



HAL
open science

Modélisation mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères

Adnane Boukamel

► **To cite this version:**

Adnane Boukamel. Modélisation mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2006. tel-00517997

HAL Id: tel-00517997

<https://theses.hal.science/tel-00517997>

Submitted on 16 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE (AIX-MARSEILLE II)

MEMOIRE D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : MÉCANIQUE

présenté par

ADNANE BOUKAMEL

le 5 Octobre 2006

**MODÉLISATIONS MÉCANIQUES ET
NUMÉRIQUES DES MATÉRIAUX ET
STRUCTURES EN ÉLASTOMÈRES**

JURY

Mr A.	DRAGON	ENSMA, Poitiers	Président
Mr A.	CHRYSOCHOOS	Université de Montpellier	Rapporteur
Mr M.	POTIER-FERRY	Université de Metz	Rapporteur
Mr F.	SIDOROFF	ECL, Lyon	Rapporteur
Mr J.L.	BATOZ	INSIC, Saint-Dié-des-Vosges	Examinateur
Mr O.	DÉBORDES	ECM, Marseille	Examinateur
Mr P.	SUQUET	LMA, Marseille	Examinateur
Mr P.	GODIOT	EUROCOPTER, Marignane	Invité

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE (AIX-MARSEILLE II)

MEMOIRE D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : MÉCANIQUE

présenté par

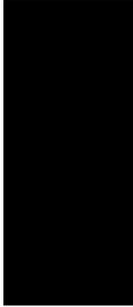
ADNANE BOUKAMEL

le 5 Octobre 2006

**MODÉLISATIONS MÉCANIQUES ET
NUMÉRIQUES DES MATÉRIAUX ET
STRUCTURES EN ÉLASTOMÈRES**

JURY

Mr A.	DRAGON	ENSMA, Poitiers	Président
Mr A.	CHRYSOCHOOS	Université de Montpellier	Rapporteur
Mr M.	POTIER-FERRY	Université de Metz	Rapporteur
Mr F.	SIDOROFF	ECL, Lyon	Rapporteur
Mr J.L.	BATOZ	INSIC, Saint-Dié-des-Vosges	Examineur
Mr O.	DÉBORDES	ECM, Marseille	Examineur
Mr P.	SUQUET	LMA, Marseille	Examineur
Mr P.	GODIOT	EUROCOPTER, Marignane	Invité



SOMMAIRE

Introduction

Chapitre 1 Les matériaux élastomères

1.1	Généralités sur les élastomères	7
1.2	Quelques mécanismes locaux de comportements des élastomères	9
1.2.1	L'élasticité caoutchoutique	9
1.2.2	Influence du taux de réticulation	10
1.2.3	La cristallisation	10
1.2.4	Les mécanismes dissipatifs	11
1.2.5	Les mécanismes d'endommagement	13
1.3	Conclusion	16

Chapitre 2 Le comportement hyperélastique

2.1	Généralités	19
2.1.1	Formalisme thermodynamique	19
2.1.2	Définition d'un milieu hyperélastique	20
2.2	Lois de comportement pour les milieux hyperélastiques isotropes	21
2.2.1	L'hyperélasticité incompressible	21
2.2.2	L'hyperélasticité compressible	24
2.3	Identification des paramètres caractéristiques	26
2.3.1	Caractérisations expérimentales	26

2.3.2	Méthodologie d'identification	27
2.3.3	Identification sous contrainte de stabilité	28
2.4	Développements d'éléments finis hyperélastiques quasi-incompressibles	29
2.4.1	Formulation variationnelle	29
2.4.2	Éléments finis classiques	30
2.4.3	Éléments finis réduits	32
2.4.4	Quelques exemples d'applications	38
2.5	Bilan	40

Chapitre 3 Les comportements élasto-dissipatifs en grandes transformations

3.1	Présentation générale	45
3.2	Observations expérimentales	45
3.3	Cadre thermodynamique	47
3.3.1	Notions de configurations intermédiaires	48
3.3.2	Formalisme lagrangien	50
3.3.3	Formalisme eulérien	50
3.3.4	Application aux modèles rhéologiques	51
3.4	Exemples de modèles rhéologiques hyper-visco-élastiques	52
3.4.1	Modèle de Poynting-Thomson	52
3.4.2	Modèle de Zener	54
3.4.3	Choix des potentiels	55
3.4.4	Exemples d'identifications	55
3.4.5	Pertinence des deux modèles	58
3.5	Un modèle hyper-élasto-visco-plastique	59
3.5.1	Présentation du modèle	59
3.5.2	Équations constitutives	59
3.5.3	Identification des paramètres	60
3.6	Bilan	61

Chapitre 4 Approche statistique

4.1	Motivations microphysiques	65
4.1.1	Observations au Microscope Electronique à Balayage	65
4.1.2	Hypothèses de modélisation	66
4.2	L'approche statistique	67
4.2.1	Le concept général	67
4.2.2	Écriture des équations constitutives	69
4.3	Un premier modèle statistique hyper-élasto-visco-plastique	70

4.3.1	Choix des potentiels et des fonctions statistiques	70
4.3.2	Identification des paramètres du modèle	71
4.4	Quelques variantes du modèle statistique	75
4.4.1	Le modèle SHVP2	75
4.4.2	Le modèle de MIEHE généralisé	76
4.5	Bilan	80

Chapitre 5 Le couplage thermomécanique pour des élastomères

5.1	Introduction	83
5.2	Aspects théoriques du couplage thermomécanique	83
5.2.1	Écriture de l'équation de la chaleur pour un problème thermomécanique	83
5.2.2	Position du problème thermomécanique	86
5.3	Mise en oeuvre d'une plate-forme de couplage	88
5.3.1	Formulation variationnelle	89
5.3.2	Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis	90
5.3.3	Algorithme de couplage	91
5.3.4	Application à la simulation d'un essai cyclique en double-cisaillement	91
5.4	Bilan	95

Bilan général et perspectives

Annexes

Annexe A Les élastomères : mise en oeuvre et applications

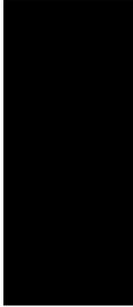
Annexe B Quelques modèles hyperélastiques isotropes incompressibles

Annexe C État de l'art des comportements dissipatifs

Annexe D Algorithme d'identification des paramètres des modèles élasto-dissipatifs

Annexe E Expérimentation sur un silicone chargé en silice

BIBLIOGRAPHIE



Introduction

L'utilisation des matériaux élastomères est de plus en plus fréquente dans les secteurs industriels, tels que l'industrie aéronautique, l'industrie automobile, le bâtiment et le génie civil ou même l'industrie des loisirs. . . Dans le domaine aéronautique et en particulier la fabrication d'hélicoptères, les choix technologiques et les nouveaux concepts des moyeux rotors font appel depuis environ une vingtaine d'années à des pièces constituées d'élastomères telles que :

- les **butées lamifiées** élastomère-métal (Fig. 1), pièces de liaison élastique entre les pales et le rotor, jouant le rôle de filtre mécanique qui permet de reprendre les efforts de compression (force centrifuge) en découplant les mouvements de cisaillement et de torsion (mouvements de traînée et le pas) ;
- les **adaptateurs de fréquence** ou amortisseurs de traînée (Fig. 1) qui permettent de décaler les fréquences propres de la pale de son régime nominal d'oscillation et, par leur fonction dissipative, d'amortir les mouvements de traînée ;
- le **bras élastomérique : EFB**, composite ternaire constitué de baguettes en verre/époxy et en carbone/époxy noyées dans une matrice élastomérique. Il s'agit d'un nouveau concept de pièce, reliant la pale au mât et assurant à la fois les rôles de la butée et de l'adaptateur de fréquence.

La conception de ce type de pièces, qui restent étroitement liées à la sécurité, nécessite une grande maîtrise et des garanties de fiabilité de plus en plus exigeantes. Ces objectifs sont d'autant plus critiques que les conditions d'utilisation de ces pièces en élastomères se révèlent souvent très sévères compte tenu des sollicitations statiques⁽¹⁾, dynamiques⁽²⁾ et thermiques⁽³⁾ auxquelles elles sont soumises. De telles conditions imposent donc une certaine maîtrise du comportement de ces pièces et, en particulier, l'estimation de la durée de vie et la prévision de leur réponse sous des sollicitations extrêmes et couplant plusieurs phénomènes physiques.

La modélisation du comportement des élastomères utilisés dans la fabrication de ces pièces nécessite la prise en compte des grandes déformations, des processus dissipatifs et de l'influence de la température

(1). de l'ordre de 100% de déformation moyenne

(2). de 1Hz à 30Hz de fréquence, avec une amplitude dynamique pouvant atteindre 50% d'une déformation statique de 55%

(3). Température de service allant de $-55^{\circ}C$ à $+70^{\circ}C$

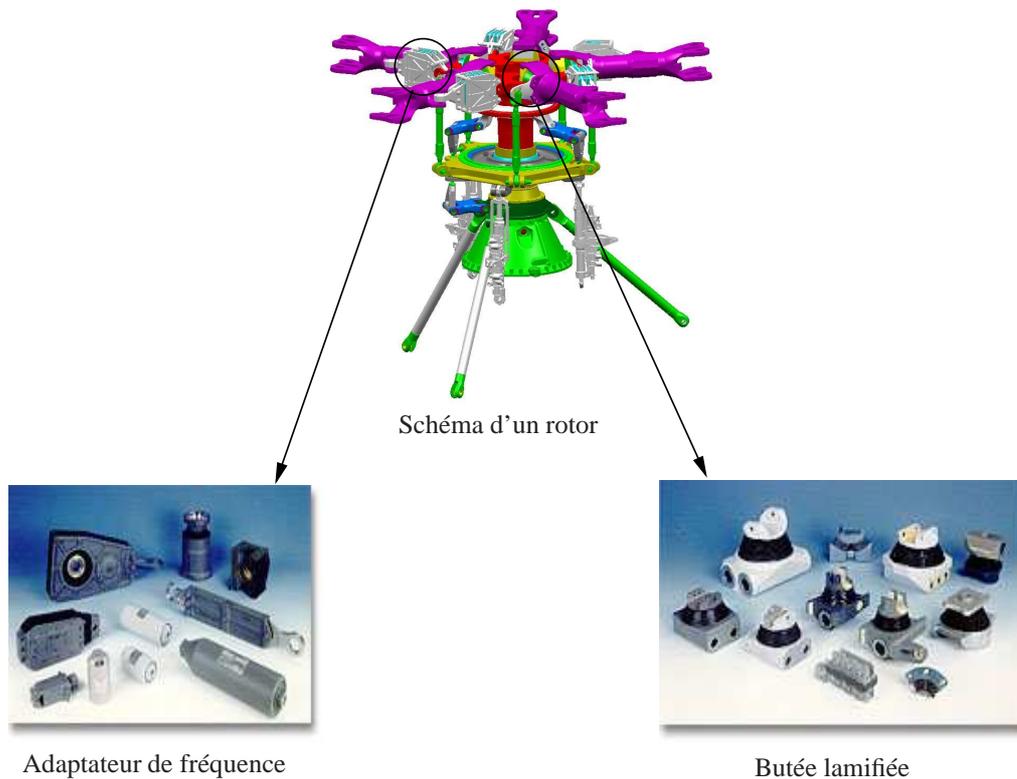


Figure 1 – Pièces élastomériques d'un rotor d'hélicoptère, EUROCOPTER & HUTCHINSON.

sur le comportement thermomécanique. Ainsi, parmi les aspects de comportement à considérer, on peut citer :

- l'hyperélasticité appliquée dans le cas des sollicitations statiques,
- l'hyper-visco-élasticité pour les sollicitations dynamiques,
- l'hyper-visco-élasto-plasticité pour le comportement dynamique à froid,
- le couplage thermomécanique pour modéliser les phénomènes dissipatifs dépendant de la température,
- la modélisation de l'endommagement couplé à ces comportements élasto-dissipatifs, afin de prévoir la durée de vie des pièces en élastomère.

Les premiers travaux sur ces thèmes ont fait l'objet d'un programme de recherche de 1991 à 1994, initié à l'époque par AÉROSPATIALE/DH et mené à travers une collaboration entre :

- l'équipe Modèles Numériques du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille (LMA), pour la partie numérique et l'élaboration de modèles de comportement⁽⁴⁾,
- l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille (IMFL), pour la partie expérimentation mécanique,
- l'Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels (IUSTI), pour la partie thermique.

Le cadre général de ces travaux a porté d'une part sur la modélisation, la caractérisation et l'identification du comportement des élastomères et d'autre part sur la formulation numérique et la mise en œuvre des modèles à travers des algorithmes numériques basés sur la méthode des éléments finis.

(4). Le pilotage de ce projet a été assuré par Olivier DÉBORDES et moi-même

Par la suite en 2001, nous avons relancé un second programme de recherche, dans le cadre d'un projet Européen plus global (projet DART), et dont l'objectif est de caractériser le comportement à froid et/ou sous sollicitations dynamiques multi-fréquentielles des élastomères en silicone chargés en silice. Ces travaux menés via une collaboration entre :

- la société EUROCOPTER-FRANCE,
- l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille (ESIM) et le LMA,
- le Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris, pour la partie analyses microscopiques,
- la société PAULSTRA, fabricant de ces pièces en élastomère,

ont été basés sur une démarche à la fois phénoménologique, par le biais de caractérisations expérimentales et d'identifications de modèles, mais aussi micro-physiquement motivée, à travers l'élaboration de modèles macroscopiques sur la base d'observations microscopiques.

L'objectif de ces travaux est donc de cerner finement le comportement de ces matériaux à travers :

- le développement de modèles de comportement,
- l'identification des paramètres gouvernant ces modèles à travers la réalisation d'essais de caractérisation à différentes températures,
- la validation de ces modèles via la confrontation à des essais sous sollicitations complexes,
- l'implémentation et la mise au point de codes éléments finis pour la simulation thermomécanique du comportement de pièces réelles.

L'aboutissement logique de cette démarche devra se concrétiser par une procédure d'aide à la conception de ces pièces dissipatives en élastomère.

Ces projets, issus directement des besoins industriels, ont donc, depuis 1991, continuellement guidé nos préoccupations scientifiques. Ces travaux sont menés avec le souci permanent de répondre efficacement aux attentes de nos partenaires, mais aussi, avec la nécessité d'approfondir les thématiques scientifiques abordées afin de mieux appréhender les phénomènes physiques et de maîtriser les techniques numériques que l'on peut rencontrer dans un projet aussi ambitieux.

Ainsi, en partant des résultats de mes travaux de thèse en 1988 [15] et au fil des années, ces programmes de recherche ont permis (ou ont nécessité) la mise en place de plusieurs projets de thèses et de stages de DEA, avec des objectifs graduels et qui ont apporté, et continuent à apporter, leur pierre à l'édifice, à savoir :

- la thèse de F. JAZZAR [78] sur la *Modélisation du comportement hyperélastique quasi-incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*, soutenue en octobre 1993 ;
- la thèse de C. CARPENTIER-GABRIELI [53] sur l'*Étude numérique du comportement thermomécanique des élastomères sous sollicitations harmoniques*, soutenue en décembre 1995 ;
- la thèse de D. DELORME [38] sur la *Modélisation numérique du comportement mécanique de matériaux composites à matrices élastomériques*, soutenue en septembre 1997 ;
- la thèse de S. MÉO [119] sur la *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité*, soutenue en décembre 2000 ;
- la thèse de J.M. MARTINEZ [107] sur la *Modélisation hyper-visco-plastique d'un élastomère sous sollicitations dynamiques multi-fréquences et à différentes températures*, soutenue en avril 2005 ;
- la thèse S. LEJEUNES [94] sur la *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles*, soutenue en mars 2006 ;
- et plus récemment les travaux de thèse de J. GRANDCOIN portant sur l'*Endommagement en fatigue des élastomères chargés* et dont la soutenance est prévue en 2007 ;
- ainsi qu'une dizaine de stages de DEA...

C'est grâce à ces contributions successives et à la collaboration permanente avec nos partenaires que l'activité de recherche sur la modélisation du comportement des élastomères au LMA jouit aujourd'hui d'une reconnaissance à l'échelle nationale.

Nous allons donc, au fil de ce document, tenter de synthétiser ces différents travaux de recherche. Ainsi, après un premier chapitre consacré à une brève présentation des matériaux élastomères et de leurs mécanismes de déformation, la suite du mémoire se décline, à l'image du déroulement de ce programme de recherche et des thématiques scientifiques abordées, en quatre chapitre.

Le second chapitre traite de la modélisation du comportement hyperélastique incompressible et quasi-incompressible. Il situe le cadre thermodynamique de ces modèles de comportement et présente quelques modèles avec des exemples d'identifications des paramètres associés. Une seconde partie de ce chapitre résume les développements des éléments finis hyperélastiques incompressibles que nous avons réalisés. Nous insistons en particulier sur les éléments finis spécifiques permettant de ramener, dans le cadre de l'hyperélasticité incompressible, des problèmes tridimensionnels en problèmes 2D avec :

- les éléments pseudo-axisymétriques, pour la modélisation de pièces complexes, à symétrie de révolution mais soumises à des chargements non-symétriques, telles que la BUTÉE LAMIFIÉE,
- les éléments réduits 3D/2D destinés à la modélisation des structures élancées dans une direction et possédant des propriétés d'invariance dans leur direction d'élancement, telles que le BRAS EFB.

Le troisième et le quatrième chapitres sont consacrés aux comportements élasto-dissipatifs, en grandes déformations, des élastomères chargés, matériaux constitutifs des ADAPTATEURS DE FRÉQUENCES. Après quelques constatations expérimentales et une présentation du cadre thermodynamique, nous exposons dans le troisième quelques modèles rhéologiques, basés sur une décomposition multiplicative des déformations en une partie élastique et partie anélastique. Ces modèles permettent de traduire le comportement sous chargements dynamiques simples (mono-harmoniques) à température ambiante (modèles hyper-visco-élastiques) ou à froid (modèles hyper-élasto-visco-plastiques). A chaque fois une confrontation avec des résultats d'essais expérimentaux, réalisés dans le cadre de ces travaux, est présentée.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons une approche statistique, micro-physiquement motivée, permettant de modéliser le comportement hyper-élasto-visco-plastique des élastomères chargés, sous sollicitations dynamiques complexes (statiques et dynamiques ou multi-harmoniques). Elle permet de généraliser les assemblages parallèles d'un nombre fini de branches à un assemblage statistique à une infinité de branches. L'intérêt de cette démarche réside en une couverture plus large du spectre de chargement, sans pour autant augmenter le nombre de paramètres du modèle. Quelques exemples de modèles sont ensuite présentés avec une stratégie d'identification de leurs paramètres caractéristiques et une campagne d'identification en discutant la pertinence de ces modèles vis-à-vis des phénomènes observés expérimentalement.

Le dernier chapitre est consacré à la modélisation du couplage thermomécanique des élastomères dissipatifs⁽⁵⁾. Ainsi, un algorithme de couplage faible est proposé ; il relie la modélisation mécanique à une modélisation thermique, via la prise en compte d'un terme source de chaleur d'origine mécanique et de l'évolution des caractéristiques mécaniques en fonction de la température. Une confrontation des résultats numériques et expérimentaux est présentée dans ce chapitre. Elle permet de quantifier la proportion de la puissance dissipée en chaleur et de valider le modèle couplé.

Enfin, nous terminerons ce manuscrit par une discussion sur les résultats obtenus à ce jour, ainsi que sur les orientations que nous envisageons de donner à ce projet de recherche.

(5). Là encore, la motivation industrielle est liée au comportement, sous chargements dynamiques et thermiques, des adaptateurs de fréquences

Les matériaux élastomères

La nature d'un matériau élastomère est le résultat d'une forte interaction entre sa composition chimique, sa morphologie à différentes échelles, le procédé de son élaboration, ses propriétés physico-chimiques et des performances visées en service. La maîtrise des mécanismes de comportement de tels matériaux nécessite donc, entre autres, une bonne connaissance de sa micro-structure et des procédés de sa mise en oeuvre.

L'objet de ce chapitre est de donner un bref aperçu sur ces deux aspects, afin de comprendre les mécanismes locaux qui induisent le comportement macroscopique du matériau.

Après quelques généralités sur les principales familles d'élastomères et de leurs propriétés caractéristiques, nous proposons une description de leur morphologie à l'échelle macro-moléculaire, nous permettra de comprendre les mécanismes induisant les différents modes de comportement. Ainsi, en partant de l'élasticité caoutchoutique, nous abordons les comportements dissipatifs et l'influence des charges, pour finir par la description de quelques mécanismes d'endommagement et notamment de l'effet Mullins.

PLAN DU CHAPITRE 1

1.1	Généralités sur les élastomères	7
1.2	Quelques mécanismes locaux de comportements des élastomères	9
1.2.1	L'élasticité caoutchoutique	9
1.2.2	Influence du taux de réticulation	10
1.2.3	La cristallisation	10
1.2.4	Les mécanismes dissipatifs	11
1.2.4.a	Les frottements internes	11
1.2.4.b	Renforcement par les charges	12
1.2.5	Les mécanismes d'endommagement	13
1.2.5.a	Processus d'endommagement	13
1.2.5.b	L'effet Mullins	15
1.3	Conclusion	16

1.1 Généralités sur les élastomères

Les élastomères appartiennent à la famille des hauts polymères. Microscopiquement, ils se présentent sous forme de macro-molécules constituées de longues chaînes de polymères, linéaires ou ramifiées, enchevêtrées les unes dans les autres. Compte-tenu de leur structure amorphe et pour des températures supérieures à leur température de transition vitreuse, les élastomères se caractérisent par une grande déformabilité et une haute élasticité caoutchoutique.

En effet, l'étude des propriétés physiques des polymères, en fonction de la température, montre l'existence de plusieurs états de la matière :

- **État vitreux** : cet état caractérise généralement les verres organiques qui présentent une très faible déformabilité.
- **État de transition** : à ce stade, on est en présence de polymères linéaires thermoplastiques de type cellulosiques, polyamides, polyesters, polyvinyles. . . Il s'agit comme son nom l'indique d'une phase de transition significative de l'état quasi-fragile à un état de grande déformabilité.
- **État caoutchoutique** : les élastomères sont caractéristiques de cet état. Ils possèdent une grande déformabilité et un comportement visqueux.
- **État d'écoulement** : le polymère, bien que encore solide, se comporte comme un fluide non-newtonien quasi-incompressible fortement visqueux.

On peut ainsi réaliser une observation qualitative du module d'YOUNG et de l'angle de perte, suivant la température, ce qui permet de mettre en évidence les différents états de déformabilité que peut engendrer une variation de température sur ces matériaux (Fig. 1.1).

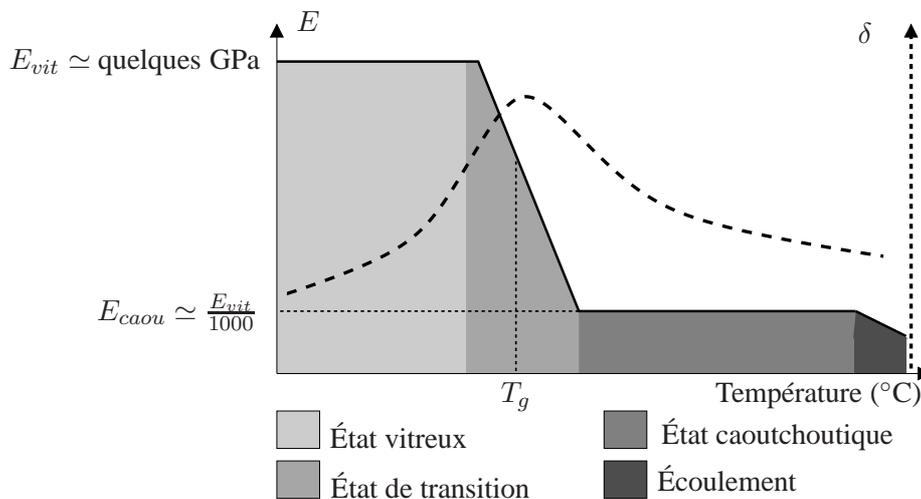


Figure 1.1 – Évolution du module d'YOUNG et de l'angle de perte en fonction de la température.

La température de transition vitreuse T_g des élastomères, varie de $-10^\circ C$ à $-120^\circ C$ selon leur composition chimique et leur micro-structure. Ces caractéristiques mécaniques alliées à des propriétés d'imperméabilité, d'inertie chimique et d'une certaine stabilité aux changements de température en font des matériaux devenus de plus en plus incontournables pour diverses utilisations industrielles. Aujourd'hui, sous la dénomination "Élastomères", on regroupe aussi bien le caoutchouc naturel que les élastomères synthétiques.

Le caoutchouc naturel ou *Natural Rubber*, de symbole normalisé NR, est obtenu à partir du latex fourni par incision dans l'écorce d'une famille d'arbres équatoriaux : les *Hévéas*. Il s'agit d'un polyisoprène de

formule chimique $(C_5H_8)_n$ (cf Fig. 1.2). Ils se caractérisent par de très bonnes propriétés mécaniques, après vulcanisation, mais de faibles tenues chimiques et une médiocre résistance à la chaleur.

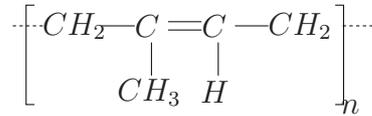


Figure 1.2 – *Isoprène*, C_5H_8

Les élastomères de synthèse sont, quant à eux, obtenus par polymérisation de monomères issus d'hydrocarbures insaturés. Parmi les grandes familles de caoutchoucs de synthèse, on peut citer, les caoutchoucs Buna (SBR et BR), les copolymères d'éthylène propylène (EPM et EPDM), le caoutchouc butyle (IIR), le polyisoprène de synthèse (IR), le néoprène, les silicones (MQ, VMQ...), les polyuréthanes (PU), et copolymères fluorés (FM)... Le tableau (Tab. 1.1), résume la classification et les propriétés caractéristiques de ces familles d'élastomères.

Famille	Nomenclature	Symbole	Tg	Propriétés caractéristiques
Caoutchoucs naturels ou synthétiques	Caoutchouc naturel	NR	$-72^\circ C$	Bonnes propriétés mécaniques, faibles résistance à la chaleur et à l'ozone, faible tenue chimique
	Polyisoprène	IR	$-72^\circ C$	
Caoutchoucs BUNA	Copolymère styrène-butadiène	SBR	$-50^\circ C$	Grande résistance à l'abrasion
	Polymère de butadiène	BR	$-112^\circ C$	
Caoutchouc éthylène propylène diène	Terpolymère éthylène-propylène-diène	EPDM	$-55^\circ C$	Excellentes propriétés élastiques, bonne tenue au vieillissement et en température, mauvaise tenue aux huiles et carburants
Caoutchouc butyle	Copolymères isobutylène-isoprène	IIR	$-66^\circ C$	Très bonne résistance au vieillissement et étanchéité aux gaz.
Caoutchoucs nitriles	Copolymères butadiène-acrylonitrile (basse teneur en ACN)	NBR	$-45^\circ C$	Bonnes propriétés mécaniques, bonne tenue aux huiles et aux carburants, tenue en température limitée
	Copolymères butadiène-acrylonitrile (haute teneur en ACN)	NBR	$-20^\circ C$	
Néoprène	Polychloroprène	CR	$-45^\circ C$	Bonnes propriétés mécaniques, bonne tenue au vieillissement, tenue aux huiles modérées, tenue en température limitée
Silicones	Polydiméthylsiloxane	MQ	$-120^\circ C$	Haute résistance à la chaleur et au froid, faible tenue mécanique
	Polydiméthylvinylméthylsiloxane	VMQ	$-120^\circ C$	
	Silicones fluorés	FVMQ	$-70^\circ C$	

Tableau 1.1 – *Familles d'élastomères*

Pour plus de précisions, une présentation plus détaillée sur les matériaux élastomères est proposée en Annexe A

1.2 Quelques mécanismes locaux de comportements des élastomères

1.2.1 L'élasticité caoutchoutique

A titre illustratif, nous présentons Fig. 1.3, la réponse à un chargement en traction uniaxiale d'un élastomère à base de silicone. Cette courbe montre d'une part, la non-linéarité de comportement et d'autre part la grande capacité à se déformer ; l'élongation maximale pouvant parfois atteindre les 700%.

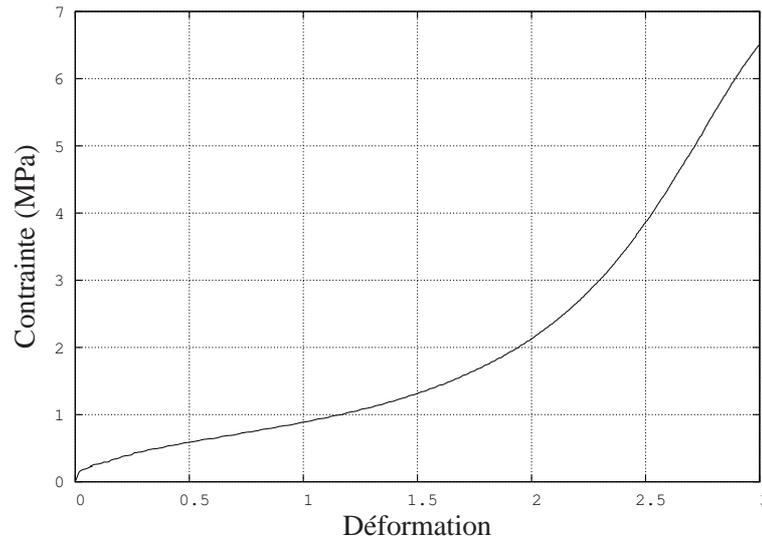


Figure 1.3 – Caractère hyperélastique d'un élastomère en traction uniaxiale

A l'échelle de la structure microscopique, un élastomère vulcanisé est constitué de longues chaînes moléculaires comportant des points de jonctions. Ces macro-molécules forment ainsi un réseau tridimensionnel dont les segments de chaînes sont orientés de façon aléatoire. Outre ces points de jonctions de type liaisons covalentes, il existe des liaisons à très faible énergie appelées liaisons secondaires ou enchevêtrements. L'élasticité caoutchoutique est le résultat de cette faible interaction entre les macro-molécules. Ainsi, sous l'action d'une sollicitation mécanique, ces chaînes moléculaires peuvent glisser les unes sur les autres et changer ainsi la configuration micro-structurale du réseau moléculaire qui passe d'un arrangement aléatoire à un arrangement orienté suivant la direction de sollicitation. **L'élasticité caoutchoutique est donc de nature entropique.**

Cette élasticité caoutchoutique résulte plus des variations d'entropie configurationnelle dans le réseau macro-moléculaire que des variations de son énergie interne. En l'absence de forces extérieures, le réseau de chaînes moléculaires adopte une configuration correspondant à l'entropie maximale. Sous sollicitation mécanique ces chaînes se déplient et s'arrangent suivant une direction privilégiée, la direction de chargement réduisant ainsi l'entropie du réseau et produisant un état de déformation macroscopique.

En effet, en partant d'observations expérimentales, MEYER et FERRI en 1935, puis ANTHONY & AL. en 1942, ont montré, dans le cas d'une traction uniaxiale, que l'effort de traction était proportionnel à la température pour une même élongation et donc que l'énergie interne changeait peu avec la déformation (cf. Fig. 1.4 extrait de [158]).

Ce résultat a été récemment discuté par CHADWICH et CREASY, montrant qu'à un état de déformation donné, la partie déviatorique du tenseur de contraintes n'est pas intégralement d'origine entropique, et découle en partie de la variation d'énergie interne [27].

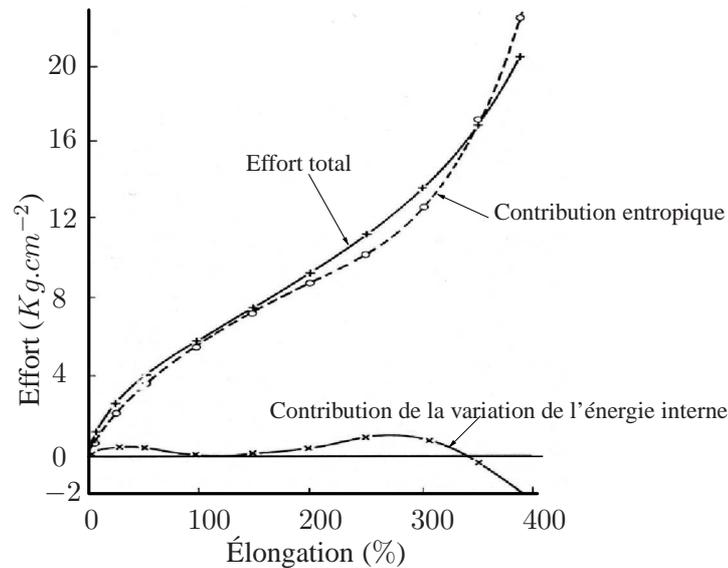


Figure 1.4 – Contribution de l'entropie et de l'énergie interne à la force de traction en fonction de l'élongation.

1.2.2 Influence du taux de réticulation

La déformation maximale que peut atteindre un élastomère vulcanisé dépend de la distance moyenne entre deux points de jonction dans le réseau macro-moléculaire, généralement quantifiée par la densité de réticulation. On comprend ainsi facilement qu'une faible densité de réticulation induit une grande flexibilité des chaînes et donc une grande déformabilité macroscopique du matériau.

Cependant d'autres propriétés dépendent aussi du taux de réticulation (Fig. 1.5) telles que la résistance au déchirement et à la fatigue, la dissipation, la dureté... Mais, ces dépendances évoluent souvent de façon antagoniste, il est difficile de trouver un taux de réticulation optimal vis-à-vis des différents critères de comportement. C'est là une difficulté majeure que rencontrent les manufacturiers des pièces en élastomère.

1.2.3 La cristallisation

Dans sa configuration non déformée, la micro-structure de l'élastomère se présente sous la forme de *Pelote statistique*, où les chaînes macro-moléculaires sont repliées sur elles-mêmes et s'enchevêtrent avec les chaînes voisines. Sous contraintes, ces chaînes se déploient et entraînent l'alignement progressif, dans la direction de chargement, puis l'extension des segments situés entre deux points de réticulation, formant ainsi des zones cristallites qui agissent comme des liens supplémentaires dans le réseau macro-moléculaire. Cette cristallisation induite par la déformation se traduit par une rigidification de l'élastomère à partir d'un niveau de déformation relativement important (au delà de 100% à 300% selon la nature du matériau).

Afin de vérifier si un élastomère est cristallisant ou non sous contraintes, une méthode [68] consiste à soumettre le matériau à un essai de traction cyclique à amplitude croissante. Ainsi, si les cycles réponses ne rejoignent pas la courbe non-cyclée alors l'élastomère est cristallisant. Si ces derniers rejoignent la courbe de comportement du matériau non-cyclé alors le matériau est non cristallisant (Fig. 1.6).

Plus récemment RAO et RAJAGOPAL [128] ont proposé un cadre thermodynamique pour la prévision de la cristallisation sous contraintes mécaniques des matériaux polymères.

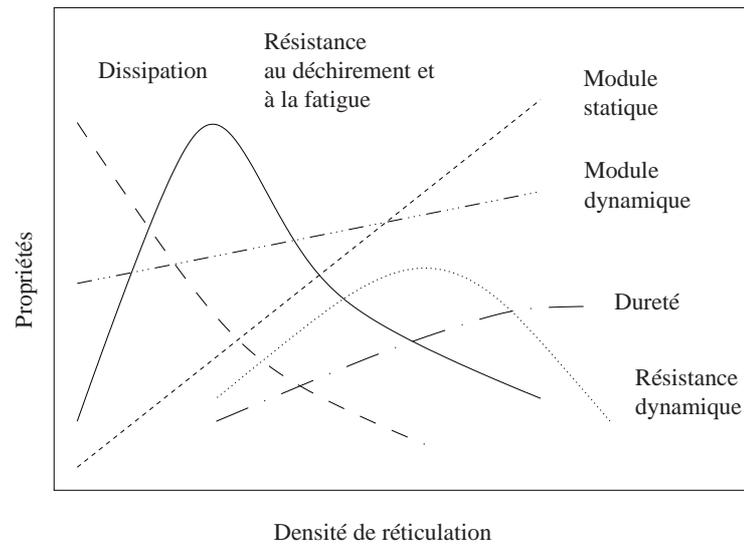


Figure 1.5 – Représentation schématique des propriétés physiques et mécaniques fonction de la densité de réticulation de BOUCHEREAU issue de [24]

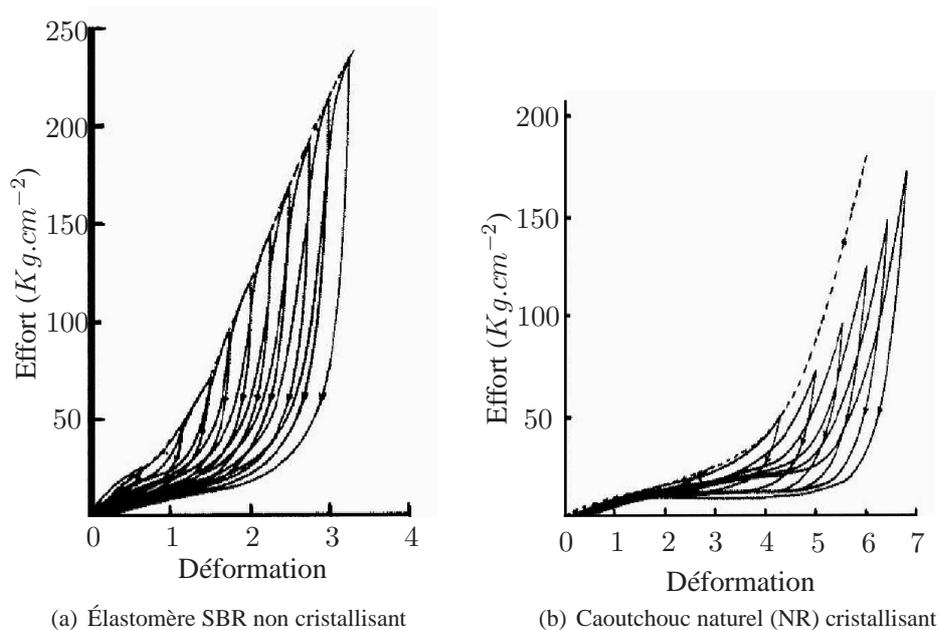


Figure 1.6 – Effet de cristallisation sous contrainte [68].

1.2.4 Les mécanismes dissipatifs

1.2.4.a Les frottements internes

Sous contrainte, le déploiement des chaînes macro-moléculaires est freiné par le frottement visqueux au niveau des points de liaison à faible énergie et par l'enchevêtrement entre les différentes chaînes. Ce mécanisme couplé à l'élasticité caoutchoutique de l'élastomère induit donc un caractère viscoélastique dans le comportement macroscopique de la plupart des élastomères. Ce comportement est notamment caractérisé par la dépendance de la réponse en fonction de la vitesse de la déformation ainsi que par les

effets de fluage et de relaxation (Fig. 1.7).

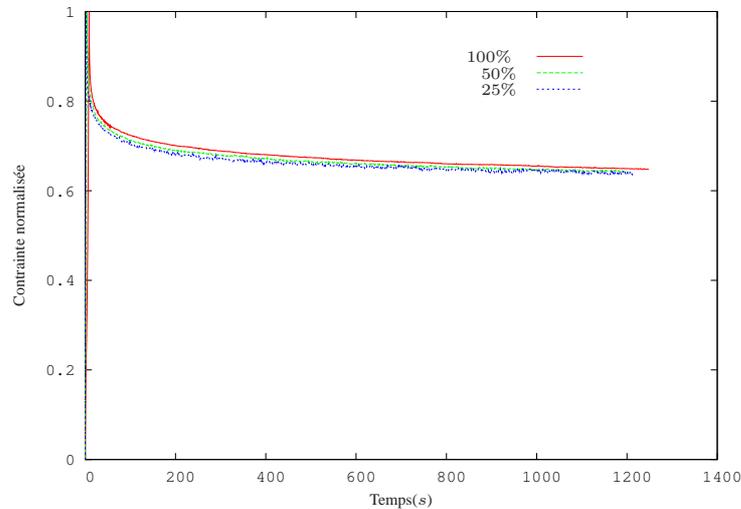


Figure 1.7 – Essais de relaxation en traction uniaxiale à température ambiante.

Un autre mécanisme dissipatif est lié aux frottements secs générés par l'interaction entre éléments libres de chaînes moléculaires. Macroscopiquement, ces frottements secs induisent un comportement plastique dont la dissipation par hystérèse croît avec la diminution de la température (Fig. 1.8) et avec le taux de cristallisation du matériau.

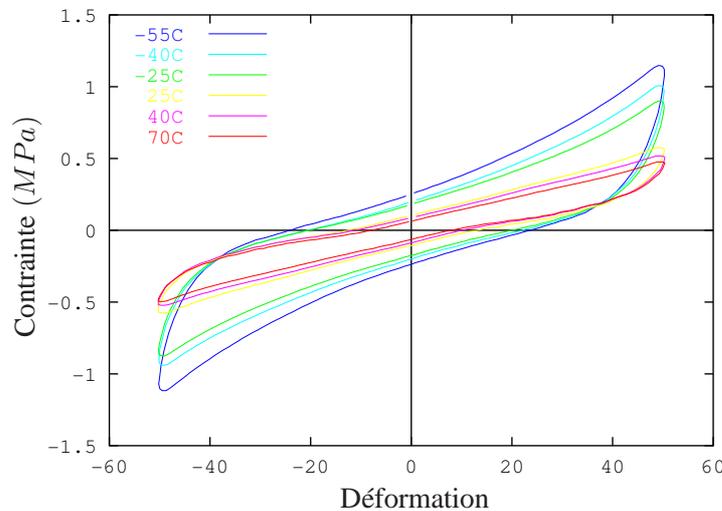


Figure 1.8 – Influence de la température sur le comportement hystérique d'un élastomère silicone.

1.2.4.b Renforcement par les charges

Le comportement d'un élastomère résulte non seulement de sa nature chimique, mais aussi des additifs que l'on y incorpore lors de son élaboration. Parmi ces additifs, les charges renforçantes conditionnent fortement le comportement du matériau fini. Il s'agit alors d'un système multiphasé composé :

- de la matrice qui constitue un réseau d'élastomère réticulé (**la gomme**),

- de particules fines regroupées en agrégats ou agglomérats (Fig. 1.9) formés lors de la phase de malaxage (**les charges de renfort**).

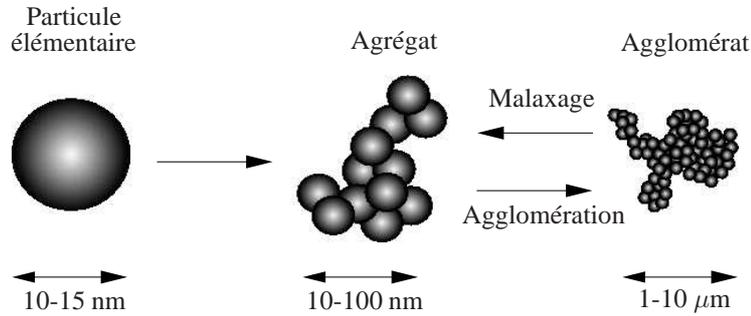
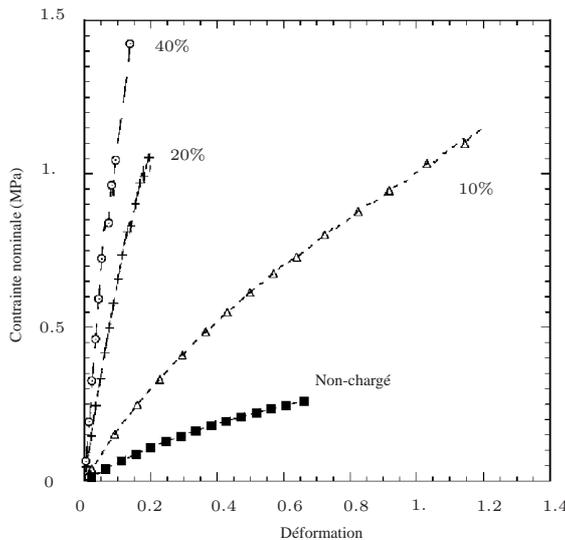
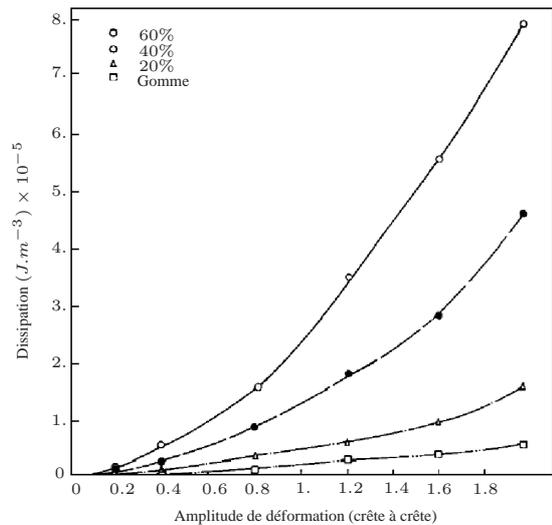


Figure 1.9 – Les différentes échelles de taille des charges.

On entend alors par renforcement, l’amélioration des propriétés d’usage de la gomme. Il peut s’agir de l’augmentation du module tangent à l’origine, des modules sécants, de l’énergie à rupture, de la contrainte ou de l’élongation à rupture, de la résistance à la fatigue, de la résistance à l’abrasion ... De manière générale, le caractère renforçant varie avec la nature de la charge, sa taille (Fig. 1.11), sa fraction volumique dans le mélange, mais aussi ses interactions avec la matrice (Fig. 1.10).



(a) Influence du taux de charge sur le comportement instantané d’un silicone renforcé par la silice précipitée *in situ* [39]



(b) Influence du taux de charge sur l’évolution de la dissipation en fonction de l’amplitude pour un élastomère SBR chargé de noir de carbone [83].

Figure 1.10 – Influence des charges renforçantes.

1.2.5 Les mécanismes d’endommagement

1.2.5.a Processus d’endommagement

Il apparaît que le matériau peut être vu à trois échelles décroissantes Fig. 1.12.

1. le matériau à l’échelle macroscopique, apparemment homogène, que l’on cherche à modéliser,

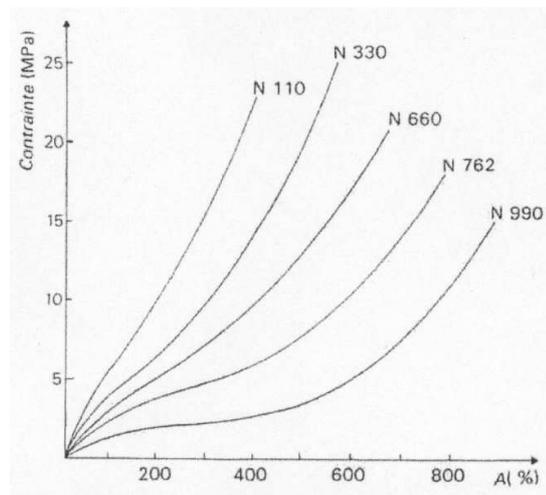


Figure 1.11 – Influence de la taille des particules de noir de carbone sur le comportement d'un SBR.

2. à l'échelle mésoscopique, la matrice et les agglomérats,
3. à l'échelle microscopique, les chaînes et les charges.

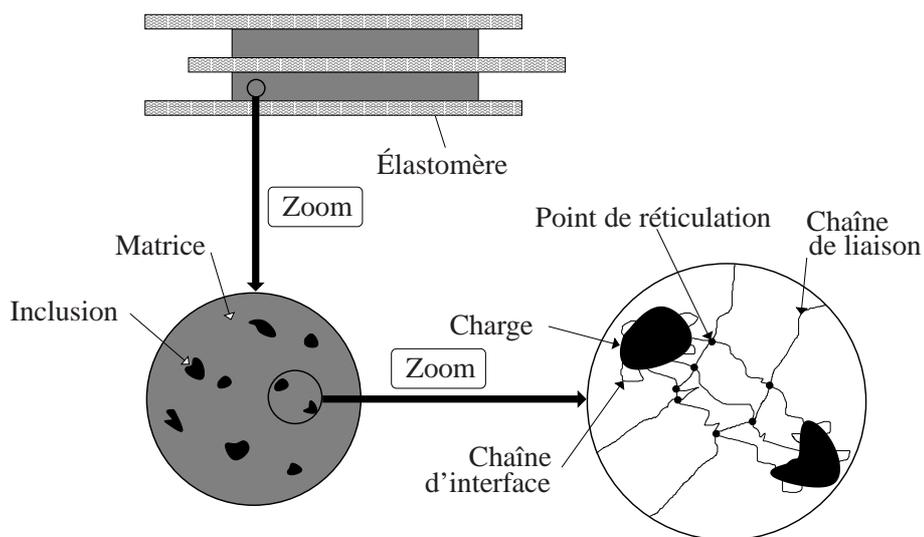


Figure 1.12 – Observation "macro-méso-micro" pour un élastomère réticulé.

L'endommagement des élastomères est donc lié à plusieurs phénomènes :

- la rupture des liaisons charges-chaînes, et des chaînes elles-mêmes (Fig. 1.13) [151; 62; 61; 111];
- la décohésion des charges, c'est-à-dire la diminution des caractéristiques mécaniques de leurs interfaces [1; 40; 3];
- la rupture des agglomérats [140; 87];
- et bien sûr la propagation des fissures engendrées par ces trois phénomènes.

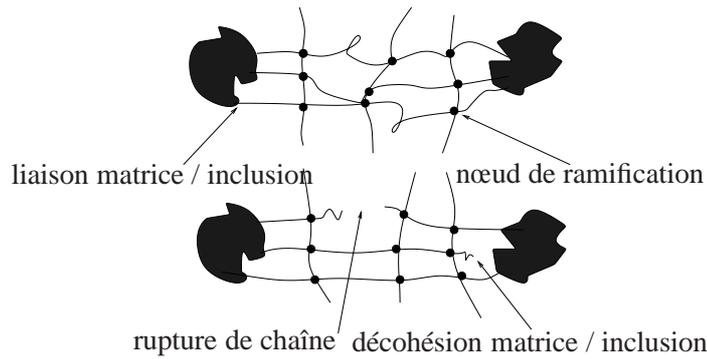


Figure 1.13 – Deux types de mécanismes d'endommagement au sein d'un VER

1.2.5.b L'effet Mullins

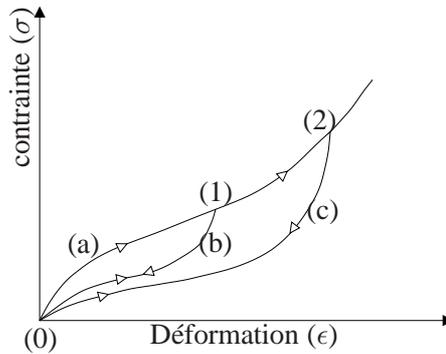


Figure 1.14 – Chargement cyclique d'un élastomère.

Lorsqu'un élastomère vierge est sollicité de façon cyclique, on observe que l'effort à appliquer initialement pour déformer l'élastomère jusqu'à un niveau donné est toujours supérieur à celui nécessaire pour atteindre le même niveau de déformation au cours des cycles suivants. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet **Mullins** ou **assouplissement sous contrainte** des élastomères. Cet effet (Fig. 1.14) peut aussi être mis en évidence par un essai de traction cyclique au cours duquel on augmente progressivement l'amplitude de déformation [62], où l'on observe que le chemin suivi par la réponse du matériau dépend du niveau maximum de déformation subi par le matériau au cours des précédents chargements.

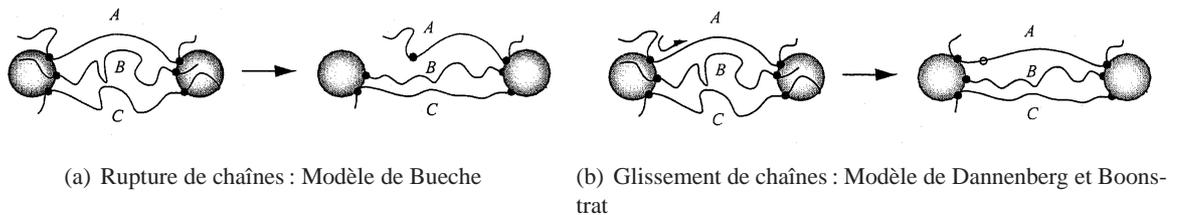


Figure 1.15 – Mécanismes micro-moléculaires d'assouplissement

Ce phénomène a fait l'objet de plusieurs investigations [118] et la plupart des auteurs s'accordent pour attribuer ce caractère spécifique des élastomères à un phénomène d'**endommagement**.

Ainsi parmi les mécanismes micro-moléculaires qui ont été proposés pour expliquer ce phénomène [143; 25], on peut citer pour les élastomères chargés (Fig. 1.15) :

- le modèle de BUECHE qui attribue l'effet Mullins à une rupture de chaînes entre deux charges voisines ;
- le modèle de DANNENBERG et BOONSTRAT qui propose un mécanisme de glissement de chaînes au niveau de la surface de charge.

1.3 Conclusion

De par leur composition et leur élaboration (relevant bien souvent du secret industriel) les matériaux élastomères sont constitués d'une micro-structure complexe et représentent un panel complet de comportements mécaniques : de l'élasticité, de la viscosité, de la plasticité, de l'endommagement... Ceux-ci peuvent être plus ou moins accentués en fonction du chargement mécanique et de l'environnement (température, atmosphère, UV...).

Nous aborderons dans la suite de ce document, les différentes voies explorées afin de mieux prévoir la réponse des élastomères sous des sollicitations mécaniques (statiques ou dynamiques) et/ou thermiques (induite ou extérieures).

Le comportement hyperélastique

Pour décrire le comportement statique ou quasi-statique des élastomères, les modèles les plus couramment utilisés sont les modèles hyperélastiques. Les premiers modèles, pour décrire le comportement hyperélastique des caoutchoucs vulcanisés, ont été proposés dès les années 40. Les uns étaient basés sur des observations expérimentales et des propriétés mathématiques d'isotropie et d'incompressibilité ; d'autres étaient issus de considérations micro-structurales et traduisaient l'origine essentiellement entropique de l'élasticité caoutchoutique.

L'objet de ce chapitre est de donner, dans un premier temps, une vision panoramique des modèles de comportements hyperélastiques. En partant de la définition d'un milieu hyperélastique, nous rappelons les différentes écritures des lois de comportement associées pour les milieux incompressibles ou compressibles. Nous donnons ensuite quelques formes d'énergie de déformation hyperélastique en distinguant les modèles phénoménologiques et les modèles micro-physiquement motivés. Ensuite, nous proposons quelques exemples de déterminations des paramètres caractéristiques, afin de dégager une stratégie d'identification pour les modèles usuellement utilisés.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la modélisation numérique, par éléments finis, des structures constituées d'élastomères hyperélastiques incompressibles ou quasi-incompressibles. Ainsi, après une présentation générale des formulations variationnelles et des espaces de discrétisation adaptées à ces problèmes, nous nous intéressons particulièrement aux méthodes de réduction de modèles (éléments finis pseudo-axisymétriques et éléments réduits 3D/2D) appliquées à l'hyperélasticité incompressible. Ces approches permettent de mettre à profit les symétries initiales des structures afin de réduire la taille des modèles à traiter, tout en déterminant avec une bonne précision leur réponse mécanique, aussi bien au niveau global que local.

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1	Généralités	19
2.1.1	Formalisme thermodynamique	19
2.1.1.a	Notations	19
2.1.1.b	Loi de comportement - Principes généraux	19
2.1.2	Définition d'un milieu hyperélastique	20
2.2	Lois de comportement pour les milieux hyperélastiques isotropes	21
2.2.1	L'hyperélasticité incompressible	21
2.2.1.a	Formulation	21
2.2.1.b	Quelques formes de densité d'énergie de déformation	24
2.2.2	L'hyperélasticité compressible	24
2.2.2.a	Formulation	24
2.2.2.b	Quelques modèles compressibles	26
2.3	Identification des paramètres caractéristiques	26
2.3.1	Caractérisations expérimentales	26
2.3.2	Méthodologie d'identification	27
2.3.3	Identification sous contrainte de stabilité	28
2.4	Développements d'éléments finis hyperélastiques quasi-incompressibles	29
2.4.1	Formulation variationnelle	29
2.4.2	Éléments finis classiques	30
2.4.2.a	Formulation discrète	30
2.4.2.b	Choix des espaces d'interpolation	31
2.4.3	Éléments finis réduits	32
2.4.3.a	Les éléments pseudo-axisymétriques	33
2.4.3.b	Les éléments réduits 3D/2D	35
2.4.4	Quelques exemples d'applications	38
2.4.4.a	Calcul d'une butée sphérique	38
2.4.4.b	Calcul d'un bras élastomérique	40
2.5	Bilan	40

2.1 Généralités

2.1.1 Formalisme thermodynamique

2.1.1.a Notations

Avant de donner la définition d'un milieu hyperélastique et d'en écrire la loi de comportement, nous présentons dans ce paragraphe, les notations que nous utilisons Tab. 2.1, ainsi que quelques critères que doit généralement vérifier une loi de comportement.

Symbole	Désignation	Commentaires
$d\vec{X}$	Vecteur élémentaire dans la configuration initiale	
$d\vec{x}$	Transformé de $d\vec{X}$ dans la configuration actuelle	
\vec{F}	Tenseur gradient de la transformation	$d\vec{x} = \vec{F} \cdot d\vec{X}$ et $J = \det(\vec{F}) > 0$
\vec{C}	Tenseur de CAUCHY-GREEN droit	$\vec{C} = \vec{F}^T \cdot \vec{F}$
\vec{E}	Tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE	$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{C} - \vec{1})$
\vec{B}	Tenseur de CAUCHY-GREEN gauche	$\vec{B} = \vec{F} \cdot \vec{F}^T$
\vec{A}	Tenseur des déformations d'EULER-ALMANSI	$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{1} - \vec{B}^{-1})$
$\vec{\sigma}$	Tenseur des contraintes de CAUCHY (description eulérienne)	
$\vec{\Pi}$	Premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF (description mixte)	$\vec{\Pi} = J\vec{\sigma} \cdot \vec{F}^{-T}$
\vec{S}	Second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF (description lagrangienne)	$\vec{S} = \vec{F}^{-1} \cdot \vec{\Pi}$
\vec{L}	Gradient eulérien des vitesses	$\vec{L} = \dot{\vec{F}} \cdot \vec{F}^{-1}$
\vec{D}	Tenseur taux des déformations	$\vec{D} = \left(\dot{\vec{F}} \cdot \vec{F}^{-1} \right)_{sym}$
ρ_0, ρ	Densité volumique de masse dans la configuration initiale, actuelle	$\rho = \frac{\rho_0}{J}$
T	Température	
s	Entropie spécifique	
\vec{q}	Flux de chaleur dans la configuration actuelle	
\vec{Q}	Transporté du flux de chaleur dans la configuration initiale	$\vec{Q} = J\vec{F}^{-1}\vec{q}$

Tableau 2.1 – Présentation des principales notations utilisées.

2.1.1.b Loi de comportement - Principes généraux

Pour déterminer l'évolution d'un système déformable, il est nécessaire d'établir une relation entre contrainte et déformation : la loi de comportement. Elle doit en outre obéir aux critères suivants :

- le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle : la loi de comportement doit être invariante par tout changement de référentiel,
- la compatibilité avec les symétries matérielles : dans le cas d'un matériau isotrope, la loi de comportement doit être invariante dans toute rotation de la configuration de référence.

Sous l'hypothèse de l'état local, la loi de comportement est construite de manière phénoménologique en partant de l'inégalité de **Clausius-Duhem** que l'on obtient à partir du premier et second principes de la thermodynamique. En introduisant l'énergie libre spécifique de HELMHOLTZ ψ , l'inégalité de Clausius-

Duhem traduit la positivité de la dissipation (Φ_0 ou Φ) et s'écrit selon le mode de description :

$$\begin{aligned}
\text{Description eulérienne : } \quad & \Phi = \bar{\sigma} : \bar{D} - \rho \left(\dot{\psi} + s\dot{T} \right) - \frac{1}{T} \bar{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_x T \geq 0 \\
\text{Description lagrangienne : } \quad & \Phi_0 = \bar{S} : \dot{\bar{E}} - \rho_0 \left(\dot{\psi} + s\dot{T} \right) - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_X T \geq 0 \\
\text{Description mixte : } \quad & \Phi_0 = \bar{\Pi} : \dot{\bar{F}} - \rho_0 \left(\dot{\psi} + s\dot{T} \right) - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_X T \geq 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.2 Définition d'un milieu hyperélastique

Un milieu est dit **hyperélastique** s'il vérifie les critères suivants :

- l'existence d'une configuration de référence libre de contrainte,
- le matériau ne dissipe pas d'énergie,
- le comportement du matériau est décrit par une densité d'énergie libre spécifique ψ , fonction des déformations et de la température.

Ainsi, en l'absence d'effets thermiques et compte-tenu de la nullité de la dissipation, les équations Eq. 2.1 permettent d'obtenir la relation contrainte-déformation, dans chaque mode de description⁽¹⁾ :

En eulérien	$\Phi = \bar{\sigma} : \bar{D} - \rho \dot{\psi} = \left(\bar{\sigma} - 2\rho \bar{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} \right) : \bar{D} = 0 \iff \bar{\sigma} = 2\rho \bar{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}}$	(2.2)
En lagrangien	$\Phi_0 = \bar{S} : \dot{\bar{E}} - \rho_0 \dot{\psi} = \left(\bar{S} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}} \right) : \dot{\bar{E}} = 0 \iff \bar{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}}$	
En mixte	$\Phi_0 = \bar{\Pi} : \dot{\bar{F}} - \rho_0 \dot{\psi} = \left(\bar{\Pi} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{F}} \right) : \dot{\bar{F}} = 0 \iff \bar{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{F}}$	

Ainsi, un matériau est dit hyperélastique si la relation contraintes-déformations dérive d'une densité d'énergie de déformation qui est égale à l'énergie libre spécifique d'HELMHOLTZ du milieu. En considérant cette densité d'énergie de déformation par unité de volume dans la configuration initiale :

$$\mathcal{W} = \rho_0 \psi,$$

et en introduisant le tenseur de KIRCHHOFF, les formes générales de la loi de comportement hyperélastique s'écrivent respectivement en eulérien, lagrangien et mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau} = J \bar{\sigma} = 2\bar{B} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{B}} \\ \bar{S} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{E}} = 2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{C}} \\ \bar{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{F}} \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Lorsque le matériau possède des propriétés d'isotropie, la densité d'énergie de déformation s'écrit, compte-tenu du **Théorème de représentation** (voir [150]), en fonction des invariants des tenseurs de

(1). En description eulérienne, l'obtention de l'expression de $\bar{\sigma}$ nécessite la symétrie de $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}}$ qui découle de l'hypothèse d'isotropie de ψ .

Cauchy-Green $\bar{\bar{C}}$ et $\bar{\bar{B}}$ notés $I_i, (i = 1, 2, 3)$, soit :

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(I_1, I_2, I_3) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} I_1 = Tr(\bar{\bar{X}}), \\ I_2 = \frac{1}{2} \left((Tr(\bar{\bar{X}}))^2 - Tr(\bar{\bar{X}}^2) \right) = Tr(Cof \bar{\bar{X}}), \\ I_3 = Det(\bar{\bar{X}}) \end{cases} \quad (\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{C}}, \bar{\bar{B}}) \quad (2.4)$$

La loi de comportement d'un matériau isotrope hyperélastique s'écrit, en posant $\mathcal{W}_i = \partial \mathcal{W} / \partial I_i$ et en tenant compte de l'équation de CAYLEY-HAMILTON :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = \frac{2}{J} \left[(\mathcal{W}_2 I_2 + \mathcal{W}_3 I_3) \bar{\bar{1}} + \mathcal{W}_1 \bar{\bar{B}} - \mathcal{W}_2 I_3 \bar{\bar{B}}^{-1} \right] \\ \bar{\bar{S}} = 2 \left[(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 I_1) \bar{\bar{1}} - \mathcal{W}_2 \bar{\bar{C}} + \mathcal{W}_3 I_3 \bar{\bar{C}}^{-1} \right] \\ \bar{\bar{\Pi}} = 2 \left[(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 I_1) \bar{\bar{F}} - \mathcal{W}_2 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}} + \mathcal{W}_3 I_3 \bar{\bar{F}}^{-T} \right] \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 Lois de comportement pour les milieux hyperélastiques isotropes

2.2.1 L'hyperélasticité incompressible

2.2.1.a Formulation

Plusieurs types de matériaux peuvent subir des déformations en obéissant à des liaisons internes telles l'incompressibilité. Pour traduire la condition locale d'incompressibilité écrivons, dans un premier temps, le taux de variation de volume :

$$\begin{cases} \dot{j} = \frac{\partial J}{\partial \bar{\bar{B}}} : \dot{\bar{\bar{B}}} = J \bar{\bar{1}} : \dot{\bar{\bar{D}}} \\ \dot{j} = \frac{\partial J}{\partial \bar{\bar{E}}} : \dot{\bar{\bar{E}}} = J \bar{\bar{C}}^{-1} : \dot{\bar{\bar{E}}} \\ \dot{j} = \frac{\partial J}{\partial \bar{\bar{F}}} : \dot{\bar{\bar{F}}} = J \bar{\bar{F}}^{-T} : \dot{\bar{\bar{F}}} \end{cases} \quad (2.6)$$

En considérant la nullité de la dissipation dans les équations Eq. 2.2 pour toute transformation incompressible (soit, respectivement pour tout $\dot{\bar{\bar{D}}}$, $\dot{\bar{\bar{E}}}$ ou $\dot{\bar{\bar{F}}}$ vérifiant $\dot{j} = 0$ dans Eq. 2.6) et en utilisant les relations de transport des tenseurs de contraintes [150], nous pouvons définir les **déviateurs de contraintes**, respectivement en description eulérienne, lagrangienne et mixte :

$$\begin{cases} \mathcal{D}ev_E[\bar{\bar{X}}] = \bar{\bar{X}} - \frac{1}{3}(\bar{\bar{X}} : \bar{\bar{1}})\bar{\bar{1}} \\ \mathcal{D}ev_L[\bar{\bar{X}}] = \bar{\bar{X}} - \frac{1}{3}(\bar{\bar{X}} : J^{-1}\bar{\bar{C}})J\bar{\bar{C}}^{-1} \\ \mathcal{D}ev_M[\bar{\bar{X}}] = \bar{\bar{X}} - \frac{1}{3}(\bar{\bar{X}} : J^{-1}\bar{\bar{F}})J\bar{\bar{F}}^{-T} \end{cases} \quad \bar{\bar{X}} = \bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{S}} \quad \text{ou} \quad \bar{\bar{\Pi}} \quad (2.7)$$

Alors que les parties sphériques :

$$\begin{cases} \mathcal{S}ph_E[\bar{X}] = \frac{1}{3}(\bar{X} : \bar{1})\bar{1} \\ \mathcal{S}ph_L[\bar{X}] = \frac{1}{3}(\bar{X} : J^{-1}\bar{C})J\bar{C}^{-1} \\ \mathcal{S}ph_M[\bar{X}] = \frac{1}{3}(\bar{X} : J^{-1}\bar{F})J\bar{F}^{-T} \end{cases} \quad (2.8)$$

vérifient les conditions d'orthogonalité qui sont équivalentes aux conditions locales d'incompressibilité :

$$\left(\mathcal{S}ph_E[\bar{\sigma}]\right) : \bar{D} = \left(\mathcal{S}ph_L[\bar{S}]\right) : \dot{\bar{E}} = \left(\mathcal{S}ph_M[\bar{\Pi}]\right) : \dot{\bar{F}} = 0 \quad (2.9)$$

Ainsi, pour un milieu incompressible, la nullité de la dissipation dans les équations Eq. 2.2 respectivement pour tout \bar{D} , $\dot{\bar{E}}$ ou $\dot{\bar{F}}$ incompressibles, permet de déterminer **seulement** les déviateurs de contraintes, soient :

$$\begin{cases} \mathcal{D}ev_E[\bar{\sigma}] = \mathcal{D}ev_E \left[\frac{2}{J} \bar{B} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{B}} \right] \\ \mathcal{D}ev_L[\bar{S}] = \mathcal{D}ev_L \left[2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{C}} \right] \\ \mathcal{D}ev_M[\bar{\Pi}] = \mathcal{D}ev_M \left[\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{F}} \right] \end{cases} \quad (2.10)$$

Les contraintes sphériques sont, quant à elles, colinéaires respectivement aux tenseurs $\bar{1}$, $J\bar{C}^{-1}$ et $J\bar{F}^{-T}$; de sorte que la loi de comportement devienne en utilisant la variable scalaire p , appelée usuellement **pression hydrostatique** et qui est généralement déterminée à partir des équations d'équilibre et des conditions sthéniques aux frontières :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \mathcal{D}ev_E \left[\frac{2}{J} \bar{B} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{B}} \right] - p \bar{1} \\ \bar{S} = \mathcal{D}ev_L \left[2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{C}} \right] - p J \bar{C}^{-1} \\ \bar{\Pi} = \mathcal{D}ev_M \left[\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{F}} \right] - p J \bar{F}^{-T} \end{cases} \quad (2.11)$$

Ainsi, pour les milieux hyperélastiques incompressibles, les tenseurs de contraintes sont déterminés en fonction des déformations à une contrainte sphérique près, dont la puissance est toujours nulle dans une cinématique incompressible.

Si, en plus le milieu est isotrope, la densité d'énergie de déformation est fonction des deux premiers

invariants $\mathcal{W}(I_1, I_2)$ et la loi de comportement devient :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{2}{J} \mathcal{D}ev_E \left[(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 I_1) \bar{B} - \mathcal{W}_2 \bar{B}^2 \right] - p \bar{1} \\ \bar{S} = 2 \mathcal{D}ev_L \left[(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 I_1) \bar{1} - \mathcal{W}_2 \bar{C} \right] - p J \bar{C}^{-1} \\ \bar{\Pi} = 2 \mathcal{D}ev_M \left[(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 I_1) \bar{F} - \mathcal{W}_2 \bar{F} \cdot \bar{F}^T \cdot \bar{F} \right] - p \text{Cof} \bar{F} \end{cases} \quad (2.12)$$

Remarque 2.1

L'opérateur : $\mathcal{D}ev_E \left[\bar{X} \right]$, présent dans l'expression eulérienne de Eq. 2.7, correspond à la définition usuellement utilisée du déviateur :

$$\left[\bar{X} \right]^D = \bar{X} - \frac{1}{3} (\bar{X} : \bar{1}) \bar{1},$$

ainsi, dans la suite de ce document, nous adopterons, lorsque celà n'induit aucune ambiguïté, la notation $\left[\bar{X} \right]^D$ pour désigner cet opérateur. □

Remarque 2.2

La formulation présentée ci-dessus diffère de celle classiquement utilisée pour les problèmes hyperélastiques incompressibles et qui consiste à postuler une fonction densité d'énergie de déformation de la forme :

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} - q(J - 1)$$

où q est un **multiplicateur de Lagrange**, associé à la condition d'incompressibilité $J = 1$ et qui est souvent assimilé à une pression hydrostatique⁽²⁾ [15]. Les lois de comportement s'écrivent dans ce cas sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = 2 \bar{B} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{B}} - p \bar{1} \\ \bar{S} = 2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{C}} - p J \bar{C}^{-1} \\ \bar{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{F}} - p \text{Cof} \bar{F} \end{cases} \quad (2.13)$$

L'écriture présentée ici, présente l'avantage d'une part, de découler d'un traitement thermodynamique de la condition d'incompressibilité et d'autre part, de distinguer les parties sphériques et déviatoriques des contraintes, et donc de donner une vraie signification physique de la pression hydrostatique.

En fait, analytiquement les deux écritures aboutissent rigoureusement aux mêmes solutions en contraintes et en déplacements. Par contre numériquement, et en particulier pour des formulations variationnelles multi-champs, les opérateurs tangents et les résidus d'équilibre au cours des itérations diffèrent entre ces deux écritures. □

(2). Par abus de langage.

2.2.1.b Quelques formes de densité d'énergie de déformation

Parmi les formes proposées dans la littérature, depuis les années quarante⁽³⁾, nous citons ici les modèles que nous avons utilisé à travers nos différentes applications, soient :

- Modèle de MOONEY-RIVLIN,(1940) [116]

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3). \quad (2.14)$$

Ce modèle reste de loin le plus utilisé pour sa simplicité et sa capacité à refléter convenablement le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation allant jusqu'à 100%.

- Modèle de RIVLIN,(1948) [137; 138; 139]

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = \sum_{\substack{0 \leq m \leq \infty \\ 0 \leq n \leq \infty}} C_{nm} (I_1 - 3)^n (I_2 - 3)^m, \quad (2.15)$$

Cette formulation générale est basée uniquement sur des hypothèses d'isotropie et d'incompressibilité. Elle englobe plusieurs modèles, proposés par différents auteurs et dont les degrés d'approximation polynomiale en (I_1, I_2) varient selon la nature de l'élastomère à modéliser et le domaine des déformations à couvrir.

- Modèle de GENT-THOMAS, (1958) [57]

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = A_1(I_1 - 3) + A_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$$

Ce modèle découle d'une étude expérimentale, proposée en 1951 par RIVLIN & SAUNDERS ([136]), qui démontre que la variation de l'énergie de déformation est linéaire en I_1 et à dérivée décroissante en I_2 . Il traduit convenablement le comportement des élastomères pour des déformations de moins de 200%.

- Modèle de HART-SMITH, (1966) [65]

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = A_1 \int_3^{I_1} \exp(A_3(\hat{I}_1 - 3)^2) d\hat{I}_1 + A_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$$

Cette forme d'énergie décrit correctement le comportement des élastomères pour des déformations allant jusqu'à 500%. Il traduit en particulier le phénomène de cristallisation sous déformation.

2.2.2 L'hyperélasticité compressible

2.2.2.a Formulation

L'hypothèse d'incompressibilité des élastomères reste une approximation souvent justifiée par les valeurs élevées du module de compressibilité de ces matériaux par rapport à leur rigidité en cisaillement. En réalité, ces matériaux sont qualifiables de faiblement compressibles ou quasi-incompressibles. Par ailleurs, cette propriété est souvent mise à profit sur le plan numérique, pour relâcher la contrainte sévère que constitue la condition d'incompressibilité dans la résolution des problèmes d'équilibre en hyperélasticité.

(3). et qui sont développées en Annexe B

Une prise en compte de cette faible compressibilité nécessite rigoureusement une reformulation de la loi de comportement en décomposant dans un premier temps, le mouvement local du milieu en une transformation purement sphérique $J\bar{\bar{I}}$ et une transformation isochoire $\bar{\bar{F}}$:

$$\bar{\bar{F}} = J^{1/3}\bar{\bar{C}}, \quad \bar{\bar{C}} = J^{2/3}\bar{\bar{C}} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{B}} = J^{2/3}\bar{\bar{B}}$$

les invariants de déformations correspondant à la transformation purement incompressible, s'écrivent donc :

$$\bar{\bar{I}}_1 = J^{-2/3} I_1 \quad \text{et} \quad \bar{\bar{I}}_2 = J^{-4/3} I_2$$

La densité d'énergie de déformation est ensuite découpée en une partie sphérique et une partie déviatorique :

$$\mathcal{W}(\bar{\bar{I}}_1, \bar{\bar{I}}_2, J) = \mathcal{W}_D(\bar{\bar{I}}_1, \bar{\bar{I}}_2) + \mathcal{W}_S(J)$$

On obtient alors la loi de comportement **hyperélastique compressible** qui s'écrit respectivement en eulérien, lagrangien et mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{\sigma}} = \frac{2}{J} \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}_D}{\partial \bar{\bar{B}}} : \frac{\partial \bar{\bar{B}}}{\partial \bar{\bar{B}}} + \frac{2}{J} \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}_S}{\partial \bar{\bar{B}}} = \mathcal{D}ev_E \left[\frac{2}{J} \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}_D}{\partial \bar{\bar{B}}} \right] + \frac{d\mathcal{W}_S}{dJ} \bar{\bar{I}} \\ \bar{\bar{S}} = 2 \frac{\partial \mathcal{W}_D}{\partial \bar{\bar{C}}} : \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial \bar{\bar{C}}} + 2 \frac{\partial \mathcal{W}_S}{\partial \bar{\bar{C}}} = 2 J^{-2/3} \mathcal{D}ev_L \left[\frac{\partial \mathcal{W}_D}{\partial \bar{\bar{C}}} \right] + J \frac{d\mathcal{W}_S}{dJ} \bar{\bar{C}}^{-1} \\ \bar{\bar{\Pi}} = \frac{\partial \mathcal{W}_D}{\partial \bar{\bar{F}}} : \frac{\partial \bar{\bar{F}}}{\partial \bar{\bar{F}}} + \frac{\partial \mathcal{W}_S}{\partial \bar{\bar{F}}} = J^{-1/3} \mathcal{D}ev_M \left[\frac{\partial \mathcal{W}_D}{\partial \bar{\bar{F}}} \right] + \frac{d\mathcal{W}_S}{dJ} \text{Cof} \bar{\bar{F}} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

On retrouve ainsi les opérateurs déviatoriques définis respectivement en description eulérienne, lagrangienne et mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}ev_E[\bar{\bar{X}}] = \bar{\bar{X}} : \frac{\partial \bar{\bar{B}}}{\partial \bar{\bar{B}}} = \bar{\bar{X}} - \frac{1}{3}(\bar{\bar{X}} : \bar{\bar{I}})\bar{\bar{I}} \\ \mathcal{D}ev_L[\bar{\bar{X}}] = \bar{\bar{X}} : \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial \bar{\bar{C}}} = \bar{\bar{X}} - \frac{1}{3}(\bar{\bar{X}} : J^{-1}\bar{\bar{C}})J\bar{\bar{C}}^{-1} \quad \bar{\bar{X}} = \bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{S}} \quad \text{ou} \quad \bar{\bar{\Pi}} \\ \mathcal{D}ev_M[\bar{\bar{X}}] = \bar{\bar{X}} : \frac{\partial \bar{\bar{F}}}{\partial \bar{\bar{F}}} = \bar{\bar{X}} - \frac{1}{3}(\bar{\bar{X}} : J^{-1}\bar{\bar{F}})J\bar{\bar{F}}^{-T} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Ces écritures de loi de comportement ont été mises en oeuvre pour modéliser des comportements quasi-incompressibles, dans le cadre des travaux de thèse de S. LEJEUNES [94]. En effet, dans le cas d'une faible compressibilité, les lois compressibles s'adaptent relativement bien aux formulations variationnelles en Lagrangien perturbé⁽⁴⁾ et présentent un meilleur comportement numérique comparativement aux lois hyperélastiques incompressibles.

(4). que nous aborderons plus loin dans ce mémoire.

2.2.2.b Quelques modèles compressibles

Pour expliciter les lois hyperélastiques compressibles, l'expression de l'énergie de déformation déviatorique, fonction des invariants réduits $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$, est généralement choisie sous la même forme que pour les matériaux incompressibles. On retrouve donc les modèles présentés au paragraphe précédent ou en Annexe B.

Pour la densité d'énergie sphérique, les formes les plus fréquentes sont résumées dans le tableau Tab. 2.2, où κ désigne le module de compressibilité à l'origine :

$\mathcal{W}_S(J)$	Référence
$\frac{\kappa}{2}(J-1)^2$	[15]
$\frac{\kappa}{2}(\ln J)^2$	[152]
$\kappa(J-1-\ln J)$	[110]
$\frac{\kappa}{\beta^2} \left(\frac{1}{J^\beta} - 1 + \beta \ln J \right)$	[125]
$\kappa^\beta(\beta \ln J - 1) + 1$	[67]

Tableau 2.2 – Quelques formes d'énergie de compressibilité.

2.3 Identification des paramètres caractéristiques

2.3.1 Caractérisations expérimentales

Dans le but de déterminer les paramètres caractéristiques d'un modèle hyperélastique, on utilise des essais de caractérisation, sous sollicitations simples, qui engendrent des états de déformations homogènes et/ou accessibles analytiquement. Ainsi depuis 1988, nous avons utilisés les résultats expérimentaux issus d'essais **quasi-statiques** et qui ont été mis en oeuvre par nos soins [15; 107] ou réalisés par nos partenaires de recherche institutionnels (INSTITUT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES DE LILLE...) ou industriels (EUROCOPTER, PAULSTRA...).

Ces essais de caractérisation peuvent être classés en plusieurs catégories :

- **Essais de traction uniaxiale** réalisés sur des éprouvettes en forme de haltère.
- **Essais de traction biaxiale** réalisés sur éprouvette en membrane cruciformes.
- **Essais de traction equi-biaxiale** réalisés sur éprouvette en membrane circulaire sous pression.
- **Essais de cisaillement pur** qui correspondent à une forme particulière des essais d'extension biaxiale.
- **Essais de glissement simple** réalisés sur des éprouvettes dites de double-cisaillement ou de quadruple-cisaillement.
- **Essais de traction multiaxiale** réalisés sur éprouvette cylindrique de section annulaire soumise à une extension selon son axe et à une pression interne.
- **Essais de compressibilité** de type essai de pression hydrostatique dans un liquide (*supposé plus incompressible que l'élastomère : tel que l'eau ou le mercure*) pour les élastomères quasi-incompressibles.

2.3.2 Méthodologie d'identification

L'identification des paramètres des modèles est basée sur la minimisation de la distance au sens des moindres carrés entre les réponses expérimentale et analytique de l'éprouvette soumise à ses sollicitations simples. Elle a nécessité en outre, la mise en place d'une stratégie de détermination des paramètres du modèle en fonction de leur influence sur la réponse aux sollicitations des différents essais. Le choix d'une stratégie d'identification dépend en général, de plusieurs facteurs :

- la nature de comportement de l'élastomère à caractériser (non-linéarités, effet de rigidification aux grands allongements...);
- le modèle hyperélastique à caractériser et donc le nombre de paramètres à déterminer ;
- le domaine de déformations visé ;
- et de façon pragmatique, les résultats d'essais disponibles pour la caractérisation.

Ainsi, à titre d'exemple, nous présentons deux identifications effectuées sur deux élastomères distincts et pour deux applications différentes.

La première concerne un caoutchouc naturel (NR) constituant des appuis stratifiés élastomère-métal, utilisés en tant qu'isolateurs parasismiques [15]. Il s'agissait d'identifier les paramètres du modèle de **Mooney-Rivlin** (cf. Eq. 2.14) pour un domaine de déformations inférieures à 100% et en utilisant les essais de traction uniaxiale et de cisaillement simple. Ainsi, la méthodologie d'identification se réduisait à :

- une identification par ajustement sur la réponse en traction uniaxiale (cf. Fig. 2.1),
- une validation des paramètres à travers une confrontation en cisaillement simple.

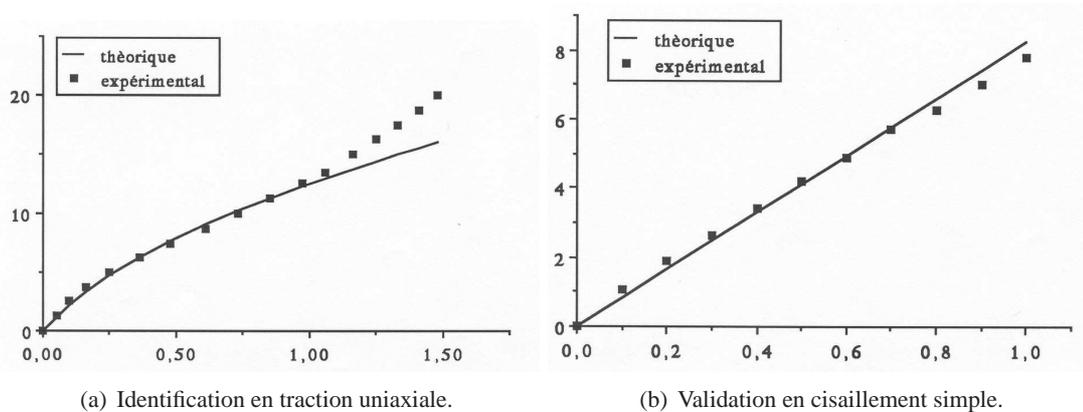


Figure 2.1 – Identification des paramètres de Mooney-Rivlin (courbes contraintes-déformations), (issu de [15]).

Le second exemple d'identification concerne un élastomère SBR constituant le dispositif DIAS de la fusée ARIANE V⁽⁵⁾ [53]. Les déformations atteignent pour cette application le niveau de 300% en cisaillement. Pour modéliser le comportement de cet élastomère, nous avons utilisé le modèle de **Hart-Smith** quasi-incompressible :

$$\mathcal{W}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, J) = A_1 \int_3^{\tilde{I}_1} \exp(A_3(U - 3)^2) dU + A_2 \ln\left(\frac{\tilde{I}_2}{3}\right) + \frac{\kappa}{2}(J - 1)^2$$

(5). Ce dispositif assouplisseur intervient à la jonction de la jupe avant des boosters et du corps central de la fusée, il joue le rôle de filtre de transmission de la poussée.

avec une identification des paramètres selon la stratégie suivante (cf. Fig. 2.2) :

- Prédétermination des paramètres A_1 , A_2 et A_3 sur les résultats d'essais en traction uniaxiale.
- Correction du paramètre A_3 sur l'essai de cisaillement pur.
- Correction du paramètre A_2 sur l'essai de traction equi-biaxiale.
- Identification du module de compressibilité κ sur l'essai de compressibilité.

Cette stratégie résulte d'une étude de sensibilité menée dans le cadre de la thèse de F. JAZZAR [78] et qui avait montré que les variations du paramètre A_1 modifient sensiblement le comportement en traction uniaxiale, que A_2 influe sur la réponse en traction bi-axiale et que A_3 conditionne la rigidité, en grandes déformations, sous sollicitation de cisaillement.

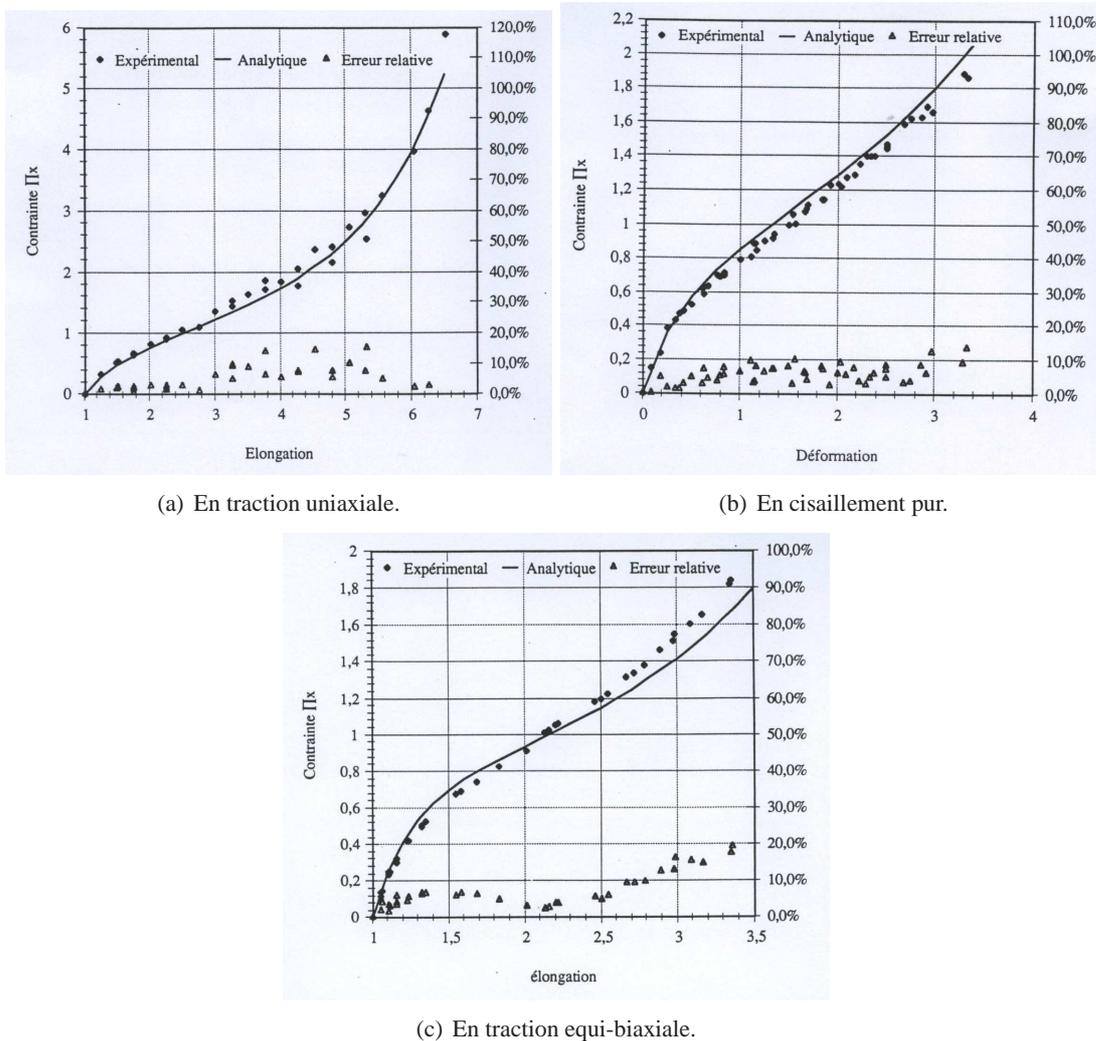


Figure 2.2 – Identification des paramètres de Hart-Smith (Issu de [53]).

2.3.3 Identification sous contrainte de stabilité

Comme nous avons pu le noter précédemment, il existe une multitude de modèles hyperélastiques. Cependant, on spécifie rarement leur domaine de validité vis-à-vis de la stabilité matérielle. Pour qu'une loi

de comportement hyperélastique soit matériellement stable, la densité d'énergie de déformation \mathcal{W} doit vérifier certains critères, à savoir :

- le critère de positivité, quel que soit l'état de déformation ;
- les conditions de coercivité ;
- la condition de poly-convexité de BALL [4].

Dans le cas des modèles polynomiaux, une condition suffisante pour assurer la convexité de la densité d'énergie de déformation⁽⁶⁾ est la **condition de positivité des paramètres** proposée par HARTMANN dans [66]. Une condition à la fois moins sévère et plus générale, car applicable à toutes les formes de densité, a été développée avec S. LEJEUNES [93]. Elle consiste à fixer *a priori*, le domaine de déformations visé par la modélisation et à identifier les paramètres du modèle en imposant la condition de convexité en tout point du domaine. Cette condition de convexité peut s'écrire localement, à l'aide de l'opérateur Hessian, dans le cas incompressible, sous la forme :

$$\det(\nabla^2\psi(\lambda_1, \lambda_2)) \geq 0 \quad (2.18)$$

En pratique, la condition précédente est imposée en tout point de l'ensemble discret des dilatations principales $(\lambda_1^i, \lambda_2^i)$, telles que :

$$(\lambda_1^i, \lambda_2^i) \in \mathbf{V} = \left\{ (\lambda_1^j, \lambda_2^j) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*; \quad \lambda_1^{\min} \leq \lambda_1^j \leq \lambda_1^{\max}, \quad \lambda_2^{\min} \leq \lambda_2^j \leq \lambda_2^{\max} \right\}$$

Par la suite, S. LEJEUNES a affiné, dans le cadre de sa thèse [94], cette condition en introduisant la notion de stabilité de MIELKE [115].

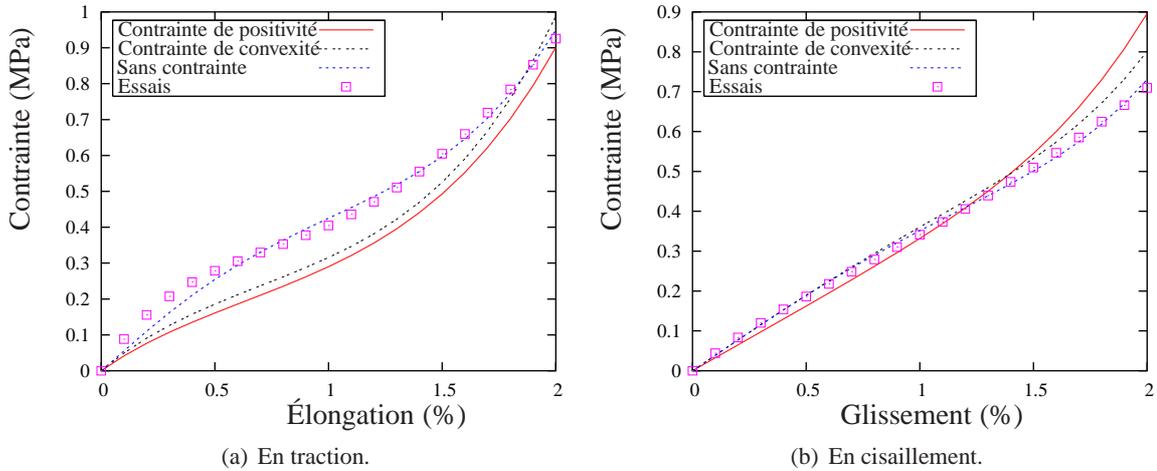


Figure 2.3 – Identification des paramètres du modèle de Haupt & Sedlan (issu de [93]).

2.4 Développements d'éléments finis hyperélastiques quasi-incompressibles

2.4.1 Formulation variationnelle

La résolution du problème d'équilibre hyperélastique incompressible se ramène au problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$\mathcal{E}(\vec{v}) = \int_{\Omega_0} \mathcal{W}(\bar{\bar{F}}(\vec{v})) dV - \mathcal{W}_{ext}(\vec{v}) \quad (2.19)$$

(6). et donc la poly-convexité

sous la contrainte d'incompressibilité locale :

$$J(\vec{v}) = \det(\bar{\bar{F}}(\vec{v})) = 1.$$

La difficulté principale de la résolution de ces problèmes, à l'aide de la méthode des éléments finis, réside en la formulation numérique d'éléments stables évitant les phénomènes de blocage ou des modes de déformation, à énergie nulle, de type *sablier*.

Pour s'affranchir d'une telle contrainte, plusieurs formulations ont été proposées, depuis les années soixante (*cf.* [54; 55; 56]), dont les approches variationnelles multi-champs, en déplacement et en pression, telles que :

- la formulation en lagrangien [123], qui présente l'inconvénient de la non-coercivité par rapport à la variable pression d'où la non-définie positivité du système tangent ;
- la formulation en lagrangien perturbé [105; 70], qui permet de régulariser le système tangent, via l'introduction d'un terme de perturbation fonction coercive de la pression hydrostatique ;
- la formulation en lagrangien augmenté [58; 59; 60], associée à un algorithme d'UZAWA, qui consiste à chercher une solution incompressible dans un espace "plus grand" que celui du problème initial afin d'éviter les phénomènes de blocages.

Par ailleurs, on peut citer les approches variationnelles en déplacement basées sur les méthodes de pénalité qui présentent l'avantage d'éliminer la variable pression et qui se ramènent physiquement à adopter une hypothèse de quasi-incompressibilité avec une fonction de pénalité qui correspond à une densité d'énergie de compressibilité. La minimisation de cette fonctionnelle obtenue via cette approche est équivalente (moyennant une méthode d'intégration réduite sélective) à la recherche d'un point selle de la fonctionnelle en lagrangien perturbé [106; 126].

$$\mathcal{L}_\alpha(\vec{v}, q) = \int_{\Omega_0} \left(\mathcal{W}(\bar{\bar{F}}(\vec{v})) + q(J(\vec{v}) - 1) - \frac{\alpha}{2} q^2 \right) dV - \mathcal{W}_{ext}(\vec{v}) \quad (2.20)$$

Les équations d'Euler associées à cette fonctionnelle sont :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \mathcal{W}(\bar{\bar{F}}(\vec{u}))}{\partial \bar{\bar{F}}} + p \text{Cof} \bar{\bar{F}}(\vec{u}) \right) : \delta \bar{\bar{F}} dV - \int_{\Omega_0} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV - \int_{\partial \Omega_F} \vec{T} \cdot \delta \vec{u} dS = 0 \\ \int_{\Omega_0} (J(\vec{u}) - 1 - \alpha p) \delta p dV = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Une autre approche en lagrangien perturbé consiste à considérer le problème d'un matériau hyperélastique compressible, en utilisant un découplage de la densité d'énergie de déformation en une partie isochorique, dépendant de la partie incompressible $\tilde{\bar{F}} = (J^{-1/3}) \bar{\bar{F}}$ de la transformation, et une partie volumique fonction de J . On obtient alors la solution quasi-incompressible pour des modules de compressibilité $1/\alpha$ infiniment grands. Cette approche a été mise en oeuvre par S. LEJEUNES [94] et présente deux avantages majeurs :

- le multiplicateur de Lagrange p est directement identifiable à la pression hydrostatique ;
- une convergence rapide vers la solution incompressible lorsque α tend vers zéro.

2.4.2 Éléments finis classiques

2.4.2.a Formulation discrète

La résolution numérique du problème variationnel Eq. 2.21 a été mise en oeuvre via le développement d'éléments finis quasi-incompressibles associés à un algorithme de résolution de type NEWTON-RAPHSON (*cf.* [15; 78; 94]). Ces développements restent basés sur une démarche classique commune à de nombreux problèmes en mécanique non-linéaire (voir par exemple [164; 6; 36]).

Ainsi en utilisant des fonctions d'interpolation, par éléments finis, respectivement pour le champ de déplacements \vec{u}^e et le champ de pression p^e , on aboutit à la forme discrète suivante :

$$\sum_{e=1}^{Nel} \langle \delta U^e, \delta P^e \rangle \left(\begin{bmatrix} K_{uu}^e & K_{up}^e \\ (K_{up}^e)^T & K_{pp}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U^e \\ \Delta P^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_u^e \\ R_p^e \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (2.22)$$

avec $\sum_{e=1}^{Nel} A$ l'opérateur classique d'assemblage.

En outre, le champ de pression étant choisi discontinu à l'interface entre éléments, on peut alors condenser statiquement les degrés de liberté ΔP^e , internes à l'élément e , soit :

$$\{\Delta P^e\} = -[K_{pp}^e]^{-1} (\{R_p^e\} + [K_{up}^e]\{\Delta U^e\}) \quad (2.23)$$

on obtient alors une matrice tangente et un vecteur résidu élémentaires tels que :

$$\begin{aligned} [K_t^e] &= [K_{uu}^e] - [K_{up}^e][K_{pp}^e]^{-1}[K_{up}^e]^T \\ \{R^e\} &= \{R_u^e\} - [K_{up}^e][K_{pp}^e]^{-1}\{R_p^e\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.4.2.b Choix des espaces d'interpolation

Pour une formulation mixte déplacement/pression, le choix des fonctions d'interpolation et de l'ordre d'interpolation est crucial. La construction des espaces discrets des déplacements et des pressions nécessite une attention particulière quant à leurs dimensions respectives. Ainsi un espace de pression trop grand entraîne un système d'équations sur-contraint. A l'inverse, un espace sous-dimensionné induit des oscillations de la solution en pression et des modes de sabliers pour la réponse en déplacement.

On trouve dans la littérature, un certain nombre de critères théoriques ou numériques permettant de faire un tri parmi l'ensemble des possibilités, ainsi on peut citer :

- la condition *L.B.B.*⁽⁷⁾ ou condition *inf-sup* [124; 26; 5], qui est une condition nécessaire pour assurer la stabilité de la solution avec le raffinement du maillage. Elle reste cependant, difficile à mettre en oeuvre dans la plupart des cas et en particulier en grandes déformations [162].
- des patch-tests ou tests numériques simples permettant de vérifier la consistance et la stabilité des éléments finis mixtes, [141; 163]. Plus simples à mettre en oeuvre que la condition LBB, ils sont souvent basés sur l'étude du rapport entre le nombre de noeuds de pression (ou nombre d'équations associées à la contrainte d'incompressibilité) et le nombre d'inconnues de déplacement, ainsi que son évolution asymptotique avec la finesse du maillage.

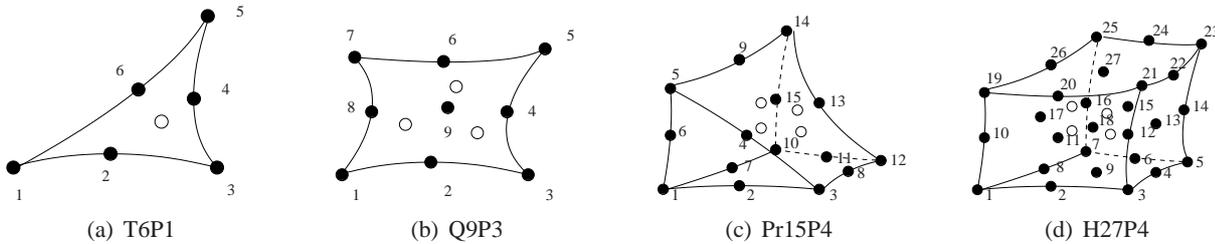
Plus récemment, pour assurer la stabilité et la fiabilité des éléments finis incompressibles, des méthodes de stabilisation et/ou d'enrichissement ont été proposées (par exemple dans [134; 131]), permettant d'utiliser des éléments à interpolation linéaire en déplacement.

En ce qui concerne nos propres développements, plusieurs choix de discrétisations ont été testés, avec plus ou moins de réussite. Les éléments finalement retenus sont présentés dans le tableau Tab. 2.3, leur géométrie sur la figure Fig. 2.4.

L'implémentation numérique de ces éléments a d'abord été réalisée en Fortran, pendant les années 80 et 90, dans les architectures MEF et SIC développés via une collaboration entre l'UTC et le LMA, puis plus récemment, intégrés en C++ dans le code ZéBuLoN, développé par l'ENSMP, l'ONERA et l'INSA Rouen.

(7). pour LADYZHENSKAYA-BABUSKA-BREZZI

Type d'élément	T6P1	Q9P3	Pr15P4	H27P4
Dimension	2D/Axi	2D/Axi	3D	3D
Type Géométrique	Triangle	Quadrangle	Prisme	Hexaèdre
Interpolation des déplacements	Quadratique	Quadratique	Quadratique	Quadratique
Interpolation de la pression	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1, \xi, \eta \rangle$	$\langle 1, \xi, \eta, \zeta \rangle$	$\langle 1, \xi, \eta, \zeta \rangle$

Tableau 2.3 – *Éléments à interpolation discontinue de la pression.*Figure 2.4 – *Géométrie des éléments finis hyperélastiques incompressibles.*

2.4.3 Éléments finis réduits

La modélisation du comportement de pièces en élastomère et à géométrie complexe, telles que les structures de révolution multi-couches ou les structures élancées en composite à matrice élastomérique, nécessite une modélisation numérique affinée du comportement de ces structures. L'utilisation d'éléments finis classiques pour de telles modélisations et en particulier les éléments tridimensionnels, conduit souvent à une taille prohibitive.

Le développement de modèles réduits permettant de retranscrire le comportement de ce type de structures a fait l'objet de nombreux travaux, que l'on peut classer en deux catégories : les méthodes numériques de sous-structuration, par sous-domaines [104], ou multi-niveaux [121] et les techniques d'homogénéisation appliquées aux composites à matrice élastomériques [48]. La validité de ces méthodes s'avère cependant limitée en présence de non-linéarités géométriques et/ou matérielles et de contrainte d'incompressibilité que présente l'élastomère.

Nos travaux dans ce domaine visent à mettre à profit les symétries géométriques et matérielles telles la symétrie de révolution ou l'invariance par translation suivant une direction. Elles s'inscrivent dans une logique de réduction de modèles inspirée des méthodes éléments finis semi-analytiques :

- développées par CHEUNG au milieu des années 70, pour la modélisation des plaques élastiques,
- et proposées par HYER et COOPER [77] pour l'analyse des tubes composites sous contraintes thermiques.

Les premières consistent à discrétiser seulement la section transverse d'un solide prismatique et à choisir des fonctions de forme continues pour la direction longitudinale, ces méthodes ont depuis trouvé de nombreux domaines d'applications [29]. Alors que la seconde approche est basée sur des développements en série de Fourier pour modéliser le comportement des structures à géométrie de révolution mais avec des dissymétries matérielles et/ou de chargement.

Ces travaux que nous avons initiés en 1986 [15], pour les éléments finis pseudo-axisymétriques⁽⁸⁾, puis repris en 2002 dans le cadre de la thèse de Stéphane Lejeunes [95; 96], pour les éléments 3D/2D ou 3D/1D, ont permis d'étendre ces méthodes de réduction de modèles à des comportement géométrique et matériellement non-linéaires tels que l'hyperélasticité incompressible.

(8). Signalons que cette approche a, entre temps, été mise en oeuvre en 1992 par MARUSAK et BECKER [109]

2.4.3.a Les éléments pseudo-axisymétriques

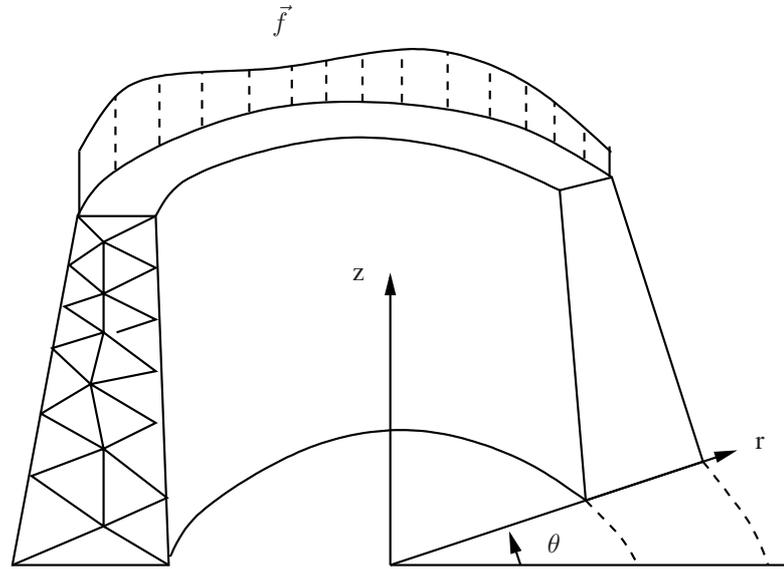


Figure 2.5 – Réduction pseudo-axisymétrique

La mise en oeuvre des éléments pseudo-axisymétriques est adaptée à la résolution des problèmes d'équilibre de structures à symétrie de révolution, soumises à des sollicitations non-axisymétriques. Elle est basée sur une décomposition en série de Fourier des champs inconnus (composantes du champ de déplacement) dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} u_r(r, \theta, z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} (u_{r_i}^s(r, z) \cos(i\theta) + u_{r_i}^a(r, z) \sin(i\theta)) \\ u_\theta(r, \theta, z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} (u_{\theta_i}^s(r, z) \sin(i\theta) + u_{\theta_i}^a(r, z) \cos(i\theta)) \\ u_z(r, \theta, z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} (u_{z_i}^s(r, z) \cos(i\theta) + u_{z_i}^a(r, z) \sin(i\theta)) \end{cases} \quad (2.25)$$

Elle permet de ramener la résolution du problème tridimensionnel à la résolution de problèmes bidimensionnels indépendants de la coordonnée circonférentielle θ . Dans le cas linéaire et compte tenu de l'orthogonalité de la base de projection, la mise en oeuvre de cette approche est facilitée par le découplage du problème global en n_u problèmes indépendants. Dans le cas de non-linéarités géométriques ou matérielles, le découplage entre harmoniques s'avère irréalisable, il devient alors nécessaire de formuler une hypothèse sur l'approximation du champ de déplacement de manière à réaliser un compromis entre la précision recherchée et la taille du problème à résoudre. Cette approximation consiste à tronquer la série de Fourier à un ordre raisonnablement limité, mais qui devra refléter, avec une précision convenable, le comportement global et local de la structure soumise à des sollicitations simples (traction/compression, cisaillement et flexion) induisant des champs de déformations relativement réguliers.

En outre, si l'on considère uniquement le mode axisymétrique combiné aux modes symétriques par rapport au plan $\theta = 0$:

$$\begin{cases} u_r(r,\theta,z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} u_{r_i}(r,z) \cos(i\theta) \\ u_\theta(r,\theta,z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} u_{\theta_i}(r,z) \sin(i\theta) \\ u_z(r,\theta,z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} u_{z_i}(r,z) \cos(i\theta) \end{cases} \quad (2.26)$$

Pour les formulations hybrides, le champ de pression hydrostatique peut aussi être développé de façon symétrique :

$$p(r,\theta,z) \approx \sum_{i=0}^{n_p} p_i(r,z) \cos(i\theta) \quad (2.27)$$

La formulation élémentaire de ces éléments pseudo-axisymétriques s'écrit de façon analogue au cas tridimensionnel, en partant des approximations par éléments finis :

$$\begin{cases} u_r(r,\theta,z) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=1}^{l_u} N_u^j(r,z) U_{r_i}^j \cos(i\theta) \\ u_\theta(r,\theta,z) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=1}^{l_u} N_u^j(r,z) U_{\theta_i}^j \sin(i\theta) \\ u_z(r,\theta,z) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=1}^{l_u} N_u^j(r,z) U_{z_i}^j \cos(i\theta) \\ p(r,\theta,z) = \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=1}^{l_p} N_p^j(r,z) P_i^j \cos(i\theta) \end{cases} \quad (2.28)$$

avec :

- N_u^j et N_p^j , les polynômes d'interpolations respectifs du déplacement et de la pression ;
- $(U_{r_i}^j, U_{\theta_i}^j, U_{z_i}^j)$, les degrés de libertés nodaux de déplacement ;
- P_i^j , les degrés de libertés de pression.

L'intégration numérique par rapport à la coordonnée circonférentielle est basée sur la formule de quadrature de Gauss-Chebyshev :

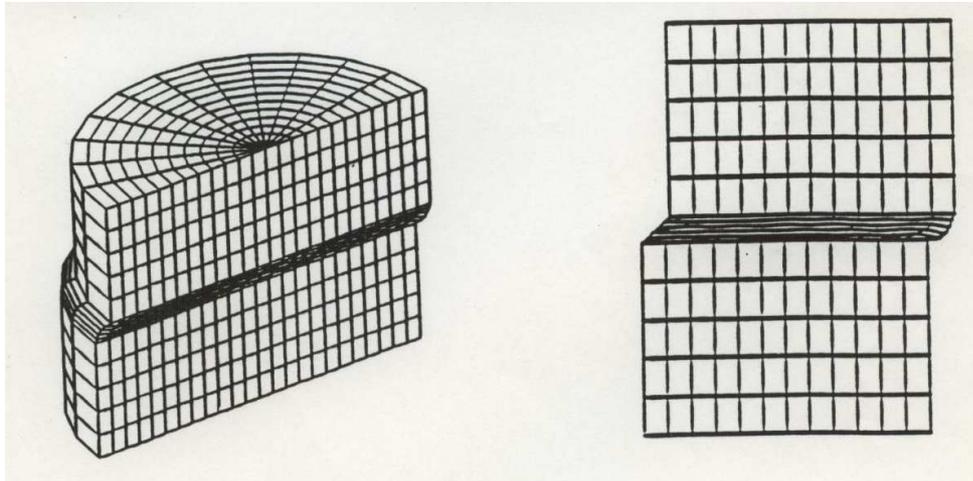
$$\int_r \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_z r f(r,\theta,z) dr d\theta dz = \sum_{j=1}^J \frac{2\pi}{J} \int_r \int_z r f(r,\theta_j,z) dr dz \quad \text{avec} \quad \theta_j = \frac{2j-1}{J} \pi \quad (2.29)$$

Des essais numériques, pratiqués sur différentes formes de loi de comportement hyperélastique, ont indiqué que la valeur optimale de J est donnée par :

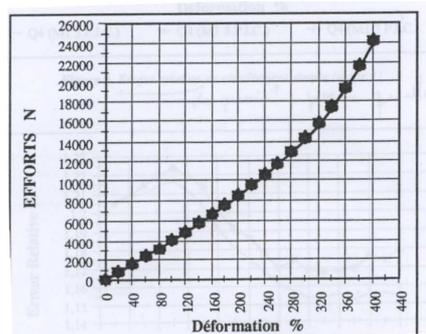
$$J = 2n_u + 1.$$

L'évaluation de la fiabilité de cette formulation en série de Fourier a été effectuée au niveau global, via la confrontation de la réponse du modèle pseudo-axisymétrique, à 3 harmoniques, avec celle du modèle 3D, simulant le comportement d'une éprouvette multi-couches acier-élastomère [16]. Le modèle de comportement adopté pour l'élastomère correspond à la loi de HART-SMITH à 3 paramètres.

Les résultats présentés Fig. 2.6 correspondent à un cisaillement couplé à une compression suivant l'axe de révolution et montrent que la modélisation pseudo-axisymétrique offre un écart relatif, au niveau de la réponse globale, inférieur à 1.25% par rapport à la solution 3D de référence, avec un gain de 7.5 sur le temps de calcul et de 52 sur l'espace mémoire nécessaire à la résolution du problème.



(a) Comparaison Déformée 3D/déformée Pseudo-axi.



(b) Confrontation des réponses globales.

Figure 2.6 – Test de compression et cisaillement d'un lamifié élastomère-métal.

2.4.3.b Les éléments réduits 3D/2D

Les éléments réduits 3D/2D sont adaptés aux structures élancées et invariantes suivant une direction. L'idée de départ consiste à construire des éléments finis réduits, basés sur des fonctions de formes suffisamment riches pour approximer les champs de déplacement \mathbf{u} et de pression p sur une unité représentative de la structure dans une direction donnée. L'unité représentative (voir Fig. 2.7) est constituée d'une rangée d'éléments dans la direction à condenser.

Ainsi, dans le cas d'une réduction 3D-2D, on obtient avec le paramétrage $\xi = 2Z/L$:

$$\begin{cases} \vec{u}(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^{n_u} \vec{u}_i(X,Y)T_i(\xi) \\ p(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^{n_p} p_i(X,Y)T_i(\xi) \end{cases} \quad (2.30)$$

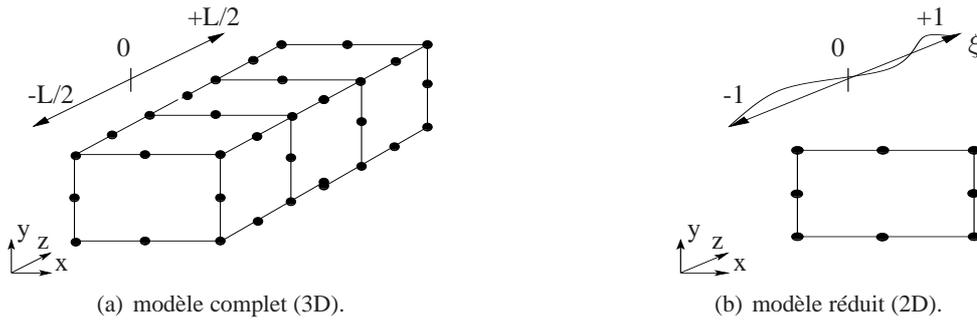


Figure 2.7 – Réduction de modèle 3D-2D.

n_u et n_p étant les ordres d'approximations des champs dans la base polynomiale \mathcal{T} .

Le choix de cette base de projection doit être guidé par le type de sollicitations à traiter et doit permettre de décrire l'évolution des grandeurs mécaniques suivant la direction condensée (pour des sollicitations régulières de type traction, cisaillement ou flexion), en traduisant les effets de bords au voisinage des sections extrêmes. Ainsi, nous utilisons les polynômes de Lagrange d'ordre 1 (permettant d'imposer directement les conditions cinématiques de type translations et/ou rotations), enrichis par des fonctions bulles, constituant une correction de l'évolution des grandeurs mécaniques dans la direction condensée. Soit de façon formelle, en utilisant les polynômes de Legendre $L_n(\xi)$:

$$\begin{cases} T_0(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \\ T_1(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \\ T_n(\xi) = \frac{L_n(\xi) - L_{n-2}(\xi)}{\sqrt{2(2n-1)}} \end{cases} \quad (2.31)$$

A partir de la décomposition des champs inconnus présentés Eq. 2.30, on peut réaliser une approximation éléments finis classique du déplacement et de la pression en utilisant des fonctions de forme basées sur des polynômes de Lagrange :

$$\begin{cases} u_k(X, Y, Z) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=1}^{l_u} N_u^j(X, Y) U_{k_i}^j T_i(\xi) \\ p(X, Y, Z) = \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=1}^{l_p} N_p^j(X, Y) P_i^j T_i(\xi) \end{cases} \quad (2.32)$$

N_u^j et N_p^j sont les polynômes d'interpolations respectifs du déplacement et de la pression. Ainsi, les degrés libérés pour les noeuds de déplacement sont les composantes $U_{k_i}^j$ du déplacement dans la base \mathcal{T} , alors que les composantes P_i^j de la pression constituent les ddls des noeuds de pression.

Partant d'une formulation élémentaire identique aux éléments finis classiques présentés au paragraphe précédent, et en utilisant un schéma d'intégration de Gauss selon la direction ξ , une bibliothèque d'éléments finis, géométriquement bidimensionnels, a été implémentée dans le code ZéBuLoN. Par ailleurs, des essais numériques ont permis de démontrer qu'une approximation relativement optimale du champ de pression, vis-à-vis du critère de stabilité, consiste à prendre :

$$n_p = n_u - 2.$$

Cette approche de réduction de modèles 3D/2D a été validée, aussi bien au niveau de la réponse globale que locale, via des comparaisons avec un modèle de référence utilisant des éléments finis 3D classiques. Le modèle de référence est basé sur la modélisation du comportement d'un barreau élastomérique à comportement hyperélastique quasi-incompressible de type MOONEY-RIVLIN, soumis à des essais de traction, cisaillement ou de flexion en imposant des déplacements sur une section extrême et en encastrant l'autre extrémité (voir figure Fig. 2.8).

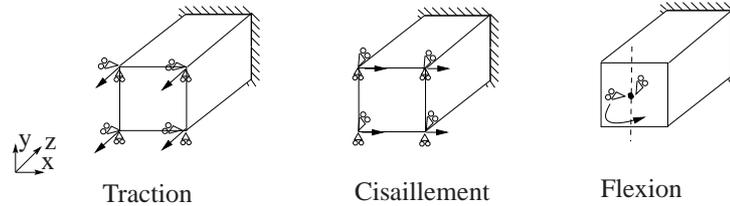


Figure 2.8 – Type de sollicitations traitées.

Pour la réponse globale, la confrontation s'effectue à partir des composantes du torseur résultant des réactions aux déplacements imposés. On utilise un modèle réduit 3D-2D à 25 éléments de type Q9P3 avec $n_u = 12$ et $n_p = 9$, ce qui représente un système à 9972 ddls, au lieu des 39231 ddls du modèle 3D de référence. La figure Fig. 2.9 présente les résultats d'un test de traction où l'on impose un déplacement vertical tout en bloquant les déplacements transverses et les rotations sur une extrémité de la poutre, l'autre extrémité est encastrée. Les figures Fig. 2.10 et Fig. 2.11 correspondent aux résultats d'un test de cisaillement et d'un test de flexion. Le bilan de ces tests traduit le bon accord entre le modèle réduit et complet, concernant le comportement global d'une structure type.

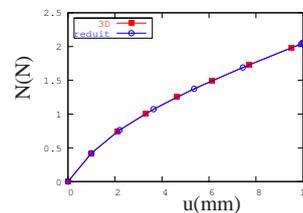


Figure 2.9 – Test de traction.

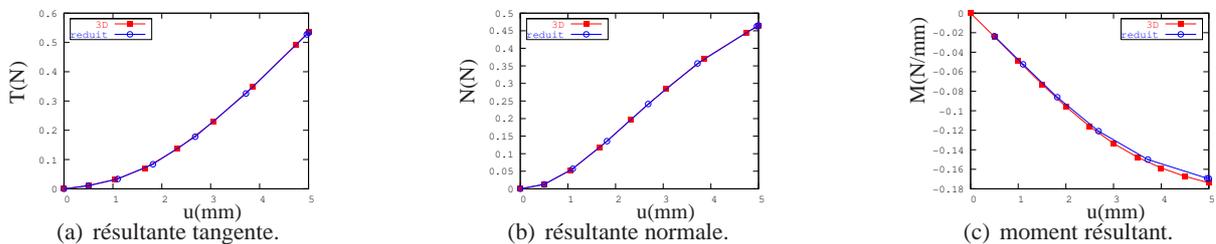


Figure 2.10 – Test de cisaillement, poutre élastomérique (3D).

Pour la validation des résultats locaux, on peut construire, à partir des approximations de la cinématique et de la pression d'un modèle réduit, les champs de contraintes et de déformations correspondants. Nous présentons (figure Fig. 2.12), les cartes des déformations principales et de la pression hydrostatique,

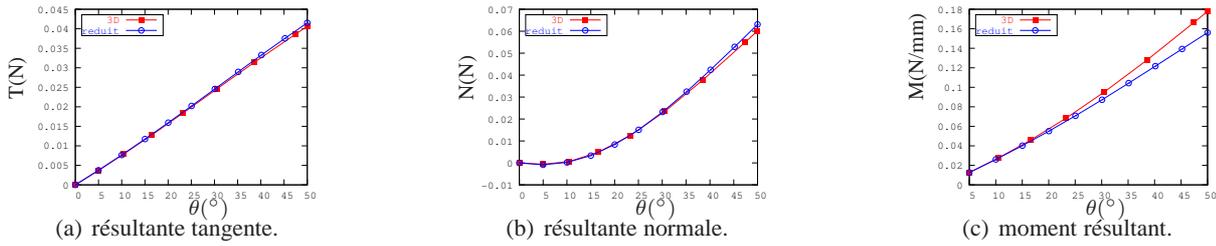


Figure 2.11 – Test de flexion, poutre élastomérique (3D).

issues du modèle réduit 3D-2D sous chargement en cisaillement, en comparaison avec le modèle 3D. On constate une bonne concordance, entre les deux modèles, aussi bien au niveau de l'indication des zones critiques qu'au niveau des valeurs extrêmes.

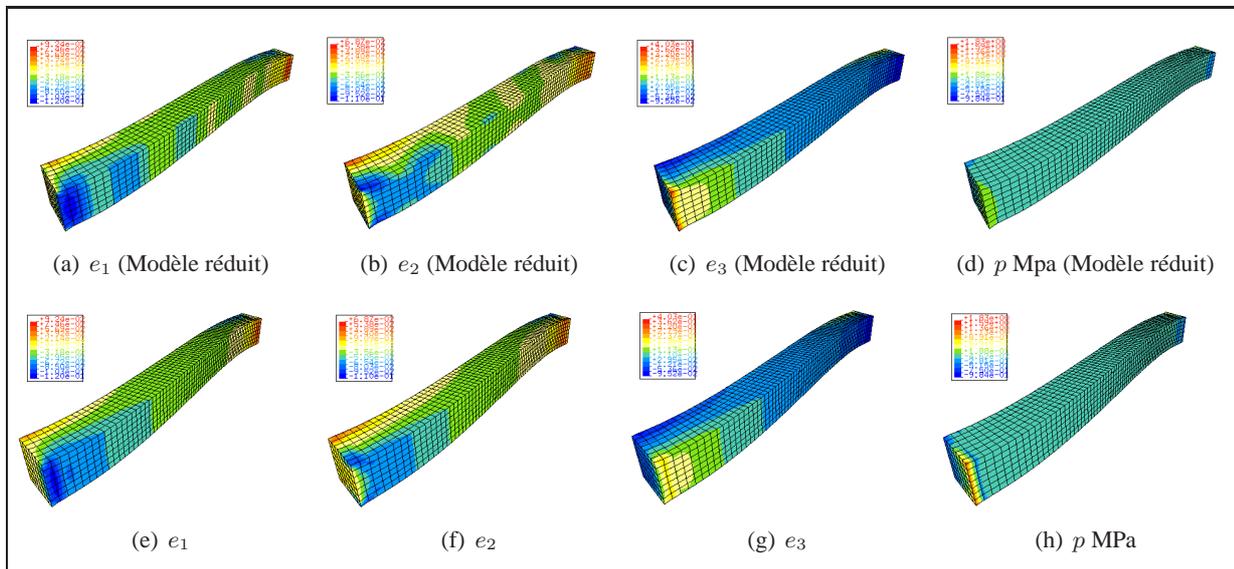


Figure 2.12 – Confrontation locale sur un essai de cisaillement.

2.4.4 Quelques exemples d'applications

2.4.4.a Calcul d'une butée sphérique

A titre d'application des éléments pseudo-axisymétriques, nous présentons ici, l'exemple d'une butée sphérique Fig. 2.13, constituée d'un stratifié élastomère-métal, qui joue le rôle de filtre mécanique entre les pales et le rotor d'hélicoptère et qui doit répondre simultanément aux critères suivants :

- une rigidité élevée en compression pour reprendre les forces centrifuges dues à la rotation des pales ;
- de faibles rigidités en cisaillement, flexion et torsion pour découpler les mouvements relatifs de traînée, de battement et de pas, afin de minimiser les efforts transmis au mât rotor.

La structure de cette butée, destinée au rotor arrière du SUPER PUMA MKII, est constituée de :

- deux armatures métalliques interne et externe,

- d’une dizaine de couches d’élastomère de 1mm d’épaisseur, intercalées de coupelles métalliques de forme sphérique.

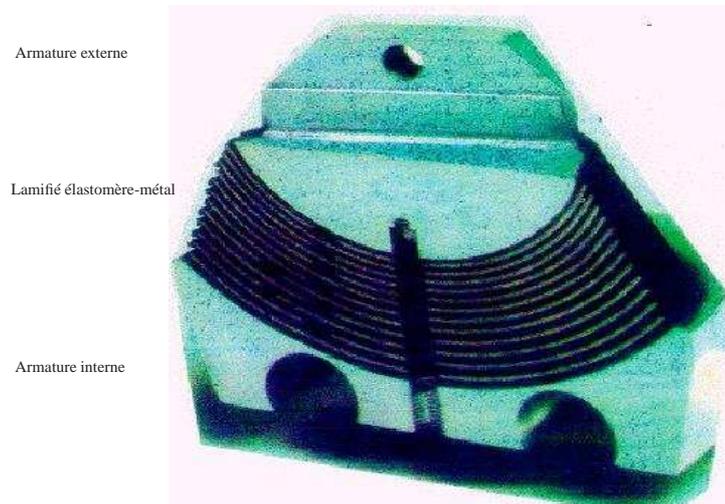
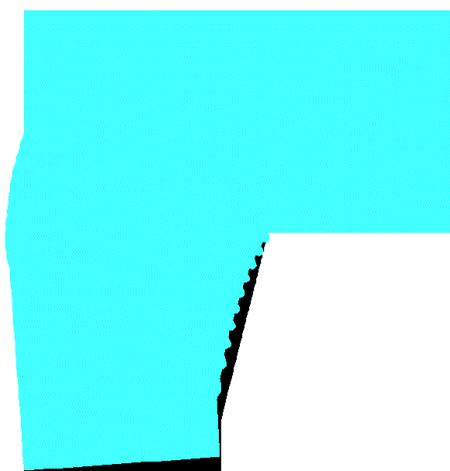


Figure 2.13 – Coupe de la butée sphérique.

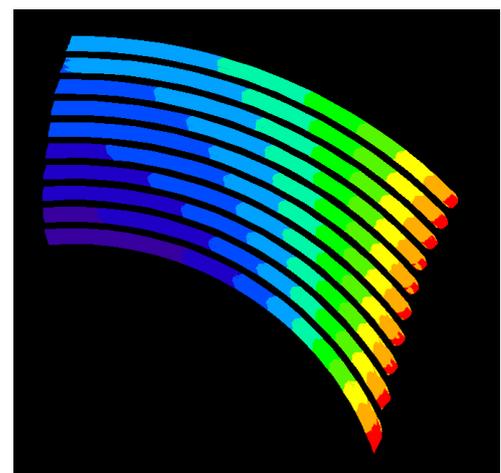
Les armatures et les coupelles métalliques sont supposées linéairement élastiques, alors que l’élastomère obéit au comportement quasi-incompressible de HART-SMITH.

Le chargement considéré correspond à une déformation en battement (rotation de l’armature externe), couplée à une pré-déformation en compression correspondant à une force centrifuge de 50 000N, appliquée sur l’armature interne.

Les figures Fig. 2.14(a) et Fig. 2.14(b) présentent les résultats du modèle pseudo-axisymétrique à 3 harmoniques, soit 8 ddls par noeud et donc un système global de 17 600 ddls, au lieu de quelques centaines de milliers pour un modèle 3D.



(a) Déformée



(b) Champ de cisaillement maximal

Figure 2.14 – Résultats, sur la section $\theta = 0$, de la butée sous compression et battement.

2.4.4.b Calcul d'un bras élastomérique

La seconde application concerne le bras élastomérique EFB⁽⁹⁾. Il s'agit d'un composite ternaire, constitué de baguettes en verre/epoxy et en carbone/epoxy noyées dans une matrice élastomérique. Cette pièce est chargée de relier la pale au mât rotor d'un hélicoptère en assurant à la fois le rôle d'articulation mécanique et d'amortisseur de traînée afin de réaliser un gain en encombrement, en maintenance et au final en coût.

La structure présentée dans cet exemple Fig. 2.15 a été récemment modélisée [94] et constitue une simplification de la pièce étudiée dans les travaux de D. DELORME [38] puis de S. Méo [119]. Elle présente un rapport d'élancement voisin de 8.5. Le comportement des baguettes a été modélisé par une loi élastique linéaire orthotrope, et l'élastomère par un modèle hyperélastique quasi-incompressible de type MOONEY-RIVLIN.

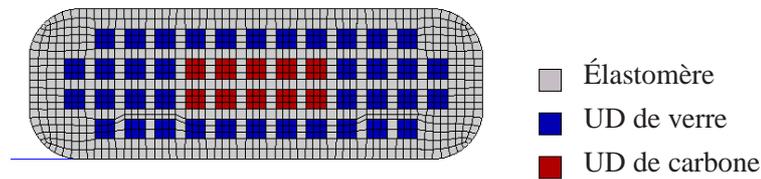


Figure 2.15 – Maillage de la section en éléments réduits 3D-2D (type q9p3).

Le cas de charge traité correspond à un essai combiné de traction-cisaillement. La section de la structure est maillée avec 1117 éléments réduits de type Q9P3 (cf. figure Fig. 2.15). Avec $n_u = 11$ et $n_p = 9$, le modèle réduit comprend 152 361 degrés de liberté. A titre de comparaison, si l'on devait considérer un maillage tridimensionnel de la structure, ayant la même taille élémentaire que le maillage réduit proposé, on obtiendrait plus de 5 millions de degrés de liberté.

La figure Fig. 2.16 montre l'isocouleur de la contrainte principale maximale dans les baguettes de carbone sur la déformée 3D reconstituée, alors que la figure Fig. 2.17 présente la distribution de la pression hydrostatique sur la section encastree.

2.5 Bilan

Partant de la définition d'un milieu hyperélastique et via des considérations thermodynamiques, nous avons passé en revue, dans ce chapitre, les différentes écritures des lois de comportement associées, avec la prise en compte, ou non, de la condition d'incompressibilité locale, généralement caractéristique des matériaux élastomères.

Dans le cas des milieux hyperélastiques incompressibles, nous avons proposé une forme *thermodynamiquement cohérente* de la loi de comportement, dissociant la partie sphérique de la partie déviatorique des tenseurs de contraintes. Cette forme reste compatible avec la formulation des lois quasi-incompressibles (par passage à la limite) et présente l'avantage de donner une vraie signification physique à la variable **pression hydrostatique** qui, sur le plan numérique, permet une formulation variationnelle plus claire des problèmes d'équilibres en hyperélasticité incompressible.

Au niveau des formes d'énergie hyperélastique, la bibliographie propose une multitude de modèles, phénoménologiques ou micro-physiquement motivés et dont le nombre de paramètres caractéristiques varie selon le domaine de déformation envisagé. La complexité de ces modèles réside principalement dans la difficulté d'identification de leurs paramètres. Ainsi, de par notre modeste expérience dans ce domaine,

(9). Elastomeric Flex Beam

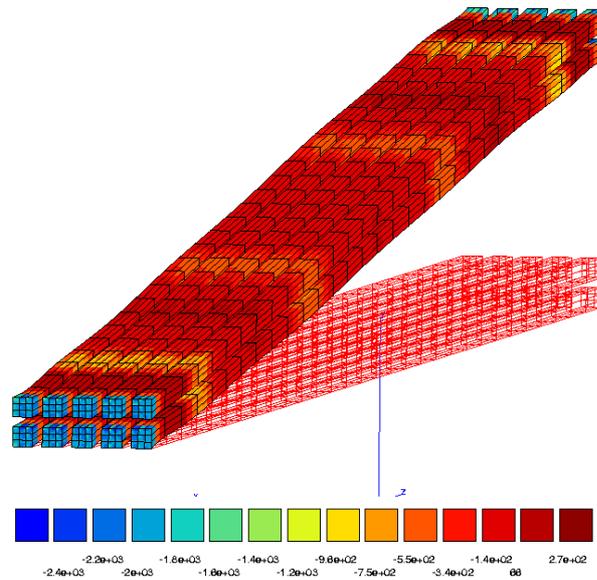


Figure 2.16 – Contrainte principale maximale (en MPa) dans les baguettes de carbone, configuration déformée et non déformée ($n_u = 11, n_p = 9$).

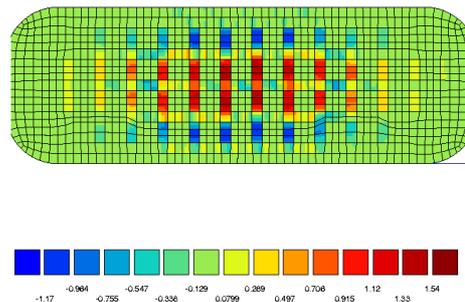


Figure 2.17 – Pression hydrostatique (en MPa) dans l'élastomère ($n_u = 11, n_p = 9$).

nous proposons à travers quelques exemples, les stratégies d'identification associées aux modèles usuellement utilisés. Par ailleurs, on peut noter que l'identification et la stabilité matérielle de la loi identifiée restent un problème ouvert qui mérite d'être exploré d'une façon plus générale et non limitée aux modèles polynomiaux, comme nous l'avons fait à ce jour.

Concernant la modélisation numérique du comportement des structures élastomériques, nous avons mis en oeuvre des éléments finis hyperélastiques multi-champs, répondant aux critères de stabilité numérique associés à la contrainte d'incompressibilité. Mais notre apport essentiel, réside dans le couplage du comportement hyperélastique incompressible avec l'approche de réduction de modèles. Ainsi en utilisant les propriétés d'invariance géométrique et matérielle des structures dans une direction, ces éléments finis réduits permettent de ramener le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel, voire mono-dimensionnel.

Cette approche se révèle très prometteuse, car elle permet, pour des structures complexes :

- de déterminer la réponse globale (prévision du comportement de macro-modèle, estimation de la charge critique d'instabilité...)
- d'évaluer les états locaux de contraintes et de déformations, sous des chargements réguliers ;

avec des gains sensibles en temps de calcul et en taille des systèmes à résoudre et avec une précision

raisonnable sur les résultats aussi bien au niveau global que local.

Elle peut, cependant, être améliorée par :

- l'enrichissement de la base de projection, dans le cas des éléments finis réduits 3D/2D ou 3D/1D, afin de mieux prendre en compte les effets de bords dans la direction de réduction ;
- la mise en oeuvre de techniques similaires au *p-méthodes* [49], mais uniquement dans la direction de réduction, associées à un estimateur d'erreur *a priori*.

Les comportements élasto-dissipatifs en grandes transformations

Les modèles hyperélastiques présentés au chapitre précédent ne rendent pas compte du caractère dissipatif du comportement des élastomères (sensibilité à la vitesse de déformation, effet d'hystérésis, endommagement. . .). Or, ce sont les aspects dissipatifs, liés à la viscosité et à la plasticité, qui leur confère des propriétés amortissantes, induisant une utilisation de plus en plus répandue dans des systèmes passifs de filtrage des vibrations ou pour l'absorption des chocs.

Cependant, la modélisation de ce comportement dissipatif reste moins développée que celle des matériaux métalliques, à cause de difficultés liées aux grandes déformations, à la complexité des mécanismes micro-structuraux qui induisent ces comportements dissipatifs et la sensibilité à de nombreux paramètres physico-chimiques tels que la température, le taux de charges, le degré de vulcanisation. . . Dans la littérature, on peut trouver une grande variété de modèles privilégiant tel ou tel mécanisme (frottement visqueux ou sec, glissement interne, effet Mullins, endommagement par rupture de chaîne ou par cavitation. . .). Mais tous ces modèles restent spécifiques à un matériau donné ou une application limitée, voire même à la sensibilité scientifique des auteurs. . . Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps, des constatations expérimentales caractérisant le comportement dissipatif et non-linéaire d'une famille d'élastomères. Ensuite, après une introduction du cadre thermodynamique en grandes transformations isothermes, et une présentation de l'état de l'art des modèles de comportements dissipatifs, nous exposons les modèles hyper-visco-élastiques et hyper-visco-plastiques que nous avons mis en oeuvre durant les dernières années. Quelques résultats d'identification, sur les modèles les plus significatifs, sont finalement montrés.

PLAN DU CHAPITRE 3

3.1	Présentation générale	45
3.2	Observations expérimentales	45
3.3	Cadre thermodynamique	47
3.3.1	Notions de configurations intermédiaires	48
3.3.2	Formalisme lagrangien	50
3.3.3	Formalisme eulérien	50
3.3.4	Application aux modèles rhéologiques	51
3.4	Exemples de modèles rhéologiques hyper-visco-élastiques	52
3.4.1	Modèle de Poynting-Thomson	52
3.4.1.a	Écriture lagrangienne	53
3.4.1.b	Écriture eulérienne	53
3.4.2	Modèle de Zener	54
3.4.2.a	Écriture lagrangienne	54
3.4.2.b	Écriture eulérienne	54
3.4.3	Choix des potentiels	55
3.4.4	Exemples d'identifications	55
3.4.4.a	Modèle de ZENER	56
3.4.4.b	Modèle de POYNTING-THOMSON	57
3.4.5	Pertinence des deux modèles	58
3.5	Un modèle hyper-élasto-visco-plastique	59
3.5.1	Présentation du modèle	59
3.5.2	Équations constitutives	59
3.5.3	Identification des paramètres	60
3.6	Bilan	61

3.1 Présentation générale

D'une manière générale, un comportement élasto-dissipatif se caractérise par des évolutions thermodynamiquement irréversibles. L'état du système à un instant donné dépend de l'histoire de son évolution. D'un point de vue micro-structural, le comportement dissipatif des élastomères est principalement dû aux glissements, au niveau des points de jonctions à faible énergie, entre les différents constituants (entre macro-chaînes moléculaires et/ou entre chaînes et charges). Ces glissements entraînent des frottements visqueux ou secs qui génèrent alors une perte d'énergie.

Dans la littérature, on trouve plusieurs tentatives pour traduire ces comportements élasto-dissipatifs, dont on résume ici les grandes orientations :

- le comportement viscoélastique,
- le comportement élasto-visco-plastique,
- le comportement endommageable.

Sur ces différents volets de comportements, une analyse bibliographique détaillée est présentée en Annexe C.

3.2 Observations expérimentales

Lorsqu'on observe la réponse en cisaillement d'un élastomère en silicone chargé en silice, sous sollicitations harmoniques, on constate dans un premier temps, un comportement fortement non-linéaire. En outre, la variation des paramètres de chargement tels que l'amplitude, la fréquence et la température de l'essai, permet de mettre en évidence plusieurs phénomènes :

- l'augmentation de la rigidité globale du cycle vis-à-vis de la fréquence de sollicitation, ou du taux de glissement imposé (Fig. 3.1) :

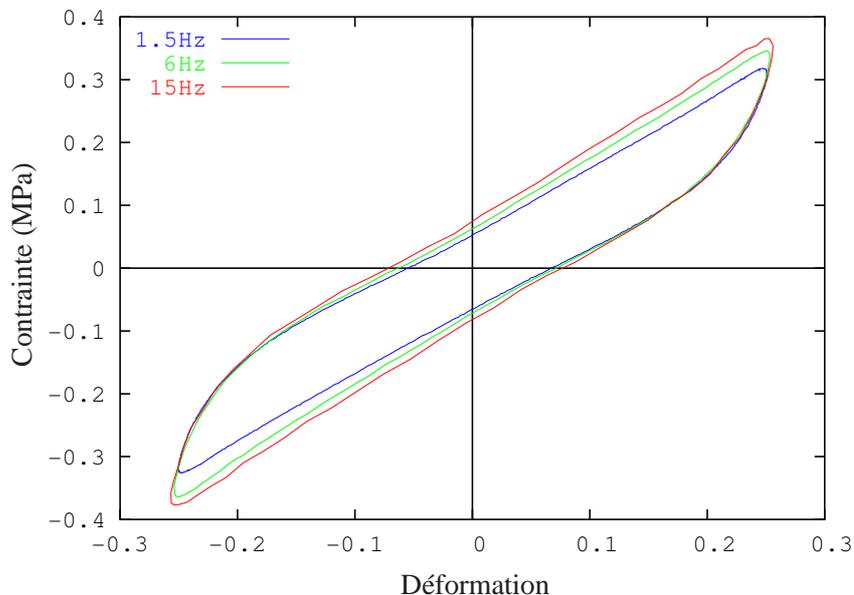


Figure 3.1 – Influence de la fréquence de sollicitation sur la réponse en glissement simple.

- l'assouplissement global du cycle d'hystérésis avec l'accroissement de l'amplitude de sollicitation, phénomène connu sous le nom d'EFFET PAYNE [50] (Fig. 3.2) :

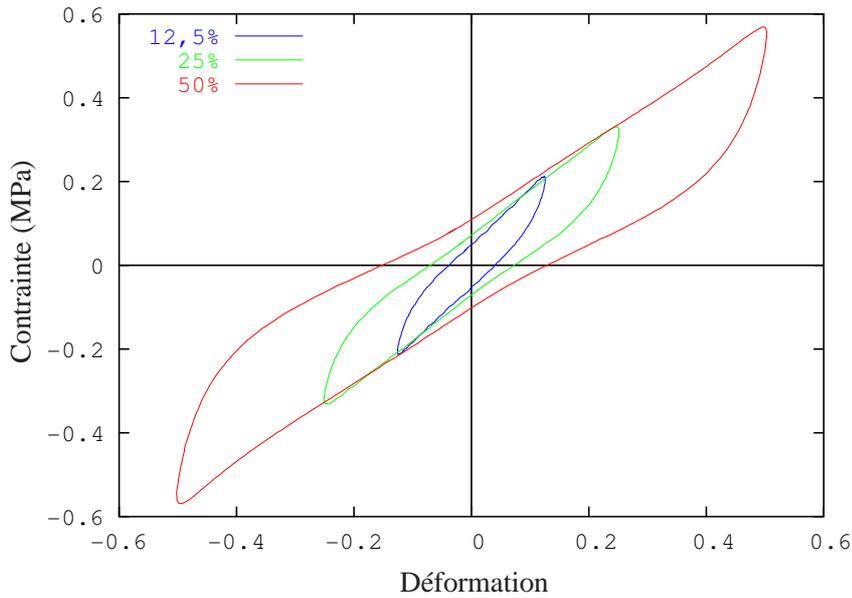


Figure 3.2 – Influence de l'amplitude de déformation sur la réponse en glissement simple.

- pour les faibles températures d'essai (en deçà de -25°C), la réponse devient fortement non-linéaire avec une augmentation sensible de la dissipation, Fig. 3.3 :

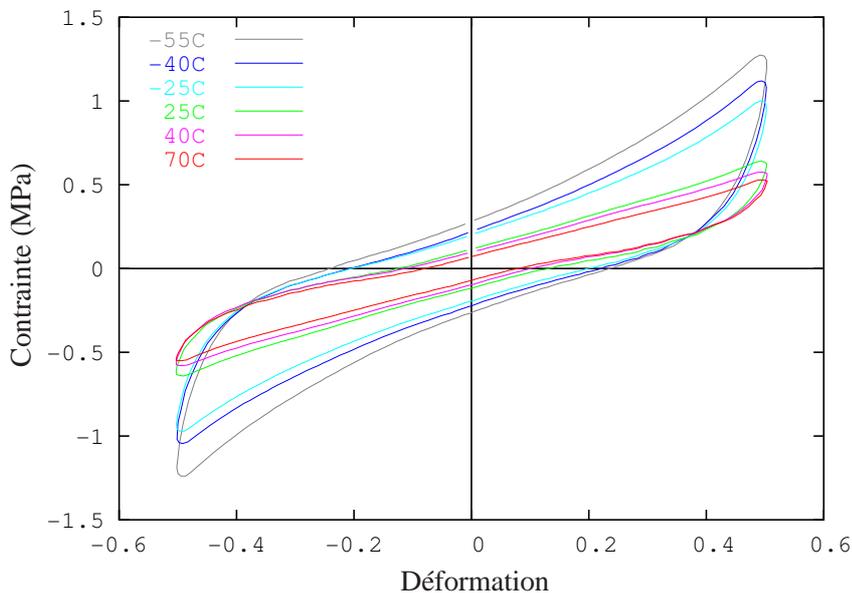


Figure 3.3 – Influence de la température sur la réponse en glissement simple.

Ainsi, l'accroissement de l'amplitude de sollicitation et la diminution de la température induisent les mêmes effets sur la réponse cyclique, à savoir, l'assouplissement du cycle et l'augmentation de la dissipation. En effet, aux amplitudes élevées ou aux faibles températures, on observe une accentuation de la non-linéarité de comportement matérialisée par (cf. Fig. 3.4) :

- la présence d'un **point anguleux** ① au changement du signe de la sollicitation.

- l'existence d'un **étranglement** de l'hystérésis au passage à l'origine ② .
- un **raidissement** local en bout de cycle ③.

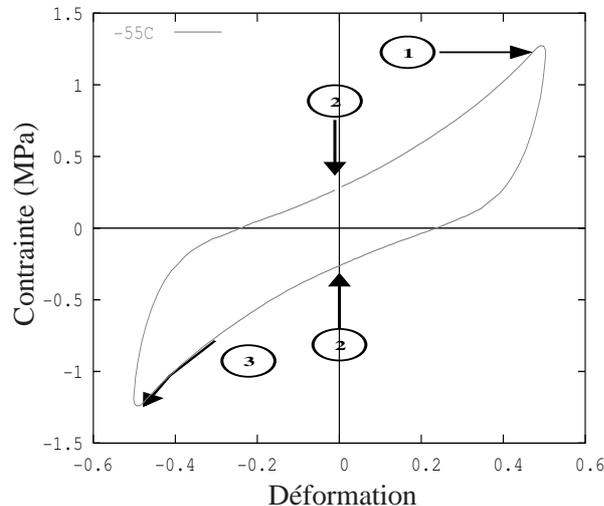


Figure 3.4 – Non-linéarités de comportement aux faibles températures ou aux amplitudes élevées.

Pour résumer ces constatations expérimentales, on peut donc conclure qu'outre les caractères élastique et visqueux du matériau, ces non-linéarités indiquent la présence de mécanismes dissipatifs liés à la **plasticité** (frottement secs à l'interface charges-matrice de l'élastomère, par exemple). Ce comportement plastique est d'ailleurs plus sensible aux faibles températures où les chaînes moléculaires et les liaisons chaînes/charges sont plus *raides et fragiles*.

Ainsi, pour prendre en compte toutes ces observations expérimentales, les modèles de comportement à bâtir devront englober les aspects suivants :

- l'hyperélasticité, pour traduire les mécanismes de déformation réversibles,
- la viscosité, pour modéliser les effets retardés et les interactions visqueuses entre chaînes moléculaires,
- la plasticité, pour inclure le phénomène d'assouplissement aux fortes amplitudes ainsi que les non-linéarités observées ci-dessus.

3.3 Cadre thermodynamique

Dans le but de construire les modèles traduisant le comportement de ces élastomères et donc, englobant à la fois des phénomènes réversibles tels que l'hyperélasticité et des processus dissipatifs tels que la viscosité et la plasticité, nous avons opté pour une démarche thermodynamique à variables internes, dont nous rappelons brièvement ici le cadre thermodynamique délimité via les postulats d'un ensemble d'hypothèses telles que :

- Une formulation en grandes transformations.
- Le matériau est supposé homogène et isotrope.
- L'introduction d'une ou plusieurs variables internes via le concept d'états intermédiaires et la décomposition multiplicative du gradient de la transformation en gradients élastiques et gradients anélastiques.

- L'incompressibilité de la transformation globale et des transformations anélastiques du matériau.
- Le découplage de l'énergie libre en une somme de fonctions isotropes des variables d'états.
- Le découplage des phénomènes thermiques et mécaniques qui nous permet de considérer la dissipation intrinsèque comme résultant uniquement de l'évolution des variables d'états mécaniques.
- Le cadre des matériaux standards généralisés postulant l'existence de pseudo-potentiels de dissipation anélastique.

3.3.1 Notions de configurations intermédiaires

La mise en oeuvre d'une approche thermodynamique à variables internes, nécessite un choix adéquat de ces dernières. Ce choix, ainsi que celui des formes d'énergies libres et des pseudo-potentiels de dissipation permettra une représentation plus ou moins fine du comportement du matériau étudié. C'est pourquoi, il est souvent plus pratique de se ramener à des variables ayant un sens physique. Pour ce faire, une des solutions possibles est de postuler l'existence d'états intermédiaires (C_i) pour passer d'un état de référence C_0 , à un état actuel C_t (cf. Fig. 3.5).

Ce concept [144], initialement mis en oeuvre pour décrire les comportements élastoplastiques en grandes déformations, considère la transformation comme la composition d'une transformation purement élastique et d'une autre plastique ; la configuration intermédiaire est alors obtenue, à partir de la configuration actuelle, par relâchement élastique.

L'extension de cette démarche aux modèles hyper-visco-élastiques ou hyper-visco-plastiques induit une interprétation similaire de la configuration intermédiaire, à savoir que C_i s'obtient de C_t par annulation de la déformation hyperélastique instantanée.

Ainsi, en notant $\bar{\bar{F}}_a$ et $\bar{\bar{F}}_e$ respectivement les gradients des transformations anélastique et élastique, $\bar{\bar{F}}$ se

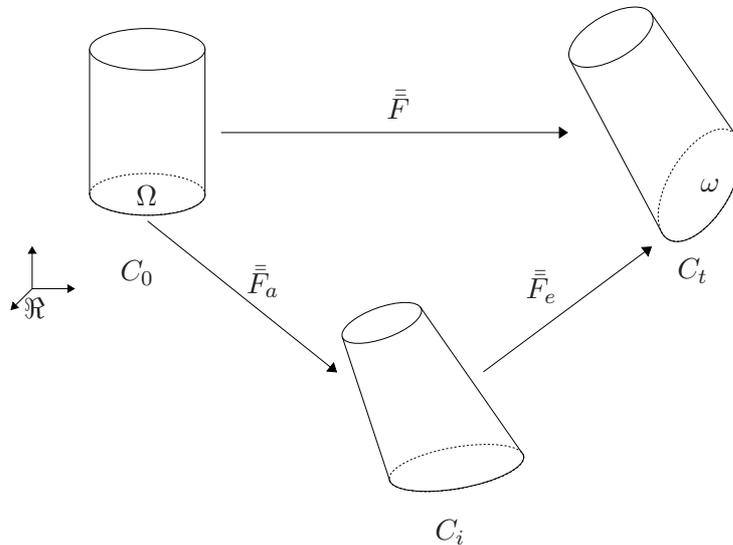


Figure 3.5 – Milieu avec une configuration intermédiaire .

décompose comme suit :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_a. \quad (3.1)$$

Il est alors possible de redéfinir pour chaque transformation, des tenseurs cinématiques spécifiques.

On définira, par exemple, les tenseurs de CAUCHY-GREEN gauches élastique et anélastique, ainsi que le taux eulérien de déformation anélastique :

$$\bar{\bar{B}}_e = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_e^T, \quad (3.2)$$

$$\bar{\bar{B}}_a = \bar{\bar{F}}_a \cdot \bar{\bar{F}}_a^T = \bar{\bar{F}}_e^{-1} \cdot B \cdot \bar{\bar{F}}_e^{-T}, \quad (3.3)$$

$$\bar{\bar{D}}_a = (\dot{\bar{\bar{F}}}_a \cdot \bar{\bar{F}}_a^{-1})_{sym}. \quad (3.4)$$

Plus généralement, [148] propose d'introduire plusieurs états intermédiaires, le modèle est alors complètement défini par la connaissance d'un jeu de $n + 2$ variables⁽¹⁾. Ici, notre choix de variables d'état portera sur le jeu suivant : $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, \dots, {}^N\bar{\bar{F}})$. Pour la suite, ψ dépendra donc de ces variables d'état. La notion de tenseur de CAUCHY-GREEN droit et gauche est introduite pour chaque état comme étant :

$${}^i\bar{\bar{C}} = {}^i\bar{\bar{F}}^T \cdot {}^i\bar{\bar{F}} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{C}}^i = \bar{\bar{F}}^{iT} \cdot \bar{\bar{F}}^i, \quad (3.5)$$

$${}^i\bar{\bar{B}} = {}^i\bar{\bar{F}} \cdot {}^i\bar{\bar{F}}^T \quad \text{et} \quad \bar{\bar{B}}^i = \bar{\bar{F}}^i \cdot \bar{\bar{F}}^{iT}. \quad (3.6)$$

Il en va de même pour les taux de déformation :

$${}^i\bar{\bar{D}} = ({}^i\dot{\bar{\bar{F}}} \cdot {}^i\bar{\bar{F}}^{-1})_{sym} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{D}}^i = (\dot{\bar{\bar{F}}}^i \cdot \bar{\bar{F}}^{i-1})_{sym}. \quad (3.7)$$

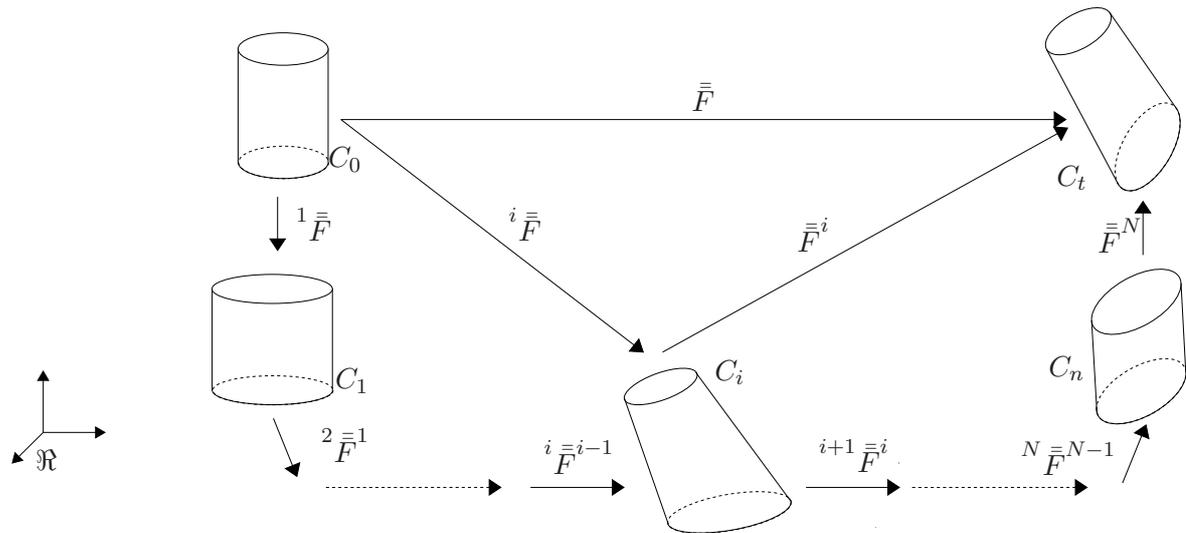


Figure 3.6 – Milieu avec N configurations intermédiaires

Par ailleurs, en introduisant le **Principe d'Invariances des Fonctions Constitutives (P.I.F.C.)** (cf. [144; 145; 148])⁽²⁾, on montre [119] que dans le cas de variables internes entièrement déterminées par le biais d'états intermédiaires, l'isotropie du matériau doit se traduire par l'invariance des lois constitutives pour toute rotation de la configuration initiale et en particulier vérifier l'invariance de l'énergie libre pour une telle transformation. Par conséquent, si un matériau est isotrope, alors sa fonction énergie libre spécifique est une **fonction scalaire isotrope** des variables $(\bar{\bar{C}}, {}^1\bar{\bar{C}}, \dots, {}^N\bar{\bar{C}}, T)$ ou de $(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^1, \dots, \bar{\bar{B}}^N, T)$.

(1). Il existe trois jeux de variables possibles : $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, \dots, {}^N\bar{\bar{F}})$, $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, \dots, {}^N\bar{\bar{F}})$, $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, {}^1\bar{\bar{F}}^2, \dots, {}^{N-1}\bar{\bar{F}}^N, \bar{\bar{F}}^N)$.

(2). qui traduit le principe d'objectivité des lois de comportement et des lois complémentaires

3.3.2 Formalisme lagrangien

Après avoir introduit les variables d'états traduisant l'évolution du système, on peut ensuite déduire la loi de comportement et les lois complémentaires via l'écriture de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM.

En description lagrangienne, un choix possible de ces variables d'états est $(T, \bar{C}, {}^i\bar{C})$; la densité spécifique d'énergie libre ψ est alors fonction scalaire isotrope des tenseurs de ces variables. La densité volumique de puissance dissipée s'écrit alors :

$$\Phi_0 = (\bar{S} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}}) : \dot{\bar{E}} - \rho_0 (s + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{C}} : {}^i\dot{\bar{C}} - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_X T} \geq 0. \quad (3.8)$$

Ainsi, dans le cadre général de la thermodynamique des processus irréversibles et en utilisant les hypothèses citées précédemment, le **principe de normalité**, permet d'aboutir aux lois constitutives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{E}}} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{C}} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i\dot{\bar{C}}} \\ s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \\ -\frac{\overrightarrow{\text{grad}_X T}}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{Q}} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\bar{C}, {}^k\bar{C}) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\dot{\bar{C}}, {}^k\dot{\bar{C}}) \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\vec{Q}) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Si en plus le matériau est incompressible, on considère à la fois, l'incompressibilité de la transformation globale et l'incompressibilité de chacune des transformations intermédiaires :

$$\dot{\bar{C}} : \bar{C}^{-1} = 0 \quad {}^i\dot{\bar{C}} : {}^i\bar{C}^{-1} = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad (3.10)$$

La loi de comportement et les lois complémentaires deviennent dans ce cas, en introduisant la pression hydrostatique p due à la condition d'incompressibilité $\dot{\bar{C}} : \bar{C}^{-1} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S} = \text{Dev}_L \left[\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{E}}} \right] - p J \bar{C}^{-1} \\ \text{Dev}_L \left[-\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{C}} \right] = \text{Dev}_L \left[\frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i\dot{\bar{C}}} \right] \quad \text{ou} \quad \left[-\rho_0 {}^i\bar{C} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{C}} \right]^D = \left[{}^i\bar{C} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i\dot{\bar{C}}} \right]^D \end{array} \right. \quad (3.11)$$

3.3.3 Formalisme eulérien

En description eulérienne, l'énergie libre spécifique est fonction isotrope des variables (T, \bar{B}, \bar{B}^i) et l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM s'écrit alors :

$$\Phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}}) : \dot{\bar{B}} - \rho (s + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_x T} \geq 0. \quad (3.12)$$

En utilisant l'identité $\dot{\bar{B}}^i = \bar{L} \cdot \bar{B}^i + \bar{B}^i \cdot \bar{L}^T - 2\bar{F}^i \cdot {}^i\bar{D} \cdot \bar{F}^{iT}$, puis la décomposition polaire de $\bar{F}^i = \bar{V}^i \cdot \bar{R}^i$, on aboutit à :

$$\Phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} - 2\rho\bar{B}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i}) : \bar{D} - \rho(s + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} + 2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i : {}^i\bar{D}^o, \quad (3.13)$$

où ${}^i\bar{D}^o = \bar{R}^i \cdot {}^i\bar{D} \cdot \bar{R}^{iT}$, définit la mesure eulérienne du taux de déformation anélastique relative à la transformation ${}^i\bar{F}$. Elle s'obtient de ${}^i\bar{D}$ par rotation élastique.

Ainsi l'ensemble des lois constitutives qui en découlent, sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + 2\rho\bar{B}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} + \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\bar{D}} \\ s = -\frac{\partial\psi}{\partial T} \\ 2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial {}^i\bar{D}^o} \\ -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}_x T}{T} = \frac{\partial\varphi^{ther}}{\partial\vec{q}} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\bar{B}, \bar{B}^k) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{D}, {}^k\bar{D}^o) \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\vec{q}) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Dans le cas d'un milieu incompressible, les conditions d'incompressibilité s'écrivent :

$$\text{tr}\bar{D} = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}{}^i\bar{D} = \text{tr}{}^i\bar{D}^o = 0 \quad \forall i \in [1..N], \quad (3.15)$$

et les équations constitutives deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = \left[2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + 2\rho\bar{B}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} + \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\bar{D}} \right]^D - p\bar{1} \\ \left[2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i \right]^D = \left[\frac{\partial\varphi^{int}}{\partial {}^i\bar{D}^o} \right]^D \end{array} \right. \quad (3.16)$$

3.3.4 Application aux modèles rhéologiques

A partir des travaux de F. SIDOROFF [149], Stéphane MÉO [119] a montré que dans le cas isotrope et par une décomposition à N états intermédiaires, l'énergie libre peut être écrite sous la forme d'une somme de fonctions isotropes des tenseurs \bar{B} , \bar{B}^i et ${}^i\bar{B}$ en formulation eulérienne (ou \bar{C} , \bar{C}^i et ${}^i\bar{C}$ en lagrangien) :

$$\psi = \psi_0(\bar{B}) + \psi_e^i(\bar{B}^i) + \psi_a^i({}^i\bar{B}) \quad \text{ou} \quad \psi = \psi_0(\bar{C}) + \psi_e^i(\bar{C}^i) + \psi_a^i({}^i\bar{C}). \quad (3.17)$$

Le système Eq. 3.14 peut être vu comme la généralisation aux grandes déformations du modèle rhéologique présenté Fig. 3.7. A partir de ce modèle rhéologique généralisé, on peut retrouver chaque modèle rhéologique appliqué au cadre des grandes déformations.

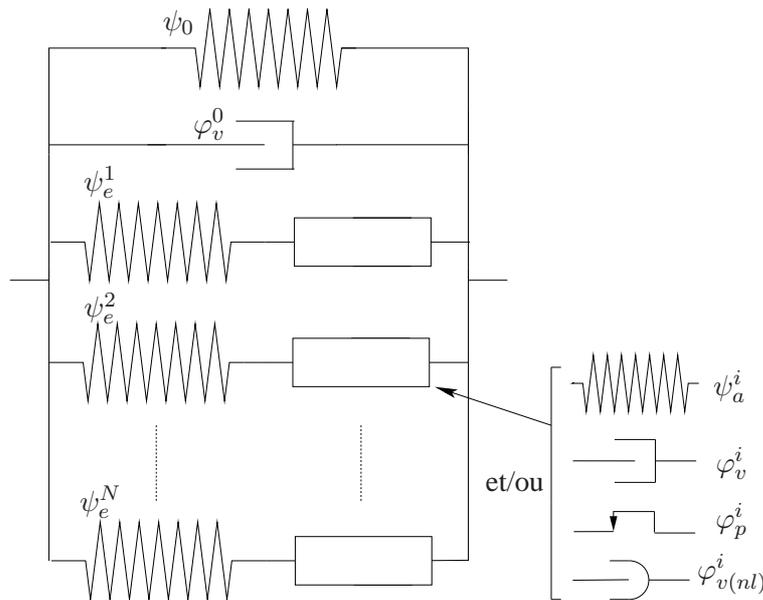


Figure 3.7 – Modèle rhéologique généralisé

3.4 Exemples de modèles rhéologiques hyper-visco-élastiques

A titre d'exemples, nous présentons dans ce paragraphe, les modèles rhéologiques de POYNTING-THOMSON et ZENER. Ces modèles, classiquement utilisés dans la modélisation des comportements viscoélastiques, présentent des réponses équivalentes dans le cadre des petites perturbations.

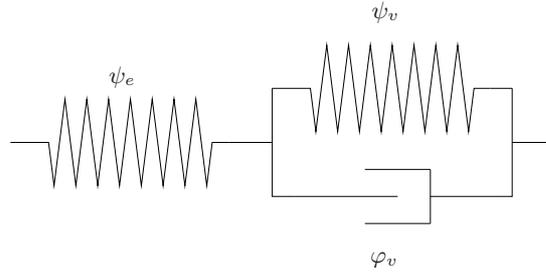
Ces deux modèles ont été initialement mis en oeuvre, dans un formalisme lagrangien, au cours des travaux de thèse de C. CARPENTIER-GABRIELI [53], puis repris ensuite avec S. MÉO pour une identification automatisée des paramètres caractéristiques ainsi qu'une comparaison plus fine de leurs réponses respectives. Le cadre thermodynamique est celui introduit dans le précédent paragraphe, avec une hypothèse supplémentaire qui consiste à considérer les phénomènes mécaniques indépendamment des effets thermiques. Ceci nous permet de considérer l'énergie libre et le pseudo-potential fonctions des uniques grandeurs mécaniques.

Remarque 3.1

Cette hypothèse restreint fortement le domaine de validité de nos modèles. En effet, pour des essais à grand nombre de cycles, on observe une variation de température à coeur de l'élastomère pouvant aller jusqu'à plusieurs dizaines de degrés, variation qui peut modifier considérablement le comportement du matériau. □

3.4.1 Modèle de Poynting-Thomson

Ce modèle, présenté Fig. 3.8, s'obtient du modèle général Fig. 3.7 en considérant une seule branche (ψ_e^1, ψ_a^1 et φ_v^1), avec une loi de viscosité linéaire et sans plasticité.

Figure 3.8 – *Modèle de POYNTING-THOMSON.*

3.4.1.a Écriture lagrangienne

$$\begin{cases} \psi = \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) + \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\dot{\bar{\bar{C}}}_v). \end{cases} \quad (3.18)$$

En choisissant comme variables d'états, les tenseurs $\bar{\bar{C}}$ et $\bar{\bar{C}}_v$, le modèle est alors régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{C}}_v^{-1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}}^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}_v \cdot \bar{\bar{C}}^{-1} \right) - p J \bar{\bar{C}}^{-1} \\ \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}}_v \cdot \bar{\bar{C}}^{-1} \right) \right]^D - \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} \bar{\bar{C}}_v - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \right]^D = \left[\bar{\bar{C}}_v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} \right]^D \\ \text{avec les conditions d'incompressibilité : } \dot{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

3.4.1.b Écriture eulérienne

$$\begin{cases} \psi = \psi_e(\bar{\bar{B}}_e) + \psi_v(\bar{\bar{B}}_v) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{D}}_v^o). \end{cases} \quad (3.20)$$

En choisissant comme variables d'états, les tenseurs $\bar{\bar{B}}$ et $\bar{\bar{B}}_v$ et en introduisant la décomposition polaire $\bar{\bar{F}}_e = \bar{\bar{R}}_e \cdot \bar{\bar{V}}_e$, le modèle est cette régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D - p \bar{\bar{1}}, \\ 2\rho \left[\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D - 2\rho \left[\bar{\bar{V}}_e^{-1} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{\bar{B}}_e \cdot \bar{\bar{B}}^{-1} \cdot \bar{\bar{B}}_e \right) \bar{\bar{V}}_e^{-1} \right]^D = \left[\frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o} \right]^D. \\ \text{avec les conditions d'incompressibilité : } \text{tr} \bar{\bar{D}} = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr} \bar{\bar{D}}_v^o = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

3.4.2 Modèle de Zener

Le modèle de ZENER découle aussi du modèle général Fig. 3.7 en associant (cf. Fig. 3.9) la branche hyperélastique (ψ_0) en parallèle à une branche hyper-viscoélastique (ψ_e^1 et φ_v^1).

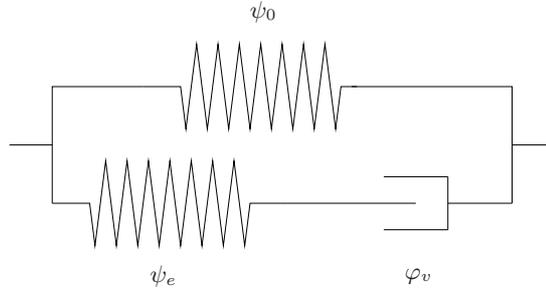


Figure 3.9 – Modèle de ZENER.

3.4.2.a Écriture lagrangienne

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{C}}) + \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\dot{\bar{\bar{C}}}_v) \end{cases} \quad (3.22)$$

En choisissant comme variables d'états, les tenseurs $\bar{\bar{C}}$ et $\bar{\bar{C}}_v$, le modèle est alors régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{\bar{C}}^{-2} \right) + 2\rho_0 \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{C}}_v^{-1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}_v \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) - p J \bar{\bar{C}}^{-1} \\ \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{C}}_v \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}}_v \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \right]^D = \left[\bar{\bar{C}}_v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} \right]^D \\ \text{avec } \dot{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

3.4.2.b Écriture eulérienne

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \psi_e(\bar{\bar{B}}_e) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{D}}_v^o) \end{cases} \quad (3.24)$$

En choisissant comme variables d'états, les tenseurs $\bar{\bar{B}}$ et $\bar{\bar{B}}_v$, le modèle est régi par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = 2\rho \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D + 2\rho \left[\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D - p\bar{\bar{1}}, \\ 2\rho \left[\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D = \left[\frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o} \right]^D, \\ \text{avec} \quad \text{tr} \bar{\bar{D}} = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr} \bar{\bar{D}}_v^o = 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

3.4.3 Choix des potentiels

Afin de complètement définir les modèles précédents, on affecte aux différentes parties élastiques une densité d'énergie libre hyperélastique. Plusieurs choix ont été testés, à savoir la forme NÉO-HOOKÉENNE, de MOONEY-RIVLIN, de GENT-THOMAS et de HART-SMITH.

A titre illustratif, nous présentons ici des modèles basés sur les formes :

- NÉO-HOOKÉENNE : $\rho_0 \psi(I_1, I_2) = a_1(I_1 - 3)$,
- de GENT-THOMAS : $\rho_0 \psi(I_1, I_2) = c_1(I_1 - 3) + c_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$,

avec les affectations définies aux tableaux Tab. 3.1.

Le pseudo-potential de dissipation est choisi, par analogie aux modèles rhéologiques sous l'hypothèse

	ZENER	POYNTING-THOMSON
ψ_0	GENT-THOMAS	
ψ_e		GENT-THOMAS
ψ_v	NÉO-HOOKÉEN	NÉO-HOOKÉEN

Tableau 3.1 – Énergies libres hyperélastiques des différents modèles.

des petites perturbations, comme une fonction quadratique de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\dot{\bar{\bar{C}}}_v) = \frac{\eta}{2} \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \dot{\bar{\bar{C}}}_v \quad \text{en lagrangien,} \\ \varphi(\bar{\bar{D}}_v^o) = \frac{\eta}{2} \bar{\bar{D}}_v^o : \bar{\bar{D}}_v^o \quad \text{en eulérien.} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Les deux modèles, sont alors régis par quatre paramètres caractéristiques :

- 3 paramètres hyperélastiques (c_1 , c_2 et a_1)
- un coefficient de viscosité η .

3.4.4 Exemples d'identifications

L'identification des paramètres s'effectue selon un algorithme développé (cf. Annexe D) sur le logiciel MATHEMATICA et basé sur :

- une méthode de minimisation sans gradient de la distance des moindres carrés entre les points expérimentaux et numériques ;
- des calculs semi-analytiques simulant des essais de double cisaillement et pour lesquels les gradients des transformations ont été pris homogènes.

Les identifications présentées ci-après ont été réalisées à partir de la courbe d'hystérésis en cisaillement cyclique à 50% d'amplitude de déformation et à une fréquence de $3.5Hz$

3.4.4.a Modèle de ZENER

Les caractéristiques identifiées, à différentes températures, du modèle de ZENER sont données Tab. 3.2.

identification	GENT-THOMAS		NÉO-HOOKE	φ	Ecart (%)
	c_1 (MPa)	c_2 (Mpa)	a_1 (Mpa)	η (MPa.s)	
à $23^{\circ}C$	1.03	-4.53	0.79	0.3	7.3
à $70^{\circ}C$	0.58	-2.95	0.66	0.39	3.0
à $100^{\circ}C$	0.51	-2.76	0.68	0.58	2.7

Tableau 3.2 – Résultats d'identification - modèle de ZENER.

Ce modèle traduit deux des phénomènes attendus (*cf.* Fig. 3.4), à savoir un point anguleux au changement de signe de la sollicitation, ainsi qu'un raidissement dans la zone de sollicitation maximum. En revanche, ni l'étranglement (Fig. 3.10(b) et Fig. 3.11(b)), ni l'assouplissement global pour les amplitudes élevées (Fig. 3.11(a)) ne sont constatés.

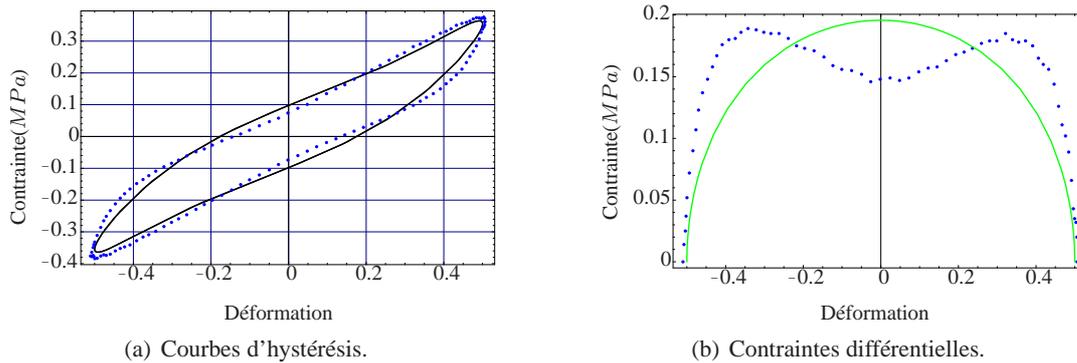


Figure 3.10 – Résultats d'identification sur le modèle de ZENER (cisaillement 50%, 3.5Hz).

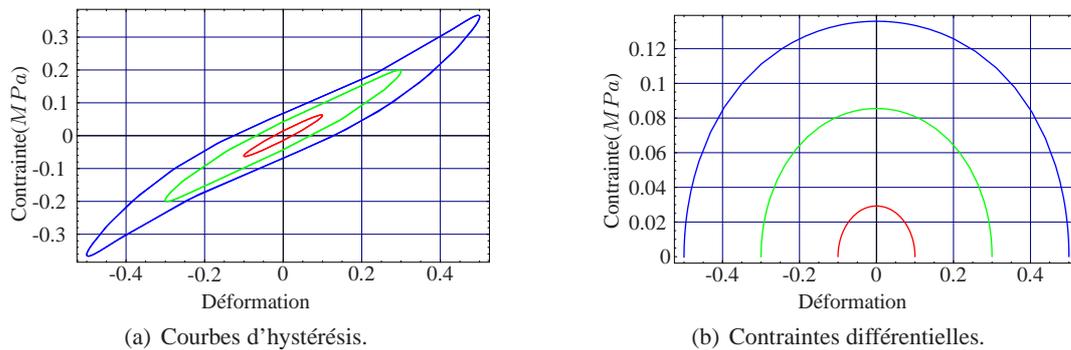


Figure 3.11 – Influence de l'amplitude de cisaillement sur la réponse du modèle de ZENER.

3.4.4.b Modèle de POYNTING-THOMSON

Les caractéristiques identifiées, du modèle de POYNTING-THOMSON sont données Tab. 3.3.

identification	GENT-THOMAS		NÉO-HOOKE	φ	Ecart (%)
	c_1 (MPa)	c_2 (Mpa)	a_1 (Mpa)	η (MPa.s)	
à 23°C	1.66	-3.43	0.03	0.075	4.0
à 70°C	0.99	-1.92	0.06	0.08	1.0
à 100°C	0.96	-1.84	0.08	0.10	0.7

Tableau 3.3 – Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON.

Le modèle de POYNTING-THOMSON répond mieux que le précédent aux critères initialement visés. Il traduit, en effet, deux des quatre phénomènes visés, à savoir l'assouplissement général (Fig. 3.13(a)) de l'hystérésis pour les amplitudes de cisaillement élevées et l'étranglement de la courbe dans les zones de déformations voisines de zéro (Fig. 3.13(b)). Il présente, en plus, un léger raidissement de la courbe au changement de signe de la sollicitation.

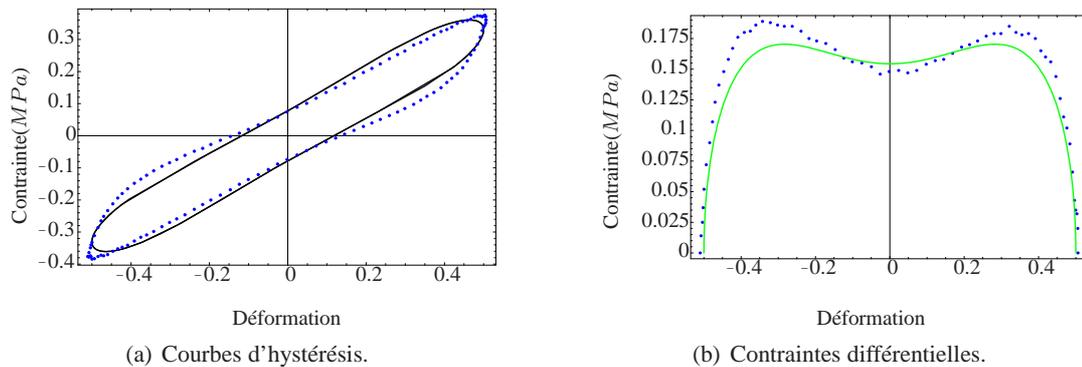


Figure 3.12 – Résultats d'identification sur le modèle de POYNTING-THOMSON (cisaillement 50%, 3.5Hz).

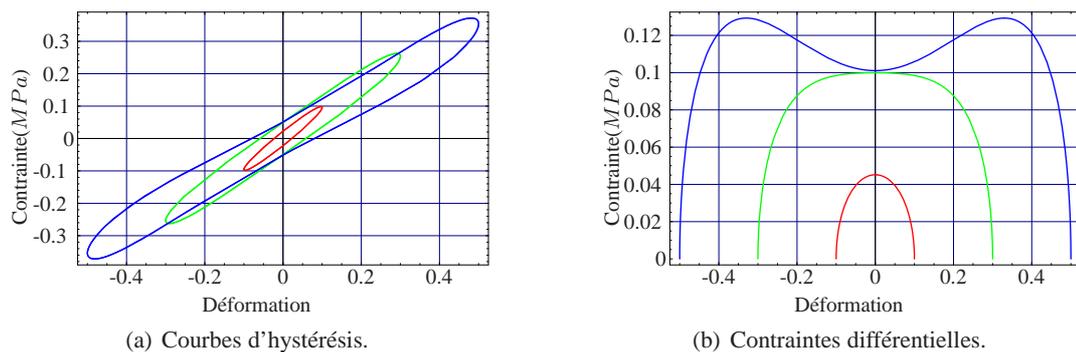


Figure 3.13 – Influence de l'amplitude de cisaillement sur la réponse du modèle de POYNTING-THOMSON.

Par ailleurs, l'augmentation de la fréquence rigidifie le comportement (cf. Fig. 3.14 à 1Hz, 3Hz, 5Hz et 10Hz) ce qui reste en accord avec les constatations expérimentales. Cependant à l'inverse des résultats expérimentaux, il présente une diminution de la dissipation.

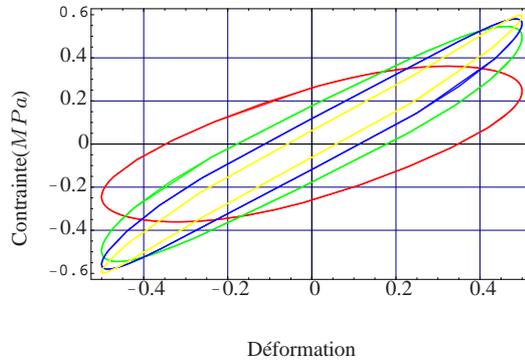


Figure 3.14 – Influence de la fréquence sur la réponse du modèle de POYNTING-THOMSON.

3.4.5 Pertinence des deux modèles

Au vu des résultats précédents, les modèles de POYNTING-THOMSON et de ZENER s'avèrent intrinsèquement différents en grandes déformations. Le modèle de POYNTING-THOMSON semble relativement plus apte à refléter le comportement de notre élastomère. Il traduit, au moins qualitativement, l'effet PAYNE, le phénomène d'étranglement de l'hystérésis⁽³⁾.

Cependant, ces deux modèles ne permettent pas de traduire le comportement à froid (de -25°C à -55°C , des élastomères cf. Fig. 3.15) et restent limités à un domaine de fréquences restreint au voisinage de la fréquence de l'essai d'identification. Ils s'avèrent donc incapables de modéliser le comportement des élastomères chargés, sous sollicitations dynamiques multi-fréquences, tel que c'est le cas des adaptateurs de fréquence du rotor d'hélicoptère.

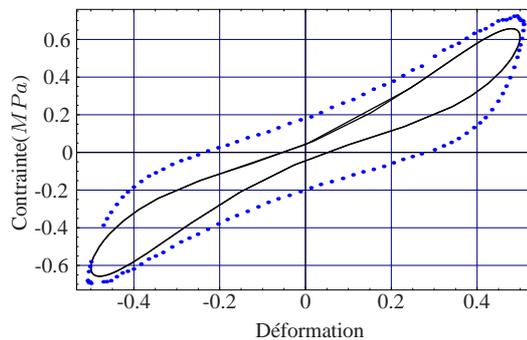


Figure 3.15 – Inaptitude du modèle POYNTING-THOMSON à traduire le comportement à froid (-45°C).

(3). La capacité à traduire ce phénomène est principalement due à la forme hyperélastique de GENT-THOMAS (ou de HART-SMITH) et en particulier, à la diminution du coefficient c_2 , tendant à rendre le comportement instable ; l'étranglement constitue alors la zone limite de stabilité matérielle du modèle.

3.5 Un modèle hyper-élasto-visco-plastique

3.5.1 Présentation du modèle

Dans le but de modéliser le comportement à froid, nous avons exploré la piste de modèles rhéologiques avec un comportement **hyper-élasto-visco-plastique**, avec :

- une plasticité à seuil de VON-MISES,
- et loi de viscosité de puissance de type NORTON.

Parmi, les différents modèles mis en oeuvre, nous proposons ici, à titre d'exemple, celui qui nous a semblé être le plus pertinent pour décrire les différents phénomènes caractéristiques du comportement de notre élastomère.

Ce modèle peut être considéré comme une généralisation du modèle de ZENER en associant (cf. Fig. 3.16), en parallèle, une branche hyperélastique (ψ_0) et une branche hyper-élasto-visco-plastique (ψ_{vp} et φ_{vp}).

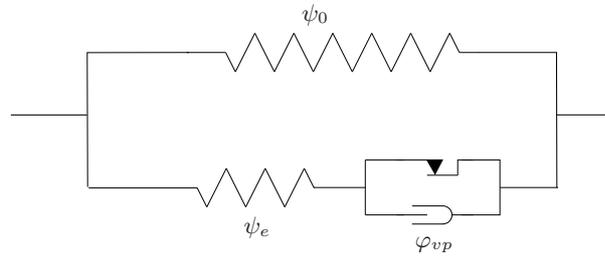


Figure 3.16 – Modèle hyper-élasto-visco-plastique.

3.5.2 Équations constitutives

En adoptant un formalisme eulérien et en choisissant comme variables d'états les tenseurs $\bar{\bar{B}}$ et $\bar{\bar{B}}_{vp}$, le modèle est régi par :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \psi_e(\bar{\bar{B}}_e) \\ \varphi^{int} = \varphi_{vp}(\bar{\bar{D}}_{vp}^o) \end{cases} \quad (3.27)$$

avec les choix de potentiels suivants^{(4) (5)}

$$\begin{cases} \rho\psi_0(\bar{\bar{B}}) = c_1(I_1 - 3) + c_2 \ln \frac{I_2}{3} \\ \rho\psi_e(\bar{\bar{B}}_e) = a_1(I_1^e - 3) \\ \varphi_{vp}^*(\bar{\bar{\sigma}}_{vp}) = \frac{\eta}{\nu + 1} \left\langle \frac{\|\bar{\bar{\sigma}}_{vp}\| - \chi}{\eta} \right\rangle^{\nu+1} \end{cases} \quad (3.28)$$

(4). L'opérateur $\langle . \rangle$ est donné par :

$$\langle f \rangle = f \quad \text{si } f \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle f \rangle = 0 \quad \text{si } f < 0.$$

(5). On désigne par $\|\bar{\bar{X}}\|$, la norme du tenseur d'ordre 2, $\bar{\bar{X}}$ soit :

$$\|\bar{\bar{X}}\| = \sqrt{\bar{\bar{X}} : \bar{\bar{X}}}$$

où $\varphi_{vp}^*(\bar{\sigma}_{vp})$ désigne la transformée de LEGENDRE-FENCHEL du pseudo-potentiel de dissipation visco-plastique $\varphi_{vp}(\bar{D}_{vp}^o)$. On obtient ainsi la loi de comportement :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_e + \bar{\sigma}_{vp} - p\bar{1} \\ \bar{\sigma}_e = 2\rho \left[c_1 \bar{B} - c_2 \bar{B}^{-1} \right]^D \\ \bar{\sigma}_{vp} = 2\rho \left[a_1 \bar{B}_e \right]^D \end{cases} \quad (3.29)$$

et la loi complémentaire :

$$\begin{cases} \bar{D}_{vp}^o = \frac{\partial \varphi_{vp}^*}{\partial \bar{\sigma}_{vp}} \\ = \left\langle \frac{\|\bar{\sigma}_{vp}\| - \chi}{\eta} \right\rangle^\nu \frac{\bar{\sigma}_{vp}}{\|\bar{\sigma}_{vp}\|} \end{cases} \quad (3.30)$$

Le modèle finalement obtenu nécessite l'identification de 5 paramètres caractéristiques du matériau.

3.5.3 Identification des paramètres

L'identification des paramètres du modèle (Tab. 3.4) a été effectuée, à différentes températures, suivant la même démarche (algorithme et essais expérimentaux identiques) décrite en Annexe D. Les courbes Fig. 3.17 et Fig. 3.18 montrent la capacité de ce modèle à refléter le comportement à froid.

$T(^{\circ}C)$	$c_1(Mpa)$	$c_2(MPa)$	$a_1(Mpa)$	$\eta(Mpa.s)$	$\chi(Mpa)$
-55	4.19	-14.39	1.13	0.36	0.88
-45	3.72	-18.65	0.92	0.069	1.140
23	1.15	-4.67	0.73	0.040	0.93
70	0.64	-2.38	0.35	0.079	0.36
100	0.60	-2.26	0.35	0.14	0.35

Tableau 3.4 – Résultats d'identification - modèle hyper-élasto-visco-plastique.

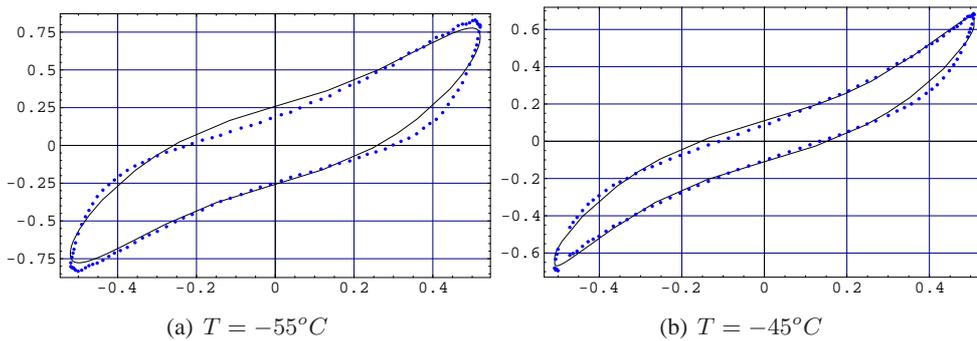


Figure 3.17 – Identification du modèle hyper-élasto-visco-plastique (Hystérésis contrainte-déformation).

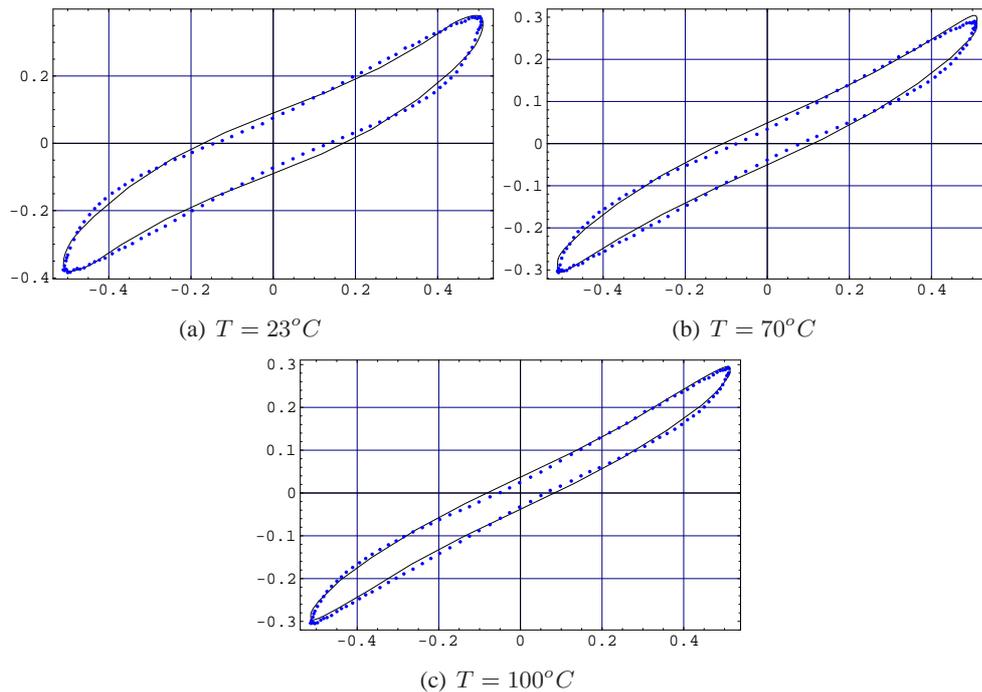


Figure 3.18 – Identification du modèle hyper-élasto-visco-plastique (Hystérésis contrainte-déformation).

3.6 Bilan

A ce stade des développements, nous pouvons dresser un premier bilan quant à la capacité des modèles phénoménologiques hyper-visco-élastiques ou hyper-élasto-visco-plastiques à refléter le comportement, en grandes déformations, des élastomères chargés.

Ainsi, les modèles de type ZENER ou POYNTING-THOMSON restent relativement adaptés aux comportements sous sollicitations quasi-statiques ou dynamiques dans une plage de fréquences proche de la zone d'identification (ici, de $1Hz$ à $5Hz$) et pour un domaine de températures supérieures à $20^{\circ}C$.

L'intégration de la plasticité s'avère donc nécessaire pour modéliser le comportement à froid.

Ainsi les modèles hyper-élasto-visco-plastiques, avec une loi de viscosité de NORTON, offrent un meilleur accord avec l'expérience pour des températures allant de $-55^{\circ}C$ à $+100^{\circ}C$.

Cependant les enseignements à tirer de la mise en oeuvre de ces modèles phénoménologiques peuvent être résumés comme suit :

- l'incapacité de ces modèles à rendre compte de la réponse du matériau sous sollicitations complexes (de type multi-fréquences) pour un jeu de paramètres donné [107].
- la complexité de ces modèles, et en particulier ceux associés à une forme non-linéaire de viscosité, rend pratiquement inaccessible toute interprétation physique de leurs paramètres et donc toute identification de leur rôle respectif, ce qui réduit l'intérêt de leur mise en oeuvre pour traduire convenablement le comportement des matériaux,
- la nécessité de faire appel à une approche physiquement motivée afin de modéliser le comportement des élastomères chargés dont la micro-structure et donc les mécanismes de déformation s'avèrent très complexes.

Une approche statistique pour une modélisation micro-physiquement motivée

Les résultats obtenus, dans le chapitre 3, à l'aide des modèles phénoménologiques mono-branches, montrent la nécessité de construire des modèles via une approche permettant d'une part, d'aller vers une intégration des hétérogénéités micro-structurales du matériau et d'autre part, de refléter le comportement macroscopique dans un large domaine de vitesses de sollicitations.

Ce chapitre présente les développements d'une famille de modèles statistiques hyper-élasto-visco-platiques basés sur une démarche micro-physiquement motivée.

Après un exposé des motivations issues d'observations microscopiques effectuées sur un silicone chargé en silice, nous déclinons les hypothèses faites sur les micro-mécanismes d'interactions des différents constituants pour schématiser le comportement du Volume Élémentaire Représentatif et en déduire, via une approche statistique, le comportement macroscopique du matériau.

Quelques exemples de modèles statistiques hyper-élasto-visco-platiques sont ensuite présentés avec une stratégie d'identification de leur paramètres caractéristiques.

Enfin, nous présentons une campagne d'identification en discutant la pertinence de ces modèles vis-à-vis des phénomènes spécifiques observés expérimentalement, à savoir : l'effet PAYNE et l'évolution avec la température.

PLAN DU CHAPITRE 4

4.1 Motivations microphysiques	65
4.1.1 Observations au Microscope Electronique à Balayage	65
4.1.2 Hypothèses de modélisation	66
4.2 L'approche statistique	67
4.2.1 Le concept général	67
4.2.1.a Le modèle statistique discret	68
4.2.1.b Passage au modèle continu	69
4.2.2 Écriture des équations constitutives	69
4.3 Un premier modèle statistique hyper-élasto-visco-plastique	70
4.3.1 Choix des potentiels et des fonctions statistiques	70
4.3.2 Identification des paramètres du modèle	71
4.3.2.a Stratégie d'identification	72
4.3.2.b Quelques résultats	73
4.4 Quelques variantes du modèle statistique	75
4.4.1 Le modèle SHVP2	75
4.4.1.a Présentation	75
4.4.1.b Identification	76
4.4.2 Le modèle de MIEHE généralisé	76
4.4.2.a Présentation	76
4.4.2.b Identification	77
4.5 Bilan	80

4.1 Motivations microphysiques

4.1.1 Observations au Microscope Electronique à Balayage

Dans le cadre d'un stage de DEA [35] et d'une collaboration avec le CENTRE DES MATÉRIAUX d'Evry, laboratoire de l'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES PARIS, nous avons mené une campagne d'observations au MEB d'un élastomère en silicone chargé en silice. Le but de ces observations était d'une part de mieux connaître la composition et la morphologie de la microstructure de ces élastomères et d'autre part, d'en appréhender les mécanismes de déformation, et en particulier l'interaction entre les charges et la gomme, à travers des essais de traction *in situ*.

Les principaux résultats de ces observations peuvent être résumés comme suit :

- Les particules de charges, principalement de la silice, sont regroupées en agglomérats de quelques dizaines de μm Fig. 4.1.

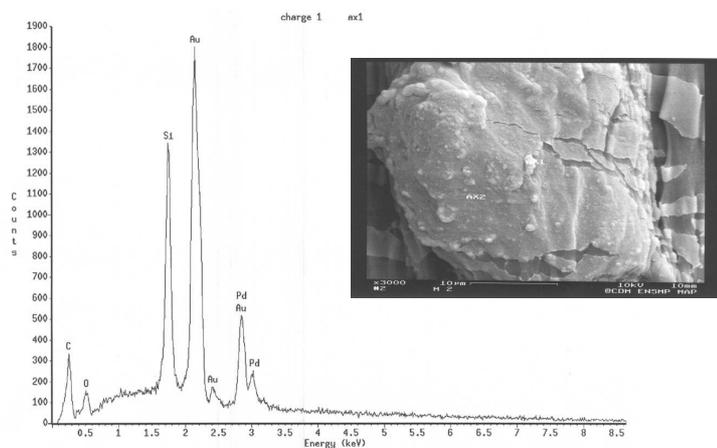
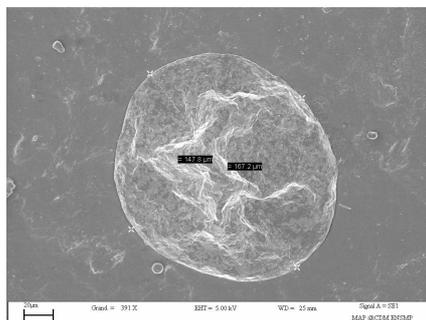
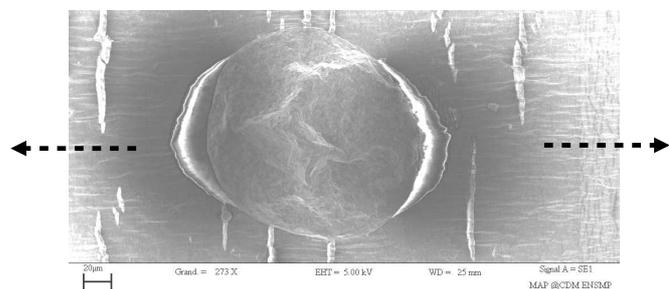


Figure 4.1 – Regroupement sous formes d'agglomérats : ici de la silice en majorité.

- Sous chargement en traction *in situ* du matériau, on observe une décohésion entre les agglomérats de charges et la gomme, (cf. Fig. 4.2).



(a) Avant déformation.



(b) Déformation à 100%.

Figure 4.2 – Mise en évidence de la décohésion à l'interface charges/gomme.

- Après décharge, cette décohésion induit une déformation résiduelle à caractère permanent, puisqu'elle reste visible après 15 jours de repos (Fig. 4.3).

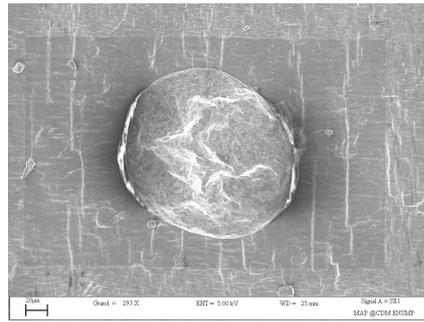


Figure 4.3 – Décohérence résiduelle, à charge nulle, après 15 jours.

4.1.2 Hypothèses de modélisation

Si à l'échelle macroscopique – dans le cas de la figure Fig. 4.4 une éprouvette de double cisaillement – les élastomères chargés présentent une apparence homogène, les observations de leur morphologie à l'échelle microscopique, nous permettent de distinguer un mélange bi-phasique constitué d'inclusions noyées dans une matrice. Cependant la zone de transition entre ces deux phases reste encore méconnue, mais semble être le siège d'interactions jouant un rôle important dans les micro-mécanismes de déformation des ces matériaux.

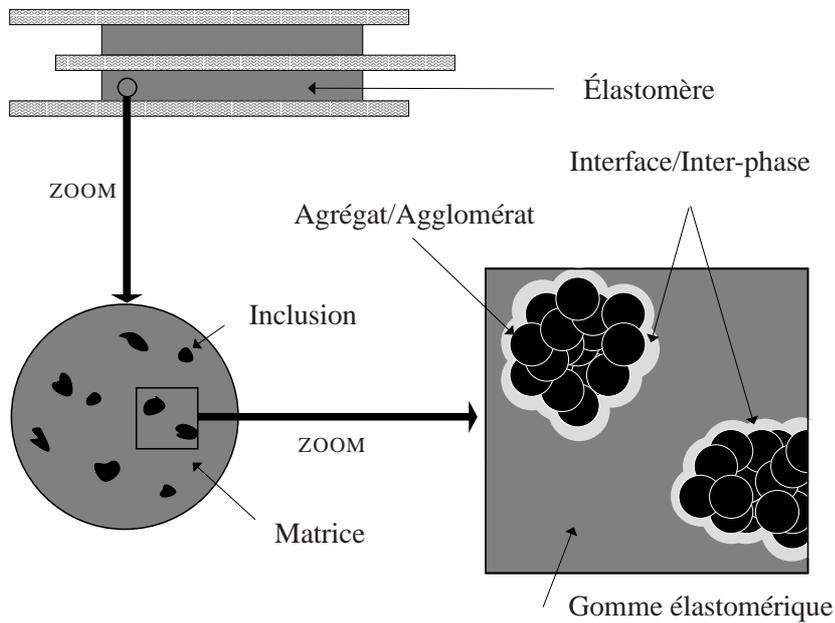


Figure 4.4 – Vision "macro-micro" d'un élastomère chargé.

A travers ce constat on peut donc dégager un **Volume Élémentaire Représentatif** du matériau, comprenant :

- une matrice élastomérique dense (*Gomme*),
- des inclusions constituées d'agrégats/agglomérats de charges faiblement réticulées,
- une zone d'interface (ou inter-phase selon son épaisseur), entre la gomme et l'inclusion.

Pour modéliser le comportement de ce milieu complexe, nous postulons les hypothèses suivantes :

- la cinématique du milieu respecte l'hypothèse d'*affinité*, c'est-à-dire : la déformation dans la matrice correspond à la déformation macroscopique,
- le comportement de la matrice élastomérique est considéré hyperélastique,
- le comportement intra-inclusions est supposé hyperélastique ou hyper-viscoélastique (de type KELVIN-VOIGT),
- le comportement de l'interface est plastique ou visco-plastique.

Le comportement du V.E.R. peut ainsi être schématisé à l'aide d'un modèle rhéologique associant en parallèle (*cf.* Fig. 4.5) :

- une branche hyperélastique pour le comportement de la matrice,
- une branche élasto-dissipative comprenant une association en série :
 - d'un élément ressort ou un élément de KELVIN-VOIGT pour le comportement de l'inclusion,
 - d'un élément patin avec ou sans amortisseur pour modéliser le glissement à l'interface.

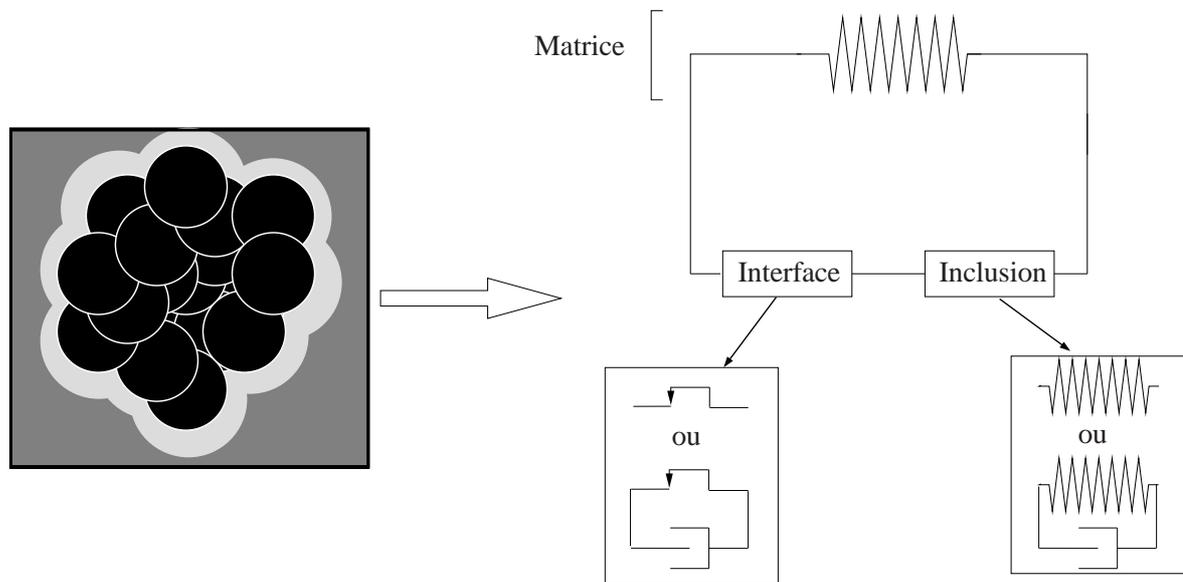


Figure 4.5 – Modélisation rhéologique du V.E.R.

4.2 L'approche statistique

4.2.1 Le concept général

L'idée centrale de cette approche est de modéliser le comportement de l'élastomère chargé via l'association des schémas rhéologiques des différentes populations de V.E.R. constituant le matériau. L'approche statistique proposée ici permet donc de généraliser les assemblages parallèles d'un nombre fini

de branches à un assemblage statistique à une infinité de branches. L'intérêt de cette démarche réside en une couverture plus large du spectre de vitesses de chargement (ou de temps caractéristiques de retard de la réponse), à savoir les avantages d'un modèle multi-branches, sans pour autant augmenter le nombre de paramètres du modèle.

Cette approche s'inscrit dans le cadre des modélisations micro-mécaniquement motivées des élastomères chargés que l'on trouve dans la littérature. Ces modélisations sont souvent basées sur des hypothèses concernant les interactions entre les agglomérats de charges et la matrice élastomérique [44; 45; 47; 41; 46], ou concernant les mécanismes de déformation et de réarrangement du réseau macro-moléculaire [156; 42; 43; 130].

4.2.1.a Le modèle statistique discret

Sur la base de cette logique et compte tenu des motivations évoquées ci-dessus, on peut donc construire un modèle discret Fig. 4.6 en partant du schéma rhéologique du V.E.R. Chaque branche $i \in [1..N]$ est

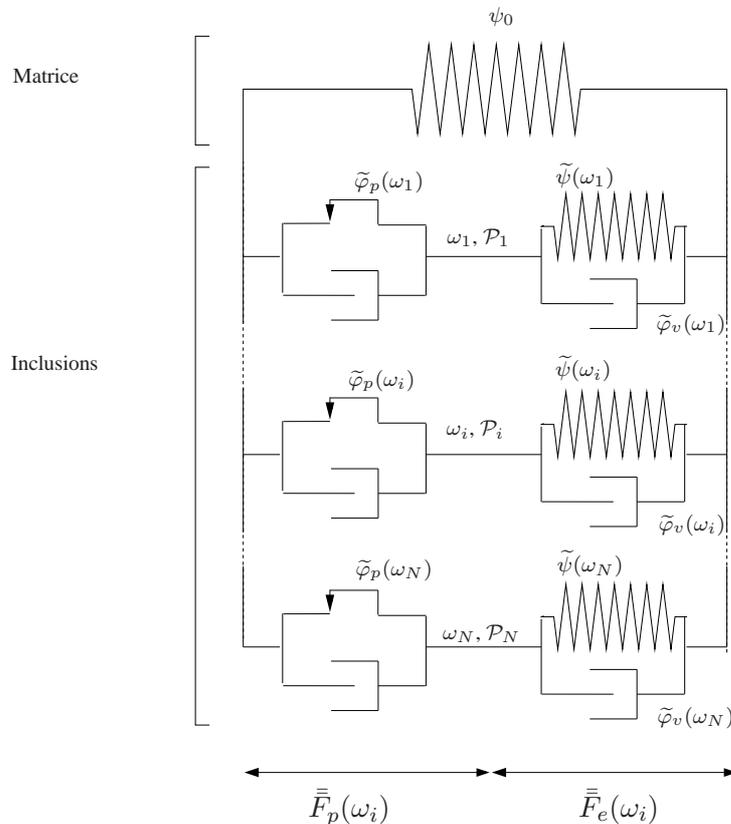


Figure 4.6 – *Modèle statistique hyper-élasto-visco-plastique discret.*

pondérée par un poids \mathcal{P}_i et est caractérisée par la variable aléatoire ω_i , qui peut être interprétée comme une énergie d'activation nécessaire à la rupture des liaisons inclusions–matrice. Elle est aussi associée, par une loi exponentielle (Loi d'EYRING), au temps caractéristique de retard du mécanisme de glissement inclusions–matrice [43].

Ainsi chaque branche schématise une population d'agglomérats associée à l'énergie d'activation ω_i et \mathcal{P}_i représente la probabilité de présence d'une telle population dans la phase des inclusions.

L'énergie libre spécifique et le pseudo-potentiel de dissipation du mélange s'écrivent, avec une description eulérienne, sous la forme :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{B}) + \sum_{i=1}^N \tilde{\psi}(\omega_i, \bar{B}_e(\omega_i)) \mathcal{P}_i, \\ \varphi^{int} = \sum_{i=1}^N \left(\tilde{\varphi}_p(\omega_i, \bar{D}_p^o(\omega_i)) + \tilde{\varphi}_v(\omega_i, \bar{D}_e(\omega_i)) \right) \mathcal{P}_i. \end{cases} \quad (4.1)$$

4.2.1.b Passage au modèle continu

La généralisation de l'écriture de Eq. 4.1 au modèle statistique continu se fait naturellement en utilisant la densité de probabilité, fonction de la variable aléatoire ω , $\mathcal{P}(\omega)$:

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{B}) + \int_0^\infty \tilde{\psi}(\omega, \bar{B}_e(\omega)) \mathcal{P}(\omega) d\omega, \\ \varphi^{int} = \int_0^\infty \left(\tilde{\varphi}_p(\omega, \bar{D}_p^o(\omega)) + \tilde{\varphi}_v(\omega, \bar{D}_e(\omega)) \right) \mathcal{P}(\omega) d\omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

Cette écriture Eq. 4.2 correspond au modèle rhéologique généralisé présenté sur la figure Fig. 4.7.

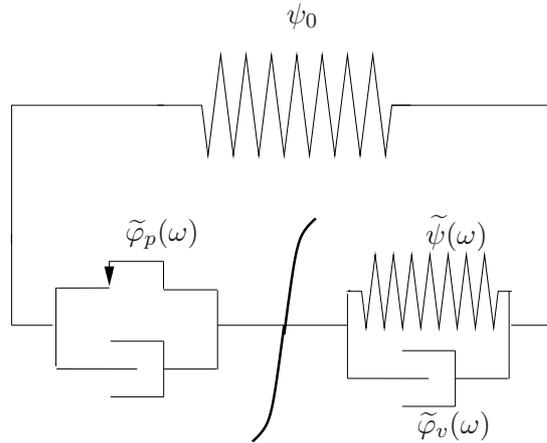


Figure 4.7 – *Modèle statistique hyper-élasto-visco-plastique continu.*

4.2.2 Écriture des équations constitutives

En partant des formes Eq. 4.2 et en adoptant les hypothèses et le cadre thermodynamique détaillés dans le chapitre précédent (incompressibilité élastique et anélastique, isotropie des fonctions énergies spécifiques...) et en considérant, pour chaque population d'inclusions ω :

- la décomposition polaire du gradient élastique :

$$\bar{F}_e(\omega) = \bar{V}_e(\omega) \cdot \bar{R}_e(\omega),$$

- le tenseur eulérien des taux de déformations viscoplastiques :

$$\bar{D}_p^o(\omega) = \bar{R}_e(\omega) \cdot \left(\dot{\bar{F}}_p(\omega) \cdot \bar{F}_p^{-1}(\omega) \right)_{Sym} \cdot \bar{R}_e^T(\omega),$$

– et le tenseur eulérien des taux de déformations viscoélastiques :

$$\bar{\bar{D}}_e(\omega) = \left(\dot{\bar{F}}_e(\omega) \cdot \bar{F}_e^{-1}(\omega) \right)_{Sym} ;$$

on aboutit aux lois constitutives sous la forme eulérienne suivante :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \int_0^\infty \tilde{\sigma}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega - p\bar{\mathbb{1}}, \\ \bar{\sigma}_0 = 2\rho \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D, \\ \tilde{\sigma}(\omega) = 2\rho \left[\frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial I_1^e(\omega)} \bar{\bar{B}}_e(\omega) - \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial I_2^e(\omega)} \bar{\bar{B}}_e^{-1}(\omega) \right]^D + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}_v(\omega, \bar{\bar{D}}_e(\omega))}{\partial \bar{\bar{D}}_e(\omega)} \right]^D, \\ 2\rho \left[\frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial I_1^e(\omega)} \bar{\bar{B}}_e(\omega) - \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial I_2^e(\omega)} \bar{\bar{B}}_e^{-1}(\omega) \right]^D + \left[\bar{\bar{V}}_e(\omega) \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}_v(\omega, \bar{\bar{D}}_e(\omega))}{\partial \bar{\bar{D}}_e(\omega)} \cdot \bar{\bar{V}}_e^{-1}(\omega) \right]^D = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}_p(\omega, \bar{\bar{D}}_p^o(\omega))}{\partial \bar{\bar{D}}_p^o(\omega)} \right]^D, \\ \text{avec } \text{tr} \bar{\bar{D}} = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(\bar{\bar{D}}_p^o(\omega)) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.3 Un premier modèle statistique hyper-élasto-visco-plastique

4.3.1 Choix des potentiels et des fonctions statistiques

Les équations générales régissant le modèle statistique continu étant ainsi posées, plusieurs formes peuvent en découler, en fonction des choix des potentiels hyperélastiques, des pseudo-potentiels dissipatifs et de l'évolution de leurs paramètres en fonction de ω . Pour ce premier modèle, que nous désignerons par **SHVP1**, nous avons adopté un comportement hyperélastique⁽¹⁾ pour les inclusions, avec une loi d'interface rigide visco-plastique. La représentation rhéologique de ce modèle est décrite sur la figure Fig. 4.8.

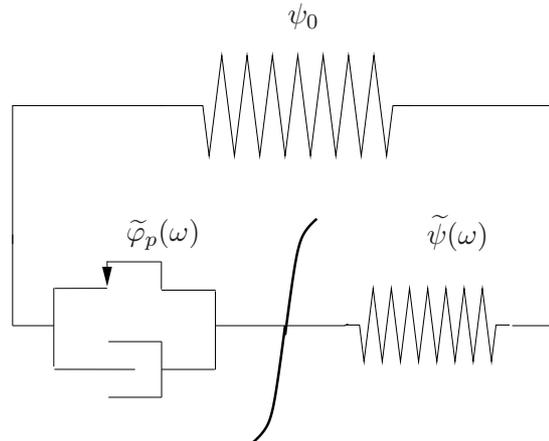


Figure 4.8 – Modèle statistique hyper-élasto-visco-plastique SHVP1.

(1). Le fait de négliger, pour ce modèle, la viscosité des agglomérats relève plus d'une volonté de réduction du nombre de paramètres du modèle, que d'une motivation physique ; cette hypothèse sera d'ailleurs reconsidérée par la suite.

Ainsi, avec un choix des formes de potentiels telles que :

$$\begin{cases} \rho\psi(\bar{B}) = c_1(I_1 - 3) + c_2 \ln \frac{I_2}{3}, \\ \rho\tilde{\psi}(\omega, \bar{B}_e(\omega)) = a(\omega)(I_1^e(\omega) - 3), \\ \tilde{\varphi}_v(\omega, \bar{D}_e(\omega)) = 0, \\ \tilde{\varphi}_p^*(\omega, \tilde{\sigma}(\omega)) = \frac{\eta(\omega)}{2} \left\langle \frac{\|\tilde{\sigma}(\omega)\| - \chi(\omega)}{\eta(\omega)} \right\rangle^2, \end{cases} \quad (4.4)$$

où $\tilde{\varphi}_p^*$ désigne la transformée de LEGENDRE-FENCHEL du pseudo-potential de dissipation visco-plastique $\tilde{\varphi}_p$ relatif à l'interface. Les équations constitutives régissant ce modèle s'écrivent :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \int_0^\infty \tilde{\sigma}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega - p\bar{1}, \\ \bar{\sigma}_0 = 2 \left[c_1 \bar{B} - c_2 \bar{B}^{-1} \right]^D, \\ \tilde{\sigma}(\omega) = 2 \left[a(\omega) \bar{B}_e(\omega) \right]^D, \\ \bar{D}_p^o(\omega) = \left\langle \frac{\|\tilde{\sigma}(\omega)\| - \chi(\omega)}{\eta(\omega)} \right\rangle \frac{\tilde{\sigma}(\omega)}{\|\tilde{\sigma}(\omega)\|}, \\ \text{avec } \text{tr} \bar{D} = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(\bar{D}_p^o(\omega)) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

Le choix des fonctions statistiques est conditionné par le spectre de temps caractéristiques de retard visé. Ainsi, pour privilégier la réponse instantanée, on peut choisir une fonction de distribution $P(\omega)$ sous forme d'une GAUSSIENNE centrée à l'origine et de variance Ω :

$$P(\omega) = \frac{1}{\int_0^\infty P(\omega) d\omega} \text{Exp} \left[- \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right] \quad \forall \omega \geq 0 \quad (4.6)$$

Pour les variations, en fonction de ω , des caractéristiques hyperélastiques, visqueuses et plastiques, plusieurs jeux de fonctions ont été testés [107], pour aboutir au meilleur compromis :

$$\begin{cases} a(\omega) = a_0 \left(\text{Exp}[\omega^2] + \ln[\sqrt{\omega} + 1] \right), \\ \eta(\omega) = \bar{\eta}\omega \\ \chi(\omega) = \bar{\chi}\omega \end{cases} \quad (4.7)$$

Avec ces écritures, les paramètres à identifier sont au nombre de **6** :

- **5** paramètres déterministes (c_1 , c_2 , a_0 , $\bar{\eta}$ et $\bar{\chi}$),
- **1** paramètre statistique (Ω).

4.3.2 Identification des paramètres du modèle

Dans le but d'identifier les six paramètres du modèle, nous avons réalisé au cours de la thèse de J.M. MARTINEZ, une campagne d'essais sur des éprouvettes de double-cisaillement constituées d'un silicone chargé en silice. Ces essais ont été menés dans une enceinte climatique, à différentes températures (de $-55^\circ C$ à $+70^\circ C$), et sous sollicitations (monotone, de relaxation ou cycliques triangulaires, à différents taux de déformations). Une présentation synthétique de cette campagne et des résultats expérimentaux qui en ont découlée est proposée en Annexe E.

4.3.2.a Stratégie d'identification

L'identification des paramètres de ce modèle se fait en utilisant l'algorithme présenté en Annexe D. Cependant, compte-tenu de la complexité du modèle, du nombre de ces paramètres caractéristiques et de la multiplicité des essais expérimentaux destinés à l'identification de ces paramètres, il a été nécessaire de mettre au point une stratégie d'identification (cf. Tab. 4.1) permettant de distinguer les effets de viscosité de ceux dus à la plasticité, en identifiant d'abord sur des essais quasi-statiques puis en ajustant partiellement les paramètres sur des essais de relaxation et sur des essais cycliques triangulaires à amplitude progressivement croissante et à différents taux de déformations.

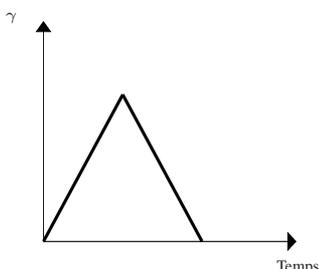
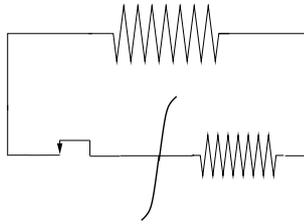
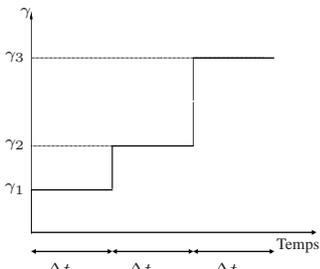
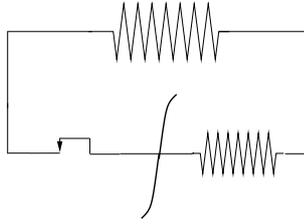
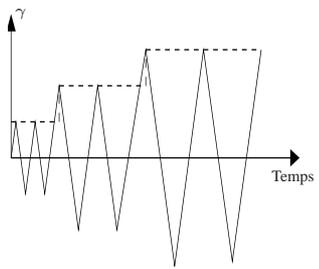
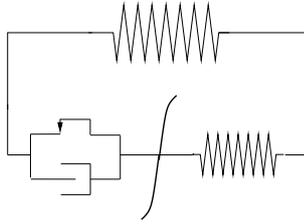
Étape	Essais	Modèle identifié	Paramètres
<p>Initiale (1) Pré-identification des paramètres du modèle hyper-élastoplastique écrouissable sur des essais quasi-statiques ($\dot{\gamma} \sim 0$).</p>	<p>Charge-Décharge à différents γ_{max}</p> 		<p>Estimation de : $c_1^*, c_2^*, a_0^*, \bar{\chi}^*$ et Ω^*</p>
<p>Intermédiaire (2) Ajustement des paramètres hyper-élastoplastiques ainsi identifiés, sur la réponse différée des essais de relaxation.</p>	<p>Relaxation différents γ_i</p> 		<p>Ajustement de : a_0 et $\bar{\chi}$</p> <p>Correction de : Ω^*</p>
<p>Finale (3) Identification du paramètre de viscosité et correction du paramètre statistique sur essais cycliques triangulaires à γ_{max} progressivement croissante.</p>	<p>Cyclique triangulaire à différents γ_i</p> 		<p>Ajustement de : $a_0, \bar{\chi}, \bar{\eta}$ et Ω</p>

Tableau 4.1 – Stratégie d'identification des paramètres du modèle SHVP1

4.3.2.b Quelques résultats

Les premières identifications des paramètres de ce modèle ont été récemment effectuées (thèse de J. GRANDCOIN), sur des essais réalisés à température ambiante $25^{\circ}C$. Les résultats obtenus démontrent la bonne capacité de ce modèle à traduire le comportement statique et dynamique, à différents taux de déformations, d'un élastomère silicone chargé en silice.

En effet, les courbes présentées sur Fig. 4.9, Fig. 4.10 et Fig. 4.11 montrent une bonne corrélation entre les résultats d'identification et les réponses expérimentales, à l'issue de chacune des trois étapes présentées au tableau Tab. 4.1.

Étape	c_1 (MPa)	c_2 (MPa)	a_0 (MPa)	$\bar{\chi}$ (Mpa)	$\bar{\eta}$ (MPa.s)	Ω	Erreur (%)
Étape (1)	1.38	-3.29	1.06	5.07	–	0.12	11.4
Étape (2)	1.38	-3.29	0.13	0.17	–	0.08	1.53
Étape (3)	1.38	-3.29	0.57	1.45	0.10	0.14	13.6

Tableau 4.2 – Paramètres du modèle SHVP1, identifiés à l'issue de chacune des trois étapes.

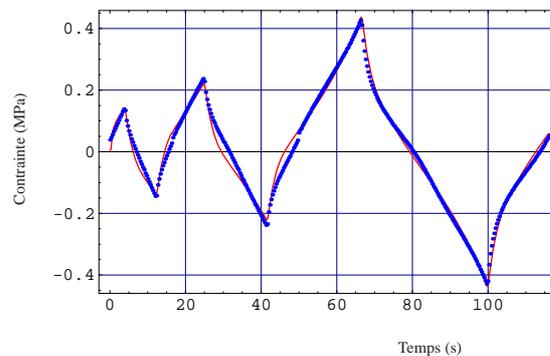


Figure 4.9 – Pré-identification du modèle SHVP1 sur un essai quasi-statique charge/décharge, à amplitude croissante (Erreur=11.4%).

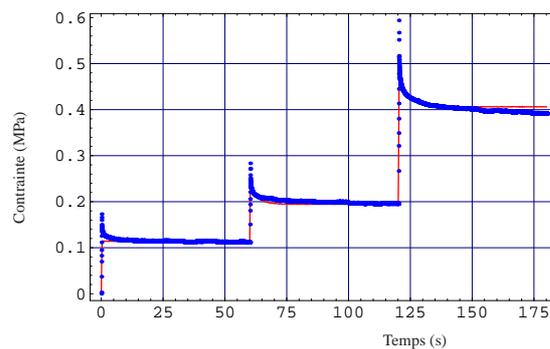


Figure 4.10 – Correction des paramètres du modèle SHVP1 sur un essai de relaxation, à amplitude croissante (Erreur=1.53%).

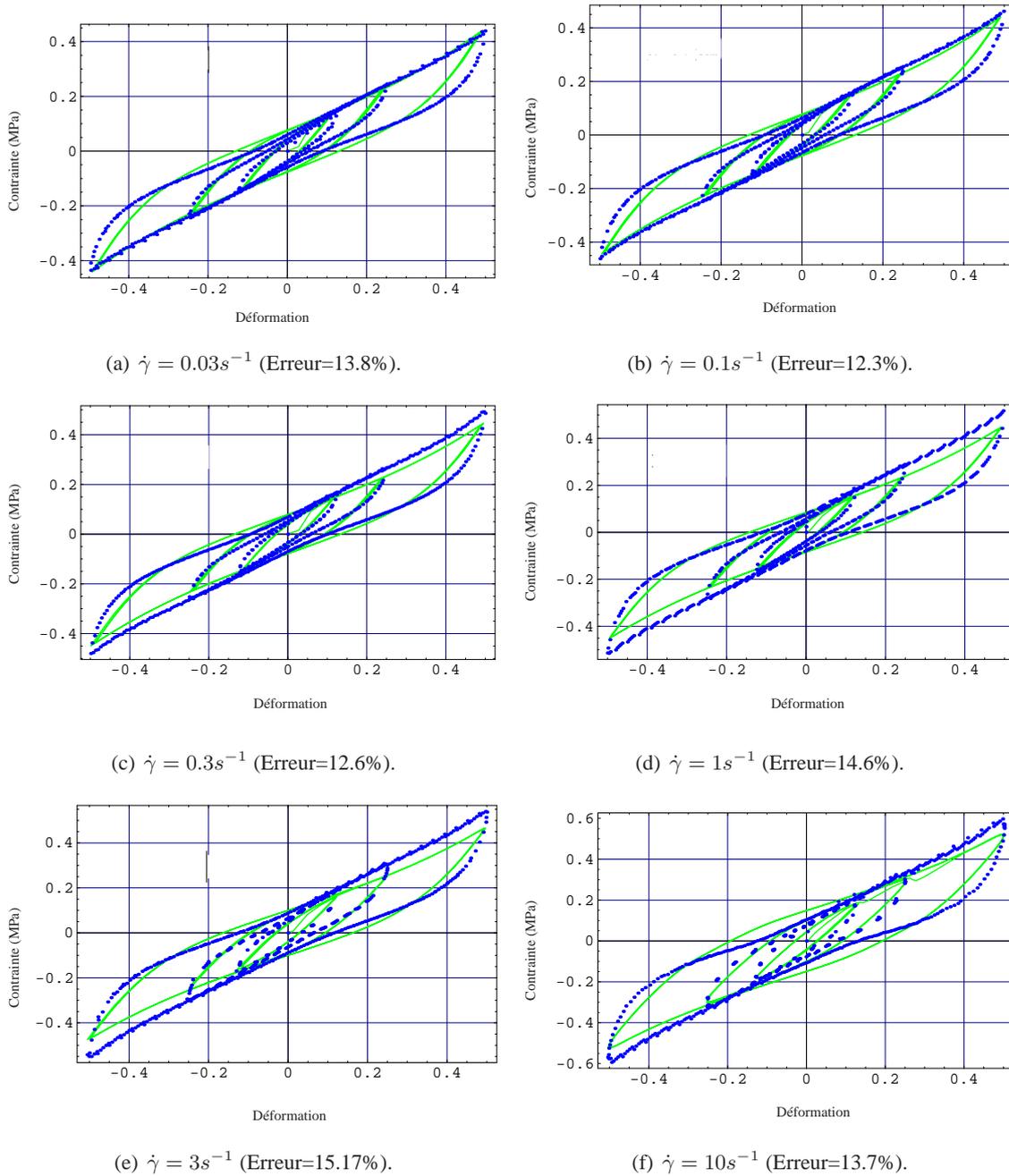


Figure 4.11 – Ajustement des paramètres du modèle SHVP1, sur des essais cycliques triangulaires, à amplitude progressive et à différents taux de déformation.

4.4 Quelques variantes du modèle statistique

4.4.1 Le modèle SHVP2

4.4.1.a Présentation

Une autre variante du modèle statistique hyper-élasto-visco-plastique peut être proposée (cf. Fig. 4.12)⁽²⁾, en supposant cette fois-ci que :

- les inclusions sont à comportement hyper-visco-élastique,
- l'interface inclusions/matrice est le siège de glissements avec frottements secs.

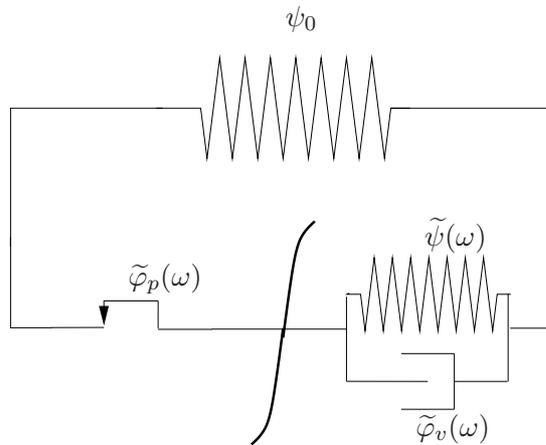


Figure 4.12 – Modèle statistique hyper-élasto-visco-plastique SHVP2.

Les formes de potentiels et les équations constitutives relatives à ce modèle sont donc :

$$\begin{cases} \rho\psi(\bar{\bar{B}}) = c_1(I_1 - 3) + c_2 \ln \frac{I_2}{3}, \\ \rho\tilde{\psi}(\omega, \bar{\bar{B}}_e(\omega)) = a(\omega)(I_1^e(\omega) - 3), \\ \tilde{\varphi}_v(\omega, \bar{\bar{D}}_e(\omega)) = \frac{\eta(\omega)}{2} \bar{\bar{D}}_e(\omega) : \bar{\bar{D}}_e(\omega), \\ \tilde{\varphi}_p(\omega, \bar{\bar{D}}_p^o(\omega)) = \chi(\omega) \left\| \bar{\bar{D}}_p^o(\omega) \right\|. \end{cases} \quad (4.8)$$

et :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_0 + \int_0^\infty \tilde{\bar{\sigma}}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega - p\bar{\bar{1}}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_0 = 2 \left[c_1 \bar{\bar{B}} - c_2 \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D, \\ \tilde{\bar{\sigma}}(\omega) = 2 \left[a(\omega) \bar{\bar{B}}_e(\omega) \right]^D + \eta(\omega) \bar{\bar{D}}_e(\omega), \\ 2 \left[a(\omega) \bar{\bar{B}}_e(\omega) \right]^D + \left[\eta(\omega) \bar{\bar{V}}_e(\omega) \cdot \bar{\bar{D}}_e(\omega) \cdot \bar{\bar{V}}_e^{-1}(\omega) \right]^D = \chi(\omega) \frac{\bar{\bar{D}}_p^o(\omega)}{\left\| \bar{\bar{D}}_p^o(\omega) \right\|}, \\ \text{avec } \text{tr} \bar{\bar{D}} = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(\bar{\bar{D}}_p^o(\omega)) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

(2). Ce modèle fait actuellement l'objet d'une analyse fine, menée par J. GRANDCOIN dans le cadre de sa thèse, en vue d'y intégrer une loi d'endommagement par fatigue.

4.4.1.b Identification

A titre indicatif, nous présentons un résultat d'identification réalisé sur des essais à température ambiante. Le tableau Tab. 4.3 et la figure Fig. 4.13 présentent respectivement les valeurs des paramètres identifiés et l'allure comparative des réponses expérimentales et numériques sous chargement cyclique triangulaire à amplitude croissante.

c_1 (MPa)	c_2 (MPa)	a_0 (MPa)	$\bar{\chi}$ (Mpa)	$\bar{\eta}$ (MPa.s)	Ω	Erreur (%)
1.38	-3.15	0.63	4.37	0.30	0.16	7.0

Tableau 4.3 – Paramètres du modèle SHVP2, identifiés à la fin des trois étapes.

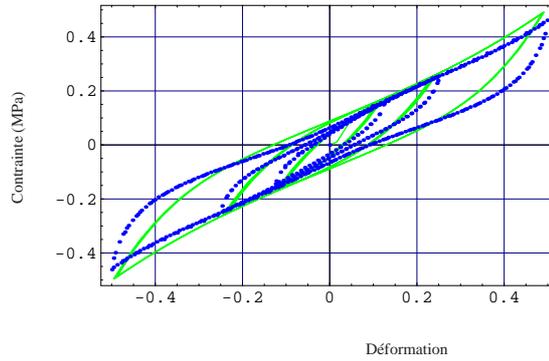


Figure 4.13 – Résultat d'identification du modèle SHVP2 (Erreur=7%).

4.4.2 Le modèle de MIEHE généralisé

4.4.2.a Présentation

Une autre approche statistique, basée sur la même logique que les modèles précédents, a été mise en oeuvre lors de la thèse de J.M. MARTINEZ [107] et a donné lieu à un modèle que nous baptisons le modèle de MIEHE généralisé. Il associe un modèle statistique hyper-visco-élastique en parallèle avec une branche élastoplastique de SAINT VENANT Fig. 4.14.

Les équations constitutives de ce modèle ont été établies en adoptant :

- des potentiels d'énergie libre de forme hyperélastique incompressible, de type NÉO-HOOKÉEN :

$$\begin{aligned} & - \psi_0 = c_1 \left(I_1(\bar{\bar{B}}) - 3 \right), \\ & - \tilde{\psi}(\omega) = a(\omega) \left(I_1(\bar{\bar{B}}_e(\omega)) - 3 \right), \\ & - \psi_p = a_p \left(I_1(\bar{\bar{B}}_e^p) - 3 \right); \end{aligned}$$

- un pseudo-potential visqueux sous forme quadratique :

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{2} \bar{\bar{D}}_v^o(\omega) : \bar{\bar{D}}_v^o(\omega)$$

- et une plasticité avec une surface seuil de VON-MISES, :

$$\varphi_p \left(\bar{\bar{D}}_p^o \right) = \chi \left\| \bar{\bar{D}}_p^o(\omega) \right\|$$

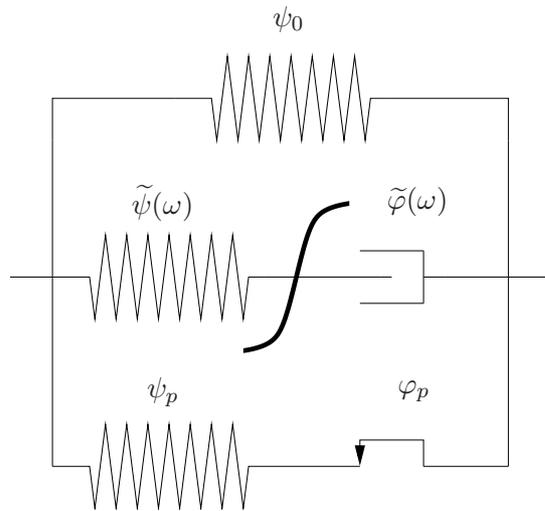


Figure 4.14 – Modèle de MIEHE généralisé

D'où la loi de comportement et les lois complémentaires :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \int_0^\infty \tilde{\sigma}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega + \bar{\sigma}_p - p\bar{1} \\ \bar{\sigma}_0 = 2 [c_1 \bar{\bar{B}}]^D \\ \tilde{\sigma}(\omega) = 2 [a(\omega) \bar{\bar{B}}_e(\omega)]^D = \eta(\omega) \bar{\bar{D}}_v^o(\omega), & \text{avec } \text{tr} \bar{\bar{D}} = 0, \text{tr}(\bar{\bar{D}}_v^o(\omega)) = 0 \text{ et } \text{tr}(\bar{\bar{D}}_p^o) = 0 \\ \bar{\sigma}_p = 2 [a_p \bar{\bar{B}}_e^p]^D = \chi \frac{\bar{\bar{D}}_p^o}{\|\bar{\bar{D}}_p^o\|}, \end{cases} \quad (4.10)$$

La fonction de répartition $\mathcal{P}(\omega)$ ainsi que les variations des caractéristiques hyperélastiques et visqueuses en fonction de ω ont été choisies, pour cette application, sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{\int_0^\infty \mathcal{P}(\omega) d\omega} \text{Exp} \left[- \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right] \\ a(\omega) = a_0 \text{Exp} [\omega], \\ \eta(\omega) = \eta_\infty \left[\frac{\ln [\sqrt{\omega} + 1]}{\omega} + 1 \right] \end{cases} \quad (4.11)$$

Avec ces écritures, les paramètres à identifier sont au nombre de **6** : **5** paramètres déterministes ($c_1, a_0, \eta_\infty, a_p, \chi$) et **1** paramètre statistique (Ω).

4.4.2.b Identification

Compte-tenu de la spécificité de ce modèle, l'identification de ses paramètres s'effectue avec une stratégie légèrement différente des modèles SHVP1 et SHVP2.

Ainsi, en régime (quasi-)statique, le modèle est assimilable à un modèle hyper-élastoplastique à écrouissage linéaire. On propose alors d'identifier préalablement c_1, a_p et χ sur un essai de montée en charge quasi-statique et ensuite de réaliser un ajustement sur l'élasticité différée obtenue par des essais de relaxation. Les paramètres a_0, η_∞ et Ω sont ensuite identifiés sur des essais cycliques triangulaires à amplitude progressive (12.5%, 25%) et à différentes vitesses de déformations ($3s^{-1}$ et $10s^{-1}$).

Les résultats des identifications, à différentes températures, sont présentés sur le tableau Tab. 4.4. Les courbes présentées sur Fig. 4.15 montrent une bonne corrélation entre les résultats d'identification, à l'issue des trois étapes citées ci-dessus, et les réponses expérimentales.

T (°C)	c_1 (MPa)	a_p (MPa)	χ (Mpa)	a_0 (MPa)	η_∞ (MPa.s)	Ω	Erreur (%)	
							$3s^{-1}$	$10s^{-1}$
-55	0.538	2.424	0.107	0.151	0.14	1.56	10.84	12.43
-40	0.486	2.109	0.088	0.136	0.105	1.56	12.45	12.17
-25	0.451	1.767	0.075	0.121	0.096	1.56	15.28	11.82
25	0.386	1.23	0.04	0.0614	0.063	1.56	7.98	8.75
40	0.359	1.024	0.031	0.059	0.056	1.56	7.78	6.79
70	0.342	0.855	0.02	0.051	0.053	1.56	10.15	6.86

Tableau 4.4 – Paramètres identifiés lors de l'étape finale pour différentes températures.

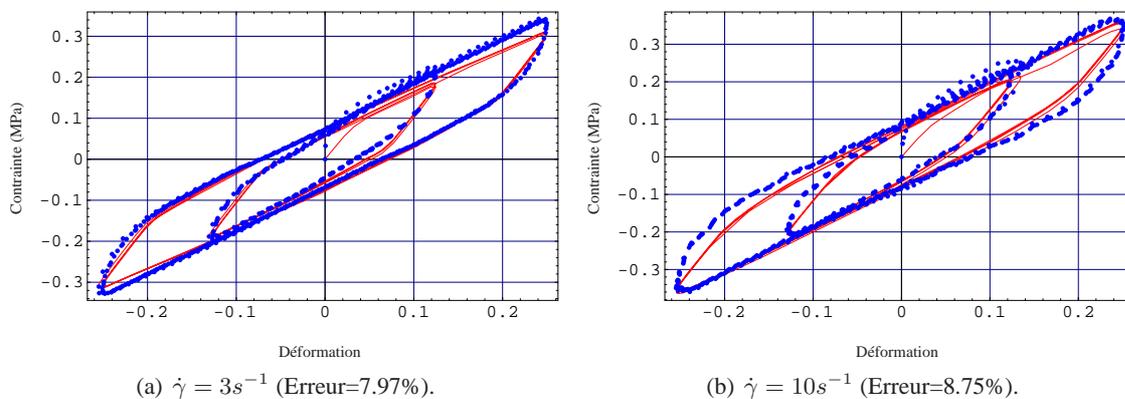


Figure 4.15 – Confrontation modèle/expérience des boucles d'hystérésis pour une sollicitation cyclique triangulaire à amplitude progressive.

Par ailleurs, nous présentons (Fig. 4.16) quelques boucles de réponse stabilisée du modèle qui représente convenablement le comportement du matériau en terme d'hystérésis à différentes températures et à différents taux de déformations.

De façon plus globale, la confrontation du modèle vis à vis de l'expérience, pour des chargements cycliques sinusoïdaux, montre qu'il traduit convenablement les phénomènes observés expérimentalement, à savoir :

- l'effet PAYNE, c-à-d l'assouplissement du cycle d'hystérésis avec l'augmentation de l'amplitude Fig. 4.17(c) [50],
- la rigidification avec l'augmentation de la fréquence de sollicitation Fig. 4.17(a),
- l'évolution de la dissipation cyclique avec l'amplitude et la fréquence de chargement (Fig. 4.17(d) et Fig. 4.17(b)).

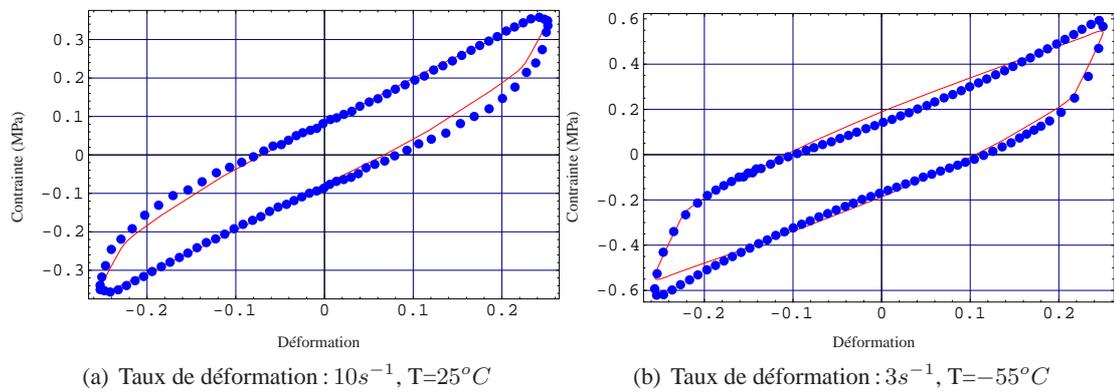


Figure 4.16 – Confrontation des réponses stabilisées à différentes vitesses de déformation et à différentes températures.

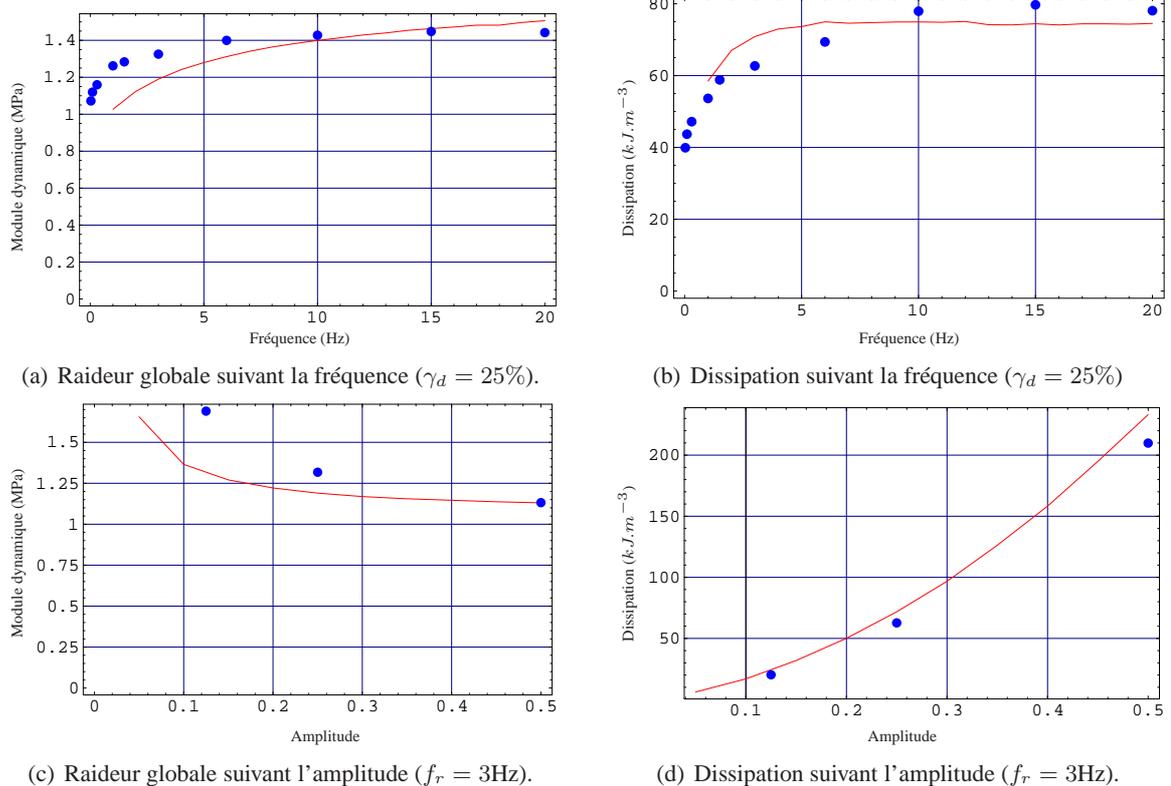


Figure 4.17 – Évolution de la raideur globale et de la dissipation suivant la fréquence et l'amplitude pour une sollicitation cyclique sinusoïdale.

4.5 Bilan

Dans ce chapitre, une approche statistique a été proposée pour le développement de modèles hyper-élasto-visco-plastiques permettant de couvrir un large spectre de vitesses de sollicitations. Ils présentent l'avantage des modèles multi-branches, mais avec un faible nombre de paramètres caractéristiques à identifier.

Pour chaque modèle, nous avons mis au point une stratégie d'identification permettant l'évaluation de ces paramètres moyennant une corrélation avec des résultats d'essais expérimentaux réalisés à différentes températures.

Cependant, les modèles développés nécessitent encore une analyse fine visant à mettre en évidence la signification physique des différents paramètres et à en étudier l'influence sur la réponse et donc à en faciliter l'identification.

Par ailleurs, la stratégie d'identification nécessite d'être complétée via l'utilisation d'essais expérimentaux, autres que le double cisaillement, (traction uniaxiale, traction multiaxiale ou torsion...) afin d'une part, de mieux corréler la réponse tridimensionnelle du modèle avec le comportement réel du matériau et d'autre part, de qualifier la pertinence de ce modèle et de l'identification de ses paramètres, à travers une confrontation sous des sollicitations plus complexes que celles de l'identification.

Concernant les perspectives de ces travaux, nous envisageons, à court terme, d'intégrer ces modèles dans un code de calcul par éléments finis. En effet le développement d'éléments finis basés sur ces modèles, auraient à la fois :

- les performances numériques des éléments finis hyper-visco-élastiques ou hyper-visco-plastiques à variables internes [91; 92; 135; 133; 67] qui, avec l'intégration locale des lois complémentaires permettent d'obtenir une solution numérique à coût raisonnable,
- et la généralité des éléments finis basés sur l'approche à intégrale héréditaire, avec une intégration récursive de l'histoire de la déformation [80; 61], qui permet de couvrir un large spectre de vitesses de déformations.

Ainsi ces éléments hyper-élasto-visco-plastiques devraient couvrir un large spectre de chargement, avec l'efficacité numérique qu'offrent les formulations à variables internes.

Le couplage thermomécanique pour des élastomères

Comme nous l'avons constaté au fil de ce document, les élastomères chargés possèdent d'une part un caractère fortement dissipatif et d'autre part, des caractéristiques mécaniques dépendantes de la température. La modélisation du couplage thermomécanique s'avère de plus en plus nécessaire pour traduire leur comportement.

Pour ce faire, un algorithme de couplage faible a été mis en place. Il tient compte, en particulier, de l'évolution des caractéristiques mécaniques en fonction de la température ainsi que d'un terme source de chaleur d'origine mécanique dans les différentes équations induites par la thermique.

Une confrontation des résultats numériques et expérimentaux est effectuée. Elle permet, dans un premier temps, de quantifier la proportion de la puissance dissipée qui est transformée en chaleur, puis de valider cette modélisation couplée.

PLAN DU CHAPITRE 5

5.1	Introduction	83
5.2	Aspects théoriques du couplage thermomécanique	83
5.2.1	Écriture de l'équation de la chaleur pour un problème thermomécanique	83
5.2.1.a	Formulation eulérienne	83
5.2.1.b	Écriture lagrangienne	85
5.2.2	Position du problème thermomécanique	86
5.2.2.a	Description eulérienne	86
5.2.2.b	Description lagrangienne	87
5.3	Mise en oeuvre d'une plate-forme de couplage	88
5.3.1	Formulation variationnelle	89
5.3.2	Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis	90
5.3.2.a	Problème mécanique	90
5.3.2.b	Problème thermique	90
5.3.3	Algorithme de couplage	91
5.3.4	Application à la simulation d'un essai cyclique en double-cisaillement	91
5.4	Bilan	95

5.1 Introduction

Ce dernier chapitre présente des travaux, menés en collaboration avec l'IUSTI, sur la modélisation du couplage thermomécanique des élastomères. Cette modélisation permet la prise en compte de la dissipation mécanique, de l'évolution de la température ainsi que l'influence de la température initiale dans le comportement mécanique d'un élastomère.

La motivation industrielle de ces travaux est liée à des pièces que l'on trouve au niveau du rotor d'hélicoptères : les **adaptateurs de fréquences**. Ces pièces, destinées à amortir les mouvements de traînée, sont constituées d'élastomère fortement dissipatif. Sous sollicitations dynamiques, le matériau constitutif subit un auto-échauffement significatif qui induit une variation de ses caractéristiques mécaniques en fonction de la température, et donc une évolution de la réponse mécanique locale et globale. Il s'agit donc de modéliser le comportement thermomécanique sous sollicitations dynamiques, en tenant compte des variations de températures induites au sein du matériau.

Ces dernières années, ce thème a fait l'objet de plusieurs travaux, ainsi HOLZAPFEL et REITER ont proposé une modélisation thermomécaniquement couplée en viscoélasticité linéaire [72]. Cette formulation a ensuite été généralisée aux grandes transformations par HOLZAPFEL et SIMO, avec un cadre thermodynamique permettant un couplage fort entre l'élasticité et les effets thermiques [73], puis en thermo-visco-élasticité [74; 99; 100] et récemment thermo-visco-plasticité [102].

Sur les aspects numériques du couplage thermomécanique citons les travaux de HOLZAPFEL et REITER [72] dans le cas linéaire, puis ceux de MIEHE [112] en thermo-élasticité finie, ainsi de ceux de REESE et GOVINDJEE en grandes déformations viscoélastiques [132; 129]. L'objet de ce chapitre est de présenter une synthèse de nos travaux menés à ce sujet, à travers les thèses de C. CARPENTIER-GABRIELI et S. MÉO, [53; 119] et en collaboration avec M. JEAGER de l'IUSTI à Marseille ; collaboration ayant fait l'objet d'une publication commune [18].

Dans un premier temps, nous présentons le cadre thermodynamique du modèle thermomécanique adapté à une formulation en grandes transformations du comportement d'un matériau incompressible à configurations intermédiaires.

Ensuite, nous proposons un algorithme de couplage faible, basé sur la méthode des éléments finis, et appliqué à un matériau hyper-visco-élastique de type POYNTING-THOMSON.

Et enfin, une confrontation des résultats numériques du modèle et des mesures expérimentales, issues d'essais de double-cisaillement réalisée à l'IUSTI, nous permettra de proposer une schématisation des micro-mécanismes de couplage et d'en dégager des idées et des orientations de recherche à explorer à moyen terme.

5.2 Aspects théoriques du couplage thermomécanique

5.2.1 Écriture de l'équation de la chaleur pour un problème thermomécanique

5.2.1.a Formulation eulérienne

L'écriture de l'équation de la chaleur, en description eulérienne, suit une démarche analogue à celle utilisée en petites perturbations [32]. Partant de la relation entre l'énergie interne et l'énergie libre spécifique $e = \psi + sT$ et de sa variation :

$$\dot{e} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \dot{\bar{B}} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \dot{T}s + T\dot{s}, \quad (5.1)$$

et en utilisant l'équation d'état de l'entropie $s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}$, on aboutit à :

$$\dot{e} = \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} : \dot{\bar{B}} + \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i + T\dot{s}. \quad (5.2)$$

Cette équation combinée à l'écriture locale du premier principe :

$$\rho\dot{e} = \bar{\sigma} : \bar{D} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (5.3)$$

donne :

$$\rho \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} : \dot{\bar{B}} + \rho \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i + \rho T\dot{s} = \bar{\sigma} : \bar{D} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (5.4)$$

Soit, en utilisant les mesures objectives des taux de déformation :

$$2\rho \left[\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + \bar{B}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \right] : \bar{D} - 2\rho \left[\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i \right] : {}^i\bar{D}^o + \rho T\dot{s} = \bar{\sigma} : \bar{D} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (5.5)$$

Puis en injectant les équations constitutives Eq. 3.16 :

$$-\frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\bar{D}} : \bar{D} - \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial{}^i\bar{D}^o} : {}^i\bar{D}^o + \rho T\dot{s} = \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (5.6)$$

Soit aussi :

$$\rho T\dot{s} = \phi^{int} + \rho r - \text{div}_x \vec{q} \quad \text{avec} \quad \phi^{int} = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\bar{D}} : \bar{D} + \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial{}^i\bar{D}^o} : {}^i\bar{D}^o. \quad (5.7)$$

Or, puisque :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial T \partial \bar{B}} : \dot{\bar{B}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial T \partial \bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i - \frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} \dot{T} \\ &= -2 \left[\bar{B} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial T \partial \bar{B}} + \bar{B}^i \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial T \partial \bar{B}^i} \right] : \bar{D} + 2 \left[\bar{V}^i \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial T \partial \bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i \right] : {}^i\bar{D}^o - \frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} \dot{T} \end{aligned}$$

on obtient, en tenant compte des conditions d'incompressibilité :

$$\begin{aligned} \rho T\dot{s} &= -2T\rho \left[\bar{B} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial T \partial \bar{B}} + \bar{B}^i \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial T \partial \bar{B}^i} \right] : \bar{D} + 2T\rho \left[\bar{V}^i \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial T \partial \bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i \right] : {}^i\bar{D}^o - \rho T \frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} \dot{T} \\ &= -T \left[\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial T} - \frac{\partial^2\varphi^{int}}{\partial\bar{D}\partial T} \right] : \bar{D} + T \left[\frac{\partial^2\varphi^{int}}{\partial{}^i\bar{D}^o\partial T} \right] : {}^i\bar{D}^o + \rho T \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \end{aligned}$$

En réinjectant ce dernier résultat et la chaleur spécifique, à déformations constantes $C_\epsilon = T \frac{\partial s}{\partial T}$ dans la relation Eq. 5.7, on obtient :

$$\underbrace{\rho C_\epsilon \dot{T}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\text{div}_x \vec{q}}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\rho r}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\phi^{int}}_{\textcircled{4}} + T \underbrace{\left[\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial T} - \frac{\partial^2\varphi^{int}}{\partial\bar{D}\partial T} \right) : \bar{D} - \left(\frac{\partial^2\varphi^{int}}{\partial{}^i\bar{D}^o\partial T} \right) : {}^i\bar{D}^o \right]}_{\textcircled{5}}. \quad (5.8)$$

L'analyse des différents termes de cette équation reste la même que sous l'hypothèse des petites déformations, à savoir :

- les composantes ① et ② de l'équation Eq. 5.8 correspondent respectivement aux termes d'absorption et de diffusion de chaleur,

- la grandeur ρr (③) représente le taux de production de chaleur créée à distance par des sources externes,
- en ④ on retrouve la dissipation intrinsèque (mécanique) qui est homogène à une source volumique de chaleur interne,
- et enfin les termes de couplage (⑤) dus à la variation des paramètres mécaniques vis-à-vis de la température.

Concernant le terme de diffusion, on utilise tout simplement la loi de FOURIER, qui s'écrit pour les milieux isotropes sous la forme :

$$\vec{q} = -K \vec{\nabla}_x T \quad (5.9)$$

où K est le coefficient de conductivité thermique.

5.2.1.b Écriture lagrangienne

Cette fois, l'équation locale de conservation de l'énergie écrite dans la configuration initiale est :

$$\rho_0 \dot{e} = \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{E}} + \rho_0 r - \text{div}_X \vec{Q}. \quad (5.10)$$

avec :

$$\dot{e} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}} : \dot{\bar{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}^i} : \dot{\bar{C}}^i + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + T \dot{s} + T \dot{s}, \quad (5.11)$$

donne, compte-tenu de l'équation d'état d'entropie :

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}} : \dot{\bar{E}} + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}^i} : \dot{\bar{C}}^i + \rho_0 T \dot{s} = \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{E}} + \rho_0 r - \text{div}_X \vec{Q}. \quad (5.12)$$

soit aussi, en injectant la loi de comportement et les lois complémentaires Eq. 3.11 et en tenant compte des conditions d'incompressibilité ($\bar{\bar{C}}^{-1} : \dot{\bar{C}} = 0$, ${}^i \bar{\bar{C}}^{-1} : \dot{\bar{C}}^i = 0$) :

$$\left[\bar{\bar{S}} - \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{E}}} \right] : \dot{\bar{E}} - \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}^i} : \dot{\bar{C}}^i + \rho_0 T \dot{s} = \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{E}} + \rho_0 r - \text{div}_X \vec{Q}. \quad (5.13)$$

Soit aussi :

$$\rho_0 T \dot{s} = \phi_0^{int} + \rho_0 r - \text{div}_X \vec{Q} \quad \text{avec} \quad \phi_0^{int} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{E}}} : \dot{\bar{E}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}^i} : \dot{\bar{C}}^i. \quad (5.14)$$

Par ailleurs, partant de $s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}$ et en développant de façon analogue à la formulation eulérienne, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_0 T \dot{s} &= -\rho_0 T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{E}} : \dot{\bar{E}} - \rho_0 T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{C}^i} : \dot{\bar{C}}^i - \rho_0 T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} \\ &= -T \left[\left(\frac{\partial \bar{\bar{S}}}{\partial T} - \frac{\partial^2 \varphi^{int}}{\partial T \partial \dot{\bar{E}}} \right) : \dot{\bar{E}} - \left(\frac{\partial^2 \varphi^{int}}{\partial T \partial \dot{\bar{C}}^i} \right) : \dot{\bar{C}}^i \right] + \rho_0 T \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \end{aligned}$$

On aboutit finalement à l'équation de la chaleur en description lagrangienne :

$$\underbrace{\rho_0 C_\epsilon \dot{T}}_{\text{①}} + \underbrace{\text{div}_X \vec{Q}}_{\text{②}} = \underbrace{\rho_0 r}_{\text{③}} + \underbrace{\phi_0^{int}}_{\text{④}} + \underbrace{T \left[\left(\frac{\partial \bar{\bar{S}}}{\partial T} - \frac{\partial^2 \varphi^{int}}{\partial T \partial \dot{\bar{E}}} \right) : \dot{\bar{E}} - \left(\frac{\partial^2 \varphi^{int}}{\partial T \partial \dot{\bar{C}}^i} \right) : \dot{\bar{C}}^i \right]}_{\text{⑤}}, \quad (5.15)$$

avec la même signification physique des différents termes que dans le cas eulérien.

Pour écrire la loi de FOURIER dans la configuration initiale, rappelons que le vecteur flux de chaleur de PIOLA-KIRCHHOFF se déduit du flux eulérien par :

$$\vec{Q} = J\bar{F}^{-1}.\vec{q}. \quad (5.16)$$

Ainsi, en utilisant l'équation de transport :

$$\vec{\nabla}_X T = \bar{F}^T . \vec{\nabla}_x T,$$

on obtient l'écriture lagrangienne de la loi de FOURIER :

$$\vec{Q} = -\bar{K}_L . \vec{\nabla}_X T = -J\bar{F}^{-1} . \bar{K} . \bar{F}^{-T} . \vec{\nabla}_X T, \quad (5.17)$$

avec, dans le cas isotrope : $\bar{K} = K\bar{1}$.

5.2.2 Position du problème thermomécanique

5.2.2.a Description eulérienne

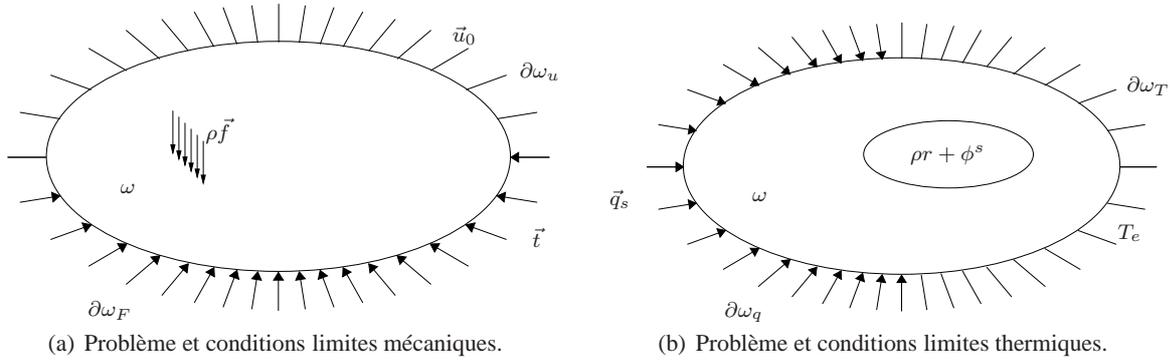


Figure 5.1 – Définition eulérienne du problème thermomécanique.

Nous présentons, dans ce paragraphe, un bilan des équations régissant le problème thermomécanique faiblement couplé, et écrites dans la configuration actuelle.

• Problème mécanique :

Ainsi, pour le problème mécanique, les équations locales de conservation de la quantité de mouvement peuvent être résumées comme suit :

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \text{div}_x \bar{\sigma} + \rho\vec{f} \quad \forall \vec{x} \in \omega \quad (5.18)$$

avec les équations aux frontières :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{t} & \forall \vec{x} \in \partial\omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \forall \vec{x} \in \partial\omega_u \end{cases} \quad (5.19)$$

Les équations constitutives sont, quant à elles, données par les équations Eq. 5.20 ,

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \left[2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + 2\rho\bar{B}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \right]^D - p\bar{1}, \\ \left[2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i \right]^D = \left[\frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\bar{D}^i} \right]^D, \\ \text{tr}\bar{D} = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}^i \bar{D}^0 = 0 \quad \forall i \in [1..N], \end{cases} \quad \forall \vec{x} \in \omega \quad (5.20)$$

• **Problème thermique :**

Les équations de la thermique traduisent, quant à elles, la conservation locale de l'énergie :

$$\forall \vec{x} \in \omega, \quad \rho C_e \dot{T} + \text{div}_x \vec{q} = \rho r + \phi^s \quad \text{avec} \quad \phi^s = \phi^{int} + T \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \bar{D} - \frac{\partial \phi^{int}}{\partial T} \right]. \quad (5.21)$$

Les conditions aux bords correspondantes sont :

$$\begin{cases} \vec{q} = \vec{q}_s & \forall \vec{x} \in \partial\omega_q \\ T = T_e & \forall \vec{x} \in \partial\omega_T \end{cases} \quad (5.22)$$

Alors que l'équation constitutive de la thermique se résume à la loi de FOURIER :

$$\vec{q} = -K \vec{\nabla}_x T \quad \forall \vec{x} \in \omega. \quad (5.23)$$

5.2.2.b Description lagrangienne

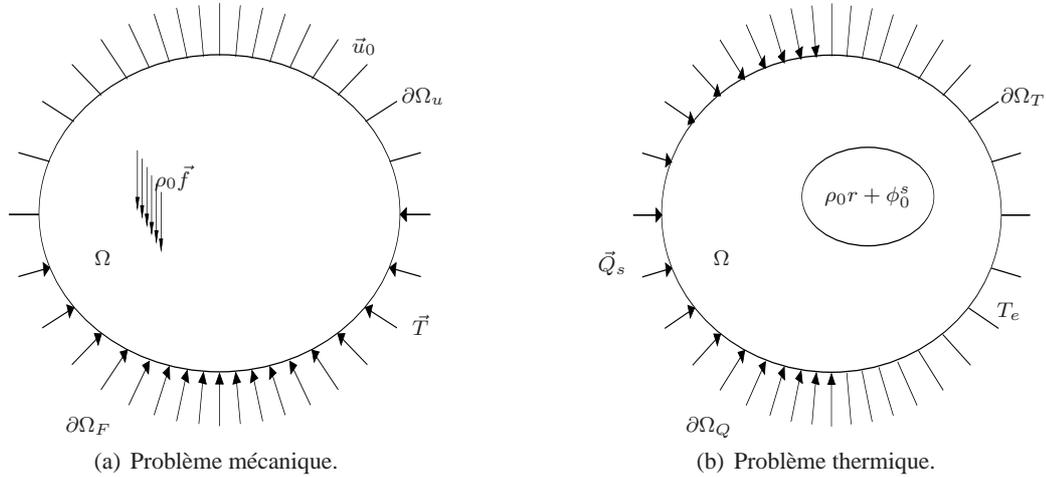


Figure 5.2 – Définition lagrangienne du problème thermomécanique.

La retranscription lagrangienne de ce problème est faite en utilisant le premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF et le vecteur flux de chaleur de PIOLA-KIRCHHOFF, soit :

• **Problème mécanique :**

Les équations locales d'équilibre :

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \text{div}_X \bar{\bar{\Pi}} + \rho_0 \vec{f} \quad \forall \vec{X} \in \Omega \quad (5.24)$$

avec les équations aux frontières :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\Pi}} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \forall \vec{X} \in \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \forall \vec{X} \in \partial\Omega_u \end{cases} \quad (5.25)$$

Les équations constitutives sont, quant à elles, données par les équations Eq. 3.11 ,

$$\begin{cases} \bar{\bar{\Pi}} = \bar{F} \cdot \text{Dev}_L \left[\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{E}}} \right] - p J \bar{F}^{-T} \\ \left[-\rho_0 \dot{\bar{C}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\bar{C}}} \right]^D = \left[\dot{\bar{C}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}} \right]^D \\ \dot{\bar{C}} : \bar{C}^{-1} = 0 \quad \dot{\bar{C}}^i : \bar{C}^{i-1} = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}, \end{cases} \quad \forall \vec{X} \in \Omega \quad (5.26)$$

• **Problème thermique :**

L'équation de la chaleur s'écrit en lagrangien :

$$\forall \vec{X} \in \Omega, \quad \rho_0 C_e \dot{T} + \operatorname{div}_X \vec{Q} = \rho_0 r + \phi_0^s \quad \text{avec} \quad \phi_0^s = \phi_0^{int} + T \left[\frac{\partial (\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\Pi})}{\partial T} : \dot{\bar{E}} - \frac{\partial \phi_0^{int}}{\partial T} \right], \quad (5.27)$$

associée aux conditions aux bords :

$$\begin{cases} \vec{Q} = \vec{Q}_s & \forall \vec{X} \in \partial\Omega_Q \\ T = T_e & \forall \vec{X} \in \partial\Omega_T \end{cases} \quad (5.28)$$

Alors que l'équation constitutive de la thermique s'écrit dans la configuration initiale :

$$\vec{Q} = -\bar{K}_L \cdot \vec{\nabla}_X T \quad \forall \vec{X} \in \Omega. \quad (5.29)$$

Remarque 5.1

Ces équations ne tiennent pas compte des effets de dilatation thermique que nous avons toujours négligés dans nos travaux, car très peu observés au cours des essais expérimentaux à températures contrôlées. Pour tenir compte de la dilatation thermique, certains auteurs [99; 73] choisissent d'introduire une configuration intermédiaire purement thermique et de décomposer ainsi, la transformation en une partie thermique (\bar{F}_T) et une autre mécanique (\bar{F}_M), cette dernière pouvant être de nature élastique, viscoélastique, élastoplastique ou visco-élasto-plastique.

$$\begin{cases} \bar{F} = \bar{F}_M \cdot \bar{F}_T \\ \text{avec } \bar{F}_T = (f(T - T_0))^{1/3} \bar{1}, \end{cases}$$

où T_0 est la température de la configuration de référence et $f(0) = 1$. □

Remarque 5.2

Pour nos applications nous avons systématiquement négligé le terme de couplage :

$$T \left[\frac{\partial (\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\Pi})}{\partial T} : \dot{\bar{E}} - \frac{\partial \phi_0^{int}}{\partial T} \right],$$

si bien que seule la dissipation intrinsèque $\phi_0^s = \phi_0^{int}$ constitue la source de chaleur pour le problème thermique.

Cette hypothèse repose principalement sur le fait que les caractéristiques mécaniques dépendent peu de la température ; ce qui restreint le domaine de validité de notre modélisation thermomécanique à des zones éloignées de la zone de transition vitreuse.

Elle devra cependant, faire l'objet d'une analyse plus fine afin d'estimer l'ordre de grandeur de ce terme de couplage relativement à la dissipation intrinsèque. □

5.3 Mise en oeuvre d'une plate-forme de couplage

A titre d'application, nous avons ([18; 120]) mis en place une plate-forme de couplage, basée sur :

- le modèle hyper-visco-élastique incompressible de POYNTING-THOMSON, avec des paramètres caractéristiques dépendants de la température ;

- le développement d'éléments finis mécanique et thermique permettant la résolution numérique du problème thermo-visco-hyper-élastique couplé.

Cependant, les temps caractéristiques respectifs des effets mécaniques et thermiques étant très différents, cette plate-forme de couplage peut être construite sur la base de résolutions séparées et séquentielles du problème mécanique et du problème thermique [23; 53; 73].

Ainsi, au cours de la modélisation, est réalisée une succession de calculs mécaniques et thermiques. Les calculs mécaniques sont supposés isothermes, tandis que les calculs thermiques sont réalisés sur la géométrie déformée à vitesse de déformation nulle et en considérant la dissipation intrinsèque comme source volumique de chaleur. On parle alors de plate-forme de **couplage thermomécanique faible**, dont les équations locales sont présentées ci-dessous.

Problème mécanique	Problème thermique
$\dot{T} = 0$	$\dot{\vec{F}} = 0$
<u>Équations constitutives</u>	<u>Équations constitutives</u>
$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{\Pi}} = 2c_1(T)\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \\ \quad - 2c_2(T)\bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \bar{\bar{C}}_v \cdot \bar{\bar{C}}^{-1} - p J \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \\ \left[\eta(T)\bar{\bar{C}}_v \cdot \dot{\bar{\bar{C}}}_v \right]^D \\ = \left[c_1(T)\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} - c_2(T)\bar{\bar{C}}_v \cdot \bar{\bar{C}}^{-1} \right]^D \\ - \left[a_1(T)\bar{\bar{C}}_v \right]^D \\ \\ \dot{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Q} = -\bar{\bar{K}}_L \cdot \vec{\nabla}_X T \\ \bar{\bar{K}}_L = J \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{K}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} \end{array} \right.$
<u>Équations de conservation</u>	<u>Équations de conservation</u>
$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_X \bar{\bar{\Pi}} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \bar{\bar{\Pi}} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 C_e \dot{T} + \text{div}_X \vec{Q} = \phi_0^{int} & \text{sur } \Omega \\ \vec{Q} = \vec{Q}_s & \text{sur } \partial\Omega_Q \\ T = T_e & \text{sur } \partial\Omega_T \end{array} \right.$

5.3.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème d'équilibre quasi-statique est écrite via une formulation en lagrangien perturbé [26]. La solution d'équilibre (\vec{u}, p) vérifie la nullité, pour tout couple de fonctions $(\delta\vec{u}, \delta p)$ de la forme intégrale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{W}_u^m(\vec{u}, p) = \int_{\Omega} \bar{\bar{\Pi}} : \delta \bar{\bar{F}} dV - \int_{\partial\Omega_F} \bar{\bar{F}} \cdot \delta \vec{u} dS - \int_{\Omega} \rho_0 \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV, \\ \mathcal{W}_p^m(\vec{u}, p) = \int_{\Omega} \delta p (J - 1 - \alpha p) dV \end{array} \right. \quad (5.30)$$

où α désigne un coefficient de perturbation strictement positif, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, la solution (\vec{u}, p) tend vers la solution incompressible.

Pour le problème thermique, la solution T annule pour tout δT , la fonctionnelle :

$$\mathcal{W}^\theta(T) = \int_{\Omega} \left(\rho_0 C_\epsilon \dot{T} \delta T + \vec{\nabla}_L(\delta T) \cdot \bar{K}_L \cdot \vec{\nabla}_L(T) \right) dV - \int_{\partial\Omega_Q} \vec{Q} \cdot \vec{N} \delta T dS - \int_{\Omega} \phi_0^{int} \delta T dV \quad (5.31)$$

5.3.2 Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis

5.3.2.a Problème mécanique

Pour la modélisation des problèmes hyper-visco-élastiques, nous avons développé une bibliothèque d'éléments finis hybrides pour imposer la contrainte d'incompressibilité. Ces éléments sont basés sur des interpolations classiques de type Lagrange et une discontinuité de pression aux interfaces. Cette discontinuité permet aux degrés de liberté de pression d'être statiquement condensées à l'intérieur de l'élément ; ce qui aboutit, en définitif, à un système élémentaire à assembler qui se limite aux degrés de liberté de déplacement.

Cette bibliothèque d'éléments finis est couplée à un solveur non-linéaire basé sur la méthode de Newton-Raphson.

Pour cette application, nous avons utilisé l'élément triangulaire à 6 noeuds de déplacement et un noeud de pression (T6/P1) vérifiant la condition LBB et permettant d'obtenir une approximation stable du champ de pression hydrostatique p [124].

Par ailleurs, la construction des matrices et des résidus élémentaires, nécessite la résolution, à chaque point d'intégration, des systèmes différentiels issus :

- de la loi complémentaire que nous représentons schématiquement sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\bar{C}}_v = \bar{\mathcal{E}} \left(t, \bar{F}(t), \bar{C}_v(t) \right) \text{ on } [t_0, t_0 + \Delta t] \\ \bar{C}_v(t_0) = \bar{C}_v^0 \end{cases} \quad (5.32)$$

La résolution de ce système différentiel est faite à l'aide d'un schéma d'Euler implicite, avec une sous-incrémentation du pas de temps, et couplé à un algorithme de Newton-Raphson

- du comportement tangent dû à la viscosité :

$$\begin{cases} \frac{d\dot{\bar{C}}_v}{d\bar{F}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \bar{C}_v} : \frac{\partial \bar{C}_v}{\partial \bar{F}} + \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \bar{F}} \text{ on } [t_0, t_0 + \Delta t] \\ \left. \frac{\partial \bar{C}_v}{\partial \bar{F}} \right|_{t=t_0} = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

résolution qui se fait, cette fois, à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson

5.3.2.b Problème thermique

Le problème thermique est résolu en utilisant la même discrétisation géométrique que pour la mécanique. Cependant, afin d'éviter les oscillations de la solution thermique, nous avons adopté une interpolation linéaire de la température, soit un élément triangulaire géométriquement quadratique et dont les sommets sont des noeuds de température.

Le calcul des matrices et vecteurs élémentaires thermiques est réalisé de façon classique [121] et la résolution du système global est faite par un schéma d'Euler explicite.

5.3.3 Algorithme de couplage

La plate-forme de couplage des problèmes mécanique et thermique a été réalisée, dans le code de calcul par éléments finis SIC, selon le schéma présenté Fig. 5.3.

Ainsi, connaissant l'évolution des paramètres mécaniques vis-à-vis de la température⁽¹⁾, l'algorithme consiste en :

- une résolution du problème mécanique pendant un intervalle de temps t_m suffisamment long pour obtenir une évolution stable de la puissance dissipée ;
- une transmission de cette dissipation et du gradient moyen de la transformation entre les points d'intégration mécanique et les points d'intégration thermiques ;
- une résolution du problème thermique pendant un temps t_θ , suffisant pour avoir une évolution sensible des paramètres mécaniques ;
- une ré-actualisation des paramètres mécaniques pour une nouvelle résolution mécanique.

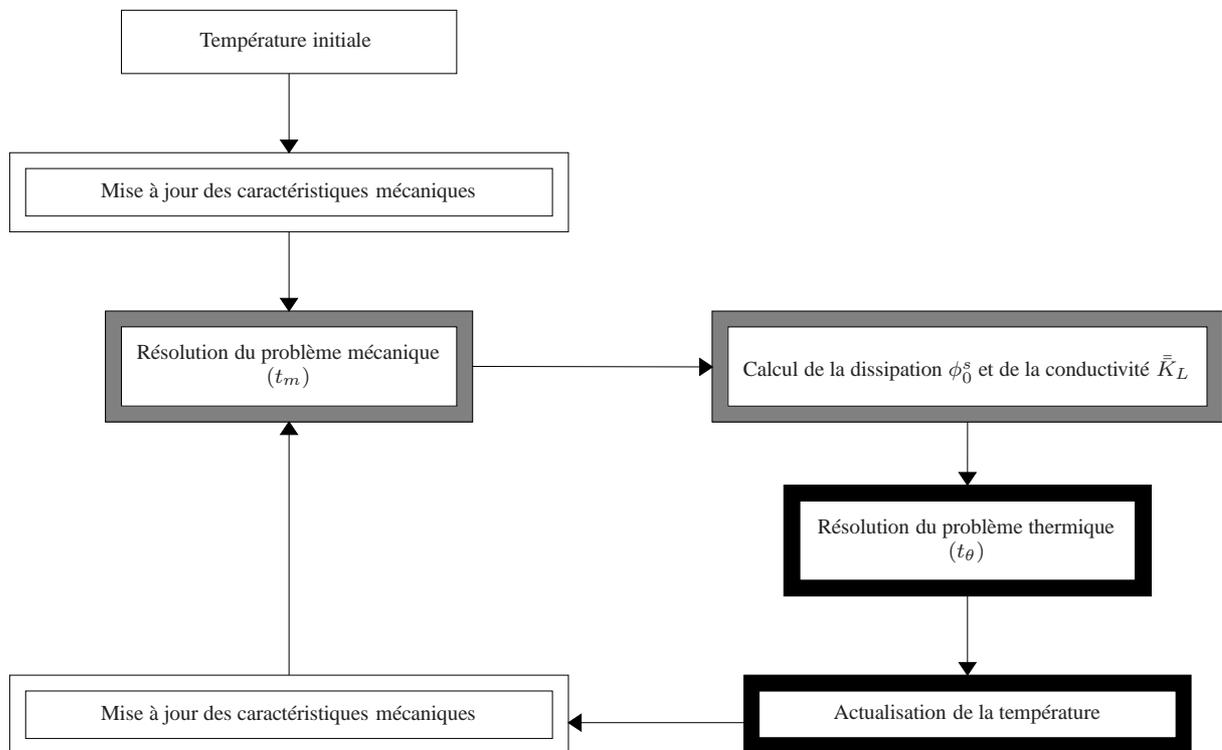


Figure 5.3 – Algorithme de couplage thermomécanique.

5.3.4 Application à la simulation d'un essai cyclique en double-cisaillement

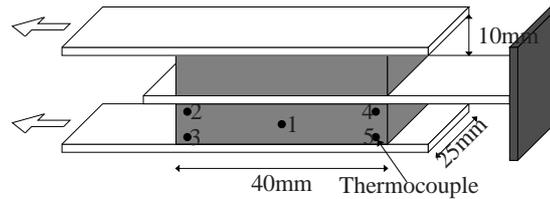
Cette plate-forme de couplage a été utilisée pour simuler des essais cycliques sinusoïdaux, à 3.1Hz , de double-cisaillement Fig. 5.4(a) réalisés, dans une enceinte climatique à température contrôlée respectivement à 27°C et à 60°C et sur un élastomère en silicone chargé, dont les caractéristiques mécaniques⁽²⁾ dépendent de la température Fig. 5.5.

(1). Évolution déterminée via des essais expérimentaux à température contrôlée

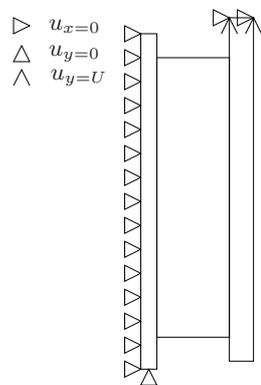
(2). Paramètres identifiés sur un modèle de Poynting-Thomson.

Concernant la stratégie d'incrémentation des problèmes mécaniques et thermiques, des essais numériques [119] ont mis en évidence, d'une part la nécessité d'affiner les séquences de couplages en début d'essai afin d'éviter des discontinuités et, d'autre part, la possibilité d'adopter un découpage thermique assez lâche sur la partie stabilisée de la réponse thermique. Ainsi, pour les résultats présentés par la suite, la $i^{ième}$ séquence de couplage a été définie comme suit :

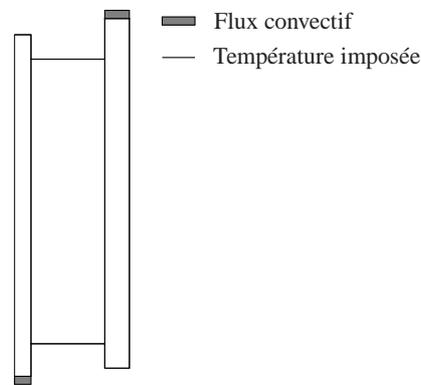
- un calcul mécanique sur 3 cycles de chargement : $t_m = 0.93s$,
- suivi d'un calcul thermique : $t_\theta = 10 \times 2^{i-1}s$.



(a) Éprouvette de double cisaillement.



(b) Conditions aux bords mécaniques.



(c) Conditions aux bords thermiques.

Figure 5.4 – Modèle thermomécanique.

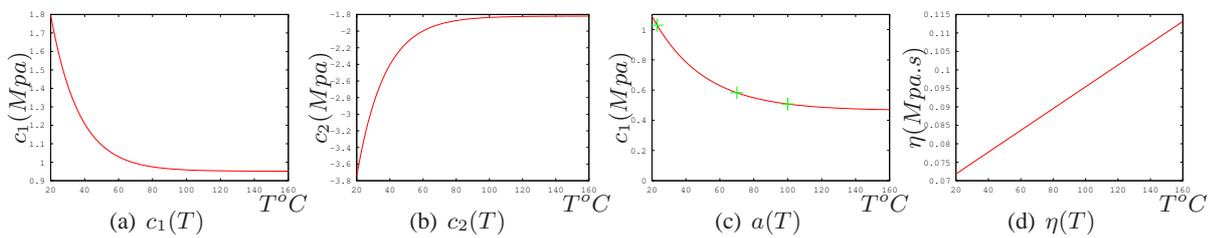


Figure 5.5 – Évolution des paramètres mécaniques en fonction de la température.

La figure Fig. 5.6 présente les cartes de la moyenne temporelle de la densité de puissance mécanique dissipée, au bout de quelques cycles de chargement. On peut noter que d'une part, la dissipation est maximale aux coins du bloc d'élastomère et que d'autre part, la carte de la moyenne temporelle de dissipation se stabilise au 4^{me} cycle mécanique.

On observe d'ailleurs, cette stabilité de comportement sur les cycles d'hystérésis (Force–Déplacement)

Fig. 5.7 qui montrent, en plus, une perte de rigidité globale entre deux cycles.

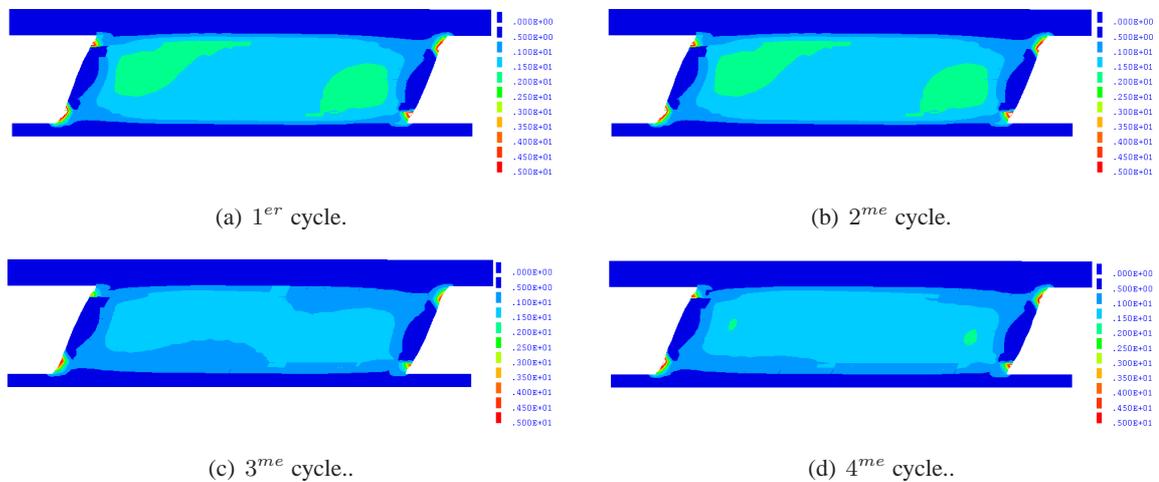


Figure 5.6 – Carte de la dissipation mécanique (en $MW.m^{-3}$).

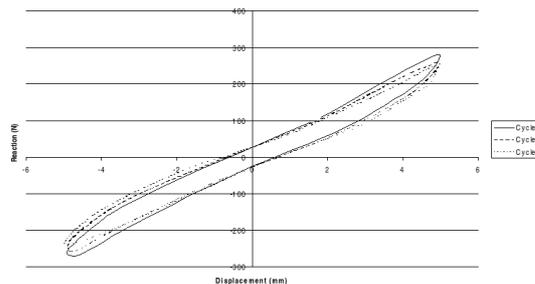


Figure 5.7 – Courbes d'hystérésis issues de la simulation mécanique.

Concernant les résultats des calculs thermiques, en examinant la réponse en température à coeur de l'élastomère et en la confrontant à l'évolution mesurée par thermocouple au cours de l'essai Fig. 5.8, on constate que la réponse numérique reste nettement supérieure à l'évolution expérimentale. Ce résultat montre que l'apport volumique de chaleur, pris en compte dans le modèle thermique, est surestimé et que la puissance mécanique dissipée n'est pas intégralement transformée en chaleur, c'est-à-dire qu'une partie de cette puissance est stockée par le matériau par le biais de phénomènes micro-structuraux tels les réarrangements des macro-chaînes moléculaires et/ou la re-réticulation entre les segments de chaînes ou entre les chaînes et les charges.

Un simple ajustement de la valeur asymptotique de la température, au coeur de l'élastomère, obtenue numériquement à celle issue de la mesure expérimentale, a permis d'évaluer la proportion de puissance mécanique transformée en chaleur, soit 70%.

Partant de cette hypothèse, de nouvelles simulations ont abouti à une meilleure concordance entre les résultats numériques et expérimentaux. Et ce, non seulement pour le point central de l'échantillon et avec une température initiale de $27^{\circ}C$ ⁽³⁾, mais aussi pour des points situés au voisinage du bord et pour d'autres températures initiales Fig. 5.9.

(3). conditions qui ont servi au recalage,

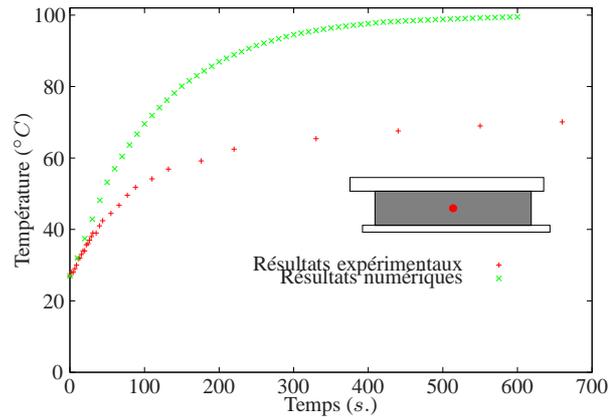
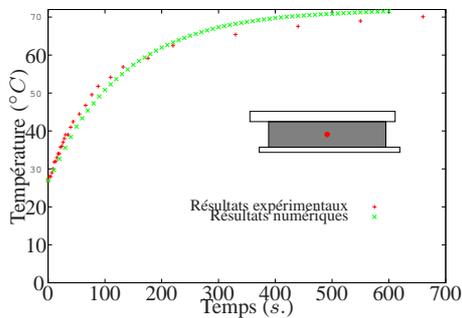
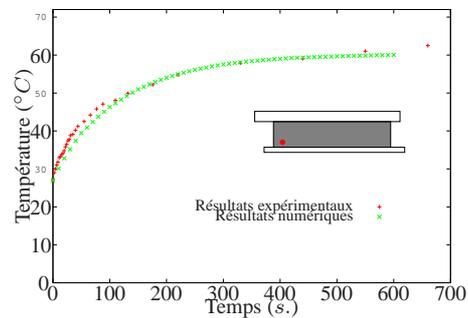


Figure 5.8 – Évolution de la température au centre de l'élastomère. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques.

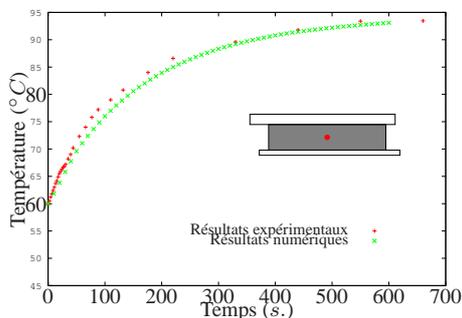
Au niveau local, la figure Fig. 5.10 montre les cartes de températures à différents instants. On peut y observer qu'initialement la température augmente dans les zones à dissipation maximale, c'est à dire aux coins du bloc élastomérique, puis elle diffuse vers le coeur de l'échantillon jusqu'à l'établissement d'une zone chaude à coeur de l'élastomère.



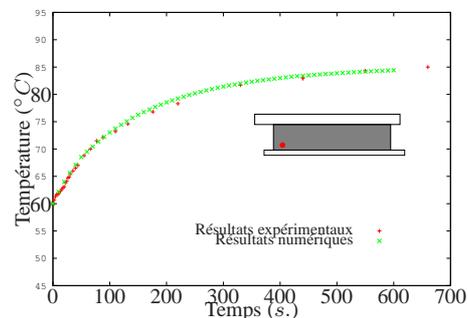
(a) Température au centre (Enceinte à 27°C).



(b) Température au coin (Enceinte à 27°C).



(c) Température au centre (Enceinte à 60°C).



(d) Température au coin (Enceinte à 60°C).

Figure 5.9 – Évolution de la température dans l'élastomère, après recalage. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques.

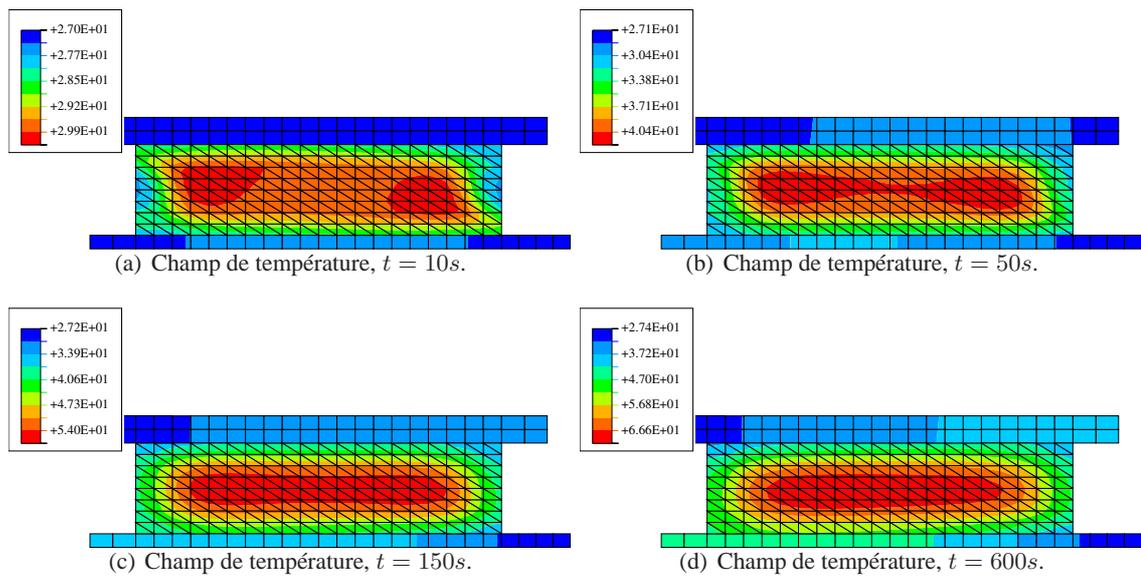


Figure 5.10 – Évolution du champ de température.

5.4 Bilan

Les travaux menés au sujet du couplage thermomécanique des élastomères, ont permis de réaliser une plate-forme de couplage faible permettant de résoudre, par la méthode des éléments finis, le problème thermomécanique basé sur un comportement en grandes déformations hyper-visco-élastiques et sur la résolution du problème thermique en description lagrangienne.

Les résultats, ainsi obtenus, présentent une bonne corrélation avec les mesures expérimentales si l'on suppose qu'une proportion de la dissipation intrinsèque n'est pas transformée en chaleur (soit 30%) et est utilisée pour le réarrangement de la micro-structure de l'élastomère.

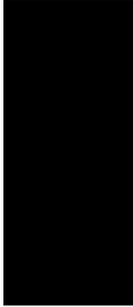
Ce résultat a d'ailleurs été évoqué lors de précédents travaux concernant le comportement thermomécanique des matériaux métalliques [31], mais aussi sur d'autres élastomères chargés (SBR ou NR chargés en carbone) [82; 83].

L'approfondissement de cette question s'inscrit d'ores et déjà en perspectives, à long terme, de nos travaux. Effet une reformulation thermodynamique du problème *thermo-chimio-mécanique* en intégrant le processus de régénération au sein de l'élastomère⁽⁴⁾ devrait permettre une meilleure quantification des transferts de puissances entre les phénomènes physiques.

Par ailleurs et à plus court terme, un point mérite d'être clarifié ; il s'agit de la proportion relative des termes de couplage (⑤) dus à la variation des paramètres mécaniques avec de la température (*cf.* Eq. 5.8 ou Eq. 5.15, par rapport aux autres termes. En effet, ce terme qui a souvent été omis pour des facilités de développement, peut à notre sens être approché, au moins sur des cas simples, à travers l'évolution des paramètres mécaniques vis-à-vis de la température.

Au niveau numérique, la plate-forme développée, permet de traiter un couplage séquentiel entre la mécanique et la thermique. Un traitement simultané, avec des éléments finis hybrides (Déplacement-pression-température), permettrait de mieux appréhender les termes de couplages en tenant compte des différences des temps caractéristiques de chaque phénomène.

(4). Régénération qui concerne aussi bien les liaisons entre les chaînes moléculaires que celles à l'interface des agglomérats de charges.



Bilan général et perspectives

Ce mémoire présente un état d'avancement des travaux de recherche et des réflexions que nous menons pour la modélisation mécanique et numérique des comportements des matériaux et des structures en élastomères. Il aborde les deux aspects classiquement rencontrés dans le domaine de la modélisation en mécanique :

- la modélisation des comportements des matériaux qui s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles en grandes transformations et qui comporte des difficultés dues aux non-linéarités géométriques et matérielles, à la mise en oeuvre d'essais expérimentaux pertinents en vue de l'identification des paramètres des modèles développés ;
- la modélisation et la simulation numérique du comportement de pièces, à géométrie et à chargement complexes. Cette modélisation qui reste orientée "éléments finis" comporte aussi les difficultés numériques liées aux non-linéarités, à la contrainte d'incompressibilité et à la taille des problèmes à résoudre.

• **Bilan et discussion**

Sur la modélisation du comportement hyperélastique :

Nous pouvons considérer que les objectifs fixés pour le volet modélisations en hyperélasticité ont été pratiquement atteints. Nos travaux dans ce domaine ont abouti au développement d'outils numériques de simulation du comportement de solides hyperélastiques quasi-incompressibles, ainsi qu'à l'élaboration d'une stratégie d'identification des paramètres de comportement à partir de résultats expérimentaux .

Par ailleurs, compte tenu de la complexité, sans cesse croissante, des pièces à analyser, nous avons mis au point une méthode numérique, que nous avons baptisée : *Approche par réduction de modèles*, permettant d'en analyser le comportement local tout en mettant à profit les propriétés d'invariance géométrique qu'elles possèdent, réduisant ainsi la taille des problèmes à résoudre, malgré les non-linéarités géométriques et matérielles. Cette méthodologie ayant déjà fait l'objet d'applications sur les structures à symétrie de révolution (*dans le cadre de nos travaux de thèse, soutenue en 1988*), nous l'avons récemment généralisée aux structures invariantes, voire périodiques, suivant une direction. Cette approche se

révèle très prometteuse, car elle permet à la fois de prévoir la réponse globale d'une structure (calcul de la charge critique d'instabilité, par exemple) et de déterminer les états locaux de contraintes et de déformations, sous des chargements réguliers. Son atout majeur reste incontestablement le gain sensible en temps de calcul et en taille des systèmes à résoudre, sans pour autant détériorer la précision des résultats, aussi bien au niveau global que local.

Cette approche peut être améliorée, à court terme, dans le cas des éléments finis réduits 3D/2D ou 3D/1D, par une meilleure prise en compte des effets de bords via un enrichissement de la cinématique au voisinage des bords sollicités.

A plus long terme, l'intégration d'un estimateur d'erreur et l'optimisation des degrés d'approximations dans la direction de réduction apporteront certainement un gain en temps de calcul et une économie en taille des systèmes à résoudre.

La modélisation des comportements élasto-dissipatifs :

Concernant la modélisation des pièces comportant des élastomères amortissants, deux approches ont été abordées pour décrire le comportement dissipatif de ces élastomères. Une approche purement phénoménologique, basée sur la généralisation des modèles rhéologiques aux grandes déformations, cette approche a été menée en deux temps :

- dans le cadre des travaux de thèse de C. GABRIELI (soutenue en 1995) et de S. MÉO (soutenue en 2000), qui ont porté sur les modèles de Zener et de Poynting-Thomson et sur la mise en oeuvre d'une formulation en éléments finis basée sur ces modèles de comportement ;
- dans le cadre de la thèse de J.M. MARTINEZ (soutenue en 2005), sur le développement de modèles hyper-visco-(plastiques)-élastiques puis, la réalisation d'essais expérimentaux de caractérisation et l'identification des paramètres à partir des résultats d'essais.

Parallèlement à cette démarche phénoménologique, nous avons proposé une modélisation micro-physiquement motivée, couplée à une approche statistique, permettant de modéliser le comportement hyper-élasto-visco-plastique des élastomères chargés, dans un large spectre de vitesses de sollicitations. Elle permet de généraliser les assemblages parallèles d'un nombre fini de branches à un assemblage statistique avec une infinité de branches. L'intérêt de cette démarche réside en une couverture plus large du spectre de chargement, sans pour autant augmenter le nombre de paramètres du modèle.

Cependant, les modèles développés et la stratégie d'identification nécessitent, à court terme, une analyse fine à travers :

- des études d'influence des différents paramètres caractéristiques, afin d'en dégager la signification physique et d'en faciliter l'identification ;
- l'utilisation d'autres essais expérimentaux, pour cette identification et pour la validation de la pertinence du modèle et/ou des paramètres identifiés pour des états multi-axiaux de déformation.

Sur le plan numérique, nous avons commencé à implémenter ces modèles dans le code de calcul par éléments finis ZéBuLon, développé par l'Ecole des Mines de Paris.

Le couplage thermomécanique :

Les travaux menés sur ce thème, ont permis de réaliser une plate-forme de couplage faible permettant de résoudre, par la méthode des éléments finis, le problème thermo-viscoélastique basé sur un comportement en grandes déformations viscoélastiques et sur la résolution du problème thermique en configuration lagrangienne. Ce couplage est effectué en injectant la dissipation visqueuse en tant que terme source dans la résolution thermique et en tenant ensuite compte de l'évolution de la température et de son influence sur les caractéristiques mécaniques pour la résolution du problème mécanique.

La confrontation des résultats ainsi obtenus, avec les mesures expérimentales, a permis d'évaluer la proportion de la dissipation visqueuse qui n'est pas transformée en chaleur et qui contribue *a priori* au

réarrangement de la structure moléculaire du matériau.

Cependant, la quantification de la proportion relative des termes de couplage dus à la variation des paramètres mécaniques avec de la température (que nous avons négligé dans l'état actuel des travaux, plus pour des facilités de développement que pour des motivations physiques) demeure une question ouverte et devrait être abordée, à travers la prise en compte, dans la modélisation thermique, de l'évolution des paramètres mécaniques vis-à-vis de la température.

• Quelques perspectives

Les perspectives de nos travaux de recherche s'inscrivent dans la continuité de la thématique actuelle ; à savoir :

- la modélisation de l'endommagement par fatigue des élastomères,
- la mise en oeuvre des techniques d'homogénéisation pour prévoir le comportement des élastomères chargés,
- la modélisation du couplage thermo-chimio-mécanique.

La modélisation de l'endommagement par fatigue :

Ce thème, déjà initié en 1994 au cours du stage de DEA de S. Bourgeois [19], puis repris en septembre 2004 par J. GRANDCOIN dans le cadre de sa thèse, a pour objectif de quantifier l'endommagement par fatigue des élastomères chargés et de l'intégrer dans le modèle hyper-élasto-visco-plastique statistique présenté dans ce manuscrit. *In fine*, ces travaux devront aboutir sur l'établissement d'une méthodologie de prévision de la durée de vie des pièces telles que l'adaptateur de fréquences. Ils comportent trois volets :

- la réalisation d'une campagne d'essais de fatigue suivis d'essais de caractérisation du comportement du matériau fatigué,
- l'utilisation des résultats de ces derniers essais pour identifier des paramètres caractéristiques du modèle hyper-élasto-visco-plastique statistique et d'en quantifier l'évolution en fonction du nombre de cycles de fatigues,
- la proposition d'un modèle hyper-élasto-visco-plastique statistique endommageable par fatigue, en s'appuyant à la fois sur les mécanismes microscopiques observés ou simulés et sur les caractérisations expérimentales.

Par ailleurs, nous envisageons de réaliser ces essais dans une enceinte climatique afin d'évaluer l'influence de la température sur l'évolution du dommage.

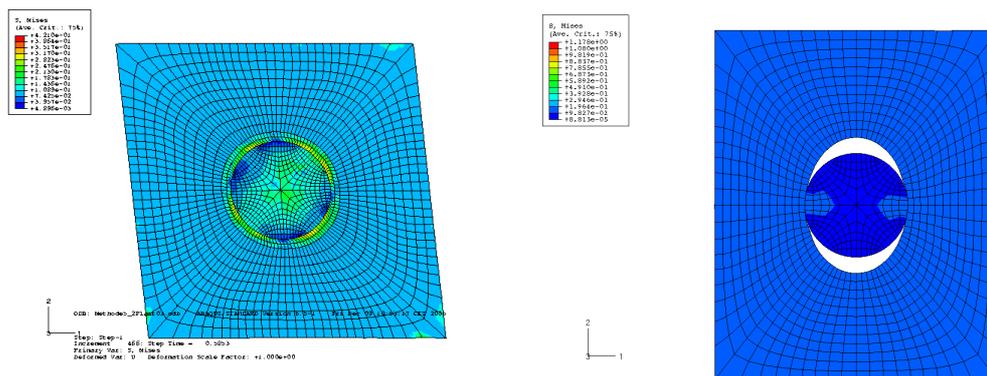
Mise en oeuvre des techniques d'homogénéisation :

Dans la continuité logique des modèles statistiques micro-physiquement motivés évoqués précédemment, et pour affiner la modélisation du comportement macroscopique, nous envisageons à terme, de faire appel à des modèles micro-mécaniques en :

- représentant de façon plus réaliste les diverses complexités de la micro-structure des élastomères chargés (gomme et agrégats/agglomérats de charges, distribution aléatoire des charges...),
- modélisant les mécanismes microscopiques de décohésion et de frottements (sec ou visqueux) à l'interface charges/matrice et/ou intra-agglomérats,
- en utilisant les techniques d'homogénéisation non-linéaire [127; 86], ou l'approche par éléments finis au carré [51; 21] qui associent à chaque point d'intégration du macro-modèle, un micro-modèle

éléments finis du V.E.R. La résolution du problème micro permet d'une part, de résoudre le problème de localisation à l'échelle microscopique et d'autre part d'intégrer la loi de comportement pour le modèle éléments finis macroscopique.

D'ailleurs, nous avons récemment initié l'exploration de cette piste, dans le cas d'un V.E.R. comportant une inclusion sphérique représentant les agglomérats de charges et une matrice élastomérique, afin d'appréhender les interactions entre les inclusions et la matrice élastomérique à travers une interface cohésive/décohésive (cf. Fig. 11).



(a) Déformation en cisaillement, interface cohésive.

(b) Déformation en traction, interface décohésive.

Figure 11 – Modélisations microscopiques (en 2D) du V.E.R. d'un élastomère chargé

La modélisation du couplage thermo-chimio-mécanique :

Sur le thème du couplage thermomécanique, les résultats obtenus à ce jour ont permis d'identifier la proportion de la dissipation mécanique qui n'est pas transformée en chaleur. Cette proportion de puissance est *a priori* utilisée pour le réarrangement de la structure moléculaire du matériau, à savoir : la régénération de points de réticulation à faible énergie entre chaînes moléculaires et/ou la naissance de liaisons supplémentaires entre la gomme et les charges. Ces transformations de la micro-structure seraient favorisées, entre autres, par l'augmentation de la température interne du matériau.

La modélisation de ces mécanismes, dans un cadre thermodynamique des processus dissipatifs, permettrait de mieux caractériser cette régénération. Une reformulation thermodynamique du problème *thermo-chimio-mécanique* en intégrant ce processus de régénération au sein de l'élastomère devrait permettre une meilleure quantification des transferts de puissances respectivement entre les processus mécaniques, thermiques et chimiques.

• **Et pour conclure...**

A travers l'exposé de nos travaux, nous pouvons constater qu'à partir de problèmes industriels complexes et dont le cadre technique est rarement bien délimité, nous avons initié et développé un programme scientifique complet, couvrant différents domaines de la mécanique des matériaux, faisant appel à des techniques numériques avancées et ouvrant des perspectives scientifiques riches telles que les couplages multi-physiques et les modélisations multi-échelles des matériaux aléatoirement hétérogènes.

Bien que basés sur des préoccupations industrielles, qui nécessitent souvent des approches pragmatiques, nos projets ont toujours été guidés par :

- le souci d'une rigueur scientifique pour mettre en oeuvre des approches physiquement ou mathématiquement motivées, afin de garantir la fiabilité des méthodes et des résultats,
- la volonté de faire bénéficier à la communauté (chercheurs, enseignants, étudiants et industriels) l'apport de notre expérience.

Les élastomères : mise en oeuvre et applications

Historique

Les premières utilisations des élastomères [52] ont été signalées dès le XV^e siècle chez les indigènes d'Amérique Centrale qui utilisaient une gomme élastique qu'ils retiraient par incision de certains arbres de la forêt amazonienne, et qu'ils appelaient de *caout-chou*⁽¹⁾.

Au milieu du XVIII^e siècle, deux français, un naturaliste : Charles-Marie DE LA CONDAMINE et un ingénieur : Charles FRESNEAU, redécouvrent l'arbre dont est issu cette gomme élastique : *Hevea Guyanensis* ou *Hevea Brasiliensis* et font connaître le **Caoutchouc** en Europe.

A la fin du XVIII^e siècle, ce fut le chimiste MACQUER qui réussit les premières mises en forme du caoutchouc en le dissolvant dans l'éther et à l'intérieur de moules de diverses formes. Dès lors, les premières utilisations du caoutchouc ont vu le jour : sondes vésicales en chirurgie et les gommes à effacer (d'où le nom **Rubber** pour qualifier le caoutchouc en Anglais). Mais ces utilisations restaient mineures vis-à-vis de l'essor que réservait l'industrie aux applications de ce matériau.

En 1819, Thomas HANCOCK s'aperçoit que l'adjonction de certains produits permet la plastification du caoutchouc facilitant ainsi sa mise en oeuvre (procédé de mastication), ce fut une étape importante dans la manufacture du caoutchouc. Ensuite, ont suivi l'invention des tissus imperméables par MACKINTOSH en 1823, puis celle de tissus élastiques et des bretelles, via la réduction du caoutchouc en fils, par RATIER et GUIBAL (en 1834).

Cependant, ces utilisations se heurtaient à un inconvénient majeur : ce matériau, qui possède une élasticité prodigieuse par temps normal devient rigide et fragile par temps froid, puis visqueux et collant par temps chaud. Et c'est en 1839 que Charles GOODYEAR inventa le procédé de vulcanisation permettant, via une réaction entre le caoutchouc et le soufre à haute température, de transformer le caoutchouc naturel en une forme stable, avec une élasticité accrue et une plus grande stabilité aux changements de température. Cette invention constitua dès lors, le point de lancement d'une industrialisation de plus en plus intense dans divers secteurs d'activité.

A partir de la seconde guerre mondiale, cette utilisation quasi-exclusive du caoutchouc naturel s'est vue

(1). qui signifie "bois qui pleure"

complétée par les élastomères⁽²⁾ de synthèse afin de pallier au manque de caoutchouc naturel provenant du sud-est asiatique, à l'époque sous occupation nipponne. Aujourd'hui, 60% de la consommation mondiale du caoutchouc est d'origine synthétique.

Auparavant, des travaux de recherche ont permis d'identifier la nature chimique du caoutchouc naturel, puis de le synthétiser à partir de la molécule de base. Ainsi, en 1860, un chimiste britannique C. WILLIAMS montra que le caoutchouc naturel était un polymère de l'isoprène (Fig. 1.2).

De nombreux efforts furent ensuite réalisés pour synthétiser du caoutchouc à partir de cette molécule et le premier brevet de fabrication du caoutchouc synthétique a été déposé par un chimiste allemand F. HOFMANN en 1909. Mais ce n'est qu'à partir des années 1930, que la mise au point des élastomères de synthèse a fait l'objet d'importants travaux de recherche, particulièrement en Allemagne et aux Etats-Unis ; travaux qui ont contribué au développement de la connaissance actuelle sur les macro-molécules et les polymères.

Mise en oeuvre des élastomères

Les élastomères sont des matériaux amorphes constitués de longues chaînes moléculaires, sous forme linéaires ou ramifiées, repliées sur elles-mêmes et enchevêtrées les unes aux autres (voir aussi [37]). Sous sollicitations mécaniques, ces chaînes moléculaires glissent les unes sur les autres, sans retrouver leur morphologie initiale après relâchement des contraintes. Cette irréversibilité plastique est accentuée pour les élastomères à l'état brut.

Pour leur conférer un comportement élastique, ils sont soumis à une réaction thermo-chimique appelées *Vulcanisation* ou *Réticulation*. Microscopiquement, elle consiste à créer des ponts, via des liaisons covalentes, entre les différentes macro-molécules afin de former un réseau tridimensionnel de segments de chaînes ayant une structure au repos plus stable qu'à l'état brut et donc un comportement plus élastique.

La formulation

Les caractéristiques d'un mélange à base d'élastomère dépendent non seulement de la nature de l'élastomère brut, mais aussi de la formulation d'un certain nombre d'ingrédients dont l'objectif est de répondre aux spécifications du cahier de charges du produit fini. Ces ingrédients ont une influence directe sur les caractéristiques finales du mélange, soit à titre indicatif :

- le taux de réticulation influe sur le comportement dynamique ;
- la nature des ponts de réticulation conditionne la tenue au vieillissement ;
- la dose de charges présentes dans le mélange influe sur la rigidité, la capacité de dissipation et la réaction aux solvants du mélange ;

D'une manière générale [75], un mélange comprend, outre l'élastomère brut, une dizaine d'ingrédients dont on peut citer :

Le système de vulcanisation qui comprend l'agent de vulcanisation (soufre, peroxydes...), des activateurs et les accélérateurs de vulcanisation pour régler la cinétique de la réaction.

Les charges qui permettent de moduler un grand nombre de propriétés (résistance à la rupture, à l'abrasion, la dureté, les propriétés dynamiques, le prix...). Il existe généralement deux catégories de charges :

- les charges noires telles que les noirs de carbone sont les plus souvent utilisées et leur caractère renforçant est d'autant plus grand que leur granulométrie est fine,

(2). le terme *élastomères* est utilisé pour désigner l'ensemble des caoutchoucs naturels ou synthétiques.

- les charges claires qui peuvent être renforçantes telles que les silices précipitées, ou semi-renforçantes telles que les argiles et les kaolins, voire même inertes telles que les craies et les silices naturelles.

Les plastifiants , dont le rôle est de faciliter la mise en oeuvre des mélanges et surtout de régler le module de rigidité et la dureté en fonction de la nature des charges incorporées.

Les agents protecteurs (anti-oxygènes et anti-ozonants) permettent d'améliorer la tenue au vieillissement.

D'autres ingrédients confèrent au produit fini des propriétés spécifiques telles que la couleur, ou une texture alvéolaire...

Le mélangeage

Le mélangeage [108] consiste dans un premier temps à mastiquer la gomme d'élastomère sous l'effet conjugué de la chaleur (moins de $70^{\circ}C$), d'un cisaillement et d'une oxydation. Dès que la plastification de l'élastomère atteint un niveau suffisant, on incorpore dans la gomme les divers ingrédients spécifiés dans la formulation. Ce procédé est réalisé dans des mélangeurs cylindriques (procédé manuel et de longue durée *45mn*) ou internes (procédé automatique et rapide *3mn*). Cette phase est souvent accompagnée d'opérations de contrôle concernant la viscosité du mélange, les caractéristiques rhéométriques de vulcanisation ; ainsi que le degré de dispersion des charges dans la gomme. . .

La mise en forme

Une fois réalisés, les mélanges sont ensuite mis en forme pour la vulcanisation. Cette mise en forme est souvent réalisée par moulage de type :

- **compression** où le mélange est placé dans une empreinte et est comprimé par la fermeture du moule ;
- **transfert** où la matière est placée dans un volume auxiliaire puis poussé, lors de la fermeture du moule, pour prendre la forme de l'empreinte ;
- **injection** où la matière est réchauffée par passage dans une extrudeuse et injectée dans le moule fermé.

D'autres techniques de mise en forme sont utilisées selon la nature des produits manufacturés, nous pouvons citer :

- **l'extrusion**, adaptée aux profilés de grandes longueurs. Elle consiste à faire passer la matière sous forte pression dans une filière dont la section interne conditionne la forme du profilé ;
- **le calandrage**, destiné à la production de feuilles continues, est relativement similaire au procédé de laminage des métaux.

La vulcanisation

Il existe divers procédés de vulcanisation, dont les principaux sont :

- La vulcanisation par le soufre, est de loin la plus utilisée ; elle s'applique au caoutchouc naturel (NR) aux SBR, NBR , EPDM et aux caoutchoucs butyl.
- La vulcanisation par peroxydes organiques, mettant en jeu un processus radicalaire qui a pour effet de créer des liaisons C–C entre les macro-molécules. De ces liaisons solides et courtes découle une excellente résistance au vieillissement et à la chaleur, mais un comportement dynamique médiocre.
- La vulcanisation par peroxydes métalliques est adaptée aux élastomères contenant des halogènes.
- La vulcanisation par diamines qui concerne principalement les polymères fluorés.

Domaines d'utilisation

L'industrie de transformation des élastomères occupe une place de plus en plus importante dans l'économie mondiale. La production annuelle des caoutchoucs naturels ou synthétique dépasse les 20 millions de tonnes dans le monde, dont 24% en Europe. Grâce à leurs propriétés d'élasticité, d'imperméabilité et d'amortissement, l'utilisation des élastomères s'est donc généralisée à divers secteurs de l'industrie, tels que :

- l'industrie automobile représente plus de 75% de la consommation mondiale d'élastomères, avec les joints extrudés, les courroies de transmissions, les durites, les supports moteurs, les balais d'essuie-glace... et surtout la production de pneumatiques qui consomme à elle seule 63% de la production mondiale d'élastomères ;
- l'industrie aéronautique et spatiale, pour des pièces techniques, généralement composites et jouant le rôle de liaisons élastiques et/ou systèmes antivibratoires, comme par exemple : les butées sphériques (structures lamifiés élastomère-métal) et/ou les amortisseurs de traînée pour les rotors d'hélicoptères, ainsi que les systèmes lamifiés DIAS reliant les boosters au corps central de la fusée Ariane V ;
- le secteur BTP, avec les appuis de pont et les systèmes d'isolation antisismiques, utilisés notamment dans la construction des centrales nucléaires ;
- l'habillement, et en particulier l'industrie des chaussures (bottes, semelles, chaussures de sport...) qui, avec un siècle et demi d'existence, reste l'une des premières applications du caoutchouc.
- dans les domaines de l'industrie médicale et pharmaceutique, on utilise d'une part, des élastomères répondant à des exigences de pureté et biocompatibilité (principalement les silicones et les polyuréthanes, pour la conception d'articles tels que les prothèses, les éléments d'organes artificiels) et d'autre part, pour le conditionnement avec des critères d'élasticité et d'inertie chimique (caoutchoucs naturels et caoutchoucs butyl)
- dans d'autres secteurs, pour l'étanchéité, les revêtements anti-corrosion, tubes et tuyaux, les colles et mastics...

Selon leur utilisation les élastomères sont classés en trois catégories :

- **Les élastomères à usage général** : caractérisés par leurs propriétés élastiques, il s'agit essentiellement des caoutchoucs naturels ou synthétiques (NR ou IR), des SBR, des polymères de butadiène (BR). Ils sont utilisés pour diverses applications dans l'industrie automobile telles que les pneumatiques, supports moteurs, balais d'essuie-glaces ; ou pour le bâtiment (étanchéité de toitures, câblerie, adhésifs, tuyaux...) ; ou encore pour le grand public telles que gants de ménage et de chirurgie, tétines, préservatifs, tapis de sol...
- **Les élastomères à usages spéciaux** : pour des applications requérant des propriétés particulières telles que la résistance aux liquides agressifs (solvants, acides, huiles...), une stabilité vis-à-vis des hautes et basses températures et une bonne tenue au vieillissement. Ils sont utilisés dans divers secteurs d'activités (industrie pharmaceutique, nucléaire, automobile, aéronautique...)
- **Les caoutchoucs à usages très spéciaux** : qui présentent d'excellentes tenues chimiques et thermiques, essentiellement utilisés en industries aéronautiques et spatiales, ainsi que dans l'industrie chimique.

Catégorie	Élastomères	Caractéristiques	Secteur	Applications
Élastomères à usages généraux	NR, IR, SBR, BR...	Excellentes propriétés élastiques, Résistance chimique	Automobile Bâtiments Public	Pneumatiques, Support moteurs, balais d'essuie-glaces... Étanchéité de toitures, câblerie, adhésifs, tuyaux... gants de ménage et de chirurgie, tétines, préservatifs, tapis de sol...
Élastomères à usages spéciaux	EPDM, IIR, CR, NBR...	Résistance aux liquides agressifs, stabilité vis-à-vis de la température, bonne tenue au vieillissement.	Automobile BTP Pharmacie Aéronautique	Amortisseurs, joints de vitrage, courroies, durites... Joints, tuyaux, isolations de câbles... Bouchons... réservoirs souples...
Élastomères à usages très spéciaux	Silicone, Élastomères fluorés...	Excellentes tenues chimiques et thermiques.	Automobile Aéronautique	Fils d'allumage, bagues d'étanchéité... Joints, pièces techniques...

Tableau A.1 – Utilisations des élastomères.

Quelques modèles hyperélastiques isotropes incompressibles

Pour modéliser le comportement hyperélastique des matériaux élastomères, plusieurs formes d'énergie de déformation ont été développées depuis le milieu du XX^{ième} siècle. Dans la littérature, on peut les classer principalement en deux catégories⁽¹⁾ :

- les modèles issus d'une **approche statistique** basée sur les changements de forme du réseau macro-moléculaire et sur l'élasticité entropique ;
- les **modèles phénoménologiques** fondés sur un concept purement mathématique, mais généralement motivés par des observations expérimentales.

Les modèles statistiques

Ces modèles sont développés, dans le cadre de la mécanique statistique, en partant de l'hypothèse, qu'à l'état initial, le réseau macro-moléculaire est caractérisé par une orientation aléatoire des chaînes macro moléculaires. Avec la déformation, ces chaînes se réorientent et induisent ainsi une diminution de l'entropie configurationnelle du réseau [161].

• Modèle de distribution gaussienne

En supposant une distribution gaussienne de la distance entre les extrémités des chaînes [157] :

$$\mathcal{P}(r) = 4\pi \left(\frac{3}{2\pi nl^2} \right)^{\frac{3}{2}} r^2 \text{Exp} \left[-\frac{3r^2}{2nl^2} \right], \quad (\text{B.1})$$

où n est le nombre de liaisons dans la chaîne et l la longueur moyenne de ces liaisons. Cette distribution statistique représente le nombre de configurations que la chaîne peut adopter. Elle est ainsi reliée à l'entropie configurationnelle pour obtenir, moyennant les hypothèses d'affinité des déformations et d'élasticité entropique, une expression de la densité d'énergie de déformation en fonction des extensions

(1). Pour plus de détails concernant les modèles hyperélastiques des élastomères cf. [20]

principales $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^{(2)}$:

$$\psi = \frac{1}{2}NkT(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = \frac{1}{2}NkT(I_1 - 3), \quad (\text{B.2})$$

où N représente le nombre de chaînes moléculaires par unité de volume, T la température absolue et k la constante de BOLTZMANN.

Cependant, si ce modèle traduit convenablement le comportement des élastomères pour un niveau de déformations modérées ($\lambda \ll nl$), il ne permet pas de tenir compte de la rigidification induite par l'extension propre des segments de chaînes ; des théories non-gaussiennes ont donc été proposées durant ces dernières années.

• **Modèle de distribution de LANGEVIN**

Pour tenir compte de la rigidification de la chaîne moléculaire pour des élongations élevées, KÜHN ET GRÜN ont proposé en 1942 ([7]) une nouvelle fonction de distribution définie à partir de l'inverse de la fonction de LANGEVIN notée \mathcal{L} .

$$\begin{cases} \mathcal{P}(r) = \exp \left[-n \left[\frac{r}{nl} \beta + \ln \left(\frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) \right] \right], \\ \beta = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{r}{nl} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \end{cases}, \quad (\text{B.3})$$

En utilisant la loi de Boltzmann, on obtient la densité d'énergie de déformation de **la chaîne de Langevin** :

$$\mathcal{W}_{1ch} = NkT \left(\frac{r}{nl} \beta + \ln \left(\frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) \right). \quad (\text{B.4})$$

Pour construire, la densité d'énergie au niveau macroscopique, plusieurs auteurs ont proposé des modèles basés d'une part sur les hypothèses d'affinité des déformations et d'additivité des énergies de chaînes et d'autre part sur une idéalisation de la structure du réseau de ces chaînes. Citons, à titre d'exemples :

- Le modèle de JAMES & GUTH, avec une cellule élémentaire à trois chaînes disposées suivant les directions principales de déformation et dont les allongements correspondent aux extensions principales :

$$\mathcal{W}_{3ch} = \frac{NkT}{3} \sqrt{n} \sum_{i=1}^3 \left(\beta_i \lambda_i + \sqrt{n} \ln \left(\frac{\beta_i}{\sinh(\beta_i)} \right) \right) \quad \text{avec} \quad \beta_i = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) \quad (\text{B.5})$$

- le modèle d'ARRUDA & BOYCE qui considèrent un modèle à huit chaînes disposées sur les diagonales d'un cube élémentaire ([2; 10]) et obtiennent l'expression :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{8ch} = NkT \sqrt{n} \left(\beta_r \lambda_r + \sqrt{n} \ln \left(\frac{\beta_r}{\sinh(\beta_r)} \right) \right) \\ \text{avec} \quad \lambda_r = \sqrt{\frac{I_1}{3}} \quad \text{et} \quad \beta = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_r}{\sqrt{n}} \right) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Plus récemment MIEHE & AL. [113] a proposé une approche micro-macro basée sur une micro-structure symbolisée par une *micro-sphère* dont la surface représente une distribution continue de l'orientation des macro-chaînes dans l'espace. Contrairement aux approches précédentes, cette dernière n'utilise pas l'hypothèse d'affinité et reste basée sur les techniques d'homogénéisation non-linéaires.

(2). Cette forme d'énergie de déformation est connue sous le nom de modèle **Néo-Hookéen**.

Les modèles phénoménologiques

Les modèles hyperélastiques les plus utilisés sont issus de raisonnements mathématiques qui sont souvent motivés par des observations expérimentales faites à l'échelle macroscopique. Dans la littérature, on retrouve deux catégories de formulation de densités d'énergie de déformation :

- fonctions des invariants de déformations $I_i, (i = 1, 2, 3)$,
- fonctions des extensions principales⁽³⁾ $\lambda_i, (i = 1, 2, 3)$.

Les modèles à base des invariants de déformations

Nous présentons dans ce paragraphe, les principales formes d'énergie de déformation, en hyperélasticité isotrope et incompressible, proposées depuis quelques dizaines d'années :

- **Modèle de MOONEY-RIVLIN, (1940) [116]**

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3). \quad (\text{B.7})$$

Ce modèle reste de loin le plus utilisé pour sa simplicité et sa capacité à refléter convenablement le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation allant jusqu'à 100%.

- **Modèle de RIVLIN, (1948) [137; 138]**

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = \sum_{\substack{0 \leq m \leq \infty \\ 0 \leq n \leq \infty}} C_{nm} (I_1 - 3)^n (I_2 - 3)^m, \quad (\text{B.8})$$

Cette formulation générale est basée uniquement sur des hypothèses d'isotropie et d'incompressibilité. Elle englobe plusieurs modèles, proposés par différents auteurs et dont les degrés d'approximation polynomiale en (I_1, I_2) varient selon la nature de l'élastomère à modéliser et le domaine de déformations à couvrir. Parmi ces modèles, on peut citer à titre indicatif :

- le modèle NÉO-HOOKÉEN et le modèle de MOONEY-RIVLIN présentés ci-dessus,
- le modèle de BIDERMAN (1958) :

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$$

- le modèle de JAMES & AL. (1975) à 9 termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(I_1, I_2) = & C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \\ & + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{21}(I_1 - 3)^2(I_2 - 3) + C_{12}(I_1 - 3)(I_2 - 3)^2 \\ & + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{03}(I_2 - 3)^3 \end{aligned}$$

- le modèle de YEOH (1990) :

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$$

- le modèle de LION (1997) :

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{50}(I_1 - 3)^5$$

(3). Valeurs propres des tenseurs de déformations pures

– le modèle de HAUPT & SEDLAN (2001) :

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \\ + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$$

• **Modèle de GENT-THOMAS, (1958) [57]**

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = A_1(I_1 - 3) + A_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$$

Ce modèle découle d'une étude expérimentale, proposée en 1951 par RIVLIN & SAUNDERS ([136]), qui démontre que la variation de l'énergie de déformation est linéaire en I_1 et à dérivée décroissante en I_2 . Il traduit convenablement le comportement des élastomères pour des déformations de moins de 200%.

• **Modèle de HART-SMITH, (1966) [65]**

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = A_1 \int_3^{I_1} \exp(A_3(\hat{I}_1 - 3)^2) d\hat{I}_1 + A_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$$

Cette forme d'énergie décrit correctement le comportement des élastomères pour des déformations allant à 500%, il traduit en particulier le phénomène de cristallisation sous déformation.

Les modèles à base des extensions principales

• **Modèle de VARGA, (1966)[125]**

$$\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

Dans la catégorie des densités d'énergie fonctions des extensions principales, ce modèle constitue une première approximation du comportement des matériaux élastomères.

• **Modèle de VALANIS & LANDEL, (1967)[71]**

$$\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 \omega(\lambda_i) \quad \text{avec} \quad \omega(\lambda_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{\alpha_j} (\lambda_i^{\alpha_j} - 1) \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

Dans ce modèle la densité d'énergie de déformation est écrite en tant que la somme de 3 fonctions découplées et qui dépendent respectivement des trois extensions principales.

• **Modèle de OGDEN, (1971)[125]**

Parmi les densités d'énergie fonctions des extensions principales, ce modèle est le plus utilisé pour sa généralité et sa précision modulable :

$$\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

Autres modèles

Pour compléter ce panorama de modèles hyperélastiques incompressibles, nous nous devons de citer deux exemples proposés par des collègues français. Ces deux modèles sont adaptés aux comportements fortement non-linéaires.

- Le premier proposé par LAMBERT-DIANI et REY [88; 89] est de la forme :

$$\mathcal{W}(I_1, I_2) = \int_3^{I_1} \exp\left(\sum_{i=0}^n a_i (\widehat{I}_1 - 3)^i\right) d\widehat{I}_1 + \int_3^{I_2} \exp\left(\sum_{i=0}^m b_i (\ln(I_2 - 3))^i\right) d\widehat{I}_2$$

- Pour un comportement fortement non-linéaire aux faibles déformations (inférieures à 20%), LAHELLEC [85] propose d'enrichir le modèle de MOONEY-RIVLIN en introduisant une fonction corrective de l'énergie de déformation qui s'atténue aux grandes déformations :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(I_1, I_2) = & a_1 (I_1 - 3) + \int_3^{I_1} a_2 \frac{1 - \exp(a_3(\widehat{I}_1 - 3))}{\sqrt{\widehat{I}_1 - 3}} d\widehat{I}_1 \\ & + a_4 (I_2 - 3) + \int_3^{I_2} a_5 \frac{1 - \exp(a_6(\widehat{I}_2 - 3))}{\sqrt{\widehat{I}_2 - 3}} d\widehat{I}_2 \end{aligned}$$

État de l'art dans la modélisation des comportements dissipatifs des élastomères

Le comportement viscoélastique

A l'échelle macroscopique, on parle dans ce cas d'une élasticité retardée due au temps nécessaire au matériau pour atteindre son état d'équilibre. A l'échelle micro, il s'agit de frottements visqueux entre chaînes qui induisent une résistance à la réorganisation des chaînes macro-moléculaires. Les modèles viscoélastiques sont particulièrement utilisés pour modéliser les comportements dépendant de la vitesse de déformation [64; 151; 53; 74; 18; 17; 119; 140; 85; 142]. La modélisation du comportement viscoélastique est aujourd'hui assez bien maîtrisée dans le cadre des petites perturbations, aussi bien avec les formulations intégrales, qu'avec les approches rhéologiques associées à des variables internes [155] ou encore avec les modèles fractionnaires utilisant des opérateurs différentiels non entiers [154].

Il n'en va pas de même en grandes transformations, où les modèles viscoélastiques restent encore dans le domaine des investigations et que l'on peut classer principalement suivant deux axes d'orientations :

Les formulations intégrales

Elles consistent à écrire une relation entre les contraintes et l'histoire de la déformation, en partant :

- de l'hypothèse du matériau à mémoire évanescence,
- du second principe de la thermodynamique,
- et de la généralisation du principe de superposition de BOLTZMANN, [33; 30] ;

Cette approche a fait l'objet de nombreuses formulations, dans le cadre des grandes transformations isothermes, dont les principales sont présentées sur le tableau Tab. C.1. Cependant, si certaines de ces formulations (**M.F.L.V.**, **B.K.Z.** ou **C.B.T.**) présentent l'avantage de traduire la réponse différée, des matériaux à mémoire évanescence, avec un nombre réduit de paramètres constitutifs et accessibles via des essais caractéristiques simples tels que l'essai de relaxation, elles restent difficilement utilisables dans le cas des chargements cycliques à différentes fréquences.

Plus récemment, on peut citer quelques modèles qui dérivent de l'approche générale **B.K.Z.** :

- Le modèle de **SIMO** : [151] basé sur une décomposition additive des contraintes élastique et vis-

Modèle	Désignation	Référence	Formulation
G.R.	Green-Rivlin theory	[64]	$\bar{\bar{S}}(t) = \int_{-\infty}^t \bar{\bar{G}}_1(t-s) \frac{d\bar{\bar{E}}(s)}{ds} ds$ $+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \bar{\bar{G}}_1(t-s_1) \otimes \bar{\bar{G}}_2(t-s_2) : \frac{d\bar{\bar{E}}(s_1)}{ds} : \frac{d\bar{\bar{E}}(s_2)}{ds} ds_1 ds_2$ $+ \dots$
F.L.V.	Finite Linear Viscoelasticity	[34; 98]	$\bar{\sigma} = -p\bar{1} + \frac{2}{J} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right] + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{\Phi}}(\bar{\bar{B}}(t), t - \tau) : \bar{\bar{C}}(\tau) d\tau$
M.F.L.V.	Modified Finite Linear Viscoelasticity	[117]	$\bar{\sigma}(t) = -p(t)\bar{1} + \frac{2}{3m} E_e \bar{\bar{B}}(t)^{\frac{m}{2}}$ $+ \frac{2}{3m} \int_{-\infty}^t \dot{\bar{\bar{E}}}(s) \left[\bar{\bar{B}}(t)^{\frac{m}{2}} \boxtimes \bar{1} \right]_{Sym} : (\bar{\bar{C}}_t(t-s) - \bar{1}) ds$
B.K.Z.	Bernstein, Kearsley et Zapas	[11]	$\bar{\sigma}(t) = -p(t)\bar{1} + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{F}}^{-1}(t') \cdot \frac{\partial W(\bar{\bar{E}}(t, t'))}{\partial \bar{\bar{E}}(t, t')} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}(t') dt',$
C.B.T.	Chang, Block and Tschoegl theory	[28]	$\bar{\sigma}(t) = -p(t)\bar{1} + \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t G(t-s) \left[\bar{\bar{B}}(t)^{\frac{n}{2}} \frac{d\bar{\bar{C}}_t(s)^{\frac{n}{2}}}{ds} \right]_{Sym} ds$

Tableau C.1 – Quelques modèles de comportement à intégrales héréditaires en grandes déformations.

coélastique avec un découplage des réponses déviatorique et isochore :

$$\bar{\bar{S}} = Jp\bar{\bar{C}}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \left[\int_0^t a + (1-a)e^{-\frac{t-s}{\tau}} \frac{d}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{E}}} ds \right]^D.$$

- Le modèle **K-BKZ** : qui consiste à introduire la non-linéarité dans la formulation intégrale de la loi de comportement par le biais d'une fonction scalaire $h(I_1, I_2)$ dite d'amortissement qui ne dépend que des invariants I_1 et I_2 du tenseur des déformations de FINGER noté $\bar{\bar{C}}_t^{-1}(s)$.

$$\bar{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t M(t-s) h(I_1, I_2) \bar{\bar{C}}_t^{-1}(s) ds,$$

où $M(t-s)$ est la fonction mémoire calculée à partir du spectre des temps de relaxation (G_i, τ_i) de la viscosité linéaire telle que :

$$M(t-s) = \sum_i \left[\frac{G_i}{\tau_i} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \right].$$

Les modèles à variables internes

Les modèles viscoélastiques basés sur une approche par variables internes reposent sur la théorie de l'état local associée aux relations d'ONSAGER et au cadre des matériaux standards généralisés. Ils généralisent aux grandes déformations les comportements décrits via des modèles rhéologiques. Cette généralisation est principalement basée sur :

- la notion de configurations intermédiaires et donc une décomposition multiplicative du gradient de la transformation [145; 146; 147; 148; 149] ;
- l'hypothèse d'additivité des énergies libres spécifiques, fonctions des variables d'états ;
- le postulat d'existence d'un pseudo-potential de dissipation fonction du taux de variation des variables internes.

Cette démarche faisant l'objet d'une présentation détaillée dans les prochains paragraphes, nous nous contentons ici de donner une vision panoramique des travaux qui en ont découlé. Ainsi, parmi les principaux modèles à variables internes, nous pouvons citer :

- **Les modèles à un état intermédiaire** : tels que les modèles de ZENER (cf. Fig. C.1(a)) et de POYNTING-THOMSON (cf. Fig. C.1(b)). Ces deux modèles, équivalents en petites perturbations, ont fait l'objet d'investigations dans le cadre de la thèse de C. CARPENTIER-GABRIELI [53], puis ont été repris avec S. MÉO [119], via une analyse comparative démontrant ainsi qu'ils restent fondamentalement différents, dans le cas des transformations finies. Par ailleurs, d'autres auteurs ont proposé différentes écritures de ces deux modèles (cf. [103; 90; 91; 97; 76; 9]).

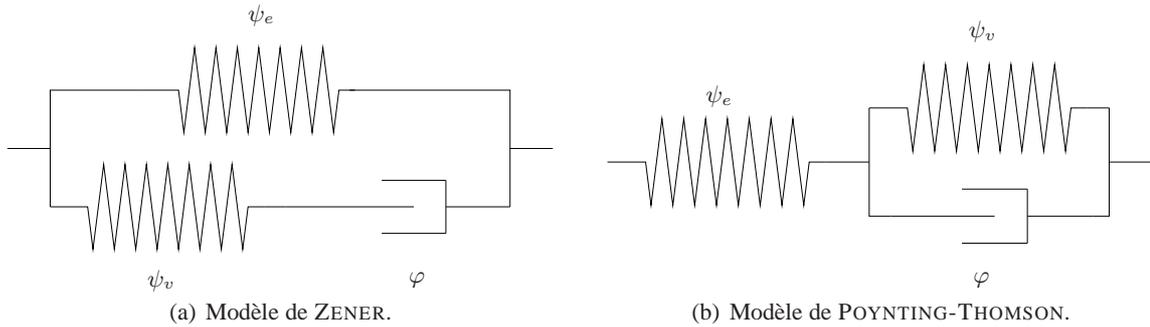


Figure C.1 – Modèles viscoélastiques à une configuration intermédiaire.

- **Modèles à plusieurs états intermédiaires** : Dans le cadre de cette approche, on trouve principalement des modèles ([69], [101]) issus du modèle de MAXWELL généralisé (cf. Fig. C.2), basés sur une combinaison de l'énergie libre ψ et du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $\bar{\bar{S}}$ en une partie à l'équilibre et une autre hors-équilibre, comme suit :

$$\psi = \psi_e(\bar{\bar{E}}) + \sum_{k=1}^N \psi_{v_k}(\bar{\bar{E}}_{e_k}), \quad \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}_e + \sum_{k=1}^N \bar{\bar{S}}_{v_k} - p\bar{\bar{C}}^{-1}. \quad (\text{C.1})$$

ψ_e et $\bar{\bar{S}}_e$ décrivent les propriétés à l'équilibre du matériau. La partie hors-équilibre est la somme des énergies libres ψ_{v_k} fonctions des tenseurs de déformations élastiques définis par une décomposition en N états intermédiaires.

Le comportement élasto-visco-plastique

Il se traduit par des décohésions et des glissements à l'interface entre les agglomérats de charges et les chaînes macro-moléculaires. Phénoménologiquement, et pour rendre compte de la dépendance vis-à-vis de l'amplitude, on introduit la notion de frottement interne non visqueux c-à-d la plasticité, [99; 81; 22; 12; 25]. Ainsi, à travers la littérature, on peut distinguer trois approches pour la modéliser :

- **les modèles rhéologiques élastoplastiques** : Plusieurs modèles rhéologiques élasto-visco-plastiques adaptés aux grandes déformations ont été proposés ces dernières années, citons en particulier ([101; 114; 159; 160; 122]) le modèle de MIEHE (cf. Fig. C.3(a)) en introduisant une variable interne de plasticité avec les lois d'évolution suivantes :

- MIEHE et KECK (2000) [114]

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\bar{\bar{H}}}\| \text{ avec } \bar{\bar{H}} = \frac{1}{2} \ln(\bar{\bar{C}}). \quad (\text{C.2})$$

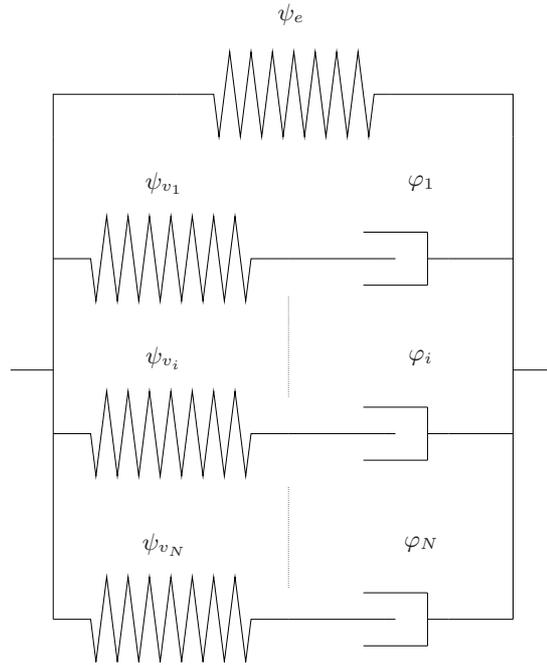


Figure C.2 – Un modèle viscoélastique à plusieurs configurations intermédiaires : Maxwell généralisé

– LION (1998) [101]

$$\dot{q} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\bar{\bar{E}} : \dot{\bar{\bar{E}}}}{\|\bar{\bar{E}}\|} \text{ si } f(\bar{\bar{E}}) = 0 \text{ et } \frac{\partial f(\bar{\bar{E}})}{\partial \bar{\bar{E}}} : \dot{\bar{\bar{E}}} \\ \frac{1}{\tau_q} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \|\bar{\bar{E}}\| - q \right) \text{ sinon.} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(\bar{\bar{E}}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\bar{E}} - q, \\ \|\bar{\bar{E}}\| = \sqrt{\bar{\bar{E}} : \bar{\bar{E}}}. \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Par ailleurs KALISKE et ROTHERT [81] utilisent un formalisme mixte pour transcrire le modèle de SAINT-VENANT généralisé aux grandes transformations (*cf.* Fig. C.3(b)). Ils introduisent alors la notion d'états intermédiaires pour supposer l'existence de plusieurs variables internes plastiques et utilisent une fonction seuil de type VON MISES pour chaque branche du modèle rhéologique.

- **Les modèles de frottement :** Une variante des modèles élasto-visco-plastiques, consiste à rajouter un comportement de frottement de type COULOMB associé à une raideur élastique en phase d'adhérence [153; 142]. Cette famille de modèles caractérise correctement la dépendance vis-à-vis de l'amplitude et en particulier, l'assouplissement avec son augmentation. Cependant, il s'agit de modèles globaux incapables de traduire des comportements locaux multi-axiaux.
- **Les modèles hystérétiques sans viscosité :** Inspirés des modèles de micro-fissuration du béton, ces modèles ([24], [25]) sont basés sur une écriture du potentiel d'énergie libre sous forme d'énergies de déformation hyperélastiques fonctions de la déformation totale $\bar{\bar{E}}$ et de la déformation anélastique $\bar{\bar{E}}_a$ et d'une énergie stockée par glissement supposée de forme quadratique fonction d'une variable de glissement interne $\bar{\bar{\alpha}}$, soit :

$$\rho_0 \psi = \rho_0 \psi_1(\bar{\bar{E}}) + \rho_0 \psi_2(\bar{\bar{E}} - \bar{\bar{E}}_a) + \frac{1}{2} \mathcal{C}_f \bar{\bar{\alpha}} : \bar{\bar{\alpha}}, \quad (\text{C.4})$$

la loi d'évolution du frottement interne découlant d'une fonction critère de type VON-MISES.

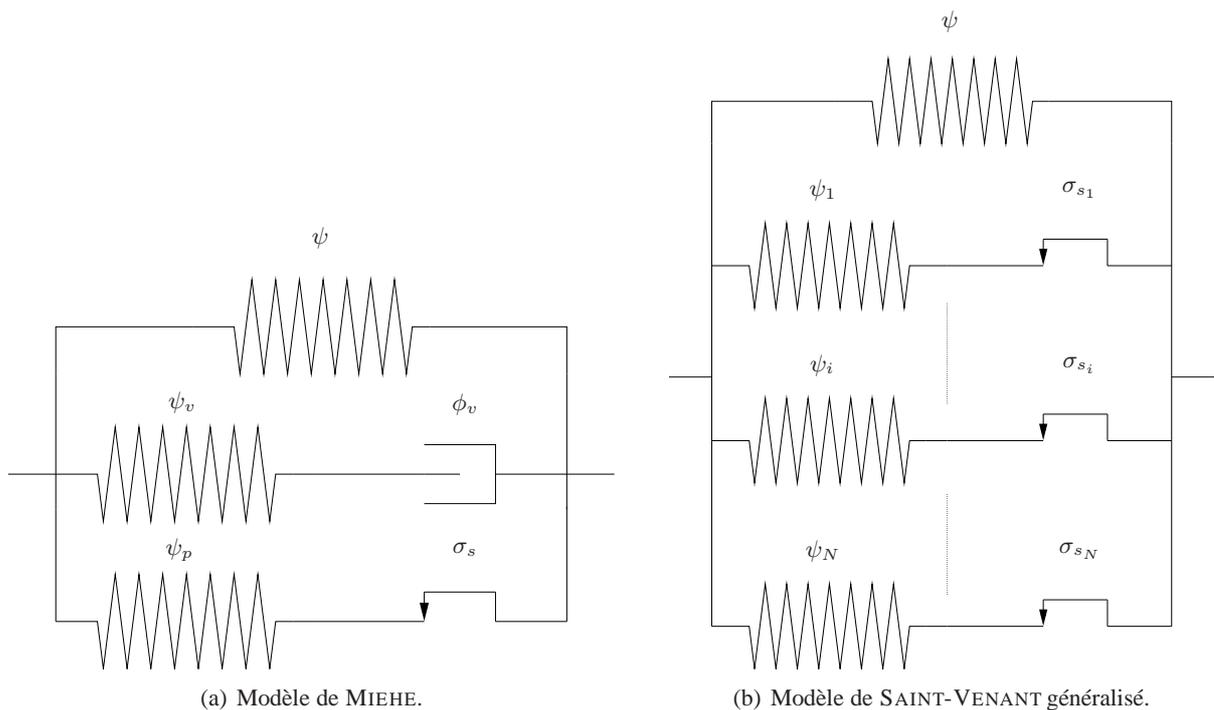


Figure C.3 – Modèles rhéologiques élasto-(visco)-plastiques.

Le comportement endommageable

Les modèles traduisant ce comportement font intervenir des mécanismes de décohésion entre charges et chaînes induisant un adoucissement cyclique (l'effet MULLINS, [62; 61; 63; 8; 84]), par cavitation autour des agglomérats de charges [111; 14; 13] ou par rupture de chaînes macro-moléculaires. Nous présentons ici quelques exemples de modèles d'endommagement, classés en deux catégories selon l'approche utilisée :

- micro-physiquement motivée [62] ;
- ou phénoménologique [79; 151; 111]

Approches microphysiques

- **Modèle de GOVINDJEE et SIMO (1991,1992)** : Ce modèle [62] a pour objet la modélisation de l'effet MULLINS en se reposant sur le mécanisme proposé par BUECHE en 1961 où l'adoucissement est supposé dû à une rupture des chaînes au-delà d'une longueur maximale (*cf.* Fig. C.4). Il consiste à supposer que l'élastomère chargé est un matériau composite charges/gomme, avec des charges indéformables ; la seule énergie de déformation à considérer est celle de la gomme. Les techniques d'homogénéisation, basées sur les résultats de Hill, sont donc menées sur un V.E.R. à matrice élastomérique et à inclusion rigide, pour obtenir la loi de comportement macroscopique. Enfin dans ce modèle, l'endommagement se produit sur les chaînes aux interfaces des charges ; le nombre de ces chaînes diminuant lorsque le matériau subit une déformation au delà d'un seuil.

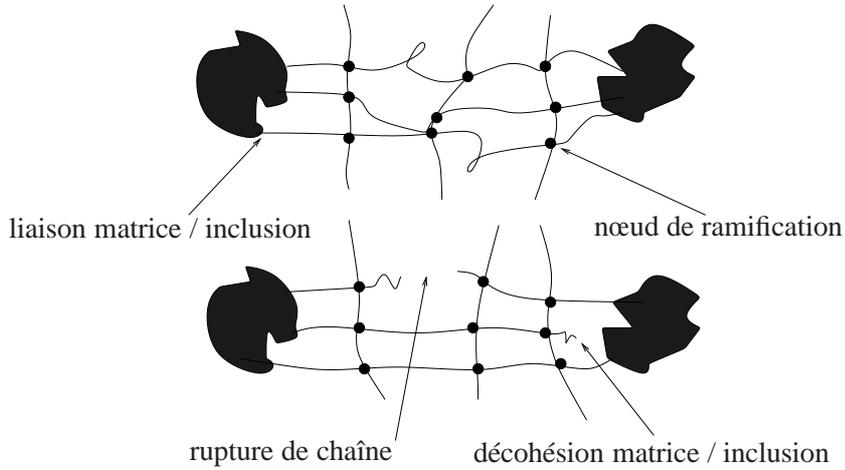


Figure C.4 – Deux types de mécanismes d'endommagement au sein d'un V.E.R. extraits de [62].

Approches phénoménologiques

- **Modèle de SIMO (1987)** : [151] associe à un modèle viscoélastique standard, une variable d'endommagement Θ^m . L'expression de l'énergie libre s'écrit donc, en configuration lagrangienne, sous la forme :

$$\psi(\bar{\bar{E}}, \bar{\bar{A}}_v, \Theta^m) = g(\Theta^m) \psi_0(\bar{\bar{E}}) - \bar{\bar{A}}_v : \bar{\bar{E}} + \psi_v(\bar{\bar{A}}_v) \quad (C.5)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Theta_t^m = \max_{t' \in]-\infty, t]} \sqrt{2\psi_0(\bar{\bar{E}}(t'))}, \\ g(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\alpha}, \quad \alpha > 0 \text{ et } \beta < 1 \text{ deux coefficients réels liés au matériau.} \end{cases} \quad (C.6)$$

- **Modèle de MIEHE (1995)** : pour traduire l'effet MULLINS, ou l'assouplissement permanent que subit le matériau lors d'un essai cyclé et ce, pour des elongations n'excédant pas l'elongation maximale vue par l'élastomère au cours de son histoire des déformations, MIEHE [111] propose d'enrichir le modèle de [151], en introduisant un endommagement discontinu et un endommagement continu issu de l'accumulation du premier.

La mise en place de cette formulation passe par la considération d'une variable interne d'endommagement de type scalaire d telle que :

$$\psi = (1 - d) \psi_0, \quad (C.7)$$

où ψ_0 représente l'énergie libre spécifique du matériau vierge de tout endommagement et $d \in [0,1]$. Si l'on se limite au seul phénomène d'endommagement d'un matériau isotrope au cours d'une transformation isotherme, nous obtenons pour une description eulérienne :

$$\phi = \left(\bar{\bar{\sigma}} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot (1 - d) \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{\bar{B}}} \right) : \bar{\bar{D}} + \psi_0 \dot{d} \geq 0. \quad (C.8)$$

Si l'on suppose que seul le phénomène d'endommagement est dissipatif, on arrive à :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\rho(1 - d) \bar{\bar{B}} \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{\bar{B}}} = (1 - d) \bar{\bar{\sigma}}_0 \text{ et } \phi = \psi_0 \dot{d} \geq 0 \quad (C.9)$$

La loi de comportement Eq. C.9 est complétée par deux lois d'évolution indépendantes gouvernant respectivement l'endommagement continu et l'endommagement discontinu :

$$d = d_\alpha(\alpha) + d_\beta(\beta). \quad (\text{C.10})$$

Les fonctions d_α et d_β vérifient les conditions qui traduisent :

- un état initial non endommagé ($d_\alpha(0) = d_\beta(0) = 0$),
- une évolution croissante et irréversible de l'endommagement ($\dot{d}_\alpha \geq 0$ et $\dot{d}_\beta \geq 0$)
- et sa limite $d_\alpha(\infty) + d_\beta(\infty) \in [0,1]$.

Les variables α et β gouvernent respectivement l'endommagement discontinu de type MULLINS et celui d'accumulation continu. On peut alors écrire :

$$\alpha(t) = \max_{s \in [0,t]} \psi_0(s) \text{ et } \beta(t) = \int_0^t |\dot{\psi}_0(s)| ds. \quad (\text{C.11})$$

Ces variables suivent les lois d'évolution :

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \dot{\psi}_0 & \text{si } \psi - \alpha = 0 \text{ et } \dot{\psi}_0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \dot{\beta} = |\dot{\psi}_0|. \quad (\text{C.12})$$

L'auteur propose alors deux expressions des fonctions d_α et d_β telles que :

$$d_\alpha(\alpha) = d_\alpha^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta_\alpha}\right) \right] \text{ et } d_\beta(\beta) = d_\beta^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\eta_\beta}\right) \right], \quad (\text{C.13})$$

avec $d_\alpha^\infty, d_\beta^\infty, \eta_\alpha$ et η_β quatre paramètres dépendant du matériau. Les figures Fig. C.5(a) et Fig. C.5(b) nous montrent l'importance relative de chaque paramètre d'endommagement.

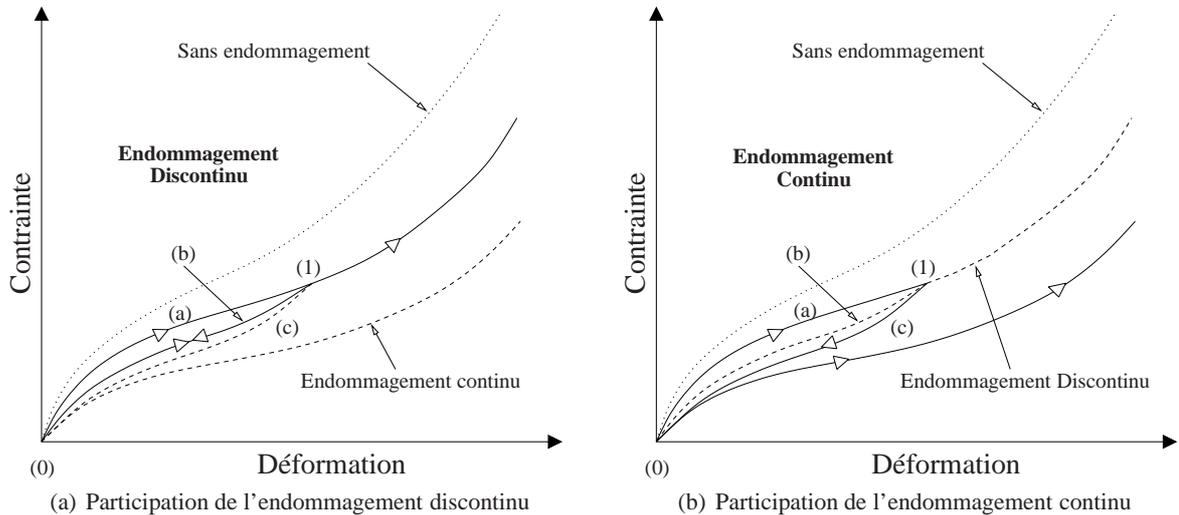


Figure C.5 – Représentation graphique en contrainte-déformation du modèle de MIEHE [111]

On peut alors remarquer que la partie discontinue de ce modèle est très proche de celle du modèle de SIMO [151] (cf. Fig. C.5(a)). En effet, seule la formulation varie, la description est – eulérienne pour SIMO, lagrangienne pour MIEHE –. On retrouve donc le caractère d'endommagement par effet MULLINS, c'est-à-dire un chargement par la branche (a) jusqu'au point (1), une décharge et une

seconde charge par la même branche (b), et continuation de la charge par la branche (a). On a bien un endommagement discontinu qui ne dépend que du maximum de déformation durant l'histoire du matériau. Contrairement à l'endommagement continu (*cf.* Fig. C.5(b)) qui, quant à lui, dépend de toute l'histoire du matériau. Le chargement se traduit par la branche (a) jusqu'au point (1), puis une décharge par la branche (b) et une deuxième charge par la branche (c). L'endommagement a augmenté sans que l'on dépasse la déformation maximale subie par le matériau.

- **Modèle proposé par BIKARD et DÉSOYER (2001)** : [14] proposent une alternative aux deux modèles précédents en développant un modèle phénoménologique "micro-physiquement motivé" à variables internes, basé sur la thermodynamique des processus irréversibles, couplant faiblement endommagement et déformations élastoplastiques c.-à-d. seulement par le biais des lois d'évolution (dans ce cas, l'endommagement n'est pas fortement couplé aux mécanismes dissipatifs), et tenant compte du caractère visqueux de ces matériaux.

Par analogie aux hypothèses de ROUSSELIER concernant les aciers chargés de carbure, ils sup-

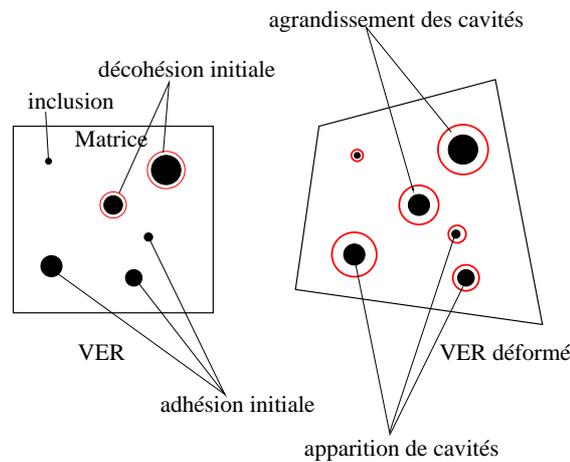


Figure C.6 – Apparition et évolution de cavités en fonction de la déformation du V.E.R. issue de [13].

posent que l'endommagement est majoritairement dû à des processus de décohésion de la matrice autour d'inclusions, c.-à-d. l'apparition de micro-cavités. Les mécanismes élastoplastiques peuvent alors être scindés en une partie déviatorique (plasticité incompressible avec écrouissage isotrope caractérisant les réarrangements permanents de chaînes macro-moléculaires), et une partie sphérique caractérisant l'apparition de cavités permanentes autour des inclusions, du fait d'une répartition radiale des contraintes autour d'elles (*cf.* Fig. C.6). Ces cavités déterminent la porosité du V.E.R., et modifient donc sa masse volumique initiale. Ce constat amène les auteurs à supposer que le V.E.R. n'est pas incompressible, à la différence de la matrice élastomérique, ce qui rejoint le concept de matériau incompressible à compressibilité induite par l'endommagement présenté par [1].

Algorithme d'identification des paramètres des modèles élasto-dissipatifs

Hypothèses cinématiques

L'identification d'un modèle élasto-dissipatif consiste à déterminer le jeu de paramètres permettant de minimiser la distance, au sens des moindres carrés, entre :

- la réponse du modèle, déduite semi-analytiquement à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®],
- et les résultats obtenus via des essais expérimentaux :
 - de double-cisaillement en relaxation ou sous chargement cyclique,
 - de traction uniaxiale en relaxation.

Cette réponse semi-analytique étant supposée homogène, on considère alors que le gradient global $\bar{\bar{F}}$ et du pseudo-gradient anélastique $\bar{\bar{F}}_a^{(1)}$ prennent les formes suivantes :

- **En cisaillement :**

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{F}}_a = \begin{bmatrix} \gamma_{a_1} & \gamma_a & 0 \\ 0 & \gamma_{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}} \end{bmatrix}.$$

- **Traction uniaxiale :**

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{F}}_a = \begin{bmatrix} \lambda_{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{a_3} \end{bmatrix}.$$

La réponse du modèle en contrainte est ainsi déterminée en utilisant la loi de comportement, après l'intégration numérique des équations différentielles non-linéaires issues de la loi complémentaire.

(1). tous les deux incompressibles

Formes des données expérimentales

Le traitement des données expérimentales peut s'avérer différent selon la nature de l'essai considéré et du mode d'acquisition de la réponse, on distingue alors les réponses temporelles des réponses en hystérèse.

Réponses temporelles

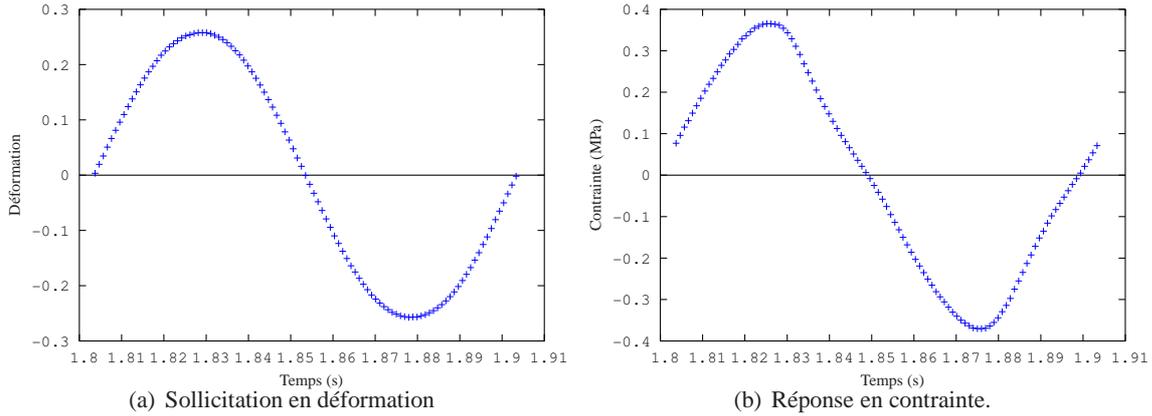


Figure D.1 – Données expérimentales issues d'un essai cyclique de double cisaillement.

Ainsi, lorsque la réponse expérimentale se présente sous forme de N_{exp} couples (Temps, Contrainte) de points expérimentaux par $(t_i^{exp}, \tau_i^{exp})$ (cf. Fig. D.1). Cet ensemble de point est ajusté par une courbe théorique définie par l'ensemble des points $(t_i^{mod}, \tau_i^{mod})$ sachant que $t_i^{exp} = t_i^{mod}$.

Ainsi, en notant $\hat{\mathbf{X}}$ le vecteur composé des n paramètres du modèle à identifier, la distance des moindres carrés à minimiser s'écrit :

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{exp}} \left(\tau_i^{mod}(\hat{\mathbf{X}}) - \tau_i^{exp} \right)^2}. \quad (\text{D.1})$$

Réponse en hystérésis

Lorsque les données expérimentales se présentent sous forme de courbe d'hystérésis dans le plan (Déformations, Contraintes)⁽²⁾, on définit cette fois, les points expérimentaux par les $2 \times N$ couples (γ_i, τ_i) , avec :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1 \dots N\} \\ \dot{\gamma}_i < 0 \quad \forall i \in \{N \dots 2N\} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

L'hystérésis défini par ces $2 \times N$ couples n'étant pas bijective, il est préférable de décomposer les résultats expérimentaux en deux parties bijectives, soient (Fig. D.2) :

- la contrainte moyenne, à γ donnée, entre la descente ($\dot{\gamma} < 0$) et la montée ($\dot{\gamma} \geq 0$) :

$$t_i = \frac{\tau_i + \tau_{2N-i}}{2} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}, \quad (\text{D.3})$$

(2). pour une réponse cyclique en cisaillement

– la contrainte différentielle, à γ donnée :

$$d_i = \tau_i - \tau_{2N-i} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}. \quad (\text{D.4})$$

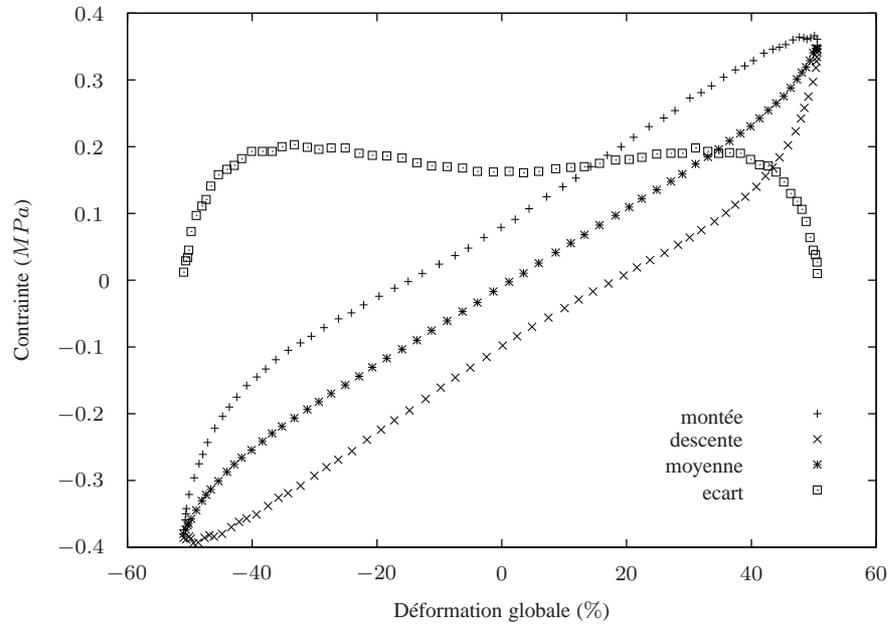


Figure D.2 – Traitement des courbes d'hystérésis.

L'identification des paramètres du matériau peut alors se ramener à la minimisation de l'écart entre les courbes expérimentales (γ_i, t_i) , (γ_i, d_i) et leurs homologues théoriques :

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - t(\hat{\mathbf{X}})|_{\gamma_i})^2 + \sum_{i=1}^n (d_i - d(\hat{\mathbf{X}})|_{\gamma_i})^2} \quad (\text{D.5})$$

Algorithme de minimisation

La résolution du problème de minimisation de la distance des moindres carrés, définie précédemment, s'effectue, sans calcul de gradient, en adoptant un algorithme itératif de minimisation (*cf.* Fig. D.3) inspiré de la méthode de HOOKE & JEEVES et couplée à une procédure itérative de réduction de la variation. Le principe de cette méthode consiste à chercher de façon heuristique, à partir d'un point $\hat{\mathbf{X}}^0$, la direction et le pas permettant de diminuer \mathbf{E} . L'opérateur permettant cette diminution est appelée : l'opérateur de **Recherche Locale** détaillé sur la figure Fig. D.4⁽³⁾.

(3). $(e_1, e_2 \dots e_n)$ désignant la base canonique de \mathcal{R}^n .

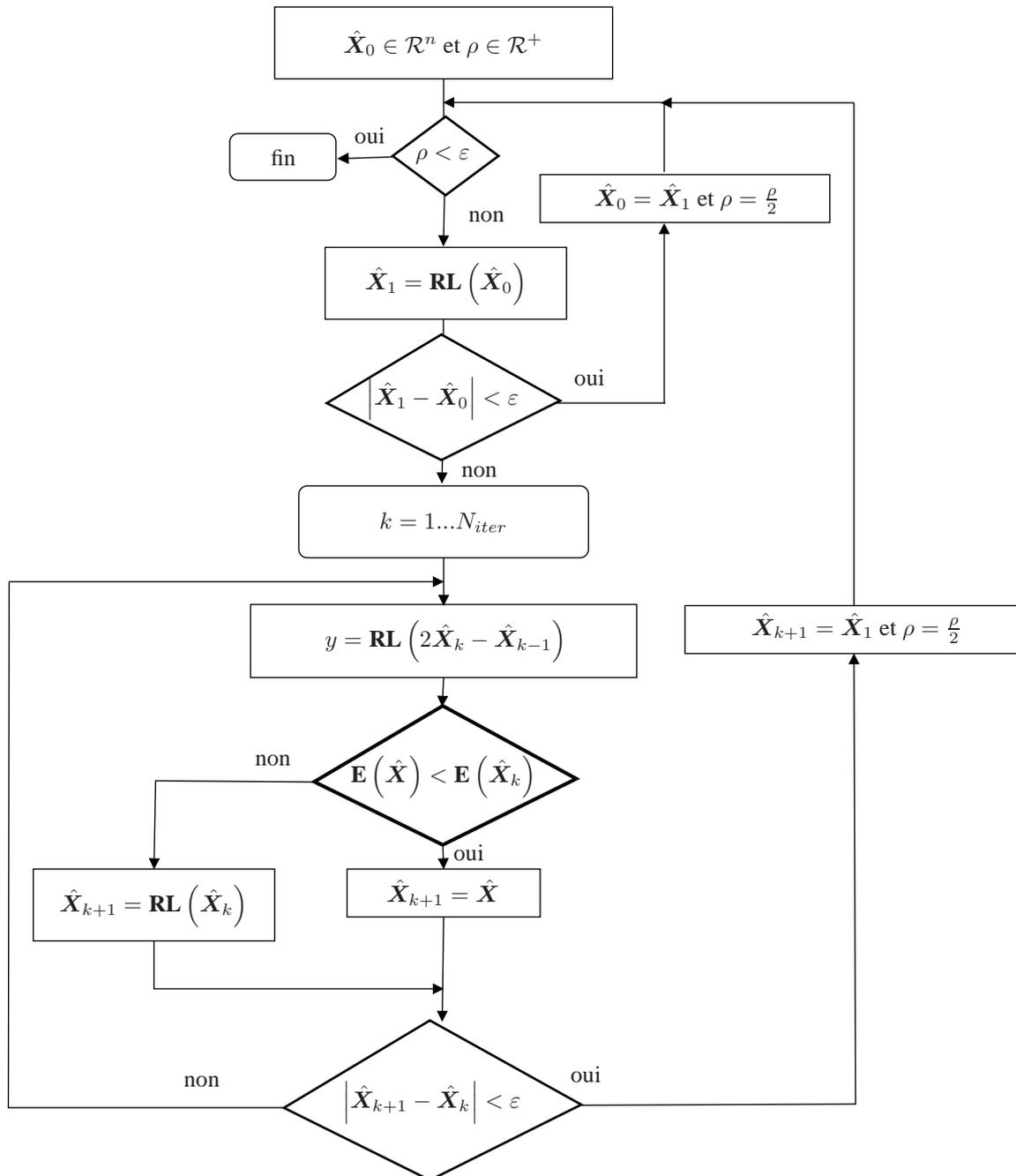
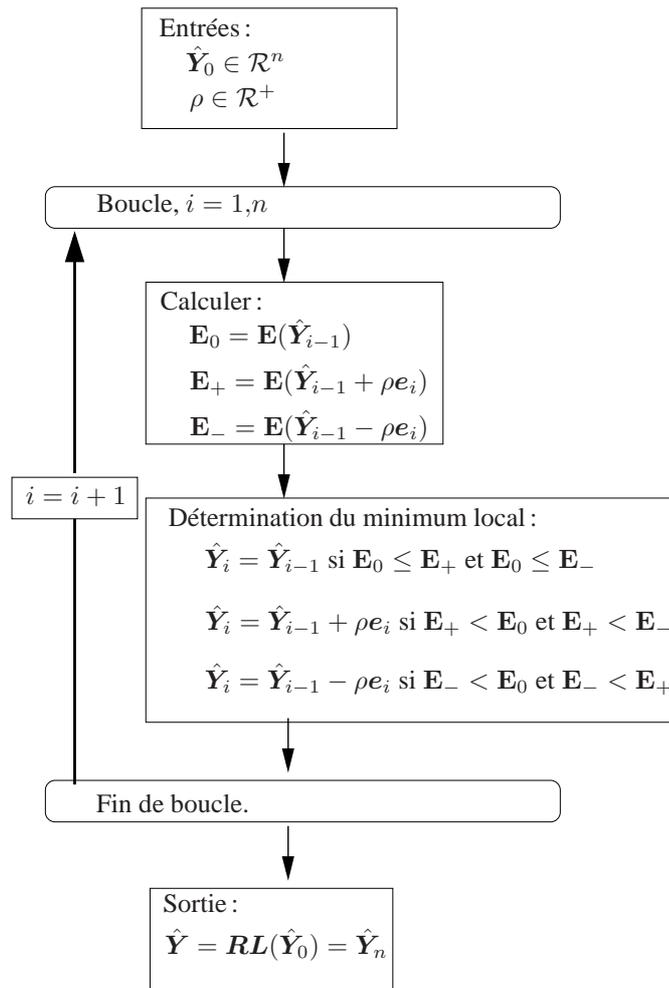


Figure D.3 – Algorithme itératif d'ajustement.

Figure D.4 – Opérateur de Recherche Locale : **RL**.

Campagne d'essais expérimentaux réalisés sur un élastomère silicone chargé en silice

Présentation des essais

L'ensemble des essais présentés dans ce paragraphe s'inscrit dans le cadre d'une campagne expérimentale menée par J.M. MARTINEZ pendant ses travaux de thèse [107].

Le matériau, utilisé pour cette campagne d'essais, était un Silicone VHDS1029⁽¹⁾ réalisé par la société PAULSTRA et destiné à la fabrication des adaptateurs de fréquence, pièce reliant généralement les pales au rotor d'un hélicoptère et permettant d'amortir les mouvements de traînée.



Figure E.1 – Éprouvettes de traction et de double cisaillement.

Ces essais ont consisté en :

- des essais de traction uniaxiale sur éprouvettes haltères (*cf.* Fig. E.1) de type H2 (selon la norme NF T46-002) essentiellement pour déterminer la réponse quasi-statique et en relaxation ;

(1). Au niveau composition, il s'agit d'un diméthyl-vinyl-siloxan vulcanisé par peroxyde

- des essais de cisaillement, réalisés sur des éprouvettes bi-couches élastomère/métal, plus communément appelées **éprouvettes de double cisaillement** (cf. Fig. E.1), pour des sollicitations quasi-statiques, de relaxation ou cycliques. Il s'agit principalement :
 - d'essais de charge-décharge à basse vitesse de déformation,
 - d'essais de relaxation à divers échelons de déformation pour différentes températures,
 - d'essais cycliques sinusoïdaux et triangulaires pour différentes températures.

Les moyens d'essais mis en oeuvre pour cette campagne peuvent être résumés comme suit :

- Pour les essais de traction, une machine de traction-compression de type ADAMEL DY36 (cf. Fig. E.2(a)) d'une capacité de $100kN$ équipée d'un système d'extensométrie laser et d'une enceinte climatique, thermostatée de $-60^{\circ}C$ à $+220^{\circ}C$, refroidie par une circulation d'azote et éventuellement réchauffée par une résistance électrique et ventilation d'air,
- Pour les essais de cisaillement, une machine dynamique type MTS-Model 322.21 T-Slot d'une capacité de $100kN$ (cf. Fig. E.2(b)) avec des fréquences de sollicitation pouvant atteindre la centaine de Hz . Cette machine a été aussi équipée d'une enceinte thermostatée de caractéristiques similaires à la précédente et thermostatée de $-60^{\circ}C$ à $+150^{\circ}C$.



(a) Machine ADAMEL DY36.



(b) Machine MTS.

Figure E.2 – Machines utilisées dans la campagne d'essais.

Remarque E.3

Afin d'éliminer l'effet MULLINS et donc de caractériser le comportement du matériau stabilisé, il a été procédé préalablement à chaque essai, à l'assouplissement des éprouvettes. Cet assouplissement est réalisé via une dizaine de cycles à une amplitude de déformation supérieure à la déformation maximale de l'essai envisagé (cf. Fig. E.3). □

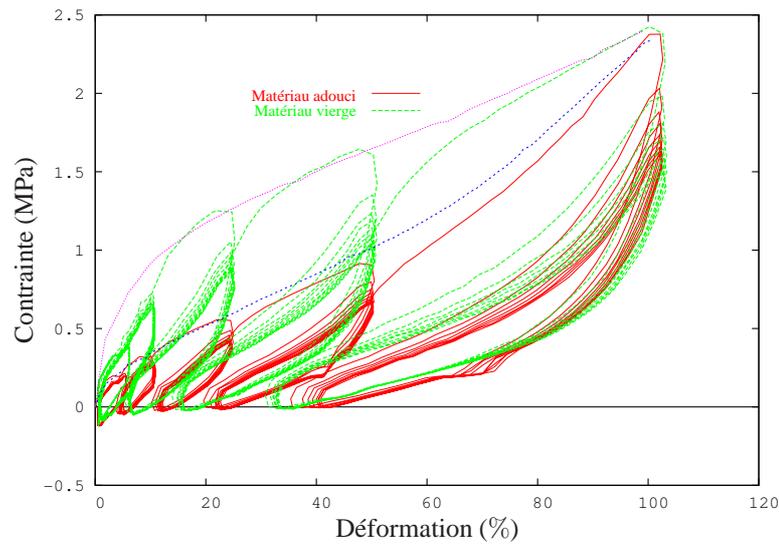


Figure E.3 – Observation de l'effet MULLINS à travers des essais de traction uniaxiale.

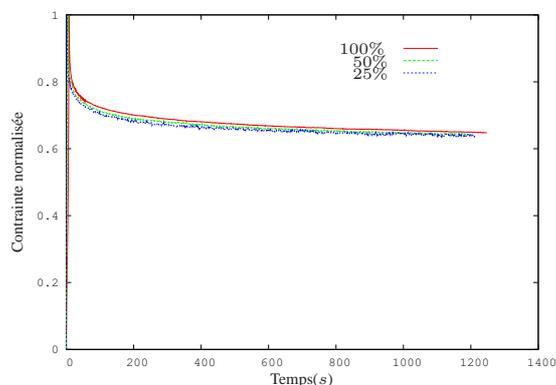
Quelques résultats

Nous présentons, dans ce paragraphe, une synthèse des résultats expérimentaux les plus marquants et ce, dans le but d'en dégager une tendance quant à la conception du modèle reflétant le comportement du matériau.

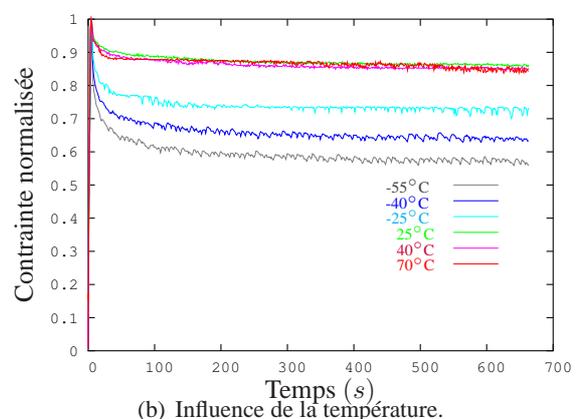
Relaxation en traction uniaxiale

Influence de l'amplitude de déformation

Pour les essais de relaxation en traction, l'éprouvette est soumise à plusieurs échelons de déformation (c.-à-d. 25%, 50% et 100%). La réponse est décrite Fig. E.4 par l'évolution de la contrainte normalisée suivant le temps. Ces résultats montrent que la réponse en contrainte normalisée reste indépendante de l'amplitude de déformation, il s'agit d'un **comportement linéaire**.



(a) Influence de l'amplitude de déformation.



(b) Influence de la température.

Figure E.4 – Réponse d'essais de relaxation en traction.

Influence de la température

Les mêmes essais de relaxation ont ensuite été réalisés à différentes températures ($70^{\circ}C$, $40^{\circ}C$, $25^{\circ}C$, $-25^{\circ}C$, $-40^{\circ}C$ et $-55^{\circ}C$). Les courbes Fig. E.4(b) montrent que :

- pour $T \geq 25^{\circ}C$: la réponse est peu sensible au changement de température ainsi qu’au niveau de déformation.
- pour $-55^{\circ}C \leq T \leq -25^{\circ}C$: on observe que la relaxation évolue significativement lorsqu’on diminue la température. Cependant cette évolution s’atténue avec l’amplitude de déformation.

Essais de double cisaillement

Essais quasi-statiques

Il s’agit d’essais de charge-décharge réalisés à basse vitesse de déformation ($\dot{\gamma} = 0.03s^{-1}$) pour différentes déformations ($\gamma_{max} = 12.5\%$, 25% et 50%). Les réponses contraintes/déformations sont représentées sur la figure Fig. E.5.

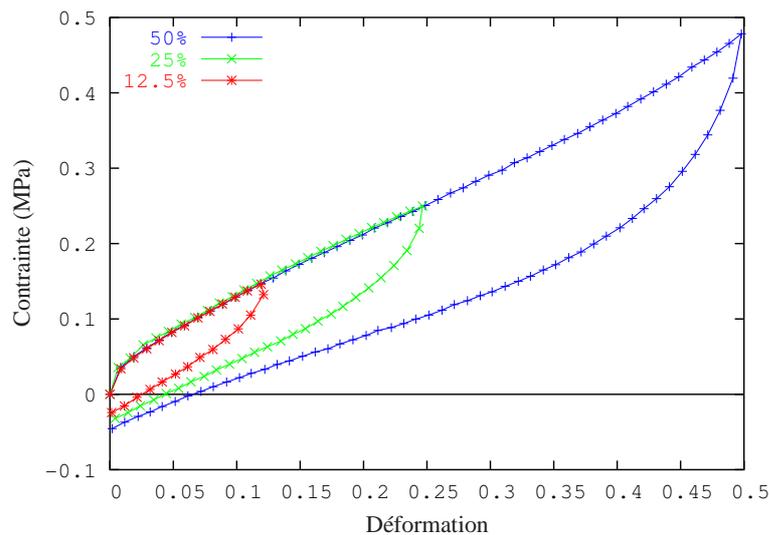


Figure E.5 – Essais quasi-statiques de charge-décharge en double cisaillement à température ambiante ($\dot{\gamma} = 0.03s^{-1}$).

Essais de relaxation

Les essais de relaxation en double cisaillement ont été réalisés à différentes températures ($70^{\circ}C$, $40^{\circ}C$, $25^{\circ}C$, $-25^{\circ}C$, $-40^{\circ}C$ et $-55^{\circ}C$) et à des échelons de glissement successivement imposés à 20% , 30% et 54% (cf. Fig. E.6).

Pour effectuer l’analyse de ces essais, la réponse en contrainte correspondant à chaque échelon de glissement a été extraite de la réponse globale, puis normalisée par rapport à la contrainte instantanée. Ainsi, à l’instar de la réponse en traction, la relaxation en cisaillement reste d’une part indépendante de l’amplitude de glissement imposé (cf. Fig. E.7(a)) et devient d’autre part, de plus en plus significative aux températures inférieure à $-25^{\circ}C$ (cf. Fig. E.7(b)).

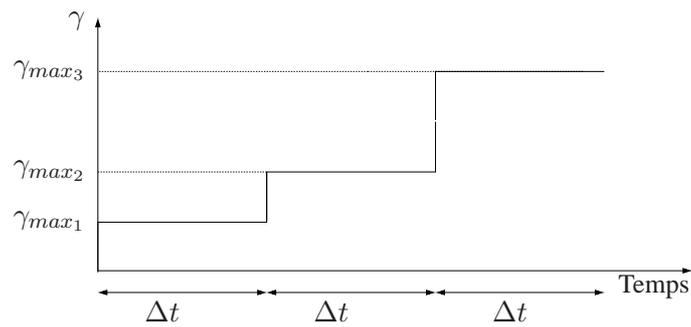


Figure E.6 – Sollicitation pour une série d'essais de relaxation en cisaillement.

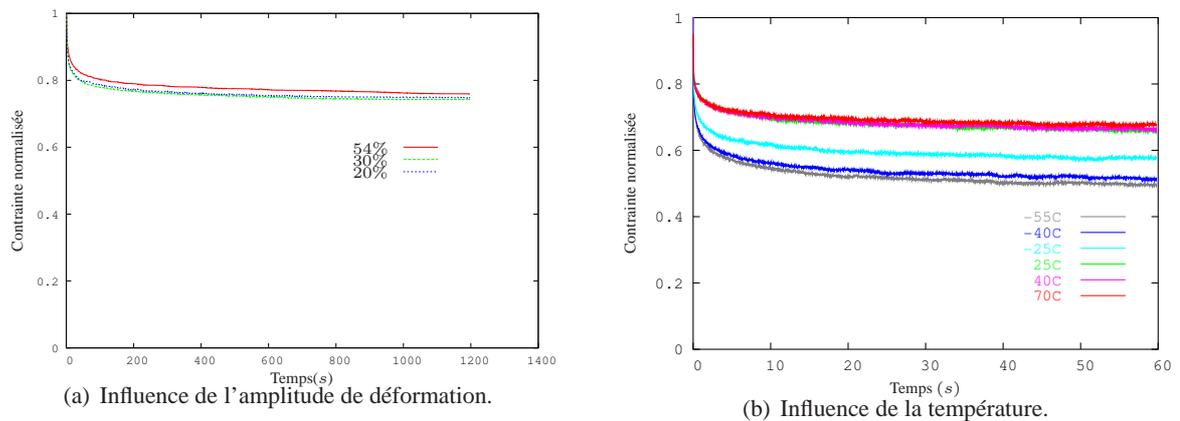


Figure E.7 – Résultats d'essais de relaxation en double cisaillement.

Essais cycliques triangulaires

Ces essais ont été réalisés, sous sollicitations cycliques triangulaires à amplitudes progressivement croissantes Fig. E.8, en faisant varier les paramètres suivants :

- domaine de températures : 70°C , 40°C , 25°C , -25°C , -40°C et -55°C ,
- domaine de taux de déformation : 0.03s^{-1} , 0.1s^{-1} , 0.3s^{-1} , 1s^{-1} , 3s^{-1} et 10s^{-1} ,
- domaine des déformations, $\gamma_{max1} = 12.5\%$, $\gamma_{max2} = 25\%$ et $\gamma_{max3} = 50\%$,

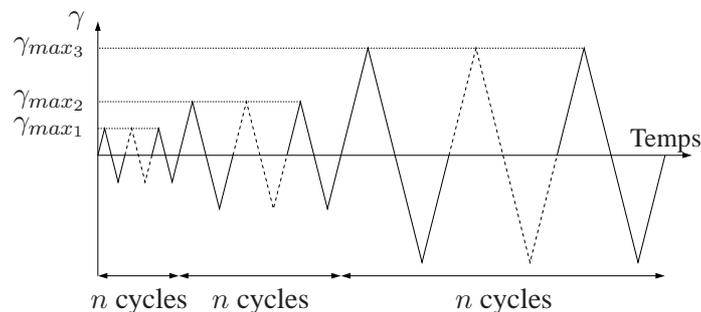


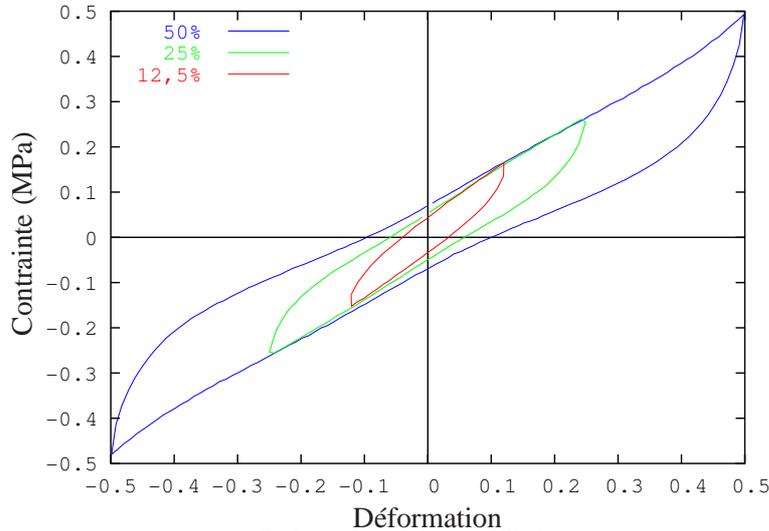
Figure E.8 – Sollicitation pour un essai cyclique triangulaire à amplitude progressive.

• Influence de l'amplitude :

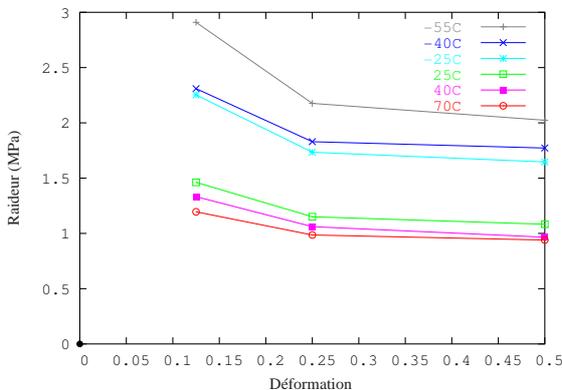
La figure Fig. E.9(a) montre les cycles stabilisés. Qualitativement, ces cycles présentent des non-linéarités

croissantes ainsi qu'un assouplissement du matériau avec l'augmentation de l'amplitude de déformation. Ce phénomène d'assouplissement est connu sous le nom de l'EFFET PAYNE et est d'autant plus marqué aux faibles températures (cf. Fig. E.9(b)).

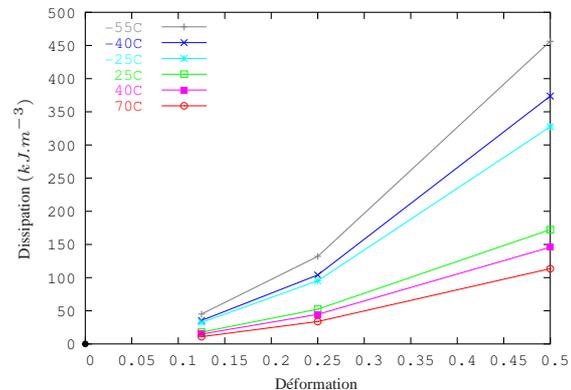
Par ailleurs et plus classiquement, on observe (Fig. E.9(c)) une augmentation de la dissipation avec l'amplitude de déformation mais aussi avec la diminution de la température.



(a) Cycles stabilisés à $T = 25^{\circ}C$.



(b) Raideur globale du cycle en fonction de la température.



(c) Dissipation au cours d'un cycle en fonction de la température.

Figure E.9 – Influence de l'amplitude de déformation sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement ($\dot{\gamma} = \pm 0.3s^{-1}$).

● Influence du taux de déformation :

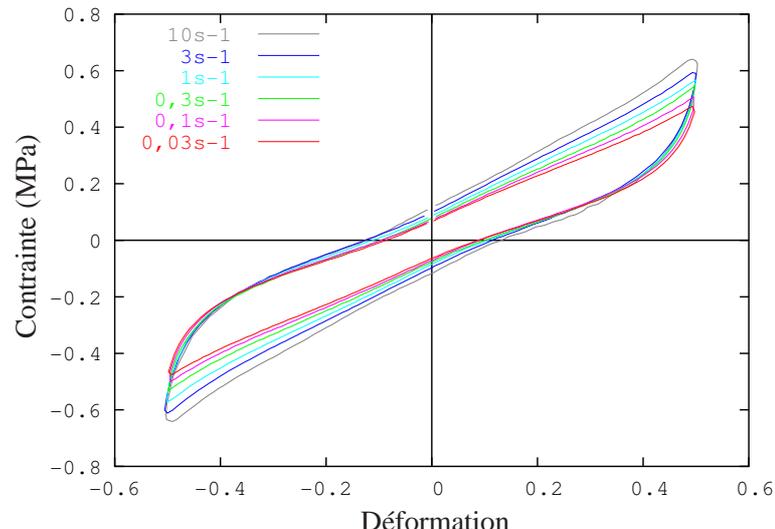
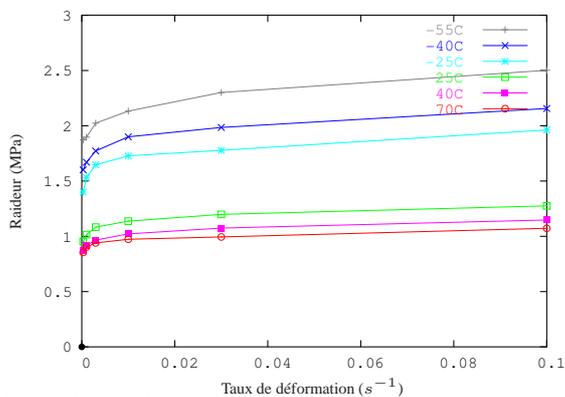
Les résultats présentés Fig. E.10(a) montrent :

- une rigidification globale avec l'augmentation de la vitesse de déformation (cf. Fig. E.10(b)),
- une augmentation de la dissipation globale suivant la vitesse de déformation (cf. Fig. E.10(c)),
- ces observations restent approximativement identiques quelle que soit la température de l'essai.

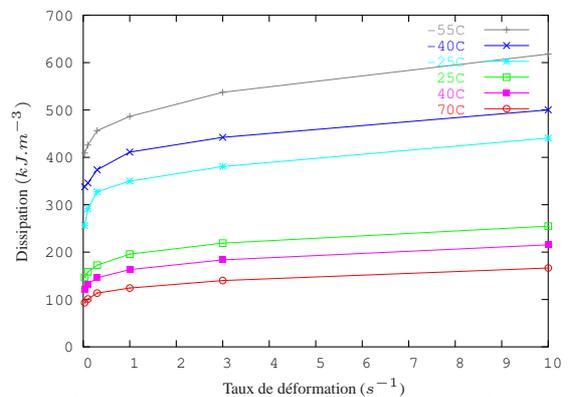
Cependant les variations de ces grandeurs s'atténuent avec l'accroissement de la température.

● Influence de la température :

Les courbes d'hystérésis présentées sur Fig. E.11, montrent la forte influence de la température sur la

(a) Cycles stabilisés à $T = 25^{\circ}\text{C}$.

(b) Raideur globale du cycle en fonction de la température.



(c) Dissipation au cours d'un cycle en fonction de la température.

Figure E.10 – Influence de la vitesse de déformation sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement à température ambiante tels que $\gamma_{max} = 50\%$.

réponse du matériau sous sollicitation cyclique, on observe notamment :

- un assouplissement global et une diminution de la dissipation du cycle avec l'accroissement de la température,
- la réponse cyclique présente un caractère non-linéaire (point anguleux en bout de cycle et un étranglement du cycle à déformation nulle) qui se voit amplifié avec la diminution de la température.

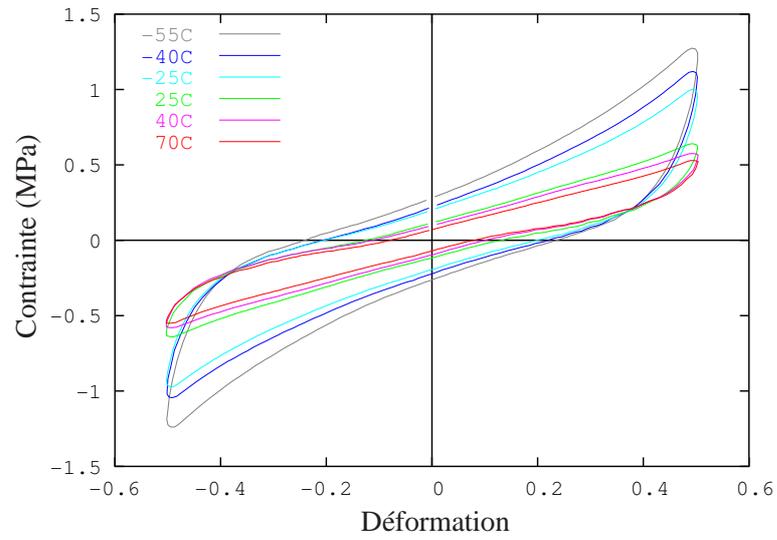
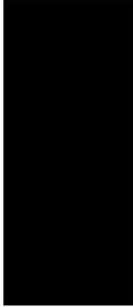


Figure E.11 – Influence de la température sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement ($\gamma_{max} = 50\%$ et $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$).



BIBLIOGRAPHIE

1. ANDRIEUX, F., SAANOUNI, K., SIDOROFF, F. Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement. *C. R. Acad. Sci.*, **324**(SérieIb), 281–288 (1997).
2. ARRUDA, E.M., BOYCE, M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J Mech Phys Solids*, **41**, 389–412 (1993).
3. AUBARD, X., BOUCARD, P. A., LADEVEZE, P., MICHEL, S. Modeling and simulation of damage in elastomer structures at high strains. *Computers and Structures*, vol. **80**, p. 2289–2298 (2002).
4. BALL, J.M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **63** (1977).
5. BATHE, K.J. The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers and Structures*, **79**, 243–252 (2001).
6. BATOZ, J. L., DHATT, G. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes (1990).
7. BEATTY, M. F. An Average-Stretch Full-Network Model for Rubber Elasticity. *Journal of Elasticity*, **70**, 65–86 (2003).
8. BEATTY, M. F., KRISHNASWAMY, S. A theory of stress-softening in incompressible isotropic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**, 1931–1965 (2000).
9. BERGSTRÖM, J.S., BOYCE, M.C. Constitutive modeling of the time-dependent and cyclic loading of elastomers and application to soft biological tissues. *Mechanics of Materials*, **33**, 523–530 (2001).
10. BERGSTRÖM, J.S., KURTZ, S.M., RIMNAC, C.M., EDIDIN, A.A. Constitutive modeling of ultra-high molecular weight polyethylene under large-deformation and cyclic loading conditions. *Biomaterials*, **23**, 2329–2343 (2002).
11. BERNSTEIN, B., KEARSLEY, E.A., ZAPAS, L.J. A study of stress relaxation with finite strain. *Transaction of the Society of Rheology*, **7**, 391–410 (1963).
12. BESDO, D., IHLEMANN, J. The effect of softening phenomena in filled rubber inhomogeneous loading. In Schuster Besdo, Ihlemann (eds) (eds.), *Constitutive models for rubber II*, pp. 137–147 (2001).
13. BIKARD, J. *Un modèle de comportement visco-élastique plastique endommageable pour les élastomères chargés*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II (2002).
14. BIKARD, J., DÉSOYER, T. Finite viscoelasticity, plasticity and damage of a class of filled elastomers : constitutive model. *Mechanics Research Communications*, **28**, 693–702 (2001).
15. BOUKAMEL, A. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II (1988).

16. BOUKAMEL, A., DÉBORDES, O., JAZZAR, F. Etude de la fiabilité d'une formulation en éléments finis pseudo-axisymétriques pour les grandes déformations hyperélastiques. Non publié.
17. BOUKAMEL, A., MÉO, S. Identifictaion of the mechanical parameters linked to a visco-hyperelastic model : Application to a class of elastomers. In Schuster Besdo, Ihlemann (eds) (eds.), *Constitutive Models for Rubber II*, pp. 267–272 (2001).
18. BOUKAMEL, A., MÉO, S., DÉBORDES, O., JAEGER, M. A thermo-viscoelastic model for elastomeric behaviour and its numerical application. *Archive of Applied Mechanics*, **71**, 785–801 (2001).
19. BOURGEOIS, S. *Caractérisation d'élastomères en fatigue*. Rapport de dea, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II (1994).
20. BOYCE, M.C., ARRUDA, E.M. Constitutive models of rubber elasticity : a review. *Rubber Chem. Technol.*, **73**, 504–523 (2000).
21. BOYCE, M.C., SOCRATE, S., KEAR, K., YEH, O., SHAW, K. Micromecanisms of deformation and recovery in thermoplastic vulcanizates. *J. Mech. Phys. Solids*, **49**, 1323–1342 (2001).
22. BRACKBILL, C.R. *Helicopter rotor aeroelastic analysis using elastomeric damper model*. Thèse de Doctorat, The Pennsylvania State University, The graduate scholl, Department of aerospace engineering (2000).
23. BÉRARDI, G. *Modélisation numérique du comportement thermo-viscoélastique d'un élastomère en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Université de Provence, Aix-Mareille I (1995).
24. CANTOURNET, S. *Endommagement et fatigue des élastomères*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (2002).
25. CANTOURNET, S., DESMORAT, R. Modélisation thermodynamique du frottement interne et de l'hystérésis d'un élastomère. *C.R. Mecanique*, **331**, 265–270 (2003).
26. CAREY, G.F., ODEN, J.T. *Finite elements*. Prentice-Hall, N.J. (1986).
27. CHADWICK, P., CREASY, C.F.M. Modified entropic elasticity of rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **32** (1984).
28. CHANG, W.V., BLOCH, R., TSCHOEGL, N.W. The behaviour of rubber-like materials in moderatly large deformations. *Journal of Rheology*, **22**, 1–32 (1978).
29. CHEUNG, Y.K., AU, F.T.K. Isoparametric Spline Finite Strip for Degenerate Shells. *Thin-Walled Structures*, **21**, 65–92 (1995).
30. CHRISTENSEN, R.M. *Theory of viscoelasticity, an introduction*. Academic Press Inc., New York (1971).
31. CHRYSOCHOOS, A. Energy balance for elastic plastic deformation at finite strtain. *J. Theo Appl. Mech.*, **4**, 589–614 (1985).
32. CHRYSOCHOOS, A., PEYROUX, R. Modélisation numérique des couplages en thermomécanique des solides. *Revue européenne des éléments finis*, **6**, 673–724 (1997).
33. COLEMAN, B.D. Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rational Mech. Anal*, **17**, 1–46 (1964).
34. COLEMAN, B.D., NOLL, W. Foundations of linear viscoelasticity. *Rev. Mod. Phys.*, **33**, 239–249 (1961).
35. COURTOIS, S. *Une approche physiquement motivée pour l'endommagement des élastomères*. Rapport de dea, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II (2003).
36. CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Essentials*, vol. 1. John Wiley & Sons (1991).
37. CURCHOS, J ET ALARCON-LORCA, F. Elastomères - Généralités. In *Traité : Généralités*, pp. Fiche A–7700. Techniques de l'Ingénieur ().
38. DELORME, D. *Modélisation numérique du comportement mécanique de matériaux composites à matrice élastomérique*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II (1997).
39. DEWIMILLE, L., BOKOBZA, L. Rôle de l'interface charge-matrice dans des réseaux de polydiméthylsiloxane (PDMS) renforcés par des particules de silice générées *in situ*. In *Premier congrés interdisciplinaire sur les matériaux en France* (2002).
40. DORFMANN, L., OGDEN, R. W. Stress softening in rubber-like solids subjected to cavitation damage. In *Constitutive Models for Rubber II*, pp. p. 193–203 (2001).
41. DROZDOV, A. D., DORFMANN, L. A micro-mechanical model for the response of filled elastomers at finite strains. *International Journal of Plasticity*, **vol. 19**, p. 1037–1067 (2003).

42. DROZDOV, A.D. A model for the nonlinear viscoelastic response in polymers at finite strains. *International Journal of Solids and Structures*, **vol. 35**(18), p. 2315–2347 (1998).
43. DROZDOV, A.D. A model of cooperative relaxation in finite viscoelasticity of amorphous polymers. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **35**, 897–909 (2000).
44. DROZDOV, A.D. A model for the viscoelastic and viscoplastic responses of glassy polymers. *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 8285–8304 (2001).
45. DROZDOV, A.D. Modelling nonlinear viscoelasticity and damage in amorphous glassy polymers. *Mathematical and Computer Modelling*, **33**, 883–893 (2001).
46. DROZDOV, A.D., AGARWAL, S., GUPTA, R.K. Linear thermo-viscoelasticity of isotactic polypropylene. *Computational Materials Science*, **29**, 195–213 (2004).
47. DROZDOV, A.D., DORFMANN, L. The nonlinear viscoelastic response of carbon black-filled natural rubbers. *International Journal of Solids and Structures*, **vol. 39**, p. 5699–5717 (2002).
48. DUMONTET, H. *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie Paris 6 (1990).
49. DUSTER, A., HARTMANN, S., RANK, E. p-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**, 5147–5166 (2003).
50. FERRY, J.D. *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley Sons, Inc. (1970).
51. FEYEL, F. *Application du calcul parallèle aux modèles à grand nombre de variables internes*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris (décembre 1998).
52. FIGUIER, L. *Les merveilles de l'industrie - Industrie du Caoutchouc*. Jouvot et Cie (1873).
53. GABRIELI, C. *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée (1995).
54. GADALA, M. S. Numerical solutions of non-linear problems of continua–II. Survey of incompressibility constraints and software aspects. *Computers and structures*, **22**, 841–855 (1986).
55. GADALA, M. S. Alternative methods for the solution of hyperelastic problems with incompressibility. *Computers and structures*, **42**, 1–10 (1992).
56. GADALA, M. S. Recent advances in the numerical modeling of constitutive relations. *Finite Elements in Analysis and Design*, **24**, 171–185 (1997).
57. GENT, A.N., THOMAS, A.G. Forms for the stored strain energy function for vulcanised rubber. *J. of Polym. Sci.*, **28**, 625–637 (1958).
58. GLOWINSKI, R., LE TALLEC, P. A numerical method in nonlinear incompressible elasticity. *Academie des Sciences (Paris), Comptes Rendus, Serie B-Sciences Physiques.*, **290**, 23–26 (1980).
59. GLOWINSKI, R., LE TALLEC, P. Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented Lagrangian methods I. two-dimensional and axisymmetric problems. *SIAM J. Appl. Math.*, **42**, 400–429 (1982).
60. GLOWINSKI, R., LETALLEC, P. Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented lagrangien methods, II. Three-dimensional problems. *SIAM J. Appl. Math.*, **44**, 710–733 (1984).
61. GOVINDJEE, S., SIMO, J. Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology: carbon black filled rubbers incorporating Mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, **40**, 213–233 (1992).
62. GOVINDJEE, S., SIMO, J.C. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, **39**, 87–112 (1991).
63. GOVINDJEE, S., SIMO, J.C. Mullins' effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus. *International Journal of Solids and Structures*, **vol. 29**(14/15), p. 1737–1751 (1992).
64. GREEN, A.E., RIVLIN, R.S. The mechanics of non-linear materials with memory. *Arch. Rational Mech. Anal*, **1**, 1–21 (1957).
65. HART-SMITH, L.J. Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *J. Appl. Math. Phys.*, **17**, 608–626 (1966).
66. HARTMANN, S. Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions. *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 7999–8018 (2001).
67. HARTMANN, S. Computation in finite strain viscoelasticity: finite elements based on the interpretation as differential-algebraic equations. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, **191**, 1439–1479 (2002).

68. HARWOOD, J.A.C., MULLINS, L., PAYNE, A.R. Stress softening in rubbers: a review. *Journal of the IRI*, pp. 17–27 (1967).
69. HAUPT, P., LION, A., BACKJAUS, E. On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters. *Int. J. Solids Structures*, **37**, 3633–3646 (2000).
70. HERRMANN, L. R. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible material by a variational theorem. *AAIA J.*, **3**, 1896–1900 (1964).
71. HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley (2000).
72. HOLZAPFEL, G.A., REITER, G. Fully coupled thermomechanical behaviour of viscoelastic solids treated with finite elements. *Int. J. Engng. Sci.*, **33**, 1037–1058 (1995).
73. HOLZAPFEL, G.A., SIMO, J. Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **132**, 17–44 (1996).
74. HOLZAPFEL, G.A., SIMO, J. A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermo-mechanical changes. *Int. J. Solids Structures*, **33**, 3019–3034 (1996).
75. HOUDRET, C. Elastomères - Ingrédients. In *Traité : Généralités*, pp. Fiche A–7710. Techniques de l'Ingénieur ().
76. HUBER, N., TSAKMAKIS, C. Finite deformation viscoelasticity laws. *Mechanics of Materials*, **32**, 1–18 (2000).
77. HYER, M.W., COOPER, D.E. Stresses and deformations in composite tubes due to a circumferential temperature gradient. *Journal of Applied Mechanics*, **53**, 757–764 (1986).
78. JAZZAR, M.F. *Modélisation du comportement hyperélastique quasi incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II (1993).
79. KALISKE, M., NASDALA, L., ROTHERT, H. On damage modelling for elastic and viscoelastic materials at large strain. *Computers and Structures*, **79**, 2133–2141 (2001).
80. KALISKE, M., ROTHERT, H. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics*, **19**, 228–239 (1997).
81. KALISKE, M., ROTHERT, H. Viscoelastic and elastoplastic damage formulations. In A.Dorfmann, A.Muhr Editors (eds.), *Constitutive Models for Rubber I*, pp. 159–167 (1999).
82. KAR, K.K., BHOWMICK, A.K. Hysteresis loss in filled rubber vulcanisates and its relationship with heat generation. *Journal of Applied Polymer Science*, **64**, 1541–1555 (1997).
83. KAR, K.K., BHOWMICK, A.K. Medium strain hysteresis loss of natural rubber and styrene-butadiene rubber vulcanisates: a predictive model. *Polymer*, **40**, 683–694 (1999).
84. KRISHNASWAMY, S., BEATTY, M. F. The Mullins effect in compressible solids. *International Journal Eng. Sci.*, **38**, 1397–1414 (2000).
85. LAHELLEC, N. *Homogénéisation et étude expérimentale de composites hyperélastiques et visco-hyperélastiques*. Thèse de doctorat, Université de la méditerranée, Aix-Marseille II (2001).
86. LAHELLEC, N., MAZEROLLE, F., MICHEL, J.C. Second-order estimate of the macroscopic behavior of periodic hyperelastic composites: theory and experimental validation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **52**, 27–49 (2003).
87. LAIARINANDRASANA, L., PIQUES, R., ROBISSON, A. Visco-hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept under total Lagrangian formulation. *International Journal of Plasticity*, **19**, 977–1000 (2003).
88. LAMBERT-DIANI, J., REY, C. Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères: principe et avantages. *C. R. Acad. Sci.*, **326**(SérieIIb), 483–488 (1998).
89. LAMBERT-DIANI, J., REY, C. New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **18**, 1027–1043 (1999).
90. LE TALLEC, P. *Numerical analysis of viscoelastic problems*. Masson (1990).
91. LE TALLEC, P., RAHIER, C. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 1159–1186 (1994).
92. LE TALLEC, P., RAHIER, C., KAISS, A. Three-dimensional incompressible viscoelasticity in large strain: Formulation and numerical approximation. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, **109**, 233–258 (1993).

93. LEJEUNES, S. *Stabilité de structure lamifié élastomère-métal*. Rapport de dea, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II (2002).
94. LEJEUNES, S. *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II (2006).
95. LEJEUNES, S., BOUKAMEL, A., B., COCHELIN. Analysis of laminated rubber bearings with a numerical reduction model method. *Archive of Applied Mechanics*, p. online first (2006).
96. LEJEUNES, S., BOUKAMEL, A., B., COCHELIN. Model reduction method : an application to the buckling analysis of laminated rubber bearings. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, **15**, 281–292 (2006).
97. LEONOV, A.I. On thermodynamics and stability of general Maxwell-like viscoelastic constitutive equations, Theoretical and applied rheology. In *XIth Int. Cong. On Rheology*, pp. 97–99 (1992).
98. LIANIS, G. Constitutive equations of viscoelastic solids under finite deformation. *Purdue University report, A&ES 63-11* (1963).
99. LION, A. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, 1805–1834 (1997).
100. LION, A. A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomer. *Acta Mechanica*, **123**, 1–25 (1997).
101. LION, A. Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories : experiments and theory. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **46**, 895–930 (1998).
102. LION, A. Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity : a physical approach based on nonlinear rheological models. *International Journal of Plasticity*, **16**, 469–494 (2000).
103. LUBLINER, J. A model of rubber viscoelasticity. *Mechanics Research Communications*, **12** (1985).
104. LÉNÉ, FRANÇOISE, REY, CHRISTIAN. Some strategies to compute elastomeric lamified composite structures. *Composite Structures*, **54**, 231–241 (2001).
105. MALKUS, D.S. Finite element with penalties in nonlinear elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **16**, 121–136 (1980).
106. MALKUS, D.S., HUGHES, T.J.R. Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques : a unification of concepts. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **15**, 63–81 (1978).
107. MARTINEZ, J.M. *Modélisation et caractérisation du comportement hyper-visco-plastique d'un élastomère sous sollicitations multi-harmoniques et à différentes températures*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II (2005).
108. MARTINON, P. Elastomères - Mise en oeuvre. In *Traité : Généralités*, pp. Fiche A–2550. Techniques de l'Ingénieur ().
109. MARUSAK, R.E., BECKER, E.B. A finite element procedure for axisymmetric elastomeric solids under general loading. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 2031–2048 (1993).
110. MIEHE, C. Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 1981–2004 (1994).
111. MIEHE, C. Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **14**, 697–720 (1995).
112. MIEHE, C. Entropic thermoelasticity at finite strains. Aspects of the formulation and numerical implementation. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, **120**, 243–269 (1995).
113. MIEHE, C., GÖKTEPE, S., LULEI, F. A micro-macro approach to rubber-like materials Part I: the non affine micro sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **52**, 2617–2660 (2004).
114. MIEHE, C., KECK, J. Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **48**, 323–365 (2000).
115. MIELKE, A. Necessary and sufficient conditions for polyconvexity of isotropic functions. *Journal of Convex Analysis*, **12**, 291–314 (2005).
116. MOONEY, M. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, **11**, 582–592 (1940).
117. MORMAN, K.N. Original contributions. An adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like by use of the generalised strain measure. *Rheologica Acta*, **27**, 3–14 (1988).

118. MULLINS, L. Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research*, **16**, 275–289 (1947).
119. MÉO, S. *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II (2000).
120. MÉO, S., BOUKAMEL, A., DÉBORDES, O. Analysis of a thermoviscoelastic model in large strain. *Computers and Structures*, **80**, 2085 – 2098 (2002).
121. MÉO, S., DÉBORDES, O., BOUKAMEL, A. Assemblage de structures une à une invariantes dans une direction. *Mécanique & Industries*, **3**, 211–225 (2002).
122. NEDJAR, B. Frameworks for finite strain viscoelastic-plasticity based on multiplicative decompositions. Part I: Continuum formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 1541–1562 (2002).
123. ODEN, J.T. *Finite element on nonlinear continua*. Mc Graw-Hill, New York (1972).
124. ODEN, J.T., KIKUCHI, N. Finite element methods for constrained problems in elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **18**, 701–725 (1982).
125. OGDEN, R.W. Large deformation isotropic elasticity, on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids. *Proc. Roy. Soc., Lond.*, **A326**, 565–584 (1972).
126. PAPOULIA, K. D. Mixed and selective reduced integration procedures in large strain hyperelastic analysis of nearly incompressible solids. *Computational Mechanics*, **23**, 63–74 (1999).
127. PONTE CASTAÑEDA, P., TIBERIO, E. Homogenization estimates for hyperelastic composites and particle-reinforced rubbers. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **327**, 1297–1304 (1999).
128. RAO, I.J., RAJAGOPAL, K.R. A thermodynamic framework for the study of crystallization in polymers. *Z. angew. Math. Phys.*, **53**, 365–406 (2002).
129. REESE, S. On the numerical modelling of the thermo-mechanical material behaviour of rubber-like polymers. In *Constitutive models for rubber II* (2001).
130. REESE, S. A micromechanically motivated material model for the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers. *International Journal of Plasticity*, **19**, 909–940 (2003).
131. REESE, S. On a physically stabilized one point finite element formulation for three-dimensional finite elasto-plasticity. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, **194**, 4685–4715 (2005).
132. REESE, S., GOVINDJEE, S. Theoretical and numerical aspects in the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, **1**, 357–396 (1998).
133. REESE, S., GOVINDJEE, S. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspect. *Int. J. Solids Structures*, **35**, 3455–3482 (1998).
134. REESE, S., KÜSSNER, M., REDDY, B. D. A new stabilization technique for finite elements in non-linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **44**, 1617–1652 (1999).
135. REESE, S., WRIGGERS, P. A material model for rubber-like polymers exhibiting plastic deformation: computational aspects and a comparison with experimental results. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, **148**, 279–298 (1997).
136. RIVLIN, R. S., SAUNDERS, D. W. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.*, **243**, 251–288 (1951).
137. RIVLIN, R.S. Large elastic deformations of isotropic materials, I. Fundamental concepts. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A240**, 459–490 (1948).
138. RIVLIN, R.S. Large elastic deformations of isotropic materials, IV. Further developments in the general theory. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A241**, 379–397 (1948).
139. RIVLIN, R.S. Some topics in finite elasticity. *1st Symp. on Naval Struct. Mech., Stanford* (August 11-14, 1958).
140. ROBISSON, A. *Comportement d'un élastomère SBR chargé de silice et d'un PU cellulaire : Prédiction de la durée de vie en fatigue*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris (avril 2000).
141. RUAS, V. *Méthodes d'éléments finis en élasticité incompressible non-linéaire*. Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (1982).
142. SAAD, P. *Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon (2003).

143. SAINTIER, N. *Fatigue multiaxiale dans un élastomère de type NR chargé : Mécanismes d'endommagement et critère local d'amorçage de fissure*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris (janvier 2001).
144. SIDOROFF, F. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic finite strain. *Arch. Mech.*, **25**(2), 299–309 (1973).
145. SIDOROFF, F. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, **13**(4), 679–713 (1974).
146. SIDOROFF, F. Variables internes en viscoélasticité, 1. Variable internes scalaires et tensorielles. *J. Méc.*, **14**(3), 545–566 (1975).
147. SIDOROFF, F. Variables internes en viscoélasticité, 2. Milieux avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, **14**(4), 571–595 (1975).
148. SIDOROFF, F. Variables internes en viscoélasticité, 3. Milieux avec plusieurs configurations intermédiaires. *J. Méc.*, **15**(1), 85–118 (1976).
149. SIDOROFF, F. Rhéologie non-linéaire et variables internes tensorielles. In *Symposium franco-polonais* (1977).
150. SIDOROFF, F. *Cours sur les grandes déformations*. Ecole d'été Sophia-Antipolis (1982).
151. SIMO, J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : fomulation and computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **60**, 153–163 (1987).
152. SIMO, J.C., TAYLOR, R.L., PISTER, K.S. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elastoplasticity. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, **51**, 177–208 (1985).
153. SJÖBERG, M. *On dynamic properties of rubber isolators*. Thèse de Doctorat, Royal Institute of Technology. Department of Vehicle Engineering. The Marcus Wallenberg Laboratory for Sound and Vibration Research, Stockholm (2002).
154. SNOWDON, J.C. *Vibration and shock in damped mechanical systems*. John Wiley and Sons, Inc. (1968).
155. SUQUET, P. *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (1982).
156. TANAKA, F., EDWARDS, S.F. Viscoelastic properties of physically cross-linked networks. Transient network theory. *Macromolecules*, **25**, 1516–1523 (1992).
157. TRELOAR, L.R.G. The elasticity of a network of long chain molecules I. *Trans. Faraday Soc.*, **39**, 36–64 (1943).
158. TRELOAR, L.R.G. *The Physics of Rubber elasticity*. Oxford University Press (1975).
159. TRUMEL, H., DRAGON, A., FANGET, A., LAMBERT, P. A constitutive model for dynamic and high-pressure behaviour of a propellant-like material - Part I : Experimental background and general structure of the model. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **25**, 551–579 (2001).
160. TRUMEL, H., DRAGON, A., FANGET, A., LAMBERT, P. A constitutive model for dynamic and high-pressure behaviour of a propellant-like material - Part II : Model development and applications. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **25**, 581–603 (2001).
161. WARD, I.M., SWEENEY, J. *An introduction of he mechanical properties of solid polymers*. 2nd Edition, John Wiley and sons, ltd (2004).
162. WRIGGERS, P., REESE, S. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **135**, 201–209 (1996).
163. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. The finite element patch test revisited. A computer test for convergence, validation and error estimates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **149**, 223–254 (1997).
164. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. *The finite elements method, fifth edition*, vol. 1&2. Butterworth-Heinemann (2000).