

Particules de masse nulle dans des représentations exotiques du groupe de Poincaré

Xavier Bekaert

▶ **To cite this version:**

Xavier Bekaert. Particules de masse nulle dans des représentations exotiques du groupe de Poincaré. Physique mathématique [math-ph]. Université François Rabelais - Tours, 2010. tel-00495431

HAL Id: tel-00495431
https://theses.hal.science/tel-00495431

Submitted on 26 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université François Rabelais de Tours

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Physique théorique

présenté et soutenu publiquement par

Xavier BEKAERT

Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique

le 10 juin 2010

Particules de masse nulle dans des représentations exotiques du groupe de Poincaré

devant le jury composé de

Costas BACHAS	Dir. de recherche (CNRS)	Ecole Normale Supérieure de Paris
Glenn BARNICH	Dir. de recherche (FNRS) *rapporteur*	Univ. Libre de Bruxelles
Peter HORVATHY	Professeur	Univ. de Tours
Jihad MOURAD	Professeur *rapporteur*	Univ. Paris Diderot
Augusto SAGNOTTI	Professore ordinario *rapporteur*	Scuola Normale Superiore di Pisa
Dmitri SOROKIN	Primo ricercatore (INFN)	Univ. degli Studi di Padova
Philippe SPINDEL	Professeur	Univ. de Mons

A te

A te che hai dato senso al tempo

Senza misurarlo

(extrait de la chanson “A te”) Lorenzo Cherubini ‘Jovanotti’

Remerciements

Je constate qu'il est difficile de rendre justice aux innombrables personnes qui ont pu m'aider et m'influencer durant toutes les années ayant suivi ma thèse, ce qui est accentué par la variété des lieux où j'ai résidé.

Il va sans dire que les travaux présentés ici n'ont pas été accomplis de manière isolée. Ils trouvent tous leurs sources dans d'innombrables échanges, discussions, lectures et collaborations. Je voudrais commencer par remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu la joie de travailler directement depuis ma thèse : Igor Bandos, Glenn Barnich, Nicolas Boulanger, Joseph Buchbinder, Sandrine Cnockaert, Thibault Damour, Michel Rausch de Traubenberg, Andres Gomberoff, Maxim Grigoriev, Marc Henneaux, Carlo Iazeolla, Euihun Joung, Serge Leclercq, Élisa Meunier, Jihad Mourad, Jeong-Hyuck Park, Anatol Pashnev, Dmitri Sorokin, Mirian Tsulaia, Mauricio Valenzuela, Mikhail Vasiliev.

Ces rencontres enrichissantes furent trop nombreuses et variées que pour en faire un compte-rendu détaillé ici. Néanmoins, je voudrais en particulariser quelques unes qui furent tout particulièrement déterminantes :

Je remercie vivement mon directeur de thèse Marc Henneaux pour m'avoir guidé durant les premières années, décisives, de mon parcours scientifique. L'élégance, la clarté et la précision mathématiques qui imprègnent ses travaux autant d'enseignement que de recherche constituent une référence inoubliable pour ses élèves.

J'ai d'abord partagé un bureau avec Nicolas Boulanger pendant trois ans à Bruxelles. Ni notre intense collaboration ni notre profonde amitié ne se sont jamais effacées avec la distance.

J'ai ensuite partagé un appartement avec Mirian Tsulaia pendant deux ans à Padoue. Cette cohabitation prolongée m'a énormément apporté sur les plans croisés de l'apprentissage de la vie, de la physique, et de l'amitié.

J'ai été enfin voisin, à la fois de bureau (à l'Institut des Hautes Études Scientifiques) et d'appartement (à la résidence de l'Ormaille), de Jeong-Hyuck Park pendant un an à Bures-sur-Yvette. Bien qu'il soit résident aujourd'hui de cet antipode géographique qu'est la Corée, il me semble toujours aussi proche aujourd'hui qu'hier.

J'ai rencontré Jihad Mourad après avoir assisté à un séminaire à Paris. Directement après son exposé, nous avons initié une discussion stimulante qui s'est vite transformée dans une collaboration ininterrompue à ce jour. Je le remercie très chaleureusement pour nos échanges scientifiques, ses conseils, son amitié et sa confiance. Ses encouragements à postuler hier à un poste de maître de conférence et à défendre aujourd'hui une habilitation à diriger des recherches me furent très précieux.

Concernant l'habilitation à diriger des recherches proprement dite, je voudrais remercier Glenn Barnich pour m'avoir très tôt encouragé à entreprendre ce diplôme et pour m'avoir également soutenu pendant la rédaction de ce mémoire, Hector Giacomini et Peter Horváthy pour leur accompagnement dans mon projet et mes démarches. Ainsi, je suis très reconnaissant à Peter Horváthy d'avoir accepté d'être mon référent auprès de l'Université de Tours pour la procédure d'autorisation d'inscription. Je remercie aussi tous les membres du jury, Costas Bachas, Glenn Barnich, Peter Horváthy, Jihad Mourad, Augusto Sagnotti, Dmitri Sorokin, Philippe Spindel, pour avoir agréé d'en faire partie. Je voudrais notamment remercier les rapporteurs pour avoir accepté le surcroît de travail correspondant.

Je remercie Amaury Mouchet et Stam Nicolis pour leur aide répétée et patiente en informatique, leurs précieux échanges autour de l'habilitation, ainsi que pour nos discussions scientifiques et culturelles. Je remercie Paolo Palazzi pour m'avoir servi de guide dans la jungle hadronique, cartographiée par le "Particle Data Group." Les discussions avec Dario Francia, d'une part sur l'éventail des théorèmes no-go, d'autre part sur le livre incontournable de Weinberg, ont constitué de multiples sources d'inspiration. Pour leur lecture du premier chapitre de ce mémoire selon un point de vue extérieur et pour leurs commentaires constructifs, je suis reconnaissant à Élisa Meunier et Amaury Mouchet.

J'adresse mes remerciements aux membres du Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique de Tours pour m'avoir accordé leur confiance en me sélectionnant pour un poste de maître de conférence.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Jihad Mourad et Karim Noui pour m'avoir encouragé à postuler à ce poste et pour leur soutien moral pendant la psychologiquement difficile phase de candidature. Je ne saurai jamais trop vivement leur exprimer ma gratitude.

Je n'ai pas tant d'amis que pour ne pouvoir les citer tous ici mais, de peur d'en omettre un seul, je préfère les remercier tous ensemble, d'un seul élan. J'espère que chacun d'entre eux s'y reconnaîtra car ils devraient savoir combien leur amitié m'est chaque jour indispensable.

Encore plus indispensable et incontournable est l'amour et le soutien de mes parents que je voudrais remercier pour la confiance inaltérable qu'ils ont toujours placée en moi depuis ma plus tendre enfance.

Pour terminer, mes remerciements les plus vifs vont *a te*, Evelina, pour tous nos innombrables moments, petits et grands, de complicité et pour ton soutien inébranlable sans lequel ma passion pour la physique n'aurait certainement pas pu être poursuivie au sein du cadre académique.

Présentation générale

Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches est centré autour des particules de masse nulle issues de représentations exotiques du groupe de Poincaré, en particulier celles de spin supérieur à deux.

Le manuscrit est subdivisé en trois parties : premièrement une fiche signalétique, deuxièmement le corps du texte, troisièmement des compléments.

- La *fiche signalétique* est structurée comme un curriculum vitæ traditionnel.
- Le *corps du texte* est composé de deux chapitres :
  I. Le premier chapitre propose une introduction historique aux particules de spin élevé. Ce chapitre se voudrait une introduction conviviale pour non experts. Hormis quelques digressions à caractère historique, dont je prie le lecteur de me pardonner, le survol chronologique de ce domaine de recherche permet d'en rappeler les fondements théoriques, les motivations sous-jacentes et les principaux enjeux.
  II. Le deuxième chapitre propose une synthèse succinte de mes travaux.
- Les *compléments* sont au nombre de trois :
  A. Le premier complément reprend les notes d'un cours sur les représentations unitaires du groupe de Poincaré de dimension d'espace-temps quelconque. Il vise à compléter le premier chapitre par une introduction plus "technique."
  B. Le deuxième complément contient un acte de conférence fournissant un résumé de mes travaux sur la classification des interactions cohérentes entre champs de jauge tensoriels.
  C. Le troisième complément est constitué d'un travail récent sur les couplages entre matière scalaire et champs de jauge tensoriels.

Table des matières

Remerciements **i**

Présentation générale **v**

Fiche signalétique **ix**

I Particules de spin élevé : introduction historique **1**

I.1 La barrière du spin deux : tentative de saut 2
a) Où situer la barrière ? 2
b) Invitations au voyage et précautions d'usage 3
c) Tranches d'histoire 4

I.2 Génèse : généraliser Dirac 5

I.3 Fondations : les particules élémentaires vues comme représentations unitaires irréductibles 7
a) Représentations du groupe de Poincaré 9
b) Équations d'onde relativistes linéaires 11
c) Théorie des groupes et groupe de théoriciens 13

I.4 L'explosion démographique : le zoo hadronique 13

I.5 Prolongements : la quête Lagrangienne, l'espace-temps anti de Sitter 16
a) Lagrangiens relativistes quadratiques 16
b) À l'intérieur de l'espace-temps anti de Sitter 18
c) Au bord de l'espace-temps anti de Sitter 20

I.6 Un problème bien posé : le programme de Frønsdal 22
a) Programme de Gupta 24
b) Programme de Frønsdal 25
c) Méthode de Noether 29

I.7 La course d'obstacles : les théorèmes "no-go" et leurs contournements 31
a) Théorèmes "no-go" dans l'espace-temps de Minkowski 31

b) Exemples “yes-go” dans l’espace-temps de Minkowski 34
c) Les cordes : l’éclairage ultraviolet 36
d) L’école russe : les interactions selon Fradkin et Vasiliev . . . 40
I.8 L’éclairage holographique : le problème inverse 43
a) La correspondance : de l’intérieur vers le bord 44
b) Le problème inverse : du bord vers l’intérieur 47
I.9 En guise de conclusion 50

II Sentiers de recherche **53**
II.1 Symétries mixtes 55
II.2 Spins élevés 57
II.3 Singletons 59
II.4 Spin infini 59
II.5 Perspectives 60
a) Quelques problèmes bien posés ouverts 61
b) Quelques perspectives générales 61

A Représentations unitaires du groupe de Poincaré de dimension d’espace-temps quelconque **65**
A.1 Rencontres de Modave 2006 65
A.2 Notes de cours 67
A.3 Annexe sur les groupes de spin 101
A.4 Tenseurs *versus* spineurs en dimension 4 101

B Vertex cubiques et méthode de Noether **103**

C Matière scalaire interagissant via des médiateurs sans masse de spin élevé **113**

Bibliographie **146**

Fiche signalétique

Xavier BEKAERT

Né le 27 juillet 1976 à Bruxelles.

Nationalité belge.

Coordonnées professionnelles :

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique (LMPT)
Faculté des Sciences et Techniques
Université de Tours
Parc de Grandmont
37200 Tours

Téléphone : +33247367375 ; Télécopie : +33247366956
Courriel : *xavier.bekaert@lmpt.univ-tours.fr*

Diplômes :

Années académiques	Nom du diplôme (Durée prévue)	Mention	Institution
1994-1998	Maîtrise en Physique (4 ans)	L.P.G.D.	Univ. Libre de Bruxelles
1998-2002	Doctorat en Sciences (4 ans)	-	Univ. Libre de Bruxelles

remarques :

- La mention "L.P.G.D." (= "La Plus Grande Distinction") est obtenu pour des notes entre 18/20 et 20/20.
- Titre du mémoire de Maîtrise : *Dualité Électrique-Magnétique et Formes Chirales* (directeur de stage : Marc Henneaux).

Emplois :

Période	Titre	Employeur	Institution	Pays
01/09/1998 - 30/09/2002	Chercheur	I.I.S.N.	Univ. Libre de Bruxelles	Belgique
01/10/2002 - 30/09/2004	Boursier post-doctoral	R.T.N.	Univ. de Padoue	Italie
01/10/2004 - 30/09/2006	Visiteur invité	I.H.É.S.	Inst. des Hautes Études Sc.	France
01/09/2006 - xx/xx/xxxx	Maître de conférence	Ministère	Univ. de Tours	France

remarques :

- I.I.S.N. est l'abbréviation de "Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires" (État Belge).
- R.T.N. est l'abbréviation du réseau européen "Research Training Network" intitulé "The quantum structure of spacetime et the geometric nature of fundamental interactions" (Commission Européenne).
- I.H.É.S. est l'abbréviation de "Institut des Hautes Études Scientifiques."

Thèse de doctorat :

- Titre : *Issues in Electric-Magnetic Duality*
- Soutenance : à Bruxelles le 11 septembre 2002.
- Directeur de thèse : Marc Henneaux (Université Libre de Bruxelles)
- Membres du Jury (par ordre alphabétique) : Marc Henneaux, Laurent Houart, Christiane Schomblond, Alexander Sevrin, Mario Tonin et Michel Tytgat.
- Disponible sur arXiv : `hep-th/0209169`, 200pp.

remarque :

En Belgique, aucune mention n'est plus attribuée au Doctorat et il n'existe pas de rapport de soutenance. Néanmoins, il est possible de s'adresser au secrétaire du Jury (Marc Henneaux, `henneaux@ulb.ac.be`) qui a donné son accord pour rassembler, sous la demande, les avis des divers membres du Jury.

Activités d'enseignement :

1996-1998 : Élève-assistant pour les "guidance de physique" (aide supplémentaire donnée aux étudiant de première année en Science ; 2×60h) sous la direction de Mustapha Tlidi (courriel : `mtlidi@ulb.ac.be`).

1998-1999 : Assistant pour un cours en électrodynamique classique (étudiants en deuxième année de Physique ; 50h d'exercices) sous la direction de Christiane Schomblond (courriel : `cschomb@ulb.ac.be`).

1998-2001 : Assistant pour un cours en relativité générale (étudiants en quatrième année de Physique et Mathématiques ; 2×15h d'exercices) sous la direction de Marc Henneaux (courriel : `henneaux@ulb.ac.be`).

2006-xxxx : Services complets (192h par an)

Activités administratives :

2007-xxxx : Responsable Erasmus de la filière Physique.

Expérience organisationnelle :

2009 : Membre du comité organisateur du workshop "Loops meet Strings", Tours (France) 18-19 novembre 2009.

2006-2008 : Co-organisateur des hebdomadaires "Déjeuners de physique théorique" des physiciens théoriciens du L.M.P.T.

2005 : Membre du comité organisateur des "Rencontres de physique mathématique à Modave", Modave (Belgique) 19-25 juin 2005 ;
`http ://www.ulb.ac.be/sciences/ptm/pmif/RPMM.html`

2003-2004 : Organisateur des mensuels "Séminaires informels de physique théorique" du groupe de physique théorique des hautes énergies de l'Université de Padoue.

1999-2001 : Organisateur des bihebdomadaires "Séminaires informels de physique théorique" des doctorants en physique théorique des hautes énergies de l'Université de Bruxelles.

Expérience de rapporteur :

Depuis 2001, j'ai été "referee" de plusieurs articles soumis à Class.Quant.Grav., Eur.J.Phys., JHEP, J. Math. Phys., Nucl.Phys.B et J.Phys.A.

Liste des activités d'encadrement

Officiellement, j'ai encadré des stagiaires de divers niveaux, incluant collège, lycée, licence et master.

24-26 Janvier 2006 : Co-encadrement d'une collégienne pour un stage d'observation en milieu professionnel.

Janvier-Mars 2008 : Encadrement de 4 stagiaires en 3ème année de Licence en Physique.

Janvier-Mai 2008 : Encadrement d'une stagiaire en 1ère année de Maîtrise en Physique.

24-28 Novembre 2008 : Encadrement d'un lycéen pour un stage d'observation en milieu professionnel.

Septembre-Novembre 2008 : Encadrement de 2 groupes de stagiaires en première année de Licence en Physique dans le cadre d'une unité d'enseignement "projet pédagogique."

Février-Juin 2009 : Encadrement d'une stagiaire en deuxième année de Maîtrise en Physique (Elisa Meunier).

Depuis Septembre 2009 : Encadrement d'une doctorante (Elisa Meunier).

Concrètement, depuis le début de mon parcours scientifique, j'ai collaboré avec de nombreux étudiants en thèse, dont une majorité de façon indépendante de leur directeur. La liste des personnes avec qui j'ai publié des papiers pendant le déroulement de leur thèse est la suivante :

Nicolas Boulanger, Sandrine Cnockaert, Sorin Cucu, Carlo Iazeolla, Euihun Joung, Serge Leclercq.

Exposés présentés lors de conférences :

- Présentation sous invitation au "6th Alsacian Meeting in Mathematics and Physics", Strasbourg (France) Novembre 2009 ; *Singletons & Higher-Spin Algebras : definitions and applications.*
- Présentation sous invitation à la "4th International Sakharov Conference on Physics", Moscou (Russie) Mai 2009 ; *On higher-spin interactions with a matter scalar field.*
- Cours sous invitation à la "6th international school and workshop on QFT & Hamiltonian systems", Calimanesti (Roumanie) Mai 2008 ; *Weyl calculus and Noether currents : An application to cubic interactions.*
- Cours sous invitation aux "Deuxièmes rencontres de physique mathématique à Modave", Modave (Belgique) Août 2006 ; *The unitary representations of the Poincaré group in any spacetime dimension.*
- Cours sous invitation à la "5th international school and workshop on QFT & Hamiltonian systems", Calimanesti (Roumanie) Mai 2006 ; *Higher spin algebras as higher symmetries.*
- RTN-meeting "Constituents, Fundamental Forces and Symmetries of the Universe", Corfou (Grèce) Septembre 2005 ; *Gauge invariants, Killing tensors and cubic vertices in higher-spin gauge theories.*
- Cours donné aux "Rencontres de physique mathématique à Modave", Modave (Belgique) Juin 2005 ; *Universal enveloping algebras and some applications in physics.*
- Présentation sous invitation à l'"International conference on theoretical physics", Moscou (Russie) Avril 2005 ; *Higher spin gauge fields and tensorial space.*
- RTN-meeting "The Quantum Structure of Spacetime and the Geometric Nature of Fundamental Interactions", Copenhague (Danemark) Septembre 2003 ; *Massive higher spin fields in constant curvature backgrounds.*
- International Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries SQS'03", Dubna (Russie) Juillet 2003 ; *Mixed symmetry gauge fields in flat background.*
- RTN-school "The Quantum Structure of Spacetime and the Geometric Nature of Fundamental Interactions", Turin (Italie) Janvier 2003 ; organisation du *Workgroup on higher-spin fields.*
- RTN-meeting "The Quantum Structure of Spacetime and the Geometric Nature of Fundamental Interactions", Louvain (Belgique) Septembre 2002 ; *Massless spin two field S-duality.*

- "Rencontres mathématiques de Glanon, 6ème édition", Glanon (France) Juillet 2002 ; *Mixed symmetry fields : Poincaré lemma and duality.*
- RTN-meeting "The Quantum Structure of Spacetime and the Geometric Nature of Fundamental Interactions", Corfou (Grèce) Septembre 2001 ; *Deformations of duality-symmetric theories.*
- "Quantum Field Theories and Hamiltonian Systems", Calimanesti (Roumanie) Mai 2000 ; *Fatal inconsistency in nonsymmetric gravity theories.*
- "9th Midwest Geometry Conference", Columbia (USA) Novembre 1999 ; *Interactions of chiral two-forms.*
- TMR-meeting "Quantum aspects of gauge theories, supersymmetry and unification", ENS (Paris), Septembre 1999 ; *Interactions of chiral two-forms.*

Liste des publications

Papiers publiés dans des journaux avec comité de lecture :

Articles

1. **"An infinite supermultiplet of massive higher-spin fields"**
   avec M. R. de Traubenberg et M. Valenzuela
   JHEP **0905** (2009) 118 arXiv :0904.2533 [hep-th], 29pp.
2. **"On higher spin interactions with matter"**
   avec E. Joung et J. Mourad
   JHEP **0905** (2009) 126 arXiv :0903.3338 [hep-th], 29pp.
3. **"Comments on higher-spin symmetries"**
   Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **6**, 285 (2009) arXiv :0807.4223 [hep-th], 58pp.
4. **"Tensor gauge fields in arbitrary representations of GL(D,R). II : Quadratic actions"**
   avec N. Boulanger
   Commun. Math. Phys. **271**, 723 (2007) hep-th/0606198, 51pp.
5. **"The continuous spin limit of higher spin field equations"**
   avec J. Mourad
   JHEP **0601**, 115 (2006) hep-th/0509092, 18pp.
6. **"Spin three gauge theory revisited"**
   avec N. Boulanger et S. Cnockaert
   JHEP **0601**, 052 (2006) hep-th/0508048, 35pp.
7. **"Gauge invariants and Killing tensors in higher-spin gauge theories"**
   avec N. Boulanger
   Nucl. Phys. B **722**, 225 (2005) hep-th/0505068, 23pp.
8. **"Dynamics of higher spin fields and tensorial space"**
   avec I. Bandos, J. A. de Azcarraga, D. Sorokin et M. Tsulaia
   JHEP **0505**, 031 (2005) hep-th/0501113, 40pp.
9. **"No self-interaction for two-column massless fields"**
   avec N. Boulanger et S. Cnockaert
   J. Math. Phys. **46**, 012303 (2005) hep-th/0407102, 41pp.
10. **"On geometric equations and duality for free higher spins"**
    avec N. Boulanger
    Phys. Lett. B **561**, 183 (2003) hep-th/0301243, 12pp.
11. **"Quantization of the Chern-Simons coupling constant"**
    avec A. Gomberoff
    JHEP **0301**, 054 (2003) hep-th/0212099, 17pp.

12. **"Consistent deformations of dual formulations of linearized gravity : A no-go result"**
avec N. Boulanger et M. Henneaux
Phys. Rev. D **67**, 044010 (2003) `hep-th/0210278`, 20pp.
13. **"Tensor gauge fields in arbitrary representations of GL(D,R) : Duality and Poincaré lemma"**
avec N. Boulanger
Commun. Math. Phys. **245**, 27 (2004) `hep-th/0208058`, 44pp.
14. **"Gravitational Lorentz violations from M-theory"**
avec N. Boulanger et J. F. Vazquez-Poritz
JHEP **0210**, 053 (2002) `hep-th/0206050`, 13pp.
15. **"Deformations of duality-symmetric theories"**
avec S. Cucu
Nucl. Phys. B **610**, 433 (2001) `hep-th/0104048`, 37pp.
16. **"Antifield BRST quantization of duality-symmetric Maxwell theory"**
avec S. Cucu
JHEP **0101**, 015 (2001) `hep-th/0010266`, 21pp.
17. **"Chiral forms and their deformations"**
avec M. Henneaux et A. Sevrin
Commun. Math. Phys. **224**, 683 (2001) `hep-th/0004049`, 26pp.
18. **"Couplings of gravity to antisymmetric gauge fields"**
avec B. Knaepen et C. Schomblond
Phys. Lett. B **481**, 89 (2000) `hep-th/0003170`, 10pp.
19. **"Deformations of chiral two-forms in six dimensions"**
avec M. Henneaux et A. Sevrin
Phys. Lett. B **468**, 228 (1999) `hep-th/9909094`, 7pp.

Synthèses

20. **"Symmetries and dynamics in constrained systems"**
avec J. H. Park
Eur. Phys. J. C **61** (2009) 141 `arXiv :0902.4754v1 [math-ph]`, 43pp.
Cours donné par J.-H. Park à l'université de Sogang (Séoul, Corée du Sud) durant les semestres 2007 et 2008.

ACTES

21. **"Weyl calculus and Noether currents : an application to cubic interactions"**
avec E. Joung, J. Mourad,
Physics AUC **18**, 26 (2008) 20pp.

22. **"Higher spin algebras as higher symmetries"**
Physics AUC **16**, 58 (2006) `hep-th/0704.0898`, 7pp.

23. **"On cubic vertices and Killing tensors in higher-spin gauge theories"**
avec N. Boulanger, S. Cnockaert et S. Leclerq
Fortsch. Phys. **54**, 282 (2006) `hep-th/0602092`, 8pp.

24. **"On higher spin theory : Strings, BRST, dimensional reductions"**
avec I. L. Buchbinder, A. Pashnev et M. Tsulaia
Class. Quant. Grav. **21**, S1457 (2004) `hep-th/0312252`, 8pp.

25. **"Massless spin-two field S-duality"**
avec N. Boulanger
Class. Quant. Grav. **20**, S417 (2003) `hep-th/0212131`, 8pp.

26. **"Comments on duality-symmetric theories"**
avec S. Cucu
Fortsch. Phys. **50**, 831 (2002) `hep-th/0111215`, 7pp.

27. **"Inconsistencies of non-symmetric gravity"**
avec B. Knaepen et C. Schomblond
Physics AUC **10**, 188 (2000) 4pp.

28. **"Symmetry-deforming interactions of chiral p-forms"**
avec M. Henneaux et A. Sevrin
Nucl. Phys. Proc. Suppl. **88**, 27 (2000) `hep-th/9912077`, 7pp.

29. **"Comments on chiral p-forms"**
avec M. Henneaux
Int. J. Theor. Phys. **38**, 1161 (1999) `hep-th/9806062`, 12pp.

Papiers publiés dans des actes de conférences sans comité de lecture :

30. **"The unitary representations of the Poincaré group in any spacetime dimension"**
avec N. Boulanger
`hep-th/0611263`, 50pp.
Cours donné par X.B. et N.Boulanger aux "Deuxièmes rencontres de physique mathématique à Modave", Modave (Belgique) 6-12 Août 2006

31. **"Universal enveloping algebras and some applications in physics"**
Cours donné par X.B. aux "Rencontres de physique mathématique à Modave", Modave (Belgique) 19-25 juin 2005; 29pp.

32. **"Nonlinear Higher Spin Theories in Various Dimensions"**
avec S. Cnockaert, C. Iazeolla et M.A. Vasiliev
`hep-th/0503128`, 85pp.
Cours donnés par M.A. Vasiliev au "First Solvay Workshop", Bruxelles (Belgique) 12-14 mai 2004

33. **"Mixed symmetry gauge fields in a flat background"**
avec N. Boulanger
`hep-th/0310209`, 6pp.
Exposé présenté par X.B. au "Supersymmetries and Quantum Symmetries SQS'03", Dubna (Russie) 24-29 juillet 2003

34. **"Spins élevés et complexes généralisés"**
Exposé présenté par X.B. aux "Rencontres Mathématiques de Glanon (6ème édition)", Glanon (France) 1-5 juillet 2002; 6pp.

35. **"On BRST description of massless higher spin fields in AdS background"**
avec I.L. Buchbinder, A. Pashnev et M.Tsulaia
Exposé présenté par A. Pashnev au "3d International Sakharov Conference", Moscou (Russie) 24-29 juin 2002; 5pp.

Chapitre Premier

Particules de spin élevé : introduction historique

Plan du chapitre

I.1 La barrière du spin deux : tentative de saut **2**
I.2 Génèse : généraliser Dirac **5**
I.3 Fondations : les particules élémentaires vues comme représentations unitaires irréductibles **7**
I.4 L'explosion démographique : le zoo hadronique **13**
I.5 Prolongements : la quête Lagrangienne, l'espace-temps anti de Sitter **16**
I.6 Un problème bien posé : le programme de Frønsdal . . **22**
I.7 La course d'obstacles : les théorèmes "no-go" et leurs contournements **31**
I.8 L'éclairage holographique : le problème inverse **43**
I.9 En guise de conclusion **50**

There is one lesson which theoretical physicists learnt (...)
All that is consistent is possible, and all that is possible happens.

E.S. Fradkin durant son discours [1] pour la médaille Dirac,
reçue en 1989 à Trieste

I.1 La barrière du spin deux : tentative de saut

a) Où situer la barrière ?

"*Our conclusion is that it seems, at this moment, that Nature stops at spin* 2."

Physics Report de Peter van Nieuwhenhuizen [2]

Sur un plan expérimental, les seules particules élémentaires connues à ce jour possèdent soit un spin $\frac{1}{2}$ pour les fermions constituant la matière (leptons et quarks) soit un spin 1 pour les bosons médiateurs (photon, Z, $W^{\pm}$, gluons) des interactions électromagnétique et nucléaires (faible et forte). Sur un plan théorique, au sein du modèle standard se rajoute le boson de Higgs de spin 0 qui pourrait être observé au Large Hadron Collider. Si l'on incorpore la gravité classique, les fluctuations de la métrique autour d'un espace-temps de fond sont décrites comme une particule de masse nulle et de spin 2, le graviton. Les théories de supergravité lui associent même un partenaire supersymétrique de masse nulle et de spin 3/2, le gravitino. Au niveau quantique, des interactions cohérentes incluant le graviton (et/ou le gravi-

tino) ne sont pas renormalisables perturbativement par comptage de puissance.[I.1] Ce problème constitue l'obstacle majeur à la quantification "naïve" de la gravité. Le regard porté sur le critère usuel de renormalisabilité perturbative a cependant beaucoup évolué.[I.2] De plus, un grand nombre de modèles ont été proposés pour remédier au problème de la gravitation quantique, avec des succès variés.

Pendant longtemps, le spin 1 a été considéré comme étant la barrière maximale pour le spin d'une particule élémentaire dans une théorie quantique des champs en interaction. La terminologie de spin "supérieur" se référait ainsi à cette limite pour décrire les spins supérieurs ou égaux à $\frac{3}{2}$. Depuis l'essor des recherches en gravité quantique et le nouveau regard sur les critères de renormalisabilité, la terminologie de spin "supérieur" fait plus souvent référence à la limite du spin 2 et est donc plutôt réservée aux spins supérieurs ou égaux à $\frac{5}{2}$.

Nous suivrons l'usage en situant la barrière au spin deux. Nous appellerons donc "spin élevés"[I.3] les spins strictement supérieurs à deux, et "spins bas" les spins plus petits ou égaux à deux.

b) Invitations au voyage et précautions d'usage

La citation de Fradkin qui ouvre ce chapitre se poursuit ainsi [1] :

> "[*Theoretical physicists*] *recall this lesson each time when a new barrier bars the way to their ideal. At such a barrier we stand now. This is the upper bound two on the gauge fields spin, imposed by the existing theory. Why two ? We claimed that there is nothing that forbids the existence of such particles with any spin except our present inability to describe their complete interactions. Since particles of higher spins can exist, they exist and give rise to presently unknown forces which manifest themselves at high energies.*"

Tout en ne partageant pas l'optimisme de la dernière phrase, peut-être excessif dans son platonisme naïf, il faut admettre que la question de la cohérence des interactions incluant des particules de masse nulle dans des représentations exotiques du groupe d'isométrie (par exemple : Poincaré, de Sitter ou anti de Sitter) est un problème ouvert en théorie des champs, mathématiquement bien posé. En

[I.1] La gravitation d'Einstein diverge déjà à deux boucles [3]. Par contre, la divergence ultraviolette de la supergravité maximale reste une question ouverte.

[I.2] Le changement de perspective vers une interprétation comme théories effectives des théories quantiques des champs est exprimé en détail par Weinberg dans l'article [4] ainsi que dans le chapitre 12 de son livre [5].

[I.3] Littéralement, la terminologie "higher spin," utilisée majoritairement dans la littérature sur le sujet, devrait se traduire par "spin supérieur" cependant nous lui préfèrerons dans ce texte l'équivalent de "high spin," que l'on rencontre parfois également. En effet, l'expression "spin élevé" nous semble plus élégante et moins connotée en français que "spin supérieur" (à quoi ?).

tant que tel, il est légitime de tenter d'y répondre, dans le cas où la nature ferait usage de ces représentations. Et même si la réponse s'avérait négative (c'est-à-dire si de tels champs n'admettent pas d'interactions cohérentes ou seulement dans des conditions très particulières), ce résultat fournirait une justification théorique au fait expérimental que de telles particules élémentaires n'ont jamais été observées jusqu'à présent.

Le présent chapitre propose un panorama chronologique des diverses tentatives de saut au-dessus de la barrière du spin deux. Les détails techniques y sont volontairement restreints à un minimum, exigé par la précision, afin de concentrer la discussion sur les motivations sous-tendant ce domaine de recherche, sur la nature des obstacles rencontrés et sur les avancées (partielles) effectuées à ce jour. Les multiples renvois à l'abondante littérature sur le sujet ont pour but de compenser cette légèreté. La liste des références n'a néanmoins pas prétention à l'exhaustivité, tant le sujet a une vaste et longue histoire. Dès lors, je prierais à l'avance le lecteur d'excuser tout maladresse de ma part concernant les questions de priorité. Quoique je me sois efforcé de rendre justice aux divers acteurs, toute omission devrait être mise sur le compte de mon ignorance et je serais heureux de la rectifier.

Une autre précaution : ayant préféré privilégier un point de vue historique pour introduire le sujet, je me suis permis d'inclure de nombreuses citations afin de rendre l'exposé plus vivant, à la manière de témoignages dans un documentaire ou d'illustrations dans un livre. Il va de soi que les citations (enthousiastes ou sceptiques) retenues ne doivent en aucun être perçues comme une récitation d'arguments d'autorité. Le seul but de ces citations est de communiquer un peu de leur enthousiasme ou de leur curiosité au lecteur. Ce chapitre est plutôt conçu comme une invitation au voyage (dans le domaine des spins élevés).

c) Tranches d'histoire

Il est d'usage courant de découper l'Histoire en périodes successives. Cette pratique sera suivie ici afin de clarifier le déroulement chronologique du développement du domaine. Le découpage retenu ici, non dénué d'arbitraire, correspond *grosso modo* à un découpage par décennies.

- **1932-1939 : "Génèse : généraliser Dirac"**
  Écriture de diverses équations relativistes à la Dirac.
- **1939 et années 40 : "Fondations : les particules élémentaires vues comme représentations unitaires irréductibles"**
  Écriture de divers cas particuliers de Lagrangiens relativistes.
  Connection entre théorie physique des particules libres et théorie mathématique des représentations linéaires.

- **<u>décennies 50-60</u> : "L'explosion démographique : le zoo hadronique"**
  Découverte expérimentale d'une foule de résonances de spin élevé.
  Divers modèles théoriques du spectre en masse : groupes dynamiques, modèles duaux, *etc.*
  Premiers théorèmes no-go sur le couplage minimal des particules de masse nulle.

- **<u>années 70</u> : "Prolongements : la quête Lagrangienne, l'espace-temps anti de Sitter"**
  Écriture des Lagrangiens pour tous les champs libres avec un nombre fini de composantes (masse carrée non négative et spin demi/entier).
  Étude des champs libres dans anti de Sitter.

- **<u>1978</u> : "Un problème bien posé : le programme de Frønsdal"**
  Formulation du problème de la recherche d'interactions cohérentes.

- **<u>décennies 80-90</u> : "La course d'obstacles : les théorèmes "no-go" et leurs contournements"**
  Autres théorèmes no-go sur le couplage minimal des particules de masse nulle.
  Recherches sur la limite ultraviolette de la théorie des cordes.
  Écriture de divers vertex cubiques cohérents.
  Écriture d'équations non linéaires cohérentes à tous les ordres.

- **<u>2000-etc</u> : "L'éclairage holographique : le problème inverse"**
  Nouvelle perspective apportée par la correspondance holographique.
  Nombreux développements dans une multitude de direction.

Chacune des sections suivantes correspondra à une période dans le découpage précédent. Une dernière remarque : il ne sera pas tenté de dresser ci-dessous un inventaire, même succint, du large éventail de développements récents ayant pris place au sein du domaine des spins élevés. La tranche d'histoire correspondant à la dernière décennie sera uniquement survolée selon l'angle spécifique de l'holographie. En fin de chapitre, le lecteur sera renvoyé aux nombreux travaux de synthèse (notes de cours, actes de conférence, *etc*) disponibles sur les développements récents du sujet, auquel le présent travail ne prétend pas se substituer.

I.2 Génèse : généraliser Dirac

"*Until the late 1940s (I mean here the discovery of* $\pi^{\pm}$ *mesons in 1947)*

> *only spin-$\frac{1}{2}$ particles were known, as well as massless spin-1 particles (photons). Therefore the investigation of relativistic wave equations for an arbitrary spin was mainly dictated by a desire to generalise Dirac's equation for spin-$\frac{1}{2}$ particles, rather than by experiment.*"
>
> Note biographique de Vitaly Ginzburg sur Efim Fradkin [6]

On peut dater la naissance des particules des spins élevés en physique théorique au début des années 30 avec le travail visionnaire de Majorana[I.4] [10] qui, étonnamment, est passé presque totalement inaperçu pendant trois décades, alors qu'il anticipait de nombreux développements qui reçurent ultérieurement une attention considérable de la part de la communauté des physiciens mathématiciens : les équations à infinité de composantes, les représentations de dimension infinie unitaires des groupes de Lorentz, Poincaré, de Sitter, *etc.*[I.5] En effet, l'équation à infinité de composantes fut redécouverte indépendamment par Gel'fand et Yaglom [12] vers la fin des années 40 mais son authentique résurrection a été rendue possible grâce aux efforts de Amaldi [13].[I.6]

Avant l'article de Majorana, seules les équations d'onde pour des particules spin 0, $\frac{1}{2}$ et 1 étaient connues et c'est seulement dans la seconde moitié des années 30 que des équations décrivant une particule de spin fixé arbitraire furent introduites successivement par Dirac, Fierz et Pauli [16, 17, 18] pour ne citer que les travaux les plus célèbres (Duffin, Kemmer, Petiau, Proca, et bien d'autres, ont également apporté des contributions notables, pendant la même période, au domaine des équations d'onde relativiste de spin $\geqslant 1$).[I.7] Afin de souligner le caractère prémonitoire des idées contenues dans ce papier de Majorana, on peut mentionner par exemple que l'espace de solutions de cette équation d'onde relativiste à infinité de composantes n'inclut pas seulement les représentations massives du groupe de Poincaré pour tous les spins mais aussi les représentations exotiques "tachyoniques" et de "spin continu" [15]. De plus, Esposito et Recami ont présenté plusieurs indices issus des cahiers de recherche de Majorana [20, 21] supportant la thèse selon laquelle ce dernier aurait même obtenu des équations à la Dirac décrivant le cas général d'un ou plusieurs champs massifs de spin quelconque, avant de développer son équation à infinité de composantes. Selon Majorana lui-même, le papier [10]

[I.4] Le mystère entourant la vie et surtout la disparition du physicien sicilien a été immortalisé en 1975 par le roman "La scomparsa di Majorana" de l'écrivain Sciascia. [7] Il existe une vaste littérature sur sa biographie et sa carrière scientifique (*c.f.* par exemple le récents livres [8, 9]).

[I.5] Un compte rendu clair et concis de la publication de Majorana elle-même ainsi que de l'histoire des équations d'onde à infinité de composantes peut être trouvé dans [11].

[I.6] La note [14] constitue une introduction historique et scientifique très complète à l'article de Majorana.

[I.7] La section 21.2 du livre [19] contient un revue détaillée de l'histoire des équations relativistes à un nombre fini de composantes depuis les années 30 jusqu'aux années 70 (*c.f.* également les remarques bibliographiques dans [6, 14]).

donnait seulement "une notice sommaire" de son travail sur les particules de spin arbitraire [22].

I.3 Fondations : les particules élémentaires vues comme représentations unitaires irréductibles

> "*The representations of the* [*inhomogeneous*] *Lorentz group have been investigated repeatedly. The first investigation is due to Majorana, who in fact found all representations of the class to be dealt with in the present work excepting two sets of representations.*"[I.8]
>
> Note bibliographique de Eugene Wigner dans [23]

Une exception notable au manque d'intérêt suscité par la publication [10] de Majorana est le célèbre article [23] de Wigner dans lequel elle est citée en bonne place aux côtés de celle de Dirac [16]. Ce travail de Wigner est une des réussites les plus incontestables de la physique mathématique et il constitue une des fondations les plus solides de la théorie quantique des champs, que ce soit sur le plan de la rigueur mathématique ou de l'inévitabilité. En effet, combiner les axiomes de la physique quantique avec le principe de relativité restreinte conduit nécessairement à identifier une particule élémentaire (libre) avec une représentation unitaire irréductible du groupe d'isométrie de l'espace-temps de fond (supposé stationnaire).

Ce résultat est bien connu mais l'idée de la démonstration est suffisamment simple et élégante que pour être répétée ici : d'un côté, les règles de la mécanique quantique impliquent que les symétries sont identifiées, au niveau quantique, avec les représentations unitaires (projectives) d'un groupe agissant sur l'espace de Hilbert des états physiques. De plus, si les translations dans le temps forment un sous-groupe à un paramètre du groupe de symétrie, alors l'équation de Schrödinger décrit essentiellement une représentation unitaire de ce sous-groupe. D'un autre côté, le principe de relativité impose que l'ensemble des isométries de l'espace-temps soient des symétries du système. Ensemble, cela implique que l'espace de Hilbert des états physiques est un module[I.9] unitaire du groupe d'isométrie. Une particule est dite "élémentaire" si le module est irréductible[I.10], et "composite" si

[I.8] Les deux seuls ensembles de représentations que Majorana n'avait pas obtenu sont les représentations d'hélicité et celles d'impulsion zéro.

[I.9] L'usage moderne est d'utiliser le terme de "module" pour désigner l'espace portant la représentation.

[I.10] On peut rappeller que si une représentation unitaire est réductible, alors elle est décomposable (c'est-à-dire complètement réductible). L'étude des particules libres se ramène donc bien à celle des particules élémentaires.

le module est un produit de plusieurs modules irréductibles.[I.11] Lorsque l'espace-temps est à symétrie maximale (c'est-à-dire Minkowski, de Sitter ou anti de Sitter), la théorie des groupes permet ainsi de caractériser univoquement les particules s'y propageant librement. Ceci permet de réduire complètement le problème physique de la quantification relativiste des particules libres à un problème purement mathématique. Cette identification motive le problème mathématique suivant.

Programme de Wigner : *Classification de toutes les représentations unitaires irréductibles des groupes d'isométrie des espace-temps à symétrie maximale.*

Il s'avère que toutes les représentations unitaires non triviales des groupes non compacts pseudo-orthogonaux (homogènes ou inhomogènes) intervenant en dimension d'espace-temps 3 ou plus sont de dimension infinie.[I.12] De plus, ces représentations sont toutes équivalentes à leurs réalisations naturelles comme espace de fonctions sur l'espace-temps homogène correspondant.[I.13] De cette façon, l'espace-temps est reconstruit à partir des seuls principes de symétrie.[I.14] En ce sens, la théorie des groupes permet de comprendre mathématiquement pourquoi la réunion des règles de la mécanique quantique et du principe de relativité conduit automatiquement à une théorie des *champs*.

Les deux sous-sections suivantes et le complément A.2 constituent ensemble un rappel de la théorie des représentations et de son application aux équations relativistes qui est utile (voire nécessaire) pour la compréhension du présent travail. Le point de vue adopté dans ces deux sous-sections est celui d'un traitement général (sur la dimension et le rayon de courbure de l'espace-temps) ce qui, par son anachronisme, entre en conflit avec le point de vue historique adopté dans le reste du chapitre. Le but de ce rappel est de préparer le terrain à l'exposé de mes recherches personnelles dans le prochain chapitre.

[I.11] Un module irréductible sous l'action d'un groupe est en général réductible par rapport à la restriction de cette action à celle d'un sous-groupe (par exemple, sa composante connexe). Dès lors, la prise en compte (ou non) des symétries discrètes peut jouer un rôle dans l'attribution du qualificatif "élémentaire" (par exemple, la transformation de parité relie deux particules de chiralité opposée). Afin de lever cette ambiguïté, irrelevante pour notre propos, les groupes d'isométrie seront supposés maximaux (au sens où il incluent également toutes les isométries discrètes) sauf lorsque spécifié explicitement.

[I.12] *c.f.* le corollaire dans la section 3 du complément A.2 pour une démonstration détaillée de cette propriété bien connue.

[I.13] Ce point, important d'un point de vue axiomatique, a été souligné par Wigner : "*The previous treatments assume from the outset that the space and time coordinates will be continuous variables of the wave function in the usual way. This will not be done, of course, in the present work*" [23].

[I.14] Ceci ne surprendra pas le lecteur familier des liens intimes entre géométrie et théorie des groupes, car c'est l'analogue (en mécanique quantique) de la reconstruction en 1872 par Klein de la géométrie des espaces homogènes à partir de leurs seuls groupes de symétrie, selon son programme d'Erlangen.

a) Représentations du groupe de Poincaré

"*The elementary particles known to present-day physics, the electron, positron, neutron, and proton, each have a spin of a half, and thus the work of the present paper will have no immediate physical application. All the same, it is desirable to have the equations ready for a possible future discovery of an elementary particle with a spin greater than a half, or for approximate application to composite particles. Further, the underlying theory is of considerable mathematical interest.*"

Paul Adrien Maurice Dirac [16]

Plus spécifiquement, Wigner fut concerné dans [23] uniquement par les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré à quatre dimensions d'espace-temps. Cependant, la méthode des représentations induites qu'il y développa à cette fin est extrêmement générale et s'applique en dimension quelconque. Elle permet de réduire la classification de toutes les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré $ISO(D-1,1)^{\uparrow}$ à celle du "petit groupe" (appelé "groupe de stabilité" par les mathématiciens) qui dépend du genre de l'impulsion de la particule.[I.15]

Genre	Orbite	Groupe de stabilité	Représentation
Temps	Couche de masse	$SO(D-1)$	Massive
Lumière	Cône de lumière	$ISO(D-2)$	Masse nulle
Espace	Hyperboloïde	$SO(D-2,1)^{\uparrow}$	Tachyonique
Zéro	Origine	$SO(D-1,1)^{\uparrow}$	Impulsion zéro

En toute rigueur, pour traiter les représentations spinorielles il faudrait partout remplacer les groupes (pseudo) orthogonaux par les groupes de spin correspondants (*c.f.* le bref rappel dans le complément A.3). Nous suivrons ici l'usage en physique en sous-entendant parfois que les représentations sont projectives (c'est-à-dire "doublement valuées" dans le cas spinoriel) par rapport au groupe (pseudo) orthogonal.

Hormis le cas de masse nulle, les petits groupes sont des groupes (pseudo) orthogonaux (spéciaux). Le cas de masse nulle mérite donc une discussion plus approfondie puisque le petit groupe $ISO(D-2)$ des déplacements de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^{D-2}$ n'est pas semi simple. En effet, il est nécessaire de faire à nouveau usage de la méthode des représentations induites pour traiter ce cas. Il faut ainsi considérer le sous groupe de stabilité d'un vecteur de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^{D-2}$. Ce sous groupe de $ISO(D-2)$ est parfois appelé petit groupe "court" [24] par

[I.15] Un rappel détaillé de cette procédure et une discussion détaillée des divers cas sont présentés dans la section 3 du complément A.2.

analogie avec l'étape précédente. La méthode des représentations induites conduit à la conclusion que les représentations unitaires irréductibles du groupe $ISO(D-2)$ sont divisées en deux classes selon le petit groupe court du vecteur auxiliaire dans $\mathbb{R}^{D-2}$. Lorsque ce dernier est non nul, il paramétrise une infinité de degrés de liberté de "spin". La représentation correspondante est dite de "spin continu" dans la littérature. L'appellation de "spin infini", proposée par Wigner lui-même dans [25], lui sera préférée ici, car elle semble donner une interprétation physique plus appropriée de ces représentations exotiques.[I.16] Les deux sous-cas possibles du cas à masse nulle sont résumés dans le tableau suivant :

Orbite	Sous groupe de stabilité	Représentation
Sphère	$SO(D-3)$	Spin infini
Origine	$SO(D-2)$	Hélicité

On voit ainsi que toute représentation unitaire irréductible du groupe de Poincaré est induite par une représentation unitaire irréductible du petit groupe (court, dans le cas de masse nulle) qui s'avère être un groupe spécial orthogonal $SO(n)$ ou un groupe spécial pseudo-orthogonal $SO(n,1)^{\uparrow}$. Ceci ramène le problème de la classification des représentations de masse carrée positive ou nulle à la classification des représentations des groupes orthogonaux, et le problème de la classification des représentations tachyoniques et d'impulsion zéro à la classification des représentations des "groupes de Lorentz" (au sens de groupes pseudo-orthogonaux à une direction de genre temps).

Les représentations unitaires irréductibles non triviales d'un groupe (pseudo) orthogonal sont de dimension (in)finie si le groupe est (non) compact (et non Abélien). À la lumière de ces propriétés, les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré peuvent être divisées en deux catégories distinctes : celles à nombre fini de composantes (les représentations massives et d'hélicité) et celles à infinité de composantes (les représentations de spin infini, tachyoniques et d'impulsion zéro). Les représentations d'hélicité non nulle correspondent aux "champs de jauge" car ces particules de masse nulle nécessitent l'introduction de degrés de liberté non physiques afin d'être décrites de manière locale et covariante.

Les représentations unitaires irréductibles du groupe orthogonal $O(n)$ sont caractérisées (pour $n \geqslant 2$) par des partitions d'entier en $n/2$ parties au plus. Une partition est traditionnellement représentée de manière visuelle par un "diagramme de Young". Il existe deux exemples "dégénérés" de partition :

(i) La partition d'un entier $r \in \mathbb{N}$ en une seule partie correspond, d'une part, comme diagramme de Young, à une seule rangée de r boîtes et, d'autre part,

[I.16] Une discussion détaillée de ce cas (traditionnellement survolé dans les livres de référence) se trouve dans les sections 3.3 et 5.3.2 du complément A.2. La meilleure adéquation de la terminologie "spin infini" y est amplement argumentée.

comme représentation irréductible, à un tenseur complètement symétrique de trace nulle et de rang r. En vérité, ce cas dégénéré couvre le cas général pour le groupe de rotations de l'espace Euclidien à deux ou trois dimensions ($n = 2, 3$).

(ii) La représentation d'un entier $r \in \mathbb{N}$ en r parties correspond, d'une part, comme diagramme de Young, à une seule colonne de r boîtes et, d'autre part, comme représentation irréductible, à un tenseur complètement antisymétrique de rang r.

Lorsque la partition est non dégénérée, le diagramme de Young contient plusieurs rangées et plusieurs colonnes tandis que le tenseur est dit "à symétrie mixte" car il n'est pas complètement (anti)symétrique.

En dimension d'espace-temps $D = 4$, un réel non négatif (le carré de la masse) et un nombre naturel (le double du spin ou de l'hélicité) suffisent à caractériser toutes les représentations à nombre fini de composantes. Cependant, ceci n'est plus vrai en dimension supérieure quelconque car le petit groupe (court) est en général un groupe spécial orthogonal dont la théorie des représentations unitaires est plus riche puisqu'elle inclut les champs à symétrie mixte. Par abus de language, pour les représentations à nombre fini de composantes il est d'usage d'appeler "spin" le nombre de colonnes du diagramme de Young caractérisant la représentation (de dimension finie par hypothèse) du petit groupe (court).

b) Équations d'onde relativistes linéaires

> "*It turns out that the representations of a group essentially determine all linear equations which are invariant under the group in question and one is thus led naturally to the theory of the representations of the Poincaré group.*"
>
> Séminaire de Eugene Wigner [25]

Par définition, une équation est préservée par un groupe donné si ce groupe transforme toute solution de cette équation en une solution. Dès lors, si une équation est linéaire et préservée par un groupe de symétries alors l'espace vectoriel des solutions de cette équation porte une représentation linéaire de ce groupe de symétrie. En seconde quantification, il est naturel de voir la fonction d'onde d'une particule libre relativiste comme un champ classique dont l'évolution dans le temps est gouvernée par l'équation de Schrödinger qui s'identifie à une équation d'onde relativiste linéaire. Ainsi l'espace de Hilbert des états physiques portant une représentation unitaire du groupe d'isométrie est réalisé comme un espace de solutions d'une équation d'onde relativiste linéaire.[I.17] Dès lors, du point de vue de la théorie

[I.17] Notons que, selon Wigner, ce point de vue extrêmement fécond et moderne semble avoir été adopté très tôt par Dirac : "*The subject of this paper was suggested to me as early as 1928 by*

des groupes deux équations d'onde linéaires sont équivalentes si leurs espaces de solutions (avec, implicitement, des conditions aux limites et de régularité fixées) sont isomorphes. Il est courant de demander que l'équation soit covariante[I.18] afin que l'invariance sous le groupe d'isométrie soit manifeste.[I.19] L'étape qui consiste à passer de la représentation abstraite (classifiée par les mathématiciens) à une réalisation concrète comme espace de solutions d'une équation différentielle n'est pas toujours triviale. C'est pourquoi Wigner a jugé bon, presque une décade après son article fondateur [23], de revenir sur ce sujet et de traiter ce problème de façon séparée et exhaustive. Il s'avère que Bargmann était arrivé essentiellement aux mêmes résultats, et ils préférèrent ainsi co-signer l'article [29], un chef d'oeuvre de clarté sur ce thème. La généralisation directe de leur approche motive le problème mathématique suivant.

Programme de Bargmann-Wigner : *Associer une équation d'onde linéaire covariante à chacune des représentations unitaires irréductibles des groupes d'isométrie des espace-temps à symétrie maximale, tel que l'espace des solutions inéquivalentes porte la représentation associée.*

La réalisation de ce programme présuppose la réalisation préalable du programme de Wigner. Plus spécifiquement, Bargmann et Wigner furent en réalité concernés dans [29] uniquement par les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré à quatre dimensions d'espace-temps.[I.20] Cependant, les équations qu'ils présentèrent admettent des généralisations naturelles en dimension quelconque. Sur le plan technique, cette généralisation requiert de passer du formalisme des multispineurs (= produit tensoriel de représentations spinorielles) aux tenseurs-spineurs (= produit de deux représentations, l'une tensorielle l'autre spinorielle). Quoique ce passage peut sembler aisé (voire trivial) aujourd'hui, il a fallu un certain temps pour que l'approche des tenseurs-spineurs soit largement adop-

P. A. M. Dirac who realised even at that date the connection of representations with quantum mechanical equations" [23]. C'est d'ailleurs ce dernier qui, après son propre travail sur le sujet [26], conseilla respectivement à Bargmann [27] et Harish-Chandra [28] l'étude des représentations unitaires des goupes non compacts $Spin(2,1) \cong SL(2;\mathbb{R})$ et $Spin(3,1) \cong SL(2;\mathbb{C})$ qui correspondent aux petits groupes respectifs des représentations tachyoniques et d'impulsion zéro (dont l'analyse détaillée manquait dans le travail de Wigner).

[I.18] Notons que dans ce travail, la covariance sera toujours entendue au sens de symétrie *manifeste* sous le groupe de transformations correspondant (typiquement : un groupe d'isométrie).

[I.19] Des notions plus restreintes d'équivalence peuvent jouer un rôle important du point de vue physique, par exemple si on impose des conditions supplémentaires telles que la localité.

[I.20] Alors que le programme de Wigner est couvert dans la plupart des textes de référence en théorie quantique des champs, le programme de Bargmann-Wigner est, lui, très rarement abordé en toute généralité. Pour une introduction agréable et un traitement exhaustif des programmes respectifs de Wigner et de Bargmann-Wigner (dans le cas des représentations à nombre fini de composantes du groupe de Poincaré en dimension quatre), on peut recommander vivement la lecture des chapitres respectifs 1 et 6 du livre [31].

tée[I.21] et que les mérites de chacune des approches soient perçus. D'un côté, le formalisme des multispineurs permet un traitement uniforme pour tous les spins, sans distinction manifeste entre spins demi-entiers (qu'il conviendrait d'appeler plus proprement "demi-impairs") et spins entiers ("demi-pairs"), ce qui est commode du point de vue de la supersymétrie. D'un autre côté, le formalisme des tenseurs-spineurs permet un traitement uniforme quelle que soit la dimension, ce qui permet donc une généralisation plus aisée aux dimensions supérieures, ce qui correspond au point de vue suivi dans ce travail. Pour les lecteurs qui voudraient consulter les articles originaux et effectuer eux-mêmes la traduction entre les deux formalismes, un rappel rapide des règles à suivre constitue le complément A.4.

c) Théorie des groupes et groupe de théoriciens

Une conclusion de cette section est que, quoique le sujet des particules de spin élevé comporte des volets assez spéculatifs, il repose néanmoins sur une fondation solide : la théorie relativiste des champs libres qui, elle même, s'appuie sur un socle stable puisqu'elle s'identifie essentiellement à l'incontournable théorie mathématique des représentations unitaires.

Ainsi, il n'est pas surprenant que la plupart des acteurs de cette période fondatrice pour les équations d'onde relativistes furent des experts en théorie des goupes (Bargmann, Dirac, Gel'fand, Majorana, Wigner, *etc*). Notons à cet égard que c'est l'étude des particules élémentaires par les physiciens théoriciens qui fut à l'origine de l'étude des représentations unitaires des groupes non compacts par les mathématiciens. À titre anecdotique, on peut d'ailleurs citer l'exemple du mathématicien Harish Chandra qui commenca sa carrière comme physicien sous la supervision de Bhabha en poursuivant le travail [32] de ce dernier sur les équations relativistes de particules de spin élevé (*c.f.* par exemple le compte-rendu de conférence [33]) et qui initia sa classification des représentations unitaires des groupes non compacts par l'étude de celles du groupe de Lorentz [28], sujet qui lui fut conseillé par Dirac lui-même.[I.22]

I.4 L'explosion démographique : le zoo hadronique

> "*There certainly does not seem to be any such thing as a 'hadron of highest spin'.*"

[I.21] En effet, Dirac et Fierz [16, 17] utilisaient (quasi) exclusivement les multispineurs. Il a fallu attendre Tamm et Ginzburg ainsi que Rarita et Schwinger [30] pour que l'usage des tenseurs-spineurs se répande pour traiter le cas des champs fermioniques de spin élevé (*c.f.* les remarques dans [6]).

[I.22] On peut se reporter à la notice biographique [34] pour des renseignements plus précis.

Michael Green, John Schwarz et Edward Witten [35]

Jusqu'au milieu des années 40, les particules observées expérimentalement pouvaient se compter sur les doigts des deux mains (électron, proton, neutron, muon et leurs antiparticules auxquels il faut ajouter le photon) mais la situation changea radicalement durant les deux décennies suivantes 50-60 puisque le nombre de particules connues dépassait déjà la cinquantaine au début des années 70 et n'a cessé de grimper depuis pour dépasser largement le nombre de cent-cinquante dans la liste fournie par les derniers "Review of particle physics."[I.23] On sait aujourd'hui que la majorité de ces particules ne sont pas élémentaires mais sont des résonances hadroniques. Au début des années 60, la prolifération de hadrons de spin s élevé ($\geqslant 3/2$) constituait un des principaux mystères de l'interaction nucléaire forte. En 1961, Chew et Frautschi notèrent que le spectre en masse pouvait être décrit approximativement par une trajectoire de Regge linéaire croissante

$$m^2 \,=\, \frac{s \,-\, \alpha_0}{\alpha'}\,,$$

où α' ($\approx$ 1 GeV^{-2} en physique hadronique) est la "pente de Regge" et α_0 est l'"interception de Regge." L'extension du plot de Chew-Frautschi aux valeurs supérieures du spin suggéra l'existence d'une tour infinie de hadrons de spin non borné[I.24] dont il s'agissait d'expliquer la section efficace de diffusion et le spectre en masse.

D'une part, la tentative de modélisation des sections efficaces de diffusion des particules de spin élevé motiva, dès la seconde moitié des années 50, l'étude des propagateurs pour des champs de spin arbitraire afin de pouvoir calculer les amplitudes de diffusion pour les processus dans lesquels de telles particules interviennent. Parmi les premiers travaux dans ce programme de recherche, on peut citer la thèse de doctorat de Frønsdal [36] ainsi que la publication conjointe avec Behrends [37] sur le calcul d'amplitude de désintégration à la Fermi. Ce programme de recherche sur la matrice S incluant des particules de spin élevé a culminé avec l'établissement des règles de Feynman par Weinberg au milieu des années 60 pour toute particule dans une représentation unitaire du groupe de Poincaré (en dimension quatre d'espace-temps) à nombre fini de composantes [38, 39]. Cet axe de recherche

[I.23] Il est amusant de suivre cette évolution en consultant la collection des travaux du "Particle Data Group" dont la liste complète se trouve à l'adresse
http ://library.web.cern.ch/library/Library/RPP.html

[I.24] Le record (homologué par le "Particle Data Group") du hadron observé de spin le plus élevé est actuellement détenu par un multiplet d'isospin dont les baryons $\Delta(2950)$ possèdent un spin 15/2 (*remarque* : Δ dénote un baryon d'isospin 3/2 composé de trois quarks up et/ou down, et le nombre entre parentèse indique sa masse approximative en MeV) *c.f.* les fichiers de données du "Review of particle physics," disponibles en ligne à l'adresse http ://pdg.lbl.gov

conduisit aussi à l'établissement des premiers résultats "no-go" sur le couplage minimal de champs de masse nulle et de spin "élevé" au sens des physiciens de l'époque (c'est-à-dire dès le spin 3/2 pour le couplage électromagnétique [40, 41]) mais aussi au sens moderne (c'est-à-dire à partir du spin 5/2 pour le couplage gravitationnel [42]).[I.25] Les efforts dirigés vers la modélisation d'amplitudes relativistes de diffusion entre deux particules scalaires exhibant la symétrie de "dualité" entre résonances et pôles de Regge menèrent aux "modèles duaux," ancêtres des théories des (super)cordes, dont la naissance fut marquée par la célèbre formule proposée par Veneziano en 1968.

D'autre part, la modélisation du spectre en masse des hadrons suscita divers programmes de recherche (trouvant leur inspiration dans les "groupes dynamiques" ou les "algèbres de courant") conduisant à l'étude d'une très vaste classe d'équations d'onde relativistes à infinité de composantes (provenant parfois de la première quantification de quelque modèle mécanique) menant à des relations entre masse et spin pour une tour infinie de particules au spin non borné.[I.26] Ceci fut à l'origine du regain d'intérêt [14] dans les travaux précurseurs de Majorana [10], Gel'fand et Yaglom [12] sur les équations à la Dirac à infinité de composantes. Malheureusement, l'équation de Majorana mène à une trajectoire de Regge décroissante pour la partie discrète du spectre

$$m \;=\; \frac{M}{s+\frac{1}{2}}$$

où M correspond au terme de masse dans l'équation à la Dirac (dont les "matrices gamma" sont de dimension infinie). De plus, la présence de particules tachyoniques dans la partie continue du spectre est un signal d'instabilité de la théorie. L'apparition automatique de tels problèmes pour le cas générique des équations à la Dirac à infinité de composantes fut démontrée en 1968 par Grodsky et Streater [46]. Ce "théorème no-go"[I.27] mina les programmes de recherche correspondants (groupes dynamiques et algèbres de courant). Au même moment, deux modèles hadroniques distincts (modèles duaux *versus* partons) commencèrent à attirer l'attention et donnèrent naissance respectivement à la théorie des cordes et à la chromodynamique quantique durant les années 70.

Une leçon importante est que, depuis l'explosion démographique des hadrons, le "théorème populaire"[I.28] selon lequel la cohérence des interactions entre parti-

[I.25] Ces résultats négatifs et leurs successeurs seront commentés en détail dans la section I.7.

[I.26] Une revue concise des équations à infinité de composantes et des groupes dynamiques se trouve dans la section 21.3 du livre [19]. Un volumineux recueil d'articles sur le sujet est [45].

[I.27] À titre de curiosité, on peut observer que cette expression "théorème no-go" donne son titre à l'article lui-même, sans autre commentaire. Il est donc possible que cet article marque l'invention même de cette expression, peut-être forgée par Grodsky et Streater eux-mêmes. Quoi qu'il en soit, je n'ai pu retracer directement l'origine précise de ce terme.

[I.28] Traduction de l'expression "folk theorem," utilisée par certains physiciens mathématiciens

cules de spin élevé nécessite l'inclusion d'une tour infinie de particules, non bornée en spin, fait partie du folklore des physiciens théoriciens des hautes énergies. Quoique cette question reste un problème ouvert de la physique mathématique, il est intéressant de constater que cette conjecture a germé à partir de l'observation expérimentale des résonances hadroniques.

I.5 Prolongements : la quête Lagrangienne, l'espace-temps anti de Sitter

a) Lagrangiens relativistes quadratiques

> "*Our aim was not so much to set up the most general possible relativistic equations for particles of higher spin but rather to show that, in the present state of the theory, the existence of elementary particles of spin higher than one, cannot be excluded, although the theory for such particles is considerably more complicated than for smaller spin values.*"
>
> Wolfgang Pauli et Markus Fierz [18]

Dans les années 70, la poursuite des efforts concernant la description quantique des champs de spin élevé apparaissant dans les divers modèles hadroniques motiva la recherche de Lagrangiens pour des particules de spin (ou d'hélicité) arbitraire. Si la "première" quantification d'une particule relativiste libre conduit de façon naturelle aux programmes de Wigner et de Bargmann-Wigner, sa "seconde" quantification (ou plutôt la quantification tout court du champ classique correspondant à la fonction d'onde de la particule) suggère, elle, le programme suivant (initié par Fierz et Pauli dans [18] en suivant un motif distinct).

Programme de Fierz-Pauli : *Associer un Lagrangien quadratique local covariant à chacune des représentations unitaires irréductibles des groupes d'isométrie des espace-temps à symétrie maximale, tel que l'espace des solutions inéquivalentes des équations d'Euler-Lagrange porte la représentation associée.*

En effet, les méthodes de quantification usuelles sont basées sur un principe variationnel[I.29] (par exemple, Hamiltonien pour la quantification canonique ou Lagrangien pour l'intégrale de chemin) et la covariance est un moyen extrêmement

(tel Wightman) pour désigner un résultat dont la validité est admise par la communauté mais dont il n'existe aucune démonstration rigoureuse.

[I.29]On peut parfois lire que le formalisme de la matrice S ne présuppose pas l'existence d'un principe variationnel et permet ainsi de faire l'économie d'une telle hypothèse. Néanmoins, la formule de Dyson-Schwinger permet (en principe) de reconstruire perturbativement les vertex d'interaction. Un point de vue agnostique est adopté ici en constatant simplement que l'existence

commode[I.30] d'assurer l'invariance sous le groupe d'isométrie. La réalisation du programme de Fierz-Pauli présuppose implicitement la réalisation préalable du programme de Bargmann-Wigner. Ainsi, réaliser le programme de Fierz-Pauli revient à résoudre le problème inverse du calcul variationnel pour les équations d'onde linéaires covariantes décrivant chacune des représentations unitaires irréductibles considérées.

Le "problème inverse du calcul variationnel" consiste à tenter de dériver un système d'équations différentielles à partir d'un principe variationnel local. Un principe variationnel sera dit local si l'action est une *fonctionnelle locale*, c'est-à-dire (*c.f.* par exemple la sous-section 4.2 de [43]) l'intégrale sur l'espace-temps d'une fonction locale (le Lagrangien en l'occurence).[I.31] Plus précisément, résoudre le problème inverse du calcul variationnel consiste à trouver un Lagrangien local dont les équations d'Euler-Lagrange sont équivalentes au système d'équations différentielles donné. Puisqu'ici l'équation de départ est linéaire, il va de soi que le Lagrangien (s'il existe) devrait être quadratique. Toute la difficulté du programme de Fierz-Pauli provient du fait que le problème inverse du calcul variationnel est extrêmement ardu[I.32] : ce problème ne semble pas posséder de solution algorithmique ni même de critère efficace (c'est-à-dire direct et entièrement général) permettant de déterminer si ce problème possède une solution ou pas. Une difficulté majeure de ce problème provient de la liberté associée à la relation d'équivalence pour le système d'équations différentielles. Non seulement, les équations différentielles peuvent être écrites sous des formes algébriques variées, mais il est possible (et parfois même nécessaire) de changer le nombre de champs apparaissant dans les équations en introduisant (ou en éliminant) des degrés de liberté non physiques qui peuvent être soit des "champs de pure jauge" soit des "champs auxiliaires" qui peuvent être, respectivement, éliminés soit en fixant la jauge soit en résolvant un sous-système d'équations algébriques. Ces subtilités importantes[I.33] furent reconnues dès l'article fondateur de Pauli et Fierz [18].

---

d'un principe variationnel est une hypothèse pratique (non seulement pour la quantification, mais aussi pour les théorèmes de Noether).

[I.30] La covariance manifeste est évidemment une condition suffisante mais pas nécessaire de l'invariance de Lorentz puisque l'on peut choisir de travailler uniquement avec les degrés de liberté physiques, par exemple dans la jauge du cône de lumière.

[I.31] Une *fonction locale* est une fonction du champ et de ses dérivées (premières, secondes, *etc*) jusqu'à un ordre *fini*.

[I.32] Ce haut degré de difficulté est reconnu même pour un nombre fini de degrés de liberté où les équations différentielles sont ordinaires (*c.f.* [44] pour une introduction à ce sujet).

[I.33] Ces diverses subtilités nécessitent un traitement rigoureux afin de les garder sous contrôle. Pour des définitions et des résultats précis concernant les relations d'équivalence (telle l'élimination ou l'introduction de champs auxiliaires généralisés) pertinentes pour les programmes de Bargmann-Wigner et Fierz-Pauli, on peut consulter par exemple [47, 48] et les références au-dedans.

Fierz et Pauli suggérèrent dans [18] une méthode générale de résolution de leur programme dans le cas des champs massifs mais ils ne traitèrent explicitement que le cas du spin deux. Au début des années 70, Schwinger fournit dans son livre [49] un traitement détaillé des deux premiers exemples de Lagrangiens covariants décrivant des particules de spin élevé (de masse carrée positive ou nulle) : les spin 5/2 et 3. Un peu plus tôt, Chang avait traité ces exemples jusqu'au spin 4 inclus [50]. Le programme de Fierz-Pauli pour l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions ne fut complété, pour le cas des représentations massives de spin arbitraire, qu'en 1974 par Singh et Hagen [51] au moyen de l'introduction de nombreux champs auxiliaires sans trace (en nombre croissant linéairement avec le spin) et, pour le cas des représentations de masse nulle d'hélicité arbitraire, en 1978 par Fang et Frønsdal [52, 53]. Ces derniers obtinrent leur Lagrangien en prenant la limite de masse nulle de celui de Singh et Hagen, après laquelle ils constatèrent l'apparition de symétries de jauge et de subtiles conditions de trace. Rétrospectivement, il convient de noter que l'achèvement du programme de Bargmann-Wigner ou de Fierz-Pauli pour toutes les représentations d'hélicité suffit à compléter les programmes correspondants pour toutes les représentations à nombre fini de composantes car les représentations massives peuvent toutes être obtenues par réduction dimensionnelle à partir des représentations d'hélicité à une dimension d'espace-temps supplémentaire (voir la remarque dans la section 5.2 du complément A.2). Cette dérivation fut effectuée explicitement vers la fin des années 80 pour le cas des tenseurs(-spineurs) symétriques massifs [54, 55, 56].

Comme corollaire, l'écriture de ces Lagrangiens relativistes permit la détermination des propagateurs covariants pour les représentations précédentes [52, 57]. À son tour, ceci autorisa une première démonstration rigoureuse du "théorème populaire" selon lequel la force d'interaction entre deux particules statiques de charge identique est respectivement (répulsive) attractive si elle est transmise par un boson médiateur de spin (im)pair [58].

b) À l'intérieur de l'espace-temps anti de Sitter

> "*There is one other respect in which my discussion will be limited : by the very fact that the Poincaré group will be the basic group throughout. It would be desirable to consider equations wich are invariant under one of the generalizations of the Poincaré group.*"
>
> Séminaire de Eugene Paul Wigner [25]

Durant les années 70, Frønsdal s'attaqua à la généralisation des programmes de Bargmann-Wigner et Fierz-Pauli pour l'espace-temps anti de Sitter à quatre dimensions AdS_4 dans une série de sept articles intitulée "Elementary particles in a curved space." Cet ambitieux programme de recherche fut formulé dès 1965

[59] mais ne fut initié concrètement qu'à partir de 1974 [60] pour les représentations unitaires irréductibles du groupe $SO(3,2)$ dont l'énergie[I.34] est bornée. Elles appartiennent à la "série discrète" de représentations de $SO(3,2)$. En dimension d'espace-temps $D \geqslant 4$, cela signifie qu'elles sont des représentations de "poids le plus haut" (pour reprendre la terminologie des mathématiciens) de $SO(D-1,2)$. Le programme de Wigner[I.35] pour AdS_4 avait déjà été résolu par Evans auparavant [63] et sa généralisation en dimension supérieure a été extraite ultérieurement par Ferrara et Frønsdal [64] à partir des théorèmes très généraux obtenu par les mathématiciens Enright, Howe and Wallach au début des années 80. Un module unitaire irréductible de poids le plus haut $\mathcal{D}(E_0, Y)$ de l'algèbre $\mathfrak{o}(n,2)$ (avec $n \geqslant 3$) est caractérisé par la représentation irréductible de la sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{o}(2) \oplus \mathfrak{o}(n)$ portée par le sous-espace d'énergie minimale : elle est donc caractérisée par la valeur $E_0 > 0$ du minimum d'énergie et par un diagramme de Young Y avec au plus $n/2$ rangées pour les représentations tensorielles. Pour un diagramme Y constitué d'une unique rangée de longueur s, le module $\mathcal{D}(E_0, s)$ correspond à un champs tensoriel symétrique de rang s et est entièrement caractérisés par l'"énergie" E_0 et le "spin" s de la représentation de $\mathfrak{o}(n)$ portée par les états d'énergie minimale. Ce cas particulier de diagramme de Young couvre le cas général des représentations tensorielles d'énergie positive [I.36] du groupe d'isométrie de l'espace-temps AdS_4, mais pas en dimension supérieure.

Les modules unitaires irréductibles $\mathcal{D}(s+n-2, s)$ du groupe $O(n,2)$ décrivent des particules élémentaires libres de "masse nulle" dans AdS_{n+1} décrites par des tenseurs-spineurs symétriques de spin $s \geqslant 1$. La limite plate correspond à une contraction d'Inönü-Wigner $\mathfrak{o}(n,2) \to \mathfrak{io}(n,1)$ après laquelle la représentation $\mathcal{D}(s+n-2, s)$ devient effectivement une représentation d'hélicité s. Au sens strict, il n'y a pas d'analogue sans équivoque de la masse en espace-temps courbe. Traditionnellement, les particules sans masse sont associées à la présence de degrés de liberté de pure jauge, ce qui correspond d'un point de vue mathématique à un module qui est réductible (= il possède un sous-espace propre invariant) mais indécomposable (= il n'est pas *complètement* réductible) car il n'est pas la somme directe de deux sous-modules propres. En termes plus concrets, l'espace de représentation d'énergie bornée (un cas particulier "module de Verma" dans le jargon des représentations) possède un sous-espace invariant maximal formé d'éléments de norme nulle (des "vecteurs nuls" pour les mathématiciens, des

[I.34] Dans les espace-temps de Minkowski et anti de Sitter, il existe un champ de vecteurs de Killing de genre temps, globalement défini. Une valeur propre de l'opérateur correspondant est appelée l'"énergie" du vecteur état propre correspondant.

[I.35] Deux excellentes introductions (pédagogiques et pour physiciens) au programme de Wigner pour le groupe $SO(3,2)$ (et son extension supersymétrique) sont [61, 62].

[I.36] Dans le cas non tachyonique, une "particule" désigne traditionnelement un module où l'énergie est positive. Le module conjugué où l'énergie est négative est associé à une "antiparticule".

"états de pure jauge" pour les physiciens) que l'on peut quotienter afin d'obtenir un module unitaire irréductible (l'espace de Hilbert des états physiques).[I.37] Par exemple, le module de Verma $\mathcal{V}(s+n-2,s)$ de l'algèbre $\mathfrak{o}(n,2)$ possède un idéal $\mathcal{V}(s+n-1,s-1)$ que l'on peut quotienter afin d'obtenir le module unitaire irréductible $\mathcal{D}(s+n-2,s) = \mathcal{V}(s+n-2,s)/\mathcal{V}(s+n-1,s-1)$.

Une étape décisive de la série d'articles de Frønsdal fut l'achèvement des programmes de Bargmann-Wigner et de Fierz-Pauli pour les représentations unitaires irréductibles du groupe $SO(3,2)$ correspondant à des particules de "masse nulle" et dont l'énergie est bornée par en-dessous [65]. L'ensemble de ces travaux de Frønsdal sur la propagation de champs de spin élevé dans l'espace-temps AdS_4 s'est avéré très important pour la suite. En effet, les travaux de Fradkin et Vasiliev semblent suggérer que cet espace-temps constitue un fond ("background") approprié pour démarrer l'introduction perturbative d'interactions cohérentes.

c) Au bord de l'espace-temps anti de Sitter

> "*The flat space limit appears to be very smooth. Nevertheless, we report (...) a result that may be of considerable importance, although (and perhaps precisely because) it cannot be formulated in a similar way after one has passed to the flat space limit.*"
>
> Moshé Flato et Christian Frønsdal [66]

L'autre étape décisive de la série d'articles de Frønsdal fut la découverte de ce qui s'appele depuis le "théorème de Flato-Frønsdal" [66] qui contient en germe certaines des idées ayant conduit à la correspondance holographique. En un sens, ce théorème permet d'interpréter les particules élémentaires de masse nulle dans AdS_4 comme étant "composites" au sens où elles peuvent être obtenues comme produit de deux singletons vivant au bord conforme de l'espace-temps anti de Sitter. Avant de définir précisément les singletons en toute généralité, il est important de rappeler que le bord conforme de l'espace-temps anti de Sitter de dimension $n+1$ est usuellement identifié avec (la compactification conforme de) l'espace-temps de Minkowski de dimension n : $\partial AdS_{n+1} \cong \mathbb{R}^{n-1,1} \cup \infty$. Mais, les espace-temps à courbure constante $(A)dS_n$ sont conformément plats eux aussi, donc ils peuvent, de manière équivalente, être vus comme bords conformes de AdS_{n+1}. Dans ce cas, $SO(n,2)$ est vu comme le groupe des "isométries conformes" de l'espace conforme de dimension n correspondant (entre autre) aux trois espace-temps de symétrie maximale : $\mathbb{R}^{n-1,1}$, AdS_n et dS_n.

Une définition moderne d'un singleton, en dimension arbitraire, est une représentation unitaire irréductible du groupe $Spin(n,2)$ dont la restriction à ses

[I.37] Pour une discussion très complète de ces questions, on peut consulter [64] et les références au-dedans.

sous-groupes $ISpin(n-1,1)$, $Spin(n,1)$ et $Spin(n-1,2)$ reste irréductible [67]. De manière équivalente, on peut donc le définir comme une représentation unitaire irréductible du groupe d'isométrie d'un des espace-temps de dimension n à symétrie maximale qui peut s'étendre comme une représentation unitaire du groupe d'isométrie conforme correspondant. Du point de vue physique, un singleton est donc une particule élémentaire se propageant librement dans un espace-temps de dimension n à symétrie maximale et qui est préservée par les transformations conformes. Du point de vue de l'espace-temps anti de Sitter de dimension $n+1$, ce sont des particules élémentaires assez dégénérées au sens où elles n'ont pas de degrés de liberté physique locaux, car tous leurs degrés de liberté physiques sont situés sur le bord conforme.

Historiquement, le terme "singleton" a été forgé pour désigner les deux irreps "remarquables" du groupe $Spin(3,2)$ examinées par Dirac au début des années 60 [69]. Il s'avère que la première apparition de ces représentations en physique des particules est une fois de plus l'article de Majorana [10]. L'infinité de composantes de la fonction d'onde porte précisément ces deux représentations unitaires de dimension infinie. L'article [10] est traditionnellement mentionné pour ces irreps du groupe $Spin(3,1)$, mais elles s'étendent en fait au plus gros groupe $Spin(3,2)$, ce qui est crucial dans la construction de Majorana. Le module unitaire $\mathcal{D}(1,\frac{1}{2})\oplus\mathcal{D}(\frac{1}{2},0)$ est intimement relié à l'espace de Fock avec deux oscillateurs et il apparait ainsi dans une incroyable variété de domaines de la physique, sous des interprétations extrêmement différentes qu'il est impossible de recenser toutes ici.

Plus pragmatiquement, un singleton de spin s en dimension quelconque peut être défini de façon équivalente [66, 68] comme un module unitaire irréductible $\mathcal{D}\big(s+\frac{n}{2}-1\,,\,s\times(\frac{n}{2}-1)\big)$ de $Spin(n,2)$ où $E_0=s+\frac{n}{2}-1$ est interprétée comme le poids conforme et $Y=s\times(\frac{n}{2}-1)$ désigne un diagramme de Young rectangulaire formé de $\frac{n}{2}-1$ rangées[I.38] de longueur s (en suivant la convention de Siegel [68] où les représentations spinorielles correspondantes sont caractérisées par des diagrammes de Young où l'on admet que la première colonne soit une colonne de la largeur d'une demi-boîte). Les deux exemples les plus simples de singleton sont les singletons spinoriel ($s=1/2$) et scalaire ($s=0$), appelés respectivement (non sans un certain humour) "Di" et "Rac" dans [66] (en référence à l'article précurseur [69]), correspondant aux modules respectifs $\mathcal{D}(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2})$ et $\mathcal{D}(\frac{n}{2}-1,0)$ de $Spin(n,2)$. Il convient de remarquer que les particules sans masse dans $\mathbb{R}^{3,1}$ et dans AdS_4 sont des singletons vis-à-vis de AdS_5. En effet, les modules $\mathcal{D}(s+1,s)$ de $Spin(3,2)$ peuvent tous être étendus à $Spin(4,2)$.

La limite plate d'$AdS_{n+1}\to\mathbb{R}^{n,1}$ correspond pour les singletons à une contraction d'Inönü-Wigner $\mathfrak{o}(n,2)\to\mathfrak{io}(n,1)$, après laquelle le module irréductible $\mathcal{D}\big(s+$

[I.38] Le diagramme de Young Y n'est pas bien défini lorsque $s\neq 0$ et n est impair. Effectivement, les deux seuls singletons en dimension n impaire sont le Di et le Rac.

$\frac{n}{2}-1\,,\, s\times(\frac{n}{2}-1)\big)$ devient un module irréductible de $\mathfrak{iso}(n,1)$ d'impulsion zéro, correspondant au module irréductible de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{so}(n,1)$ caractérisé par le diagramme de Young rectangulaire $s\times(\frac{n}{2}-1)$. Comme mentionné dans la citation ouvrant cette sous-section, la limite plate d'un singleton existe : c'est une représentation exotique du groupe de Poincaré à impulsion zéro. Le fait que l'impulsion soit zéro est cohérent avec le fait que le singleton ne possède pas de degrés de liberté locaux.

Du point de vue de la théorie des groupes, le théorème de Flato-Frønsdal (pour le cas particuliers des singletons scalaires) peut s'énoncer comme suit : le produit de deux Rac $\mathcal{D}(\frac{n}{2}-1,0)$ peut être décomposé comme une somme directe infinie de modules décrivant des champs de jauge tensoriels symétriques $\mathcal{D}(s+n-2,s)$ [66, 70]

$$\mathcal{D}\Big(\frac{n}{2}-1,0\Big)\otimes\mathcal{D}\Big(\frac{n}{2}-1,0\Big)\;=\;\bigoplus_{s=0}^{\infty}\mathcal{D}(s+n-2,s)\,.$$

Physiquement, les champs tensoriels symétriques de masse nulle dans AdS_{n+1} peuvent tous être obtenus à partir du produit de deux singletons vivant au bord conforme ∂AdS_{n+1} (une réalisation concrète éclairante de cet isomorphisme a été fournie dans [65]). Ce résultat n'admet pas d'analogue en espace plat puisque le produit tensoriel de deux représentations d'impulsion zéro sera du même type, et donc ne produira en aucun cas une (ou des) représentation(s) d'hélicité. Le théorème de Flato-Frønsdal ne commute donc pas avec la contraction d'Inönü-Wigner (*c.f.* la citation ouvrant cette sous-section).

I.6 Un problème bien posé : le programme de Frønsdal

> "*The relation between representations and equations of motion justifies a few remarks. In one sense, the representation gives much more information than the equation of motion : (...) because it gives the effect of finite, rather than only of infinitesimal transformations, and because it gives the effect of all Poincaré transformations, not only of time displacements.*"
>
> "*In another less mathematical but much more suggestive sense, the equation of motion is much more informative than the representation from which it arises.*" (...) "*One may be led by analogies to assumptions concerning interactions. Without any knowledge of its interactions, the picture of a particle is rather empty.*"
>
> Séminaire de Eugene Paul Wigner [25]

Rapidement après la parution des Lagrangiens quadratiques dans l'espace-temps de Minkowski par Fang et Frønsdal [52, 53], apparurent diverses tentatives

de clarifications de la systématique de la théorie libre visant à la reformuler de façon géométrique soit à la Riemann (formalisme "métrique") [71, 72]) soit à la Cartan (formalisme "repère mobile") [73, 74, 75]. Ces deux approches sont basées sur l'analogie avec le spin deux et constituent encore toujours deux points de vue complémentaires[I.39] sur la théorie des spins élevés.

Au sein du formalisme métrique, les champs de force introduits dans [39, 71] généralisent le tenseur de Faraday ($s = 1$) et le tenseur de Riemann/Jacobi linéarisé ($s = 2$) aux spins élevés. Par analogie avec les spins un et deux, ils sont appelés "tenseurs de courbure" (de Weinberg-deWit-Freedman) puisqu'ils pourraient provenir de la linéarisation d'une formulation géométrique sous-jacente. Il est important de mentionner que ces tenseurs sont invariants de jauge sous les transformations à la Fang-Frønsdal [52, 53] même en l'absence de contrainte de trace. En suivant l'usage actuel et le programme de recherche initié par Francia et Sagnotti dans [76], une équation d'onde relativiste dans le formalisme métrique sera dite "géométrique" si elle est écrite en terme du tenseur de courbure correspondant. Les équations de Fang-Frønsdal pour une particule de spin élevé ne sont invariantes de jauge que pour des paramètres de jauge de trace nulle, elles ne sont donc pas géométriques au sens précédent.

L'objectif affiché des travaux précurseurs [71, 73] sur les deux formulations géométriques (métrique *versus* repère mobile) était de préparer le terrain à la construction d'interactions en espérant soit les "deviner" directement par analogie géométrique avec les exemples connus, soit les "dériver" uniquement à partir de critères d'auto-cohérence. Les théories de jauge non Abéliennes pour des particules de spin bas ($s \leqslant 2$) correspondent aux théories de Yang-Mills ($s = 1$) et d'Einstein-Hilbert ($s = 2$) dont les géométries sous-jacentes (fibrés principaux et variétés Riemanniennes) étaient famillières aux mathématiciens avant l'élaboration des théories physiques. Au contraire, la situation est assez différente pour les spins élevés ($s > 2$) dont la géométrie sous-jacente (s'il en est !) reste obscure (malgré diverses avancées décisives, discutées dans les sections suivantes) puisqu'elle ne semble pas être déjà disponible dans la vaste littérature mathématique. Pour être prudent, il conviendrait de dire plutôt que, si elle existe déjà, soit cette structure géométrique n'est pas famillière aux physiciens[I.40] soit le lien entre les deux sujets n'est pas encore entièrement[I.41] clarifié. En l'absence de guide géométrique, il fut

[I.39] Auxquels il convient d'ajouter le point de vue plus algébrique, mais en un sens unificateur, apporté par le formalisme de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) qui sera mentionné ultérieurement dans la section I.7.

[I.40] Un candidat qui mériterait d'être examiné est celui des fibrés de jets et des repères d'ordre supérieur élaborés par Ehresman.

[I.41] Cependant des connections entre divers avatars du programme de quantification par déformation ont fait leur apparition récemment au sein du domaine des spins élevés : par exemple, l'approche de Fedosov [47, 77] et les modèles sigma d'Alexandrov-Kontsevich-Schwartz-Zaboronsky

naturel de chercher de l'inspiration auprès de la reconstruction non géométrique de la gravité d'Einstein.

a) Programme de Gupta

> "*Hence, not only do Maxwell's theory of the electromagnetic field and Einstein's theory of the gravitational field have many similarities, but the dissimilarities between these fields are a necessary consequence of the difference in their spins.*"
>
> Conclusion de l'article de S. N. Gupta [79]

La relativité générale est peut-être le plus beau joyau d'orfèvrerie apporté à la théorie *classique* des champs. Pendant toute la première moitié du siècle précédent, ses fondements ont dû être considérés par les physiciens de l'époque comme totalement disjoints de ceux de la théorie *quantique* des interactions électromagnétiques qui était alors activement développée. Néanmoins, à partir de la moitié des années 50, un point de vue diamétralement opposé émergea progressivement, consistant à regarder la gravitation comme une théorie de jauge non-Abélienne pour un champ de masse nulle et de spin deux. L'histoire sinueuse de l'émergence de ce point de vue moderne connut plusieurs redécouvertes indépendantes (mais souvent complémentaires) et mériterait un chapitre entier à elle seule car elle inclut un nombre considérable de protagonistes (tels Fierz, Pauli, Rosen, De Witt, Papapetrou, Kraichnan, Gupta, Feynman, Thirring, Wyss, Deser, *etc*). Il n'est pas nécessaire de la raconter ici en détail car il existe de nombreuses références dans la littérature où ceci est effectué de manière assez complète[I.42]. Il est possible de la résumer brièvement en disant que, dès les années 40,[I.43] il était bien compris que le développement du Lagrangien de Einstein-Hilbert en puissance de la perturbation $h_{\mu\nu}$ de la métrique $g_{\mu\nu} := \overline{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ autour de la solution $\overline{g}_{\mu\nu}$ des équations dans le vide reproduit, à l'ordre quadratique, le Lagrangien d'un champ sans masse de spin deux se propageant dans cet espace-temps de fond (de métrique $\overline{g}_{\mu\nu}$). Par contre,

(AKSZ) [78, 48]. Néanmoins, un principe fondateur, analogue aux principes de jauge et/ou d'équivalence, semble encore manquer pour parler d'une connection claire entre les deux programmes de recherche.

[I.42]Le cours de Feynman sur la gravitation a été d'une importance considérable pour l'adoption de cette nouvelle perspective. Une introduction concise à cette histoire est fournie dans l'avant-propos de Preskill et Thorne (plus précisément dans le paragraphe sur la dérivation de l'équation d'Einstein par Feynman) à ce cours [80], ainsi que dans l'article fondateur de Fang et Frønsdal [81] où est formulé pour la première fois le "programme de Gupta" [79] sous l'angle spécifique des déformations de l'algèbre de jauge. Une synthèse assez complète, incluant certains des développements récents, est présentée dans le chapitre 3 du livre [82].

[I.43]Cette observation a été faite explicitement par Pauli et Fierz [18] dans le cas à constante cosmologique nulle.

l'idée selon laquelle il est naturel de dériver la (ou les) théorie(s) de la gravitation sans partir de certains *a priori* géométriques mais avec comme seul critère l'auto-cohérence via l'introduction perturbative de vertex d'interactions, ordre par ordre en la perturbation $h_{\mu\nu}$ (décrivant un graviton) fut redécouverte indépendament de multiples fois avant d'être progressivement assimilée par la communauté des théoriciens des particules. Ce programme est parfois [81] appelé "programme de Gupta" en référence à l'article [79] qui est la première publication où cette idée fut avancée (quoiqu'elle fit plusieurs apparitions antérieures de façon plus confidentielle).

Ces reconstructions *a posteriori* de la théorie d'Einstein-Hilbert (comme une théorie de jauge non Abélienne pour des gravitons en interaction se propageant dans un espace-temps de fond de courbure constante) ont donné lieu à diverses preuves rigoureuses et toujours plus générales de son universalité[I.44] et de son extrême degré d'unicité[I.45]. L'apport majeur de cette vision perturbative de la gravité est d'avoir permis l'application de diverses techniques de la théorie des champs à cette théorie. Ces travaux ont eux-mêmes permis de mettre en évidence la profonde limite de cette approche perturbative puisque les interactions n'y sont pas renormalisables par comptage de puissance et donc l'arsenal de la renormalisation perturbative ne semble pas pouvoir être appliquée à la théorie de gravité quantique "complète" (c'est-à-dire y compris les effets non perturbatifs *et* ultraviolets). Pour ce qui nous occupe ici, une autre retombée de cette re-construction a été l'élaboration de techniques perturbatives de construction d'interactions pour des théories de champs libres données. La synthèse de ces recherches aboutit à ce qui fut appelé (de façon quelque peu anachronique) la "méthode de Noether" dont les succès furent déterminants dès 1976 lors de l'épopée des supergravités. En 1978, les deux succès engrangés récemment pour les particules de masse nulle (la généralisation du programme de Gupta pour les spins "bas" par la supergravité et l'achèvement du programme de Fierz-Pauli pour les spins élevés) conduisirent Frønsdal à formuler la généralisation du programme de Gupta à un spin arbitraire. Frønsdal conjectura que les couplages entre particules de masse nulle et de spin élevé nécessitent probablement une symétrie de jauge non Abélienne qui unisse les particules de tous les spins.

b) Programme de Frønsdal

> "*A generalized Gupta program is proposed, that is, a search for a scheme for generating a theory of interacting, massless particles, consistent to*

[I.44] Parmi les preuves les plus générales de cette propriété, il convient de citer l'incontournable article [42] basée sur la matrice S.

[I.45] Du point de vue de la théorie des champs classique, un théorème d'unicité très général sur la théorie d'Einstein (en tant que déformation cohérente de celle de Fierz-Pauli) dont les hypothèses sont énoncées très précisément a été démontré dans [83].

all orders in the coupling constant."

Abstract de C. Frønsdal [52]

Au moyen des tenseurs de courbure de Weinberg-deWit-Freedman [39, 71] invariants de jauge, il est toujours possible d'écrire des vertex d'interaction cohérents à la Born-Infeld [84] mais ces interactions ne déforment pas les symétries de jauge Abéliennes. Cependant, le programme de recherche proposé par Frønsdal est souvent restreint, comme ce sera le cas ici, aux interactions qui déforment l'algèbre de jauge Abélienne de la théorie libre. Par contre, pour la plupart des hypothèses, c'est une version généralisée[I.46] du programme de Frønsdal qui sera retenue ici (par analogie avec les définitions proposées précédemment des programmes de Bargmann-Wigner et Fierz-Pauli).

Programme de Frønsdal : *Liste de toutes les interactions cohérentes inéquivalentes, covariantes, locales, déformant une somme (finie ou pas) positive de Lagrangiens quadratiques covariants locaux associés à des représentations unitaires irréductibles du groupe d'isométrie d'un espace-temps à symétrie maximale, telles que l'algèbre des symétries de jauge soit non Abélienne dès le premier ordre en un (des) paramètre(s) de déformation et fasse intervenir le paramètre de jauge d'au moins un champ de spin élevé (c'est-à-dire caractérisé par un diagramme de Young avec un nombre de colonnes strictement supérieur à deux).*

La réalisation exhaustive d'un tel programme présuppose la réalisation préalable du programme de Fierz-Pauli. Le programme de Frønsdal (dans la version adoptée ici) repose sur plusieurs hypothèses dont certaines méritent d'être discutées :

- Perturbation : Les interactions sont supposées perturbatives, c'est-à-dire que l'action (classique) est une série formelle[I.47] en une (ou plusieurs) constante(s) de couplage dont le terme d'ordre zéro est quadratique en les champs.
- Cohérence : La définition précise d'"interactions cohérentes" est donnée dans la sous-section suivante sur la méthode de Noether.
- Inéquivalence : Deux Lagrangiens (ou deux transformations de jauge) sont considérés comme équivalents s'ils peuvent être reliés par une redéfinition

[I.46] Par rapport au programme originel [52, 81], on abandonne les restrictions suivantes : déformation autour de l'espace-temps de Minkowski de dimension quatre, représentations d'hélicité complètement symétriques. Par contre, on précise certaines hypothèses telles que la localité perturbative et la déformation non Abélienne de l'algèbre. Le programme de Frønsdal est également défini avec précision dans le complément B accompagné d'une synthèse de nombreux résultats.

[I.47] Dans la théorie quantique des champs correspondante, il est naturel d'autoriser la théorie des perturbations à ne livrer qu'une série asymptotique non convergente. De manière générale dans ce mémoire, toutes les analyses sont restreintes à la théorie des perturbations, sans présumer de sa convergence. En fait, la plupart des problèmes adressés dans ce mémoire concernent avant tout la théorie perturbative classique (c'est-à-dire à l'ordre en arbre).

des champs qui soit perturbative (proche de l'identité) et locale (en un sens précis défini plus bas).

- Covariance : L'hypothèse de covariance doit être entendue uniquement par rapport aux isométries de l'espace-temps de fond. Comme dans le programme de Gupta, on s'attend à ce que la covariance sous les difféomorphismes (et l'indépendance par rapport au fond) émerge pour la série complète seulement.
- Absence de fantômes : Le Lagrangien décrivant la théorie libre de départ est, par hypothèse, une somme *positive* de Lagrangiens dont le terme cinétique des champs physiques a le "bon" signe, de façon à bannir les "fantômes".
- Algèbre non Abélienne : Dans la mesure où l'algèbre des transformations de jauge est supposée non triviale, cela exclut une théorie où aucun des champs ne disposerait de symétries de jauge. Afin d'inclure éventuellement le cas massif dans notre définition du programme de Frønsdal, les champs massifs seront supposés décrits par une formulation à la Stuckelberg.
- Spin élevé : Au moins une des particules intervenant dans la déformation de l'algèbre doit correspondre à un champ à nombre fini de composantes dont le "spin" est strictement supérieur à deux (ce qui se traduit par une condition sur le nombre de colonnes). Cette condition exclut le cas d'une théorie non Abélienne pour les spins bas (Yang-Mills, Einstein-Hilbert) où les champs de spin élevé ne joueraient aucun rôle dans l'algèbre de jauge.
- Localité : Traditionnellement, la localité est exigée car elle permet (avec l'invariance de Lorentz) de garantir la causalité de la théorie quantique des champs correspondante. Néanmoins, une forme douce de non localité est autorisée ici : une déformation (d'un Lagrangien ou d'une symétrie) est *locale* si chacun des coefficients dans son expansion en série formelle de puissance entière du (ou des) paramètre(s) de déformation est une fonction locale polynomiale en les dérivées. Concrètement, cela signifie que la série complète peut contenir un nombre infini de dérivées mais, ordre par ordre, chaque somme partielle ne peut contenir qu'un nombre fini de dérivées.[I.48] Ce type de non localité contrôlée[I.49] semble physiquement acceptable du moins au niveau perturbatif[I.50] En effet, la plupart des théories effectives appartiennent à cette classe (*c.f.* les remarques dans la sous-section 4.7 de [43]). Un exemple est la théorie des champs de corde où la non localité est contrôlée par la longueur de corde ℓ_s (c'est-à-dire la racine carrée de l'inverse de la tension,

[I.48] Ainsi, la théorie quantique correspondante admet une définition perturbative via des règles de Feynman "raisonnables" (au sens où les vertex d'interaction sont locaux, c'est-à-dire polynomiaux en les impulsions).

[I.49] Eliezer et Woodard ont proposé l'appellation "localité perturbative" [85].

[I.50] L'article de synthèse [86] contient une discussion détaillée et très claire de ce point. Notons que, en revanche, de nombreuses subtilités peuvent apparaître au niveau non perturbatif. Une longue liste de pathologies potentielles est recensée dans [85].

$\ell_S = \sqrt{\alpha'}$). Du point de vue mathématique, la localité permet d'avoir un problème algébrique bien posé. En effet, sans l'hypothèse de la localité la classification des déformations cohérentes serait un inextricable problème d'analyse fonctionnelle (où définir rigoureusement l'espace sur lequel on travaille est déjà une tâche redoutable) alors que la restriction aux fonctionnelles locales permet d'utiliser les techniques d'algèbre homologique.[I.51] Cette hypothèse sur la localité n'exclut pas l'existence, voire la pertinence, d'une formulation équivalente (par exemple, après fixation de la jauge) qui soit non locale.[I.52] En effet, les actions quadratiques non locales proposées dans [76, 88, 89, 90] constituent non seulement un point de départ alternatif valide du programme de Frønsdal, mais ces principes variationnels suggestifs pourraient inspirer l'écriture d'une déformation métrique non Abélienne, puisque les équations d'Euler-Lagrange y sont directement sous forme "géométrique" (c'est-à-dire écrites en terme des champs de force pour tout spin s). Notons que les actions de Fradkin et Vasiliev (*c.f.* la section I.7) ne sont pas géométriques en ce sens précis, quoique "à la MacDowel-Mansouri" (de plus, leur principe variationnel est suppléé de contraintes de torsion imposées à la main).

Il est important de souligner que, du point de vue de la physique mathématique, le programme de Frønsdal est un problème bien posé qui doit donc posséder une réponse dépourvue d'ambiguïté : soit il ne possède pas de solution (la liste est vide) et cela expliquerait le fait expérimental que des particules de masse nulle et de spin élevé n'aient jamais été observées, soit il possède une solution (comme suggéré par de très nombreux résultats, *c.f.* la section I.7) et donc sans doute des applications en physique théorique (comme suggéré par la théorie des cordes et la correspondance holographique, *c.f.* les sections I.7 et I.8).

À titre de remarque encourageante, l'analogue du programme de Frønsdal pour des champs *massifs* possède au moins une solution explicite : la théorie des champs de corde (*c.f.* la section I.7). Il n'est pas totalement à exclure que programme de Frønsdal dans le cas massif puisse[I.53] un jour lointain devenir pertinent en physique nucléaire, au sens suivant : les Lagrangiens relativistes effectifs de chromodynamique quantique sont souvent écrits par des modèles phénoménologiques en termes des degrés de liberté hadroniques, dont certains correspondent à particules

[I.51] Par contre, relâcher l'hypothèse de la localité apporte la grande simplification suivante : toutes les fonctionnelles invariantes de jauge de la théorie initiale définissent des interactions cohérentes à tous les ordres [87]. En d'autres termes, il n'existe d'obstruction que locale à la cohérence des interactions au-delà du premier ordre en le(s) paramètre(s) de déformation.

[I.52] Par exemple, l'action non locale de Polyakov (obtenue après intégration des champs scalaires décrivant le plongement du feuillet d'univers dans l'espace-temps) se réduit, dans la jauge conforme, à l'action locale de Liouville.

[I.53] Ceci fut argumenté, en toute généralité, dans [91], et discuté en détail sur un exemple concret de spin "bas" : les interactions entre un baryon, une résonance "$\Delta(1232)$ isobar" de spin $\frac{3}{2}$, et un pion ou un photon (*c.f.* [92] et plusieurs articles ultérieurs).

massives de spin élevé. Les termes de couplage correspondants peuvent donc être contraints par des critères de cohérence. Quoique cette remarque méritait d'être faite afin d'être complet, étant donné l'état d'avancement du sujet (surtout en ce qui concerne le mécanisme de brisure de symétrie) il serait cependant prématuré de trouver dans la physique nucléaire une authentique motivation pour le programme de Frønsdal.

c) Méthode de Noether

> "*In any gauge theory, one may start an iterative procedure ("Noether method") of adding extra terms to the action and transformation laws such that in the end the complete action is invariant. The first term is, as always, the coupling of the gauge field to the Noether current.*"
>
> Physics Report de Peter van Nieuwhenhuizen [2]

L'hypothèse cruciale sous-tendant la méthode de Noether est que les interactions soient perturbatives. Les mathématiciens utilisent le terme de "déformation" pour désigner une famille d'objets (appartenant à une même structure algébrique) caractérisée par une série formelle en un (ou plusieurs) paramètre(s). Le terme d'ordre zéro est donné et interprété comme l'objet de départ à déformer. Par exemple, dans la quantification par déformation le produit est modifié mais la structure d'algèbre est préservée (et le paramètre de déformation formelle y est traditionnellement noté $\hbar$). Dans le cas présent des interactions, les paramètres de déformations sont les constantes de couplage et les objets à déformer sont essentiellement l'action et les transformations de jauge, tandis que la structure à préserver est leur compatibilité (la symétrie de jauge de l'action) et la fermeture (de l'algèbre de jauge). On parle alors d'"interaction cohérente" entre champs de jauge [93].

Hormis son caractère anachronique, la terminologie "méthode de Noether" n'est pas dépourvue d'une certaine ambiguïté puisqu'elle désigne parfois un algorithme de construction, parfois une technique de classification. La méthode de Noether trouve son origine dans les deux théorèmes de Noether. Tous les deux sont basés sur l'existence d'un principe variationnel et de symétries continues. Le premier théorème (le plus célèbre) établit un isomorphisme entre (classes d'équivalence de) symétries rigides et courants conservés, tandis que le second théorème fournit une correspondance univoque entre symétries de jauge de l'action et identités (algébriques et/ou différentielles) sur les équations d'Euler-Lagrange. Le premier théorème permet la construction algorithmique de courants conservés et le second le calcul des identités sur les équations du mouvement, d'où la justification des terminologies respectives "courants" et "identités" de Noether.[I.54]

[I.54]Les identités de Noether sont aussi parfois appelée "condition de transversalité" ou "identité

Comme algorithme de construction d'interactions, la méthode de Noether revient à démarrer l'itération en introduisant un terme de couplage minimal dans les équations d'Euler-Lagrange tel que le champ de jauge couple au courant de Noether, car la conservation de ce dernier lui permet d'être cohérente avec les identités de Noether (déformées) à l'ordre non trivial le plus bas. Comme technique de classification, le socle de la méthode de Noether est les identités de Noether qui imposent que le terme à l'ordre non trivial le plus bas de l'action déformée soit une observable de la théorie non déformée. L'histoire du programme de Gupta est un long cheminement pour s'extraire progressivement d'un algorithme efficace, mais souvent accompagné d'hypothèses *ad hoc*, jusqu'à en dégager une technique de classification aussi élégante que générale. Une des subtilités qui a obscurci les discussions pendant longtemps est la prise en compte rigoureuse des "ambiguïtés" résultant des possibles redéfinitions des champs et/ou paramètres de jauge. En termes mathématiques, il s'agit de travailler avec des classes d'équivalence sans se focaliser sur les propriétés de représentants particuliers.

C'est précisément la complexité du programme de Frønsdal qui motiva l'étude systématique des interactions cohérentes entre champs de jauge, initiée au milieu des années 80 par [94] et dont une étape importante[I.55] fut atteinte au début des années 90 dans [87] avec la reformulation de la classification des interactions cohérentes locales comme calcul de cohomologie BRST locale dans le cadre[I.56] du formalisme des antichamps. Plusieurs physiciens et mathématiciens semblent avoir indépendament reconnu dans l'article décisif [94] l'apparition de structures qui leur étaient déjà familières (*c.f.* les articles de revue [93, 95]). Depuis le travail de Gerstenhaber, une voie naturelle semble être de capturer sous forme cohomologique le problème de la classification des déformations non triviales d'une structure algébrique. La théorie mathématique sous-jacente est la théorie homologique des perturbations[I.57] dont les avatars sont extrêmement nombreux en mathématiques, autant que leurs contextes d'apparition : les algèbres Lie-∞, de forte homotopie, différentielle libre universelle, le formalisme BRST, des antichamps, les Q-variété, et bien d'autres encore. Comme on peut le constater, des liens intimes semblent unir ces structures algébriques aux théories des spins élevés [47, 77, 78, 48], il n'est pas impossible que de nouvelles relations profondes entre ces domaines de recherche puissent encore être mises à jour dans l'avenir.

---

de Bianchi" (selon le contexte).

[I.55] Une liste de résultats enregistrés pour le problème de la classification des déformations non Abéliennes de diverses théories apparues avec le programme de Fierz-Pauli se trouve dans le complément B.

[I.56] Le lecteur est renvoyé au rapport [43] sur la cohomologie BRST locale pour plus d'informations sur ce cadre.

[I.57] Des éléments de théorie homologique des perturbations accessibles aux physiciens se trouvent dans [96].

I.7 La course d'obstacles : les théorèmes "no-go" et leurs contournements

> "*It seems that massless fields of spin* 3/2 *cannot couple without the cooperation of gravity [97]. Perhaps massless fields of spin* 3 *can couple only with the help of other massless fields of integer spin. The analogy with supergravity suggests a higher symmetry that unites massless particles of all spins.*"
>
> Conclusion de Christian Frønsdal dans [52]

Sauter au-delà de la barrière du spin deux est similaire à une course de haies car de nombreux théorèmes no-go barrent la route. Une (très) longue énumération des théorèmes existant à l'encontre des spins élevés est présentée dans la première sous-section, non pas afin d'écraser le programme de Frønsdal sous les arguments d'autorité que l'on peut rencontrer en divers endroits, mais, au contraire, afin de tordre le cou à certains malentendus existant à l'encontre de ce programme de recherche en examinant cette liste (assez complète, voire exhaustive) en détail et sous diverses facettes. Dans la sous-section suivante, la construction des premiers exemples "yes-go"[I.58] en espace-temps de Minkowski est revue brièvement, pour enchaîner ensuite dans la sous-section successive sur la théorie des cordes, revisitée du point de vue de la théorie des spins élevés. Finalement, la dernière sous-section rappelle l'étape décisive que fut la réalisation par Fradkin et Vasiliev de la possibilité de contourner *tous* les théorèmes no-go en prenant l'espace-temps $(A)dS$ comme fond dans lequel démarrer l'introduction d'interactions.

a) Théorèmes "no-go" dans l'espace-temps de Minkowski

> "*From time to time various difficulties have been reported in the field theory of particles with spin* $\geqslant 3/2$*. Generally, these are encountered in the study of the propagation of a higher spin field in the presence of c-number external field. Depending on the details of the theory, the difficulties encountered include non-causality, inconsistency, unphysical mass states, and violation of unitarity.*"
>
> Steven Weinberg dans "The Quantum Theory of Fields" [5] (chapitre 5.7)

[I.58] Le terme "exemple yes-go" est l'antagoniste de "théorème no-go." Plus concrètement, c'est un contre-exemple à la conclusion naïve d'un théorème no-go (s'il est appliqué en-dehors de son domaine de validité, délimité par ses hypothèses).

La longueur de la liste des théorèmes no-go sur les interactions incluant des particules de masse nulle dans l'espace-temps de Minkowski est certes très impressionnante mais il ne faut pas s'en laisser compter car les catégories de problèmes sont en nombre très restreint. Afin de souligner ce fait important, diverses formes de rangement des théorèmes no-go sont examinées : classement par

- **Ordre chronologique :** [40, 41, 98, 42, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 74, 75, 109, 94, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116]
  Afin de constater l'évolution de la question de l'incohérence du couplage minimal et combien le statut à lui accorder est subtil, on peut noter que la première mention d'incohérence pour l'introduction "naïve" d'interactions est l'article de Fierz et Pauli [18] dans lequel il est remarqué que la procédure de couplage minimal aux champs électromagnétique appliquée aux équations introduites par Dirac précédemment [16] aboutit à des incohérences algébriques lorsque le spin est strictement supérieur à un (y compris lorsque la masse est non nulle). L'introduction de champs auxiliaires et la recherche d'un principe variationnel y fut précisément motivée sur la base qu'ils constituent une manière commode de résoudre le problème précédent.
- **Les spins concernés :**
  – $s > 1$ [40, 41, 100, 101, 102, 103, 108, 113, 116]
  – $s > 2$ [98, 42, 99, 104, 105, 106, 107, 74, 75, 109, 94, 110, 111, 112, 114, 115]
  Cette première distinction est importante car, d'un point de vue moderne, les théorèmes no-go de la première catégorie ($s > 1$) n'ont pas le même statut que ceux de la deuxième catégorie ($s > 2$) puisque, le gravitino et le graviton sont unanimement considérés comme admettant des interactions cohérentes, du moins sur le plan classique. La première catégorie concerne l'apparition de diverses "pathologies" lorsque l'on applique la procédure de couplage électromagnétique minimal à des particules de masse nulle et de spin 3/2 ou plus. Du point de vue du sujet qui nous occupe, cette classe de théorèmes no-go est relativement bénigne puisque, tout au plus, ces résultats suggèrent que des particules comme le graviton doivent avoir une charge électromagnétique nulle.
- **Les formalismes utilisés :**
  – Matrice S [42, 99, 104, 105, 108, 111, 112, 114, 115][I.59]
  – Équation d'onde [40, 41, 98, 100, 101, 102, 103]
  – Lagrangien [106, 107, 74, 75, 109, 94, 116]
  La puissance relative d'un théorème no-go est mesurée par la faiblesse relative de ses hypothèses. Pour cette raison, les théorèmes basés sur la matrice S sont souvent plébiscités car ils ne recquièrent pas d'hypothèse

[I.59] Le récent théorème no-go [114] de matrice S n'est pas discuté ici car il est basé sur des hypothèses plus fortes que les autres (voir la conclusion de [115] pour plus détails sur ce point).

telle que l'existence d'un Lagrangien local, *etc.* Néanmoins, dans l'état présent du sujet, le programme de Frønsdal reste un problème de la théorie classique des champs donc il est naturel de ne pas se baser sur le formalisme de la théorie quantique des champs pour éliminer certaines théories. De plus, le formalisme de la matrice S sous-entend également certaines hypothèses supplémentaires par rapport au formalisme Lagrangien (sur le comportement asymptotique des états, des symétries, des vertex, *etc*).

- **Le type de couplage rejeté :**

> "*The problem appears to do specifically with giving massless higher spin particles electromagnetic or gravitational interactions. The replacement of the derivatives in the Lagrangians of [49, 51, 52, 53] with gauge-covariant or generally-covariant derivatives yields a Lagrangian that for high spin does not satisfy the appropriate higher-spin gauge invariance conditions, and leads to field equations that are not even algebraically consistent [106, 107].*"
>
> Steven Weinberg et Edward Witten [108]

  - **Couplage minimal**, c'est-à-dire incluant un champ de spin élevé et un champ (peut-être externe) de spin distinct selon la prescription usuelle de couplage minimal.
    - **Électromagnétique** [40, 41, 100, 101, 102, 103, 108, 113, 116]
      Ces théorèmes no-go ont peu de poids du point de vue qui nous occupe car, d'une part, ils présupposent que le champ électromagnétique est un champ externe générique (alors que dans la théorie complète il devrait être sur sa couche de masse et ressentir les effets rétroatifs de ses interactions avec les autres champs) et, d'autre part, ils imposent tout au plus que les particules de masse nulle ne soient pas chargées électriquement.
    - **Gravitationnel** [98, 106, 107, 108, 74, 75, 110, 111, 112, 115]
      Une présentation très concise de l'essence du problème algébrique apparaissant pour le couplage minimal gravitationnel est présentée dans la section 13.2 du livre de référence [117]. Étant donné la célèbre universalité du couplage à la gravitation, l'absence de couplage usuel au graviton peut sembler une propriété fatale. Mais après réflexion, cette propriété suprenante n'est pas à exclure *a priori*. En effet, le couplage minimal des particules de spin bas avec la gravité est un fait expérimental testé seulement à des énergies très en-dessous de l'échelle de Planck et il n'est pas évident que la gravité d'Einstein et l'invariance sous les difféomorphismes fonctionnent à toutes les échelles. Quoiqu'il en soit, le statut du couplage minimal gravitationnel est assez subtil en théorie des champs de corde également (*c.f.* par exemple les discussions dans

[111, 112, 116]). Il faut néanmoins reconnaître que ce théorème no-go est un des plus redoutables.

- **Auto-couplage**, c'est-à-dire entre champs de même spin : [109, 94]
  Il s'avère que la déformation de l'algèbre de jauge apportée par le vertex cubique obtenu dans [118] est incohérente à l'ordre quartique au sens où l'algèbre ne ferme pas, néanmoins il n'existe aucune preuve générale de l'incohérence de tous les auto-couplages non Abéliens.
- **Couplage à basse énergie** [42, 105]
  Une présentation pédagogique de ces théorèmes à basse énergie est fournie dans la section 13.1 du livre [5]. Pour ce qui concerne le sujet présent, la conclusion principale à retenir est que : "*Massless higher-spin particles may exist, but they cannot have couplings that survive in the limit of low energy*" [5]. En d'autres termes, les particules de spin élevé ne peuvent transmettre des interactions de longue portée (ce qui est cohérent avec le fait expérimental qu'elles n'aient jamais été observées).
- **Charges asymptotiques** [99, 104]
  Le théorème de Coleman-Mandula et son avatar de Haag-Lopuszanski-Sohnius constituent un cas à part dans la classification en termes de couplage car ils impliquent plutôt l'absence de charges conservées de "spin élevé" (au sens de rang strictement supérieur à un) lorsque la diffusion est non triviale (pour des impulsions génériques).

• **Les symptômes diagnostiqués :**

- Violation de la causalité [40, 100, 101, 102]
- Trivialité de la matrice de diffusion [42, 99, 104, 105, 108, 115]
- Violation de l'unitarité à l'ordre en arbre [111, 112, 116]
  Plus précisément, le phénomène qui est observé est que les interactions incluant des particules de spin élevé massives deviennent à couplage fort dans l'ultraviolet, ce qui empêche la théorie perturbative d'être crédible au-delà d'une certaine échelle (qui, pour les spins élevés, est plus petite que l'énergie de Planck) mais cela n'implique pas nécessairement l'incohérence d'une potentielle théorie sous-jacente.
- Incohérence algébrique [41, 98, 106, 107, 74, 75, 109, 94, 110]
  Par "incohérence algébrique", il faut surtout comprendre que les conditions d'intégrabilité du système d'équations différentielles (ou de l'invariance de jauge du Lagrangien) imposent des conditions trop fortes sur les champs en présence. La principale source de problème est les identités de Noether.

b) Exemples "yes-go" dans l'espace-temps de Minkowski

"*The problems reported with higher spin have been encountered only for higher-spin particles that have been arbitrarily assumed to have only*

> *very simple interactions with external fields. No one has shown that the problems persist for arbitrary interactions.*" (...) "*There are good reasons to believe that the problems with higher spin disappear if the interaction with external fields is sufficiently complicated. For one thing, there is no doubt about the existence of higher-spin particles, including various stable nuclei and hadronic resonances.*"
>
> Steven Weinberg dans "The Quantum Theory of Fields" [5] (chapitre 5.7)

Malgré la multiplicité des théorèmes no-go à l'encontre des spins élevés déjà connus à l'époque, le programme de Frønsdal fut néanmoins considéré sérieusement par plusieurs groupes de recherche et, à l'encontre de certains préjugés, plusieurs succès partiels furent rapidement enregistrés. Dès la première moitié des années 80, une grande variété de vertex cubiques cohérents entre particules de masse nulle de spin élevé dans l'espace-temps de Minkowski furent obtenus [119, 118, 109, 94, 120, 121, 84, 122, 123]. Cette liste d'exemples "yes-go" n'est exhaustive que pour la seule période des années 80. Une bibliographie complète des articles où figurent des vertex cubiques pour des champs de masse nulle ne sera pas fournie ici car elle serait encore nettement plus longue que celle (de la sous-section précédente) des théorèmes no-go suggérant naïvement leur impossibilité...

C'est en 1983 qu'un groupe de Göteborg obtint les premiers couplages cubiques [119] pour un spin arbitraire dans la jauge (non covariante) du cône de lumière. Peu après, un groupe de Leiden obtint le premier vertex cubique sous forme covariante [118] pour les interactions entre particules de spin 3. Cependant, ce résultat positif fut vite tempéré par la preuve de l'incohérence de cette interaction aux ordres successifs [109, 94, 121]. Plus précisément, il fut constaté que, à l'ordre quartique en le champ de spin 3 (c'est-à-dire à l'ordre deux en le paramètre de déformation), cette déformation non Abélienne de l'algèbre de jauge devient incohérente [109, 94] et que nul vertex quartique ne peut correspondre à ce vertex cubique [121]. Néanmoins le statut de cette obstruction restait ouvert : les auteurs de [94] suggérèrent que l'ajout de particules de spin différent de 3 pourrait peut-être lever l'obstruction (par analogie avec la levée de l'obstruction pour le gravitino via l'addition du graviton dans le cadre de la supergravité). Quoi qu'il en soit, d'autres vertex cubiques furent obtenus au cours des années 80. On peut classer ces différents résultats dans l'espace-temps de Minkoski en 3 approches (qui continuèrent à être développées durant les décennies successives) : le cône de lumière [119, 122], la méthode de Noether [118, 94, 120] et le formalisme BRST [123].

Une conclusion importante de ces travaux est la nécessité des dérivées "supérieures" (c'est-à-dire un nombre total de dérivées strictement supérieur à 2 pour des bosons et à 1 pour des fermions) dans les vertex d'interaction entre particules de spin élevé. Cette propriété fut d'abord observée sur les différents exemples et

fut ensuite démontrée rigoureusement dans le cas général via la classification complète des vertex cubiques dans le formalisme du cône de lumière [122, 124, 125]. Elle est un corollaire du théorème[I.60] affirmant qu'un vertex cubique entre trois bosons (de masse carrée non négative et se propageant dans l'espace-temps de Minkowski de dimension $D \geqslant 4$) doit nécessairement inclure un terme dont le nombre minimal de dérivées est égal au maximum des trois spins y intervenant ; dès lors, la présence d'un seul spin élevé impose que le nombre de dérivée y dépasse deux. Cette propriété implique (voire explique) l'incohérence des couplages minimaux électromagnétique et gravitationel puisque les vertex cubiques provenant de la procédure de couplage minimal appliquée au Lagrangien quadratique de départ ne contiennent pas plus de dérivées que ce dernier ; ils ne peuvent donc contenir de dérivées supérieures à deux.

c) Les cordes : l'éclairage ultraviolet

> "Is it possible that our particle accelerators could actually show us [elementary] particles with a spin greater than two ?
> *They all have masses of the order of the Planck mass, so they will not be directly accessible in foreseeable experiments.*
> (...)
> Are there not formidable mathematical consistency problems about formulating theories of objects with spin greater than two ?
> *This is the great miracle of* [*string*] *theory. It is finite just because of the higher spins.*"
>
> Interview de Abdus Salam [126]

Un célèbre exemple "yes-go" de théorie interactive incluant des champs de spin élevé, est la théorie des (super)cordes. Dans la colossale pyramide infinie de champs de spin élevé (dont la majorité sont à symétrie mixte), tous ont une masse carrée proportionnelle à la tension de la corde $1/\alpha'$. Et si l'on fixe la longueur de corde ℓ_s aux alentours de la longueur de Planck ℓ_P, cela implique que ces champs ont une masse supérieure à (ou de l'ordre de) la masse de Planck. Plus précisément, selon le point de vue qui nous occupe, l'écriture de l'action covariante dans l'espace cible de la théorie des champs de corde ("string field theory") en termes de *tous* les

[I.60] Ce théorème est lui-même un corollaire du résultat suivant [122, 124, 125] : le nombre total de dérivées dans un vertex cohérent local incluant trois bosons de masse nulle et de spins respectifs $s \leqslant s' \leqslant s''$ dans l'espace-temps de Minkowski de dimension $D \geqslant 4$ prend les 2 valeurs $s'+s''-s$ et $s+s'+s''$ pour $D = 4$, et les $s+1$ valeurs $s'+s''-s \leqslant s'+s''-s+2 \leqslant s'+s''-s+4 \leqslant ... \leqslant s+s'+s''$ pour $D > 4$. En dimension $D = 4$, il y a donc seulement deux vertex cubiques pour chaque triplet de spins : un vertex Abélien contenant $s + s' + s''$ dérivées du type Born-Infeld (cubique en les trois tenseurs de courbure de Weinberg-deWit-Freedman [39, 71] correspondants) et un vertex (vraisemblablement) non Abélien contenant $s' + s'' - s$ dérivées du type Yang-Mills.

modes (de masse nulle *et* massifs) devrait délivrer une action, cohérente à tous les ordres, incluant une pléthore de champs massifs de spin élevé et à symétrie mixte.

La théorie des cordes est en accord avec le "théorème populaire" selon lequel sauter au-delà de la barrière du spin deux exige d'inclure le spin deux lui-même (donc la gravité) et aussi, voire surtout, une tour infinie de spins arbitrairement grands. Quoique une tour infinie de particules exotiques puisse sembler un lourd prix à payer pour la cohérence de la théorie, l'espoir est que, en retour, cette infinité de champs supplémentaires au-delà de la barrière (la gravité) résolve le problème de la barrière elle-même (sa non renormalisabilité perturbative). En un sens, l'ajout de la pyramide infinie de champs massifs de spin élevé peut être interprétée comme une (procédure de) régularisation des divergences ultraviolettes du graviton (et des autres particules par la même occasion) préservant la covariance, l'unitarité, *etc.*

Du point de vue de la théorie des champs, le mécanisme de régularisation ultraviolette à l'oeuvre en théorie des cordes semble être le suivant[I.61] : bien que les interactions incluant un nombre fini de particules de spin 2 ou plus soient non renormalisables (par comptage de puissance), la sommation des contributions faisant intervenir une collection de particules, *infinie* et *de spin non borné*, peut être une théorie quantique finie[I.62] incluant la gravité. À l'origine de ce mécanisme intriguant semblent se trouver deux vices, propres aux spins élevés, qui y sont transformés en vertus : Premièrement, les divergences ultraviolettes empirent avec le spin des champs (comme le nombre de dérivées) dans les vertex d'interaction, mais la série de puissance correspondante peut converger dans la limite ultraviolette même si chacune des sommes partielles diverge.[I.63] Deuxièmement, les particules massives de spin élevé semblent ne pas admettre d'interactions perturbatives en espace-temps plat dans la limite ultraviolette (*c.f.* les théorèmes no-go sur les particules de masse nulle), de sorte que les amplitudes de diffusion non triviale à l'ordre en arbre sont très "douces" (elles tendent rapidement vers zéro) dans l'ultraviolet. Les diagrammes à boucles se construisent en "collant" des pattes de diagrammes en arbres. Ainsi un bon comportement ultraviolet des diagrammes en arbre autorise la finitude perturbative des diagrammes à boucles.

En théorie des cordes, les amplitudes de diffusion non triviale entre quatre particules à l'ordre en arbre et à angle fixé exhibent une décroissance exponentielle (plus précisément "Gaussienne") dans l'ultraviolet, ce qui contredit les bornes sur le comportement d'une théorie quantique des champs locale (*c.f.* le discussion dans

[I.61] La section 1.1 du livre de référence [35] fournit une introduction pédagogique à ce processus en théorie des cordes, sous l'angle originel des modèles duaux.

[I.62] Au sens strict, la finitude perturbative des amplitudes de diffusion en théorie des supercordes semble ne pas être encore rigoureusement prouvée pour un nombre de boucles *quelconque* (*c.f.* [127], par exemple, pour un bref résumé de l'état de l'art).

[I.63] Par exemple, chaque terme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ en puissance de x diverge dans la limite $x \to \infty$ mais la série complète est égale à $\exp(-x)$ qui tend vers zéro dans la limite $x \to \infty$.

[128]). Il semble qu'il n'y a donc pas moyen de représenter ce comportement aux hautes énergies par une action effective qui soit strictement locale. En effet, la théorie des champs de corde est non locale (l'argument heuristique traditionnel est que les cordes ne sont pas des objets ponctuels) mais cette non localité n'est pas "sauvage" (ce qui introduirait des fantômes, des instabilités, ou la violation de la causalité) mais sous contrôle perturbatif (*c.f.* la section I.6). Quoi qu'il en soit, l'importance d'une meilleure compréhension des mystères cachés derrière le régime ultraviolet de la théorie des cordes fut soulignée dès l'essor de la théorie. La physique hadronique est une importante source d'inspiration :

> "*We must explore the physics of strings at energies above their characteristic energy scale* (...) *The idea is to do what an experimental high-energy physicist would if he had unlimited funds available* (...) *We don't have unlimited funds but* (...) *we can do thought (gedanken) experiments* (...) *If the theory possesses a much larger symmetry than the symmetry that is evident in low-energy scattering amplitudes (i.e. supergauge + general coordinate invariance) then it might become evident in the structure of high-energy scattering amplitudes. An analogue of the problems we now face would be the attemp to discover quarks, gluons and non-Abelian gauge theory starting from an effective string theory of QCD. The reason is that the formulation of the theory appropriate for large-scale physics does not reveal the essence of QCD. In QCD, as in most theories, the ultimate simplicity lies at short distances. In this regime the variables in terms of which one describes the system are fewer and simpler and the symmetries of the theory are manifest and evident.*"
>
> Exposé de David Gross
> à la conférence "Physics and mathematics of strings" [128]

L'analogie avec la physique hadronique[I.64] suggère ainsi l'existence d'une phase plus symétrique dans le régime ultraviolet. Dans le cas qui nous concerne, les symétries supplémentaires devraient correspondre aux transformations de jauge des

[I.64] En poursuivant cette analogie, il est possible de spéculer sur une réinterprétation positive des théorèmes no-go (selon l'optique qui consiste à transformer les vices en vertus) sur la matrice S pour des particules de spin élevé et de masse nulle, comme suggérant des propriétés non perturbatives analogues à la liberté asymptotique, au confinement de la couleur, voire au fossé de masse, en chromodynamique quantique. En effet, une façon de contourner les théorèmes no-go sur les particules de masse nulle et de spin élevé serait que la matrice de diffusion de particules massives de spin élevé devienne triviale dans la limite ultraviolette ("liberté asymptotique"). Une autre serait qu'il n'existe pas d'état asymptotique portant une charge conservée de rang strictement supérieur à 1 ("confinement"). Encore une autre serait qu'il n'existe pas d'état asymptotique décrivant une particule de masse nulle et de spin élevé ("fossé de masse").

particules de spin élevé. Dans le régime ultraviolet, la théorie des cordes pourrait ne pas contourner le théorème de Coleman et Mandula [99] mais plutôt le retourner à son avantage. Un tel scénario a très bien été résumé par Gross et on peut se contenter d'extraire la substance de son argument : "*Relations connect amplitudes involving particles of different and arbitrarily high spin. If they are generated by a symmetry transformation of the $\alpha' \to \infty$ theory it must be one whose conserved charges have arbitrarily high spins. This would contradict the Coleman-Mandula theorem, which limits the maximal spin of a conserved charge to be one.* (...) *The theorem states that if there exist higher spin conserved charges then the S-matrix equals the identity and the theory is trivial.* (...) *Perhaps this theorem is valid, the higher spin symmetries do exist and consequently the scattering amplitudes do all vanish as $\alpha' \to \infty$. This is certainly suggested by the exponential fall-off of the scattering amplitudes, order by order in perturbation theory* (...) *What does it mean to say that the high-energy phase of the theory has vanishing S-matrix ? It clearly implies the existence of an enormous symmetry of the theory, since the individual momenta of each string mode are separately conserved. From this point of view the maximal symmetry of the theory is so powerful as to render the theory trivial. The non-trivial dynamics is then a consequence of symmetry breaking.*" [128]. En effet, dans ce scénario la question subsidiaire à la description de la phase symétrique est la compréhension du mécanisme de brisure des symétries de spin élevé conférant leur masse à une pyramide infinie de particules.

Vingt ans plus tard, l'identification précise du mécanisme de brisure des symétries de spin élevé reste une question irrésolue, quoique la correspondance holographique (*c.f.* la section I.8) semble fournir des indications indirectes sur ce phénomène autour de l'espace-temps anti de Sitter. Or, cet espace-temps s'avère précisément être un cadre adéquat pour l'introduction d'interactions gravitationnelles cohérentes pour les particules de spin élevé, comme rappelé dans la sous-section suivante.

Du point de vue du programme de Frønsdal, la théorie des champs de corde est un exemple yes-go hautement non trivial d'interactions cohérentes entre particules massives de spin élevé dans l'espace-temps plat. Il est naturel de s'attendre à ce que, dans la limite à tension nulle ($\alpha' \to \infty$), toutes les particules deviennent de masse nulle mais il s'avère que cette limite est très délicate lorsqu'une infinité de champs est considérée simultanément. De plus, la limite à tension nulle n'est pas bien définie physiquement en l'absence d'un autre paramètre dimensionné auquel comparer la tension $(\alpha')^{-1}$.[I.65] Néanmoins, ces subtilités semblent ne pas poser de problèmes dans le cas de la théorie des champs de corde libre : la limite à tension nulle de l'action quadratique dans la formulation BRST fut obtenue en

[I.65] Par contre, pour des processus de diffusion donnés, on peut comparer $(\alpha')^{-1/2}$ avec l'énergie dans le centre de masse.

1986 indépendamment par trois groupes de chercheurs [131, 132, 133]. Une limite "naïve" de l'action cubique de la théorie des champs de corde bosonique ouverte donne une théorie essentiellement sans interaction [129], ce qui paraît cohérent avec la douceur[I.66] ultraviolette des amplitudes de diffusion en théorie des cordes à l'ordre en arbre. Une version plus raffinée de cette limite permet la construction d'une théorie interactive mais Abélienne [130]. Depuis l'article [123], la formulation BRST de la théorie des champs de corde est une source d'inspiration récurrente pour le programme de Frønsdal (*c.f.* l'introduction [134] à la littérature abondante sur cet angle d'attaque). Du point de vue réciproque, le programme de Frønsdal pourrait apporter un éclairage différent sur une des questions fondatrices de la théorie des cordes : sa limite ultraviolette.

d) L'école russe : les interactions selon Fradkin et Vasiliev

> "*In contradiction of the general opinion, a noncontradictory gravitational interaction of massless fields of high spin $s > 2$ exists at least in the first nontrivial order. A fundamentally new aspect of the gravitational interaction of high spins is that it is nonanalytic in the cosmological constant.*"
>
> Abstract de Mikhail Vasiliev et Efim Fradkin [138]

Il ne semble pas exagéré de parler d'école russe concernant les spins élévés. Pour être plus spécifique, cet intérêt de longue durée est particulièrement présent à l'Institut Lebedev de Moscou, au laboratoire Bogolioubov de Dubna et à l'université de Tomsk. Comme anecdote révélatrice, on peut observer qu'à l'Institut Lebedev il existe une filliation directe directeur↪thésard s'étalant sur plus de sept décades et plus de quatre "générations" (Tamm ↪ Ginzburg ↪ Fradkin ↪ Metsaev & Tseytlin & Vasiliev)[I.67] dont un point commun fut un intérêt prononcé envers les spins élevés. En effet, au début des années 40 Ginzburg avait développé son équation d'onde relativiste pour les particules de spin ("élevé" pour l'époque) $\frac{3}{2}$ [135] obtenue indépendamment de Rarita et Schwinger [30]. Vers la fin des années 40, Tamm et Ginzburg développèrent ensemble une équation à infinité de composantes (*c.f.* les remarques historiques dans [6]). Peu après sa démobilisation, Fradkin généralisa le travail de Ginzburg [135] au cas des spins élevés dans son pre-

[I.66] De manière qualitative et heuristique, la non localité (contrôlée) et la douceur ultraviolette (autorisée par la première) de la théorie des champs de corde est perceptible dans les facteurs du type $\exp(-\alpha' p^2)$ présents dans le vertex cubique de Witten qui, dans l'Euclidien, amortissent exponentiellement les interactions entre modes d'impulsion non nulle ($p \neq 0$) dans l'ultraviolet ($\alpha' p^2 \gg 1$).

[I.67] Pour être complet, il conviendrait d'ajouter à cette liste les nombreux (actuels et anciens) élèves de Vasiliev qui poursuivent très activement ces travaux au sein du département Tamm.

mier article [136]. C'est bien plus tard que Fradkin revint à son premier amour[I.68] lorsqu'il construisit, en compagnie de Vasiliev, des vertex cubiques et des algèbres non Abéliennes pour une tour infinie de champs de jauge de spin (demi-)entiers $s \geqslant 3/2$ incluant le champ gravitationnel.

Vers la fin des années 80 le programme de Frønsdal avait enregistré plusieurs résultats encourageants en espace-temps plat (*c.f.* section I.7 et [119, 118, 94, 120, 122]) néanmoins un obstacle majeur subsistait : les interactions des particules de masse nulle et de spin élevé avec le graviton. En effet, le couplage minimal gravitationnel semblait en conflit avec la symétrie de jauge des particules de spin élevé (*c.f.* la section I.7 et [106, 107, 74, 75]). Notons de manière très schématique[I.69]

$$\mathcal{L}^{\rm FF}_{\bar g}(\varphi, \bar\nabla\varphi) \,=\, \sqrt{|\bar g|}\,\Big(-\frac{1}{2}\,(\bar\nabla\varphi)^2 \,+\, c_s\, R^{-2}\,\varphi^2\Big)$$

la densité Lagrangienne de Fang et Frønsdal [52, 53, 65] quadratique en un champ φ de jauge de spin s dans un espace-temps de fond de courbure constante et de métrique $\bar g$. La dérivée covariante par rapport au fond est notée $\bar\nabla$, le coefficient c_s est un nombre ne dépendant que du spin, et R est le rayon de courbure. La procédure de "couplage minimal" consiste à remplacer partout la métrique $\bar g$ (et la dérivée covariante $\bar\nabla$) de l'espace-temps de fond par une métrique arbitraire g (et la dérivée covariante ∇ associée). La densité Lagrangienne "covariantisé" est de la forme

$$\mathcal{L}^{\rm min}(g,\varphi,\nabla\varphi) \,:=\, \mathcal{L}^{\rm FF}_{g}(\varphi,\nabla\varphi) \,=\, \mathcal{L}^{\rm FF}_{\bar g}(\varphi,\bar\nabla\varphi) \,+\, \mathcal{O}(h)$$

où $h := g - \bar g$ est la perturbation de la métrique g par rapport à celle du fond $\bar g$ et où $\mathcal{O}(h)$ représente des termes au moins linéaire en cette perturbation. La variation infinitésimale de l'action "covariantisée"

$$S^{\rm min}[g,\varphi] = \int d^D x\, \mathcal{L}^{\rm min}(g,\varphi,\nabla\varphi)$$

sous les transformations de jauge $\delta_\varepsilon\varphi = \nabla\varepsilon$ ("covariantisées" elles aussi) est proportionnelle au tenseur de Riemann pour $s > 1$ du fait de certains commutateurs $[\nabla,\nabla]$ entre les dérivées covariantes. Pour le spin $3/2$ cette variation est proportionnelle au tenseur de Ricci et peut donc être compensée par la transformation du champ h de spin 2, comme en supergravité. Cependant, pour $s > 2$ cette variation est proportionnelle au tenseur de Weyl $\mathcal{W}$:

$$\delta_\varepsilon S^{\rm min}[g,\varphi] \,=\, \int d^D x\; \varepsilon\; \nabla\varphi\; \mathcal{W}\,.$$

[I.68] Cette passion précoce est attestée par l'anecdote suivante sur Efim Fradkin (à peine âgé de 19 ans durant la tragique bataille de Stalingrad) : *John Schwarz once asked Fradkin what he did in the trenches in Stalingrad between the fightings. He replied : "I thought about higher-spin gauge field theories."* [137].

[I.69] Seule la structure des termes sera écrite dans cette sous-section, les indices ainsi que la valeur exacte des coefficients seront omis volontairement afin de simplifier la discussion.

Or, un terme de ce type ne peut être compensé de la façon précédente. Ce conflit s'avère être rigoureusement insurmontable dans le cadre du programme de Frønsdal autour de l'espace-temps de Minkowski [140, 141] par contre il peut être dépassé autour d'$(A)dS$ [138, 139].[I.70] Les deux ingrédients déterminants dans cette découverte de Fradkin et Vasiliev furent (i) la restriction à l'ordre linéaire en la perturbation h de la métrique autour d'$(A)dS$ et (ii) l'autorisation d'un terme "non minimal"[I.71] $\mathcal{L}^{\cancel{\text{min}}}$ se développant en puissance du rayon de courbure R et contenant des dérivées supérieures :

$$\mathcal{L}^{\cancel{\text{min}}}(g,\varphi,\nabla\varphi,...) \;=\; \sqrt{|g|}\,\sum_{p+q=2}^{2s-4} c_{p,q}\,R^{p+q}\,\nabla^p\varphi\,\nabla^q\varphi\,W$$

où $c_{p,q}$ sont des coefficients appropriés et $W := \mathcal{W} - R^{-2}g^2 = \mathcal{O}(h)$ est la "covariantisation" de la fluctuation $\mathcal{W} - \bar{\mathcal{W}}$ du tenseur de Weyl $\mathcal{W}$ autour de sa valeur pour le fond $\bar{\mathcal{W}} = R^{-2}\,\bar{g}^2$. Les vertex cubiques issus de

$$\mathcal{L}^{\text{FV}}(g,\varphi,\nabla\varphi,...) \;:=\; \mathcal{L}^{\text{min}}(g,\varphi,\nabla\varphi) \;+\; \mathcal{L}^{\cancel{\text{min}}}(g,\varphi,\nabla\varphi,...)$$

de Fradkin et Vasiliev sont bilinéaires en le champ φ et linéaires en la fluctuation h. Ils décrivent donc l'interaction entre deux particules de spin $s > 2$ et une particule de spin 2 dans $(A)dS$. Les vertex $\mathcal{L}^{\cancel{\text{min}}}$ sont covariants sous les difféomorphismes et cohérents avec la symétrie de jauge de la particule de spin élevé jusqu'à l'ordre linéaire en la perturbation h de la métrique

$$\delta_\varepsilon\mathcal{L}^{\text{FV}}(g,\varphi,\nabla\varphi,...) \;=\; \mathcal{O}(h^2)\,.$$

Pour un spin s, le vertex contient un terme avec $2s-4$ dérivées et un facteur R^{2s-4}. Dans la limite plate ($R\to\infty$) c'est ce terme qui domine et qui peut donner naissance à un vertex cubique cohérent autour de l'espace-temps de Minkowski [141]

$$\lim_{R\to\infty} R^{4-2s}\mathcal{L}^{\text{FV}}(g,\varphi,\nabla\varphi,...) \;=\; \sum_{p+q=2s-4} c_{p,q}\,\nabla^p\varphi\,\nabla^q\varphi\,W\,.$$

[I.70] Un bref témoignage sur cette découverte de Fradkin et Vasiliev se trouve dans l'introduction de [142]. Ce résultat fut initialement obtenu pour le cas du spin 3 par un calcul direct, sans être publié. Ils ont ensuite généralisé ce résultat via l'écriture dans le formalisme "repère mobile" de leurs vertex cubiques entre spins arbitraires. Le vertex cubique de Fradkin-Vasiliev entre trois champs de jauge, dont deux de spin 3 et un de spin 2, a été récemment écrit dans le formalisme "métrique" [141, 143] plus directement lisible.

[I.71] Ce terme n'est pas minimal au sens où il ne provient pas de la procédure de couplage minimal appliquée au Lagrangien quadratique de Fang et Frønsdal, cependant il est covariant sous les difféomorphismes.

La limite est non singulière à condition d'être multiplié par un préfacteur R^{4-2s} qui dépend explicitement du spin. Cette astuce ne fonctionne donc pas pour une collection infinie de champs de spin non borné, auquel cas la théorie correspondante semble n'admettre qu'un développement perturbatif à courbure forte ($R \ll \ell_P$).

Cette découverte surprenante de Fradkin et Vasiliev sur le couplage gravitationnel des particules de spin élevé constitua la première étape d'une spectaculaire série d'avancées décisives autour d'AdS durant la seconde moitié des années 80 : développement du formalisme "repère mobile" à la MacDowell-Mansouri [144, 145, 146], définition et description des algèbres des spins élevés [147, 148, 149, 150], écriture de vertex cubiques entre champs de jauge de spin arbitraire [138, 151, 139]. À l'orée des années 90, ces progrès culminèrent avec l'obtention par Vasiliev de ses équations "dépliées" cohérentes à tous les ordres [152, 153, 154]. Au sens strict, ce résultat remarquable ne constitue cependant pas encore une solution du programme de Frønsdal car le problème inverse du calcul variationnel reste ouvert. Les équations dépliées de Vasiliev présentent l'énorme mérite d'être cohérentes à tous les ordres mais elles souffrent d'un défaut majeur : elles ne semblent pas provenir directement d'un principe variationnel, du moins usuel (au sens où la localité y est manifeste par exemple). En effet, la formulation dite "dépliée" est très exotique puisque chaque particule individuelle y est décrite par une infinité de champs (dont presque tous sont auxilliaires ou purement de jauge).

Une conclusion possible à cette section est que, quoique les nombreux et remarquables progrès enregistrés après trois décennies[I.72] par le programme de Frønsdal indiquent qu'il doit exister effectivement une solution complète à ce problème bien posé, au sens strict le programme de Frønsdal reste un problème ouvert et représente donc un authentique défi à relever pour les physiciens théoriciens.

I.8 L'éclairage holographique : le problème inverse

Afin de fixer la terminologie, cette section s'ouvre avec un rappel succint de la correspondance holographique. Ensuite, la deuxième sous-section mentionne une formulation inverse du calcul holographique dans laquelle une théorie des champs perturbative au bord permet (en principe) de reconstruire l'espace-temps (et le reste de la théorie duale) à l'intérieur. Pour le cas d'une théorie des champs à couplage faible au bord qui serait duale d'une théorie des spins élevés autour d'un espace-temps fortement courbé à l'intérieur, cette reconstruction perturbative fournit un nouvel éclairage sur le programme de Frønsdal et le régime ultraviolet

[I.72] Aux succès enregistrés pendant les années 80 mentionnés ici, il conviendrait d'ajouter la multitude de leurs généralisations et extensions ultérieures obtenues depuis deux décennies, mais ceci ne sera pas effectué ici par manque d'espace. Pour un aperçu, le lecteur est renvoyé aux nombreux cours et synthèses disponibles sur le sujet (*c.f.* la section I.9).

de la théorie des cordes.

a) La correspondance : de l'intérieur vers le bord

It is possible that the $1/N$ *expansion, with* N *the number of colors, might fruitfully be applied to quantum chromodynamics. In the real world,* N *is* 3*, so an expansion in* $1/N$ *may not seem like such a good idea. This objection is without force, as is shown by the following wisecrack by Ed Witten :*

$$\frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \quad \Longleftrightarrow \quad e \approx 0.3$$

Note d'humour dans le cours "$1/N$" de Sidney Coleman [155]

La théorie "Super-Yang-Mills" (SYM) maximale ($\mathcal{N} = 4$) de groupe de jauge $U(N)$ est caractérisée par deux paramètres, tous les deux sans dimension comme il se doit pour une théorie (super)conforme : la constante de couplage g_{YM} et le nombre de couleurs N. Notons $W(g_{YM}, N)$ la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation connexes entre opérateurs invariants de jauge. Le développement perturbatif usuel en diagrammes de Feynman conduit à un développement en puissances de g_{YM}^2 :

$$W(g_{YM}, N) \, = \, \frac{1}{g_{YM}^2} \sum_{L=0}^{\infty} W_L(N) \, \left(g_{YM}^2\right)^L ,$$

où le degré L correspond au nombre de "boucles" et où chaque coefficient W_L dépend de façon polynomiale de l'entier fixé N. Le niveau classique de cette théorie des champs correspond aux diagrammes en arbre ($L = 0$) : $W_0(N)$. Afin d'obtenir des informations non-perturbatives en g_{YM}^2, il est utile de réorganiser le développement précédent en puissances de $1/N$.[I.73] Il est commode d'introduire le couplage de 't Hooft $\lambda := g_{YM}^2 N$ auquel cas le développement en $1/N$ prend la forme :

$$W(\lambda, N) \, = \, \sum_{h=0}^{\infty} \overset{(h)}{W} (\lambda) \, \left(\frac{1}{N}\right)^{2h-2} ,$$

où chaque coefficient $\overset{(h)}{W}$ dépend du paramètre fixé λ. L'ordre le plus bas de ce développement "topologique" correspond aux diagrammes "planaires" ($h = 0$) : il

[I.73] Le raisonnement fait usage de la notation à ligne double et s'applique de façon très générale pour toute théorie où les champs Φ prennent valeur dans l'adjoint du groupe $U(N)$ et où l'action est de la forme $S[\Phi] = \frac{1}{g_{YM}^2} \int \mathrm{Tr}_{U(N)} \mathcal{F}[\Phi]$ où $\mathcal{F}[\Phi]$ est constitué d'une somme de produits de champs Φ incluant un terme quadratique.

faut souligner que l'objet $W^{(0)}(\lambda)$ est complètement quantique du point de vue de la théorie des champs. En effet, le développement de chacun des coefficients $W^{(h)}$ (donc pour une topologie fixée) en puissances de $\lambda = g_{YM}^2 N$ correspondrait à un développement en nombre de boucles :

$$\overset{(h)}{W}(\lambda) = \sum_{L=0}^{\infty} \overset{(h)}{W}_L \ \lambda^L .$$

En revanche, il est également possible (voire plus naturel) de considérer un développement en puissances inverses de λ puisque ce dernier paramètre est grand pour $N \gg 1$ à g_{YM} fixé :

$$\overset{(h)}{W}(\lambda) = \sum_{M=0}^{\infty} \overset{(h)}{W}_{[M]} \ \left(\frac{1}{\lambda}\right)^M .$$

La théorie de supercorde de type IIB autour de l'espace-temps $AdS_5 \times S^5$ est caractérisée par deux paramètres sans dimension : l'entier N (correspondant au flux quantifié de la 5-forme à travers l'hypersphère S^5) et le couplage de corde g_s, auxquels il faut rajouter deux paramètres avec la dimension d'une longueur : le rayon R de courbure de AdS_5 et de S^5, et la longueur ℓ_s de corde. Physiquement, c'est le rapport sans dimension ℓ_s/R entre la longueur de corde et le rayon de courbure qui est significatif. Ce rapport s'avère être relié au produit $g_s N$ entre couplage de corde et l'entier N par la relation :[I.74]

$$g_s\, N \ = \ \left(\frac{R}{\ell_s}\right)^4 .$$

En d'autres termes, cette théorie est caractérisée par deux paramètres sans dimension, disons g_s et le rapport ℓ_s/R. Notons $\mathcal{W}(g_s, \ell_s/R)$ l'action effective de la théorie de supercorde de type IIB, où les valeurs des champs au bord sont fixées. Le développement perturbatif usuel en surfaces de Riemann conduit à un développement en puissances de g_s :

$$\mathcal{W}(g_s, \ell_s/R) = \sum_{h=0}^{\infty} \overset{(h)}{\mathcal{W}}(\ell_s/R)\ (g_s)^{2h-2} ,$$

où h est le genre (= le nombre de "poignées") de la surface de Riemann. L'ordre le plus bas de ce développement correspond à la sphère ($h = 0$) : la fonctionnelle $\mathcal{W}^{(0)}(\ell_s/R)$ est donc purement classique du point de vue de la théorie des

[I.74] Pour la commodité, le facteur 4π usuellement présent dans cette formule est supposé être éliminé par une redéfinition appropriée de la longueur (et donc aussi de la tension) de corde.

cordes, c'est donc la valeur de l'action sur la couche de masse (avec conditions au bord fixées) pour la théorie des champs de corde. Le développement de chacun des coefficients en puissances de ℓ_s/R correspond à un développement effectif en corrections cordiques

$$\overset{(h)}{\mathcal{W}}(\ell_s/R) \;=\; \sum_{M=0}^{\infty} \overset{(h)}{\mathcal{W}}_{[M]} \;(\alpha'/R^2)^M \,.$$

L'ordre le plus bas de ce second développement correspond à la limite de particule ($\ell_s = 0$) donc l'objet $W^{(0)}_{[0]}$ correspond à la supergravité classique.

En empruntant la terminologie du rapport [156] (section 3.1), on peut distinguer trois formes de la conjecture de Maldacena (appelée ici "conjecture AdS_5/CFT_4") sur ces deux théories. On peut les classer par force décroissante :

- La forme dite "forte" de la conjecture AdS_5/CFT_4 est la supposition que ces deux théories sont duales pour toutes valeurs des deux paramètres sans dimension, à condition de donner les deux relations permettant d'identifer les deux paramètres respectifs de chaque théorie. L'identification standard est :
$$g_s \;=\; g_{YM}^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda \;=\; g_s\, N \;=\; \left(\frac{R}{\ell_s}\right)^4 .$$
Plus précisément, la dualité énonce l'égalité entre la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation connexes entre opérateurs invariants de jauge de la théorie SYM et l'action effective de la théorie de supercorde de type IIB, à condition d'établir une bijection (du type opérateur/état) entre l'espace des opérateurs invariants de jauge de SYM indécomposables et l'espace de Hilbert des états à une particule du spectre la théorie des supercordes sur $AdS_5 \times S^5$, et d'identifier la "source" des premiers avec la "valeur au bord" des seconds.[I.75]
- En pratique, les tests quantitatifs de la conjecture concernent principalement l'ordre dominant dans la limite à grand nombre de couleurs ($N \gg 1$) auquel cas on parle de forme "pas si faible" [156]. Ce consiste à travailler à l'ordre classique pour la théorie des cordes et à l'ordre planaire pour la théorie des champs (donc complètement quantique pour cette dernière).
- La forme "la plus faible" [156] de la conjecture AdS_5/CFT_4 est la supposition que ces deux théories sont duales à l'ordre le plus bas en $1/N \ll 1$ *et* dans la limite à grand rayon d'AdS. Ceci revient considérer le régime à grand couplage de 't Hooft ($R \gg \ell_s \Leftrightarrow \lambda \gg 1$) dont l'ordre le plus bas correspond

[I.75] Cette correspondance nécessiterait d'être précisée d'avantage puisqu'elle comporte de nombreuses subtilités (convention de normalisation, comportement asymptotique des champs, régularisation, renormalisation, *etc*) mais ces questions techniques sortent du cadre de ce mémoire. Le lecteur est renvoyé à [156] pour plus de précisions.

à l'approximation de la supergravité classique du côté de la théorie des cordes équivalent au régime ultra-quantique du côté de la théorie des champs. Les corrections cordiques en α' à la théorie de supergravité classique permettent de calculer des corrections en $1/\sqrt{\lambda}$ à la théorie de Yang-Mills planaire.

Le tableau dresse la liste des trois formes de la conjecture AdS_5/CFT_4 par force décroissante et inclut également la forme "inverse" qui est discutée dans la sous-section suivante.

Hologramme	*Forme*	*Dual holographique*
$\mathcal{N}=4$ SYM conforme $\forall\ N,\ \lambda$	Forte $\Longleftrightarrow$	Corde IIB autour $AdS_5\times S^5$ $\forall\ N,\ \ell_s,\ R$
Secteur planaire de $\mathcal{N}=4$ SYM $N\to\infty$ et $\forall\lambda$	Pas si faible $\Longleftrightarrow$	Corde classique IIB autour $AdS_5\times S^5$ $N\to\infty$ et $\forall\ \ell_s,\ R$
Limite à grand λ de $\mathcal{N}=4$ SYM $N\to\infty$ et $\lambda\gg 1$	La plus faible $\Longleftrightarrow$	Limite SUGRA IIB autour $AdS_5\times S^5$ $N\to\infty$ et $R\gg\ell_s$
Limite à petit λ de $\mathcal{N}=4$ SYM $N\to\infty$ et $\lambda\ll 1$	Inverse $\Longleftrightarrow$	Limite ultraviolette autour $AdS_5\times S^5$ $N\to\infty$ et $R\ll\ell_s$

b) Le problème inverse : du bord vers l'intérieur

If a strong connection between the approaches is established, the advanced mathematical machinery of higher spin gauge theories may perhaps be applied to solve problems in large N Yang-Mills theory.

Compte-rendu de conférence de Bo Sundborg [157]

La forme la plus faible de la conjecture AdS/CFT permet d'utiliser une théorie gravitationnelle classique pour calculer une théorie quantique des champs à couplage fort. La forme pas si faible de la conjecture autorise à considérer le régime inverse où la théorie quantique des champs est à couplage faible. Ce régime permet d'aborder le problème inverse suivant[I.76] : utiliser un hologramme calculable (une théorie à couplage faible de champs de spin ≤ 1) pour reconstruire perturbativement la théorie duale correspondante (une théorie à courbure forte incluant nécessairement une particule de spin 2 duale au tenseur énergie-impulsion).

Afin de fixer la terminologie, on appellera forme "inverse" de la conjecture AdS_5/CFT_4 (afin de la distinguer de la forme "la plus faible") la supposition que $\mathcal{N}=4$ SYM et théorie des cordes IIB sont duales, dans la limite à grand N et à l'ordre le plus bas en $\lambda\ll 1$, c'est-à-dire pour la théorie libre ($g_{YM}\ll 1$) du côté de la théorie quantique des champ et pour l'approximation ultraviolette

[I.76] Witten a appelé ce problème inverse "reconstruction de l'espace-temps" et "antiholographie" dans [158].

($\ell_s \gg R$) c'est-à-dire à tension faible du côté de la théorie des cordes. Il semble qu'une des premières publications discutant explicitement cette forme inverse de la conjecture soit dûe à Haggi-Mani et Sundborg [159]. Même à l'ordre le plus bas en λ, il reste encore à considérer le développement perturbatif de ces deux théories en puissance de $1/N \ll 1$, ce qui correspond à un développement en composantes connexes pour les graphes dans la théorie conforme libre (dont il faut souligner qu'il ne correspond plus à un développement en nombre de "poignées" du côté de la théorie des cordes).[I.77] Bien que l'hologramme soit une théorie libre, la forme "inverse" de la conjecture n'est cependant pas triviale. En effet, la correspondance holographique intervient à travers les fonctions de corrélation de produits de trace des champs dont la combinatoire est très compliquée (même si les calculs ne font intervenir que des propagateurs libres). Dès lors, la théorie duale à un hologramme libre peut être une théorie en interaction ![I.78]

Une fois ceci admis, il est naturel de chercher à déterminer cette théorie duale en interaction et c'est ici que les particules de masse nulle et de spin élevé font leur apparition. L'idée consistant à relier l'hologramme libre au bord d'AdS aux théories en interaction de Fradkin et Vasiliev dans l'intérieur d'AdS semble avoir germé indépendamment chez de nombreuses personnes. À nouveau, la première publication argumentant précisément une telle connection semble appartenir à Sundborg [157]. Bien que Witten n'ait jamais publié sur ce sujet, ses idées précoces sur cette connection sont attestées de façon directe par [158] et de façon indirecte par [161, 162, 163]. Il convient de mentionner également les travaux précurseurs du Lebedev [164, 165] sur la bijection entre courants (pour un scalaire libre conforme) et symétries (dans AdS) de spin élévé, ainsi que l'article de Polyakov [166] où il exposa ses idées personnelles sur la forme inverse de la conjecture AdS_5/CFT_4. L'article [167] de Sezgin et Sundel a initié une vérification de la connection conjecturée par Sundborg et Witten. Son introduction contient un bref rappel des diverses étapes ayant anticipé cette connection entre la théorie des cordes[I.79] et théorie des spins élevés via les singletons. Il est important de préciser que c'est le sous-secteur des

[I.77] Notons que l'identification standard entre les paramètres duaux repose essentiellement sur des arguments provenant de la forme la plus faible et il n'est donc pas exclu qu'elles doivent être modifiée en dehors du régime $N \gg 1$ et $\lambda \gg 1$. Par exemple, les auteurs de [160] ont argumenté que dans le régime $N \gg 1$ et $\lambda \ll 1$ (donc $g_{YM} \ll 1$) l'identification suivante $g_s \sim 1/N$ et $\ell_s \sim R$ serait plus naturelle suivant la correspondance holographique. Puisque cette identification ne fait pas l'objet d'un consensus, le lecteur ne sera pas surpris si la forme inverse de la conjecture AdS_5/CFT_4 ne sera pas définie ici avec toute la précision souhaitable.

[I.78] *A posteriori*, cette conclusion de la conjecture holographique inverse n'est pas si surprenante. La théorie des cordes elle-même fournit, autour de l'espace-temps plat, un exemple de théorie conforme libre (décrite par l'action quadratique de Polyakov sur le feuillet d'univers) permettant de décrire des particules en interaction (dans l'espace-temps cible).

[I.79] Voire même avec la "théorie M" puisque les premiers articles cruciaux concernèrent la supermembrane à onze dimensions [168, 169].

opérateurs (dits de "twist deux") de simple trace bilinéaire en les champs scalaires qui est conjecturé être dual à une théorie des spins élevés à la Fradkin et Vasiliev dans AdS_5 correspondant probablement à la trajectoire dominante de Regge de la théorie des cordes. En effet, le cas des champs à symétrie mixte est plus complexe.

La dernière décennie de recherches intensives sur la correspondance holographique suggère qu'un vaste éventail[I.80] de théories des champs conformes (ou pas) pourrait posséder un dual holographique (pas nécessairement autour d'AdS et pas forcément une théorie des cordes). Pour le cas d'une théorie des champs perturbative, un candidat plausible de dual holographique serait une théorie des spins élevés.[I.81] L'argument général est schématiquement le suivant : toute théorie de champs libre (ou intégrable) possède une infinité de symétries rigides linéaires et de courants conservés quadratiques, respectivement d'ordre et de rang arbitrairement grand. En vertu du dictionnaire holographique, un courant conservé au bord couple à la valeur asymptotique d'un champ de jauge (de même rang) à l'intérieur. Dès lors, le dual holographique d'une théorie conforme des champs libre au bord serait une théorie de jauge des spins élevés interactive dans l'intérieur. Après l'introduction perturbative d'interactions au bord, les courants quadratiques de spin élevé ne sont plus conservés ce qui devrait correspondre à une brisure des symétries de jauge dans l'intérieur par un mécanisme à la Brout-Englert-Higgs. Le cutoff ultraviolet d'une théorie quantique des champs à liberté asymptotique correspond holographiquement au cutoff infrarouge de la théorie classique des spins élevés. Dans le cas de la conjecture AdS_5/CFT_4, cela signifierait que le régime perturbatif de la théorie SYM contiendrait (sous une forme très difficile à décrypter) toutes les informations nécessaires sur la limite ultraviolette de la théorie des cordes (autour d'AdS) ainsi que sur le mystérieux mécanisme de brisure des symétries de spin élevé.

La réalisation explicite du progamme de Frønsdal dans AdS pourrait être une des clés conduisant à une démonstration concrète de la conjecture AdS/CFT, ou du moins sa forme inverse. Inversement, la validité de la forme inverse de la conjecture AdS/CFT garantirait l'existence d'un algorithme de reconstruction de la théorie des spins élevés dans l'intérieur à partir de l'hologramme au bord. En ce sens, la forme inverse de la conjecture AdS/CFT peut être interprétée comme un nouvel angle d'attaque du programme de Frønsdal autour d'AdS, sur le même pied que la méthode de Noether. En poussant cette vue à l'extrême, certains seraient même tentés d'interpréter l'hologramme au bord comme fournissant une *défini-*

[I.80] Une forme "pas si faible" de cette conjecture suppose l'existence d'un développement à grand N (où N caractérise, par exemple, le nombre de composantes internes "matricielles" ou "vectorielles") de la théorie des champs au bord.

[I.81] Par exemple, dans la conjecture AdS_4/CFT_3 de Klebanov et Polyakov [170] le dual holographique des singlets bilinéaires du modèle $O(N)$ critique à trois dimensions est identifié à la théorie des spins élevés de Fradkin et Vasiliev autour d'AdS_4.

tion (indirecte) de la théorie des spins élevés à l'intérieur. Néanmoins, une telle définition ne garantit pas l'existence d'une solution non triviale au programme de Frønsdal car, dans cette définition holographique, l'existence (avérée) de l'hologramme ne garantit pas l'existence d'une description duale à l'intérieur d'AdS qui soit (perturbativement) locale. Or, c'est précisément l'hypothèse de la localité qui rend la conjecture AdS/CFT hautement non triviale (comme souligné dans [158]). Il n'en reste pas moins que la conjecture AdS/CFT renforce la conviction selon laquelle le programme de Frønsdal possède une solution non triviale.

Les tests quantitatifs de la forme inverse de la conjecture AdS/CFT (principalement pour les versions AdS_5/CFT_4 et AdS_4/CFT_3) concernent principalement les fonctions de corrélation à deux points, à l'ordre dominant des deux limites $N \to \infty$ et $\lambda \to 0$, ce qui revient essentiellement à comparer les spectres de deux théories libres au moyen de la théorie des groupes. Jusqu'à présent, la complication technique des vertex d'interaction de Fradkin et Vasiliev empêche une comparaison explicite directe avec les fonctions de corrélations à plus de deux points de la théorie conforme libre. Néanmoins, la correspondance holographique inverse a contribué à revitaliser le sujet des théories des spins élevés dans le sens où elle a rajouté une motivation supplémentaire et fourni un nouvel angle d'attaque au programme de Frønsdal. De plus, elle a suscité un regain d'intérêt pour le sujet à l'extérieur de la communauté des spins élevés (par exemple, chez certains cordistes ou auprès de théoriciens des champs spécialistes du modèle $O(N)$) et inspiré ainsi un grand nombre de travaux voisins ou connexes.

I.9 En guise de conclusion

Comme j'ai tenté de le mettre en évidence dans ce chapitre introductif, l'étude des particules de spin élevé est un domaine de recherche avec une très longue histoire. Ses fondations sont solides du point de vue de la physique mathématique au sens où il a suscité plusieurs programmes de recherche bien posés (Bargmann-Wigner, Fierz-Pauli, Frønsdal, *etc*) et il est sous-tendu par des motivations issues de plusieurs domaines de la physique théorique (hadrons, cordes, holographie, *etc*).

Sa longue histoire semble loin d'être achevée puisque de nombreuses questions centrales restent encore ouvertes. Lors de la dernière décade, ce domaine de recherche a connu de nombreux développements et la littérature sur le sujet est devenue suffisament vaste que pour ne pas pouvoir le résumer ici. Par manque de place, je ne pourrai rendre justice à l'ensemble des problèmes variés qui ont été défrichés au cours de la dernière décade et je devrai, à partir du prochain chapitre, centrer la discussion sur mes quelques travaux personnels. De nombreux cours et synthèses sont apparues ces dernières années sur les développements récents du sujet et je renvoie le lecteur vers ces sources pour de plus amples informations.

Une conférence organisée par les Instituts Internationaux Solvay a été spécifiquement dédiée au sujet des spins élevés à Bruxelles en mai 2004. Hormis les actes de la conférence disponibles en ligne à l'adresse[I.82]

http ://www.solvayinstitutes.be/Activities/Higher Spin/Solvay1proc.pdf,

on peut mentionner la liste suivante d'introductions et d'articles de synthèse ultérieurs sur divers développements récents [177, 178, 179, 180, 78, 181, 182, 134, 183].[I.83]

[I.82] La plupart de ces contributions est également disponible sur "arXiv" (classées par ordre chronologique d'apparition) : [171, 172, 173, 174, 175, 176].

[I.83] J'ai exclu de cette liste mes propres articles de revues et/ou notes de cours [184, 185, 186, 187, 188, 189] car elles seront mentionnées dans le prochain chapitre (certaines figurent dans les compléments).

Chapitre Deux

Sentiers de recherche

Plan du chapitre

II.1 Symétries mixtes 55
II.2 Spins élevés 57
II.3 Singletons 59
II.4 Spin infini 59
II.5 Perspectives 60

Il n'y avait point d'autre chemin pour y aller qu'un petit sentier tout bordé de ronces.

Jean de La Fontaine (Psyché, II)

Selon le Littré, un sentier est un "chemin étroit, dans la campagne ou les bois, qui ne sert qu'aux piétons." Dans ce chapitre, j'essayerai de synthétiser brièvement les quelques sentiers que j'ai eu l'occasion de parcourir, le plus souvent accompagné. J'ai principalement examiné diverses problématiques concernant les particules élémentaires associées à des représentations "exotiques" du groupe de Poincaré, telles que les représentations dites à symétrie mixte, de spin élevé, de spin infini, en passant par les singletons. Contrairement au chapitre précédent, l'ordre chronologique ne sera pas suivi dans le résumé de mon parcours scientifique post-doctorat. Un regroupement par thème m'a semblé mieux convenir :

(i). **Symétries mixtes**
Articles [190, 191, 192, 193] Synthèses [184, 185, 189] Compléments A.2

(ii). **Spins élevés**
Articles [194, 195, 196, 197, 199, 200] Synthèses [186, 187, 188, 198] Compléments B et C

(iii). **Singletons**
Articles [201, 202]

(iv). **Spin infini**
Articles [203, 204] Synthèse [189] Complément A.2

II.1 Symétries mixtes

Comme son titre ("Issues in Electric-Magnetic Duality") l'indique, ma thèse de doctorat [205] a eu comme thème central la symétrie de dualité électrique-magnétique et ses possibles généralisations, pertinentes dans le cadre des théories d'objets étendus (supercordes et théorie M). Vers la fin de ma thèse, j'ai été intéressé par les propriétés de dualité de la gravité et de champs sans masse de spin élevé qui venaient d'être examinées par C. Hull [206]. Le champ dual (électrique-magnetique) au graviton dans un espace-temps de dimension supérieure à quatre est doté de propriétés de symétrie dites "mixtes" décrites par un diagramme de Young à deux colonnes de longueurs respectives $D-3$ et 1. Avec M. Henneaux et N. Boulanger, nous avons montré en utilisant la reformulation [87] de la procédure de Noether dans la version antichamp du formalisme BRST qu'un tel champ n'admet pas d'auto-interaction cohérentes qui soient locales et avec au maximum deux dérivées [190]. Ce théorème no-go a été étendu ultérieurement dans [191] au cas générique d'un champ tensoriel de masse nulle à symétrie mixte caractérisé par un diagramme de Young formé de deux colonnes de longueurs distinctes[II.1]. Un court résumé de ces résultats est inclus dans la sous-section 4 du complément B.

En parallèlle à ce travail [190], avec N. Boulanger nous avons déterminé rigoureusement la structure de jauge de champs à symétrie arbitraire (mixte ou pas) à l'aide d'outils d'algèbre homologique (introduits par P.J. Olver et indépendamment par M. Henneaux & M. Dubois-Violette [207, 208]) généralisant la théorie de De Rham habituelle, ce qui conduisit à la publication [192]. En termes physiques, ce travail justifie l'introduction de champs de force invariants de jauge généralisant les tenseurs de courbure de Weinberg-deWit-Freedman [39, 71] au cas à symétrie quelconque. Un nouveau principe variationnel venait d'être proposé par D. Francia et A. Sagnotti [76] permettant de décrire les champs symétriques par des équations dites "géométriques" (dans la mesure où elles sont écrites en terme des champs de force pour tout spin s, contrairement aux équations de Fang-Frønsdal qui ne s'expriment ainsi que pour les spins bas $s \leqslant 2$, *c.f.* la définition de cette terminologie dans la section I.6). D'autres équations géométriques, où la dualité électrique magnétique est manifeste, furent peu après proposées dans [205, 192] pour le cas générique à symétrie arbitraire. Il convient de signaler que P. de Medeiros et C. Hull obtinrent indépendament des résultats semblables [209].[II.2] Une synthèse des résultats mentionnés dans ce paragraphe est le compte-rendu de conférence [184].

Le programme de Bargmann-Wigner (*c.f.* la section I.3) dans le cas des représentations du groupe de Poincaré (*c.f.* le complément A.2) à nombre fini de

[II.1] Cela implique que la longueur minimale des colonnes est deux boîtes pour la première, et une boîte pour la deuxième. En d'autres termes, le champ est effectivement à symétrie mixte.

[II.2] Quelques jours seulement séparent l'apparition de [192] et [209] sur `arXiv`.

composantes en dimension d'espace-temps $D \geqslant 4$ a été achevé par W. Siegel et B. Zwiebach [210] (*c.f.* le chapitre 1.II.B du manuel de W. Siegel [211] pour une introduction pédagogique à leurs équations). Le programme de Fierz-Pauli fut complété pour les champs tensoriels par J.M.F. Labastida [212] mais la preuve définitive de la validité de ces équations dans le cas général ne fut apportée que récemment via les nouveaux formalismes ("géométrique" et "parent") développés ces dernières années [193, 213, 214]. De plus, pour le cas général (c'est-à-dire incluant aussi les champs spinoriels) le programme de Fierz-Pauli fut complété par A. Campoleoni, D. Francia, J. Mourad and A. Sagnotti [213, 215] en poursuivant l'approche locale sans contrainte dite "minimale" initiée dans [216].

Au début de mon stage post-doctoral à Padoue, N. Boulanger et moi avons réalisé que les équations proposées dans [205, 192, 209] pouvaient être réinterprétées comme une autre réalisation, distincte mais équivalente, du programme de Bargmann-Wigner [185]. Les équations géométriques proposées dans [205, 192, 209, 201] présentent le mérite d'être covariantes sous la dualité électrique-magnétique (c'est à cette fin qu'elles furent initialement construites) et correspondent à une généralisation naturelle des équations de Bargmann-Wigner [29] réécrites sous la forme tenseur-spineur. Leur défaut majeur est de ne pas provenir directement d'un principe variationnel, contrairement aux équations de D. Francia et A. Sagnotti [76] qui proviennent d'un Lagrangien.[II.3] Les différentes équations du mouvement qui ont été mentionnées [29, 76, 192, 209, 201, 88] ont toutes en commun d'être géométriques.[II.4]

Avec N. Boulanger, nous avons réexaminé dans [194, 193] l'équivalence, au niveau des équations du mouvement entre les différents formalismes dits "sans contrainte" (car les contraintes de trace de Fang et Frønsdal sur les champs et paramètres de jauge y sont absentes) qui venaient d'apparaître, en combinant l'identité (généralisée pour l'occasion aux champs à symétrie quelconque) de T. Damour et S. Deser [72] (qui établit un pont entre le tenseur à la Ricci et le $s-2$ème rotationnel du tenseur de Frønsdal pour les spins élevés) au lemme de Poincaré généralisé [207, 208, 192]. Cette équivalence avait déjà été étudiée auparavant et fut approfondie ultérieurement dans les nombreux travaux déjà mentionnés (dont [76, 217, 218]). Une spécificité de l'approche suivie dans [194, 201, 193] est l'éta-

[II.3] Notons qu'il fut réalisé ultérieurement que cette version initiale de Lagrangiens non-locaux ne mène pas au échanges de courants appropriés et doit être modifiée par l'addition de pôles plus élevés [88].

[II.4] Les équations du mouvement de W. Siegel et B. Zwiebach [210, 211] ne dépendent explicitement que du moment cinétique de spin, dont la représentation du groupe de Lorentz demande d'être spécifiée afin de caractériser alors la représentation du groupe de Poincaré. Ainsi, implicitement elles s'appliquent aux modules de représentation irréductible de Lorentz qui s'identifient physiquement à la partie sans trace du tenseur de courbure (c'est-à-dire la généralisation du tenseur de Weyl du cas de spin deux). En ce sens, il est possible de les inclure également dans la classe des équations géométriques.

blissement d'un lien direct entre deux équations du mouvement sans contrainte : l'une dite "avec compensateur" [217] et l'autre "à la Ricci", ce qui a pu contribuer à fournir un éclairage supplémentaire aux liens multiples reliant les formulations géométriques aux autres.

II.2 Spins élevés

Après le lemme de Poincaré généralisé, c'est le formalisme BRST qui a été l'autre porte m'ayant amené à explorer le domaine des champs symétriques de spin élevé durant mes deux stages post-doctoraux. Il existe plusieurs manières distinctes de faire usage des techniques BRST pour traiter ces champs, je me suis concentré exclusivement sur son application à la construction de Lagrangiens quadratiques et surtout à la classification des interactions cohérentes (*c.f.* les sections I.6 et I.7).

En collaborant avec I.L. Buchbinder, A. Pashnev et M. Tsulaia, j'ai appris certaines applications des techniques BRST au programme de Fierz-Pauli [186]. Cette approche (*c.f.* la synthèse [134] et sa bibliographie) est très réminiscente de la formulation covariante de la théorie des champs de corde avec laquelle je me suis familiarisé à cette occasion, d'autant plus que les liens entre l'approche sans contrainte et la limite ultraviolette de la théorie des cordes commençaient à être explorés également [217, 218]. Au sein de cette approche, nous avons reformulé la technique de réduction dimensionnelle "radiale" proposée peu avant par T. Biswas et W. Siegel [219] permettant d'obtenir, à partir d'une théorie dans un espace ambient plat de dimension $D+1$, une théorie dans l'espace-temps $(A)dS_D$.

En compagnie de N. Boulanger et S. Cnockaert, nous avons initié l'application au programme de Frønsdal de la reformulation BRST du problème des interactions cohérentes, dans le cas particulier des auto-interactions entre particules de masse nulle et de spin trois autour de l'espace-temps plat [195]. Comme étape préliminaire, toutes les fonctions locales invariantes de jauge et tous les tenseurs de Killing sur la couche de masse de la théorie libre furent déterminés dans [196]. Revisiter le cas des auto-interactions non Abéliennes entre particules d'hélicité égale à trois (déjà examiné il y a longtemps dans [118]) à l'aide de nouvelles techniques de calcul performantes (théorèmes sur la cohomologie BRST locale sur le plan mathématique, logiciels de calcul symbolique sur le plan informatique) permit de trouver un nouveau vertex cubique covariant en dimension $D \geqslant 5$ qui passe le test de la cohérence de l'algèbre à l'ordre deux en le paramètre de déformation, alors que le vertex déjà connu ne franchit pas ce cap [94]. Très récemment, avec N. Boulanger et S. Leclercq nous avons démontré [200] que cette obstruction à la cohérence de l'algèbre du précédent vertex [118] ne peut pas être levée par l'addition de champs symétriques dans des représentations d'hélicité de spin entier (contrairement à l'espoir formulé initialement dans [94]). Le complément B fournit un résumé de

divers résultats obtenus en suivant cet axe de recherche sur les déformations non Abéliennes dans l'espace-temps de Minkowski.

Une autre étape importante de mon parcours fut l'écriture des notes du cours de M.A. Vasiliev [187] avec deux thésards (S. Cnockaert et C. Iazeolla) sur les théories interactives des champs de jauge de spin élevé dans l'espace-temps Anti de Sitter, comme contribution aux actes de la conférence organisée par les Instituts Internationaux Solvay à Bruxelles en mai 2004. Les organisateurs de cette conférence innovèrent en suivant une démarche originale : ce furent des thésards (et/ou des post-docs) qui furent chargés de rédiger (en collaboration avec les conférenciers évidemment) les compte-rendus à partir de leurs notes manuscrites et de l'enregistrement sonore du cours. Cet exercice difficile fut extrêmement formateur pour moi. Ainsi, j'ai pu me familiariser avec les algèbres non Abéliennes et les équations dépliées de Vasiliev, sans oublier les nombreuses subtilités techniques qu'elle font intervenir. Indirectement, ceci conduisit plus tard à mon travail [197] où j'ai pu montrer[II.5] que le formalisme repère mobile sans contrainte (dans ce contexte, on dit aussi "hors de la couche de masse") conduit, après une fixation partielle de la jauge et une résolution des contraintes de torsion, à une déformation des symétries de jauge pour le formalisme métrique telle que, à l'ordre non trivial le plus bas, l'algèbre de jauge est équivalente à l'algèbre des opérateurs différentiels Hermitiens sur l'espace-temps. Précédemment, j'avais essayé de motiver cette algèbre de symétries dans l'acte de conférence [198] via l'application de la méthode de Noether à un champ de matière scalaire libre.

Avec E. Joung et J. Mourad [199], en suivant des motifs distincts nous avons effectué une analyse plus poussée du couplage entre champs de jauge de spin entier et un champ de matière scalaire libre au moyen de fonctions génératrices et de symboles de Weyl. L'apparition de l'algèbre des opérateurs différentiels Hermitiens fut confirmée. Mais notre analyse a surtout permis le calcul des interactions quartiques courant-courant entre particules scalaires où les bosons médiateurs sont des particules de masse nulle et de spin entier arbitraires. La sommation exacte des amplitudes de diffusion élastique, à l'ordre en arbre, entre deux scalaires avec échange d'une collection arbitraire (finie ou infinie dénombrable) de médiateurs de jauge fut possible. Pour une large classe de constantes de couplage, il est possible de voir explicitement que l'amplitude totale peut exhiber une décroissance très rapide dans la limite ultraviolette. Ce comportement est réminiscent des modèles duaux, précurseurs des théories des cordes (*c.f.* la section I.7 pour plus de commentaires sur le comportement ultraviolet). L'article [199] constitue le complément C.

[II.5] Ce résultat est en accord avec celui précédent de M. Grigoriev [220] obtenu suivant une formulation et une perspective différentes.

II.3 Singletons

Les équations obtenues durant ma thèse pour des champs tensoriels à symétrie arbitraire [205, 192] furent généralisés aux tenseurs-spineurs en collaboration avec I. Bandos, J. A. de Azcarraga, D. Sorokin et M. Tsulaia dans [201]. Ces équations y furent utilisées pour démontrer que le spectre quantique d'une particule twistorielle se propageant dans un espace dit "tensoriel"[II.6] [221, 222] est constitué d'une tour infinie de singletons où tous les spins $s \in \mathbb{N}/2$ apparaissent une et une seule fois (la multiplicité de chacune des représentations est égale à un). Ce résultat était déjà connu pour les dimensions d'espace-temps 3 et 4 [161] et il fut généralisé aux cas pertinents de dimension qui restaient à considérer : 6 et 10 [201].

Le formalisme BRST permet une approche systématique du programme de Fierz-Pauli. Assez récemment, avec M. Grigoriev nous avons appliqué l'approche de la "forme parente" [47, 223] aux singletons bosoniques [204]. D'après la forme inverse de la correspondance holographique (*c.f.* la section I.8), la (super)algèbre maximale de symmétrie d'un singleton vivant en dimension D (au bord d'AdS_{D+1}) est un bon candidat pour une algèbre de spin élevé associée à une théorie en interaction dans AdS_{D+1}. Ceci a motivé notre généralisation du théorème de Eastwood [163] (identifiant l'algèbre maximale des symétries (locales) d'un singleton de spin 0 vivant dans un espace-temps de courbure constante de dimension $D \geqslant 3$) à tout spin s entier et en dimension[II.7] $D \geqslant 4$, c'est-à-dire pour tout module unitaire irréductible $\mathcal{D}\big(s + \frac{D}{2} - 1\,,\, s \times (\frac{D}{2} - 1)\big)$ de $Spin(D, 2)$ où $s \times (\frac{D}{2} - 1)$ désigne un diagramme de Young rectangulaire forme de $\frac{D}{2} - 1$ rangées de longueur s.

II.4 Spin infini

Avec J. Mourad, nous avons obtenu la liste complète (aux équivalences près) des équations différentielles linéaires covariantes décrivant une particule bosonique de spin infini (*c.f.* la section I.3) se propageant librement dans un espace-temps de Minkowski de dimension $D \geqslant 4$ [203]. Comme corollaire ce résultat complète le programme de Bargmann-Wigner pour l'ensemble[II.8] des représentations unitaires du groupe de Poincaré de masse carrée non négative en dimension $D \geqslant 4$ (dans la mesure où seul le cas des représentations de spin infini en dimension $D > 4$ manquait). Ce résultat a été obtenu en partant des equations décrivant des

[II.6] Les coordonnées $x^{\alpha\beta} = x^{\beta\alpha}$ d'un espace tensoriel commutent mais peuvent être rangées dans une "matrice" carrée réelle symétrique. La terminologie provient du fait qu'elles peuvent être interprétées comme les conjuguées de Fourier de charges centrales tensorielles.

[II.7] L'espace des symmétries d'un champ d'hélicité s quelconque sur l'espace-temps de Minkowski de dimension $D = 4$ était connu depuis peu [224].

[II.8] Pour être précis, les représentation doublement valuées ("spinorielles") n'ont pas été traitées dans [203] mais la méthode suivie devrait également fonctionner dans le cas fermionique.

particules massives et en implémentant de manière appropriée la limite (proposée peu auparavant par A.M. Khan et P. Ramond [225]) de masse nulle $m \to 0$ et de spin infini $s \to \infty$ où l'on garde le produit des deux fini et fixé : $ms = \mu \in \mathbb{R}_0$. Cette technique est présentée dans la sous-section 5.3.2 du complément A.2.

Il n'existe que deux représentations de spin infini du groupe de Poincaré en dimension $D = 4$: la simplement et la doublement valuée. Ainsi, la limite de spin infini d'une suite de particules massives mène à un particule de spin infini, soit bosonique ou fermionique selon que les spins sont soit tous entiers, soit tous demi-impairs. Avec M. Rausch de Traubenberg et M. Valenzuela nous avons observé dans [204] que l'équation de Majorana à infinité de composantes [10] fournit une réalisation[II.9] de cette limite exotique. Le sous-module du groupe de Poincaré formé des solutions de masse nulle de [10] porte les deux représentations de spin infini.[II.10] Après le passage à la limite, le couple de particules (bosonique et fermionique) de spin infini forme un supermultiplet, ce qui a comme corollaire que le secteur de masse nulle de l'équation de Majorana à infinité de composantes est supersymétrique [204].[II.11]

II.5 Perspectives

Comme conclusion, la première sous-section contient une liste de problèmes bien posés qu'il pourrait être intéressant d'attaquer dans le futur et la sous-section suivante rappelle seulement quelques ponts mystérieux semblant réunir les spins élevés à d'autres domaines de recherche en physique théorique ou mathématique.

[II.9] La limite exotique de spin infini avait déjà été examinée dans un article antérieur [226] selon un angle assez différent. Des équations d'onde relativistes linéaires, unifiant l'équation pour un spin 0 introduite par P.A.M. Dirac en 1971 et son analogue de spin 1/2 obtenue par L.P. Staunton en 1974, y furent proposées et généralisées (au moyen de l'équation de Majorana) à une théorie supersymmétrique de particules massives de spin élevé. Cette théorie est caractérisée par une superalgèbre de supersymmétrie non linéaire qui, dans la limite de spin infini, se réduit à la superalgèbre de Poincaré avec (ou sans) charges centrales tensorielles.

[II.10] Ceci peut être compris comme résultant de la limite de spin infini $s \to \infty$ pour des couples de solutions massives de spins respectifs $s + 1/2$ et s, dont les masses sont déterminées par la trajectoire de Regge $m = M/(s+1/2)$ (*c.f.* l'équation pour le spectre de masse dans la section I.4). Dans cette limite, on trouve que le paramètre dimensionné μ s'identifie avec celui de l'équation de Majorana : $\mu = ms = M + \mathcal{O}(1/s)$. De plus, les rapports entre les masses et entre les nombre de degrés de liberté de deux particules de spins respectifs $s + 1/2$ et s tend vers 1 (ce qui serait exactement vérifié par un supermultiplet).

[II.11] Ceci est cohérent avec la positivité de l'énergie de toutes les solutions massives de l'équation de Majorana à infinité de composantes. La possibilité d'une supersymmétrie cachée au sein de l'équation de Majorana avait déjà été évoqué auparavant [227].

a) Quelques problèmes bien posés ouverts

Il va de soi que la liste suivante de problèmes ouverts est loin d'être exhaustive, elle se restreint à certains problèmes ouverts qui seraient dans le prolongement de questions examinées précédemment (seuls quelques uns de ces projets sont actuellement en chantier).

- classification des interactions non Abéliennes pour des champs mixtes à trois colonnes (ou plus)
- problème inverse du calcul variationnel pour les représentations de spin infini
- généralisation du théorème d'Eastwood pour les singletons fermioniques, ainsi que pour les multiplets supersymétriques de singletons
- généralisation du théorème de Flato-Frønsdal pour des singletons arbitraires
- identification des algèbres de spin élevé correspondant aux deux théorèmes précédents
- calcul explicite de la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation entre courants singlets bilinéaires pour une théorie de champs scalaires libres de masse nulle et comparaison avec les théories conformes non Abéliennes de spin élevé de E.S. Fradkin & V.Y. Linetsky [228] et A. Segal [229].
- calcul explicite de la valeur sur la couche de masse des actions de spin élevé dans AdS_4 de E.S. Fradkin et M.A. Vasiliev et comparaison à la fonctionnelle précédente.
- calcul explicite du diagramme de Witten pour l'interaction quartique effective à l'ordre en arbre entre champs scalaires dans AdS résultant de l'échange d'une infinité de champs de jauge symmétrique de spin élevé (correspondant à une fonction de corrélation à quatre points d'opérateurs singlets $|\phi(x)|^2$ bilinéaires en un champ scalaire) et comparaison avec les deux points précédents.
- compararaison des trois points précédents à la conjecture de I.R. Klebanov et A.M. Polyakov [170]

Le fait que les problèmes ouverts précédents soient bien posés ne présume pas la clarté de la voie à suivre pour tenter de les résoudre. En effet, la plupart de ces problèmes semblent difficile d'accès à l'heure actuelle.

b) Quelques perspectives générales

D'une part, la reformulation par F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer [230] du problème physique de la quantification en un problème mathématique (celui de la déformation d'une algèbre de fonctions sur une variété de Poisson en une algèbre associative non commutative) s'est révélée très fructueuse et a engrangé de nombreux succès, dont le plus renommé est probablement l'avancée décisive par M. Kontsevich. D'autre part, le problème ouvert

majeur des théories des champs de jauge de spin élevé a été formulée au moment même de la conception de leurs théories libres [52]. Bien que de nombreux résultats importants aient été obtenus, certaines questions centrales résistent encore. Par une coincidence suggestive, les deux sujets précédents sont nés (en tant que programmes de recherche) au cours de la même année et avec un auteur en commun : C. Frønsdal. Bien qu'appartenant en apparence à des domaines distincts de la physique (le premier programme plutôt au versant de la physique mathématique, et le second plutôt à la physique théorique des hautes énergies) il s'est avéré que c'est précisément dans les théories de jauge des spins élevés que les produits étoilés ont fait une de leur première apparition [148] en physique des hautes énergies. Cet usage n'a cessé de se révéler crucial au fil des développements successifs.

Tandis que l'interprétation géométrique des théories non Abéliennes connues pour des champs de jauge de spin un ou deux correspond, respectivement, aux fibrés principaux et à la géométrie Riemannienne, une telle interprétation géométrique manque toujours pour les spins plus élevés. Cette lacune est sans doute à la fois cause et effet de la compréhension limitée que nous avons de leurs interactions. Le pont établi par les produits étoilés entre géometrie de Poisson et algèbre associative pourrait être un fil conducteur pour de nouvelles recherches sur les théories de jauge de spin élevé. Des connections entre divers avatars du programme de quantification par déformation ont déjà fait leur apparition au sein du programme de Frønsdal : par exemple, l'approche de Fedosov [47, 78, 77, 220] et les modèles sigma d'AKSZ [78, 48]. Certains résultats préliminaires [198, 220, 197, 199] semblent suggérer que (i) l'algèbre non-Abélienne des transformations jauge du formalisme métrique sans contrainte d'une théorie des spins élevés (*c.f.* [76, 88, 90] et les références ci-dedans) soit reliée (voire équivalente) à l'algèbre des opérateurs différentiels auto-adjoints (agissant sur l'espace des fonctions de carré sommable) sur la variéte d'espace-temps $\mathcal{M}$ et (ii) les transformations de jauge soient reliées au commutateur étoilé via une quantification par déformation du fibré cotangent $T^*\mathcal{M}$. Ainsi jauger l'infinité de symétries rigides d'une théorie libre mènerait à considérer le groupe des opérateur différentiels unitaires comme le groupe des symmétries de jauge d'un champ de matière se transformant dans la représentation fondamentale. L'analogue des connections de Ehresman et de Levi-Civita serait alors un opérateur Hermitien transformant dans la représentation adjointe et dont le symbole (une fonction sur $T^*\mathcal{M}$) décrit une tour infinie de champs de jauge de spin élevé. La quantification par déformation du fibré cotangent est bien connue des mathématiciens [231] et il serait intéressant d'explorer plus avant les connexions existant entre ces deux sujets. Il faut souligner que les spéculations précédentes (i)-(ii) sont fortement sujettes à caution en l'absence de résultats analogue à ceux de E.F. Fradkin et M.A. Vasiliev à l'ordre cubique au sein du formalisme métrique sans contrainte.

Un autre axe de recherche stimulant est la possible connection entre les théories des spins élevés et certains modèles issus de la chromodynamique quantique, des phénomènes critiques ou de la matière condensée. La généralité des arguments conduisant à la forme inverse de la correspondance holographique ont déjà suggéré une intime connection entre théories des spins élevés autour d'AdS et limite à grand N de la théorie de (super) Yang-Mills $U(N)$ [157, 158] ou du modèle vectoriel $O(N)$ [170]. Il est tentant de spéculer que la même ligne d'arguments puisse s'appliquer à des théories non relativistes (par exemple aux modèles $Sp(N)$ des atomes froids, comme suggéré en passant par D.T. Son [232]) même si ceci est fort prématuré car une telle tentative nécessiterait probablement de trouver un analogue à la Newton-Cartan (*c.f.* [233]) au formalisme repère mobile de M.A. Vasiliev [144, 145, 146]. L'établissement du domaine de validité et/ou d'une preuve directe de ces conjectures holographiques (de Sundborg-Witten, Klebanov-Polyakov, Son, *etc*) pose un défi redoutable, dont la réalisation du programme de Frønsdal semble une étape incontournable.

Complément A

Représentations unitaires du groupe de Poincaré de dimension d'espace-temps quelconque

Plan du complément

A.1 Rencontres de Modave 2006 65
A.2 Notes de cours 67
A.3 Annexe sur les groupes de spin 101
A.4 Tenseurs *versus* spineurs en dimension 4 101

A.1 Rencontres de Modave 2006

Les notes de cours ont été publiées en version papier par les Instituts Solvay et sont disponibles en ligne à l'adresse :
`http ://www.ulb.ac.be/sciences/ptm/pmif/Rencontres/ModaveII/Modave2006.pdf`
Elles trouvent leur origine dans un cours donné avec Nicolas Boulanger à l'édition 2006 des "Rencontres de physique mathématique à Modave."

Ces rencontres de physique mathématique méritent un commentaire particulier car elles ont constitué pour moi une expérience particulièrement enrichissante puisque j'ai pu participer à leur naissance. En effet, c'est lors de l'édition 2004 des "Rencontres mathématiques de Glanon" que, avec d'autres doctorants (Sophie de Buyl, Stéphane Detournay) et post-docs (Nicolas Boulanger et moi-même) belges en physique mathématique, nous avons décidé d'organiser une école d'été en Bel-

gique, inspirée de l'"esprit Glanon"[A.1] mais s'adressant plutôt à des physiciens. Les "premières Rencontres de physique mathématique à Modave" virent ainsi le jour fin juin 2005. Elles furent organisées par de jeunes doctorants et post-doctorants de diverses universités belges, réunissant ainsi les 3 communautés : bruxelloise, flamande et wallonne. Le petit village de Modave est situé "dans un écrin de verdure à la frontière entre le Condroz et l'Ardenne," son calme et son isolement étant propice à la concentration et aux échanges. Afin de réduire les coûts de participation et afin de contribuer à une atmosphère conviviale, le logement, les repas et les cours se déroulèrent tous dans le centre d'hébergement "Les Cent Fontaines."

Sur le plan scientifique proprement dit, le but était "d'étudier des outils mathématiques utiles à la recherche en physique théorique des interactions fondamentales, généralement supposés connus mais trop rarement expliqués en détails." En effet, le problème auquel est confronté tout jeune physicien théoricien (du moins dans le domaine de la physique des hautes énergies, au sens de `hep-th`) est la nécessité d'acquérir un vaste bagage mathématique sophistiqué avant de pouvoir rentrer dans bon nombre de sujets d'intérêt contemporain. Or, une culture générale aussi poussée en mathématiques ne fait pas toujours partie du cursus traditionnel de l'étudiant en physique et est, cependant, un prérecquis de nombreux cours avancés en physique théorique actuelle.

L'authentique originalité de cette école d'été, et de celles qui l'ont suivi, réside probablement d'avantage encore dans le fait qu'elle soit organisée uniquement par de jeunes chercheurs sans poste permanent (doctorant ou post-doc) et que les "enseignants" y soient majoritairement (voire exclusivement) les "étudiants" eux-mêmes, plutôt que des experts reconnus. Cette exigence a pour but de s'assurer que les cours se rapprochent du niveau et des attentes authentiques des jeunes participants, sans sacrifier la qualité scientifique des exposés qui se déroulèrent ainsi dans une atmosphère détendue où toutes les questions et les interventions des auditeurs puissent fuser sans auto-censure.

N'ayant participé qu'aux deux premières éditions[A.2], c'est néanmoins un plaisir de voir que les "rencontres de physique mathématique à Modave" en sont déjà à leur sixième édition et ont continué à faire partie intégrante des activités des Instituts Internationaux Solvay. On ne peut que leur souhaiter une longue vie, en préservant cet "esprit Modave" qui en fait leur caractère unique.

A.2 Notes de cours

[A.1] Cette formule est très chère aux organisateurs de ces rencontres et est assez bien résumé sur leur site :
`http ://www-math.univ-poitiers.fr/ laurent/GlanonPage08/pres.php.htm`

[A.2] Pour l'organisation, j'ai participé à celle de la première édition uniquement et très modestement en comparaison des autres membres du comité.

Le plan de ces notes est comme suit :[A.3]

1. Préliminaires de théorie des groupes (pages 1-4)
2. Particules élémentaires comme représentations unitaires irréductibles du groupe d'isométrie (pages 4-5)
3. Classification des représentations unitaires (pages 5-10)
4. Représentations tensorielles et diagrammes de Young (pages 10-22)
5. Équations d'onde relativistes (pages 22-32)
6. Bibliographie (pages 32-33)

Une particularité de ce cours est un traitement en dimension quelconque (plus grande ou égale à 3) alors que les textes de références traitent du cas à quatre dimensions et que la généralisation aux dimensions supérieures introduit plusieurs subtilités qui conduisent parfois à des confusions (par exemple sur la définition à adopter du "spin" et de l'"hélicité"). De plus, ces notes contiennent un résumé de nombreuses propriétés sur les représentations tensorielles des groupes généraux linéaires et orthogonaux, exprimées en termes de diagrammes de Young. Ces propriétés très utiles sont parfois méconnues car dispersées dans la littérature. On a tenté de remédier à ce défaut en les y rassemblant de façon aussi concise que possible.

[A.3] La numérotation des pages correspond à l'original des notes de cours et non pas à celle du mémoire.

The unitary representations of the Poincaré group in any spacetime dimension

Xavier Bekaert[a,1] and Nicolas Boulanger[b,2]

[a] Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique,
Unité Mixte de Recherche 6083 du CNRS, Fédération Denis Poisson,
Université François Rabelais,
Parc de Grandmount, 37200 Tours (France)

[b] Service de Mécanique et Gravitation,
Université de Mons-Hainaut, Académie Wallonie-Bruxelles,
6 avenue du Champ de Mars, 7000 Mons (Belgium)

Abstract. An extensive group-theoretical treatment of linear relativistic wave equations on Minkowski spacetime of arbitrary dimension $D \geqslant 3$ is presented in these lecture notes. To start with, the one-to-one correspondence between linear relativistic wave equations and unitary representations of the isometry group is reviewed. In turn, the method of induced representations reduces the problem of classifying the representations of the Poincaré group $ISO(D-1,1)^{\uparrow}$ to the classication of the representations of the stability subgroups only. Therefore, an exhaustive treatment of the two most important classes of unitary irreducible representations, corresponding to massive and massless particles (the latter class decomposing in turn into the "helicity" and the "infinite-spin" representations) may be performed via the well-known representation theory of the orthogonal groups $O(n)$ (with $D-3 \leqslant n \leqslant D-1$). Finally, covariant wave equations are given for each unitary irreducible representation of the Poincaré group with non-negative mass-squared. Tachyonic representations are also examined. All these steps are covered in many details and with examples. The present notes also include a self-contained review of the unitary representation theory of the general linear and (in)homogeneous orthogonal groups in terms of Young diagrams.

[1] E-mail address: xavier.bekaert@lmpt.univ-tours.fr .
[2] E-mail address: nicolas.boulanger@umh.ac.be ; Chargé de Recherches FNRS (Belgium).

1 Group-theoretical preliminaries

Elementary knowledge of the theory of Lie groups and their representations is assumed (see *e.g.* the textbooks [1, 2] or the lecture notes [3]). The basic definitions of the Lorentz and Poincaré groups together with some general facts on the theory of unitary representations are reviewed in order to fix the notation and settle down the prerequisites.

1.1 Universal covering of the Lorentz group

The group of linear homogeneous transformations $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, \ldots, D-1)$ preserving the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$ of "mostly plus" signature $(-, +, \ldots, +)$,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \,,$$

where Λ^T denotes the matrix transpose of Λ, is called the *Lorentz group* $O(D-1,1)$.

A massless particle propagates on the light-cone $x^2 = 0$. Without loss of generality, one may consider that its momentum points along the $(D-1)$th spatial direction. Then it turns out to be convenient to make use of the *light-cone coordinates*

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x^{D-1} \pm x^0 \right) \quad \text{and} \quad x^m \quad (m = 1, \ldots, D-2) \,,$$

where the Minkowski metric reads $\eta_{++} = 0 = \eta_{--}$, $\eta_{+-} = 1 = \eta_{-+}$ and $\eta_{mn} = \delta_{mn}$ $(m, n = 1, \ldots, D-2)$.

On physical grounds, one will mainly be interested in the matrices Λ's with determinant $+1$ and such that $\Lambda^0{}_0 \geqslant 0$. It can be shown that such matrices Λ's also form a group that one calls the *proper orthochronous Lorentz group* denoted by $SO(D-1,1)^{\uparrow}$. It is connected to the identity, but not *simply connected*, that is to say, there exist loops in the group manifold $SO(D-1,1)^{\uparrow}$ which are not continuously contractible to a point. In order to study the representations (reps) of $SO(D-1,1)^{\uparrow}$, one may first determine its universal covering group, *i.e.* the Lie group which is simply connected and whose Lie algebra is isomorphic to $\mathfrak{so}(D-1,1)$, the Lie algebra of $SO(D-1,1)^{\uparrow}$. For $D \geqslant 4$, the universal covering group, denoted $Spin(D-1,1)$, is the double cover of $SO(D-1,1)^{\uparrow}$. The spin groups $Spin(D-1,1)$ have no intrinsically projective representations. Therefore, a single (or double) valued "representation" of $SO(D-1,1)^{\uparrow}$ is meant to be a genuine representation of $Spin(D-1,1)$.

Warning: The double cover of $SO(2,1)^{\uparrow}$ is the group $SU(1,1)$, in close analogy to the fact that the double cover of $SO(3)$ is $SU(2)$. The group $SU(2)$ is also the universal covering group of $SO(3)$, but beware that the universal cover of $SO(2,1)^{\uparrow}$ is actually $\mathbb{R}^3$, covering $SO(2,1)^{\uparrow}$ infinitely often. Thus one may not speak of the spin group for the "degenerate case" of the proper orthochronous Lorentz group in spacetime dimension three. The analogue is that the universal cover of $SO(2) \cong U(1)$ is $\mathbb{R}$ covering it infinitely often, so that one may not speak of the spin group for the "degenerate case" of the rotation group in two spatial dimensions.

1.2 The Poincaré group and algebra

The transformations

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\mu} + a^{\mu}$$

where a is a spacetime translation vector, form the group of all inhomogeneous Lorentz transformations. If one denotes a general transformation by (Λ, a), the multiplication law in the Poincaré group is given by

$$(\Lambda_2, a_2) \cdot (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1) \,,$$

so that the *inhomogeneous Lorentz group* is the semi-direct product denoted by

$$IO(D-1,1) = \mathbb{R}^D \rtimes O(D-1,1) \,.$$

The subgroup $ISO(D-1,1)^{\uparrow}$ of inhomogeneous proper orthochronous Lorentz transformations is called the *Poincaré group*. The Lie algebra $\mathfrak{iso}(D-1,1)$ of the Poincaré group is presented

by the generators $\{ P_\mu , M_{\nu\rho} \}$ and by the commutation relations

$$\begin{aligned} i\,[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\mu} M_{\rho\nu} + \eta_{\sigma\nu} M_{\rho\mu} && (1.1)\\ i\,[P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho \,, && (1.2)\\ i\,[P_\mu, P_\rho] &= 0 \,. && (1.3) \end{aligned}$$

Two subalgebras must be distinguished: the Lie algebra $\mathfrak{so}(D-1,1)$ of the Lorentz group presented by the generators $\{ M_{\nu\rho} \}$ and by the commutation relations (1.1), and the Lie algebra $\mathbb{R}^D$ of the Abelian translation group presented by the generators $\{ P_\mu \}$ and by the commutation relations (1.3). The latter algebra $\mathbb{R}^D$ is an ideal of the Poincaré algebra, as can be seen from (1.2). Altogether, this implies that the Lie algebra of the Poincaré group is the semi-direct sum $\mathfrak{iso}(D-1,1) = \mathbb{R}^D \ni \mathfrak{so}(D-1,1)$.

The Casimir elements of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ are homogeneous polynomials in the generators of $\mathfrak{g}$ providing a distinguished basis of the center $\mathcal{Z}\Big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\Big)$ of the universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (see *e.g.* the part V of the lecture notes [3]). The quadratic Casimir operator of the Lorentz algebra $\mathfrak{so}(D-1,1)$ is the square of the generators $M_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{so}(D-1,1)\Big) \,=\, \frac{1}{2}\, M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \,. \qquad (1.4)$$

The quadratic Casimir operator of the Poincaré algebra $\mathfrak{iso}(D-1,1)$ is the square of the momentum

$$\mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{iso}(D-1,1)\Big) \,=\, -P^\mu P_\mu \,, \qquad (1.5)$$

while the quartic Casimir operator is

$$\mathcal{C}_4\Big(\mathfrak{iso}(D-1,1)\Big) \,=\, -\frac{1}{2} P^2 M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + M_{\mu\rho} P^\rho M^{\mu\sigma} P_\sigma \,,$$

which, for $D = 4$, is the square of the Pauli-Lubanski vector W^μ,

$$W^\mu := \frac{1}{2}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma \,.$$

1.3 ABC of unitary representations

The mathematical property that all non-trivial unitary reps of a non-compact simple Lie group must be infinite-dimensional has some physical significance, as will be reviewed later.

Finite-dimensional unitary reps of non-compact simple Lie groups: *Let* $\mathrm{U} : G \to U(n)$ *be a unitary representation of a Lie group* G *acting on a (real or complex) Hilbert space* $\mathcal{H}$ *of finite dimension* $n \in \mathbb{N}$. *Then* U *is completely reducible. Moreover, if* U *is irreducible and if* G *is a connected simple non-compact Lie group, then* U *is the trivial representation.*

Proof: For the property that U is completely reducible, we refer *e.g.* to the proof of the proposition 5.15 in [1]. The image $\mathrm{U}(G)$ for any unitary representation U defines a subgroup of $U(n)$. Moreover, the kernel of U is a normal subgroup of the simple group G. Therefore, either the representation is trivial and $\ker \mathrm{U} = G$, or it is faithfull and $\ker \mathrm{U} = \{e\}$. In the latter case, U is invertible and its image is isomorphic to its domain, $\mathrm{U}(G) \cong G$. Actually, the image $\mathrm{U}(G)$ is a non-compact subgroup of $U(n)$ because if $\mathrm{U}(G)$ was compact, then $\mathrm{U}^{-1}\big(\mathrm{U}(G)\big) = G$ would be compact since U^{-1} is a continuous map. But the group $U(n)$ is compact, thus it cannot contain a non-compact subgroup. Therefore the representation cannot be faithful, so that it is trivial. (A different proof of the second part of the theorem may be found in the section 8.1.B of [2].) □

Another mathematical result which is of physical significance is the following theorem on unitary irreducible representations (UIRs) of compact Lie groups.

Unitary reps of compact Lie groups: *Let* U *be a UIR of a compact Lie group* G*, acting on a (real or complex) Hilbert space* $\mathcal{H}$. *Then* $\mathcal{H}$ *is finite-dimensional. Moreover, every unitary representation of* G *is a direct sum of UIRs (the sum may be infinite).*

Proof: The proofs are somewhat lengthy and technical so we refer to the section 7.1 of [2] for complete details. □

Examples of (not so) simple groups:
• On the one hand, all (pseudo)-orthogonal groups $O(p,q)$ are either Abelian ($p+q=2$) or simple ($p+q>2$). Moreover, orthogonal groups ($p\,q=0$) are compact, while pseudo-orthogonal groups ($p\,q\neq 0$) are non-compact.
• On the other hand, the inhomogeneous Lorentz group $IO(D-1,1)$ is non-compact (both $\mathbb{R}^D$ and $O(D-1,1)$ are non-compact) but it is *not* semi-simple (because its normal subgroup $\mathbb{R}^D$ is Abelian).

2 Elementary particles as unitary irreducible representations of the isometry group

Except for the final remarks, this section is based almost *ad verbatim* on the introduction of the illuminating work of Bargmann and Wigner [4], modulo some changes of notation and terminology in order to follow the modern conventions.

The wave functions $|\,\psi\,\rangle$ describing the possible states of a quantum-mechanical system form a linear vector space $\mathcal{H}$ which, in general, is infinite-dimensional and on which a positive-definite inner product $\langle\,\phi\,|\,\psi\,\rangle$ is defined for any two wave functions $|\,\phi\,\rangle$ and $|\,\psi\,\rangle$ (*i.e.* they form a Hilbert space). The inner product usually involves an integration over the whole configuration or momentum space and, for particles of non-vanishing spin, a summation over the spin indices.

If the wave functions in question refer to a free particle and satisfy relativistic wave equations, there exists a correspondence between the wave functions describing the same state in different Lorentz frames. The transformations considered here form the group of all *inhomogeneous* Lorentz transformations (including translations of the origin in space and time). Let $|\,\psi\,\rangle$ and $|\,\psi\,\rangle'$ be the wave functions of the same state in two Lorentz frames L and L', respectively. Then $|\,\psi\,\rangle' = U(\Lambda,a)\,|\,\psi\,\rangle$, where $U(\Lambda,a)$ is a linear unitary operator which depends on the transformation (Λ,a) leading from L to L'. By a proper normalization, U is determined by Λ up to a factor ± 1. Moreover, the operators U form a single- or double-valued representation of the inhomogeneous Lorentz group, *i.e.*, for a succession of two transformations (Λ_1,a_1) and (Λ_2,a_2), we have

$$U(\Lambda_2,a_2)U(\Lambda_1,a_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1, a_2+\Lambda_2 a_1)\,. \tag{2.1}$$

Since all Lorentz frames are equivalent for the description of our system, it follows that, together with $|\,\psi\,\rangle$, $U(\Lambda,a)\,|\,\psi\,\rangle$ is also a possible state viewed from the original Lorentz frame L. Thus, the vector space $\mathcal{H}$ contains, with every $|\,\psi\,\rangle$, all transforms $U(\Lambda,a)\,|\,\psi\,\rangle$, where (Λ,a) is any inhomogenous Lorentz transformation.

The operators U may also replace the wave equation of the system. In our discussion, we use the wave functions in the "Heisenberg" representation, so that a given $|\,\psi\,\rangle$ represents the system for all times, and may be chosen as the "Schrödinger" wave function at time $t=0$ in a given Lorentz frame L. To find $|\,\psi\,\rangle_{t_0}$, the Schrödinger function at time t_0, one must therefore transform to a frame L' for which $t' = t - t_0$, while all other coordinates remain unchanged. Then $|\,\psi\,\rangle_{t_0} = U(\Lambda,a)\,|\,\psi\,\rangle$, where (Λ,a) is the transformation leading from L to L'.

A classification of all unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *i.e.* of all solution of (2.1), amounts, therefore, to a classification of all possible relativistic wave equations. Two reps U and $\widetilde{U} = VUV^{-1}$, where V is a fixed unitary operator, are equivalent. If the system is described by wave functions $|\,\psi\,\rangle$, the description by

$$|\,\widetilde{\psi}\,\rangle = V\,|\,\psi\,\rangle \tag{2.2}$$

is isomorphic with respect to linear superposition, with respect to forming the inner product of two wave functions, and also with respect to the transition from one Lorentz frame to another. In fact, if $|\,\psi\,\rangle' = U(\Lambda,a)\,|\,\psi\,\rangle$, then

$$|\,\widetilde{\psi}\,\rangle' = V\,|\,\psi\,\rangle' = VU(\Lambda,a)V^{-1}|\,\widetilde{\psi}\,\rangle = \widetilde{U}(\Lambda,a)|\,\widetilde{\psi}\,\rangle\,.$$

Thus, one obtains classes of equivalent wave equations. Finally, it is sufficient to determine the irreducible representations (irreps) since any other may be built from them.

Two descriptions which are equivalent according to (2.2) may be quite different in appearance. The best known example is the description of the electromagnetic field by the fieldstrength and

the vector potential, respectively. It cannot be claimed either that equivalence in the sense of (2.2) implies equivalence in every physical aspect. It should be emphasized that any selection of one among the equivalent systems involves an explicit or implicit assumption as to possible interactions, *etc.* Our analysis is necessarily restricted to free particles and does not lead to any assertion about possible interactions.

The present discussion is not based on any hypothesis about the structure of the wave equations provided that they be covariant. In particular, it is not necessary to assume differential equations in configuration space. But it is a result of the group-theoretical analysis that every irreducible wave equation is equivalent, in the sense of (2.2), to a system of differential equations for fields on Minkowski spacetime.

Remarks:

• An important theorem proved by Wigner is that any symmetry transformation that is continuously related to the identity must be represented by a linear unitary operator (see *e.g.* the appendix A of [5]). Strictly speaking, physical states are represented by *rays* in a Hilbert space. Therefore the unitary representations of the symmetry group are actually understood to be *projective* representations. In spacetime dimensions $D \geqslant 4$, this subtlety reduces to the standard distinction between single and double valued representations of the Poincaré group, as was taken for granted in the text.

• Notice that the previous discussion remains entirely valid if the Minkowski spacetime $\mathbb{R}^{D-1,1}$ is replaced everywhere by any other maximally symmetric spacetime (*i.e.* de Sitter spacetime dS_D, or anti de Sitter spacetime AdS_D) under the condition that the inhomogeneous Lorentz group $IO(D-1,1)$ be also replaced everywhere by the corresponding group of isometries (respectively, $O(D,\,1)$ or, $O(D-1,\,2)$).

• In first-quantization, particles are described by fields on the spacetime and isometries are represented by unitary operators. A particle is said to be "elementary" if the representation is irreducible, and "composite" if the representation is made of a product of irreps. In second-quantization, a unitary representation of the isometry group describes the one-particle Hilbert space of states.

Another point of view: On the one hand, the rules of quantum mechanics imply that quantum symmetries correspond to unitary representations of the symmetry group carried by the Hilbert space of physical states. Furthermore, if time translations are a one-parameter subgroup of the symmetry group, then the Schrödinger equation is essentially a unitary representation of this subgroup. On the other hand, the principle of relativity dictates that the isometries of spacetime be symmetries of the physical system. All together, this implies that linear relativistic wave equations may be identified with unitary reps of the isometry group.

3 Classification of the unitary representations

3.1 Induced representations

The method of induced reps was introduced by Wigner in his seminal paper [6] on the unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group $IO(3,1)$ in four spacetime dimensions, which admits a straightforward generalization to any spacetime dimension D, as reviewed now. The content of this subsection finds its origin in the section 2.5 of the comprehensive textbook [5].

From (1.3) one sees that all the translation generators commute with each other, so it is natural to express physical states $|\,\psi\,\rangle$ in terms of eigenvectors of the translation generators P^μ. Introducing a label σ to denote all other degrees of freedom, one thus considers states $\Psi_{q,\sigma}$ with $P_\mu \Psi_{q,\sigma} = q_\mu \Psi_{q,\sigma}$. From the infinitesimal translation $U = \mathbf{1} - iP^\mu \epsilon_\mu$ and repeated applications of it, one finds that finite translations are represented on $\mathcal{H}$ by $U(\,\mathbf{1}, a) = \exp(-i\,P^\mu a_\mu)$, so one has

$$U(\,\mathbf{1}, a)\,\Psi_{q,\sigma} \;=\; e^{-i\,q\cdot a}\,\Psi_{q,\sigma}\,.$$

Using (1.2), one sees that the effect of operating on $\Psi_{p,\sigma}$ with a quantum homogeneous transformation $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$ is to produce an eigenvector of the translation generators with eigenvalue

Λp :

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda)[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda)(\Lambda^{-1}{}_\rho{}^\mu P^\rho)\Psi_{p,\sigma} \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}\,, \end{aligned}$$

since $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\rho$. Hence $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ must be a linear combination of the states $\Psi_{\Lambda p,\sigma}$:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,. \tag{3.1}$$

In general, it is possible by using suitable linear combinations of the $\Psi_{p,\sigma}$ to choose the σ labels in such a way that the matrix $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ is block-diagonal; in other words, so that the $\Psi_{p,\sigma}$ with σ within any one block *by themselves* furnish a representation of the Poincaré group. It is natural to identify the states of a specific particle type with the components of a representation of the Poincaré group which is irreducible, in the sense that it cannot be further decomposed in this way. It is clear from (3.1) that all states $\Psi_{p,\sigma}$ in an irrep of the Poincaré group have momenta p belonging to the orbit of a single fixed momentum, say q^μ.

One has to work out the structure of the coefficients $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ in irreducible representations of the Poincaré group. In order to do that, note that the only functions of p^μ that are left invariant by all transformations $\Lambda^\mu{}_\nu \in SO(D-1,1)^\uparrow$ are, of course, $p^2 = \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ and, for $p^2 \leqslant 0$, also the sign of p^0 . Hence, for each value of p^2 , and (for $p^2 \leqslant 0$) each sign of p^0 , one can choose a standard four-momentum, say q^μ , and express any p^μ of this class as

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)q^\nu\,,$$

where $L^\mu{}_\nu$ is some standard proper orthochronous Lorentz transformation that depends on p^μ , and also implicitly on our choice of q^μ . One can define the states $\Psi_{p,\sigma}$ of momentum p^μ by

$$\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p)\,U\Big(L(p)\Big)\,\Psi_{q,\sigma}\,, \tag{3.2}$$

where $N(p)$ is a numerical normalization factor. Operating on (3.2) with an arbitrary homogeneous Lorentz transformation $U(\Lambda)$, one now finds

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= N(p)\,U\Big(\Lambda L(p)\Big)\,\Psi_{q,\sigma} \\ &= N(p)\,U\Big(L(\Lambda p)\Big)\,U\Big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\Big)\Psi_{q,\sigma}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

The point of this last step is that the Lorentz transformation $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ takes q to $L(p)q = p$, then to Λp , and finally back to q , so it belongs to the subgroup of the Lorentz group consisting of Lorentz transformations $W^\mu{}_\nu$ that leave q^μ invariant : $W^\mu{}_\nu q^\nu = q^\mu$. This stability subgroup is called the *little group* corresponding to q . For any $W, \bar{W}$ in the little group, one has

$$U(W)\Psi_{q,\sigma} = \sum_{\sigma'} D^q_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{q,\sigma'} \tag{3.4}$$

and

$$D^q_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D^q_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})D^q_{\sigma''\sigma}(W)\,,$$

that is to say, the coefficients $D^q(W)$ furnish a representation of the little group. In particular, for $W(\Lambda,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$, (3.3) becomes

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))U\Big(L(\Lambda p)\Big)\Psi_{q,\sigma'}$$

or, recalling the definition (3.2),

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\big(W(\Lambda,p)\big)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,. \tag{3.5}$$

Apart from the question of normalization, the problem of determining the coefficients $C_{\sigma'\sigma}$ in the transformation rule (3.1) has been reduced to the problem of determining the coefficients

$D_{\sigma'\sigma}$. In other words, the problem of determining all possible irreps of the Poincaré group has been reduced to the problem of finding all possible irreps of the little group, depending on the class of momentum to which q^μ belongs. This approach, of deriving representations of a semi-direct product like the inhomogeneous Lorentz group from the representations of the stability subgroup, is called the *method of induced representations*.

The wave function $\Psi_{p,\sigma}$ depends on the momentum, therefore its Fourier transform $\Psi_{x,\sigma}$ depends on the spacetime coordinate, so that the wave function is called a (complex) *field* on Minkowski spacetime $\mathbb{R}^{D-1,1}$ and the quantities $\Psi_{x,\sigma}$ at fixed x and for varying σ are referred to as its *physical components* at x.

3.2 Orbits and stability subgroups

The orbit of a given non-vanishing vector q^μ of Minkowski spacetime $\mathbb{R}^{D-1,1}$ under Lorentz transformations is, by definition, the hypersurface of constant momentum square p^2. Geometrically speaking, it is a quadric of curvature radius $m > 0$. More precisely, the hypersurface

- $p^2 = -m^2$ is a two-sheeted hyperboloid, each sheet of which is called a *mass-shell*. The corresponding UIR is said to be *massive*.
- $p^2 = 0$ is a cone, each half of which is called a *light-cone*. The corresponding UIR is said to be *massless* ($m = 0$).
- $p^2 = +m^2$ is a one-sheeted hyperboloid. The corresponding UIR is said to be *tachyonic*.

Orthochronous Lorentz transformations preserve the sign of the time component of vectors of non-positive momentum-squared, thus the orbit of a time-like (light-like) vector is the mass-shell (respectively, light-cone) to which the corresponding vector belongs.

Remarks:
• Notice that the Hilbert space carrying the irrep is indeed an eigenspace of the quadratic Casimir operator (1.5), the eigenvalue of which is $\mathcal{C}_2 = \pm\, m^2$ (the eigenvalue is real because the representation is unitary), as it should according to Schur's lemma. Moreover, the quadratic Casimir classifies the UIRs but does not entirely characterize them.
• As quoted in Section 2, it is not necessary to assume differential equations in position space, because the group-theoretical analysis leads directly to a wave function which is a function of the momenta on the orbit, the Fourier transform of which is a function in position space obeying the Klein–Gordon equation $\Box\, \Psi_{x,\sigma} = \pm\, m^2\, \Psi_{x,\sigma}$.

By going to a rest-frame, it is easy to show that the stabilizer of a time-like vector $q^\mu = (m, \overrightarrow{0}) \neq 0$ is the rotation subgroup $SO(D-1) \subset SO(D-1,1)^\uparrow$. For a space-like vector, one may choose a frame such that the non-vanishing momentum is along the $(D-1)$th spatial axis: $q^\mu = (0, 0, \ldots, 0, m) \neq 0$. Thus its stabilizer is the subgroup $SO(D-2,1)^\uparrow \subset SO(D-1,1)^\uparrow$. In the case of a light-like vector, the little group "*is not quite so obvious*" to determine, as was stressed by Wigner himself [7]. It clearly contains the rotation group $SO(D-2)$ in the space-like hyperplane $\mathbb{R}^{D-2}$ transverse to the light-ray along the momentum. Now, we will provide an algebraic proof that the stabilizer of a light-like vector is the Euclidean group $ISO(D-2)$. According to Wigner, reviewing his $D = 4$ analysis, "*no simple argument is known (...) to show directly that the group of Lorentz transformations which leave a null vector invariant is isomorphic to the two-dimensional Euclidean group, desirable as it would be to have such an argument. Clearly, there is no plane in the four-space of momenta in which these transformations could be interpreted directly as displacements (...) because all transformations considered here are homogeneous*" [7]. Even though there is no simple geometric way to understand this fact, the algebraic proof reviewed here is rather straightforward.

Proof: By going in a light-cone frame (see Section 1.1), it is possible to express the components of a momentum p^μ obeying $p^2 = 0$ as $p_\mu = (p_-, 0, 0, \ldots, 0)$. In words, one can set the component p_+ to zero, as well as all the transverse components p_m $(m = 1, \ldots, D-2)$. The condition that the component p_- be unaffected by a Lorentz transformation translates as $0 \stackrel{!}{=} i[p_-, M_{\nu\rho}] = \eta_{-\nu}\, p_\rho - \eta_{-\rho}\, p_\nu$ due to (1.2). Obviously, the transformation generated by M_{+-} does modify p_-, hence it cannot be part of the little group for p. The other Lorentz generators preserve p_-, but they should also satisfy the equations $[p_m, M_{\mu\nu}] = 0 = [p_+, M_{\mu\nu}]$. It is readily seen that

$i[p_m, M_{n-}] = \delta_{mn} p_- \neq 0$ (for $m = n$), therefore M_{n-} does not belong to the little group of p_μ either. We are left with the generators $\{M_{mn}, M_{+n}\}$ which preserve the (vanishing) value of p_+. It turns out to be more convenient for later purpose to work with the generators $\pi_n := p_- M_{+n} = p^\mu M_{\mu n}$ instead. This redefinition does not modify the algebra since p_- commutes with all the generators of the little group. From the Poincaré algebra (1.1)–(1.3) one finds, in the light-cone frame,

$$i\,[M_{mn}, M_{pq}] = \delta_{np} M_{mq} - \delta_{mp} M_{nq} - \delta_{qm} M_{pn} + \delta_{qn} M_{pm}\,, \tag{3.6}$$

$$i\,[\pi_m, M_{np}] = \delta_{mn} \pi_p - \delta_{mp} \pi_n\,, \tag{3.7}$$

$$i\,[\pi_m, \pi_n] = 0\,. \tag{3.8}$$

As can be seen, the generators $\{M_{mn}, \pi_m\}$ span the Lie algebra of the inhomogeneous orthogonal group $ISO(D-2)$. □

For later purpose, notice that the quadratic Casimir operator of the Euclidean algebra $\mathfrak{iso}(D-2)$ presented by the generators $\{M_{mn}, \pi_m\}$ and the relations (3.6)-(3.8) is the square of the "translation" generators

$$\mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{iso}(D-2)\Big) = \pi^m \pi_m\,. \tag{3.9}$$

To end up this discussion, one should consider the case of a vanishing momentum. Of course, the orbit of a vanishing vector under linear transformations is itself while its stabilizer is the whole linear subgroup. Therefore, the subgroup of $SO(D-1,1)^\uparrow$ leaving invariant the zero-momentum vector $p^\mu = 0$ is the whole group itself. This ends up the determination of the orbit and stabilizer of any possible vector $\in \mathbb{R}^{D-1,1}$.

Remark: The zero-momentum ($q^\mu = 0$) representations are essentially UIRs of the little group $SO(D-1,1)^\uparrow$ because the translation group acts trivially. The proper orthochronous Lorentz group may be identified with the isometry group of the de Sitter spacetime dS_{D-1}. In other words, the wave function of the zero-momentum representation may be interpreted as a wave function on a lower-dimensional de Sitter spacetime, and conversely. Even though their physical meaning may differ, both UIRs may be mathematically identified.

3.3 Classification

To summarize the previous subsection, the UIRs of the Poincaré group $ISO(D-1,1)^\uparrow$ have been divided into four classes according to the four possible orbits of the momentum, summarized in the following table (where $m^2 > 0$):

Gender	Orbit	Stability subgroup	UIR
$p^2 = -m^2$	Mass-shell	$SO(D-1)$	Massive
$p^2 = 0$	Light-cone	$ISO(D-2)$	Massless
$p^2 = +m^2$	Hyperboloid	$SO(D-2,1)^\uparrow$	Tachyonic
$p_\mu = 0$	Origin	$SO(D-1,1)^\uparrow$	Zero-momentum

The problem of classifying the UIRs of the Poincaré group $ISO(D-1,1)^\uparrow$ has been reduced to the classication of the UIRs of the stability subgroup of the momentum, which are either a unimodular orthogonal group, an Euclidean group or a proper orthochronous Lorentz group.

Actually, the method of induced representation may also be applied to the classification of the UIRs of the Euclidean group $ISO(D-2)$, the little group of a massless particle. The important thing to understand is that the light-like momentum p^μ is fixed and that what should be examined is the action of the little group on the physical components characterized by σ. From (3.8) one sees that the $D-2$ "translation" generators π^i commute with each other, so it is natural to express physical states $\Psi_{p,\sigma}$ in terms of eigenvectors ξ^m of these generators π^m. Introducing a label ς to denote all remaining physical components, one thus considers states $\Psi_{p,\xi,\varsigma}$ with $\pi_m \Psi_{p,\xi,\varsigma} = \xi_m \Psi_{p,\xi,\varsigma}$. The discussion presented in Subsection 3.1 may be repeated almost identically, up to the replacement of the momentum p by the eigenvector ξ, the label σ by ς, the Poincaré group $ISO(D-1,1)^\uparrow$ by the Euclidean group $ISO(D-2)$ and the proper orthochronous Lorentz group $SO(D-1,1)^\uparrow$ by the unimodular orthogonal group $SO(D-2)$. The conclusion is therefore similar: the problem of determining all possible irreps of the massless little group $ISO(D-2)$ has been reduced to the problem of finding all possible irreps of the stability subgroup of the $(D-2)$-vector ξ, called the *short little group* in the literature [8].

The massless representations induced by a non-trivial representation of the little group may therefore be divided into distinct categories, depending on the class of momentum to which ξ^m belongs. The situation is simpler here because there exist only two possible classes of orbits for a vector in the Euclidean space $\mathbb{R}^{D-2}$: either the origin $\xi^m = 0$, or a $(D-3)$-sphere of radius $\mu > 0$. In the first case, the action of the elusive "translation" operators π^m is trivial and, effectively, the little group is identified with the short little group $SO(D-2)$. These representations are most often referred to as *helicity* representations by analogy with the $D = 4$ case. In the second case, the corresponding representations are most often referred to as *continuous spin* representations [8], even though Wigner also used the name *infinite spin* [7]. The former name originates from the fact that the transverse vector ξ^m has a continuous range of values. Nevertheless, the latter name is more adequate in some respect, as will be argued later on. Roughly speaking the point is that, on the orbit $\xi^2 = \mu^2$, the components spanned by the internal vector ξ^m take values on the sphere $S^{D-3} \subset \mathbb{R}^{D-2}$ of radius $\mu = |\xi|$. The "radius" μ of this internal sphere has actually the dimension of a mass parameter (the reason is that the sphere S^{D-3} is somehow in internal "momentum" space). Indeed, for massless representations, the parameter μ classifying the various irreps should be understood as the analogue of the mass for massive irreps, while the angular coordinates on the sphere S^{D-3} are the genuine "spin" degrees of freedom, the Fourier conjugates of which are discrete variables as is more usual for spin degrees of freedom. This point of view motivates the name "infinite spin."[3]

To summarize, the UIRs of the Euclidean group $ISO(D-2)$ are divided into two classes according to the two possible orbits of the $(D-2)$-vector ξ_m, summarized in the following table:

Gender	Orbit	Stability subgroup	Massless UIR
$\xi^2 = \mu^2$	Sphere	$SO(D-3)$	Infinite spin
$\xi_m = 0$	Origin	$SO(D-2)$	Helicity

As a consequence of the method of induced representations, the physical components of a first-quantized elementary particle span a UIR of the little group. The number of local degrees of freedom (or of physical components) of the field theory is thus given by the dimension of the Hilbert space carrying the UIR of the little group. In the light of the standard results of representation theory (reviewed in Subsection 1.3) and using the method of induced representation, the UIRs of the Poincaré group may alternatively be divided into two distinct classes: the *finite-component* ones (the massive and the helicity reps) for which the (short) little group is compact, and the *infinite-component* ones (the infinite-spin, the tachyonic and the zero-momentum reps) for which the little group is non-compact.

Remarks:
• More precisely, the lower-dimensional cases $D = 2, 3$ are degenerate in the following sense (when $p^\mu \neq 0$). In $D = 2$, all little groups are trivial, thus all physical fields are scalars. In $D = 3$, all little groups are Abelian (massive: $SO(2)$, massless: $\mathbb{R}$, tachyonic: $SO(1,1)^\uparrow \cong \mathbb{R}$) hence all their UIRs have (complex) dimension one: generically, fields have one physical degrees of freedom. Notice that the helicity reps may be assigned a "*conformal* spin" if they are extended to irreps of the group $SO(D,2) \supset SO(D-1,1)^\uparrow$. Notice also that the "spin" of a massive representation is not discretized in $D = 3$ but is an arbitrary real number[4] [9] because the universal cover of $SO(2,1)^\uparrow$ covers it infinitely often.
• For massive and helicity representations, the number of local physical degrees of freedom may be determined from the well known formulas for the dimension of any UIR of the orthogonal groups (reviewed in Subsection 4.3 for the tensorial irreps).
• This group-theoretical analysis does not probe topological theories (such as Chern-Simons theory) because such theories correspond to identically vanishing representations of the little group since they have no *local* physical degrees of freedom.

The following corollary provides a group-theoretical explanation of the fact that combining the principle of relativity with the rules of quantum mechanics necessarily leads to *field* theory.

Corollary: *Every non-trivial unitary irreducible representation of the isometry group of any maximally-symmetric spacetime is infinite-dimensional.*

[3] Actually, in Subsection 5.3 an explicit derivation of the continuous spin representation from a proper "infinite spin" limit of a massive representation is reviewed. All the former comments find their natural interpretation in this point of view.

[4] This peculiarity is related to the existence of anyons in three spacetime dimensions.

Proof: The Hilbert space carrying a non-trivial unitary representation of the Poincaré group is infinite-dimensional because (i) in the generic case, $q_\mu \neq 0$, the orbit is either a hyperboloid ($p^2 \neq 0$) or a cone ($p^2 = 0$) and the space of wave functions on the orbit is infinite-dimensional, (ii) the zero-momentum representations of the Poincaré group are unitary representations of the de Sitter isometry group. Thus, the proof is ended by noticing that all non-trivial unitary representations of the isometry group of (anti) de Sitter spacetimes $(A)dS_D$ also are infinite-dimensional, because their isometry groups are *pseudo*-orthogonal Lie groups. □

4 Tensorial representations and Young diagrams

Most of the material reviewed here may be found in textbooks such as [10]. Nevertheless, large parts of this section are either copied or adapted from the reference [11] because altogether it provides an excellent summary, both for its pedagogical and comprehensive values. The material collected in the present section goes slightly beyond what is strictly necessary for these lectures, but the reader may find it useful in specific applications.

4.1 Symmetric group

An (unlabeled) *Young diagram*, consisting of n boxes arranged in r (left justified) rows, represents a *partition* of the integer n into r *parts*:

$$n = \sum_{a=1}^{r} \lambda_a \qquad (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r)\,.$$

That is, λ_a is the number of boxes in the ath row. Successive row lengths are non-increasing from top to bottom. A simpler notation for the partition is the list of its parts: $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$. For instance,

$\{3,3,1\} =$  .

Examples: There are five partitions of 4:

$$\{4\}, \{3,1\}, \{2,2\}, \{2,1,1\}, \{1,1,1,1\}\,. \tag{4.1}$$

Partitions play a key role in the study of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$. This is the group of all permutations of n objects. It has $n!$ elements and *its inequivalent irreducible representations may be labeled by the partitions of* n. [In the following, Greek letters λ, μ and ν will be used to specify not only partitions and Young diagrams but also irreducible representations of the symmetric group and other groups.]

The connection between the symmetric group and tensors was initially developed by H. Weyl. This connection can be approached in (at least) two equivalent ways.

A. Let $T_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ be a 'generic' n-index tensor, without any special symmetry property. [For the moment, 'tensor' just means a function of n indices, not necessarily with any geometrical realization. It must be meaningful, however, to *add* — and form linear combinations of — tensors of the same rank.] A *Young tableau*, or labeled Young diagram, is an assignment of the numbers $1, 2, \ldots, n$ to the n boxes of a Young diagram λ. The tableau is *standard* if the numbers are increasing both along rows from left to right and down columns from top to bottom. The entries $1, \ldots, n$ in the tableau indicate the n successive indices of $T_{\mu_1 \ldots \mu_n}$. The tableau defines a certain symmetrization operation on these indices: *symmetrize* on the set of indices indicated by the entries in each row, then *antisymmetrize* the result on the set of indices indicated by the entries in each column. The resulting object is a tensor, $\widetilde{T}$, with certain index symmetries. Now let each permutation of $\mathfrak{S}_n$ act (separately) upon $\widetilde{T}$. The $n!$ results are not linearly independent; they span a vector space $V_\lambda^{\mathfrak{S}_n}$ which supports an irreducible representation of $\mathfrak{S}_n$. Different tableaux corresponding to the same diagram λ yield equivalent (by not identical) representations.

Example: The partition $\{2,2\}$ of 4 has two standard tableaux:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array} \quad . \tag{4.2}$$

Let us construct the symmetrized tensor $\widetilde{T}_{abcd} := R_{ab|cd}$ corresponding to the second of these:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a&c\\\hline b&d\\\hline\end{array} \quad . \tag{4.3}$$

First symmetrize over the first and third indices (a and c), and over the second and fourth (b and d):

$$\frac{1}{4}\left(T_{abcd}+T_{cbad}+T_{adcb}+T_{cdab}\right).$$

Now antisymmetrize the result over the first and second indices (a and b), and over the third and fourth (c and d);[5] dropping the combinatorial factor $\frac{1}{16}$, we get

$$\begin{aligned} R_{ab|cd} &= T_{abcd}+T_{cbad}+T_{adcb}+T_{cdab}-T_{bacd}-T_{cabd}-T_{bdca}-T_{cdba} \\ &- T_{abdc}-T_{dbac}-T_{acdb}-T_{dcab}+T_{badc}+T_{dabc}+T_{bcda}+T_{dcba}\,. \end{aligned}$$

It is easy to check that R possesses the symmetries of the Riemann tensor. There are two independent orders of its indices (e.g. $R_{ab|cd}$ and $R_{ac|bd}$), and applying any permutation to the indices produces some linear combination of those two basic objects. On the other hand, performing on T the operations prescribed by the first tableau in (4.2) produces a different expression $P_{ac|bd}$, which, however, generates a two-dimensional representation of $\mathfrak{S}_4$ with the same abstract index structure as that generated by R. A non-standard tableau would also yield such a representation, but the tensors within it would be linear combinations of those already found. One finds

$$\begin{aligned} P_{ac|bd} &= T_{abcd}+T_{bacd}+T_{abdc}+T_{badc}-T_{cbad}-T_{bcad}-T_{cbda}-T_{bcda} \\ &- T_{adcb}-T_{dacb}-T_{adbc}-T_{dabc}+T_{cdab}+T_{dcab}+T_{cdba}+T_{dcba}\,. \end{aligned}$$

As the reader may check, no linear combinations of P can reproduce R. The objects $P_{ab|cd}$, $P_{ac|bd}$, $R_{ab|cd}$ and $R_{ac|bd}$ are linearly independent. Although R and P are characterized by the same Young *diagram*, they are associated with different standard Young *tableaux* and therefore span two *different* irreducible representations of $\mathfrak{S}_n$.

Example: Define a *symmetrized Riemann tensor* (the *Jacobi tensor*) by $J_{ad;bc} := \frac{1}{2}\left(R_{ab|cd} + R_{ac|bd}\right)$. It obeys $J_{ab;cd} = J_{ba;cd} = J_{ab;dc}$. Then it is easy to show that $R_{ab|cd} = \frac{2}{3}\left(J_{ad;bc} - J_{bd;ac}\right)$. Thus the tensor J has no fewer independent components and contains no less information than the tensor R, despite the extra symmetrization; R is recovered from J by an antisymmetrization. The tensors R and J are really the same tensor expressed with respect to different bases.

B. The *regular representation* of $\mathfrak{S}_n$ is the $n!$-dimensional representation obtained by letting $\mathfrak{S}_n$ act by left multiplication on the formal linear combinations of elements of $\mathfrak{S}_n$. [That is, one labels the basis vectors of $\mathbb{R}^{n!}$ by elements of $\mathfrak{S}_n$, defines that action of each permutation on the basis vectors in the natural way, and extends this definition to the whole space by linearity.] Equivalently, the vector space of the regular representation is the space of real-valued functions defined on $\mathfrak{S}_n$. [In general the regular representation is defined with complex scalars, but for $\mathfrak{S}_n$ it is sufficient to work with real coefficients.]

Regular representation: *The regular representation contains every irreducible representation with a multiplicity equal to its dimension. Each Young diagram λ corresponds to an irreducible representation of $\mathfrak{S}_n$. Its dimension and multiplicity are equal to the number of standard tableaux of diagram λ.*

[5] Here we adopt the convention that the second round of permutations interchanges indices with the same *names*, rather than indices in the same *positions* in the various terms. The opposite convention is tantamount to antisymmetrizing *first*, which leads to a different, but mathematically isomorphic, development of the representation theory. The issue here is analogous to the distinction between space-fixed and body-fixed axes in the study of the rotation group (active or passive transformations).

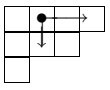
The symmetrization procedure described under **A.** can be transcribed to the more abstract context **B.** to construct a projection operator onto the subspace of $\mathbb{R}^{n!}$ supporting each representation. [The numerical coefficient needed to normalize the tableau operation as a projection — an operator whose square is itself — is not usually the same as that accumulated from the individual symmetrization operations. For example, to make R_{abcd} into a projection of T_{abcd}, one needs to divide by 12, not 16.]

Example: In (4.1), the partition $\{4\}$ corresponds to the totally symmetric four-index tensors, a one-dimensional space $V_{\{4\}}^{\mathfrak{S}_4}$. Similarly, $\{1,1,1,1\}$ yields the totally antisymmetric tensors. A generic rank-four tensor, T_{abcd}, can be decomposed into the sum of its symmetric and antisymmetric parts, plus a remainder. The theory we are expounding here tells how to decompose the remainder further. The partition $\{2,2\}$ yields two independent two-dimensional subrepresentations of the regular representation; in more concrete terms, there are two independent pieces of T_{abcd} ($\frac{1}{12}\,R_{ab|cd}$ and $\frac{1}{12}\,P_{ac|bd}$) constructed as described in connection with (4.2). One of these ($R_{ab|cd}$) has exactly the symmetries of the Riemann tensor; the other ($P_{ac|bd}$, coming from the first tableau of (4.2)) has the same abstract symmetry as the Riemann tensor, but with the indices ordered differently. Finally, each of the remaining partitions in (4.1) can be made into a standard tableau in three different ways. Therefore, each of these two representations has three separate pieces of T corresponding to it, and each piece is three-dimensional (has three independent index orders after its symmetries are taken into account). Thus the total number of independent tensors which can be formed from the irreducible parts of T_{abcd} by index permutations is

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24 = 4!$$

which is simply the total number of permutations of the indices of T itself, as it must be.

To state a formula for the dimension of an irreducible representation $V_\lambda^{\mathfrak{S}_n}$ of $\mathfrak{S}_n$, we need the concept of the hook length of a given box in a Young diagram λ. The *hook length* of a box in a Young diagram is the number of squares directly below or directly to the right of the box, including the box once:



.

Example: In the following diagram, each box is labeled by its hook length:

6	4	3	1
4	2	1	
1			

.

One then has the following *hook length formula* for the dimension of the representation $V_\lambda^{\mathfrak{S}_n}$ of $\mathfrak{S}_n$ corresponding to the Young diagram λ:

$$\dim V_\lambda^{\mathfrak{S}_n} = \frac{n!}{\prod(\text{ hook lengths})}\,. \tag{4.4}$$

Remark: Note carefully that the "dimension" we have been discussing up to now is the number of independent *index orders* of a tensor, not the number of independent *components* when the tensor is realized geometrically with respect to a particular underlying vector space or manifold. The latter number depends on the dimension (say D) of that underlying space, while the former is independent of D (so long as D is sufficiently large, as we tacitly assume in generic discussions). For example, the number of components of an antisymmetric two-index tensor is $\frac{D(D-1)}{2}$, but the number of its index orders is always 1, except in dimension $D = 1$ where no non-zero antisymmetric tensors exist at all.

4.2 General linear group

We now turn to the representation theory of the general linear and orthogonal groups, where the (spacetime) dimension D plays a key role. The theory of partitions and of the representations of the permutation groups is the foundation on which this topic is built.

Let $\{v_a\}$ represent a generic element of $\mathbb{R}^D$ (or of the cotangent space at a point of a D-dimensional manifold). The action of non-singular linear operators on this space gives a D-dimensional irreducible representation V of the general linear group $GL(D)$; indeed, this representation defines the group itself. The rank-two tensors, $\{T_{ab}\}$, carry a larger representation of $GL(D)$ ($V \otimes V$, of dimension D^2), where the group elements act on the two indices simultaneously. The latter representation is reducible: it decomposes into the subspace of symmetric and antisymmetric rank-two tensors $V \otimes V \cong (V \odot V) \oplus (V \wedge V)$, of respective dimensions $\frac{D(D+1)}{2}$ and $\frac{D(D-1)}{2}$. Similarly, the tensor representation of rank n, $V^{\otimes n}$, decomposes into irreducible representations of $GL(D)$ which are associated with the irreducible representations of $\mathfrak{S}_n$ acting on the indices, which in turn are labeled by the partitions of n , hence by Young diagrams. Young diagrams with more than D rows do not contribute [if λ is a partition of n into more than D parts, then the associated index symmetrization of a D-dimensional rank-n tensor yields an expression that vanishes identically; in particular, there are no non-zero totally antisymmetric rank-n tensors if $n > D$].

More precisely, let λ be a Young *tableau*. The *Schur module* $V_\lambda^{GL(D)}$ is the vector space of all rank-n tensors $\tilde{T}$ in $V^{\otimes n}$ such that:

(i) the tensor $\tilde{T}$ is completely antisymmetric in the entries of each column of λ ,

(ii) complete antisymmetrization of $\tilde{T}$ in the entries of a column of λ and another entry of λ that is on the right-hand side of the column vanishes.

This construction is equivalent to the construction **A.**

Example: Associated with the Young tableau (4.3), the tensor $R_{ab|cd}$ introduced in the subsection 4.1 obeys to the conditions (i) and (ii): $R_{ab|cd} = -R_{ba|cd} = -R_{ab|dc}$ and $R_{ab|cd} + R_{bc|ad} + R_{ca|bd} = 0$.

As explained in the footnote 5, if one interchanges everywhere in the previous constructions the words "symmetric" and "antisymmetric," then the (reducible) representation spaces characterized by the same Young *diagram* [but not by the same Young *tableau*] are isomorphic and the conditions (i)-(ii) must be replaced with:

(a) the tensor is completely symmetric in the entries of each column of λ,

(b) complete symmetrization of the tensor in the entries of a row of λ and another entry of λ that sits in a lower row vanishes.

Example: Taking the standard Young tableau (4.3) and constructing, following the "manifestly symmetric convention", the irreducible tensor associated with it, one obtains a tensor $\mathcal{R}$ with the same abstract index symmetries as J [*i.e.* obeying the constraints (a) and (b)] but which is however linearly independent from J , thence linearly independent from R alone. The tensor $\mathcal{R}$ can be expressed as a linear combination of *both* R *and* P . Similarly, taking the first standard Young tableau in (4.2) and following the manifestly symmetric convention, one obtains a tensor $\mathcal{P}$ obeying (a) and (b). This tensor is linearly independent from P alone as it is a linear combination of *both* P and R . Summarizing, associated with the Young *diagram* $\{2, 2\}$ we have the (reducible) representation space spanned by either $\{R, P\}$ in the manifestly antisymmetric convention or by $\{\mathcal{R}, \mathcal{P}\}$ in the manifestly symmetric convention.

Remarks:

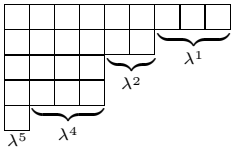
• An important point to note is that, by the previous construction featuring irreducible tensors with definite symmetry properties, we have got *all* the finite-dimensional irreducible representations of $GL(D, \mathbb{R})$.

• In order to make contact with an alternative road to the representation theory of $GL(D)$, one says that the irreducible representation $\Gamma_{\lambda^1 \dots \lambda^{D-1}}$ of $\mathfrak{sl}(D, \mathbb{C}) \equiv A_{D-1}$ with highest weight $\Lambda = \lambda^1 \Lambda_{(1)} + \lambda^2 \Lambda_{(2)} + \ldots + \lambda^{D-1} \Lambda_{(D-1)}$ [see *e.g.* the Part II of the lecture notes [3] for definitions and notations] is obtained by applying the Schur functor $\mathbb{S}_\lambda$ [*i.e.* the construction presented above] to the standard representation V, where the Young diagram is

$$\lambda = \{\lambda^1 + \ldots + \lambda^{D-1} \, , \, \lambda^2 + \ldots + \lambda^{D-1} \, , \, \ldots \, , \, \lambda^{D-1} \, , \, 0\} \, .$$

In terms of the Young diagram for λ , the Dynkin labels λ^a ($1 \leqslant a \leqslant D-1$) are the differences of lengths of rows: $\lambda^a = \lambda_a - \lambda_{a+1}$.

Example: If $D = 6$, then



is the Young diagram corresponding to the irrep $\Gamma_{3,2,0,3,1}$ of $A_5 \equiv \mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$.

The dimension of the representation $V_\lambda^{GL(D)}$ of $GL(D)$ corresponding to the Young diagram λ is:

$$\dim V_\lambda^{GL(D)} = \prod \frac{D - \text{row} + \text{column}}{\text{hook length}}\,, \tag{4.5}$$

where the product is over the n boxes while "row" and "column" respectively give the place of the corresponding box. As was underlined before, the formula (4.5) is distinct from the hook length formula (4.4).

Examples:
• In the following diagram

5	6	7	8
4	5	6	
3			

,

each box is labeled by its value in the numerator of (4.5) for $D = 5$. Observe that, for the corresponding diagram λ, $\dim V_\lambda^{GL(5)} = 1050 \neq 70 = \dim V_\lambda^{\mathfrak{S}_8}$.
• The space of (anti)symmetric tensors of V of rank n are denoted by $\odot^n(V)$ (respectively, $\wedge^n(V)$). It carries an irreducible representation of $GL(D)$ labeled by a Young diagram made of one row (respectively, column) of length n. The dimensions

$$\dim \odot^n(V) = \begin{pmatrix} D+n-1 \\ n \end{pmatrix}, \qquad \dim \wedge^n(V) = \begin{pmatrix} D \\ n \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

are easily computed from the formula (4.5) and reproduce the standard results obtained from combinatorial arguments.

If T_1 and T_2 are tensors of ranks n_1 and n_2, then their product is a tensor of rank $n_1 + n_2$. Each factor T_j transforms under index permutation according to some representation of $\mathfrak{S}_{n_j}$, and under linear transformation by the corresponding representation of $GL(D)$. It follows immediately that the product tensor $T_1 \otimes T_2$ transforms as some representation of $\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2}$. This *induces* a representation of the full permutation group $\mathfrak{S}_{n_1+n_2}$ which is associated with a corresponding representation of $GL(D)$, called *Kronecker product*. It is possible to reduce these last two representations into a sum of irreducible ones. We may assume that the factor representations are irreducible, since the original tensors T_j could have been broken into irreducible parts at the outset.

Littlewood–Richardson rule: The decomposition of an "outer product" $\mu \cdot \nu$ of irreducible representations μ and ν of $\mathfrak{S}_{n_1}$ and $\mathfrak{S}_{n_2}$, respectively, into irreducible representations of $\mathfrak{S}_{n_1+n_2}$ can be determined by means of the following algorithm involving Young diagrams. The product is commutative, so it does not matter which factor is regarded as the "right-hand" one. [In practice, on should choose the simpler Young diagram for that role.]

(I) Label each box in the top row of the right-hand diagram, ν, by "a", each box in the second row by "b", etc.

(II) Add the labeled boxes of ν to the left-hand diagram μ, one at a time, first the as, then the bs, ..., subject to these constraints:

(A) No two boxes in the same column are labeled with the same letter;

(B) At all stages the result is a legitimate Young diagram;

(C) At each stage, if the letters are read right-to-left along the rows, from top to bottom, one never encounters more bs than as, more cs than bs, etc.

(III) Each of the distinct diagrams constructed in this way specifies an irreducible subrepresentation λ, appearing in the decomposition of the outer product. The same labeled Young diagram may arise in more than one way; the multiplicity of that representation must be counted accordingly.

Remarks:
• This rule enables products of *distinct* tensors to be decomposed. When the factors are the same tensor, the list is further restricted by the requirement of symmetry under interchange of the factors. This is the problem of *plethysm*, whose solution requires more complicated techniques than the Littlewood–Richardson rule.
• Representations with too many parts (columns of length greater than D) must be deleted from the list of subrepresentations of the $GL(D)$. [If irreducible representations of the special linear group $SL(D)$ are considered instead, every column of length D must be removed from the corresponding Young diagram.]

4.3 Orthogonal group

It remains to consider index contractions. Up to now we considered only covariant tensors, because in the intended application there is a metric tensor which serves to relate contravariant and covariant tensors. Contractions are mediated by this metric. Implicitly, therefore, one is restricting the symmetry group of the problem from the general linear group to the subgroup that leaves the metric tensor invariant, the orthogonal group $O(D)$. [If the metric has indefinite signature, the true symmetry group is a non-compact analogue of the orthogonal group, such as the Lorentz group. This does not affect the relevant aspects of the *finite-dimensional* representation theory.] Each irreducible $GL(D)$ representation $V_\lambda^{GL(D)}$ decomposes into irreducible $O(D)$ representations $V_\nu^{O(D)}$, labeled by Young diagrams ν obtained by removing an even number of boxes from λ. The *branching rule* for this process involves a sort of inverse of the Littlewood–Richardson rule:

Restriction from $GL(D)$ to $O(D)$: *The irreps of $GL(D)$ may be reduced to direct sums of irreps of $O(D)$ by extracting all possible trace terms formed by contraction with products of the metric tensor and its inverse.*

The reduction is given by the branching rule for $GL(D) \downarrow O(D)$:

$$V_\lambda^{GL(D)} = V_{\lambda/\Delta}^{O(D)} \equiv V_\lambda^{O(D)} \oplus V_{\lambda/\{2\}}^{O(D)} \oplus V_{\lambda/\{4\}}^{O(D)} \oplus V_{\lambda/\{2,2\}}^{O(D)} \oplus \cdots \tag{4.7}$$

where Δ is the formal infinite sum [12]

$\Delta = 1 +$  $+$  $+$  $+\ldots$

corresponding to the sum of all possible plethysms of the metric tensor, and where λ/μ means the sum of the Young diagrams ν such that $\nu \cdot \mu$ contains λ according to the Littlewood–Richardson rule (with the corresponding multiplicity).

Examples:
• The $GL(D)$ irreducible representation labeled by the Young diagram $\{2,2\}$ decomposes with respect to $O(D)$ according to the direct sum $\{2,2\}/\Delta = \{2,2\}+\{2,0\}+\{0,0\}$ which corresponds to the decomposition of the Riemann tensor into the Weyl tensor, the traceless part of the Ricci tensor and the scalar curvature, respectively.
• The $GL(D)$ irreducible representation labeled by the Young diagram $\{n\}$ decomposes with respect to $O(D)$ according to the direct sum $\{n\}/\Delta = \{n\}+\{n-2\}+\{n-4\}+\ldots$, corresponding to the decomposition of a completely symmetric tensor or rank n into its traceless part, the traceless part of its trace, *etc.* This provides an alternative proof of the obvious fact that the number of independent components of a traceless symmetric tensor of rank n is equal to the number of independent components of a symmetric tensor of rank n minus the number

of independent components of a symmetric tensor of rank $n-2$ (its trace): $\dim V^{O(D-2)}_{\{n\}} = \dim V^{GL(D)}_{\{n\}} - \dim V^{GL(D)}_{\{n-2\}}$. Using the formula (4.6) allows to show that

$$\dim V^{O(D)}_{\{n\}} = \frac{(D+2n-2)(D+n-3)!}{n!(D-2)!}\,. \tag{4.8}$$

The very useful formula (4.8) contains as a particular case the well-known fact that all the traceless symmetric tensorial representations of $O(2)$ are two-dimensional (indeed, any UIR of an Abelian group is of complex dimension one). Moreover, the traceless symmetric tensorial representations of rank n of the rotation group $O(3)$ are the well-known integer spin representations of dimension equal to $2n+1$.

The following theorem is very important (see e.g. the first reference of [10]):

Vanishing irreps for (pseudo-)orthogonal groups: *Whenever the sum of the lengths of the first two columns of a Young diagram λ is greater than D, then the irreducible representation of $O(D)$ labeled by λ is identically zero.*

Young diagrams such that the sum of the lengths of the first two columns does not exceed D are said to be *allowed*.

Finite-dimensional irreps of (pseudo-)orthogonal groups: *Each non-zero finite-dimensional irreducible representation of $O(p,q)$ is isomorphic to a completely traceless tensorial representation, the symmetry properties of which are labeled by an allowed Young diagram λ.*

The dimension of the tensorial irrep is determined by the following rule due to King [13]:

(α) The numbers $D-1$, $D-3$, $D-5$, …, $D-2r+1$are place in the end boxes of the 1st, 2nd, 3rd, …, rth rows of the diagram λ. A labeled Young diagram of n numbers is then constructed by inserting in the remaining boxes of the diagram, numbers which increase by one in passing from one box to its left-hand neighbor.

(β) This labeled Young diagram is extended to the limit of the triangular Young diagram τ of r rows. This produces a Young diagram $\widetilde{\lambda}$ the ath row of which has length equal the maximum between the two integers $\tau_a = r-a+1$ and λ_a.

(γ) The series of numbers in any row of the Young diagram $\widetilde{\lambda}$ is then extended by inserting in the remaining boxes of the diagram, numbers which decrease by one in passing from one box to its right-hand neighbor. The resulting numbers will be called the "King length."

(δ) The row lengths λ_1, λ_2, …, λ_r are then added to all of the numbers of the Young diagram $\widetilde{\lambda}$ which lie on lines of unit slope passing through the first box of the 1st, 2nd, …, rth rows, respectively, of the Young diagram λ.

The dimension is equal to the product of the integers in the resulting labeled Young diagram $\widetilde{\lambda}$ divided by the product of

- the hook length of each box of λ, and of
- the King length of each box of $\widetilde{\lambda}$ outside λ.

Examples:

• In the following diagram, allowed for $D=5$,

7	6	5	4
4	3	2	
0			

,

each box is labeled by its King length, while in the diagram

11	9	6	4
7	4	2	
1			

,

each box is labeled by the number obtained at the very end of King's rule. Observe that, for the corresponding diagram λ, it was not necessary to perform the steps (β)-(γ) and that, $\dim V_\lambda^{O(5)} = 231 < 1050 = \dim V_\lambda^{GL(5)}$.

• In the following Young diagram $\lambda = \{2,2,1\}$, allowed for $D = 5$,

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 5&4\\\hline 3&2\\\hline 0\\\cline{1-1}\end{array} \quad ,$$

each box is labeled by the number obtained after step (α). The step (β) is now necessary and gives the Young diagram $\widetilde{\lambda} = \{3,2,1\}$. At the end of steps ($\gamma$) and ($\delta$), respectively, the result is

$$\xrightarrow{(\gamma)} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&4&3\\\hline 3&2\\\cline{1-2} 0\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{(\delta)} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 7&6&4\\\hline 5&3\\\cline{1-2} 1\\\cline{1-1}\end{array} \quad ,$$

so that $\dim V_\lambda^{O(5)} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{(4\cdot3\cdot2)\cdot(3)} = 35 < 75 = \dim V_\lambda^{GL(5)}$.

• The space of traceless symmetric tensors of V of rank n carries an irreducible representation of $O(D)$ labeled by a Young diagram made of one row of length n for which the dimension (4.8) is easily reproduced from the King rule, since the rules (β)-(γ) may be omitted

• Computing the number of components of the Weyl tensor and of a symmetric, traceless, rank-two tensor in $D = 4$ dimensions, enables one to give the decomposition $\{2,2\}/\Delta = \{2,2\} + \{2,0\} + \{0,0\}$ of the Riemann tensor into the Weyl tensor, the traceless part of the Ricci tensor and the scalar curvature, respectively, in terms of the corresponding dimensions. This gives the well-known result $20 = 10 + 9 + 1$.

Unitary irreps of orthogonal groups: *Each non-zero inequivalent UIR of $O(D)$ corresponds to an allowed Young diagram λ, and conversely.*

Proof: The orthogonal group is compact, thence any UIR is finite-dimensional (see Subsection 1.3). Furthermore, any finite-dimensional irrep of the orthogonal group is labeled by an allowed Young diagram. Moreover, an important result is that any finite-dimensional representation may be endowed with a sesquilinear form which makes it unitary. □

The quadratic Casimir operator of the orthogonal algebra $\mathfrak{so}(D)$ presented by its generators and its commutation relations

$$i\,[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \delta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \delta_{\sigma\mu}M_{\rho\nu} + \delta_{\sigma\nu}M_{\rho\mu} \tag{4.9}$$

is the sum of square of the generators (similarly to the definition (1.4) for $\mathfrak{so}(D-1,1)$ since these two *complex* algebras are isomorphic). Its eigenvalue on a finite-dimensional irrep labeled by an allowed Young diagram $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ is given in the subsection 9.4.C of [2]:

$$\Big[\ \mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{so}(D)\Big) - \sum_{a=1}^{r} \lambda_a(\lambda_a + D - 2a)\ \Big]\, V_\lambda^{O(D)} = 0\,. \tag{4.10}$$

Examples:

• The UIRs of the Abelian $O(2) \cong U(1)$ are labeled by one integer only, which is the eigenvalue of the single generator on the irrep, say $h \in \mathbb{Z}$. The only allowed Young diagrams are made of a single row of length equal to the non-negative integer $s = |h|$. The traceless symmetric tensorial representations of $O(2)$ are two-dimensional, the sum of the two irreps labeled by $h = \pm s$. The formula (4.10) with $D = 2$, $r = 1$ and $\lambda_1 = s$ gives the obvious eigenvalue s^2, since the quadratic Casimir operator of the rotation group $O(2)$ is equal to the square of the single generator.

• The quadratic Casimir operator of the rotation group $O(3)$ is the square of the angular momentum. The irrep of $O(3)$ with spin $s \in \mathbb{N}$ is labeled by the allowed Young diagram made of a single row of length equal to the integer s. The formula (4.10) with $D = 3$, $r = 1$ and $\lambda_1 = s$ gives the celebrated eigenvalue $s(s+1)$.

• The irrep of $O(D)$ carried by the space of traceless symmetric tensors of rank n is labeled by the allowed Young diagram $\{n\}$ made of a single row of length equal to an integer n. The formula (4.10) with $r = 1$ and $\lambda_1 = n$ gives the eigenvalue $n(n+D-2)$ for the quadratic Casimir operator.

The following branching rule is extremely useful in the process of dimensional reduction.

Restriction from $GL(D)$ to $GL(D-1)$: *The restriction to the subgroup $GL(D-1) \subset GL(D)$ of a finite-dimensional irrep of $GL(D)$ determined by the Young diagram λ contains each irrep of $GL(D-1)$ labeled by Young diagrams μ such that*

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{r-1} \geqslant \lambda_r \geqslant \mu_r \geqslant 0\,,$$

with multiplicity one. The same theorem holds for the restriction $O(D) \downarrow O(D-1)$ where λ is an allowed Young diagram.

These rules are discussed in the section 8.8.A of [2]. They may be summarized in the following branching rule for $GL(D) \downarrow GL(D-1)$,

$$V^{GL(D)}_{\lambda} = V^{GL(D-1)}_{\lambda/\Sigma} \equiv V^{GL(D-1)}_{\lambda} \oplus V^{GL(D-1)}_{\lambda/\{1\}} \oplus V^{GL(D-1)}_{\lambda/\{2\}} \oplus V^{GL(D-1)}_{\lambda/\{3\}} \oplus \ldots \tag{4.11}$$

where Σ is the formal infinite sum of all Young diagrams made of a single row.

Example: The branching rule applied to symmetric irrep labeled by a Young diagram $\{n\}$ made of one row of length n gives as a result:

$$\{n\}/\Sigma \,=\, \{\,n\,\} + \{n-1\} + \{n-2\} + \ldots + \{1\} + \{0\}\,.$$

This implies the obvious fact that a completely symmetric tensor of rank n whose indices run over D values may be decomposed as a sum of completely symmetric tensors of rank n, $n-1$, $\ldots$, 1, 0 whose indices run over $D-1$ values. A non-trivial instance of the branching rule for $O(D) \downarrow O(D-1)$ is that the same result is true for *traceless* symmetric tensors as well.

4.4 Auxiliary variables

Let λ be a Young diagram with s columns and r rows.

The Schur module $V^{GL(D)}_{\lambda}$ in the "manifestly antisymmetric convention" can be built *via* a convenient construction in terms of polynomials in $s \times D$ graded variables satisfying appropriate conditions. More precisely, the vector space $V^{GL(D)}_{\lambda}$ is isomorphic to a subspace of the algebra

$$\odot^s \big(\wedge(V)\big) \equiv \underbrace{\wedge(V) \odot \ldots \odot \wedge(V)}_{s \text{ factors}}\,. \tag{4.12}$$

of s symmetric tensor products of antisymmetric forms $\in \wedge(V)$. The elements of $\odot^s\big(\wedge(V)\big)$ are usually called *multiforms*. The D generators of the Ith factor $\wedge(V)$ are written $d_{\scriptscriptstyle I}x^{\mu}$ ($I = 1, 2, \ldots, s$). By definition, the multiform algebra is presented by the graded commutation relations

$$d_{\scriptscriptstyle I}x^{\mu}\, d_{\scriptscriptstyle J}x^{\nu} \,=\, (-)^{\delta_{IJ}}\, d_{\scriptscriptstyle J}x^{\nu}\, d_{\scriptscriptstyle I}x^{\mu}\,, \tag{4.13}$$

where the wedge and symmetric products are not written explicitly. The condition (i) of Subsection 4.2 is automatically verified for any element $\Phi \in \odot^s\big(\wedge(V)\big)$ due to the fact that the variables are anticommuting in a fixed column ($I = J$). The $GL(D)$-irreducibility condition (ii) of Subsection 4.2 is implemented by the conditions

$$\Big(d_{\scriptscriptstyle I}x \cdot \frac{\partial^L}{\partial(d_{\scriptscriptstyle J}x)} \,-\, \delta_{IJ}\,\ell_{\scriptscriptstyle I}\Big)\Phi \,=\, 0\,, \quad (I \leqslant J) \tag{4.14}$$

where the dot stands for the contraction of the indices, ℓ_I for the length of the Ith column in the Young diagram λ and ∂^L stands for "left" derivative. By the Weyl construction, an element $\Phi \in \odot^s\big(\wedge(V)\big)$ satisfying (4.14) belongs to the Schur module $V^{GL(D)}_{\lambda}$. Following the discussion of Subsection 4.3, if λ denotes an allowed Young diagram, such an element $\Phi \in V^{GL(D)}_{\lambda}$ is irreducible under the (pseudo)-orthogonal group $O(p,q)$ ($p+q=D$) if it is traceless, that is

$$\Big(\frac{\partial^L}{\partial(d_{\scriptscriptstyle I}x)} \cdot \frac{\partial^L}{\partial(d_{\scriptscriptstyle J}x)}\Big)\Phi \,=\, 0\,, \quad (\forall\, I, J) \tag{4.15}$$

where the dot stands now for the contraction of indices via the use of the metric preserved by $O(p,q)$. An element $\Phi \in \odot^s\big(\wedge(V)\big)$ such that (4.14)-(4.15) are fulfilled belongs to the Schur module $V_\lambda^{O(p,q)}$ labeled by the Young diagram λ.

The Schur module $V_\lambda^{GL(D)}$ admits another convenient realization in terms of polynomials in $r \times D$ commuting variables. In other words, the vector space $V_\lambda^{GL(D)}$ is isomorphic to a subspace of the polynomial algebra in the variables u_a^μ $(a = 1, 2, \ldots, r)$ where the index a corresponds to each row. The condition (a) of Subsection 4.2 is automatically verified for any such polynomial due to the fact that the variables are commuting in a fixed row. The $GL(D)$-irreducibility condition (b) of Subsection 4.2 is implemented by the conditions

$$\Big(u_a \cdot \frac{\partial}{\partial u_b} \, - \, \delta_{ab}\, \lambda_a \Big) \Phi \, = \, 0 \,, \quad (a \leqslant b) \tag{4.16}$$

where the dot still stands for the contraction of the indices. The degree of homogeneity of the polynomial Φ in the variables u_a^μ (for fixed a) is λ_a. The corresponding coefficients are tensors irreducible under the general linear group. By the Weyl construction, a polynomial $\Phi(u_a)$ satisfying (4.16) belongs to the Schur module $V_\lambda^{GL(D)}$. Again, such an element $\Phi \in V_\lambda^{GL(D)}$ is irreducible under the (pseudo)-orthogonal group $O(p,q)$ $(p+q=D)$ iff it is traceless, that is

$$\Big(\frac{\partial}{\partial u_a} \cdot \frac{\partial}{\partial u_b} \Big) \Phi \, = \, 0 \,, \quad (\forall\, a, b) \tag{4.17}$$

where the dot stands for the contraction of indices via the use of the metric preserved by $O(p,q)$. A polynomial $\Phi(u_a)$ such that (4.16)-(4.17) are fulfilled belongs to the Schur module $V_\lambda^{O(p,q)}$ labeled by an allowed Young diagram λ.

Example: Consider an irreducible representation of the orthogonal group $O(D)$ labeled by the Young diagram $\{n\}$ made of a single row of length equal to an integer n. The polynomial $\Phi(u) \in V_{\{n\}}^{O(D)}$ obeys to the irreducibility conditions

$$\Big(u \cdot \frac{\partial}{\partial u} \, - \, n \Big) \Phi \, = \, 0 \,, \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \Big) \Phi \, = \, 0 \,. \tag{4.18}$$

They mean that the polynomial is homogeneous (of degree equal to n) and harmonic, so that its components correspond to a symmetric traceless tensor of rank n:

$$\Phi(u) \, = \, \frac{1}{n!} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_n}\, u^{\mu_1} \ldots u^{\mu_n} \,, \qquad \delta^{\mu_1 \mu_2} \Phi_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n} = 0 \,.$$

Of course the integral of the square of such a polynomial over $\mathbb{R}^D$ is, in general, infinite. But the restriction of an harmonic polynomial on the unit sphere $\overrightarrow{u}^2 = 1$ is square integrable on S^{D-1}. This restriction is called a *spherical harmonic* of degree n. Therefore the space of spherical harmonics of degree n provides an equivalent realization of the Schur module $V_{\{n\}}^{O(D)}$. For $D = 3$, the space $V_{\{n\}}^{O(3)}$ is spanned by the usual spherical harmonics $Y_n^m(\theta, \phi)$ on the two-sphere with $|m| \leqslant n$.

Remarks:
• The infinitesimal generators of the pseudo-orthogonal group $O(p,q)$ are represented by the operators

$$M_{\mu\nu} = i \sum_{a=1}^{r} u_a^\rho \Big(g_{\rho\mu} \frac{\partial}{\partial u_a^\nu} - g_{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial u_a^\mu} \Big) \,.$$

Reordering the factors and making use of (4.16)-(4.17) allows to reproduce the formula (4.10) for the eigenvalues of the quadratic Casimir operator.
• Instead of polynomial functions in the commuting variables, one may equivalently consider *distributions* obeying to the same conditions. The space of solutions would carry an equivalent irrep, as follows from the highest-weight construction of the representation. However, it does not make sense any more of talking about the "coefficients" of the homogeneous distribution so that the link with the equivalent tensorial representation is more intricate.

The example of the spherical harmonics suggests that it might be convenient to realize any unitary module of the orthogonal group $O(D)$ as a space of functions on the unit hypersphere

S^{D-1} satisfying some linear differential equations. Better, the symmetry under the orthogonal group would be made manifest by working with homogeneous harmonic functions on the *ambient space* $\mathbb{R}^D$, evaluated on any hypersphere $S^{D-1} \subset \mathbb{R}^D$.

Spherical harmonics: *To any UIR of the isometry group $O(D)$ of a hypersphere S^{D-1}, one may associate manifestly covariant differential equations for functions on S^{D-1} embedded in $\mathbb{R}^D$ whose space of solutions carry the corresponding UIR.*

Proof: Any UIR of the isometry group $O(D)$ corresponds to a Schur module $V_\lambda^{O(D)}$ which may be realized as the space of polynomials $\Phi(\overrightarrow{u}_a)$ such that (4.16)-(4.17) are obeyed. Let us introduce the notation: $\overrightarrow{x} := \overrightarrow{u}_1$ and $\overrightarrow{t}_{a-1} := \overrightarrow{u}_a$ for $a = 2, \ldots, r$. One interprets the polynomial $\Phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}_{\underline{a}})$ (where the index $\underline{a}$ runs from 1 to $r-1$) as a tensor field on the Euclidean space $\mathbb{R}^D$ parametrized by the Cartesian coordinates $\overrightarrow{x}$, with some auxiliary variables $\overrightarrow{t}_{\underline{a}}$ implementing the tensor components. The conditions (4.16)-(4.17) for a and b strictly greater than 1 imply that

$$\Big(t_{\underline{a}} \cdot \frac{\partial}{\partial t_{\underline{b}}} - \delta_{\underline{ab}}\, \lambda_{\underline{a}}\Big)\Phi = 0\,, \quad (\underline{a} \leqslant \underline{b}) \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial t_{\underline{a}}} \cdot \frac{\partial}{\partial t_{\underline{b}}}\Big)\Phi = 0\,, \tag{4.19}$$

where $\underline{\lambda} = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ is the Young diagram obtained from λ by removing its first row. Thus the components of the "tensor field" $\Phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}_{\underline{a}})$ carry an irreducible representation of $O(D)$ labeled by $\underline{\lambda}$. The conditions (4.16) for $a = b = 1$ imply that

$$(x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \lambda_1)\Phi = 0\,,$$

so the polynomial $\Phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}_{\underline{a}})$ is homogeneous of degree λ_1 in the radial coordinate $|\overrightarrow{x}|$. The condition (4.17) for $a = b = 1$ is interpreted as the Laplace equation

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Phi = 0 \tag{4.20}$$

on the ambient space $\mathbb{R}^D$, it imples that the tensor field Φ is harmonic in ambient space. The condition (4.16) for $b > a = 1$ states that the radial components vanish,

$$\Big(x \cdot \frac{\partial}{\partial t_{\underline{a}}}\Big)\Phi = 0\,, \tag{4.21}$$

so the tensor components are longitudinal to the hyperspheres S^{D-1}. Therefore the evaluation of the non-vanishing components of $\Phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}_{\underline{a}})$ on the unit hypersphere $|\overrightarrow{x}| = 1$ is an *intrinsic* tensor field living on the hypersphere S^{D-1} and whose tensor components carry an irrep of the stability subgroup $O(D-1)$ labeled by $\underline{\lambda}$. These tensor fields generalize the spherical harmonics to the generic case $r \geqslant 1$. Finally, the condition (4.17) for $b > a = 1$ states that the tensor field is divergenceless in ambient space,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t_{\underline{a}}}\Big)\Phi = 0\,. \tag{4.22}$$

The differential equations (4.20) and (4.22) are written in ambient space but they may be reformulated in intrinsic terms on the hypersphere, at the price of losing the manifest covariance under the full isometry group $O(D)$. □

4.5 Euclidean group

The method of induced representations was introduced in Subsection 3.1 for the Poincaré group $ISO(D-1,1)^\uparrow$ and applied to the Euclidean group $ISO(D-2)$ in Subsection 3.3. Focusing on the genuine (*i.e.* with a non-trivial action of the translation generators) irreps of the *inhomogeneous* orthogonal group, all of them are induced from an UIR of the stability subgroup. Using the results of the previous section 4.3, one may summarize the final result into the following classification.

Unitary irreps of the inhomogeneous orthogonal groups: *Each inequivalent UIR of the group $IO(D)$ with a non-trivial action of its Abelian normal subgroup is associated with a positive real number μ and an allowed Young diagram of the subgroup $O(D-1)$, and conversely.*

The orbits of the linear action of the orthogonal group $O(D)$ on the Euclidean space $\mathbb{R}^D$ are the hyperspheres S^{D-1} of radius R. The isometry group of any such hypersphere S^{D-1} is precisely $O(D)$. Considering a region of fixed size on these hyperspheres, in the limit $R \to \infty$ the sphere becomes a hyperplane $\mathbb{R}^{D-1}$. Therefore the homogeneous and inhomogeneous orthogonal groups are related by some infinite radius limit: $O(D) \to IO(D-1)$. Such a process is frequently referred to as an *Inönü-Wigner contraction* in the physics literature [14]. This is better seen at the level of the Lie algebra. Specializing the Dth directions, the commutation relations (4.9) take the form

$$\begin{aligned} i\,[M_{mn}, M_{pq}] &= \delta_{np} M_{mq} - \delta_{mp} M_{nq} - \delta_{qm} M_{pn} + \delta_{qn} M_{pm}\,, & (4.23)\\ i\,[M_{mD}, M_{pq}] &= \delta_{mn} M_{pD} - \delta_{mp} M_{nD}\,, & (4.24)\\ i\,[M_{mD}, M_{pD}] &= M_{pm}\,. & (4.25) \end{aligned}$$

where the latin letters take $D-1$ values. Defining $M_{mD} = R\,P_m$ and taking the limit $R \to \infty$ (with P_m fixed) in the relations (4.23)-(4.25) lead to

$$\begin{aligned} i\,[M_{mn}, M_{pq}] &= \delta_{np} M_{mq} - \delta_{mp} M_{nq} - \delta_{qm} M_{pn} + \delta_{qn} M_{pm}\,, & (4.26)\\ i\,[P_m, M_{pq}] &= \delta_{mn} P_p - \delta_{mp} P_n\,, & (4.27)\\ i\,[P_m, P_p] &= 0\,. & (4.28) \end{aligned}$$

As can be seen, the generators $\{M_{mn}, P_m\}$ span the Lie algebra of the inhomogeneous orthogonal group $IO(D-1)$. The former argument proves the contraction $\mathfrak{so}(D) \to \mathfrak{iso}(D-1)$.

The limit of a sequence of irreps of the homogeneous orthogonal group $O(D)$, in which one performs an Inönü-Wigner contraction, is automatically a representation of the inhomogeneous orthogonal group $IO(D-1)$ (if the limit is not singular). An interesting issue is the inverse problem: which irreps of $IO(D-1)$ may be obtained as the limit of such a sequence of irreps of $O(D)$? The problem is non-trivial because, generically, the limit of a sequence of irreps is a *reducible* representation.

Contraction of UIRs of the homogeneous orthogonal groups: *Each inequivalent UIR of the group $IO(D-1)$ with a non-trivial action of its Abelian normal subgroup may be obtained as the contraction of a sequence of UIRs of the group $O(D)$.*

More precisely, the Inönü-Wigner contraction $R \to \infty$ of a sequence of UIRs of $O(D)$, labeled by allowed Young diagrams $\nu = \{s, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ such that the limit of the quotient s/R is a fixed positive real number μ, is the UIR of $IO(D-1)$ labeled by the parameter μ and the Young diagram $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.

Proof: The use of the spherical harmonics construction discussed at the end of Subsection 4.4 is very convenient here. The main idea is to solve the homogeneity condition in a neighborhood of $x^D \neq 0$ as follows:

$$\Phi(x^m, x^D, t_{\underline{a}}) \;=\; z^s\, \phi\left(\frac{x^m}{z}, t_{\underline{a}}\right)\,, \qquad (4.29)$$

where $\overrightarrow{x} = (x^m, x^D)$ and $\phi(y^m, t_{\underline{a}}) := \Phi(y^m, \frac{s}{\mu}, t_{\underline{a}})$. In other words, one may perform a convenient change of coordinates from the *homogenous coordinates* (x^m, x^D) to the set (y^m, z) where

$$y^m = \frac{x^m}{z}$$

are the *inhomogenous coordinates* (on the projective space $\mathbb{PR}^{D-1}$ minus the point at infinity $z = 0$) and

$$z = \frac{\mu\, x^D}{s}$$

is a scale variable.. The magic is that the equations for the generalized spherical harmonics have a well-behaved limit $x^D \to \infty$ in terms of $\phi(y^m, t_{\underline{a}})$ when x^D/s is fixed to be equal to the ratio z/μ, where z and μ are finite [15]. To see that, one should use the relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^m} &= \frac{1}{z}\,\frac{\partial}{\partial y^m}\,,\\ \frac{\partial}{\partial x^D} &= \frac{\mu}{s}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z}\,y^m \frac{\partial}{\partial y^m}\right)\,. & (4.30) \end{aligned}$$

Moreover, the equation in tis limit may be identified with equations for the proper UIR of the inhomogeneous orthogonal group $IO(D-1)$ realized homogeneously in terms of the inhomogenous coordinates. □

Example: The simplest instance is when $\lambda = \{0\}$ because one considers the sequence of harmonic functions $\Phi(x^m, x^D)$ of homogeneity degree s. The Laplace operator acting on $\Phi(x^m, x^D)$ reads in terms of $\phi(y^m)$ as follows

$$\Delta_{\mathbb{R}^D}\Phi = z^{s-2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mu^2}{s^2}\left(s(s-1) - (2s-1)\left(y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right)\right]\phi\,,$$

due to the homogeneity condition (4.29) and the relations (4.30). The Laplace equation $\Delta_{\mathbb{R}^D}\Phi = 0$ is thus equivalent to the equation

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mu^2}{s^2}\left(s(s-1) - (2s-1)\left(y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right)\right]\phi = 0\,,$$

whose limit for $s\to\infty$ is the Helmholtz equation $[\,\Delta_{\mathbb{R}^{D-1}} + \mu^2\,]\,\phi = 0$, where $\Delta_{\mathbb{R}^{D-1}} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}$. The space of solutions of the Helmholtz equation carries an UIR of $IO(D-1)$ induced from a trivial representation of the stability subgroup $O(D-2)$.

5 Relativistic wave equations

The *Bargmann-Wigner programme* amounts to associating, with any given UIR of the Poincaré group, a manifestly covariant differential equation whose positive-energy solutions transform according to the corresponding UIR. Physically, it might be natural to restrict this programme to the two most important classes of UIRs: the massive and massless representations. Mathematically, this restriction is convenient because the group-theoretical analysis is simpler since any of these UIRs is induced from an UIR of a unimodular orthogonal group $SO(n)$ (with $D-3\leqslant n\leqslant D-1$), as can be checked easily on the tables of Subsection 3.3.

In 1948, this restricted programme was completed by Bargmann and Wigner in four dimensions when, for each such UIR of $ISO(3,1)^\uparrow$, a relativistic wave equation was written whose positive-energy solutions transform according to the corresponding UIR [4]. But this case ($D=4$) will not be reviewed here in details because it may cast shadow on the generic case. Indeed, it is rather peculiar in many respects:

- The quadratic and quartic Casimir operators essentially classify the UIRs, but this is no more true in higher dimensions where more Casimir operators are necessary and the classification quickly becomes technically cumbersome in this way. Moreover, one should stress that the eigenvalues of the Casimir operators do not characterize uniquely an irreducible representation (for instance, the quadratic and quartic Casimir operators vanish for all helicity representations).

- The (complex) Lorentz algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ is isomorphic to the direct sum of two (complex) rotation algebras $\mathfrak{so}(3)\cong\mathfrak{sp}(2)$. These isomorphisms allow the use of the convenient "dotted-undotted" formalism for the finite-dimensional (non-unitary) irreps of the spin group $Spin(3,1)$.

- The symmetric tensor-spinor fields are sufficient to cover all inequivalent cases.

- The helicity short little group $SO(2)$ is Abelian, therefore its irreps are one-dimensional, for fixed helicity. Notice that the helicity is discretized because the representation of the "little group" $SO(2)$ is a restriction of the representation of the group $Spin(3)\cong SU(2)$ which has no intrinsically projective representations.

- The infinite-spin short little group $SO(1)$ is trivial, thus there are only two inequivalent infinite-spin representations (single- or double-valued) [6].

- *etc.*

Moreover, there exists an extensive literature on the subject of UIRs of $ISO(3,1)^{\uparrow}$ and we refer to the numerous pedagogical reviews available for more details on the four-dimensional case (see *e.g.* the inspiring presentations of [5] and [16]).

It is standard to require time reversal and parity symmetry of the field theory. More precisely, the wave equations we will consider are covariant under the two previous transformations. As a consequence of the time reversal symmetry, the representation is *irreducible* under the group $ISO(D-1,1)$ but *reducible* under the Poincaré group $ISO(D-1,1)^{\uparrow}$: the Hilbert space of solutions contain both positive and negative energy solutions. Furthermore, the parity symmetry implies that the representation is *irreducible* under the inhomogeneous Lorentz group $IO(D-1,1)$ but *reducible* under the group $ISO(D-1,1)$ (for instance, both chiralities are present in the massless case for D even). To conclude, the Bargmann-Wigner programme is actually understood as associating, with any given UIR of the inhomogeneous Lorentz group, a manifestly covariant differential equation whose solutions transform according to the corresponding UIR.

5.1 General procedure

The lesson on induced representations that we learned from Wigner implies the following strategy:

1. Pick a unitary representation of the (short) little group.
2. Introduce a wave function on $\mathbb{R}^{D-1,1}$ taking values in some (possibly non-unitary) representation of the Lorentz group $O(D-1,1)$ the restriction of which to the (short) little group contains the representation of step 1.
3. Write a system of linear covariant equations, differential in position space x^{μ} thus algebraic in momentum space p_{ν} , for the wave function of step 2. These equations may not be independent.
4. Fix the momentum and check in convenient coordinates that the wave equations of step 3 put to zero all "unphysical" components of the wave function. More precisely, verify that its non-vanishing components carry the unitary representation of step 1.

Proof: The fact that the set of linear differential equations is taken to be manifestly covariant ensures that the Hilbert space of their solutions carries a (infinite-dimensional) representation of $IO(D-1,1)$. The fourth step determines the representation of the little group by which it is induced. □

In the physics literature, the fourth step is referred to as "looking at the physical degrees of freedom." If the (possibly reducible) representation is proven to be unitary, then this property is summarized in a "no-ghost theorem."

The Klein-Gordon equation $(p^2 \pm m^2)\Psi = 0$ is always, either present in the system of covariant equations or a consequence thereof. Consequently, the Klein-Gordon equation will be assumed implicitly from now on in the step 3. Therefore, the step 4 will be immediately performed in a proper Lorentz frame. (We refer the reader to the Subsection 3.2 for more details.)

The completion [17] of the Bargmann-Wigner programme for finite-component representations is reviewed in the subsections 5.2 and 5.3 for single-valued UIRs of the Poincaré group.[6] The tachyonic case[7] is more briefly discussed in Subsection 5.4. The zero-momentum representation is not considered here since it essentially is a unitary representation of the de Sitter spacetime dS_{D-1}.

5.2 Massive representations

The Bargmann-Wigner programme is easy to complete for massive UIRs because the massive stability subgroup is the orthogonal group $O(D-1) \subset O(D-1,1)$. By going to a rest-frame,

[6] Spinorial irreps may be adressed analogously by supplementing the system of differential equations with Dirac-like equations and gamma-trace constraints (see *e.g.* [15, 18] for more details). The Bargmann-Wigner programme has been completed for anyonic representations in three-dimensional Minkowski spacetime [19].

[7] The discussion presented in the section 5.4 was not published before, it directly derives from private conversations between X.B. and J. Mourad.

the time-like momentum vector takes the form $p^\mu = (m, \overrightarrow{0}) \neq 0$. The physical components of the field are thus carrying a tensorial irrep of the group $O(D-1)$ of orthogonal transformations in the spatial hyperplane $\mathbb{R}^{D-1}$. In other words, the linear wave equations should remove all components including time-like directions. These unphysical components are responsible for the fact that the Fock space is not endowed with a positive-definite norm.

Step 1. From the sections 1.3 and 4, one knows that any unitary representation of the orthogonal group $O(D-1)$ is a sum of UIRs which are finite-dimensional and thus, equivalent to a tensorial representation. Let us consider the UIR of $O(D-1)$ labeled by the allowed Young diagram $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ (*i.e.* the sum of the lengths of its first two columns does not exceed $D-1$).

Step 2. The simplest way to perform the Bargmann-Wigner programme in the massive case is to choose a covariant wave function whose components carry the (finite-dimensional and non-unitary) tensorial irrep of the Lorentz group $O(D-1,1)$ labeled by the Young diagram λ. As explained in the subsection 4.4, a convenient way of realizing this is in terms of a wave function $\Phi(p, u_a)$ polynomial in the auxiliary commuting variables u_a^μ satisfying the irreducibility conditions (4.16)-(4.17).

Step 3. The massive Klein-Gordon equation has to be supplemented with the transversality conditions

$$\Big(p \cdot \frac{\partial}{\partial u_a}\Big)\Phi \,=\, 0\,, \tag{5.1}$$

of the wave function.

Step 4. Looking at a fixed-momentum mode in its corresponding rest-frame $p^\mu = (m, \overrightarrow{0})$ leads to the fact that the components of the wave function along the timelike momentum are set to zero by (5.1): $\Phi = \Phi(p, \overrightarrow{u}_a)$. In words, Φ does not depend on the time components u_a^0, $\forall\, a$. In this case, the conditions (4.16)-(4.17) read as irreducibility conditions under the orthogonal group $O(D-1)$. □

Example: Massive symmetric representations with "spin" equal to s correspond to Young diagrams $\lambda = \{s\}$ made of one row of length equal to the integer s. In four spacetime dimensions, this representation is precisely what is usually called a "massive spin-s field."[8] The covariant wave function $\Phi(p,u)$ obeys to the irreducibility conditions (4.16)-(4.17) of the components

$$\Big(u \cdot \frac{\partial}{\partial u} \,-\, s\Big)\Phi \,=\, 0\,, \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\Big)\Phi \,=\, 0\,. \tag{5.2}$$

The wave function Φ is homogeneous of degree s and harmonic in the auxiliary variable u. If the wave function $\Phi(p,u)$ is polynomial in the auxiliary variable u, then its components correspond to a symmetric traceless tensor of rank s

$$\Phi(p,u) \,=\, \frac{1}{s!}\Phi_{\mu_1\ldots\mu_s}(p)\, u^{\mu_1}\ldots u^{\mu_s}\,, \qquad \eta^{\mu_1\mu_2}\Phi_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_s}(p) = 0\,.$$

The covariant wave equations are the massive Klein-Gordon equation together with the transversality condition

$$\Big(p \cdot \frac{\partial}{\partial u}\Big)\Phi \,=\, 0\,, \tag{5.3}$$

which reads in components as

$$p^{\mu_1}\Phi_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_s}(p) = 0\,. \tag{5.4}$$

The non-vanishing components of a solution of (5.4) must be along the spatial directions, *i.e.* only $\Phi_{i_1\ldots i_s}(p)$ may be $\neq 0$. This symmetric tensor field is traceless with respect to the spatial metric: $\delta^{i_1 i_2}\Phi_{i_1 i_2 i_3\ldots i_s}(p) = 0$, thus the physical components carry a symmetric irrep of the orthogonal group $O(D-1)$, the dimension of which can be computed by making use of the formula (4.8). The polynomial wave function $\Phi(p,u)$ evaluated on the internal unit hypersphere $u^i u_i = 1$ corresponds to a decomposition of the physical components in terms of the spherical harmonics on the internal hypersphere S^{D-2}, which is an equivalent, though rather unusual, way of representing the physical components (usually, the use of spherical harmonics is reserved to the "orbital" part of the wave function).

[8] To our knowledge, the Bargmann-Wigner programme for the massive integer-spin representations in four-dimensional Minkowski spacetime was adressed along the lines reviewed here for the first time by Fierz in [20].

The quartic Casimir operator of the Poincaré algebra is easily evaluated in components in the rest frame

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2} \quad & P^2 M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \;+\; M_{\mu\rho} P^\rho \, M^{\mu\sigma} P_\sigma \\ & = \frac{1}{2}\, m^2 (M_{ij} M^{ij} + 2 M_{i0} M^{i0}) \;-\; m^2 M_{i0} M^{i0} \;=\; m^2\, \frac{1}{2}\, M_{ij} M^{ij} \,, \end{aligned}$$

giving as a final result for a massive representation associated with a Young diagram λ

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4\Big(\mathfrak{iso}(D-1,1)\Big) \;&=\; \mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{iso}(D-1,1)\Big)\, \mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{so}(D-1)\Big) \,, \\ &=\; m^2 \sum_{a=1}^{r} \lambda_a (\lambda_a + D - 2a - 1) \,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

where the eigenvalues of the quadratic Casimir operator of the rotation algebra are given by the formula (4.10).

Example: In any dimension D, the eigenvalue of the quartic Casimir operator for a massive symmetric representation of rank s is equal to $m^2\, s(s+D-3)$. In four spacetime dimensions, the square of the Pauli-Lubanski vector acting on a massive field of spin-s is indeed equal to $m^2\, s(s+1)$.

Each massive representation in $D \geqslant 4$ dimensions may actually be obtained as the first Kaluza–Klein mode in a dimensional reduction from $D+1$ down to D dimensions. There is no loss of generality because the massive little group $SO(D-1)$ in D dimension is identified with the $(D+1)$-dimensional helicity (short) little group. Such a Kaluza–Klein mechanism leads to a Stückelberg formulation of the massive field.

The massless limit $m \to 0$ of a massive irrep with λ fixed is, in general, reducible because the irrep of the massive little group $SO(D-1)$ is restricted to the helicity (short) little group $SO(D-2) \subset SO(D-1)$. This argument combined with the known branching rule for $O(D-1) \downarrow O(D-2)$ (reviewed in Subsection 4.3) allows to prove that the massless limit of a massive irrep of the homogeneous Lorentz group labeled by a fixed Young diagram λ contains each helicity irrep labeled by Young diagrams μ such that

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{r-1} \geqslant \lambda_r \geqslant \mu_r \geqslant 0 \,,$$

with multiplicity one. The zero modes of a dimensional reduction from $D+1$ down to D dimensions are determined by the same rule.

Example: The zero modes of the dimensional reduction of a massive symmetric representations with "spin" equal to s are all helicity symmetric representations with integer "spins" not greater than the integer s, each with multiplicity one. For the dimensional reduction of a gravitational theory (*i.e.* a spin-two particle), one recovers the usual result that the massless spectrum is made of one "graviton" (spin-2), one "photon" (spin-1) and one "dilaton" (spin-0).

5.3 Massless representations

The quartic Casimir operator of the Poincaré algebra is evaluated easily in components in the light-cone coordinates (see Subsection 3.2 for notations),

$$-\,\frac{1}{2}\, P^2\, M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \;+\; M_{\mu\rho} P^\rho \, M^{\mu\sigma} P_\sigma \;=\; 0 \;+\; M_{m+} P^+ \, M^{m-} P_- \;=\; \pi_m \pi^m \,,$$

giving as a final result for a massless representation

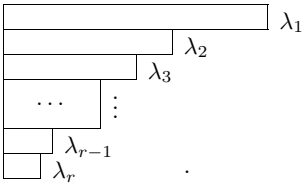
$$\mathcal{C}_4\Big(\mathfrak{iso}(D-1,1)\Big) \;=\; \mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{iso}(D-2)\Big) \;=\; \mu^2 \tag{5.6}$$

where the quadratic Casimir operator of the massless little group is written in (3.9).

Helicity representations

Helicity representations correspond to the case $\mu = 0$, so that $\pi^m = 0$ and in practice the representation is induced from a representation of the orthogonal group $O(D-2)$.

Step 1. Again, any unitary representation of the orthogonal group $O(D-2)$ is a sum of finite-dimensional UIRs. Let us consider the UIR of the helicity short little group $O(D-2)$ labeled by the allowed Young diagram $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ (that is, the sum of the lengths of its first two columns does not exceed $D-2$):

$\lambda =$ 

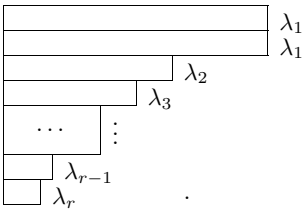
. (5.7)

The step 2 is more subtle to perform than for massive representations because the field equations must set to zero all components along the light-cone of the covariant wave function, because they are unphysical. In other words, the covariant wave equations should remove *two* directions, and not only one like in the massive case. This fact implies that the transversality is not a sufficient condition any more, it must be supplemented either by other equations or by gauge symmetries asserting that one may quotient the solution space by pure gauge fields. In these lecture notes, one focuses on two *gauge-invariant* formulations which may be respectively referred to as "Bargmann-Wigner formulation" in terms of the fieldstrength and "gauge-fixed formulation" in terms of the potential.

Bargmann-Wigner equations

The so-called "Bargmann-Wigner equations" were actually first written by Dirac [21] in four-dimensional Minkowski spacetime in spinorial form. Their name originates from their decisive use in the completion of the Bargmann-Wigner programme [4]. The generalization of the Bargmann-Wigner equations to any dimension was presented in [17] for tensorial irreps (reviewed here) and in [18] for spinorial irreps.

Step 2. Let $\overline{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ be the Young diagram depicted as

$\overline{\lambda} =$ 

. (5.8)

It is obtained from the Young diagram λ represented in (5.7) by adding a row of equal length on top of the first row of λ. The Young diagram $\overline{\lambda}$ has at least two rows of equal lengths and the sum of the lengths of its first two columns does not exceed D. The covariant wave function is chosen to take values in the Schur module $V_{\overline{\lambda}}^{O(D-1,1)}$ realized in the manifestly antisymmetric convention. Following Subsection 4.4, the wave function $\mathcal{K}(p, d_I x)$ is taken to be a polynomial in the graded variables $d_I x^\mu$ ($I = 1, 2, \ldots, \lambda_1$) obeying the commutation relations (4.13). Moreover, the irreducibility conditions of the components under the Lorentz group $O(D-1,1)$ are

$$\Big(d_I x^\mu \frac{\partial^L}{\partial(d_J x^\mu)} - \delta_{IJ}\, \overline{\ell}_I \Big) \mathcal{K} = 0\,, \quad (I \leqslant J) \tag{5.9}$$

where $\overline{\ell}_I$ stands for the length of the Ith column in the Young diagram $\overline{\lambda}$, and

$$\Big(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^L}{\partial(d_I x^\mu)} \frac{\partial^L}{\partial(d_J x^\nu)} \Big) \mathcal{K} = 0\,. \tag{5.10}$$

Step 3. The covariant wave equations may be summarized in the assertion that the wave function is a "harmonic" multiform in the sense that, $\forall\, I$, it is "closed"

$$\Big(p_\mu\, d_I x^\mu \Big) \mathcal{K} = 0\,, \tag{5.11}$$

and "coclosed" (*i.e.* transverse)

$$\Big(p^\mu \frac{\partial^L}{\partial(d_I x^\mu)} \Big) \mathcal{K} = 0\,. \tag{5.12}$$

The operators $p \cdot d_I x$ act as "exterior differentials" (or "curls"), they are nilpotent and obey graded commutation relations. As one can easily see, the wave equations (5.11) and (5.12), considered together, imply the massless Klein-Gordon equation. Actually, the equations (5.11) may even be imposed off-shell, whereas the equations (5.12) only hold on-shell [17].

Step 4. In the light-cone frame (see Section 1.1), the components of the momentum may be taken to be $p_\mu = (p_-, 0, 0, \ldots, 0)$ with $p_- \neq 0$. On the one hand, the transversality condition (5.12) implies that the wave function does not depend on the variables $d_I x^+$. On the other hand, the closure condition (5.11) reads $(p_- d_I x^-)\mathcal{K} = 0$, the general solution of which is $\mathcal{K} = (\prod_I p_- d_I x^-)\,\phi$, where ϕ depends neither on $d_I x^-$ nor on $d_I x^+$ (due to the transversality condition). In other words, the directions along the light-cone have been removed, since $\phi = \phi(p, d_I x^m)$ $(m = 1, 2, \ldots, D-2)$. Focusing on this field, one may show that the irreducibility conditions (5.9) become, in terms of the function ϕ,

$$\Big(d_I x^m \frac{\partial^L}{\partial(d_J x^m)} - \delta_{IJ}\, \ell_I \Big)\phi = 0\,, \quad (I \leqslant J) \tag{5.13}$$

where $\ell_I = \overline{\ell}_I - 1$, and the trace conditions (5.10) implies

$$\Big(\delta^{mn} \frac{\partial^L}{\partial(d_I x^m)} \frac{\partial^L}{\partial(d_J x^n)} \Big)\phi = 0\,. \tag{5.14}$$

Since ℓ_I is the length of the Ith column of the Young diagram λ, the system of equations (5.13)-(5.14) states that the components of the function ϕ carry a tensorial irrep of the orthogonal group $O(D-2)$. Therefore, the same is true for the physical components of the wave function $\mathcal{K}$. □

This may be reformulated covariantly by saying that the closure (5.11) of the wave function implies that

$$\mathcal{K} = \Big(\prod_{I=1}^{\lambda_1} p_\mu d_I x^\mu \Big)\,\phi\,. \tag{5.15}$$

In components, this means that the tensor $\mathcal{K}$ is equal to λ_1 curls of the tensor ϕ. This motivates the name "fieldstrength" for the wave function $\mathcal{K}(p, d_I x)$, the components of which are irreducible under the Lorentz group (when evaluated on zero-mass shell) and labeled by $\overline{\lambda}$, and the name "potential" or "gauge field" for the wave function $\phi(p, d_I x)$, the components of which may be taken to be irreducible under the general linear group, with symmetries labeled by the Young diagram λ.

Examples:

• The helicity vectorial representation corresponds to a Young diagram $\lambda = \{1\}$ made of a single box. In four spacetime dimensions, this representation is precisely what is usually called a "vector gauge field". The Young diagram $\overline{\lambda} = \{1, 1\}$ is a single column made of two boxes. The wave function in momentum space is given by

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\,\mathcal{K}_{\mu\nu}(p)\, dx^\mu dx^\nu$$

which carries an irrep of $GL(D, \mathbb{R})$: the antisymmetric rank-two representation. As one can see, the wave function actually is a differential two-form, the components of which transforming as an antisymmetric tensor of rank two. The wave equations (5.11) and (5.12), respectively, read in components

$$p_\mu \mathcal{K}_{\nu\rho} + p_\nu \mathcal{K}_{\rho\mu} + p_\rho \mathcal{K}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{(Bianchi identities)}$$

and

$$p^\mu \mathcal{K}_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(transversality conditions)}\,.$$

The differential two-form $\mathcal{K}$ is indeed harmonic (closed and coclosed). In physical terms, one says that the fieldstrength $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ obeys to the Maxwell equations. As usual, the Bianchi identities imply that the fieldstrength derives from a potential: $\mathcal{K}_{\mu\nu} = p_\mu \phi_\nu - p_\nu \phi_\mu$. In the light-cone coordinates, the transversality implies that the components $\mathcal{K}_{+\nu}$ vanish, thus the only non-vanishing components are $\mathcal{K}_{-n} = p_- \phi_n$. Therefore the only physical components correspond to a $(D-2)$-vector in the hyperplane transverse to the light-cone.

• Helicity symmetric representations with "helicity" (or "spin") equal to s correspond to Young diagrams $\lambda = \{s\}$ made of one row of length equal to the integer s. In four spacetime dimensions, this representation is precisely what is usually called a "massless spin-s field." The Young diagram $\overline{\lambda} = \{s, s\}$ is a rectangle made of two row of length equal to the integer s. The wave function is thus a polynomial in the auxiliary variables

$$\mathcal{K} \,=\, \frac{1}{2^s}\, \mathcal{K}_{\mu_1\nu_1\,|\ldots|\,\mu_s\nu_s}\, d_1x^{\mu_1} d_1x^{\nu_1} \,\ldots\, d_sx^{\mu_s} d_sx^{\nu_s}$$

satisfying the irreducibility equations (5.9)-(5.10) with $\ell_I = 2$ $(I = 1, \ldots, s)$. The fieldstrength tensor $\mathcal{K}_{\mu_1\nu_1\,|\ldots|\,\mu_s\nu_s}$ was first introduced by Weinberg in four spacetime dimensions [22]. The tensor $\mathcal{K}$ is, by construction, antisymmetric in each of the s sets of two indices

$$\mathcal{K}_{\mu_1\nu_1\,|\ldots|\,\mu_s\nu_s} \,=\, -\,\mathcal{K}_{\nu_1\mu_1\,|\ldots|\,\mu_s\nu_s} \,=\, \ldots \,=\, -\,\mathcal{K}_{\mu_1\nu_1\,|\ldots|\,\nu_s\mu_s}\,. \tag{5.16}$$

Moreover, the complete antisymmetrization over any set of three indices gives zero and all its traces are zero, so that the tensor indeed belongs to the space irreducible under the Lorentz group $O(D-1,1)$ characterized by a two-row rectangular Young diagram of length s. In four-dimensional Minkowski spacetime, the irrep of the Lorentz group $O(3,1)$ carried by the (on-shell) Weinberg tensor is usually denoted as $(s,0)\oplus(0,s)$. More precisely, the symmetry properties of the tensor $\mathcal{K}_{\mu_1\nu_1\,|\ldots|\,\mu_s\nu_s}$ are labeled by the Young tableau

μ_1	μ_2	$\cdots$	μ_s
ν_1	ν_2	$\cdots$	ν_s

.

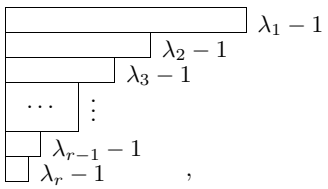
The equation (5.15) means that the components of the tensor $\mathcal{K}_{\mu_1\nu_1\,|\ldots|\,\mu_s\nu_s}$ are essentially the projection of $p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_s}\phi_{\nu_1\ldots\nu_s}$ on the tensor field irreducible under $GL(D,\mathbb{R})$ with symmetries labeled by the above Young tableau. The physical components $\phi_{n_1\ldots n_s}$ of the symmetric tensor gauge field $\phi_{\nu_1\ldots\nu_s}$ are along the $D-2$ directions transverse to the light-cone. The number of physical degrees of freedom of a helicity symmetric field of rank s can be computed by making use of the formula (4.8).

• The helicity symmetric representation with "spin" equal to 2 corresponds to the graviton. The fieldstrength has the symmetry properties of the Riemann tensor. Its on-shell tracelessness indicates that it corresponds to the Weyl tensor. The equations (5.11) are the Bianchi identities for the linearized Riemann tensor on flat spacetime, whereas the equations (5.12) hold as a consequence of the sourceless Einstein equations linearized around flat spacetime.

Gauge-fixed equations

The following equations are somewhat unusual, but they proved to be determinant in the completion of the Bargmann-Wigner programme for the infinite spin representations [15].

Step 2. Let $\widehat{\lambda} = \{\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_r - 1\}$ be the Young diagram depicted as

$\widehat{\lambda} =$ 

, (5.17)

obtained from the Young diagram λ represented in (5.7) by removing the first column of λ. Therefore the sum of the length of the first two columns of the Young diagram $\widehat{\lambda}$ does not exceed $D-2$. The covariant wave function is chosen to take values in the Schur module $V^{O(D-1,1)}_{\widehat{\lambda}}$ realized in the manifestly symmetric convention. Actually, as anticipated in Subsection 4.4, it turns out to be crucial to regard the wave function $\Phi(p, u_a)$ as a *distribution* in the commuting auxiliary variables u^μ_a, obeying to

$$\left[\left(u_a \cdot \frac{\partial}{\partial u_b}\right) - \widehat{\lambda}_a\, \delta_{ab}\right] \Phi \;=\; 0\,, \quad (a \leqslant b)\,. \tag{5.18}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_a} \cdot \frac{\partial}{\partial u_b}\right) \Phi \;=\; 0\,, \tag{5.19}$$

Step 3. Proper wave equations are the transversality condition (5.1) combined with the equation

$$(p \cdot u_a)\, \Phi = 0\,. \tag{5.20}$$

The equations (5.20) and (5.1) are the respective analogues of the closure and coclosure conditions (5.11)-(5.12). A drastic difference is that the operators $p \cdot u_a$ are not nilpotent (thus there is no underlying cohomology). Actually, the equation (5.20) has no solution if Φ is assumed to be a polynomial in all the variables.

Step 4. Equation (5.20) can be solved as

$$\Phi = \delta(u_a \cdot p)\, \phi\,, \tag{5.21}$$

where the distribution $\phi(p, u_a)$ may actually be assumed to be a function depending polynomially on the auxiliary variables u_a for the present purpose. The Dirac delta is a distribution of homogeneity degree equal to minus one, hence the irreducibility conditions (5.18)-(5.19) imply that

$$\left[\left(u_a \cdot \frac{\partial}{\partial u_b}\right) - \lambda_a\, \delta_{ab}\right] \phi \;=\; 0 \qquad (a \leqslant b)\,, \tag{5.22}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_a} \cdot \frac{\partial}{\partial u_b}\right) \phi \;=\; 0\,. \tag{5.23}$$

The function ϕ is defined from (5.21) modulo the equivalence relation

$$\phi \sim \phi + \sum_{a=1}^{r} (u_a \cdot p)\, \epsilon_a \tag{5.24}$$

where ϵ_a are arbitrary functions. This means that (5.21) is equivalent to the alternative road towards the Bargmann-Wigner programme: the gauge symmetry principle with the irreducible components of $(u_a \cdot p)\, \epsilon_a$ being pure gauge fields. As mentioned before, this path will not be addressed here (see *e.g.* [17] and refs therein for more discussions on the gauge-invariance issue). Therefore, one may say that the equation (5.20) is the "remnant" of the gauge symmetries (5.24). In the light-cone coordinates, the gauge symmetries (5.24) imply that one may choose a representative ϕ which does not depend on the variables u_a^- (the gauge is "fixed"). The transversality condition (5.1) implies that ϕ is also transverse, implying no dependence on u_a^+ ("gauge shoots twice"). Thus ϕ depends only on the transverse auxiliary variables u_a^m, so one concludes by observing that the physical components of ϕ carry a tensorial irrep of $O(D-2)$ labeled by λ. □

Infinite spin representations

Infinite spin representations correspond to the case $\mu \neq 0$ and, in practice, the representation of the massless little group $IO(D-2)$ is induced from a representation of the orthogonal group $O(D-3)$. The parameter μ is a real parameter with the dimension of a mass. Wigner proposed a set of manifestly covariant equations to describe fields carrying these UIR in four spacetime dimensions [23]. Recently, they were generalized to arbitrary infinite-spin representations in any dimension [15].

Step 1. Again, any unitary representation of the orthogonal group $O(D-3)$ is a sum of finite-dimensional UIRs. Let us consider the UIR of the helicity short little group $O(D-3)$ labeled by the allowed Young diagram $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ (that is, the sum of the lengths of its first two columns does not exceed $D-3$).

Step 2. In order to have manifest covariance, it is necessary to lift the eigenvalues ξ^m of the generators π^m in the massless little group to a D-vector ξ^μ. In practice, the covariant wave function is taken to be a distribution $\Phi(p, \xi, u_a)$ satisfying the conditions (4.16)-(4.17). The tensorial components associated with the commuting variables u_a belong to the Schur module of the Lorentz group $O(D-1,1)$ labeled by an allowed Young diagram λ.

Step 3. Relativistic equations describing a first-quantized particle with infinite spin are

$$(p \cdot \xi)\, \Phi \;=\; 0\,, \tag{5.25}$$

$$\left(p \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} - i\right) \Phi \;=\; 0\,, \tag{5.26}$$

$$(\xi^2 - \mu^2)\, \Phi \;=\; 0\,, \tag{5.27}$$

together with the transversality conditions

$$(p\cdot u_a)\,\Phi \;=\; 0\,, \tag{5.28}$$

$$\left(p\cdot\frac{\partial}{\partial u_a}\right)\Phi \;=\; 0\,, \tag{5.29}$$

$$\left(\xi\cdot\frac{\partial}{\partial u_a}\right)\Phi \;=\; 0\,. \tag{5.30}$$

This system of equations is far from being independent. For instance, compatibility condition of the systems (5.25)-(5.26) or (5.28)-(5.29) is the massless Klein-Gordon equation.

Step 4. The equation (5.26) reflects the fact that the couples $(p\,,\xi)$ and $(p\,,\xi+\alpha p)$ are physically equivalent for arbitrary $\alpha\in\mathbb{R}$. Indeed, one gets

$$\Phi(p\,,\xi+\alpha p) \;=\; e^{i\alpha}\,\Phi(p\,,\xi) \tag{5.31}$$

from Equation (5.26). The equation (5.27) states that the internal vector ξ is a space-like vector while the mass-shell condition states that the momentum is light-like. From the equation (5.25), one obtains that the internal vector is transverse to the momentum. All together, one finds that ξ may be taken to live on the hypersphere S^{D-3} of radius μ embedded in the transverse hyperplane $\mathbb{R}^{D-2}$. In brief, the "continuous spin" degrees of freedom essentially correspond to $D-3$ angular variables, whose Fourier conjugates are discrete variables analogous to the usual spin degrees of freedom. Finally, proceeding analogously to the "gauge-fixed" wave equations of the helicity representations, one may show [15] that the conditions (5.28)-(5.30) concretely remove three unphysical directions in the components, so that the final result is a tensorial irrep of the short little group $O(D-3)$ fixing both the momentum p and the internal vector ξ.

From the group theoretical point of view, the UIR of the homogeneous and inhomogeneous orthogonal groups are related by an Inönü-Wigner contraction $O(D-1)\,\rightarrow\,IO(D-2)$ (see Subsection 4.5). It follows that one can obtain the continuous spin representations from the massive ones in a suitable massless limit $m\,\rightarrow\,0$ since their little group UIRs are related by a contraction. The quartic Casimir operator of the Poincaré group for the massive representation is related to its Young diagram ν labeling the UIR of the little group $O(D-1)$ via the formula (5.5):

$$\mathcal{C}_4\Big(\mathfrak{iso}(D-1,1)\Big) = m^2\sum_{a=1}^{r}\nu_a(\nu_a+D-2a-1)\,, \tag{5.32}$$

In order to keep $\mathcal{C}_4$ non-vanishing, the massless limit must be such that the product of the "spin" $\nu_1=s$ and the mass m remains finite. More precisely, one needs $sm\,\rightarrow\,\mu$ in order to reproduce (5.6), so that the spin goes to infinity while the row lengths ν_a for $a\neq 1$ are kept equal to λ_{a-1} [24, 15]. The Fourier transform (in the internal space spanned by ξ) of the wave equations (5.25)-(5.30) may be obtained in this way from the wave equations of a massive representation in "gauge-fixed" form (see [15] for more details). This limit is very similar to the contraction of Subsection 4.5.

5.4 Tachyonic representations

The tachyonic representations have some similarities with the massive representations. The simpler one is the analogue of the Klein-Gordon equation, up to a change of sign for the mass term. The other similarity is that the linear equations should remove the components along the momentum. Of course, the major difference is that the momentum is space-like. The quartic Casimir operator of the Poincaré algebra is also evaluated easily in components, giving as a final result for a tachyonic representation,

$$\mathcal{C}_4\Big(\mathfrak{iso}(D-1,1)\Big) \;=\; \mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{iso}(D-1,1)\Big)\,\mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{so}(D-2,1)\Big)\,, \tag{5.33}$$

where the eigenvalues of the quadratic Casimir operator of the rotation algebra are given by the formula (4.10).

Step 1. The first step is more involved for the tachyonic case since it requires the exhaustive knowledge of the UIR theory for the groups $SO(D-2,1)^{\uparrow}$. Fortunately, complete results are available [25]. However, the steps 2-3 further require the completion of the Bargmann-Wigner

programme for the isometry group $SO(D-2,1)^{\uparrow}$ of the de Sitter spacetime dS_{D-2}, which is still an open problem in full generality.

Let us assume that this programme has been performed through an ambient space formulation, analogous to the one of the spherical harmonics, as discussed in the subsection 4.4. More explicitly, let us consider that the physical components of the wave function have been realized via a function on the hyperboloid dS_{D-2} of radius $\mu > 0$ embedded in $\mathbb{R}^{D-2,1}$ with some set of auxiliary commuting vectors of $\mathbb{R}^{D-2,1}$ (for the spin degrees of freedom) and the corresponding $O(D-2,1)$-covariant wave equations of the UIR are known explicitly. The step 1 is therefore assumed to be performed.

Step 2. In order to have manifest Lorentz invariance, all auxiliary variables are lifted to D-vectors: the coordinates of the internal de Sitter spacetime are denoted by ξ^μ and the auxiliary variables by u_A^μ. The wave function is taken to be $\Phi(p,\xi,u_A)$, where the internal vector ξ plays a role similar to the one in the infinite-spin representations. An important distinction is that in the ambient space formulation, one would evaluate the wave function on the hypersurface $\xi^2 = \mu^2$ instead of imposing this relation on the wave function, as in (5.27). The $O(D-2,1)$-covariant wave equations for the UIR of the little group $O(D-2,1)$ must be $O(D-1,1)$-covariantized accordingly. Concretely, this implies that the components of the covariant wave function carry an (infinite-dimensional) irrep of the Lorentz group.

Step 3. These covariantized wave equations and the tachyonic Klein-Gordon equation $(p^2 - m^2)\psi = 0$ must be supplemented by two equations: say the orthogonality condition (5.25), similarly to the infinite spin representation, and the transversality condition (5.1), similarly to the massive representation. The orthogonality condition (5.25) may be replaced by another transversality equation for the vector ξ.

Step 4. Now, the equation (5.25) implies that the internal vector belongs to the hyperplane $\mathbb{R}^{D-2,1}$ orthogonal to the momentum p. Its intersection with the hypersurface $\xi^2 = \mu^2$ restricts ξ to the internal de Sitter space $dS_{D-2} \subset \mathbb{R}^{D-2,1}$. Moreover, the condition (5.1) sets to zero all components of the wave function along the momentum. Therefore, the remaining components are physical and carry an UIR of the little group $O(D-2,1)$ by construction (see step 2). □

Example: The simplest non-trivial example corresponds to a tachyonic representation of the inhomogeneous Lorentz group $IO(D-1,1)$ induced by a representation of the little group $O(D-2,1)$ corresponding to "massive scalar field" on the "internal de Sitter spacetime" dS_{D-2} with $D \geqslant 4$. This UIR belongs to the *principal continuous series* of UIR of the group $O(D-2,1)$ and it may be realized as the space of harmonic functions on $\mathbb{R}^{D-2,1}$ of (complex) homogeneity degree s equal to $\frac{3-D}{2} + i\,\sigma$ (with σ a positive real parameter) evaluated on the unit one-sheeted hyperboloid $dS_{D-2} \subset \mathbb{R}^{D-2,1}$. They can be regarded as a generalization of the spherical harmonics in the Lorentzian case, where the degree is a complex number. The eigenvalue of the quadratic Casimir operator (1.4) of the little group $O(D-2,1)$ on this representation is equal to

$$\mathcal{C}_2\Big(\mathfrak{so}(D-2,1)\Big) \;=\; \left(\frac{D-3}{2}\right)^2 + \sigma^2\,. \tag{5.34}$$

The d'Alembertian on the unit hyperboloid evaluated on such functions is precisely equal to the former eigenvalue (as is true for the Laplacian on the unit sphere evaluated on spherical harmonics) so the corresponding fields on the internal spacetime dS_{D-2} are indeed "massive". Inserting the above result in (5.33), one sees that the quartic Casimir operator is negative for the corresponding tachyonic representation. In four-dimensional Minkowski spacetime, this implies that the Pauli-Lubanski vector is time-like. The Lorentz-covariant wave function is taken to be $\Phi(p,\xi)$ evaluated on $\xi^2 = 1$ and the corresponding relativistic equations for the induced tachyonic representation may be chosen as

$$\big(p^2 - m^2\big)\,\Phi \;=\; 0\,, \tag{5.35}$$

$$\left(p\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\Phi \;=\; 0\,, \tag{5.36}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\Phi \;=\; 0\,, \tag{5.37}$$

$$\left(\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\xi} - s\right)\Phi \;=\; 0\,, \tag{5.38}$$

where one should remember that $s = \frac{3-D}{2} + i\,\sigma$. Notice the formal analogy with the equations (5.2) for the massive scalar field.

Remark: There might be sometimes confusion in the folklore surrounding the tachyons. We would like to insist on the fact that the tachyonic representations are indeed *unitary* (by definition). Still, their physical interpretation is problematic because they are *not causal* in the sense that one may show that the support of their propagator requires superluminal propagation. Roughly speaking, the acausality is obvious because the momentum is space-like, $p^2 = +m^2$. The confusing point is that one may try to circumvent this problem in the following way: solving $p^2 - m^2 = 0$ by $p^\mu = (im, \overrightarrow{0})$ enforces causality, but the price to pay is the loss of unitarity. Indeed, the energy is pure imaginary, hence a naive plane-wave $e^{\pm i\,p_0\,x^0}$ is actually a non-integrable exponential $e^{\pm m x^0}$. These remarks are summarized in the following table:

$E = p_0$	$\lvert\overrightarrow{p}\rvert$	Unitarity	Causality
0	m	OK	KO
$\pm im$	0	KO	OK

Nevertheless, the tachyonic representations should not be discarded too quickly on such physical grounds. Actually, if tachyonic representations appear in the spectrum of a theory, then it merely signals a local instability of the field theory in the sense that the perturbation theory is performed around an unstable vacuum, and the tachyon might roll to a stable vacuum (if any). For instance, the Higgs particle is described by nothing but a tachyonic scalar field (induced by the trivial representation of the little group). By analogy, one may wonder if some infinite-component tachyonic field (induced by a non-trivial representation of the little group) could not play a role in some huge Brout–Englert–Higgs mechanism providing mass to an infinite tower of gauge fields in various massless irreps.

Acknowledgments

X. B. is especially grateful to his collaborator J. Mourad for numerous fruitful discussions on group theory and relativistic wave equations. He also thanks K. Noui for stimulating exchanges on the unitary representations in the case of three-dimensional spacetimes.

The authors acknowledge the Institut des Hautes Études Scientifiques de Bures-sur-Yvette and the Université de Mons-Hainaut for hospitality during the first stage of this work.

References

[1] B. C. Hall, "An elementary introduction to groups and representations" `math-ph/0005032`. Expanded version published as *Graduate Texts in Mathematics* **222** (Springer-Verlag, 2003).

[2] A. O. Barut and R. Raczka, *Theory of group representations and applications* (Polish Scientific Publishers, 1977).

[3] X. Bekaert, N. Boulanger, S. de Buyl, F. Dolan and J.-H. Park, "Lie algebras: representation and applications," to be published in the proceedings of the *First Modave Summer School in Mathematical Physics* (Modave, June 2005).

[4] V. Bargmann and E. P. Wigner, "Group theoretical discussion of relativistic wave equations," Proc. Nat. Acad. Sci. **34** (1948) 211.

[5] S. Weinberg, *The quantum theory of fields, Vol. 1: Foundations* (Cambridge University Press, 1995) Chapter 2.

[6] E. P. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group," Annals Math. **40** (1939) 149.

[7] E. P. Wigner, "Invariant quantum mechanical equations of motion," in *International Atomic Energy Agency* (Vienna, 1963) 59.

[8] L. Brink, A. M. Khan, P. Ramond and X. Z. Xiong, "Continuous spin representations of the Poincaré and super-Poincaré groups," J. Math. Phys. **43** (2002) 6279 [`hep-th/0205145`].

[9] B. Binegar, "Relativistic field theories in three dimensions," J. Math. Phys. **23** (1982) 1511.

[10] M. Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems* (Addison-Wesley, 1962) Chapter 10;
H. Bacry, *Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires* (Dunod, 1967) Chapter 4;
W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: a first course* (Springer, 2004) Chapters 4, 6, 15 and 19.

[11] S. A. Fulling, R. C. King, B. G. Wybourne and C. J. Cummins, "Normal forms for tensor polynomials. 1: The Riemann tensor," Class. Quantum Grav. **9** (1992) 1151.

[12] R.C. King, "Branching rules for classical Lie groups using tensor and spinor methods," J. Phys. A: Math. Gen. **8** (1975) 429.

[13] R. C. King, "The dimensions of irreducible tensor representations of the orthogonal and symplectic groups," Canad. Jour. Math. **23** (1971) 176.

[14] E. Inönü and E. P. Wigner, "On the contraction of groups and their representations," Proc. Nat. Acad. Sci. **39** (1953) 510.

[15] X. Bekaert and J. Mourad, "The continuous spin limit of higher spin field equations," JHEP **0601** (2006) 115 [hep-th/0509092].

[16] I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity: Or a walk through superspace* (Institute of Physics Publishing, 1998) Chapters 1 and 6.

[17] X. Bekaert and N. Boulanger, "Tensor gauge fields in arbitrary representations of $GL(D,\mathbb{R})$," Commun. Math. Phys. **245** (2004) 27 [hep-th/0208058]; [hep-th/0606198].

[18] I. Bandos, X. Bekaert, J. A. de Azcarraga, D. Sorokin and M. Tsulaia, "Dynamics of higher spin fields and tensorial space," JHEP **0505** (2005) 031 [hep-th/0501113].

[19] R. Jackiw and V. P. Nair, "Relativistic wave equations for anyons," Phys. Rev. D **43** (1991) 1933;
J. L. Cortes and M. S. Plyushchay, "Anyons as spinning particles," Int. J. Mod. Phys. A **11** (1996) 3331 [hep-th/9505117].

[20] M. Fierz, "Über die relativistische theorie krafterfreier teilchen mit beliebigem spin," Helv. Phys. Acta **XII** (1939) 3.

[21] P. A. M. Dirac, "Relativistic wave equations," Proc. Roy. Soc. Lond. **155A** (1936) 447.

[22] S. Weinberg, "Photons and gravitons in perturbation theory: derivation of Maxwell's and Einstein's equations," Phys. Rev. **138** (1965) B988.

[23] E.P. Wigner, "Relativistische Wellengleichungen" Z. Physik **124** (1947) 665.

[24] A. M. Khan and P. Ramond, "Continuous spin representations from group contraction," J. Math. Phys. **46** (2005) 053515 [Erratum-ibid. **46** (2005) 079901] [hep-th/0410107].

[25] V. Bargmann, "Irreducible unitary representations of the Lorentz group," Annals Math. **48** (1947) 568;
E. A. Thieleker, "The unitary representations of the generalized Lorentz groups," Trans. Amer. Math. Soc. **199** (1974) 327.

A.3 Annexe sur les groupes de spin

Le groupe de $Spin(p,q)$ est défini comme le double recouvrement de la composante connexe du groupe (pseudo) orthogonal $SO(p,q)$. Il est aussi son recouvrement universel, sauf lorsque p et q tous les deux strictement inférieurs à 3. Certains isomorphismes pour $D = p+q$ petits sont utilisés couramment dans les dimensions d'espace-temps correspondantes. La table suivante en rappelle certains :

	$Spin(n)$	$Spin(n-1,1)$	$Spin(n-2,2)$
$n=2$	$U(1)$	$\mathbb{R}$	$U(1)$
$n=3$	$SU(2;\mathbb{C})$	$SL(2;\mathbb{R})$	$SL(2;\mathbb{R})$
$n=4$	$SU(2;\mathbb{C})^{\times 2}$	$SL(2;\mathbb{C})$	$SL(2;\mathbb{R})^{\times 2}$
$n=5$	$U(2;\mathbb{H})$	$U(1,1;\mathbb{H})$	$Sp(4;\mathbb{R})$
$n=6$	$SU(4;\mathbb{C})$	$SL(2;\mathbb{H})$	$SU(2,2;\mathbb{C})$

Seulement quelques uns de ces isomorphismes seront mentionnés dans le corps du texte car la majeure partie des représentations considérées dans ce travail sont tensorielles.

A.4 Tenseurs *versus* spineurs en dimension 4

Le formalisme multitensoriel est essentiellement basé sur les trois isomorphismes suivants (spécifiques à la dimension 4 d'espace-temps) :

- d'une part celui entre le recouvrement universel du groupe de Lorentz et le groupe spécial linéaire complexe : $Spin(3,1) \cong SL(2,\mathbb{C})$),
- d'autre part ceux entre algèbres de Lie complexes : $\mathfrak{o}(3,1) \cong \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{o}(3)$ et $\mathfrak{o}(3) \cong \mathfrak{sp}(2)$.

Suivant les notations du mathématicien van der Waerden, il est d'usage d'utiliser un indice spinoriel/symplectique (pointé *vs* non pointé) à deux valeurs pour un spineur de Weyl (gauche *vs* droit) dans la représentation $(\frac{1}{2},0)$ *vs* $(0,\frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz.

Ainsi, un multispineur dans la représentation irréductible $(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$ s'écrit comme un "tenseur" $\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_n\,\dot\beta_1\ldots\dot\beta_m}$ complètement symétrique en les indices (spinoriels) pointés et non pointés séparément. Ce multispineur est manifestement un tenseur sous $\mathfrak{sp}(2)\oplus\mathfrak{sp}(2) \cong \mathfrak{o}(3,1)$. De plus, il est irréductible sous chacune des deux algèbres $\mathfrak{sp}(2)$ car il est de trace nulle par rapport aux métriques $\epsilon_{\alpha\beta}$ ou $\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$ de $\mathfrak{sp}(2)$.

En utilisant les matrices $\sigma_\mu^{\alpha\dot\beta}$ de Pauli (*c.f.* la référence [2] par exemple), il est possible de convertir les couples d'indices spinoriels en indices de Lorentz. Ainsi, le tenseur-spineur correspondant à $\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_n\,\dot\beta_1\ldots\dot\beta_m}$ s'écrit comme un "tenseur" $\psi_{\mu_1\ldots\mu_p\;\nu_1\ldots\nu_q}$ complètement symétrique en les indices (vectoriels) mu et nu séparément, où $p = [\frac{n+m}{2}]$ et $q = [\frac{|n-m|}{2}]$ avec $[\,]$ et $|\,|$ dénotant ici la partie entière

et la valeur absolue respectivement. Implicitement, $\psi_{\mu_1 \ldots \mu_p \; \nu_1 \ldots \nu_q}$ inclut un indice spinoriel restant lorsque n et m n'ont pas la même parité. En effet, le "spin total" de la représentation est $s = \frac{n+m}{2}$. Notons également que le tenseur-spineur est irréductible sous le groupe de Lorentz, ce qui se traduit par les identités algébriques suivantes : (i) la symétrization complète sur $p+1$ indices de Lorentz donne zéro, (ii) la trace est nulle pour toute paire d'indice de Lorentz, et (iii) la gamma-trace est nulle pour tout indice de Lorentz. En termes de diagramme de Young, cela signifie que le tenseur de Lorentz de rang $p + q$ porte une représentation irréductible du groupe de Lorentz caractérisée par un diagramme à deux rangées dont la première rangée est de longueur p et la deuxième de longueur q.

Complément B

Vertex cubiques et méthode de Noether

Une introduction à la classification des interactions non Abéliennes dans l'espace-temps de Minkowski et une synthèse des nombreux résultats obtenus par la méthode de Noether dans le formalisme BRST pour les spins ($\geqslant 3$) sont fournies ici sous une forme suggérant la probable situation générale du programme de Frønsdal autour de l'espace-temps plat. Afin de mettre à jour cet état de l'art, il conviendrait d'ajouter à la liste des résultats, entre autre ceux obtenus ultérieurement dans [140, 141, 200].

Ce complément est constitué de l'acte de conférence [188] correspondant à un exposé présenté au colloque tenu à Corfou en septembre 2005 et organisé par le réseau Marie Curie 'Research Training Network' intitulé "Constituents, Fundamental Forces and Symmetries of the Universe".

Fortschr. Phys. **54**, No. 5 – 6, 282 – 290 (2006) / **DOI** 10.1002/prop.200510274

On Killing tensors and cubic vertices in higher-spin gauge theories

Xavier Bekaert[1,*], **Nicolas Boulanger**[2,**], **Sandrine Cnockaert**[3,***], and **Serge Leclercq**[2,****]

[1] Institut des Hautes Études Scientifiques, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

[2] Mécanique et Gravitation, Université de Mons-Hainaut, Académie Wallonie-Bruxelles, 6 avenue du Champ de Mars, 7000 Mons, Belgium

[3] Physique Théorique et Mathématique, Université Libre de Bruxelles and International Solvay Institutes, U.L.B. Campus Plaine, C.P. 231, 1050 Bruxelles, Belgium

Received 15 December 2005, accepted 15 December 2005
Published online 18 April 2006

Key words Higher-spin gauge fields, consistent deformations, BRST cohomology.
PACS 11.15.-q, 11.30.Ly

The problem of determining all consistent non-Abelian local interactions is reviewed in flat space-time. The antifield-BRST formulation of the free theory is an efficient tool to address this problem. Firstly, it allows to compute all on-shell local Killing tensor fields, which are important because of their deep relationship with higher-spin algebras. Secondly, under the sole assumptions of locality and Poincaré invariance, all non-trivial consistent deformations of a sum of spin-three quadratic actions deforming the Abelian gauge algebra were determined. They are compared with lower-spin cases.

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

1 Introduction

It has been known since the works of Wigner that first-quantized relativistic particles are in one-to-one correspondence with inequivalent unitary irreducible representations (UIRs) of the Poincaré group $ISO(n-1,1)$. Therefore it is a natural programme to explore the exhaustive list of such possibilities and to determine if some exotic cases could be of physical relevance. At sufficiently high energy, any given massive field effectively behaves as a massless field. The little group[1] $ISO(n-2)$ of a light-like momentum governs the classification of the massless representations which fall into two distinct categories: the particularly interesting "helicity" (i.e. finite-dimensional) representations and the generic "continuous spin" (i.e. infinite-dimensional) representations. The helicity fields are either the celebrated completely symmetric gauge fields (see e.g. [1] for introductions) or the mixed symmetry gauge fields (see for instance [2] for a review). Usually the "spin" s of a single-valued helicity representation refers to the number of columns of the Young diagram labeling the representation of the maximal compact subgroup $SO(n-2)$. For completely symmetric tensor gauge fields, the spin s is equal to the rank. "Lower spin" stands for spin $s \leqslant 2$, while "higher spin" refers to spin $s > 2$. Covariant field equations were recently obtained for each continuous spin representation from a subtle infinite spin limit of helicity field equations [3] so that "continuous spin" may somehow be thought of as the case $s = \infty$.

* Corresponding author E-mail: bekaert@ihes.fr
** Chargé de Recherches FNRS (Belgium); E-mail: nicolas.boulanger@umh.ac.be
*** Aspirant du FNRS (Belgium); E-mail: sandrine.cnockaert@ulb.ac.be
**** E-mail: serge.leclercq@umh.ac.be

[1] In order for the little group to make sense, we will consider here space-time dimension $n \geqslant 3$.

WILEY InterScience DISCOVER SOMETHING GREAT

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

Whereas gauge theories describing free massless fields are by now well established, it still remains unclear whether non-trivial consistent self-couplings and/or cross-couplings among those fields may exist in general, such that the deformed gauge algebra is non-Abelian. The goal of the present paper is to review a mathematically precise statement of this problem and to focus on the rather general results obtained thanks to a very useful tool: the Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) reformulation of the Noether procedure for the determination of the cubic vertices and corresponding deformations of the gauge transformations.

2 The interaction problem

We review the deformation setting for the problem of constructing consistent local vertices for a free field theory possessing some gauge symmetries [4] and particularize to the case of non-Abelian deformations. The cohomological reformulation of the deformation problem in the antifield-BRST formalism [5] is briefly sketched. Note that other formulations exist (see e.g. [6] and refs therein).

2.1 General hypotheses

The starting point is some given action S_0 that is said to be "undeformed". We assume, as in the Noether deformation procedure, that the deformed action can be expressed as a formal power series in some coupling constants denoted collectively by g, the zeroth-order term in the expansion describing the undeformed theory S_0:

$$S = S_0 + g\, S_1 + g^2 S_2 + \mathcal{O}(g^3)\,.$$

The procedure is then *perturbative*: one tries to construct the deformations order by order in the deformation parameters g. Some physical requirements naturally come out:

- *Poincaré symmetry:* We ask that the Lagrangian be *manifestly* invariant under the *Poincaré* group. Therefore, the free theory is formulated in the flat space-time $\mathbb{R}^{n-1,1}$, the Lagrangian should not depend explicitly on the space-time cartesian coordinates $\{x^\mu\}$ and all space-time indices must be raised and lowered by using either the Minkowski metric or the Levi-Civita tensor.
- *non-triviality:* We reject *trivial* deformations arising from field-redefinitions that reduce to the identity at order zero:

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi + g\,\phi(\varphi, \partial\varphi, \ldots) + \mathcal{O}(g^2)\,.$$

- *Consistency:* A deformation of a theory is called *consistent* if the deformed theory possesses the same number of possibly deformed (perturbatively as well) independent gauge symmetries, reducibility identities, etc., as the system we started with. In other words, the number of physical degrees of freedom is unchanged.
- *Locality:* The deformed action $S[\varphi]$ must be a *local* functional. The deformations of the gauge transformations, etc., must be local functions, as well as the allowed field redefinitions.

We remind the reader that a local function of some set of fields φ is a smooth function of the fields φ and their derivatives $\partial\varphi$, $\partial^2\varphi, \ldots$ up to some *finite* order, say k, in the number of derivatives. Such a set of variables $\varphi, \partial\varphi, \ldots, \partial^k\varphi$ will be collectively denoted by $[\varphi]$. Therefore, a local function of φ is denoted by $f([\varphi])$. A local p-form $(0 \leqslant p \leqslant n)$ is a differential p-form the components of which are local functions:

$$\omega = \frac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(x, [\varphi])\, dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}\,.$$

A local functional $\Omega[\varphi]$ of the fields φ is the integral $\Omega = \int \omega$ of a local n-form $\omega = \omega(x, [\varphi])$.

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

The general problem of consistently deforming a given action S_0 is of course highly non-trivial. It is very fruitful to investigate it order by order in g and to exploit the undeformed gauge symmetries that strongly restrict the consistent possibilities. Indeed, one can easily show that non-trivial first order consistent local deformations S_1 are, on-shell, non-vanishing gauge invariant local functionals (with respect to the undeformed equations of motion and gauge symmetries). To reformulate the problem in the antifield-BRST setting it is enough to observe [5] that the latter functionals are in one-to-one correspondence with elements of the local BRST cohomology group $H^{n,0}(s_0|\,d)$ in top form degree and in vanishing ghost number, where s_0 is the BRST differential corresponding to the undeformed action S_0. Moreover, the obstructions to the existence of a second-order deformation S_2 corresponding to S_1 are encoded in the local BRST cohomology group $H^{n,1}(s_0|\,d)$ in ghost number one [5].

2.2 Non-Abelian deformations

The conventional local free theories corresponding to UIRs of the helicity group $SO(n-2)$ that are completely symmetric tensors have been constructed by Fronsdal a while ago [7] for arbitrary rank s. To have Lorentz invariance manifest, the theory is expressed in terms of completely symmetric tensor gauge fields $\varphi_{\mu_1\ldots\,\mu_s} = \varphi_{(\mu_1\ldots\,\mu_s)}$ of rank $s > 0$, the gauge transformation of which reads

$$\delta_\varepsilon \varphi_{\mu_1\ldots\,\mu_s} = s\,\partial_{(\mu_1}\varepsilon_{\mu_2\ldots\mu_s)}\,,$$

where the curved (square) bracket denotes complete (anti)symmetrization with strength one[2] and the Greek indices run over n values ($n \geqslant 3$). The gauge parameter ε is a completely symmetric tensor field of rank $s-1$. For spin $s=1$ the gauge field φ_μ represents the photon with $U(1)$ gauge symmetry while for spin $s=2$ the gauge field $\varphi_{\mu\nu}$ represents the graviton with linearized diffeomorphism invariance. The gauge field theories corresponding to tensorial helicity representations labeled by one-column Young diagrams are the usual p-form (i.e. completely antisymmetric tensor) gauge theories. Analogous gauge field theories corresponding to arbitrary spin-two (i.e. two-column Young diagrams) helicity representations [8] have been studied recently [9, 10] by using multiform and hyperform calculus [11].

Let us denote by $S_0[\varphi_Y]$ the Poincaré-invariant, local, second-order, quadratic, gauge-invariant ghost-free actions mentioned above where the Young diagram Y labels the corresponding representations. Now, the interaction problem reviewed here can be formulated in a mathematically precise way as follows:

Non-Abelian interaction problem: *List all Poincaré-invariant, non-trivial consistent local deformations*

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] + g\,S_1[\varphi] + g^2\,S_2[\varphi] + \mathcal{O}(g^3)$$

of a finite positive sum

$$S_0[\varphi] = \sum_{Y,\,a} S_0[\varphi^a_Y]$$

of a collection $\varphi \equiv \varphi^a_Y$ (labeled by some index a for each given Young diagram Y) of free gauge field theories such that the deformed local gauge transformations

$$\delta\varphi^a = \delta_0\varphi^a + g\,F^a([\varphi^b],[\varepsilon^c]) + \mathcal{O}(g^2)$$

are non-Abelian at first order *in the coupling constants g.*

Of course, this problem is too complicated to be addressed in full generality with the techniques known at the moment. The restriction of the interaction problem to symmetric tensor gauge fields of rank two, is sometimes referred to as the "Gupta programme". The generalization of the latter to a collection of symmetric tensor gauge fields with arbitrary values of the rank s was proposed in [7] and is thereby frequently called the "Fronsdal programme" or "higher-spin interaction problem".

[2] For example, $\Phi_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(\Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu})$ and $\Phi_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\Phi_{\mu\nu} - \Phi_{\nu\mu})$.

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

2.3 Fronsdal's programme

This old programme is still far away from completion even though encouraging progresses have been obtained over the years. On the one hand, the problem of consistent interactions among only higher-spin gauge fields (hence without gravity) in Minkowski space-time $\mathbb{R}^{n-1,1}$ was addressed in [12–16] (and refs therein) where some positive results have been obtained at first order in the perturbation. In the light-cone gauge, three-point couplings between completely symmetric gauge fields with arbitrary spins $s > 2$ were constructed in [12]. For the pure spin-3 case, a cubic vertex was obtained in a covariant form by Berends, Burgers and van Dam (BBvD) [13] while new explicit vertices were obtained very recently in [15, 16]. The BBvD interaction, however, leads to inconsistencies when pushed at the next orders in powers of g, as was demonstrated in [13–15]. On the other hand, the first explicit attempts to introduce minimal coupling between higher-spin gauge fields and gravity encountered severe problems [17]. Very early, the idea was proposed that a consistent higher-spin gauge theory could exist, provided all spins are taken into account [7]. In order to overcome the gravitational coupling problem, it was also suggested to perturb around a maximally-symmetric curved background, like for example AdS_n, in which directions interesting results have indeed been obtained, such as cubic vertices consistent at first order [18] and equations of motion formally consistent at all orders [19] (see also [20] and refs therein).

If there is a lesson to learn from decades of efforts on the higher-spin interaction problem, it certainly is the unusual character of the possible interactions. For instance, the cubic vertices contain more than two derivatives.[3] In order to remove any prejudice on the form of the interactions, it is natural to attack the Fronsdal programme on exhaustive and purely algebraic grounds such as the antifield-BRST deformation procedure.

3 Killing tensor fields

A problem of physical interest for a better understanding of the higher-spin symmetries is the determination of all Killing tensor fields on Minkowski space-time, that is, the symmetric tensor fields satisfying the following Killing-like equation $\partial_{(\mu_1}\varepsilon_{\mu_2\ldots\mu_s)}(x) = 0$, so that the corresponding Abelian gauge transformations vanish: $\delta_\varepsilon\varphi = 0$. The most general smooth solution of this equation is

$$\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{s-1}}(x) = \sum_{t=0}^{s-1} \lambda_{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\,,\,\nu_1\ldots\nu_t}\, x^{\nu_1}\ldots x^{\nu_t}\,, \quad \lambda_{(\mu_1\ldots\mu_{s-1}\,,\,\nu_1)\nu_2\ldots\nu_t} = 0 \tag{1}$$

where each coefficient of the term of given homogeneity degree in the coordinates $\{x^\mu\}$ is a constant tensor $\lambda_{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\,,\,\nu_1\ldots\nu_t}$, the symmetries of which are labeled by a two-row Young diagram.

Another motivation is that non-trivial on-shell local Killing tensor fields are in one-to-one correspondence with cocycles of the local Koszul-Tate cohomology group $H_2^n(\delta_0|d)$ in top form degree and antifield number two, the knowledge of which is an important ingredient in the computation of the local BRST cohomology group $H^{n,0}(s_0|d)$.

Constant-curvature space-time Killing tensors [21, 22]: *All on-shell Killing tensor fields* $\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{s-1}}(x, [\varphi])$ *of the completely symmetric tensor gauge field theory on constant-curvature space-times can be represented by off-shell Killing tensor fields that are independent of the gauge field* φ *and that are solutions of the Killing-like equation* $\nabla_{(\mu_1}\varepsilon_{\mu_2\ldots\mu_s)}(x) = 0$.

Generally speaking, the global symmetries of a solution of some field equation correspond to the space of gauge parameters leaving the gauge fields invariant under gauge transformations evaluated at the solution. Furthermore, for the flat vacuum solution they are expected to correspond to the full rigid symmetry algebra of the theory. More specifically, the Minkowski Killing tensors of the infinite tower of higher-spin fields should be related to a higher-spin algebra in flat space-time.

The higher-spin gauge symmetry algebras might eventually find their origin in the general procedure of "gauging" some global higher-symmetry algebras of free theories, as was argued in [21,23] and as we briefly

[3] The full non-linear higher-spin theory exposed in [19] is even expected to be non-local.

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

sketch here. All linear relativistic wave equations $\mathrm{K}|\phi\rangle = 0$ (corresponding to some finite-dimensional UIR of the little group) can be derived from an action taking the form of an inner product $\int\langle\phi|\mathrm{K}|\phi\rangle$. Let $\{\mathrm{T}_i\}$ be Hermitian operators spanning some symmetry Lie algebra. This means that they commute with the kinetic operator so that $\{i\mathrm{T}_i\}$ generate, via exponentation, unitary operators preserving the quadratic action. But exactly the same is true for any Weyl-ordered polynomial $P(\mathrm{T}_i)$ of such symmetry generators so that the symmetry algebra may become infinite-dimensional. If the symmetry algebra is a finite-dimensional internal algebra then the latter procedure does not produce anything interesting in general. The case of interest is when one deals with a space-time symmetry algebra generated by vector fields. In such a case, the polynomials in the basis elements are differential operators and their exponentiation leads to non-local unitary operators [23].

Minkowski higher-spin algebra [21]: *The algebra of Weyl-ordered polynomials in the Killing vector fields ∂_μ and $x_{[\mu}\partial_{\nu]}$ of Minkowski space-time is isomorphic to the algebra of differential operators given by $\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_{s-1}}(x)\,\partial^{\mu_1}\dots\partial^{\mu_{s-1}}$ defined by the infinite tower of Minkowski Killing tensor fields ($0 < s < \infty$).*

From its definition, it follows directly that this Minkowski higher-spin algebra can also be obtained via an Inönü-Wigner contraction of the $(A)dS_n$ higher-spin algebras of Vasiliev [19] in the flat limit $\Lambda \to 0$. To end this section, we underline that we have not discussed at all here the subtle issue of trace conditions and their relation with the factorization of the higher-spin algebras which has been debated recently [20] (in the specific context of Minkowski Killing tensors, it was also discussed in [21]).

4 Non-Abelian gauge transformations

The results on one one-column [24] and on two-column [10,25] Young-diagram gauge fields together with the spin-three case [15,16] may be summarized in the following theorem in a form which suggests itself a conjecture for an arbitrary Young diagram.

Deformations of the algebra: *For a collection of gauge fields φ^a_Y ($a = 1,\dots,N$) labeled by a* fixed *Young diagram Y with three columns or less, the non-Abelian interaction problem does not possess any non-trivial solution if the Young diagram Y is made of more than one row. In the completely symmetric tensor case, at first order in some smooth deformation parameter, Poincaré-invariant deformations of the (Abelian) gauge algebra exist. The deformed gauge algebra may always be assumed to be closed off-shell. Two cases arise depending on the parity-symmetry property of the first-order deformation.*

(i) *The first-order* parity-invariant *deformations of the gauge algebra are in one-to-one correspondence with the structure constant tensors $C^a{}_{bc} = (-)^s C^a{}_{cb}$ of an (anti)commutative internal algebra, that may be taken as deformation parameters;*

(ii) *The first-order* parity-breaking *deformations of the gauge algebra are characterized by structure constant tensors $C^a{}_{bc} = (-)^s(\delta^n_3 - \delta^n_5)C^a{}_{cb}$, where n is the space-time dimension and $s > 1$.*

In other words, one may conjecture that there exists no solution to the non-Abelian interaction problem for any finite collection of mixed symmetry gauge fields (at least for fixed symmetry properties). Therefore, from now on we focus on the case of a collection $\varphi^a_{\mu_1\dots\mu_s}$ ($a = 1,\dots,N$) of completely symmetric tensor gauge fields with fixed spin s. We also review the lower spin cases $s = 1, 2$ in order to compare them with the higher-spin case $s = 3$ and look for similarities or novelties.

Deformations of the transformations: *For a collection $\varphi^a_{\mu_1\dots\mu_s}$ ($a = 1,\dots,N$) of completely symmetric tensor gauge fields with fixed spin $s = 1, 2, 3$, the most general Poincaré and* parity-invariant *gauge transformations deforming the gauge algebra at first order in the structure constants are equal to, up to gauge transformations that either are trivial or do not deform the gauge algebra at first order,*

$s = 1$**:** *the Yang-Mills gauge transformation $\delta\varphi^a_\mu = \partial_\mu\varepsilon^a - C^a{}_{bc}\,\varphi^b_\mu\,\varepsilon^c$;*

$s = 2$**:** *the "multi-diffeomorphisms" $\delta\varphi^a_{\mu\nu} = 2\,\partial_{(\mu}\varepsilon^a_{\nu)} - C^a{}_{bc}\,\eta^{\rho\sigma}\,(\,2\partial_{(\mu}\varphi^b_{\nu)\rho} - \partial_\rho\varphi^b_{\mu\nu}\,)\,\varepsilon^c_\sigma + \mathcal{O}(C^2)$;*

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

$s = 3$**:** *the spin-3 gauge transformations decomposing into two categories. More precisely, the structure constant tensor C splits into f and g and the gauge transformations are of the schematic form*

$$\delta\varphi^a_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{(\mu}\varepsilon^a_{\nu\rho)} + f^a{}_{bc}\,(\partial\varphi^b\partial\varepsilon^c)_{\mu\nu\rho} + \; g^a{}_{bc}\,(\partial^2\varphi^b\partial^2\varepsilon^c)_{\mu\nu\rho} \; + \mathcal{O}(C^2)\,,$$

where the structure constant tensor $g^a{}_{bc}$ vanishes in space-time dimension $n < 5$.

In length units, the coupling constants $C^a{}_{bc}$ have dimension $n/2 + s - 3$, except for $g^a{}_{bc}$ which has dimension $n/2 + 2$. The spin-three deformation associated with the tensor $f^a{}_{bc}$ was obtained in [13] while the spin-three deformation corresponding to $g^a{}_{bc}$ was obtained in [15].

In the spin-2 and spin-3 parity-breaking *cases, the first-order deformations of the gauge transformations schematically read (for the detailed expressions, see the second ref. of [25] and [16])*

$$s = 2\text{:}\quad \delta\varphi^a_{\mu\nu} = 2\,\partial_{(\mu}\varepsilon^a_{\nu)} + \delta^n_3\,\widetilde{f}^a_{bc}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial\varphi^b\partial\varepsilon^c)_{\mu\nu\rho} + \delta^n_5\,\widetilde{g}^a_{bc}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(\partial\varphi^b\partial\varepsilon^c)_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}\,,$$

$$s = 3\text{:}\quad \delta\varphi^a_{\mu\nu\rho} = 3\,\partial_{(\mu}\varepsilon^a_{\nu\rho)} + \delta^n_3\,\widehat{f}^a_{bc}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial\varphi^b\varepsilon^c + \varphi^b\partial\varepsilon^c)_{\mu\nu\rho} + \delta^n_5\,\widehat{g}^a_{bc}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(\partial^2\varphi^b\partial\varepsilon^c)_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}\,.$$

5 Non-Abelian cubic vertices

In order to provide an intrinsic characterization of the conditions on the constant tensors characterizing the deformations, let us start by briefly reviewing some basics of abstract algebra.

5.1 Algebraic preliminaries

Let $\mathcal{A}$ be a real algebra of dimension N with a basis $\{T_a\}$. Its multiplication law $* : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ obeys $a * b = (-)\,b * a$ if it is *(anti)commutative*, which is equivalent to the fact that the structure constant tensor defined by $T_b * T_c = C^a{}_{bc}\,T_a$ is (anti)symmetric in the covariant indices: $C^a{}_{bc} = (-)\,C^a{}_{cb}$. Moreover, let us assume that the algebra $\mathcal{A}$ is an Euclidean space, i.e. it is endowed with a scalar product $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{A}^2 \to \mathbb{R}$ with respect to which the basis $\{T_a\}$ is orthonormal, $\langle\, T_a\ ,\ T_b\,\rangle = \delta_{ab}$. For an (anti)commutative algebra, the scalar product is said to be *invariant* (under the left or right multiplication) if and only if $\langle\, a * b\,,\ c\,\rangle = \langle\, a\ ,\ b * c\,\rangle$ for any $a, b, c \in \mathcal{A}$, and the latter property is equivalent to the complete (anti)symmetry of the trilinear form

$$C : \mathcal{A}^3 \to \mathbb{R} : (a, b, c) \mapsto C(a, b, c) = \langle\, a\ ,\ b * c\,\rangle$$

or, in components, to the complete (anti)symmetry property of the covariant tensor $C_{abc} := \delta_{ad}\,C^d{}_{bc}$. For that reason, the former algebras are said to be *(anti)symmetric*. An anticommutative algebra satisfying the Jacobi identity $a*(b*c)+b*(c*a)+c*(a*b) = 0$ is called a Lie algebra and the product $*$ is called a Lie bracket. In components it reads $C^e{}_{d[a}C^d{}_{bc]} = 0$. Furthermore, the Killing form of a (compact) semisimple Lie algebra endows it with an (Euclidean) antisymmetric algebra structure. Eventually, an algebra is said to be associative if $a * (b * c) = (a * b) * c$ which, for (anti)commutative algebras, reads in components $C^d{}_{b[c}C^e{}_{a]d} = 0$. For anticommutative algebras, the associativity is much stronger than the Jacobi identity.

5.2 Cubic vertices

An important physical question is whether or not these first-order gauge symmetry deformations possess some Lagrangian counterpart. The following theorem provides a sufficient condition [15, 16, 24, 25].

Cubic vertices: *Let the constant tensor $C_{abc} := \delta_{ad}C^d{}_{bc}$ be completely (anti)symmetric, then the non-Abelian interaction problem for a quadratic local action $S_0[\varphi^a_{\mu_1\ldots\mu_s}]$ (rank s fixed) admits first-order solutions which are local functionals $C_{abc}\,S_1^{abc}[\varphi^a_{\mu_1\ldots\mu_s}]$ such that the deformation $S = S_0 + C_{abc}\,S_1^{abc} + \mathcal{O}(C^2)$ is invariant under the aforementioned gauge transformations at first order in C. They*

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

- $s = 1$: *are equal to the Yang-Mills cubic vertex* $S_1[\varphi^d_\mu] = C_{[abc]} \int d^n x \; \partial^{[\mu}\varphi^{\nu]\,a}\varphi^b_\mu\varphi^c_\nu$.
- $s = 2$: *decompose as a sum* $S_1[\varphi^d_{\mu\nu}] = C_{(abc)}R^{abc} + \delta^n_3\,\widetilde{f}_{(abc)}\widetilde{U}^{abc} + \delta^n_5\,\widetilde{g}_{[abc]}\widetilde{V}^{abc}$ *of cubic functionals respectively containing two, three and three derivatives.*
- $s = 3$: *decompose as a sum* $S_1[\varphi^d_{\mu\nu\rho}] = f_{[abc]}\,S^{abc} + g_{[abc]}\,T^{abc} + \delta^n_3\,\widehat{f}_{[abc]}\widehat{U}^{abc} + \delta^n_5\,\widehat{g}_{(abc)}\widehat{V}^{abc}$ *of cubic functionals respectively containing three, five, two and four derivatives.*

The vertices in the first-order deformations are determined uniquely by the structure constants, modulo vertices that do not deform the gauge algebra. Moreover, the (anti)symmetry of the internal algebra is not only a sufficient *but also a* necessary *requirement for all known cases (i.e. this issue is open only for the spin-three case with the deformation associated with* $g^a{}_{bc}$*).*

The first-order covariant cubic deformation $S^{abc}[\varphi^d_{\mu\nu\rho}]$ is the BBvD vertex [13]. We do not know yet whether the antisymmetry condition on the structure constant $g^a{}_{bc}$ is actually necessary or not for the existence of a consistent vertex at first order but, looking at all other cases, it seems very plausible. One may thus conjecture that, for any fixed helicity s, the existence of a local Lagrangian counterpart to the non-Abelian gauge symmetries requires that the structure constants define an (anti)symmetric internal algebra. The fact that the internal algebra is Euclidean is hidden in the fact that in the free limit the action is a *positive* sum of quadratic *ghost-free* actions.

6 Consistency at second order

Of course, the next issue is whether the first order deformations can be pushed further or if they are obstructed. Consistency of the gauge algebras (only by itself and already at second order) constrains rather strongly the parity-invariant possibilities [4, 14, 15, 24, 25]. In the spin-2 and spin-3 parity-breaking cases, the issue is more subtle and a detailed comparative discussion is given in the conclusion of [16].

Consistency of the algebra: *At second order in* $C^a{}_{bc}$*, the parity-invariant deformation of the gauge algebra can be assumed to close off-shell without loss of generality, and for* $s = 1, 2, 3$ *it is not obstructed if and only if the structure constants* $C^a{}_{bc}$ *define an internal algebra which is*

- $s = 1$: *a Lie algebra.*
- $s = 2$: *an associative algebra.*
- $s = 3$: *an associative algebra for* $f^a{}_{bc}$*, or if the space-time dimension is equal to* $n = 3$.

We emphasize that the existence of a cubic vertex corresponding to the non-Abelian gauge transformations was not necessary to derive this theorem. In order to combine the latter result with the former one for the existence of a Lagrangian counterpart, one may use the following well-known lemma.[4]

Lemma: *If a finite-dimensional (anti)commutative (anti)symmetric Euclidian algebra is associative, then it is the direct sum of one-dimensional ideals.*

This lemma leads to stringent restrictions on the deformations which are consistent till second order.

Corollary: *For a collection* $\varphi^a_{\mu_1\ldots\mu_s}$ $(a = 1, \ldots, N)$ *of completely symmetric tensor gauge fields with fixed rank* $s = 1, 2, 3$*, the non-Abelian parity-invariant interaction problem is such that the deformed gauge algebra is*

- $s = 1$: *a finite-dimensional internal Lie algebra endowed with an antisymmetric algebra structure. For semi-simple compact Lie algebras, the scalar product is naturally identified with the Killing form.*
- $s = 2$: *given by the direct sum of diffeomorphism (i.e. vector field) Lie algebras.*
- $s = 3$: *inconsistent if* $f^a_{bc} \neq 0$ *and* $n > 3$.

[4] The proofs are elementary and were given in the corresponding references.

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

To conclude, the recent (modest but exciting) observations on the spin-three non-Abelian interaction problem are that, at second order at the level of the gauge *algebra*, the new deformations corresponding to the structure constants $g_{[abc]}$ [15] and $\widehat{g}_{(abc)}$ [16] both pass the consistency requirement where the BBvD vertex fails, and that the BBvD gauge symmetries are not obstructed in three-dimensional flat space-time (this new result is proper to the present paper). Unfortunately, we do not know yet whether there exist second-order gauge *transformations* that are consistent at this order.

Acknowledgements X.B. is grateful to the organizers of the network meeting for giving him the opportunity to present this work in Corfu. He also thanks the Albert Einstein Institut, the Werner Heisenberg Institut and especially the Institut des Hautes Études Scientifiques for hospitality.

The work of S.C. is supported in part by the "Interuniversity Attraction Poles Programme – Belgian Science Policy" and by IISN-Belgium (convention 4.4505.86). Moreover, X.B. and S.C. are supported in part by the European Commission FP6 programme MRTN-CT-2004-005104, in which S.C. is associated to the V.U.Brussel (Belgium).

References

[1] D. Sorokin, AIP Conf. Proc. **767**, 172 (2005) [hep-th/0405069].
N. Bouatta, G. Compere, and A. Sagnotti, An introduction to free higher-spin fields, in: Proceedings of the First Solvay Workshop on Higher-Spin Gauge Theories, Brussels, 2004 [hep-th/0409068].

[2] X. Bekaert and N. Boulanger, Mixed symmetry gauge fields in a flat background, in: Proceedings of the International Seminar on Supersymmetries and Quantum Symmetries "SQS 03", Dubna, 2003 [hep-th/0310209].

[3] X. Bekaert and J. Mourad, The Continuous Spin Limit of Higher Spin Field Equations [hep-th/0509092].

[4] F.A. Berends, G.J.H. Burgers, and H. van Dam, Nucl. Phys. B **260**, 295 (1985).

[5] G. Barnich and M. Henneaux, Phys. Lett. B **311**, 123 (1993) [hep-th/9304057].
M. Henneaux, Contemp. Math. **219**, 93 (1998) [hep-th/9712226].

[6] S.C. Anco, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **1**, 493 (2004) [math-ph/0407026].

[7] C. Fronsdal, Phys. Rev. D **18**, 3624 (1978).

[8] T. Curtright, Phys. Lett. B **165**, 304 (1985).
C.S. Aulakh, I.G. Koh, and S. Ouvry, Phys. Lett. B **173**, 284 (1986).

[9] P. de Medeiros and C. Hull, Commun. Math. Phys. **235**, 255 (2003) [hep-th/0208155].

[10] X. Bekaert, N. Boulanger, and M. Henneaux, Phys. Rev. D **67**, 044010 (2003) [hep-th/0210278].
C. Bizdadea, C.C. Ciobirca, E.M. Cioroianu, S.O. Saliu, and S.C. Sararu, Eur. Phys. J. C **36**, 253 (2004) [hep-th/0306154].
N. Boulanger, and S. Cnockaert, J. High Energy Phys. **0403**, 031 (2004) [hep-th/0402180].
X. Bekaert, N. Boulanger, and S. Cnockaert, J. Math. Phys. **46**, 012303 (2005) [hep-th/0407102].

[11] P.J. Olver, Lect. Notes Math. **1278**, 62 (1987).
M. Dubois-Violette and M. Henneaux, Lett. Math. Phys. **49**, 245 (1999) [math.qa/9907135]; Commun. Math. Phys. **226**, 393 (2002) [math.qa/0110088].
X. Bekaert, and N. Boulanger, Commun. Math. Phys. **245**, 27 (2004) [hep-th/0208058]; Class. Quantum Gravity **20**(2003) S417 [hep-th/0212131].

[12] A.K.H. Bengtsson, I. Bengtsson, and L. Brink, Nucl. Phys. B **227**, 31 (1983).
A.K.H. Bengtsson, I. Bengtsson, and N. Linden, Class. Quantum Gravity **4**, 1333 (1987).
E.S. Fradkin and R.R. Metsaev, Class. Quantum Gravity **8**, L89 (1991).
R.R. Metsaev, Mod. Phys. Lett. A **6**, 359 (1991); Mod. Phys. Lett. A **8**, 2413 (1993).

[13] F.A. Berends, G.J.H. Burgers, and H. van Dam, Z. Phys. C **24**, 247 (1984).

[14] A.K.H. Bengtsson, Phys. Rev. D **32**, 2031 (1985).

[15] X. Bekaert, N. Boulanger, and S. Cnockaert, Spin Three Gauge Theory Revisited [hep-th/0508048].

[16] N. Boulanger, S. Cnockaert, and S. Leclercq, Parity Violating Vertices for Spin-3 Gauge Fields [hep-th/0509118].

[17] C. Aragone and S. Deser, Phys. Lett. B **86**, 161 (1979).
F.A. Berends, J.W. van Holten, B. de Wit, and P. van Nieuwenhuizen, J. Phys. A **13**, 1643 (1980).

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

[18] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, Phys. Lett. B **189**, 89 (1987); Nucl. Phys. B **291**, 141 (1987).
M. A. Vasiliev, Nucl. Phys. B **616**, 106 (2001); Erratum Nucl. Phys. B **652**, 407 (2003) [hep-th/0106200].
K. B. Alkalaev, and M. A. Vasiliev, Nucl. Phys. B **655**, 57 (2003) [hep-th/0206068].
[19] M. A. Vasiliev, Phys. Lett. B **567**, 139 (2003) [hep-th/0304049]; Fortschr. Phys. **52**, 702 (2004) [hep-th/0401177]; C.R. Phys. **5**, 1101 (2004) [hep-th/0409260].
[20] A. Sagnotti, E. Sezgin, and P. Sundell, [hep-th/0501156].
X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla, and M. A. Vasiliev, [hep-th/0503128]; both in: Proceedings of the First Solvay Workshop on Higher-Spin Gauge Theories, Brussels, 2004.
[21] X. Bekaert and N. Boulanger, Nucl. Phys. B **722**, 225 (2005) [hep-th/0505068].
[22] G. Barnich, N. Bouatta, and M. Grigoriev, J. High Energy Phys. **0510**, 010 (2005) [hep-th/0507138].
[23] X. Bekaert, Universal enveloping algebras and some applications in physics, preprint IHES/P/05/26, to be published in: Proccedings of the Modave Summer School in Mathematical Physics, Modave, 2005.
[24] G. Barnich, M. Henneaux, and R. Tatar, Int. J. Mod. Phys. D **3**, 139 (1994) [hep-th/9307155].
M. Henneaux and B. Knaepen, Phys. Rev. D **56**, 6076 (1997) [hep-th/9706119].
[25] N. Boulanger, T. Damour, L. Gualtieri, and M. Henneaux, Nucl. Phys. B **597**, 127 (2001) [hep-th/0007220].
N. Boulanger and L. Gualtieri, Class. Quantum Gravity **18**, 1485 (2001) [hep-th/0012003].
N. Boulanger and M. Henneaux, Ann. Phys. (Leipzig) **10**, 935 (2001) [hep-th/0106065].

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

Complément C

Matière scalaire interagissant via des médiateurs sans masse de spin élevé

Published by IOP Publishing for SISSA

Received: *March 26, 2009*
Revised: *April 29, 2009*
Accepted: *May 15, 2009*
Published: *May 29, 2009*

On higher spin interactions with matter

Xavier Bekaert,[a] **Euihun Joung**[b] **and Jihad Mourad**[b]

[a] *Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, Unité Mixte de Recherche* 6083 *du CNRS, Fédération Denis Poisson, 37200 Tours, France*

[b] *AstroParticule et Cosmologie, Unité Mixte de Recherche* 7164 *du CNRS, Université Paris VII, Bâtiment Condorcet 75205 Paris Cedex 13, France*

E-mail: bekaert@lmpt.univ-tours.fr, joung@apc.univ-paris7.fr, mourad@apc.univ-paris7.fr

Abstract: Cubic couplings between a complex scalar field and a tower of symmetric tensor gauge fields of all ranks are investigated. A symmetric conserved current, bilinear in the scalar field and containing r derivatives, is provided for any rank $r \geqslant 1$ and is related to the corresponding rigid symmetry of Klein-Gordon's Lagrangian. Following Noether's method, the tensor gauge fields interact with the scalar field via minimal coupling to the conserved currents. The corresponding cubic vertex is written in a compact form by making use of Weyl's symbols. This enables the explicit computation of the non-Abelian gauge symmetry group, the current-current interaction between scalar particles mediated by any gauge field and the corresponding four-scalar elastic scattering tree amplitude. The exact summation of these amplitudes for an infinite tower of gauge fields is possible and several examples for a definite choice of the coupling constants are provided where the total amplitude exhibits fast (e.g. exponential) fall-off in the high-energy limit. Nevertheless, the long range interaction potential is dominated by the exchange of low-spin ($r \leqslant 2$) particles in the low-energy limit.

Keywords: Gauge Symmetry, Global Symmetries

ArXiv ePrint: 0903.3338

© SISSA 2009

doi:10.1088/1126-6708/2009/05/126

JHEP05(2009)126

Contents

1 Introduction and summary of results **1**

2 Generating functions and the Noether method **4**

3 Minimal coupling of a scalar to higher-spin gauge fields **7**
- 3.1 Conserved current of any rank from scalar action 7
- 3.2 Noether interactions 8
- 3.3 Weyl formulation 9
- 3.4 Weyl algebra as a non-Abelian gauge symmetry 10

4 Tree-level higher-spin exchange amplitudes **13**
- 4.1 Feynman rules 13
- 4.2 Tree-level amplitude 14

5 Summation of tree amplitudes and high-energy behaviour **16**
- 5.1 Simplest examples 17
- 5.2 General discussion 17
- 5.3 Softness and finiteness 18

6 Non-relativistic interaction potential **19**

7 Conclusion and discussion of results **20**

A Weyl quantisation **22**

B Elastic scattering **26**

C Chebyshev and Gegenbauer polynomials **28**

1 Introduction and summary of results

The role of higher-spin fields in fundamental interactions is still unclear. On the one hand, starting from spin two, the potential coupling constants have negative mass dimensions leading to power counting nonrenormalisable theories. On the other hand, higher spin particles have a crucial role in the softness of string interactions at high energies; the infinite tower of massive higher-spin states provides a regularisation in the ultraviolet. Confronting this fact and the example of Vasiliev's theory [1] (reviewed e.g. in [2]) with the many no-go

JHEP05(2009)126

theorems [3–6] involving a finite number of massless higher-spin fields suggests that an infinite collection of higher-spin fields is a necessary ingredient for building a consistently interacting theory. Furthermore, the algebra of higher-spin symmetries is expected to have consistent Lorentz covariant truncations only for gauge fields with spin not greater than two.

Here, we would like to examine the issues of the high energy behaviour and the gauge symmetries in more details in the framework of a simple example: the cubic couplings between a matter scalar field and a collection of higher-spin gauge fields. The model is consistent from quadratic order in the gauge and matter fields up to cubic couplings of two scalar and one gauge field. This model can be used to reliably calculate tree level amplitudes for the elastic scattering of two scalar particles. It also gives a hint on the non-Abelian generalization of the gauge algebra, in our case it is the algebra of unitary operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$ where n is the spacetime dimension.

Let us first describe briefly the model. We start with a free matter scalar field $|\,\phi\,\rangle$, with the Klein-Gordon action

$$S_0[\phi] = -\,\langle\,\phi\,|\,\hat{P}^2 + m^2\,|\,\phi\,\rangle\,. \tag{1.1}$$

It gives rise to an infinite set of conserved Noether currents. Alternatively, the generating function

$$\phi(x - q/2)\,\phi^*(x + q/2) = \sum_r \frac{1}{r!}\ \overset{(r)}{J}_{\mu_1\ldots\mu_r}\ q^{\mu_1}\ldots q^{\mu_r}\,, \tag{1.2}$$

when expanded in the auxiliary variable u gives as coefficients symmetric conserved currents $J^{(r)}$ which are improved Noether currents. The higher-spin gauge fields $h^{(r)}$ can also be grouped in a generating function

$$h(x,p)\ =\ \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!}\ \overset{(r)}{h}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\,p^{\mu_1}\ldots p^{\mu_r}$$

which we interpret as defining a Hermitian operator $\hat{H}$ acting on the scalar field. The currents allow minimal couplings with the higher-spin fields. The first important remark is that the sum of the cubic couplings takes the simple form

$$S_1[\phi,h] = -\,\langle\,\phi\,|\,\hat{H}\,|\,\phi\,\rangle\,. \tag{1.3}$$

The precise relationship between the operator $\hat{H}$ and the generating function $h(x,p)$ for higher-spin field $h^{(r)}$ is that the latter is the Weyl symbol of the former. Basic facts about Weyl calculus are recalled in appendix A. Denoting $\hat{G} = \hat{P}^2 + m^2 + \hat{H}$, the action $S_0 + S_1$, which is clearly of the form $-\,\langle\,\phi\,|\,\hat{G}\,|\,\phi\,\rangle$, is invariant under the unitary transformations

$$|\,\phi\,\rangle\ \ \rightarrow\ \ \hat{U}\,|\,\phi\,\rangle\,, \tag{1.4}$$

provided $\hat{G}$ transforms as

$$\hat{G}\ \ \rightarrow\ \ \hat{U}\ \hat{G}\ \hat{U}^{-1}. \tag{1.5}$$

The second important observation is that this transformation reduces to lowest order in $\hat{H}$ to the gauge transformation of massless higher-spin fields.[1] This is shown in section 3.

[1] Similar ideas on the link between Weyl quantisation and Noether couplings between matter and gauge fields have been pushed forward previously in the context of conformal higher-spin theory by Segal [7]. Symbol calculus made one of its earliest appearance in the subject of higher spin interactions in the construction of higher-spin (super)algebras [8].

JHEP05(2009)126

We next consider tree level scattering amplitudes which can be easily calculated in our framework. The model gives rise to cubic vertices, which together with the propagators of the higher-spin fields allow the calculation of the tree amplitudes for the scattering of two scalar particles. The propagators which are suitable for our purposes were found in [9] where no assumption about the vanishing of the double trace of the fields were made. One may ask about the coupling constants of the theory. In fact, there is an infinite number of them, which are hidden in the correspondence between $\hat{H}$ and the higher-spin fields $h^{(r)}$ or, by a field redefinition, in the kinetic terms of $h^{(r)}$. We have one coupling constant λ with dimension of length and a collection of dimensionless couplings a_r associated with each spin r. In fact all these dimensionless couplings can be grouped in a generating function $a(z)$

$$a(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r!} z^r. \tag{1.6}$$

We will show that the tree level amplitude of the two-scalar scattering $\phi\phi \to \phi\phi$ and the non-relativistic potential can both be expressed simply in terms of this generating function. Its behavior near the origin determines the static interaction potential and its behavior at large negative arguments determines the high energy scattering amplitudes. The explicit expression of the scattering amplitude turns out to be very simple and is given, in terms of the Mandelstam variables, by

$$A(s,t,u) = -\frac{\lambda^{-2}}{t}\left[a\left(-\frac{\lambda^2}{8}\left(\sqrt{s}+\sqrt{-u}\right)^2\right) + a\left(-\frac{\lambda^2}{8}\left(\sqrt{s}-\sqrt{-u}\right)^2\right) - a_0\right]. \tag{1.7}$$

It can be very soft at high energies if the function a is small for large negative argument. The static potential due to the exchange of a spin r particle between two mass m particles with interdistance $\vec{x}$ can be deduced and is given by

$$\overset{(r)}{V}(\vec{x}) = \frac{a_r}{4\,r!}\left(-\frac{(m\lambda)^2}{2}\right)^{r-1}\frac{1}{4\pi\,|\vec{x}|}. \tag{1.8}$$

If λ is of the order of the Planck length and m of the proton mass, then $(m\lambda) \ll 1$ and the potentials for higher spins are negligible with respect to the Newtonian one provided the coefficients a_r do not grow fastly with r. Unitarity leads to positive coefficients a_r but otherwise the generating function is arbitrary within our framework. We expect higher order consistency to further constrain this function.

The plan of the paper is as follows: section 2 presents a concise reformulation of the so-called Noether method for introducing consistent interactions between matter and gauge fields in terms of various generating functions. This formalism together with Weyl calculus is applied in section 3 to the construction of the cubic vertices that are bilinear in a complex scalar field and linear in a tensor gauge field. Section 4 is devoted to the four-scalar elastic scattering tree amplitude due to the exchange of a single tensor gauge field. It is expressed in terms of Chebyshev's or Gegenbauer's polynomials. The high-energy behaviour of their sum, corresponding to an infinite tower of exchanged tensor gauge fields, is discussed in section 5. The non-relativistic interaction potential is obtained

JHEP05(2009)126

and discussed in section 6. The paper ends with a short conclusion in section 7 and several appendices:[2] appendix A is a brief introduction to the formulation of quantum mechanics in terms of Weyl symbols [10]. In appendix B, the Mandelstam variables and various limits of elastic scattering are recalled. Appendix C contains the definitions and some useful formulas for Chebyshev's or Gegenbauer's polynomials.

2 Generating functions and the Noether method

A *symmetric conserved current* of rank $r \geqslant 1$ is a real contravariant symmetric tensor field $J^{(r)}$ obeying the conservation law

$$\partial_{\mu_1} \overset{(r)}{J}{}^{\mu_1 \dots \mu_r}(x) \approx 0 \,.$$

where the "weak equality" symbol $\approx$ stands for "equal on-mass-shell," i.e. modulo terms proportional to the Euler-Lagrange equations. A *generating function of conserved currents* is a real function $J(x,u)$ on phase space which is (i) a formal power series in the "momenta" u_μ and (ii) such that

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) J(x,u) \approx 0 \,. \tag{2.1}$$

The terminology follows from the fact that all the coefficients of order $r \geqslant 1$ in the power expansion of the generating function

$$J(x,u) \;=\; \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!} \overset{(r)}{J}{}^{\mu_1 \dots \mu_r}(x)\, u_{\mu_1} \dots u_{\mu_r} \tag{2.2}$$

are all symmetric currents which from eq. (2.1) are conserved.

A *symmetric tensor gauge field* of rank $r \geqslant 1$ is a real covariant symmetric tensor field $h^{(r)}$ whose gauge transformations are [11]

$$\delta_\varepsilon \overset{(r)}{h}{}_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) \;=\; r\, \partial_{(\mu_1} \overset{(r-1)}{\varepsilon}{}_{\mu_2 \dots \mu_r)}(x) \;+\; \mathcal{O}(h) \,, \tag{2.3}$$

where the gauge parameter $\varepsilon^{(r-1)}$ is a covariant symmetric tensor field of rank $r-1$ and the round bracket denotes complete symmetrisation with weight one. For lower ranks $r = 1$ or 2, the transformation (2.3) either corresponds to the U(1) gauge transformation of the vector ($r = 1$) gauge field or to the linearised diffeomorphisms of the metric ($r = 2$). By comparison with the spin-two case, this formulation of higher-spin gauge fields is sometimes called "metric-like" (in order to draw the distinction with the "frame-like" version where the gauge field is not completely symmetric). A *generating function of gauge fields* is a real function $h(x,v)$ on configuration space (i) which is a formal power series in the velocities v^μ and (ii) whose gauge transformations are

$$\delta_\varepsilon h(x,v) \;=\; \left(v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \varepsilon(x,v) \;+\; \mathcal{O}(h) \,, \tag{2.4}$$

[2] Except in appendix A, we set $\hbar = c = 1$.

JHEP05(2009)126

where $\varepsilon(x,v)$ is also a formal power series in the velocities. The nomenclature follows from the fact that all the coefficients of order $r \geqslant 1$ in the power expansion of the generating function

$$h(x,v) \;=\; \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!}\, \overset{(r)}{h}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\, v^{\mu_1}\ldots v^{\mu_r} \tag{2.5}$$

are all symmetric tensor gauge fields due to (2.4) with

$$\varepsilon(x,v) \;=\; \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!}\, \overset{(r)}{\varepsilon}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\, v^{\mu_1}\ldots v^{\mu_r}\,.$$

Of course, in the context of Noether couplings, the "velocities" v^μ and "momenta" u_ν are interpreted as mere auxiliary variables. Let us introduce a nondegenerate bilinear pairing $\ll \| \gg$ between the generating functions $J(x,u)$ and $h(x,v)$ on the configuration and phase spaces respectively,

$$\ll J \,\|\, h \gg \;:=\; \sum_{r\geqslant 0} \int d^n x \,\Big\langle\, \overset{(r)}{J}(x)\,,\, \overset{(r)}{h}(x) \,\Big\rangle\,, \tag{2.6}$$

where $\big\langle\, J^{(r)}(x)\,,\, h^{(r)}(x) \,\big\rangle$ is the contraction between the current and the gauge field:

$$\Big\langle\, \overset{(r)}{J}(x)\,,\, \overset{(r)}{h}(x) \,\Big\rangle = \frac{1}{r!}\, \overset{(r)}{J}{}^{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\, \overset{(r)}{h}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\,. \tag{2.7}$$

This bilinear form can be written in terms of the generating functions as

$$\ll J \,\|\, h \gg = \int d^n x \;\exp\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\frac{\partial}{\partial v^\mu}\right) J(x,u)\, h(x,v)\Big|_{u=v=0}\,. \tag{2.8}$$

Let us denote by $\ddagger$ the adjoint operation for the pairing (2.8) in the sense that

$$\ll J \,\|\, \hat{\hat{O}}\, h \gg \;=\; \ll \hat{\hat{O}}^\ddagger\, J \,\|\, h \gg\,,$$

where $\hat{\hat{O}}$ is an operator acting on the vector space of functions on configuration space (the double hat stands for "second quantisation" in the sense that the operator acts on symbols of "first quantised" operators). Notice that $(v^\mu)^\ddagger = \partial/\partial u_\mu$ and $(\partial/\partial x^\mu)^\ddagger = -\partial/\partial x^\mu$ imply the useful relation

$$\left(v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^\ddagger \;=\; -\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\,. \tag{2.9}$$

The *matter action* is a functional $S_0[\,\phi\,]$ of some matter fields collectively denoted by ϕ. The Euler-Lagrange equations of these matter fields is such that there exists some conserved current $J^{(r)}[\,\phi\,]$. The Noether method for introducing interactions is essentially the "minimal" coupling between a gauge field $h^{(r)}$ and a conserved current $J^{(r)}[\,\phi\,]$ of the same rank. Accordingly, the *Noether interaction* between gauge fields and conserved currents is the functional of both matter and gauge fields defined as the pairing between the generating functions

$$S_1[\,\phi, h\,] \;:=\; -\,\ll J \,\|\, h \gg\,. \tag{2.10}$$

JHEP05(2009)126

Let us assume that there exists a gauge invariant action $S[\,\phi,h\,]$ whose power expansion in the gauge fields starts as follows

$$S\,[\,\phi,h\,]\;=\;S_0[\,\phi\,]\;+\;S_1[\,\phi,h\,]\;+\;S_2[\,\phi,h\,]\;+\;\mathcal{O}(h^3)\,. \tag{2.11}$$

The variation of the Noether interaction (2.10) under (2.4)

$$\delta_\varepsilon S_1[\,\phi,h\,]\;=\;-\,\ll J\,\|\,\delta_\varepsilon h\gg\,+\mathcal{O}(h)\,,$$

is at least of order one in the gauge fields when the equations of motion for the matter sector are obeyed,

$$\delta_\varepsilon S_1[\,\phi,h\,]\;\approx\;\mathcal{O}(h)\,, \tag{2.12}$$

because the properties (2.1) and (2.9) imply that

$$\ll J\,\|\,\left(v\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\varepsilon\gg\;=\;-\,\ll\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)J\,\|\,\varepsilon\gg\;\approx\;0\,. \tag{2.13}$$

Actually, the crucial property (2.12) works term by term since

$$\int d^nx\;\overset{(r)}{J}{}^{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\;\partial_{\mu_1}\overset{(r-1)}{\varepsilon}{}_{\mu_2\ldots\mu_r}(x)\;=\;-\int d^nx\;\partial_{\mu_1}\overset{(r)}{J}{}^{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\;\overset{(r-1)}{\varepsilon}{}_{\mu_2\ldots\mu_r}(x)\;\approx\;0\,.$$

The equation (2.12) implies that the action (2.11) is indeed gauge-invariant at lowest order in the gauge fields because the terms that are proportional to the Euler-Lagrange equations $\delta S_0/\delta\phi$ of the matter sector can be compensated by introducing a gauge transformation $\delta_\varepsilon\phi$ of the matter fields, independent of the gauge fields h and linear in the matter fields ϕ, such that

$$\delta_\varepsilon\,(\,S_0[\,\phi\,]+S_1[\,\phi,h\,]\,)\;=\;\mathcal{O}(h)\,. \tag{2.14}$$

A *Killing tensor field* of rank $r-1\geqslant 0$ on $\mathbb{R}^n$ is a covariant symmetric tensor field $\overline{\varepsilon}^{(r-1)}$ solution of the generalised Killing equation

$$\partial_{(\mu_1}\overset{(r-1)}{\overline{\varepsilon}}{}_{\mu_2\ldots\mu_r)}(x)=0\,.$$

A *generating function of Killing fields* is a function $\overline{\varepsilon}(x,v)$ on configuration space which is (i) a formal power series in the velocities and (ii) such that $\overline{\varepsilon}(x+v\,\tau\,,v)=\overline{\varepsilon}(x,v)$ for any τ. Then the coefficients in the power series

$$\overline{\varepsilon}(x,v)\;=\;\sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!}\,\overset{(r)}{\overline{\varepsilon}}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\,v^{\mu_1}\ldots v^{\mu_r}$$

are all Killing tensor fields on $\mathbb{R}^n$. The variation (2.3) of the gauge field vanishes if the gauge parameter is a Killing tensor field. Therefore the corresponding gauge transformation $\delta_{\overline{\varepsilon}}\phi$ of the matter fields is a rigid symmetry of the matter action $S_0[\,\phi\,]$:

$$\delta_{\overline{\varepsilon}}S_0[\,\phi\,]=-\,\delta_{\overline{\varepsilon}}S_1[\,\phi,h\,]\,\big|_{h=0}=0\,,$$

JHEP05(2009)126

due to (2.14) and the fact that $\delta_\varepsilon\phi$ is independent of the gauge fields. In turn, this shows that the conserved current $J^{(r)}[\,\phi\,]$ must be equal, on-shell and modulo a trivial conserved current (sometimes called an "improvement"), to the Noether current associated with the latter rigid symmetry of the action $S_0[\,\phi\,]$. A careful look at the one-to-one correspondence between equivalence classes of rigid symmetries of the action and conserved currents provided by Noether's theorem (see e.g. the section 2 of [12] for a concise review) allows to prove also the following fact: if the Noether interaction is translation invariant (i.e. the Noether current does not depend on x) then the corresponding rigid symmetry of the matter field does not depend on x.

3 Minimal coupling of a scalar to higher-spin gauge fields

3.1 Conserved current of any rank from scalar action

Consider a matter sector made of a free complex scalar field ϕ, of mass square $m^2 \geqslant 0$, propagating on Minkowski spacetime with mostly plus metric $\eta_{\mu\nu}$. The matter action is the quadratic functional

$$S_0[\,\phi\,] \;=\; -\int d^n x \,\big(\,\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi^*(x)\,\partial_\nu\phi(x) + m^2\,\phi^*(x)\,\phi(x)\,\big)\,, \tag{3.1}$$

which gives an Euler-Lagrange equation: $(\Box - m^2)\phi(x) \approx 0$. Now consider the following function with an auxiliary variable q^μ

$$\breve{\rho}(x,q) := \phi^*(x-q/2)\,\phi(x+q/2)\,. \tag{3.2}$$

It obeys a conservation law,

$$\begin{aligned}\left(\eta^{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial q^\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\breve{\rho}(x,q) \;&=\; \phi^*(x-q/2)\,\partial^2\phi(x+q/2)\\ &\quad - \partial^2\phi^*(x-q/2)\,\phi(x+q/2) \;\approx 0\,,\end{aligned} \tag{3.3}$$

and can be considered as a generating function for symmetric conserved currents. Notice that eq. (3.3) is similar to eq. (2.1) except that the metric must be used.[3] Therefore one finds that a very simple generating function of conserved currents is $J(x,u) = \breve{\rho}(x,-i\,u)$ where the factor i has been introduced in such a way that the function is real. It can be formally written in terms of the wave function $\phi(x)$ as

$$J(x,u) = \phi^*(x+i\,u/2)\,\phi(x-i\,u/2) = |\,\phi(x-i\,u/2)\,|^2\,. \tag{3.4}$$

where reality is manifest. The condition (2.1) can again be checked by a direct computation.

Moreover, the Taylor expansion of $J(x,u)$ in power series of u^μ:

$$J(x,u) = \sum_{r=0}^{\infty}\,\frac{1}{r!}\,\overset{(r)}{J}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\,u^{\mu_1}\ldots u^{\mu_r}, \tag{3.5}$$

[3] The Minkowski metric provides an isomorphism between the tangent and cotangent spaces via the identification $u^\mu = \eta^{\mu\nu}u_\nu$, which induces an isomorphism between the spaces of functions on the configuration and phase spaces.

JHEP05(2009)126

leads to the explicit expression of the symmetric conserved currents

$$\overset{(r)}{J}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \;=\; \left(\frac{i}{2}\right)^r \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \,\partial_{(\mu_1}\ldots\partial_{\mu_s}\phi(x)\;\partial_{\mu_{s+1}}\ldots\partial_{\mu_r)}\phi^*(x)\,, \tag{3.6}$$

where all indices of the currents have been lowered because its explicit expression is in terms of derivatives of the scalar field. These currents are proportional to the ones already introduced in [13]. Various explicit sets of conserved currents were also provided in [14]. The symmetric conserved current (3.6) or rank r is bilinear in the scalar field and contains exactly r derivatives. The currents of any rank are real thus, if the scalar field is real then the odd rank currents are absent due to the factor in front of (3.6). Notice that the symmetric conserved current of rank two

$$\overset{(2)}{J}{}_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*(x)\,\phi(x) + \phi^*(x)\,\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) - 2\,\partial_{(\mu}\phi^*(x)\;\partial_{\nu)}\phi(x)\right), \tag{3.7}$$

is distinct from the canonical energy-momentum tensor

$$T_{\mu\nu}(x) = \partial_{(\mu}\phi^*(x)\,\partial_{\nu)}\phi(x) - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\left(\,|\partial\phi(x)|^2 + m^2|\,\phi(x)|^2\,\right),$$

though, on-shell they differ only from a trivially conserved current since

$$\overset{(2)}{J}{}_{\mu\nu}(x) \;\approx\; T_{\mu\nu}(x) \;+\; \frac{1}{4}\,\left(\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu\right)|\,\phi(x)|^2\,. \tag{3.8}$$

3.2 Noether interactions

The conserved currents $J^{(r)}$ of eq. (3.6) allow to define Noether interactions between the scalar ϕ and gauge fields $h^{(r)}$ as in eq. (2.10) by

$$\begin{aligned} S_1[\,\phi,h\,] &= -\sum_{r=0}^{\infty}\,\frac{1}{r!}\int d^nx\;\overset{(r)}{h}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\;\overset{(r)}{J}{}^{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \\ &= -\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^r\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^s}{s!\,(r-s)!}\int d^nx\,\overset{(r)}{h}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\,\partial^{\mu_1}\ldots\partial^{\mu_s}\phi(x)\,\partial^{\mu_{s+1}}\ldots\partial^{\mu_r}\phi^*(x). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Similar Noether interactions with scalar field conserved currents were elaborated in [13, 15, 16]. Actually, the above cubic interaction is precisely of the form mentioned in [17], as can be seen from eq. (3.6). The sum of terms in the cubic interaction (3.9) can be expressed in a concise way exhibiting in a manifest way its symmetries. In order to do so, we first introduce the generating function of gauge fields:[4]

$$h(x,v) = \sum_{r=0}^{\infty}\,\frac{1}{r!}\;\overset{(r)}{h}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}\;v^{\mu_1}\ldots v^{\mu_r}, \tag{3.10}$$

[4] From (3.1) and (3.4), it is clear that the generating function $J(x,u)$ has mass dimension $n-2$. Thus (2.8) shows that $h(x,v)$ has mass dimension 2. Since v^μ has the dimension of a mass, the tensor gauge field $h^{(r)}$ of rank r has mass dimension $2-r$.

JHEP05(2009)126

so that the Noether interaction (3.9) can be expressed as $\ll J||h \gg$ or from (2.8) as

$$\int d^n x \;\; \exp\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\frac{\partial}{\partial v^\mu}\right) \breve{\rho}(x,-iu)\, h(x,v)\Big|_{u=v=0}. \tag{3.11}$$

Next, we notice that for any function $f(p)$ and $g(p)$:

$$\exp\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\frac{\partial}{\partial v^\mu}\right) \;\breve{f}(-iu)\, g(v)\Big|_{u=v=0} = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\; f(p)\, g(p)\,, \tag{3.12}$$

where $\breve{f}(q)$ is the Fourier transform of $f(p)$:

$$\breve{f}(q^\nu) \;:=\; \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\; f(x^\mu, p_\nu)\; e^{i\, u^\mu\, p_\mu}\,.$$

This allows us to to express (3.11) as

$$S_1[\,\phi, h\,] = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n x\, d^n p\; h(x,p)\;\rho(x,p)\,. \tag{3.13}$$

where $\rho(x,p)$ is the inverse Fourier transform of $\breve{\rho}(x,q)$ over the auxiliary variables q. The form (3.13) of the cubic interaction will be an essentiel ingredient in exhibiting all the symmetries of the cubic action in the next subsection.

If we rewrite the expression (3.13) in momentum space, we can get an even more compact form. By noticing that the Fourier transform of $\rho(x,p)$ over spacetime variables x reads

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(k,p) \;&=\; \int d^n x\, d^n q \;\; e^{-i\,(k\cdot x + p\cdot q)}\;\phi^*(x-q/2)\,\phi(x+q/2)\\ &=\; \tilde{\phi}^*(p-k/2)\;\tilde{\phi}(p+k/2)\,,\end{aligned} \tag{3.14}$$

the Noether interaction can be written in a very simple form in terms of $\tilde{\phi}$:

$$S_1[\,\phi, h\,] = -\int \frac{d^n \ell}{(2\pi)^n}\,\frac{d^n k}{(2\pi)^n}\;\; \tilde{\phi}^*(\ell)\;\tilde{h}\left(\ell - k, \frac{k+\ell}{2}\right)\;\tilde{\phi}(k)\,. \tag{3.15}$$

3.3 Weyl formulation

Using the bra-ket notation for the scalar field $\phi(x) = \langle\, x \mid \phi\,\rangle$, the current generating function $\breve{\rho}(x,q)$ can be written as $\langle\, x + q/2 \mid \phi\,\rangle\langle\, \phi \mid x - q/2\,\rangle$. A very important observation is that, as explained in appendix A, this is the Fourier transform over momentum space of the Wigner function $\rho(x,p)$ associated to the operator $|\,\phi\,\rangle\langle\,\phi\,|$:

$$\rho(x,p) \;=\; \int d^n q\; e^{-i\,p\cdot q}\;\langle\, x + q/2 \mid \phi\,\rangle\langle\, \phi \mid x - q/2\,\rangle\;, \tag{3.16}$$

Thus, the expression of the Noether coupling (3.11) can now be simplified using the Weyl correspondence to

$$S_1[\phi, h] = -\,\langle\, \phi \mid \hat{H} \mid \phi\,\rangle\;, \tag{3.17}$$

JHEP05(2009)126

where $\hat{H} := \mathcal{W}[\,h\,]$ is the image of the generating function $h(x,p)$ under the Weyl map $\mathcal{W}$ introduced in (A.1). Consequently, the Noether interaction (2.8) defined by the generating functions (3.4) and (3.10) can be written as the "mean value" over the state $|\,\phi\,\rangle$ of the operator $\hat{H}$. The expression (3.15) could also have been obtained by inserting the completeness relations $\int d^nk/(2\pi)^n \;|\,k\,\rangle\langle\,k\,| = \hat{1}$ between each state in (3.17) and apply the identity (A.10). A cubic interaction with scalar matter was written in this form by Segal in the somewhat different context of conformal higher-spin gauge theory [7].

By making use of the "anticommutator ordering" prescription for the Weyl map, as explained in the appendix A, one finds that the operator $\hat{H}$ starts at lower spin as

$$\hat{H} = \overset{(0)}{h}(\hat{X}) + \frac{1}{2}\left(\hat{P}^\mu\,\overset{(1)}{h}_\mu(\hat{X}) + \overset{(1)}{h}_\mu(\hat{X})\,\hat{P}^\mu\right) + \frac{1}{8}\left(\hat{P}^\mu\,\hat{P}^\nu\,\overset{(2)}{h}_{\mu\nu}(\hat{X}) + 2\,\hat{P}^\mu\,\overset{(2)}{h}_{\mu\nu}(\hat{X})\,\hat{P}^\nu + \overset{(2)}{h}_{\mu\nu}(\hat{X})\,\hat{P}^\mu\,\hat{P}^\nu\right) + \dots \tag{3.18}$$

As one can check, the Noether coupling with the vector gauge field $h^{(1)}_\mu$ is the usual electromagnetic coupling. The Noether coupling with the symmetric tensor gauge field $h^{(2)}_{\mu\nu}$ corresponds to the "minimal" coupling between a spin-two gauge field and a scalar density ϕ of weight one-half (minimal in the sense that there is no term containing the trace $\eta^{\mu\nu}\,h^{(2)}_{\mu\nu}$ corresponding to the linearised volume element in the interaction). This means that $|\phi|^2$ must be a density of weight one. As can be checked directly from (3.8), if the action (2.11) includes the rank-two conserved current (3.7) only, then it reads

$$S[\phi,h] = -\int d^nx\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\Phi^*(x)\,\partial_\nu\Phi(x) + \left(m^2 - \frac{R}{8}\right)|\,\Phi(x)|^2\right] + \mathcal{O}(h^2)\,, \tag{3.19}$$

in terms of the scalar $\Phi := (-g)^{-\frac{1}{4}}\phi$, the metric $g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$ and the scalar curvature R.

It is worth emphasising that the cubic interaction $S_1[\phi,h]$ contains r derivatives and grows like the power $r-3+n/2$ of the energy scale by naive dimensional analysis, so if it involves a tensor field of rank $r > 3-n/2$ then it is not (power-counting) renormalisable. Notice also that for a real scalar field, the interactions occur with tensor gauge fields of even rank only.

3.4 Weyl algebra as a non-Abelian gauge symmetry

Using the braket notation of scalar field where $\partial_\mu\phi(x) = i\,\langle\,x\,|\,\hat{P}_\mu\,|\,\phi\,\rangle$ and the completeness relation $\hat{1} = \int d^nx\,|\,x\,\rangle\langle\,x\,|$, the Klein-Gordon action (3.1) can be rewritten as

$$S_0[\phi] = -\,\langle\,\phi\,|\,\hat{P}^2 + m^2\,|\,\phi\,\rangle\,, \tag{3.20}$$

which is (minus) the mean value over the state $|\,\phi\,\rangle$ of the Hamiltonian (constraint) $\hat{P}^2 + m^2$. The quadratic and cubic functionals (3.20) and (3.17) are such that the would-be action (2.11) at all orders in the gauge fields starts as

$$S[\phi,h] = -\,\langle\,\phi\,|\,\hat{G}\,|\,\phi\,\rangle + \mathcal{O}(\phi^3,h^2)\,, \tag{3.21}$$

JHEP05(2009)126

where the operator

$$\hat{G} := \hat{P}^2 + m^2 + \hat{H}\,, \tag{3.22}$$

should be interpreted in terms of its Weyl symbol

$$g(x,p) := p^2 + m^2 + h(x,p)\,,$$

as the generating function of the various gauge fields around the Minkowski metric as background.

The linearised gauge transformation (2.4) of the Weyl symbol $h(x,p)$ can be written as the Poisson bracket between the function $\varepsilon(x,p)$ and the Weyl symbol of p^2+m^2 of a free relativistic particle,

$$\left(p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \varepsilon(x,p) = \frac{1}{2}\left\{\, \varepsilon(x,p)\,,\ p^2+m^2 \,\right\}_{\mathbf{P.B.}} = -\frac{i}{2}\left[\, \varepsilon(x,p) \stackrel{\star}{,} p^2+m^2 \,\right]\,, \tag{3.23}$$

where $\{\cdot,\cdot\}_{\mathbf{P.B.}}$ is the Poisson bracket and $[\,\cdot\stackrel{\star}{,}\cdot\,]$ is the commutator with respect to the Moyal product. The image of the above formula under the Weyl map leads to

$$\delta_{\hat{E}}\,\hat{H} = -\frac{i}{2}\,\left[\,\hat{E}\,,\,\hat{P}^2+m^2\,\right] + \mathcal{O}(\hat{H})\,, \tag{3.24}$$

where $\hat{E}$ is the image of $\varepsilon(x,p)$ under the Weyl map. The variation of the scalar field ϕ which guarantees the gauge invariance, at lowest order in h, of the action (3.21) is

$$\delta_{\hat{E}}\,|\,\phi\,\rangle = -\frac{i}{2}\,\hat{E}\,|\,\phi\,\rangle\ , \tag{3.25}$$

as can be checked directly. At lower orders in the derivative, the explicit form of the operator $\hat{E}$ in terms of its Weyl symbol $\varepsilon(x,p)$

$$\hat{E} = \overset{(0)}{\varepsilon}(\hat{X}) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\hat{P}^\mu\,\overset{(1)}{\varepsilon}_\mu(\hat{X}) + \overset{(1)}{\varepsilon}_\mu(\hat{X})\,\hat{P}^\mu\right)}_{=\,-i\left(\overset{(1)}{\varepsilon}_\mu(\hat{X})\,\partial^\mu + \frac{1}{2}\,\partial^\mu\overset{(1)}{\varepsilon}_\mu(\hat{X})\right)} + \dots \tag{3.26}$$

confirms that following (3.25) the matter field ϕ transforms as a scalar density of weight one-half under the (linearised) diffeomorphisms. The set of all such transformations (3.25) closes under the commutator and is isomorphic to the Lie algebra of Hermitian operators, i.e. the Lie algebra of quantum observables, corresponding to the Lie group of unitary operators. If one truncates the tower of gauge fields to the lower-spin sector, then there are no further terms represented by dots in (3.26), and the Lie algebra of symmetries one is left with is the semidirect sum of the local $\mathfrak{u}(1)$ algebra and the algebra of vector fields on $\mathbb{R}^n$, corresponding to the semidirect product of the local U(1) group and the group of diffeomeorphisms. The form of (3.21) suggests the following finite gauge transformation

$$|\,\phi\,\rangle \;\longrightarrow\; \hat{U}\,|\,\phi\,\rangle\ , \qquad\qquad \hat{G} \;\longrightarrow\; \hat{U}\,\hat{G}\,\hat{U}^{-1}\,, \tag{3.27}$$

with $\hat{U} := \exp(-i\,\hat{E}/2)$, because, *at lowest order* in $\hat{H}$, it reproduces the infinitesimal transformations (3.24)–(3.25) and leaves invariant the quadratic form $\langle\,\phi\,|\,\hat{G}\,|\,\phi\,\rangle$. The

JHEP05(2009)126

scalar and gauge fields respectively transform in the fundamental and adjoint representation of the group of unitary operators. Notice that as long as higher-derivative transformations are allowed then the infinite tower of higher-spin fields should be included for consistency of the gauge transformations (3.27) beyond the lowest order. The infinitesimal version of (3.27) written in terms of the Weyl symbols leads to the following completion of (2.4)

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon\, h(x,p) &= -\frac{i}{2}\,\big[\,\varepsilon(x,p)\,\star\,p^2+m^2+h(x,p)\,\big] \\ &= \left(\eta^{\mu\nu}\,p_\mu\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu}-h(x,p)\;\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_\mu}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_\mu}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\right)\right]\right)\varepsilon(x,p),\end{aligned} \tag{3.28}$$

where we made use of (A.17) and (3.23). Such a deformation of the higher-spin gauge transformations was already advocated in [7, 18, 19].[5] Notice that, in general, the Moyal bracket contains a non-vanishing contribution at $p_\mu = 0$ which corresponds in (3.28) to a gauge transformation of a tensor field of rank $r = 0$. Hence, it might be necessary for the consistency of the non-Abelian gauge transformations (3.28) to include a scalar field $h^{(0)}$ in the tower of gauge fields.[6]

The Weyl symbol $\overline{\varepsilon}(x,p)$ of an operator $\hat{\overline{E}}$ commuting with $\hat{P}^2+m^2$ is a generating function of Killing fields, as can be easily seen from (3.23). This is in agreement with the facts that if $[\,\hat{\overline{E}}\,,\,\hat{P}^2+m^2\,]=0$ then the corresponding transformation (3.27),

$$|\,\phi\,\rangle \;\longrightarrow\; \exp(-i\,\hat{\overline{E}}\,)\,|\,\phi\,\rangle\,, \tag{3.29}$$

is obviously a symmetry of the Klein-Gordon action (3.1). It is very tempting to conjecture that the full action (3.21) should be interpreted as arising from the gauging of the rigid symmetries (3.29) of the free scalar field, which generalise the U(1) and Poincaré symmetries, so the local symmetries (3.27) generalise the local U(1) and diffeomorphisms. The rigid higher-derivative symmetries which are generated by a function $\overline{\varepsilon}(p)$ independent of the position and which thereby generalise the phase shifts and translations were introduced in [13] and further developed in [14]. The corresponding infinitesimal symmetries are the most general rigid linear symmetry transformations of a free scalar field which are independent of the coordinates and compatible with locality (in the sense that the order of the differential operators is finite). The group of unitary operators was already advertised in [16, 18] as the symmetry group arising from the gauging of these rigid higher-derivative symmetries.

Notice that the conserved currents (3.6) are indeed equivalent to the Noether currents for the latter symmetries, as follows from Noether's first theorem or as can be checked by direct computation. This correspondence also implies that the Noether interaction considered here is the most general one (up to equivalence) between one gauge field and two free scalars that induces a gauge transformation of the scalar field and is compatible with locality and Poincaré symmetry. In the case of a real scalar field, the Lie algebra

[5] This deformation was already implicit in [20] in the sense that (3.28) should arise after the elimination of the auxiliary variables y.

[6] A scalar field is also necessary for consistency of Vasilev's unfolded equations. It should be stressed that the transformation (3.28) of the gauge scalar field $h^{(0)}$ is distinct from the transformation (3.25) of the matter scalar field ϕ.

JHEP05(2009)126

and group of gauge symmetries would have to be replaced by, respectively, the algebra of symmetric operators and the group of orthogonal operators. The former construction goes along the same line for a scalar field taking values in an internal finite-dimensional space, i.e. for a multiplet of scalar fields.

4 Tree-level higher-spin exchange amplitudes

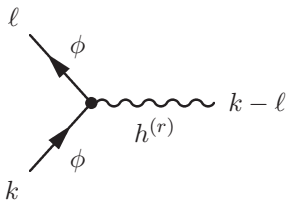
4.1 Feynman rules

Vertex. The cubic vertex between two scalar fields ϕ and a gauge field $h^{(r)}$ takes a simple form in momentum space in terms of the Fourier transforms of fields, $\tilde{\phi}$. Indeed, from eq. (3.15), the Noether interaction between ϕ and $h^{(r)}$ is given by

$$S_1\left[\phi, h^{(r)}\right] = -\int \frac{d^n\ell}{(2\pi)^n}\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\;\tilde{\phi}^*(\ell)\;\tilde{\phi}(k)\;\overset{(r)}{\tilde{h}}{}_{\mu_1\ldots\mu_r}(\ell-k)\times \\ \times\frac{1}{r!}\left(\frac{k^{\mu_1}+\ell^{\mu_1}}{2}\right)\ldots\left(\frac{k^{\mu_r}+\ell^{\mu_r}}{2}\right). \tag{4.1}$$

The corresponding cubic vertices is

$$\overset{(r)}{\mathcal{V}}{}^{\mu_1\ldots\mu_r}(k,\ell) =$$



$$= -\frac{1}{r!}\left(\frac{k^{\mu_1}+\ell^{\mu_1}}{2}\right)\ldots\left(\frac{k^{\mu_r}+\ell^{\mu_r}}{2}\right). \tag{4.2}$$

If the scalar field is real then one can insert the relation $\tilde{\phi}^*(-k) = \phi(k)$ in (4.1) and recover the fact that cubic vertices for odd r are absent in such case.

Propagators. The propagator with respect to the scalar field ϕ is easily determined from the kinetic term in (3.20) and is given by

$$\mathcal{D}(p) = \longrightarrow \\ = \frac{1}{p^2+m^2}\,. \tag{4.3}$$

The current-current interaction which determines the propagator $\mathcal{P}^{(r)}/p^2$ for spin r exchange was determined in [9], and the amplitudes were shown to propagate the correct numbers of on-shell degrees of freedom, exactly like in Fronsdal's formulation, even though the currents involved were not doubly traceless. The contraction of the propagator residue $\mathcal{P}^{(r)}$ with two conserved currents $J_1^{(r)}$ and $J_2^{(r)}$ is given by

$$\left\langle \overset{(r)}{J}{}_1\,,\,\overset{(r)}{\mathcal{P}}\,\overset{(r)}{J}{}_2\right\rangle = \sum_{m=0}^{\lfloor r/2\rfloor}\frac{1}{2^{2m}\,m!\,(3-\frac{n}{2}-r)_m}\left\langle \overset{(r)}{J}{}_1{}^{[m]}\,,\,\overset{(r)}{J}{}_2{}^{[m]}\right\rangle, \tag{4.4}$$

JHEP05(2009)126

where $J^{[m]}$ denotes the m-th trace of the external current, $(a)_m$ denotes the m-th Pochhammer symbol of a : $(a)_m = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$.

This amplitude corresponds to a kinetic term for the spin r fields which is canonically normalised that is of the form $S_{\rm kin}[\,h^{(r)}\,] = \frac{1}{2} < h^{(r)}\,|\,\Box h^{(r)} > + \dots$ However, our gauge fields $h^{(r)}$ are not canonically normalised and the kinetic terms compatible, to lowest order, with our symmetries have the form

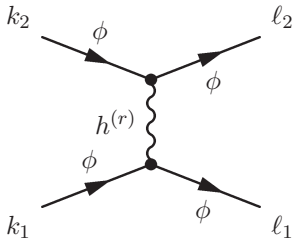
$$S_{\rm kin}[\,h^{(r)}\,] = \frac{\lambda^{6-n-2r}}{2a_r}\,\Big\langle \overset{(r)}{h}\,|\,\Box\,\overset{(r)}{h}\Big\rangle + \dots \tag{4.5}$$

with λ a length parameter and a_r real strictly positive dimensionless parameters. Thus, the propagator with respect to our $h^{(r)}$ is given, in a gauge *à la* Feynman and de Donder, by

$$\begin{aligned}\overset{(r)}{\mathcal{D}}_{\mu_1\dots\mu_r\,|\,\nu_1\dots\nu_r}(k) &= \mu_1\dots\mu_r \sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim \nu_1\dots\nu_r \\ &= \frac{a_r\,\lambda^{n-6+2r}}{k^2}\;\overset{(r)}{\mathcal{P}}_{\mu_1\dots\mu_r\,|\,\nu_1\dots\nu_r}\,.\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2 Tree-level amplitude

We consider the following diagram where two scalar particles of same charge exchange one gauge particle of rank r in t-channel.



Since vertices $\mathcal{V}^{(r)}$ are conserved, the corresponding amplitude is given by

$$\overset{(r)}{A}\,(\,\phi(k_1)\,\phi(k_2)\,\to\,\phi(\ell_1)\,\phi(\ell_2)\,) = \Big\langle\;\overset{(r)}{\mathcal{V}}(k_1,\ell_1)\,,\,\overset{(r)}{\mathcal{D}}(k_1-\ell_1)\;\overset{(r)}{\mathcal{V}}(k_2,\ell_2)\;\Big\rangle\,, \tag{4.7}$$

where the contraction notation (2.7) was used and the momentum conservation $k_1+k_2 = \ell_1+\ell_2$ is assumed. We recall that the propagator $\mathcal{D}$ is given in (4.6) and (4.4). Using eq. (4.2), the contraction between two m-th traces of vertex is given by

$$\begin{aligned}&\Big\langle\;\overset{(r)}{\mathcal{V}}{}^{[m]}(k_1,\ell_1)\,,\,\overset{(r)}{\mathcal{V}}{}^{[m]}(k_2,\ell_2)\;\Big\rangle = \\ &\qquad= \frac{1}{(r-2m)!}\left[\frac{k_1+\ell_1}{2}\cdot\frac{k_2+\ell_2}{2}\right]^{r-2m}\left[\left(\frac{k_1+\ell_1}{2}\right)^2\left(\frac{k_2+\ell_2}{2}\right)^2\right]^m\,.\end{aligned} \tag{4.8}$$

By making use of the above result and the Mandelstam variables s, t and u (see appendix B for more details) :

$$\begin{aligned}(k_1+\ell_1)\cdot(k_2+\ell_2) &= -(s-u)\,,\\ (k_1+\ell_1)^2 = (k_2+\ell_2)^2 &= -(s+u)\,,\\ (k_1-\ell_1)^2 = (k_2-\ell_2)^2 &= -t\,,\end{aligned} \tag{4.9}$$

JHEP05(2009)126

the amplitude can be written as[7]

$$\overset{(r)}{A}(s,t,u) = -\frac{\lambda^{n-6}}{t}\, a_r \left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)^r \sum_{m=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{(s-u)^{r-2m}\,(s+u)^{2m}}{2^{2m}\, m!\,(r-2m)!\,(3-\frac{n}{2}-r)_m}\,. \tag{4.10}$$

In four-dimensional spacetime ($n = 4$) and for $r \geqslant 1$, the sum (4.10) can be expressed in terms of Chebyshev polynomials of the first kind (C.2) as

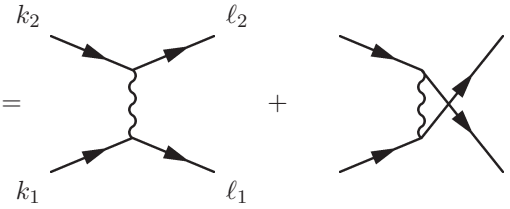
$$\overset{(r)}{A}(s,t,u) = -\frac{\lambda^{-2}}{t}\, a_r \left(-\frac{\lambda^2}{8}\,(s+u)\right)^r \frac{2}{r!}\, T_r\left(\frac{s-u}{s+u}\right). \tag{4.11}$$

In higher dimensions ($n \geqslant 5$), the sum (4.10) can be expressed in terms of Gegenbauer polynomials (C.3) as

$$\overset{(r)}{A}(s,t,u) = -\frac{\lambda^{n-6}}{t}\, a_r \left(-\frac{\lambda^2}{8}\,(s+u)\right)^r \frac{1}{(\frac{n}{2}-2)_r}\, C_r^{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{s-u}{s+u}\right). \tag{4.12}$$

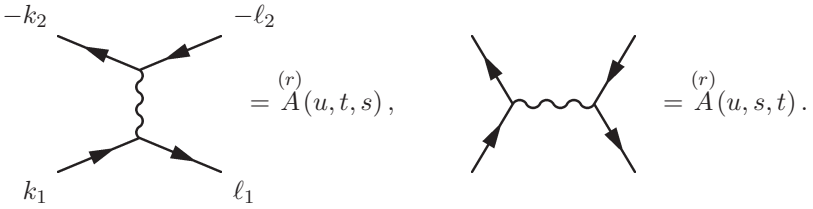
Notice that in $n = 5$ dimensions, the Gegenbauer polynomial in (4.12) essentially becomes a Legendre polynomial. These amplitudes have a pole when t is equal to the squared mass of an exchanged particle. Thus for massless mediators t must be different from zero, i.e. the scattering angle $\theta \neq 0$ modulo π.[8]

For bosons, the total amplitude for the scattering process $\phi(k_1)\,\phi(k_2) \to \phi(\ell_1)\,\phi(\ell_2)$ contains the sum of the t and u channel amplitude:

$\overset{(r)}{A}_{\text{total}}(\phi\,\phi \to \phi\,\phi) =$ 

$$= \overset{(r)}{A}(s,t,u) + \overset{(r)}{A}(s,u,t)\,. \tag{4.14}$$

The diagrams for the scattering $\phi(k_1)\,\bar{\phi}(k_2) \to \phi(\ell_1)\,\bar{\phi}(\ell_2)$ can be obtained from $A^{(r)}$ by a *crossing* symmetry:



(4.15)

[7] The case $r = 0$ corresponds to the exchange of a scalar "gauge" field $h^{(0)}$ and so is slightly less natural from a physical perspective than cases $r \geqslant 1$.

[8] The scattering angle θ in the center-of-mass system is determined by

$$\sin^2(\theta/2) = -t/(s-4m^2)\,, \qquad \cos^2(\theta/2) = -u/(s-4m^2)\,. \tag{4.13}$$

Since $s \geqslant 4m^2$, one should have $t \leqslant 0$ and $u \leqslant 0$. See appendix B for more details.

JHEP05(2009)126

The parity properties of Gegenbauer and Chebyshev polynomials are such that

$$\overset{(r)}{A}(u,t,s) = (-1)^r \overset{(r)}{A}(s,t,u)\,, \tag{4.16}$$

which is consistent with crossing "symmetry." For instance, if the scalar field is real then the amplitude is a symmetric function of s and u.

If λ is thought as Planck's length and m as, say, the proton mass, then $\lambda\, m \approx 10^{-19} \ll 1$. The high-energy regime must now be understood as $s \gg \lambda^{-2} \gg m^2$. In the Regge limit, the t-channel tree-level amplitudes behave as

$$\overset{(r)}{A}(s,t,u) \sim -\,\frac{\lambda^{n-6}}{t}\,\frac{a_r}{r!}\,\left(-\frac{\lambda^2}{2}\,s\right)^r\,,$$

and for fixed scattering angle θ in $n = 4$ as

$$\overset{(r)}{A}(s,t,u) \sim -\,\frac{1}{4}\,\frac{a_r}{r!}\,\left(-\frac{\lambda^2}{8}\,\sin^2(\theta/2)\,s\right)^{r-1}\,T_r\!\left(\frac{1+\cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}\right)\,.$$

As one can see, in the latter limit each amplitude grows as the $(r-1)$-th power of the large s, so it goes to a constant when $r = 1$ and it diverges for spin $r \geqslant 2$. This is another signal of the well-known fact that the corresponding interactions are or not (power-counting) renormalisable.

5 Summation of tree amplitudes and high-energy behaviour

In the present section, the main focus is on spacetime dimension $n = 4$ for obvious physical reasons (and because the case $n \geqslant 5$ goes exactly along the same lines). For the process $\phi\phi \to \phi\phi$, the sum of the t-channel tree-level amplitudes including all exchanged particles is

$$A(s,t,u) = \sum_{r\geqslant 0} \overset{(r)}{A}(s,t,u) = -\frac{\lambda^{-2}}{t}\left[a_0 + \sum_{r\geqslant 1} a_r \left(-\frac{\lambda^2}{8}(s+u)\right)^r \frac{2}{r!} T_r\!\left(\frac{s-u}{s+u}\right)\right]\,. \tag{5.1}$$

Let us denote by $a(z)$ the generating function of the coefficients $a_r (\geqslant 0)$, in the sense that

$$a(z) = \sum_{r\geqslant 0} \frac{a_r}{r!}\, z^r\,. \tag{5.2}$$

Using the identity (C.1), the sum (5.1) over r can be explicitly performed and gives

$$A(s,t,u) = -\frac{\lambda^{-2}}{t}\,\left[a\left(-\frac{\lambda^2}{8}\left(\sqrt{s}+\sqrt{-u}\,\right)^2\right) + a\left(-\frac{\lambda^2}{8}\left(\sqrt{s}-\sqrt{-u}\,\right)^2\right) - a_0\right]\,. \tag{5.3}$$

In the high-energy regimes $s \gg \lambda^{-2} \gg m^2$, the t-channel tree amplitude behaves in the Regge limit as

$$-\,\frac{\lambda^{-2}}{t}\,a\left(-\frac{\lambda^2}{2}\,s\right)\,, \tag{5.4}$$

and in the fixed scattering angle limit as

$$\frac{\lambda^{-2}}{\sin^2(\theta/2)\,s}\,\left[a\left(-\frac{\lambda^2}{8}\,\left[1-\cos(\theta/2)\right]^2\,s\right) + a\left(-\frac{\lambda^2}{8}\,\left[1+\cos(\theta/2)\right]^2\,s\right) - a_0\right]\,, \tag{5.5}$$

which formally reproduces the behaviour (5.4) in the limit $\theta \to 0$ with fixed (but large) s.

JHEP05(2009)126

5.1 Simplest examples

We first consider the simplest choice of coefficients: $a_r = 1$ for all $r \geqslant 0$. Hence $a(z) = e^z$ so that the t-channel amplitude is equal to

$$A(s,t,u) = -\frac{\lambda^{-2}}{t}\left[2\,\exp\left(-\frac{\lambda^2}{8}\,(s-u)\right)\,\cosh\left(\frac{\lambda^2}{4}\,\sqrt{-su}\right) - 1\right], \tag{5.6}$$

and decreases exponentially in the Regge limit,

$$A(s,t,u) \sim -\frac{\lambda^{-2}}{t}\,\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\,s\right)$$

in agreement with (5.4). Next, in order to cancel the constant contribution in the brackets of (5.6) we consider another choice of coefficients $a_0 = 2$ and $a_r = 1$ for all $r \geqslant 1$. Hence $a(z) = e^z + 1$ and the t-channel amplitude is equal to

$$A(s,t,u) = -\frac{2\,\lambda^{-2}}{t}\,\exp\left(-\frac{\lambda^2}{8}\,(s-u)\right)\,\cosh\left(\frac{\lambda^2}{4}\,\sqrt{-su}\right),$$

and falls-off exponentially for large s but fixed scattering angle $\theta \neq 0$

$$A(s,t,u) \sim \frac{\lambda^{-2}}{\sin^2(\theta/2)\;s}\,\exp\left(-\frac{\lambda^2}{8}\,\big[1-\cos(\theta/2)\big]^2\;s\right)$$

as can be checked directly or from (5.5). However, the t-channel tree-level scattering amplitude of the process $\phi\,\bar{\phi} \to \phi\,\bar{\phi}$ grows exponentially.

5.2 General discussion

Let $a(z)$ be the real function defined by the power series (5.2) with non-negative coefficients $a_r \geqslant 0$. Let us assume that the function is holomorphic on the complex plane except a set of isolated poles (i.e. it is meromorphic) which does not contain the origin. More concretely, the function $a(z)$ is analytic inside the disk of convergence of the power series $\sum_{r\geqslant 0}\,\frac{a_r}{r!}\,z^r$ around the origin $z = 0$ and it is defined outside the radius of convergence by analytic continuation.

The poles of the corresponding t-channel tree-level amplitude for the exchange of an infinite tower of tensor gauge fields between two scalar particles might be interpreted, effectively, as the exchange of some massive particles. This amplitude goes to zero in the Regge limit if and only if $z = -\infty$ is a zero of $a(z)$, as can be seen from (5.4). Moreover, at any fixed scattering angle $\theta \neq 0$ (modulo π), the high-energy limit of the t-channel tree-level amplitude goes to zero if $z = 0$ is another zero of $a(z)$, as follows from (5.5). The crossing transformation $s \leftrightarrow u$ of the amplitude (5.3) is equivalent to the exchange $a(z) \leftrightarrow a(-z)$. Therefore, the t-channel tree-level amplitude for the scattering process $\phi\,\bar{\phi} \to \phi\,\bar{\phi}$ also goes to zero in the ultraviolet if the analytic function $a(z)$ has another zero at $z = +\infty$. Unfortunately, this is not possible if the power series defining $a(z) \neq 0$ around zero is convergent on the whole positive axis because all coefficients $a_r \geqslant 0$ of the power series of $a(z)$ are non-negative. An interesting possibility is therefore when the function $a(z)$

JHEP05(2009)126

has a finite radius of convergence around the origin. Outside the disk of convergence, the function may be analytically continued and it is this analytic continuation which determines the high energy behaviour. A simple example is given by $a_r = r!$ in which case the analytic continuation is given by $a(z) = (1-z)^{-1}$ which vanishes for any large argument $z = \pm\infty$.[9]

Consequently, the total scattering amplitude may be extremely soft in the ultraviolet regime, though any individual exchange amplitude grows quickly (for spin $r \geqslant 2$). Such asymptotic behaviours may be qualitatively understood as follows: The t-channel scattering amplitude of the process $\phi\,\phi \to \phi\,\phi$ corresponding to an exchange of a tensor field of rank r behaves polynomially in the Regge limit like $(-s)^r/t$, which is more and more divergent for larger rank r. However, very precisely along the lines of [17], one may observe that the asymptotic behaviour of, say, the power series $\sum_{r\geqslant 0}(-s)^r/r! = e^{-s}$ is much smaller when $s \to +\infty$ than any individual term. Such a property arises naturally for current-current interactions between two scalar particles ϕ (or two scalar antiparticles $\bar{\phi}$) because the series is alternating with the rank r (remember that the coefficients are non-negative $a_r \geqslant 0$). Heuristically, some compensations are possible between the exchanges of even-spin (attractive) and odd-spin (repulsive) gauge tensors. Naively, this mechanism seems impossible between a scalar particle ϕ and its antiparticle $\bar{\phi}$ or if the scalar field is real ($\phi = \bar{\phi}$) because, intuitively, the former interactions are always attractive. More precisely, the t-channel scattering amplitude of the $\phi\,\bar{\phi} \to \phi\,\bar{\phi}$ corresponding to an exchange of a tensor field of rank r behaves polynomially in the Regge limit like s^r/t. Actually, the asymptotic behaviour is a subtle issue because the non-compensation argument works only inside the disk of convergence of the power series defining the amplitude. Indeed, for instance the power series we already mentioned $\sum_{r\geqslant 0} s^r = (1-s)^{-1}$ is not alternating but its analytic continuation $(1-s)^{-1}$ goes to zero when $s \to \infty$.

5.3 Softness and finiteness

The softness of tree-level scattering amplitudes in the high-energy regime is a strong indication in favour of ultraviolet finiteness. For instance, various loop diagrams can be built out of the (off-shell) diagram of the previous section. As an illustration, one may consider the following one-loop contribution to the scalar propagator (encoding its self-energy)



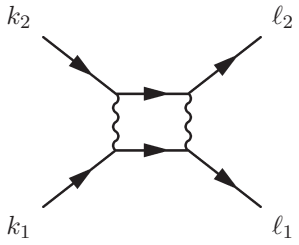
$$\propto \int d^4p\, \frac{A\,(\phi(k)\phi(p) \to \phi(-p)\phi(k))}{p^2 + m^2}\,,$$

[9] This example exhibits a general feature: If the real function $a(z)$ defined by the power series (5.2) with non-negative coefficients $a_r \geqslant 0$ is meromorphic and has a finite radius of convergence $R > 0$ then $z = R$ is a pole of $a(z)$ on the positive axis. The idea of the proof is as follows: The modulus of the function a at any given point z_0 inside the disk of convergence satisfies the inequality $|a(z_0)| \leqslant \sum_r \frac{|a_r|}{r!}\,|z_0|^r = \sum_r \frac{a_r}{r!}\,|z_0|^r = a(\,|z_0|\,)$, because the coefficients a_r are non-negative. The function $a(z)$ is meromorphic and its power series around the origin has a finite radius of convergence $R > 0$, thus it must have a pole z_0 on the circle of radius R, i.e. $|z_0| = R$ and $|a(z_0)| = \infty$. Therefore $a(\,|z_0|\,) = a(R) = \infty$. In other words, $z = R$ is a singularity of $a(z)$ on the positive axis, which can only be a pole because the function is meromorphic.

JHEP05(2009)126

where the internal curly lines should be understood as the sum over all possible gauge fields and the amplitude A is extended off-shell. This Feynman diagram can be seen to have at most a logarithmic divergence in the UV if $a(z)$ goes to a constant when $z \to \pm\infty$. This is already much better than any individual contribution coming from a finite number of gauge fields of spin $r \neq 0$ in the internal curly line.

Another example is the following box diagram which contributes to the two-scalar scattering process at one-loop.



$$\propto \int d^4p \, \frac{A\left(\phi(k_1)\phi(k_2) \to \phi(k_1+p)\phi(k_2-p)\right) \, A\left(\phi(k_1+p)\phi(k_2-p) \to \phi(\ell_1)\phi(\ell_2)\right)}{\left((k_1+p)^2+m^2\right) \, \left((k_2-p)^2+m^2\right)} \,,$$

This Feynman diagram can be seen to be UV finite if $a(z)$ goes to some constant when $z \to \pm\infty$. Of course, this does not imply that the corresponding total one-loop amplitudes are finite because other diagrams should be taken into account, some of which might include higher-order vertices which are not considered in the present paper. Nevertheless, it is already very suggestive to observe that some Feynman diagrams may be UV finite if all contributions of the whole infinite tower of gauge fields are summed.

6 Non-relativistic interaction potential

Since the higher-spin particles are massless, one may wonder about the macroscopic interactions that they give rise to in $n = 4$ dimensions. In the low-energy (or non-relativistic) regime the Mandelstam variables of the scattering process $\phi\,\phi \to \phi\,\phi$ examined in section 4 behave as $s \sim 4m^2$ and $|u| \ll s$, thus the t-channel exchange amplitudes are equal to

$$\overset{(r)}{A}\left(\phi(\vec{k})\,\phi(-\vec{k}) \to \phi(\vec{\ell})\,\phi(-\vec{\ell})\right) \sim -\frac{a_r}{r!}\left(-\frac{(m\,\lambda)^2}{2}\right)^{r-1}\frac{m^2}{(\vec{k}-\vec{\ell})^2}\,. \tag{6.1}$$

For the interaction arising from the exchange of a spin-r mediator, the non-relativistic potential between two elementary scalar particles separated by $\vec{x}$ can be deduced from the above amplitude (6.1) via the Born approximation (B.3) and reads

$$\overset{(r)}{V}(\vec{x}) \;=\; \frac{a_r}{4\,r!}\left(-\frac{(m\lambda)^2}{2}\right)^{r-1}\frac{1}{4\pi\,|\vec{x}|}\,, \tag{6.2}$$

The sign indicates that even (odd) spin massless particles mediate attractive (repulsive) interactions between identical scalar particles (i.e. charges of the same sign). The effective non-relativistic potential including all possible exchanges is the sum

$$V(\vec{x}) := \sum_{r\geqslant 0}\overset{(r)}{V}(\vec{x}) \;=\; -\frac{1}{2\,(m\,\lambda)^2}\;a\left(-\frac{(m\lambda)^2}{2}\right)\;\frac{1}{4\pi\,|\vec{x}|}\,. \tag{6.3}$$

JHEP05(2009)126

This expression somehow justifies on physical ground the mathematical assumption that the function $a(z)$ should at least be analytic around zero. Indeed, in such case

$$V(\vec{x}) \,=\, V_{\text{lower}}(\vec{x}) \,+\, \mathcal{O}\left((m\lambda)^4\right)$$

where $m\lambda \ll 1$ and V_{lower} denotes the part of the effective potential corresponding to exchange of lower ($r \leqslant 2$) spin particles. In other words, the validity of the Taylor expansion of $a(z)$ around zero agrees with the fact that higher-spin contributions are not observable at energy scales much smaller than Planck's mass. In order to bring another perspective on this point, suppose now that we have two macroscopic bodies respectively made of $N \gg 1$ and $N' \gg 1$ charged scalars (each of mass m). The macroscopic bodies have thus respective masses $M = N\,m$ and $M' = N'\,m$. The resulting macroscopic potential energy of the system for the interaction mediated by a massless spin-r field is then obtained from (6.2) and reads

$$\overset{(r)}{W}(\vec{x}) := N\,N'\,\overset{(r)}{V}(\vec{x}) \,=\, -\frac{\lambda^2}{8}\,\frac{a_r}{r!}\,\left(-\frac{(m\lambda)^2}{2}\right)^{r-2}\,\frac{M\,M'}{4\pi\,|\vec{x}|}\,, \tag{6.4}$$

All macroscopic interaction potential can be expressed in terms of the spin-two exchange (gravitational interaction) as

$$\overset{(r)}{W}(\vec{x}) \,=\, \frac{2\,a_r}{r!\,a_2}\,\left(-\frac{(m\lambda)^2}{2}\right)^{r-2}\,\overset{(2)}{W}(\vec{x})\,, \tag{6.5}$$

which clearly shows that when $m\lambda \ll 1$ (e.g. if we take for m the proton mass and for λ the inverse of the Planck mass) the higher-spin interaction are negligible compared to the gravitational ones. In order for the scalar exchange contribution to be macroscopically invisible, one may assume that $a_0 \ll (m\lambda)^4 \ll 1$. Moreover, if the macroscopic bodies are approximately "neutral" (same number of particles and antiparticles) then the odd-spin interactions are completely negligible. The toy model considered here allows to understand why higher-spin interactions would not be macroscopically observable if they exist.

7 Conclusion and discussion of results

As advocated here, the Noether procedure applied to an infinite tower of (higher-rank) conserved currents associated with (higher-derivative) symmetries of the Klein-Gordon equation is deeply connected with Weyl quantisation and leads to a gauge symmetry group which is (at lowest order) isomorphic to the group of unitary operators on $\mathbb{R}^n$. In this picture, the scalar field transforms in the fundamental while the tower of symmetric tensor gauge fields transforms in the adjoint representation of this group. Apart from technical complications, the straight analogue of this cubic coupling between a tower of (higher-spin) gauge fields and a free scalar field on any Riemannian manifold $\mathcal{M}$ should lead to the group of unitary operators on $\mathcal{M}$. The only difference would be that the Noether procedure could hold for homogeneous manifolds only, in order for conserved currents to exist. Since only the simplest examples of matter (a scalar field) and background (Minkowski spacetime) have been considered here, the natural questions of how to extend the present analysis for spinor fields and/or for constant-curvature spacetimes arise; they are currently under investigation.

JHEP05(2009)126

The use of symbol calculus also enables to write the cubic vertex in a very compact form which allows an explicit computation of the general four-scalar tree-level amplitude. The coefficients of the exchanges of symmetric tensor gauge fields may be chosen in such a way that this amplitude is extremely soft in the high-energy regime. For instance, the simplest choice of coefficients leads to an exponential fall-off of the $\phi\,\phi \to \phi\,\phi$ high-energy tree amplitude which is very reminiscent of the behaviour of the ultraviolet fixed-angle Veneziano/Virasoro four-tachyon amplitudes in open/closed string theory. This suggestive property pleads in favour of the standard lore on higher-spin symmetries as the deep origin of ultraviolet softness (and thereby maybe of perturbative finiteness) in string theory. Further evidence in this direction would be provided by fixing the various coefficients from some consistency requirement on the non-Abelian transformations in the gauge field sector.

At first sight, these non-trivial scattering amplitudes and long-range interactions seem in contradiction with the various S-matrix no-go theorems on the interactions between matter and massless higher-spin particles [3, 4]. The main point is that the elastic scattering of matter particles is constrained to be trivial by higher-order conservation laws on products of momenta, as in the case of free or even integrable field theories. For instance, the conservation laws $\sum_i k_i^{\mu_1} \dots k_i^{\mu_r} = \sum_i \ell_i^{\mu_1} \dots \ell_i^{\mu_r}$ of order $r > 1$ imply that the outgoing momenta can only be a permutation of the incoming ones. On the one-hand, the low-energy Weinberg theorem [3] states that Lorentz invariance and the absence of unphysical degrees of freedom from the amplitude of the emission of an external soft massless particle of spin r imposes a conservation law of order r. On the other hand, the conservation of higher-spin charges is associated with higher-order conservation laws, as in the Coleman-Mandula theorem [4]. As a corollary, asymptotic higher-spin massless particles or conserved charges imply the triviality of the S-matrix. Like all theorems, the weakness of a no-go theorem relies in its assumptions. In the present case, the fact that the scattering amplitudes of two scalars with some higher-spin field exchanged are non-trivial could have several explanations, among which:

- Asymptotic states of massless higher-spin particles may not exist in the complete theory, similarly to coloured states in QCD.
- It is necessary to fix the gauge in order to define the propagators for massless higher-spin fields, thus it is not obvious that their gauge symmetries automatically imply the existence of non-vanishing higher-spin conserved charges.
- The cubic vertex has been shown to be consistent at lowest order only, while the interactions might become inconsistent at higher-orders.
- There is no genuine S-matrix in (Anti) de Sitter space-time, so even if the cubic vertex is inconsistent in Minkowski space-time, its deformation in curved space-time might be consistent to all orders. In a sense, the AdS/CFT correspondence is the definition of the "S-matrix" in Anti de Sitter space-time [21]. Therefore, an infinite number of asymptotic higher-spin conserved charges means that the holographic dual theory is integrable, but it does not imply that the "scattering" theory in the bulk (defined by the Witten diagrams) is trivial at all. This observation is indeed the very basis of the holographic correspondence in the higher-spin context [22].

JHEP05(2009)126

- Along these lines, another possibility is that, when $m = 0$, the action $\langle \phi \,|\, \hat{G} \,|\, \phi \rangle$ could be interpreted as the action for a conformal scalar field ϕ living on the "boundary" of AdS and interacting with higher-spin gauge fields in the "bulk" (see [7] for similar line of reasoning).

To end up, the issue of the trace constraints of Frønsdal [11] on the gauge fields and parameters in higher-spin metric-like theory has not been discussed in the previous sections and deserves some comments. These constraints might have been included by consistently imposing weaker conservation laws on double-traceless currents. This would not modify the current-current interactions because the residue of the propagator is automatically double-traceless, as pointed out in [9]. Nevertheless, it was convenient to remove trace constraints when reflecting on the non-Abelian symmetry group. Anyway, the trace constraints may be removed in the action principle for free higher-spin metric-like fields in several ways (see [23] for some reviews, and [9, 24] for some later developments). As far as the non-Abelian frame-like formulation is concerned, the analogues of Vasiliev's unfolded equations in the unconstrained case [18, 20] are dynamically empty and can somehow be thought [18, 20, 25] of as Fedosov's quantisation [26] of the cotangent bundle along the lines of [27]. But a slight refinement of Vasiliev's unfolded equations [1] has been proposed in [28] and should also be dynamically interesting. The frame-like formalism with weaker trace constraints [29] might also prove to be useful in this respect. Last but not least, the group of gauge symmetries of the metric-like theory arising from unconstrained frame-like theories (by fixing the gauge and solving the torsion constraints) can be shown to be also isomorphic to the group of unitary operators on $\mathbb{R}^n$, at lowest order in the gauge fields and around flat spacetime [19].

Acknowledgments

We thank D. Francia and A. Sagnotti for many helpful discussions. X.B. is grateful to the organisers of the "6th International Spring School and Workshop on Quantum Field Theory and Hamiltonian Systems" (Calimanesti & Caciulata, Romania; May 2008) for their invitation to an enjoyable meeting and the opportunity to present lectures (published in [30]) on related results. X.B. also acknowledges N. Boulanger and P. Sundell for general discussions, S. Nicolis and O. Thibault for their help in drawing Feynman diagrams with `feynMF` package.

A Weyl quantisation

The Weyl formalism [10] offers a classical-like formulation of quantum mechanics using phase space functions as observables and the Wigner function as an analogue of the Liouville density function.

In order to fix the ideas, one may consider the simplest case: the quantum description of a single particle. Classical mechanics is based on the commutative algebra of classical observables (i.e. real functions $f(x^\mu, p_\nu)$ on the phase space $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$) endowed

JHEP05(2009)126

with the canonical Poisson bracket

$$\{f,g\}_{\mathbf{P.B.}} \,=\, \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial g}{\partial p_\mu} \,-\, \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\,\frac{\partial g}{\partial x^\mu}\,.$$

The *Weyl map* $\mathcal{W} : f(x^\mu,p_\nu) \mapsto \hat{F}$ associates to any function f a Weyl(i.e. symmetric)-ordered operator $\hat{F}$ defined by

$$\hat{F} \,=\, \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int d^n k\, d^n v\; \mathcal{F}(k,v)\, e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,k_\mu\,\hat{X}^\mu \,-\, v^\mu\,\hat{P}_\mu)}\,, \tag{A.1}$$

where $\mathcal{F}$ is the Fourier transform[10] of f over *whole* phase space (in other words, over position *and* momentum spaces)

$$\mathcal{F}(k,v) \,:=\, \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int d^n x\, d^n p\; f(x,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,(\,k_\mu\,x^\mu \,-\, v^\mu\,p_\mu)}\,.$$

The function $f(x,p)$ is called the *Weyl symbol* of the operator $\hat{F}$, which need not be in symmetric-ordered form. A nice property of the Weyl map (A.1) is that it relates the complex conjugation * of symbols to the Hermitian conjugation † of operators, $\mathcal{W} : f^*(x^\mu,p_\nu) \mapsto \hat{F}^\dagger$. Consequently, the image of a real function (a classical observable) is a Hermitian operator (a quantum observable). The inverse $\mathcal{W}^{-1} : \hat{F} \mapsto f(x^\mu,p_\nu)$ of the Weyl map is called the *Wigner map*.

The commutation relations between the position and momentum operators are $[\hat{X}^\mu,\hat{P}_\nu]_- \,=\, i\,\hbar\,\delta^\mu_\nu$, where $[\hat{A},\hat{B}]_\pm := \hat{A}\hat{B} \pm \hat{B}\hat{A}$ denotes the (anti)commutator of the operators $\hat{A}$ and $\hat{B}$. The Baker-Campbell-Hausdorff formula implies that if the commutator $[\hat{A},\hat{B}]_-$ itself commutes with both $\hat{A}$ and $\hat{B}$, then

$$e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}} \,=\, e^{\hat{A}\,+\,\hat{B}\,+\,\frac{1}{2}\,[\hat{A},\hat{B}]_-}\,.$$

Moreover, for any operators $\hat{A}$ and $\hat{B}$ one can show that

$$e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}}\,e^{\pm\hat{A}} \,=\, e^{[\hat{A},\ ]_\pm}\,e^{\hat{B}}\ ,$$

where $[\hat{A},\ ]_\pm$ denotes the (anti)adjoint action of $\hat{A}$. Two very useful equalities follow:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,k_\mu\,\hat{X}^\mu \,-\, v^\mu\,\hat{P}_\mu)} \,=\, e^{\frac{i}{2\hbar}\,k_\mu\,\hat{X}^\mu}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,v^\mu\,\hat{P}_\mu}\,e^{\frac{i}{2\hbar}\,k_\mu\,\hat{X}^\mu} \tag{A.2}$$

$$\,=\, e^{\frac{i}{2\hbar}\,k_\mu\,[\,\hat{X}^\mu,\ ]_+}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,v^\mu\,\hat{P}_\mu} \tag{A.3}$$

Combining (A.1) with (A.3) implies that one way to explicitly perform the Weyl map is via some "anticommutator ordering" for half of the variables with respect to their conjugates.

The matrix elements in the position basis of the exponential operator in (A.1) are found to be equal to

$$\begin{aligned}\langle\, x \mid e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,k_\mu\,\hat{X}^\mu \,-\, v^\mu\,\hat{P}_\mu)} \mid x'\,\rangle \,&=\, e^{\frac{i}{2\hbar}\,k_\mu\,(\,x^\mu + x'^\mu)}\,\langle\, x \mid e^{-\frac{i}{\hbar}\,v^\mu\,\hat{P}_\mu} \mid x'\,\rangle \\ &=\, \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n}\, e^{\frac{i}{2\hbar}\,k_\mu\,(\,x^\mu + x'^\mu) \,+\, \frac{i}{\hbar}\,(\,x^\mu - x'^\mu - v^\mu)\,p_\mu}\end{aligned} \tag{A.4}$$

[10]The Weyl map is well defined for a much larger class than square integrable functions, including for instance the polynomial functions (remark: their Fourier transform are distributions).

JHEP05(2009)126

by making use of the identity (A.2) and by inserting the completeness relation $\int d^n p/(2\pi\hbar)^n \; |\, p \,\rangle \langle\, p \,| = \widehat{1}$.

The *integral kernel* of an operator $\hat{F}$ is the matrix element $\langle\, x \mid \hat{F} \mid x' \,\rangle$ appearing in the position representation of the state $\hat{F} \mid \psi \,\rangle$ as follows

$$\langle\, x \mid \hat{F} \mid \psi \,\rangle \;=\; \int d^n x' \; \psi(x') \; \langle\, x \mid \hat{F} \mid x' \,\rangle \,,$$

where the wave function in position space is $\psi(x') := \langle\, x' \mid \psi \,\rangle$ and the completeness relation $\int dx' \mid x' \,\rangle \langle\, x' \mid = \widehat{1}$ has been inserted. The definition (A.1) and the previous relation (A.4) enable to write the integral kernel of an operator in terms of its Weyl symbol,

$$\langle\, x \mid \hat{F} \mid x' \,\rangle \;=\; \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \; f\left(\frac{x+x'}{2}\,,\, p\right) \; e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,x^\mu - x'^{\,\mu})\,p_\mu} \,. \tag{A.5}$$

This provides an explicit form of the Wigner map

$$f(x^\mu, p_\nu) \;=\; \int d^n q \; \langle\, x - q/2 \mid \hat{F} \mid x + q/2 \,\rangle \; e^{\frac{i}{\hbar}\,q^\mu\,p_\mu} \,, \tag{A.6}$$

as follows from the expression (A.5). This shows that indeed the Weyl and Wigner maps are bijections between the vector spaces of classical and quantum observables. The Fourier transform

$$\breve{f}(x^\mu, v^\nu) \;:=\; \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \; f(x^\mu, p_\nu) \; e^{\frac{i}{\hbar}\,v^\mu\,p_\mu} \,,$$

over momentum space of the Weyl symbol $f(x,p)$ is a function on the configuration space $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. The equation (A.5) states that the Fourier transform over momentum space of the Weyl symbol is related to the integral kernel of its operator via

$$\langle\, x \mid \hat{F} \mid x' \,\rangle \;=\; \breve{f}\left(\frac{x+x'}{2}\,,\, x^\mu - x'^{\,\mu}\right) \tag{A.7}$$

or, equivalently,

$$\breve{f}\,(x^\mu, v^\nu) \;=\; \langle\, x + v/2 \mid \hat{F} \mid x - v/2 \,\rangle \,. \tag{A.8}$$

By integrating over $x = x'$, the relation (A.5) also implies that the trace of an operator $\hat{F}$ is proportional to the integral over phase space of its Weyl symbol f ,

$$\mathrm{Tr}[\hat{F}] \;=\; \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int d^n x \, d^n p \; f(x,p) \,. \tag{A.9}$$

As a side remark, notice that the Fourier transform

$$\tilde{f}(k_\mu, p_\nu) \;:=\; \int d^n x \; f(x^\mu, p_\nu) \; e^{-\frac{i}{\hbar}\,k_\mu\,x^\mu} \,,$$

over position space of the Weyl symbol $f(x,p)$ is related to the matrix element in the momentum basis of the operator $\hat{F}$ via

$$\langle\, k \mid \hat{F} \mid k' \,\rangle \;=\; \tilde{f}\left(k^\mu - k'^{\,\mu}\,,\, \frac{k+k'}{2}\right) \tag{A.10}$$

in direct analogy with (A.7).

JHEP05(2009)126

The *Moyal product* $\star$ is the pull-back of the composition product in the algebra of quantum observables with respect to the Weyl map $\mathcal{W}$, such that the latter becomes an isomorphism of associative algebras, namely

$$\mathcal{W}\big[f(x,p)\star g(x,p)\big] \,=\, \hat{F}\,\hat{G}\,. \tag{A.11}$$

The Wigner map (A.6) allows to check that the following explicit expression of the Moyal product satisfies the definition (A.11),

$$\begin{aligned} f(x,p)\star g(x,p) \,&=\, f(x,p)\,\exp\left[\frac{i\,\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_\mu}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\right)\right] g(x,p) \\ &=\, f(x,p)\,g(x,p)+\frac{i\,\hbar}{2}\,\{f(x,p)\,,\,g(x,p)\}_{\mathbf{P.B.}}+\mathcal{O}(\hbar^2) \end{aligned} \tag{A.12}$$

where the arrows indicate on which factor the derivatives should act. The trace formula (A.9) for a product of operators leads to

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\,\hat{F}\hat{G}\,] \,&=\, \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int dx\,dp\;f(x,p)\star g(x,p) \\ &=\, \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int dx\,dp\;f(x,p)\,g(x,p) \end{aligned} \tag{A.13}$$

because all terms in the Moyal product (A.12) beyond the pointwise product are divergences over phase space and any boundary term will always be assumed to be zero in the present notes.

The *Wigner function* $\rho(x,p)$ is the Weyl symbol of the density operator $\hat{\rho}$ under the Wigner map (A.6). Let $|\,\psi\,\rangle$ be an (unnormalised) quantum state. The corresponding pure state density operator is equal to $\hat{\rho}\,:=|\,\psi\,\rangle\langle\,\psi\,|$. Then the Fourier transform over momentum space of the pure state Wigner function $\rho(x,p)$ can be written in terms of the wave function $\psi(x)$ as follows,

$$\breve{\rho}(x,q) = \psi(x+q/2)\,\psi^*(x-q/2)\,, \tag{A.14}$$

due to (A.8). The mean value of an observable $\hat{F}$ over the state $|\,\psi\,\rangle$ is proportional to the integral over phase space of the product between the Wigner function ρ and the Weyl symbol f,

$$\langle\,F\,\rangle_\psi \,=\, \frac{\langle\,\psi\,|\,\hat{F}\,|\,\psi\rangle}{\langle\,\psi\,|\,\psi\rangle} \,=\, \frac{\mathrm{Tr}[\,\hat{\rho}\,\hat{F}\,]}{\mathrm{Tr}\,[\,\hat{\rho}\,]} \,=\, \frac{\int dx\,dp\;\rho(x,p)\,f(x,p)}{\int dx\,dp\;\rho(x,p)}\,, \tag{A.15}$$

which explains why the Wigner function is sometimes called the Wigner "quasi-probability distribution." It should be emphasised that the Wigner function is real but may take negative values, thereby exhibiting quantum behaviour.

Let $\hat{H}$ be a Hamiltonian operator of Weyl symbol $h(x,p)$. In the Heisenberg picture, the time evolution of quantum observables (which do not depend explicitly on time) is governed by the differential equation

$$\frac{d\hat{F}}{dt} \,=\, \frac{1}{i\,\hbar}\,[\hat{F},\hat{H}]_- \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{df}{dt} \,=\, \frac{1}{i\,\hbar}\,[\,f\overset{\star}{,}h\,]_- \tag{A.16}$$

JHEP05(2009)126

where $[\ \star\ ]_-$ denotes the *Moyal commutator* defined by

$$\begin{aligned}[f(x,p)\stackrel{\star}{,}g(x,p)]_- &:= f(x,p)\star g(x,p) - g(x,p)\star f(x,p)\\ &= 2i\, f(x,p)\, \sin\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_\mu} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\right)\right] g(x,p)\\ &= i\hbar\,\{\,f(x,p)\,,\,g(x,p)\,\}_{\mathbf{P.B.}} + \mathcal{O}(\hbar^2)\,, \end{aligned} \tag{A.17}$$

as can be seen from (A.12). essentially to the Poisson bracket. The *Moyal bracket* is the renormalisation of the Moyal commutator given by

$$\frac{1}{i\hbar}[\ \stackrel{\star}{,}\ ]_- = \{\ ,\ \}_{\mathbf{P.B.}} + \mathcal{O}(\hbar).$$

The Moyal bracket is a deformation of the Poisson bracket, and one can see that the equation (A.16) in terms of the Weyl symbol is a perturbation of the Hamiltonian flow. If either $f(x,p)$ or $g(x,p)$ is a polynomial of degree two, then their Moyal bracket reduces to their Poisson bracket. So when the Hamiltonian is quadratic (free) the quantum evolution of a Weyl symbol is identical to its classical evolution.

B Elastic scattering

The three *Mandelstam variables* s, t and u of any elastic scattering of four particles (see e.g. the textbook [31]) with the same mass m are related by $s+t+u = 4m^2$. In $n = 4$ dimensions, there are indeed only two independent Lorentz invariants which can be constructed from the four 4-momenta.

Let the Mandelstam variables of the scattering $\phi(k_1)\,\phi(k_2) \to \phi(\ell_1)\,\phi(\ell_2)$ be

$$s = -(k_1+k_2)^2\,, \qquad t = -(k_1-\ell_1)^2\,, \qquad u = -(k_1-\ell_2)^2\,. \tag{B.1}$$

In the center-of-mass system, the four-momenta take the form

$$k_1^\mu = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\,,\,\vec{k}\right)\,, \qquad k_2^\mu = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\,,\,-\vec{k}\right)\,, \qquad \ell_1^\mu = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\,,\,\vec{\ell}\right)\,, \qquad \ell_2^\mu = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\,,\,-\vec{\ell}\right)\,,$$

hence the variable $s \geqslant (2m)^2$ is the *squared center of mass energy*, the variable $t = -(\vec{k}-\vec{\ell})^2$ is the *squared momentum transfer* and $u = -(\vec{k}+\vec{\ell})^2$ has no obvious physical interpretation. The (center-of-mass) *scattering angle* θ is defined as the angle between $\vec{k}$ and $\vec{\ell}$. The products of momenta are related by

$$k_1\cdot k_2 = \ell_1\cdot\ell_2 = m^2 - \frac{s}{2}\,, \qquad k_1\cdot\ell_1 = k_2\cdot\ell_2 = \frac{t}{2} - m^2\,,$$

$$k_1\cdot\ell_2 = k_2\cdot\ell_1 = \frac{u}{2} - m^2\,.$$

The two relevant variables of the problem considered in the paper are

$$s+u = -(k_1+\ell_1)^2 = -(k_2+\ell_2)^2\,, \qquad s-u = -(k_1+\ell_1)\cdot(k_2+\ell_2)\,.$$

JHEP05(2009)126

Both variables can be expressed in terms of the squared center-of-mass energy s and scattering angle θ as

$$s \pm u = \left[1 \mp \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] s \pm 4m^2 \,.$$

Hence, for large $s \gg m^2$, they behave in the Regge limit[11] as

$$s + u \sim -t \quad \text{is fixed and} \quad \frac{s-u}{s+u} \sim -\frac{2}{t}\, s \quad \text{is large}\,,$$

and in the fixed scattering angle limit as

$$\frac{s-u}{s+u} \sim \frac{1+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{is fixed and} \quad s+u \sim \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) s \quad \text{is large}\,.$$

In the scattering theory of quantum mechanics, the differential cross section between two boson is given by

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \Big|\, f(\vec{k}\,,\vec{\ell}\,) + f(\vec{k}\,,-\vec{\ell}\,) \,\Big|^2 \,. \tag{B.2}$$

and in the *Born approximation* the scattered waves f are proportional to the Fourier transform of the potential $V(\vec{x}\,)$:

$$f(\vec{k}\,,\vec{\ell}\,) = -\frac{m}{4\pi} \int d^3x\, V(\vec{x}\,)\, e^{i\,(\vec{k}\,-\vec{\ell}\,)\cdot\vec{x}} \,. \tag{B.3}$$

Comparing eq. (B.2) with the differential cross section calculated from the scattering amplitude $A(s,t,u)$:

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \frac{1}{64\,\pi^2\,s}\, |\, A(s,t,u) + A(s,u,t)\,|^2 \,, \tag{B.4}$$

we get the non-relativistic interaction potential as

$$V(\vec{x}\,) = -\frac{1}{4\,m^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, A\left(4m^2, -\vec{p}^{\,2}, 0\right)\, e^{-i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} \,. \tag{B.5}$$

Remark that another way[12] of deriving the low-energy interaction potentials is by considering a distribution

$$\overset{(r)}{J}{}^{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \;=\; \sigma(x)\; w^{\mu_1} \ldots w^{\mu_r} \tag{B.6}$$

of particles at rest of density and velocity respectively given by the scalar $\sigma(\vec{x})$ and the fixed vector w^μ. Plugging (B.6) inside the integrals (4.4) leads to a current-current interaction in $n = 4$ given by

$$\begin{aligned} \overset{(r)}{S}{}_{\text{curr}}\,[\,\sigma\,] \;&=\; \int dx^0 \int d^3x\; \sigma(\vec{x})\; \frac{1}{\Delta}\; \sigma(\vec{x})\,, \\ &=\; \int dx^0 \int d^3x\, d^3y\; \sigma(\vec{x})\; \sigma(\vec{y})\; \overset{(r)}{V}(\rho)\,, \end{aligned} \tag{B.7}$$

where $\overset{(r)}{V}(\rho)$ is the interaction potential computed in (6.2) where $m\lambda = 1$.

[11] Traditionnally, one distinguishes two high-energy (i.e. $s/m^2 \to \infty$) limits: the *Regge* (or *fixed momentum transfer*) limit which corresponds to $s/m^2 \to \infty$ with t fixed (thus $\theta \to 0$ and $u/m^2 \to -\infty$) and the *fixed scattering angle* limit which corresponds to $s/m^2 \to \infty$ with s/t and u/s fixed (thus $t/m^2 \to -\infty$ and $u/m^2 \to -\infty$).

[12] See e.g. [32] for the case of massive mediating fields.

JHEP05(2009)126

C Chebyshev and Gegenbauer polynomials

Several useful definitions and formulas taken from [33] are collected here in order to be self-contained.

The *Chebyshev polynomial of first kind* $T_r(z)$ is uniquely defined by the relation $T_r(\cos\beta) = \cos(r\beta)$ for any angle β, which implies

$$T_r(z) = \frac{1}{2}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^r + \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^r\right] \tag{C.1}$$

but it is also given by the sum

$$T_r(z) \;=\; \frac{r}{2}\sum_{m=0}^{[\frac{r}{2}]} \frac{(-1)^m(r-m-1)!}{m!\,(r-2m)!}\,(2z)^{r-2m}\,, \tag{C.2}$$

when $r \geqslant 1$. Observe that $T_0(z) = 1 = T_r(1)$ and $T_r(-z) = (-1)^r T_r(z)$. When $|z| \gg 1$, the Chebyshev polynomial of first kind with index $r \geqslant 1$ behaves as $T_r(z) \sim 2^{r-1}\, r\, z^r$.

The *Gegenbauer (or ultraspherical) polynomial* $C_r^\alpha(z)$ with $\alpha > -\frac{1}{2}$ et $\alpha \neq 0$ is a polynomial of degree $r \in \mathbb{N}$ in the variable z defined as

$$C_r^\alpha(z) \;:=\; \sum_{m=0}^{[\frac{r}{2}]} \frac{(-1)^m(\alpha)_{r-m}}{m!\,(r-2m)!}\,(2z)^{r-2m}\,. \tag{C.3}$$

They generalize the Legendre polynomials $P_r(z)$ to which $C_r^{\frac{1}{2}}(z)$ is proportional. Moreover, the Chebyshev polynomial of first kind $T_r(z)$ may somehow be thought as a regularised limit of Gegenbauer polynomials $C_r^\alpha(z)$ for $\alpha \to 0$. Notice that $C_0^\alpha(z) = 1$ and $C_r^\alpha(-z) = (-1)^r C_r^\alpha(z)$. When $|z| \gg 1$, the Gegenbauer polynomial behaves as $C_r^\alpha(z) \sim (\alpha)_r (2z)^r/r!$.

References

[1] M.A. Vasiliev, *Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3 + 1)-dimensions*, *Phys. Lett.* **B 243** (1990) 378 [SPIRES]; *Properties of equations of motion of interacting gauge fields of all spins in (3 + 1)-dimensions*, *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 1387 [SPIRES]; *More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions*, *Phys. Lett.* **B 285** (1992) 225 [SPIRES]; *Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS$_d$*, *Phys. Lett.* **B 567** (2003) 139 [hep-th/0304049] [SPIRES].

[2] M.A. Vasiliev, *Higher spin gauge theories in various dimensions*, *Fortsch. Phys.* **52** (2004) 702 [hep-th/0401177] [SPIRES]; *Higher spin gauge theories in any dimension*, *Comptes Rendus Physique* **5** (2004) 1101 [hep-th/0409260] [SPIRES]; X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla and M.A. Vasiliev, *Nonlinear higher spin theories in various dimensions*, in the Proceedings of the *First Solvay workshop on higher-spin gauge theories*, Brussels Belgium (2004), hep-th/0503128 [SPIRES].

[3] S. Weinberg, *Photons and gravitons in S matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass*, *Phys. Rev.* **135** (1964) B1049 [SPIRES]; M.T. Grisaru, H.N. Pendleton and P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity and the S matrix*, *Phys. Rev.* **D 15** (1977) 996 [SPIRES];

JHEP05(2009)126

Pedagogical review in S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Volume I: Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1995), section 13.1.

[4] S.R. Coleman and J. Mandula, *All possible symmetries of the S matrix*, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251 [SPIRES];
R. Haag, J.T. Lopuszanski and M. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the S matrix*, *Nucl. Phys.* **B 88** (1975) 257 [SPIRES];
Pedagogical review in S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Volume III: Supersymmetry*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (2000), chapter 24.

[5] C. Aragone and S. Deser, *Consistency problems of hypergravity*, *Phys. Lett.* **B 86** (1979) 161 [SPIRES];
F.A. Berends, J.W. van Holten, B. de Wit and P. van Nieuwenhuizen, *On spin 5/2 gauge fields*, *J. Phys.* **A 13** (1980) 1643 [SPIRES];
C. Aragone and H. La Roche, *Massless second order tetradic spin 3 fields and higher helicity bosons*, *Nuovo Cim.* **A 72** (1982) 149 [SPIRES];
S. Deser and Z. Yang, *Inconsistency of spin 4 – spin 2 gauge field couplings*, *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 1491 [SPIRES];
M. Porrati, *Universal limits on massless high-spin particles*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 065016 [arXiv:0804.4672] [SPIRES].

[6] N. Boulanger and S. Leclercq, *Consistent couplings between spin-2 and spin-3 massless fields*, *JHEP* **11** (2006) 034 [hep-th/0609221] [SPIRES];
N. Boulanger, S. Leclercq and P. Sundell, *On the uniqueness of minimal coupling in higher-spin gauge theory*, *JHEP* **08** (2008) 056 [arXiv:0805.2764] [SPIRES].

[7] A.Y. Segal, *Conformal higher spin theory*, *Nucl. Phys.* **B 664** (2003) 59 [hep-th/0207212] [SPIRES].

[8] M.A. Vasiliev, *Extended higher spin superalgebras and their realizations in terms of quantum operators*, *Fortsch. Phys.* **36** (1988) 33 [SPIRES].

[9] D. Francia, J. Mourad and A. Sagnotti, *Current exchanges and unconstrained higher spins*, *Nucl. Phys.* **B 773** (2007) 203 [hep-th/0701163] [SPIRES].

[10] H. Weyl, *Quantum mechanics and group theory*, *Z. Phys.* **46** (1927) 1 [SPIRES];
E.P. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749 [SPIRES];
J.E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** (1949) 99 [SPIRES];
M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O. Scully and E.P. Wigner, *Distribution functions in physics: fundamentals*, *Phys. Rept.* **106** (1984) 121 [SPIRES].

[11] C. Fronsdal, *Massless fields with integer spin*, *Phys. Rev.* **D 18** (1978) 3624 [SPIRES].

[12] G. Barnich and F. Brandt, *Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges*, *Nucl. Phys.* **B 633** (2002) 3 [hep-th/0111246] [SPIRES].

[13] F.A. Berends, G.J.H. Burgers and H. van Dam, *Explicit construction of conserved currents for massless fields of arbitrary spin*, *Nucl. Phys.* **B 271** (1986) 429 [SPIRES].

[14] D. Anselmi, *Higher-spin current multiplets in operator-product expansions*, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 1383 [hep-th/9906167] [SPIRES];
M.A. Vasiliev, *Higher spin gauge theories: star-product and AdS space*, hep-th/9910096 [SPIRES];

JHEP05(2009)126

S.E. Konstein, M.A. Vasiliev and V.N. Zaikin, *Conformal higher spin currents in any dimension and AdS/CFT correspondence*, *JHEP* **12** (2000) 018 [hep-th/0010239] [SPIRES];
O.A. Gelfond, E.D. Skvortsov and M.A. Vasiliev, *Higher spin conformal currents in Minkowski space*, *Theor. Math. Phys.* **154** (2008) 294 [hep-th/0601106] [SPIRES].

[15] R. Manvelyan and W. Rühl, *Conformal coupling of higher spin gauge fields to a scalar field in AdS_4 and generalized Weyl invariance*, *Phys. Lett.* **B 593** (2004) 253 [hep-th/0403241] [SPIRES];
A. Fotopoulos, N. Irges, A.C. Petkou and M. Tsulaia, *Higher-spin gauge fields interacting with scalars: the Lagrangian cubic vertex*, *JHEP* **10** (2007) 021 [arXiv:0708.1399] [SPIRES];
R. Manvelyan and K. Mkrtchyan, *Conformal invariant interaction of a scalar field with the higher spin field in AdS_D*, arXiv:0903.0058 [SPIRES].

[16] X. Bekaert, *Higher spin algebras as higher symmetries*, in the Proceedings of the *Fifth international spring school and workshop on quantum field theory and Hamiltonian systems*, Calimanesti & Caciulata Romania (2006), arXiv:0704.0898 [SPIRES].

[17] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory, Vol. 1: Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1987), chapter 1.

[18] M. Grigoriev, *Off-shell gauge fields from BRST quantization*, hep-th/0605089 [SPIRES].

[19] X. Bekaert, *Comments on higher-spin symmetries*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **6** (2009) 285 [arXiv:0807.4223] [SPIRES].

[20] M.A. Vasiliev, *Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **3** (2006) 37 [hep-th/0504090] [SPIRES].

[21] E. Witten, *Baryons and branes in anti de Sitter space*, talk at *Strings '98*, Santa Barbara CA U.S.A. (June 1998), http://online.itp.ucsb.edu/online/strings98/witten.

[22] B. Sundborg, *Stringy gravity, interacting tensionless strings and massless higher spins*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **102** (2001) 113 [hep-th/0103247] [SPIRES];
E. Witten, *Spacetime reconstruction*, talk at *J.H. Schwarz 60-th Birthday Conference*, CalTech CA U.S.A. (November 2001), http://theory.caltech.edu/jhs60/witten/1.html;
E. Sezgin and P. Sundell, *Doubletons and 5D higher spin gauge theory*, *JHEP* **09** (2001) 036 [hep-th/0105001] [SPIRES];
I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, *AdS dual of the critical $O(N)$ vector model*, *Phys. Lett.* **B 550** (2002) 213 [hep-th/0210114] [SPIRES].

[23] D. Francia and A. Sagnotti, *On the geometry of higher-spin gauge fields*, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) S473 [hep-th/0212185] [SPIRES]; *Higher-spin geometry and string theory*, *J. Phys. Conf. Ser.* **33** (2006) 57 [hep-th/0601199] [SPIRES].

[24] I.L. Buchbinder, A.V. Galajinsky and V.A. Krykhtin, *Quartet unconstrained formulation for massless higher spin fields*, *Nucl. Phys.* **B 779** (2007) 155 [hep-th/0702161] [SPIRES].

[25] G. Barnich, M. Grigoriev, A. Semikhatov and I. Tipunin, *Parent field theory and unfolding in BRST first-quantized terms*, *Commun. Math. Phys.* **260** (2005) 147 [hep-th/0406192] [SPIRES].

[26] B.V. Fedosov, *Quantization and the index Soviet Phys. Dokl.* **31** (1986) 877 [*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **291** (1986) 82]; *A simple geometrical construction of deformation quantization*, *J. Diff. Geom.* **40** (1994) 213 [SPIRES].

JHEP05(2009)126

[27] M. Bordemann, N. Neumaier and S. Waldmann, *Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles I: Weyl and standard ordering with differential operator representation*, q-alg/9707030 [SPIRES]; *Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles II: gNS representations, the WKB expansion and applications*, q-alg/9711016 [SPIRES].

[28] A. Sagnotti, E. Sezgin and P. Sundell, *On higher spins with a strong* $\mathrm{Sp}(2,R)$ *condition*, in the Proceedings of the *First Solvay workshop on higher-spin gauge theories*, Brussels Belgium (May 2004), hep-th/0501156 [SPIRES].

[29] D.P. Sorokin and M.A. Vasiliev, *Reducible higher-spin multiplets in flat and AdS spaces and their geometric frame-like formulation*, *Nucl. Phys.* **B 809** (2009) 110 [arXiv:0807.0206] [SPIRES].

[30] X. Bekaert, E. Joung, J. Mourad, *Weyl calculus and Noether currents: an application to cubic interactions*, *Physics Ann. Univ. Craiova* **18** (2008) 26.

[31] R. Hagedorn, *Relativistic kinematics*, W.A. Benjamin, New York U.S.A. (1963) chapter 6.

[32] K. Jagannathan and L.P.S. Singh, *Attraction/repulsion between like charges and the spin of the classical mediating field*, *Phys. Rev.* **D 33** (1986) 2475 [SPIRES].

[33] M. Abramowitz and I.A. Stegun eds., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York U.S.A. (1972), chapter 22;
S. Iyanaga and Y. Kawada eds., *Encyclopedic dictionary of mathematics*, MIT Press (1980), appendix A, table 20.I.

JHEP05(2009)126

Bibliographie

[1] E. S. Fradkin, "The problem of unification of all interactions and self-consistency," preprint Lebedev 90-0193. Discours pour la réception de la médaille Dirac (Trieste, 1989).

[2] P. Van Nieuwenhuizen, "Supergravity," *Phys. Rept.* **68** (1981) 189–398.

[3] M. H. Goroff and A. Sagnotti, "Quantum gravity at two loops," *Phys. Lett.* **B160** (1985) 81.

[4] S. Weinberg, "What is quantum field theory, and what did we think it was ?," in *Conceptual foundations of quantum field theory*, T. Y. Cao ed. (Cambridge University Press, 1996) pp. 241–251, `arXiv :hep-th/9702027`.

[5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. Volume I : Foundations* (Cambridge University Press, 1995).

[6] V. Ginzburg, "About Efim Samoilovich Fradkin and the equations for higher-spin particles," in *Quantum Field Theory and Quantum Statistics : Essays in honor of the sixtieth birthday of E. S. Fradkin (vol. 2)*, I. A. Batalin, C. J. Isham, and G. A. Vilkovisky eds. (Adam Hilger, 1987) pp. 15–33.

[7] L. Sciascia, *La Disparition de Majorana* (Flammarion, 1993).

[8] E. Recami, *Il caso Majorana : epistolario, documenti, testimonianze* (Di Renzo, 2000) [in Italian].

[9] F. Guerra and N. Robotti, *Ettore Majorana : Aspects of his Scientific and Academic Activity* (Scuola Normale Superiore di Pisa, 2008).

[10] E. Majorana, "Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario," *Nuovo Cim.* **9** (1932) 335 [in Italian].

[11] R. Casalbuoni, "Majorana and the infinite component wave equations," *PoS* **EMC** (2006) 004, `arXiv :hep-th/0610252`.

[12] I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.* **18** (1948) 707 [in Russian].

[13] E. Amaldi, *La Vita e l'Opera di Ettore Majorana* (Accademia Nazionale dei Lincei, 1966) [in Italian].

[14] D. M. Fradkin, "Comments on a paper by Majorana concerning elementary particles," *Am. J. Phys.* **53** (1965) 314.

[15] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, "Quantum theory of the infinite-component majorana field and the relation of spin and statistics," *Phys. Rev.* **D1** (1970) 571.

[16] P. A. M. Dirac, "Relativistic wave equations," *Proc. Roy. Soc. Lond.* **155A** (1936) 447.

[17] M. Fierz, "Force-free particles with any spin," *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 3.

[18] M. Fierz and W. Pauli, "On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A173** (1939) 211.

[19] A. O. Barut and R. Raczka, *Theory of group representations and applications* (Polish Scientific Publishers, 1977).

[20] E. Recami and S. Esposito, "The scientific manuscripts left unpublished by Ettore Majorana (with outlines of his life and work)," `arXiv :0709.1183 [physics.hist-ph]`.

[21] S. Esposito, E. Recami, A. van der Merwe, and R. Battiston (eds.), *Ettore Majorana : Unpublished Research Notes on Theoretical Physics*, vol. 159 of *Fundamental Theories of Physics*. (Springer, 2009).

[22] E. Majorana, "Second letter to the National Council of Research (21.01.1933) MB/L1." Une version scannée de l'original se trouve à la page 162 de [9]. [en Italien].

[23] E. P. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group," *Annals Math.* **40** (1939) 149.

[24] L. Brink, A. M. Khan, P. Ramond, and X.-z. Xiong, "Continuous spin representations of the Poincaré and super-Poincaré groups," *J. Math. Phys.* **43** (2002) 6279, `arXiv :hep-th/0205145`.

[25] E. P. Wigner, "Invariant quantum mechanical equations of motion," in International Atomic Energy Agency, p. 59. 1963.

[26] P. A. M. Dirac, "Unitary representations of the Lorentz group," *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A183** (1945) 284.

[27] V. Bargmann, "Irreducible unitary representations of the Lorentz group," *Annals Math.* **48** (1947) 568.

[28] Harish-Chandra, "Infinite irreducible representations of the Lorentz group," *Proc. R. Soc. Lond. A* **189** (1947) 372.

[29] V. Bargmann and E. P. Wigner, "Group theoretical discussion of relativistic wave equations," *Proc. Nat. Acad. Sci.* **34** (1948) 211.

[30] W. Rarita and J. Schwinger, "On a theory of particles with half integral spin," *Phys. Rev.* **60** (1941) 61.

[31] I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity : or a walk through superspace* (Institute of Physics Publishing, 1988).

[32] H. J. Bhabha, "Relativistic wave equations for the elementary particles," *Rev. Mod. Phys.* **17** (1945) 200.

[33] Harish-Chandra, "Equations for particles of higher spin," in *Report of an International Conference on Fundamental particles and low temperatures held at the Cavendish Laboratory. Vol. I : Fundamental particles* (Cambridge, 1946) pp. 185–188

[34] "Harish-Chandra 1923-1983," *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* **31** (1985).

[35] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring theory. Volume 1 : Introduction* (Cambridge Monographs On Mathematical Physics, 1987).

[36] C. Fronsdal, "On the theory of higher spin fields," *Nuovo Cimento Supp.* **9** (1958) 416.

[37] R. E. Behrends and C. Fronsdal, "Fermi decay of higher spin particles," Phys. Rev. **106** (1957) 345.

[38] S. Weinberg, "Feynman rules for any spin," *Phys. Rev.* **133** (1964) B1318.

[39] S. Weinberg, "Feynman rules for any spin : 2. Massless particles," *Phys. Rev.* **134** (1964) B882.

[40] K. Johnson and E. C. G. Sudarshan, "Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles," *Ann. Phys.* **13** (1961) 126.

[41] K. M. Case and S. G. Gasiorowicz, "Can massless particles be charged ?," *Phys. Rev.* **125** (1962) 1055.

[42] S. Weinberg, "Photons and gravitons in S matrix theory : Derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass," *Phys. Rev.* **135** (1964) B1049.

[43] G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, "Local BRST cohomology in gauge theories," Phys. Rept. **338** (2000) 439–569, `arXiv :hep-th/0002245`.

[44] J. Lopuszanski, *The Inverse Variational Problem in Classical Mechanics* (World Scientific, 1999).

[45] A. Bohm, Y. Ne'Eman and A. O. Barut eds., *Dynamical Groups and Spectrum Generating Algebras* (World Scientific, 1989).

[46] I. T. Grodsky and R. F. Streater, "No-Go Theorem," *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 695.

[47] G. Barnich, M. Grigoriev, A. Semikhatov, and I. Tipunin, "Parent field theory and unfolding in BRST first-quantized terms," *Commun. Math. Phys.* **260** (2005) 147, `arXiv :hep-th/0406192`.

[48] G. Barnich and M. Grigoriev, "A Poincaré lemma for sigma models of AKSZ type," `arXiv :0905.0547 [math-ph]`.

[49] J. Schwinger, *Particles, sources and fields (vol. I)* (Addison-Wesley, 1970) Sections 3-3 & 3-5.

[50] S.-J. Chang, "Lagrange formulation for systems with higher spin," *Phys. Rev.* **161** (1967) 1308.

[51] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, "Lagrangian formulation for arbitrary spin," *Phys. Rev.* **D9** (1974) 898 & 910.

[52] C. Fronsdal, "Massless fields with integer spin," *Phys. Rev.* **D18** (1978) 3624.

[53] J. Fang and C. Fronsdal, "Massless fields with half integral spin," *Phys. Rev.* **D18** (1978) 3630.

[54] S. D. Rindani and M. Sivakumar, "Gauge-invariant description of massive higher-spin particles by dimensional reduction," *Phys. Rev.* **D32** (1985) 3238.

[55] C. Aragone, S. Deser, and Z. Yang, "Massive higher spin from dimensional reduction of gauge fields," *Ann. Phys.* **179** (1987) 76.

[56] S. D. Rindani, D. Sahdev, and M. Sivakumar, "Dimensional reduction of symmetric higher spin actions," *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 265 & 275.

[57] L. P. S. Singh, "Covariant propagators for massive arbitrary spin fields," *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2236.

[58] K. Jagannathan and L. P. S. Singh, "Attraction/repulsion between like charges and the spin of the classical mediating field," *Phys. Rev.* **D33** (1986) 2475.

[59] C. Fronsdal, "Elementary particles in a curved space," *Rev. Mod. Phys.* **37** (1965) 221.

[60] C. Fronsdal, "Elementary particles in a curved space. 2," *Phys. Rev.* **D10** (1974) 589.

[61] H. Nicolai, "Representations of supersymmetry in anti de Sitter space," in *Supersymmetry and Supergravity '84*, P. v. N. B. de Wit, P. Fayet eds. (World Scientific, 1984).

[62] B. de Wit and I. Herger, "Anti-de Sitter supersymmetry," *Lect. Notes Phys.* **541** (2000) 79, arXiv :hep-th/9908005.

[63] N. T. Evans, "Discrete series for the universal covering group of the 3+2 de Sitter group," *J. Math. Phys.* **8** (1967) 170.

[64] S. Ferrara and C. Fronsdal, "Conformal fields in higher dimensions," in *Quantization, gauge theory, and strings (vol. 1)*, A. Semikhatov, M. A. Vasiliev and V. Zaikin eds. (Scientific World, 2001) pp. 405–426 ; arXiv :hep-th/0006009.

[65] C. Frønsdal, "Singletons and massless, integral spin fields on de sitter space : Elementary particles in a curved space. 7," *Phys. Rev.* **D20** (1979) 848.

[66] M. Flato and C. Frønsdal, "One massless particle equals two Dirac singletons : Elementary particles in a curved space. 6," *Lett. Math. Phys.* **2** (1978) 421.

[67] E. Angelopoulos and M. Laoues, "Masslessness in n-dimensions," *Rev. Math. Phys.* **10** (1998) 271, arXiv :hep-th/9806100.

[68] W. Siegel, "All free conformal representations in all dimensions," *Int. J. Mod. Phys.* **A4** (1989) 2015.

[69] P. A. M. Dirac, "A remarkable representation of the 3+2 de Sitter group," *J. Math. Phys.* **4** (1963) 901.

[70] M. A. Vasiliev, "Higher spin superalgebras in any dimension and their representations," *JHEP* **12** (2004) 046, arXiv :hep-th/0404124.

[71] B. de Wit and D. Z. Freedman, "Systematics of higher spin gauge fields," *Phys. Rev.* **D21** (1980) 358.

[72] T. Damour and S. Deser, "'Geometry' of spin 3 gauge theories," *Ann. Poincaré* **47** (1987) 277.

[73] M. A. Vasiliev, "'Gauge' form of description of massless fields with arbitrary spin," *Sov. J. Nucl. Phys.* **32** (1980) 439.

[74] C. Aragone and S. Deser, "Higher spin vierbein gauge fermions and hypergravities," *Nucl. Phys.* **B170** (1980) 329.

[75] C. Aragone and H. La Roche, "Massless second order tetradic spin 3 fields and higher helicity bosons," *Nuovo Cim.* **A72** (1982) 149.

[76] D. Francia and A. Sagnotti, "Free geometric equations for higher spins," *Phys. Lett.* **B543** (2002) 303, arXiv :hep-th/0207002.

[77] M. A. Vasiliev, "Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach," Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **3** (2006) 37, arXiv :hep-th/0504090.

[78] G. Barnich and M. Grigoriev, "BRST extension of the non-linear unfolded formalism," in the proceedings of the conference "Rencontres Mathématiques de Glanon", July 2004, Glanon (France) `arXiv :hep-th/0504119`.

[79] S. N. Gupta, "Gravitation and electromagnetism," *Phys. Rev.* **96** (1954) 1683.

[80] J. Preskill and K. S. Thorne, "Foreword to Feynman lectures on gravitation," in *Feynman Lectures on Gravitation*, B. Hatfield, ed. (Addison-Wesley, 1995).

[81] J. Fang and C. Fronsdal, "Deformations of gauge groups : Gravitation," *J. Math. Phys.* **20** (1979) 2264.

[82] T. Ortin, *Gravity and strings* (Cambridge, 2004).

[83] N. Boulanger, T. Damour, L. Gualtieri, and M. Henneaux, "Inconsistency of interacting, multigraviton theories," *Nucl. Phys.* **B597** (2001) 127, `arXiv :hep-th/0007220`.

[84] T. Damour and S. Deser, "Higher derivative interactions of higher spin gauge fields," *Class. Quant. Grav.* **4** (1987) L95.

[85] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, "The problem of nonlocality in string theory," *Nucl. Phys. B* **325** (1989) 389.

[86] J. Z. Simon, "Higher derivative Lagrangians, nonlocality : Problems and solutions," *Phys. Rev.* **D41** (1990) 3720.

[87] G. Barnich and M. Henneaux, "Consistent couplings between fields with a gauge freedom and deformations of the master equation," *Phys. Lett.* **B311** (1993) 123, `arXiv :hep-th/9304057`.

[88] D. Francia, J. Mourad, and A. Sagnotti, "Current exchanges and unconstrained higher spins," *Nucl. Phys.* **B773** (2007) 203, `arXiv :hep-th/0701163`.

[89] D. Francia, "On the relation between local and geometric Lagrangians for higher spins," `arXiv :1001.3854 [hep-th]`.

[90] D. Francia, "String theory triplets and higher-spin curvatures," `arXiv :1001.5003 [hep-th]`.

[91] V. Pascalutsa, "Higher spin hadrons as relativistic fields," in Physics of excited nucleons, pp. 325–330. 2002. `arXiv :nucl-th/0303005`.

[92] V. Pascalutsa and R. Timmermans, "Field theory of nucleon to higher-spin baryon transitions," *Phys. Rev.* **C60** (1999) 042201, `arXiv :nucl-th/9905065`.

[93] M. Henneaux, "Consistent interactions between gauge fields : The cohomological approach," *Contemp. Math.* **219** (1998) 93, `arXiv :hep-th/9712226`.

[94] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, and H. van Dam, "On the theoretical problems in constructing interactions involving higher spin massless particles," *Nucl. Phys.* **B260** (1985) 295.

[95] J. Stasheff, "Deformation theory and the Batalin-Vilkovisky master equation," in *Proceedings of the Ascona Meeting : June 1996*, D. Sternheimer, J. Rawnsley, and S. Gutt eds. (Springer, 1997) pp. 271–284, `arXiv :q-alg/9702012`.

[96] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, (Princeton University Press, 1992) Chapter 8.

[97] M. T. Grisaru and H. N. Pendleton, "Soft spin 3/2 fermions require gravity and supersymmetry," *Phys. Lett.* **B67** (1977) 323.

[98] H. A. Buchdahl, "On the compatibility of relativistic wave equations in Riemannian spaces," *Nuovo Cim.* **25** (1962) 486.

[99] S. R. Coleman and J. Mandula, "All possible symmetries of the S matrix," *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.

[100] G. Velo and D. Zwanziger, "Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential," *Phys. Rev.* **186** (1969) 1337.

[101] G. Velo and D. Zwanziger, "Noncausality and other defects of interaction lagrangians for particles with spin one and higher," *Phys. Rev.* **188** (1969) 2218.

[102] B. Schroer, R. Seiler, and J. A. Swieca, "Problems of stability for quantum fields in external time dependent potentials," *Phys. Rev.* **D2** (1970) 2927.

[103] A. Shamaly and A. Z. Capri, "Propagation of interacting fields," *Annals Phys.* **74** (1972) 503.

[104] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, "All possible generators of supersymmetries of the S matrix," *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

[105] M. T. Grisaru, H. N. Pendleton, and P. van Nieuwenhuizen, "Supergravity and the S matrix," *Phys. Rev.* **D15** (1977) 996.

[106] C. Aragone and S. Deser, "Consistency problems of hypergravity," *Phys. Lett.* **B86** (1979) 161.

[107] F. A. Berends, J. W. van Holten, B. de Wit, and P. van Nieuwenhuizen, "On spin 5/2 gauge fields," *J. Phys.* **A13** (1980) 1643.

[108] S. Weinberg and E. Witten, "Limits on massless particles," *Phys. Lett.* **B96** (1980) 59.

[109] A. K. H. Bengtsson, "On gauge invariance for spin 3 fields," *Phys. Rev.* **D32** (1985) 2031.

[110] S. Deser and Z. Yang, "Inconsistency of spin 4 - spin 2 gauge field couplings," *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 1491.

[111] M. Porrati, "Massive spin 5/2 fields coupled to gravity : Tree level unitarity versus the equivalence principle," *Phys. Lett.* **B304** (1993) 77, arXiv :gr-qc/9301012.

[112] A. Cucchieri, M. Porrati, and S. Deser, "Tree level unitarity constraints on the gravitational couplings of higher spin massive fields," *Phys. Rev.* **D51** (1995) 4543, arXiv :hep-th/9408073.

[113] S. Deser and A. Waldron, "Inconsistencies of massive charged gravitating higher spins," Nucl. Phys. **B631** (2002) 369, arXiv :hep-th/0112182.

[114] P. Benincasa and F. Cachazo, "Consistency conditions on the S-matrix of massless particles," arXiv :0705.4305 [hep-th].

[115] M. Porrati, "Universal limits on massless high-spin particles," *Phys. Rev.* **D78** (2008) 065016, arXiv :0804.4672 [hep-th].

[116] M. Porrati and R. Rahman, "A model independent ultraviolet cutoff for theories with charged massive higher spin fields," *Nucl. Phys.* **B814** (2009) 370, arXiv :0812.4254 [hep-th].

[117] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).

[118] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, and H. Van Dam, "On spin three selfinteractions," *Z. Phys.* **C24** (1984) 247.

[119] A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson, and L. Brink, "Cubic interaction for arbitrary spin," *Nucl. Phys.* **B227** (1983) 31.

[120] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, and H. van Dam, "Explicit construction of conserved currents of conserved currents for massless fields of arbitrary spin," *Nucl. Phys.* **B271** (1986) 429.

[121] A. K. H. Bengtsson and I. Bengtsson, "Massless higher spin fields revisited," *Class. Quant. Grav.* **3** (1986) 927.

[122] A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson, and N. Linden, "Interacting higher spin gauge fields on the light front," *Class. Quant. Grav.* **4** (1987) 1333.

[123] A. K. H. Bengtsson, "BRST approach to interacting higher spin gauge fields," *Class. Quant. Grav.* **5** (1988) 437.

[124] E. S. Fradkin and R. R. Metsaev, "A cubic interaction of totally symmetric massless representations of the Lorentz group in arbitrary dimensions," *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) L89.

[125] R. R. Metsaev, "Cubic interaction vertices for massive and massless higher spin fields," Nucl. Phys. **B759** (2006) 147, arXiv :hep-th/0512342.

[126] P. C. W. Davies and J. Brown, *Superstrings : A Theory of Everything ?* (Cambridge University Press, 1988) p.177, chapter 7.

[127] I. Adam, "Superstring perturbation theory," *Gen. Rel. Grav.* **41** (2009) 691.

[128] D. J. Gross, "Strings at superPlanckian energies : In search of the string symmetry," *Philos. Trans. R. Soc. London* **A329** (1989) 401.

[129] G. Bonelli, "On the tensionless limit of bosonic strings, infinite symmetries and higher spins," *Nucl. Phys.* **B669** (2003) 159, arXiv :hep-th/0305155.

[130] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, "Interacting higher spins and the high energy limit of the bosonic string," *Phys. Rev.* **D76** (2007) 025014, arXiv :0705.2939 [hep-th].

[131] M. Henneaux and C. Teitelboim, "First and second quantized point particles of any spin," in *Quantum mechanics of fundamental systems (vol. 2)* (Santiago, 1987) pp. 113–152.

[132] S. Ouvry and J. Stern, "Gauge fields of any spin and symmetry," *Phys. Lett.* **B177** (1986) 335.

[133] A. K. H. Bengtsson, "A unified action for higher spin gauge bosons from covariant string theory," *Phys. Lett.* **B182** (1986) 321.

[134] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, "Gauge invariant Lagrangians for free and interacting higher spin fields. A review of the BRST formulation," *Int. J. Mod. Phys.* **A24** (2009) 1, arXiv :0805.1346 [hep-th].

[135] V. L. Ginzburg *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **12** (1942) 425. [in Russian].

[136] E. S. Fradkin, "On the theory of particles with higher spins," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 27.

[137] L. Brink, à la session 'mémorial Fradkin' à la "4th International Sakharov Conference," contribution publiée dans les actes en ligne : http ://www.sc4.lpi.ru/procesf.html

[138] M. A. Vasiliev and E. S. Fradkin, "Gravitational interaction of massless high spin ($s > 2$) fields," *JETP Lett.* **44** (1986) 622.

[139] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "On the gravitational interaction of massless higher spin fields," *Phys. Lett.* **B189** (1987) 89.

[140] N. Boulanger and S. Leclercq, "Consistent couplings between spin-2 and spin-3 massless fields," *JHEP* **11** (2006) 034, arXiv :hep-th/0609221.

[141] N. Boulanger, S. Leclercq, and P. Sundell, "On the uniqueness of minimal coupling in higher-spin gauge theory," *JHEP* **08** (2008) 056, arXiv :0805.2764 [hep-th].

[142] M. A. Vasiliev, "Progress in higher spin gauge theories," in Quantization, gauge theory, and strings (vol. 1), A. Semikhatov, M. A. Vasiliev, and V. Zaikin eds. (Scientific World, 2001) pp. 452–471, arXiv :hep-th/0104246.

[143] Y. M. Zinoviev, "On spin 3 interacting with gravity," *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 035022, arXiv :0805.2226 [hep-th].

[144] M. A. Vasiliev, "Free massless fields of arbitrary spin in the de Sitter space and initial data for a higher spin superalgebra," *Fortsch. Phys.* **35** (1987) 741.

[145] V. E. Lopatin and M. A. Vasiliev, "Free massless bosonic fields of arbitrary spin in d-dimensional de Sitter space," *Mod. Phys. Lett.* **A3** (1988) 257.

[146] M. A. Vasiliev, "Free massless fermionic fields of arbitrary spin in in d-dimensional de Sitter space," *Nucl. Phys.* **B301** (1988) 26.

[147] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "Candidate to the role of higher spin symmetry," *Ann. Phys.* **177** (1987) 63.

[148] M. A. Vasiliev, "Extended higher spin superalgebras and their realizations in terms of quantum operators," *Fortsch. Phys.* **36** (1988) 33.

[149] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "Superalgebra of higher spins and auxiliary fields," *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 2983.

[150] S. E. Konstein and M. A. Vasiliev, "Massless representations and admissibility condition for higher spin superalgebras," *Nucl. Phys.* **B312** (1989) 402.

[151] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "Cubic interaction in extended theories of massless higher spin fields," *Nucl. Phys.* **B291** (1987) 141.

[152] M. A. Vasiliev, "Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions," *Phys. Lett.* **B243** (1990) 378.

[153] M. A. Vasiliev, "Properties of equations of motion of interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions," *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 1387.

[154] M. A. Vasiliev, "More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions," *Phys. Lett.* **B285** (1992) 225.

[155] S. R. Coleman, "1/N," in *Pointlike structures inside and outside hadrons*, A. Zichichi ed. (Plenum Press, 1982).

[156] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," *Phys. Rept.* **323** (2000) 183, arXiv :hep-th/9905111.

[157] B. Sundborg, "Stringy gravity, interacting tensionless strings and massless higher spins," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **102** (2001) 113, arXiv :hep-th/0103247.

[158] E. Witten, "Spacetime Reconstruction,". Exposé à la "J.H. Schwarz 60-th Birthday Conference" (CalTech, Novembre 2001) disponible en ligne http ://theory.caltech.edu/jhs60/witten/1.html

[159] P. Haggi-Mani and B. Sundborg, "Free large N supersymmetric Yang-Mills theory as a string theory," *JHEP* **04** (2000) 031, arXiv :hep-th/0002189.

[160] E. Sezgin and P. Sundell, "Massless higher spins and holography," *Nucl. Phys.* **B644** (2002) 303, arXiv :hep-th/0205131.

[161] M. A. Vasiliev, "Conformal higher spin symmetries of 4D massless supermultiplets and $\mathfrak{osp}(L, 2M)$ invariant equations in generalized (super)space," Phys. Rev. **D66** (2002) 066006, arXiv :hep-th/0106149.

[162] A. Mikhailov, "Notes on higher spin symmetries," arXiv :hep-th/0201019.

[163] M. G. Eastwood, "Higher symmetries of the Laplacian," *Annals Math.* **161** (2005) 1645, arXiv :hep-th/0206233.

[164] S. E. Konstein, M. A. Vasiliev, and V. N. Zaikin, "Conformal higher spin currents in any dimension and AdS/CFT correspondence," *JHEP* **12** (2000) 018, arXiv :hep-th/0010239.

[165] O. V. Shaynkman and M. A. Vasiliev, "Higher spin conformal symmetry for matter fields in 2+1 dimensions," *Theor. Math. Phys.* **128** (2001) 1155, arXiv :hep-th/0103208.

[166] A. M. Polyakov, "Gauge fields and space-time," *Int. J. Mod. Phys.* **A17S1** (2002) 119, arXiv :hep-th/0110196.

[167] E. Sezgin and P. Sundell, "Doubletons and 5D higher spin gauge theory," *JHEP* **09** (2001) 036, arXiv :hep-th/0105001.

[168] H. Nicolai, E. Sezgin, and Y. Tanii, "Conformally invariant supersymmetric field theories on $S^p \times S^1$ and super p-branes," *Nucl. Phys.* **B305** (1988) 483.

[169] E. Bergshoeff, A. Salam, E. Sezgin, and Y. Tanii, "Singletons, higher spin massless states and the supermembrane," *Phys. Lett.* **B205** (1988) 237.

[170] I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "AdS dual of the critical $O(N)$ vector model," *Phys. Lett.* **B550** (2002) 213, arXiv :hep-th/0210114.

[171] N. Bouatta, G. Compere, and A. Sagnotti, "An introduction to free higher-spin fields," arXiv :hep-th/0409068.

[172] A. C. Petkou, "Holography, duality and higher-spin theories," arXiv :hep-th/0410116.

[173] S. de Buyl and A. Kleinschmidt, "Higher spin fields from indefinite Kac-Moody algebras," arXiv :hep-th/0410274.

[174] A. Sagnotti, E. Sezgin, and P. Sundell, "On higher spins with a strong $Sp(2,\mathbb{R})$ condition," `arXiv :hep-th/0501156`.

[175] D. Francia and C. M. Hull, "Higher-spin gauge fields and duality," `arXiv :hep-th/0501236`.

[176] M. Bianchi and V. Didenko, "'Massive' higher spin multiplets and holography," `arXiv :hep-th/0502220`.

[177] D. Sorokin, "Introduction to the classical theory of higher spins," *AIP Conf. Proc.* **767** (2005) 172, `arXiv :hep-th/0405069`.

[178] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories in various dimensions," *Fortsch. Phys.* **52** (2004) 702, `arXiv :hep-th/0401177`.

[179] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories in any dimension," *Comptes Rendus Physique* **5** (2004) 1101, `arXiv :hep-th/0409260`.

[180] G. Barnich, G. Bonelli and M. Grigoriev, "From BRST to light-cone description of higher spin gauge fields," *Physics AUC* **15** (2005) 1, `arXiv :hep-th/0502232`.

[181] D. Francia and A. Sagnotti, "Higher-spin geometry and string theory," *J. Phys. Conf. Ser.* **33** (2006) 57, `arXiv :hep-th/0601199`.

[182] A. K. H. Bengtsson, "Towards unifying structures in higher spin gauge symmetry," *SIGMA* **4** (2008) 013, `arXiv :0802.0479 [hep-th]`.

[183] M. Henneaux, "N-complexes and higher spin gauge fields," *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **5** (2008) 1255, `arXiv :0808.1975 [hep-th]`.

[184] X. Bekaert and N. Boulanger, "Massless spin-two field S-duality," Class. Quant. Grav. **20** (2003) S417, `arXiv :hep-th/0212131`. Exposé présenté par X.B. au "Workshop on the Quantum Structure of Space-time and the Geometrical Nature of the Fundamental Interactions", Louvain (Belgique) 13-19 septembre 2002.

[185] X. Bekaert and N. Boulanger, "Mixed symmetry gauge fields in a flat background," in the proceedings of the conference "Supersymmetries and Quantum Symmetries SQS'03", Dubna (Russie) 24-29 juillet 2003, `arXiv :hep-th/0310209`.

[186] X. Bekaert, I. L. Buchbinder, A. Pashnev, and M. Tsulaia, "On higher spin theory : Strings, BRST, dimensional reductions," *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) S1457, `arXiv :hep-th/0312252`. Exposé présenté par X.B. au "Workshop on the Quantum Structure of Space-time and the Geometrical Nature of the Fundamental Interactions", Louvain (Belgique) 13-19 septembre 2002.

[187] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla, and M. A. Vasiliev, "Nonlinear higher spin theories in various dimensions," in *Solvay Workshops and*

Symposia (vol. 1) : Higher Spin Gauge Theories, R. Argurio, G. Barnich, G. Bonelli, and M. Grigoriev eds. (International Solvay Institutes, 2005) pp. 132–197, arXiv :hep-th/0503128.
http ://www.solvayinstitutes.be/Activities/Higher Spin/Solvay1proc.pdf.

[188] X. Bekaert, N. Boulanger, S. Cnockaert, and S. Leclercq, "On Killing tensors and cubic vertices in higher-spin gauge theories," *Fortsch. Phys.* **54** (2006) 282, arXiv :hep-th/0602092. Exposé présenté par X.B. au colloque "Constituents, Fundamental Forces and Symmetries of the Universe", Corfou (Grèce) 20-26 septembre 2005.

[189] X. Bekaert and N. Boulanger, "The unitary representations of the Poincaré group in any spacetime dimension," in the proceedings of the "Deuxièmes rencontres de physique mathématique à Modave", Modave (Belgique) 6-12 Août 2006, arXiv :hep-th/0611263.

[190] X. Bekaert, N. Boulanger, and M. Henneaux, "Consistent deformations of dual formulations of linearized gravity : A no-go result," *Phys. Rev.* **D67** (2003) 044010, arXiv :hep-th/0210278.

[191] X. Bekaert, N. Boulanger, and S. Cnockaert, "No self-interaction for two-column massless fields," *J. Math. Phys.* **46** (2005) 012303, arXiv :hep-th/0407102.

[192] X. Bekaert and N. Boulanger, "Tensor gauge fields in arbitrary representations of $GL(D, \mathbb{R})$: Duality and Poincaré lemma," *Commun. Math. Phys.* **245** (2004) 27, arXiv :hep-th/0208058.

[193] X. Bekaert and N. Boulanger, "Tensor gauge fields in arbitrary representations of $GL(D, \mathbb{R})$. II : Quadratic actions," *Commun. Math. Phys.* **271** (2007) 723, arXiv :hep-th/0606198.

[194] X. Bekaert and N. Boulanger, "On geometric equations and duality for free higher spins," Phys. Lett. **B561** (2003) 183, arXiv :hep-th/0301243.

[195] X. Bekaert, N. Boulanger, and S. Cnockaert, "Spin three gauge theory revisited," *JHEP* **01** (2006) 052, arXiv :hep-th/0508048.

[196] X. Bekaert and N. Boulanger, "Gauge invariants and Killing tensors in higher-spin gauge theories," *Nucl. Phys.* **B722** (2005) 225, arXiv :hep-th/0505068.

[197] X. Bekaert, "Comments on higher-spin symmetries," *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **6** (2009) 285, arXiv :0807.4223 [hep-th].

[198] X. Bekaert, "Higher spin algebras as higher symmetries," *Physics AUC* **16** (2006) 58, arXiv :0704.0898 [hep-th]. Exposé présenté à la "5th international school and workshop on QFT & Hamiltonian systems", Calimanesti (Roumanie) 20-26 Mai 2006.

[199] X. Bekaert, E. Joung, and J. Mourad, "On higher spin interactions with matter," *JHEP* **05** (2009) 126, arXiv :0903.3338 [hep-th].

[200] X. Bekaert, N. Boulanger and S. Leclercq, "Strong obstruction of the Berends-Burgers-van Dam spin-3 vertex," arXiv :1002.0289 [hep-th].

[201] I. Bandos, X. Bekaert, J. A. de Azcarraga, D. Sorokin, and M. Tsulaia, "Dynamics of higher spin fields and tensorial space," *JHEP* **05** (2005) 031, arXiv :hep-th/0501113.

[202] X. Bekaert and M. Grigoriev, "Manifestly conformal descriptions and higher symmetries of bosonic singletons," arXiv :0907.3195 [hep-th].

[203] X. Bekaert and J. Mourad, "The continuous spin limit of higher spin field equations," *JHEP* **01** (2006) 115, arXiv :hep-th/0509092.

[204] X. Bekaert, M. R. de Traubenberg, and M. Valenzuela, "An infinite supermultiplet of massive higher-spin fields," *JHEP* **05** (2009) 118, arXiv :0904.2533 [hep-th].

[205] X. Bekaert, *Issues in electric-magnetic duality* (PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, September 2002) arXiv :hep-th/0209169.

[206] C. M. Hull, "Duality in gravity and higher spin gauge fields," *JHEP* **09** (2001) 027, arXiv :hep-th/0107149.

[207] P. Olver, "Invariant theory and differential equations," in *Invariant Theory*, S. Koh ed. (Springer-Verlag, 1987) p. 62.

[208] M. Dubois-Violette and M. Henneaux, "Generalized cohomology for irreducible tensor fields of mixed Young symmetry type," *Lett. Math. Phys.* **49** (1999) 245, arXiv :math/9907135.

[209] P. de Medeiros and C. Hull, "Exotic tensor gauge theory and duality," *Commun. Math. Phys.* **235** (2003) 255, arXiv :hep-th/0208155.

[210] W. Siegel and B. Zwiebach, "Gauge string fields from the light cone," *Nucl. Phys.* **B282** (1987) 125.

[211] W. Siegel, "Fields," arXiv :hep-th/9912205.

[212] J. M. F. Labastida, "Massless particles in arbitrary representations of the Lorentz group," *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 185.

[213] A. Campoleoni, D. Francia, J. Mourad and A. Sagnotti, "Unconstrained higher spins of mixed symmetry. I. Bose Fields," *Nucl. Phys.* **B815** (2009) 289 arXiv :0810.4350 [hep-th].

[214] K. B. Alkalaev, M. Grigoriev and I. Y. Tipunin, "Massless Poincaré modules and gauge invariant equations," *Nucl. Phys.* **B823** (2009) 509 arXiv :0811.3999 [hep-th].

[215] A. Campoleoni, D. Francia, J. Mourad and A. Sagnotti, "Unconstrained higher spins of mixed symmetry. II. Fermi Fields," *Nucl. Phys.* **B828** (2010) 405 arXiv :0904.4447 [hep-th].

[216] D. Francia and A. Sagnotti, "Minimal local Lagrangians for higher-spin geometry," *Phys. Lett.* **B624** (2005) 93 arXiv :hep-th/0507144.

[217] D. Francia and A. Sagnotti, "On the geometry of higher-spin gauge fields," *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) S473, arXiv :hep-th/0212185.

[218] A. Sagnotti and M. Tsulaia, "On higher spins and the tensionless limit of string theory," *Nucl. Phys.* **B682** (2004) 83, arXiv :hep-th/0311257.

[219] T. Biswas and W. Siegel, "Radial dimensional reduction : (Anti) de Sitter theories from flat," *JHEP* **07** (2002) 005, arXiv :hep-th/0203115.

[220] M. Grigoriev, "Off-shell gauge fields from BRST quantization," arXiv :hep-th/0605089.

[221] I. A. Bandos and J. Lukierski, "Tensorial central charges and new superparticle models with fundamental spinor coordinates," *Mod. Phys. Lett.* **A14** (1999) 1257, arXiv :hep-th/9811022.

[222] I. A. Bandos, J. Lukierski, and D. P. Sorokin, "Superparticle models with tensorial central charges," *Phys. Rev.* **D61** (2000) 045002, arXiv :hep-th/9904109.

[223] G. Barnich and M. Grigoriev, "Parent form for higher spin fields on anti-de Sitter space," *JHEP* **08** (2006) 013, arXiv :hep-th/0602166.

[224] J. Pohjanpelto and S. C. Anco, "Generalized symmetries of massless free fields on Minkowski space," *SIGMA* **4** (2008) 004, arXiv :0801.1892 [math-ph].

[225] A. M. Khan and P. Ramond, "Continuous spin representations from group contraction," *J. Math. Phys.* **46** (2005) 053515 [Erratum-ibid. **46** (2005) 079901] [arXiv :hep-th/0410107].

[226] P. A. Horvathy, M. S. Plyushchay and M. Valenzuela, "Bosonized supersymmetry from the Majorana-Dirac-Staunton theory and massive higher-spin fields," *Phys. Rev.* **D77** (2008) 025017, arXiv :0710.1394 [hep-th].

[227] M. S. Plyushchay, "Majorana equation and exotics : Higher derivative models, anyons and noncommutative geometry," *Electron. J. Theor. Phys.* **3N10** (2006) 17, arXiv :math-ph/0604022.

[228] E. S. Fradkin and V. Y. Linetsky, "Cubic interaction in conformal theory of integer spin fields in four-dimensional space-time," *Phys. Lett.* **B231** (1989) 97.

[229] A. Y. Segal, "Conformal higher spin theory," *Nucl. Phys.* **B664** (2003) 59, arXiv :hep-th/0207212.

[230] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, "Deformation Theory and Quantization," *Ann. Phys.* **111** (1978) 61 111.

[231] M. Bordemann, N. Neumaier, and S. Waldmann, "Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles I : Weyl and standard ordering with differential operator representation," arXiv :q-alg/9707030.

[232] D. T. Son, "Toward an AdS/cold atoms correspondence : a geometric realization of the Schroedinger symmetry," *Phys. Rev.* **D78** (2008) 046003, arXiv :0804.3972 [hep-th].

[233] C. Duval and P. A. Horvathy, "Non-relativistic conformal symmetries and Newton-Cartan structures," *J. Phys.* **A42** (2009) 465206, arXiv :0904.0531 [math-ph].