



# Exemples et applications des groupoïdes quantiques finis

Camille Mével

► **To cite this version:**

Camille Mével. Exemples et applications des groupoïdes quantiques finis. Mathématiques [math]. Université de Caen, 2010. Français. tel-00498884

**HAL Id: tel-00498884**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00498884>**

Submitted on 8 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Caen Basse-Normandie  
U.F.R. de Sciences  
École doctorale SIMEM



**T H È S E**

présentée par

Mlle **Camille MÉVEL**

et soutenue le 23 juin 2010

en vue de l'obtention du

**DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN**

**Spécialité : mathématiques et leurs interactions**

*(Arrêté du 7 août 2006)*

# Exemples et applications des groupoïdes quantiques finis

**MEMBRES du JURY**

- Mme Marie-Claude DAVID, maître de conférences à l'Université de Paris-Sud  
M. Michel ENOCK, directeur de recherche CNRS à l'Université de Paris VI  
M. Bernard LECLERC, professeur à l'Université de Caen  
M. Vladimir TURAEV, professeur à l'Université de l'Indiana (États-Unis) (*rapporteur*)  
M. Leonid VAINERMAN, professeur à l'Université de Caen (*directeur*)  
M. Jean-Michel VALLIN, maître de conférences HDR à l'Université d'Orléans (*rapporteur*)



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Algèbres de Hopf faibles. . . . .	1
1.1.1 Définition. . . . .	1
1.1.2 Algèbre de Hopf faible duale. . . . .	2
1.1.3 Sous-algèbres co-unitales. . . . .	2
1.1.4 Les exemples issus des groupoïdes. . . . .	3
1.1.5 Connexité et régularité. . . . .	4
1.1.6 Coïdalgèbres. . . . .	4
1.2 Catégories de fusion. . . . .	5
1.2.1 Généralités sur les catégories. . . . .	5
1.2.2 Catégories semi-simples. . . . .	6
1.2.3 Catégorie monoïdale, catégorie rigide. . . . .	9
1.2.4 Définition des catégories de fusion. . . . .	11
1.2.5 Catégories de Tambara-Yamagami. . . . .	12
1.3 Algèbres de Hopf faibles et catégories de fusion . . . . .	13
1.3.1 La catégorie des représentations d'une algèbre de Hopf faible. . . . .	13
1.3.2 Théorème de reconstruction. . . . .	14
1.3.3 Catégories de module. . . . .	15
1.4 $C^*$ -algèbres de Hopf faibles. . . . .	19
1.4.1 Définition, premières propriétés dues à l'involution. . . . .	19
1.4.2 Projection de Haar, mesure de Haar, espérances conditionnelles de Haar. . . . .	19
1.4.3 Élément de type groupe canonique, automorphisme modulaire. . . . .	20
1.5 Action d'une $C^*$ -algèbre de Hopf faible. . . . .	20
1.5.1 Action sur une algèbre involutive. . . . .	20
1.5.2 Produit croisé. . . . .	21
1.6 Coïdalgèbres involutives. . . . .	21
1.7 Inclusions d'algèbres semi-simples de dimension finie. . . . .	22
1.8 Inclusion de facteurs de type $\text{II}_1$ . . . . .	24
1.8.1 Propriétés de l'indice, tour de Jones. . . . .	24
1.8.2 Tour dérivée et graphe principal. . . . .	25
1.8.3 Correspondance de Galois. . . . .	26

<b>2 Algèbres de Hopf faibles</b>	<b>29</b>
2.1 Reconstruction	29
2.1.1 Structure d'algèbre de $B$ et inclusion $B_t \subset B$ .	29
2.1.2 Calcul du coproduit.	33
2.1.3 Cointé, applications co-unités but et source, antipode.	35
2.1.4 Élément de type groupe canonique, projection de Haar, mesure de Haar, espérances conditionnelles de Haar et automorphisme modulaire.	36
2.1.5 Projecteur de Jones de l'inclusion $B_t \subset B$ .	38
2.1.6 Autodualité de $B$ .	39
2.2 Deux familles de coïdalgèbres involutives.	42
2.2.1 Les coïdalgèbres involutives $I_H$ .	42
2.2.2 Les coïdalgèbres involutives $J_H$ .	45
2.2.3 Le treillis des coïdalgèbres involutives $I_H$ et $J_H$ .	55
2.3 Conclusion.	57
<b>3 Application des catégories aux sous-facteurs.</b>	<b>59</b>
3.1 Algèbres de comodule et catégories de module.	59
3.1.1 Algèbre de comodule.	59
3.1.2 La catégorie des représentations d'une algèbre de comodule.	61
3.1.3 Indécomposabilité de $\text{Rep}(I)$ .	63
3.1.4 Déformations d'algèbres de comodule	64
3.2 Modules sur les catégories de Tambara-Yamagami	65
3.2.1 Théorie de Clifford.	65
3.2.2 Catégories de module de multiplicité 1 sur les catégories de Tambara-Yamagami	67
3.3 Applications.	76
3.3.1 Structure des coïdalgèbres connexes.	76
3.3.2 Facteurs intermédiaires	79
<b>A Les catégories de module <math>\text{Rep}(I_H)</math> et <math>\text{Rep}(J_H)</math>.</b>	<b>83</b>
A.1 La catégorie de module $\text{Rep}(I_H)$ .	83
A.2 La catégorie de module $\text{Rep}(J_H)$ .	89
<b>B Déformations d'algèbres de Hopf faibles</b>	<b>91</b>

# Remerciements

Mes premiers remerciements vont évidemment à mon directeur de thèse Leonid Vainerman pour m'avoir proposé ce sujet et encadrée pendant ces quatre années. Sans lui, ce travail n'aurait ni vu le jour, ni abouti. Je lui suis très reconnaissante de m'avoir motivée tout ce temps.

Je remercie sincèrement mes rapporteurs Vladimir Turaev et Jean-Michel Vallin pour leur lecture attentive de ma thèse et leur patience quant aux multiples versions. Leurs remarques ont largement amélioré mon travail.

Je remercie Marie-Claude David, Michel Enock et Bernard Leclerc d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie encore Marie-Claude David pour son aide précieuse lors de la rédaction de ma thèse. Je ne sais pas si cette dernière serait lisible sinon...

Je tiens aussi à remercier tous les enseignants de l'université de Caen dont j'ai suivi les cours depuis la première année de DEUG et qui m'ont permis d'arriver jusqu'au doctorat.

Place maintenant aux remerciements plus personnels. D'abord merci à Benjamin, Coentin, Erwan, Manu, Marc, Nicolas, Philippe, Pierre, Pierre, Sophie pour tous les bons moments passés au labo ou ailleurs, et surtout ailleurs!

Merci aussi à Lucie, Matthieu et Romain qui ont le courage de venir à ma soutenance (j'ose croire que ce n'est pas que pour le champagne...).

Maintenant un paragraphe spécial pour deux personnes spéciales. Un énorme merci à Marc et Pierre. Et je ne parle pas seulement de mes innombrables questions en informatique pour Marc et en mathématiques pour Pierre! Votre amitié et vos conseils en tout genre m'ont été (et me sont encore) indispensables.

Il me reste à remercier mon cercle le plus proche, mes parents, mon frère et Émilien, qui me supportent, dans tous les sens du terme, certains depuis quelques années maintenant! Votre présence à mes côtés est pour beaucoup dans mon équilibre.



# Introduction

Ce travail est motivé par le problème de l'étude de la structure des sous-facteurs du facteur hyperfini de type  $\text{II}_1$  selon la classification de Murray-von Neumann. Rappelons qu'un facteur est une algèbre de von Neumann dont le centre est trivial. Les références de base sur la théorie des sous-facteurs, développée par V. Jones, sont l'article [J] et le livre [GHJ]. Parmi les invariants classiques d'un sous-facteur  $M_0$  du facteur hyperfini  $M_1$ , se trouvent deux invariants numériques, l'indice et la profondeur, et le graphe principal. Un théorème fondamental de V. Jones affirme que les valeurs possibles pour l'indice  $[M_1 : M_0]$  appartiennent à l'ensemble

$$\{4\cos^2(\frac{\pi}{n}), n \geq 3\} \cup [4, +\infty].$$

La classification des sous-facteurs de  $M_1$  a été donnée par S. Popa pour les valeurs d'indice inférieures ou égales à 4 et dans une série de travaux plus récents pour les valeurs d'indices dans l'intervalle  $]4, 3 + \sqrt{3}[$ . En revanche, ce problème reste largement ouvert pour d'autres valeurs d'indice.

Beaucoup de travaux ont consisté à décrire les inclusions à l'aide d'actions de structures algébriques sur  $M_1$ . Si  $M_0 \subset M_1$  est une inclusion de facteurs de type  $\text{II}_1$  la construction de base permet de fabriquer une tour de facteurs

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

appelée tour de Jones. Lorsque l'inclusion est irréductible (c'est-à-dire  $M'_0 \cap M_1 = \mathbb{C}$ ), l'indice  $[M_1 : M_0]$  fini et la profondeur égale à 2, le travail de W. Szymanski ([Szy]) a montré l'existence d'une  $C^*$ -algèbre de Hopf de dimension finie (ou groupe quantique fini)  $B$  agissant sur  $M_1$  et telle qu'on ait  $M_0 = M_1^B$ , l'algèbre des points fixes de  $M_1$  sous l'action de  $B$ , et  $M_2 \simeq M_1 \rtimes B$ , le produit croisé de  $M_1$  par  $B$ . Lorsque l'indice est infini, M. Enock et R. Nest ont montré ([EnNe]) que l'inclusion provenait de l'action d'un groupe quantique localement compact dans le sens de J. Kustermans et S. Vaes ([KV]). Lorsque l'inclusion est réductible, l'indice fini et la profondeur toujours égale à 2, D. Nikshych et L. Vainerman ont montré dans l'article [NV] que l'inclusion était cette fois-ci décrite par l'action d'une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible de dimension finie ou groupoïde quantique fini ([BNSz]). Plus précisément, ils ont muni les commutants relatifs  $A = M'_0 \cap M_2$  et  $B = M'_1 \cap M_3$  de structures de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles duales l'une de l'autre agissant respectivement sur  $M_1$  et  $M_2$  telles que  $M_0 \simeq M_1^A$ ,  $M_2 \simeq M_1 \rtimes A$ ,  $M_1 \simeq M_2^B$  et  $M_3 \simeq M_2 \rtimes B$ . M. Enock et J-M. Vallin ont traité le cas d'indice infini à l'aide des groupoïdes quantiques infinis ([EV]).

Nous revenons maintenant au problème de la classification des sous-facteurs par le biais de l'étude des facteurs intermédiaires d'une inclusion. Lorsque l'inclusion  $M_0 \subset M_1$  est irréductible,



Y. Watatani a montré dans [W] que ses facteurs intermédiaires formaient un treillis fini. Dans le cas réductible en revanche, on peut seulement affirmer que les algèbres de von Neumann intermédiaires forment un treillis, infini en général. Cependant, supposons que nous ayons une inclusion  $M_1^B \subset M_1 \subset M_1 \rtimes B$  d'indice fini et de profondeur 2 où  $B$  est  $C^*$ -algèbre de Hopf faible, D. Nikshych et L. Vainerman ont démontré dans [NV1] l'existence d'une correspondance de Galois entre les facteurs intermédiaires de l'inclusion  $M_1 \subset M_1 \rtimes B$  et certains sous-objets de  $B$ , les coïdalgèbres involutives connexes (la terminologie « coïdalgèbre » a été introduite par M-C. David et N. Thiéry dans l'article [DT], à ceci près qu'une coïdalgèbre était toujours supposée involutive). Plus précisément, si  $M$  est un facteur intermédiaire  $M_1 \subset M \subset M_1 \rtimes B$ , alors  $(M_1^B)' \cap M$  est une coïdalgèbre involutive connexe de  $B$  et, réciproquement, si  $I$  est coïdalgèbre involutive connexe de  $B$ , alors  $M_1 \rtimes I$  est un facteur intermédiaire de  $M_1 \subset M_1 \rtimes B$ . De plus, le graphe principal d'un facteur intermédiaire peut-être obtenu à partir du diagramme de Bratteli d'une inclusion d'algèbres de dimension finie.

Les algèbres de Hopf faibles sont liées à un autre domaine de recherche, les catégories de fusion ([ENO]). Comme les algèbres de Hopf, leur coproduit permet de mettre une structure monoïdale sur la catégorie de leurs représentations ([BSz],[NTV]), et sous certaines hypothèses supplémentaires, notamment de semi-simplicité, la catégorie de leurs représentations est une catégorie de fusion. Réciproquement, T. Hayashi et K. Szlachanyi ont, indépendamment, démontré que toute catégorie de fusion était équivalente à la catégorie des représentations d'une algèbre de Hopf faible semi-simple ([H],[Sz]). Ce théorème de reconstruction possède la qualité d'être explicite et donc de permettre, à partir d'une catégorie de fusion donnée, de décrire l'algèbre de Hopf faible la réalisant. C'est ce lien avec les catégories qui nous permettra à la fois de construire des  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles, mais aussi d'étudier leurs coïdalgèbres grâce à la théorie des catégories de module ([O1]).

Le but de ce travail est donc de mettre en pratique la correspondance de Galois de D. Nikshych et L. Vainerman. Nous parviendrons ainsi, grâce à des méthodes algébriques, à décrire une famille concrète d'inclusions de facteurs de type  $\text{II}_1$  d'indice de la forme  $(n + \sqrt{n})^2$  avec  $n \geq 1$  entier. De plus, nous serons en mesure de décrire des graphes principaux de facteurs intermédiaires et de montrer l'existence d'une sous-famille d'inclusions pour laquelle cette description est exhaustive.

Le premier chapitre présente les objets mathématiques et les résultats que nous utiliserons au cours de ce travail. En particulier, ce chapitre comporte la définition des catégories de Tambara-Yamagami ([TY]), l'énoncé du théorème de reconstruction ([H], [Sz]) et de la correspondance de Galois. Une catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  est une catégorie de fusion paramétrée par un groupe abélien fini  $G$ , un bicaractère symétrique non dégénéré  $\chi$  sur  $G$  et une constante  $\beta$  liée à l'ordre  $n$  de  $G$ . Ses objets simples sont les éléments du groupe  $G$  et un élément  $m$  et les morphismes d'associativité sont donnés à l'aide de  $\chi$  et  $\beta$ . Ce sont à partir de ces catégories que nous construirons une famille de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles.

Le second chapitre comporte deux parties. La première est consacrée à la construction des algèbres de Hopf faibles associées aux catégories de Tambara-Yamagami, en utilisant le théorème de reconstruction. Nous en décrivons toute la structure (structure d'algèbre, coproduit, antipode, co-unité) ainsi que la structure des sous-algèbres co-unitales  $B_t$  et  $B_s$  et le diagramme de Bratteli de l'inclusion  $B_t \subset B$ . Ce qui nous permet de montrer le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $B$  l'algèbre de Hopf faible semi-simple associée à la catégorie de Tambara-

Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ ,  $n = |G|$ . Alors :

(i) La décomposition de  $B$  en somme directe d'algèbres simples est

$$B \simeq \bigoplus_{g \in G} M_{n+1}(\mathbb{C}) \oplus M_{2n}(\mathbb{C}).$$

(ii)  $B$  est une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible biconnexe, régulière et autoduale, et l'indice de l'inclusion  $B_t \subset B$  est égal à  $(n + \sqrt{n})^2$ .

Grâce à ce théorème, nous pourrons construire, dans le chapitre suivant, une inclusion  $M \subset M \rtimes B$  de facteurs hyperfinis de type  $\text{II}_1$  d'indice  $(n + \sqrt{n})^2$  pour tout  $n$  supérieur à 1.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous calculons deux familles de coïdalgèbres involutives connexes de  $B$ ,  $I_H$  et  $J_H$ , paramétrées par les sous-groupes  $H$  de  $G$  pour toute  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à une catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . Nous donnons notamment la décomposition en somme directe d'algèbres simples, le diagramme de Bratteli de l'inclusion  $B_t \subset I$  et le projecteur de Jones  $p_I$  pour toute coïdalgèbre  $I$  appartenant à une de ces familles. Ces résultats nous permettront dans le chapitre trois de construire des facteurs intermédiaires de l'inclusion  $M \subset M \rtimes B$  et de calculer leur indice et leur graphe principal. Finalement, nous montrons que l'ensemble  $\{I_H | H < G\} \cup \{J_H | H < G\}$  forme un treillis et donnons l'exemple concret de ce treillis lorsque  $G = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $P$  un ensemble de nombres premiers deux à deux distincts.

Le troisième chapitre est scindé en trois parties. La première partie est théorique. Nous établissons le lien entre les catégories de module sur une catégorie de fusion et les algèbres de comodule sur une algèbre de Hopf faible. Dans la deuxième partie, nous adaptions la théorie de Clifford pour les catégories de module développée par C. Galindo dans [G] pour calculer une famille de catégories de module sur les catégories de Tambara-Yamagami. Lorsque l'ordre du groupe  $G$  paramétrant la catégorie de Tambara-Yamagami est sans facteur carré, nous obtenons une classification complète des catégories de module simples sur  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  :

**Théorème.** Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie de module simple sur la catégorie  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  avec  $|G|$  sans facteur carré. Il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$  tel que  $\mathcal{M}$  soit équivalente à la catégorie  $\mathcal{M}(H)$  dont les objets simples sont les classes de  $G/H$  et de  $G/H^\perp$  (où  $H^\perp = \{g \in H \mid \chi(g, h) = 1, \forall h \in H\}$ ) avec la structure de catégorie de module sur  $\mathcal{C}$  :

$$g \otimes M = g + M, \quad m \otimes M = \bigoplus_{\tilde{N} \in G/H^\perp} \tilde{N},$$

$$g \otimes \tilde{M} = g + \tilde{M}, \quad m \otimes \tilde{M} = \bigoplus_{N \in G/H} N.$$

et les morphismes structurels

$$\begin{aligned}
\mu_{g,g',M} &= \text{id}_{g+g'+M} \\
\mu_{g,g',\widetilde{M}} &= \text{id}_{g+g'+\widetilde{M}}, \\
\mu_{g,m,M} &= \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(M), g) \text{id}_{\widetilde{M}}, \\
\mu_{m,g,M} &= \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,M}) \text{id}_{\widetilde{M}}, \\
\mu_{g,m,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{M \in G/H} \chi(u(\widetilde{M}), g) \text{id}_M, \\
\mu_{m,g,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{M \in G/H} \chi(u(M), \kappa_{g,\widetilde{M}}) \text{id}_M, \\
\mu_{m,m,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} \left( \chi(u(\widetilde{M}), -g - u(M)) \text{id}_N \right)_{\widetilde{M} \in G/H^\perp, g \in G, g+M=N}, \\
\mu_{m,m,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{\widetilde{N} \in G/H^\perp} \left( \beta |H| \chi(u(M), -g - u(\widetilde{M})) \text{id}_{\widetilde{N}} \right)_{M \in G/H, g \in G, g+\widetilde{M}=\widetilde{N}},
\end{aligned}$$

pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ .

De plus, les catégories de module  $\mathcal{M}(H)$  et  $\mathcal{M}(H')$  sont équivalentes si et seulement si  $H = H'$  ou  $H = H'^\perp$ .

Dans la troisième partie, nous commençons par déduire de la classification précédente que, si  $B$  est associée à  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ ,  $|G|$  sans facteur carré, pour toute coïdalgèbre involutive connexe  $I$  de  $B$ , le diagramme de Bratteli de  $B_t \subset I$  est un de ceux calculés dans le chapitre deux. Nous appliquons ensuite les différents théorèmes de la correspondance de Galois pour construire une inclusion  $M \subset M \rtimes B$  de facteurs hyperfinis de type  $\text{II}_1$  d'indice  $(n + \sqrt{n})^2$ , pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1, et, dans le cas où  $n$  est sans facteur carré, nous obtenons la description exhaustive des graphes principaux des facteurs intermédiaires de l'inclusion  $M \subset M \rtimes B$ . Il s'agit des graphes suivants, où  $d$  parcourt l'ensemble des diviseurs de  $n$  :

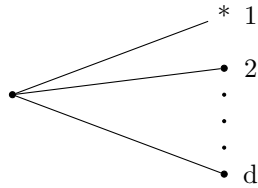


Figure a

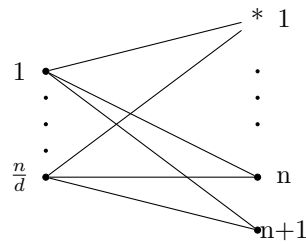


Figure b

Cette description permet alors de prouver le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible biconnexe et régulière associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \chi, \beta)$ . Soit

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3$$

la tour de Jones de profondeur 2 de facteurs hyperfinis de type  $\text{II}_1$  telle que

$$M_1 = M_2^B \quad \text{et} \quad M_3 = M_2 \rtimes B.$$

On définit sur les facteurs intermédiaires de l'inclusion  $M_2 \subset M_2 \rtimes B$  la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  suivante : deux facteurs intermédiaires  $M$  et  $N$  sont équivalents s'ils ont le même graphe principal. Alors les classes d'équivalence pour  $\mathcal{R}$  forment un treillis isomorphe au treillis des sous-ensembles d'un ensemble à  $\text{card}(P) + 1$  éléments.

Dans l'appendice, nous décrivons les structures de catégorie de module des catégories des représentations des coïdalgèbres du chapitre deux et nous donnons des conditions d'équivalence de Morita pour des algèbres de Hopf faibles possédant la même structure d'algèbre.



# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Algèbres de Hopf faibles.

#### 1.1.1 Définition.

La notion de groupoïde quantique fini sur  $\mathbb{C}$  coïncide avec la notion de  $C^*$ -algèbre de Hopf faible (de dimension finie). Nous utiliserons cette dernière terminologie. On suppose pour l'instant que  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

**Définition 1.1.1.** Une cogèbre  $B$  (sur  $k$ ) est un  $k$ -espace vectoriel  $B$  muni d'une application  $k$ -linéaire  $\Delta : B \rightarrow B \otimes_k B$  coassociative, c'est-à-dire vérifiant  $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$ , appelée coproduit, et d'une application  $k$ -linéaire  $\varepsilon : B \rightarrow k$  vérifiant  $(\varepsilon \otimes id)\Delta = (id \otimes \varepsilon)\Delta = id$ , appelée co-unité.

Soient  $(A, \Delta_A, \varepsilon_A)$  et  $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$  deux cogèbres. Un morphisme de cogèbres  $\varphi : A \rightarrow B$  est une application  $k$ -linéaire telle que  $\Delta_B \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_A$  et  $\varepsilon_B \circ \varphi = \varepsilon_A$ .

Soit  $\tau : B \otimes_k B \rightarrow B \otimes_k B$  l'application  $k$ -linéaire définie par  $\tau(b \otimes c) = (c \otimes b)$  pour tous  $b, c$  dans  $B$ . Un anti-morphisme de cogèbres  $\psi : A \rightarrow B$  est une application  $k$ -linéaire telle que  $\Delta_B \circ \psi = (\psi \otimes \psi) \circ \tau \circ \Delta_A$  et  $\varepsilon_B \circ \psi = \varepsilon_A$ .

On utilise la notation de Sweedler  $\Delta(b) = b_{(1)} \otimes b_{(2)}$  pour tout élément  $b$  appartenant à une cogèbre  $B$ .

**Définition 1.1.2** ([BNSz], 2.1). Une algèbre de Hopf faible (sur  $k$ ) est un  $k$ -espace vectoriel  $B$  de dimension finie muni d'une structure d'algèbre  $(B, m, 1)$  et d'une structure de cogèbre  $(B, \Delta, \varepsilon)$  telles que :

- (i)  $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$ ,  $\forall a, b \in B$ ,
- (ii)  $(\Delta \otimes id)\Delta(1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1))$ ,
- (iii)  $\varepsilon(abc) = \varepsilon(ab_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}c) = \varepsilon(ab_{(2)})\varepsilon(b_{(1)}c)$ ,  $\forall a, b, c \in B$ ,
- (iv) il existe un anti-isomorphisme d'algèbres et de cogèbres  $S : B \rightarrow B$  appelé antipode vérifiant pour tout  $b$  dans  $B$  :

$$m(id \otimes S)\Delta(b) = \varepsilon(1_{(1)}b)1_{(2)},$$

$$m(S \otimes id)\Delta(b) = 1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2)}),$$

$$S(b_{(1)})b_{(2)}S(b_{(3)}) = S(b).$$

Si  $A$  et  $B$  sont deux algèbres de Hopf faibles,  $\varphi : A \longrightarrow B$  est un morphisme d'algèbres de Hopf faibles si  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres et de cogèbres vérifiant que  $S_B \circ \varphi = \varphi \circ S_A$  où  $S_A$  et  $S_B$  sont les antipodes respectives de  $A$  et  $B$ .

Une algèbre de Hopf faible est une algèbre de Hopf si et seulement si on a  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$  ou la co-unité est un morphisme d'algèbre.

### 1.1.2 Algèbre de Hopf faible duale.

**Définition et proposition 1.1.3** ([BNSz], 2.1). Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible. L'espace vectoriel dual  $\widehat{B} = \text{Hom}_k(B, k)$  muni du produit, du coproduit et de l'antipode définis par :

$$\langle \varphi\psi, b \rangle = \langle \varphi \otimes \psi, \Delta(b) \rangle,$$

$$\langle \widehat{\Delta}(\varphi), b \otimes a \rangle = \langle \varphi, ab \rangle,$$

$$\langle \widehat{S}(\varphi), b \rangle = \langle \varphi, S(b) \rangle,$$

de l'unité  $\widehat{1} = \varepsilon$  et de la co-unité  $\widehat{\varepsilon} : \varphi \mapsto \varphi(1)$  est une algèbre de Hopf faible, appelée algèbre de Hopf faible duale de  $B$ .

L'isomorphisme  $k$ -linéaire canonique de  $B$  dans  $\widehat{\widehat{B}}$  qui à  $x$  associe l'application  $\varphi \mapsto \varphi(x)$  est un isomorphisme d'algèbres de Hopf faibles.

### 1.1.3 Sous-algèbres co-unitales.

**Définition et proposition 1.1.4** ([BNSz], 2.2). Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible.

On appelle application co-unité but de  $B$  l'application  $\varepsilon_t$  définie par  $\varepsilon_t(b) = \varepsilon(1_{(1)}b)1_{(2)}$  pour tout  $b$  dans  $B$ . L'image  $B_t = \varepsilon_t(B)$  est une sous-algèbre de  $B$  appelée sous-algèbre co-unitale but.

On appelle application co-unité source de  $B$  l'application  $\varepsilon_s$  définie par  $\varepsilon_s(b) = 1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2)})$  pour tout  $b$  dans  $B$ . L'image  $B_s = \varepsilon_s(B)$  est une sous-algèbre de  $B$  appelée sous-algèbre co-unitale source.

**Proposition 1.1.5** ([BNSz], 2.2). Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible,  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_s$  les applications co-unités but et source,  $B_t$  et  $B_s$  les sous-algèbres co-unitales but et source. On a les propriétés suivantes :

- (i)  $\varepsilon_t \circ \varepsilon_t = \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_s \circ \varepsilon_s = \varepsilon_s$ ,
- (ii)  $B_t = \{b \in B \mid \Delta(b) = \Delta(1)(b \otimes 1)\}$ ,  $B_s = \{b \in B \mid \Delta(b) = (1 \otimes b)\Delta(1)\}$ ,
- (iii)  $B_t = \{(\varphi \otimes id)\Delta(1), \varphi \in \widehat{B}\}$ ,  $B_s = \{(id \otimes \varphi)\Delta(1), \varphi \in \widehat{B}\}$ ,
- (iv)  $\Delta(1) \in B_s \otimes B_t$ ,
- (v)  $\varepsilon_s \circ \varepsilon_t = S \circ \varepsilon_t = \varepsilon_s \circ S$ ,
- (vi)  $S(B_t) = B_s$ ,  $S(B_s) = B_t$ ,
- (vi)  $zt = tz$ ,  $\forall z \in B_t, \forall t \in B_s$

Si  $B$  est une algèbre de Hopf, alors la représentation triviale de  $B$  est la représentation de dimension 1 donnée par la co-unité. Lorsque  $B$  est une algèbre de Hopf faible, la co-unité n'est pas un morphisme d'algèbres et ne définit donc pas une représentation de  $B$ .

**Définition et proposition 1.1.6** ([BNSz], 2.4). *Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible. L'algèbre co-unitale but  $B_t$  est un  $B$ -module via  $b.z = \varepsilon_t(bz)$  pour tous  $b$  dans  $B$  et  $z$  dans  $B_t$ . On l'appelle la représentation triviale de  $B$ .*

*De plus, l'application de  $B_t$  vers  $\widehat{B}_s$  qui à  $z$  associe  $\widehat{1}_{(1)}\langle \widehat{1}_{(2)}, z \rangle$  est un isomorphisme de  $B$ -modules.*

**Remarque.** L'application  $z \mapsto \widehat{1}_{(1)}\langle \widehat{1}_{(2)}, z \rangle$  est aussi un isomorphisme d'algèbres de  $B_t$  vers  $\widehat{B}_s$ .

Nous rappelons maintenant la notion d'algèbre séparable et d'élément de séparabilité, symétrique ou non. Cette notion interviendra dans le théorème de reconstruction.

**Définition et proposition 1.1.7** ([P], [A]). *Une  $k$ -algèbre  $(A, m, 1)$  est séparable si la multiplication  $m : A \otimes_k A \rightarrow A$  possède un inverse à droite en tant que morphisme de  $A$ -bimodules. Cette condition est équivalente à l'existence d'un élément dit de séparabilité  $e \in A \otimes_k A$  tel que  $m(e) = 1$ ,  $(a \otimes 1)e = e(1 \otimes a)$  et  $(1 \otimes a)e = e(a \otimes 1)$  pour tout  $a$  dans  $A$ . Si  $e$  est un élément de séparabilité pour  $A$  vérifiant  $\tau(e) = e$  (la volte est définie dans la définition 1.1.1), on dit que  $e$  est symétrique. Toute  $k$ -algèbre semi-simple de dimension finie possède un unique élément de séparabilité symétrique.*

**Proposition 1.1.8** ([BNSz], proposition 2.11). *Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible. Les sous-algèbres co-unitales  $B_t$  et  $B_s$  sont séparables. L'élément  $S(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}$  est un élément de séparabilité pour  $B_t$  et l'élément  $1_{(1)} \otimes S(1_{(2)})$  est un élément de séparabilité pour  $B_s$ .*

Nous donnons quelques égalités qui nous serviront pour les futurs calculs.

**Lemme 1.1.9** ([BNSz]). *Pour tous  $b$  dans  $B$ ,  $t$  dans  $B_s$  et  $z$  dans  $B_t$ , on a :*

- (i)  $1_{(1)}1_{(1')} \otimes 1_{(2)} \otimes 1_{(2')} = 1_{(1)} \otimes \varepsilon_t(1_{(2)}) \otimes 1_{(3)}$ ,
- (ii)  $b_{(1)} \otimes b_{(2)}S(t) = b_{(1)}t \otimes b_{(2)}$ ,
- (iii)  $S(z)b_{(1)} \otimes b_{(2)} = b_{(1)} \otimes zb_{(2)}$ ,
- (iv)  $\varepsilon_t(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}z = S(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}z = \varepsilon_t(1_{(1)}z) \otimes 1_{(2)}$ .

Les trois premières égalités sont les égalités (2.11a), (2.31a) et (2.31b) de [BNSz] tandis que la quatrième est obtenue en combinant les égalités (2.24a) et (2.30d) de [BNSz].

#### 1.1.4 Les exemples issus des groupoïdes.

Pour tout groupe fini  $G$ , l'algèbre du groupe  $kG$  et l'algèbre des fonctions sur le groupe  $k(G)$  sont des algèbres de Hopf. Un rôle analogue est joué par les groupoïdes finis pour les algèbres de Hopf faibles. Nous rappelons ici la notion de catégorie.

**Définition 1.1.10.** *Une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée :*

- (i) d'une classe d'objets  $Ob(\mathcal{C})$ , nous noterons  $X \in \mathcal{C}$  pour  $X \in Ob(\mathcal{C})$ ,
- (ii) d'un ensemble  $Hom(X, Y)$  pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$  dont les éléments  $\varphi$  sont appelés morphismes de  $X$  vers  $Y$  et notés  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,
- (iii) d'un morphisme  $\varphi \circ \psi : X \rightarrow Z$  pour tous morphismes  $\psi : X \rightarrow Y$  et  $\varphi : Y \rightarrow Z$  appelé composée de  $\psi$  et  $\varphi$  vérifiant la condition d'associativité  $\varphi \circ (\psi \circ \eta) = (\varphi \circ \psi) \circ \eta$  pour tous morphismes  $\varphi, \psi$  et  $\eta$  composables,



(iv) d'un morphisme  $id_X : X \longrightarrow X$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  appelé identité de  $X$  vérifiant  $id_X \circ \varphi = \varphi$  pour tout morphisme  $\varphi$  d'un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  vers  $X$  et  $\psi \circ id_X = \psi$  pour tout morphisme  $\psi$  de  $X$  vers un objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$ .

Lorsque les objets de  $\mathcal{C}$  forment un ensemble, on appelle  $\mathcal{C}$  une petite catégorie.

**Définition 1.1.11.** Un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Un groupoïde est dit fini s'il possède un nombre fini de morphismes. Si  $\mathcal{G}$  est un groupoïde, on note  $\mathcal{G}^0 = \{gg^{-1} | g \in \mathcal{G}\}$  l'ensemble des unités de  $\mathcal{G}$ .

**Définition et proposition 1.1.12** ([NTV]). Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde. L'algèbre du groupoïde  $k\mathcal{G}$  est le  $k$ -espace vectoriel  $k\mathcal{G} = \text{Vect}\{g | g \in \mathcal{G}\}$  muni du produit défini sur les éléments de la base par  $gh = g \circ h$  si  $g$  et  $h$  sont composables, 0 sinon, et étendu par linéarité. Munie du coproduit, de la co-unité et de l'antipode définis respectivement par  $\Delta(g) = g \otimes g$ ,  $\varepsilon(g) = 1$  et  $S(g) = g^{-1}$  pour tout  $g$  dans  $\mathcal{G}$ ,  $k\mathcal{G}$  est une algèbre de Hopf faible. Les applications co-unités but et source sont définies par  $\varepsilon_t(g) = gg^{-1}$  et  $\varepsilon_s(g) = g^{-1}g$  pour tout  $g$  dans  $\mathcal{G}$  et correspondent respectivement à prendre le but et la source du morphisme. Les algèbres co-unitaes but et source,  $k\mathcal{G}_t$  et  $k\mathcal{G}_s$ , sont confondues et égales à  $k\mathcal{G}^0 = \text{Vect}\{gg^{-1} | g \in \mathcal{G}\}$ .

L'algèbre des fonctions sur le groupoïde  $\text{Fon}(\mathcal{G}, k)$  est le  $k$ -espace vectoriel  $\text{Vect}\{p_g | g \in \mathcal{G}\}$  muni du produit défini par  $p_g p_h = \delta_{g,h} p_g$  pour tous  $g, h$  dans  $\mathcal{G}$  et étendu par linéarité. Munie du coproduit, de la co-unité et de l'antipode définis respectivement par  $\Delta(p_g) = \sum_{h \in \mathcal{G}} p_h \otimes p_{gh^{-1}}$ ,  $\varepsilon(p_g) = \delta_{g, gg^{-1}}$ ,  $S(p_g) = p_{g^{-1}}$  pour tout  $g$  dans  $\mathcal{G}$ , l'algèbre  $\text{Fon}(\mathcal{G}, k)$  est une algèbre de Hopf faible isomorphe à l'algèbre de Hopf faible duale de  $k\mathcal{G}$ .

Le coproduit sur les éléments de la base de l'algèbre du groupoïde  $k\mathcal{G}$  a la forme très simple  $\Delta(g) = g \otimes g$  pour tout  $g$  dans  $\mathcal{G}$ . On dit que ces éléments sont de type groupe. On va définir ce type d'élément pour une algèbre de Hopf faible quelconque.

**Définition 1.1.13** ([BNSz], définition 4.11). Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible.

Un élément  $b$  de  $B$  est dit de type groupe s'il vérifie

$$\Delta(b) = \Delta(1)(b \otimes b) = (b \otimes b)\Delta(1) \quad \text{et} \quad bS(b) = 1.$$

### 1.1.5 Connexité et régularité.

**Définition 1.1.14.** Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible.

On dit que  $B$  est connexe si  $B_s \cap Z(B) = k$  et coconnexe si  $\widehat{B}$  est connexe. Lorsque  $B$  est à la fois connexe et coconnexe, on dit qu'elle est biconnexe.

On dit que  $B$  est régulière si  $S^2$  est égale à l'identité sur  $B_t$  et  $B_s$ .

**Proposition 1.1.15** ([BNSz], 2.4). Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible semi-simple. On a :

- (i)  $B_s \cap Z(B) = k \Leftrightarrow B_t \cap Z(B) = k$ ,
- (i)  $B$  est connexe si et seulement si  $B_t$  est un  $B$ -module simple,
- (ii)  $B$  est coconnexe si et seulement si  $B_t \cap B_s = k$ .

### 1.1.6 Coïdalgèbres.

**Définition 1.1.16.** Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible. Une coïdalgèbre (à gauche) de  $B$  est une sous-algèbre unifère de  $B$  vérifiant  $\Delta(I) \subset B \otimes I$  (on dit que  $I$  est un coïdéral).

Une coïdalgèbre  $I$  est dite connexe si  $Z(I) \cap B_s = k$ .

**Exemples 1.1.17.** 1)  $B$  est une coïdalgèbre d'elle-même.

2)  $B_t$  est une coïdalgèbre de  $B$ . Elle est incluse dans toute coïdalgèbre de  $B$ . De plus, si  $B$  est coconnexe, alors  $B_t$  est connexe.

## 1.2 Catégories de fusion.

### 1.2.1 Généralités sur les catégories.

Nous avons déjà rappelé la définition d'une catégorie (définition 1.1.10). Tout ce qui suit est tiré du livre [M].

**Définition 1.2.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie.

Un morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  est appelé *monomorphisme* si pour tous morphismes  $\psi_1 : Z \rightarrow X$  et  $\psi_2 : Z \rightarrow X$ ,  $\varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2$  implique  $\psi_1 = \psi_2$ .

Un morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  est appelé *épimorphisme* si pour tous morphismes  $\psi_1 : Y \rightarrow Z$  et  $\psi_2 : Y \rightarrow Z$ ,  $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi$  implique  $\psi_1 = \psi_2$ .

Un morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  est appelé *isomorphisme* s'il existe un morphisme  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_X$  et  $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_Y$ .

Un sous-objet d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  est un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  muni d'un monomorphisme de  $Y$  vers  $X$ .

**Définition 1.2.2.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Un foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est la donnée d'une application des objets de  $\mathcal{C}$  vers les objets de  $\mathcal{D}$  et d'une application des morphismes de  $\mathcal{C}$  vers les morphismes de  $\mathcal{D}$  toutes deux notées  $\mathcal{F}$  telles que :

(i) pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$  et pour tout morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $\mathcal{F}(\varphi)$  est un morphisme de  $\mathcal{F}(X)$  vers  $\mathcal{F}(Y)$ ,

(ii)  $\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$ ,  $\forall X \in \mathcal{C}$ ,

(iii)  $\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \circ \mathcal{F}(\psi)$ , si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des morphismes composables de  $\mathcal{C}$ .

Un foncteur  $\mathcal{F}$  est dit *plein* s'il est surjectif sur les ensembles de morphismes.

Un foncteur  $\mathcal{F}$  est dit *fidèle* s'il est injectif sur les ensembles de morphismes.

Un foncteur  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  est dit *essentiellement surjectif* si, pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$ , il existe un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $\mathcal{F}(X)$  soit isomorphe à  $Y$ .

**Définition 1.2.3.** Une sous-catégorie d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est une catégorie dont les objets sont des objets de  $\mathcal{C}$  et dont les morphismes sont des morphismes de  $\mathcal{C}$ . Une sous-catégorie  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  est dite *pleine* si pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{D}$ , on a  $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

**Définition 1.2.4.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories et  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$ . Une transformation naturelle  $\theta$  de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{G}$  est une application des objets de  $\mathcal{C}$  vers les morphismes de  $\mathcal{D}$  telle que pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$  et tout morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\theta(X)} & \mathcal{G}(X) \\ \mathcal{F}(\varphi) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(\varphi) \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\theta(Y)} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

Une transformation naturelle telle que  $\theta(X)$  soit un isomorphisme pour tout  $X$  de  $\mathcal{C}$  est appelée une *équivalence naturelle*.

**Définition 1.2.5.** Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Une équivalence de catégorie entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est un foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tel qu'il existe un foncteur  $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et des équivalences naturelles de  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  vers  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  et de  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  vers  $\text{id}_{\mathcal{D}}$ .

**Proposition 1.2.6.** Un foncteur  $\mathcal{F}$  est une équivalence de catégorie si et seulement si il est plein, fidèle et essentiellement surjectif.

**Définition et proposition 1.2.7.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un squelette de  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie pleine  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{C}$  telle que chaque objet de  $\mathcal{S}$  soit isomorphe à exactement un objet de  $\mathcal{C}$ . L'inclusion  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  est une équivalence de catégories pour tout squelette  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{C}$ . Une catégorie est dite squelette si chaque classe d'isomorphisme est réduite à un élément.

**Définition 1.2.8.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Le produit cartésien  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est la catégorie dont les objets sont les couples  $(X, Y)$  pour  $X$  dans  $\mathcal{C}$  et  $Y$  dans  $\mathcal{D}$  et dont les ensembles de morphismes sont  $\text{Hom}((X, Y), (X', Y')) = \text{Hom}(X, X') \times \text{Hom}(Y, Y')$  pour tous objets  $X, X'$  de  $\mathcal{C}$  et  $Y, Y'$  de  $\mathcal{D}$  avec la composition composante par composante.

Un foncteur d'un produit cartésien de catégories vers une catégorie est appelé bifoncteur.

## 1.2.2 Catégories semi-simples.

Commençons par rappeler la définition d'une catégorie abélienne « classique ».

**Définition 1.2.9** ([M], VIII.3). Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite abélienne si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble des morphismes  $\text{Hom}(X, Y)$  est un groupe abélien (additif) et pour tous objets  $X, Y, Z$  de  $\mathcal{C}$ , la composition

$$\begin{cases} \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) & \longrightarrow \text{Hom}(X, Z), \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto \psi \circ \varphi, \end{cases}$$

est additive en chaque variable.

(ii) Il existe un objet dit nul de  $\mathcal{C}$  noté  $0$  tel que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  on ait :

$$\text{Hom}(X, 0) = \text{Hom}(0, X) = \{0\}.$$

(iii) Pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , leur somme directe existe, c'est-à-dire qu'il existe un objet de  $\mathcal{C}$  noté  $X \oplus Y$  et des morphismes  $i_X : X \rightarrow X \oplus Y$ ,  $i_Y : Y \rightarrow X \oplus Y$ ,  $p_X : X \oplus Y \rightarrow X$  et  $p_Y : X \oplus Y \rightarrow Y$  tels que :

$$p_X \circ i_X = \text{id}_X, \quad p_Y \circ i_Y = \text{id}_Y \quad \text{et} \quad (i_X \circ p_X) + (i_Y \circ p_Y) = \text{id}_{X \oplus Y}.$$

(iv) Pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , tout morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  possède un noyau, c'est-à-dire un morphisme  $\varphi_K$  d'un objet  $K$  de  $\mathcal{C}$  vers  $X$  vérifiant  $\varphi \circ \varphi_K = 0$  et tel que tout morphisme  $\varphi_{K'}$  d'un objet  $K'$  de  $\mathcal{C}$  vers  $X$  vérifiant  $\varphi \circ \varphi_{K'} = 0$  se factorise de manière unique par  $\varphi_K$  ( $\exists! f : K' \rightarrow K$ ,  $\varphi_{K'} = \varphi_K \circ f$ ).

(iv') Pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , tout morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  possède un conoyau, c'est-à-dire un morphisme  $\varphi_C$  de  $Y$  vers un objet  $C$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant  $\varphi_C \circ \varphi = 0$  et tel que tout autre morphisme  $\varphi_{C'}$  de  $Y$  vers un objet  $C'$  de  $\mathcal{C}$  se factorise de manière unique par  $\varphi_C$  ( $\exists! f : C \rightarrow C'$ ,  $\varphi_{C'} = f \circ \varphi_C$ ).

(v) Tout monomorphisme est un noyau, tout épimorphisme est un conoyau.

**Remarque.** Les conditions (i) à (iii) définissent ce qu'on appelle une catégorie additive ([M]).

**Exemples 1.2.10.** 1) La catégorie  $Ab$  dont les objets sont les groupes abéliens et dont les morphismes sont les morphismes de groupes est une catégorie abélienne.

2) Soit  $R$  un anneau. La catégorie  $R\text{-Mod}$  dont les objets sont les  $R$ -modules et dont les morphismes sont les morphismes de  $R$ -modules est une catégorie abélienne.

On suppose toujours que  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Lorsque l'anneau  $R$  de l'exemple précédent n'est pas seulement un anneau mais une algèbre sur  $k$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  est un  $k$ -espace vectoriel pour tous objets  $X, Y$  de  $R\text{-Mod}$  et la composition est  $k$ -bilinéaire. Cela motive la définition suivante d'une catégorie  $k$ -linéaire abélienne :

**Définition 1.2.11** ([BK], définition 1.1.1). *Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite  $k$ -linéaire (ou additive sur  $k$ ) abélienne si elle vérifie les conditions (iii) à (v) de la définition précédente ainsi que :*

- (i') *Pour tous objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble des morphismes  $\text{Hom}(X, Y)$  est un  $k$ -espace vectoriel.*
- (ii') *Pour tous objets  $X, Y, Z$  de  $\mathcal{C}$ , la composition*

$$\begin{cases} \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(X, Z), \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & \psi \circ \varphi, \end{cases}$$

*est  $k$ -bilinéaire.*

Nous pouvons maintenant définir la notion de catégorie semi-simple.

**Définition 1.2.12** ([BK], définition 1.1.3). *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $k$ -linéaire abélienne. Un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  est dit simple si tout sous-objet (définition 1.2.1) de  $X$  est isomorphe à  $X$  ou égal à  $0$ .  $\mathcal{C}$  est dite semi-simple si tout objet est isomorphe à une somme directe finie d'objets simples.*

*Une catégorie semi-simple est dite finie si elle possède un nombre fini de classes d'isomorphisme d'objets simples.*

Le lemme suivant permet de caractériser les objets simples.

**Lemme 1.2.13** ([BK], 1.1). *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie semi-simple. Un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  est simple si et seulement si  $\text{End}(X) = k$ . De plus, si  $X$  et  $Y$  sont deux objets simples, soit ils sont isomorphes et on a  $\text{Hom}(X, Y) = k$ , soit on a  $\text{Hom}(X, Y) = \{0\}$ .*

**Exemples 1.2.14.** 1) La catégorie  $\text{Vect}_k$  dont les objets sont les  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie et dont les morphismes sont les applications  $k$ -linéaires est semi-simple avec une seule classe d'isomorphisme d'objets simples, la classe de  $k$ .

2) Soit  $A$  une  $k$ -algèbre semi-simple de dimension finie. La catégorie dont les objets sont les  $A$ -modules de dimension finie et dont les morphismes sont les morphismes de  $A$ -modules est une catégorie semi-simple.

Nous donnons maintenant la définition des foncteurs respectant la structure des catégories semi-simples.

**Définition 1.2.15** ([BK], 1.1). *Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories semi-simples. Un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  est dit  $k$ -linéaire s'il est  $k$ -linéaire sur les  $k$ -espaces vectoriels de morphismes.*

*Les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont équivalentes s'il existe un foncteur  $k$ -linéaire de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  qui est aussi une équivalence de catégories.*

Le théorème suivant permet de réaliser toute catégorie semi-simple finie comme la catégorie des modules de dimension finie sur une  $k$ -algèbre semi-simple de dimension finie.

**Théorème 1.2.16** ([Mi], IV. théorème 4.1). *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie semi-simple finie. Il existe une  $k$ -algèbre semi-simple de dimension finie  $A$  telle que  $\mathcal{C}$  soit équivalente à la catégorie des  $A$ -modules de dimension finie.*

**Remarque.** Le théorème original concerne les catégories abéliennes. Lorsque  $\mathcal{C}$  est semi-simple, la démonstration est semblable. Il faut juste remarquer que l'objet  $U$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $A = \text{End}_k(U)$  est semi-simple et donc  $A$  l'est également et que le foncteur réalisant l'équivalence entre les catégories est  $k$ -linéaire.

On utilisera souvent la notion de somme directe de deux catégories semi-simples, notamment pour définir l'indécomposabilité.

**Définition et proposition 1.2.17.** *La catégorie somme directe  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$  de deux catégories semi-simples  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est la catégorie  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  (définition 1.2.5). On note un objet  $(X, Y)$  de  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  par  $X \oplus Y$  si  $X, Y \neq 0$ , un objet  $(X, 0)$  de  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  par  $X$  et un objet  $(0, Y)$  de  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  par  $Y$ . La catégorie  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$  est semi-simple pour la structure  $k$ -linéaire composante par composante. Ses objets simples sont les objets simples de  $\mathcal{C}$  et les objets simples de  $\mathcal{D}$ .*

**Remarque.** Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux sous-catégories semi-simples (pleines ou non) d'une catégorie semi-simple  $\mathcal{C}$ , par abus de notation, on note  $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1$  la sous-catégorie semi-simple de  $\mathcal{C}$  engendrée par  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$ . Elle est équivalente à la catégorie somme directe « extérieure » définie précédemment.

**Définition 1.2.18.** *Une catégorie semi-simple est dite décomposable si elle est équivalente à la somme directe de deux catégories semi-simples non triviales.*

*Une catégorie semi-simple  $\mathcal{C}$  est dite simple si elle ne possède pas de sous-catégorie propre (c'est-à-dire différente de  $\mathcal{C}$ ) semi-simple pleine non triviale.*

**Corollaire 1.2.19** (du théorème 1.2.16). *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre semi-simple de dimension finie. La catégorie semi-simple  $\text{Rep}(A)$  est décomposable si et seulement si  $A$  est décomposable. Plus précisément, si  $\text{Rep}(A)$  est équivalente à  $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ , alors il existe deux algèbres semi-simples  $A_1$  et  $A_2$  non triviales telles que  $A$  soit égale à  $A_1 \oplus A_2$ ,  $\mathcal{M}_1$  soit équivalente à  $\text{Rep}(A_1)$  et  $\mathcal{M}_2$  à  $\text{Rep}(A_2)$  en tant que catégories semi-simples. Réciproquement, si  $A$  se décompose en  $A_1 \oplus A_2$  où  $A_1$  et  $A_2$  sont deux algèbres semi-simples non triviales, alors la catégorie  $\text{Rep}(A)$  est équivalente en tant que catégorie semi-simple à la catégorie  $\text{Rep}(A_1) \oplus \text{Rep}(A_2)$ .*

Nous démontrons la proposition suivante :

**Proposition 1.2.20.** *Une catégorie semi-simple finie est simple si et seulement si elle est indécomposable.*

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie semi-simple finie. On suppose que  $\mathcal{C}$  n'est pas simple. Soit  $\mathcal{C}_0$  une sous-catégorie semi-simple pleine de  $\mathcal{C}$  propre et non triviale. On choisit un ensemble  $\Omega_0$  de représentants des classes d'isomorphisme d'objets simples de  $\mathcal{C}_0$ . Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}_0$ , comme  $\mathcal{C}_0$  est pleine,  $X$  est simple dans  $\mathcal{C}_0$  si et seulement si  $X$  est simple dans  $\mathcal{C}$ . On peut donc compléter  $\Omega_0$  pour obtenir un ensemble  $\Omega$  de représentants des classes d'isomorphisme d'objets simples de  $\mathcal{C}$ . On pose  $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$ . Comme  $\mathcal{C}_0$  est propre et non triviale,  $\Omega_1$  n'est ni vide ni égal à

$\Omega$ . Soient  $\mathcal{C}'_0$  la catégorie squelette de  $\mathcal{C}_0$  dont les objets sont les sommes directes finies d'objets de  $\Omega_0$  (définition 1.2.7) et  $\mathcal{C}_1$  la sous-catégorie semi-simple pleine de  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les sommes directes finies d'objets de  $\Omega_1$ . La catégorie  $\mathcal{C}_1$  est non propre et non triviale car  $\Omega_1$  est différent de  $\Omega$  et non vide. Alors la catégorie  $\mathcal{C}'_0 \oplus \mathcal{C}_1$  est un squelette de  $\mathcal{C}$  et, d'après la proposition 1.2.7, l'inclusion est une équivalence de catégories, clairement  $k$ -linéaire.

Réciproquement, on suppose que  $\mathcal{C}$  est décomposable. Il existe alors deux catégories semi-simples finies  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$  non triviales et une équivalence de catégories semi-simples  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1$  vers  $\mathcal{C}$ . D'après la proposition 1.2.6,  $\mathcal{F}$  est bijectif sur les espaces de morphismes. La catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0)$  est donc une sous-catégorie semi-simple pleine de  $\mathcal{C}$  non propre et non triviale (considérer un ensemble de représentants des objets simples de  $\mathcal{C}$ ) et  $\mathcal{C}$  n'est pas simple.  $\square$

### 1.2.3 Catégorie monoïdale, catégorie rigide.

On dira par abus de langage que des isomorphismes sont fonctoriels s'ils définissent une transformation naturelle entre deux foncteurs.

**Définition 1.2.21** ([M], VII.1). *Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite monoïdale s'il existe un bifoncteur  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , des isomorphismes fonctoriels  $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$  pour tous objets  $X, Y, Z$  de  $\mathcal{C}$ , un objet unité  $\mathbf{1}$  et des isomorphismes fonctoriels  $l_X : \mathbf{1} \otimes X \rightarrow X$  et  $r_X : X \otimes \mathbf{1} \rightarrow X$  tels que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T & \\
 a_{X,Y,Z} \otimes id \swarrow & & \searrow a_{X \otimes Y, Z, T} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \\
 a_{X,Y \otimes Z, T} \downarrow & & \downarrow a_{X,Y,Z \otimes T} \\
 X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) & \xrightarrow{id \otimes \mu_{Y,Z,T}} & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T))
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,\mathbf{1},Y}} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \\
 r_X \otimes id \searrow & & \swarrow id \otimes l_Y \\
 & X \otimes Y &
 \end{array}$$

commutent pour tous  $X, Y, Z, T$  dans  $\mathcal{C}$ .

Les isomorphismes  $a_{X,Y,Z}$ , pour  $X, Y, Z$  dans  $\mathcal{C}$ , sont appelés les morphismes d'associativité et les isomorphismes  $l_X$  et  $r_X$ ,  $X$  dans  $\mathcal{C}$ , sont appelés les morphismes unité respectivement gauche et droit. La commutativité du premier diagramme est appelée condition du pentagone et celle du deuxième condition du triangle.

Lorsque  $\mathcal{C}$  est semi-simple, on demande que le bifoncteur  $\otimes$  soit  $k$ -bilinéaire sur les espaces de morphismes.

**Exemples 1.2.22.** 1) La catégorie  $\text{Vect}_k$  est une catégorie monoïdale pour le produit tensoriel usuel. L'unité est le corps de base  $k$ , les morphismes d'associativité sont le changement de parenthèses  $a_{X,Y,Z} : (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$  pour tous  $X, Y, Z$  dans  $\text{Vect}_k$ ,  $x$  dans  $X$ ,  $y$  dans  $Y$  et

$z$  dans  $Z$  et les morphismes unité sont définis par  $l_X(\lambda \otimes x) = r_X(x \otimes \lambda) = \lambda x$  pour tout  $X$  dans  $\text{Vect}_k$ ,  $x$  dans  $X$  et  $\lambda$  dans  $k$ .

2) Soit  $G$  un groupe fini. La catégorie  $\text{Rep}(G)$  dont les objets sont les représentations de  $G$  et dont les morphismes sont les opérateurs d'entrelacement munie du produit tensoriel des représentations est une catégorie monoïdale. L'unité de cette catégorie est la représentation triviale de  $G$ .

Nous donnons maintenant la définition des foncteurs respectant la structure monoïdale :

**Définition 1.2.23** ([M], XI.2). *Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories monoïdales. Un foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est dit monoïdal s'il existe des isomorphismes fonctoriels  $\mathcal{F}_{X,Y} : \mathcal{F}(X \otimes Y) \rightarrow \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$  pour tous  $X, Y$  dans  $\mathcal{C}$  et un isomorphisme  $\mathcal{F}_1 : \mathcal{F}(\mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{1}$  tels que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{\mathcal{F}(a_{X,Y,Z})} & \mathcal{F}(X \otimes (Y \otimes Z)) \\
 \mathcal{F}_{X \otimes Y, Z} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_{X, Y \otimes Z} \\
 \mathcal{F}(X \otimes Y) \otimes \mathcal{F}(Z) & & \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y \otimes Z) \\
 \mathcal{F}_{X,Y} \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \mathcal{F}_{Y,Z} \\
 (\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)) \otimes \mathcal{F}(Z) & \xrightarrow{a_{\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(Z)}}} & \mathcal{F}(X) \otimes (\mathcal{F}(Y) \otimes \mathcal{F}(Z))
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(\mathbf{1} \otimes X) \xrightarrow{\mathcal{F}_1, X} \mathcal{F}(\mathbf{1}) \otimes \mathcal{F}(X) & \text{et} & \mathcal{F}(X \otimes \mathbf{1}) \xrightarrow{\mathcal{F}_X, \mathbf{1}} \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(\mathbf{1}) \\
 \mathcal{F}(l_X) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(r_X) \\
 \mathcal{F}(X) \xleftarrow{l_{\mathcal{F}(X)}} \mathbf{1} \otimes \mathcal{F}(\mathbf{1}) & & \mathcal{F}(X) \xleftarrow{r_{\mathcal{F}(X)}} \mathcal{F}(X) \otimes \mathbf{1} \\
 \mathcal{F}_1 \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \mathcal{F}_1
 \end{array}$$

commutent pour tous  $X, Y, Z$  dans  $\mathcal{C}$ .

Une équivalence de catégories monoïdales est un foncteur monoïdal qui est aussi une équivalence de catégories.

Le définition suivante de rigidité d'une catégorie monoïdale est l'axiomatisation de la notion de dual.

**Définition 1.2.24** ([BK], définitions 2.1.1, 2.1.2). *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie monoïdale. Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Un dual à droite de  $X$  est un objet  $X^*$  de  $\mathcal{C}$  muni de deux morphismes  $e_X : X^* \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$  et  $i_X : \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$  tels qu'on ait :*

$$r_X \circ (\text{id}_X \otimes e_X) \circ a_{X, X^*, X} \circ (i_X \otimes \text{id}_X) \circ l_X^{-1} = \text{id}_X$$

et

$$l_{X^*} \circ (e_X \otimes \text{id}_{X^*}) \circ a_{X^*, X, X^*}^{-1} \circ (\text{id}_{X^*} \otimes i_X) \circ r_{X^*}^{-1} = \text{id}_{X^*}.$$

De manière symétrique, un dual à gauche pour  $X$  est un objet  ${}^*X$  de  $\mathcal{C}$  muni de deux morphismes  $e'_X : X \otimes {}^*X \rightarrow \mathbf{1}$  et  $i'_X : \mathbf{1} \rightarrow {}^*X \otimes X$  tels qu'on ait :

$$r_{{}^*X} \circ (\text{id}_X \otimes e'_X) \circ a_{{}^*X, X, {}^*X} \circ (i'_X \otimes \text{id}_X) \circ l_{{}^*X}^{-1} = \text{id}_{{}^*X}$$

et

$$l_X \circ (e'_X \otimes id_X) \circ a_{X, X, X}^{-1} \circ (id_X \otimes i'_X) \circ r_X^{-1} = id_X.$$

Une catégorie monoïdale est dite rigide si tout objet possède un dual à droite et un dual à gauche.

**Exemples 1.2.25.** 1) Soit  $X$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient  $E$  une base de  $X$  et  $E^* = \{x^* | x \in E\}$  la base duale de  $X^* = \text{Hom}(X, k)$ . Muni des applications  $e_X : X^* \otimes X \rightarrow k$  et  $i_X : k \rightarrow X \otimes X^*$  définies par  $e_X(f \otimes x) = f(x)$  pour tout  $x$  dans  $X$  et  $i_X(1) = \sum_{x \in E} x \otimes x^*$ ,  $X^*$  est un dual à droite pour  $X$  dans  $\text{Vect}_k$  et muni des applications  $e_X : X \otimes X^* \rightarrow k$  et  $i_X : k \rightarrow X^* \otimes X$  définies par  $e_X(x \otimes f) = f(x)$  pour tous  $x$  dans  $X$  et  $\varphi$  dans  $X^*$  et  $i_X(1) = \sum_{x \in E} x^* \otimes x$ ,  $X^*$  est un dual à gauche pour  $X$  dans  $\text{Vect}_k$ . La catégorie  $\text{Vect}_k$  est donc rigide.

2) Soit  $G$  un groupe fini et  $\pi$  une représentation de  $G$ . La représentation contragrédiente  $\bar{\pi}$  est un dual à droite et à gauche pour  $\pi$ . La catégorie  $\text{Rep}(G)$  est une catégorie rigide.

**Proposition 1.2.26** ([BK], lemme 2.1.6). *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie semi-simple et monoïdale. Si  $Y$  possède un dual à droite et à gauche dans  $\mathcal{C}$ , alors les  $k$ -espaces vectoriels suivants sont canoniquement isomorphes pour tous  $Y, Z$  dans  $\mathcal{C}$  :*

$$\text{Hom}(X \otimes Y, Z) \simeq \text{Hom}(X, Z \otimes Y^*),$$

$$\text{Hom}(X, Y \otimes Z) \simeq \text{Hom}(Y^* \otimes X, Z),$$

$$\text{Hom}(Y \otimes X, Z) \simeq \text{Hom}(X, {}^*Y \otimes Z),$$

$$\text{Hom}(X, Z \otimes Y) \simeq \text{Hom}(X \otimes {}^*Y, Z).$$

### 1.2.4 Définition des catégories de fusion.

**Définition 1.2.27** ([ENO], 2). *Une catégorie de fusion (sur  $k$ ) est une catégorie semi-simple finie, monoïdale rigide telle que l'objet unité soit simple.*

*Une équivalence de catégories de fusion est un foncteur  $k$ -linéaire et monoïdal qui est aussi une équivalence de catégories.*

**Exemples 1.2.28.** 1) La catégorie  $\text{Vect}_k$  est une catégorie de fusion. Toute catégorie de fusion à une seule classe d'isomorphisme d'objets simples lui est équivalente.

2) Soit  $G$  un groupe fini. La catégorie  $\text{Rep}(G)$  est une catégorie de fusion.

Pour réduire les problèmes liés aux identifications entre objets isomorphes, on utilise des catégories squelettes. La proposition suivante permet de restreindre l'étude des catégories de fusion à l'étude des catégories de fusion squelettes.

**Proposition 1.2.29** ([HH]). *Toute catégorie de fusion est équivalente à une catégorie de fusion squelette.*

Les objets d'une catégorie de fusion squelette  $\mathcal{C}$  sont les sommes directes des objets simples.  $\mathcal{C}$  est donc entièrement définie par ses objets simples et la structure monoïdale au niveau de ces objets simples.



**Définition 1.2.30** ([CE], 1.3). *On appelle règles de fusion les règles de décomposition en somme directe d'objets simples des produits tensoriels d'objets simples.*

**Exemple 1.2.31.** Soit  $G$  un groupe fini. On note  $\text{Vect}_G$  la catégorie de fusion définie de la manière suivante :

- (i) Les objets simples de  $\text{Vect}_G$  sont les éléments  $g$  de  $G$ ,
- (ii) Les règles de fusion sont données par le produit dans  $G$ ,  $g \otimes h = gh$  pour tous  $g, h$  dans  $G$ ,
- (iii) Les morphismes d'associativité et unité sont égaux à l'identité,
- (iv) Le dual à gauche et à droite de  $g$  dans  $G$  est  $g^{-1}$ , les morphismes  $i_g, e_g, i'_g$  et  $e'_g$  sont égaux à l'identité.

La notation  $\text{Vect}_G$  provient du fait que cette catégorie est équivalente à la catégorie des espaces vectoriels  $G$ -gradués de dimension finie (voir par exemple [ENO], 2), c'est un de ses squelettes.

### 1.2.5 Catégories de Tambara-Yamagami.

Dans cette partie, le corps de base  $k$  est pris égal à  $\mathbb{C}$ . Nous pouvons maintenant définir les catégories de Tambara-Yamagami. Nous avons besoin de la notion de bicaractère sur un groupe fini.

**Définition 1.2.32.** *Un bicaractère  $\chi$  sur un groupe fini  $G$  est une application de  $G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$  telle que*

$$\chi(gh, k) = \chi(g, k)\chi(h, k), \quad \chi(g, hk) = \chi(g, h)\chi(g, k)$$

pour tous  $g, h, k$  dans  $G$  et  $\chi(g, e) = \chi(e, g) = 1$  pour tout  $g$  dans  $G$ .

Un bicaractère  $\chi$  est dit symétrique si  $\chi(g, h) = \chi(h, g)$  pour tous  $g, h$  dans  $G$ .

Un bicaractère est dit non-dégénéré si  $\chi(g, h) = 1$  pour tout  $h$  dans  $G$  implique  $g = e$  et  $\chi(g, h) = 1$  pour tout  $g$  dans  $G$  implique  $h = e$ .

Si  $\chi$  est un bicaractère symétrique et non-dégénéré sur  $G$  et si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on définit l'orthogonal  $H^\perp$  de  $H$  par  $H^\perp = \{k \in H \mid \chi(k, h) = 1, \forall h \in H\}$ .

**Définition et proposition 1.2.33** ([TY], définition 3.1, proposition 3.4). *Soient  $G$  un groupe abélien fini (on utilise la notation additive),  $\chi$  un bicaractère symétrique non-dégénéré sur  $G$  et  $\beta \in \{-\frac{1}{\sqrt{|G|}}, \frac{1}{\sqrt{|G|}}\}$ . La catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  est la catégorie de fusion sur  $\mathbb{C}$  d'objets simples  $\Omega = G \cup \{m\}$  avec les règles de fusion  $g \otimes h = g + h$ ,  $g \otimes m = m$ ,  $m \otimes g = m$ , pour tous  $g, h$  dans  $G$ , et  $m \otimes m = \bigoplus_{g \in G} g$  et les morphismes d'associativité suivants :*

$$\begin{aligned} a_{g,h,k} &= id_{g+h+k}, \\ a_{g,h,m} &= id_m, \\ a_{m,g,h} &= id_m, \\ a_{g,m,h} &= \chi(g, h)id_m, \\ a_{g,m,m} &= \bigoplus_{h \in G} id_h, \\ a_{m,m,g} &= \bigoplus_{h \in G} id_h, \\ a_{m,g,m} &= \bigoplus_{h \in G} \chi(g, h)id_h, \\ a_{m,m,m} &= (\beta\chi(g, h)^{-1}id_m)_{g,h}, \end{aligned}$$

pour tous  $g, h, k$  dans  $G$ . Les morphismes unité sont triviaux. Les duaux à gauche et à droite d'un élément du groupe  $g$  dans  $G$  sont égaux à  $g^{-1}$  avec les morphismes identité et le dual à gauche et à droite de  $m$  est  $m$  avec  $i_m = i'_m : 0 \mapsto m \otimes m$  l'injection canonique et  $e_m = e'_m = \frac{1}{\beta} p_m$  où  $p_m : m \otimes m \mapsto 0$  est la projection canonique (ici  $0$  est l'objet simple de la catégorie correspondant à l'élément neutre du groupe et non l'objet nul de la catégorie).

Les catégories de Tambara-Yamagami possèdent une décomposition en somme directe de catégories semi-simples qui nous servira pour calculer leurs catégories de module. Donnons d'abord une définition.

**Définition 1.2.34** ([ENO], 5.9). *Soit  $\Lambda$  un groupe fini d'unité  $e$  et  $\mathcal{C}$  une catégorie de fusion. On dit que  $\mathcal{C}$  est  $\Lambda$ -graduée si  $\mathcal{C} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$  où les  $\mathcal{C}_\lambda$ ,  $\lambda$  dans  $\Lambda$ , sont des sous-catégories semi-simples pleines de  $\mathcal{C}$  telles que  $\mathbf{1}$  appartient à  $\mathcal{C}_e$ , le produit tensoriel envoie  $\mathcal{C}_\lambda \times \mathcal{C}_\mu$  dans  $\mathcal{C}_{\lambda\mu}$  et telles que si  $X$  dans  $\mathcal{C}_\lambda$  alors  $X^*$  et  $*X$  appartiennent à  $\mathcal{C}_{\lambda^{-1}}$ . On dit que  $\mathcal{C}$  est fidèlement graduée si  $\mathcal{C}_\lambda \neq 0$  pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ .*

**Lemme 1.2.35.** *Les catégories de Tambara-Yamagami sont des catégories fidèlement  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduées,  $\mathcal{C}_0$  est la catégorie squelette  $\text{Vect}_G$  et  $\mathcal{C}_1 = \langle m \rangle$ , la catégorie semi-simple engendrée par  $m$  ( $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est ici noté additivement).*

## 1.3 Lien entre les algèbres de Hopf faibles et les catégories de fusion.

### 1.3.1 La catégorie des représentations d'une algèbre de Hopf faible.

Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible. On note  $\text{Rep}(B)$  la catégorie des représentations de  $B$ , c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les  $B$ -modules de dimension finie et dont les morphismes sont les morphismes de  $B$ -modules. Nous définissons une structure de catégorie monoïdale sur  $\text{Rep}(B)$  par le bifoncteur  $\otimes : \text{Rep}(B) \times \text{Rep}(B) \rightarrow \text{Rep}(B)$  par  $X \otimes Y = \Delta(1)(X \otimes_k Y)$  pour tous  $X, Y$  dans  $\text{Rep}(B)$ .

Les morphismes d'associativité sont alors le changement de parenthèses, c'est-à-dire l'application  $a_{X,Y,Z}$  de  $(X \otimes Y) \otimes Z$  vers  $X \otimes (Y \otimes Z)$  définie par  $a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$  pour tous  $X, Y, Z$  dans  $\text{Rep}(B)$ ,  $x$  dans  $X$ ,  $y$  dans  $Y$  et  $z$  dans  $Z$ .

L'objet unité est le  $B$ -module  $B_t$ . On définit les applications  $l_X$  de  $B_t \otimes X$  vers  $X$  et  $r_X$  de  $X \otimes B_t$  vers  $X$  par

$$l_X(\Delta(1)(z \otimes x)) = z.x \quad \text{et} \quad r_X(\Delta(1)(x \otimes z)) = S(z).x$$

pour tous  $X$  dans  $\text{Rep}(B)$ ,  $z$  dans  $B_t$  et  $x$  dans  $X$ .

On définit maintenant une structure de catégorie rigide sur  $\text{Rep}(B)$ . Soit  $X$  dans  $\text{Rep}(B)$ , on note  $X^*$  l'espace vectoriel dual  $\text{Hom}(X, k)$  de  $X$  muni de la structure de  $B$ -module définie par  $(b.\varphi)(x) = \varphi(S(b).x)$  pour tous  $b$  dans  $B$ ,  $\varphi$  dans  $X^*$  et  $x$  dans  $X$ , et  $*X$  l'espace vectoriel dual de  $X$  muni de la structure de  $B$ -module définie par  $(b.\varphi)(x) = \varphi(S^{-1}(b).x)$  pour tous  $b$  dans  $B$ ,  $\varphi$  dans  $X^*$  et  $x$  dans  $X$ .

Soient  $E$  et  $E^* = \{x^* | x \in E\}$  des bases duales respectivement de  $X$  et de  $\text{Hom}(X, k)$ . On définit les applications  $e_X : X^* \otimes X \rightarrow B_t$  et  $i_X : B_t \rightarrow X \otimes X^*$  par

$$e_X(\varphi \otimes x) = \varphi(1_{(1)}.x)1_{(2)} \quad \text{et} \quad i_X(z) = z. \left( \sum_{x \in E} x \otimes x^* \right),$$

et les applications  $e'_X : X \otimes X^* \rightarrow \mathbf{1}$  et  $i'_X : \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$  par

$$e'_X(x \otimes \varphi) = \varphi(1_{(2)}.x)\varepsilon_t(1_{(1)}) \quad \text{et} \quad i'_X(z) = S(z). \left( \sum_{x \in E} x^* \otimes x \right),$$

pour tous  $x$  dans  $X$ ,  $\varphi$  dans  $X^*$  et  $z$  dans  $B_t$ .

**Proposition 1.3.1** ([BSz] 2.1, 2.2, [NTV], propositions 4.1 et 4.2). *La catégorie  $\text{Rep}(B)$  munie du produit tensoriel  $\otimes$  d'unité  $B_t$ , des morphismes d'associativité  $a_{X,Y,Z}$ , pour tous  $X, Y, Z$  dans  $\text{Rep}(B)$ , des morphismes unité  $l_X$  et  $r_X$  et des dualités à gauche et à droite  $(X^*, e_X, i_X)$  et  $(*X, e'_X, i'_X)$  pour tout  $X$  dans  $\text{Rep}(B)$  est une catégorie monoïdale et rigide.*

Pour que la catégorie des représentations de  $B$  soit une catégorie de fusion, nous devons ajouter des hypothèses sur  $B$ . On obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 1.3.2.** *Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible semi-simple et connexe. La catégorie  $\text{Rep}(B)$  est une catégorie de fusion.*

La semi-simplicité provient de la semi-simplicité de  $B$ . Comme  $B$  est connexe, d'après la proposition 1.1.15,  $B_t$  est un  $B$ -module simple.

### 1.3.2 Théorème de reconstruction.

Nous énonçons maintenant le théorème de reconstruction de type tanakienne pour les catégories de fusion. Nous avons besoin de la structure monoïdale de la catégorie des bimodules sur une algèbre.

**Définition et proposition 1.3.3.** *Soit  $R$  une  $k$ -algèbre (de dimension finie). On note  $R\text{-Bimod}$  la catégories dont les objets sont les  $R$ -bimodules de dimension finie et dont les morphismes sont les morphismes de  $R$ -bimodules. La catégorie  $R\text{-Bimod}$  est monoïdale pour le produit tensoriel au-dessus de  $R$ , d'unité  $R$ .*

**Théorème 1.3.4** ([Sz], [CE], 2.3.2). *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de fusion et  $R$  une algèbre semi-simple (de dimension finie). On note  $\Omega$  l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de  $\mathcal{C}$ . On suppose qu'il existe un foncteur  $k$ -linéaire et monoïdal  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow R\text{-Bimod}$ .*

On pose  $B = \text{End}_k(\mathcal{F}) = \bigoplus_{x \in \Omega} \text{End}_k(\mathcal{F}(x))$ . On définit les inclusions  $s : R \rightarrow B$  et  $t : R \rightarrow B$  compatibles respectivement avec les actions à droite et à gauche de  $R$ , c'est-à-dire  $s(r)b = b.r$  et  $t(r)b = r.b$  pour tous  $r$  dans  $R$  et  $b$  dans  $B$  et on note  $J = \bigoplus_{x,y \in \Omega} \mathcal{F}_{x,y}$  la somme directe des isomorphismes fonctoriels  $\mathcal{F}_{x,y} : \mathcal{F}(x \otimes y) \rightarrow \mathcal{F}(x) \otimes \mathcal{F}(y)$  pour tous  $x, y$  dans  $\Omega$ .

Alors, l'algèbre  $B$  possède une structure d'algèbre de Hopf faible semi-simple régulière et connexe dont le coproduit est donné par

$$\Delta(b) = \sum_{i \in I} (s(r_i) \otimes t(p_i)) J \circ b \circ J^{-1}$$

pour tout  $b$  dans  $B$ , où  $\sum_{i \in I} r_i \otimes p_i$  est l'élément de séparabilité symétrique de  $R$  (définition 1.1.7).

On a

$$\Delta(1) = \sum_{i \in I} s(r_i) \otimes t(p_i)$$

et les sous-algèbres co-unitales but et source ont pour bases respectives les ensembles  $\{t(p_i), i \in I\}$  et  $\{s(r_i), i \in I\}$ .

De plus, les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\text{Rep}(B)$  sont équivalentes en tant que catégories de fusion.

**Remarque.** Nous ne donnons pas de formules pour la co-unité et l'antipode de  $B$ . Nous utiliserons les axiomes des algèbres de Hopf faibles pour les calculer.

Bien qu'une catégorie de fusion  $\mathcal{C}$  puisse être réalisée par plusieurs algèbres de Hopf faibles, il existe une algèbre semi-simple  $R$  et un foncteur monoïdal  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow R\text{-Bimod}$  canoniques.

**Définition et proposition 1.3.5** ([H]). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de fusion,  $\Omega$  un ensemble de représentants de ses classes d'isomorphisme d'objets simples et  $R = \bigoplus_{x \in \Omega} kp_x$  où  $p_x p_y = \delta_{x,y} p_x$ ,

pour  $x, y$  dans  $\Omega$ . Le foncteur de Hayashi  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow R\text{-Bimod}$  est défini de la manière suivante :

(i)  $\mathcal{F}(x) = \bigoplus_{y, z \in \Omega} \text{Hom}(z, y \otimes x)$ , pour tout  $x$  dans  $\mathcal{C}$  et la structure de  $R$ -bimodule est donnée par

$$p_y \cdot \mathcal{F}(x) \cdot p_z = \text{Hom}(z, y \otimes x), \quad \forall (x, y) \in \Omega^2;$$

(ii) si  $x, y$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}(f)(\varphi) = (id_z \otimes f) \circ \varphi$ , pour tous  $f$  dans  $\text{Hom}(x, y)$ ,  $z, t$  dans  $\Omega$  et  $\varphi$  dans  $p_z \cdot \mathcal{F}(x) \cdot p_t$ ;

(iii) si  $x, y$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}_{x,y}^{-1} : \mathcal{F}(x) \otimes \mathcal{F}(y) \rightarrow \mathcal{F}(x \otimes y)$  est donné par

$$\mathcal{F}_{x,y}(\varphi \otimes \psi) = a_{z,x,y} \circ (\varphi \otimes id_y) \circ \psi,$$

pour tous  $\varphi$  dans  $p_z \cdot \mathcal{F}(x) \cdot p_t$ ,  $\psi$  dans  $p_t \cdot \mathcal{F}(y) \cdot p_s$ ,  $z, s, t$  dans  $\Omega$ ;

(iv)  $\mathcal{F}_1^{-1} : R \rightarrow \mathcal{F}(1)$  défini par  $\mathcal{F}_1^{-1}(p_x) = r_x^{-1}$ , pour tout  $x$  dans  $\Omega$ .

Le foncteur de Hayashi est un foncteur monoïdal.

Nous utiliserons ce foncteur pour construire les algèbres de Hopf faibles réalisant les catégories de Tambara-Yamagami.

### 1.3.3 Catégories de module.

**Définition 1.3.6** ([O1]). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie monoïdale. Une catégorie  $\mathcal{M}$  est une catégorie de module sur  $\mathcal{C}$  s'il existe un bifoncteur  $\otimes$  de  $\mathcal{C} \times \mathcal{M}$  vers  $\mathcal{M}$  et des isomorphismes fonctoriels  $\mu_{X,Y,V} : (X \otimes Y) \otimes V \rightarrow X \otimes (Y \otimes V)$  et  $\lambda_V : \mathbf{1} \otimes V \rightarrow V$  pour tous  $X, Y$  dans  $\mathcal{C}$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}$  vérifiant les conditions du pentagone et du triangle, c'est-à-dire tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
& ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes V & \\
& \swarrow a_{X,Y,Z} \otimes id & \searrow \mu_{X \otimes Y, Z, V} \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes V & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes V) \\
\downarrow \mu_{X, Y \otimes Z, V} & & \downarrow \mu_{X, Y, Z \otimes V} \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes V) & \xrightarrow{id \otimes \mu_{Y, Z, V}} & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes V))
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes V & \xrightarrow{\mu_{X, \mathbf{1}, V}} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes V) \\
& \searrow r_X \otimes id & \swarrow id \otimes \lambda_V \\
& X \otimes V &
\end{array}$$

commutent pour tous  $X, Y, Z$  dans  $\mathcal{C}$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}$ .

Une sous-catégorie de module de  $\mathcal{M}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}$  qui est une catégorie de module pour la structure héritée de  $\mathcal{M}$ .

Les foncteurs respectant la structure de catégorie de module sont les foncteurs de module :

**Définition 1.3.7** ([O1]). Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux catégories de module sur une catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$ . Un foncteur  $\mathcal{G} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  est dit de module s'il existe des isomorphismes fonctoriels  $\mathcal{G}_{X,V} : \mathcal{G}(X \otimes V) \rightarrow X \otimes \mathcal{G}(V)$  pour tous  $X$  dans  $\mathcal{C}$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}$  tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{G}((X \otimes Y) \otimes V) & \\
& \swarrow \mathcal{G}(\mu_{X,Y,V}) & \searrow \mathcal{G}_{X \otimes Y, V} \\
\mathcal{G}(X \otimes (Y \otimes V)) & & (X \otimes Y) \otimes \mathcal{G}(V) \\
\downarrow \mathcal{G}_{X, Y \otimes V} & & \downarrow \mu_{X, Y, V} \\
X \otimes \mathcal{G}(Y \otimes V) & \xrightarrow{id \otimes \mathcal{G}_{Y, V}} & X \otimes (Y \otimes \mathcal{G}(V))
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}(\mathbf{1} \otimes V) & \xrightarrow{\mathcal{G}(\lambda_V)} & \mathcal{G}(V) \\
& \searrow \mathcal{G}_{\mathbf{1}, V} & \swarrow \lambda_{\mathcal{G}(V)} \\
& \mathbf{1} \otimes \mathcal{G}(V) &
\end{array}$$

commutent pour tous  $X, Y$  dans  $\mathcal{C}$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}$ .

Une équivalence de catégories de module est un foncteur de module qui est aussi une équivalence de catégories.

On suppose maintenant que  $\mathcal{C}$  est une catégorie de fusion. On ne considère dans ce cas que des catégories de module semi-simples sur  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire des catégories semi-simples en tant que catégories telles que le bifoncteur  $\mathcal{F}$  soit  $k$ -bilinéaire sur les espaces de morphismes. La rigidité de  $\mathcal{C}$  nous fournit encore une fois des isomorphismes canoniques.

**Lemme 1.3.8** ([O1]). *Si  $X$  possède un dual à gauche et à droite dans  $\mathcal{C}$ , les  $k$ -espaces vectoriels suivants sont canoniquement isomorphes pour tous  $U, V$  dans  $\mathcal{M}$  :*

$$\text{Hom}(U, X \otimes V) \simeq \text{Hom}(X^* \otimes U, V),$$

$$\text{Hom}(X \otimes U, V) \simeq \text{Hom}(U, {}^*X \otimes V).$$

Nous établissons la proposition suivante qui permet de se restreindre aux catégories de module squelettes :

**Proposition 1.3.9.** *Toute catégorie de module semi-simple finie sur une catégorie de fusion  $\mathcal{C}$  est équivalente à une catégorie de module squelette.*

**Démonstration.** On choisit un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme d'objets simples et on prend comme squelette  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}$  dont les objets sont les sommes directes de ces représentants. On choisit une famille d'isomorphismes  $\theta_V : V \mapsto \mathcal{S}(V)$  pour tout  $V$  dans  $\mathcal{C}$  où  $\mathcal{S}(V)$  est l'unique objet isomorphe à  $V$  appartenant à  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ . Il existe un unique foncteur  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{M}$  vers  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$  telle que ces isomorphismes deviennent fonctoriels. Ce foncteur est une équivalence de catégories ([M]). Mettons la structure de  $\mathcal{C}$ -module sur  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$  suivante :

(i) on définit un bifoncteur  $\otimes_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \times \mathcal{S}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{M})$  par  $X \otimes_{\mathcal{S}} V = \theta_{X \otimes V}(X \otimes V)$  pour tous  $X$  dans  $\mathcal{C}$  et  $V$  dans  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ ,

(ii) l'associativité est définie pour tous  $X, Y$  dans  $\mathcal{C}$  et  $V$  dans  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$  par

$$\mu_{X,Y,V}^{\mathcal{S}} = \theta_{X \otimes (Y \otimes V)} \circ \mu_{X,Y,V} \circ \theta_{(X \otimes Y) \otimes V}^{-1},$$

(iii) le morphisme unité est défini pour tout  $V$  dans  $\mathcal{S}(\mathcal{M})$  par

$$\lambda_V^{\mathcal{S}} = \lambda_V \circ \theta_{\mathbf{1} \otimes V}^{-1}.$$

On définit maintenant une famille d'isomorphismes  $\mathcal{S}_{X,V} : \mathcal{S}(X \otimes V) \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S}(V)$  pour tous  $X$  dans  $\mathcal{C}$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}$  par

$$\mathcal{S}_{X,V} = \theta_{X \otimes \mathcal{S}(V)} \circ (\text{id}_X \otimes \theta_V) \circ \theta_{X \otimes V}^{-1}.$$

Le foncteur  $\mathcal{S}$  munit de cette famille d'isomorphismes est un foncteur de module. La functorialité des isomorphismes  $\mathcal{S}_{X,V}$ ,  $X$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $V$  dans  $\mathcal{M}$  découle de la functorialité des isomorphismes  $\theta_V$ ,  $V$  dans  $\mathcal{M}$ , tandis que la commutativité des diagrammes se réduit pour tous  $X, Y$  dans  $\mathcal{C}$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}$  à

$$(\text{id}_X \otimes (\text{id}_Y \otimes \theta_V)) \circ \mu_{X,Y,V} = \mu_{X,Y,\mathcal{S}(V)} \circ (\text{id}_{X \otimes Y} \otimes \theta_V)$$

et

$$\theta_V \circ \lambda_V = \lambda_{\mathcal{S}(V)} \circ (\text{id}_{\mathbf{1}} \otimes \theta_V),$$

ce qui est vrai par functorialité des isomorphismes d'associativité et unité de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

Nous définissons maintenant les notions de somme directe, d'indécomposabilité et de simplicité pour les catégories de module semi-simples.

**Définition et proposition 1.3.10** ([O1]). *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de fusion.*

(i) *Si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux catégories de module semi-simples sur  $\mathcal{C}$ , leur somme directe en tant que catégories semi-simples est une catégorie de module sur  $\mathcal{C}$  pour la structure de catégorie de module composante par composante.*

(ii) *Une catégorie de module semi-simple sur  $\mathcal{C}$  est dite décomposable si elle est équivalente à la somme directe de deux catégories de module semi-simples non triviales.*

(iii) *Une catégorie de module semi-simple sur  $\mathcal{C}$  est dite simple si elle ne possède pas de sous-catégorie de module (définition 1.3.6) semi-simple non triviale.*

Nous donnons maintenant une démonstration de la propriété suivante énoncée dans l'introduction de [G] :

**Proposition 1.3.11.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de fusion. Une catégorie de module  $\mathcal{M}$  semi-simple finie sur  $\mathcal{C}$  est indécomposable si et seulement si elle est simple.*

**Démonstration.** Supposons que  $\mathcal{M}$  ne soit pas simple, c'est-à-dire qu'il existe  $\mathcal{M}_0$  une sous-catégorie de module semi-simple de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{C}$  non-triviale. On choisit un squelette  $\mathcal{M}'_0$  de  $\mathcal{M}_0$  comme dans la proposition 1.2.20. D'après la proposition précédente,  $\mathcal{M}'_0$  est une catégorie de module sur  $\mathcal{C}$  équivalente à  $\mathcal{M}_0$ . Il existe alors une sous-catégorie semi-simple squelette  $\mathcal{M}_1$  de  $\mathcal{M}$ , telle que  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'_0 \oplus \mathcal{M}_1$ . Soit  $V$  dans  $\mathcal{M}_1$ . D'après le lemme 1.3.8,  $\text{Hom}(U, X \otimes V)$  est isomorphe à  $\text{Hom}(X^* \otimes U, V)$  pour tous  $X$  dans  $\mathcal{C}$  et  $U$  dans  $\mathcal{M}'_0$ . Comme  $\mathcal{M}'_0$  est stable par l'action de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}(U, X \otimes V)$  est réduit à  $\{0\}$  pour tout  $X$  dans  $\mathcal{C}$  et  $U$  dans  $\mathcal{M}'_0$ . Ainsi  $\mathcal{M}_1$  est stable par l'action de  $\mathcal{C}$ . En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1.3.9, on peut munir  $\mathcal{M}_1$  d'une structure de catégorie de module sur  $\mathcal{C}$  telle que l'inclusion soit un foncteur de module. L'inclusion de  $\mathcal{M}'_0 \oplus \mathcal{M}_1$  dans  $\mathcal{M}$  est alors une équivalence de catégories de module.

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{M}$  soit décomposable, c'est-à-dire qu'il existe deux catégories de module semi-simples  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_1$  sur  $\mathcal{C}$  non triviales et une équivalence  $k$ -linéaire de catégories de module  $\mathcal{F} : \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}$ . Comme  $\mathcal{F}$  est une équivalence de catégories,  $\mathcal{F}$  est bijectif sur les espaces de morphismes et  $\mathcal{F}(\mathcal{M}_1)$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ . La catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{M}_1)$  est donc une sous-catégorie de module semi-simple de  $\mathcal{M}$  non propre et non triviale.  $\square$

Nous donnons quelques exemples de catégories de module. L'exemple 2 est la classification complète des catégories de modules simples sur  $\text{Vect}_G$  où  $G$  est un groupe abélien fini. Elle nous servira de point de départ pour calculer des catégories de module sur les catégories de Tambara-Yamagami.

**Exemples 1.3.12.** 1) Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie de fusion, alors  $\mathcal{C}$  est une catégorie de module sur elle-même via son produit tensoriel et ses morphismes structurels.

2) ([Na]) Soit  $G$  un groupe abélien fini (noté additivement). Si  $A$  est un groupe abélien (noté multiplicativement) sur lequel  $G$  agit, un 2-cocycle sur  $G$  à valeur dans  $A$  est une application  $\mu$  de  $G \times G$  dans  $A$  vérifiant  $[g.\mu(h, k)]\mu(g, h + k) = \mu(g, h)\mu(g + h, k)$  pour tous  $g, h, k$  dans  $G$ . L'ensemble des 2-cocycles sur  $G$  à valeurs dans  $A$  est un groupe noté  $Z^2(G, A)$ .

Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $\{u(M) | M \in G/H\}$  un ensemble de représentants des classes de  $G/H$  tel que  $u(H) = 1$  et on pose  $\kappa_{g, M} = u(g + M) - u(M) - g$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ . On munit  $\mathbb{C}^*$  de l'action triviale de  $G$ , c'est-à-dire  $g.\lambda = \lambda$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^*$  et le groupe  $\text{Fon}(G/H, \mathbb{C}^*)$  de l'action de  $G$  définie par  $g.\varphi(M) = \varphi(g + M)$  pour tous  $g$  dans  $G$ ,  $\varphi$  dans  $\text{Fon}(G/H, \mathbb{C}^*)$  et  $M$  dans  $G/H$ . L'application de  $Z^2(H, \mathbb{C}^*)$  vers  $Z^2(G, \text{Fon}(G/H, \mathbb{C}^*))$  qui

à  $\eta$  associe  $\mu$  défini par  $\mu(g, g')(M) = \eta(\kappa_{g, g'+M}, \kappa_{g', M})$ , pour tous  $g, g'$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ , est un isomorphisme de groupes.

Soit  $\eta$  un 2-cocycle sur  $H$ . On définit une catégorie de module  $\mathcal{M}(H, \eta)$  sur  $\text{Vect}_G$ . Ses objets simples sont les classes  $M$  dans  $G/H$  et les morphismes d'associativité sont donnés par

$$\mu_{g, g', M} = \mu(g, g')(M)\text{id}_{g+g'+M},$$

où  $\mu$  est l'image de  $\eta$  via l'isomorphisme précédent, pour tous  $g, g'$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ . Deux catégories  $\mathcal{M}(H, \eta)$  et  $\mathcal{M}(H', \eta')$  sont équivalentes en tant que catégories de module si et seulement si  $H = H'$  et  $\eta$  est cohomologue à  $\eta'$ . Les catégories de module simples sur la catégorie squelette  $\text{Vect}_G$  sont classifiées par les paires  $(H, \eta)$  où  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et  $\eta$  est un 2-cocycle sur  $H$ .

3) Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie de fusion  $\Lambda$ -graduée, alors  $\mathcal{C}_\lambda$  est une catégorie de module semi-simple finie sur  $\mathcal{C}_e$  pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ .

## 1.4 $C^*$ -algèbres de Hopf faibles.

### 1.4.1 Définition, premières propriétés dues à l'involution.

**Définition et proposition 1.4.1.** *Une  $C^*$ -algèbre  $B$  est une algèbre de Banach involutive telle que  $\|x^*x\| = \|x\|^2$  pour tout  $x$  dans  $B$ .*

Nous complétons maintenant la définition 1.1.2 dans le cadre des  $C^*$ -algèbres.

**Définition 1.4.2** ([BNSz], 4.1). *Une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible (de dimension finie) est une algèbre de Hopf faible (de dimension finie)  $B$  sur  $\mathbb{C}$  telle que  $B$  soit une  $C^*$ -algèbre de dimension finie et que l'involution commute avec le coproduit, c'est-à-dire  $(* \otimes *) \circ \Delta = \Delta \circ *$ .*

*Un morphisme  $\varphi$  de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles est un morphisme d'algèbres de Hopf faibles tel que  $\varphi(b^*) = \varphi(b)^*$  pour tout  $b$  dans  $B$ .*

D'après la proposition 1.1.3, l'espace vectoriel dual d'une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible possède une structure d'algèbre de Hopf faible. En fait, on peut le munir d'une involution :

**Proposition 1.4.3** ([BNSz], 4.1). *Si  $B$  est une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible, alors son algèbre de Hopf faible duale  $\widehat{B}$  munie de l'involution définie par*

$$\langle \varphi^*, b \rangle = \overline{\langle \varphi, S(b)^* \rangle},$$

*est une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible. On l'appelle la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible duale de  $B$ . L'isomorphisme usuel  $\widehat{\widehat{B}} \simeq B$  est un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles.*

**Proposition 1.4.4** ([BNSz], 4.1). *Si  $B$  est une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible, alors les sous-algèbres co-unitalles  $B_t$  et  $B_s$  sont des sous- $C^*$ -algèbres de  $B$ .*

### 1.4.2 Projection de Haar, mesure de Haar, espérances conditionnelles de Haar.

Nos rappelons les notions d'application linéaire positive, de forme linéaire fidèle, d'automorphisme modulaire et d'espérance conditionnelle.



**Définition 1.4.5.** Soient  $A$  et  $B$  deux  $C^*$ -algèbres.

Une application linéaire  $\varphi : A \longrightarrow B$  est dite positive si  $\varphi(a)$  est un élément positif de  $B$  pour tout élément  $a$  positif de  $A$ .

Une forme linéaire  $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{C}$  est dite fidèle si  $\varphi(ab) = 0$  pour tout  $b$  dans  $B$  implique  $a = 0$ . Si  $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{C}$  est une forme linéaire fidèle, on définit son automorphisme modulaire  $\theta_\varphi : B \longrightarrow B$  par  $\varphi(ab) = \varphi(b\theta_\varphi(a))$  pour tous  $a, b$  dans  $B$ .

Si  $A$  est incluse dans  $B$ , on appelle espérance conditionnelle une application linéaire positive  $E : B \longrightarrow A$  qui est un morphisme de  $A$ -bimodules tel que  $E(a) = a$  pour tout  $a$  dans  $A$ .

**Proposition 1.4.6** ([BNSz], 4.2). Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible. Il existe une unique projection  $p$  dans  $B$  appelée projection de Haar telle que  $S(p) = p$  et vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

$$(i) \quad bp = \varepsilon_t(b)p, \quad \forall b \in B \text{ et } \varepsilon_t(p) = 1,$$

$$(ii) \quad pb = p\varepsilon_s(b), \quad \forall b \in B \text{ et } \varepsilon_s(p) = 1.$$

Il existe une unique forme linéaire positive  $\phi$  sur  $B$  appelée mesure de Haar normalisée vérifiant  $\phi \circ S = \phi$  et les conditions équivalentes suivantes :

$$(i) \quad (id \otimes \phi)\Delta = (\varepsilon_t \otimes \phi)\Delta \quad \text{et} \quad \phi \circ \varepsilon_t = \varepsilon,$$

$$(ii) \quad (\phi \otimes id)\Delta = (\phi \otimes \varepsilon_s)\Delta \quad \text{et} \quad \phi \circ \varepsilon_s = \varepsilon.$$

Il existe deux espérances conditionnelles  $E_t : B \longrightarrow B_t$  et  $E_s : B \longrightarrow B_s$  vérifiant la condition  $\phi \circ E_t = \phi \circ E_s = \phi$  appelées espérances conditionnelles de Haar définies pour tout  $b$  dans  $B$  par :

$$E_t(b) = (id \otimes \phi)\Delta(b), \quad E_s(b) = (\phi \otimes id)\Delta(b).$$

### 1.4.3 Élément de type groupe canonique, automorphisme modulaire.

**Proposition 1.4.7** ([BNSz], 4.3). Toute  $C^*$ -algèbre de Hopf faible  $B$  possède un élément de type groupe (définition 1.1.13)  $Q$  positif et inversible implémentant le carré de l'antipode, c'est-à-dire tel qu'on ait  $S^2(b) = QbQ^{-1}$  pour tout  $b$  dans  $B$ . On l'appelle l'élément de type groupe canonique de  $B$ . Cet élément se décompose en  $Q = E_t(p)^{\frac{1}{2}}E_s(p)^{-\frac{1}{2}}$  où  $p$  est la projection de Haar et  $E_t, E_s$  les espérances conditionnelles de Haar.

**Proposition 1.4.8** ([BNSz], proposition 4.14). L'automorphisme modulaire (définition 1.4.5) de la mesure de Haar sur  $B$  est donné, pour tout  $b$  dans  $B$ , par

$$\theta_\phi(b) = E_t(p)^{\frac{1}{2}}E_s(p)^{\frac{1}{2}}bE_s(p)^{-\frac{1}{2}}E_t(p)^{-\frac{1}{2}}.$$

## 1.5 Action d'une $C^*$ -algèbre de Hopf faible.

### 1.5.1 Action sur une algèbre involutive.

Rappelons la définition d'une algèbre de von Neumann.

**Définition 1.5.1.** Une algèbre involutive  $M$  est une algèbre de von Neumann s'il existe un espace de Hilbert  $H$  tel que  $M$  soit contenue dans  $\mathcal{B}(H)$ , non-dégénérée et fermée pour la topologie faible.

**Définition 1.5.2** ([N], 2.2). Soit  $M$  une algèbre involutive. On dit qu'une algèbre de Hopf faible  $B$  agit (à gauche) sur  $M$  s'il existe une structure de  $B$ -module sur  $M$  notée  $\triangleright$  telle que, pour tout  $b$  dans  $B$ , l'on ait :

- (i)  $b \triangleright (xy) = (b_{(1)} \triangleright x)(b_{(2)} \triangleright y)$ ,
- (ii)  $(b \triangleright x)^* = S(b)^* \triangleright x^*$ ,
- (iii)  $b \triangleright 1 = \varepsilon_t(b) \triangleright 1, \forall x, y \in M$ ,
- (iv)  $b \triangleright 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_t(b) = 0, \forall b \in B$ .

Si  $M$  est une algèbre de von Neumann (resp. une  $C^*$ -algèbre), on demande en plus que l'application de  $M$  dans  $M$  définie par  $b \otimes m \mapsto b \triangleright m$  soit faiblement continue (resp. continue pour la norme).

**Proposition 1.5.3** ([N], 2.2). *Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible agissant sur une algèbre involutive  $M$ . La condition*

$$b \triangleright 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_t(b) = 0, \quad \forall b \in B,$$

*est équivalente à la condition  $z \otimes 1 \mapsto z \triangleright 1$  est un isomorphisme de  $B_t$  sur une sous-algèbre de  $M$ . On dit parfois que les actions de ce type sont standard.*

**Exemples 1.5.4** ([N], 2.2). Une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible  $B$  agit sur  $B_t$  via  $b \triangleright z = \varepsilon_t(bz)$  pour tous  $b$  dans  $B$  et  $z$  dans  $B_t$ . Elle agit sur  $\widehat{B}$  via  $b \triangleright \varphi = \varphi_{(1)} \langle \varphi_{(2)}, b \rangle$  pour tous  $b$  dans  $B$  et  $\varphi$  dans  $\widehat{B}$ .

### 1.5.2 Produit croisé.

Lorsque  $B$  agit sur une algèbre involutive  $M$ , nous pouvons construire deux nouvelles algèbres involutives appelées produit croisé de  $M$  par  $B$  et algèbre des points fixes de  $B$  pour l'action de  $B$ .

**Définition et proposition 1.5.5** ([N], 2.2). *Soient  $M$  une algèbre involutive et  $B$  une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible agissant sur  $M$ . Le produit croisé à gauche  $M \rtimes B$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $M \otimes_{B_t} B$  où on identifie  $m(z \triangleright 1) \otimes b$  et  $m \otimes zb$  pour tous  $m$  dans  $M$ ,  $b$  dans  $B$  et  $z$  dans  $B_t$ . Soit  $[m \otimes g]$  la classe de  $m \otimes g$ . On munit le produit croisé d'une structure d'une algèbre involutive en posant pour tous  $a$  et  $b$  dans  $B$  et  $x$  et  $y$  dans  $M$  :*

$$[x \otimes a][y \otimes b] = [x(a_{(1)} \triangleright y) \otimes a_{(2)}b], \quad [x \otimes b]^* = [(b_{(1)}^* \triangleright x^*) \otimes b_{(2)}^*].$$

*L'algèbre des points fixes de  $M$  pour l'action de  $B$  est l'ensemble*

$$M^B = \{x \in M \mid b \triangleright x = \varepsilon_t(b) \triangleright x, \forall b \in B\}.$$

*Lorsque  $M$  est une algèbre de von Neumann (resp. une  $C^*$ -algèbre), le produit croisé  $M \rtimes B$  et l'algèbre des points fixes  $M^B$  sont des algèbres de von Neumann (resp. des  $C^*$ -algèbres).*

**Exemples 1.5.6** ([N], 2.2). Les actions de  $B$  sur  $B_t$  et  $\widehat{B}$  nous permettent de construire les produits croisés  $B_t \rtimes B$  et  $\widehat{B} \rtimes B$ . On a  $B \simeq B_t \rtimes B$  et l'isomorphisme de  $B_t$  vers  $\widehat{B}_s$  qui à  $z$  associe  $z \triangleright \widehat{1}$  (proposition 1.1.6) permet d'identifier les sous-algèbres co-unitales  $\widehat{B}_s$  et  $B_t$  dans  $\widehat{B} \rtimes B$ .

## 1.6 Coïdalgèbres involutives.

**Définition 1.6.1** ([DT], définition 2.2.1). *Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible. Une coïdalgèbre involutive <sup>1</sup> (à gauche) est une sous-algèbre unifère involutive  $I$  de  $B$  telle que  $\Delta(I) \subset B \otimes I$ .*

<sup>1</sup>La terminologie est différente de celle de l'article [DT] où une coïdalgèbre involutive est appelée simplement coïdalgèbre.

Si  $B$  agit sur une algèbre involutive  $M$ , on note

$$M \rtimes I = \text{Vect}\{[x \otimes a] \mid x \in M, a \in I\} \subset M \rtimes B$$

pour toute coïdalgèbre involutive  $I$  de  $B$ .

**Proposition 1.6.2** ([NV1], 3). *Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible. Les coïdalgèbres involutives de  $B$  forment un treillis noté  $l(B)$  pour les opérations  $I \wedge J = I \cap J$  et  $I \vee J = (I \cup J)''$ , où  $(I \cup J)''$  est le bicommutant<sup>2</sup> de  $I \cup J$  dans  $B$ , pour tous  $I, J$  dans  $l(B)$ . Le plus grand élément de  $l(B)$  est  $B$  et le plus petit élément de  $l(B)$  est  $B_t$ .*

**Proposition 1.6.3** ([NV1], proposition 3.3). *Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible. Si  $I$  appartient à  $l(B)$ , alors on pose  $\tilde{I} = Q^{-\frac{1}{2}}S(I)Q^{\frac{1}{2}}$  où  $Q$  est l'élément de type groupe canonique de  $B$  (proposition 1.4.7). L'application  $\delta : I \mapsto \tilde{I}' \cap \widehat{B} \subset \widehat{B} \rtimes B$  est un anti-isomorphisme de treillis de  $l(B)$  vers  $l(\widehat{B})$  et le commutant relatif  $\delta(I)' \cap B$  vu dans  $\widehat{B} \rtimes B$  est égal à  $\tilde{I}$ .*

Les coïdalgèbres involutives connexes (définition 1.1.16) ne forment pas en général un sous-treillis de  $l(B)$ . Néanmoins, nous établissons le lemme suivant :

**Lemme 1.6.4.** *Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre de Hopf régulière (définition 1.1.14) Une coïdalgèbre involutive  $I$  de  $B$  est connexe si et seulement si  $\delta(I)$  est connexe.*

**Démonstration.** Soit  $I$  une  $*$ -coïdalgèbre de  $B$ . Notons que, comme  $B$  est régulière,  $Q$  commute avec les éléments de  $B_t$ . D'après la définition de  $\delta$ , on a

$$\delta(I) \cap \widehat{B}_s = \tilde{I}' \cap \widehat{B}_s = \tilde{I}' \cap B_t$$

car les algèbres  $\widehat{B}_s$  et  $B_t$  sont identifiées dans  $\widehat{B} \rtimes B$  (exemple 1.5.6). De  $\delta(I)' \cap B = \tilde{I}$ , on déduit

$$\begin{aligned} \delta(I)' \cap B \cap \delta(I) \cap \widehat{B}_s &= \tilde{I} \cap \tilde{I}' \cap B_t, \\ \Leftrightarrow Z(\delta(I)) \cap \widehat{B}_s &= Z(\tilde{I}) \cap B_t, \\ \Leftrightarrow Z(\delta(I)) \cap \widehat{B}_s &= Z(Q^{\frac{1}{2}}S(I)Q^{-\frac{1}{2}}) \cap B_t, \\ \Leftrightarrow Z(\delta(I)) \cap \widehat{B}_s &= Z(S(I)) \cap B_t. \end{aligned}$$

Comme  $S$  réalise un isomorphisme entre  $Z(S(I)) \cap B_t$  et  $Z(I) \cap B_s$ , on obtient l'équivalence souhaitée. □

## 1.7 Inclusions d'algèbres semi-simples de dimension finie.

Toute cette partie est tirée du chapitre 2 du livre [GHJ].

**Définition 1.7.1.** *Soient  $N$  une algèbre semi-simple de dimension finie et  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  ses idempotents minimaux centraux, c'est-à-dire tels que la décomposition de  $N$  en somme d'algèbres simples soit  $N = \bigoplus_{i=1}^r Nq_i$ . On dit que  $N$  est de type  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$  si  $Nq_i \simeq M_{n_i}(\mathbb{C})$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ .*

<sup>2</sup>Si  $A$  est un sous-ensemble d'une algèbre  $B$ , le commutant  $A'$  de  $A$  dans  $B$  est  $A' = \{b \in B \mid ab = ba, \forall a \in A\}$ .

**Définition 1.7.2.** Soit  $N \subset M$  une inclusion d'algèbres semi-simples de dimension finie où  $N = \bigoplus_{j=1}^r Nq_j$  est de type  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$  et  $M = \bigoplus_{i=1}^s Mp_i$  est de type  $\bar{m} = (m_1, \dots, m_s)$ . On pose  $M_{i,j} = p_iq_jMp_iq_j$  et  $N_{i,j} = p_iq_jNp_iq_j$  pour tous  $i \in \{1, \dots, s\}$  et  $j \in \{1, \dots, r\}$ .

On appelle matrice d'inclusion et on note  $\Lambda_N^M$ , la matrice de taille  $s \times r$  dont les coefficients sont définis par  $\lambda_{i,j} = 0$  si  $p_iq_j = 0$  et  $\lambda_{i,j} = \left( \frac{\dim(M_{i,j})}{\dim(N_{i,j})} \right)^{\frac{1}{2}}$  sinon, pour tous  $i \in \{1, \dots, s\}$  et  $j \in \{1, \dots, r\}$ . On appelle indice de l'inclusion et note  $[M : N]$  l'élément  $\|\Lambda_N^M\|^2$ .

On appelle diagramme de Bratteli de l'inclusion le multigraphe bipartite pondéré à  $r$  sommets pairs munis des poids  $n_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  et  $s$  sommets impairs munis des poids  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , tel que le  $j$ -ième sommet pair soit relié par  $\lambda_{i,j}$  arêtes au  $i$ -ième sommet impair. Lorsqu'on omet les poids, on appelle ce graphe le diagramme de Bratteli non pondéré.

**Proposition 1.7.3.** Soient  $N_0 \subset M_0$  et  $N_1 \subset M_1$  deux inclusions d'algèbres semi-simples de dimension finie dont les diagrammes de Bratteli pondérés sont égaux. Il existe un isomorphisme d'algèbres  $\theta : M_0 \longrightarrow M_1$  tel que  $\theta(N_0) = N_1$ .

Cette proposition combinée avec le théorème de Skolem-Noether nous donne :

**Corollaire 1.7.4.** Soient  $N_0 \subset M$  et  $N_1 \subset M$  deux inclusions d'algèbres semi-simples de dimension finie dont les diagrammes de Bratteli pondérés sont égaux. Il existe un inversible  $u$  dans  $M$  tel que  $N_1 = uN_0u^{-1}$ .

**Définition et proposition 1.7.5.** Une trace sur une algèbre  $M$  est une forme linéaire sur  $M$  telle que  $\varphi(xy) = \varphi(yx)$  pour tous  $x, y \in M$ . On dit qu'une trace  $\varphi$  est normalisée si  $\varphi(1) = 1$ .

Si la décomposition de  $M$  en somme directe d'algèbres simples est  $M = \bigoplus_{i=1}^r Mp_i \simeq \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(\mathbb{C})$ ,

toute trace  $\varphi$  sur  $M$  est de la forme  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i \text{tr}(x)$  avec  $\varphi_i = \frac{1}{n_i} \varphi(p_i)$ , où  $\text{tr}$  est la trace usuelle sur les algèbres de matrices, c'est-à-dire  $\text{tr}(A) = \sum_j a_{jj}$  si  $A = (a_{j,k})_{j,k}$ .

On la représente par le vecteur trace  $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ .

**Proposition 1.7.6.** Soit  $N \subset M$  une inclusion d'algèbres semi-simples de dimension finie. Si  $\varphi$  est une trace sur  $N$  et  $\psi$  une trace sur  $M$ , alors  $\varphi$  est la restriction de  $\psi$  à  $N$  si et seulement si  $\bar{\varphi} = \bar{\psi} \Lambda_N^M$ .

On peut associer à une inclusion  $N \subset M$ , l'inclusion  $M \subset L = \text{End}_N(M)$  où  $M$  est vu comme  $N$ -module à droite. Cette construction s'appelle la construction de base.

**Proposition 1.7.7.** Soit  $N \subset M$  une inclusion d'algèbres semi-simples de dimension finie et  $L = \text{End}_N(M)$  la construction de base. On a :

(i)  $\Lambda_M^L = (\Lambda_N^M)^t$ ,

(ii)  $[L : M] = [M : N]$ ,

(iii) le diagramme de Bratteli non pondéré de l'inclusion  $M \subset L$  est le symétrique du diagramme de Bratteli non pondéré de l'inclusion  $N \subset M$ .

(iv)  $M$  est incluse dans  $L$  via  $\iota(x)(y) = xy$  pour tous  $x, y$  dans  $M$ .

**Proposition 1.7.8.** *Soient  $N \subset M$  une inclusion d'algèbres semi-simples de dimension finie,  $L = \text{End}_N(M)$  la construction de base et  $\iota : M \longrightarrow L$  l'inclusion de  $M$  dans  $L$  définie précédemment.*

(i) *Si  $\text{tr}$  est une trace sur  $M$  dont la restriction à  $N$  est fidèle, alors il existe une espérance conditionnelle fidèle  $E : M \longrightarrow N$  telle que  $\text{tr} \circ E = \text{tr}$ .*

(ii) *Dans ce cas,  $L$  est engendré en tant qu'espace vectoriel par les éléments de la forme  $\iota(x)E\iota(y)$ ,  $x, y \in M$ .*

Nous pouvons maintenant définir la notion de trace de Markov.

**Définition 1.7.9.** *On se place dans les conditions de la proposition précédente. Une trace  $\text{tr}$  sur  $M$  dont la restriction à  $N$  est fidèle est appelée une trace de Markov de module  $\tau^{-1} \in k$  s'il existe une trace  $\text{Tr}$  sur  $L$  telle qu'on ait, pour tout  $x$  dans  $M$  :*

$$\text{Tr}(\iota(x)) = \text{tr}(x), \quad \text{et} \quad \tau^{-1} \text{Tr}(\iota(x)E) = \text{tr}(x).$$

La proposition suivante permet de calculer explicitement la trace de Markov d'une inclusion.

**Proposition 1.7.10.** *Soient  $N \subset M$  une inclusion d'algèbres semi-simples de dimension finie et  $\Lambda = \Lambda_N^M$  la matrice d'inclusion. On suppose que  $\text{tr}$  est une trace fidèle sur  $M$  de vecteur trace  $\vec{s}$  dont la restriction à  $N$  est fidèle de vecteur trace  $\vec{t}$ , c'est-à-dire qu'on a  $\vec{t} = \vec{s}\Lambda$ . Soit  $\tau \in k$ ,  $\tau \neq 0$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i)  *$\text{tr}$  est une trace de Markov de module  $\tau^{-1}$ ,*

(ii) *on a  $\vec{s}\Lambda\Lambda^t = \tau^{-1}\vec{s}$  et  $\vec{t}\Lambda^t\Lambda = \tau^{-1}\vec{t}$ .*

*De plus, dans le cas  $k = \mathbb{C}$  et  $Z(N) \cap Z(M) = \mathbb{C}$ , il existe une unique trace de Markov normalisée sur  $M$  et elle est de module  $\tau^{-1} = [M : N]$*

## 1.8 Inclusion de facteurs de type $\text{II}_1$ .

### 1.8.1 Propriétés de l'indice, tour de Jones.

**Définition 1.8.1** ([JS], définition 1.4.10). *Un facteur est une algèbre de von Neumann dont le centre est trivial, c'est-à-dire  $M' \cap M = \mathbb{C}$ . Un facteur  $M$  est dit de type  $\text{II}_1$  s'il est de dimension infinie et possède une trace  $\text{tr}$  normale (c'est-à-dire faiblement continue), fidèle, finie (c'est-à-dire  $\varphi(1) < \infty$ ) et normalisée. Si elle existe, cette trace est unique.*

*Un facteur  $M$  de type  $\text{II}_1$  est dit hyperfini s'il existe une suite croissante d'algèbres de dimension finie dont la réunion est faiblement dense dans  $M$ .*

*Si  $M$  un facteur de type  $\text{II}_1$  et  $\text{tr}$  sa trace normale, fidèle, finie et normalisée. On définit un produit scalaire sur  $M$  par  $\langle x, y \rangle = \text{tr}(x^*y)$  pour tous  $x, y$  dans  $M$ . On note  $L^2(M)$  l'espace de Hilbert obtenu par complétion de  $M$  pour ce produit scalaire.*

**Théorème 1.8.2** ([JS], théorème 1.4.11). *Il existe à isomorphisme près un unique facteur hyperfini de type  $\text{II}_1$ .*

De même que pour les inclusions d'algèbres semi-simples de dimension finie, il existe une notion d'indice pour les inclusions de facteurs de type  $\text{II}_1$  (se référer à [GHJ] ou [J]). Nous en donnons quelques propriétés :

**Proposition 1.8.3** ([J], proposition 2.8). *Soit  $N \subset M \subset P$  une inclusion de facteurs de type  $II_1$ .*

*On a les propriétés suivantes :*

- (i)  $[M : N] \geq 1$ ,
- (ii)  $[M : N] = 1 \Leftrightarrow M = N$ ,
- (iii)  $[P : N] = [P : M][M : N]$ .

**Théorème 1.8.4** ([J], théorème 4.3.1). *Soit  $N \subset M$  une inclusion de facteurs de type  $II_1$ . Les valeurs possibles pour l'indice  $[M : N]$  appartiennent à l'ensemble  $\{4\cos^2\frac{\pi}{n}, n \geq 3\} \cup [4, +\infty]$ .*

Lorsque l'indice de l'inclusion  $M_0 \subset M_1$  est fini, l'analogie de la construction de base pour les inclusions d'algèbres semi-simples de dimension finie nous fournit une nouvelle inclusion de facteurs de type  $II_1$ .

**Définition et proposition 1.8.5** ([J], §3, [GHJ]). *Soit  $M_0 \subset M_1$  une inclusion de facteurs de type  $II_1$ . Soit  $e_1$  la projection orthogonale de  $L^2(M)$  sur  $L^2(N)$  en tant que sous-espace vectoriel fermé. L'algèbre de von Neumann  $M_2 = (\text{Vect} \langle M, e_1 \rangle)'' \subset L^2(M)$ , appelée construction de base de  $M_0 \subset M_1$ , est un facteur de type  $II_1$  si et seulement si l'indice  $[M_1 : M_0]$  est fini. Dans ce cas, l'indice  $[M_2 : M_1]$  est égal à l'indice  $[M_1 : M_0]$ .*

*La projection  $e_1$  est appelée projecteur de Jones de l'inclusion  $M_0 \subset M_1$ .*

*La tour de Jones de l'inclusion  $M_0 \subset M_1$  est la tour de facteurs de type  $II_1$  obtenue en répétant la construction de base :*

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

*On a  $[M_{k+1} : M_k] = [M_k : M_{k-1}]$  pour tout  $k \geq 1$ .*

## 1.8.2 Tour dérivée et graphe principal.

**Définition 1.8.6** ([GHJ], définition 4.6.1). *Soit  $M_0 \subset M_1$  une inclusion de facteurs de type  $II_1$  d'indice fini. On appelle tour dérivée de l'inclusion  $M_0 \subset M_1$ , la tour des commutants relatifs :*

$$\mathbb{C} = M'_0 \cap M_0 \subset M'_0 \cap M_1 \subset M'_0 \cap M_2 \subset M'_0 \cap M_3 \subset \dots$$

Le lemme suivant et la multiplicativité de l'indice impliquent que la tour dérivée est une tour d'algèbres semi-simples de dimension finie.

**Lemme 1.8.7** ([GHJ], lemme 3.6.2). *Soit  $N \subset M$  une inclusion de facteurs de type  $II_1$  d'indice fini. On a  $\dim_k(N' \cap M) \leq [M : N]$ .*

Chaque niveau de la tour dérivée étant une inclusion d'algèbres semi-simples de dimension finie, on peut y associer son diagramme de Bratteli. On peut ainsi définir le diagramme de Bratteli de la tour elle-même comme étant le diagramme infini obtenu en mettant bout à bout les diagrammes de Bratteli non pondérés des inclusions successives.

Le théorème 4.6.3 de [GHJ] implique que le diagramme de Bratteli de chaque niveau possède la symétrie du diagramme de Bratteli du niveau précédent. On peut donc définir un nouveau graphe qui oublie à chaque niveau le niveau précédent et regarder ses propriétés, notamment de finitude.

**Définition 1.8.8** ([GHJ], définition 4.6.5). *Le graphe principal de l'inclusion  $M_0 \subset M_1$  est le graphe obtenu à partir du diagramme de Bratteli de la tour dérivée en enlevant à chaque niveau le*

symétrique du diagramme de Bratteli du niveau précédent. L'unique point du niveau 0 est appelé point étoilé. On dit que l'inclusion est de profondeur finie lorsque le graphe principal est fini, la profondeur étant le dernier niveau atteint, c'est-à-dire la distance maximale entre un point et le point étoilé.

### 1.8.3 Correspondance de Galois.

**Théorème 1.8.9** ([NV] 6, [D], 3.8). *Soit  $M_0 \subset M_1$  une inclusion de facteurs de type  $II_1$  de profondeur 2 et d'indice fini et*

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

la tour de Jones correspondante. Les commutants relatifs  $A = M'_0 \cap M_2$  et  $B = M'_1 \cap M_3$  possèdent des structures de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles biconnexes et régulières duales l'une de l'autre, avec  $B_t = A_s = M'_1 \cap M_2$ ,  $A_t = M'_0 \cap M_1$  et  $B_s = M'_2 \cap M_3$ . De plus,  $B$  agit sur  $M_2$  (resp.  $A$  agit sur  $M_1$ ) et on a  $M_1 = M_2^B$  et  $M_3 = M_2 \rtimes B$  (resp.  $M_0 = M_1^A$  et  $M_2 = M_1 \rtimes A$ ).

L'inclusion  $B_t \subset B$  admet une unique trace de Markov normalisée  $tr$  de module  $\tau^{-1}$ . Le graphe principal de l'inclusion  $M_1 \subset M_2$  est donné par le diagramme de Bratteli de l'inclusion  $B_t \subset B$  et l'indice  $\tau^{-1} = [M_1 : M_0]$  est égal à l'indice  $[B : B_t]$ .

Des formules explicites sont données pour la structure de  $A$  et de  $B$  dans [NV] et [D] avec des dualités différentes, la deuxième respectant l'involution sur  $B$  héritée des facteurs.

**Remarque.** Si l'inclusion  $M_0 \subset M_1$  est irréductible, c'est-à-dire si elle vérifie  $M_0 \cap M'_1 = \mathbb{C}$ , les commutants relatifs  $A$  et  $B$  sont des algèbres de Kac.

On peut calculer la mesure de Haar sur  $B$ , son automorphisme modulaire et l'élément de type groupe canonique de  $B$  à partir de la trace de Markov de l'inclusion  $B_t \subset B$ .

**Proposition 1.8.10** ([NV] corollaire 4.7, [NV1], 2, [D], 3.2). *Soit  $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$  le vecteur trace de la trace de Markov sur  $B$  et  $\vec{t} = (t_1, \dots, t_m)$  le vecteur trace de sa restriction sur  $B_t$ . On note  $e_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  les projections centrales minimales de  $B_t$  et  $d_i$  la dimension du bloc  $B_t e_i$ . On pose  $q = \sum_{i=1}^m t_i^{-\frac{1}{2}} d_i^{\frac{1}{2}} e_i$ . Alors :*

(i) *L'élément de type groupe canonique de  $B$  est  $Q = q^2 S(q^{-2})$ .*

(ii) *La mesure de Haar sur  $B$  est donnée par  $\phi(b) = \frac{1}{\dim(B_t)} \text{tr}(q^2 S(q^2) b)$  pour tout  $b$  dans  $B$ .*

(ii) *L'automorphisme modulaire de la mesure de Haar sur  $B$  est donné, pour tout  $b$  dans  $B$ , par*

$$\theta_\phi(b) = q^2 S(q^2) b S(q^{-2}) q^{-2}.$$

Le théorème 1.8.9 permet d'associer à une inclusion de profondeur 2 et d'indice fini donnée deux algèbres de Hopf faibles biconnexes et régulières en dualité. Le théorème suivant montre que, réciproquement, tout couple d'algèbres de Hopf biconnexes et régulières en dualité permet de construire une telle inclusion.

**Théorème 1.8.11** ([D], annexe A). *Soient  $A$  et  $B$  deux  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles biconnexes et régulières duales l'une de l'autre. On peut construire une tour de Jones de facteurs hyperfinis de*

type  $II_1$  (définition 1.8.1) d'indice fini et de profondeur 2

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3$$

telle que  $A = M'_0 \cap M_2$ ,  $B = M_1 \cap M_3$ ,  $M_2^B = M_1$ ,  $M_2 \rtimes B = M_3$ ,  $M_1^A = M_0$  et  $M \rtimes A = M_2$ . De plus, les structures d'algèbres de Hopf faibles sur  $A$  et  $B$  obtenues en appliquant à cette tour de Jones le théorème 1.8.9 coïncident avec les structures initiales.

Le théorème suivant énonce la correspondance de Galois :

**Théorème 1.8.12** ([NV1], théorème 4.3). *Soient  $M_0 \subset M_1$  une inclusion de facteurs de type  $II_1$  d'indice fini et de profondeur 2,*

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

la tour de Jones correspondante et  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible agissant sur  $M_2$  telle que  $M_1 = M_2^B$  et  $M_3 = M_1 \rtimes B$ . On note  $l(M_2 \subset M_3)$  le treillis des algèbres de von Neumann intermédiaires de l'inclusion  $M_2 \subset M_3$ . Les treillis  $l(B)$  et  $l(M_2 \subset M_3)$  sont isomorphes. Plus précisément, si  $M$  appartient à  $l(M_2 \subset M_3)$ , alors  $I = M'_1 \cap M$  est une coïdalgèbre involutive de  $B$ . Réciproquement, si  $I$  est une coïdalgèbre involutive de  $B$ , alors  $M = M_2 \rtimes I$  est une algèbre de von Neumann intermédiaire de  $M_2 \subset M_3$ . De plus,  $M$  est un facteur si et seulement si  $I$  est connexe.

Les deux propositions suivantes nous permettent de calculer les indices des facteurs intermédiaires associés aux coïdalgèbres involutives connexes.

**Définition et proposition 1.8.13** ([DT] proposition 2.3.2, [NV1], proposition 4.7). *Soit  $I$  une coïdalgèbre involutive de  $B$ . On note  $\tau_I$  l'inverse de l'indice de l'inclusion  $M_2 \subset M_2 \rtimes I$ , c'est-à-dire  $\tau_I^{-1} = [M_2 \rtimes I : M_2]$ , et  $x_I$  l'unique élément positif de  $I$  tel que  $\varepsilon(a) = \text{tr}(x_I a)$  pour tout  $a$  dans  $I$ . On appelle projecteur de Jones de  $I$  la projection définie par :*

$$p_I = \tau_I q^{-1} x_I q^{-1}.$$

L'inverse  $\tau_I$  de l'indice  $[M_2 \rtimes I : M_2]$  est l'unique constante  $\lambda_I \in \mathbb{C}$  telle que  $\lambda_I q^{-1} x_I q^{-1}$  soit une projection et on a  $\text{tr}(p_I) = \tau_I$ .

Lorsque  $I = B$ , on a

$$p_B = \frac{1}{[B : B_t]} q^{-1} x_B q^{-1}.$$

**Proposition 1.8.14** ([DT], proposition 2.4.2). *Si  $I$  est une  $*$ -coïdalgèbre involutive connexe de  $B$ , alors :*

- (i)  $M_1 \rtimes \delta(I) \subset M_2 \subset M_2 \rtimes I$  est la construction de base,
- (ii)  $[M_1 \rtimes \delta(I) : M_1][M_2 \rtimes I : M_2] = [M_2 \rtimes B : M_2]$ .

Nous donnons pour finir cette proposition qui permet de décrire les graphes principaux des facteurs intermédiaires à partir de diagrammes de Bratteli (non pondérés).

**Proposition 1.8.15** ([NV1], proposition 5.9). *Soit  $I$  une coïdalgèbre involutive connexe de  $B$ . Le graphe principal de l'inclusion  $M_2 \subset M_2 \rtimes I$  est la composante connexe du diagramme de Bratteli non pondéré de l'inclusion  $\delta(I) \subset \widehat{B}$  contenant la représentation triviale de  $\widehat{B}$ . Cette représentation en est le point étoilé.*





## Chapitre 2

# Algèbres de Hopf faibles associées aux catégories de Tambara-Yamagami.

Ce chapitre est consacré à la construction et à l'étude d'une famille d'exemples de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles de dimension finie. En utilisant le théorème de reconstruction, nous allons associer à chaque catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible  $B$  telle que  $\text{Rep}(B) \simeq \mathcal{C}$  en tant que catégories de fusion. Nous en calculerons toute la structure et étudierons l'inclusion  $B_t \subset B$ . Nous donnerons un isomorphisme explicite entre  $B$  et  $\widehat{B}$  qui nous permettra de calculer deux familles de coïdalgèbres involutives connexes.

### 2.1 Application du théorème de reconstruction aux catégories de Tambara-Yamagami.

Soit  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  une catégorie de Tambara-Yamagami (définition 1.2.33),  $n = |G|$ . On note  $\Omega = G \cup \{m\}$  l'ensemble de ses objets simples,  $R$  l'algèbre engendrée par les éléments  $\{p_x, x \in \Omega\}$  dont le produit est défini par  $p_x p_y = \delta_{x,y} p_x$  pour tous  $x, y$  dans  $\Omega$  et  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow R$  - Bimod le foncteur de Hayashi (définition 1.3.5).

#### 2.1.1 Structure d'algèbre de $B$ et inclusion $B_t \subset B$ .

**Structure d'algèbre.**

**Proposition 2.1.1.** *Soit  $B$  l'algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . La décomposition de  $B$  en somme directe d'algèbres simples est  $B = \bigoplus_{x \in \Omega} B^x$  avec*

*$B^g \simeq M_{n+1}(\mathbb{C})$  pour  $g$  dans  $G$  et  $B^m \simeq M_{2n}(\mathbb{C})$ .*

**Démonstration.**

D'après le théorème 1.3.4, La structure d'algèbre de  $B$  est donnée par  $B = \bigoplus_{x \in \Omega} \text{End}_k(\mathcal{F}(x))$ .

On note  $B^x = \text{End}_k(\mathcal{F}(x))$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$ . Le foncteur de Hayashi  $\mathcal{F}$  est défini sur les objets  $x$  de  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{F}(x) = \bigoplus_{y, z \in \Omega} \text{Hom}(z, y \otimes x) = \bigoplus_{y, z \in \Omega} p_y \cdot \mathcal{F}(x) \cdot p_z$ . On obtient pour tout  $g$  dans  $G$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g) &= \bigoplus_{h \in G} \text{Hom}(h, (h - g) \otimes g) \oplus \text{Hom}(m, m \otimes g) \\ &= \bigoplus_{h \in G} p_{h-g} \mathcal{F}(g) p_h \oplus p_m \mathcal{F}(g) p_m \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(m) &= \bigoplus_{h \in G} \text{Hom}(m, h \otimes m) \oplus \bigoplus_{k \in G} \text{Hom}(k, m \otimes m) \\ &= \bigoplus_{h \in G} p_h \mathcal{F}(m) p_m \oplus \bigoplus_{k \in G} p_m \mathcal{F}(m) p_k. \end{aligned}$$

Les dimensions des espaces vectoriels  $\mathcal{F}(g)$ ,  $g \in G$ , et  $\mathcal{F}(m)$  nous donnent  $B^g \simeq M_{|G|+1}(\mathbb{C})$  et  $B^m \simeq M_{2|G|}(\mathbb{C})$ .  $\square$

On pose, pour tous  $g, h$  dans  $G$  :

$$v_h^g = 1_{p_{h-g} \mathcal{F}(g) p_h}, \quad v_m^g = 1_{p_m \mathcal{F}(g) p_m}, \quad v_h^m = 1_{p_h \mathcal{F}(m) p_m}, \quad v_h^m = 1_{p_m \mathcal{F}(m) p_h}.$$

Les ensembles  $\{v_h^g | h \in G\} \cup \{v_m^g\}$  et  $\{v_h^m | h \in G\} \cup \{v_k^m | k \in G\}$  forment respectivement une base de  $\mathcal{F}(g)$  pour tout  $g$  dans  $G$  et une base de  $\mathcal{F}(m)$ . On note  $\Omega_g = \Omega = G \cup \{m\}$  pour tout  $g$  dans  $G$  et  $\Omega_m = G \cup \bar{G}$  où  $\bar{G} = \{\bar{g} | g \in G\}$  est une deuxième copie de  $G$ . On prend comme base de  $B$  les unités matricielles  $e_{y,z}^x$  définies par :

$$e_{y,z}^x v_{z'}^{x'} = \delta_{x,x'} \delta_{z,z'} v_y^x, \quad \forall x, x' \in \Omega, \quad y, z \in \Omega_x, \quad z' \in \Omega_{x'}.$$

**Sous-algèbres co-unitales.**

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $B$  l'algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . On pose :*

$$\begin{aligned} e^g &= \sum_{h \in G} e_{g+h, g+h}^h + e_{g,g}^m, \quad \forall g \in G, \\ e^m &= \sum_{g \in G} e_{m,m}^g + \sum_{h \in G} e_{h,\bar{h}}^m, \\ e_g &= \sum_{h \in G} e_{g,g}^h + e_{\bar{g},\bar{g}}^m, \quad \forall g \in G, \\ e_m &= \sum_{g \in G} e_{m,m}^g + \sum_{h \in G} e_{h,h}^m. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\{e^x | x \in \Omega\}$  forme une base de  $B_t$  et l'ensemble  $\{e_x | x \in \Omega\}$  forme une base de  $B_s$ .

**Démonstration.** D'après le théorème 1.3.4, les sous-algèbres co-unitales  $B_t$  et  $B_s$  sont égales respectivement à l'image de  $R$  par  $t$  et à l'image de  $R$  par  $s$  dans  $B$ . Par exemple, on a

$$\begin{aligned} t(p_g) v_k^h &= p_g v_k^h &= \delta_{g, k-h} v_k^h, \\ t(p_g) v_k^m &= p_g v_k^m &= \delta_{g, k} v_k^m, \\ t(p_g) v_{\bar{k}}^m &= t(p_g) v_m^g &= 0, \end{aligned}$$

pour tous  $g, h, k$  dans  $G$ . On obtient donc pour tout  $g$  dans  $G$

$$t(p_g) = \sum_{h \in G} e_{g+h, g+h}^h + e_{g, g}^m.$$

On note  $e^g = t(p_g)$  pour tout  $g$  dans  $G$ . De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned} e^m &= t(p_m) = \sum_{g \in G} e_{m, m}^g + \sum_{h \in G} e_{\bar{h}, \bar{h}}^m, \\ e_g &= s(p_g) = \sum_{h \in G} e_{g, g}^h + e_{\bar{g}, \bar{g}}^m, \quad \forall g \in G, \\ e_m &= s(p_m) = \sum_{g \in G} e_{m, m}^g + \sum_{h \in G} e_{h, h}^m. \end{aligned}$$

□

### Biconnexité de $B$ .

**Proposition 2.1.3.** *L'algèbre de Hopf faible  $B$  associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  est biconnexe.*

**Démonstration.** Comme  $B$  réalise  $\mathcal{C}$ , d'après le théorème 1.3.4, elle est connexe. D'après la proposition 1.1.15, la coconnexité de  $B$  est équivalente à la condition  $B_t \cap B_s = \mathbb{C}$ . Calculons  $B_t \cap B_s$ . Soit  $b \in B_t \cap B_s$ . On a  $b = \sum_{x \in \Omega} c^x e^x = \sum_{x \in \Omega} c_x e_x$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} c^g \left( \sum_{h \in G} e_{g+h, g+h}^h + e_{g, g}^m \right) + c^m \left( \sum_{h \in G} e_{m, m}^h + \sum_{h \in G} e_{\bar{h}, \bar{h}}^m \right) = \\ \sum_{g \in G} c_g \left( \sum_{h \in G} e_{g, g}^h + e_{\bar{g}, \bar{g}}^m \right) + c_m \left( \sum_{h \in G} e_{m, m}^h + \sum_{h \in G} e_{h, h}^m \right). \end{aligned}$$

Cela implique  $c^m = c_m = c^g = c_g$  pour tout  $g$  dans  $G$  et donc on a  $B_t \cap B_s = \mathbb{C}$ . □

### L'inclusion $B_t \subset B$ .

**Proposition 2.1.4.** *Soit  $B$  l'algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  et  $B_t$  sa sous-algèbre co-unital but.*

- 1) *Le diagramme de Bratteli de l'inclusion  $B_t \subset B$  est donné par la figure 1.*
- 2) *La matrice de l'inclusion est la matrice  $(n+1) \times (n+1)$*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$$

- 3) *L'indice de l'inclusion est  $\tau^{-1} = [B : B_t] = (n + \sqrt{n})^2$ .*

4) La trace de Markov normalisée  $tr$  sur  $B$  admet pour vecteur trace

$$\vec{s} = \tau(1, \dots, 1, \sqrt{n})$$

et sa restriction sur  $B_t$  le vecteur trace

$$\vec{t} = \sqrt{\tau}(1, \dots, 1, \sqrt{n}).$$

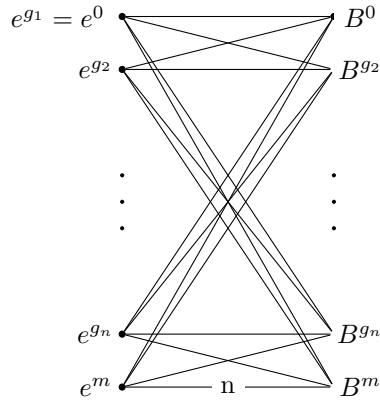


Figure 1 : Diagramme de Bratteli de  $B_t \subset B$ .

**Démonstration.** Les éléments de la base de  $B_t$  sont donnés dans la base de  $B$  par les formules

$$\begin{aligned} e^g &= \sum_{h \in G} e_{g+h, g+h}^h + e_{g, g}^m, \quad g \in G, \\ e^m &= \sum_{h \in G} e_{m, m}^h + \sum_{h \in G} e_{h, h}^m, \end{aligned}$$

ce qui nous donne le diagramme de Bratteli et la matrice de la proposition. Le polynôme caractéristique de cette matrice est  $P(X) = X^{n-1}(X^2 - 2nX - n + n^2)$ . La plus grande valeur propre de cette matrice est donc  $n + \sqrt{n}$ , qui est égale à sa norme car  $\Lambda$  est symétrique. L'indice est donc

$$\tau^{-1} = [B : B_t] = (n + \sqrt{n})^2.$$

Passons au calcul de la trace de Markov. On a

$$\Lambda \Lambda^t = \Lambda^t \Lambda = \Lambda^2 = \begin{pmatrix} n+1 & \cdots & n+1 & 2n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & \cdots & n+1 & 2n \\ 2n & \cdots & 2n & n+n^2 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 1.7.10, les vecteurs  $\vec{s}$  et  $\vec{t}$  sont les vecteurs propres (lignes) pour la matrice  $\Lambda^2$  pour la valeur propre  $\tau$  tels que  $\vec{s} = \Lambda \vec{t}$  et que les traces qu'ils représentent soient normalisées.  $\square$

### 2.1.2 Calcul du coproduit.

**Proposition 2.1.5.** *Soit  $B$  l'algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . Le coproduit sur  $B$  est donné par les formules suivantes, pour  $g, k, l \in G$  :*

$$\begin{aligned}
\Delta(e_{k,l}^g) &= \sum_{h \in G} e_{h-g+k, h-g+l}^h \otimes e_{k,l}^{g-h} + e_{k-g, l-g}^m \otimes e_{k,\bar{l}}^m \\
\Delta(e_{k,m}^g) &= \sum_{h \in G} e_{h-g+k, m}^h \otimes e_{k,m}^{g-h} + \beta \sum_{l \in G} \chi(g, l)^{-1} e_{k-g, \bar{l}}^m \otimes e_{k,l}^m, \\
\Delta(e_{m,k}^g) &= \sum_{h \in G} e_{m, h-g+k}^h \otimes e_{m,k}^{g-h} + \beta \sum_{l \in G} \chi(g, l) e_{l, k-g}^m \otimes e_{l, \bar{k}}^m, \\
\Delta(e_{m,m}^g) &= \sum_{h \in G} e_{m,m}^h \otimes e_{m,m}^{g-h} + \frac{1}{n} \sum_{k, l \in G} \chi(g, k-l) e_{k, \bar{l}}^m \otimes e_{k,l}^m, \\
\Delta(e_{k,l}^m) &= \sum_{g \in G} \chi(g, l-k) e_{k,l}^m \otimes e_{m,m}^g + \sum_{h \in G} e_{h+k, h+l}^h \otimes e_{h+k, h+l}^m, \\
\Delta(e_{k,\bar{l}}^m) &= \sum_{g \in G} e_{k-g, l-g}^m \otimes e_{k,l}^g + \sum_{h \in G} \chi(h, l-k) e_{m,m}^h \otimes e_{k,\bar{l}}^m, \\
\Delta(e_{k,l}^m) &= \sum_{g \in G} \chi(g, l) e_{k-g, l}^m \otimes e_{k,m}^g + \sum_{h \in G} \chi(h, k)^{-1} e_{m, h+l}^h \otimes e_{k, h+l}^m, \\
\Delta(e_{k,\bar{l}}^m) &= \sum_{g \in G} \chi(g, k)^{-1} e_{k, l-g}^m \otimes e_{m,l}^g + \sum_{h \in G} \chi(h, l) e_{h+k, m}^h \otimes e_{h+k, \bar{l}}^m.
\end{aligned}$$

#### Démonstration.

D'après le théorème 1.3.4, le coproduit est donné pour tout  $b$  dans  $B$  par  $\Delta(b) = r.(J \circ b \circ J^{-1})$  où  $J$  est défini par  $J = \bigoplus_{x,y \in \Omega} \mathcal{F}_{x,y}$  et  $r = \sum_{x \in \Omega} p_x \otimes p_x$  est l'élément de séparabilité symétrique de  $R$ .

Commençons par calculer les isomorphismes  $J$  et  $J^{-1}$ . D'après la définition 1.3.5, les isomorphismes fonctoriels de  $\mathcal{F}$  sont donnés par :

$$\mathcal{F}_{x,y}^{-1} : \begin{cases} \mathcal{F}(x) \otimes \mathcal{F}(y) & \longrightarrow \mathcal{F}(x \otimes y) \\ \varphi \otimes \psi & \longmapsto a_{s,x,y} \circ (\varphi \otimes 1_y) \circ \psi \end{cases}$$

pour tous  $\varphi$  dans  $p_s \mathcal{F}(x) p_t$ ,  $\psi$  dans  $p_t \mathcal{F}(y) p_z$ ,  $s, t, z$  dans  $\Omega$ . On obtient pour tout  $g, h, k$  dans  $G$  :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \mathcal{F}(g) \otimes_R \mathcal{F}(h) & \longrightarrow \mathcal{F}(g+h) \\ v_k^g \otimes_R v_{h+k}^h & \longmapsto v_{h+k}^{g+h} \\ v_m^g \otimes_R v_m^h & \longmapsto v_m^{g+h} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{F}(g) & \longrightarrow \mathcal{F}(h) \otimes_R \mathcal{F}(g-h) \\ v_k^g & \longmapsto v_{h-g+k}^h \otimes_R v_k^{g-h} \\ v_m^g & \longmapsto v_m^h \otimes_R v_m^{g-h} \end{cases} \\
&\begin{cases} \mathcal{F}(m) \otimes_R \mathcal{F}(g) & \longrightarrow \mathcal{F}(m) \\ v_k^m \otimes_R v_m^g & \longmapsto \chi(g, k) v_k^m \\ v_k^m \otimes_R v_{g+k}^g & \longmapsto v_{g+k}^m \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{F}(m) & \longrightarrow \mathcal{F}(m) \otimes_R \mathcal{F}(g) \\ v_k^m & \longmapsto v_{k-g}^m \otimes_R v_k^g \\ v_k^m & \longmapsto \chi(g, k)^{-1} v_k^m \otimes_R v_m^g \end{cases} \\
&\begin{cases} \mathcal{F}(g) \otimes_R \mathcal{F}(m) & \longrightarrow \mathcal{F}(m) \\ v_m^g \otimes_R v_k^m & \longmapsto \chi(g, k) v_k^m \\ v_k^g \otimes_R v_k^m & \longmapsto v_{k-g}^m \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{F}(m) & \longrightarrow \mathcal{F}(g) \otimes_R \mathcal{F}(m) \\ v_k^m & \longmapsto v_{g+k}^g \otimes_R v_{g+k}^m \\ v_k^m & \longmapsto \chi(g, k)^{-1} v_m^g \otimes_R v_k^m \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(m) \otimes_R \mathcal{F}(m) \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathcal{F}(g) \\ v_h^m \otimes_R v_k^m \longmapsto v_k^{k-h} \\ v_h^m \otimes_R v_h^m \longmapsto \beta \sum_{g \in G} \chi(g, h)^{-1} v_m^g \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bigoplus_{g \in G} \mathcal{F}(g) \longrightarrow \mathcal{F}(m) \otimes_R \mathcal{F}(m) \\ v_k^g \longmapsto v_{k-g}^m \otimes_R v_k^m \\ v_m^g \longmapsto \beta \sum_{h \in G} \chi(g, h) v_h^m \otimes_R v_h^m \end{array} \right.$$

Le dernier isomorphisme est obtenu grâce à l'orthogonalité des (bi)caractères de  $G$

$$\frac{1}{n} \sum_{h \in G} \chi(g, h) \chi^{-1}(k, h) = \delta_{g, k}.$$

On note  $\Delta_0$  l'application qui à  $b$  associe  $J \circ b \circ J^{-1}$ . Nous allons calculer  $\Delta_0(e_{k,l}^g)$ , avec  $g, k, l$  dans  $G$ . On a, pour tout  $h$  dans  $G$  :

$$\begin{aligned} \Delta_0(e_{k,l}^g)(v_{h-g+l}^h \otimes_R v_l^{g-h}) &= v_{h-g+k}^h \otimes_R v_k^{g-h}, \\ \Delta_0(e_{k,l}^g)(v_{l-g}^m \otimes_R v_l^m) &= v_{k-g}^m \otimes_R v_k^m. \end{aligned}$$

On obtient 0 sur les autres tenseurs simples d'éléments de base des  $B$ -modules  $\mathcal{F}(x)$  pour  $x$  dans  $\Omega$ . On en déduit, pour tous  $g, k, l$  dans  $G$  :

$$\Delta_0(e_{k,l}^g) = \sum_{h \in G} e_{h-g+k, h-g+l}^h \otimes_R e_{k,l}^{g-h} + e_{k-g, l-g}^m \otimes_R e_{k,l}^m.$$

En procédant de la même manière pour les autres unités matricielles de  $B$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_0(e_{k,m}^g) &= \sum_{h \in G} e_{h-g+k, m}^h \otimes_R e_{k,m}^{g-h} + \beta \sum_{l \in G} \chi(g, l)^{-1} e_{k-g, l}^m \otimes_R e_{k,l}^m, \\ \Delta_0(e_{m,k}^g) &= \sum_{h \in G} e_{m, h-g+k}^h \otimes_R e_{m,k}^{g-h} + \beta \sum_{l \in G} \chi(g, l) e_{l, k-g}^m \otimes_R e_{l,k}^m, \\ \Delta_0(e_{m,m}^g) &= \sum_{h \in G} e_{m,m}^h \otimes_R e_{m,m}^{g-h} + \frac{1}{n} \sum_{k, l \in G} \chi(g, k-l) e_{k,l}^m \otimes_R e_{k,l}^m, \\ \Delta_0(e_{k,l}^m) &= \sum_{g \in G} \chi(g, l-k) e_{k,l}^m \otimes_R e_{m,m}^g + \sum_{h \in G} e_{h+k, h+l}^h \otimes_R e_{h+k, h+l}^m, \\ \Delta_0(e_{k,l}^m) &= \sum_{g \in G} e_{k-g, l-g}^m \otimes_R e_{k,l}^g + \sum_{h \in G} \chi(h, l-k) e_{m,m}^h \otimes_R e_{k,l}^m, \\ \Delta_0(e_{k,l}^m) &= \sum_{g \in G} \chi(g, l) e_{k-g, l}^m \otimes_R e_{k,m}^g + \sum_{h \in G} \chi(h, k)^{-1} e_{m, h+l}^h \otimes_R e_{k, h+l}^m, \\ \Delta_0(e_{k,l}^m) &= \sum_{g \in G} \chi(g, k)^{-1} e_{k, l-g}^m \otimes_R e_{m, l}^g + \sum_{h \in G} \chi(h, l) e_{h+k, m}^h \otimes_R e_{h+k, l}^m, \end{aligned}$$

pour tous  $g, k, l$  dans  $G$ .

Il ne reste plus qu'à faire agir à gauche l'élément de séparabilité symétrique  $r = \bigoplus_{x \in \Omega} p_x \otimes p_x$  de

$R$ . Le calcul nous donne pour  $\Delta$  les mêmes formules que pour  $\Delta_0$ . □

**Proposition 2.1.6.** *L'algèbre de Hopf faible  $B$  associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  est une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible pour l'involution matricielle usuelle.*

**Démonstration.**

La propriété  $\overline{\chi}(g, h) = \chi(g, h)^{-1}$  pour tous  $g, h$  dans  $G$  implique  $\Delta \circ * = (* \otimes *) \circ \Delta$  où  $*$  est l'involution matricielle usuelle. □

### 2.1.3 Cointé, applications co-unités but et source, antipode.

**Proposition 2.1.7.** *Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible régulière associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ .*

- 1) *La co-unité de  $B$  est donnée par  $\varepsilon(e_{x,y}^0) = 1$ ,  $x, y \in \Omega$ , sur le bloc  $B^0$  et est nulle sur les autres blocs.*
- 2) *Les applications co-unités but et sources de  $B$  sont données par  $\varepsilon_t(e_{x,y}^0) = e^x$  et  $\varepsilon_s(e_{x,y}^0) = e_y$ ,  $x, y \in \Omega$ , sur le bloc  $B^0$  et sont nulles sur les autres blocs.*
- 3) *L'antipode de  $B$  est donnée, pour tous  $g, k, l$  dans  $G$ , par les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} S(e_{k,l}^g) &= e_{l-g,k-g}^{-g}, & S(e_{k,m}^g) &= e_{m,k-g}^{-g}, & S(e_{m,k}^g) &= e_{k-g,m}^{-g}, & S(e_{m,m}^g) &= e_{m,m}^{-g}, \\ S(e_{k,l}^m) &= e_{l,\bar{k}}^m, & S(e_{\bar{k},l}^m) &= e_{l,k}^m, & S(e_{\bar{k},l}^m) &= \beta e_{l,k}^m, & S(e_{k,\bar{l}}^m) &= \beta^{-1} e_{l,\bar{k}}^m. \end{aligned}$$

**Démonstration.** Nous allons calculer la co-unité et l'antipode en utilisant les axiomes des algèbres de Hopf faibles. Commençons par la co-unité. En utilisant l'axiome

$$(\varepsilon \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \text{id},$$

on obtient  $\varepsilon(e_{x,y}^0) = 1$  pour tous  $x, y$  dans  $\Omega$  et 0 sur les autres blocs de matrices.

Les applications co-unités but et source sont définies respectivement par  $\varepsilon_t(b) = \varepsilon(1_{(1)}b)1_{(2)}$  et  $\varepsilon_s(b) = 1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2)})$  pour tout  $b$  dans  $B$ . Comme on a  $\Delta(1) = \sum_{x \in \Omega} e_x \otimes e^x$ , nous obtenons

$\varepsilon_t(e_{x,y}^0) = e^x$ ,  $\varepsilon_s(e_{x,y}^0) = e_y$  pour tous  $x, y$  dans  $\Omega$  et 0 sur les autres blocs. Nous utilisons maintenant les axiomes

$$m(S \otimes \text{id})\Delta = \varepsilon_s \quad (1) \quad \text{et} \quad m(\text{id} \otimes S)\Delta = \varepsilon_t \quad (2)$$

liant ces applications co-unités et l'antipode pour calculer cette dernière. Soient  $h, k, l$  dans  $G$ , nous allons calculer en détail  $S(e_{k,l}^h)$  et  $S(e_{k,l}^m)$ . Il faut appliquer les axiomes (1) et (2) aux unités matricielles dont le coproduit possède dans sa décomposition les facteurs qui nous intéressent. On applique l'axiome (1) à  $e_{k,l}^g$ ,  $g$  dans  $G$  et  $e_{k,l}^m$ . On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{h \in G} S(e_{h+k,h+l}^h) e_{k,l}^{-h} + S(e_{k,l}^m) e_{k,l}^m &= \sum_{h \in G} e_{l,l}^h + e_{l,\bar{l}}^m, \\ \sum_{h \in G} S(e_{h-g+k,h-g+l}^h) e_{k,l}^{g-h} + S(e_{k,l}^m) e_{k-g,l-g}^m &= 0, \quad \text{si } g \neq 0, \\ \sum_{h \in G} \chi(h, l-k) S(e_{k,l}^m) e_{m,m}^h + \sum_{h \in G} S(e_{h+k,h+l}^h) e_{h+k,h+l}^m &= 0. \end{aligned}$$

On applique maintenant l'axiome (2) à  $e_{k,l}^g$ ,  $e_{m,m}^g$ ,  $g \in G$ ,  $e_{k,l}^m$  et  $e_{k,\bar{l}}^m$ . On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{h \in G} e_{h+k,h+l}^h S(e_{k,l}^{-h}) + e_{k,l}^m S(e_{k,\bar{l}}^m) &= \sum_{h \in G} e_{k+h,k+h}^h + e_{k,k}^m, \\ \sum_{h \in G} e_{h-g+k,h-g+l}^h S(e_{k,l}^{g-h}) + e_{k-g,l-g}^m S(e_{k,\bar{l}}^m) &= 0, \quad \text{si } g \neq 0, \\ \sum_{h \in G} e_{m,m}^h S(e_{m,m}^{g-h}) + \frac{1}{n} \sum_{k,l \in G} \chi(g, k-l) e_{k,\bar{l}}^m S(e_{k,l}^m) &= 0, \\ \sum_{h \in G} \chi(h, l-k) e_{k,l}^m S(e_{m,m}^h) + \sum_{h \in G} e_{h+k,h+l}^h S(e_{h+k,h+l}^m) &= 0, \\ \sum_{h \in G} e_{k-h,l-h}^m S(e_{k,l}^h) + \sum_{h \in G} \chi(h, l-k) e_{m,m}^h S(e_{k,\bar{l}}^m) &= 0. \end{aligned}$$



Ainsi on a  $S(e_{g+k,g+l}^g) = e_{l,k}^{-g}$  et  $S(e_{k,l}^m) = e_{l,k}^m$ . En procédant de manière similaire pour les autres unités matricielles, on obtient, pour tous  $g, k, l$  dans  $G$  :

$$\begin{aligned} S(e_{k,l}^g) &= e_{l-k,g}^{-g}, & S(e_{k,m}^g) &= e_{m,k-g}^{-g}, & S(e_{m,k}^g) &= e_{k-g,m}^{-g}, & S(e_{m,m}^g) &= e_{m,m}^{-g}, \\ S(e_{k,l}^m) &= e_{l,k}^m, & S(e_{k,l}^m) &= e_{l,k}^m, & S(e_{k,l}^m) &= \beta e_{l,k}^m, & S(e_{k,l}^m) &= \beta^{-1} e_{l,k}^m. \end{aligned}$$

□

**Remarque.** On vérifie facilement que  $S(e^x) = e_x$  et  $S(e_x) = e^x$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$ . L'application  $S^2$  est donc égale à l'identité sur les sous-algèbres co-unitales et  $B$  est régulière, ce que nous savions déjà d'après le théorème de reconstruction.

### 2.1.4 Élément de type groupe canonique, projection de Haar, mesure de Haar, espérances conditionnelles de Haar et automorphisme modulaire.

Grâce à la trace de Markov sur  $B$ , nous pouvons calculer l'élément de type groupe canonique de  $B$ .

**Proposition 2.1.8.** *L'élément  $q$  de la proposition 1.8.10 est égal à*

$$(n + \sqrt{n})^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{g \in G} e^g + n^{-\frac{1}{4}} e^m \right)$$

et l'élément de type groupe canonique de  $B$  est

$$Q = \sum_{g,h \in G} e_{h,h}^{h-g} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{g \in G} e_{g,\bar{g}}^m + \sqrt{n} \sum_{g \in G} e_{g,g}^m + \sum_{g \in G} e_{m,m}^g.$$

**Démonstration.** On utilise la formule de la proposition 1.8.10. On a

$$q = \sum_{y \in \Omega} t_y^{-\frac{1}{2}} e^y = \tau^{-\frac{1}{4}} \left( \sum_{g \in G} e^g + n^{-\frac{1}{4}} e^m \right)$$

où  $t_y$ ,  $y \in \Omega$ , sont les composantes du vecteur trace  $\vec{t}$  de la trace de Markov  $\text{tr}$  sur  $B_t$  (proposition 2.1.4) et on calcule :

$$\begin{aligned} q^2 S(q^{-2}) &= \sum_{g,h \in G} e^g e_h + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{g \in G} e^m e_g + \sqrt{n} \sum_{g \in G} e^g e_m + e^m e_m \\ &= \sum_{g,h \in G} e_{h,h}^{g-h} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{g \in G} e_{g,\bar{g}}^m + \sqrt{n} \sum_{g \in G} e_{g,g}^m + \sum_{g \in G} e_{m,m}^g. \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.1.9.** *Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ .*

1) La projection de Haar de  $B$  est l'élément

$$p = \frac{1}{n+1} \sum_{x,y \in \Omega} e_{x,y}^0.$$

2) La mesure de Haar sur  $B$  est la forme linéaire  $\phi$  définie pour tous  $g, h, k$  dans  $G$  et  $x, y$  dans  $\Omega_m$  :

$$\begin{aligned} \phi(e_{h,k}^g) &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1}, \\ \phi(e_{m,m}^g) &= \frac{1}{n(n+1)}, \\ \phi(e_{x,y}^m) &= \delta_{x,y} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et nulle sur les autres unités matricielles.

3) Les espérances conditionnelles de Haar  $E_t$  et  $E_s$  sont données par :

$$\begin{aligned} E_t(e_{h,k}^g) &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1} e^{h-g} \quad \forall g, h, k \in G, \\ E_t(e_{m,m}^g) &= \frac{1}{n(n+1)} e^m \quad \forall g \in G, \\ E_t(e_{h,k}^m) &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1} e^h \quad \forall h, k \in G, \\ E_t(e_{h,\bar{k}}^m) &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1} e^m \quad \forall h, k \in G, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_s(e_{h,k}^g) &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1} e_{h-g} \quad \forall g, h, k \in G, \\ E_s(e_{m,m}^g) &= \frac{1}{n(n+1)} e_m \quad \forall g \in G, \\ E_s(e_{h,k}^m) &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1} e_h \quad \forall h, k \in G, \\ E_s(e_{h,\bar{k}}^m) &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1} e_m \quad \forall h, k \in G, \end{aligned}$$

Elles sont nulles sur les autres unités matricielles.

4) L'automorphisme modulaire de la mesure de Haar de  $B$  est donné par  $\theta_\phi(e_{h,m}^g) = \frac{1}{n} e_{h,m}^g$  et  $\theta_\phi(e_{m,h}^g) = n e_{m,h}^g$  pour tous  $g, h$  dans  $G$  et est égal à l'identité sur toutes les autres unités matricielles.

### Démonstration.

1) Nous utilisons la définition de la projection de Haar (définition 1.4.6) pour la calculer. Comme  $\varepsilon_t(b)$  est nul si  $b$  n'appartient pas à  $B^0$ , la condition  $bp = \varepsilon_t(b)p$  pour tout  $b$  dans  $B$  implique que  $p$  appartient à  $B^0$ . Soit donc  $p = \sum_{x,y \in \Omega} c_{x,y} e_{x,y}^0$ . Quelque soit  $g$  dans  $G$ , on a d'une part :

$$e_{g,m}^0 p = \sum_{y \in \Omega} c_{m,y} e_{g,y}^0$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\varepsilon_t(e_{g,m}^0)p &= e^g p \\ &= \left( \sum_{k \in G} e_{g+k,g+k}^k + e_{g,g}^m \right) p \\ &= \sum_{y \in \Omega} c_{g,y} e_{g,y}^0\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient  $c_{g,y} = c_{m,y}$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $y$  dans  $\Omega$ . La propriété symétrique  $pb = p\varepsilon_s(b)$  pour tout  $b$  dans  $B$  implique  $c_{x,m} = c_{x,g}$  pour tout  $g$  dans  $G$  et  $x$  dans  $\Omega$ . On obtient donc

$$p = \lambda \sum_{x,y \in \Omega} e_{x,y}^0.$$

La condition de normalisation  $\varepsilon_t(p) = 1$  implique  $\lambda = \frac{1}{n+1}$ .

2) On utilise la formule de la proposition 1.8.10,  $\phi(b) = \frac{1}{\dim(B_t)} \text{tr}(q^2 S(q^2)b)$ , pour tout  $b$  dans  $B$ , où  $\text{tr}$  est la trace de Markov normalisée et  $q$  l'élément de la proposition précédente. On calcule

$$\begin{aligned}q^2 S(q^2) &= \frac{1}{\tau} \left( \sum_{g,h \in G} e^g e_h + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{g \in G} e^m e_g + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{g \in G} e^g e_m + \frac{1}{n} e^m e_m \right) \\ &= \frac{1}{\tau} \left( \sum_{g,h \in G} e_{h,h}^{g-h} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{g \in G} e_{g,g}^m + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{g \in G} e_{\bar{g},\bar{g}}^m + \frac{1}{n} \sum_{g \in G} e_{m,m}^g \right).\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule, les valeurs de  $\text{tr}$  sur  $B$  étant données par le vecteur trace  $\vec{s}$  (proposition 2.1.4).

3) On applique les définitions  $E_t(b) = (\text{id} \otimes \phi)\Delta(b)$  et  $E_s(b) = (\phi \otimes \text{id})\Delta(b)$  pour tout  $b$  dans  $B$ . Nous donnons un exemple de calcul. Soient  $g, h, k$  dans  $G$ .

$$\begin{aligned}E_t(e_{h,k}^g) &= \sum_{l \in G} e_{l-g+h, l-g+k}^l \phi(e_{h,k}^{g-l}) + e_{h-g, k-g}^m \phi(e_{h,k}^m), \\ &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1} \left( \sum_{l \in G} e_{l-g+h, l-g+h}^l + e_{h-g, h_g}^m \right), \\ &= \delta_{h,k} \frac{1}{n+1} e^{h-g} \quad (\text{proposition 2.1.2}).\end{aligned}$$

4) On applique la définition (définition 1.4.5). □

### 2.1.5 Projecteur de Jones de l'inclusion $B_t \subset B$ .

Nous avons maintenant décrit toute la structure de  $B$  et nous pouvons finir de décrire l'inclusion  $B_t \subset B$  en calculant le projecteur de Jones de  $B_t$ .

**Proposition 2.1.10.** *Le projecteur de Jones de l'inclusion  $B_t \subset B$  est*

$$p_B = (n + \sqrt{n})^{-1} \left[ \sum_{k,l \in G} e_{k,l}^0 + n^{\frac{1}{4}} \sum_{g \in G} (e_{g,m}^0 + e_{m,g}^0) + n^{\frac{1}{2}} e_{m,m}^0 \right].$$

**Démonstration.**

D'après la définition 1.8.13, le projecteur de Jones de  $B$  est défini par  $p_B = \tau q^{-1} x_B q^{-1}$  où  $x_B$  est l'unique élément positif de  $B$  tel que  $\varepsilon(b) = \text{tr}(x_B b)$  pour tout  $b$  dans  $B$ . On a  $\varepsilon(e_{x,y}^0) = 1$  pour tous  $x, y$  dans  $\Omega$  et 0 sur les autres blocs donc  $x_B$  appartient au bloc  $B^0$ . Le vecteur trace de  $\text{tr}$  sur  $B$  est

$$\vec{s} = \tau(1, \dots, 1, \sqrt{n}).$$

On obtient donc  $x_B = \tau^{-1} \sum_{x,y \in \Omega} e_{x,y}^0$ . L'inverse de l'élément  $q$  (proposition 2.1.8) est

$$q^{-1} = \tau^{\frac{1}{4}} \left( \sum_{g \in G} e^g + n^{\frac{1}{4}} e^m \right)$$

et on a pour tous  $x, y, z$  dans  $\Omega$  :

$$e_{x,y}^0 e^z = \delta_{y,z} e_{x,z}^0, \quad e^z e_{x,y}^0 = \delta_{x,z} e_{z,y}^0.$$

Le projecteur de Jones  $p_B$  est donc égal à

$$\tau^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k,l \in G} e_{k,l}^0 + n^{\frac{1}{4}} \sum_{g \in G} (e_{g,m}^0 + e_{m,g}^0) + n^{\frac{1}{2}} e_{m,m}^0 \right].$$

□

**2.1.6 Autodualité de  $B$ .**

**Proposition 2.1.11.** *Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . On pose, pour tous  $g, h, k$  dans  $G$  :*

$$f_{h,k}^g = e_{g-k, -k}^{h-k}, \quad f_{h,m}^g = e_{g-h, -h}^m, \quad f_{m,k}^g = e_{g-k, -k}^m, \quad f_{m,m}^g = \sum_{h \in G} \chi(g, h)^{-1} e_{m,m}^h,$$

$$f_{h,k}^m = e_{-k, m}^{h-k}, \quad f_{\bar{h}, \bar{k}}^m = e_{m, -k}^{h-k}, \quad f_{h, \bar{k}}^m = \beta \chi(h, k) e_{-h, -k}^m, \quad f_{\bar{h}, k}^m = \chi(h, k)^{-1} e_{-k, -h}^m$$

et on note  $\{\widehat{f_{y,z}^x} \mid x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  la base de  $\widehat{B}$  duale de la base  $\{f_{y,z}^x \mid x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$ . L'application

$$\Phi : \begin{cases} B & \longrightarrow \widehat{B}, \\ e_{y,z}^x & \longmapsto \widehat{f_{y,z}^x} \end{cases}$$

est un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles.

L'isomorphisme inverse  $\Phi^{-1}$  envoie  $\widehat{e_{y,z}^x}$  sur  $f_{y,z}^x$  pour tous  $x$  dans  $\Omega$ ,  $y, z$  dans  $\Omega_x$ .

**Démonstration.**

Un simple calcul permet de vérifier que le coproduit dans la base  $\{f_{y,z}^x \mid x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  est bien le coproduit comatriciel, c'est-à-dire

$$\Delta(f_{y,z}^x) = \sum_{t \in \Omega_x} f_{y,t}^x \otimes f_{t,z}^x, \quad \forall x \in \Omega, y, z \in \Omega_x.$$

Ainsi la base  $\{\widehat{f_{y,z}^x} x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  est une base d'unités matricielles et l'application  $\Phi$  est un isomorphisme d'algèbres.

Les formules pour le coproduit, l'antipode et la co-unité duaux sont donnés dans la proposition 1.1.3. Pour montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles, nous devons vérifier que  $\Phi$  est un morphisme de cogèbres, c'est-à-dire  $(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta = \widehat{\Delta} \circ \Phi$  et  $\Phi \circ \varepsilon = \widehat{\varepsilon}$ , que  $\Phi$  entrelace les antipodes, c'est-à-dire  $\Phi \circ S = \widehat{S} \circ \Phi$ , et que  $\Phi \circ * = * \circ \Phi$ . Ainsi, il suffit de vérifier que les égalités

$$\begin{aligned} \langle (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta(e_{y,z}^x), e_{y',z'}^{x'} \otimes e_{y'',z''}^{x''} \rangle &= \langle \Phi(e_{y,z}^x), e_{y',z'}^{x'} e_{y'',z''}^{x''} \rangle, \\ \Phi \circ \varepsilon(e_{y,z}^x) &= \langle \Phi(e_{y,z}^x), 1_B \rangle, \\ \langle \Phi \circ S(e_{y,z}^x), e_{y',z'}^{x'} \rangle &= \langle \Phi(e_{y,z}^x), S(e_{y',z'}^{x'}) \rangle, \\ \langle \Phi((e_{y,z}^x)^*), e_{y',z'}^{x'} \rangle &= \langle e_{y,z}^x, S(e_{y',z'}^{x'})^* \rangle, \end{aligned}$$

sont vraies pour toutes les unités matricielles  $e_{y,z}^x, e_{y',z'}^{x'}, e_{y'',z''}^{x''}$  de  $B$ .

La dualité entre les bases  $\{\widehat{f_{y,z}^x}, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  et  $\{e_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f_{k,l}^g}, e_{p,q}^h \rangle &= \delta_{g,p-q} \delta_{k,h-q} \delta_{-q,l}, & \langle \widehat{f_{k,l}^m}, e_{p,m}^h \rangle &= \delta_{k,h-p} \delta_{l,-p}, \\ \langle \widehat{f_{k,l}^m}, e_{m,q}^h \rangle &= \delta_{k,h-q} \delta_{-q,l}, & \langle \widehat{f_{m,m}^g}, e_{m,m}^h \rangle &= \frac{1}{n} \chi(g, h), \\ \langle \widehat{f_{k,m}^g}, e_{p,q}^m \rangle &= \delta_{g,p-q} \delta_{k,-q}, & \langle \widehat{f_{m,l}^g}, e_{p,q}^m \rangle &= \delta_{g,p-q} \delta_{l,-q}, \\ \langle \widehat{f_{k,l}^m}, e_{p,q}^m \rangle &= \beta^{-1} \delta_{p,-k} \delta_{-q,l} \chi(p, q)^{-1}, & \langle \widehat{f_{k,l}^m}, e_{p,q}^m \rangle &= \delta_{p,-l} \delta_{-q,k} \chi(p, q), \end{aligned}$$

pour tous  $g, h, k, l, p, q$  dans  $G$ , les autres unités matricielles étant deux à deux orthogonales. Ces formules permettent de vérifier les égalités précédentes.  $\Phi$  est bien un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles.

La matrice de passage de la base  $\{e_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  à la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  est égale à sa transposée, donc  $\Phi^{-1}$  envoie  $\widehat{e}_{y,z}^x$  sur  $f_{y,z}^x$  pour tous  $x$  dans  $\Omega$  et  $y, z$  dans  $\Omega_x$ .  $\square$

Nous avons calculé le produit, l'antipode, la co-unité et l'involution de  $B$ , ainsi que l'écriture des  $e^x$ ,  $x \in \Omega$ , dans la nouvelle base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$ . Nous en donnons les formules qui nous serviront dans les prochains calculs.

**Lemme 2.1.12.** *Le produit de  $B$  dans la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  est donné par les formules :*

$$\begin{aligned} f_{h,k}^g f_{h',k'}^{g'} &= \delta_{h',h+g'} \delta_{k',k+g'} f_{h',k'}^{g+g'}, & f_{m,k}^g f_{m,k'}^{g'} &= \delta_{k',k+g'} f_{m,k'}^{g+g'}, \\ f_{h,m}^g f_{h',m}^{g'} &= \delta_{h',h+g'} f_{h',m}^{g+g'}, & f_{m,m}^g f_{m,m}^{g'} &= f_{m,m}^{g+g'}, \\ f_{h,k}^m f_{h',k'}^m &= \delta_{h-k,h'-k'} f_{h',k'}^{k'-k}, & f_{h,k}^m f_{h',k'}^m &= \delta_{k,k'} \delta_{h,h'} f_{m,m}^{h-k}, \\ f_{h,k}^m f_{h',k'}^m &= \delta_{k,k'} \beta \chi(h-h', k) f_{h',m}^{h-h}, & f_{h,k}^m f_{h',k'}^m &= \delta_{h,h'} \beta \chi(h, k' - k) f_{m,k'}^{k'-k}, \\ f_{h,k}^g f_{h',k'}^m &= \delta_{h,h'} \delta_{k,k'} f_{h-g,k-g}^m, & f_{h,k}^m f_{m,m}^g &= \chi(g, k-h) f_{h,k}^m, \\ f_{h,m}^g f_{h',k'}^m &= \delta_{h,h'} \chi(g, k') f_{h-g,k'}^m, & f_{h,k}^m f_{m,k'}^g &= \delta_{k,k'-g} \chi(h, -g) f_{h,k'}^m, \\ f_{h,k}^m f_{h',m}^g &= \delta_{g,h'-h} \chi(g, k) f_{h',k}^m, & f_{m,k}^g f_{h',k'}^m &= \delta_{k,k'} \chi(g, -h') f_{h',k-g}^m, \\ f_{h,k}^m f_{h',k'}^g &= \delta_{h,h'-g} \delta_{k,k'-g} f_{h',k'}^m, & f_{m,m}^g f_{h,k}^m &= \chi(g, k-h) f_{h,k}^m, \end{aligned}$$

pour tous  $g, g', h, h', k, k'$  dans  $G$ . Les autres produits d'éléments de  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  sont nuls.

L'antipode de  $B$  est donnée dans la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  par les formules :

$$\begin{aligned} S(f_{h,k}^g) &= f_{k-g, h-g}^{-g}, & S(f_{h,m}^g) &= f_{m, h-g}^{-g}, & S(f_{m,k}^g) &= f_{k-g, m}^{-g}, & S(f_{m,m}^g) &= f_{m, m}^{-g}, \\ S(f_{h,k}^m) &= f_{\bar{k}, \bar{h}}^m, & S(f_{h, \bar{k}}^m) &= f_{k, h}^m, & S(f_{h, \bar{k}}^m) &= \beta^{-1} f_{\bar{k}, \bar{h}}^m, & S(f_{h, \bar{k}}^m) &= \beta f_{\bar{k}, \bar{h}}^m. \end{aligned}$$

pour tous  $g, h, k$  dans  $G$ .

La co-unité de  $B$  est donnée dans la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  par  $\varepsilon(f_{h,h}^g) = \varepsilon(f_{h,h}^m) = \varepsilon(f_{\bar{h}, \bar{h}}^m) = \varepsilon(f_{h,h}^0) = 1$  pour tous  $g, h$  dans  $G$  et est nulle sur les autres éléments de la base.

L'involution de  $B$  est donnée dans la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  par :

$$\begin{aligned} (f_{h,k}^g)^* &= f_{-g+h, -g+k}^{-g}, & (f_{m,m}^g)^* &= f_{m, m}^{-g}, \\ (f_{h,m}^g)^* &= f_{-g+h, m}^{-g}, & (f_{m,k}^g)^* &= f_{m, -g+k}^g, \\ (f_{h,k}^m)^* &= f_{\bar{h}, \bar{k}}^m, & (f_{h, \bar{k}}^m)^* &= f_{h, k}^m, \\ (f_{h, \bar{k}}^m)^* &= \beta f_{\bar{h}, \bar{k}}^m, & (f_{h, \bar{k}}^m)^* &= \beta^{-1} f_{h, \bar{k}}^m, \end{aligned}$$

pour tous  $g, h, k$  dans  $G$ .

La base de  $B_t$  s'écrit dans la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  :

$$e^g = \sum_{y \in \Omega} f_{-g, y}^0, \quad \forall g \in G, \quad e^m = \sum_{y \in \Omega} f_{m, y}^0.$$

De même, nous avons calculé la projection, la mesure et les espérances conditionnelles de Haar, ainsi que l'automorphisme modulaire de  $B$  dans la nouvelle base.

**Lemme 2.1.13.** 1) La projection de Haar de  $B$  est

$$p = \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{g, h \in G} f_{h, h}^g + \sum_{h \in G} f_{h, h}^m + \sum_{h \in G} f_{\bar{h}, \bar{h}}^m + \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f_{m, m}^g \right].$$

2) La mesure de Haar de  $B$  est donnée pour tous  $h, k$  dans  $G$  par

$$\begin{aligned} \phi(f_{h,k}^0) &= \frac{1}{n+1}, \\ \phi(f_{h,m}^0) &= \frac{1}{n+1}, \\ \phi(f_{m,h}^0) &= \frac{1}{n+1}, \\ \phi(f_{m,m}^0) &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et est nulle sur les autres éléments de la base.

3) Les espérances conditionnelles de Haar de  $B$  sont données par

$$\begin{aligned} E_t(f_{h,k}^0) &= \frac{1}{n+1} e^{-h}, \quad \forall h, k \in G, \\ E_t(f_{h,m}^0) &= \frac{1}{n+1} e^{-h}, \quad \forall h \in G, \\ E_t(f_{m,h}^0) &= \frac{1}{n+1} e^m, \quad \forall h \in G, \\ E_t(f_{m,m}^0) &= \frac{1}{n+1} e^m, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_s(f_{h,k}^0) &= \frac{1}{n+1}e_{-h}, \quad \forall h, k \in G, \\ E_s(f_{h,m}^0) &= \frac{1}{n+1}e_{-h}, \quad \forall h \in G, \\ E_s(f_{m,h}^0) &= \frac{1}{n+1}e_m, \quad \forall h \in G, \\ E_s(f_{m,m}^0) &= \frac{1}{n+1}e_m, \end{aligned}$$

et sont nulles sur les autres éléments de la base.

4) L'automorphisme modulaire  $\theta_\phi$  de la mesure de Haar de  $B$  est égal à l'identité sur tous les éléments de la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  à l'exception de  $\theta_\phi(f_{h,k}^m) = \frac{1}{n}f_{h,k}^m$  et  $\theta_\phi(f_{\bar{h},\bar{k}}^m) = n f_{\bar{h},\bar{k}}^m$  pour tous  $h, k$  dans  $G$ .

## 2.2 Deux familles de coïdalgèbres involutives.

### 2.2.1 Les coïdalgèbres involutives $I_H$ .

**Proposition 2.2.1.** Soit  $B$  l'algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On pose, pour tous  $h$  dans  $H$  et  $x$  dans  $\Omega$ ,

$$u_x^h = \sum_{y \in \Omega} f_{x,y}^h.$$

L'espace vectoriel  $I_H = \text{Vect}\{u_x^h | h \in H, x \in \Omega\}$  est une coïdalgèbre involutive connexe de  $B$ . Leur ensemble  $\{I_H | H < G\}$  forme un sous-treillis de  $l(B)$  isomorphe au treillis des sous-groupes de  $G$  dont le plus petit élément est  $B_t$ .

Donnons d'abord un lemme.

**Lemme 2.2.2.** On a :

- (i)  $u_g^h u_{g'}^{h'} = \delta_{g',g+h'} u_{g'}^{h+h'}$ ,  $u_m^h u_m^{h'} = u_m^{h+h'}$ ,  $u_g^h u_m^{h'} = u_m^h u_g^{h'} = 0, \forall h, h' \in H, g, g' \in G$ ,
- (ii)  $(u_g^h)^* = u_{g^{-h}}^{-h}$  et  $(u_m^h)^* = u_m^{-h}, \forall h \in H, g \in G$ ,
- (iii)  $e^g = u_{-g}^0, \forall g \in G$  et  $e^m = u_m^0$ .

**Démonstration.** On utilise les formules du produit et de l'involution ainsi que l'écriture de  $e^x$ ,  $x \in \Omega$  dans la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$  (lemme 2.1.12).  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition.

**Démonstration.**

Le coproduit étant le coproduit comatriciel dans la base  $\{f_{y,z}^x, x \in \Omega, y, z \in \Omega_x\}$ , on a

$$\Delta(u_x^h) = \sum_{y \in \Omega} f_{x,y}^h \otimes u_y^h$$

pour tous  $h$  dans  $H$ ,  $x$  dans  $\Omega$ , et donc  $\Delta(I_H)$  est incluse dans  $B \otimes I_H$ .

Le lemme précédent montre que  $I_H$  est une coïdalgèbre involutive (le point (iii) implique que  $1 = \sum_{x \in \Omega} e^x$  appartient bien à  $I_H$ ).

Montrons que  $I_H$  vérifie la condition  $I_H \cap B_s = \mathbb{C}$ . Soit  $u$  dans  $I_H \cap B_s$ . Une base de  $B_s$  est donnée par les éléments  $e_g = \sum_{x \in \Omega} f_{x,-g}^0$ ,  $g \in G$  et  $e_m = \sum_{x \in \Omega} f_{x,m}^0$ . On doit donc avoir

$$u = \sum_{h \in H, x \in \Omega} c_{h,x} \sum_{y \in \Omega} f_{x,y}^h = \sum_{y \in \Omega} c_y \sum_{x \in \Omega} f_{x,y}^0.$$

Ceci n'est possible que si  $c_{h,x} = 0$  si  $h \neq 0$  et  $c_{0,x} = c_y = c$  pour tous  $x, y$  dans  $\Omega$ . On a bien  $I_H \cap B_s = \mathbb{C}$  et donc a fortiori  $Z(I_H) \cap B_s = \mathbb{C}$ . La coïdalgèbre involutive  $I_H$  est connexe pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ .

Soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$ . D'après la définition des coïdalgèbres  $I_H$ , on a clairement  $I_{H \cap K} \subset I_H \cap I_K$ . Réciproquement, soit  $u \in I_H \cap I_K$ . On a :

$$u = \sum_{h \in H} \sum_{x \in \Omega} c_{h,x} u_x^h = \sum_{k \in K} \sum_{y \in \Omega} c_{k,y} u_y^k$$

Comme les éléments  $u_z^g$  sont linéairement indépendants pour tous  $g$  dans  $G$  et  $z$  dans  $\Omega$ , on a nécessairement  $c_{x,h} = c_{y,k} = 0$  pour tout  $h, k \notin H \cap K$ . Ainsi,  $I_H \wedge I_K = I_{H \cap K}$ . De même, on voit facilement que  $I_H \vee I_K = I_{H+K}$ . Le treillis des coïdalgèbres  $I_H$  est donc un sous-treillis de  $l(B)$  isomorphe au treillis des sous-groupes de  $G$ . L'égalité entre  $I_{\{0\}}$  et  $B_t$  est donnée par le lemme 2.2.2.  $\square$

Nous allons maintenant étudier la structure de  $C^*$ -algèbre de  $I_H$  et l'inclusion de  $B_t$  dans  $I_H$ . Lorsque  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on choisit un ensemble  $\{u(M) | M \in G/H\}$  de représentants des classes  $M$  de  $G/H$  tel que  $u(H) = 0$ , on note  $[g]$  la classe de  $g$  dans  $G/H$ ,  $H^\perp$  l'orthogonal de  $H$  par rapport au bicaractère  $\chi$  (définition 1.2.32) et  $\widehat{H}$  le dual de  $H$ , c'est-à-dire le groupe des caractères de  $H$ .

**Proposition 2.2.3.** *Soient  $B$  l'algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On pose  $d = |H|$ . La décomposition de la coïdalgèbre involutive  $I_H$  en somme directe de  $C^*$ -algèbres simples est donnée par  $I_H = \bigoplus_{M \in G/H} I_H^M \oplus \bigoplus_{\rho \in \widehat{H}} I_H^\rho$  où*

*$I_H^M \simeq M_d(\mathbb{C})$  pour tout  $M$  dans  $G/H$  et  $I_H^\rho \simeq \mathbb{C}$  pour tout  $\rho$  dans  $\widehat{H}$ . Le diagramme de Bratteli de l'inclusion de  $B_t$  dans  $I_H$  est donné par la figure 2 et le projecteur de Jones de  $I_H$  de trace  $\frac{1}{d}$  est*

$$p_{I_H} = \frac{1}{d} \sum_{h \in H} \sum_{x \in \Omega} u_x^h.$$



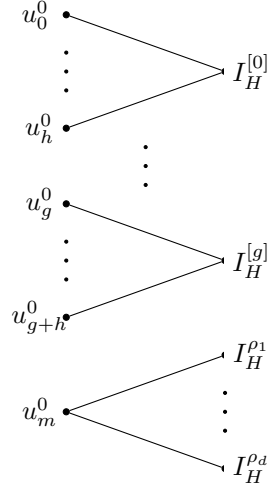


Figure 2 : Diagramme de Bratteli de  $B_t \subset I_H$ .

**Démonstration.** D'après l'écriture du produit dans la base  $\{u_x^h | x \in \Omega\}$  de  $I_H$  (lemme 2.2.2), on pose  $e_{h,k}^M = u_{u(M)+k}^{k-h}$  pour tous  $M$  dans  $G/H$  et  $h, k$  dans  $H$ . Pour tout  $M$  dans  $G/H$ , les éléments  $e_{h,k}^M$  où  $h$  et  $k$  parcourent  $H$  engendrent une  $C^*$ -algèbre isomorphe à  $M_d(\mathbb{C})$  (voir formules du produit et de l'involution du lemme 2.2.2). On note  $I_H^M$  le bloc correspondant à la classe  $M$  de  $G/H$ .

D'un autre côté, l'application  $h \mapsto u_m^h$  est une représentation unitaire de  $H$ , donc la  $C^*$ -algèbre engendrée par les éléments  $u_m^h$  où  $h$  parcourt  $H$  est  $\bigoplus_{\rho \in \widehat{H}} \mathbb{C}p_\rho$  où  $p_\rho = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \rho(h)u_m^h$ ,  $\rho \in \widehat{H}$  sont

les projections centrales minimales. On note  $I_H^\rho$  le bloc correspondant au caractère  $\rho$  de  $\widehat{H}$ .

Comme  $e^g = u_{-g}^0$  pour tout  $g$  dans  $G$  et  $e^m = u_m^0$  (lemme 2.2.2), on obtient le diagramme de Bratteli voulu : pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $u_g^0$  est connecté au bloc  $I_H^{[g]}$  avec multiplicité 1 et n'est connecté à aucun bloc  $I_H^\rho$ ,  $\rho \in \widehat{H}$ ,  $e^m$  n'est connecté à aucun bloc  $I_H^M$ ,  $M \in G/H$ , et est connecté à tous les blocs  $I_H^\rho$ ,  $\rho \in \widehat{H}$ , avec multiplicité 1.

Calculons  $x_{I_H}$  l'unique élément positif de  $I_H$  tel que  $\varepsilon(u_x^h) = \text{tr}(x_H u_x^h)$  pour tous  $h$  dans  $H$  et  $x$  dans  $\Omega$ . Nous savons que  $\varepsilon(u_x^h) = 1$ ,  $\text{tr}(u_g^h) = \delta_{h,0}(n + \sqrt{n})^{-1}$  et  $\text{tr}(u_m^h) = \delta_{0,h}(1 + \sqrt{n})^{-1}$  pour tous  $h$  dans  $H$ ,  $g$  dans  $G$  et  $x$  dans  $\Omega$ . Cela implique que  $x_{I_H} = \sum_{h \in H} \sum_{x \in \Omega} c_{x,h} u_x^h$  avec  $c_{h,g} = n + \sqrt{n}$  et  $c_{h,m} = \sqrt{n} + 1$  pour tous  $h$  dans  $H$  et  $g$  dans  $G$ . On obtient donc

$$x_{I_H} = (n + \sqrt{n}) \sum_{h \in H} \left( \sum_{g \in G} u_g^h + \frac{1}{\sqrt{n}} u_m^h \right).$$

D'après la définition 1.8.13, le projecteur de Jones est l'unique projection qui soit un multiple de  $q^{-1}x_{I_H}q^{-1}$ . D'après les formules des points (i) et (iii) du lemme 2.2.2 et la valeur de  $q$  (proposition

2.1.8), il existe donc  $\lambda > 0$  tel que

$$p_{I_H} = \lambda q^{-1} x_{I_H} q^{-1} = \lambda \sum_{h \in H} \sum_{x \in \Omega} u_x^h.$$

Pour que  $p_{I_H}$  soit une projection, on doit avoir  $\lambda = \frac{1}{d}$ .  $\square$

### 2.2.2 Les coïdalgèbres involutives $J_H$ .

La  $C^*$ -algèbre de Hopf faible  $B$  étant autoduale, l'anti-isomorphisme de treillis  $\delta : l(B) \longrightarrow l(\widehat{B})$  (proposition 1.6.3) nous fournit un anti-isomorphisme de treillis de  $l(B)$ .

**Proposition 2.2.4.** *Soient  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . La coïdalgèbre involutive  $J_H = \Phi^{-1} \circ \delta(I_H)$  (proposition 1.6.3) de  $B$  est connexe et est engendrée en tant qu'espace vectoriel par les éléments*

$$\begin{aligned} v_{x,M}^g &= \sum_{h \in H} f_{x,u(M)+h}^g, & v_{x,m}^k &= f_{x,m}^k, \\ v_{y,M}^m &= \sum_{h \in H} f_{y,u(M)+h}^m, & v_{y,\overline{M}}^m &= \sum_{h \in H} \overline{f_{y,u(M)+h}^m}, \end{aligned}$$

pour tous  $g$  dans  $G$ ,  $x$  dans  $\Omega$ ,  $M$  dans  $G/H$ ,  $k$  dans  $H^\perp$  et  $y$  dans  $G \cup \overline{G}$ . On note  $\overline{G/H}$  une deuxième copie de  $G/H$  définie par  $\overline{G/H} = \{\overline{M} | M \in G/H\}$ .

De plus, l'ensemble  $\{J_H | H < G\}$  forme un sous-treillis de  $l(B)$  anti-isomorphe au treillis des sous-groupes de  $G$  dont le plus grand élément est  $B$ .

**Démonstration.** Comme  $B$  est régulière, le lemme 1.6.4 implique, pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ , la connexité de la coïdalgèbre involutive  $J_H = \Phi^{-1} \circ \delta(I_H)$ .

Nous souhaitons maintenant en calculer une base. Soient  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $Q$  l'élément de type groupe canonique de  $B$  (proposition 2.1.8). L'anti-isomorphisme  $\delta$  est défini pour toute coïdalgèbre involutive  $I$  de  $B$  par

$$\delta(I_H) = (\widetilde{I}_H)' \cap \widehat{B} \subset \widehat{B} \rtimes B \quad \text{où} \quad \widetilde{I}_H = Q^{-\frac{1}{2}} S(I_H) Q^{\frac{1}{2}}.$$

Démontrons d'abord un lemme.

**Lemme 2.2.5.** *On pose  $\widetilde{u}_y^h = \sum_{x \in \Omega} f_{x,y}^h$ , pour tous  $h$  dans  $H$  et  $y$  dans  $\Omega$ . Alors :*

- (i)  $S(u_g^h) = \widetilde{u}_{g^{-h}}^{-h}$  et  $S(u_m^h) = \widetilde{u}_m^{-h}$ ,  $\forall h \in H, g \in G$ ,
- (ii)  $\widetilde{u}_g^h = \sum_{g' \in G} e_{h-g, -g}^{g'-g} + e_{h-g, -g}^m$ ,  $\forall h \in H, g \in G$ ,
- (ii')  $\widetilde{u}_m^h = \sum_{g' \in G} e_{h-g', -g'}^m + \sum_{g' \in G} \chi(g', h)^{-1} e_{m,m}^{g'}$ ,  $\forall h \in H$ ,
- (iii)  $S(\varepsilon_t(\widetilde{u}_g^h)) = \widetilde{u}_{g^{-h}}^0$  et  $S(\varepsilon_t(\widetilde{u}_m^h)) = \widetilde{u}_m^0$ ,  $\forall h \in H, g \in G$ ,
- (iv)  $\widetilde{u}_x^h$  commute avec  $Q^{\frac{1}{2}}$  pour tous  $h \in H$  et  $x \in \Omega$ .

**Démonstration (du lemme).**

Pour démontrer les points (i) à (iii), on utilise les formules du lemme 2.1.12.

(iv) D'après la proposition 2.1.8, on a :

$$Q = \sum_{g,h \in G} e_{h,h}^{h-g} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{g \in G} e_{\bar{g},\bar{g}}^m + \sqrt{n} \sum_{g \in G} e_{g,g}^m + \sum_{g \in G} e_{m,m}^g.$$

On vérifie ensuite que  $Q\tilde{u}_x^h = \tilde{u}_x^h Q = \tilde{u}_x^h$  pour tous  $h$  dans  $H$  et  $x$  dans  $\Omega$ . Comme  $\tilde{u}_x^h$  commute avec  $Q$ , il commute avec la racine carrée de  $Q$ , pour tous  $h \in H$  et  $x \in \Omega$ .  $\square$

Le lemme précédent nous permet d'affirmer que  $\delta(I_H)$  est le commutant dans  $\widehat{B} \rtimes B$  de

$$S(I_H) = \{\tilde{u}_x^h | h \in H, x \in \Omega\}.$$

Nous allons maintenant extraire de cette définition des conditions calculables.

**Lemme 2.2.6.** *Un élément  $\varphi$  de  $\widehat{B}$  commute à  $S(I_H)$  si et seulement si il vérifie  $S(\varepsilon_t(u)) \triangleright \varphi = u \triangleright \varphi$  pour tout  $u$  dans  $S(I_H)$ .*

**Démonstration (du lemme).** Par définition du produit croisé  $\widehat{B} \rtimes B$  (exemple 1.5.6) et du commutant, on a

$$\delta(I_H) = \{\varphi \in \widehat{B} | [\varphi(1_{(1)} \triangleright \widehat{1}) \otimes 1_{(2)} u] = [(u_{(1)} \triangleright \varphi) \otimes u_{(2)}], \forall u \in S(I_H)\}.$$

Démontrons l'égalité suivante pour tout  $z$  dans  $B_t$  :

$$S(z) \triangleright \varphi = \varphi(z \triangleright \widehat{1}) \quad (E).$$

Quelque soit  $b$  dans  $B$ , on a  $S(z) \triangleright \varphi(b) = \varphi(bS(z))$ . D'un autre côté, l'égalité

$$b_{(1)} t \otimes b_{(2)} = b_{(1)} \otimes b_{(2)} S(t)$$

pour tous  $b$  dans  $B$  et  $t$  dans  $B_s$  (lemme 1.1.9) et la régularité de  $B$  impliquent

$$\begin{aligned} \varphi(z \triangleright \widehat{1})(b) &= \varphi(b_{(1)}) \varepsilon(b_{(2)} z) = \varphi(x_{(1)} S(z)) \varepsilon(x_{(2)}), \\ &= \varphi(x_{(1)} \varepsilon(x_{(2)}) S(z)) = \varphi(x S(z)), \forall \varphi \in \widehat{B}, z \in B_t, b \in B. \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $[\varphi(1_{(1)} \triangleright \widehat{1}) \otimes 1_{(2)} u] = [\varphi \otimes u]$  pour tous  $\varphi$  dans  $\widehat{B}$  et  $u$  dans  $S(I_H)$ . D'après la proposition 1.4.6, il existe une projection  $p$  de  $B$ , appelée projection de Haar, vérifiant  $bp = \varepsilon_t(b)p$  pour tout  $b$  dans  $B$ . Nous cherchons donc des éléments  $\varphi$  dans  $\widehat{B}$  vérifiant

$$[\varphi \otimes \varepsilon_t(u)p] = [(u_{(1)} \triangleright \varphi) \otimes \varepsilon_t(u_{(2)})p],$$

pour tout  $u$  dans  $S(I_H)$ . En utilisant (E), la définition du produit tensoriel et les propriétés de l'action, on obtient d'un côté

$$[\varphi \otimes \varepsilon_t(u)p] = [\varphi(z \triangleright \widehat{1}) \otimes p] = (S(\varepsilon_t(u)) \triangleright \varphi) \otimes p$$

et d'un autre côté

$$[(u_{(1)} \triangleright \varphi) \otimes \varepsilon_t(u_{(2)})p] = [(u_{(1)} \triangleright \varphi)(\varepsilon_t(u_{(2)}) \triangleright \widehat{1}) \otimes p] = [(u_{(1)} \triangleright \varphi)(u_{(2)} \triangleright \widehat{1}) \otimes p] = [(u \triangleright \varphi) \otimes p]$$

c'est-à-dire  $S(\varepsilon_t(u)) \triangleright \varphi = u \triangleright \varphi$  pour tout  $u$  dans  $S(I_H)$ .

Ces conditions sont suffisantes. En effet, elles impliquent :

$$\begin{aligned} [(u_{(1)} \triangleright \varphi) \otimes u_{(2)}] &= [(S(\varepsilon_t(u_{(1)})) \triangleright \varphi) \otimes u_{(2)}], \\ &= [\varphi \otimes \varepsilon_t(u_{(1)})u_{(2)}], \\ &= [\varphi \otimes u]. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant caculer une base de  $\delta(I_H)$ .

**Lemme 2.2.7.** *On pose  $\varphi = \sum_{x \in \Omega} \sum_{y, z \in \Omega_x} c_{y,z}^x \widehat{e}_{y,z}^x$ . Alors, on a  $c_{x,g'+h}^g = c_{x,g'}^g$  pour tout  $h$  dans  $H$  si  $g$  appartient à  $G$ ,  $x$  à  $\Omega$  et  $g'$  à  $G$ ,  $c_{x,m}^g = 0$  si  $g$  n'appartient pas à  $H^\perp$  et  $x$  appartient à  $\Omega$ ,  $c_{x,g'+h}^m = c_{x,g'}^m$  et  $c_{x,g'+h}^m = c_{x,g'}^m$  pour tout  $h$  dans  $H$  si  $x$  dans  $\Omega$ .*

**Démonstration (du lemme).**

D'après les formules du lemme 2.2.5 et la définition de l'action  $\triangleright$ , les conditions nécessaires et suffisantes du lemme précédent se traduisent pour  $h$  dans  $H$  et  $g$  dans  $G$  par :

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_g^h \triangleright \widehat{e}_{x,y}^{g'} &= \delta_{y,-g} \widehat{e}_{x,h-g}^{g'} & \text{et} & \quad \widetilde{u}_{g-h}^0 \triangleright \widehat{e}_{x,y}^{g'} = \delta_{y,h-g} \widehat{e}_{x,h-g}^{g'}, \quad \forall g' \in G, x, y \in \Omega, \\ \widetilde{u}_g^h \triangleright \widehat{e}_{x,y}^m &= \delta_{y,-g} \widehat{e}_{x,h-g}^m & \text{et} & \quad \widetilde{u}_{g-h}^0 \triangleright \widehat{e}_{x,y}^m = \delta_{y,h-g} \widehat{e}_{x,h-g}^m, \quad \forall x, y \in G \cup \overline{G}, \\ \widetilde{u}_m^h \triangleright \widehat{e}_{x,y}^{g'} &= \delta_{y,m} \chi(g', h)^{-1} \widehat{e}_{x,m}^{g'} & \text{et} & \quad \widetilde{u}_m^0 \triangleright \widehat{e}_{x,y}^{g'} = \delta_{y,m} \widehat{e}_{x,m}^{g'}, \quad \forall g' \in G, x, y \in \Omega, \\ \widetilde{u}_m^h \triangleright \widehat{e}_{x,y}^m &= \widehat{e}_{x,h+y}^m & \text{et} & \quad \widetilde{u}_m^h \triangleright \widehat{e}_{x,y}^m = \widehat{e}_{x,y}^m, \quad \text{si } y \in G, x \in G \cup \overline{G}, \\ \widetilde{u}_m^h \triangleright \widehat{e}_{x,y}^m &= 0 & \text{et} & \quad \widetilde{u}_m^h \triangleright \widehat{e}_{x,y}^m = 0, \quad \text{si } y \in \overline{G}, x \in G \cup \overline{G}. \end{aligned}$$

On lit alors les conditions sur les coefficients. □

Pour conclure la démonstration de la proposition, on applique  $\Phi^{-1}$  et on obtient la base désirée. De plus, comme  $\Phi^{-1} \circ \delta$  est un anti-isomorphisme de treillis, les coïdalgèbres connexes  $J_H$  forment un sous-treillis de  $l(B)$  anti-isomorphe au treillis des sous-groupes de  $G$  et on a

$$J_{\{0\}} = \Phi^{-1} \circ \delta(I_{\{0\}}) = \Phi^{-1} \circ \delta(B_t) = B$$

□

Nous allons maintenant étudier la structure de  $C^*$ -algèbre de  $J_H$  et l'inclusion  $B_t \subset J_H$ . Commençons par démontrer quelques lemmes.

**Lemme 2.2.8.** *Le produit est donné dans la base de  $J_H$  par :*

$$\begin{aligned} v_{h,M}^g v_{h',M'}^{g'} &= \delta_{h',h+g'} \delta_{M',g'+M'} v_{h',M'}^{g'+g'} & v_{m,m}^k v_{m,m}^{k'} &= v_{m,m}^{k+k'} \\ v_{g,M}^m v_{g',\overline{M'}}^m &= \delta_{g-M,g'-M'} v_{g',M'}^{g'-g} & v_{h,M}^g v_{h',M'}^m &= \delta_{h,h'} \delta_{M,M'} v_{h-g,-g+M}^m \\ v_{g,M}^m v_{m,m}^k &= \chi(k, u(M) - g) v_{g,M}^m & v_{m,m}^k v_{g,\overline{M}}^m &= \chi(k, u(M) - g) v_{g,\overline{M}}^m \\ v_{h,\overline{M}}^m v_{h',M'}^g &= \delta_{M',g+M} \delta_{h',h+g} v_{h',\overline{M'}}^m & v_{h,\overline{M}}^m v_{m,M'}^g &= \delta_{M',g+M} \chi(h, -g) v_{h,\overline{M'}}^m \\ v_{m,M}^g v_{m,M'}^{g'} &= \delta_{M',g'+M} v_{m,M'}^{g'+g'} & v_{h,M}^m v_{h',m}^k &= \delta_{h',h+k} \chi(u(M), k) v_{h',M}^m \\ v_{m,M}^g v_{h',M'}^m &= \delta_{M,M'} \chi(h, -g) v_{h,-g+M}^m & v_{h,m}^k v_{h',m}^{k'} &= \delta_{h',h+k'} v_{h',m}^{k+k'} \\ v_{h,m}^k v_{h',\overline{M'}}^m &= \delta_{h,h'} \chi(u(M'), k) v_{h-k,\overline{M'}}^m & v_{g,\overline{M}}^m v_{g',M'}^m &= \frac{d}{n} \delta_{g,g'} \delta_{M,M'} \sum_{k \in H^\perp} \chi(k, g - u(M)) v_{m,m}^k \end{aligned}$$

$$v_{g,\overline{M}}^m v_{g',\overline{M}'}^m = \beta d \delta_{M,M'} \chi(g - g', u(M)) v_{g',m}^{g'-g}, \text{ si } g - g' \in H^\perp$$

$$v_{\overline{g},M}^m v_{g',\overline{M}'}^m = \beta \delta_{g,g'} \sum_{h \in H} \chi(g, h + u(M') - u(M)) v_{m,M'}^{u(M') - u(M) + h}$$

pour tous  $g, g', h, h'$  dans  $G$ ,  $k, k'$  dans  $H^\perp$ ,  $M, M'$  dans  $G/H$ . Les autres produits d'éléments de la base de  $J_H$  sont nuls.

L'involution est donnée dans la base de  $J_H$  par :

$$\begin{aligned} (v_{g',M}^g)^* &= v_{-g+g',-g+M}^{-g}, & (v_{m,m}^g)^* &= v_{m,m}^{-g}, \\ (v_{g,M}^m)^* &= v_{\overline{g},\overline{M}}^m, & (v_{\overline{g},\overline{M}}^m)^* &= v_{g,M}^m, \\ (v_{m,M}^g)^* &= v_{m,-g+M}^{-g}, & (v_{g,m}^k)^* &= v_{-k+g,m}^{-k}, \\ (v_{\overline{g},\overline{M}}^m)^* &= \beta v_{\overline{g},\overline{M}}^m, & (v_{\overline{g},\overline{M}}^m)^* &= \beta^{-1} v_{\overline{g},\overline{M}}^m, \end{aligned}$$

pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $k$  dans  $H^\perp$  et  $M$  dans  $G/H$ .

**Démonstration.**

On calcule en utilisant la définition de la base de  $J_H$  et les formules du lemme 2.1.12.  $\square$

**Lemme 2.2.9.** On pose :

$$(i) J_H^1 = \text{Vect}\{v_{g,M}^x, v_{\overline{g},\overline{M}}^m, v_{m,m}^k \mid x \in \Omega, g \in G, M \in G/H, k \in H^\perp\},$$

$$(ii) v_M = \sum_{g \in G} v_{g,g+M}^0, \forall M \in G/H, g \in G,$$

$$(iii) z_k^1 = \sum_{M \in G/H} \chi(k, u(M)) v_M + v_{m,m}^k, \forall k \in H^\perp,$$

$$(iv) p_\rho^1 = \frac{d}{n} \sum_{k \in H^\perp} \rho(k) z_k^1, \forall \rho \in \widehat{H^\perp}.$$

L'espace vectoriel  $J_H^1$  est une algèbre et la décomposition de  $Z(J_H^1)$  en somme directe d'algèbres simples est donnée par

$$Z(J_H^1) = \bigoplus_{\rho \in \widehat{H^\perp}} \mathbb{C} p_\rho^1.$$

**Démonstration.** Le fait que  $J_H^1$  soit une algèbre découle du lemme précédent. Soit  $u$  un élément de  $J_H^1$ ,

$$u = \sum_{g,h,M} c_{h,M}^g v_{h,M}^g + \sum_{h,M} c_{h,M}^m v_{h,M}^m + \sum_{h,M} c_{h,\overline{M}}^m v_{h,\overline{M}}^m + \sum_k c_{m,m}^k v_{m,m}^k.$$

Alors  $u$  commute avec  $v_{h',M'}^{g'}$  pour tout  $g', h'$  dans  $G$ ,  $M'$  dans  $G/H$  si et seulement si pour tous  $h$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$  on a :

$$\begin{aligned} c_{h,M}^g &= 0, \text{ si } g \neq 0, \\ c_{h,M}^m &= c_{h,\overline{M}}^m = 0, \\ c_{h,M}^0 &= c_{-g+h,-g+M}^0, \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

La dernière condition est équivalente à  $c_{h,h+M}^0 = c_{g,g+M}^0$  pour tous  $g, h$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ .

En posant  $v_M = \sum_{g \in G} v_{g,g+M}^0$  pour tout  $M$  dans  $M$ , on obtient :

$$u = \sum_{M \in G/H} c_M v_M + \sum_{k \in H^\perp} c_{m,m}^k v_{m,m}^k.$$

En multipliant maintenant des deux côtés par  $v_{\bar{g},\bar{M}}^m$  on obtient  $c_{-g+M} = \sum_{k \in H^\perp} c_{m,m}^k \chi(k, u(M) - g)$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ , c'est-à-dire  $c_M = \sum_{k \in H^\perp} c_{m,m}^k \chi(k, u(M))$  pour tout  $M$  dans  $G/H$ . On a donc montré que les éléments du centre de  $J_H^1$  sont de la forme :

$$u = \sum_{k \in H^\perp} c_{m,m}^k \left( \sum_{M \in G/H} \chi(k, u(M)) v_M + v_{m,m}^k \right).$$

La dimension du centre de  $J_H$  est donc égale à  $[G : H] = \frac{n}{d}$  et les éléments

$$z_k^1 = \sum_{M \in G/H} \chi(k, u(M)) v_M + v_{m,m}^k$$

où  $k$  parcourt  $H^\perp$  en forment une base. On remarque que  $z_k^1 z_{k'}^1 = z_{k+k'}^1$  pour tous  $k, k'$  dans  $H^\perp$ . L'application  $k \mapsto z_k^1$  est donc une représentation de  $H^\perp$  dans  $Z(J_H^1)$ . On obtient donc

$$Z(J_H^1) = \bigoplus_{\rho \in \widehat{H^\perp}} \mathbb{C} p_\rho^1.$$

□

**Lemme 2.2.10.** *Les éléments*

$$e_{g,g'}^\rho = v_{g',g'+M}^{g'-g}, \quad e_{g,m}^\rho = v_{g,g+M}^m, \quad e_{m,g}^\rho = v_{\bar{g},g+M}^m \quad \text{et} \quad e_{m,m}^\rho = \frac{d}{n} \sum_{k \in H^\perp} \rho(k) v_{m,m}^k$$

pour tous  $\rho \in \widehat{H^\perp}$ ,  $g, g'$  dans  $G$  où  $M$  dans  $G/H$  est tel que  $\rho = \chi(u(M), \cdot)^{-1}$  engendrent une  $C^*$ -algèbre simple  $J_H^\rho$  isomorphe à  $M_{n+1}(\mathbb{C})$ .

**Démonstration.** D'après le lemme précédent, l'algèbre  $J_H^1$  est la somme de  $\frac{|G|}{|H|} = \frac{n}{d}$  blocs de matrices. Il nous reste à en exhiber une base d'unités matricielles. Soient  $\rho \in \widehat{H^\perp}$  et  $M$  dans  $G/H$ . Le calcul nous donne :

$$p_\rho^1 v_{g',g'+M}^{g'-g} = \delta_{\rho, \chi(u(M), \cdot)^{-1}} v_{g',g'+M}^{g'-g}, \quad p_\rho^1 v_{g,g+M}^m = \delta_{\rho, \chi(u(M), \cdot)^{-1}} v_{g,g+M}^m,$$

$$p_\rho^1 v_{\bar{g},g+M}^m = \delta_{\rho, \chi(u(M), \cdot)^{-1}} v_{\bar{g},g+M}^m \quad \text{et} \quad p_\rho^1 \frac{d}{n} \sum_{k \in H^\perp} \rho(k) v_{m,m}^k = \frac{d}{n} \sum_{k \in H^\perp} \rho(k) v_{m,m}^k$$

pour tous  $g, g'$  dans  $G$ . On en déduit le lemme (pour vérifier que l'involution est bien l'involution matricielle usuelle, on utilise les formules du lemme 2.2.8). □

**Lemme 2.2.11.** *On pose :*

$$(i) J_H^2 = \text{Vect}\{v_{m,M}^g, v_{\bar{g},M}^m, v_{g,m}^k \mid g \in G, x \in \Omega, M \in G/H, k \in H^\perp\},$$

$$(ii) z_h^2 = \sum_{M \in G/H} v_{m,M}^h + \sum_{g \in G} \chi(g, h)^{-1} v_{g,m}^0, \quad \forall h \in H,$$

$$(iii) p_\rho^2 = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \rho(h) z_h^2, \quad \forall \rho \in \widehat{H}.$$

L'espace vectoriel  $J_H^2$  est une algèbre et la décomposition en somme directe d'algèbres simples de  $Z(J_H^2)$  est donnée par :

$$Z(J_H^2) = \bigoplus_{\rho \in \widehat{H}} \mathbb{C} p_\rho^2.$$

**Démonstration.** Le fait que  $J_H^2$  soit une algèbre découle du lemme 2.2.8. Soit  $u$  un élément de  $J_H^2$ ,

$$u = \sum_{g,M} c_{m,M}^g v_{m,M}^g + \sum_{g,M} c_{\bar{g},M}^m v_{\bar{g},M}^m + \sum_{g,M} c_{g,\bar{M}}^m v_{g,\bar{M}}^m + \sum_{k,g} c_{g,M}^k.$$

Alors  $u$  commute avec  $v_{m,M}^g$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ , si et seulement si on a :

- (i)  $c_{g,M}^m = c_{g,\bar{M}}^m = 0, \quad \forall g \in G, M \in G/H,$
- (ii)  $c_{m,M}^g = 0, \quad \forall M \in G/H, \forall g \in G \setminus H,$
- (iii)  $c_{m,M}^h = c_{m,M'}^h, \quad \forall h \in H, M, M' \in G/H.$

On obtient :

$$u = \sum_{h \in H} c_h \sum_{M \in G/H} v_{m,M}^h + \sum_{k,g} c_{g,m}^k v_{g,m}^k.$$

Ensuite,  $u$  commute avec  $v_{g,\bar{M}}^m$ , si et seulement si on a  $c_{g,m}^k = 0$  pour tout  $g$  dans  $G$  si  $k \neq 0$  et  $c_{g,m}^0 = \sum_{h \in H} c_h \chi(g, h)^{-1}$  pour tout  $g$  dans  $G$ , et par suite

$$u = \sum_{h \in H} c_h \left( \sum_{M \in G/H} v_{m,M}^h + \sum_{g \in G} \chi(g, h)^{-1} v_{g,m}^0 \right).$$

La dimension de  $Z(J_H^2)$  est donc égale à  $|H| = d$  et les éléments

$$z_h^2 = \sum_{M \in G/H} v_{m,M}^h + \sum_{g \in G} \chi(g, h)^{-1} v_{g,m}^0,$$

où  $h$  parcourt  $H$ , en forment une base. Comme on a  $z_h^2 z_{h'}^2 = z_{h+h'}^2$ , l'application  $h \mapsto z_h^2$  est une représentation de  $H$  dans  $Z(J_H^2)$  et on a

$$Z(J_H^2) = \bigoplus_{\rho \in \widehat{H}} \mathbb{C} p_\rho^2.$$

□

**Lemme 2.2.12.** Pour tout  $\widetilde{M} \in G/H^\perp$ , les éléments

$$e_{k,k'}^{\widetilde{M}} = v_{k'+u(\widetilde{M}),m}^{k'-k}, \quad e_{M,M'}^{\widetilde{M}} = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(u(\widetilde{M}), h + u(M') - u(M)) v_{m,M'}^{h+u(M')-u(M)}$$

$$e_{M,k}^{\widetilde{M}} = \frac{1}{\sqrt{|H|}} \chi(u(M), k) v_{k+u(\widetilde{M}),M}^m, \quad e_{k,M}^{\widetilde{M}} = \frac{1}{\beta \sqrt{|H|}} \chi(u(M), k)^{-1} v_{k+u(\widetilde{M}),\bar{M}}^m$$

pour tous  $k, k'$  dans  $H^\perp$ ,  $M, M'$  dans  $G/H$  engendrent une  $C^*$ -algèbre isomorphe à  $M_{2\frac{n}{d}}(\mathbb{C})$  que l'on note  $J_H^{\widetilde{M}}$ .

**Démonstration.** D'après le lemme précédent, l'algèbre  $J_H^2$  est la somme de  $|H| = d$  blocs de matrices. Nous donnons juste un exemple de vérification. Soient  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ ,  $M, M', M''$  dans  $G/H$  et  $k$  dans  $H^\perp$ . Calculons  $e_{M, M'}^{\widetilde{M}}, e_{M'', k}^{\widetilde{M}}$ . On a :

$$\begin{aligned}
e_{M, M'}^{\widetilde{M}}, e_{M'', k}^{\widetilde{M}} &= \frac{1}{|H|^{\frac{3}{2}}} \sum_{h \in H} \chi(u(\widetilde{M}), h + u(M') - u(M)) v_{m, M'}^{h+u(M')-u(M)} \chi(u(M''), k) v_{k+u(\widetilde{M}), M''}^m \\
&= \delta_{M', M''} \frac{1}{|H|^{\frac{3}{2}}} \sum_{h \in H} \chi(u(\widetilde{M}), h + u(M') - u(M)) v_{m, M'}^{h+u(M')-u(M)} \\
&\quad \times \chi(u(M''), k) \chi(k + u(\widetilde{M}), -h - u(M') + u(M)) v_{k+u(\widetilde{M}), -h-u(M')+u(M)+M''}^m, \\
&= \delta_{M', M''} \frac{1}{|H|^{\frac{3}{2}}} \sum_{h \in H} \chi(k, u(M)) v_{k+u(\widetilde{M}), M}^m \\
&= \delta_{M', M''} \frac{1}{|H|} \chi(k, u(M)) v_{k+u(\widetilde{M}), M}^m, \\
&= \delta_{M', M''} e_{M, k}^{\widetilde{M}}.
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé  $\chi(h, k) = 1$  pour tous  $k$  dans  $H^\perp$ ,  $h$  dans  $H$ . □

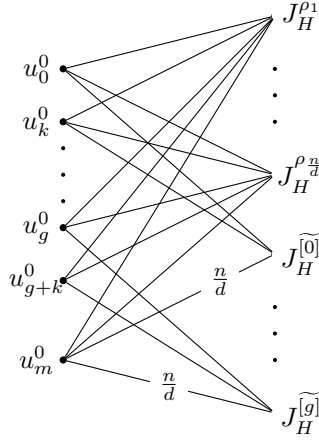
Nous pouvons maintenant énoncer la proposition.

**Proposition 2.2.13.** *Soient  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ ,  $d = |H|$ . La décomposition de la coïdalgèbre involutive  $J_H$  en somme directe de  $C^*$ -algèbres simples est donnée par  $J_H = \bigoplus_{\rho \in \widehat{H}^\perp} J_H^\rho \oplus \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} J_H^{\widetilde{M}}$*

où  $J_H^\rho \simeq M_{(n+1)}(\mathbb{C})$  pour tout  $\rho$  dans  $\widehat{H}^\perp$  et  $J_H^{\widetilde{M}} \simeq M_{2\frac{n}{3}}(\mathbb{C})$  pour tout  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ , le diagramme de Bratteli de l'inclusion  $B_t \subset J_H$  est donné par la figure 3 et le projecteur de Jones de  $J_H$  de trace  $d\tau$  est

$$p_{J_H} = d\tau^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{d} \sum_{M \in G/H} \sum_{h \in M} \left( \sum_{g \in G} v_{h, M}^g + n^{\frac{1}{4}} v_{h, M}^m + n^{\frac{1}{4}} v_{h, \widetilde{M}}^m \right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in H^\perp} v_{m, m}^k \right).$$



Figure 3 : Diagramme de Bratteli de  $B_t \subset J_H$ .**Démonstration.**

La structure d'algèbre est démontrée dans les lemmes précédents. Maintenant que nous connaissons une base d'unités matricielles de  $J_H$ , nous pouvons donner le diagramme de Bratteli de  $B_t \subset J_H$ . Il est obtenu en écrivant les éléments  $e^g = u_{-g}^0$ ,  $g \in G$ , et  $e^m = u_m^0$  dans la base d'unités matricielles de  $J_H$ . On a pour tout  $g$  dans  $G$  :

$$\begin{aligned} u_g^0 &= \sum_{y \in \Omega} f_{g,y}^0 = \sum_{M \in G/H} v_{g,M}^0 + v_{g,m}^0, \\ &= \sum_{M \in G/H} e_{g,g}^{\chi(g-u(M), \cdot)} + e_{[g]-g, [g]-g}^{[g]} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_m^0 &= \sum_{y \in \Omega} f_{m,y}^0 = \sum_{M \in G/H} v_{m,M}^0 + v_{m,m}^0, \\ &= \sum_{M \in G/H} \sum_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} e_{\widetilde{M}, M}^{\widetilde{M}} + \sum_{\rho \in \widehat{H^\perp}} e_{m,m}^\rho. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $u_g^0$  est connecté au bloc  $J_H^{[g]}$  avec multiplicité 1, où  $[g]$  est la classe de  $g$  modulo  $H^\perp$ , et à tous les blocs  $J_H^\rho$ ,  $\rho \in \widehat{H^\perp}$ , et  $u_m^0$  est connecté à tous les blocs  $J_H^{\widetilde{M}}$ ,  $\widetilde{M} \in G/H^\perp$ , avec multiplicité 1 et à tous les blocs  $J_H^\rho$ ,  $\rho \in \widehat{H^\perp}$ , avec multiplicité  $\frac{|G|}{|H|}$ .

Il ne nous reste plus qu'à calculer le projecteur de Jones de  $J_H$ . Soit

$$x_{J_H} = \sum_{g \in G} \sum_{x \in \Omega} \sum_{M \in G/H} c_{x,M}^g v_{x,M}^g + \sum_{k \in H^\perp} \sum_{x \in \Omega} c_{x,m}^k v_{x,m}^k + \sum_{y \in G \cup \overline{G}} \sum_{M \in G/H \cup \overline{G}/\overline{H}} c_{y,M}^m v_{y,M}^m$$

l'unique élément positif de  $J_H$  tel que  $\text{tr}(x_{J_H} u) = \varepsilon(u)$  pour tout  $u$  dans  $J_H$ . Calculons les coefficients.

Quelques soient  $g', h$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ , on a

$$\begin{aligned} x_{J_H} v_{h,M}^{g'} &= \sum_{g \in G} c_{h-g', M-g'}^g v_{h,M}^{g+g'} + c_{h-g', M-g'}^m v_{h,M}^m, \\ \text{tr}(v_{h,M}^{g+g'}) &= \delta_{g, -g'} \tau |H|, \\ \text{tr}(v_{h,M}^m) &= 0, \\ \varepsilon(v_{h,M}^g) &= 1, \text{ si } h \in M, 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} c_{h-g', M-g'}^g &= 0 \text{ si } h \notin M, \forall g \in G \\ c_{h-g', M-g'}^g &= \frac{1}{\tau |H|} \text{ si } h \in M. \forall g \in G, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, quelque soit  $M$  dans  $G/H$  :

$$\begin{aligned} c_{h,M}^g &= 0 \text{ si } h \notin M, \forall g \in G \\ c_{h,M}^g &= \frac{1}{\tau |H|} \text{ si } h \in M. \forall g \in G. \end{aligned}$$

Quelques soient  $g'$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$ , on a

$$\begin{aligned} x_{J_H} v_{m,M}^{g'} &= \sum_{g \in G} c_{g, M-g'}^m \chi(g, g')^{-1} v_{g', \overline{M}}^m + \sum_{g^i n G} c_{m, M-g}^g v_{m,M}^{g+g'}, \\ \text{tr}(v_{g', \overline{M}}^m) &= 0, \\ \text{tr}(v_{m,M}^{g+g'}) &= \delta_{g, -g'} \tau \sqrt{n} |H|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $c_{m, M-g'}^{-g'} = 0$ . On obtient donc  $c_{m,M}^g = 0$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ .

Quelque soit  $k$  dans  $H^\perp$ , on a

$$\begin{aligned} x_{J_H} v_{m,m}^k &= \sum_{k' \in H^\perp} c_{m,m}^{k'} v_{m,m}^{k+k'} + \sum_{g, M} \chi(k, u(M) - g) c_{g, M}^m v_{g, M}^m, \\ \text{tr}(v_{m,m}^{k+k'}) &= \tau \sum_{g \in G} \chi(k + k', g)^{-1} = \delta_{k, -k'} \tau |G|, \\ \text{tr}(v_{g, M}^m) &= 0, \\ \varepsilon(v_{m,m}^k) &= 1. \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $v_{m,m}^{-k} = \frac{1}{\tau |G|}$ . On obtient donc  $v_{m,m}^k = \frac{1}{\tau |G|}$  pour tout  $k$  dans  $H^\perp$ .

Quelques soient  $k$  dans  $H^\perp$  et  $g$  dans  $G$ , on a

$$\begin{aligned} x_{J_H} v_{g,m}^k &= \sum_{M \in G/H} c_{g-k, M}^m \chi(u(M), k) v_{g, M}^m + \sum_{k' \in H^\perp} c_{g-k, m}^{k'} v_{g, M}^{k+k'}, \\ \text{tr}(v_{g, M}^m) &= 0, \\ \text{tr}(v_{g-k, m}^{k+k'}) &= \delta_{k, -k'} \tau \sqrt{n}, \\ \varepsilon(v_{g, M}^k) &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $c_{g-k, m}^{-k} = 0$ . On obtient donc  $c_{g, m}^k = 0$  pour tous  $k$  dans  $H^\perp$  et  $g$  dans  $G$ .

Quelques soient  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ , on a

$$\begin{aligned} x_{J_H} v_{g,M}^m &= \frac{|H|}{|G|} c_{\bar{g},\bar{M}}^m \sum_{k \in H^\perp} \chi(k, g - u(M)) v_{m,m}^k + \sum_{g' \in G} c_{g',M}^{g'} v_{g'-g',M-g'}^m, \\ \text{tr}(v_{g-g',M-g'}^m) &= 0, \\ \text{tr}(v_{m,m}^k) &= \delta_{k,0} \tau |G|, \\ \varepsilon(v_{g,M}^m) &= 1 \text{ si } g \in M, 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $c_{\bar{g},\bar{M}}^m = \frac{1}{\tau |G|}$  si  $g$  appartient à  $M$  et  $c_{\bar{g},\bar{M}}^m = 0$  sinon.

Quelques soient  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ . On a

$$\begin{aligned} x_{J_H} v_{\bar{g},\bar{M}}^m &= \sum_{g' \in G} c_{g',g'-g+M}^m v_{g',M}^{g-g'} + \sum_{k \in H^\perp} c_{m,m}^k \chi(k, u(M) - g) v_{\bar{g},\bar{M}}^m, \\ \text{tr}(v_{g-g',M}^{g-g'}) &= \delta_{g,g'} \tau |H|, \\ \text{tr}(v_{\bar{g},\bar{M}}^m) &= 0, \\ \varepsilon(v_{\bar{g},\bar{M}}^m) &= 1 \text{ si } g \in M, 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $c_{\bar{g},\bar{M}}^m = \frac{1}{\tau |H|}$  si  $g$  appartient à  $M$  et  $c_{\bar{g},\bar{M}}^m = 0$  sinon.

En étudiant  $\text{tr}(x_{J_H} v_{\bar{g},\bar{M}}^m)$  et  $\text{tr}(x_{J_H} v_{g,M}^m)$  de la même manière, on trouve  $c_{\bar{g},\bar{M}}^m = c_{g,M}^m = 0$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ .

On a donc

$$x_{J_H} = \frac{1}{\tau |H|} \sum_{M \in G/H} \sum_{h \in M} \left( \sum_{g \in G} v_{h,M}^g + v_{h,M}^m + v_{h,\bar{M}}^m \right) + \frac{1}{\tau |G|} \sum_{k \in H^\perp} v_{m,m}^k.$$

On calcule maintenant  $q^{-1} x_{J_H} q^{-1}$ , avec  $q = \tau^{\frac{1}{4}} \left( \sum_{g \in G} e^g + n^{\frac{1}{4}} e^m \right)$ . À l'aide des formules du lemme

2.1.12, on obtient, pour tous  $g, g', h$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$ ,  $k$  dans  $H^\perp$  :

$$\begin{aligned} e^x v_{h,M}^{g'} &= \delta_{x,g'-h} v_{h,M}^{g'} & \text{et} & & v_{h,M}^{g'} e^x &= \delta_{x,-g'} v_{h,M}^{g'}, \\ e^x v_{h,M}^m &= \delta_{x,-h} v_{h,M}^m & \text{et} & & v_{h,M}^m e^x &= \delta_{x,m} v_{h,M}^m, \\ e^x v_{\bar{g},\bar{M}}^m &= \delta_{x,m} v_{\bar{g},\bar{M}}^m & \text{et} & & v_{\bar{g},\bar{M}}^m e^x &= \delta_{x,-h} v_{\bar{g},\bar{M}}^m, \end{aligned}$$

ainsi que

$$e^x v_{m,m}^k = v_{m,m}^k e^x = \delta_{x,m} v_{m,m}^k.$$

Le projecteur de Jones  $p_{J_H}$  est donc égal à

$$\lambda \tau^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{|H|} \left( \sum_{M \in G/H} \sum_{h \in M} \left( \sum_{g \in G} v_{h,M}^g + n^{\frac{1}{4}} v_{h,M}^m + n^{\frac{1}{4}} v_{h,\bar{M}}^m \right) \right) + \frac{1}{|G|} n^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in H^\perp} v_{m,m}^k \right),$$

pour une certaine constante  $\lambda$ . Pour que  $p_{J_H}$  soit une projection, on doit avoir  $\lambda = |H| \tau$ .  $\square$

### 2.2.3 Le treillis des coïdalgèbres involutives $I_H$ et $J_H$ .

Si  $B$  est la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ , d'après les propositions 2.2.1 et 2.2.4, les familles  $\{I_H | H < G\}$  et  $\{J_H | H < G\}$  forment des sous-treillis de  $l(B)$  respectivement isomorphe et anti-isomorphe au treillis des sous-groupes de  $G$ . La proposition suivante montre qu'ils ne sont pas disjoints et que leur réunion forme un treillis.

**Proposition 2.2.14.** *Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . La réunion des treillis  $\{I_H | H < G\}$  et  $\{J_H | H < G\}$  forme un treillis inclus dans  $l(B)$  pour les opérations  $I_H \wedge J_K = I_{H \cap K^\perp}$  et  $I_H \vee J_K = J_{H^\perp \cap K}$  pour tous sous-groupes  $H$  et  $K$  de  $G$ . Le plus grand élément de ce treillis est  $B$  et le plus petit élément est  $B_t$ .*

#### Démonstration.

Soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$  et  $u$  dans  $I_H \cap J_K$ .

On a  $u = \sum_{h \in H} \sum_{x \in \Omega} c_x^h u_x^h$  et

$$\begin{aligned} u &= \sum_{g \in G} \sum_{x \in \Omega} \sum_{M \in G/H} c_{x,M}^g v_{x,M}^g + \sum_{l \in K^\perp} \sum_{x \in \Omega} c_{x,m}^l v_{x,m}^l \\ &+ \sum_{y \in G \cup \overline{G}} \sum_{M \in G/H} c_{y,M}^m v_{y,M}^m + \sum_{y \in G \cup \overline{G}} \sum_{M \in G/H} c_{y,\overline{M}}^m v_{y,\overline{M}}^m, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $u = \sum_{h \in H} \sum_{x \in \Omega} c_x^h \sum_{y \in \Omega} f_{x,y}^h$  et

$$\begin{aligned} u &= \sum_{g,x,M} c_{x,M}^g \sum_{k \in K} f_{x,u(M)+k}^g + \sum_{l,x} c_{x,m}^l f_{x,m}^l \\ &+ \sum_{y,M} c_{y,M}^m \sum_{k \in K} f_{y,u(M)+k}^m + \sum_{y,M} c_{y,\overline{M}}^m \sum_{k \in K} f_{y,u(M)+k}^m. \end{aligned}$$

On obtient  $c_{y,M}^m = 0$  pour tous  $y$  dans  $G \cup \overline{G}$  et  $M$  dans  $G/H \cup \overline{G/H}$ ,  $c_{x,M}^g = c_{x,m}^l = c_x^h = 0$  pour tous  $x$  dans  $\Omega$  et  $M$  dans  $G/H$  si  $g, l, h$  n'appartiennent pas à  $H \cap K^\perp$  et  $c_{x,M}^g = c_{x,N}^g = c_{x,m}^g = c_x^g$  pour tous  $g$  dans  $H \cap K^\perp$ ,  $M, N$  dans  $G/H$  et  $x$  dans  $\Omega$ . On obtient donc

$$u = \sum_{g \in H \cap K^\perp} \sum_{x \in \Omega} c_x^g u_x^g.$$

Ainsi la coïdalgèbre  $I_H \cap J_K$  est égale à la coïdalgèbre  $I_{H \cap K^\perp}$ .

En prenant  $K = H^\perp$ , cela implique  $I_H \subset J_{H^\perp}$  et donc on a bien  $I_H \subset J_{H^\perp \cap K}$ . On vérifie facilement que les conditions d'associativité et d'absorption sont vérifiées.  $\square$

**Corollaire 2.2.15.** Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  avec  $G = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $P$  un ensemble fini de nombres premiers deux à deux distincts. Le treillis  $\{I_H | H < G\} \cup \{J_H | H < G\}$  est alors isomorphe au treillis  $T$  des sous-ensembles d'un ensemble à  $\text{card}(P) + 1$  éléments.

**Démonstration.**

Lorsque  $G$  est de la forme  $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , où  $P$  est un ensemble fini de nombres premiers deux à deux distincts, quelque soit le bicharactère  $\chi$ , l'orthogonal  $H^\perp$  d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est l'unique sous-groupe de  $G$  tel que  $|H||H^\perp| = |G|$ . On pose  $l = \text{card}(P)$ . On écrit  $P$  sous la forme  $P = \{p_i | i = 1, \dots, l\}$  et on pose  $E = \{1, \dots, l\}$ . Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on définit  $E_H$  comme étant le sous-ensemble de  $E$  formé des  $i$  tels que  $p_i$  divise l'ordre de  $H$  (autrement dit  $H \simeq \prod_{i \in E_H} \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ ).

L'isomorphisme de treillis est donné par l'application de  $\{I_H | H < G\} \cup \{J_H | H < G\}$  dans  $T$  qui à  $I_H$  associe  $E_H$  et qui à  $J_H$  associe  $E_{H^\perp} \cup \{l + 1\}$  pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ .  $\square$

Les figures 4, 5 et 6 illustrent les cas  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $G = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$  et  $G = \mathbb{Z}/pqr\mathbb{Z}$ . La symétrie des treillis obtenus est due à l'autodualité de  $B$ .

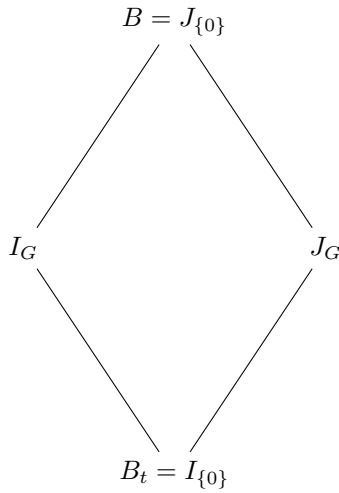


Figure 4,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

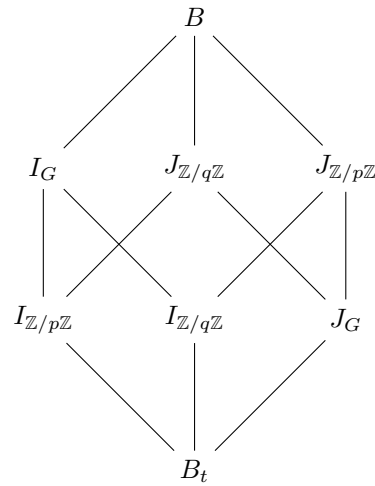


Figure 5,  $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$

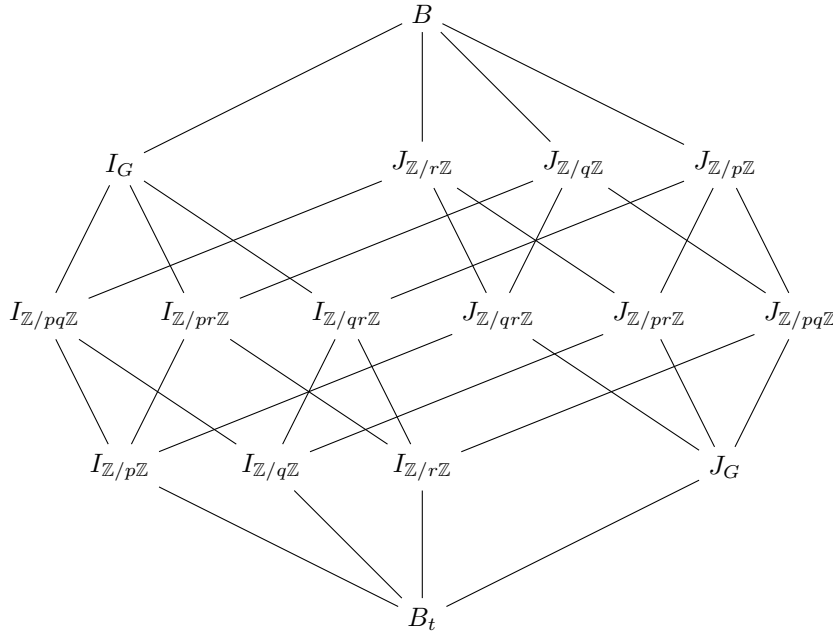


Figure 6,  $\mathbb{Z}/pqr\mathbb{Z}$

### 2.3 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons construit une famille de  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles biconnexes et régulières en appliquant le théorème de reconstruction aux catégories de Tambara-Yamagami. Pour toute  $C^*$ -algèbre de Hopf faible  $B$  réalisant un catégorie  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ , nous avons calculé sa structure et étudié l'inclusion  $B_t \subset B$  en calculant son indice, son projecteur de Jones et en donnant son diagramme de Bratteli. Nous avons ensuite démontré que  $B$  était autoduale et exploité cette autodualité pour calculer deux familles de coïdalgèbres involutives connexes, les familles  $\{I_H, H < G\}$  et  $\{J_H, H < G\}$ . Nous avons à nouveau étudié les inclusions  $B_t \subset I_H$  et  $B_t \subset J_H$  (projecteurs de Jones, diagrammes de Bratteli), puis décrit les sous-treillis de  $l(B)$  formés par ces deux familles de coïdalgèbres involutives de  $B$  respectivement isomorphe et anti-isomorphe au treillis des sous-groupes de  $G$ . Pour finir, nous avons remarqué que leur réunion formait un treillis inclus dans  $l(B)$ , isomorphe au treillis des sous-ensembles d'un ensemble fini lorsque  $G$  est de la forme  $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , où  $P$  est un ensemble de nombres premiers deux à deux distincts.



## Chapitre 3

# Application des catégories aux sous-facteurs.

Ce nouveau chapitre comporte trois parties, le but étant d'appliquer la théorie des catégories de module au calcul des coïdalgèbres des  $C^*$ -algèbres de Hopf faibles construites dans le chapitre précédent. Nous allons commencer par établir le lien entre les algèbres de comodule d'une algèbre de Hopf faible quelconque  $B$  (dont les coïdalgèbres sont un cas particulier) et les catégories de module sur  $\text{Rep}(B)$ . La deuxième partie est consacrée au calcul d'un certain type de catégories de module simples sur les catégories de Tambara-Yamagami, dites de multiplicité 1. Les catégories de Tambara-Yamagami étant  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduées, nous utiliserons la théorie de Clifford développée dans [G]. Nous montrerons ensuite que toute catégorie de module simple sur  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \chi, \beta)$ , où

$P$  est un ensemble de nombres premiers deux à deux distincts, est de multiplicité 1. Si  $B$  est la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à  $\mathcal{C}$ , grâce au lien entre les coïdalgèbres de  $B$  et les catégories de module sur  $\mathcal{C}$ , nous prouverons que le diagramme de Bratteli (pondéré) de l'inclusion  $B_t \subset I$  pour toute coïdalgèbre connexe  $I$  de  $B$  est soit le diagramme de Bratteli (pondéré) de  $B_t \subset I_H$ , soit le diagramme de Bratteli (pondéré) de  $B_t \subset J_H$ . Grâce à la correspondance de Galois et aux résultats du chapitre 2, nous pourrons alors décrire les graphes principaux des facteurs intermédiaires de l'inclusion  $M_2 \subset M_2 \rtimes B$  lorsque  $B$  réalise  $\mathcal{C}$ .

### 3.1 Algèbres de comodule et catégories de module.

Si  $B$  est une algèbre de Hopf faible, nous établissons le lien entre les algèbres de comodules sur  $B$  et les catégories de module sur  $\text{Rep}(B)$ . Ce lien est déjà connu pour les algèbres de Hopf (voir par exemple [AM]).

#### 3.1.1 Algèbre de comodule.

On suppose toujours que  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

**Définition 3.1.1** ([NV2], définition 4.1.2). *Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible (de dimension finie) (sur  $k$ ). On appelle comodule (à gauche) sur  $B$  un  $k$ -espace vectoriel  $I$  muni d'une application*



$k$ -linéaire  $\delta$  de  $I$  vers  $B \otimes_k I$ , appelée coaction, vérifiant :

$$(i) (\Delta \otimes id)\delta = (id \otimes \delta)\delta,$$

$$(ii) (\varepsilon \otimes id)\delta = id.$$

On note  $\delta(a) = a^{(1)} \otimes a^{(2)}$  pour tout  $a$  dans  $I$ .

On appelle algèbre de comodule (à gauche) sur  $B$  une  $k$ -algèbre  $I$  munie d'une structure de comodule  $(I, \delta)$  telle que :

$$(iii) \delta(ab) = \delta(a)\delta(b), \forall a, b \in I,$$

$$(iv) (\varepsilon_s \otimes id)\delta(1) = \delta(1).$$

Une sous-algèbre de comodule d'une algèbre de comodule  $I$  est une sous-algèbre (non unifère)  $J$  de  $I$  qui est une algèbre de comodule pour la restriction de  $\delta$  à  $J$ , que l'on notera encore  $\delta$ .

Une coïdalgèbre de  $B$  est donc une sous-algèbre unifère  $I$  de  $B$  telle que  $(I, \Delta)$  soit une algèbre de comodule.

Nous allons maintenant donner quelques propriétés des algèbres de comodules.

**Proposition 3.1.2.** Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible et  $(I, \delta)$  une algèbre de comodule sur  $B$ . Alors :

(i)  $I$  est un  $B_t$ -bimodule via

$$z_1.a.z_2 = \varepsilon(z_1.a^{(1)}.z_2)a^{(2)}$$

pour tous  $z_1, z_2$  dans  $B_t$  et  $a$  dans  $I$  et on a  $z.1 = 1.z$  pour tout  $z$  dans  $B_t$ .

(ii) La coïdalgèbre  $(B_t, \Delta)$  est incluse canoniquement dans l'algèbre de comodule  $(I, \delta)$  via

$$\iota(z) = z.1, \forall z \in B_t.$$

En particulier, on a  $1_{(1)} \otimes \iota(1_{(2)}) = 1^{(1)} \otimes 1^{(2)}$ .

(iii) Pour tous  $z, z_1, z_2$  dans  $B_t$  et  $a$  dans  $I$ ,

$$\begin{aligned} \delta(z.a) &= za^{(1)} \otimes a^{(2)} & (I_1), \\ \delta(a.z) &= a^{(1)}z \otimes a^{(2)} & (I'_1), \\ z_1.a.z_2 &= \iota(z_1)a\iota(z_2) & (I_2), \\ \varepsilon_t(a^{(1)})a^{(2)} &= a & (I_3). \end{aligned}$$

**Démonstration.**

(i) On a, pour tous  $z_1, z_2$  dans  $B_t$  et  $a$  dans  $I$ , d'une part

$$(z_1.a).z_2 = \varepsilon(z_1a^{(1)})a^{(2)}.z_2 = \varepsilon(z_1a^{(1)})\varepsilon(a^{(2)}z_2)a^{(3)} = \varepsilon(z_1a^{(1)}z_2)a^{(2)}$$

et d'autre part

$$z_1.(a.z_2) = z_1.\varepsilon(a^{(1)}z_2)a^{(2)} = \varepsilon(a^{(1)}z_2)\varepsilon(z_1a^{(2)})a^{(3)} = \varepsilon(z_1a^{(1)}z_2)a^{(2)},$$

ainsi que

$$z_1.(z_2.a) = z_1.\varepsilon(z_2a^{(1)})a^{(2)} = \varepsilon(\varepsilon(z_2a^{(1)})z_1a^{(2)})a^{(3)} = \varepsilon(z_1z_2a^{(1)})a^{(2)} = z_1z_2.a$$

et

$$(a.z_1).z_2 = \varepsilon(a^{(1)}z_1)a^{(2)}.z_2 = \varepsilon(\varepsilon(a^{(1)}z_1)a^{(2)}z_2)a^{(3)} = \varepsilon(a^{(1)}z_1z_2)a^{(2)} = a.z_1z_2.$$

De plus, on a  $z.1 = \varepsilon(z1^{(1)})1^{(2)} = \varepsilon(1^{(1)}z)1^{(2)} = 1.z$ ,  $\forall z \in B_t$ .

(ii) D'après le (i),  $\iota$  est un morphisme d'algèbres. Montrons que  $(\text{id} \otimes \iota)\Delta(z) = \delta(\iota(z))$  pour tout  $z$  dans  $B_t$ . On a pour tout  $z$  dans  $B_t$  :

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \iota)\Delta(z) &= 1_{(1)}z \otimes \iota(1_{(2)}) &= 1_{(1)}z \otimes \varepsilon(1_{(2)}1^{(1)})1^{(2)} \\ &= 1_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}1^{(1)})z \otimes 1^{(2)} &= 1_{(1)}\varepsilon(1^{(1)}1_{(2)})z \otimes 1^{(2)} \\ &= 1^{(1)}z \otimes 1^{(2)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta(\iota(z)) &= \delta(\varepsilon(z1^{(1)})1^{(2)}) &= \varepsilon(z1^{(1)})1^{(2)} \otimes 1^{(3)} \\ &= \varepsilon(1^{(1)}z)1^{(2)} \otimes 1^{(3)} &= \varepsilon(1^{(1)}1_{(1)}z)1^{(2)}1_{(2)} \otimes 1^{(3)} \\ &= 1^{(1)}z \otimes 1^{(2)}. \end{aligned}$$

(iii) *Propriétés (I<sub>1</sub>) et (I'<sub>1</sub>)*. On a, pour tous  $z$  dans  $B_t$  et  $a$  dans  $I$  :

$$\delta(z.a) = \varepsilon(za^{(1)})a^{(2)} \otimes a^{(3)} = \varepsilon(z1^{(1)}a^{(1)})1^{(2)}a^{(2)} \otimes a^{(3)} = za^{(1)} \otimes a^{(2)}.$$

La propriété (I<sub>1</sub>') se démontre de la même manière.

*Propriété (I<sub>2</sub>)*. On a, pour tous  $z_1, z_2$  dans  $B_t$  et  $a$  dans  $I$  :

$$\begin{aligned} \delta(z_1.a.z_2) &= z_1a^{(1)}z_2 \otimes a^{(2)} &= (z_11^{(1)} \otimes 1^{(2)})(a^{(1)} \otimes a^{(2)})(1^{(1)}z_2 \otimes 1^{(2)}) \\ &= \delta(z_1.1)\delta(a)\delta(1.z_2) &= \delta(\iota(z_1)a\iota(z_2)) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les propriétés (I<sub>1</sub>) et (I'<sub>1</sub>). Il ne reste plus qu'à appliquer  $\varepsilon \otimes \text{id}$  aux deux membres de l'égalité.

*Propriété (I<sub>3</sub>)*. On a  $\varepsilon_t(a^{(1)})a^{(2)} = \varepsilon(\varepsilon_t(a^{(1)})a^{(2)})a^{(3)} = \varepsilon(a^{(1)})a^{(2)} = a$  pour tout  $a$  dans  $I$ , où nous avons utilisé la propriété  $\varepsilon_t(b_{(1)})b_{(2)} = b$  pour tout  $b$  dans  $B$ .  $\square$

### 3.1.2 La catégorie des représentations d'une algèbre de comodule.

Nous pouvons maintenant décrire la structure de  $\text{Rep}(B)$ -module de la catégorie  $\text{Rep}(I)$  des  $I$ -modules de dimension finie. Si  $V$  est un  $I$ -module, alors  $V$  est un  $B_t$ -module via  $z.v = \iota(z).v$  pour tous  $z \in B_t$  et  $v \in V$ .

**Proposition 3.1.3.** *Soient  $B$  une algèbre de Hopf faible et  $I$  une algèbre de comodule sur  $B$ . La catégorie  $\text{Rep}(I)$  est une catégorie de module sur  $\text{Rep}(B)$  pour le bifoncteur défini sur les objets par  $X \otimes V = \delta(1)(X \otimes_k V)$ , pour tout objet  $X$  de  $\text{Rep}(B)$  et tout objet  $V$  de  $\text{Rep}(I)$ , avec comme morphismes structurels  $\mu_{X,Y,V} : (X \otimes Y) \otimes V \longrightarrow X \otimes (Y \otimes V)$  le changement de parenthèse et  $l_V : B_t \otimes V \longrightarrow V$  défini par  $l_V(\delta(1)(z \otimes v)) = z.v$ ,  $z \in B_t$ ,  $v \in V$  pour tous objets  $X, Y$  de  $\text{Rep}(B)$  et  $V$  de  $\text{Rep}(I)$ . On la note  $\text{Rep}(I, \delta)$ , excepté si  $I$  est une coïdalgèbre où on note simplement  $\text{Rep}(I)$ .*

**Démonstration.** Quelques soient  $X \in \text{Rep}(B)$  et  $V \in \text{Rep}(I)$ , on peut munir  $X \otimes V$  de la structure de  $I$ -module définie par  $a.(x \otimes v) = \delta(a)(x \otimes v)$ ,  $a \in I$ ,  $x \in X$ ,  $v \in V$ . L'application  $\otimes$  définie ainsi sur les objets de  $\mathcal{C} \times \mathcal{M}$  induit un bifoncteur de  $\mathcal{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ . Le fait que  $\mu_{X,Y,V}$ ,  $X, Y \in \text{Rep}(B)$ ,  $V \in \text{Rep}(I)$ , soit un morphisme de  $I$ -modules et qu'il vérifie la condition du pentagone sont assurés par la coassociativité de  $\delta$  et de  $\Delta$ . D'après leur définition, ces morphismes sont clairement bijectifs et fonctoriels.

Montrons que  $\lambda_V$  est un isomorphisme de  $I$ -modules pour tout objet  $V$  de  $\text{Rep}(I)$ . On a, pour tous  $a$  dans  $I$ ,  $z$  dans  $B_t$  et  $v$  dans  $V$  :

$$\begin{aligned} \lambda_V(a.[\delta(1)(z \otimes v)]) &= \lambda_V(a^{(1)}.z \otimes a^{(2)}.v) = \iota(a^{(1)}.z).(a^{(2)}.v) \\ &= \iota(\varepsilon_t(a^{(1)}z))a^{(2)}.v = (\varepsilon_t(a^{(1)}z).a^{(2)}).v \\ &= (a.z).v = a\iota(z).v \\ &= a.(\iota(z).v). \end{aligned}$$

Nous avons utilisé ici les propriétés  $(I'_1)$  et  $(I_2)$ .

Le morphisme inverse  $\lambda_V^{-1}$  de  $V$  vers  $B_t \otimes V$  est donné par  $\lambda_V^{-1}(v) = 1^{(1)}.1 \otimes 1^{(2)}.v$  pour tout  $v$  dans  $V$ . En effet, on a, pour tous  $z$  dans  $B_t$  et  $v$  dans  $V$  :

$$\begin{aligned} (\lambda_V^{-1} \circ \lambda_V)(1^{(1)}.z \otimes 1^{(2)}.v) &= 1^{(1)}.1 \otimes 1^{(2)}.(z.v) \\ &= (\text{id} \otimes \iota)(\varepsilon_t(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}z)(1 \otimes v) \\ &= (\text{id} \otimes \iota)(\varepsilon_t(1_{(1)}z) \otimes 1_{(2)})(1 \otimes v) \\ &= 1^{(1)}.z \otimes 1^{(2)}.v \end{aligned}$$

grâce à la propriété  $1_{(1)} \otimes \iota(1_{(2)}) = 1^{(1)} \otimes 1^{(2)}$  et à la propriété  $\varepsilon_t(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}z = \varepsilon_t(1_{(1)}z) \otimes 1_{(2)}$  pour tout  $z$  dans  $B_t$  (lemme 1.1.9). De plus, on a  $(\lambda_V \circ \lambda_V^{-1})(v) = 1.v = v$  pour tout  $v$  dans  $V$ . Ces deux conditions impliquent que  $\lambda_V^{-1}$  est un morphisme de  $I$ -modules.

Il reste à montrer que la famille  $\{\lambda_V, V \in \text{Rep}(I)\}$  est fonctorielle et qu'elle vérifie la condition du triangle. Soient  $V, W$  deux objets de  $\text{Rep}(I)$  et  $f : V \rightarrow W$  un morphisme de  $\text{Rep}(I)$ . On a, pour tous  $z$  dans  $B_t$  et  $v$  dans  $V$  :

$$\begin{aligned} (\lambda_W \circ (\text{id} \otimes f))(1^{(1)}.z \otimes 1^{(2)}.v) &= \lambda_W(1^{(1)}.z \otimes 1^{(2)}.f(v)) \\ &= \iota(z).f(v) \\ &= f(\iota(z).v) \\ &= (f \circ \lambda_V)(1^{(1)}.z \otimes 1^{(2)}.v). \end{aligned}$$

Les isomorphismes  $\lambda_V, V \in \text{Rep}(I)$  sont bien fonctoriels.

Soient maintenant  $X$  dans  $\text{Rep}(B)$  et  $V$  dans  $\text{Rep}(I)$ . Nous allons montrer la condition du triangle en terme des applications  $r_X^{-1}$  et  $\lambda_V^{-1}$ . On rappelle que  $r_X^{-1} : X \otimes B_t \rightarrow X$  est défini par  $r_X^{-1}(x) = 1_{(1)}.x \otimes 1_{(2)}$  pour tout  $x$  dans  $X$  et qu'on a  $1_{(1)} \otimes \iota(1_{(2)}) = 1^{(1)} \otimes 1^{(2)}$  pour tout  $z$  dans  $B_t$ . On a, pour tous  $x$  dans  $X$  et  $v$  dans  $V$  :

$$\begin{aligned} (r_X^{-1} \otimes \text{id}_V)(1^{(1)}.x \otimes 1^{(2)}.v) &= 1_{(1)}.(1^{(1)}.x) \otimes 1_{(2)} \otimes 1^{(2)}.v \\ &= 1_{(1)}1'_{(1)}.x \otimes 1_{(2)} \otimes \iota(1'_{(2)}).v \\ &= 1_{(1)}.x \otimes \varepsilon_t(1_{(2)}) \otimes \iota(1_{(3)}).v \end{aligned}$$

d'après la propriété  $1_{(1)}1_{(1)'} \otimes 1_{(2)} \otimes 1_{(2)'} = 1_{(1)} \otimes \varepsilon_t(1_{(2)}) \otimes 1_{(3)}$  (lemme 1.1.9). D'autre part, on a, pour tous  $x$  dans  $X$  et  $v$  dans  $V$  :

$$\begin{aligned} (\text{id}_X \otimes \lambda_V^{-1})(1^{(1)}.x \otimes 1^{(2)}.v) &= 1^{(1)}.x \otimes 1^{(1)'} \cdot 1 \otimes 1^{(2)'} \cdot (1^{(2)}.v) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \iota)[(1_{(1)} \otimes \varepsilon_t(1_{(1)'}) \otimes 1_{(2)'1_{(2)}})](x \otimes 1 \otimes v) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \iota)[(1_{(1)} \otimes \varepsilon_t(1_{(1)'1_{(2)}}) \otimes 1_{(2)'})](x \otimes 1 \otimes v) \\ &= 1_{(1)}.x \otimes \varepsilon_t(1_{(2)}) \otimes \iota(1_{(3)}).v \end{aligned}$$

d'après la propriété  $\varepsilon_t(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}z = \varepsilon_t(1_{(1)}z) \otimes 1_{(2)}$  pour tout  $z$  dans  $B_t$ . □

### 3.1.3 Indécomposabilité de $\text{Rep}(I)$ .

Lorsque  $B$  est une algèbre de Hopf faible semi-simple, nous considérons des algèbres de comodule sur  $B$  semi-simples. Dans ce cas, nous regardons comment se lit au niveau d'une algèbre de comodule semi-simple  $I$ , l'indécomposabilité en tant que catégorie de module sur  $\text{Rep}(B)$  de la catégorie  $\text{Rep}(I)$ . Nous définissons d'abord la notion d'indécomposabilité pour une algèbre de comodule semi-simple.

**Définition 3.1.4.** *Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible semi-simple. Une algèbre de comodule semi-simple est dite décomposable si elle peut s'écrire comme somme directe de deux sous-algèbres de comodule non triviales.*

**Proposition 3.1.5.** *Soit  $B$  une algèbre de Hopf faible semi-simple et  $I$  une algèbre de comodule sur  $B$  semi-simple. La catégorie  $\text{Rep}(I, \delta)$  est décomposable en tant que catégorie de module sur  $\text{Rep}(B)$  si et seulement si  $I$  est décomposable en tant qu'algèbre de comodule sur  $B$ .*

**Démonstration.** On suppose qu'il existe deux catégories de module sur  $\text{Rep}(B)$  semi-simples et non triviales  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  et une équivalence de catégorie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$  vers  $\text{Rep}(I, \delta)$ . Comme  $\text{Rep}(I, \delta)$  est semi-simple finie,  $I$  se décompose en une somme directe d'algèbres semi-simples finies non triviales  $I_1 \oplus I_2$  avec  $\mathcal{F}(\mathcal{M}_1) \simeq \text{Rep}(I_1)$  et  $\mathcal{F}(\mathcal{M}_2) \simeq \text{Rep}(I_2)$  en tant que catégories semi-simples (corollaire 1.2.19). Le foncteur  $\mathcal{F}$  est essentiellement surjectif, donc il existe  $X_1$  dans  $\mathcal{M}_1$  et  $X_2$  dans  $\mathcal{M}_2$  tels qu'on ait  $I_1 \simeq \mathcal{F}(X_1)$  et  $I_2 \simeq \mathcal{F}(X_2)$ . Comme  $\mathcal{F}$  est un foncteur de module, on a  $B \otimes I_1 \simeq B \otimes \mathcal{F}(X_1) \simeq \mathcal{F}(B \otimes X_1)$  et  $B \otimes I_2 \simeq B \otimes \mathcal{F}(X_2) \simeq \mathcal{F}(B \otimes X_2)$ . Ainsi,  $B \otimes I_1$  est un  $I_1$ -module donc  $\delta(a) = \delta(a)(1 \otimes 1) \in B \otimes I_1$ , pour tout  $a$  dans  $I_1$ , et  $B \otimes I_2$  est un  $I_2$ -module donc  $\delta(a) = \delta(a)(1 \otimes 1) \in B \otimes I_2$ , pour tout  $a$  dans  $I_2$ . L'algèbre de comodule  $I$  est décomposable.

La réciproque est évidente.  $\square$

Nous nous intéressons particulièrement aux coïdalgèbres, notamment aux coïdalgèbres connexes. Démontrons d'abord un lemme.

**Lemme 3.1.6.** *Si  $I$  est une algèbre de comodule semi-simple sur une algèbre de Hopf faible semi-simple  $B$ , alors  $I$  est décomposable si et seulement si elle possède une projection  $p$  dans  $Z(I)$  telle que  $\delta(p) = 1_{(1)} \otimes p.1_{(2)}$ .*

**Démonstration.** Si  $I$  est une algèbre de comodule semi-simple décomposable, alors il existe une projection  $p$  dans  $Z(I)$  telle que  $I = pI \oplus (1-p)I$  et  $pI$  et  $(1-p)I$ . Comme  $p$  est l'unité de  $pI$ , on a  $\delta(p) = (\varepsilon_s \otimes \text{id})\delta(p)$ . Donc on a :

$$(\varepsilon_s \otimes \text{id})\delta(p) = 1_{(1)}\varepsilon(p^{(1)}1_{(2)}) \otimes p^{(2)} = 1_{(1)} \otimes \varepsilon(p^{(1)}1_{(2)})p^{(2)} = 1_{(1)} \otimes p.1_{(2)}.$$

(On a aussi  $\delta(1-p) = 1_{(1)} \otimes (1-p).1_{(2)}$ .)

Réciproquement, soit  $p$  dans  $Z(I)$  une projection telle que  $\delta(p) = 1_{(1)} \otimes p.1_{(2)}$ . On a  $I = pI \oplus (1-p)I$  en tant qu'algèbre semi-simple. De plus on a, pour tout  $a$  dans  $I$  :

$$\delta(pa) = \delta(p)\delta(a) = (1_{(1)} \otimes p.1_{(2)})\delta(a) = (1 \otimes p)(\text{id} \otimes \iota)\Delta(1)\delta(a) = (1 \otimes p)\delta(a) \in B \otimes pI.$$

De même, on a  $\delta((1-p)I) \subset B \otimes (1-p)I$ .  $\square$

La proposition suivante établit le lien entre la connexité d'une coïdalgèbre et l'indécomposabilité de la catégorie de ses représentations.

**Proposition 3.1.7.** *Soit  $I$  une coïdalgèbre d'une algèbre de Hopf faible semi-simple  $B$ . La catégorie  $\text{Rep}(I)$  est indécomposable en tant que catégorie de module sur  $\text{Rep}(B)$  si et seulement si  $I$  est connexe.*

**Démonstration.** Il suffit de combiner la proposition 3.1.5 avec le lemme précédent et la proposition 1.1.5.  $\square$

### 3.1.4 Déformations d'algèbres de comodule

Nous savons maintenant associer à chaque algèbre de comodule sur  $B$  une catégorie de module sur  $\text{Rep}(B)$ . Il est naturel de se demander quand deux algèbres de comodule donnent deux catégories de module équivalentes sur  $\text{Rep}(B)$ . Soient  $(I, \delta)$ ,  $(J, \gamma)$  deux algèbres de comodule sur  $B$ . Lorsque les catégories  $\text{Rep}(I, \delta)$  et  $\text{Rep}(J, \gamma)$  sont équivalentes en tant que  $\text{Rep}(B)$ -modules, nous dirons que  $(I, \delta)$  et  $(J, \gamma)$  sont équivalentes au sens de Morita. Nous allons adapter la notion de déformation au cas des algèbres de comodule et ensuite donner des conditions d'équivalence de Morita en s'inspirant de [N1] (des conditions similaires pour l'équivalence de Morita des algèbres de Hopf faibles sont données dans l'annexe B).

**Définition 3.1.8.** *Soient  $(I, \delta)$  une algèbre de comodule sur  $B$ . On dit que  $(I, \gamma)$  est déformée de  $(I, \delta)$  s'il existe un couple, appelé un  $\delta$ -couple de déformation,  $(\omega, \bar{\omega}) \in (B \otimes I) \times (B \otimes I)$  tel que :*

- (i)  $\omega\bar{\omega} = \bar{\omega}\omega = \delta(1)$ ,
- (ii)  $(\Delta \otimes id)(\omega) = (1 \otimes \omega)(id \otimes \delta)(\omega)$ ,
- (iii)  $\varepsilon_t(\omega^{(1)}z).\omega^{(2)} = 1$ , pour tout  $z \in B_t$ , où on note  $\omega = \omega^{(1)} \otimes \omega^{(2)}$ ,
- (iv)  $\gamma(i) = \omega\delta(i)\bar{\omega}$  pour tout  $i \in I$ .

**Proposition 3.1.9.** *Soient  $(I, \delta_1)$  et  $(I, \delta_2)$  deux structures de  $B$ -algèbre de comodule sur  $I$  telles que  $\delta_1(1) = \delta_2(1)$ . Les algèbres de comodule  $(I, \delta_1)$  et  $(I, \delta_2)$  sont équivalentes au sens de Morita si et seulement si elles sont déformées l'une de l'autre.*

**Démonstration.** Soient  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  un ensemble de représentants des  $B$ -modules irréductibles,  $\{V_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$  un ensemble de représentants des  $I$ -modules irréductibles et  $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ ,  $\{\rho_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$  les représentations irréductibles associées.

Pour tout  $\alpha$  appartenant à  $\Omega$  et tout  $\beta$  appartenant à  $\Lambda$ , comme les catégories des représentations de  $(I, \delta_1)$  et  $(I, \delta_2)$  sont équivalentes en tant que catégories de module sur  $\text{Rep}(B)$ , les produits tensoriels de représentations  $\pi_\alpha \otimes_1 \rho_\beta = (\pi_\alpha \otimes \rho_\beta) \circ \delta_1$  et  $\pi_\alpha \otimes_2 \rho_\beta = (\pi_\alpha \otimes \rho_\beta) \circ \delta_2$  ont la même décomposition en somme de représentations irréductibles et donc les algèbres  $(\pi_\alpha \otimes \rho_\beta)\delta_1(I)$  et  $(\pi_\alpha \otimes \rho_\beta)\delta_2(I)$  sont isomorphes. L'égalité entre  $\delta_1(1)$  et  $\delta_2(1)$  implique l'existence d'une algèbre simple  $I_{\alpha, \beta}$  incluse dans  $\pi_\alpha(B) \otimes \rho_\beta(I)$  d'unité  $\delta_1(1)(\pi_\alpha(1) \otimes \rho_\beta(1))$  contenant  $(\pi_\alpha \otimes \rho_\beta)\delta_1(I)$  et  $(\pi_\alpha \otimes \rho_\beta)\delta_2(I)$ . L'isomorphisme entre ces algèbres s'étend donc en un automorphisme de  $I_{\alpha, \beta}$ , qui est intérieur par simplicité de cette algèbre. Il existe donc  $\omega_{\alpha, \beta}$  inversible dans  $I_{\alpha, \beta}$  tel que  $(\pi_\alpha \otimes \rho_\beta)\delta_2(x) = \omega_{\alpha, \beta}(\pi_\alpha \otimes \rho_\beta)\delta_1(x)\omega_{\alpha, \beta}^{-1}$  pour tout  $x \in I$ .

On pose

$$\omega = \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha, \beta} \quad , \quad \bar{\omega} = \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha, \beta}^{-1}.$$

On a bien  $\delta_2(x) = \omega\delta_1(x)\bar{\omega}$  pour tout  $x$  dans  $I$  et  $\omega\bar{\omega} = \bar{\omega}\omega = \delta_1(1)$ .

Les propriétés vérifiées par le couple  $(\omega, \bar{\omega})$  sont la traduction des conditions du pentagone et du triangle. L'équivalence entre les catégories  $\text{Rep}(I, \delta_1)$  et  $\text{Rep}(I, \delta_2)$  est réalisée par le foncteur  $\mathcal{F} : \text{Rep}(I, \delta_1) \longrightarrow \text{Rep}(I, \delta_2)$  défini sur les objets par  $\mathcal{F}(V) = V$  et dont les isomorphismes

fonctoriels  $\mathcal{F}_{X,V} : \mathcal{F}(X \otimes V) \longrightarrow X \otimes \mathcal{F}(V)$  sont donnés par  $\mathcal{F}_{X,V}(1^{(1)}.x \otimes 1^{(2)}.v) = \omega(x \otimes v)$  pour tous objets  $X$  de  $\text{Rep}(B)$ ,  $V$  de  $\text{Rep}(I)$  et  $x$  dans  $X$ ,  $v$  dans  $V$ .

L'associativité étant le changement de parenthèses, la condition du pentagone se réduit donc à  $(\Delta \otimes \text{id})(\omega) = (1 \otimes \omega)(\text{id} \otimes \delta_1)(\omega)$ .

Soit maintenant  $V$  un  $I$ -module. On a  $l_V^1(1^{(1)}.z \otimes 1^{(2)}.v) = l_V^2(1^{(1)}.z \otimes 1^{(2)}.v) = z.v$  pour tous  $z$  dans  $B_t$  et  $v$  dans  $V$  où  $l_V^1$  est l'isomorphisme unité pour  $V$  dans  $\text{Rep}(I, \delta_1)$  et  $l_V^2$  dans  $\text{Rep}(I, \delta_2)$ . D'après la définition de  $\mathcal{F}$ , la condition du triangle s'écrit donc  $z.v = (\omega^{(1)}.z).(\omega^{(2)}.v)$  pour tous  $z$  dans  $B_t$  et  $v$  dans  $V$ . On doit donc avoir  $(\omega^{(1)}.z).\omega^{(2)} = z$ , c'est-à-dire  $\varepsilon_t(\omega^{(1)}z).\omega^{(2)} = z$ , pour tout  $z$  dans  $B_t$ .

La réciproque est claire.  $\square$

Passons maintenant aux coïdalgèbres. Nous voulons savoir quand deux coïdalgèbres conjuguées sont équivalentes au sens de Morita.

**Corollaire 3.1.10.** *Soient  $I$  et  $J$  deux coïdalgèbres de  $B$  conjuguées et soit  $u$  un inversible de  $B$  tel que  $I = uJu^{-1}$ .  $I$  et  $J$  sont équivalentes au sens de Morita si et seulement si il existe un  $\Delta$ -couple de déformation  $(\omega, \bar{\omega}) \in (B \otimes I) \times (B \otimes I)$  tel que  $(1 \otimes u)\omega\Delta(a)\bar{\omega}(1 \otimes u^{-1}) = \Delta(uau^{-1})$  pour tout  $a \in I$ .*

## 3.2 Catégories de module sur les catégories de Tambara-Yamagami.

### 3.2.1 Théorie de Clifford.

Dans [G], une théorie de Clifford est développée pour les catégories monoïdales abéliennes fortement graduées, c'est-à-dire telle que chaque composante homogène possède au moins un objet inversible (un objet  $X$  d'une catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  est dit inversible s'il existe un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $X \otimes Y$  soit isomorphe à  $\mathbf{1}$ ). Elle permet de décrire les catégories de module sur  $\mathcal{C} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$

à partir des catégories de module sur  $\mathcal{C}_e$ , qui est elle-même une catégorie monoïdale abélienne. Dans le cas des catégories de Tambara-Yamagami, la catégorie  $\mathcal{C}_e$  est la catégorie  $\text{Vect}_G$  dont la classification des catégories de module simples est rappelée dans l'exemple 1.3.12. Les catégories de Tambara-Yamagami n'étant pas fortement graduées mais seulement fidèlement graduées, nous allons réécrire les démonstrations des résultats qui nous intéressent dans ce contexte.

**Définition 3.2.1.** *Si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont deux sous-catégories d'une catégorie de fusion  $\mathcal{C}$ , on note  $\mathcal{D} \overline{\otimes} \mathcal{D}'$  la sous-catégorie semi-simple pleine de  $\mathcal{C}$  engendrée par les objets de la forme  $X \otimes Y$  où  $X$  appartient à  $\mathcal{D}$  et  $Y$  appartient à  $\mathcal{D}'$ .*

*Si  $\mathcal{D}$  est une sous-catégorie d'une catégorie de fusion  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{N}$  une sous-catégorie d'une catégorie de module semi-simple  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{C}$ , on note  $\mathcal{D} \overline{\otimes} \mathcal{N}$  la sous-catégorie semi-simple pleine de  $\mathcal{M}$  engendrée par les objets de la forme  $X \otimes V$  où  $X$  appartient à  $\mathcal{D}$  et  $V$  appartient à  $\mathcal{N}$ .*

*Si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont deux sous-catégories d'une catégorie semi-simple  $\mathcal{C}$ , on note  $\mathcal{D}' + \mathcal{D}$  la sous-catégorie semi-simple pleine de  $\mathcal{C}$  engendrée par  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .*

D'après la proposition 1.3.9, nous pouvons nous restreindre aux catégories de module semi-simples squelette. Cela simplifie les démonstrations. Nous démontrons d'abord un lemme.

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie de module semi-simple finie et squelette sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{N}$  une sous-catégorie de module semi-simple sur  $\mathcal{C}_e$  de  $\mathcal{M}$  vue comme catégorie de module sur  $\mathcal{C}_e$ . On a les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ , la catégorie  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$  est une sous-catégorie de module semi-simple sur  $\mathcal{C}_e$  de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$  est simple si et seulement si  $\mathcal{N}$  est simple,*

(ii) *Le groupe  $\Lambda$  agit sur l'ensemble des classes d'équivalence de sous-catégories de module simples sur  $\mathcal{C}_e$  de  $\mathcal{M}$  par  $\lambda. [\mathcal{N}] = [\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}]$ .*

**Démonstration.**

(i) Soient  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\Lambda$ . Comme  $\mathcal{M}$  est squelette, pour tous objets  $X_\lambda$  de  $\mathcal{C}_\lambda$ ,  $X_\mu$  de  $\mathcal{C}_\mu$  et  $V$  de  $\mathcal{N}$ ,  $X_\lambda \otimes (X_\mu \otimes V)$  est égal à  $(X_\lambda \otimes X_\mu) \otimes V$  et appartient à  $\mathcal{C}_{\lambda\mu} \overline{\otimes} \mathcal{N}$ . La catégorie  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} (\mathcal{C}_\mu \overline{\otimes} \mathcal{N})$  est donc une sous-catégorie semi-simple pleine de  $\mathcal{C}_{\lambda\mu} \overline{\otimes} \mathcal{N}$ . En particulier, la catégorie semi-simple  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$  est stable pour l'action de  $\mathcal{C}_e$  et on peut la munir de la structure de catégorie de module sur  $\mathcal{C}_e$  héritée de  $\mathcal{M}$ .

On suppose que  $\mathcal{N}$  est simple sur  $\mathcal{C}_e$ . Soit  $\mathcal{P}$  une sous-catégorie de module sur  $\mathcal{C}_e$  semi-simple propre et non triviale de  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$ . La catégorie  $\mathcal{C}_{\lambda^{-1}} \overline{\otimes} \mathcal{P}$  est alors égale à une sous-catégorie de module semi-simple sur  $\mathcal{C}_e$  non triviale de  $\mathcal{N}$  et donc on a  $\mathcal{C}_{\lambda^{-1}} \overline{\otimes} \mathcal{P} = \mathcal{N}$ . Mais alors on a  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} (\mathcal{C}_{\lambda^{-1}} \overline{\otimes} \mathcal{P}) = \mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$  et  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} (\mathcal{C}_{\lambda^{-1}} \overline{\otimes} \mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ . Contradiction.

Pour la réciproque il suffit de prendre  $\lambda = e$ .

(ii) Si  $\mathcal{N}$  est une catégorie de module simple sur  $\mathcal{C}_e$ , alors la catégorie  $\mathcal{C}_{\lambda\mu} \overline{\otimes} \mathcal{N}$  est simple sur  $\mathcal{C}_e$  et donc on a  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} (\mathcal{C}_\mu \overline{\otimes} \mathcal{N}) = \mathcal{C}_{\lambda\mu} \overline{\otimes} \mathcal{N}$ .  $\square$

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie de module squelette finie simple sur une catégorie de fusion  $\mathcal{C}$  fidèlement  $\Lambda$ -graduée. Alors :*

(i) *L'action de  $\Lambda$  sur les classes d'équivalence de sous-catégories de module de  $\mathcal{M}$  simples sur  $\mathcal{C}_e$  définie précédemment est transitive.*

(ii) *Si  $\mathcal{N}$  est une sous-catégorie de module sur  $\mathcal{C}_e$  simple de  $\mathcal{M}$  et  $\Sigma$  le stabilisateur de  $[\mathcal{N}]$ , alors  $\mathcal{M}_\Sigma = \sum_{\lambda \in \Sigma} (\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N})$  est une catégorie de module simple sur  $\mathcal{C}_\Sigma = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathcal{C}_\lambda$ .*

(iii) *On a  $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\mu \in \Lambda/\Sigma} (\mathcal{C}_{\mu\Sigma} \overline{\otimes} \mathcal{M}_\Sigma)$  en tant que catégorie de module sur  $\mathcal{C}_e$ .*

**Démonstration.**

(i) La catégorie semi-simple  $\mathcal{C} \overline{\otimes} \mathcal{N}$  munie de la structure de catégorie de module sur  $\mathcal{C}$  héritée de  $\mathcal{M}$  est une sous-catégorie de module semi-simple de  $\mathcal{M}$  non triviale. Comme  $\mathcal{M}$  est simple, on a donc  $\mathcal{C} \overline{\otimes} \mathcal{N} = \mathcal{M}$ . Or, on a  $\mathcal{C} \overline{\otimes} \mathcal{N} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$ . Soit  $\mathcal{P}$  une sous-catégorie de module simple sur  $\mathcal{C}_e$

de  $\mathcal{M}$ . Comme les catégories  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , engendrent  $\mathcal{M}$ , il existe  $\lambda$  dans  $\Lambda$  tel que  $\mathcal{P} \cap (\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N})$  soit non trivial. La simplicité des catégories  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$  impliquent alors  $\mathcal{P} = \mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$ . Donc, si  $N_1$  et  $N_2$  sont deux sous-catégories de module de  $\mathcal{M}$  simples sur  $\mathcal{C}_e$ , il existe  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans  $\Lambda$  tels que  $N_1 = \mathcal{C}_{\lambda_1} \overline{\otimes} \mathcal{N}$  et  $N_2 = \mathcal{C}_{\lambda_2} \overline{\otimes} \mathcal{N}$  et on a  $N_2 = \mathcal{C}_{\lambda_2 \lambda_1^{-1}} \overline{\otimes} N_1$ .

(ii) Le même raisonnement que précédemment implique que  $\Sigma$  agit transitivement sur les classes d'équivalence de sous-catégories de module de  $\mathcal{M}_\Sigma$  simples sur  $\mathcal{C}_e$ . Si  $\mathcal{P}$  est une sous-catégorie de module semi-simple sur  $\mathcal{C}_\Sigma$  de  $\mathcal{M}_\Sigma$ , alors  $\mathcal{P} = \sum_{\lambda \in \Xi} \mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$  en tant que catégorie de module sur  $\mathcal{C}_e$ ,

où  $\Xi$  est un sous-ensemble de  $\Sigma$ . La transitivité de l'action de  $\Sigma$  implique alors  $\Xi = \Sigma$ .

(iii) Il suffit de réordonner et de regrouper les termes de  $\mathcal{M} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda \overline{\otimes} \mathcal{N}$ .

□

### 3.2.2 Catégories de module de multiplicité 1 sur les catégories de Tambara-Yamagami

Toujours grâce à la proposition 1.3.9, nous ne travaillons qu'avec des catégories squelettes.

**Définition et proposition 3.2.4.** Soient  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  une catégorie de Tambara-Yamagami et soit  $\mathcal{M}$  une catégorie de module simple et squelette sur  $\mathcal{C}$ . Alors,  $\mathcal{M}$  vérifie l'une des deux conditions suivantes :

(i) Il existe deux sous-groupes  $H$  et  $K$  de  $G$ , un 2-cocycle  $\eta_H$  appartenant à  $Z^2(G, \text{Fon}(G/H, \mathbb{C}^*))$  et un 2-cocycle  $\eta_K$  appartenant à  $Z^2(G, \text{Fon}(G/K, \mathbb{C}^*))$  tels que  $\mathcal{M}$  se décompose en tant que catégorie de module sur  $\mathcal{C}_0 = \text{Vect}_G$  en une somme directe  $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$  où  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont équivalentes en tant que catégories de module sur  $\mathcal{C}_0$  respectivement à  $\mathcal{M}(H, \mu_H)$  et  $\mathcal{M}(K, \mu_K)$  (exemple 1.3.12) et où on a :

$$m \otimes M = \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/K} c_0 \widetilde{M} \quad , \quad m \otimes \widetilde{M} = \bigoplus_{M \in G/H} c_1 M, \quad \forall M \in G/H, \forall \widetilde{M} \in G/K.$$

(ii) Il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$  et un 2-cocycle  $\mu$  appartenant à  $Z^2(G, \text{Fon}(G/H, \mathbb{C}^*))$  tels que  $\mathcal{M}$  soit équivalente en tant que catégorie de module sur  $\mathcal{C}_0$  et sur  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{M}(H, \mu_H)$  et où on a :

$$m \otimes M = \bigoplus_{N \in G/H} cN, \quad \forall M \in G/H.$$

On dit qu'une catégorie de module est de multiplicité 1 si  $c_0 = c_1 = 1$  dans le premier cas ou si  $c = 1$  dans le deuxième.

#### Démonstration.

La catégorie  $\mathcal{C}$  étant une catégorie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée avec  $\mathcal{C}_0 = \text{Vect}_G$  et  $\mathcal{C}_1 = \langle m \rangle$ , d'après la théorie de Clifford (théorème 3.2.3), il y a deux cas possibles : soit  $\mathcal{M}$  est la somme directe de deux sous-catégories de module simples sur  $\text{Vect}_G$ ,  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_1$ , telles que  $m \overline{\otimes} \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$  et  $m \overline{\otimes} \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0$ , soit  $\mathcal{M}$  est une catégorie de module simple sur  $\text{Vect}_G$  avec  $m \overline{\otimes} \mathcal{M} = \mathcal{M}$ . On utilise ensuite la classification des catégories de module simples sur  $\text{Vect}_G$  de l'exemple 1.3.12.

Dans le premier cas, nous avons donc deux sous-catégories de module squelettes de  $\mathcal{M}$ , simples sur  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{M}(H, \mu_H)$  et  $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}(K, \mu_K)$ , vérifiant  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$ . L'ensemble  $\Upsilon$  des objets simples de  $\mathcal{M}$  est donc  $G/H \cup G/K$ . Si  $M$  appartient à  $G/H$ , comme on a  $m \overline{\otimes} \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$ , on a

$$m \otimes M \simeq \bigoplus_{\widetilde{N} \in G/K} c_M^{\widetilde{N}} \widetilde{N}.$$

D'après l'isomorphisme

$$\mu_{g,m,M} : (g \otimes m) \otimes M \longrightarrow g \otimes (m \otimes M),$$

on a  $c_M^{\widetilde{N}} = c_N^{\widetilde{N}}$  pour tout  $N$  dans  $G/H$ , et d'après l'isomorphisme

$$\mu_{m,g,M} : (m \otimes g) \otimes M \longrightarrow m \otimes (g \otimes m),$$

on a  $c_M^{\widetilde{N}} = c_M^{\widetilde{M}}$  pour tous  $\widetilde{N}, \widetilde{M}$  dans  $G/K$ . On note ce nombre  $c_0$ . De manière symétrique, on obtient  $c_M^{\widetilde{N}} = c_M^{\widetilde{M}}$  pour tous  $\widetilde{M}, \widetilde{N}$  dans  $G/K$  et tous  $M, N$  dans  $G/H$ . On note ce nombre  $c_1$ .



Dans le deuxième cas, nous avons une unique catégorie  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(H, \mu_H)$  avec

$$m \otimes M = \bigoplus_{N \in G/H} c_M^N N.$$

Les isomorphismes structurels impliquent cette fois  $c_M^N = c_Q^P$  pour tous  $M, N, P, Q$  dans  $G/H$  et on note ce nombre  $c$ .  $\square$

Nous allons maintenant classifier les catégories de module de multiplicité 1. Les deux théorèmes suivants sont respectivement la classification dans le premier et le deuxième cas. Démontrons d'abord un lemme justifiant nos futurs calculs. Nous utilisons l'analogie pour les catégories de module de la méthode de [HH] et [TY] pour calculer des catégories de fusion. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de module squelette semi-simple finie sur  $\mathcal{C}$  de multiplicité 1 et  $\Upsilon$  l'ensemble de ses objets simples. On note  $V_{y,z}^x$  l'espace vectoriel  $\text{Hom}(y \otimes z, x)$  pour tous  $x, y, z$  dans  $\Omega$  (on rappelle que  $\Omega$  est l'ensemble des objets simples de  $\mathcal{C}$ ) et par  $W_{x,N}^M$  l'espace vectoriel  $\text{Hom}(x \otimes N, M)$  pour tous  $M, N$  dans  $\Upsilon$  et  $x$  dans  $\Omega$ . Ces espaces vectoriels sont soit nuls soit de dimension 1. On choisit des éléments de base  $v_{y,z}^x$  de  $V_{y,z}^x$  et  $w_{x,N}^M$  de  $W_{x,N}^M$  pour tous  $x, y, z$  dans  $\Omega$  et  $M, N$  dans  $G/H$  tels que ces espaces vectoriels soient non nuls.

**Lemme 3.2.5.** *Les morphismes d'associativité  $\mu_{x,y,M}$  pour  $x, y$  dans  $\Omega$  et  $M$  dans  $\Upsilon$  sont déterminés par les applications linéaires  $\mu_{x,y,M}^N$  de*

$$\text{Hom}(x \otimes (y \otimes M), N) \simeq \bigoplus_{N' \in \Omega} W_{y,M}^{N'} \otimes W_{x,N'}^N$$

vers

$$\text{Hom}((x \otimes y) \otimes M, N) \simeq \bigoplus_{z \in X} V_{x,y}^z \otimes W_{z,M}^N$$

où  $N$  parcourt  $\Upsilon$ .

Les morphismes unité  $\lambda_M$  sont déterminés par l'application linéaire  $\lambda_M$  appartenant à  $W_{1,M}^M$  pour tout  $M$  dans  $\Upsilon$ .

Pour tous  $x, y, z$  dans  $\Omega$  et  $M$  dans  $\Upsilon$ , la condition du pentagone de

$$\text{Hom}(x \otimes (y \otimes (z \otimes M)), N) \simeq \bigoplus_{M', N' \in \Omega} W_{z,M}^{M'} \otimes W_{y,M'}^{N'} \otimes W_{x,N'}^N$$

vers

$$\text{Hom}(((x \otimes y) \otimes z) \otimes M, N) \simeq \bigoplus_{s,t \in X} V_{x,y}^t \otimes V_{t,z}^s \otimes W_{s,M}^N$$

en termes de ces applications est la commutativité du diagramme suivant (les produits tensoriels sont implicites) :

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{M', N' \in \Omega} W_{z, M}^{M'} W_{y, M'}^{N'} W_{x, N'}^N & \xrightarrow{\bigoplus_{M'} id_{W_{z, M}^{M'}} \mu_{x, y, M'}^N} & \bigoplus_{s \in X, M' \in \Omega} W_{z, M}^{M'} V_{x, y}^s W_{s, M'}^N \\
\downarrow \bigoplus_{N'} \mu_{y, z, M}^{N'} id_{V_{x, N'}^N} & & \downarrow \tau \\
\bigoplus_{t \in X, N' \in \Omega} V_{y, z}^t W_{t, M}^{M'} W_{x, M'}^N & & \bigoplus_{s \in X, M' \in \Omega} V_{x, y}^s W_{z, M}^{M'} W_{s, M'}^N \\
\downarrow \bigoplus_{t \in X} id_{V_{y, z}^t} \mu_{x, t, M}^N & & \downarrow \bigoplus_s id_{V_{x, y}^s} \mu_{s, z, M}^N \\
\bigoplus_{s, t \in X} V_{y, z}^t V_{x, t}^s W_{s, M}^N & \xrightarrow{\bigoplus_s a_{x, y, z}^s id_{W_{s, M}^N}} & \bigoplus_{s, t \in X} V_{x, y}^t V_{t, z}^s W_{s, M}^N
\end{array}$$

où  $\tau$  est la volte (définition 1.1.2), tandis que la condition du triangle est donnée par :

$$\mu_{x, 1, M}^{x+M} \circ (id_x \otimes \lambda_M) = r_x \otimes id_M.$$

### Démonstration.

Comme  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{M}$  sont semi-simples, tous morphismes  $f : x \rightarrow y$  de  $\mathcal{C}$  et  $F : M \rightarrow N$  de  $\mathcal{M}$  sont déterminés par des morphismes  $f_z : \text{Hom}(y, z) \rightarrow \text{Hom}(x, z)$  où  $z$  parcourt  $\Omega$  et  $F_P : \text{Hom}(N, P) \rightarrow \text{Hom}(M, P)$  où  $P$  parcourt  $\Upsilon$ .

Le fait que les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{M}$  soient squelettes permet d'écrire facilement  $f$  et  $F$  en fonction des  $f_z$ ,  $z \in \Omega$ , et des  $F_P$ ,  $P \in \Upsilon$  : si  $y = \bigoplus_{z \in \Omega} c_z^y z$  et  $N = \bigoplus_{P \in \Upsilon} c_P^N P$ , on note  $p_z^y$  et  $p_P^N$  les projections canoniques respectives de  $y$  sur  $c_z^y z$  et de  $N$  sur  $c_P^N P$ , pour tous  $z$  dans  $\Omega$  et  $P$  dans  $\Upsilon$  ; on a alors  $f = \bigoplus_{z \in \Omega} f_z(p_z^y)$  et  $F = \bigoplus_{P \in \Upsilon} F_P(p_P^N)$ .

Réciproquement, si  $f : x \rightarrow y$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$  et  $F : M \rightarrow N$  un morphisme de  $\mathcal{M}$ , on leur associe  $f_z : \text{Hom}(y, z) \rightarrow \text{Hom}(x, z)$  défini par  $f_z(\varphi) = \varphi \circ f$  pour tout  $z$  dans  $\Omega$  et  $F_P : \text{Hom}(N, P) \rightarrow \text{Hom}(M, P)$  défini par  $F_P(\psi) = \psi \circ F$  pour tout  $P$  dans  $\Upsilon$ .

Pour tous  $x, y$  dans  $\Omega$  et  $M$  dans  $\Upsilon$ , l'associativité  $\mu_{x, y, M}$  est donc déterminée par une famille de morphismes  $\mu_{x, y, M}^N : \text{Hom}(x \otimes (y \otimes M), N) \rightarrow \text{Hom}((x \otimes y) \otimes M, N)$  où  $N$  parcourt  $\Upsilon$ .

L'isomorphisme

$$\bigoplus_{N' \in \Omega} W_{y, M}^{N'} \otimes W_{x, N'}^N \simeq \text{Hom}(x \otimes (y \otimes M), N)$$

est donné par  $\varphi \otimes \psi \mapsto \psi \circ (id_x \otimes \varphi)$  et l'isomorphisme

$$\bigoplus_{z \in X} V_{x, y}^z \otimes W_{z, M}^N \simeq \text{Hom}((x \otimes y) \otimes M, N)$$

est donné par  $\varphi \otimes \psi \mapsto \psi \circ (\varphi \otimes id_M)$ .

Les conditions sont alors la traduction des conditions du pentagone et du triangle.  $\square$

**Théorème 3.2.6.** *Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie de module squelette simple de multiplicité 1 sur la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . On suppose que  $\mathcal{M}$  est de la forme  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$  où  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_1$  sont des catégories de modules simples sur  $\mathcal{C}_0$ . Il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$  tel*

que  $\mathcal{M}$  soit équivalente à la catégorie  $\mathcal{M}(H)$  définie de la manière suivante : ses objets simples sont les éléments de  $\Upsilon = G/H \cup G/H^\perp$  et sa structure de module est donnée par

$$g \otimes M = g + M, \quad g \otimes \widetilde{M} = g + \widetilde{M}, \quad m \otimes M = \bigoplus_{\widetilde{N} \in G/H^\perp} \widetilde{N}, \quad m \otimes \widetilde{M} = \bigoplus_{N \in G/H} N$$

et les morphismes structurels

$$\begin{aligned} \mu_{g,g',M} &= id_{g+g'+M} \\ \mu_{g,g',\widetilde{M}} &= id_{g+g'+\widetilde{M}}, \\ \mu_{g,m,M} &= \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(M), g) id_{\widetilde{M}}, \\ \mu_{m,g,M} &= \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,M}) id_{\widetilde{M}}, \\ \mu_{g,m,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{M \in G/H} \chi(u(\widetilde{M}), g) id_M, \\ \mu_{m,g,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{M \in G/H} \chi(u(M), \kappa_{g,\widetilde{M}}) id_M, \\ \mu_{m,m,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} \left( \chi(u(\widetilde{M}), -g - u(M)) id_N \right)_{\widetilde{M} \in G/H^\perp, g \in G, g+M=N}, \\ \mu_{m,m,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{\widetilde{N} \in G/H^\perp} \left( \beta |H| \chi(u(M), -g - u(\widetilde{M})) id_{\widetilde{N}} \right)_{M \in G/H, g \in G, g+\widetilde{M}=\widetilde{N}}, \end{aligned}$$

pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ .

De plus, les catégories de module  $\mathcal{M}(H)$  et  $\mathcal{M}(H')$  sont équivalentes si et seulement si  $H = H'$  ou  $H = H'^\perp$ .

### Démonstration.

Soit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$  une catégorie de module squelette simple de multiplicité 1 sur  $\mathcal{C}$  avec  $\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{M}(H, \eta_H)$  et  $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}(K, \eta_K)$ . Remarquons pour commencer qu'on a  $|G| = |H||K|$ . En effet, si  $M \in G/H$ , comme on a  $c_0 = c_1 = 1$ , l'isomorphisme

$$\mu_{m,m,M} : (m \otimes m) \otimes M \longrightarrow m \otimes (m \otimes M)$$

nous donne  $\bigoplus_{g \in G} (g + M) = \bigoplus_{N \in G/H} \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/K} N$  et donc  $|H| = \frac{|G|}{|K|}$ .

Les morphismes non nuls sont du type  $\mu_{g,g',M}^N$ ,  $\mu_{g,m,M}^{\widetilde{M}}$ ,  $\mu_{m,g',M}^{\widetilde{M}}$ ,  $\mu_{m,m,M}^N$ ,  $\mu_{g,g',\widetilde{M}}^{\widetilde{N}}$ ,  $\mu_{g,m,\widetilde{M}}^M$ ,  $\mu_{m,g',\widetilde{M}}^M$  et  $\mu_{m,m,\widetilde{M}}^{\widetilde{N}}$  pour  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M, N$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}, \widetilde{N}$  dans  $G/K$ . On pose pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M, N$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$  :

$$\begin{aligned} \mu_{g,g',M}^{g+g'+M} &: w_{g',M}^{g'+M} \otimes w_{g,g'+M}^{g+g'+M} \longmapsto \mu_H(g, g')(M) v_{g,g'}^{g+g'} \otimes w_{g,g'+M}^{g+g'+M}, \\ \mu_{g,m,M}^{\widetilde{M}} &: w_{m,M}^{-g+\widetilde{M}} \otimes w_{g,-g+\widetilde{M}}^{\widetilde{M}} \longmapsto \alpha_H(g, M, \widetilde{M}) v_{g,m}^m \otimes w_{m,M}^{\widetilde{M}}, \\ \mu_{m,g',M}^{\widetilde{M}} &: w_{g',M}^{g'+M} \otimes w_{m,g'+M}^{\widetilde{M}} \longmapsto \beta_H(g', M, \widetilde{M}) v_{m,g'}^m \otimes w_{m,M}^{\widetilde{M}}, \\ \mu_{m,m,M}^N &: w_{m,M}^N \otimes w_{m,\widetilde{N}}^N \longmapsto \sum_{g \in G, g+M=N} \gamma_H(M, N)(\widetilde{N}, g) v_{m,m}^g \otimes w_{g,M}^N, \quad \forall \widetilde{N} \in G/K, \end{aligned}$$

et les applications symétriques pour  $K$ , c'est-à-dire en échangeant les rôles de  $H$  et de  $K$ , et des classes  $M, N \in G/H$  et  $\widetilde{M}, \widetilde{N} \in G/K$ .

On peut s'arranger pour choisir une base de  $W_{1,M}^M$  pour tout  $M$  dans  $G/H$  telle que  $\lambda_M$  soit égal à l'identité.

Les conditions du pentagone non triviales sont  $(g, g', m, M)$ ,  $(g, m, g', M)$ ,  $(m, g, g', M)$ ,  $(g, m, m, M)$ ,  $(m, g, m, M)$ ,  $(m, m, g, M)$ ,  $(m, m, m, M)$  pour tous  $g, g'$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$  et les conditions symétriques pour  $K$ . Elles nous donnent :

$$\alpha_H(g', M, -g + \widetilde{M})\alpha_H(g, M, \widetilde{M}) = \mu_K(g, g')(\widetilde{M})\alpha_H(g + g', M, \widetilde{M}), \quad (1)$$

$$\beta_H(g', M, -g + \widetilde{M})\alpha_H(g, M, \widetilde{M})\chi(g, g') = \alpha_H(g, g' + M, \widetilde{M})\beta_H(g', M, \widetilde{M}), \quad (2)$$

$$\mu_H(g, g')(M)\beta_H(g + g', M, \widetilde{M}) = \beta_H(g, g' + M, \widetilde{M})\beta_H(g', M, \widetilde{M}), \quad (3)$$

$$\gamma_H(M, -g + N)(\widetilde{M}, -g + g') = \gamma_H(M, N)(\widetilde{M}, g')\alpha_K(g, \widetilde{M}, N), \quad (4)$$

$$\alpha_H(g, M, g + \widetilde{M})\chi(g, g')\gamma_H(M, N)(g + \widetilde{M}, g') = \beta_K(g, \widetilde{M}, N)\gamma_H(M, N)(\widetilde{M}, g'), \quad (5)$$

$$\gamma_H(M, N)(\widetilde{M}, g')\beta_H(g, M, \widetilde{M}) = \gamma_H(g + M, N)(\widetilde{M}, g' - g), \quad (6)$$

$$\sum_{g, g+M=N} \gamma_H(M, N)(\widetilde{N}, g)\beta_H(g, M, \widetilde{M})\chi(g, g')^{-1} = 0, \text{ si } g' + \widetilde{N} \neq \widetilde{M}, \quad (7)$$

$$\beta \sum_{g, g+M=N} \gamma_H(M, N)(\widetilde{N}, g)\beta_H(g, M, \widetilde{M})\chi(g, g')^{-1} = \gamma_K(\widetilde{N}, \widetilde{M})(N, g')\alpha_H(g', M, \widetilde{M}), \quad (8)$$

$$\text{si } g' + \widetilde{N} = \widetilde{M},$$

ces équations étant vraies pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M, N$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}, \widetilde{N} \in G/K$  excepté les équations (4), (5) et (6) qui ne sont vraies que pour  $g'$  dans  $G$  tel que  $g' + M = N$ , et les équations symétriques pour  $K$  que l'on note  $(i')$  pour  $i \in \{1, \dots, 8\}$ .

Nous allons maintenant résoudre les équations pour  $H$ , le cas de  $K = H^\perp$  étant parfaitement symétrique.

Les équations (3) et (3') nous disent que  $\mu_H$  et  $\mu_K$  sont triviaux. Ensuite, en prenant  $g$  dans  $K$  et  $g'$  dans  $H$  dans l'équation (2), on obtient  $\chi(g, g') = 1$  pour tous  $g$  dans  $K$  et  $g'$  dans  $H$ . Comme  $|G| = |H||K|$ , on a  $K = H^\perp$  (définition 1.2.32).

Les équations (1) et (3) signifient que  $\alpha_H(\cdot, M, \cdot)$  et  $\beta_H(\cdot, \cdot, \widetilde{M})$  sont des 1-cocycles sur  $G$  à valeurs respectivement dans  $\text{Fon}(G/K, \mathbb{C}^*)$  avec l'action induite par  $g.\widetilde{M} = -g + \widetilde{M}$  et  $\text{Fon}(G/H, \mathbb{C}^*)$  avec l'action induite par  $g.M = g + M$ . On choisit, comme dans l'exemple 1.3.12, un ensemble de représentants  $\{u(M) | M \in G/H\}$  des classes  $G/H$  tel que  $u(H) = 0$  et un ensemble de représentants  $\{u(\widetilde{M}) | \widetilde{M} \in G/K\}$  des classes de  $G/K$  tel que  $u(K) = 0$ , et on pose pour tous  $g$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$  :

$$\kappa_{g,M} = u(g + M) - u(M) - g \quad \text{et} \quad \kappa_{g,\widetilde{M}} = u(g + \widetilde{M}) - u(\widetilde{M}) - g.$$

L'application de  $Z^1(H, \mathbb{C}^*)$  vers  $Z^1(G, \text{Fon}(G/H, \mathbb{C}^*))$  qui associe à un 1-cocycle  $\varphi$  sur  $H$  le 1-cocycle  $\nu$  sur  $G$  à valeurs dans  $\text{Fon}(G/H, \mathbb{C}^*)$  défini par  $\nu(g)(M) = \varphi(\kappa_{g,M})$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$  est un isomorphisme de groupes ([Na]). Le 1-cocycle  $\beta_H(\cdot, \cdot, \widetilde{M})$  est donc l'image d'un 1-cocycle sur  $H$ , c'est-à-dire  $\beta_H(g, M, \widetilde{M}) = \varphi_{\widetilde{M}}(\kappa_{g,M})$  avec  $\varphi_{\widetilde{M}} \in Z^1(H, \mathbb{C}^*)$  pour tout  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ .

En prenant  $g'$  dans  $H$  et  $\widetilde{M} = K$  dans l'équation (2), on obtient  $\varphi_{\widetilde{M}} = \chi(u(\widetilde{M}), \cdot)\varphi_K$ . On pose  $\varphi = \varphi_K$ . On a donc  $\beta_H(g, M, \widetilde{M}) = \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,M})\varphi(\kappa_{g,M})$  pour tous  $g$  dans  $g$ ,  $M$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ .

En remplaçant  $\beta_H$  par sa valeur dans l'équation (2), on obtient, pour tous  $g, g'$  dans  $g, M$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ ,  $\alpha_H(g, g' + M, \widetilde{M}) = \chi(g' - \kappa_{g', M}, g)\alpha_H(g, M, \widetilde{M})$  et en prenant  $M = H$ , on obtient  $\alpha_H(g, M, \widetilde{M}) = \chi(u(M), g)\alpha_H(g, H, \widetilde{M})$ . Il suffit donc de connaître  $\alpha_H(\cdot, H, \cdot)$ . Or, d'après l'isomorphisme entre  $Z^1(G, \text{Fon}(G/K, \mathbb{C}^*))$  et  $Z^1(K, \mathbb{C}^*)$ , il existe un 1-cocycle  $\psi$  sur  $K$  tel que  $\alpha_H(g, H, \widetilde{M}) = \psi(-\kappa_{-g, \widetilde{M}})$  pour tous  $g$  dans  $G$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ . On obtient donc  $\alpha_H(g, M, \widetilde{M}) = \chi(u(M), g)\psi(-\kappa_{-g, \widetilde{M}})$  pour tous  $g$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ .

Les équations symétriques pour  $K$  nous donnent

$$\alpha_K(g, \widetilde{M}, M) = \chi(u(\widetilde{M}), g)\widetilde{\psi}(-\kappa_{-g, M})$$

et

$$\beta_K(g, \widetilde{M}, M) = \chi(u(M), \kappa_{g, \widetilde{M}})\widetilde{\varphi}(\kappa_{g, \widetilde{M}})$$

pour tous  $g$  dans  $G$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$  et  $M$  dans  $G/H$ .

Ensuite, en prenant  $g \in K$  dans l'équation (5) et  $g \in H$  dans l'équation (5'), on obtient  $\psi = \widetilde{\varphi}$  et  $\varphi = \widetilde{\psi}$ .

En conclusion, il existe un 1-cocycle  $\varphi$  appartenant à  $Z^1(H, \mathbb{C}^*)$  et un 1-cocycle  $\psi$  appartenant à  $Z^1(K, \mathbb{C}^*)$  tels que, pour tous  $g$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ , on ait :

$$\begin{aligned} \alpha_H(g, M, \widetilde{M}) &= \chi(u(M), g)\psi(-\kappa_{-g, \widetilde{M}}), \\ \beta_H(g, M, \widetilde{M}) &= \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g, M})\varphi(\kappa_{g, M}), \\ \alpha_K(g, \widetilde{M}, M) &= \chi(u(\widetilde{M}), g)\varphi(-\kappa_{-g, M}), \\ \beta_K(g, \widetilde{M}, M) &= \chi(u(M), \kappa_{g, \widetilde{M}})\psi(\kappa_{g, \widetilde{M}}). \end{aligned}$$

Passons au calcul suivant. Soient  $M, N$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ . L'équation (4) implique

$$\gamma_H(M, N)(\widetilde{M}, u(N) + g) = \chi(u(\widetilde{M}), -u(N))\gamma_H(M, H)(\widetilde{M}, g)$$

pour tout  $g$  dans  $-M$ .

Ensuite, l'équation (6) nous donne

$$\gamma_H(M, H)(\widetilde{M}, h - u(M)) = \gamma_H(H, H)(\widetilde{M}, h)\beta_H(u(M), H, \widetilde{M}),$$

c'est-à-dire  $\gamma_H(M, H)(\widetilde{M}, h - u(M)) = \gamma_H(H, H)(\widetilde{M}, h)$  pour tout  $h$  dans  $H$ . On a donc

$$\gamma_H(M, N)(\widetilde{M}, h - u(M) + u(N)) = \chi(u(\widetilde{M}), u(N))^{-1}\gamma_H(H, H)(\widetilde{M}, h)$$

pour tout  $h$  dans  $H$ . L'équation (5) implique

$$\alpha_H(u(\widetilde{M}), H, \widetilde{M})\chi(u(\widetilde{M}), h)\gamma_H(H, H)(\widetilde{M}, h) = \beta_K(u(\widetilde{M}), K, H)\gamma_H(H, H)(K, h),$$

c'est-à-dire  $\gamma_H(H, H)(\widetilde{M}, h) = \chi(u(\widetilde{M}), h)^{-1}\gamma_H(H, H)(K, h)$  pour tout  $h$  dans  $H$ , puis l'équation (6) nous donne  $\gamma_H(H, H)(K, h)\beta_H(g, H, K) = \gamma_H(H, H)(K, 0)$  c'est-à-dire

$$\gamma_H(H, H)(K, h) = \varphi(h)^{-1}\gamma_H(H, H)(K, 0)$$

pour tout  $h$  dans  $H$ . On pose  $\lambda = \gamma_H(H, H)(K, 0)$ . On obtient

$$\gamma_H(M, N)(\widetilde{M}, h - u(M) + u(N)) = \lambda\chi(u(\widetilde{M}), u(N) + h)^{-1}\varphi(h)$$

pour tout  $h$  dans  $H$ . En posant  $g = h - u(M) + u(N)$ , on obtient

$$\gamma_H(M, N)(\widetilde{M}, g) = \lambda \chi(u(\widetilde{M}), -g - u(M)) \varphi(-\kappa_{g, M})$$

pour tout  $g$  dans  $G$  tel que  $g + M = N$ . Les équations symétriques pour  $K$  nous donnent

$$\gamma_K(\widetilde{M}, \widetilde{N})(M, g) = \widetilde{\lambda} \chi(u(M), -g - u(\widetilde{M})) \psi(-\kappa_{g, \widetilde{M}}),$$

tandis que l'équation (8) implique  $\beta|H|\lambda = \widetilde{\lambda}$ .

Il existe donc  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$  non nul tel que, pour tous  $M, N$  dans  $G/H$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$  et  $g$  dans  $G$  vérifiant  $g + M = N$ , on ait

$$\gamma_H(M, N)(\widetilde{M}, g) = \lambda \chi(u(\widetilde{M}), -g - u(M)) \varphi(-\kappa_{g, M})$$

et

$$\gamma_K(\widetilde{M}, \widetilde{N})(M, g) = \beta|H|\lambda \chi(u(M), -g - u(\widetilde{M})) \psi(-\kappa_{g, \widetilde{M}}).$$

En conclusion, il existe un 1-cocycle  $\varphi$  appartenant à  $Z^1(H, \mathbb{C}^*)$ , un 1-cocycle  $\psi$  appartenant à  $Z^1(K, \mathbb{C}^*)$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^*$  tels qu'on ait :

$$\begin{aligned} \mu_{g, g', M} &= \text{id}_{g+g'+M} \\ \mu_{g, g', \widetilde{M}} &= \text{id}_{g+g'+\widetilde{M}}, \\ \mu_{g, m, M} &= \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(M), g) \psi(-\kappa_{-g, \widetilde{M}}) \text{id}_{\widetilde{M}}, \\ \mu_{m, g, M} &= \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g, M}) \varphi(\kappa_{g, M}) \text{id}_{\widetilde{M}}, \\ \mu_{g, m, \widetilde{M}} &= \bigoplus_{M \in G/H} \chi(u(\widetilde{M}), g) \varphi(-\kappa_{-g, M}) \text{id}_M, \\ \mu_{m, g, \widetilde{M}} &= \bigoplus_{M \in G/H} \chi(u(M), \kappa_{g, \widetilde{M}}) \psi(\kappa_{g, \widetilde{M}}) \text{id}_M, \\ \mu_{m, m, M} &= \bigoplus_{N \in G/H} \left( \chi(u(\widetilde{M}), -g - u(M)) \varphi(-\kappa_{g, M}) \text{id}_N \right)_{\widetilde{M} \in G/H^\perp, g \in G, g+M=N}, \\ \mu_{m, m, \widetilde{M}} &= \bigoplus_{\widetilde{N} \in G/H^\perp} \left( \beta|H|\lambda \chi(u(M), -g - u(\widetilde{M})) \psi(-\kappa_{g, \widetilde{M}}) \text{id}_{\widetilde{N}} \right)_{M \in G/H, g \in G, g+\widetilde{M}=\widetilde{N}}, \end{aligned}$$

pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ .

Nous devons maintenant exhiber un foncteur entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}(H)$  qui réalise une équivalence de catégories de module. Il suffit de définir sur les objets simples  $\mathcal{F}(M) = M$  et  $\mathcal{F}(\widetilde{M}) = \widetilde{M}$ , et de poser  $\mathcal{F}_{g, M} = \psi^{-1}(\kappa_{g, M})$ ,  $\mathcal{F}_{m, M} = \lambda^{-1} \text{id}$ ,  $\mathcal{F}_{g, \widetilde{M}} = \varphi^{-1}(\kappa_{g, \widetilde{M}})$  et  $\mathcal{F}_{m, \widetilde{M}} = \text{id}$  pour tous  $g$  dans  $H$ ,  $M$  dans  $G/H$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ , où  $\mathcal{F}_{x, P}$  est l'isomorphisme entre  $\mathcal{F}(x \otimes P)$  et  $x \otimes \mathcal{F}(P)$  pour tous  $x$  dans  $\Omega$  et  $P \in \Upsilon$ . Toute catégorie de module indécomposable sur  $\mathcal{C}$  est donc équivalente à  $\mathcal{M}(H)$  pour un certain sous-groupe  $H$  de  $G$ .

Soient maintenant deux catégories  $\mathcal{M}(H)$  et  $\mathcal{M}(H')$  équivalentes en tant que catégories de module et soit  $\mathcal{F}$  le foncteur réalisant cette équivalence. Comme elles sont toutes les deux squelettes, on a une bijection de  $\Upsilon$  sur l'ensemble  $\Upsilon'$  des objets simples de  $\mathcal{M}(H')$ . On doit avoir  $\mathcal{F}(h \otimes M) = \mathcal{F}(M) \simeq h \otimes \mathcal{F}(M)$  pour tous  $h$  dans  $H$  et  $M$  dans  $G/H$  et  $\mathcal{F}(k \otimes \widetilde{M}) = \mathcal{F}(\widetilde{M}) \simeq k \otimes \mathcal{F}(\widetilde{M})$  pour tous  $k$  dans  $K$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ . Cela implique soit  $H = H'$ , soit  $H = H'^\perp$ .  $\square$

**Théorème 3.2.7.** *La catégorie  $\mathcal{C}$  admet une catégorie de module  $\mathcal{M}$  squelette simple sur elle-même et sur  $\mathcal{C}_0$  de multiplicité 1 si et seulement si  $|G| = d^2$  et qu'il existe un sous-groupe  $H$  d'ordre  $d$  tel que  $H^\perp = H$ . Dans ce cas, la catégorie  $\mathcal{M}$  est équivalente à la catégorie  $\mathcal{N}(H)$  d'objets simples les classes  $M \in G/H$  avec la structure de module donnée par  $g \otimes M = g + M$ ,  $m \otimes M = \bigoplus_{N \in G/H} N$*

pour tous  $M$  dans  $G/H$  et  $g$  dans  $G$  et les morphismes structurels

$$\begin{aligned} \mu_{g,g',M} &= \text{id}_{g+g'+M}, \\ \mu_{g,m,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} \chi(u(M), g) \text{id}_N, \\ \mu_{m,g,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} \chi(u(N), \kappa_{g,M}) \text{id}_N, \\ \mu_{m,m,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} (\chi(u(P), -g - u(M)) \text{id}_N)_{P \in G/H, g \in G, g+M=N}, \end{aligned}$$

pour tous  $g, g'$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ .

De plus,  $\mathcal{N}(H) \simeq \mathcal{N}(H')$  si et seulement si  $H = H'$ .

**Démonstration.** L'isomorphisme entre  $(m \otimes m) \otimes M$  et  $m \otimes (m \otimes M)$  nous donne cette fois-ci  $|G/H|^2 = |G|$ , c'est-à-dire  $|G| = |H|^2$ . Nous n'avons plus maintenant que trois applications de structure à calculer  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  vérifiant les mêmes équations que précédemment, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \alpha(g', M, -g + N) \alpha(g, M, N) &= \mu_H(g, g')(N) \alpha(g + g', M, N), & (1) \\ \beta(g', M, -g + N) \alpha(g, M, N) \chi(g, g') &= \alpha(g, g' + M, N) \beta(g', M, N), & (2) \\ \mu_H(g, g')(M) \beta(g + g', M, N) &= \beta(g, g' + M, N) \beta(g', M, N), & (3) \\ \gamma(M, -g + N)(P, -g + g') &= \gamma(M, N)(P, g') \alpha(g, P, N), & (4) \\ \alpha(g, M, g + P) \chi(g, g') \gamma(M, N)(g + P, g') &= \beta(g, P, N) \gamma(M, N)(P, g'), & (5) \\ \gamma(M, N)(P, g') \beta(g, M, P) &= \gamma(g + M, N)(P, g' - g), & (6) \\ \sum_{g, g+M=N} \gamma(M, N)(Q, g) \beta(g, M, P) \chi(g, g')^{-1} &= 0, \text{ if } g' + Q \neq P, & (7) \\ \beta \sum_{g, g+M=N} \gamma(M, N)(Q, g) \beta(g, M, P) \chi(g, g')^{-1} &= \gamma(Q, P)(N, g') \alpha(g', M, P), & (8) \\ &\text{if } g' + Q = P, \end{aligned}$$

ces équations étant vraies pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M, N$  dans  $G/H$ , excepté les équations (4), (5) et (6) qui ne sont vraies que pour  $g'$  dans  $G$  tel que  $g' + M = N$ .

En procédant de la même manière que dans le théorème précédent, on obtient les applications de structures suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_{g,g',M} &= \text{id}_{g+g'+M}, \\ \mu_{g,m,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} \chi(u(M), g) \varphi(-\kappa_{-g,M}) \text{id}_N, \\ \mu_{m,g,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} \chi(u(N), \kappa_{g,M}) \varphi(\kappa_{g,M}) \text{id}_N, \\ \mu_{m,m,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} (\lambda \chi(u(P), -g - u(M)) \varphi(-\kappa_{g,M}) \text{id}_N)_{P \in G/H, g \in G, g+M=N}, \end{aligned}$$

pour tous  $g, g'$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ . De plus, quelques soient  $\lambda$  et  $\varphi$ , nous obtenons des catégories équivalentes et  $\mathcal{N}(H) \simeq \mathcal{N}(H')$  si et seulement si  $H = H'$  (voir la démonstration du théorème précédent).

□

**Remarque.** Quelque soit la multiplicité  $c$ , l'isomorphisme entre  $(m \otimes m) \otimes M$  et  $m \otimes (m \otimes M)$  nous donne  $|G| = \left(\frac{|H|}{c}\right)^2$ . L'existence d'une catégorie de module squelette simple  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H, \mu)$  sur  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  implique donc que  $|G|$  est un carré. Certaines catégories de Tambara-Yamagami sont réalisables par des algèbres de Hopf (voir [T]). Une condition nécessaire et suffisante est l'existence de catégories de module de rang 1. On voit qu'il doit exister  $\mu$  dans  $H^2(G, \mathbb{C}^*)$  tel que  $\mathcal{M}(G, \mu)$  soit une catégorie de module sur  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . Dans ce cas, la multiplicité est  $c = \sqrt{|G|}$ .

Nous avons donc calculé une famille de catégorie de module squelettes simples sur  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . Démontrons un résultat général.

**Lemme 3.2.8.** *Soit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H, \mu_H) \oplus \mathcal{M}(K, \mu_K)$  une catégorie de module squelette simple sur une catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ . Si  $c_0$  et  $c_1$  sont premiers entre eux, alors on a  $c_0 = c_1 = 1$ .*

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  une catégorie de Tambara-Yamagami et

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(H, \mu_H) \oplus \mathcal{M}(K, \mu_K)$$

une catégorie de module squelette simple sur  $\mathcal{C}$  telle que  $c_0$  et  $c_1$  soient premiers entre eux. L'isomorphisme  $\mu_{m,m,M} : (m \otimes m) \otimes M \longrightarrow m \otimes (m \otimes M)$  nous donne dans ce cas

$$\bigoplus_{g \in G} (g + M) = \bigoplus_{N \in G/H} \bigoplus_{\tilde{M} \in G/K} c_0 c_1 N$$

et donc  $|H| = c_0 c_1 \frac{|G|}{|K|}$ . On rappelle que, pour tous  $g$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$  les morphismes d'associativité  $\mu_{g,m,M}$  et  $\mu_{m,g,M}$  sont déterminés par les applications linéaires

$$\mu_{g,m,M}^{\tilde{M}} : W_{m,M}^{-g+\tilde{M}} \otimes W_{g,-g+\tilde{M}}^{\tilde{M}} \longrightarrow V_{g,m}^m \otimes W_{m,M}^{\tilde{M}}$$

et

$$\mu_{m,g,M}^{\tilde{M}} : W_{g,M}^{g+M} \otimes W_{m,g+M}^{\tilde{M}} \longrightarrow V_{m,g}^m \otimes W_{m,M}^{\tilde{M}}$$

où  $\tilde{M}$  parcourt  $G/K$ . Pour tous  $M$  dans  $G/H$  et  $\tilde{M}$  dans  $G/K$ , on choisit une base  $((w_{m,M}^{\tilde{M}})_i)_{i=1,\dots,c_0}$  de l'espace  $W_{m,M}^{\tilde{M}}$ . On a

$$\mu_{g,m,M}^{\tilde{M}} = \left( \alpha_H(g, M, \tilde{M})_{i,j} \right)_{i,j} \quad \text{et} \quad \mu_{m,g,M}^{\tilde{M}} = \left( \beta_H(g, M, \tilde{M})_{i,j} \right)_{i,j}$$

où  $\left( \alpha_H(g, M, \tilde{M})_{i,j} \right)_{i,j}$  et  $\left( \beta_H(g, M, \tilde{M})_{i,j} \right)_{i,j}$  sont des matrices de taille  $c_0$  pour tout  $g$  dans  $G$ . Soient  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$ , la condition du pentagone  $(g, m, g', M)$  se traduit en terme de ces matrices par

$$\chi(g, g') \left( \alpha_H(g, M, \tilde{M})_{i,j} \right)_{i,j} \left( \beta_H(g', M, -g + \tilde{M})_{i,j} \right)_{i,j} = \left( \alpha_H(g, g' + M, \tilde{M})_{i,j} \right)_{i,j} \left( \beta_H(g', M, \tilde{M})_{i,j} \right)_{i,j}$$



pour tout  $\widetilde{M}$  dans  $G/K$ . En prenant  $g$  dans  $K$ ,  $g'$  dans  $H$  et en passant au déterminant, on obtient  $\chi(g, g')^{c_0} = 1$ . Le raisonnement symétrique où les rôles de  $H$  et  $K$  sont échangés nous donne  $\chi(g, g')^{c_1} = 1$  pour tous  $g$  dans  $K$  et  $g'$  dans  $H$ . Comme  $c_0$  et  $c_1$  sont premiers entre eux (et  $\chi$  symétrique), on a  $\chi(g, g') = 1$  pour tous  $g$  dans  $H$  et  $g'$  dans  $K$ . On a donc  $H \subset K^\perp$ . Cela implique  $|H| \leq \frac{|G|}{|K|}$  et donc  $|H||K| \leq |G|$ . Mais on a  $c_0 c_1 |G| = |H||K|$ . On obtient donc  $H = K^\perp$  et  $c_0 = c_1 = 1$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant regarder le cas  $G = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $P$  un ensemble de nombres premiers deux à deux distincts.

**Théorème 3.2.9.** *Si  $\mathcal{M}$  une catégorie de module simple sur  $\mathcal{C}(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \chi, \beta)$  où  $P$  est un ensemble de nombres premiers deux à deux distincts, alors il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$  tel que  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(H)$ . Deux catégories de module simples  $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}(H)$  et  $\mathcal{M}_2 \simeq \mathcal{M}(H')$  sur  $\mathcal{C}(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \chi, \beta)$  sont équivalentes si et seulement si  $H' = H$  ou  $H' = H^\perp$ .*

**Démonstration.** On ne peut pas dans ce cas avoir de catégorie de module squelette simple du type  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H, \mu)$ , car  $|G|$  serait un carré (voir la dernière remarque). D'après la proposition 3.2.4, les catégories de module squelettes simples sur  $\mathcal{C}(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \chi, \beta)$  sont donc de la forme

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(H, \mu_H) \oplus \mathcal{M}(K, \mu_K)$$

avec  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$ ,  $\mu_H$  dans  $Z^2(G, \text{Fon}(G/H), \mathbb{C})$  et  $\mu_K$  dans  $Z^2(G, \text{Fon}(G/K), \mathbb{C})$ . De plus, lorsque  $|G|$  est sans facteur carré, la condition  $c_0 c_1 = \frac{|H||K|}{|G|}$  implique que  $c_0$  et  $c_1$  sont premiers entre eux. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme précédent et le théorème 3.2.6.  $\square$

### 3.3 Applications.

#### 3.3.1 Structure des coïdalgèbres connexes de $B$ :

le cas  $G = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \chi, \beta)$  où  $P$  est un ensemble de nombres premiers deux à deux distincts.*

*Si  $I$  est une coïdalgèbre connexe de  $B$ , alors il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$  tel que : soit les inclusions  $B_t \subset I$  et  $B_t \subset I_H$  ont le même diagramme de Bratteli (pondéré), soit les inclusions  $B_t \subset I$  et  $B_t \subset J_H$  ont le même diagramme de Bratteli (pondéré).*

**Démonstration.** Comme  $I$  est connexe, d'après la proposition 3.1.7, la catégorie  $\text{Rep}(I)$  est une catégorie de module simple sur la catégorie  $\text{Rep}(B) \simeq \mathcal{C}$ . D'après le théorème 3.2.9, la

décomposition de  $I$  en somme directe d'algèbres simples est donc de la forme

$$I \simeq \bigoplus_{M \in G/H} I^M \oplus \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} I^{\widetilde{M}}.$$

D'après le chapitre 2 partie 2.2.1, on a  $B = \bigoplus_{x \in \Omega} B^x$  et  $B_t = \bigoplus_{x \in \Omega} \mathbb{C}u_x^0$ . La structure monoïdale de  $\text{Rep}(B)$ , ainsi que son action sur  $\text{Rep}(I)$  et  $\text{Rep}(B_t)$  impliquent que :

(i) la multiplicité de  $\mathbb{C}u_m^0$  dans  $I^M$  (respectivement  $I^{\widetilde{M}}$ ) ne dépend pas de  $M$  (respectivement de  $\widetilde{M}$ ),

(ii) la multiplicité de  $\mathbb{C}u_g^0$  dans  $I^M$  (respectivement  $I^{\widetilde{M}}$ ) est égale à la multiplicité de  $\mathbb{C}u_{g'+g}^0$  dans  $I^{g'+M}$  (respectivement  $I^{g'+\widetilde{M}}$ ) pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $M$  dans  $G/H$  (respectivement  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ ),

(i') la multiplicité de  $I^M$  (respectivement  $I^{\widetilde{M}}$ ) dans  $B^m$  ne dépend pas de  $M$  dans  $G/H$  (respectivement de  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ ),

(ii') la multiplicité de  $I^M$  (respectivement  $I^{\widetilde{M}}$ ) dans  $B^g$  est égale à la multiplicité de  $I^{g'+M}$  (respectivement  $I^{g'+\widetilde{M}}$ ) dans  $B^{g'+g}$ .

Démontrons par exemple les points (i) et (ii) pour les blocs  $I^M$ ,  $M \in G/H$ . Pour tout  $M$  dans  $G/H$ , la décomposition de  $I^M$  en tant que  $B_t$ -module est de la forme

$$I^M \simeq \bigoplus_{g \in G} c_g^M \mathbb{C}u_g^0 \oplus c_m^M \mathbb{C}u_m^0$$

où  $c_x^M$  est la multiplicité de  $\mathbb{C}u_x^0$  dans  $I^M$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$ . D'après la structure de catégorie de module sur  $\text{Rep}(B)$  de  $\text{Rep}(I)$  et de  $\text{Rep}(B_t)$ , on a, pour tout  $g'$  dans  $G$ ,

$$I^{g'+M} \simeq B^{g'} \otimes I^M \simeq \bigoplus_{g \in G} c_g^M \mathbb{C}u_{g'+g}^0 \oplus c_m^M \mathbb{C}u_m^0.$$

Ainsi, on obtient  $c_{g+g'}^{g'+M} = c_g^M$  et  $c_m^{g'+M} = c_m^M$  pour tous  $g, g'$  dans  $G$  et  $M$  dans  $G/H$ .

Rappelons que l'inclusion  $B_t \subset B$  est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & |G| \end{pmatrix}.$$

**Cas 1 :** le bloc  $\mathbb{C}u_m^0$  est connecté à tous les blocs de  $I$ . Soit  $g$  dans  $G$ . Comme la multiplicité de  $\mathbb{C}u_m^0$  dans  $B^g$  est 1,  $B^g$  ne peut être connecté qu'à un seul bloc de  $I$  et avec multiplicité 1. Soit  $M$  dans  $G/H$  tel que  $B^g$  soit connecté au bloc  $I^M$  (nous obtiendrons ainsi une coïdalgèbre conjuguée à  $J_H$ , si l'on avait choisi un bloc  $I^{\widetilde{M}}$  avec  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ , nous aurions obtenu une coïdalgèbre conjuguée à  $J_{H^\perp}$ ). Comme  $\mathbb{C}u_g^0$  est connecté à  $B^g$  avec multiplicité 1 pour tout  $g'$  dans  $G$ ,  $\mathbb{C}u_g^0$  doit être connecté à  $I^M$  pour tout  $g'$  dans  $G$ . Ainsi, l'unité de  $I^M$  est la somme de  $|G| + 1$  projections minimales et donc on obtient  $I^M \simeq M_{(|G|+1)}$ . La transitivité de l'action de  $G$  sur les classes  $M$  de  $G/H$  et la propriété (ii) impliquent alors que  $u_g^0$  est connecté à  $I^M$  avec multiplicité 1 pour tout  $M$  dans  $G/H$  et donc on a  $I^M \simeq M_{(|G|+1)}$  pour tout  $M$  dans  $G/H$ .

Regardons maintenant les connexions entre  $I^M$ ,  $M \in G/H$ , et  $B^m$ . En comparant les dimensions, on voit qu'il existe au plus un  $M$  dans  $G/H$  tel que  $I^M$  soit connecté à  $B^m$ . Comme  $\mathbb{C}u_m^0$  est connecté à  $I^M$  avec multiplicité 1 et à  $B^m$  avec multiplicité  $|G|$ , il doit y avoir  $|G| - 1$  connexions entre  $\mathbb{C}u_m^0$  et  $B^m$  via les blocs  $I^{\widetilde{M}}$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ . D'après la propriété (i),  $[G : H^\perp]$  doit donc diviser  $|G| - 1$ . Ceci n'est possible que si  $H^\perp = G$  et dans ce cas  $I = B = J_{\{0\}}$ . Supposons donc que, pour tout  $M$  dans  $G/H$ ,  $I^M$  n'est pas connecté à  $B^m$ . Toutes les connexions entre  $\mathbb{C}u_x^0$ ,  $x$  dans  $\Omega$ , et  $B^m$  passent donc par les blocs  $I^{\widetilde{M}}$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ . Toujours d'après la propriété (i), la multiplicité de  $\mathbb{C}u_m^0$  dans  $I^{\widetilde{M}}$  est égale  $|H^\perp| = \frac{|G|}{|H|}$  pour tout  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ . Soit maintenant  $g$  dans  $G$ . La multiplicité de  $\mathbb{C}u_g^0$  dans  $B^m$  est égale à 1. Ainsi, il existe  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$  tel que  $\mathbb{C}u_g^0$  soit connecté à  $I^{\widetilde{M}}$  avec multiplicité 1. La propriété (ii) implique que tout  $g'$  dans la classe de  $g$  modulo  $H^\perp$  est aussi connecté à  $I^{\widetilde{M}}$  avec multiplicité 1 et on a  $I^{\widetilde{M}} \simeq M_{2|G|/|H|}(\mathbb{C})$ . En raisonnant de la même manière pour chaque  $g$  de  $G$ , on obtient  $I^{\widetilde{M}} \simeq M_{2|G|/|H|}(\mathbb{C})$  pour tout  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ . On obtient donc  $I \simeq J_H$  en tant qu'algèbres avec les mêmes diagrammes de Bratteli. La figure 6 illustre ces arguments, où nous avons supposé que  $\mathbb{C}u_g^0$  était connecté au bloc de  $I$  correspondant à la classe  $\widetilde{[g]}$  de  $G/H^\perp$  et  $B^g$  au bloc de  $I$  correspondant à la classe  $[g]$  de  $G/H$  pour tout  $g$  dans  $G$ .

**Cas 2 :** le bloc  $\mathbb{C}u_m^0$  est connecté uniquement aux blocs  $I^{\widetilde{M}}$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$  (ce choix arbitraire permet d'obtenir des coïdalgèbres conjuguées à  $I_H$  et non à  $I_{H^\perp}$ ). L'inclusion  $B_t \subset I$  étant unifère, pour tout  $g$  dans  $G$ , il existe  $M$  dans  $G/H$  tel que  $\mathbb{C}u_g^0$  soit connecté à  $I^M$ , ainsi que tout  $\mathbb{C}u_{g'}^0$  pour tout  $g'$  dans la classe de  $g$  modulo  $H$  (propriété (ii)). Comme  $\mathbb{C}u_g^0$  est connecté à  $B^m$  avec multiplicité 1,  $I^M$  est connecté à  $B^m$  et avec multiplicité 1. Ainsi,  $I^M$  est isomorphe à  $M_{|H|}(\mathbb{C})$  pour tout  $M$  dans  $G/H$ .

Comme  $\mathbb{C}u_m^0$  est connecté à  $B^g$  avec multiplicité 1, pour tout  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ , il existe  $g$  dans  $G$  tel que  $I^{\widetilde{M}}$  soit connecté à  $B^g$  avec multiplicité 1 et  $\mathbb{C}u_m^0$  est connecté à tous les blocs  $I^{\widetilde{M}}$  avec multiplicité 1. La propriété (ii') implique que  $I^{\widetilde{M}}$  est aussi connecté à  $B^{g'}$  pour tout  $g'$  dans la classe de  $g$  modulo  $H^\perp$ . De plus, la multiplicité de  $\mathbb{C}u_m^0$  dans  $B^m$  étant  $|G|$ , la propriété (i) implique que  $I^{\widetilde{M}}$  est connecté à  $B^m$  avec multiplicité  $|H^\perp| = \frac{|G|}{|H|}$ . En raison des multiplicités, quelques soient  $g$  dans  $G$  et  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ ,  $\mathbb{C}u_g^0$  n'est pas connecté à  $I^{\widetilde{M}}$ . Ainsi, on a  $I^{\widetilde{M}} \simeq \mathbb{C}$  pour tout  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$ . La figure 7 illustre ces arguments où nous avons supposé que  $\mathbb{C}u_g^0$  était connecté au bloc de  $I$  correspondant à la classe  $[g]$  de  $G/H$  et  $B^g$  au bloc de  $I$  correspondant à la classe  $\widetilde{[g]}$  de  $G/H^\perp$ .  $\square$

D'après la proposition 1.7.4, on a le corollaire suivant :

**Corollaire 3.3.2.** *Si  $I$  est une coïdalgèbre semi-simple connexe de  $B$  alors il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$  tel que  $I$  soit conjuguée à  $I_H$  ou à  $J_H$ .*

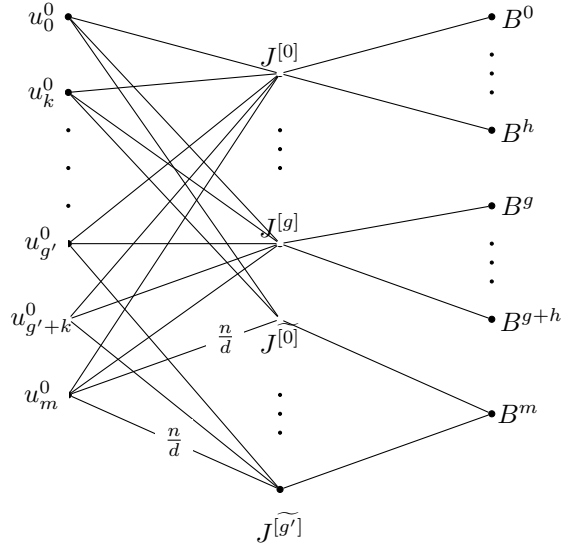


Figure 6

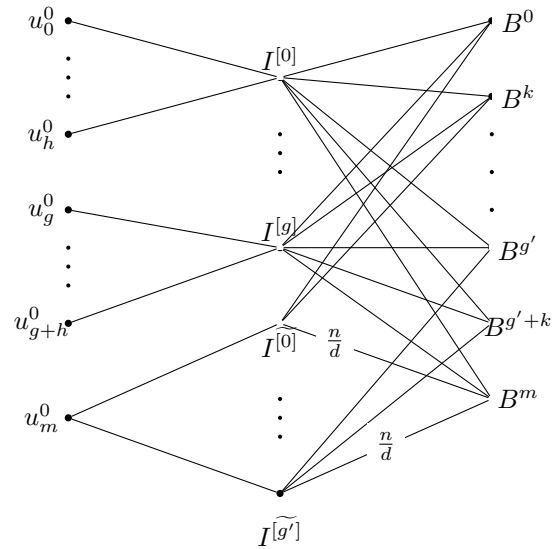


Figure 7

### 3.3.2 Étude de l'inclusion $M_2 \subset M_2 \rtimes B$ et de ses facteurs intermédiaires.

Nous avons montré dans le premier chapitre que si  $B$  est une  $C^*$ -algèbre de Hopf faible associée à une catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ , alors  $B$  était biconnexe et régulière. D'après le théorème 1.8.11, nous pouvons donc construire une tour de Jones de facteurs hyperfinis de type  $\text{II}_1$  de profondeur 2 et d'indice fini.

**Théorème 3.3.3.** Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible biconnexes et régulière associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$ ,  $n = |G|$ . Soit

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3$$

la tour de Jones de profondeur 2 de facteurs hyperfinis de type  $II_1$  telle que

$$M_1 = M_2^B \quad \text{et} \quad M_3 = M_2 \rtimes B.$$

Alors, le graphe principal de l'inclusion  $M_2 \subset M_2 \rtimes B$  est donné par la figure 8 et l'indice de l'inclusion est  $[M_2 \rtimes B : M_2] = (n + \sqrt{n})^2$ .

Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ ,  $d = |H|$ . Les inclusions  $M_2 \subset M_2 \rtimes I_H$  et  $M_2 \subset M_2 \rtimes J_H$  ont respectivement comme graphes principaux les figures 9 et 10 et on a  $[M_2 \rtimes I_H : M_2] = d$  et  $[M_2 \rtimes J_H : M_2] = \frac{1}{d}(n + \sqrt{n})^2$ .

De plus, si  $G$  est de la forme  $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  où  $P$  est un ensemble de nombres premiers deux à deux distincts, alors ce sont les seuls graphes principaux possibles pour un facteur intermédiaire  $M$  de  $M_2 \subset M_2 \rtimes B$ .

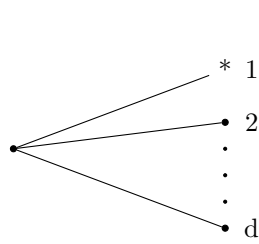


Figure 9

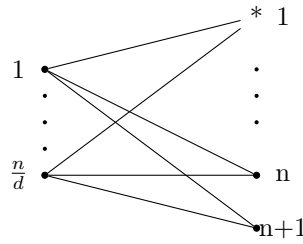


Figure 10

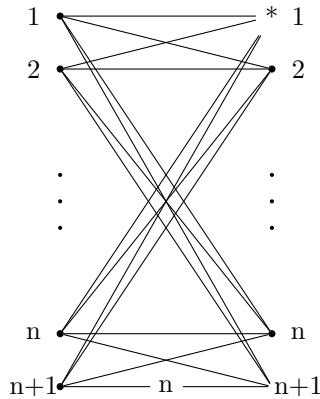


Figure 8

**Démonstration.** D'après la proposition 1.8.9, le graphe principal de l'inclusion est le diagramme de Bratteli de l'inclusion  $B_t \subset B$  figure 1, 2.1.1. et l'indice est  $[B : B_t]$ .

Comme  $B$  est autoduale, si  $I$  est une coïdalgèbre, alors le diagramme de Bratteli de l'inclusion  $\delta(I) \subset \widehat{B}$  est le diagramme de Bratteli de l'inclusion  $\Phi \circ \delta(I) \subset B$ . Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ ,  $d = |H|$ . Le graphe principal de  $M_2 \subset M_2 \rtimes I_H$  est donc la composante connexe contenant  $B^0$  du diagramme de Bratteli de  $J_H \subset B$  et le graphe principal de  $M_2 \subset M_2 \rtimes J_H$  la composante connexe contenant  $B^0$  du diagramme de Bratteli de  $I_H \subset B$ . Il suffit de lire les figures 6 et 7 de la proposition 3.3.1. Ensuite, le point étoilé doit correspondre à la représentation triviale de  $\widehat{B} \simeq B$ . D'après la définition 1.8.13 l'indice  $[M_2 \rtimes I_H : M_2]$  (resp.  $[M_2 \rtimes J_H : M_2]$ ) est donné par l'inverse de la trace du projecteur de Jones  $p_{I_H}$  (resp.  $p_{J_H}$ ) qui est calculée dans la proposition 2.2.3 (resp. 2.2.13). Si  $G$  est de la forme  $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , nous savons, toujours d'après la proposition 3.3.1, que pour toute coïdalgèbre connexe  $I$ , il existe un sous-groupe  $H$  telle que l'inclusion  $B_t \subset I$  a le même diagramme de Bratteli que l'inclusion  $B_t \subset I_H$  ou  $B_t \subset J_H$ . On applique ensuite le théorème 1.8.15.  $\square$

Lorsque  $G$  est de la forme  $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , les graphes principaux des facteurs intermédiaires sont en nombre fini et permettent de définir une relation d'équivalence.

**Théorème 3.3.4.** *Soit  $B$  la  $C^*$ -algèbre de Hopf faible biconnexe et régulière associée à la catégorie de Tambara-Yamagami  $\mathcal{C}(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \chi, \beta)$ . Soit*

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3$$

la tour de Jones de profondeur 2 de facteurs hyperfinis de type  $II_1$  telle que

$$M_1 = M_2^B \quad \text{et} \quad M_3 = M_2 \rtimes B.$$

On définit sur les facteurs intermédiaires de l'inclusion  $M_2 \subset M_2 \rtimes B$  la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  suivante : on dira que deux facteurs intermédiaires  $M$  et  $N$  sont équivalents s'ils ont le même graphe principal. Alors les classes d'équivalence pour  $\mathcal{R}$  forment un treillis isomorphe au treillis des sous-ensembles d'un ensemble à  $\text{card}(P) + 1$  éléments.

**Démonstration.** Il suffit de remarquer qu'on peut prendre comme représentants des classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  les facteurs  $M_2 \rtimes I_H$  et  $M_2 \rtimes J_H$  où  $H$  parcourt l'ensemble des sous-groupes de  $G = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . En effet, quelques soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$  les graphes principaux des inclusions  $M_2 \subset M_2 \rtimes I_H$  et  $M_2 \rtimes J_K$  sont différents, ainsi que les graphes principaux de  $I_H$  et  $I_K$  d'une part et de  $J_H$  et  $J_K$  d'autre part si  $H$  et  $K$  sont différents car ils sont caractérisés par l'ordre des sous-groupes. Les classes d'équivalences forment donc un treillis isomorphe au treillis  $\{I_H | H < G\} \cup \{J_H | H < G\}$  qui est isomorphe au treillis des sous-ensembles d'un ensemble à  $\text{Card}(P)$  éléments d'après le corollaire 2.2.15.  $\square$



## Annexe A

# Les catégories de module $\text{Rep}(I_H)$ et $\text{Rep}(J_H)$ .

Nous allons calculer les catégories de module squelettes sur  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  équivalentes aux catégories de module  $\text{Rep}(I_H)$  et  $\text{Rep}(J_H)$  pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ .

### A.1 La catégorie de module $\text{Rep}(I_H)$ .

Soient  $V_M$  le  $I_H$ -module de base  $\{e_{h,0}^M, h \in H\}$ , pour tout  $M \in G/H$ , et  $V_{\widetilde{M}}$  le  $I_H$ -module de base  $p_{\widetilde{M}} = p_\rho$ , pour tout  $\widetilde{M} \in G/H^\perp$  où  $\rho = \chi(\widetilde{M}, \cdot)$ . Les modules  $V_M$ ,  $M \in G/H$ , et  $V_{\widetilde{M}}$ ,  $\widetilde{M} \in G/H^\perp$ , forment un ensemble de représentants des classes d'équivalence de modules simples de  $I_H$ . La catégorie squelette de  $\text{Rep}(I_H)$  a donc comme objets simples les classes  $M \in G/H$  et les classes  $\widetilde{M} \in G/H^\perp$ .

**Proposition A.1.1.** *La catégorie de module squelette  $\mathcal{M}$  de  $\text{Rep}(I_H)$  est la catégorie d'objets simples  $M \in G/H$  et  $\widetilde{M} \in G/H^\perp$  avec la structure de module basé*

$$\begin{aligned} g \otimes M &\simeq g + M \\ g \otimes \widetilde{M} &\simeq g + \widetilde{M} \\ m \otimes M &\simeq \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \widetilde{M} \\ m \otimes \widetilde{M} &\simeq \bigoplus_{M \in G/H} M \end{aligned}$$



et les morphismes d'associativité

$$\begin{aligned}
\mu_{g,g',M} &= id_{g+g'+M} \\
\mu_{g,g',\widetilde{M}} &= id_{g+g'+\widetilde{M}} \\
\mu_{g,m,M} &= \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(M), g) id_{\widetilde{M}} \\
\mu_{m,g,M} &= \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,M}) id_{\widetilde{M}} \\
\mu_{g,m,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{M \in G/H} \chi(-u(\widetilde{M}), \kappa_{-g,M}) id_M \\
\mu_{m,g,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{M \in G/H} \chi(u(M), g) id_M \\
\mu_{m,m,M} &= \bigoplus_{N \in G/H} \left( \chi(u(\widetilde{M}), u(N) - u(M) - g) \right)_{\widetilde{M} \in G/H^\perp, g \in G, g+M=N} \\
\mu_{m,m,\widetilde{M}} &= \bigoplus_{\widetilde{N} \in G/H^\perp} (\beta|H|\chi(u(M), -g))_{M \in G/H, g \in G, g+\widetilde{M}=\widetilde{N}}.
\end{aligned}$$

Elle est équivalente à la catégorie  $\mathcal{M}(H)$ .

**Démonstration.** La première étape est le calcul des isomorphismes explicites entre les produits tensoriels des objets simples de  $\text{Rep}(I_H)$  et leur décomposition en éléments simples.

1.  $\mathcal{F}(g) \otimes V_M \simeq V_{g+M}$ .

Une base de  $\mathcal{F}(g) \otimes V_M$  est donnée par les éléments  $e_{-h-u(M),0}^g \otimes e_{h,0}^M$  pour  $h \in H$  (on rappelle que  $\mathcal{F}(g) \otimes V_M = \Delta(1)(\mathcal{F}(g) \otimes_{\mathbb{C}} V_M)$ ). Calculons la structure de  $I_H$ -module de  $\mathcal{F}(g) \otimes V_M$ . On a

$$\begin{aligned}
\Delta(e_{h',h''}^{M'}) (e_{-h-u(M),0}^g \otimes e_{h,0}^M) &= \Delta(u_{u(M')+h''}^{h''-h'}) (e_{-h-u(M),0}^g \otimes e_{h,0}^M) \\
&= \sum_{y \in X} (f_{u(M')+h'',y}^{h''-h'} \otimes u_y^{h''-h'}) (e_{-h-u(M),0}^g \otimes e_{h,0}^M) \\
&= f_{u(M')+h'',u(M)+h}^{h''-h'} e_{-h-u(M),0}^g \otimes u_{u(M)}^{h''-h'-h} \\
&= e_{h''-h'-h-u(M),-h-u(M)}^{u(M')-u(M)+h''-h} \otimes u_{u(M)}^{h''-h'-h} \\
&= \delta_{u(M')-u(M)+h''-h,g} e_{h''-h'-h-u(M),0}^g \otimes u_{u(M)}^{h''-h'-h}
\end{aligned}$$

et zéro pour les autres éléments de base de  $I_H$ . La condition  $u(M')-u(M)+h''-h = g$  signifie  $M' = g + M$  et  $h'' - h = \kappa_{g,M}$ . On en conclut que la structure de  $I_H$ -module de  $\mathcal{F}(g) \otimes V_M$  est donnée par  $e_{h',h''}^{g+M} \cdot e_{-h''+\kappa_{g,M}-u(M),0}^g \otimes e_{h''-\kappa_{g,M},0}^M = e_{-h'+\kappa_{g,M}-u(M),0}^g \otimes e_{h'-\kappa_{g,M},0}^M$ , pour tous  $h', h'' \in H$ . On obtient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(g) \otimes V_M \\ e_{-h+\kappa_{g,M}-u(M),0}^g \otimes e_{h-\kappa_{g,M},0}^M \end{array} \right. \simeq \begin{array}{l} V_{g+M} \\ e_{h,0}^{g+M} \end{array}.$$

2.  $\mathcal{F}(g) \otimes V_{\widetilde{M}} \simeq V_{g+\widetilde{M}}$ .

$\mathcal{F}(g) \otimes V_{\widetilde{M}}$  est de dimension 1 engendré par  $e_{m,0}^g \otimes p_{\widetilde{M}}$ . Pour simplifier, nous allons calculer

l'action de  $u_m^h = \sum_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} \chi(u(\widetilde{M}), h)^{-1} p_{\widetilde{M}}$ ,  $h \in H$  :

$$\begin{aligned}
\Delta(u_m^h)(e_{m,0}^g \otimes p_{\widetilde{M}}) &= \sum_{y \in X} (f_{m,y}^h \otimes u_y^h)(e_{m,0}^g \otimes p_{\widetilde{M}}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in X} (f_{m,y}^h \otimes u_y^h)(e_{m,0}^g \otimes \sum_{h' \in H} \chi(u(\widetilde{M}), h') u_m^{h'}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h' \in H} \chi(u(\widetilde{M}), h') f_{m,m}^h e_{m,m}^g \otimes u_m^{h'+h} \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h' \in H} \chi(u(\widetilde{M}), h') \chi(g, h)^{-1} e_{m,0}^g \otimes u_m^{h'+h} \\
&= \chi(u(\widetilde{M}), h)^{-1} \chi(g, h)^{-1} e_{m,0}^g \otimes p_{\widetilde{M}}
\end{aligned}$$

et zéro sinon. Un calcul simple permet de vérifier que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{F}(g) \otimes V_{\widetilde{M}} & \simeq & V_{g+\widetilde{M}} \\ e_{m,0}^g \otimes p_{\widetilde{M}} & \mapsto & p_{g+\widetilde{M}} \end{cases}$$

est bien un isomorphisme de  $I_H$ -modules.

$$3. \mathcal{F}(m) \otimes V_M \simeq \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} V_{\widetilde{M}}.$$

Une base de  $\mathcal{F}(m) \otimes V_M$  est donnée par les éléments  $e_{-h-u(M),0}^m \otimes e_{h,0}^M$ ,  $h \in H$ . Cette fois encore nous faisons agir un élément du type  $u_m^{h'}$ ,  $h' \in H$ , pour simplifier les calculs :

$$\begin{aligned}
\Delta(u_m^{h'})(e_{-h-u(M),0}^m \otimes e_{h,0}^M) &= \sum_{y \in X} (f_{m,y}^{h'} \otimes u_y^{h'})(e_{-h-u(M),0}^m \otimes e_{h,0}^M) \\
&= f_{m,u(M)+h}^{h'} e_{-u(M)-h,0}^m \otimes u_m^{h'-h} \\
&= e_{h'-h-u(M),0}^m \otimes u_m^{h'-h}.
\end{aligned}$$

et zéro sinon. On obtient

$$\begin{cases} \mathcal{F}(m) \otimes V_M & \simeq & \bigoplus_{\widetilde{M} \in G/H^\perp} V_{\widetilde{M}} \\ e_{-h-u(M),0}^m \otimes e_{h,0}^M & \mapsto & u_m^{-h} \end{cases}.$$

$$4. \mathcal{F}(m) \otimes V_{\widetilde{M}} \simeq \bigoplus_{M \in G/H} V_M.$$

Une base est donnée par les éléments  $e_{g,0}^m \otimes p_{\widetilde{M}}$ ,  $g \in G$  et on a :

$$\begin{aligned}
\Delta(e_{h,h'}^M)(e_{g,0}^m \otimes p_{\widetilde{M}}) &= \sum_{y \in X} (f_{u(M)+h',y}^{h'-h} \otimes u_y^{h'-h})(e_{g,0}^m \otimes p_{\widetilde{M}}) \\
&= f_{u(M)+h',m}^{h'-h} e_{g,0}^m \otimes u_m^{h'-h} p_{\widetilde{M}} \\
&= \delta_{-u(M)-h',g} e_{-u(M)-h,0}^m \otimes \chi(u(\widetilde{M}), h-h') p_{\widetilde{M}}
\end{aligned}$$

et zéro sinon. On obtient donc

$$e_{h,h'}^M \cdot \chi(u(\tilde{M}), h') e_{-h'-u(M),0}^m \otimes p_{\tilde{M}} = \chi(u(\tilde{M}), h) e_{-u(M)-h,0}^m \otimes p_{\tilde{M}}$$

et l'isomorphisme suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(m) \otimes V_{\tilde{M}} & \simeq \bigoplus_{M \in G/H} V_M \\ \chi(u(\tilde{M}), h) e_{-h-u(M),0}^m \otimes p_{\tilde{M}} & \mapsto e_{h,0}^M \end{cases}.$$

Nous allons maintenant passer au calcul des morphismes d'associativité. Au niveau de la catégorie  $\text{Rep}(I_H)$ , nous savons que ce sont les isomorphismes canoniques (c'est-à-dire le changement de parenthèses).

1.  $(\mathcal{F}(g) \otimes \mathcal{F}(g')) \otimes V_M \simeq \mathcal{F}(g) \otimes (\mathcal{F}(g') \otimes V_M)$ .

$$\begin{array}{ccc} (e_{-g'-h-u(M),0}^g \otimes e_{-h-u(M),0}^{g'}) \otimes e_{h,0}^M & \longrightarrow & e_{-g'-h-u(M),0}^g \otimes (e_{-h-u(M),0}^{g'} \otimes e_{h,0}^M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ e_{-h-u(M),0}^{g+g'} \otimes e_{h,0}^M & & e_{-\kappa_{g',M}-h-u(g'+M),0}^g \otimes e_{h+\kappa_{g',M},0}^{g'+M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ e_{h+\kappa_{g+g',M},0}^{g+g'+M} & \longrightarrow & e_{h+\kappa_{g',M}+\kappa_{g,g'+M},0}^{g+g'+M} \end{array}$$

Comme on a  $\kappa_{g+g',M} = \kappa_{g',M} + \kappa_{g,g'+M}$ , on obtient  $\mu_{g,g',M} = \text{id}_{g+g'+M}$ .

2.  $(\mathcal{F}(g) \otimes \mathcal{F}(g')) \otimes V_{\tilde{M}} \simeq \mathcal{F}(g) \otimes (\mathcal{F}(g') \otimes V_{\tilde{M}})$ .

$$\begin{array}{ccc} (e_{m,0}^g \otimes e_{m,0}^{g'}) \otimes p_{\tilde{M}} & \longrightarrow & e_{m,0}^g \otimes (e_{m,0}^{g'} \otimes p_{\tilde{M}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ e_{m,0}^{g+g'} \otimes p_{\tilde{M}} & & e_{m,0}^g \otimes p_{g'+\tilde{M}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_{g+g'+\tilde{M}} & \longrightarrow & p_{g+g'+\tilde{M}} \end{array}$$

On obtient  $\mu_{g,g',\tilde{M}} = \text{id}_{g+g'+\tilde{M}}$ .

3.  $(\mathcal{F}(g) \otimes \mathcal{F}(m)) \otimes V_M \simeq \mathcal{F}(g) \otimes (\mathcal{F}(m) \otimes V_M)$ .

$$\begin{array}{ccc} (e_{m,0}^g \otimes e_{-h-u(M),0}^m) \otimes e_{h,0}^M & \longrightarrow & e_{m,0}^g \otimes (e_{-h-u(M),0}^m \otimes e_{h,0}^M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi(g, -h-u(M)) e_{-h-k,0}^m \otimes e_{h,0}^M & & e_{m,0}^g \otimes u_m^{-h} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi(g, -h-u(M)) u_m^{-h} & \longrightarrow & \chi(g, -h) u_m^h \end{array}$$

On obtient  $\mu_{g,m,M} = \chi(g, u(M)) \bigoplus_{\widetilde{M}} \text{id}_{\widetilde{M}}$ .

4.  $(\mathcal{F}(g) \otimes \mathcal{F}(m)) \otimes V_{\widetilde{M}} \simeq \mathcal{F}(g) \otimes (\mathcal{F}(m) \otimes V_{\widetilde{M}})$ .

$$\begin{array}{ccc}
 (e_{k,0}^g \otimes e_{k,0}^m) \otimes p_{\widetilde{M}} & \longrightarrow & e_{k,0}^g \otimes (e_{k,0}^m \otimes p_{\widetilde{M}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 e_{k-g,0}^m \otimes p_{\widetilde{M}} & & e_{k,0}^g \otimes \chi(u(\widetilde{M}), -\kappa_{-k,H}) e_{\kappa_{-k,H},0}^M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \chi(u(\widetilde{M}), -\kappa_{g-k,H}) e_{\kappa_{g-k,H},0}^M & \longrightarrow & \chi(u(\widetilde{M}), -\kappa_{-k,H}) e_{\kappa_{-k,H} + \kappa_{g,-k},0}^{[g-k]}
 \end{array}$$

Comme on a  $\kappa_{-k,H} + \kappa_{g,-k} = \kappa_{g-k,H}$  et  $\kappa_{g,-k} = \kappa_{-g,[g-k]}$ , on obtient

$$\mu_{g,m,\widetilde{M}} = \bigoplus_M \chi(u(\widetilde{M}), -\kappa_{-g,M}) \text{id}_M.$$

5.  $(\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{F}(g)) \otimes V_M \simeq \mathcal{F}(m) \otimes (\mathcal{F}(g) \otimes V_M)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 (e_{-h-\kappa_{g,M}-u(g+M),0}^m \otimes e_{-h-u(M),0}^g) \otimes e_{h,0}^M & \longrightarrow & e_{-h-\kappa_{g,M}-u(g+M),0}^m \otimes (e_{-h-u(M),0}^g \otimes e_{h,0}^M) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 e_{-h-u(M),0}^m \otimes e_{h,0}^M & & e_{-h-\kappa_{g,M}-u(g+M),0}^m \otimes e_{h+\kappa_{g,M},0}^{g+M} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 u_m^{-h} & \longrightarrow & u_m^{-h-\kappa_{g,M}}
 \end{array}$$

On obtient  $\mu_{m,g,M} = \bigoplus_{\widetilde{M}} \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,M}) \text{id}_{V_{\widetilde{M}}}$ .

6.  $(\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{F}(g)) \otimes V_{\widetilde{M}} \simeq \mathcal{F}(m) \otimes (\mathcal{F}(g) \otimes V_{\widetilde{M}})$

$$\begin{array}{ccc}
 (e_{x,0}^m \otimes e_{m,0}^g) \otimes p_{\widetilde{M}} & \longrightarrow & e_{x,0}^m \otimes (e_{m,0}^g \otimes p_{\widetilde{M}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \chi(x,g) e_{x,0}^m \otimes p_{\widetilde{M}} & & e_{x,0}^m \otimes p_{g+\widetilde{M}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \chi(g,x) \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{x,-x}) e_{\kappa_{x,-x},0}^{[-x]} & \longrightarrow & \chi(u(g+\widetilde{M}), \kappa_{x,-x}) e_{\kappa_{x,-x},0}^{[-x]}
 \end{array}$$

On obtient  $\mu_{m,g,\widetilde{M}} = \bigoplus_M \chi(u(M), g) \text{id}_{V_M}$ .

7.  $(\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{F}(m)) \otimes V_M \simeq \mathcal{F}(m) \otimes (\mathcal{F}(m) \otimes V_M)$ .

Ici,  $-k$  appartient à la classe  $M$ .

$$\begin{array}{ccc}
(e_{g,0}^m \otimes e_{\bar{k},0}^m) \otimes e_{-k-u(M),0}^M & \longrightarrow & e_{g,0}^m \otimes (e_{\bar{k},0}^m \otimes e_{-k-u(M),0}^M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
e_{k,0}^{k-g} \otimes e_{-k-u(M),0}^M & & e_{g,0}^m \otimes u_m^{k+u(M)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
e_{-k+\kappa_{k-g,M}-u(M),0}^{k-g+M} & \longrightarrow & \sum_{\widetilde{M}} \chi(u(\widetilde{M}), -k-u(M) + \kappa_{g,[-g]}) e_{-\kappa_{g,[-g]},0}^{[-g]}
\end{array}$$

Comme on a  $[-k] = M$ , on a  $e_{-k+\kappa_{k-g,M}-u(M),0}^{k-g+M} = e_{-\kappa_{g,[-g]},0}^{[-g]}$ . De plus, on a

$$\sum_{\widetilde{M}} \chi(u(\widetilde{M}), -k-u(M) + \kappa_{g,[-g]}) e_{-\kappa_{g,[-g]},0}^{[-g]} = \sum_{\widetilde{M}} \chi(u(\widetilde{M}), -k-u(M) + g + u([-g])) e_{-\kappa_{g,[-g]},0}^{[-g]}.$$

On en conclut  $\mu_{m,m,M} = \sum_N \left( \chi(u(\widetilde{M}), u(N) - u(M) - x) \text{id}_{V_N} \right)_{\widetilde{M} \in G/H^+, x \in G, x+M=N}$ .

8.  $(\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{F}(m)) \otimes V_{\widetilde{M}} \simeq \mathcal{F}(m) \otimes (\mathcal{F}(m) \otimes V_{\widetilde{M}})$ .

$$\begin{array}{ccc}
(e_{g,0}^m \otimes e_{g,0}^m) \otimes p_{\widetilde{M}} & \longrightarrow & e_{g,0}^m \otimes (e_{g,0}^m \otimes p_{\widetilde{M}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tau \sum_{k \in G} \chi(g, k)^{-1} e_{m,0}^k \otimes p_{\widetilde{M}} & & e_{g,0}^m \otimes \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,[-g]}) e_{-\kappa_{g,[-g]},0}^{[-g]} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tau \sum_{k \in G} \chi(g, k)^{-1} p_{k+\widetilde{M}} & \longrightarrow & \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,[-g]}) u_m^{\kappa_{g,[-g]}}
\end{array}$$

On a  $\chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,[-g]}) u_m^{\kappa_{g,[-g]}} = \bigoplus_{\widetilde{N}} \chi(u(\widetilde{M}) - u(\widetilde{N}), \kappa_{g,[-g]}) p_{\widetilde{N}}$ , donc l'isomorphisme  $\mu_{m,m,\widetilde{M}}$

est l'inverse de celui qui envoie  $p_{\widetilde{N}}$  sur

$$\tau \chi(u(\widetilde{N}) - u(\widetilde{M}), \kappa_{g,[-g]}) \sum_{k \in G, k+\widetilde{M}=\widetilde{N}} \chi(g, k)^{-1} p_{k+\widetilde{M}}.$$

Comme on a  $\kappa_{g,[-g]} = g + u([-g])$ , on a

$$\tau \chi(u(\widetilde{N}) - u(\widetilde{M}), \kappa_{g,[-g]}) \sum_{k \in G, k+\widetilde{M}=\widetilde{N}} \chi(g, k)^{-1} p_{k+\widetilde{M}} = \tau \sum_{k \in G, k+\widetilde{M}=\widetilde{N}} \chi(u([-g], k)) p_{k+\widetilde{M}}.$$

On en conclut que  $\mu_{m,m,\widetilde{M}} = \bigoplus_{\widetilde{N}} (\tau |H| \chi(u(M), -k) \text{id}_{V_{\widetilde{N}}})_{M \in G/H, k \in G, k+\widetilde{M}=\widetilde{N}}$ .

L'équivalence entre la catégorie  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}(H)$  est réalisée par le foncteur  $\mathcal{F}$  défini sur les objets par  $\mathcal{F}(M) = M$  et  $\mathcal{F}(\widetilde{M}) = \widetilde{M}$  pour tous  $M \in G/H$  et  $\widetilde{M} \in G/H^\perp$  et muni des morphismes  $c_{g,M} = \text{id}$ ,  $c_{g,\widetilde{M}} = \text{id}$ ,  $c_{m,M}^M = \text{id}$  et  $c_{m,\widetilde{M}}^M = \chi(u(\widetilde{M}), u(M))\text{id}_M$ .

□

## A.2 La catégorie de module $\text{Rep}(J_H)$ .

**Proposition A.2.1.** *La catégorie squelette de  $\text{Rep}(J_H)$  est équivalente à la catégorie squelette de  $\text{Rep}(I_{H^\perp})$ .*

**Démonstration.** Nous prenons comme représentants des classes d'équivalence des  $J_H$ -modules simples les modules  $V_M$ ,  $M \in G/H^\perp$ , de base

$$\{e_{k,0}^M = v_{u(M),m}^{-k}, k \in H^\perp\} \cup \{e_{\widetilde{M},0}^M = \frac{1}{\sqrt{|H|}} v_{u(\widetilde{M}),\widetilde{M}}^m, \widetilde{M} \in G/H\},$$

et les modules  $V_\rho$ ,  $\rho \in \widehat{H^\perp}$ , de base

$$\left\{ e_{g,0}^\rho = v_{0,\widetilde{M}}^{-g}, g \in G \right\} \cup \left\{ e_{m,0}^\rho = v_{0,\widetilde{M}}^m \right\}$$

où  $\rho^{-1} = \chi(u(\widetilde{M}), \cdot)$ . Nous procédons ensuite de la même façon que pour  $I_H$ . Nous donnons directement les résultats.

La structure de catégorie de module squelette sur  $\mathcal{C}(G, \chi, \beta)$  de  $\text{Rep}(J_H)$  est donnée pour tous  $g, g'$  dans  $G$ ,  $k$  dans  $H^\perp$ ,  $M$  dans  $G/H$ ,  $\widetilde{M}$  dans  $G/H^\perp$  et  $\rho$  dans  $\widehat{H^\perp}$  par :

$$\begin{cases} X_g \otimes V_M & \simeq & V_{g+M} \\ e_{-k-u(M),0}^g \otimes e_{k,0}^M & \longmapsto & e_{k+\kappa_{g,M},0}^{g+M} \\ \chi(u(\widetilde{M}), \kappa_{g,M}) e_{m,0}^g \otimes e_{\widetilde{M},0}^M & \longmapsto & e_{\widetilde{M},0}^{g+M} \end{cases} \quad \begin{cases} X_g \otimes V_\rho & \simeq & V_{\chi(g,\cdot)\rho} \\ e_{-g',0}^g \otimes e_{g',0}^\rho & \longmapsto & e_{g+g',0}^{\chi(g,\cdot)\rho} \\ e_{m,0}^g \otimes e_{m,0}^\rho & \longmapsto & e_{m,0}^{\chi(g,\cdot)\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_m \otimes V_M & \simeq & \bigoplus_{\rho \in \widehat{H^\perp}} V_\rho \\ e_{-g,0}^m \otimes e_{\widetilde{M}+g,0}^M & \longmapsto & \beta|H|\chi(u(M), -g) e_{g,0}^{\chi(u(\widetilde{M}), \cdot)^{-1}} \\ e_{-k-u(M),0}^m \otimes e_{k,0}^M & \longmapsto & \sum_{\rho \in \widehat{H^\perp}} \rho(k) e_{m,0}^\rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_m \otimes V_\rho & \simeq & \bigoplus_{M \in G/H^\perp} V_M \\ e_{-u(M)-k,0}^m \otimes e_{m,0}^\rho & \longmapsto & \rho(-k) e_{k,0}^M \\ e_{-g,0}^m \otimes e_{g,0}^{\chi(u(\widetilde{M}), \cdot)^{-1}} & \longmapsto & \sum_{M \in G/H^\perp} \chi(u(M), g) e_{g+M,0}^M \end{cases}$$

avec les morphismes d'associativité

$$\mu_{g,g',M} = \text{id}_{V_{g+g'+M}},$$

$$\mu_{g,g',\rho} = \text{id}_{V_{\chi(g+g',\cdot)\rho}},$$

$$\begin{aligned}
\mu_{g,m,M} &= \chi(u(M), g) \bigoplus_{\rho \in \widehat{H^\perp}} \text{id}_{V_\rho}, \\
\mu_{m,g,M} &= \bigoplus_{\rho \in \widehat{H^\perp}} \rho(\kappa_{g,M}) \text{id}_{V_\rho}, \\
\mu_{g,m,\rho} &= \sum_{M \in G/H} \rho(-\kappa_{-g,M}) \text{id}_{V_M}, \\
\mu_{m,g,\rho} &= \bigoplus_{M \in G/H^\perp} \chi(u(M), g) \text{id}_{V_M}, \\
\mu_{m,m,M} &= \bigoplus_{N \in G/H^\perp} \left( \chi(u(\widetilde{M}), -\kappa_{g,M}) \text{id}_{V_N} \right)_{\widetilde{M} \in G/H, g \in G, g+M=N}, \\
\mu_{m,m,\rho} &= \bigoplus_{\rho' \in \widehat{H^\perp}} (\beta|_H | \chi(u(M), -g) \text{id}_{V_\rho})_{M \in G/H, g \in G, \chi(g, \cdot) \rho = \rho'}.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à poser  $V_{\widetilde{M}} = V_\rho$  si  $\rho = \chi(u(\widetilde{M}), \cdot)$  avec  $\widetilde{M} \in G/H$  et on obtient l'équivalence  $\text{Rep}(J_H) \simeq \text{Rep}(I_{H^\perp})$ .  $\square$

## Annexe B

# Équivalence de Morita et déformation des algèbres de Hopf faibles semi-simples.

Ce qui suit est inspiré de l'article [N1]. Soient  $A$  et  $B$  deux algèbres de Hopf faibles semi-simples sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle. On dit que  $A$  et  $B$  sont équivalentes au sens de Morita si les catégories  $\text{Rep}(A)$  et  $\text{Rep}(B)$  sont équivalentes en tant que catégories de fusion.

**Définition B.0.2.** Soit  $B$  une algèbre semi-simple munie de deux structures d'algèbres de Hopf faibles  $B_1$  et  $B_2$  de coproduits respectifs  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  vérifiant  $\Delta_1(1) = \Delta_2(1)$ , d'antipodes respectives  $S_1$  et  $S_2$  et d'applications co-unités sources respectives  $\varepsilon_t^1$  et  $\varepsilon_t^2$ . On dit qu'elles sont déformées l'une de l'autre s'il existe un couple  $(\Omega, \bar{\Omega})$  d'éléments de  $B \otimes B$  vérifiant :

- (i)  $\Omega\bar{\Omega} = \bar{\Omega}\Omega = \Delta_1(1)$ ,
- (ii)  $(\Delta_1 \otimes id)(\Omega)(\Omega \otimes 1)(id \otimes \Delta_1)(\bar{\Omega})(1 \otimes \bar{\Omega}) = (id \otimes \Delta_1)(\Omega)(1 \otimes \Omega)(\Delta_1 \otimes id)(\bar{\Omega})(\bar{\Omega} \otimes 1)$ ,
- (iii)  $\varepsilon_t^1(\Omega_{(1)}z)\Omega_{(2)} = z$ , pour tout  $z \in B_t$ ,
- (iv)  $S_1(\varepsilon_t^1(\Omega_{(2)}z))\Omega_{(1)} = S_1(z)$ , pour tout  $z \in B_t$  (on note  $\Omega = \Omega_{(1)} \otimes \Omega_{(2)}$ ),
- (v)  $\Delta_2(b) = \Omega\Delta_1(b)\bar{\Omega}$  pour tout  $b \in B$ .

**Proposition B.0.3.** Soit  $B$  une algèbre semi-simple munie de deux structures d'algèbre de Hopf faible  $B_1$  et  $B_2$  de coproduits respectifs  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . On suppose qu'on a  $\Delta_1(1) = \Delta_2(1)$ .  $B_1$  et  $B_2$  sont équivalentes au sens de Morita si et seulement si  $B_1$  et  $B_2$  sont déformées l'une de l'autre.

**Démonstration.** On suppose que  $B_1$  et  $B_2$  sont équivalentes au sens de Morita. Soient  $\{X_i\}_{i \in I}$  un ensemble de représentants des  $B$ -modules irréductibles et  $\{\pi_i\}_{i \in I}$  les représentations irréductibles associées. Soient  $i, j \in I$ . Comme les catégories des représentations de  $B_1$  et  $B_2$  sont équivalentes en tant que catégories de fusion, les produits tensoriels de représentations  $\pi_i \otimes_1 \pi_j = (\pi_i \otimes \rho_j) \circ \Delta_1$  et  $\pi_i \otimes_2 \pi_j = (\pi_i \otimes \pi_j) \circ \Delta_2$  ont la même décomposition en somme de représentations irréductibles et donc les algèbres  $(\pi_i \otimes \pi_j)\Delta_1(B)$  et  $(\pi_i \otimes \pi_j)\Delta_2(B)$  sont isomorphes. Comme  $\Delta_1(1) = \Delta_2(1)$ , il existe une algèbre simple  $B_{i,j}$  incluse dans  $\pi_i(B) \otimes \pi_j(B)$  d'unité  $\Delta_1(1)(\pi_i(1) \otimes \pi_j(1))$  contenant les algèbres  $(\pi_i \otimes \pi_j)\Delta_1(B)$  et  $(\pi_i \otimes \pi_j)\Delta_2(B)$ . L'isomorphisme entre ces algèbres s'étend donc en un automorphisme de  $B_{i,j}$ , qui est intérieur par simplicité de cette algèbre. Il existe donc  $\Omega_{i,j}$  inversible



dans  $B_{i,j}$  tel que  $(\pi_i \otimes \pi_j)\Delta_2(x) = \Omega_{i,j}(\pi_i \otimes \pi_j)\Delta_1(x)\Omega_{i,j}^{-1}$  pour tout  $x \in I$ . On pose  $\Omega = \sum_{i,j \in I} \Omega_{i,j}$  et  $\bar{\Omega} = \sum_{i,j \in I} \Omega_{i,j}^{-1}$  et on a bien  $\Delta_2(x) = \Omega\Delta_1(x)\bar{\Omega}$  pour tout  $x \in I$  avec  $\Omega\bar{\Omega} = \bar{\Omega}\Omega = \Delta_1(1)$ .

L'équivalence entre  $\text{Rep}(B_1)$  et  $\text{Rep}(B_2)$  est alors réalisée par le foncteur défini sur les objets par  $\mathcal{F}(X) = X$  pour tout  $X \in \text{Rep}(B_1)$  et dont les isomorphismes structurels sont donnés par  $\mathcal{F}_{X,Y}(1_{(1)} \cdot x \otimes 1_{(2)} \cdot y) = \Omega(x \otimes y)$  pour tous  $X, Y \in \text{Rep}(B_1)$ ,  $x \in X$  et  $y \in Y$  et  $\mathcal{F}_1 = \text{id}_{B_t}$ . Les autres conditions sont alors la traduction des conditions de commutativité des diagrammes de la définition d'un foncteur monoïdal.  $\square$

# Bibliographie

- [A] M. Aguiar, *A note on strongly separable algebras*, Boletín de la Academia Nacional de Ciencias (Córdoba, Argentina), special issue in honor of Orlando Villamayor, **65** (2000) 51-60.
- [AM] N. Andruskiewitch, J.M. Mombelli, *On module categories over finite dimensional Hopf algebras*, J. Algebra, **314** (1) (2007), 383–418.
- [BK] B. Bakalov, A. Kirillov, Jr., *Lectures on tensor categories and modular functor*, Amer. Math. Soc., 2001.
- [BJ] D. Bisch V. Jones, *Algebras associated to intermediate subfactors*, Invent. Math. **128** (1997), no. 1, 89–157.
- [BNSz] G. Böhm, F. Nill, and K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras I. Integral theory and  $C^*$ -structure*, J. Algebra, **221** (1999), 385–438.
- [BSz] G. Böhm, K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras II. Representation theory, dimensions and the Markov trace*, J. Algebra **233** (2000), 156–212.
- [CE] D. Calaque, P. Etingof, *Lectures on tensor categories*, IRMA, Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 12, 1-38 (2008).
- [D] M-C. David,  *$C^*$ -Groupoides Quantiques et Inclusions de Facteurs : Structure Symétrique et Autodualité, Action sur le Facteur Hyperfini de type  $II_1$* , J. Operator Theory, **54** (1) (2005), 27–68.
- [DT] M-C. David, N.M. Thiéry *Exploration of Finite Dimensional Hopf Algebras and Lattices of Intermediate Subfactors*, arXiv :0812.3044.
- [EnNe] M. Enock and R. Nest. *Inclusions of factors, multiplicative unitaries and Kac algebras*, J. Funct. Analysis, **137** (1996), 466–543.
- [EV] M. Enock, J.-M. Vallin. *Inclusions of von Neumann algebras and quantum groupoids*, Journal of Functional Analysis **172**, Issue 2, (2000) Pages 249-300.
- [EN] P. Etingof, D. Nikshych, *Dynamical quantum groups at roots of 1*, Duke Math. J. **108** (2001), no. 1, 135–168.
- [ENO] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik *On fusion categories*, Ann. Math., **162** (2005), 581–642.
- [GHJ] F.M. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, Springer (1989), 288 pp.
- [G] C. Galindo, *Clifford theory for tensor categories*, arXiv :0902.1088.
- [H] T. Hayashi *A canonical Tannaka duality for semifinite tensor categories*, arXiv : 9904.073.
- [HH] T.J. Hagge and S.-M. Hong *Some non-braided fusion categories of rank 3*, Commun. Contemp. Math. **11** (2009), no. 4, 615–637.

- [J] V. Jones *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983) 1-25.
- [JS] V. Jones, V.S. Sunder, *Introduction to subfactors*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **234**, Cambridge University Press, (1997).
- [K] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer-Verlag (1995).
- [KV] J. Kusterman, S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. **33** (6) (2000), 837–934.
- [M] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer (2001), 314 pp.
- [Mi] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press (1965).
- [Na] D. Naidu, *Categorical Morita equivalence for group-theoretical categories*, Comm. Algebra **35** (2007), no. 11, 3544–3565.
- [N] D. Nikshych, *Duality for actions of weak Kac algebras and crossed product inclusions on  $II_1$  factors*, J. Operator Theory **46** (2001), 635–655.
- [N1] D. Nikshych,  *$K0$ -rings and twisting of finite dimensional semisimple hopf algebras*, Communications in Algebra, 1532-4125, Volume 26, Issue 1, 1998, Pages 321 – 342.
- [N2] D. Nikshych, *Semisimple weak Hopf algebras*, J. Algebra, **275** (2004), no. 2, 639-667.
- [NTV] D. Nikshych, V. Turaev, and L. Vainerman, *Invariants of knots and 3-manifolds from quantum groupoids*, Topology and its Applications, **127** (2003), 91–123.
- [NV] D. Nikshych, L. Vainerman, *A characterization of depth 2 subfactors of  $II_1$  factors*, J. Func. Analysis, **171** (2) (2000), 278–307.
- [NV1] D. Nikshych, L. Vainerman, *A Galois correspondence for  $II_1$  factors and quantum groupoids*, J. Func. Analysis, **178** (2) (2000), 113-142.
- [NV2] D. Nikshych, L. Vainerman, *Finite quantum groupoids and their applications*, in *New Directions in Hopf Algebras* MSRI Publications, **43** (2002), 211–262.
- [NSzW] F. Nill, K. Szlachányi et H.-W. Wiesbrock, *Weak Hopf algebras and reducible Jones inclusions of depth 2, I : From crossed products to Jones towers*, arXiv : 9806.130.
- [O1] V. Ostrik, *Module categories, weak Hopf algebras, and modular invariants*, Transform. Groups, **8** (2003), 177–206.
- [P] R.S. Pierce, *Associative Algebras*, Graduate Texts in Mathematics **88** Springer-Verlag (1982).
- [Sz] K. Szlachányi, *Finite quantum groupoids and inclusions of finite type*, in *Mathematical Physics in Mathematics and Physics* (Siena, 2000), 393–407; *Fields Inst. Commun.*, **30**, A.M.S. Providence, RI (2001).
- [Szy] W. Szymanski. *Finite index subfactors and Hopf algebra crossed products*, Proceedings of the AMS, **130**, no. 2 (1994), 519–528.
- [T] D. Tambara, *Representations of tensor categories with fusion rules of self-duality for abelian groups*, Isr. J. Math., **118** (2000), 29–60.
- [Tu] V. Turaev, *Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories*, arXiv : 0005.291.  
À paraître dans : V. Turaev, *Homotopy Quantum Field Theory*, EMS Tracts Math. 10, European Math. Soc. Publ. House, Zurich, (2010).
- [TY] D. Tambara, S. Yamagami, *Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups*, J. Algebra, **209** (2) (1998), 692–707.
- [W] Y. Watatani, *Lattices of Intermediate Subfactors*, J. Funct. Analysis, **140**, (1996) 312–334.