



**HAL**  
open science

# Equations intégrales volumiques pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique

El Hadji Koné

► **To cite this version:**

El Hadji Koné. Equations intégrales volumiques pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2010. Français. NNT: . tel-00504939

**HAL Id: tel-00504939**

**<https://theses.hal.science/tel-00504939>**

Submitted on 22 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et Applications*

**Ecole doctorale MATISSE**

présentée par

**El Hadji KONÉ**

préparée à l'UMR 6625 CNRS - IRMAR  
Institut de Recherche Mathématique de Rennes  
U.F.R. de Mathématique

---

**Intitulé de la thèse :**

**Equations intégrales  
volumiques pour la  
diffraction d'ondes  
électromagnétiques par  
un corps diélectrique**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 23 juin 2010**

devant le jury composé de :

**Christine BERNARDI**

DR1 CNRS UPMC Paris 6 / Examineur

**Martin COSTABEL**

Pr UR1 Rennes / Directeur de thèse

**Éric DARRIGRAND**

MCF UR1 Rennes / co-directeur de thèse

**Vivette GIRAULT**

Pr émérite UPMC-Invited Pr Texas AM  
/ Examineur

**Olivier GOUBET**

Pr UPJV Amiens / Examineur

**Daniel MARTIN**

MCF UR1 Rennes / Examineur

**Roland POTTHAST**

Pr University of Reading (UK) / Rapporteur

**Ronan SAULEAU**

Pr UR1 Rennes / Examineur



# Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au sein de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR), en collaboration avec l'Institut d'Electronique et de Télécommunication de Rennes (IETR). Pour m'avoir proposé ce sujet, je veux exprimer, ma reconnaissance à mon directeur de thèse, monsieur Martin Costabel, au co-directeur monsieur Eric Darrigrand, ainsi qu'à madame Monique Dauge et monsieur Ronan Sauleau. Je tiens particulièrement à adresser mes remerciements à messieurs Martin Costabel et Eric Darrigrand pour leur constante disponibilité et leur assistance dans tous les aspects de cette thèse. Merci encore à madame Monique Dauge et à monsieur Ronan Sauleau pour leurs contributions aux discussions ayant animé le déroulement de la thèse. Je voudrais également adresser mes remerciements à messieurs Daniel Martin et Yvon Lafranche pour leur participation aux travaux, notamment leur aide à l'implémentation de la méthode numérique.

Je témoigne de ma profonde gratitude à messieurs Marc Lenoir et Roland Potthast pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse. Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me font également monsieur Olivier Goubet et mesdames Christine Bernardi et Vivette Girault pour leur participation à mon jury de thèse.

Je remercie tous les membres de l'équipe d'analyse numérique de l'IRMAR, et particulièrement le responsable monsieur Florian Méhats, qui m'ont accueilli et créé un environnement de travail très convivial durant cette thèse. Je remercie spécialement Frédérique Le Louër qui nous a fourni le code de calcul des séries de Mie nous permettant de tester certains de nos résultats numériques. Je veux aussi saluer monsieur Manuel Buisson qui m'a accueilli dans son bureau et qui, tout en créant une atmosphère très amicale, a montré un véritable intérêt pour mes travaux au travers de nombreuses discussions et propositions. J'exprime mes vives remerciements à madame Chantal Halet. Elle a été d'une grande disponibilité pour me guider et m'assister dans mes nombreuses démarches administratives et aussi pour m'écouter quelque soit le sujet. Un grand merci également à madame Claude Boschet qui m'a toujours reçu dans son bureau avec une grande gentillesse et chaque fois, avec le mot pour rire.

Je veux terminer ces remerciements par ma famille. Tout d'abord, j'ai une pensée profonde pour Florence que je tiens à remercier ici. Elle qui partage ma vie et me supporte au quotidien. Ensuite, je remercie très affectueusement ma mère, mes frères et soeurs restés en Côte d'Ivoire, mais qui me soutiennent continuellement. Enfin, je voudrais rendre un vibrant hommage à mon père qui nous a quittés. Je lui serai toujours reconnaissant pour tout ce qu'il m'a apporté.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Etude théorique du problème de diffraction</b>	<b>5</b>
1.1 Le problème de diffraction . . . . .	6
1.1.1 Opérateurs de traces et espaces de fonctions . . . . .	7
1.1.2 Le modèle . . . . .	7
1.2 Les formulations intégrales du problème . . . . .	9
1.2.1 Les représentations intégrales . . . . .	9
1.2.2 Les équations intégrales . . . . .	18
1.3 Relations d'équivalence . . . . .	19
1.3.1 Equivalence entre $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{P})$ . . . . .	19
1.3.2 Equivalence entre $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ . . . . .	29
1.4 Quelques propriétés des opérateurs intégraux . . . . .	31
1.4.1 Existence, unicité et stabilité . . . . .	31
1.4.2 Quelques propriétés de l'opérateur de la VIE . . . . .	34
<b>2 Résolution de l'équation intégrale volumique</b>	<b>37</b>
2.1 Formulation variationnelle et discrétisation . . . . .	39
2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables . . . . .	42
2.2.1 Les tétraèdres ont un sommet commun . . . . .	42
2.2.2 Les tétraèdres ont une arête commune . . . . .	50
2.2.3 Les tétraèdres ont une face commune . . . . .	54
2.2.4 Les tétraèdres sont confondus . . . . .	65
2.2.5 Cas particulier pour le tétraèdre et l'une de ses faces . . . . .	70
2.3 Application : régularisation de l'opérateur intégral volumique . . . . .	75
2.3.1 Configurations de quasi-singularités . . . . .	75
2.3.2 Configurations de singularités . . . . .	76
<b>3 Tests numériques</b>	<b>83</b>
3.1 Convergence des matrices élémentaires . . . . .	83
3.2 Spectre de l'opérateur intégral volumique . . . . .	91
3.3 Profil de rayonnement électrique . . . . .	94
3.3.1 Formalisme . . . . .	94
3.3.2 Champ électrique lointain pour des obstacles homogènes . . . . .	94
Diffraction d'un dipôle magnétique . . . . .	95
Diffraction d'une onde plane . . . . .	97
3.3.3 Erreur relative sur le champ lointain . . . . .	97
Erreur pour la diffraction d'une onde plane . . . . .	98
Erreur pour la diffraction d'un dipôle magnétique . . . . .	99
3.3.4 Champs électriques pour des obstacles non homogènes . . . . .	100
Diélectriques à permittivités continûment radiales . . . . .	100
Superpositions de domaines . . . . .	102

Recherche de résonances . . . . .	109
<b>Conclusion Générale</b>	<b>113</b>
<b>Annexe A</b>	<b>i</b>
<b>Annexe B</b>	<b>iii</b>
<b>Annexe C</b>	<b>xv</b>

# Introduction Générale

## Origine et motivation du problème - objectifs

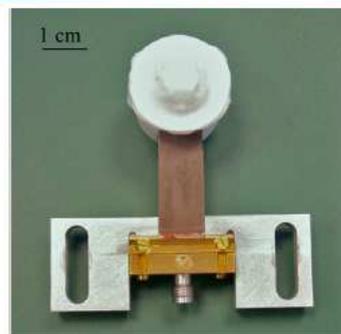
Les systèmes de communications de proximité (60 GHz), les communications multimédia par satellites à 50 GHz, les systèmes de transport intelligents (radar d'assistance à la conduite automobile, détecteurs d'obstacles à 77GHz, systèmes de sécurité aéroportuaires, ...) nécessitent l'utilisation de dispositifs émetteurs et récepteurs rayonnants plus ou moins directifs qui sont appelés des antennes. Plusieurs technologies de développement de ces antennes sont envisagées. La technologie à laquelle nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse consiste, à associer des sources primaires micro-ondes à des lentilles diélectriques dont le rôle est de focaliser le rayonnement primaire. On parle alors d'*antennes lentilles*. Ces sources primaires sont en général situées en zone de champ lointain, contrairement aux antennes dites *Lentilles substrats* (ou *antennes lentilles intégrées*) où elles sont en contact direct avec les lentilles. Nous présentons ci-dessous, quelques images de ces *antennes lentilles*.



ILA pour communication indoor à 62GHz.  
Source : IST



. 4 : ILA compacte pour communication par satellite à 49GHz [7]. Source : IETR



Un intérêt des *antennes lentilles* par rapport aux antennes à réflecteurs métalliques est le coût financier faible des lentilles comparé à celui des réflecteurs métalliques. Ces *antennes lentilles* offrent de multiples variations possibles dans leur réalisation, tant par leur forme que par leur caractéristique physique. Ceci rend disponible un ensemble de paramètres qui peuvent être optimisés pour modifier le rayonnement primaire de façon à obtenir le rayonnement désiré en sortie du dispositif émetteur. Des travaux de recherche sont menés au sein du groupe Antennes et Hyperfréquences de l'Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes (IETR) pour concevoir des *antennes lentilles* et *Lentilles substrats* efficaces, en optimisant la forme des lentilles. Les principes de conception sont basés sur l'Optique Géométrique (lois de Snell - Descartes, conservation de la puissance

au sein d'un tube de rayon, longueur des trajets optiques). Ces principes ont été énoncés dès les années 1950 - 1960 (cf. [5]). Principalement, deux méthodes basées sur l'Optique Géométrique sont actuellement utilisées à l'IETR pour optimiser la forme des lentilles (voir [48]). La première dite d'optimisation locale, est une procédure par étapes dans laquelle un profil de lentille est d'abord généré à l'aide des principes de l'Optique Géométrique. Le profil ainsi synthétisé est ensuite optimisé localement avec un algorithme de type gradient. La seconde procédure dite d'optimisation globale, consiste à coupler un algorithme d'optimisation (du type algorithme génétique par exemple) directement au noyau générique de l'Optique Géométrique. On peut visualiser ci-dessous un exemple de synthèse d'une forme de lentille et le diagramme de rayonnement correspondant (cf. [48]).

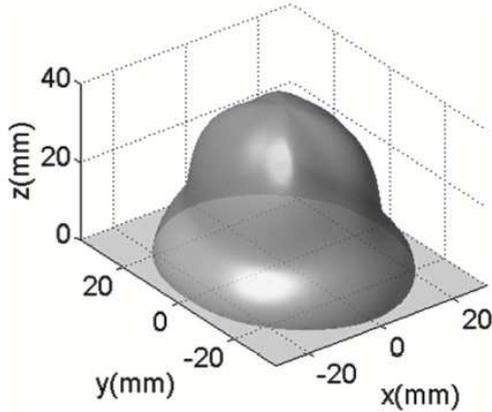


FIGURE 6. Optimized shape of the lens for a flat-top illumination.

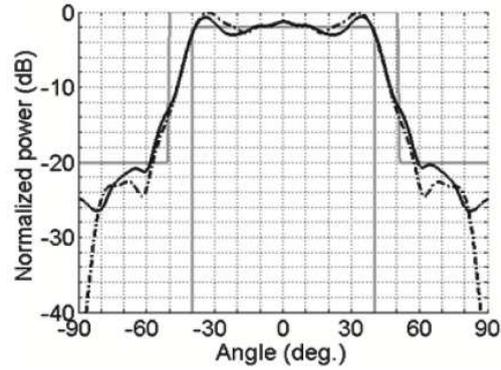


FIGURE 7. Computed radiation patterns in both principal planes at 28GHz. Solid grey line: power template. Solid and dotted black lines: copolarization components in E- and H-planes.

La méthode de l'Optique Géométrique qui est une méthode de développement asymptotique présente quelques insuffisances. Notamment, elle ne tient pas compte dans l'approximation de la solution, des effets de la diffraction de l'onde par l'obstacle. En outre, l'algorithme n'est valable que pour des lentilles ayant une permittivité électrique relativement élevée. En plus, pour la procédure d'optimisation locale, le système non linéaire à résoudre pour synthétiser le profil de la lentille est parfois mal posé (cf. [48]). Dans le but de dépasser les limitations de la méthode de l'Optique Géométrique et d'améliorer la conception des *antennes lentilles*, le groupe Antennes et Hyperfréquences de l'IETR et l'équipe d'Analyse Numérique de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR) ont initié un projet de recherche sur l'optimisation de certains types d'*antennes lentilles* déjà étudiées à l'IETR. Ce projet vise à développer une méthode d'optimisation de forme, alternative à l'Optique Géométrique et basée sur des formulations intégrales. Il s'agira donc dans un premier temps, de modéliser le rayonnement électromagnétique autour de la lentille au moyen d'équations intégrales et à les résoudre par des méthodes rapides (problème direct). Ensuite, une méthode d'optimisation de forme (problème inverse) sera développée en minimisant, pour un gabarit de rayonnement donné, une fonction objectif impliquant le profil de rayonnement qui est solution du problème direct.

Cette thèse est l'une de celles issues de ce projet, et elle concerne le traitement du problème direct de diffraction d'ondes électromagnétiques par des formulations intégrales de volume. La littérature existante offre, pour l'analyse du problème direct de diffraction, le choix entre une formulation par équation intégrales volumiques et une formulation par équations intégrales surfaciques. Les résolutions par formulations intégrales sont économiques en haute fréquence. La résolution par équations intégrales volumiques est certes moins économique que celle par équations intégrales surfaciques, à cause du nombre d'inconnues croissant avec la dimension du domaine. Cependant, la formulation volumique permet de traiter les problèmes de diffraction par des corps non homogènes (matériaux multi-couches, stratifiés). Les équations intégrales peuvent de plus être accélérées par

la mise en œuvre de méthodes puissantes telles que les *Méthodes Multipôles Rapides* (FMM, pour Fast Multipole Methods), actuellement en plein développement. Les formulations intégrales résultent des équations de Maxwell et sont basées sur des noyaux plus ou moins singuliers dépendant du type de lentille (homogène ou stratifié).

L'application des FMM à la résolution du problème de diffraction constitue une perspective de ce travail de thèse. Ceci impliquera (en amont) des aspects de modélisation et des aspects théoriques nouveaux pour combiner les FMM avec les spécifications du problème de lentille, et (en aval) une implémentation numérique avec possibilités de comparaison avec des calculs benchmark ou des expériences physiques. Cette étude aura pour but de fournir une résolution rapide qui pourra être intégrée, à terme, à un algorithme d'optimisation de la forme de la lentille en fonction d'un rayonnement désiré.

Ce mémoire de thèse est constitué de trois chapitres.

### Etude théorique du système de Maxwell

Le premier chapitre est consacré à l'analyse théorique du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique, à l'aide de formulations intégrales de volume. Si l'analyse théorique de la formulation intégrale surfacique a suscité beaucoup d'intérêt, vu l'abondance des productions scientifiques, pour la formulation intégrale volumique en revanche, il en a été moins le cas. L'analyse du problème est alors menée en commençant par dériver deux formulations intégrales : une formulation couplée (surface-volume) ayant un noyau faiblement singulier, et une formulation (purement) volumique qui a un noyau fortement singulier. Après justification de l'équivalence de ces formulations au problème de diffraction, la formulation couplée est utilisée pour analyser le problème. Cette analyse est basée sur des résultats standard de Fredholm pour les équations intégrales, et permet de dériver quelques propriétés de l'équation intégrale de volume. Notamment, sur le spectre essentiel de l'opérateur intégral volumique, dans l'espace des champs de vecteurs dont le carré de la norme est intégrable ( $L^2$ ). On note en particulier, la satisfaction de l'inégalité de Gårding par la solution de l'équation intégrale volumique, assurant ainsi la stabilité de tout schéma de discrétisation de l'équation par une méthode de Galerkin. L'analyse du problème de diffraction est faite sous l'hypothèse plus réaliste de la discontinuité de la permittivité électrique à travers le bord du diélectrique. Cette hypothèse rend l'étude aussi valable pour des matériaux composés de plusieurs diélectriques, où il y a plusieurs surfaces de discontinuité pour la permittivité. Ce chapitre a fait l'objet d'un article paru au journal *Journal of Computational and Applied Mathematics* ([8]).

### Résolution numérique de l'équation intégrale volumique

Le deuxième chapitre est dévolu à la résolution numérique de l'équation intégrale volumique dérivée du problème de diffraction au premier chapitre. La résolution numérique par des méthodes intégrales requiert l'évaluation d'intégrales singulières et quasi-singulières qui déterminent les matrices d'influences des systèmes. L'évaluation de ces intégrales est une question centrale, puisqu'elle gouverne la qualité (précision et complexité) de l'approximation de la solution au problème étudié. Excepté des cas particuliers, où la simplicité du domaine d'intégration et de l'intégrande permet une évaluation analytique et où les intégrales sont suffisamment régulières pour appliquer directement les formules de quadratures standard, les intégrales sont évaluées en combinant des techniques de traitement des singularités à des formules d'intégration numérique. Une méthode de traitement des singularités basée sur des changements de variables dans le domaine d'intégration est développée dans ce chapitre, pour des intégrales de la forme :

$$I_{\alpha,KL} = \int_K \int_L \frac{F(x,y)}{|x-y|^\alpha} dy dx,$$

où  $F$  est une fonction régulière, l'ordre de singularité  $\alpha$  est un réel positif et  $K$  et  $L$  sont des tétraèdres, en prévision de la discrétisation de l'équation intégrale volumique par des éléments fi-

nis tétraédriques. Par divers changements de variables généralisant les transformations de Duffy (voir [15]), l'intégration est ramenée sur des domaines tels que le carré, le cube, ... et la singularité est décrite par une variable uni-dimensionnelle appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Les Jacobiens de ces transformations singulières sont ensuite utilisés pour lever la singularité. Cet élimination de la singularité dépend de la position relative des tétraèdres. En effet, lorsque  $K$  et  $L$  partagent exactement un sommet, une arête, une face, ou coïncident, la singularité est levée respectivement pour  $\alpha \leq 5$ ,  $\alpha \leq 4$ ,  $\alpha \leq 3$  et  $\alpha \leq 2$ . La méthode n'étant basée que sur des changements dans le domaine d'intégration, elle est applicable à une large classe de noyaux d'opérateurs intégraux volumiques. C'est une extension au cas volumique de la méthode introduite par Jean GAY pour le cas surfacique (voir [12, 33, 35, 39]). La méthode développée est ensuite appliquée à l'implémentation de l'équation intégrale volumique. Pour les coefficients diagonaux (cas où  $K = L$ ), la méthode est combinée à une méthode de soustraction de la singularité pour traiter la forte singularité ( $\alpha = 3$ ) de l'intégrale, puisque dans ce cas, la singularité n'est levée que pour  $\alpha \leq 2$  avec la méthode développée.

## Tests numériques

Le troisième chapitre est consacré aux tests pour la résolution numérique de l'équation intégrale volumique. Pour la diffraction de dipôles magnétiques et d'ondes planes par des corps diélectriques sphériques homogènes et non homogènes, les profils de rayonnement électrique pour les champs lointain et intérieur sont présentés pour certaines valeurs des paramètres. Quelques courbes d'erreurs (relatives), sur le calcul du profil de rayonnement et sur le calcul des matrices élémentaires, sont également présentées. Les résultats de nos calculs du profil de rayonnement sont confrontés aux résultats du calcul avec la série de Mie. Nous avons également présenté le spectre de l'opérateur intégral volumique pour quelques valeurs du nombre d'onde extérieur  $\kappa$ .

L'équation intégrale volumique est implémentée dans le code Mélima++, qui est la version en C++ de la version en Fortran 77 baptisée Mélima et consultable sur le site internet d'adresse <http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/index.html>. Nous y avons intégré les outils nécessaires à la résolution de l'équation. Notamment, la mise en œuvre de la méthode développée au chapitre 2 pour le traitement des intégrales singulières qui constituent les coefficients de la matrice d'influence du système. Le code Mélima++ est une librairie d'éléments finis basée sur le langage C++ et développée au sein de l'IRMAR par Daniel MARTIN. C'est un code dévolu à la résolution d'une large famille de problèmes variationnels. L'une des forces de ce code est sa structure particulière, développée de sorte que le programme principal écrit par l'utilisateur n'est qu'une simple transcription de la formulation variationnelle du problème à résoudre. Dans sa version initiale, la librairie consistait essentiellement en des structures d'éléments finis d'ordres arbitraires. Récemment, des opérateurs intégraux y ont été introduits de sorte que le code résout aujourd'hui, des équations intégrales de surface pour des problèmes en acoustique et en électromagnétisme. Les travaux de cette thèse constituent une première partie des opérateurs intégraux introduits dans la librairie, pour la résolution des équations intégrales de volume.

# Chapitre 1

## Etude théorique du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique

L'analyse théorique et numérique du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques, par les équations intégrales de surface est un sujet largement traité dans la littérature scientifique (par exemple, [7] et [42] sont de très bons livres sur le sujet). En revanche, l'équation intégrale volumique utilisant la solution fondamentale fortement singulière des équations de Maxwell, que nous étudions dans ce chapitre et que nous désignerons dorénavant par la VIE (pour l'expression en anglais "Volume Integral Equation"), n'a fait l'objet relativement que de très peu d'études. Ces études sont d'ailleurs largement consacrées à l'aspect numérique de la VIE, notamment dans [46], [2] et [30], où elle est résolue par la méthode des moments. Elle est combinée à un algorithme multipôle rapide multiniveaux, pour analyser le rayonnement d'une antenne en présence d'un radôme diélectrique dans [6]. Le spectre de l'opérateur est également étudié numériquement dans [3] et [44]. Toutefois, sous les hypothèses de continuité au sens de Hölder dans l'espace tout entier, des paramètres caractéristiques du milieu, une analyse spectrale de l'opérateur intégral volumique est introduite dans [3]. Il y est établi que le spectre de l'opérateur est composé à la fois d'un spectre essentiel continu dominant aux basses fréquences et de valeurs propres discrètes qui deviennent plus significatives aux hautes fréquences. Parallèlement à la VIE, l'équation de Lippmann-Schwinger pour Maxwell, correspondant à une équation intégrale volumique faiblement singulière est analysée dans [7], pour le problème de diffraction dans un milieu à indice de réfraction uniformément Hölder continûment différentiable dans l'espace tout entier.

L'hypothèse de continuité globale notamment de la permittivité électrique, n'est pas réaliste du point de vue de la physique pour la diffraction par un corps diélectrique, où la permittivité est typiquement discontinue à travers le bord, tandis que la perméabilité magnétique est bien souvent constante. La formulation de la VIE et son analyse sont faites dans ce chapitre, en considérant une permittivité discontinue à travers le bord du diélectrique. Cette hypothèse rend en plus, l'étude valable pour des matériaux composés de plusieurs diélectriques, où nous avons plusieurs surfaces de discontinuité pour la permittivité. L'hypothèse de discontinuité de la permittivité et de la perméabilité est faite dans [46] pour dériver la VIE dans une approche bien éloignée de celle qui sera présentée dans ce chapitre. De même dans un article récent ([29]), Andreas KIRSCH considère des paramètres électromagnétiques (perméabilité magnétique, permittivité et conductivité électriques) discontinus à travers la surface de l'obstacle et dérive une formulation intégrale volumique fortement singulière, au problème de diffraction d'ondes électromagnétiques. L'équation intégrale est ensuite analysée dans l'espace  $H(\text{rot}, \cdot)$  des fonctions qui sont avec leur rotationnel, de carrés intégrables (c'est l'espace naturel pour le problème de Maxwell), où il établit l'existence et l'unicité

de la solution.

Nous débutons le chapitre par une présentation, dans la section 1, du problème de diffraction que nous allons étudier. Ensuite dans la section 2, nous dérivons deux formulations intégrales du problème de diffraction. L'une étant la VIE et l'autre, une formulation couplée surface-volume qui est en fait un système d'équations impliquant des intégrales dans le domaine et sur sa surface. Cette dernière est faiblement singulière et se réduit à l'équation de Lippmann-Schwinger déjà étudiée dans [7], si la permittivité est supposée continue à travers le bord du domaine. La section 3 assure l'équivalence entre les trois problèmes (les deux formulations intégrales et le problème de diffraction). Enfin dans la section 4, nous utilisons l'équivalence entre les trois problèmes et la faible singularité de la formulation couplée (qui la rend plus simple à analyser), pour montrer qu'ils sont bien posés au sens de Hadamard. Nous établirons ensuite quelques propriétés de l'opérateur intégral volumique, notamment de son spectre essentiel dans l'espace  $L^2$  des fonctions de carré intégrable et en particulier, la satisfaction de l'inégalité de Gårding dans cet espace, ce qui est intéressant pour la stabilité des schémas numériques basés sur la méthode de Galerkin et appliqués à l'opérateur pour la résolution numérique de l'équation.

## 1.1 Le problème de diffraction

Nous considérons la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isotrope non homogène (l'espace  $\mathbb{R}^3$  dans lequel est placé un objet diélectrique). La permittivité électrique du milieu est une fonction strictement positive de l'espace et sa perméabilité magnétique est supposée constante pour simplifier le problème et égale à celle du vide notée  $\mu_0$ . La conductivité électrique  $\sigma$  est nulle.

L'onde électromagnétique est propagée dans l'espace, suite au rayonnement d'une source située à une certaine distance du diélectrique. La propagation de cette onde est décrite par les équations de Maxwell suivantes :

Si  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{F}$  sont respectivement le champ électrique, le champ magnétique, la densité du courant et la source de rayonnement, en espace et en temps, alors les équations de Maxwell sont données par

$$\begin{cases} \nabla \times \mathcal{E} + \mu_0 \partial_t \mathcal{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathcal{H} - \varepsilon \partial_t \mathcal{E} &= \mathcal{J} + \mathcal{F}. \end{cases} \quad (1.1)$$

★ En régime harmonique, on a

$$\begin{cases} \mathcal{E}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \mathbf{E}(x) e^{-i\omega t} \\ \mathcal{H}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \mathbf{H}(x) e^{-i\omega t} \\ \mathcal{F}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \mathbf{F}(x) e^{-i\omega t}, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité électrique du vide et  $\omega$  est la fréquence de l'onde. Les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{F}$  sont des champs de vecteurs complexes, ne dépendant que de la variable d'espace.

★ En milieu isotrope, la loi d'Ohm est  $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$  et dans le cas du diélectrique ( $\sigma = 0$ ), on a  $\mathcal{J} = 0$ .

On déduit de (1.1) et (1.2), les équations de Maxwell harmoniques suivantes, pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\kappa \varepsilon_r \mathbf{E} &= \mathbf{F}, \end{cases} \quad (1.3)$$

## 1.1 Le problème de diffraction

---

où  $\kappa = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$  est le nombre d'onde et  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  est la permittivité relative.

### 1.1.1 Opérateurs de traces et espaces de fonctions

Soit  $D$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\overline{D^c} = \mathbb{R} \setminus D$  et  $\partial D$  la frontière de  $D$ . Considérons aussi  $\mathbf{u} \in (C^\infty(\overline{D}))^3$ ,  $u \in C^\infty(\overline{D})$  et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à  $D$ . Nous utiliserons les notations suivantes pour les opérateurs de traces :

$$\begin{aligned}\gamma_0 \mathbf{u} &= \mathbf{u}|_{\partial D} && \text{(trace sur le bord)} \\ \gamma_1 \mathbf{u} &= \partial_n \mathbf{u}|_{\partial D} && \text{(dérivée normale sur le bord)} \\ \gamma_n \mathbf{u} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\partial D} && \text{(trace normale sur le bord)} \\ \gamma_\times \mathbf{u} &= \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\partial D} && \text{(trace tangentielle sur le bord).}\end{aligned}$$

Nous rappelons les définitions et notations suivantes pour les espaces de fonctions qui seront utilisés dans la suite :

$$\begin{aligned}H(\text{rot}, D) &= \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(D))^3; \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(D))^3 \right\} \\ H(\text{div}, D) &= \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(D))^3; \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(D) \right\} \\ H(\text{rot}, \text{div}, D) &= H(\text{rot}, D) \cap H(\text{div}, D) \\ H_{loc}(\text{rot}, \overline{D^c}) &= \left\{ \mathbf{u} \in (L^2_{loc}(\overline{D^c}))^3; \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2_{loc}(\overline{D^c}))^3 \right\} \\ H_{loc}(\text{div}, \overline{D^c}) &= \left\{ \mathbf{u} \in (L^2_{loc}(\overline{D^c}))^3; \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2_{loc}(\overline{D^c}) \right\} \\ H_{loc}(\text{rot}, \text{div}, \overline{D^c}) &= H_{loc}(\text{rot}, \overline{D^c}) \cap H_{loc}(\text{div}, \overline{D^c}) \\ H_t^{-\frac{1}{2}}(\partial D) &= \left\{ \mathbf{u} \in (H^{-\frac{1}{2}}(\partial D))^3; \gamma_n \mathbf{u} = 0 \right\} \\ H^1(D) &= \left\{ f \in L^2(D); \nabla f \in L^2(D) \right\} \\ H^1(\Delta, D) &= \left\{ f \in H^1(D); \Delta f \in L^2(D) \right\}.\end{aligned}$$

On rappelle les résultats suivants qui sont détaillés dans [42], sur les opérateurs de traces :

#### **Théorème 1.**

*i)- Les opérateurs  $\gamma_n$  et  $\gamma_\times$  sont continus sur  $(C^\infty(\overline{D}))^3$  et se prolongent en opérateurs continus de  $H(\text{div}, D)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  et de  $H(\text{rot}, D)$  dans  $(H^{-\frac{1}{2}}(\partial D))^3$  respectivement.*

*ii)- Les opérateurs  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont continus sur  $C^\infty(\overline{D})$  et se prolongent en opérateurs continus de  $H^m(D)$  dans  $H^{m-\frac{1}{2}}(\partial D)$  et dans  $H^{m-\frac{3}{2}}(\partial D)$  respectivement, pour  $m \in \mathbb{N}^*$ . ■*

### 1.1.2 Le modèle

Le diélectrique est représenté par un domaine  $\Omega^-$ , ouvert connexe et borné de  $\mathbb{R}^3$ . La frontière  $\Gamma$  de  $\Omega^-$  est régulière et on note  $\Omega^+$ , l'extérieur de  $\Omega^-$  ( $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$ ). Nous rappelons que  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire orientée vers l'extérieur de  $\Omega^-$  et  $\varepsilon(x) > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . On suppose

que  $\varepsilon|_{\Omega^-} \in C^1(\overline{\Omega^-})$ ,  $\varepsilon|_{\Omega^+} = \varepsilon_0$  et  $\varepsilon$  est discontinue à travers  $\Gamma$ . Nous noterons  $\eta = 1 - \varepsilon_r$ , où  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  est la permittivité relative. Nous rappellons également que dans l'espace tout entier, la conductivité  $\sigma$  est supposée nulle et la perméabilité magnétique  $\mu$  est égale à  $\mu_0$ . Rappelons enfin que le nombre d'onde est strictement positif et vaut  $\kappa = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ , où  $\omega$  est la fréquence.

Soit  $\mathbf{F} \in H(\text{div}, \Omega^+)$ , un champ de vecteur à support compact contenu dans  $\Omega^+$ .  $\mathbf{F}$  représente la densité de courant issue de la source de rayonnement primaire, c'est à dire le champ incident qui sera diffracté par le diélectrique  $\Omega^-$ . Le problème de diffraction que nous noterons  $(\mathcal{P})$  est défini par les expressions (1.4) – (1.7) suivantes :

Trouver les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbb{R}^3$  vérifiant :

- les conditions d'espaces :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &\in H(\text{rot}, \text{div}, \Omega^-), \quad \mathbf{E}_e \in H_{loc}(\text{rot}, \text{div}, \overline{\Omega^+}), \\ \mathbf{H}_i &\in H(\text{rot}, \Omega^-), \quad \mathbf{H}_e \in H_{loc}(\text{rot}, \overline{\Omega^+}), \\ \text{avec } \mathbf{E}_i &= \mathbf{E}|_{\Omega^-}, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}|_{\Omega^-}, \quad \mathbf{E}_e = \mathbf{E}|_{\Omega^+} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_e = \mathbf{H}|_{\Omega^+} \end{aligned} \quad (1.4)$$

- les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_i - i\kappa \mathbf{H}_i &= 0 & \text{et} & \quad \nabla \times \mathbf{H}_i + i\kappa \varepsilon_r \mathbf{E}_i = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \nabla \times \mathbf{E}_e - i\kappa \mathbf{H}_e &= 0 & \text{et} & \quad \nabla \times \mathbf{H}_e + i\kappa \mathbf{E}_e = \mathbf{F} & \text{dans } \Omega^+, \end{aligned} \quad (1.5)$$

où le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e)$ , dans le domaine extérieur  $\Omega^+$ , est la superposition du champ incident  $(\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc})$ , provenant de la source  $\mathbf{F}$ , et du champ  $(\mathbf{E}_{diff}, \mathbf{H}_{diff})$  diffracté par le diélectrique. C'est à dire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \mathbf{E}_{diff} + \mathbf{E}_{inc}, \quad \mathbf{H}_e = \mathbf{H}_{diff} + \mathbf{H}_{inc}, \quad \text{et} \\ \nabla \times \mathbf{E}_{inc} - i\kappa \mathbf{H}_{inc} &= 0 & \text{et} & \quad \nabla \times \mathbf{H}_{inc} + i\kappa \mathbf{E}_{inc} = \mathbf{F} & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

- les conditions de transmission au bord :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_e = \mathbf{n} \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_i \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.6)$$

- la condition de radiation de Silver-Müller (pour le champ diffracté  $(\mathbf{E}_{diff}, \mathbf{H}_{diff})$ ) :

$$\mathbf{H}_{diff} \times \hat{x} - \mathbf{E}_{diff} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right); \quad r \rightarrow +\infty \quad (1.7)$$

uniformément dans toutes les directions  $\hat{x} = \frac{x}{r}$  où  $r = |x|$ .

Le problème de diffraction  $(\mathcal{P})$  est en fait, **un problème de transmission d'ondes électromagnétiques**.

**Remarque 1.** Les conditions (1.6) de transmission au bord du domaine sont équivalentes aux conditions sur les composantes tangentielles  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_i$  et  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_i$ , grâce aux équations de Maxwell (1.5). C'est d'ailleurs ces dernières qui sont le plus souvent considérées pour le problème de diffraction. En outre, les conditions de transmission au bord impliquent que les champs  $\nabla \times \mathbf{E}$ ,  $\nabla \times \mathbf{H}$ ,  $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E})$  et  $\nabla \cdot \mathbf{H}$  sont localement intégrables, c'est à dire que les équations de Maxwell harmoniques sont satisfaites dans tout l'espace, au sens des distributions.

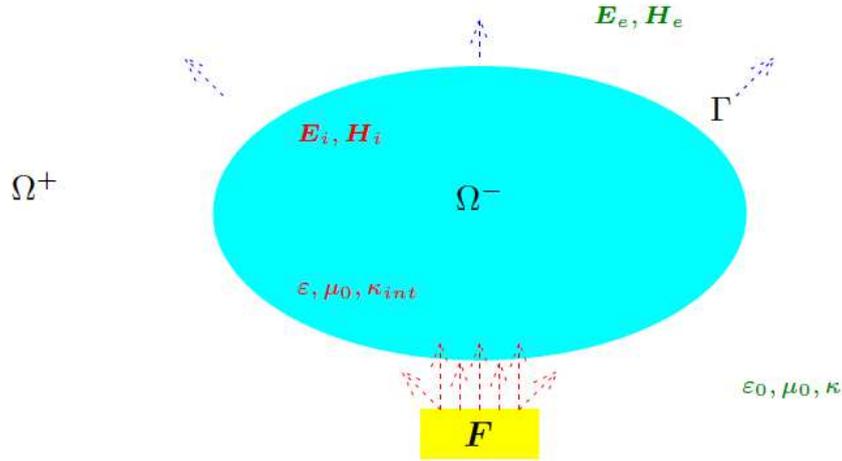


FIG. 1.1 – Visualisation du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique.  $F$  est la source de rayonnement primaire (génératrice du champ incident).

**Remarque 2.** Le problème physique modélisé par le problème  $(\mathcal{P})$  est la diffraction par une lentille diélectrique, d'un champ électromagnétique rayonné par une antenne. Un problème de diffraction légèrement différent est généralement considéré dans la littérature, où le champ incident est donné par exemple comme une onde plane et où l'on s'intéresse seulement à l'onde diffractée  $(\mathbf{E}_{diff}, \mathbf{H}_{diff})$  dans  $\Omega^+$ . Ceci conduit à une formulation mathématique équivalente où les équations différentielles sont homogènes (i.e  $F \equiv 0$ ) et les conditions de transmissions sont non homogènes.

## 1.2 Les formulations intégrales du problème

Nous établissons un résultat de représentations intégrales pour une solution du problème de diffraction  $(\mathcal{P})$ . De ces représentations intégrales, nous définirons ensuite des équations intégrales. Le théorème bien connu de représentation intégrale de Stratton-Chu que nous rappelons ici, est le point de départ de ces équations.

### 1.2.1 Les représentations intégrales

Nous commençons d'abord par rappeler des formules d'intégrations basiques, qui seront largement utilisées dans les démonstrations des résultats de ce chapitre. Ce sont des formules d'intégrations par parties. Nous commençons par le théorème de la divergence de Gauss et énonçons ensuite ses corollaires, notamment les formules d'intégrations de Green. Ces formules sont énoncées ici sans preuve, on pourra toujours retrouver les preuves par exemple dans [41] ou pour une partie dans [7].

#### Lemme 1. (Divergence de Gauss)

Soit  $D$  un domaine borné dans  $\mathbb{R}^3$ , de classe  $C^2$  et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à  $D$  sur  $\partial D$ . Soit un champ de vecteurs  $\mathbf{u} \in C^1(\overline{D})^3$ . Alors nous avons

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = \int_{\partial D} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, ds(x).$$

■

De cette formule, on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.**

Soit  $D$  un domaine borné dans  $\mathbb{R}^3$ , de classe  $C^2$  et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à  $D$  sur  $\partial D$ .

(i) Si  $f \in C^1(\overline{D})$  et  $\mathbf{u} \in C^1(\overline{D})^3$ , alors

$$\int_D f \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = - \int_D \mathbf{u} \cdot \nabla f \, dx + \int_{\partial D} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} f \, ds(x).$$

(ii) Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(\overline{D})^3$ , alors

$$\int_D \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_D \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial D} \mathbf{n} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, ds(x).$$

Viennent ensuite les formules de Green scalaires :

(iii) Si  $f \in C^2(\overline{D})$  et  $g \in C^1(\overline{D})$ , alors

$$\int_D g \Delta f \, dx = - \int_D \nabla f \cdot \nabla g \, dx + \int_{\partial D} g \partial_n f \, ds(x).$$

(iv) Si  $f, g \in C^2(\overline{D})$ , alors

$$\int_D (g \Delta f - f \Delta g) \, dx = \int_{\partial D} (g \partial_n f - f \partial_n g) \, ds(x).$$

Puis les formules de Green vectorielles :

(v) Si  $\mathbf{u} \in C^2(\overline{D})^3$  et  $\mathbf{v} \in C^1(\overline{D})^3$ , alors

$$\int_D (\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}) \, dx = \int_{\partial D} (\mathbf{n} \times \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u}) \, ds(x).$$

(vi) Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^2(\overline{D})^3$ , alors

$$\int_D (\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \, dx = \int_{\partial D} (\mathbf{n} \times \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{n} \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}) \, ds(x).$$

■

**Remarque 3.** Ces formules sont aussi valables pour un domaine Lipschitzien borné et sont extensibles aux espaces de Sobolev adéquats pour les différents opérateurs différentiels (voir [41]). Ce sont d'ailleurs les formules (i) et (ii) dans ces espaces de Sobolev qui définissent les opérateurs de traces normale  $\gamma_n$  et tangentielle  $\gamma_\times$ , respectivement dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  et dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)^3$ , par prolongement de l'espace des fonctions régulières (théorème 1).

Rappelons à présent sous forme de lemme, le théorème de représentation intégrale de Stratton-Chu, qui nous servira à établir les représentations intégrales pour le problème de diffraction :

## 1.2 Les formulations intégrales du problème

### Lemme 2. (Stratton-Chu)

Soit  $D$  un domaine borné dans  $\mathbb{R}^3$ , régulier de classe  $C^2$ . Soit  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à  $D$  sur  $\partial D$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  deux champs de vecteurs dans  $C^1(\overline{D})^3$ . Alors pour tout  $x \in D$  nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= -\nabla \times \int_{\partial D} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}(y) G_\kappa(x-y) ds(y) + \nabla \int_{\partial D} \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ &\quad - i\kappa \int_{\partial D} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}(y) G_\kappa(x-y) ds(y) + i\kappa \int_D \left\{ \nabla \times \mathbf{H}(y) + i\kappa \mathbf{E}(y) \right\} G_\kappa(x-y) dy \\ &\quad - \nabla \int_D \nabla \cdot \mathbf{E}(y) G_\kappa(x-y) dy + \nabla \times \int_D \left\{ \nabla \times \mathbf{E}(y) - i\kappa \mathbf{H}(y) \right\} G_\kappa(x-y) dy, \end{aligned} \quad (1.8)$$

avec  $G_\kappa(x-y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$  la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz.

Pour la preuve du lemme, voir [7] (pages 150 - 151). ■

Nous étendons cette formule de représentation intégrale à des champs de vecteurs  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  dans l'espace  $H(\text{rot}, \text{div}, D) \times H(\text{rot}, D)$ , où les composantes des traces normales et tangentielles au bord doivent être comprises au sens faible dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ .

**Proposition 1.** Avec les mêmes conditions de régularité sur le domaine  $D$ , la formule de représentation intégrale (1.8) est vraie pour les champs  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in H(\text{rot}, \text{div}, D) \times H(\text{rot}, D)$ .

**Preuve :**

Pour montrer que la formule (1.8) est aussi valable pour  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in H(\text{rot}, \text{div}, D) \times H(\text{rot}, D)$ , nous utilisons la densité des fonctions régulières dans ces espaces (voir [18] et aussi [9] et [41]) et la continuité des opérateurs intégraux intervenant dans la formule.

Introduisons le potentiel de volume  $\mathcal{N}$  (appelé aussi potentiel de Newton) et le potentiel de simple couche  $\mathcal{S}$ , agissant tous les deux aussi bien sur des fonctions scalaires que sur des champs de vecteurs :

$$\mathcal{N}u(x) = \int_D u(y) G_\kappa(x-y) dy, \quad \mathcal{S}f(x) = \int_{\partial D} f(y) G_\kappa(x-y) ds(y).$$

On rappelle les notations et définitions des traces normale  $\gamma_n \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\partial D}$  et tangentielle  $\gamma_\times \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\partial D}$  sur  $\partial D$ . Nous pouvons écrire la relation (1.8) sous la forme

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0 \quad \forall \mathbf{E}, \mathbf{H} \in (C^1(\overline{D}))^3, \quad (1.9)$$

où nous posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) &= \mathbf{E} + \nabla \times (\mathcal{S}\gamma_\times \mathbf{E}) - \nabla \mathcal{S}\gamma_n \mathbf{E} + i\kappa \mathcal{S}\gamma_\times \mathbf{H} \\ &\quad - \nabla \times \mathcal{N}(\nabla \times \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H}) + \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - i\kappa \mathcal{N}(\nabla \times \mathbf{H} + i\kappa \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Puisque les opérateurs

$$\mathcal{S} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \longrightarrow H^1(D) \quad \text{et} \quad \mathcal{N} : L^2(D) \longrightarrow H^2(D)$$

sont continus, nous pouvons prolonger (1.9) par densité de  $(C^1(\overline{D}))^6$  dans  $H(\text{rot}, \text{div}, D) \times H(\text{rot}, D)$  et obtenir

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0 \quad \forall (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in H(\text{rot}, \text{div}, D) \times H(\text{rot}, D). \quad \blacksquare$$

Nous appliquons cette proposition aux cas  $D = \Omega^-$  et  $D = \Omega^+ \cap B_R$ , où  $B_R$  est la boule centrée sur l'origine et de rayon  $R$  suffisamment grand (que nous ferons tendre vers l'infini). En considérant les équations de Maxwell et la condition de radiation dans le problème  $(\mathcal{P})$ , nous établissons le lemme suivant :

**Lemme 3.** Soit  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  deux champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$  satisfaisant les hypothèses et les équations du problème (P) excepté les conditions au bord. Notons de plus pour  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i(x) &= -\nabla \times \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{E}_i)(x) + \nabla \mathcal{S}(\gamma_n \mathbf{E}_i)(x) - i\kappa \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{H}_i)(x) \\ &\quad - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_i)(x) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_i)(x), \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{U}_e(x) = \nabla \times \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{E}_e)(x) - \nabla \mathcal{S}(\gamma_n \mathbf{E}_e)(x) + i\kappa \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{H}_e)(x) + \mathbf{D}(x),$$

où

$$\mathbf{D}(x) = -\frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_{\kappa}(x-y) dy + i\kappa \int_{\Omega^+} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{F}(y) dy. \quad (1.10)$$

Alors nous avons

$$\mathbf{U}_i = \begin{cases} \mathbf{E}_i & \text{dans } \Omega^- \\ 0 & \text{dans } \Omega^+ \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_e = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \mathbf{E}_e & \text{dans } \Omega^+. \end{cases}$$

On rappelle que  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}|_{\Omega^-}$ ,  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}|_{\Omega^-}$ ,  $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}|_{\Omega^+}$  et  $\mathbf{H}_e = \mathbf{H}|_{\Omega^+}$ .

**Preuve :**

i) Pour montrer que  $\mathbf{U}_i = \mathbf{E}_i$  dans  $\Omega^-$ , Il suffit d'appliquer dans le domaine  $\Omega^-$ , la proposition 1 précédent (extension de la formule de représentation de Stratton-Chu), à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , puis d'utiliser les équations (1.5)  $\square$

ii) Montrons que  $\mathbf{U}_i = 0$  dans  $\Omega^+$ .

$G_{\kappa}(x-\cdot)$  est suffisamment régulière sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}$ . Notons  $\nabla_y \times$  et  $\nabla_y \cdot$  respectivement le rotationnel et la divergence par rapport à un point  $y \in \mathbb{R}^3$ . Si  $\mathbf{u}$  est un champ de vecteurs de carré intégrable de même que son rotationnel et/ou sa divergence, on rappelle pour tout  $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x\}$  :

$$\begin{cases} \nabla_y \times (G_{\kappa}(x-y) \mathbf{u}(y)) &= G_{\kappa}(x-y) \nabla \times \mathbf{u}(y) - \nabla_x \times (G_{\kappa}(x-y) \mathbf{u}(y)), \\ \nabla_y \cdot (G_{\kappa}(x-y) \mathbf{u}(y)) &= G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot \mathbf{u}(y) - \nabla_x \cdot (G_{\kappa}(x-y) \mathbf{u}(y)). \end{cases} \quad (1.11)$$

Nous avons alors p.p.t  $x \in \Omega^+$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{E}_i)(x) &= \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}_i(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \\ &= \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \times \mathbf{E}_i(y) dy - \nabla \times \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_i(y) dy, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\gamma_n \mathbf{E}_i)(x) &= \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_i(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \\ &= \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_i(y) dy - \nabla \cdot \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_i(y) dy. \end{aligned}$$

Puis avec les équations (1.5) et les identités

$$\nabla \times (\nabla \times) - \nabla(\nabla \cdot) = -\Delta \quad \text{et} \quad (\Delta + \kappa^2) G_{\kappa}(x-\cdot) = -\delta_x,$$

où  $\delta_x$  est la distribution de Dirac au point  $x$ , on obtient :

$$\begin{aligned} &-\nabla \times \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}_i(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) + \nabla \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_i(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \\ &- i\kappa \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}_i(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \\ &= \nabla \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_i(y) dy + \kappa^2 \int_{\Omega^-} (1 - \varepsilon_r(y)) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_i(y) dy. \end{aligned}$$

## 1.2 Les formulations intégrales du problème

C'est à dire

$$-\nabla \times \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{E}_i)(x) + \nabla \mathcal{S}(\gamma_n \mathbf{E}_i)(x) - i\kappa \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{H}_i)(x) - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_i)(x) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_i)(x) = 0.$$

□

iii) Montrons que  $\mathbf{U}_e = \mathbf{E}_e$  dans  $\Omega^+$ .

Considérons dans  $\mathbb{R}^3$ , la sphère origine  $\Gamma_R = \{y \in \mathbb{R}^3; |y| = R\}$ . On prend le rayon  $R$  suffisamment grand pour que  $\Omega^- \subset\subset B_R$ , où  $B_R$  est la boule de frontière  $\Gamma_R$ . On définit ainsi le domaine  $\Omega_R^+ = B_R \setminus \overline{\Omega^-}$ , dont la frontière est  $\partial\Omega_R^+ = \Gamma \cup \Gamma_R$ . La normale extérieure à  $\Omega_R^+$  est  $\mathbf{n}_R$  sur  $\Gamma_R$  et est égale à  $-\mathbf{n}$  sur  $\Gamma$ .

En posant ensuite pour tout  $x \in \Omega^+$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R(x) = & -\nabla \times \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) + \nabla \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ & -i\kappa \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) + \nabla \times \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ & -\nabla \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) + i\kappa \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ & + \nabla \times \int_{\Omega_R^+} [\nabla \times \mathbf{E}_e(y) - i\kappa \mathbf{H}_e(y)] G_\kappa(x-y) dy - \nabla \int_{\Omega_R^+} \nabla \cdot \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) dy \\ & + i\kappa \int_{\Omega_R^+} [\nabla \times \mathbf{H}_e(y) + i\kappa \mathbf{E}_e(y)] G_\kappa(x-y) dy, \end{aligned}$$

la proposition 1 appliquée aux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans le domaine  $\Omega_R^+$  donne alors

$$\mathbf{E}_e(x) = \mathbf{M}_R(x) \quad \text{p.p.t } x \in \Omega_R^+. \quad (1.12)$$

On réécrit  $\mathbf{M}_R$  grâce aux équations de Maxwell (1.5) du problème de diffraction :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R(x) = & -\nabla \times \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) + \nabla \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ & -i\kappa \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) + \nabla \times \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ & -\nabla \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) + i\kappa \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ & -\frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega_R^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy + i\kappa \int_{\Omega_R^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy. \end{aligned}$$

Une démonstration similaire à celle appliquée à  $\mathbf{U}_i$  permet d'établir :

$$\mathbf{M}_R(x) = \begin{cases} \mathbf{E}_e(x) & \text{p.p.t } x \in \Omega_R^+ \\ 0 & \text{p.p.t } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_R^+}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Il vient alors trivialement que

$$\mathbf{E}_e(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbf{M}_R(x), \quad \text{p.p.t } x \in \Omega^+. \quad (1.14)$$

Etablissons désormais la relation  $\mathbf{U}_e(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbf{M}_R(x)$ , p.p.t  $x \in \Omega^+$ . Il s'agit de montrer que p.p.t  $x \in \Omega^+$ ,

$$\left[ \nabla \times \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) - \nabla \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \right. \\ \left. + i\kappa \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \right] \longrightarrow 0, \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty.$$

Pour  $R$  suffisamment grand, à l'aide des relations  $\nabla_x G_\kappa(x-y) = -\nabla_y G_\kappa(x-y)$  pour  $x \neq y$  et  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ , on a p.p.t  $x \in \Omega^+$  :

$$\begin{aligned} & \nabla \times \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) - \nabla \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ & + i\kappa \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y) ds(y) \\ & = \int_{\Gamma_R} \left[ \nabla_x \times (\mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y)) - \nabla_x (\mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_\kappa(x-y)) \right. \\ & \quad \left. + i\kappa G_\kappa(x-y) (\mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y)) \right] ds(y) \\ & = \int_{\Gamma_R} \left[ \nabla_x G_\kappa(x-y) \times (\mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y)) + \nabla_y G_\kappa(x-y) (\mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y)) \right. \\ & \quad \left. + i\kappa G_\kappa(x-y) (\mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y)) \right] ds(y) \\ & = \int_{\Gamma_R} \left[ (\partial_{\mathbf{n}_R(y)} G_\kappa(x-y)) \mathbf{E}_e(y) - \mathbf{E}_e(y) \times (\mathbf{n}_R(y) \times \nabla_y G_\kappa(x-y)) \right. \\ & \quad \left. + i\kappa G_\kappa(x-y) (\mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_\kappa(x-y)) \right] ds(y) \\ & = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_{\Gamma_R} \left( \partial_{\mathbf{n}_R(y)} G_\kappa(x-y) - i\kappa G_\kappa(x-y) \right) \mathbf{E}_e(y) ds(y), \\ \mathcal{I}_2 &= \int_{\Gamma_R} \mathbf{E}_e(y) \times \left( \mathbf{n}_R(y) \times \nabla_y G_\kappa(x-y) \right) ds(y), \\ \mathcal{I}_3 &= i\kappa \int_{\Gamma_R} G_\kappa(x-y) \left( \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) + \mathbf{E}_e(y) \right) ds(y). \end{aligned}$$

Nous allons montrer à présent que chacune des expressions  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$  et  $\mathcal{I}_3$  tend vers 0.

\*\*\* *pour*  $\mathcal{I}_3$

Nous avons

$$y \in \Gamma_R \implies y = R \mathbf{n}_R(y) \quad \text{et} \quad G_\kappa(x-y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow +\infty$$

avec la condition de radiation de Silver-Müller (1.7) :

$$\mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) + \mathbf{E}_e(y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \rightarrow +\infty.$$

## 1.2 Les formulations intégrales du problème

---

Il est clair que  $\mathcal{I}_3 \longrightarrow 0$ , quand  $R \rightarrow +\infty$  p.p dans  $\Omega^+$ .  $\square$

\*\*\* *pour  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$*

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|\mathcal{I}_1|^2 \leq \int_{\Gamma_R} |\partial_{\mathbf{n}_R(y)} G_\kappa(x-y) - i\kappa G_\kappa(x-y)|^2 ds(y) \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_e(y)|^2 ds(y),$$

$$|\mathcal{I}_2|^2 \leq \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_e(y)|^2 ds(y) \int_{\Gamma_R} |\mathbf{n}_R(y) \times \nabla_y G_\kappa(x-y)|^2 ds(y).$$

En outre, on a les comportements asymptotiques suivants, impliquant la solution fondamentale  $G_\kappa$  :

$$\partial_{\mathbf{n}_R(y)} G_\kappa(x-y) - i\kappa G_\kappa(x-y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \rightarrow +\infty \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{n}_R(y) \times \nabla_y G_\kappa(x-y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (1.15b)$$

Il nous suffit donc de montrer l'estimation

$$\int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_e|^2 = \mathcal{O}(1) \quad R \rightarrow +\infty, \quad (1.16)$$

pour conclure grâce aux estimations (1.15) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\mathcal{I}_1 \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 \longrightarrow 0, \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty \text{ p. p. dans } \Omega^+.$$

Montrons à présent l'estimation (1.16). On a

$$|\mathbf{H}_e \times \mathbf{n}_R - \mathbf{E}_e|^2 = |\mathbf{H}_e \times \mathbf{n}_R|^2 + |\mathbf{E}_e|^2 - 2Re\left\{(\mathbf{n}_R \times \mathbf{E}_e) \cdot \overline{\mathbf{H}_e}\right\}.$$

La condition de radiation de Silver-Müller conduit à

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} |\mathbf{H}_e \times \mathbf{n}_R - \mathbf{E}_e|^2 &= \int_{\Gamma_R} \left[ |\mathbf{H}_e \times \mathbf{n}_R|^2 + |\mathbf{E}_e|^2 - 2Re\left\{(\mathbf{n}_R \times \mathbf{E}_e) \cdot \overline{\mathbf{H}_e}\right\} \right] \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_R} Re\left\{(\mathbf{n}_R \times \mathbf{E}_e) \cdot \overline{\mathbf{H}_e}\right\} \\ &= Re \left[ \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e) \cdot \overline{\mathbf{H}_e} + \int_{\Omega_R^+} (\nabla \times \mathbf{E}_e \cdot \overline{\mathbf{H}_e} - \nabla \times \overline{\mathbf{H}_e} \cdot \mathbf{E}_e) \right] \\ &= Re \left[ \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e) \cdot \overline{\mathbf{H}_e} + \int_{\Omega_R^+} (i\kappa \mathbf{H}_e \cdot \overline{\mathbf{H}_e} + (i\kappa \overline{\mathbf{E}_e} - \overline{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{E}_e) \right] \\ &= Re \left[ \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e) \cdot \overline{\mathbf{H}_e} \right] - Re \int_{\Omega_R^+} \mathbf{E}_e \cdot \overline{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbf{F}$  est à support compact dans  $\Omega^+$ , nous avons

$$Re \int_{\Omega_R^+} \mathbf{E}_e \cdot \overline{\mathbf{F}} = \mathcal{O}(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Donc  $\int_{\Gamma_R} Re \left\{ (\mathbf{n}_R \times \mathbf{E}_e) \cdot \overline{\mathbf{H}_e} \right\} = \mathcal{O}(1)$ ,  $R \rightarrow +\infty$ . La relation (1.17) entraîne ensuite le résultat suivant :

$$\int_{\Gamma_R} \left\{ |\mathbf{H}_e \times \mathbf{n}_R|^2 + |\mathbf{E}_e|^2 \right\} = \mathcal{O}(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

On obtient ainsi

$$\int_{\Gamma_R} |\mathbf{H}_e \times \mathbf{n}_R|^2 = \mathcal{O}(1), \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_e|^2 = \mathcal{O}(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

D'où l'estimation (1.16). Finalement, le passage à la limite donne p.p.t  $x \in \Omega^+$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{M}_R(x) &= \nabla \times \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - \nabla \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \\ &\quad + i\kappa \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_{\kappa}(x-y) dy \\ &\quad + i\kappa \int_{\Omega^+} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{F}(y) dy \\ &= \nabla \times \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{E}_e)(x) - \nabla \mathcal{S}(\gamma_n \mathbf{E}_e)(x) + i\kappa \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{H}_e)(x) + \mathbf{D}(x) \\ &= \mathbf{U}_e(x). \end{aligned}$$

Cette estimation et l'égalité (1.14) conduisent donc au résultat  $\mathbf{U}_e = \mathbf{E}_e$  dans  $\Omega^+$ . □

iv) Montrons enfin que  $\mathbf{U}_e = 0$  dans  $\Omega^-$ .

$G_{\kappa}(x - \cdot)$  est suffisamment régulière sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}$ . Nous avons p.p.t  $x \in \Omega^-$  et pour tout  $R$  suffisamment grand,

$$\begin{aligned} &\nabla \times \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{E}_e)(x) - \nabla \mathcal{S}(\gamma_n \mathbf{E}_e)(x) + i\kappa \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{H}_e)(x) \\ &= \nabla \times \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - \nabla \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \\ &\quad + i\kappa \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \\ &= \nabla \times \left[ \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - \int_{\Omega_R^+} \nabla \times_y \left( \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) \right) dy \right] \\ &\quad - \nabla \left[ \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - \int_{\Omega_R^+} \nabla \cdot_y \left( \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) \right) dy \right] \\ &\quad + i\kappa \left[ \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - \int_{\Omega_R^+} \nabla \times_y \left( \mathbf{H}_e(y) G_{\kappa}(x-y) \right) dy \right]. \end{aligned}$$

A l'aide des équations de Maxwell (1.5) du problème de diffraction ( $\mathcal{P}$ ), des relations (3.2) et de l'identité  $\nabla \times (\nabla \times) - \nabla(\nabla \cdot) = -\Delta$ , on a

## 1.2 Les formulations intégrales du problème

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{E}_e)(x) - \nabla \mathcal{S}(\gamma_n \mathbf{E}_e)(x) + i\kappa \mathcal{S}(\gamma_{\times} \mathbf{H}_e)(x) \\
&= \nabla \times \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - \nabla \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \\
&\quad + i\kappa \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - (\Delta + \kappa^2) \int_{\Omega_R^+} \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) dy \\
&\quad + \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega_R^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_{\kappa}(x-y) dy - i\kappa \int_{\Omega_R^+} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{F}(y) dy.
\end{aligned}$$

Puis en procédant exactement comme dans le cas précédent, il vient p.p.t  $x \in \Omega^-$ ,

$$\begin{aligned}
& \left[ \nabla \times \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) - \nabla \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \cdot \mathbf{E}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \right. \\
& \quad \left. + i\kappa \int_{\Gamma_R} \mathbf{n}_R(y) \times \mathbf{H}_e(y) G_{\kappa}(x-y) ds(y) \right] \longrightarrow 0, \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

D' où  $\mathbf{U}_e = 0$  dans  $\Omega^-$ , par passage à la limite ( $R \rightarrow +\infty$ ). ■

Nous déduisons de ce dernier lemme, les représentations intégrales pour le champ électrique  $\mathbf{E}$ , dans la proposition suivante. En plus du potentiel de simple couche  $\mathcal{S}$  et du potentiel de Newton  $\mathcal{N}$ , nous utiliserons dans la proposition, l'opérateur  $\mathcal{M}$  donné par :

$$\mathcal{M}\mathbf{u}(x) = \int_{\Omega^-} \nabla_y G_{\kappa}(x-y) \cdot \mathbf{u}(y) dy.$$

**Proposition 2.** *Soit  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  une solution du problème (P). Alors nous avons les représentations intégrales suivantes pour  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3$  :*

$$\mathbf{E} = \nabla \mathcal{S}(\eta \gamma_n \mathbf{E}_i) - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_i) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_i) + \mathbf{D} \quad (1.18)$$

et

$$\mathbf{E} = \nabla \mathcal{M}(\eta \mathbf{E}_i) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_i) + \mathbf{D}. \quad (1.19)$$

**Preuve :**

Par le lemme précédent, nous avons dans tout  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_e \\
&= \nabla \times \mathcal{S}(\gamma_{\times} (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i)) - \nabla \mathcal{S}(\gamma_n (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i)) + i\kappa \mathcal{S}(\gamma_{\times} (\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_i)) \\
&\quad - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_i) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_i) + \mathbf{D}.
\end{aligned}$$

Considérant les conditions de transmissions au bord (1.6) :

$$\gamma_{\times} (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i) = 0 = \gamma_{\times} (\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_i) \quad \text{et} \quad \gamma_n (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i) = (\varepsilon_r - 1) \gamma_n \mathbf{E}_i \quad \text{sur } \Gamma,$$

nous obtenons la première représentation intégrale (1.18). Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i)(x) &= \int_{\Gamma} (1 - \varepsilon_r(y)) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_i(y) ds(y) \\
&= \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_i(y) dy - \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot (\varepsilon_r(y) \mathbf{E}_i(y)) dy \\
&\quad + \int_{\Omega^-} (1 - \varepsilon_r(y)) \nabla_y G_{\kappa}(x-y) \cdot \mathbf{E}_i(y) dy.
\end{aligned}$$

Ainsi, utilisant l'égalité  $\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}_i) = 0$ , qui est une conséquence des équations de Maxwell (1.5), nous sommes conduits à

$$\mathcal{S}(\eta \gamma_n \mathbf{E}_i) - \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_i) = \mathcal{M}(\eta \mathbf{E}_i). \quad (1.20)$$

Injectant cette égalité dans (1.18), nous obtenons la représentation (1.19). ■

**Remarque 4.** *Les représentations intégrales pour le champ magnétique  $\mathbf{H}$  se déduisent de celles du champ électrique  $\mathbf{E}$ , par les équations de Maxwell du problème (P). Le choix du champ  $\mathbf{E}$  pour les représentations intégrales est complètement arbitraire. Nous aurions tout aussi bien pu représenter le champ magnétique par un traitement similaire et en déduire celles du champ électrique.*

## 1.2.2 Les équations intégrales

Nous présentons ici, deux équations intégrales définies à partir des représentations intégrales établies dans la proposition précédente. L'une est une formulation couplée surface-volume constituée d'un système d'équations intégrales issues de l'équation (1.18) et de sa trace normale sur la frontière  $\Gamma$ . L'autre équation est la VIE, provenant de (1.19).

Des équations de (P), nous avons  $\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}) = 0$  au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^3$ . Dans  $\Omega^-$ , nous avons alors  $\nabla \cdot \mathbf{E}_i = -\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \varepsilon_r \cdot \mathbf{E}_i$ , et donc nous allons remplacer dans la représentation intégrale (1.18), l'expression  $\nabla \cdot \mathbf{E}_i$  par  $-\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \varepsilon_r \cdot \mathbf{E}_i$ . Désignons par  $\boldsymbol{\tau}$ , le gradient logarithmique de  $\varepsilon_r$  :  $\boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \varepsilon_r$  et définissons les opérateurs intégraux suivants :

$$\mathcal{S}_\eta : f \mapsto \mathcal{S}(\eta f), \quad \mathcal{N}_\boldsymbol{\tau} : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}), \quad \mathcal{N}_\eta : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{N}(\eta \mathbf{u}), \quad \mathcal{M}_\eta : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{M}(\eta \mathbf{u}), \quad (1.21)$$

où  $f$  et  $\mathbf{u}$  sont respectivement des champs scalaire et vectoriel définis sur  $\Gamma$  et sur  $\Omega^-$ . Définissons également les opérateurs de traces intérieurs et extérieurs :

$$\gamma_0^\pm g := g|_\Gamma, \quad \gamma_1^\pm g := (\mathbf{n} \cdot \nabla g^\pm)|_\Gamma, \quad \gamma_n^\pm \mathbf{v} := \gamma_n \mathbf{v}^\pm, \quad \text{et} \quad \gamma_\times^\pm \mathbf{v} := \gamma_\times \mathbf{v}^\pm,$$

pour  $g$  et  $\mathbf{v}$  respectivement des champs scalaire et vectoriel définis sur  $\mathbb{R}^3$ , avec  $g^\pm := g|_{\Omega^\pm}$  et  $\mathbf{v}^\pm := \mathbf{v}|_{\Omega^\pm}$ . Le système couplé d'équations intégrales, que nous désignerons par  $(\mathcal{E}_1)$  est défini comme suit :

$$(\mathcal{E}_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}_*, e_*) \in (L^2(\Omega^-))^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ tel que} \\ \begin{pmatrix} 1 - \nabla \mathcal{N}_\boldsymbol{\tau} + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta & -\nabla \mathcal{S}_\eta \\ \kappa^2 \gamma_n^- \mathcal{N}_\eta - \gamma_1^- \mathcal{N}_\boldsymbol{\tau} & 1 - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_* \\ e_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \gamma_n^- \mathbf{D} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

**Remarque 5.** *L'équation  $(\mathcal{E}_1)$  est un système faiblement singulier. Si la permittivité  $\varepsilon$  est continue à travers la frontière  $\Gamma$ , alors la fonction  $\eta = 1 - \varepsilon_r$  est nulle sur  $\Gamma$  et la contribution du bord dans le système disparaît. Nous retrouvons dans ce cas, l'équation de Lippmann-Schwinger pour Maxwell, étudiée dans [7].*

La seconde formulation (la VIE) que nous désignerons par  $(\mathcal{E}_2)$ , se définit comme suit :

$$(\mathcal{E}_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_o \in (L^2(\Omega^-))^3, \text{ tel que} \\ (1 - \nabla \mathcal{M}_\eta + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta) \mathbf{E}_o = \mathbf{D}. \end{array} \right.$$

### 1.3 Relations d'équivalence

**Remarque 6.** Une autre voie pour parvenir à la représentation intégrale (1.19) et ensuite par restriction à  $\Omega^-$ , à la VIE, est la suivante :

i) Ecrire le problème de transmission ( $\mathcal{P}$ ) comme un système de second ordre (par élimination du champ  $\mathbf{H}$ ) valable au sens des distributions dans l'espace tout entier, puis transporter l'inhomogénéité au second membre :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \kappa^2 \mathbf{E} = -\kappa^2 \eta \mathbf{E} + i\kappa \mathbf{F}.$$

ii) Résoudre ensuite le système par convolution avec la solution fondamentale (fortement singulière)  $\mathbf{U}^*$  de l'opérateur à coefficient constant  $\nabla \times (\nabla \times) - \kappa^2$ . Ceci donne

$$\mathbf{E} = -\kappa^2 \mathbf{U}^* * (\eta \mathbf{E}) + i\kappa \mathbf{U}^* * \mathbf{F}$$

et cette expression coïncide avec la représentation (1.19), puisque la fonction  $\eta$  s'annule à l'extérieur de  $\Omega^-$ .

Soit l'opérateur matriciel  $\nabla \nabla = (\partial_i \partial_j)_{i,j=1,2,3}$ , où  $\partial_i$  est la dérivée partielle par rapport à la  $i$ -ième variable d'espace, et soit  $\mathbb{I}$  la matrice identité d'ordre 3. La solution fondamentale  $\mathbf{U}^*$  est donné par :

$$\mathbf{U}^*(x) = \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla G_\kappa(x) + \mathbb{I} G_\kappa(x). \quad (1.22)$$

## 1.3 Equivalence entre les formulations intégrales et le problème de diffraction

Nous assurons ici l'équivalence entre les équations intégrales et le problème de transmission. Ce résultat d'équivalence est non seulement intéressant pour l'aspect numérique (qui sera abordé dans les chapitres suivants), puisqu'il nous confirme que la résolution de la VIE est aussi celle du problème de transmission, mais il est aussi intéressant pour l'analyse. En effet, la forte singularité de la VIE rendant difficile l'analyse directe de celle-ci, nous pourrions faire cette analyse grâce à l'équivalence, via la formulation couplée ( $\mathcal{E}_1$ ) qui est faiblement singulière et donc plus simple à analyser. L'équivalence est établie d'abord entre le problème de diffraction ( $\mathcal{P}$ ) et la formulation couplée ( $\mathcal{E}_1$ ), puis dans un cadre plus général, entre les équations ( $\mathcal{E}_1$ ) et ( $\mathcal{E}_2$ ).

### 1.3.1 Equivalence entre ( $\mathcal{E}_1$ ) et ( $\mathcal{P}$ )

On commence simplement par établir l'implication suivante :

**Théorème 2.** Si  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  est une solution du problème ( $\mathcal{P}$ ), alors la paire  $(\mathbf{E}_i, \gamma_n \mathbf{E}_i)$  est une solution du problème ( $\mathcal{E}_1$ ).

**Preuve :**

Ce résultat est en fait une conséquence des propositions 1, 2 et du lemme 3. En effet, Si  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  est solution du problème de transmission ( $\mathcal{P}$ ), on rappelle la représentation intégrale de  $\mathbf{E}$  d'après la proposition 2 :

$$\mathbf{E} = \nabla \mathcal{S}(\eta \gamma_n \mathbf{E}_i) - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_i) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_i) + \mathbf{D}.$$

Prenant la restriction  $\mathbf{E}_i$  de  $\mathbf{E}$  à  $\Omega^-$ , et remarquant que  $\nabla \cdot \mathbf{E}_i = -\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \varepsilon_r \cdot \mathbf{E}_i$ , on obtient la première équation de ( $\mathcal{E}_1$ ) :

$$\mathbf{E}_i - \nabla \mathcal{N}_\tau \mathbf{E}_i + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta \mathbf{E}_i - \nabla \mathcal{S}_\eta \gamma_n \mathbf{E}_i = \mathbf{D}.$$

La seconde équation est obtenue, en prenant tout simplement la trace normale de  $\mathbf{E}_i$  dans cette expression. Par conséquent, le couple  $(\mathbf{E}_i, \gamma_n \mathbf{E}_i)$  est solution du problème ( $\mathcal{E}_1$ ), puisqu'il est bien dans  $(L^2(\Omega^-)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ . ■

**Remarque 7.** Un calcul direct avec l'expression (1.10) du champ  $\mathbf{D}$ , donnée dans le lemme 3, montre que  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{D}) - \kappa^2 \mathbf{D} = i\kappa \mathbf{F}$ , dans  $\mathbb{R}^3$ . C'est à dire que  $\mathbf{D}$  est le champ incident  $\mathbf{E}_{inc}$ . Le champ magnétique incident est alors  $\mathbf{H}_{inc} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{D}$ .

La démonstration de la réciproque au résultat précédent requiert l'établissement de résultats intermédiaires. Le premier est le principe de continuation unique établi dans [37] et [43] :

**Lemme 4.** Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , une fonction réelle  $u \in H_{loc}^2(D)$ , telle que

$$\forall K \subset\subset D, \exists c \geq 0; \quad |\Delta u| \leq c(|u| + |\nabla u|) \quad p.p \text{ dans } D.$$

Si  $u$  s'annule dans un voisinage d'un point  $x_0 \in D$ , alors  $u = 0$  dans  $D$ .

Pour la preuve, voir [37] (page 65). ■

Nous établissons grâce à ce résultat, le lemme suivant :

**Lemme 5.** La solution triviale est l'unique solution du problème de Lippmann-Schwinger suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } q \in L^2(D) \text{ tel que :} \\ (1 + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta)q = 0 \quad \text{dans } D, \end{cases} \quad (1.23)$$

où on rappelle la définition du potentiel de volume  $\mathcal{N}_\eta u(x) = \int_D \eta(y) G_\kappa(x-y) u(y) dy$ , avec  $x \in D$  et  $u$ , un champ scalaire défini sur  $D$ .

**Preuve**

Si  $q$  est solution du problème (1.23), nous avons  $q = -\kappa^2 \mathcal{N}_\eta q$ . Ainsi  $q \in H^2(D)$ , puisque  $\mathcal{N}_\eta$  est borné de  $L^2(D)$  dans  $H^2(D)$ . Posons :

$$u(x) := -\kappa^2 \int_D \eta(y) G_\kappa(x-y) q(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

On a alors  $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$  avec  $u|_D = q$ . Donc

$$\begin{cases} [\gamma_0 u]_{\partial D} = \gamma_0^+(u) - \gamma_0^-(u) = 0 \\ [\gamma_1 u]_{\partial D} = \gamma_1^+(u) - \gamma_1^-(u) = 0, \end{cases}$$

avec  $(\Delta + \kappa^2)u = 0$  dans  $D$  et  $(\Delta + \kappa^2 \varepsilon_r)u = 0$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ . En fait,  $u$  est solution du problème :

$$\begin{cases} u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3) \\ (\Delta + \kappa^2 \varepsilon_r)u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \partial_r u - i\kappa u = \mathcal{O}(\frac{1}{r^2}), \quad r \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (1.24)$$

$\partial_r u - i\kappa u = \mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$ ,  $r \rightarrow +\infty$  est la condition de radiation de Sommerfeld. Grâce à cette condition de radiation, nous nous aidons du théorème de Rellich pour montrer que  $u$  s'annule à l'extérieur de  $D$  et ensuite, l'application du principe de continuation unique (lemme 4) dans un domaine contenant strictement  $D$ , montre que  $u = 0$  partout et en particulier que  $q = 0$ . ■

Avec ces lemmes, nous pouvons à présent énoncer et démontrer la réciproque au théorème 2.

**Théorème 3.** Si  $(\mathbf{E}_*, e_*) \in (L^2(\Omega^-))^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est une solution du problème  $(\mathcal{E}_1)$ , alors nous avons une solution  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  du problème  $(\mathcal{P})$  en définissant :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|_{\Omega^-} &= \mathbf{E}_*, \\ \mathbf{E}|_{\Omega^+}(x) &= \nabla \mathcal{S}(\eta e_*)(x) - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_*)(x) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_*)(x) + \mathbf{D}(x), \\ \mathbf{H}|_{\Omega^-} &= \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}_* \quad \text{et} \quad \mathbf{H}|_{\Omega^+} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^+}. \end{aligned}$$

### 1.3 Relations d'équivalence

**Preuve :** Nous allons montrer ici, que le champ  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  construit ci-dessus, vérifie successivement toutes les conditions définissant le problème de diffraction  $(\mathcal{P})$ . A savoir, les conditions d'appartenance au cadre fonctionnel requis, les équations de Maxwell, les conditions de transmission au bord et la condition de radiation de Silver-Müller.

Si la paire  $(\mathbf{E}_*, e_*) \in (L^2(\Omega^-)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$  est solution du problème  $(\mathcal{E}_1)$ , alors les restrictions  $\mathbf{E}|_{\Omega^-}$ ,  $\mathbf{H}|_{\Omega^-}$ ,  $\mathbf{E}|_{\Omega^+}$  et  $\mathbf{H}|_{\Omega^+}$  des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  aux domaines  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$  définies dans l'énoncé du théorème, ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|_{\Omega^-} &= \nabla \mathcal{S}(\eta e_*) + \nabla \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_*) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_*) + \mathbf{D}, \\ \mathbf{E}|_{\Omega^-}(x) &= \nabla \int_{\Gamma} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) e_*(y) ds(y) - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \\ &\quad + \nabla \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \nabla \varepsilon_r(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) dy + i\kappa \int_{\Omega^+} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{F}(y) dy \\ &\quad - \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_{\kappa}(x-y) dy. \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|_{\Omega^+} &= \nabla \mathcal{S}(\eta e_*) - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_*) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_*) + \mathbf{D}, \\ \mathbf{E}|_{\Omega^+}(x) &= \nabla \int_{\Gamma} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) ds(y) - \nabla \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \\ &\quad - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + i\kappa \int_{\Omega^+} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{F}(y) dy \\ &\quad - \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_{\kappa}(x-y) dy. \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{H}|_{\Omega^-} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^-},$$

$$\mathbf{H}|_{\Omega^-}(x) = i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + \nabla \times \int_{\Omega^+} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{F}(y) dy. \quad (1.27)$$

$$\mathbf{H}|_{\Omega^+} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^+},$$

$$\mathbf{H}|_{\Omega^+}(x) = i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + \nabla \times \int_{\Omega^+} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{F}(y) dy. \quad (1.28)$$

Et puis  $e_*$  est donné par :

$$\begin{aligned} e_* &= \gamma_1^- \mathcal{S}(\eta e_*) + \gamma_1^- \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_*) - \kappa^2 \gamma_n^- \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_*) + \gamma_n^- \mathbf{D}, \\ e_*(x) &= \partial_n^- \int_{\Gamma} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) e_*(y) ds(y) - \kappa^2 \mathbf{n}(x) \cdot \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \\ &\quad + \partial_n^- \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \text{grad } \varepsilon_r(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \\ &\quad - \frac{1}{i\kappa} \partial_n^- \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_{\kappa}(x-y) dy + i\kappa \mathbf{n}(x) \cdot \int_{\Omega^+} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{F}(y) dy. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Nous rappelons que  $\eta = 1 - \varepsilon_r$ . Vérifions à présent que les conditions du problème ( $\mathcal{P}$ ) sont satisfaites.

i) Les champs  $\mathbf{E}|_{\Omega^-}$ ,  $\mathbf{H}|_{\Omega^-}$ ,  $\mathbf{E}|_{\Omega^+}$  et  $\mathbf{H}|_{\Omega^+}$  appartiennent bien aux espaces fonctionnels requis pour le problème ( $\mathcal{P}$ ). Ceci se déduit de la régularité des opérateurs intégraux intervenant dans les expressions (1.25) – (1.29) (en se rappelant que le champ  $\mathbf{F}$  est à support compact dans  $\Omega^+$ ).  $\square$

ii) *les équations de Maxwell (1.5) dans  $\Omega^-$*

Par définition de  $\mathbf{H}|_{\Omega^-} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^-}$ , la première équation dans  $\Omega^-$  est vérifiée. Montrons à présent, la seconde. Dans un premier temps, en prenant dans (1.25), la trace normale  $\gamma_n^-(\mathbf{E}|_{\Omega^-})$  de  $\mathbf{E}|_{\Omega^-}$  sur le bord  $\Gamma$  et en comparant avec l'expression de  $e_*$  dans (1.29), on vérifie aisément que  $e_* = \gamma_n^-(\mathbf{E}|_{\Omega^-})$ . Nous avons ensuite

$$\nabla \times \mathbf{H}|_{\Omega^-} + i\kappa\varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^-} + i\kappa\varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-}.$$

Puisque  $\mathbf{F}$  est à support compact dans  $\Omega^+$  et donc nul sur le bord  $\Gamma$ , en utilisant l'expression de  $\mathbf{E}|_{\Omega^-}$  dans (1.25), avec une intégration par parties (théorèmes d'intégration de Gauss et de Green) en plus des identités  $\nabla \times (\nabla \times) = -\Delta + \nabla(\nabla \cdot)$  et  $\int_{\Omega^+} \nabla_y \cdot (G_\kappa(x-y)\mathbf{F}(y)) dy = 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\nabla \times \mathbf{H}|_{\Omega^-} + i\kappa\varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-})(x) \\ &= i\kappa\eta(x) \left\{ \mathbf{E}|_{\Omega^-}(x) + \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y)G_\kappa(x-y)\mathbf{E}_*(y) dy - \nabla \int_\Gamma \eta(y)G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y) \right. \\ & \quad \left. - i\kappa \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y)\mathbf{F}(y) dy + \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y)G_\kappa(x-y) dy \right\} \\ & \quad + i\kappa \left\{ \nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y)\nabla \cdot (\eta(y)\mathbf{E}_*(y)) + \varepsilon_r(x) \nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \nabla \varepsilon_r(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant (1.25), il vient donc

$$\begin{aligned} & (\nabla \times \mathbf{H}|_{\Omega^-} + i\kappa\varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-})(x) \\ &= i\kappa \nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \left\{ \nabla \cdot (\eta(y)\mathbf{E}_*(y)) + \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \nabla \varepsilon_r(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) \right\} dy \\ &= i\kappa \nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r(y)} (\varepsilon_r(y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) + \nabla \varepsilon_r(y) \cdot \mathbf{E}_*(y)) - \nabla \cdot (\varepsilon_r(y)\mathbf{E}_*(y)) \right\}. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$(\nabla \times \mathbf{H}|_{\Omega^-} + i\kappa\varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-})(x) = i\kappa \nabla \int_{\Omega^-} \eta(y)G_\kappa(x-y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \nabla \cdot (\varepsilon_r(y)\mathbf{E}_*(y)) dy. \quad (1.30)$$

En prenant par ailleurs la divergence de l'équation (1.30), nous avons

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon_r(x)\mathbf{E}_*(x)) &= \Delta \int_{\Omega^-} \eta(y)G_\kappa(x-y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \nabla \cdot (\varepsilon_r(y)\mathbf{E}_*(y)) dy \\ &= -\frac{\eta(x)}{\varepsilon_r(x)} \nabla \cdot (\varepsilon_r(x)\mathbf{E}_*(x)) - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y)G_\kappa(x-y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \nabla \cdot (\varepsilon_r(y)\mathbf{E}_*(y)) dy. \end{aligned}$$

### 1.3 Relations d'équivalence

C'est à dire :

$$\frac{1}{\varepsilon_r(x)} \nabla \cdot (\varepsilon_r(x) \mathbf{E}_*(x)) = -\kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \nabla \cdot (\varepsilon_r(y) \mathbf{E}_*(y)) dy.$$

Posons  $q := \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}_*)$ . Alors  $q$  est solution du problème de Lippmann-Schwinger (1.23), dans le domaine  $\Omega^-$ . Le lemme 5 nous conduit donc à  $q := \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}_*) = 0$ , c'est à dire  $\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}_*) = 0$ . En injectant ceci dans l'égalité (1.30), on obtient

$$\nabla \times \mathbf{H}|_{\Omega^-} + i\kappa \varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-} = 0.$$

D'où la seconde équation de (1.5). □

iii) *les équations de Maxwell (1.5) dans  $\Omega^+$*

Ici aussi, la première équation dans  $\Omega^+$  est vérifiée par la définition de  $\mathbf{H}|_{\Omega^+}$ . Il ne nous faut donc vérifier que la seconde. On a

$$\nabla \times \mathbf{H}|_{\Omega^+} + i\kappa \mathbf{E}|_{\Omega^+} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^+} + i\kappa \mathbf{E}|_{\Omega^+}.$$

Nous utilisons l'expression de  $\mathbf{E}|_{\Omega^+}$  (1.26), en remarquant que  $\nabla \cdot \mathbf{E}_* = -\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \varepsilon_r \cdot \mathbf{E}_*$  (puisque  $\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}_*) = 0$ ). Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} & (\nabla \times \mathbf{H}|_{\Omega^+} + i\kappa \mathbf{E}|_{\Omega^+})(x) \\ &= i\kappa^3 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \\ & \quad + i\kappa \nabla \int_{\Omega^-} \left\{ G_\kappa(x-y) \nabla \cdot (\eta(y) \mathbf{E}_*(y)) - \nabla \cdot_y (\eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y)) \right\} dy \\ & \quad + \mathbf{F}(x) + \kappa^2 \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy + i\kappa \nabla \int_{\Gamma} \eta(y) G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y) \\ & \quad + \nabla \int_{\Omega^+} \left\{ G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{F}(y) - \nabla \cdot_y (G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y)) \right\} dy \\ & \quad + i\kappa \nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \nabla \varepsilon_r(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) dy - \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy \\ & \quad - i\kappa^3 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy. \end{aligned}$$

Une intégration par parties de l'intégrale  $\int_{\Omega^-} \nabla_y \cdot [(\eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y))] dy$ , puis une organisation des termes qui s'annulent mutuellement dans l'expression ci-dessus, nous conduisent à :

$$\nabla \times \mathbf{H}|_{\Omega^+} + i\kappa \mathbf{E}|_{\Omega^+} = \mathbf{F},$$

qui est l'équation recherchée. Nous avons donc établi les conditions (1.5) dans  $\Omega^+$ . □

iv) *les conditions de transmission au bord (1.6)*

Bien que seules les conditions sur les traces normales soient nécessaires, nous vérifierons que les conditions sur les traces tangentielles sont également satisfaites.

Soit la boule  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < R\}$  avec  $R > 0$  tel que  $\overline{\Omega^-} \subset B_R$ ; on pose  $\Omega_R^+ = B_R \setminus \overline{\Omega^-}$ . On considère  $\psi \in (C_0^\infty(B_R))^3$ . On a

$$\begin{aligned}
 & \langle \gamma \times \mathbf{E}|_{\Omega^+} - \gamma \times \mathbf{E}|_{\Omega^-}, \psi \rangle_\Gamma \\
 &= \int_{\Omega_R^+} \left( \mathbf{E}|_{\Omega^+} \cdot \nabla \times \psi - \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^+} \cdot \psi \right) + \int_{\Omega^-} \left( \mathbf{E}|_{\Omega^-} \cdot \nabla \times \psi - \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^-} \cdot \psi \right) \\
 &= \int_{\Omega_R^+} \nabla \times \psi(x) \cdot \left\{ \nabla \int_\Gamma \eta(y) G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y) \right. \\
 & \quad \left. - \nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \right. \\
 & \quad \left. + i\kappa \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy - \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy \right\} dx \\
 & - \int_{\Omega_R^+} \psi(x) \cdot \left\{ -\kappa^2 \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy \right\} dx \\
 & + \int_{\Omega^-} \nabla \times \psi(x) \cdot \left\{ \nabla \int_\Gamma \eta(y) G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y) \right. \\
 & \quad \left. - \nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \right. \\
 & \quad \left. + i\kappa \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy - \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy \right\} dx \\
 & - \int_{\Omega^-} \psi(x) \cdot \left\{ -\kappa^2 \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy \right\} dx.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Nous associons et calculons les termes de cette égalité :

► Le potentiel de simple couche défini par  $a(x) := \int_\Gamma \eta(y) G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y)$ , pour  $x \in B_R \setminus \Gamma$ , est à saut nul sur le bord  $\Gamma$ . Il est donc dans l'espace  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$  et par conséquent dans  $H^1(B_R)$ . D'où

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_R^+} \nabla \times \psi(x) \cdot \nabla \int_\Gamma \eta(y) G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y) dx \\
 & + \int_{\Omega^-} \nabla \times \psi(x) \cdot \nabla \int_\Gamma \eta(y) G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y) dx \\
 &= \int_{\Omega_R^+} \nabla \times \psi(x) \cdot \nabla a(x) dx + \int_{\Omega^-} \nabla \times \psi(x) \cdot \nabla a(x) dx \\
 &= \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \cdot \nabla \times \psi(x) \{ \gamma_0^- a(x) - \gamma_0^+ a(x) \} ds(x) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

► Les fonctions  $b, c, d, l$  définies par :

$$\begin{aligned}
 b(x) &:= \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy, & c(x) &:= \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy, \\
 l(x) &:= \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy, & \text{et } d(x) &:= \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy,
 \end{aligned}$$

### 1.3 Relations d'équivalence

sont dans l'espace  $H^2(B_R)$  (on rappelle que  $\mathbf{F}$  est à support compact dans  $\Omega^+$ ). Ces fonctions ont alors des sauts nuls sur  $\Gamma$  et nous amènent ainsi à l'égalité

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_R^+} \nabla \times \psi(x) \cdot \left\{ -\nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \right. \\
& \quad \left. + i\kappa \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy - \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy \right\} dx \\
& + \int_{\Omega^-} \nabla \times \psi(x) \cdot \left\{ -\nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \right. \\
& \quad \left. + i\kappa \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy - \frac{1}{i\kappa} \nabla \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy \right\} dx \\
& = \int_{\Omega_R^+} \nabla \times \psi(x) \cdot \left\{ -\nabla b(x) - \kappa^2 \mathbf{c}(x) + i\kappa \mathbf{d}(x) - \frac{1}{i\kappa} \nabla l(x) \right\} dx \\
& \quad + \int_{\Omega^-} \nabla \times \psi(x) \cdot \left\{ -\nabla b(x) - \kappa^2 \mathbf{c}(x) + i\kappa \mathbf{d}(x) - \frac{1}{i\kappa} \nabla l(x) \right\} dx \\
& = -\kappa^2 \int_{\Omega_R^+} \psi(x) \cdot \nabla \times \mathbf{c}(x) dx + i\kappa \int_{\Omega_R^+} \psi(x) \cdot \nabla \times \mathbf{d}(x) dx \\
& \quad - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \psi(x) \cdot \nabla \times \mathbf{c}(x) dx + i\kappa \int_{\Omega^-} \psi(x) \cdot \nabla \times \mathbf{d}(x) dx.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

En combinant les résultats (1.32) et (1.33) avec (1.31) on arrive à

$$\langle \gamma_\times \mathbf{E}|_{\Omega^+} - \gamma_\times \mathbf{E}|_{\Omega^-}, \psi \rangle_\Gamma = 0, \quad \text{pour tout } \psi \in (C_0^\infty(B_R))^3.$$

Donc  $\gamma_\times \mathbf{E}|_{\Omega^+} = \gamma_\times \mathbf{E}|_{\Omega^-}$  dans  $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$ . □

Par ailleurs, on calcule

$$\begin{aligned}
& \langle \gamma_\times \mathbf{H}|_{\Omega^+} - \gamma_\times \mathbf{H}|_{\Omega^-}, \psi \rangle_\Gamma \\
& = \int_\Gamma \psi(x) \cdot \left\{ \gamma_\times^+ \left( i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + \nabla \times \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy \right) \right. \\
& \quad \left. - \gamma_\times^- \left( i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + \nabla \times \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy \right) \right\} dx.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

De la régularité des fonctions  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  intervenant dans (1.44), on obtient l'annulation du saut des traces tangentielles du champ  $\mathbf{H}$  sur  $\Gamma$  :

$$\langle \gamma_\times \mathbf{H}|_{\Omega^+} - \gamma_\times \mathbf{H}|_{\Omega^-}, \psi \rangle_\Gamma = 0, \quad \text{pour tout } \psi \in (C_0^\infty(B_R))^3.$$

Donc  $\gamma_\times \mathbf{H}|_{\Omega^+} = \gamma_\times \mathbf{H}|_{\Omega^-}$  dans  $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$ . □

Quant aux conditions sur les traces normales, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \langle \gamma_n \mathbf{H}|_{\Omega^+} - \gamma_n \mathbf{H}|_{\Omega^-}, \psi \rangle_\Gamma \\
 &= \int_\Gamma \psi(x) \left\{ \gamma_n^+ \left( i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + \nabla \times \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy \right) \right. \\
 & \quad \left. - \gamma_n^- \left( i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + \nabla \times \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy \right) \right\} dx.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Nous avons dans (1.35) les mêmes fonctions que dans (1.44), alors les mêmes arguments de régularité nous permettent de conclure que le saut des traces normales est nul :

$$\langle \gamma_n \mathbf{H}|_{\Omega^+} - \gamma_n \mathbf{H}|_{\Omega^-}, \psi \rangle_\Gamma = 0, \quad \text{pour tout } \psi \in C_0^\infty(B_R).$$

Par conséquent,  $\gamma_n \mathbf{H}|_{\Omega^+} = \gamma_n \mathbf{H}|_{\Omega^-}$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . □

Pour compléter les conditions de transmission au bord, nous évaluons enfin les traces normales du champ  $\mathbf{E}$ .

$$\begin{aligned}
 & \langle \gamma_n \mathbf{E}|_{\Omega^+} - \gamma_n \varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-}, \psi \rangle_\Gamma \\
 &= \int_\Gamma \psi(x) \left\{ \gamma_1^+ \left( \int_\Gamma \eta(y) G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y) \right) - \gamma_1^+ \left( \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \right) \right. \\
 & \quad - \kappa^2 \gamma_n^+ \left( \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \right) + i\kappa \gamma_n^+ \left( \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy \right) \\
 & \quad \left. - \frac{1}{i\kappa} \gamma_1^+ \left( \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy \right) \right\} dx \\
 & - \int_\Gamma \psi(x) \varepsilon_r(x) \left\{ \gamma_1^- \left( \int_\Gamma \eta(y) G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y) \right) - \gamma_1^- \left( \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \right) \right. \\
 & \quad - \kappa^2 \gamma_n^- \left( \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \right) + i\kappa \gamma_n^- \left( \int_{\Omega^+} G_\kappa(x-y) \mathbf{F}(y) dy \right) \\
 & \quad \left. - \frac{1}{i\kappa} \gamma_1^- \left( \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy \right) \right\} dx.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Les mêmes fonctions  $a, b, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  et  $l$  introduites précédemment, définissent le saut des traces normales du champ  $\mathbf{E}$ . Puisque  $b, l$  d'une part et  $\mathbf{c}, \mathbf{d}$  d'autre part sont respectivement dans les espaces  $H^2(B_R)$  et  $(H^2(B_R))^3$ , nous avons au bord  $\Gamma$  :

$$\gamma_1^+ b = \gamma_1^- b, \quad \gamma_1^+ l = \gamma_1^- l, \quad \gamma_n^+ \mathbf{c} = \gamma_n^- \mathbf{c} \quad \text{et} \quad \gamma_n^+ \mathbf{d} = \gamma_n^- \mathbf{d}.$$

Par ailleurs, les relations de sauts au bord pour la fonction  $a$  sont :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^+ a(x) &= -\frac{1}{2} \eta(x) e_*(x) + \int_\Gamma \eta(y) \partial_{n(x)} G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y), \\
 \gamma_1^- a(x) &= +\frac{1}{2} \eta(x) e_*(x) + \int_\Gamma \eta(y) \partial_{n(x)} G_\kappa(x-y) e_*(y) ds(y).
 \end{aligned}$$

Donc  $\gamma_1^+ a(x) - \gamma_1^- a(x) = -\eta(x) e_*(x)$ ,  $x \in \Gamma$ . De retour à l'équation (1.36), on a

### 1.3 Relations d'équivalence

$$\begin{aligned}
& \langle \gamma_n \mathbf{E}|_{\Omega^+} - \gamma_n \varepsilon_r \mathbf{E}_*, \psi \rangle_\Gamma \\
&= \int_\Gamma \psi(x) \left\{ \gamma_1^+ a(x) - \varepsilon_r(x) \gamma_1^- a(x) - \eta(x) \gamma_1^- b(x) - \kappa^2 \eta(x) \gamma_n^- \mathbf{c}(x) + i\kappa \eta(x) \gamma_n^- \mathbf{d}(x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{i\kappa} \eta(x) \gamma_1^- l(x) \right\} dx \\
&= \int_\Gamma \eta(x) \psi(x) \left\{ -e_*(x) + \gamma_1^- a(x) - \gamma_1^- b(x) - \kappa^2 \gamma_n^- \mathbf{c}(x) + i\kappa \gamma_n^- \mathbf{d}(x) - \frac{1}{i\kappa} \gamma_1^- l(x) \right\}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

En outre, de la représentation de  $e_*$  donnée par (1.29), on a

$$\begin{aligned}
& -e_*(x) + \gamma_1^- a(x) - \gamma_1^- b(x) - \kappa^2 \gamma_n^- \mathbf{c}(x) + i\kappa \gamma_n^- \mathbf{d}(x) - \frac{1}{i\kappa} \gamma_1^- l(x) \\
&= -e_*(x) + \gamma_1^- \mathcal{S}(\eta e_*)(x) + \gamma_1^- \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_*)(x) - \kappa^2 \gamma_n^- \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_*)(x) + \gamma_n^- \mathbf{D}(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L'égalité (1.37) nous conduit alors à

$$\langle \gamma_n \mathbf{E}|_{\Omega^+} - \gamma_n \varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-}, \psi \rangle_\Gamma = 0, \quad \text{pour tout } \psi \in C_0^\infty(B_R).$$

Par conséquent,  $\gamma_n \mathbf{E}|_{\Omega^+} = \gamma_n \varepsilon_r \mathbf{E}|_{\Omega^-}$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .  $\square$

#### v) la condition de radiation de Silver-Müller (1.7)

La preuve de la condition de radiation achève celle du théorème. Cette condition est en fait, une conséquence du comportement asymptotique de la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz  $G_\kappa(x-y)$  qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld :

$$\partial_R \phi - i\kappa \phi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \rightarrow +\infty.$$

On rappelle que

$$G_\kappa(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|},$$

et on a les développements asymptotiques suivants :

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2} = |x| - \hat{x} \cdot y + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty$$

$$\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ e^{-i\kappa \hat{x} \cdot y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

Si  $\mathbf{v}$  est un champ de vecteurs, on a

$$\nabla_x \times \left( \mathbf{v}(y) \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} \right) = i\kappa \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ e^{-i\kappa \hat{x} \cdot y} \hat{x} \times \mathbf{v}(y) + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{v}(y)|}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

uniformément pour  $y$  fixé. Nous faisons un développement asymptotique pour  $\mathbf{H}_{diff}$ . Tenant compte de la remarque 7, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{diff} &= \mathbf{E}|_{\Omega^+} - \mathbf{D} = \nabla \int_\Gamma \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) ds(y) - \nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \\
&\quad - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy
\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_{diff} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}_{diff} = i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{diff}(x) &= \frac{i\kappa}{4\pi} \int_{\Omega^-} \nabla_x \times \left\{ \eta(y) \mathbf{E}_*(y) \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} \right\} dy \\ &= -\frac{\kappa^2}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ \hat{x} \times \int_{\Omega^-} \eta(y) \mathbf{E}_*(y) e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} dy + \int_{\Omega^-} \mathcal{O}\left(\frac{|\eta(y)\mathbf{E}_*(y)|}{|x|}\right) dy \right\}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_{\Omega^-} \mathcal{O}\left(\frac{|\eta(y)\mathbf{E}_*(y)|}{|x|}\right) dy = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

nous obtenons

$$\mathbf{H}_{diff}(x) = -\frac{\kappa^2}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \hat{x} \times \int_{\Omega^-} \eta(y) \mathbf{E}_*(y) e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty. \quad (1.38)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{diff} \times \hat{x} &= -\int_{\Gamma} \eta(y) (\hat{x} \times \nabla_x G_{\kappa}(x-y)) \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) ds(y) + \int_{\Omega^-} (\hat{x} \times \nabla_x G_{\kappa}(x-y)) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \\ &\quad + \kappa^2 \hat{x} \times \int_{\Omega^-} \eta(y) \mathbf{E}_*(y) \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \right\} dy. \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\nabla_x G_{\kappa}(x-y) = \frac{1}{4\pi} \left( i\kappa - \frac{1}{|x-y|} \right) \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|^2} (x-y).$$

Donc

$$\nabla_x G_{\kappa}(x-y) = \frac{i\kappa}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} \hat{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty$$

et

$$\hat{x} \times \nabla_x G_{\kappa}(x-y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

L'estimation précédente devient alors

$$\mathbf{E}_{diff} \times \hat{x} = \frac{\kappa^2}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \hat{x} \times \int_{\Omega^-} \eta(y) \mathbf{E}_*(y) e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty. \quad (1.39)$$

Des résultats (1.38) et (1.39), on déduit

$$\mathbf{E}_{diff} \times \hat{x} + \mathbf{H}_{diff} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty. \quad \square \quad (1.40)$$

En remarquant en outre que

$$\mathbf{H}_{diff} \times \hat{x} - \mathbf{E}_{diff} = (\mathbf{E}_{diff} \times \hat{x} + \mathbf{H}_{diff}) \times \hat{x} - (\hat{x} \cdot \mathbf{E}_{diff}) \hat{x},$$

il nous suffit de de montrer que

$$\hat{x} \cdot \mathbf{E}_{diff} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

pour conclure grâce à (1.40) que

$$\mathbf{H}_{diff} \times \hat{x} - \mathbf{E}_{diff} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

### 1.3 Relations d'équivalence

On a

$$\begin{aligned}
\hat{x} \cdot \mathbf{E}_{diff} &= \hat{x} \cdot \nabla_x \int_{\Gamma} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) ds(y) - \hat{x} \cdot \nabla_x \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \\
&\quad - \kappa^2 \hat{x} \cdot \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \\
&= i\kappa \int_{\Gamma} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) ds(y) - i\kappa \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \\
&\quad - \kappa^2 \hat{x} \cdot \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que la solution fondamentale  $G_{\kappa}(x-y)$  satisfait la condition de radiation de Sommerfeld. Nous effectuons maintenant une intégration par parties dans l'équation précédente, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\hat{x} \cdot \mathbf{E}_{diff} &= i\kappa \int_{\Omega^-} \eta(y) \nabla_y G_{\kappa}(x-y) \cdot \mathbf{E}_*(y) dy - \kappa^2 \hat{x} \cdot \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{E}_*(y) ds(y) - \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \nabla \cdot \mathbf{E}_*(y) dy \\
&= \int_{\Omega^-} \eta(y) \nabla_y G_{\kappa}(x-y) \cdot \mathbf{E}_*(y) dy.
\end{aligned}$$

On évalue à présent chacun des termes de l'égalité (1.41) :

$$i\kappa \int_{\Omega^-} \eta(y) \nabla_y G_{\kappa}(x-y) \cdot \mathbf{E}_*(y) dy = \frac{\kappa^2}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \hat{x} \cdot \int_{\Omega^-} \eta(y) \mathbf{E}_*(y) e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \tag{1.42}$$

$$-\kappa^2 \hat{x} \cdot \int_{\Omega^-} \eta(y) G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy = -\frac{\kappa^2}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \hat{x} \cdot \int_{\Omega^-} \eta(y) \mathbf{E}_*(y) e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \tag{1.43}$$

En sommant les égalités (1.42) et (1.43), nous aboutissons au résultat :

$$\hat{x} \cdot \mathbf{E}_{diff} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty$$

que nous recherchions. Ce qui achève la preuve de la condition de radiation (1.7) et aussi, celle du théorème 3. ■

#### 1.3.2 Equivalence entre $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$

La section précédente établit l'équivalence entre le problème de transmission  $(\mathcal{P})$  et la formulation couplée  $(\mathcal{E}_1)$ . Dans ce contexte, le second membre  $\mathbf{D}$  de l'équation intégrale  $(\mathcal{E}_1)$  a une forme particulière issue de notre hypothèse selon laquelle la source de rayonnement primaire est située dans le domaine extérieur  $\Omega^+$ . Ce second membre qui est le champ généré par cette source est donc analytique dans  $\overline{\Omega^-}$ . Pour pouvoir étudier les propriétés de l'opérateur fortement singulier de la VIE  $(\mathcal{E}_2)$ , via l'opérateur faiblement singulier de  $(\mathcal{E}_1)$ , nous allons établir l'équivalence entre les deux formulations intégrales, indépendamment du second membre. Le théorème suivant établit l'équivalence dans cette situation, où l'expression du second membre n'est pas nécessaire.

**Théorème 4.** Soit  $\mathbf{D} \in H(\text{div}, \Omega^-)$ , avec  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ .

(i) Si  $(\mathbf{E}_*, e_*) \in L^2(\Omega^-)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est une solution du problème  $(\mathcal{E}_1)$ , alors  $\mathbf{E}_*$  est une solution du problème  $(\mathcal{E}_2)$ .

(ii) Si  $\mathbf{E}_o \in L^2(\Omega^-)^3$  est une solution du problème  $(\mathcal{E}_2)$ , alors en posant  $e_o = \gamma_n \mathbf{E}_o$  :  $\mathbf{E}_o \in H(\text{div}, \Omega^-)$ ,  $e_o \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , et  $(\mathbf{E}_o, e_o)$  est une solution du problème  $(\mathcal{E}_1)$ .

**Preuve :**

(i) Si  $(\mathbf{E}_*, e_*)$  est solution du problème  $(\mathcal{E}_1)$ , alors

$$\mathbf{E}_* = \nabla \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_*) + \nabla \mathcal{S}(\eta e_*) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_*) + \mathbf{D}.$$

Comme nous l'avons précédemment vu dans le théorème 3,  $\mathbf{E}_* \in H(\text{div}, \Omega^-)$ ,  $e_* = \gamma_n \mathbf{E}_*$  et  $\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}_*) = 0$ , ainsi  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_* = -\nabla \cdot \mathbf{E}_*$ . On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_*) &= -\nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_*) \\ &= -\nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \eta \mathbf{E}_*) \quad (\text{puisque } \nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}_*) = 0 \text{ et } \eta = 1 - \varepsilon_r) \\ &= -\nabla \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \nabla \cdot ((1 - \varepsilon_r) \mathbf{E}_*) . \end{aligned}$$

Une intégration par parties, nous conduit à :

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_*) + \nabla \mathcal{S}(\eta \gamma_n \mathbf{E}_*) &= \nabla \int_{\Omega^-} (1 - \varepsilon_r) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{E}_* \\ &= \nabla \mathcal{M}(\eta \mathbf{E}_*), \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\mathbf{E}_* = \nabla \mathcal{M}(\eta \mathbf{E}_*) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_*) + \mathbf{D}.$$

Par conséquent  $\mathbf{E}_*$  est solution du problème  $(\mathcal{E}_2)$ .

(ii) Réciproquement, soit  $\mathbf{E}_o$  une solution du problème  $(\mathcal{E}_2)$ . Nous allons montrer dans un premier temps que  $\mathbf{E}_o \in H(\text{div}, \Omega^-)$ . Ecrivons  $\mathbf{E}_o = \mathcal{A} \mathbf{E}_o + \mathbf{D}$ , avec  $\mathcal{A} = \nabla \mathcal{M}_\eta - \kappa^2 \mathcal{N}_\eta$ . Puisque  $\mathcal{M}$  est borné de  $L^2(\Omega^-)^3$  dans  $H^1(\Omega^-)$  et  $\mathcal{N}$  est borné de  $L^2(\Omega^-)^3$  dans  $H^2(\Omega^-)^3$ , il est clair que  $\mathcal{A}$  est borné de  $L^2(\Omega^-)^3$  dans lui même. Pour  $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega^-)^3$ , un calcul simple nous donne  $\nabla \cdot \mathcal{A} \mathbf{u} = \nabla \cdot (\eta \mathbf{u})$ . Posant ensuite  $\mathcal{C} \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathcal{A} \mathbf{u} - \eta \mathbf{u})$ , nous avons

$$\mathcal{C} \mathbf{u} = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega^-)^3. \quad (1.44)$$

L'opérateur  $\mathcal{C}$  est borné de  $L^2(\Omega^-)^3$  dans  $H^{-1}(\Omega^-)$ . Ainsi, de la densité de  $C_0^\infty(\Omega^-)$  dans  $L^2(\Omega^-)$ , on déduit que  $\mathcal{C} \mathbf{u} = 0$  est valable pour tout  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega^-)^3$ . Par suite, pour la solution  $\mathbf{E}_o$  de  $(\mathcal{E}_2)$ , nous obtenons

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_o = \nabla \cdot \mathcal{A} \mathbf{E}_o + \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\eta \mathbf{E}_o) + \nabla \cdot \mathbf{D}.$$

Donc  $\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}_o) = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ , et finalement  $\nabla \cdot \mathbf{E}_o = -\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_o \in L^2(\Omega^-)$ . C'est à dire  $\mathbf{E}_o \in H(\text{div}, \Omega^-)$ .

Vérifions à présent que le couple  $(\mathbf{E}_o, \gamma_n \mathbf{E}_o)$  satisfait les équations de  $(\mathcal{E}_1)$ . Nous avons

$$\mathbf{E}_o = \nabla \mathcal{M}(\eta \mathbf{E}_o) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E}_o) + \mathbf{D}.$$

Maintenant que nous avons montré que  $\mathbf{E}_o \in H(\text{div}, \Omega^-)$ , nous pouvons utiliser une intégration par parties et retrouver  $\nabla \mathcal{M}(\eta \mathbf{E}_o) = \nabla \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_o) + \nabla \mathcal{S}(\eta \gamma_n \mathbf{E}_o)$ . On obtient alors la première équation de  $(\mathcal{E}_1)$  :

$$\mathbf{E}_o = \nabla \mathcal{Q} \mathbf{E}_o + \nabla \mathcal{L}(\gamma_n \mathbf{E}_o) - \kappa^2 \mathcal{N} \mathbf{E}_o + \mathbf{D}.$$

La seconde équation de  $(\mathcal{E}_1)$  est obtenue en prenant tout simplement la trace normale de l'égalité précédente sur  $\Gamma$ . ■

## 1.4 Quelques propriétés des opérateurs intégraux

**Remarque 8.** *Le théorème est valable dans un cadre encore plus général, c'est à dire en considérant arbitrairement  $D$  dans  $H(\text{div}, \Omega^-)$  (et non nécessairement à divergence nulle). Le second membre de  $(\mathcal{E}_1)$  doit alors être modifié, en remplaçant  $D$  par le champ*

$$\tilde{D} = D - \nabla \mathcal{N}(\frac{1}{\varepsilon_r} \eta \nabla \cdot D).$$

*Avec ce second membre,  $(\mathcal{E}_1)$  est encore équivalent à  $(\mathcal{E}_2)$  avec le second membre  $D$  pour cette dernière. Nous avons en effet,  $\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{D}$  dans  $\Omega^-$  et cette relation provient de  $(\mathcal{E}_2)$ . Pour la déduire de  $(\mathcal{E}_1)$ , nous vérifions que la fonction  $\tilde{q} = \frac{1}{\varepsilon_r} [\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}) - \mathbf{D}]$  satisfait l'équation homogène de Lippmann-Schwinger (1.23).*

L'équivalence entre les problèmes  $(\mathcal{P})$ ,  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  étant établie, nous nous intéressons à présent aux propriétés des opérateurs intégraux. Si l'un des trois problèmes est bien posé au sens de Hadamard, les autres le sont également. Outre la question de savoir si ces problèmes sont bien posés, une motivation importante de l'analyse des opérateurs intégraux dans  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  réside dans la question de leur adéquation pour le calcul numérique. Le plus simple à analyser est celui de  $(\mathcal{E}_1)$ , parce qu'il est faiblement singulier. La VIE est cependant l'équation qui nous intéressera pour le calcul numérique. En effet, puisqu'elle est posée dans le volume, nous serons affranchis de la discrétisation de la normale à son bord, entraînant une bonne tolérance à la précision sur l'approximation du bord et l'utilisation de maillages structurés. L'utilisation d'un maillage structuré est intéressante pour l'application de méthodes d'optimisation sur la forme de l'obstacle, puisque la frontière du domaine peut varier à chaque itération de la méthode et qu'un maillage structuré serait moins contraignant d'un point de vue pratique, qu'un maillage non structuré. Nous terminons ce chapitre, en résumant quelques propriétés de ces opérateurs intégraux.

## 1.4 Quelques propriétés des opérateurs intégraux

### 1.4.1 Existence, unicité et stabilité

Nous abordons cette section par un résultat d'existence et d'unicité pour les problèmes étudiés. La question d'existence et d'unicité pour le problème de diffraction est bien connue. Pour l'existence par exemple, il existe dans la littérature plusieurs approches basées sur les méthodes intégrales (qui sont les plus répandues sur la question) et l'alternative de Fredholm (notamment dans [7] et [29]). En outre dans [11], une méthode de couplage entre formulation variationnelle et représentation intégrale est introduite. Elle consiste à substituer le problème de la diffraction dans un milieu superposé par une représentation intégrale sur un domaine borné. Cette méthode diffère cependant des méthodes intégrales classiques, en ce sens qu'elle conduit à un opérateur intégral régulier. Quant à l'unicité pour le problème de la diffraction, elle est basée sur le théorème d'intégrations par parties (Green et Gauss) et la propriété de continuation unique pour les équations elliptiques, avec l'utilisation de la condition de radiation de Silver-Müller (ou condition d'onde sortante) et le lemme de Rellich. A l'instar des auteurs des travaux cités ci-dessus, nous allons utiliser l'alternative de Fredholm pour établir l'existence, puis l'unicité, pour les équations intégrales  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  et par la même occasion pour le problème  $(\mathcal{P})$ .

**Proposition 3.** *Soit le coefficient  $\varepsilon_r \in C^1(\overline{\Omega^-})$  avec  $\varepsilon_r(x) \neq 0, \forall x \in \overline{\Omega^-}$ , et*

$$\varepsilon_r(x) \neq -1, \forall x \in \Gamma. \quad (1.45)$$

*Alors la matrice d'opérateurs du problème  $(\mathcal{E}_1)$  :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \nabla \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta & -\nabla \mathcal{S}_\eta \\ \kappa^2 \gamma_n^- \mathcal{N}_\eta - \gamma_1^- \mathcal{N}_\tau & 1 - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta \end{pmatrix}$$

de  $L^2(\Omega^-)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $L^2(\Omega^-)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , est Fredholm d'indice zéro. S'il existe un point sur  $\Gamma$  où la condition (1.45) n'est pas satisfaite, alors la matrice n'est pas Fredholm.

**Preuve :**

Les opérateurs  $\mathcal{N} : L^2(\Omega^-) \rightarrow H^2(\Omega^-)$  et  $\mathcal{S} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega^-)$  sont bornés. Donc  $-\nabla \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta$  est compact de  $L^2(\Omega^-)^3$  dans lui-même,  $\kappa^2 \gamma_n^- \mathcal{N}_\eta - \gamma_1^- \mathcal{N}_\tau$  est compact de  $L^2(\Omega^-)^3$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\nabla \mathcal{S}_\eta$  est borné de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $L^2(\Omega^-)^3$ . Concernant l'opérateur  $\gamma_1^- \mathcal{S}_\eta$ , nous utilisons les relations de saut et obtenons pour  $x \in \Gamma$ ,

$$\gamma_1^- \mathcal{S}_\eta f(x) = \int_\Gamma \eta(y) \partial_{n_x} G_\kappa(x-y) f(y) ds(y) + \frac{1}{2} \eta(x) f(x).$$

Donc  $(1 - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta) f = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_r) f - \mathcal{T}(\eta f)$ , où sur notre surface qui est régulière, l'opérateur  $\mathcal{T}$  est borné de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , il est donc compact de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans lui-même. Avec  $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_r)$ , la matrice A peut alors être réécrite sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{B} \\ 0 & \alpha 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & 0 \\ \mathcal{K}_3 & \mathcal{K}_2 \end{pmatrix},$$

où  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  et  $\mathcal{K}_3$  sont des opérateurs compacts et  $\mathcal{B}$ , un opérateur borné. On constate que si la condition (1.45) est satisfaite, alors A est la somme d'un opérateur inversible et d'un opérateur compact. A est donc Fredholm d'indice zéro; et si il existe  $x \in \Gamma$  tel que  $\alpha(x) = 0$ , alors A n'est pas Fredholm. ■

Bien que l'unicité pour le problème de la diffraction soit une question bien connue, nous en donnons ici une démonstration.

**Théorème 5.** *La solution triviale est l'unique solution du problème de diffraction ( $\mathcal{P}$ ) avec  $\mathbf{F} \equiv 0$ .*

**Preuve :**

Soit une solution homogène  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  du problème de transmission (i.e solution du problème ( $\mathcal{P}$ ) avec second membre nul). Si  $\mathbf{F} \equiv 0$ , alors  $(\mathbf{E}|_{\Omega^+}, \mathbf{H}|_{\Omega^+}) = (\mathbf{E}_{diff}, \mathbf{H}_{diff})$ . On rappelle la condition de radiation de Silver-Müller pour  $(\mathbf{E}|_{\Omega^+}, \mathbf{H}|_{\Omega^+})$  :

$$\mathbf{H}|_{\Omega^+} \times \hat{x} - \mathbf{E}|_{\Omega^+} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow +\infty$$

uniformément dans toutes les directions  $\hat{x} = \frac{x}{r}$  où  $r = |x|$ . Des équations de Maxwell homogènes, on déduit que les champs  $\mathbf{E}|_{\Omega^+}$  et  $\mathbf{H}|_{\Omega^+}$  sont analytiques (ils sont solutions de l'équation vectorielle de Helmholtz). Par ailleurs, on a montré (preuve lemme 3) que :

$$\int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}|_{\Omega^+}|^2 = \mathcal{O}(1), \quad R \rightarrow +\infty,$$

où on rappelle que  $B_R = \{y \in \mathbb{R}^3; |y| < R\}$ ,  $\Gamma_R = \partial B_R$  et  $\Omega_R^+ = B_R \setminus \overline{\Omega^-}$ . On évalue alors l'expression suivante :

## 1.4 Quelques propriétés des opérateurs intégraux

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_R} (\mathbf{H}_{|\Omega^+} \times \mathbf{n}_R - \mathbf{E}_{|\Omega^+}) \cdot \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}} \\
&= \int_{\Gamma_R} (\mathbf{n}_R \times \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}}) \cdot \mathbf{H}_{|\Omega^+} - \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 \\
&= \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}}) \cdot \mathbf{H}_{|\Omega^+} - \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 - \int_{\Omega_R^+} (\nabla \times \mathbf{H}_{|\Omega^+} \cdot \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}} - \nabla \times \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}} \cdot \mathbf{H}_{|\Omega^+}) \\
&= \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}}) \cdot \mathbf{H}_{|\Omega^+} - \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 + i\kappa \int_{\Omega_R^+} \{ |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 + |\mathbf{H}_{|\Omega^+}|^2 \} \\
&= \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^-}}) \cdot \mathbf{H}_{|\Omega^-} - \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 + i\kappa \int_{\Omega_R^+} \{ |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 + |\mathbf{H}_{|\Omega^+}|^2 \} \\
&= - \int_{\Omega^-} (\nabla \times \mathbf{H}_{|\Omega^-} \cdot \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^-}} - \nabla \times \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^-}} \cdot \mathbf{H}_{|\Omega^-}) + i\kappa \int_{\Omega_R^+} \{ |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 + |\mathbf{H}_{|\Omega^+}|^2 \} - \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 \\
&= i\kappa \left[ \int_{\Omega^-} \{ \varepsilon_r |\mathbf{E}_{|\Omega^-}|^2 + |\mathbf{H}_{|\Omega^-}|^2 \} + \int_{\Omega_R^+} \{ |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 + |\mathbf{H}_{|\Omega^+}|^2 \} \right] - \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Donc

$$Re \int_{\Gamma_R} (\mathbf{H}_{|\Omega^+} \times \mathbf{n}_R - \mathbf{E}_{|\Omega^+}) \cdot \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}} = - \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 \longrightarrow 0 \quad R \rightarrow +\infty.$$

En effet, par l'estimation  $\int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 = \mathcal{O}(1)$ ,  $R \rightarrow +\infty$ , la condition de radiation de Silver-Müller et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\Gamma_R} (\mathbf{H}_{|\Omega^+} \times \mathbf{n}_R - \mathbf{E}_{|\Omega^+}) \cdot \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}} \longrightarrow 0 \quad R \rightarrow +\infty.$$

D'où  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}_{|\Omega^+}|^2 = 0$ . Par le lemme de Rellich, on conclut que  $\mathbf{E}_{|\Omega^+} \equiv 0$  et par suite que  $\mathbf{H}_{|\Omega^+} \equiv 0$ . L'équation (1.46) devient alors

$$0 = \int_{\Gamma_R} (\mathbf{H}_{|\Omega^+} \times \mathbf{n}_R - \mathbf{E}_{|\Omega^+}) \cdot \overline{\mathbf{E}_{|\Omega^+}} = i\kappa \int_{\Omega^-} \{ \varepsilon_r |\mathbf{E}_{|\Omega^-}|^2 + |\mathbf{H}_{|\Omega^-}|^2 \}.$$

C'est à dire

$$\int_{\Omega^-} \{ \varepsilon_r |\mathbf{E}_{|\Omega^-}|^2 + |\mathbf{H}_{|\Omega^-}|^2 \} = 0,$$

et donc  $\mathbf{E}_{|\Omega^-} \equiv 0$  et  $\mathbf{H}_{|\Omega^-} \equiv 0$ , puisque  $\varepsilon_r > 0$ . Ceci établit donc l'unicité pour le problème  $(\mathcal{P})$ .  $\blacksquare$

Le théorème suivant exprime que les équations intégrales  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  (et donc le problème de diffraction  $(\mathcal{P})$ ) sont bien posés au sens de Hadamard. C'est une conséquence des deux résultats précédents et des résultats d'équivalence de la section précédente.

**Théorème 6.** *Sous les hypothèses du problème de diffraction  $(\mathcal{P})$ , la VIE  $(\mathcal{E}_2)$  admet une solution unique, qui dépend continûment de la donnée  $\mathbf{F}$ .*

### 1.4.2 Quelques propriétés de l'opérateur de la VIE

Des questions plus générales sur les propriétés de l'opérateur intégral fortement singulier de la VIE ( $\mathcal{E}_2$ ) dans les espaces  $L^2$  et  $H(\text{div})$ , en particulier sa théorie spectrale, restent largement ouvertes. Nous résumons cependant quelques propriétés de l'opérateur, dans la proposition suivante :

**Proposition 4.** Soit  $\varepsilon_r \in C^1(\overline{\Omega^-})$  et  $\eta = 1 - \varepsilon_r$ .

(i) L'opérateur intégral volumique

$$\mathcal{A} : \mathbf{E} \mapsto \nabla \mathcal{M}(\eta \mathbf{E}) - \kappa^2 \mathcal{N}(\eta \mathbf{E})$$

est borné de  $L^2(\Omega^-)^3$  dans  $L^2(\Omega^-)^3$  et de  $H(\text{div}, \Omega^-)$  dans  $H(\text{div}, \Omega^-)$ .

(ii) Si  $\mathbf{E} \in L^2(\Omega^-)^3$  est solution de

$$(1 - \mathcal{A})\mathbf{E} = \mathbf{D},$$

avec  $\mathbf{D} \in H(\text{div}, \Omega^-)$ , alors  $\mathbf{E} \in H(\text{div}, \Omega^-)$ .

(iii) Si  $\varepsilon_r(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \overline{\Omega^-}$  et  $\varepsilon_r(x) \neq -1$ ,  $\forall x \in \Gamma$ , alors le noyau de l'opérateur  $1 - \mathcal{A}$  dans  $L^2(\Omega^-)^3$  est de dimension finie, et la codimension de la fermeture dans  $L^2(\Omega^-)^3$  de l'image de  $H(\text{div}, \Omega^-)$  est finie.

(iv) Si  $\varepsilon_r(x) \geq \varepsilon_1$  pour tout  $x \in \Omega^-$ , où  $\varepsilon_1$  est une constante strictement positive, alors l'opérateur  $1 - \mathcal{A}$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro dans  $L^2(\Omega^-)^3$ , et est fortement elliptique : Il existe un opérateur compact  $\mathcal{K}_0$  et une constante  $c > 0$  tels que pour tout  $\mathbf{E} \in L^2(\Omega^-)^3$ , on ait l'inégalité de Gårding suivante :

$$\int_{\Omega^-} \overline{\mathbf{E}(x)} \cdot (1 - \mathcal{A})\mathbf{E}(x) dx \geq c \|\mathbf{E}\|_{L^2(\Omega^-)}^2 - \|\mathcal{K}_0 \mathbf{E}\|_{L^2(\Omega^-)}^2. \quad (1.47)$$

**Preuve :**

Les assertions (i)–(iii) sont des corollaires des résultats précédents. Nous n'allons donc montrer que l'inégalité de Gårding (1.47). A une perturbation compacte près, l'opérateur  $\mathcal{A}$  coïncide avec  $(1 - \varepsilon_r)\mathcal{P}$ , où l'opérateur  $\mathcal{P}$  est défini avec la solution fondamentale de l'équation de Laplace :

$$\mathcal{P}\mathbf{E}(x) = \nabla \int_{\Omega^-} \nabla_y G_0(x - y) \cdot \mathbf{E}(y) dy; \quad G_0(x - y) = \frac{1}{4\pi|x - y|}.$$

La forme quadratique  $(\mathbf{E}, \mathcal{P}\mathbf{E}) = \int_{\Omega^-} \overline{\mathbf{E}(x)} \cdot \mathcal{P}\mathbf{E}(x) dx$  sur  $L^2(\Omega^-)^3$ , est la restriction à  $\Omega^-$  de la forme correspondante sur  $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ , en prolongeant par zéro à  $\mathbb{R}^3$ . Sur  $\mathbb{R}^3$ , l'opérateur  $\mathcal{P}$  est un multiplicateur de Fourier par la matrice  $\widehat{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^\top)/|\boldsymbol{\xi}|^2$ . Cette matrice définit un projecteur orthogonal, et ainsi  $\mathcal{P}$  et  $1 - \mathcal{P}$  sont tous les deux semi-définis positifs dans  $L^2(\Omega^-)^3$ . Sachant que la multiplication par une fonction continue sur  $\overline{\Omega^-}$  commute avec  $\mathcal{P}$  modulo des opérateurs compacts sur  $L^2(\Omega^-)^3$ , définissons :

$$\varepsilon_r^-(x) = \min\{1, \varepsilon_r(x)\}.$$

Alors à une perturbation compacte près, nous avons :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}, (1 - \mathcal{A})\mathbf{E}) &\sim (\mathbf{E}, (1 - (1 - \varepsilon_r)\mathcal{P})\mathbf{E}) \\ &= (\mathbf{E}, \varepsilon_r^- \mathbf{E}) + (\mathbf{E}, (1 - \varepsilon_r^-)(1 - \mathcal{P})\mathbf{E}) + (\mathbf{E}, (\varepsilon_r - \varepsilon_r^-)\mathcal{P}\mathbf{E}) \\ &\sim (\mathbf{E}, \varepsilon_r^- \mathbf{E}) + (\mathbf{E}_1, (1 - \mathcal{P})\mathbf{E}_1) + (\mathbf{E}_2, \mathcal{P}\mathbf{E}_2) \\ &\geq (\mathbf{E}, \varepsilon_r^- \mathbf{E}), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{E}_1 = \sqrt{1 - \varepsilon_r^-} \mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_2 = \sqrt{\varepsilon_r - \varepsilon_r^-} \mathbf{E}$ .

Ceci prouve (1.47) avec  $c = \min\{1, \varepsilon_1\}$ . ■

Dans ce chapitre, nous avons rigoureusement dérivé du problème de diffraction, deux équations intégrales en considérant une permittivité électrique discontinue à travers le bord du diélectrique ;

## 1.4 Quelques propriétés des opérateurs intégraux

---

ce qui est du point de vue de la physique, une hypothèse plus réaliste que la continuité dans l'espace tout entier. L'équation intégrale volumique à noyau fortement singulier (la VIE) obtenue ici, est analysée après avoir justifié son équivalence avec le problème de diffraction. Cette analyse est effectuée en utilisant la seconde équation formulée, qui est un système couplé surface-volume, d'équations intégrales. Nous avons d'abord justifié également l'équivalence de ce système couplé, à noyau faiblement singulier, avec la VIE (et donc aussi avec le problème de diffraction). Nous avons aussi utilisé l'unicité pour le problème de diffraction et la théorie de Fredholm appliquée au système couplé, pour montrer que les problèmes (et notamment la VIE dans l'espace  $L^2$ ) sont tous bien posés au sens de Hadamard.

L'analyse de la VIE a été motivée par la question de son comportement dans l'approximation numérique de la solution. Puisque l'équation est définie dans l'espace  $L^2$  et y satisfait une inégalité de Gårding, alors elle est appropriée aux approximations numériques par la méthode des éléments finis dans  $L^2$ , car toute méthode de Galerkin conduira à un schéma de discrétisation stable. Les chapitres suivants seront donc consacrés à la résolution numérique de la VIE par la méthode des éléments finis, en commençant par une discussion dans le prochain chapitre, sur le traitement des intégrales singulières intervenant dans l'approximation de la solution.



## Chapitre 2

# Résolution numérique de l'équation intégrale volumique

Les méthodes d'équations intégrales appliquées aux problèmes physiques (élastostatique, électrostatique, électromagnétisme, acoustique, ...) font intervenir différents noyaux dans les opérateurs intégraux définissant ces équations. Ces noyaux ont cependant en commun, la présence au dénominateur, de la distance entre le point d'observation et la variable d'intégration sur la surface pour les méthodes intégrales de frontière, ou dans le domaine pour les équations intégrales de volume. Le point d'observation est le point où la quantité physique (potentiel, pression, ...) veut être évaluée. Ainsi, l'intégrale sera dite singulière lorsque le point d'observation se situera dans le domaine d'intégration, et quasi-singulière lorsqu'il sera en dehors, mais assez proche comparé à la taille du domaine. Une intégrale singulière est dite d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si son intégrande est en  $\frac{1}{R^\alpha}$  où  $R$  est la distance entre le point d'observation et le point d'intégration. Si  $N$  est la "dimension" du domaine (en tant que sous-variété différentielle de  $\mathbb{R}^3$ ), l'intégrale est faiblement singulière, fortement singulière ou hypersingulière si on a respectivement  $\alpha < N$ ,  $\alpha = N$  ou  $\alpha > N$ . Les intégrales faiblement singulières sont convergentes, tandis que les intégrales fortement singulières et hypersingulières sont divergentes et elles sont généralement définies (sous certaines conditions) au sens de la valeur principale de Cauchy ou de la partie finie de Hadamard. La résolution numérique par des méthodes intégrales requiert l'évaluation d'intégrales singulières et quasi-singulières qui déterminent les matrices d'influences des systèmes. L'évaluation de ces intégrales est une question centrale, puisqu'elle gouverne la précision et la complexité de l'approximation de la solution au problème étudié. Excepté pour des cas particuliers, où la forme simple de l'intégrande faiblement singulière avec une géométrie simple du domaine d'intégration, permettent l'évaluation analytique (voir par exemple [38] et [13], pour la solution fondamentale du Laplacien sur le triangle) et où les intégrales sont suffisamment régulières pour appliquer directement les formules de quadratures standard, les intégrales sont évaluées par des formules d'intégration numérique combinées à des techniques de traitement des singularités décrites dans la littérature (voir par exemple [23] pour une synthèse de ces techniques). Les intégrales quasi-singulières sont en nombre plus élevé que les intégrales singulières dans la matrice d'influence et les techniques développées, sont établies aussi bien pour les intégrales singulières que pour les intégrales quasi-singulières. En effet pour ces dernières, bien que régulières au sens mathématique, la valeur du noyau change de manière drastique au voisinage du point d'observation et une application directe des formules de quadrature serait moins précise, à moins d'utiliser un trop grand nombre de points. Les techniques de traitement des singularités dans la littérature se résument en deux méthodes principales : une méthode de "soustraction de la singularité", et une autre "d'élimination de la singularité". La première consiste à soustraire de l'intégrande, une fonction de même comportement singulier que celle-ci (généralement un développement de Taylor de l'intégrande) et qui peut être intégrée analytiquement. L'intégrale restant après la soustraction est alors "régulière" et peut être intégrée numériquement. C'est le cas par exemple dans [1] pour des méthodes intégrales de frontière et dans [30] pour l'équation intégrale volumique, où l'intégrande est le tenseur de Green dynamique (la solution fondamentale de l'opérateur de Maxwell (1.22) définie à la remarque 6 du chapitre précédent). Dans ce dernier

cas, la fonction soustraite est le tenseur de Green statique (développement de Taylor à l'ordre 1 de l'exponentielle dans la solution fondamentale de Helmholtz). La méthode "d'élimination de la singularité" consiste quant à elle, en des changements de variables et/ou de coordonnées dont les Jacobiens permettent de régulariser l'intégrande, en affaiblissant la singularité ou en l'éliminant (pour le cas d'intégrales faiblement singulières comme dans [28] et [34]). L'intégrale ainsi "régularisée" peut être évaluée directement par des formules de quadratures. Ces transformations de coordonnées sont utilisées soit seules comme dans [16], [21] en coordonnées cartésiennes ou dans [22] en coordonnées polaires, soit elles sont combinées à d'autres transformations pour améliorer la précision ou réduire la complexité de l'évaluation (par exemple dans [24], [25] et [49], où la première transformation est effectuée en coordonnées polaires). Les méthodes de "soustraction de la singularité" et "d'élimination de la singularité" sont par ailleurs combinées dans [14], pour des intégrales quasi-singulières, faiblement singulières et "valeur principale" de Cauchy intervenant dans les méthodes intégrales de frontière. Outre les deux principales méthodes, on note une méthode de "subdivision de domaine" spécialement conçue pour les intégrales quasi-singulières. Elle consiste en une subdivision du domaine d'intégration en sous-domaines qui sont de plus en plus raffinés près du point d'observation (voir [27] et [32]). On note par ailleurs quelques techniques développées pour améliorer l'application des formules de quadratures standard dans l'évaluation de certaines intégrales singulières ; dans [50], des transformations polynômiales de degrés 2 et 3 sont utilisées pour des intégrales quasi-singulières. La technique est auto-adaptative, la rendant inactive si non nécessaire (i.e pour des distances "suffisamment" grandes entre le point d'observation et le domaine d'intégration). Dans [4], une transformation dite bi-cubique est introduite pour évaluer une intégrale "valeur principale" de Cauchy sur le segment. Elle divise l'intervalle d'intégration au point de singularité et introduit une transformation polynômiale de degré 3 sur chaque sous-intervalle. Cette méthode est améliorée dans [47] qui en discute et en précise la validité. L'intégrale "valeur principale" de Cauchy est également évaluée en dimension 1 dans [20], directement par une méthode d'intégration et dans un cadre plus général où le domaine peut être une courbe ; Dans ce cas, on voit apparaître un terme logarithmique supplémentaire provenant du Jacobien dans le passage de l'élément courbe au segment droit. Dans [31], une formule est donnée pour l'évaluation sur le segment, des intégrales singulières et hypersingulières existant au sens "partie finie". En plus des techniques citées ci-dessus pour l'évaluation des intégrales singulières et quasi-singulières, une analyse générale est faite dans [45] pour leurs évaluations. Cette analyse est basée sur la propriété d'homogénéité communément satisfaite par les solutions fondamentales des différents problèmes, et elle discute l'évaluation des intégrales selon leurs ordres de singularité. Aussi dans [40], après une généralisation des intégrales "valeur principale" de Cauchy et "partie finie" de Hadamard, une analyse est faite, établissant des conditions faibles pour l'existence (convergence, finitude) de ces intégrales.

Les techniques exposées au précédent paragraphe, constituent à notre connaissance l'essentiel des techniques de traitement des singularités, bien que les références citées ici ne couvrent pas toute la littérature à ce sujet. Ces techniques sont établies pour la plupart pour des intégrales de surface, provenant des méthodes intégrales de frontière en dimensions 2 et 3. Elles sont sûrement transposables pour certaines, aux intégrales de volume en dimension 3. C'est le cas dans [30], de la méthode de "soustraction de la singularité". Cependant la question du traitement des singularités pour des intégrales de volume 3D a assez peu été explorée, à l'instar de l'analyse des méthodes d'intégrales volumiques. Toutefois pour les équations de Maxwell en électromagnétisme, les singularités de l'opérateur intégral volumique avec le tenseur de Green dynamique ont été traitées avec deux méthodes principales de régularisation. L'une est une méthode d'exclusion de volume (voir [36] et [26]) et l'autre est une version de la méthode classique de soustraction de la singularité (voir [30]). La première, développée dans [36], consiste à régulariser l'intégrande par extraction dans le domaine d'intégration, d'un volume arbitraire autour de la singularité puis d'appliquer une méthode de soustraction de la singularité dans le volume soustrait. L'aspect pratique de cette méthode n'est cependant intéressant que pour des volumes extraits aussi large que possible avec une géométrie simple. Ces conditions restreignent l'application de la méthode comme dans [26], où la méthode est appliquée sur des pavés de  $\mathbb{R}^3$  avec une exclusion de volumes cubiques. Parallèlement à ces deux méthodes développées pour le tenseur de Green dynamique, la recherche d'une méthode "d'élimination de la singularité" pour des intégrales de volume nous a conduit dans ce chapitre, au développement d'une méthode de changements de variables. La méthode est établie pour des inté-

## 2.1 Formulation variationnelle et discrétisation

grales définies sur des tétraèdres, en prévision de la discrétisation de l'équation intégrale volumique par des éléments tétraédriques. C'est une extension au cas volumique de la méthode introduite par Jean GAY pour le cas surfacique (voir [12, 33, 35, 39]). Parce que basée uniquement sur des changements de variables dans les domaines d'intégrations, c'est une méthode générale, au sens où elle est applicable à une large famille de noyaux issus d'une méthode d'intégrales volumiques.

Le chapitre sera alors abordé par une formulation variationnelle de l'équation intégrale volumique étudiée au chapitre 1, suivie de sa discrétisation par des éléments finis dans la section 2.1 pour aboutir à un système linéaire à résoudre. Ensuite dans la section 2.2, on développera la méthode de changements de variables pour le traitement des singularités d'intégrales de volume. Enfin dans la section 2.3, on appliquera la méthode pour régulariser l'opérateur intégral volumique afin d'évaluer les coefficients de la matrice d'influence du système.

## 2.1 Formulation variationnelle et discrétisation

Nous voulons résoudre numériquement l'équation intégrale volumique :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E} \in L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3) \text{ tel que :} \\ (\mathbf{1} - \mathcal{A}_{\kappa, \eta}) \mathbf{E} = \mathbf{D}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\Omega^-$  est un domaine borné et suffisamment régulier, représentant le diélectrique pour le problème de diffraction défini au chapitre précédent. Le second membre  $\mathbf{D}$  est un champ de vecteurs donné : le champ incident fourni par la source d'alimentation primaire. L'opérateur  $\mathcal{A}_{\kappa, \eta}$  est défini pour tout champ de vecteurs  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3)$ , par

$$\mathcal{A}_{\kappa, \eta} \mathbf{u}(x) = \nabla \int_{\Omega^-} \eta(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u}(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{u}(y) dy, \quad (2.2)$$

avec  $\eta = 1 - \varepsilon_r$ , où  $\varepsilon_r$  est la permittivité relative du diélectrique par rapport au vide.  $\eta$  est une fonction scalaire définie dans le domaine  $\Omega^-$ . On rappelle que  $G_\kappa(x-y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ .

La méthode de Galerkin choisie ici pour discrétiser le problème (2.1) est la méthode des éléments finis. Nous commençons pour cela, par introduire une formulation variationnelle au problème, dans l'espace  $L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3)$ . Notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit Hermitien dans  $L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3)$ , i.e pour tous  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3)$ ,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega^-} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}},$$

sachant que l'opérateur  $\mathcal{A}_{\kappa, \eta}$  est borné de  $L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3)$  dans lui même (proposition 4). La notation  $\bar{\mathbf{v}}$  désigne le champ de vecteurs complexes, conjugué du champ  $\mathbf{v}$ . La formulation variationnelle est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E} \in L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3) \text{ tel que :} \\ \langle \mathbf{E}, \mathbf{E}' \rangle - \langle \mathcal{A}_{\kappa, \eta} \mathbf{E}, \mathbf{E}' \rangle = \langle \mathbf{D}, \mathbf{E}' \rangle, \quad \forall \mathbf{E}' \in L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3). \end{cases} \quad (2.3)$$

Nous utilisons ensuite la méthode des éléments finis pour discrétiser cette formulation. Il s'agit, dans cette méthode, d'approcher l'espace  $L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3)$  par des espaces de dimension finie, définis par un maillage du domaine. Nous nous limitons ici à un maillage par éléments tétraédriques droits. Comme nous le verrons aux prochaines sections, nous ne savons traiter pour le moment les singularités de l'opérateur intégral, que pour cette géométrie. Le domaine  $\Omega^-$  sera donc approché par un domaine polyédrique  $\Omega_h^-$ , maillé par un ensemble  $\mathcal{T}_h$  de tétraèdres droits. Nous avons envisagé cette approche pour la méthode volumique, car la normale au bord du domaine n'intervient pas.

Soit donc  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{T}_h = \{K_n : n = 1, \dots, N\}$  un maillage de  $\Omega^-$ , par  $N$  tétraèdres  $K_n$  tels que :

- i)  $\overline{\Omega}_h^- = \bigcup_{n=1}^N K_n$ ,
- ii) pour tous  $n, m \in \{1, 2, \dots, N\}$ , avec  $n \neq m$ ,  $K_n \cap K_m$  est soit vide, soit un sommet commun, soit exactement une arête commune, ou exactement une face commune.

Les sommets du maillage  $\mathcal{T}_h$  sont les sommets des éléments qui le composent. Par convention, le paramètre  $h$  désigne le maximum des diamètres des  $N$  tétraèdres du maillage. Nous associons au maillage  $\mathcal{T}_h$ , les éléments finis d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $\mathbb{P}_k$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  de degré inférieur ou égal à  $k$  par rapport à l'ensemble des composantes de la variable. C'est à dire que tout  $p \in \mathbb{P}_k$  s'écrit sous la forme  $p(x) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq k} a_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ , où  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$  et  $a_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \in \mathbb{C}$ . L'espace associé pour des fonctions scalaires est donné par

$$V_h = \{f \in L^2(\Omega_h^-, \mathbb{C}) : f|_{K_n} \in \mathbb{P}_k; n = 1, \dots, N\}.$$

Nous désignerons dorénavant de manière générale par  $N_{dl} \in \mathbb{N}^*$ , le nombre de degrés de liberté et par  $(\varphi_j)_{j=1, \dots, N_{dl}}$ , la base de  $V_h$  associée. Si  $k = 0$ , alors  $N_{dl} = N$  et les fonctions  $\varphi_j$  sont constantes sur chaque  $K_n$  comme défini précédemment. Si  $k \geq 1$ , alors les fonctions  $\varphi_j$  sont associées à la famille  $(\sigma_j)_{j=1, \dots, N_{dl}}$  des nœuds des degrés de liberté, i.e  $\varphi_j(\sigma_i) = \delta_{ij}$ ;  $i, j = 1, \dots, N_{dl}$ .

Pour la solution vectorielle complexe du problème (2.1), nous allons donc utiliser l'espace discret

$$W_h = \left\{ v \in L^2(\Omega_h^-, \mathbb{C}^3) : v = \sum_{j=1}^{N_{dl}} v_j \varphi_j; v_j \in \mathbb{C}^3, \forall j = 1, \dots, N_{dl} \right\}.$$

Dans le cadre de la thèse, nous nous limiterons en pratique aux éléments finis de Lagrange d'ordres  $k = 0, 1$ .

On a pour tout  $j = 1, \dots, N_{dl}$ ,  $v_j = \begin{cases} v|_{\kappa_j} & \text{si } k = 0 \\ v(\sigma_j) & \text{si } k = 1. \end{cases}$

**Remarque 9.** Si  $k = 1$ , on peut considérer des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  discontinus.  $V_h$  est alors l'espace des fonctions affines sur chaque tétraèdre  $K_n$  de  $\mathcal{T}_h$ , et discontinues à travers les interfaces de ces tétraèdres. Nous pouvons notamment considérer les éléments finis introduits par M. CROUZEIX et P.- A. RAVIART (voir [10]) où les fonctions de  $V_h$  sont discontinues aux interfaces des tétraèdres, mais continues au barycentre de chacune des faces. Avec ces éléments finis, toute fonction de  $V_h$  est entièrement déterminée par ses valeurs en ces barycentres. En effet, soit  $K$ , un tétraèdre non dégénéré de sommets  $(X_j)_{j=1,2,3,4}$ . Si pour chaque  $j = 1, 2, 3, 4$ , on note  $Y_j$  le barycentre de la face ne contenant pas  $X_j$  (i.e  $Y_j = \frac{1}{3} \sum_{i=1, i \neq j}^4 X_i$ ), alors les points  $Y_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) forment aussi un tétraèdre non dégénéré et constituent donc un ensemble unisolvant pour les polynômes de degré 1 sur  $K$ . En plus, si nous notons  $(\lambda_j(x))_{j=1,2,3,4}$ , les coordonnées barycentriques d'un point  $x \in \mathbb{R}^3$  par rapport aux sommets de  $K$ , i.e

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j(x) X_j = x \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^4 \lambda_j(x) = 1,$$

les fonctions  $\varphi_i(x) = 1 - 3\lambda_i(x)$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$  forment une base de  $\mathbb{P}_1$  sur  $K$  telle que  $\varphi_i(Y_j) = \delta_{ij}$ .

Introduisons l'opérateur  $\mathcal{A}_{\kappa, \eta, h}$  approchant  $\mathcal{A}_{\kappa, \eta}$  et défini sur  $W_h$  par :

$$\mathcal{A}_{\kappa, \eta, h} \mathbf{u}(x) = \nabla \int_{\Omega_h^-} \eta(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u}(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega_h^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{u}(y) dy. \quad (2.4)$$

L'approximation numérique du problème variationnel (2.3) est alors donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in W_h \text{ tel que :} \\ \langle \mathbf{E}_h, \mathbf{E}'_h \rangle - \langle \mathcal{A}_{\kappa, \eta, h} \mathbf{E}_h, \mathbf{E}'_h \rangle = \langle \mathbf{D}, \mathbf{E}'_h \rangle, \quad \forall \mathbf{E}'_h \in W_h. \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.1 Formulation variationnelle et discrétisation

**Remarque 10.** *Le produit Hermitien dans l'approximation ci-dessus, est en fait le produit dans l'espace  $L^2(\Omega_h^-, \mathbb{C}^3)$ , défini exactement comme précédemment dans  $L^2(\Omega^-, \mathbb{C}^3)$ .*

On vérifie aisément que l'approximation (2.5) est équivalente à la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in W_h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega_h^-} \mathbf{E}_h \varphi_i - \int_{\Omega_h^-} (\mathcal{A}_{\kappa, \eta, h} \mathbf{E}_h) \varphi_i = \int_{\Omega_h^-} \mathbf{D} \varphi_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_{dl}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

La décomposition unique du champ  $\mathbf{E}_h = \sum_{j=1}^{N_{dl}} \mathbf{E}_{h,j} \varphi_j$  dans l'espace  $W_h$ , nous conduit au système d'équations vectorielles :

$$\sum_{j=1}^{N_{dl}} \mathbf{E}_{h,j} \int_{\Omega_h^-} \varphi_j \varphi_i - \sum_{j=1}^{N_{dl}} \int_{\Omega_h^-} \mathcal{A}_{\kappa, \eta, h} (\varphi_j \mathbf{E}_{h,j}) \varphi_i = \int_{\Omega_h^-} \mathbf{D} \varphi_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_{dl}, \quad (2.7)$$

dont les inconnues sont les  $N_{dl}$  vecteurs  $\mathbf{E}_{h,j}$  ( $j = 1, \dots, N_{dl}$ ). Le système peut s'écrire

$$\sum_{j=1}^{N_{dl}} (a_{h,ij} \mathbb{I} + \kappa^2 \mathcal{A}_{\kappa, \eta, h, ij}) \mathbf{E}_{h,j} = \mathbf{D}_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_{dl}. \quad (2.8)$$

La matrice  $\mathbb{I}$  est l'identité de  $\mathbb{R}^3$  et pour  $i, j = 1, \dots, N_{dl}$ , on a posé :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i &= \int_{\Omega_h^-} \mathbf{D}(x) \varphi_i(x) dx \\ a_{h,ij} &= \int_{\Omega_h^-} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La matrice  $\mathcal{A}_{\kappa, \eta, h, ij}$  est définie à l'aide de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\kappa, \eta, h}$  introduit au (2.4) et pour tout vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ , par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\kappa, \eta, h, ij} \mathbf{u} &= \int_{\Omega_h^-} [\mathcal{A}_{\kappa, \eta, h} \mathbf{u} \varphi_j](x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{\Omega_h^-} \varphi_i(x) \nabla \left( \int_{\Omega_h^-} \eta(y) \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ &\quad - \kappa^2 \left( \int_{\Omega_h^-} \varphi_i(x) \int_{\Omega_h^-} \eta(y) \varphi_j(y) G_\kappa(x-y) dy dx \right) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

On peut encore écrire le système d'équations vectorielles (2.8) de manière plus condensée :

$$\bar{\mathcal{A}}_{\kappa, \eta, h} \bar{\mathbf{E}}_h = \bar{\mathbf{D}}, \quad (2.11)$$

avec  $\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}_i)_{i=1, \dots, N_{dl}}$  et  $\bar{\mathbf{E}}_h = (\mathbf{E}_{h,i})_{i=1, \dots, N_{dl}}$ , des vecteurs (ou blocs) de  $N_{dl}$  vecteurs de  $\mathbb{C}^3$ , et  $\bar{\mathcal{A}}_{\kappa, \eta, h} = (\bar{\mathcal{A}}_{\kappa, \eta, h, ij} = a_{h,ij} \mathbb{I} + \kappa^2 \mathcal{A}_{\kappa, \eta, h, ij})_{i,j=1, \dots, N_{dl}}$  une matrice carré (ou bloc) de  $N_{dl} \times N_{dl}$  matrices carrés  $3 \times 3$  à coefficients complexes.

La résolution du système linéaire (2.11) requiert l'assemblage de la matrice  $\bar{\mathcal{A}}_{\kappa, \eta, h}$  et du vecteur  $\bar{\mathbf{D}}$ , c'est à dire l'évaluation des intégrales dans (2.9) et (2.10). La différentiation de l'intégrale par le gradient ne peut être évaluée analytiquement et la commutation avec l'intégration pour s'affranchir des dérivations numériques conduit à des intégrandes fortement singulières ( $\mathcal{O}(\frac{1}{R^3})$ ,  $R \rightarrow 0$ ) pour

(2.10) à cause des dérivées secondes de la solution fondamentale de Helmholtz  $G_k$ . La partition de  $\bar{\Omega}_h^-$  en éléments tétraédriques ramène l'évaluation des intégrales sur des tétraèdres. Les intégrales  $D_i$  et  $a_{h,ij}$  seront évaluées par des formules de quadratures standard, puisqu'elles sont régulières. Quant aux matrices  $\mathcal{A}_{\kappa,\eta,h,ij}$ , les singularités pour les dérivées secondes du noyau de Helmholtz surviennent lorsque les points d'intégration en  $x$  et en  $y$  sont soit dans le même tétraèdre (cas de singularité) ou dans des tétraèdres distincts et voisins (cas de quasi-singularité) à cause du comportement singulier de l'intégrande pour des points "proches". Les sections suivantes seront donc consacrées au traitement des intégrales singulières et quasi-singulières, pour l'évaluation des intégrales volumiques du type des  $\mathcal{A}_{\kappa,\eta,h,ij}$ .

Nous commençons par développer, ici, une méthode basée sur des changements de variables dans les tétraèdres. La méthode est inspirée de celle introduite par Jean GAY (ingénieur au CEA) sur les triangles (voir [12, 33, 35, 39]). Elle fait intervenir les transformations de Duffy [15] et permet la levée de la singularité pour certains ordres de singularité. Puisque la méthode n'est basée que sur des changements de variables dans le domaine d'intégration, elle est indépendante de l'intégrande et donc applicable à plusieurs types de noyaux d'opérateurs intégraux. Cette méthode sera ensuite appliquée à l'opérateur intégral volumique, pour évaluer les coefficients singuliers de la matrice d'influence du système linéaire (2.8).

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

Nous nous proposons dans cette section, de traiter les intégrales singulières et quasi-singulières de la forme

$$I_{\alpha,KL} = \int_K \int_L \frac{F(x,y)}{|x-y|^\alpha} dy dx, \quad (2.12)$$

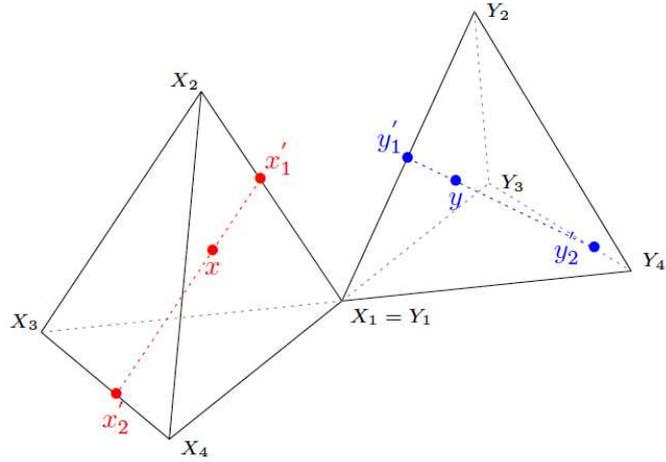
où  $F$  est une fonction régulière qui peut être scalaire, vectorielle ou matricielle. L'ordre de singularité  $\alpha$  est un réel strictement positif,  $K$  et  $L$  sont des tétraèdres non disjoints. Lorsque les tétraèdres sont disjoints, l'intégrale est régulière et donc évaluée directement et éventuellement par des formules de quadratures standard. Les sommets de  $K$  et de  $L$  seront notés  $(X_i)_{i=1,\dots,4}$  et  $(Y_j)_{j=1,\dots,4}$  respectivement. Le principe ici est, par divers changements de variables, de décrire les singularités par des variables uni-dimensionnelles sur le segment  $[0, 1]$ , puis d'essayer d'éliminer ces singularités à l'aide des Jacobiens de ces transformations qui sont singulières. La méthode est introduite pour les positions relatives des tétraèdres  $K$  et  $L$ , constituant toutes les configurations possibles dans un maillage tétraédrique conforme. C'est à dire outre le cas où les tétraèdres sont disjoints, les configurations où :

- i) ils ont exactement un sommet commun,
- ii) ils ont exactement une arête commune,
- iii) ils ont exactement une face commune,
- iv) ils sont confondus.

En fin de section, nous présentons un traitement pour le cas particulier d'une intégrale où la paire de domaines est constituée du tétraèdre et de l'une de ses faces. Dans la plupart de ces configurations, différentes options se sont offertes à nous pour transformer les variables d'intégration, révélant ainsi plus d'une méthode pour la même configuration. Cependant ces diverses méthodes dans la même configuration ont théoriquement le même impact sur l'ordre de singularité de l'intégrale. Nous avons choisi de toutes les présenter ici, car elles présentent néanmoins des différences pratiques, notamment dans la mise en œuvre informatique et le choix des formules de quadratures pour l'évaluation de l'intégrale.

### 2.2.1 Les tétraèdres ont un sommet commun

Nous présentons pour cette configuration, deux méthodes selon les descriptions des variables d'intégration dans les tétraèdres.



### Méthode 1

Nous décrivons  $x \in K$ , en le considérant sur le segment  $[x'_1, x'_2]$ , où  $x'_1$  et  $x'_2$  sont respectivement sur les segments  $[X_1, X_2]$  et  $[X_3, X_4]$  :

$$x'_1 = (1 - \lambda_2)X_1 + \lambda_2 X_2 \quad ; \quad \lambda_2 \in [0, 1]$$

$$x'_2 = (1 - \lambda_3)X_4 + \lambda_3 X_3 \quad ; \quad \lambda_3 \in [0, 1]$$

$$x = (1 - \lambda_1)x'_1 + \lambda_1 x'_2 \quad ; \quad \lambda_1 \in [0, 1].$$

$y$  est décrit de manière analogue dans le tétraèdre  $L$  :

$$y'_1 = (1 - \mu_2)Y_1 + \mu_2 Y_2 \quad ; \quad \mu_2 \in [0, 1]$$

$$y'_2 = (1 - \mu_3)Y_4 + \mu_3 Y_3 \quad ; \quad \mu_3 \in [0, 1]$$

$$y = (1 - \mu_1)y'_1 + \mu_1 y'_2 \quad ; \quad \mu_1 \in [0, 1].$$

Nous avons :

$$y - x = \mu_1(y'_2 - y'_1) - \lambda_1(x'_2 - x'_1) + y'_1 - x'_1,$$

avec

$$y'_1 - x'_1 = \mu_2(Y_2 - X_1) - \lambda_2(X_2 - X_1) \quad (\text{puisque } X_1 = Y_1).$$

Donc

$$y - x = 0 \iff (\lambda_1 = \mu_1 = 0 \text{ et } y'_1 - x'_1 = 0) \iff \lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0.$$

Exprimons l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  à l'aide de ce changement de variables. Pour cela, déterminons les Jacobiens  $J_x$  et  $J_y$  de ces transformations.

$$J_x = \left| \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} \times \frac{\partial x}{\partial \lambda_3} \right) \right|,$$

avec

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = x'_2 - x'_1 = X_4 - X_1 + \lambda_2(X_1 - X_2) + \lambda_3(X_3 - X_4),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_2} = (1 - \lambda_1)(X_2 - X_1),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_3} = \lambda_1(X_3 - X_4).$$

Désignons par  $\mathcal{P}(K)$  le parallélépipède généré par les vecteurs  $(X_2 - X_1), (X_3 - X_1)$  et  $(X_4 - X_1)$ . Son volume est  $|\mathcal{P}(K)| = |(X_4 - X_1) \cdot [(X_2 - X_1) \times (X_3 - X_1)]| = 6|K|$ , où  $|K|$  est le volume du tétraèdre  $K$ . Alors

$$J_x = \lambda_1(1 - \lambda_1)|\mathcal{P}(K)|$$

$$J_x = 6\lambda_1(1 - \lambda_1)|K|.$$

De même, nous avons :

$$J_y = \mu_1(1 - \mu_1)|\mathcal{P}(L)|$$

$$J_y = 6\mu_1(1 - \mu_1)|L|.$$

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\gamma_{KL} = |\mathcal{P}(K)||\mathcal{P}(L)| = 36|K||L|,$$

$$\dot{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = |\mu_1(y'_2 - y'_1) - \lambda_1(x'_2 - x'_1) + \mu_2(Y_2 - X_1) - \lambda_2(X_2 - X_1)|^\alpha,$$

et pour  $a_i \in [0, 1]; i = 1, \dots, 6$ ,

$$\dot{F}(a_1, \dots, a_6) = F(x(a_1, a_2, a_3), y(a_4, a_5, a_6)),$$

avec

$$x(a_1, a_2, a_3) = (1 - a_1)[(1 - a_2)X_1 + a_2X_2] + a_1[a_3X_3 + (1 - a_3)X_4],$$

$$y(a_4, a_5, a_6) = (1 - a_4)[(1 - a_5)Y_1 + a_5Y_2] + a_4[a_6Y_3 + (1 - a_6)Y_4].$$

L'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  devient :

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \int_{[0,1]^2} \dot{H}_{KL}(\lambda_3, \mu_3) d\lambda_3 d\mu_3,$$

$$\text{où } \dot{H}_{KL}(\lambda_3, \mu_3) = \int_{[0,1]^4} \frac{\dot{F}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\dot{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)} \lambda_1(1 - \lambda_1)\mu_1(1 - \mu_1) d\lambda_1 d\lambda_2 d\mu_1 d\mu_2.$$

Evaluons à présent l'intégrale  $\dot{H}_{KL}(\lambda_3, \mu_3)$ . Pour cela, nous utilisons une transformation inspirée par Duffy [15]. On procède à la subdivision du pavé  $[0, 1]^4 = \bigcup_{q=1}^4 P_q$  où les  $P_q$  sont donnés par :

$$P_1 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in [0, 1]^4; \quad \max(\lambda_2, \mu_1, \mu_2) \leq \lambda_1 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in [0, 1]^4; \quad \max(\lambda_1, \mu_1, \mu_2) \leq \lambda_2 \right\},$$

$$P_3 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in [0, 1]^4; \quad \max(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2) \leq \mu_1 \right\},$$

$$P_4 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in [0, 1]^4; \quad \max(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1) \leq \mu_2 \right\}.$$

Nous avons alors :

$$\dot{H}_{KL}(\lambda_3, \mu_3) = \sum_{q=1}^4 \dot{H}_{KL}^q(\lambda_3, \mu_3),$$

$$\text{où } \dot{H}_{KL}^q(\lambda_3, \mu_3) = \int_{P_q} \frac{\dot{F}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\dot{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)} \lambda_1(1 - \lambda_1)\mu_1(1 - \mu_1) d\lambda_1 d\lambda_2 d\mu_1 d\mu_2.$$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

---

Effectuons ensuite dans chaque  $P_q$ , les changements de variables suivants :

- Dans  $P_1$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \xi \\ \lambda_2 &= \zeta\xi \\ \mu_1 &= \theta\xi \\ \mu_2 &= \eta\xi \\ \xi, \zeta, \theta, \eta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_1$  en le pavé  $[0, 1]^4$  et son Jacobien est  $J_1 = \xi^3$ .

- Dans  $P_2$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \xi\zeta \\ \lambda_2 &= \zeta \\ \mu_1 &= \theta\zeta \\ \mu_2 &= \eta\zeta \\ \xi, \zeta, \theta, \eta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_2$  en le pavé  $[0, 1]^4$  et son Jacobien est  $J_2 = \zeta^3$ .

- Dans  $P_3$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \xi\theta \\ \lambda_2 &= \zeta\theta \\ \mu_1 &= \theta \\ \mu_2 &= \eta\theta \\ \xi, \zeta, \theta, \eta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_3$  en le pavé  $[0, 1]^4$  et son Jacobien est  $J_3 = \theta^3$ .

- Dans  $P_4$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \xi\eta \\ \lambda_2 &= \zeta\eta \\ \mu_1 &= \theta\eta \\ \mu_2 &= \eta \\ \xi, \zeta, \theta, \eta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_4$  en le pavé  $[0, 1]^4$  et son Jacobien est  $J_4 = \eta^3$ .

Nous évaluons à présent les  $\dot{H}_{KL}^q(\lambda_3, \mu_3)$  ( $q = 1, 2, 3, 4$ ), à l'aide de ces changements :  
Pour  $q = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\dot{H}_{KL}^q(\lambda_3, \mu_3) = \int_{[0,1]^4} \frac{\dot{F}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta, \lambda_3, \mu_3)}{\dot{\Delta}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta, \lambda_3, \mu_3)} \dot{J}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta) d\eta d\theta d\zeta d\xi,$$

avec

$$\dot{F}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta, \lambda_3, \mu_3) = \begin{cases} \dot{F}(\xi, \xi\zeta, \lambda_3, \xi\theta, \xi\eta, \mu_3) & \text{si } q = 1 \\ \dot{F}(\xi\zeta, \zeta, \lambda_3, \zeta\theta, \zeta\eta, \mu_3) & \text{si } q = 2 \\ \dot{F}(\xi\theta, \zeta\theta, \lambda_3, \theta, \theta\eta, \mu_3) & \text{si } q = 3 \\ \dot{F}(\xi\eta, \zeta\eta, \lambda_3, \theta\eta, \eta, \mu_3) & \text{si } q = 4, \end{cases}$$

$$\dot{\Delta}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta, \lambda_3, \mu_3) = \begin{cases} |\theta(y'_2 - y'_1) - (x'_2 - x'_1) + \eta(Y_2 - X_1) - \zeta(X_2 - X_1)|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\theta(y'_2 - y'_1) - \xi(x'_2 - x'_1) + \eta(Y_2 - X_1) - (X_2 - X_1)|^\alpha & \text{si } q = 2 \\ |(y'_2 - y'_1) - \xi(x'_2 - x'_1) + \eta(Y_2 - X_1) - \zeta(X_2 - X_1)|^\alpha & \text{si } q = 3 \\ |\theta(y'_2 - y'_1) - \xi(x'_2 - x'_1) + (Y_2 - X_1) - \zeta(X_2 - X_1)|^\alpha & \text{si } q = 4, \end{cases}$$

et

$$\dot{J}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta) = \begin{cases} (1 - \xi)(1 - \xi\theta)\theta\xi^{(5-\alpha)} & \text{si } q = 1 \\ (1 - \xi\zeta)(1 - \zeta\theta)\xi\theta\zeta^{(5-\alpha)} & \text{si } q = 2 \\ (1 - \theta)(1 - \xi\theta)\xi\theta^{(5-\alpha)} & \text{si } q = 3 \\ (1 - \xi\eta)(1 - \theta\eta)\xi\theta\eta^{(5-\alpha)} & \text{si } q = 4. \end{cases}$$

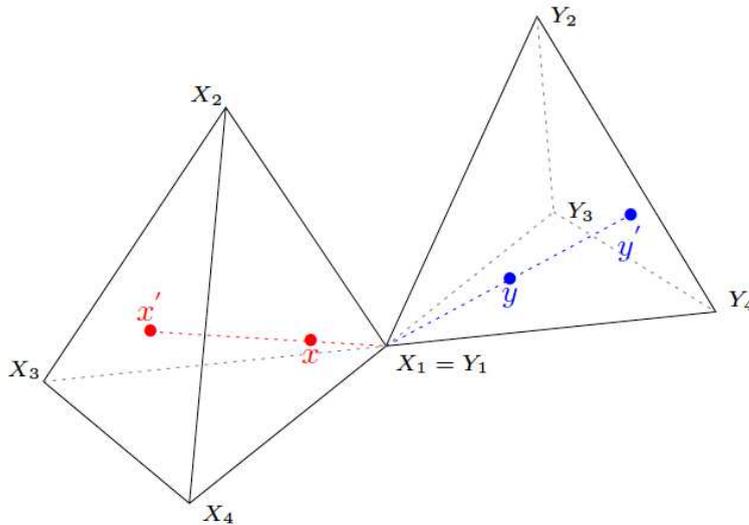
En résumé, nous avons :

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \sum_{q=1}^4 \int_{[0,1]^6} \frac{\dot{F}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta, \lambda_3, \mu_3)}{\dot{\Delta}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta, \lambda_3, \mu_3)} \dot{J}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta) d\eta d\theta d\zeta d\xi d\mu_3 d\lambda_3, \quad (2.13)$$

où les fonctions  $\dot{F}_q$ ,  $\dot{\Delta}_q$  et  $\dot{J}_q$  ( $q = 1, 2, 3, 4$ ) sont données ci-dessus. ■

Dans l'expression (2.13), nous avons  $\dot{\Delta}_q(\xi, \zeta, \theta, \eta, \lambda_3, \mu_3) \neq 0, \forall (\xi, \zeta, \theta, \eta, \lambda_3, \mu_3) \in [0, 1]^6$  et  $\forall q = 1, 2, 3, 4$ . La singularité ne concerne plus que les fonctions  $\dot{J}_q$ , et on constate selon leurs expressions que cette singularité est parfaitement levée pour  $\alpha \leq 5$ .

## Méthode 2



## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

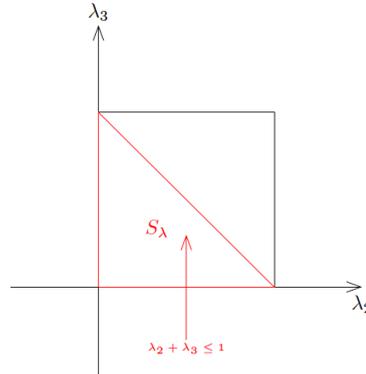
Nous décrivons  $x \in K$ , en le considérant sur le segment  $[X_1, x']$  où  $x'$  est un élément de la face  $X_2X_3X_4$ , opposée au sommet  $X_1$  :

$$x' = (1 - \lambda_2 - \lambda_3)X_2 + \lambda_2X_3 + \lambda_3X_4 \quad ; \quad (\lambda_2, \lambda_3) \in S_\lambda$$

$$x = (1 - \lambda_1)X_1 + \lambda_1x' \quad ; \quad \lambda_1 \in [0, 1],$$

où nous définissons

$$S_\lambda = \left\{ (\lambda_2, \lambda_3) \in [0, 1]^2; \quad \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1 \right\}.$$



Nous décrivons de manière analogue,  $y$  dans le tétraèdre  $L$  :

$$y' = (1 - \mu_2 - \mu_3)Y_2 + \mu_2Y_3 + \mu_3Y_4 \quad ; \quad (\mu_2, \mu_3) \in S_\mu$$

$$y = (1 - \mu_1)Y_1 + \mu_1y' \quad ; \quad \mu_1 \in [0, 1],$$

avec

$$S_\mu = \left\{ (\mu_2, \mu_3) \in [0, 1]^2; \quad \mu_2 + \mu_3 \leq 1 \right\}.$$

Notant que  $X_1 = Y_1$ , nous avons

$$y - x = \mu_1(y' - X_1) - \lambda_1(x' - X_1).$$

Donc

$$y - x = 0 \iff \lambda_1 = \mu_1 = 0.$$

Exprimons l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  à l'aide de ce changement de variables. Les Jacobiens  $J_x$  et  $J_y$  de ces transformations sont :

$$J_x = \lambda_1^2 | (X_4 - X_2) \cdot [(X_3 - X_2) \times (X_1 - X_2)] |$$

$$J_x = \lambda_1^2 |\mathcal{P}(K)|$$

$$J_x = 6\lambda_1^2 |K|$$

et de même

$$J_y = \mu_1^2 |\mathcal{P}(L)| = 6\mu_1^2 |L|.$$

Avec les notations suivantes

$$\tilde{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = |\mu_1(y' - X_1) - \lambda_1(x' - X_1)|^\alpha,$$

et pour  $a_i \in [0, 1]$ ;  $i = 1, \dots, 6$ ,

$$\tilde{F}(a_1, \dots, a_6) = F(x(a_1, a_2, a_3), y(a_4, a_5, a_6)),$$

avec

$$x(a_1, a_2, a_3) = (1 - a_1)X_1 + a_1[(1 - a_2 - a_3)X_2 + a_2X_3 + a_3X_4],$$

$$y(a_4, a_5, a_6) = (1 - a_4)X_1 + a_4[(1 - a_5 - a_6)Y_2 + a_5Y_3 + a_6Y_4],$$

l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  devient

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \int_{[0,1]^2 \times S_\lambda \times S_\mu} \frac{\tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\tilde{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)} \lambda_1^2 \mu_1^2 d\lambda_1 d\mu_1 d(\lambda_2, \lambda_3) d(\mu_2, \mu_3),$$

où le facteur  $\gamma_{KL}$  est introduit dans la méthode précédente et sera défini comme tel tout le long du chapitre. Nous effectuons ensuite dans chaque  $S_\lambda$  et  $S_\mu$ , les changements de variables suivants :

- Dans  $S_\lambda$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \omega u \\ \lambda_3 &= \omega(1 - u) \\ u, \omega &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il transforme  $S_\lambda$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $\omega$ .

- Dans  $S_\mu$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \nu v \\ \mu_3 &= \nu(1 - v) \\ v, \nu &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

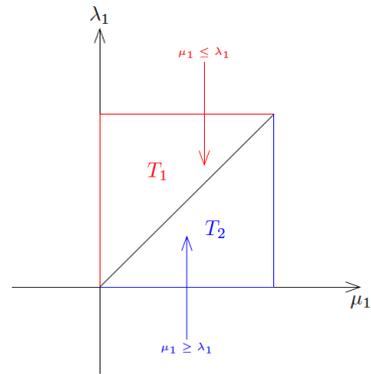
Il transforme  $S_\mu$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $\nu$ .

L'expression précédente de  $I_{\alpha, KL}$  devient

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \int_{[0,1]^4} \tilde{H}_{KL}(\nu, \omega, u, v) \nu \omega d\nu d\omega du dv,$$

$$\text{où } \tilde{H}_{KL}(\nu, \omega, u, v) = \int_{[0,1]^2} \frac{\tilde{F}(\lambda_1, \omega u, \omega(1 - u), \mu_1, \nu v, \nu(1 - v))}{\tilde{\Delta}(\lambda_1, \mu_1, \nu, \omega, u, v)} \lambda_1^2 \mu_1^2 d\lambda_1 d\mu_1.$$

Evaluons à présent l'intégrale  $\tilde{H}_{KL}(\nu, \omega, u, v)$ . Pour cela, nous utilisons encore la transformation de Duffy. On décompose le carré  $[0, 1]^2 = T_1 \cup T_2$  où  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) est un triangle.



$$T_1 = \left\{ (\lambda_1, \mu_1) \in [0, 1]^2; \quad \mu_1 \leq \lambda_1 \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (\lambda_1, \mu_1) \in [0, 1]^2; \quad \mu_1 \geq \lambda_1 \right\}.$$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

Nous effectuons ensuite dans  $T_2$ , le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mu_1 \\ \mu_1 &= \lambda_1.\end{aligned}$$

Il transforme  $T_2$  en  $T_1$  et son Jacobien vaut 1. On obtient alors

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{KL}(\nu, \omega, u, v) &= \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} \frac{\tilde{F}(\lambda_1, \omega u, \omega(1-u), \mu_1, \nu v, \nu(1-v))}{\tilde{\Delta}(\lambda_1, \mu_1, \nu, \omega, u, v)} \lambda_1^2 \mu_1^2 d\lambda_1 d\mu_1 \\ \tilde{H}_{KL}(\nu, \omega, u, v) &= \sum_{i=1}^2 \int_{T_1} \frac{\tilde{F}_i(\lambda_1, \mu_1, \nu, \omega, u, v)}{\tilde{\Delta}_i(\lambda_1, \mu_1, \nu, \omega, u, v)} \lambda_1^2 \mu_1^2 d\lambda_1 d\mu_1,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(\lambda_1, \mu_1, \nu, \omega, u, v) &= \tilde{F}(\lambda_1, \omega u, \omega(1-u), \mu_1, \nu v, \nu(1-v)), \\ \tilde{\Delta}_1(\lambda_1, \mu_1, \nu, \omega, u, v) &= |\mu_1(y' - X_1) - \lambda_1(x' - X_1)|^\alpha, \\ \tilde{F}_2(\lambda_1, \mu_1, \nu, \omega, u, v) &= \tilde{F}(\mu_1, \omega u, \omega(1-u), \lambda_1, \nu v, \nu(1-v)), \\ \tilde{\Delta}_2(\lambda_1, \mu_1, \nu, \omega, u, v) &= |\lambda_1(y' - X_1) - \mu_1(x' - X_1)|^\alpha.\end{aligned}$$

Nous effectuons de nouveau un changement, cette fois dans  $T_1$  :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \zeta \\ \mu_1 &= \eta\zeta \\ \eta, \zeta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $T_1$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $\zeta$ . Ce qui nous conduit à :

$$\tilde{H}_{KL}(\nu, \omega, u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{[0,1]^2} \frac{\tilde{F}^i(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v)}{\tilde{\Delta}^i(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v)} \eta^2 \zeta^{(5-\alpha)} d\zeta d\eta,$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{F}^1(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v) &= \tilde{F}(\zeta, \omega u, \omega(1-u), \eta\zeta, \nu v, \nu(1-v)), \\ \tilde{\Delta}^1(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v) &= |\eta(y' - X_1) - (\zeta - X_1)|^\alpha, \\ \tilde{F}^2(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v) &= \tilde{F}(\eta\zeta, \omega u, \omega(1-u), \zeta, \nu v, \nu(1-v)), \\ \tilde{\Delta}^2(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v) &= |(y' - X_1) - \eta(\zeta - X_1)|^\alpha.\end{aligned}$$

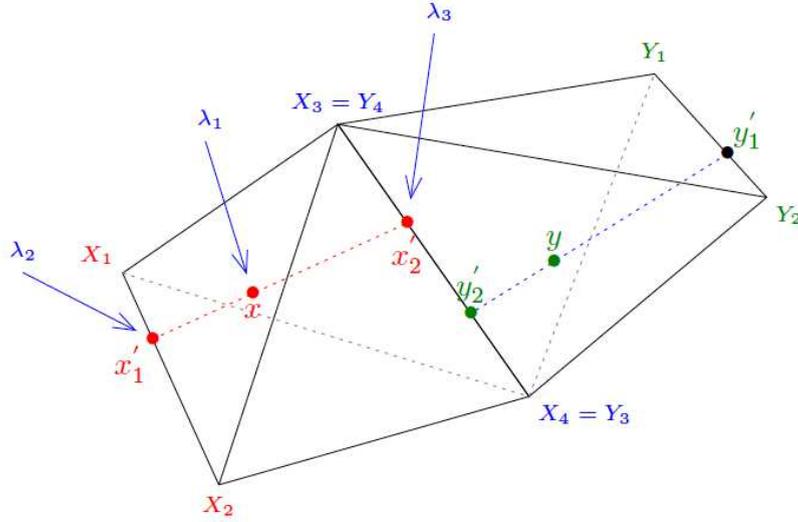
En résumé, nous avons

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \sum_{i=1}^2 \int_{[0,1]^6} \frac{\tilde{F}^i(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v)}{\tilde{\Delta}^i(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v)} \nu \omega \eta^2 \zeta^{(5-\alpha)} d\zeta d\eta d\nu d\omega du dv, \quad (2.14)$$

où les fonctions  $\tilde{F}^i$  et  $\tilde{\Delta}^i$  ( $i = 1, 2$ ) sont données ci-dessus. ■

Les vecteurs  $(x' - X_1)$  et  $(y' - X_1)$  ne pouvant être colinéaires et de même sens, nous avons dans l'expression (2.14) :  $\tilde{\Delta}^i(\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v) \neq 0$ ,  $\forall (\zeta, \eta, \nu, \omega, u, v) \in [0, 1]^6$  et  $\forall i = 1, 2$ . Dans la configuration actuelle des tétraèdres  $K$  et  $L$ , nous avons donc introduit deux méthodes qui transforment chacune  $I_{\alpha, KL}$  en une intégrale singulière d'ordre  $\alpha - 5$  par rapport à une variable uni-dimensionnelle. La singularité est alors totalement levée pour  $\alpha \leq 5$ . Pour ces dernières valeurs de  $\alpha$ , l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  peut donc être évaluée par des formules de quadrature standard appliquées directement à l'une des expressions (2.13) et (2.14). L'expression (2.14) est celle qui a été implémentée pour les tests numériques, parce qu'elle est la plus simple à mettre en oeuvre.

## 2.2.2 Les tétraèdres ont une arête commune



Nous décrivons  $x \in K$ , en le considérant sur le segment  $[x'_1, x'_2]$  où  $x'_1$  et  $x'_2$  sont des éléments des segments  $[X_1, X_2]$  et  $[X_3, X_4]$ , respectivement :

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda_2 X_2 + (1 - \lambda_2) X_1 & ; & \quad \lambda_2 \in [0, 1] \\ x'_2 &= \lambda_3 X_3 + (1 - \lambda_3) X_4 & ; & \quad \lambda_3 \in [0, 1] \\ x &= \lambda_1 x'_1 + (1 - \lambda_1) x'_2 & ; & \quad \lambda_1 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

$y$  est décrit de manière analogue dans  $L$  :

$$\begin{aligned} y'_1 &= \mu_2 Y_2 + (1 - \mu_2) Y_1 & ; & \quad \mu_2 \in [0, 1] \\ y'_2 &= \mu_3 Y_3 + (1 - \mu_3) Y_4 & ; & \quad \mu_3 \in [0, 1] \\ y &= \mu_1 y'_1 + (1 - \mu_1) y'_2 & ; & \quad \mu_1 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Alors

$$y - x = \mu_1 (y'_1 - y'_2) - \lambda_1 (x'_1 - x'_2) + y'_2 - x'_2,$$

et puisque  $X_3 = Y_4$  et  $X_4 = Y_3$ , nous avons :

$$y - x = \mu_1 (y'_1 - y'_2) - \lambda_1 (x'_1 - x'_2) + (1 - \lambda_3 - \mu_3)(X_3 - X_4).$$

Par conséquent,

$$y - x = 0 \iff \lambda_1 = \mu_1 = 1 - \lambda_3 - \mu_3 = 0.$$

Exprimons l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  à l'aide de ce changement de variables. Les Jacobiens de ces transformations sont :

$$J_x = 6\lambda_1(1 - \lambda_1)|K| \quad \text{et} \quad J_y = 6\mu_1(1 - \mu_1)|L|.$$

On introduit les notations suivantes :

$$\bar{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = |\mu_1 (y'_1 - y'_2) - \lambda_1 (x'_1 - x'_2) + (1 - \lambda_3 - \mu_3)(X_3 - X_4)|^\alpha,$$

et pour  $a_i \in [0, 1]$ ;  $i = 1, \dots, 6$ ,

$$\bar{F}(a_1, \dots, a_6) = F(x(a_1, a_2, a_3), y(a_4, a_5, a_6)),$$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

avec

$$x(a_1, a_2, a_3) = a_1 \left[ (1 - a_2)X_1 + a_2X_2 \right] + (1 - a_1) \left[ a_3X_3 + (1 - a_3)X_4 \right],$$

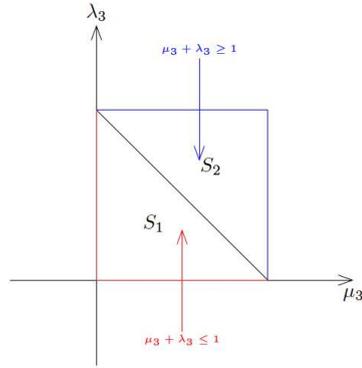
$$y(a_4, a_5, a_6) = a_4 \left[ (1 - a_5)Y_1 + a_5Y_2 \right] + (1 - a_4) \left[ a_6Y_3 + (1 - a_6)Y_4 \right].$$

L'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  devient

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \int_{[0,1]^4} \bar{H}_{KL}(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \lambda_1 (1 - \lambda_1) \mu_1 (1 - \mu_1) d\lambda_1 d\lambda_2 d\mu_1 d\mu_2,$$

$$\text{où } \bar{H}_{KL}(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \int_{[0,1]^2} \frac{\bar{F}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\bar{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)} d\mu_3 d\lambda_3.$$

Evaluons à présent l'intégrale  $\bar{H}_{KL}(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ . Pour cela, nous décomposons le carré  $[0, 1]^2 = S_1 \cup S_2$  où  $S_i (i = 1, 2)$  est un triangle :



$$S_1 = \left\{ (\lambda_3, \mu_3) \in [0, 1]^2; \quad \mu_3 + \lambda_3 \leq 1 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ (\lambda_3, \mu_3) \in [0, 1]^2; \quad \mu_3 + \lambda_3 \geq 1 \right\}.$$

Nous effectuons ensuite dans chaque  $S_i$ , les changements de variables suivants :

- Dans  $S_1$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= (1 - \omega)u \\ \mu_3 &= (1 - \omega)(1 - u) \\ u, \omega &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il transforme  $S_1$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $(1 - \omega)$ .

- Dans  $S_2$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= (1 - \omega)u + \omega \\ \mu_3 &= (1 - \omega)(1 - u) + \omega \\ u, \omega &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il transforme  $S_2$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $(1 - \omega)$ .

Ces changements nous conduisent à :

$$1 - \lambda_3 - \mu_3 = \begin{cases} \omega & \text{sur } S_1 \\ -\omega & \text{sur } S_2, \end{cases}$$

et nous avons

$$\bar{H}_{KL}(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \sum_{i=1}^2 \int_{[0,1]^2} \frac{\bar{F}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega))}{\bar{\Delta}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega))} (1 - \omega) d\omega du,$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{F}_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega)) &= \bar{F}(\lambda_1, \lambda_2, (1-\omega)u, \mu_1, \mu_2, (1-\omega)(1-u)), \\ \bar{\Delta}_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega)) &= |\mu_1(y'_1 - y'_2) - \lambda_1(x'_1 - x'_2) + \omega(X_3 - X_4)|^\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega)) &= \bar{F}(\lambda_1, \lambda_2, (1-\omega)u + \omega, \mu_1, \mu_2, (1-\omega)(1-u) + \omega), \\ \bar{\Delta}_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega)) &= |\mu_1(y'_1 - y'_2) - \lambda_1(x'_1 - x'_2) - \omega(X_3 - X_4)|^\alpha.\end{aligned}$$

L'expression précédente de  $I_{\alpha, KL}$  devient alors

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{[0,1]^6} \frac{\bar{F}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega))}{\bar{\Delta}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega))} (1-\omega)\lambda_1(1-\lambda_1) \times \mu_1(1-\mu_1) d\omega du d\lambda_1 d\lambda_2 d\mu_1 d\mu_2 \right\}.$$

Nous constatons que

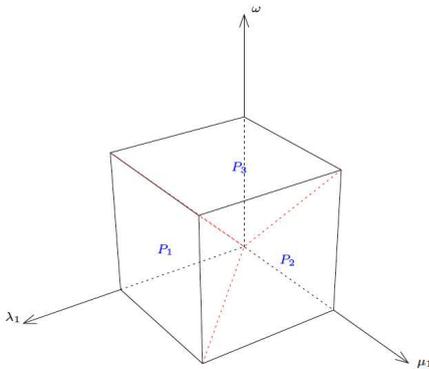
$$\bar{\Delta}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega)) = 0 \iff \lambda_1 = \mu_1 = \omega = 0, \quad \forall i = 1, 2,$$

et nous traitons la singularité par la transformation de Duffy. Récrivons

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \sum_{i=1}^2 \int_{[0,1]^3} \bar{G}_{KL}^i(u, \lambda_2, \mu_2) du d\mu_2 d\lambda_2,$$

$$\text{avec } \bar{G}_{KL}^i(u, \lambda_2, \mu_2) = \int_{[0,1]^3} \left\{ \frac{\bar{F}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega))}{\bar{\Delta}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega))} \times (1-\omega)\lambda_1(1-\lambda_1)\mu_1(1-\mu_1) d\omega d\lambda_1 d\mu_1 \right\}.$$

Nous décomposons ensuite le cube  $[0, 1]^3 = \bigcup_{q=1}^3 P_q$ , où  $P_q (q = 1, 2, 3)$  est un tétraèdre.



$$P_1 = \left\{ (\lambda_1, \mu_1, \omega) \in [0, 1]^3; \quad \max(\mu_1, \omega) \leq \lambda_1 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ (\lambda_1, \mu_1, \omega) \in [0, 1]^3; \quad \max(\lambda_1, \omega) \leq \mu_1 \right\},$$

$$P_3 = \left\{ (\lambda_1, \mu_1, \omega) \in [0, 1]^3; \quad \max(\lambda_1, \mu_1) \leq \omega \right\}.$$

Nous avons alors

$$\bar{G}_{KL}^i(u, \lambda_2, \mu_2) = \sum_{q=1}^3 \bar{M}_{KL}^{i,q}(u, \lambda_2, \mu_2),$$

$$\text{avec } \bar{M}_{KL}^{i,q}(u, \lambda_2, \mu_2) = \int_{P_q} \left\{ \frac{\bar{F}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega))}{\bar{\Delta}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(u, \omega), \mu_1, \mu_2, \mu_3(u, \omega))} \times (1-\omega)\lambda_1(1-\lambda_1)\mu_1(1-\mu_1) d\omega d\lambda_1 d\mu_1 \right\}.$$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

---

On effectue dans chaque  $P_q$ , les changements de variables suivants :

- Dans  $P_1$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \zeta \\ \mu_1 &= \eta\zeta \\ \omega &= \theta\zeta \\ \eta, \theta, \zeta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_1$  en le cube  $[0, 1]^3$  et son Jacobien vaut  $\zeta^2$ .

- Dans  $P_2$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \zeta\eta \\ \mu_1 &= \eta \\ \omega &= \theta\eta \\ \eta, \theta, \zeta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_2$  en le cube  $[0, 1]^3$  et son Jacobien vaut  $\eta^2$ .

- Dans  $P_3$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \theta\zeta \\ \mu_1 &= \eta\theta \\ \omega &= \theta \\ \eta, \theta, \zeta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_3$  en le cube  $[0, 1]^3$  et son Jacobien vaut  $\theta^2$ .

L'évaluation des  $\bar{M}_{KL}^{i,q}$  ( $i = 1, 2$ ;  $q = 1, 2, 3$ ), à l'aide de ces changements nous amène à

$$I_{\alpha, KL} = \gamma_{KL} \sum_{i=1}^2 \sum_{q=1}^3 \int_{[0,1]^6} \frac{\bar{F}_i^q(\zeta, \eta, \theta, u, \lambda_2, \mu_2)}{\bar{\Delta}_i^q(\zeta, \eta, \theta, u, \lambda_2, \mu_2)} \bar{J}_q(\zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta du d\mu_2 d\lambda_2, \quad (2.15)$$

où les fonctions  $\bar{F}_i^q$ ,  $\bar{\Delta}_i^q$  et  $J_q$  ( $i = 1, 2$ ;  $q = 1, 2, 3$ ) sont données par :

$$\bar{F}_1^q(\zeta, \eta, \theta, u, \lambda_2, \mu_2) = \begin{cases} \bar{F}(\zeta, \lambda_2, (1 - \theta\zeta)u, \eta\zeta, \mu_2, (1 - \theta\zeta)(1 - u)) & \text{si } q = 1 \\ \bar{F}(\eta\zeta, \lambda_2, (1 - \eta\theta)u, \eta, \mu_2, (1 - \eta\theta)(1 - u)) & \text{si } q = 2 \\ \bar{F}(\zeta\theta, \lambda_2, (1 - \theta)u, \eta\theta, \mu_2, (1 - \theta)(1 - u)) & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

$$\bar{F}_2^q(\zeta, \eta, \theta, u, \lambda_2, \mu_2) = \begin{cases} \bar{F}(\zeta, \lambda_2, (1 - \theta\zeta)u + \theta\zeta, \eta\zeta, \mu_2, (1 - \theta\zeta)(1 - u) + \theta\zeta) & \text{si } q = 1 \\ \bar{F}(\eta\zeta, \lambda_2, (1 - \eta\theta)u + \eta\theta, \eta, \mu_2, (1 - \eta\theta)(1 - u) + \eta\theta) & \text{si } q = 2 \\ \bar{F}(\zeta\theta, \lambda_2, (1 - \theta)u + \theta, \eta\theta, \mu_2, (1 - \theta)(1 - u) + \theta) & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

$$\bar{\Delta}_1^q(\zeta, \eta, \theta, u, \lambda_2, \mu_2) = \begin{cases} |\eta(y'_1 - y'_2) - (x'_1 - x'_2) + \theta(X_3 - X_4)|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |(y'_1 - y'_2) - \zeta(x'_1 - x'_2) + \theta(X_3 - X_4)|^\alpha & \text{si } q = 2 \\ |\eta(y'_1 - y'_2) - \zeta(x'_1 - x'_2) + (X_3 - X_4)|^\alpha & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

$$\bar{\Delta}_2^q(\zeta, \eta, \theta, u, \lambda_2, \mu_2) = \begin{cases} |\eta(y'_1 - y'_2) - (x'_1 - x'_2) - \theta(X_3 - X_4)|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |(y'_1 - y'_2) - \zeta(x'_1 - x'_2) - \theta(X_3 - X_4)|^\alpha & \text{si } q = 2 \\ |\eta(y'_1 - y'_2) - \zeta(x'_1 - x'_2) - (X_3 - X_4)|^\alpha & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

$$\bar{J}_q(\zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} (1 - \theta\zeta)\eta(1 - \eta\zeta)(1 - \zeta)\zeta^{(4-\alpha)} & \text{si } q = 1 \\ (1 - \eta\theta)\zeta(1 - \eta\zeta)(1 - \eta)\eta^{(4-\alpha)} & \text{si } q = 2 \\ (1 - \eta\theta)\eta(1 - \zeta\theta)\zeta(1 - \theta)\theta^{(4-\alpha)} & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

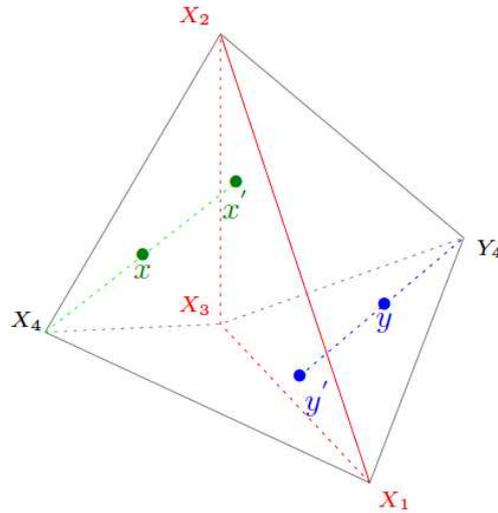
■

Dans l'expression (2.15), nous avons  $\bar{\Delta}_i^q(\zeta, \eta, \theta, u, \lambda_2, \mu_2) \neq 0, \forall (\zeta, \eta, \theta, u, \lambda_2, \mu_2) \in [0, 1]^6, \forall i = 1, 2$  et  $\forall q = 1, 2, 3$ . La singularité ne concerne plus que les fonctions  $\bar{J}_q$ . La méthode introduite ici pour cette configuration des tétraèdres  $K$  et  $L$ , transforme donc  $I_{\alpha, KL}$  en une intégrale singulière d'ordre  $\alpha - 4$  par rapport à une variable uni-dimensionnelle. La singularité est alors totalement levée pour  $\alpha \leq 4$ . Pour ces dernières valeurs de  $\alpha$ , l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  peut être évaluée par des formules de quadrature standard appliquées directement à (2.15).

### 2.2.3 Les tétraèdres ont une face commune

Nous présentons pour cette configuration, deux méthodes issues des différentes descriptions des variables d'intégration dans les tétraèdres.

#### Méthode 1



Nous décrivons  $x \in K$ , en le considérant sur le segment  $[X_4, x']$  où  $x'$  est un élément de la face  $X_1X_2X_3$  (que nous noterons  $\Sigma$ ) :

$$x = (1 - \lambda)x' + \lambda X_4 ; \quad (\lambda, x') \in [0, 1] \times \Sigma.$$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

De manière analogue, nous décrivons  $y \in L$  à l'aide du sommet  $Y_4$  et de la face  $Y_1Y_2Y_3$  (qui est la même que  $\Sigma$ ) :

$$y = (1 - \mu) y' + \mu Y_4 ; \quad (\mu, y') \in [0, 1] \times \Sigma.$$

Nous avons

$$y - x = \lambda(x' - X_4) - \mu(y' - Y_4) + y' - x',$$

et

$$y - x = 0 \iff \lambda = \mu = 0 \text{ et } y' - x' = 0.$$

Evaluons à présent l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  avec ce changement de variables. Nous appliquons aux tétraèdres  $K$  et  $L$ , le résultat du changement de variables introduit dans l'annexe A, qui ramène une intégrale sur un tétraèdre, à une intégrale sur l'une de ces faces :

$$\begin{aligned} I_{\alpha, KL} &= \int_K \int_L \frac{F(x, y)}{|x - y|^\alpha} dy dx \\ &= \beta_{KL} \left\{ \int_{[0,1]} (1 - \lambda)^2 \int_\Sigma \int_{[0,1]} (1 - \mu)^2 \int_\Sigma \frac{F[x(\lambda, x'), y(\mu, y')]}{|x(\lambda, x') - y(\mu, y')|^\alpha} ds(y') d\mu ds(x') d\lambda \right\}, \end{aligned}$$

où  $\beta_{KL} = 9 \frac{|K||L|}{|\Sigma|^2}$ .

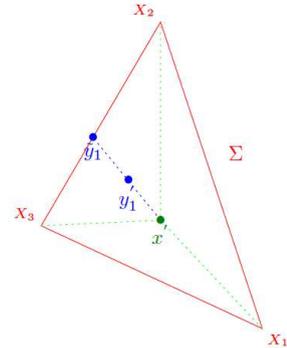
Pour la variable d'intégration externe  $x'$  donnée dans le triangle  $\Sigma$ , on découpe  $\Sigma$  en trois zones concourantes en  $x'$ . Le triangle  $\Sigma$  est alors subdivisé en sous triangles  $x'X_1X_2$ ,  $x'X_2X_3$  et  $x'X_3X_1$ , et la réunion de ces sous triangles est décrite par la variable d'intégration interne  $y' \in \Sigma$ . La variable  $y'$  est exprimée dans chaque sous triangle comme combinaison du sommet  $x'$  et d'un point  $\tilde{y}$  sur l'arête opposée.

Nous pouvons écrire alors

$$I_{\alpha, KL} = \beta_{KL} \sum_{i=1}^3 \int_\Sigma I_{\Sigma}^i(x') ds(x'),$$

avec  $I_{\Sigma}^i(x') = \int_{[0,1]^2} \int_{\Sigma_i} \frac{F[x(\lambda, x'), y(\mu, y')]}{|x(\lambda, x') - y(\mu, y')|^\alpha} (1 - \lambda)^2 (1 - \mu)^2 ds(y') d\mu d\lambda; \quad i = 1, 2, 3,$

et  $\Sigma_i$  est le triangle  $\begin{cases} x'X_2X_3 & \text{si } i = 1 \\ x'X_3X_1 & \text{si } i = 2 \\ x'X_1X_2 & \text{si } i = 3. \end{cases}$



**Remarque 11.** Il est clair que l'intégrale  $I_{\Sigma}^i(x')$  ne contribue à l'évaluation de  $I_{\alpha, KL}$ , que si  $\Sigma_i$  est non dégénéré. Si nous introduisons les coordonnées barycentriques du point  $x'$  dans  $\Sigma$  :

$$x' = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x') X_j, \text{ avec } \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x') = 1 \text{ et } \lambda_j(x') \in [0, 1], \quad j = 1, 2, 3$$

alors la dégénérescence de  $\Sigma_i$  équivaut à  $\lambda_i(x') = 0$ . Nous allons alors calculer l'intégrale  $I_{\Sigma}^i(x')$ , pour  $\lambda_i(x') \neq 0$ .

Evaluons à présent  $I_{\Sigma}^i(x')$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

★  $i = 1$  (dans  $\Sigma_1 := x'X_2X_3$ )

On définit :

$$\tilde{y}_1 = (1 - \lambda_y)X_2 + \lambda_y X_3 ; \quad \lambda_y \in [0, 1]$$

$$y'_1 := y' = (1 - \mu_y)x' + \mu_y \tilde{y}_1 ; \quad \mu_y \in [0, 1]$$

$$y_1 := y = (1 - \mu)y'_1 + \mu Y_4.$$

On a  $y'_1 - x' = \mu_y(\tilde{y}_1 - x')$  et

$$y_1(\mu, y') - x(\lambda, x') = \lambda(x' - X_4) + \mu(Y_4 - y'_1) + \mu_y(\tilde{y}_1 - x').$$

En outre  $\Sigma_1$  est transformé en le carré unité  $[0, 1]^2$  et le Jacobien est

$$J_1 = \left| \frac{\partial y'_1}{\partial \mu_y} \times \frac{\partial y'_1}{\partial \lambda_y} \right|,$$

avec  $\frac{\partial y'_1}{\partial \mu_y} = \tilde{y}_1 - x'$  et  $\frac{\partial y'_1}{\partial \lambda_y} = \mu_y(X_3 - X_2)$ . Donc

$$J_1 = \mu_y |(X_3 - X_2) \times (\tilde{y}_1 - x')|$$

$$= \mu_y |(X_3 - X_2) \times (X_2 - x')|$$

$$J_1 = 2 \mu_y |\Sigma_1|.$$

On a

$$y_1 - x = 0 \iff \lambda = \mu = \mu_y = 0.$$

La transformation nous conduit à :

$$I_{\Sigma}^1(x') = 2 |\Sigma_1| \int_{[0,1]^2} I_{\Sigma}^1(x', \lambda_y) d\lambda_y,$$

$$\text{avec } I_{\Sigma}^1(x', \lambda_y) = \int_{[0,1]^3} \frac{F[x(\lambda, x'), y_1(\mu, y'_1(x', \lambda_y, \mu_y))]}{|x - y_1|^\alpha} (1 - \lambda)^2 (1 - \mu)^2 \mu_y d\mu_y d\mu d\lambda.$$

Nous introduisons ensuite, la transformation de Duffy [15] sur les variables  $\lambda, \mu$  et  $\mu_y$ . Pour cela, décomposons le cube  $[0, 1]^3$  en trois pyramides  $P_q$  ( $q = 1, 2, 3$ ) :  $[0, 1]^3 = \bigcup_{q=1}^3 P_q$ .

$$P_1 = \left\{ (\lambda, \mu, \mu_y) \in [0, 1]^3 ; \max(\mu, \mu_y) \leq \lambda \right\},$$

$$P_2 = \left\{ (\lambda, \mu, \mu_y) \in [0, 1]^3 ; \max(\lambda, \mu_y) \leq \mu \right\},$$

$$P_3 = \left\{ (\lambda, \mu, \mu_y) \in [0, 1]^3 ; \max(\lambda, \mu) \leq \mu_y \right\}.$$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

---

Nous effectuons ensuite dans chaque  $P_q$ , les changements de variables suivants :

- Dans  $P_1$

$$\begin{aligned}\lambda &= \zeta \\ \mu &= \eta\zeta \\ \mu_y &= \theta\zeta \\ \eta, \theta, \zeta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_1$  en le cube  $[0, 1]^3$  et son Jacobien vaut  $\zeta^2$ .

- Dans  $P_2$

$$\begin{aligned}\lambda &= \zeta\eta \\ \mu &= \eta \\ \mu_y &= \theta\eta \\ \eta, \theta, \zeta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_2$  en le cube  $[0, 1]^3$  et son Jacobien vaut  $\eta^2$ .

- Dans  $P_3$

$$\begin{aligned}\lambda &= \theta\zeta \\ \mu &= \eta\theta \\ \mu_y &= \theta \\ \eta, \theta, \zeta &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Il transforme  $P_3$  en le cube  $[0, 1]^3$  et son Jacobien vaut  $\theta^2$ .

Nous avons alors :

$$I_{\Sigma}^1(x', \lambda_y) = \sum_{q=1}^3 \check{M}_{\Sigma}^{1,q}(x', \lambda_y),$$

$$\text{où } \check{M}_{\Sigma}^{1,q}(x', \lambda_y) = \int_{P_q} \frac{F[x(\lambda, x'), y_1(\mu, y'_1(x', \lambda_y, \mu_y))]}{|x - y_1|^\alpha} (1 - \lambda)^2 (1 - \mu)^2 \mu_y d\mu_y d\mu d\lambda.$$

Nous évaluons à présent les  $\check{M}_{\Sigma}^{1,q}$  ( $q = 1, 2, 3$ ), à l'aide de ces changements :

$$\check{M}_{\Sigma}^{1,q}(x', \lambda_y) = \int_{[0, 1]^3} \frac{F(x_{1,q}(x', \zeta, \eta, \theta), y_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta))}{\check{\Delta}_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta)} \check{J}_{1,q}(\zeta, \eta, \theta) d\zeta d\theta d\eta,$$

avec

$$x_{1,q}(x', \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \zeta X_4 + (1 - \zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta\zeta X_4 + (1 - \eta\zeta) x' & \text{si } q = 2 \\ \theta\zeta X_4 + (1 - \theta\zeta) x' & \text{si } q = 3, \end{cases}$$

$$y_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \eta\zeta Y_4 + (1 - \eta\zeta) y'_{1,1} & \text{si } q = 1 \\ \eta Y_4 + (1 - \eta) y'_{1,2} & \text{si } q = 2 \\ \theta\eta Y_4 + (1 - \theta\eta) y'_{1,3} & \text{si } q = 3, \end{cases}$$

où

$$y'_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \theta\zeta \tilde{y}_1 + (1 - \theta\zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \theta\eta \tilde{y}_1 + (1 - \theta\eta) x' & \text{si } q = 2 \\ \theta \tilde{y}_1 + (1 - \theta) x' & \text{si } q = 3, \end{cases}$$

$$\tilde{\Delta}_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} |x' - X_4 + \eta(Y_4 - y'_{1,1}) + \theta(\tilde{y}_1 - x')|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(x' - X_4) + (Y_4 - y'_{1,2}) + \theta(\tilde{y}_1 - x')|^\alpha & \text{si } q = 2 \\ |\zeta(x' - X_4) + \eta(Y_4 - y'_{1,3}) + (\tilde{y}_1 - x')|^\alpha & \text{si } q = 3, \end{cases}$$

et

$$\check{J}_{1,q}(\zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \theta(1 - \eta\zeta)^2(1 - \zeta)^2\zeta^{(3-\alpha)} & \text{si } q = 1 \\ \theta(1 - \eta\zeta)^2(1 - \eta)^2\eta^{(3-\alpha)} & \text{si } q = 2 \\ (1 - \theta\zeta)^2(1 - \theta\eta)^2\theta^{(3-\alpha)} & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} I_{\Sigma}^1(x') &= 2|\Sigma_1| \int_{[0,1]} I_{\Sigma}^1(x', \lambda_y) d\lambda_y \\ &= 2|\Sigma_1| \int_{[0,1]} \left\{ \sum_{q=1}^3 \check{M}_{\Sigma}^{1,q}(x', \lambda_y) \right\} d\lambda_y \\ I_{\Sigma}^1(x') &= 2|\Sigma_1| \int_{[0,1]} \left\{ \sum_{q=1}^3 \int_{[0,1]^3} \frac{F(x_{1,q}(x', \zeta, \eta, \theta), y_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta))}{\tilde{\Delta}_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta)} \check{J}_{1,q}(\zeta, \eta, \theta) d\theta d\zeta d\eta \right\} d\lambda_y. \end{aligned}$$

Un calcul similaire nous permet d'évaluer ensuite, les intégrales  $I_{\Sigma}^i(x')$ ;  $i = 2, 3$  :

★  $i = 2$  (dans  $\Sigma_2 := X_1 x' X_3$ )

$$\tilde{y}_2 = (1 - \lambda_y)X_3 + \lambda_y X_1.$$

$$x_{2,q}(x', \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \zeta X_4 + (1 - \zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta\zeta X_4 + (1 - \eta\zeta) x' & \text{si } q = 2 \\ \theta\zeta X_4 + (1 - \theta\zeta) x' & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

$$y_{2,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \eta\zeta Y_4 + (1 - \eta\zeta) y'_{2,1} & \text{si } q = 1 \\ \eta Y_4 + (1 - \eta) y'_{2,2} & \text{si } q = 2 \\ \theta\eta Y_4 + (1 - \theta\eta) y'_{2,3} & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

où

$$y'_{2,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \theta\zeta \tilde{y}_2 + (1 - \theta\zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \theta\eta \tilde{y}_2 + (1 - \theta\eta) x' & \text{si } q = 2 \\ \theta \tilde{y}_2 + (1 - \theta) x' & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

$$\check{\Delta}_{2,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} |x' - X_4 + \eta(Y_4 - y'_{2,1}) + \theta(\tilde{y}_2 - x')|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(x' - X_4) + (Y_4 - y'_{2,2}) + \theta(\tilde{y}_2 - x')|^\alpha & \text{si } q = 2 \\ |\zeta(x' - X_4) + \eta(Y_4 - y'_{2,3}) + (\tilde{y}_2 - x')|^\alpha & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

et

$$\check{J}_{2,q}(\zeta, \eta, \theta) = \check{J}_{1,q}(\zeta, \eta, \theta), \quad \text{pour } q = 1, 2, 3.$$

★  $i = 3$  (dans  $\Sigma_3 := X_1 X_2 x'$ )

$$\tilde{y}_3 = (1 - \lambda_y)X_1 + \lambda_y X_2.$$

$$x_{3,q}(x', \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \zeta X_4 + (1 - \zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta\zeta X_4 + (1 - \eta\zeta) x' & \text{si } q = 2 \\ \theta\zeta X_4 + (1 - \theta\zeta) x' & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

$$y_{3,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \eta\zeta Y_4 + (1 - \eta\zeta) y'_{3,1} & \text{si } q = 1 \\ \eta Y_4 + (1 - \eta) y'_{3,2} & \text{si } q = 2 \\ \theta\eta Y_4 + (1 - \theta\eta) y'_{3,3} & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

où

$$y'_{3,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} \theta\zeta \tilde{y}_3 + (1 - \theta\zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \theta\eta \tilde{y}_3 + (1 - \theta\eta) x' & \text{si } q = 2 \\ \theta \tilde{y}_3 + (1 - \theta) x' & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

$$\check{\Delta}_{3,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) = \begin{cases} |x' - X_4 + \eta(Y_4 - y'_{3,1}) + \theta(\tilde{y}_3 - x')|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(x' - X_4) + (Y_4 - y'_{3,2}) + \theta(\tilde{y}_3 - x')|^\alpha & \text{si } q = 2 \\ |\zeta(x' - X_4) + \eta(Y_4 - y'_{3,3}) + (\tilde{y}_3 - x')|^\alpha & \text{si } q = 3. \end{cases}$$

et

$$\check{J}_{3,q}(\zeta, \eta, \theta) = \check{J}_{1,q}(\zeta, \eta, \theta), \quad \text{pour } q = 1, 2, 3. \quad \blacksquare$$

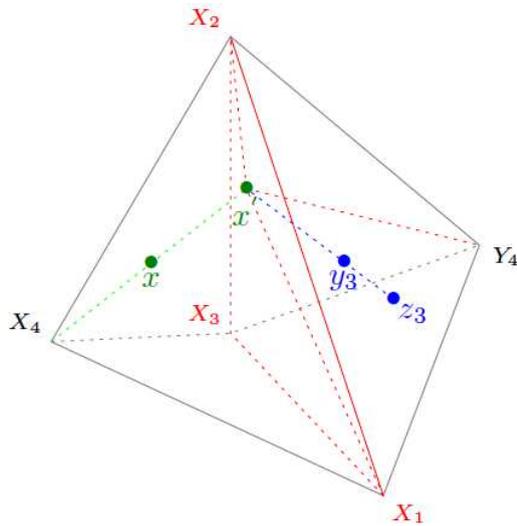
Finalement par cette méthode, l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  s'exprime :

$$I_{\alpha, KL} = 2\beta_{KL} \int_{\Sigma} \int_{[0,1]} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{q=1}^3 |\Sigma_i| \int_{[0,1]^3} \frac{F(x_{i,q}(x', \zeta, \eta, \theta), y_{i,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta))}{\check{\Delta}_{i,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta)} \check{J}_{i,q}(\zeta, \eta, \theta) d\theta d\eta d\zeta \right\} d\lambda_y ds(x'). \quad (2.16)$$

**Remarque 12.** En utilisant les coordonnées barycentriques de  $x'$  dans  $\Sigma$  comme défini dans la remarque 11, on a  $|\Sigma_i| = \lambda_i(x') |\Sigma|$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Nous avons défini, ci-dessus, les vecteurs  $x_{i,q}$ ,  $y_{i,q}$  et les scalaires  $\check{\Delta}_{i,q}$ ,  $\check{J}_{i,q}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $q = 1, 2, 3$ ). Dans l'expression (2.16), si  $\Sigma_i$  est non dégénéré pour  $i = 1, 2, 3$ , nous avons alors pour tout  $(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) \in \Sigma \times [0, 1]^4$  et pour tout  $q = 1, 2, 3$ ,  $\check{\Delta}_{i,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta, \theta) \neq 0$ . La singularité ne concerne plus que les fonctions  $\check{J}_{i,q}$ , et on constate selon leurs expressions que cette singularité est parfaitement levée pour  $\alpha \leq 3$ . Nous présentons pour la configuration actuelle des tétraèdres  $K$  et  $L$ , une autre méthode liée à la description du point  $y$  dans  $L$ .

## Méthode 2



Rappelons que

$$x(\lambda, x') := x = (1 - \lambda)x' + \lambda X_4 ; \quad (\lambda, x') \in [0, 1] \times \Sigma,$$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

avec  $\Sigma = X_1X_2X_3 = Y_1Y_2Y_3$ . Pour  $x'$  donné sur la face  $\Sigma$ , nous définissons une subdivision de  $L$  en sous tétraèdres  $L_i(x')$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de sommets  $(\hat{Y}_{ij})_{j=1,2,3,4}$ , donnés par

$$\hat{Y}_{ij} = \begin{cases} Y_j & \text{si } j \neq i \\ x' & \text{sinon.} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3, 4$$

Nous avons  $L = \bigcup_{i=1}^3 L_i(x')$  et donc

$$\begin{aligned} I_{\alpha, KL} &= \int_K \int_L \frac{F(x, y)}{|x - y|^\alpha} dy dx \\ &= 3 \frac{|K|}{|\Sigma|} \int_{[0,1]} (1 - \lambda)^2 \int_\Sigma \int_L \frac{F[x(\lambda, x'), y]}{|x(\lambda, x') - y|^\alpha} dy ds(x') d\lambda \\ &= 3 \frac{|K|}{|\Sigma|} \int_{[0,1]} (1 - \lambda)^2 \int_\Sigma \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_{L_i(x')} \frac{F[x(\lambda, x'), y]}{|x(\lambda, x') - y|^\alpha} dy \right\} ds(x') d\lambda \\ I_{\alpha, KL} &= \beta_K \int_\Sigma \left\{ \sum_{i=1}^3 I_L^i(x') \right\} ds(x'), \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \beta_K = 3 \frac{|K|}{|\Sigma|}$$

$$\text{et} \quad I_L^i(x') = \int_{[0,1]} \int_{L_i(x')} \frac{F[x(\lambda, x'), y]}{|x(\lambda, x') - y|^\alpha} (1 - \lambda)^2 dy d\lambda.$$

**Remarque 13.** Comme dans la remarque 11, l'intégrale  $I_L^i(x')$  ne contribue que si  $L_i(x')$  est non dégénéré. Si nous considérons les coordonnées barycentriques du point  $x'$  dans  $\Sigma$ , cette fois par rapport aux sommets  $Y_j$  :

$$x' = \sum_{j=1}^3 \tilde{\lambda}_j(x') Y_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^3 \tilde{\lambda}_j(x') = 1,$$

alors la dégénérescence de  $L_i(x')$  équivaut à  $\tilde{\lambda}_i(x') = 0$ . Nous allons alors évaluer l'intégrale  $I_L^i(x')$ , pour  $\tilde{\lambda}_i(x') \neq 0$ .

Evaluons à présent, les intégrales

$$I_L^i(x') = \int_{[0,1]} \int_{L_i(x')} \frac{F[x(\lambda, x'), y]}{|x(\lambda, x') - y|^\alpha} (1 - \lambda)^2 dy d\lambda; \quad i = 1, 2, 3.$$

Pour chaque  $i \in \{1, 2, 3\}$ , nous décrivons  $y \in L_i(x')$  à l'aide du segment  $[x', z_i]$ , où  $z_i$  est un élément de la face  $\tilde{\Sigma}_i$  opposée à  $x'$ , dans le tétraèdre  $L_i(x')$ . La variable  $z_i$  sera décrite par une formule de quadrature sur le triangle.

★ Cas  $i = 1$  :  $L_1(x') \equiv x' Y_2 Y_3 Y_4$

On considère  $z_1 \in \tilde{\Sigma}_1 \equiv Y_2 Y_3 Y_4$  et on définit  $y \in [x', z_1]$ , en posant :

$$y_1 := y = (1 - \mu)x' + \mu z_1 ; \quad \mu \in [0, 1].$$

Le résultat du changement de variables introduit dans l'annexe A, nous conduit à :

$$I_L^1(x') = \sigma_1(x') \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \int_{\tilde{\Sigma}_1} \frac{F(x(\lambda, x'), y_1(x', \mu, z_1))}{|x - y_1|^\alpha} \mu^2 ds(z_1) d\mu d\lambda,$$

où  $\sigma_1(x') = 3 \frac{|L_1(x')|}{|\Sigma_1|}$ .

Nous avons

$$y_1 - x = \mu(z_1 - x') + x' - x$$

$$y_1 - x = \mu(z_1 - x') + \lambda(x' - X_4),$$

et

$$y_1 - x = 0 \iff \mu = \lambda = 0.$$

Récrivons :

$$I_L^1(x') = \sigma_1(x') \int_{\tilde{\Sigma}_1} I_L^1(x', z_1) ds(z_1),$$

$$\text{où } I_L^1(x', z_1) = \int_{[0,1]^2} \frac{F(x(\lambda, x'), y_1(x', \mu, z_1))}{|x - y_1|^\alpha} \mu^2 d\mu d\lambda.$$

Nous introduisons ensuite la transformation de Duffy sur les variables  $\lambda$  et  $\mu$ . Pour cela, décomposons le carré  $[0, 1]^2$  en deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  :  $[0, 1]^2 = T_1 \cup T_2$ .

$$T_1 = \left\{ (\lambda, \mu) \in [0, 1]^2; \quad \mu \leq \lambda \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (\lambda, \mu) \in [0, 1]^2; \quad \mu \geq \lambda \right\}.$$

Effectuons ensuite dans  $T_1$  et  $T_2$ , les changements de variables suivants :

- Dans  $T_1$

$$\begin{aligned} \lambda &= \zeta \\ \mu &= \eta\zeta \\ \eta, \zeta &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il transforme  $T_1$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $\zeta$ .

- Dans  $T_2$

$$\begin{aligned} \lambda &= \zeta\eta \\ \mu &= \eta \\ \eta, \zeta &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il transforme  $T_2$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $\eta$ .

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

Nous avons :

$$I_L^1(x', z_1) = \sum_{q=1}^2 \check{N}_L^{1,q}(x', z_1),$$

$$\text{où } \check{N}_L^{1,q}(x', z_1) = \int_{T_q} \frac{F(x(\lambda, x'), y_1(x', \mu, z_1))}{|x - y_1|^\alpha} \mu^2 d\mu d\lambda.$$

Nous évaluons à présent les  $\check{N}_L^{1,q}$  ( $q = 1, 2$ ), à l'aide de ces changements :

$$\check{N}_L^{1,q}(x', z_1) = \int_{[0,1]^2} \frac{F(x_{1,q}(x', \zeta, \eta), y_{1,q}(x', z_1, \zeta, \eta))}{\check{\Delta}_{1,q}(x', z_1, \zeta, \eta)} \check{J}_{1,q}(\zeta, \eta) d\eta d\zeta,$$

avec

$$x_{1,q}(x', \zeta, \eta) = \begin{cases} (1 - \zeta)x' + \zeta X_4 & \text{si } q = 1 \\ (1 - \zeta\eta)x' + \zeta\eta X_4 & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

$$y_{1,q}(x', z_1, \zeta, \eta) = \begin{cases} (1 - \zeta\eta)x' + \zeta\eta z_1 & \text{si } q = 1 \\ (1 - \eta)x' + \eta z_1 & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

$$\check{\Delta}_{1,q}(x', z_1, \zeta, \eta) = \begin{cases} |x' - X_4 + \eta(z_1 - x')|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(x' - X_4) + (z_1 - x')|^\alpha & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

et

$$\check{J}_{1,q}(\zeta, \eta) = \begin{cases} \eta^2 \zeta^{(3-\alpha)} & \text{si } q = 1 \\ \eta^{(3-\alpha)} & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

Nous obtenons alors :

$$I_L^1(x') = \sigma_1(x') \int_{\check{\Sigma}_1} \left\{ \sum_{q=1}^2 \int_{[0,1]^2} \frac{F(x_{1,q}(x', \zeta, \eta), y_{1,q}(x', z_1, \zeta, \eta))}{\check{\Delta}_{1,q}(x', z_1, \zeta, \eta)} \check{J}_{1,q}(\zeta, \eta) d\eta d\zeta \right\} ds(z_1).$$

Les intégrales  $I_L^i(x')$  ( $i = 2, 3$ ) sont évaluées de la même manière que pour le cas 1 :

★ **Cas**  $i = 2$  :  $L_2(x') = Y_1 x' Y_3 Y_4$

$$x_{2,q}(x', \zeta, \eta) = \begin{cases} (1 - \zeta)x' + \zeta X_4 & \text{si } q = 1 \\ (1 - \zeta\eta)x' + \zeta\eta X_4 & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

$$y_{2,q}(x', z_1, \zeta, \eta) = \begin{cases} (1 - \zeta\eta)x' + \zeta\eta z_2 & \text{si } q = 1 \\ (1 - \eta)x' + \eta z_2 & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

$$\tilde{\Delta}_{2,q}(x', z_1, \zeta, \eta) = \begin{cases} |x' - X_4 + \eta(z_2 - x')|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(x' - X_4) + (z_2 - x')|^\alpha & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

$$\check{J}_{2,q}(\zeta, \eta) = \check{J}_{1,q}(\zeta, \eta), \quad \text{pour } q = 1, 2.$$

★ Cas  $i = 3$  :  $L_3(x') = Y_1 Y_2 x' Y_4$

$$x_{3,q}(x', \zeta, \eta) = \begin{cases} (1 - \zeta)x' + \zeta X_4 & \text{si } q = 1 \\ (1 - \zeta\eta)x' + \zeta\eta X_4 & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

$$y_{3,q}(x', z_1, \zeta, \eta) = \begin{cases} (1 - \zeta\eta)x' + \zeta\eta z_3 & \text{si } q = 1 \\ (1 - \eta)x' + \eta z_3 & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

$$\tilde{\Delta}_{3,q}(x', z_1, \zeta, \eta) = \begin{cases} |x' - X_4 + \eta(z_3 - x')|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(x' - X_4) + (z_3 - x')|^\alpha & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

$$\check{J}_{3,q}(\zeta, \eta) = \check{J}_{1,q}(\zeta, \eta), \quad \text{pour } q = 1, 2.$$

Finalement par cette méthode, l'intégrale  $I_{\alpha, KL}$  s'exprime :

$$I_{\alpha, KL} = \beta_K \int_{\Sigma} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{q=1}^2 \sigma_i(x') \int_{\Sigma_i} \int_{[0,1]^2} \frac{F(x_{i,q}(x', \zeta, \eta), y_{i,q}(x', z_i, \zeta, \eta))}{\tilde{\Delta}_{i,q}(x', z_i, \zeta, \eta)} \check{J}_{i,q}(\zeta, \eta) d\eta d\zeta ds(z_i) \right\} ds(x'). \quad \blacksquare \quad (2.17)$$

On rappelle que  $\beta_K = 3 \frac{|K|}{|\Sigma|}$  et pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\sigma_i(x') = 3 \frac{|L_i(x')|}{|\Sigma_i|}$ . Notons que  $|L_i(x')| = \tilde{\lambda}_i(x') |L|$ , où  $\tilde{\lambda}_i(x')$  est la  $i$ -ème coordonnée barycentrique de  $x'$  dans  $\Sigma$  (comme définie dans la remarque 13). Nous avons donc  $\sigma_i(x') = 3 \tilde{\lambda}_i(x') \frac{|L|}{|\Sigma_i|}$ .

Les vecteurs  $x' - X_4$  et  $x' - z_i$  ne pouvant être colinéaires et de même sens lorsque le sous tétraèdre  $L_i(x')$  est non dégénéré pour  $i = 1, 2, 3$ , alors  $\tilde{\Delta}_{i,q}(x', z_i, \zeta, \eta) \neq 0, \forall (x', z_i, \zeta, \eta) \in$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

$\Sigma \times \tilde{\Sigma}_i[0,1]^2$  et  $\forall q = 1, 2, 3$ . Comme la méthode 1, la singularité ne concerne que les fonctions  $\tilde{J}_{i,q}$ . Ainsi, lorsque les tétraèdres  $K$  et  $L$  ont une face commune, chacune des méthodes 1 et 2 introduites précédemment, transforme  $I_{\alpha,KL}$  en une intégrale singulière d'ordre  $\alpha - 3$  par rapport à une variable uni-dimensionnelle. La singularité est alors totalement levée pour  $\alpha \leq 3$ . Pour ces dernières valeurs de  $\alpha$ , l'intégrale peut donc être évaluée par des formules de quadrature standard appliquées directement à l'une des expressions (2.16) et (2.17). Les deux méthodes ont la même influence sur la singularité de l'intégrale et se distinguent principalement par les formules de quadrature qui leur seront appliquées. D'une part la méthode 1 qui utilisera une formule d'intégration sur le triangle et une autre sur le pavé  $[0,1]^4$  (qui peut être la même formule sur chaque segment  $[0,1]$ ) et d'autre part, la méthode 2 qui fera intervenir une formule d'intégration sur le carré  $[0,1]^2$  et des formules sur deux triangles (qui peuvent être deux fois la même formule sur le triangle, sachant qu'on se ramène toujours au triangle de référence). L'expression (2.16) est celle qui a été implémentée pour les tests numériques, parce qu'elle est la plus simple à mettre en oeuvre.

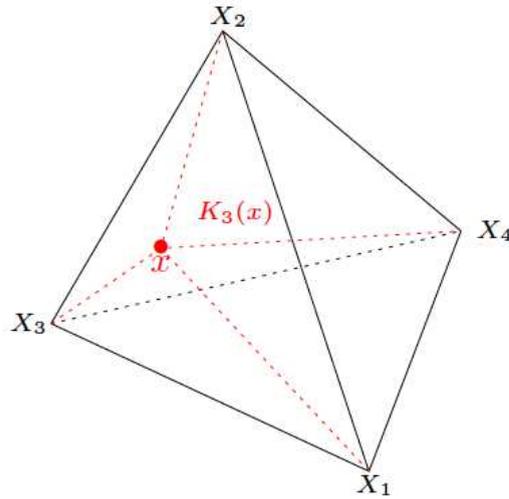
### 2.2.4 Les tétraèdres sont confondus

On a

$$I_{\alpha,KK} = \int_K \int_K \frac{F(x,y)}{|x-y|^\alpha} dy dx \quad ; \quad \alpha > 0.$$

Soit  $x$  donné dans  $K$ , nous définissons une subdivision du tétraèdre  $K$ , en sous tétraèdres  $K_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de sommets  $\hat{X}_{ij}$   $j = 1, 2, 3, 4$ , donnés par

$$\hat{X}_{ij} = \begin{cases} X_j & \text{si } j \neq i \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4 ; j = 1, 2, 3, 4$$



Nous avons  $K = \bigcup_{i=1}^4 K_i(x)$  et donc

$$I_{\alpha,KK} = \int_K \left\{ \sum_{i=1}^4 I_K^i(x) \right\} dx,$$

$$\text{avec } I_K^i(x) = \int_{K_i(x)} \frac{F(x,y)}{|x-y|^\alpha} dy; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

**Remarque 14.** L'intégrale  $I_K^i(x)$  n'a une contribution que si  $K_i(x)$  est non dégénéré. Si nous introduisons les coordonnées barycentriques du point  $x$  dans  $K$  :

$$x = \sum_{j=1}^4 \lambda_j(x) X_j \quad \sum_{j=1}^4 \lambda_j(x) = 1,$$

alors la dégénérescence de  $K_i(x)$  équivaut à  $\lambda_i(x) = 0$ . Nous allons alors évaluer l'intégrale  $I_K^i(x)$ , pour  $\lambda_i(x) \neq 0$ .

Évaluons à présent, les intégrales  $I_K^i(x) = \int_{K_i(x)} \frac{F(x, y)}{|x - y|^\alpha} dy$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$ . Nous présentons ici, deux méthodes liées à la description de la variable d'intégration  $y$  dans les sous tétraèdres  $K_i(x)$ .

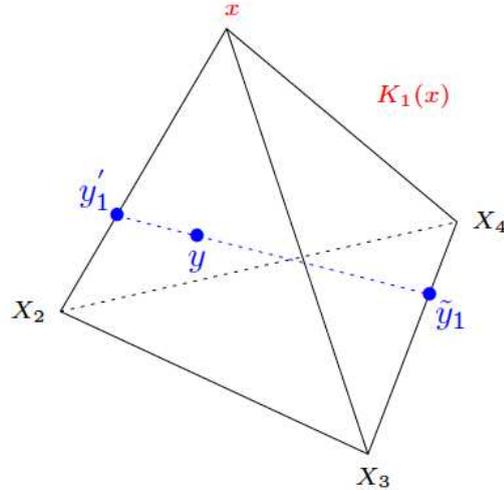
### Méthode 1

Pour chaque  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , nous décrivons  $y \in K_i(x)$  à l'aide du segment  $[y'_i, \tilde{y}_i]$ , où  $y'_i$  et  $\tilde{y}_i$  parcourent deux côtés opposés du tétraèdre  $K_i(x)$ .

★ Cas  $i = 1$  :  $K_1(x) = xX_2X_3X_4$

On définit :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \mu_1 X_3 + (1 - \mu_1)X_4; \quad \mu_1 \in [0, 1], \\ y'_1 &= \mu_2 X_2 + (1 - \mu_2)x; \quad \mu_2 \in [0, 1], \\ y_1 &:= y = \mu_3 \tilde{y}_1 + (1 - \mu_3)y'_1; \quad \mu_3 \in [0, 1]. \end{aligned}$$



Le Jacobien de la transformation est

$$J_1 = 6 \mu_3 (1 - \mu_3) |K_1(x)|.$$

L'intégrale  $I_K^1(x)$  devient alors :

$$I_K^1(x) = \gamma_1(x) \int_{[0,1]^3} \frac{F(x, y_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3))}{|x - y_1|^\alpha} \mu_3 (1 - \mu_3) d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3,$$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

---

où nous avons posé  $\gamma_1(x) = 6|K_1(x)|$ . On a

$$\begin{aligned} y_1 - x &= \mu_3(\tilde{y}_1 - y_1') + y_1' - x \\ y_1 - x &= \mu_3(\tilde{y}_1 - y_1') + \mu_2(X_2 - x), \end{aligned}$$

et  $y_1 - x = 0 \iff \mu_2 = \mu_3 = 0$ .

Nous introduisons ensuite, la transformation de Duffy sur les variables  $\mu_2$  et  $\mu_3$ . Pour cela, décomposons le carré  $[0, 1]^2$  en deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  :  $[0, 1]^2 = T_1 \cup T_2$ .

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ (\mu_2, \mu_3) \in [0, 1]^2; \quad \mu_2 \leq \mu_3 \right\}, \\ T_2 &= \left\{ (\mu_2, \mu_3) \in [0, 1]^2; \quad \mu_2 \geq \mu_3 \right\}. \end{aligned}$$

Effectuons ensuite le changement de variables suivant, dans  $T_2$  :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_3 \\ \mu_3 &= \mu_2. \end{aligned}$$

Il transforme  $T_2$  en  $T_1$  et son Jacobien vaut 1. Nous sommes alors conduit à

$$\begin{aligned} I_K^1(x) &= \gamma_1(x) \int_{[0,1]} \int_{T_1 \cup T_2} \frac{F(x, y_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3))}{|x - y_1|^\alpha} \mu_3 (1 - \mu_3) d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \\ I_K^1(x) &= \gamma_1(x) \int_{[0,1]} \int_{T_1} \left\{ \frac{F(x, y_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3))}{|x - y_1|^\alpha} \mu_3 (1 - \mu_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{F(x, \bar{y}_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3))}{|x - \bar{y}_1|^\alpha} \mu_2 (1 - \mu_2) \right\} d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3, \end{aligned}$$

avec  $\bar{y}_1 = \mu_2 \tilde{y}_1 + (1 - \mu_2) \tilde{y}_1'$  et  $\bar{y}_1' = \mu_3 X_2 + (1 - \mu_3)x$ , donc

$$\bar{y}_1 - x = \mu_2(\tilde{y}_1 - \bar{y}_1') + \mu_3(X_2 - x).$$

On effectue à présent, le changement de variables suivant, dans  $T_1$  :

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \zeta \\ \mu_2 &= \eta \zeta \\ \eta, \zeta &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il transforme  $T_1$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $\zeta$ . Nous obtenons avec ce changement,

$$\begin{aligned} I_K^1(x) &= \gamma_1 \int_{[0,1]^3} \left\{ \frac{F(x, y_1(\mu_1, \zeta, \eta))}{\Delta_1(x, \mu_1, \zeta, \eta)} (1 - \zeta) \zeta^{(2-\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{F(x, \bar{y}_1(\mu_1, \zeta, \eta))}{\bar{\Delta}_1(x, \mu_1, \zeta, \eta)} (1 - \eta \zeta) \eta \zeta^{(2-\alpha)} \right\} d\zeta d\eta d\mu_1, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \mu_1 X_3 + (1 - \mu_1) X_4, \\ y_1' &= \eta \zeta X_2 + (1 - \eta \zeta) x, \\ y_1(\mu_1, \zeta, \eta) &= \zeta \tilde{y}_1 + (1 - \zeta) y_1', \\ \Delta_1(x, \mu_1, \zeta, \eta) &= \tilde{y}_1 - y_1' + \eta(X_2 - x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{y}'_1 &= \zeta X_2 + (1 - \zeta)x, \\ \bar{y}_1(\mu_1, \zeta, \eta) &= \eta\zeta \bar{y}_1 + (1 - \eta\zeta)\bar{y}'_1, \\ \bar{\Delta}_1(x, \mu_1, \zeta, \eta) &= \eta(\bar{y}_1 - \bar{y}'_1) + X_2 - x.\end{aligned}$$

Un calcul similaire nous permet d'évaluer ensuite, les intégrales  $I_K^q(x)$ ;  $q = 2, 3, 4$ .

★ **Cas**  $i = 2$  :  $K_2(x) = X_1 x X_3 X_4$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_2 &= \mu_1 X_3 + (1 - \mu_1)X_4, \\ y'_2 &= \eta\zeta X_1 + (1 - \eta\zeta)x, \\ y_2(\mu_1, \zeta, \eta) &= \zeta \tilde{y}_2 + (1 - \zeta)y'_2, \\ \Delta_2(x, \mu_1, \zeta, \eta) &= \tilde{y}_2 - y'_2 + \eta(X_1 - x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{y}'_2 &= \zeta X_1 + (1 - \zeta)x, \\ \bar{y}_2(\mu_1, \zeta, \eta) &= \eta\zeta \bar{y}_2 + (1 - \eta\zeta)\bar{y}'_2, \\ \bar{\Delta}_2(x, \mu_1, \zeta, \eta) &= \eta(\bar{y}_2 - \bar{y}'_2) + X_1 - x.\end{aligned}$$

★ **Cas**  $i = 3$  :  $K_3(x) = X_1 X_2 x X_4$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_3 &= \mu_1 X_2 + (1 - \mu_1)X_4, \\ y'_3 &= \eta\zeta X_1 + (1 - \eta\zeta)x, \\ y_3(\mu_1, \zeta, \eta) &= \zeta \tilde{y}_3 + (1 - \zeta)y'_3, \\ \Delta_3(x, \mu_1, \zeta, \eta) &= \tilde{y}_3 - y'_3 + \eta(X_1 - x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{y}'_3 &= \zeta X_1 + (1 - \zeta)x, \\ \bar{y}_3(\mu_1, \zeta, \eta) &= \eta\zeta \bar{y}_3 + (1 - \eta\zeta)\bar{y}'_3, \\ \bar{\Delta}_3(x, \mu_1, \zeta, \eta) &= \eta(\bar{y}_3 - \bar{y}'_3) + X_1 - x.\end{aligned}$$

★ **Cas**  $i = 4$  :  $K_4(x) = X_1 X_2 X_3 x$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_4 &= \mu_1 X_2 + (1 - \mu_1)X_3, \\ y'_4 &= \eta\zeta X_1 + (1 - \eta\zeta)x, \\ y_4(\mu_1, \zeta, \eta) &= \zeta \tilde{y}_4 + (1 - \zeta)y'_4, \\ \Delta_4(x, \mu_1, \zeta, \eta) &= \tilde{y}_4 - y'_4 + \eta(X_1 - x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{y}'_4 &= \zeta X_1 + (1 - \zeta)x, \\ \bar{y}_4(\mu_1, \zeta, \eta) &= \eta\zeta \tilde{y}_4 + (1 - \eta\zeta)\tilde{y}'_4, \\ \bar{\Delta}_4(x, \mu_1, \zeta, \eta) &= \eta(\tilde{y}_4 - \tilde{y}'_4) + X_1 - x.\end{aligned}$$

Finalement par cette méthode, l'intégrale  $I_{\alpha, KK}$  s'exprime :

$$\begin{aligned}I_{\alpha, KK} = \int_K \left\{ \sum_{i=1}^4 \gamma_i(x) \int_{[0,1]^3} \left\{ \frac{F(x, y_i(\mu_1, \zeta, \eta))}{\Delta_i(x, \mu_1, \zeta, \eta)} J_\alpha(\zeta) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{F(x, \bar{y}_i(\mu_1, \zeta, \eta))}{\bar{\Delta}_i(x, \mu_1, \zeta, \eta)} \bar{J}_\alpha(\zeta, \eta) \right\} d\zeta d\eta d\mu_1 \right\} dx,\end{aligned}\tag{2.18}$$

avec  $J_\alpha(\zeta) = (1 - \zeta)\zeta^{(2-\alpha)}$ ,  $\bar{J}_\alpha(\zeta, \eta) = (1 - \eta\zeta)\eta\zeta^{(2-\alpha)}$  et pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\gamma_i(x) = |\mathcal{P}(K_i(x))| = 6|K_i(x)|$ . Notons que  $|K_i(x)| = \lambda_i(x)|K|$ , où  $\lambda_i(x)$  est la  $i$ -ème coordonnée barycentrique de  $x$  dans  $K$ . Nous avons donc  $\gamma_i(x) = 6\lambda_i(x)|K|$ . Nous avons défini, ci-dessus, les vecteurs  $\tilde{y}_i, \tilde{y}'_i, \bar{y}_i, y_i, \bar{y}_i$  et les scalaires  $\Delta_i, \bar{\Delta}_i$ . ■

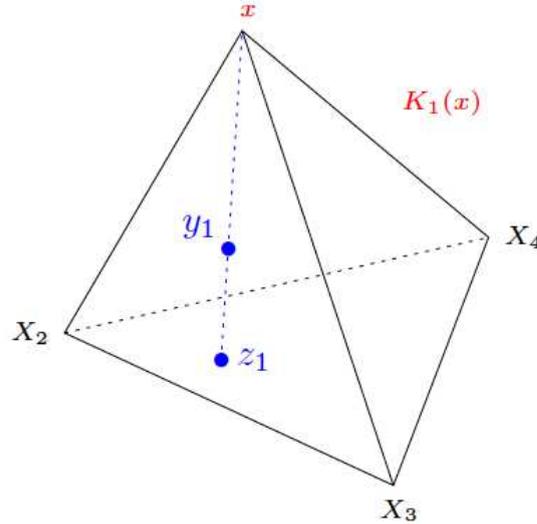
### Méthode 2

Pour chaque  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , nous décrivons  $y \in K_i(x)$  à l'aide du segment  $[x, z_i]$ , où  $z_i$  est un élément de la face  $\hat{\Sigma}_i$  opposée à  $x$ , dans le tétraèdre  $K_i(x)$ . La variable  $z_i$  sera décrite par une formule de quadrature sur le triangle.

★ Cas  $i = 1$  :  $K_1(x) = xX_2X_3X_4$

On considère  $z_1 \in \hat{\Sigma}_1 = X_2X_3X_4$  et on définit  $y \in [x, z_1]$ , en posant :

$$y_1 := y = (1 - \mu)x + \mu z_1 ; \quad \mu \in [0, 1].$$



Cette définition entraîne que  $y_1 - x = \mu(z_1 - x)$ , et la formule d'intégration permettant de passer du tétraèdre à un domaine impliquant l'une de ses faces (annexe A), nous conduit à :

$$I_K^1(x) = 3 \frac{|K_1(x)|}{|\hat{\Sigma}_1|} \int_{[0,1]} \int_{\hat{\Sigma}_1} \frac{F(x, y_1(\mu, z_1))}{|x - z_1|^\alpha} \mu^{(2-\alpha)} d\mu ds(z_1).$$

★ Cas  $i = 2$  :  $K_2(x) = X_1 x X_3 X_4$

On considère  $z_2 \in \overset{\circ}{\Sigma}_2 = X_1 X_3 X_4$  et on définit  $y \in [x, z_2]$ , en posant :

$$y_2 := y = (1 - \mu)x + \mu z_2 ; \quad \mu \in [0, 1].$$

De même  $y_2 - x = \mu(z_2 - x)$ , et on est conduit à :

$$I_K^2(x) = 3 \frac{|K_2(x)|}{|\overset{\circ}{\Sigma}_2|} \int_{[0,1]} \int_{\overset{\circ}{\Sigma}_2} \frac{F(x, y_2(\mu, z_2))}{|x - z_2|^\alpha} \mu^{(2-\alpha)} d\mu ds(z_2).$$

Les intégrales  $I_K^q(x)$  ( $q = 3, 4$ ) sont évaluées de manière similaire. Finalement par cette méthode, l'intégrale  $I_{\alpha, KK}$  s'exprime :

$$I_{\alpha, KK} = \int_K \left\{ \sum_{i=1}^4 \sigma_i(x) \int_{[0,1]} \int_{\overset{\circ}{\Sigma}_i} \frac{F(x, y_i(\mu, z_i))}{|x - z_i|^\alpha} \mu^{(2-\alpha)} d\mu ds(z_i) \right\} dx, \quad (2.19)$$

où pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\sigma_i(x) = 3 \frac{|K_i(x)|}{|\overset{\circ}{\Sigma}_i|} = 3 \lambda_i(x) \frac{|K|}{|\overset{\circ}{\Sigma}_i|}$ . Les faces  $\overset{\circ}{\Sigma}_i$  et les vecteurs  $y_i$  sont définis ci-dessus. ■

Pour cette configuration des tétraèdres, les méthodes 1 et 2 transforment chacune,  $I_{\alpha, KK}$  en une intégrale singulière d'ordre  $\alpha - 2$  par rapport à une variable uni-dimensionnelle. Les deux méthodes n'ont en fait aucun impact sur la singularité de  $I_{\alpha, KK}$ , lorsque celle-ci est forte ( $\alpha \geq 3$ ). En effet, les valeurs  $\alpha < 3$  demeurent celles pour lesquelles la singularité est affaiblie. Cependant, pour des intégrales  $I_{\alpha, KK}$  faiblement singulières de l'ordre de  $\alpha \leq 2$ , cette méthode lève complètement la singularité et l'on peut évaluer l'une des intégrales (2.18) et (2.19), directement par des formules de quadrature. L'expression (2.19) est celle qui a été implémentée pour les tests numériques, parce qu'elle est la plus simple à mettre en oeuvre.

### 2.2.5 Cas particulier pour le tétraèdre et l'une de ses faces

Figure 1 :

On considère l'intégrale

$$I_{K\Sigma} = \int_K \int_{\Sigma} \frac{F(x, y)}{|x - y|^\alpha} ds(y) dx \quad ; \quad \alpha > 0.$$

$\Sigma$  est une face du tétraèdre  $K$ , que nous désignerons par  $X_1 X_2 X_3$ . Nous décrivons  $x \in K$ , en le considérant sur le segment  $[X_4, x']$  où  $x'$  est un élément de  $\Sigma$  :

$$x = (1 - \lambda_x) x' + \lambda_x X_4 ; \quad (\lambda_x, x') \in [0, 1] \times \Sigma.$$

On évalue à présent l'intégrale  $I_{K\Sigma}$  avec ce changement de variables. Nous appliquons à l'intégrale sur le tétraèdre  $K$ , encore le résultat du changement de variable introduit à l'annexe I :

$$I_{K\Sigma} = \beta_{K\Sigma} \int_{[0,1]} (1 - \lambda_x)^2 \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{F[x(\lambda_x, x'), y]}{|x(\lambda_x, x') - y|^\alpha} ds(y) ds(x') d\lambda_x,$$

avec  $\beta_{K\Sigma} = 3 \frac{|K|}{|\Sigma|}.$

## 2.2 Traitement des singularités : une méthode de changements de variables

Pour la variable d'intégration externe  $x'$  donné sur le triangle  $\Sigma$ , à l'instar du cas où les tétraèdres ont une face commune, on découpe  $\Sigma$  en trois zones concourantes en  $x'$ . Le triangle  $\Sigma$  est alors subdivisé en sous triangles  $x'X_1X_2$ ,  $x'X_2X_3$  et  $x'X_3X_1$ , et la réunion de ces sous triangles est décrite par la variable d'intégration interne  $y \in \Sigma$ . La variable  $y$  est exprimée dans chaque sous triangle comme combinaison du sommet  $x'$  et d'un point  $\tilde{y}$  sur l'arête opposée.

$$\text{Donc pour tout } x' \in \Sigma, \quad \Sigma_i(x') \text{ est le triangle } \begin{cases} x'X_2X_3 & \text{si } i = 1 \\ x'X_3X_1 & \text{si } i = 2 \\ x'X_1X_2 & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

Figure 2 :

Nous avons ainsi

$$I_{K\Sigma} = \beta_{K\Sigma} \sum_{i=1}^3 \int_{\Sigma} I_{\Sigma}^i(x') ds(x'),$$

$$\text{avec } I_{\Sigma}^i(x') = \int_{[0,1]} \int_{\Sigma_i(x')} \frac{F[x(\lambda_x, x'), y]}{|x(\lambda_x, x') - y|^\alpha} (1 - \lambda_x)^2 ds(y) d\lambda_x; \quad i = 1, 2, 3.$$

**Remarque 15.** Si  $\Sigma_i(x')$  est dégénéré alors l'intégrale  $I_{\Sigma}^i(x')$  n'a aucune contribution (i.e  $I_{\Sigma}^i(x') = 0$ ).

Evaluons à présent  $I_{\Sigma}^i(x')$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

- $i = 1$  (dans  $\Sigma_1 := x'X_2X_3$ )

$$\tilde{y}_1 = (1 - \lambda_y)X_2 + \lambda_y X_3; \quad \lambda_y \in [0, 1]$$

$$y_1 := y = (1 - \mu_y)x' + \mu_y \tilde{y}_1; \quad \mu_y \in [0, 1]$$

Le triangle  $\Sigma_1(x')$  est transformé en le carré unité  $[0, 1]^2$  et

$$J_1 = \left| \frac{\partial y}{\partial \mu_y} \times \frac{\partial y}{\partial \lambda_y} \right|$$

avec  $\frac{\partial y}{\partial \mu_y} = \tilde{y}_1 - x'$  et  $\frac{\partial y}{\partial \lambda_y} = \mu_y(X_3 - X_2)$ . Donc

$$J_1 = \mu_y |(X_3 - X_2) \times (\tilde{y}_1 - x')|$$

$$= \mu_y |(X_3 - X_2) \times (X_2 - x')|$$

$$J_1 = 2\mu_y |\Sigma_1(x')|.$$

par conséquent, on obtient

$$I_{\Sigma}^1(x') = 2 |\Sigma_1(x')| \int_{[0,1]} I_{\Sigma}^1(x', \lambda_y) d\lambda_y,$$

$$\text{avec } I_{\Sigma}^1(x', \lambda_y) = \int_{[0,1]^2} \frac{F[x(\lambda_x, x'), y_1(x', \lambda_y, \mu_y)]}{|x - y_1|^\alpha} (1 - \lambda_x)^2 \mu_y d\mu_y d\lambda_x.$$

Nous avons  $x - y = \lambda_x(X_4 - x') + \mu_y(x' - \tilde{y}_1)$ . Puisque  $\Sigma_1(x')$  est non dégénéré, alors

$$x - y = 0 \iff \lambda_x = \mu_y = 0.$$

Nous introduisons ensuite, la transformation de Duffy [15] sur les variables  $\lambda_x$  et  $\mu_y$ . Pour cela, décomposons le carré  $[0, 1]^2 = T_1 \cup T_2$  :

$$T_1 = \left\{ (\lambda_x, \mu_y) \in [0, 1]^2; \quad \mu_y \leq \lambda_x \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (\lambda_x, \mu_y) \in [0, 1]^2; \quad \mu_y \geq \lambda_x \right\}.$$

Nous effectuons ensuite dans  $T_1$  et  $T_2$ , les changements de variables suivants :

• **Dans  $T_1$**

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \zeta \\ \mu_y &= \eta\zeta \\ \eta, \zeta &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il transforme  $T_1$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $\zeta$ .

• **Dans  $T_2$**

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \zeta\eta \\ \mu_y &= \eta \\ \eta, \zeta &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il transforme  $T_2$  en le carré  $[0, 1]^2$  et son Jacobien vaut  $\eta$ .

La décomposition nous conduit à :

$$I_{\Sigma}^1(x', \lambda_y) = \sum_{q=1}^2 M_{\Sigma}^{1,q}(x', \lambda_y),$$

$$\text{où } M_{\Sigma}^{1,q}(x', \lambda_y) = \int_{T_q} \frac{F \left[ x(\lambda_x, x'), y_1(x', \lambda_y, \mu_y) \right]}{|x - y_1|^\alpha} (1 - \lambda_x)^2 \mu_y d\mu_y d\lambda_x.$$

A l'aide des changements précédents, nous avons pour  $q = 1, 2$ ,

$$M_{\Sigma}^{1,q}(x', \lambda_y) = \int_{[0, 1]^2} \frac{F \left( x_{1,q}(x', \zeta, \eta), y_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta) \right)}{\Delta_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta)} J_{1,q}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta,$$

avec

$$x_{1,q}(x', \zeta, \eta) = \begin{cases} \zeta X_4 + (1 - \zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta\zeta X_4 + (1 - \eta\zeta) x' & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

$$y_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta) = \begin{cases} \eta\zeta \tilde{y}_1 + (1 - \eta\zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta \tilde{y}_1 + (1 - \eta) x' & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

$$\Delta_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta) = \begin{cases} |X_4 - x' + \eta(x' - \tilde{y}_1)|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(X_4 - x') + x' - \tilde{y}_1|^\alpha & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

et

$$J_{1,q}(\zeta, \eta) = \begin{cases} (1 - \zeta)^2 \eta \zeta^{(2-\alpha)} & \text{si } q = 1 \\ (1 - \eta \zeta)^2 \eta^{(2-\alpha)} & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi

$$I_{\Sigma}^1(x') = 2 |\Sigma_1(x')| \int_{[0,1]} \left\{ \sum_{q=1}^2 \int_{[0,1]^2} \frac{F(x_{1,q}(x', \zeta, \eta), y_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta))}{\Delta_{1,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta)} J_{1,q}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \right\} d\lambda_y.$$

Un calcul similaire nous permet d'évaluer ensuite, les intégrales  $I_{\Sigma}^i(x')$ ;  $i = 2, 3$ .

- $i = 2$  (dans  $\Sigma_2 := x' X_3 X_1$ )

$$\tilde{y}_2 = (1 - \lambda_y) X_3 + \lambda_y X_1.$$

$$x_{2,q}(x', \zeta, \eta) = \begin{cases} \zeta X_4 + (1 - \zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta \zeta X_4 + (1 - \eta \zeta) x' & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

$$y_{2,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta) = \begin{cases} \eta \zeta \tilde{y}_2 + (1 - \eta \zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta \tilde{y}_2 + (1 - \eta) x' & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

$$\Delta_{2,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta) = \begin{cases} |X_4 - x' + \eta(x' - \tilde{y}_2)|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(X_4 - x') + x' - \tilde{y}_2|^\alpha & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

et

$$J_{2,q}(\zeta, \eta) = J_{1,q}(\zeta, \eta), \quad \text{pour } q = 1, 2.$$

- $i = 3$  (dans  $\Sigma_3 := x' X_1 X_2$ )

$$\tilde{y}_3 = (1 - \lambda_y)X_1 + \lambda_y X_2.$$

$$x_{3,q}(x', \zeta, \eta) = \begin{cases} \zeta X_4 + (1 - \zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta \zeta X_4 + (1 - \eta \zeta) x' & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

$$y_{3,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta) = \begin{cases} \eta \zeta \tilde{y}_3 + (1 - \eta \zeta) x' & \text{si } q = 1 \\ \eta \tilde{y}_3 + (1 - \eta) x' & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

$$\Delta_{3,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta) = \begin{cases} |X_4 - x' + \eta(x' - \tilde{y}_3)|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(X_4 - x') + x' - \tilde{y}_3|^\alpha & \text{si } q = 2, \end{cases}$$

et

$$J_{3,q}(\zeta, \eta) = J_{1,q}(\zeta, \eta), \quad \text{pour } q = 1, 2.$$

■

Finalement par cette méthode, l'intégrale  $I_{K\Sigma}$  est :

$$I_{K\Sigma} = \beta_{K\Sigma} \int_{\Sigma} \left\{ \sum_{i=1}^3 I_{\Sigma}^i(x') \right\} ds(x')$$

$$I_{K\Sigma} = 2\beta_{K\Sigma} \int_{\Sigma} \int_{[0,1]} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{q=1}^2 |\Sigma_i(x')| \int_{[0,1]^2} \frac{F(x_{i,q}(x', \zeta, \eta), y_{i,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta))}{\Delta_{i,q}(x', \lambda_y, \zeta, \eta)} \right. \\ \left. J_{i,q}(\zeta, \eta) d\eta d\zeta \right\} d\lambda_y ds(x').$$

Les vecteurs  $x_{i,q}$ ,  $y_{i,q}$  et les scalaires  $\Delta_{i,q}$ ,  $J_{i,q}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $q = 1, 2$ ), sont donnés ci dessus.

Pour ce cas particulier, l'intégrale est transformée en une intégrale singulière d'ordre  $\alpha - 2$  par rapport à une variable uni-dimensionnelle. Pour un ordre de singularité  $\alpha \leq 2$ , la méthode permet de lever complètement la singularité et d'évaluer l'intégrale  $I_{K\Sigma}$  avec des formules standard d'intégration numérique.

## 2.3 Application : régularisation de l'opérateur intégral volumique

La discrétisation de l'équation intégrale volumique (2.1) à la section 2.1 nous conduit, pour la résolution du système linéaire (2.8), à l'évaluation des intégrales singulières suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\kappa,\eta,h,ij}\mathbf{u} = & \int_{\Omega_h^-} \varphi_i(x) \nabla \left( \int_{\Omega_h^-} \eta(y) \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ & - \kappa^2 \left( \int_{\Omega_h^-} \varphi_i(x) \int_{\Omega_h^-} \eta(y) \varphi_j(y) G_\kappa(x-y) dy dx \right) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ . On rappelle que  $G_\kappa(x) = \frac{e^{i\kappa|x|}}{4\pi|x|}$  pour  $x \neq 0$  et que  $\overline{\Omega_h^-} = \bigcup_{n=1}^N K_n$ , où les  $K_n$  sont des tétraèdres. Les fonctions  $\varphi_i$ ,  $\varphi_j$  et  $\eta$  sont scalaires, avec  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  des fonctions de base de la discrétisation et  $\eta = 1 - \varepsilon_r$ , où  $\varepsilon_r$  est la permittivité électrique relative du milieu. En utilisant le maillage de  $\overline{\Omega_h^-}$ , on se ramène à

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\kappa,\eta,h,ij}\mathbf{u} = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{K_n} \varphi_i(x) \nabla \left( \int_{K_m} \eta(y) \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \right. \\ & \left. - \kappa^2 \left( \int_{K_n} \varphi_i(x) \int_{K_m} \eta(y) \varphi_j(y) G_\kappa(x-y) dy dx \right) \mathbf{u} \right\}. \end{aligned}$$

Quitte à introduire l'inconnu  $\tilde{\mathbf{E}} = \eta \mathbf{E}$  dans l'équation (2.1), il suffira donc, pour évaluer l'intégrale volumique, de nous intéresser aux intégrales de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{KL,ij}(\mathbf{u}) = & \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_L \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ & - \kappa^2 \left( \int_K \varphi_i(x) \int_L \varphi_j(y) G_\kappa(x-y) dy dx \right) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

où  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$  et  $K$  et  $L$  sont deux tétraèdres du maillage. Nous décrivons dans la suite, l'évaluation de ces intégrales selon que  $K$  et  $L$  sont différents et non disjoints (quasi-singularité) ou qu'ils sont confondus (singularité). Quand  $K$  et  $L$  sont disjoints, nous évaluons l'expression (2.21) directement par des formules de quadratures standard.

### 2.3.1 Configurations de quasi-singularités

Lorsque les tétraèdres  $K$  et  $L$  du maillage sont différents et non disjoints, ils partagent exactement soit un sommet, soit une arête ou une face. Pour évaluer l'intégrale (2.21), nous pouvons commuter ici, l'intégration et la différentiation. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{KL,ij}(\mathbf{u}) = & \int_K \varphi_i(x) \int_L \varphi_j(y) \nabla_x (\nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u}) dy dx \\ & - \kappa^2 \left( \int_K \varphi_i(x) \int_L \varphi_j(y) G_\kappa(x-y) dy dx \right) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

En notant  $\nabla_x \nabla_y$  la matrice d'opérateurs différentiels dont les entrées sont  $\partial_{x_i} \partial_{y_j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), on a  $\nabla_x (\nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u}) = (\nabla_x \nabla_y G_\kappa(x-y)) \mathbf{u} = -(\nabla \nabla G_\kappa(x-y)) \mathbf{u}$  pour  $x \neq y$ , où on a noté  $\nabla \nabla G_\kappa(x-y) := \nabla_x \nabla_x G_\kappa(x-y) = \nabla_y \nabla_y G_\kappa(x-y)$ . Nous utiliserons dorénavant cette notation et préciserons, si besoin, la variable par rapport à laquelle la dérivation est faite. Ces considérations nous emmènent à la définition de la matrice de fonctions (appelée tenseur de Green dynamique par les physiciens) :

$$\mathbb{G}_\kappa(x, y) = \left( \mathbb{I} + \frac{\nabla \nabla}{\kappa^2} \right) G_\kappa(x-y) \text{ pour } x \neq y.$$

Avec cette définition, nous récrivons (2.22) :

$$\mathcal{A}_{KL,ij}(\mathbf{u}) = -\kappa^2 \left( \int_K \varphi_i(x) \int_L \varphi_j(y) \mathbb{G}_\kappa(x,y) dy dx \right) \mathbf{u}.$$

Nous appliquons ensuite, à l'intégrale quasi-singulière  $\mathcal{A}_{KL,ij} = \int_K \int_L \varphi_i(x) \varphi_j(y) \mathbb{G}_\kappa(x,y) dy dx$ , la méthode de traitement des singularités que nous avons développée à la section 2.2. Pour cela, avec

$$\partial_i G_\kappa(x) = (i\kappa|x| - 1) \frac{e^{i\kappa|x|}}{4\pi|x|^3} x_i,$$

$$\partial_{ij} G_\kappa(x) = \frac{e^{i\kappa|x|}}{4\pi|x|^5} \left\{ i\kappa\delta_{ij}|x|^3 - \delta_{ij}|x|^2 - \kappa^2 x_i x_j |x|^2 - 3i\kappa x_i x_j |x| + 3x_i x_j \right\},$$

on explicite

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_\kappa(x,y) = & \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\kappa^2|x-y|^5} \left\{ (\kappa^2|x-y|^4 + i\kappa|x-y|^3 - |x-y|^2) \mathbb{I} \right. \\ & \left. - (\kappa^2|x-y|^2 + 3i\kappa|x-y| - 3) (x-y)(x-y)^T \right\}. \end{aligned}$$

Nous écrivons ensuite  $\mathcal{A}_{KL,ij}$ , avec cette expression de  $\mathbb{G}_\kappa(x,y)$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{KL,ij} = & \frac{1}{4\pi\kappa^2} \left\{ \sum_{p=1}^3 \left( \int_K \int_L \varphi_i(x) \varphi_j(y) \frac{f_p(x,y)}{|x-y|^{\alpha_p}} dy dx \right) \mathbb{I} \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^3 \int_K \int_L \varphi_i(x) \varphi_j(y) \frac{g_q(x,y)}{|x-y|^{\beta_q}} (x-y)(x-y)^T dy dx \right\}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1(x,y) = \kappa^2 e^{i\kappa|x-y|} & \alpha_1 = 1 \\ f_2(x,y) = i\kappa e^{i\kappa|x-y|} & \alpha_2 = 2 \\ f_3(x,y) = -e^{i\kappa|x-y|} & \alpha_3 = 3 \\ \\ g_1(x,y) = -\kappa^2 e^{i\kappa|x-y|} = -F_1(x,y) & \beta_1 = 3 \\ g_2(x,y) = -3i\kappa e^{i\kappa|x-y|} = -3F_2(x,y) & \beta_2 = 4 \\ g_3(x,y) = 3e^{i\kappa|x-y|} = -3F_3(x,y) & \beta_3 = 5. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Sachant que  $(x-y)(x-y)^T = \mathcal{O}(|x-y|^2)$  quand  $|x-y| \rightarrow 0$ , la singularité de l'intégrande impliquant  $g_q$  est en fait d'ordre  $\beta_q - 2$  ( $q = 1, 2, 3$ ). Pour ces valeurs des  $\alpha_p$  et  $\beta_q$  et pour les positions relatives de  $K$  et  $L$  considérées ici, la méthode permet de lever la singularité dans  $\mathcal{A}_{KL,ij}$ , puis de l'évaluer par des formules standard d'intégration numérique.

### 2.3.2 Configurations de singularités

Nous considérons, ici, l'intégrale (2.21) que nous désignerons par  $\mathcal{A}_{K,ij}(\mathbf{u})$  lorsque les tétraèdres  $K$  et  $L$  sont confondus. Une commutation de l'intégration et de la différentiation, comme dans la sous-section précédente, nous conduirait à une intégrale fortement singulière. Notre méthode de traitement des singularités ne permettant pas de régulariser les intégrales fortement singulières,

### 2.3 Application : régularisation de l'opérateur intégral volumique

nous allons alors présenter trois approches équivalentes pour appliquer la méthode à des intégrales faiblement singulières. La première approche consiste en une soustraction de la singularité, par la solution fondamentale de Laplace, combinée à une intégration par parties au sens des distributions. Les deux autres approches sont simplement des intégrations par parties, au sens usuel, du premier ordre et du deuxième ordre.

#### i) Soustraction de singularité

On désigne par  $\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u})$ , le premier terme de l'expression de  $\mathcal{A}_{K,ij}(\mathbf{u})$  donnée dans (2.21) pour  $K = L$ . C'est à dire

$$\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) = \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx.$$

Il s'agit ici, de scinder l'intégrale en une partie faiblement singulière à laquelle on pourra appliquer directement notre méthode de changements des variables, et en une autre partie fortement singulière qui sera d'abord transformée grâce à la théorie des distributions, avant d'être soumise à la méthode développée. Soit  $G_0(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$  ( $x \neq 0$ ), la solution fondamentale de Laplace. On soustrait  $G_0$  de  $G_\kappa$  et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) = & \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y (G_\kappa(x-y) - G_0(x-y)) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ & + \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

On pose  $\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) = \mathcal{B}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u})$ , avec

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u}) &= \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y (G_\kappa(x-y) - G_0(x-y)) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ \mathcal{B}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u}) &= \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx. \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'intégrale  $\mathcal{B}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u})$  est ensuite décomposée en  $\mathcal{B}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u}) = \mathcal{C}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u}) + \mathcal{C}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u})$ , où

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u}) &= \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_K (\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ \mathcal{C}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u}) &= \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_K \varphi_j(x) \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

La faiblesse de la singularité dans  $\mathcal{C}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u})$ , grâce à la différence  $(\varphi_j(y) - \varphi_j(x))$ , permet de commuter l'intégration et la différentiation. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u}) &= \int_K \varphi_i(x) \int_K (\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) \nabla_x (\nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u}) dy dx \\ &\quad - \int_K \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) \left( \int_K \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u}) &= \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(x) \nabla \left( \int_K \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ &\quad + \int_K \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) \left( \int_K \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'addition de (2.28) et de (2.29) annulant leurs seconds termes, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u}) &= \int_K \varphi_i(x) \int_K (\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) \nabla_x (\nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u}) \, dy \, dx \\ &\quad + \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(x) \nabla \left( \int_K \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} \, dy \right) \, dx. \end{aligned}$$

En introduisant la matrice d'opérateurs différentiels  $\nabla_x \nabla_y$  ou  $\nabla \nabla$ , notons que  $\nabla_x (\nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u}) = (\nabla_x \nabla_y G_0(x-y)) \mathbf{u}$  et que

$$\begin{aligned} \nabla \left( \int_K \nabla_y G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} \, dy \right) &= -\nabla \left( \int_K \nabla_x G_0(x-y) \cdot \mathbf{u} \, dy \right) \\ &= -\nabla \left[ \left( \nabla \int_K G_0(x-y) \, dy \right) \cdot \mathbf{u} \right] \\ &= - \left( \nabla \nabla \int_K G_0(x-y) \, dy \right) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u}) &= \left( \int_K \int_K \varphi_i(x) (\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) \nabla_x \nabla_y G_0(x-y) \, dy \, dx \right) \mathbf{u} \\ &\quad - \left[ \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(x) \left( \nabla \nabla \int_K G_0(x-y) \, dy \right) \, dx \right] \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Pour évaluer le second membre de (2.30), nous utilisons la théorie des fonctions généralisées décrite dans [17]. Pour cela, notons  $\mathbf{1}_K$  la distribution à support compact définie pour toute fonction test  $\psi$ , par  $\langle \mathbf{1}_K, \psi \rangle := \int_K \psi(x) \, dx$ . On a

$$\begin{aligned} \langle \nabla \mathbf{1}_K, \psi \rangle &= -\langle \mathbf{1}_K, \nabla \psi \rangle \\ &= - \int_K \nabla \psi(x) \, dx \\ \langle \nabla \mathbf{1}_K, \psi \rangle &= - \int_{\partial K} \mathbf{n}(x) \psi(x) \, ds(x), \end{aligned} \tag{2.31}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à  $K$ . On applique ce calcul pour obtenir

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \int_K G_0(x-y) \, dy &= \nabla \nabla (\mathbf{1}_K * G_0)(x) \\ &= (\nabla \mathbf{1}_K * (\nabla G_0)^T)(x) \\ &= \langle \nabla \mathbf{1}_K, (\nabla G_0(x-\cdot))^T \rangle \\ &= - \int_{\partial K} \mathbf{n}(y) (\nabla_x G_0(x-y))^T \, ds(y). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Avec  $\nabla_x G_0(x-y) = -\frac{x-y}{4\pi|x-y|^3}$ , on a l'égalité suivante (figurant également dans [36] et [30]) :

$$\nabla \nabla \int_K G_0(x-y) \, dy = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K} \frac{\mathbf{n}(y)(x-y)^T}{|x-y|^3} \, ds(y).$$

### 2.3 Application : régularisation de l'opérateur intégral volumique

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{K,ij}^{(2)}(\mathbf{u}) &= \left( \int_K \int_K \varphi_i(x)(\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) \nabla_x \nabla_y G_0(x-y) dy dx \right) \mathbf{u} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left( \int_K \int_{\partial K} \varphi_i(x) \varphi_j(x) \frac{\mathbf{n}(y)(x-y)^T}{|x-y|^3} ds(y) dx \right) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Par ailleurs, la faible singularité dans  $\mathcal{B}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u})$  permet aussi de commuter l'intégration et la différentiation dans (2.26) et d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u}) &= \int_K \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \nabla_x (\nabla_y (G_\kappa(x-y) - G_0(x-y)) \cdot \mathbf{u}) dy dx \\ \mathcal{B}_{K,ij}^{(1)}(\mathbf{u}) &= \left( \int_K \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \nabla_x \nabla_y (G_\kappa(x-y) - G_0(x-y)) dy dx \right) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Finalement en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K,ij} &= \int_K \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \nabla_x \nabla_y (G_\kappa(x-y) - G_0(x-y)) dy dx \\ \mathcal{D}_{K,ij} &= \int_K \int_K \varphi_i(x) (\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) \nabla_x \nabla_y G_0(x-y) dy dx \\ \mathcal{E}_{K,ij} &= -\frac{1}{4\pi} \int_K \int_{\partial K} \varphi_i(x) \varphi_j(x) \frac{\mathbf{n}(y)(x-y)^T}{|x-y|^3} ds(y) dx, \end{aligned} \quad (2.35)$$

nous avons  $\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) = (\mathcal{C}_{K,ij} + \mathcal{D}_{K,ij} + \mathcal{E}_{K,ij}) \mathbf{u}$ . Les intégrales  $\mathcal{C}_{K,ij}$ ,  $\mathcal{D}_{K,ij}$  et  $\mathcal{E}_{K,ij}$  étant faiblement singulières, nous utiliserons le traitement des singularités développé en section 2.2, pour leurs évaluations. Plus précisément :

- **Evaluation de  $\mathcal{C}_{K,ij}$**

Rappelant les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de  $G_0$  :

$$\begin{aligned} \partial_i G_0(x) &= -\frac{x_i}{4\pi|x|^3}, \\ \partial_{ij} G_0(x) &= \frac{3x_i x_j - \delta_{ij}|x|^2}{4\pi|x|^5}, \end{aligned}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbol de Kronecker, on explicite

$$\begin{aligned} &\nabla_x \nabla_y (G_\kappa(x-y) - G_0(x-y)) \\ &= \left\{ -i\kappa|x-y|^2 \mathbb{I} + (\kappa^2|x-y| + 3i\kappa)(x-y)(x-y)^T \right\} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|^4} \\ &\quad + \frac{|x-y|^2 \mathbb{I} - 3(x-y)(x-y)^T}{4\pi|x-y|^4} \left( \frac{e^{i\kappa|x-y|} - 1}{|x-y|} \right). \end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto \frac{e^{i\kappa|x|} - 1}{|x|}$  étant analytique au voisinage de l'origine, l'intégrale  $\mathcal{C}_{K,ij}$  est faiblement singulière et nous lui appliquons alors, notre méthode de traitement des singularités en écrivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K,ij} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{p=1}^2 \left( \int_K \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \frac{F_p(x,y)}{|x-y|^{\alpha_p}} dy dx \right) \mathbb{I} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=1}^3 \int_K \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \frac{H_q(x,y)}{|x-y|^{\beta_q}} (x-y)(x-y)^T dy dx \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_1(x, y) = -i\kappa e^{i\kappa|x-y|} & \alpha_1 = 2 \\ F_2(x, y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|} - 1}{|x-y|} & \alpha_2 = 2 \\ H_1(x, y) = \kappa^2 e^{i\kappa|x-y|} & \beta_1 = 3 \\ H_2(x, y) = 3i\kappa e^{i\kappa|x-y|} & \beta_2 = 4 \\ H_3(x, y) = -3 \frac{e^{i\kappa|x-y|} - 1}{|x-y|} & \beta_3 = 4. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

• **Evaluation de  $\mathcal{D}_{K,ij}$**

Puisque nous nous limitons aux éléments finis d'ordres  $k \leq 1$ , nous écrivons  $\varphi_j(y) - \varphi_j(x) = \nabla \varphi_j(x) \cdot (y - x)$  et

$$\mathcal{D}_{K,ij} = \int_K \int_K \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) \cdot (y - x) \nabla_x \nabla_y G_0(x - y) dy dx$$

$$\mathcal{D}_{K,ij} = \int_K \int_K \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) \cdot \nu(x, y) |x - y| \nabla_x \nabla_y G_0(x - y) dy dx,$$

où nous avons posé  $\nu(x, y) = \frac{y - x}{|x - y|}$ . On explicite ensuite

$$|x - y| \nabla_x \nabla_y G_0(x - y) = \frac{1}{4\pi|x - y|^4} \left( |x - y|^2 \mathbb{I} - 3(x - y)(x - y)^T \right).$$

Puisque  $\nu(x, y) = \mathcal{O}(1)$  quand  $|x - y| \rightarrow 0$ , l'intégrale  $\mathcal{D}_{K,ij}$  est faiblement singulière et nous lui appliquons également la méthode de changements des variables, en écrivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{K,ij} = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \int_K \int_K \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) \cdot \nu(x, y) \frac{F_3(x, y)}{|x - y|^{\alpha_3}} dy dx \right) \mathbb{I} \right. \\ & \left. + \int_K \int_K \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) \cdot \nu(x, y) \frac{H_4(x, y)}{|x - y|^{\beta_4}} (x - y)(x - y)^T dy dx \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_3(x, y) = 1 & \alpha_3 = 2 \\ H_4(x, y) = -3 & \beta_4 = 4. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

L'estimation  $(x - y)(x - y)^T = \mathcal{O}(|x - y|^2)$  quand  $|x - y| \rightarrow 0$ , et les valeurs de  $\alpha_p$  et  $\beta_q$  ( $p = 1, 2, 3$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$ ), permettent à la méthode de lever les singularités dans  $\mathcal{C}_{K,ij}$  et dans  $\mathcal{D}_{K,ij}$ , puis de les évaluer par des formules standard d'intégration numérique.

• **Evaluation de  $\mathcal{E}_{K,ij}$**

L'intégration sur le bord  $\partial K$  du tétraèdre  $K$  se décompose en une somme d'intégrations sur les faces  $\Delta_l$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ) de  $K$ . La normale  $\mathbf{n}$  étant constante sur chacune de ces faces, en notant  $\mathbf{n}_l$  sa restriction à  $\Delta_l$ , nous avons

$$\mathcal{E}_{K,ij} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^4 \mathbf{n}_l \left( \int_K \int_{\Delta_l} \varphi_i(x) \varphi_j(x) \frac{x - y}{|x - y|^3} ds(y) dx \right)^T.$$

## 2.3 Application : régularisation de l'opérateur intégral volumique

Pour compléter l'évaluation de  $\mathcal{E}_{K,ij}$ , nous lui appliquons la méthode de changements de variables développée précédemment, pour le cas particulier du tétraèdre et l'une de ses faces.

### ii) Intégrations par parties d'ordres 1 et 2

Nous reconsidérons le premier terme  $\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u})$  de l'expression de  $\mathcal{A}_{K,ij}(\mathbf{u})$  donnée dans (2.21). Une alternative à la méthode de soustraction de singularité, exposée précédemment, est l'application d'une intégration par parties directement sur  $\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u})$ . Ceci conduit à

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) &= \int_K \varphi_i(x) \nabla \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ \mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) &= - \int_K \nabla \varphi_i(x) \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) dx \\ &\quad + \int_{\partial K} \mathbf{n}(x) \varphi_i(x) \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u} dy \right) ds(x).\end{aligned}$$

Sachant que pour tout  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in (\mathbb{C}^3)^3$ ,  $(\mathbf{b}^T \mathbf{c}) \mathbf{a} = (\mathbf{a} \mathbf{b}^T) \mathbf{c}$ , nous obtenons pour l'intégration par parties d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) &= - \left( \int_K \int_K \varphi_j(y) \nabla \varphi_i(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy dx \right) \mathbf{u} \\ &\quad + \left( \int_{\partial K} \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \mathbf{n}(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy ds(x) \right) \mathbf{u}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

C'est à dire  $\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) = (\mathcal{B}_{K,ij,1} + \mathcal{B}_{K,ij,2})\mathbf{u}$ , avec

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{K,ij,1} &= - \int_K \int_K \varphi_j(y) \nabla \varphi_i(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy dx \\ \mathcal{B}_{K,ij,2} &= \int_{\partial K} \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \mathbf{n}(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy ds(x).\end{aligned}$$

Les intégrales  $\mathcal{B}_{K,ij,1}$  et  $\mathcal{B}_{K,ij,2}$  sont faiblement singulières. On peut donc les évaluer à l'aide de notre méthode de traitement des singularités. Nous pouvons encore appliquer, à (2.40), un niveau supplémentaire d'intégration par parties. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{K,ij,1} &= - \int_K \nabla \varphi_i(x) \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) dy \right)^T dx \\ \mathcal{B}_{K,ij,1} &= \int_K \int_K G_\kappa(x-y) \nabla \varphi_i(x) (\nabla \varphi_j(y))^T dy dx \\ &\quad - \int_K \int_{\partial K} G_\kappa(x-y) \varphi_j(y) \nabla \varphi_i(x) \mathbf{n}(y)^T ds(y) dx\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{K,ij,2} &= \int_{\partial K} \varphi_i(x) \mathbf{n}(x) \left( \int_K \varphi_j(y) \nabla_y G_\kappa(x-y) dy \right)^T ds(x) \\ \mathcal{B}_{K,ij,2} &= - \int_{\partial K} \int_K G_\kappa(x-y) \varphi_i(x) \mathbf{n}(x) (\nabla \varphi_j(y))^T dy ds(x) \\ &\quad + \int_{\partial K} \int_{\partial K} G_\kappa(x-y) \varphi_i(x) \varphi_j(y) \mathbf{n}(x) \mathbf{n}(y)^T ds(y) ds(x).\end{aligned}$$

D'où l'intégration par parties d'ordre 2 :  $\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u}) = \left( \tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,1} + \tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,2} + \tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,3} + \tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,4} \right) \mathbf{u}$ , avec

$$\tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,1} = \int_K \int_K G_\kappa(x-y) \nabla \varphi_i(x) (\nabla \varphi_j(y))^T dy dx$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,2} = - \int_K \int_{\partial K} G_\kappa(x-y) \varphi_j(y) \nabla \varphi_i(x) \mathbf{n}(y)^T ds(y) dx$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,3} = - \int_{\partial K} \int_K G_\kappa(x-y) \varphi_i(x) \mathbf{n}(x) (\nabla \varphi_j(y))^T dy ds(x)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,4} = \int_{\partial K} \int_{\partial K} G_\kappa(x-y) \varphi_i(x) \varphi_j(y) \mathbf{n}(x) \mathbf{n}(y)^T ds(y) ds(x).$$

Ces intégrales sont toutes faiblement singulières. Les intégrales  $\tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,1}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,2}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,3}$  peuvent être évaluées par notre méthode, et l'intégrale  $\tilde{\mathcal{B}}_{K,ij,4}$  peut être calculée à l'aide de la méthode introduite par Jean GAY sur les triangles (voir [12, 33, 35, 39]).

**Remarque 16.** *Dans cette sous-section, nous nous sommes intéressés à l'évaluation du premier terme  $\mathcal{B}_{K,ij}(\mathbf{u})$  de l'expression de  $\mathcal{A}_{K,ij}(\mathbf{u})$  donnée dans (2.21) pour  $K = L$ . Le second terme est, quant à lui, faiblement singulier avec une forme plus simple (sans différentiation). Il peut donc être évalué directement par la méthode de traitement des singularités développée à la section précédente.*

## Chapitre 3

# Tests numériques

L'objectif majeur de ce chapitre est la présentation des résultats que nous avons obtenus pour le calcul numérique du profil de rayonnement électromagnétique issu d'un problème de transmission d'ondes électromagnétiques. Considérant le problème de transmission, le champ à l'intérieur du domaine est déterminé par la résolution numérique de l'équation intégrale volumique rappelée au chapitre 2 par l'expression (2.1). Le champ diffracté est ensuite exprimé directement à partir de ce champ intérieur et de l'une quelconque des formules de représentations intégrales équivalentes décrites au chapitre 1 (proposition 2). Le développement asymptotique de l'expression du champ diffracté nous conduit, enfin, à l'expression du profil de rayonnement ou champ lointain. Le travail numérique a donc reposé sur l'implémentation de l'équation intégrale dans le volume. Cette implémentation s'est effectuée dans le cadre du développement du code Méлина++, dans lequel nous avons intégré les outils nécessaires à la résolution de l'équation. Notamment, une partie significative du travail a consisté à mettre en œuvre les méthodes développées au chapitre 2 pour le traitement des intégrales singulières impliquées dans la définition de la matrice d'influence du système. Ce code est une librairie d'éléments finis développée au sein de l'IRMAR (Institut de Recherche Mathématique de Rennes) par Daniel MARTIN, afin de résoudre numériquement la plupart des problèmes de type variationnel. C'est une version en langage de programmation C++, de la version Méлина en langage Fortran 77 utilisée dans le cadre de nombreuses thèses. En attendant la version finale de Méлина++, le code Méлина est consultable à l'adresse internet suivante : <http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/index.html>.

Le chapitre débute par une présentation des courbes de convergence des matrices élémentaires pour l'assemblage de la matrice d'influence du système. Nous illustrons ensuite le spectre de l'opérateur intégral volumique pour quelques valeurs du nombre d'onde  $\kappa$ . Nous exposons enfin les résultats de notre calcul du champ lointain, par comparaison avec ceux du calcul avec la série de Mie.

### 3.1 Convergence des matrices élémentaires

Nous avons observé, dans un premier temps, la convergence de l'erreur relative des coefficients des matrices élémentaires pour l'opérateur intégral volumique. Les intégrales présentes dans ces coefficients ont été évaluées par la formule de quadrature de Gauss-Legendre. L'erreur est alors estimée en fonction du degré de la formule d'intégration et relativement à la matrice élémentaire donnée par la formule de degré égal à 17 qui est ici le plus haut degré que nous avons fixé. Les observations ont été faites pour les différentes positions relatives de deux tétraèdres d'intersection non vide dans un maillage tétraédrique conforme et pour les différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 à supports sur ces tétraèdres, avec les valeurs du nombre d'onde  $\kappa = 0, 1, 2$ . Les figures 3.1 – 3.4 illustrent les convergences de l'erreur pour les différentes positions des tétraèdres et pour  $\kappa = 2$ . Les matrices élémentaires sont de taille  $3 \times 3$  (9 coefficients) et sont symétriques à cause de la symétrie du tenseur de Green. Chaque sous-figure présente donc les coefficients non nuls parmi les 6 de la partie triangulaire supérieure. Les trois sous-figures de la figure 3.1 concernent les

coefficients des matrices élémentaires lorsque les tétraèdres ont un sommet commun. Elles correspondent respectivement aux cas où les deux fonctions de base sont associées au sommet commun, où l'une seule des deux fonctions est associée au sommet commun et où aucune n'y est associée. Les quatre sous-figures de la figure 3.2 concernent les coefficients des matrices élémentaires lorsque les tétraèdres ont une arête commune. Elles correspondent respectivement aux cas où les deux fonctions de base sont associées à un même sommet sur l'arête commune, où les fonctions sont associées chacune à un sommet de l'arête commune, où l'une seule des deux fonctions est associée à un sommet de l'arête commune et où aucune n'est associée à un sommet de l'arête commune. Les quatre sous-figures de la figure 3.3 concernent les coefficients des matrices élémentaires lorsque les tétraèdres ont une face commune. Elles correspondent respectivement aux cas où les deux fonctions de base sont associées à un même sommet sur la face commune, où les fonctions sont associées chacune à un sommet de la face commune, où l'une seule des deux fonctions est associée à un sommet de la face commune et où aucune n'est associée à un sommet de la face commune. Les trois sous-figures de la figure 3.4 concernent les coefficients des matrices élémentaires lorsque les tétraèdres sont confondus. La première sous-figure correspond au cas où les deux fonctions de base sont associées à un même sommet et les deux autres correspondent au cas où les deux fonctions sont associées à deux sommets distincts. Les résultats sont similaires pour les différentes valeurs de  $\kappa$  que nous avons testées. Les courbes nous montrent bien une nette convergence des coefficients. Cependant, comme on s'y attendait, la convergence devient plus lente lorsque la singularité de l'intégrale devient plus forte. En effet, lorsque les tétraèdres ont en commun un sommet ou une arête, l'erreur est au plus à 1% dès que la formule est de degré égal à 7. Pour les deux autres configurations des tétraèdres, en revanche, il faut aller jusqu'à la formule de degré égal à 13 pour atteindre un tel pourcentage d'erreur relative.

### 3.1 Convergence des matrices élémentaires

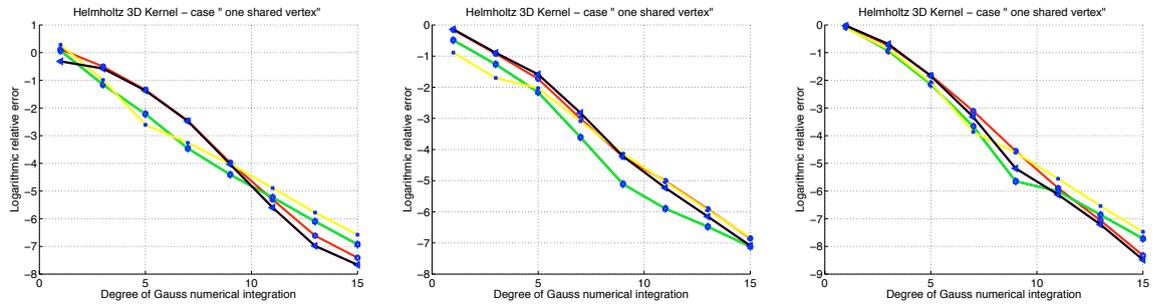


FIG. 3.1 – Convergence de l'erreur relative sur les coefficients des matrices élémentaires pour la discrétisation de l'opérateur intégral volumique avec différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 lorsque les tétraèdres ont un sommet en commun. A gauche, les deux fonctions de base sont associées au sommet commun. Au milieu, une seule des deux fonctions est associée au sommet commun. A droite, aucune des deux fonctions n'est associée au sommet commun.

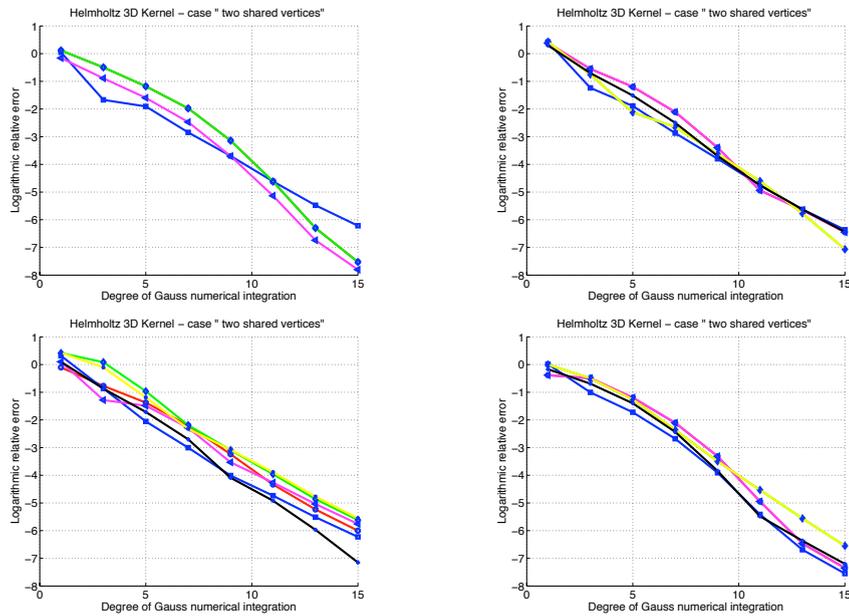


FIG. 3.2 – Convergence de l'erreur relative sur les coefficients des matrices élémentaires pour la discrétisation de l'opérateur intégral volumique avec différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 lorsque les tétraèdres ont une arête en commun. En haut à gauche, les deux fonctions de base sont associées au même sommet de l'arête commune. En haut à droite, les deux fonctions de base sont associées chacune à un sommet de l'arête commune. En bas à gauche, une seule des deux fonctions est associée à un sommet de l'arête commune. En bas à droite, aucune des deux fonctions n'est associée à un sommet de l'arête commune.

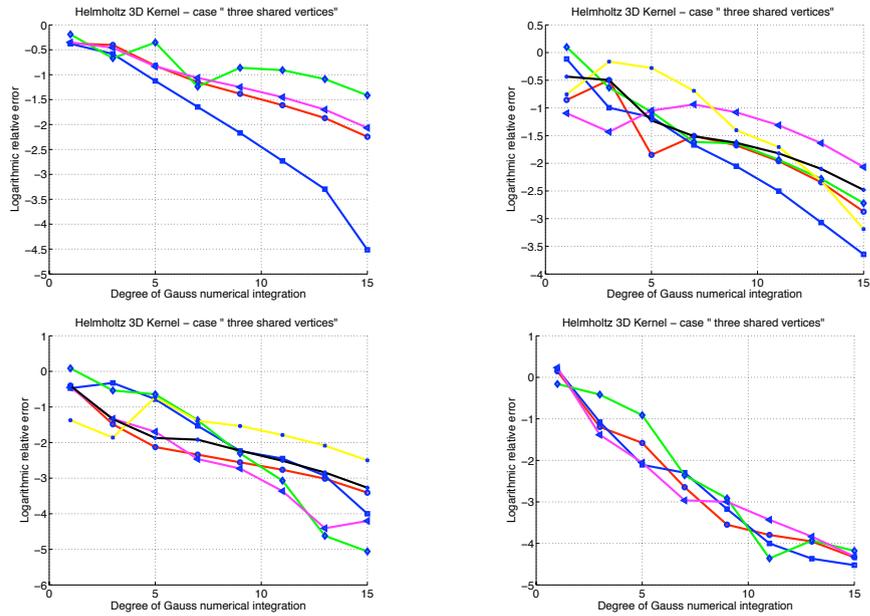


FIG. 3.3 – Convergence de l'erreur relative sur les coefficients des matrices élémentaires pour la discrétisation de l'opérateur intégral volumique avec différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 lorsque les tétraèdres ont une face en commun. En haut à gauche, les deux fonctions de base sont associées au même sommet de la face commune. En haut à droite, les deux fonctions de base sont associées chacune à un sommet de la face commune. En bas à gauche, une seule des deux fonctions est associée à un sommet de la face commune. En bas à droite, aucune des deux fonctions n'est associée à un sommet de la face commune.

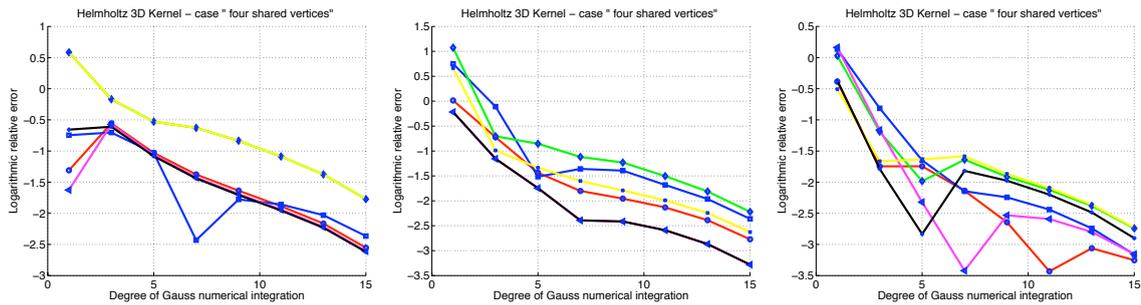


FIG. 3.4 – Convergence de l'erreur relative sur les coefficients des matrices élémentaires pour la discrétisation de l'opérateur intégral volumique avec différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 lorsque les tétraèdres sont confondus. A gauche, les deux fonctions de base sont associées à un même sommet. Au milieu et à droite, les deux fonctions sont associées à deux sommets distincts.

### 3.1 Convergence des matrices élémentaires

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les courbes ci-dessus représentent la convergence de l'erreur sur les coefficients des matrices élémentaires, relativement à ceux obtenus par la formule de quadrature de degré égal à 17. Cette option est la conséquence du défaut de valeurs de références disponibles pour ces coefficients. Les résultats précédents nous montrent seulement que les coefficients convergent, mais ils ne nous indiquent pas que ceux-ci convergent vers les valeurs exactes. Dans ces conditions, pour renforcer nos résultats, nous les avons confrontés à ceux d'une autre méthode dans le cas particulier du noyau de Laplace qui équivaut à  $\kappa = 0$  pour le noyau de Green. Cette autre méthode est l'application de la transformation de Fourier, sur les coefficients, que nous exposons ici. Le coefficient associé aux paires de tétraèdres  $(K, L)$  et de fonctions de base  $(\varphi, \psi)$  est  $\mathcal{M}(K, L, \varphi, \psi) = \int_K \varphi(x) \nabla_x \left( \int_L \nabla_y G_0(x-y) \psi(y) dy \right) dx$ , où on rappelle que  $G_0(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$  ( $x \neq 0$ ). En prolongeant les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  par zéro dans un domaine  $D$  contenant  $K \cup L$ , l'entrée  $\mathcal{M}_{pq}(K, L, \varphi, \psi)$ ,  $p, q = 1, 2, 3$  de la matrice est la forme quadratique  $(\varphi, \mathcal{P}_{pq}\psi)_{L^2(D)} = \int_D \overline{\varphi(x)} \mathcal{P}_{pq}\psi(x) dx$ , où  $\mathcal{P}_{pq}\psi(x) = \partial_{x_p} \int_D \partial_{x_p} G_0(x-y) \psi(y) dy$ . Cette forme quadratique est la restriction à  $L^2(D)$  de la forme correspondante sur  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , en prolongeant par zéro à  $\mathbb{R}^3$ . Sur  $\mathbb{R}^3$ , l'opérateur  $\mathcal{P}_{pq}$  est un multiplicateur de Fourier par le scalaire  $\widehat{\mathcal{P}_{pq}}(\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi}_p \boldsymbol{\xi}_q) / |\boldsymbol{\xi}|^2$ . On rappelle que c'est l'entrée d'indice  $(p, q)$  du multiplicateur matriciel  $\widehat{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^\top) / |\boldsymbol{\xi}|^2$  vu dans la preuve de la proposition 4 au chapitre 1. en notant par  $\widetilde{f}$  la transformée de Fourier inverse pour une fonction  $f$ , on écrit (Parseval-Plancherel) :

$$\begin{aligned} (\varphi, \mathcal{P}_{pq}\psi)_{L^2(D)} &= (\varphi, \mathcal{P}_{pq}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\mathcal{P}_{pq}\psi})_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= \int_D \overline{\widetilde{\varphi}(x)} \widetilde{\mathcal{P}_{pq}\psi}(x) dx. \end{aligned}$$

Pour l'approximation numérique, le domaine  $D$  est un pavé de  $\mathbb{R}^3$  que nous maillons en sous-pavés de  $N$  noeuds  $x^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ). Avec ce maillage, on a l'approximation

$$\int_D \overline{\widetilde{\varphi}(x)} \widetilde{\mathcal{P}_{pq}\psi}(x) dx \simeq \frac{|D|}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\widetilde{\varphi}(x^{(n)})} \widetilde{\mathcal{P}_{pq}\psi}(x^{(n)}), \quad (3.1)$$

où  $|D|$  désigne le volume du pavé  $D$ . Les coefficients  $\widetilde{\varphi}(x^{(n)})$  sont donnés pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $\widetilde{\varphi}(x^{(n)}) = \frac{1}{|D|} \int_D \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) e^{ix^{(n)} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}$  avec  $\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{\varphi}(x^{(n)}) e^{-ix^{(n)} \cdot \boldsymbol{\xi}}$ . On en déduit la relation

d'orthogonalité  $\int_D \overline{e^{ix^{(n)} \cdot \boldsymbol{\xi}}} e^{ix^{(m)} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} = \delta_{nm} |D|$ ,  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , où  $\delta_{nm}$  est le symbole de Kronecker.

La transformée de Fourier inverse discrète de  $\widehat{\varphi}$  est  $\widetilde{\varphi}(x^{(n)}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}^{(k)}) e^{ix^{(n)} \cdot \boldsymbol{\xi}^{(k)}}$ . On a naturellement une expression similaire pour  $\widehat{\mathcal{P}_{pq}\psi}(x^{(n)})$ . Notons que la suite  $(\widetilde{\varphi}(x^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  est  $N$ -périodique. C'est à dire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\widetilde{\varphi}(x^{(n+N)}) = \widetilde{\varphi}(x^{(n)})$ . On pourra en effet prendre  $x^{(n+N)} - x^{(n)} = [(x^{(n+N)} - x^{(n)}) \cdot \mathbf{e}_p] \mathbf{e}_p$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  où  $p \in \{1, 2, 3\}$  et  $\mathbf{e}_p$  est le  $p$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  avec  $(\boldsymbol{\xi}^{(k)} \cdot \mathbf{e}_p) [(x^{(n+N)} - x^{(n)}) \cdot \mathbf{e}_p] = 0 \pmod{2\pi}$ , pour tout  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . La quantité  $(x^{(n+N)} - x^{(n)}) \cdot \mathbf{e}_p$  est en fait la longueur d'une des arêtes du pavé  $D$ . En revenant à l'approximation de la forme quadratique 3.1 avec les expressions des transformées de Fourier inverse discrètes, nous avons

$$\int_D \overline{\widetilde{\varphi}(x)} \widetilde{\mathcal{P}_{pq}\psi}(x) dx \simeq \frac{|D|}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}^{(k)})} \widehat{\mathcal{P}_{pq}\psi}(\boldsymbol{\xi}^{(l)}) \sum_{n=0}^{N-1} e^{ix^{(n)} \cdot (\boldsymbol{\xi}^{(l)} - \boldsymbol{\xi}^{(k)})}.$$

La propriété d'orthogonalité donne  $\sum_{n=0}^{N-1} e^{ix^{(n)} \cdot (\xi^{(l)} - \xi^{(k)})} = \delta_{kl} N$  et elle nous conduit à

$$\int_D \overline{\widehat{\varphi}(x)} \widehat{\mathcal{P}_{pq}\psi}(x) dx \simeq \frac{|D|}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\widehat{\varphi}(\xi^{(k)})} \widehat{\mathcal{P}_{pq}\psi}(\xi^{(k)}).$$

Rappelant que  $\widehat{\mathcal{P}_{pq}\psi}(\xi) = \frac{(\xi_p \xi_q)}{|\xi|^2} \widehat{\psi}(\xi)$ , on obtient finalement

$$\int_D \overline{\widehat{\varphi}(x)} \widehat{\mathcal{P}_{pq}\psi}(x) dx \simeq \frac{|D|}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\widehat{\varphi}(\xi^{(k)})} \frac{(\xi_p^{(k)} \xi_q^{(k)})}{|\xi^{(k)}|^2} \widehat{\psi}(\xi^{(k)}).$$

Le calcul est implémenté par un code matlab présenté à l'annexe C.

Les figures 3.6 – 3.9 illustrent les convergences de l'erreur des coefficients approchés par la transformation de Fourier. Cette erreur est estimée relativement aux coefficients obtenus par notre méthode avec la formule d'intégration de degré égal à 17. Nous avons considéré, alors, les mêmes valeurs de références pour les coefficients avec les mêmes configurations des tétraèdres et des fonctions de base que le test précédent (figures 3.1 – 3.4). L'erreur est estimée en fonction du nombre de points utilisés dans la discrétisation pour un pavé englobant chaque fois les deux tétraèdres. Dans chacun des cas, nous avons utilisé successivement 129, 257 et 401 points pour la discrétisation dans chaque direction de l'espace. On observe, également ici, une convergence plus ou moins lente des valeurs des coefficients issues de la transformation de Fourier, vers celles issues de notre méthode. On peut constater notamment sur la sous-figure en haut à gauche de la figure 3.8, correspondant au cas où les deux fonctions de base sont associées au même sommet de la face commune, que l'entrée de matrice élémentaire d'indice (3, 2) a un comportement moins bon que les autres entrées non nulles de la matrice. On rappelle que seules les entrées non nulles sont considérées et représentées. L'observation des valeurs montre, comme on le constate sur la figure 3.5 ci-dessous des résultats pour le calcul avec respectivement 129, 257 et 401 points, que l'entrée d'indice (3, 2) est en  $O(10^{-4})$  quand les autres sont en  $O(10^{-3})$ . La faiblesse de l'ordre peut expliquer la lente convergence de cette entrée, mais cette lenteur pourrait également être due au fait que notre solution de référence n'aie pas encore convergé. A l'inverse de notre méthode, on note par ailleurs un comportement meilleur de la transformation de Fourier dans le cas où les tétraèdres sont confondus. C'est à dire lorsque la singularité est plus forte.

### 3.1 Convergence des matrices élémentaires

```
Exple_Res_FT
Exple_Res_FT:2:1
1
2 Exemple de Résultats de matrices élémentaires (M) du calcul par transformée de Fourier,
3   pour deux tétraèdres K et L ayant une face commune.
4 -----
5
6
7 Coordonnées des sommets de K : (0,0,0) (1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)
8 Coordonnées des sommets de L : (0,0,0) (-1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)
9
10 Les deux fonctions de base Lagrangiennes sont associées au même sommet (0,0,0).
11
12
13 * Solution transformée de Fourier :
14
15 Nbre de points 129
16 --- Valeur de M :
17 -1.247013586739757e-03  3.523030083522968e-23  1.630230896453592e-20
18  3.523030083522968e-23  1.907413247612733e-03  1.825868365645687e-04
19  1.630230896453592e-20  1.825868365645687e-04  1.907413247612756e-03
20
21 Nbre de points 257
22 --- Valeur de M :
23 -1.905894578767163e-03  -1.182523055272575e-20  -1.056400801734246e-20
24 -1.182523055272575e-20  1.562047551371641e-03  1.520462311058503e-04
25 -1.056400801734246e-20  1.520462311058503e-04  1.562047551371471e-03
26
27 Nbre de points 401
28 --- Valeur de M :
29 -2.209286178000295e-03  -9.961099547877455e-20  -9.040252398521129e-20
30 -9.961099547877455e-20  1.489829160501481e-03  1.460029557777112e-04
31 -9.040252398521129e-20  1.460029557777112e-04  1.489829160501318e-03
32
33
34 ** Solution de référence :
35
36 --- Valeur de M :
37 -2.84275875093e-03  9.80986831380e-21  -3.71771771933e-21
38  9.80986831380e-21  1.37251798623e-03  1.86057905727e-04
39 -3.71771771933e-21  1.86057905727e-04  1.47024076471e-03
40
41
```

FIG. 3.5 – Un exemple de valeurs des matrices élémentaires pour la transformation de Fourier et notre solution de référence lorsque les tétraèdres ont une face en commun avec les deux fonctions de base associées à un même sommet de la face commune.

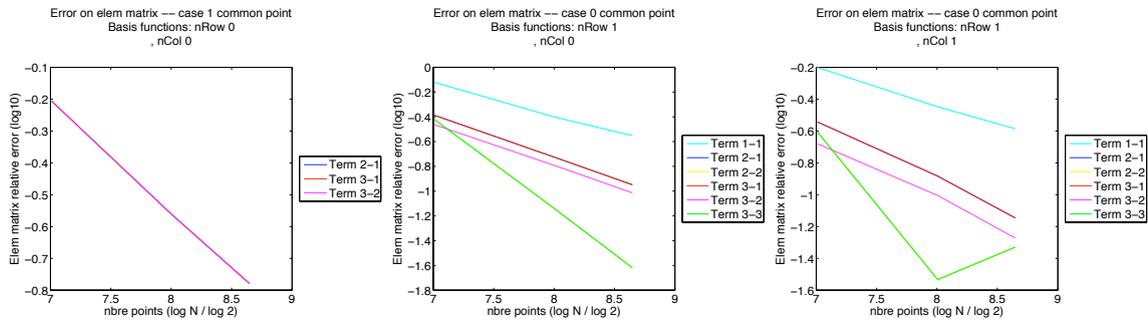


FIG. 3.6 – Convergence de l'erreur relative sur les coefficients des matrices élémentaires pour la transformation de Fourier avec différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 lorsque les tétraèdres ont un sommet en commun.

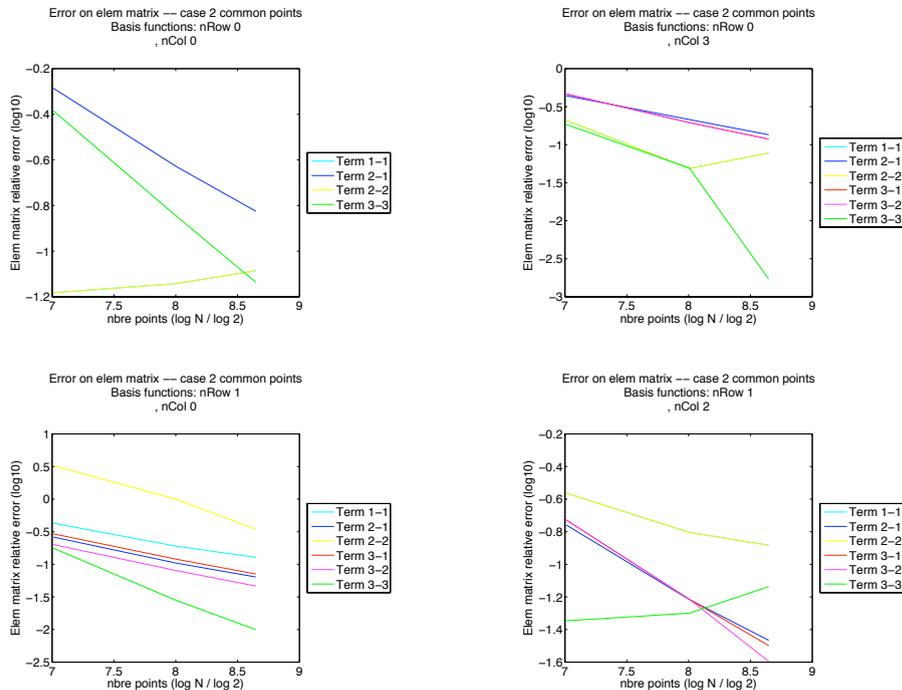


FIG. 3.7 – Convergence de l'erreur relative sur les coefficients des matrices élémentaires pour la transformation de Fourier avec différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 lorsque les tétraèdres ont une arête en commun.

## 3.2 Spectre de l'opérateur intégral volumique

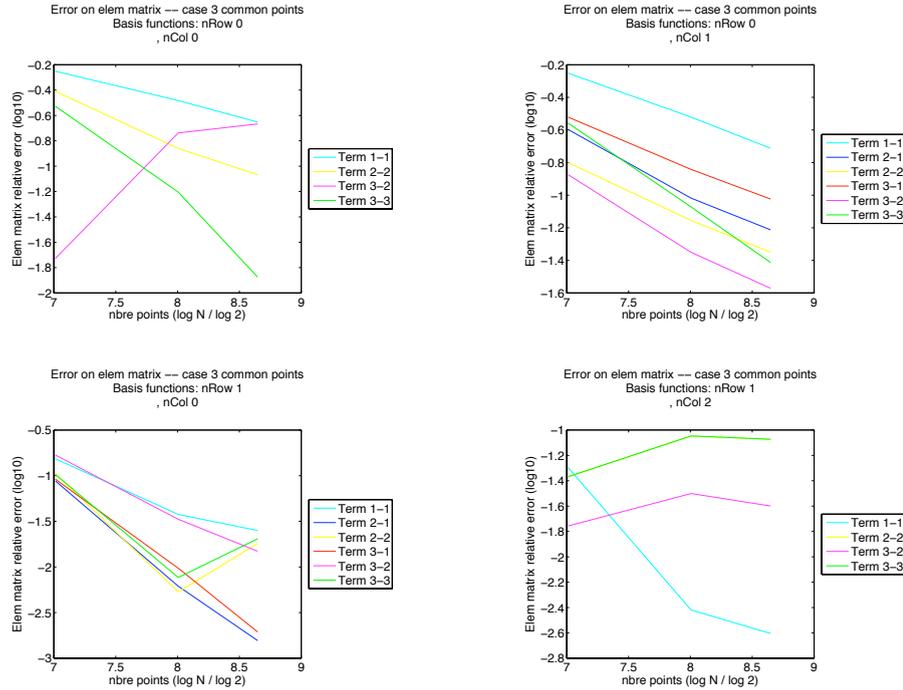


FIG. 3.8 – Convergence de l'erreur relative sur les coefficients des matrices élémentaires pour la transformation de Fourier avec différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 lorsque les tétraèdres ont une face en commun.

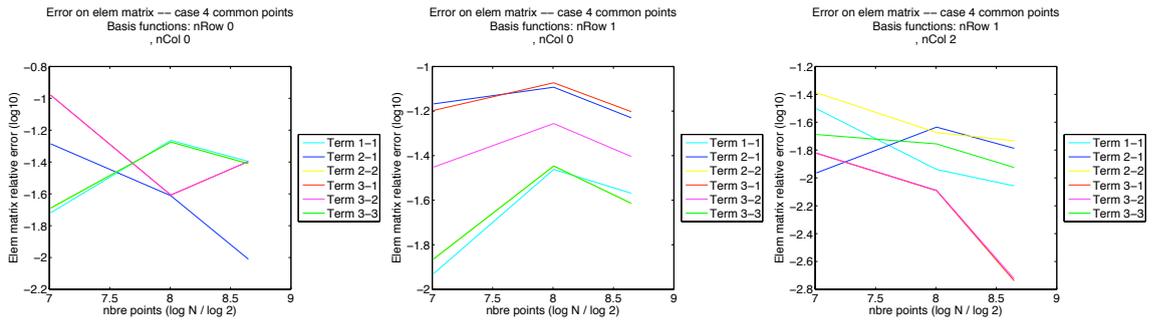


FIG. 3.9 – Convergence de l'erreur relative sur les coefficients des matrices élémentaires pour la transformation de Fourier avec différentes fonctions de base de Lagrange d'ordre 1 lorsque les tétraèdres sont confondus.

## 3.2 Spectre de l'opérateur intégral volumique

En vue de prédire la performance des méthodes itératives dans la résolution de l'équation intégrale volumique, le spectre de l'opérateur a été analysé dans [44]. L'opérateur  $y$  est d'abord discrétisé à l'aide d'un maillage cubique et d'une technique de collocation ou de point-matching, puis les valeurs propres de la matrice du système sont observées. Ces observations montrent que les valeurs propres sont quasiment toutes localisées sur un segment, support du spectre essentiel sur le

plan complexe. Les rares valeurs propres en dehors du segment correspondent aux résonances dans les séries de Mie. La position et la longueur de ce segment dépendent uniquement de l'indice de réfraction. Au regard de ces résultats, nous avons examiné les valeurs propres de la matrice issue de notre discrétisation de l'opérateur intégral volumique. Considérant un obstacle diélectrique homogène  $\Omega^-$ , l'indice de réfraction, qui est ici la permittivité électrique relative  $\varepsilon_r$ , est un nombre réel constant. Le support du spectre essentiel est donc ici situé sur l'axe réel du plan complexe. Plus précisément, on rappelle l'équation intégrale volumique (cf. expression 2.1 au chapitre 2) :  $(\mathbf{1} - \mathcal{A}_{\kappa, \eta}) \mathbf{E} := (\mathbf{1} - \eta \mathcal{A}_{\kappa}) \mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc}$ , où  $\eta = 1 - \varepsilon_r$  et

$$\mathcal{A}_{\kappa} \mathbf{E}(x) = \nabla \int_{\Omega^-} \nabla_y G_{\kappa}(x-y) \cdot \mathbf{E}(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^-} G_{\kappa}(x-y) \mathbf{E}(y) dy.$$

L'analyse au chapitre 1 montre que ce problème est mal posé pour une permittivité  $\varepsilon_r$  non bornée ou appartenant à l'ensemble  $\{0, -1\}$ , c'est à dire pour un paramètre  $\eta$  non borné ou appartenant à  $\{1, 2\}$ . Le spectre de l'opérateur intégral volumique  $\mathcal{A}_{\kappa}$  étant l'ensemble des valeurs  $\lambda$  telles que le problème  $(\lambda \mathbf{1} - \mathcal{A}_{\kappa}) \mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc}$  est mal posé, les valeurs propres de  $\mathcal{A}_{\kappa}$  sont les valeurs  $0, \frac{1}{2}, 1$ . Le support du spectre essentiel de l'opérateur intégral  $\mathcal{A}_{\kappa}$  est alors le segment  $[0, 1]$ . Les figures 3.11 et 3.12 montrent les valeurs propres de la matrice issue de la discrétisation de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\kappa}$ , respectivement pour les valeurs  $\kappa = 1.e - 03$  et  $\kappa = 1$ . Les quatre sous-figures de chacune de ces figures correspondent aux différents niveaux de raffinement du maillage tétraédrique avec successivement 8 tétraèdres (niveau 0), 64 tétraèdres (niveau 1), 512 tétraèdres (niveau 2), 4096 tétraèdres (niveau 3). On observe effectivement que les valeurs propres sont quasiment toutes localisées sur le segment  $[0, 1]$ . Le segment se densifie, avec l'augmentation de la taille de la matrice, à mesure que le maillage se raffine et on note, cependant, un léger dépassement aux extrémités de l'intervalle pour les niveaux de raffinement 2 et 3. En ce qui concerne la figure 3.10, nous avons effectué le test avec les mêmes données que celles utilisées dans [44], afin d'obtenir des résultats comparables. L'obstacle sphérique est alors à conductivité non nulle, avec un ratio  $\kappa r = 1$  où  $r$  est le rayon de l'obstacle. Dans [44], l'indice de réfraction est  $m = 1.4 + 0.05i$  et il est lié à notre permittivité relative par la relation  $\varepsilon_r = m^2$ . Nous avons donc utilisé la valeur  $\eta = 1 - m^2 = -0.9575 - 0.14i$  et avons représenté les valeurs propres, cette fois, pour l'opérateur  $(\mathbf{1} - \eta \mathcal{A}_{\kappa})$ . On observe de ce fait, des courbes très proches de celles obtenus dans [44].

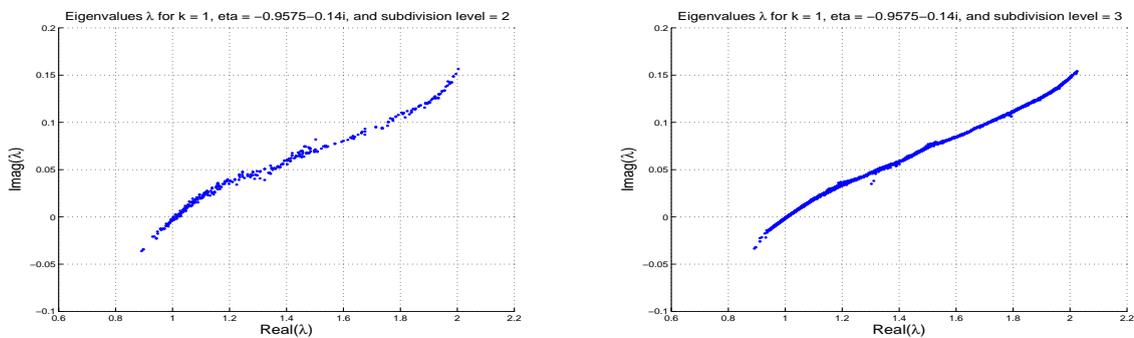


FIG. 3.10 – Valeurs propres de la matrice issue de la discrétisation de l'opérateur intégral volumique  $(\mathbf{1} - \eta \mathcal{A}_{\kappa})$  dans la boule unité, avec  $\kappa = 1$  et l'indice de réfraction complexe  $\eta = 1 - \varepsilon_r = -0.9575 - 0.14i$  pour un maillage à 512 tétraèdres (à gauche) et à 4096 tétraèdres (à droite).

### 3.2 Spectre de l'opérateur intégral volumique

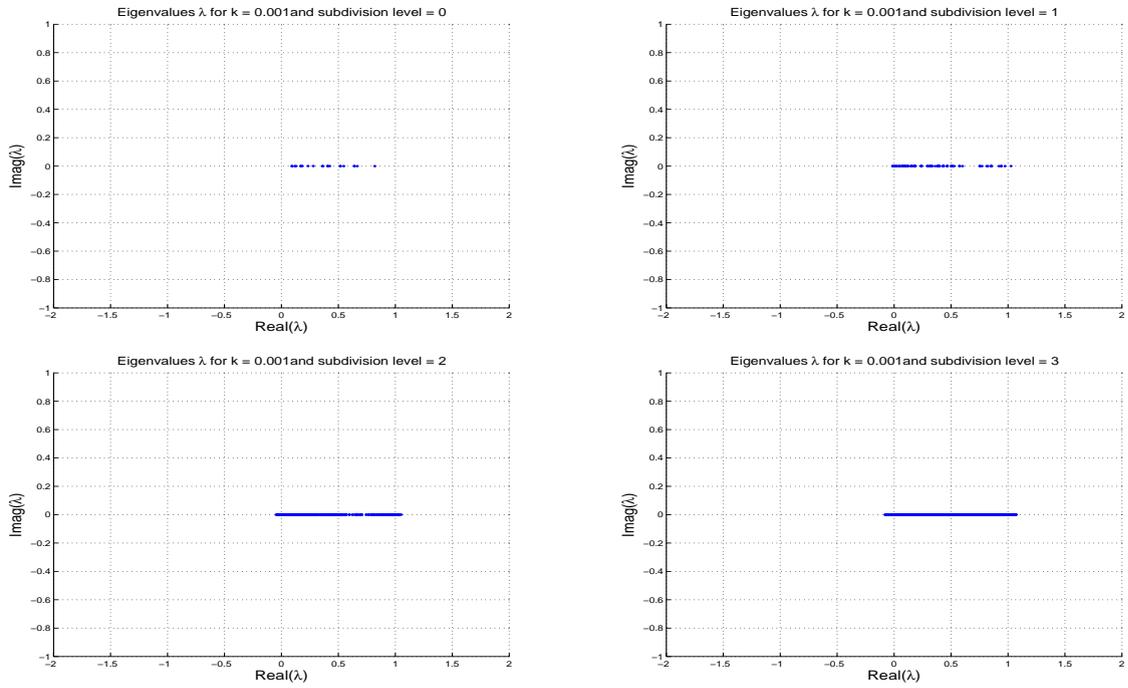


FIG. 3.11 – Valeurs propres de la matrice issue de la discrétisation de l'opérateur intégral volumique  $\mathcal{A}_\kappa$  dans la boule unité, avec  $\kappa = 1.e - 03$  et un maillage à 8 tétraèdres (en haut à gauche), à 64 tétraèdres (en haut à droite), à 512 tétraèdres (en bas à gauche) et à 4096 tétraèdres (en bas à droite).

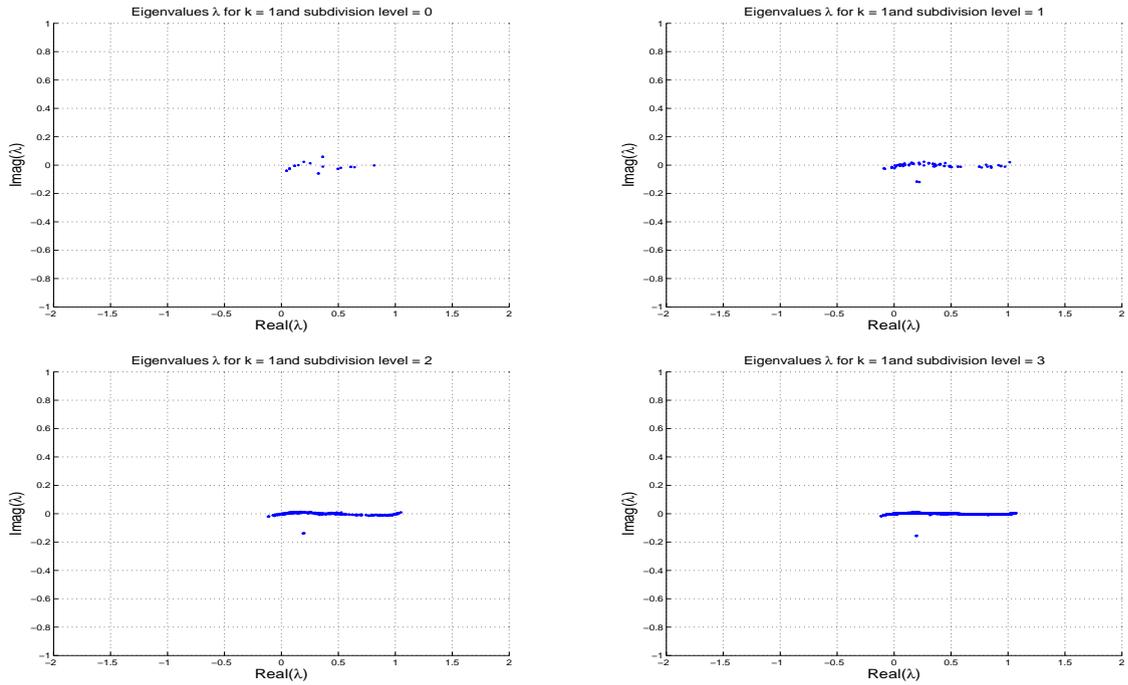


FIG. 3.12 – Valeurs propres de la matrice issue de la discrétisation de l'opérateur intégral volumique  $\mathcal{A}_\kappa$  dans la boule unité, avec  $\kappa = 1$  et un maillage à 8 tétraèdres (en haut à gauche), à 64 tétraèdres (en haut à droite), à 512 tétraèdres (en bas à gauche) et à 4096 tétraèdres (en bas à droite).

### 3.3 Profil de rayonnement électrique

#### 3.3.1 Formalisme

Si  $\mathbf{E}_*$  désigne le champ électrique intérieur obtenu par la résolution de l'équation intégrale volumique dans le domaine  $\Omega^-$ , le champ électromagnétique diffracté  $(\mathbf{E}_{diff}, \mathbf{H}_{diff})$  est alors donné, grâce à la formule de représentation intégrale (1.19) (proposition 2 au chapitre 1), par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{diff}(x) &= \nabla \int_{\Omega^-} \eta(y) (\nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{E}_*(y)) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy \\ \mathbf{E}_{diff}(x) &= -\nabla \times \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy, \\ \mathbf{H}_{diff}(x) &= \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}_{diff} = i\kappa \nabla \times \int_{\Omega^-} \eta(y) G_\kappa(x-y) \mathbf{E}_*(y) dy,\end{aligned}$$

pour  $x \in \Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$ . On rappelle que  $G_\kappa(x-y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ . Par définition, le champ électromagnétique lointain  $(\mathbf{E}_\infty, \mathbf{H}_\infty)$  est donné par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{diff}(x) &= \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ \mathbf{E}_\infty(\hat{x}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow +\infty, \\ \mathbf{H}_{diff}(x) &= \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ \mathbf{H}_\infty(\hat{x}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow +\infty,\end{aligned}$$

où  $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$  est sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Grâce aux développements asymptotiques suivants, où  $\mathbf{v}$  est un champ de vecteurs :

$$\nabla_x \times \left( \mathbf{v}(y) \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} \right) = i\kappa \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} \hat{x} \times \mathbf{v}(y) + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{v}(y)|}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

et

$$\nabla_x \times \nabla_x \times \left( \mathbf{v}(y) \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} \right) = \kappa^2 \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{v}(y)) + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{v}(y)|}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

uniformément pour  $y$  fixé, on obtient les expressions du champ lointain

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\infty(\hat{x}) &= \frac{\kappa^2}{4\pi} \hat{x} \times \left( \hat{x} \times \int_{\Omega^-} \eta(y) e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} \mathbf{E}_*(y) dy \right), \\ \mathbf{H}_\infty(\hat{x}) &= -\frac{\kappa^2}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\Omega^-} \eta(y) e^{-i\kappa\hat{x}\cdot y} \mathbf{E}_*(y) dy.\end{aligned}$$

Le point  $\hat{x}$  sera déterminé, sur la sphère unité, par ses angles en coordonnées sphériques :

$$\hat{x} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta), \quad \text{avec } (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$

**Remarque 17.** Nous avons  $\mathbf{H}_\infty(\hat{x}) = \hat{x} \times \mathbf{E}_\infty(\hat{x})$  et  $\hat{x} \cdot \mathbf{E}_\infty(\hat{x}) = \hat{x} \cdot \mathbf{H}_\infty(\hat{x}) = 0$ . Les champs électrique et magnétique lointains sont tangents à la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .

#### 3.3.2 Champ électrique lointain pour des obstacles homogènes

Nous avons comparé nos résultats du calcul du champ lointain, avec ceux obtenus par les séries de Mie, pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique sphérique et homogène noté  $\Omega^-$ . Nous avons examiné des diffractions d'ondes planes et de champs incidents générés par un dipôle magnétique. Le champ généré par un dipôle magnétique de polarisation  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  (vecteur unitaire) situé en un point  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$  est donné par  $\mathbf{E}_{inc}(x) = \nabla \times (\mathbf{p} G_\kappa(x - \mathbf{x}_0)) =$

### 3.3 Profil de rayonnement électrique

$\nabla G_{\kappa}(x - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{p}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ . L'onde plane de polarisation  $\mathbf{p}$  et de direction  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$  (vecteur unitaire) est donnée par  $\mathbf{E}_{inc}(x) = \mathbf{p}e^{i\kappa\mathbf{d}\cdot x}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ . Les figures 3.13 - 3.15 présentent les profils de rayonnement des diffractions de ces champs incidents, pour quelques valeurs des paramètres. Ces paramètres sont d'une part, la polarisation  $\mathbf{p}$  des champs incidents, le point source  $\mathbf{x}_0$  pour le dipôle magnétique et la direction  $\mathbf{d}$  pour l'onde plane, puis d'autre part, les nombres d'ondes à l'extérieur du domaine noté  $\kappa$  ou  $\kappa_{ext}$  et à l'intérieur noté  $\kappa_{int}$ . Le domaine étant supposé homogène ici,  $\kappa_{int}$  est constant. La permittivité relative est liée aux nombres d'ondes par la relation  $\kappa_{int}^2 = \varepsilon_r \kappa_{ext}^2$ . Chaque sous-figure représente, sur un plan de coupe  $\phi = 0^\circ$  ou  $\phi = 90^\circ$ , les courbes de la norme du champ électrique lointain donné par les séries de Mie et des normes des champs lointains donnés par notre méthode pour différents niveaux de raffinement du maillage de la boule unité. Ces niveaux de raffinement comportent successivement 8, 64, 512 et 4096 tétraèdres. A mesure que le maillage de la boule est raffiné, nous observons une convergence de nos résultats vers ceux de la série de Mie pour les différentes situations de diffraction. Le maillage avec 4096 tétraèdres suffit pour obtenir des résultats satisfaisants lorsque la fréquence n'est pas très haute. Pour les hautes fréquences, un niveau de raffinement supplémentaire (32768 tétraèdres) devient nécessaire. Cependant, en l'absence de couplage avec une méthode rapide, la résolution de l'équation intégrale volumique (dimension 3 et matrice dense) avec un tel niveau de raffinement devient onéreuse en temps de calcul et même en espace mémoire. Le but de ces travaux a été porté sur l'exactitude des résultats de notre méthode. L'optimisation de la méthode en temps de calcul et en espace mémoire fera l'objet d'une étude ultérieure.

#### Diffraction d'un dipôle magnétique

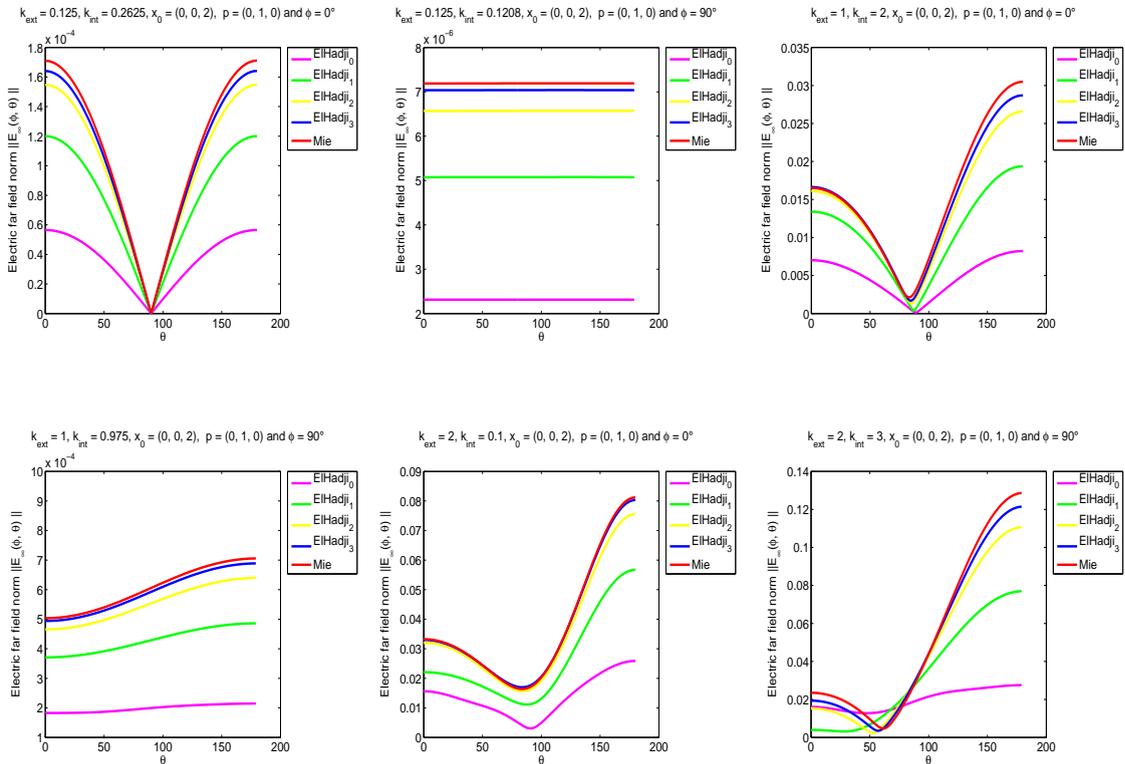


FIG. 3.13 – Profils de rayonnement électrique lointain pour la diffraction d'un dipôle magnétique par un corps sphérique diélectrique, pour différents niveaux de raffinement du maillage comparés à la solution donnée par les séries de Mie.

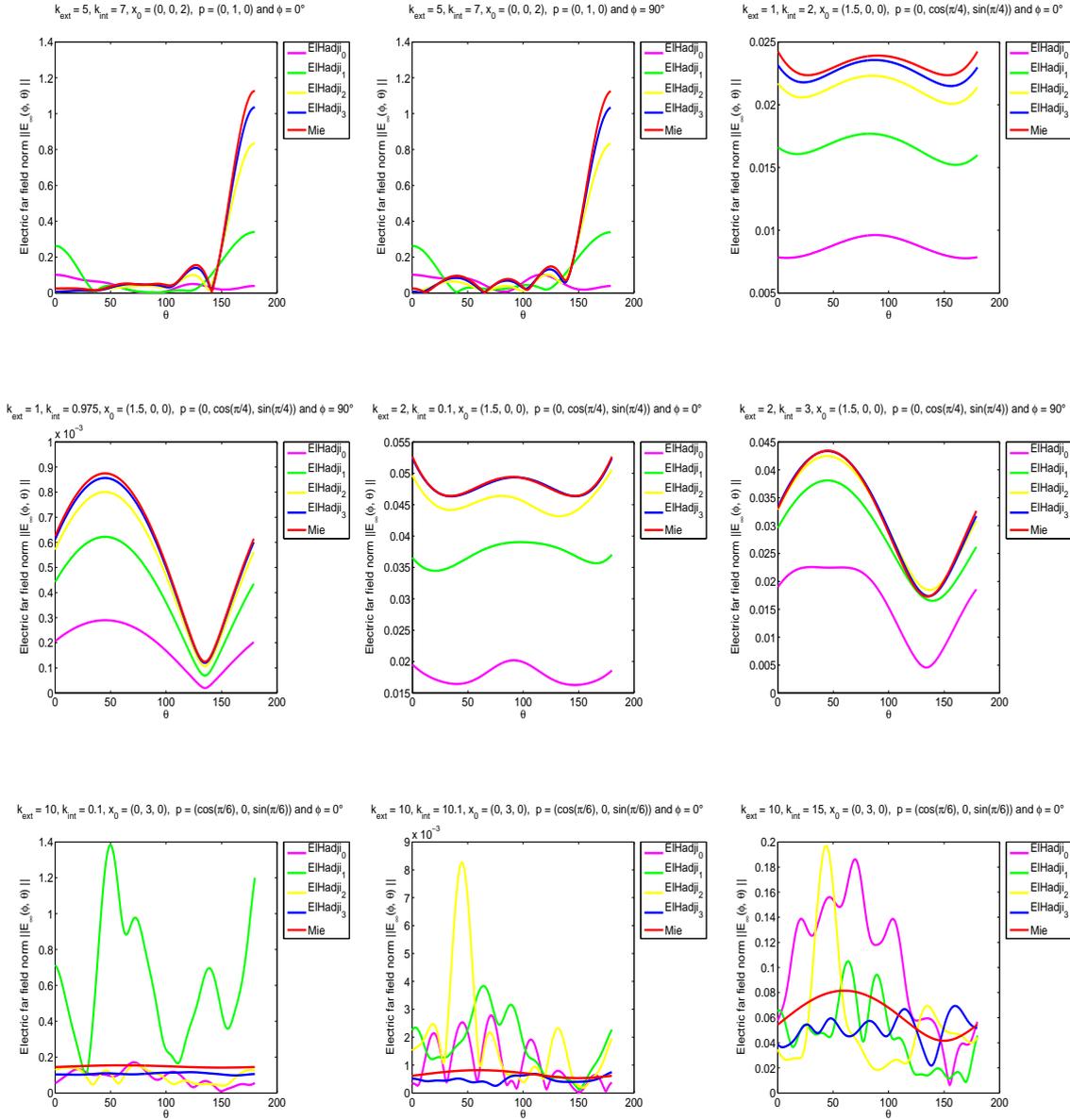


FIG. 3.14 – Profils de rayonnement électrique lointain pour la diffraction d'un dipôle magnétique par un corps sphérique diélectrique, pour différents niveaux de raffinement du maillage comparés à la solution donnée par les séries de Mie.

#### Diffraction d'une onde plane

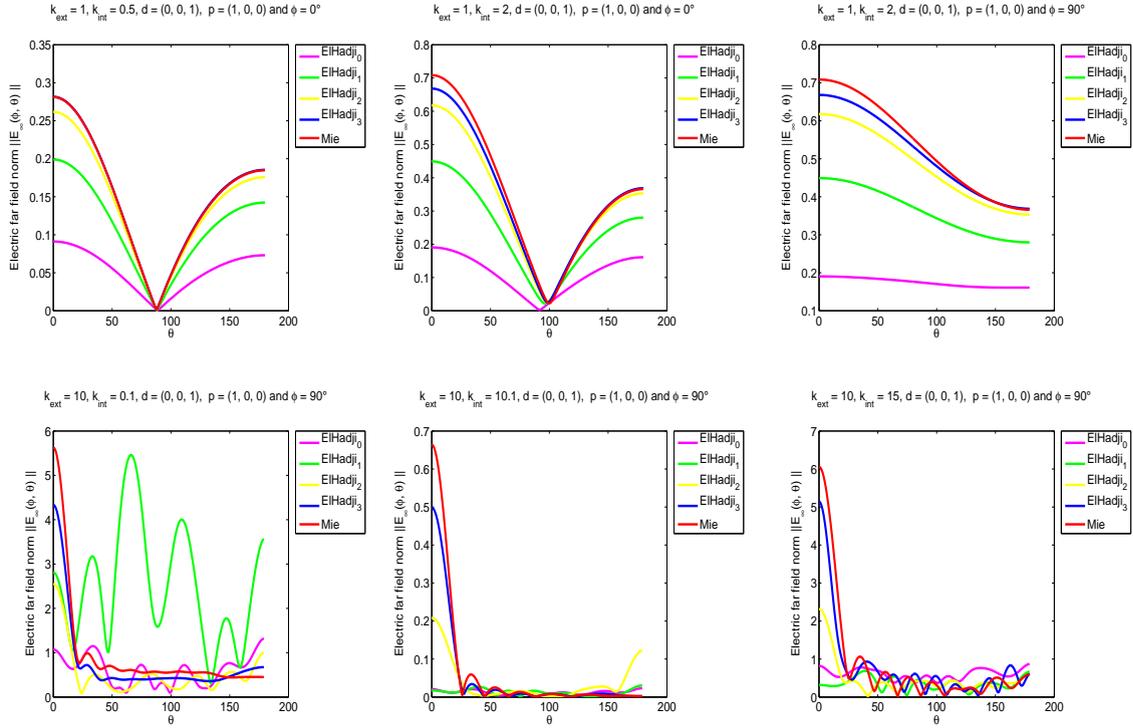


FIG. 3.15 – Profils de rayonnement électrique lointain pour la diffraction d'une onde plane par un corps sphérique diélectrique, pour différents niveaux de raffinement du maillage comparés à la solution donnée par les séries de Mie.

#### 3.3.3 Erreur relative sur le champ lointain

Pour chaque niveau de raffinement, nous évaluons en norme  $L^2$  l'erreur numérique sur l'approximation du profil de rayonnement relativement à celui de la série de Mie et selon le formalisme suivant.

Si  $\mathbf{u}$  est un champ de vecteurs défini sur la sphère unité, on le décrit par ses coordonnées sphériques  $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  et on définit numériquement sur le plan  $\phi = \phi_0$ , la norme  $L^2$  du champ  $\mathbf{u}$  par :

$$\|\mathbf{u}(\cdot, \phi_0)\|^2 = \int_0^\pi |\mathbf{u}(\theta, \phi_0)|^2 d\theta$$

$$\|\mathbf{u}(\cdot, \phi_0)\|^2 = \sum_{q=1}^N \omega_q |\mathbf{u}(\theta_q, \phi_0)|^2.$$

On prend  $\omega_q = \omega_1, \forall q = 1, \dots, N$  et une formule d'intégration d'ordre 1. Ce qui entraîne

$$\sum_{q=1}^N \omega_q = N\omega_1 = \pi. \text{ D'où nous avons } \|\mathbf{u}(\cdot, \phi_0)\|^2 = \frac{\pi}{N} \sum_{q=1}^N |\mathbf{u}(\theta_q, \phi_0)|^2.$$

Si on note  $\mathbf{E}_\infty$  le profil de rayonnement issu de nos calculs et  $\mathbf{E}_{M,\infty}$  celui de la série de Mie, alors l'erreur relative sur l'approximation du champ lointain est donnée pour un plan de coupe  $\phi = \phi_0$  par

$$\mathcal{E}_{r,\infty}(\phi_0) = \frac{\sqrt{\sum_{q=1}^N |\mathbf{E}_\infty(\theta_q, \phi_0) - \mathbf{E}_{M,\infty}(\theta_q, \phi_0)|^2}}{\sqrt{\sum_{q=1}^N |\mathbf{E}_{M,\infty}(\theta_q, \phi_0)|^2}}.$$

Les figures 3.17 et 3.16 présentent quelques courbes de l'erreur relative dans les plans  $\phi = 0^\circ$  et  $\phi = 90^\circ$  pour les diffractions, par la boule unité diélectrique homogène, respectivement d'ondes planes et de champs générés par un dipôle magnétique. L'erreur est estimée pour les niveaux de raffinement 1, 2, 3 et 4 qui correspondent respectivement au maillages avec 8, 64, 512 et 4096 tétraèdres. Ces courbes d'erreur consolident les observations effectuées sur les courbes des profils de rayonnement précédentes. En effet, on constate une décroissance de l'erreur pour chacune des courbes confirmant ainsi la convergence de nos résultats vers ceux de la série de Mie. Le maillage avec 4096 tétraèdres fournit une erreur relative en dessous de 10% dans la plupart des cas observés, lorsque la fréquence n'est pas très élevée. Ce niveau de raffinement est donc bien suffisant pour obtenir des résultats satisfaisants pour des fréquences pas très hautes.

### Erreur pour la diffraction d'une onde plane

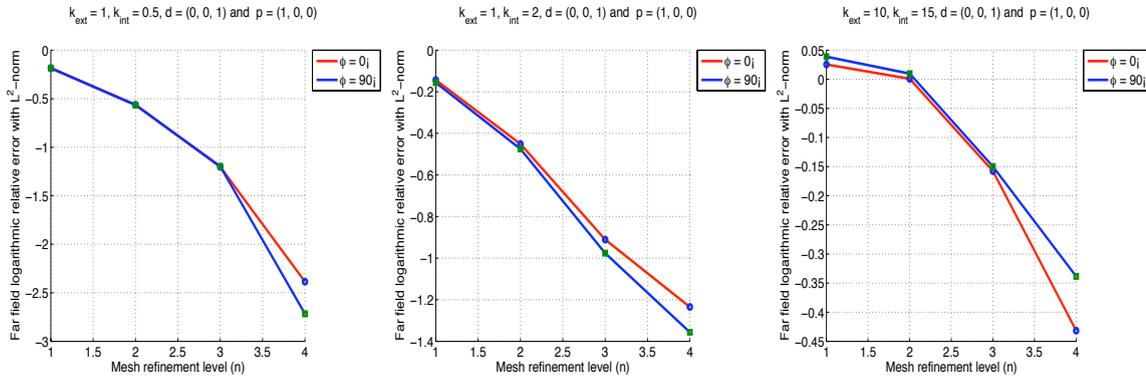


FIG. 3.16 – Erreur relative sur le calcul du profil de rayonnement électrique lointain pour la diffraction d'une onde plane par un corps diélectrique sphérique.

#### Erreur pour la diffraction d'un dipôle magnétique

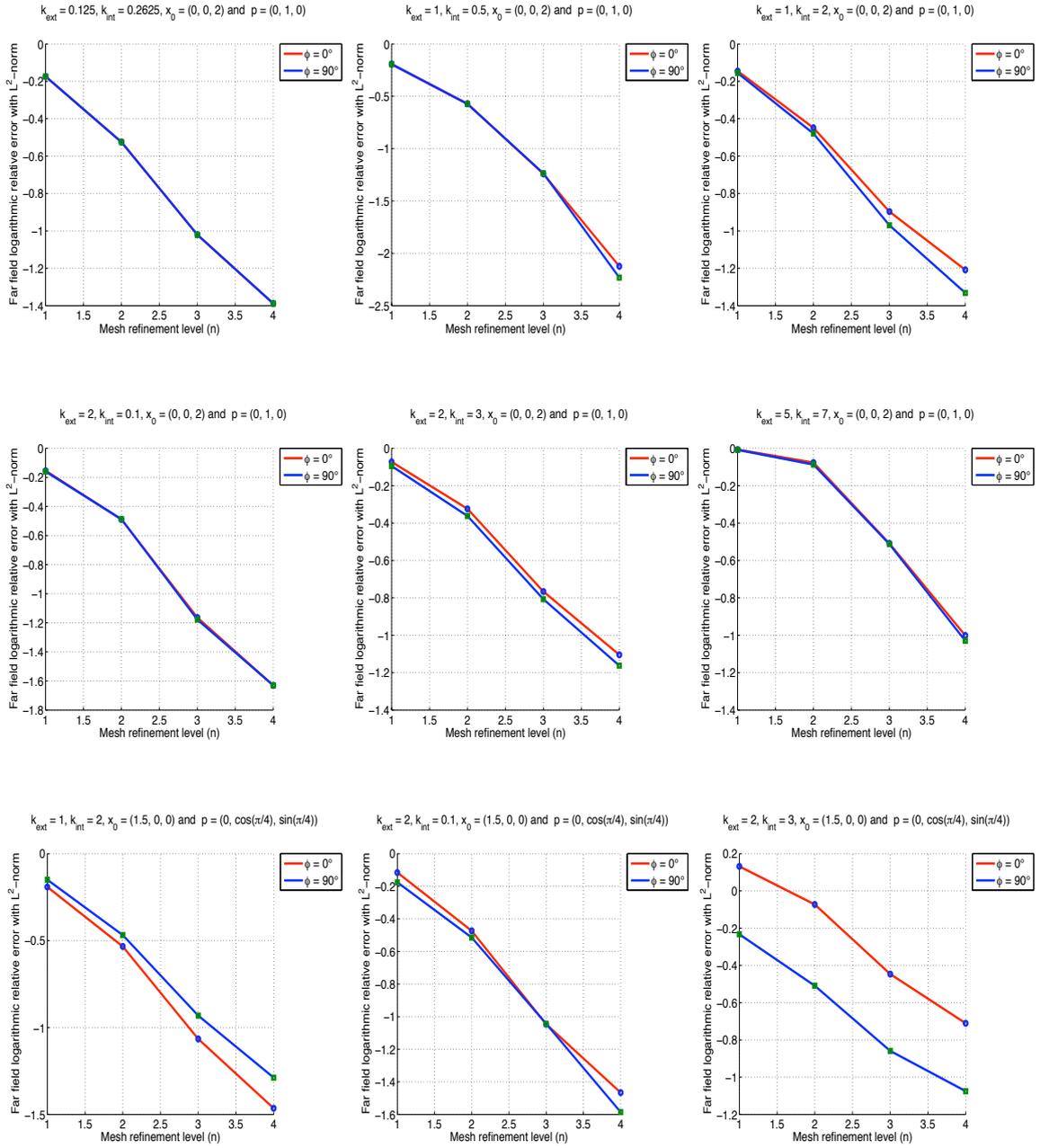


FIG. 3.17 – Erreur relative sur le calcul du profil de rayonnement électrique lointain pour la diffraction d'un dipôle magnétique par un corps diélectrique sphérique.

### 3.3.4 Champs électriques pour des obstacles non homogènes

L'intérêt majeur de l'équation intégrale volumique est sa capacité à traiter la diffraction par des obstacles non homogènes. Nous allons alors considérer, à présent, la diffraction avec une permittivité électrique variable dans le domaine occupé par l'obstacle. A défaut de valeurs numériques de référence disponibles dans la littérature pour la diffraction par un obstacle non homogène, à l'instar des séries de Mie pour les obstacles homogènes et sphériques, nous ne pouvons effectuer de confrontation des valeurs de nos résultats numériques. Nous avons simulé les champs intérieur et lointain pour la diffraction par la boule ou la demi-boule unité pour certaines permittivités électriques variables. Pour l'instant, seulement une justification qualitative peut donc être apportée pour certains phénomènes observés. Signalons que la méthode est applicable à des obstacles de formes géométriques diverses. Cependant, les formes géométriques simples sont celles pour lesquelles nous disposons actuellement de maillages. Les figures ci-dessous représentent un échantillon de champs intérieurs et lointains pour la diffraction d'une onde plane et d'un dipôle magnétique. Les obstacles sont d'abord des lentilles diélectriques sphériques à permittivités continûment radiales, ensuite on considère des superpositions de couches dans la boule unité et dans la demi-boule unité. Enfin on s'intéresse à la visualisation des champs pour des obstacles certes homogènes, mais à permittivités proches de la résonance. Les figures sont composées, pour chaque définition de la permittivité, des courbes de la norme du champ lointain sur les plans  $\phi = 0^\circ$  et  $\phi = 90^\circ$  d'une part, et d'autre part, des images du champ sur le bord du domaine et sur une coupe intérieure plane d'équation  $x_1 = 0$ , où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  est la variable générique. Le champ intérieur est représenté en échelle logarithmique pour une meilleure visibilité, et les images correspondent aux valeurs absolues d'une des composantes des parties réelle ou imaginaire du champ électrique.

#### Diélectriques à permittivités continûment radiales

Nous observons, ici, les champs pour chacune des quatre lentilles sphériques de permittivités relatives radiales données par :

$$\varepsilon_r^{(1)}(\mathbf{x}) = 2 - |\mathbf{x}|^2 + \sqrt{\epsilon}, \quad \varepsilon_r^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{4}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^2} + \epsilon, \quad \varepsilon_r^{(3)}(\mathbf{x}) = \frac{2}{|\mathbf{x}| + \rho\epsilon} - 1, \quad \varepsilon_r^{(4)}(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2},$$

où  $|\mathbf{x}| \leq 1$ ,  $\epsilon = 2.22045e - 16$  et  $\rho = 1$  si  $|\mathbf{x}| < 1 - \epsilon$  et  $\rho = -1$  sinon. Les trois premières permittivités sont des modifications légères des lentilles physiques de Luneburg, de Maxwell fish-eye et de Eaton-Lippmann respectivement (voir [19]). Ces permittivités sont toutes à valeurs croissantes du bord de la boule vers son centre. La dernière permittivité a été introduite dans un souci purement mathématique, pour une inversion du sens de variation. Les modifications des lentilles physiques ont pour but d'éviter à la permittivité relative de prendre la valeur 1 dans le domaine. C'est équivalent à empêcher le paramètre  $\eta = 1 - \varepsilon_r$  de s'annuler dans le domaine. En effet, notre discrétisation de l'opérateur intégral volumique reste onéreuse pour l'instant. Pour nous affranchir donc de la dépendance de l'opérateur en  $\eta$ , et tester simultanément et plus simplement plusieurs valeurs, on a effectué le changement d'inconnue  $\tilde{\mathbf{E}} = \eta \mathbf{E}$  dans l'équation (2.1) (voir au chapitre 2). Ce changement nous conduit alors à la discrétisation de l'opérateur  $\frac{1}{\eta} \mathbf{1}$ . Les figures 3.18, 3.19 et 3.20 montrent des champs intérieurs confinés dans des couches sphériques plus ou moins fines, avec des intensités de plus en plus faibles à mesure qu'on approche le centre de la boule. Le champ se propageant plus difficilement dans un diélectrique de permittivité plus élevée, ce phénomène s'explique naturellement par le caractère radial des permittivités avec une croissance de leurs valeurs du bord vers le centre. On peut observer, justement, un phénomène analogue pour champ intérieur à la figure 3.21 avec cependant une inversion du sens de variation des intensités.

### 3.3 Profil de rayonnement électrique

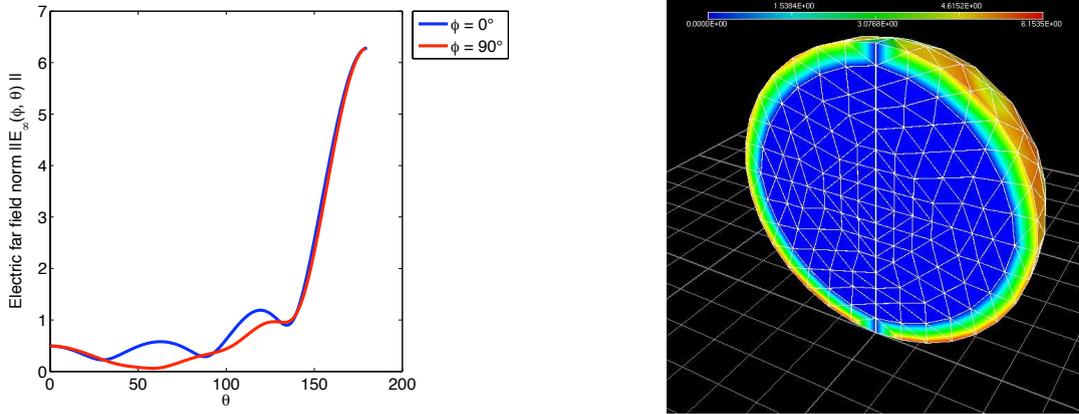


FIG. 3.18 – Diffraction de l'onde plane de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de direction  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(1)}$ . A gauche, le profil de rayonnement lointain et à droite, une coupe de la troisième composante de la partie imaginaire du champ intérieur.

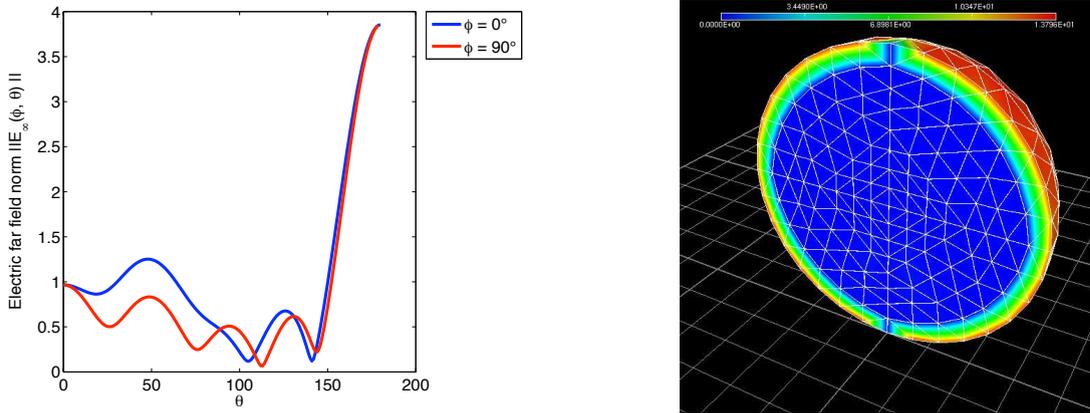


FIG. 3.19 – Diffraction de l'onde plane de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de direction  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(3)}$ . A gauche, le profil de rayonnement lointain et à droite, une coupe de la troisième composante de la partie réelle du champ intérieur.

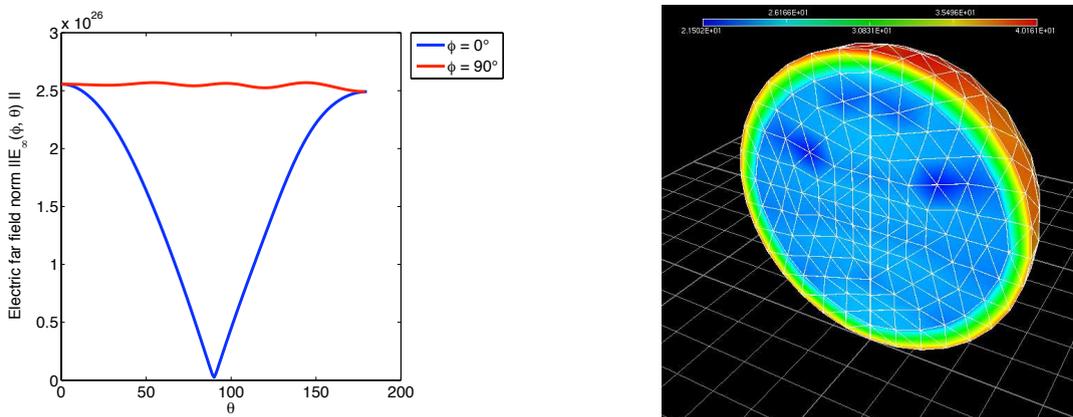


FIG. 3.20 – Diffraction du dipôle magnétique de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de point source  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 1 + \epsilon)$ , où  $\epsilon = 2.22045e - 16$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(2)}$ . A gauche, le profil de rayonnement lointain et à droite, une coupe de la première composante de la partie imaginaire du champ intérieur.

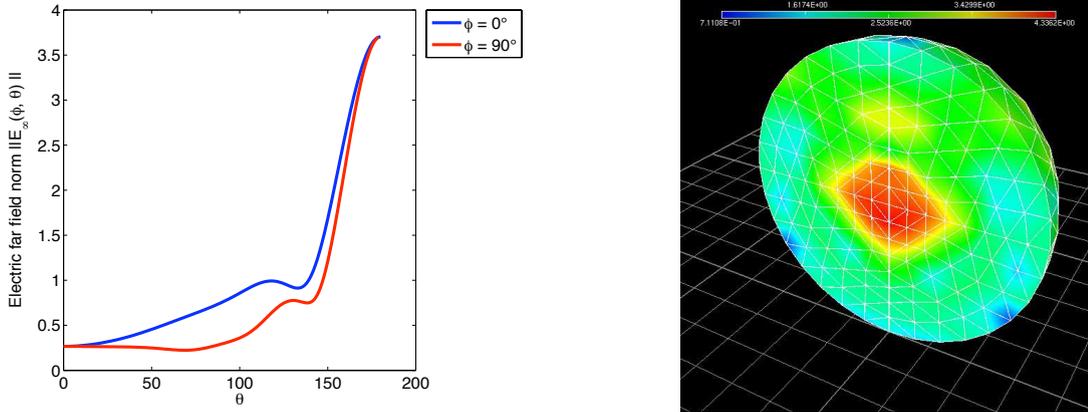


FIG. 3.21 – Diffraction de l'onde plane de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de direction  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(4)}$ . A gauche, le profil de rayonnement lointain et à droite, une coupe de la première composante de la partie réelle du champ intérieur.

### Superpositions de domaines

Nous simulons des superpositions de domaines dans la boule unité et dans la demi-boule. Pour la boule entière, nous superposons deux domaines homogènes. L'un des domaines est très fortement conducteur, tandis que l'autre est un diélectrique avec plutôt une faible permittivité. La superposition est d'abord linéaire, avec une permittivité constante par morceaux donnée par :

$$\varepsilon_r^{(5)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.1 + 10^6 i & \text{si } x_3 \leq 0 \\ 0.95 & \text{si } x_3 > 0, \end{cases}$$

où  $|\mathbf{x}| \leq 1$ . Les deux domaines sont en fait les hémisphères nord et sud de la boule. L'hémisphère sud est le domaine à très forte conductivité.

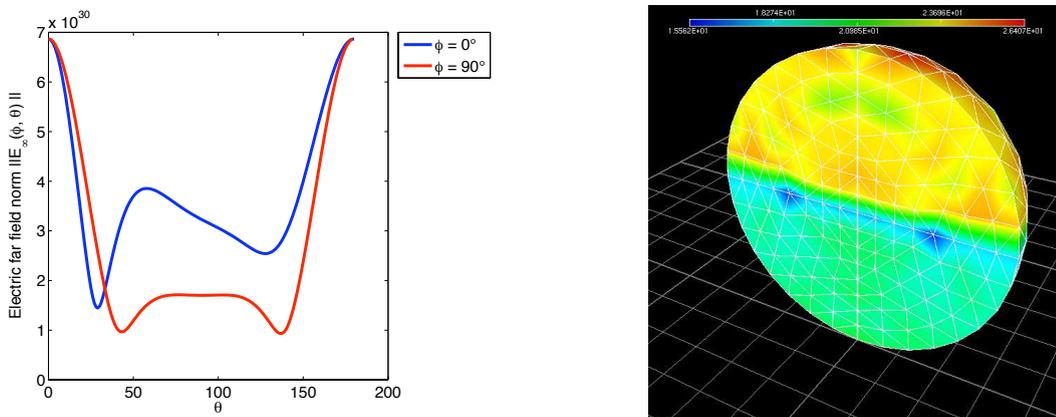


FIG. 3.22 – Diffraction du dipôle magnétique de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de point source  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 1 + \epsilon)$ , où  $\epsilon = 2.22045e - 16$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(5)}$ . A gauche, le profil de rayonnement lointain et à droite, une coupe de la deuxième composante de la partie réelle du champ intérieur.

### 3.3 Profil de rayonnement électrique

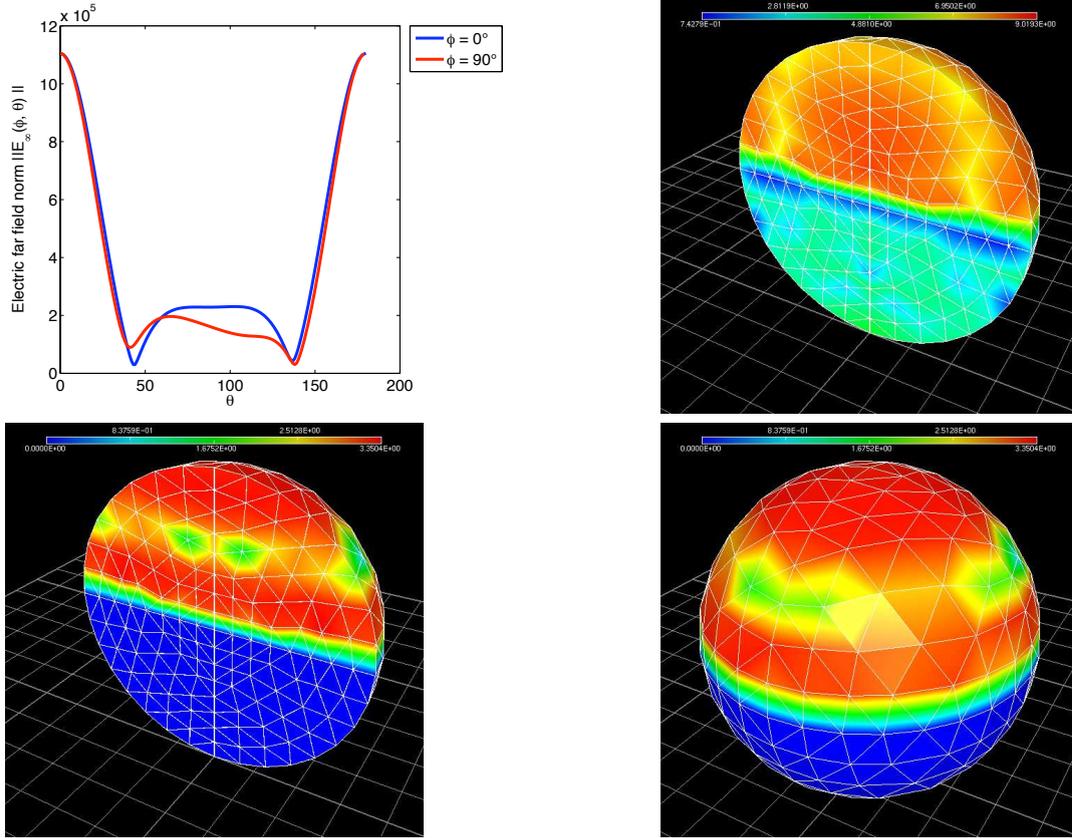


FIG. 3.23 – Diffraction de l'onde plane de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de direction  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(5)}$ . En haut à gauche, le profil de rayonnement lointain. En haut à droite, une coupe de la première composante de la partie réelle du champ intérieur. En bas à gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la troisième composante de la partie imaginaire.

Nous procédons ensuite à une superposition en boules concentriques en définissant la permittivité radiale constante par morceaux suivante :

$$\varepsilon_r^{(6,1)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.1 + 10^6 i & \text{si } |\mathbf{x}| \leq 1/2 \\ 0.95 & \text{si } 1/2 < |\mathbf{x}| \leq 1. \end{cases}$$

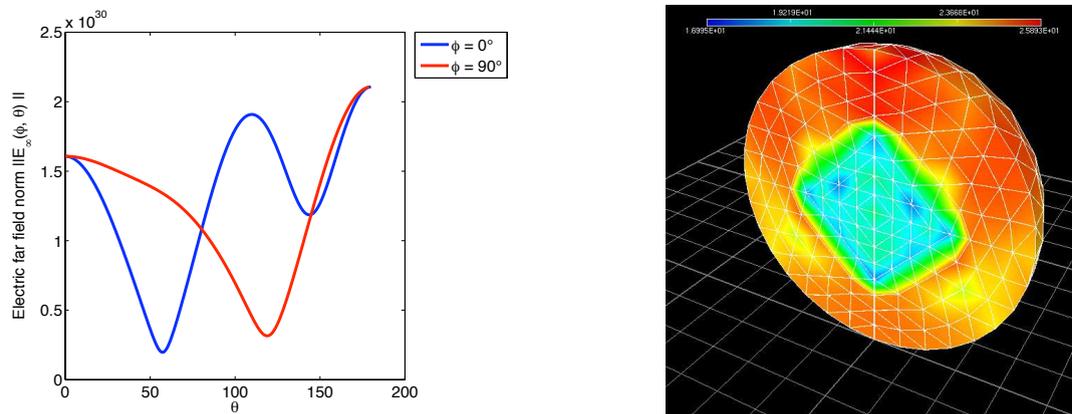


FIG. 3.24 – Diffraction du dipôle magnétique de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de point source  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 1 + \epsilon)$ , où  $\epsilon = 2.22045e - 16$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(6,1)}$ . A gauche, le profil de rayonnement lointain et à droite, une coupe de la première composante de la partie imaginaire du champ intérieur.

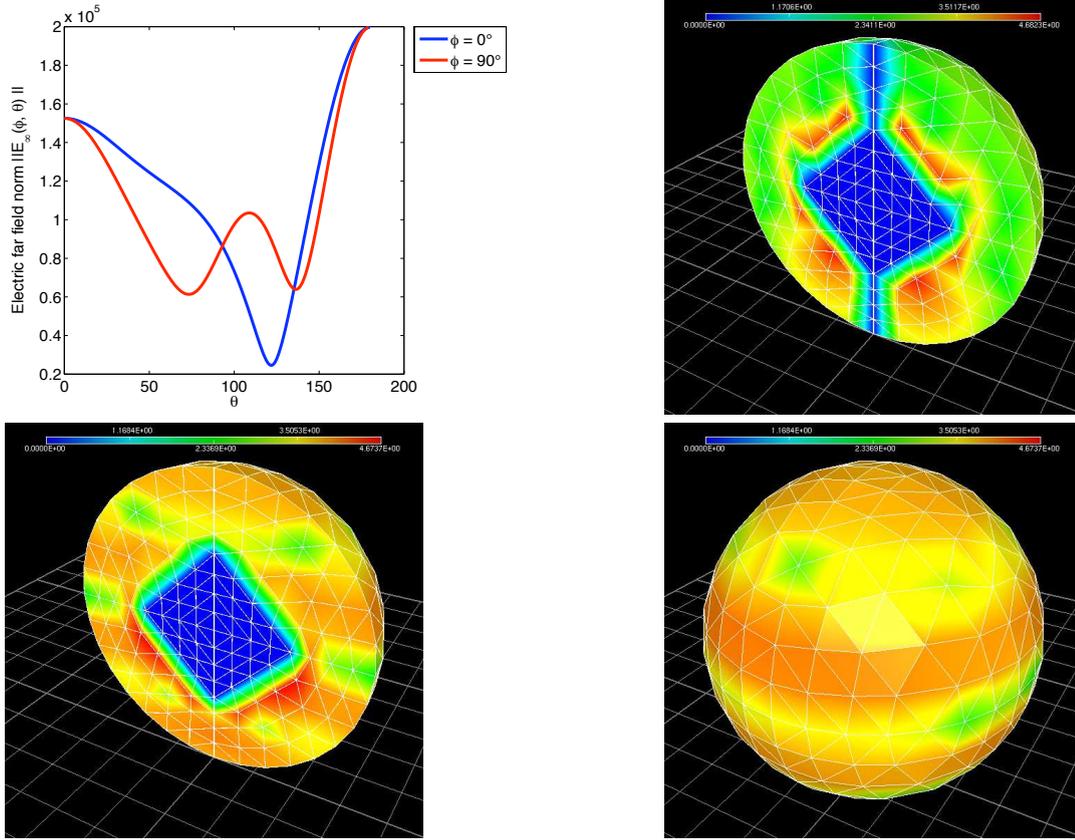


FIG. 3.25 – Diffraction de l'onde plane de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de direction  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(6,1)}$ . En haut à gauche, le profil de rayonnement lointain. En haut à droite, une coupe de la troisième composante de la partie réelle du champ intérieur. En bas à gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la deuxième composante de la partie imaginaire.

Nous augmentons, à présent, le rayon de la boule interne en posant :

$$\varepsilon_r^{(6,2)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.1 + 10^6 i & \text{si } |\mathbf{x}| \leq 3/4 \\ 0.95 & \text{si } 3/4 < |\mathbf{x}| \leq 1. \end{cases}$$

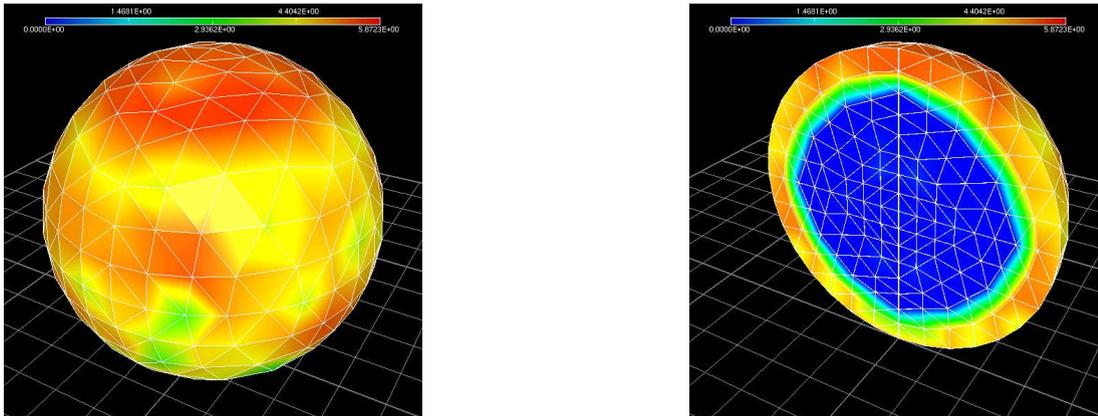


FIG. 3.26 – Diffraction de l'onde plane de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de direction  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(6,2)}$ . A gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la deuxième composante de la partie imaginaire.

### 3.3 Profil de rayonnement électrique

L'observation, des figures 3.22 et 3.23 pour la superposition en hémisphères et des figures 3.24, 3.25 et 3.26 pour la superposition en boules concentriques, distingue nettement les deux domaines. Le champ est, comme on s'y attend, négligeable dans le domaine fortement conducteur, au profit d'un confinement quasi-total dans le domaine diélectrique à faible permittivité. Les figures 3.24, 3.25 et 3.26 mettent en évidence, par ailleurs, une influence du maillage sur les calculs. En effet la boule interne, définie par la permittivité radiale, suit les contours du maillage. Pour  $\varepsilon_r^{(6,1)}$ , les contours de la boule interne (de rayon égal à 1/2) sont plutôt planes. D'où l'observation d'une forme en losange au lieu d'une forme sphérique sur la coupe interne.

Dans la demi-boule, les superpositions sont effectuées par des couches en anneaux diélectriques et non homogènes. Dans chacun de ces anneaux, la permittivité est linéaire en la composante  $x_3$ . On observe les champs dans la demi-boule, pour les trois permittivités suivantes :

$$\varepsilon_r^{(7)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x_3 + 2 & \text{si } |(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}x_3 + 3 & \text{si } \frac{1}{4} < |(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x_3 + 3.5 & \text{si } \frac{1}{2} < |(x_1, x_2)| \leq \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}x_3 + 4 & \text{si } \frac{3}{4} < |(x_1, x_2)| \leq 1, \end{cases}$$

$$\varepsilon_r^{(8)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_3 + 3.25 & \text{si } |(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}x_3 + 2.75 & \text{si } \frac{1}{4} < |(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x_3 + 2.25 & \text{si } \frac{1}{2} < |(x_1, x_2)| \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}x_3 + 1.75 & \text{si } \frac{3}{4} < |(x_1, x_2)| \leq 1 \end{cases}$$

et

$$\varepsilon_r^{(9)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_3 + 0.35 & \text{si } |(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}x_3 + 0.25 & \text{si } \frac{1}{4} < |(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x_3 + 0.15 & \text{si } \frac{1}{2} < |(x_1, x_2)| \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}x_3 + 0.05 & \text{si } \frac{3}{4} < |(x_1, x_2)| \leq 1, \end{cases}$$

où  $|\mathbf{x}| \leq 1$  et  $x_3 \geq 0$ . Les figures 3.27, 3.28 et 3.29 présentent les champs pour ces trois permittivités.

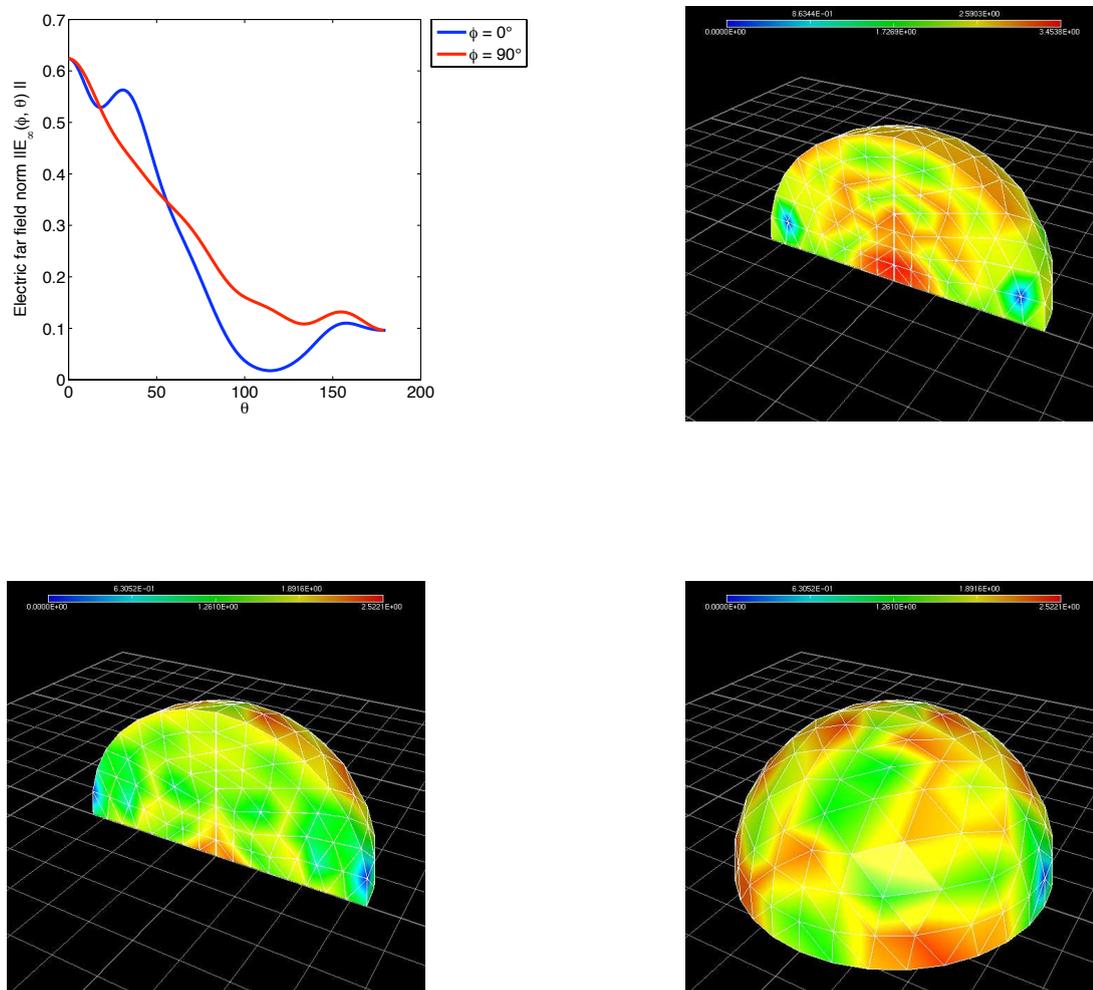


FIG. 3.27 – Diffraction du dipôle magnétique de nombre d'onde  $\kappa = 7$ , de point source  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, -0.2)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la demi-boule unité de permittivité  $\epsilon_r^{(7)}$ . En haut à gauche, le profil de rayonnement lointain. En haut à droite, une coupe de la première composante de la partie imaginaire du champ intérieur. En bas à gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la deuxième composante de la partie réelle.

### 3.3 Profil de rayonnement électrique

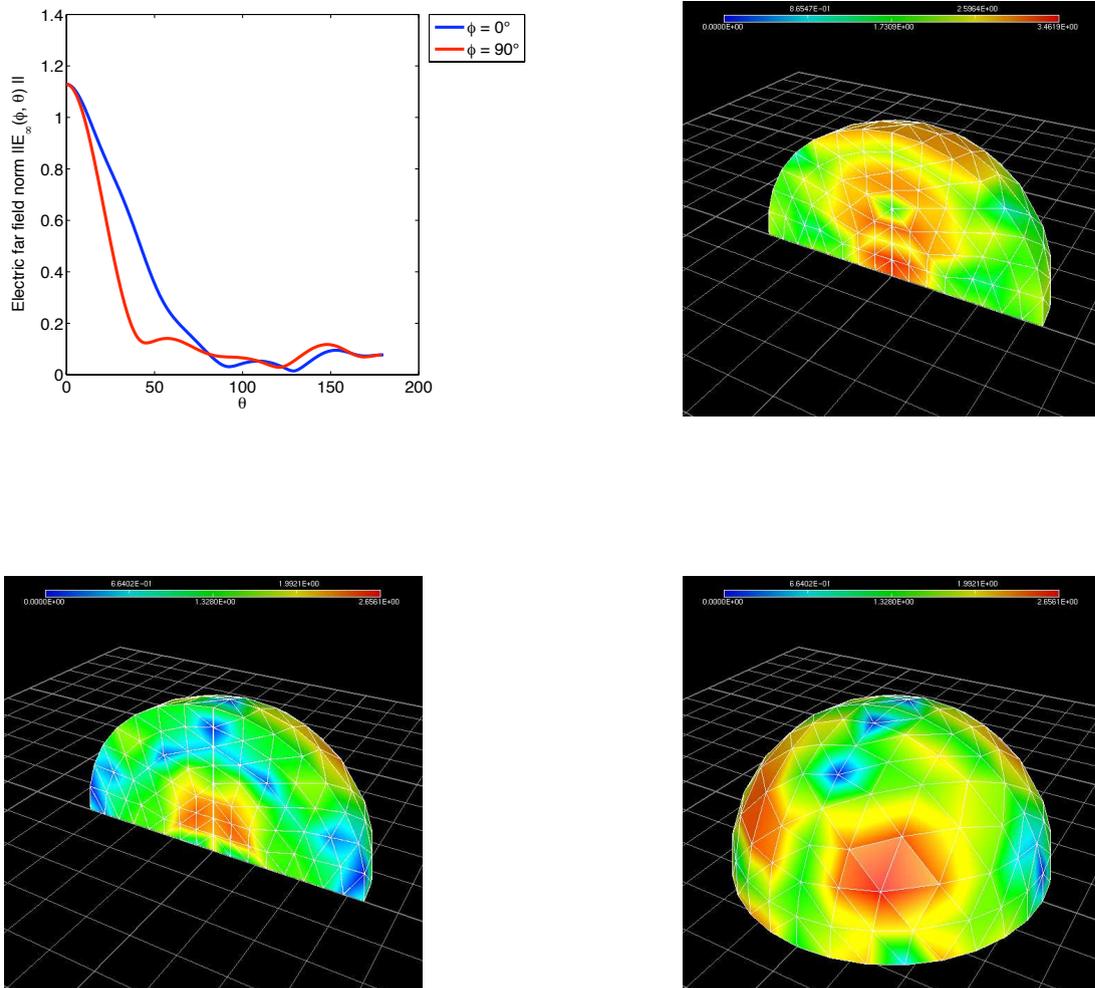


FIG. 3.28 – Diffraction du dipôle magnétique de nombre d'onde  $\kappa = 7$ , de point source  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, -0.2)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la demi-boule unité de permittivité  $\epsilon_r^{(8)}$ . En haut à gauche, le profil de rayonnement lointain. En haut à droite, une coupe de la première composante de la partie imaginaire du champ intérieur. En bas à gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la deuxième composante de la partie réelle.

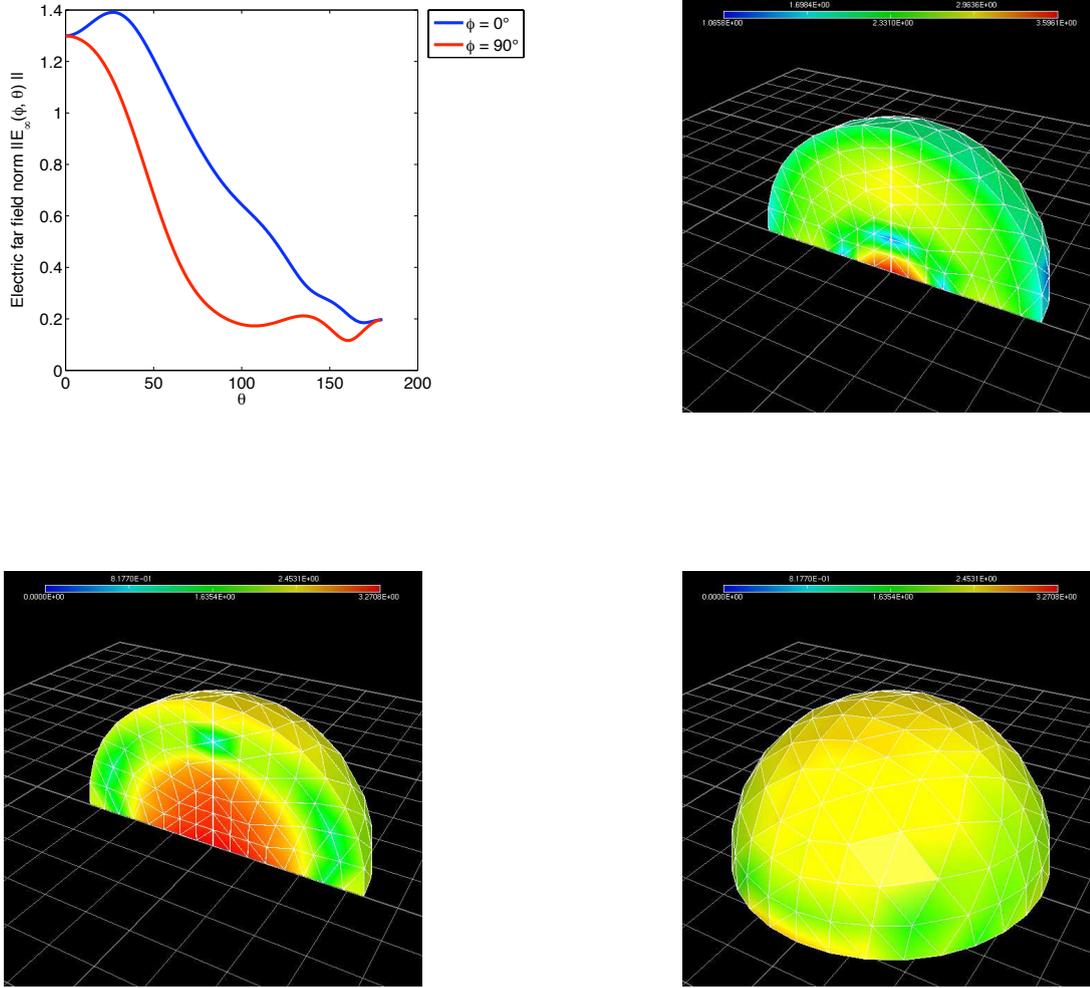


FIG. 3.29 – Diffraction du dipôle magnétique de nombre d'onde  $\kappa = 7$ , de point source  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, -0.2)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la demi-boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(9)}$ . En haut à gauche, le profil de rayonnement lointain. En haut à droite, une coupe de la première composante de la partie réelle du champ intérieur. En bas à gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la première composante de la partie imaginaire.

Les couches de chacune des lentilles sont de même nature avec des permittivités de même ordre. L'observation des champs intérieurs n'explique aucun phénomène particulier, contrairement aux exemples précédents. On constate simplement une distribution toujours forte au centre de la demi-boule. Cependant les courbes des champs lointains correspondants, permettent d'observer un rayonnement plus diffus pour la lentille de permittivité  $\varepsilon_r^{(7)}$  (figure 3.27) que les deux autres, avec une courbe plus étalée. La lentille de permittivité  $\varepsilon_r^{(8)}$  (figure 3.28) ayant certes un maximum inférieur à celui de la lentille de permittivité  $\varepsilon_r^{(9)}$  (figure 3.29), mais valant presque deux fois celui de  $\varepsilon_r^{(7)}$ , a le rayonnement le plus focalisé avec une courbe plus resserrée et une décroissance plus rapide. La lentille à  $\varepsilon_r^{(9)}$  présente, néanmoins, une particularité. En effet, on a un décalage du point de maximum du champ lointain pour le plan  $\phi = 0^\circ$ . Plus précisément, ce point de maximum est  $\theta = 27^\circ$ , quand le point  $\theta = 0^\circ$  est le point de maximum pour tous les autres champs  $\forall \phi \in \{0^\circ, 90^\circ\}$ .

#### Recherche de résonances

Dans cette dernière partie, on considère la boule unité diélectrique et homogène puis on observe les champs pour deux valeurs de la permittivité proches de la résonance. Pour cela, comme à la section 3.2, nous avons calculé le spectre de l'opérateur intégral volumique  $\mathcal{A}_\kappa$  avec 4096 tétraèdres et pour la valeur  $\kappa = 5$  (figure 3.30). Nous avons testé les valeurs propres  $\lambda_1 = 1.275 - 0.26i$  et  $\lambda_2 = 1.226 - 0.793i$  correspondant respectivement aux permittivités  $\varepsilon_r^{(10)} = 0.247 - 0.153i$  et  $\varepsilon_r^{(11)} = 0.425 - 0.372i$ . Les figures 3.31 - 3.34 présentent les distributions des champs intérieurs et lointains pour ces deux valeurs de la permittivité avec une onde plane d'une part et un dipôle magnétique d'autre part, comme ondes incidentes.

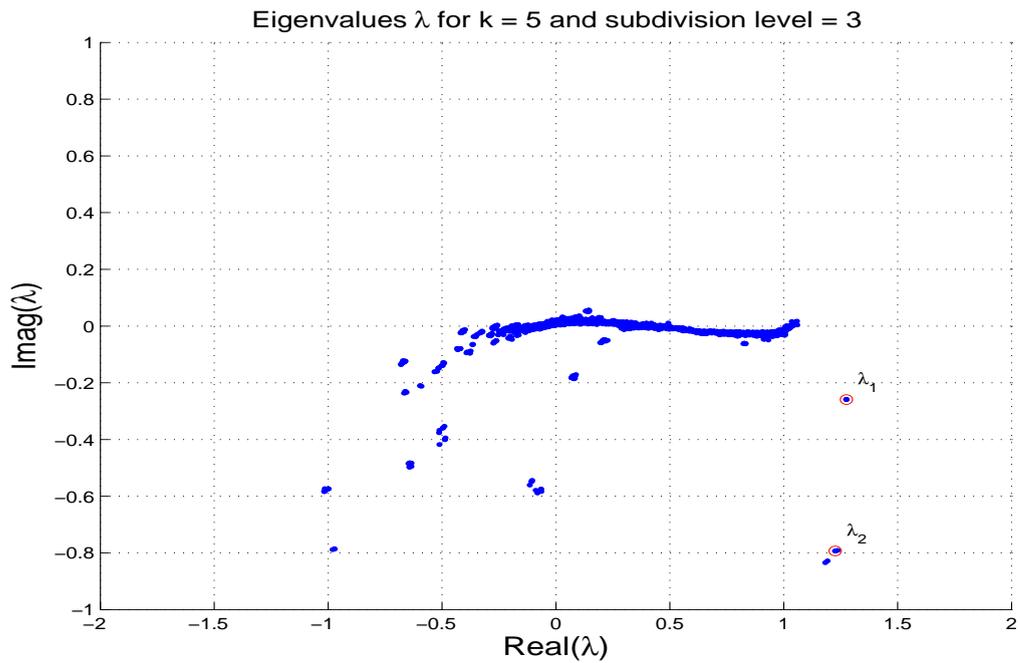


FIG. 3.30 – Valeurs propres de la matrice issue de la discrétisation de l'opérateur intégral volumique  $\mathcal{A}_\kappa$  dans la boule unité, avec  $\kappa = 5$  et un maillage à 4096 tétraèdres. Les points  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , sélectionnés dans le plan complexe, sont ceux utilisés pour définir la permittivité.

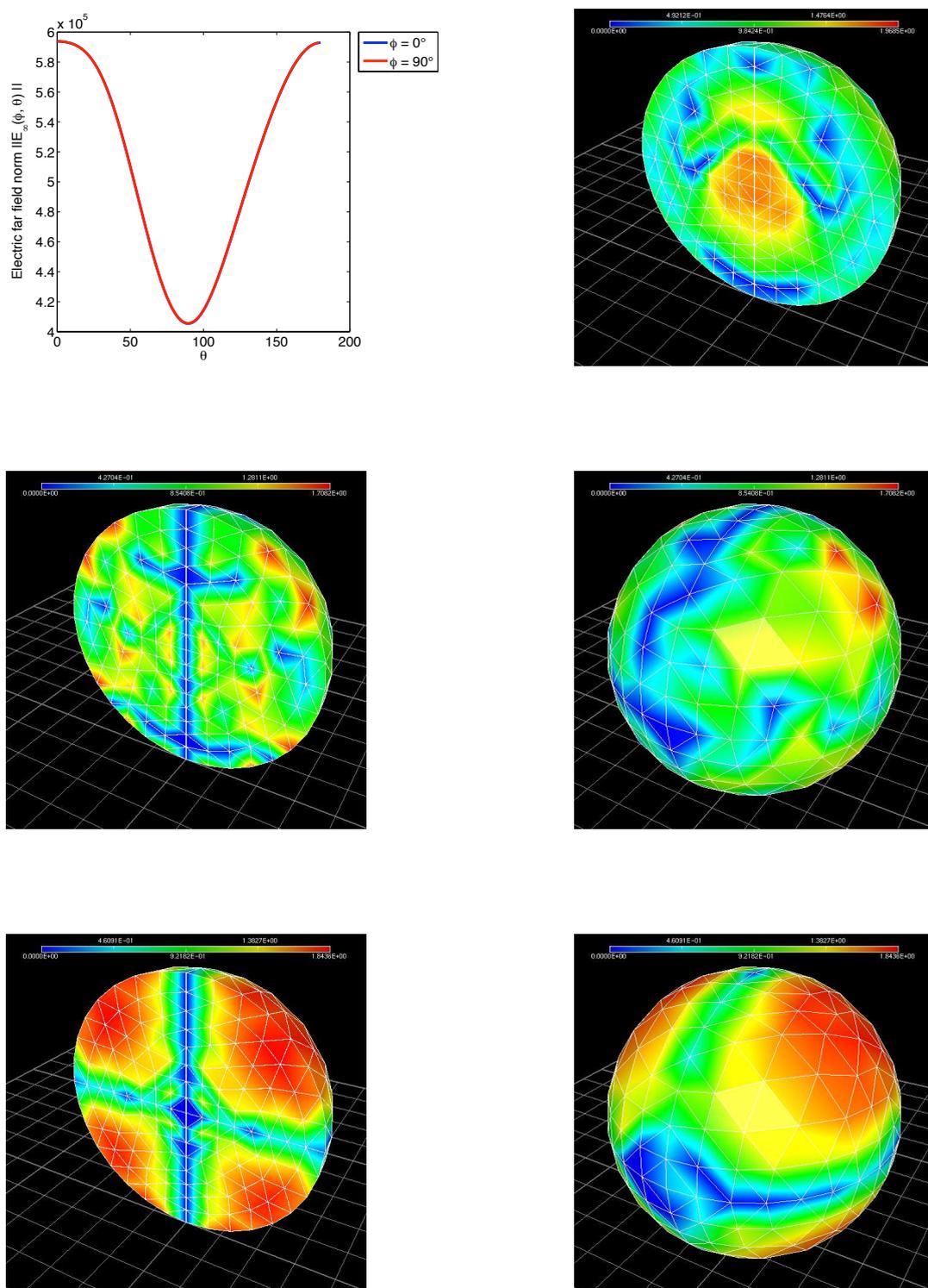


FIG. 3.31 – Diffraction de l'onde plane de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de direction  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\varepsilon_r^{(10)}$ . En haut à gauche, le profil de rayonnement lointain. En haut à droite, une coupe de la première composante de la partie imaginaire du champ intérieur. Milieu à gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la troisième composante de la partie imaginaire. En bas à gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la troisième composante de la partie réelle.

### 3.3 Profil de rayonnement électrique

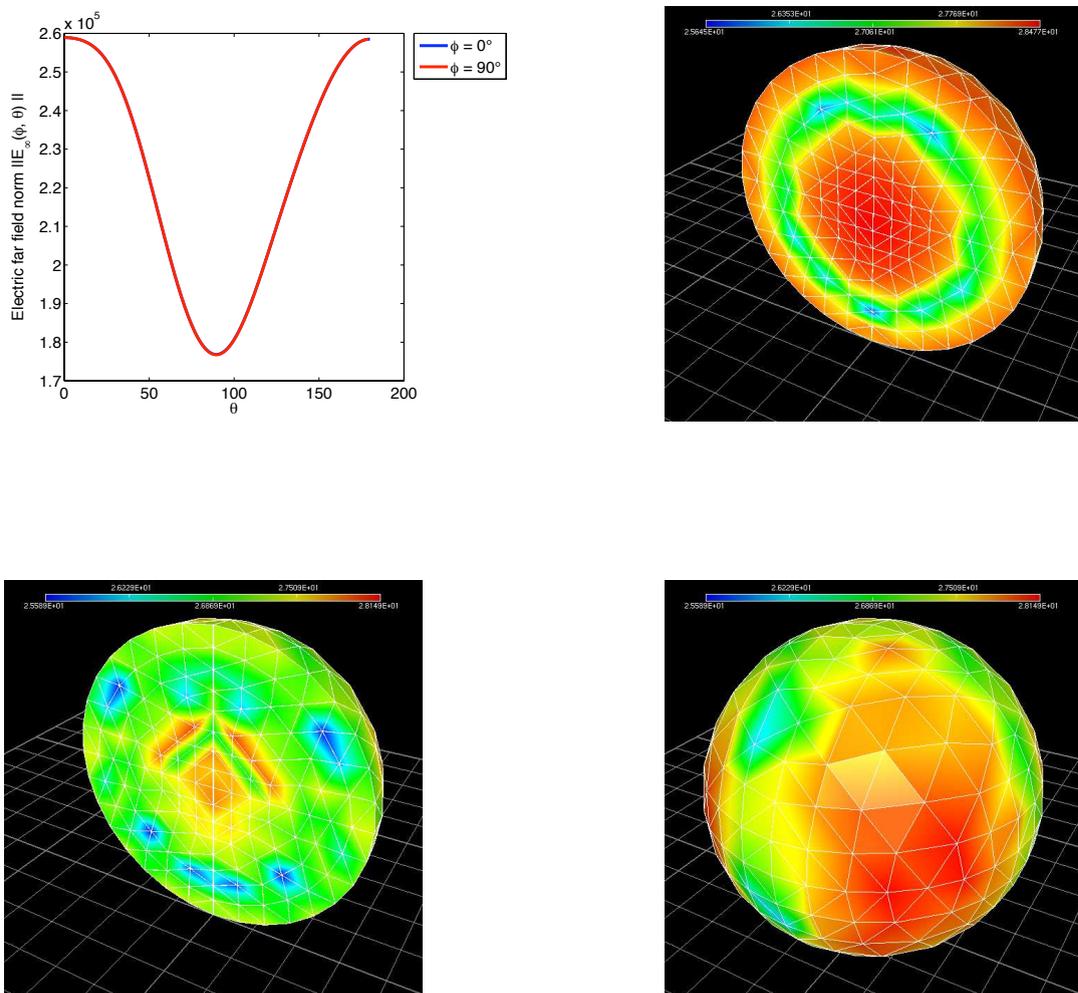


FIG. 3.32 – *Diffraction du dipôle magnétique de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de point source  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 1 + \epsilon)$ , où  $\epsilon = 2.22045e - 16$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\epsilon_r^{(10)}$ . En haut à gauche, le profil de rayonnement lointain. En haut à droite, une coupe de la première composante de la partie imaginaire du champ intérieur. En bas à gauche et à droite, respectivement coupe et champ à la surface de la deuxième composante de la partie réelle.*

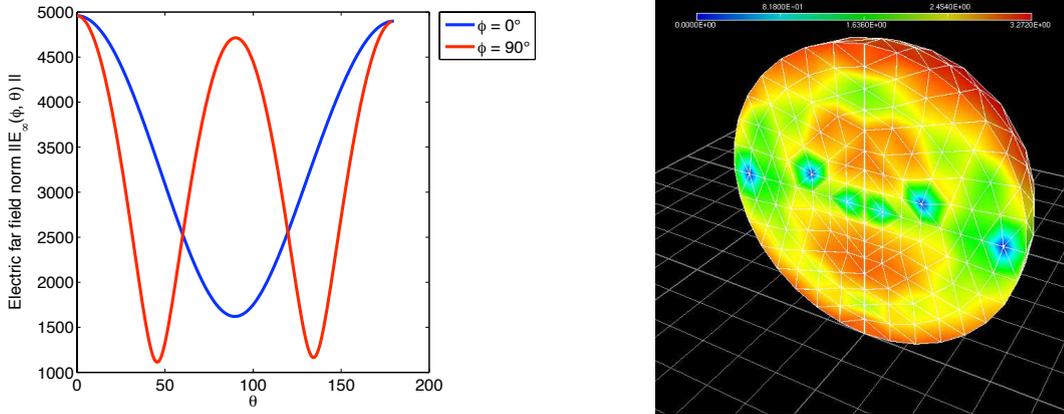


FIG. 3.33 – Diffraction de l'onde plane de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de direction  $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\epsilon_r^{(11)}$ . A gauche, le profil de rayonnement lointain et à droite, une coupe de la première composante de la partie imaginaire du champ intérieur.

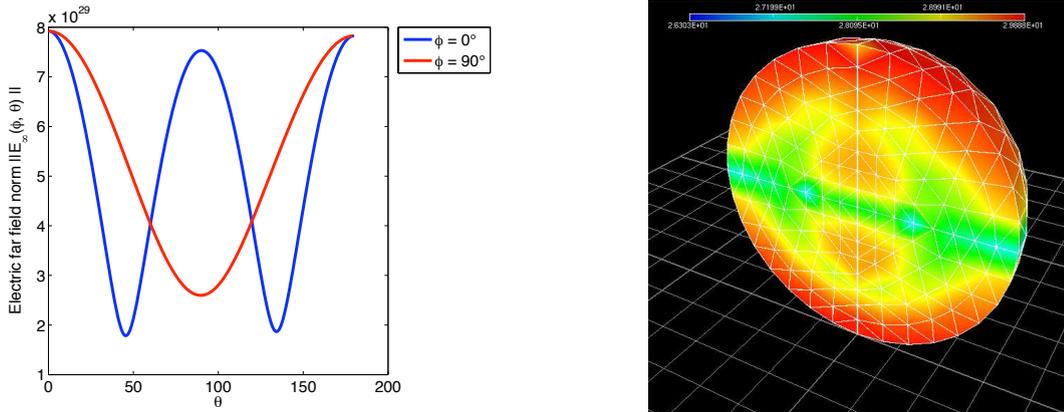


FIG. 3.34 – Diffraction du dipôle magnétique de nombre d'onde  $\kappa = 5$ , de point source  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 1 + \epsilon)$ , où  $\epsilon = 2.22045e - 16$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , par la boule unité de permittivité  $\epsilon_r^{(11)}$ . A gauche, le profil de rayonnement lointain et à droite, une coupe de la première composante de la partie réelle du champ intérieur.

On peut noter, dans les exemples de cette sous-section, des valeurs particulièrement élevées du champ lointain pour la diffraction du dipôle magnétique lorsque le point source est très proche (à une distance  $\epsilon = 2.22045e - 16$ ) de l'obstacle. Cette situation se traduit physiquement par une forte intensité du champ incident et mathématiquement, par la proximité de la singularité due à la fonction de Green dans l'expression du dipôle magnétique. Les permittivités électriques correspondent à des objets non physiques, à cause de leurs parties imaginaires négatives (i.e conductivités négatives). Ces objets sont donc des générateurs d'énergie. Les résultats présentés aux figures 3.31 - 3.34 corroborent cette propriété. En effet les profils de rayonnements lointains très réguliers, notamment aux figures 3.33 et 3.34, indiquent que les boules se comportent comme des points sources, tandis qu'on relève de l'activité à l'intérieur de celles-ci.

# Conclusion Générale

Nous avons commencé, en première partie de ces travaux, à étudier théoriquement et aux moyens d'équations intégrales, le problème de la diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique. Sous l'hypothèse plus réaliste de la discontinuité de la permittivité électrique à travers le bord du diélectrique, nous avons d'abord dérivé deux formulations intégrales : un système couplé surface-volume d'équations intégrales à noyau faiblement singulier et une équation intégrale volumique fortement singulière. Nous avons ensuite justifié l'équivalence entre le problème de diffraction et les deux formulations intégrales. La formulation couplée a été la plus propice à l'analyse grâce à la faible singularité de son noyau. Nous lui avons appliqué les propriétés standard de Fredholm pour les équations intégrales et avons montré usant de l'équivalence que les trois problèmes sont bien posés. Cette équivalence nous a également permis de déduire des propriétés de l'équation intégrale volumique fortement singulière. Notamment nous avons montré que l'équation intégrale volumique est bien posée dans l'espace  $L^2$  des champs de vecteurs dont le carré de la norme est intégrable, et qu'elle satisfait une inégalité de Gårding. Cette propriété la rend convenable à une approximation numérique par des éléments finis  $L^2$  - conformes, puisque toute méthode de Galerking conduit à un schéma de discrétisation stable.

Nous avons poursuivi nos travaux dans la deuxième partie, par le traitement d'intégrales singulières en vue de résoudre numériquement l'équation intégrale volumique, puis de calculer le profil de rayonnement électromagnétique issu de la diffraction par un corps diélectrique homogène et non homogène. Nous avons donc développé une méthode de traitement des singularités, basée sur des changements de variables dans le tétraèdre. La méthode est ensuite appliquée à l'opérateur intégral volumique, pour une régularisation de celui-ci. La méthode et la régularisation de l'opérateur intégral volumique ont été implémentées dans le code Mélima++ dont la version antérieure Mélima est à l'adresse <http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/index.html>. L'objectif de ce code est de constituer une librairie de résolution de problèmes variationnels de divers types, soit par des éléments finis ou par des équations intégrales surfaciques et/ou volumiques. Les tests numériques effectués sur l'implémentation de l'équation intégrale volumique et exposés au dernier chapitre ont montré des résultats satisfaisants en ce qui concerne l'approximation de la solution au problème. En effet, le but de nos travaux était d'abord l'exactitude des résultats de notre méthode. Nous avons ainsi pu comparer nos résultats aux séries de Mie pour la diffraction par un obstacle sphérique homogène. L'intérêt majeur de cette étude étant la capacité à modéliser la diffraction par des obstacles non homogènes, nous avons simulé des obstacles non homogènes. Nous n'avons pu restituer que qualitativement certains phénomènes simples, à défaut de valeurs numériques de référence disponibles. Bien que la boule et la demi-boule ont été les seuls obstacles considérés pour les tests, le modèle est applicable à diverses formes géométriques. Seulement, nous ne disposons actuellement que de maillages pour des formes géométriques simples.

Par ailleurs, l'exploitation de notre code en l'état actuel reste onéreuse en espace mémoire et surtout en temps de calcul pour une amélioration de la précision. Ainsi la perspective à court terme est d'une part, le couplage des *Méthodes Multipôles Rapides* avec le code pour accélérer l'approximation et d'autre part, la validation du modèle pour des obstacles non homogènes au moyen de résultats empiriques. Ensuite la perspective à moyen terme est l'optimisation de forme pour une *antenne lentille* à l'aide de notre méthode. Ce qui est l'objectif du projet initiateur de cette thèse.



# Annexe A :

## Un changement de variables dans le tétraèdre

Soit l'intégrale

$$J = \int_Z f(z) dz,$$

où  $Z$  est un tétraèdre de sommets  $Z_i$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$ . Nous présentons un changement de variables ramenant l'intégrale sur l'une des faces de  $Z$ .

Le point  $z \in Z$  est décrit comme suit :

$$z = \nu z' + (1 - \nu) Z_1 ; \quad (\nu, z') \in [0, 1] \times \Sigma_Z,$$

où  $\Sigma_Z$  est le triangle  $Z_2 Z_3 Z_4$ . On peut exprimer  $z' \in \Sigma_Z$ , de la manière suivante :

$$z' = (1 - \sigma_1 - \sigma_2) Z_2 + \sigma_1 Z_3 + \sigma_2 Z_4 ; \quad (\sigma_1, \sigma_2) \in S_\sigma,$$

où

$$S_\sigma = \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in [0, 1]^2 ; \quad \sigma_1 + \sigma_2 \leq 1 \right\}.$$

Nous avons alors

$$z = \nu [(1 - \sigma_1 - \sigma_2) Z_2 + \sigma_1 Z_3 + \sigma_2 Z_4] + (1 - \nu) Z_1 ; \quad (\nu, z') \in [0, 1] \times \Sigma_Z.$$

Considérons l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} [0, 1] \times S_\sigma & \xrightarrow{k} & [0, 1] \times \Sigma_Z & \xrightarrow{h} & Z \\ (\nu, \sigma_1, \sigma_2) & \mapsto & (\nu, z') & \mapsto & z \end{array} \quad (\text{i.e. } g = h \circ k).$$

Par passage au Jacobien, nous avons  $J_g(\nu, \sigma_1, \sigma_2) = J_h(\nu, z') J_k(\nu, \sigma_1, \sigma_2)$ ; c'est à dire  $J_k = J_g (J_h)^{-1}$ . Le Jacobien  $J_g$  est donné par

$$J_g = \left| \frac{\partial g}{\partial \nu} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \times \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \right) \right|,$$

avec

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} = z' - Z_1 = Z_2 - Z_1 + \sigma_1(Z_3 - Z_2) + \sigma_2(Z_4 - Z_2),$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_1} = \nu(Z_3 - Z_2),$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_2} = \nu(Z_4 - Z_2).$$

Donc

$$\begin{aligned} J_g &= \nu^2 |(Z_2 - Z_1) \cdot [(Z_3 - Z_2) \times (Z_4 - Z_2)]| \\ &= \nu^2 |\mathcal{P}(Z)| \end{aligned}$$

$$J_g = 6\nu^2 |Z|,$$

et

$$J_h = \left| \frac{\partial h}{\partial \nu} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial \sigma_1} \times \frac{\partial h}{\partial \sigma_2} \right) \right|,$$

avec

$$\frac{\partial h}{\partial \nu} = (1, 0),$$

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma_1} = \left( 0, \frac{\partial z'}{\partial \sigma_1} \right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma_2} = \left( 0, \frac{\partial z'}{\partial \sigma_2} \right).$$

D'où

$$J_h = \left| \frac{\partial z'}{\partial \sigma_1} \times \frac{\partial z'}{\partial \sigma_2} \right|,$$

avec  $\frac{\partial z'}{\partial \sigma_1} = Z_3 - Z_2$  et  $\frac{\partial z'}{\partial \sigma_2} = Z_4 - Z_2$ . Nous avons donc

$$J_h = |(Z_3 - Z_2) \times (Z_4 - Z_2)|$$

$$J_h = 2|\Sigma_Z|.$$

Par conséquent,

$$J_k = \frac{6\nu^2 |Z|}{2|\Sigma_Z|} = 3\nu^2 \frac{|Z|}{|\Sigma_Z|}.$$

Finalement, l'intégrale  $J$  devient

$$\begin{aligned} J &= \int_Z f(z) dz \\ &= \int_{[0,1] \times \Sigma_Z} f(k(\nu, z')) J_k(\nu, z') d\nu dz' \\ J &= 3 \frac{|Z|}{|\Sigma_Z|} \int_{[0,1]} \nu^2 \int_{\Sigma_Z} f(k(\nu, z')) d\nu dz' \quad \blacksquare \end{aligned}$$

# Annexe B :

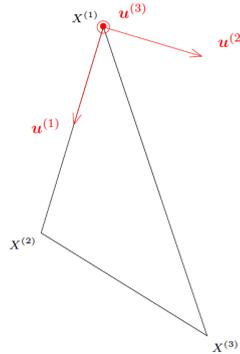
## Un calcul analytique pour une intégrale quasi-singulière particulière

Soit  $\Delta$  un triangle de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , de sommets  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}$  et soit  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \Delta$ . On se propose de calculer *analytiquement*, l'intégrale suivante :

$$I(\mathbf{x}^0) = \int_{\Delta} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^3} ds(\mathbf{x}).$$

Pour cela, nous commençons par décrire  $\Delta$  en suivant la voie indiquée dans [49]. Soit  $\mathbf{x}^o = (x_1^o, x_2^o, x_3^o)^T$ , la représentation en coordonnées cartésiennes de  $\mathbf{x}^o$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On définit la base orthonormale  $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)})$  en posant :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{\mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}}{|\mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}|}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \frac{(\mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}) \times (\mathbf{X}^{(3)} - \mathbf{X}^{(1)})}{|(\mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}) \times (\mathbf{X}^{(3)} - \mathbf{X}^{(1)})|}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(3)} \times \mathbf{u}^{(1)}.$$



On note  $\mathbf{A} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)})$ , la matrice orthogonale de changement de base et on définit la transformation affine suivante :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \longmapsto \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$$\text{avec } \mathbf{y} = \mathbf{A}^T (\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(1)}) \quad \left( \text{ou encore } \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{X}^{(1)} \right).$$

On pose  $\mathbf{y}^0 = \mathbf{A}^T (\mathbf{x}^0 - \mathbf{X}^{(1)})$  et  $\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{A}^T (\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(1)})$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Les coordonnées de  $\mathbf{y}^0$  et des  $\mathbf{Y}^{(k)}$  dans le repère affine  $\mathcal{B} = (\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)})$ , notées  $\mathbf{y}^o = (y_1^o, y_2^o, y_3^o)^T_{\mathcal{B}}$  et

$\mathbf{Y}^{(k)} = (Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, Y_3^{(k)})^T_{\mathcal{B}}$ , sont données par :

$$y_i^o = \mathbf{u}^{(i)} \cdot (\mathbf{x}^0 - \mathbf{X}^{(1)}) \quad i = 1, 2, 3,$$

$$Y_i^{(k)} = \mathbf{u}^{(i)} \cdot (\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(1)}) \quad k, i = 1, 2, 3.$$

Le triangle  $\Delta$  est donc transformé en le triangle  $\Delta'$ , de sommets  $\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{Y}^{(2)}, \mathbf{Y}^{(3)}$ , avec  $\Delta'$  dans le plan  $y_3 = 0$ ; l'espace étant décrit par la variable  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T_{\mathcal{B}}$ . La matrice  $\mathbf{A}$  étant orthogonale, on peut écrire :

$$I(x^0) = \int_{\Delta} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^3} ds(\mathbf{x})$$

$$I(x^0) = \int_{\Delta'} \frac{\mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^0)}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}).$$

Nous avons  $\mathbf{y} \in \Delta' \implies \mathbf{y} = (y_1, y_2, 0)^T_{\mathcal{B}}$ , alors

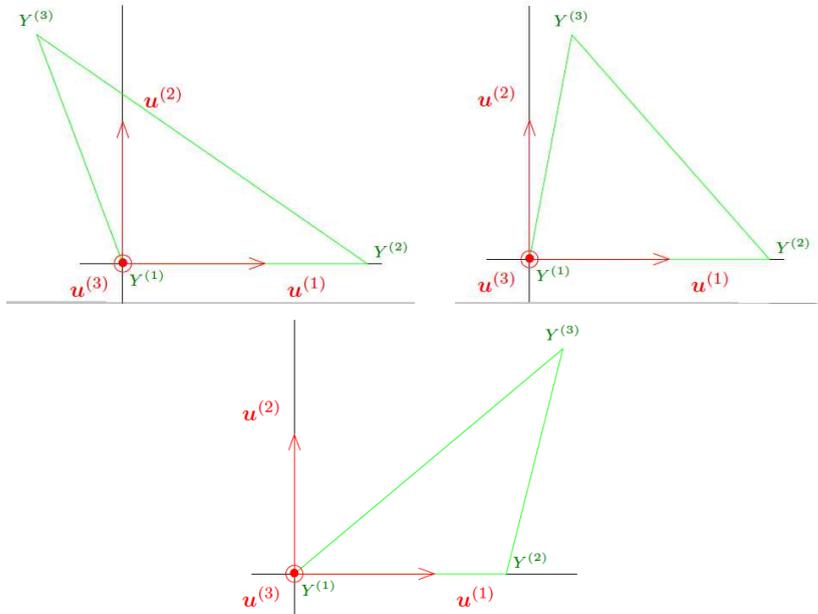
$$\mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^0) = (y_1 - y_1^0)\mathbf{u}^{(1)} + (y_2 - y_2^0)\mathbf{u}^{(2)} - y_3^0\mathbf{u}^{(3)}.$$

Donc  $I(x^0) = \sum_{i=1}^3 I^i(x^0)\mathbf{u}^{(i)}$  avec :

$$\begin{cases} I^1(x^0) = \int_{\Delta'} \frac{y_1 - y_1^0}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}), \\ I^2(x^0) = \int_{\Delta'} \frac{y_2 - y_2^0}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}), \\ I^3(x^0) = -y_3^0 \int_{\Delta'} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}). \end{cases}$$

Notons que  $|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0| = \sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2}$ . Nous allons à présent évaluer les  $I^i(x^0)$ .

### Configurations diverses de $\Delta'$ dans le repère $\mathcal{B}$



Quelque soit la configuration du triangle  $\Delta'$  dans le repère  $\mathcal{B}$ , nous pouvons le caractériser par les deux approches suivantes :

**Première caractérisation**

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, 0)_{\mathcal{B}}^T \in \Delta' \iff \begin{cases} 0 \leq y_2 \leq Y_2^{(3)} \\ f_{13}(y_2) \leq y_1 \leq f_{23}(y_2), \end{cases}$$

où  $f_{13}$  et  $f_{23}$  décrivent respectivement les droites  $(Y^{(1)}Y^{(3)})$  et  $(Y^{(2)}Y^{(3)})$ .  
Nous avons

$$f_{13}(y_2) = a_{13}y_2, \quad \text{avec} \quad a_{13} = \frac{Y_1^{(3)}}{Y_2^{(3)}}$$

et

$$f_{23}(y_2) = a_{23}y_2 + Y_1^{(2)}, \quad \text{avec} \quad a_{23} = \frac{Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)}}{Y_2^{(3)}}.$$

$$\text{Donc } \Delta' : \begin{cases} 0 \leq y_2 \leq Y_2^{(3)} \\ a_{13}y_2 \leq y_1 \leq a_{23}y_2 + Y_1^{(2)}. \end{cases}$$

**Seconde caractérisation**

On pose  $\Delta' = \Delta'_1 \cup \Delta'_2$ , où

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, 0)_{\mathcal{B}}^T \in \Delta'_1 \iff \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq Y_1^{(3)} \\ 0 \leq y_2 \leq f'_{13}(y_1), \end{cases}$$

et

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, 0)_{\mathcal{B}}^T \in \Delta'_2 \iff \begin{cases} Y_1^{(3)} \leq y_1 \leq Y_1^{(2)} \\ 0 \leq y_2 \leq f'_{23}(y_1), \end{cases}$$

où  $f'_{13}$  et  $f'_{23}$  décrivent respectivement les droites  $(Y^{(1)}Y^{(3)})$  et  $(Y^{(2)}Y^{(3)})$ .

Si  $Y_1^{(3)} \neq 0$ , alors

$$f'_{13}(y_1) = \tilde{a}_{13}y_1, \quad \text{avec} \quad \tilde{a}_{13} = \frac{1}{a_{13}} = \frac{Y_2^{(3)}}{Y_1^{(3)}}.$$

Sinon,  $f'_{13}$  décrit la droite  $y_1 = 0$ .

Si  $Y_1^{(3)} \neq Y_1^{(2)}$ , alors

$$f'_{23}(y_1) = \tilde{a}_{23} (y_1 - Y_1^{(2)}), \quad \text{avec} \quad \tilde{a}_{23} = \frac{1}{a_{23}} = \frac{Y_2^{(3)}}{(Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)})}.$$

Sinon,  $f'_{23}$  décrit la droite  $y_1 = Y_1^{(2)}$ . Donc

$$\text{si } Y_1^{(3)} \neq 0, \quad \Delta'_1 : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq Y_1^{(3)} \\ 0 \leq y_2 \leq \tilde{a}_{13}y_1 \end{cases}$$

$$\text{sinon, } \Delta'_1 : \begin{cases} y_1 = 0 \\ 0 \leq y_2 \leq Y_2^{(3)}, \end{cases}$$

et

$$\text{si } Y_1^{(3)} \neq Y_1^{(2)}, \quad \Delta'_2 : \begin{cases} Y_1^{(3)} \leq y_1 \leq Y_1^{(2)} \\ 0 \leq y_2 \leq \tilde{a}_{23} (y_1 - Y_1^{(2)}) \end{cases}$$

$$\text{sinon, } \Delta'_2 : \begin{cases} y_1 = Y_1^{(2)} \\ 0 \leq y_2 \leq Y_2^{(3)}. \end{cases}$$

**Remarque 18.** L'écriture  $0 \leq y_1 \leq Y_1^{(3)}$  (resp.  $Y_1^{(3)} \leq y_1 \leq Y_1^{(2)}$ ) est un abus pour les configurations où  $Y_1^{(3)} < 0$  (resp.  $Y_1^{(2)} < Y_1^{(3)}$ ). Cependant, elle permet de caractériser le domaine d'intégration au sens de  $\int_a^b = -\int_b^a$  ;  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## Evaluation de $I^1(x^0)$

Rappelons que

$$I^1(x^0) = \int_{\Delta'} \frac{y_1 - y_1^0}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}).$$

Nous utilisons la première caractérisation de  $\Delta'$ , pour évaluer l'intégrale.

$$I^1(x^0) = \int_0^{Y_2^{(3)}} \int_{a_{13}y_2}^{a_{23}y_2 + Y_1^{(2)}} \frac{y_1 - y_1^0}{\left\{ (y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2.$$

Posons  $I^1(x^0, y_2) = \int_{a_{13}y_2}^{a_{23}y_2 + Y_1^{(2)}} \frac{y_1 - y_1^0}{\left\{ (y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} dy_1,$

nous avons alors  $I^1(x^0) = \int_0^{Y_2^{(3)}} I^1(x^0, y_2) dy_2$  et

$$\begin{aligned} I^1(x^0, y_2) &= \int_{a_{13}y_2 - y_1^0}^{a_{23}y_2 + Y_1^{(2)} - y_1^0} \frac{y_1}{\left\{ y_1^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} dy_1 \\ &= \left. \frac{1}{\left\{ y_1^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right]_{a_{13}y_2 - y_1^0}^{a_{23}y_2 + Y_1^{(2)} - y_1^0} \\ I^1(x^0, y_2) &= \frac{\alpha_{11}}{\left\{ y_2^2 - 2\beta_{11}y_2 + \gamma_{11}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha_{12}}{\left\{ y_2^2 - 2\beta_{12}y_2 + \gamma_{12}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} = (a_{13}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \\ \beta_{11} = (a_{13}y_1^0 + y_2^0) \alpha_{11} \\ \gamma_{11} = |\mathbf{y}^0| \alpha_{11} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{12} = (a_{23}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \\ \beta_{12} = [a_{23} (y_1^0 - Y_1^{(2)}) + y_2^0] \alpha_{12} \\ \gamma_{12} = |\mathbf{Y}^{(2)} - \mathbf{y}^0| \alpha_{12}. \end{array} \right.$$

Donc

$$\begin{aligned} I^1(x^0) &= \int_0^{Y_2^{(3)}} I^1(x^0, y_2) dy_2 \\ &= \alpha_{11} \int_0^{Y_2^{(3)}} \frac{1}{\{y_2^2 - 2\beta_{11}y_2 + \gamma_{11}^2\}^{\frac{1}{2}}} dy_2 - \alpha_{12} \int_0^{Y_2^{(3)}} \frac{1}{\{y_2^2 - 2\beta_{12}y_2 + \gamma_{12}^2\}^{\frac{1}{2}}} dy_2 \\ I^1(x^0) &= \alpha_{11} \text{Log} \left\{ \frac{Y_2^{(3)} - \beta_{11} + \sqrt{(Y_2^{(3)})^2 - 2\beta_{11}Y_2^{(3)} + \gamma_{11}^2}}{\gamma_{11} - \beta_{11}} \right\} \\ &\quad - \alpha_{12} \text{Log} \left\{ \frac{Y_2^{(3)} - \beta_{12} + \sqrt{(Y_2^{(3)})^2 - 2\beta_{12}Y_2^{(3)} + \gamma_{12}^2}}{\gamma_{12} - \beta_{12}} \right\}. \end{aligned}$$

■

### Evaluation de $I^2(x^0)$

On rappelle que

$$I^2(x^0) = \int_{\Delta'} \frac{y_2 - y_2^0}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}).$$

Nous utilisons la seconde caractérisation de  $\Delta'$ , pour évaluer l'intégrale.

$$I^2(x^0) = I_1^2(x^0) + I_2^2(x^0),$$

$$\text{avec } I_k^2(x^0) = \int_{\Delta'_k} \frac{y_2 - y_2^0}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}), \quad k = 1, 2.$$

### Evaluation de $I_1^2(x^0)$

Si  $Y_1^{(3)} = 0$ , alors  $I_1^2(x^0) = 0$  d'après la caractérisation précédente de  $\Delta'_1$ . L'évaluation de  $I_1^2(x^0)$  peut donc être faite ici, en supposant que  $Y_1^{(3)} \neq 0$ . Nous avons

$$I_1^2(x^0) = \int_0^{Y_1^{(3)}} \int_0^{\tilde{a}_{13}y_1} \frac{y_2 - y_2^0}{\{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2\}^{\frac{3}{2}}} dy_2 dy_1.$$

Posons  $I_1^2(x^0, y_1) = \int_0^{\tilde{a}_{13}y_1} \frac{y_2 - y_2^0}{\left\{ (y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} dy_2,$

alors  $I_1^2(x^0) = \int_0^{Y_1^{(3)}} I_1^2(x^0, y_1) dy_1$  et

$$I_1^2(x^0, y_1) = \int_{-y_2^0}^{\tilde{a}_{13}y_1 - y_2^0} \frac{y_2}{\left\{ (y_1 - y_1^0)^2 + y_2^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} dy_2$$

$$= \left. - \frac{1}{\left\{ y_2^2 + (y_1 - y_1^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right]_{-y_2^0}^{\tilde{a}_{13}y_1 - y_2^0}$$

$$I_1^2(x^0, y_1) = \frac{1}{\left\{ y_1^2 - 2y_1^0 y_1 + |\mathbf{y}^0|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha_{21}}{\left\{ y_1^2 - 2\beta_{21}y_1 + \gamma_{21}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}},$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_{21} = (\tilde{a}_{13}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = |a_{13}| \alpha_{11} \\ \beta_{21} = (\tilde{a}_{13}y_2^0 + y_1^0) \alpha_{21} = a_{13} \beta_{11} \\ \gamma_{21} = |\mathbf{y}^0| \alpha_{21} = |a_{13}| \gamma_{11}. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1^2(x^0) &= \int_0^{Y_1^{(3)}} I_1^2(x^0, y_1) dy_1 \\ &= \int_0^{Y_1^{(3)}} \frac{1}{\left\{ y_1^2 - 2y_1^0 y_1 + |\mathbf{y}^0|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} dy_1 - \alpha_{21} \int_0^{Y_1^{(3)}} \frac{1}{\left\{ y_1^2 - 2\beta_{21}y_1 + \gamma_{21}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} dy_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1^2(x^0) &= \text{Log} \left\{ \frac{Y_1^{(3)} - y_1^0 + \sqrt{\left( Y_1^{(3)} \right)^2 - 2y_1^0 Y_1^{(3)} + |\mathbf{y}^0|^2}}{|\mathbf{y}^0| - y_1^0} \right\} \\ &\quad - \alpha_{21} \text{Log} \left\{ \frac{Y_1^{(3)} - \beta_{21} + \sqrt{\left( Y_1^{(3)} \right)^2 - 2\beta_{21} Y_1^{(3)} + \gamma_{21}^2}}{\gamma_{21} - \beta_{21}} \right\}. \end{aligned}$$

□

### Evaluation de $I_2^2(x^0)$

Si  $Y_1^{(3)} = Y_1^{(2)}$ , alors  $I_2^2(x^0) = 0$  d'après la caractérisation précédente de  $\Delta'_2$ . L'évaluation de  $I_2^2(x^0)$  peut donc être faite ici, en supposant que  $Y_1^{(3)} \neq Y_1^{(2)}$ . Nous avons

$$I_2^2(x^0) = \int_{Y_1^{(3)}}^{Y_1^{(2)}} \int_0^{\tilde{a}_{23}(y_1 - Y_1^{(2)})} \frac{y_2 - y_2^0}{\left\{ (y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} dy_2 dy_1.$$

Posons  $I_2^2(x^0, y_1) = \int_0^{\tilde{a}_{23}(y_1 - Y_1^{(2)})} \frac{y_2 - y_2^0}{\left\{ (y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} dy_2,$

alors  $I_2^2(x^0) = \int_{Y_1^{(3)}}^{Y_1^{(2)}} I_2^2(x^0, y_1) dy_1$  et

$$I_2^2(x^0, y_1) = \int_{-y_2^0}^{\tilde{a}_{23}(y_1 - Y_1^{(2)}) - y_2^0} \frac{y_2}{\left\{ (y_1 - y_1^0)^2 + y_2^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} dy_2$$

$$= \left. -\frac{1}{\left\{ y_2^2 + (y_1 - y_1^0)^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right]_{-y_2^0}^{\tilde{a}_{23}(y_1 - Y_1^{(2)}) - y_2^0}$$

$$I_2^2(x^0, y_1) = \frac{1}{\left\{ (y_1 - Y_1^{(2)})^2 - 2(y_1^0 - Y_1^{(2)})(y_1 - Y_1^{(2)}) + |\mathbf{Y}^{(2)} - \mathbf{y}^0|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha_{22}}{\left\{ (y_1 - Y_1^{(2)})^2 - 2\beta_{22}(y_1 - Y_1^{(2)}) + \gamma_{22}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}},$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_{22} = (\tilde{a}_{23}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = |a_{23}| \alpha_{12} \\ \beta_{22} = (\tilde{a}_{23} y_2^0 + y_1^0 - Y_1^{(2)}) \alpha_{22}^2 = a_{23} \beta_{12} \\ \gamma_{22} = |\mathbf{Y}^{(2)} - \mathbf{y}^0| \alpha_{22} = |a_{23}| \gamma_{12}. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_2^2(x^0) &= \int_{Y_1^{(3)}}^{Y_1^{(2)}} I_2^2(x^0, y_1) dy_1 \\ &= \int_{Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)}}^0 \frac{1}{\left\{ y_1^2 - 2(y_1^0 - Y_1^{(2)})y_1 + |\mathbf{Y}^{(2)} - \mathbf{y}^0|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} dy_1 \\ &\quad - \alpha_{22} \int_{Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)}}^0 \frac{1}{\left\{ y_1^2 - 2\beta_{22}y_1 + \gamma_{22}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} dy_1 \\ I_2^2(x^0) &= -\text{Log} \left\{ \frac{Y_1^{(3)} - y_1^0 + \sqrt{(Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)})^2 - 2(y_1^0 - Y_1^{(2)})(Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)}) + |\mathbf{Y}^{(2)} - \mathbf{y}^0|^2}}{|\mathbf{Y}^{(2)} - \mathbf{y}^0| - (y_1^0 - Y_1^{(2)})} \right\} \\ &\quad + \alpha_{22} \text{Log} \left\{ \frac{Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)} - \beta_{22} + \sqrt{(Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)})^2 - 2\beta_{22}(Y_1^{(3)} - Y_1^{(2)}) + \gamma_{22}^2}}{\gamma_{22} - \beta_{22}} \right\}. \end{aligned}$$

Avec les évaluations précédentes de  $I_1^2(x^0)$  et  $I_2^2(x^0)$ , nous obtenons celle de

$$I^2(x^0) = I_1^2(x^0) + I_2^2(x^0).$$

■

## Evaluation de $I^3(x^0)$

On rappelle que

$$I^3(x^0) = -y_3^0 \int_{\Delta'} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}).$$

Si  $y_3^0 = 0$ , alors  $I^3(x^0) = 0$ . Nous évaluerons donc  $I^3(x^0)$  dans la suite, sous l'hypothèse  $y_3^0 \neq 0$ . En posant  $J^3(x^0) = \int_{\Delta'} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y})$ , nous avons  $I^3(x^0) = -y_3^0 J^3(x^0)$ . Evaluons à présent l'intégrale  $J^3(x^0)$ . Nous utiliserons pour cela, la transformation en coordonnées polaires. Rappelons que  $|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0| = \sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 + (y_3^0)^2}$  et considérons le point  $\mathbf{Y}^{(0)} = (y_1^0, y_2^0, 0)_B^T$ , projeté orthogonal de  $\mathbf{y}^0$  sur le plan  $y_3 = 0$ . Nous écrivons :

$$J^3(x^0) = \left( \varepsilon_{12} \int_{\Delta_{12}} + \varepsilon_{23} \int_{\Delta_{23}} + \varepsilon_{31} \int_{\Delta_{31}} \right) \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}),$$

où  $\Delta_{ij}$  est le triangle de sommets  $\mathbf{Y}^{(0)}, \mathbf{Y}^{(i)}, \mathbf{Y}^{(j)}$  et

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } [(\mathbf{Y}^{(i)} - \mathbf{Y}^{(0)}) \times (\mathbf{Y}^{(j)} - \mathbf{Y}^{(0)})] \cdot \mathbf{u}^{(3)} > 0 \\ -1 & \text{si } [(\mathbf{Y}^{(i)} - \mathbf{Y}^{(0)}) \times (\mathbf{Y}^{(j)} - \mathbf{Y}^{(0)})] \cdot \mathbf{u}^{(3)} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

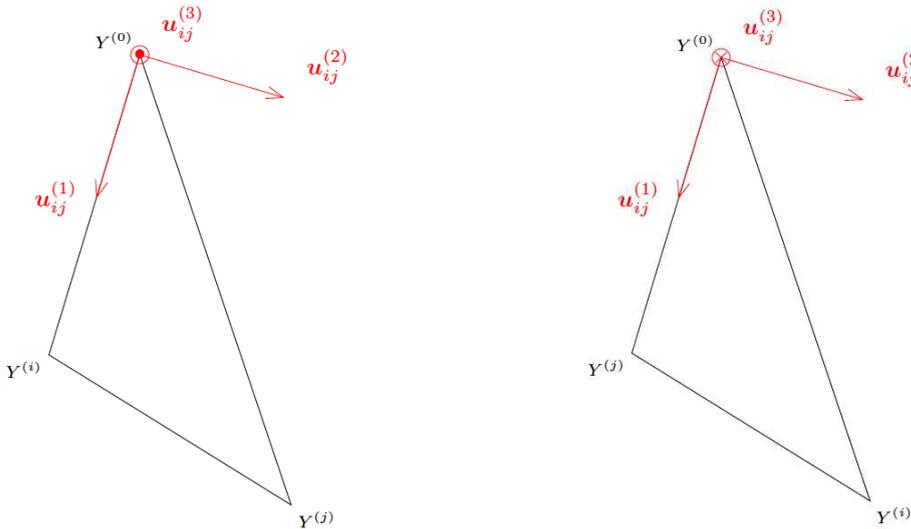
avec  $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ .

On pose

$$J_{ij}^3(x^0) = \int_{\Delta_{ij}} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}).$$

Si  $\varepsilon_{ij} = 0$ , alors  $J_{ij}^3(x^0) = 0$ . Nous évaluerons donc  $J_{ij}^3(x^0)$ , en supposant  $\varepsilon_{ij} \neq 0$ . Définissons la base  $(\mathbf{u}_{ij}^{(1)}, \mathbf{u}_{ij}^{(2)}, \mathbf{u}_{ij}^{(3)})$  par

$$\mathbf{u}_{ij}^{(1)} = \frac{\mathbf{Y}^{(i)} - \mathbf{Y}^{(0)}}{|\mathbf{Y}^{(i)} - \mathbf{Y}^{(0)}|}, \quad \mathbf{u}_{ij}^{(3)} = \varepsilon_{ij} \mathbf{u}^{(3)}, \quad \mathbf{u}_{ij}^{(2)} = \mathbf{u}_{ij}^{(3)} \times \mathbf{u}_{ij}^{(1)}.$$



On définit :

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \longmapsto \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$$

$$\text{avec } \mathbf{t} = \mathbf{B}_{ij}^T (\mathbf{y} - \mathbf{Y}^{(0)}) \quad \left( \text{ou encore } \mathbf{y} = \mathbf{B}_{ij} \mathbf{t} + \mathbf{Y}^{(0)} \right),$$

où  $\mathbf{B}_{ij} = (\mathbf{u}_{ij}^{(1)}, \mathbf{u}_{ij}^{(2)}, \mathbf{u}_{ij}^{(3)})$  est la matrice de changement de la base  $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)})$  à la base  $(\mathbf{u}_{ij}^{(1)}, \mathbf{u}_{ij}^{(2)}, \mathbf{u}_{ij}^{(3)})$ . Posons  $\mathbf{t}^0 = \mathbf{B}_{ij}^T (\mathbf{y}^0 - \mathbf{Y}^{(0)})$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}^{(k)} = \mathbf{B}_{ij}^T (\mathbf{Y}^{(k)} - \mathbf{Y}^{(0)})$ ,  $k = 0, i, j$ . Les coordonnées de  $\mathbf{t}^0$  et des  $\tilde{\mathbf{Y}}^{(k)}$  dans le repère affine  $\mathcal{B}_{ij} = (\tilde{\mathbf{Y}}^{(0)}, \mathbf{u}_{ij}^{(1)}, \mathbf{u}_{ij}^{(2)}, \mathbf{u}_{ij}^{(3)})$ , notées  $\mathbf{t}^o = (t_1^o, t_2^o, t_3^o)_{\mathcal{B}_{ij}}^T$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}^{(k)} = (\tilde{Y}_1^{(k)}, \tilde{Y}_2^{(k)}, \tilde{Y}_3^{(k)})_{\mathcal{B}_{ij}}^T$ , sont alors données par :

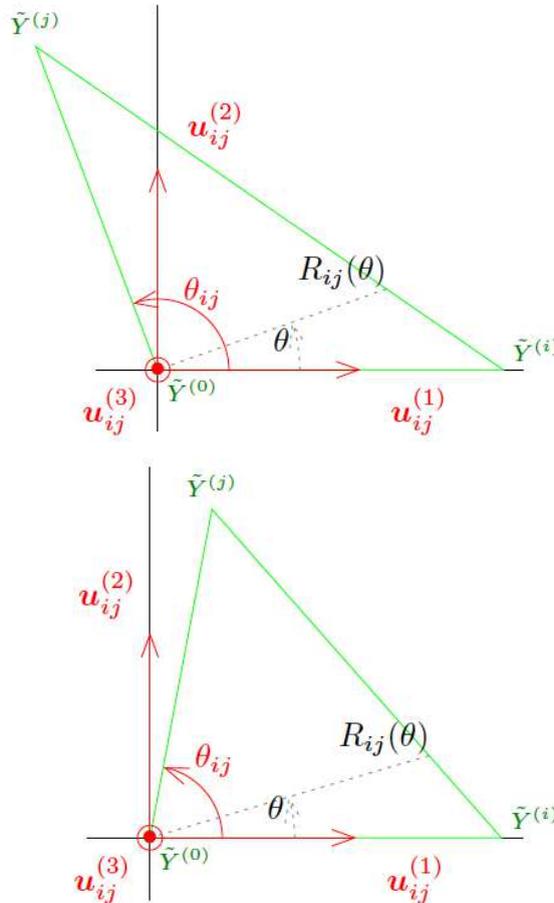
$$t_q^o = \mathbf{u}_{ij}^{(q)} \cdot (\mathbf{y}^0 - \mathbf{Y}^{(0)}) \quad q = 1, 2, 3,$$

$$\tilde{Y}_q^{(k)} = \mathbf{u}_{ij}^{(q)} \cdot (\mathbf{Y}^{(k)} - \mathbf{Y}^{(0)}) \quad k = 0, i, j; \quad q = 1, 2, 3.$$

Le triangle  $\Delta_{ij}$  est donc transformé en le triangle  $\tilde{\Delta}_{ij}$ , de sommets  $\tilde{\mathbf{Y}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{Y}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{Y}}^{(j)}$ , d'orientation fixée (dans le sens direct – sens contraire à celui des aiguilles d'une montre). Le triangle  $\tilde{\Delta}_{ij}$  est dans le plan  $t_3 = 0$ ; l'espace étant maintenant décrit par la variable  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)_{\mathcal{B}_{ij}}^T$ . La matrice  $\mathbf{B}_{ij}$  étant orthogonale, nous avons :

$$\begin{aligned} J_{ij}^3(x^0) &= \int_{\Delta_{ij}} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|^3} ds(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\tilde{\Delta}_{ij}} \frac{1}{|\mathbf{B}_{ij}(\mathbf{t} - \mathbf{t}^0)|^3} ds(\mathbf{t}) \\ J_{ij}^3(x^0) &= \int_{\tilde{\Delta}_{ij}} \frac{1}{|\mathbf{t} - \mathbf{t}^0|^3} ds(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Notons que  $|\mathbf{t} - \mathbf{t}^0| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + (y_3^0)^2}$  et passons à présent aux coordonnées polaires.



Nous caractérisons  $\tilde{\Delta}_{ij}$  par :

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, 0)^T \in \tilde{\Delta}_{ij} \iff \begin{cases} t_1 = \rho \cos \theta \\ t_2 = \rho \sin \theta \\ (\theta, \rho) \in [0, \theta_{ij}] \times [0, R_{ij}(\theta)], \end{cases}$$

avec

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\tilde{Y}_2^{(j)}}{\tilde{Y}_1^{(j)}}\right) & \text{si } \tilde{\mathbf{Y}}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}^{(i)} > 0 \quad (\text{i.e } \tilde{Y}_1^{(j)} > 0) \\ \pi + \arctan\left(\frac{\tilde{Y}_2^{(j)}}{\tilde{Y}_1^{(j)}}\right) & \text{si } \tilde{\mathbf{Y}}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}^{(i)} < 0 \quad (\text{i.e } \tilde{Y}_1^{(j)} < 0) \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \tilde{\mathbf{Y}}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}^{(i)} = 0 \quad (\text{i.e } \tilde{Y}_1^{(j)} = 0), \end{cases} \quad (3.2)$$

et pour  $\theta \in [0, \theta_{ij}]$ ,

$$R_{ij}(\theta) = \frac{\tilde{Y}_1^{(i)}}{\cos \theta + b_{ij} \sin \theta}, \quad (3.3)$$

où  $b_{ij} = \frac{\tilde{Y}_1^{(i)} - \tilde{Y}_1^{(j)}}{\tilde{Y}_2^{(j)}}$ . Nous avons alors  $|\mathbf{t} - \mathbf{t}^0| = \sqrt{\rho^2 + (y_3^0)^2}$  et

$$J_{ij}^3(x^0) = \int_0^{\theta_{ij}} \int_0^{R_{ij}(\theta)} \frac{\rho}{\{\rho^2 + (y_3^0)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\rho d\theta.$$

Posons ensuite

$$J_{ij}^3(x^0, \theta) = \int_0^{R_{ij}(\theta)} \frac{\rho}{\{\rho^2 + (y_3^0)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\rho,$$

nous obtenons :

$$J_{ij}^3(x^0, \theta) = \left[ -\frac{1}{\{\rho^2 + (y_3^0)^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{R_{ij}(\theta)}$$

$$J_{ij}^3(x^0, \theta) = \frac{1}{|y_3^0|} - \frac{1}{\{(R_{ij}(\theta))^2 + (y_3^0)^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Alors

$$J_{ij}^3(x^0) = \int_0^{\theta_{ij}} J_{ij}^3(x^0, \theta) d\theta$$

$$= \frac{\theta_{ij}}{|y_3^0|} - \int_0^{\theta_{ij}} \frac{1}{\{(R_{ij}(\theta))^2 + (y_3^0)^2\}^{\frac{1}{2}}} d\theta$$

$$J_{ij}^3(x^0) = \frac{\theta_{ij}}{|y_3^0|} - K_{ij}^3(x^0),$$

avec  $K_{ij}^3(x^0) = \int_0^{\theta_{ij}} \frac{1}{\{(R_{ij}(\theta))^2 + (y_3^0)^2\}^{\frac{1}{2}}} d\theta.$

Posons à présent :

$$b_{ij} \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{1 + b_{ij}^2} \left( \frac{b_{ij}}{\sqrt{1 + b_{ij}^2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{1 + b_{ij}^2}} \cos \theta \right)$$

$$b_{ij} \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{1 + b_{ij}^2} \cos(\theta - \phi_{ij}),$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \phi_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sqrt{1 + b_{ij}^2}} \\ \cos \phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + b_{ij}^2}} \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \phi_{ij} = \arctan(b_{ij}) \quad (\text{car } \phi_{ij} \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [).$$

L'expression (3.3) devient alors

$$R_{ij}(\theta) = \frac{\tilde{Y}_1^{(i)}}{\sqrt{1 + b_{ij}^2 \cos(\theta - \phi_{ij})}},$$

et donc

$$\left\{ (R_{ij}(\theta))^2 + (y_3^0)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos(\theta - \phi_{ij})}{|y_3^0| (\cos^2(\theta - \phi_{ij}) + c_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{où } c_{ij} = \frac{\tilde{Y}_1^{(i)}}{y_3^0 \sqrt{1 + b_{ij}^2}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} K_{ij}^3(x^0) &= \frac{1}{|y_3^0|} \int_0^{\theta_{ij}} \frac{\cos(\theta - \phi_{ij})}{(\cos^2(\theta - \phi_{ij}) + c_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}} d\theta \\ &= \frac{1}{|y_3^0|} \arctan \left( \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + c_{ij}^2}} \right) \Big|_{-\phi_{ij}}^{\theta_{ij} - \phi_{ij}} \\ K_{ij}^3(x^0) &= \frac{1}{|y_3^0|} \left\{ \arctan \left( \frac{\sin(\theta_{ij} - \phi_{ij})}{\sqrt{\cos^2(\theta_{ij} - \phi_{ij}) + c_{ij}^2}} \right) + \arctan \left( \frac{\sin \phi_{ij}}{\sqrt{\cos^2 \phi_{ij} + c_{ij}^2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, de l'expression de  $c_{ij}$  et du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \phi_{ij}}{\sqrt{\cos^2 \phi_{ij} + c_{ij}^2}} &= \frac{b_{ij} (1 + b_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left\{ (1 + b_{ij}^2)^{-1} + c_{ij}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{b_{ij}}{\sqrt{1 + c_{ij}^2 (1 + b_{ij}^2)}} \\ \frac{\sin \phi_{ij}}{\sqrt{\cos^2 \phi_{ij} + c_{ij}^2}} &= \frac{b_{ij} |y_3^0|}{\sqrt{(\tilde{Y}_1^{(i)})^2 + (y_3^0)^2}}, \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} K_{ij}^3(x^0) &= \frac{1}{|y_3^0|} \arctan \left( \frac{|y_3^0| \sin(\theta_{ij} - \phi_{ij})}{\sqrt{(y_3^0)^2 \cos^2(\theta_{ij} - \phi_{ij}) + d_{ij}^2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{|y_3^0|} \arctan \left( \frac{b_{ij} |y_3^0|}{\sqrt{(\tilde{Y}_1^{(i)})^2 + (y_3^0)^2}} \right), \end{aligned}$$

où  $d_{ij} = c_{ij} y_3^0 = \frac{\tilde{Y}_1^{(i)}}{\sqrt{1 + b_{ij}^2}}$ . Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} J_{ij}^3(x^0) &= \frac{\theta_{ij}}{|y_3^0|} - K_{ij}^3(x^0) \\ &= \frac{1}{|y_3^0|} (\theta_{ij} - |y_3^0| K_{ij}^3(x^0)) \\ J_{ij}^3(x^0) &= \frac{1}{|y_3^0|} (\theta_{ij} - L_{ij}^3(x^0)), \end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned} L_{ij}^3(x^0) = |y_3^0| K_{ij}^3(x^0) &= \arctan \left( \frac{|y_3^0| \sin(\theta_{ij} - \phi_{ij})}{\sqrt{(y_3^0)^2 \cos^2(\theta_{ij} - \phi_{ij}) + d_{ij}^2}} \right) \\ &+ \arctan \left( \frac{b_{ij} |y_3^0|}{\sqrt{(\tilde{Y}_1^{(i)})^2 + (y_3^0)^2}} \right). \end{aligned}$$

Nous complétons l'évaluation de l'intégrale  $I^3(x^0)$ , en rappelant que  $I^3(x^0) = -y_3^0 J^3(x^0)$  et que

$$J^3(x^0) = \varepsilon_{12} J_{12}^3(x^0) + \varepsilon_{23} J_{23}^3(x^0) + \varepsilon_{31} J_{31}^3(x^0).$$

Donc

$$I^3(x^0) = - (\varepsilon_{12} y_3^0 J_{12}^3(x^0) + \varepsilon_{23} y_3^0 J_{23}^3(x^0) + \varepsilon_{31} y_3^0 J_{31}^3(x^0))$$

avec

$$y_3^0 J_{ij}^3(x^0) = \text{sign}(y_3^0) (\theta_{ij} - L_{ij}^3(x^0)), \quad (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} I^3(x^0) &= \text{sign}(-y_3^0) \{ \varepsilon_{12} (\theta_{12} - L_{12}^3(x^0)) + \varepsilon_{23} (\theta_{23} - L_{23}^3(x^0)) \\ &+ \varepsilon_{31} (\theta_{31} - L_{31}^3(x^0)) \}. \end{aligned}$$

■

Les évaluations des intégrales  $I^1(x^0)$ ,  $I^2(x^0)$  et  $I^3(x^0)$ , le long de la sous-section, conduisent ainsi au résultat du calcul de l'intégrale quasi-singulière qui vaut donc

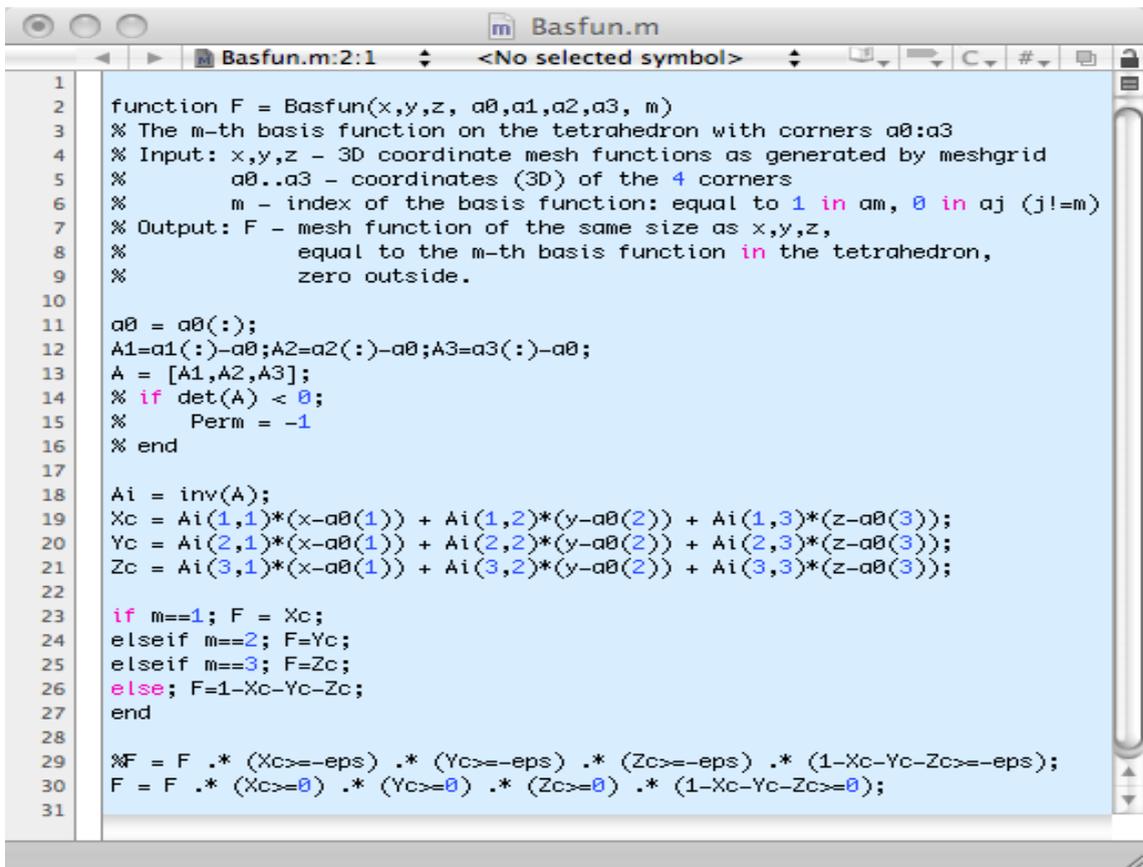
$$I(x^0) = \sum_{i=1}^3 I^i(x^0) \mathbf{u}^{(i)}.$$

■

# Annexe C :

## Codes matlab de la transformation de Fourier discrète pour le calcul des matrices élémentaires

### 1) Evaluation d'une fonction de base



```
1 function F = Basfun(x,y,z, a0,a1,a2,a3, m)
2 % The m-th basis function on the tetrahedron with corners a0:a3
3 % Input: x,y,z - 3D coordinate mesh functions as generated by meshgrid
4 % a0..a3 - coordinates (3D) of the 4 corners
5 % m - index of the basis function: equal to 1 in am, 0 in aj (j!=m)
6 % Output: F - mesh function of the same size as x,y,z,
7 % equal to the m-th basis function in the tetrahedron,
8 % zero outside.
9
10
11 a0 = a0(:);
12 A1=a1(:)-a0;A2=a2(:)-a0;A3=a3(:)-a0;
13 A = [A1,A2,A3];
14 % if det(A) < 0;
15 % Perm = -1
16 % end
17
18 Ai = inv(A);
19 Xc = Ai(1,1)*(x-a0(1)) + Ai(1,2)*(y-a0(2)) + Ai(1,3)*(z-a0(3));
20 Yc = Ai(2,1)*(x-a0(1)) + Ai(2,2)*(y-a0(2)) + Ai(2,3)*(z-a0(3));
21 Zc = Ai(3,1)*(x-a0(1)) + Ai(3,2)*(y-a0(2)) + Ai(3,3)*(z-a0(3));
22
23 if m==1; F = Xc;
24 elseif m==2; F=Yc;
25 elseif m==3; F=Zc;
26 else; F=1-Xc-Yc-Zc;
27 end
28
29 %F = F .* (Xc>=-eps) .* (Yc>=-eps) .* (Zc>=-eps) .* (1-Xc-Yc-Zc>=-eps);
30 F = F .* (Xc>=0) .* (Yc>=0) .* (Zc>=0) .* (1-Xc-Yc-Zc>=0);
31
```

## 2) Evaluation d'une matrice élémentaire

```

1
2 function M=AMat(x0,x1,Nx,y0,y1,Ny,z0,z1,Nz,a0,a1,a2,a3,m,b0,b1,b2,b3,n)
3 % Elements de matrice de l'operateur integral volumique fortement singulier
4 % calcules par multiplicateur de Fourier.
5 % On choisit 2 fonctions de base sur 2 tetraedres
6 % et un cube contenant les 2 tetraedres
7 %
8 % Input: x0,x1,Nx - min, max et nombre de points en x
9 %        y0,y1,Ny - min, max et nombre de points en y
10 %       z0,z1,Nz - min, max et nombre de points en z
11 %       a0..a3 - coordinate vectors (3D) of the 4 corners of tetrahedron K1
12 %       m - index of the basis function B1 on tetrahedron 1
13 %       b0..b3 - coordinates (3D) of the 4 corners of tetrahedron K2
14 %       n - index of the basis function B2 on tetrahedron 2
15 % Output: M - matrice 3x3 avec les elements de matrice
16 %          \int_{K1}\int_{K2} \partial_j\partial_k G(x-y) B2(x) B1(y) dx dy
17 %          ou G(x) est la solution elementaire du laplacien 3D
18 %
19 % Ligne de commande typique:
20 % a=0;b=1;N=128;
21 % M=AMat(a,b,N,a,b,N,a,b,N,[0,0,0],[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],0,...
22 %       [0,0,0],[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],0); real(M)
23
24 % Coordonnees dans l'espace des x
25 xs = linspace(x0,x1,Nx);
26 ys = linspace(y0,y1,Ny);
27 zs = linspace(z0,z1,Nz);
28
29 [x,y,z] = ndgrid(xs,ys,zs);
30 % Attn: utiliser ndgrid et pas meshgrid ! meshgrid melange x et y !
31
32 % Definition of the two basis functions
33
34 B1=Basfun(x,y,z,a0,a1,a2,a3,m);
35 B2=Basfun(x,y,z,b0,b1,b2,b3,n);
36 clear x y z;
37
38 % Normalisation pour Parseval
39 Volx = (x1-x0)*(y1-y0)*(z1-z0);
40 Volxi= Nx*Ny*Nz;
41 Normalize = sqrt(Volx)/Volxi;
42
43 % L2-L2 normalisation: norm(Y) = ||X||_{L2}
44 Y1 = Normalize*fftn(B1);
45 Y2 = Normalize*fftn(B2);
46 clear B1 B2;
47
48

```

```

47
48 % Coordonnees dans l'espace des frequences, centrees a zero
49 Xs = linspace(-1/2,1/2,Nx)*Nx/(x1-x0);
50 Ys = linspace(-1/2,1/2,Ny)*Ny/(y1-y0);
51 Zs = linspace(-1/2,1/2,Nz)*Nz/(z1-z0);
52
53 [X,Y,Z] = ndgrid(Xs,Ys,Zs);
54 F2 = X.*X + Y.*Y + Z.*Z;
55 F2(F2==0)=eps;
56
57 % Pour rearranger les frequences comme dans fft, allant de 0 a N-1
58 ShuffleX = [floor(Nx/2)+1:Nx,1:floor(Nx/2)];
59 ShuffleY = [floor(Ny/2)+1:Ny,1:floor(Ny/2)];
60 ShuffleZ = [floor(Nz/2)+1:Nz,1:floor(Nz/2)];
61
62 M=zeros(3,3);
63
64 Mul = X.*X./F2;
65 Mul = Mul(ShuffleX,ShuffleY,ShuffleZ);
66 M(1,1) = dot(Y1(:),Mul(:).*Y2(:));
67
68 Mul = Y.*Y./F2;
69 Mul = Mul(ShuffleX,ShuffleY,ShuffleZ);
70 M(2,2) = dot(Y1(:),Mul(:).*Y2(:));
71
72 Mul = Z.*Z./F2;
73 Mul = Mul(ShuffleX,ShuffleY,ShuffleZ);
74 M(3,3) = dot(Y1(:),Mul(:).*Y2(:));
75
76 Mul = X.*Y./F2;
77 Mul = Mul(ShuffleX,ShuffleY,ShuffleZ);
78 M(1,2) = dot(Y1(:),Mul(:).*Y2(:));
79 M(2,1) = M(1,2);
80
81 Mul = X.*Z./F2;
82 Mul = Mul(ShuffleX,ShuffleY,ShuffleZ);
83 M(1,3) = dot(Y1(:),Mul(:).*Y2(:));
84 M(3,1) = M(1,3);
85
86 Mul = Y.*Z./F2;
87 Mul = Mul(ShuffleX,ShuffleY,ShuffleZ);
88 M(2,3) = dot(Y1(:),Mul(:).*Y2(:));
89 M(3,2) = M(2,3);
90

```



# Bibliographie

- [1] M. H. ALIABADI, W. S. HALL, and T. G. PHEMISTER. Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 21 :2221–2236, 1985.
- [2] M. M. BOTHA. Solving the volume integral equations of electromagnetic scattering. *J. Comput. Phys.*, pages 141–158, March 2006.
- [3] N. V. BUDKO and A. B. SAMOKHIN. On the eigenvalues of the volume integral operator of electromagnetic scattering. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(2) :682–700, May 26 2006.
- [4] M. CERROLAZA and E. ALARCÓN. A bi-cubic transformation for the numerical evaluation of the Cauchy principal value integrals in boundary methods. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 28(5) :987–999, 1989.
- [5] B. CHANTRAINE-BARÈS. *Synthèse et optimisation d’antennes lentilles substrats à diagramme de rayonnement formé en ondes millimétriques*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, Novembre 2004.
- [6] C. CHENG. A fast algorithm based on volume integral equation for analysis of arbitrarily shaped dielectric radomes. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 51 :606–612, March 2003.
- [7] D. COLTON and R. KRESS. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag, 1998.
- [8] M. COSTABEL, E. DARRIGRAND, and E. H. KONÉ. Volume and surface integral equations for electromagnetic scattering by a dielectric body. *J. Comput. Appl. Math.*, 234 :1817–1825, 2010.
- [9] M. COSTABEL and M. DAUGE. Un résultat de densité pour les équations de Maxwell régularisées dans un domaine lipschitzien. *Problèmes mathématiques de la mécanique/Mathematical problems in mechanics, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327*, Ser I :849–854, 1998.
- [10] M. CROUZEIX and P. A. RAVIART. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *I. Rev.Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Anal. Numér.*, 7(R-3) :33–75, 1973.
- [11] P. M. CUTZACH and C. HAZARD. Existence, uniqueness and analyticity properties for electromagnetic scattering in a two-layered medium. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 21 :433–461, 1998.
- [12] E. DARRIGRAND. *Couplage méthodes multipôles rapides et discrétisation microlocale pour les équations intégrales de l’électromagnétisme*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Septembre 2002.
- [13] E. DARVE. *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, Juin 1999.
- [14] M. DOBLARÉ and L. GRACIA. On non-linear transformations for the integration of weakly-singular and Cauchy principal value integrals. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 40 :3325–3358, 1997.
- [15] M. G. DUFFY. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM J. Num. Anal.*, 19 :1260–1262, 1982.
- [16] S. ERICHSEN and S. A. SAUTER. Efficient automatic quadrature in 3-D Galerkin BEM. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 157 :215–224, 1998.
- [17] I. M. GEL’FAND and G. E. SHILOV. *Generalized Functions*. Academic Press, New York-London, 1964.

- 
- [18] V. GIRAULT and P. A. RAVIART. *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Springer Series in Computat. Math. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [19] A. D. GREENWOOD and J. M. JIN. A field picture of wave propagation in inhomogeneous dielectric lenses. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 41(5), October 1999.
- [20] M. GUIGGIANI and P. CASALINI. Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 24 :1711–1720, 1987.
- [21] W. HACKBUSCH and S. A. SAUTER. On the efficient use of the Galerkin-method to solve Fredholm integral equations. *Appl. Math.*, 38(4-5) :301–322, 1993.
- [22] W. HACKBUSCH and S. A. SAUTER. On numerical cubatures of nearly singular surface integrals arising in BEM collocation. *Computing*, 52(2) :139–159, 1994.
- [23] W. S. HALL. Integration methods for singular boundary element integrands. *Boundary Element X (Southampton, 1988) - Comput. Mech.*, 1 :219–236, 1988.
- [24] K. HAYAMI and C. A. BREBBIA. A new coordinate transformation method for singular and nearly singular integrals over general curved boundary. *Boundary Element IX (Stuttgart, 1987) - Comput. Mech.*, 1 :375–399, 1987.
- [25] K. HAYAMI and C. A. BREBBIA. Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3-D boundary element method. *Boundary Element X (Southampton, 1988) - Comput. Mech.*, 1 :237–264, 1988.
- [26] S. A. JENKINS and J. R. BOWLER. Numerical evaluation of singular matrix elements in three dimensions. *IEEE Trans. Magn.*, 27(6), November 1991.
- [27] L. JUN, G. BEER, and J. L. MEEK. Efficient evaluation of integrals of order  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{1}{r^2}$ ,  $\frac{1}{r^3}$  using Gauss quadrature. *Engrg. Anal.*, 2 :118–123, 1985.
- [28] M. A. KHAYAT and D. R. WILTON. Numerical evaluation of singular and near-singular potential integrals. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 53(10), October 2005.
- [29] A. KIRSCH. An integral equation approach and the interior transmission problem for Maxwell's equations. *Inv. Probl. Imag.*, 1(1) :159–179, 2007.
- [30] J. P. KOTTMANN and O. J. F. MARTIN. Accurate solution of the volume integral equation for high-permittivity scatterers. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 48 :1719–1726, November 2000.
- [31] H. R. KUTT. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numer. Math.*, 24 :205–210, 1975.
- [32] J. C. LACHAT and J. O. WATSON. Effective numerical treatment of boundary integral equations : A formulation for three-dimensional elastostatics. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 10 :273–289, 1976.
- [33] V. LANGE. *Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Octobre 1995.
- [34] J. P. LAURES. Removal of integral singularities. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 6 :93–99, 1990.
- [35] A. LECOMPTE. *Compatibilité électromagnétique d'un téléphone portable avec son environnement*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Juillet 1997.
- [36] S. W. LEE, J. B. BOERSMA, C. L. LAW, and G. A. DESCHAMPS. Singularity in Green's function and its numerical evaluation. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 28 :311–317, March 1980.
- [37] R. LEIS. *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*. John Wiley-New York, 1986.
- [38] M. LENOIR. Influence coefficients for variational integral equations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I* 343 :561–564, 2006.
- [39] V. LUBET. *Diffraction d'une onde électromagnétique sur un corps 3-D. Résolution par méthode intégrale avec éléments plans et triangulaires*. Rapport de DEA, Université Bordeaux I, 1991.
- [40] P. A. MARTIN and F. J. RIZZO. Hypersingular integrals : How smooth must the density be? *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 39 :687–704, 1996.
- [41] P. MONK. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford University Press, 2003.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [42] J. C. NÉDÉLEC. *Acoustic and Electromagnetic Equations, Integral Representations for Harmonic Problems*. Springer-Verlag New York, 2000.
- [43] M. H. PROTTER. Unique continuation for elliptic equations. *Trans. Amer. Math. Society*, 95(1) :81–91, April 1960.
- [44] J. RAHOLA. Spectrum of the volume integral operator of electromagnetic scattering. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(5) :1740–1754, April 28 2000.
- [45] D. ROSEN and D. E. CORMACK. Singular and near singular integrals in the BEM : A global approach. *SIAM J. Appl. Math.*, 53(2) :340–357, April 1993.
- [46] M. I. SANCER, K. SERTEL, J. L. VOLAKIS, and P. V. ALSTINE. On volume integral equations. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 54(5) :1488–1495, May 2006.
- [47] J. SANZ-SERNA, M. DOBLARÉ, and E. ALARCÓN. Remarks on methods for the computation of boundary-element integrals by co-ordinate transformation. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 6 :121–123, 1990.
- [48] R. SAULEAU, G. GODI, and B. CHANTRAINE - BARÈS. Recent advances in shape optimization techniques of 3-D integrated lens antennas. *ESAIM : Proc.*, 22 :88–95, 2007.
- [49] L. SCUDERI. On the computation of nearly singular integrals in 3-D BEM collocation. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, On line at [www.interscience.wiley.com](http://www.interscience.wiley.com), September 2007.
- [50] J. C. F. TELLES. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 24 :959–973, 1987.



**VU à Rennes, le**  
**Le Directeur de thèse**  
Martin COSTABEL

**VU à Rennes, le**  
**Le Responsable de l'Ecole Doctorale**  
Jean Marie LION

**VU pour autorisation de soutenance à**  
**Rennes, le**

**Le Président de l'Université de Rennes 1**

Guy CATHELINEAU

**VU après soutenance pour autorisation de publication**

**Le Président de Jury**

## Résumé

Ce travail est dévolu à l'étude de la diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique. Des équations de Maxwell, nous dérivons deux formulations intégrales. L'une est une équation intégrale volumique à noyau fortement singulier et l'autre, une équation intégrale couplée surface-volume à noyau faiblement singulier. Ces deux formulations sont analysées, à l'aide des résultats standard de Fredholm, en considérant une permittivité discontinue à travers le bord du diélectrique. Cette hypothèse est plus réaliste et permet de prendre en compte des matériaux composés de différentes couches diélectriques. L'équation intégrale volumique est ensuite résolue numériquement. A cette fin, nous avons développé une méthode pour traiter les singularités de l'opérateur intégral volumique. Cette méthode de traitement des singularités est une méthode de changements de variables faisant appel aux transformations de Duffy et elle peut s'appliquer à une classe plus grande d'opérateurs intégraux. La méthode et l'équation intégrale volumique sont implémentées dans le code Mélima++ qui est une librairie d'éléments finis développée au sein de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes. Quelques résultats de tests numériques viennent, enfin, compléter le travail.

### Mots clés :

Ondes électromagnétiques, Equation intégrale de volume, Intégrales singulières, Diélectrique, Maxwell, Diffraction

## Abstract

We are concerned with studying the electromagnetic scattering by a dielectric body. From Maxwell equations, we derived two integral formulations. One is a volume integral equation with a strongly singular kernel and the other one is a coupled surface-volume integral equation with weakly singular kernel. Assuming a discontinuous electric permittivity across the dielectric boundary, the two formulations are analyzed using standard Fredholm properties. The hypothesis of discontinuity for the electric permittivity is more realistic and moreover it enables composite dielectric materials with several surfaces of discontinuity. The volume integral equation is then solve numerically. To this end, we developed a method to handle the singularities in the kernel of the volume integral operator. This method of treatment of singularities is based on changes of variables involving Duffy's transformations and it can be applied to a wide class of integral operators. The method and the volume integral equation are implemented in the Mélima++ code which is a finite element library developed within the mathematical research institut of Rennes. We complete the work with some numerical tests results.

### Key words:

Electromagnetic scattering, Volume integral equation, Singular integrals, Dielectric interface problem, Maxwell