère matériel, et donc de résoudre les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

Cependant, l'orientation du repère local est une inconnue du problème qui ne peut pas être obtenue d'une façon explicite. Il nous faut donc pouvoir définir un algorithme, forcément itératif, permettant de déterminer, d'une manière approchée, à un moment donné en chaque

point de la structure, l'orientation et la position du repère local. En fait, la résolution des équations d'équilibre donne, en chaque point, une nouvelle orientation et une nouvelle position qui sont utilisées pour l'itération suivante.

La définition de la position et de l'orientation du repère local sont fondées sur la décomposition suivante du grand déplacement d'un élément d'une structure.

### a - traitement des grands déplacements

Le déplacement d'un élément AB d'une structure quelconque (fig. II.3) soumise à un chargement donné, peut se décomposer pour chacun des points de cet élément en la somme d'un déplacement de corps rigide (translation + rotation), transportant l'élément de la position AB à la position  $A_1B_1$ , et d'un déplacement dû à la déformation de la structure appelé déplacement relatif, amenant le point  $B_1$  en  $B_2$ . Seul le déplacement relatif entraîne une variation de l'énergie potentielle interne de la structure.

$$\text{Déplacement} = \text{Déplacement de corps rigide} + \text{Déplacement relatif.}$$

$$\partial w = 0 \qquad \qquad \qquad \partial w \neq 0$$

Nous définissons le repère local comme étant le repère résultant de l'application du déplacement de corps rigide au repère matériel lié à la position initiale de l'élément AB. Nous pouvons donc dire que le déplacement de corps rigide et le déplacement relatif se produisent respectivement dans le repère matériel et dans le repère local.

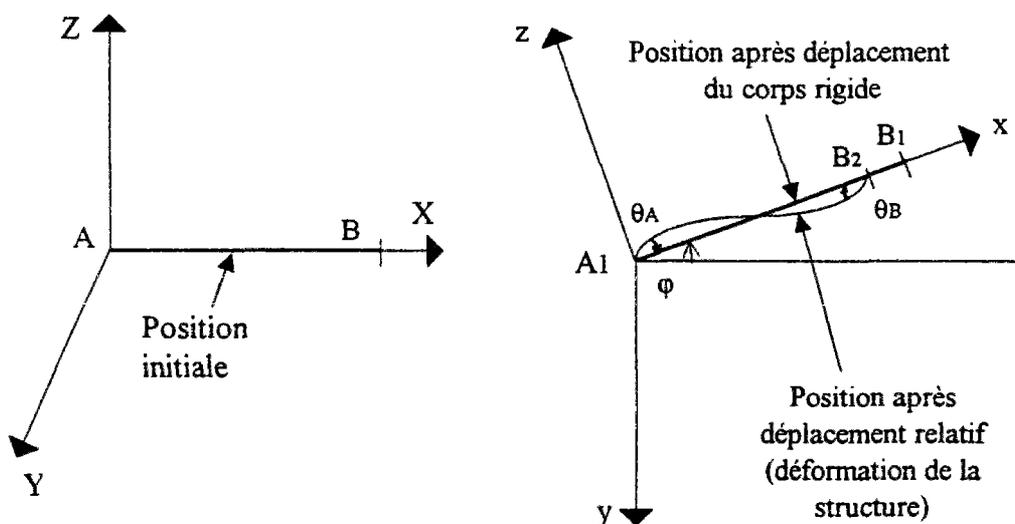


Fig. II.3: composition des grands déplacements.

En conséquence, si nous nous restreignons au problème d'une structure linéaire, nous pouvons dire que la rotation totale d'une section droite de centre B, est la composition d'une rotation de corps rigide ( $\phi$ ) et d'une rotation relative ( $\theta_B$ ). La rotation de corps rigide est

définie dans le repère matériel et la rotation relative est définie dans le repère local. En associant, respectivement à ces deux rotations les vecteurs rotations semi-tangentiels  $\bar{T}^*$  et  $\bar{T}_i$ , on obtient d'après l'expression (II.41) :

$$\bar{T} = \frac{1}{1 - \bar{T}^* \cdot \bar{T}_i} (\bar{T}^* + \bar{T}_i) \quad (\text{II.48})$$

Nous avons supposé que les déformations étaient petites, on peut donc écrire  $\|\bar{T}_i\| \ll 1$ , et par suite, on peut poser  $\bar{T}^* \cdot \bar{T}_i \ll 1$ , d'où pour chaque point de la structure:

$$\bar{T} = \frac{1}{1 - \bar{T}^* \cdot \bar{T}_i} (\bar{T}^* + \bar{T}_i) \approx \bar{T}^* + \bar{T}_i \quad (\text{II.49})$$

Ainsi, la composition de ces deux rotations au sens semi-tangentiel permet d'obtenir un vecteur rotation semi-tangentielle totale égal à la somme du vecteur rotation semi-tangentielle associé à la rotation du corps rigide et du celui associé à la rotation relative. Ce résultat final est indépendant de l'ordre de l'application des deux rotations.

### **b - Matrices-transferts généralisées aux grands déplacements - algorithme itératif**

L'hypothèse consistant à supposer que les équations de la RDM sont toujours valides dans le repère local, permet d'utiliser dans ce repère le principe des matrices-transferts telles qu'elles ont été développées par Géry et Calgaro (1973), et généralisées par Bangratz (1983).

Nous allons expliquer comment à partir de l'orientation du repère local, définie à l'aide du vecteur rotation semi-tangentielle associé à la rotation du corps rigide, nous pouvons définir une matrice - transfert "matérielle" et un vecteur d'état "matériel"; ces concepts étant leur généralisation aux grands déplacements.

#### ***b1- Algorithme itératif***

Considérons un tronçon AB occupant à l'instant initial la position  $A_0B_0$  sur l'axe Z et à l'itération i, la position  $A_iB_i$  (fig. II.4). Nous proposons d'étudier la résolution à l'itération i+1 faisant passer le tronçon de la position  $A_iB_i$  à  $A_{i+1}B_{i+1}$ , à partir des résultats obtenus à l'itération i.

Nous supposons pour l'itération i+1 que le repère local est de centre égal à celui de la section droite supérieure à l'itération i ( $A_i$ ) du tronçon, et dont l'orientation est définie par un vecteur rotation semi-tangentielle égal à la demi-somme des vecteurs rotations semi-tangentiels définissant l'orientation des sections droites supérieures ( $A_i$ ) et inférieure ( $B_i$ ) par rapport au repère matériel. Cette orientation est supposée être celle correspondant à la rotation du corps rigide. Nous noterons donc  $\bar{T}^{*i}$  ce vecteur rotation semi-tangentielle associé à cette rotation de corps rigide.

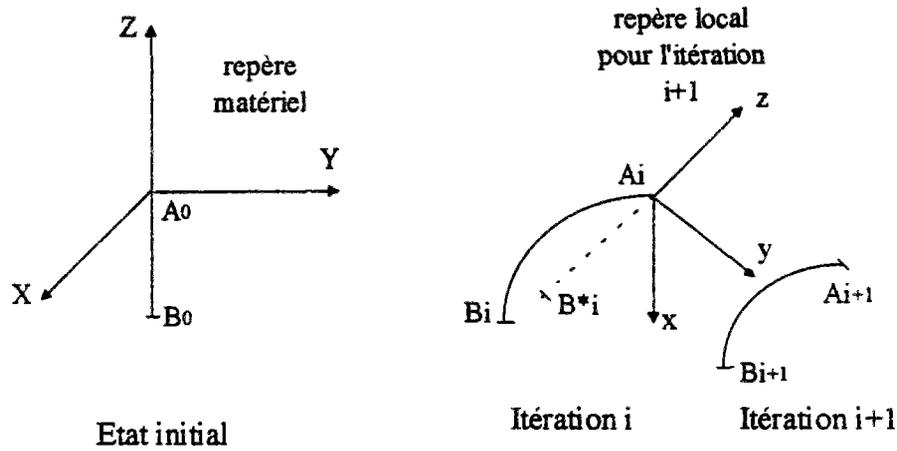


Fig. II.4 : Schéma du tronçon AB.

Le déplacement de corps rigide fait passer le point  $A_0$  à la position  $A_1$ . Nous définissons  $B_i^*$  l'image du point B après application du déplacement de corps rigide tel que nous venons de le définir.  $A_i B_i^*$  est situé sur l'axe z du repère local. On applique donc pour l'itération  $i+1$  les principes de la RDM classique au tronçon  $A_i B_i^*$  auquel est lié le repère local.

Dans ce repère local, les rotations dues à la déformation du tronçon étant petites, les composantes locales du vecteur rotation semi-tangentielle  $\bar{T}_i$  correspondant à la rotation relative dans le repère local (Argyris; 1982), s'écrivent :

$$[\bar{T}_i]_l = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (II.50)$$

$\theta_i$  étant les rotations infinitésimales autour des trois axes locaux. La notation  $[X]_l$  signifie que les composantes du vecteur ou de la matrice X sont exprimées dans le repère local. De façon analogue, on utilise  $[X]_m$  pour désigner que ces composantes sont exprimées dans le repère matériel.

A l'itération  $i+1$ , le vecteur d'état local  $V_i^{A,i+1}$  au point  $A_i$ , s'exprime dans le repère local par:

$$[\bar{V}_i^{A,i+1}]_l = \begin{bmatrix} \bar{U}_i^{A,i+1} \\ \bar{\Omega}_i^{A,i+1} \\ \bar{E}_i^{A,i+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (II.51)$$

où  $\bar{U}_i^{A,i+1} = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$  et  $\bar{\Omega}_i^{A,i+1} = 2 \cdot \bar{T}_i^{A,i+1}$  ;  $\bar{T}_i^{A,i+1}$  étant le vecteur rotation semi-tangentielle local au point A à l'itération  $i+1$ , défini dans le repère local par :

$$[\bar{T}_l^{A,i+1}]_l = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_x^A \\ \theta_y^A \\ \theta_z^A \end{bmatrix}_l. \quad (\text{II.52})$$

Notons que, par analogie avec la notion du vecteur d'état telle qu'elle est développée par Géry et Calgaro, on utilise dans l'approche RDM locale le vecteur de rotation  $\bar{\Omega} = 2 \cdot \bar{T}$ , soit deux fois le vecteur de rotation semi-tangentielle tel qu'il est défini par Argyris. Ceci permet, lorsque le déplacement de corps solide est négligeable de retrouver les valeurs des rotations infinitésimales autour des trois axes telles qu'elles sont calculées classiquement en RDM.

D'une façon analogue, nous définissons le vecteur d'état local  $V_l^{B,i+1}$  au point B, dans le repère local.

L'écriture dans ce repère des équations de la RDM et l'application du principe de matrice-transfert permet de lier le vecteur d'état local au point B au vecteur d'état local au point A par la matrice  $T^{i+1}$  (éq. II.18), telle que:

$$[\bar{V}_l^{B,i+1}]_l = [T^{i+1}]_l \cdot [\bar{V}_l^{A,i+1}]_l,$$

où

$$[T^{i+1}]_l = \begin{bmatrix} T_{11}^{i+1} & T_{12}^{i+1} & \alpha^{i+1} \\ T_{21}^{i+1} & T_{22}^{i+1} & \beta^{i+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_l. \quad (\text{II.53})$$

L'expression du vecteur d'état matériel en A, s'exprime dans le repère matériel par :

$$[\bar{V}_m^{A,i+1}]_m = \begin{bmatrix} \bar{U}_m^{A,i+1} \\ \bar{\Omega}_m^{A,i+1} \\ \bar{E}_m^{A,i+1} \\ 1 \end{bmatrix}_m, \quad (\text{II.54})$$

où  $\bar{U}_m^{A,i+1}$  est le déplacement  $\overrightarrow{A_0 A_{i+1}}$  du point A à l'itération i+1.  $\bar{\Omega}_m^{A,i+1}$  est le double du vecteur rotation semi-tangentielle du point A, à l'itération i+1. Le déplacement et le vecteur rotation semi-tangentielle du point A s'écrivent :

$$\overrightarrow{A_0 A_{i+1}} = \overrightarrow{A_0 A_i} + \overrightarrow{A_i A_{i+1}},$$

et

$$\bar{\Omega}_m^{A,i+1} = \bar{\Omega}^{*i} + \bar{\Omega}_l^{A,i+1}; \quad (\text{II.55})$$

soit en représentation matricielle exprimée dans le repère matériel :

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_m^{A,i+1} \\ \bar{\Omega}_m^{A,i+1} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \bar{U}_m^{A,i} \\ \bar{\Omega}_m^{*,i} \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \bar{U}_l^{A,i+1} \\ \bar{\Omega}_l^{A,i+1} \end{bmatrix}_m \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{U}_m^{A,i+1} \\ \bar{\Omega}_m^{A,i+1} \end{bmatrix}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{U}_m^{A,i} \\ \bar{\Omega}_m^{*,i} \end{bmatrix}_m}_{[D_A^{*,i}]_m} + \underbrace{\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}_{[P]} \begin{bmatrix} \bar{U}_l^{A,i+1} \\ \bar{\Omega}_l^{A,i+1} \end{bmatrix}_m$$

d'où 
$$\begin{bmatrix} \bar{D}_m^{A,i+1} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \bar{D}_m^{*,i} \end{bmatrix}_m + [P] \begin{bmatrix} \bar{D}_l^{A,i+1} \end{bmatrix}_m. \quad (\text{II.56})$$

En remarquant que le torseur des efforts E de la RDM est une quantité intrinsèque, nous pouvons écrire la relation entre l'expression matérielle du vecteur d'état matériel et l'expression locale du vecteur d'état local au point A, telle que :

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_m^{A,i+1} \\ \bar{E}^{A,i+1} \\ 1 \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D}_l^{A,i+1} \\ \bar{E}^{A,i+1} \\ 1 \end{bmatrix}_l + \begin{bmatrix} \bar{D}_m^{*,i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_m. \quad (\text{II.57})$$

D'une façon analogue, on peut déterminer le vecteur d'état matériel au point B à l'itération i+1, dans le repère matériel. En effet, le déplacement du point B à l'itération i+1, s'écrit :

$$\overrightarrow{B_0 B_{i+1}} = \overrightarrow{B_0 A_0} + \overrightarrow{A_0 A_i} + \overrightarrow{A_i B_i^*} + \overrightarrow{B_i^* B_{i+1}} \quad (\text{II.58})$$

D'où 
$$\bar{U}_m^{B,i+1} = \overrightarrow{B_0 A_0} + \bar{U}_m^{A,i} + \overrightarrow{A_i B_i^*} + \bar{U}_l^{B,i+1} \quad (\text{II.59})$$

La représentation matricielle dans le repère matériel, de l'expression (II.59), s'écrit :

$$\begin{bmatrix} U_{x,m}^{B,i+1} \\ U_{y,m}^{B,i+1} \\ U_{z,m}^{B,i+1} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} U_{x,m}^{A,i} \\ U_{y,m}^{A,i} \\ U_{z,m}^{A,i} \end{bmatrix}_m + [R] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix}_l + [R] \begin{bmatrix} U_{x,l}^{B,i+1} \\ U_{y,l}^{B,i+1} \\ U_{z,l}^{B,i+1} \end{bmatrix}_l, \quad (\text{II.60})$$

où l est la longueur initiale du tronçon A<sub>0</sub>B<sub>0</sub> égale à celle du tronçon A<sub>i</sub>B<sub>i</sub><sup>\*</sup>. La relation sur les rotations semi-tangentielles est analogue à celle pour le point A ;

$$\bar{\Omega}_m^{B,i+1} = \bar{\Omega}_m^{*,i} + \bar{\Omega}_l^{B,i+1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_m^{B,i+1} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_m^{*,i} \end{bmatrix}_m + [R] \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_l^{B,i+1} \end{bmatrix}_l; \quad (\text{II.61})$$

d'où l'expression liant le vecteur d'état matériel au vecteur d'état local au point B, à l'itération i+1 :

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_m^{B,i+1} \\ \bar{\Omega}_m^{B,i+1} \\ \bar{E}_m^{B,i+1} \\ 1 \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{U}_l^{B,i+1} \\ \bar{\Omega}_l^{B,i+1} \\ \bar{E}_l^{B,i+1} \\ 1 \end{bmatrix}_l + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_l \right\} + \begin{bmatrix} \bar{D}_B^{*,i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_m, \quad (\text{II.62})$$

avec

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_B^{*,i} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} U_{x,m}^{A,i} \\ U_{y,m}^{A,i} \\ U_{z,m}^{A,i} + l \\ \bar{\Omega}_m^{*,i} \end{bmatrix}_m. \quad (\text{II.63})$$

En remplaçant les vecteurs locaux au point A et B dans l'expression (II.53), par leurs expressions matérielles déduites des équations (II.57) et (II.62), on obtient la matrice transfert-matérielle du tronçon AB à l'itération  $i+1$  liant les vecteurs matériaux au point A et B, dans le repère matériel, telle que:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_m^{B,i+1} \end{bmatrix}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} PT_{11}^{i+1}P & PT_{12}^{i+1}P & P\alpha^{*,i} - PT_{11}^{i+1}PD_A^{*,i} + D_B^{*,i} \\ PT_{21}^{i+1}P & PT_{22}^{i+1}P & P\beta^i - PT_{12}^{i+1}PD_A^{*,i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_m^{i+1}} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_m^{A,i+1} \end{bmatrix}_m \quad (\text{II.64})$$

avec

$$\begin{bmatrix} \alpha^{*,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.65})$$

### *b2-Etape initiale (première itération)*

Nous venons d'expliquer la problématique de l'itération  $i+1$  qui nous a permis de définir la matrice-transfert matériel et le vecteur d'état matériel. Pour définir entièrement le processus itératif, il nous faut préciser comment est effectuée l'étape initiale c'est à dire la première itération. De façon naturelle, celle-ci est simplement composée d'un calcul RDM classique appliqué au tronçon  $A_0B_0$ . Les résultats du calcul permettront d'initialiser le processus itératif en définissant les orientations et la position du repère local de chacun des tronçons pour l'itération suivante.

### **II.3.3 Application au problème de pieux - Programme GOUFLA**

L'analyse théorique utilisée dans le programme GOUPIL est l'extension au cas des groupes de pieux des analyses des programmes PILATE (pieu chargé latéralement ; Baguelin, Frank et Guéguan 1976), et PIVER (pieu chargé verticalement ; Frank, 1989). L'approche mécanique utilisée dans GOUPIL est celle de la résistance de matériaux classique pour des poutres de faibles courbures. En conséquence, il y a découplage entre les différents types de sollicitations élémentaires (flexion, compression et torsion). Par suite, les non-linéarités géométriques qui consistent à tenir compte des effets du second ordre tels que l'influence de la compression sur la réponse en flexion ne sont pas prises en compte.

Pour tenir compte des non-linéarités géométriques dans le calcul en flexion composée d'un groupe de pieux, nous avons développé le programme GOUFLA en incorporant, dans GOUPIL, l'approche "RDM locale" qui utilise le concept de rotations semi-tangentielles tel qu'il a été décrit dans le paragraphe (II.3.2).

On présente les différentes hypothèses et possibilités du programme de calcul GOUFLA, ainsi que le principe de résolution.

#### **II.3.3.1 Hypothèses et possibilités du programme GOUFLA**

Le programme GOUFLA permet, d'une part, d'effectuer un calcul simple de type GOUPIL (RDM classique), et d'autre part, d'effectuer un calcul GOUPIL mais en tenant compte des non-linéarités géométriques (GOUFLA, RDM locale).

##### **a - Géométrie des pieux**

Il s'agit d'un groupe de pieux reliés par un chevêtre rigide soumis à des sollicitations tridimensionnelles composées des sollicitations au centre du chevêtre et pour chacun des pieux d'un déplacement tridimensionnel du sol. La disposition géométrique des pieux dans l'espace peut être quelconque (fig. II.5). En particulier, les inclinaisons et les longueurs peuvent être différentes pour chacun des pieux. Les positions du centre du chevêtre et des têtes de pieux, ainsi que l'orientation des axes de ces pieux sont définies par rapport à un "repère global" unique pour l'ensemble de la structure, repère orthonormé (O, X, Y, Z) dont l'axe des Z est vertical et orienté vers le haut. Pour chacun des pieux constituant le groupe, on définit un "repère matériel" dont l'origine est le centre de la section droite liée à la tête du pieu et dont les axes sont constitués des deux axes d'inertie et de l'axe initial du pieu (orientation de la pointe vers la tête, fig. II.5). Ce repère est orienté par rapport au repère global au moyen de trois angles d'Euler : la précession  $\psi$ , la nutation  $\theta$  et la rotation propre  $\phi$ . D'après Bangratz

(1983), la matrice de rotation assurant le passage du repère global au repère matériel a pour expression en fonction des trois angles d'Euler :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

On montre que :  $Q^{-1}(\psi, \theta, \varphi) = {}^tQ(\psi, \theta, \varphi) = Q(-\psi, -\theta, -\varphi)$  . (II.67)

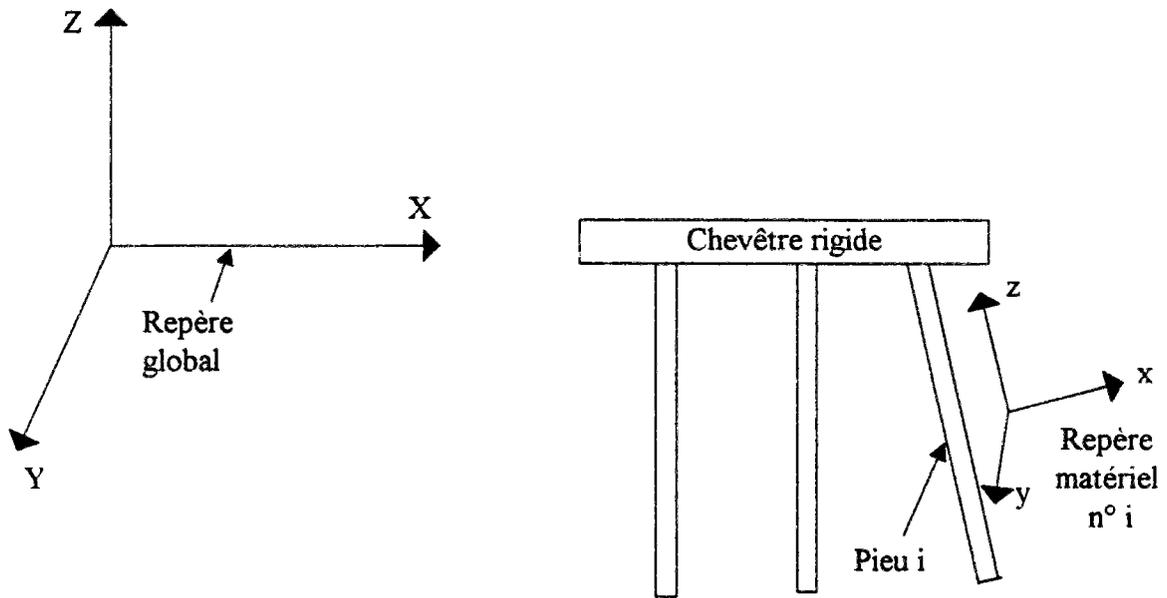


Fig. II.5 : Schéma général d'un groupe de pieux : orientations.

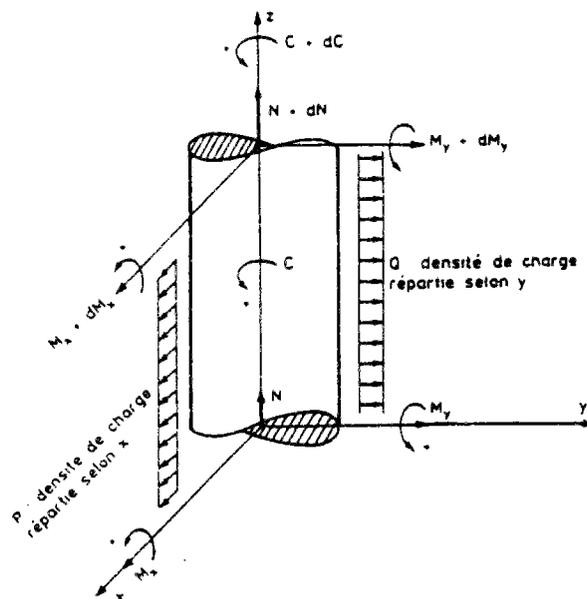


Fig. II.6 : Convention de signe du programme GOUFLA.

## b - Courbes de réaction du sol

Le programme GOUFLA permet de prendre en compte d'éventuels déplacements libres du sol dans les trois directions (f, g et h).

A l'origine, la notion de déplacement libre provient de la prise en compte de déplacements latéraux du sol agissant sur le pieu (poussée latérale sous l'action d'un remblai sur sol mou, de surcharges, d'un glissement de terrain, etc.). En effet pour résoudre ce problème, Marche (1973) a utilisé la notion de déplacement relatif sol-pieu  $\Delta y$  défini par :

$$\Delta y = y(z) - g(z) \quad (\text{II.68})$$

$y(z)$  étant le déplacement horizontal du pieu à la profondeur  $z$  et  $g(z)$  le déplacement latéral libre du sol en l'absence de pieu. La réaction latérale du sol (fig. II.7.a) est définie en fonction de ce déplacement relatif par une loi non-linéaire. Cette loi peut être appliquée éventuellement suivant  $ox$  et  $oy$ .

Dans GOUPIL et GOUFLA, cette loi est généralisée à l'axe  $oz$  pour définir la réaction verticale le long du fût du pieu (fig. II.7.b). L'interaction sol-pieu est donc représentée par des lois de réaction non-linéaires, fonction du déplacement relatif sol-pieu :

$$P = f_1(u - f) \quad ; \quad Q = f_2(v - g) \quad \text{et} \quad R = f_3(w - h) \quad (\text{II.69})$$

où  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont les densités de charges réparties suivant les trois axes du repère local.  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les composantes du vecteur déplacement matériel du pieu.  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont les trois composantes du déplacement libre du sol dont la déformée est assimilée à un polynôme de degré 3. Les fonctions  $f_i$  sont prises linéaires par morceaux (fig. II.8) :

$$f_i(\xi) = a_i^j + b_i^j \cdot \xi \quad (\text{II.70})$$



Fig. II.7: (a) Réaction latéral du sol. (b) Réaction verticale du sol le long du fût du pieu.

(Bourges et Frank, 1989).

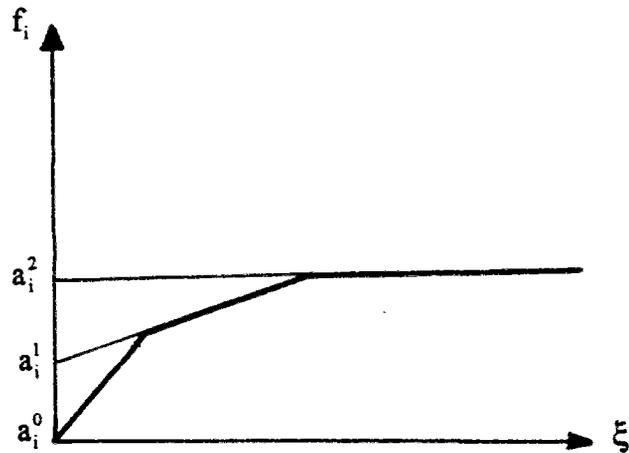


Fig. II.8 : Courbe de réaction (d'après Degny et Romagny, 1989).

On notera que la prise en compte du déplacement relatif sol-pieu, dans le cas du comportement axial ( $w-h$ ), permet de calculer la mobilisation des frottements négatifs éventuels. A l'interface sol-pieu les contraintes horizontales de cisaillement (dues à la torsion du pieu), sont supposées nulles. Dans la pratique du programme GOUFLA, les courbes P, Q et R sont introduites sous forme de réaction unitaire (pression de réaction, frottement latéral unitaire) en fonction des déplacements adimensionnels ( $2(u-f)/B$ ,  $2(v-g)/B$  ou  $2(w-h)/B$ ) où  $B$  est le diamètre du pieu.

Il est possible de tenir compte dans GOUPIL d'effets de groupe, par pondération des lois de réaction du sol au moyen de coefficients de réduction forfaitaires "pond1" et "pond2" suivant la relation :

$$(\text{pond2} \cdot p) = F(\text{pond1} \cdot (f - u)) \quad (\text{II.71})$$

ou encore en jouant sur les déplacements libres du sol sur chaque pieu.

### c - Conditions aux limites en tête et en pointe de pieux

En tête, trois conditions de liaison de pieux au chevêtre sont possibles : encastrement, articulation (moment d'encastrement nul) et liaison élastique en rotation, où le moment d'encastrement  $M_i$  est proportionnel à la rotation relative  $\Omega_i$  entre le pieu et le chevêtre :

$$M_i = \frac{\Omega_i}{f_i} \quad , \quad i = x, y, z ; \quad (\text{II.72})$$

où  $f_i$  est la flexibilité en rotation autour de l'axe  $i$ .

En pointe du pieu, il est possible d'imposer quatre types de conditions aux limites:

- encastrement (torseur des déplacements  $D$  nul) ;
- libre (torseur des efforts  $E$  nul) ;

- articulé (vecteur de moment  $M$  et vecteur de déplacement  $U$  nuls) ;
- courbe de réaction en pointe liant la composante du torseur des efforts à la composante correspondante du torseur des déplacements. Cette courbe est définie de façon analogue à la courbe de réaction du sol (fonction linéaire par morceaux).

### II.3.3.2 Principe de résolution

Le principe de résolution exposé est fondé sur l'application de la théorie RDM locale présentée précédemment. Le principe de résolution du problème général est basé sur la solution analytique de l'équation différentielle pour chacune des sollicitations élémentaires, grâce à une double discrétisation : d'une part une discrétisation physique en couches de sol, et d'autre part une discrétisation numérique en tronçons (Degny et Romagny, 1989). Les tronçons sont choisis de manière à ce que les caractéristiques mécaniques des pieux et les paramètres géotechniques soient constants.

#### a - Eléments de rigidité: prise en compte des conditions aux limites

Après avoir calculé la matrice-transfert matérielle totale du pieu, on procède à la détermination des éléments de rigidité en tête de pieu sans tenir compte de sa liaison avec le chevêtre. L'expression (II.18) de la matrice-transfert, liant les vecteurs d'état en pointe et en tête d'un tronçon de pieu, nous donne:

$$E_t = T_{12}^{-1} \cdot D_p - T_{12}^{-1} \cdot T_{11} \cdot D_t - T_{12}^{-1} \cdot \alpha$$

$$E_p = (T_{21} - T_{22} \cdot T_{12}^{-1} \cdot T_{11}) D_t + T_{22} \cdot T_{12}^{-1} \cdot D_p - T_{22} \cdot T_{12}^{-1} \cdot \alpha + \beta$$

soit 
$$E_t = M_{11} \cdot D_t + M_{12} \cdot D_p + k_1 \quad (\text{II.73})$$

$$E_p = M_{21} \cdot D_t + M_{22} \cdot D_p + k_2 \quad (\text{II.74})$$

Les conditions aux limites envisagées en pointe de pieu peuvent s'exprimer sous la forme de la relation linéaire suivante:

$$A \cdot E_p + B \cdot D_p = C \quad (\text{II.75})$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices  $6 \times 6$  et  $C$  est un vecteur de dimension 6. Par exemple, pour un pieu libre en pointe:  $A$  matrice unité,  $B$  matrice nulle et  $C$  vecteur nul.

En multipliant l'équation (II.74) par  $A$  et en retranchant de l'équation (II.75), on obtient:

$$D_p = -(A \cdot M_{22} + B)^{-1} \cdot A \cdot M_{21} \cdot D_t + (A \cdot M_{22} + B)^{-1} \cdot (C - A \cdot k_2) \quad (\text{II.76})$$

En remplaçant le terme  $D_p$  de l'équation (II.76) dans l'équation (II.73), on obtient :

$$E_t = \underbrace{\left[ M_{11} - M_{12}(A.M_{22} + B)^{-1} \cdot A.M_{21} \right]}_{R_t} \cdot D_t + \underbrace{k_1 + M_{12}(A.M_{22} + B)^{-1}(C - A.k_2)}_{G_t} \quad (\text{II.77})$$

d'où la relation 
$$E_t = R_t \cdot D_t + G_t \quad (\text{II.78})$$

Ainsi, le torseur des efforts en tête du tronçon s'exprime linéairement en fonction du torseur des déplacements,  $R_t$  et  $G_t$  étant respectivement la matrice de rigidité 6 x 6 et le vecteur de rigidité de dimension 6 en tête du tronçon.  $R_t$  et  $G_t$  sont appelés les éléments de rigidité. Ceux-ci sont exprimés dans le repère matériel sans tenir compte de la liaison chevêtre-pieu. Avant de calculer les éléments de rigidité en tête de pieu en tenant compte de la liaison avec le chevêtre, nous présentons la façon de transférer les éléments de rigidité d'un point à un autre d'une structure.

#### b - Transfert des éléments de rigidité d'un point à un autre d'une structure.

Soit une structure d'extrémités 0 et 1 avec  $R_0$  et  $G_0$  les éléments de rigidité à l'extrémité 0. Il s'agit d'exprimer les éléments de rigidité  $R_1$  et  $G_1$  à l'extrémité 1 de la structure en fonction de ceux à l'extrémité 0 et de la matrice transfert de la structure. On suppose de plus qu'on a une relation linéaire entre efforts et déplacements de l'extrémité 0, telle que (éq. II.78) :

$$E_t = R_t \cdot D_t + G_t \quad (\text{II.79})$$

D'après le paragraphe (II.3.2.2), il existe une matrice transfert liant les vecteurs d'état en chacune des extrémités, dont l'expression est donnée par l'équation II.18. telle que:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ E_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \alpha \\ T_{21} & T_{22} & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ E_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.80})$$

Si nous reportons l'équation (II.79) dans la deuxième équation du système (II.80), on obtient :

$$E_1 = (T_{21} + T_{22} \cdot R_0) \cdot D_0 + T_{22} \cdot G_0 + \beta. \quad (\text{II.81})$$

De même, en reportant l'équation (II.79) dans la première équation du système (II.80), on aura:

$$D_0 = (T_{11} + T_{12} \cdot R_0)^{-1} \cdot D_1 - (T_{11} + T_{12})^{-1} (T_{12} \cdot G_0 + \alpha). \quad (\text{II.82})$$

L'addition des équations II.81 et II.82 donne :

$$E_1 = (T_{21} + T_{22} \cdot R_0)(T_{11} + T_{12} \cdot R_0)^{-1} \cdot D_1 + T_{22} \cdot R_0 + \beta - (T_{21} + T_{22} \cdot R_0)(T_{11} + T_{12} \cdot R_0)^{-1} \cdot (T_{12} \cdot G_0 + \alpha) \quad (\text{II.83})$$

Si nous posons :  $R_1 = (T_{21} + T_{22} \cdot R_0)(T_{11} + T_{12} \cdot R_0)^{-1}$ , (II.84)

nous obtenons :  $E_1 = R_1 \cdot D_1 + \underbrace{(T_{22} - R_1 \cdot T_{12}) \cdot G_0 + \beta - R_1 \cdot \alpha}_{G_1}$ ; (II.85)

d'où l'expression de  $G_1$  :  $G_1 = (T_{22} - R_1 \cdot T_{12}) \cdot G_0 + \beta - R_1 \cdot \alpha$ . (II.86)

### c - Eléments de rigidité au centre du chevron

Dans le paragraphe (II.3.3.2.a) nous avons donné les éléments de rigidité en tête de pieu en fonction de ceux en pointe sans tenir compte de la liaison chevron-pieu. Celle-ci peut être considérée comme une discontinuité. Il est possible de construire la matrice-transfert de la liaison entre la tête de pieu et le chevron rigide. La méthode consiste à isoler un tronçon de pieu de longueur infiniment petite contenant le point d'application de la discontinuité, à exprimer les conditions d'équilibre de ce tronçon et à en déduire l'expression de la matrice-transfert de la discontinuité considérée. Il existe deux sortes de liaisons (II.3.3.1.c) : le cas où la tête de pieu est reliée par une liaison élastique et celui où elle est articulée au chevron. L'encastrement parfait est une liaison élastique dont la flexibilité est nulle.

#### c1 - Liaison élastique

Cette liaison peut être considérée comme une discontinuité de déplacement. Elle intervient par sa matrice de flexibilité, définie par :

$$[f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.87})$$

où  $f_i$  est la flexibilité en rotation autour de l'axe  $i$  ( $i = 1 \text{ à } 3$ ).

Les efforts des vecteurs d'états aux extrémités du tronçon supposé contenir la discontinuité, sont les mêmes. Dans le cas d'une liaison élastique, la continuité entre les deux extrémités porte uniquement sur le vecteur déplacement et s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} D_u \\ E_t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_t \\ E_t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.88})$$

où  $I$  est la matrice unité  $6 \times 6$  et  $f$  est la matrice de flexibilité de la discontinuité. Les équations II.84 et II.86 permettent d'obtenir les éléments de rigidité en tête de pieu après la liaison,  $R_{ul}$  et  $G_{ul}$ , tels que :

$$\left. \begin{aligned} R_{ul} &= R_t \cdot (I_6 + f \cdot R_t)^{-1} \\ G_{ul} &= (I_6 - R_{ul} \cdot f) \cdot G_t \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.89})$$

$R_{ul}$  et  $G_{ul}$  sont exprimés dans le repère matériel de chacun des pieux. La matrice de rotation  $[Q]$  ou de passage du repère matériel au repère global (éq. II.66), nous permettent de calculer les éléments de rigidité en tête de pieu dans le repère global, tels que :

$$R_{tg} = [Q]_6 \cdot R_{ul} \cdot [Q]_6^t \quad (\text{II.90})$$

$$G_{tg} = [Q]_6 \cdot G_{ul} \quad (\text{II.91})$$

Enfin après transfert de rigidité du point  $X$  (tête du pieu, repère global) au point  $X_c$  (centre du chevêtre), on obtient:

$$R_c = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ X^* & I_3 \end{bmatrix} \cdot R_{tg} \cdot \begin{bmatrix} I_3 & -X^* \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.92})$$

$$G_c = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ X^* & I_3 \end{bmatrix} \cdot G_{tg} \quad (\text{II.93})$$

où  $x^*$  est un opérateur matriciel défini par  $X^* = (X - X_0) \wedge \dots$ .  $R_c$  et  $G_c$  sont les éléments de rigidité du pieu reportés au centre du chevêtre. Les éléments de rigidité au centre du chevêtre sont alors la somme des différents éléments de rigidité de chacun des pieux, exprimés au centre du chevêtre.

***c2 - La tête du pieu est articulée au chevêtre.***

La relation (II.78), exprimant les éléments de rigidité  $R_t$  et  $G_t$  en tête du pieu sans la liaison, dans le repère matériel, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} F_t \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_t)_{11} & (R_t)_{12} \\ (R_t)_{21} & (R_t)_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t \\ \Omega_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (G_t)_1 \\ (G_t)_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.94})$$

L'articulation parfaite est caractérisée par un moment nul en tête du pieu ( $M_t = 0$ ) ; ce qui permet d'obtenir  $\Omega_t$  :

$$\Omega_t = -(\mathbf{R}_t)_{22}^{-1} \cdot [(\mathbf{R}_t)_{21} \cdot U_t + (G_t)_2]. \quad (\text{II.95})$$

Si on reporte l'expression (II.95) dans la première équation de la relation matricielle (II.94), on obtient :

$$F_t = (\mathbf{R}_t)_{11} \cdot U_t - (\mathbf{R}_t)_{12} \cdot (\mathbf{R}_t)_{22}^{-1} \cdot [(\mathbf{R}_t)_{21} \cdot U_t + (G_t)_2] + (G_t)_1 \quad (\text{II.96})$$

soit encore :

$$F_t = (\mathbf{R}_u)_{11} \cdot U_t + (G_u)_1 \quad (\text{II.97})$$

où

$$(\mathbf{R}_u)_{11} = (\mathbf{R}_t)_{11} - (\mathbf{R}_t)_{12} \cdot (\mathbf{R}_t)_{22}^{-1} \cdot (\mathbf{R}_t)_{21}; \quad (\text{II.98})$$

et

$$(G_u)_1 = (G_t)_1 - (\mathbf{R}_t)_{12} \cdot (\mathbf{R}_t)_{22}^{-1} \cdot (G_t)_2. \quad (\text{II.99})$$

Par suite, les éléments de rigidité en tête de pieu, après la liaison, peuvent s'écrire :

$$\mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_u)_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_u = \begin{bmatrix} (G_u)_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.100})$$

On procède de la même façon que dans le cas d'une liaison élastique, pour exprimer les éléments de rigidité dans le repère global, puis les reporter au point  $X_c$  du centre du chevêtre.

#### d - résolution au centre du chevêtre

D'après le paragraphe précédent (II.3.4.2.c), nous pouvons calculer les éléments de rigidité au centre du chevêtre, soient  $R_c$  et  $G_c$ . Ces éléments lient les torseurs des efforts  $E_c$  et des déplacements  $D_c$ , du vecteur d'état au centre du chevêtre, par la relation exprimée dans le repère global :

$$E_c = R_c \cdot D_c + G_c$$

Nous avons six composantes connues du vecteur d'état au centre du chevêtre. Ces composantes sont les déplacements et les efforts imposés au centre du chevêtre. Le système à résoudre, pour déterminer les composantes de déplacements et d'efforts inconnues au centre du chevêtre, est un système linéaire d'ordre 6. Une fois déterminées les composantes inconnues des torseurs de déplacement et d'effort au centre du chevêtre, on calcule le nouveau vecteur d'état en tête de chaque pieu sans la liaison (par l'inverse des relations établies dans le

paragraphe précédent cf.§.II.3.4.2.c1 ou cf.§.II.3.4.2.c2 selon la nature de la liaison pieu-chevêtre), dans le repère matériel. Les matrices-transferts matérielles des tronçons étant connues, on en déduit les efforts et les déplacements en chacun des niveaux de discrétisation de tous les pieux, ainsi que le vecteur d'état en pointe de chacun des pieux. Le nouveau vecteur d'état en pointe servira de point de départ pour la nouvelle itération.

#### e - Processus de convergence

A l'itération  $i$ , on calcule d'après la courbe de réaction (fig. II.8), la pression correspondant au déplacement relatif moyen du haut et du bas du tronçon donné à cette itération ; ceci pour une section donnée d'un pieu, et pour chacune des sollicitations élémentaires. Cette pression se situe sur une branche linéaire de la courbe de réaction. Les caractéristiques mécaniques tangentes ou sécantes de cette branche serviront comme point de départ pour l'itération suivante. Ainsi, on calcule à l'itération  $i+1$ , un nouveau déplacement relatif moyen et la pression correspondante sur la branche linéaire déterminée à l'itération  $i$ . On dit que le processus a convergé si le point correspondant au déplacement relatif moyen d'une part, et à la pression d'autre part, pour chaque sollicitation élémentaire, se situe sur la courbe de réaction correspondante moyennant une certaine tolérance  $\varepsilon$ : c'est le critère 1 de convergence. Le processus de convergence, dans le cas où ont été définies des courbes de mobilisation des efforts en pointe, est similaire à celui des courbes de réaction; c'est le critère 2. Le critère 3 porte sur la convergence en norme sur le vecteur rotation entre deux itérations pour chacun des tronçons de discrétisation, soit:

$$\frac{\|\bar{\Omega}_{i+1} - \bar{\Omega}_i\|}{\|\bar{\Omega}_i\|} \leq \varepsilon \quad (\text{II.101})$$

Pour un calcul GOUPIL (RDM classique), on doit vérifier les critères 1 et 2. Pour un calcul GOUFLA (RDM locale, grands déplacements), les critères 1, 2 et 3 doivent être vérifiés.

#### f - traitement particulier vis-à-vis du flambement

##### *f1 - tronçon de taux d'énergie critique maximal*

Dans certains cas, par exemple, le cas du mât d'Euler, les réponses obtenues par le programme, sous l'action des charges supérieures à la force critique, sont numériquement stables. Ceci n'est pas conforme à la réalité. Pour éviter ce problème, on vérifie la validité de la stabilité de la solution obtenue, en perturbant le tronçon de taux d'énergie critique maximal : en effet, on suppose que le tronçon initialisant le flambement est celui dont le taux d'énergie critique est maximal (Degny, 1987).

La compression est un facteur qui provoque le flambement et la torsion est un élément qui favorise son apparition. Par contre, les flexions ont une action retardatrice sur le flambement. En conséquence, l'énergie critique  $\Delta W_c$  est définie par:

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{N^2}{E_p S} + \frac{M_t^2}{G I_{pz}} - \frac{M_y^2}{E_p I_{py}} - \frac{M_x^2}{E_p I_{px}} \right) dl \quad (\text{II.102})$$

$N$  : effort normal,

$S$  : section du tronçon,

$E_p$  : module d'Young du tronçon du pieu,

$G$  : module de cisaillement,

$M_t$  : moment de torsion autour de l'axe  $z$ ,

$M_x, M_y$  : moments fléchissants dans le plan  $y z$  et  $x z$ ,

$I_{px}, I_{py}, I_{pz}$  : inertie de la section du tronçon autour des axes  $x, y$  et  $z$ .

Le taux d'énergie critique  $\tau_{Ec}$  d'un tronçon est défini par:

$$\tau_{Ec} = \frac{\Delta W_c}{\mathfrak{S}} ; \quad (\text{II.103})$$

$\mathfrak{S}$  est le potentiel du tronçon dû aux diverses sollicitations (compression, torsion et flexion). Ce potentiel a pour expression, en négligeant la contribution due à l'effort tranchant :

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{N^2}{E_p S} + \frac{M_y^2}{E_p I_{py}} + \frac{M_x^2}{E_p I_{px}} + \frac{M_t^2}{G I_{pz}} \right) dl \quad (\text{II.104})$$

### *f2 - Perturbation du tronçon critique*

Afin de passer à la solution instable, on perturbe le tronçon dont le taux d'énergie critique est maximal au moyen d'un déplacement de sol supplémentaire égal à l'opposé du déplacement de ce tronçon. Cette perturbation n'est appliquée que le temps d'une itération. Deux possibilités se présentent:

- Après perturbation, si le calcul donne un résultat identique à la solution trouvée avant perturbation, cette solution était stable (correspondant à un minimum d'énergie).
- Après perturbation, si le calcul donne une solution différente à celle trouvée avant perturbation, cette solution n'était pas stable (post-flambement).

### II.3.3.3 Algorithme de calcul du programme GOUFLA

Le calcul de la réponse d'un groupe de pieux est constitué des étapes suivantes:

A - calcul *GOUPIIL* (petits déplacements) ou *GOUFLA* (grands déplacements).

Etape 1: détermination des éléments de rigidité pour chaque pieu.

- calcul des matrices-transferts locales des tronçons;
- assemblage de la matrice-transfert locale totale pour chaque tronçon ;
- s'il s'agit d'un calcul *GOUFLA*, calcul des matrices-transferts matérielles des tronçons ;
- calcul des matrices-transferts matérielles totales des pieux ;
- calcul des éléments de rigidité en tête des pieux, liaisons non comprises.

Etape 2 : résolution au centre du chevêtre.

- calcul des éléments de rigidité en tête des pieux, liaisons comprises ;
- détermination des éléments de rigidité au centre du chevêtre ;
- résolution du vecteur d'état au centre du chevêtre ;
- calcul des nouveaux vecteurs d'état en tête de chaque pieu.

Etape 3 : résultats intermédiaires pour chaque pieu

- calcul du vecteur d'état en bas de chaque tronçon constituant le pieu et des réactions du sol ;
- calcul des vecteurs d'état en pointes des pieux ;
- s'il s'agit d'un calcul *GOUFLA*, test de convergence:
  - si critère 3 = " faux ", réactualisation des vecteurs rotation semi-tangentielle et des déplacements libres du sol en tenant compte du déplacement du sol dû au déplacement du corps solide, puis retour à l'étape 1.
  - si critère 3 = " vrai ", suite de calcul ;
- réactualisation des courbes de réaction ;
- test de convergence: si (critère 1 ou critère 2) = " faux ", retour à l'étape 1
  - si (critère 1 et critère 2) = " vrai ", fin du calcul *GOUPIIL* ou *GOUFLA*.

Dans le cas où l'on souhaite calculer la force critique de flambement, il existe deux possibilités : la première consiste à perturber le tronçon de taux d'énergie critique maximal. Ainsi la suite de l'algorithme est la suivante :

B - *localisation du flambement*.

- recherche du tronçon de taux d'énergie critique maximal ;
- perturbation du tronçon critique ;

- retour à la phase A pour faire un calcul GOUFLA avec une seule itération sans tester la convergence ;
- rétablissement des déplacements initiaux du sol pour le tronçon critique ;
- retour à la phase A pour faire un calcul GOUFLA en testant la convergence. S'il y a convergence, arrêt du calcul.

La deuxième possibilité consiste à déterminer la force critique de flambement à partir de la première partie de l'algorithme (partie A). Ceci est fait en remplaçant la perturbation par un faible déplacement latéral, imposé en tête du pieu, pour initialiser le flambement et en incrémentant la force verticale pour atteindre le flambement. Cette méthode est utilisée pour la détermination de la force critique de flambement, lors des comparaisons GOUFLA-FLAMANDEL et GOUFLA-CESAR (cf.§.II.3.7), parce que c'est le moyen retenu dans le programme CESAR pour calculer la force critique de flambement.

### II.3.4 Etude de quelques aspects dans le mécanisme du programme GOUFLA

#### II.3.4.1 Influence de la discrétisation numérique

Dans le programme GOUFLA, une discrétisation numérique en tronçons de pieux d'une longueur  $d/l$ , appelée aussi pas de discrétisation, est effectuée en compatibilité avec les discrétisations physiques précédemment décrites. Nous avons fait une étude paramétrique pour étudier l'influence du choix du pas de discrétisation sur les résultats de calcul du programme GOUFLA, et par conséquent, déduire une valeur moyenne de  $d/l$  à conseiller dans les calculs.

Nous avons étudié un cas proche de la réalité: il s'agit d'une virole d'acier, de diamètre extérieur  $B = 60$  cm, d'épaisseur  $e = 1$  cm et de longueur  $l = 20$  m. Le module d'Young de l'acier est  $E_y = 2.10^5$  MPa. Le pieu est supposé fiché dans un sol homogène de module de réaction  $E_s = 2$  MPa, encasté aux deux extrémités. Cette valeur du module de réaction correspond au cas d'une argile molle. Par ailleurs, on ne prend pas en compte de frottement latéral.

En calculant le rapport de la longueur  $l$  à la longueur de transfert  $l_0$ , on constate que le pieu est souple ( $l/l_0 \approx 5$ ). On rappelle que la longueur de transfert est donnée par :

$$l_0 = \left( \frac{4E_p I_p}{E_s} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{II.105})$$

où  $E_p I_p$  est la rigidité à la flexion du pieu (module d'Young x inertie). On trouve  $l_0 \approx 4$  m dans le cas présent.

Le pieu est chargé horizontalement ( $F_H = 400 \text{ kN}$ ) et verticalement ( $F_v$ ). Deux valeurs sont affectées à la force verticale  $F_v$ : une première valeur égale à la moitié de la force critique, et une deuxième légèrement inférieure à la force critique. Pour chaque cas, nous avons effectué trois calculs avec trois pas de discrétisation différents:  $dl = 0,5 \text{ m}$ ,  $1 \text{ m}$  et  $2 \text{ m}$ . Les figures (II.9) et (II.10) illustrent les résultats des efforts (moments) et déplacements pour les différents cas.

D'après les figures (II.9) et (II.10), on remarque que, dans le cas de faibles charges ( $F_v \leq F_{cr} / 2$ ), il n'y a pratiquement pas de différence entre les résultats obtenus pour les trois pas de discrétisation et, par conséquent, une discrétisation très fine n'est pas obligatoire. Par contre, pour les fortes charges ( $F_{cr} / 2 < F_v \leq F_{cr}$ ), on remarque qu'il y a une influence appréciable du pas de discrétisation. Par exemple, les valeurs obtenus dans le cas ( $dl = 2\text{m}$ ) valent la moitié de celles obtenues dans le cas ( $dl = 0,5\text{m}$ ). Par contre, il y a une légère différence (+10 % à + 15 %) entre les valeurs obtenues pour  $dl = 0,5 \text{ m}$  et  $dl = 1 \text{ m}$ . Ceci est valable aussi bien pour les moments que pour les déplacements. Un calcul supplémentaire effectué avec un pas de discrétisation  $dl = 0,25 \text{ m}$  montre qu'il n'y a plus de différence par rapport aux résultats obtenus dans le cas  $dl = 0,5 \text{ m}$ .

Une discrétisation assez fine est donc nécessaire dans le cas de pieux fortement chargés. Cette discrétisation doit tenir compte de la rigidité relative sol-pieu et de la longueur du pieu. Suite à une série de calculs par le programme GOUFLA, on préconise, dans la plupart des cas, la valeur suivante pour le pas de discrétisation :

$$dl \approx \inf(l / 20 ; l_0 / 3). \quad (\text{II.106})$$

#### II.3.4.2 Influence de la tolérance de convergence

Dans le processus de convergence du calcul du programme GOUFLA, on doit vérifier les trois critères de convergence (critère 1, critère 2 et critère 3) moyennant une certaine tolérance ou précision  $\varepsilon$ . Nous avons fait une étude paramétrique pour étudier l'influence de la valeur de la précision demandée sur les résultats des calculs, en reprenant le cas du pieu souple ( $l/l_0 \approx 5$ ) défini dans le paragraphe précédent (cf.§.II.3.5.1). Les conditions de chargement (2 cas de chargement) et les conditions aux limites sont les mêmes. Pour chaque cas de chargement, nous avons effectué trois calculs correspondant aux valeurs suivantes de la précision:  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $10^{-6}$  et  $10^{-9}$ .

Les résultats des moments et déplacements sont illustrés dans les figures (II.11) et (II.12). D'après ces figures, on remarque que, pour  $F_v = F_{cr} / 2$ , il n'y a pas d'influence de la précision sur les valeurs des moments et des déplacements. Par contre, pour  $F_v \approx F_{cr}$ , on observe un écart très important, de l'ordre de 50 %, entre les résultats obtenus avec  $\varepsilon = 10^{-3}$ , et ceux obtenus avec  $\varepsilon = 10^{-6}$  ou  $\varepsilon = 10^{-9}$ .

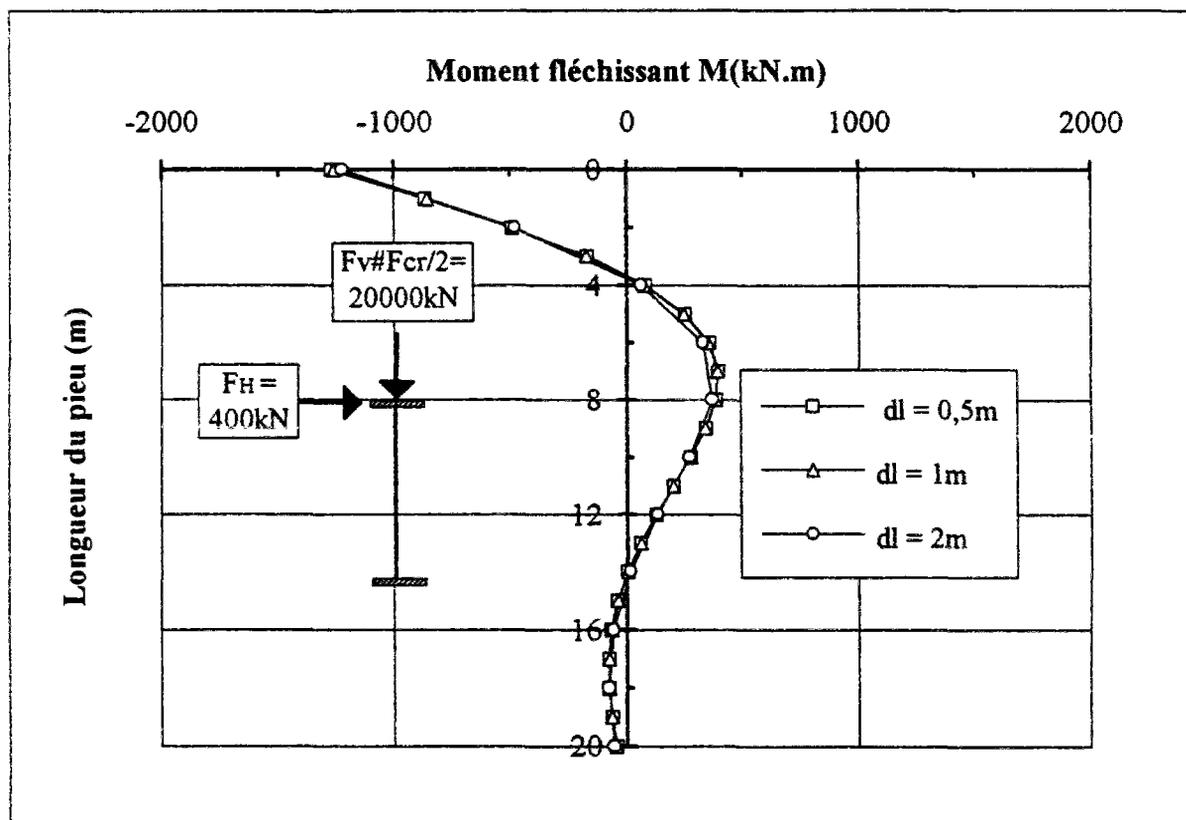
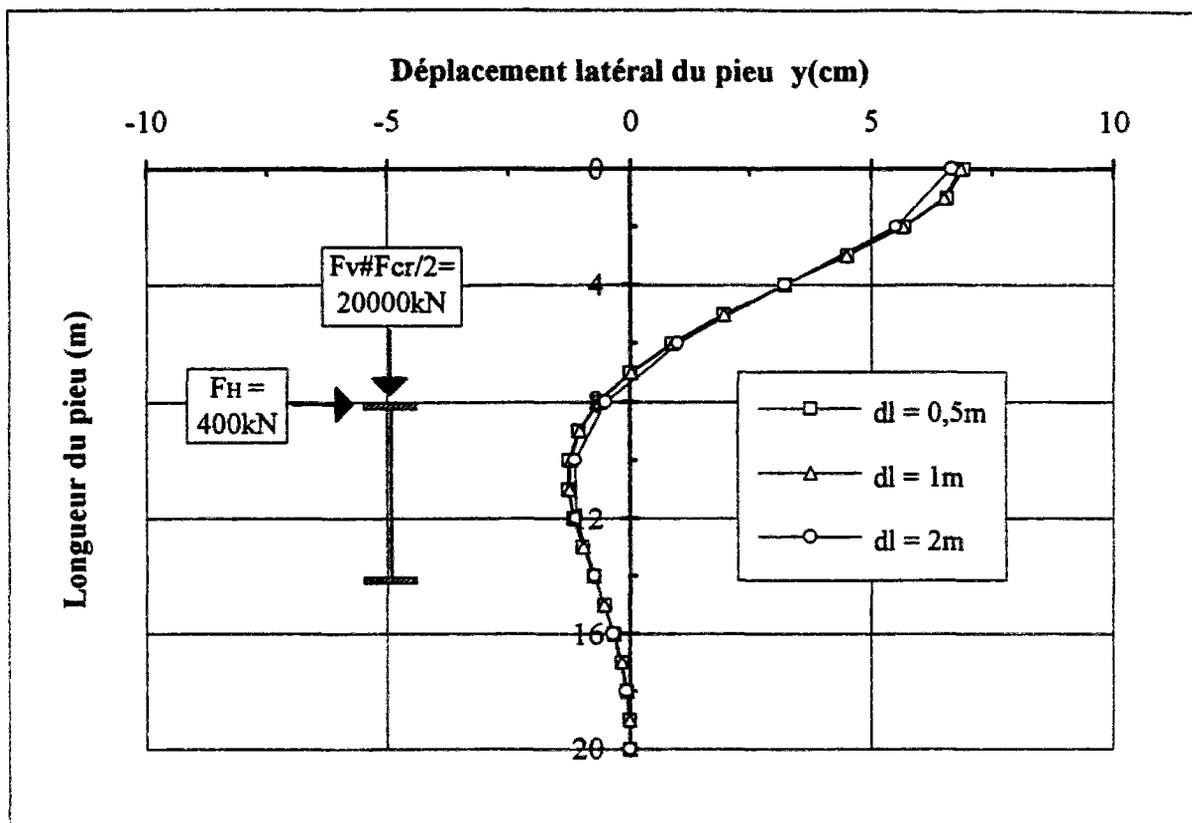


Fig. II.9 : Influence du pas de discrétisation sur les efforts dans GOUFLA ( $F_v \sim F_{cr} / 2$ ).

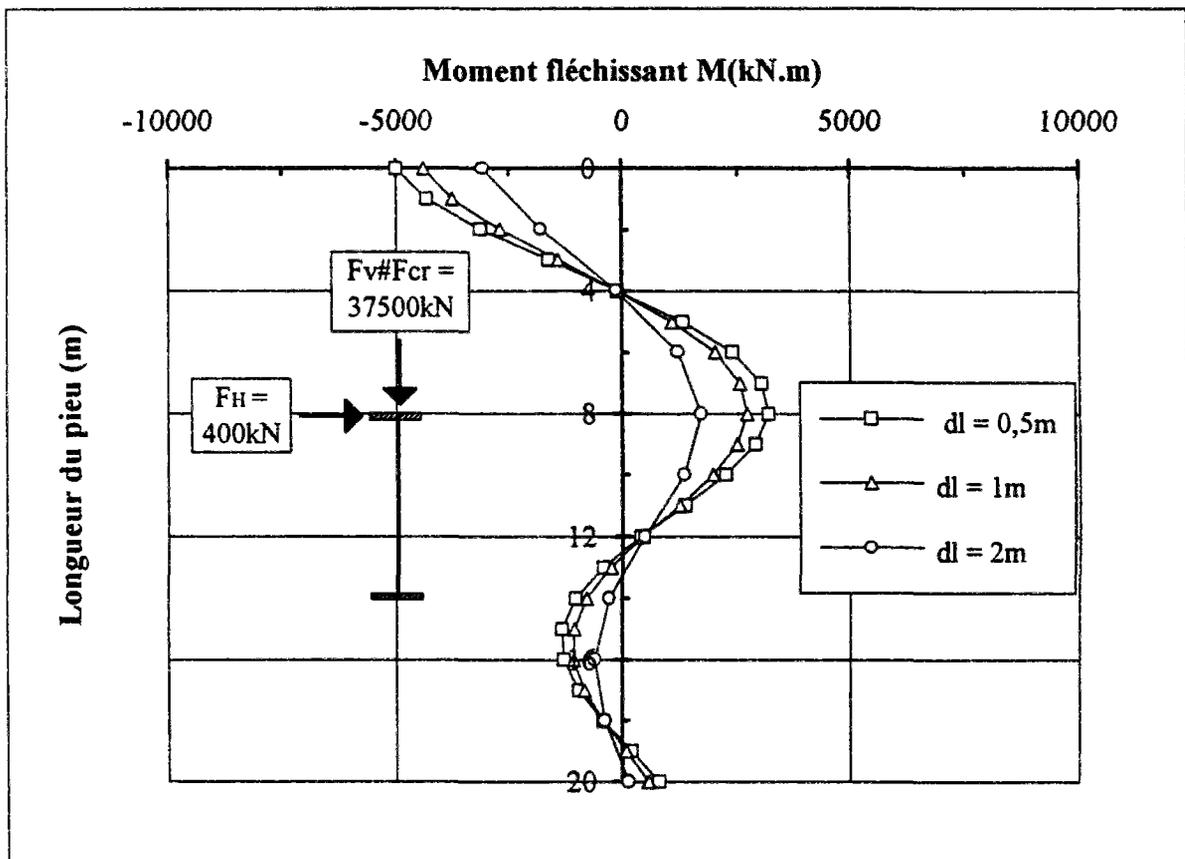
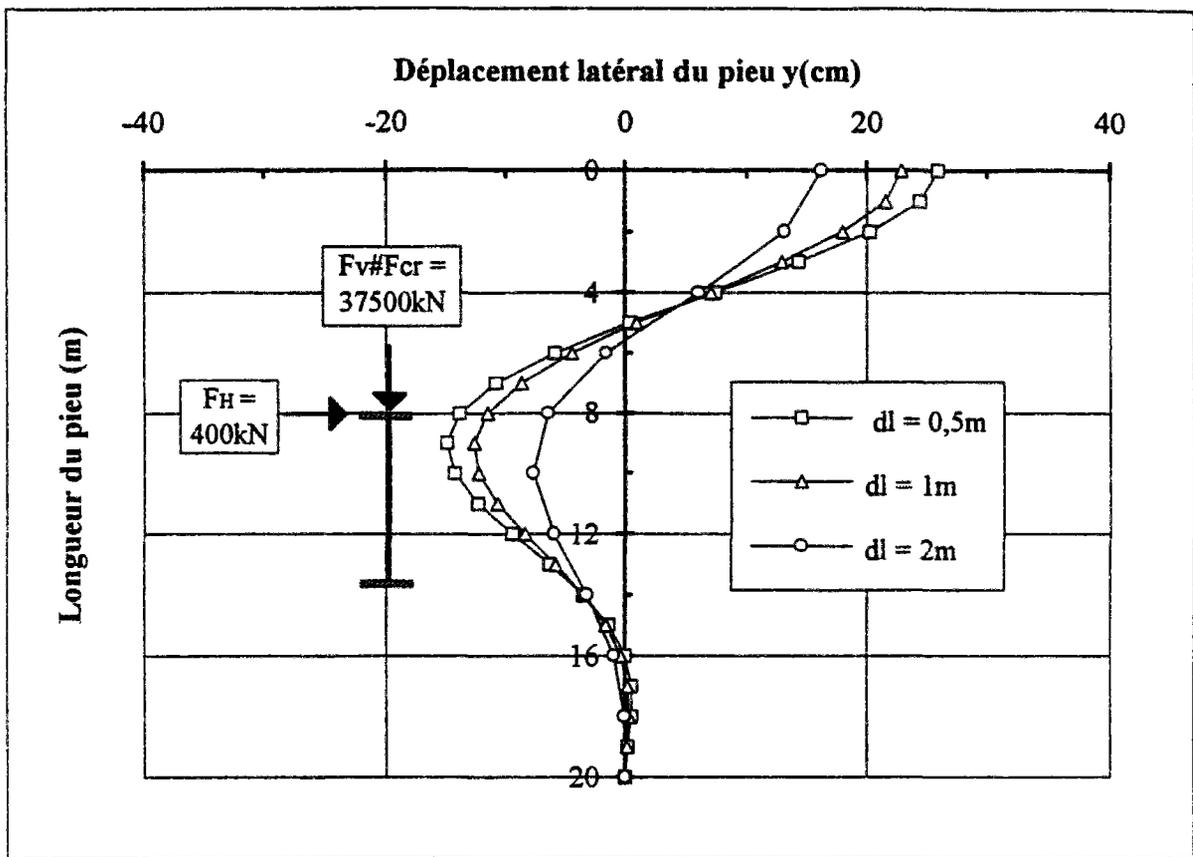


Fig. II.10 : Influence du pas de discrétisation sur les efforts dans GOUFLA ( $F_v \sim F_{cr}$ ).

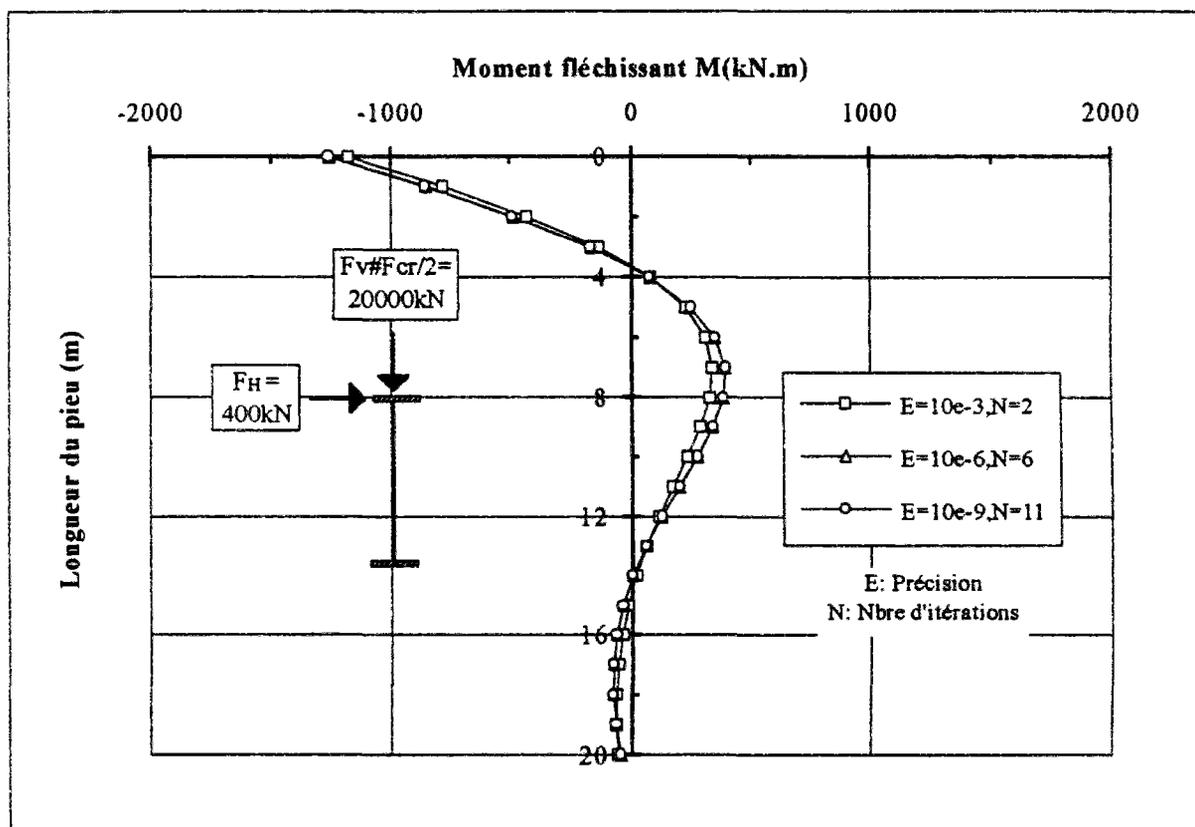
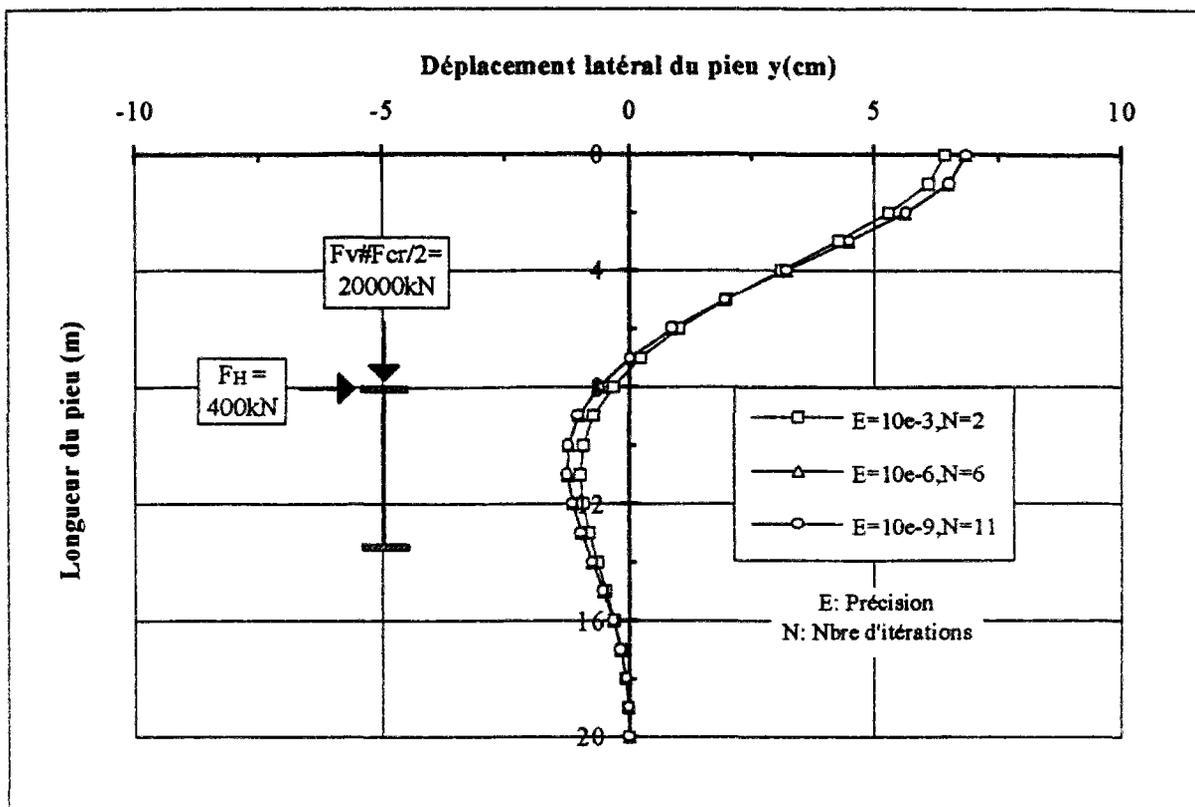


Fig. II.11 : Influence de la précision sur les efforts dans GOUFLA ( $F_v \sim F_{cr}/2$ ).

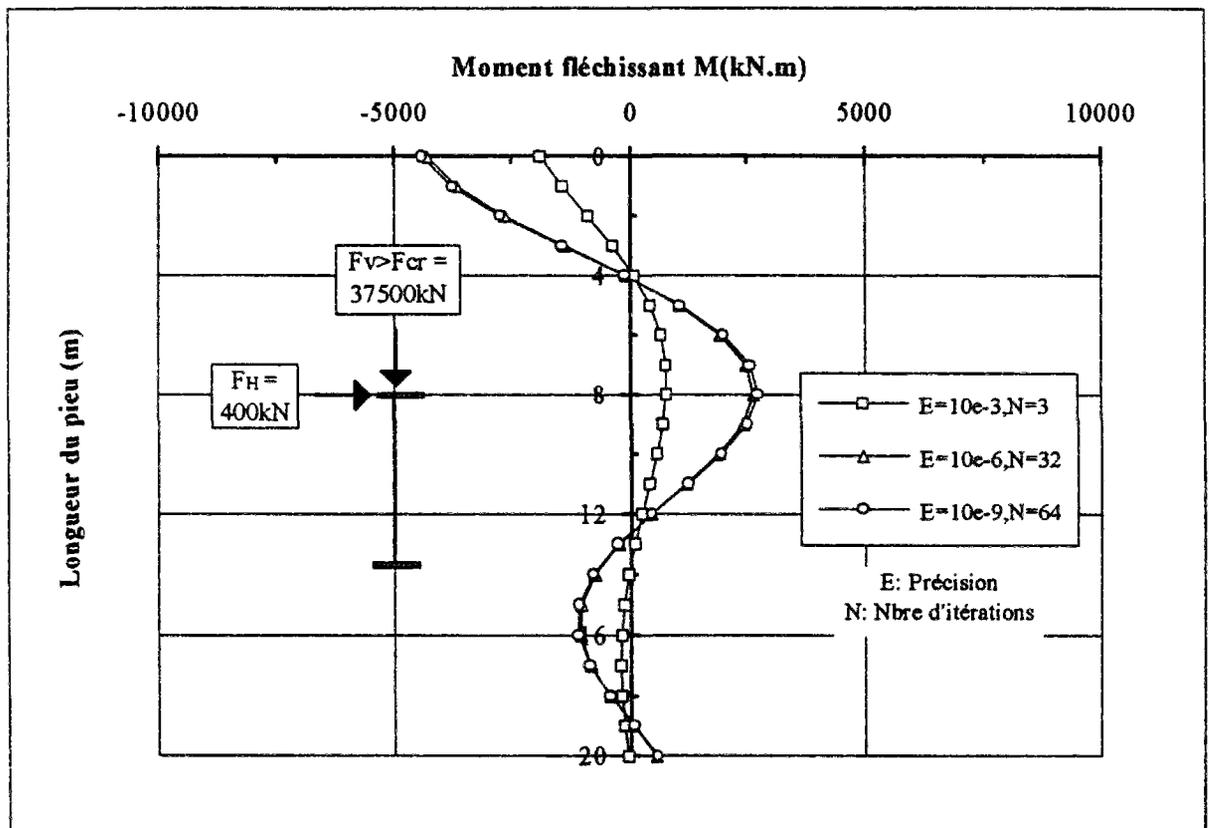
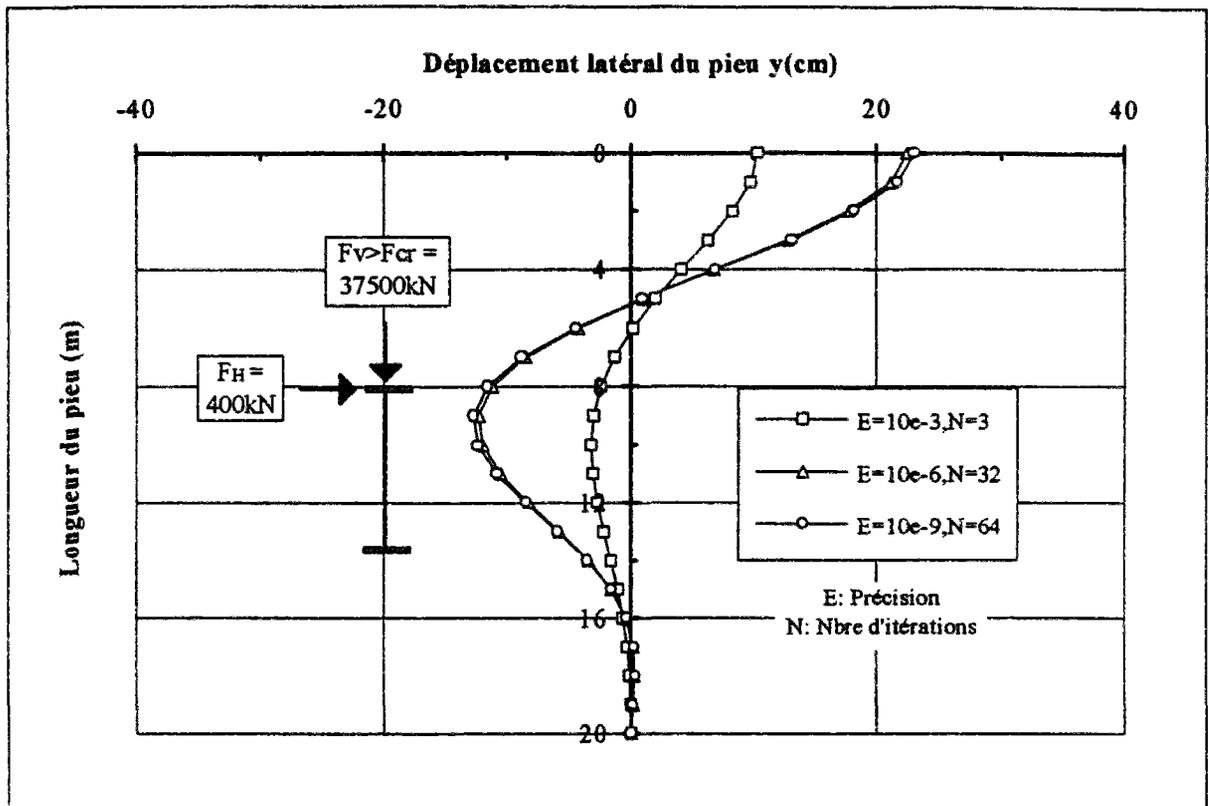


Fig. II.12 : Influence de la précision sur les efforts dans GOUFLA ( $F_v \sim F_{cr}$ ).

De même, le nombre d'itérations augmente très rapidement avec l'augmentation de la précision. Ainsi, le nombre d'itération passe de  $N = 2$  pour  $\varepsilon = 10^{-3}$  à  $N = 32$  pour  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Les résultats sont semblables pour les précisions  $\varepsilon = 10^{-6}$  et  $\varepsilon = 10^{-9}$ , mais le nombre d'itérations pour  $\varepsilon = 10^{-9}$  ( $N = 64$ ) est le double de celui pour  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Par conséquent, la précision doit être élevée pour le calcul de la réponse des pieux fortement chargés ( $F_{cr} / 2 < F_v \leq F_{cr}$ ), mais pas trop cependant, pour éviter des itérations n'apportant aucune différence significative. D'une façon générale, on préconise d'utiliser pour  $\varepsilon$  les valeurs suivantes:

$$10^{-6} \leq \varepsilon \leq 10^{-8}. \quad (\text{II.107})$$

Cette marge de valeurs est justifiée par le fait que pour les charges faibles ( $F_v \leq F_{cr} / 2$ ), on peut choisir la limite inférieure parce qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser une précision très élevée, sinon on obtient un nombre important d'itérations ce qui rend le calcul inutilement long et coûteux. Dans le cas des fortes charges, on peut utiliser une limite intermédiaire ou la limite supérieure suivant la nature de calcul.

### II.3.5 Influence des effets du second ordre - Comparaison GOUFLA - GOUPIL

Pour bien mettre en évidence l'importance des effets du second ordre, une étude paramétrique a été réalisée en se basant sur la comparaison entre des calculs GOUPIL (RDM classique) et des calculs GOUFLA (RDM locale). Nous avons étudié deux types de pieux: le même pieu souple ( $l/l_0 \approx 5$ ) défini précédemment et un pieu rigide ( $l/l_0 \approx 2$ ). Le pieu rigide est une virole d'acier de même diamètre extérieur que le pieu souple ( $B = 60$  cm), mais d'épaisseur  $e = 2$  cm et de longueur  $l = 10$  m. Les pieux sont supposés fichés dans une argile molle de module de réaction  $E_s = 2$  MPa. Pour chaque pieu, deux conditions aux limites sont étudiées: pieu encastré en pointe et dans un chevêtre mobile en tête, et pieu articulé aux deux extrémités (AA). Les pieux sont chargés en flexion et en compression. La charge horizontale  $F_H$  est constante, égale à 800 kN. Par contre, on augmente la charge verticale  $F_v$  jusqu'au flambement du pieu.

Nous avons déterminé les variations relatives du déplacement latéral ( $\Delta y / y_0$ ) en tête du pieu et du moment maximal ( $\Delta M_{\max} / M_{0\max}$ ) en fonction du rapport adimensionnel ( $F_v / EI^2$ ) (fig. II.13 et fig. II.14), où :

$$\Delta y = y_1 - y_0 \quad \text{et} \quad \Delta M_{\max} = M_{1\max} - M_{0\max} \quad (\text{II.108})$$

$y_1$  : déplacement latéral en tête du pieu obtenu par GOUFLA ;

$y_0$  : déplacement latéral en tête du pieu obtenu par GOUPIL ;

$M_{0\max}$ ,  $M_{1\max}$ : moments maximaux obtenus respectivement par GOUPIL et GOUFLA.

D'après les figures (II.13) et (II.14), on obtient pour  $F_v = F_{cr} / 2$  une variation relative de déplacement de l'ordre de 40 % à 50 %, dans le cas du pieu souple, et de l'ordre de 50 % à 70 % dans le cas du pieu rigide, suivant les conditions aux limites. Ces variations peuvent atteindre 100 % à 200 % dans le cas du pieu souple et 200 % à 300 % dans le cas du pieu rigide, pour une force verticale voisine de la force critique relative à chaque pieu. On retrouve les mêmes pourcentages pour la variation relative du moment maximal que ceux obtenus pour les déplacements.

On remarque aussi, d'après les figures (II.13) et (II.14) que, pour un même rapport  $F_v / F_H$ , les variations relatives du moment maximal et de déplacement latéral, obtenues dans le cas du pieu articulé aux deux extrémités, sont supérieures à celles obtenues dans le cas du pieu encasté aux deux extrémités. Par exemple dans le cas d'un pieu rigide, pour un rapport  $F_v / F_H \sim 10$ , on obtient une variation relative de déplacement de l'ordre de 28 % dans le cas du pieu encasté aux deux extrémités, alors que cette variation atteint 55 % pour le pieu articulé aux deux extrémités. Ceci est valable à la fois pour le pieu rigide et le pieu souple.

On remarque aussi que pour les mêmes conditions aux limites et pour un même rapport  $F_v / F_H$ , les variations relatives obtenues dans le cas du pieu souple sont plus importantes que celles obtenues dans le cas du pieu rigide.

D'une façon générale, on déduit que si la force verticale augmente, les variations relatives des moments et des déplacements augmentent et l'influence de la force verticale devient plus importante. Par conséquent, pour des faibles forces verticales ( $F_v < F_{cr} / 4$ ) et des rapports ( $F_v / F_H < 3,75$  à 5) dans le cas du pieu articulé aux deux extrémités et ( $F_v / F_H < 8$ ) dans le cas du pieu encasté aux deux extrémités, la différence entre les calculs GOUPIL et GOUFLA est admissible ( $\sim 8$  à 10 %). Par contre, pour les pieux fortement chargés, en dépassant ces rapports de ( $F_v / F_H$ ) pour les pieux étudiés, la différence devient importante ainsi que l'influence de la charge axiale sur le comportement latéral et il faut, dans ce cas, tenir compte des effets du second ordre (grands déplacements) dans le calcul de la réponse du pieu.

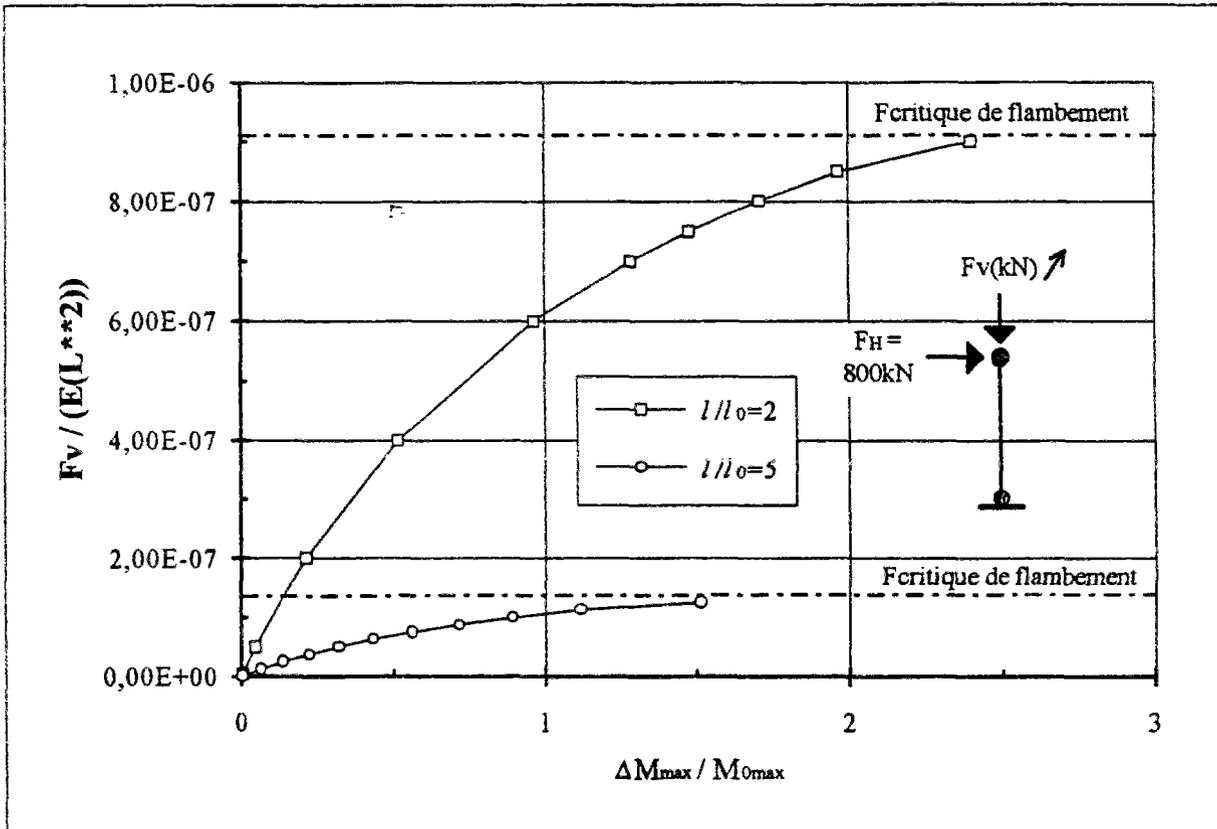
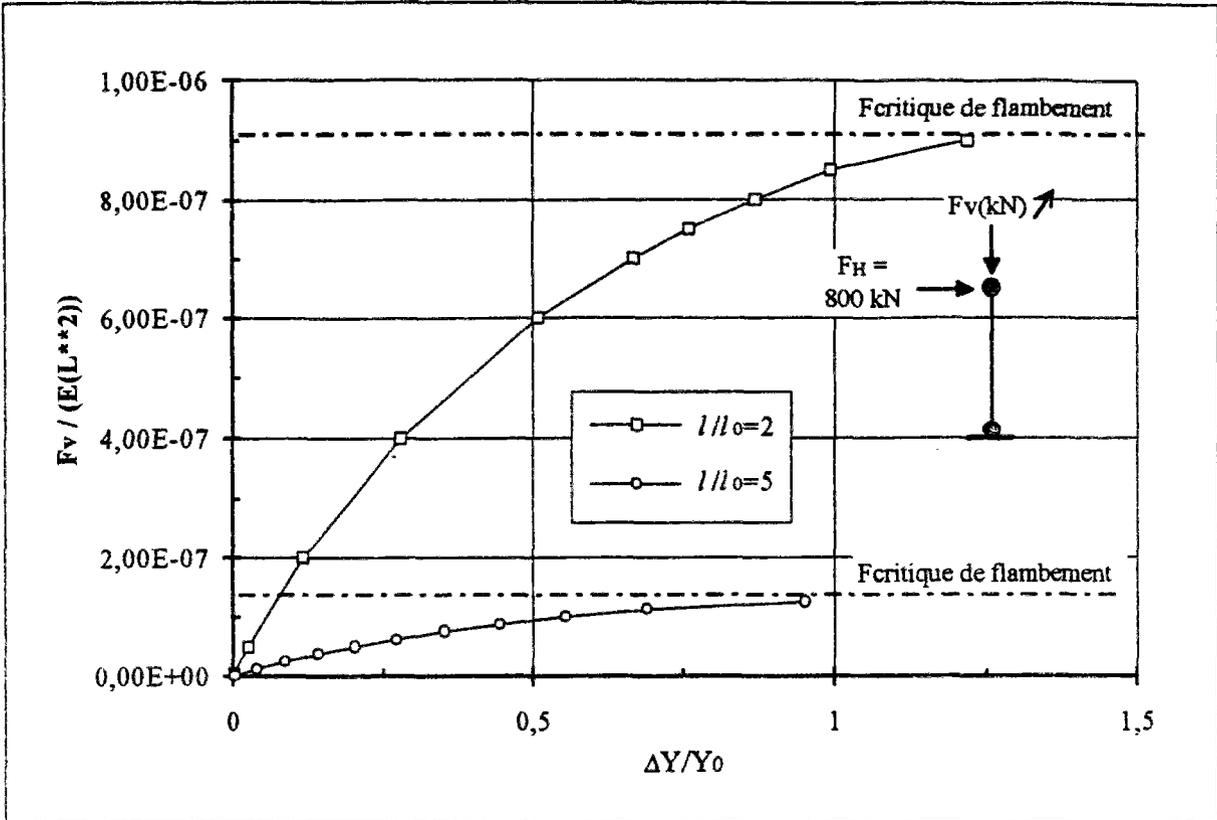


Fig. II.13 : Variations relatives du déplacement latéral en tête du pieu et du moment maximal, pieux articulés aux deux extrémités.

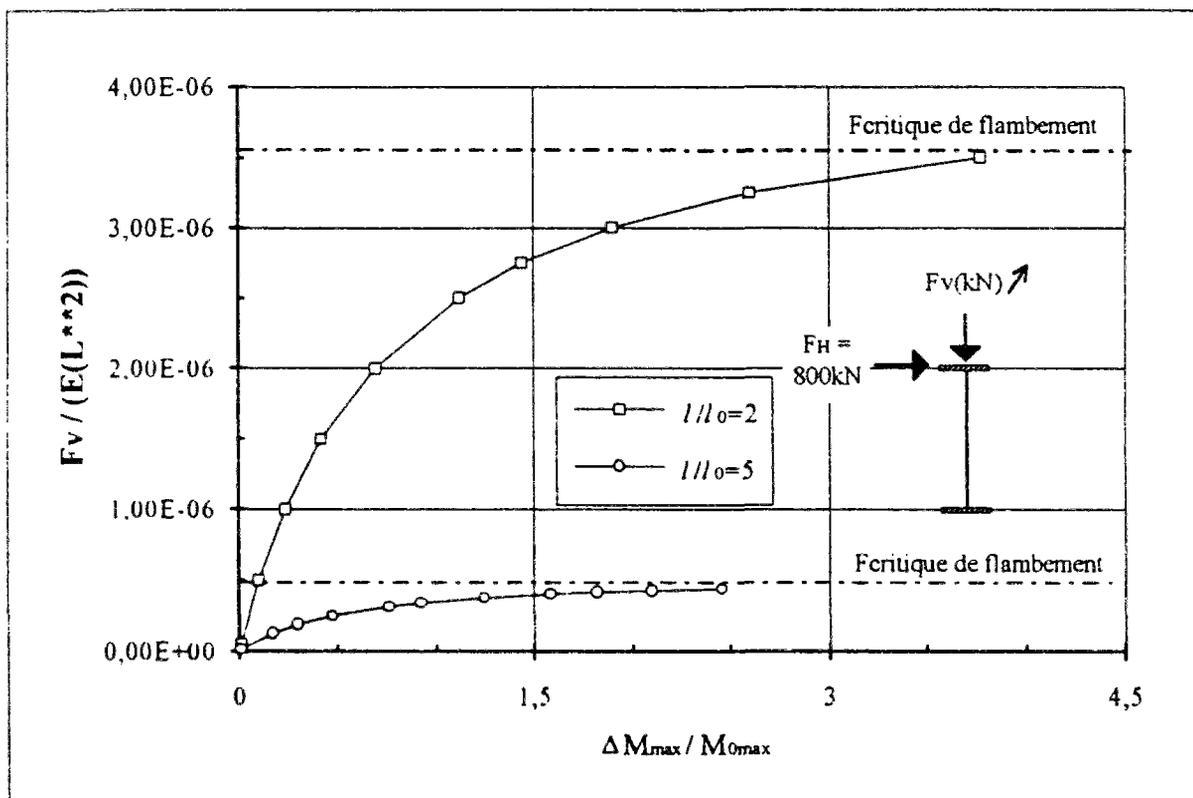
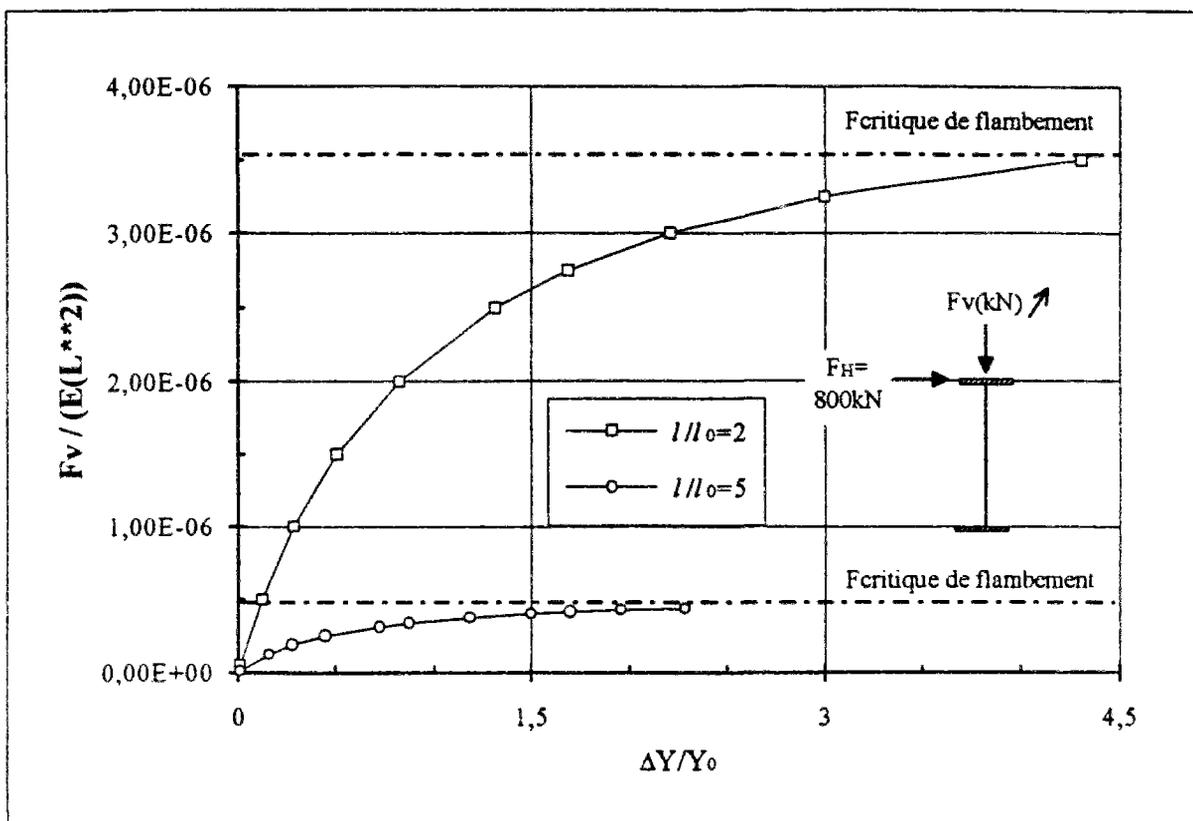


Fig. II.14 : Variations relatives du déplacement latéral en tête du pieu et du moment maximal, pieux encastés aux deux extrémités.

### II.3.6 Validation du programme GOUFLA

Afin de valider la formulation théorique du programme GOUFLA, on procédera à des comparaisons entre les résultats obtenus par GOUFLA et ceux obtenus, soit analytiquement par la théorie de Mandel (programme FLAMANDEL), soit numériquement avec un code d'éléments finis (CESAR-LCPC).

#### II.3.6.1 Comparaison GOUFLA - MANDEL

Il s'agit de comparer la force critique de flambement obtenue par GOUFLA avec celle calculée d'après la théorie de Mandel, dans le cas d'un pieu chargé en compression. Trois types de conditions aux limites ont été étudiés, soient :

- pieu encasté aux deux extrémités ;
- pieu articulé aux deux extrémités ;
- pieu articulé en tête et encasté en pointe ;

Pour les caractéristiques géométriques du pieu et les caractéristiques mécaniques du sol, nous avons repris le cas du pieu souple ( $I / I_0 \approx 5$ ) que l'on a décrit précédemment.

Pour initialiser le flambement dans GOUFLA, on impose un déplacement horizontal initial  $y_0$ , en tête du pieu, de l'ordre de  $l/1000$ , soit  $y_0 = 2$  cm. La figure (II.15) illustre la variation du tassement de la tête du pieu en fonction de la force verticale, dans le cas du pieu encasté aux deux extrémités. Les figures relatives aux autres conditions aux limites sont présentées dans l'annexe A-1

La courbe de la figure II.15, obtenue par GOUFLA, est constituée de deux parties : une partie qui représente la phase élastique (préflambement) où le tassement de la tête du pieu varie linéairement en fonction de la force verticale, et une deuxième partie qui représente la phase post - flambement où nous avons une grande variation de tassement pour une faible variation de la force verticale

Les résultats obtenus par GOUFLA montrent que l'on retrouve la force critique de Mandel à moins de 3 %. Cet écart est probablement dû au déplacement horizontal imposé en tête du pieu. Pour vérifier cet effet, nous avons calculé la force critique de flambement par GOUFLA, pour le pieu encasté aux deux extrémités, en imposant un déplacement horizontal égal au dixième de celui qu'on a imposé dans le premier calcul, soit  $y_0 = 2$  mm. La figure (II.15) montre que l'on retrouve la force critique de Mandel avec un écart de + 2 %. Par conséquent, si le déplacement horizontal en tête du pieu augmente, la force critique de flambement diminue. On étudiera par la suite d'une façon détaillée, l'influence du type de chargement sur la valeur de la force critique de flambement (cf. §.II.3.8)

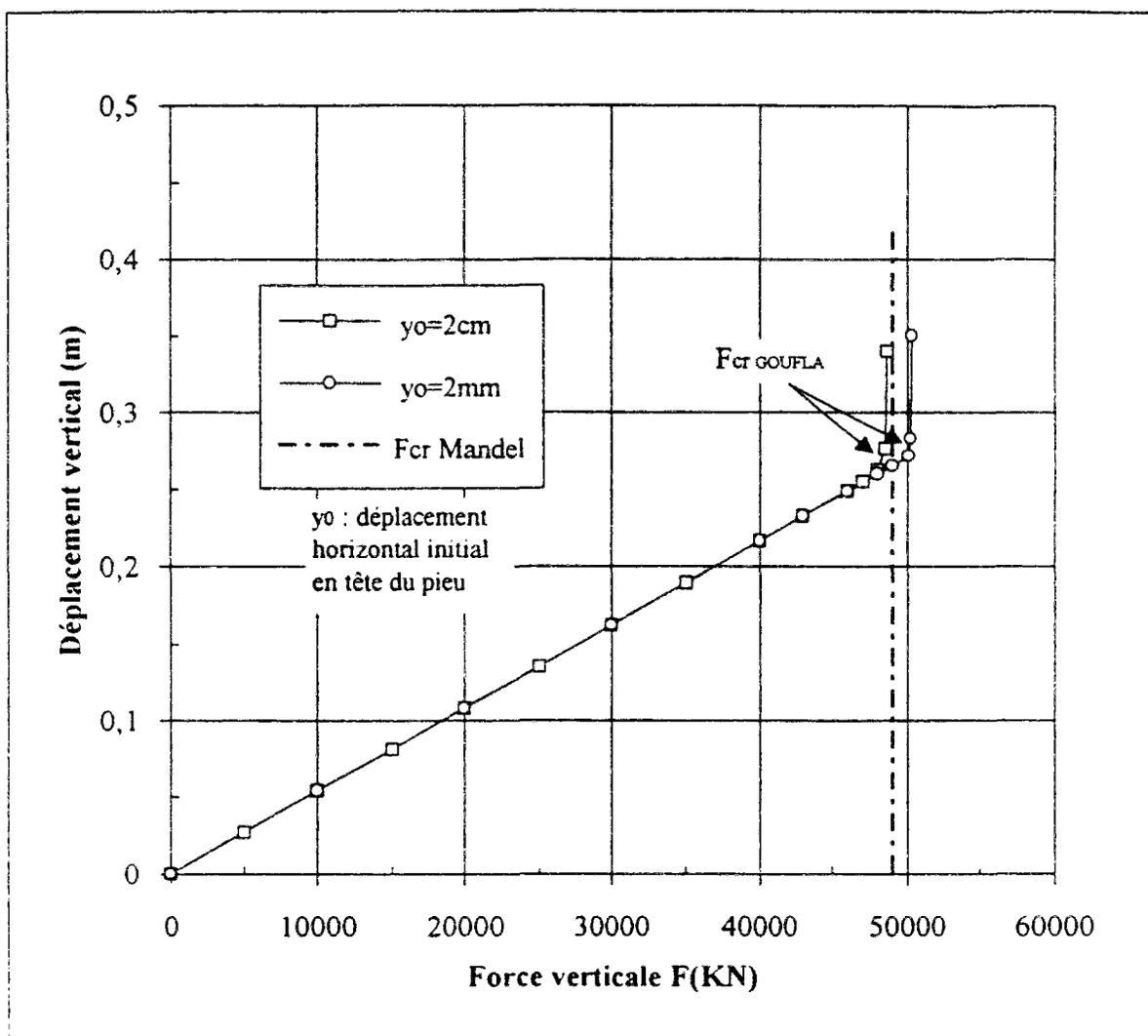


Fig II 15 : comparaison entre GOUFLA et la théorie de Mandel, cas d'un pieu encastré aux deux extrémités.

A partir de ces exemples, on peut dire que le programme GOUFLA permet, en tenant compte des recommandations sur la précision et la discrétisation (cf.§.II.3.5), de calculer la force critique de Mandel avec une erreur de  $\pm 3\%$ , soit :

$$F_{cr,GOUFLA} \equiv F_{cr,Mandel} \pm 3\% . \quad (II.109)$$

### II.3.6.2 Comparaison GOUFLA - CESAR (LCPC)

Dans le cadre de la validation du programme GOUFLA, nous avons comparé les résultats obtenus par GOUFLA avec les résultats numériques obtenus par le logiciel d'éléments finis CESAR - LCPC. Ulm (1993) a développé une famille d'éléments finis dans le logiciel CESAR, qui permet de traiter les problèmes de non-linéarités géométriques et matérielles d'une poutre reposant sur des appuis élastiques. Les appuis élastiques représentés par des ressorts sont appliqués aux noeuds des éléments de discrétisation. Deux types de calcul ont été effectués :

un calcul avec un chargement dans le plan (bidimensionnel, 2D) et un calcul avec un chargement tridimensionnel (3D). Ceci en utilisant la même discrétisation dans les deux programmes GOUFLA et CESAR. Les pieux étudiés sont les mêmes : pieu rigide ( $l/l_0 = 2$ ) et pieu souple ( $l/l_0 = 5$ ), définis précédemment. Le tableau (II.1) regroupe les différents cas traités pour chaque de type de chargement, les conditions aux limites et les valeurs de la force horizontale appliquée en tête du pieu.

Tableau II.1 : calculs effectués pour la comparaison GOUFLA - CESAR

	Pieu rigide ( $l/l_0 = 2$ )		Pieu souple ( $l/l_0 = 5$ )
	articulé - articulé	encastré - encastré	encastré - encastré
chargement en 2D	$F_H = 200 \text{ kN}$	$F_H = 800 \text{ kN}$	$F_H = 400 \text{ kN}$
chargement en 3D	-	$F_x = F_y = \frac{F_H}{\sqrt{2}} = 565 \text{ kN}$	-

Pour chaque cas cité dans le tableau II.1, nous avons effectué deux calculs en affectant deux valeurs à la force verticale : une première valeur égale à la moitié de la force critique et une deuxième légèrement inférieure à la force critique de flambement. Les figures (II.16) et (II.17) montrent les déplacements et les moments fléchissants pour le pieu souple dans le cas d'un chargement 2D. Pour les autres cas, les résultats sont présentés dans l'annexe A-2.

Bien que l'influence de la charge verticale sur le comportement latéral (effet des non-linearités) soit importante pour  $F_v = F_{cr} / 2$  (cf § II.3.6), on remarque que les déplacements et les moments obtenus par GOUFLA, sont en très bonne concordance avec ceux obtenus par CESAR. Pour  $F_v = F_{cr}$ , on obtient une légère surestimation dans les résultats obtenus par CESAR. On peut tenter de justifier cette surestimation par le fait que, dans CESAR, la réaction du sol est modélisée par des ressorts placés aux extrémités des éléments de discrétisation. Par contre, dans GOUFLA, la réaction du sol est assimilée à une pression continue le long d'un élément de discrétisation.

Le but du calcul en 3D avec deux composantes dans le plan horizontal  $F_x$  et  $F_y$ , égale à la force précédente  $F_H$  divisée par  $\sqrt{2}$  (même résultante), était de vérifier ainsi que le calcul en 3D donne les mêmes résultats que le calcul en 2D. Tant pour GOUFLA que pour CESAR-LCPC, les résultats sont rigoureusement identiques.

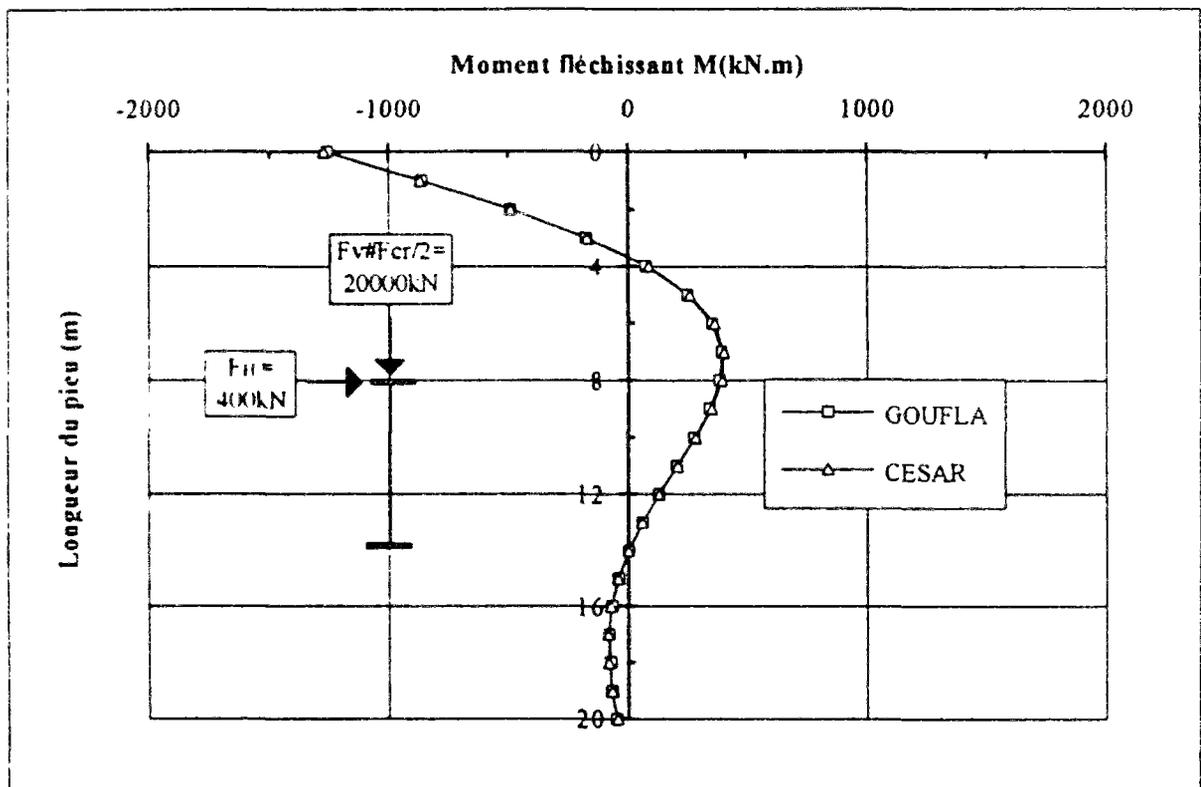
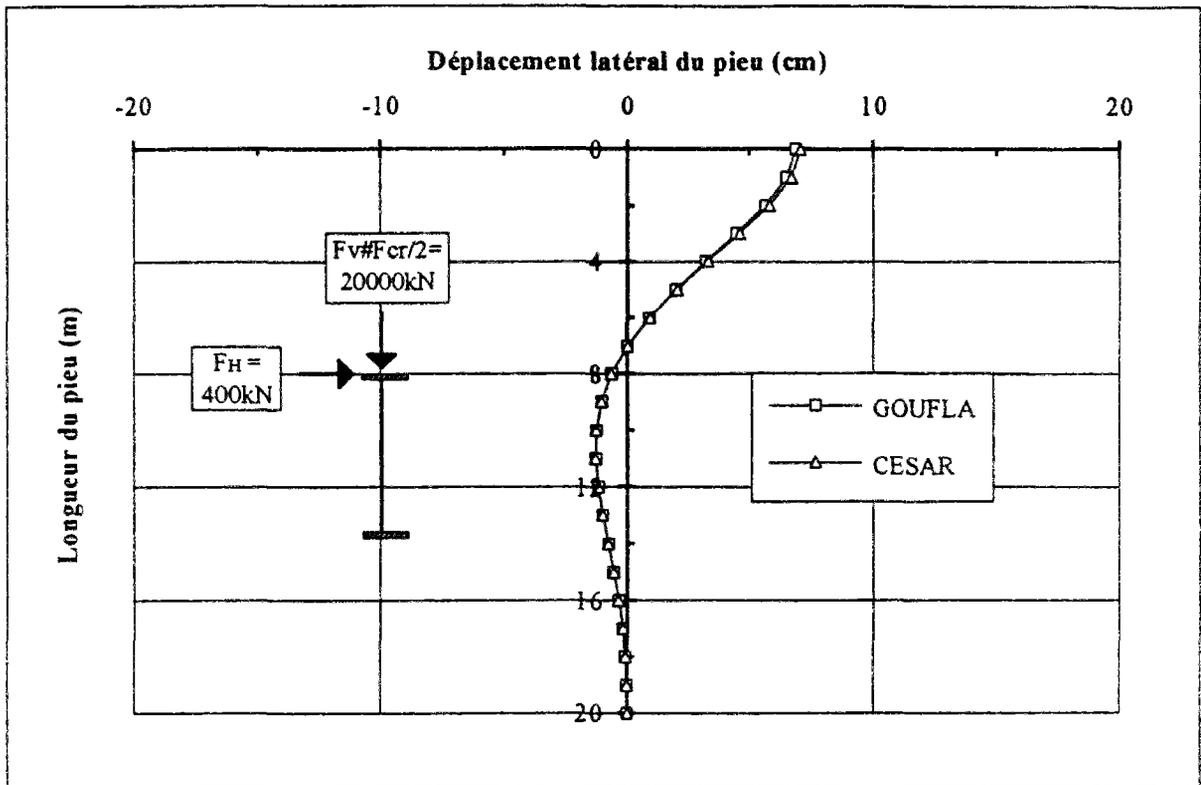


Fig. II.16 : Comparaison GOUFLA et CESAR-LCPC, pieu souple encastré aux deux côtés avec  $F_v = F_{cr} / 2$  (2D).

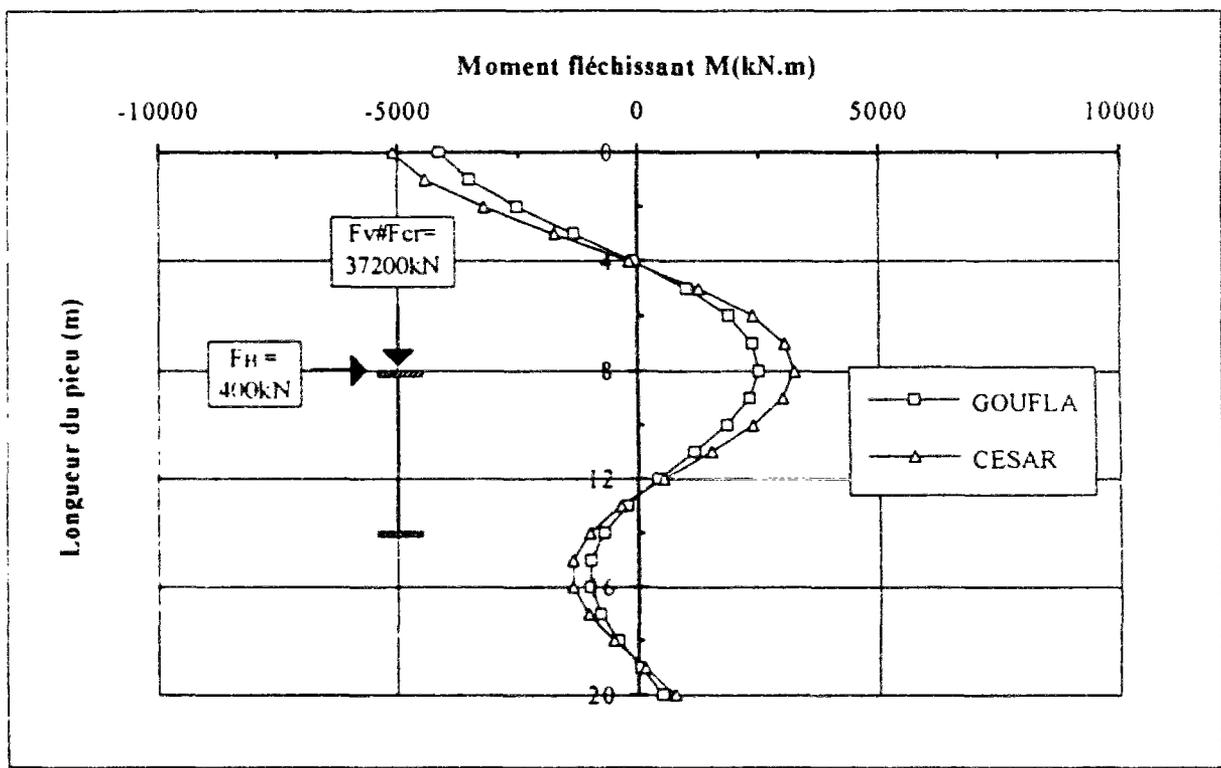
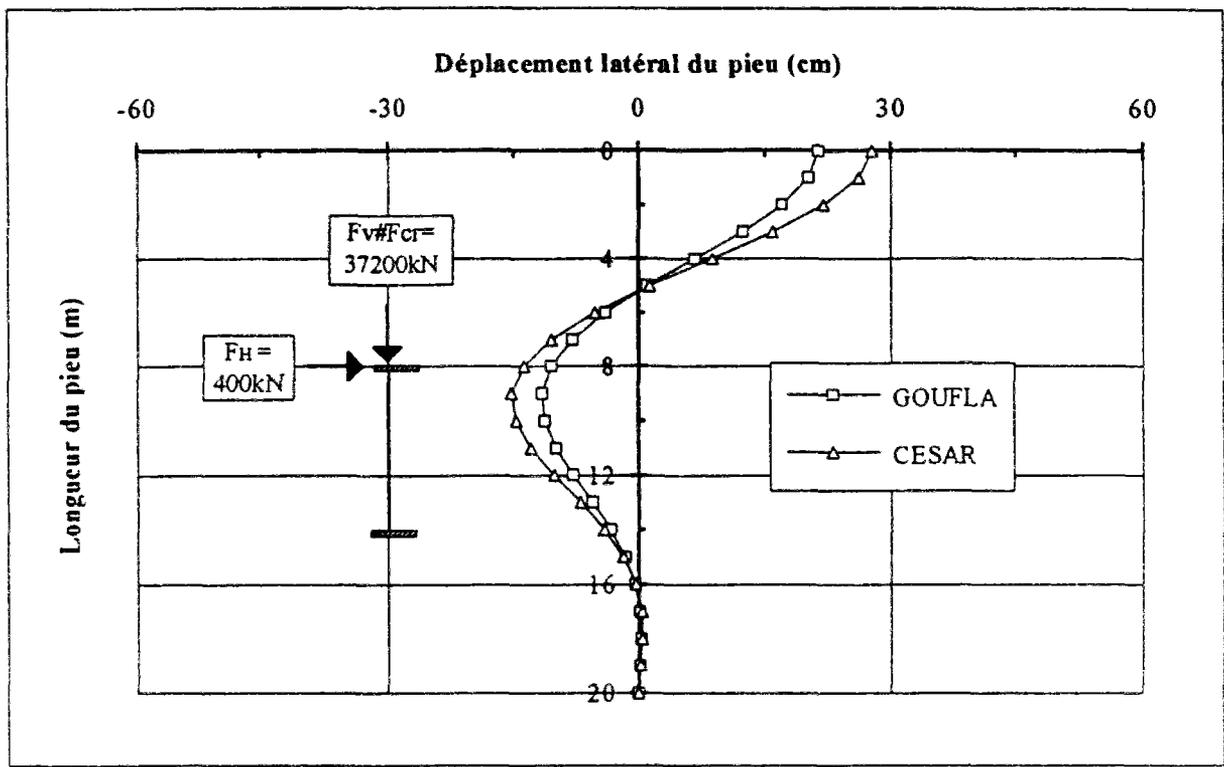


Fig. II.17 : Comparaison GOUFLA et CESAR-LCPC, pieu souple encastré aux deux côtés avec  $F_v = F_{cr}$  (2D).

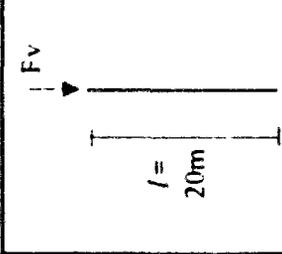
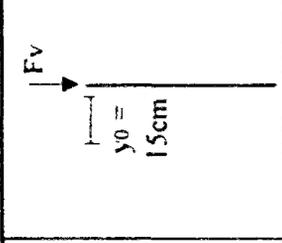
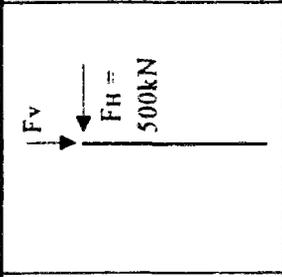
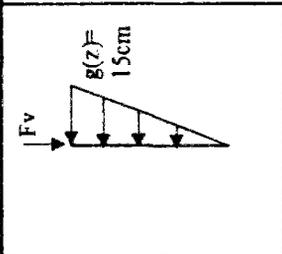
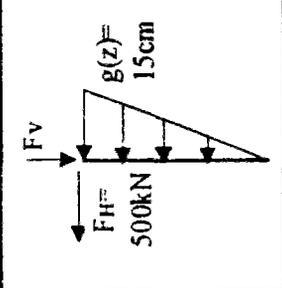
### II.3.7 Influence du type de chargement sur la force critique de flambement

Nous avons vu dans un paragraphe précédent (cf.§.II.3.7.1) que la force critique diminue quand le déplacement horizontal initial en tête du pieu augmente. Une étude paramétrique plus générale est faite pour étudier l'influence du type de chargement sur la valeur de la force critique de flambement. Les caractéristiques géométriques du pieu et mécaniques du sol sont celles du pieu souple ( $l/l_0 \approx 5$ ). Cinq conditions de chargement ont été étudiées :

- pieu chargé verticalement ;
- pieu chargé verticalement avec un déplacement initial  $y_0 = 15$  cm ;
- pieu chargé verticalement et horizontalement ( $F_H = 500$  kN) ;
- pieu chargé verticalement avec un déplacement linéaire du sol  $g(z)$  où  $g_0 = 15$  cm en tête du pieu et  $g(l) = 0$  en pointe du pieu ;
- pieu chargé verticalement et horizontalement ( $F_H = 500$  kN) avec un déplacement du sol  $g(z)$ .

Pour chaque type de chargement, nous avons étudié deux types de conditions aux limites: pieu encastré en tête dans un chevêtre mobile, encastré en pointe et pieu articulé aux deux extrémités. Le tableau II.2 regroupe les valeurs des forces critiques de flambement obtenues correspondant à chaque cas. D'après le tableau (II.2), on remarque que la force critique diminue quand on applique une force horizontale ou un déplacement initial horizontal en tête du pieu. Cette diminution est relativement plus importante dans le cas du pieu articulé que dans le cas du pieu encastré aux deux extrémités. De plus, la force horizontale a un effet plus important, dans la diminution de la force critique, que celui du déplacement horizontal.

Tableau II 2 : valeurs de la force critique correspondant à chaque cas de chargement.

					
Pieu encasté aux deux extrémités	48700 kN	42700 kN	29950 kN	43500 kN	26900 kN
Pieu articulé aux deux extrémités	35300 kN	28450 kN	7340 kN	29500 kN	6600 kN

$l$  : longueur du pieu ;

$F_v$  : force verticale en tête du pieu ;

$F_H$  : force horizontale en tête du pieu ;

$y_0$  : déplacement horizontal initial en tête du pieu ;

$g(z)$  : déplacement du sol.

## II.4 Conclusions

Le calcul de la réponse préflambement nécessite la prise en compte des non-linéarités géométriques (grands déplacements). Une nouvelle formulation théorique appelée "RDM locale " est développée dans le programme GOUFLA, pour tenir compte des non-linéarités géométriques dans le calcul d'un groupe de pieux. La théorie utilisée dans le programme GOUFLA consiste à écrire localement les équations de la RDM et à les projeter dans le repère matériel. L'utilisation du concept des rotations semi-tangentes, permet de généraliser la notion de matrice-transfert et de vecteur d'état au cas des non-linéarités géométriques comme la prise en compte de l'effort normal dans la flexion du pieu.

Dans le cas des faibles charges verticales, la prise en compte des non-linéarités n'apporte pas de modifications notables dans le résultat des moments et des déplacements donnés par le calcul classique de la RDM (GOUFIL). Une discrétisation numérique très fine et une haute précision sur la convergence ne sont pas nécessaires. Par contre, dans le cas des pieux fortement chargés, il faut tenir compte des non-linéarités (il y a un écart important entre les résultats obtenus par les programmes GOUFIL et GOUFLA). De plus, il est nécessaire d'adopter une discrétisation fine et une précision élevée sur la convergence. Une faible précision ou un grand pas de discrétisation peut réduire les valeurs des résultats numériques de moitié. Par contre, des valeurs trop faibles de la précision peuvent conduire à un nombre d'itérations supplémentaires important et inutile. Des valeurs concernant la discrétisation numérique et la précision sont conseillées dans le paragraphe (II.3.5).

Dans le programme GOUFLA, la force critique de flambement est donnée avec une très bonne précision par rapport à celle calculée par la théorie de Mandel (programme FLAMANDEL). De plus, les résultats de moments et déplacements obtenus par GOUFLA sont en très bonne concordance avec ceux obtenus par le code d'éléments finis CESAR-LCPC.

Enfin, l'application d'une charge horizontale, d'un déplacement horizontal initial en tête du pieu ou d'un déplacement du sol, a pour tendance de diminuer la force critique de flambement.



## **Chapitre III**

### **ESSAIS DE FLAMBEMENT DE MODELES REDUITS DE PIEUX SOUS CHARGES AXIALES.**

#### **III.1 Introduction**

Un programme d'essais de chargement axial sur des modèles réduits de pieux a été réalisé dans la centrifugeuse du LCPC Nantes. Le but de ces essais est de déterminer la force critique de flambement de pieux totalement fichés dans le sol (argile, sable), ceci pour différentes géométries et conditions aux limites. Au préalable, afin de valider le processus expérimental mis en oeuvre, nous avons réalisé une série d'essais à l'air libre et dans le sol à 1 g en dehors de la centrifugeuse (gravitation terrestre normale). Le programme d'essais comportent trois parties :

- essais de flambement de pieux à l'air libre (sans sol) à 1 g ;
- essais de flambement de pieux dans le sable à 1 g et à 50 g ;
- essais de flambement de pieux dans l'argile à 1 g et à 50 g ;

Ces essais sont accompagnés par des essais complémentaires, tels que :

- essais de traction pour la détermination des caractéristiques mécaniques du matériau utilisé pour les modèles réduits ;
- essais au mini-pénétromètre pour la détermination des caractéristiques mécaniques des massifs de sol

On présente d'abord les conditions expérimentales des essais ( modèles utilisés, dispositif de chargement, caractéristiques et constitution des massifs, procédures d'essais,...), puis on détaille les résultats obtenus. La confrontation entre l'expérience et la théorie est ensuite donnée dans le chapitre IV.

## III.2 Essais à l'air libre (sans sol) à 1 g

Une série de quarante essais de flambement de modèles réduits de pieux, à l'air libre (sans sol) à 1 g, a été réalisée afin de pouvoir déterminer la force critique de flambement et la comparer à celle établie par Euler (1744). Cette série nous a permis aussi de valider le processus expérimental (dispositif de chargement, capteur de force,...). Une autre série de douze essais à 1 g, a été réalisée sur des modèles réduits avec traitement numérique d'images afin de déterminer la déformée du pieu au moment du flambement.

### III.2.1 Caractéristiques géométriques et mécaniques des modèles

Les modèles utilisés sont des barrettes rectangulaires en aluminium de largeur  $B = 10$  mm ou  $B = 20$  mm, d'épaisseur constante 2 mm. La longueur propre du modèle varie suivant les conditions aux limites de façon à obtenir une longueur totale théorique de 300 mm.

Une série de cinq essais de traction a été réalisée, pour la détermination des caractéristiques mécaniques des modèles, notamment le module élastique  $E$ , la limite d'élasticité  $\sigma_e$  et la résistance à la traction ou contrainte de rupture  $\sigma_r$ . Le tableau III.1 récapitule les résultats des essais de traction avec les valeurs moyennes utilisées pour le calcul théorique de la force critique de flambement.

Tableau III.1: Résultats des essais de traction.

Numéro d'essai	Limite d'élasticité $\sigma_e$ (MPa)	Contrainte de rupture $\sigma_r$ (MPa)	Module d'élasticité $E$ (MPa)
1	197,75	221,39	60210
2	203,09	224,39	63100
3	197,92	221,39	61680
4	197,40	223,30	60540
5	202,31	227,61	60320
valeur moyenne	200	225	61000

### III.2.2 Conditions aux limites

Nous avons étudié cinq configurations de conditions aux limites pour les deux types de modèles ( $B = 10$  mm et  $B = 20$  mm), soient :

- pieu encasté aux deux extrémités EE10 ( $B = 10$  mm) et EE20 ( $B = 20$  mm) ;
- pieu encasté en tête et articulé en pointe EA10 et EA20 ;
- pieu articulé aux deux extrémités AA10 et AA20 ;

- pieu encastré en tête et simplement appuyé en pointe EA<sub>s</sub>10 et EA<sub>s</sub>20 ;
- pieu articulé en tête et simplement appuyé en pointe AA<sub>s</sub>10 et AA<sub>s</sub>20.

Les rotules et les pièces d'encastrement sont en aluminium Al 2027. Elles ont été étudiées et réalisées par l'équipe de la Section de Modélisation en Centrifugeuse du LCPC Nantes. La figure III.1 montre les pièces d'encastrement et d'articulation ainsi que la longueur du pieu à considérer dans les deux cas.

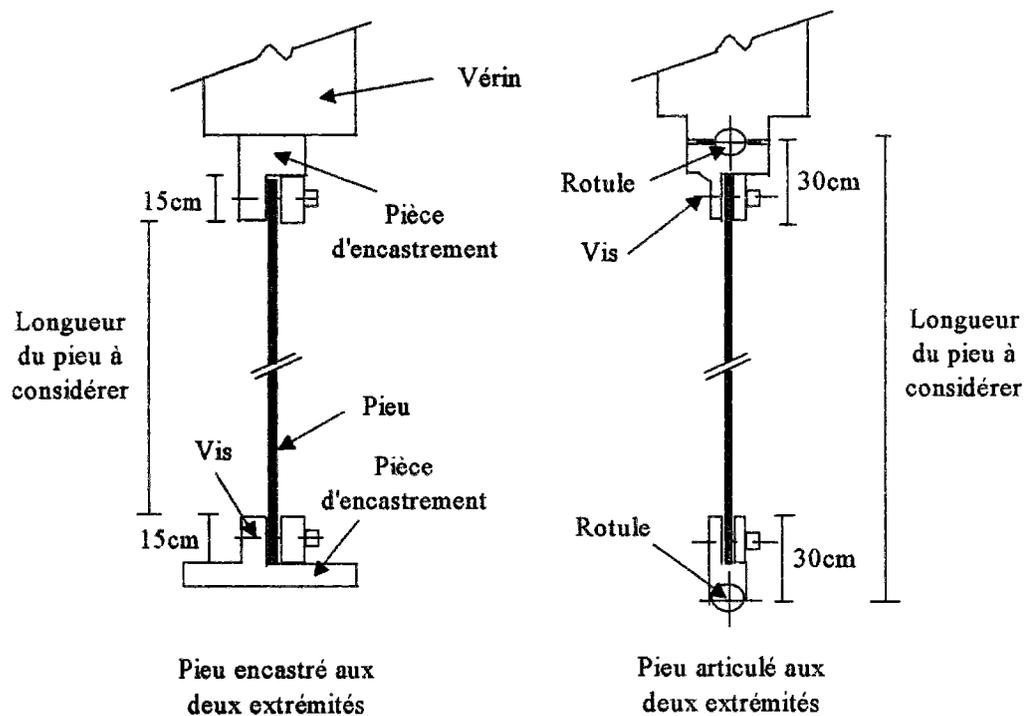


Fig. III.1 : Conditions d'appui (rotule, encastrement).

### III.2.3 Dispositif de chargement

Le chargement est assuré par un vérin hydraulique qui se déplace à une vitesse de 0,48 m/s. Le vérin est fixé à une poutre de réaction s'appuyant sur les parois latérales du conteneur dans lequel est placé le modèle (fig. III.2). Le vérin est équipé de capteurs d'effort et de déplacement pour mesurer la charge appliquée et le déplacement vertical de la tête du pieu. Le même dispositif est utilisé pour les essais de flambement dans le sol à 1 g et à 50 g.

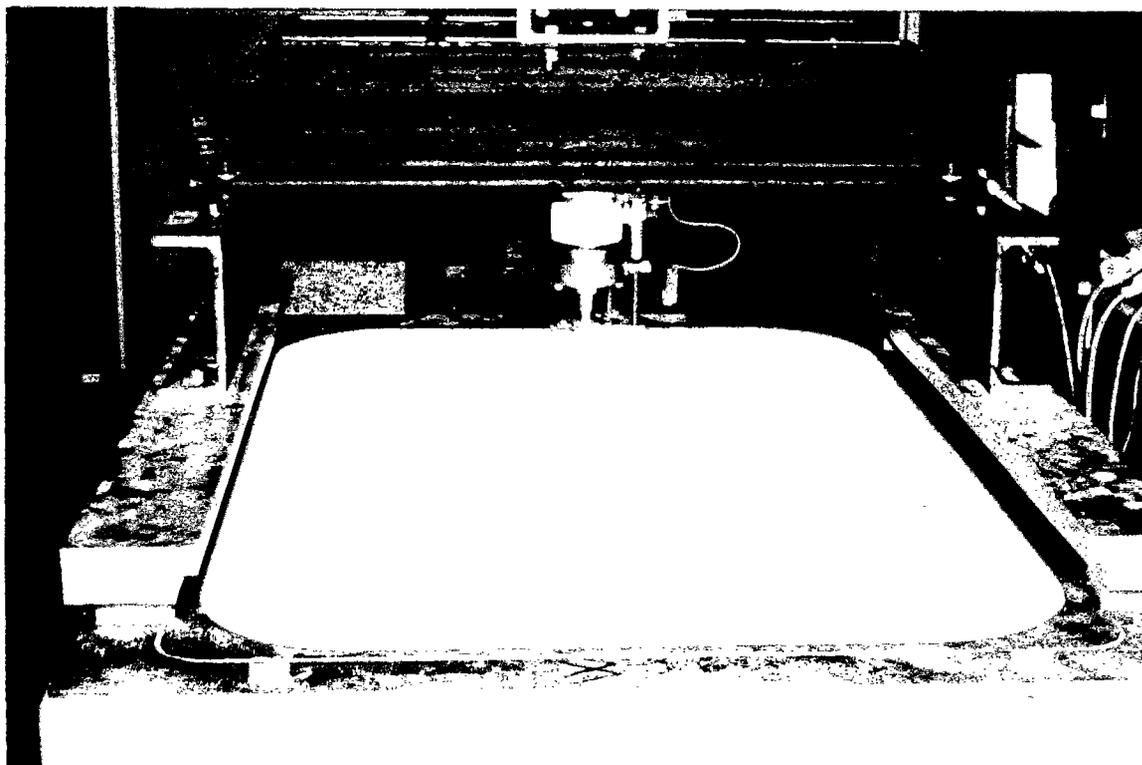


Fig. III.2 : Dispositif de chargement.

#### III.2.4 Résultats des essais de flambement

Plusieurs essais de flambement ont été réalisés pour chaque jeu de conditions aux limites cité ci-dessus, afin de tester la fiabilité des moyens de mesures et la répétabilité des résultats. Au total quarante essais ont été réalisés. Les figures III.3 et III.4 montrent un exemple des essais de flambement à l'air libre.

Les figures III.5 et III.6 représentent les courbes de chargement obtenues dans le cas de pieux encastrés aux deux extrémités, ayant pour largeur respectivement  $B = 10$  mm et  $B = 20$  mm. Pour les autres conditions aux limites, les courbes de chargement sont présentées dans l'annexe B-1.

Les courbes de chargement présentent au début de l'essai un comportement élastique stable, puis une augmentation des déplacements sous une force constante. A la fin de l'essai, le vérin ne peut plus suivre le déplacement et la force diminue : c'est la ruine du modèle. La force critique de flambement correspond au maximum de la courbe de chargement. Le tableau III.2 récapitule l'ensemble des expériences effectuées à l'air libre à 1 g et donne les valeurs expérimentales minimales, maximales et théoriques de la force critique de flambement. Ces dernières sont calculées d'après la formule d'Euler (cf.§.I.3.1)

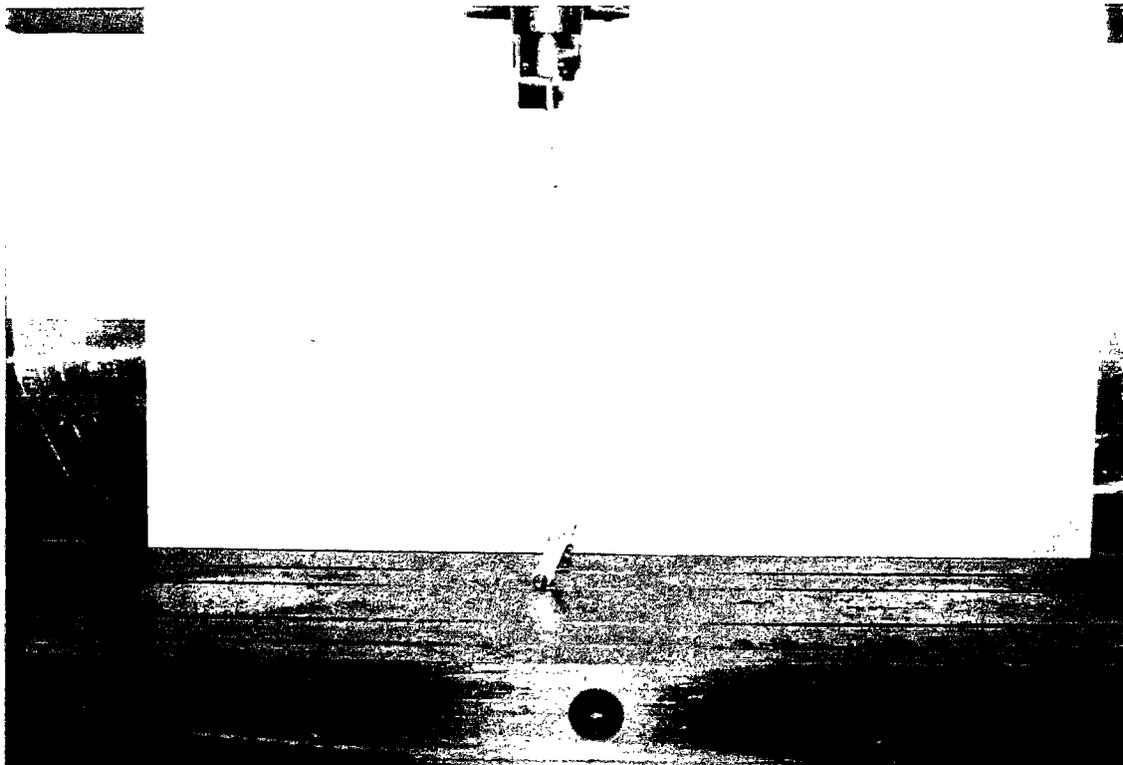


Fig III.3 : Essai de flambement à l'air libre (sans sol) à 1 g.  
Pieu encastré en tête, articulé en pointe.

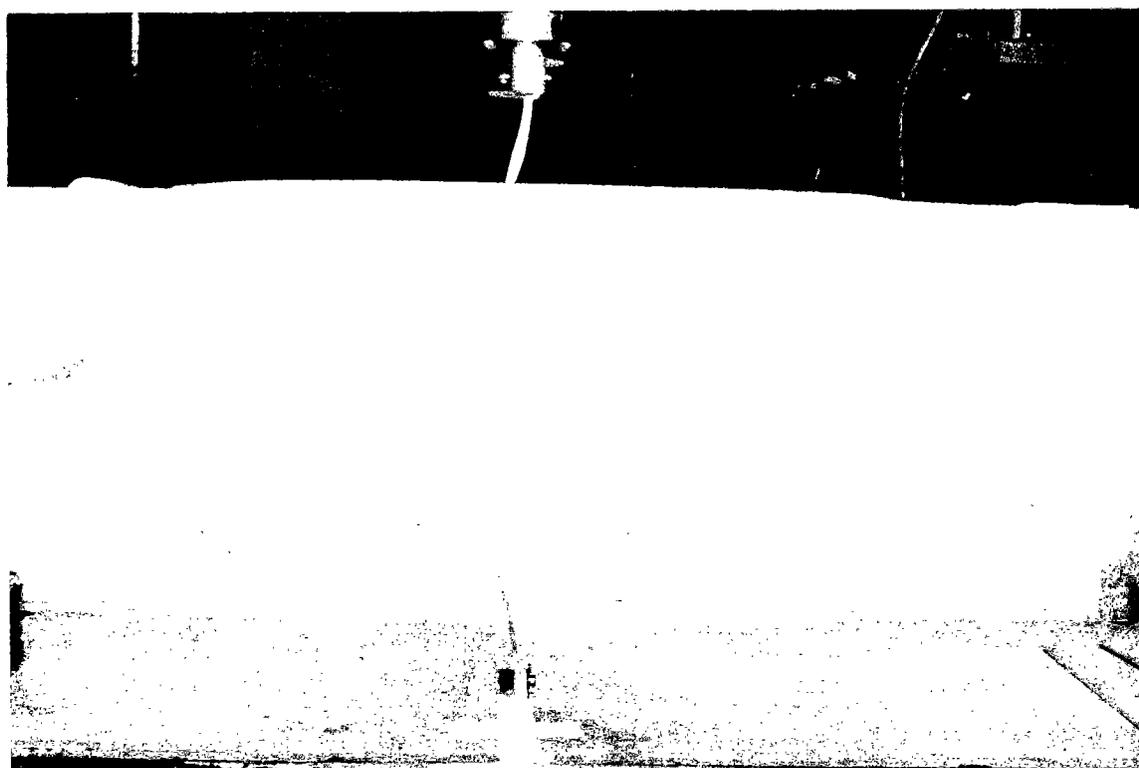


Fig III.4 : Essai de flambement à l'air libre (sans sol) à 1 g  
Pieu encastré aux deux extrémités.

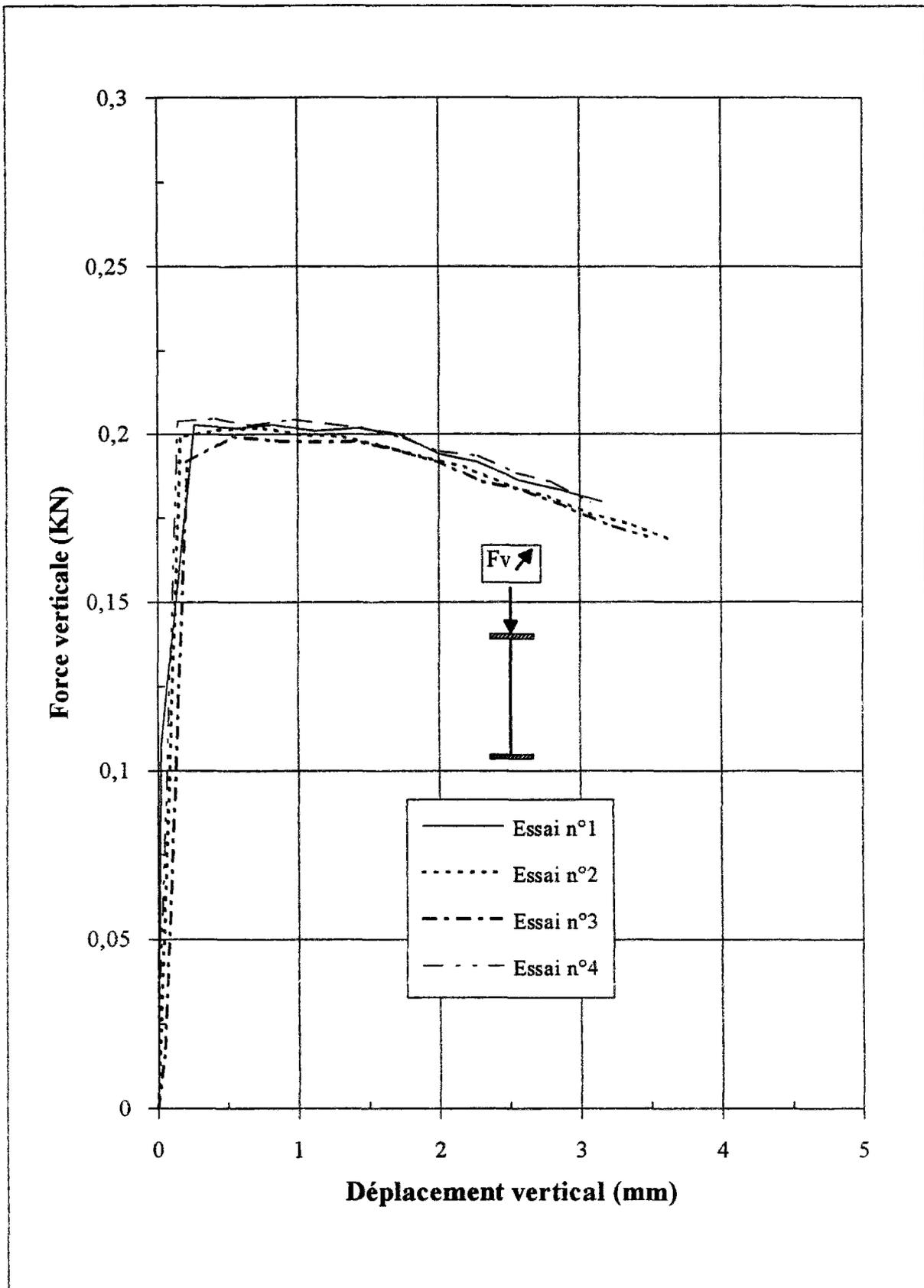


Fig. III.5 : Essais de flambement à l'air libre à 1 g. Pieu de largeur 10 mm, encastré aux deux extrémités (EE10).

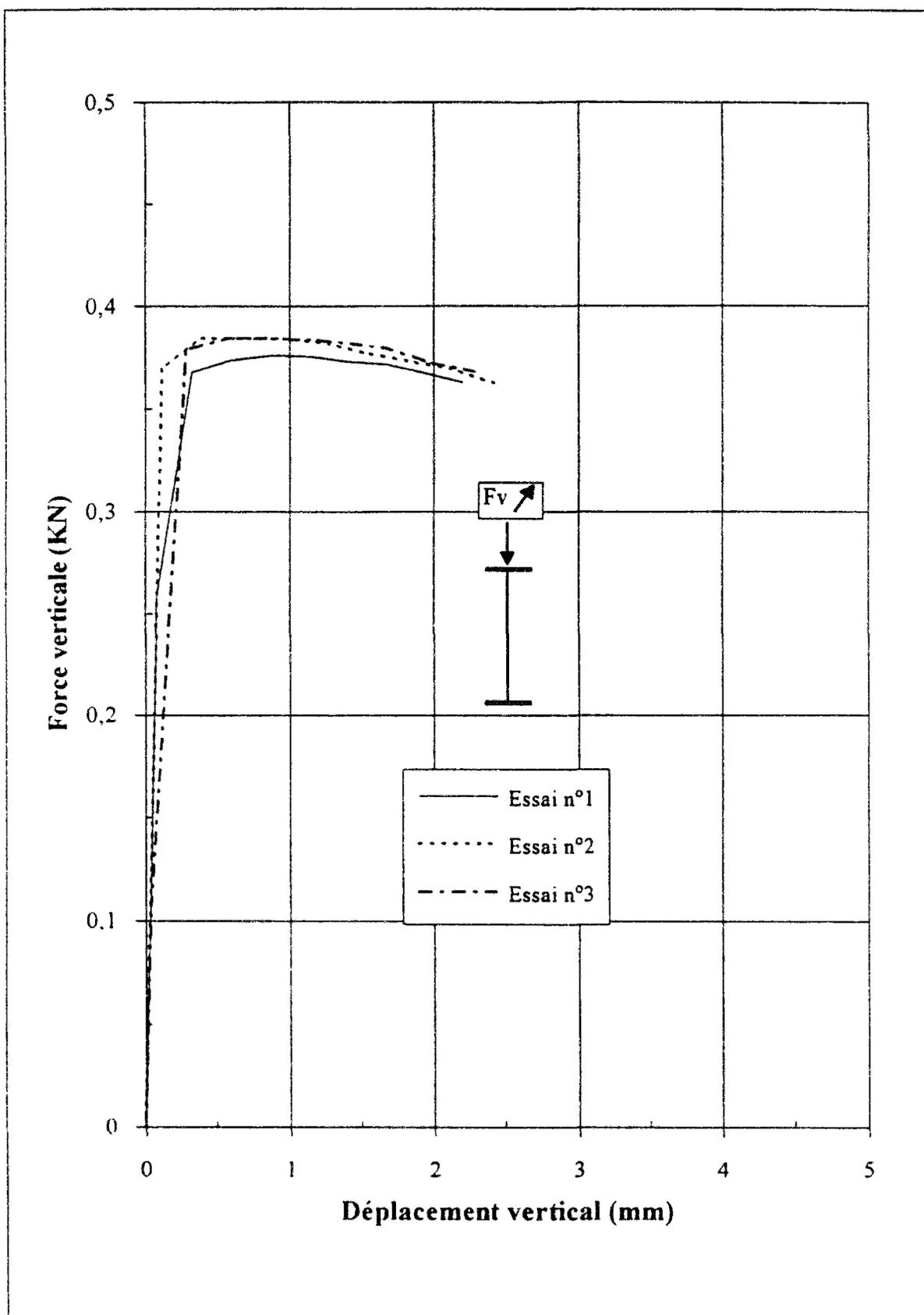


Fig. III.6 : Essais de flambement à l'air libre à 1 g. Pieu de largeur 20 mm, encasté aux deux extrémités (EE20).

Tableau III.2: Résultats des essais de flambement à l'air libre à 1 g.

Type d'essai	Nombre d'essais	Force critique expérimentale minimale (kN)	Force critique expérimentale maximale (kN)	Force critique expérimentale moyenne (kN)	Force critique d'Euler (kN)	$\frac{F_{\text{crex}} - F_{\text{crE}}}{F_{\text{crE}}}$ %
AA10	6	0,051	0,064	0,057	0,051	+ 11,7 %
AA <sub>10</sub>	6	0,052	0,063	0,056	-	-
AA20	5	0,102	0,120	0,106	0,101	+ 5 %
AA <sub>20</sub>	3	0,113	0,122	0,118	-	-
EA20	4	0,204	0,208	0,206	0,208	- 0,95 %
EA <sub>20</sub>	3	0,202	0,223	0,213	-	-
EA10	3	0,108	0,110	0,109	0,104	+ 4,8 %
EA <sub>10</sub>	3	0,120	0,129	0,123	-	-
EE10	4	0,199	0,204	0,202	0,203	- 0,5 %
EE20	3	0,375	0,384	0,381	0,406	- 6 %

D'après le tableau (III.2), on constate une faible dispersion de la force critique de flambement, de l'ordre de  $\pm 5 \%$ , par rapport à la moyenne faite pour les essais du même type. Les résultats expérimentaux obtenus sont en accord avec les forces critiques théoriques d'Euler. L'écart entre les valeurs expérimentales et théoriques varie de  $- 6 \%$  pour le pieu EE20 à  $+ 11 \%$  pour le pieu AA10.

Cet écart provient probablement des conditions d'appui qui ne produisent pas des articulations et des encastremements idéaux. On remarque aussi que, pour une même condition en tête, on obtient une légère différence entre les forces critiques obtenues dans les cas des pieux simplement appuyés et articulés en pointe. Cet écart varie entre  $3,5 \%$  pour le pieu EA20 et  $13 \%$  pour le pieu EA10. Cette différence est due au fait que la pointe simplement appuyée ne peut pas constituer une articulation parfaite, de plus, la surface de contact avec le sol est plus grande que dans le cas d'une pointe munie d'une rotule.

### III.2.5 Mesure du déplacement par analyse d'images

Le traitement d'images est une technique récente (1970) qui consiste à traiter numériquement des images enregistrées par une caméra CCD (Charged Coupled Device). Pour satisfaire aux besoins réels du traitement d'images, un outil informatique (PICTURE-01) a été réalisé au sein du groupe analyse d'images, Section instrumentation du Service physique du LCPC de Nantes, et mis au point avec l'aide de J. Charrier (Moliard, 1992).

Pour le suivi des déformations du pieu, on colle sur la face vue par la caméra, des rectangles de papier marqués en leur milieu d'un cercle plein, de couleur noire (fig. III.7). Ces marqueurs sont distants de 25 mm. La couleur des marqueurs est choisie en fonction de celle du matériau suivi, de manière à avoir un contraste maximum. Chaque marqueur est encadré par une fenêtre en papier de teinte uniforme et suffisamment étendue. La diminution de la taille des marqueurs entraîne un temps d'analyse plus court et une meilleure précision des résultats. En plus des marqueurs collés sur la structure, il faut prévoir des marqueurs fixes, au moins trois, formant un angle droit. Ces derniers serviront de référence lors de transformation de pixels en millimètres ( pixel = plus petit élément d'une image).

La caméra avec son éclairage est placée devant le modèle et visionne les images successives pendant la descente du vérin, qui est de 20 secondes environ. Les images du flambement sont enregistrées par le magnétoscope. Un signal est émis sur la bande son du magnétoscope, simultanément aux cycles de mesures déclenchés par le calculateur relié aux chaînes d'acquisitions.

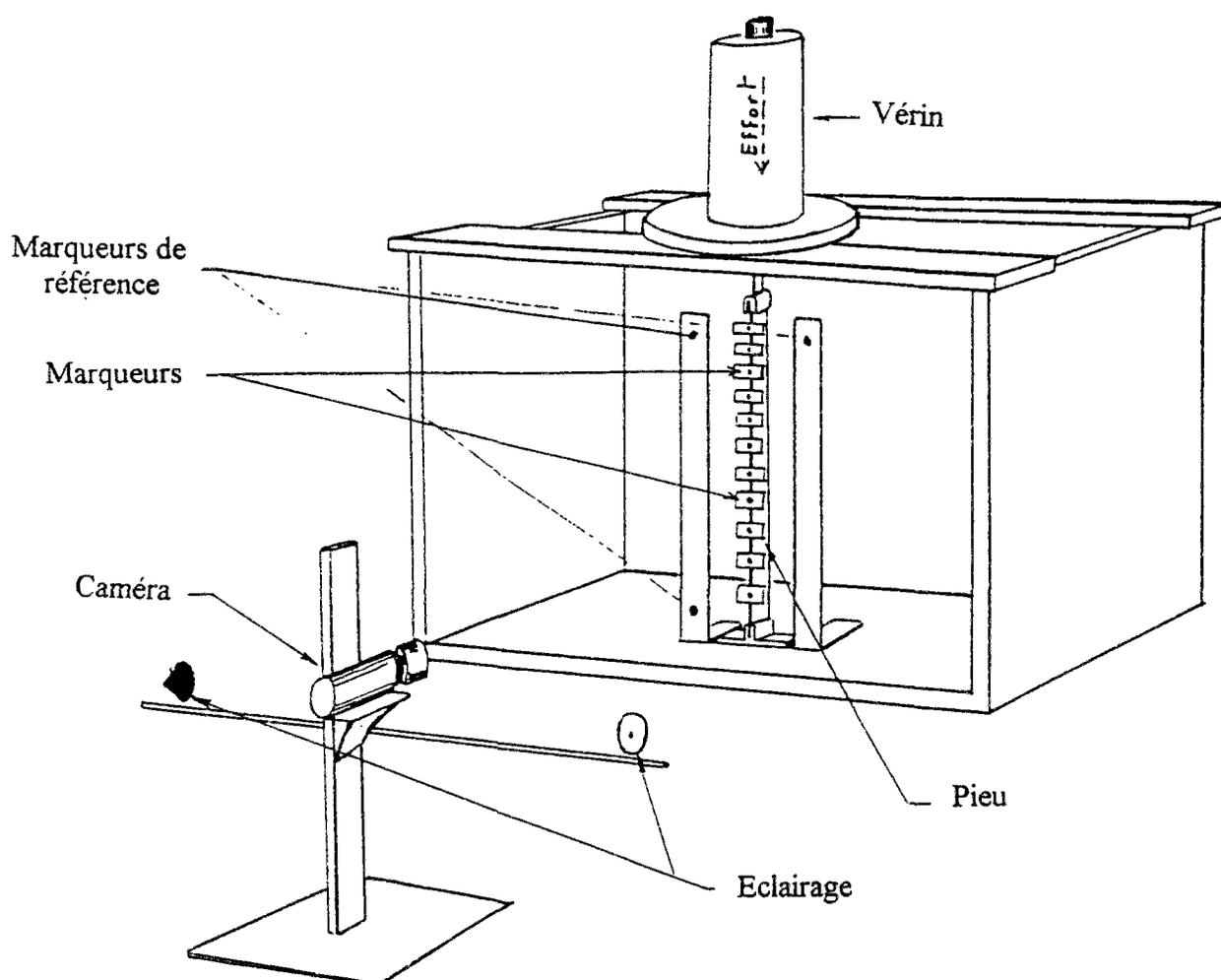


Fig. III.7 : Essai de flambement à l'air libre avec traitement d'images (Moliard, 1992).

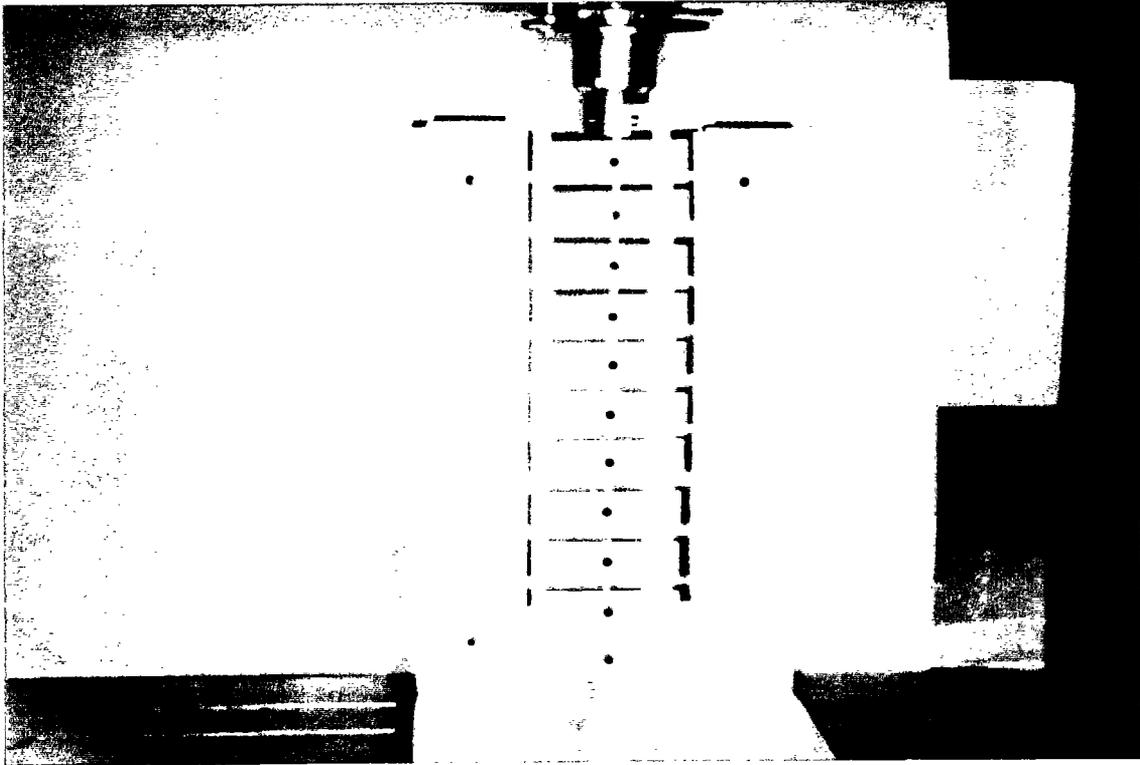


Fig III.8 : Essai de flambement avec traitement d'images, Pieu encastré aux deux extrémités (EE20) - position initiale

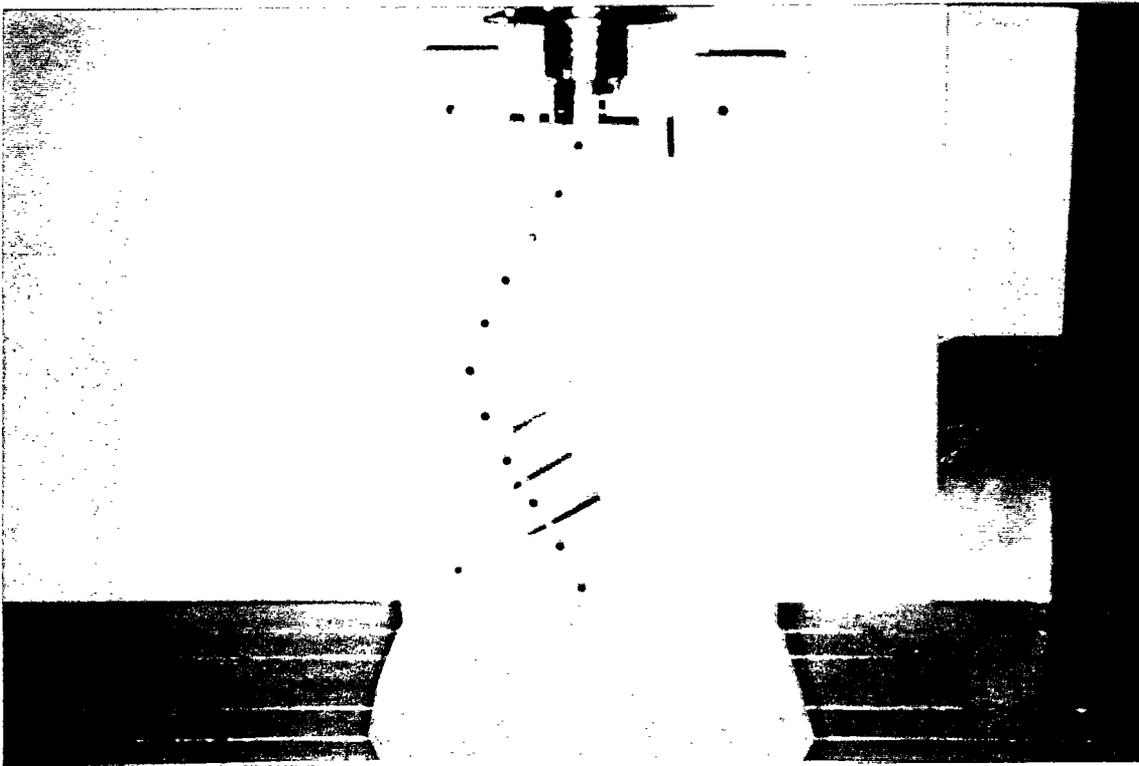


Fig III.9 : Essai de flambement avec traitement d'images, Pieu encastré aux deux extrémités (EE20) - position après flambement.

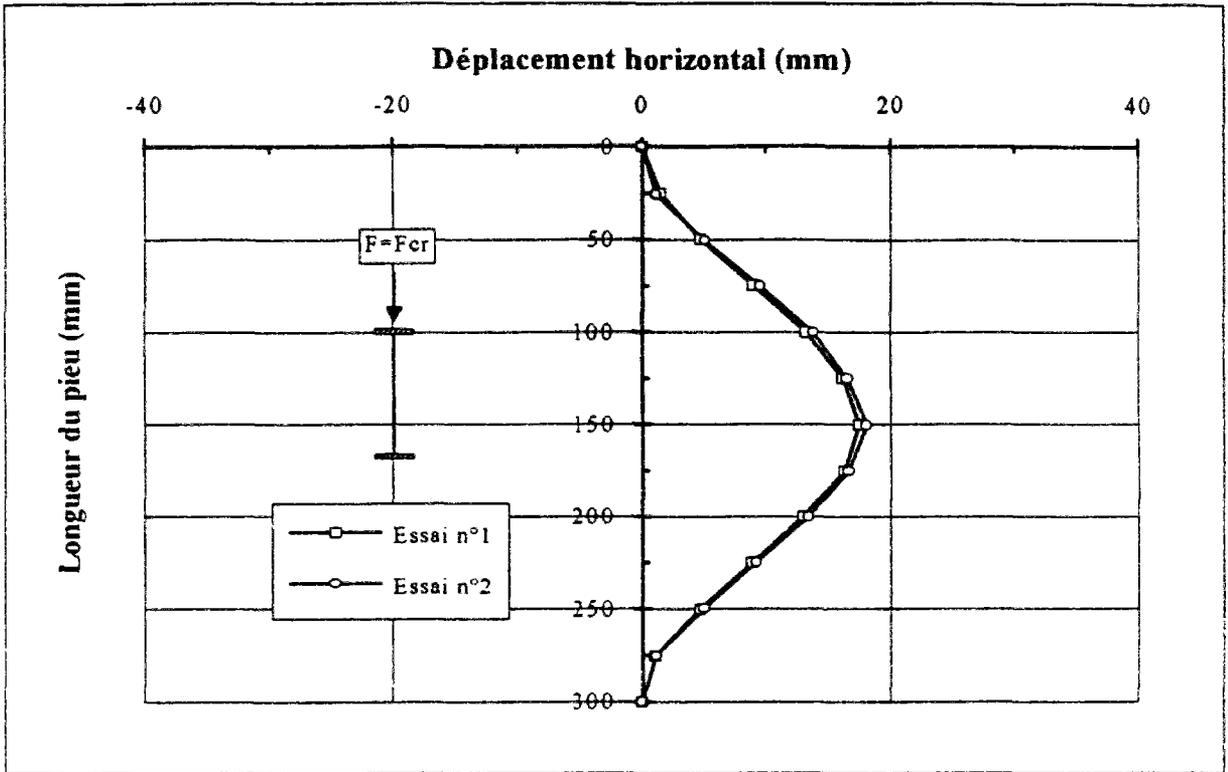


Fig III.10 : Déformée au moment du flambement déterminée par analyse d'images. Pieu encasté aux deux extrémités (EE20).

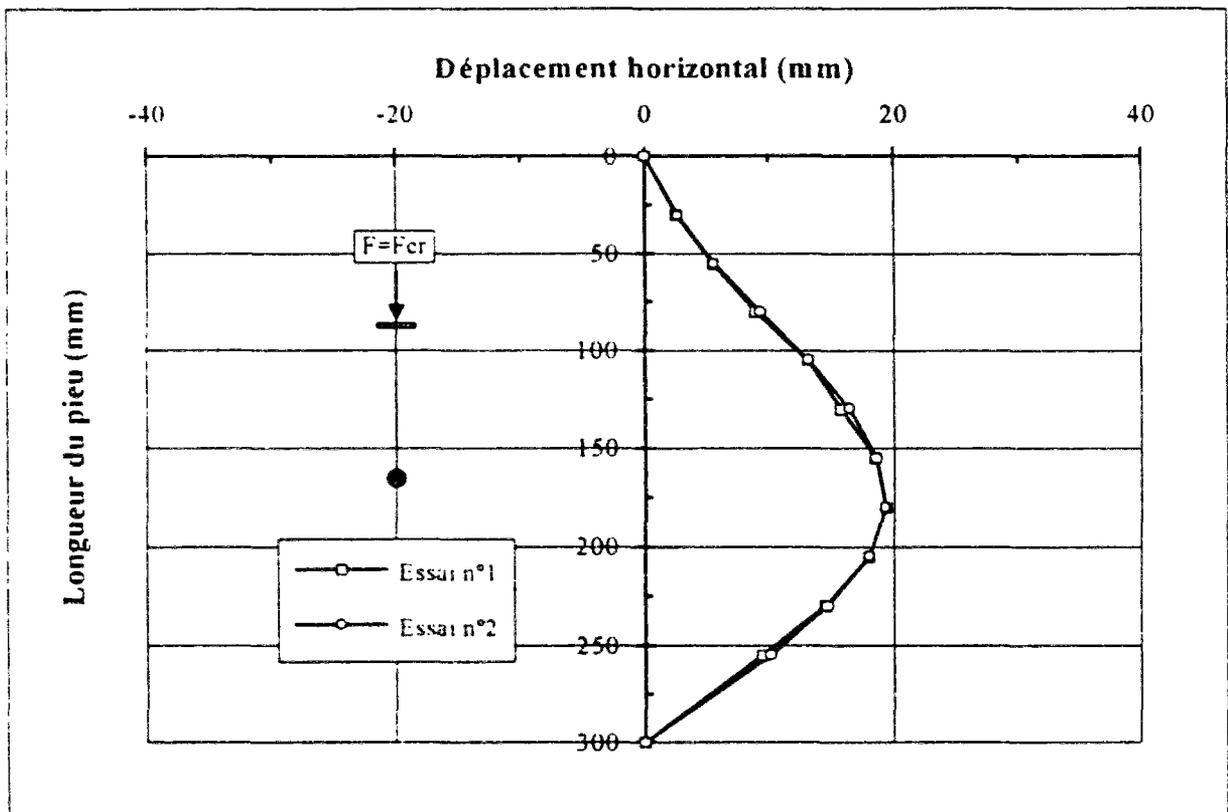


Fig III.11 : Déformée au moment du flambement déterminée par analyse d'images. Pieu encasté en tête et articulé en pointe (EA20).

Dans un second temps, le logiciel PICTURE-01 d'analyse et de traitement effectue les dépouillements. Un fichier a été au préalable ouvert et reçoit à l'issue de chaque traitement les coordonnées en pixels des centres de gravité de chacun des marqueurs. Le numéro de l'image et le temps en secondes sont également stockés. L'origine du temps est pris lors de la première acquisition. Un autre fichier contenant les coordonnées des centres de gravité en millimètres est déduit à partir du fichier de pixels, en ayant recours à une transformation, qui n'est autre que le rapport d'une distance en pixels et d'une distance en millimètres. L'exploitation de ces fichiers contenant les coordonnées des différents marqueurs à un instant donné permet ensuite l'étude des champs de déplacement et des champs de vitesse.

Au total, douze essais ont été réalisés pour trois configurations de conditions aux limites et deux géométries différentes. Les cas étudiés sont les suivants : AA10, AA20, EE10, EE20, EA10 et EA20. Pour chaque cas, deux essais ont été effectués pour déterminer la déformée du pieu sous une charge axiale égale à la force critique de flambement. Les figures III.8 et III.9 montrent un essai de flambement avec traitement d'images. Les figures III.10 et III.11 montrent les déformées au moment du flambement, pour deux modèles de largeur 20 mm, l'un encastré aux deux extrémités, l'autre encastré en tête et articulé en pointe. Les déformées relatives aux autres cas, sont présentées dans l'annexe B-2. L'allure des déformées obtenues est conforme aux prévisions théoriques d'Euler.

### **III.3 Essais dans le sol**

En plus de la série d'essais de flambement à l'air libre, une autre série a été menée dans des massifs de sol reconstitués, d'une part, dans le sable de Fontainebleau moyennement dense, et d'autre part, dans l'argile Speswhite molle (Kaolin).

Avant d'aborder les conditions expérimentales des essais et les résultats obtenus, nous présentons un bref rappel historique de la technique de modèles réduits et les concepts de base de cette méthode tels qu'ils sont présentés par Corté et Garnier (1986).

#### **III.3.1 Centrifugation : généralités et conditions de similitude**

L'idée de l'utilisation de modèles réduits centrifugés est ancienne; elle a été proposée par Edouard Phillips en 1869. Cependant, cette idée n'a été mise en application que soixante ans plus tard aux Etats-Unis et tout de suite après en ex-Union Soviétique. Le développement de la technique de modélisation par centrifugeuse, dans le domaine du génie civil, a débuté en 1970 en Grande Bretagne et au Japon. En France, c'est à partir de 1973 que les essais sur modèles centrifugés ont commencé dans le domaine du génie civil suite aux travaux réalisés au Centre d'Etudes Scientifiques et Techniques d'Aquitaine.

Pour observer les mêmes phénomènes sur un ouvrage en grandeur réelle, parfois appelé prototype (indice p) et sur son modèle à échelle réduite (indice m), il est nécessaire de

respecter, entre les différentes grandeurs physiques qui interviennent, certaines relations dites conditions de similitude. Ces conditions peuvent être déduites à partir des équations différentielles d'équilibre des solides élastiques en traduisant leur invariance dans un changement d'unités. Nous nous limitons dans ce rappel aux conditions de similitude valables pour des phénomènes quasi statiques pour lesquels l'approximation milieu continu peut être faite. Pour les milieux continus, les équations indéfinies d'équilibre de la mécanique sont (Corté et Garnier, 1986) :

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \left( g_i - \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} \right) = 0 \quad (\text{III.1})$$

où  $x_j$  désignent les coordonnées ;

$\sigma_{ij}$  : composantes du tenseur de contrainte ;

$\xi_i$  : composantes du vecteur déplacement ;

$g_i$  : composantes du vecteur force de masse ;

$\rho$  : masse volumique ;

$t$  : temps.

Si on réalise un modèle dont les échelles par rapport à l'ouvrage réel ou prototype sont:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \frac{\sigma_m}{\sigma_p} & ; & & l^* &= \frac{l_m}{l_p} & ; & & \rho^* &= \frac{\rho_m}{\rho_p} \\ g^* &= \frac{g_m}{g_p} & , & & \xi^* &= \frac{\xi_m}{\xi_p} & \text{ et } & & t^* &= \frac{t_m}{t_p} \end{aligned}$$

l'équation (III.1) s'écrit :

$$\frac{\sigma^*}{l^*} \sum_j \frac{\partial \sigma_{pi}}{\partial x_{pj}} + \rho^* \rho_p \left( g^* g_{pi} - \frac{\xi^*}{t^{*2}} \frac{d^2 \xi_{pi}}{dt_p^2} \right) = 0 \quad (\text{III.2})$$

$l^*$  étant l'échelle de réduction de longueur

L'équation restera formellement vérifiée si les échelles satisfont aux deux conditions .

$$\sigma^* = \rho^* g^* l^* \text{ et } \xi^* = g^* t^{*2}. \quad (\text{III.3})$$

Pour recevoir le même état de contraintes ( $\sigma^* = 1$ ) sur le modèle réduit ( $l^* \ll 1$ ), en conservant le même matériau ( $\rho^* = 1$ ), il faut accroître les forces de masse appliquées au modèle selon la relation .

$$g^* l^* = 1. \quad (\text{III.4})$$

Ce résultat peut être obtenu en pratique par la centrifugation du modèle, où l'accélération centrifuge créée par une mise en rotation du modèle à vitesse constante permet d'accroître la

pesanteur qui s'applique à la maquette, dans le rapport inverse de l'échelle des longueurs. Le tableau III.3 regroupe une liste de facteurs d'échelle s'appliquant à la similitude produite dans la modélisation en centrifugeuse.

Tableau III.3 : Facteurs d'échelle pour des essais en centrifugeuse faits à  $N_g$  avec les mêmes matériaux que dans l'ouvrage prototype (Corté, Garnier 1986).

Grandeur du modèle / Grandeur du prototype	
Masse volumique	1
Longueur	1 / N
Déplacement	1 / N
Temps	1 / N (problème dynamique)
Temps	1 / N <sup>2</sup> (prob. de diffusion)
Force	1 / N <sup>2</sup>

Il est à noter que le champ des forces centrifuges est radial, et par conséquent différent du champ gravitationnel qui induit à l'échelle du prototype des forces parallèles. L'écart devient d'autant plus faible que les dimensions du modèle sont négligeables par rapport au rayon de la centrifugeuse.

La centrifugeuse du LCPC que nous utilisons est mise en service depuis 1986. Elle est destinée aux travaux de recherche en génie civil, notamment en mécanique des sols.

La figure (III 12) montre le domaine d'application de la centrifugeuse du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Pour une description détaillée des appareillages de la centrifugeuse du LCPC et de son mode de fonctionnement, on pourra se reporter à l'article de Corté et Garnier (1986) concernant ce sujet.

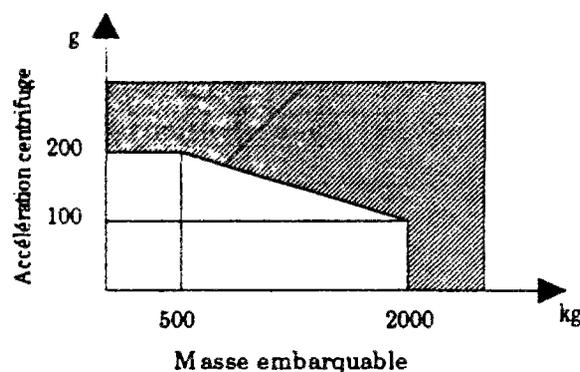


Fig. III.12 : Domaine d'application de la centrifugeuse de LCPC (Corté et Garnier 1986).

### III.3.2 Récapitulation des essais dans le sol

Au total, une cinquantaine d'essais, répartis sur cinq conteneurs, ont été réalisés. Une partie de ces essais a été effectuée sur des modèles réduits à 1 g, et l'autre partie sur des modèles réduits centrifugés à 50 g. Dans les deux cas, les modèles de pieux ont été complètement fichés dans le sol. Plusieurs conditions aux limites ont été étudiées. Le tableau III.4 récapitule l'ensemble des essais effectués en donnant les géométries des modèles, les conditions aux limites et le nombre d'essais réalisé dans chaque conteneur.

Tableau III.4 : Essais de flambement sur modèles réduits dans le sol.

Type d'Essai	Sable de Fontainebleau moyennement dense $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$			Argile Speswhite molle $\gamma_h = 16,41 \text{ kN/m}^3$		
	conteneur 1	conteneur 3	conteneur 4	conteneur 2	conteneur 5	
	50 g	1 g	50 g	50 g	1 g	50 g
AA <sub>10</sub>	3	-	-	3	-	-
AA <sub>20</sub>	4	-	-	3	-	-
EA <sub>10</sub>	2	4	4	1	3	3
EA <sub>20</sub>	3	4	4	1	2	3
EE10	-	2	2	-	-	-
EE20	-	2	2	-	-	-

### III.3.3 Massifs de sol

#### III.3.3.1 Caractéristiques des matériaux utilisés

Le sable de Fontainebleau est de la silice presque pure, dont 90 % des éléments sont de dimensions inférieures à 300  $\mu$ . Etant donné sa finesse, ce sable est souvent utilisé dans les essais en centrifugeuse où il est nécessaire que l'effet de la taille des grains soit négligeable. C'est un matériau purement frottant, propre et homogène. La figure III.13 montre la courbe granulométrique du sable de Fontainebleau, réalisée par le Danish Geotechnical Institute.

Le tableau III.5 récapitule les principales caractéristiques du sable de Fontainebleau blanc utilisé.

Tableau III.5 Caractéristiques du sable de Fontainebleau blanc.

$\gamma_h$ (kN/m <sup>3</sup> )	$\gamma_{d\min}$ (kN/m <sup>3</sup> )	$\gamma_{d\max}$ (kN/m <sup>3</sup> )	$e_{\min}$	$e_{\max}$	$\frac{(d_{30})^2}{d_{60} \times d_{10}}$
26,44	13,64	16,83	0,615	0,940	$\cong 1$

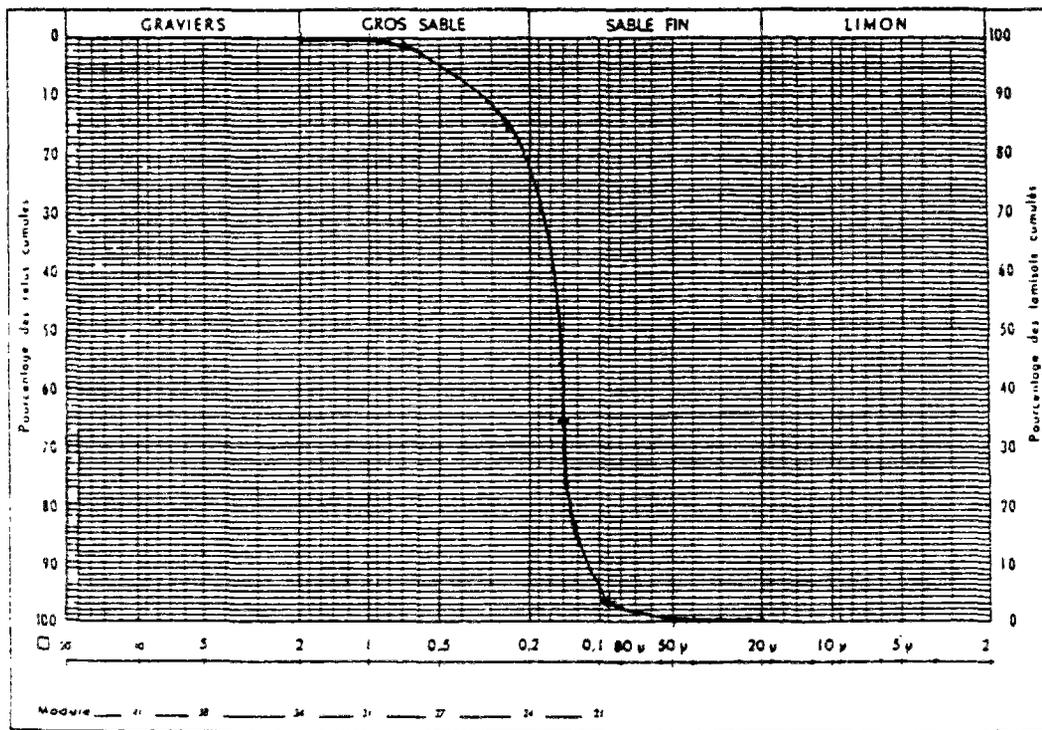


Fig. III.13 : Courbe granulométrique du sable de Fontainebleau utilisé.

L'argile utilisée est reconstituée à partir de la poudre de Kaolin que l'on appelle argile "Speswhite". Plusieurs essais (oedomètre, triaxial, ...) ont été réalisés au LCPC Nantes pour caractériser cette argile et dont les principaux résultats sont regroupés dans le tableau III.6.

Tableau III.6 . Caractéristiques de l'argile Speswhite reconstituée.

$\gamma_h$ (kN/m <sup>3</sup> )	$\gamma_d$ (kN/m <sup>3</sup> )	$w_l$	$w_p$	$I_p$	$e_{min}$	$e_{max}$	$C_v$ (m <sup>2</sup> /s)	$k$ (m/s)
14 à 18	10 à 15	55	26	29	1	1,5	2 à 7.10 <sup>-7</sup>	0,5 à 10 10 <sup>-9</sup>

### III.3.3.2 Constitution des massifs de sol

#### a) Massif de sable

Le sable de Fontainebleau est déposé par pluviation à l'aide d'une trémie mobile, se déplaçant de façon continue au dessus du conteneur (Garnier, Cottineau 1988). Cette trémie est constituée d'un bac métallique muni à sa base d'une fente par laquelle le sable s'écoule. L'ouverture de la fente, la vitesse de déplacement et la hauteur de chute du sable ont fait l'objet d'un étalonnage préalable pour obtenir une densité sèche voisine de 15,53 kN/m<sup>3</sup> correspondant à un sable moyennement dense. La trémie du LCPC permet d'obtenir un massif de sable homogène de densité connue. Cette densité est une fonction croissante de la hauteur de chute, décroissante de la largeur de la fente. La figure III.14 montre une vue globale de la salle de pluviation au LCPC de Nantes.

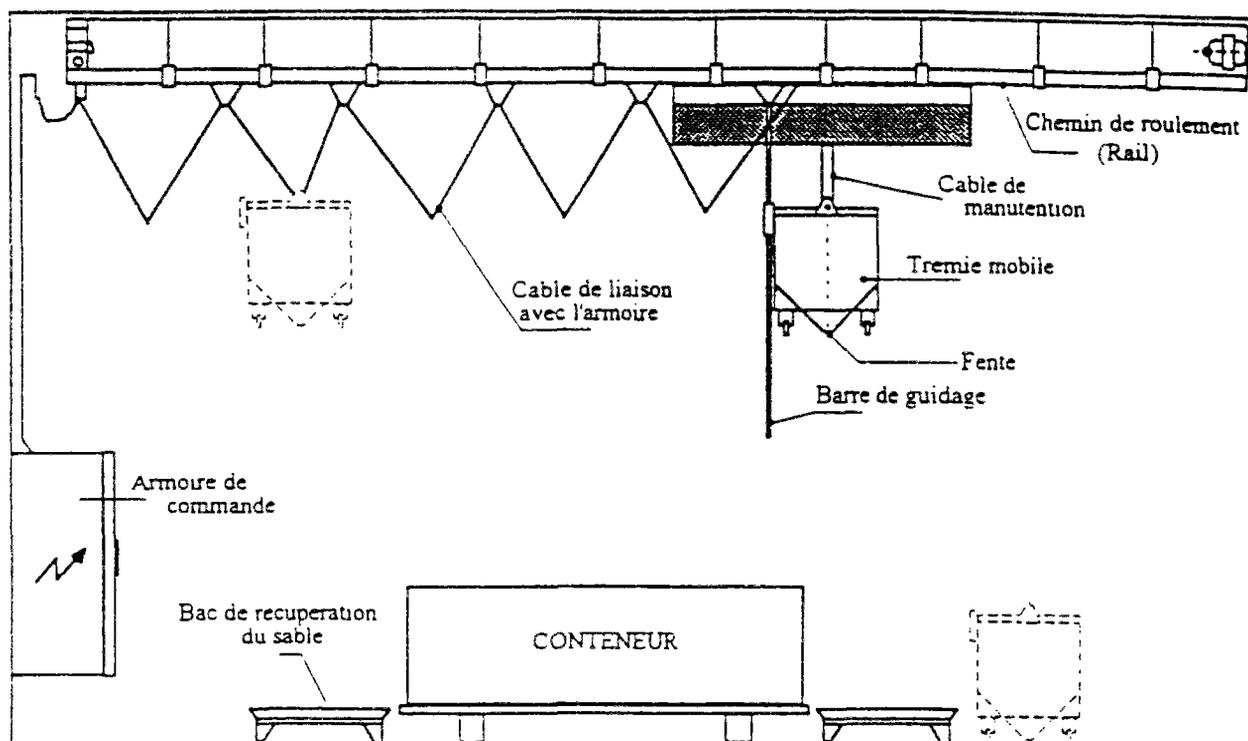


Fig. III.14 : Salle et trémie de pluviation du LCPC (Bakir, 1993).

A la fin de la pluviation, un léger arasement en bordure du conteneur et une aspiration du sable à proximité des modèles réduits est nécessaire pour la planéité de la surface du sol. Afin de contrôler l'homogénéité du massif du sable obtenu, des boîtes calibrées sont placées au sein du massif lors du remplissage de chaque conteneur, pour mesurer a posteriori la densité sèche  $\gamma_d$ . Le tableau III.7 récapitule les valeurs des densités obtenues pour les trois conteneurs de sable. On remarque qu'il y a une bonne reproductibilité de la construction des massifs. Plusieurs essais au mini-pénétrömètre statique ont été réalisés, dans chaque conteneur, soit en cours de centrifugation, soit à 1 g, pour vérifier aussi l'homogénéité du massif du sable. Des détails sur le mini-pénétrömètre ainsi que les résultats obtenus sont présentés ultérieurement (cf § III.3.8).

Tableau III.7 Contrôle de densité à posteriori.

accélération	N° du conteneur	$\gamma_d$ (kN/m <sup>3</sup> )				
		Boite 1	Boite 2	Boite 3	Boite 4	Moyenne
50 g	1	15,46	15,59	15,56	15,60	15,55
50 g	4	-	15,51	-	15,57	15,54
1 g	3	-	15,48	-	15,44	15,46

### ***b) Massif argileux***

Le massif argileux est reconstitué à partir de la kaolinite sous forme de poudre mélangée à l'eau dans un malaxeur à dépression d'une capacité maximale de 200 litres. Pour enlever l'air, on applique une dépression de l'ordre de 100 kPa. Une pâte de bonne homogénéité est obtenue après trois ou quatre heures de malaxage. Le dosage en eau et en poudre de kaolin ont été déterminés en fonction de la teneur en eau souhaitée. La pâte ainsi obtenue (à teneur en eau  $w \approx 85\%$ ) est versée puis consolidée à 1 g dans le conteneur qui est ultérieurement embarqué sur la nacelle de la centrifugeuse, afin d'éviter les risques de remaniement lors d'un démoulage.

La couche d'argile repose sur une couche de sable de Loire bien saturée pour assurer le drainage durant la consolidation à 1 g. Une plaque d'acier, placée entre la couche d'argile et celle du sable, sert de support rigide pour les pieux.

Une consolidation uniforme du massif est assurée par l'intermédiaire d'un piston et d'un vérin de 200 kN capable de créer dans le sol une contrainte verticale effective, constante avec la profondeur et pouvant atteindre 200 kPa. Le massif argileux est réalisé en deux couches, compte tenu de la capacité du malaxeur limitée à 200 l.

Deux massifs d'argile Speswhite molle de densité humide moyenne,  $\gamma_h = 16,41 \text{ kN/m}^3$ , ont été reconstitués. Cette densité a été mesurée à la fin des essais. Dans le premier (conteneur 2), chaque couche a été soumise à trois paliers de chargement, de durée de 48 heures, respectivement égal à 0,17 kPa (poids propre du piston), 20 kPa et 50 kPa de façon à obtenir une cohésion moyenne de l'ordre de 10 kPa au sein du massif. D'après ce processus, il s'est avéré que le drainage dans la première couche s'est effectué dans les deux sens (vers le haut et vers le bas) Mais dans la deuxième couche, le drainage s'est effectué uniquement vers le haut parce que la première couche a été surconsolidée.

Pour éviter ce problème, nous avons appliqué à la première couche du deuxième massif (conteneur 5) une pression de preconsolidation finale (3<sup>o</sup> palier de chargement) inférieure à celle qui sera appliquée à la deuxième couche, ce qui permet le drainage dans les deux sens lors de l'application du dernier palier de chargement pour la deuxième couche. Le tableau III.8 présente les étapes de consolidation à 1 g, des conteneurs 2 et 5.

Tableau III.8 : Consolidation des massifs argileux à 1 g.

numéro du conteneur	numéro de couche	numéro du palier	contrainte appliquée $\sigma_p$ (kPa)	hauteur initiale $h_i$ (mm)	hauteur finale $h_f$ (mm)	hauteur totale du massif
conteneur 2	1 <sup>ère</sup>	1 <sup>er</sup>	0,17	209	193	161 +
		2 <sup>o</sup>	25	193	180	
		3 <sup>o</sup>	50	180	<b>161</b>	
	2 <sup>o</sup>	1 <sup>er</sup>	0,17	194	177	126
		2 <sup>o</sup>	25	177	158	=
		3 <sup>o</sup>	50	158	<b>126</b>	<b>287</b>
conteneur 5	1 <sup>ère</sup>	1 <sup>er</sup>	0,17	209	194	163
		2 <sup>o</sup>	32	194	166	+
		3 <sup>o</sup>	39	166	<b>163</b>	133
	2 <sup>o</sup>	1 <sup>er</sup>	0,17	208	198	=
		2 <sup>o</sup>	50	198	<b>133</b>	<b>296</b>

### III.3.4 Caractéristiques géométriques et mécaniques des modèles

Les modèles utilisés sont des barrettes rectangulaires en aluminium. La longueur du pieu est de 300 mm en modèle réduit, soit de 15 m en grandeur réelle (prototype) sous une accélération de 50 g. On cherche à modéliser des pieux de 0,5 m et de 1 m de largeur frontale en grandeur réelle, ce qui correspond en modèle réduit, à des barres de 10 mm et 20 mm de largeur (fig III 15). Le modèle réduit a une épaisseur de 2 mm soit 0,1 m en prototype. Le prédimensionnement des modèles est fait à partir de la force critique de flambement prévue par Mandel, de façon à ce que la contrainte due à la force critique de flambement soit inférieure à la limite élastique du matériau. Cette force critique ne devrait pas dépasser la moitié de la puissance maximale du vérin limitée à 40 kN, pour laisser une marge suffisante compte tenu de l'inexactitude des caractéristiques mécaniques du sol. Le tableau III.9 résume les caractéristiques géométriques des modèles et des prototypes de pieux. Les caractéristiques mécaniques du modèle sont déterminées à partir des essais de traction effectués au préalable (cf § III.2.1).

Tableau III 9 : Caractéristiques des modèles et prototypes de pieux.

Type	modèle réduit			prototype			accélération g	élancement $\lambda = \frac{l}{B}$
	largeur B (mm)	longueur l (mm)	épaisseur e (mm)	largeur B (m)	longueur l (m)	épaisseur e (m)		
pieu 10	10	300	2	0,5	15	0,1	50	30
pieu 20	20	300	2	1	15	0,1	50	15

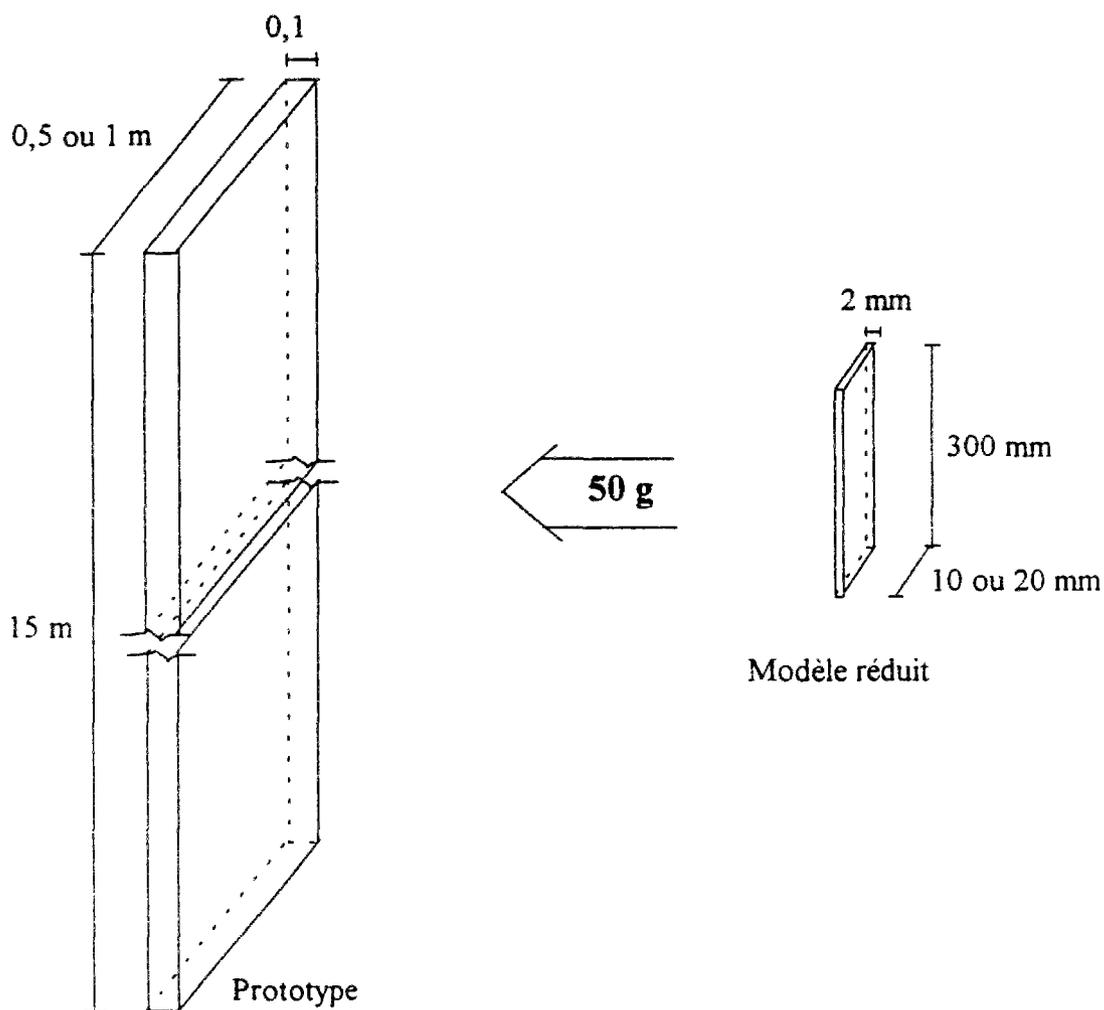


Fig. III.15 · Modèle réduit et prototype de pieu.

### III.3.5 Caractéristiques des conteneurs

Deux types de conteneurs ont été utilisés suivant la nature du sol. Dans le cas du sable, il s'agit d'un conteneur en acier, en forme de parallélépipède rectangle de hauteur 36 cm, de largeur 80 cm et de longueur 120 cm. Le conteneur est supposé indéformable, à fond amovible. Pour l'argile, le conteneur utilisé est un cylindre en acier de diamètre 90 cm, de hauteur 70 cm. Dans les deux cas, compte tenu des dimensions des conteneurs, nous avons pu réaliser plusieurs essais de flambement dans le même conteneur.

### III.3.6 Mise en place des modèles dans les massifs de sol

Deux méthodes de mise en place des pieux ont été utilisées dans le cas des massifs sableux. La première consiste à fonder lentement les pieux dans le sable, après pluviométrie, à l'aide d'un guide de fonçage pour contrôler la verticalité des pieux. Cette procédure nous empêche d'équiper la pointe du modèle avec une rotule ou un encastrement et par conséquent on

n'obtient que des pieux avec des pointes simplement appuyées sur le fond du conteneur. La deuxième façon consiste à procéder à la pluviation du sable autour des modèles déjà installés dans le conteneur. Cette méthode présente la possibilité de faire varier les conditions aux limites en pointe et permet d'étudier l'effet de la mise en place sur la force critique de flambement. Elle permet aussi de bien contrôler la verticalité des modèles, mais elle est plus difficile à appliquer que la première méthode étant donnée la nécessité d'un dispositif supplémentaire assurant une position fixe des modèles pendant la chute du sable.

Dans le cas de l'argile, le bâti de consolidation ne donne pas la possibilité de construction du massif autour des modèles de pieux. Par conséquent, la mise en place des modèles est limitée au fonçage guidé, dans l'argile, après consolidation à 1 g.

Pour éviter l'effet de groupe, la distance entre les pieux est supérieure ou égale à 10 fois le diamètre du pieu le plus large. Il en est de même pour la distance entre les pieux extérieurs et les bords du conteneur, afin d'éviter les effets de bord. Des coupes des conteneurs, montrant la position des pieux, sont présentés ultérieurement (cf. §. III.3.9).

### **III.3.7 Procédure d'essais et observation des modèles**

#### *a) Essais à 50 g*

Après la consolidation du massif de sol et la mise en place des modèles, on installe le conteneur dans la nacelle de la centrifugeuse, puis on procède à un réglage de balourd avant de monter au niveau d'accélération souhaité (50 g). Une phase de consolidation du massif à 50 g précède les essais de chargement.

Pour les massifs sableux, on réalise trois montées à 50 g avec un palier de 5 minutes entre chaque cycle. Le but de ces cycles est de stabiliser les déformations résiduelles qui peuvent apparaître au début de la centrifugation. A la fin de la consolidation du massif de sable, on procède au chargement continu du pieu, par le biais d'un vérin hydraulique, jusqu'au flambement.

Les moyens actuels ne permettent pas l'intervention en cours de centrifugation pour le déplacement du dispositif de chargement d'un pieu au suivant, d'où la nécessité d'un arrêt de la machine. Une fois la liaison modèle - dispositif établie, on réalise un nouvel essai. Dans le cas de l'argile, le temps d'arrêt de la machine est pénalisant, parce qu'il faut un temps de rotation égal à trois fois le temps d'arrêt, pour revenir au même état de contraintes du massif. Cette constatation est faite suite à de nombreux essais de consolidation des massifs argileux, réalisés dans la centrifugeuse du LCPC Nantes. Dans notre cas, le temps d'arrêt est de 20 mn environ ; ainsi la consolidation du massif argileux est fixée à une heure de rotation avant la réalisation de chaque essai de chargement.

Deux caméras disposées, respectivement, dans le bras de la centrifugeuse et sur le conteneur, permettent un suivi continu du modèle. La chaîne d'acquisition disposée dans la nacelle et reliée au ordinateur donne, en temps réel, l'évolution de la charge en fonction du déplacement de la tête de pieu ou du temps sous forme de courbes et de listing. Le suivi de la courbe de chargement indique le moment d'arrêt propice du chargement (une fois la force maximale atteinte).

#### *a) Essais à 1 g*

Pour les essais à 1 g, il n'y a pas de consolidation de sol autre que celle du massif argileux. L'essai de chargement proprement dit et l'acquisition des mesures ainsi que leur traitement s'effectue d'une façon identique à celle des essais à 50 g, avec le même matériel (dispositif de chargement, capteurs, chaîne d'acquisition,...). A noter que la poutre de réaction ne suffit pas pour reprendre les efforts de réaction, car les forces critiques de flambement à 1 g en présence du sol, sont largement supérieures (20 à 60 fois) à celles obtenues pour les pieux à l'air libre. D'où la nécessité d'ajouter des masses supplémentaires à la poutre de réaction.

#### **III.3.8 Essais au mini-pénétrromètre**

Plusieurs essais au mini-pénétrromètre LCPC ont été réalisés, en différents endroits de chaque conteneur. Une partie de ces essais est effectuée sur le sol en place à 1 g, l'autre partie durant la centrifugation des modèles. Le but de ces essais est de contrôler l'homogénéité du massif du sol. Ils permettent aussi d'estimer un profil de module de réaction du sol selon la profondeur, nécessaire pour le calcul théorique de la force critique de flambement, ceci en utilisant diverses formules et corrélations empiriques proposées dans la littérature entre le module de réaction et la résistance de cône. Les corrélations utilisées et les différentes valeurs obtenues du module de réaction sont présentées dans le chapitre IV (cf.§.IV.1.1.1), dans le cadre de la comparaison entre les résultats expérimentaux et les prévisions théoriques.

Pour les massifs argileux, chaque essai de flambement est accompagné d'un essai pénétrométrique. Ceci permettra de vérifier que les essais de flambement d'un même conteneur ont été effectués à partir d'un même état de contraintes du massif. Pour le sable, nous avons réalisé quatre essais pénétrométriques en plusieurs endroits dans chaque conteneur.

Le pénétromètre utilisé est un pénétromètre statique constitué d'une pointe de diamètre 12 mm et équipé d'un capteur de 2,5 kN. La vitesse d'enfoncement est de 4,5 mm/s. La résistance unitaire à l'enfoncement de la pointe  $q_c$  est mesurée par l'intermédiaire de jauges de déformations. Dans le cas de l'argile Speswhite, une corrélation entre la résistance en pointe  $q_c$  et la cohésion non drainée  $c_u$  a été établie suite à de nombreux essais au mini-pénétrromètre embarqué dans la centrifugeuse du LCPC Nantes. Cette corrélation est donnée par (Corté et al., 1991) :

$$q_c = 18,5 c_u \quad (\text{III.5})$$

Les résultats de chaque essai pénétrométrique sont présentés sous forme de courbe, montrant la résistance de cône  $q_c$  en fonction de la profondeur prototype corrigée  $Z_{pc}$ , telle que :

$$Z_{pc} = n \cdot z_m \left[ 1 + \frac{z_m}{2 R_s} \right] \quad (\text{III.6})$$

$n$  : rapport des accélérations en centrifugeuse et terrestre (50) ;

$z_m$  : profondeur dans le modèle par rapport à la surface libre du sol ;

$R_s$  : rayon pour lequel  $n \times g$  est effectif (surface libre de sol).

Cette correction tient compte de l'augmentation du champ d'accélération avec la profondeur du modèle. Celui-ci est égal à 50 g au niveau de la surface libre du sol.

La figure III.16 montre les résultats des quatre essais pénétrométriques réalisés à 50 g, dans le sable de Fontainebleau moyennement dense en plusieurs endroits (conteneur 1). On remarque une très bonne concordance entre les quatre profils, ce qui signifie une bonne homogénéité du massif sableux. Par conséquent, le processus de pluviation du sable à l'air sec à l'aide de la trémie mobile, permet la constitution des massifs très homogènes.

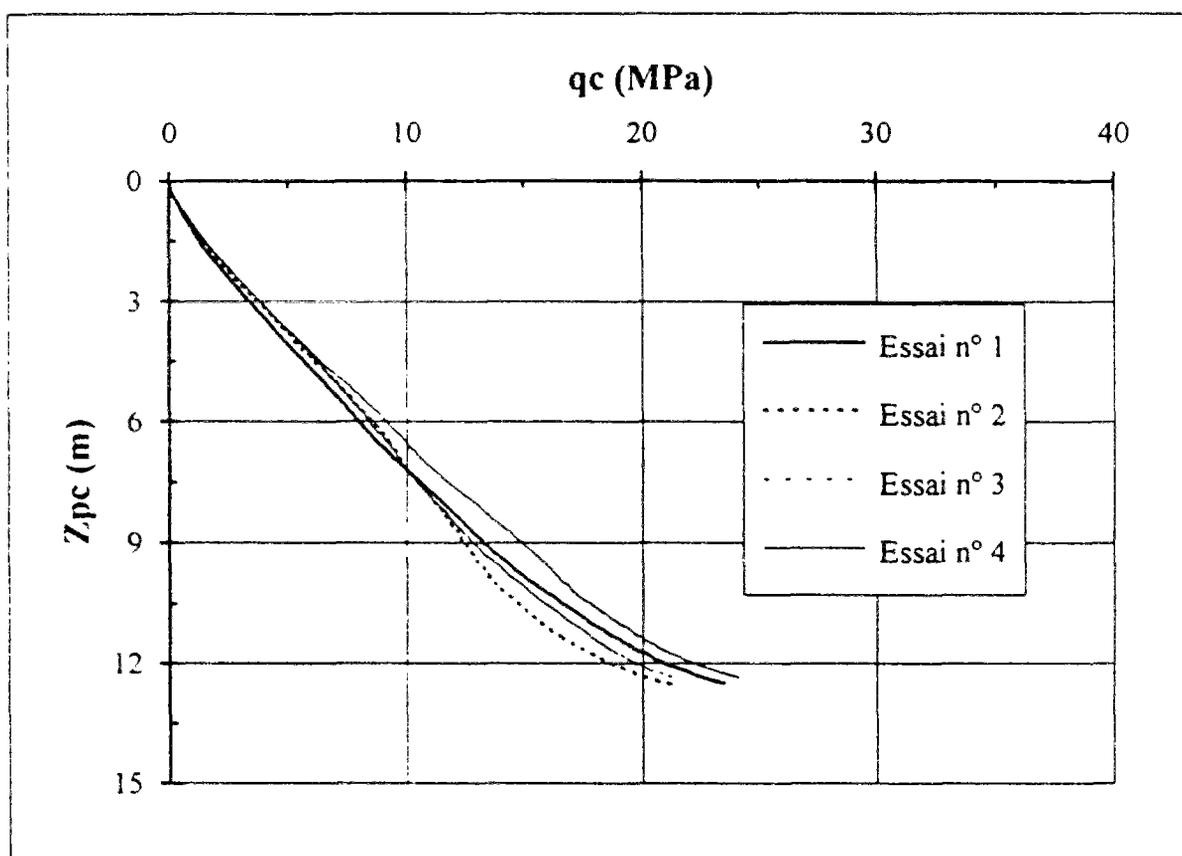


Fig. III.16 : Résultats des essais au mini-pénétrömètre dans le sable de Fontainebleau moyennement dense ( $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$ ). Conteneur 1 - Essais à 50 g.

L'annexe B-3 regroupe les profils pénétrométriques obtenus dans les autres conteneurs. La remarque faite sur le conteneur 1, concernant la répétabilité des essais pénétrométriques est aussi valable pour les autres conteneurs.

### **III.3.9 Description et résultats des essais de flambement**

D'un conteneur à l'autre, des améliorations ont été apportées en ce qui concerne les conditions expérimentales des essais, notamment la consolidation du massif argileux à 1 g (cf. §. III.3.3.2), et des phénomènes supplémentaires ont été étudiés tels que l'influence des conditions aux limites et de la mise en place des pieux sur la force critique dans les massifs sableux.

En effet, dans les conteneurs 1 et 2, nous avons réalisé des essais avec des pieux encastés ou articulés en tête. Mais, lors d'un essai de flambement sur un modèle avec une rotule en tête, la longueur théorique à considérer tient compte de la hauteur de la rotule (30 mm) placée hors sol. Ceci conduit à des modèles qui ne sont pas complètement fichés dans le sol. Pour éviter ce problème, nous n'avons utilisé dans les conteneurs 3, 4 et 5 que des modèles encastés en tête, ce qui permet d'obtenir des modèles complètement fichés dans le sol.

On présente ainsi des coupes de chaque conteneur montrant la position des modèles, celle des essais pénétrométriques et des boîtes de densité. Les valeurs expérimentales maximales et minimales de la force critique de flambement pour les différentes conditions aux limites, sont présentées, pour chaque conteneur, sous forme de tableaux. Les figures (III.17) et (III.18) respectivement pour le sable et pour l'argile, montrent les courbes de chargement (évolution du déplacement de la tête du pieu en fonction de la charge appliquée) obtenues à 50 g dans le cas de pieux encastés en tête et simplement appuyés en pointe, de largeur  $B = 1$  m. Pour les autres conditions aux limites, les courbes de chargement sont présentées dans l'annexe B-4.

La charge correspondante à la limite élastique de l'aluminium est de 10000 kN pour le pieu de largeur 0,5 m, et de 20000 kN pour le pieu de largeur 1 m. Dans la suite de l'analyse des résultats on peut constater que les charges mesurées sont inférieures à ces valeurs. Ceci signifie que les phénomènes observés correspondent au flambement de pieux.

#### *a) Conteneur 1 - Essais dans le sable à 50 g.*

Douze essais de flambement ont été réalisés à 50 g dans le sable de Fontainebleau moyennement dense (fig. III 19). Les pieux sont encastés ou articulés en tête. Les pieux sont fonceés dans le sable après pluviométrie. Par conséquent, ils ont la pointe simplement appuyée sur le fond du conteneur. Quatre boîtes calibrées ont été placées dans le conteneur et quatre essais au mini-pénétrömètre ont été réalisés.

D'après le tableau III.10, on remarque une répétabilité correcte des essais de flambement. L'écart par rapport à la valeur moyenne varie entre  $\pm 7$  % pour les pieux EA<sub>10</sub> et  $\pm 16$  % pour les pieux AA<sub>20</sub>.

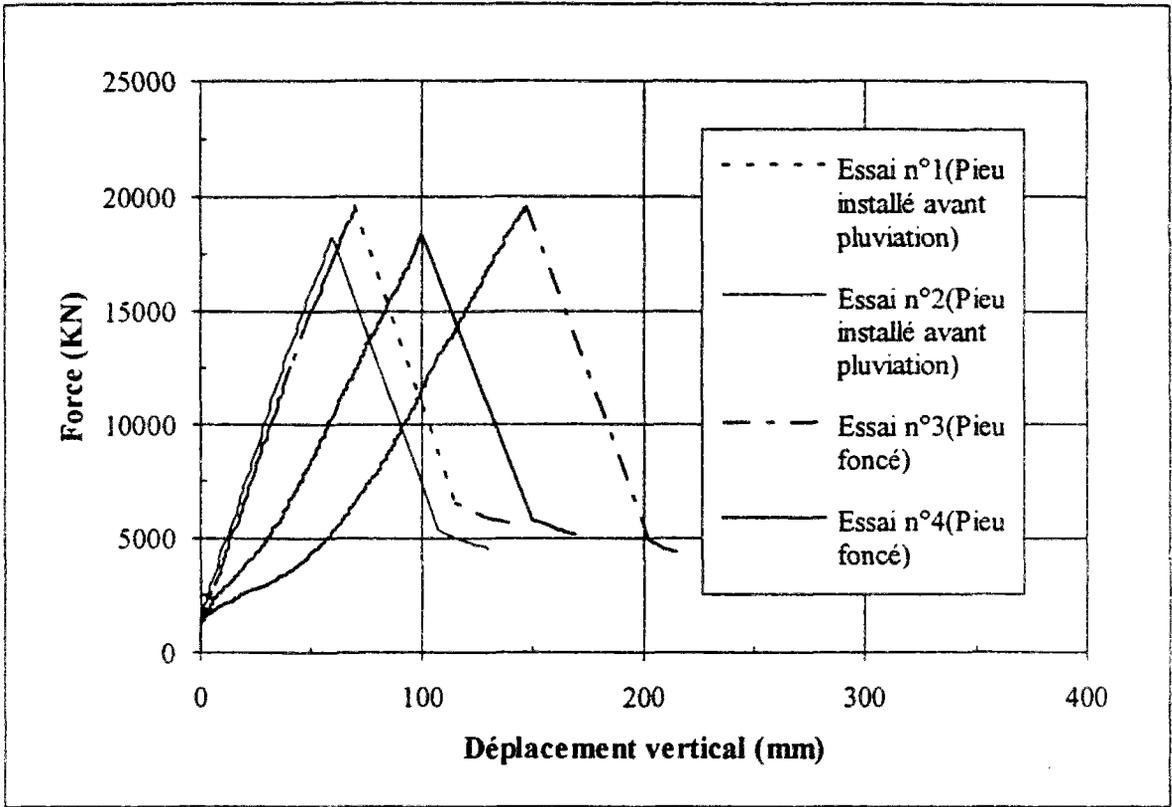


Fig. III.17 : Essais de flambement dans le sable à 50 g. Pieu EAs20

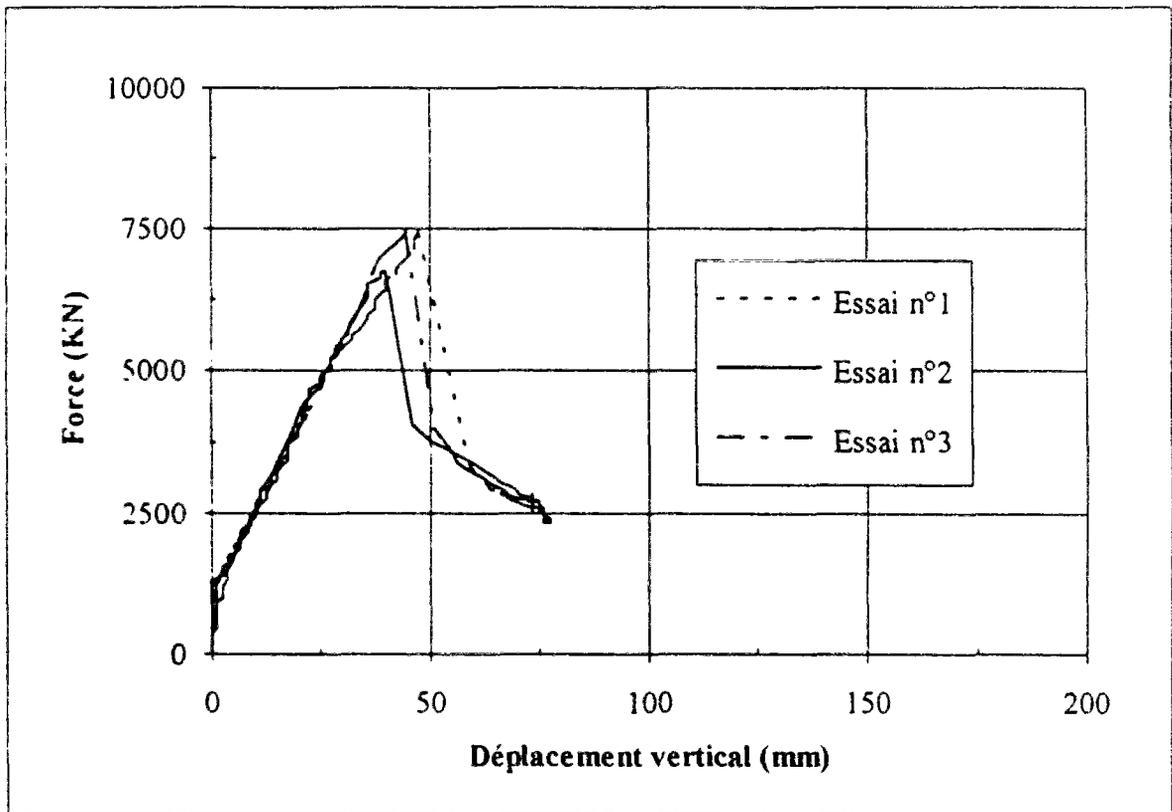
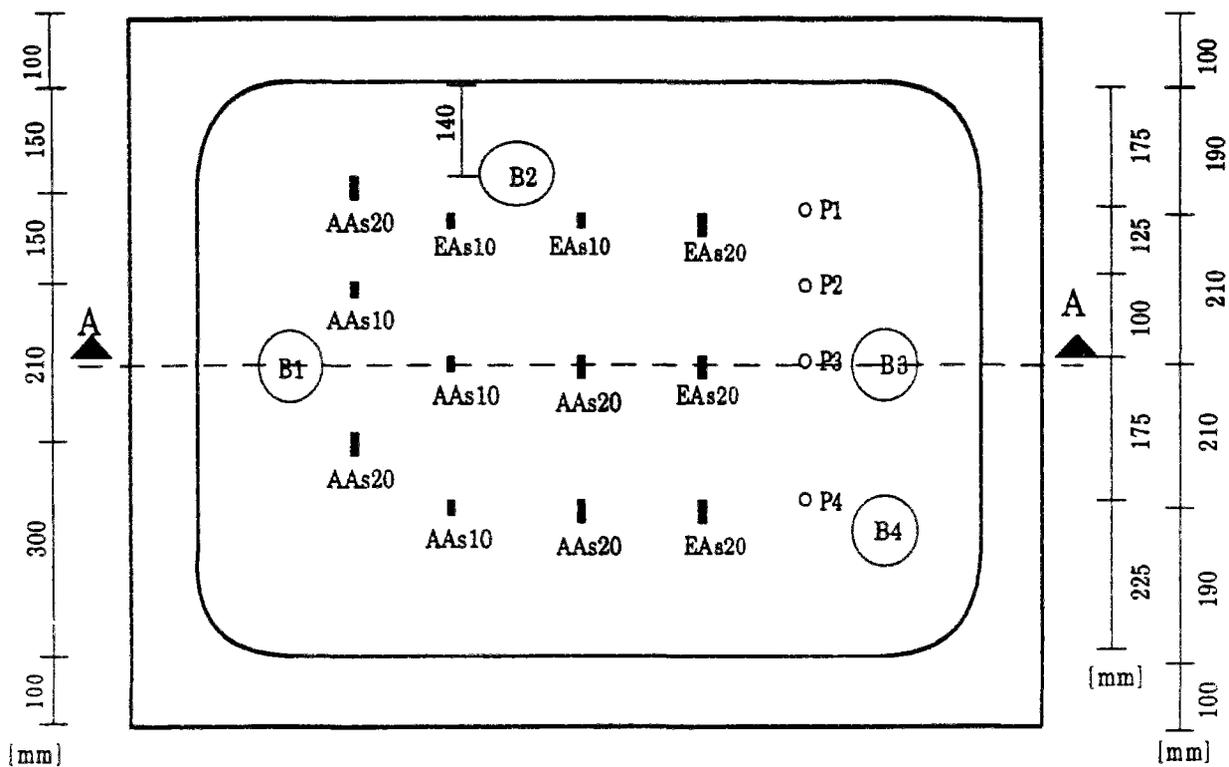
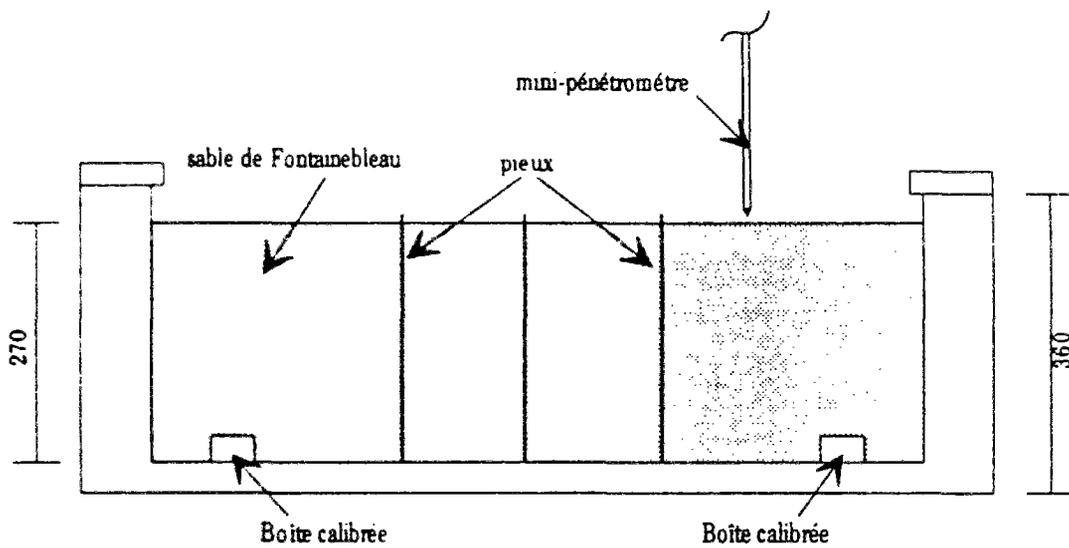


Fig. III.18 : Essais de flambement dans l'argile à 50 g. Pieu EAs20



VUE EN PLAN



COUPE A-A

Fig. III.19 : Conteneur 1 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.

Tableau III.10 : Valeurs expérimentales de la force critique de flambement.  
Conteneur 1 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.

Type d'Essai	nombre d'essais	valeur minimale ( kN )	valeur maximale ( kN )	valeur moyenne ( kN )
AA <sub>10</sub>	3	8070	9495	8655
AA <sub>20</sub>	4	13508	18657	16118
EA <sub>10</sub>	2	7335	8450	7893
EA <sub>20</sub>	3	14100	17233	15928

*b) Conteneur 2 - Essais dans l'argile à 50 g.*

Huit essais ont été réalisés dans le conteneur 2. Les pieux sont foncés dans l'argile. Par conséquent, les pieux ont tous la pointe simplement appuyée sur une plaque d'acier de dimensions (600 x 370) mm, placée entre la couche d'argile et celle du sable (fig.III.20). La tête des pieux est articulée ou encadrée. Une série de huit essais au mini-pénétrömètre a été réalisée. Le tableau III.11 récapitule les valeurs obtenues de la force critique de flambement.

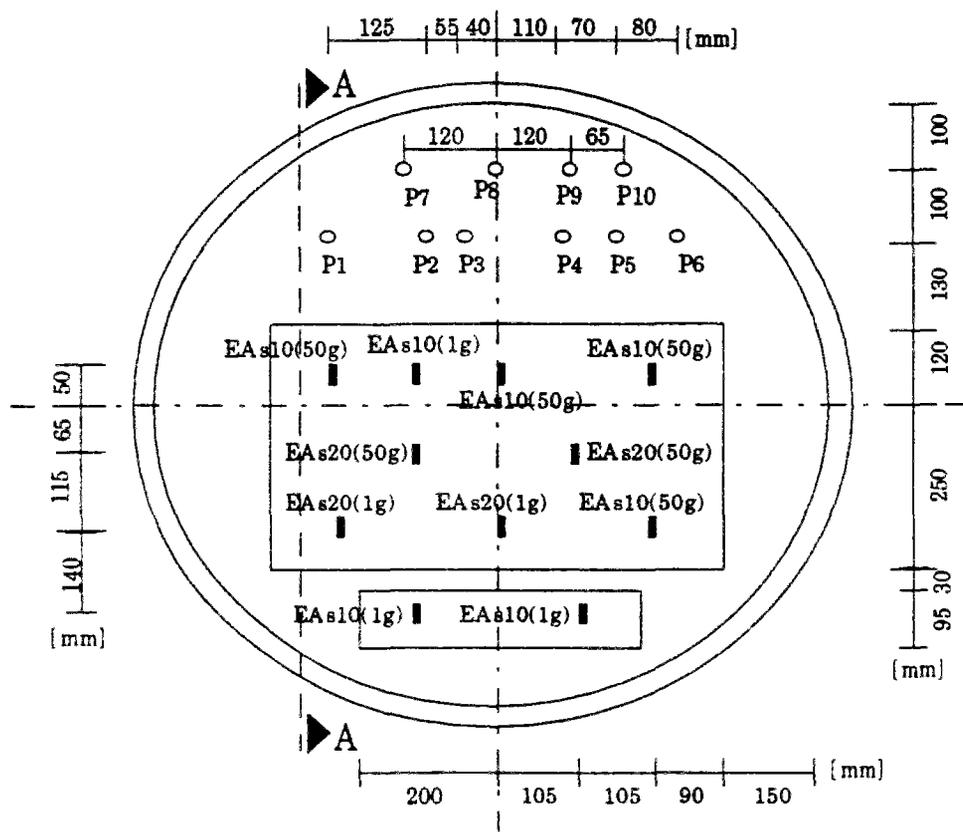
Tableau III.11 : Valeurs expérimentales de la force critique de flambement.  
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.

Type d'Essai	nombre d'essais	valeur minimale ( kN )	valeur maximale ( kN )	valeur moyenne ( kN )
AA <sub>10</sub>	3	2965	5783	4278
AA <sub>20</sub>	3	7050	9150	7878
EA <sub>10</sub>	1	4385	4385	4385
EA <sub>20</sub>	1	8913	8913	8913

*c) Conteneur 3 - Essais dans le sable à 1 g.*

Douze essais de flambement ont été réalisés sur des modèles réduits dans le sable de Fontainebleau moyennement dense à 1 g. Dix modèles sont mis en place avant la pluviation du sable (indice P), et le reste par fonçage guidé après la pluviation (indice F), pour étudier l'effet de la mise en place (fig. III.21).

Les pieux sont encadrés en tête. Par contre, la pointe des pieux est simplement appuyée ou encadrée. Ceci permet d'étudier l'effet de la condition aux limites en pointe. Les pieux ayant une pointe libre s'appuient sur des cales rigides d'épaisseur 20 mm pour obtenir la même longueur théorique que les pieux encadrés en pointe. Deux boîtes calibrées sont placées au sein du massif. Quatre essais au mini-pénétrömètre sont réalisés.



VUE EN PLAN

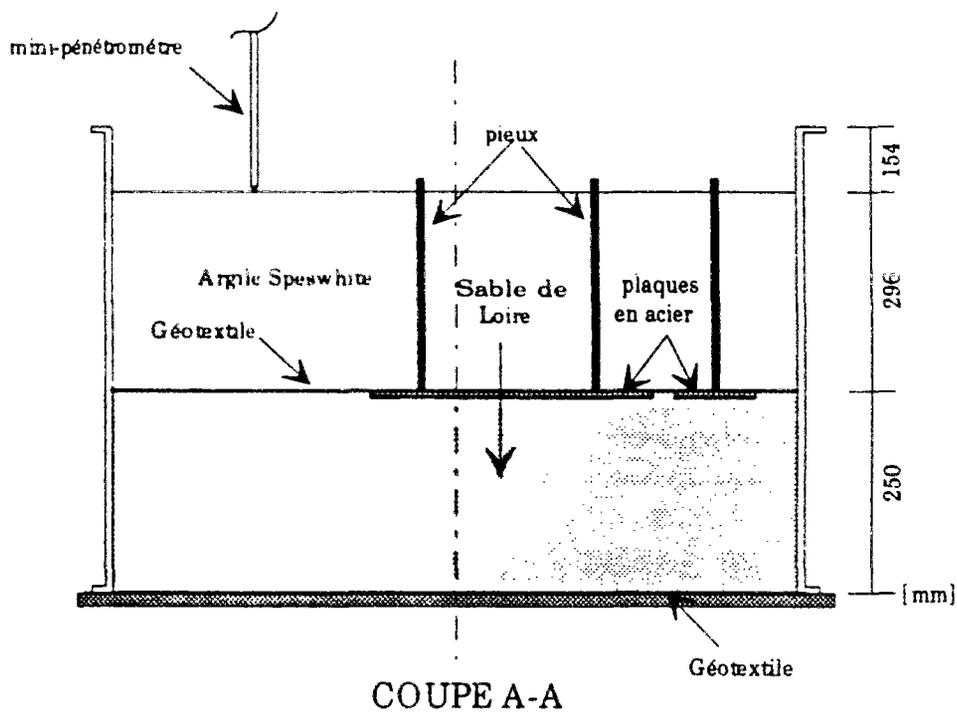
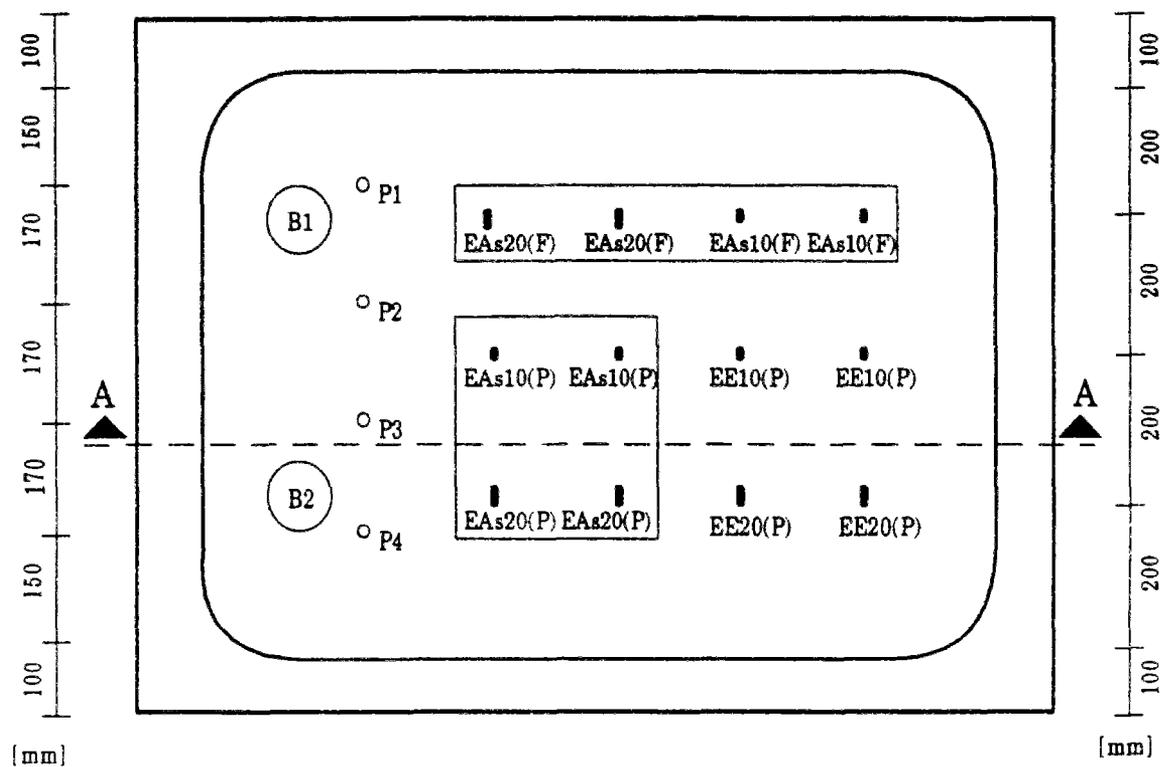
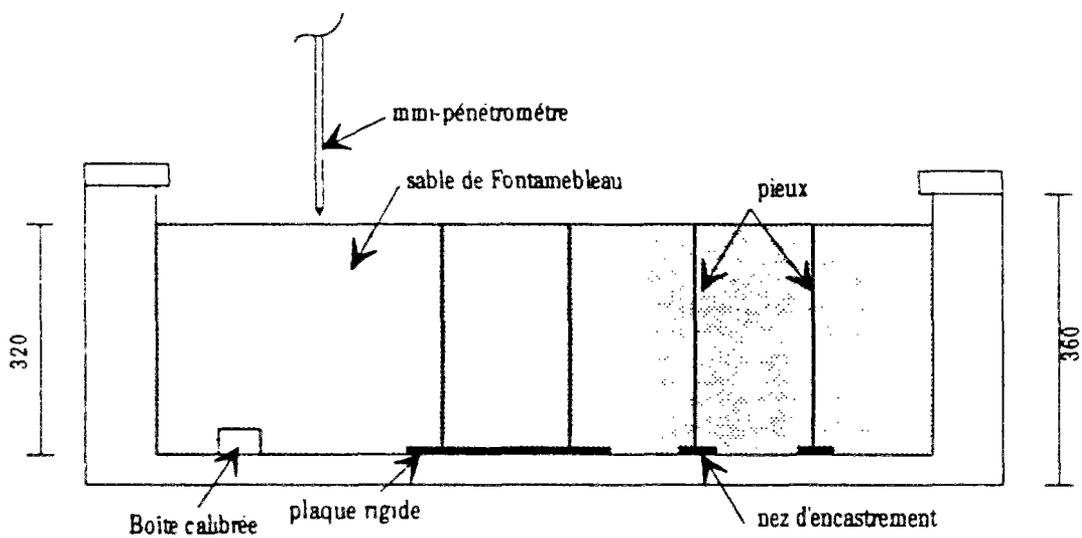


Fig. III.20 : Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.



VUE EN PLAN



COUPE A-A

Fig. III.21 : Conteneur 3 et conteneur 4 - Essais à 1 g et à 50 g dans le sable de Fontainebleau.

D'après le tableau III.12, on remarque une faible dispersion entre les valeurs de la force critique pour un même essai (écart moyen  $\pm 10\%$ ), surtout pour les modèles installés avant la pluviation, où on peut contrôler facilement la verticalité des modèles. On remarque aussi que la mise en place n'a pas beaucoup d'influence sur la force critique, dans le cas de modèles de 10 mm de largeur. Par contre, cette influence devient plus importante pour les modèles de largeur 20 mm, où on remarque un écart de 30 % entre les forces critiques obtenues pour les modèles foncés et ceux installés avant la pluviation.

Tableau III.12 : Valeurs expérimentales de la force critique de flambement.  
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.

Type d'Essai	nombre d'essais	valeur minimale (kN)	valeur maximale (kN)	valeur moyenne (kN)
EE10	2	1,217	1,285	1,251
EA <sub>10</sub> (P)	2	1,400	1,680	1,591
EA <sub>10</sub> (F)	2	1,440	1,844	
EE20	2	1,836	2,609	2,223
EA <sub>20</sub> (P)	2	2,696	2,905	3,357
EA <sub>20</sub> (F)	2	3,788	4,040	

*d) Conteneur 4 - Essais dans le sable à 50 g.*

Les essais réalisés dans le sable de Fontainebleau à 1 g, ont été répétés en centrifugeuse avec une accélération de 50 g. L'implantation des modèles, les conditions aux limites et la mise en place, sont les mêmes que dans le conteneur 3 (fig. III.21).

D'après le tableau III 13, on remarque, d'une façon générale, une faible dispersion ( $\pm 5\%$ ) entre les résultats d'un même essai. Les résultats obtenus montrent qu'il n'y a pas une différence considérable entre les pieux foncés et ceux mis en place avant la pluviation. Ceci s'explique par le fait que les pieux sont foncés à 1 g, ce qui provoque un faible remaniement du sol. Mais le sol se reorganise autour du pieu pendant la centrifugation à 50 g. Pour bien étudier l'influence de la mise en place, il faudrait fonder les pieux en cours de centrifugation pour mieux simuler la réalité. Ceci nécessite un dispositif de battage spécial qui est en cours de développement à la Section de modélisation en centrifugeuse du LCPC Nantes.

Tableau III.13 : Valeurs expérimentales de la force critique de flambement.  
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.

Type d'Essai	nombre d'essais	valeur minimale ( kN )	valeur maximale ( kN )	valeur moyenne ( kN )
EE10	2	8400	9420	8910
EA <sub>10</sub> (P)	2	9500	9775	9450
EA <sub>10</sub> (F)	2	9100	9425	
EE20	2	19390	19700	19545
EA <sub>20</sub> (P)	2	18150	19400	18900
EA <sub>20</sub> (F)	2	18500	19550	

*e) Conteneur 5 - Essais dans l'argile à 1 g et à 50 g.*

Onze essais de flambement ont été réalisés dans le conteneur 5, dont six à 50 g et cinq à 1 g (fig. III.22). Onze essais au mini-pénétromètre ont été réalisés à 50 g et quatre essais à 1 g. Pour les essais de flambement à 1 g, quatre essais sont réalisés après la consolidation du massif à 1 g, et le cinquième essai est réalisé après la consolidation à 50 g. Il en est de même pour les essais au mini-pénétromètre à 1 g, où trois essais sont effectués avant la centrifugation et le dernier après la centrifugation.

Les modèles sont encastrés en tête et simplement appuyés en pointe sur des plaques en acier, placées entre les couches d'argile et de sable de Loire. D'après le tableau III.14, on remarque une excellente répétabilité des essais de flambement (dispersion de l'ordre de  $\pm 5\%$ ) à la fois pour les essais à 50 g et à 1g. Cependant, l'essai réalisé à 1 g après centrifugation donne une force critique légèrement supérieure (+12 %) à celle obtenue dans le cas de l'essai réalisé avant centrifugation. Ceci est dû à la cohésion acquise durant la centrifugation à 50 g.

Tableau III 14 Valeurs expérimentales de la force critique de flambement.  
Conteneur 5 - Essais à 50 g et à 1g dans l'argile Speswhite reconstituée.

conditions aux limites	nombre d'essais	valeur minimale ( kN )	valeur maximale ( kN )	valeur moyenne ( kN )
EA <sub>10</sub> (50g)	3	2838	3098	3000
EA <sub>20</sub> (50g)	3	6753	7483	7225
EA <sub>10</sub> (1g)	2	1,875	1,893	1,884
EA <sub>10</sub> (1g-50g-1g)	1	2,111	2,111	2,111
EA <sub>20</sub> (1g)	2	2,697	2,883	2,790

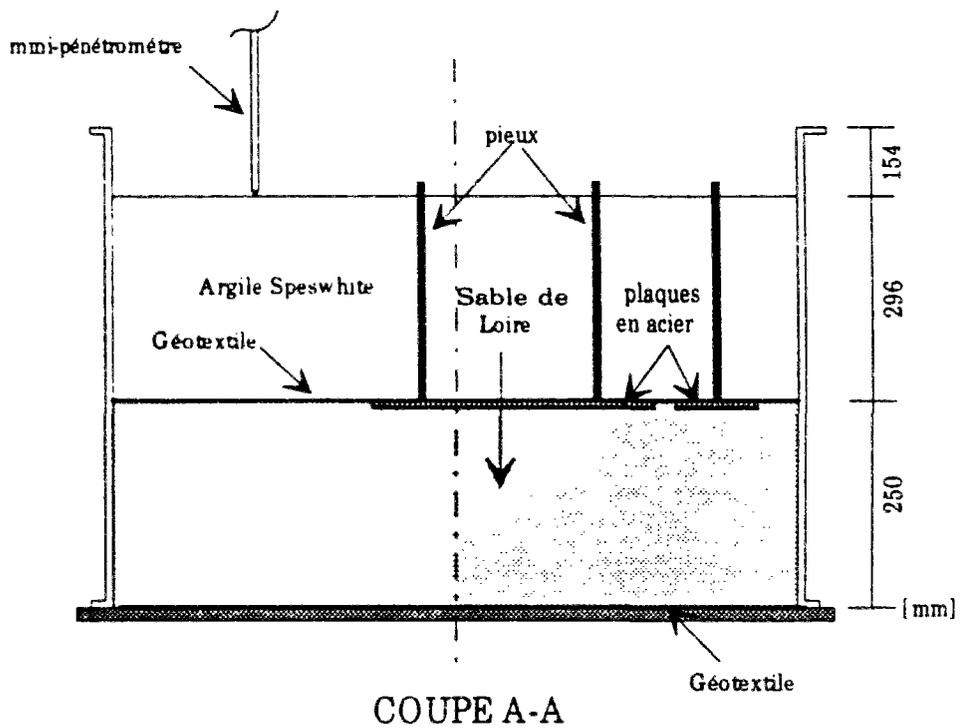
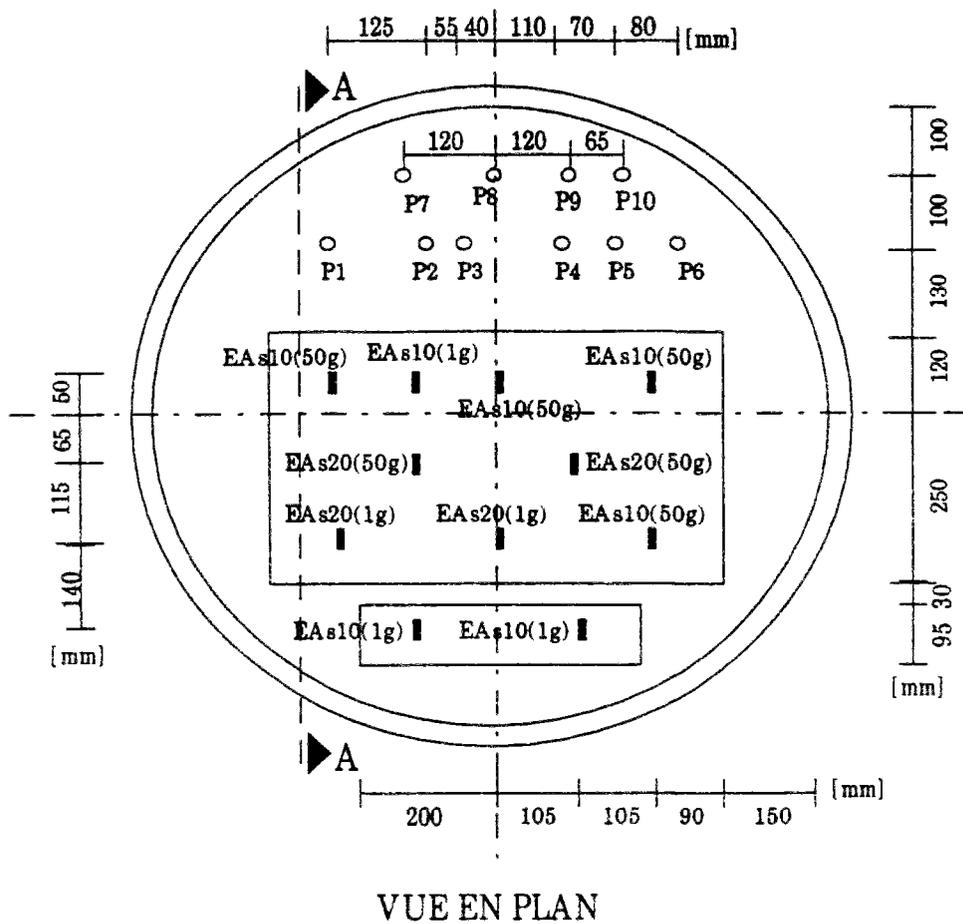


Fig. III.22 : conteneur 5 - Essais à 50 g et à 1 g dans l'argile Speswhite reconstituée.

**f) Récapitulation des essais à 50 g dans le sol.**

Le tableau III.15 récapitule les valeurs moyennes des forces critiques expérimentales obtenues à 50 g, dans le cas de l'argile Speswhite et du sable de Fontainebleau, et à titre indicatif, les forces critiques théoriques  $F_{crE}$  calculées par la formule d'Euler en supposant les pieux à l'air libre (sans sol).

Tableau III.15 : Forces critiques expérimentales (kN) à 50 g dans le sable et l'argile, et forces critiques théoriques d'Euler

Type d'Essai	longueur du pieu $l$ (m)	$F_{crE}$ (kN)	Argile Speswhite		Sable de Fontainebleau		$\frac{F_{cr(sable)}}{F_{cr(argile)}}$
			cont.2	cont.5	cont.1	cont.4	
AA <sub>s</sub> 10	15	127	4278	-	8655	-	2,02
AA <sub>s</sub> 20	15	254	7878	-	16118	-	2,04
EA <sub>s</sub> 10	15	260	4385	3000	7893	9450	1,8 - 3,2
EA <sub>s</sub> 20	15	520	8913	7225	15928	18900	1,9 - 2,6
EE10	15	508	-	-	-	8910	-
EE20	15	1016	-	-	-	19545	-

Dans le cas de l'argile, on remarque que les forces critiques obtenues dans le conteneur 2 sont supérieures à celles obtenues dans le conteneur 5. En effet, les profils pénétrométriques ou ceux de la cohésion non drainée  $c_u$  montrent que l'argile dans le conteneur 2 a une cohésion plus forte que celle de l'argile du conteneur 5, ce qui conduit à des forces critiques plus élevées. Il en est de même pour le sable de Fontainebleau où les forces obtenues dans le conteneur 4 sont plus élevées que celles obtenues dans le conteneur 1.

Les forces critiques obtenues dans le sable de Fontainebleau moyennement dense sont 2 à 3 fois plus élevées que celles obtenues dans l'argile Speswhite molle. Ce rapport ne varie pas d'une façon très sensible avec les conditions aux limites et la largeur du pieu.

En revanche, le rapport entre les forces critiques expérimentales obtenues dans le sable et les forces théoriques calculées en absence de sol varie sensiblement avec les conditions aux limites mais ne dépend pas de la largeur du pieu. Ainsi ce rapport est maximal dans le cas d'un pieu articulé aux deux extrémités et minimal dans le cas d'un pieu encastré aux deux extrémités. Il en est de même pour le rapport entre les forces critiques obtenues dans l'argile et celles d'Euler.

### III.3.10 Découpage des massifs - longueur de flambement

A la fin des essais de flambement, une observation du modèle est faite en découpant les massifs de sol. Dans le cas de l'argile, la cohésion du massif facilite le découpage. Par contre, dans le cas du sable de Fontainebleau sec, il a fallu humidifier le massif afin que ce dernier puisse acquérir une cohésion qui permet le découpage. L'humidification est réalisée par capillarité.

Connaissant la direction du flambement, on procède à un découpage du massif selon des plans verticaux parallèles à cette direction. Cette procédure nous permet de relever la déformée des pieux.

La figure III.23 montre la déformée d'un pieu, articulé en tête et simplement appuyé en pointe AA<sub>20</sub>, fiché dans l'argile. Les déformées pour les autres conditions aux limites sont données dans l'annexe B-5.

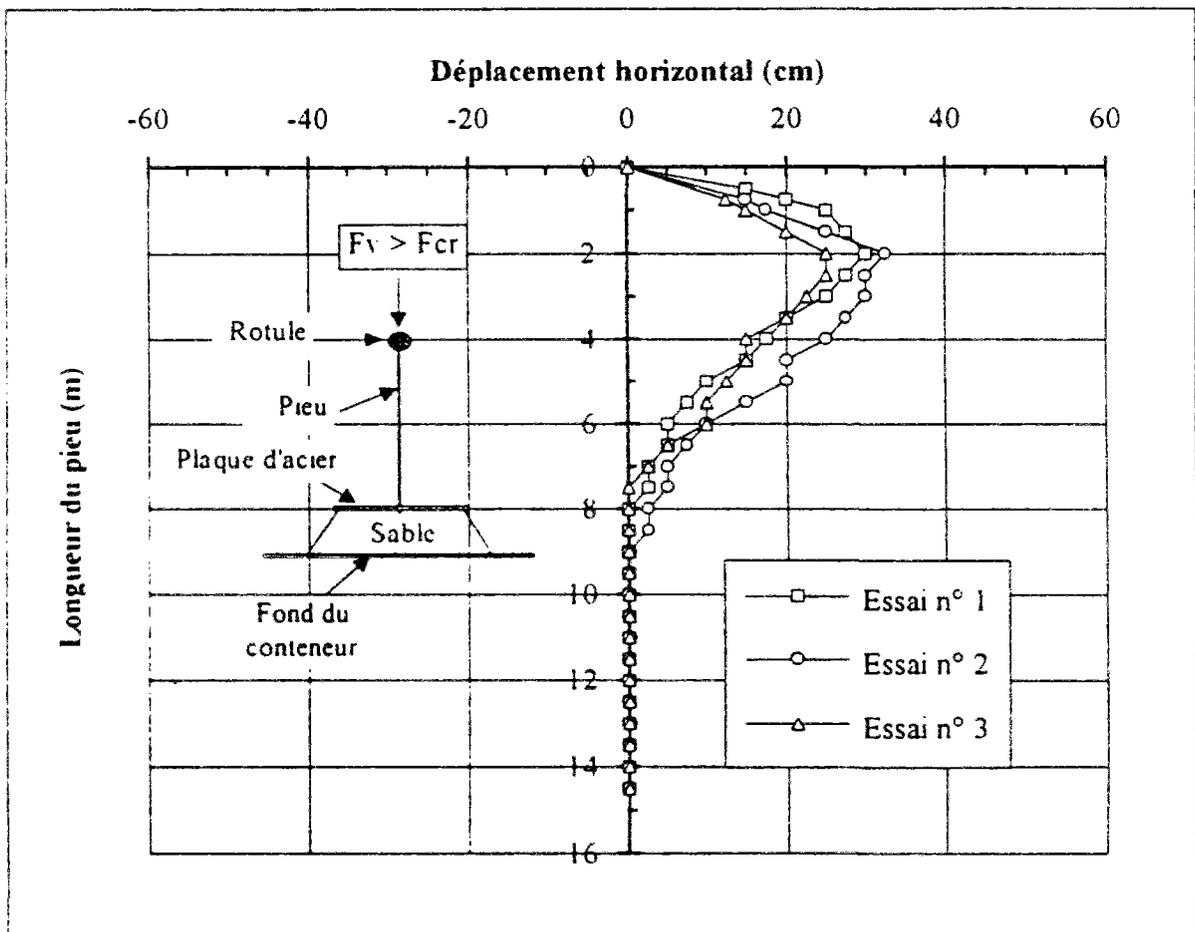


Fig. III.23 . Déformée du pieu d'après les découpes du sol.  
Pieu AA<sub>20</sub> dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Conteneur 2 - Essais à 50 g.

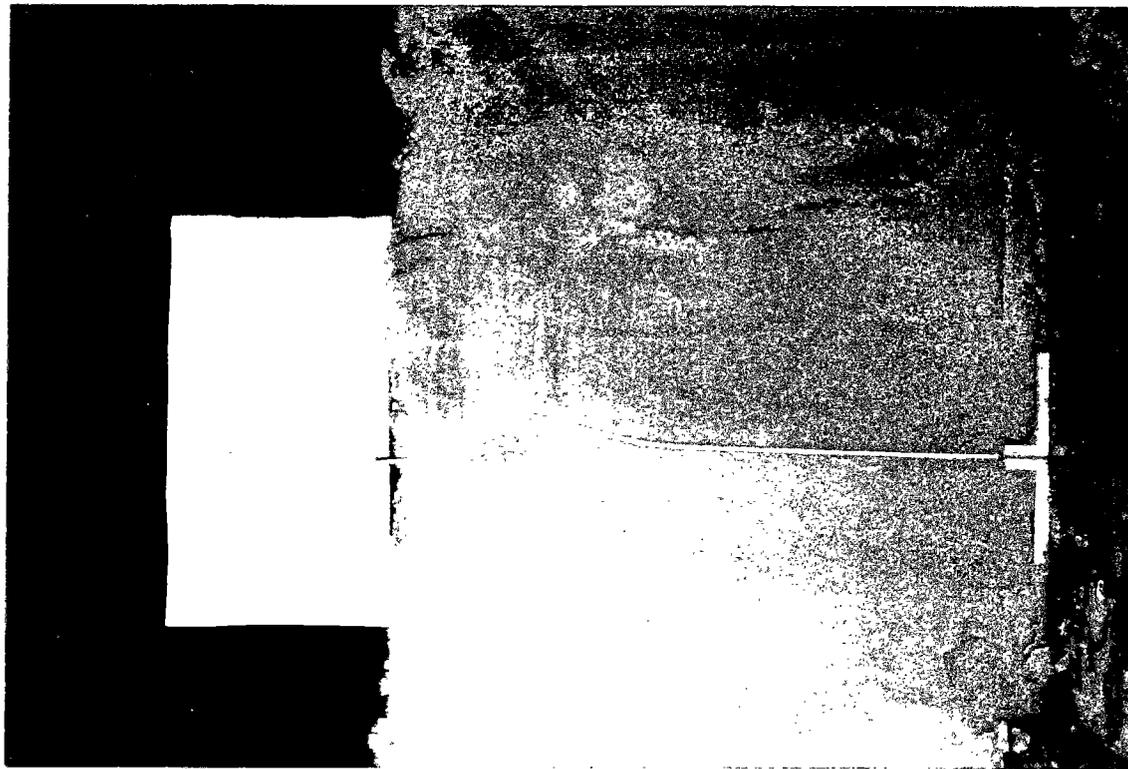


Fig. III.24 : Découpes dans un massif de sable de Fontainebleau.  
Conteneur 3 - Essais à 1 g, pieu encastré aux  
deux extrémités.

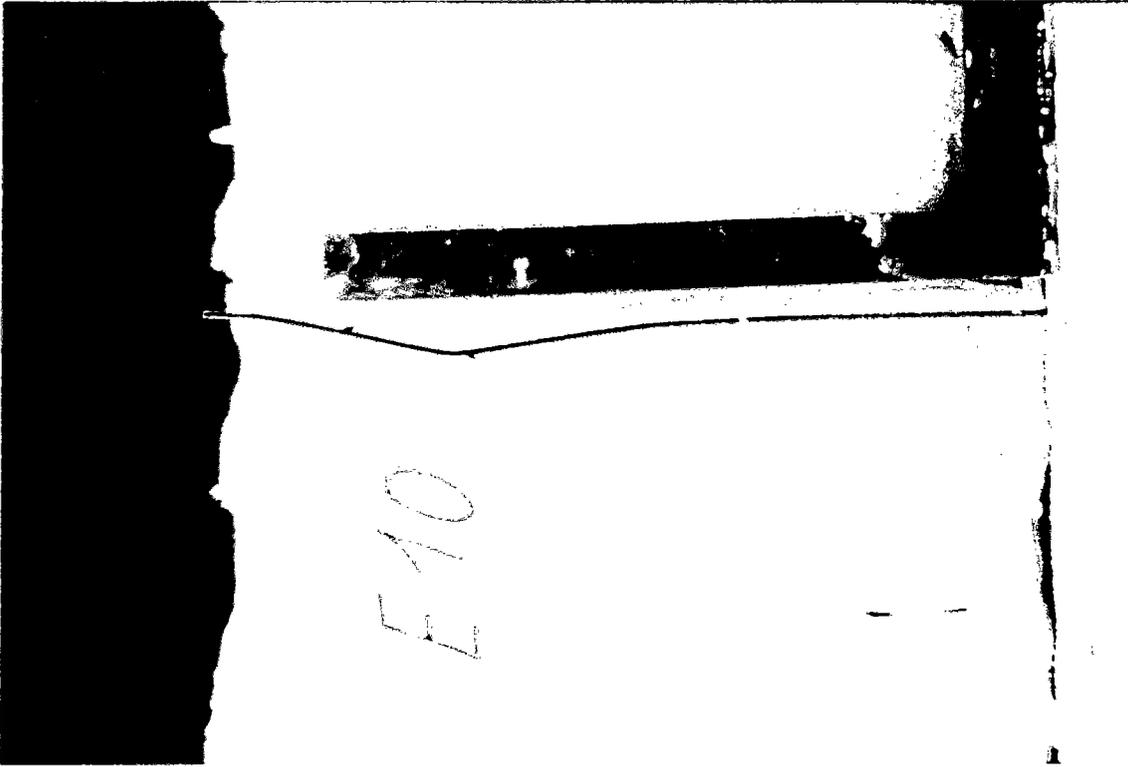


Fig. III.25 : Découpes dans un massif d'argile Speswhite  
reconstituée. Conteneur 2- Essai à 50 g, pieu  
encastré en tête, simplement appuyé en pointe.

D'une façon générale, les résultats obtenus montrent que les pieux ont flambé dans leurs partie supérieure. Ceci s'explique par le fait que le module de réaction en surface est plus faible que celui des couches profondes ce qui favorise le flambement dans les couches supérieures au voisinage de la surface.

On remarque que la longueur du flambement dépend essentiellement de la nature du sol. Dans le cas du sable de Fontainebleau moyennement dense, les résultats montrent que la longueur de flambement varie entre le tiers et la moitié de la longueur totale du pieu. Cette longueur devient plus importante dans le cas d'argile Speswhite molle utilisée : elle varie entre la moitié et les deux tiers de la longueur du pieu. Quand la variation du module de réaction entre la tête et la pointe du pieu diminue, la longueur de flambement augmente.

### III.4 Conclusions

Plusieurs types d'essais sur modèles réduits ont été réalisés. Une première série d'essais réalisée à l'air libre (sans sol) à 1 g a permis de valider le modèle expérimental. Les résultats obtenus sont en très bonne concordance avec les forces critiques d'Euler. Une partie de ces essais à l'air libre a été réalisée, avec traitement d'images afin de déterminer la déformée du pieu au moment du flambement.

Des séries d'essais de flambement en centrifugeuse (accélération 50 g) ont ensuite été effectuées dans des massifs de sol reconstitués (sable de Fontainebleau moyennement dense  $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$  et argile de Speswhite molle  $\gamma_b = 16,41 \text{ kN/m}^3$ ), pour diverses géométries et différentes conditions aux limites en tête et en pointe de pieu. En parallèle, nous avons réalisé aussi des essais de flambement sur modèles réduits à 1 g dans les mêmes types de sols.

Les essais de flambement ont été répétés, afin de tester la fiabilité des moyens de mesures et la répétabilité des résultats. Les résultats montrent qu'il y a une faible dispersion de la force critique par rapport à la moyenne des valeurs obtenues pour plusieurs essais du même type. Cette dispersion est plus élevée dans le cas du sable ( $\pm 10 \%$  à  $\pm 15 \%$ ), que dans le cas d'argile ( $\pm 7 \%$ ).

Pour la condition en pointe, on remarque qu'il n'y a pas de différence considérable entre les forces critiques obtenues dans le cas des pieux encastés en pointe, et celles obtenues dans le cas des pieux simplement appuyés.

On remarque aussi que la mise en place des pieux n'a pas beaucoup d'influence sur la force critique de flambement dans le cas des essais à 50 g dans le sable, car les pieux ont été installés à 1 g. Par contre, cette influence devient importante dans le cas des essais à 1 g, notamment pour les modèles de largeur 20 mm, où l'écart entre les forces critiques obtenues pour les modèles foncés et ceux installés avant la pluviométrie, peut atteindre 30 %.

Plusieurs essais au mini-pénétrömètre ont été menés dans chaque conteneur, pour le contrôle de l'homogénéité des massifs sableux et la détermination du module de réaction du sol. L'homogénéité des massifs sableux est aussi contrôlée par des mesures de la densité a posteriori. Ceci est réalisé en plaçant des boîtes calibrées au sein du massif lors du remplissage des conteneurs. La bonne répétabilité des mesures de densité et la bonne concordance entre les profils pénétrométriques d'un même conteneur montrent que la pluviation à l'aide de la trémie permet la construction de massifs homogènes.

L'observation des modèles à la fin des essais, par découpage des massifs de sol, a permis la détermination de la déformée des modèles. Les résultats montrent que les pieux ont tendance à flamber dans la couche du sol au voisinage de la surface.

Une comparaison entre ces résultats expérimentaux et les prévisions théoriques obtenues notamment grâce à Mandel, est effectuée dans le chapitre suivant.



## Chapitre IV

### CONFRONTATION ENTRE LA THEORIE ET L'EXPERIENCE.

#### IV.1 Introduction

Après avoir présenté, d'une part les différentes méthodes de calcul de la force critique de flambement, notamment celle de Mandel (programme FLAMANDEL, chapitre I) ainsi que la formulation théorique du programme GOUFLA (chapitre II) et, d'autre part les essais de flambement sur modèles réduits avec leurs résultats (chapitre III), nous procédons, dans ce chapitre, à une confrontation entre la théorie et l'expérience.

On distingue deux parties principales : une comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus en centrifugeuse et les prévisions théoriques, notamment celles de Mandel, et une série d'applications des programmes FLAMANDEL et GOUFLA à des cas réels.

Dans la première partie, on présente les corrélations proposées dans la bibliographie et utilisées pour estimer le profil du module de réaction, nécessaire pour le calcul théorique, à partir des résultats d'essais au mini-pénétromètre effectués sur le sol en place durant la centrifugation du modèle

Le choix du module de réaction est déterminant dans l'estimation de la force critique. Il est donc nécessaire de proposer une méthodologie de choix du module de réaction, à partir d'un profil déduit d'un sondage de reconnaissance, pour obtenir une estimation fiable de la force critique de flambement. A partir de la théorie de Mandel, une analyse à rebours est développée dans le but de déterminer un module de réaction unique (sol homogène) permettant de retrouver la force critique obtenue en centrifugeuse. On présente aussi une évaluation de la sensibilité de l'écart entre les forces critiques expérimentales (centrifugeuse) et théoriques (Mandel) en fonction du module de réaction, ceci pour plusieurs géométries et différentes conditions aux limites.

Une comparaison est ensuite établie entre les résultats calculés par le programme GOUFLA et ceux obtenus en centrifugeuse, notamment la force critique de flambement et la déformée du

pieu, en prenant en compte la variation du module de réaction avec la profondeur (sol hétérogène).

On étudie la possibilité d'extrapolation des résultats en centrifugeuse à des pieux constitués d'acier ou de béton, et le risque de flambement de tels pieux.

Dans la deuxième partie, on traite trois exemples d'application des programmes FLAMANDEL ou GOUFLA à des cas réels. Le premier consiste à faire des prévisions de la force critique de flambement, pour le dimensionnement du renforcement par micropieux de la pile du pont de remparts sur le Lot à Cahors (les travaux ont été exécutés depuis).

On présente une analyse de la situation du quai de Lorient après les désordres observés en 1985, ainsi qu'une étude du risque de flambement des pieux supportant le quai, sous les charges prévues à la mise en service du quai, au moyen du programme GOUFLA. On compare les résultats obtenus par GOUFLA avec ceux obtenus par une autre analyse de résistance de pieux au flambement d'une part, ainsi qu'avec les résultats d'essais de chargement d'autre part.

Enfin, on présente un essai de flambement d'un micropieu en vraie grandeur sur le chantier du T.G.V. Lille - Bruxelles à Ath en Belgique, l'interprétation et l'analyse des mesures effectuées, ainsi que la comparaison des résultats obtenus avec les prévisions de la force critique par GOUFLA.

## IV.2 Comparaison entre les prévisions théoriques de Mandel et les résultats en centrifugeuse

### IV.2.1 Détermination d'un profil de module de réaction

Les différentes études entreprises pour traiter le problème de la stabilité des pieux vis-à-vis du flambement, montrent que la détermination de la valeur théorique de la force critique de flambement dépend essentiellement d'un paramètre mécanique du sol qui est le module de réaction  $E_s$ . Celui-ci peut être déduit de corrélations avec le module pressiométrique  $E_M$  ou avec les caractéristiques élastiques du sol (cf. §.I.4.6).

La réalisation des essais pressiométriques en centrifugeuse n'étant pas possible, nous avons donc eu recours à des essais au mini-pénétrömètre statique LCPC, réalisés en différents endroits de chaque conteneur (cf. §.III.3.8). Ainsi, on propose de déduire les caractéristiques pressiométriques du sable de Fontainebleau et de l'argile Speswhite utilisés pour les essais sur modèles réduits, à partir des résultats de pénétration avec le mini-pénétrömètre LCPC ; ceci est fait en exploitant les corrélations usuelles recommandées par divers auteurs, entre le pénétrömètre et le pressiomètre.

Cassan (1978) a présenté une synthèse détaillée sur ces différentes corrélations que nous rappelons brièvement ici.

#### *a - Cas du sable*

Le phénomène de poinçonnement du sol autour de la pointe d'un pénétrömètre présente de grandes analogies avec l'expansion d'une cavité sphérique (Cassan, 1978). A partir de cette analogie et en étudiant l'expansion d'une cavité sphérique en élastoplasticité en milieu frottant, plusieurs auteurs, dont Ménard, ont établi des formules théoriques reliant le module pressiométrique à la pression limite sphérique, c'est à dire approximativement la résistance de cône  $q_c$  du pénétrömètre statique

Ménard (1957) a trouvé a Gand, pour le rapport  $E_M / q_c$ , des valeurs voisines de l'unité. Kerisel (1958) a obtenu, dans les sables de Dunkerque :

$$\frac{E_M}{q_c} = 3 \text{ à } 4 . \quad (\text{IV.1})$$

Van Wanbecke a proposé pour ses essais, effectués en 1962 :

$$\frac{E_M}{q_c} = 1,1 \text{ à } 1,5. \quad (\text{IV.2})$$

Les essais réalisés par Cassan donnent des résultats voisins de ceux de Ménard et de Van Wanbecke, c'est-à-dire  $E_M = q_c$ .

Cassan (1978) trouve que toutes ces valeurs sont assez concordantes et il estime qu'on peut finalement admettre :

$$1 \leq \frac{E_M}{q_c} \leq 1,5 \quad (\text{IV.3})$$

### *b - Cas de l'argile*

Dans le cas des argiles purement cohérentes, Cassan (1978) suppose que le module pressiométrique  $E_M$  et la résistance en pointe  $q_c$  est dans un rapport constant, de l'ordre de 3. Par contre, Van Wanbecke dans l'étude déjà citée, obtient un résultat différent :

$$\frac{E_M}{q_c} = 4,5 \quad \text{pour les argiles normalement consolidées;}$$

et  $5 < \frac{E_M}{q_c} < 7$  pour les argiles surconsolidées.

Les corrélations données ci-dessus, pour les argiles et pour les sables, permettent d'estimer le module pressiométrique à partir de la résistance de cône. On déduit, par la suite, le module de réaction  $E_s$  en utilisant les formules proposées par Ménard (cf. §.I.4.6. a).

De plus, on utilise les corrélations empiriques proposées par Terzaghi (1955), Reese et Matlock (1956), Davisson (1970) (cf § 1.4.6) et Sanglerat et Lacroix (1974). Ces derniers proposent de déterminer directement le module de réaction à partir de la résistance de cône, à partir de la relation .

$$E_s = 4,5q_c \quad (\text{IV 4})$$

Le tableau IV 1 récapitule les différentes corrélations utilisées pour la détermination du module de réaction  $E_s$ . Pour chaque conteneur et à partir d'un profil pénétrométrique moyen (on rappelle qu'il y a une très bonne concordance entre les différents profils obtenus dans le même conteneur, cf § III.3.8, Fig III 16, annexe B-3), on applique ces corrélations pour en déduire plusieurs profils du module de réaction. Les figures IV.1 et IV.2 montrent les profils du module de réaction obtenus dans le conteneur 1 (sable de Fontainebleau, essai à 50g) et dans le conteneur 2 (argile Speswhite reconstituée, essais à 50g). Pour les autres conteneurs, les profils du module de réaction sont présentés dans l'annexe C.

D'après la figure IV.1, on remarque que dans le cas du sable de Fontainebleau moyennement dense, le module de réaction varie linéairement d'une façon importante avec la profondeur. On remarque aussi qu'il y a une bonne concordance, d'une part entre les résultats obtenus par les corrélations de Cassan et Ménard pour le pieu de largeur  $B = 1$  m et, d'autre part, entre ceux obtenus par les corrélations proposées par Sanglerat et Lacroix, et Terzaghi.

Tableau IV 1 Expressions du module de réaction, déduites principalement des essais réalisés avec le mini-pénétrômetre de la centrifugeuse du LCPC (Nantes).

		Modules de réaction $E_s$						
		Terzaghi (1955)	Reese et Matlock (1956)	Davison (1970)	Sanglerat et Lacroix (1974)	Cassan (1978) et Ménard (1969)	Van Wanbecke (1962) et Ménard (1969)	
Sable de Fontainebleau $\gamma = 15,53$ $\text{kN/m}^3$	Essais à 1 g	$N_{Hz}$ ( $N_h = 6,9$ $\text{MPa/m}$ )	-	-	4,5qc	3,44qc	-	
	Essais à 50 g	$N_{Hz}$ ( $N_h = 6,9$ $\text{MPa/m}$ )	-	-	4,5qc	3,44qc	-	
								4,56qc
Argile Speswhite $\gamma = 16,41$ $\text{kN/m}^3$	Essais à 1 g (S.C.)	-	-	67Cu	4,5qc	-	9,32qc	
	Essais à 50 g (N.C.)	-	-	$N_{Hz}$ ( $N_h = 1,85$ )	$N_{Hz}$ ( $N_h = 0,4$ )	4,5qc	-	8,385qc

S.C. : Argile surconsolidée;  
 N.C. : Argile normalement consolidée;  
 B : Largeur du pieu.

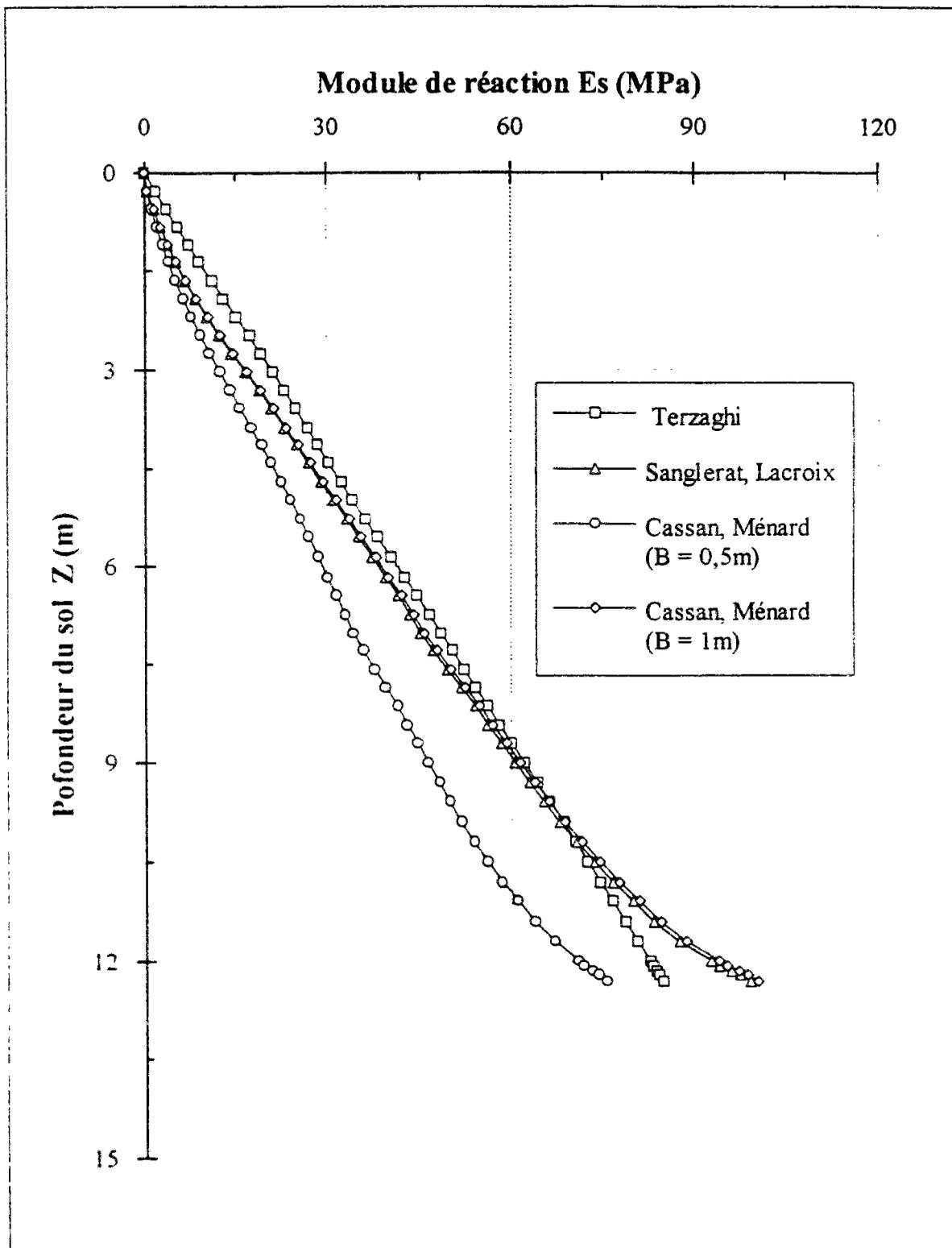


Fig. IV.1 : Profils du module de réaction obtenus dans le sable de Fontainebleau moyennement dense ( $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$ ). Conteneur 1 - Essais à 50 g.

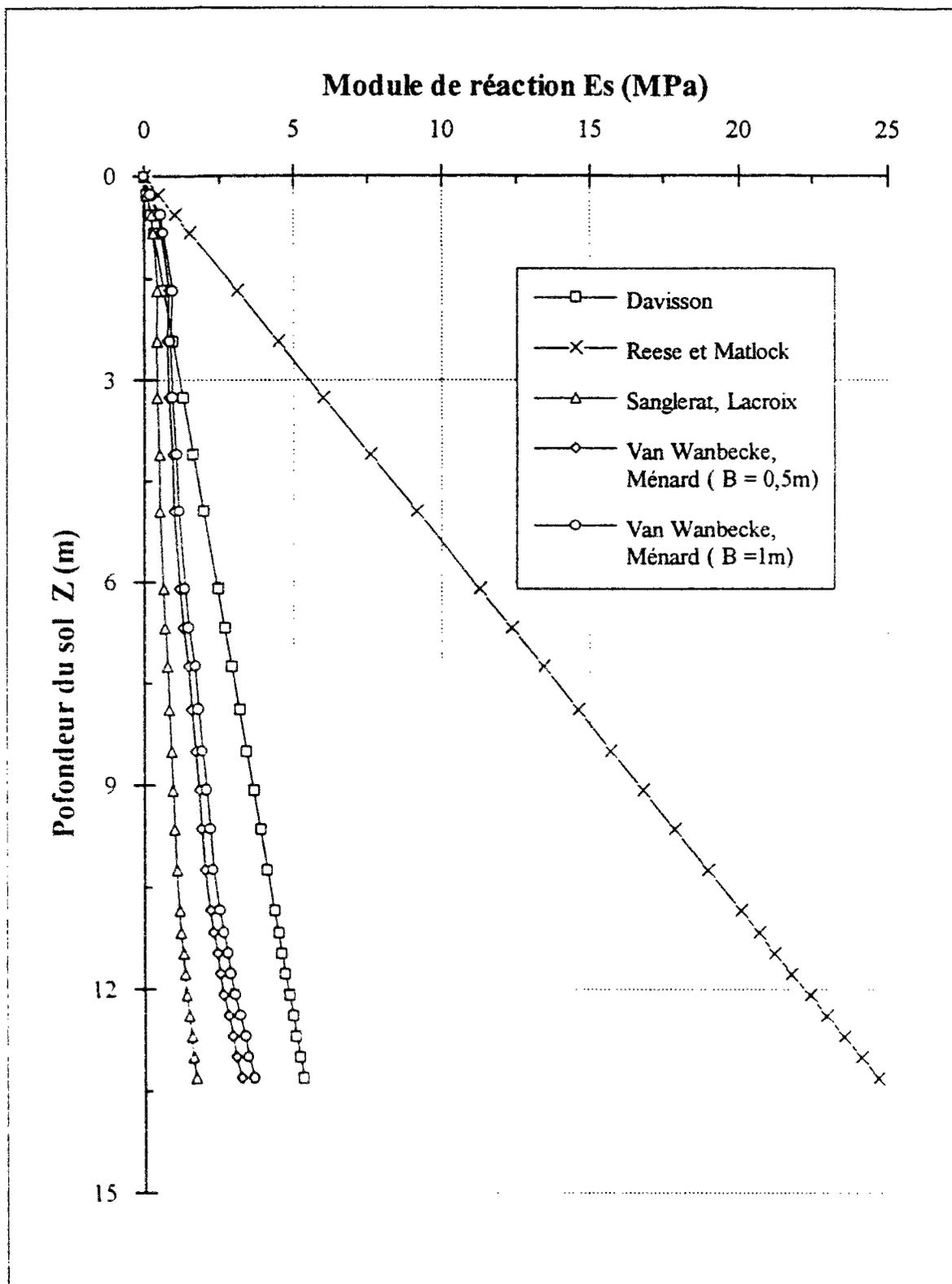


Fig. IV.2 : Profils du module de réaction obtenus dans l'argile Speswhite molle reconstituée ( $\gamma_b = 16,41 \text{ kN/m}^3$ ). Conteneur 2 - Essais à 50 g.

Par contre, pour le pieu de largeur  $B = 0,5$  m, les corrélations de Cassan et Ménard donnent des valeurs plus faibles que celles obtenues par les autres corrélations.

Dans le cas d'argile Speswhite molle reconstituée (fig. IV.2), on remarque qu'il y a une faible variation linéaire du module de réaction avec la profondeur. De plus il y a une bonne concordance entre les résultats déduits des corrélations de Van Wanbecke, Ménard et ceux déduits des corrélations de Sanglerat et Lacroix. Ceci est valable aussi bien pour le pieu de largeur  $B = 1$  m que pour celui de largeur  $B = 0,5$  m. On remarque aussi qu'il y a une surestimation dans les résultats déduits de la corrélation proposée par Davisson. Par contre, la corrélation proposée par Reese et Matlock donne des valeurs très élevées par rapport aux autres profils. En conséquence, nous ne tiendrons pas compte de ce profil dans les calculs effectués ultérieurement.

#### IV.2.2 Variation du rapport ( $F_{cr,Mandel} / F_{cr,centrifugeuse}$ ) en fonction du module de réaction

L'utilisation des formules de Mandel pour la détermination de la force critique de flambement, nécessite le choix d'une valeur unique de module de réaction. Pour bien mettre en évidence l'influence de ce choix sur les valeurs calculées de la force critique, nous avons effectué une étude paramétrique pour déterminer la variation du rapport entre les forces critiques théoriques (Mandel) et expérimentales (centrifugeuse)  $F_{crth} / F_{crex}$  en fonction du module de réaction, ceci pour différentes géométries et conditions aux limites.

A partir d'un profil moyen du module de réaction pour chaque conteneur, nous avons déterminé les forces critiques théoriques de Mandel  $F_{crth}$  en choisissant plusieurs valeurs du module de réaction le long du profil, ainsi que le rapport entre ces forces théoriques et les forces expérimentales obtenues en centrifugeuse, ceci pour les essais à 50 g avec les différentes conditions aux limites. Les résultats sont illustrés dans les figures IV.3 et IV.4.

Pour les essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau moyennement dense (conteneurs 1 et 4), la figure IV.3 montre que le rapport  $F_{crth} / F_{crex}$  croît sensiblement avec l'augmentation du module de réaction. Pour la valeur maximale de  $E_s$ , située au niveau  $z = l$  (pointe du pieu), ce rapport atteint sa valeur maximale de l'ordre de 4 pour les pieux de largeur 1 m (EE20, EA<sub>s</sub>20, ...), et de l'ordre de 3 pour les pieux de largeur 0,5 m (EE10, EA<sub>s</sub>10, ...). On remarque aussi que ce rapport varie légèrement suivant les conditions aux limites.

Pour les essais à 50 g dans l'argile Speswhite molle (conteneurs 2 et 5), la figure IV.4 montre que le rapport entre les forces critiques théoriques et expérimentales  $F_{crth} / F_{crex}$  est plus faible que celui calculé dans le cas du sable de Fontainebleau. Ce rapport varie entre 1,5 pour les pieux de largeur 1 m et 2,5 pour les pieux de largeur 0,5 m.

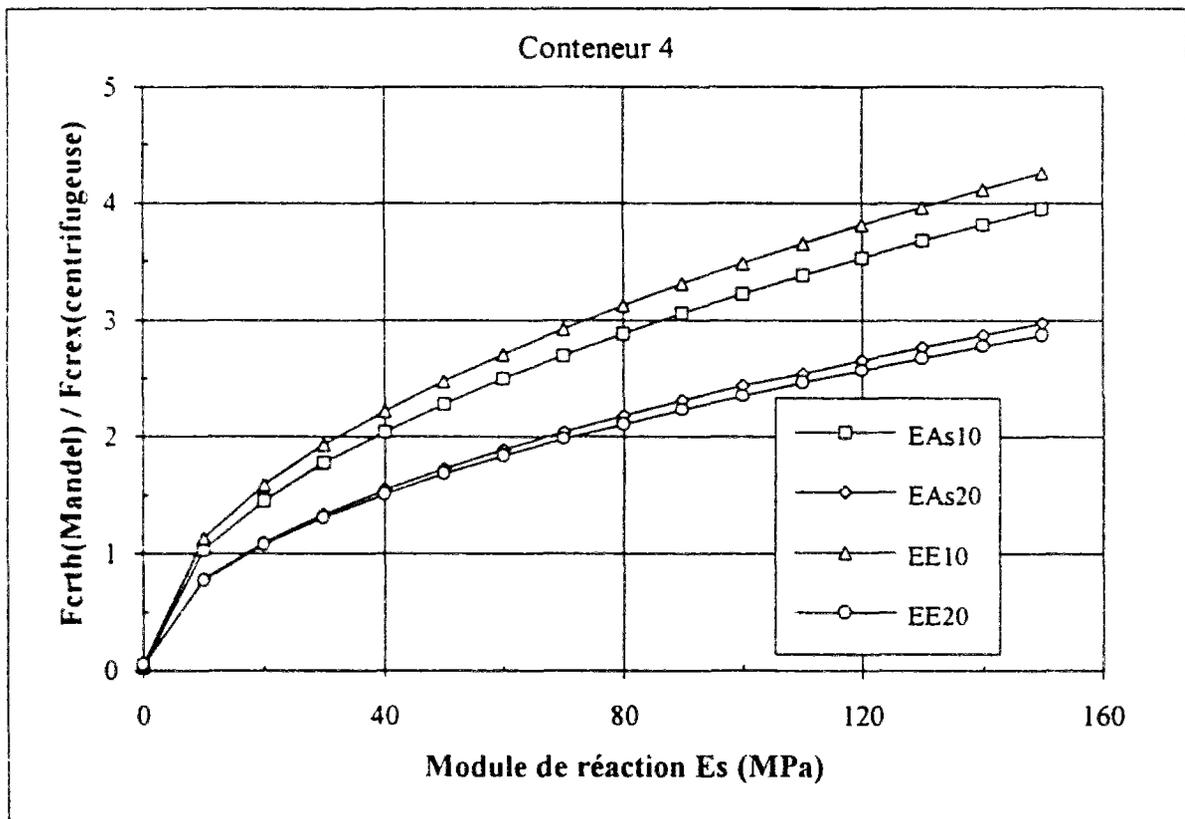
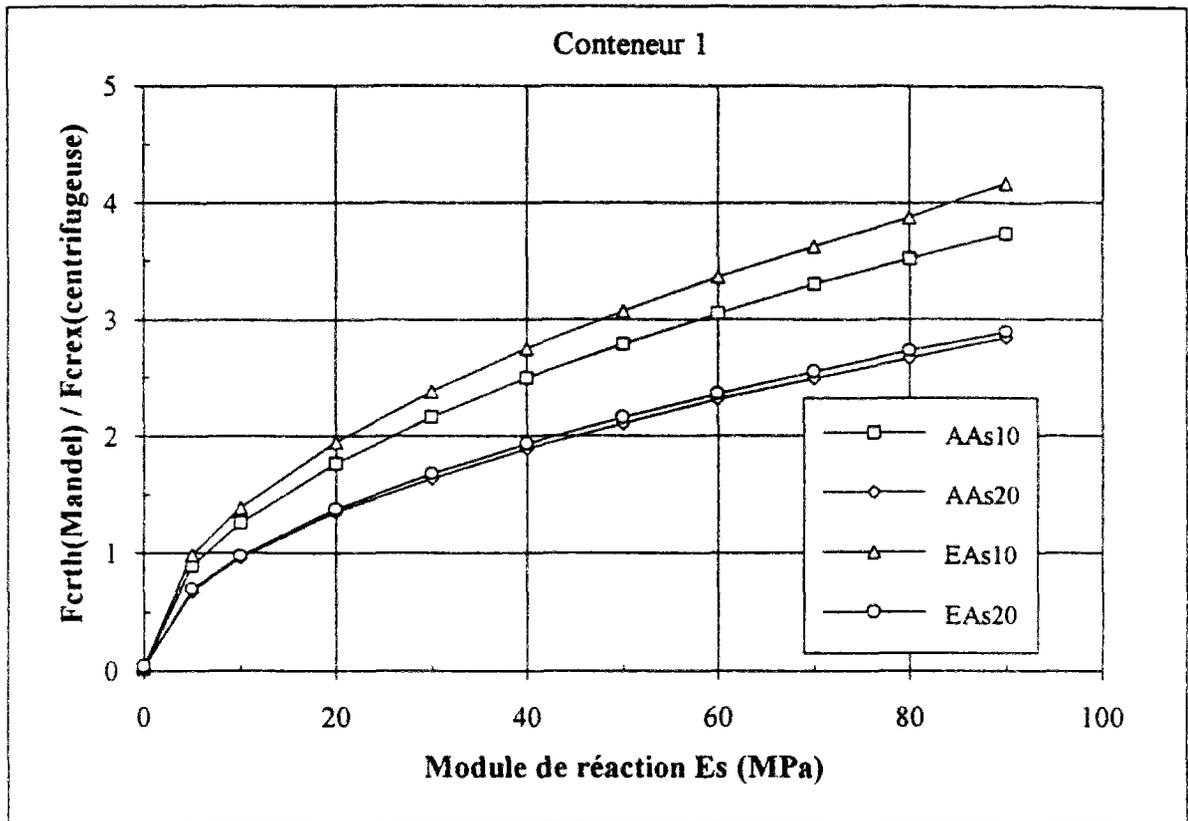


Figure IV.3 : Variations de  $F_{crth} / F_{crex}$  par rapport au module de réaction  $E_s$ .  
Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau moyennement dense.

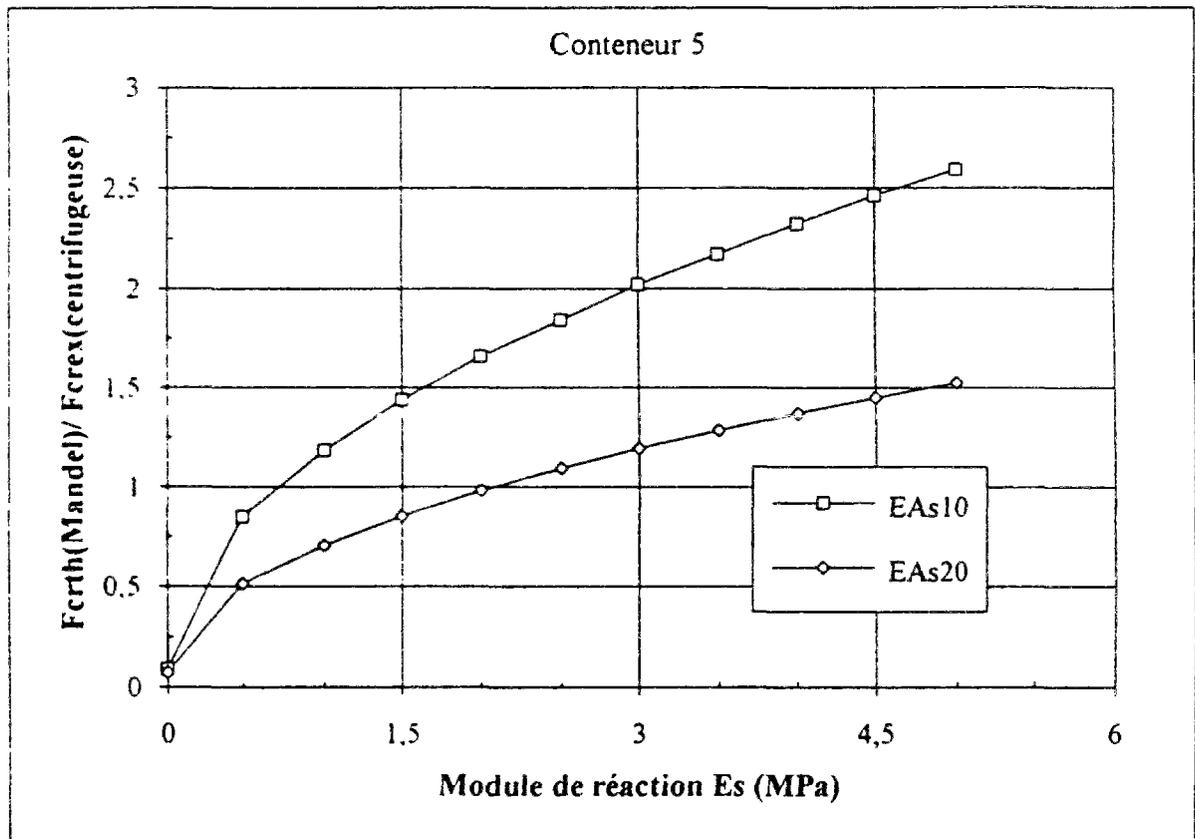
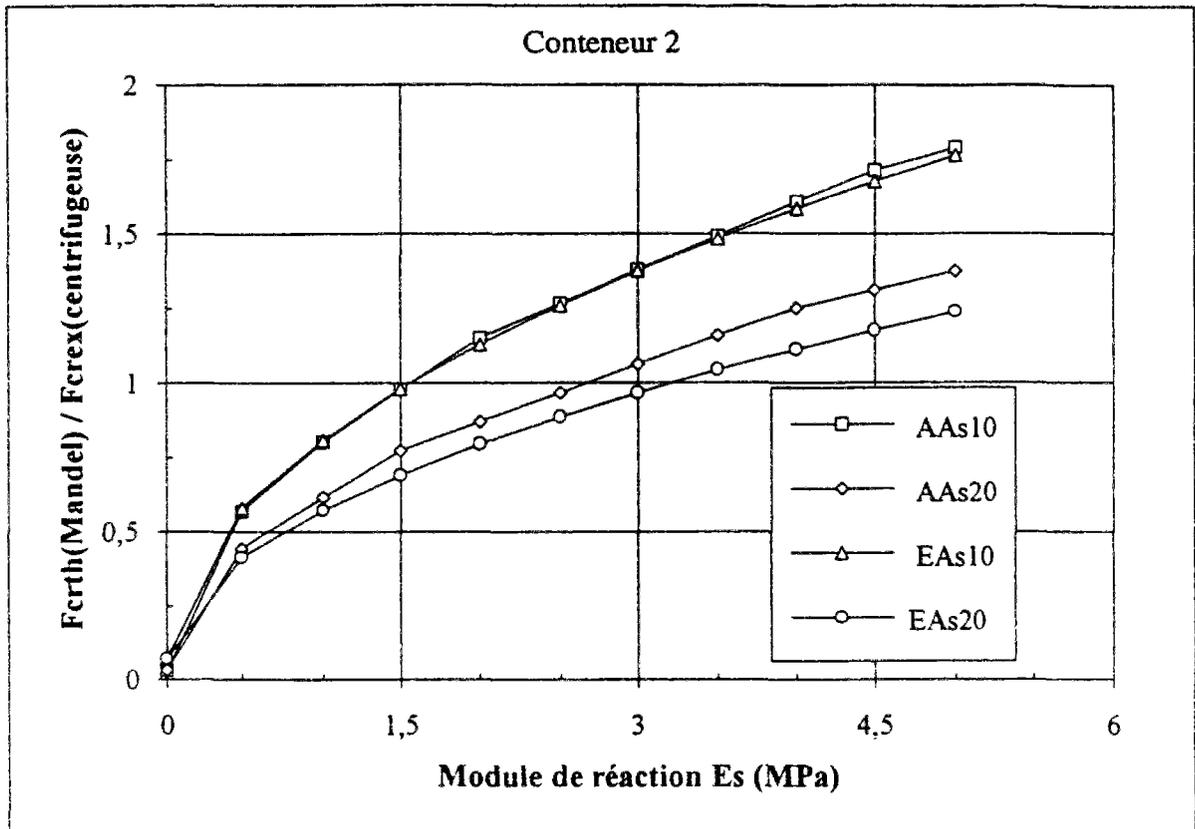


Figure IV.4 : Variations de  $F_{crth} / F_{crex}$  par rapport au module de réaction  $E_s$ .  
Essais à 50 g dans l'argile Speswhite molle reconstituée.

Ceci s'explique par le fait que l'hypothèse retenue dans l'analyse théorique de Mandel considérant le module de réaction constant le long du pieu (sol homogène) est plus valable dans le cas d'une argile molle que dans le cas d'un sable moyennement dense où la variation du module de réaction  $\Delta E_s$  entre la tête et le pointe du pieu est importante.

Ces valeurs sont en accord avec celles constatées par Gouvenot (1975) suite à des essais de flambement sur pieux aiguilles réalisés en laboratoire. En effet, Gouvenot préconise l'adaptation d'un coefficient de sécurité de 3 vis-à-vis des forces critiques déterminées à partir de la théorie de Mandel.

Le problème qui se pose est de savoir à quel niveau d'un profil il faut choisir la valeur unique du module de réaction afin d'obtenir une bonne estimation de la force critique à partir de la théorie de Mandel.

#### IV.2.3 Choix du module de réaction

L'apparition du phénomène de flambement dans les couches au voisinage de la surface du sol et les longueurs de flambement observées lors du découpage des massifs de sol laissent supposer qu'il faut choisir la valeur du module de réaction dans les niveaux supérieurs du profil. Pour valider cette hypothèse, nous proposons de faire une analyse à rebours pour déduire une valeur théorique du module de réaction correspondant à la force critique obtenue en centrifugeuse, et de reporter cette valeur sur le profil du module de réaction. Ceci nous permettra de donner une idée sur la zone dans laquelle il faut choisir la valeur du module de réaction, pour obtenir une bonne estimation de la force critique de flambement à partir de la théorie de Mandel.

Connaissant la rigidité du pieu  $E_p I_p$ , sa longueur  $l$  et sa force critique de flambement expérimentale  $F_{crit}$ , il est possible de déduire le module de réaction en utilisant, d'une part, la formule établie par Hetenyi (1946) pour les pieux encastés aux deux extrémités (cf § 1.4.2 a-1) et d'autre part, le programme FLAMANDEL (cf § II.2) pour les autres conditions aux limites. Le tableau IV 2 récapitule les valeurs calculées du module de réaction dans chaque conteneur, ceci pour les différentes géométries et conditions aux limites.

D'après le tableau IV.2, on remarque que pour les pieux de même largeur, on obtient les mêmes ordres de grandeur du module de réaction pour les différentes conditions aux limites. Ceci est valable à la fois pour le sable de Fontainebleau moyennement dense et pour l'argile Speswhite molle.

En reportant pour chaque conteneur les valeurs calculées sur un profil moyen du module de réaction, nous pouvons déterminer les profondeurs correspondant à ces valeurs.

Tableau IV.2 : Valeurs théoriques du module de réaction déduites par l'analyse à rebours.

Type d'Essai	Module de réaction $E_s$ (MPa).					
	Sable de Fontainebleau moyennement dense $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$			Argile Speswhite molle $\gamma_h = 16,41 \text{ kN/m}^3$		
	conteneur 1	conteneur 3	conteneur 4	conteneur 2	conteneur 5	
	50 g	1 g	50 g	50 g	1 g	50 g
AA <sub>s</sub> 10	6,4	-	-	1,5	-	-
AA <sub>s</sub> 20	11,0	-	-	2,6	-	-
EA <sub>s</sub> 10	5,5	1,3	9,5	1,6	1,95	0,8
EA <sub>s</sub> 20	10,1	3,0	17,8	3,2	1,95	2,1
EE10	-	0,9	8,6	-	-	-
EE20	-	1,1	17,0	-	-	-

Pour les essais à 50 g dans le sable de fontainebleau moyennement dense (conteneurs 1 et 4), la figure IV.5 montre que pour les pieux de largeur 0,5 m, le module  $E_s$  calculé correspond à la valeur située à la profondeur  $z = l / 6$  du profil du module de réaction, tandis qu'il correspond à la valeur située à  $z = l / 5$  du profil pour le pieu de largeur 1m.

Pour les essais à 50 g dans l'argile Speswhite molle (conteneurs 2 et 5), la figure IV.6 montre que les modules calculés correspondent à des valeurs situées à des niveaux inférieurs du profil de  $E_s$  à ceux relevés dans le cas du sable de Fontainebleau. Pour le pieu de largeur 0,5 m, ce niveau est situé entre  $z = l / 3$  et  $z = l / 2$  du profil du module de réaction alors qu'il se situe entre  $z = 2 / 3$  et  $z = 3 / 4$  pour le pieu de largeur 1 m. Les mêmes niveaux sont relevés pour les essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau (fig. IV.7, conteneur 3).

Pour les essais à 1 g dans l'argile Speswhite molle, les modules calculés sont supérieurs à ceux obtenus par les diverses corrélations (fig IV.7, conteneur 5), c'est-à-dire que la force critique estimée par Mandel et nos modules de réaction est inférieure à celle obtenue en centrifugeuse. Ceci est probablement dû à ce que ces diverses corrélations, qui sont à appliquer à des essais en vraie grandeur, ont été utilisées ici pour un modèle réduit (couche de sol d'épaisseur 30 cm). Par ailleurs, le mini-pénétromètre est lui aussi de dimensions réduites, ce qui peut conduire à des résultats qui ne sont pas représentatifs.

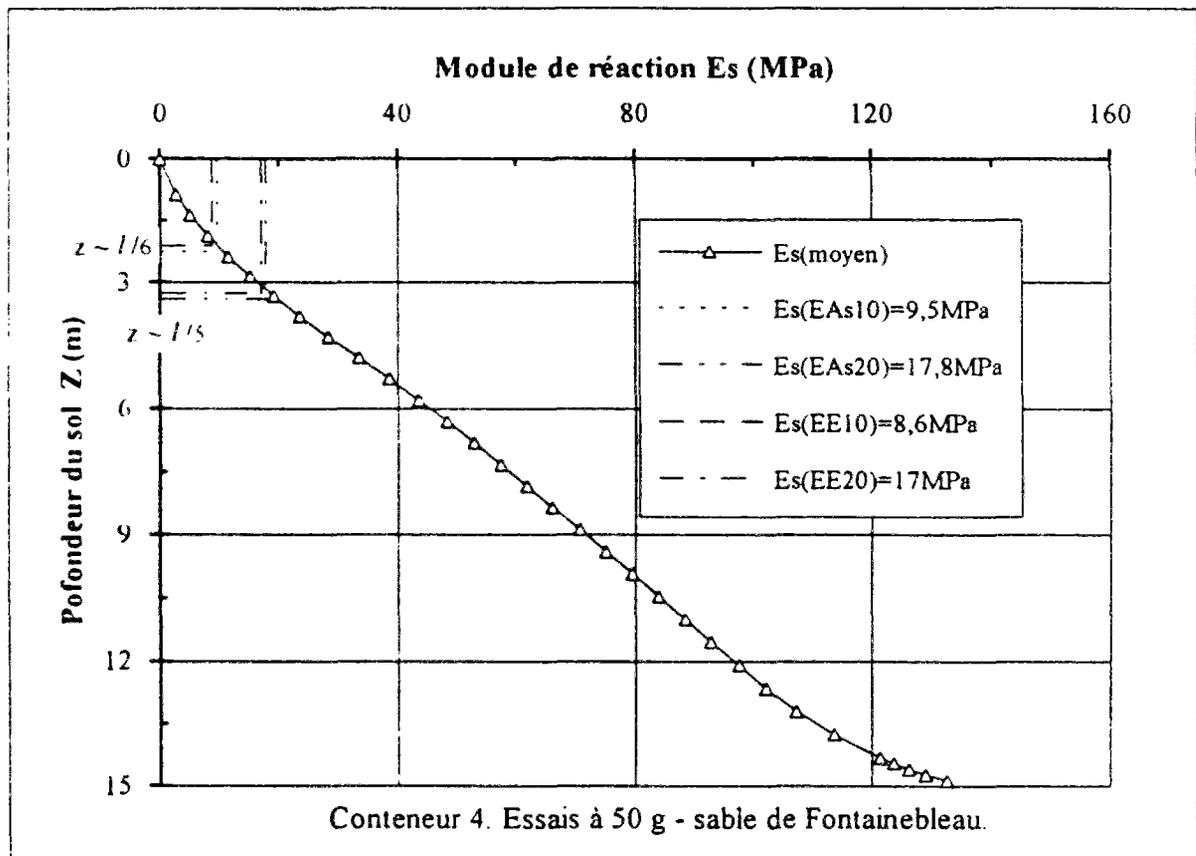
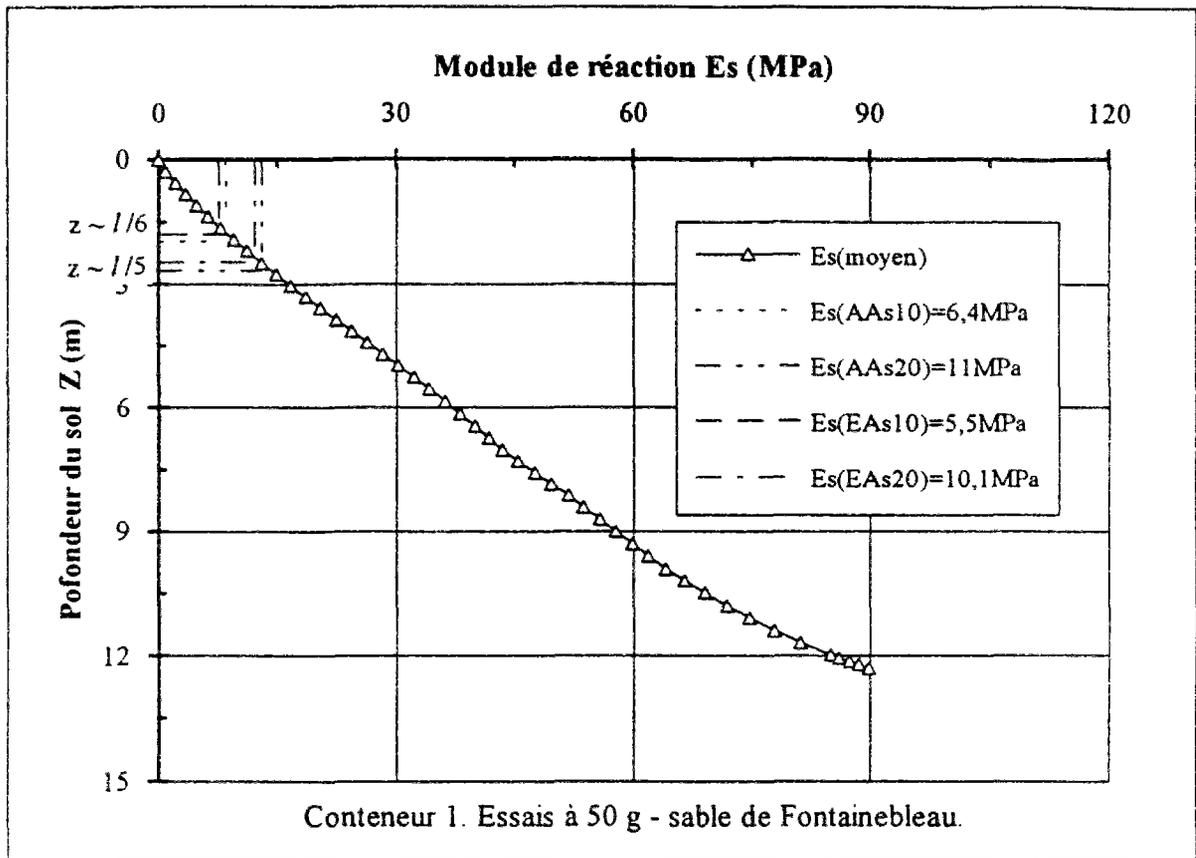


Figure IV.5 : Valeurs du module de réaction déduites de l'analyse à rebours et reportées sur un profil moyen du module de réaction des conteneurs 1 et 4.

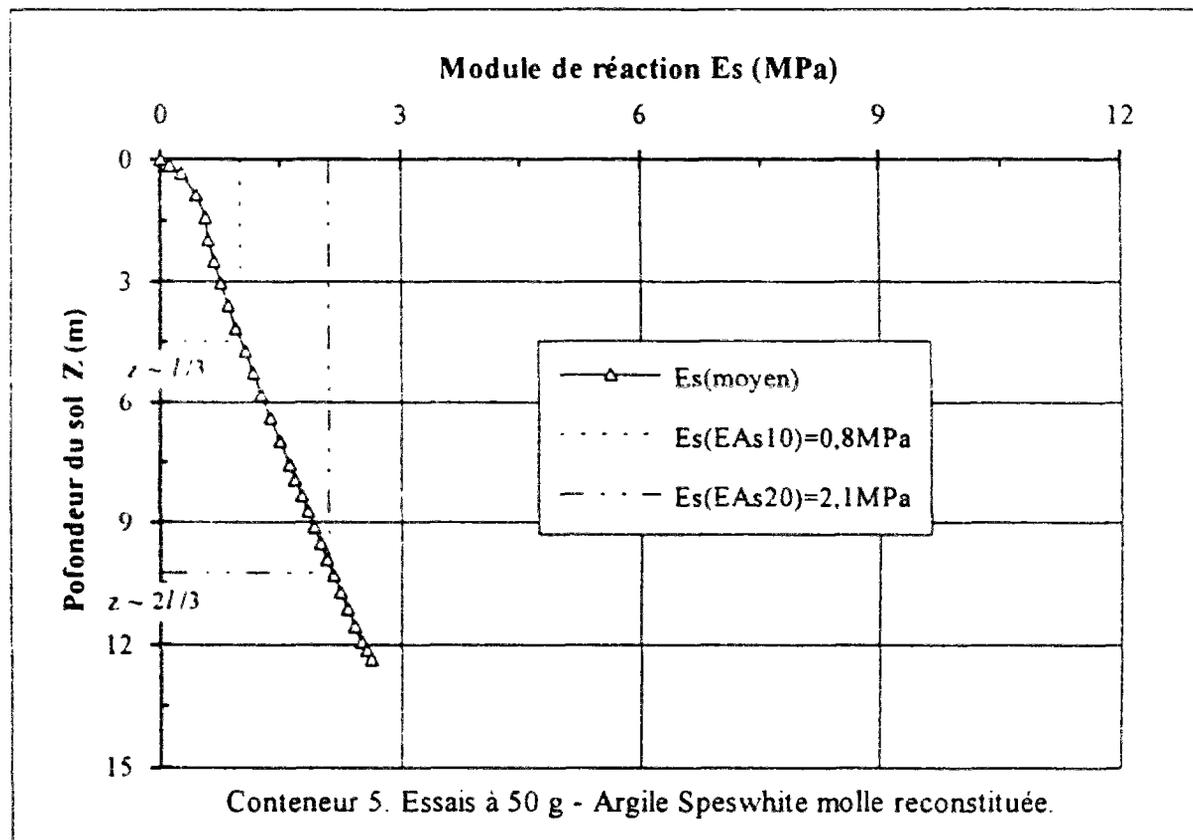
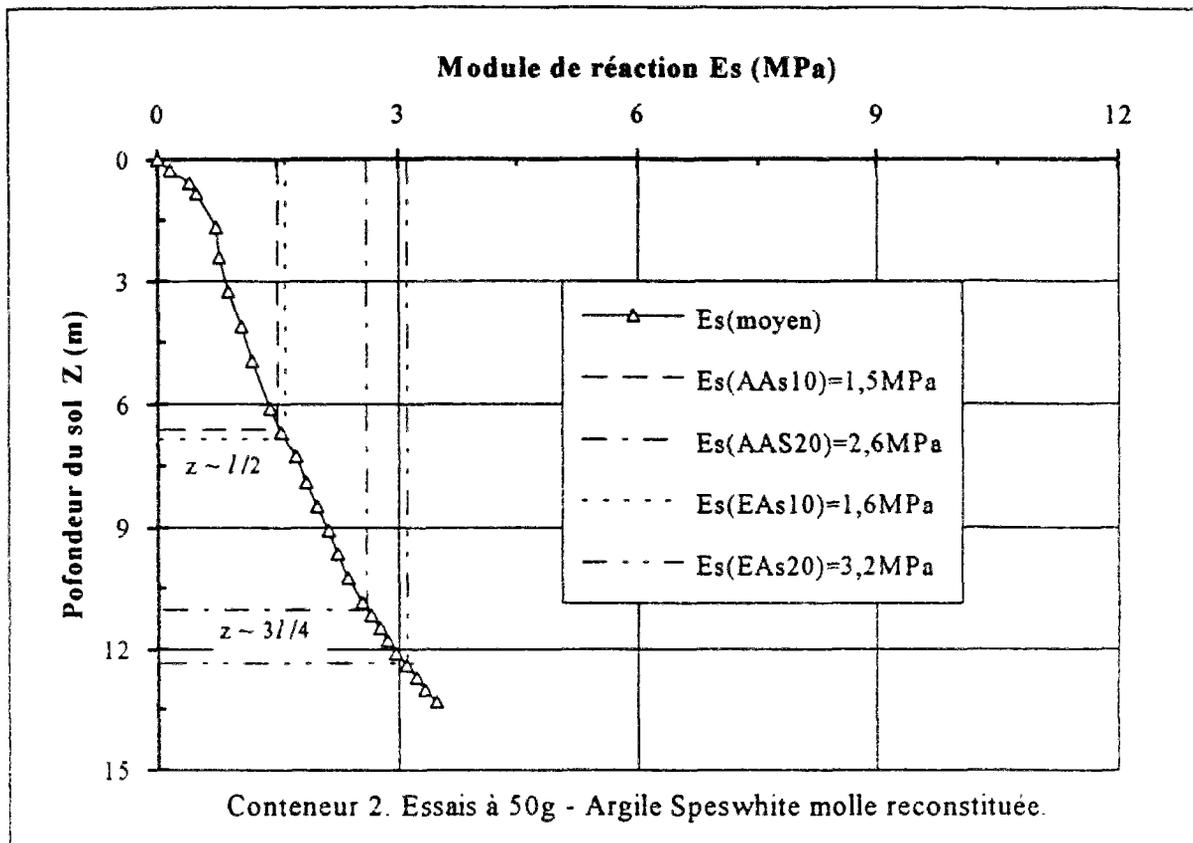


Figure IV.6 : Valeurs du module de réaction déduites de l'analyse à rebours et reportées sur un profil moyen du module de réaction des conteneurs 2 et 5.

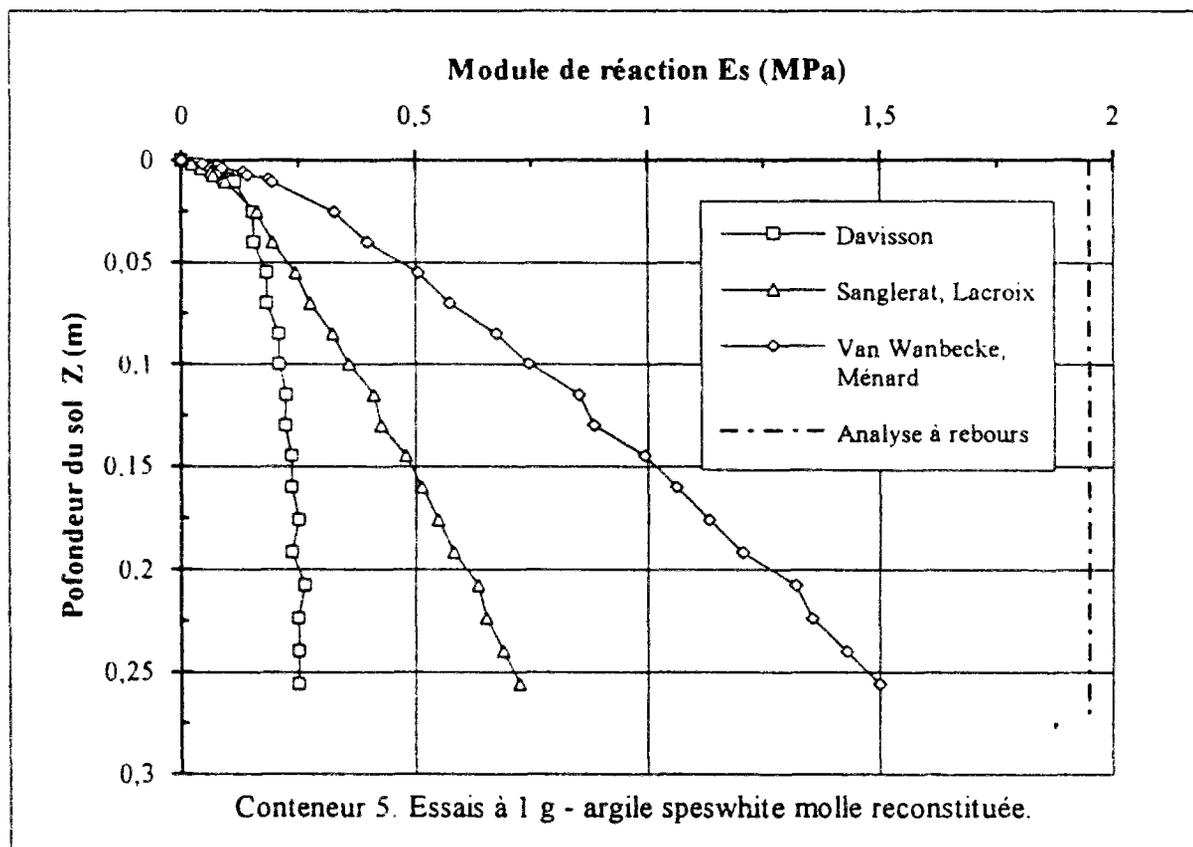
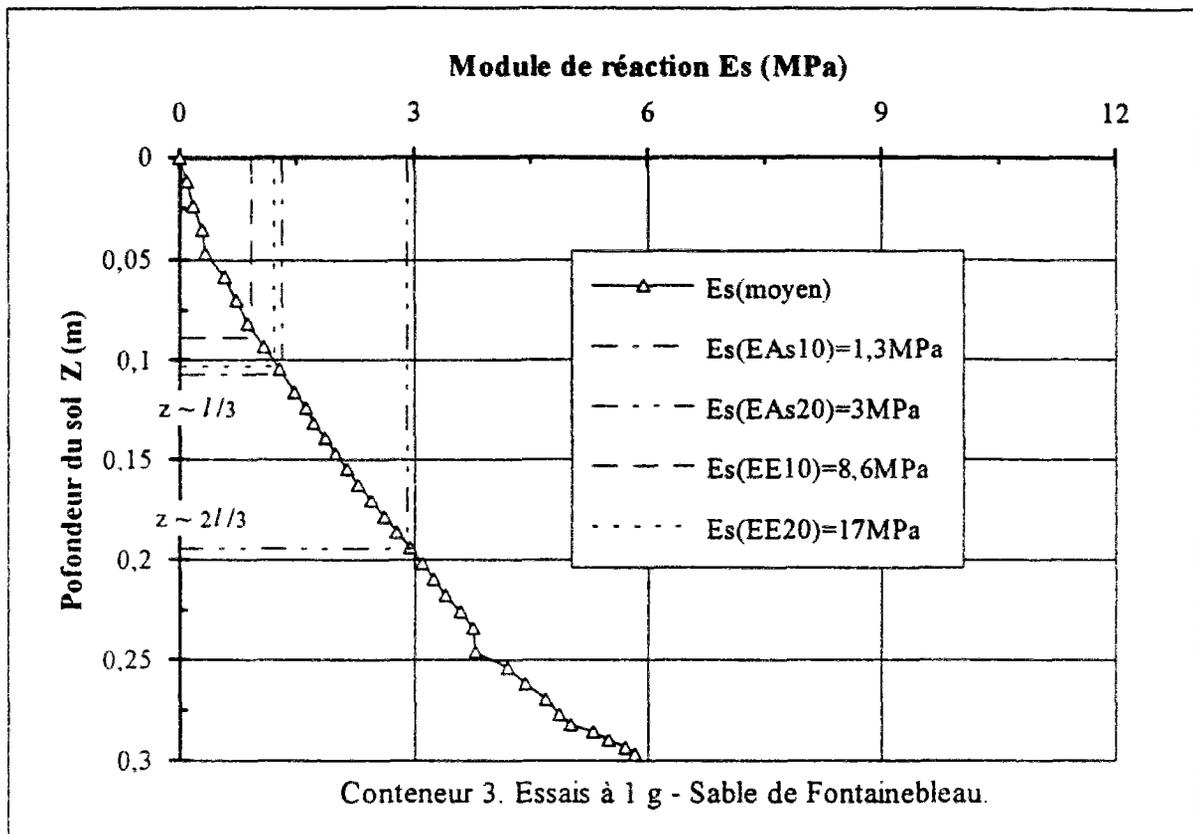


Figure IV.7 : Valeurs du module de réaction déduites de l'analyse à rebours et reportées sur les profils du module de réaction des conteneurs 3 et 5 (1 g).

En prenant la valeur de  $E_s$  à mi-profondeur du pieu, on peut calculer la longueur de transfert  $l_0 = (4E_p I_p / E_s)^{1/4}$ . Le calcul donne, dans le cas du sable, un rapport  $l / l_0$  de 23 pour le pieu de largeur 0,5 m et de 18 pour le pieu de largeur 1 m. Dans le cas d'argile, on obtient  $l / l_0 = 11$  pour le pieu de largeur 0,5 m et  $l / l_0 = 9$  pour le pieu de largeur 1 m. D'après ces valeurs, on constate que les pieux sont très longs ou très souples.

En exprimant les profondeurs trouvées plus haut en fonction de ces longueurs de transfert, nous préconisons, pour obtenir une bonne estimation de la force critique de flambement par la théorie de Mandel dans le cas d'un sol à module de réaction croissant linéairement avec la profondeur, de choisir une valeur du module de réaction correspondant à une profondeur entre  $3,5 l_0$  et  $4 l_0$  dans le cas d'un sable moyennement dense ( $E_s$  à mi-profondeur compris entre 50 et 75 MPa), et entre  $4,5 l_0$  et  $6 l_0$  dans le cas d'une argile molle ( $E_s$  à mi-profondeur compris entre 3 et 5 MPa). Au delà de ces profondeurs, la théorie de Mandel surestime la valeur de la force critique de flambement.

#### IV.2.4 Extrapolation des résultats obtenus en centrifugeuse

Les essais de flambement en centrifugeuse sont réalisés sur des modèles réduits en aluminium, matériau rarement utilisé dans la pratique (mais qui présentent, pour nous, l'avantage d'avoir des limites élastiques élevées). En effet, dans la réalité les pieux ou les micropieux sont principalement constitués en acier, coulis armé ou en béton armé, le coulis armé est plutôt utilisé dans le cas des micropieux. Ces matériaux ont des caractéristiques mécaniques différentes de celles de l'aluminium, notamment le module d'élasticité  $E$  et la limite élastique  $\sigma_e$ .

Notre but est, d'une part d'étudier la possibilité d'extrapolation des résultats obtenus en centrifugeuse pour déduire des forces critiques de flambement pour des pieux constitués de tels matériaux, d'autre part d'étudier le risque de flambement ; il s'agit de vérifier si sous l'action des charges critiques déterminées pour l'aluminium, les micropieux réels périraient par flambement ou par écrasement et dépassement de la limite élastique.

La force critique de flambement dépend de la rigidité à la flexion du pieu  $E_p I_p$ , de sa longueur  $l$ , des conditions aux limites et de la nature du sol caractérisé par son module de réaction  $E_s$ . En conservant les valeurs des trois derniers paramètres, il est donc possible d'obtenir la même force critique de flambement pour deux pieux constitués de matériaux différents, à condition qu'ils aient la même rigidité  $E_p I_p$ . Ainsi, en égalisant  $E_p I_p$ , nous avons déterminé des dimensions correspondant à des pieux en acier HR (haute résistance) et en béton armé, encastés en tête et simplement appuyés en pointe, fichés dans le sable de Fontainebleau moyennement dense et dans l'argile Speswhite molle reconstituée.

Pour la vérification vis-à-vis du flambement, il faut calculer la contrainte critique produite dans le matériau au moment de la rupture, telle que :

$$\sigma_{\text{crex}} = \frac{F_{\text{crex}}}{S}, \quad (\text{IV.5})$$

$F_{\text{crex}}$  : force critique de flambement obtenue en centrifugeuse,

$S$  : section calculée.

Cette contrainte est comparée à la limite élastique du matériau  $\sigma_e$  : si  $\sigma_{\text{crex}} < \sigma_e$ , le pieu périt par flambement. Dans le cas contraire, il y a " rupture " par dépassement de la limite élastique. Le tableau IV.3 récapitule les dimensions obtenues, les valeurs des contraintes critiques  $\sigma_{\text{crex}}$  et le risque de flambement que l'on déduit, ceci pour plusieurs matériaux et différents types de sols. D'après le tableau IV.3, on constate qu'il faut vérifier le flambement pour les pieux en acier de haute résistance fichés dans une argile molle ( $E_s \approx 3$  à 5 MPa). Il est nécessaire aussi de vérifier le flambement dans le cas d'un sable moyennement dense ( $E_s \approx 50$  à 75 MPa), même si le risque est plus faible. Par contre pour les pieux en béton armé, la rupture par écrasement du pieu se produit avant le flambement (les contraintes critiques de flambement dépassent les limites élastiques). Ceci est valable aussi bien dans le cas de l'argile que dans le cas du sable. Ces conclusions sont en accord avec les constatations établies dans la pratique.

### IV.3 Comparaison entre les calculs numériques de GOUFLA et les résultats en centrifugeuse

Dans le cadre de la validation du programme GOUFLA, nous avons comparé les résultats calculés avec ceux obtenus en centrifugeuse. Nous avons étudié le cas de pieux de largeurs 0,5 m et 1 m, fichés dans l'argile Speswhite molle ou le sable de Fontainebleau moyennement dense, ceci pour différentes conditions aux limites. Nous supposons que le module de réaction  $E_s$  est variable avec la profondeur, ceci en adoptant une discrétisation physique en plusieurs couches de sol, ayant chacune une valeur différente du module de réaction. Ces valeurs sont relevées d'un profil moyen de  $E_s$ , déterminé à partir des diverses corrélations (cf. § IV.2.1, Fig IV 3 et IV 4) Dans le cas d'argile Speswhite molle, une discrétisation en trois couches de sol est faite, compte tenu de la faible variation du module de réaction avec la profondeur. Par contre, dans le cas du sable de Fontainebleau où la variation de  $E_s$  est plus importante, nous avons fait une discrétisation plus fine en 11 couches de sol.

Pour chaque cas, nous avons comparé, d'une part, les forces critiques de flambement obtenues par GOUFLA avec celles mesurées en centrifugeuse, d'autre part, les déformées ainsi que les longueurs de flambement obtenues par GOUFLA avec celles mesurées lors du découpage des massifs de sol. Le tableau IV.4 regroupe les valeurs des forces critiques obtenues par GOUFLA et celles mesurées en centrifugeuse, pour les différents cas étudiés.

Tableau IV 3 Dimensions des pieux en acier HR et béton, extrapolées à partir des forces critiques obtenues en centrifugeuse et vérification du risque de flambement de ces pieux.

Type de sol	Force critique expérimentale $F_{crex}$ (kN)	matériau constituant le pieu	Dimensions du pieu (largeur x épaisseur) (cm x cm)	Contrainte due à la force critique expérimentale $\sigma_{Grex}$ (MPa)	Limite élastique $\sigma_g$ (MPa)	Risque de flambement "dominant"
Argile Speswhite molle $\gamma_h = 16,41$ kN/m <sup>3</sup>	3000	Aluminium	50 x 10	60	200	oui
		Acier HR	50 x 7	85	450	oui
		Béton armé	50 x 12	40	15-18	non
Sable de Fontainebleau moyennement dense $\gamma_d = 15,53$ kN/m <sup>3</sup>	7225	Aluminium	100 x 10	72	200	oui
		Acier HR	100 x 7	103	450	oui
		Béton armé	100 x 12	46	15-18	non
Sable de Fontainebleau moyennement dense $\gamma_d = 15,53$ kN/m <sup>3</sup>	7893	Aluminium	50 x 10	173	200	oui
		Acier HR	50 x 7	248	450	oui
		Béton armé	50 x 12	118	15-18	non
Sable de Fontainebleau moyennement dense $\gamma_d = 15,53$ kN/m <sup>3</sup>	15928	Aluminium	100 x 10	161	200	oui
		Acier HR	100 x 7	230	450	oui
		Béton armé	100 x 12	103	15-18	non

Le tableau IV.4 montre qu'il y a une bonne concordance entre les forces critiques obtenues par GOUFLA et la centrifugeuse pour les pieux de largeur 0,5 m, avec une légère surestimation (+ 6 %) dans les résultats obtenus par GOUFLA. Ceci est valable aussi bien dans le cas de l'argile Speswhite molle que dans le cas du sable de Fontainebleau et pour les différentes conditions aux limites.

Tableau IV.4 : Forces critiques (kN) calculées par GOUFLA et mesurées en centrifugeuse.

		Argile Speswhite molle		Sable de Fontainebleau
		EA <sub>s</sub>	AA <sub>s</sub>	EA <sub>s</sub>
B = 0,5 m	Centrifugeuse	4385	2840	9910
	GOUFLA	4660	3035	10600
B = 1 m	Centrifugeuse	8913	7030	20865
	GOUFLA	6890	5575	19150

Par contre, dans le cas des pieux de largeur 1 m, le programme GOUFLA donne des forces critiques inférieures à celles mesurées en centrifugeuse avec un écart qui varie de - 8 % dans le cas du sable de Fontainebleau et de - 20 % dans le cas d'argile molle.

Ces écarts proviennent probablement du choix du module de réaction et de la discrétisation physique en plusieurs couches (on suppose que le module de réaction est constant dans chaque couche) De ces comparaisons on peut déduire que le programme GOUFLA permet d'encadrer la valeur expérimentale avec un écart de  $\pm 10 \%$ .

Des comparaisons entre les déplacements calculés par GOUFLA et ceux mesurés en centrifugeuse, sont illustrées dans les figures IV.8, IV.9 et IV.10. Ces figures montrent que le programme GOUFLA retrouve les mêmes ordres de grandeur de la longueur de flambement (partie du pieu déformée suite au flambement) que celle mesurée en centrifugeuse.

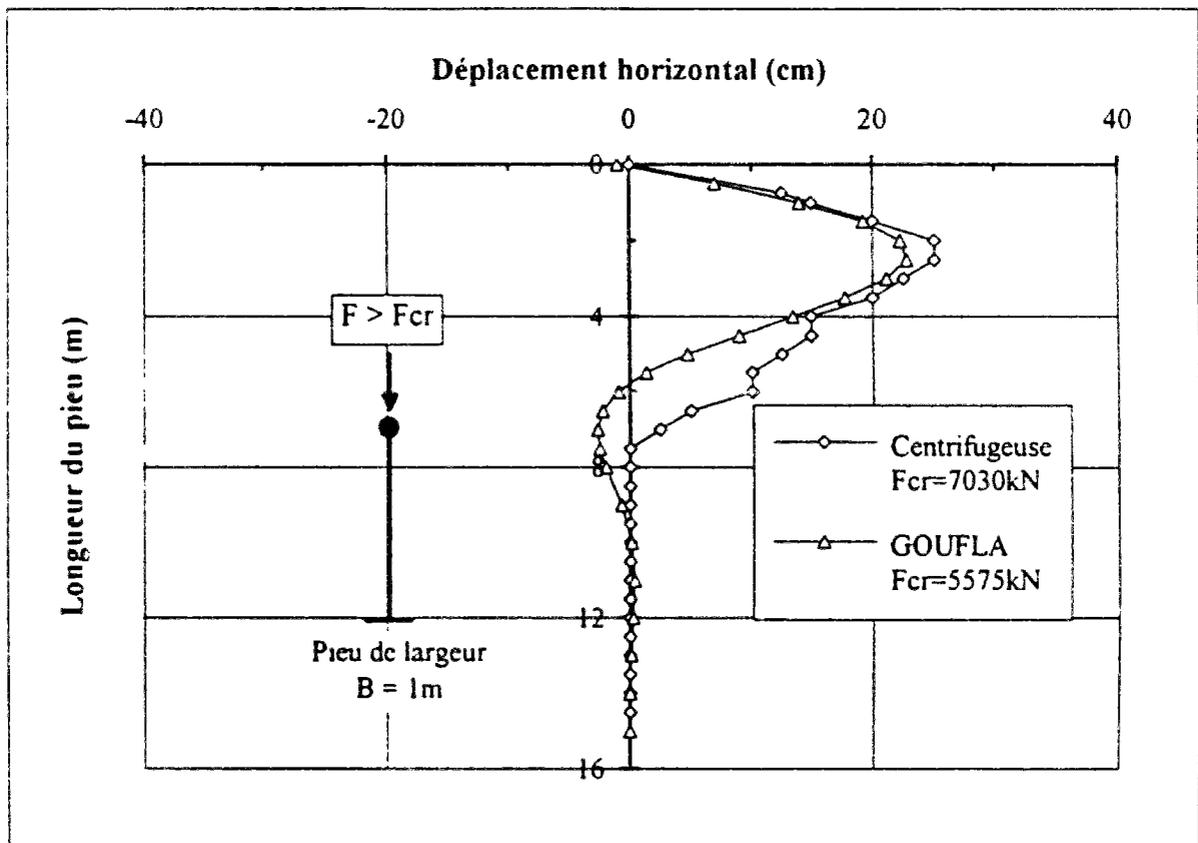
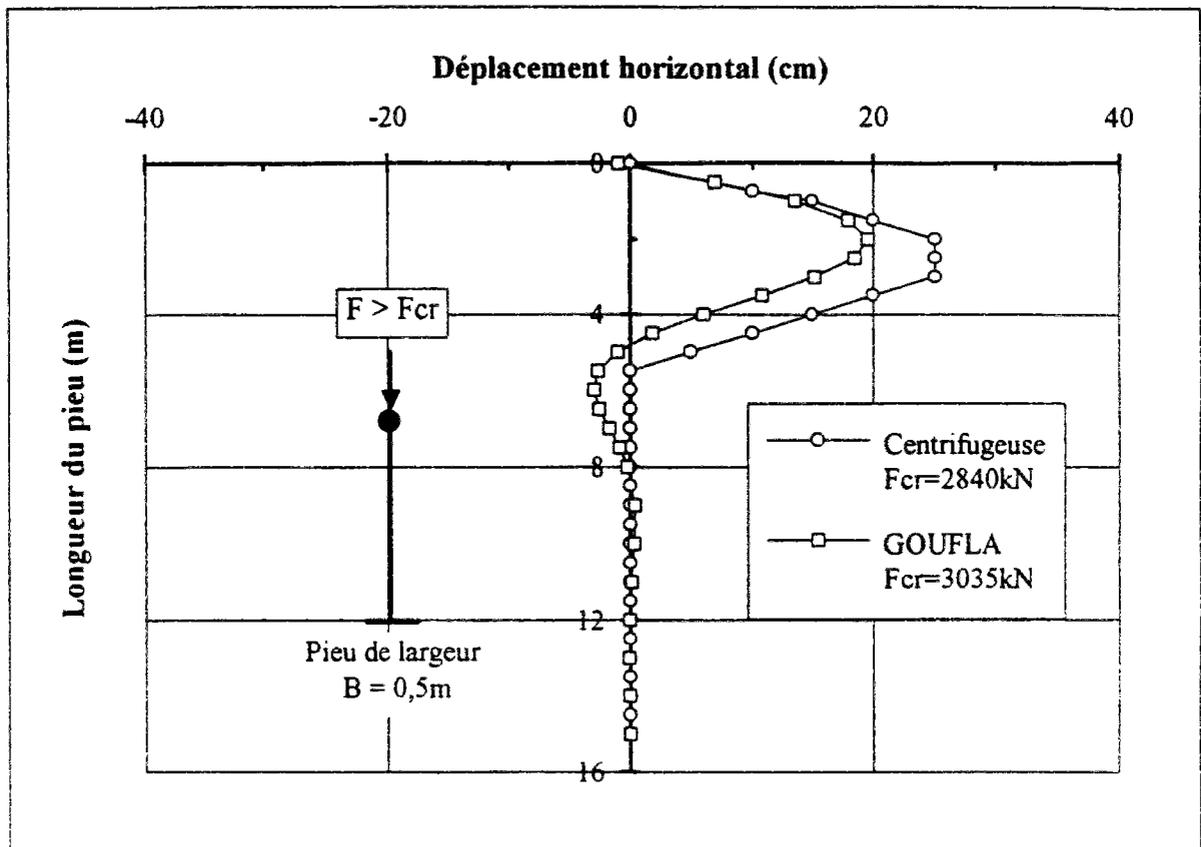


Figure IV.8 : Comparaison entre les déformées obtenues par GOUFLA et la centrifugeuse. Pieux articulés en tête et simplement appuyés en pointe, dans l'argile Speswhite molle.

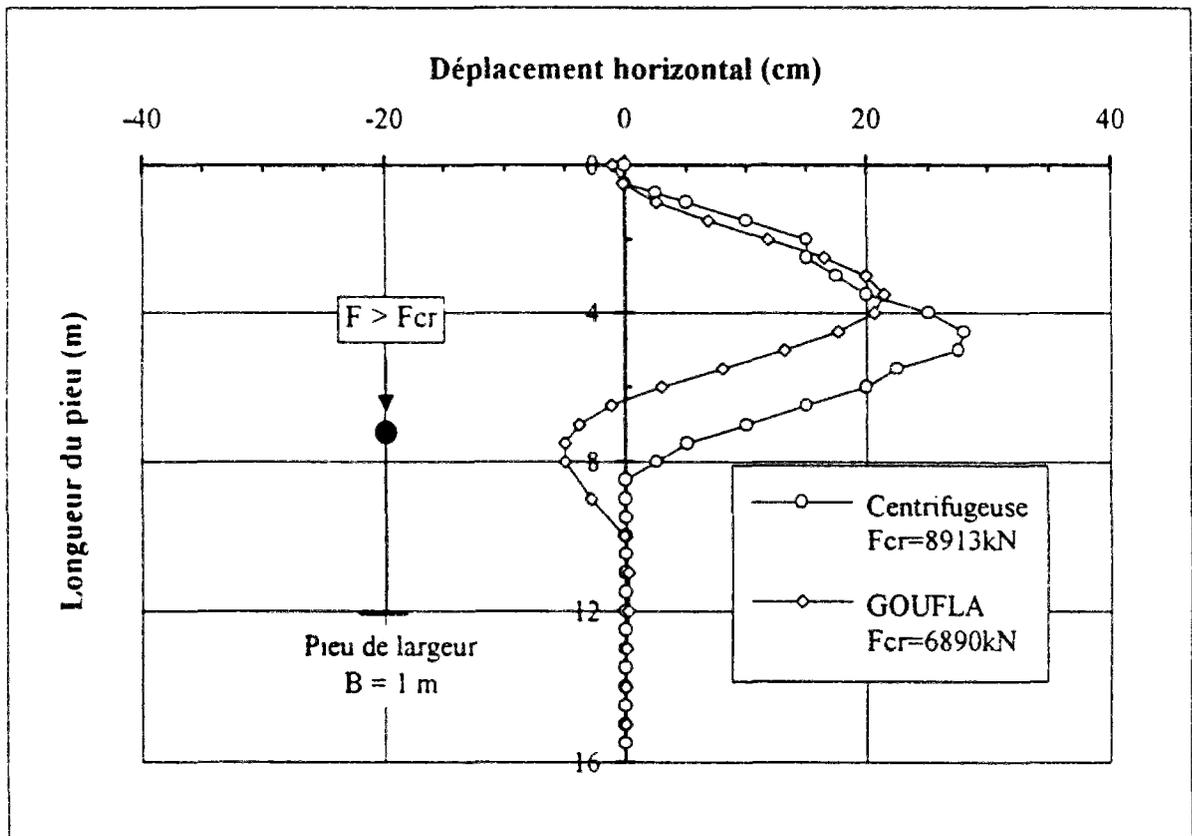
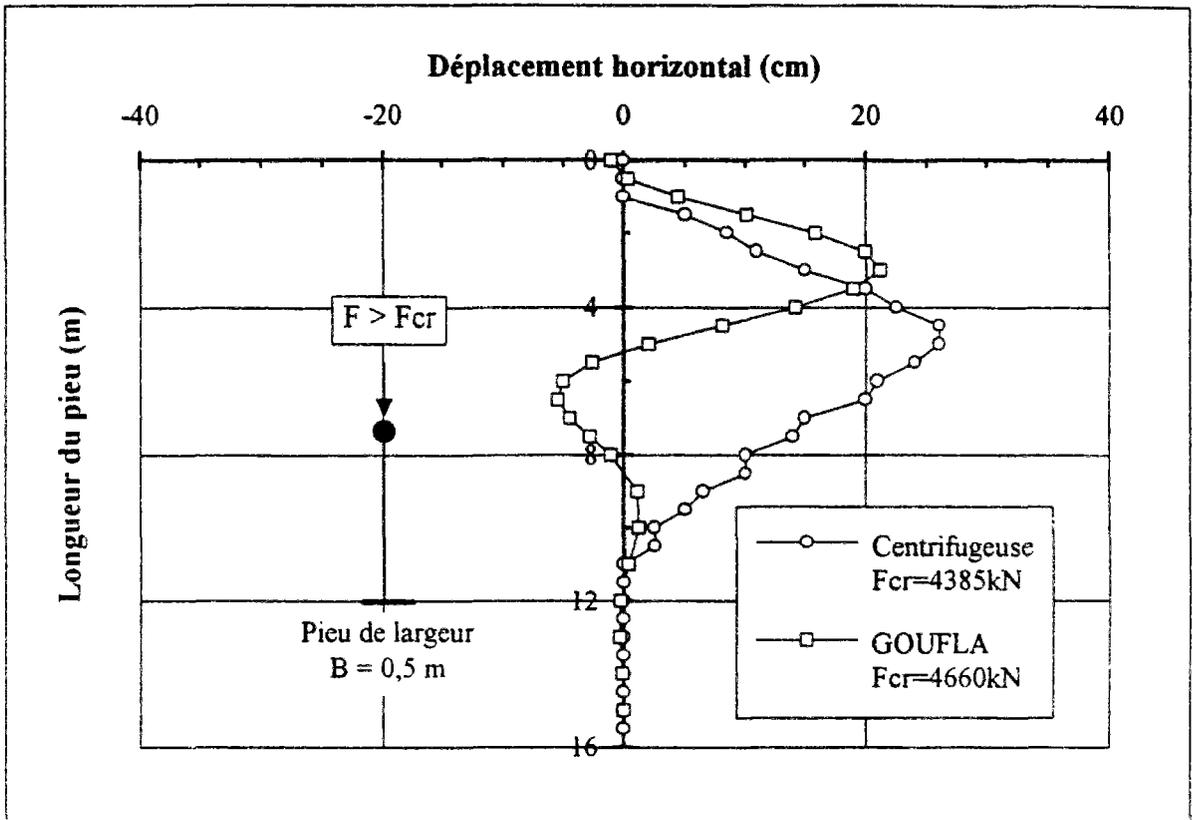


Figure IV.9 : Comparaison entre les déformées obtenues par GOUFLA et la centrifugeuse. Pieux encastés en tête et simplement appuyés en pointe, dans l'argile Speswhite molle.

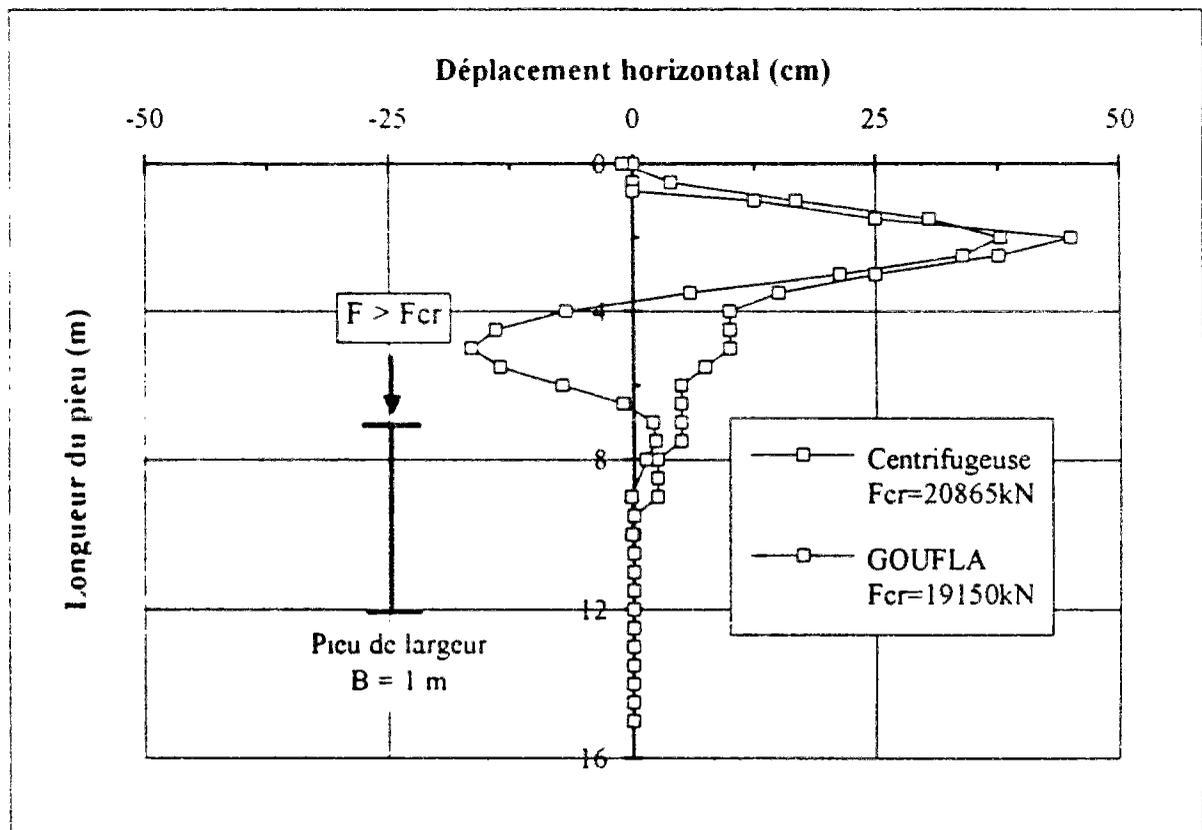
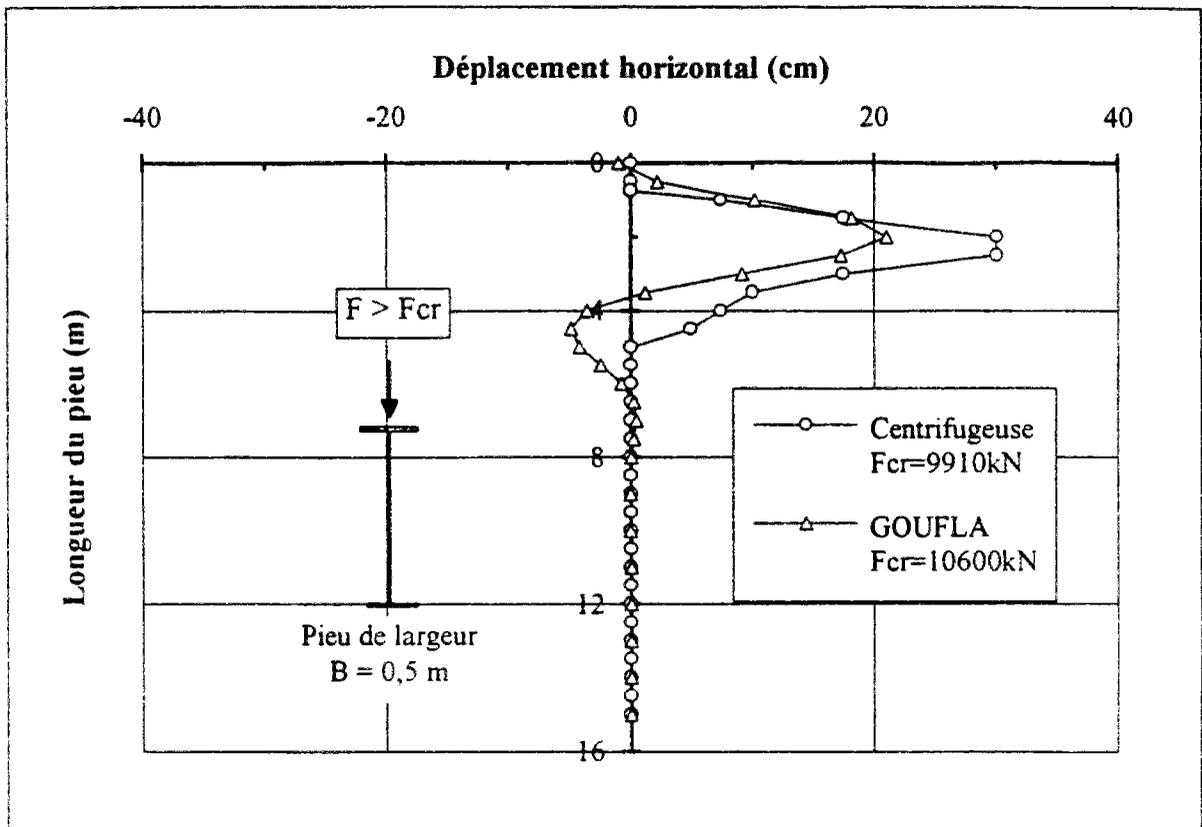


Figure IV.10 : Comparaison entre les déformées obtenues par GOUFLA et la centrifugeuse. Pieux encastés en tête et simplement appuyés en pointe, dans le sable de Fontainebleau.

## IV.4 Application au cas du pont des remparts à Cahors.

### IV.4.1 Présentation de l'ouvrage

Cette étude présente une application des programmes FLAMANDEL et GOUFLA sur un cas réel de prédimensionnement de micropieux dans le cadre du renforcement des fondations de la pile du pont des remparts sur le Lot à Cahors. Cette pile s'appuie sur des pieux de diamètre 1,5 m ( $\Phi 1500$  mm), fondés dans un banc calcaire surmontant un karst (fig. IV.11). La distance entre-axes des pieux est de 5 m. Les résultats des sondages de reconnaissance effectués au droit des pieux montrent que le karst est d'une hauteur moyenne de 12 m du côté amont et de 6 m du côté aval. Au-dessous de la couche de karst se trouve une couche de calcaire sain. La première couche de calcaire est surmontée d'une couche d'alluvions de 1,5 m d'épaisseur et d'un remblai de 4,2 m de hauteur.

Afin d'éviter les difficultés qu'exigerait l'installation de pieux de gros diamètre  $\Phi 1500$  mm au travers d'horizons karstifiés, il a été décidé d'adopter le principe d'un fût arrêté dans la première couche de calcaire dur et la réalisation des micropieux de forte capacité, traversant le karst et assurant la transmission des efforts verticaux à la seconde couche de calcaires sains. Les micropieux au nombre de douze (6 par pieu) sont scellés en tête dans les pieux de la pile et encastrés en pointe dans le calcaire sain sur 4 m. Les pieux, de longueur totale 6 m, sont ancrés de 2 m dans la première couche de calcaire. Chaque fût comporte six tubes guides à partir desquels seront réalisés les six micropieux. Les armatures de ces derniers sont constituées de tubes d'acier à haute résistance.

Nous avons réalisé une étude paramétrique dans le but de déterminer les dimensions des micropieux afin qu'ils puissent supporter les charges de service prévues sans qu'il y ait risque de flambement. Ceci a été fait en calculant les forces critiques de flambement d'après la théorie de Mandel (FLAMANDEL) et le programme GOUFLA pour différents cas, parfois très pessimistes.

### IV.4.2 Hypothèses de calcul

Les calculs sont effectués pour deux types de micropieux constitués de tubes  $\Phi 127/109$  (diamètre extérieur = 127 mm, épaisseur = 18 mm) et  $\Phi 168/147$  (diamètre extérieur = 168 mm, épaisseur = 21 mm). Le module d'Young de l'acier est  $E_y = 2,1 \cdot 10^5$  MPa. Les caractéristiques pressiométriques retenues sont les suivantes :

- calcaire dur  $E_M = 250$  MPa ,  $p_l = 10$  MPa ,  $\alpha = 1/2$ ;
- karst avec remplissage argileux  $E_M = 4$  MPa ,  $p_l = 0,4$  MPa ,  $\alpha = 2/3$ .

Les modules de réaction  $E_r$  sont déterminés à partir des formules de Ménard (cf. §.1.4.6.a). On obtient une valeur de 560 MPa pour le calcaire et de 6,7 MPa pour le karst.

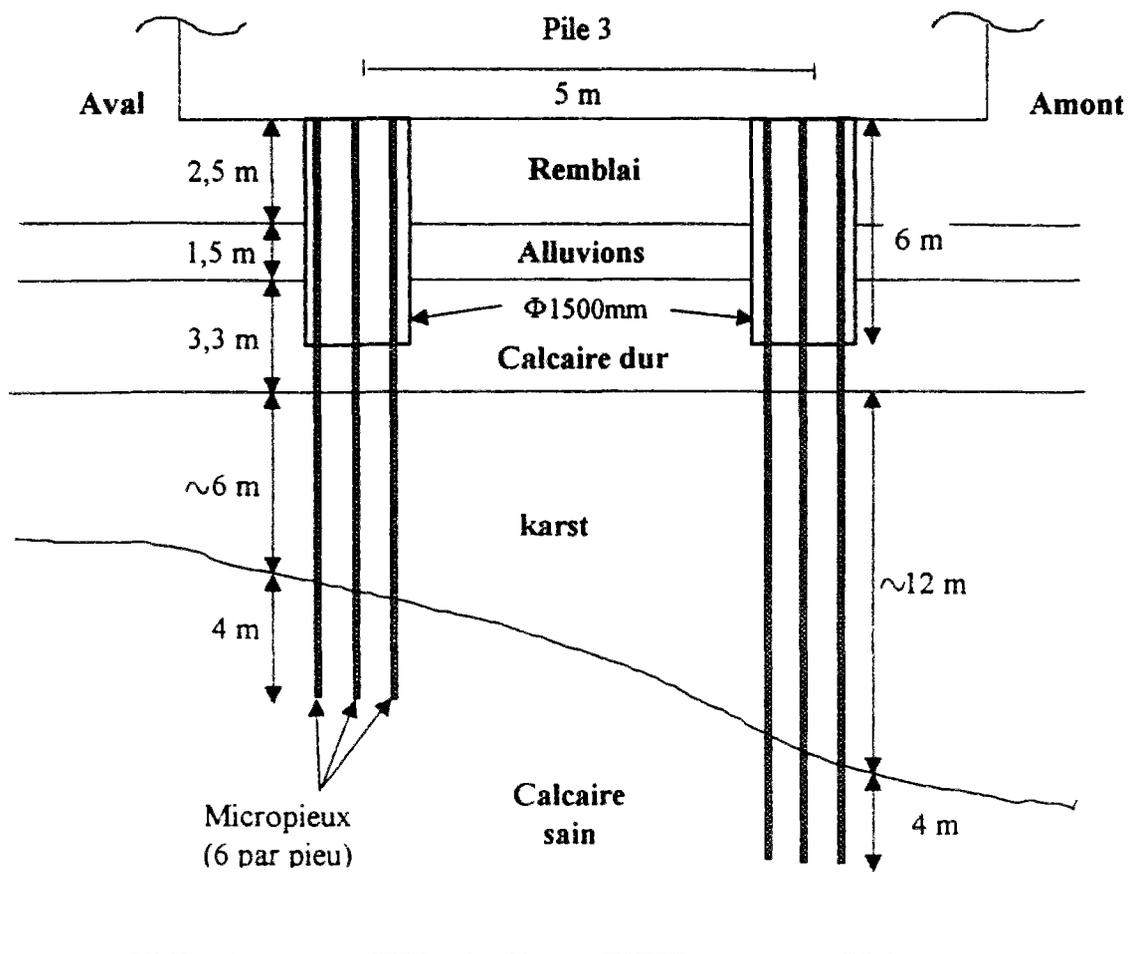


Figure IV.11 : Coupe géologique au droit de la Pile P3 du pont des remparts à Cahors.

Dans un premier temps nous déterminons la force critique de flambement d'après la théorie de Mandel, en ne tenant compte que de la partie du micropieu traversant le karst, soit un micropieu de longueur 6 m en aval et 12 m en amont. En effet, compte tenu des valeurs faibles de la longueur de transfert dans le karst ( $l_0 = 0,9$  m pour  $\Phi 127/109$  et  $l_0 = 1,2$  m pour  $\Phi 168/147$  mm), la condition en pointe n'a pas d'influence sur la force critique et il n'est pas nécessaire de tenir compte de la deuxième couche de calcaire. On suppose que les micropieux sont encastres en pointe, à l'interface karst - calcaire sain. Par contre, bien que la tête des micropieux soit, en principe, encastree dans le fût des pieux, deux conditions sont étudiées: encastrement et articulation à l'interface karst - calcaire dur. Les micropieux sont supposés charges verticalement

Par ailleurs, des prévisions de la force critique de flambement ont été déterminées par le programme GOUFLA, en tenant compte, cette fois, de toute la longueur du micropieu, soit 11,3 m en aval et 17,3 m en amont. Les micropieux sont supposés encastres aux deux extrémités. Deux conditions de chargement en tête sont étudiées : micropieu chargé verticalement et micropieu chargé à la fois verticalement et horizontalement ( $F_H = 250$  kN). La deuxième hypothèse est très sécuritaire, car en réalité le micropieu n'est chargé que

verticalement, mais nous avons voulu traiter un tel cas pour étudier la variation de la force critique en présence d'une charge horizontale accidentelle.

#### **IV.4.3 Résultats et choix du type de micropieu**

Le tableau IV.5 récapitule l'ensemble des cas étudiés et donne les valeurs des forces critiques de flambement prévues par les programmes FLAMANDEL et GOUFLA. Ce tableau montre que, pour un cas donné, il y a un faible écart entre les forces critiques obtenues pour un micropieu amont et celles d'un micropieu aval. Ceci est probablement dû aux faibles valeurs de la longueur de transfert (pieu souple). En effet pour les pieux souples, l'augmentation de la longueur a une faible influence sur la force critique de flambement.

Par ailleurs, on remarque d'après les prévisions obtenues par GOUFLA, que les conditions en tête du micropieu n'ont pas d'influence considérable sur la force critique de flambement. Ceci est dû à la présence de la première couche de calcaire assez rigide qui peut jouer le rôle d'un encastrement parfait. Par conséquent, on peut effectivement simplifier le problème et le ramener à celui d'un micropieu encasté aux deux extrémités ayant comme longueur celle de la partie traversant le karst.

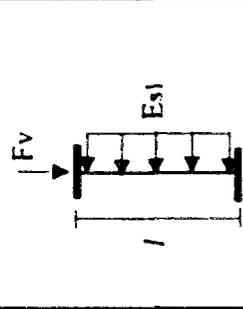
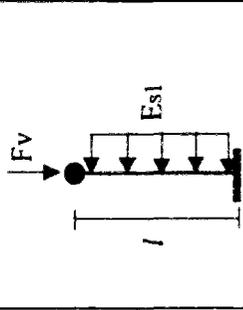
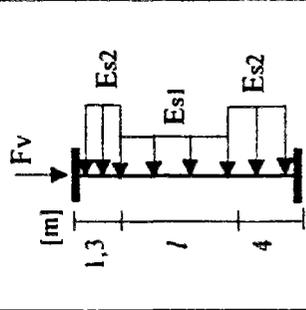
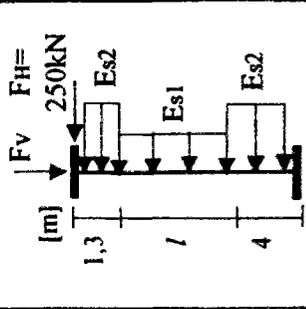
La charge de service de chacun des gros pieux  $\Phi 1500$  est estimée à 6500 kN. Dans le projet, on a retenu six micropieux  $\Phi 168/147$  mm, par pieu  $\Phi 1500$ . Notre étude montre qu'il n'y a pas un risque de flambement pour de tels micropieux.

#### **IV.5 Application du programme GOUFLA au cas du quai de Lorient**

Cette étude consiste en l'application du programme GOUFLA dans le cadre de l'analyse d'un cas de désordre d'ouvrage fondé sur pieux. Il s'agit d'un quai de 150 m dans le port de Kergroise à Lorient, sur lequel plusieurs études ont été entreprises pour tenter de connaître les origines de ces désordres. Une partie de ces études était consacrée aux problèmes liés au flambement éventuel des pieux. Notamment, des calculs ont été effectués à la demande de la direction départementale de l'équipement (DDE) pour prévoir les forces critiques de flambement des pieux, et un programme d'essais de chargement de pieux a été réalisé par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

Notre but est d'étudier le risque de flambement des pieux supportant le quai et endommagés lors des désordres, lorsqu'on leur appliquerait des charges de service supplémentaires. Ainsi des prévisions de la force critique de flambement ont été déterminées par le programme GOUFLA et comparées à celles obtenues lors de l'étude préalable aux essais de pieux, tout en prenant les mêmes hypothèses que celles adoptées pour cette dernière.

Tableau IV 5 . Prévisions de la force critique de flambement par les programmes FLAMANDEL et GOUFLA

	Prévisions FLAMANDEL		Prévisions GOUFLA	
				
$\Phi 127/109$	$l = 6 \text{ m}$	7050 kN	6060 kN	6650 kN
mm	$l = 12 \text{ m}$	6080 kN	5821 kN	6500 kN
$\Phi 168/147$	$l = 6 \text{ m}$	12500 kN	10400 kN	11000 kN
mm	$l = 12 \text{ m}$	11100 kN	9700 kN	10650 kN

$l$  : épaisseur du karst,

$E_{s1}$  : module de réaction du karst,

$E_{s2}$  : module de réaction du calcaire,

$F_v$  : force verticale appliquée en tête du micropieu,

$F_H$  : force horizontale appliquée en tête du pieu,

 : encastrement,

 : articulation.

#### IV.5.1 Description de l'ouvrage

Le quai de Lorient est un quai de type Hollandais de longueur 148,86 m et de largeur 23,45 m, reposant sur 3 files longitudinales de pieux verticaux (files A, B, C) espacés de 4,06 m (37 pieux par file) et une file longitudinale de chevalets constitués d'un pieu incliné (file D) et d'un pieu vertical (file E) (fig. IV.12 et IV.13). Ces pieux sont constitués de tubes métalliques de diamètre  $D = 660$  mm et d'épaisseur  $e = 9,5$  mm, munis d'un sabot, battus au refus dans un substratum rocheux et remplis de béton sur toute la hauteur.

L'ensemble de l'ouvrage présente une section de forme U, composée de la plate-forme principale constituant le quai et des deux retours de dimensions 33x16 m environ qui permettent d'insérer le terre-plein en arrière du quai. Un rideau de soutènement avant, constitué de palplanches Larssen IVS nuance E270 ou E240, permet le soutènement du remblai entre la cote -1,0 CM (cote marine) et la cote de dragage à -10 CM.

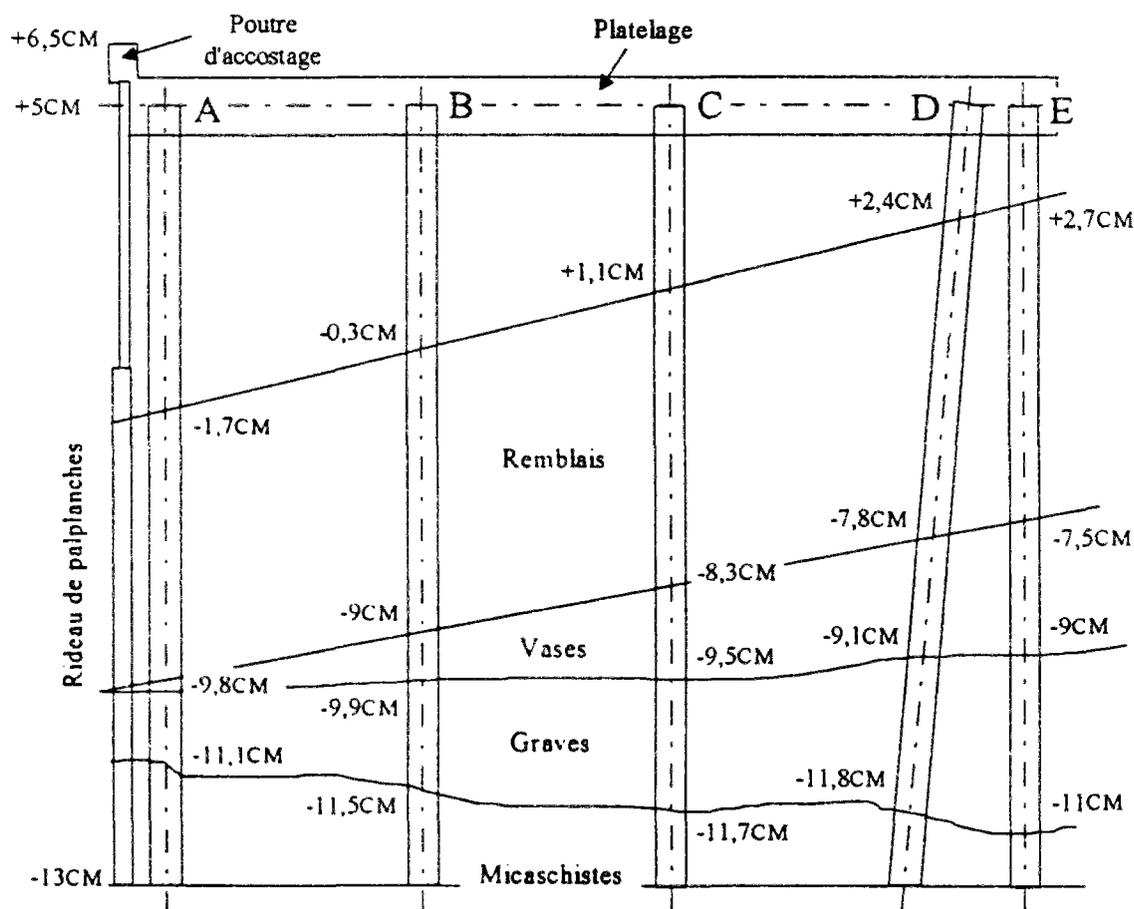


Figure IV.12 : Coupe transversale au droit de la plate-forme principale (Quai de Lorient).



Les résultats de la campagne de sondages de reconnaissance, effectuée par le Laboratoire Régional de St Brieuc, montrent la présence de dépôts alluvionnaires marins constitués essentiellement de vases compressibles limono-argileuses. A la base de ces vases, on rencontre une couche de sables et de graves de faible épaisseur (1,5 à 2 m). Celle-ci recouvre d'une manière continue le substratum granitique ou micaschisteux qui existe à des profondeurs très variables, allant de -5,55 CM à -19,50 CM. Le granit paraît sain, mais la zone micaschisteuse, qui est la plus importante, se présente le plus souvent sous une forme très altérée. Au-dessus des vases se trouvent les remblais constitués de matériaux divers d'épaisseur moyenne de 6 à 7 m.

#### **IV.5.2 Désordres du quai : origines et conséquences**

En octobre 1984, un dégraphage du rideau nord a été constaté. Trois mois plus tard en janvier 1985, des mouvements du quai entraînant des déplacements de l'ordre de 20 cm ont été observés alors que le remblai atteignait sa cote maximale et qu'une opération de battage de pieux complémentaires était en cours.

Suite à ces deux incidents, plusieurs études ont été entreprises par les différents partenaires pour analyser les problèmes techniques soulevés par les désordres observés sur le quai. A l'issue de ces analyses, il apparaît que l'origine des désordres est vraisemblablement due à un problème de stabilité de talus. En effet, le rapport établi par le LR de St. Brieuc, lors des études de conception, indique que la mise en place d'un remblai atteignant la cote +6,5 CM sur des vases compressibles de faibles caractéristiques mécaniques ( $15 < c_u < 30$  kPa, peu compacte, fortement plastique avec une teneur en matière organique très élevée, très compressible et présentant un fluage non négligeable) risque de poser de problèmes délicats de stabilité de talus.

Par ailleurs, les dragages préalables à la construction de l'ouvrage effectués en 1974, ont semble-t-il conduit à une diminution de ces caractéristiques mécaniques, déjà faibles. Une autre campagne géotechnique, réalisée par le LR de St. Brieuc suite aux premiers désordres, conclut à l'existence d'une zone remaniée dans la partie superficielle du talus de dragage des vases. Cette zone aurait été remaniée par le dragage et présenterait donc des caractéristiques mécaniques encore plus réduites.

A la suite des incidents, les pieux supportant le quai ont été endommagés, en subissant des déformations sous l'effort combiné du mouvement latéral imposé par le remblai et de l'encastrement dans la base rocheuse (graves + micaschistes). Ces conditions sont de nature à altérer le comportement des pieux du point de vue du flambement. Ainsi se pose la question importante : les pieux sont-ils susceptibles de supporter les charges de service prévues sans qu'il y ait risque de flambement ? Pour répondre à cette question, une étude numérique a été

entreprise à la demande de la DDE dans le but d'analyser la résistance des pieux vis-à-vis du flambement et de déterminer les forces critiques de flambement pour les files les plus critiques.

#### IV.5.3 Analyse de la résistance des pieux au flambement - Etude préalable.

Cette première étude numérique, antérieure aux essais de chargement de pieux a consisté à déterminer les forces critiques de flambement pour les pieux les plus critiques, pris isolément. Les calculs ont été effectués sur des modèles simplifiés bidimensionnels de la structure, à l'aide du code éléments finis PAM-NL, spécialisé pour les analyses de structures tridimensionnelles, soumises à des comportements non linéaires et à de grandes déformations.

Le pieu, constitué d'une virole d'acier remplie de béton, est modélisé par des éléments de poutres de section rectangulaire ayant la même inertie. Pour chaque pieu, on distingue deux parties. Pour la partie supérieure, on considère que les efforts sont transmis par le platelage au béton armé du pieu, mais que la virole d'acier de ce dernier ne participe pas encore à la résistance en flexion (non adhérence de la virole d'acier à son remplissage en béton armé). On appelle cette partie le raccord béton; sa longueur est, par hypothèse, supposée égale à la longueur d'adhérence des barres d'acier dans le béton (BAEL), soit 3 m au-dessous du platelage (fig. IV.14). Le produit d'inertie  $(E_p I_p)_1$  est celui de la section du béton armé seule. En dessous de cette partie, on considère qu'il y a adhérence parfaite entre la virole et son remplissage en béton. Le produit d'inertie  $(E_p I_p)_2$  est celui de la virole d'acier, le béton de remplissage étant négligé en flexion. Le tableau IV.6 récapitule les rigidités du raccord  $(E_p I_p)_1$ , retenues dans le calcul pour les pieux étudiés

Tableau IV.6 Valeurs de la rigidité  $(E_p I_p)_1$  du raccord béton.

Pieu	B	C	E
$(E_p I_p)_1$	28750 kN.m <sup>2</sup>	40250 kN.m <sup>2</sup>	94300 kN.m <sup>2</sup>

Le sol est représenté par des ressorts élastoplastiques de Winkler. Le tableau IV.7 donne les caractéristiques mécaniques des différentes couches de sol, notamment le module pressiométrique  $E_{M1}$  et la pression limite  $p_l$ .

En ce qui concerne les conditions aux limites, le pieu est supposé articulé en pointe et encasté en tête (encastrement du raccord béton dans le platelage). Il est chargé verticalement avec un déplacement horizontal initial  $y_0$  imposé en tête, correspondant au mouvement du platelage observé  $\delta$ , soit 14 cm dans la section nord et 21 cm dans la section sud. De plus, le pieu est soumis à un déplacement de sol  $g(z)$  supposé constant sur toute la hauteur du terrain remblayé puis variant linéairement de  $g(z)$  à 0 dans les vases (fig. IV.14) Le déplacement de sol  $g(z)$  est supposé égal au déplacement du platelage observé  $\delta$ .

Tableau IV.7 : Caractéristiques mécaniques des sols ( $E_M$  et  $p_l$ ) utilisées dans l'étude préalable.

	Section Sud		Section Nord	
	Module pressiométrique $E_M$ (MPa)	Pression limite $p_l$ (MPa)	Module pressiométrique $E_M$ (MPa)	Pression limite $p_l$ (MPa)
Remblais	1,4	0,2	2	0,4
Vases	0,9	0,1	2	0,3
Graves, rocher	42,5	3	42,5	3

Le tableau IV.8 regroupe les valeurs des forces critiques calculées ainsi que les charges de service prévues, lors de la conception de l'ouvrage, pour les trois pieux les plus critiques. Les charges de service sont calculées à partir des combinaisons les plus défavorables entre les charges permanentes dues à la structure du béton et au remblai, les surcharges verticales, les surcharges verticales dues aux efforts horizontaux et le frottement négatif.

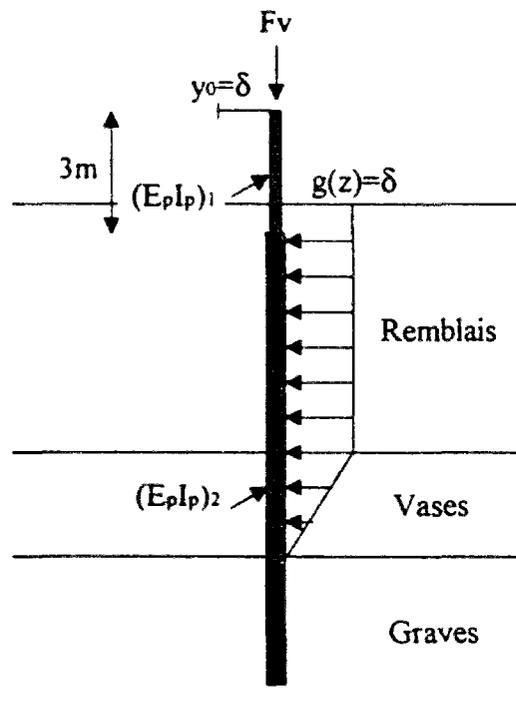


Figure IV.14 : Conditions de chargement d'un pieu du quai de Lorient.

Le tableau IV.8 montre que le flambement des pieux, déplacés par les désordres, devait avoir lieu pour des charges faibles, en particulier pour la section sud du quai. Le pieu le plus critique est le pieu C de la section sud. Ce flambement est généralement localisé au niveau d'une région comprenant la partie basse du remblai, la couche de vase et la partie supérieure du sol dur. L'étude avait conclu que les pieux ne peuvent pas reprendre, sans travaux complémentaires, les charges verticales restant à appliquer.

Tableau IV.8 : Forces critiques de flambement d'après l'étude numérique préalable.

Pieu	Section Sud			Section Nord		
	B	C	E	B	C	E
Charge de service (kN)	1930	2040	1580	1930	2040	1580
Force critique (kN)	800	600	1100	3100	2000	1500

Ces résultats, et le calcul de la force critique d'un pieu d'une façon générale, sont malheureusement fortement influencés par les hypothèses prises en compte concernant les caractéristiques mécaniques du système sol-pieu. Il avait donc paru indispensable de les accompagner de vérifications expérimentales, d'où l'idée du LCPC de réaliser un programme d'essais de chargement de pieux pour valider ces résultats numériques.

#### IV.5.4 Essais de chargement de pieux

Suite aux conclusions tirées de l'analyse numérique précédente sur le risque de flambement des pieux, le LCPC est intervenu pour réaliser un programme d'essais de chargement afin de vérifier le comportement des pieux sous les charges de service. Ce programme comporte essentiellement deux phases : essais de chargement de pieux isolés et chargement d'un demi-quai par un remblai.

Dans la première phase, les essais ont été effectués sur deux pieux C et deux chevalets (D, E) des files 26 et 30 (côté sud), pris chacun isolément dans l'ouvrage. La charge au vérin  $Q_v$ , mesurée à l'aide d'un peson disposé entre le vérin et le massif de réaction, a été appliquée par paliers successifs (9 ou 10 paliers) avec des séquences de mesures après 1, 5, 10, 25 et 55 minutes de chargement. Cette charge est limitée par le massif de réaction à environ 4800 kN. Tous les essais ont été poussés jusqu'à cette charge.

Pour estimer les charges  $Q_p$  sur les pieux, transmises à travers le platelage, on a disposé, pour les pieux C, deux niveaux de 4 extensomètres à cordes vibrantes placés sur la chemise métallique, respectivement à 0,7 m et 1,4 m de la base des dés en béton surmontant le pieu. Pour les chevalets (D, E), un niveau de 4 extensomètres a été mis en place à 0,7 m de la base

du dé en béton, sur chacun des pieux D et E. La charge sur le pieu est donc une valeur moyenne résultant des 4 ou 8 mesures de déformations sur les extensomètres à corde vibrante. Pour passer des déformations aux charges, on a retenu la valeur du module du béton déterminé sur les carottes extraites à la partie supérieure du pieu (2 premiers mètres).

Pour tous les essais, aucun phénomène significatif n'a été signalé et les charges de fluage n'ont pas été atteintes. Le tableau IV.9 montre les valeurs mesurées des efforts exercés par le vérin de chargement, et estimées sur les pieux.

Tableau IV.9 : Résultats des essais de chargement menés par le LCPC.

Pieu	C26	D26	E26	C30	D30	E30
Charge maximale au vérin	4840 kN	4650 kN		4890 kN	4800 kN	
Charge d'essai maximale sur le pieu	3090 kN	800 kN	870 kN	3580 kN	1050 kN	1840 kN

Les valeurs indiquées comme charge d'essai maximale sur chacun des pieux résultent d'une démarche prudente; elles constituent des valeurs par défaut. Ces valeurs sont à ajouter à la charge existant avant chargement, due au poids propre du quai et à celui du massif de réaction. Par conséquent, si on tient compte seulement du poids propre du quai, les charges maximales pour les pieux C considérés comme les pieux le plus critiques, sont respectivement de 3450 kN (file 26) et 3930 kN (file 30), donc largement supérieures aussi bien aux charges de service qu'aux forces critiques de flambement prévues par l'étude numérique préalable. On peut conclure de même pour les pieux E chargés respectivement à 1040 kN (file 26) et 1990 kN (file 30), valeurs encadrant la charge maximale de service. On peut donc conclure, d'après la première phase des essais, que les pieux pris isolément sont aptes à reprendre les charges verticales de service et que les risques de flambement soulignés dans les conclusions des calculs théoriques n'étaient pas confirmés par les essais.

Suite aux résultats favorables des essais de pieux, le LCPC a décidé de passer à la deuxième phase de l'auscultation en chargeant le demi-quai sud par étapes successives (5 couches constituant un remblai de 2 m environ d'épaisseur, représentant les charges d'exploitation prévues au projet). Des calculs ont été effectués pour déterminer les charges totales dans les pieux B et C de la file 28 sous l'action du remblai, soit 2279 kN pour le pieu B28 et 2171 kN pour le pieu C28. Ces valeurs dépassent les charges maximales de service ainsi que les forces critiques calculées avant les essais.

Le rapport établi par le LCPC, suite à l'ensemble de ces essais, aboutit aux conclusions suivantes :

- la portance verticale des pieux est assurée : il n'y a pas de risque de flambement ni de poinçonnement du sol sous l'effet des charges de service. Les tassements, même à long terme, restent de l'ordre de grandeur de ceux qui sont habituellement admis sous les ouvrages.
- le déplacement latéral du quai sous l'action des charges verticales demeure quasiment nul.

Sur la base de ces essais, le quai a été déclaré apte pour le service sous réserve, cependant, de ne pas remblayer le terre-plein arrière.

#### IV.5.5 Etude du risque de flambement par le programme GOUFLA

Ayant développé un programme qui permet de calculer la réponse d'un pieu en tenant compte des effets du second ordre (grands déplacements), nous avons voulu contribuer à l'étude du risque de flambement des pieux endommagés par les mouvements observés du quai. Nous avons calculé les forces critiques de flambement pour les pieux les plus critiques (B, C et E) et nous les avons comparées à celles calculées avant les essais et aux résultats des essais de chargement effectués par le LCPC.

Pour les conditions aux limites et les conditions de chargement ainsi que les caractéristiques mécaniques et géométriques du système sol-pieu, nous avons adopté des hypothèses semblables à celles prises en compte dans l'analyse numérique décrite au paragraphe IV.5.3 Le tableau IV.10 regroupe les valeurs des forces critiques calculées par GOUFLA et dans l'étude préalable. Ce tableau montre que les valeurs obtenues par GOUFLA sont très supérieures (10 à 20 fois) à celles calculées antérieurement.

Tableau IV 10 Forces critiques obtenues par GOUFLA et lors de l'étude préalable (EP).

	Pieu	B	C	E
Section sud	$F_{cr}$ (EP)	800 kN	600 kN	1100 kN
	$F_{cr}$ (GOUFLA)	6000 kN	20000 kN	26000 kN
Section nord	$F_{cr}$ (EP)	3100 kN	2000 kN	1500 kN
	$F_{cr}$ (GOUFLA)	28000 kN	40000 kN	45000 kN

Etant donné l'écart important entre les deux séries de résultats, nous avons effectué un calcul simple de la force critique d'Euler des pieux, en les supposant articulés aux deux extrémités (cas défavorable), sans contact avec le sol, et en tenant compte de la rigidité la plus défavorable qui est celle du raccord béton  $(E_p I_p)_1$ . Le même calcul est aussi effectué en tenant

compte de la rigidité de la virole d'acier  $(E_p I_p)_2$ . Les résultats des deux séries de calcul sont présentés dans le tableau IV.11.

Tableau IV.11 : Forces critiques d'Euler calculées pour les rigidités  $(E_p I_p)_1$  et  $(E_p I_p)_2$ .

Pieu	B	C	E
Rigidité $(E_p I_p)_1$	650 kN	880 kN	1930 kN
Rigidité $(E_p I_p)_2$	4880 kN	4740 kN	4440 kN

Les résultats obtenus sont surprenants. On trouve des forces critiques d'Euler supérieures à celles calculées dans l'étude préalable, même en prenant toute une série de conditions défavorables (sauf pour le pieu B de rigidité  $(E_p I_p)_1$ ). En effet, la force critique de flambement d'un pieu fiché dans un sol de faibles caractéristiques mécaniques (argile molle) est au moins 10 à 20 fois plus élevée que la force critique d'Euler de ce pieu si l'on en croit les résultats observés lors des essais de flambement sur modèles réduits en centrifugeuse.

Ces observations remettent en cause les résultats fournis par l'étude préalable, mais elles ne confirment pas nécessairement la validité des résultats obtenus par GOUFLA, vu que les forces critiques dépendent fortement des hypothèses prises en compte. Une telle validation nécessite la réalisation d'un essai de chargement de pieu jusqu'à la rupture. Par contre, on peut au moins conclure, d'après l'étude effectuée par GOUFLA, que les charges de service prévues ne sont pas de nature à aggraver la situation antérieure et que le risque de flambement sous ces charges n'existe pas; c'est ce qui a été observé lors des essais de chargement (au vérin et par le remblai).

#### IV.6 Essai de flambement d'un micropieu en vraie grandeur

Dans le cadre de la réalisation du T.G.V entre les villes de Lille et Bruxelles, il a été décidé de réaliser une série d'essais de chargement sur micropieux en vraie grandeur pour le dimensionnement des fondations du viaduc d'Arbre en Belgique. L'un des essais consiste à réaliser un essai de compression sur le micropieu implanté à proximité de l'emprise de la pile P26, afin d'en vérifier la force critique de flambement. La réalisation de cet essai a été confiée au LCPC avec la participation de la société ME2I

##### IV.6.1 Coupe géotechnique et caractéristiques du micropieu

Des sondages de reconnaissance ont été réalisés par le laboratoire OREX pour la détermination des caractéristiques mécaniques du sol. Des essais pressiométriques et pénétrométriques ont été effectués au droit de la pile, dont les résultats sont illustrés sur les figures IV.15 et IV.16. On peut distinguer principalement deux couches de sols : une première couche de 10 m d'épaisseur constituée de sables fins argileux, dans la moitié supérieure, et de

tourbe plus ou moins sableuse, dans la moitié inférieure, et une deuxième couche comprenant du sable grossier à fin et des calcaires de compacité élevée.

Le micropieu de type foré et injecté sous haute pression (mode IRS), de longueur 26 m, est constitué de tubes pétroliers  $\Phi 114/85$  mm, équipés de manchettes en raison d'une manchette tous les mètres, raccordés par manchons filetés  $\Phi 135/111$  mm tous les 3 m. Les tubes sont constitués d'acier haute résistance (nuance N80). La charge élastique limite de l'acier du micropieu est de l'ordre de 3600 kN. Le diamètre du forage est environ de 180 mm. Le micropieu est équipé d'un tube inclinométrique pour mesurer les déplacements horizontaux. La tête du micropieu est renforcée par un cube en béton (fig. IV.17), d'une part, pour éviter le flambement de la partie hors sol (50 cm) et, d'autre part, pour constituer un support pour le vérin. Une plaque d'acier de répartition est placée sous le vérin.

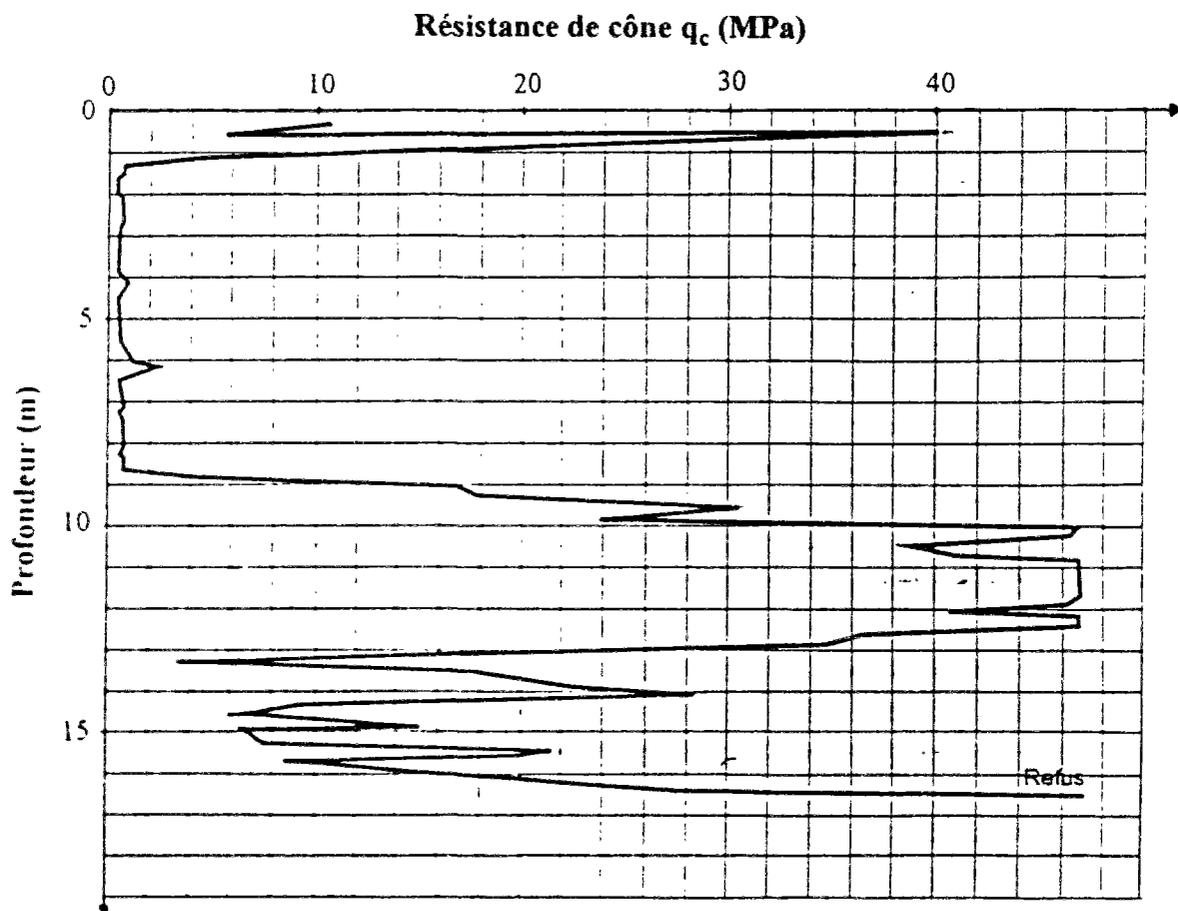


Figure IV.15 : Résultats de l'essai pénétrométrique effectué par le laboratoire OREX.

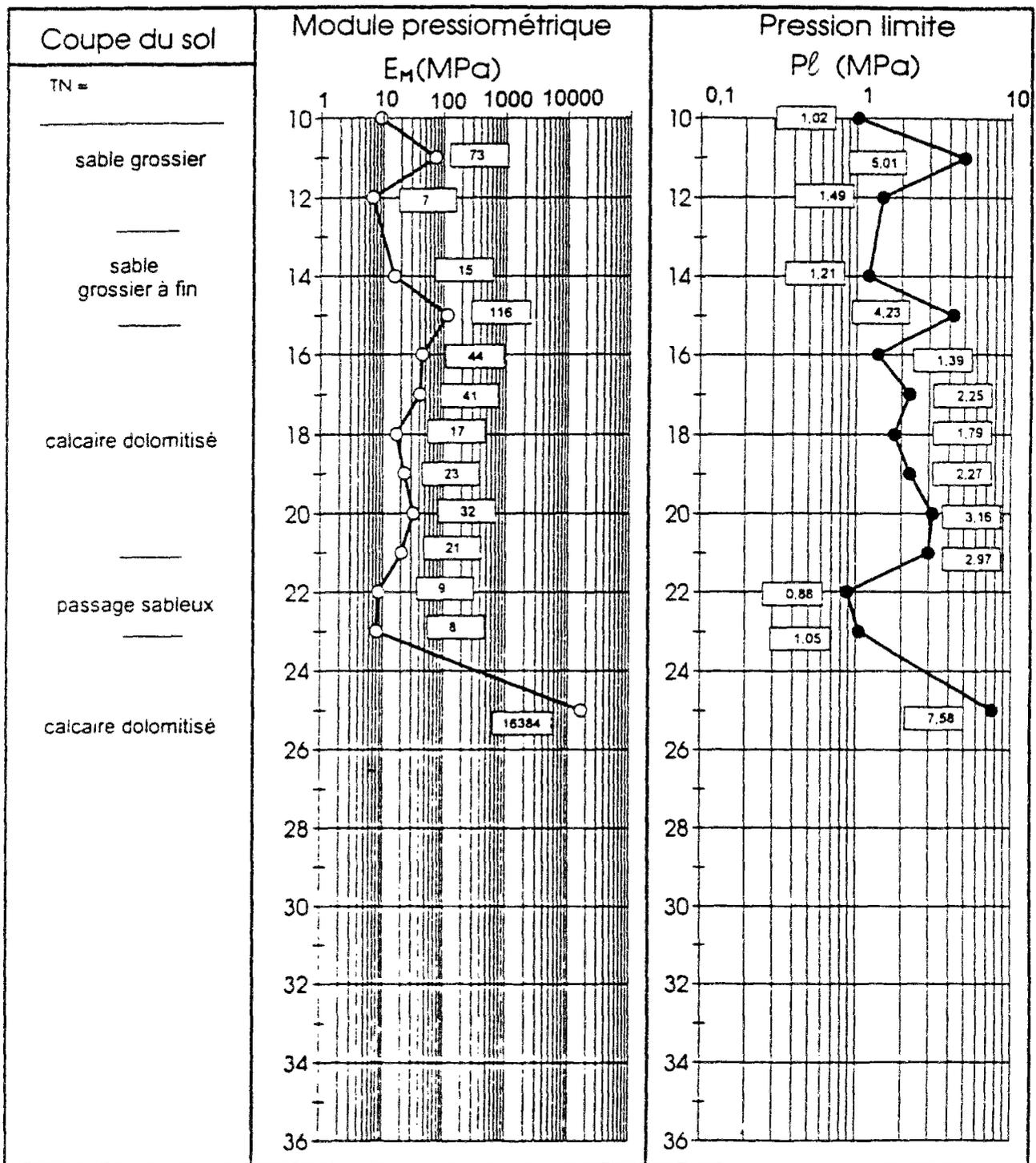


Figure IV.16 : Résultats de l'essai pressiométrique effectué par le laboratoire OREX.

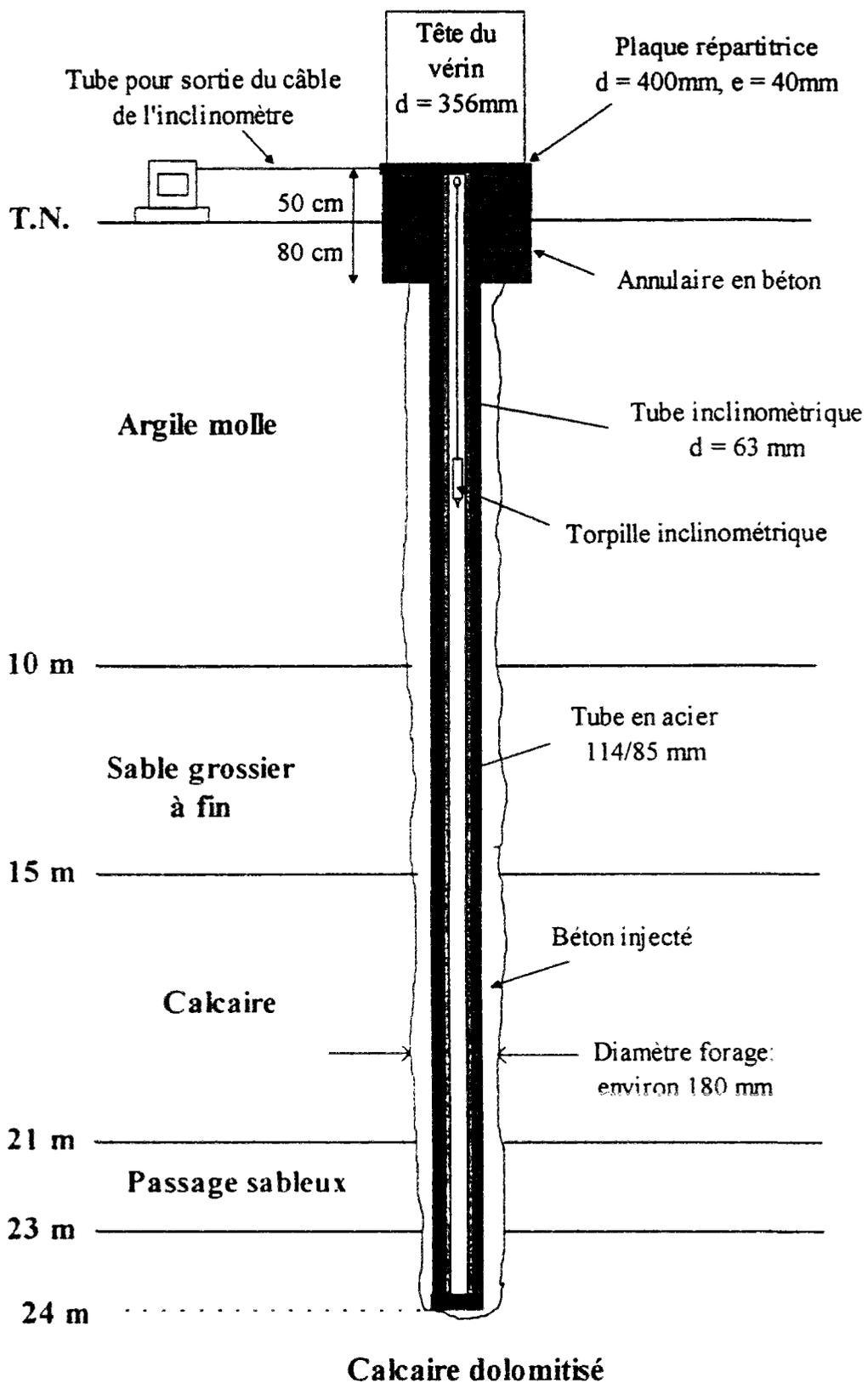


Figure IV.17 : Coupe longitudinale du micropieu de la pile P26 du viaduc d'ARBRE.

#### IV.6.2 Prévisions théoriques de la force critique de flambement

Avant la réalisation de l'essai, nous avons fait une étude paramétrique par le programme GOUFLA, pour estimer la force critique de flambement. Plusieurs cas ont été étudiés : d'abord en ne tenant compte que de la couche d'argile molle où le pieu a tendance à flamber et en supposant que la pointe est encastrée ou articulée, puis en tenant compte des autres couches de sol. La tête du pieu est supposée articulée. Les caractéristiques mécaniques des sols, utilisées dans le calcul, sont regroupées dans le tableau IV.12. On note que pour  $z \leq 10$  m, on n'a pas de résultats pressiométriques. En conséquence, nous avons déterminé le module pressiométrique  $E_M$  et la pression limite  $p_l$  de la couche d'argile à partir de la résistance de cône  $q_c$  fournie par l'essai pénétrométrique, en utilisant les corrélations suivantes (cf. §.IV.2.1):

$$q_c = 3 \text{ à } 3,5 p_l \quad \text{et} \quad E_M = 4 q_c \quad (\text{IV.6})$$

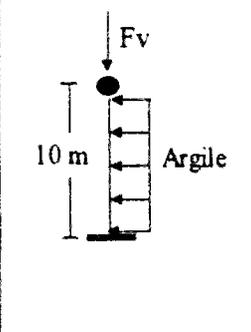
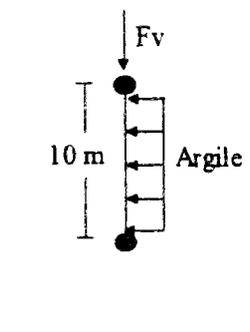
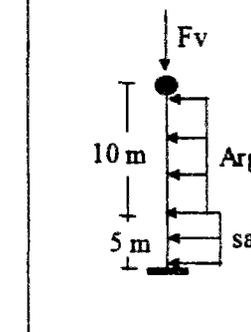
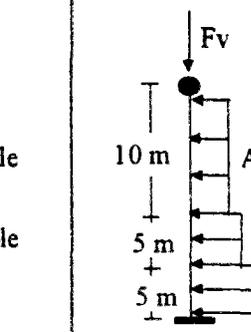
Les modules de réaction  $E_s$  sont calculés à partir des formules de Ménard (cf. §.I.4.6.a).

Tableau IV.12 : Caractéristiques mécaniques des sols utilisées dans GOUFLA.

	Module pressiométrique $E_M$ (MPa)	Pression limite $p_l$ (MPa)	Module de réaction $E_s$ (MPa)
Argile molle	2	0,15	3,5
Sable grossier à fin	15	2	40
Calcaire dolomitisé	30	3	80

Le tableau IV 13 récapitule l'ensemble des cas traités et donne les valeurs de la force critique de flambement pour chaque cas. Le tableau IV.13 montre qu'on trouve le même ordre de grandeur pour la force critique de flambement ( $F_{cr} \sim 3700\text{kN}$ ) dans les différents cas étudiés. En effet, le rapport de la longueur du micropieu dans la couche d'argile ( $l = 10$  m) sur la longueur de transfert ( $l_0 = 1.1$  m) est grand et la condition en pointe n'a pas d'influence significative sur la valeur de la force critique de flambement. Par conséquent, la prise en compte des couches inférieures (sable, calcaire) ne modifie pas les résultats.

Tableau IV.13 : Forces critiques calculées par GOUFLA.

			
3750 kN	3720 kN	3740 kN	3710 kN

#### IV.6.3 Réalisation de l'essai et interprétation des résultats

Il s'agit d'un essai de chargement statique réalisé par paliers de 250 kN appliqués durant trente minutes. L'effort est fourni par un vérin hydraulique appliquant sa charge par l'intermédiaire d'une rotule à la forme d'une calotte sphérique. Des capteurs de déplacements verticaux, collés sur les quatre faces du cube solidaire de la tête, et un capteur de force sont reliés à une chaîne d'acquisition, permettant la lecture de la charge appliquée et de l'enfoncement de la tête du micropieu. A chaque palier de chargement, des mesures inclinométriques sont réalisées, tous les mètres, de 1 à 17 mètres, de profondeur.

L'application du 11<sup>ème</sup> palier de chargement a provoqué la rupture. Celle-ci est annoncée par un bruit remarquable suivi d'un enfoncement rapide de la tête du micropieu allant de 47 mm à 87 mm au bout d'une minute. Les figures IV 18 et IV.19 montrent respectivement la courbe de chargement (déplacement vertical de la tête en fonction de la charge appliquée), l'évolution des enfoncements durant chaque palier de chargement, ainsi que le diagramme de fluage constitué des vitesses moyennes de chaque palier (coefficient  $\alpha$ ). La figure IV.20 montre l'enfoncement de la partie solidaire de la tête du micropieu et l'allure de la rupture à proximité immédiate du micropieu au contact du béton de propreté et du terrain.

D'après la figure IV 19, le coefficient  $\alpha$  présente un pic pour le palier de 1500 kN. Cette variation de pente laisse croire qu'il s'agit d'une accélération du fluage, mais le palier de chargement suivant ( $F_v = 1750$  kN) présente une pente plus faible de la courbe. Nous observons le même phénomène pour les paliers de 2000 kN et 2250 kN. Ces variations de pente sont probablement dues à des ruptures locales du coulis d'injection. La question est plutôt de savoir si le micropieu a flambé ou non.

D'une part, les figures IV 18 et IV.19 montrent que la charge de fluage n'a pas été atteinte. D'autre part, les déformations déduites des mesures inclinométriques (fig. IV.21) correspondent à un phénomène de flexion plutôt qu'à du flambement. Ceci est probablement dû

à la déformée initiale acquise par le micropieu au moment de l'exécution et à l'excentricité de la charge appliquée ; en effet, la verticalité d'un pieu et le centrage de l'effort appliqué sont deux facteurs qui sont difficiles à assurer lors d'un essai en vraie grandeur.

De plus, après la rupture, le tube inclinométrique ne permettait plus le passage d'un gabarit au delà de 16 m où la rupture s'est probablement produite. A cette profondeur se trouve la couche du sol ayant de bonnes caractéristiques (interface sable et calcaire). Or dans le cas du flambement, c'est dans la couche de sols de faibles caractéristiques (argile molle), à proximité de la surface, que la rupture devrait se produire. Il est donc possible, sinon probable, que la rupture soit due à la plastification d'un manchon à 16 mètres de profondeur (dépassement de la limite élastique, la charge limite élastique étant de l'ordre de 1750 kN) .

Il apparaît clairement qu'aucun critère de fluage et de flambement n'est observé et que la charge de fluage est supérieure à 2500 kN. La conclusion de l'essai est que le micropieu est apte à reprendre la charge de service prévue ( $F_v = 1100$  kN), sans qu'il y ait un risque de flambement ou de poinçonnement, ce qui est cohérent avec nos prévisions par GOUFLA.

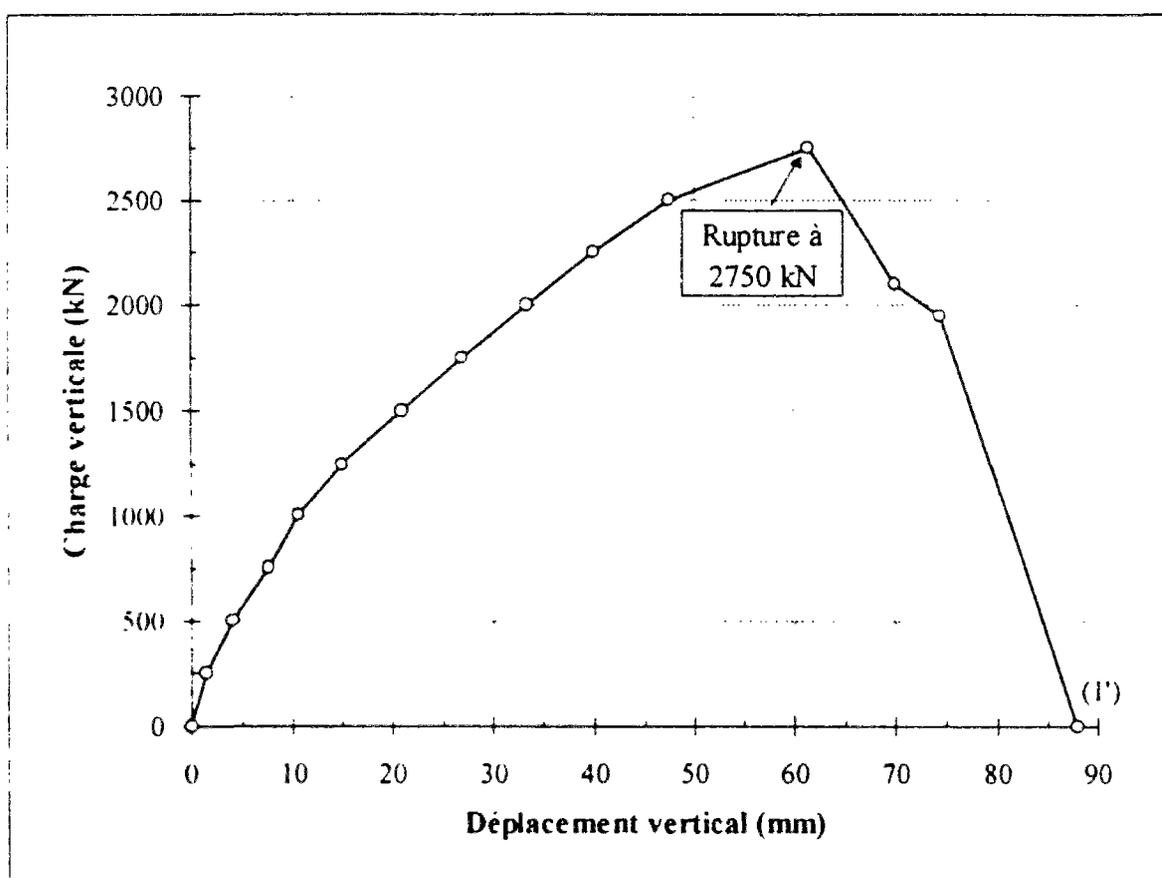


Figure IV.18 : Courbe de chargement (déplacement vertical - charge appliquée).





Figure IV.20 : Etat du terrain et de la partie solidaire de la tête du pieu après la rupture.

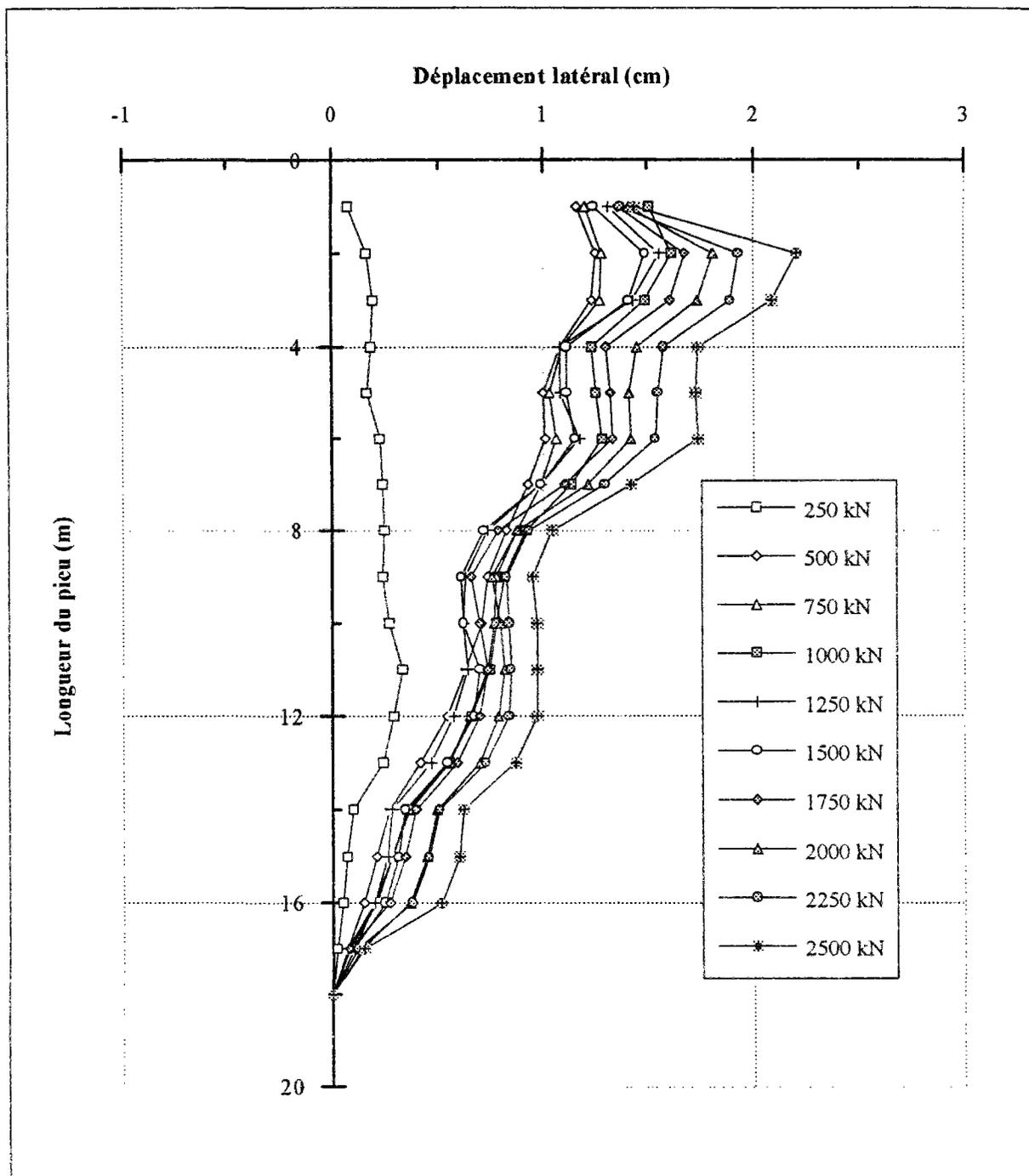


Figure IV.21 : Déformée du pieu en cours de chargement (inclinomètre).

## IV.7 Conclusions

Le calcul de la force critique de flambement à partir de la théorie de Mandel (1936) nécessite le choix d'une valeur unique du module de réaction  $E_s$  le long d'un profil déduit à partir d'un essai de reconnaissance de sol (pressiomètre, pénétromètre,...). En comparant les résultats obtenus en centrifugeuse avec les prévisions théoriques, nous proposons, afin d'obtenir une bonne estimation de la force critique, de choisir ce module à une profondeur entre  $3,5 l_0$  et  $4 l_0$  dans le cas d'un sable moyennement dense ( $E_s$  compris entre 50 et 75 MPa), et entre  $4,5 l_0$  et  $6 l_0$  dans le cas d'une argile molle ( $E_s$  compris entre 3 et 5 MPa). Ces recommandations sont valables dans le cas des sols où l'on peut supposer que le module de réaction varie linéairement avec la profondeur. Le choix d'une valeur de module de réaction au-delà de ces profondeurs conduit à une surestimation de la valeur de la force critique d'un rapport ( $F_{crth} / F_{crex}$ ) qui varie de 2 à 3 dans le cas du sable moyennement dense, et de 1,5 à 2 dans le cas d'une argile molle.

L'extrapolation des résultats obtenus en centrifugeuse pour des pieux constitués de matériaux utilisés en pratique, montre qu'il est nécessaire de vérifier le flambement pour les pieux en acier de haute résistance fichés dans une argile molle ( $E_s$  compris entre 3 et 5 MPa). La vérification est aussi nécessaire dans le cas d'un sable moyennement dense ( $E_s$  compris entre 50 à 75 MPa), même si le risque de flambement est plus faible. Pour les pieux en béton armé, la rupture du pieu par dépassement de la limite élastique se produit avant le flambement.

La comparaison des résultats numériques avec ceux obtenus en centrifugeuse montre que le programme GOUFLA encadre la valeur expérimentale avec un écart ne dépassant pas 10 %. GOUFLA retrouve les mêmes ordres de grandeur pour la longueur de la zone déformée du pieu (longueur de flambement), que pour celle mesurée en centrifugeuse.

Pour le cas du quai de Lorient, les résultats obtenus par le programme GOUFLA montrent que les pieux supportant le quai sont, malgré leur endommagement causé par les désordres (mouvement du quai dû à un glissement), aptes à reprendre les charges verticales de service et que le risque de flambement sous ces charges n'existe pas. Ceci est cohérent avec les résultats des essais de chargement des pieux du quai.

La réalisation d'un essai de chargement montre qu'il est difficile de provoquer, dans la pratique, le flambement d'un micropieu. L'essai a été mené jusqu'à la rupture du matériau, qui s'est produite sous une charge de 2750 kN sans que l'on puisse déceler du flambement. Le programme GOUFLA prévoyait une force critique de l'ordre de 3700 kN. L'interprétation des résultats de l'essai montrent que la limite de fluage n'est pas atteinte ( $Q_c > 2500$  kN) et que la charge admissible (2000 kN) est supérieure à la charge de service prévue (1100 kN). La rupture observée à 2750 kN est probablement due à la plastification d'un manchon à 16 m de profondeur et non au flambement.



## CONCLUSION GENERALE

L'étude bibliographique entreprise met en évidence que deux approches sont principalement utilisées pour étudier le problème de la stabilité d'un pieu vis-à-vis du flambement : la méthode du module de réaction (modèle de Winkler), et la méthode du continuum élastique. Les différentes solutions obtenues par ces approches montrent que la force critique dépend de plusieurs facteurs, notamment la nature du sol, les conditions aux limites, la rigidité du pieu ainsi que sa longueur. On remarque que pour les pieux souples (pieu long ou sol de bonnes caractéristiques), la condition en pointe ainsi que l'augmentation de la longueur du pieu n'ont pas d'influence significative sur la force critique.

La plupart des travaux entrepris dans ce domaine, notamment ceux de Mandel (1936), utilisent donc la notion du module de réaction. Les travaux qui tiennent compte de la variation du module de réaction avec la profondeur ou de l'effet du frottement latéral, ne sont pas faciles à appliquer compte tenu des paramètres difficiles à déterminer dans la pratique. En conséquence, la théorie de Mandel connaît dans la pratique une large application, une seule valeur du module de réaction étant nécessaire. Pour appliquer la théorie de Mandel, un programme de calcul numérique des solutions a été réalisé (logiciel FLAMANDEL).

Par ailleurs, une approche théorique des grands déplacements, appelée "résistance des matériaux locale (RDM locale)" a été développée pour tenir compte des non-linéarités géométriques (effets du second ordre). Cette approche est à la base du programme GOUFLA qui permet de calculer la réponse préflambement ainsi que la force critique de flambement pour un groupe de pieux.

La comparaison entre les résultats obtenus par les programmes GOUFLA et GOUPIL (calcul de la réponse d'un groupe de pieux en résistance des matériaux classique) montre l'influence de la charge normale sur le comportement en flexion (moments et déplacements) d'un pieu sollicité latéralement, et par conséquent, la nécessité de tenir compte des non-linéarités géométriques, lorsque l'on est en présence de charges verticales élevées.

La validation du programme GOUFLA montre qu'il y a une très bonne concordance, d'une part avec les résultats théoriques calculés d'après la théorie de Mandel à partir du programme FLAMANDEL, d'autre part avec les résultats numériques obtenus par le code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC. Les études paramétriques effectuées ont conduit à des recommandations concernant le pas de discrétisation et la tolérance de convergence, dans le but de faciliter l'utilisation pratique du programme GOUFLA.

Pour ce qui concerne le programme d'essais de chargement axial sur modèles réduits de pieux, une première série d'essais à l'air libre, sans sol, a permis de valider le processus expérimental. Les résultats obtenus sont en plein accord avec les forces critiques d'Euler.

Les essais en centrifugeuse effectués dans les massifs de sols reconstitués (sable de Fontainebleau et argile Speswhite), ceci pour diverses géométries et différentes conditions aux limites, constituent une base de données expérimentales très utile aussi bien pour la confrontation avec les prévisions théoriques, que pour la validation des outils numériques traitant la stabilité vis-à-vis du flambement. Les essais ont été répétés pour vérifier, d'une part, la qualité des moyens d'essais mis au point et, d'autre part, leur fidélité. Une très bonne reproductibilité des résultats est constatée.

Les résultats d'essais de caractérisation de massifs de sols, notamment les essais au mini-pénétrömètre embarquant en centrifugeuse, montrent une très bonne homogénéité, à la fois du massif argileux reconstitué, et du massif de sable obtenu par pluviation à l'aide de la trémie développée par le LCPC Nantes.

Les découpages des massifs de sols permettent de constater que les pieux flambent dans la partie supérieure, à proximité de la surface du sol. La longueur de la partie déformée du pieu (longueur de flambement) varie en fonction de la nature du sol. Elle est d'autant plus grande que la variation du module de réaction selon la profondeur est plus faible. Dans le cas du sable de Fontainebleau moyennement dense ( $E_s$  à mi-profondeur compris entre 50 et 75 MPa), cette longueur varie entre le tiers et la moitié de la longueur totale du pieu, tandis qu'elle varie entre la moitié et les deux tiers de la longueur du pieu dans le cas d'une argile molle ( $E_s$  à mi-profondeur compris entre 3 et 5 MPa). Ces résultats sont en accord avec les quelques prévisions théoriques, trouvées dans la littérature (Davisson, 1963).

La confrontation entre les résultats obtenus en centrifugeuse et les prévisions théoriques, montre qu'il est possible d'estimer dans la pratique la force critique à partir de la théorie de Mandel, à condition de choisir une valeur du module de réaction correspondant à une profondeur comprise entre  $3,5 l_0$  et  $4 l_0$  dans le cas d'un sable moyennement dense ( $E_s \approx 50$  à 75 MPa), et entre  $4,5 l_0$  et  $6 l_0$  dans le cas d'une argile molle ( $E_s \approx 3$  à 5 MPa);  $l_0$  étant la longueur de transfert du pieu. Le choix d'une valeur du module de réaction au-delà de ces profondeurs conduit à une surestimation de la valeur de la force critique. Ces constatations sont applicables pour les sols dont on peut supposer que le module de réaction croît linéairement avec la profondeur. La généralisation à d'autres types de sols (autres valeurs du module de réaction, sol hétérogène) nécessiterait des études complémentaires.

La simulation numérique, au moyen du programme GOUFLA, des essais réalisés en centrifugeuse montrent que les valeurs des forces critiques calculées encadrent les valeurs expérimentales avec un écart qui ne dépasse pas 10 %. Les déformées calculées sont en concordance avec celles mesurées après découpage des massifs de sols. En particulier, la

longueur mesurée de la zone où se localise la déformation due au flambement, est du même ordre de grandeur que celle calculée par GOUFLA.

Les résultats des études effectuées par GOUFLA, dans le cas du quai de Lorient et dans le cas du T.G.V. Lille - Bruxelles, sont cohérents avec les constatations des essais de chargement de pieux réalisés dans les deux cas. On montre, en effet, que les pieux supportant les ouvrages sont aptes à reprendre les charges verticales de service sans qu'il y ait flambement. En ce qui concerne le cas du pont des remparts à Cahors, les résultats de GOUFLA justifient les pieux retenus dans le projet. Dans ces trois exemples de cas réels, les modules de réaction utilisés ont été estimés à partir des modules pressiométriques au moyen des formules de Ménard.



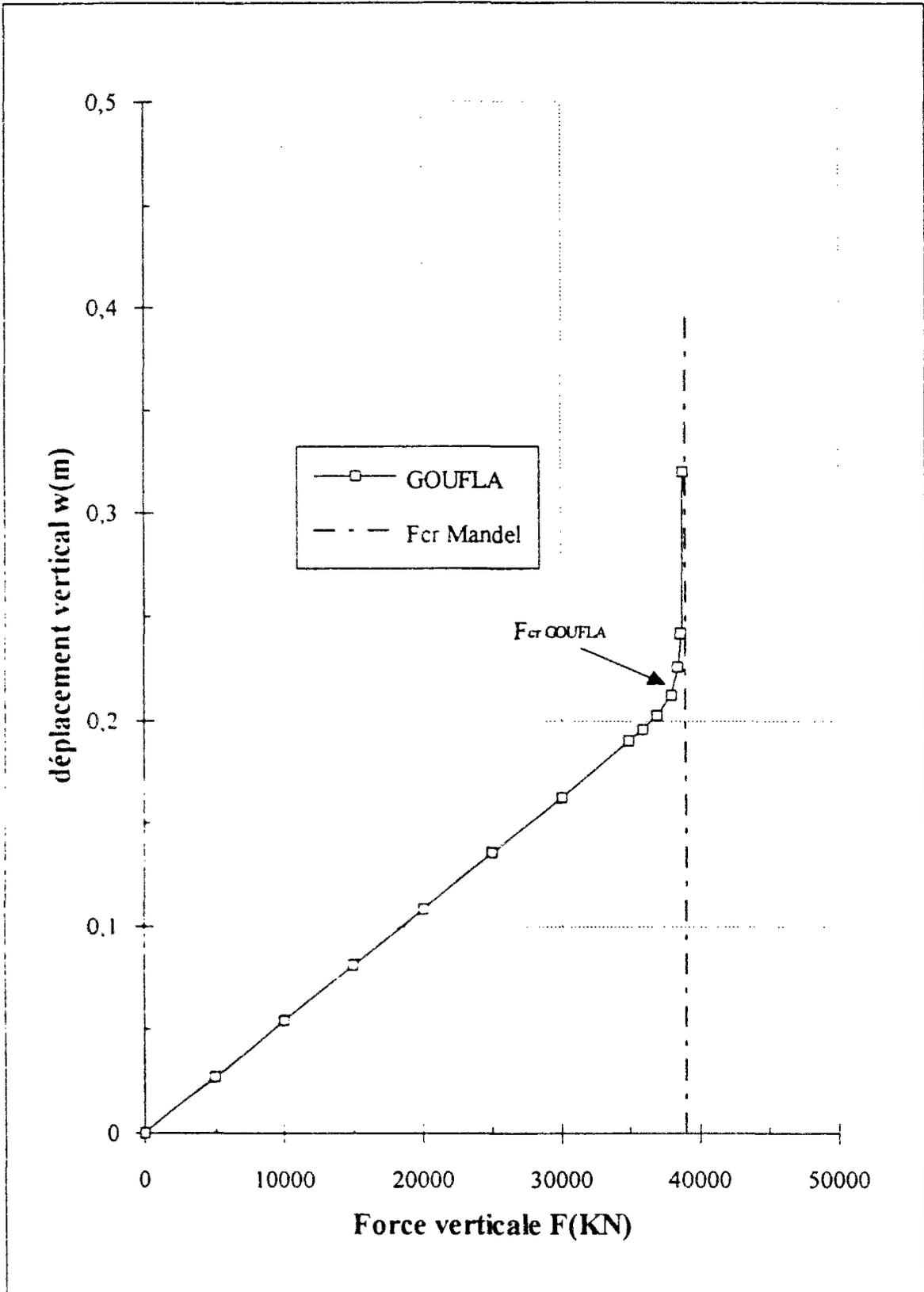
## **ANNEXES A**



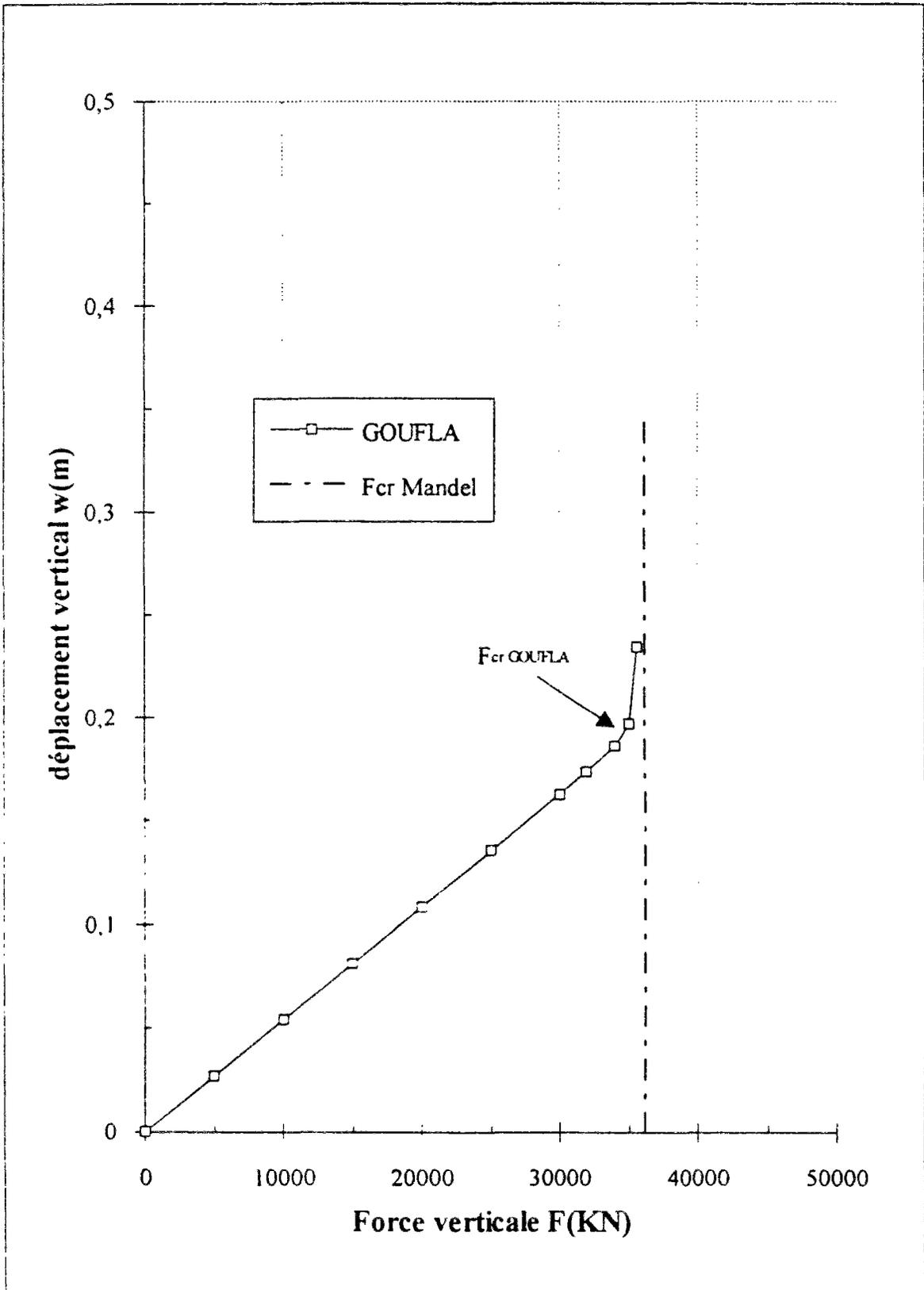
## **ANNEXE A-1**

### **Comparaison entre GOUFLA et la théorie de Mandel**

**Comparaison GOUFLA-Mandel**  
**Pieu (cylindre creux) en acier dans une argile molle,**  
**chargé axialement, articulé en tête et encastré en pointe.**



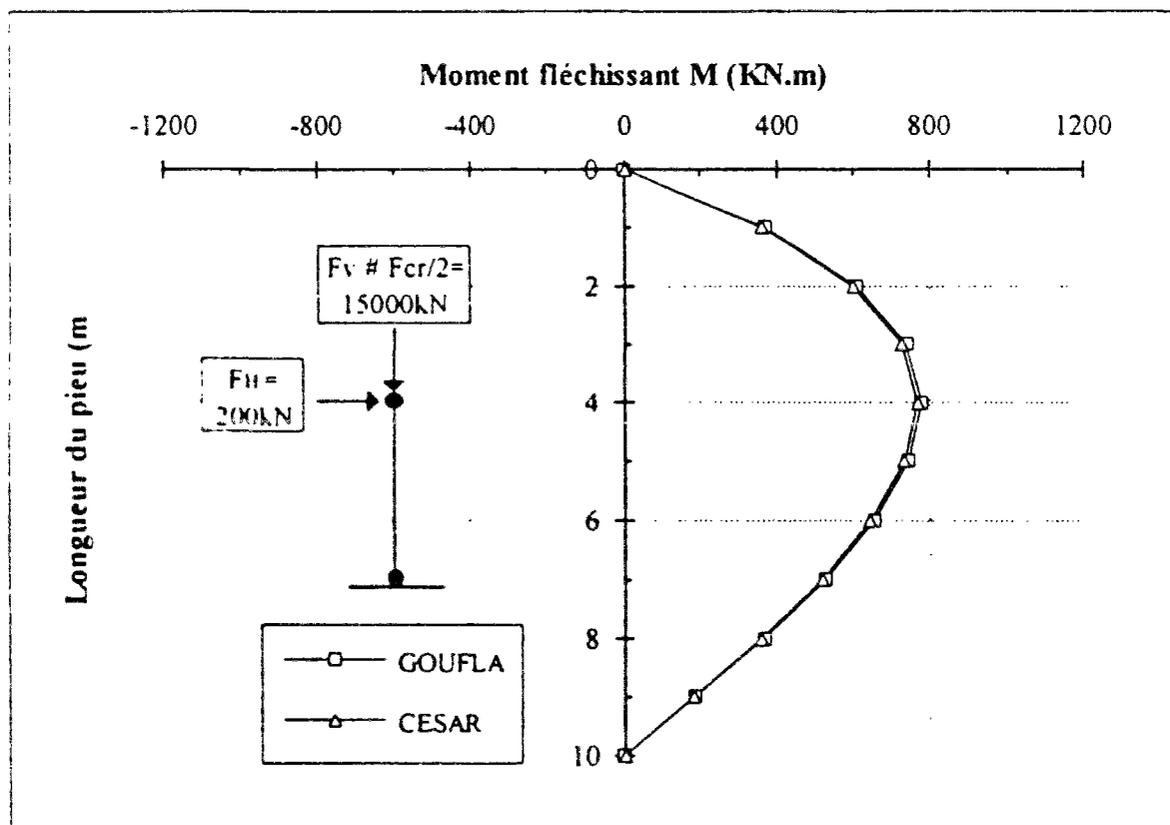
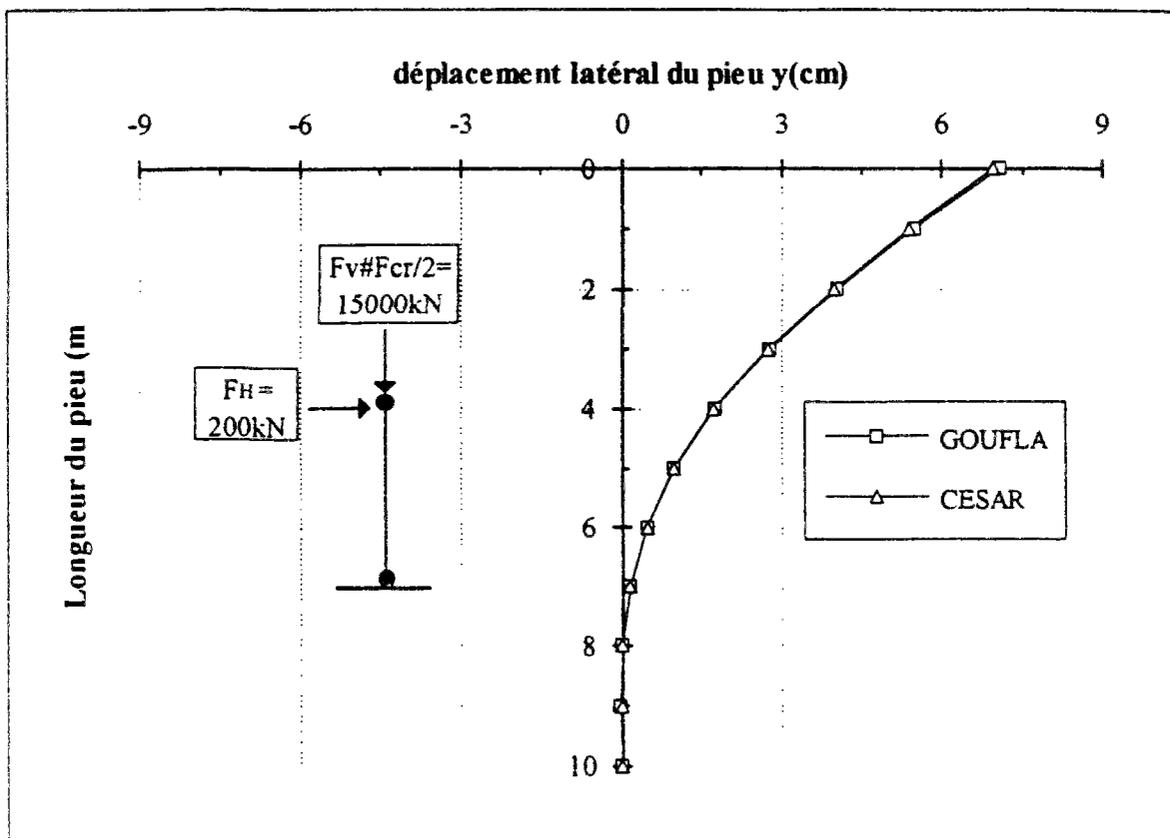
**Comparaison GOUFLA-Mandel**  
**Pieu (cylindre creux) en acier dans une argile molle, chargé axialement et articulé aux deux extrémités.**



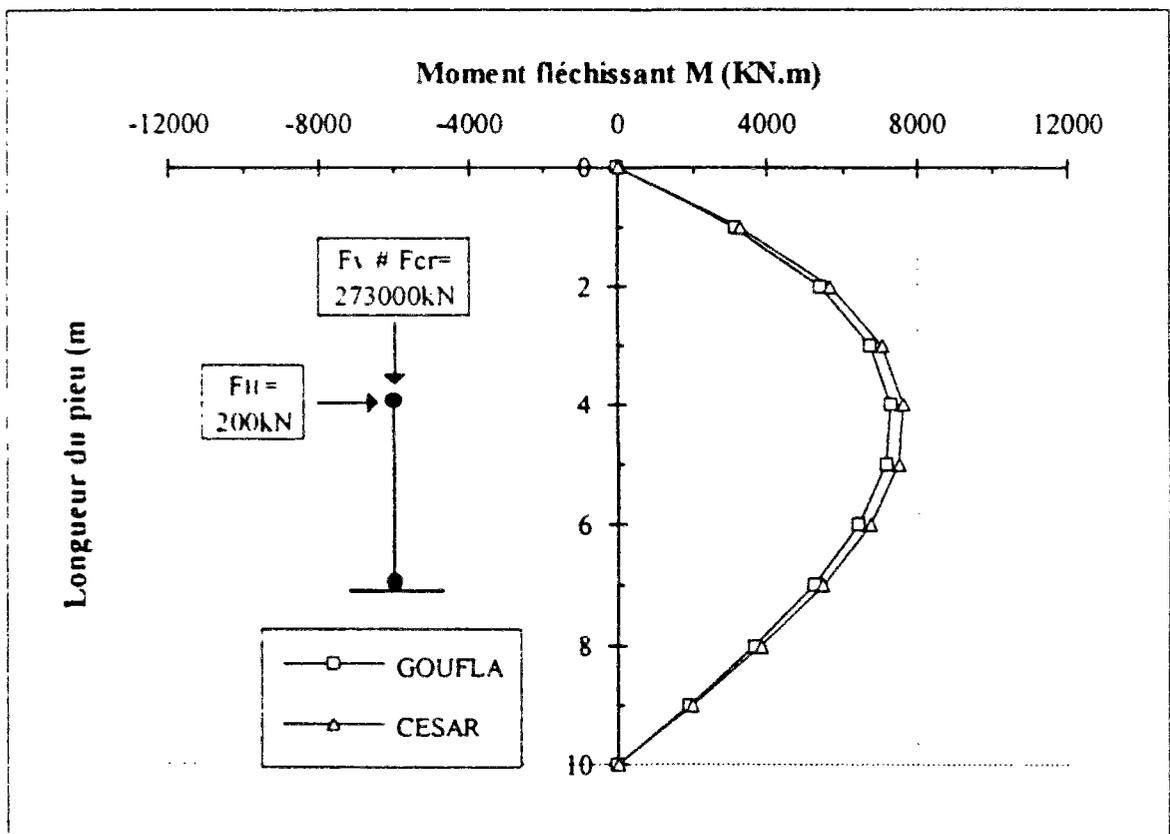
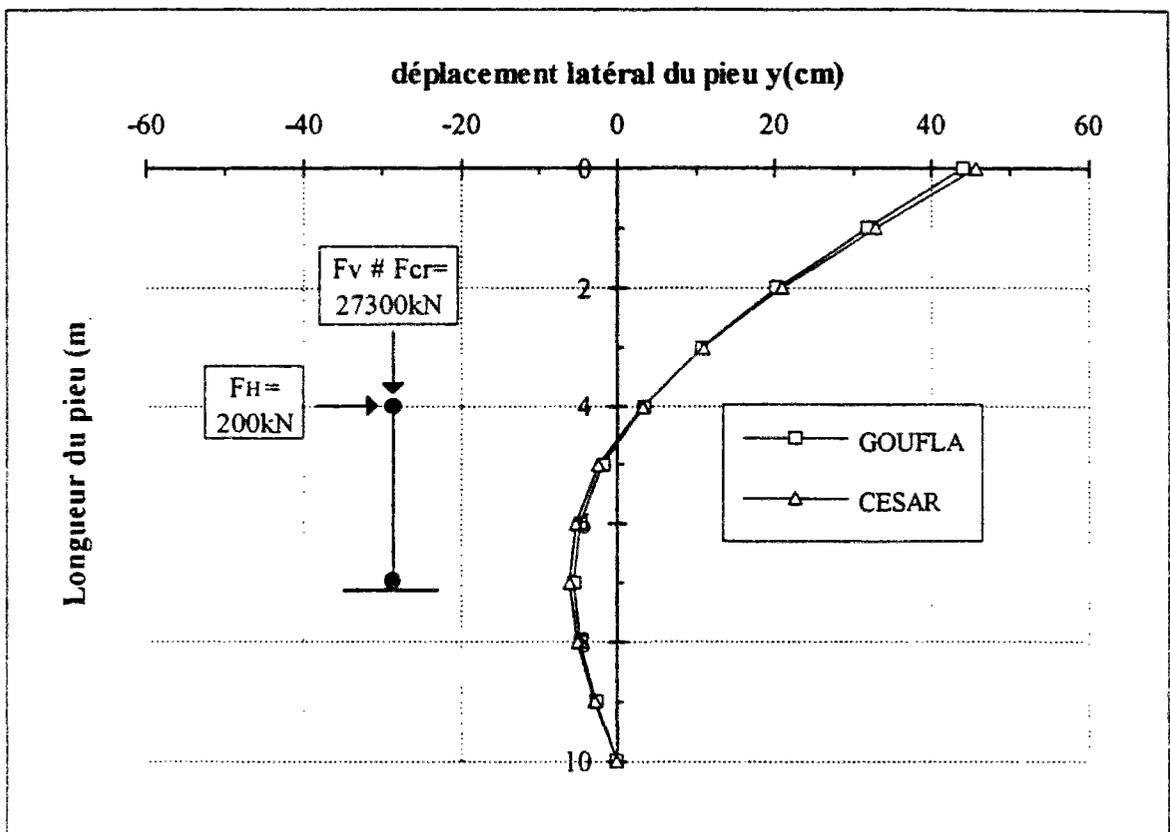


## **ANNEXE A-2**

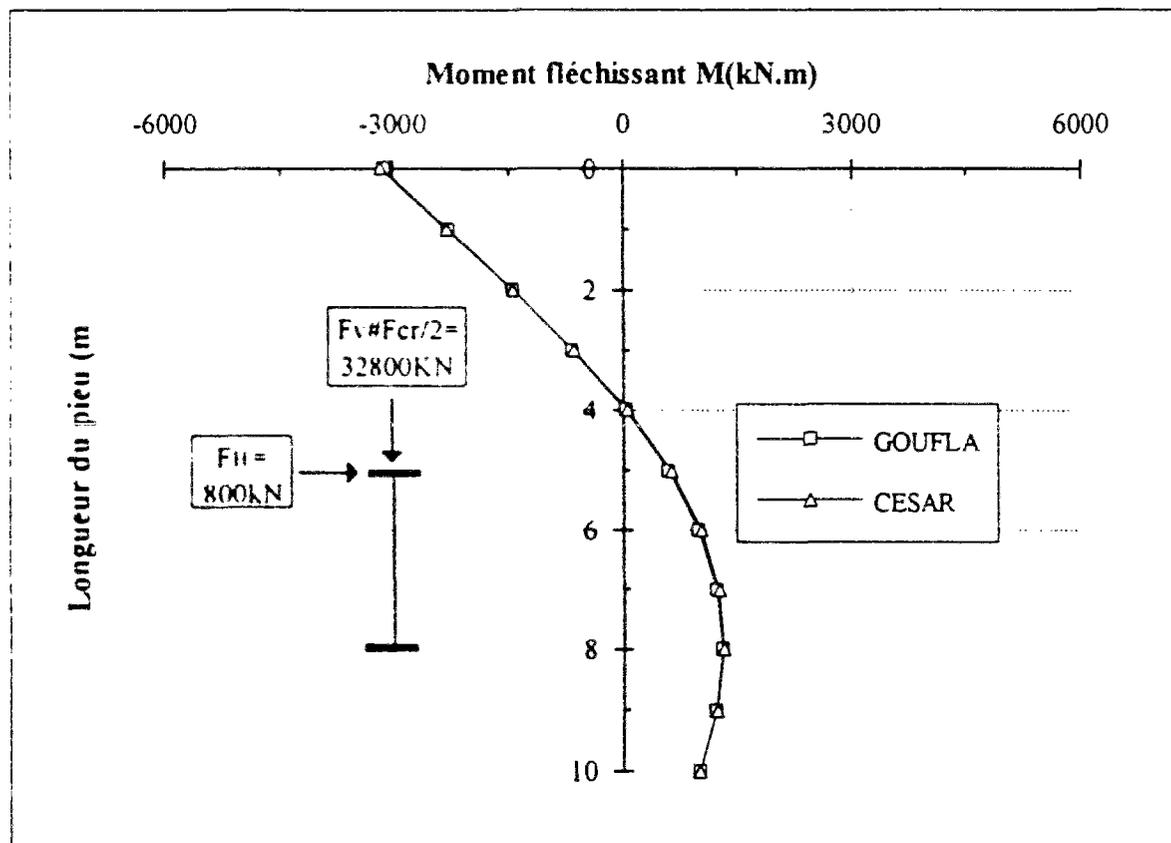
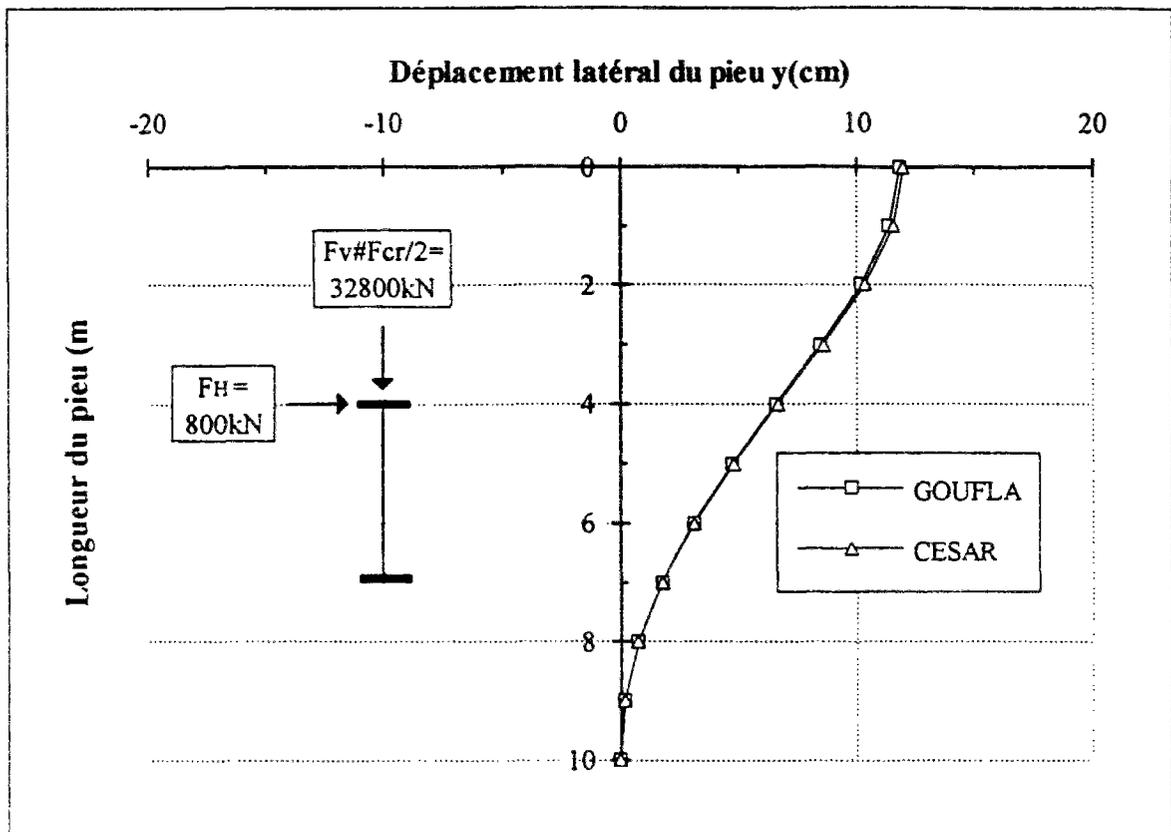
**Comparaison entre les résultats du programme GOUFLA  
et du logiciel d'éléments finis CESAR-LCPC.**



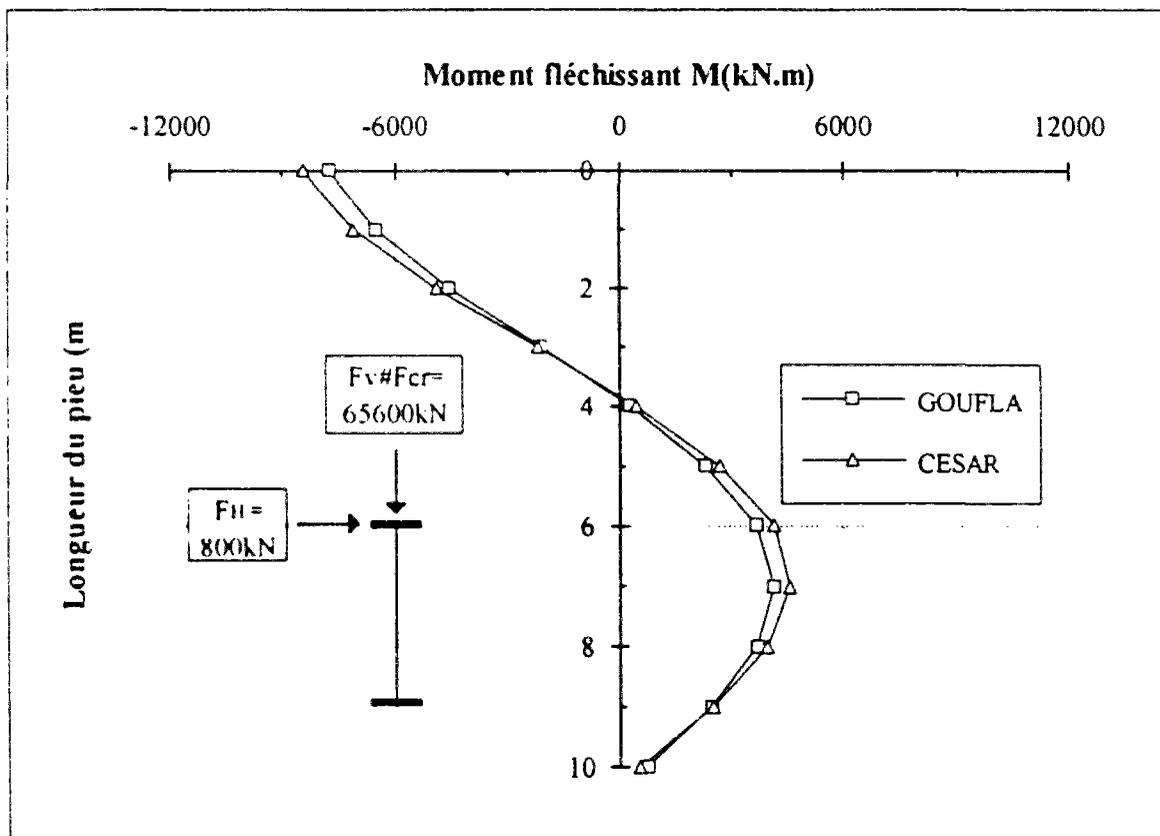
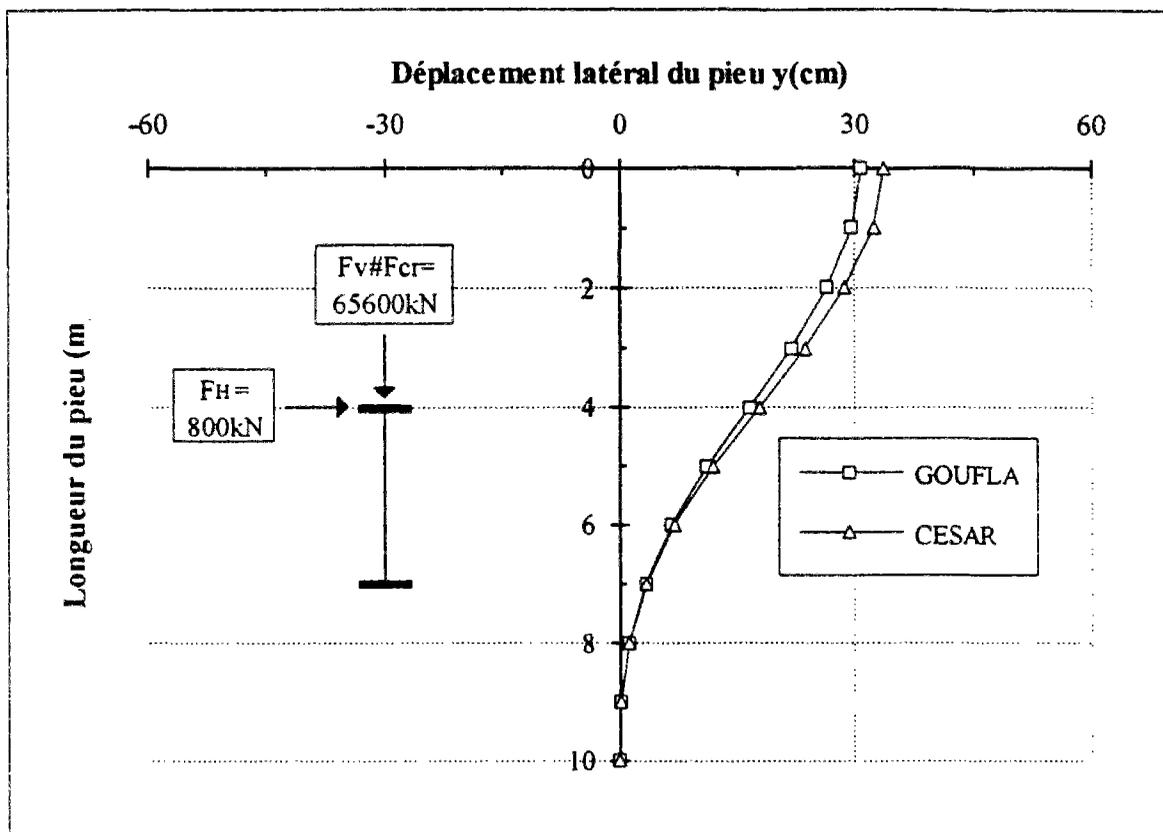
Comparaison GOUFLA et CESAR-LCPC, pieu rigide articulé aux deux côtés avec  $F_v = F_{cr} / 2$  (2D).



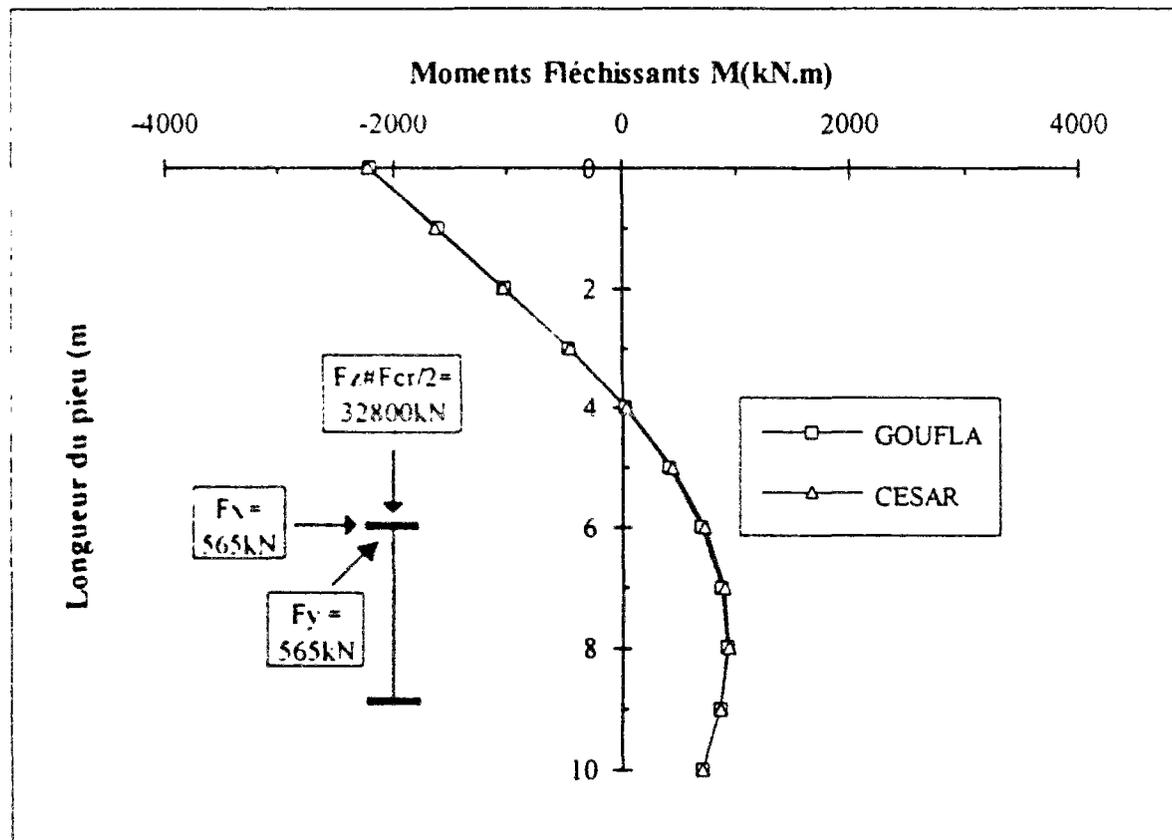
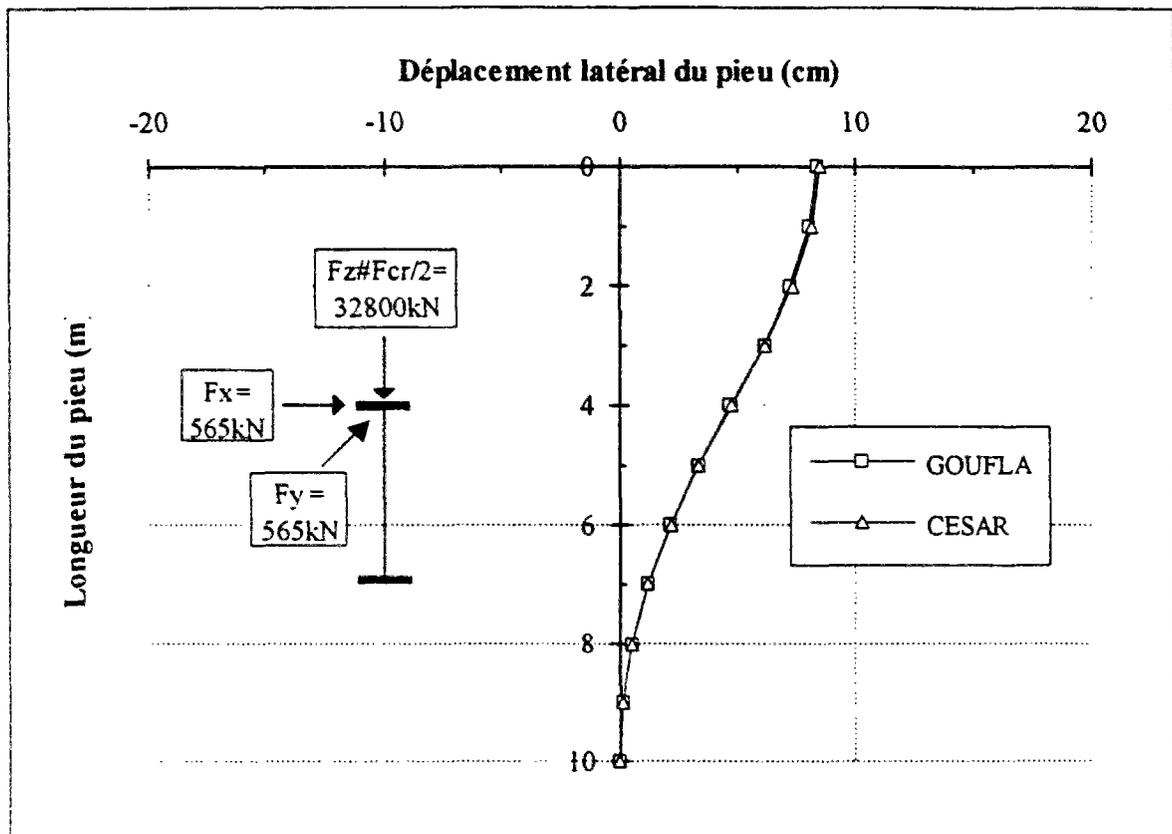
Comparaison GOUFLA et CESAR-LCPC, pieu rigide articulé aux deux côtés avec  $F_v \approx F_{cr}$  (2D).



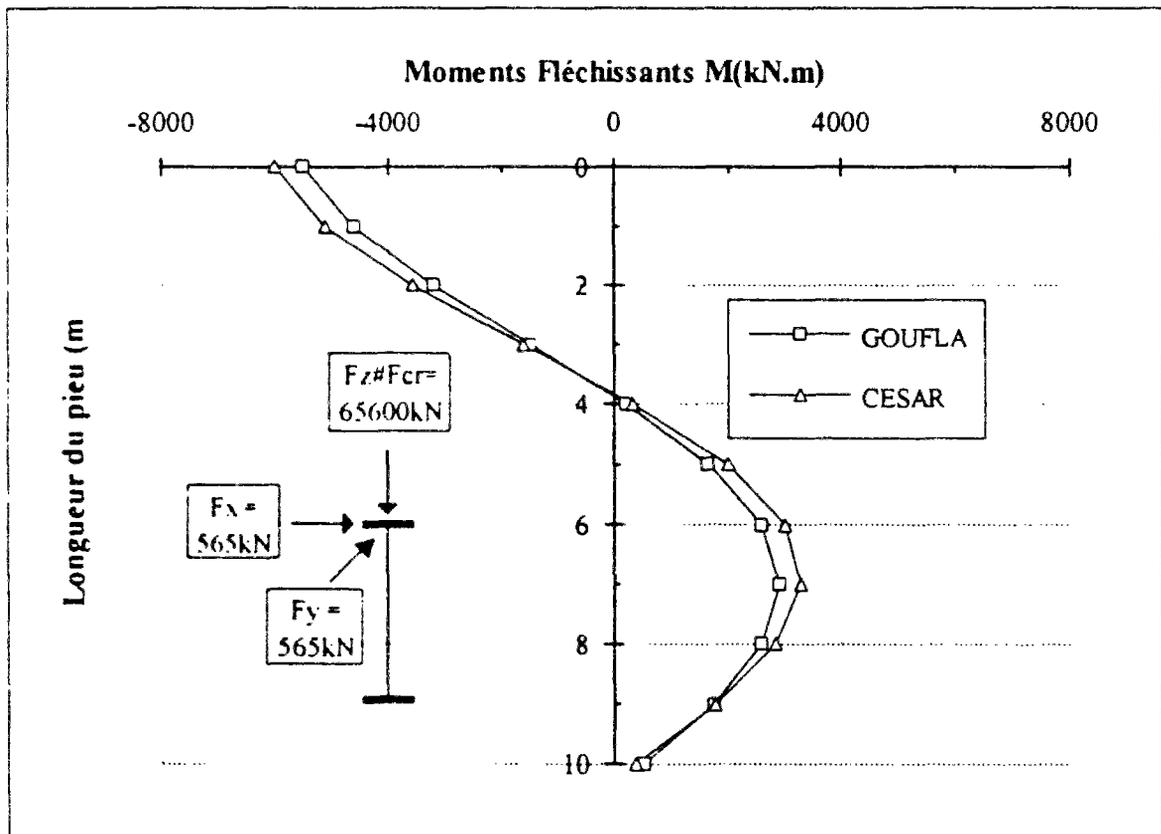
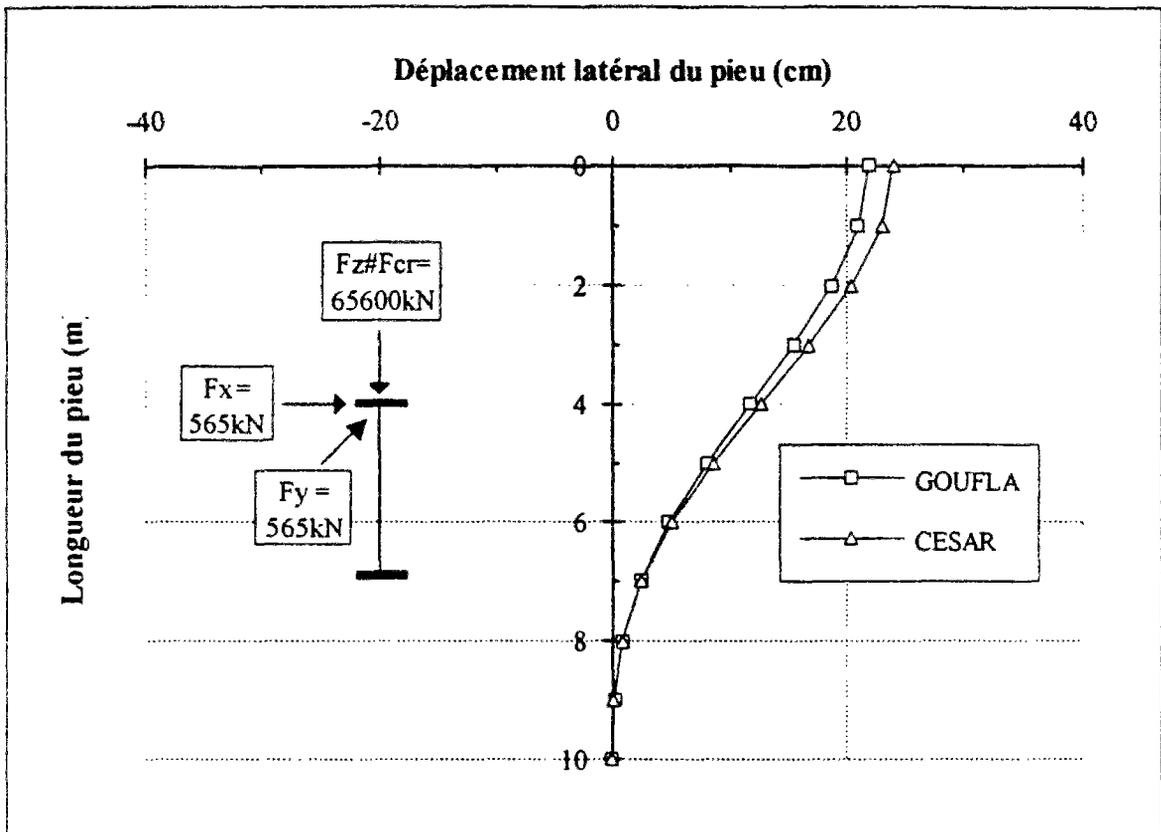
Comparaison GOUFLA et CESAR-LCPC, pieu rigide  
 encasté aux deux côtés avec  $F_v = F_{cr} / 2$  (2D).



Comparaison GOUFLA et CESAR-LCPC, pieu rigide  
encasté aux deux côtés avec  $F_v = F_{cr}$  (2D).



Comparaison GOUFLA et CESAR-LCPC, pieu rigide  
 encasté aux deux côtés avec  $F_v = F_{cr} / 2$  (3D).



Comparaison GOUFLA et CESAR-LCPC, pieu rigide  
encasté aux deux côtés avec  $F_v = F_{cr}$  (3D).

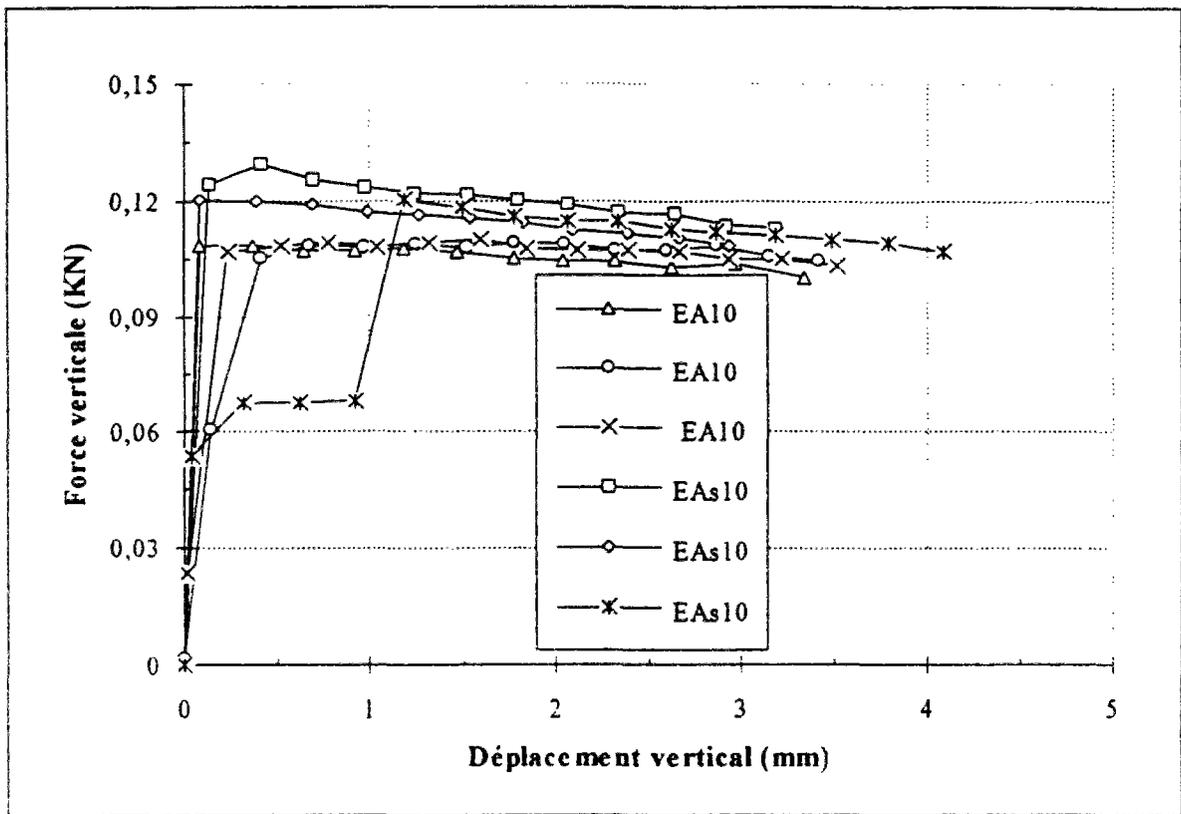


## **ANNEXES B**

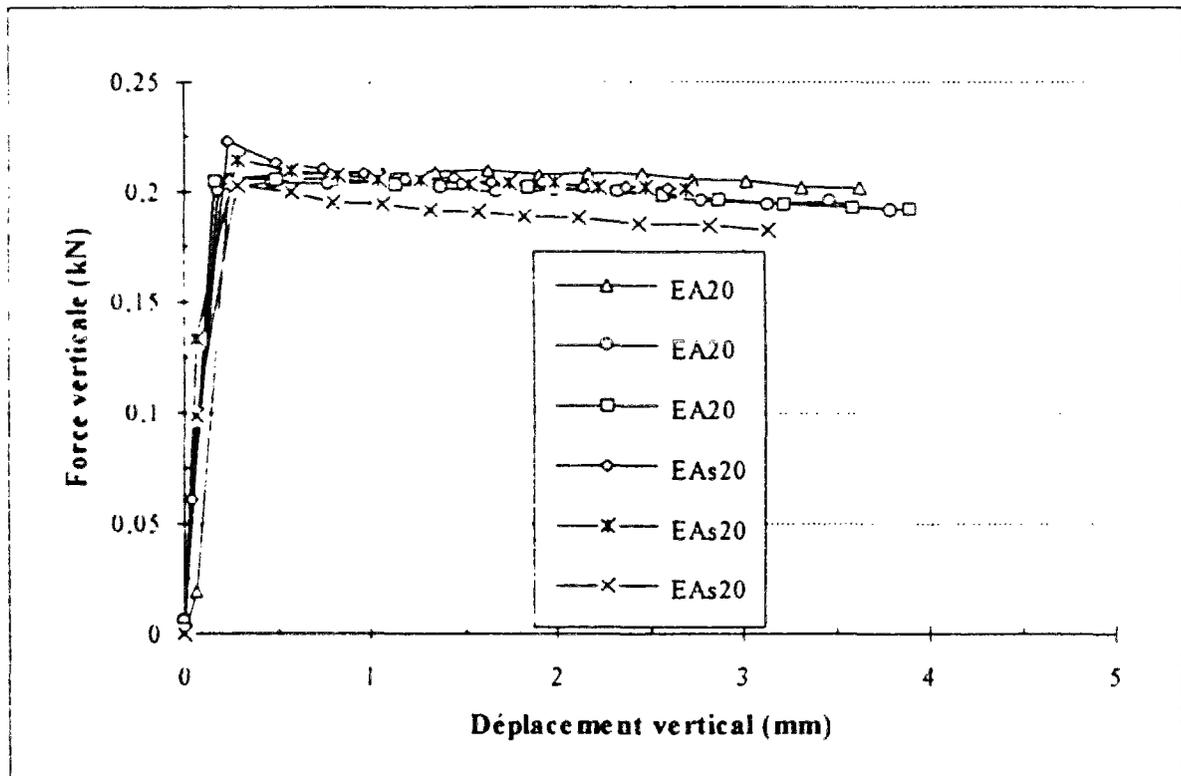


## **ANNEXE B-1**

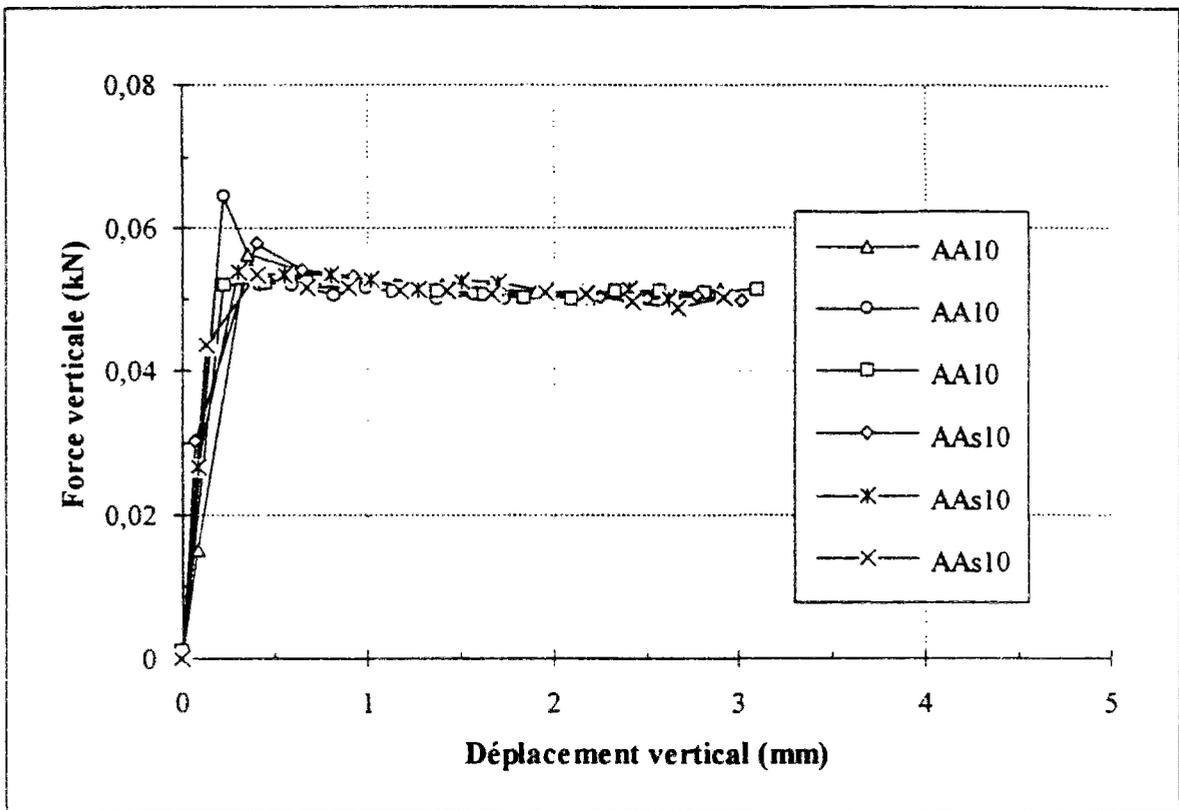
### **Résultats des essais de flambement des pieux à l'air libre à 1 g.**



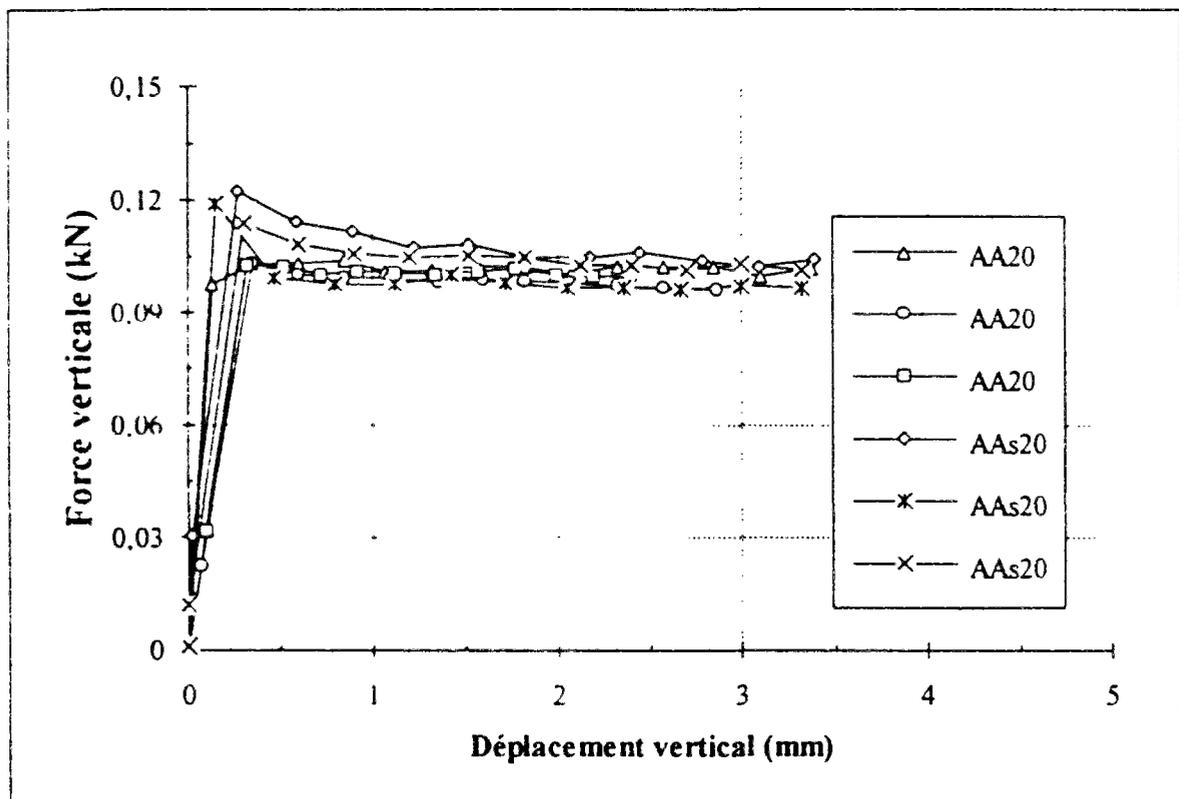
Essais de flambement à l'air libre à 1 g. Pieux de largeur 10 mm, encastés en tête, articulés ou simplement appuyés en pointe.



Essais de flambement à l'air libre à 1 g. Pieux de largeur 20 mm, encastés en tête, articulés ou simplement appuyés en pointe.



Essais de flambement à l'air libre à 1 g. Pieux de largeur 10 mm, articulés en tête, articulés ou simplement appuyés en pointe.

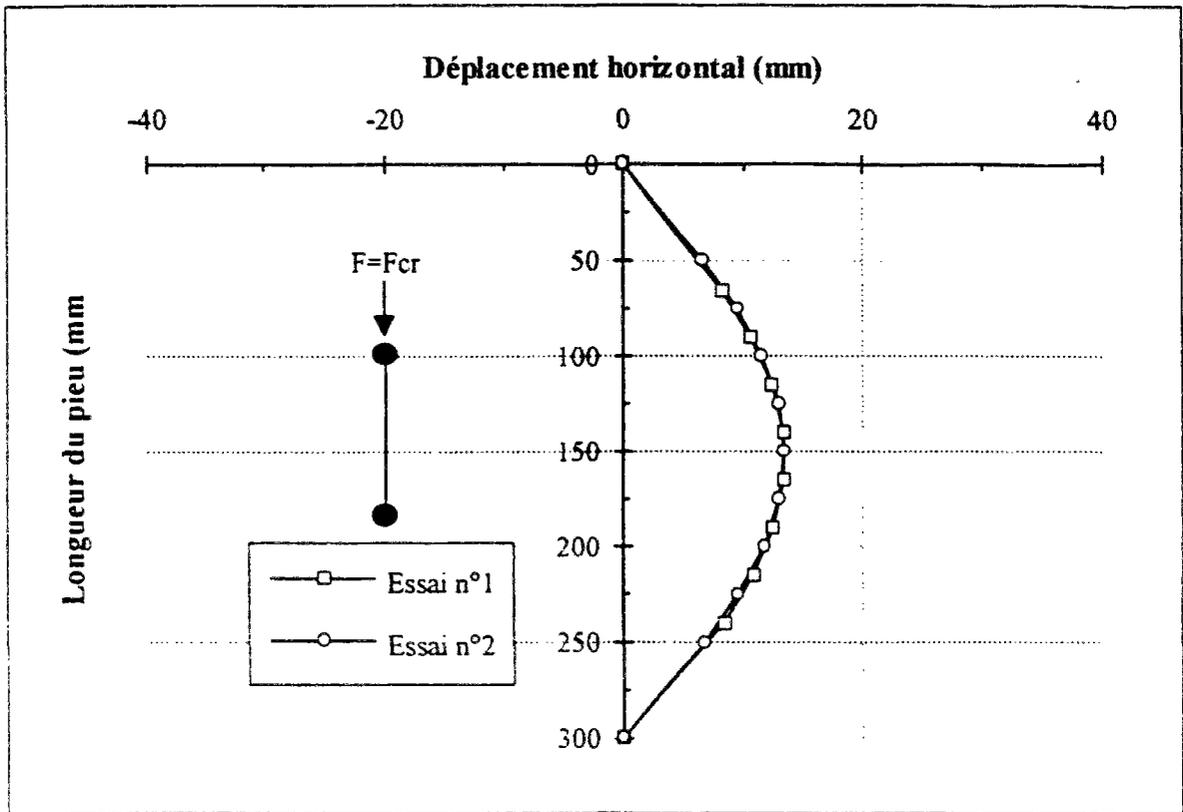


Essais de flambement à l'air libre à 1 g. Pieux de largeur 20 mm, articulés en tête, articulés ou simplement appuyés en pointe.

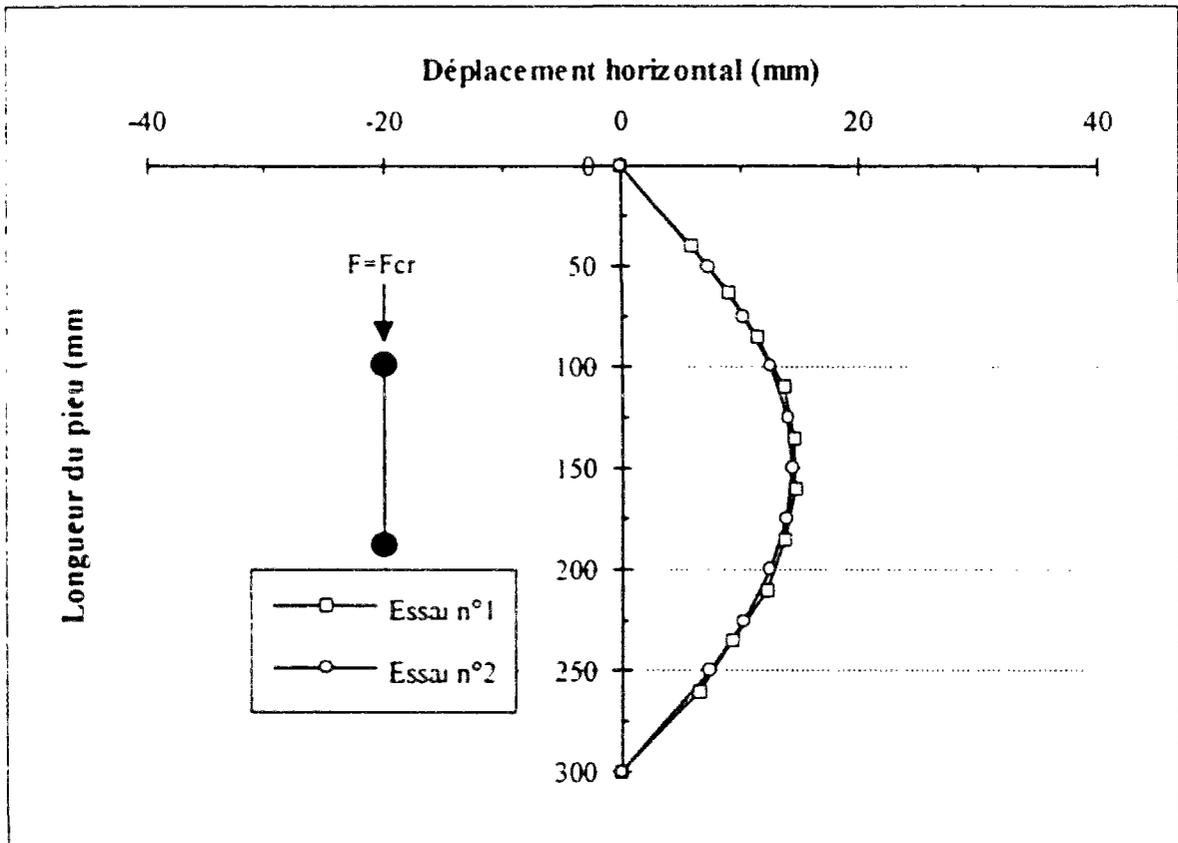


## **ANNEXE B-2**

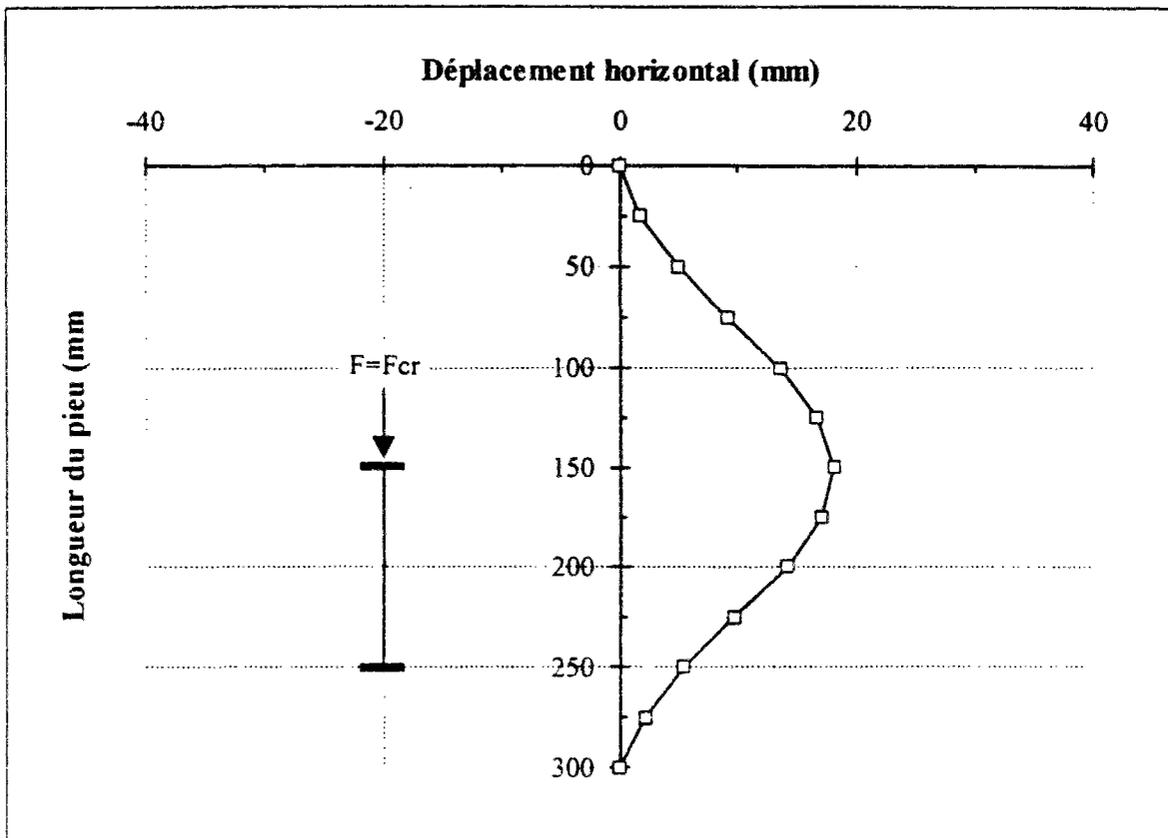
**Déformées des pieux déterminées par analyses d'images,  
essais de flambement des pieux à l'air libre à 1 g.**



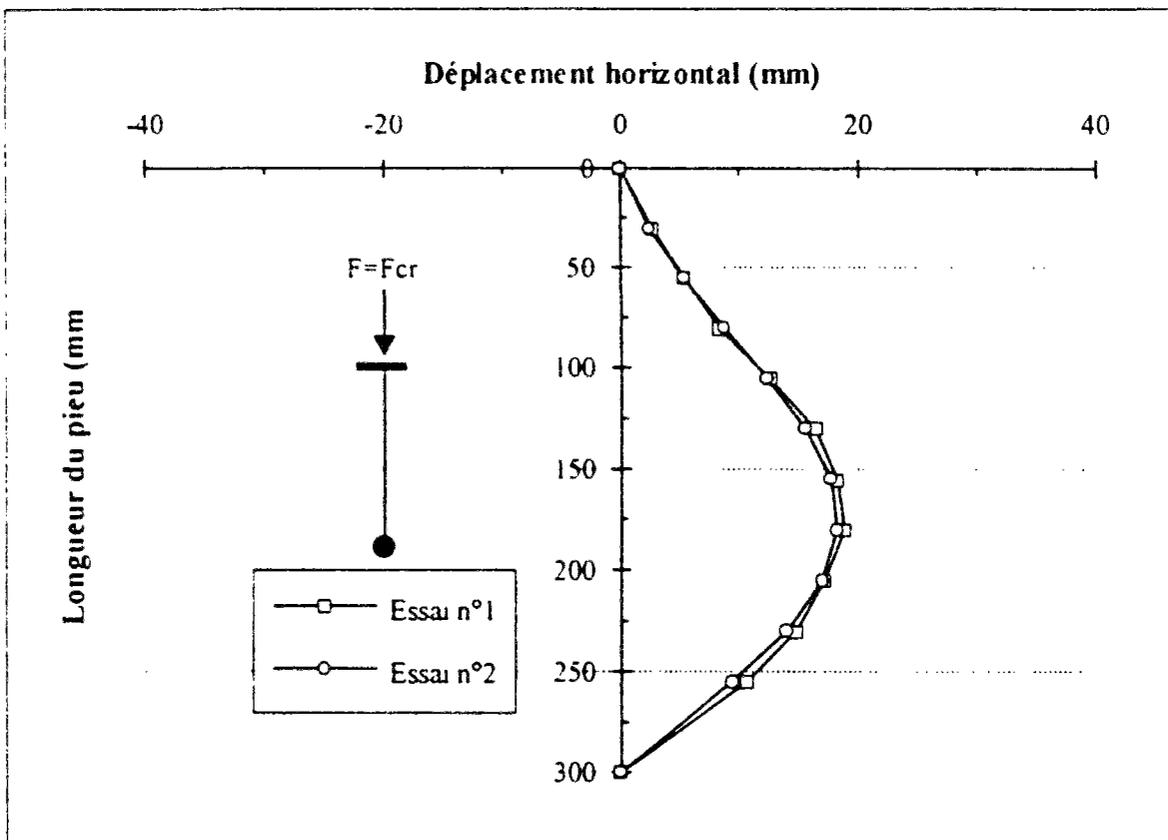
Pieux de largeur 10 mm articulés aux deux extrémités (AA10).



Pieux de largeur 20 mm articulés aux deux extrémités (AA20).



Pieu de largeur 10 mm encasté aux deux extrémités (EE10).

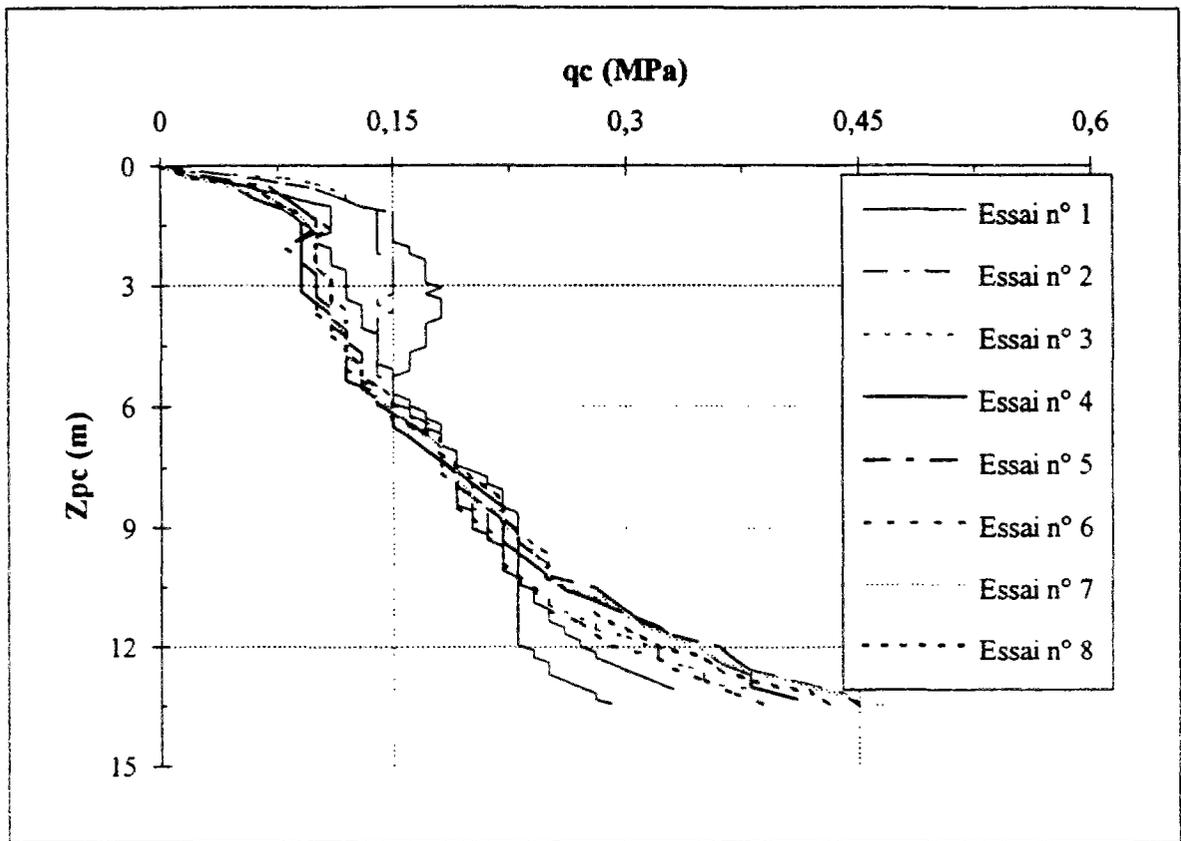


Pieux de largeur 10 mm encastés en tête et articulés en pointe (EA10).

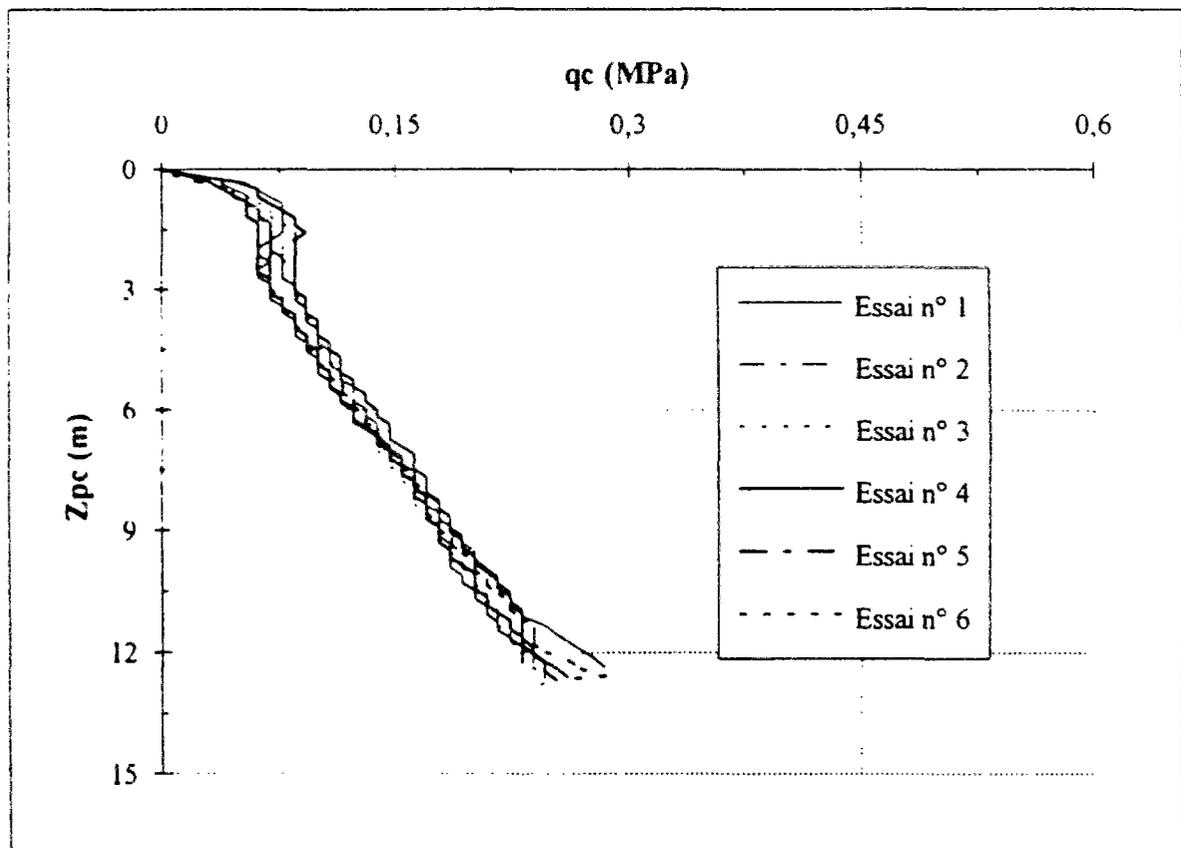


## **ANNEXE B-3**

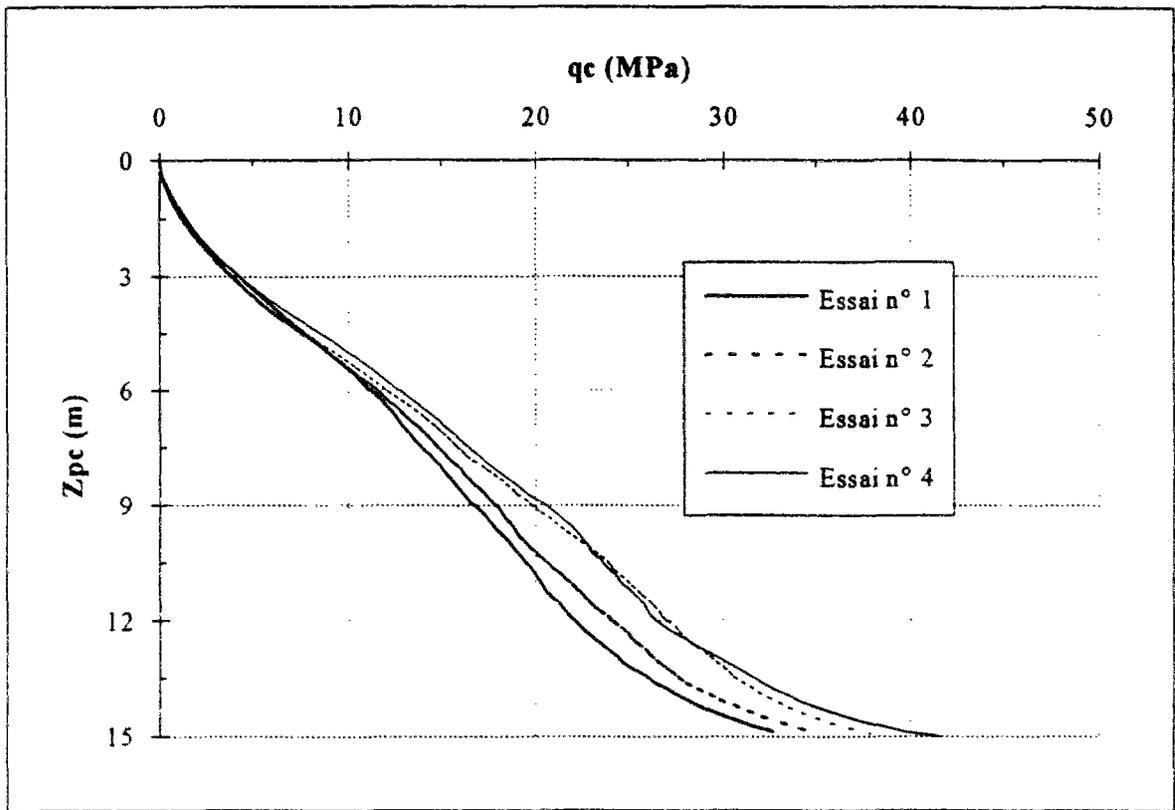
**Résultats des essais au mini-pénétrömètre LCPC.**



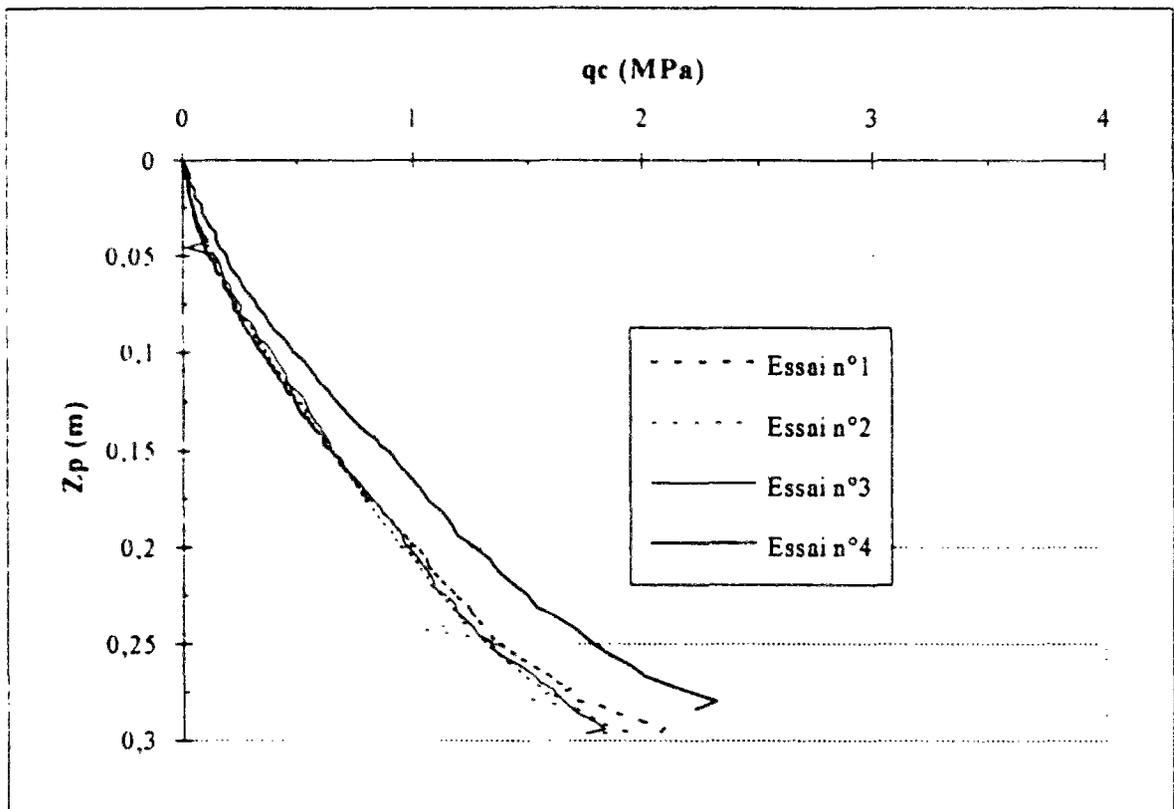
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite molle ( $\gamma_h = 16,41 \text{ kN/m}^3$ ).



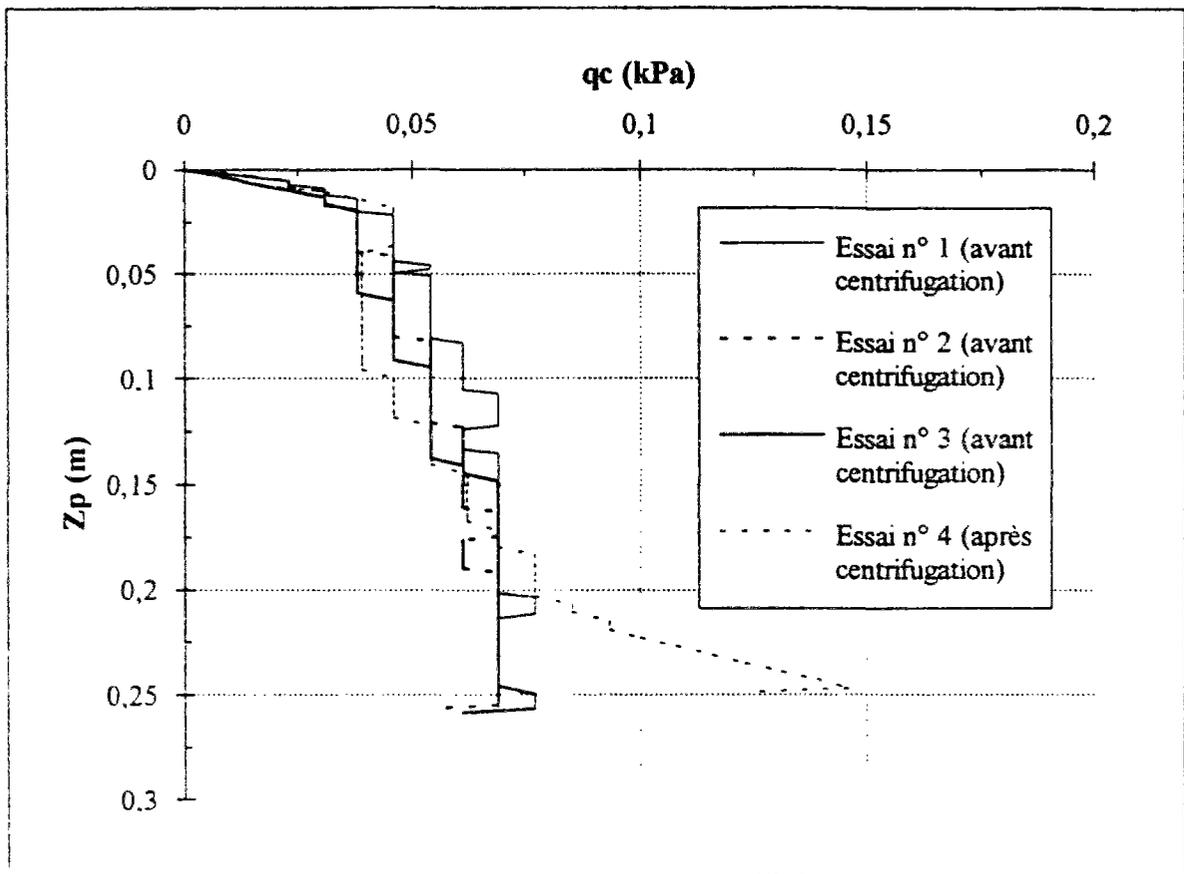
Conteneur 5 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite molle ( $\gamma_h = 16,41 \text{ kN/m}^3$ ).



Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau moyennement dense ( $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$ ).



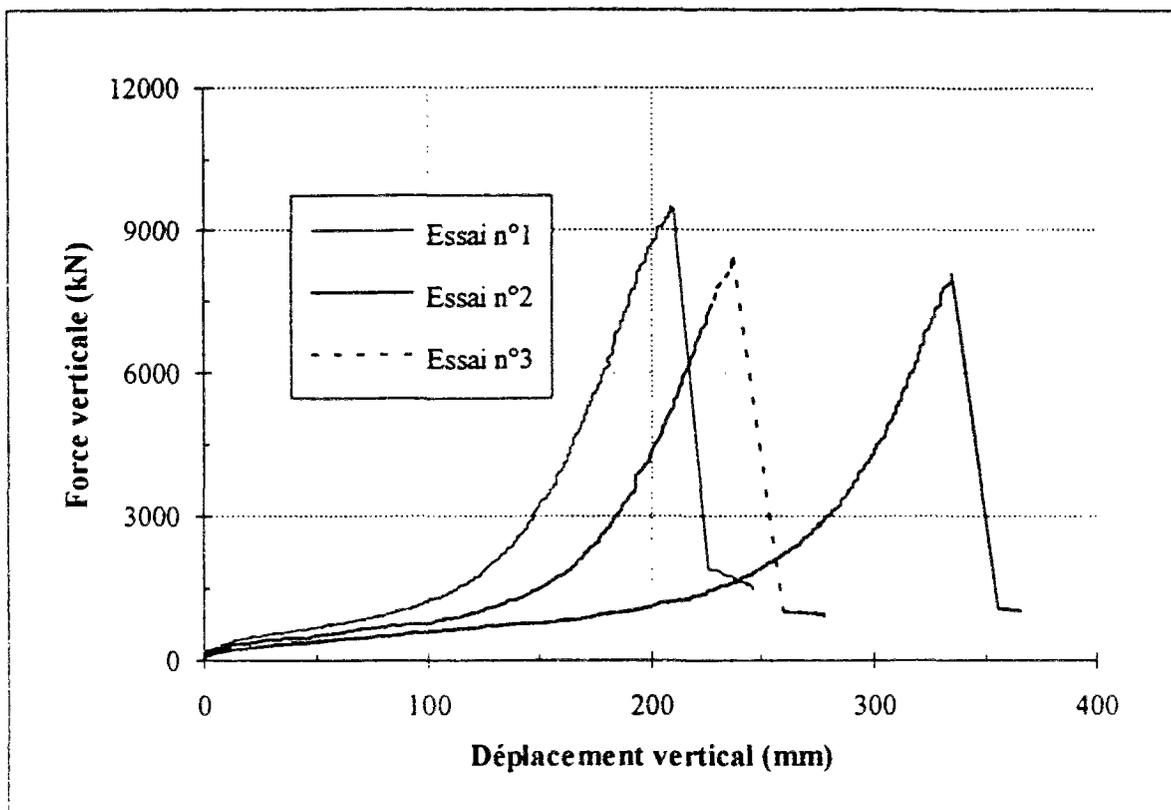
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau moyennement dense ( $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$ ).



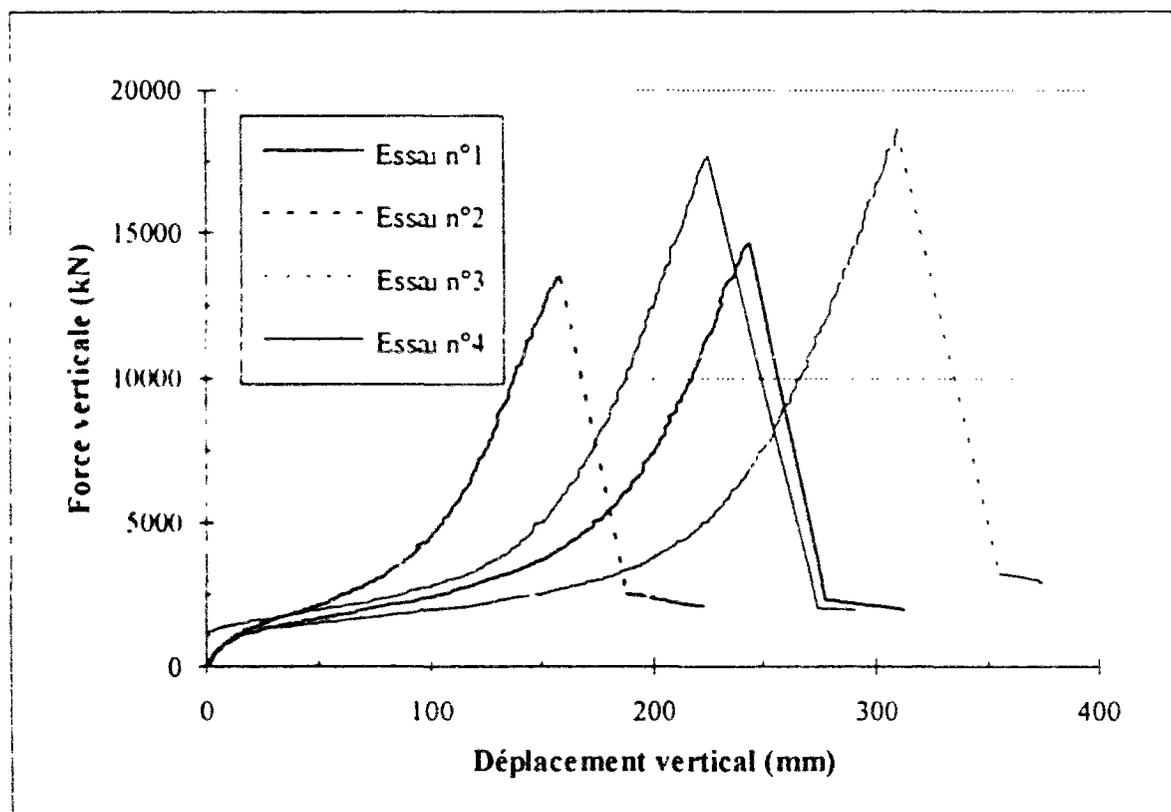
Conteneur 5 - Essais à 1 g dans l'argile Speeswhite molle ( $\gamma_h = 16,41 \text{ kN/m}^3$ ).

## **ANNEXE B-4**

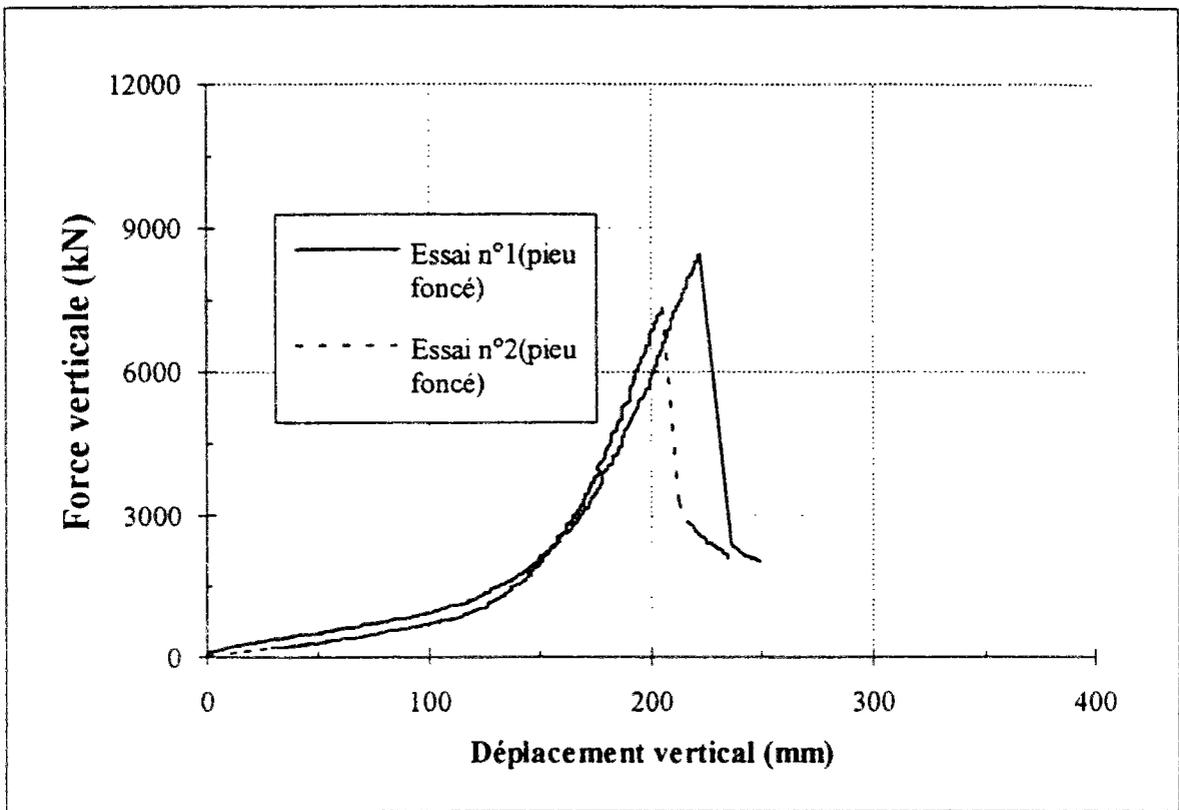
**Résultats des essais de flambement des pieux  
dans des massifs de sols reconstitués  
(sable de Fontainebleau, argile Speswhite).**



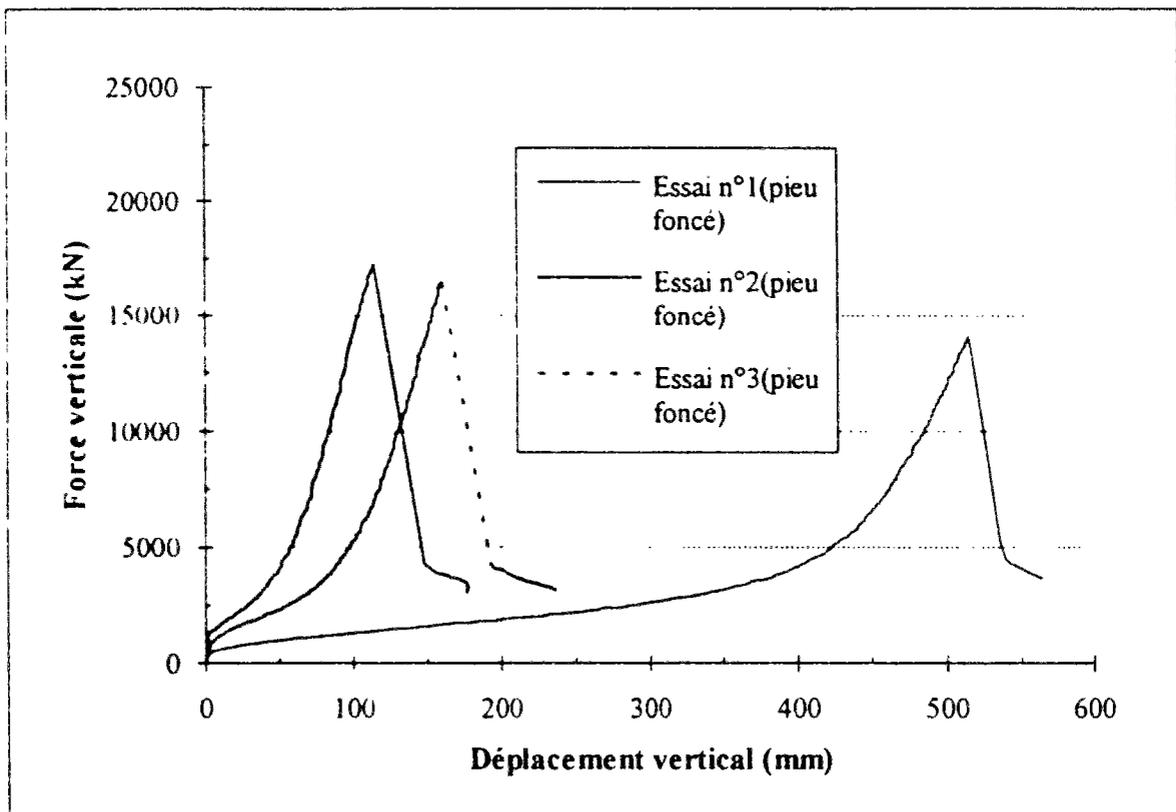
Conteneur 1 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 0,5 m articulé en tête et simplement appuyé en pointe (AA<sub>s</sub>10).



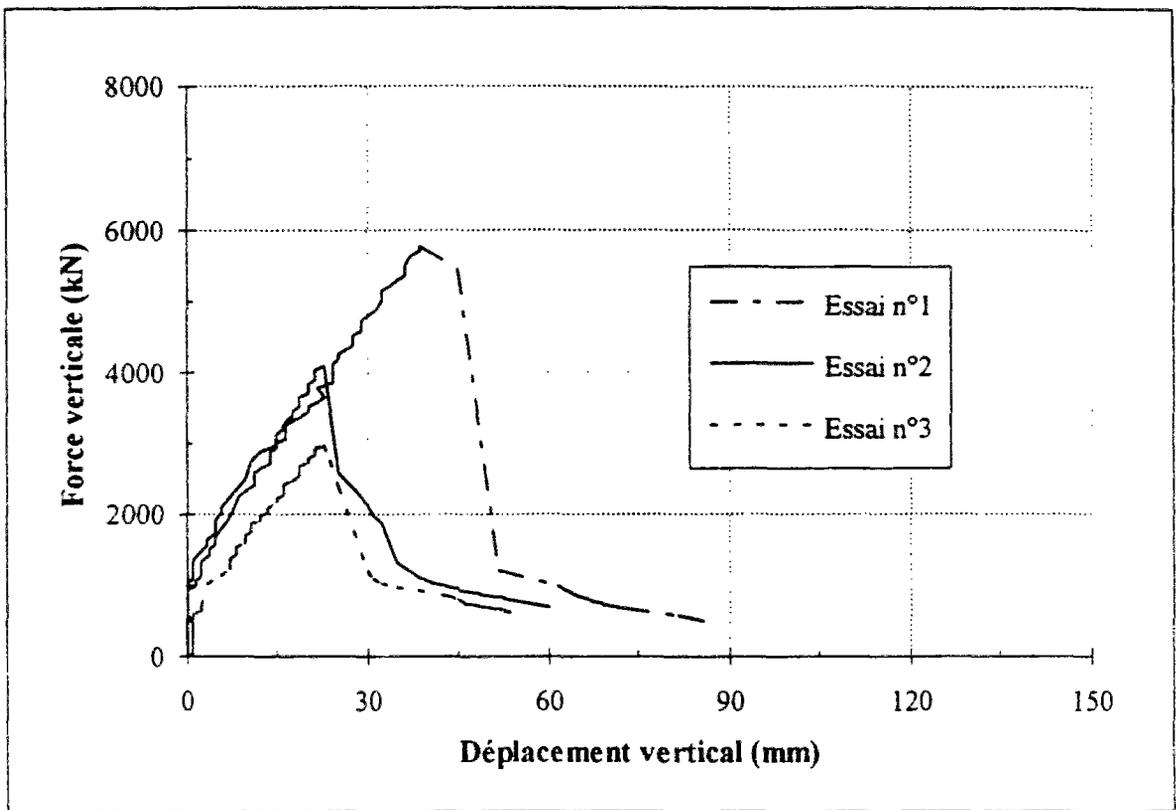
Conteneur 1 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 1 m articulé en tête et simplement appuyé en pointe (AA<sub>s</sub>20).



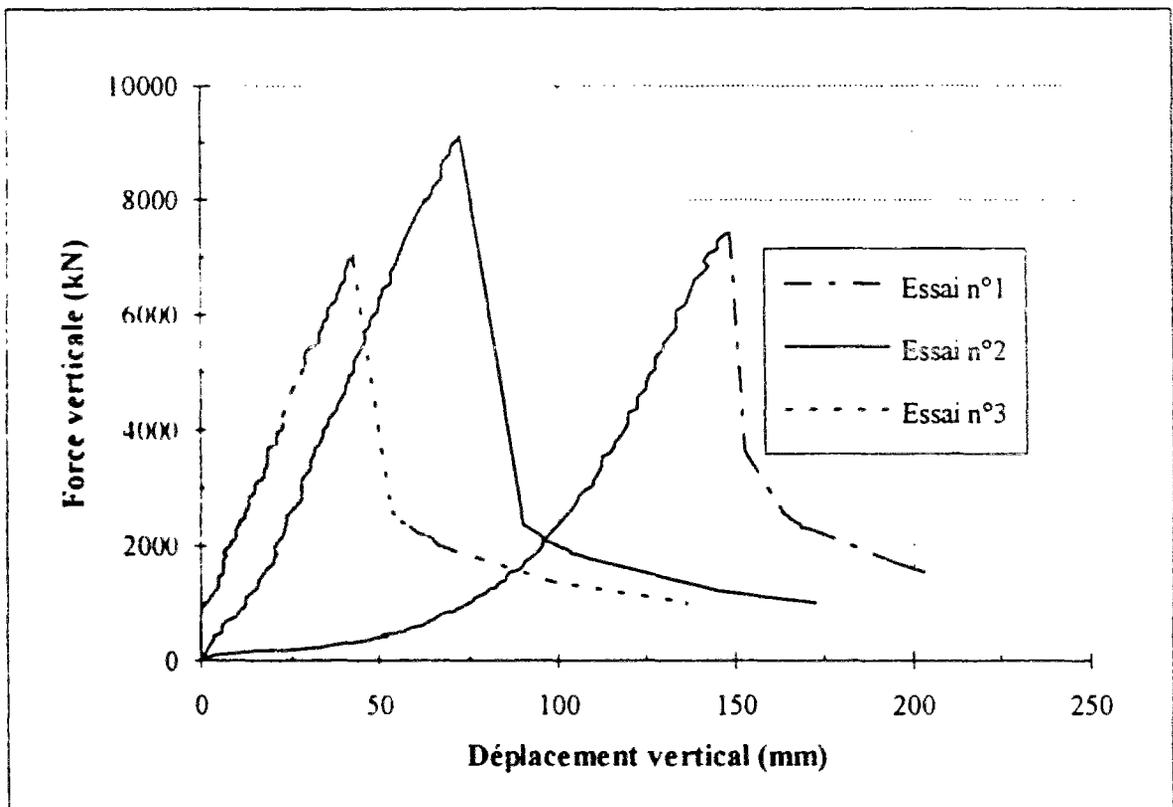
Conteneur 1 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 0,5 m encasté en tête et simplement appuyé en pointe ( $EA_s10$ ).



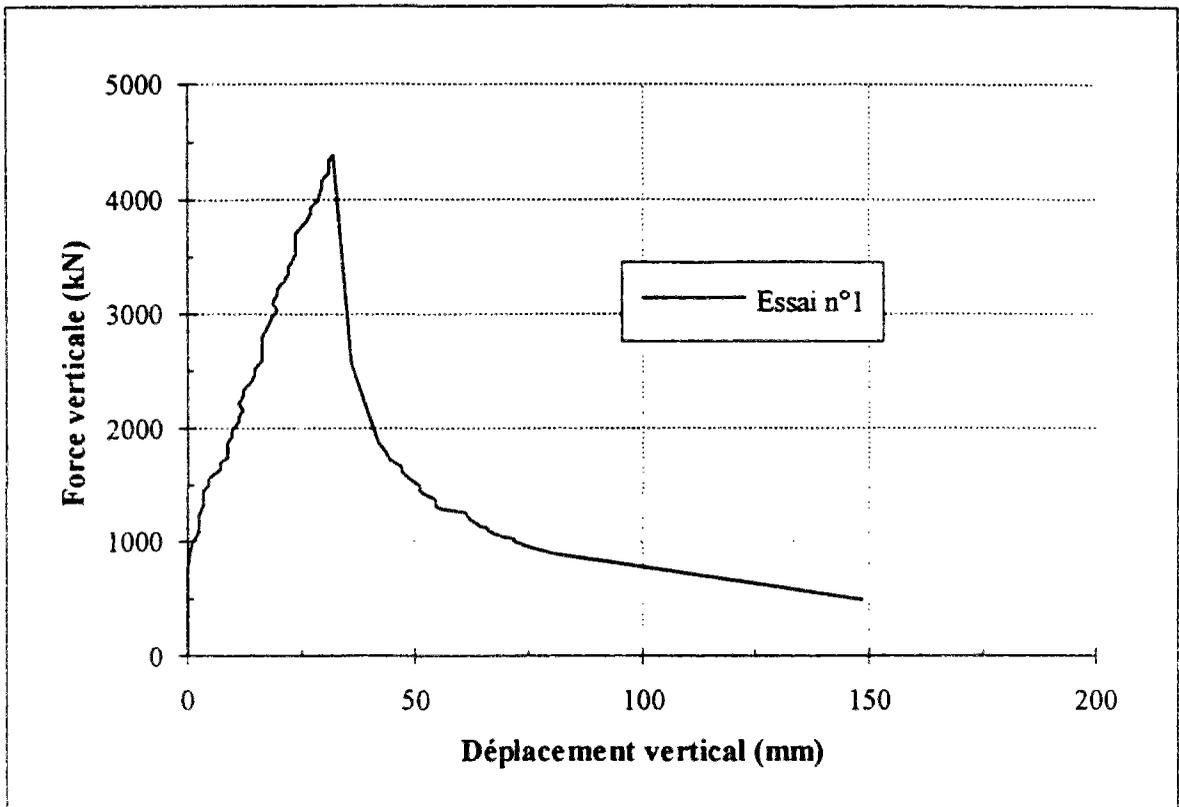
Conteneur 1 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 1 m encasté en tête et simplement appuyé en pointe ( $EA_s20$ ).



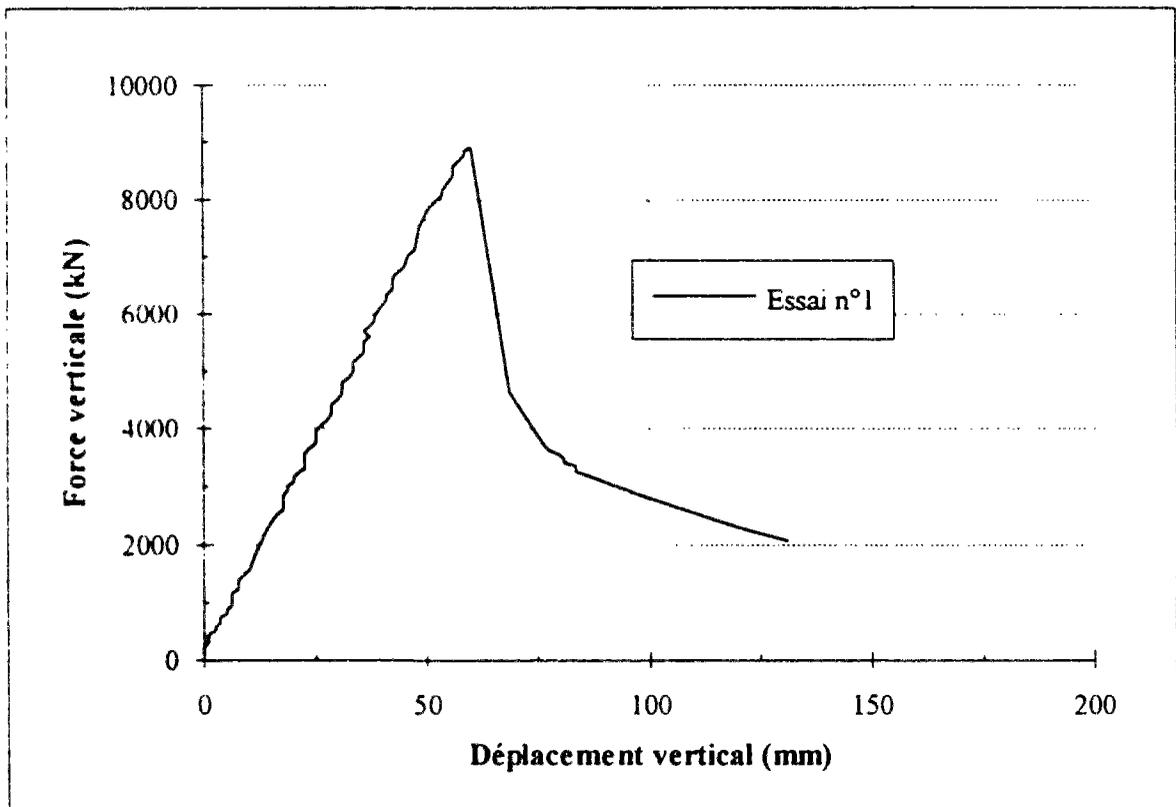
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 0,5 m articulé en tête et simplement appuyé en pointe (AA<sub>s</sub>10).



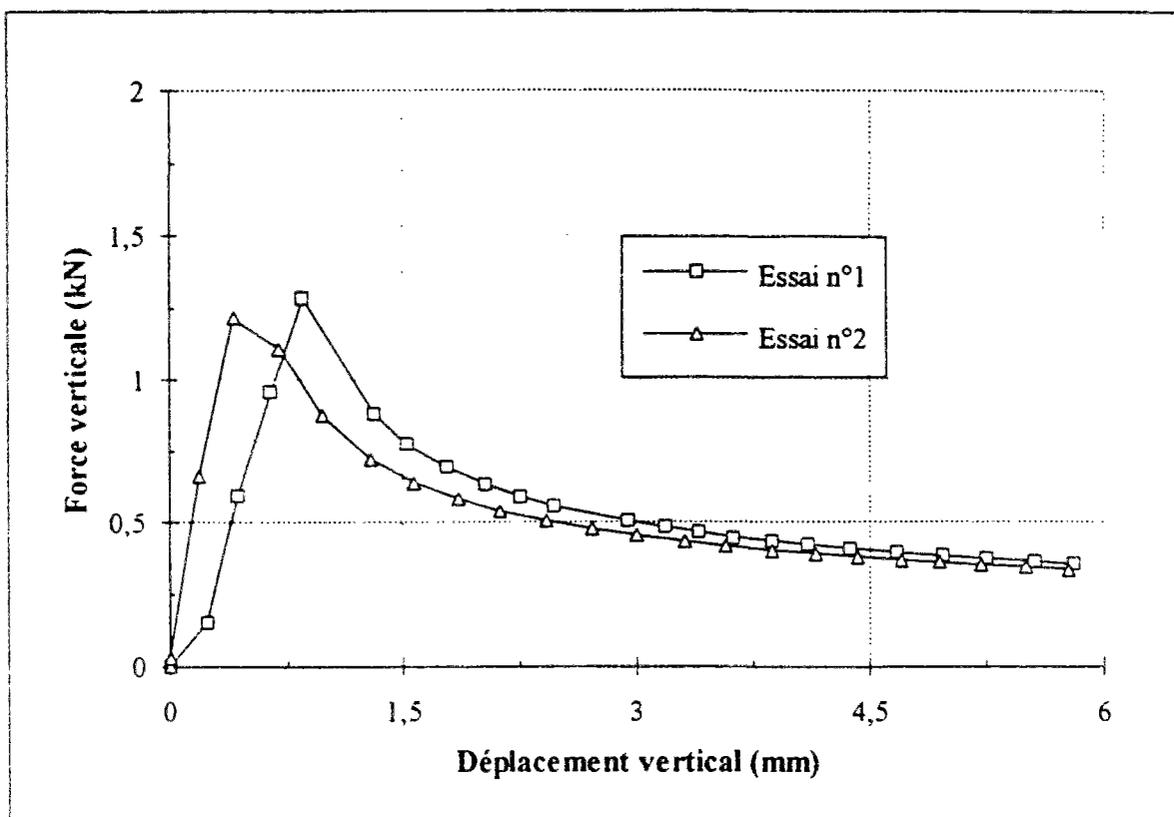
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 1 m articulé en tête et simplement appuyé en pointe (AA<sub>s</sub>20).



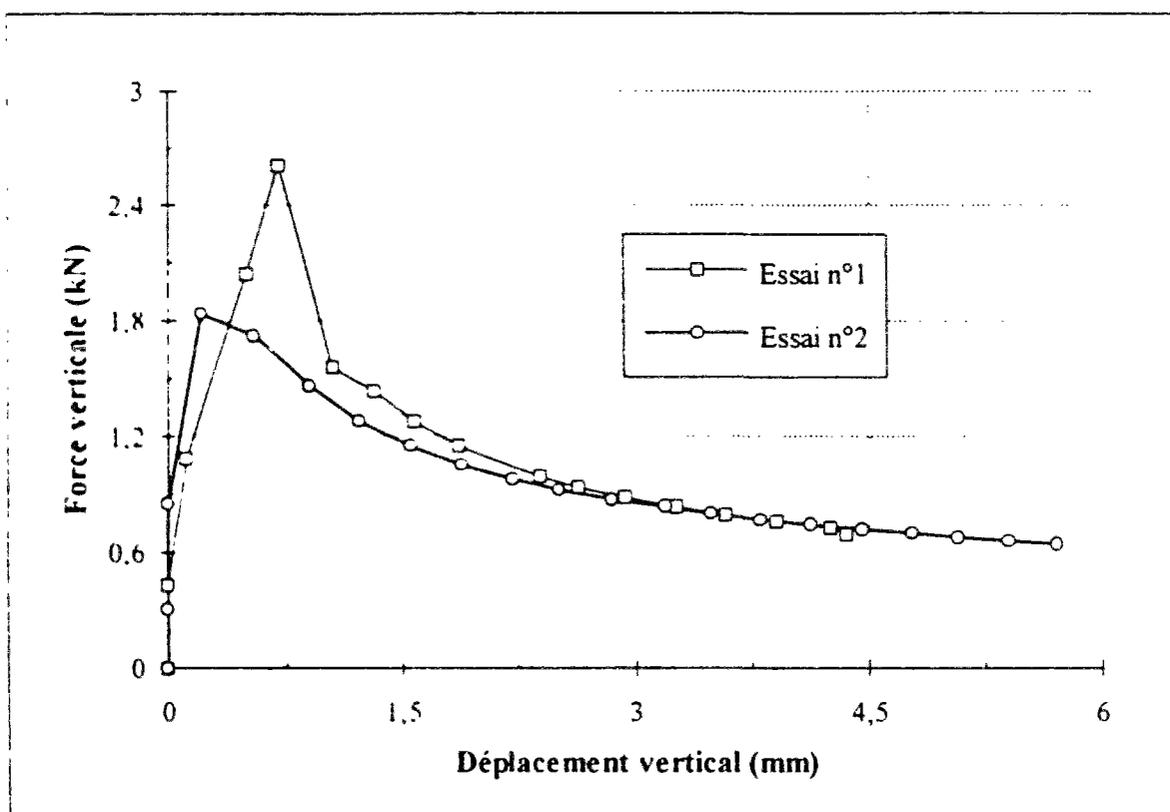
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
 Pieu de largeur 0,5 m encastré en tête et simplement appuyé en pointe (EA<sub>s</sub>10).



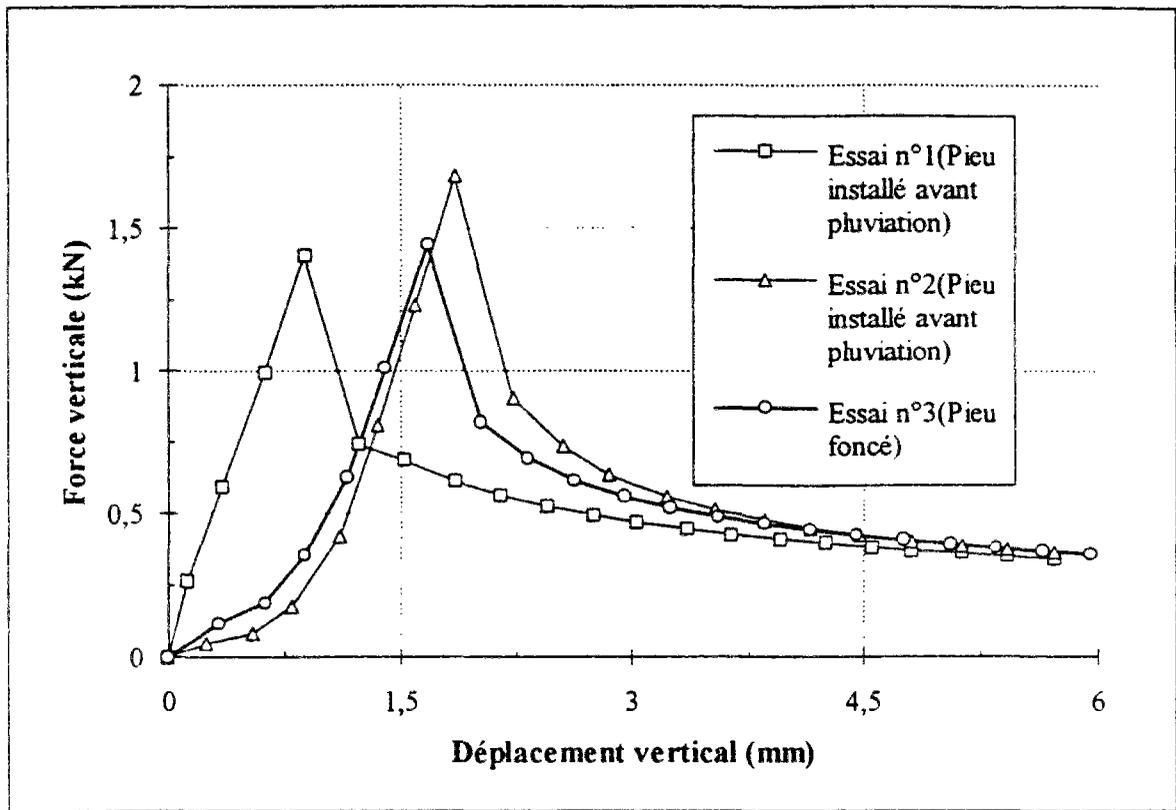
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
 Pieu de largeur 1 m encastré en tête et simplement appuyé en pointe (EA<sub>s</sub>20).



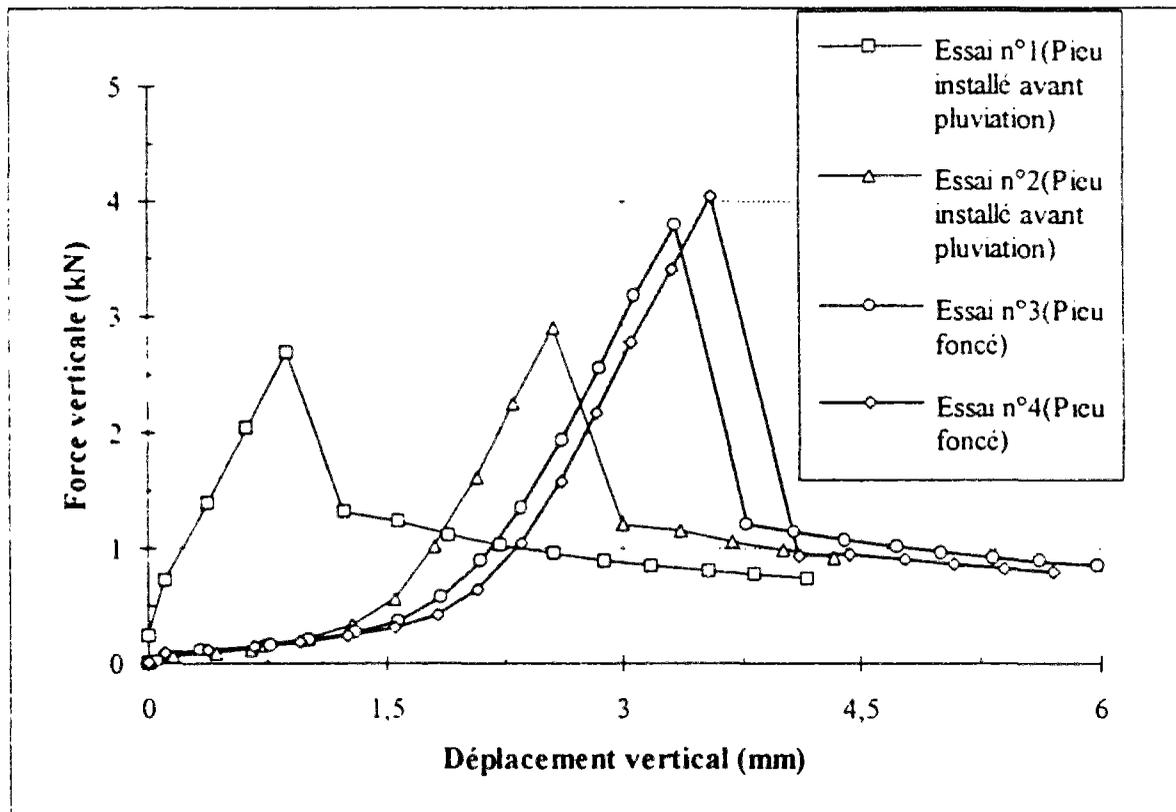
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 10 cm encastré aux deux extrémités (EE10).



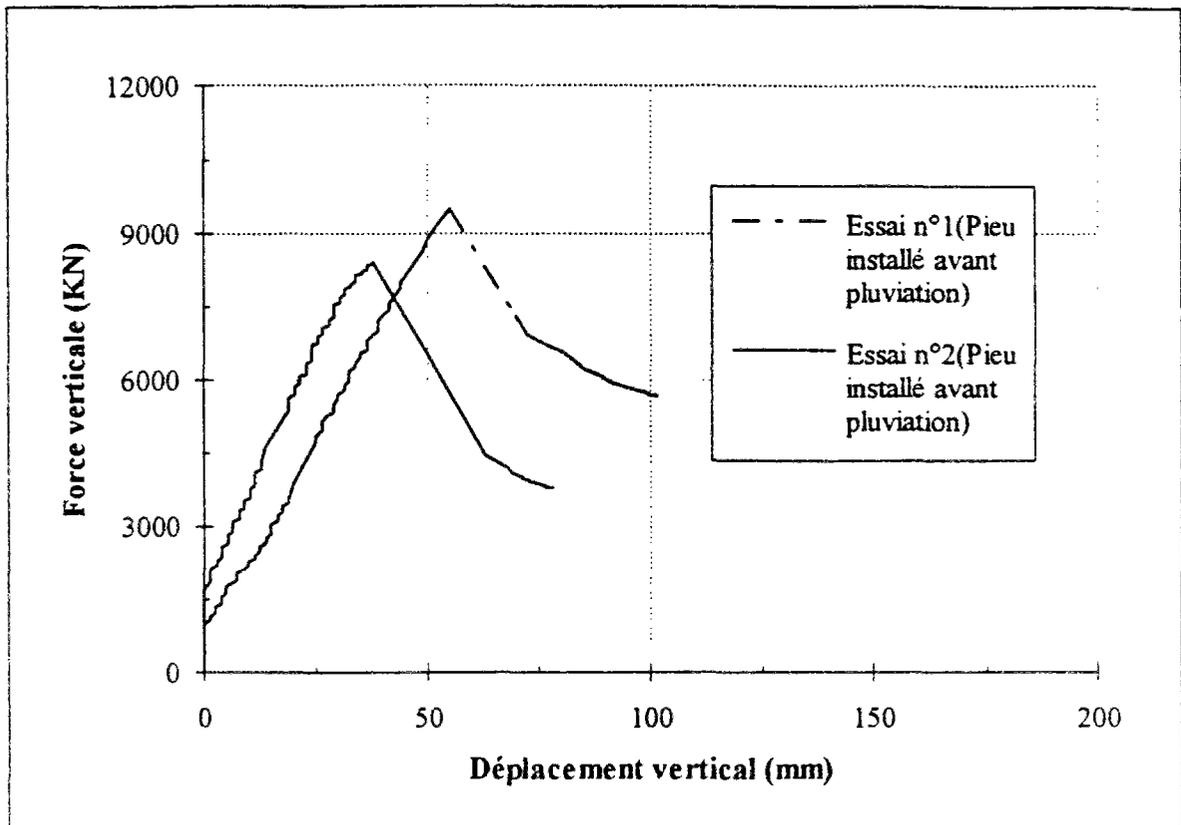
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 20 cm encastré aux deux extrémités (EE20).



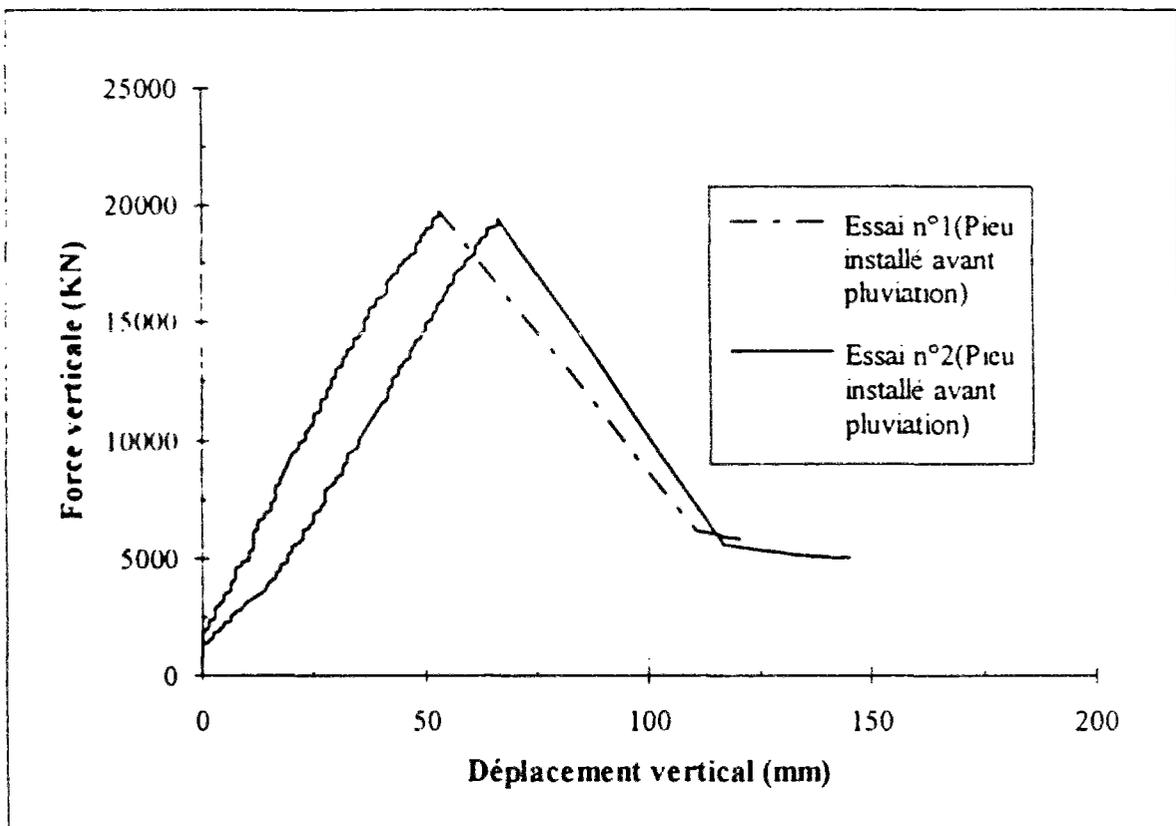
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 10 cm encasté en tête simplement appuyé en pointe (EA<sub>10</sub>).



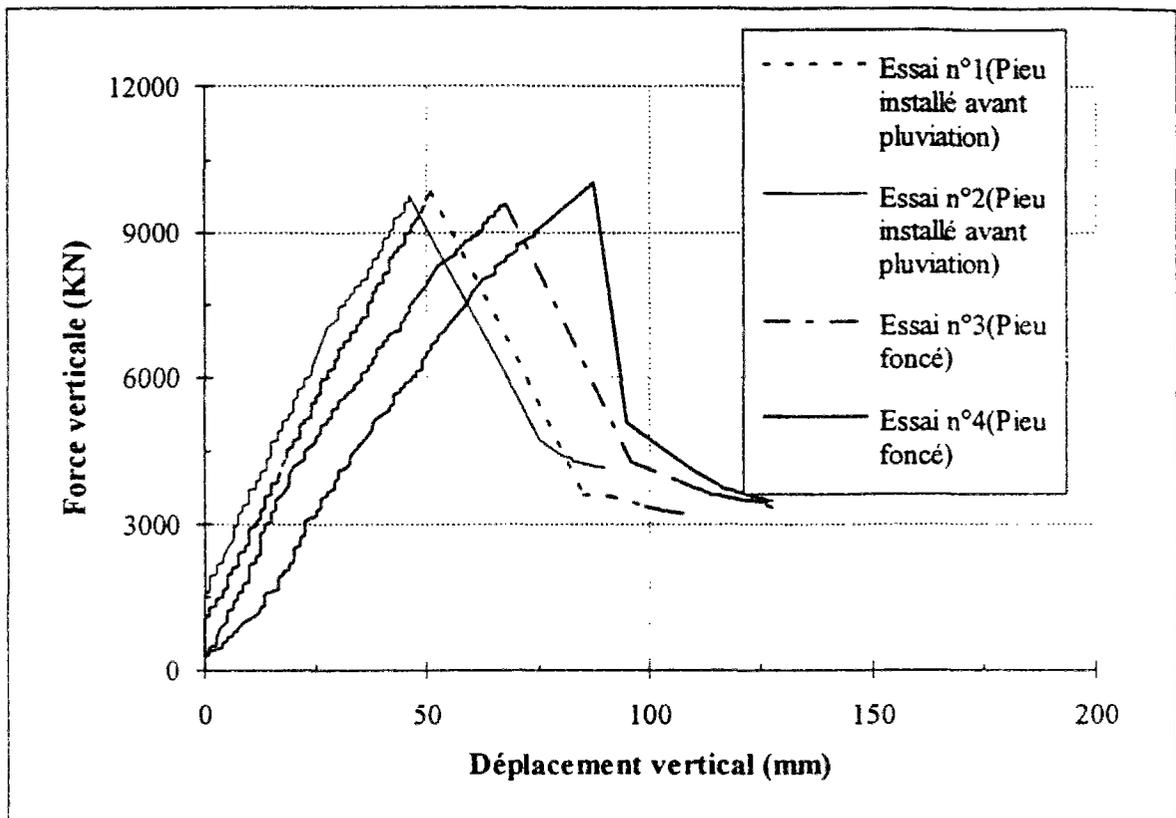
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 20 cm encasté en tête simplement appuyé en pointe (EA<sub>20</sub>).



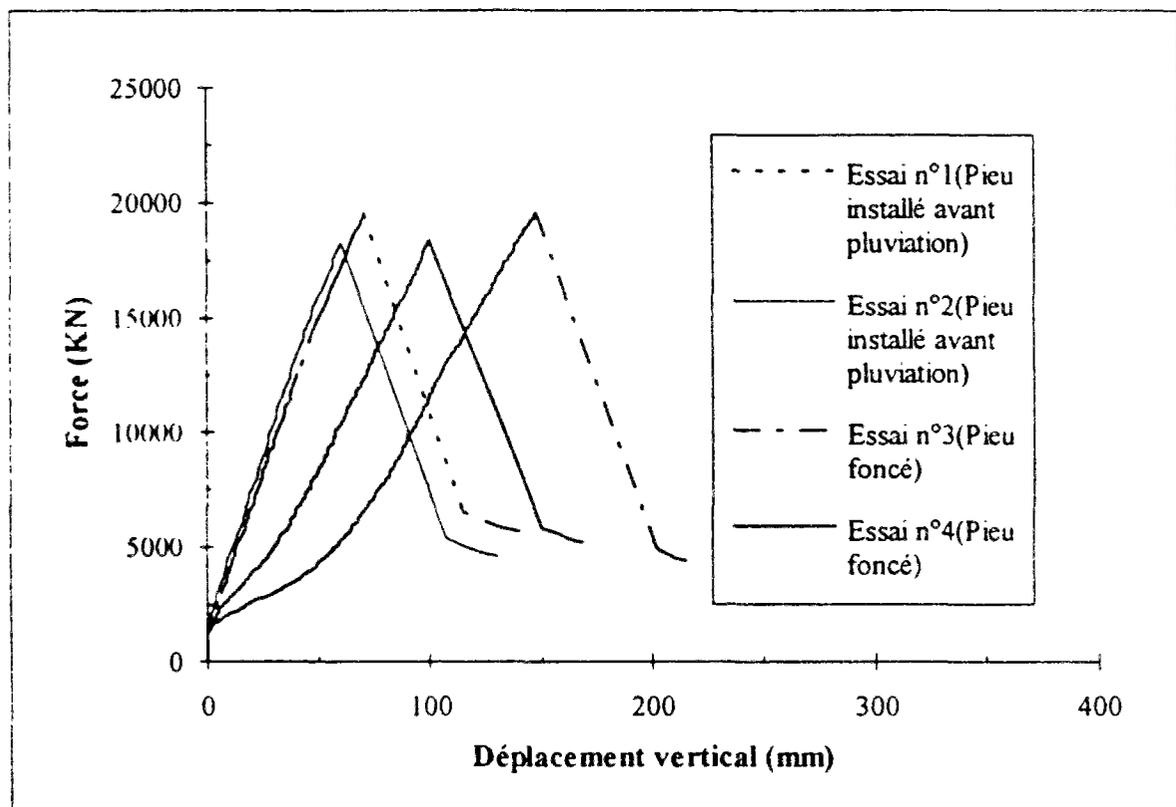
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 0,5 m encastré aux deux extrémités (EE10).



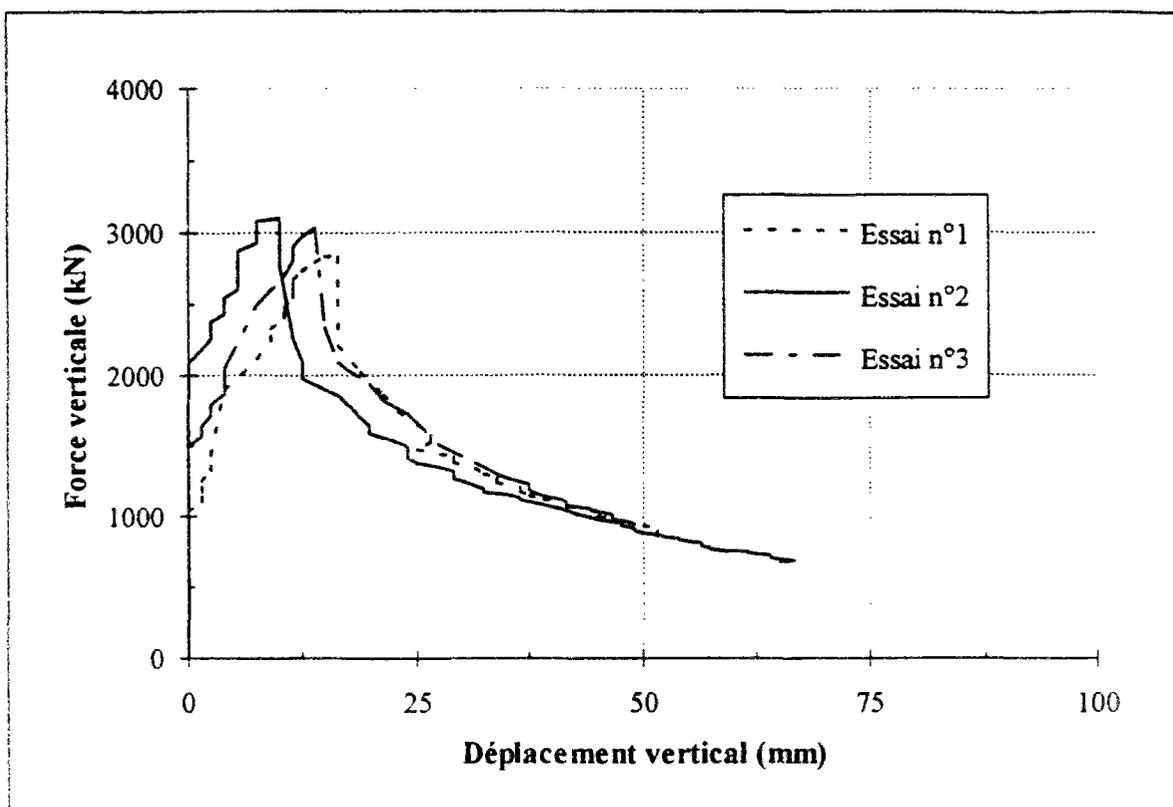
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 1 m encastré aux deux extrémités (EE20).



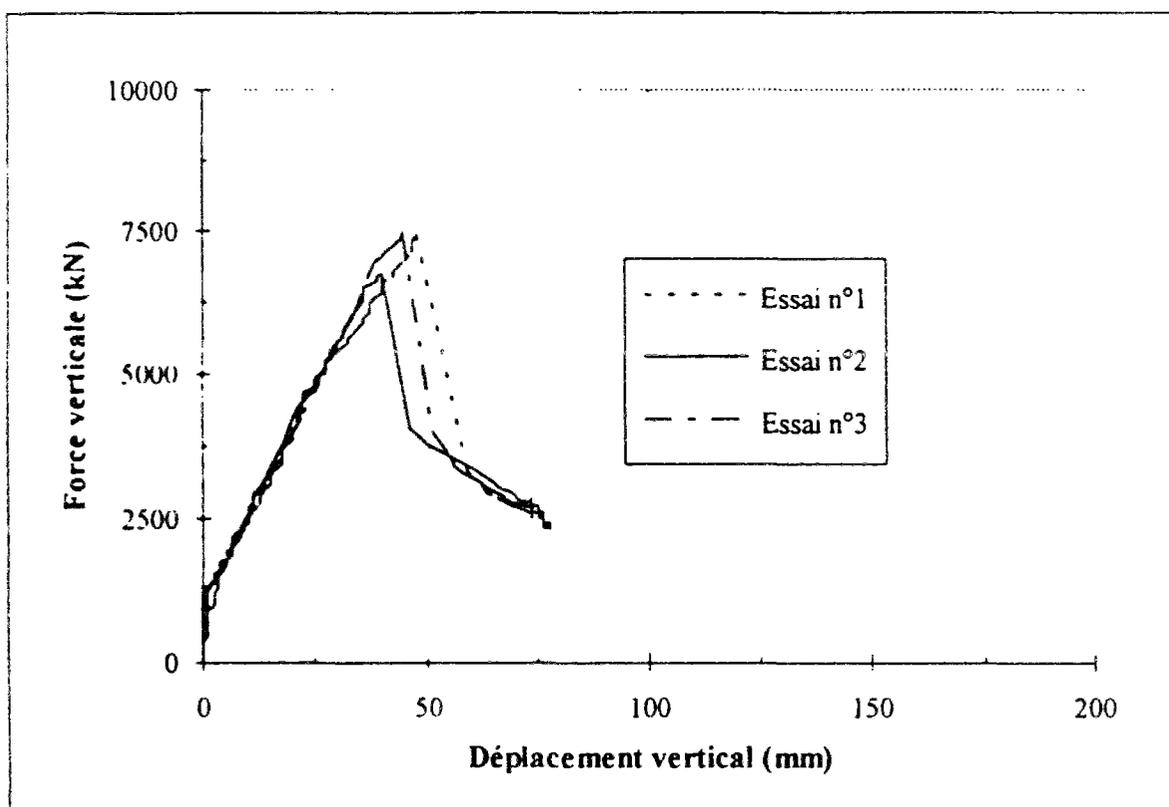
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 0,5 m encastré en tête simplement appuyé en pointe ( $EA_s 10$ ).



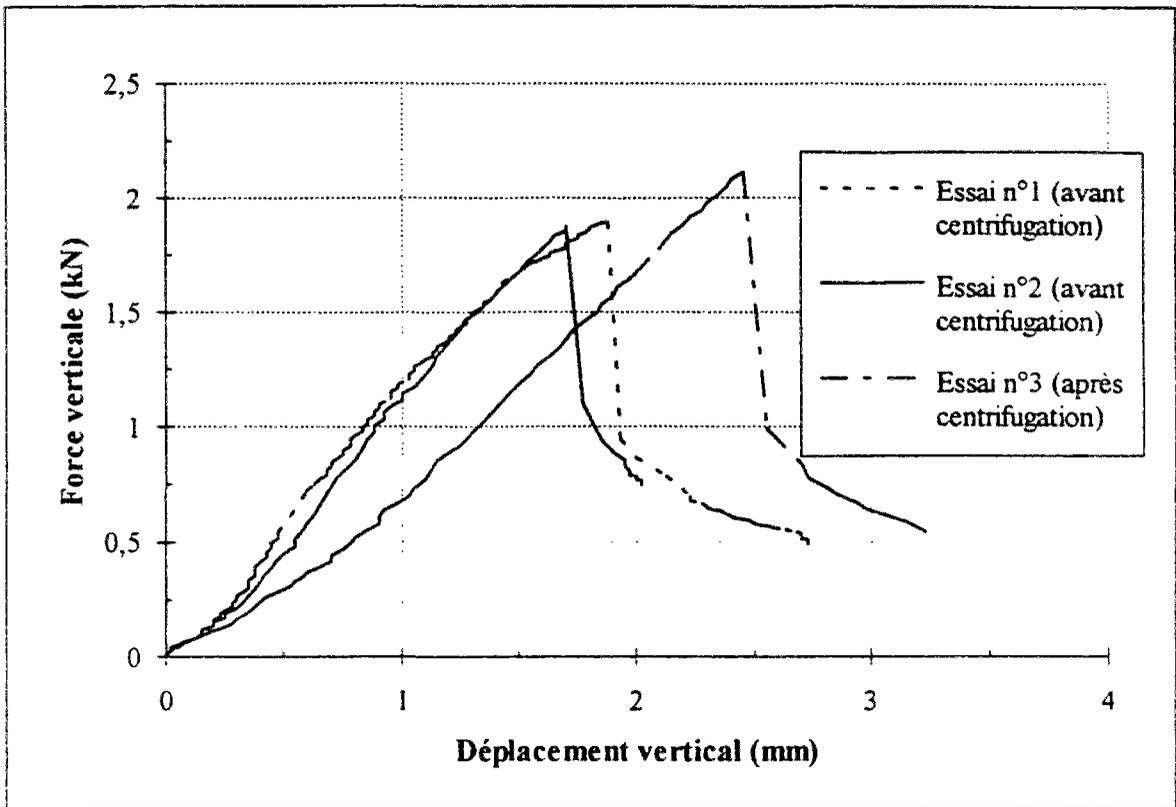
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 1 m encastré en tête simplement appuyé en pointe ( $EA_s 20$ ).



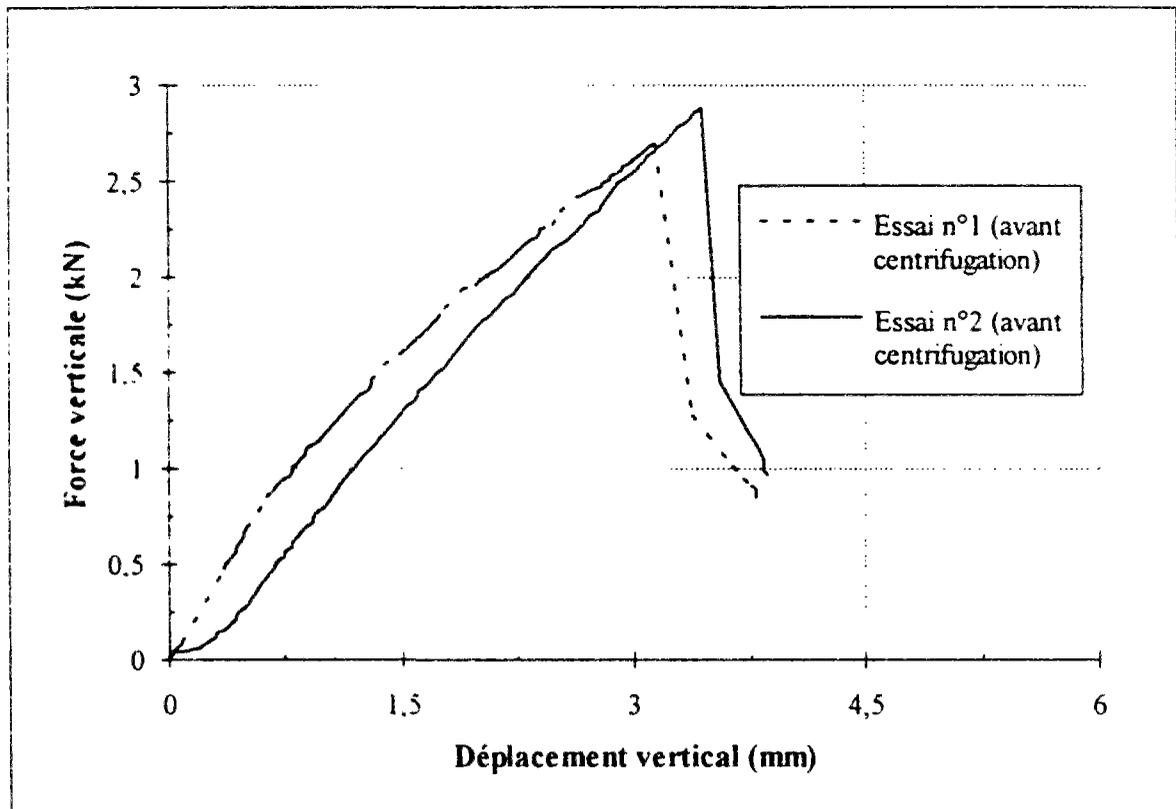
Conteneur 5 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 0,5 m encastré en tête simplement appuyé en pointe ( $EA_s10$ ).



Conteneur 5 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 1 m encastré en tête simplement appuyé en pointe ( $EA_s20$ ).



Conteneur 5 - Essais à 1 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 10 cm encastré en tête simplement appuyé en pointe (EA<sub>10</sub>).

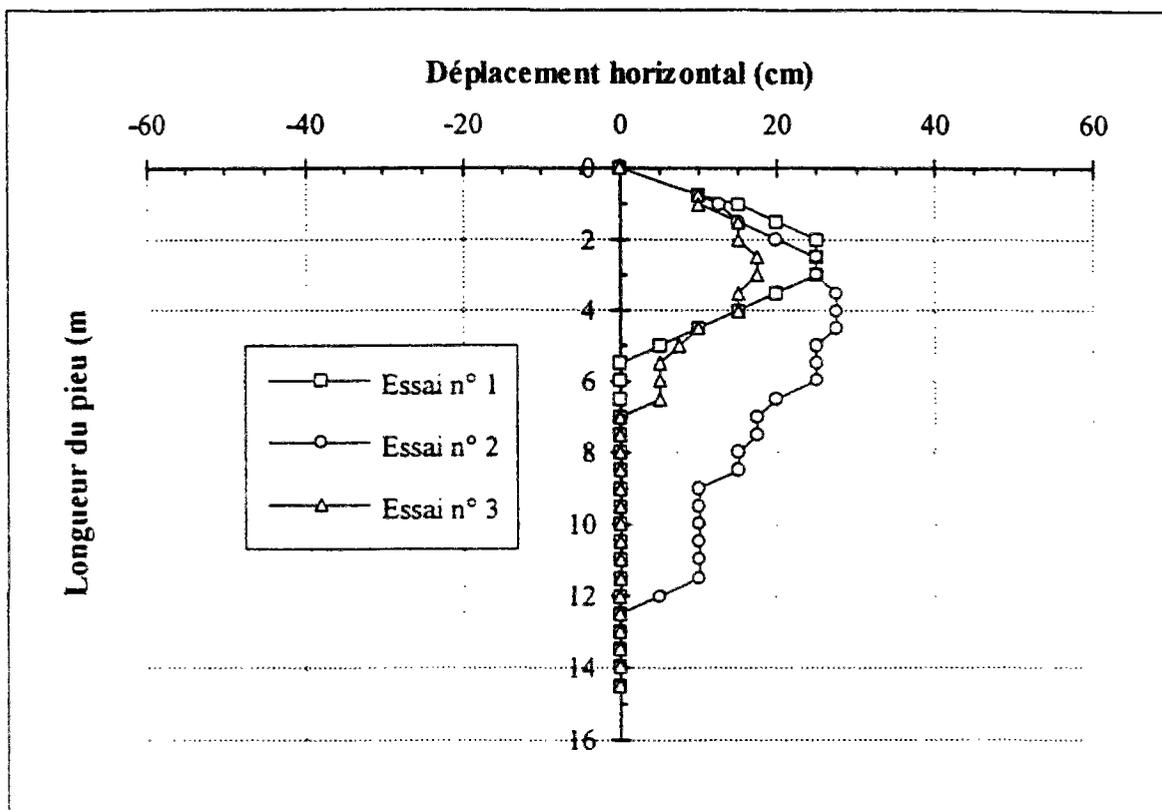


Conteneur 5 - Essais à 1 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 20 cm encastré en tête simplement appuyé en pointe (EA<sub>20</sub>).

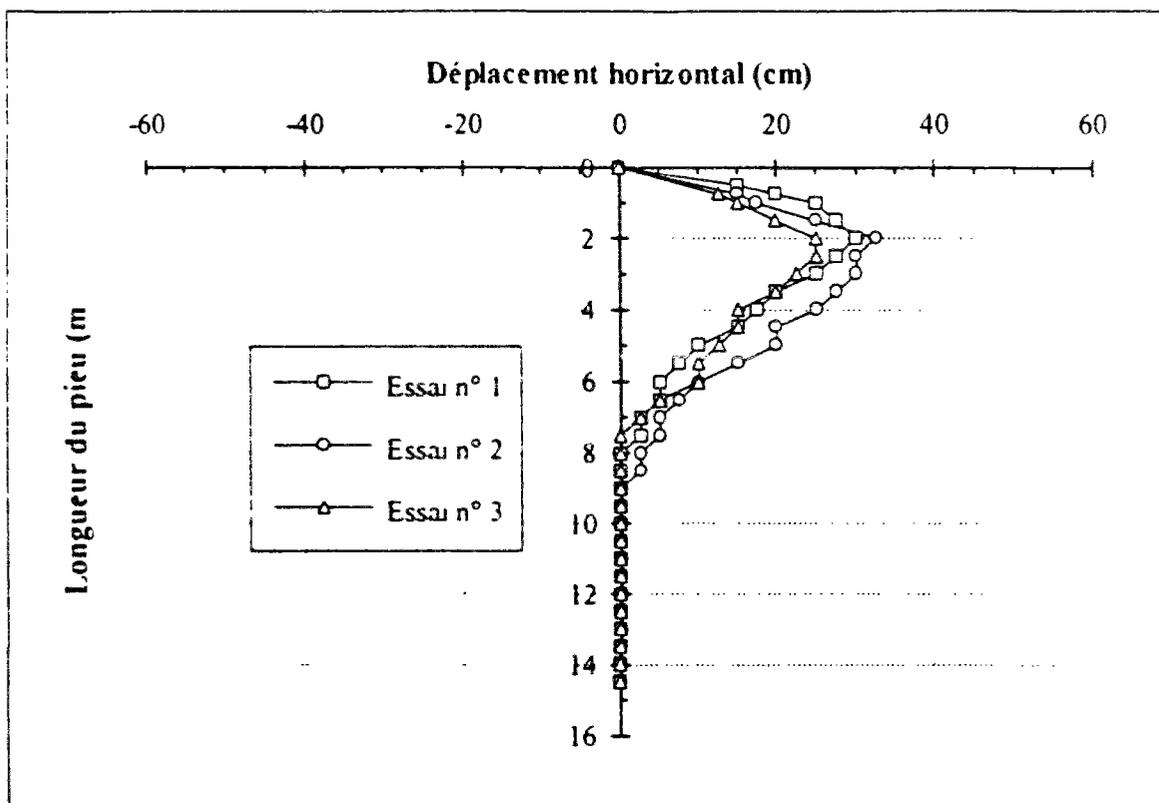


## **ANNEXE B-5**

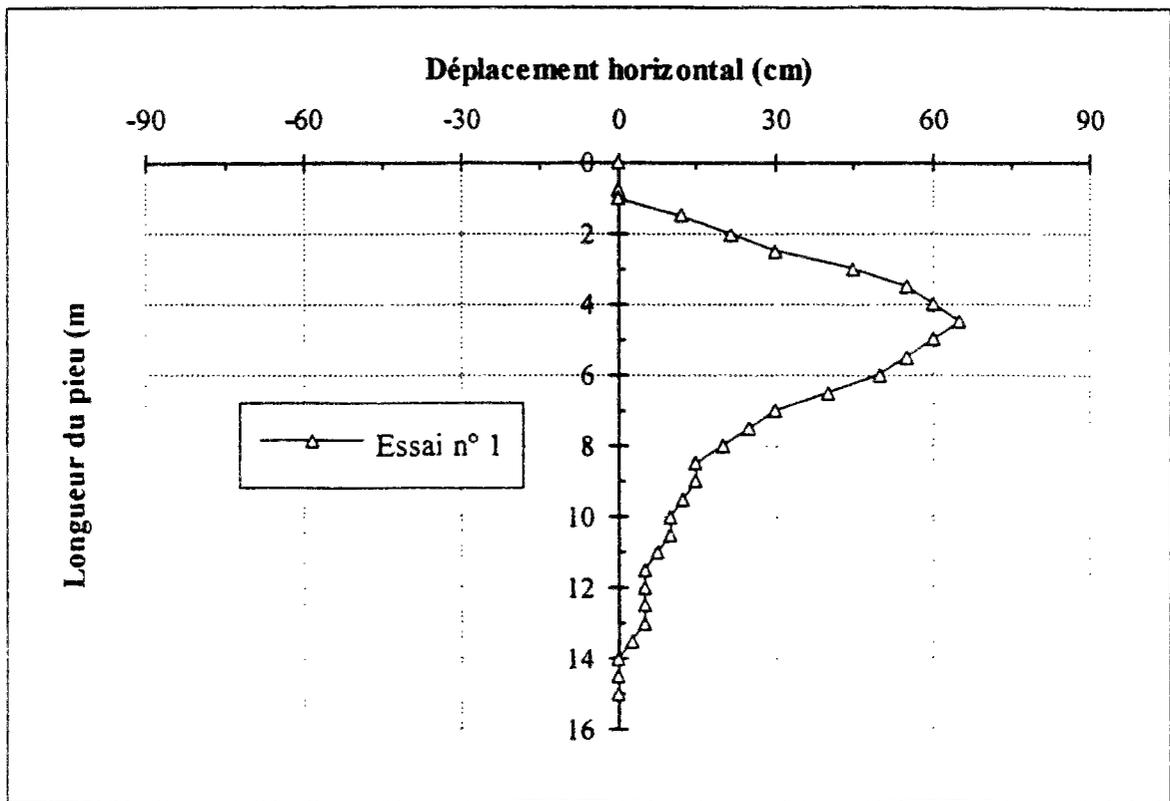
**Déformées des pieux déduites des découpages  
des massifs de sols reconstitués  
(sable de Fontainebleau, argile Speswhite).**



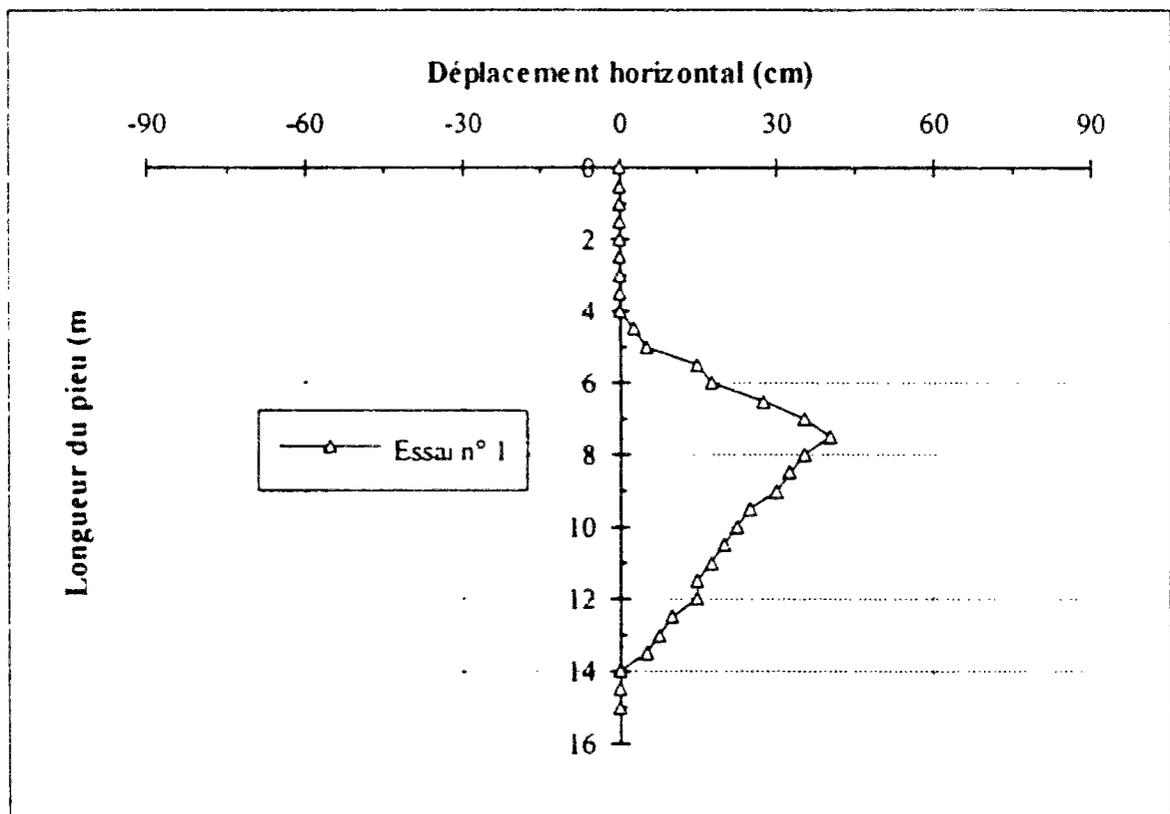
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 0,5 m articulé en tête et simplement appuyé en pointe (AA<sub>s</sub>10).



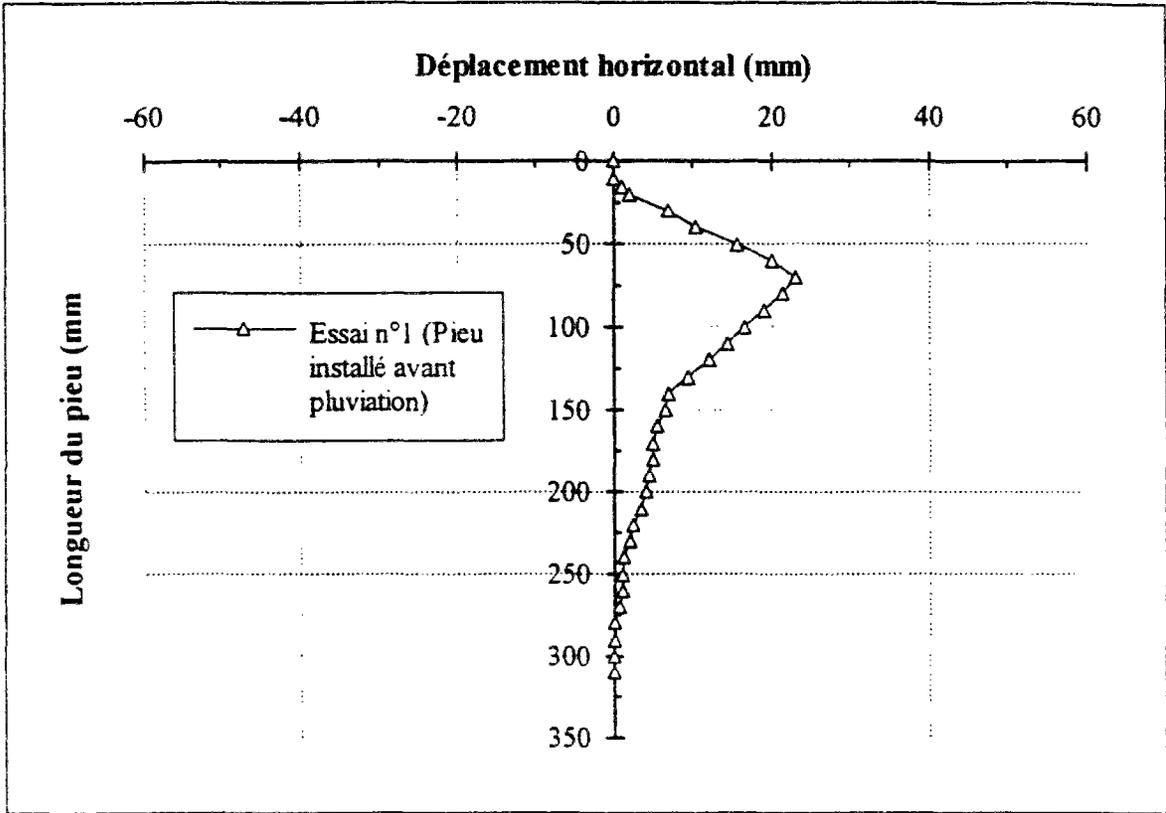
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 1 m articulé en tête et simplement appuyé en pointe (AA<sub>s</sub>20).



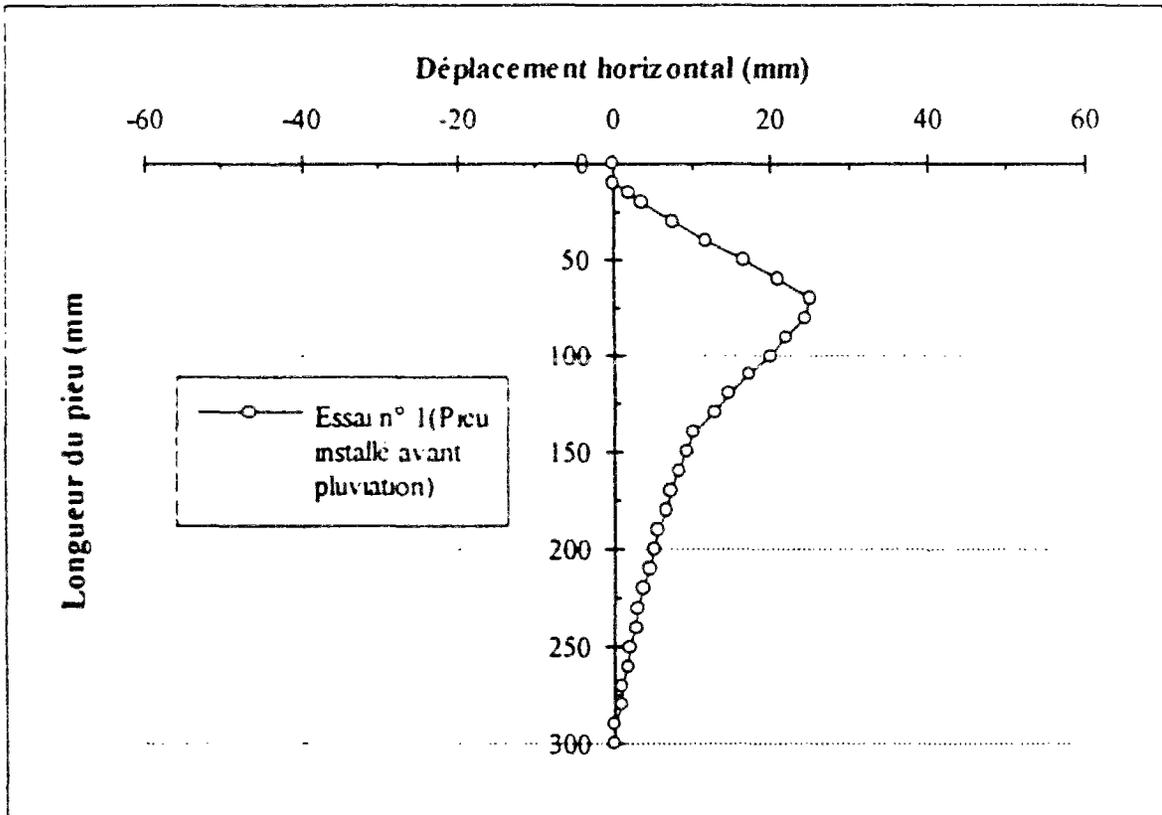
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
 Pieu de largeur 0,5 m encasté en tête et simplement appuyé en pointe (EA<sub>5</sub>10).



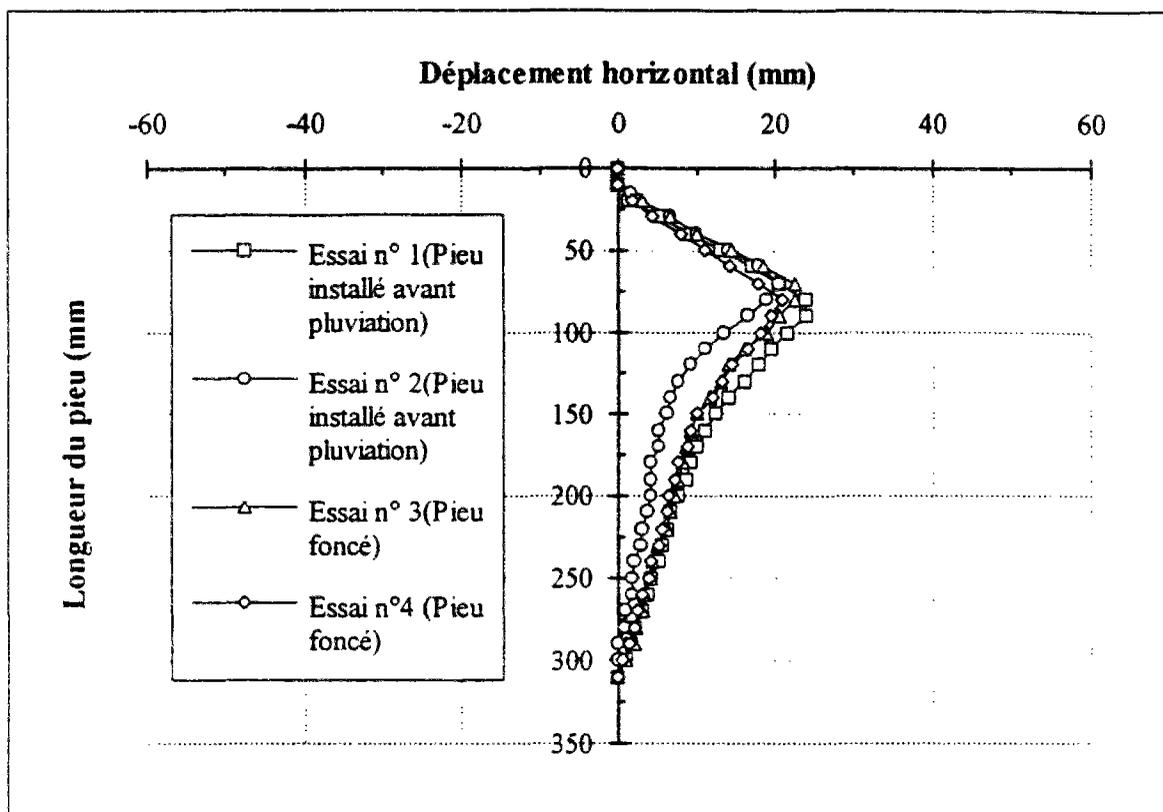
Conteneur 2 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
 Pieu de largeur 1 m encasté en tête et simplement appuyé en pointe (EA<sub>5</sub>20).



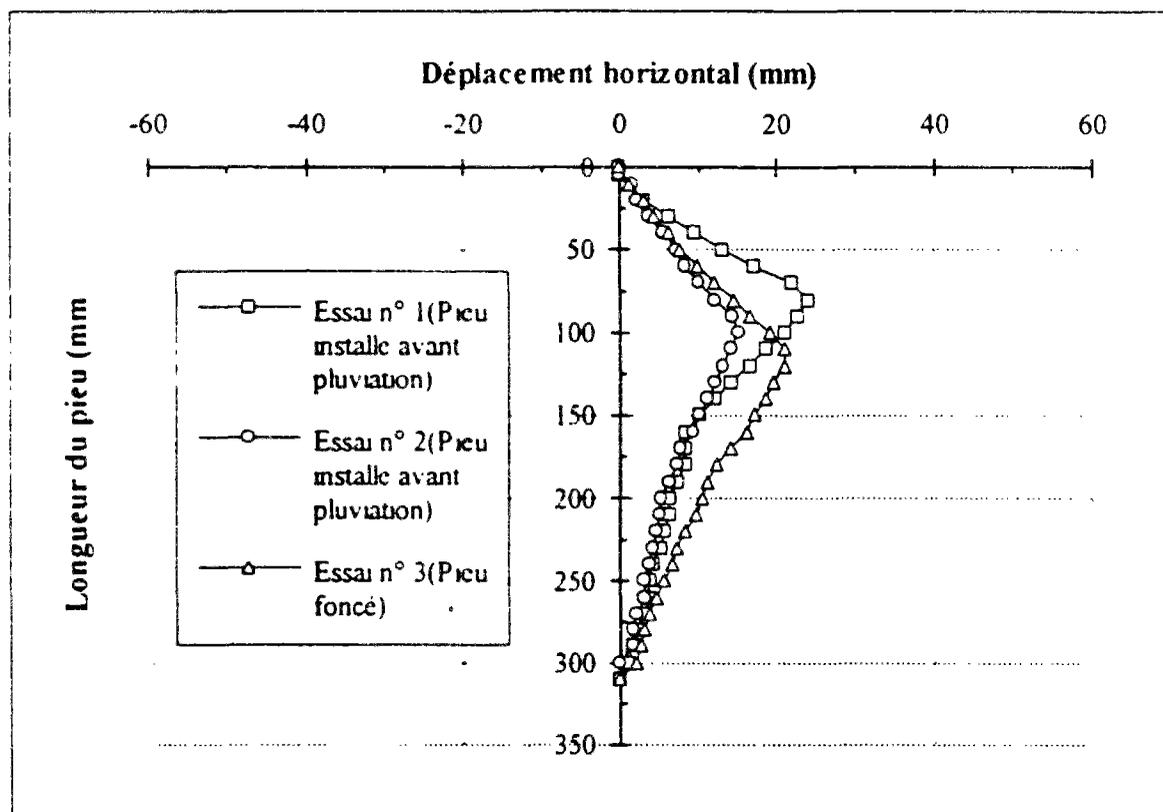
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 10 cm encastré aux deux extrémités (EE10).



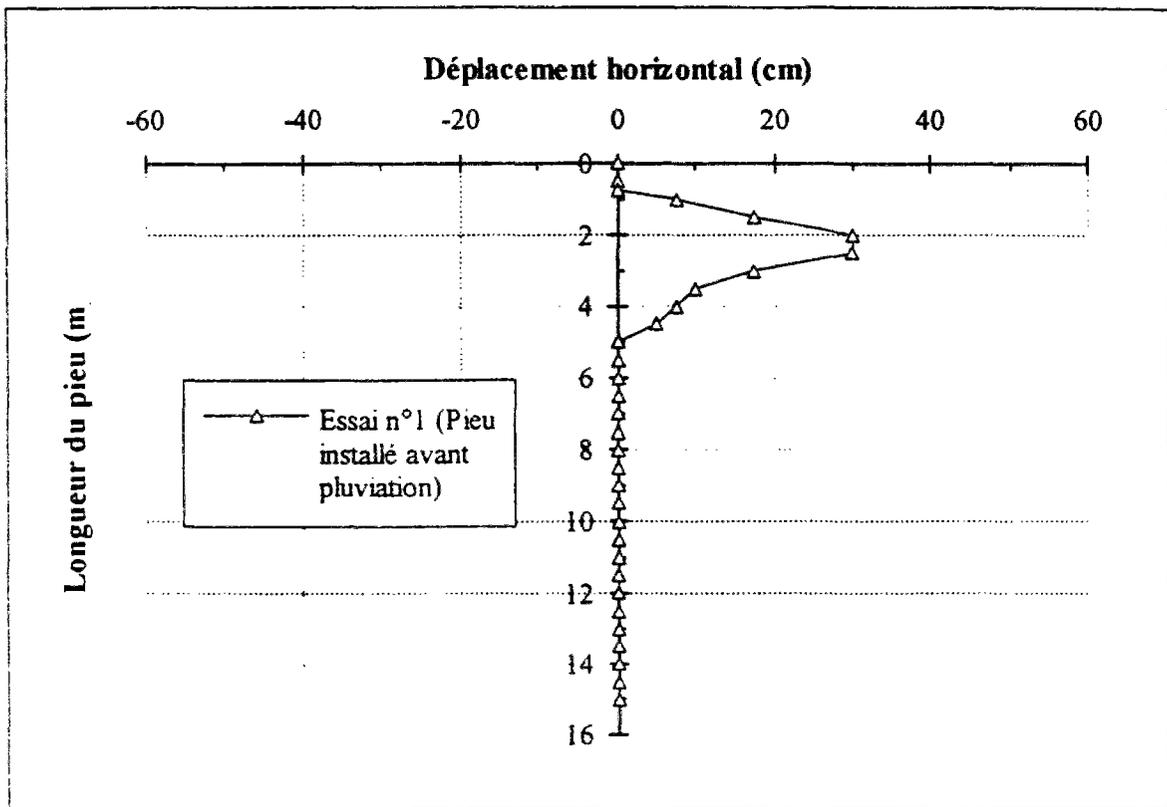
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 20 cm encastré aux deux extrémités (EE20).



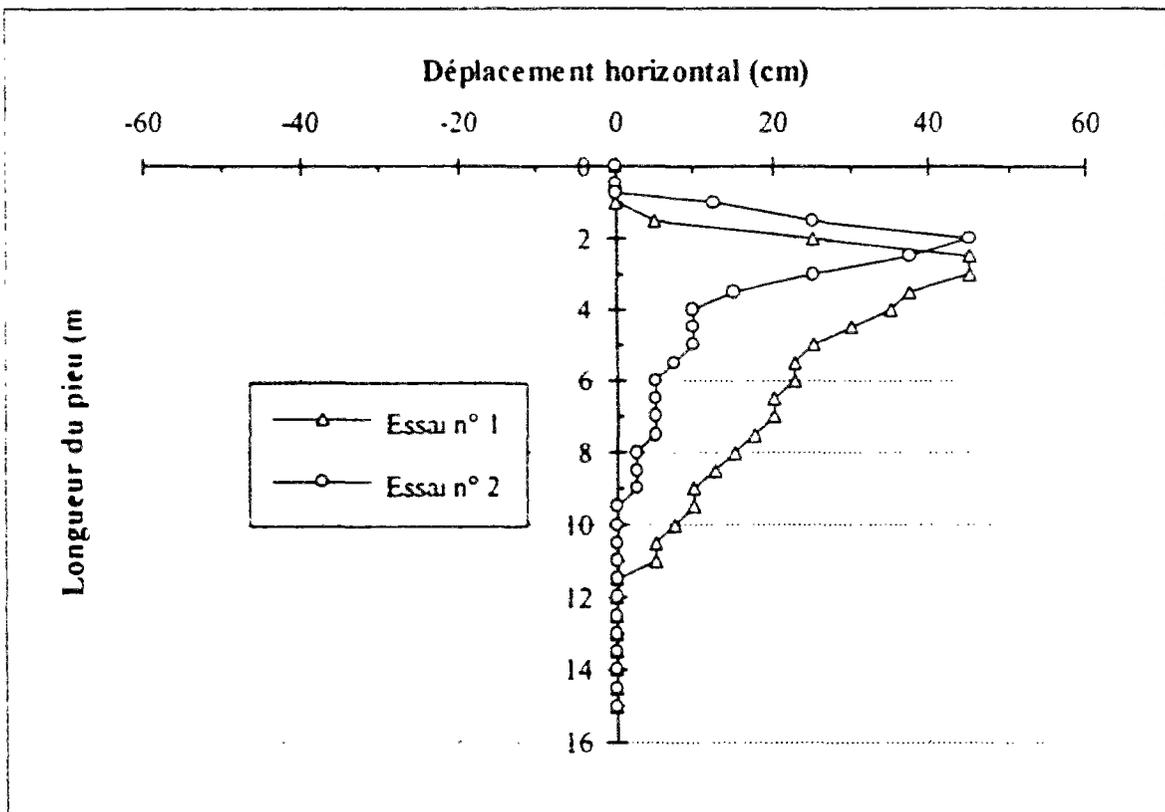
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 10 cm encasté en tête simplement appuyé en pointe ( $EA_s 10$ ).



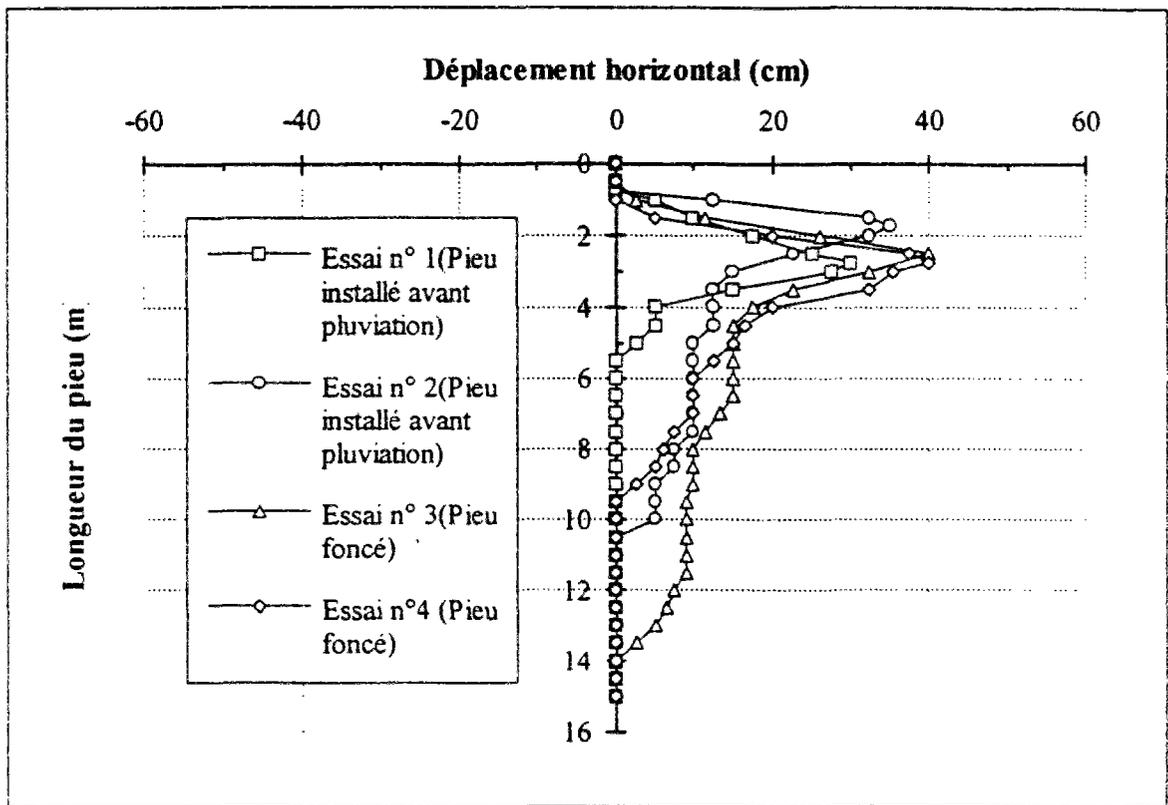
Conteneur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 20 cm encasté en tête simplement appuyé en pointe ( $EA_s 20$ ).



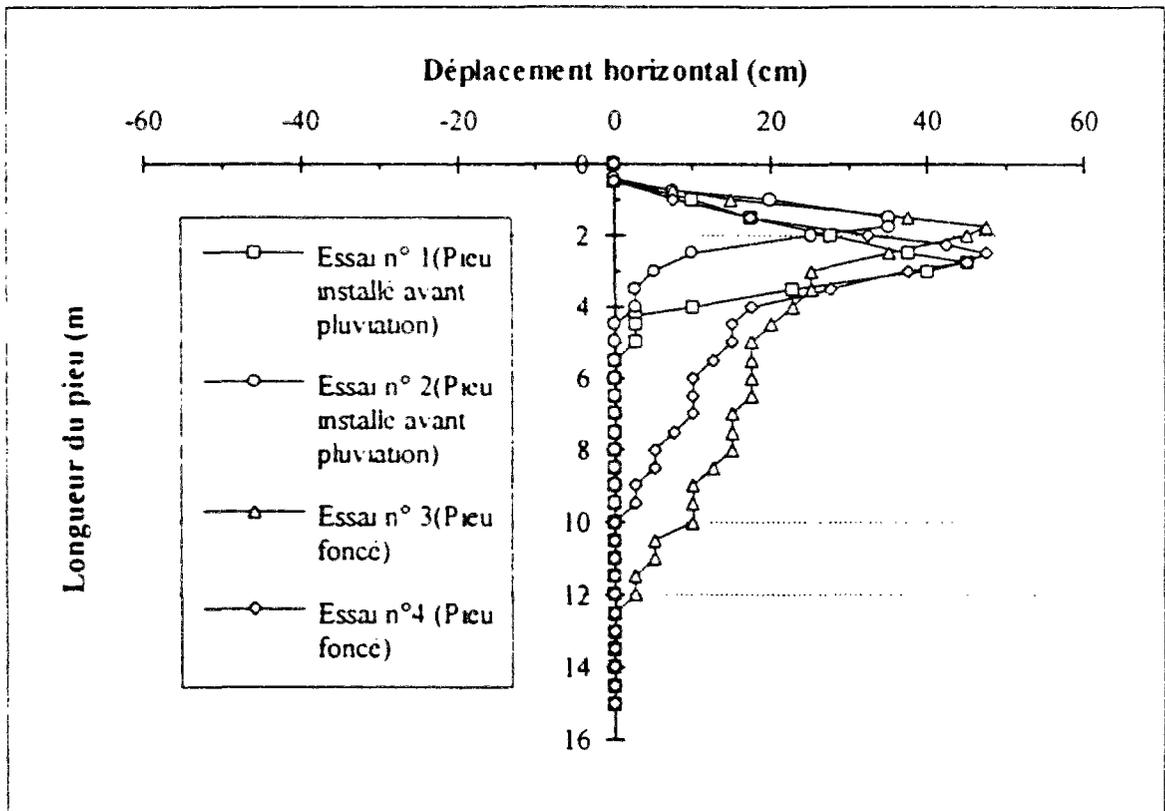
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 0,5 m encastré aux deux extrémités (EE10).



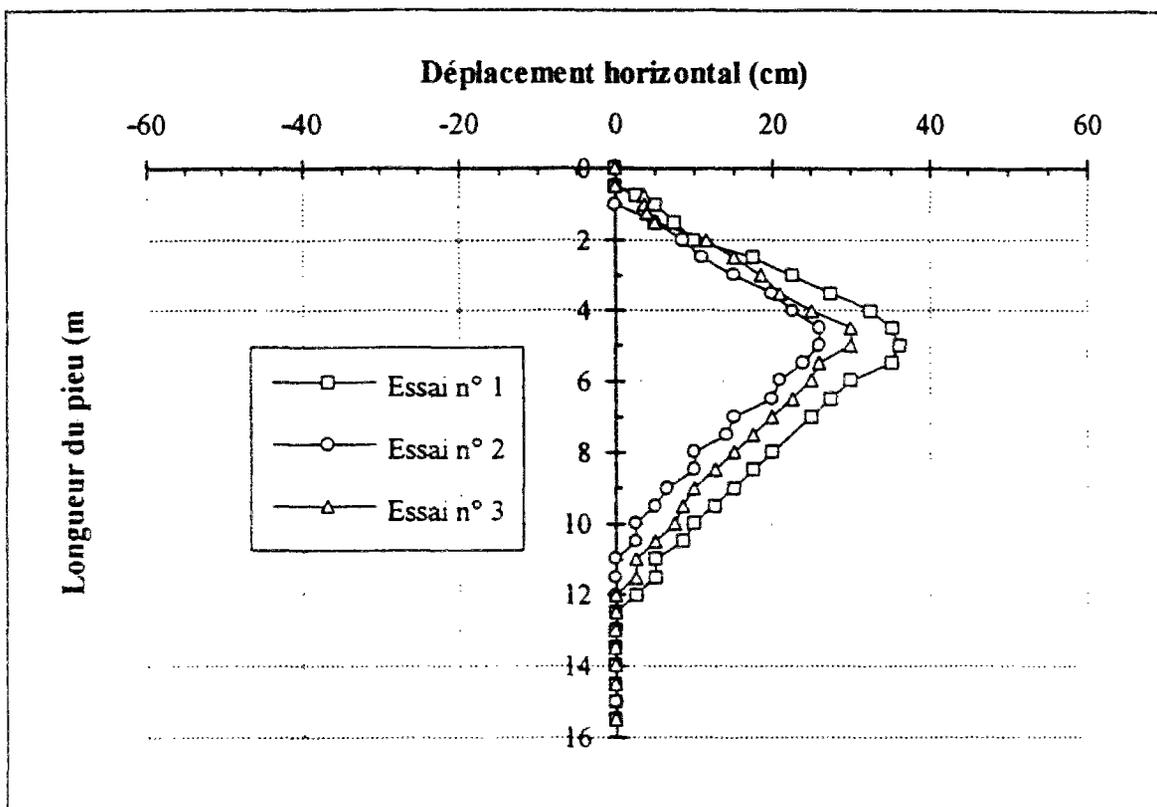
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
Pieu de largeur 1 m encastré aux deux extrémités (EE20).



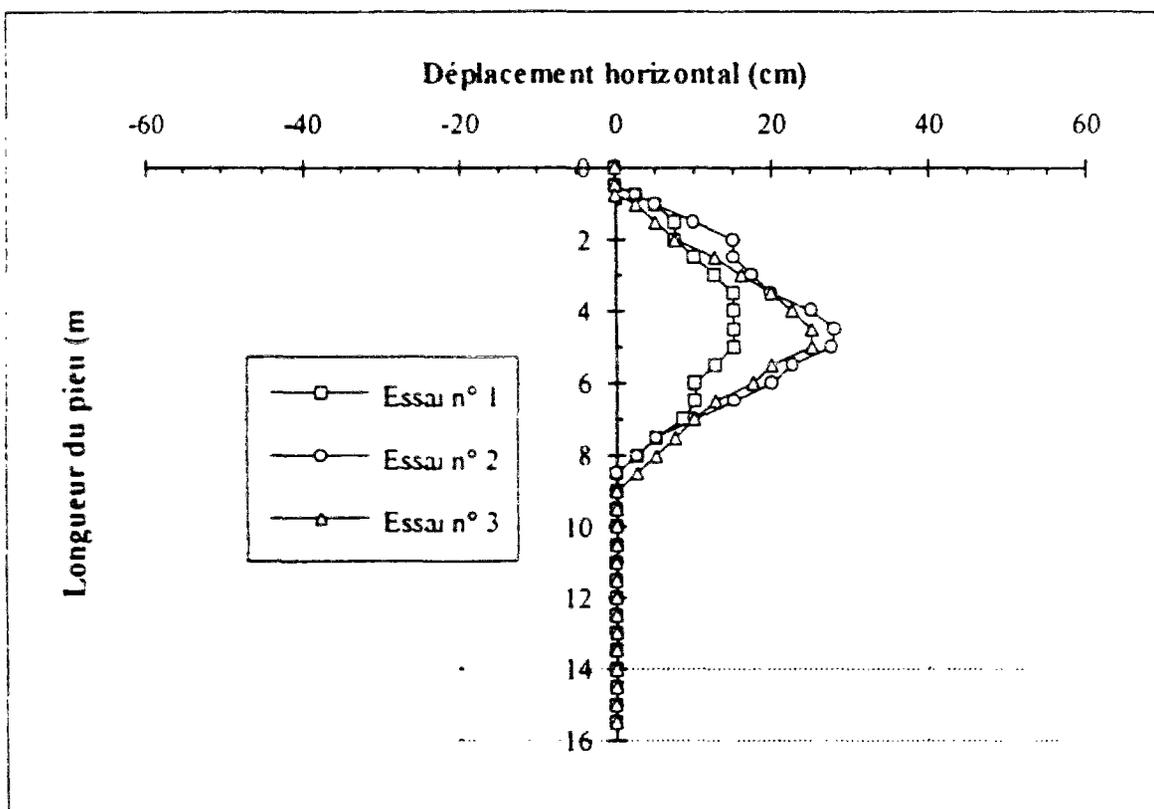
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
 Pieu de largeur 0,5 m encasté en tête simplement appuyé en pointe (EA<sub>s</sub>10)



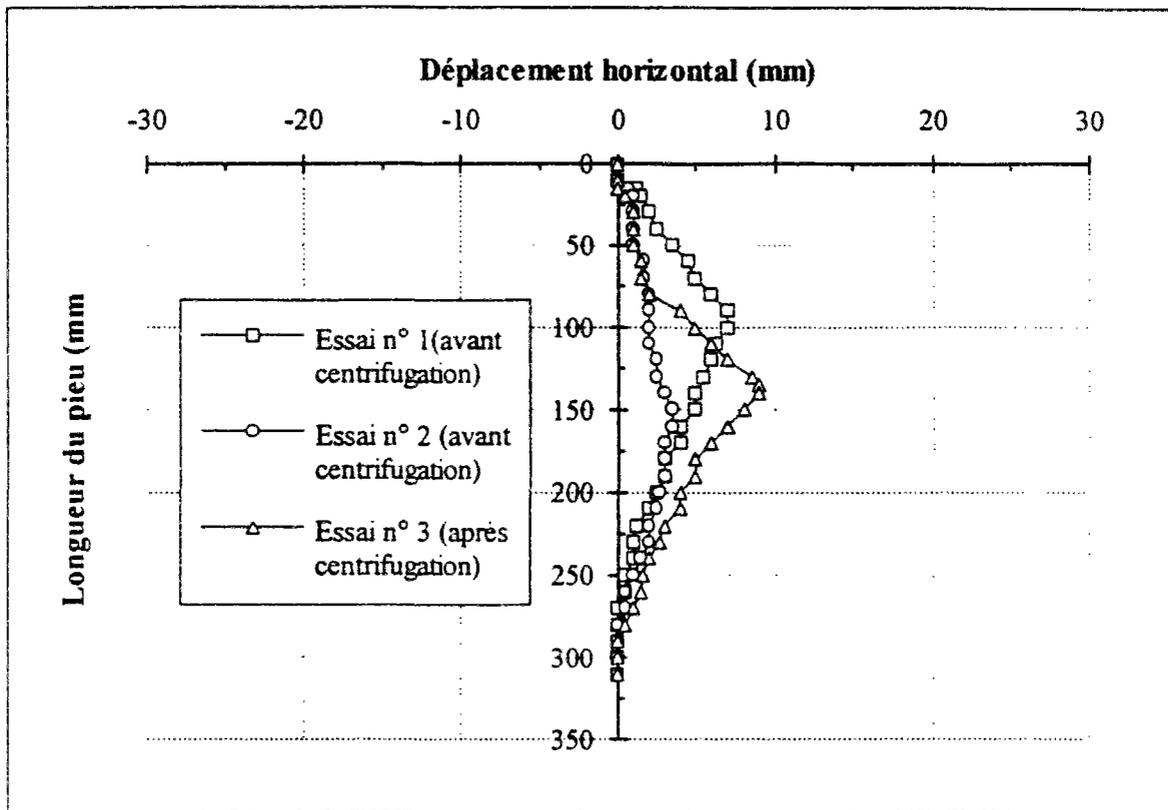
Conteneur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau.  
 Pieu de largeur 1 m encasté en tête simplement appuyé en pointe (EA<sub>s</sub>20).



Conteneur 5 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 0,5 m encasté en tête simplement appuyé en pointe ( $EA_s 10$ ).



Conteneur 5 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
Pieu de largeur 1 m encasté en tête simplement appuyé en pointe ( $EA_s 20$ ).

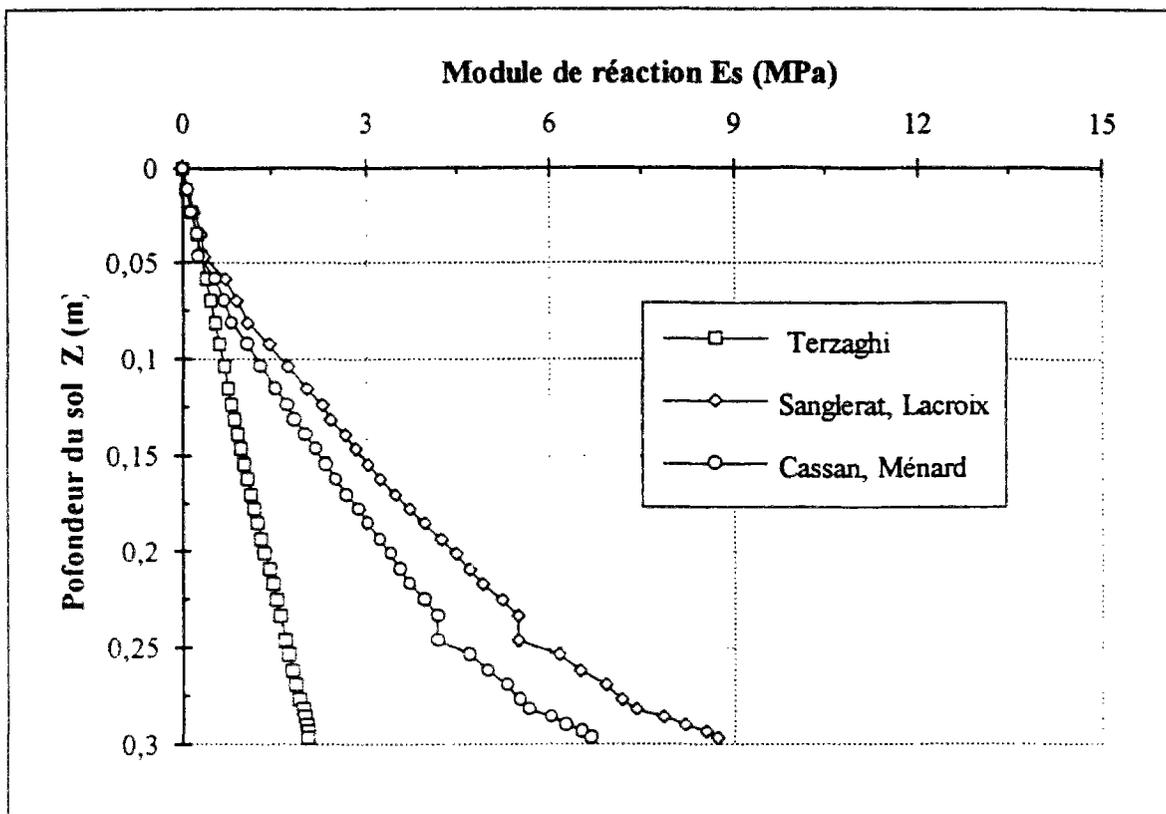


Conteneur 5 - Essais à 1 g dans l'argile Speswhite reconstituée.  
 Pieu de largeur 10 cm encasté en tête simplement appuyé en pointe (EA<sub>s</sub>10).

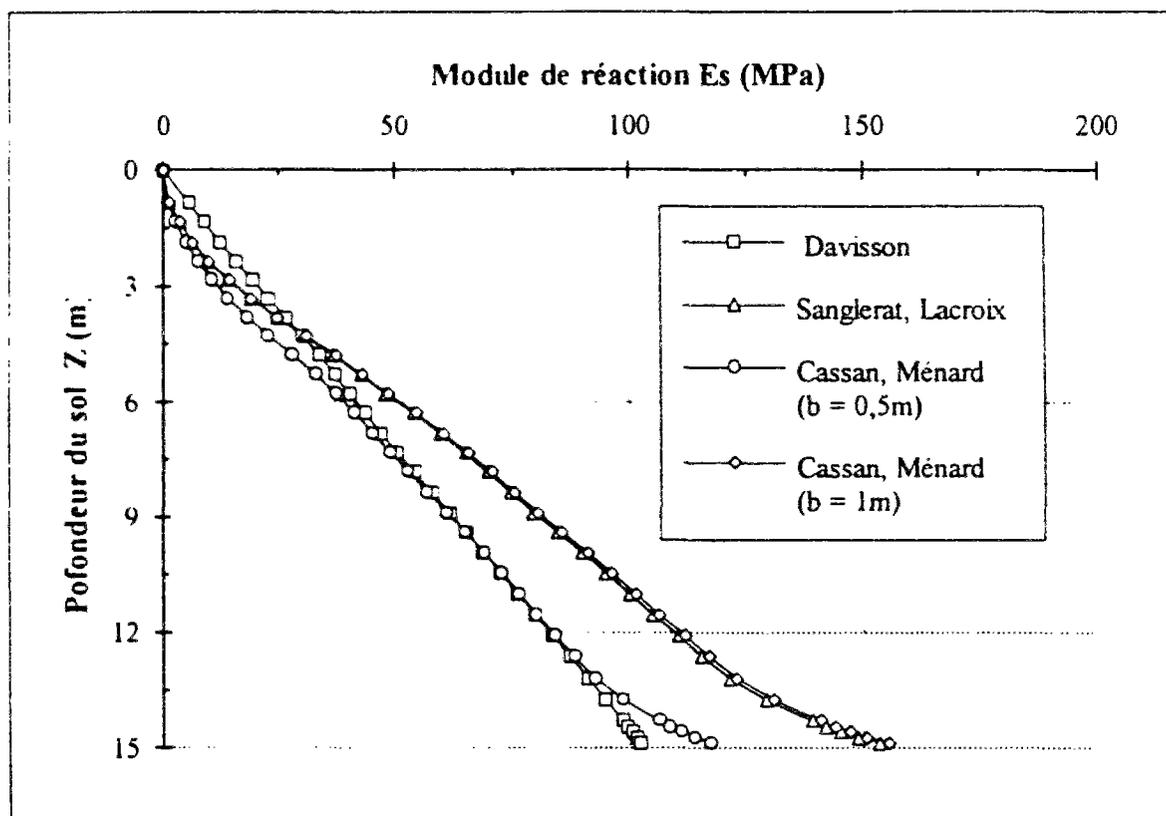


## **ANNEXE C**

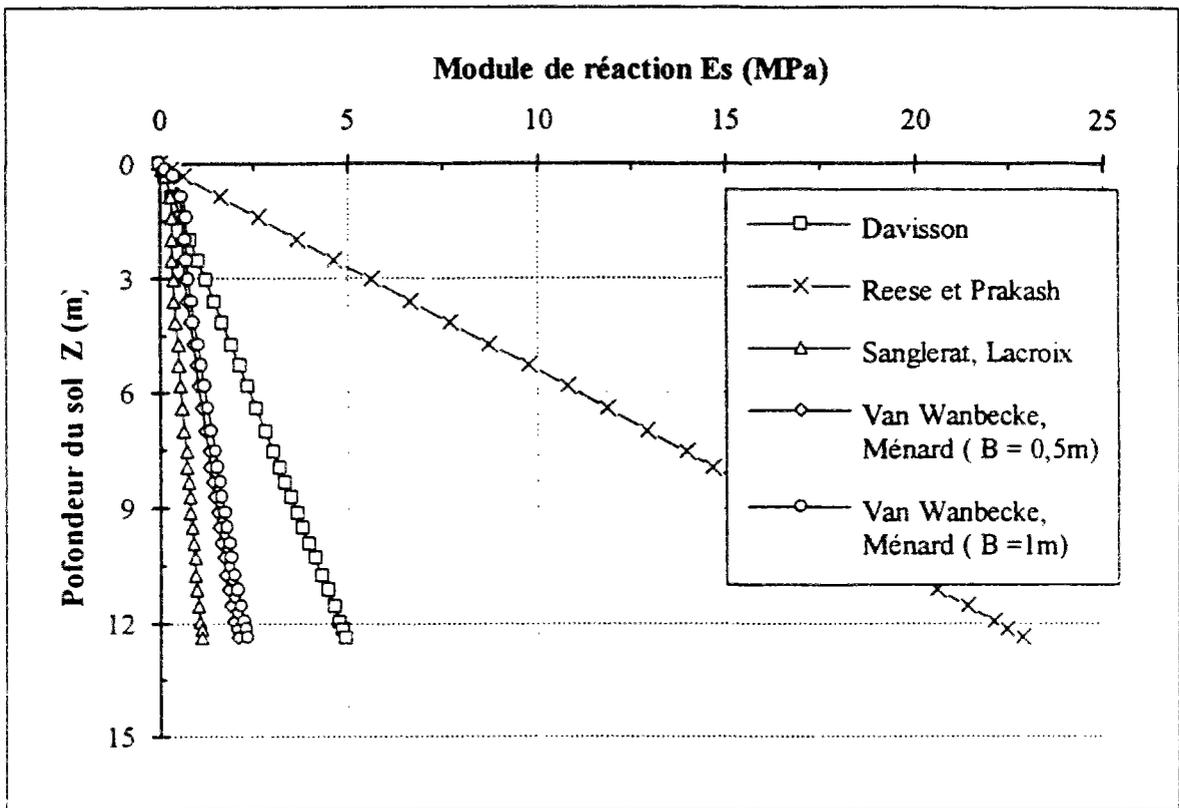
**Profils de module de réaction, déduits à partir  
des résultats d'essais au mini-pénétrromètre LCPC.**



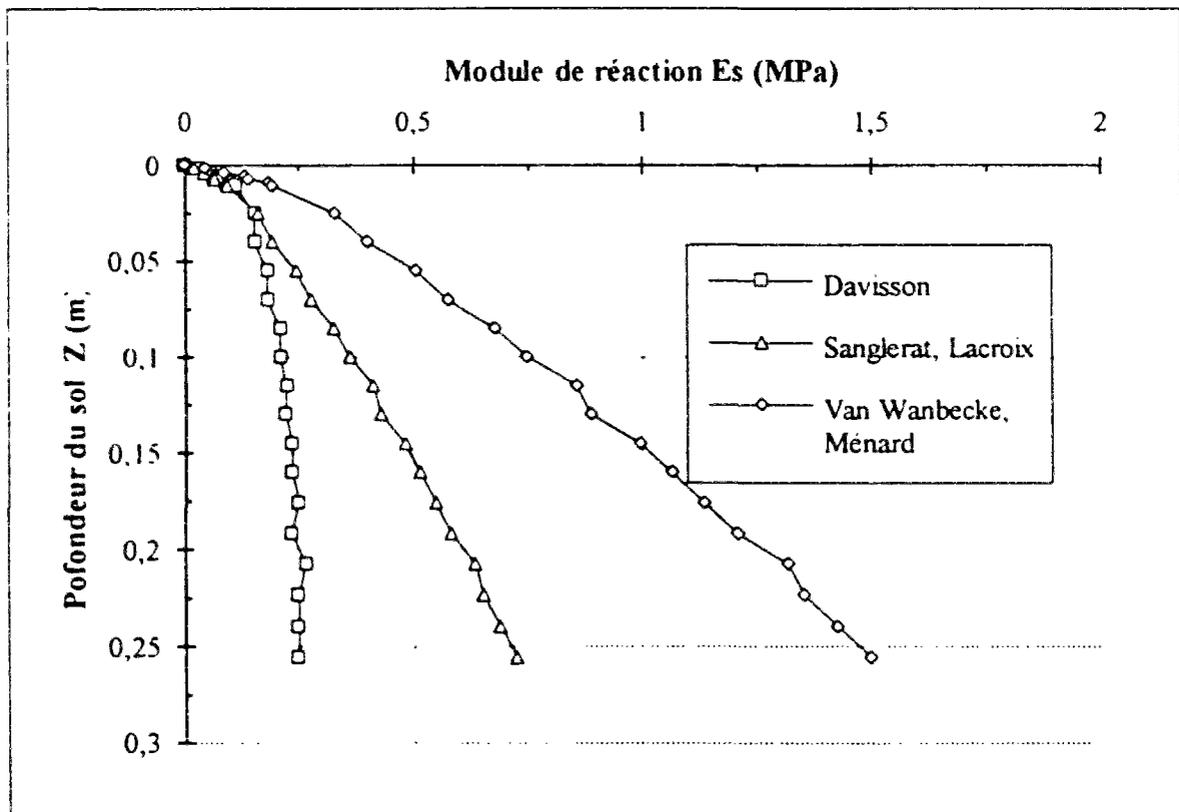
Contenur 3 - Essais à 1 g dans le sable de Fontainebleau moyennement dense ( $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$ ).



Contenur 4 - Essais à 50 g dans le sable de Fontainebleau moyennement dense ( $\gamma_d = 15,53 \text{ kN/m}^3$ ).



Conteneur 5 - Essais à 50 g dans l'argile Speswhite molle reconstituée ( $\gamma_h = 16,41 \text{ kN/m}^3$ ).



Conteneur 5 - Essais à 1 g dans l'argile Speswhite molle reconstituée ( $\gamma_h = 16,41 \text{ kN/m}^3$ ).



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALBIGES M., COIN A. (1975). Résistance des matériaux appliquée, tome I. Eyrolles, 2<sup>e</sup> édition, Paris.

ARGYRIS J. (1982). An excursion into large rotations. Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, n° 32, pp. 85-155.

BAGUELIN F., FRANK R., GUEGAN Y. (1976). Calcul sur ordinateur des pieux sollicités horizontalement ou subissant des poussées parasites. Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, n° 84, pp. 113-120.

BAGUELIN F., FRANK R., SAID Y.H. (1977). Etude théorique du mécanisme de réaction latérale des pieux. Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, n° 92, pp. 35-55.

BAGUELIN F., JEZEQUEL J.F., SHIELDS D.H. (1978). The pressuremeter and foundation engineering. Trans. Tech. Publications, Clausthal, R.F.A., 617 p.

BAGUELIN F., BOURGES F., LE MEHAUTE A. (1987). Port de commerce de Lorient, quai de 150 m à Kergroise, essais de chargement des pieux, chargement du quai par un remblai. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Laboratoire Régional St. Briec.

BAKIR N.E. (1993). Etudes sur modèles centrifugés de la capacité portante de fondations superficielles. Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes.

BANGRATZ J.L. (1983) Calcul élastique non linéaire d'un groupe de pieux, analyse et programmation. Laboratoire Régional de l'Est Parisien, Compte Rendu de Recherche F A E R 1.05.10.1.

BANGRATZ J.L., FRANK R., KUTNIAK M. (1981). PILATE : programme de calcul d'un pieu isolé soumis à des efforts de flexion en tête et à des poussées latérales de sol, notice d'utilisation. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, rapport interne F.P. 1.05.10.0.

BERT C.W. (1984) Improved technique for estimating buckling loads. J. of Eng. Mech., ASCE, vol 110, n° 12, pp 1655-1665

BLEICH F. (1932) Buckling strength of steel structures. Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York

BLEICH F. (1952) Buckling strength of metal structures. Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York.

BOUAFIA A. (1990) Modélisation des pieux chargés latéralement en centrifugeuse. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique. 326 pages.

BOURDON G. (1976). La vérification des pièces élancées à inerties multiples, fichées profondément dans le sol et sollicitées horizontalement et verticalement à des niveaux divers. Annales I.T.B.T.P., n° 338, pp. 117-132.

BOURGES F., FRANK R. (1989). Les Techniques de l'Ingénieur, mécanique des sols, fondations profondes, C 248.

BOUSSINESQ (1885). Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Gauthier - Villars, Paris.

BOWLES J. (1982). Foundation Analysis and Design. 3th Edition, New York, McGraw-Hill.

BRANDTZAEG A., HARBOE E. (1957). Buckling tests of slender steel piles in soft, quick clay. Proc., 4th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Engng., vol. 2, pp. 19-23.

BROMS B.B. (1983). Pile foundation-general report. Proc., 10th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Engng., vol. 4, pp. 427-439.

BUSTAMANTE M. (1994). T.G.V. Paris-Bruxelles-Londres, Viaduc de l'Arbre, résultats des essais statiques de micropieux réalisés par le LCPC et propositions d'extrapolation à l'ouvrage définitif. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, rapport technique n° 353036.

BUSTAMANTE M., FRANK R., GIANESELLI L. (1987). Le dimensionnement des fondations profondes, l'expérience des Laboratoires des Ponts et Chaussées. Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, n° 149, pp. 13-21.

CARIOU D (1988). Calcul par éléments finis de structures poutres bidimensionnelles et tridimensionnelles en grands déplacements elastoplastiques sous sollicitations dynamiques. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

CASSAN M (1978). Les essais in situ en mécanique des sols, réalisation et interprétation, tome I Eyrolles, Paris

CHAJES A (1974) Principles of structural stability theory. Prentice-Hill, Englewood cliffs.

CHEN W F , ATSUTA T (1976) Theory of beam-columns, in plane behavior and design. McGraw-Hill, vol 1, New York

CHEN W F , ATSUTA T (1977) Theory of beam-columns, space behavior and design. McGraw-Hill, vol 2, New York

CHEN W.F., LUI E M. (1987) Structural stability. Elsevier, New York.

CHENG F.Y., PANTELIDES C P (1988). Static Timoshenko beam-column on elastic media. J. Struct. Div., ASCE, n° 114, pp. 1152-1172.

CHIWANGA M., VALSANGKAR A.J. (1988). Generalized beam element on two-parameter elastic foundation. J Struct. Eng., ASCE, vol. 114, pp. 1414-1427.

CORTE J.F., GARNIER J. (1986). Une centrifugeuse pour la recherche en geotechnique. Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, n° 146. .

CORTE J.F., GARNIER J., COTTINEAU L.M., RAULT G. (1991). Determination of model soil in the centrifuge. Centrifuge 91, Balkema, Rotterdam, pp. 607-614.

COURBON J. (1964). Résistance des matériaux. Dunod, Paris.

DAVISSON H.L., DONOVAN T.D. (1977). Design approach for laterally loaded drilled piers. GAI report to Pennsylvania Powwer and Light Compagny, december.

DAVISSON M.T. (1963). Estimating buckling loads for piles. Proc., 2nd Pan-American Conf. Soil Mech. and Found. Engng.,Brazil, vol. 1, pp. 351-371.

DAVISSON M.T. (1970). Lateral load capacity of piles. High Res. Rec., n° 333, pp. 104-112.

DAVISSON M.T., ROBINSON K.E. (1965). Bending and buckling of partially embedded piles. Proc., 6th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Engng.,Canada, vol. 2, pp. 243-246.

DEGNY E. (1987). Etudes théoriques de quelques problèmes liés aux pieux sous charges horizontales. Compte Rendu de Recherche LCPC, F.A.E.R. 1.05.10.6.

DEGNY E. (1988). Calcul des groupes de pieux, notice théorique du programme GOUPIL. Compte Rendu de Recherche LCPC, F.A.E.R. 1.05.10.7.

DEGNY E (1988) Prise en compte des non-linéarités géométriques dans le calcul en flexion deviee d'un groupe de pieux Une théorie simple basée sur l'écriture locale des équations de la RDM, incluant le concept de rotation semi-tangentielle. Compte Rendu de Recherche LCPC, F A E R. 1.05.10.7.

DEGNY E , ROMAGNY J C (1987) Calcul des groupes de pieux, notice d'utilisation du programme GOUPIL. Compte Rendu de Recherche LCPC, F.A.E.R. 1.05.10.6.

DEGNY E , ROMAGNY J C (1989) Calcul des efforts et déplacements dans les groupes de pieux le programme GOUPIL. Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, n° 162, pp 3-12

DELATTRE L (1989) Port de commerce de Lorient, quai de 150 mètres à Kergroise, études et travaux réalisés de 1985 à 1988, note de synthèse. Service Technique Central des Ports Maritimes et Voies Navigables

DESAI I.D., NAIK A.B (1974) Effect of skin friction on the buckling resistance of an axially loaded pile embedded in cohesive soil. Indian Geotechn. J. 4, n° 1, pp. 72-77.

ELISHAKOFF I., PLETNER B. (1991). Analysis of buckling by computer algebra. Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, n° 88, pp. 299-309.

ENGESSER F. (1891). Zentr. Bauverwaltung, vol. 11, pp. 483.

EULER L. (1744). Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Appendix I, "De curvis elasticis". Bousquet, Lausanne and Geneva. (English translation : OLDFATHER W.A., ELLIS C.A., BROWN D.M., Isis, vol. 20, 1993, pp. 72-160).

FAESSEL P. (1984). Difficultés diverses du flambement, arcs, grandes piles, portiques multiples, recherches des solutions simples. Annales I.T.B.T.P., n° 426, pp. 81-92.

FENOUX G.Y. (1976). Les pieux aiguilles I.M. Construction, n° 6, pp. 275-282.

FENU L., SERRA M. (1990). Elastic instability of piles in stratified soils. Rivista Italiana Di Geotechnica, vol. 24, n° 1, pp. 25-34.

FILONENKO-BORODICH M.M. (1940). Some approximate theories of the elastic foundation. Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ. Mekh., n° 46, pp. 3-18.

FILONENKO-BORODICH M.M. (1945). A very simple model of an elastic foundation capable of spreading the load. Sb. Tr. Mosk. Elektro. Inst. Inzh. Trans., n° 53, Transzheldorizdat.

FRANCIS A.J., STEVENS L.K., HOADLEY P.J. (1965). Paper to Symp. Soft Ground Eng., Brisbane, Inst. Engrs., Aust.

FRANK R (1974). Etude théorique du comportement des pieux sous charge verticale. Introduction de la dilatance. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), C N R S n° A010766, 228 pages

FRANK R (1984). Etude théorique des fondations profondes et d'essais en place par autoforage dans les L.P.C. et resultats pratiques (1972-1983). Thèse de doctorat d'état ès sciences physiques, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

FRANK R (1989) Déplacement axial des pieux dans les sols mous. Symposium Franco-Sovietique LCPC-VNIIOSP, Moscou, avril 1989, pp. 105-114.

FRANK R, KUTNIAK M (1981) Etude des pieux soumis à des poussées latérales par la methode du module de réaction. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Rapport de recherche, L P C . n° 107, 65 pages

GALIN L A (1961) Contact problems in the theory of elasticity. North Carolina State College, School of Physical Sciences and Applied Mathematics.

GARNIER J, COTTINEAU L M (1988) La centrifugeuse du LCPC : moyens de preparation des modèles et instrumentation. Colloque Centrifuge 88, Paris, pp. 83-90.

GERY P.M., CALGARO J A (1973) Les matrices-transfert dans le calcul des structures. Eyrolles, Paris

GOLDER H.Q., SKIPP B O (1957). The buckling of piles in soft clay. Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Engng., vol 2, pp.35-39.

GORBUNOV-PASADOV M.I. (1941). Slabs on elastic foundations. Gosstroizdat, Moscow.

- GORBUNOV-PASADOV M.I. (1949). Beams and slabs on elastic foundations. Mashstroizdat, Moscow.
- GOUVENOT D. (1975). Essais de chargement de flambement de pieux aiguilles. Annales I.T.B.T.P., supplément au n° 334, série Sols et Fondations 124, pp. 25-39.
- GOUVENOT. D., BUSTAMENTE M. (1979). Mesures in situ sur les ouvrages maritimes de soutènement, étude du comportement réel de quelques ouvrages. Annales I.T.B.T.P., n° 375, série Sols et Fondations 167, pp. 113-144.
- GRANDHOLM H. (1929). On elastic stability of piles surrounded by a supporting medium. Ing. Vet. Akad., Hand. 89, Stockholm.
- HADJADJI T. (1993). Analyse du comportement expérimental des pieux sous chargements horizontaux. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- HARR M.E. (1966). Foundations of Theoretical Soil Mechanics. McGraw-Hill, New York.
- HARR M.E. et al. (1969). Euler beams on a two-parameter foundation model. J. Soil Mech Found. Div., ASCE, vol. 95, pp. 933-948.
- HETENYI M. (1946). Beams on elastic foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor, vol. 16.
- HETENYI M. (1966). Beams and plates on elastic foundation and related problems. Appl Mech Rev., n° 19, pp. 95-102.
- HOBLIT F. (1950). Critical buckling loads for hydraulic actuating cylinders. Product Engineering, vol. 21, n° 7, pp 108-112
- IMAI T (1976) Method of calculation of transverse behavior of pile based on measurements results by L L T Chapter 4 of OYO Technical Note TN-13, "Studies of subgrade reaction coefficient K - value of soil ground". OYO Corporation, Tokyo, Japan, June.
- JEZEQUEL J, LEMASSON H (1985) Port de Lorient, quai à 150 mètres à Kergroise, analyse de la situation en septembre 1985 Laboratoire Régional de St. Brieuc, dossier n° 30 85 2 184
- KAR R C , SUJATA T (1988) Parametric instability of non-uniform beam with thermal gradient resting on a Pasternak foundation. Computers & Structures, n° 29, pp 591-599.
- KARAMANLIDIS D , PRAKASH V (1988) Buckling and vibration analysis of flexible beam resting on an elastic half-space. Earthquake Engng Struct. Dyn., n° 16, pp. 1103-1114.
- KERISEL J. (1958) La mécanique des sols : recherches et investigations récentes. Travaux. Septembre.
- KLOHN E.J., HUGHER G.T. (1964). Buckling of long unsupported timber piles. J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, vol. 90, SM6, pp. 107-123.

KORONEV B.G. (1960). Structures resting on an elastic foundation. Pergamon Press, Oxford, pp. 160-190.

LEE K.L. (1968). Buckling of partially embedded piles in sand. J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, vol. 94, SM1, pp. 255-270.

LEONARDS G.A. (1968). Les fondations. Dunod, Paris.

LUR'E A.I. (1964). Three dimensional problems of the theory of elasticity. Interscience, New-York.

MADHAV M.R., DAVIS E.H. (1974). Buckling of finite beams in elastic continuum. J. Engng Mech. Div., ASCE, vol. 100, EM6, pp. 1227-1236.

MANDEL M. (1936). Flambage au sein d'un milieu élastique. Annales des Ponts et Chaussées, n° 20, pp. 295-335.

MANDEL M. (1936). Le flambage en milieu résistant élastique-Applications. Annales des Ponts et Chaussées, n° 25, pp. 443-482.

MASCARDI C. (1968). Micro pali di elevata capacità portante. Rivista Italiana di Geotechnica, n° 4.

MATLOCK H (1970). Correlations for design of laterally loaded piles in soft clays. Proceedings of the Second Offshore Technology Conference, Houston, Texas, May, vol 1, pp 577-594, Paper OTC 1204

MATLOCK H , INGRAM W B (1963) Bending and buckling of soil-supported structural elements Proc 2nd Pan-Amer Conf Soil Mech and Found. Engng., Brazil, vol. 1, pp.373-388

MATLOCK H , REESE L C (1960) Generalized solutions for laterally loaded piles Journal of the soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 86, SM5, October, pp 63-91

MATLOCK H , RIPPERGER E A (1956) Procedures and instrumentation for tests on a laterally loaded pile Proceedings of the 8th Texas Conference on Soils Mechanics and Foundation Engineering, Special Publication n°29, Bureau of Engineering Research, The University of Texas, Austin, Texas, September, 39p

MAZINDRANI Z H , SASTRY V V R N (1972). Buckling resistance of piles in layered clays Indian Geotechn J., vol 2, n° 3, pp 232-240.

MC CLELLAND B , FOCHT J A (1956) Soil modulus for laterally loaded piles. J of the Soil Mech and Fond Div., Am Soc Civ Engrs., n° 82, SM4, octobre.

MENARD L. (1957) Mesure in situ des propriétés physiques des sols. Annales des Ponts et Chaussées, Mai-Juin

MENARD L. (1962). Comportement d'une fondation profonde soumise à des efforts de renversement, Sols - Soils, n° 3, 4° trimestre.

MOLIARD J.M. (1992). Logiciel PICTURE01, analyse d'une image constituée de points avec suivi de leur déplacement. Application aux essais en centrifugeuse. Communication interne à la section Modélisation En Centrifugeuse du LCPC Nantes.

NARASIMHA MURTHY G.K. (1973). Buckling of beams supported by Pasternak foundation. J. Engng. Mech. Div., ASCE, vol. 99, EM3, pp. 565-579.

NOGANI T., ONEILL M.W. (1985). Beam on generalized two-parameter foundation. J. Engng. Mech. Div., ASCE, vol. 111.

PANTELIDES C.P. (1990). Stability of columns on biparametric foundations. Computers & Structures, vol. 42, n° 1, pp. 21-29.

PASTERNAK P.L. (1954). On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. Gosudarstvennoe Izdatelstvo Liberaturi po Stroitelstvui Arkhitekture, Moscow.

PERIE F. (1986). Etude numérique du flambage des pieux du quai de Lorient. Rapport technique de la société ESI (Engineering System International).

PINCENT B., PILOT G., BLONDEAU F., QUEYROI D. (1978). Modélisation du comportement d'ouvrages en terre par centrifugation de modèles réduits. Annales I.T.B.T.P., n°359, pp 126-135.

PNUELI D. (1972). Buckling of columns with variable moment of inertia. J. of Applied Mechanics, vol. 39, pp. 1139-1141

POPOV G Ya (1971). Plates on a linearly elastic foundation (a survey). Sov. Appl Mech., 8 (3), pp 3-17.

POULOS H G (1971) Behavior of laterally loaded piles : I-Single piles. Journal of the soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol 97, SM5, Proc. Paper 8092, May, pp 711-731

POULOS H G, DAVIS E H (1980) Pile foundation analysis and design. Series in geotechnical engineering, J Wileyand sons editors

PRAKASH S (1987) Buckling loads of fully embedded vertical piles. Computers and Geotechnics. n° 4, pp 61-83

RAMSAMOOJ D V (1975) Buckling capacity of piles in soft clay. J. Geotechn Engng. Div., Proc ASCE, vol 101, n° GT11, Techn N., pp 1187-1191.

REDDY A.S., VALSANGKAR A J (1970). Buckling of fully and partially embedded piles. J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, vol 96, SM6, pp. 1951-1965.

REESE L.C., MATLOCK H (1956). Nondimensional solutions for laterally loaded piles with soil modulus assumed proportional to depth. Proceedings of the 8th Texas Conference on Soils Mechanics and Foundation Engineering, Special Publication n°29, Bureau of Engineering Research, The University of Texas, Austin, Texas, September.

REISSNER E. (1958). Deflection of plates on viscoelastic foundation. *Journal of Appl. Mech. (Trans. ASME)*, n° 80, pp. 144-145.

SADOWSKY M.A., PU S.L., HUSSAIN M.A. (1967). Buckling of microfibrés. *J. of Applied Mechanics, ASME*, vol. 34, pp. 1011-1016.

SAÏD Y.H. (1975). Etude théorique des pieux sollicités horizontalement. Thèse de docteur ingénieur, Université de Paris VI.

SANGLERAT G. (1974). State of the art in France. Symposium européen sur les essais de pénétration, Stockholm, Juin.

SCHMIDT R. (1982). Estimation of buckling loads and other Eigenvalues via a modification of the Rayleigh-Ritz Method. *J. of Applied Mechanics*, vol. 49, pp. 639-640.

SCHREYER H.L., SHIH P.Y. (1973). Lower bounds to column buckling loads. *J. of Eng Mech. Div., Proceedings of ASCE*, vol. 18, pp. 1011-1022.

SELVADURAI A.P.S. (1979). Elastic analysis of soil-foundation interaction. *Developments in Geotech. Eng.*, vol. 17, Elsevier scientific publishing company.

SILVER G. (1951). Critical loads on variable section columns in the elastic range. *J. of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 414-420.

SMITH T.E. (1969). Buckling of a beam on a weighardt type elastic foundation. *Zeitschrift Fuer Angewandte Mathematic and Mechanic*, vol. 49, n° 11, pp. 641-645.

SOUCHE P. (1984). Etude du flambement de pieux partiellement immergés dans un milieu offrant latéralement une réaction élastique pure. *Annales I.T.B.T.P.*, n° 423, pp. 38-60

TERZAGHI K (1955) Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Geotechnique*, vol 5, pp 297-326

THOMSON W T (1950) Critical load of columns of varying cross sections. *J of Applied Mechanics*, vol 17, pp 132-134

TIMOSHENKO P S , GERE J M (1936) Theory of elastic stability. 1st édition, McGraw-Hill Book Co , Inc New York

TIMOSHENKO P S , GERE J M (1961) Theory of elastic stability. 2nd édition, McGraw-Hill Book Co , Inc New York

TOAKLEY A.R (1965) Buckling loads for elastically supported struts. *J. of Eng. Mech. Div., Proceedings of ASCE*, vol 91, EM3, pp. 205-231.

ULM F.J. (1993). Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures, applications aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint.

- VALLABHAN C.V., DAS Y.C. (1991). Modified Vlasov model for beams on elastic foundations. *J. Geotech. Engng., ASCE*, vol.117, n°6, pp.956-966.
- VAN WAMBECKE A. (1962). Méthodes d'investigation des sols en place, étude d'une campagne d'essais comparatifs. *Sols-Soils*, n° 2.
- VAN WAMBECKE A. (1975). Les corrélations entre caractéristiques géotechniques. *Annales des Travaux Publics de Belgique*, n° 4, 1975.
- VESIC A.B. (1961). Beams on elastic subgrade and Winkler's hypothesis. *Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Engng.*, vol. 1, pp.845-850.
- VEZOLE P; (1989). Stabilité de forme de micropieux, une approche simple. *Annales I.T.B.T.P.*, n°478, pp.158-171.
- VLAZOV V.Z. (1949). General theory of shells and its application in engineering. Gosterkhizdat, Moscow, Leningrad.
- VLAZOV V.Z. (1949). Structural Mechanics of Thin-walled three-dimensional Systems. Gosstroizdat, Moscow, Leningrad.
- VLAZOV V.Z., LEONTIEV U.N. (1966). Beams, plates and shells on elastic foundations. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
- WANG T.M., STEPHENS J.E. (1977). Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations. *J. Sound Vibr.*, n° 51, pp. 149-155.
- WINKLER E. (1867) Die lehre von der elastizitat und festigkeit. Dominicus, Prague.
- ZHAOHUA F., COOK R.D (1983) Beam elements on two parameter elastic foundations. *J. of Eng Mech Div., Proceedings of ASCE*, n° 190, pp. 1390-1402.