Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information

Mihai Bogdan Luca

▶ **To cite this version:**

Mihai Bogdan Luca. Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2006. Français. NNT : . tel-00488267

HAL Id: tel-00488267

https://theses.hal.science/tel-00488267

Submitted on 1 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant
l'Université de Bretagne Occidentale

pour obtenir le grade de
DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

MENTION SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION
ET DE LA COMMUNICATION
SPECIALITE COMMUNICATIONS NUMERIQUES

par

Mihai Bogdan Luca

Laboratoire d'Electronique et Systèmes de Télécommunications
LEST - UMR CNRS 6165
Université de Bretagne Occidentale - Ecole Doctorale SMIS

Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information

Soutenue le 6 novembre 2006 devant la commission d'examen composée de :

Président

M.	C. Balan	Professeur, Académie Technique Militaire de Bucarest

Rapporteurs

M.	I. Banica	Professeur, Université Polytechnique de Bucarest
	M. Boutayeb	Professeur, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Examinateurs

M.	S. Azou	Maître de Conférences, Université de Bretagne Occidentale
	G. Burel	Professeur, Université de Bretagne Occidentale, co-directeur de thèse
	A. Quinquis	Enseignant-Chercheur HDR, ENSIETA Brest
	D. Roviras	Professeur, I.N.P. Toulouse
	A. Serbanescu	Professeur, Académie Technique Militaire de Bucarest, co-directeur de thèse

Thèse réalisée en cotutelle avec l'Académie Technique Militaire de Bucarest

Table des matières

Liste des acronymes et abréviations **xi**

Notations mathématiques **xiii**

Introduction **1**

1 Systèmes dynamiques chaotiques et transmission de l'information **5**

1.1 Introduction 5

1.2 Le chaos : définition et propriétés 5

1.2.1 Définition des systèmes dynamiques 6

1.2.2 Comportement des systèmes dynamiques 8

1.2.3 Évaluation du comportement dynamique 10

1.3 Synchronisation du chaos 12

1.3.1 Synchronisation identique 13

1.3.2 Synchronisation par filtrage de Kalman Étendu 15

1.4 Systèmes à étalement de spectre 20

1.4.1 Étalement de spectre par séquence directe (DS-SS) 21

1.4.2 Étalement de spectre par sauts de fréquence 23

1.5 Transmissions à porteuses chaotiques 24

1.5.1 Masquage chaotique 25

1.5.2 *Chaos Shift Keying* (CSK) 26

1.5.3 Étalement de spectre par séquence chaotique directe 30

1.6 Conclusion 32

2 Filtres de Kalman non-linéaires **33**

2.1 Introduction 33

2.2 Filtre de Kalman Étendu (EKF) 35

2.2.1 Modèle général de filtrage . . . 35
2.2.2 Principe du filtre de Kalman Étendu (EKF) . . . 36
2.2.3 Filtre de type IEKF . . . 38
2.3 Filtre de Kalman *Unscented* . . . 40
2.3.1 Transformation *Unscented* . . . 40
2.3.2 Transformation *scaled-Unscented* . . . 43
2.3.3 Construction du modèle de filtrage récursif UKF . . . 44
2.3.4 Filtre HOUF . . . 47
2.4 Filtre CDKF . . . 49
2.4.1 Formule d'interpolation polynomiale de Stirling . . . 50
2.4.2 Estimation de la moyenne et de la covariance d'une v.a. transformée . . . 51
2.5 Filtrage de Kalman basé sur une approximation par somme de gaussiennes . . . 53
2.6 Filtre à particules . . . 54
2.7 Conclusion . . . 57

3 Le Filtre de Kalman Polynomial Exact 59
3.1 Introduction . . . 59
3.2 Transformation Polynomiale Exacte . . . 60
3.3 Filtre de Kalman Polynomial Exact (ExPKF) . . . 63
3.4 Application du filtrage ExPKF à la synchronisation chaotique . . . 66
3.5 Evaluation des performances du filtre ExPKF . . . 68
3.5.1 Analyse graphique des transformations non-linéaires . . . 69
3.5.2 Résultats sur la stabilité des transformations EKF, UKF et Exact . . . 72
3.5.3 EQM du filtre ExPKF appliqué à la synchronisation chaotique . . . 77
3.5.4 Evaluation de la consistence . . . 78
3.6 Conclusion . . . 82

4 Récepteurs complets à étalement de spectre par séquence chaotique directe 83
4.1 Introduction . . . 83
4.2 Emetteur du système "Chaotic DS-SS" (CD3S) . . . 84
4.3 Modèles de base pour les récepteurs CD3S . . . 85
4.3.1 Récepteur à estimation parallèle du code et du symbole . . . 85
4.3.2 Estimation simultanée du Code, du Symbole et de la Phase . . . 88
4.3.3 Méthodes de contrôle de gain . . . 91
4.3.4 Récepteur basé sur une structure de type corrélateur . . . 95

4.3.5 Résultats obtenus par simulation numérique 97
4.4 Généralisation du filtrage Kalman parallèle pour les canaux à trajets multiples 100
4.4.1 Structure du récepteur 100
4.4.2 Généralisation des modèles de filtrage Kalman 101
4.5 Récepteur RAKE - MRC 104
4.6 Résultats expérimentaux 105
4.7 Conclusion 114

5 Estimation de canal par filtrage Kalman linéaire 115
5.1 Introduction 115
5.2 Système à étalement de spectre DS-SS à séquence courte 116
5.2.1 Modèle linéaire associé à l'estimation récursive du canal 116
5.2.2 Suppression des termes d'interférence 119
5.2.3 Solution asymptotique 120
5.2.4 Introduction d'une étape de troncature 121
5.2.5 Résultats numériques 122
5.3 Système à étalement de spectre DS-SS à séquence longue 125
5.3.1 Modèle associé 125
5.3.2 Suppression des termes d'interférence et solution asymptotique associée 127
5.3.3 Algorithme d'estimation du canal et décision symbole 128
5.3.4 Résultats expérimentaux 130
5.4 Conclusion 131

6 Compression de l'information à l'aide de systèmes chaotiques 135
6.1 Introduction 135
6.2 Notions sur la dynamique symbolique 136
6.3 Générateur probabiliste de Bernoulli 138
6.4 Un algorithme de compression chaotique 140
6.4.1 Performances de l'algorithme proposé 140
6.4.2 Implémentation en pratique 142
6.4.3 Exemple d'application de l'algorithme proposé 144
6.5 Conclusion 146

Conclusions 147

A Exposants de Lyapunov 151

B Formulation du Filtre de Kalman Etendu (EKF) 154

B.1 Etape de mise à jour temporelle 154

B.2 Etape de mise à jour par des observations 156

C Compléments sur la Transformation Polynomiale Exacte 157

Liste de publications 161

Bibliography 162

Index 174

Table des figures

1.1 Exemple de trajectoire pour le système Lorenz 7

1.2 Étude du comportement dynamique pour la fonction logistique (eq. 1.8) : a) génération de la séquence récursive (*web diagram*) ; b) le diagramme de bifurcation ; c,d,e) séquence générée et états limites pour $r = 2, 3.2, 3.55$; f) séquences générées et sensibilité aux CI pour $r = 3.9$ (comportement chaotique). 9

1.3 Sensibilité aux CI - système de Lorenz 11

1.4 Synchronisation Maître-Esclave en utilisant la décomposition en sous-systèmes 15

1.5 Évolution des états du système maître et de l'esclave avant et après synchronisation : a) $y = X_2$; b) $z = X_3$; c) Diagramme de synchronisation pour l'état $y = X_2$; d) Puissance de l'erreur de synchronisation. 16

1.6 Structure de l'estimateur récursif EKF 17

1.7 Exemple de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Etendu : a) séquence initiale vs séquence estimée ; b) diagramme de synchronisation ; c) évolution du gain Kalman K_k ; d) évolution de la covariance des erreurs P_k par rapport à la variance du bruit d'observation R . 19

1.8 Modèle d'un système de communication à étalement de spectre 21

1.10 Exemple d'étalement de spectre par séquence directe : a) évolution en temps ; b) DSP du signal informationnel et signal étalé ; 22

1.9 Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence directe 22

1.11 Système à spectre étalé par sauts de fréquence : a) Distribution en temps et en fréquence de l'énergie émise ; b) DSP du signal étalé 23

1.12 Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par sauts de fréquence 24

1.13 Modulation directe du signal informationnel par une porteuse haute fréquence chaotique . . . 24

1.14 Modulation en bande de base du signal informationnel par le signal chaotique, combinée avec une mise sur porteuse classique 25

1.15 Modulation par masquage chaotique 26

1.16 Système générique de communication CSK 27
1.17 Récepteur cohérent CSK 27
1.18 Récepteur non-cohérent CSK/COOK 28
1.19 Récepteur non-cohérent DCSK 30
1.20 Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence chaotique directe 31
1.21 Exemple d'étalement de spectre par séquence chaotique directe : a) séquence périodique sur la durée symbole ; b) séquence non-périodique ; 32

2.1 Application récursive de l'algorithme de Kalman Étendu 37
2.2 Effets de la linéarisation au premier ordre sur l'estimation de la statistique de la v.a. transformée (figures b), d) et f)) pour une distribution initiale gaussienne caractérisée par : a), b) $\mu = -0.7$, $\sigma^2 = 0.0125$; c), d) $\mu = -0.6$, $\sigma^2 = 0.025$; e), f) $\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.05$ 39
2.3 Le principe de la transformation *Unscented* 41
2.4 Un exemple de distribution de sigma points pour une v.a. gaussienne bi-dimensionnelle dans le cas de la transformation Unscented 42
2.5 Effets de la transformation *Unscented* sur l'estimation de la statistique de la v.a. transformée (avec une non-linéarité de type $\cos x$ - figures a, b ; et de type polynomiale d'ordre 3 : $f(x) = 2x^3 - 1.5x + 0.5$ - figures d, f) pour une distribution initiale gaussienne caractérisée par : a), b) $\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.05$; c), d) $\mu = -0.1$, $\sigma^2 = 0.05$; 45
2.6 Un exemple de distribution de *sigma points* pour une v.a. gaussienne bi-dimensionnelle - transformation HOUF 49
2.7 Un exemple d'approximation par somme de gaussiennes 54
2.8 Evolution de la distribution de probabilité et exemple de 10 particules pour le système non-linéaire donné par les équations (2.46) 57

3.1 a) Distribution initiale d'échantillons ; b) Position d'échantillons après transformation 70
3.2 Les effets de l'ordre de la non-linéarité Chebyshev sur les performances des transformations : $y_1 = T_2(x_1)$; a) $y_2 = T_2(x_2)$; b) $y_2 = T_3(x_2)$; c) $y_2 = T_4(x_2)$; d) $y_2 = T_5(x_2)$. 71
3.3 Evolution récursive du gain de Kalman pour les filtres : a) EKF ; b) ExPKF et UKF, $R = 10^{-2}$; c) ExPKF et UKF, $R = 10^{-1}$. 75
3.4 a) Instabilité locale du filtre représentée par la divergence instantanée d'erreur ; b) Variation du gain de Kalman dans la région d'instabilité 77
3.5 EQM de synchronisation normalisée par rapport à R, pour $f(x) = T_4(x)$ 78

3.6 La NEES moyennée pour les méthodes de filtrage ExPKF, UKF version Scaled et EKF, avec une variance du bruit d'observation $R = 10^{-4}$ et les fonctions génératrices : a) $f(x) = T_2(x)$; b) $f(x) = T_3(x)$; c) $f(x) = T_4(x)$; d) $f(x) = T_5(x)$; 80

3.7 La NEES moyennée pour les méthodes de filtrage ExPKF, UKF version Scaled et EKF, avec une variance du bruit d'observation $R = 10^{-1}$ et les fonctions génératrices : a) $f(x) = T_2(x)$; b) $f(x) = T_3(x)$; c) $f(x) = T_4(x)$; d) $f(x) = T_5(x)$; 81

4.1 Schéma général d'un système CD3S 85

4.2 Récepteur CD3S basé sur une estimation Code/Symbole duale 86

4.3 L'estimateur Dual Code/Symbole 86

4.4 a) Diagramme de synchronisation pour le récepteur parallèle C/S (implémentation UKF) ; b) Estimation du symbole émis 87

4.5 Récepteur CD3S basé sur une estimation Code/Symbole/Phase 88

4.6 Estimateur parallèle Code/Symbole/Phase 89

4.7 Représentation des paramètres de phase estimés pour : a) une erreur de fréquence nulle et un canal stationnaire ; b) une erreur de fréquence constante et un canal stationnaire ; c) une erreur de fréquence sur un canal avec des changements périodiques de phase 90

4.8 La fonction caractéristique initiale et modifiée pour une non-linéarité de type Chebyshev d'ordre deux 92

4.9 a) Implémentation de la boucle de contrôle de gain statistique ; b) Inverse du gain estimé et variations du canal 93

4.10 Estimation du signal informationnel en fonction du gain du canal pour : a) la méthode du modèle dynamique modifié ; b) la méthode statistique (contrainte sur le moment d'ordre deux du code) 94

4.11 Diagramme de synchronisation pour : a) la méthode du modèle dynamique modifié ; b) la méthode statistique 94

4.12 Influence du gain du canal sur l'EQM de synchronisation pour le système standard et les méthodes de contrôle de gain présentées 95

4.13 Récepteur CD3S exploitant un corrélateur 96

4.14 a) TEB du récepteur C/S sur un canal AWGN à gain unité ; b) TEB du récepteur C/S/P sur un canal AWGN à gain unité ; c) TEB des structures C/S et C/S/P sur un canal non-stationnaire affecté par un bruit gaussien. 98

4.15 TEB des récepteurs proposés pour une dynamique Chebyshev de 2-ème ordre et pour un gain d'étalement de : 31 (à gauche) et 63 (à droite). 99

4.16 TEB des récepteurs proposés pour une dynamique Chebyshev de 4-ème ordre et pour un gain d'étalement de : 31 (à gauche) et 63 (à droite). 100
4.17 Structure du récepteur CD3S proposé 101
4.18 Structure du récepteur RAKE utilisé 104
4.19 Structure du signal de test utilisé 105
4.20 Réponse impulsionnelle estimée (en valeur absolue) par le récepteur RAKE-MRC à gauche et la variante avec la sélection de trajets à droite pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f) 107
4.21 Etat symbole estimé par les variantes de récepteurs à un trajet (à gauche) et à deux trajets (à droite) pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f) 108
4.22 Gains estimés par les variantes de récepteurs à un trajet (à gauche) et à deux trajets (à droite) pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f) . . 110
4.23 Phases estimées par les variantes de récepteurs à un trajet (à gauche) et à deux trajets (à droite) pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f) 111
4.24 Phase relative estimée pour : le signal 1 - (a) ; le signal 2 - (b) ; le signal 3 - (c) 112
4.25 Retards de code estimés par les variantes de récepteurs à un trajet (à gauche) et à deux trajets (à droite) pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f) 113

5.1 Réponse impulsionnelle du canal considéré 122
5.2 Erreur d'estimation du canal pour différentes valeurs de α_T : a) sans sélection, b) une sélection des trajets les plus énergétiques est réalisée 123
5.3 Réponse impulsionnelle du canal estimée 124
5.4 Erreur d'estimation du canal pour différentes variantes d'estimateurs (simulation MC) : a) sans sélection, b) une sélection des trajets les plus énergétiques est réalisée 124
5.5 Calcul de la matrice d'auto-corrélation pour une séquence non-périodique porteuse d'information 126
5.6 Structure générale du récepteur à retour de décision avec une hypothèse sur le symbole courant 129
5.7 Réponse impulsionnelle du canal, estimée à fréquence symbole par une solution de type corrélateur pour le signal : a - 1 ; b - 2 ; c - 3 ; d - 4 ; e - 4 avec sur-échantillonage 132
5.8 Réponse impulsionnelle du canal, estimée à fréquence chip par la solution de type filtrage de Kalman linéaire, pour le signal : a - 1 ; b - 2 ; c - 3 ; d - 4 ; e - 4 avec sur-échantillonage 133

5.9 Constellation obtenue à la sortie de la structure RAKE avec les coefficients du canal estimés par filtrage de Kalman linéaire, à fréquence chip, pour le signal : a - 1 ; b - 2 ; c - 3 ; d - 4 ; e - 4 avec sur-échantillonage 134

6.1 a) Intervalle de CI possibles déduit par la propagation inverse ; b) Forme de la fonction inverse $f^{-1}(\cdot)$ 138

6.2 Fonction caractéristique d'un générateur probabiliste de Bernoulli 139

6.3 a) Histogramme de la distribution de probabilité discrète ; b) Générateur probabiliste de Bernoulli 145

6.4 Limites des trajectoires qui déterminent l'intervalle récurrent des CI et la trajectoire régénérée pour la séquence informationnelle : a) #1 ; b) #2 146

Liste des tableaux

1.1 Classification des régimes permanents en fonction du spectre Lyapunov 12

2.1 Performances des transformations EKF et Unscented pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité 45

3.1 Les moments d'ordre un et deux de la v.a. résultant de la transformation d'une v.a. gaussienne par un polynôme de Chebyshev (ordre des polynômes 2, 3 et 4) 67

4.1 Paramètres des signaux choisis 106

4.2 Paramétrage du modèle d'estimation de la phase 109

5.1 Paramètres des signaux traités et résultats obtenus 130

6.1 Probabilité d'apparition des symboles 145

Liste des acronymes et abréviations

BPSK	Binary Phase Shift Keying
C/S	Récepteur à filtrage de Kalman parallèle *Code/Symbole*
C/S/P	Récepteur à filtrage de Kalman parallèle *Code/Symbole/Phase*
CD3S	Chaotic Direct-Sequence Spread Spectrum
CDKF	Central Difference Kalman Filter
CDMA	Code Division Multiple Acces
CDMA2000	Standard CDMA2000
CI	Conditions Initiales
COOK	Chaos On-Off Keying
CSK	Chaos Shift Keying
DCSK	Differential Chaos Shift Keying
DD1	Divided Difference - 1st order
DD2	Divided Difference - 2nd order
DLL	Delay Locked Loop
DS	Direct Sequence
DSP	Densité Spectrale de Puissance
EKF	Extended Kalman Filter
EQM = MSE	Erreur Quadratique Moyenne
ExPKF	Exact Polynomial Kalman Filter
FSK	Frequency Shift Keying
FH	Frequency Hopping
GPS	Global Positioning System
HOUF	High Order Unscented Filter
IEKF	Iterated Extended Kalman Filter
IS-95	Interim Standard 95

KF	Kalman Filter
LMMSE	Linear Minimum Mean Square Error
LZW	Algorithme de compression Lempel-Ziv-Welch
MC	Monte Carlo
NEB	Nombre d'Erreurs Binaires
NEES	Normalized Estimation Error Squared
PSK	Phase Shift Keying
RAKE-MRC	Récepteur RAKE Maximum Ratio Combining
scaled-UKF	Variante *scaled* de Filtre de Kalman *Unscented*
SMC	Sequential Monte Carlo
SNR	Signal to Noise Ratio
SS	Spread Spectrum
TEB	Taux d'Erreurs Binaires
TH	Time Hopping
UKF	Unscented Kalman Filter
v. a.	Variable Aléatoire

Notations mathématiques

$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\dot{\mathbf{x}}$	Dérivée du vecteur d'état $\mathbf{x}$
$\nabla_x \mathbf{f}$	Gradient de la fonction $\mathbf{f}$ par rapport au vecteur $\mathbf{x}$
$f^{-1}(\cdot)$	Inverse de la fonction $f(\cdot)$
$\mathbf{A}^T$	Opérateur de transposition pour la matrice $\mathbf{A}$
$\mathbf{I}_N$	Matrice identité de dimension N
λ_i	Exposant de Lyapunov de rang i
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Distribution normale de moyenne μ et de variance σ^2
$\hat{\mathbf{x}}$	Vecteur $\mathbf{x}$ estimé
N_x	Dimension du vecteur $\mathbf{x}$
$E[\cdot]$	Espérance mathématique
$p(\mathbf{x}\|\mathbf{Y})$	Densité de probabilité de la v. a. $\mathbf{x}$ conditionnée au vecteur d'observation $\mathbf{Y}$
$\mathbf{v}_k$	Etat associé au bruit de processus
$\mathbf{n}_k$	Etat associé au bruit d'observation
$\mathbf{Q}$	Covariance du bruit de processus
$\mathbf{R}$	Covariance du bruit d'observation
$\bar{\mathbf{x}}$	Valeur moyenne de la v.a. $\mathbf{x}$
$\mathbf{P}_{xx}$	Matrice de covariance pour la v.a. $\mathbf{x}$
$\mathbf{P}_{xy}$	Matrice de trans-covariance entre les v.a. $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$
$\hat{\mathbf{x}}_{k\|k}$	Etat estimé à l'instant k
$\mathbf{P}_{k\|k}$	Covariance des erreurs à l'instant k

$\hat{\mathbf{x}}_{k+1\|k}$	Etat prédit à l'instant $k+1$, en sachant la statistique à l'instant k
$\mathbf{P}_{k+1\|k}$	Covariance des erreurs prédite à l'instant $k+1$, en sachant la statistique à l'instant k
$\mathbf{K}_k$	Gain de Kalman à l'instant k
$\mathbf{x}^{(i)}$	Point *sigma* de rang i (transformation *Unscented*)
$W^{(i)}$	Pondération associée au point $\mathbf{x}^{(i)}$ (transformation *Unscented*)
$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{\Delta_z}}\mathbf{f}$	Opérateur d'accroissement centré de premier ordre associé à la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{z})$
$\tilde{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{\Delta_z}}\mathbf{f}$	Opérateurs d'accroissement centré de deuxième ordre associé à la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{z})$
C_i^n	Coefficient binomial
$\mathbf{m}^x_{i:j}$	Vecteur de moments centrés de la v.a. x avec les ordres compris entre i et j
$\mathbf{0}_{i\times j}$	Matrice de dimension $i \times j$ avec tous les éléments nuls
$\mathbf{1}_N$	Vecteur colonne de dimension N avec tous les éléments égaux à 1
$\boxdot$	Produit de Hadamard
$\rho(x)$	Densité de probabilité limite
$T_p(x)$	Polynôme de Chebyshev d'ordre p
$\epsilon_k^{(i)}$	NEES à l'instant k, en considérant une simulation Monte Carlo particulière (de rang i)
$\chi^2(\alpha)$	Loi de chi-deux évaluée en α
b_k	Variable associée aux symboles informationnels à l'instant k
F_b	Fréquence symbole
c_k	Variable associée au code d'étalement (chip) dans un système CD3S, à l'instant k
F_c	Fréquence chip
$\lfloor \times \rfloor$	Partie entière du nombre $\times$
$\begin{bmatrix} \phi_k & \varepsilon_k \end{bmatrix}^T$	Variables associées à l'estimation de phase, à l'instant k
$diag[\mathbf{x}]$	Matrice diagonale avec les elements du vecteur $\mathbf{x}$ sur la diagonale
$\Gamma_{cc}(\cdot)$	Matrice d'auto-corrélation

$\mathbf{P}_{\infty}^{-}$	Matrice de covariance des erreurs asymptotique
$\mathbf{K}_{\infty}$	Gain de Kalman asymptotique
$\|\mathbf{h}\|$	Norme Euclidienne du vecteur $\mathbf{h}$
S	Alphabet des symboles disponibles $S_{\{n\}}$
P_n	Probabilité d'apparition du symbole $S_{\{n\}}$
$\cup$	Opération "réunion d'ensembles"
$\cap$	Opération "intersection d'ensembles"
H	Entropie d'un alphabet source
$card\{\cdot\}$	Cardinal d'un ensemble

Introduction

L'emploi du chaos pour la transmission sécurisée de l'information a été considéré dans les derniers années comme une solution très prometteuse pour augmenter les performances des systèmes de transmission actuels. Ainsi on trouve dans la littérature une multitude d'applications et d'études réalisés concernant plusieurs aspects de la transmission. Grâce à ses caractéristiques quasi-stochastiques le chaos offre une solution possible pour les systèmes à probabilités réduites de détection et d'interception ainsi que des applications dans l'accès multiple.

En contradiction avec ces aspects positifs qui font du chaos une solution très attirante, il faut préciser qu'a priori la synchronisation entre deux systèmes dynamiques chaotiques, nécessaire à la récupération de l'information transmise, est difficile à réaliser. Dans ce travail de thèse nous nous sommes concentrés sur une solution de synchronisation à estimation d'état, susceptible d'offrir effectivement les meilleures performances possibles. Ainsi le document est organisé sous la forme suivante.

La première partie est destinée à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques en général et en particulier aux systèmes chaotiques. Ainsi les modèles généraux qui définissent les systèmes dynamiques en temps continu et en temps discret seront présentés en même temps avec les notions d'espace des phases et de trajectoire. A partir de ces définitions une classification de comportements dynamiques est par la suite facile à construire en les séparant en quatre catégories spécifiques : points d'équilibre, régime périodique, régime quasi-périodique et particulièrement le régime chaotique [Ser04]. Plusieurs méthodes généralement établies pour faire la classification existent mais nous allons nous limiter à la présentation des exposants de Lyapunov, qui par leurs caractéristiques offrent une solution facile et très fiable.

Un sujet qui a reçu beaucoup d'attention dans notre étude est la synchronisation des systèmes chaotiques en général et en particulier dans le cas des dynamiques en temps discret. La notion de synchronisation chaotique sera évoquée et les idées principales de la méthode de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman seront présentées [Fow89]. Ceci est important car dans un chapitre ultérieur un apport théorique sera proposé sur ce sujet.

Un deuxième point étudié est l'application des systèmes chaotiques à la transmission de l'information et en

particulier aux systèmes à étalement de spectre ; Ainsi une présentation globale de tels systèmes est proposée, posant les bases des structures qui sont développées. Sont présentées ensuite les solutions courantes de transmission à porteuse chaotique dont les plus connues sont les méthodes CSK cohérentes et non-cohérentes, ainsi que l'étalement de spectre par séquence chaotique directe.

Etant donné les performances supérieures et la généralité prouvées par les méthodes de synchronisation chaotiques à filtrage de Kalman, une présentation de ces estimateurs adaptés aux cas non-linéaires devient importante. Ainsi on observe que l'estimation d'état réalisée sur un modèle non-linéaire est totalement différente du cas linéaire, étant caractérisée surtout par une certaine sous-optimalité. Ceci se reflète sur le fait qu'on est presque toujours contraints de considérer quelques hypothèses simplificatrices sur la propagation des distributions à travers le modèle où même des hypothèses sur le modèle lui-même. Dans cette ordre d'idée, le deuxième chapitre devient un chapitre d'état de l'art sur le filtrage de Kalman non-linéaire, limité aux méthodes le plus utilisées dans la pratique. Ainsi on introduit d'abord le filtrage de Kalman Etendu comme la plus simple solution de filtrage non-linéaire qui remplace le modèle par sa version linéarisée donnée par le premier terme dans la série de Taylor.

Récemment nous avons été témoins de plusieurs nouvelles solutions de filtrage Kalman qui essayent d'augmenter sensiblement les performances d'estimation en limitant de même au maximum le coût de calcul. Une telle solution est représentée par le filtrage de Kalman *Unscented* [JU97], et sa version d'ordre supérieur (le HOUF), qui proposent la propagation d'un ensemble de points de dimension bien établie à travers le modèle non-linéaire. Cet ensemble de points permet par la suite l'estimation de la statistique d'ordre deux de la v.a. transformée à une précision bien limitée en ce qui concerne les moments d'ordre supérieur pris en compte. Une approche similaire est suivie par le filtrage Kalman de type *Central Difference* [NPR00a], qui peut être vu comme une généralisation du filtre Unscented, mais pour les positions de points la formule d'interpolation de Stirling est utilisée.

Finalement deux autres solutions seront proposées qui approchent plus le critère d'optimalité, dont la première considère l'approximation de la distribution qui caractérise l'état courant par une somme de gaussiennes et la deuxième est le très connu filtrage particulaire. On va introduire ces deux variantes succinctement, à cause du coût de calcul requis, en paramétrant les algorithmes pour un fonctionnement quasi-optimal.

Ce but de recherche d'une méthode de filtrage quasi-optimale va être abordé dans le troisième chapitre où un algorithme original de filtrage Kalman est proposé. Le point de départ représente le fait que la classe des fonctions polynomiales est largement utilisée pour modéliser beaucoup de processus dont une estimation d'état est recherchée. Ce sera le cas des dynamiques génératrices chaotiques que nous allons utiliser, appartenant à la classe très importante des polynômes de Chebyshev.

Ainsi avec ces hypothèses du modèle polynomial on va démontrer que la statistique d'une v. a. qui subit une transformation non-linéaire peut être calculée analytiquement comme une expression de ces moments

et des coefficients du polynôme qui représente la fonction. En plus de cette démonstration on va déduire aussi un ensemble de relations matricielles qui rendent l'application de cette transformation exacte très facile en pratique. A partir des expressions déduites la mise en forme d'un algorithme récursif de Kalman Exact devient immédiate.

On va appliquer cette formulation à la synchronisation chaotique, en comparant avec d'autres estimateurs. Ainsi en utilisant ce modèle de synchronisation on va démontrer que la solution proposée offre les meilleures performances du point de vue de la stabilité et de la consistence du filtre, ainsi qu'implicitement de l'erreur de synchronisation. Soulignons que la synchronisation chaotique n'est qu'un problème particulier pouvant bénéficier des performances du filtre de Kalman exact proposé, beaucoup d'autres applications pourraient en fait profiter de cette approche.

Avec le problème de synchronisation chaotique traité, on passe dans le quatrième chapitre aux systèmes de communications numériques qui peuvent être développés par la suite. Toutes les solutions de récepteurs qui seront présentées sont basées sur une méthode d'étalement de spectre par séquence directe, où le code d'étalement est représenté par une séquence chaotique.

Du côté du récepteur, il est tout d'abord proposé un modèle d'estimation parallèle du code et du symbole, cette structure simplifie beaucoup le mécanisme de synchronisation qui est couramment employé dans les systèmes classiques. A partir de cette structure on va généraliser par la suite le modèle à une estimation parallèle du code, du symbole et de l'erreur de phase rendant ainsi le récepteur très simple avant l'entrée dans le démodulateur qui travaille à fréquence chip. En plus de cette estimation de phase le système sera complété par une boucle de contrôle automatique du gain, pour faire face aux éventuelles variations du gain dans le canal de communication. Ces récepteurs que l'on qualifiera de complets sont testés par la suite dans plusieurs configurations de canal (stationnaire où non-stationnaire en phase et en amplitude) par rapport à un critère de taux d'erreurs binaires (TEB). Un autre type de test concerne l'influence de la non-linéarité génératrice de la séquence d'étalement, de la méthode d'estimation utilisée ainsi que le gain d'étalement par rapport au même critère de TEB.

Cette structure parallèle du récepteur va être développée par la suite pour faire face aux canaux plus difficiles de communications acoustiques sous-marines. Ainsi un modèle général adapté à la propagation par trajets multiples sera introduit avec des paramètres individuels de gain et phase pour chaque trajet pris en compte. Cette solution finale sera mise à l'épreuve sur des signaux réels, et une comparaison avec un récepteur de type RAKE-MRC sera menée. Les résultats vont prouver que la solution proposée peut faire face aux conditions difficiles de canal mais elle devient plus dure à maîtriser sur des canaux à faible SNR, où un reparamétrage du récepteur peut s'avérer nécessaire.

En plus du paramétrage du récepteur, un problème crucial qui influence les performances des systèmes qui travaillent sur des canaux à trajets multiples est l'estimation du canal. En plus de l'estimation correcte

des coefficients, l'emploi d'une séquence d'étalement chaotique, par exemple, va déterminer la présence des termes d'interférence dont les valeurs seront inconnues. Dans ces conditions on va proposer dans le cinquième chapitre un modèle d'estimation des coefficients du canal à une fréquence supérieure où égale à la fréquence chip, qui va utiliser la matrice d'autocorrélation de la séquence d'étalement. On divise l'approche en deux directions : la première va considérer le cas d'une séquence d'étalement courte et la deuxième ne va pas faire d'hypothèse sur la longueur de la séquence.

Pour le cas d'un code court, on va démontrer qu'on peut écrire un modèle linéaire pour l'estimation des coefficients et on va proposer l'emploi d'un filtrage de Kalman linéaire pour les estimer. Par la suite, en utilisant une méthode de suppression des termes d'interférence, le modèle général se simplifie finalement sous la forme d'un filtrage de Kalman mono-dimensionnel. Basée sur ce modèle une solution théorique asymptotique sera développée et plusieurs étapes pour augmenter la vitesse de convergence du filtre seront présentées.

En ce qui concerne le cas des séquences longues une simplification similaire ne peut pas être réalisée sans des hypothèses sur la matrice d'autocorrélation qui intervient dans le calcul. Avec ces hypothèses prises en compte, on va obtenir de même une solution mono-dimensionnelle et par la suite sa variante asymptotique. Toutes ces solutions seront mises à l'épreuve en contexte de transmission acoustique sous-marine.

En plus de ces considérations sur la façon dont la synchronisation chaotique est établie et la structure physique du récepteur qui exploite celle-ci, un système de communication comprends aussi une étape de codage qui travaille directement sur l'information numérique. En étudiant les caractéristiques de certains systèmes dynamiques chaotiques on a observé que celles-ci peuvent englober des paramètres statistiques associés à l'information qui doit être transmise. Ainsi dans la dernière partie de ce document on va introduire un générateur particulier, similaire au populaire système dynamique de Bernoulli, et on va démontrer par la suite qu'il existe une relation entre ce nouveau type de générateur et l'alphabet des symboles qui forment la séquence informationnelle.

Une fois le générateur construit, on va utiliser une approche de dynamique symbolique pour montrer qu'une séquence informationnelle quelconque, à laquelle est associé le générateur équivalent, va se transformer par propagation, d'une façon unique dans un intervalle de conditions initiales. Cette transformation d'une séquence informationnelle dans un intervalle a été déjà présentée dans la littérature comme compression arithmétique [Abr63]. En effectuant les calculs de performance de la méthode de compression chaotique ainsi introduite on observe que cette solution est équivalente à l'approche arithmétique, en atteignant la borne représentée par l'entropie informationnelle de la séquence initiale. Même si les performances de compression sont similaires la solution représente une nouvelle application du chaos à la transmission de l'information.

Chapitre 1

Systèmes dynamiques chaotiques et transmission de l'information

1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques étranges (chaotiques) sont depuis longtemps connus dans le domaine des mathématiques mais c'est seulement au cours de la dernière décennie que les applications concrètes se sont multipliées. Notre étude se focalise sur l'usage du chaos pour transmettre de l'information. Dans cette perspective, ce chapitre est destiné à l'introduction de quelques outils de base associés à ces deux domaines dont l'intersection fait l'objet de notre étude. Ce chapitre peut être vu comme une synthèse bibliographique compacte sur les transmissions chaotiques, dont l'intérêt principal est de mieux mettre en évidence l'originalité des résultats que nous proposerons par la suite. Le lecteur avisé pourra directement consulter le chapitre suivant.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Premièrement nous présentons les aspects généraux des systèmes dynamiques chaotiques et dans la deuxième section on continue par la présentation des deux méthodes de synchronisation associées à ce type de systèmes. Les aspects de communications numériques par méthodes à étalement de spectre seront introduits dans la section III, et dans la dernière partie des solutions "classiques" destinées aux systèmes de communications à porteuse chaotique sont évoquées.

1.2 Le chaos : définition et propriétés

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique déterministe non-linéaire. Du point de vue mathématique la notion générale de système dynamique est définie à son

tour à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état $\mathbf{x} = \{x_i \in \mathbb{R}\}, i = 1...n$ où n représente la dimension du vecteur. Ce jeu de variables a la propriété de caractériser complètement l'état instantané du système dynamique générique. En associant en plus un système de coordonnées on obtient l'espace d'état qui est appelé également *l'espace de phase*. Conjointement avec l'espace d'état un système dynamique est défini aussi par une loi d'évolution, généralement désignée par *dynamique*, qui caractérise l'évolution de l'état du système en temps. La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique.

1.2.1 Définition des systèmes dynamiques

Un système dynamique en temps continu est décrit par un système d'équations différentielles, alors qu'en temps discret on parle d'un système d'équations aux différences finies [Ken94, Ser00, Ser04] :

– **temps continu**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) \tag{1.1}$$

où $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, pour chaque couple choisi $(\mathbf{x}_0, t_0)$ on peut identifier une solution unique $\mathbf{\Phi}(\cdot; \mathbf{x}_0, t_0) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{F}}(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}_{\mathbf{F}}(t; \mathbf{x}_0, t_0), t) \tag{1.2}$$

Cette solution unique déterminée avec l'aide des équations (1.2), et qui fournit l'ensemble d'états successifs occupés par le système à chaque instant t, s'appelle généralement trajectoire.

On considère l'exemple du celèbre système de Lorenz donné par les équations suivantes [Lor63] :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - b \end{aligned} \tag{1.3}$$

Les paramètres pour l'exemple de trajectoire donné dans la figure 1.1 ont été choisis de la manière suivante : $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $b = 8/3$ avec la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (2, 5, 20)$.

On observe que la dynamique du système de Lorenz donnée par les équations (1.3) est indépendante de l'instant t considéré, et généralement ce type de système est qualifié d'autonome. La dynamique dans ce cas particulier a la forme suivante :

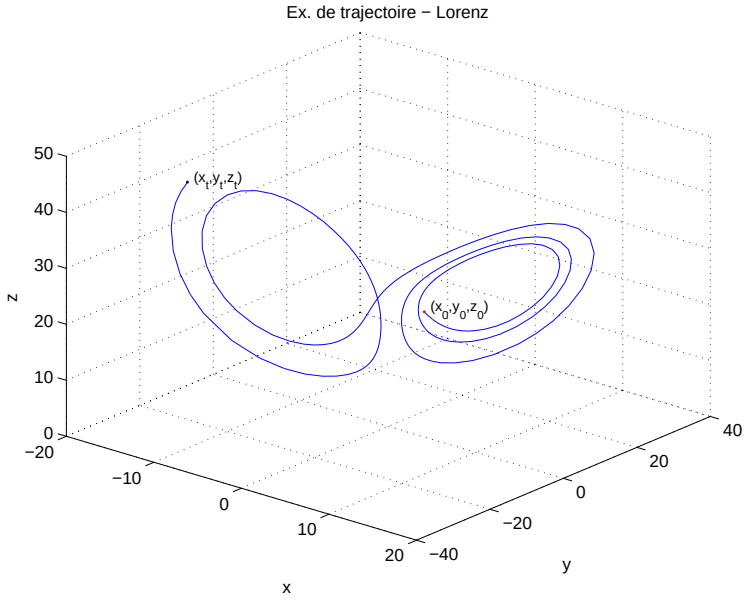


FIG. 1.1 – Exemple de trajectoire pour le système Lorenz

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \tag{1.4}$$

– **temps discret**

Comme il a été déjà précisé le système dynamique est dans ce cas représenté par des équations aux différences finies, avec le modèle général suivant :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(k), k) \tag{1.5}$$

où $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système en temps discret.

De même qu'en temps continu, si on associe à cette dynamique un état initial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(k_0)$, pour chaque couple choisi $(\mathbf{x}_0, k_0)$ on peut identifier une solution unique $\mathbf{\Phi}_\mathbf{G}(\cdot; \mathbf{x}_0, k_0) : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\mathbf{\Phi}_\mathbf{G}(k_0; \mathbf{x}_0, k_0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{\Phi}_\mathbf{G}(k+1; \mathbf{x}_0, k_0) = \mathbf{G}(\mathbf{\Phi}_\mathbf{G}(k; \mathbf{x}_0, k_0), k) \tag{1.6}$$

En temps discret on définit aussi le système autonome comme une dynamique qui ne dépend pas de l'instant k :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(k)) \tag{1.7}$$

1.2.2 Comportement des systèmes dynamiques

A partir d'un état initial $\mathbf{x}_0$ et après un régime transitoire, la trajectoire d'un système dynamique atteint une région limitée de l'espace des phases. Ce comportement asymptotique obtenu pour $t, k \to \infty$ est une des caractéristiques les plus importantes à étudier pour tout système dynamique. Si dans le cas d'un système linéaire la solution asymptotique est indépendante de la condition initiale et unique, en présence de non-linéarités il existe une plus grande variétés de régimes permanents, parmi lesquelles on trouve, par ordre de complexité : points d'équilibre, solutions périodiques, solutions quasi-périodiques et chaos, respectivement. Il faut préciser que cette fois le comportement développé par un système dynamique particulier est fortement dépendant de la condition initiale choisie [Ser97].

Par la suite on va définir et illustrer les comportements évoqués ci-dessus, en utilisant une dynamique très connue dans la théorie des systèmes non-linéaires ; Il s'agit de l'équation logistique définie par l'expression suivante [Kra99, Wei] :

$$x_{k+1} = f(x_k) = r x_k (1 - x_k) \tag{1.8}$$

Dans les figures 1.2 on montre la dynamique propre à l'équation logistique ainsi que certains modes asymptotiques particuliers. Le mécanisme de construction d'une séquence est tout d'abord montré sous la forme d'un diagramme en toile (*web diagram* [Tab89]). Cette méthode permet la génération de la séquence choisie, graphiquement en utilisant la projection des états successifs par rapport à la diagonale principale (fig. 1.2 a) ; $r = 3.9$). Dans la partie b) est présenté le diagramme de bifurcation qui montre la distribution des états limites pour différents choix du paramètre r. On appelle cette représentation diagramme de bifurcation parce que le comportement asymptotique subit, pour des valeurs du paramètre r bien déterminées, une bifurcation de l'ensemble des états limites. Dans le cas continu la bifurcation se manifeste comme une multiplication des trajectoires possibles. Pour cette représentation on a choisi pour chaque valeur $r \in [1, 4]$ une séquence de 500 échantillons avec une période de transition de 50 échantillons.

Par la suite pour chaque type de régime permanent on a :

– **points d'équilibre :** Dans ce cas, la solution asymptotique est représentée par un point, sa valeur étant déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibres. De même ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles. Dans le cas de la dynamique logistique, on observe que pour toute valeur $r \in [1, 3]$, le régime permanent est formé par un point limite stable, sa valeur étant dépendante du choix de paramètre r. La figure 1.2 c) nous donne un aperçu d'une telle trajectoire pour $r = 2$. Ainsi on observe qu'après une période de transition relativement courte la séquence se stabilise autour du point fixe qui cette fois est $x_\infty = 0.5$.

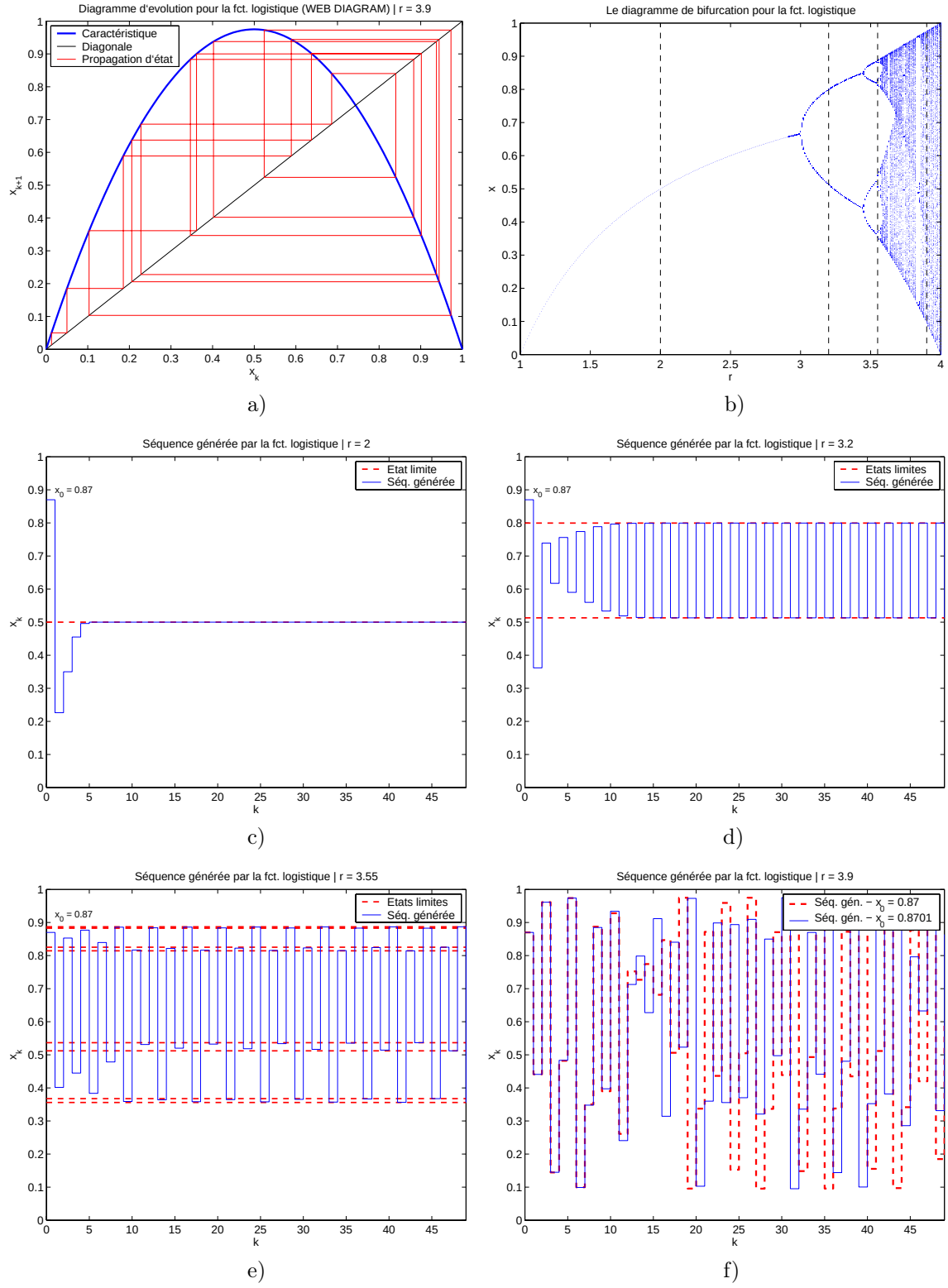


FIG. 1.2 – Étude du comportement dynamique pour la fonction logistique (eq. 1.8) : a) génération de la séquence récursive (*web diagram*) ; b) le diagramme de bifurcation ; c,d,e) séquence générée et états limites pour $r = 2, 3.2, 3.55$; f) séquences générées et sensibilité aux CI pour $r = 3.9$ (comportement chaotique).

- **régime périodique :** Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles nT, $n \in \mathbb{N}^+$, T désignant la période. Pour la fonction logistique on a choisi deux exemples pour le paramètre $r = 3.2$ puis $r = 3.55$. Pour le premier cas, ce choix nous garantit que l'ensemble des états limites est formé par deux points, et la période correspond à deux échantillons (figure 1.2 d). La deuxième solution nous permet d'augmenter la dimension de l'ensemble des états limites et la période de répétition à 8 (figure 1.2 e).
- **régime quasi-périodique :** correspond à une somme de solutions périodiques dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique peut être représenté dans l'espace d'état par un tore.
- **régime chaotique :** le régime chaotique est par définition tout régime permanent qui n'appartient à aucune des classes présentées antérieurement. Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ainsi deux trajectoires générées à partir de CI (conditions initiales) très proches, vont diverger très vite l'une par rapport à l'autre. Cette sensibilité par rapport aux CI traduit aussi le comportement en apparence stochastique des générateurs chaotiques, de telle sorte qu'une prévision à long terme du comportement du système est impossible. Dans la figure 1.2 f) un exemple est donné pour deux CI espacées par une valeur de 10^{-4} et on peut observer que juste après quelques itérations les deux trajectoires divergent et deviennent non-corrélées.

Généralement, l'ensemble des solutions asymptotiques stables décrites ci-dessus est qualifié d'attracteur ; Il représente la région de l'espace d'état au voisinage de laquelle les trajectoires restent confinées lorsque $t, k \to \infty$. En parallèle avec la définition de l'attracteur apparait la notion de bassin d'attraction qui est défini comme la région de l'espace d'état formée par l'ensemble des CI à partir desquelles l'attracteur sera atteint.

1.2.3 Évaluation du comportement dynamique

La présence d'un comportement chaotique pour un système dynamique quelconque peut être déterminée par élimination de comportements introduits auparavant : si son comportement asymptotique n'est pas un point fixe, périodique ou quasi-périodique on conclut qu'il est chaotique. Mais dans le cas où la dynamique employée pour générer la séquence observée n'est pas connue et si en plus un bruit affecte les observations une telle méthode n'est pas envisageable. Par conséquence, la communauté scientifique a proposé des solutions avec une approche statistique du problème comme le calcul de la dimension de corrélation [GP83a], l'entropie de Kolmogorov [GP83b] ou les exposants de Lyapunov [WSSV85, ABK91]. La dimension de corrélation est un outil qui offre la possibilité de déterminer la dimension de l'attracteur reconstruit à partir d'une série temporelle observée, tandis que l'entropie ou les exposants de Lyapunov sont employés pour l'évaluation de l'instabilité propre au phénomène chaotique. Dans la pratique ces exposants se sont imposés comme des outils

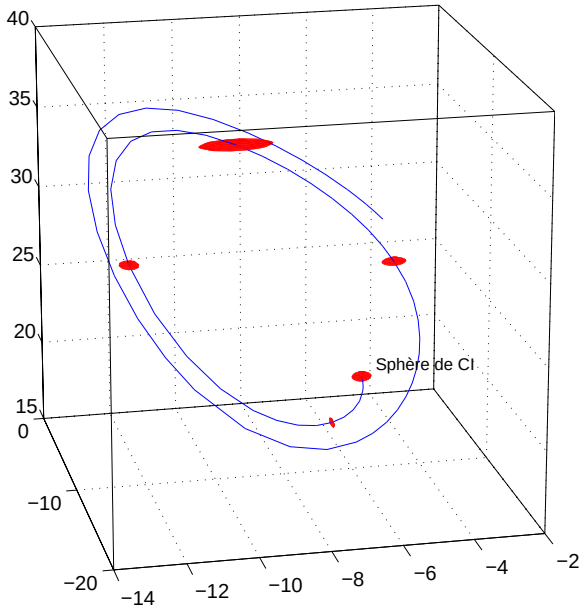


FIG. 1.3 – Sensibilité aux CI - système de Lorenz

performants, même dans le cas de séries temporelles courtes, avec un coût de calcul relativement réduit par rapport à la dimension de corrélation ou l'entropie de Kolmogorov.

Dans ce chapitre nous nous limiterons à la description des exposants de Lyapunov, solution que nous jugerons la plus pertinente dans le contexte des systèmes à dimension d'état réduite destinés aux communications numériques. Ainsi les exposants de Lyapunov se définissent comme une mesure invariante propre à un système dynamique qui caractérise la séparation exponentielle en temps de deux trajectoires proches. Cette propriété est aussi qualifiée de sensibilité aux CI, mais elle se réfère généralement à la divergence de trajectoires à n'importe quel instant temporel [ABK91]. Ainsi dans le cas d'un attracteur chaotique, deux trajectoires initialement voisines vont diverger à une vitesse exponentielle quantifiée par l'exposant de Lyapunov. Géométriquement, cela se traduit par le fait que si on choisit un ensemble de CI situées dans une sphère infiniment petite (de diamètre $\delta(0)$) dans le bassin d'attraction du système dynamique de dimension n ; sous l'effet de la dynamique cette sphère va se déformer pour se transformer en ellipsoïde. Le i-ème exposant de Lyapunov se définit alors en fonction de la déformation subie sur la i-ème direction [WSSV85] comme :

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(0)},\ i = 1...n \tag{1.9}$$

L'ensemble $\{\lambda_i\}_{i=1...n}$ constitue le spectre de Lyapunov. D'habitude les exposants sont classés par ordre décroissant : $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, $i = 1...n-1$.

Dans la figure 1.3 on montre l'exemple d'un ensemble de CI choisies dans le voisinage d'une valeur située

Régime permanent	**Attracteur**	**Spectre**	**Exposants Lyapunov**
point d'équilibre	point	composante continue	$0 > \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$
périodique	courbe fermée	fréq. fondamentale + harmoniques entières	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$
quasi-périodique	tore	composantes fréquentielles en rapport irrationnel	$\lambda_1 = ... = \lambda_i = 0$ $0 > \lambda_{i+1} \geq ... \geq \lambda_n$
chaotique	fractale	spectre large	$\lambda_1 > 0$ $0 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$

TAB. 1.1 – Classification des régimes permanents en fonction du spectre Lyapunov

dans le bassin d'attraction pour le système de Lorentz. On observe par la suite les déformations de cette sphère initiale à des instants différents. De cette façon on remarque que les déformations ne sont pas uniformes dans toute la région qui définit l'attracteur. Pour caractériser ce comportement Abarbanel [ABK91] a défini le spectre de Lyapunov associé localement à un point dans l'attracteur. Des détails sur la construction de ces exposants locaux ainsi que les propriétés qui les concernent sont disponibles dans l'annexe A.

Il faut noter que l'existence d'un attracteur nécessite que la dynamique de ce système soit globalement dissipative. Cela signifie que le système doit être caractérisé par une stabilité globale qui correspond à la condition suivante sur le spectre de Lyapunov :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0 \tag{1.10}$$

Si le spectre de Lyapunov reste une des plus robustes méthodes pour évaluer le comportement dynamique d'un système quelconque, le spectre de fréquence peut donner aussi des indices sur le régime permanent. Les divers critères permettant de caractériser la dynamique d'un système quelconque sont regroupés dans le tableau 1.1 [Ken94].

1.3 Synchronisation du chaos

L'emploi d'un signal chaotique dans le domaine des télécommunications pose directement le problème de synchronisation du récepteur dans le but de dupliquer le signal chaotique employé à l'émetteur. Dans la section précédente nous avons montré la sensibilité très importantes aux CI des systèmes chaotiques, et

à première vue la synchronisation chaotique parait difficile à réaliser. A la différence de la synchronisation classique employée dans les systèmes de télécommunication où l'on cherche à reproduire juste une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés tout d'abord avec les travaux de Yamada et Fujisaka [YF83, YF84] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite Afraimovich et al. [AVR83] ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement Pecora et Carroll [PC90] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un maître et l'autre esclave ; Ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications.

Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont Rulkov *et al.* ont posé les bases [RTA94, RSTA95, Rul96] et qui a ensuite été étudiée dans [KP95] et [PC00] ; Cette approche considère aussi une paire de systèmes configurés en maître-esclave mais cette fois le couplage n'est pas réservé à l'identité. En parallèle avec ces études est apparue la notion de synchronisation de phase entre deux circuits chaotiques couplés, dans ce cas la synchronisation vise à réaliser une cohérence de phase entre les variables d'état des systèmes considérés [RPK97, Vol97]. Finalement, plus récemment, une nouvelle technique est apparue avec l'emploi des méthodes d'estimation non-linéaire de type filtrage de Kalman, vues comme une généralisation du couplage des systèmes chaotiques ; Sous certaines conditions sur le bruit d'observation, cette approche garantit un caractère optimal de la synchronisation au sens de l'EQM [LZD00, LZ01].

1.3.1 Synchronisation identique

Pour illustrer la méthode de synchronisation par couplage entre deux systèmes chaotiques on a choisi de présenter la synchronisation identique proposée par Pecora et Carroll [PC90]. Celle-ci a l'avantage de représenter une solution simple et performante de synchronisation dont l'objectif est que l'esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire.

Considérons un système dynamique autonome, en temps continu, de dimension n, représenté par la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \tag{1.11}$$

où $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^T$.

Par la suite on divise le système initial en deux sous-systèmes $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 : \dot{\mathbf{x}}^{\{1\}} = \mathbf{F}^{\{1\}}\left(\mathbf{x}^{\{1\}}, \mathbf{x}^{\{2\}}\right) \\ \mathcal{S}_2 : \dot{\mathbf{x}}^{\{2\}} = \mathbf{F}^{\{2\}}\left(\mathbf{x}^{\{1\}}, \mathbf{x}^{\{2\}}\right) \end{cases} \tag{1.12}$$

avec les états et les dynamiques définis conformément aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left[\mathbf{x}^{\{1\}}, \mathbf{x}^{\{2\}}\right]^T \\ \mathbf{x}^{\{1\}} &= [x_1, ..., x_m]^T \\ \mathbf{x}^{\{2\}} &= [x_{m+1}, ..., x_n]^T \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{F}^{\{1\}}(\mathbf{x}); \mathbf{F}^{\{2\}}(\mathbf{x})\right] \tag{1.14}$$

Bien sûr, cette opération peut être réalisée de manière arbitraire avec une réorganisation des variables d'état dans une ordre quelconque. On considère maintenant un deuxième sous-système $\mathcal{S}_2'$ caractérisé par une dynamique identique $\mathbf{F}^{\{2\}}$, et un vecteur d'état $\hat{\mathbf{x}}^{\{2\}}$:

$$\mathcal{S}_2' : \dot{\hat{\mathbf{x}}}^{\{2\}} = \mathbf{F}^{\{2\}}\left(\mathbf{x}^{\{1\}}, \hat{\mathbf{x}}^{\{2\}}\right) \tag{1.15}$$

On peut dire que ce sous-système réplique $\mathcal{S}_2'$ est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie est que le sous-système $\mathcal{S}_2'$ soit stable [PC90] ; Hypothèse qui est équivalente avec la condition que l'ensemble des coefficients Lyapunov du sous-système $\mathcal{S}_2'$ soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être accomplie ; les trajectoires étant asymptotiquement convergentes :

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \hat{\mathbf{x}}^{\{2\}}(t) - \mathbf{x}^{\{2\}}(t) \right\| = 0 \tag{1.16}$$

Dans la figure 1.4 on représente graphiquement le processus de décomposition en sous-systèmes, cette fois avec la notation $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\{1\}} + \mathbf{n}$ de la variable d'état qui commande le système $\mathcal{S}_2'$, où $\mathbf{n}$ est un éventuel bruit additif associé au canal de communication. Dans le cas pratique où la variance de ce bruit d'observation est significative, l'équation 1.16 qui traduit la convergence asymptotique ne reste plus valable. Dans ce cas on doit utiliser une approche de synchronisation généralisée [RSTA95].

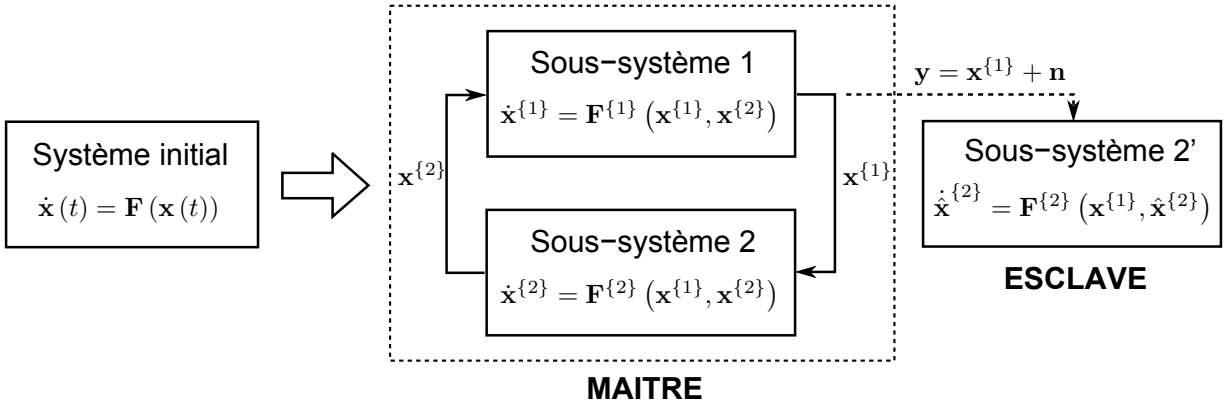


FIG. 1.4 – Synchronisation Maître-Esclave en utilisant la décomposition en sous-systèmes

Pour illustrer ce mécanisme de synchronisation on considère de nouveau le système dynamique de Lorentz, donné par les équations (1.3), avec l'ensemble de paramètres : $\{\sigma = 10,\ \rho = 28,\ b = 8/3\}$. L'émetteur et le récepteur sont initialisés séparément avec des conditions initiales proches. Pour une durée de 10 secondes on les laisse fonctionner indépendemment, ainsi on observe que les trajectoires des deux systèmes deviennent assez vite divergentes. A l'instant $t = 10\,s$ on supprime la dimension x du système récepteur et on le remplace par l'état correspondant côté émetteur ; Cette opération va forcer les états y et z du système esclave à converger asymptotiquement vers les états correspondants du système maître. La garantie de cette convergence est donnée par les valeurs négatives $\lambda'_2, \lambda'_3 \leq 0$ des exposants de Lyapounov associés au système esclave. Dans les figures 1.5 ce comportement est démontré graphiquement par les représentations des états $y = X_2$ et $z = X_3$. Le diagramme de synchronisation montré pour l'état $y = X_2$ ainsi que la puissance de l'erreur nous confirment encore une fois qu'après une période de transition, le système esclave converge asymptotiquement vers l'état de l'émetteur (maître).

1.3.2 Synchronisation par filtrage de Kalman Étendu

La méthode de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Étendu a été introduite comme une généralisation des méthodes de synchronisation à couplage unidirectionnel telles que la synchronisation identique. L'estimation récursive des états pour un système chaotique a été proposée pour la première fois par Fowler [Fow89], avec des aspects sur l'optimalité et la stabilité d'une telle synchronisation [LZD00, LZ01, LABS06]. Plusieurs applications ont été développées par la suite pour des structures de systèmes de communication avec l'emploi dans la démodulation et même l'égalisation du canal [LL01]. L'objet de cette étude est de proposer des structures de filtrage non-linéaire innovantes, dans la continuité des travaux pré-cités.

Par exemple on considère un système en temps discret, autonome défini par la relation générale :

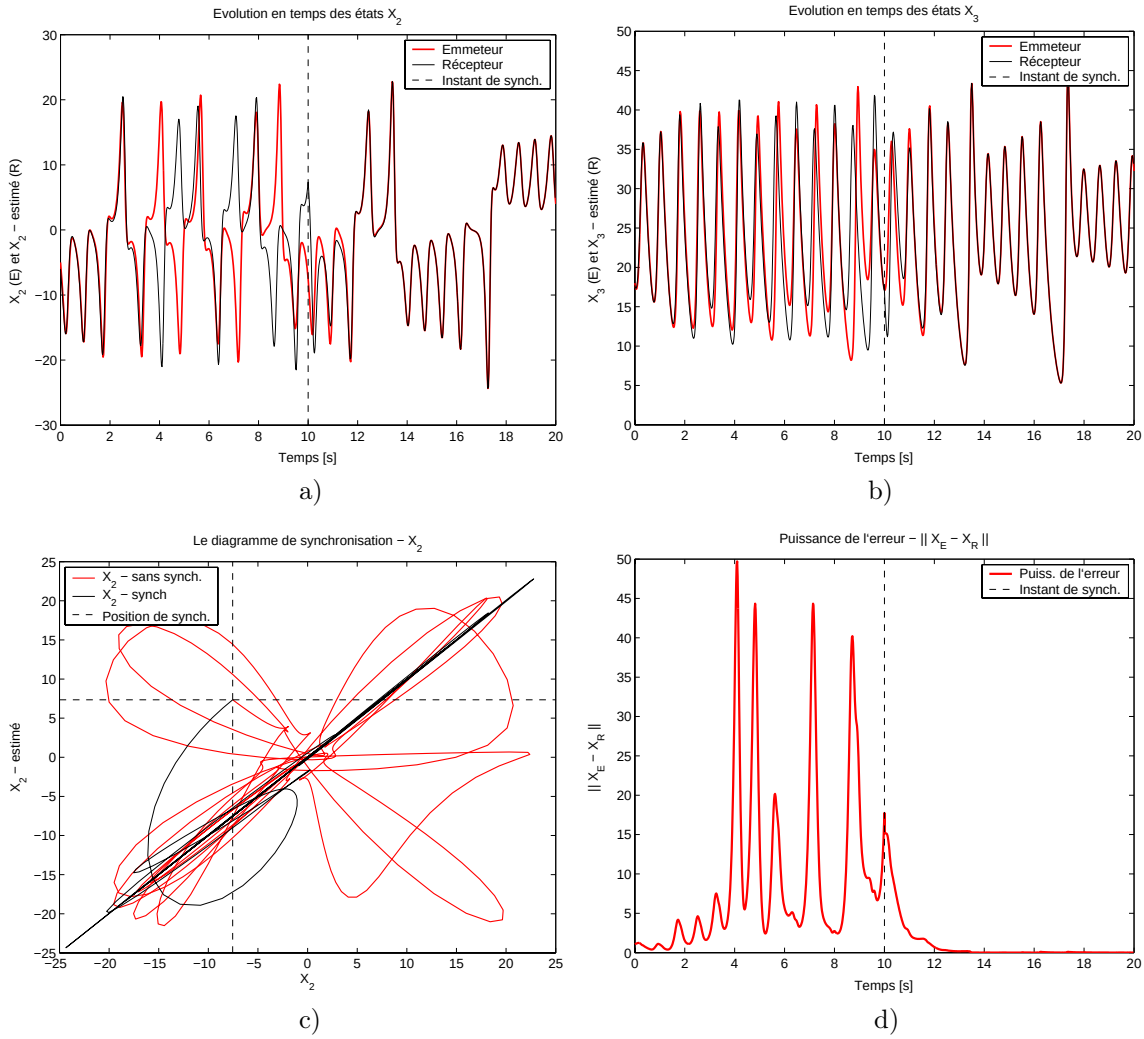


FIG. 1.5 – Évolution des états du système maître et de l'esclave avant et après synchronisation : a) $y = X_2$; b) $z = X_3$; c) Diagramme de synchronisation pour l'état $y = X_2$; d) Puissance de l'erreur de synchronisation.

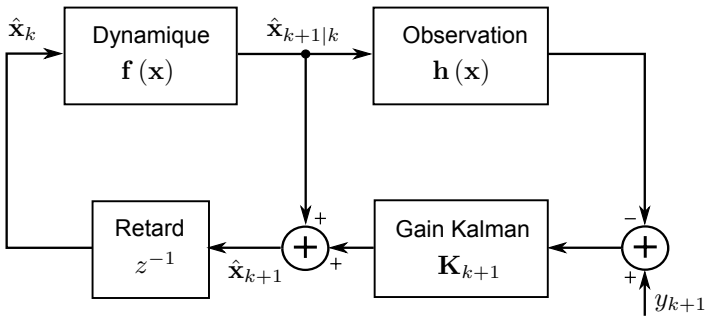


FIG. 1.6 – Structure de l'estimateur récursif EKF

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \tag{1.17}$$

où $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\mathbf{f}(\cdot)$ est la dynamique non-linéaire associée.

D'habitude, pour une efficacité maximale, l'on a intérêt à transmettre entre l'émetteur et le récepteur un nombre d'états le plus réduit possible ; nous supposerons que le signal de contrôle est un scalaire donné par l'équation suivante :

$$y_k = \mathbf{h}^T \mathbf{x}_k + n_k \tag{1.18}$$

où $\mathbf{h} = [h_1, ..., h_n]^T$, et $n_k = \mathcal{N}(0, R)$ représente l'éventuel bruit supposé gaussien centré, de variance R, associé aux imperfections du canal de communication. Généralement, dans le cadre d'un filtrage récursif de Kalman les équations (1.17) et (1.18) sont appelées modèle de processus et modèle d'observation. Nous n'insisterons pas ici sur les aspects de la théorie du filtrage non-linéaire de Kalman car le chapitre suivant sera dédié à ce sujet.

L'interprétation dans le cas général d'un tel modèle est donnée dans la figure 1.6 comme une structure à rétroaction qui permet l'estimation de l'état à partir des observations bruitées [LZ01]. On note que le modèle d'observation dans ce cas ne doit pas respecter forcément une fonction linéaire. Ainsi dans la partie gauche du schéma on effectue une projection de l'estimation courante $\hat{\mathbf{x}}_k$ pour obtenir la valeur *a priori* du nouvel état estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$. Dans la partie droite ce nouvel état va incorporer l'information apportée par la nouvelle mesure y_{k+1} pour obtenir la valeur estimée *a posteriori* $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$. Le coefficient de pondération $\mathbf{K}_{k+1}$, appelé aussi gain de Kalman, est calculé par rapport à la dynamique du système ; Il donne une évaluation de la confiance accordée aux observations à chaque étape de filtrage.

Cette dualité présentée par la structure de l'algorithme de filtrage se retrouve dans le développement des équations employées :

– équations de mise à jour temporelle, destinées à évaluer la statistique d'ordre deux de l'état prédit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_k\right) \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \mathbf{F}_k^T \end{aligned} \tag{1.19}$$

où $\mathbf{F}_k \triangleq \nabla \mathbf{f}|_{\hat{\mathbf{x}}_k}$, et $\mathbf{P}_{k+1|k}$ représente la covariance des erreurs prédite.

– équations de mise à jour par des observations, donnant la valeur estimée en utilisant la connaissance de l'état observé :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\left(y_k - \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\right) \\ \mathbf{P}_{k+1} &= \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{h}\right)\mathbf{P}_{k+1|k} \end{aligned} \tag{1.20}$$

où $\mathbf{I}_n$ est la matrice unité $n \times n$, $\mathbf{P}_{k+1}$ représente la covariance des erreurs, et $\mathbf{K}_{k+1}$ désigne le gain de Kalman s'exprimant comme :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{h}^T\left(\mathbf{h}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{h}^T + R\right)^{-1} \tag{1.21}$$

Ainsi par l'unification des relations 1.19 et 1.20 on obtient la solution récursive suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_k\right) + \mathbf{K}_{k+1}\left(y_k - \mathbf{h}^T \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_k\right)\right) \tag{1.22}$$

En utilisant la décomposition du vecteur d'état sous la forme $\mathbf{x}_k = \left[x_k^{\{1\}}, \mathbf{x}_k^{\{2\}}\right]^T$, comme en synchronisation identique, on peut écrire la dynamique du système sous la forme :

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k\right) = \left[f^{\{1\}}\left(x_k^{\{1\}}, \mathbf{x}_k^{\{2\}}\right), \mathbf{f}^{\{2\}}\left(x_k^{\{1\}}, \mathbf{x}_k^{\{2\}}\right)\right]^T \tag{1.23}$$

Avec cette relation le parallèle avec la synchronisation identique est immédiat. En considérant le système esclave caractérisé par la dynamique $\mathbf{f}^{\{2\}}\left(y_k, \hat{\mathbf{x}}_k^{\{2\}}\right)$ où $y_k = x_k^{\{1\}} + n_k$ est le signal de synchronisation, et avec $\mathbf{h} = [1, 0, ..., 0]^T$, $\mathbf{K}_k = [1, 0, ..., 0]^T$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^{\{1\}} &= y_{k+1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\{2\}} &= \mathbf{f}^{\{2\}}\left(\hat{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k^{\{2\}}\right) \end{aligned} \tag{1.24}$$

Nous voyons ainsi que la méthode de synchronisation en utilisant le filtrage de Kalman est une généralisation de la méthode de synchronisation identique présentée antérieurement.

En ce qui concerne le fonctionnement du filtre de Kalman dans le cadre de la synchronisation chaotique, il est intéressant de mentionner que si généralement on est habitué à une convergence du gain de Kalman

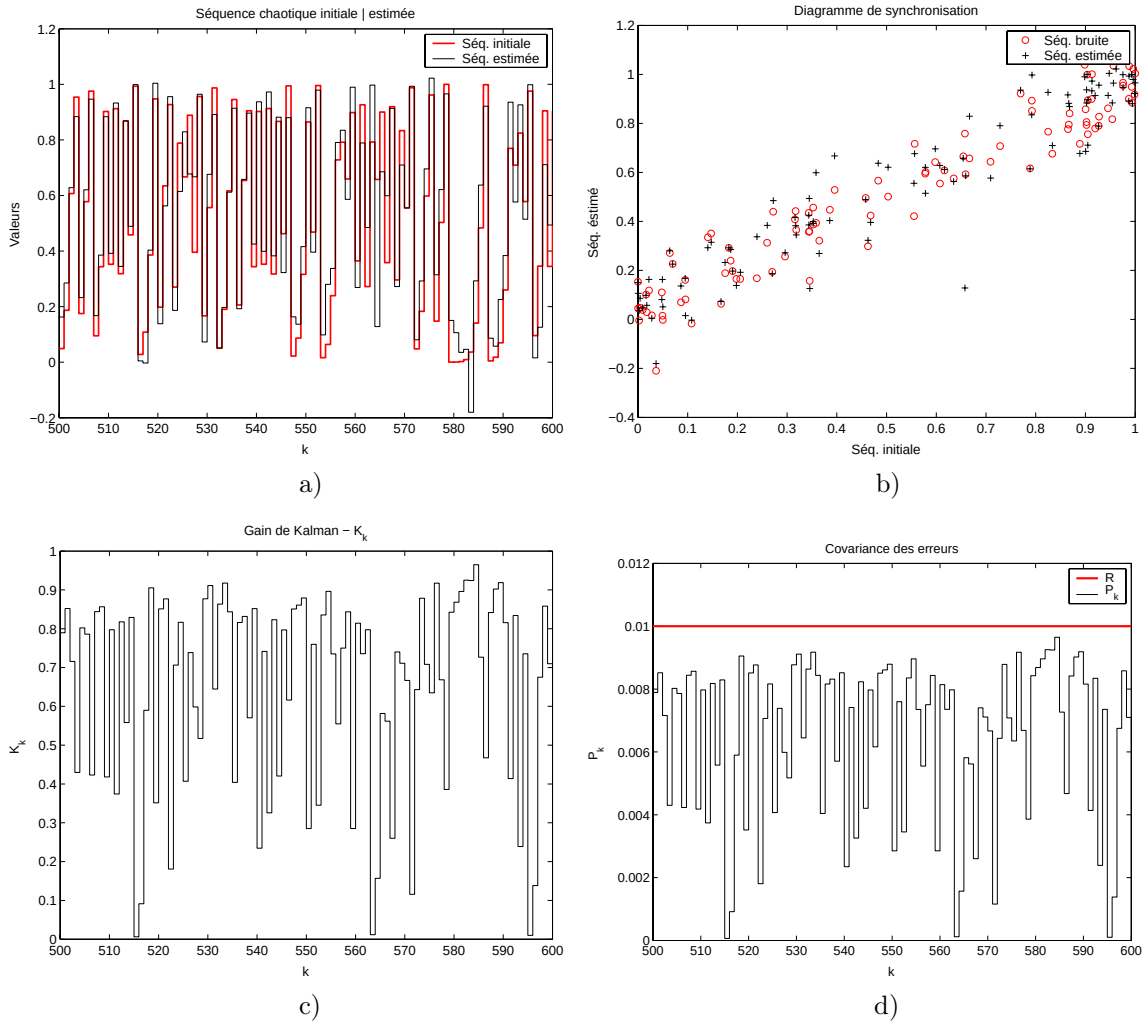


FIG. 1.7 – Exemple de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Etendu : a) séquence initiale vs séquence estimée ; b) diagramme de synchronisation ; c) évolution du gain Kalman K_k ; d) évolution de la covariance des erreurs P_k par rapport à la variance du bruit d'observation R

vers une valeur fixe, dans le cas de systèmes chaotiques, des oscillations apériodiques du gain seront obtenues [LZD00]. Le même phénomène est constaté au niveau de la covariance des erreurs $\mathbf{P}_k$.

Dans les figures 1.7 on considère le cas de synchronisation chaotique appliquée à une dynamique non-linéaire mono-dimensionnelle représentée par la fonction logistique (eq. 1.8), avec le paramètre $r = 4$. Ainsi on a généré une séquence chaotique avec une longueur de 600 échantillons, affectée par un bruit d'observation gaussien additif de variance $R = 10^{-2}$. Après une période de transition de 500 échantillons on représente l'évolution de la séquence estimée, le diagramme de synchronisation, le comportement du gain de Kalman K_k ainsi que la covariance des erreurs estimées P_k.

Si on parle qualitativement de performances de synchronisation, on observe que l'introduction du bruit de mesure dans le modèle va entraîner l'impossibilité d'obtenir une synchronisation parfaite. Cela signifie que le vecteur d'état du système maître et le vecteur d'état du système esclave ne seront jamais égaux ; Dans

ce cas la synchronisation chaotique peut être définie au sens d'une erreur d'estimation bornée. Une autre remarque peut être faite par rapport à l'évolution comparative entre le gain de Kalman et la covariance des erreurs, qui suivent une relation de proportionnalité. Analytiquement il est facile de prouver que dans le cas mono-dimensionnel cette relation est valide [LZ01], avec un coefficient de proportionnalité égal à la variance du bruit d'observation considéré :

$$P_k = RK_k \tag{1.25}$$

Le modèle d'estimation employé reste assez sensible aux perturbations introduites par le bruit de canal ainsi qu'aux approximations faites par le filtre de Kalman Etendu. Une solution généralement utilisée pour compenser ces approximations est de considérer la présence d'un bruit de processus associé au système dynamique chaotique mais un paramétrage optimal de la valeur de ce bruit est difficile à faire. Dans les chapitres qui suivent nous démontrerons que le filtrage de type Kalman Étendu n'est pas la meilleure solution d'estimation à employer, d'autre variantes étant proposées pour améliorer les performances globales de synchronisation.

1.4 Systèmes à étalement de spectre

L'étalement de spectre désigne un ensemble de techniques de transmission numérique de l'information caractérisées par une bande de fréquence W beaucoup plus importante que celle R du signal informationnel en bande de base. Ceci définit le gain d'étalement $G_e = W/R$. Un deuxième élément important qui intervient dans le développement d'un tel système est la caractéristique pseudo-aléatoire des signaux employés, qui fait que le signal transmis apparaisse comme une valeur stochastique rendant la démodulation plus difficile par des utilisateurs non-autorisés. Plus spécifiquement l'étalement de spectre est utilisé pour [Pro95] :

- combattre les effets néfastes de l'interférence produite par un brouillage, d'autres utilisateurs présents dans le canal ou la propagation par trajet multiple ;
- masquer le signal en utilisant une faible puissance d'émission, et par conséquence le signal sera difficile à intercepter par un utilisateur non-autorisé ;
- garantir un niveau de confidentialité de la transmission étant donné le caractère aléatoire des signaux.

Les premières applications de l'étalement de spectre datent des années 50, essentiellement dans le domaine militaire, avec des systèmes anti-brouillage, des systèmes de guidage, ou encore des prototypes de systèmes de propagation à trajet multiple [Sch82, PSM82, Vit79]. Plus récemment on voit l'apparition de l'étalement de spectre couramment dans les applications militaires satellitaires avec le système GPS et c'est juste au début des années 90 que des solutions à étalement de spectre sont employées dans le cadre de systèmes de communications civiles avec les normes IS-95 et CDMA2000 [LM98].

Le modèle donné dans la figure 1.8 représente la structure d'un système de communication à étalement de spectre avec le but de transmettre la séquence informationnelle binaire caractérisée par la largeur de bande R. La signal subit par la suite l'étalement avec l'aide d'une séquence pseudo-aléatoire, et il est transmit dans le canal sur une bande utile W. Côté récepteur on effectue l'opération inverse de désétalement pour retrouver le signal informationnel. Le filtre passe-bas est utilisé pour limiter la bande du signal obtenu à la bande informationnelle R.

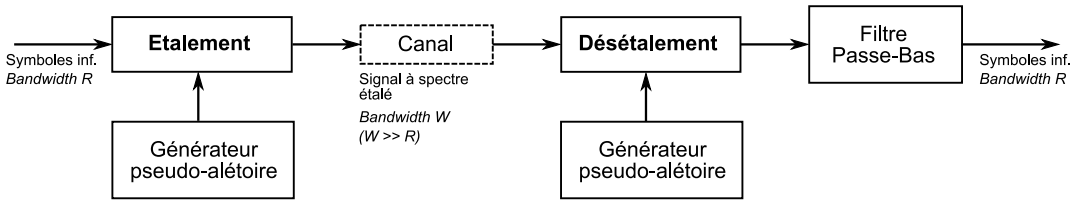


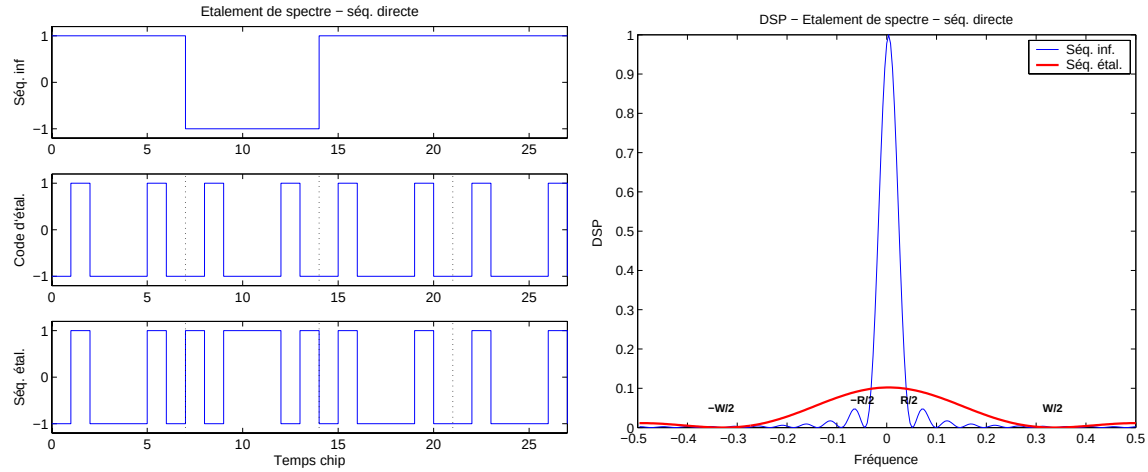
FIG. 1.8 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre

En ce qui concerne les techniques de base employées dans l'étalement de spectre deux type de modulations sont identifiées :

- modulation **PSK** (*Phase Shift Keying*) : employée dans le cas des applications où la cohérence de phase entre le signal transmis et le signal réceptionné peut être maintenue pour une durée assez longue par rapport à l'inverse de la bande utile. Dans ce cas la séquence pseudo-aléatoire est utilisée pour modifier la phase du signal transmis ; Ce type de modulation a reçu le nom de *séquence directe* (DS - Direct Séquence).
- modulation **FSK** (*Frequency Shift Keying*) : employée dans le cas où cette cohérence de phase ne peut pas être maintenue à cause des variations rapides de la réponse impulsionnelle du canal. Cette fois le générateur pseudo-aléatoire est utilisé conjointement avec la modulation M-FSK pour sélectionner la fréquence d'émission ; Ce type de modulation a reçu le nom de étalement de spectre par *sauts de fréquence* (FH - Frequency Hopping) [Pro95].

1.4.1 Étalement de spectre par séquence directe (DS-SS)

Pour illustrer le fonctionnement de cette méthode on considère le cas particulier où le signal informationnel subit une modulation PSK d'ordre 2 (BPSK). Dans cette configuration, pour obtenir le signal étalé, la séquence informationnelle (période symbole $T_s = 1/R$) est multipliée directement par la séquence binaire pseudo-aléatoire évoluant au rythme W (figure 1.9). Les éléments binaires de la séquence d'étalement, appelés aussi "chips" auront pour période $T_c = T_s/G_e = 1/W$. Finalement pour la transmission le signal obtenu est modulé par une porteuse sinusoïdale. Côté récepteur la structure est symétrique : on effectue tout d'abord



a) b)

FIG. 1.10 – Exemple d'étalement de spectre par séquence directe : a) évolution en temps ; b) DSP du signal informationnel et signal étalé ;

la récupération de la porteuse et par la suite le signal est désétalé par une réplique de la séquence pseudo-aléatoire utilisée à l'émission. On observe l'apparition d'un sous-système de synchronisation qui permet aux deux séquences d'étalement de rester en phase. D'ailleurs la synchronisation reste le problème le plus difficile à maîtriser pour garantir une démodulation correcte du signal informationnel.

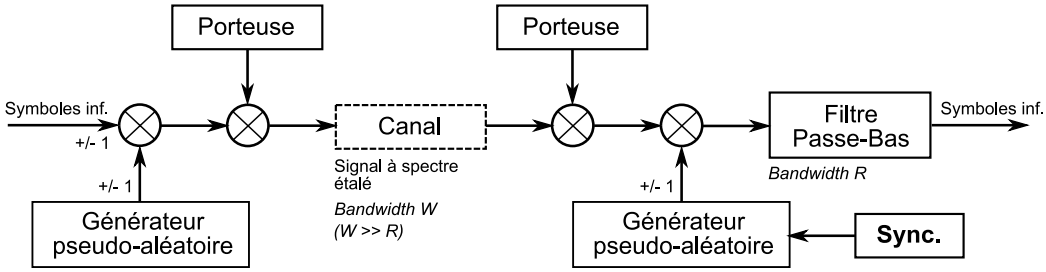


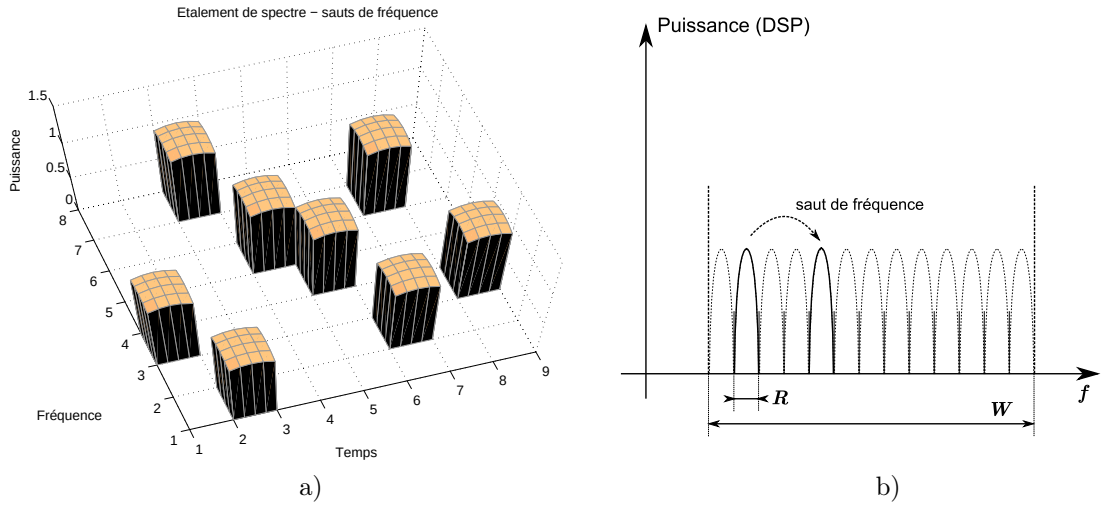
FIG. 1.9 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence directe

Le couple d'opérations étalement et désétalement est lié au gain de traitement défini antérieurement, ainsi on peut établir une relation entre la rapport signal à bruit à l'entrée du récepteur (SNR_{in}) et respectivement le même rapport calculé pour le signal démodulé en bande de base (SNR_{out}) :

$$SNR_{out} = \frac{W}{R} \cdot SNR_{in} \tag{1.26}$$

Dans les figures 1.10 on présente un exemple d'évolution en temps ainsi que le spectre de puissance pour : le signal informationnel, le code d'étalement et le signal étalé.

Pour les figures 1.10 on a choisi une séquence d'étalement aléatoire, mais dans les applications réelles



a) b)

FIG. 1.11 – Système à spectre étalé par sauts de fréquence : a) Distribution en temps et en fréquence de l'énergie émise ; b) DSP du signal étalé

les séquences pseudo-aléatoires doivent respecter des propriétés de corrélation quasi-optimales pour réduire l'influence des interférences. Ainsi beaucoup d'études ont été réalisées pour choisir au mieux les séquences d'étalement, dont on va citer ici les séquences de longueur maximale et de type Gold, générées par l'intermédiaire des registres à décalage [Pro95]. En ce qui concerne l'emploi des séquences chaotiques dans une structure d'étalement de spectre similaire, nous verrons dans le paragraphe suivant que de telles études existent, et des performances supérieures sont ainsi obtenues en ce qui concerne la capacité du canal par rapport au nombre d'utilisateurs disponible.

1.4.2 Étalement de spectre par sauts de fréquence

La deuxième version de la structure à étalement de spectre considère une division de la bande disponible W du canal en un nombre important de canaux sans recouvrement. Dans un intervalle temporel limité le signal informationnel occupe ainsi un ou plusieurs canaux disponibles (fig. 1.11 a), avec la sélection du canal associée à la séquence pseudo-aléatoire considérée. On peut interpréter ce fonctionnement comme un signal informationnel à bande étroite associé à une porteuse dont la fréquence effectue des sauts selon le code d'étalement. Ainsi on peut observer dans la partie b) un spectre très différent de celui obtenu par le système à séquence directe, en remplaçant l'enveloppe en $[(\sin x)/x]^2$ par une DSP plate sur la bande de fréquence de largeur W.

Une méthode qui permet une telle implémentation est présentée dans la figure 1.12 dont le signal informationnel est déplacé en fréquence par l'intermédiaire du synthétiseur avec une valeur représentée par les m bits lus à la sortie du générateur pseudo-aléatoire. Par exemple les m bits obtenus peuvent spécifier un ensemble de $2^m - 1$ translations possibles [Pro95].

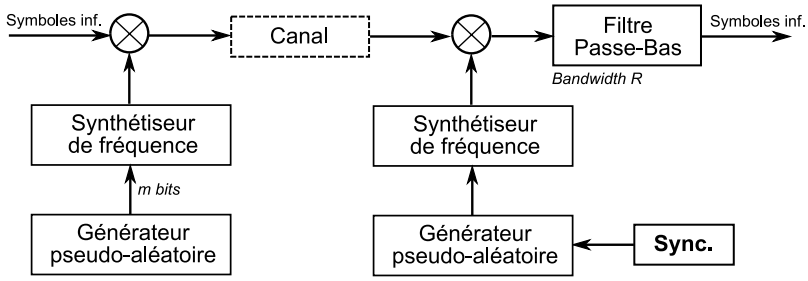


FIG. 1.12 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par sauts de fréquence

Côté récepteur on a un générateur pseudo-aléatoire identique, synchronisé, qui permet avec l'aide d'un synthétiseur de fréquence similaire la démodulation du signal reçu. Le signal est limité ensuite à la bande utile de la séquence informationnelle.

D'autres variantes de systèmes à étalement du spectre sont disponibles dont on cite l'étalement de spectre par sauts en temps (TH - *Time Hopping*) ainsi que des versions qui emploient conjointement plusieurs méthodes (FH-TH, DS-FH, ...).

1.5 Transmissions à porteuses chaotiques

Les signaux chaotiques peuvent être utilisés pour la transmission de l'information principalement dans deux objectifs. Le premier objectif est de protéger l'information transmise et dans ce cas les applications réalisées sont en compétition avec les méthodes de cryptographie classiques. Un deuxième objectif est d'étaler le signal informationnel avec tous les avantages des techniques à étalement de spectre. Dans ce deuxième cas, les méthodes développées doivent être comparées aux systèmes classiques à étalement de spectre.

Si on regarde du point de vue de la structure d'un tel système de transmission on peut définir deux approches. Le première, représentée dans la figure 1.13 remplace le signal porteur sinusoïdal par un modulateur chaotique contrôlé d'une manière quelconque par le signal informationnel. Cette solution a l'avantage d'être très simple à implémenter mais par contre nécessite un système chaotique avec des contraintes fortes sur les paramètres intrinsèques et en plus celui-ci doit travailler à des hautes fréquences. En pratique, il est difficile de trouver des circuits permettant un tel fonctionnement et pour le moment cette solution est surtout considérée dans un cadre théorique.

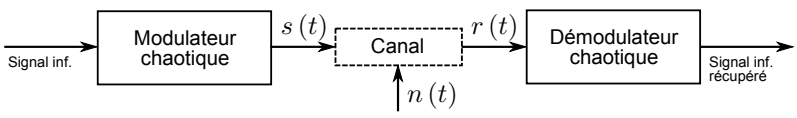


FIG. 1.13 – Modulation directe du signal informationnel par une porteuse haute fréquence chaotique

Une deuxième solution est de moduler le signal informationnel par celui chaotique en bande de base, et après d'appliquer une transposition en haute-fréquence par l'intermédiaire d'une porteuse sinusoïdale. Ce schéma est présenté dans la figure 1.14. Son avantage principal consiste dans une simplification importante du modulateur chaotique, mais avec une complexité générale du système plus importante [HS01].

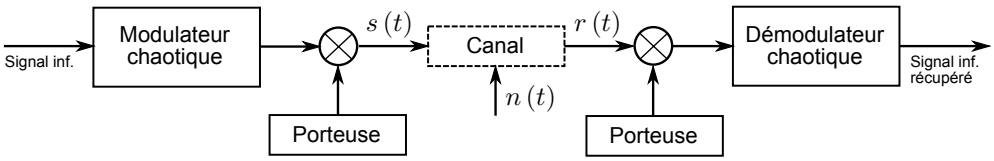


FIG. 1.14 – Modulation en bande de base du signal informationnel par le signal chaotique, combinée avec une mise sur porteuse classique

Dans l'intégralité de ce document la deuxième solution sera considérée. Dans le reste de ce chapitre nous passons en revue les principaux résultats recensés dans la littérature sur le sujet.

1.5.1 Masquage chaotique

La méthode de masquage chaotique a été la première solution proposée dans la littérature comme application du chaos aux communications [OWIC92, KHE+92]. L'idée est d'additionner directement le signal informationnel $s(t)$ au signal chaotique $y(t)$ et de le récupérer ensuite par synchronisation chaotique (fig. 1.15). Le même système est utilisé à la fois à l'émetteur et au récepteur, avec la différence que le récepteur est contrôlé par le signal émis pour obtenir la synchronisation. Il est démontré [OWIC92] que grâce à la synchronisation chaotique, à la sortie du système dynamique récepteur, le signal sera plus proche du signal chaotique original $y(t)$ que de la somme $y(t) + s(t)$. Ainsi avec une simple différence on peut obtenir un approximation $\hat{s}(t)$ du signal informationnel initial. Il est évident que la présence d'un bruit important dans le canal de communication va affecter fortement les performances du système.

Même si cette méthode n'a pas trouvé d'applications directes sur des canaux radio-fréquence, elle est envisagée comme solution de cryptage sur des canaux à fort SNR, comme c'est le cas dans la fibre optique [ASL+05].

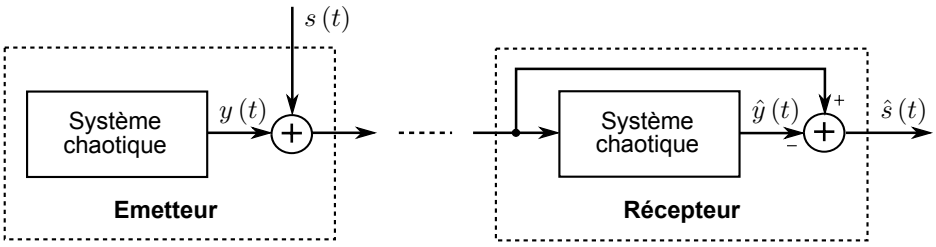


FIG. 1.15 – Modulation par masquage chaotique

1.5.2 *Chaos Shift Keying* (CSK)

La technique CSK introduite pour la première fois dans [DKH93, KD93], est définie comme une modulation numérique qui associe à chaque symbole informationnel un attracteur où une somme d'attracteurs différents, en se placant dans une période de symbole de durée T. Cette définition générale peut être développée analytiquement avec la supposition que chaque attracteur va générer une fonction de base $g_j(t)$ et que l'ensemble des signaux porteurs de l'information s'exprime alors, sur l'intervalle $t \in [iT, (i+1)T]$, comme [KKC97, KKC98] :

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} s_{ij} g_j(t), \; i = 1, 2, ..., M \tag{1.27}$$

où $N \leq M$ est le nombre de fonctions de base et M est la dimension de l'espace de symboles.

Dans la figure 1.16 on présente le schéma générique pour un système de communication CSK en bande de base. Du côté de l'émetteur la construction de la forme d'onde courante, associée au symbole i, est définie par l'équation (1.27). Ainsi on suppose une commutation des coefficients s_{ij} aux instants multiples de la durée symbole T. Si dans le cas d'un système de transmission classique les formes d'onde des fonctions de base ont un caractère périodique, dans le cas du CSK cette condition ne reste plus valable à cause du caractère chaotique des attracteurs utilisés pour la génération de ces fonctions de base.

A la réception on suppose que la forme du signal reçu $r_i(t)$, associée au symbole i, est donnée par la version du signal émis $s_i(t)$ affectée par un bruit additif $n(t)$:

$$r_i(t) = s_i(t) + n(t) \tag{1.28}$$

La structure usuelle d'un récepteur CSK repose sur une batterie de corrélateurs, en fonction du nombre de fonctions de base N utilisées par l'émetteur. Les fonctions $\{y_j(t)\}_{j=1...N}$ forment l'ensemble des fonctions de base utilisées pour mettre en place le mécanisme de corrélation. Nous verrons par la suite que le choix de ces fonctions est fait par rapport à une structure particulière du récepteur. Après corrélation, le vecteur

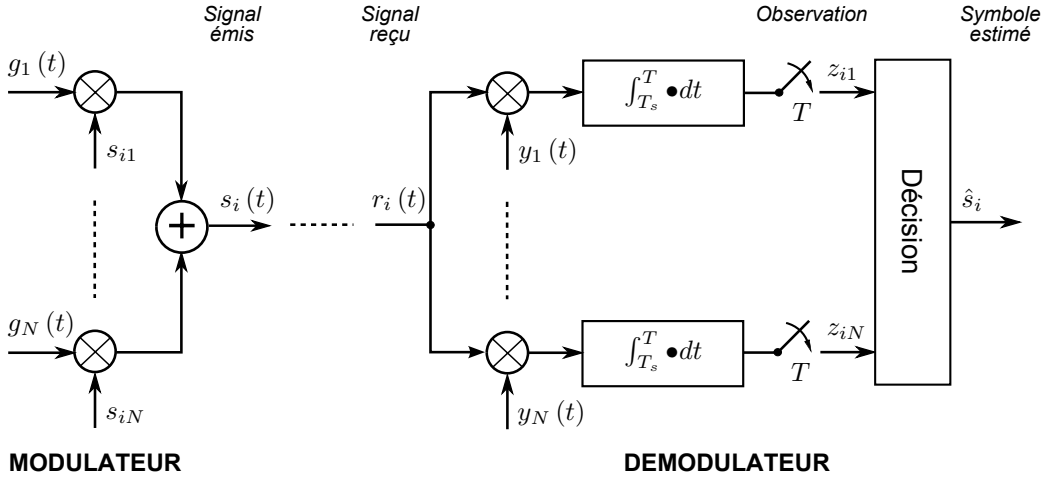


FIG. 1.16 – Système générique de communication CSK

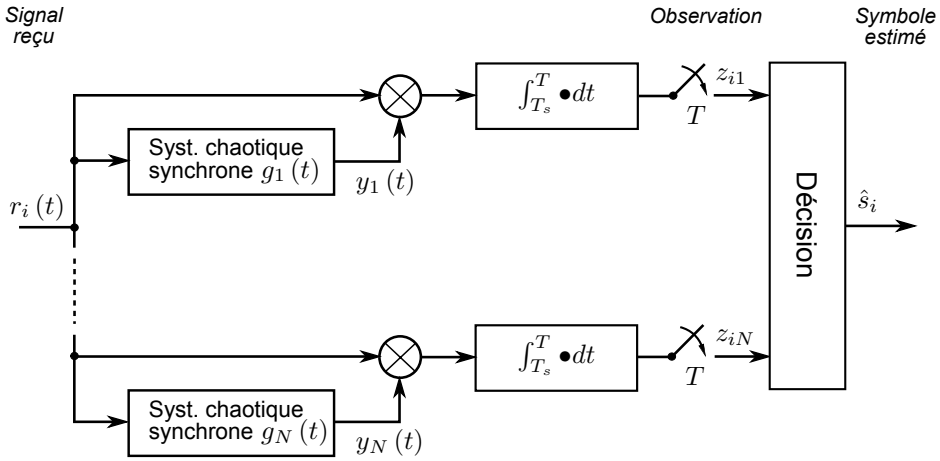


FIG. 1.17 – Récepteur cohérent CSK

d'observation $\mathbf{z}_i = [z_{i1}, ..., z_{iN}]^T$ est utilisé pour faire la décision du symbole transmis $\hat{s}_i$. Pour cette configuration de récepteur, comme dans le cas des communications numériques classiques, on peut considérer les quatre cas suivants :

– *récepteur cohérent qui utilise une méthode de synchronisation chaotique* : Dans ce cas, les références $\{y_j(t)\}$ correspondent aux fonctions de base originales $\{g_j(t)\}$ reconstruites à partir du signal reçu avec l'aide d'une méthode de synchronisation chaotique (fig. 1.17).

Dans cette structure le signal reçu va essayer de synchroniser tous les systèmes chaotiques, ainsi en supposant que le signal transmis est $s_i(t) = g_j(t)$, à la sortie du j-ème circuit chaotique synchrone on va avoir une convergence de $y_j(t)$ vers $g_j(t)$; T_s est le temps nécessaire pour que la synchronisation soit réalisée. En contraste avec la synchronisation de ce système, tous les autres vont avoir un caractère divergent par

rapport au j-ème attracteur. La prise de décision sera alors faite à partir de l'erreur de synchronisation, en sortie des corrélateurs ; Ainsi on peut affirmer sans doute que la convergence de $y_j(t)$ vers $g_j(t)$ sur l'intervalle $[T_s, T]$ va nous donner une observation $z_{ij} > z_{ik}$, $\forall k = 1...N, k \neq j$. Avec une telle conclusion l'étape de décision consiste à prendre la valeur caractérisée par l'énergie maximale.

Analytiquement on peut écrire que la valeur du coefficient d'observation z_{ij} est donnée par :

$$\begin{aligned} z_{ij} &= \int_{T_s}^{T} r_i(t)\, y_j(t)\, dt \\ &= \int_{T_s}^{T} [s_i(t) + n(t)]\, y_j(t)\, dt \\ &= \int_{T_s}^{T} g_j(t)\, y_j(t)\, dt + \int_{T_s}^{T} n(t)\, g_j(t)\, dt \end{aligned} \tag{1.29}$$

Ceci nous montre que z_{ij} est une variable aléatoire, dont la valeur moyenne va dépendre de l'énergie par élément binaire et de la qualité de synchronisation.

L'inconvénient important présenté par cette méthode est que la synchronisation est perdue et ensuite récupérée chaque fois que le symbole informationnel change. Ainsi le temps nécessaire pour la transmission d'un seul symbole est donné par le temps de synchronisation plus le temps d'estimation dont le vecteur d'observation est calculé. Par conséquence le débit de transmission possible est limité par l'inverse du temps de synchronisation.

- *récepteur cohérent de type filtre adapté* : si cette solution dans le cas des transmissions classiques est équivalente aux structures cohérentes de type corrélateur, dans le cas chaotique cette solution ne peut pas être utilisée. L'impossibilité vient du fait que les formes d'ondes employées dans la modulation doivent être connues en avance et dans le cas d'un système chaotique ces formes d'ondes changent d'un symbole à l'autre [KKC98].
- *récepteur non-cohérent* : dans le cas de la détection non-cohérente la référence côté récepteur ne sera plus obtenue par l'intermédiaire d'une synchronisation chaotique mais par contre elle correspond à une partie du signal reçu (fig 1.18).

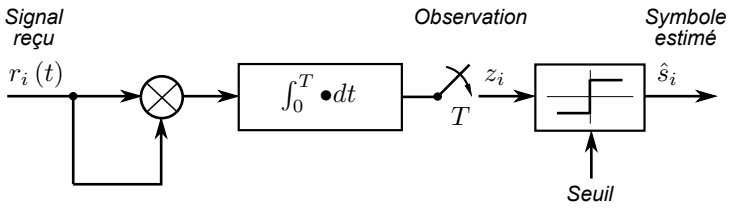


FIG. 1.18 – Récepteur non-cohérent CSK/COOK

Dans la littérature deux systèmes CSK non-cohérents sont proposés :

1. système COOK (*Chaotic on-off keying*) [KKK97] qui offre la plus simple solution ; Le signal informationnel binaire est directement multiplié par le signal chaotique. Ce principe est équivalent à associer à l'élément binaire "1" le signal $s_1(t) = g_1(t)$ et au symbole "0" le signal $s_2(t) = 0$. Dans ce cas le récepteur présenté dans la figure 1.18 va évaluer l'énergie par bit transmis et va prendre la décision en utilisant un comparateur à seuil.
2. système CSK non-cohérent, qui utilise des propriétés qui peuvent différencier les différentes formes d'onde associées aux symboles transmis, au niveau statistique par exemple. La structure présentée dans la figure 1.18 reste la même avec la prise décision cette fois effectuée sur les paramètres d'intérêt. Généralement ces solutions sont envisageables étant donné que les propriétés statistiques entre différents attracteurs chaotiques sont différentiables. Par exemple dans [Yan95] les fonctions de base sont deux signaux chaotiques caractérisés par des fréquences moyennes différentes ; côté récepteur les signaux peuvent être identifiés en mesurant la valeur moyenne de la fréquence quand le signal change de signe. D'autres méthodes de modulation considèrent par exemple l'évaluation de la fonction d'auto-corrélation [Sch95] qui est modifiée selon le symbole à transmettre.

– *récepteur cohérent différentiel* (DCSK - *Differential Chaos Shift Keying*) : Dans le cas du récepteur cohérent CSK les fonctions de base $g_i(t)$ doivent être récupérées avant que toute démodulation soit possible. Il existe des situations pour lesquelles cette approche est impossible à cause des mauvaises conditions de propagation. Dans ce cas la seule solution cohérente disponible est une solution différentielle, ainsi on va transmettre sur une partie de la durée du symbole une référence, et le reste est associé à la transmission de l'information [KKC97].

Par exemple, pour la modulation DCSK binaire, le symbole "1" est représenté par un signal de référence, de durée $T/2$, suivi d'une réplique exacte de celui-ci retardée bien sûr avec la même durée $T/2$. Pour le bit "0" on transmet le même signal référence suivi cette fois par sa copie inversée. On peut exprimer alors le signal produit par le modulateur pour le i-ème symbole comme :

$$s_i(t) = \begin{cases} x(t) & t_i \leq t < t_i + \frac{T}{2} \\ b_i x\left(t - \frac{T}{2}\right) & t_i + \frac{T}{2} \leq t < t_i + T \end{cases} \tag{1.30}$$

où $x(t)$ désigne le signal issu d'une source chaotique et $b_i \in \{-1, +1\}$ représente le i-ème symbole informationnel à transmettre.

Côté récepteur la démodulation est réalisée en utilisant une structure similaire au CSK non-cohérent. Ainsi on introduit dans ce cas une cellule à retard qui permet au signal de référence et à celui porteur de l'information d'être en phase (fig. 1.19).

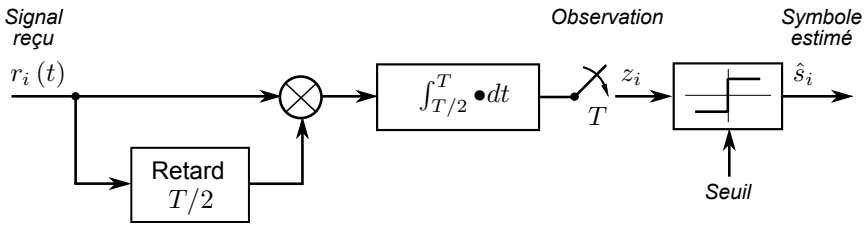


FIG. 1.19 – Récepteur non-cohérent DCSK

Analytiquement la valeur z_i observée est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} z_i &= \int_{T/2}^{T} r_i(t)\, r_i\left(t-\frac{T}{2}\right) dt \\ &= \int_{T/2}^{T} \left[s_i(t)+n(t)\right]\left[s_i\left(t-\frac{T}{2}\right)+n\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] dt \\ &= \int_{T/2}^{T} \left[x(t)+n(t)\right]\left[b_i x(t)+n\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] dt \\ &= b_i \int_{T/2}^{T} x^2(t)\, dt + \int_{T/2}^{T} x(t)\, n\left(t-\frac{T}{2}\right) dt + \\ &\quad + b_i \int_{T/2}^{T} x(t)\, n(t)\, dt + \int_{T/2}^{T} n(t)\, n\left(t-\frac{T}{2}\right) dt \end{aligned} \tag{1.31}$$

Avec l'hypothèse que le bruit présent dans le canal est blanc, le récepteur devient un estimateur non-biaisé, avec un seuil de décision nul, indépendant de la variance du bruit présent dans le canal. Une autre observation doit être faite sur le terme associé à l'inter-corrélation avec le bruit, qui va influencer de façon négative les performances. En plus de ce fait, étant donné que l'énergie associée à chaque symbole varie, à cause de la séquence chaotique utilisée, une incertitude doit être encore prise en compte pour déterminer le taux d'erreur binaire. Une solution a ce problème est d'employer une modulation FM qui va nous permettre de garder une énergie constante sur la durée du symbole (solution FM-DCSK - [KKJK98]).

Dans les dernières années les solutions DCSK ont reçues plus d'attention étant donné que des systèmes à accès multiple sont proposés [TLT04, MB04, XTL04] avec une évaluation des performances sur des canaux à trajets multiples.

1.5.3 Étalement de spectre par séquence chaotique directe

Dans la section 1.4 plusieurs systèmes d'étalement de spectre ont fait l'objet d'une présentation introductive. Parmi ces méthodes toutes ont un équivalent dans le cas des systèmes de transmission chaotiques. L'idée de base est de remplacer le générateur de séquences pseudo-aléatoires par une dynamique chaotique. Bien sûr pour trouver un intérêt économique les séquences chaotiques jouant le rôle de séquences d'étalement, doivent

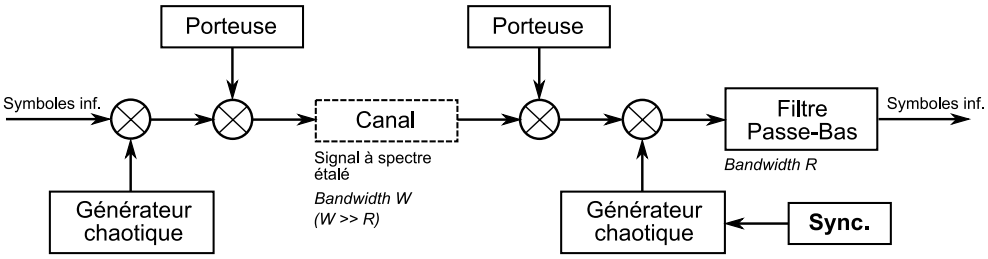


FIG. 1.20 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence chaotique directe

prouver qu'elles offrent de meilleures performances que les codes classiques (séquences de longueur maximale, Gold ...). Si dans le cas des systèmes à étalement de spectre par sauts de fréquence et sauts en temps l'emploi de séquences chaotiques n'est pas vraiment envisagé à cause des problèmes liées à la synchronisation, dans le cas des systèmes à séquence directe plusieurs études ont été réalisées.

Généralement l'étalement de spectre par séquence chaotique directe revient à remplacer directement la séquence d'étalement binaire générée par des registres à décalage, par une séquence chaotique avec des valeurs réelles comprises dans un intervalle bien précisé (fig. 1.20). Les solutions proposées sont introduites surtout pour augmenter les capacités en accès multiple. Initialement les premières variantes envisagent l'emploi de séquences d'étalement analogiques [YC97, KNYC00] où le code d'étalement représente un état correspondant à une dynamique chaotique multi-dimensionnelle. L'avantage essentiel d'une telle solution est la simplicité du système final, en ajoutant qu'en fonction de la dynamique, un système d'étalement du code auxiliaire doit être employé pour atteindre une largeur de bande désirée.

Un deuxième point de vue a été représenté par l'introduction de code d'étalement en temps discret qui permet un contrôle beaucoup plus important des propriétés statistiques du code d'étalement. On peut ainsi envisager deux options : la première suppose un code d'étalement chaotique périodique où le plus souvent la longueur du code chaotique est égale au gain d'étalement (fig. 1.21 a) et aussi une deuxième solution non-périodique où le code d'étalement est considéré de longueur infinie (fig. 1.21 b). L'avantage de la solution périodique est donné par l'emploi des mêmes systèmes qui assurent la synchronisation au sein des systèmes à étalement de spectre classiques.

Particulièrement appliquées aux cas de communications mobiles, pour les connections *downlink* une synchronisation au niveau de système pour les différents récepteurs est facilement maintenue, ainsi une solution de code d'étalement classique peut garantir un minimum d'interférence entre les utilisateurs. Par contre, pour les liaisons *uplink* on se trouve dans la situation où les variantes synchrones ne sont plus envisageables. Dans ces conditions spécifiques, des travaux ont été réalisés prouvant que les séquences chaotiques peuvent facilement surpasser les performances des séquences d'étalement classiques (longueur maximale, Gold ...) [MSR97, MSR99, SMRC02, RSM98, RMS00, CYKB01].

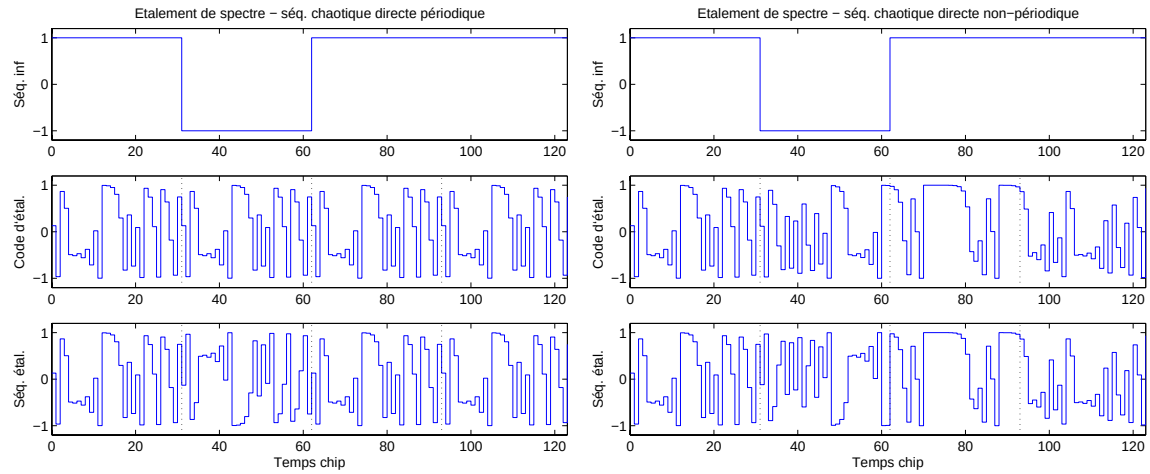


FIG. 1.21 – Exemple d'étalement de spectre par séquence chaotique directe : a) séquence périodique sur la durée symbole ; b) séquence non-périodique ;

Dans ce document les applications proposées étant développées surtout avec une méthode de synchronisation chaotique, dans le cas mono-utilisateur, on ne va plus insister sur les aspects concernant les performances de l'étalement en accès multiple. Ainsi dans notre contexte mono-utilisateur, le système à étalement de spectre par séquence directe chaotique peut être vu comme une application particulière de l'approche CSK cohérent évoquée auparavant. Ainsi toutes les propriétés mises en évidence antérieurement restent valables dans ce cas précis.

1.6 Conclusion

Ce chapitre avait comme objectif l'introduction de quelques notions élémentaires concernant les systèmes dynamiques chaotiques et leur application dans le domaine des télécommunications. Dans la première section les définitions de systèmes dynamiques non-linéaires en temps continu et discret, ainsi que leurs particularisation pour le cas de systèmes chaotiques ont été données. Par la suite on a présenté les méthodes envisageables pour établir éventuellement une synchronisation entre deux systèmes chaotiques dans le but de transmettre un signal informationnel. La troisième section était destinée à la présentation générale des solutions classiques d'étalement de spectre ainsi que des inconvénients associés, et finalement dans la dernière partie les méthodes les plus connues de transmission à porteuse chaotique ont été introduites.

Dans le chapitre suivant on va compléter l'état de l'art des méthodes employées dans ce document par la présentation des solutions de filtrage adaptatif non-linéaire de type Kalman.

Chapitre 2

Filtres de Kalman non-linéaires

2.1 Introduction

Le filtre de Kalman (KF - Kalman filter) est considéré comme une technique de référence pour les problèmes d'estimation linéaire, menant à la solution MMSE (Minimum Mean Square Error), de manière récursive grâce aux modèles d'état du système dynamique [Kal60, Gel80, BSL93]. Dans le cas d'une dynamique non-linéaire le problème d'estimation récursive devient difficile. Comme dans ce contexte une connaissance complète de la densité de probabilité est exigée, l'estimateur optimal conforme aux règles de Bayes, n'est pas d'habitude utilisé en pratique. Pour quelques cas particuliers de dynamiques non-linéaires une solution optimale peut être développée, sous des hypothèses contraignantes [Ben81, Dau88]. Parmi les nombreuses solutions non-optimales disponibles, le filtre de Kalman Étendu (EKF - Extended Kalman Filter) reste une solution populaire car il évite le coût de calcul important habituellement exigé par des approches quasi-optimales telles que le filtre particulaire [AMGC02]. Le EKF se base sur la propagation de la distribution des états, par linéarisation au premier ordre du système non-linéaire, en gardant la même structure que le filtre de Kalman classique. Bien que le EKF puisse faire face aux systèmes faiblement non-linéaires, de larges erreurs peuvent être commises sur les moments a posteriori (moyenne et covariance) en présence de non-linéarités importantes. Cette limite de la linéarisation peut être résolue à l'aide d'un filtre IEKF (Iterated - EKF) mais avec une augmentation du coût de calcul.

Plusieurs méthodes de filtrage de Kalman non-linéaires ont été proposées récemment pour éviter les limitations imposées par le EKF, sans un coût de calcul additionnel significatif. Le UKF, introduit par Julier *et al.* [JU97], dans le contexte de la commande non-linéaire et davantage développé par Wan et van der Merwe [WvdM01], aborde le problème d'approximation d'une manière bien différente du EKF. Ainsi, même s'il utilise une hypothèse gaussienne pour les états, cette fois la statistique est représentée par un ensemble minimal de points judicieusement choisis (*sigma points*). A chaque étape d'estimation, ces points sont propagés à travers

la non-linéarité du modèle (transformation *Unscented*), évitant ainsi le calcul de Jacobiens. En utilisant cette approche, la moyenne et la covariance de la distribution *a posteriori* sont capturés jusqu'au troisième ou deuxième ordre dans la série de Taylor, quelle que soit la non-linéarité considérée. Le UKF est une solution intéressante pour les applications en temps réel, car il réalise un bon compromis entre les performances d'estimation (toujours une meilleure consistence que le EKF), le coût de calcul et la facilité d'implémentation.

Noorgard et al. [NPR00b] ont proposé une autre solution de filtrage Kalman non-linéaire, basée sur une approximation polynomiale des fonctions qui forment le modèle. Pour l'approximation polynomiale ils ont utilisé la relation de Stirling et en fonction de l'ordre de l'approximation faite, deux variantes de filtrage sont proposées : La première (DD1 - Divided Difference 1er ordre) est définie comme une généralisation du filtre proposé par Schei [Sch97], dénommé CDKF (CDKF - Central Difference Kalman Filter), qui utilise une approximation au premier ordre de la non-linéarité ; La deuxième solution (DD2) considère une approximation au deuxième ordre dans la relation de Stirling, et par conséquence offre de meilleures performances d'estimation. Lefebvre *et al.* ont proposé dans [LBS04] une présentation unifiée de l'ensemble des méthodes (UKF, CDKF, DD1) en utilisant une approche de régression statistique linéaire.

En complément des "transformations" non-linéaires évoquées ci-dessus, un autre moyen d'augmenter les performances des méthodes de filtrage non-linéaire est de sortir de l'hypothèse gaussienne des distributions de probabilité. Ainsi dans les années 1970 Alspach et Sorenson [AS72] ont introduit l'idée d'approximer les distributions de probabilité qui caractérisent les états par des sommes de gaussiennes. Avec cette hypothèse l'application du processus de filtrage est simple, et l'approche est compatible avec tous les filtres décrits auparavant. Alspach et Sorenson ont utilisé initialement le EKF et plus récemment van der Merwe et Wan *et al.* [vdMW03] ont proposé des solutions s'appuyant sur la propagation de particules (UKF, filtrage particulaire).

Le dernière méthode d'estimation non-linéaire récursive décrite dans ce chapitre est le filtre à particules. Si dans le cas de la transformation *Unscented* on avait un ensemble limité de points placés de manière déterministe, dans le cas particulaire le nombre de points est plus important et cette fois ils sont choisis aléatoirement dans l'espace de phase conformément à l'hypothèse de distribution initiale. Développée initalement au LAAS de Toulouse [Sal89, MRS91], cette méthode se base sur la loi des grands nombres pour approximer les distributions de probabilité des états. Ce type de filtre est aussi connu sous le nom de filtre Monte-Carlo séquentiel (SMC - Sequential Monte Carlo).

Dans ce chapitre nous proposons une présentation synthétique des diverses solutions de filtrage Kalman non-linéaires, avec une description des avantages et inconvénients de chaque solution. Plusieurs versions de ces filtres (EKF, UKF) seront utilisées dans la suite de notre étude soit dans un objectif de comparaison soit comme un outil d'estimation lorsque nous proposerons des structures de récepteurs.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. La première section est destinée à la présentation des méthodes de filtrage basées sur la linéarisation au premier ordre (EKF, IEKF). Le second paragraphe consi-

dère les implémentations basées sur la transformation *Unscented* (UKF, HOUF). Les aspects unifiés de filtres s'appuyant sur la formule de Stirling sont présentés dans la section III. Dans la quatrième section, l'approximation des distributions par somme de gaussiennes est considérée, et dans la dernière partie de chapitre quelques aspects sur le filtrage particulaire sont évoqués.

2.2 Filtre de Kalman Étendu (EKF)

Comme il a été mentionné dans l'introduction de ce chapitre, le calcul récursif de la statistique d'ordre deux dans le cas d'un modèle linéaire avec des hypothèses de gaussianité des états, a trouvé une solution sous la forme du filtre de Kalman [Kal60]. Son principal intérêt réside dans l'implémentation récursive, qui répartit le coût de calcul sur l'ensemble des observations, réalisant en même temps une minimisation de l'erreur par rapport à un critère d'EQM (Erreur Quadratique Moyenne).

La majorité des méthodes d'estimation récursive proposées jusqu'à présent, pour résoudre le problème de filtrage dans le cas non-linéaire, font des approximations du modèle ou au niveau des hypothèses des statistiques initiales. Chronologiquement la première solution proposée a été le Filtre de Kalman Étendu (EKF - Extended Kalman Filter). Cette solution repose sur un développement en série de Taylor des équations de processus et d'observation qui forment le modèle. Ainsi le Filtre de Kalman Étendu est défini en utilisant les deux idées suivantes [BSL93] :

- une linéarisation au premier ordre dans le développement de Taylor pour les non-linéarités correspondantes aux équations de processus et/ou observation
- une estimation de type LMMSE

2.2.1 Modèle général de filtrage

Ainsi si on considère le modèle d'estimation suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k\right) + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}\left(\mathbf{x}_k\right) + \mathbf{n}_k \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\{\mathbf{f}\left(\cdot\right), \mathbf{h}\left(\cdot\right)\}$ désignent des fonctions non-linéaires et où les bruits additifs $\{\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_k\}$ sont considérés centrés, gaussiens et avec une inter-corrélation nulle :

$$E\left[\mathbf{v}_k\right] = E\left[\mathbf{n}_k\right] = \mathbf{0}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^T\right] &= \mathbf{Q}\delta_{ij} \\
E\left[\mathbf{n}_k\mathbf{n}_j^T\right] &= \mathbf{R}\delta_{ij} \\
E\left[\mathbf{v}_k\mathbf{n}_j^T\right] &= \mathbf{0} \\
E\left[\mathbf{v}_k\mathbf{x}_j^T\right] &= E\left[\mathbf{n}_k\mathbf{x}_j^T\right] = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Comme dans le cas de filtre de Kalman standard (modèles linéaires) l'estimation à l'instant k sera accomplie par approximation à l'ordre deux de la statistique des états :

- état estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \approx E\left[\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}^k\right]$
- matrice de covariance $\mathbf{P}_{k|k}$

Les détails qui donnent le développement des expressions pour le calcul de la statistique du vecteur d'état estimé sont présentés dans l'annexe B.

2.2.2 Principe du filtre de Kalman Étendu (EKF)

Le schéma général qui présente la structure récursive de l'algorithme de Kalman Étendu est proposé en figure 2.1. Ainsi de façon similaire au filtre de Kalman classique le mécanisme d'estimation est divisé en deux parties :

- l'étape de mise à jour temporelle qui réalise l'évaluation de la statistique d'ordre deux de l'état prédit
- l'étape de mise à jour par des observations qui donne la valeur estimée en utilisant la connaissance de l'état observé

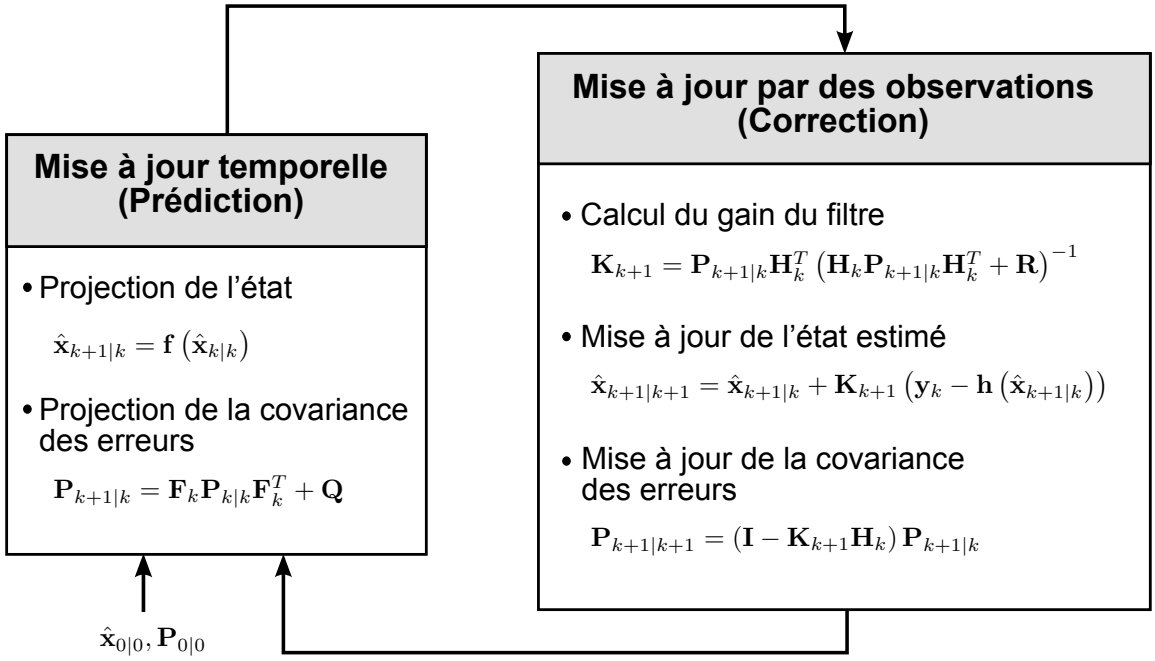


FIG. 2.1 – Application récursive de l'algorithme de Kalman Étendu

où $\mathbf{F}_k \triangleq \nabla\mathbf{f}|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}$ et $\mathbf{H}_k \triangleq \nabla\mathbf{h}|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}$. Une solution plus générale est définie en considérant une relation non-linéaire par rapport aux bruits de processus et d'observation. Comme dans le contenu de ce document on travaille toujours avec des hypothèses de bruits additifs, les équations générales de filtrage seront simplifiées.

Toute méthode de filtrage de Kalman peut être écrite comme une application récursive d'une transformation de la statistique de l'état au cours du temps. Ainsi pour une méthode de filtrage quelconque l'algorithme est écrit sous la forme de deux transformations successives, l'une pour implémenter les équations de mise à jour temporelle et l'autre pour la propagation de la statistique de l'état prédit à travers le modèle d'observation. En utilisant l'observation courante on peut calculer le vecteur d'innovation et estimer la nouvelle statistique de l'état. La transformation non-linéaire est définie comme une application destinée au calcul de la statistique d'une v.a. $\mathbf{x}$ qui subit une transformation à travers la fonction $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

Dans cette section on va juste présenter la transformation non-linéaire considérée par le EKF pour mettre en place le mécanisme de filtrage. Ainsi, en utilisant le modèle de propagation donné par l'équation (2.3), la linéarisation effectuée dans la série de Taylor va mener aux expressions suivantes des moments d'ordre un et deux :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{P}_{yy} &= \nabla\mathbf{f} \cdot \mathbf{P}_{xx} \cdot (\nabla\mathbf{f})^T \end{aligned} \tag{2.4}$$

Un tel calcul des moments à chaque étape de filtrage va naturellement dégrader les performances en présence de non-linéarités prononcées. Les figures 2.2 illustrent les erreurs engendrées dans plusieurs situations pour le cas où $f(x) = \cos x$.

La v. a. gaussienne initiale est caractérisée par le choix de la moyenne et de la variance comme suit : $\mu = \{-0.7, -0.6, -0.5\}$ et $\sigma^2 = \{0.0125, 0.025, 0.05\}$. Pour toutes les figures, la distribution est représentée en bleu, avec la partie jaune associée à l'intervalle symétrique donnée par la moyenne et l'écart type $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$. Pour la distribution transformée on a aussi considéré les vraies moyennes et écarts types déterminés par la propagation de 10^6 échantillons à travers la fonction non-linéaire (méthode de Monte Carlo - MC). On observe que ces variations de la statistique initiale se transposent au niveau de la statistique transformée par une erreur d'estimation des deux premiers moments. En plus de ces figures qualitatives, on présente à la fin de la prochaine section dans le tableau 2.1 les résultats numériques obtenus pour ces cas. Ainsi, on peut conclure que même pour une non-linéarité "faible" la transformation basée sur la linéarisation au premier ordre peut présenter des erreurs importantes d'estimation.

2.2.3 Filtre de type IEKF

Une méthode permettant d'améliorer le processus d'estimation correspond au calcul successif des états prédits $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$, $\mathbf{K}_{k+1}$ et $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$, en effectuant chaque fois une linéarisation autour de l'état le plus récent. Pour développer l'algorithme on va utiliser les notations $\hat{\mathbf{x}}^{\{i\}}_{k+1|k+1}$, $\mathbf{K}^{\{i\}}_{k+1}$ et $\mathbf{P}^{\{i\}}_{k+1|k+1}$, $i = 0, 1, ...$ pour désigner les paramètres estimés à la i-ème étape. En appliquant le même principe que dans le filtre de Kalman Étendu, présentées dans l'annexe B, les équations récursives pour le filtre IEKF sont facilement déduites [Gel80] :

1. Initialisation du filtre :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{\{0\}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \\ \mathbf{P}^{\{0\}}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} \end{aligned} \tag{2.5}$$

2. Calcul récursif de $\hat{\mathbf{x}}^{\{i\}}_{k+1|k+1}$, $\mathbf{K}^{\{i\}}_{k+1}$ et $\mathbf{P}^{\{i\}}_{k+1|k+1}$

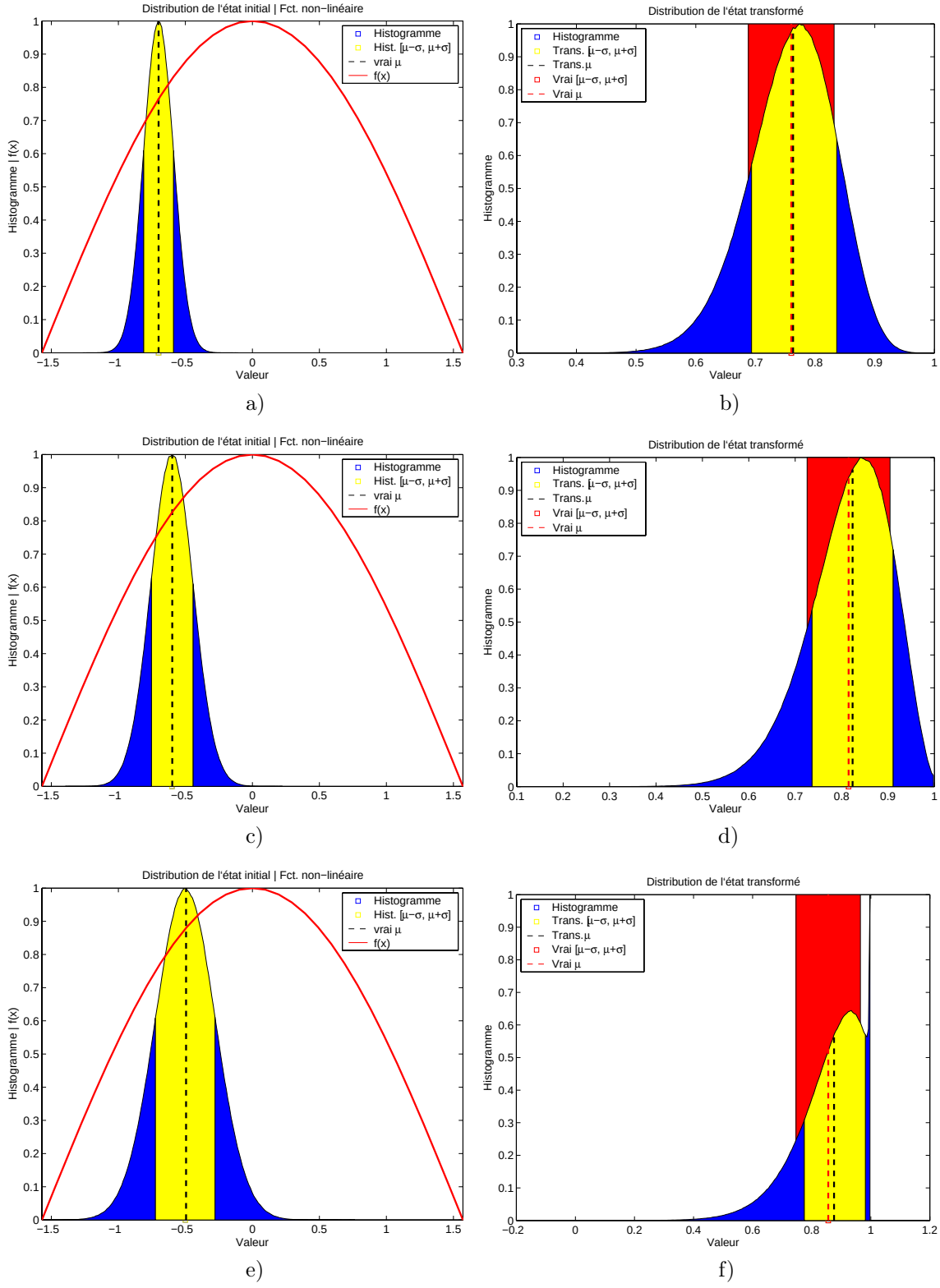


FIG. 2.2 – Effets de la linéarisation au premier ordre sur l'estimation de la statistique de la v.a. transformée (figures b), d) et f)) pour une distribution initiale gaussienne caractérisée par : a), b) $\mu = -0.7$, $\sigma^2 = 0.0125$; c), d) $\mu = -0.6$, $\sigma^2 = 0.025$; e), f) $\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.05$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{\{i+1\}} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}^{\{i\}} \left(\mathbf{y}_k - \mathbf{h} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{\{i\}} \right) - \mathbf{H}_{k+1,i} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{\{i\}} \right) \right) \\
\mathbf{K}_{k+1}^{\{i\}} &= \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1,i}^T \left(\mathbf{H}_{k+1,i} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1,i}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \\
\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{\{i\}} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}^{\{i\}} \mathbf{H}_{k+1,i} \right) \mathbf{P}_{k+1|k}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

où $\mathbf{H}_{k+1,i}^T = \nabla \mathbf{h}|_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{\{i\}}}$

3. Récupération des états estimés, après la i-ème itération :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{\{i\}} \\
\mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{\{i\}}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Une observation immédiate concerne le fait que si on considère la valeur de $i = 0$, les équations (2.5), (2.6) et (2.7) correspondent aux équations de mise à jour par des observations rencontrées dans le cas classique du filtrage EKF.

Le nombre des i étapes successives à effectuer dépend du critère d'optimisation considéré. Ainsi par exemple une solution est représentée par l'application de l'algorithme jusqu'à la détection d'un changement minimal par rapport à l'étape précédente. Par contre il faut bien préciser que chaque itération joue sur le coût total de calcul nécessaire à la mise en oeuvre du filtre.

Si les équations récursives des filtres EKF et IEKF sont obtenues avec la prise en compte des premiers termes dans la série de Taylor, ce principe peut être étendu pour le traitement des problèmes où les non-linéarités sont plus importantes. Dans les sections suivantes on va présenter d'autres transformations possibles qui peuvent faire une estimation plus correcte de la statistique transformée avec même la possibilité d'obtenir une solution de calcul exacte [LABS06], en considérant l'influence des termes supérieurs dans le développement de Taylor.

2.3 Filtre de Kalman *Unscented*

2.3.1 Transformation *Unscented*

Le filtre de Kalman *Unscented* est défini de même que le EKF à l'aide d'une transformation non-linéaire de statistique appelée dans ce cas *Unscented*. La transformation *Unscented* a été introduite par Julier [JU97], dans l'idée d'estimer la distribution de probabilité de la statistique transformée en évitant d'approximer la

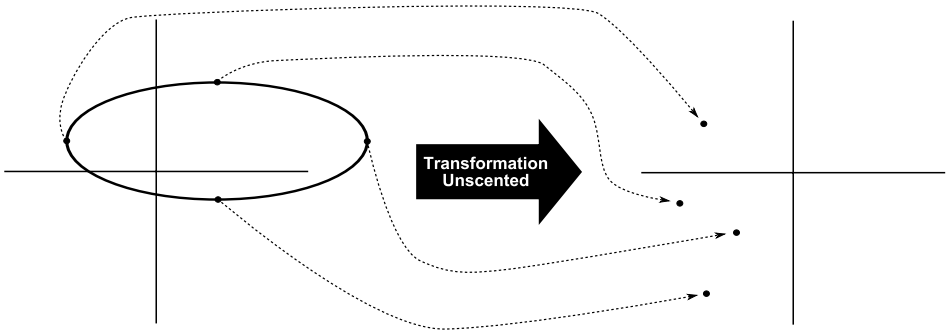


FIG. 2.3 – Le principe de la transformation *Unscented*

fonction non-linéaire, dont la linéarisation au premier ordre fait partie. Ainsi cette approche se base sur une constellation de points (appelés *sigma points*) et respectivement leurs pondérations, distribués dans l'espace d'état de la v.a. initiale pour approximer sa statistique. Comme on peut l'observer sur la figure 2.3 ces points sont choisis de telle manière que leur moyenne et covariance représentent exactement la statistique initiale.

L'ensemble de points choisi $\left\{\mathbf{x}^{(i)}\right\}$, auquel on associe les coefficients de pondération $\left\{W^{(i)}\right\}$ calculés d'une manière déterministe forme l'ensemble de *sigma points* $\mathsf{S} = \left\{\mathbf{x}^{(i)}, W^{(i)}\right\}$, qui caractérise complètement les vraies moyenne et covariance. Cet ensemble de points subit ensuite la propagation à travers la fonction non-linéaire, comme dans le cas du EKF (eq. 2.3).

Cette méthode de propagation de points a une ressemblance avec le filtrage particulaire qui sera présenté plus tard dans ce chapitre, mais à la différence de celui-ci, le choix de points est déterministe et les pondérations associées sont choisies d'une autre manière, sans se baser sur la distribution.

Dans son article [JUDW00] Julier démontre qu'un tel ensemble de points, permettant le calcul de la moyenne et covariance de la v.a. transformée, est donné par un nombre de $2N_x$ points, où N_x est la dimension du vecteur état $\mathbf{x}$. Les points sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(i)} &= \bar{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{N_x \mathbf{P}_{xx}}\right)_i \\ W^{(i)} &= 1/2N_x \\ \mathbf{x}^{(i+N_x)} &= \bar{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{N_x \mathbf{P}_{xx}}\right)_i \\ W^{(i+N_x)} &= 1/2N_x \end{aligned} \tag{2.8}$$

où $i = 1...N_x$,$(\times)_i$ représente la i-ème ligne ou colonne de la matrice $\sqrt{N_x \mathbf{P}_{xx}}$ et où $W^{(i)}$ est la pondération associée. Dans la figure 2.4 on donne un exemple pour le choix de points *sigma* avec l'hypothèse d'une

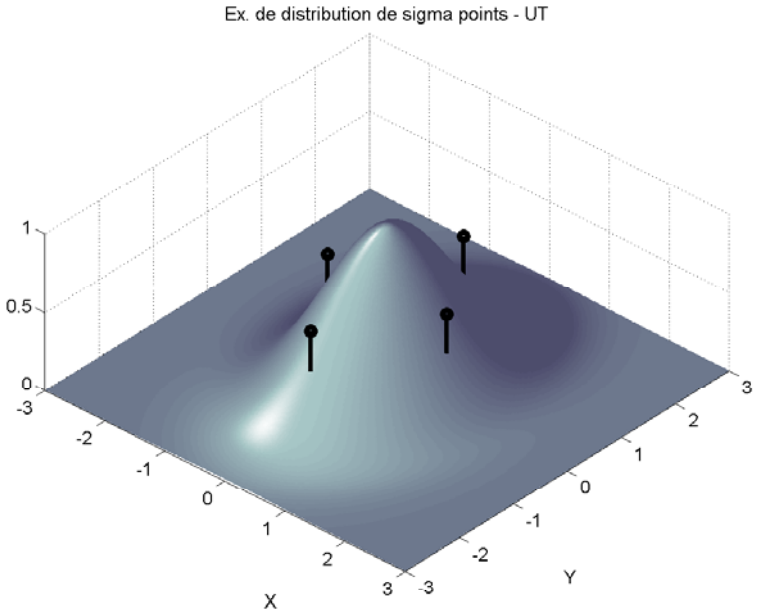


FIG. 2.4 – Un exemple de distribution de sigma points pour une v.a. gaussienne bi-dimensionnelle dans le cas de la transformation Unscented

distribution initiale gaussienne bi-dimensionnelle. Les points sont situés par rapport à la surface gaussienne à une distance égale au coefficient de pondération.

Étant donné cet ensemble de points, la moyenne et la variance sont calculées de la manière suivante :

1. par propagation par la fonction non-linéaire on obtient l'ensemble de points transformés :

$$\mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}^{(i)}\right] \tag{2.9}$$

2. la moyenne est calculée par la somme des points transformés, pondérés par les coefficients $\left\{W^{(i)}\right\}$:

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=1}^{2N_x} W^{(i)} \mathbf{y}^{(i)} \tag{2.10}$$

3. la covariance est alors calculée comme :

$$\mathbf{P}_{yy} \approx \sum_{i=1}^{2N_x} W^{(i)} \left\{\mathbf{y}^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}\right\} \left\{\mathbf{y}^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}\right\}^T \tag{2.11}$$

L'ensemble de points ainsi défini, permet d'approximer la valeur moyenne de la vraie distribution jusqu'au deuxième ordre dans le développement de Taylor mais par contre offre une estimation biaisée au niveau de la covariance. Ce biais découle de l'impossibilité de l'ensemble de points à traduire l'influence des moments supérieurs de la statistique. Pour corriger ce problème la solution la plus simple est de compléter l'ensemble de points choisi avec un où plusieurs points. Les mêmes auteurs [JUDW00, vdM04] ont alors proposé d'ajouter un point correspondant à la moyenne et avec son coefficient de pondération de permettre le réglage de

l'influence des moments supérieurs. Ainsi le nouvel ensemble de *sigma points* proposé est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(0)} &= \bar{\mathbf{x}} \\
W^{(0)} &= \kappa / \left(N_x + \kappa\right) \\
\mathbf{x}^{(i)} &= \bar{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{\left(N_x + \kappa\right)\mathbf{P}_{xx}}\right)_i \\
W^{(i)} &= 1 / \left\{2\left(N_x + \kappa\right)\right\} \\
\mathbf{x}^{(i+N_x)} &= \bar{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{\left(N_x + \kappa\right)\mathbf{P}_{xx}}\right)_i \\
W^{(i+N_x)} &= 1 / \left\{2\left(N_x + \kappa\right)\right\}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où $i = 1...N_x$. Le choix original des points *sigma*, défini par les équations (2.8), a la propriété que l'ellipsoïde qui limite le positionnement des points augmente avec la dimension N_x de l'espace d'état. Ainsi le choix du nouveau paramètre introduit κ, en plus de capturer l'influence des moments supérieurs, doit être utilisé aussi pour limiter la dispersion des points dans l'espace d'état en présence de forte non-linéarité.

Avec la définition du nouvel ensemble de points *sigma* on observe que la distance du i-ème point par rapport à $\bar{\mathbf{x}}$ est proportionnelle à la valeur $\sqrt{(N_x + \kappa)}$. Ainsi le choix du paramètre $\kappa = 0$, nous place dans le cas des équations (2.8), tandis qu'une valeur $\kappa > 0$ éloigne les points de la moyenne, et avec une valeur négative de κ, on trouve l'effet inverse avec un rapprochement des points. Il existe un cas spécial avec la solution de $\kappa = 3 - N_x$, correspondant à l'annulation de la dimension N_x sur la distribution de points. Par contre avec le choix $\kappa = 3 - N_x < 0$ on va se retrouver dans un cas où le coefficient de pondération du point situé sur la moyenne est négatif et la covariance obtenue après propagation peut devenir semi-définie négative.

2.3.2 Transformation *scaled-Unscented*

Enfin il existe une solution proposée dans [JUDW00] où un nouvel ensemble de points est proposé avec un paramètre de décalage :

$$\mathbf{x}_s^{(i)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\left(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(0)}\right),\ i = 0...2N_x,\ (0 < \alpha < 1) \tag{2.13}$$

Cette nouvelle transformation porte le nom de transformation *scaled-Unscented*. Les auteurs ont démontré que le nouveau paramètre de décalage α introduit ne va pas influencer de manière négative l'estimation de la statistique de la variable transformée $(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{P}_{yy})$, avec une expression exacte jusqu'au deuxième ordre des moments de la v.a. initiale, et une pondération des autres moments supérieurs grâce à α. Enfin les auteurs

ont proposé un ensemble de points qui intègre ce décalage ainsi que les nouvelles pondérations associées :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x}^{(0)} = \bar{\mathbf{x}} & & W_{(m)}^{(0)} = \frac{\lambda}{N_x+\lambda} \\ \mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{(N_x+\lambda)\,\mathbf{P}_{xx}}\right)_i & i = 1,...,N_x & W_{(c)}^{(0)} = \frac{\lambda}{N_x+\lambda} + \left(1-\alpha^2+\beta\right) \\ \mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{(N_x+\lambda)\,\mathbf{P}_{xx}}\right)_i & i = N_x+1,...,2N_x & W_{(m)}^{(i)} = W_{(c)}^{(i)} = \frac{1}{2(N_x+\lambda)} \qquad i = 1,...,2N_x \end{array} \tag{2.14}$$

où $\lambda = \alpha^2\left(N_x + \kappa\right) - N_x$ et les pondérations désignées par $W_{(m)}^{(i)}$ et $W_{(c)}^{(i)}$ sont associées au calcul de la moyenne et de la covariance, respectivement.

L'expression du point central $\mathbf{x}^{(0)}$ garantit une matrice de covariance définie semi-positive. Le choix des paramètres qui apparaissent dans le calcul de l'ensemble de points se fait de la manière suivante :

- afin d'avoir une matrice de covariance définie semi-positive, on prendra $\kappa \geq 0$. Il s'avère que la valeur de κ n'est pas critique, de telle sorte que $\kappa = 0$ correspond généralement à tous les cas d'estimation ;
- le paramètre $0 < \alpha < 1$ considéré antérieurement va jouer directement sur la dimension de l'ellipsoïde de distribution des *sigma points*. Ainsi de façon idéale sa valeur doit être petite pour limiter l'influence de certains effets de non-linéarité dans les régions éloignées de la valeur estimée ;
- le dernier paramètre introduit β, est choisi positif pour avoir une certaine connaissance des moments d'ordre supérieur de la statistique initiale dans le modèle. Par exemple pour une hypothèse de distribution initiale gaussienne nous prendrons $\beta = 2$.

Pour étudier les performances de cette nouvelle transformation nous allons considérer de nouveau la propagation d'une distribution initiale gaussienne à travers certaines fonctions non-linéaires. Ainsi dans les figures 2.5 a) et b) on va reprendre la fonction non-linéaire $f\left(x\right) = \cos x$, avec pour paramètres de la distribution initiale $\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.05$; On ajoute aussi que pour la transformation Unscented considérée les paramètres suivants ont été choisi : $\kappa = 0$, $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 2$.

Comment on peut l'observer, la transformation Unscented arrive à mieux estimer les deux moments dans le cas d'une fonction non-linéaire de type *cosinus*, mais par contre avec l'augmentation de l'ordre de la non-linéarité ce type de transformation présente des erreurs. Ces conclusions sont reflétées numériquement dans le tableau 2.1 où la linéarisation et la transformation *Unscented* sont comparées. Les résultats sont issus d'une simulation de type Monte-Carlo avec la propagation d'une séquence aléatoire de 10^6 échantillons.

2.3.3 Construction du modèle de filtrage récursif UKF

Avec la définition de la transformation *Unscented* donnée ci-dessus la forme récursive du filtrage de Kalman peut être facilement déduite. Ainsi Julier et al. [JUDW00, vdM04] proposent une formulation générale dont le vecteur d'état est modifié en ajoutant à l'état original les vecteur associés aux bruits de processus et

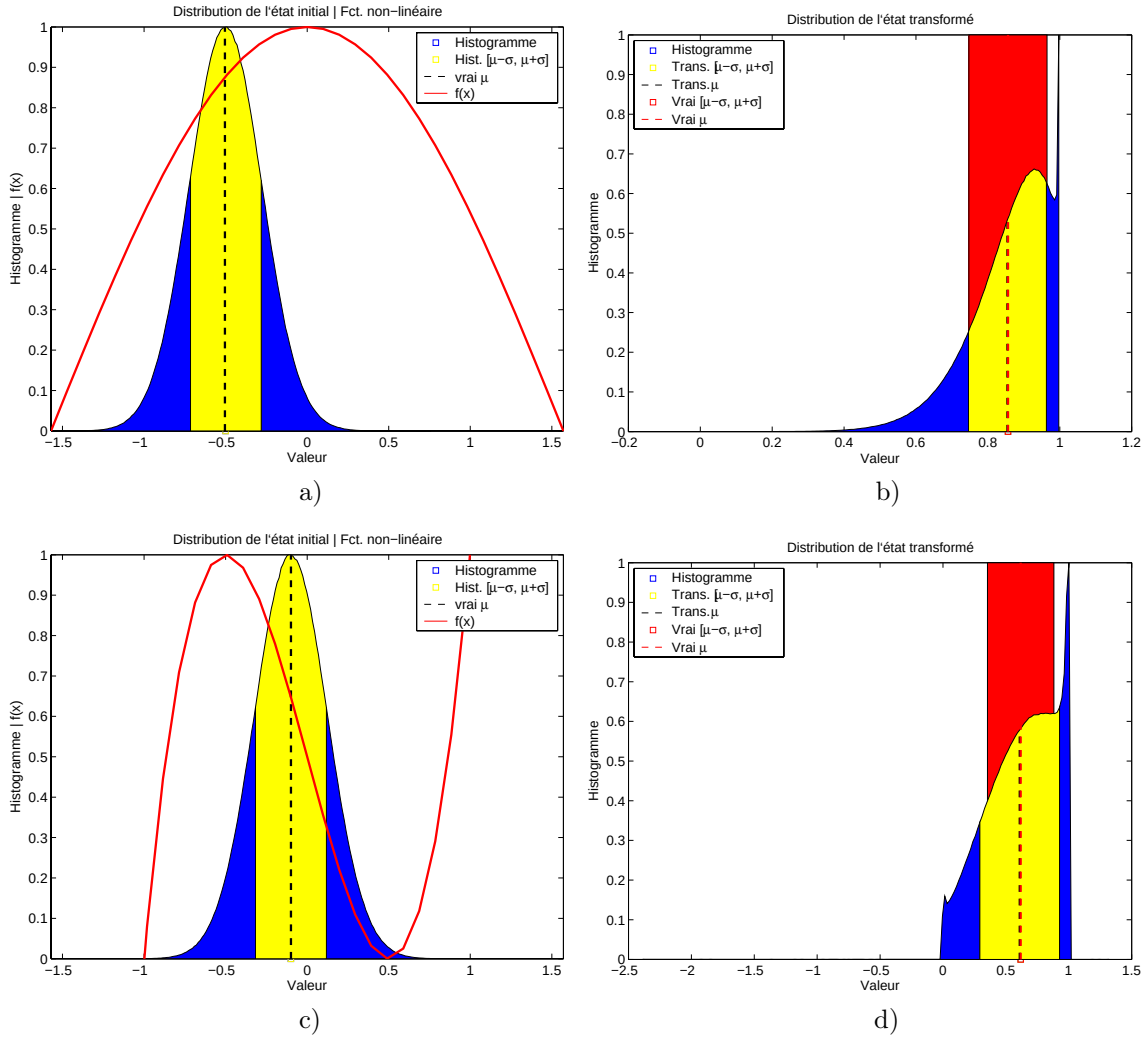


FIG. 2.5 – Effets de la transformation *Unscented* sur l'estimation de la statistique de la v.a. transformée (avec une non-linéarité de type $\cos x$ - figures a, b ; et de type polynomiale d'ordre 3 : $f(x) = 2x^3 - 1.5x + 0.5$ - figures d, f) pour une distribution initiale gaussienne caractérisée par : a), b) $\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.05$; c), d) $\mu = -0.1$, $\sigma^2 = 0.05$;

Fonction non-linéaire $f(x)$	$x = \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$		$y = f(x)$ - EKF		$y = f(x)$ - UKF		$y = f(x)$ - MC	
	μ_x	σ_x^2	μ_y	σ_y^2	μ_y	σ_y^2	μ_y	σ_y^2
$f(x) = \cos x$	- 0.7	0.0125	0.76484	0.005187	0.76006	0.005233	0.97044	0.005172
$f(x) = \cos x$	-0.6	0.025	0.82534	0.007970	0.81502	0.008183	0.8151	0.007980
$f(x) = \cos x$	-0.5	0.05	0.87758	0.011492	0.85564	0.012455	0.85592	0.011855
$f(x) = 2x^3 - 1.5x + 0.5$	-0.1	0.05	0.648	0.10368	0.618	0.10548	0.61804	0.069748

TAB. 2.1 – Performances des transformations EKF et Unscented pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité

d'observation. Le vecteur final obtenu, en utilisant un modèle de filtrage similaire à celui donné par l'équation (2.1), est écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{n}_k \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

La dimension du nouveau vecteur d'état augmenté est $N_a = N_x + N_v + N_n$, où N_x, N_v et N_n représentent les dimensions des vecteurs $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{v}_k$ et $\mathbf{n}_k$ respectivement. Étant données les nouvelles notations, le modèle d'estimation récursif peut être écrit sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{f}^a\left(\mathbf{x}_k^a\right) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}^a\left(\mathbf{x}_k^a\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

avec la transformation Unscented qui calcule les points *sigma* à partir des expressions suivantes des moments :

$$\begin{aligned} \mu_k^a &= \begin{pmatrix} \mu_k \\ \mathbf{0}_{N_v \times 1} \\ \mathbf{0}_{N_n \times 1} \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{k|k}^a &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Bien sûr un modèle plus général peut être écrit avec la prise en compte de certaines corrélations entre les bruits et les états ou entre les bruits eux-mêmes, mais pour tous les cas considérés par la suite un tel développement n'est pas nécessaire. Finalement les notations introduites nous permettent d'écrire l'algorithme récursif de filtrage pour un instant k quelconque, en utilisant la succession d'étapes suivantes :

1. Construction de l'ensemble de points *sigma* en utilisant les relations (2.14) : $\left\{\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}, W^{(i)}\right\}_{i=0...N_a}$
2. Propagation de l'ensemble des points construit à travers la fonction de processus :

$$\mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)} = \mathbf{f}^a\left(\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}\right),\ i = 0...N_a \tag{2.18}$$

3. Calcul de la valeur estimée et de la covariance des erreurs prédites :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \sum_{i=1}^{N_a} W_{(m)}^{(i)} \mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)} \\
\mathbf{P}_{x_{k+1|k}x_{k+1|k}} &= \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \left\{ \mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right\} \left\{ \mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right\}^T
\end{aligned} \tag{2.19}$$

4. Propagation des points *sigma* à travers le modèle d'observation :

$$\mathbf{y}_{k+1|k}^{(i)} = \mathbf{h}^a \left(\mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)} \right),\ i = 0...N_a \tag{2.20}$$

5. Calcul de l'observation prédite, de la covariance de l'innovation et de la matrice de cross-covariance :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} &= \sum_{i=1}^{N_a} W_{(m)}^{(i)} \mathbf{y}_{k+1|k}^{(i)} \\
\mathbf{P}_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \left\{ \mathbf{y}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} \right\} \left\{ \mathbf{y}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} \right\}^T \\
\mathbf{P}_{x_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \left\{ \mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right\} \left\{ \mathbf{y}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} \right\}^T
\end{aligned} \tag{2.21}$$

6. Expression du gain de Kalman et calcul final de l'état estimé et de la covariance des erreurs :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{x_{k+1|k}y_{k+1|k}} \mathbf{P}_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}}^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} \right) \\
\mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{x_{k+1|k}x_{k+1|k}} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} \mathbf{K}_{k+1}^T
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Avec les expressions qui caractérisent l'implémentation récursive du filtrage de Kalman, le développement de la structure classique du filtrage de type *scaled-Unscented* est accompli. On souligne encore une fois que la solution choisie pour former l'ensemble de points *sigma* n'est pas unique ; Dans le paragraphe qui suit nous évoquons une méthode associée à la transformation Unscented qui grâce à un nombre plus grand de points réussit une meilleure approximation des moments supérieurs.

2.3.4 Filtre HOUF

On a déjà mentionné que la transformation Unscented et implicitement la structure de Kalman déduite réussit à estimer correctement les moments de la distribution transformée, jusqu'à un ordre limité. Tenne

et Singh [TS03] sont les premiers à s'interroger sur la possibilité d'améliorer l'approximation des moments supérieurs à l'aide d'un ensemble de points similaire. Ainsi ils proposent le HOUF (Higher Order Unscented Filter) comme une structure similaire au filtre Unscented classique, dont le nombre de points depend de la précision souhaitée pour l'estimation des moments supérieurs.

Le nouvel ensemble de *sigma* points se forme de façon similaire, avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &= \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}^{(i)} &= \bar{\mathbf{x}} + (L+\kappa)\,\sigma_i,\ i = 1, ..., N_x + q \\ \mathbf{x}^{(i)} &= \bar{\mathbf{x}} - (L+\kappa)\,\sigma_i,\ i = N_x + q + 1, ..., 2\,(N_x + q) \end{aligned} \tag{2.23}$$

où $L = N_x + q$ est la dimension augmentée de l'espace d'état, q est le nombre additionnel de points, et où $\sigma_i = \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_L$ sont choisis sur chaque dimension de l'espace d'état. Le principe est similaire, les points sont propagés par la fonction non-linéaire du modèle ; Dans le cas simplifié mono-dimensionnel on doit obtenir l'expression suivante pour les moments calculés par la transformation Unscented d'ordre supérieur :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \sum_{i=0}^{2L} W^{(i)} y^{(i)} \\ m_y^j &= \sum_{i=0}^{2N_x} W^{(i)} \left\{ y^{(i)} - \bar{y} \right\}^j \end{aligned} \tag{2.24}$$

où $\bar{y}$ et m_y^j représentent la moyenne et respectivement le moment centré d'ordre j.

Étant données les notations précédentes plusieurs solutions sont possibles pour le choix des points, la première considérant, par exemple pour le cas mono dimensionnel, deux positions σ_1 et σ_2 pour les points *sigma*. Ce nouvel ensemble est supposé respecter plusieurs contraintes pour une estimation correcte des moments, mais une solution générale pour toute distribution initiale est difficile à déterminer. Sous hypothèse gaussienne, avec la même relation $L+\kappa = 3$ que pour la transformation Unscented classique, et en développant les équations jusqu'au 8-ème ordre, on obtient les relations suivantes pour le calcul des positions et des pondérations :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \left(\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{10}{9}} \right) P_x \\ \sigma_2^2 &= \frac{10}{3} P_x - \sigma_1^2 \end{aligned}$$

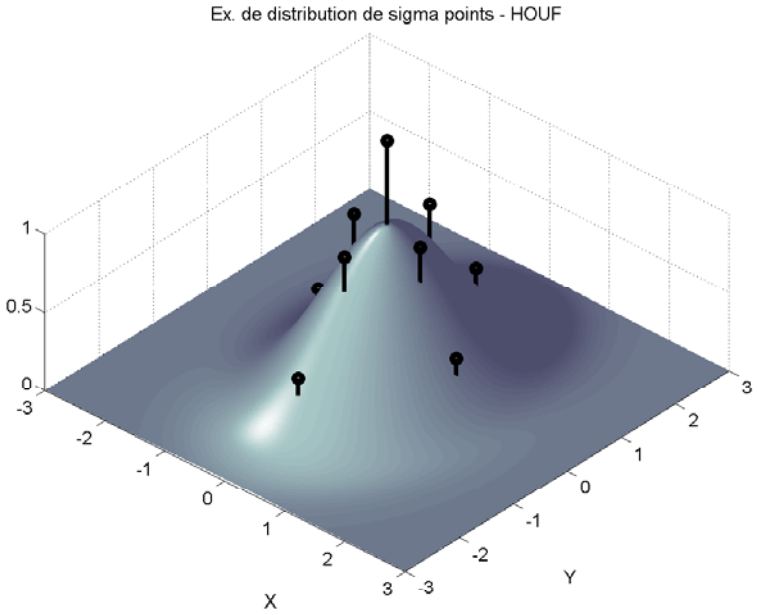


FIG. 2.6 – Un exemple de distribution de *sigma points* pour une v.a. gaussienne bi-dimensionnelle - transformation HOUF

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= \frac{1}{60}\frac{21\sigma_1^2 - 55P_x}{3\sigma_1^2 - 5P_x} \\ W^{(2)} &= \frac{1}{3}\frac{3P_x\left(\sigma_1^2 - P_x\right)}{\left(3\sigma_1^2 - P_x\right)\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2\right)} \\ W^{(0)} &= 1 - 2\left(W^{(1)} + W^{(2)}\right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Cet ensemble de points a été désigné sous le nom $2-\sigma$, en tenant compte que le nombre de points déterminé se situe dans l'espace d'état sur deux ellipses correspondant dans le cas mono dimensionnel aux valeurs de σ_1 et σ_2. On illustre en figure 2.6 le positionnement de l'ensemble de points et des pondérations sur la même distribution gausienne que dans le cas de la transformée Unscented.

2.4 Filtre CDKF

De façon parallèle avec le développement de structures UKF présentées auparavant, d'autres solutions ont été proposées pour contourner le problème du calcul de dérivés partielles et de stabilité rencontrés dans le cas de filtrage étendu. Ainsi le *Divided Difference Filter* proposé par Norgaard et al. [NPR00a, NPR00b] et le *Central Difference Kalman Filter* proposé par Ito et Xiong [IX00] utilisent la formule d'interpolation polynomiale de Stirling pour approximer la non-linéarité présente dans le modèle, interpolation qui permet par la suite le calcul de moments de la statistique transformée. Comme le fait remarquer Van Der Merwe [vdM04], ces deux structures sont presque identiques et peuvent être désignées simplement sous le nom de *Central Difference Kalman Filter* (CDKF). Cette méthode de filtrage ne sera pas exploitée dans les chapitres

qui suivent, ainsi nous donnons juste les aspects généraux de la formule de Stirling et le calcul des moments en utilisant la transformation associée.

2.4.1 Formule d'interpolation polynomiale de Stirling

Comme dans les développements en série de Taylor, l'interpolation avec la formule de Stirling est donnée pour une approximation au deuxième ordre, avec une hypothèse de fonction mono-dimensionnelle, par la relation :

$$f(x) = f(\bar{x}) + \tilde{D}_{\Delta_x} f + \frac{1}{2!}\tilde{D}^2_{\Delta_x} f \tag{2.26}$$

où $f(\cdot)$ est la fonction non-linéaire à approximer et où $\tilde{D}_{\Delta_x} f$, $\tilde{D}^2_{\Delta_x} f$ représentent les opérateurs d'accroissement centré du premier et deuxième ordre respectivement, appliqués à la fonction $f(\cdot)$. Dans le cas scalaire, ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\Delta_x} f &= (x - \bar{x}) \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} \\ \tilde{D}^2_{\Delta_x} f &= (x - \bar{x})^2 \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h) - 2f(\bar{x})}{h^2} \end{aligned} \tag{2.27}$$

où h est la longueur de l'intervalle choisi, pour accomplir l'approximation. Pour étendre ces résultats aux cas multi-dimensionnel, la solution proposée est de découpler statistiquement la v. a. $\mathbf{x}$ initiale en utilisant la transformation linéaire suivante [Sch97] :

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= {\mathbf{S_x}}^{-1}\mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) &\doteq \mathbf{f}(\mathbf{S_x}\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{2.28}$$

où $\mathbf{S_x}$ représente la matrice obtenue par la factorisation Cholesky de la matrice de covariance $\mathbf{P_x}$:

$$\mathbf{P_x} = \mathbf{S_x}{\mathbf{S_x}}^T \tag{2.29}$$

Ces décompositions permettent l'application de l'approximation réalisée antérieurement, dans le cas multi-dimensionnel, indépendamment pour chaque composante de la fonction $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$[vdM04] :

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{\Delta_z}} \tilde{\mathbf{f}} = \left(\sum_{i=1}^{N_x} \mathbf{\Delta}_{\mathbf{z}_i} \mathbf{m}_i \mathbf{d}_i \right) \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{z}})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{\Delta_z}}\tilde{\mathbf{f}} = \left(\sum_{i=1}^{N_x}\mathbf{\Delta}^2_{\mathbf{z}_i}\mathbf{d}_i^2 + \sum_{j=1}^{N_x}\sum_{q=1,q\neq j}^{N_x}\mathbf{\Delta}_{\mathbf{z}_j}\mathbf{\Delta}_{\mathbf{z}_q}\left(\mathbf{m}_j\mathbf{d}_j\right)\left(\mathbf{m}_q\mathbf{d}_q\right)\right)\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}\right) \tag{2.30}$$

où $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{z}_i} = \left(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}\right)_i$ est la i-ème composante du vecteur $\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}$, N_x est la dimension de l'espace d'état et $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{d}_i^2$ représentent la différence partielle au premier ordre, la moyenne et la différence partielle au deuxième ordre, respectivement :

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_i\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}\right) &= \frac{1}{2h}\left[\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}+h\mathbf{e}_i\right)-\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}-h\mathbf{e}_i\right)\right]\\
\mathbf{m}_i\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}\right) &= \frac{1}{2}\left[\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}+h\mathbf{e}_i\right)+\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}-h\mathbf{e}_i\right)\right]\\
\mathbf{d}_i^2\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}\right) &= \frac{1}{2h^2}\left[\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}+h\mathbf{e}_i\right)+\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}-h\mathbf{e}_i\right)-2\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$\mathbf{e}_i$ étant le i-ème vecteur unité.

La mise en forme de l'approximation ci-dessus, pour la fonction multidimensionnelle $\tilde{\mathbf{f}}\left(\cdot\right)$, va nous permettre par la suite l'implémentation d'une solution similaire à la transformation Unscented pour le calcul de la statistique d'une variable aléatoire transformée. D'ailleurs si on revient au développement initial, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}\left(\bar{\mathbf{z}}\pm h\mathbf{e}_i\right) &= \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}\left(\bar{\mathbf{z}}\pm h\mathbf{e}_i\right)\right)\\
&= \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{z}}\pm h\mathbf{S}_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_i\right)\\
&= \mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{x}}\pm h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}\right)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

où $\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}$ représente la i-ème colonne de la matrice Cholesky obtenue par la décomposition de $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$. Avec cette observation on voit bien qu'on tombe facilement sur l'ensemble de points proposé par la transformation Unscented, bien sûr avec d'autres coefficients de pondération.

2.4.2 Estimation de la moyenne et de la covariance d'une v.a. transformée

Comme dans le cas des autres transformations on considère la propagation d'une v.a. $\mathbf{x}$ de moyenne $\bar{\mathbf{x}}$ et covariance $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$ à travers une fonction non-linéaire quelconque (eq. 2.3). Norgaard [NPR00a] propose ainsi deux solutions de filtrage basées sur une approximation d'ordre un et d'ordre deux. Comme le cas à l'ordre un peut être déduit directement de celui à l'ordre deux, seul le cas le plus général est présenté. En utilisant la même notation pour la v.a. transformée $\mathbf{y} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$, on obtient l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &\approx \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{D}}^2_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

où $\mathbf{z} = {\mathbf{S}_\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{x}$, la matrice $\mathbf{S}_\mathbf{x}$ étant définie antérieurement (2.29). En appliquant ce modèle d'approximation, on obtient les relations suivantes pour les deux premiers moments de la statistique de la v.a. transformée :

– moyenne : $\bar{\mathbf{y}}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= E[\mathbf{y}] \\ &\approx E\left[\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{D}}^2_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}}\right] \\ &\approx \frac{h^2 - N_x}{h^2}\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{N_x}\left[\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{z}} + h\mathbf{e}_i) + \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{z}} - h\mathbf{e}_i)\right] \\ &\approx \frac{h^2 - N_x}{h^2}\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{N_x}\left[\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i})\right] \end{aligned} \tag{2.34}$$

– variance : $\mathbf{P}_{yy}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy} &= E\left[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T\right] \\ &= E\left[(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))^T\right] - E[\mathbf{y} - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})]\,E[\mathbf{y} - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})]^T \\ &\approx E\left[\left(\tilde{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{D}}^2_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}}\right)\left(\tilde{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{D}}^2_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T\right] \\ &\quad -E\left[\tilde{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{D}}^2_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}}\right]E\left[\tilde{\mathbf{D}}_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{D}}^2_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{f}}\right]^T \end{aligned} \tag{2.35}$$

En développant les espérances mathématiques, la relation (2.35) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy} \approx\ & \frac{1}{4h^2}\sum_{i=1}^{N_x}\left[\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i})\right]\left[\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i})\right]^T \\ &+\frac{h^2 - 1}{4h^4}\sum_{i=1}^{N_x}\left[\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}) - 2\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\right] \times \\ &\left[\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}) - 2\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\right]^T \end{aligned} \tag{2.36}$$

– cross-covariance : $\mathbf{P}_{xy}$

$$\mathbf{P}_{xy} = E\left[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T\right]$$

$$\approx E\left[\left(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}\right)\right)\left(\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{\Delta_z}}\tilde{\mathbf{f}}+\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{\Delta_z}}\tilde{\mathbf{f}}-E\left[\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{D}}^2_{\mathbf{\Delta_z}}\tilde{\mathbf{f}}\right]\right)^T\right]$$

$$\approx \frac{1}{2h}\sum_{i=1}^{N_x}\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}\left[\mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{x}}+h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}\right)-\mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{x}}-h\mathbf{s}_{\mathbf{x}_i}\right)\right]^T \tag{2.37}$$

Avec les expressions des moments calculées, l'implémentation de l'algorithme de filtrage est immédiat avec des équations similaires à celles développées pour le filtre Unscented (2.18 - 2.22). Comme ce type de filtrage n'a pas fait l'objet d'une implémentation dans la suite de notre étude, on se limite à cet ensemble de relations pour montrer que le filtrage CDKF peut offrir une solution plus générale que le UKF mais par contre à un coût de calcul plus important.

2.5 Filtrage de Kalman basé sur une approximation par somme de gaussiennes

L'idée d'approximer une distribution de probabilité quelconque par une somme de gaussiennes n'est pas nouvelle car développée dans les années 70 [AS72, AM79], avec même un caractère d'optimalité. L'optimalité se reflète dans le fait que la distribution choisie $p\left(\mathbf{x}\right)$ peut être approximée par un mélange de gaussiennes à n'importe quel degré de précision, sous la forme suivante :

$$p\left(\mathbf{x}\right)\approx p_{\mathcal{G}}\left(\mathbf{x}\right)=\sum_{g=1}^{G_x}\alpha^{(g)}\mathcal{N}\left(\mathbf{x};\mu^{(g)},\mathbf{P}^{(g)}\right) \tag{2.38}$$

où G_x est le nombre de composantes initiales utilisées, $\alpha^{(g)}$ est le coefficient de pondération et $\mathcal{N}\left(\mathbf{x};\mu^{(g)},\mathbf{P}^{(g)}\right)$ représente une distribution gaussienne de moyenne $\mu^{(g)}$ et de covariance $\mathbf{P}^{(g)}$. Un tel exemple est donné dans la figure 2.7 pour le cas mono-dimensionnel.

Ainsi en utilisant le modèle général d'estimation donné par l'ensemble des équations (2.1) et avec l'hypothèse que la densité de probabilité a priori $p\left(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k\right)$ et celles des bruits des processus $p\left(\mathbf{v}_k\right)$ et d'observation $p\left(\mathbf{n}_k\right)$ sont de même approximées par un mélange de distributions normales, on peut exprimer la densité de probabilité prédite et celle obtenue après la mise à jour par des observations de la manière suivante :

– la densité de probabilité prédite :

$$p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k\right)\approx p_{\mathcal{G}}\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k\right)=\sum_{g'=1}^{G'}\alpha^{(g')}\mathcal{N}\left(\mathbf{x};\mu_k^{(g')},\mathbf{P}_k^{(g')}\right) \tag{2.39}$$

– la densité de probabilité obtenue après la mise à jour par des observations :

$$p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_{k+1}\right)\approx p_{\mathcal{G}}\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_{k+1}\right)=\sum_{g''=1}^{G''}\alpha^{(g'')}\mathcal{N}\left(\mathbf{x};\mu_k^{(g'')},\mathbf{P}_k^{(g'')}\right) \tag{2.40}$$

où $G'=G_xG_v$ et $G''=G^{'}G_n$ où G_x, G_v et G_n représentent les nombres de composantes choisies pour

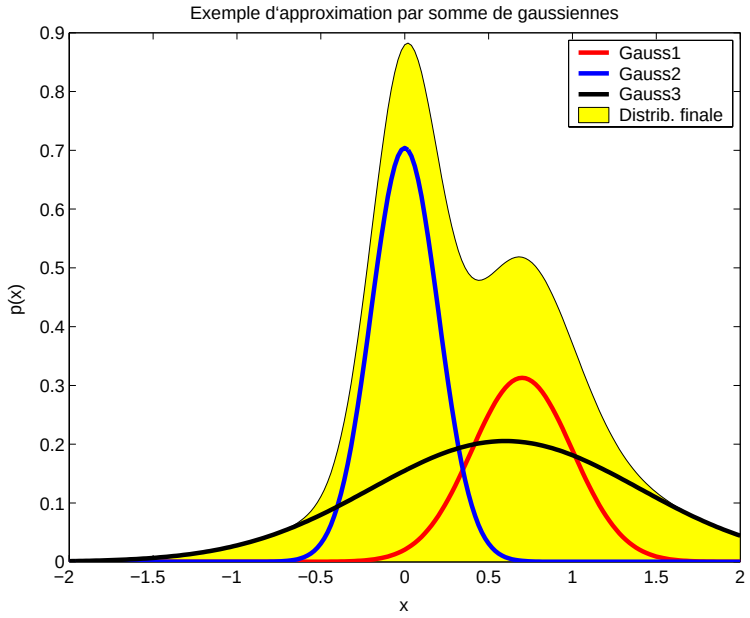


FIG. 2.7 – Un exemple d'approximation par somme de gaussiennes

l'état, le bruit de processus et le bruit d'observation respectivement.

Le calcul de composantes qui forment les distributions $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k)$ et $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_{k+1})$ est réalisé par l'application directe d'une version de filtrage de type Kalman. Finalement toute méthode de transformation peut être utilisée pour le calcul de composantes, et de cette manière il faut associer toujours à l'approximation par un mélange de gaussiennes la transformation à employer. Ainsi par exemple Anderson et Moore [AM79] utilisent la linéarisation au premier ordre équivalente au filtrage de Kalman Étendu ; Dans les versions réalisées par van der Merwe & Wan [vdMW03, vdM04] l'approche, plus élaborée, repose sur le filtrage à particules.

Une observation doit être faite sur l'augmentation à chaque étape du nombre de composantes à prendre en compte. Pour éviter une croissance exponentielle du nombre de gaussiennes au cours du temps, une technique de réduction doit être mise en oeuvre en pratique, limitant ainsi la charge de calcul.

2.6 Filtre à particules

Nous achevons ce chapitre par une présentation succinte d'un algorithme créé spécifiquement pour garantir un fonctionnement quasi-optimal de la structure récursive développée par Kalman, indépendamment de la non-linéarité du modèle. A la différence de toutes les méthodes présentées jusqu'ici, le filtre à particules ne considère aucune approximation du modèle et aucune hypothèse au niveau des distributions des états et des bruits.

Développé initialement au LAAS de Toulouse [Sal89, MRS91] et repris plus tard par Gordon et al. [GSS93] sous la forme de filtre bootstrap, le filtre particulaire s'est imposé comme un outil d'estimation très

performant, au prix d'un coût de calcul beaucoup plus important que les solutions EKF et UKF. L'idée de base est d'utiliser un nombre important de particules (points) choisis aléatoirement pour représenter les distributions de probabilité. Cet ensemble de particules est par la suite propagé dans le temps en utilisant une combinaison de méthodes d'échantillonage séquentiel et d'étapes de ré-échantillonage. Cet emploi d'un grand nombre de particules tirées aléatoirement a fait que ce filtre soit aussi désigné sous le nom de méthode Monte-Carlo séquentielle (SMC - Sequential Monte Carlo).

Pour développer les relations qui forment la base de filtrage particulaire on va partir du même modèle général donné par les équations (2.1). En plus on va utiliser la notation $\mathbf{D}_{k+1}$ pour l'ensemble des observations disponibles à l'instant $k+1$: $\mathbf{D}_{k+1} = \{\mathbf{y}_i,\ i = 1, ..., k+1\}$. Avec ces notations on définit l'objectif de l'application qui est de construire la distribution de probabilité de l'état $\mathbf{x}_{k+1}$, en tenant compte de l'ensemble des observations : $p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{D}_{k+1}\right)$. En utilisant l'hypothèse que à l'instant k la distribution de probabilité $p\left(\mathbf{x}_k|\mathbf{D}_k\right)$ est connue, on peut écrire [GSS93] :

$$p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{D}_k\right) = \int p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k\right) p\left(\mathbf{x}_k|\mathbf{D}_k\right) d\mathbf{x}_k \tag{2.41}$$

En utilisant par la suite l'expression de l'évolution récursive de l'état, la statistique connue du bruit de processus et la relation de Bayes, on obtient la distribution de probabilité de l'état $\mathbf{x}_{k+1}$:

$$p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{D}_{k+1}\right) = \frac{p\left(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}\right) p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{D}_k\right)}{p\left(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{D}_k\right)} \tag{2.42}$$

où le dénominateur est donné par :

$$p\left(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{D}_k\right) = \int p\left(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}\right) p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{D}_k\right) d\mathbf{x}_{k+1} \tag{2.43}$$

Les relations récurrentes (2.41) et (2.42) forment la solution pour le problème d'estimation récursive de Bayes. Dans les méthodes déjà présentées dans ce chapitre plusieurs approximations et hypothèses simplificatrices ont été considérées, risquant de conduire à de médiocres performances pour certaines applications. En présence de conditions difficiles (statistique non-gaussienne) le filtre à particules reste une solution de référence, pouvant garantir une convergence asymptotique [CD02].

Avant de passer à l'implémentation des expressions récursives on va initialiser l'algorithme par l'échantillonnage de la distribution initiale $p\left(\mathbf{x}_0|\mathbf{D}_0\right)$: l'ensemble de points choisi aléatoirement $\left\{\mathbf{x}_0^{(i)}, W_0^{(i)}\right\}$, $i = 1, ..., N_p$ représentera le vecteur d'état $\mathbf{x}_0^{(i)}$ de loi $p\left(\mathbf{x}_0|\mathbf{D}_0\right)$, les pondérations $W_0^{(i)} = \frac{1}{N_p}$ respectant une loi uniforme.

L'implémentation de l'algorithme de filtrage est encore divisé en deux étapes, l'une de prédiction et l'autre de mise à jour par des observations :

– étape de prédiction : chaque point considéré est passé par la suite à travers la fonction de processus pour obtenir les échantillons $\mathbf{x}_{k+1}^{(i)} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k^{(i)}\right)$ qui caractérisent la probabilité prédite $p\left(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k\right)$

– étape de mise à jour par des observations : cette étape consiste en l'évaluation de la vraisemblance de chaque échantillon transformé, avec le calcul des pondérations $W_{k+1}^{(i)}$:

$$W_{k+1}^{(i)} = \frac{p\left(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}^{(i)}\right)}{\sum_{j=1}^{N_p} p\left(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}^{(j)}\right)} \tag{2.44}$$

Avec l'expression des coefficients $W_{k+1}^{(i)}$, la valeur estimée est obtenue par la moyenne des états pondérés par leur probabilité normalisée :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \sum_{j=1}^{N_p} W_{k+1}^{(i)} \mathbf{x}_{k+1}^{(i)} \tag{2.45}$$

Dans la figure 2.8 on montre un exemple de filtrage particulaire appliqué à la synchronisation chaotique pour le cas d'un polynôme Chebyshev d'ordre deux. Le modèle utilisé est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 2x_k^2 - 1 + v_k \\ y_k &= x_k + n_k \end{aligned} \tag{2.46}$$

Ainsi on observe la distribution de l'état estimé pour 9 étapes successives d'application de l'algorithme particulaire. Une conclusion évidente que l'on peut tirer est que la distribution ne conserve pas un aspect gaussien, avec une forte asymétrie. En ce qui concerne l'évolution dans l'espace de phase des particules, nous montrons comment évoluent 10 particules issues de l'échantillonnage initial. L'amplitude de chaque pic reflète le coefficient de pondération associé à chacune d'entre-elles.

On peut observer l'échantillonnage initial correspondant à une distribution gaussienne, avec des pondérations égales pour tous les points. Pour les étapes successives de filtrage la pondération de chaque particule va changer conformément à la fonction de vraisemblance déterminée à partir de l'observation courante. De même, on observe une dispersion progressive des particules, conséquence d'une réduction d'effectif si aucune procédure de re-distribution n'est employée.

Pour résoudre ce problème de dégénérescence en pratique une nouvelle étape est introduite dans le processus de filtrage (re-échantillonage) : cela consiste à redistribuer les points après chaque étape d'estimation, si nécessaire. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature [CD02]. L'idée de base est de modifier l'ensemble de points déterminé pour qu'il respecte un critère d'approximation non-pondéré de la distribution *a priori*, qui soit utilisé à l'étape suivante.

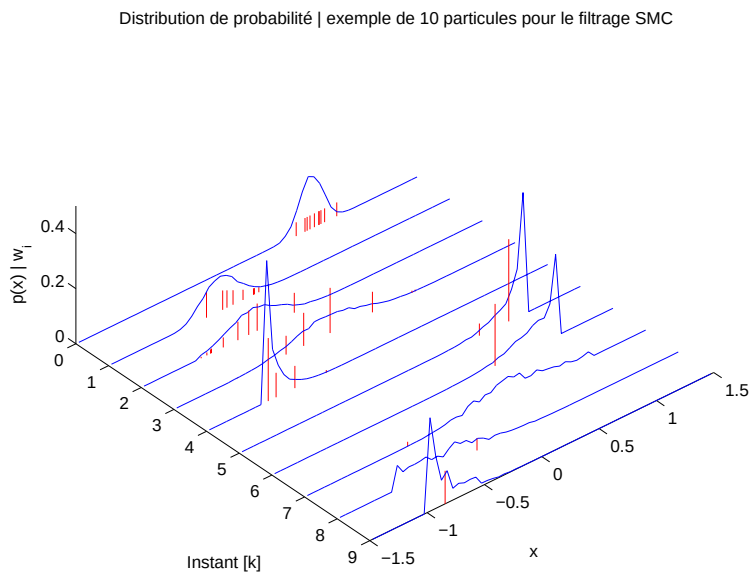


FIG. 2.8 – Evolution de la distribution de probabilité et exemple de 10 particules pour le système non-linéaire donné par les équations (2.46)

Même si ce type d'estimateur d'état offre théoriquement les meilleurs performances possibles par rapport à un critère d'EQM, le coût de calcul nécessaire est beaucoup plus important que toute autre solution exposée antérieurement. De même les performances sont directement liées à son paramétrage qui consiste essentiellement dans le nombre de points choisi et l'étape de re-échantillonage considérée. La formulation générique du filtre doit donc être adaptée au problème considéré pour réduire le plus possible le coût de calcul.

La filtre à particules est évoqué dans ce chapitre pour ses performances de référence concernant la précision d'estimation. Cependant, comme notre objectif sera par la suite de développer des solutions de récepteur à faible coût de calcul nous n'avons pas retenu cette approche.

2.7 Conclusion

Ce chapitre était dédié à la présentation générale des méthodes d'estimation récursive non-linéaire les plus populaires. Ainsi dans la première partie les solutions EKF et IEKF ont été présentées. Ces solutions basées sur une linéarisation au premier ordre du modèle d'estimation ont l'avantage d'un coût de calcul réduit ainsi qu'une simplification de l'implémentation. Par contre, elles souffrent au niveau de la consistence de l'estimateur et des performances d'estimation. Une deuxième variante présentée, utilise la transformation Unscented pour l'estimation récursive de la statistique des états. Basées sur cette transformation les solutions de filtrage UKF et HOUF sont ensuite développées. La troisième section était destinée à la présentation d'une structure générale du filtre CDKF construit à partir d'une approximation polynomiale du modèle par

la relation de Stirling. En ce qui concerne l'approximation non-gaussienne de la distribution des états nous avons évoqué en fin de chapitre la solution d'approximation par somme de gaussiennes ainsi que la méthode de filtrage particulaire. Dans le prochaine chapitre une nouvelle transformation non-linéaire sera introduite et par la suite un nouveau filtre de Kalman sera développé.

Chapitre 3

Le Filtre de Kalman Polynomial Exact

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire une nouvelle méthode de filtrage Kalman non-linéaire que nous appliquerons au problème de synchronisation du chaos. Si l'idée d'utiliser une transformation polynomiale a été déjà exposée par Norgaard et al. [NPR00a, NPR00b], on se propose de réaliser une nouvelle transformation qui ne va pas juste approximer la dynamique du système par un polynôme d'ordre deux (filtre DD2) ; Pour le cas particulier où le modèle est caractérisé par une forme polynomiale, nous proposons de calculer d'une manière exacte la statistique d'ordre deux des états estimés. Des propositions voisines ont été effectuées par Basin [Bas03], pour le cas des systèmes à temps continu et avec certaines restrictions : ordre du système limité à trois et modèle d'observation linéaire.

Nous allons considérer un processus dynamique caractérisé par un modèle polynomial mono-dimensionnel en temps discret. Pour la réalisation de l'algorithme récursif de type Kalman, une transformation non-linéaire dénommée Transformation Polynomiale Exacte sera introduite. Des relations matricielles générales vont permettre le calcul de la statistique d'ordre deux de n'importe quelle variable aléatoire (v.a.) propagée à travers une fonction polynomiale. Le calcul, réalisé en utilisant tous les termes de la série de Taylor, facilitera l'implémentation du filtre Kalman polynomial et cela sans approximation.

Notre objectif initial est d'appliquer ce type de filtrage à la synchronisation chaotique, dont la définition et le cadre général ont été présentés dans le chapitre 2. On utilisera ici comme fonctions génératrices des polynômes de Chebyshev [Riv90], qui présentent des propriétés statistiques et de corrélation très intéressantes, en particulier dans le contexte de transmissions basées sur l'étalement de spectre. Beaucoup d'articles démontrent la pertinence de diverses méthodes de filtrage de Kalman pour accomplir une synchronisation chaotique [COS93, LL97, CN00, BDR02, SOD94]. En particulier Leung et Zhu ont récemment démontré des résultats importants au sujet de la synchronisation du chaos par le filtrage de Kalman étendu (EKF) : les

auteurs montrent que la technique basée sur ce filtre est une généralisation des méthodes de synchronisation chaotique classiques. Ils montrent également que la synchronisation de type EKF approche la limite inférieure donnée par la borne de Cramer-Rao, à des rapports SNR élevés.

Enfin nous allons présenter les avantages de la nouvelle méthode de filtrage non-linéaire proposée, en considérant l'erreur quadratique moyenne (EQM), la stabilité de la synchronisation et la consistence comme critères de performance.

Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans la revue *IEEE Trans. on Circuits & Syst. I* [LABS06].

3.2 Transformation Polynomiale Exacte

La transformation non-linéaire d'une distribution connue *a priori* étant au coeur de toutes les méthodes de filtrage Kalman non-linéaire, il existe un intérêt croissant pour trouver la transformation qui offre la meilleure approximation des moments de la distribution résultante.

Dans ce chapitre on va considérer le cas des fonctions non-linéaires polynomiales mono-dimensionnelles, données par la forme générale suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \tag{3.1}$$

Le but de la transformation est d'estimer la moyenne et la variance pour une variable aléatoire y qui résulte de la propagation de la variable aléatoire x par la fonction non-linéaire considérée :

$$y = f(x) \tag{3.2}$$

Pour le moment, on ne considère aucune restriction au sujet de la densité de probabilité de la v.a. x. La supposition d'une distribution Gaussienne ne sera introduite que pour construire l'algorithme de filtrage Kalman polynomial (paragraphe 3.3).

De façon générale on peut exprimer les deux premiers moments de la distribution transformée pour la v.a. y, en utilisant le développement en série de Taylor. On écrit la distribution initiale sous la forme suivante :

$$x = \bar{x} + \Delta x \tag{3.3}$$

où Δx est une v.a. centrée. Avec le développement en série de Taylor appliquée à la v.a. y on obtient :

$$y = f(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{N} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=\bar{x}} \tag{3.4}$$

et on peut calculer le moment d'ordre un :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= E[y] \\ &= f(\bar{x}) + \sum_{n=2}^{N} \frac{m_n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=\bar{x}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

où m_n désigne le moment d'ordre n pour la v.a. Δx.

Avec la forme polynomiale (3.1) de la fonction $f(\cdot)$ les dérivées peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_{i=n}^{N} a_i \frac{i!}{(i-n)!} x^{i-n} \tag{3.6}$$

Comme $m_0 = 1$, $m_1 = 0$ et en utilisant les coefficients binomiaux $C_i^n = \frac{i!}{n! \cdot (i-n)!}$, le calcul du moment d'ordre un devient :

$$\bar{y} = \sum_{n=0}^{N} m_n \sum_{i=n}^{N} a_i C_i^n \bar{x}^{i-n} \tag{3.7}$$

Cette expression peut être écrite sous une forme matricielle compacte pour faciliter l'implémentation en pratique :

$$\bar{y} = \mathbf{a}_{0:N}^T \mathbf{C}^{\bar{x}} \mathbf{m}_{0:N}^x \tag{3.8}$$

où $\mathbf{a}_{i:j}$ dénote $[a_i, a_{i+1}, ..., a_j]^T$, $\mathbf{m}_{i:j}^x = [m_i, m_{i+1}, ..., m_j]^T$ et $\mathbf{C}^{\bar{x}}$ est une matrice triangulaire dont les éléments ont la forme de puissances de $\bar{x}$:

$$\mathbf{C}^{\bar{x}} = \begin{bmatrix} C_0^0 \bar{x}^0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ C_1^0 \bar{x}^1 & C_1^1 \bar{x}^0 & 0 & ... & 0 \\ C_2^0 \bar{x}^2 & C_2^1 \bar{x}^1 & C_2^2 \bar{x}^0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & & ... \\ C_N^0 \bar{x}^N & C_N^1 \bar{x}^{N-1} & C_N^2 \bar{x}^{N-2} & ... & C_N^N \bar{x}^0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Si on considère encore une fois la série de Taylor, le moment d'ordre deux σ_y^2 peut être calculé de la même façon :

$$\sigma_y^2 = E\left[(y - \overline{y})^2\right]$$

$$= \quad E\left[\left(f\left(\bar{x}\right)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\left(\Delta x\right)^{n}}{n!}\frac{d^{n}f}{dx^{n}}\bigg|_{x=\bar{x}}-f\left(\bar{x}\right)-\sum_{n=2}^{N}\frac{m_{n}}{n!}\frac{d^{n}f}{dx^{n}}\bigg|_{x=\bar{x}}\right)^{2}\right] \tag{3.10}$$

Après quelques manipulations algébriques, le calcul devient :

$$\sigma_{y}^{2}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{m_{n+k}-m_{n}m_{k}}{n!\cdot k!}\left.\frac{d^{n}f}{dx^{n}}\frac{d^{k}f}{dx^{k}}\right|_{x=\bar{x}} \tag{3.11}$$

Cette fois le produit de dérivées s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\left.\frac{1}{n!\cdot k!}\frac{d^{n}f}{dx^{n}}\frac{d^{k}f}{dx^{k}}\right|_{x=\bar{x}} &= \sum_{i=n}^{N}\sum_{j=k}^{N}a_{i}a_{j}C_{i}^{n}C_{j}^{k}\bar{x}^{i+j-n-k}\\ &= \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{n,k}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N}\end{aligned} \tag{3.12}$$

où la matrice $\mathbf{C}_{n,k}^{\bar{x}}$ a la forme :

$$\mathbf{C}_{n,k}^{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{(n-1)\times(k-1)} & & \mathbf{0}_{(n-1)\times(N-k+1)} & \\ & C_{n}^{n}C_{k}^{k}\bar{x}^{0} & C_{n}^{n}C_{k+1}^{k}\bar{x}^{1} & \ldots & C_{n}^{n}C_{N}^{k}\bar{x}^{N-k}\\ \mathbf{0}_{(N-n+1)\times(k-1)} & C_{n+1}^{n}C_{k}^{k}\bar{x}^{1} & C_{n+1}^{n}C_{k+1}^{k}\bar{x}^{2} & \ldots & C_{n+1}^{n}C_{N}^{k}\bar{x}^{N-k+1}\\ & \ldots & \ldots & & \ldots\\ & C_{N}^{n}C_{k}^{k}\bar{x}^{N-n} & C_{N}^{n}C_{k+1}^{k}\bar{x}^{N-n+1} & \ldots & C_{N}^{n}C_{N}^{k}\bar{x}^{2N-n-k}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}_{i\times j}$ représentant une matrice de dimension $i\times j$ avec tous les éléments nuls.

A partir des équations (3.11) et (3.12) on obtient l'expression générale du moment d'ordre deux de la v.a. y sous une forme matricielle :

$$\sigma_{y}^{2}=\mathbf{1}_{N}^{T}\left(\mathcal{M}^{x}\boxdot\mathcal{C}^{\bar{x}}\right)\mathbf{1}_{N}-\left(\mathbf{m}_{1:N}^{x}\right)^{T}\mathcal{C}^{\bar{x}}\mathbf{m}_{1:N}^{x} \tag{3.13}$$

où les matrices $\mathcal{C}^{\bar{x}}$ et $\mathcal{M}^{x}$ sont exprimées par :

$$\mathcal{C}^{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{1,1}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N} & \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{1,2}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N} & \ldots & \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{1,N}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N}\\ \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{2,1}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N} & \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{2,2}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N} & \ldots & \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{2,N}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N}\\ \ldots & \ldots & & \ldots\\ \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{N,1}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N} & \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{N,2}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N} & \ldots & \mathbf{a}_{1:N}^{T}\mathbf{C}_{N,N}^{\bar{x}}\mathbf{a}_{1:N}\end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$\mathcal{M}^x = \begin{bmatrix} m_2 & m_3 & ... & m_{N+1} \\ m_3 & m_4 & ... & m_{N+2} \\ ... & ... & & ... \\ m_{N+1} & m_{N+2} & ... & m_{2N} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$\boxdot$ représentant le produit de Hadamard et $\mathbf{1}_N$ un vecteur colonne de longueur N avec tous les éléments unité.

Un complément au calcul de ces deux moments d'une v.a. transformée par une fonction polynomiale, est présenté dans l'annexe C.

L'objectif étant d'obtenir une variante du filtrage Kalman basée sur les relations précédentes, il reste à calculer la covariance de transition P_{xy} entre les v.a. x et y :

$$\begin{aligned} P_{xy} &= E\left[(x-\bar{x})\,(y-\overline{y})\right] \\ &= E\left[\Delta x \cdot y\right] - E\left[\Delta x \cdot \overline{y}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N} m_{n+1} \sum_{i=n}^{N} a_i C_i^n \bar{x}^{i-n} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Encore une fois on peut mettre cette relation sous forme matricielle :

$$P_{xy} = \mathbf{a}_{0:N}^T \mathbf{C}^{\bar{x}} \mathbf{m}_{1:N+1}^x \tag{3.17}$$

Il faut remarquer que les relations (3.8), (3.13) et (3.17) sont vraies pour n'importe quelle distribution initiale x avec les moments centrés connus, et pour une fonction polynomiale $f(\cdot)$ quelconque. Les relations matricielles formulées ne constituent pas un moyen de réduire le coût de calcul mais plutôt une solution d'implémentation générale et rapide (pour le calcul des moments $\bar{y}$ et σ_y^2). Nous présenterons dans la section 3.4 une application au cas particulier des polynômes de Chebyshev. Des expressions alternatives des moments seront alors données pour un calcul le plus direct possible. Dans la section suivante nous proposons d'intégrer la transformation polynomiale exacte dans un filtre de Kalman.

3.3 Filtre de Kalman Polynomial Exact (ExPKF)

Pour développer le filtre de Kalman à base de transformation polynomiale, on considère les modèles mono-dimensionnels de processus et d'observation suivants :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + v_k \\ y_k &= h(x_k) + n_k \end{aligned} \tag{3.18}$$

où $\{f(\cdot), h(\cdot)\}$ désignent des fonctions non-linéaires et où les bruits additifs $\{v_k, n_k\}$ sont considérés de moyennes zéros, gaussiens et avec une inter-corrélation nulle :

$$\begin{aligned} E[v_k] &= E[n_k] = 0 \\ E[v_k v_j] &= Q\delta_{kj} \\ E[n_k n_j] &= R\delta_{kj} \\ E[v_k n_j] &= 0 \\ E[v_k x_j] &= E[n_k x_j] = 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Si on suppose aussi la gaussiannité de l'état a priori x_k et des valeurs observées y_{k+1}, on peut exprimer la valeur optimale de l'état estimé x_{k+1} de la manière suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}\left(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k}\right) \tag{3.20}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= E[f(x_k) + v_k] = E[f(x_k)] \\ \hat{y}_{k+1|k} &= E\left[h\left(x_{k+1|k}\right) + n_{k+1}\right] = E\left[h\left(x_{k+1|k}\right)\right] \\ K_{k+1} &= P_{x_{k+1|k}y_{k+1|k}} P^{-1}_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} \end{aligned} \tag{3.21}$$

En utilisant le modèle général (3.18), les covariances $P_{x_{k+1|k}y_{k+1|k}}$ et $P_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}}$ seront données par les expressions :

$$\begin{aligned} P_{x_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= E\left[\left(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}\right)\left(y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k}\right)\right] \\ &= E\left[\left(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}\right)\left(h\left(x_{k+1|k}\right) - E\left[h\left(\hat{x}_{k+1|k}\right)\right]\right)\right] \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} P_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= E\left[\left(y_{k+1|k}-\hat{y}_{k+1|k}\right)\left(y_{k+1|k}-\hat{y}_{k+1|k}\right)\right] \\ &= E\left[\left(h\left(x_{k+1|k}\right)-\hat{y}_{k+1|k}\right)^2\right]+R \end{aligned} \tag{3.23}$$

L'hypothèse gaussienne des valeurs estimées et des observations limite la connaissance des moments à l'ordre deux et dans ce cas le vecteur des moments prend la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{0:N}^{x} &= \left[m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, ...\right]^T \\ &= \left[1, 0, \sigma_x^2, 0, 3\sigma_x^4, ...\right]^T \end{aligned} \tag{3.24}$$

En conclusion, avec l'hypothèse gaussienne et la transformation polynomiale exacte présentée dans la section 3.2, on peut développer un algorithme de filtrage Kalman où les calculs se font de façon exacte avec la condition que les fonctions de processus et d'observation soient mono-dimensionnelles et polynomiales, i.e. $f(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, $h(x)=\sum_{k=0}^{K} b_k x^k$.

A l'étape de mise à jour temporelle, la moyenne et la covariance de l'état prédit sont obtenues à l'aide des relations (3.8) et respectivement (3.13) :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= E\left[f\left(x_k\right)\right] \\ &= \mathbf{a}_{0:N}^T \mathbf{C}^{\hat{x}_k} \mathbf{m}_{0:N}^{x_k} \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= E\left[\left(x_{k+1|k}-\hat{x}_{k+1|k}\right)^2\right] \\ &= \mathbf{1}_N^T \left(\mathcal{M}^{x_k} \boxdot \mathcal{C}^{\hat{x}_k}\right) \mathbf{1}_N - \left(\mathbf{m}_{1:N}^{x_k}\right)^T \mathcal{C}^{\hat{x}_k} \mathbf{m}_{1:N}^{x_k} + Q \end{aligned} \tag{3.26}$$

L'état observé prédit et les covariances de transition/innovation sont calculées à l'étape de mise à jour des observations en utilisant les équations (3.8), (3.17) et (3.13) :

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1|k} &= E\left[h\left(x_{k+1|k}\right)\right] \\ &= \mathbf{b}_{0:K}^T \mathbf{C}^{\hat{x}_{k+1|k}} \mathbf{m}_{0:N}^{x_{k+1|k}} \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} P_{x_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= E\left[\left(x_{k+1|k}-\hat{x}_{k+1|k}\right)\left(h\left(x_{k+1|k}\right)-E\left[h\left(\hat{x}_{k+1|k}\right)\right]\right)\right] \\ &= \mathbf{b}_{0:K}^{T}\mathbf{C}^{\hat{x}_{k+1|k}}\mathbf{m}_{1:K+1}^{x_{k+1|k}} \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} P_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= E\left[\left(h\left(x_{k+1|k}\right)-\hat{y}_{k+1|k}\right)^{2}\right]+R \\ &= \mathbf{1}_{K}^{T}\left(\mathcal{M}^{x_{k+1|k}}\boxdot\mathcal{C}^{\hat{x}_{k+1|k}}\right)\mathbf{1}_{K}-\left(\mathbf{m}_{1:K}^{x_{k+1|k}}\right)^{T}\mathcal{C}^{\hat{x}_{k+1|k}}\mathbf{m}_{1:K}^{x_{k+1|k}}+R \end{aligned} \tag{3.29}$$

Finalement à l'instant $(k+1)$, la moyenne et la covariance de l'état x_{k+1} sont calculées à l'aide des relation suivantes :

$$\hat{x}_{k+1}=\hat{x}_{k+1|k}+K_{k+1}\left(y_{k+1}-\hat{y}_{k+1|k}\right) \tag{3.30}$$

$$P_{k+1}=P_{k+1|k}-K_{k+1}^{2}P_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} \tag{3.31}$$

où le gain de Kalman K_{k+1} est donné par la relation (3.21).

On rappelle que les relations présentées donnent une formulation générale et elles ne sont pas optimisées pour réduire le coût de calcul. On va démontrer dans la section suivante que pour des modèles polynomiaux bien définis on peut trouver des expressions beaucoup plus simples.

3.4 Application du filtrage ExPKF à la synchronisation chaotique

De par la grande richesse de leurs propriétés, les polynômes de Chebyshev constituent l'une des familles de fonctions les plus populaires pour résoudre des problèmes de modélisation, de filtrage et de traitement du signal [Riv90]. Il a été démontré que tous les polynômes de Chebyshev génèrent du chaos, avec une densité limite égale à $\rho(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^{2}}}$ [KT94], et qu'ils sont caractérisés par un exposant de Lyapunov $\ln p$ [BG97, ABK91], où p est l'ordre du polynôme $T_p(x)$ considéré comme fonction génératrice de la séquence chaotique $\{x_k, k=0,1,...\}$:

$$x_{k+1}=f\left(x_{k}\right)=T_{p}\left(x_{k}\right) \tag{3.32}$$

Par leurs bonnes propriétés de corrélation, les polynômes de Chebyshev ont été utilisés récemment dans le domaine des communications numériques avec une technique d'accès multiple [CYKB01, LTYH04].

p	$y = T_p(x)$	$\bar{y} = E[y]$	$\sigma_y^2 = E\left[(y-\bar{y})^2\right]$
2	$2x^2 - 1$	$2\sigma_x^2 + 2\bar{x}^2 - 1$	$8\sigma_x^2\left(\sigma_x^2 + 2\bar{x}^2\right)$
3	$4x^3 - 3x$	$\bar{x}\left(12\sigma_x^2 + 4\bar{x}^2 - 3\right)$	$3\sigma_x^2\left(80\sigma_x^4 + 192\sigma_x^2\bar{x}^2 + ... +48\bar{x}^4 - 24\sigma_x^2 - 24\bar{x}^2 + 3\right)$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$24\sigma_x^4 + 48\sigma_x^2\bar{x}^2 + ... +8\bar{x}^4 - 8\sigma_x^2 - 8\bar{x}^2 + 1$	$128\sigma_x^2\left(48\sigma_x^6 + 192\sigma_x^4\bar{x}^2 + ... +84\sigma_x^2\bar{x}^4 + 8\bar{x}^6 - 12\sigma_x^4 - ... -36\sigma_x^2\bar{x}^2 - 8\bar{x}^4 + \sigma_x^2 + 2\bar{x}^2\right)$

TAB. 3.1 – Les moments d'ordre un et deux de la v.a. résultant de la transformation d'une v.a. gaussienne par un polynôme de Chebyshev (ordre des polynômes 2, 3 et 4)

On rappelle une dernière propriété liée à la récursivité des coefficients de polynômes de Chebyshev qui peuvent être calculés avec la relation :

$$T_{p+1}(x) = 2xT_p(x) - T_{p-1}(x) \tag{3.33}$$

Cette forme générale polynomiale permet l'application directe du filtrage Kalman Exact (ExPKF) à la synchronisation du chaos. L'expression des moments pour quelques polynômes de Chebyshev d'ordre faible va être donnée ci-après, pour mettre en évidence qu'un algorithme à très bas coût de calcul peut être obtenu. Pour souligner les avantages en termes de performance de notre filtre ExPKF, nous procéderons à une étude comparative avec le filtre EKF et UKF. Au cours du prochain chapitre, nous examinerons quels sont les bénéfices du filtre ExPKF dans un récepteur à étalement de spectre par séquence chaotique exploitant des codes de Chebyshev.

Alors dans le cas de la synchronisation chaotique pour une fonction génératrice mono-dimensionnelle, le modèle non-linéaire (3.18) se simplifie à cause de la linéarité de la fonction $h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + v_k \\ y_k &= x_k + n_k \end{aligned} \tag{3.34}$$

et on peut écrire les équations pour l'algorithme ExPKF proposé en utilisant des relations analytiques pour $\left\{\bar{y}, \sigma_y^2\right\}$. Par exemple, pour la synchronisation d'une séquence chaotique générée par un polynôme Chebyshev d'ordre deux, le filtre est implémenté de la manière suivante, une fois que la statistique d'ordre deux de la v.a. transformée a été calculée analytiquement (Tableau 3.1).

Les équations de mise à jour temporelle (3.25) et (3.26) deviennent :

$$\hat{x}_{k+1|k} = E[f(x_k)] = 2P_k + 2\hat{x}_k^2 - 1 \tag{3.35}$$

$$P_{k+1|k} = E\left[\left(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}\right)^2\right] = 8P_k^2 + 16P_k\hat{x}_k^2 + Q \tag{3.36}$$

De même, si on considère la linéarité de la fonction $h(\cdot)$ et l'indépendance des bruits de modèle et d'observation entre-eux et par rapport aux états, les équations de mise à jour des observations deviennent :

$$\hat{y}_{k+1|k} = E\left[h\left(x_{k+1|k}\right)\right] = \hat{x}_{k+1|k} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} P_{x_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= E\left[\left(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}\right)\left(y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k}\right)\right] \\ &= P_{k+1|k} \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} P_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= E\left[\left(y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k}\right)\left(y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k}\right)\right] \\ &= P_{k+1|k} + R \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$K_{k+1} = \frac{P_{k+1|k}}{P_{k+1|k} + R} \tag{3.40}$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}\left(y_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}\right) \tag{3.41}$$

$$P_{k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1}^2 P_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} = \frac{P_{k+1|k}R}{P_{k+1|k} + R} = K_{k+1}R \tag{3.42}$$

Les relations (3.37) - (3.42) montrent que l'algorithme ExPKF proposé pour la synchronisation d'une séquence chaotique Chebyshev d'ordre deux offre un coût de calcul très limité.

3.5 Evaluation des performances du filtre ExPKF

Pour l'évaluation des performances du filtre proposé nous allons considérer quatre orientations. Nous examinerons d'abords le résultat de la transformation d'une distribution gaussienne par différents polynômes de Chebyshev (changement de l'ordre). Ensuite nous proposerons une étude comparative entre différentes variantes de filtres de Kalman, considérant comme critère la stabilité. L'erreur de synchronisation de séquences chaotiques sera alors étudiée et pour finir nous analyserons la consistence des divers filtres.

3.5.1 Analyse graphique des transformations non-linéaires

La méthode la plus facile pour évaluer de manière qualitative les performances d'une transformation non-linéaire quelconque est d'utiliser une représentation graphique de la distribution résultante, pour différents ordres de polynômes (non-linéarité plus ou moins prononcée). Nous choisissons donc un vecteur aléatoire gaussien bidimensionnel $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_{xx})$, avec composantes indépendantes, auquel est appliquée une transformation par une fonction bidimensionnelle $\mathbf{f}$:

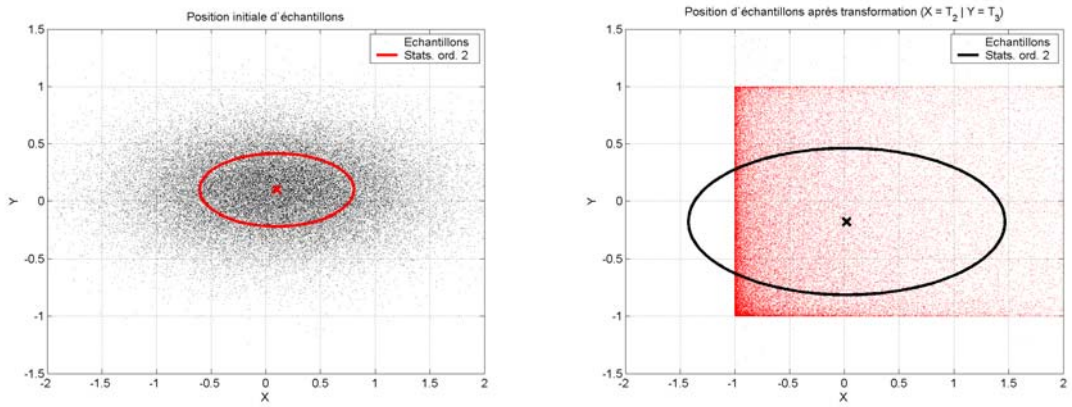
$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_p(x_1) \\ T_q(x_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.43}$$

où $\{p, q\}$ sont les ordres des polynômes de Chebyshev choisis pour représenter les non-linéarités associées aux axes X et Y, respectivement.

En plus de la transformation exacte, deux autres transformations populaires seront considérées : la linéarisation au premier ordre en utilisant la troncature dans la série Taylor et la transformation *Unscented*. Pour montrer le comportement des méthodes considérées, on propose le vecteur aléatoire gaussien $\mathbf{x}$ suivant :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{xx} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Au niveau des non-linéarités, quatre cas seront considérés pour la forme de la fonction $\mathbf{f}(\cdot)$: si selon l'axe X le même polynôme Chebyshev d'ordre deux ($p = 2$) est gardé, sur l'axe Y l'ordre du polynôme varie entre 2 et 5 ($q = 2...5$). Grâce à la transformation bidimensionnelle considérée on peut visualiser graphiquement les inconvénients de chacune des trois approches (transformation polynomiale exacte, linéarisation au premier ordre et transformation Unscented), en fonction du degré de non-linéarité. Pour calculer la vraie statistique, résultant de la transformation (3.43) de la v.a. initiale (3.44), un nombre total de 10 millions d'échantillons ont été propagés à travers le modèle non-linéaire. Pour avoir la garantie que l'inter-corrélation entre les composantes est nulle, le générateur aléatoire était initialisé chaque fois avec une nouvelle condition initiale.



a) b)

FIG. 3.1 – a) Distribution initiale d'échantillons ; b) Position d'échantillons après transformation

Une remarque s'impose sur le fait que la distribution transformée peut prendre une forme très différente d'une distribution gaussienne idéale, complètement caractérisée par la statistique d'ordre deux. En conséquence, même si les deux premiers moments sont bien calculés, l'algorithme de filtrage Kalman travaillant toujours avec une hypothèse gaussienne devient sous-optimal. Une illustration de cette difficulté est proposée à la figure 3.1, où la fonction non-linéaire bidimensionnelle correspond à un polynôme d'ordre deux et à un polynôme d'ordre trois. Dans la figure 3.1 a) on observe les échantillons correspondants à la distribution gaussienne initiale, et en 3.1 b) la distribution des échantillons après transformation. La statistique d'ordre deux à été calculée dans les conditions précisées au paragraphe précédent.

Après les observations évoquées ci-dessus, on propose dans la figure 3.2 de montrer sous un format graphique l'effet de l'ordre du polynôme de Chebyshev utilisé sur chacune des trois transformations. Dans la partie a) on peut observer que même pour une faible non-linéarité (polynôme d'ordre deux), la méthode qui suppose la linéarisation fait une mauvaise estimation autant pour la moyenne que pour la variance. Par contre les transformations Unscented et Exact arrivent à faire une approximation correcte de la statistique. Si on passe à la figure 3.2 b), la linéarisation au premier ordre fait toujours une mauvaise estimation mais aussi la transformation Unscented n'arrive plus à estimer correctement la variance gardant quand même une évaluation correcte de la moyenne. Grâce aux relations analytiques développées auparavant dans ce chapitre, notre transformation polynomiale offre une distribution coïncidant exactement avec la vraie distribution. Dans les parties c) et d) comme attendu, en augmentant l'ordre du polynôme sur l'axe Y, à 4 et respectivement 5, la transformation Unscented ne parvient plus à estimer correctement la moyenne ; La méthode proposée en revanche, offre toujours une excellente précision.

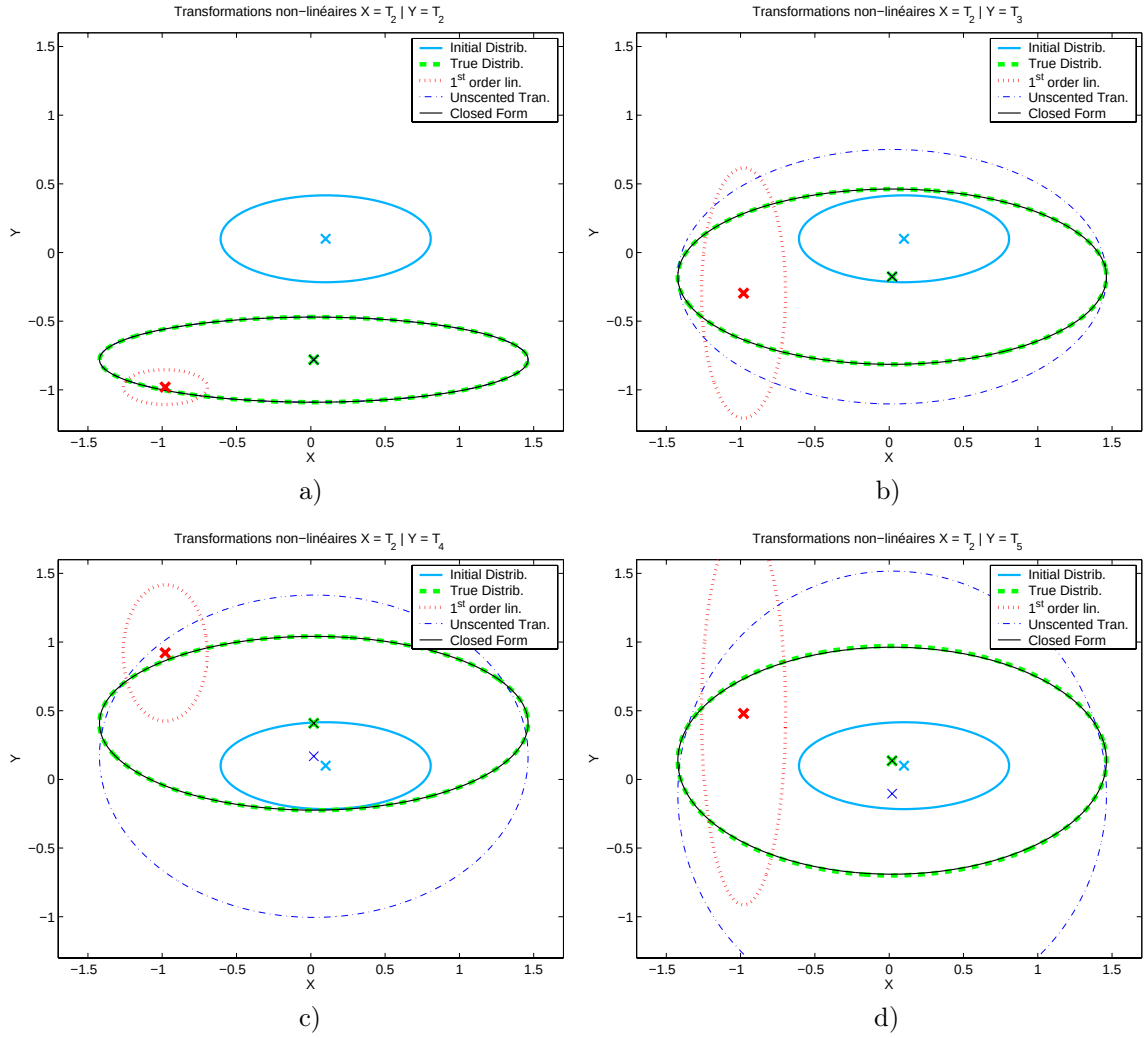


FIG. 3.2 – Les effets de l'ordre de la non-linéarité Chebyshev sur les performances des transformations : $y_1 = T_2(x_1)$; a) $y_2 = T_2(x_2)$; b) $y_2 = T_3(x_2)$; c) $y_2 = T_4(x_2)$; d) $y_2 = T_5(x_2)$.

3.5.2 Résultats sur la stabilité des transformations EKF, UKF et Exact

En regardant les résultats présentés dans la section précédente on peut se poser la question de savoir si l'exactitude dans le calcul de la statistique va réussir à résoudre les problèmes de stabilité bien connus du filtre de Kalman Etendu. On va démontrer dans la proposition suivante, qu'avec une égalité entre les états estimés pour les filtres EKF, UKF et ExPKF, il existe une relation d'ordre entre les covariances prédites pour le cas particulier de la synchronisation des séquences chaotiques générées par un polynôme de Chebyshev d'ordre deux.

Proposition 1. Dans le cas d'une dynamique Chebyshev d'ordre deux, pour n'importe quel état $\hat{x}_k^{EKF} = \hat{x}_k^{UKF} = \hat{x}_k^{ExPKF}$ et covariance d'erreur $P_k^{EKF} = P_k^{UKF} = P_k^{ExPKF}$, une synchronisation basée sur le modèle (3.34), mène à l'inégalité suivante pour les covariances prédites :

$$P_{k+1|k}^{EKF} \leq P_{k+1|k}^{UKF} \leq P_{k+1|k}^{ExPKF} \tag{3.45}$$

Démonstration : Comme il a déjà été démontré, la covariance prédite peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{m_{n+k} - m_n m_k}{n! \cdot k!} \sum_{i=n}^{N}\sum_{j=k}^{N} a_i a_j C_i^n C_j^k \bar{x}^{i+j-n-k} + Q \\ &= \mathbf{1}_N^T \left(\mathcal{M}^x \boxdot \mathcal{C}^{\bar{x}}\right) \mathbf{1}_N - \left(\mathbf{m}_{1:N}^x\right)^T \mathcal{C}^{\bar{x}} \mathbf{m}_{1:N}^x + Q \end{aligned} \tag{3.46}$$

où $\bar{x}$ représente l'état $\hat{x}_k$ et Q désigne la covariance du bruit de modèle.

Les matrices $\mathcal{M}^x$ et le vecteur $\mathbf{m}_{0:N}^x$ peuvent être simplifiés, pour le cas particulier de la linéarisation au premier ordre et de la transformation Unscented, sous la forme :

– linéarisation au premier ordre

$$\mathbf{m}_{0:N}^x \triangleq [1, 0, 0, 0, ...]^T$$

$$\mathcal{M}^x \triangleq \begin{bmatrix} m_2 & \mathbf{0}_{1\times(N-1)} \\ \mathbf{0}_{(N-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}$$

On considère la forme générale du vecteur de moments utilisée dans la transformation (débutant avec m_0), comme les définitions ci-dessus sont employées également pour la propagation au premier ordre.

– transformation Unscented

$$\mathbf{m}^x_{0:N} \triangleq [1, 0, m_2, 0, ...]^T$$

$$\mathcal{M}^x \triangleq \begin{bmatrix} m_2 & 0 & \\ 0 & m_4 & \mathbf{0}_{2\times(N-2)} \\ \mathbf{0}_{(N-2)\times 2} & & \mathbf{0}_{(N-2)\times(N-2)} \end{bmatrix}$$

Les définitions ci-dessus sont une conséquence directe de la définition de la transformation Unscented : les *points sigma* sont choisis d'une manière particulière pour permettre le calcul de la statistique a posteriori jusqu'au troisième ordre dans le développement de Taylor. Par contre, dans le cas de la transformation Exacte, tous les moments sont pris en compte pour le calcul de la statistique.

Il est facile de prouver qu'avec le vecteur de moments ci-dessus et en se limitant au cas des polynômes de Chebyshev (ou au cas de tout autre polynôme avec une alternance des coefficients nuls et non-nuls), seuls les termes multiples d'une puissance de deux de $\bar{x}$ seront retenus dans (3.46), et ainsi la covariance $P_{k+1|k}$ sera indépendante du signe de $\bar{x}$, avec la même variance initiale σ_x^2. Une autre propriété importante liée aux moments de la distribution gaussienne est $m_{n+k} - m_n m_k \geq 0$ pour tous $n, k = 1..N$.

Alors dans le cas particulier où tous le coefficients polynomiaux a_i sont positifs pour $i \geq 1$, et vu les notations $P^{EKF}_{k+1|k}$, $P^{UKF}_{k+1|k}$et $P^{ExPKF}_{k+1|k}$ pour les covariances prédites à l'instant $k+1$ et aussi avec la supposition de l'égalité entre les états estimés à l'instant k, on obtient :

$$P^{EKF}_{k+1|k} \leq P^{UKF}_{k+1|k} \leq P^{ExPKF}_{k+1|k} \tag{3.47}$$

□

Bien qu'aucune preuve générale (i.e. valide pour toute dynamique non-linéaire) de ce résultat n'est donnée, les nombreuses simulations qui ont été menées ont confirmé que la relation (3.47) est généralement observée.

Une conséquence immédiate de la proposition 1 est que le EKF donnera toujours une évaluation plus optimiste (sa propre évaluation de l'erreur sera d'habitude plus petite que l'erreur réelle) que celle obtenue par n'importe quelle autre variante de filtrage Kalman considéré ici.

La prochaine proposition démontre que ce comportement peut se traduire par une divergence locale.

Proposition 2. En synchronisant une séquence chaotique de Chebyshev du deuxième degré par la méthode de filtrage EKF, il existe $\hat{x}_k$ tel que le filtre devient inconsistent, et donne une divergence locale.

Démonstration : La proposition sera démontrée comme une conséquence directe du comportement de la

covariance prédite et que cette divergence locale est reliée au choix du rapport entre les variances des bruits de modèle et d'observation Q/R.

Considérant le modèle mono-dimensionnel de synchronisation (3.34) la variance prédite en utilisant le EKF peut être exprimée comme suit :

$$P_{k+1|k} = \left.\frac{df}{dx}\right|^2_{x=\hat{x}_k} P_k + Q$$

On considère l'équation récursive suivante qui peut définir le gain de Kalman pour le cas particulier du polynôme Chebyshev du deuxième ordre :

– EKF

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= \frac{P_{k+1|k}}{P_{k+1|k}+R} \\ &= \frac{\left.\frac{df}{dx}\right|^2_{x=\hat{x}_k} P_k + Q}{\left.\frac{df}{dx}\right|^2_{x=\hat{x}_k} P_k + Q + R} \\ &= \frac{\left.\frac{df}{dx}\right|^2_{x=\hat{x}_k} K_k + \frac{Q}{R}}{\left.\frac{df}{dx}\right|^2_{x=\hat{x}_k} K_k + \frac{Q}{R} + 1} \\ &= \frac{16\hat{x}_k^2 K_k + \frac{Q}{R}}{16\hat{x}_k^2 K_k + \frac{Q}{R} + 1} \end{aligned} \tag{3.48}$$

– ExPKF et UKF

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= \frac{P_{k+1|k}}{P_{k+1|k}+R} \\ &= \frac{8P_k\left(P_k + 2\hat{x}_k^2\right) + Q}{8P_k\left(P_k + 2\hat{x}_k^2\right) + Q + R} \\ &= \frac{8K_k\left(RK_k + 2\hat{x}_k^2\right) + \frac{Q}{R}}{8K_k\left(RK_k + 2\hat{x}_k^2\right) + \frac{Q}{R} + 1} \end{aligned} \tag{3.49}$$

Si on étudie le comportement des gains de Kalman, nous pouvons facilement observer que la valeur minimale est obtenue dans les deux cas pour $\hat{x}_k = 0$:

– EKF

$$K_{k+1} = \frac{\frac{Q}{R}}{\frac{Q}{R}+1} \tag{3.50}$$

– ExPKF et UKF

$$K_{k+1} = \frac{8RK_k^2 + \frac{Q}{R}}{8RK_k^2 + \frac{Q}{R} + 1} \tag{3.51}$$

Pour offrir une vue plus complète sur le comportement du gain du Kalman dans différentes situations, les

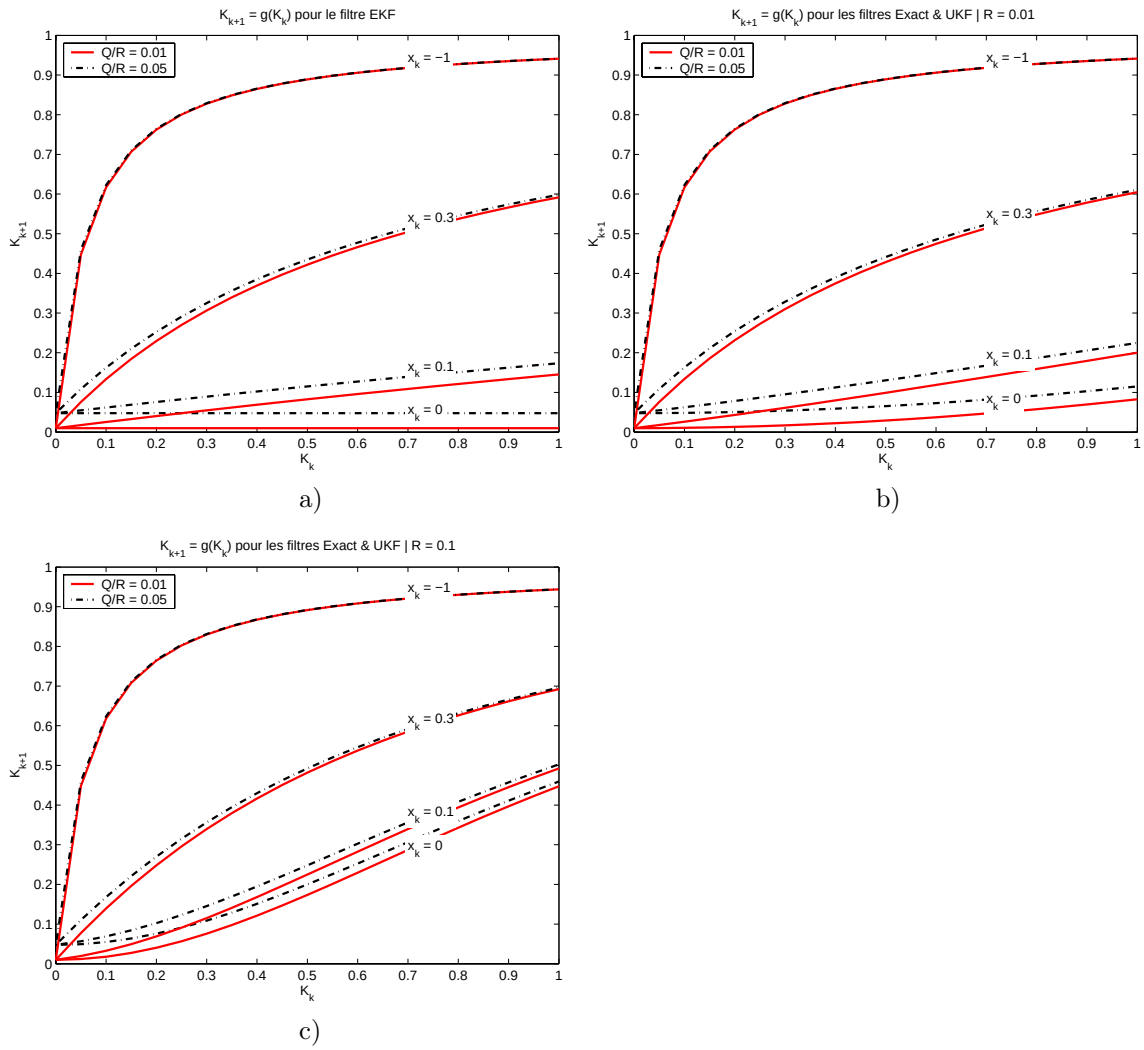


FIG. 3.3 – Evolution récursive du gain de Kalman pour les filtres : a) EKF ; b) ExPKF et UKF, $R = 10^{-2}$; c) ExPKF et UKF, $R = 10^{-1}$.

figures 3.3 a), b) et c) illustrent les relations récursives précédentes pour différentes valeurs du rapport Q/R et des états estimés précédemment. Pour le ExPKF et le UKF nous avons considéré également une variation sur la variance du bruit d'observation.

On remarque que le gain récursif de Kalman présente une caractéristique différente pour les filtres considérés. Dans le cas du EKF on retrouve juste une dépendance par rapport à Q/R, contrairement aux ExPKF / UKF où une influence supplémentaire de la variance du bruit d'observation est remarquée.

Dans les développements qui suivent on va démontrer le problème de stabilité du filtre EKF pour un cas particulier. On va considérer la fonction $g\left(K_k, \hat{x}_k\right)$ définie par :

$$g\left(K_k, \hat{x}_k\right) = K_{k+1}\left(K_k, \hat{x}_k\right)$$

La dérivée de cette relation par rapport à K_k, dans le cas du filtre EKF, est :

$$\frac{\partial}{\partial K_k} g\left(K_k, \hat{x}_k\right) = \frac{16\hat{x}_k^2}{\left(16\hat{x}_k^2 K_k + \frac{Q}{R} + 1\right)^2}$$

et l'hypothèse que l'état estimé est borné, $\exists a > 0$ pour que $\hat{x}_k^2 \leq a$, implique :

$$K_{k+1} \leq 16 a K_k \tag{3.52}$$

Avec la relation (3.48) si en plus à un moment donné, l'état estimé respecte $\hat{x}_k \simeq 0$, on obtient $K_{k+1} \simeq \frac{Q}{Q+R}$ et l'inégalité suivante existe :

$$\begin{aligned} K_{k+M} &\leq 16^{M-1} a^{M-1} K_{k+1} \\ &\leq 16^{M-1} a^{M-1} \frac{Q}{Q+R} \end{aligned}$$

où M désigne le nombre d'états consécutifs estimés.

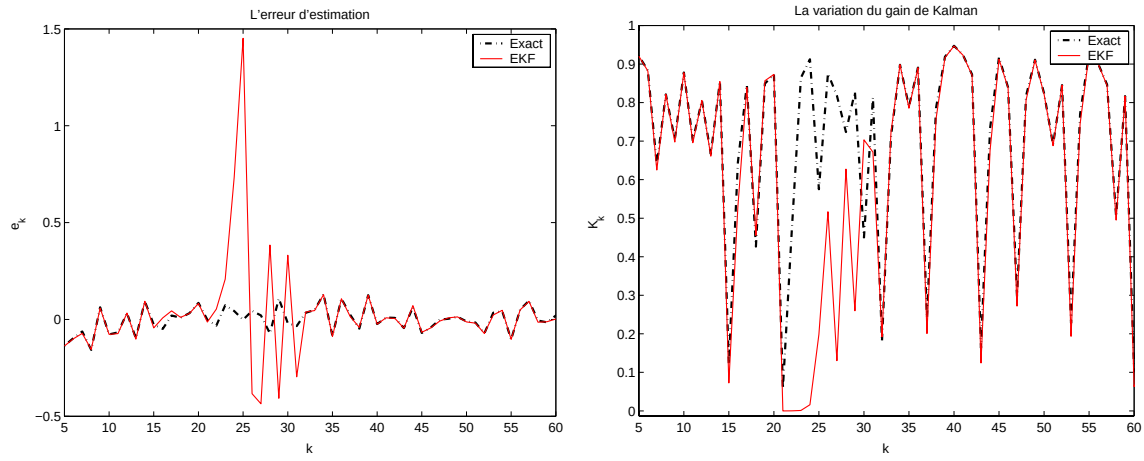
Dans le cas où le bruit d'observation est relativement petit nous pouvons considérer $a = 1$ et en conséquence $K_{k+M} \leq 16^{M-1} \frac{Q}{Q+R}$. Avec une dynamique chaotique bien connue, la covariance du bruit de modèle respecte la relation $Q \ll R$, et alors $\frac{Q}{Q+R} \simeq 0$. En conséquence $M = 1$ n'est pas suffisant pour que le gain du filtre s'éloigne de son minimum local. La conséquence est que l'état estimé est fortement pondéré par l'état prédit et l'observation est presque négligée. Ceci se traduira par un problème d'inconsistence, la covariance des erreurs estimée définie dans (3.42) étant totalement inadaptée à l'erreur courante, avec un comportement trop optimiste du filtre. □

Les figures 3.4 a) et b) donnent un exemple d'un tel comportement pour le filtre EKF dans le cas d'un polynôme de Chebyshev d'ordre deux avec pour paramètres de simulation : $Q/R = 10^{-10}$ et $R = 10^{-2}$.

Si on se réfère maintenant au ExPKF et au UKF une relation semblable à (3.47) peut être obtenue, avec la prise en compte des ordres supérieurs dans la série de Taylor. Ceci mènera à une évaluation plus pessimiste que celle donnée par le EKF. Alors, pour le même polynôme Chebyshev d'ordre deux et considérant encore les états égaux à l'instant k pour les différents filtres, nous pouvons écrire comme conséquence de la proposition 1, une inégalité entre les gains de Kalman :

$$K_{k+1}^{EKF} \leq K_{k+1}^{UKF} \leq K_{k+1}^{ExPKF} \tag{3.53}$$

Cette relation vient compléter la proposition 1, pour décrire le mécanisme de filtrage, et montre comment les implémentations EKF, UKF et ExPKF réagissent dans des conditions similaires des états et covariances



a) b)

FIG. 3.4 – a) Instabilité locale du filtre représentée par la divergence instantanée d'erreur ; b) Variation du gain de Kalman dans la région d'instabilité

estimées.

3.5.3 EQM du filtre ExPKF appliqué à la synchronisation chaotique

Un des critères les plus populaires pour mesurer la performance d'un estimateur est l'erreur quadratique moyenne (EQM). Alors on va examiner la capacité du filtre ExPKF proposé à synchroniser des séquences chaotiques générées par des polynômes de Chebyshev. L'EQM de synchronisation sera définie comme :

$$MSE = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (x_k - \hat{x}_k)^2 \tag{3.54}$$

où x_k désigne l'état vrai à l'instant k et où $\hat{x}_k$ son estimée.

Des simulations Monte Carlo ont été menées pour obtenir l'EQM par filtrage ExPKF, entre le signal chaotique original et celui synchronisé, sous différentes conditions de bruit. Dans le but de comparaison on considère également les résultats obtenus par l'application du EKF et UKF. Pour toutes les méthodes nous avons considéré des séquences de longueur 10^5 échantillons avec une période de transition de 10^3 échantillons. Tous les filtres ont été initialisés avec $x_0 = 0.3$ et $P_0 = 0.25$, et on a pris les mêmes séquences de bruit.

Pour mettre en évidence les possibilités de débruitage des filtres, on présente dans la figure 3.5, l'évolution de l'EQM normalisée par rapport à la variance du bruit d'observation R. Un polynôme de Chebyshev d'ordre 4 est considéré pour cette simulation, parce que pour des ordres inférieurs les performances des filtres sont voisines, l'influence des moments statistiques d'ordre supérieur étant limités dans ce cas. Pour faire face au problème de stabilité présenté par le EKF nous avons considéré un rapport Q/R égal à 10^{-1}, pour toutes les méthodes de filtrage.

Si le EKF se comporte bien pour des rapports SNR élevés, comme démontré récemment par Leung et Zhu

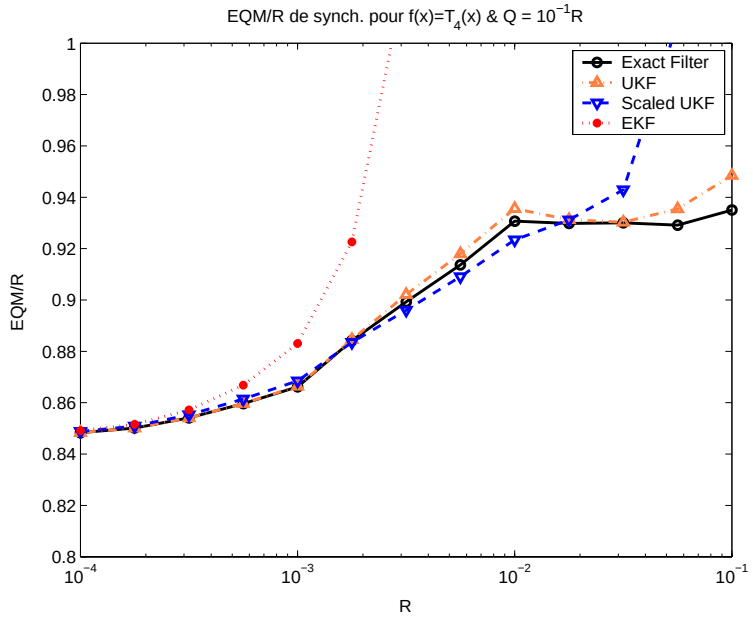


FIG. 3.5 – EQM de synchronisation normalisée par rapport à R, pour $f(x) = T_4(x)$

[LZ01], ses performances se dégradent rapidement en conditions plus bruitées. On peut voir dans la figure 3.5 que le EKF est une méthode appropriée pour synchroniser des séquences Chebyshev d'ordre 4 seulement en présence d'un bruit ayant une variance plus petite que 10^{-3}.

Pour le UKF nous avons considéré deux implémentations : la première respecte les définitions données dans le début de section, et le deuxième emploie la version *scaled* développée par Julier *et al.* [JUDW00, WvdM01] pour faire face à un étalement exagéré des *points sigma*. Cette méthode a été présentée dans le chapitre 3.

On peut remarquer sur la même figure que le UKF classique obtient de bonnes performances pour tous les niveaux de bruit considérés, mais celles-ci restent toujours inférieures à celles données par le ExPKF. Par rapport à l'implémentation *scaled*, pour des variances du bruit d'observation allant jusqu'à $3 \cdot 10^{-2}$, on obtient une erreur très proche de celle obtenue par le filtre polynomial Exact mais pour des bruits plus importants, le filtre proposé a un avantage significatif. En particulier, le ExPKF a ses performances peu sensibles au niveau de bruit dans l'intervalle $[10^{-2}, 10^{-1}]$ comme la pente de la courbe est voisine de zéro.

Pour une non-linéarité plus forte (gardant la dynamique de Chebyshev) la différence entre les diverses méthodes devient plus prononcée.

3.5.4 Evaluation de la consistence

La consistence (ou la crédibilité) de n'importe quel estimateur/filtre est une question importante en pratique. Cette question se rapporte à vérifier toute déviation significative entre l'erreur d'estimation réelle (biais et EQM) et celle fournie par l'estimateur lui-même (le biais calculé et la covariance des erreurs). Il est bien connu [BSL93] que n'importe quelle distance significative entre ces deux ensembles se traduit par de

faibles performances de filtrage et même par un comportement divergent.

Pour évaluer la consistence du filtre polynomial proposé, on considère encore un total de N simulations Monte Carlo indépendantes, chacune donnant une estimation $\hat{x}_k$ de l'état vrai x_k à l'instant k, ainsi qu'une covariance des erreurs estimée P_k. L'erreur d'estimation normalisée au carrée (NEES = Normalized Estimation Error Squared) est fréquemment employée pour évaluer la crédibilité d'un filtre [BSL93]. À l'instant k, en considérant une simulation Monte Carlo particulière (de rang i), la NEES est définie comme :

$$\epsilon_k^{(i)} = (x_k - \hat{x}_k)^T P_k^{-1} (x_k - \hat{x}_k) \tag{3.55}$$

En faisant la moyenne des NEES sur l'ensemble de simulations Monte Carlo on obtient le test statistique $\bar{\epsilon}_k$ pour examiner la consistance du filtre :

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{N} \epsilon_k^{(i)} \tag{3.56}$$

où n est la dimension du vecteur d'état ; Une valeur $\bar{\epsilon}_k$ proche de 1 indique un filtre fiable, ayant une erreur réelle d'estimation en concordance avec sa propre évaluation.

En considérant une distribution gaussienne pour l'erreur d'estimation $\tilde{x}_k$, la NEES moyennée est connue pour être distribuée selon une loi de chi-deux (avec $n = 1$ degré de liberté dans notre cas). Puis, pour vérifier la consistence du filtre, on peut définir une région de confiance qui pourrait correspondre, par exemple, à 95% en valeur de probabilité symétrique (coefficient de confiance $\alpha = 0.05$) :

$$\left[\chi^2(0.025), \chi^2(0.975)\right] = [0.74, 1.30] \tag{3.57}$$

Pour l'évaluation de Monte Carlo de l'intervalle d'acceptation nous avons considéré cent tests ($N = 100$), réalisés pour des séquences chaotiques de longueur égale à 300 échantillons (après une période de transition de 1000 échantillons), générées avec des polynômes de Chebyshev avec un ordre compris entre 2 et 5. Au niveau du bruit d'observation, des séquences gaussiennes avec une variance $R = 10^{-4}$ puis $R = 10^{-1}$ ont été considérées. Une incertitude de modèle telle que le rapport Q/R soit égal 10^{-4} a été choisie à chaque fois.

Les NEES moyennées obtenues pour les deux cas de bruit sont présentées dans les figures 3.6 et 3.7 respectivement. Pour comparer, nous considérons encore les implémentations EKF et UKF (version scaled). On a préféré la version Scaled du filtrage Unscented pour vérifier si le comportement curieux du filtre, constaté au niveau de l'EQM, se retrouve dans l'étude de NEES.

Pour vérifier la consistence des filtres, on va tester si les valeurs de $\bar{\epsilon}_k$ demeurent dans l'intervalle $[0.74, 1.30]$ au cours du filtrage. Dans le cas d'un SNR élevé (fig. 3.6) on remarque presque le même comportement pour les filtres EKF et Exact : les valeurs de NEES moyennée restent dans l'intervalle de confiance. Par contre,

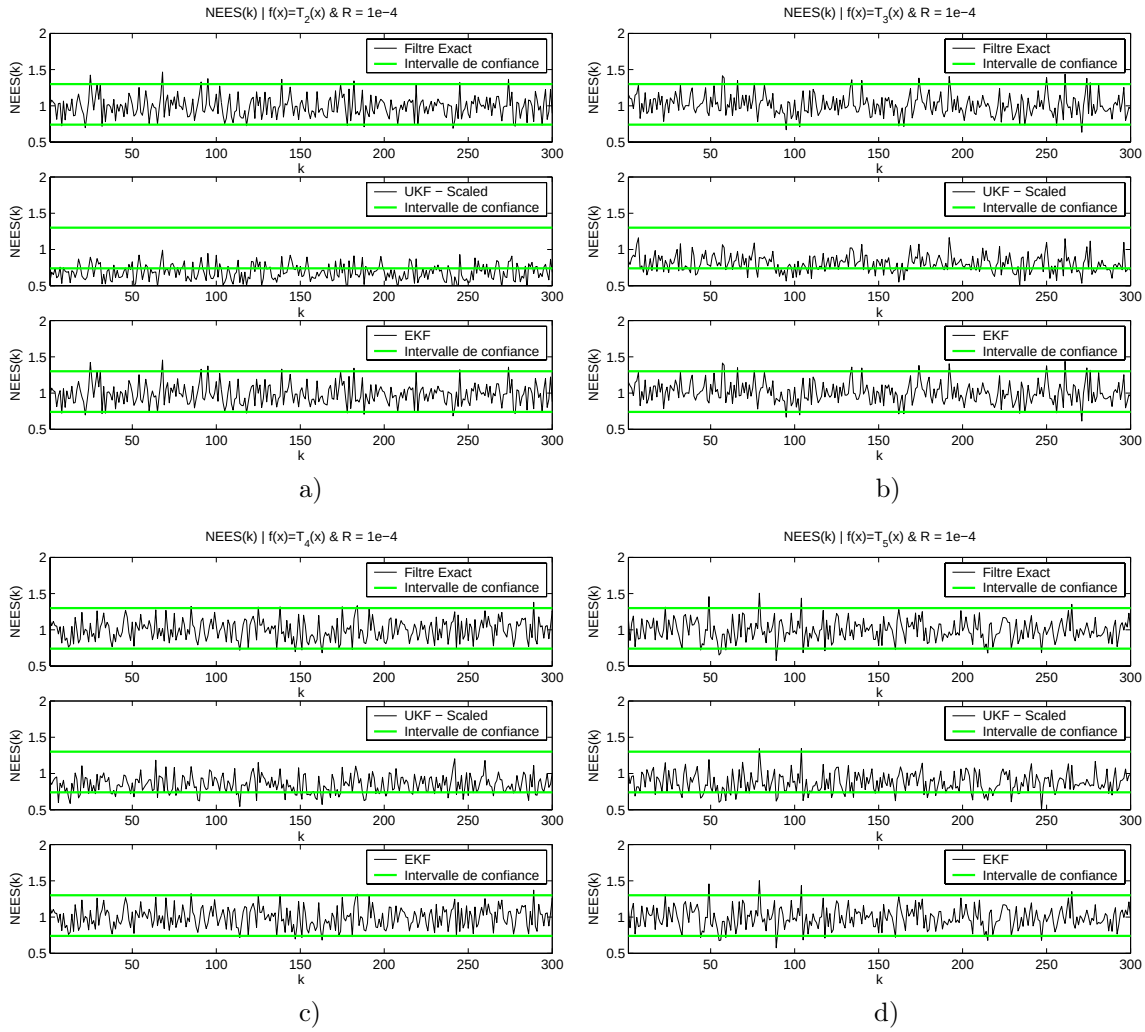


FIG. 3.6 – La NEES moyennée pour les méthodes de filtrage ExPKF, UKF version Scaled et EKF, avec une variance du bruit d'observation $R = 10^{-4}$ et les fonctions génératrices : a) $f(x) = T_2(x)$; b) $f(x) = T_3(x)$; c) $f(x) = T_4(x)$; d) $f(x) = T_5(x)$;

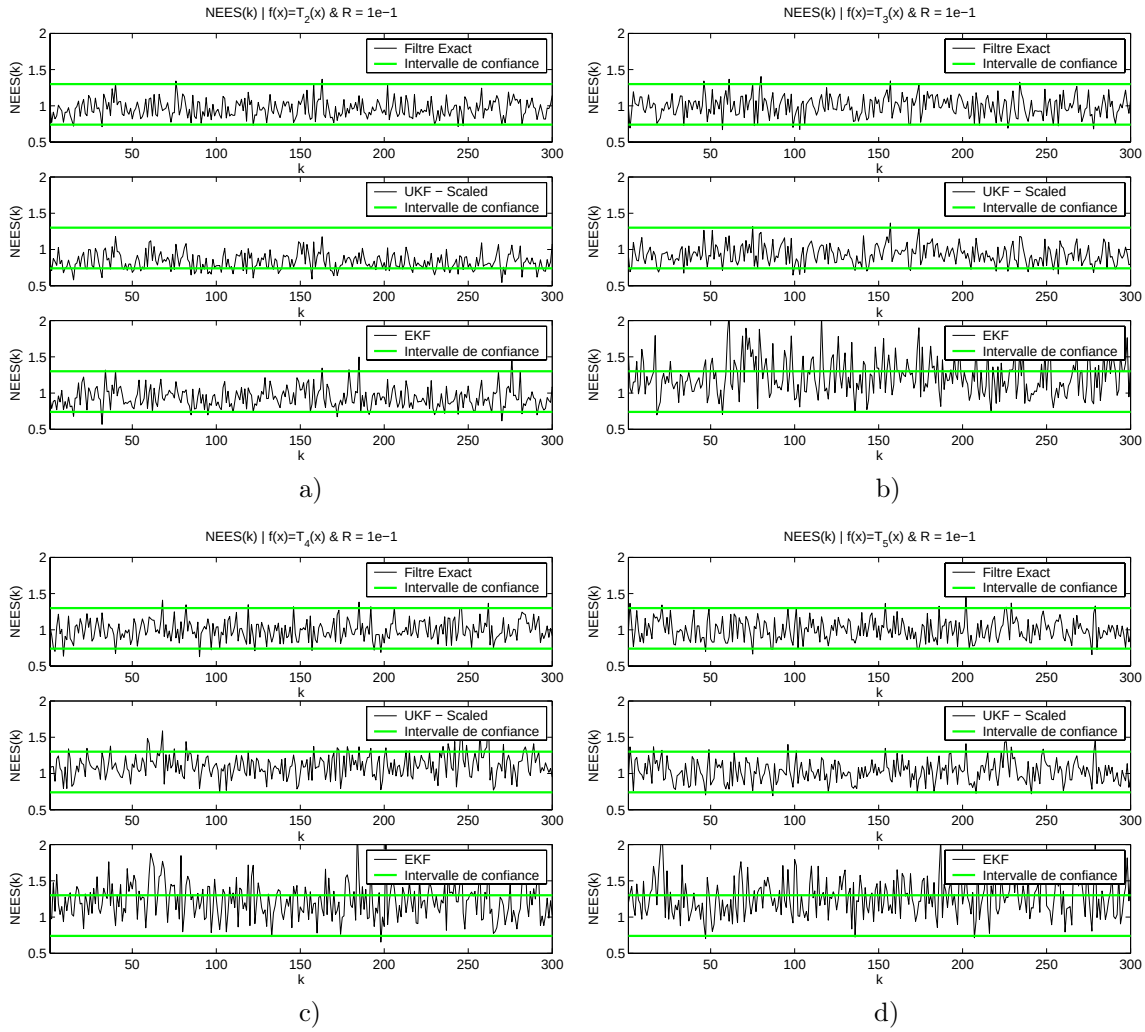


FIG. 3.7 – La NEES moyennée pour les méthodes de filtrage ExPKF, UKF version Scaled et EKF, avec une variance du bruit d'observation $R = 10^{-1}$ et les fonctions génératrices : a) $f(x) = T_2(x)$; b) $f(x) = T_3(x)$; c) $f(x) = T_4(x)$; d) $f(x) = T_5(x)$;

la variante *scaled* du filtrage Unscented présente une caractéristique plutôt pessimiste pour les non-linéarités d'ordre deux et trois, cet aspect s'effaçant avec la montée en ordre du polynôme.

Dans le cas de séquences plus fortement bruitées, on remarque une atténuation au niveau du comportement pessimiste du filtre Unscented mais par contre un optimisme exagéré du filtrage EKF pour des ordres de non-linéarité importants, sous-estimant les vraies valeurs de covariance des erreurs.

L'aspect le plus important qu'il faut dégager de ces simulations est que le filtrage ExPKF réussit à garder une estimation correcte de la vraie covariance des erreurs ; Il se place donc comme l'estimateur le plus crédible.

3.6 Conclusion

Le problème du filtrage non-linéaire des modèles polynomiaux mono-dimensionnels en temps discret a été considéré dans ce chapitre. En utilisant des développements en série de Taylor nous avons obtenu des formules analytiques originales donnant la statistique exacte d'ordre deux de n'importe quelle variable stochastique ayant subie une transformation polynomiale. Un schéma innovant de filtrage de Kalman est alors formulé sur la base de ces résultats. Grâce aux expressions matricielles compactes de la moyenne et de la covariance à chaque étape, on obtient une exécution rapide et une expression générale du filtre de Kalman polynomial. Comme application, nous avons considéré la synchronisation de séquences chaotiques générées par des polynômes de Chebyshev. L'EQM ainsi que la NEES ont été évaluées dans diverses conditions de bruit pour montrer l'efficacité du filtre proposé. Une comparaison aux résultats obtenus à l'aide du filtre populaire EKF et du filtre Unscented Kalman, d'une efficacité remarquable, a également été menée pour confirmer ces bonnes performances.

Le chapitre suivant aura comme objectif, l'application de la méthode de synchronisation chaotique dont les performances ont été présentées ici, à plusieurs structures des récepteurs à spectre étalé par séquence chaotique.

Chapitre 4

Récepteurs complets à étalement de spectre par séquence chaotique directe

4.1 Introduction

Le sujet des communications numériques à l'aide de systèmes chaotiques a reçu au cours des dix dernières années une attention importante de la part de la communauté scientifique, en raison des propriétés intrinsèques associées au chaos. Ainsi, grâce à son comportement en apparence aléatoire, le chaos étale non seulement le spectre du signal informationnel, de ce fait fournissant la robustesse contre des distorsions de canal, mais aussi agit comme clef de cryptage. Par conséquent, le fonctionnement à faible puissance d'émission est envisageable et en raison de la dynamique complexe des signaux, il est extrêmement difficile pour l'utilisateur non autorisé, averti de la transmission, d'accéder à l'information. D'autres avantages potentiels doivent être notés, entre autres le partage des ressources de canal par l'emploi d'une méthode CDMA (Code Division Multiple Acces), résultant de la faible inter-corrélation des signaux chaotiques, et de la complexité réduite des dispositifs de transmission.

Plusieurs méthodes de modulation chaotique ont été présentées déjà dans le chapitre 2, mais à ce jour la majorité des solutions proposées sont issues de simulations numériques sur des canaux de transmission affectés par un bruit blanc gaussien. Une présentation générale de ce domaine est donnée dans [Has98, Yan04].

L'objet de ce chapitre est de proposer des solutions de récepteurs chaotiques en mesure d'opérer dans des environnements sans-fil réalistes (non-stationnarité du canal en amplitude et phase). La première partie du chapitre est destinée à l'introduction de l'émetteur employé, qui sera le même pour toutes les versions de récepteurs présentés ensuite. Deux familles de récepteurs seront considérées, en fonction de la façon d'accomplir la synchronisation.

La première catégorie de solutions repose sur la mise en oeuvre d'une synchronisation chaotique, celle-ci ayant l'avantage d'une structure très simple, tout autre mécanisme de synchronisation supplémentaire n'étant pas nécessaire. Leung et Zhu [LZ01] ont obtenu des résultats théoriques importantes sur la synchronisation chaotique par filtrage de Kalman, particulièrement le filtrage de Kalman Etendu (EKF). Nous avons démontré de même, dans les chapitres 2 et 3 ainsi que dans [LABS06], que des solutions alternatives pertinentes existent, par utilisation du UKF (Unscented Kalman Filter) ou bien du ExPKF (Exact Polynomial Kalman Filter). Alors la construction du récepteur devient facile quelle que soit la solution d'estimation choisie [APB02, APDB03, ALBS04, LABS05]. Ces solutions arrivent même à compenser des caractéristiques du canal non-stationnaire en phase et en amplitude mais par contre sont encore réservées aux rapports SNR (Signal to Noise Ratio) positifs.

Dans le but de tester les performances d'un tel système de transmission sur un canal de type acoustique sous-marin à trajets multiples et à des rapports SNR négatifs, une solution basée seulement sur la synchronisation chaotique n'a pour l'instant pas été obtenue. Pour contourner cette limitation, nous étudions dans la seconde partie du chapitre une autre famille de solutions, reposant sur des schémas de synchronisation plus conventionnels. Acquisition et poursuite seront ainsi accomplies avec estimation d'état du symbole et éventuellement de l'erreur de phase. Une extension à plusieurs trajets sera aussi proposée [ALBS05], avec la compensation pour chaque trajet de la phase et du gain.

Les méthodes évoquées ci-dessus seront comparées à une variante de récepteur RAKE-MRC [Pro95] par rapport à un critère de TEB.

4.2 Emetteur du système "Chaotic DS-SS" (CD3S)

Le système CD3S a été développé [HBM94, APB02] à partir d'un modèle classique de transmission à étalement du spectre de type séquence directe. L'idée principale est de remplacer le code d'étalement binaire, généré classiquement avec des registres à décalage, par une séquence chaotique à valeurs réelles dans un intervalle fixe. Le schéma général d'un système CD3S est présenté dans la figure 4.1. Les symboles informationnels b_k, représentant une modulation de phase de l'information initiale binaire, subissent ultérieurement l'étalement par le code chaotique $c_k \in \mathbb{R}$ caractérisé par une fréquence chip $F_c \gg F_b$, où $F_b = 1/T_b$ est le taux de transmission des symboles. A ce point nous ne faisons aucune supposition sur le type de séquence chaotique, juste que celle-ci est donnée par l'équation récursive mono-dimensionnelle $c_k = f(c_{k-1})$.

On peut écrire l'expression du signal étalé sous la forme $x_k = b_{\lfloor k/L \rfloor} c_k$, où $\lfloor \times \rfloor$ désigne la partie entière du nombre $\times$ et où $G = F_c/F_b$ représente le gain d'étalement. Le choix du gain d'étalement dépend de la bande disponible, du taux de transmission et du taux d'erreur binaire souhaité de même que d'éventuelles contraintes de sécurité de transmission.

On peut remarquer la similarité de ce système avec la méthode de modulation chaotique de type CSK. Effectivement, si on considère la modulation de phase de l'information comme un changement de la dynamique chaotique du code d'étalement, on obtient vraiment une structure de type CSK. L'étalement du spectre par séquence chaotique directe représente donc un cas particulier de modulation CSK.

En ce qui concerne l'établissement de la synchronisation, des symboles pilotes peuvent être interposés au cours de la transmission comme nous le verrons plus tard. Finalement le signal subit un filtrage de type Nyquist et une porteuse sinusoïdale est utilisée pour la transposition dans la bande choisie.

4.3 Modèles de base pour les récepteurs CD3S

Comme il a été suggéré récemment [APB02], la synchronisation chaotique et la détection du symbole peuvent être obtenus simultanément en utilisant un schéma de filtrage Kalman parallèle (estimation simultanée du Code/Symbole). Pour une application sur des canaux réels le problème de la récupération de la porteuse doit être considéré. Généralement, ce problème est supposé résolu, l'analyse générique des systèmes de transmission étant faite plutôt en bande de base. Les travaux où la récupération de porteuse n'est pas ignorée exploitent habituellement une boucle de Costas ; Nous considérerons aussi cette solution comme point de départ dans notre étude. Les deux prochains paragraphes exposent deux réponses possibles au problème : la récupération de porteuse sera d'abord traitée en amont de l'estimation simultanée Code/Symbole, puis nous examinerons une autre approche où ces deux traitements seront réglés conjointement.

4.3.1 Récepteur à estimation parallèle du code et du symbole

Cette première méthode considère le problème de la récupération de la porteuse résolu en amont de la structure d'estimation du code et du symbole. Cette solution proposée par [APB02], se base sur un filtrage Kalman parallèle. L'information est ici récupérée par une méthode de synchronisation chaotique et non par une structure de type corrélateur. Ainsi la non-linéarité introduite par la dynamique chaotique joue un rôle-clé dans ce récepteur. Le schéma général d'un tel récepteur est donné dans la figure 4.2.

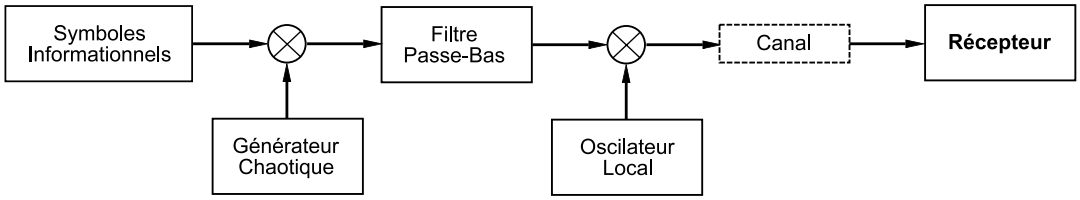


FIG. 4.1 – Schéma général d'un système CD3S

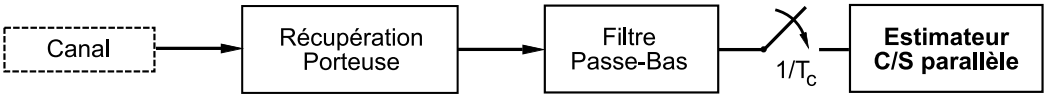


FIG. 4.2 – Récepteur CD3S basé sur une estimation Code/Symbole duale

Cette structure suppose un signal à valeurs réelles en entrée du bloc de filtrage parallèle ; En conséquence, le problème de la récupération de porteuse doit être réglé en amont pour compenser l'erreur de phase. Dans la figure 4.3, la structure de filtrage Kalman permet l'estimation simultanée, à la fréquence chip F_c, de la séquence d'étalement chaotique initiale c_k et du symbole informationnel b_k, à partir de l'observation bruitée y_k. Chacun des deux filtres utilise le dernier état estimé par l'autre filtre comme paramètre, le modèle général étant donné par les équations (4.1). Ainsi les modèles de processus et d'observation pour la synchronisation du code ont la forme suivante :

$$\begin{cases} c_{k+1} &= f\left(c_k\right) + v_k^c \\ y_k &= sgn\left(\hat{b}_{k-1}\right) c_k + n_k \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f(\cdot)$ désigne la fonction génératrice chaotique, et où la séquence de bruit $v_k^c \sim \mathcal{N}\left(0, Q^c\right)$, indépendante de l'état c_k, reflète l'incertitude de modèle associée aux imperfections du canal ; Le terme $n_k \sim \mathcal{N}\left(0, R\right)$ désigne le bruit d'observation et il est surtout dépendant du rapport Signal à Bruit (SNR - Signal to Noise Ratio) à l'entrée du récepteur.

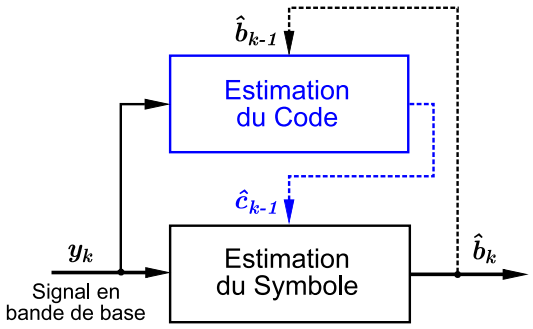
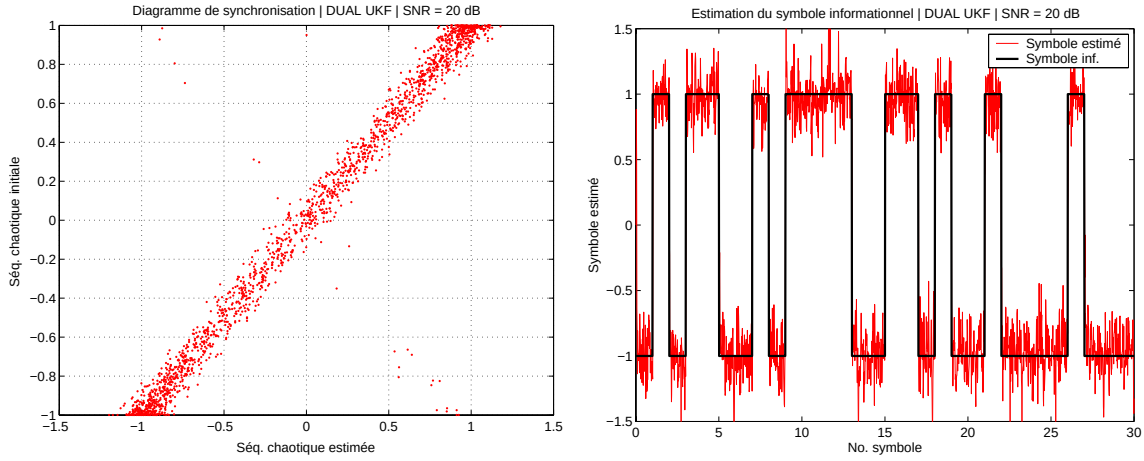


FIG. 4.3 – L'estimateur Dual Code/Symbole

De façon similaire, le symbole sera estimé à la fréquence chip en utilisant les modèles dynamique et d'observation suivants :

$$\begin{cases} b_{k+1} &= b_k + v_k^b \\ y_k &= b_k f(\hat{c}_{k-1}) + n_k \end{cases} \tag{4.2}$$



a) b)

FIG. 4.4 – a) Diagramme de synchronisation pour le récepteur parallèle C/S (implémentation UKF) ; b) Estimation du symbole émis

où la séquence de bruit gaussien $v_k^b \sim \mathcal{N}\left(0, Q^b\right)$, considéré de même indépendant de l'état b_k, va influencer la capacité du filtre à suivre l'évolution du symbole. Une petite valeur de la variance Q^b entraînera une faible capacité de poursuite alors qu'une variance importante du bruit de processus va permettre une meilleure adaptation aux changements de symbole.

Il faut souligner que grâce à l'ensemble des termes de bruit $\left\{v_k^c, v_k^b, n_k\right\}$ et à l'emploi d'une méthode d'estimation non-linéaire de type *Unscented* ou *ExPKF*, ce récepteur peut encore fonctionner sur des canaux sélectifs en fréquence [APB02, APDB03], même si le modèle d'observation n'a pas explicitement inclus la propagation par trajet multiple. Un tel modèle ainsi qu'un comparatif des performances seront présentés au paragraphe 4.4.

Les figures 4.4 a) et b) illustrent le comportement du récepteur parallèle C/S, en utilisant une dynamique chaotique de type Chebyshev d'ordre deux et une modulation de l'information de type BPSK. Ainsi on représente dans la partie a) le diagramme de synchronisation et dans la partie b) on donne un aperçu des symboles informationnels estimés.

Les paramètres de simulation ont été choisis de la manière suivante :

- simulation en bande de base ;
- fonction chaotique génératrice de type Chebyshev (ordre 2) : $f\left(x_k\right) = 2x_k^2 - 1$;
- gain d'étalement : $G = 63$;
- rapport Signal à Bruit : $SNR = 20\,dB$;

Aussi on va préciser le paramétrage du filtre de Kalman employé :

- filtrage non-linéaire **UKF** ;
- variances des bruit de processus : $Q^b = 10^{-2}$, $Q^c = 10^{-1}$;
- variance du bruit de mesure adapté au rapport SNR : $R = \sigma_c \cdot 10^{-\frac{SNR}{10}} = 5 \cdot 10^{-3}$, où la variance de la

séquence d'étalement est $\sigma_c = 0.5$.

Le diagramme de synchronisation nous confirme que le récepteur travaille avec une méthode de synchronisation chaotique pour réussir en même temps l'estimation du symbole informationnel. Quelques courtes désynchronisations s'observent au niveau du changement de symbole binaire mais le récepteur réussit rapidement à récupérer la bonne valeur de l'état. En jouant sur les variances du bruit de processus on peut augmenter ou réduire la rapidité de synchronisation, au risque de pénaliser l'EQM. Une telle étude a été faite [Luc03] sur le meilleur choix de ces deux variances, et finalement les valeurs $Q^b = 10^{-2}$, $Q^c = 10^{-1}$ conviennent dans la majorité des situations par rapport au critère de l'EQM de synchronisation.

4.3.2 Estimation simultanée du Code, du Symbole et de la Phase

A l'inverse de la structure précédente de récepteur, basée sur une boucle de Costas pour résoudre la compensation de phase avant la démodulation, nous allons maintenant développer une autre solution considérant une erreur de phase possible dans le signal en bande de base. Ainsi la structure présentée dans la figure 4.5 réalise la transposition de fréquence avec une porteuse fixe pour obtenir les signaux en phase et en quadrature.

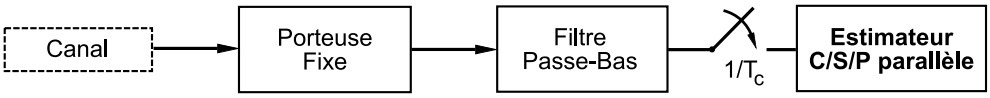


FIG. 4.5 – Récepteur CD3S basé sur une estimation Code/Symbole/Phase

On va construire le modèle du nouveau récepteur à partir de la structure parallèle Code/Symbole, en ajoutant un nouveau bloc qui fera l'estimation de l'erreur de phase en utilisant le code d'étalement et le symbole estimés comme paramètres. On considère un estimateur d'ordre deux pour modéliser l'erreur de phase entre la porteuse du signal reçu et celle du signal utilisé par la démodulation. Un aspect important est aussi le changement de dimension de l'état observé qui cette fois va inclure la forme quadratique du signal reçu, même dans le cas d'une modulation de phase à deux états.

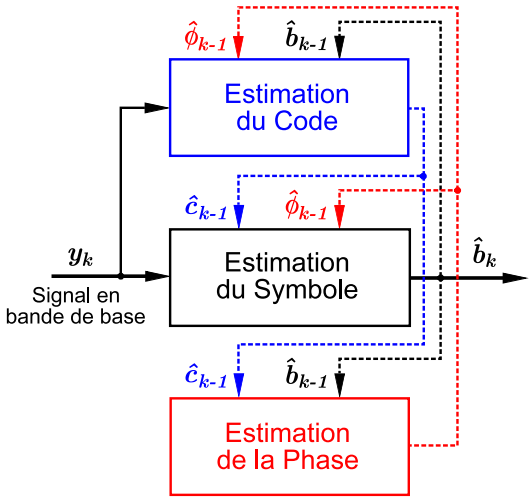


FIG. 4.6 – Estimateur parallèle Code/Symbole/Phase

Les modèles utilisés pour l'estimation du code, du symbole et de la phase sont donnés par les équations (4.3), (4.4) et (4.5), respectivement :

$$\begin{cases} c_{k+1} = f\left(c_k\right) + v_k^c \\ \mathbf{y}_k = sgn\left(\hat{b}_{k-1}\right) c_k.\mathbf{g}\left(\hat{\phi}_{k-1} + \hat{\varepsilon}_{k-1}\right) + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} b_{k+1} = b_k + v_k^b \\ \mathbf{y}_k = b_k.f\left(\hat{c}_{k-1}\right).\mathbf{g}\left(\hat{\phi}_{k-1} + \hat{\varepsilon}_{k-1}\right) + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \phi_{k+1} \\ \varepsilon_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_k + \varepsilon_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k^{\phi} \\ \mathbf{y}_k = sgn\left(\hat{b}_{k-1}\right).f\left(\hat{c}_{k-1}\right).\mathbf{g}\left(\phi_k\right) + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{4.5}$$

où $\mathbf{g}\left(.\right)$ s'exprime comme :

$$\mathbf{g}\left(\phi_k\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\phi_k\right) & \sin\left(\phi_k\right) \end{bmatrix}^T \tag{4.6}$$

$\mathbf{n}_k$ étant le bruit associé à l'observation $\mathbf{y}_k$ et $\mathbf{v}_k^{\phi}$ désignant le bruit de processus associé à l'estimateur de phase :

$$\mathbf{y}_k = \left[y_k^{Re}, y_k^{Im}\right]^T, \mathbf{n}_k = \left[n_k^1, n_k^2\right]^T, \mathbf{v}_k^{\phi} = \left[v_k^1, v_k^2\right]^T \tag{4.7}$$

Comme déjà considéré pour l'estimateur parallèle Code/Symbole, les bruits sont supposés gaussiens cen-

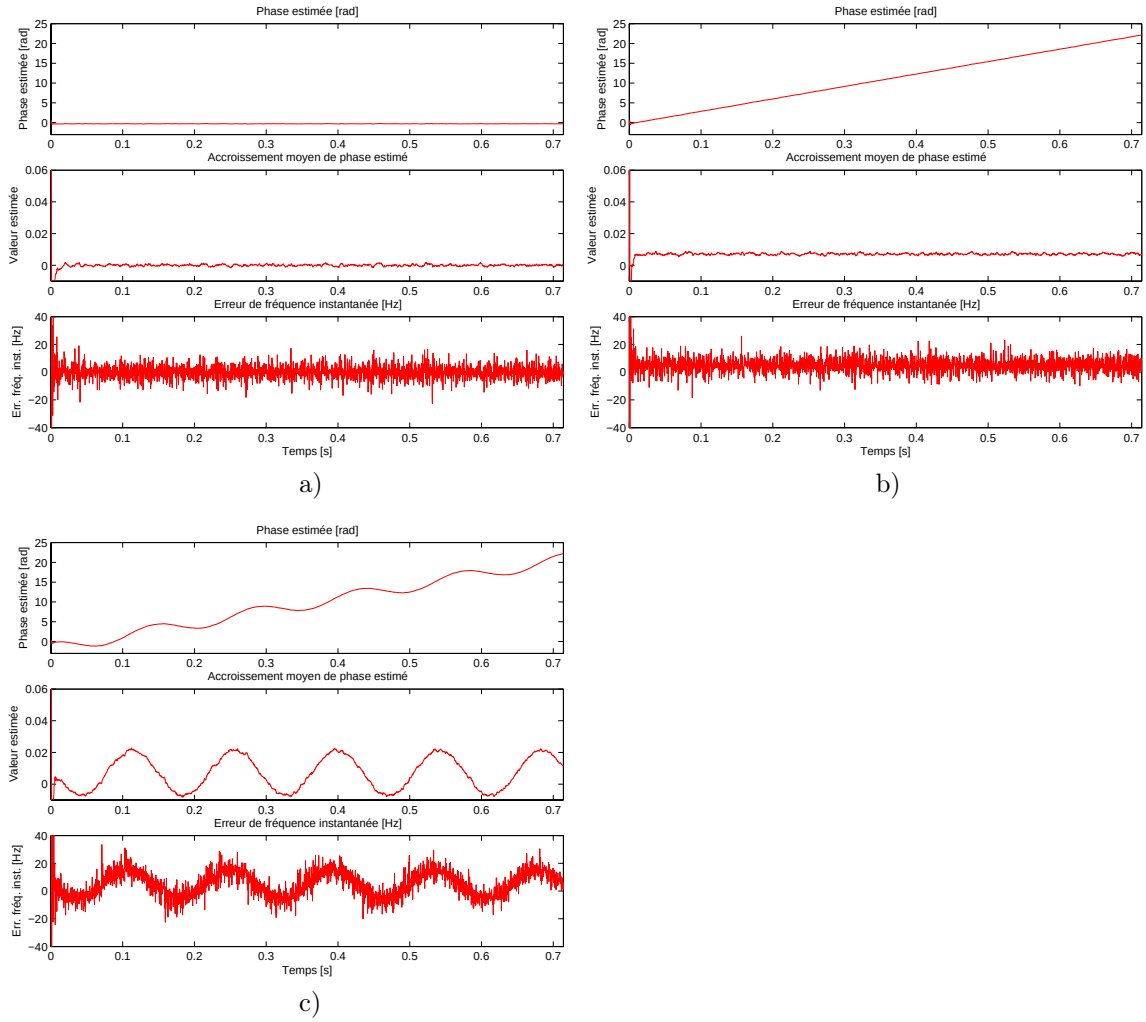


FIG. 4.7 – Représentation des paramètres de phase estimés pour : a) une erreur de fréquence nulle et un canal stationnaire ; b) une erreur de fréquence constante et un canal stationnaire ; c) une erreur de fréquence sur un canal avec des changements périodiques de phase

trés et indépendants des états :

$$\begin{cases} v_k^c \sim N\left(0, Q^c\right) \ , \ v_k^b \sim N\left(0, Q^b\right) \\ \mathbf{v}_k^\phi \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{Q}^\phi\right), \mathbf{Q}^\phi = diag\left[Q^{\phi_1}, Q^{\phi_2}\right] \end{cases}$$

Le bruit d'observation est modélisé par une statistique gaussienne : $\mathbf{n}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, avec la matrice de covariance $\mathbf{R} = \frac{\sigma^2}{2}\mathbf{I}_2$.

Pour illustrer le fonctionnement de l'estimateur à erreur de phase nous avons considéré trois cas :

- démodulation sans erreur de fréquence porteuse dans le cas d'un canal stationnaire (figure 4.7 a) ;
- démodulation avec une erreur de fréquence dans le cas d'un canal stationnaire (figure 4.7 b) ;
- démodulation avec une erreur de fréquence sur un canal avec des changements périodiques de phase (figure 4.7 c).

Comme la représentation du signal informationnel estimé est équivalente au cas d'une démodulation à l'aide de deux filtres on considère seulement la variation temporelle des coefficients estimés et de la fréquence instantanée. Seul le filtrage de Kalman Unscented est utilisé pour ces estimations, à cause d'une meilleure stabilité par rapport au filtrage EKF et de la difficulté de modélisation des fonctions trigonométriques sous une forme polynomiale pour le filtre ExPKF.

Les paramètres des simulations sont les suivants :

- simulation sur porteuse ;
- fréquence d'échantillonnage : $F_e = 44100\,Hz$;
- fréquence porteuse : $F_p = 8000\,Hz$;
- fréquence chip : $F_c = 4410\,Hz$;
- fonction chaotique génératrice de type Chebyshev (ordre 2) : $f(x_k) = 2x_k^2 - 1$
- gain d'étalement : $G = 63$;
- rapport Signal à Bruit : $SNR = 20\,dB$;

Pour le paramétrage du filtre on a utilisé les mêmes valeurs que dans le cas du récepteur C/S, en ajoutant la matrice de covariance pour l'estimation de l'erreur de phase sous la forme $\mathbf{Q}^{\phi} = diag\left[10^{-5}, 10^{-6}\right]$. Une remarque s'impose sur la relative instabilité du filtre au niveau de l'erreur de phase estimée, pour des canaux très bruités et non-stationnaires : des sauts de phase de $\pm\pi$ peuvent être remarqués, et dans telles situations l'emploi d'une méthode de modulation différentielle doit être envisagé.

Pour les deux structures de récepteurs considérées (C/S et C/S/P) des simulations plus exhaustives seront proposées par la suite avec en particulier une étude comparative sur le critère de TEB.

4.3.3 Méthodes de contrôle de gain

Pour l'application à des canaux réels des structures de récepteurs présentées antérieurement, en plus de la récupération de la porteuse, l'utilisation d'une méthode de contrôle de gain s'impose pour éviter une dégradation importante des performances de synchronisation. Même pour un canal stationnaire avec un gain non-unitaire, des erreurs importantes de synchronisation apparaissent.

Plusieurs approches sont possibles : la plus utilisée en pratique est l'emploi d'une boucle de régulation indépendante des caractéristiques du signal reçu, en amont du récepteur. Alors, les performances sont assez limitées, tout particulièrement dans les environnements fortement bruités.

Nous allons proposer deux méthodes de contrôle de gain adaptées aux récepteurs basés sur un modèle de filtrage Kalman parallèle. La première solution considère une modification de la dynamique du système, afin de transférer les variations de l'atténuation du canal sur l'amplitude du symbole informationnel. Dans le cas d'une modulation de phase cette modification d'amplitude ne va pas influencer la détection du symbole. La modification de la dynamique non-linéaire est décrite par la relation :

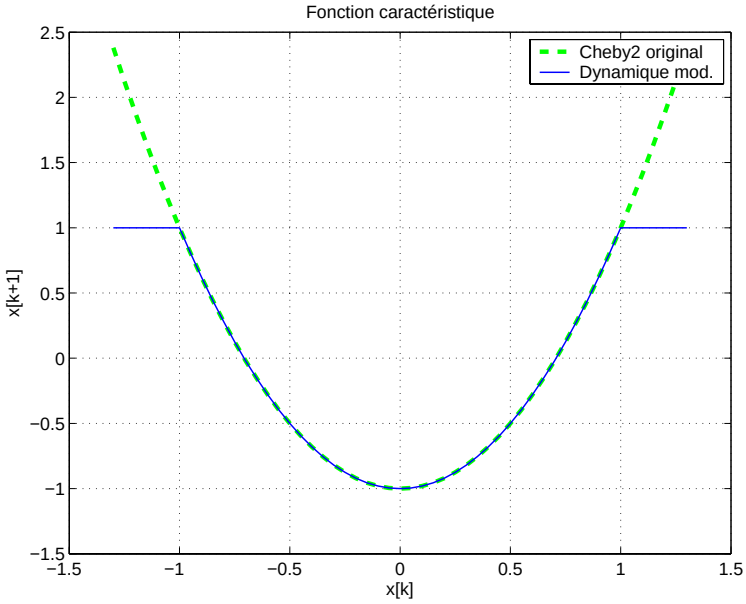


FIG. 4.8 – La fonction caractéristique initiale et modifiée pour une non-linéarité de type Chebyshev d'ordre deux

$$\tilde{f}(x_k) = \begin{cases} f(x_k), |x_k| \leq 1 \\ 1, |x_k| > 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

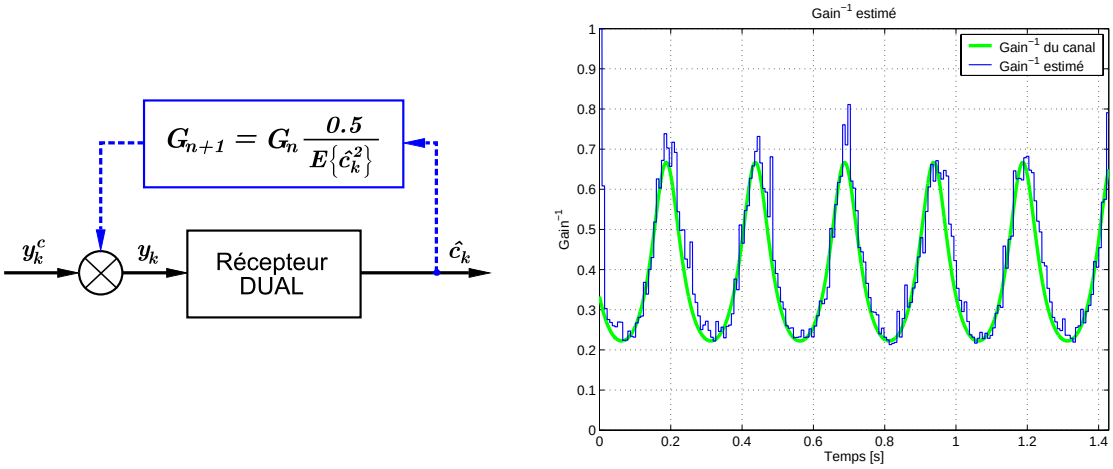
et avec cette nouvelle caractéristique $\tilde{f}(\cdot)$ la démodulation s'opère de la même manière par la structure Kalman parallèle. Les nouveaux modèles dynamiques construits à partir des équations déjà considérées dans la section précédente, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} c_{k+1} &= \tilde{f}\left(c_k\right) + v_k^c \\ y_k &= \hat{b}_{k-1} c_k + n_k \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\begin{cases} b_{k+1} &= b_k + v_k^b \\ y_k &= b_k \tilde{f}(\hat{c}_{k-1}) + n_k \end{cases} \tag{4.10}$$

La figure 4.8 représente la nouvelle fonction caractéristique, avec des valeurs possibles pour la séquence chaotique limitées à l'intervalle $[-1, 1]$, forçant ainsi la variation du gain de canal à influencer l'amplitude de l'état b_k. On observe aussi que le modèle d'observation (4.9) ne fait plus apparaître l'opérateur non-linéaire *signe*. Ces modifications vont dégrader sensiblement la statistique de l'état à chaque étape de filtrage, comme nous le verrons par la suite.

La deuxième méthode proposée utilise les propriétés statistiques de la séquence d'étalement chaotique pour accomplir la correction du gain. Grâce à la boucle mise en oeuvre, le code chaotique estimé en réception sera ajusté pour faire coïncider son moment d'ordre deux avec celui de la séquence originale. Ainsi dans le



a) b)

FIG. 4.9 – a) Implémentation de la boucle de contrôle de gain statistique ; b) Inverse du gain estimé et variations du canal

cas d'une caractéristique Chebyshev d'ordre deux, caractérisée par une variance de 0.5, on peut réaliser un contrôle par la pondération suivante du gain :

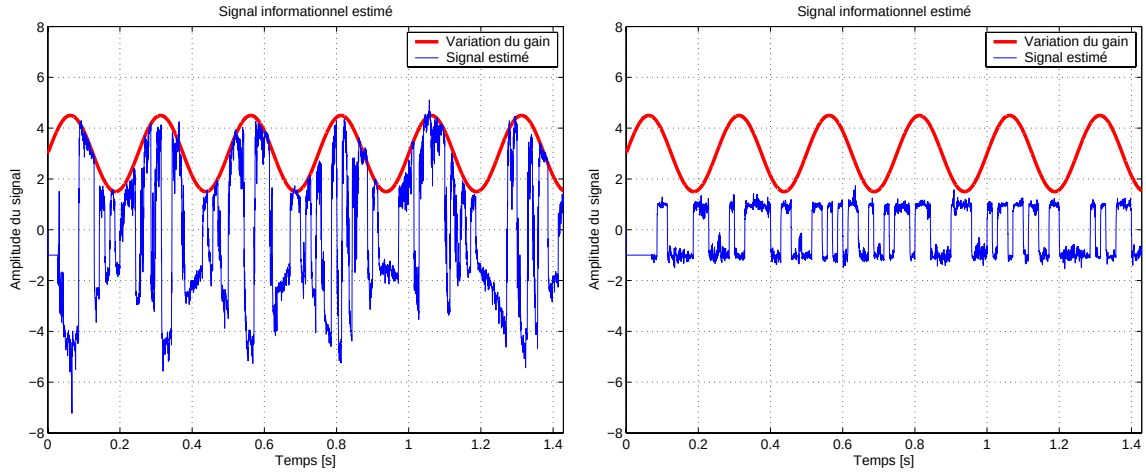
$$G_{n+1} = G_n \frac{0.5}{E\{\hat{c}_k^2\}} \tag{4.11}$$

où n est l'indice associé au symbole.

Avec l'évaluation de la statistique du code estimé, à la fréquence symbole, la boucle permet le calcul de l'inverse du gain du canal. Dans ces conditions une variation plus lente de l'atténuation du canal par rapport à cette fréquence d'ajustement du gain (fréquence symbole) permettra un meilleur contrôle de l'amplitude du signal à l'entrée du récepteur. La figure 4.9 a) illustre le principe du contrôle de gain mis en oeuvre ; dans la partie b) un exemple de fonctionnement de celle-ci est proposé pour une variation périodique du gain du canal. On peut remarquer que la valeur de G_k suit effectivement les variations de l'inverse du coefficient de transfert du canal.

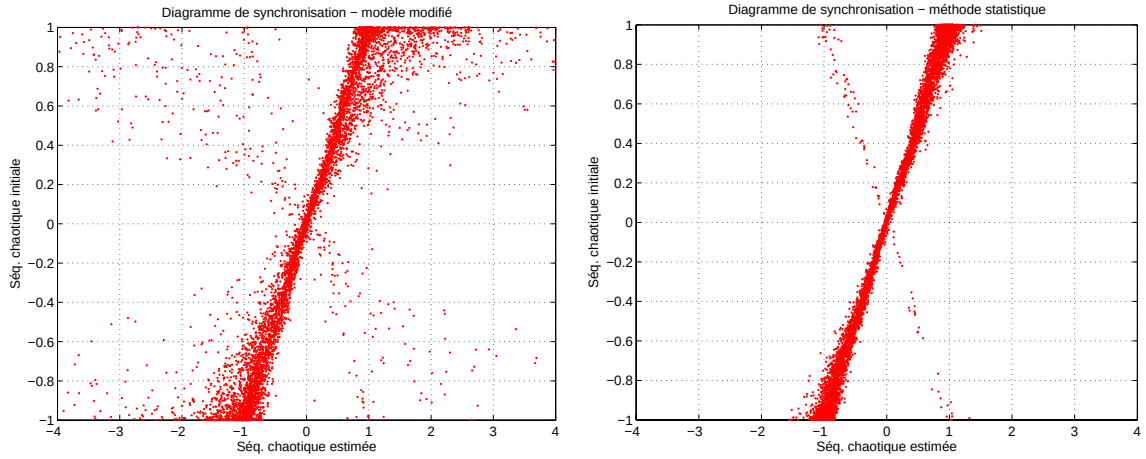
Nous allons maintenant examiner de manière comparative le comportement des deux approches de contrôle de gain proposées. Les paramètres choisis pour ces simulations sont les mêmes que ceux utilisés pour les récepteurs à filtrage parallèle, avec un rapport $SNR = 20dB$ constant sur l'ensemble de la séquence transmise. Ainsi dans la figure 4.10, on représente l'évolution du signal informationnel : si dans le cas de la dynamique modifiée (fig. 4.10 a) l'amplitude du symbole suit les variations du gain du canal, dans le cas de la boucle de contrôle statistique (fig. 4.10 b) on ne remarque pas de modifications sur l'aspect du symbole estimé.

Au niveau des performances des méthodes proposées une première observation est à faire sur les diagrammes de synchronisation présentés. Comme on s'y attendait la non-linéarité très forte introduite par la méthode de la dynamique modifiée se retrouve dans les performances de synchronisation dont le diagramme



a) b)

FIG. 4.10 – Estimation du signal informationnel en fonction du gain du canal pour : a) la méthode du modèle dynamique modifié ; b) la méthode statistique (contrainte sur le moment d'ordre deux du code)



a) b)

FIG. 4.11 – Diagramme de synchronisation pour : a) la méthode du modèle dynamique modifié ; b) la méthode statistique

est présenté dans la figure 4.11 a). Par contre encore une fois la méthode statistique s'impose avec un très bon diagramme de synchronisation (fig. 4.11 b).

Pour mesurer les performances des méthodes proposées d'une manière générale et aussi voir l'effet du coefficient de transfert sur le récepteur à estimation simultanée sans compensation de gain, on a utilisé un canal stationnaire avec le gain relatif qui varie linéairement dans l'intervalle $[0.2, 3]$ au même rapport $SNR = 20dB$. Cette valeur importante du SNR a été choisie afin que l'influence du bruit sur les performances des récepteurs soit réduite, pouvant ainsi conclure qu'une mauvaise performance est liée directement aux variations de gain et à l'algorithme de compensation choisi.

Avec ces hypothèses un critère sur l'EQM de synchronisation entre la séquence d'étalement initiale et la séquence estimée, peut être utilisé pour donner l'aperçu de l'efficacité des méthodes de contrôle de gain

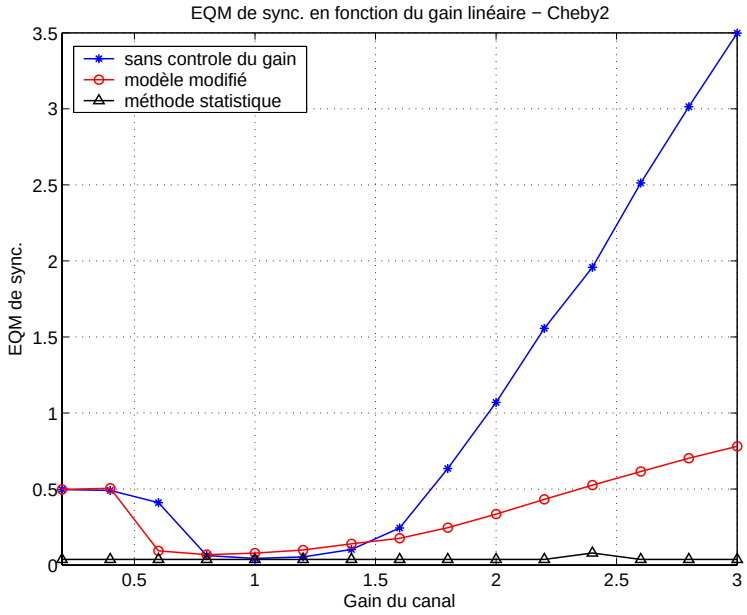


FIG. 4.12 – Influence du gain du canal sur l'EQM de synchronisation pour le système standard et les méthodes de contrôle de gain présentées

(figure 4.12).

Le récepteur standard (sans contrôle de gain) se caractérise par une EQM petite pour un coefficient de transfert unitaire mais par contre une forte variation de ce coefficient va conduire rapidement à une désynchronisation. La structure qui utilise la dynamique modifiée est caractérisée par une erreur de synchronisation légèrement plus importante dans le voisinage du gain unitaire mais elle parvient à compenser un accroissement important du gain. On remarque de même qu'elle présente une amélioration limitée pour des gains inférieurs à un.

Si on se réfère maintenant à l'emploi de la boucle de contrôle statistique, le gain de canal n'a presque aucune influence sur le récepteur ; Celui-ci peut alors fonctionner avec succès pour presque n'importe quelle variation du canal. La limite est atteinte quand le canal a une variation rapide sur une période symbole, entraînant alors une mauvaise reconstruction du code d'étalement.

4.3.4 Récepteur basé sur une structure de type corrélateur

Nous avons cherché à mettre au point des solutions de récepteurs moins coûteuses en calculs que les structures à filtres parallèles vus précédemment. La méthode la plus simple pour récupérer le signal informationnel étalé par l'intermédiaire d'une séquence chaotique est l'emploi d'une structure de type corrélateur. De façon générale le corrélateur représente aussi la solution optimale théorique avec les hypothèses de la connaissance complète de la séquence d'étalement et un canal stationnaire affecté par un bruit gaussien.

Nous allons voir dans les développements qui suivent que la récupération du signal informationnel reste

possible même avec la méconnaissance du code d'étalement, en gardant une hypothèse de parité sur la fonction génératrice chaotique. Cette hypothèse conjointement à la modulation de phase d'ordre deux nous garantissent que par propagation directe de l'échantillon chip antérieurement observé à travers la dynamique non-linéaire, on obtient une estimation de la séquence d'étalement initiale, affectée par un bruit. Le schéma qui présente cette variante de démodulateur est donné dans la figure 4.13.

Dans ce schéma L est le gain d'étalement utilisé, et de façon similaire avec les notations précédentes y_k représente l'état observé et $\hat{b}_n$ le symbole informationnel estimé où $n = \lfloor \frac{k}{L} \rfloor$. La détection du symbole informationnel sera accomplie par la corrélation directe entre la valeur propagée et l'état observé, la décision étant prise avec un simple détecteur à seuil.

La méconnaissance de la séquence d'étalement va se traduire sous la forme d'un bruit à l'issue de la propagation directe de l'échantillon observé. Par exemple, pour le cas particulier d'une fonction Chebyshev d'ordre deux nous aurons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f(b_k c_k + n_k) \\ &= 2(b_k c_k + n_k)^2 - 1 \\ &= 2b_k^2 c_k^2 + 4b_k c_k n_k + 2n_k^2 - 1 \\ &= f(c_k) + 4b_k c_k n_k + 2n_k^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Donc nous obtenons :

$$f(y_k) = c_{k+1} + n_k^r \tag{4.13}$$

où $n_k^r = 4b_k c_k n_k + 2n_k^2$ est le bruit résultant de la propagation de l'observation. Bien sûr cette relation n'est valable que dans le cas d'un canal affecté par un bruit additif gaussien.

Nous constatons que le terme de bruit additif de la relation (4.13) a une dépendance d'ordre deux avec le bruit dans le canal ; Ainsi dans un scénario avec un SNR bas, le principe de prédiction à l'aide du modèle chaotique va probablement entraîner des performances limitées. Si on passe à une dynamique de non-linéarité plus forte, par exemple un polynôme Chebyshev d'ordre quatre, les effets de la propagations seront plus

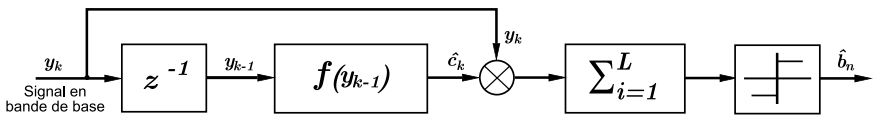


FIG. 4.13 – Récepteur CD3S exploitant un corrélateur

critiques, le bruit récursif ajouté étant cette fois dépendant à l'ordre quatre avec le bruit présent dans le canal. Bien sûr cette dépendance va influencer d'autant plus les performances générales des méthodes. Ces conclusions qualitatives se retrouvent bien sur les courbes de TEB présentées dans les figures 4.15 et 4.16.

4.3.5 Résultats obtenus par simulation numérique

Pour un système de communication numérique le meilleur critère de performance est donné par le taux d'erreur binaire, et dans notre cas de simulation, d'un système mono-utilisateur, le paramètre d'intérêt sera le rapport signal à bruit moyen et bien sûr les caractéristiques du canal utilisé. La robustesse des récepteurs proposés en présence de bruit et d'imperfections du canal de communication a été étudiée à l'aide de simulations Monte-Carlo, avec un objectif de $TEB = 10^{-3}$.

La séquence chaotique utilisée, comme déjà précisée, est une dynamique de type Chebyshev d'ordre deux. Pour les simulations, les deux structures C/S et C/S/P ont été mises en oeuvre sur les canaux suivants :

- canal gaussien stationnaire sans erreur de phase et un coefficient de transfert du gain de valeur unité ;
- canal gaussien non-stationnaire avec des variations périodiques de phase et de gain ; Les variations de phase sont produites par changement sinusoïdal de la fréquence instantanée avec une amplitude de $20\,Hz$ et une période de $0.1\,s$. On mentionne que la fréquence porteuse choisie est $F_p = 8000\,Hz$. Le gain de canal subit une variation périodique dans l'intervalle $[1.5, 4.5]$.

Les résultats pour les conditions présentées ci-dessus sont données dans les figures 4.14. Les figures a) et b) montrent les effets des méthodes de contrôle de gain sur les performances des structures C/S et C/S/P, lorsque le gain de canal ne varie pas. Le choix de représenter ces deux méthodes sur des figures différentes est justifié par l'écart important des performances observées, par exemple dans l'intervalle $[8dB, 12dB]$ les structures C/S n'ont donné aucune erreur lors de nos simulations. Dans le cas du canal stationnaire, la structure C/S offre des performances bien meilleures que la structure C/S/P.

Cette observation se retrouve dans le cas du canal non-stationnaire mais avec un écart nettement moindre entre les courbes de TEB. Si dans le cas stationnaire la distance se situe autour de $7 - 8dB$, nous avons maintenant un écart de $2-3dB$ environ, pour le cas de la boucle de contrôle statistique. Le bon fonctionnement de cette solution de contrôle de gain, observé sur la figure 4.12 se retrouve bien en terme de TEB. On peut remarquer aussi que la probabilité d'erreur associée à la structure C/S/P suit une décroissance plutôt de type linéaire, ainsi la distance par rapport aux autres courbes ne reste pas constante. L'ensemble des simulations numériques montre donc que l'introduction au niveau du démodulateur d'un état supplémentaire pour la phase tend à dégrader les performances.

Un deuxième groupe de simulations va maintenant montrer l'efficacité des différentes méthodes d'estimation d'état en considérant toujours le critère de TEB. Comme la transformée polynomiale exacte proposée suppose un modèle dynamique d'ordre un, nous nous limiterons cette fois au cas du récepteur C/S, avec

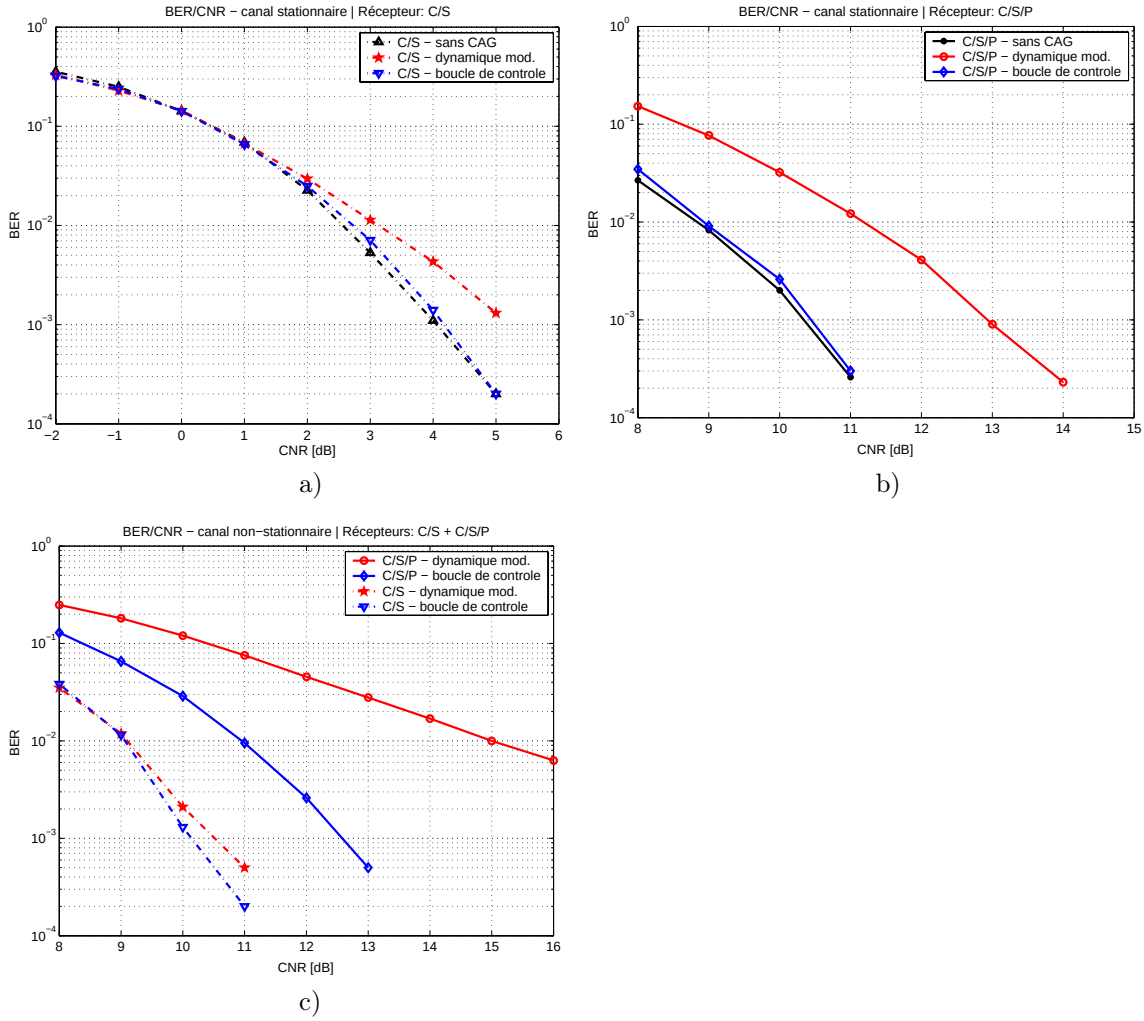


FIG. 4.14 – a) TEB du récepteur C/S sur un canal AWGN à gain unité ; b) TEB du récepteur C/S/P sur un canal AWGN à gain unité ; c) TEB des structures C/S et C/S/P sur un canal non-stationnaire affecté par un bruit gaussien.

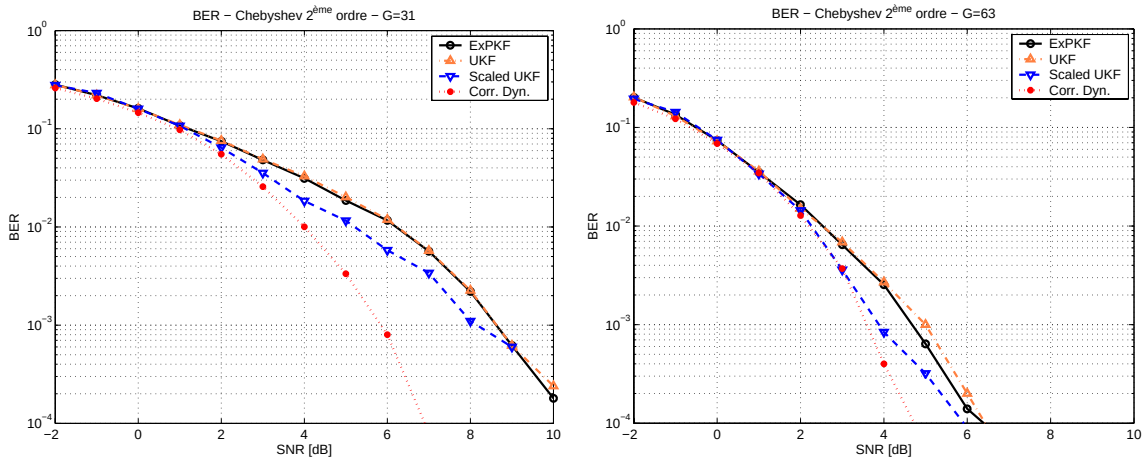
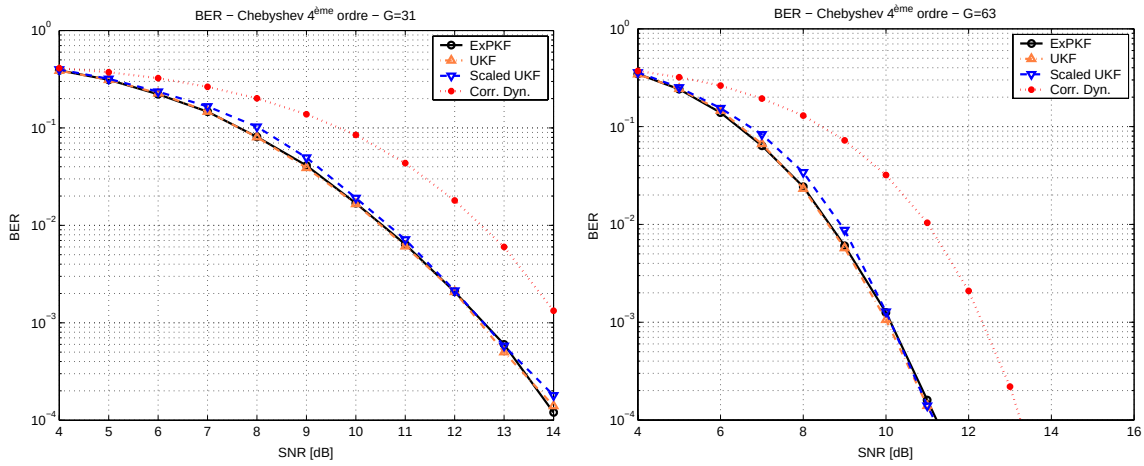


FIG. 4.15 – TEB des récepteurs proposés pour une dynamique Chebyshev de 2-ème ordre et pour un gain d'étalement de : 31 (à gauche) et 63 (à droite).

l'hypothèse d'un verrouillage de phase en amont. Pour comparer nous considérons aussi le récepteur présenté dans la sous-section 4.3.4, basé sur un corrélateur avec la propagation de l'état observé à travers la dynamique non-linéaire. Comme les deux récepteurs considérés traitent la récupération de porteuse en amont, nous menons les simulations en bande de base afin de limiter le coût de calcul. Notre objectif étant de juger de la capacité des méthodes d'estimation d'état à fonctionner en présence de dynamique non-linéaire, nous considérons les ordres 2 et 4 de polynômes de Chebyshev. Les résultats seront montrés à chaque fois pour deux valeurs du gain d'étalement (31 et 63).

Pour la dynamique d'ordre deux (figs. 4.15) on observe dans les deux cas que la structure de type corrélateur obtient les meilleures performances, mais en augmentant le gain d'étalement, l'écart entre cette méthode et celles basées sur l'estimation d'état diminue. Si on compare maintenant les structures à filtrage parallèle, la variante scaled-UKF prend le dessus sur la solution ExPKF ; Ce comportement s'explique par l'ajustement du calcul des moments effectué par le filtre scaled-UKF pour combattre les éventuelles divergences de la covariance des erreurs. Aussi on n'observe pas de différence importante entre la solution ExPKF et l'implémentation UKF, comme dans le cas particulier du polynôme de Chebyshev d'ordre deux cette dernière approche permet un calcul correct des moments.

Pour la dynamique chaotique de 4-ème ordre, les courbes de TEB sont données dans les figures 4.16 a) et b). On observe une diminution légère des performances pour tous les récepteurs. Cette fois, il est mieux de démoduler par filtrage Kalman parallèle qu'à l'aide d'un corrélateur. Comme il a déjà été évoqué la moins bonne performance de cette dernière approche provient de l'amplification du bruit par la dynamique fortement non-linéaire. Le démodulateur à filtre ExPKF offre cette fois, avec l'implémentation UKF, les meilleures performances. La non-linéarité accentuée provoque une légère dégradation du TEB obtenu par filtrage scaled-UKF.



a) b)

FIG. 4.16 – TEB des récepteurs proposés pour une dynamique Chebyshev de 4-ème ordre et pour un gain d'étalement de : 31 (à gauche) et 63 (à droite).

Une dernière observation est nécessaire à propos du coût de calcul : sur ce plan l'implémentation ExPKF excelle car il n'y a aucune propagation d'échantillons et l'expression des moments est calculée analytiquement, à l'inverse des méthodes de filtrage de type UKF.

4.4 Généralisation du filtrage Kalman parallèle pour les canaux à trajets multiples

4.4.1 Structure du récepteur

Les méthodes proposées dans la première partie de ce chapitre ont un avantage important par rapport à tout autre type de récepteur à étalement de spectre ; En effet la tâche de synchronisation n'est plus traitée comme un problème à part entière mais est résolue intrinsèquement par la propriété de synchronisation du chaos. Par contre cette simplification structurelle du récepteur se traduit par une augmentation du taux d'erreur binaire. Il est maintenant proposé de comparer les récepteurs basés sur la synchronisation chaotique avec des variantes de récepteurs qui utilise des méthodes d'acquisition et de poursuite généralement associées aux systèmes à étalement du spectre, gardant quand même une estimation du symbole par filtrage de Kalman parallèle [ALBS05].

La structure générale du récepteur est présentée dans la figure 4.17. Ainsi une fois l'étape d'acquisition achevée et le signal transposé en bande de base, on utilise une boucle à verrouillage de retard (Delay Locked Loop - DLL) pour garder la synchronisation du récepteur ; La solution proposée est similaire à celle d'un récepteur à étalement de spectre classique [Pro95]. Pour ce qui concerne la boucle à verrouillage de retard on utilise deux branches avec les versions du signal de référence en retard et en avance, correspondant

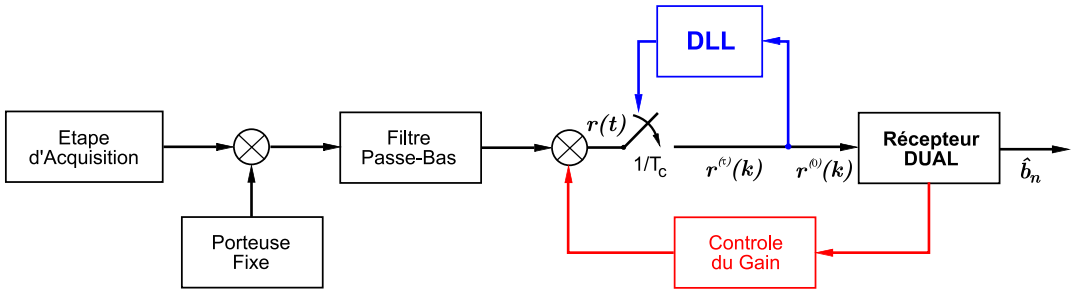


FIG. 4.17 – Structure du récepteur CD3S proposé

respectivement aux indices $\tau = -1$ et $\tau = +1$:

$$r^{(\tau)}(k) = r\left(\tau T_e + k\frac{T_c}{T_e}\right) \tag{4.14}$$

où T_c et T_e sont la période chip et la période d'échantillonage, respectivement.

La branche qui obtient la meilleure réponse en corrélation va avoir une influence sur le retard ou l'avance du code de référence, respectivement. A cette configuration de base on a ajouté une décision par seuils, qui permet d'apporter une certaine tolérance sur le positionnement de la référence.

Grâce à cette approche le symbole et l'erreur de phase seront estimés à la fréquence chip, en utilisant une structure d'estimation parallèle similaire à celle développée dans la section précédente. A cause de la non-linéarité présentée par l'estimation de phase, on va utiliser la méthode de filtrage de type scaled-UKF. Ce filtre a déjà prouvé qu'il assure une meilleure robustesse que le populaire EKF, à un niveau de complexité similaire.

Deux cas seront présentés : le premier considère le modèle de filtrage parallèle développé pour la prise en compte d'un seul trajet de propagation. En dépit de sa simplicité apparente, nous verrons par la suite que cette méthode fonctionne aussi à des niveaux de bruit importants et en présence de trajets multiples. Des signaux expérimentaux, recueillis lors d'essais de transmissions acoustiques sous-marines, seront en particulier utilisés. Une deuxième variante de récepteur sera considérée, prenant en compte dans le processus d'estimation les retards et gains associés à différents trajets. Ces résultats ont fait l'objet des publications [APDB03, ALBS05].

4.4.2 Généralisation des modèles de filtrage Kalman

Ce paragraphe est destiné à l'introduction des modèles employés par la structure d'estimation parallèle. Ainsi comme on a déjà présenté dans la première partie de la section, on va choisir un modèle qui va prendre en compte un seul trajet, et après une deuxième version avec la modélisation de plusieurs échos. Dans les deux cas l'estimateur Kalman a la même structure parallèle, avec un filtre associé à l'estimation du

symbole à l'instant k, en utilisant le dernier paramètre de phase estimé $\hat{\phi}_{k-1}$ et le deuxième filtre qui suit les fluctuations de la phase avec la connaissance du dernier symbole estimé $\hat{b}_{k-1}$. Comme auparavant les deux filtres fonctionnent à la fréquence chip.

Modèle à un seul trajet

La première solution est facilement écrite à partir du modèle général présenté par la solution C/S/P. Ainsi le processus qui assure l'estimation du symbole b_k est présenté sous la forme suivante :

$$\begin{cases} b_{k+1} = b_k + v_k^b \\ \mathbf{y}_k = b_k . f\left(c_{k-1}\right) . \mathbf{g}\left(\hat{\phi}_{k-1}\right) + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{4.15}$$

où c_k est le code d'étalement utilisé et où $v_k^b \sim \mathcal{N}\left(0, Q^b\right)$ est le terme de bruit de processus, nécessaire pour que le filtre suive les changements de symbole.

Le modèle qui estime l'erreur de phase est donné aussi par le système suivant :

$$\begin{cases} \phi_{k+1} = \phi_k + v_k^\phi \\ \mathbf{y}_k = sgn\left(\hat{b}_{k-1}\right) . f\left(c_{k-1}\right) . \mathbf{g}\left(\phi_k\right) + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{4.16}$$

On observe que cette fois on a fait le choix de modéliser l'estimation de la phase par un processus d'ordre un. Les résultats obtenus sur des signaux réels, qui seront présentés dans la prochaine section, nous confirment que ce choix a été judicieux, réalisant un compromis entre les performances et le coût de calcul. De même on a le bruit de processus $v_k^\phi \sim \mathcal{N}\left(0, Q^\phi\right)$ qui cette fois va prendre en compte en plus des fluctuations de la phase, les erreurs dues à la modélisation.

De façon similaire avec les modèles présentés dans la section 4.3, $\mathbf{g}\left(.\right)$ désigne la projection de la phase estimée sur les axes réel et imaginaire $\mathbf{y}_k = \left[y_k^{Re}, y_k^{Im}\right]^T$:

$$\mathbf{g}\left(\phi_k\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\phi_k\right) & \sin\left(\phi_k\right) \end{bmatrix}^T \tag{4.17}$$

De même le bruit d'observation additif $\mathbf{n}_k = \left[n_k^1, n_k^2\right]^T$ respecte une loi gaussienne $\mathbf{n}_k \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{R}\right)$, avec la matrice de covariance $\mathbf{R} = \frac{\sigma^2}{2}\mathbf{I}_2$ où σ^2 est la variance du bruit d'observation supposé présent dans le canal. En pratique le choix de la variance du bruit de processus n'influence pas de manière décisive les performances, tant qu'elle se trouve dans un intervalle assez large autour de la vraie valeur. De même les états $\left\{v_k^b, v_k^\phi, \mathbf{n}_k\right\}$ sont considérés indépendants avec tous les autres paramètres qui forment les modèles.

Modèle à trajets multiples

En utilisant la même solution d'estimation que dans le cas mono-trajet, on propose une nouvelle structure générale qui va prendre en compte plusieurs échos dus à la propagation dans le canal.

A partir des expérimentations, on a remarqué que le retard ainsi que les différences de phase entre les trajets ont des variations limitées ; Ainsi le modèle général construit va avoir un état de phase ϕ_k correspondant par exemple au trajet le plus énergétique, choisi comme référence, et plusieurs états $\left\{\varepsilon_k^i\right\}_{i=1,\ldots,M+1}$ seront introduits pour estimer la phase relative des trajets qui se situent aux écarts temporels $\{\triangle_i T_c\}$.

Ainsi les modèles de processus et d'observation qui donnent l'estimation du symbole seront écrits de la manière suivante :

$$\begin{cases} b_{k+1} = b_k + v_k^b \\ \mathbf{y}_k = b_k . \left(G_k^0 f\left(c_{k-1}\right) . \mathbf{g}\left(\hat{\phi}_{k-1}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{M} G_k^i f\left(c_{k-\triangle_i - 1}\right) . \mathbf{g}\left(\hat{\phi}_{k-1} + \hat{\varepsilon}_{k-1}^i\right)\right) + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{4.18}$$

où l'ensemble $\left\{G_k^i\right\}_{i=1,\ldots,M+1}$ désigne les gains des trajets sélectionnés, calculés par corrélation au niveau des DLL et où $\hat{\phi}_{k-1}$ représente la dernière phase estimée pour le trajet référence, normalement choisi le plus énergétique, et $\left\{\hat{\varepsilon}_{k-1}^i\right\}_{i=1,\ldots,M}$ sont les phases relatives estimées des autres échos sélectionnés.

Pour suivre tous les termes de phase, un deuxième filtre de Kalman est employé, dont le modèle prend la forme :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \phi_{k+1} \\ \varepsilon_{k+1}^1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{k+1}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varepsilon_k^1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k^M \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k^{\phi} \\ \mathbf{y}_k = b_k . \left(G_k^0 f\left(c_{k-1}\right) . \mathbf{g}\left(\phi_k\right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{M} G_k^i f\left(c_{k-\triangle_i - 1}\right) . \mathbf{g}\left(\phi_k + \varepsilon_k^i\right)\right) + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{4.19}$$

où $\mathbf{g}\left(.\right)$ est la fonction de décomposition vectorielle (4.17), et $\mathbf{y}_k$, $\mathbf{n}_k$ étant l'état observé et le vecteur du bruit :

$$\mathbf{y}_k = \left[y_k^{Re}, y_k^{Im}\right]^T, \mathbf{n}_k = \left[n_k^1, n_k^2\right]^T \tag{4.20}$$

Les bruits sont de nouveau supposés gaussiens centrés et indépendants avec les autres paramètres qui construisent le modèle :

$$v_k^b \sim \mathcal{N}\left(0, Q^b\right) \ , \ \mathbf{v}_k^{\phi} \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbf{Q}^{\phi}\right)$$

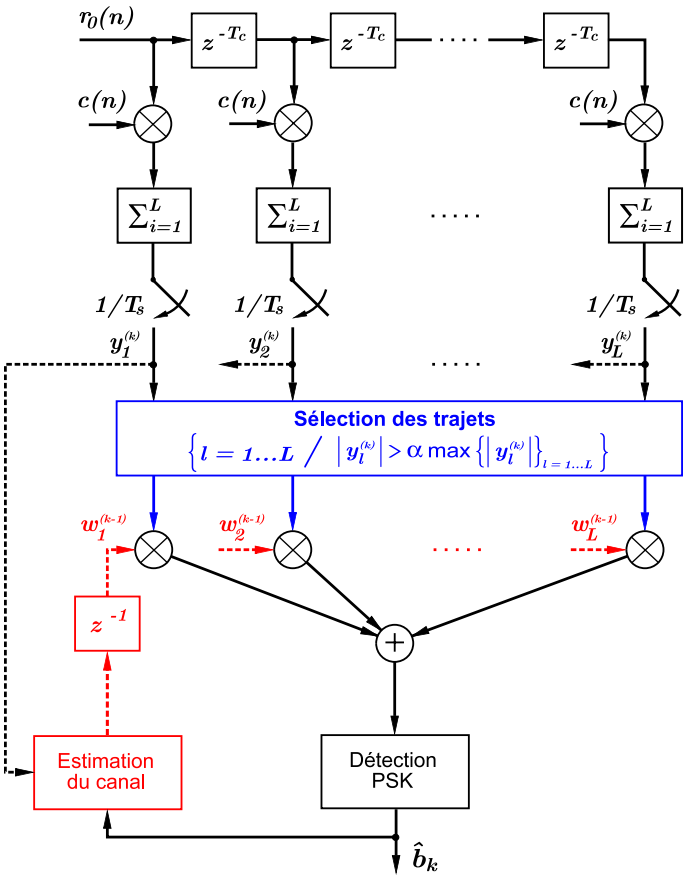


FIG. 4.18 – Structure du récepteur RAKE utilisé

Le modèle particulier d'estimation de la phase considéré ci-dessus suppose une variation très petite des phases relatives entre les échos. Ainsi la matrice de covariance de processus $\mathbf{Q}^{\phi}$ sera constituée avec des valeurs plus petites pour les éléments liés aux erreurs de phase relatives. Le bruit d'observation $\mathbf{n}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ gardera les mêmes propriétés que dans le cas mono-trajet.

Un problème important posé par ce modèle est l'évaluation, avant l'application du filtrage lui-même, des gains G_k^i et des retards relatifs $\triangle_i$ entre les trajets ; Pour le moment cette question est traitée par des calculs de corrélation, d'une manière semblable à celle utilisée dans un récepteur standard de type RAKE.

4.5 Récepteur RAKE - MRC

En présence de canaux sélectifs en fréquence, des traitements de type RAKE sont souvent mis en oeuvre. Cette solution classique [PG56, Pro95] sera considérée à titre de comparaison.

L'emploi de pondérations au niveau des corrélations partielles réalisées, sont spécifiques aux structures RAKE-MRC (Maximum Ratio Combining). Ainsi chaque coefficient de pondération complexe est calculé par

une méthode de retour de décision. La réponse impulsionnelle estimée est ensuite utilisée pour la détection du prochain symbole, avec pour hypothèse que le canal subit peu de modifications sur la durée du symbole. On a introduit aussi au niveau de chaque coefficient de corrélation obtenu, une sélection des trajets les plus énergétiques pour limiter l'influence du bruit ou des termes résultant des propriétés de corrélation non-optimales de la séquence d'étalement.

Nous ne détaillons pas plus l'implémentation RAKE-MRC comme il s'agit d'une méthode très connue et largement utilisée dans les applications de communication où la propagation se produit par trajets multiples [Pro95, GL00].

4.6 Résultats expérimentaux

Des essais à la mer ont été réalisés[1] dans la rade de Brest en juillet 2003 pour évaluer les performances des méthodes à étalement de spectre par séquence chaotique. Les canaux acoustiques sous-marins rencontrés, avec une profondeur allant de 20 m à 40 m (eaux peu profondes) sont réputés difficiles.

La structure du signal de test est donnée dans la figure 4.19. Ainsi la première partie est réalisée par un signal de type "chirp", introduit pour une détection de présence, en écoutant directement le signal en réception. Ceci est possible pour des SNR positifs, comme la bande de transmission utilisée se trouve dans la gamme audible par l'oreille humaine. Juste après le "chirp", huit symboles d'acquisition sont introduits, caractérisés par un code périodique. Le choix a été d'utiliser même pour les symboles d'acquisition une séquence chaotique générée par la même non-linéarité que la séquence d'étalement associées aux symboles informationnels. Les symboles d'acquisition sont suivis par 200 symboles informationnels modulés BPSK, avec une séquence d'étalement non-périodique de type Chebyshev, d'ordre deux.

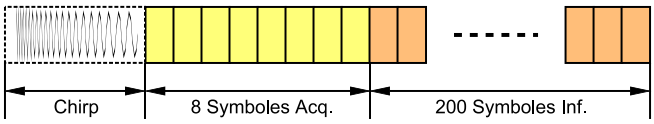


FIG. 4.19 – Structure du signal de test utilisé

Pour la majorité des réponses impulsionnelles estimées on a observé la présence d'un nombre assez réduit de trajets, allant d'un seul trajet jusqu'à 3 échos suffisamment énergétiques pour réaliser la détection. Ce critère de choix des trajets suffisamment énergétiques a été fait par exemple dans le cas du récepteur RAKE, avec un seuil de $3\,dB$ relatif à l'écho le plus puissant.

[1] Les moyens expérimentaux ont été fournis par le GESMA (Groupe d'Etude Sous-Marines de l'Atlantique, Brest)

Pour illustrer le fonctionnement des méthodes proposées on a choisi 3 signaux avec les paramètres de transmission donnés par le tableau 4.1. Ainsi on a fait le choix de plusieurs signaux caractérisés par un gain d'étalement de $L = F_c/F_b = 63$ avec des SNR estimés en entrée du récepteur entre $-8.7\,dB$ et $2.3\,dB$. La fréquence chip varie aussi entre $2100\,Hz$ et $4410\,Hz$.

Nr. Sig.	$F_e\,[Hz]$	$F_c\,[Hz]$	$F_p\,[Hz]$	L	Est. SNR	NEB-1T	NEB-2T	NEB-RAKE
1	44100	2100	9800	63	2.3 dB	0	0	0
2	44100	4410	8820	63	-8.7 dB	0	0	1
3	44100	2940	9800	63	-4.6 dB	0	0	0

Table 4.1: Paramètres des signaux choisis

Dans l'ensemble des résultats expérimentaux exposés ci-après seront considérés les trois récepteurs suivants : la variante RAKE-MRC ainsi que les implémentations mono-trajets et multi-trajets des récepteurs à filtres de Kalman parallèle (sans synchronisation chaotique). Les premiers résultats obtenus (fig. 4.20), concernent la structure RAKE. En regardant ces figures on observe que les précisions faites sur le nombre des trajets se vérifies. De même l'énergie de ces trajets diffère d'un cas à l'autre, ce qui signifie une modification importante au niveau de la structure du canal de propagation. Etant donné le nombre limité de trajets énergétiques dans le canal, nous nous limiterons à deux trajets dans la mise en oeuvre du récepteur à filtre de Kalman parallèle généralisé.

Pour les implémentations des récepteurs à filtres de Kalman plusieurs critères de comparaison seront utilisés. Ainsi dans le premier groupe de figures 4.21 on présente l'état symbole estimé, avec la représentation des 20 derniers symboles estimés, afin d'avoir un aperçu du fonctionnement de la méthode de filtrage en général. La sélection des derniers symboles nous assure aussi que les éventuels problèmes de transition présentés par le mécanisme de filtrage seront passés. On observe des différences importantes pour les deux implémentations : si dans le cas du premier signal, caractérisé par un seul trajet très énergétique, la méthode à un seul trajet a un meilleur comportement, la situation s'inverse dans le cas du signal no. 2. La présence d'un écho presque à la même énergie que le trajet le plus puissant, va donner cette fois l'avantage à la structure bi-trajet, même avec le cas d'un SNR difficile (SNR estimé = - 8.7 dB). Le troisième signal ne présente pas un avantage décisif pour une des deux méthodes présentées.

La relation d'ordre sur l'énergie des trajets est confirmée par les figures 4.22 où le contrôle de gain est illustré. Ainsi dans la figure b) une distinction importante s'observe qui disparaît totalement dans la figure d). On peut observer une différence significative entre les variations du gain associées à chaque implémentation. Ceci se justifie étant donné que la solution à deux trajets passe de l'approche statistique, considérée pour la propagation d'un seul trajet, à une approche de type corrélateur employée pour l'estimation du gain de chaque échos considéré. Généralement, comme il a déjà été précisé dans la section précédente, le fonctionnement de la méthode statistique est meilleur étant moins influencé par le bruit de type impulsionnel. Cette observation

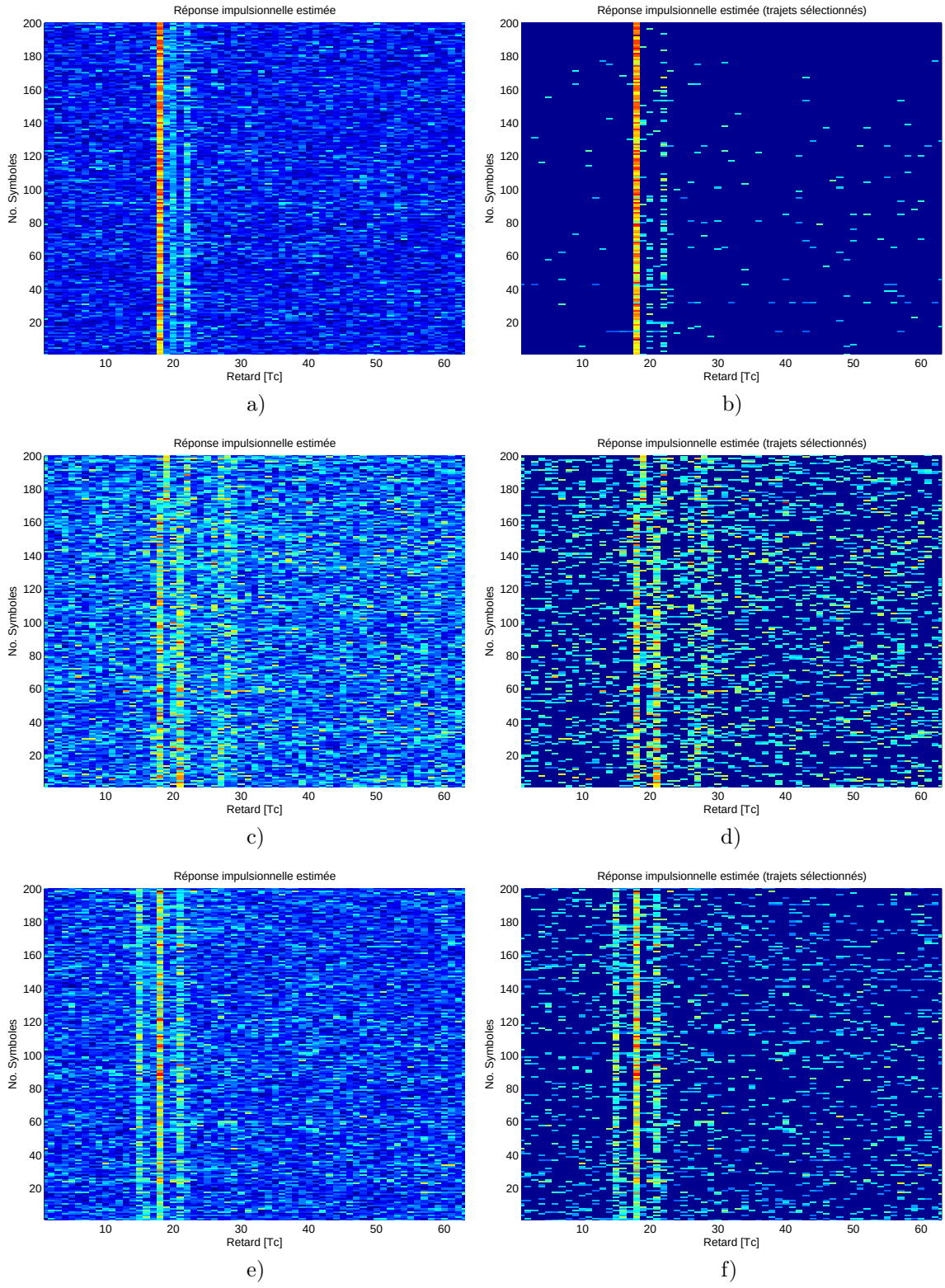


FIG. 4.20 – Réponse impulsionnelle estimée (en valeur absolue) par le récepteur RAKE-MRC à gauche et la variante avec la sélection de trajets à droite pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f)

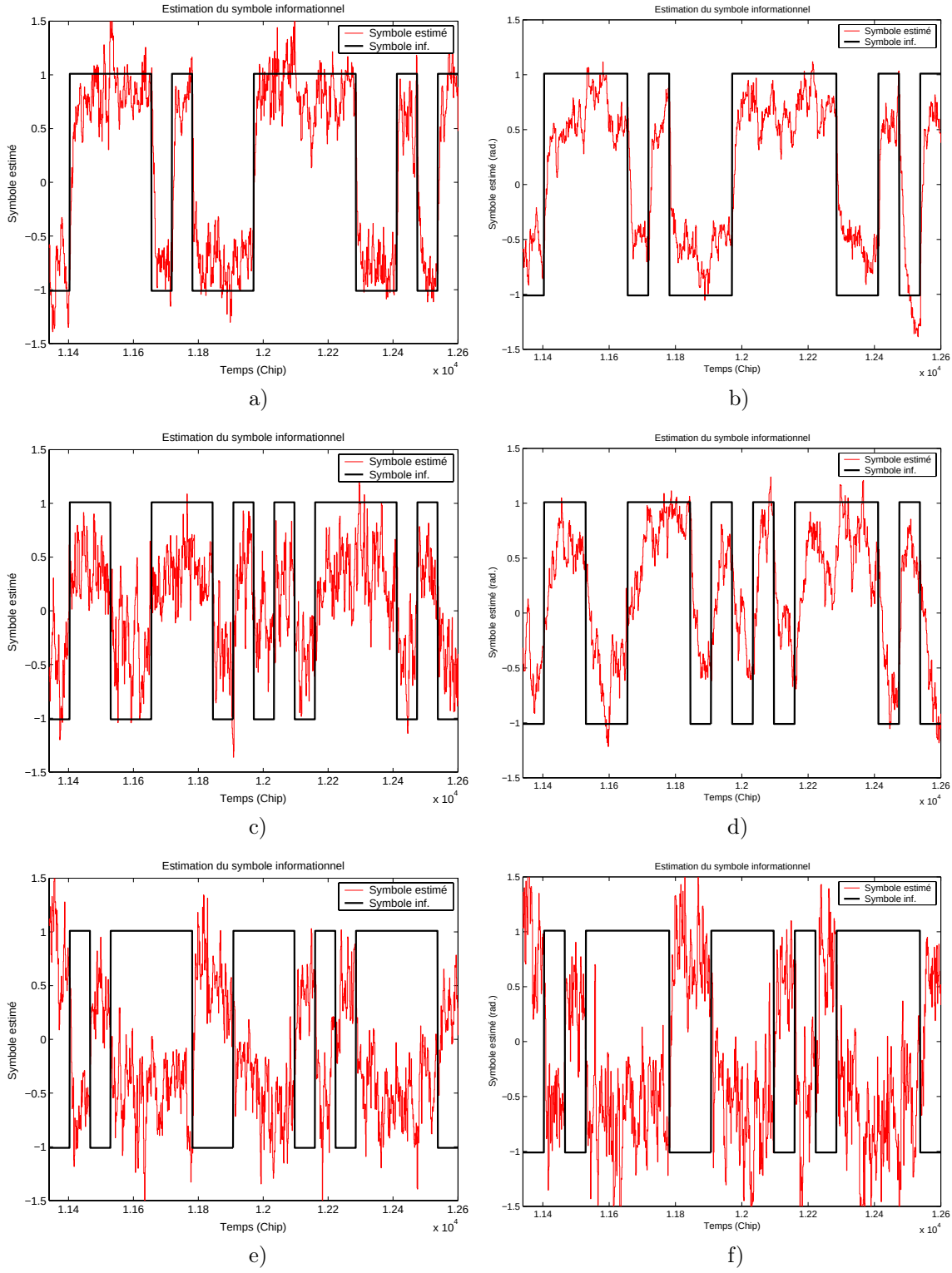


FIG. 4.21 – Etat symbole estimé par les variantes de récepteurs à un trajet (à gauche) et à deux trajets (à droite) pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f)

peut se faire directement sur l'ensemble des courbes, observant une variation plus lisse dans le cas mono-trajet.

Concernant le problème de l'estimation de phase, à l'exception de courtes périodes transitoires, on obtient généralement pour les deux implémentations la même caractéristique décroissante (figures 4.23).

Pour le modèle à deux trajets on peut observer dans les figures 4.24, un léger accroissement de la phase relative qui a tendance à se stabiliser asymptotiquement. On associe ce comportement à la période de transition du filtre, nécessaire pour converger vers la vraie valeur. D'ailleurs la résolution du problème de paramétrage du filtre à estimation de phase présente une difficulté. Celle-ci réside surtout dans le choix de la covariance de bruit pour l'estimation de phase du trajet le plus énergétique. Une variance trop importante conduit dans certains cas à une divergence du filtre, en revanche une variance trop petite limite l'adaptabilité du filtre. Dans ce but on donne dans le tableau 4.1 les covariances utilisées pour les trois signaux choisis.

Signal	1	2	3
Q^{ϕ}	$\begin{matrix} 5e-4 & 0 \\ 0 & 1e-5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5e-3 & 0 \\ 0 & 1e-5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5e-4 & 0 \\ 0 & 1e-5 \end{matrix}$

TAB. 4.2 – Paramétrage du modèle d'estimation de la phase

Un dernier critère d'analyse présenté dans ce chapitre est la réponse de la boucle à verrouillage de retard. Ces évaluations étant indépendantes du modèle choisi, à un ou bien deux trajets, on observe dans les figures 4.25 la similarité présentée par celles-ci, ainsi le retard du trajet estimé pour le modèle à un trajet correspond exactement au trajet le plus énergétique dans le cas du modèle à deux trajets. On ajoute à cette conclusion les deux observations suivantes :

- la première remarque concerne le diagramme du retard de code qui a en général une caractéristique assez plate, signifiant ainsi qu'il n'existe pas de dérive persistante entre les fréquences d'échantillonnage à l'émission et en réception ;
- une deuxième observation est faite sur la distance relative entre les deux trajets considérés qui reste presque constante pour toute la gamme des signaux présentée, ainsi on peut conclure que le canal est caractérisé par une réponse impulsionnelle presque constante en ce qui concerne la position des trajets principaux.

Une dernière conclusion est faite sur le critère de nombre d'erreurs (NEB - nombre d'erreurs binaire) au niveau de la démodulation. On a choisi de donner plutôt dans le tableau 4.1 le nombre d'erreurs plutôt que le taux d'erreur binaire, compte tenu du nombre réduit de symboles transmis. Ainsi on observe que les récepteurs proposés arrivent à atteindre de bonnes performances. En particulier, pour le signal no. 2 le filtrage Kalman parallèle permet d'obtenir le plus faible taux d'erreur.

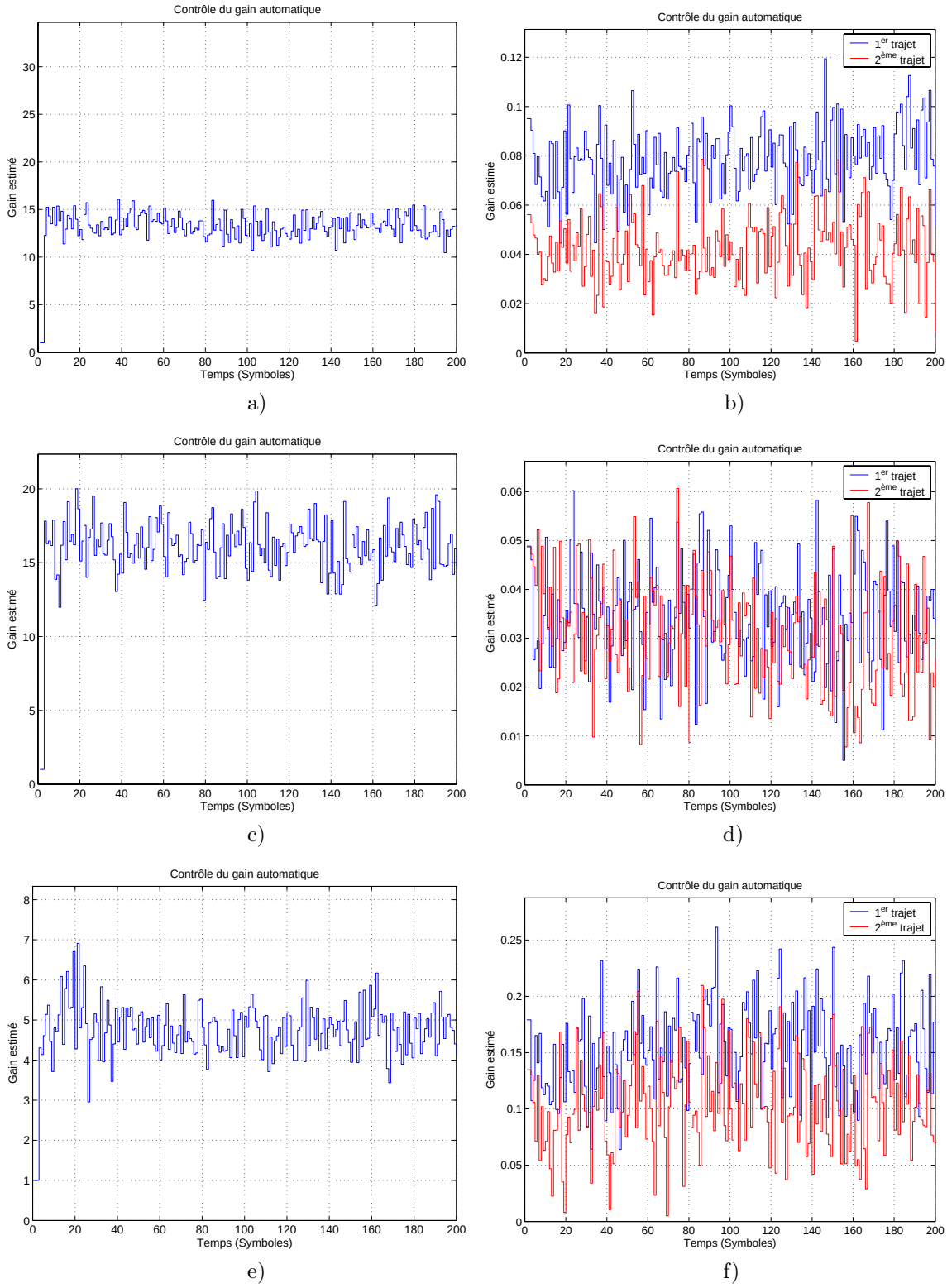


FIG. 4.22 – Gains estimés par les variantes de récepteurs à un trajet (à gauche) et à deux trajets (à droite) pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f)

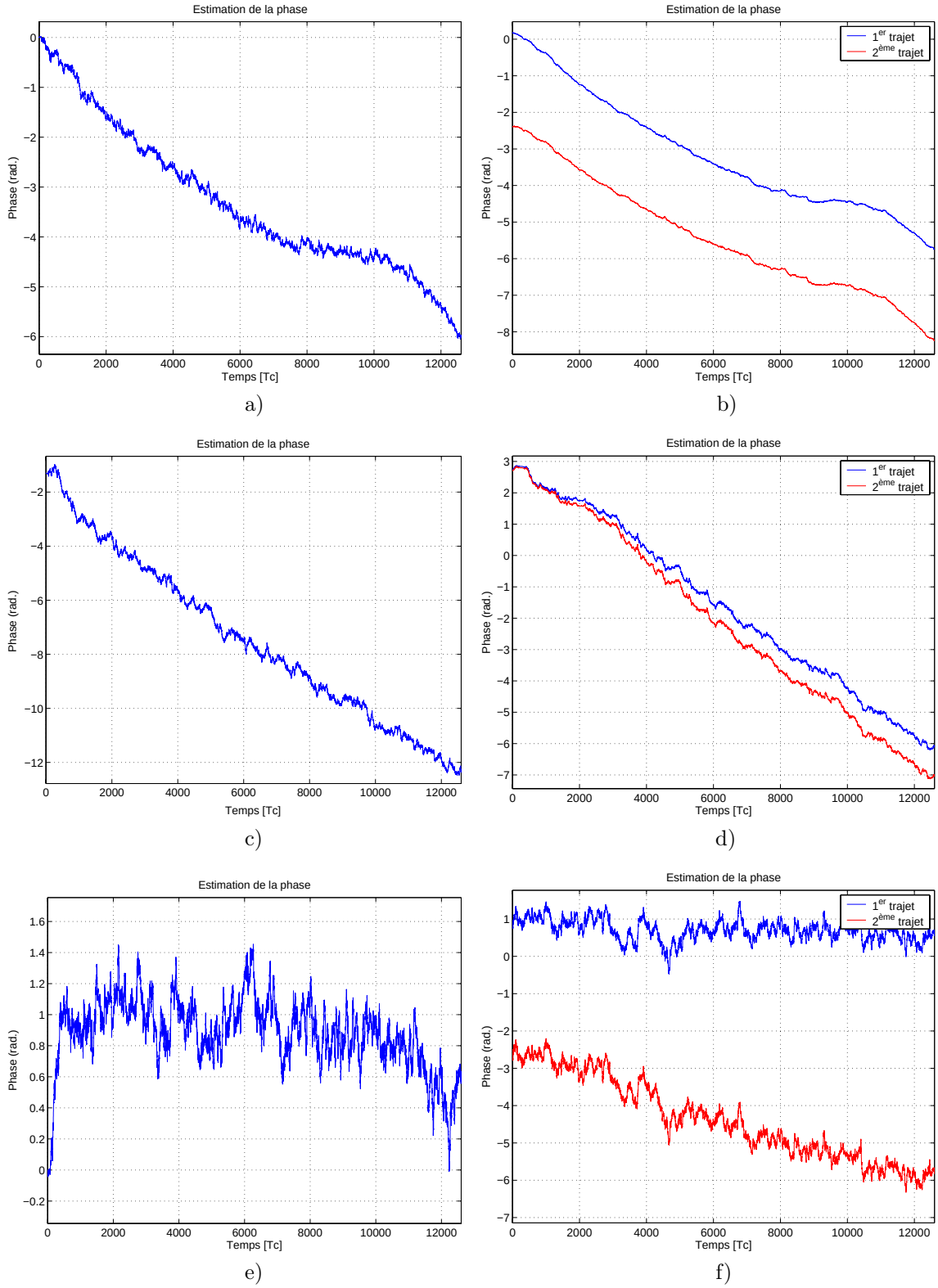


FIG. 4.23 – Phases estimées par les variantes de récepteurs à un trajet (à gauche) et à deux trajets (à droite) pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f)

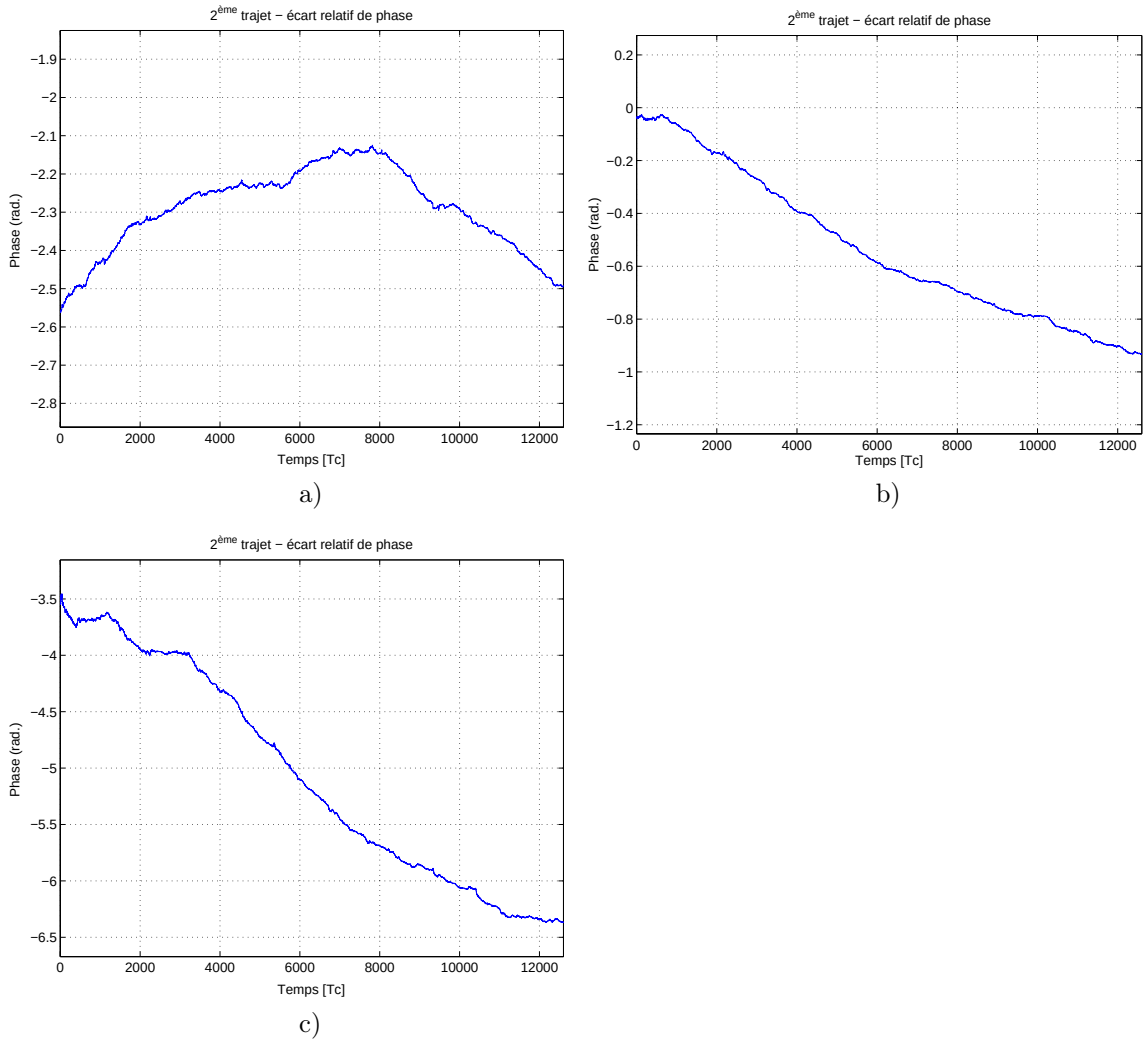


FIG. 4.24 – Phase relative estimée pour : le signal 1 - (a) ; le signal 2 - (b) ; le signal 3 - (c)

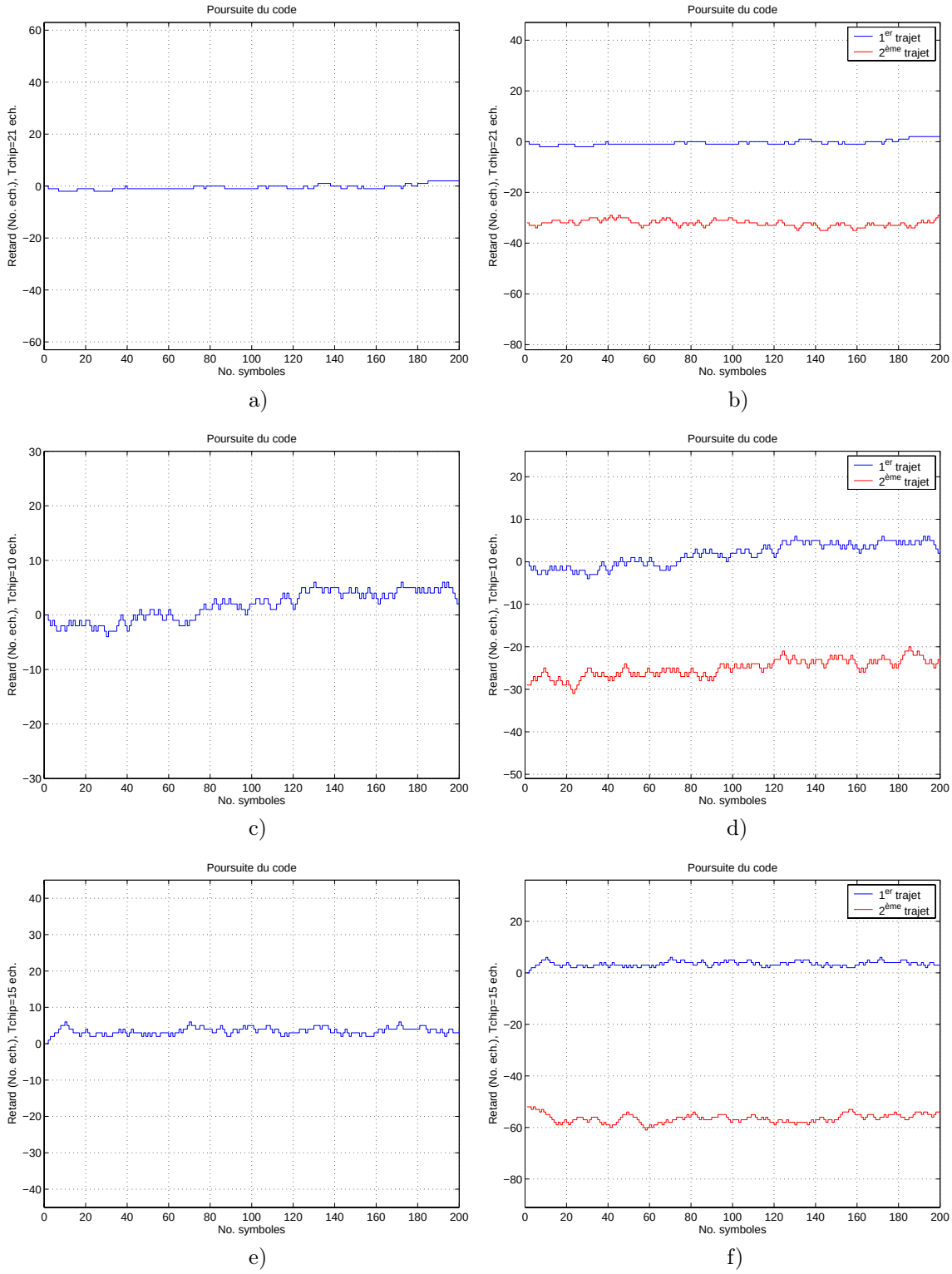


FIG. 4.25 – Retards de code estimés par les variantes de récepteurs à un trajet (à gauche) et à deux trajets (à droite) pour différents signaux : signal 1 (figs. a et b) ; signal 2 (figs. c et d) ; signal 3 (figs. e et f)

4.7 Conclusion

Ce chapitre a considéré le problème général de la réalisation d'une structure de récepteur adaptée à un système de transmission à étalement du spectre, de type séquence chaotique directe. Ainsi dans le schéma du système, on est parti sur une structure classique d'émetteur remplaçant la séquence d'étalement binaire par une séquence chaotique à valeurs réelles dans un intervalle bien précisé. Pour les variantes de récepteurs proposées on a considéré deux familles :

- récepteurs à synchronisation chaotique, où le mécanisme de synchronisation est intrinsèque à la structure déployée. Dans ce cas le récepteur connait juste la dynamique non-linéaire de la séquence d'étalement ; La séquence originale d'étalement est alors reconstruite et simultanément le symbole informationnel est estimé. Une telle méthode est très sensible à la caractéristique de transmission de l'ensemble émetteur-canal-récepteur ; Des méthodes appropriées de contrôle de gain et de correction de la phase résiduelle ont été développées. Finalement des simulations ont été réalisées pour évaluer ces nouvelles méthodes dans diverses configurations (C/S, C/S/P).
- récepteurs à synchronisation de séquence classique : cette fois la synchronisation est obtenue en suivant les étapes normales d'acquisition et de poursuite. L'application au canal acoustique sous-marin, réputé difficile, nous a obligé à considérer cette voie alternative. Ainsi on propose plusieurs structures, en débutant avec un récepteur classique de type RAKE-MRC, suivi de deux autres variantes basées sur des méthodes à filtrage de Kalman pour l'estimation du symbole et de l'éventuelle erreur de phase. Ces trois méthodes ont été testées sur trois signaux acoustiques caractérisés par différents niveaux de SNR, et de forme de réponse impulsionnelle.

En conclusion on peut dire que les méthodes présentées dans ce chapitre élargissent la gamme de solutions au problème de la démodulation pour un système à étalement de spectre par séquence chaotique. Ainsi on peut choisir en fonction de l'application entre une solution simple au niveau de la structure de réception mais avec des performances limitées et d'autres variantes plus robustes qui supposent par contre une complexité supérieure.

Le chapitre prochain sera destiné à une autre structure de récepteur qui va utiliser cette fois un modèle de filtrage Kalman linéaire pour maximiser l'énergie disponible à la démodulation du signal informationnel.

Chapitre 5

Estimation de canal par filtrage Kalman linéaire

5.1 Introduction

Le problème d'estimation du canal reste une étape très importante surtout en présence de forte interférence inter-symbole et/ou de nonstationarité. Dans la littérature plusieurs solutions ont été proposées, dont les plus performantes utilisent des algorithmes adaptatifs (LMS, RLS) associés à des structures à retour de décision. Il a déjà été prouvé [FSSJ01] qu'une solution basée sur un système à étalement de spectre par séquence directe, avec un ou plusieurs échos considérés [ALBS05], peut offrir des performances intéressantes en termes de taux d'erreurs binaires (TEB) et sécurité de la transmission.

Notre objectif étant d'étudier l'estimation du canal pour des systèmes de communications sous-marines, les solutions développées dans ce chapitre pourront engendrer un coût de calcul plus important, avec en particulier un traitement à fréquence chip. Nous verrons que le problème d'estimation des coefficients du canal peut être représenté sous la forme d'un modèle linéaire, qui permet une implémentation directe par une structure de filtrage de Kalman linéaire. Quelques articles récents [TY00, KFSW02, LMG02, TSS05] proposent la structure de récepteur de type Kalman, dans le cas des canaux à trajets multiples, comme un outil important pour augmenter les performances en TEB et du nombre d'utilisateurs. Dans notre cas, nous allons ajouter à la structure de filtrage Kalman une méthode de suppression des termes d'interférence, dans l'objectif de réduire le coût de calcul global. En fait, ceci permet la représentation de l'algorithme matriciel original sous une forme simplifiée vectorielle, avec même la possibilité d'obtenir une solution scalaire.

Deux cas seront traités, le premier va considérer que le système emploie une séquence d'étalement courte, caractérisée par des propriétés de corrélation périodiques. Ainsi on va prouver que le modèle d'observation

peut alors être écrit en fonction de la matrice d'auto-corrélation qui a dans ce cas quelques propriétés de symétrie. Une autre conséquence de cette périodicité est que le modèle peut être considéré constant à tout moment, avec l'évaluation de la matrice d'auto-corrélation avant la mise en marche du système. La méthode permet de calculer également la réponse du canal à une fréquence plus importante que la fréquence chip, ce qui peut présenter de l'intérêt dans des scénarios à faible SNR, caractérisés par des trajets multiples.

La deuxième méthode va traiter le cas des séquences d'étalement longues, considérées non-périodiques pour toute la durée de la transmission. Le modèle dynamique, de structure similaire au cas précédent, va alors évoluer au cours de temps ; La matrice d'auto-corrélation devant être recalculée, un coût de calcul plus important, sera nécessaire. Nous proposons alors quelques méthodes de simplification pour le calcul de la matrice d'auto-corrélation, avec une influence limitée sur les performances globales. A l'exception de ce calcul, l'algorithme est implémenté avec le même procédé d'annulation d'interférences que celui utilisé dans le cas périodique. Quelques simplifications supplémentaires nous permettent d'écrire une solution asymptotique.

Finalement, pour réaliser la démodulation, une solution à retour de décision avec une hypothèse a priori sur le symbole courant est proposée. Il a déjà été prouvé [SF00] qu'une telle méthode surpasse quelques structures conventionnelles avec un traitement à fréquence chip. De cette façon nous transférons l'incertitude de symbole dans une structure multi-branche avec une prise de décision par rapport à un critère d'erreur minimale parmi les hypothèses faites. Un problème présenté par cette solution concerne le nombre de branches nécessaires, croissant avec l'ordre de modulation utilisé.

Les schémas proposés sont ensuite testés en conditions de simulation ainsi que sur des signaux réels obtenus sur des canaux acoustiques sous-marins. Nous montrerons, à l'aide de ces expériences, que les performances en termes de TEB et d'estimation de canal sont améliorées par rapport à d'autres systèmes.

Ces travaux n'ont pour l'instant été validés, que par le biais de signaux expérimentaux ou par simulations numériques ; Il reste à examiner plus en profondeur les performances des méthodes proposées.

5.2 Système à étalement de spectre DS-SS à séquence courte

Comme on a déjà mentionné dans l'introduction, ce premier cas suppose un code périodique à l'entrée du récepteur. On trouve souvent cette situation dans le cas des signaux d'acquisition.

5.2.1 Modèle linéaire associé à l'estimation récursive du canal

Ainsi le signal complexe d'acquisition, en bande de base, pour un système à étalement de spectre par séquence directe est donné par la relation suivante :

$$r(t) = \sum_{l=0}^{L-1} c(l)\, h(t - lT_c) + n(t) \tag{5.1}$$

où $c(l)$ représente les "chips" qui forment la séquence d'étalement périodique de longueur L, $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du canal incluant l'effet des filtres de transmission/réception, T_c est la durée "chip" et $n(t)$ désigne le bruit additif supposé dans le canal. Le modèle du signal est celui d'un système mono-utilisateur, le terme de signal d'acquisition étant utilisé pour désigner qu'aucune information n'est associée pour l'instant. On suppose en plus que la longueur du code d'étalement est supérieure à l'étalement temporel T_m du canal ($LT_c > T_m$). Cette condition nous garantit que du coté du récepteur une quantité maximale d'énergie sera disponible.

Le signal donné par l'équation (5.1) est échantillonné à une fréquence p/T_c plus importante que la fréquence Nyquist, en considérant que la bande du signal est limitée à $\pm 1/T_c$:

$$r(k) = \sum_{l=0}^{pL-1} h(l)\, c(k-l) + n(k) \tag{5.2}$$

Il faut mentionner que dans l'équation ci-dessus présentée h et c désignent les versions sur-échantillonées des leurs corréspondants introduits dans (5.1).

Si pour un k fixé, on réalise la corrélation entre le signal reçu échantillonné et des versions retardées du code d'étalement sur la période du code pL, on obtient :

$$\begin{aligned} z_k^j &= \sum_{i=0}^{pL-1} c_k^*(i-j)\, r(k+i) \\ &= \sum_{i=0}^{pL-1} c_k^*(i-j) \left[\sum_{l=0}^{pL-1} h(l)\, c_k(k+i-l) + n(k+i) \right] \\ &= \sum_{l=0}^{pL-1} h(l) \sum_{i=0}^{pL-1} c_k^*(i-j)\, c_k(k+i-l) + \sum_{i=0}^{pL-1} c^*(i-j)\, n(k+i) \\ &= \sum_{l=0}^{pL-1} h(l)\, \Gamma_{cc}(k+j-l) + n_k^j \end{aligned} \tag{5.3}$$

où $\Gamma_{cc}(\cdot)$ représente l'auto-corrélation de la séquence d'étalement sur-échantillonnée et n_k^j désigne le bruit résiduel obtenu après la corrélation. Compte tenu de la périodicité de la séquence d'étalement, le vecteur $\Gamma_{cc}(\cdot)$ contenant les valeurs d'auto-corrélation sur l'intervalle discret $\{0, ..., pL-1\}$ est périodique.

Dans l'objectif d'alléger la notation l'indice initial sera considéré nul dans la relation (5.3), et par la suite on écrira sous forme matricielle le vecteur d'observation $\mathbf{z}_k$:

$$\mathbf{z}_k = \left[z_k^0, z_k^1, ..., z_k^{pL-1} \right]^T$$

$$= \quad \mathbf{\Gamma}_{cc}\mathbf{h} + \mathbf{n}_k \tag{5.4}$$

où $\mathbf{h} = [h(0), h(1), ..., h(pL-1)]^T$ est le vecteur de réponse impulsionnelle du canal, $\mathbf{n}_k = \left[n_k^0, n_k^1, ..., n_k^{pL-1}\right]^T$ est le vecteur des bruits résiduels obtenus après la corrélation et $\mathbf{\Gamma}_{cc}$ est la matrice Toeplitz d'auto-correlation associée au code d'étalement :

$$\mathbf{\Gamma}_{cc} = \begin{bmatrix} \Gamma_{cc}(0) & \Gamma_{cc}(1) & ... & \Gamma_{cc}(pL-1) \\ \Gamma_{cc}(1) & \Gamma_{cc}(0) & ... & \Gamma_{cc}(pL-2) \\ ... & ... & & ... \\ \Gamma_{cc}(pL-1) & \Gamma_{cc}(pL-2) & ... & \Gamma_{cc}(0) \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Si on considère un modèle AR d'ordre un pour caractériser l'évolution des coefficients du canal, on obtient un modèle général qui peut être écrit sous la forme de l'équation de processus suivante :

$$\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}_k + \mathbf{v}_k \tag{5.6}$$

En complétant cette équation de processus générale avec les observations données par la relation (5.4), on obtient un modèle complet pour l'évolution des coefficients du canal de l'instant k à l'instant $k+1$, où $\mathbf{v}_k$ est un bruit de processus gaussien circulaire qui va compenser éventuellement toute erreur de modélisation.

L'estimateur optimal récursif au sens de la minimisation de l'EQM, pour un modèle linéaire quelconque, avec la supposition de gaussianité des bruits de processus et d'observation, est le filtre de Kalman. En dépit du coût de calcul élevé, cette approche est intéressante car elle permet d'établir une borne de performances pour les algorithmes développés par la suite.

Pour expliciter les relations qui interviennent dans une structure de filtrage de type Kalman on considère ainsi le modèle général suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}_k + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{\Gamma}_{cc}\mathbf{h}_k + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{5.7}$$

A partir de ce modèle on peut développer par la suite les équations caractéristiques pour les deux étapes de filtrage :

– étape de mise à jour temporelle

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_{k+1}^- &= \hat{\mathbf{h}}_k \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{P}_k + \mathbf{Q} \end{aligned} \tag{5.8}$$

– étape de mise à jour par des observations

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^{-}\mathbf{\Gamma}_{cc}^{T}\left(\mathbf{\Gamma}_{cc}\mathbf{P}_{k+1}^{-}\mathbf{\Gamma}_{cc}^{T}+\mathbf{R}\right)^{-1} \\
\hat{\mathbf{h}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{h}}_{k+1}^{-}+\mathbf{K}_{k+1}\left(\mathbf{z}_{k}-\mathbf{\Gamma}_{cc}\hat{\mathbf{h}}_{k+1}^{-}\right) \\
\mathbf{P}_{k+1} &= \left(\mathbf{I}_{pL}-\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{\Gamma}_{cc}\right)\mathbf{P}_{k+1}^{-}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

En ce qui concerne les termes d'interférence entre les différents trajets obtenus après corrélation, le modèle de filtrage considéré les estime implicitement par l'intermédiaire du modèle de la matrice d'auto-corrélation.

On observe que pour les relations (5.8) et (5.9), le coût de calcul le plus important correspond à l'expression du gain de Kalman $\mathbf{K}_k$, qui nécessite l'inversion de la matrice $\left(\mathbf{\Gamma}_{cc}\mathbf{P}_{k}^{-}\mathbf{\Gamma}_{cc}^{T}+\mathbf{R}\right)$; Pour une seule étape, le coût de calcul de l'algorithme est de l'ordre de $(pL)^2$.

5.2.2 Suppression des termes d'interférence

Quelques articles récents proposent la méthode de suppression de termes d'interférence, pour le cas d'une propagation à trajets multiples, comme un outil important pour augmenter les performances de systèmes en TEB et nombre d'utilisateurs [GRL99, MS03, KPIL02]. Dans notre cas nous utiliserons ce principe avec pour objectif principal de réduire le coût de calcul global du processus de filtrage.

Ainsi on suppose à l'instant k que le vecteur de coefficients du canal $\hat{\mathbf{h}}_k$ suit de près la vraie réponse impulsionnelle, en considérant la matrice :

$$\mathbf{Z} = \left(\mathbf{1}_{pL}-\mathbf{I}_{pL}\right)\boxdot\mathbf{\Gamma}_{cc} \tag{5.10}$$

On peut déduire du vecteur d'observation l'interférence due aux autres coefficients de canal et ainsi obtenir un nouveau vecteur d'observation :

$$\mathbf{z}_{k}^{i-} = \mathbf{z}_{k}-\mathbf{Z}\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}} \tag{5.11}$$

Cette relation permet de modifier le modèle (5.7), sous la forme suivante :

$$\begin{cases}
\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}_{k}+\mathbf{v}_{k} \\
\mathbf{z}_{k}^{i-} = W\mathbf{h}_{k}+\mathbf{n}_{k}
\end{cases} \tag{5.12}$$

où $W = \Gamma_{cc}(0)$ est un scalaire qui représente l'énergie de la séquence d'étalement (énergie symbole).

Avec cette hypothèse le modèle d'estimation récursif devient :

– étape de mise à jour temporelle

$$\hat{\mathbf{h}}_{k+1}^{-} = \hat{\mathbf{h}}_{k}$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^{-} = \mathbf{P}_k + \mathbf{Q} \tag{5.13}$$

– étape de mise à jour par des observations

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^{-} W \left(W^2 \mathbf{P}_{k+1}^{-} + \mathbf{R}\right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{h}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{h}}_{k+1}^{-} + \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{z}_{k+1}^{i-} - W\hat{\mathbf{h}}_{k+1}^{-}\right) \\ \mathbf{P}_{k+1} &= \left(\mathbf{I}_{pL} - \mathbf{K}_{k+1} W\right) \mathbf{P}_{k+1}^{-} \end{aligned} \tag{5.14}$$

On considère les bruits d'observation et de processus non-corrélés entre-eux et avec les états. Ainsi les matrices $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ sont diagonales avec la même valeur sur la diagonale, car aucune connaissance sur les termes ne nous permet de pondérer différemment ces valeurs pour chaque coefficient. Si on initialise aussi la matrice de covariance des erreurs sous forme diagonale, sans connaissance a priori sur la statistique des termes d'erreur alors le même coefficient peut être considéré le long de la diagonale. En utilisant le même principe, par la suite on peut dire que la covariance prédite et le gain Kalman sont sous forme diagonale avec des éléments égaux sur la diagonale. Ainsi l'implémentation récursive du filtre de Kalman pour l'étape de mise à jour par des observations devient :

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= W P_{k+1}^{-} \left(W^2 P_{k+1}^{-} + R\right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{h}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{h}}_{k+1}^{-} + K_{k+1} \left(\mathbf{z}_{k+1}^{i-} - W\hat{\mathbf{h}}_{k+1}^{-}\right) \\ P_{k+1} &= \left(1 - W K_{k+1}\right) P_{k+1}^{-} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Les équations données par (5.14) ont simplifiées l'algorithme, transformant la solution matricielle en forme scalaire pour l'expression du gain de Kalman et de la covariance des erreurs.

5.2.3 Solution asymptotique

A partir de la théorie du filtrage de Kalman et avec l'hypothèse de modèle invariant en temps et linéaire, on peut calculer une solution asymptotique associée au modèle de filtrage développé [BSL93].

Ainsi pour toute matrice de covariance des erreurs prédite initiale $\mathbf{P}_0^{-}$, on a $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}_k^{-} = \mathbf{P}_\infty^{-}$ où :

$$\mathbf{P}_\infty^{-} = \mathbf{P}_\infty^{-} \left[\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_{cc}^T \left(\mathbf{\Gamma}_{cc} \mathbf{P}_\infty^{-} \mathbf{\Gamma}_{cc}^T + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{\Gamma}_{cc} \mathbf{P}_\infty^{-}\right] + \mathbf{Q} \tag{5.16}$$

Le gain Kalman $\mathbf{K}_k$ va de même converger vers une matrice invariante $\mathbf{K}_\infty$ qui en utilisant l'équation (5.13) peut être obtenue sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_\infty = \mathbf{P}_\infty^- \mathbf{\Gamma}_{cc}^T \left(\mathbf{\Gamma}_{cc} \mathbf{P}_\infty^- \mathbf{\Gamma}_{cc}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \tag{5.17}$$

Dans le cas du modèle simplifié (5.12), la relation (5.16) peut être résolue comme une forme quadratique en fonction de P_∞^- :

$$P_\infty^- = \frac{1}{2} \left(Q \pm \sqrt{Q^2 + \frac{4QR}{W^2}} \right) \tag{5.18}$$

En sélectionnant la solution positive on obtient la valeur du gain asymptotique et on peut écrire l'algorithme dans sa forme la plus simple comme l'équation récursive suivante :

$$\hat{\mathbf{h}}_{k+1} = \hat{\mathbf{h}}_k + K_\infty \left(\mathbf{z}_k^{i-} - W \hat{\mathbf{h}}_k \right) \tag{5.19}$$

où

$$K_\infty = W P_\infty^- \left(W^2 P_\infty^- + R \right)^{-1} \tag{5.20}$$

Dans la section destinée aux résultats numériques on va comparer le fonctionnement de cette solution asymptotique avec les autres variantes d'estimateurs que nous développerons.

5.2.4 Introduction d'une étape de troncature

Dans le cas des algorithmes récursifs une approche fréquemment utilisée est de supprimer les coefficients qui éventuellement peuvent introduire des erreurs dans le processus d'estimation. La solution immédiate qui se présente est de rejeter l'ensemble des coefficients de faibles valeurs par seuillage.

De façon générale une telle approche n'est pas utilisée dans le cas de l'algorithme de Kalman, mais dans notre contexte on va démontrer à l'aide de simulations numériques que le gain en performance apporté n'est pas négligeable. Qualitativement on peut énoncer aussi que pour le modèle simplifié (5.12) la troncature a un rôle très influent, car tout trajet faux pris en compte va introduire par la suite d'importantes erreurs dans le processus d'estimation.

L'emploi de l'étape de troncature va se faire en utilisant la fonction non-linéaire suivante :

$$h_k = \begin{cases} \hat{h}_k(l), \left| \hat{h}_k(l) \right| \geq \alpha_T \hat{h}_{max} \\ 0, \left| \hat{h}_k(l) \right| < \alpha_T \hat{h}_{max} \end{cases}, \; l \in \{0, ..., pL-1\} \tag{5.21}$$

où $\hat{h}_{max} = \max_{l \in \{0,...,pL-1\}} \left| \hat{h}_k(l) \right|$, et $0 \leq \alpha_T < 1$.

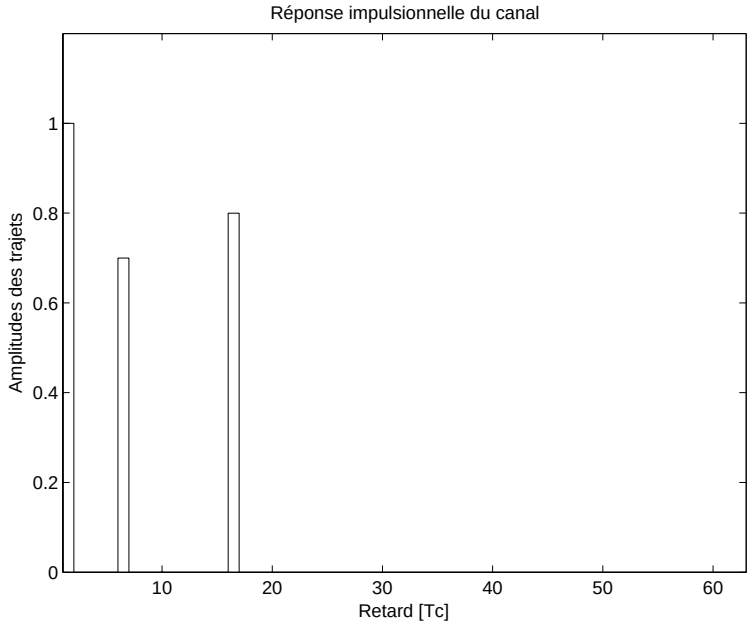


FIG. 5.1 – Réponse impulsionnelle du canal considéré

5.2.5 Résultats numériques

Pour évaluer les propriétés de convergence des méthodes proposées auparavant on a considéré l'exemple d'un canal invariant en temps caractérisé par trois trajets ; la réponse impulsionnelle correspondante est donnée dans la figure 5.1. L'ensemble de simulations est réalisé avec un gain d'étalement $L = 63$ et en présence d'un bruit blanc gaussien dont la variance est calculée pour avoir un SNR de $-5dB$ à l'entrée de l'estimateur.

L'influence de l'étape de troncature va être vérifiée en utilisant cinq variantes d'estimateur, correspondant aux valeurs (exprimé en dB) du coefficient de troncature $\alpha_T = \{-40dB, -30dB, -20dB, -10dB\}$ et au cas où tous les trajets sont sélectionnés. Les simulations ont été effectuées pour la forme générale de l'algorithme donnée par les équations (5.7) - (5.9).

Dans la figure 5.2 b) nous avons calculé l'erreur d'estimation avec l'hypothèse que seuls les trajets les plus énergétiques, par rapport à un seuil de $-3\,dB$ sous le trajet le plus puissant, sont pris en compte pour une démodulation éventuelle.

A partir des figures 5.2 a) et b) on observe que dans le cas où l'étape de troncature n'est pas présente, la convergence du filtre est moins bonne et l'erreur d'estimation résiduelle reste importante même si on applique une sélection des trajets les plus énergétiques (un seuil de $-3\,dB$). L'introduction d'un coefficient de troncature, même de petite valeur, va avoir un impact visible sur la convergence de l'algorithme en vitesse et erreur. Ainsi les figures 5.2 a) et b) nous confirment que pour une valeur α_T de $-40dB$ on obtient de bonnes performances sur cet exemple, et par la suite ce choix sera fait pour toutes les implémentations discutées dans

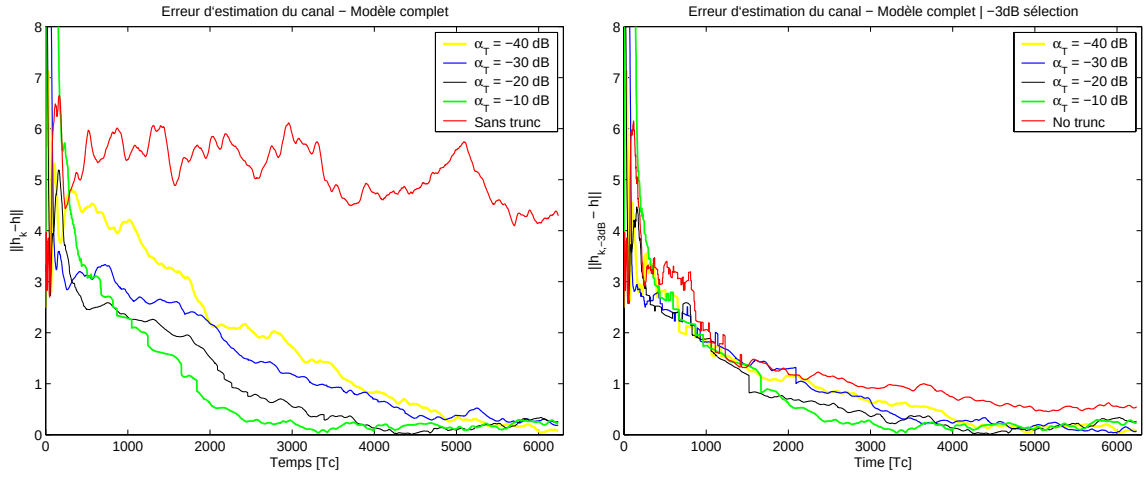


FIG. 5.2 – Erreur d'estimation du canal pour différentes valeurs de α_T : a) sans sélection, b) une sélection des trajets les plus énergétiques est réalisée

le reste de ce chapitre. Pour une valeur plus importante de α_T, pendant les premières étapes d'estimation, en situation de bruit important dans le canal ou de canaux non-stationnaires, le système peut perdre des trajets importants.

Mentionnons que le choix du coefficient de troncature est aussi très dépendant des covariances des bruits de processus et d'observation, qui vont quantifier le dégré d'évolution de la dynamique ; Il faut prendre garde à ce que l'apparition d'un trajet assez énergétique ne soit pas empêchée par l'étape de troncature.

Dans la figure 5.3, les coefficients du canal estimés sont illustrés dans le cas de l'algorithme général (eq. 5.12 - 5.14), avec le paramétrage présenté ci-dessus.

Pour tester par la suite les performances des différentes méthodes d'estimation de canal, on a employé une série de simulations Monte Carlo ; ainsi on a lancé 20 simulations successives pour le canal de la figure 5.1 avec un rapport SNR de $-5dB$ et un seuil de troncature α_T valant $-40dB$. Les résultats sont présentés dans les figures 5.4 a) et b).

A partir de ces figures on peut faire plusieurs interprétations. La première concerne la convergence rapide de la solution asymptotique par rapport à celle qui utilise juste la suppression des termes d'interférence et même par rapport à la méthode du modèle complet. Mais en dépit de cette caractéristique la figure 5.4 a) nous montre aussi que le modèle complet arrive à rattraper la courbe associée à la solution asymptotique. Dans la figure 5.4 b), où pour le calcul de l'erreur une sélection des trajets les plus énergétiques est réalisée, on observe une convergence très rapide de la méthode de suppression des termes d'interférence mais qui est finalement devancée par les solutions de modèle complet et asymptotique.

Finalement on peut conclure que la solution de suppression des termes d'interférence offre un assez bon compromis entre la convergence et les performances asymptotiques si on emploie conjointement une sélection

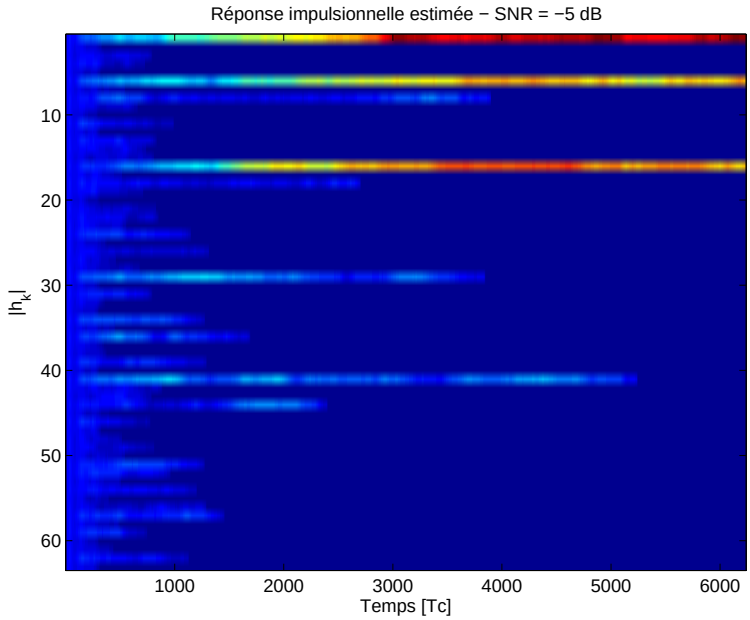
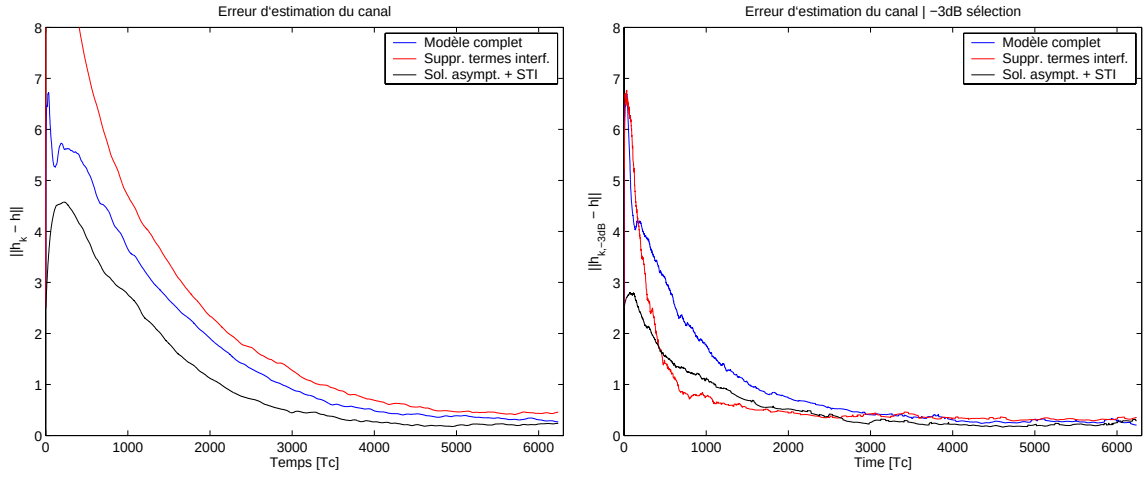


FIG. 5.3 – Réponse impulsionnelle du canal estimée



a) b)

FIG. 5.4 – Erreur d'estimation du canal pour différentes variantes d'estimateurs (simulation MC) : a) sans sélection, b) une sélection des trajets les plus énergétiques est réalisée

des trajets les plus énergétiques. La solution asymptotique offre le coût de calcul le plus réduit mais dans le cas des systèmes de communications réels, sa mise en oeuvre s'avère délicate.

Ainsi comme l'application aux canaux acoustiques sous-marins est l'un de nos objetifs, la solution à suppression des termes d'interférence est favorisée. Ce type de canal est caractérisé par une assez forte instabilité et par une connaissance approximative des paramètres de bruit à l'entrée du récepteur, la solution à suppression des termes d'interférence est favorisée. Ce choix est validé aussi par le fait qu'en condition d'instabilité du canal, la convergence par rapport aux trajets énergétiques est un paramètre prépondérant à prendre en compte.

5.3 Système à étalement de spectre DS-SS à séquence longue

5.3.1 Modèle associé

Dans le cas de séquences d'étalement non-périodiques la fonction d'auto-corrélation perd son caractère périodique. Comme nous procéderons à l'estimation du canal à fréquence chip, il faudra considérer les éventuels changements de phase introduits par l'information ; Dans ce cas le signal reçu échantillonné prend la forme suivante :

$$r(k) = \sum_{l=0}^{pL-1} h(l)\, d\left\lfloor \frac{k-l}{pL} \right\rfloor c(k-l) + n(k) \tag{5.22}$$

où $d\left\lfloor \frac{\cdot}{pL} \right\rfloor$ représente le symbole informationnel et où $c(\cdot)$ désigne la séquence d'étalement non-périodique. De même que dans le cas périodique on considère un indice initial nul (le premier trajet détecté du premier symbole est obtenu pour $k = 0$ et $l = 0$).

Dans le prochain paragraphe, nous présenterons la procédure de prise de décision ; Pour construire tout d'abord le modèle récursif d'estimation du canal nous considèrons les symboles informationnel connus, et on définit la séquence d'étalement non-périodique comme suit :

$$s(k) = d\left\lfloor \frac{k}{pL} \right\rfloor c(k) \tag{5.23}$$

En utilisant la même idée que dans le cas périodique, on réalise des corrélations entre le signal reçu, donné par l'équation (5.22) et des versions retardées de la séquence d'étalement considérée $s(\cdot)$, pour obtenir l'observation :

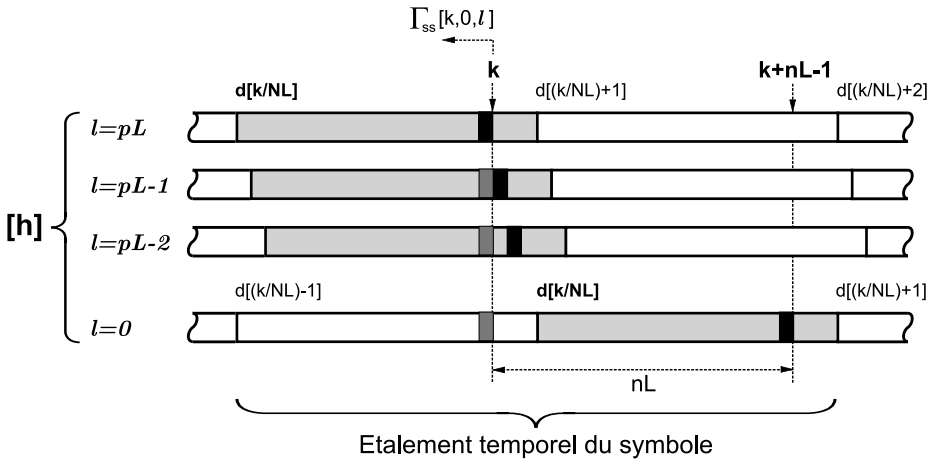


FIG. 5.5 – Calcul de la matrice d'auto-corrélation pour une séquence non-périodique porteuse d'information

$$\begin{aligned} z_k^j &= \sum_{i=0}^{pL-1} s\left(k+i-j\right) r\left(k+i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{pL-1} s^*\left(k+i-j\right) \left[\sum_{l=0}^{pL-1} h\left(l\right) s\left(k+i-l\right) + w\left(k+i\right)\right] \\ &= \sum_{l=0}^{pL-1} h\left(l\right) \sum_{i=0}^{pL-1} s^*\left(k+i-j\right) s\left(k+i-l\right) + \sum_{i=0}^{pL-1} s^*\left(k+i-j\right) w\left(k+i\right) \\ &= \sum_{l=0}^{pL-1} h\left(l\right) \Gamma_{ss}\left(k,j,l\right) + v_k^j \end{aligned} \tag{5.24}$$

Le calcul de la matrice d'auto-corrélation dans ce cas précis est illustré dans la figure 5.5. Pour cet exemple le gain d'étalement est considéré égal à l'étalement temporel supposé de pL chips.

Dans ce contexte, le vecteur d'observation pourra s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{\Gamma}_{ss}^k \mathbf{h} + \mathbf{n}_k \tag{5.25}$$

où $\mathbf{n}_k$ est le vecteur de bruit résiduel et $\mathbf{\Gamma}_{ss}^k$ est définie par :

$$\mathbf{\Gamma}_{ss}^k = \begin{bmatrix} \Gamma_{ss}\left(k,0,0\right) & \Gamma_{ss}\left(k,0,1\right) & ... & \Gamma_{ss}\left(k,0,pL-1\right) \\ \Gamma_{ss}\left(k,1,0\right) & \Gamma_{ss}\left(k,1,1\right) & ... & \Gamma_{ss}\left(k,1,pL-1\right) \\ ... & ... & & ... \\ \Gamma_{ss}\left(k,pL-1,0\right) & \Gamma_{ss}\left(k,pL-1,1\right) & ... & \Gamma_{ss}\left(k,pL-1,pL-1\right) \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

Nous pouvons remarquer que pour le cas d'une modulation BPSK et un code d'étalement à valeur réelles,

la matrice $\mathbf{\Gamma}_{ss}^{k}$ conservera la propriété de symétrie.

Ainsi le modèle d'estimation du canal est donné par :

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}_k + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{\Gamma}_{ss}^{k} \mathbf{h}_k + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{5.27}$$

La structure de ces équations est donc similaire à celle que nous avons rencontrées dans le cas d'une séquence périodique, si ce n'est que la matrice d'auto-corrélation doit être calculée à chaque étape d'estimation k.

5.3.2 Suppression des termes d'interférence et solution asymptotique associée

En général, dans le cas de séquences non-périodiques, on ne peut pas simplifier le modèle (5.27) en utilisant la méthode de suppression des termes d'interférence, à cause du format de la matrice $\mathbf{\Gamma}_{ss}^{k}$. D'après la forme générale donnée par l'équation (5.26), on voit que dans le cas le plus favorable, cette matrice est symétrique et variable au cours du temps ; Il faut donc la recalculer pour chaque nouvel instant, augmentant ainsi le coût de calcul global. Par contre on peut toujours écrire une forme où les matrices sont diagonales afin de réduire le coût de calcul au niveau de l'algorithme de Kalman, qui implique toujours l'inversion d'une matrice de dimension $pL \times pL$. Ainsi nous considérerons un modèle similaire à celui mis en oeuvre pour la suppression des termes d'interférence dans le cas périodique :

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}_k + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{z}_k^{i-} = \mathbf{W}_k \boxdot \mathbf{h}_k + \mathbf{n}_k \end{cases} \tag{5.28}$$

où cette fois $\mathbf{W}_k$ désigne le vecteur diagonal de la matrice $\mathbf{\Gamma}_{ss}^{k}$.

Le modèle (5.28) peut être simplifié sous la forme d'un algorithme à gain de Kalman scalaire avec l'hypothèse que la longueur pL sur laquelle on fait la corrélation est assez importante, ou que le code d'étalement garde une énergie constante sur pL (vrai dans le cas des séquences binaires). Cette simplification revient au fait que les éléments de la diagonale peuvent être considérés égaux :

$$\Gamma_{ss}(k, j, j) = \mathbf{W}_k(j) = W,\ j \in \{0, ..., pL-1\} \tag{5.29}$$

En plus si L est égal au gain d'étalement on peut faire l'approximation que les éléments diagonaux sont égaux à l'énergie symbole E_s.

La solution asymptotique dans ce cas est similaire à celle obtenue dans le cas périodique (eq. 5.18, 5.19 et 5.20).

Du point de vue analytique nous allons voir à partir des relations suivantes qu'une deuxième équation

d'observation peut être construite. Ainsi considérant l'expression donnée par l'équation (5.24) on propose d'avancer l'instant de référence k avec l'index j, et par la suite l'équation d'observation devient :

$$\begin{aligned}
\check{z}_k^j = z_{k+j}^j &= \sum_{i=0}^{pL-1} s\left(k+i\right) r\left(k+i+j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{pL-1} s^*\left(k+i\right) \left[\sum_{l=0}^{pL-1} h\left(l\right) s\left(k+i+j-l\right) + w\left(k+i+j\right)\right] \\
&= \sum_{l=0}^{pL-1} h\left(l\right) \sum_{i=0}^{pL-1} s^*\left(k+i\right) s\left(k+i+j-l\right) + \sum_{i=0}^{pL-1} s^*\left(k+i\right) w\left(k+i+j\right) \\
&= \sum_{l=0}^{pL-1} h\left(l\right) \Gamma_{ss}\left(k, j-l\right) + v_k^j
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Sous cette nouvelle forme on observe que la fonction d'auto-corrélation est définie relativement à la différence entre les indices j et l et non plus en valeur absolue de ces mêmes indices.

5.3.3 Algorithme d'estimation du canal et décision symbole

Dans le développement des équations précédentes nous avons inclut les symboles informationnels, supposés connus, dans le signal complexe considéré. Notre but est d'utiliser la meilleure estimation de canal possible pour démoduler le signal informationnel avec un TEB minimal ; Ainsi les deux problèmes énoncés sont réciproques.

Bien sûr, avant que toute démodulation soit possible une phase d'acquisition est nécessaire ; Nous la supposerons ici déjà accomplie.

Parmi les algorithmes d'estimation (conjointe canal-symbole), il est assez fréquent de trouver des structures de type retour de décision ; Nous ferons ici le choix d'une approche similaire. Ainsi l'idée principale de l'algorithme est d'utiliser les symboles informationnels détectés antérieurement pour faire l'estimation du canal associée au symbole courant. On souligne que dans notre cas on peut utiliser l'ensemble des coefficients du canal estimé à la fréquence chip, approche peu courante dans les méthodes à retour de décision classiques.

Le problème réciproque dont nous avons parlé ci-dessus, qui peut être observé dans la figure 5.5, réside dans le fait que le calcul complet de la matrice d'auto-corrélation suppose la connaissance du symbole courant. Cette condition impose l'emploi d'une hypothèse sur la valeur du symbole courant qui par la suite va être utilisée pour la construction de la séquence supposée être présente dans le canal. Une approche similaire a déjà été développée par Stojanovic et al. [SF00] dans le même contexte de système à étalement de spectre par séquence directe.

Avec ces précisions on présente dans la figure 5.6 la structure générale du récepteur à retour de décision, réalisant conjointement l'estimation du canal et la décision symbole à partir d'hypothèses sur l'information.

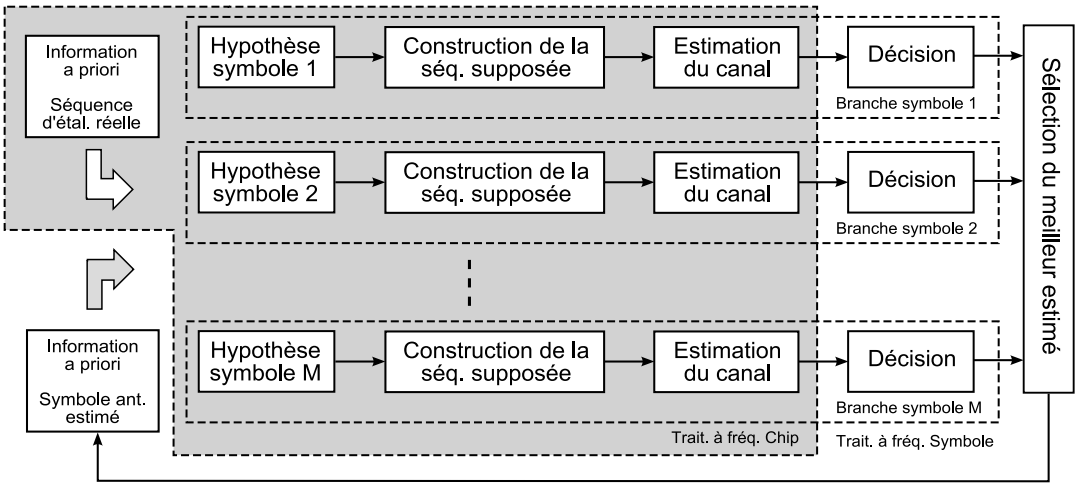


FIG. 5.6 – Structure générale du récepteur à retour de décision avec une hypothèse sur le symbole courant

L'information connue *a priori* est la séquence d'étalement non-périodique employée à l'émission ainsi que les symboles estimés antérieurement. On peut observer à partir de la figure 5.6 que la complexité de l'algorithme augmente avec l'ordre M de modulation choisi ; Pour chaque symbole il est nécessaire de procéder à "une reconstruction du code", une estimation des coefficients du canal, ainsi qu'à une étape de décision. Ainsi l'algorithme démarre avec la supposition que sur chaque branche le symbole courant est S_m qui appartient à l'alphabet $\mathcal{A} = \{S_1, S_2, ..., S_M\}$. Ensuite pour chaque hypothèse, un algorithme d'estimation de canal est employé.

La partie décision ainsi que le choix du symbole le plus probable peuvent être implémentés de différentes façons. La solution la plus classique est d'utiliser pour chaque branche une estimation du symbole transmis avec une structure de type RAKE, et ensuite l'hypothèse symbole la plus probable est choisie par rapport à un critère d'erreur minimale. Ainsi si on a à la sortie de la structure RAKE la valeur $\tilde{d}\left\lfloor \frac{k}{pL} \right\rfloor$ le choix du symbole est fait par rapport à la relation suivante :

$$\hat{d}\left\lfloor \frac{k}{pL} \right\rfloor = \arg \min_{i=1..M} \left| S_i - \tilde{d}\left\lfloor \frac{k}{pL} \right\rfloor \right|^2 \tag{5.31}$$

Comme nous le verrons au travers des résultats expérimentaux, cette approche donne des résultats intéressants. Nous avons alors cherché à améliorer encore les performances en exploitant mieux l'estimation du canal. Ainsi par exemple on peut dire qu'une hypothèse de symbole fausse va se traduire par une mauvaise construction de la matrice $\mathbf{\Gamma}_{ss}^{k}$ avec pour conséquence une mauvaise estimation du canal ; A l'inverse une hypothèse correcte du symbole mènera à la meilleure estimation de canal. Dans ce cas un autre critère de décision peut correspondre à l'énergie des trajets les plus puissants. La meilleure solution sera de pondérer toutes ces informations disponibles pour prendre une décision par rapport à un critère optimal (ex. maximum

Sig.	$F_c\,[Hz]$	$F_p\,[Hz]$	Est. SNR	pF_c	NEB RAKE BPSK	NEB RAKE DBPSK	NEB Hypoth. BPSK	NEB Hypoth. DBPSK
1	2100	9800	2.3 dB	F_c	0	0	0	0
2	4410	8820	-8.7 dB	F_c	1	2	0	0
3	2940	9800	-4.6 dB	F_c	0	0	0	0
4	2100	9800	$<$ -10 dB	F_c	28	20	145	9
-	-	-	-	$3F_c$	-	-	172	1

TAB. 5.1 – Paramètres des signaux traités et résultats obtenus

de vraisemblance).

5.3.4 Résultats expérimentaux

Pour évaluer les performances des méthodes de démodulation/estimation de canal dans le cas des systèmes à étalement de spectre par séquences non-périodiques, nous avons considéré les mêmes signaux de test que ceux déjà employés dans le chapitre précédent. Le contexte est celui d'un canal acoustique sous-marin ; Comme on a déjà présenté dans la figure 4.19, après un signal "chirp" et une séquence d'acquisition périodique, une séquence informationnelle de 200 symboles, modulés BPSK, est transmise. La séquence d'étalement non-périodique employée est chaotique (dynamique Chebyshev d'ordre 2).

En plus des trois signaux considérés dans le tableau 4.1 on a ajouté une expérimentation réalisée à un SNR très réduit (inférieur à $-10\,dB$). Pour ce dernier essai, nous avons un traitement à un fréquence supérieure à la fréquence chip qui se traduit par une amélioration des performances, comme on peut l'observer dans le tableau 5.1.

Deux structures du récepteur ont été considérées :

- La première solution est représentée par la structure RAKE à retour de décision, déjà employée comme référence dans le chapitre précédent ; Cette structure fait une estimation de canal à fréquence symbole ;
- La deuxième solution est le récepteur à hypothèse de symbole et retour de décision, exposé dans le paragraphe précédent.

Tous les signaux échantillonnés en réception à la fréquence $F_e = 44100\,Hz$ avec un gain de traitement de 63, et pour chaque méthode on mesure le nombre d'erreurs binaire (NEB) obtenues en modulation BPSK puis DBPSK, sur l'ensemble des 200 symboles transmis.

Le nombre d'erreurs présenté dans le tableau 5.1 nous donne un aperçu global du fonctionnement des deux solutions de démodulateurs ; La meilleure performance est obtenue à l'aide du récepteur à hypothèse de symbole et estimation de canal par filtrage de Kalman. Ce bon comportement est surtout remarqué pour le cas d'une modulation différentielle, car le retour de décision peut entraîner une inversion de la phase du symbole transmis. Observons que l'emploi d'une estimation des coefficients du canal à une fréquence supérieure à la fréquence chip se traduit par une meilleure récupération de l'énergie transmise et ainsi un

meilleur TEB.

En parallèle avec le nombre d'erreurs on a choisi d'illustrer quelques caractéristiques : réponses impulsionnelles estimées par le récepteur RAKE classique (fig. 5.7) ainsi que par l'estimateur à hypothèse symbole (fig. 5.8), et constellations obtenues pour cette dernière approche (fig. 5.9)

Une dernière observation peut être faite au niveau des constellations obtenues, où une légère rotation est notée. Cet effet, causé par une fréquence Doppler, pourra être corrigé par une boucle de contrôle de phase.

5.4 Conclusion

Ce chapitre avait comme objectif l'introduction d'une nouvelle méthode d'estimation du canal à fréquence chip, dans le cas d'un système à étalement de spectre par séquence directe, en utilisant une structure de type Kalman linéaire. Nous avons montré que dans le cas des séquences d'étalement longues un modèle linéaire peut encore être contruit afin d'estimer le canal par filtrage Kalman. Ensuite, pour limiter le coût de calcul important engendré par le traitement matriciel, on a utilisé une méthode de réduction des termes d'interférence. Des solutions asymptotiques pour l'algorithme de filtrage sont proposées. Les méthodes développées ont été evaluées en conditions de simulation ainsi que sur des signaux réels, dans le contexte de communications acoustiques sous-marines, avec des séquences d'étalement chaotiques. En perspective, les algorithmes d'estimation de canal et de décision pourraient être développées dans un contexte d'optimalité par rapport à un critère à définir. Des solutions multi-utilisateur seraient de même envisageables pour offrir de meilleures performances aux systèmes d'étalement par séquence directe à codes longs.

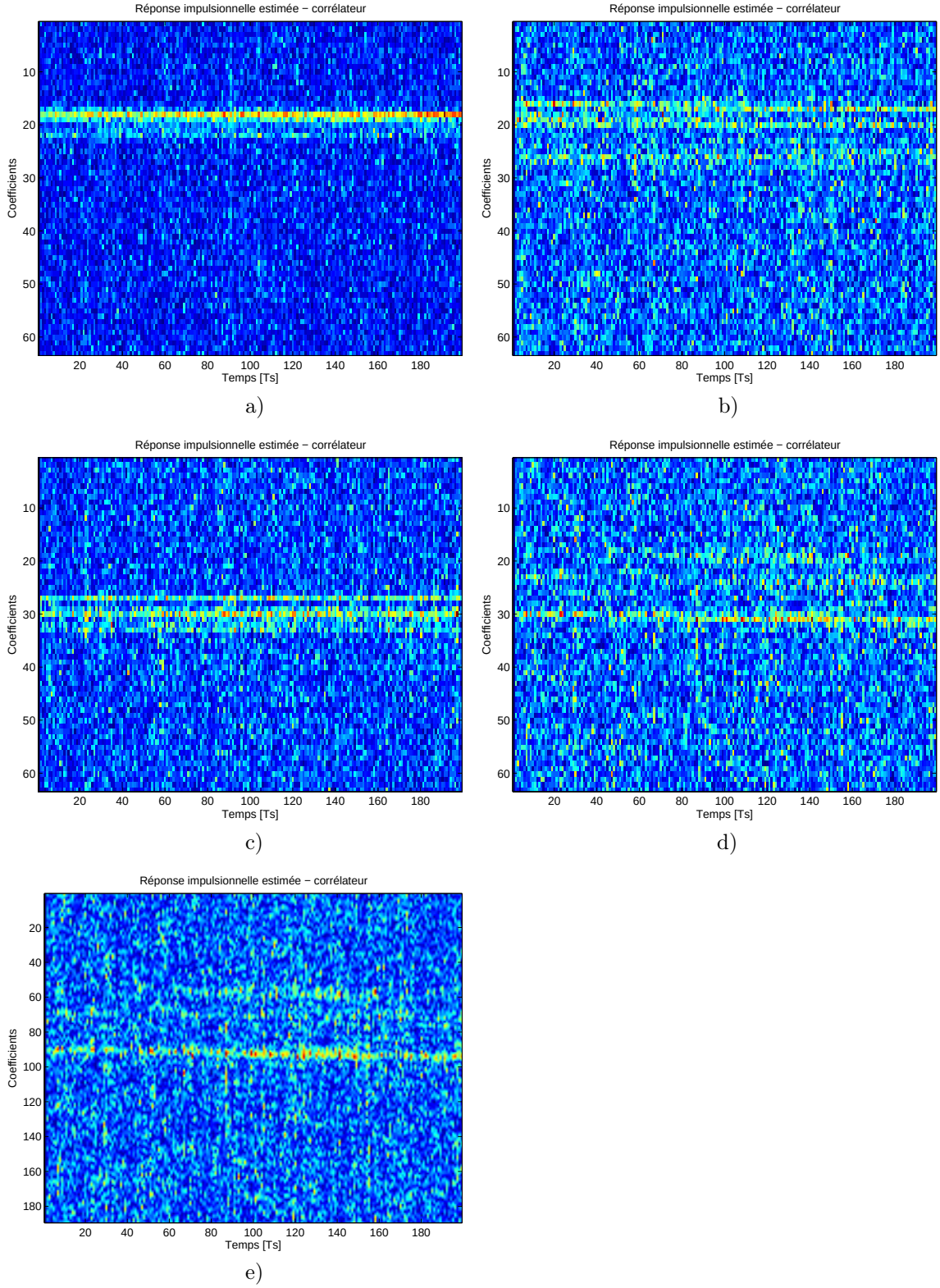


FIG. 5.7 – Réponse impulsionnelle du canal, estimée à fréquence symbole par une solution de type corrélateur pour le signal : a - 1 ; b - 2 ; c - 3 ; d - 4 ; e - 4 avec sur-échantillonage

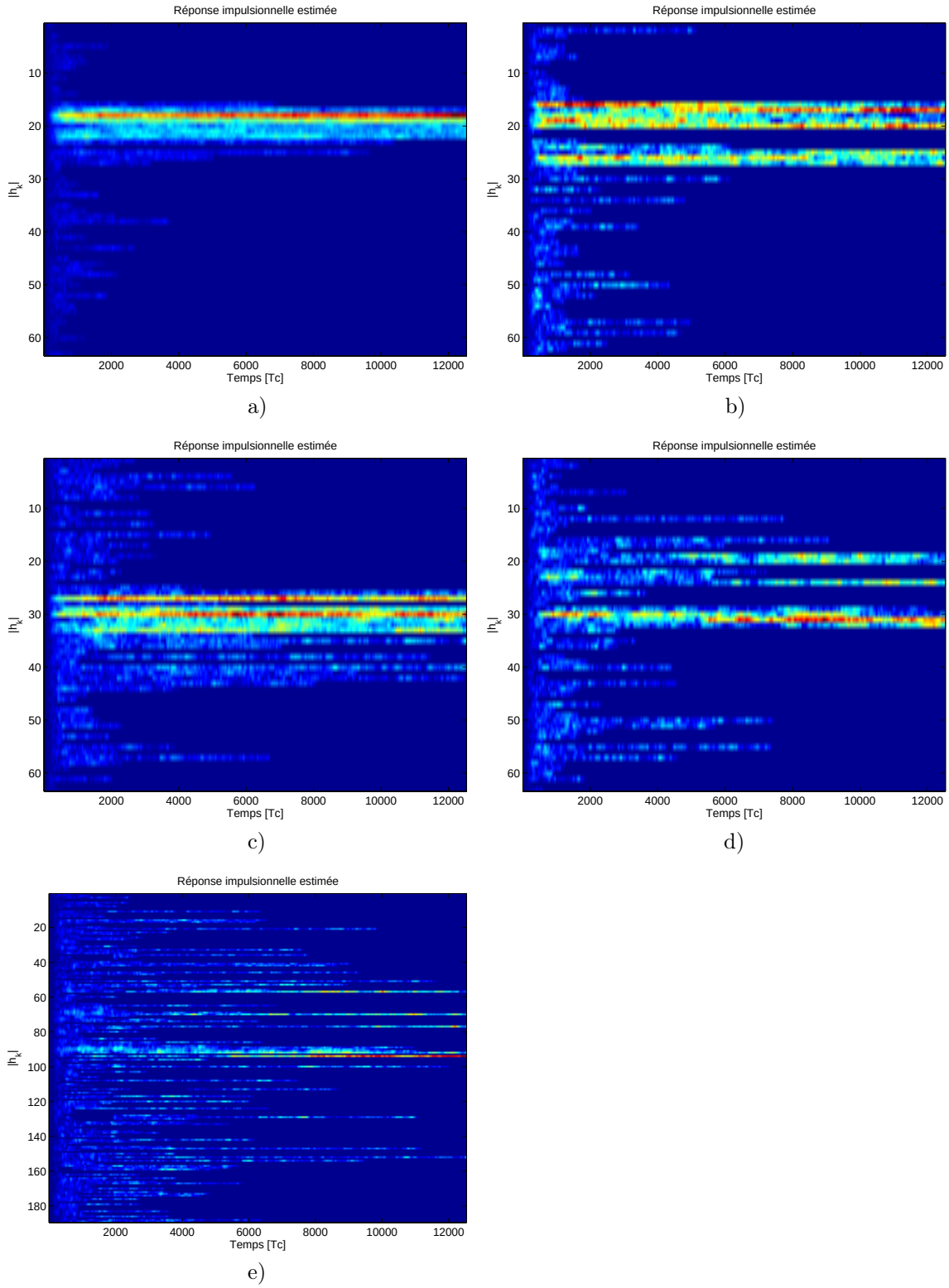


FIG. 5.8 – Réponse impulsionnelle du canal, estimée à fréquence chip par la solution de type filtrage de Kalman linéaire, pour le signal : a - 1 ; b - 2 ; c - 3 ; d - 4 ; e - 4 avec sur-échantillonage

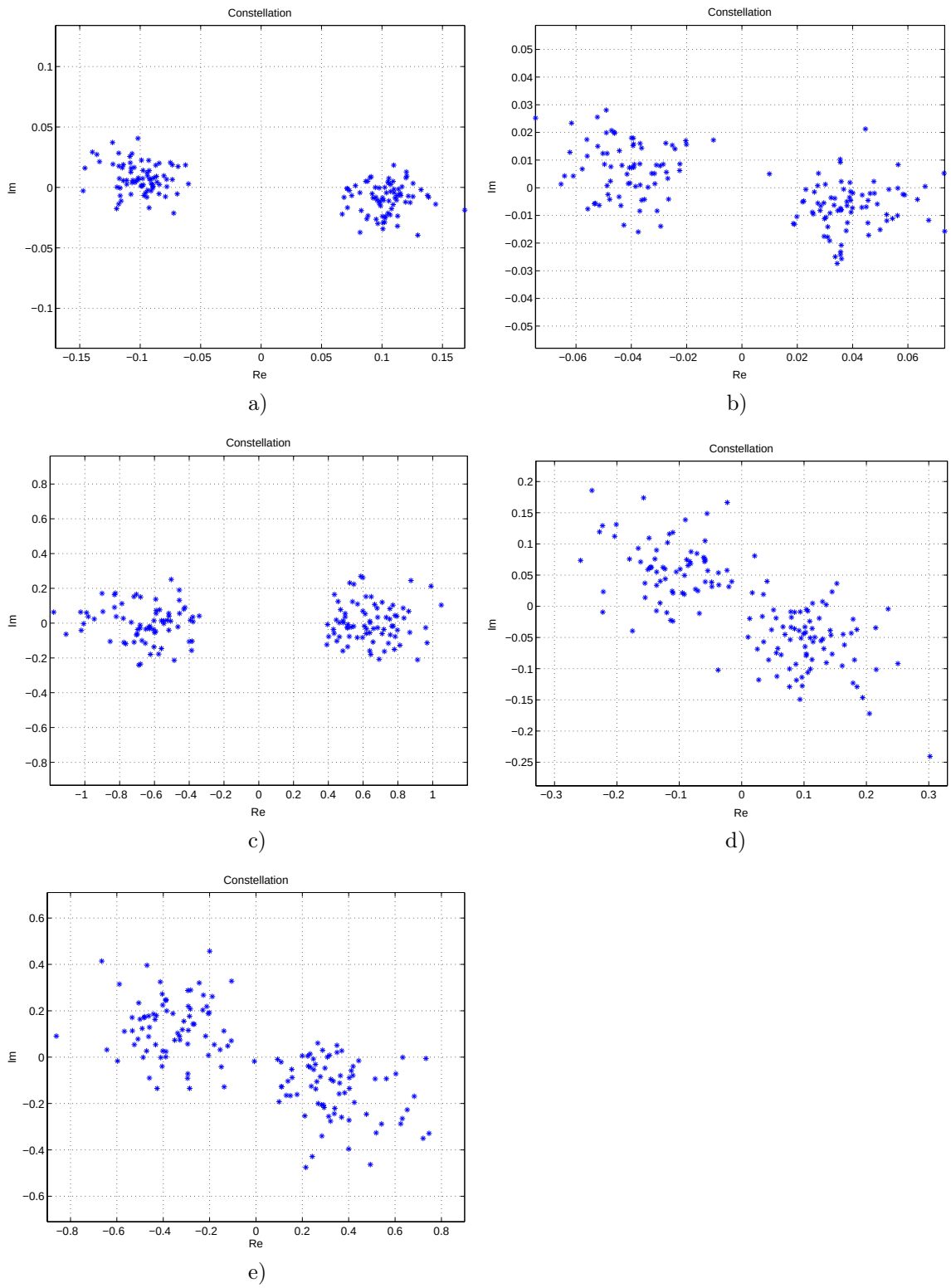


FIG. 5.9 – Constellation obtenue à la sortie de la structure RAKE avec les coefficients du canal estimés par filtrage de Kalman linéaire, à fréquence chip, pour le signal : a - 1 ; b - 2 ; c - 3 ; d - 4 ; e - 4 avec sur-échantillonage

Chapitre 6

Compression de l'information à l'aide de systèmes chaotiques

6.1 Introduction

Le codage désigne de manière générale toute transformation de l'information sous forme numérique dans l'objectif d'optimiser certaines caractéristiques d'un système de transmission. Le problème de compression en est un cas particulier ; Dans ce cas le but est de réduire au mieux l'espace nécessaire à la représentation d'une quantité d'information donnée. Dans son article [Sha48], Claude E. Shannon a formulé pour la première fois la théorie de l'information et du codage ; Ce travail reste la réference de toutes les méthodes de compression développées depuis.

De façon générale on peut classifier tous les algorithmes de compression en deux classes fondamentales : algorithmes de compression sans perte et avec pertes au niveau de l'information regénérée. Les deux cas ont comme but la suppression de la redondance dans une séquence informationnelle, le premier avec l'objectif de la reconstruction totale de la séquence initiale et le deuxième supposant acceptable une certaine distorsion.

Dans ce chapitre nous proposons d'appliquer certains systèmes dynamiques chaotiques au problème de la compression sans perte. Vu l'enjeu économique important de la compression, de nombreux algorithmes ont été développés. Après la publication de l'article de Shannon, le premier algorithme de compression a été proposé par Fano [Fan49], d'où l'appelation d'algorithme de Shannon-Fano qui propose d'arranger les symboles dans une liste décroissante en fonction de leur probabilité d'apparition. Cette liste est ensuite divisée en deux groupes telle que les probabilités totales obtenues au sein de chaque groupe soient presque égales, et à chacun d'eux sera associé le symbole **0** ou **1**. Ce principe est de nouveau appliqué, de manière itérative, à chacun des groupes précédents et il en résulte un code binaire de longueur variable associé à chaque symbole

informationnel.

En 1952, Huffman [Huf52] propose son algorithme de compression, qui considère la construction d'un arbre binaire, toujours en fonction de la distribution de probabilité. La méthode permet la construction plus facile du code de compression ; Son utilisation est fréquente en pratique. Il faut préciser que les deux algorithmes présentés ci-dessus ont des performances sous-optimales par rapport au critère entropique donné par Shannon.

Une dernière méthode évoquée sera celle proposée par Elias et plus tard publiée par Abramson [Abr63], méthode qualifiée d'arithmétique. Plusieurs développements successifs sont recensés dans [Ris76, Rub79, WNC87]. L'idée principale de l'algorithme est de représenter un code source sous la forme d'un intervalle réel inclus dans $[0, 1]$, en utilisant les probabilités d'apparition de chaque symbole pour en déterminer la dimension. Ainsi une probabilité d'apparition importante va avoir un effet de réduction moins prononcé qu'une probabilité d'apparition faible. On a choisi d'employer le même principe pour la méthode de compression basée sur la dynamique chaotique ; Nous montrerons que les performances atteignent la limite entropique.

La forte progression des applications de télécommunications aux cours des trente dernières années a entraîné le développement d'algorithmes de compression plus évolués, adaptatifs, avec une approche statistique où le modèle de probabilité associé change avec la séquence informationnelle. Citons en particulier l'algorithme de Huffman adaptatif [Gal78] ou les algorithmes Lempel-Ziv-Welch [ZL77, ZL78, Wel84]. Pour obtenir une description comparative des techniques de compression pré-citées le lecteur pourra se référer à [LH].

A l'inverse de l'activité sur les algorithmes de compression, l'emploi de séquences chaotiques dans le domaine des télécomnunications est plus récent, en particulier pour ce qui concerne l'application au codage et à la compression. L'utilisation du chaos à des fins de cryptage a fait l'objet d'investigations plus nombreuses [Bap98, JK01]. Récemment, Schweizer et al. [SS01a, SS01b] ont développé la notion de dynamique symbolique pour effectuer un codage de canal.

Dans ce chapitre, nous allons montrer que la dynamique chaotique symbolique peut tout aussi bien s'appliquer au problème de compression d'information ; Une formulation plus générale que la compression arithmétique, facilitant l'implémentation, et offrant des performances comparables, sera obtenue. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans une conférence internationale [LSAB04].

6.2 Notions sur la dynamique symbolique

La dynamique symbolique est utilisée pour l'analyse des séquences symboliques qui ont été générées par un système dynamique. L'adaptation des définitions de la dynamique symbolique aux systèmes chaotiques considère la répartition du nombre infini de trajectoires en un nombre fini de trajectoires possibles.

Cette définition donnée par Schweizer [SS01a] décrit presque totalement l'approche symbolique générale

appliquée aux séquences chaotiques. Nous ne considérons pas de formalisme mathématique général pour démontrer les propriétés statistiques d'une séquence chaotique quelconque, mais plutôt une application particulière de la dynamique symbolique au générateur de type Bernoulli suivant :

$$f(x) = \begin{cases} f^{\{1\}}(x) = 2x, x \in I_{\{1\}} = [0, 0.5] \\ f^{\{2\}}(x) = 2x - 1, x \in I_{\{2\}} = (0.5, 1] \end{cases} \tag{6.1}$$

Dans l'équation ci-dessus on a considéré les intervalles juxtaposés et disjoints deux à deux $I_{\{n\}}$, avec les propriétés $\cap_{n=1}^{N} I_{\{n\}} = \emptyset$ et $\cup_{n=1}^{N} I_{\{n\}} = I$, pour le cas où $N = 2$, $n = 1...N$ et $I = [0, 1]$. Pour définir une application symbolique dans ce cas précis on considère une séquence informationnelle $s = \{s_i, i = 1...M | s_i \in S\}$ où S représente l'alphabet des symboles disponibles $S_{\{n\}} \in S$, $n = 1...N$, dans le but d'associer à chaque symbole $S_{\{n\}}$ un intervalle $I_{\{n\}}$. De cette façon nous avons défini une fonction bijective entre l'ensemble $\cup_{n=1}^{N} I_{\{n\}} = I$ qui représente l'espace d'état de la fonction chaotique à l'alphabet $\cup_{n=1}^{N} S_{\{n\}} = S$. On a employé la terminologie d'alphabet pour faciliter l'explication de l'algorithme de compression présenté dans les sections suivantes.

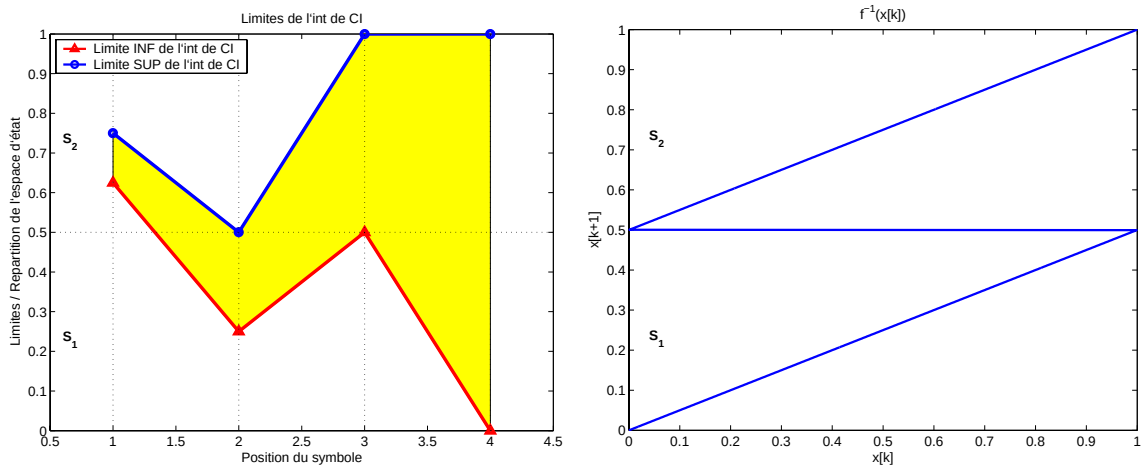
On observe que pour chaque intervalle $I_{\{n\}}$ le générateur Bernoulli, donné par l'équation (6.1), associe une fonction linéaire $f^{\{n\}} : I_{\{n\}} \to I$. Cette fonction linéaire sur l'intervalle particulier $I_{\{n\}}$ est bijective et en conséquence inversible, ainsi nous pouvons affirmer qu'il existe $f^{-1\{n\}} : I \to I_{\{n\}}$ pour chaque $n = 1...N$.

On va montrer sous la forme d'un exemple comment le processus de codage d'une séquence informationnelle fonctionne, et pour celle-ci on suppose que le dernier symbole est $s_M = S_{\{2\}}$. La conséquence que le symbole $s_M = S_{\{2\}}$ à l'instant M soit le dernier nous conduit à l'hypothèse qu'au rang $M+1$ tout l'intervalle de valeurs possibles de conditions initiales (IC) pour l'état est (I).

La fonction qui propage n'importe laquelle des valeurs de l'intervalle I à l'intervalle $I_{\{2\}}$ est donnée par $f^{-1\{2\}}$ et la propriété de bijectivité nous assure que pour n'importe quelle valeur dans I lui correspondra juste une valeur dans $I_{\{2\}}$ et vice versa. Alors finalement pour le M-ième symbole on obtient :

$$I^{\{M\}} = f^{-1\{2\}}(I) = I_{\{2\}} \tag{6.2}$$

où la notation $I^{\{i\}}$ a été choisie pour désigner l'intervalle des conditions initiales possibles et nécessaires pour que la séquence de symboles soit $\{s_i, s_{i+1}, ..., s_M\}$. On va continuer l'application du même principe, cette fois pour le symbole de rang $M-1$, choisi par exemple comme $s_{M-1} = S_{\{1\}}$. Cette fois, l'intervalle de valeurs disponible sera limité à $I^{\{M\}}$, et en conséquence l'intervalle des conditions initiales possibles est donné par $I^{\{M-1\}} = f^{-1\{1\}}\left(I^{\{M\}}\right)$. En général on peut exprimer la relation (6.2) pour n'importe quel symbole s_i avec la valeur S_n, par la récurrence :



a) b)

FIG. 6.1 – a) Intervalle de CI possibles déduit par la propagation inverse ; b) Forme de la fonction inverse $f^{-1}(\cdot)$

$$I^{\{i\}} = f^{-1\{n\}}(I^{\{i+1\}}) \tag{6.3}$$

L'application de la relation de propagation inverse ci-dessus au générateur Bernoulli (6.1) est illustrée à la figure 6.1 a) pour la séquence de symboles $S_{\{2\}}, S_{\{1\}}, S_{\{2\}}$. Dans la partie b) de la figure sont représentées les fonctions inverses $f^{-1}(\cdot)$ utilisées.

Nous venons d'exposer le mécanisme de propagation inverse qui nous permet de trouver l'intervalle de conditions initiales nécessaire à la reconstruction de la séquence informationnelle $S_{\{2\}}, S_{\{1\}}, S_{\{2\}}$. On souligne que cet intervalle est uniquement défini pour l'application Bernoulli d'ordre deux choisie. Cela signifie que dans tous les développements qui vont suivre, l'intervalle obtenu sera associé à ce générateur ; Ainsi la méconnaissance d'un de ces deux éléments rendra la reconstruction impossible.

6.3 Générateur probabiliste de Bernoulli

Nous introduisons ici un système dynamique chaotique particulier dénommé générateur probabiliste de Bernoulli. La caractéristique de ce système prendra la forme d'une fonction linéaire par portions, non-uniforme, décrivant un processus de Markov d'ordre 1. La non-uniformité vient de l'idée que les intervalles $I_{\{n\}}$ peuvent être de largeurs inégales.

Pour définir le générateur on va considérer le même alphabet S mais, cette fois, associé à la probabilité d'apparition P_n, $n = 1...N$ de chaque symbole. Alors on peut écrire pour l'ensemble des intervalles $I_{\{n\}}$ ainsi que pour les probabilités P_n, les relations suivantes :

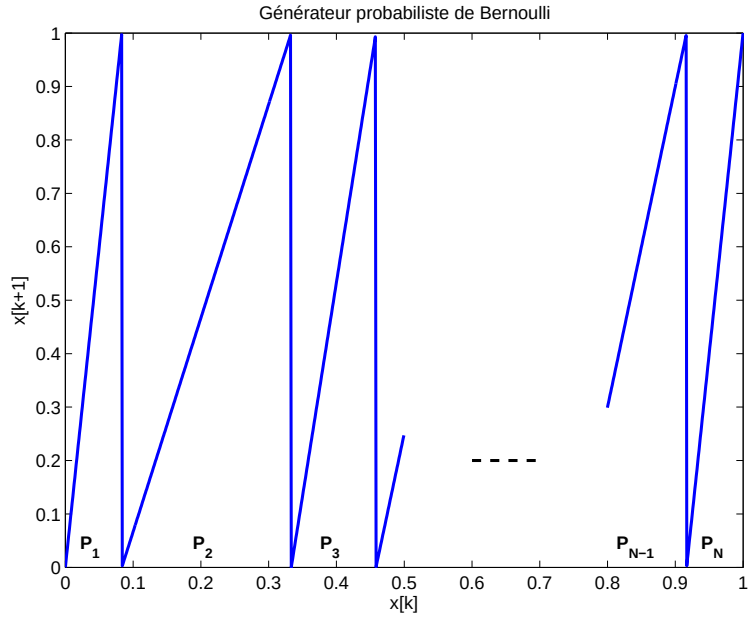


FIG. 6.2 – Fonction caractéristique d'un générateur probabiliste de Bernoulli

$$\begin{aligned} &\cup_{n=1}^{N} I_{\{n\}} = I = [0,1] \\ &\textstyle\sum_{n=1}^{N} P_n = 1 \\ &\cap_{n=1}^{N} I_{\{n\}} = \phi \\ &P_n : \text{ probabilité d'apparition du symbole } S_n \end{aligned} \tag{6.4}$$

Avec les expressions données par (6.4) on peut facilement obtenir une relation entre probabilités d'apparition et intervalles, définissant l'espace d'état où s'appliquera la dynamique symbolique :

$$\begin{aligned} &I_{\{1\}} = [0, P_1] \\ &I_{\{n\}} = \left]\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} P_i, \sum_{i=1}^{n} P_i\right] , n = 2...N \end{aligned} \tag{6.5}$$

Alors la fonction caractéristique pour le générateur probabiliste de Bernoulli prendra la forme :

$$f_p(x) = \begin{cases} f_p^{\{1\}}(x) = \frac{1}{P_1} x, x \in I_{\{1\}} \\ f_p^{\{2\}}(x) = \frac{1}{P_2} \left(x - P_1\right), x \in I_{\{2\}} \\ ..... \\ f_p^{\{N\}}(x) = \frac{1}{P_N} \left(x - \sum_{n=1}^{N-1} P_n\right), x \in I_{\{N\}} \end{cases} \tag{6.6}$$

La représentation d'une telle fonction caractéristique est donnée dans la figure 6.2.

Si on étudie les propriétés de la fonction caractéristique donnée dans (6.6) on observe qu'elle respecte les conditions nécessaires pour l'application de la dynamique symbolique inverse, en particulier que la partie définie par $f_p^{\{n\}} : I_{\{n\}} \rightarrow I$ est bijective sur son intervalle de définition, et comme conséquence inversible.

Alors on peut affirmer que la fonction $f_p^{-1\{n\}} : I \to I_{\{n\}}$ existe pour tous $n = 1...N$, avec pour expression :

$$\begin{cases} f_p^{-1\{1\}}(x) = P_1 x \\ f_p^{-1\{n\}}(x) = P_n x + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \end{cases} \tag{6.7}$$

L'expression donnée ci-dessus sera le coeur de l'algorithme de compression présenté dans la section suivante. Nous verrons que la dynamique symbolique inverse ainsi appliquée conduira à des performances de compression très intéressantes du point de vue du taux de compression et du coût de calcul.

6.4 Un algorithme de compression chaotique

6.4.1 Performances de l'algorithme proposé

Pour réaliser un certain niveau de compression on doit associer à l'algorithme de compression certaines des propriétés statistiques du signal informationnel original, le but étant de réduire la redondance.

Généralement l'information apportée par un symbole source s_i est définie par $-\log_2(p(s_i))$, et par conséquent l'on définit l'entropie d'un alphabet source comme la moyenne du contenu en information :

$$H = -\sum_{n=1}^{N} P_n \log_2(P_n) \tag{6.8}$$

L'optimalité du code de compression est considérée au sens de la redondance minimale, qui est définie par la différence entre la longueur moyenne de *mot de code* (*codeword*) et l'entropie de l'alphabet associé. Ainsi un code est considéré asymptotiquement optimal si pour une distribution donnée de probabilité, le rapport entre la longueur moyenne du *codeword* et l'entropie approche 1 lorsque l'entropie tends vers l'infini.

Dans la section 6.2 nous avons vu qu'en utilisant un générateur particulier linéaire par morceaux, on peut "coder" une séquence de symboles sous la forme d'un intervalle de conditions initiales, et que ce codage, est réalisé de manière unique grâce aux propriétés de bijectivité de la fonction caractéristique du générateur. En exploitant le générateur probabiliste de Bernoulli exposé dans le paragraphe 6.3, nous allons voir que les performances du codage atteignent la limite entropique.

La compression est réalisée en trouvant le meilleur état initial, codé sous un format binaire, qui associé au générateur probabiliste de Bernoulli (6.6) (élaboré lui-même à partir de la distribution de probabilité des symboles), pourra regénérer la séquence informationnelle initiale en utilisant la dynamique symbolique. Les performances de la méthode seront données par la longueur minimale de la séquence binaire qui permettra le codage de l'état initial dans un intervalle particulier. En général on sait que pour un intervalle quelconque $I' \subset [0, 1[$ de dimension d, on peut trouver une valeur $x \in I'$ représentée par un nombre de bits $-\log_2 d$. En utilisant ce principe, on calcule la performance de compression de l'algorithme avec l'expression de la

dimension de l'intervalle de conditions initiales obtenu par propagation inverse. Ainsi on va considérer de la même manière que dans la section 6.2, la séquence informationnelle $s = \{s_i, i = 1...M | s_i \in S\}$ où S est l'alphabet choisi, $S_{\{n\}} \in S$, $n = 1...N$, avec la probabilité d'apparition de chaque symbole donnée par :

$$P_n = \frac{1}{M} card\left\{s_i | s_i = S_{\{n\}}\right\} \tag{6.9}$$

Cette fois avec la définition de la distribution de probabilité discrète on peut construire l'ensemble d'intervalles contigus $I_{\{n\}}$ exprimés en (6.5) et bien sûr le générateur probabiliste de Bernoulli (6.6), caractérisé par la propriété de bijectivité sur chaque intervalle $I_{\{n\}}$. L'emploi de la méthode de propagation inverse nous permet de trouver l'expression récurrente pour l'intervalle $I^{\{i\}}$ de valeurs possibles et nécessaires de CI, pour coder le symbole $s_i = S_{\{n\}}$, nous aurons :

$$I^{\{i\}} = f_p^{-1\{n\}}\left(I^{\{i+1\}}\right) \tag{6.10}$$

Avec cette relation et sachant que la fonction $f_p^{-1\{.\}}$ est linéaire sur l'intervalle $I^{\{i+1\}} \subset I_{\{n\}}$, on peut calculer une expression de récurrence pour la dimension de l'intervalle $I^{\{i\}}$; Toujours dans le cas où $s_i = S_{\{n\}}$, est pour une probabilité d'apparition $0 \leq P_n < 1$:

$$size\left(I^{\{i\}}\right) = P_n size\left(I^{\{i+1\}}\right) \tag{6.11}$$

Grâce à cette relation récursive et à la définition de la distribution de probabilité discrète (6.9), nous obtenons une relation permettant le calcul direct de la largeur d'intervalle de condition initiales pour compresser toute la séquence informationnelle :

$$size\left(I^{\{1\}}\right) = \prod_{i=1}^{M} P\left(s_i \in S\right) = \prod_{n=1}^{N} \left(P_n\right)^{P_n M} \tag{6.12}$$

Finalement on obtient le nombre nécessaire de bits pour le codage d'une condition initiale dans l'intervalle $I^{\{1\}}$ en prenant le logarithme de cette expression :

$$-\log_2\left(size\left(I^{\{1\}}\right)\right) = -\sum_{n=1}^{N} P_n M \log_2\left(P_n\right) = M \cdot H \tag{6.13}$$

Ainsi nous constatons l'optimalité de l'algorithme de compression proposé, puisque l'entropie de la séquence informationnelle est atteinte. Bien sûr on peut remarquer la similarité avec l'algorithme arithmétique évoqué en début de ce chapitre, mais ce dernier se différencie par une technique de projection directe, difficile à implémenter en pratique et nécessitant un coût de calcul important. Quelques travaux récents proposent des versions allégées de cet algorithme au niveau de la charge de calcul tout en gardant les mêmes performances

[BG03].

La procédure de décompression pour l'algorithme proposé est très simple à mettre en oeuvre ; En utilisant la condition initiale déterminée ainsi que le générateur probabiliste de Bernoulli défini par $\{P_n\}$ on génère une séquence chaotique contenue dans les limites de chacun des intervalles obtenus lors de la compression. La prise de décision sur les symboles lors de l'étape de reconstruction se fera en observant simplement dans quel intervalle $\{I_{\{n\}}\}$ se place l'état à chaque itération de la dynamique (6.6).

La nécessité de connaître le générateur probabiliste utilisé à la compression nous assure aussi le cryptage de la séquence informationnelle. Tout autre générateur employé pour la décompression va produire une séquence de symboles totalement décorrélée avec l'originale. Cette décorrélation est garantie par le comportement chaotique : toute perturbation de la condition initiale se traduit par une trajectoire divergente par rapport à la vraie séquence.

Le problème de cette implémentation, d'ailleurs retrouvé dans le cas de l'algorithme arithmétique, est que l'on ne sait pas quand s'arrêter ; Ainsi nous devons ajouter à l'espace de symboles un caractère spécifique de *fin de séquence*. Ceci affectera l'optimalité du processus de compression en pratique mais pour le cas de séquences informationnelles infiniment longues l'optimalité au sens de l'entropie est toujours garantie.

6.4.2 Implémentation en pratique

Pour l'implémentation en pratique de l'algorithme proposé il faut transférer toutes les opérations sous forme binaire. On propose deux solutions pour y arriver. La première et la moins coûteuse est d'utiliser un format binaire pour toutes les opérations de multiplication et d'addition à réaliser. Même si cette méthode est la plus performante, elle suppose par contre le développement d'une bibliothèque de fonctions de calcul arithmétique particulière. Alors nous avons préféré la seconde approche, reposant sur des opérations en virgule flotante et codage de la condition initiale en binaire.

Quelle que soit la méthode choisie on propose l'expression d'une valeur quelconque $x \in [0, 1[$, sous forme de somme infinie de puissances négatives de deux :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k} \tag{6.14}$$

où $b_k = \{0, 1\}$, $k = 1...\infty$.

Si on considère que l'intervalle $I^{\{1\}}$, obtenu par la propagation inverse de toute la séquence informationnelle est défini sous la forme $I^{\{1\}} = [l_{inf}, l_{sup}]$, avec $l_{inf}, l_{sup} \in [0, 1[$, on peut démontrer la proposition suivante sur le calcul d'une condition initiale dans l'intervalle déterminé.

Proposition 1. Etant donné un intervalle $[l_{inf}, l_{sup}] \subset [0,1[$, on va démontrer qu'avec l'expression de ses limites en fonction d'une somme infinie de puissances négatives de deux $l_{inf} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\{i\}} 2^{-k}$, $l_{sup} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\{s\}} 2^{-k}$, il existe $M < \infty$ toujours tel que $b_k^{\{i\}} = b_k^{\{s\}} \; \forall \, k \leq M$, avec $b_{M+1}^{\{i\}} \neq b_{M+1}^{\{s\}}$. Aussi, la valeur $x_{CI} = \sum_{k=1}^{M+1} b_k^{\{s\}} 2^{-k}$ appartient à l'intervalle $[l_{inf}, l_{sup}]$.

Démonstration : Deux cas de figure vont être considérés pour montrer l'existence de M :

– cas où $0.5 \in]l_{inf}, l_{sup}[$

Dans ce cas l'expression des limites de l'intervalle sous la forme (6.14), implique $b_1^{\{i\}} = 0$ et $b_1^{\{s\}} = 1$. Nous considérons alors que $M = 0$ et aussi $x_{CI} = 2^{-1} \in [l_{inf}, l_{sup}]$ qui convient pour répondre au problème.

– cas où $0.5 \notin]l_{inf}, l_{sup}[$

Dans ce cas nous allons utiliser la propriété suivante :

$$\sum_{k=M}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-M} \lim_{k \to \infty} \frac{1 - 2^{-k-1}}{1 - 2^{-1}} = 2^{-M+1} \tag{6.15}$$

Pour la preuve de l'existence de M, on va écrire les inégalités suivantes pour une valeur quelconque $l \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} l &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k} \\ &= b_1 2^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k 2^{-k} \\ &\geq b_1 2^{-1} \end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned} l &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k} \\ &= b_1 2^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k 2^{-k} \\ &< b_1 2^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} \\ &< b_1 2^{-1} + 2^{-1} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Avec les expressions (6.16) et (6.17) nous allons maintenant montrer l'égalité des symboles binaires $b_k^{\{i\}}$ et $b_k^{\{s\}}$ pour $k \leq M$.

La supposition $b_1^{\{i\}} = 1$ et $b_1^{\{s\}} = 0$ nous conduirait à $l_{min} \geq 0.5$, $l_{max} < 0.5$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ $l_{min} < l_{max}$. De la même façon, si nous supposons que $b_1^{\{i\}} = 0$ et $b_1^{\{s\}} = 1$ on

a $l_{min} < 0.5$ et $l_{max} \geq 0.5$ qui par contre ne respecte pas l'hypothèse initiale que $0.5 \notin]l_{inf}, l_{sup}[$. Nous pouvons en conclure qu'il existe bien $M \geq 1$ tel que $b_k^{\{i\}} = b_k^{\{s\}}$, $\forall\, k \leq M$.

L'existence de M étant prouvée, en supposant de façon similaire les différentes combinaisons possibles des valeurs de $b_{M+1}^{\{i\}}$ et $b_{M+1}^{\{s\}}$, nous obtenons comme seule solution admissible $b_{M+1}^{\{i\}} = 0$ et $b_{M+1}^{\{s\}} = 1$.

On va choisir alors la variable $x_{CI} = \sum_{k=1}^{M+1} b_k^{\{s\}} 2^{-k}$ qui respecte les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} l_{inf} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\{i\}} 2^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{M} b_k^{\{i\}} 2^{-k} + \sum_{k=M+2}^{\infty} b_k^{\{i\}} 2^{-k} \\ &< \sum_{k=1}^{M} b_k^{\{i\}} 2^{-k} + 2^{-M-1} \\ &< \sum_{k=1}^{M+1} b_k^{\{s\}} 2^{-k} \\ &< x_{CI} \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned} l_{sup} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\{s\}} 2^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{M+1} b_k^{\{s\}} 2^{-k} + \sum_{k=M+2}^{\infty} b_k^{\{s\}} 2^{-k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{M+1} b_k^{\{s\}} 2^{-k} \\ &\geq x_{CI} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Ainsi $x_{CI} = \sum_{k=1}^{M+1} b_k^{\{s\}} 2^{-k}$ appartient bien à l'intervalle $[l_{inf}, l_{sup}]$.

La notation x_{CI} a été choisie pour désigner la condition initiale finalement sélectionnée comme la représentation binaire de la séquence informationnelle compressée.

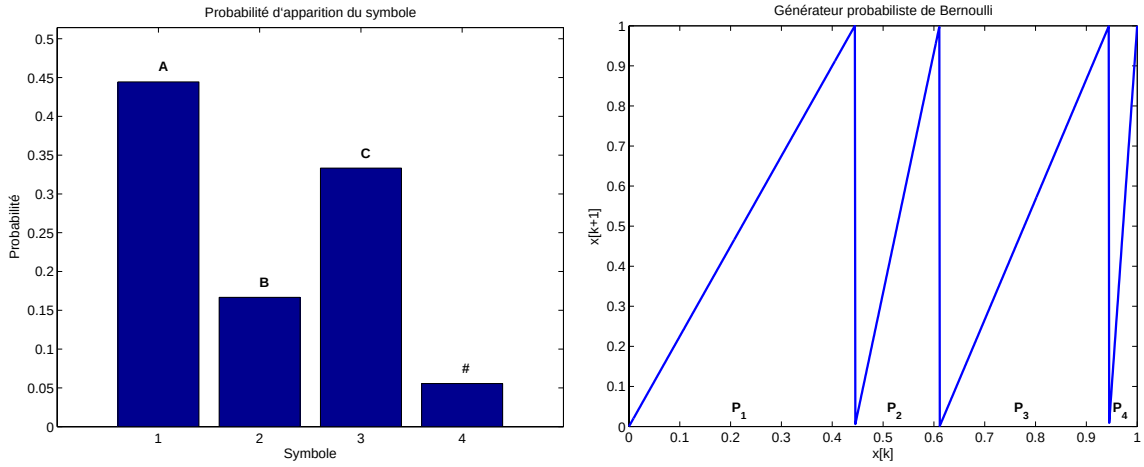
6.4.3 Exemple d'application de l'algorithme proposé

Pour illustrer le fonctionnement de l'algorithme on a choisi de compresser deux séquences avec la même longueur et la même distribution de probabilité des symboles (table 6.1). Ce choix va nous permettre d'observer l'influence de l'ordre des symboles sur la trajectoire chaotique générée et sur la condition initiale déterminée (figure 6.4 a,b).

Séquence no. #1 : `''AABACABCCACBAACAC#''`, longueur : $M = 18$

Caractère	Probabilité	Intervalle $I_{\{n\}}$
A	0.4444	$[0, 0.44]$
B	0.1667	$(0.44, 0.61]$
C	0.3333	$(0.61, 0.94]$
#	0.0556	$(0.94, 1]$

TAB. 6.1 – Probabilité d'apparition des symboles



a) b)

FIG. 6.3 – a) Histogramme de la distribution de probabilité discrète ; b) Générateur probabiliste de Bernoulli

`Entropie :` $H = 1.7108$`, codage normal pour les IC (conditions initiales) :`$H \cdot M = 30.7944$

`CI codée : [0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1], longueur de 31 bits`

`Valeur réelle de la CI :` $x_0 = 0.09800471039489$

Séquence no. $\#2$: `''ABAACABCACCBACAAC#''`, longueur : $M = 18$

`CI codée : [0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1], longueur de 31 bits`

`Valeur réelle de la CI :` $x_0 = 0.20770334312692$

Une explication qualitative des figures 6.4 a) et b), est que la propriété de bijectivité des fonctions $f_p^{\{n\}}(x)$ nous assure que la trajectoire régénérée à partir de l'état initial x_0 sera toujours contenue dans les intervalles $I^{\{i\}}$, obtenus par propagation inverse. On observe que pour les deux séquences la génération de la trajectoire s'arrête en détectant le symbole de *fin de séquence*. Une autre manière de réaliser la décompression, différente de l'emploi d'un symbole de *fin de séquence*, peut être considérée, avec une longueur fixe de la séquence informationnelle à compresser.

Une observation s'impose au niveau des possibilités de reconstruction de la séquence des symboles dans le cas où une erreur sera commise au niveau de la condition initiale (représentée sous format binaire). En fonction de la position de cette erreur dans la séquence binaire (proche de *MSB* or *LSB*) il se peut que les

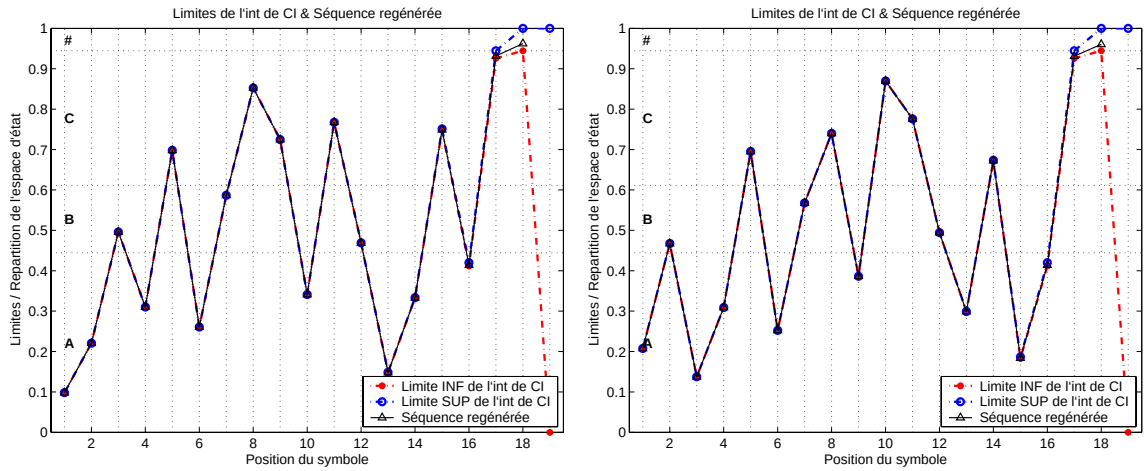


FIG. 6.4 – Limites des trajectoires qui déterminent l'intervalle récurrent des CI et la trajectoire régénérée pour la séquence informationnelle : a) #1 ; b) #2

premiers symboles informationnels soit correctement regénérés, mais dans le cas où un symbole de *fin de séquence* est utilisé, nous allons commettre aussi une erreur sur la longueur de la séquence regénérée. L'usage d'une séquence de longueur fixe se place de ce point de vue, comme un avantage.

Le choix d'une stratégie pour l'étape de décompression dépend fortement de la nature de l'information manipulée.

6.5 Conclusion

Un algorithme de compression sans pertes, optimal par rapport à un critère d'entropie a été présenté dans ce chapitre. L'idée principale est d'utiliser les systèmes chaotiques comme une nouvelle méthode de compression et même de cryptage ; Un coût de calcul limité est ainsi obtenu. Un type particulier de générateur chaotique, appelé générateur probabiliste de Bernoulli, a été considéré pour transformer une séquence informationnelle quelconque en une trajectoire comprise dans l'intervalle $[0, 1]$.

Seul l'algorithme statique de compression est considéré dans ce chapitre, une forme adaptative peuvant être envisagée pour améliorer les performances. L'emploi d'une fonction linéaire par parties permet une reconstruction rapide de la séquence initiale, rendant la méthode très intéressante pour des implémentations en temps réel.

Conclusions

Dans ce document ont été présentés plusieurs aspects sur les communications numériques à l'aide de systèmes dynamiques chaotiques. Les contributions apportées peuvent être classées en trois catégories principales :

- étude sur la synchronisation chaotique en utilisant des méthodes d'estimation d'état avec un accent important sur la mise en place d'une nouvelle méthode de filtrage de Kalman non-linéaire ;
- mise en place de plusieurs structures de récepteurs adaptés aux systèmes de communication à porteuse chaotique, en simulation et sur des canaux réels ;
- réalisation d'une méthode de compression basée sur la dynamique symbolique chaotique.

On présente par la suite pour chaque point évoqué ci-dessus les aspects importants qui caractérisent l'originalité de chaque méthode ainsi que les perspectives de nouveaux résultats.

Dans un système de communication à porteuse chaotique, la synchronisation est l'élément le plus important qui doit être pris en compte pour assurer les meilleures performances de transmission. Ainsi dans ce but, on a développé une nouvelle méthode d'estimation d'état, représentée par le filtre de Kalman Polynomial Exact (ExPKF).

On a prouvé ainsi dans le chapitre 3, que pour un modèle polynomial monodimensionnel on peut calculer facilement la statistique exacte d'ordre deux d'une v. a. aléatoire qui subit cette transformation. Les relations obtenues pour les moments d'ordre un et deux suivent des expressions de calcul matricielles rendant ainsi une application en pratique très facile à implémenter. A partir de ces relations, le développement d'un algorithme de filtrage récursif de type Kalman est immédiat. Cet algorithme a été développé pour un modèle polynomial général rendant ainsi possible son application à tout problème d'estimation récursive où le processus adopte une forme polynomiale. En ce qui concerne son application directe à la synchronisation chaotique, l'expression de moments de l'état transformé peut être encore simplifié en explicitant les relations matricielles analytiquement, pour obtenir un coût de calcul très réduit.

Les performances de cette méthode ont été évaluées, dans le paragraphe 3.5, dans plusieurs cas de figure, en la comparant à d'autres solutions de filtrage de Kalman : analyse graphique de la transformation Exacte, étude sur la stabilité pour un modèle particulier, EQM de synchronisation et une évaluation de la consistence

du mécanisme de filtrage. Sur tous les plans la méthode Exacte a montré des performances supérieures et a confirmé ainsi que cette solution originale a un potentiel important pour la synchronisation chaotique.

Les premières perspectives pour le filtrage ExPKF portent sur la possibilité d'appliquer cet algorithme à d'autres applications propres aux méthodes d'estimation d'état comme le positionnement, les méthodes de classification, et en général à tout modèle polynomial. Du point de vue de l'applicabilité aux problèmes multi-dimensionnels, le filtrage Exact peut être adapté à ce cas de figure en réalisant une transformation de diagonalisation de la matrice de covariance, étude d'ailleurs menée actuellement.

En ce qui concerne les récepteurs à porteuse chaotique on a étudié plusieurs variantes à synchronisation chaotique ainsi que d'autres solutions plus classiques à synchronisation par boucle de retard de code. Pour les récepteurs à synchronisation chaotique on a mis l'accent sur les systèmes qui emploient des méthodes d'estimation d'état, étant donné les bonnes performances présentées. Dans le paragraphe 4.3, on a considéré plusieurs solutions de traitement en bande de base du signal reçu par estimation parallèle du code d'étalement chaotique, du symbole transmis ainsi qu'éventuellement de l'erreur de phase ou du gain introduit par le canal. Pour le contrôle de gain on a considéré deux solutions : une approche de dynamique modifiée et une boucle de contrôle qui utilise les propriétés statistiques de la séquence chaotique utilisée ; Ces solutions sont ensuite testées par rapport à un critère de TEB sur différents canaux de communications.

Pour mettre en évidence l'efficacité de la nouvelle méthode d'estimation d'état Exacte sur les performances du récepteur à estimation parallèle, on a testé cette solution par rapport aux autres versions de filtrage Kalman. En plus on a ajouté un schéma de démodulation basé sur une structure de type corrélateur. Les résultats obtenus sur des canaux stationnaires ont montré l'efficacité de la version Exacte de filtrage pour différents gains d'étalement et pour diverses fonctions non-linéaires.

Pour des applications sur des canaux réels difficiles comme c'est le cas des transmissions acoustiques sous-marines, on a utilisé aussi des versions de récepteurs où la synchronisation est réalisée par des méthodes classiques. Dans ces situations on considère l'emploi d'un modèle de filtrage parallèle qui prend en compte un seul trajet énergétique, ainsi qu'un modèle généralisé qui utilise l'énergie transmise sur plusieurs trajets. Dans le paragraphe 4.6, ces deux solutions sont comparées ensuite avec un récepteur de type RAKE-MRC sur plusieurs signaux réels à différents SNR ; Les résultats montrent la supériorité de la solution d'estimation parallèle à plusieurs trajets en condition d'écart énergétique minime entre les différents échos.

A partir des résultats obtenus avec cette version on a réalisé par la suite un nouveau schéma qui estime cette fois, la majorité des trajets énergétiques présents à l'entrée du récepteur. Ce schéma est obtenu en développant l'équation d'observation des coefficients du canal pondérés par la matrice d'auto-corrélation. L'avantage de ce modèle est qu'il prend en compte les termes d'inter-corrélation entre la séquence d'étalement et sa version retardée, augmentant ainsi les performances du système pour des codes d'étalement avec une fonction d'auto-corrélation sous-optimale ; Ce modèle linéaire permet l'emploi d'un filtre de Kalman linéaire

comme estimateur optimal par rapport à un critère d'erreur quadratique minimal. En fonction du code utilisé, on a considéré deux cas : séquences d'étalement courtes et séquences d'étalement longues.

Pour les séquences d'étalement courtes le modèle linéaire obtenu ne change pas avec le signal reçu, ainsi diminuant le coût de calcul. Par la suite, pour réduire le coût de calcul, dû en partie aux relations d'inversion matricielles, on a utilisé une méthode de suppression de termes d'interférences rendant ainsi l'algorithme sous forme scalaire. Cette version de l'algorithme a subit ultérieurement plusieurs modifications pour augmenter la vitesse de convergence ou pour obtenir sa forme asymptotique.

Les séquences d'étalement longues ou la présence des symboles informationnels vont déterminer le changement de la matrice d'auto-corrélation et de même le changement du modèle. Cette nécessité de recalculer la matrice d'auto-corrélation à chaque étape ainsi que la perte de quelques propriétés comme la forme Toeplitz, vont conduire à un coût de calcul beaucoup plus important. Pour résoudre ce problème on effectue quelques approximations ainsi que la suppression des termes d'interférence, qui vont conduire finalement à un algorithme mono-dimensionnel. L'estimation du canal en présence des symboles informationnels a été réalisée avec un algorithme à retour de décision conjointement avec l'estimation du symbole par une structure de type RAKE. Dans le paragraphe 5.3.4, cet algorithme a été testé de même sur des signaux acoustiques sous-marins : les performances ainsi obtenues, en terme de TEB, se sont bien avérées supérieures à celles de la structure classique RAKE-MRC.

La dernière partie du document est dédiée à la présentation d'une méthode de compression originale qui utilise la dynamique symbolique chaotique pour réaliser le codage d'une séquence informationnelle sous la forme d'un intervalle de conditions initiales. On démontre que l'emploi d'un générateur particulier, dénommé générateur probalistique de Bernoulli, construit en fonction de la probabilité d'apparition de chaque symbole, va générer la séquence informationnelle initiale à partir d'une condition initiale située dans un intervalle donné (la détermination de celui-ci est issue de l'étape de compression). Théoriquement on démontre dans le paragraphe 6.4.1, que la performance de compression atteint la limite entropique, ainsi on obtient le résultat très important que la méthode développée est optimale.

Rappelons que cet algorithme suit les mêmes étapes que la compression arithmétique, mais avec une formulation plus générale grâce aux systèmes dynamiques chaotique, ce qui en fait l'originalité. En perspective, en utilisant cette approche, on pourra développer un algorithme de compression qui sera associé à la probabilité conditionnée d'apparition des symboles à un ordre supérieur.

Une des perspectives les plus importantes concerne l'application des méthodes développées dans ce travail de thèse dans un cadre de système de communication à accès multiple. Si l'emploi d'une méthode de synchronisation chaotique devient difficile dans un cas multi-utilisateur, une approche plus facile peut être développée en considérant les solutions de suppression des termes d'interférences adaptées en plus à ce cas de figure, avec la prise en compte de l'interférence inter-utilisateurs.

Les résultats en terme de TEB obtenus en simulation ou sur des canaux de transmission réels, ainsi que l'aspect stochastique des signaux modulés à porteuse chaotique, qualifient les méthodes développées comme des systèmes LPI, mais une étude théorique sur les méthodes d'interception reste à faire pour valider vraiment les systèmes chaotiques pour des applications qui demandent un niveau de sécurité important.

Annexe A

Exposants de Lyapunov

Dans le premier chapitre on a défini les exposants de Lyapunov en fonction de la déformation subie par une sphère de conditions initiales possibles sur une i-ème direction :

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(0)},\ i = 1...n \tag{A.1}$$

Ainsi on peut dire que les exposants positifs mesurent la divergence dans la direction correspondante (direction dilatante) et les exposants négatifs donnent le taux de convergence vers l'attracteur dans les directions contractantes.

Cette définition est donnée comme une formulation générale du lien entre la stabilité des trajectoires dans l'espace de phase et les exposants de Lyapunov. Une autre approche plus analytique en utilisant la matrice de Oseledec a été présentée par Abarbanel *et al.* [ABK91]. Généralement on part avec l'hypothèse d'un système avec une dimension d de l'espace de phase et un ensemble de vecteurs de données de la même dimension d : $\mathbf{y}(t = t_0 + n\Delta t) = \mathbf{y}(n)$, échantillonnés aux instants $t = t_0 + n\Delta t$. En plus, on considère que la dynamique du système en temps discret est donnée par :

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(n)) \tag{A.2}$$

Ainsi une petite perturbation $\mathbf{z}(n)$ va évoluer en accord avec la dynamique linéarisée du système :

$$\mathbf{z}(n+1) = \mathbf{DF}(\mathbf{y}(n)) \cdot \mathbf{z}(n) \tag{A.3}$$

où $\mathbf{DF}(\mathbf{x})$ est le Jacobien de dimension $d \times d$:

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x})_{n,k} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})_n}{\partial x_k},\ n, k = 1, 2, ..., d$$

La perturbation initiale $\mathbf{z}(n)$ va évoluer après L étapes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(n+L) &= \mathbf{DF}(\mathbf{y}(n+L-1)) \cdot \mathbf{z}(n+L-1) \\ &= \mathbf{DF}(\mathbf{y}(n+L-1)) \cdot \mathbf{DF}(\mathbf{y}(n+L-2)) \cdot ... \cdot \mathbf{DF}(\mathbf{y}(n)) \cdot \mathbf{z}(n) \\ &= \mathbf{DF}^L(\mathbf{y}(n)) \cdot \mathbf{z}(n) \end{aligned} \tag{A.4}$$

où la matrice $\mathbf{DF}^L(\mathbf{y}(n))$ est définie par :

$$\mathbf{DF}^L(\mathbf{y}(n)) = \prod_{i=0}^{L-1} \mathbf{DF}(\mathbf{y}(n+i))$$

Par la suite en définissant les matrices :

$$\mathbf{OSL}(L, \mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{DF}^L(\mathbf{x}) \cdot \left[\mathbf{DF}^L(\mathbf{x}) \right]^T \right\}^{1/2L} \tag{A.5}$$

$$\mathbf{OSL}(\mathbf{x}) = \lim_{L \to \infty} \mathbf{OSL}(L, \mathbf{x}) \tag{A.6}$$

Osedelec a démontré que la limite donnée par la matrice $\mathbf{OSL}(\mathbf{x})$ de dimension $d \times d$ existe. En plus, les valeurs propres de la matrice, désignées par $\exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2, ..., d$ sont indépendantes de $\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x}$ situé dans le même bassin d'attraction. Ainsi il est facile à reconnaître que les valeurs λ_i définies de telle façon représentent une généralisation des exposants de stabilité Lyapunov pour un point fixe $\mathbf{x}$.

Quelques propriétés importantes associées aux systèmes dynamiques peuvent être ainsi caractérisées :

- premièrement, comme on a déjà présenté dans le chapitre destiné aux systèmes chaotiques, l'existence de l'attracteur est lié directement à l'idée que le système doit être dissipatif, condition équivalente avec la négativité de la somme des exposants Lyapunov : $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i < 0$
- l'exposant le plus grand gouverne l'évolution à long terme du système dynamique et donne ainsi des limites quantitatives sur la predictibilité de son évolution
- la définition d'un système chaotique est liée directement à l'existence d'un exposant Lyapunov positif
- l'entropie qui mesure le taux global de divergence des trajectoires est égal à la somme des exposants positifs de Lyapunov :

$$K = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \ \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n > 0 \geq \lambda_{n+1} ... \geq \lambda_d \tag{A.7}$$

- calcul de la dimension de Kaplan-Yorke [GP83c] :

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \tag{A.8}$$

où j est tel que $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$.

Annexe B

Formulation du Filtre de Kalman Etendu (EKF)

Cette annexe est réalisée sous la forme d'un complément à l'introduction du filtre de Kalman Etendu déjà présentée succinctement dans le chapitre 2. Dans ce chapitre ont été introduites les relations de base qui forment l'algorithme récursif de filtrage, mais aucun détail n'a été donné sur les équations de mise à jour temporellle et de mise à jour à l'issue d'observations.

On part de l'idée que le calcul récursif de la statistique suffisante représentée par la moyenne et la variance conditionnelle dans le cas linéaire Gaussien est la plus simple méthode d'estimation d'état [BSL93]. Alors il est sohaitable d'obtenir une structure similaire dans le cas non-linéaire ; un tel estimateur est dénommé filtre de Kalman étendu, pour sa similarité avec le filtre de Kalman classique.

Le modèle employé pour la déduction considère le cas général donné par le système d'équations (2.1) dont les bruits additifs $\{\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_k\}$ sont considérés centrés, gaussiens et avec une inter-corrélation nulle (eq. 2.2).

Comme dans le cas linéaire on doit alors estimer à l'instant k :

– une approximation de la moyenne conditionnelle : $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \approx E\left[\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}^k\right]$

– la matrice de covariance associée : $\mathbf{P}_{k|k}$

B.1 Etape de mise à jour temporelle

Pour obtenir l'état prédit $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ la fonction non-linéaire associée à l'équation de processus sera développée en série de Taylor autour du dernier état estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ avec les termes jusqu'au premier ou deuxième ordre selon l'ordre condiséré du filtre, respectivement :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}\right) + f_x\left(k\right)\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\right) + \\ &\quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x}\mathbf{e}_i\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\right)^T f_{xx}^i\left(k\right)\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\right) + HOT + \mathbf{v}_k \end{aligned} \tag{B.1}$$

où $\mathbf{e}_i$ est le i-ème vecteur de base Cartésien, de dimension n_x (la i-ème composante unité et le reste zéro),

$$f_x\left(k\right) \triangleq \nabla_x \mathbf{f}|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \tag{B.2}$$

est le Jacobien de la fonction $\mathbf{f}\left(\cdot\right)$ évaluée en $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$,

$$f_{xx}^i\left(k\right) \triangleq \nabla_x \nabla_x^T \mathbf{f}^i\big|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \tag{B.3}$$

est le Hessien de la i-ème composante de $\mathbf{f}\left(\cdot\right)$ et HOT représente les termes d'ordre supérieur qui seront négligés par la suite.

Sous cette forme l'état prédit à l'instant $k+1$ à partir de l'état estimé à l'instant k est obtenu en prenant l'espérance mathématique de (B.1) (on néglige les termes d'ordre supérieur :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x}\mathbf{e}_i \mathrm{tr}\left[f_{xx}^i\left(k\right)\mathbf{P}_{k|k}\right] \tag{B.4}$$

L'erreur de prédiction de l'état est obtenue par la soustraction de (B.1) de l'équation (B.4), et obtenir :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = f_x\left(k\right)\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x}\mathbf{e}_i\left\{\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T f_{xx}^i\left(k\right)\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} - \mathrm{tr}\left[f_{xx}^i\left(k\right)\mathbf{P}_{k|k}\right]\right\} + \mathbf{v}_k \tag{B.5}$$

En multipliant ce vecteur par son transposé et en prenant par la suite l'espérance mathématique, on obtient la valeur de la covariance des erreurs prédite [BSL93] :

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = f_x\left(k\right)\mathbf{P}_{k|k}f_x^T\left(k\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_x}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T \mathrm{tr}\left[f_{xx}^i\left(k\right)\mathbf{P}_{k|k}f_{xx}^j\left(k\right)\mathbf{P}_{k|k}\right] + \mathbf{Q} \tag{B.6}$$

Il faut mentionner que la relation qui donne l'état prédit inclue un terme d'ordre deux, appelé terme de correction, sera négligé dans la cas où la solution de filtrage EKF à premier ordre est considérée. De même l'expression de la covariance des erreurs prédite (eq. B.8) contient un terme d'ordre quatre qui sera aussi négligé dans le cas du EKF au premier ordre. On remarque de même que la version EKF au premier ordre du filtre est similaire au filtrage linéaire, où dans ce cas le Jacobien $f_x\left(k\right)$ joue le rôle de matrice de transition.

B.2 Etape de mise à jour par des observations

De façon similaire, on obtient les relations suivantes pour l'état observé et la covariance des erreurs prédites :

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \mathbf{h}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{e}_i \mathrm{tr}\left[h_{xx}^i\left(k\right)\mathbf{P}_{k+1|k}\right] \tag{B.7}$$

$$\mathbf{S}_{k+1} = h_x\left(k\right)\mathbf{P}_{k+1|k}h_x^T\left(k\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_x} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T \mathrm{tr}\left[h_{xx}^i\left(k\right)\mathbf{P}_{k+1|k}h_{xx}^j\left(k\right)\mathbf{P}_{k+1|k}\right] + \mathbf{R} \tag{B.8}$$

où

$$h_x\left(k\right) \triangleq \left.\nabla_x \mathbf{h}\right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \tag{B.9}$$

est le Jacobien de la fonction $\mathbf{h}\left(\cdot\right)$ évaluée en $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, et où

$$h_{xx}^i\left(k\right) \triangleq \left.\nabla_x^T\nabla_x \mathbf{h}^i\right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \tag{B.10}$$

est le Hessien de la i-ème composante de $\mathbf{h}\left(\cdot\right)$.

Comme dans l'étape de mise à jour temporelle les termes de "correction" dans l'expression de l'état et de la covariance sont négligés pour le EKF au premier ordre. Dans ce cas le Jacobien $h_x\left(k\right)$ joue aussi le rôle correspondant de matrice de mesure. Par la suite l'expression du gain du filtre, ainsi que les équations de mise à jour de l'état et de la covariance estimées sont identiques au cas linéaire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k}h_x^T\left(k\right)\mathbf{S}_{k+1}^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\left(\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}\right) \\
\mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}^T
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Annexe C

Compléments sur la Transformation Polynomiale Exacte

Dans le chapitre 3, la transformation polynomiale exacte a été introduite comme une méthode de calcul de la statistique issue de la transformation d'une v.a. x par une fonction polynomiale : $f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$.

Comment il a été déjà prouvé les moments d'ordre un et deux de la v.a. y peuvent être déterminés à l'aide des relations matricielles. Au moment où ces relations ont été introduites nous nous sommes volontairement limités à un développement analytique concis pour éviter d'alourdir le chapitre. Cette annexe a comme but de compléter ces relations en démontrant pas à pas les étapes successives qui ont mené à ces résultats.

Ainsi, pour le calcul de la valeur moyenne de la v.a. y, à partir de la relation (3.4) qui présente le développement en série de Taylor appliquée à la v.a. y, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= E[y] \\ &= f(\bar{x}) + \sum_{n=2}^{N} \frac{E[(\Delta x)^n]}{n!} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=\bar{x}} \\ &= f(\bar{x}) + \sum_{n=2}^{N} \frac{m_n}{n!} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=\bar{x}} \end{aligned} \tag{C.1}$$

où m_n désigne le moment centré d'ordre n pour la v.a. Δx.

L'expression des dérivées (3.6) est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^n}{dx^n}\left(x^i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=n}^{N} a_i \left(\prod_{j=i-n+1}^{i} j \right) x^{i-n} \\
&= \sum_{i=n}^{N} a_i \frac{i!}{(i-n)!} x^{i-n}
\end{aligned} \tag{C.2}
$$

Avec les notations des moments $m_0 = 1$, et $m_1 = E[\Delta x] = 0$, le développement final est obtenu :

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{m_n}{n!} \sum_{i=n}^{N} a_i \frac{i!}{(i-n)!} \bar{x}^{i-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N} m_n \sum_{i=n}^{N} a_i C_i^n \bar{x}^{i-n}
\end{aligned} \tag{C.3}
$$

avec son équivalent matriciel :

$$
\bar{y} = \mathbf{a}_{0:N}^T \mathbf{C}^{\bar{x}} \mathbf{m}_{0:N} \tag{C.4}
$$

Pour l'expression du moment d'ordre deux, en utilisant le même développement en série de Taylor, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= E\left[(y - \overline{y})^2 \right] \\
&= E\left[\left(f(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{N} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=\bar{x}} - f(\bar{x}) - \sum_{n=2}^{N} \frac{m_n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=\bar{x}} \right)^2 \right] \\
&= E\left[\left(\Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} + \sum_{n=2}^{N} \frac{(\Delta x)^n - m_n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=\bar{x}} \right)^2 \right] \\
&= E\left[\left(\Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \right)^2 \right] + 2E\left[\left(\Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \right) \cdot \left(\sum_{n=2}^{N} \frac{(\Delta x)^n - m_n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=\bar{x}} \right) \right] + \ldots \\
&\quad E\left[\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{(\Delta x)^n - m_n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=\bar{x}} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{C.5}
$$

En utilisant le moment centré d'ordre n l'équation ci-dessus présentée peut être mise sous la forme suivante :

$$
\sigma_y^2 = m_2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \bigg|_{x=\bar{x}} + 2 \sum_{n=2}^{N} \frac{E\left[(\Delta x)^{n+1} \right]}{n!} \frac{df}{dx} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=\bar{x}} - 2E[\Delta x] \sum_{n=2}^{N} \frac{m_n}{n!} \frac{df}{dx} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=\bar{x}} + \ldots
$$

$$
\begin{aligned}
& E\left[\sum_{n=2}^{N}\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{(\Delta x)^n - m_n}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=\bar{x}}\right)\cdot\left(\frac{(\Delta x)^k - m_k}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=\bar{x}}\right)\right] \\
= \; & m_2\left(\frac{df}{dx}\right)^2\Big|_{x=\bar{x}} + 2\sum_{n=2}^{N}\frac{m_{n+1}}{n!}\frac{df}{dx}\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=\bar{x}} + \sum_{n=2}^{N}\sum_{k=2}^{N}\frac{E\left[\left((\Delta x)^n - m_n\right)\left((\Delta x)^k - m_k\right)\right]}{n!\cdot k!}\frac{d^n f}{dx^n}\frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=\bar{x}} \\
= \; & m_2\left(\frac{df}{dx}\right)^2\Big|_{x=\bar{x}} + 2\sum_{n=2}^{N}\frac{m_{n+1}}{n!}\frac{df}{dx}\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=\bar{x}} + \ldots \\
& \sum_{n=2}^{N}\sum_{k=2}^{N}\frac{E\left[(\Delta x)^{n+k}\right] - m_n E\left[(\Delta x)^k\right] - m_k E\left[(\Delta x)^n\right] + m_n m_k}{n!\cdot k!}\frac{d^n f}{dx^n}\frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=\bar{x}} \\
= \; & m_2\left(\frac{df}{dx}\right)^2\Big|_{x=\bar{x}} + 2\sum_{n=2}^{N}\frac{m_{n+1}}{n!}\frac{df}{dx}\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=\bar{x}} + \sum_{n=2}^{N}\sum_{k=2}^{N}\frac{m_{n+k} - m_n m_k}{n!\cdot k!}\frac{d^n f}{dx^n}\frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=\bar{x}} \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

En utilisant les mêmes hypothèses sur les moments m_0 et m_1 la relation (C.6) peut être écrite :

$$
\sigma_y^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{m_{n+k} - m_n m_k}{n!\cdot k!}\frac{d^n f}{dx^n}\frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=\bar{x}} \qquad \text{(C.7)}
$$

De la même façon pour les dérivées on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n!\cdot k!}\frac{d^n f}{dx^n}\frac{d^k f}{dx^k} &= \left(\sum_{i=n}^{N} a_i \frac{i!}{n!(i-n)!}x^{i-n}\right)\left(\sum_{j=k}^{N} a_j \frac{j!}{k!(j-k)!}x^{j-k}\right) \\
&= \sum_{i=n}^{N}\sum_{j=k}^{N} a_i a_j C_i^n C_j^k x^{i+j-n-k} \qquad \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

Par la suite avec les mêmes notations matricielles que celles présentées déjà dans le chapitre 3 la relation (C.7) devient :

$$
\sigma_y^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(m_{n+k} - m_n m_k\right)\left(\mathbf{a}_{1:N}^T \mathbf{C}_{n,k}^{\bar{x}} \mathbf{a}_{1:N}\right) \qquad \text{(C.9)}
$$

A partir de l'équation (C.9) on obtient la relation finale matricielle pour le moment d'ordre 2 de la v.a. y :

$$
\sigma_y^2 = \mathbf{1}_{1\times N}\left(\mathcal{M}\boxdot\mathcal{C}^{\bar{x}}\right)\mathbf{1}_{N\times 1} - \mathbf{m}_{1:N}^T \mathcal{C}^{\bar{x}} \mathbf{m}_{1:N} \qquad \text{(C.10)}
$$

Une dernière expression est obtenue pour la covariance de transition P_{xy} entre les variables x et y :

$$
\begin{aligned}
P_{xy} &= E\left[(x-\bar{x})(y-\overline{y})\right] \\
&= E\left[\Delta x \cdot y\right] - E\left[\Delta x \cdot \overline{y}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\Delta x\left(f\left(\bar{x}\right)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\left(\Delta x\right)^{n}}{n!}\frac{d^{n}f}{dx^{n}}\bigg|_{x=\bar{x}}\right)\right]\\
&= E\left[\Delta x\cdot f\left(\bar{x}\right)\right]+E\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{\left(\Delta x\right)^{n+1}}{n!}\frac{d^{n}f}{dx^{n}}\bigg|_{x=\bar{x}}\right]\\
&= \sum_{n=1}^{N}m_{n+1}\sum_{i=n}^{N}a_{i}C_{i}^{n}\bar{x}^{i-n} \qquad \text{(C.11)}
\end{aligned}
$$

et en conséquence avec les mêmes notations utilisées antérieurement l'expression finale matricielle est obtenue :

$$
P_{xy} = \mathbf{a}_{0:N}^{T}\mathbf{C}^{\bar{x}}\mathbf{m}_{1:N+1} \qquad \text{(C.12)}
$$

Liste de publications

Publications dans des revues avec comité de lecture

- **M. B. Luca**, S. Azou, G. Burel et A. Serbanescu, "On Exact Kalman Filtering of Polynomial Systems", *IEEE Trans. Circuits & Syst. I*, Vol. 53, No. 6, pp. 1329-1340, June 2006.

Conférences internationales

- S. Azou, **M. B. Luca** et G. Burel, "Automatic Gain Control in a Kalman Filter Based Synchronization Chaotic Receiver," *IEEE Communications 2004*, Bucharest, Romania, June 3-5, 2004.

- **M. B. Luca**, A. Serbanescu, S. Azou et G. Burel, "A New Compression Method using a Chaotic Symbolic Approach," *IEEE Communications 2004*, Bucharest, Romania, June 3-5, 2004.

- **M. B. Luca**, S. Azou, G. Burel et A. Serbanescu, "A Complete Receiver Solution for a Chaotic Direct Sequence Spread Spectrum Communication System," *IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst. (IEEE ISCAS)*, Kobe, Japan, May 2005.

- S. Azou, **M. B. Luca**, G. Burel et A. Serbanescu, "Multipath Combining in Chaotic Direct-Sequence Spread Spectrum Communications through Dual Estimation," *Proc. IEEE OCEANS '05 Europe*, Brest, FRANCE, June 20-23.

- **M. B. Luca**, S. Azou, E. Hodina, A. Serbanescu and G. Burel, "Pseudo-Blind Demodulation of Chaotic DS-SS Signals through Exact Kalman Filtering," *IEEE Communications 2006*, Bucharest, Romania, June 2006.

Bibliography

[ABK91] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, and M. B. Kennel. Lyapunov exponents in chaotic sytems: their importance and their evaluation using observed data. *Int. J. of Modern Physics B*, 5(9):1347–1375, 1991.

[Abr63] N. Abramson. *Information Theory and Coding*. McGraw-Hill, 1963.

[AF04] P. R. Atkins and A. J. Fenwick. Chaotic signals in a multipath channel. In *Proc. of the Inst. of Acoustics and Sonar Signal Processing*, volume 26, 2004.

[ALBS04] S. Azou, M. B. Luca, G. Burel, and A. Serbanescu. Automatic gain control in a kalman filter based synchronization chaotic receiver. In *Proc. IEEE-Communications 2004, Bucharest, Romania*, June 2004.

[ALBS05] S. Azou, M. B. Luca, G. Burel, and A. Serbanescu. Multipath combining in chaotic direct-sequence spread spectrum communications through dual estimation. In *Proc. IEEE OCEANS Europe*, Brest, France, June 2005.

[AM79] B. Anderson and J. Moore. *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, 1979.

[AMGC02] M. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50(2):174–189, Feb. 2002.

[APB02] S. Azou, C. Pistre, and G. Burel. A chaotic direct sequence spread-spectrum system for underwater communication. In *IEEE-Oceans'02, Biloxi, USA*, Oct. 2002.

[APDB03] S. Azou, C. Pistre, L. Le Duff, and G. Burel. Sea trial results of a chaotic direct-sequence spread spectrum underwater communication system. In *IEEE-OCEANS'03, San Diego, CA, USA*, Sept. 2003.

[AS72] D. L. Alspach and H. W. Sorenson. Nonlinear bayesian estimation using gaussian sum approximation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 17(4):439–448, 1972.

[ASL+05] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. Garcia-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and K. Alan Shore. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. *Nature*, 437/17:343–346, Nov. 2005.

[AVR83] V. S. Afraimovich, N. N. Verochev, and M. I. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems. *Radio Phys. and Quantum Electron.*, 29:795–803, 1983.

[BAB04] C. Bouder, S. Azou, and G. Burel. Performance analysis of a spreading sequence estimator for spread spectrum transmissions. *Journal of the Franklin Institute*, 341:595–614, 2004.

[Bap98] M. S. Baptista. Cryptography with chaos. *Phys. Rev. A*, 240:50–54, 1998.

[Bas03] M. V. Basin. On optimal filtering for polynomial system states. *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 125(1):123–125, March 2003.

[BC93] Bradley M. Bell and Frederick W. Cathey. The iterated kalman filter update as a gauss-newton method. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 38(2):294–297, Feb. 1993.

[BDR02] M. Boutayeb, M. Darouach, and H. Rafaralahy. Generalized state space observers for chaotic synchronization and secure communication. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49(3):345–349, 2002.

[Ben81] V. E. Benes. Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift. *Stochastics*, 5:65–92, 1981.

[BG97] A. Boyarsky and P. Gora. *Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension.* Birkhauser, 1997.

[BG03] Craig S. Brown and Thomas A. Grate. Arithmetic coding and decoding methods and related systems. Technical report, Microsoft Corporation, 5 2003. U.S. Patent 6,560,368.

[BJ93] E. H. Baghious and P. Jarry. "lorenz attractor" from differential eqations with piecewise-linear terms. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 3(1):201–210, 1993.

[BM01] L. Brunel and D. Mottier. Iterative interference cancellation scheme with pilot-aided space-time estimation in ds-cdma systems. In *Proc. Vehicular Technology Conference*, pages 197–201, 2001.

[BPV84] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'Ordre dans le Chaos.* Hermann, 1984.

[BSL93] Y. Bar-Shalom and X.-R. Li. *Estimation and Tracking - Principles, Techniques and Software.* Artech House, 1993.

[BSSP02] F. Blackmon, E. Sozer, M. Stojanovic, and J. Proakis. Performance comparison of rake and hypothesis feedback direct sequence spread spectrum techniques for underwater communication applications. In *Proc. IEEE OCEANS'02 Conference*, Oct. 2002.

[CD02] D. Crisan and A. Doucet. A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50(3):736–746, March 2002.

[CL05] T.-I. Chen and T.-L. Liao. Design of secure digital communication systems using chaotic modulation, cryptography and chaotic synchronization. *Chaos, Solitons and Fractals*, 24:241–255, 2005.

[CN00] C. Cruz and H. Nijmeijer. Synchronization through filtering. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 10(4):763–775, 2000.

[COS93] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, and S. H. Strogratz. Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with application to communication. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 40(10):626–633, 1993.

[CYKB01] C.-C. Chen, K. Yao, K. Umeno K., and E. Biglieri. Design of chaotic spread spectrum sequences using ergodic theory. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48(9):1110–1114, Sept. 2001.

[Dau88] F. Daum. *Bayesian Analysis of Time Series ans Dynamical Models*, chapter New exact nonlinear filters, pages 199–226. Marcel Dekker, Inc., 1988.

[DKH93] H. Dedieu, M. P. Kennedy, and M. Hasler. Chaos shift keying: Modulation and demodulation of chaotic carrier using self-synchronizing chua's circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 40:634–642, Oct. 1993.

[DvdV04] Q. H. Dang and A-J. van der Veen. A low-complexity blind multiuser receiver for long-code cdma. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 1:113–122, 2004.

[EC91] T. Endo and L. O. Chua. Synchronizing chaos from electronic phase-locked loops. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 1(3):701–710, Spet. 1991.

[Fan49] R. M. Fano. Transmission of information. *M.I.T. Press*, 1949.

[FD03] B. P. Flanagan and J. Dunyak. A steady state decoupled kalman filter technique for multiuser detection. Technical report, The MITRE Corporation, Sept. 2003.

[Fow89] T. B. Fowler. Application of stochastic control techniques to chaotic non-linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 34:201–205, Feb. 1989.

[FSSJ01] L. Freitag, M. Stojanovic, S. Singh, and M. Johnson. Analysis of channel effects on direct-sequence and frequency-hopped spread-spectrum acoustic communication. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 26(4):586–593, 2001.

[Gal78] R. G. Gallager. Variations on a theme by huffman. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 24(6):668–674, 1978.

[GDPX03] H. Gerlach, D. Dahlhaus, M. Pesce, and W. Xu. Joint kalman channel estimation and equalization for the umts fdd downlink. In *Proc. Vehicular Technology Conference*, pages 197– 201, 2003.

[Gel80] A. Gelb. *Applied Optimal Estimation.* The M.I.T. Press, 1980.

[GL00] John B. Groe and Lawrence E. Larson. *CDMA Mobile Radio Design.* Artech House, 2000.

[GP83a] P. Grassberger and I. Procaccia. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 50:346–349, 1983.

[GP83b] P. Grassberger and I. Procaccia. Estimation of the kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Phys. Rev. A*, 28:2591–2593, 1983.

[GP83c] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9:189–208, 1983.

[GRL99] D. Guo, L. K. Rasmunsen, and T. J. Lim. Linear parallel interference cancellation in long-code cdma multiuser detection. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 17(12):2074–2081, Dec. 1999.

[GSS93] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *Proc. Inst. Elect. Eng. F*, 140:107–113, 1993.

[Has97] M. Hasler. Current problems for the transmission of information using a chaotic signal. In *1st Int. Conf. on Control of Oscillations and Chaos*, 1997.

[Has98] M. Hasler. Synchronization of chaotic systems and transmission of information. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 8(4):647–659, 1998.

[HBM94] G. Heidari-Bateni and C. D. McGillem. A chaotic direct-sequence spread-spectrum communication system. *IEEE Trans. on Communications*, 42(2):1524–1527, 1994.

[HS01] M. Hassler and Thomas Schimming. Communications using chaos. In *Int. Conf. on Signals and Electronic Systems*, 2001.

[Huf52] D. A. Huffman. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proc. IRE*, 40(9):1098–1101, 1952.

[HYKY03] L. Hanzo, L-L. Yang, E-L. Kuan, and K. Yen. *Single and Multi-Carrier DS-CDMA: Multi-User Detection, Space-Time Spreading, Synchronisation, Networking and Standards*. Wiley-IEEE Press, 2003.

[Ilt94] R. A. Iltis. An ekf-based joint estimator for interference, multipath, and code delay in a ds spread-spectrum receiver. *IEEE Trans. on Commun.*, 42:1288–1299, 1994.

[IX00] K. Ito and K. Xiong. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45(5):910–927, May 2000.

[JK01] G. Jakimoski and L. Kocarev. Chaos and cryptography: Block encryption ciphers based on chaotic maps. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48:163–169, 2001.

[JU97] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. *Proc. SPIE-Int. Soc. Opt. Eng.*, 3068:182–193, 1997.

[JUDW00] S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45(3):477–482, 2000.

[Kal60] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME. Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.

[KD93] M. P. Kennedy and H. Dedieu. Experimental demonstration of binary chaos shift keying using self-synchronizing chua's circuit. *IEEE Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, pages 67–72, 1993.

[Ken94] M. P. Kennedy. Basic concepts of nonlinear dynamics and chaos. *Tutorials (IEEE)*, pages 289–313, 1994.

[KFSW02] C. Komninakis, C. Fragouli, A. H. Sayed, and R. D. Wesel. Multi-input multi-output fading channel tracking and equalization using kalman estimation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50(5):1065–1076, May 2002.

[KHE+92] L. Kocarev, K. S. Halle, K. Eckert, L. O. Chua, and U. Parlitz. Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 2:709–713, 1992.

[KKC97] G. Kolumban, M. P. Kennedy, and L. O. Chua. The role of synchronization in digital communications using chaos - part i: Fundamentals of digital communications. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10):927–936, Oct. 1997.

[KKC98] G. Kolumban, M. P. Kennedy, and L. O. Chua. The role of synchronization in digital communications using chaos - part ii: Chaotic modulation and chaotic synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 45(11):1129–1140, Nov. 1998.

[KKJK98] G. Kolumban, G. Kis, Z. Jako, and M. P. Kennedy. Fm-dcsk: A robust modulation scheme for chaotic communications. *IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E81-A(9):1798–1802, Sept. 1998.

[KKK97] G. Kolumban, M. P. Kennedy, and G. Kis. Performance improuvement of chaotic communications systems. In *Proc. European Conf. on Circuit Theory and Design*, pages 284–289, 1997.

[KNYC00] J. Kraus, J. A. Nossek, T. Yang, and L. O. Chua. Evaluation of a continous valued chaotic spreader used in a chaotic digital code-division multiple access ((cd)2ma) system. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 10(8):1933–1950, 2000.

[KP95] L. Kocarev and U. Parlitz. General approach for chaotic synchronization with application to communication. *Phys. Rev. Lett.*, 74(25):5028–5031, 1995.

[KPIL02] S. Kim, T. Pals, R. A. Iltis, and H. Lee. Cdma multipath channel estimation using generalized successive interference cancellation algorithm for radiolocation. In *Proc. 37th Annual Conference on Information Sciences and Systems*, 2002.

[Kra99] R. L. Kraft. Chaos, cantor sets, and hyperbolicity for the logistic maps. *Am. Math. Mon.*, 106:400–408, 1999.

[KT94] T. Kohda and A. Tsuneda. Even- and odd-correlation functions of chaotic chebyshev bit sequences for cdma. In *Proc. IEEE Int. Symp. Spread Spectrum Techniques and Applications*, 1994.

[LABS05] M. B. Luca, S. Azou, G. Burel, and A. Serbanescu. A complete receiver solution for a chaotic direct sequence spread spectrum communication system. In *Proc. IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst. (IEEE ISCAS), Kobe, Japan*, May 2005.

[LABS06] M. B. Luca, S. Azou, G. Burel, and A. Serbanescu. On exact kalman filtering of polynomial systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 53(6):1329–1340, June 2006.

[LAH+06] M. B. Luca, S. Azou, E. Hodina, A. Serbanescu, and G. Burel. Pseudo-blind demodulation of chaotic ds-ss signals through exact kalman filtering. In *Proc. IEEE-Communications 2006, Bucharest, Romania*, May 2006.

[LBS04] T. Lefebvre, H. Bruyninckx, and J. De Schutter. Kalman filters for nonlinear systems: a comparison of performance. *The International Journal of Control*, 77(7):639–653, May 2004.

[LH] Debra A. Lelewer and Daniel S. Hirschberg. *Data Compression*.

[LL97] H. Leung and J. Lam. Design of demodulator for the chaotic modulation communication. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44:262–267, 1997.

[LL01] H. Leung and J. Lam. Adaptive blind eqalization for chaotic communication systems using extended kalman filter. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48:979–989, Aug. 2001.

[LLHR03] A. Lakhzouri, E. S. Lohan, R. Hamila, and M. Renfors. Extended kalman filter channel estimation for line-of-sight detection in wcdma mobile positioning. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 13:1268–1278, 2003.

[LM98] J. S. Lee and L. E. Miller. *CDMA systems engineering handbook*. Artech House, 1998.

[LMG02] Z. Liu, X. Ma, and G. B. Giannakis. Space-time coding and kalman filtering for time-selective fading channels. *IEEE Trans. Communications*, 50(2):183–186, Feb. 2002.

[Lor63] E. N. Lorenz. Deterministic nonperodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.

[LSAB04] M. B. Luca, A. Serbanescu, S. Azou, and G. Burel. A new compression method using a chaotic symbolic approach. In *IEEE-Communications*, 2004.

[LTYH04] F. C. M. Lau, C. K. Tse, M. Ye, and S. F. Hau. Co-existence of chaos-based and conventional communication systems of equal bit rate. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 51(2):391–408, Feb. 2004.

[Luc03] M. B. Luca. Synchronisation d'un récepteur numérique de signaux à spectre etalé par code chaotique. Technical report, Université de Bretagne Occidentale & ENSIETA, July 2003.

[LZ01] H. Leung and Z. Zhu. Performance evaluation of ekf-based chaotic synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48(9):1118–1125, Sept. 2001.

[LZD00] H. Leung, Z. Zhu, and Z. Ding. An aperiodic phenomenon of the extended kalman filter in filtering noisy chaotic signals. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(6):1807–1810, June 2000.

[MB04] S. Mandal and S. Banerjee. Analysis and cmos implementation of a chaos based communication system. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 51(9):1708–1722, Sept. 2004.

[MGL02] E. N. Macau, C. Grebogi, and Y.-C. Lai. Active synchronization in nonhyperbolic hyperchaotic systems. *Physical Review E*, 65:art. no. 027202, 2002.

[MRS91] P. Del Moral, G. Rigal, and G. Salut. Estimation et commande optimale non-linéaire : Un cadre unifié pour la resolution particulaire. Technical Report 91137, LAAS-CNRS, April 1991.

[MS03] A. R. Margetts and P. Schniter. Adaptive inter-chip interference cancellation of multirate scrambled cdma downlink. In *Proc. of the Annual Allerton Ccong. on Comm. Control and Computing*, volume 41, pages 1809–1810, 2003.

[MSR97] G. Mazzini, G. Setti, and R. Rovatti. Chaotic complex spreading sequences for asynchronous ds-cdma - part i: System modeling and results. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10):937–947, Oct. 1997.

[MSR99] G. Mazzini, G. Setti, and R. Rovatti. Interference minimisation by autocorrelation shaping in asynchronous ds-cdma systems: Chaos-based spreading is nearly optimal. *Electronics Letters*, 35(13):1054–1055, Jun. 1999.

[NPR00a] M. Norgaard, N. Poulsen, and O. Ravn. Advances in derivative-free state estimation for non-linear systems. Technical report, Dept. of Mathematical Modelling, Technical University of Danemark, April 2000.

[NPR00b] M. Norgaard, N. Poulsen, and O. Ravn. New developments in state estimation for non-linear systems. *Automatica*, 36(11):1627–1638, Nov. 2000.

[Ogo93] M. J. Ogorzalek. Taming chaos - part i: Synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 40(10):693–699, Oct. 1993.

[OWIC92] A. V. Openheim, G. W. Wornell, S. H. Isabelle, and K. M. Cuomo. Signal processing in the context of chaotic signals. In *IEEE ICASP*, 1992.

[PC90] L. Pecora and T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–823, 1990.

[PC00] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Detecting chaotic drive-response geometry in generalized synchronization. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 10(4):875–889, 2000.

[PCJ+97] L. M. Pecora, T. L. Caroll, G. A. Johnson, D. J. Mar, and J. F. Heagy. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, 7(4):520–543, 1997.

[PG56] R. Price and P. Green. A communication technique for multipath channels. *Proc. IRE*, 46:555–570, Mar. 1956.

[Pro95] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 3 edition, 1995.

[PSM82] R. L. Pickholtz, D. L. Schilling, and L. B. Milstein. Theory of spread-spectrum communications: A tutorial. *IEEE Trans. on Communications*, COM-30(5):822–854, May 1982.

[Ris76] J. J. Rissanen. Generalized kraft inequality and arithmetic coding. *IBM J. Res. Dev.*, 20:198–203, 1976.

[Riv90] T. J. Rivlin. *Chebyshev Polynomials*. Wiley, 1990.

[RMS00] R. Rovatti, G. Mazzini, and G. Setti. Interference bounds for ds-cdma systems based on chaotic piecewise-affine markov maps. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 47(6):885–895, Jun. 2000.

[RPK97] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths. Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10):874–881, Oct. 1997.

[RSM98] R. Rovatti, G. Setti, and G. Mazzini. Chaotic complex spreading sequences for asynchronous ds-cdma - part i: Some theoretical performance bounds. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 45(4):496–504, April 1998.

[RSTA95] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 51(2):980–993, Feb. 1995.

[RTA94] N. F. Rulkov, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel. Tracking unstable orbits in chaos using dissipative feedback control. *Phys. Rev. E*, 50(1):314–324, July 1994.

[Rub79] F. Rubin. Arithmetic stream coding using fixed precision registers. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 25:672–675, 1979.

[Rul96] N. F. Rulkov. Images of synchronized chaos: Experiments with circuits. *Chaos*, 6(3):262–279, Sept. 1996.

[Sal89] G. Salut. Le théme non-linéaire en automatique et traitement du signal. In *Journées nationalles du G.d.R. "Traitement du signal et images" du C.N.R.S., Chantilly, France*, Sept. 1989.

[Say01] A. H. Sayed. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Trans. Automat. Control*, 46(7):998–1013, July 2001.

[SBAGAA00] M-R. Shikh-Bahaei, A. H. Aghvami, A. Ghorashi, and N. Ali-Akbarian. A statistical processing approach to interference cancellation in w-cdma systems. *IEEE Trans. Commun.*, E83-B(8):1619–1630, Aug. 2000.

[SC04] B. G. Saulson and K-C. Chang. Nonlinear estimation comparison for ballistic missile tracking. *Optical Engineering*, 43(6):1424–1438, June 2004.

[Sch82] R. A. Scholtz. The origins of spread-spectrum communications. *IEEE Trans. on Communications*, COM-30(5):822–854, May 1982.

[Sch95] J. Schweizer. A stochastic approach to spread spectrum communication using chaos. In *Proc. SPIE Chaotic Circuits for Communication*, pages 115–125, Oct. 1995.

[Sch97] T. S. Schei. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms. *Automatica*, 33(11):2053–2058, Nov. 1997.

[Ser97] A. Serbanescu. *Electronique, physique et signal pour les telecommunications*, chapter Systèmes et signaux face au chaos. Ed. Tehnica, 1997.

[Ser00] A. Serbanescu. *Sisteme de transmisiuni integrate vol. 1 - Comunicatii de banda larga folosind sisteme dinamice haotice*. Ed. ATM, 2000.

[Ser04] A. Serbanescu. *Dynamical systems - Applications in Communications*. Ed. ATM, 2004.

[SF00] M. Stojanovic and L. Freitag. Hypothesis-feedback equalization for direct-sequence spread spectrum underwater communications. In *Proc. IEEE Oceans'00 Conference*, Sept. 2000.

[Sha48] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 1948.

[SMRC02] G. Setti, G. Mazzini, R. Rovatti, and S. Callegari. Statistical modeling of discrete-time chaotic processes: Basic finite-dimensional tools and applications. *Proceedings of the IEEE*, 90(5):662–690, May 2002.

[SOD93] P. So, E. Ott, and W. P. Dayawansa. Observing chaos. *Phys. Rev. Lett. A*, 176:421–427, 1993.

[SOD94] P. So, E. Ott, and W. P. Dayawansa. Observing chaos: Deducing and tracking the state of a chaotic system from limited observation. *Phys. Rev. E*, 49:2650–2660, 1994.

[SS01a] Jörg Schweizer and Thomas Schiming. Symbolic dynamics for processing chaotic signals-i: Communication and coding. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48:1269–1282, 2001.

[SS01b] Jörg Schweizer and Thomas Schiming. Symbolic dynamics for processing chaotic signals-ii: Communication and coding. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48:1283–1295, 2001.

[SSKV02] A. Sitz, U. Schwarz, J. Kurths, and H. U. Voss. Estimation of parameters and unobserved components for nonlinear systems from noisy time series. *Phys. Rev. E*, 66:art. no. 016210, 2002.

[SSP00] E. M. Sozer, M. Stojanovic, and J. G. Proakis. Underwater acoustic networks. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 25(1):72–83, 2000.

[ST98] D. J. Sobiski and J. S. Thorp. Pdma-1 : Chaotic communication via the extended kalman filter. *IEEE Trans. Circ. Systems I*, 45(2):194–197, 1998.

[Sto05] M. Stojanovic. An adaptive algorithm for differentially coherent detection in the presence of intersymbol interference. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 23(9):1884–1890, Sept. 2005.

[Tab89] M. Tabor. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. Wiley, 1989.

[TLT04] W. M. Tam, F. C. M. Lau, and C. K. Tse. A multiple acces scheme for chaos-based digital communication systems utilizing transmitted reference. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 51(9):1868–1978, Sept. 2004.

[TP97] M. K. Tsatsanis and G. B. Proakis. Blind estimation of direct sequence spread spectrum signals in multipath. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(5):1241–1252, 1997.

[TS03] D. Tenne and T Singh. The higher order unscented filter. *Proc. Amer. Control Conf.*, 3:2441–2446, 2003.

[TSS05] A. Tarighat, A. Subramanian, and A. H. Sayed. An uplink ds-cdma receiver using a robust post-correlation kalman structure. *IEEE Trans. on Wireless Communications*, 4(3):847–854, May 2005.

[TY00] L. J. Teng and M. Yao. The kalman filter as the optimal linear minimum mean-squared error multiuser cdma detector. *IEEE Trans. Information Theory*, 46(7):2561–2566, Nov. 2000.

[vdM04] R. van der Merwe. *Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models*. PhD thesis, OGI School of Science & Engineering, 2004.

[vdMW03] R. van der Merwe and E. Wan. Gaussian mixture sigma-point particle filters for sequential probabilistic inference in dynamic state-space models. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, 6:701–704, April 2003.

[Vit79] A. J. Viterbi. Spread spectrum communications: Myths and realities. *IEEE Commun. Mag.*, 17(3):11–18, May 1979.

[Vit87] J. S. Vitter. Design and analysis of dynamic huffman codes. *Journal ACM*, 34(4):825–845, 1987.

[Vol97] A. Volkovskii. Synchronization of chaotic systems using phase control. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10):913–917, Oct. 1997.

[Wei] E. W. Weisstein. *Logistic Map.* MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[Wel84] T. A. Welch. A technique for high performance data compression. *IEEE Computer*, 17(6):8–19, 1984.

[WNC87] I. H. Witten, R. M. Neal, and J. G. Cleary. Arithmetic coding for data compression. *Commun. ACM*, 30(6):520–540, 1987.

[WSSV85] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16:285–317, 1985.

[WvdM01] E. A. Wan and R. van der Merwe. *Kalman Filtering and Neural Networks*, chapter The Unscented Kalman Filter. Wiley Publishing, 2001.

[XTL04] Y. Xia, C. K. Tse, and F. C. M. Lau. Performance of differential chaos-shift-keying digital communication systems over a multi-path fading channel with delay spread. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 51(12):680–684, Dec. 2004.

[XZC06] K. Xiong, H. Y. Zhang, and C. W. Chan. Performance evaluation of ukf-based nonlinear filtering. *Automatica*, 42:261–270, 2006.

[Yan95] T. Yang. Recovery of digital signals from chaotic switching. *Int. J. Circuit Theory Appl.*, 23:611–615, 1995.

[Yan04] T. Yang. A survey of chaotic secure communication systems. *Int. J. of Computational Cognition*, 2:81–130, 2004.

[YC97] T. Yang and L. O. Chua. Chaotic digital code-division multiple access (cdma) communication systems. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 7(12):2789–2805, 1997.

[YF83] T. Yamada and H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. ii. *Prog. Theor. Phys.*, 70:1240, 1983.

[YF84] T. Yamada and H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. iii. *Prog. Theor. Phys.*, 72:885, 1984.

[ZL77] J. Ziv and A. Lempel. A universal algorithm for sequential data compression. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 23:337–343, 1977.

[ZL78] J. Ziv and A. Lempel. Compression of individual sequences via variable-rate coding. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 24:530–536, 1978.

[ZLD99] Z. Zhu, H. Leung, and Z. Ding. Optimal synchronization of chaotic systems in noise. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 46:1320–1329, Nov. 1999.

Index

Canal
- Acoustique sous-marin, 105, 130
- Estimation de, 115

Chebyshev (polynôme de), 66, 72

Chebyshev (polynômes de), 93

Consistence d'un estimateur, 78

Contrôle de gain
- Boucle de contrôle statistique, 92
- Modification de la dynamique chaotique, 91

Diagramme de bifurcation, 9

Diagramme de synchronisation, 16, 19, 87

Dynamique symbolique, 136

Entropie informationnelle, 140, 141, 145

EQM, 77
- Synchronisation chaotique, 77

Estimation simultanée
- Code/Symbole, 85, 98, 106
- Code/Symbole/Phase, 88, 98, 102
- Modèle à trajets multiples, 103, 106

Etalement de Spectre, 20
- Séquence directe, 21, 30, 84
- Séquence directe courte, 116
- Séquence directe longue, 125
- Sauts de fréquence, 23

Exposants de Lyapunov, 11, 12, 66

Filtres de Kalman non-linéaires
- Approximation par somme de gaussiennes, 53
- CDKF, 49
- EKF, 15, 35, 36
- ExPKF, 59, 63
- Filtre à particules, 55
- HOUF, 48
- IEKF, 38
- Scaled-UKF, 43
- Stabilité de filtres, 72
- UKF, 40

Formule d'interpolation polynomiale de Stirling, 50

Générateur probabiliste de Bernoulli, 138

Logistic (application), 8

Maître-Esclave (synchronisation), 13

Normalized Estimation Error Squared, 79

Récepteur RAKE, 104, 129, 130

Récupération de porteuse, 86, 88

Signal to Noise Ratio, 22, 87, 106, 130

Solution asymptotique pour filtrage Kalman linéaire, 120, 127

Suppression des termes d'interférence, 119, 127

Synchronisation chaotique
- Filtrage EKF, 15
- Filtrage ExPKF, 66
- Identique, 13

Transformation non-linéaire, 70

High order Unscented, 48

Interpolation de Stirling, 52

Linéarisation au premier ordre, 37, 72

Polynomiale Exacte, 60, 67

Scaled-Unscented, 43

Unscented, 42

Transmissions chaotiques, 24

Chaos Shift Keying, 26

Cohérent - fitre adapté, 28

Cohérent CSK, 27

Cohérent DCSK, 29

Masquage chaotique, 25

Non-cohérent COOK, 28

Non-cohérent CSK, 29

Séquence directe chaotique, 30, 84, 105

Verrouillage de retard (Delay Locked Loop), 100