Algèbres de Hecke, cristaux et bases canoniques de groupes quantiques

N. Jacon

Université de Franche-Comté

8 Juin 2010

La conjecture de James

Problème

Etudier les représentations du groupe symétrique i.e. les $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$-modules où $\mathbb{k}$ est un corps quelconque.

En caractéristique 0, on a :

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{k}\mathfrak{S}_n) \leftrightarrow \text{Partitions de } n$$

La conjecture de James

Problème

Etudier les représentations du groupe symétrique i.e. les $\Bbbk\mathfrak{S}_n$-modules où $\Bbbk$ est un corps quelconque.

En caractéristique 0, on a :

$$\mathrm{Irr}(\Bbbk\mathfrak{S}_n) \leftrightarrow \text{Partitions de } n$$

En fait :

La conjecture de James

Problème

Etudier les représentations du groupe symétrique i.e. les $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$-modules où $\mathbb{k}$ est un corps quelconque.

En caractéristique 0, on a :

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{k}\mathfrak{S}_n) \leftrightarrow \text{Partitions de } n$$

En fait : Pour tout corps $\mathbb{k}$ on peut construire un ensemble de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$-modules, les modules de Specht :

$$\left\{\mathbb{k}S^\lambda \mid \lambda \vdash n\right\}$$

Si $\mathrm{car}(\Bbbk) = 0$,

$$\mathrm{Irr}(\Bbbk\mathfrak{S}_n) = \left\{\Bbbk S^{\lambda} \mid \lambda \vdash n\right\}$$

Si $\mathrm{car}(\mathbb{k}) = 0$,

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{k}\mathfrak{S}_n) = \left\{ \mathbb{k}S^\lambda \mid \lambda \vdash n \right\}$$

Et en caractéristique p ?

Nouveau Problème

Déterminer explicitement les $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$-modules pour tout corps $\mathbb{k}$ ou, plus précisement, trouver la matrice de décomposition :

$$D_{\mathbb{k}} = ([\mathbb{k}S^\lambda : M])_{\lambda \vdash n, M \in \mathrm{Irr}(\mathbb{k}\mathfrak{S}_n)}$$

Soit $q \in \mathbb{k}^{\times}$.

Algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbb{k}, q)$ du groupe symétrique :

- Base : $\{T_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$
- Relations : $(T_{s_i} - q)(T_{s_i} + 1) = 0$ pour $s_i = (i, i+1)$
  $T_w = T_{s_{i_1}} \ldots T_{s_{i_t}}$ pour $w = s_{i_1} \ldots s_{i_t}$ avec t minimal.

C'est une déformation de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$.

Soit $q \in \mathbb{k}^{\times}$.

Algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbb{k}, q)$ du groupe symétrique :

- Base : $\{T_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$
- Relations : $(T_{s_i} - q)(T_{s_i} + 1) = 0$ pour $s_i = (i, i+1)$
  $T_w = T_{s_{i_1}} \ldots T_{s_{i_t}}$ pour $w = s_{i_1} \ldots s_{i_t}$ avec t minimal.

C'est une déformation de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$. L'algèbre admet des "q-analogues"

- de modules de Specht $\mathbb{k}S_q^{\lambda}$
- de matrices de décomposition

$$D_{\mathbb{k},q} = ([\mathbb{k}S_q^{\lambda} : M])_{\lambda \vdash n, M \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(\mathbb{k},q))}$$

Si $q = 1 \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{k}, q) = \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$

Supposons $\mathrm{car}(\mathbb{k}) = \ell$, $q \in \mathbb{k}^{\times}$. On pose

$$e = \min\{i \geqslant 2 \mid 1 + q + q^2 + ... + q^{i-1} = 0\}$$

- $D_{\mathbb{k},q}$ = matrice de décomposition de $\mathcal{H}(\mathbb{k}, q)$.
- $D_{\mathbb{C},\eta_e}$ = matrice de décomposition de $\mathcal{H}(\mathbb{C}, \eta_e)$, $\eta_e := \exp(2i\pi/e)$.

Fait :

L'algorithme de Ariki-LLT (1996) permet le calcul explicite de $D_{\mathbb{C},\eta_e}$.

Supposons $\mathrm{car}(\Bbbk) = \ell$, $q \in \Bbbk^{\times}$. On pose

$$e = \min\{i \geqslant 2 \mid 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} = 0\}$$

- $D_{\Bbbk,q}$ = matrice de décomposition de $\mathcal{H}(\Bbbk, q)$.
- $D_{\mathbb{C},\eta_e}$ = matrice de décomposition de $\mathcal{H}(\mathbb{C}, \eta_e)$, $\eta_e := \exp(2i\pi/e)$.

Fait :

L'algorithme de Ariki-LLT (1996) permet le calcul explicite de $D_{\mathbb{C},\eta_e}$.

Relier $D_{\Bbbk,q}$ et $D_{\mathbb{C},\eta_e}$???

Théorème de factorisation (James)

Il existe une matrice carrée à coefficients entiers positifs A, la matrice d'ajustement, tel que

$$D_{\Bbbk,q} = D_{\mathbb{C},\eta_e}.A$$

Conjecture de James (1990)

Supposons $e < \infty$, $\mathrm{car}(\mathbb{k}) = \ell$ et $e\ell > n$ alors $A = \mathrm{Id}$ et ainsi $D_{\mathbb{k},q} = D_{\mathbb{C},\eta_e}$.

Si $q = 1$ et $\mathrm{car}(\mathbb{k}) = p$: La conjecture de James implique que si $p^2 > n$:

La matrice de décomposition de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ est égale à la matrice de décomposition de $\mathcal{H}(\mathbb{C}, \eta_p)$

Conjecture de James (1990)

Supposons $e < \infty$, $\mathrm{car}(\mathbb{k}) = \ell$ et $e\ell > n$ alors $A = \mathrm{Id}$ et ainsi $D_{\mathbb{k},q} = D_{\mathbb{C},\eta_e}$.

Si $q = 1$ et $\mathrm{car}(\mathbb{k}) = p$: La conjecture de James implique que si $p^2 > n$:

La matrice de décomposition de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ est égale à la matrice de décomposition de $\mathcal{H}(\mathbb{C}, \eta_p)$

Conjecture de James généralisée (Geck 1991)

Généralisation aux autres groupes de Weyl.

Groupes de réflexions complexes

Un groupe de réflexions complexes est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendré par des réflexions complexes.

Classification des groupes de réflexions complexes (irréductibles) par Shephard et Todd

- une famille de groupes notée $G(\ell, p, n)$ $(p|\ell)$.
- 34 autres groupes de réflexions "exceptionnels".

On a

$$G(1,1,n) \simeq \mathfrak{S}_n, \qquad G(\ell,1,1) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

$$G(\ell,1,n) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n,$$

Le groupe de réflexions complexes de la série $G(\ell, 1, n)$ a une présentation par

- générateurs : s_0 , s_1, ..., s_{n-1}.
- relations :
  - $s_i^2 = 1$ si $i = 1, \dots, n-1$,
  - $s_0^l = 1$,
  - $s_i s_j = s_j s_i$, si $|i - j| > 1$,
  - $s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i$ si $1 \leqslant i \leqslant n-2$,
  - $s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$.

Soit A un anneau commutatif et $q \in A^{\times}$, $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_l) \in A^l$. L'algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{A,\mathbf{Q},q}$ a une présentation par

- générateurs : T_0 , $T_1, \dots, T_{n-1}$.
- relations :
  - $(T_i - q)(T_i + 1) = 0$ si $i = 1, \dots, n-1$,
  - $(T_0 - Q_1) \dots (T_0 - Q_l) = 0$,
  - $T_i T_j = T_j T_i$, si $|i - j| > 1$,
  - $T_{i+1} T_i T_{i+1} = T_i T_{i+1} T_i$ si $1 \leqslant i \leqslant n-2$,
  - $T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0$.

Soit $\Bbbk$ un corps. On pose

$$\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^\ell) \vdash_\ell n \iff \forall i \in [1, \ell]\ \lambda^i \vdash n_i,\ \sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$$

$\mathcal{H}_{\Bbbk,\mathbf{Q},q}$ admet des généralisations

- de modules de Specht $\Bbbk S_q^\lambda$ avec $\lambda \vdash_\ell n$.
- de matrices de décomposition

$$D_{\Bbbk,q} = ([\Bbbk S_q^\lambda : M])_{\lambda \vdash_\ell n, M \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\Bbbk,\mathbf{Q},q})}$$

Si $q = 1$ et $\forall j,\ Q_j = \eta_l^{j-1} \rightarrow \mathcal{H}_{\Bbbk,(\eta_l^{j-1})_{j=1,\ldots,l},1} = \Bbbk G(l, 1, n)$

Problèmes.

(1) Calculer les matrices de décomposition $D_{\mathbb{k},q}$,

(2) Déterminer leurs formes (unitriangulaires ?),

(3) Déterminer les modules simples $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{k},\mathbf{Q},q})$,

(4) Trouver des paramétrisations naturelles (nombre ?).

v-matrices de décomposition.

On considère l'espace de Fock :

$$\mathcal{F}_v := \mathbb{C}(v)\text{-e.v engendré par les } \lambda \vdash_\ell n \; (\forall n \in \mathbb{N})$$

v-matrices de décomposition.

On considère l'espace de Fock :

$$\mathcal{F}_v := \mathbb{C}(v)\text{-e.v engendré par les } \lambda \vdash_\ell n \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

- $\rightsquigarrow$ Action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ sur $\mathcal{F}_v$.
- $\rightsquigarrow$ Leclerc-Thibon et Uglov ont défini une "base canonique" :

$$\left\{ G(\lambda) = \sum_{\mu \vdash_\ell n} d_{\lambda,\mu}(v)\mu \mid \lambda \vdash_\ell n, \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

- $\rightsquigarrow$ et un ensemble Ψ de multipartitions tel que

$$\left\{ G(\lambda) = \sum_{\mu \vdash_\ell n} d_{\lambda,\mu}(v)\mu \mid \lambda \in \Psi \right\}$$

est la base canonique d'un $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-module simple.

$$\Delta_e(v) = (d_{\lambda,\mu}(v))_{\lambda\vdash_\ell n,\mu\vdash_\ell n}, \qquad D_e(v) = (d_{\lambda,\mu}(v))_{\lambda\vdash_\ell n,\mu\in\Psi}$$

Théorème d'Ariki (conjecture LLT)

Pour tout $e \in \mathbb{N}_{>1} \cup \{\infty\}$, on a :

$$D_e(1) = D_{\mathbb{C},\eta_e}$$

$$\Delta_e(v) = (d_{\lambda,\mu}(v))_{\lambda \vdash_\ell n, \mu \vdash_\ell n}, \qquad D_e(v) = (d_{\lambda,\mu}(v))_{\lambda \vdash_\ell n, \mu \in \Psi}$$

Théorème d'Ariki (conjecture LLT)

Pour tout $e \in \mathbb{N}_{>1} \cup \{\infty\}$, on a :

$$D_e(1) = D_{\mathbb{C},\eta_e}$$

- Si $l = 1$, $\Delta_e(1)$ est la matrice de décomposition de la q-algèbre de Schur (Varagnolo-Vasserot).
- Si $l \in \mathbb{N}$, interprétation conjecturale de $\Delta_e(1)$ (Yvonne, Rouquier).
- $D_e(v)$ est une quantification $D_{\mathbb{C},\eta_e}$: la "v-matrice de décomposition".

Calculer la matrice de décomposition

Pour tout $e \in \mathbb{N}_{>1}$,

- Pour $l = 1$, algorithme LLT : calcul de $D_e(v)$ (Lascoux, Leclerc, Thibon 1995)
- Pour $l \in \mathbb{N}$, généralisation (J 2005, Fayers 2010)

Conclusion

Algorithme pour le calcul de $D_e(v)$ et donc de $D_{\mathbb{C},\eta_e} = D_e(1)$.

Bipartitions de 2 :

$$(2, \emptyset),\ (\emptyset, 2),\ (1, 1),\ (1.1, \emptyset),\ (\emptyset, 1.1).$$

Bipartitions de 2 :

$$(2,\emptyset),\ (\emptyset,2),\ (1,1),\ (1.1,\emptyset),\ (\emptyset,1.1).$$

Base canonique de $\mathcal{F}_v$ (sous l'action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ et poids $2\Lambda_0$.)

$$\begin{array}{c} (2,\emptyset) \\ (1.1,\emptyset) \\ (\emptyset,2) \\ (\emptyset,1.1) \\ (1,1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v^2 & v & v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_{\mathbb{C},-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bipartitions de 2 :

$$(2, \emptyset),\ (\emptyset, 2),\ (1, 1),\ (1.1, \emptyset),\ (\emptyset, 1.1).$$

Base canonique de $\mathcal{F}_v$ (sous l'action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ et poids $2\Lambda_0$.)

$$\begin{array}{c} (2,\emptyset) \\ (1.1,\emptyset) \\ (\emptyset,2) \\ (\emptyset,1.1) \\ (1,1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v^2 & v & v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_{\mathbb{C},-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paramétrer les modules simples

Théorème (Dipper-James-Murphy, Geck-Rouquier, Ariki, J, 1986-2008)

Il existe un ordre sur les lignes et colonnes tels que

$$D_{\mathbb{C},\eta_e} = \begin{array}{ccc} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{matrix}\right) & \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right] \mathcal{B} \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right] \textit{Multipartitions} \end{array}$$

On dit que $\mathcal{B}$ est un ensemble basique.

Paramétrer les modules simples

Théorème (Dipper-James-Murphy, Geck-Rouquier, Ariki, J, 1986-2008)

Il existe un ordre sur les lignes et colonnes tels que

$$D_{\mathbb{C},\eta_e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right] \mathcal{B} \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right] \textit{Multipartitions}$$

On dit que $\mathcal{B}$ est un ensemble basique.

$\rightsquigarrow$ généralisation au type $G(\ell, p, n)$ (J-Genet 2006)

Propriétés de $D_{\mathbb{C},\eta_e}$

Factorisation de $D_{\mathbb{C},\eta_e}$ (Geck-Rouquier 1997)

Il existe une matrice à coefficients entiers positifs A tel que

$$D_{\mathbb{C},\eta_e} = D_\infty.A$$

Propriétés de $D_{\mathbb{C},\eta_e}$

Factorisation de $D_{\mathbb{C},\eta_e}$ (Geck-Rouquier 1997)

Il existe une matrice à coefficients entiers positifs A tel que

$$D_{\mathbb{C},\eta_e} = D_\infty . A$$

- Pour $l = 2$, D_∞ est la matrice des caractères constructibles.
- Pour $l = 2$, formule explicite pour D_∞ (Lusztig, Leclerc - Miyachi)
- D_∞ admet aussi une v-matrice de décomposition $D_\infty(v)$.

Propriétés de $D_{\mathbb{C},\eta_e}$

Factorisation de $D_e(v)$ (Ariki-J-Lecouvey 2010)

Il existe une matrice à coefficients entiers positifs $A(v)$ tel que

$$D_e(v) = D_\infty(v).A(v)$$

Propriétés de $D_{\mathbb{C},\eta_e}$

Factorisation de $D_e(v)$ (Ariki-J-Lecouvey 2010)

Il existe une matrice à coefficients entiers positifs $A(v)$ tel que

$$D_e(v) = D_\infty(v).A(v)$$

- $D_\infty(v)$ quantifie D_∞.
- Pour $l = 2$, formule explicite pour $D_\infty(v)$ (Leclerc - Miyachi)
- En fait on a même

$$\Delta_e(v) = \Delta_\infty(v).\mathcal{A}(v)$$

pour une matrice à coefficients entier positifs $\mathcal{A}(v)$.

Paramétrer les modules simples (2)

Base canonique $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e})$

Paramétrer les modules simples (2)

$\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$

$\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}$

Base canonique

$\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e})$

Paramétrer les modules simples (2)

$\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ | *Bases cristallines* | *Ens. basiques* | $\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}$

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{B}_1 \\ \text{Base canonique} \leftrightarrow & \mathfrak{B}_2 \\ & \mathfrak{B}_3 \\ & \vdots \end{array}$$

$\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e})$

Paramétrer les modules simples (2)

$\boxed{\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)}$

Bases cristallines

$\mathfrak{B}_1$

$\mathfrak{B}_2$

$\mathfrak{B}_3$

$\vdots$

Base canonique

Ens. basiques

$\boxed{\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}}$

$\mathcal{B}_1$

$\mathcal{B}_2$

$\mathcal{B}_3$

$\vdots$

$\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e})$

Paramétrer les modules simples (2)

$\boxed{\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)}$ *Bases cristallines* *Ens. basiques* $\boxed{\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}}$

$$
\begin{tikzcd}
& \mathfrak{B}_1 \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{B}_1 & \\
& \mathfrak{B}_2 \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{B}_2 & \\
\text{Base canonique} \arrow[uur, leftrightarrow] \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] \arrow[ddr, leftrightarrow] & & & \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}) \arrow[uul, leftrightarrow] \arrow[ul, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[ddl, leftrightarrow] \\
& \mathfrak{B}_3 \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{B}_3 & \\
& \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Paramétrer les modules simples (2)

$\boxed{\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)}$ *Bases cristallines* *Ens. basiques* $\boxed{\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}}$

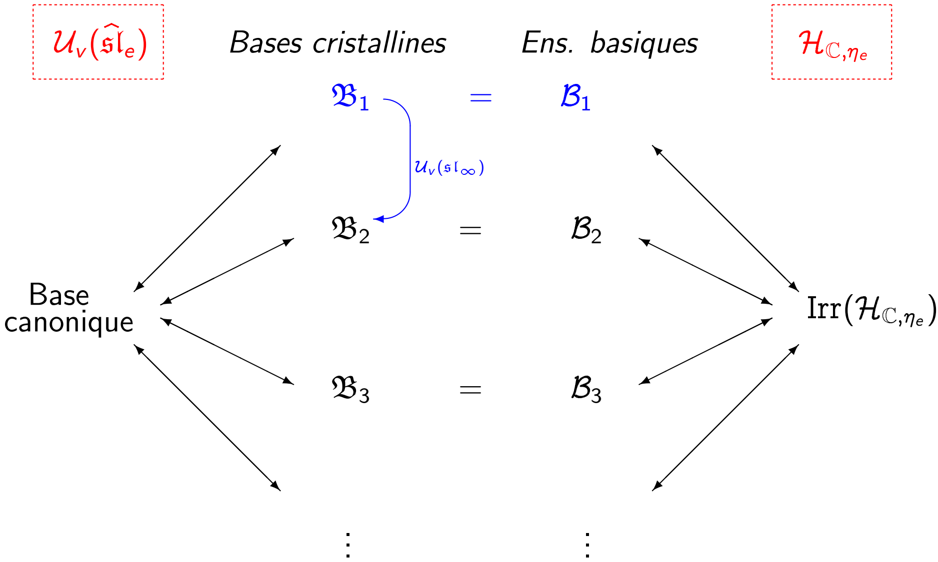
$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B}_1 & = & \mathcal{B}_1 & \\
 & \mathfrak{B}_2 & = & \mathcal{B}_2 & \\
\text{Base canonique} \arrow[uur, leftrightarrow] \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] \arrow[ddr, leftrightarrow] & & & & \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}) \arrow[uul, leftrightarrow] \arrow[ul, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[ddl, leftrightarrow] \\
 & \mathfrak{B}_3 & = & \mathcal{B}_3 & \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Paramétrer les modules simples (2)

$\boxed{\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)}$ *Bases cristallines* *Ens. basiques* $\boxed{\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B}_1 \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{B}_1 & \\
 & \mathfrak{B}_2 \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{B}_2 & \\
\text{Base canonique} \arrow[uur, leftrightarrow] \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] \arrow[ddr, leftrightarrow] & & & \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}) \arrow[uul, leftrightarrow] \arrow[ul, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[ddl, leftrightarrow] \\
 & \mathfrak{B}_3 \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{B}_3 & \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Paramétrer les modules simples (2)



Paramétrer les modules simples (2)

$\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ *Bases cristallines* *Ens. basiques* $\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B}_1 \arrow[d, bend left, "\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)"] & = & \mathcal{B}_1 & \\
\text{Base canonique} \arrow[ur, <->] \arrow[r, <->] \arrow[dr, <->] \arrow[ddr, <->] & \mathfrak{B}_2 \arrow[d, bend left, "\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)"] & = & \mathcal{B}_2 & \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},\eta_e}) \arrow[ul, <->] \arrow[l, <->] \arrow[dl, <->] \arrow[ddl, <->] \\
 & \mathfrak{B}_3 \arrow[d, bend left, "\mathcal{U}_v(\mathfrak{sl}_\infty)"] & = & \mathcal{B}_3 & \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Paramétrer les modules simples (2)