



HAL
open science

Problèmes de régularité en optimisation de forme

Nicolas Landais

► **To cite this version:**

Nicolas Landais. Problèmes de régularité en optimisation de forme. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2007. Français. NNT: . tel-00487930

HAL Id: tel-00487930

<https://theses.hal.science/tel-00487930>

Submitted on 31 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-(n d'ordre)

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Nicolas Landais

**pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :
Mathématiques

Sujet de la thèse :

**Problèmes de régularité
en Optimisation de Forme.**

Thèse présentée et soutenue à Bruz le 10 Juillet 2007. devant le jury composé de :

A. Chambolle	Directeur de recherche CNRS, CMAP, École Polytechnique	Rapporteur
C. Bandle	Professeur à l'université de Bâle	Rapporteur
D. Bucur	Professeur à l'université de Metz	Examineur
A. Novruzi	Professeur à l'université d'Ottawa	Examineur
M. Dambrine	Maitre de conférence à l'université de Compiègne	Examineur
G. Vial	AGPR à l'antenne de Bretagne de l'ENS Cachan	Examineur
M. Pierre	Professeur à l'antenne de Bretagne de l'ENS Cachan	Directeur de thèse

IRMAR, UMR 6625 du CNRS,
Antenne de Bretagne de l'École Normale Supérieure de Cachan,
Avenue Robert Schuman, F-35170, Bruz

Remerciements

Avant toutes choses, je tiens à remercier Michel Pierre qui m'a fait rentrer dans le monde palpitant de l'optimisation de forme et n'a ménagé ni son temps, ni ses efforts pour m'encadrer activement.

Un grand merci aussi à Antonin Chambolle et Catherine Bandle qui ont pris sur leur temps pour rapporter ce travail. Les nombreux retours m'ont permis de clarifier certaines preuves et de rendre le manuscrit plus lisible. Bien-entendu, je remercie aussi tous les membres du Jury, Dorin Bucur, Arian Novruzi, Marc Dambrine, Gregory Vial (il sera mentionné à nouveau plus loin ...).

Pour l'ambiance de rêve dans laquelle s'est déroulée ma thèse, il me faut remercier l'intégralité du plateau de mathématiques de l'antenne de Bretagne de l'ENS Cachan, et plus généralement tous les personnels de l'école. Quelques pensées en particulier pour Sandrine et les (trop) longues pauses cafés, pour Caro qui, si souvent, a fait le taxi, pour Juju et Vincent qui me laissaient squatter dans leur bureau, pour Greg et Virginie qui, après mon départ de l'Antenne, retrouveront enfin un peu de liberté, et bien sûr pour Sophie, notamment pour les petits défis du mardi midi.

Quelques pensées aussi pour tous ceux dont j'ai croisé la route pendant ces quelques années à Rennes, Anne-Laure en tête, Maryline, Sisi, toute la bande de la rue Pierre Gourdel, les anciens du 129, Kiki bien sûr, Franzouille et Clairon, Dydy et Julian, Jérôme, mon Cricri d'amour, tous les anciens de l'ENS, les quelques doctorants avec qui j'ai sympathisé, les potes de l'Aikido et de la Salsa, ...

Enfin, des pensées affectueuses pour ma famille, si loin et pourtant toujours si disponible. En particulier, mes pensées se tournent vers ma mère et ma peste de petite soeur, qui m'ont manquées chaque jour passé loin de chez moi.

Table des matières

I	Résultats de régularité	13
1	Rappels	19
1.1	Sur les ensembles H_0^1	19
1.1.1	Première définition	19
1.1.2	Capacité, fonction quasi-continue	20
1.1.3	Définition générale de l'espace H_0^1	21
1.1.4	Relaxation	22
1.2	Sur le périmètre	23
1.2.1	Définition	23
1.2.2	Semi-continuité, compacité	24
2	Résultats d'existence	25
2.1	Décroissance de J	25
2.2	Relaxation	26
2.3	Cas où D est borné	26
2.4	Contre-exemples avec D non borné	28
2.4.1	Un contre-exemple portant sur la forme de D	28
2.4.2	Un contre-exemple portant sur la régularité de f	29
2.5	Résultats partiels dans le cas $D = \mathbf{R}^d$	30
2.5.1	Quelques estimations	30
2.5.2	Étude de suites minimisantes	31
3	Résultat d'équivalence	33
3.1	Le résultat principal	33
3.2	Quelques estimations	34
3.3	Preuve de l'équivalence : étude du cas $ \Omega_\lambda^* < m$	36
3.3.1	Une extension d'un lemme d'I. Tamanini	36
3.3.2	Application	39
3.4	Preuve de l'équivalence : étude du cas $ \Omega_\lambda^* > m$	40
3.4.1	Étude de la variation de J par des transformations élémentaires	40
3.4.2	Application	42
3.5	Remarque sur un autre problème	43

4	$\frac{1}{2}$-Hölder continuité de la fonction d'état	45
4.1	Premières propriétés de la forme optimale	46
4.2	Énoncé du résultat	49
4.3	Quelques rappels sur le Laplacien	49
4.4	Un lemme clé	52
4.4.1	Cas où u est positive	52
4.4.2	Cas général	53
4.5	Fin de la preuve du théorème 4.7	58
5	Lipschitziannité de la fonction d'état quand $f \geq 0$	61
5.1	Un résultat de densité extérieure	61
5.2	Lipschitziannité, principe de la preuve	63
5.3	Description des perturbations	65
5.4	Utilisation des perturbations	67
5.4.1	Variations du périmètre	68
5.4.2	Variations de J	69
5.4.3	Conclusion	74
5.5	Construction de la surface S	74
5.6	Quelques lemmes techniques	76
5.6.1	Un lemme utile	76
5.6.2	Quelques résultats sur la fonction distance	76
5.7	Annexe : Un résultat de densité intérieure	79
6	Régularité supérieure	85
6.1	Quasi-minimiseurs et conséquences	85
6.2	Équation d'Euler	87
6.2.1	Le bon représentant de la forme optimale	87
6.2.2	Écriture sous forme de graphe du bord	88
6.2.3	Équation d'Euler	88
6.3	Résolution dans le cas $d = 2$	92
6.4	Régularité $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ dans le cas général $2 \leq d$	94
6.5	Régularité supérieure	97
7	Cas de la première valeur propre du Laplacien-Dirichlet	99
7.1	La fonctionnelle	99
7.2	Résultats d'existence	99
7.3	Résultats d'équivalence	100
7.4	$\frac{1}{2}$ -Hölder continuité de la fonction d'état	102
7.5	Lipschitziannité de la fonction d'état	105
7.5.1	Résultat de densité	105
7.5.2	Preuve de la lipschitziannité	105
7.6	Régularité supérieure	106

8	Cas de l'énergie de Dirichlet associée à un opérateur elliptique en forme divergente	109
8.1	Le problème	109
8.2	Les estimations	111
8.2.1	Estimations directes	111
8.2.2	Étude de la mesure $\text{div}(A\nabla u)$	111
8.3	Continuité de la fonction d'état	113
8.4	Hölder continuité de la fonction d'état	116
8.5	Quelques lemmes techniques	120
 II Simulations numériques pour des partitionnements optimaux		125
9	Les problèmes étudiés	129
9.1	Problème de la somme des valeurs propres pour deux domaines	129
9.1.1	Origine du problème, résultats connus	129
9.1.2	Deux formulations du problème	131
9.1.3	Lien avec la γ -convergence, un contre-exemple	132
9.2	Problème du maximum des valeurs propres pour trois domaines	135
9.3	Problème de la somme des valeurs propres avec pénalisation de volume	136
9.3.1	Le problème	136
9.3.2	Propriété d'existence	136
9.3.3	Résultat d'équivalence	137
10	Traitement numérique	145
10.1	Un survol des méthodes existantes	145
10.2	Le problème générique, son traitement	146
10.2.1	Création d'une population	146
10.2.2	Description d'une itération de l'algorithme génétique	147
10.2.3	Utilisation	148
10.3	Notre problème, Question de la représentation	148
10.3.1	Représentation par liste de cellules	149
10.3.2	Représentation par diagrammes de Voronoï	149
10.4	Implémentation des listes de cellules	149
10.4.1	Initialisation	150
10.4.2	Croisement	150
10.4.3	Mutation	152
10.5	Implémentation des diagrammes de Voronoï	153
10.5.1	Initialisation	153
10.5.2	Croisement	154
10.5.3	Mutation	154
10.5.4	Comparaison entre les deux représentations	154
10.6	Matériel utilisé	155
10.6.1	Description	155
10.6.2	Exemples de temps de calculs	155
10.7	Résultats	156

10.7.1 Premier problème	156
10.7.2 Second problème	158
10.7.3 Troisième problème	158

Introduction

Les pages suivantes sont dédiées à l'étude de problèmes d'optimisation de forme. Cette thèse s'est déroulée en deux parties d'importances inégales.

La première partie, portant sur l'étude de problèmes faisant intervenir l'énergie associée à une EDP sur un domaine de \mathbf{R}^d ainsi que son périmètre, et une contrainte ou une pénalisation portant sur sa mesure, constitue l'apport essentiel de cette thèse. Outre les résultats d'existence de solution à de tels problèmes, ou encore les questions relatives au contexte que l'on doit choisir pour que le problème soit bien posé, le problème de la régularité des formes optimales a plus spécifiquement été traité. La seconde partie de la thèse, d'importance moindre, a porté sur le traitement numérique de problèmes de partitions optimales à l'aide d'algorithmes génétiques.

Le premier problème, portant sur les questions de régularité des formes optimales, peut être précisé ainsi : soit D un ouvert de \mathbf{R}^d avec $d \geq 2$. Pour toute partie Ω mesurable de D , $P(\Omega)$ désigne le périmètre de cet ensemble (voir le chapitre 1), $|\Omega|$ sa mesure de Lebesgue d -dimensionnelle, et $J(\Omega)$ une énergie associée à un problème d'EDP sur Ω (en pratique, on considèrera l'énergie associée à un problème de Poisson avec condition au bord de type Dirichlet, ou encore une fonctionnelle associée à un problème de valeur propre).

Soit maintenant un $m \in (0, |D|)$. Pour tout $\lambda > 0$, on définit

$$\mathcal{E}(\Omega) = J(\Omega) + P(\Omega),$$

$$\mathcal{E}_\lambda(\Omega) = J(\Omega) + P(\Omega) + \lambda|\Omega| - m|.$$

On définit les ensembles admissibles au sens suivant :

$$\mathcal{A} = \{\Omega \subset D : \Omega \text{ mesurable, } |\Omega| < \infty\},$$

$$\mathcal{A}_m = \{\Omega \in \mathcal{A} : |\Omega| = m\}.$$

Les problèmes d'optimisation de forme considérés sont alors les suivants :

(i) *Le problème contraint :*

$$\begin{cases} \Omega^* \in \mathcal{A}_m \\ \mathcal{E}(\Omega^*) = \inf \{ \mathcal{E}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}_m \} \end{cases} \quad (\text{P})$$

(ii) *le problème pénalisé :*

$$\begin{cases} \Omega_\lambda^* \in \mathcal{A} \\ \mathcal{E}_\lambda(\Omega_\lambda^*) = \inf \{ \mathcal{E}_\lambda(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A} \} \end{cases} \quad (\text{P}_\lambda)$$

Remarquons tout d'abord que dans le cas où la fonctionnelle J est identiquement nulle, il s'agit là des problèmes isopérimétriques classiques. La régularité des formes optimales associées est alors un problème difficile, mais aujourd'hui résolu. Dans ce cas particulier, on a

les frontières réduites $\partial_{\text{red}}\Omega^*$ et $\partial_{\text{red}}\Omega_\lambda^*$ sont des hypersurfaces analytiques,

$$\text{et } \forall s > d - 8, \mathcal{H}^s(\partial\Omega^* \setminus \partial_{\text{red}}\Omega^*) = \mathcal{H}^s(\partial\Omega_\lambda^* \setminus \partial_{\text{red}}\Omega_\lambda^*) = 0.$$

L'autre aspect des fonctionnelles considérées se découvre lorsque l'on ôte le terme de périmètre dans \mathcal{E} et \mathcal{E}_λ pour ne plus considérer que la minimisation de la fonctionnelle d'énergie avec contrainte ou pénalisation de mesure. On détaillera dans la suite des exemples de régularité déjà connus sur ce type de fonctionnelles.

L'idée sous-jacente aux travaux qui suivent est que, chacune des parties de \mathcal{E} ou de \mathcal{E}_λ engendrant de la régularité, on peut espérer obtenir de la régularité pour les formes optimales, et c'est en effet les résultats obtenus dans la première partie, pour quelques exemples de fonctionnelles J :

- (i) l'énergie de Dirichlet pour une régularité suffisante du second membre,
- (ii) la première valeur propre du Laplacien dans le cas général.

Une des premières étapes du raisonnement consistera à prouver que le problème (P) est équivalent au problème (P_λ) pourvu que λ soit suffisamment grand. Une seconde étape consiste à prouver une régularité *suffisante* (on reviendra sur cette notion) pour la fonction d'état associée à l'EDP considérée. Une troisième partie consistera à appliquer des résultats connus sur les surfaces minimales pour obtenir un premier résultat de régularité sur la frontière de la forme optimale. Enfin, on essayera de mettre en place des méthodes d'obtention de régularité supérieure.

La seconde partie de cette thèse a porté sur des questions numériques. Les problèmes qui y ont été étudiés peuvent être formulés dans un cadre général de la manière suivante : considérons un ouvert borné D de \mathbf{R}^d et appelons forme admissible une famille à k éléments (A_1, \dots, A_k) , les A_i étant des sous-ensembles de D deux à deux disjoints et de réunion D . On se donne une fonction \mathcal{F} définie sur l'ensemble des formes admissibles à valeurs dans \mathbf{R} et on cherche à trouver les formes optimales de \mathcal{F} .

Parmi les problèmes étudiés, citons, pour $k = 2$, celui de la fonctionnelle :

$$(A_1, A_2) \mapsto \lambda_1(A_1) + \lambda_1(A_2),$$

et, pour $k = 3$, celui de la fonctionnelle

$$(A_1, A_2, A_3) \mapsto \max \{ \lambda_1(A_1), \lambda_1(A_2), \lambda_1(A_3) \}.$$

L'étude numérique de ces problèmes a notamment permis d'obtenir des idées quant à la forme des partitions optimales pour certains domaines D où des conjectures à ce sujet existaient déjà, et ainsi de les "confirmer" ou de les "infirmer" numériquement.

Un autre problème étudié consiste à mettre une contrainte de mesure sur l'union des A_i . Les formes admissibles sont par exemple les couples (A_1, A_2) , les ensembles A_1 et A_2 étant inclus dans D , d'intersection vide, et de réunion de mesure m fixée dans $(0, |D|)$. La première étape a consisté à se ramener à un problème sans contrainte

de mesure, mais avec une fonctionnelle pénalisée. On traite alors numériquement ce problème pénalisé.

Pour tous ces problèmes, des méthodes de type algorithmes génétiques ont été mises en place. Ce choix a eu plusieurs motivations. La première était la mise en place elle-même de cette méthode, du couplage avec le logiciel de calcul Melina, et de la distribution des calculs sur un nombre conséquent de machines. La seconde motivation était d'utiliser les algorithmes génétiques pour obtenir des renseignements quant à *l'allure* des formes optimales, l'objectif étant d'utiliser ces renseignements pour lancer ensuite des méthodes de résolution plus précises, par exemple par variation de frontière.

Première partie

Résultats de régularité

Introduction

L'objectif de cette partie est de prouver des résultats de régularité des formes optimales dans des problèmes d'optimisation de forme pénalisés par le périmètre.

Les problèmes traités dans cette partie apparaissent, par exemple, dans les problèmes de formage électromagnétique, où l'on cherche à modéliser la forme d'un métal liquide contraint par un champ électromagnétique. Dans une approche variationnelle de ces problèmes, la forme à l'équilibre minimise l'énergie totale du système considéré. La formulation mathématique est donc naturellement celle d'un problème d'optimisation de forme. On remarque d'abord qu'on impose une contrainte sur la mesure des formes, ce qui traduit le fait que l'on dispose d'une quantité donnée de métal. L'énergie totale est alors composée de deux termes : l'énergie de tension de surface qui, comme d'habitude, est proportionnelle au périmètre de la forme occupée par le liquide, et l'énergie électromagnétique, décrite par le potentiel électromagnétique, solution d'un problème de Dirichlet. De manière générale, ce genre de fonctionnelle apparaît dans de nombreuses applications (on pourra se reporter à [HP05]).

Le problème considéré est donc de la forme (P) dans le cas particulier où la fonctionnelle J est la suivante

$$J(\Omega) = \inf \{ G(v) : v \in H_0^1(\Omega) \} \quad (1)$$

où $G(v) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - f v$. Dans la suite, on appellera souvent $J(\Omega)$, par abus de langage, l'énergie de Dirichlet associée à la forme Ω . En effet, dans le cas où Ω est ouvert, on sait que $J(\Omega) = G(u_{\Omega})$ où u_{Ω} est la solution du problème suivant, dit *problème de Dirichlet* (où f est une fonction donnée de $L^2(D)$) :

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega} = f \text{ dans } \Omega, \\ u_{\Omega} \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2)$$

Dans la suite, on appellera *fonction d'état* associée à Ω la fonction u_{Ω} . La définition de $H_0^1(\Omega)$ peut être étendue à un ensemble Ω a priori seulement mesurable (pour cela voir le chapitre 1) et la fonction d'état u_{Ω} est alors définie comme la seule fonction de $H_0^1(\Omega)$ telle que $J(\Omega) = G(u_{\Omega})$.

L'étude de la fonctionnelle sans terme de périmètre, i.e., la minimisation de la fonctionnelle J , a déjà été faite. En particulier, quand f est bornée et positive, la régularité complète du bord est obtenue quand $d = 2$, et la régularité à un ensemble de mesure de Hausdorff \mathcal{H}^{d-1} nulle près quand $d \geq 3$ (on pourra se reporter à [Bri04] et à [BHP05]). On remarquera que, même dans le cas $d = 2$, des singularités de type point de rebroussement peuvent apparaître quand le signe de f change. Dans tous les

cas, une étape préliminaire reste l'étude de la fonction d'état associée à ce problème. La régularité Lipschitz de la fonction d'état est prouvée dans [BHP05]. Dans le cas où la fonctionnelle J est la première valeur propre du Laplacien avec condition au bord de Dirichlet, le même type de résultat se trouve encore dans [BHP05]. Avec la première valeur propre, mais pour des opérateurs de type $\operatorname{div}(A\nabla)$, on pourra se référer à [Wag05], et pour des opérateurs de type p -Laplacien non homogènes, à [BW07].

De la même manière, l'étude du terme de périmètre seul cette fois, est classique. On pourra se référer par exemple à [Giu84], ou encore aux travaux de Tamanini et aux références qui y sont données ([Tam94], [Tam88], [GMT83]). Le résultat essentiel (et que nous utiliserons indirectement) est que le bord réduit des formes optimales est lisse, et que le bord au sens de la mesure et le bord réduit ne diffèrent qu'à un ensemble de dimension de Hausdorff $d - 8$ près (si l'on travaille en dimension d).

Le postulat de base des travaux qui suivent a consisté à voir dans le périmètre un terme *régularisant*. C'est à dire, on a voulu utiliser sa présence dans la fonctionnelle de forme et ses propriétés pour trouver de la régularité sur les formes optimales. Pour ce faire, la première chose a été d'"éliminer" le terme associé à l'EDP, et pour cela, il fallait arriver à prouver une régularité suffisante de la fonction d'état. Notre contribution principale a été de prouver, quand la fonction f est positive et régulière, que la fonction d'état associée à une forme optimale est lipschitzienne. Cette régularité nous a alors permis d'utiliser les propriétés du périmètre pour obtenir un premier résultat de régularité sur le bord de la forme optimale. Ensuite, on a mis en oeuvre des procédés classiques faisant l'aller-retour entre la fonction d'état et le bord du domaine pour monter en régularité.

On peut trouver un problème semblable dans [CL03]. Les auteurs y étudient un problème voisin, avec un terme de compliance à la place de l'énergie de Dirichlet, et en dimension 2 uniquement. Ils prouvent que le bord des formes optimales est lisse, en utilisant la régularité apportée par le périmètre, après avoir fait disparaître le terme de compliance. Bien que la technique que nous allons développer soit très différente, de même que le contexte utilisé, les étapes clés (élimination du terme EDP, utilisation du périmètre, bootstrap) restent les mêmes. Enfin, on trouve dans [ACKS01] l'étude d'un couplage EDP périmètre. Le problème est différent du notre (il s'agit là d'un problème à deux phases avec minimisation de l'énergie totale et de la surface de la frontière libre) mais la technique qui y a été développée a été à la base de notre analyse.

Énumérons les principales contributions de ce travail. Tout d'abord, on a cherché à obtenir des résultats d'équivalence des problèmes (P_λ) et (P) pour des λ grands. En effet, l'observation du problème (P) nous a conduits à remarquer qu'il est *difficile* de perturber une forme optimale Ω . Par exemple, une perturbation élémentaire et naturelle du type $\Omega \cup B$, pour une boule quelconque B dans D , *n'est plus admissible*. D'un autre côté, ce type de perturbation est admissible en ce qui concerne le problème (P_λ) . L'idée de se ramener du premier au second type de problème est classique et a déjà été exploitée dans [BHP05] en ce qui concerne le problème de l'énergie de Dirichlet seule, ou encore dans [GMT83] ou [Tam88] en ce concerne le périmètre seul. L'idée commune est toujours que les résultats de régularité sont obtenus *plus facilement* pour le problème (P_λ) et transférés, via le résultat d'équivalence, sur le problème (P) . Dans notre étude, les résultats d'équivalence prouvés sont valides pour des domaines de travail D présentant une certaine structure. En effet, en pratique, l'obtention de ces résultats d'équivalence

provient de notre capacité à faire des perturbations d'un sous-ensemble de D tout en contrôlant l'influence de ces perturbations à la fois sur la variation de l'énergie de Dirichlet et sur la variation du périmètre. Pour des domaines étoilés, sur lesquels a porté notre étude, les homothéties constituent des perturbations qui ont permis ce contrôle.

L'étape suivante, préalable à toute étude de la régularité des formes optimales, réside dans l'étude de la régularité de la fonction d'état. Pour une forme optimale Ω du problème (P_λ) , l'utilisation de perturbations de la forme $\Omega \cup B$ pour des boules B nous a conduit directement au premier résultat de régularité de la fonction d'état u_Ω , à savoir la $\frac{1}{2}$ -Hölder continuité. Ces résultats ont fait l'objet de la publication [Lan07a]. Ils passent essentiellement par l'obtention de bonnes estimations sur la distribution $\Delta|u_\Omega|$, procédé utilisé par exemple dans [BHP05]. Ces estimations ont été obtenues dans plusieurs cadres :

- (i) d'abord, lorsque la fonction d'état est positive, de très faibles hypothèses sur f (f dans L^q pour q assez grand) suffisent.
- (ii) Sans hypothèse de signe, il faut cette fois estimer à la fois Δu_Ω^+ et Δu_Ω^- . Un outil indispensable dans l'étude de ce couplage a été le lemme de Monotonie de [ACF84]. Or, une hypothèse fondamentale dans l'étude de ce lemme demande que les mesures Δu_Ω^+ et Δu_Ω^- soient bornées inférieurement. La preuve dans ce cadre requiert donc comme hypothèse supplémentaire que la fonction f soit bornée. De plus, un préalable pour appliquer le lemme de Monotonie est aussi de prouver la continuité de u_Ω .
- (iii) On a enfin prouvé ce résultat de régularité dans le cas où la fonctionnelle J n'est plus associée au Laplacien, mais à un opérateur plus général de type elliptique sous forme divergente ($G(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - \int_\Omega f u$). On utilisera ici une approche différente de (i) et (ii), exploitant a priori la régularisation par le périmètre. On utilisera ensuite des résultats de la théorie des opérateurs elliptiques, et, en particulier, on demandera à la fonction f d'être positive (plusieurs applications du principe du maximum) et bornée.

L'étude précédente ne permet pas de conclure directement à la régularité du bord de la forme optimale dans les cas considérés. En effet, il faudrait avoir prouvé une régularité de type $(\frac{1}{2} + \varepsilon)$ -Hölder continuité pour pouvoir espérer conclure. Le résultat suivant a consisté à prouver que, si l'on suppose la fonction f bornée, positive, et Hölder continue, alors la fonction d'état associée à une forme optimale est lipschitzienne. Ce résultat s'appuie fortement sur les méthodes développées dans [ACKS01]. Il a fait l'objet de la publication [Lan07b].

Sous l'hypothèse de lipschitzianité de la fonction d'état associée à une forme optimale, on peut appliquer la théorie des quasi-minimiseurs et prouver ainsi, d'une part que la frontière réduite de la forme optimale a une structure de variété $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, et d'autre part que la différence entre le bord (au sens de la mesure) de la forme optimale et ce bord réduit est de mesure \mathcal{H}^s nulle pour tout $s > d - 8$. L'étape suivante a consisté alors en l'écriture de l'équation d'Euler associée à la forme optimale, formellement :

$$\kappa_\Omega = \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \text{constante},$$

où κ_Ω désigne la courbure moyenne au bord. On prouve alors, par un argument de

type “bootstrap”, que là où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, le bord réduit de la forme optimale est de classe $\mathcal{C}^{k+3,\alpha}$.

Enfin, l’intégralité de ces résultats a été transposée dans le cas où la fonctionnelle J est remplacée par $\lambda_1(\Omega)$, la première valeur propre de l’opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet au bord. Notons que, dans ce cas, la fonction d’état est également positive puisqu’il s’agit de la première fonction propre.

Énonçons brièvement le plan de cette partie.

- Dans un premier chapitre, on va rappeler un certain nombre de résultats utiles dans la suite, concernant notamment les espaces H_0^1 ainsi que la notion de périmètre. On donnera un certain nombre de références bibliographiques en omettant souvent les preuves des résultats énoncés.
- Dans un second chapitre, on mentionnera brièvement quelques résultats d’existence pour la classe de problèmes étudiée.
- Dans un troisième chapitre, on va étudier l’équivalence des problèmes (P) et (P_λ) .
- Dans un quatrième chapitre, on présente la preuve de la $\frac{1}{2}$ -Hölder continuité dans un cadre général.
- Le cinquième chapitre est consacré à la preuve de la Lipschitziannité de la fonction d’état.
- Le sixième chapitre vise à appliquer les résultats précédents en vue d’obtenir des résultats de régularité sur la frontière d’une forme optimale. On y étudie aussi l’obtention de régularité d’ordre supérieur.
- Dans le septième chapitre, on remplace la fonctionnelle J par λ_1 la première valeur propre de l’opérateur $-\Delta$ avec conditions au bord de Dirichlet et on indique comment les résultats précédents s’adaptent.
- Enfin, dans un dernier chapitre, on remplace la fonctionnelle J par l’énergie associée non plus à l’opérateur $-\Delta$, mais à un opérateur elliptique sous forme divergentielle. On verra comment on prouve la continuité puis la $\frac{1}{2}$ -Hölder continuité de la fonction d’état, sous de fortes hypothèses sur la fonction f .

Chapitre 1

Rappels

Les fonctionnelles que nous manipulerons dans la suite de cette partie feront intervenir, de manière générale, un terme d'énergie associé à une EDP et un terme de périmètre. Afin de prouver les théorèmes d'existence, il sera souvent nécessaire de *relaxer* les problèmes considérés. En pratique, cela se résumera à prendre pour formes admissibles des ensembles seulement *mesurables*. L'objet de ce chapitre est de rappeler, dans une première partie, une définition générale que l'on peut donner aux ensembles H_0^1 , qui constituent le cadre que nous utiliserons pour les énergies d'EDP. Dans une seconde partie, on rappellera la définition générale du périmètre et quelques résultats de semi-continuité et de compacité utilisés dans la suite.

1.1 Sur les ensembles H_0^1

En pratique, on va travailler sur des sous-ensembles d'un domaine fixe D (ce sera d'ailleurs le cadre des problèmes d'optimisation de forme que nous considérerons plus tard). On suppose donc que D est un ouvert régulier (pour l'instant non nécessairement borné) de \mathbf{R}^d .

1.1.1 Première définition

La définition de l'ensemble H_0^1 pour un ouvert est classique (on notera, pour un ouvert Ω , par $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact inclus dans l'ensemble Ω) :

Définition 1.1. Soit Ω un ouvert inclus dans D . On définit la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est alors défini comme le complété de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

L'un des objectifs des résultats énoncés ci-après est de fournir une définition pertinente de l'ensemble $H_0^1(\Omega)$ quand l'ensemble Ω est "seulement" mesurable.

1.1.2 Capacité, fonction quasi-continue

C'est l'outil qui permet en quelque sorte de "mesurer" les ensembles du point de vue de leur influence sur les espaces H_0^1 . En voici la définition :

Définition 1.2. Soit K un compact de \mathbf{R}^d . On pose

$$\text{cap}(K) = \inf \{ \|v\|_{H_0^1(\mathbf{R}^d)}^2 : v \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d), v \geq 1 \text{ sur } K \}.$$

Pour un ouvert ω de \mathbf{R}^d , on pose

$$\text{cap}(\omega) = \sup \{ \text{cap}(K) : K \subset \omega, K \text{ compact} \}.$$

Enfin, pour un sous-ensemble quelconque E de \mathbf{R}^d , on pose

$$\text{cap}(E) = \inf \{ \text{cap}(\omega) : E \subset \omega, \omega \text{ ouvert} \}.$$

On a alors une définition équivalente :

$$\text{cap}(E) = \inf \{ \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^d)}^2 : v \in H_0^1(\mathbf{R}^d), v \geq 1 \text{ p.p. sur un voisinage de } E \}.$$

(avec $\text{cap}(E) = \infty$ si l'ensemble ci-dessus est vide).

Remarque. (i) De la même manière que les ensembles de mesure nulle donnent naissance à la notion de *presque partout*, les ensembles de capacité nulle engendrent la notion de *quasi-partout*.

(ii) En pratique, les ensembles de capacité nulle sont *transparents* vis-à-vis des espaces H_0^1 .

(iii) Pour plus de détails sur les propriétés des capacités, on pourra consulter [HP05], [Zie89].

Voici une autre notion engendrée par les capacités :

Définition 1.3. Une fonction $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *quasi-continue* si et seulement si il existe une suite décroissante d'ouverts de \mathbf{R}^d : $(\omega_n)_n$, vérifiant

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(\omega_n) &= 0 \\ \text{la restriction de } f &\text{ au complémentaire de } \omega_n \text{ est continue.} \end{aligned}$$

Cette notion est en fait conçue *pour* les fonctions des espaces H_0^1 . En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Toute fonction f de $H_0^1(\mathbf{R}^d)$ admet un représentant quasi-continu \tilde{f} qui est unique modulo l'égalité quasi-partout.*

Remarque. Dans la suite, la notation $\tilde{\cdot}$ désignera toujours le représentant quasi-continu.

De la même manière que les ouverts sont associés aux fonctions continues, on définit les quasi-ouverts :

Définition 1.4. Un sous-ensemble Ω de D est dit *quasi-ouvert* s'il existe une suite décroissante d'ouverts $(\omega_n)_n$ telle que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(\omega_n) &= 0, \\ \forall n, \Omega \cup \omega_n &\text{ est ouvert.} \end{aligned}$$

On fait alors le lien entre fonction quasi-continue et quasi-ouvert (dans la suite, on a utilisé la notation $[F > \alpha]$ pour désigner l'ensemble $\{x : F(x) > \alpha\}$, et on définit de façon semblable les ensembles $[F < \alpha]$ et $[F \neq \alpha]$) :

Proposition 1.2. *Soient $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction quasi-continue et α un réel. Alors l'ensemble $[f > \alpha]$ est un quasi-ouvert. En particulier, si u est une fonction de $H_0^1(\mathbf{R}^d)$, $[\tilde{u} > \alpha]$ est un quasi-ouvert, et tout quasi-ouvert est de cette forme.*

1.1.3 Définition générale de l'espace H_0^1

La définition générale des espaces H_0^1 découle du résultat suivant :

Théorème 1.3. *Soit Ω un ouvert quelconque contenu dans D . Alors*

$$(u \in H_0^1(\Omega)) \Leftrightarrow (u \in H_0^1(D) \text{ et } \tilde{u} = 0 \text{ quasi-partout sur } D \setminus \Omega).$$

Une définition générale de l'espace H_0^1 suit :

Définition 1.5. Soit A un sous-ensemble de D . On pose

$$H_0^1(A) = \{u \in H_0^1(D) : \tilde{u} = 0 \text{ q.p. sur } D \setminus A\}.$$

Remarque. (i) Avec cette définition, on remarque que, pour n'importe quelle fonction $u \in H_0^1(D)$, on peut définir le quasi-ouvert $[\tilde{u} \neq 0]$, et on a alors $u \in H_0^1([\tilde{u} \neq 0])$.

(ii) Remarquons enfin que, pour u dans $H_0^1(\Omega)$, les fonctions u et ∇u sont définies sur tout D , mais nulle presque-partout sur $D \setminus \Omega$. En pratique, cela signifie que l'on a

$$\int_{\Omega} u^2 = \int_D u^2, \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_D |\nabla u|^2.$$

En utilisant cette remarque, on "oublie" parfois dans la suite d'écrire sous le signe \int l'ensemble sur lequel porte l'intégration.

Dans la suite, une propriété fondamentale de ces espaces est la suivante :

Lemme 1.4 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^d de mesure finie. Alors,*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} v^2 \leq C(d) |\Omega|^{\frac{2}{d}} \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Remarque sur la preuve. Elle est obtenue en utilisant la même inégalité, plus facile, lorsque les fonctions sont radiales, et le procédé de symétrisation radiale (voir [Cro91]). \square

Remarque. On peut alors définir de nouveau un problème de Dirichlet, en utilisant un procédé de minimisation. On cherche une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ réalisant

$$G(u) = \inf \{G(v) : v \in H_0^1(\Omega)\},$$

où $G(v) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - f v$. En utilisant l'inégalité de Poincaré, on prouve, par l'étude d'une suite minimisante qu'une telle fonction u existe, et qu'elle vérifie de plus

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v.$$

En particulier, on a donc

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} f u.$$

Pour un sous-ensemble Ω de D , on notera u_{Ω} cette fonction.

En ce qui concerne le rapport du passage à la limite avec les capacités, on a le résultat suivant :

Proposition 1.5. *Soit $(f_p)_p$ une suite de fonctions convergeant vers f dans $H^1(\mathbf{R}^d)$. Alors, il existe une suite-extraite $(f_{p_m})_m$ telle que f_{p_m} converge quasi-partout vers f .*

Un résultat sur les supports de fonctions, utilisé dans la seconde partie de ce document :

Proposition 1.6. *Soient u et v deux fonctions dans $H_0^1(D)$. Si $\tilde{u} \cdot \tilde{v} = 0$ quasi-partout, alors il existe un autre représentant quasi-continu \tilde{U} de u (donc égal à \tilde{u} quasi-partout) tel que $[\tilde{U} \neq 0] \cap [\tilde{v} \neq 0] = \emptyset$.*

Enfin, une notation pratique dans la suite :

Définition 1.6. Soit u une fonction $H_0^1(D)$, on définit $\Omega_u = [\tilde{u} \neq 0]$. On remarque que cet ensemble est défini à un ensemble de capacité nulle près.

1.1.4 Relaxation

Dans l'étude de suites minimisantes pour les problèmes d'optimisation considérés, il sera souvent intéressant de regarder des problèmes relaxés (On pourra se reporter à la remarque 4.5.4 dans [HP05]). Pour cela, on peut introduire les espaces suivants :

Définition 1.7. Soit Ω un sous-ensemble de D . On pose

$$\hat{H}_0^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(D) : u = 0 \text{ presque partout dans } D \setminus \Omega\}.$$

Un procédé pour prouver l'existence de forme optimale peut consister à remplacer l'espace H_0^1 sur lequel on travaille par l'espace \hat{H}_0^1 . On obtient ainsi une nouvelle fonctionnelle de forme pour laquelle on arrive à obtenir un résultat d'existence, puis à "remonter" à la fonctionnelle originelle. Pour ce faire, on peut remarquer que pour un Ω donné et un $u \in \hat{H}_0^1(\Omega)$, l'ensemble $\Omega' = \Omega \cup [\tilde{u} \neq 0]$ est équivalent au sens de la mesure à Ω (on entend par là que $|\Omega \Delta \Omega'| = 0$) et la fonction u est cette fois dans $H_0^1(\Omega')$. En pratique, pour certains problèmes, si Ω est une forme optimale pour le problème relaxé, Ω' est alors une forme optimale pour le problème initial.

Remarque. Mentionnons qu'une autre technique pour obtenir des résultats d'existence consiste à rajouter des contraintes sur les formes admissibles, afin de créer de la compacité. Par exemple, on ne s'intéresse qu'aux ouverts vérifiant une propriété de ε -cône, ou seulement une contrainte de type capacitaire. En dimension 2, on peut donner des contraintes sur le nombre de composantes connexes d'un ouvert et le nombre de composantes connexes de son complémentaire. Un exemple d'application de cette méthode peut par exemple être trouvé dans [CL03].

1.2 Sur le périmètre

Pour trouver des détails concernant les résultats et définitions suivants, on pourra consulter les ouvrages clés suivants : [Fed69], [Zie89], [EG92].

1.2.1 Définition

Remarque. Pour un ouvert Ω borné, à bord régulier inclus dans \mathbf{R}^d , on a, par la formule de Stokes, pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi &= \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n \text{ où } n \text{ est la normale extérieure au bord de } \Omega \\ &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}. \end{aligned}$$

De plus, le cas d'égalité dans cette formule est réalisé (pour un Ω régulier) en prenant pour φ un prolongement à tout \mathbf{R}^d de la normale extérieure au bord de Ω tel que $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq 1$.

À partir de cette remarque a été généralisée la définition du périmètre :

Définition 1.8. Soit Ω un ensemble mesurable inclus dans \mathbf{R}^d . On définit le périmètre de Ω par la formule

$$P(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\},$$

où on a

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}^2 = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \sum_{i=1}^d \varphi_i^2(x).$$

Si l'on se donne un ouvert D de \mathbf{R}^d , on définit de même le périmètre relatif à D par

$$P(\Omega, D) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{R}^d), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}.$$

Remarque. (i) Remarquons tout d'abord que l'on a, selon cette définition, $P(\Omega) = P(\Omega, \mathbf{R}^d)$.

(ii) Ensuite, dans le cas où l'ensemble Ω est régulier, ces formules coïncident avec les formules usuelles :

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} d\sigma, \quad P(\Omega, D) = \int_{D \cap \partial\Omega} d\sigma.$$

(iii) Pour un ensemble Ω de périmètre fini, l'application $D \mapsto P(\Omega, D)$, a priori définie sur les ouverts, se prolonge en une application définie sur tous les sous-ensembles mesurables de \mathbf{R}^d . Cette application a alors une structure de mesure sur \mathbf{R}^d . On pourra se référer à [Giu84], ou encore à [EG92].

Proposition 1.7. *Deux propriétés du périmètre que nous utiliserons beaucoup dans la suite :*

(i) *Si Ω est un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^d et t un réel strictement positif, on a*

$$P(t\Omega) = t^{d-1}P(\Omega).$$

(ii) *Si A et B sont deux sous-ensembles mesurables de \mathbf{R}^d , on a*

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) \leq P(A) + P(B).$$

1.2.2 Semi-continuité, compacité

Dans les procédés d'optimisation, une étape importante sera l'étude de suites minimisantes d'ensembles. Pour cela, il sera important d'avoir deux propriétés concernant les suites d'ensembles : de la compacité, et de la semi-continuité. Pour ce faire, on commence par représenter une suite d'ensembles par la suite des fonctions indicatrices associées, suite qui peut être étudiée dans $L^1(\mathbf{R}^d)$:

Définition 1.9. Soient $(\Omega_n)_n$ une suite de sous-ensembles mesurables de \mathbf{R}^d , et Ω un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^d . On dira que $(\Omega_n)_n$ converge dans $L^1(\mathbf{R}^d)$ vers Ω si la suite des fonctions indicatrices $(\mathbf{1}_{\Omega_n})_n$ converge dans $L^1(\mathbf{R}^d)$ vers $\mathbf{1}_\Omega$.

Lemme 1.8 (Propriété de semi-continuité). *Soit $(\Omega_n)_n$ une suite de sous-ensembles mesurables de \mathbf{R}^d convergeant dans $L^1(\mathbf{R}^d)$ vers un sous-ensemble mesurable Ω de \mathbf{R}^d . Alors, pour tout domaine D ,*

$$P(\Omega, D) \leq \liminf_n P(\Omega_n, D).$$

Lemme 1.9 (Propriété de compacité). *Soient D un ouvert borné de \mathbf{R}^d , $(\Omega_n)_n$ une suite de sous-ensembles de D telle que la suite de réels $(P(\Omega_n, D))_n$ est bornée. Alors, on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $L^1(D)$ vers un certain sous-ensemble mesurable Ω de D .*

Remarque. On peut aussi faire le lien avec les fonctions BV (Cf. [Giu84]) : pour une fonction f dans $L^1(D)$, on commence par définir la quantité

$$\int_D |Df| = \sup \left\{ \int_D f \operatorname{div} \varphi : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{R}^d), \|\varphi\|_{L^\infty(D)} \leq 1 \right\}.$$

Alors, on dit que la fonction f est dans $BV(D)$ si $\int_D |Df| < \infty$. L'espace $BV(D)$ est muni de la norme

$$\|f\|_{BV(D)} = \|f\|_{L^1(D)} + \int_D |Df|.$$

En pratique, les propriétés de semi-continuité et de compacité précédemment énoncées sont des cas particuliers de propriétés similaires pour des suites de fonctions bornées dans $BV(D)$.

Chapitre 2

Résultats d'existence

Les résultats d'existence de solution aux problèmes d'optimisation usuels proviennent soit de l'étude de suites minimisantes, soit de considérations géométriques (utilisation de symétrisations). Cette seconde méthode ne peut pas fonctionner dans le cas qui nous intéresse ici : nous n'avons en effet a priori aucune information sur la "géométrie" du domaine considéré D et surtout aucune information sur d'éventuelles symétries de la fonction f . En premier lieu, on verra que si le domaine de travail D est borné, les résultats d'existence apparaissent plutôt simplement par l'étude de suites minimisantes. En revanche, on explicitera ensuite un contre-exemple où, avec un domaine D non-borné, l'absence de structure de la fonction f nous conduit à l'absence de solution. Enfin, on énoncera un certain nombre de résultats partiels dans le cas où $D = \mathbf{R}^d$.

Notation. Tout au long de ce document, lorsque l'on procède à une intégration sans préciser le domaine, cela correspond à une intégration sur le domaine de travail D :

$$\int F = \int_D F.$$

2.1 Décroissance de J

Commençons par rappeler la définition de J : pour un sous-ensemble mesurable Ω de D ,

$$J(\Omega) = \inf \{G(u) : u \in H_0^1(\Omega)\},$$

où, pour tout u dans $H_0^1(\Omega)$, on a

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} f u.$$

De nombreux résultats dans la suite sont soit simplifiés, soit simplement possibles, grâce à la décroissance de J :

Proposition 2.1. *La fonction J est décroissante : si Ω et Ω' désignent deux sous-ensembles mesurables de D , alors*

$$(\Omega \subset \Omega') \Rightarrow (J(\Omega') \leq J(\Omega)).$$

Démonstration. Cela découle simplement de ce que, lorsque $\Omega \subset \Omega'$, on a

$$H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega').$$

□

2.2 Relaxation

L'étude de l'existence de formes optimales aux problèmes (P) et (P_λ) peut être résolue en utilisant un procédé de relaxation. Pour ce faire, rappelons la définition des espace \hat{H}_0^1 :

$$\hat{H}_0^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(D) : u = 0 \text{ presque partout dans } D \setminus \Omega\} \supset H_0^1(\Omega).$$

Remarquons qu'en général, les espaces H_0^1 et \hat{H}_0^1 sont différents. Il suffit simplement de penser à $\Omega =]0, 1[\cup]1, 2[$ en dimension 1.

On définit alors une relaxation de la fonctionnelle J :

$$\hat{J}(\Omega) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} f u : u \in \hat{H}_0^1(\Omega) \right\},$$

et des relaxations des fonctionnelles \mathcal{E} et \mathcal{E}_{λ} :

$$\hat{\mathcal{E}}(\Omega) = \hat{J}(\Omega) + P(\Omega), \quad \hat{\mathcal{E}}_{\lambda}(\Omega) = \hat{J}(\Omega) + P(\Omega) + \lambda ||\Omega| - m|.$$

Remarque. Remarquons que, à l'instar de la fonctionnelle J , la fonctionnelle \hat{J} est décroissante. En particulier. Comme de plus $\hat{J}(D) = J(D)$, on trouve que, pour tout sous-ensemble mesurable Ω de D ,

$$J(D) = \hat{J}(D) \leq \hat{J}(\Omega) \leq J(\Omega) \leq 0.$$

On peut alors formuler des problèmes relaxés :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Omega^* \in \mathcal{A}_m \\ \hat{\mathcal{E}}(\Omega^*) = \inf \{ \hat{\mathcal{E}}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}_m \} \end{cases} \quad (\hat{\text{P}})$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Omega^* \in \mathcal{A} \\ \hat{\mathcal{E}}_{\lambda}(\Omega^*) = \inf \{ \hat{\mathcal{E}}_{\lambda}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A} \} \end{cases} \quad (\hat{\text{P}}_{\lambda})$$

La méthode utilisée consistera donc à prouver que les problèmes relaxés ont des solutions, puis, à partir de ces solutions, de construire des solutions aux problèmes initiaux.

2.3 Cas où D est borné

On commence par l'étude des problèmes relaxés :

Lemme 2.2. *Dans le cas où D est borné, les problèmes $(\hat{\text{P}})$ et $(\hat{\text{P}}_{\lambda})$ admettent des solutions.*

Démonstration. On reprend essentiellement la preuve de [HP05].

(i) *Cas du problème (\hat{P}) .*

Considérons une suite minimisante $(\Omega_n)_n$ pour ce problème. En particulier, la suite $(P(\Omega_n) + \hat{J}(\Omega_n))_n$ est bornée, par exemple par une constante M . En utilisant la décroissance de la fonctionnelle \hat{J} , on trouve que,

$$\forall n \geq 0, P(\Omega_n) \leq M - \hat{J}(\Omega_n) \leq M - J(D) < \infty.$$

En particulier, la suite de fonctions $(\mathbf{1}_{\Omega_n})_n$ est bornée dans $BV(D)$. En appliquant le lemme 1.9, on peut supposer (quitte à extraire) que cette suite converge vers une fonction $\mathbf{1}_\Omega$ dans $L^1(D)$ (et même presque partout). En particulier, de cette convergence forte et de la semi-continuité du périmètre pour la convergence forte L^1 , on a

$$|\Omega| = m \text{ et } P(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_n).$$

Pour tout Ω_n , on appelle $u_n = u_{\Omega_n}$ la fonction d'état associée, i.e.

$$u_n \in \hat{H}_0^1(\Omega_n) \text{ et } \hat{J}(\Omega_n) = G(u_n).$$

On a

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega_n} f u_n = \int_D f u_n \leq C(D, d) \|f\|_{L^2(D)} \|\nabla u_n\|_{L^2(D)},$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré dans D . En particulier, la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(D)$. On peut donc supposer, quitte à extraire, qu'elle converge faiblement dans $H_0^1(D)$ vers un élément $u \in H_0^1(D)$. Par les théorèmes de Rellich et de Lebesgue inverse, on peut même supposer, toujours quitte à extraire, que la convergence est forte dans $L^2(D)$ et presque partout. De cette convergence faible, et de la semi-continuité inférieure de la norme sur $H_0^1(D)$, on déduit

$$\frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_D |\nabla u_n|^2, \text{ et } \int_D f u = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f u_n.$$

En particulier,

$$P(\Omega) + G(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_n) + \hat{J}(\Omega_n).$$

Et on peut conclure si l'on prouve que $u \in \hat{H}_0^1(\Omega)$. Ceci provient de ce que, pour tout $n \geq 0$, la fonction $u_n \cdot (1 - \mathbf{1}_{\Omega_n})$ est nulle presque partout. En passant à la limite, la fonction $u \cdot (1 - \mathbf{1}_\Omega)$ est encore nulle presque partout, et donc $u = 0$ presque partout dans $D \setminus \Omega$, i.e., $u \in \hat{H}_0^1(\Omega)$. On a alors,

$$\hat{J}(\Omega) + P(\Omega) \leq \liminf_n \hat{J}(\Omega_n) + P(\Omega_n),$$

et donc Ω est une forme optimale du problème (\hat{P}) .

(ii) *Cas du problème (\hat{P}_λ) .*

On procède à un raisonnement similaire, à ceci près que les éléments de la suite minimisante n'ont pas tous nécessairement la même mesure. En revanche, la convergence L^1 forte des fonctions caractéristiques nous donne la convergence de $|\Omega_n|$ vers $|\Omega|$. L'ensemble Ω est, de la même manière que dans le (i), une forme optimale pour le problème (\hat{P}_λ) . \square

On en déduit le résultat sur les problèmes initiaux :

Théorème 2.3. *Dans le cas où D est borné, les problèmes (P) et (P_λ) admettent des solutions.*

Démonstration. On commence par introduire une solution au problème relaxé. Soit Ω une solution au problème (\hat{P}) (resp. au problème (\hat{P}_λ)) et soit u la fonction d'état associée, i.e.

$$u \in \hat{H}_0^1(\Omega) \text{ et } G(u) = \hat{J}(\Omega).$$

Alors considérons l'ensemble $\Omega' = \Omega \cup [\tilde{u} \neq 0]$. Comme u est un élément de $\hat{H}_0^1(\Omega)$, tout représentant de u est nul presque partout dans $D \setminus \Omega$, en particulier \tilde{u} . On en déduit que Ω et Ω' ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle, ce qui implique en particulier que

$$P(\Omega) = P(\Omega') \text{ et } |\Omega| = |\Omega'|.$$

Enfin, comme u est cette fois un élément de $H_0^1(\Omega')$ (puisque nul quasi-partout hors de Ω'), on a $J(\Omega') \leq G(u) = \hat{J}(\Omega)$. Par conséquent, l'ensemble Ω' est une forme optimale du problème (P) (resp. du problème (P_λ)). \square

Remarque. Dans le cas considéré ci-dessus, à savoir D borné, on peut encore prouver l'existence de formes optimales pour la fonctionnelle de forme obtenue en remplaçant, dans les définitions de \mathcal{E} et de \mathcal{E}_λ , le périmètre de la forme $P(\Omega)$ par son périmètre relatif $P(\Omega, D)$.

2.4 Contre-exemples avec D non borné

2.4.1 Un contre-exemple portant sur la forme de D

Dans le cas où D est non borné, il faudrait être capable d'utiliser la structure de groupe sous-jacente à \mathbf{R}^d pour prouver l'existence (ce que nous ne savons pas encore faire). Dans le cas où une telle structure est absente, on peut cependant prouver qu'il n'y a pas de forme optimale.

En effet, dans le cas où la fonction f est identiquement nulle (et donc aussi régulière que l'on veut!), la fonctionnelle J étant constante, les problèmes (P) et (P_λ) ne sont rien de plus que les problèmes isopérimétriques classiques. On exhibe ici un domaine D où l'existence de forme optimale n'a pas lieu.

On se place sur \mathbf{R}^2 . On considère une fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes :

g est strictement croissante sur \mathbf{R} ,

g est paire,

$$g(0) = 1/2, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1.$$

On définit alors le domaine de travail

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq g(x)\}.$$

Il suffit alors de remarquer que le problème isopérimétrique avec comme contrainte de volume le volume de la boule de rayon 1 dans \mathbf{R}^2 :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Omega \subset D, \text{ mesurable, avec } |\Omega| = m \text{ tel que} \\ \forall \Omega' \subset D, \text{ mesurable, avec } |\Omega'| = m, P(\Omega) \leq P(\Omega') \end{cases}$$

n'a pas de solution sur ce domaine D .

Pour le cas de la fonctionnelle de forme obtenue en remplaçant le périmètre de la forme $P(\Omega)$ par son périmètre relatif $P(\Omega, D)$, et dans le cas où D est non borné, on peut encore trouver des domaines où il n'y a pas existence (voir [HP05]).

2.4.2 Un contre-exemple portant sur la régularité de f

On montre ici, dans le cas où D est non borné, que le résultat d'existence d'une forme optimale tombe en défaut pour certains $f \in L^\infty$.

Considérons un réel m strictement positif donné, et posons $D = \mathbf{R}^d$. Considérons une suite de boules, deux à deux disjointes, $(B_n)_n$, dans \mathbf{R}^d , vérifiant la condition de volume : $|B_n| = m \cdot (1 - \frac{1}{n+2})$. Posons alors la fonction

$$f = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{B_n}.$$

Proposition 2.4. *Avec le domaine $D = \mathbf{R}^d$ et la fonction f définie ci-dessus (qui est bien bornée sur \mathbf{R}^d), le problème (P) n'a pas de solution.*

Démonstration. Tout d'abord, considérons une boule B dans \mathbf{R}^d et de volume m . Soit alors u la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 \text{ dans } B, \\ u = 0 \text{ sur } \partial B. \end{cases}$$

si

$$A = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 - \int_B u + P(B),$$

on vérifie que

$$\inf \{ \mathcal{E}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}_m \} \leq A.$$

En effet, si \tilde{B}_n désigne la boule de \mathbf{R}^d de même centre que B_n et de volume m , c'est un élément de \mathcal{A}_m , $P(\tilde{B}_n) = P(B)$ et

$$\lim_n J(\tilde{B}_n) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 - \int_B u.$$

Maintenant, soit une forme admissible Ω . Montrons que $\mathcal{E}(\Omega) > A$. Déjà, par l'inégalité isopérimétrique, on a $P(\Omega) \geq P(B)$, l'égalité n'ayant lieu que quand Ω est une boule de même mesure que B . Enfin par symétrisation radiale, on trouve que

$$J(\Omega) \geq \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 - \int_B u.$$

Supposons que l'on ait l'égalité $\mathcal{E}(\Omega) = A$. On a donc en particulier $P(\Omega) = P(B)$, ce qui signifie que Ω est une boule de volume $m = |B|$. On a $u_\Omega \in H_0^1(\Omega)$, mais $-\Delta u_\Omega$ ne peut être égal à 1 sur tout Ω d'où, par stricte convexité, on a

$$J(\Omega) > \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 - \int_B u,$$

et donc, $\mathcal{E}(\Omega) > A$, ce qui nous donne une contradiction.

Par conséquent, il n'y a pas de forme optimale pour ce problème. \square

2.5 Résultats partiels dans le cas $D = \mathbf{R}^d$

Dans le cas où D est l'espace tout entier, et où la fonction f est une fonction positive, non identiquement nulle et à support compact, on s'attend à avoir des résultats d'existence.

2.5.1 Quelques estimations

Un des objectifs serait d'étudier le comportement de suites minimisantes. Remarquons que, lorsque les ensembles considérés deviennent de plus en plus grands, le périmètre et la mesure ont tendance à croître, alors que l'énergie de Dirichlet a tendance à aller vers $-\infty$. Le premier objectif est donc de savoir si les fonctionnelles considérées sont bornées.

Proposition 2.5. *Soit M un nombre réel. Soit $\Omega \in \mathcal{A}_m$ tel que $\mathcal{E}(\Omega) \leq M$. Alors, on a*

$$\max \{ -J(\Omega), |\Omega|, P(\Omega) \} \leq C(d, \|f\|_{L^2}, m, M).$$

Démonstration. Soit u la fonction d'état associée à Ω . On a donc (voir le chapitre 1)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f u.$$

En appliquant au terme de droite l'inégalité de Hölder, puis celle de Poincaré (lemme 1.4), on trouve

$$\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 \leq C(d) \|f\|_{L^2} |\Omega|^{\frac{2}{d}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que $J(\Omega) = -\frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ est borné dans \mathbf{R} par des constantes dépendant de m , d et $\|f\|_{L^2}$. Le résultat de la proposition suit. \square

Proposition 2.6. *Il existe un $\lambda_0 = \lambda_0(d, \|f\|_{L^2}) \geq 0$ tel que,*

$$\forall \lambda > \lambda_0, \exists C = C(d, \|f\|_{L^2}, m, \lambda) \in \mathbf{R}, \forall \Omega \in \mathcal{A}, \mathcal{E}_\lambda(\Omega) \geq C.$$

Pour $d \geq 3$, on peut même prendre $\lambda_0 = 0$.

Démonstration. On adapte ici une méthode utilisée dans [BHP05]. Pour cela, posons

$$x = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ et } y = |\Omega|.$$

De l'inégalité de Poincaré (lemme 1.4), on déduit

$$J(\Omega) \geq \frac{1}{2}x^2 - C(d) \|f\|_{L^2} y^{\frac{1}{d}} x,$$

d'où l'estimation suivante sur \mathcal{E}_λ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(\Omega) &\geq \frac{1}{2}x^2 - C(d) \|f\|_{L^2} y^{\frac{1}{d}} x + \lambda|y - m| \\ &\geq \frac{1}{2} \left(x - C(d) \|f\|_{L^2} y^{\frac{1}{d}} \right)^2 + \lambda|y - m| - \frac{C(d)^2}{2} \|f\|_{L^2}^2 y^{\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Si $d \geq 3$, le second membre de cette dernière inégalité tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$. Si $d = 2$, c'est aussi le cas dès que $\lambda \geq \lambda_0 = C(d)^2 \|f\|_{L^2}^2$, puisqu'on a alors

$$\mathcal{E}_\lambda(\Omega) \geq \frac{C(d)^2}{2} \|f\|_{L^2} y - \lambda m \geq -\lambda m.$$

Dans tous les cas, on trouve le résultat. \square

Corollaire 2.7. *Si $\mathcal{E}_\lambda(\Omega) \leq M$, pour $\lambda > \lambda_0$ défini dans la proposition précédente, alors il existe $C = C(d, \|f\|_{L^2}, m, M)$ tel que*

$$\max \{ -J(\Omega), |\Omega|, P(\Omega) \} \leq C.$$

Démonstration. Les estimations obtenues dans la preuve de la proposition précédente nous montre donc, sous les hypothèse $\mathcal{E}_\lambda(\Omega) \leq M$ et $\lambda > \lambda_0$, que l'on a

$$|\Omega| \leq C(d, \|f\|_{L^2}, m, M).$$

les autres estimations s'obtiennent comme dans la preuve de la proposition 2.5. \square

2.5.2 Étude de suites minimisantes

On va voir que l'étude d'un procédé classique d'optimisation par des suites minimisantes n'est pas fructueuse. Pour cela, considérons une suite minimisante $(\Omega_n)_n$ pour le problème (P) (ou pour le problème (P_λ) sous l'hypothèse $\lambda \geq \lambda^*$). Pour tout n , notons u_n la fonction d'état associée à Ω_n . Les estimations précédentes nous donnent quelques premiers résultats :

Proposition 2.8. (i) *La suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(\mathbf{R}^d)$.*

(ii) *La suite $(\mathbf{1}_{\Omega_n})_n$ est bornée dans $BV(O)$ pour tout ouvert O borné de \mathbf{R}^d .*

On peut donc supposer, quitte à considérer une suite extraite, qu'il existe un u dans $H^1(\mathbf{R}^d)$ et un sous-ensemble mesurable Ω de \mathbf{R}^d tels que

$$u_n \rightarrow u \text{ faiblement dans } H_0^1(\mathbf{R}^d), \text{ presque partout et dans } L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^d),$$

$$\mathbf{1}_{\Omega_n} \rightarrow \mathbf{1}_{\Omega} \text{ dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d).$$

Comme précédemment, on peut supposer, quitte à remplacer Ω par $\Omega \cup [\tilde{u} \neq 0]$, que $u \in H^1_0(\Omega)$.

Le problème essentiel de cette méthode est qu'un phénomène de fuite de la masse à l'infini peut avoir lieu. Le résultat suivant permet de conclure quand il n'y a pas de fuite de la masse :

Théorème 2.9. *Si $\lim_n |\Omega_n| = |\Omega|$, alors Ω est une forme optimale pour le problème (P) (resp. pour le problème (P_λ)).*

Démonstration. En effet, de l'hypothèse $\lim_n |\Omega_n| = |\Omega|$, on déduit que la suite $(\mathbf{1}_{\Omega_n})_n$ converge fortement dans $L^1(\mathbf{R}^d)$ vers $\mathbf{1}_{\Omega}$. En effet, si l'on se donne un $\varepsilon > 0$, comme $|\Omega| \leq \liminf |\Omega_n|$ est fini, on trouve qu'il existe un $R > 0$ tel que $|\Omega \cap B(0, R)| \geq |\Omega| - \varepsilon$. De la convergence de la suite $(\mathbf{1}_{\Omega_n})_n$ vers $\mathbf{1}_{\Omega}$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d)$, on trouve que

$$\lim_n |\Omega_n \cap B(0, R)| = |\Omega \cap B(0, R)| \geq |\Omega| - \varepsilon = \left(\lim_n |\Omega_n| \right) - \varepsilon.$$

On en déduit que, pour n grand (par exemple n plus grand qu'un N donné),

$$|\Omega_n \cap B(0, R)| \geq |\Omega_n| - 2\varepsilon, \text{ i.e., } |\Omega_n \setminus B(0, R)| \leq 2\varepsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} |\mathbf{1}_{\Omega_n} - \mathbf{1}_{\Omega}| &\leq \int_{B(0, R)} |\mathbf{1}_{\Omega_n} - \mathbf{1}_{\Omega}| + |\Omega_n \setminus B(0, R)| + |\Omega \setminus B(0, R)| \\ &\leq \int_{B(0, R)} |\mathbf{1}_{\Omega_n} - \mathbf{1}_{\Omega}| + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

De la convergence de la suite $(\mathbf{1}_{\Omega_n})_n$ vers $\mathbf{1}_{\Omega}$ dans $L^1(B(0, R))$, on déduit que

$$\limsup_n \int_{\mathbf{R}^d} |\mathbf{1}_{\Omega_n} - \mathbf{1}_{\Omega}| \leq 3\varepsilon.$$

et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\mathbf{1}_{\Omega_n} \rightarrow \mathbf{1}_{\Omega} \text{ dans } L^1(\mathbf{R}^d).$$

Des propriétés de semi-continuité du périmètre et de la fonctionnelle J , on déduit immédiatement que Ω est une forme optimale. \square

Remarque. En supposant seulement $f \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, il est impossible de prouver ce résultat de convergence des mesures. Le contre-exemple fourni ci-dessus montre justement un cas de fuite de la mesure vers l'infini. Avec la fonction f spécifiée dans le contre-exemple, il ne peut pas en être autrement.

Dans d'autre cas, on sait qu'il existe une forme optimale, mais ce résultat d'existence provient de procédés de symétrisation, et pas de l'étude de suites minimisantes. Par exemple, dans le cas où la fonctionnelle J est identiquement nulle, c'est à dire quand on étudie le problème isopérimétrique, le résultat provient d'un réarrangement de la forme.

De manière générale, on s'attend à devoir modifier la suite minimisante pour "tuer" la fuite à l'infini dans des cas où celle-ci ne devrait pas avoir lieu. Par exemple, si la fonction f est positive, non identiquement nulle, lisse et à support compact, la régularisation de J tendra à concentrer toute la masse près du support de f .

Chapitre 3

Résultat d'équivalence

Dans cette section, on s'intéresse avant tout à l'équivalence entre les problèmes (P) et (P_λ) . En effet, on espère ainsi prouver des résultats de régularité sur le problème pénalisé (P_λ) , puis les transférer sur le problème contraint (P). On imagine que la preuve de tels résultats de régularité sera plus aisée pour le problème pénalisé, celui-ci nous présentant un nombre beaucoup plus grand de formes admissibles.

L'idée de base est la suivante : on considère une forme optimale Ω du problème pénalisé (P_λ) dont la mesure $|\Omega|$ n'est pas égale à m . On cherche alors à en déduire une borne supérieure sur λ qui soit indépendante de la forme optimale choisie. Pour ce faire, on va chercher à perturber la forme Ω . Remarquons que, dans le cas où le domaine D est étoilé par rapport à un point, on établit une preuve simplifiée du résultat d'équivalence obtenu dans [BHP05] (où le problème contraint est la minimisation de l'énergie de Dirichlet $J(\Omega)$ avec la contrainte de volume $|\Omega| \leq m$, et le problème pénalisé la minimisation de la fonctionnelle $J(\Omega) + \lambda[|\Omega| - m]^+$).

3.1 Le résultat principal

Dans la suite, on dira qu'un sous-ensemble Ω de \mathbf{R}^d est *étoilé* (sous-entendu par rapport à un point x de Ω) si,

$$\forall y \in \Omega, [x, y[\subset \Omega.$$

On peut alors énoncer le résultat principal :

Théorème 3.1. *On suppose ici que D est borné et étoilé et que f appartient à $L^2(D)$. Alors, il existe $\lambda^* = \lambda^*(m, f, D)$ tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, les problèmes (P_λ) et (P) ont les mêmes solutions.*

La preuve de ce théorème utilise la constatation suivante :

Lemme 3.2. *On suppose que, pour un λ donné,*

- (i) *il existe une forme optimale au problème (P_λ) ,*
- (ii) *toute forme optimale du problème (P_λ) a pour mesure m .*

Alors le problème (P) admet au moins une forme optimale et les formes optimales de (P) sont exactement les formes optimales de (P_λ) .

Démonstration. Considérons tout d'abord une forme optimale Ω_λ^* du problème (P_λ) . Par (ii), on a nécessairement $|\Omega_\lambda^*| = m$ et donc cette forme est admissible pour (P) . Soit maintenant une forme Ω admissible pour (P) . On a

$$P(\Omega_\lambda^*) + J(\Omega_\lambda^*) = \mathcal{E}(\Omega_\lambda^*) = \mathcal{E}_\lambda(\Omega_\lambda^*) \leq \mathcal{E}_\lambda(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$$

et donc toute forme optimale de (P_λ) est une forme optimale de (P) .

Réciproquement, si maintenant Ω^* désigne une forme optimale de (P) , et Ω une forme admissible pour (P_λ) , c'est à dire un ensemble mesurable inclus dans D et de mesure finie, alors

$$\mathcal{E}_\lambda(\Omega^*) = \mathcal{E}(\Omega^*) \leq \mathcal{E}(\Omega_\lambda^*) = \mathcal{E}_\lambda(\Omega_\lambda^*) \leq \mathcal{E}_\lambda(\Omega).$$

En particulier, toute forme optimale de (P) est optimale pour (P_λ) . \square

Mise en route de la preuve du théorème 3.1. A partir du lemme précédent, étant donné les résultats d'existence déjà établis dans le cadre des hypothèses du théorème, i.e., quand D est borné, on voit qu'il suffit de prouver qu'il existe un $\lambda^* > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, pour toute forme optimale Ω_λ^* de (P_λ) , on a $|\Omega_\lambda^*| = m$.

On prouvera cette propriété par contraposée. On prendra Ω_λ^* une forme optimale du problème (P_λ) avec $|\Omega_\lambda^*| \neq m$ et on prouvera que nécessairement $\lambda \leq \lambda^*$ pour un certain λ^* ne dépendant pas du choix de Ω_λ^* .

Dans un premier temps, on supposera que $|\Omega_\lambda^*| < m$ et on prouvera que $\lambda \leq \Lambda_1$. Pour ceci, la monotonie de J simplifiera notre travail et la preuve ne demandera quasiment aucune hypothèse sur la forme de D . Elle utilisera en revanche un résultat d'Italo Tamanini ([Tam88]) dont nous prouvons ici une extension.

Dans un second temps, on supposera que $|\Omega_\lambda^*| > m$ et on prouvera que $\lambda \leq \Lambda_2$. Pour ceci, on ne pourra pas utiliser directement la monotonie de J et on devra trouver un moyen de gérer à la fois les termes J et le périmètre. Pour cela, on supposera que le domaine est étoilé afin de pouvoir effectuer des homothéties sur les ensembles considérés.

Au final, en prenant $\lambda^* = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$, on aura prouvé le théorème.

3.2 Quelques estimations

Dans cette section, on va prouver un certain nombre d'estimations qui s'avèreront utiles dans la suite.

Lemme 3.3. *On suppose ici D seulement ouvert. Il existe un $M_1 = M_1(D, m) > 0$ tel que, pour tout $\lambda > 0$ et pour toute forme optimale Ω_λ^* du problème (P_λ) , on a*

$$\mathcal{E}_\lambda(\Omega_\lambda^*) \leq M_1.$$

Démonstration. On affirme qu'il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) < \infty$ et $|A| = m$. En effet, il existe une famille finie de boules incluses dans D et dont la réunion a pour mesure m . Pour le prouver, il suffit de remarquer que D , en tant qu'ouvert de \mathbf{R}^d , peut s'écrire comme réunion dénombrable de boules :

$$D = \bigcup_{n \geq 0} B_n$$

où les B_n sont des boules incluses dans D . Alors, nécessairement,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{n=0}^N B_n \right| = |D| > m.$$

On choisit donc le premier $N \geq 0$ tel que

$$\left| \bigcup_{n=0}^{N-1} B_n \right| \leq m \text{ et } \left| \bigcup_{n=0}^N B_n \right| > m.$$

Comme la fonction $f : t \in [0, 1] \mapsto \left| tB_N \cup \bigcup_{n=0}^{N-1} B_n \right|$ est continue avec $f(0) \leq m$ et $f(1) > m$, il existe un $t \in [0, 1[$ tel que $f(t) = m$. La famille $(B_0, \dots, B_{N-1}, tB_N)$ vérifie alors l'assertion.

Comme de plus on a

$$P \left(tB_N \cup \bigcup_{n=0}^{N-1} B_n \right) \leq P(tB_N) + \sum_{n=0}^{N-1} P(B_n) < \infty,$$

l'ensemble $A = tB_N \cup \bigcup_{n=0}^{N-1} B_n$ convient.

Application. En particulier, comme, quel que soit le choix de λ , l'ensemble Ω_λ^* est une forme optimale, et comme la fonctionnelle J est à valeurs négatives, on a

$$\mathcal{E}_\lambda(\Omega_\lambda^*) \leq \mathcal{E}_\lambda(A) = J(A) + P(A) + \lambda||A| - m| \leq P(A) = M_1 < \infty.$$

□

Quand maintenant le domaine D est borné, on peut préciser les différentes estimations (on désigne par u la fonction d'état associée à la forme Ω) :

Lemme 3.4. *On suppose D borné. Alors il existe une constante $M_2 = M_2(D, f, m) > 0$ telle que, pour tout $\lambda > 0$, et pour toute forme optimale Ω_λ^* du problème (P_λ) , on a :*

$$\max \left\{ -J(\Omega_\lambda^*), P(\Omega_\lambda^*), \lambda||\Omega_\lambda^*| - m|, \int_{\Omega_\lambda^*} |\nabla u|^2 \right\} \leq M_2.$$

Démonstration. Le premier résultat découle de la monotonie de J . On a en effet $\Omega_\lambda^* \subset D$, et donc

$$-J(\Omega_\lambda^*) \leq -J(D) < \infty.$$

L'estimation sur $\int |\nabla u|^2$ découle de l'égalité

$$J(\Omega_\lambda^*) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \int f u = -\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2.$$

De tout ceci l'on déduit que

$$P(\Omega_\lambda^*) + \lambda||\Omega_\lambda^*| - m| \leq M_1 - J(D),$$

et le choix $M_2 = M_1 - J(D)$ convient.

□

Corollaire 3.5. *En particulier, les mesures des formes optimales des problèmes (P_λ) tendent vers m quand λ tend vers ∞ . Plus précisément,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\sup \{ ||\Omega_\lambda^*| - m| : \Omega_\lambda^* \text{ forme optimale du problème } (P_\lambda) \} \right) = 0.$$

Remarque. Pour la suite, on fixe $\lambda_1 > 0$ suffisamment grand tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda_1$ et pour toute forme optimale Ω_λ^* du problème (P_λ) , on ait

$$|\Omega_\lambda^*| \geq \frac{m}{2} \text{ et } |D \setminus \Omega_\lambda^*| \geq \frac{|D| - m}{2}.$$

3.3 Preuve de l'équivalence : étude du cas $|\Omega_\lambda^*| < m$

3.3.1 Une extension d'un lemme d'I. Tamanini

L'essentiel de cette preuve repose sur la possibilité de faire des perturbations extérieures de la forme optimale en conservant un contrôle sur le périmètre. Le lemme suivant, issu de [Tam88] nous permet justement de faire ce genre de perturbations quand D est un cube (nous avons volontairement choisi une version simplifiée du lemme qui va nous servir pour une version plus générale plus adaptée au problème).

Énoncé du lemme

Lemme 3.6 (I. Tamanini [Tam88]). *Soit D un cube ouvert dans \mathbf{R}^d . Soient L un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^d , et α, β deux constantes strictement positives telles que*

$$|D \cap L| \geq \alpha, |D \setminus L| \geq \alpha, P(L, D) \leq \beta.$$

Alors, il existe deux constantes strictement positives $b = b(\alpha, \beta)$ et $c = c(\alpha, \beta)$ (et dépendant aussi de la taille du cube) telles que, pour tout $v \in]-b, b[$, il existe un sous-ensemble mesurable \tilde{L} de \mathbf{R}^d tel que

$$L \Delta \tilde{L} \subset \subset D, |L \Delta \tilde{L}| = |v|,$$

$$L \subset \tilde{L} \text{ si } v > 0, \tilde{L} \subset L \text{ si } v < 0, \text{ et}$$

$$P(\tilde{L}, D) \leq P(L, D) + c|v|.$$

Remarque. Le point important de ce lemme est que, quitte à bien choisir les perturbations de l'ensemble considéré, on peut supposer que les variations du périmètre sont proportionnelles à celles du volume.

On cherche maintenant à étendre ce lemme à des ensembles D beaucoup plus généraux, à savoir des ouverts bornés et connexes. On va plus précisément prouver le résultat suivant :

Lemme 3.7. *Soit D un ouvert borné connexe inclus dans \mathbf{R}^d . Soient L un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^d , et α, β deux constantes strictement positives telles que*

$$|D \cap L| \geq \alpha, |D \setminus L| \geq \alpha, P(L, D) \leq \beta.$$

Alors, il existe deux constantes strictement positives $b = b(\alpha, \beta, d, D)$ et $c = c(\alpha, \beta, d, D)$ telles que, pour tout $v \in]-b, b[$, il existe un sous-ensemble mesurable \tilde{L} de \mathbf{R}^d tel que

$$\begin{aligned} L\Delta\tilde{L} &\subset\subset D, \quad |\tilde{L}\Delta L| = |v|, \\ L \subset \tilde{L} \text{ si } v > 0, \quad \tilde{L} \subset L \text{ si } v < 0, \text{ et} \\ P(\tilde{L}, D) &\leq P(L, D) + c|v|. \end{aligned}$$

Notation. Dans la suite, pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, et tout $r > 0$, on notera $C_d(x, r)$ le cube fermé $\prod_{i=1}^d [x_i - r, x_i + r]$.

La preuve de l'extension utilise le lemme suivant :

Lemme 3.8. *Si D est un ouvert borné connexe inclus dans \mathbf{R}^d , alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble ouvert et connexe C de D et un nombre réel strictement positif δ tels que*

$$\begin{aligned} |D \setminus C| &\leq \varepsilon \text{ et} \\ \forall x \in C, \quad C_d(x, \delta) &\subset D. \end{aligned}$$

Démonstration. On se donne un ε strictement positif et un $x_0 \in D$. Pour tout $\delta > 0$, on définit

$$D_\delta = \{x \in D : C_d(x, \delta) \subset D\}.$$

Comme D est ouvert et que les cubes $C_d(x, \delta)$ sont fermés, l'ensemble D_δ est ouvert. On définit alors \hat{D}_δ comme la composante connexe de D_δ contenant x_0 (pour les δ tels que $x_0 \notin D_\delta$, on posera $\hat{D}_\delta = \emptyset$).

En utilisant la connexité par arcs de D , on trouve que

$$\bigcup_{\delta > 0} \hat{D}_\delta = D,$$

et donc, comme l'application $\delta \mapsto \hat{D}_\delta$ est décroissante, on trouve que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\hat{D}_\delta| = |D|.$$

En particulier, on prouve le lemme en choisissant δ assez petit pour que

$$|D \setminus \hat{D}_\delta| \leq \varepsilon.$$

□

On peut alors prouver l'extension. La méthode consiste à trouver un "bon" découpage de l'ensemble D en cubes et à appliquer le lemme 3.6 à l'un de ces cubes :

Preuve du lemme 3.7. On considère le $\alpha > 0$ spécifié dans l'énoncé. On applique le lemme 3.8 à $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ pour obtenir un sous-ensemble ouvert et connexe C de D et un réel $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |D \setminus C| &\leq \frac{\alpha}{2} \text{ et} \\ \forall x \in C, \quad C_d(x, \delta) &\subset D. \end{aligned}$$

Dans la suite, $C_d(x)$ désignera $C_d(x, \delta)$.

On considère maintenant un ensemble L dans \mathbf{R}^d tel que $|D \cap L| \geq \alpha$ et $|D \setminus L| \geq \alpha$. Alors on a $|C \cap L| \geq \frac{\alpha}{2}$ et $|C \setminus L| \geq \frac{\alpha}{2}$. On va prouver que pour tout réel strictement positif $h < \frac{1}{2}$ assez petit, il existe un $x \in C$ tel que

$$|C_d(x) \cap L| \geq h|C_d(x)| \text{ et } |C_d(x) \setminus L| \geq h|C_d(x)|.$$

En effet, on va prouver que si un réel $h \in]0, \frac{1}{2}[$ vérifie

$$\forall x \in C, |C_d(x) \cap L| \leq h|C_d(x)| \text{ ou } |C_d(x) \setminus L| \leq h|C_d(x)|. \quad (*)$$

alors il vérifie nécessairement

$$h \geq h_0 = h_0(d, |D|, \alpha) > 0.$$

Pour cela, considérons un $h \in]0, \frac{1}{2}[$ vérifiant (*). On prend alors un x_0 dans C et on suppose par exemple que $|C_d(x_0) \cap L| \leq h|C_d(x_0)|$. Soit alors un autre point x_1 dans C . Comme C est connexe et ouvert, il existe un chemin continu

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow C$$

reliant $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Maintenant, on remarque que l'application

$$G : t \in [0, 1] \mapsto |C_d(\gamma(t)) \cap L|$$

est continue et prend une valeur inférieure à $h|C_d(x_0)|$ en 0. Or, par l'hypothèse (*), on trouve que,

$$\forall t \in [0, 1], G(t) \leq h|C_d(x_0)| \text{ ou } G(t) \geq (1 - h)|C_d(x_0)|.$$

La continuité de G et le choix de h strictement inférieur à $1/2$ implique donc que

$$|C_d(x_1) \cap L| \leq h|C_d(x_1)|.$$

Mais maintenant, $C \subset \cup_{x \in C} B(x, \delta) \subset D$ et donc, en utilisant le théorème de recouvrement de Besicovitch, on trouve $N(d)$ familles dénombrables

$$(x_i^j)_{i \in I_j} \in C^{I_j}, j \in \{1, \dots, N(d)\}$$

telles que, en prenant des indices distincts i et i' dans un même I_j , on a

$$B(x_i^j, \delta) \cap B(x_{i'}^j, \delta) = \emptyset.$$

La constante $N(d)$ est la constante de recouvrement, dépendant seulement de la dimension d de l'espace. Et on a de plus que

$$C \subset \bigcup_{j=1}^{N(d)} \bigcup_{i \in I_j} B(x_i^j, \delta).$$

Soit maintenant un j dans $\{1, \dots, N(d)\}$. On peut estimer

$$\text{card}(I_j) \leq \frac{|D|}{|B(x_0, \delta)|} \leq C(d) \frac{|D|}{|C_d(x_0)|}.$$

Et donc

$$\frac{\alpha}{2} \leq |C \cap L| \leq \sum_{j=1}^{N(d)} \sum_{i \in I_j} |C_d(x_i^j) \cap L| \leq C(d) N(d) h |D|.$$

Si au contraire on avait supposé $|C_d(x_0) \setminus L| \leq h |C_d(x_0)|$, on aurait trouvé par une preuve similaire que

$$\frac{\alpha}{2} \leq C(d) N(d) h |D|.$$

Au final, pour tout h dans $]0, \frac{1}{2}[$ vérifiant (*), on a

$$h \geq h_0 = h_0(d, |D|, \alpha).$$

Comme conséquence, prenons maintenant $h = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{h_0}{2} \right\}$. Les calculs précédents nous permettent donc de conclure à l'existence d'un point x_1 dans C tel que

$$|C_d(x_1) \cap L| \geq h |C_d(x_1)| \text{ et } |C_d(x_1) \setminus L| \geq h |C_d(x_1)|.$$

Comme, de plus, on a $P(L, C_d(x_1)) \leq P(L, D) \leq \beta$, et comme les constantes h et δ dépendent uniquement de α , de d et de D , on peut appliquer le lemme 3.6 au cube $C_d(x_1)$ et à L pour obtenir le résultat. \square

3.3.2 Application

Supposons ici que $\lambda > \lambda_1$. On rappelle que cela implique entre autre que, pour toute forme optimale Ω_λ^* du problème (P_λ) , on a

$$|\Omega| \geq \frac{m}{2} \text{ et } |D \setminus \Omega| \geq \frac{|D| - m}{2}.$$

Considérons une forme optimale Ω_λ^* de (P_λ) telle que $|\Omega_\lambda^*| < m$. Ici, D est un ouvert étoilé, donc connexe. On applique alors le lemme 3.7 à

$$L = \Omega_\lambda^*, \quad \alpha = \min \left\{ \frac{m}{2}, \frac{|D| - m}{2} \right\}, \quad \beta = M_2$$

(M_2 la constante donnée par le lemme 3.4) pour un $v > 0$ tel que $|\Omega_\lambda^*| + v < m$. On trouve alors un \tilde{L} mesurable tel que

$$\tilde{L} \setminus L \subset\subset D, \quad L \subset \tilde{L},$$

$$|\tilde{L} \setminus \Omega_\lambda^*| = v, \quad P(\tilde{L}, D) \leq P(L, D) + c v.$$

Comme la différence entre L et \tilde{L} est strictement incluse dans D , on a de plus

$$P(\tilde{L}) \leq P(L) + c v.$$

Enfin, notons que la constante c ne dépend que des données du problème et pas du choix de λ ou de Ω_λ^* .

Par optimalité de Ω_λ^* , on a

$$J(\Omega_\lambda^*) + P(\Omega_\lambda^*) + \lambda(m - |\Omega_\lambda^*|) = \mathcal{E}_\lambda(\Omega_\lambda^*) \leq \mathcal{E}_\lambda(\tilde{L}) = J(\tilde{L}) + P(\tilde{L}) + \lambda(m - |\tilde{L}|).$$

Comme J est décroissante pour l'inclusion, $J(\tilde{L}) \leq J(\Omega_\lambda^*)$, et en utilisant l'estimation du périmètre de \tilde{L} , on a

$$\lambda(m - |\Omega_\lambda^*|) + P(\Omega_\lambda^*) \leq \lambda(m - |\tilde{L}|) + P(\Omega_\lambda^*) + c v.$$

Comme de plus $|\tilde{L}| = |\Omega_\lambda^*| + v$, on obtient

$$\lambda v \leq c v$$

et donc $\lambda \leq c$. En conclusion, en prenant $\Lambda_1 = \max\{\lambda_1, c\}$, on a prouvé le résultat suivant :

Si une forme optimale Ω_λ^ du problème (P_λ) vérifie $|\Omega_\lambda^*| < m$, alors $\lambda \leq \Lambda_1$.*

3.4 Preuve de l'équivalence : étude du cas $|\Omega_\lambda^*| > m$

Dans cette partie de la preuve, la décroissance de la fonctionnelle J ne peut plus servir. Cela implique en particulier qu'il faut savoir traiter à la fois le terme J et le terme de périmètre. L'idée de base reste similaire : faire des variations d'une forme optimale de mesures différentes de m pour obtenir une estimation sur λ . Mais cette fois, les estimations à obtenir sur la forme modifiée doivent porter à la fois sur J et sur le périmètre. Nous n'avons pour l'instant effectué ce type d'opération que dans les cas où D a une géométrie simple nous permettant d'effectuer des variations globales élémentaires du type homothéties ou affinités.

Pour cela, l'hypothèse D étoilé sera fondamentale dans la suite de cette partie. On supposera de plus, sans perte de généralité, que 0 appartient à D . Pour une forme admissible L (i.e., un sous-ensemble mesurable de D), on définit alors

$$tL = \{tx \in D : x \in L\}.$$

3.4.1 Étude de la variation de J par des transformations élémentaires

Lemme 3.9. *On suppose que D est étoilé par rapport à l'origine (non nécessairement borné), et que la fonction $F : x \mapsto xf(x)$ appartient à $L^2(D)$. Soit $L \subset D$ mesurable et de mesure finie. Alors*

$$\limsup_{t \rightarrow 1, t < 1} \frac{J(tL) - J(L)}{1 - t} \leq \|F\|_{L^2(D)} \sqrt{-2J(L)}.$$

Démonstration. Pour $u = u_L$, on pose $u_t(\cdot) = u(\cdot/t)$. Alors $u_t \in H_0^1(tL)$ et donc

$$J(tL) - J(L) \leq G(u_t) - G(u) = \frac{1}{2} \left(\int_D |\nabla u_t|^2 - \int_D |\nabla u|^2 \right) - \int_D f(u_t - u).$$

On commence par calculer, par un changement de variable, $\int_D |\nabla u_t|^2 = t^{d-2} \int_D |\nabla u|^2$, et donc

$$\int_D |\nabla u_t|^2 - \int_D |\nabla u|^2 = (t^{d-2} - 1) \int_D |\nabla u|^2 \leq 0 \text{ quand } t < 1.$$

On utilise alors le lemme suivant (que l'on prouve plus loin) :

Lemme 3.10. *Soit v une fonction dans $H_0^1(D)$. Alors, en désignant encore une fois par F la fonction*

$$x \in D \mapsto xf(x),$$

on a, pour t dans l'intervalle $]0, 1[$, en notant $v_t(\cdot) = v(\cdot/t)$,

$$\left| \frac{\int_D f v_t - \int_D f v}{t-1} \right| \leq \frac{1}{t} \|F\|_{L^2(D)} \|\nabla v\|_{L^2(D)}.$$

En appliquant ce lemme à la fonction u , on trouve donc que

$$\left| \frac{\int_D f u_t - \int_D f u}{t-1} \right| \leq \frac{1}{t} \|F\|_{L^2(D)} \|\nabla u\|_{L^2(D)}.$$

Et donc, en utilisant le lien entre $\|\nabla u\|_{L^2}$ et $J(L)$,

$$\left| \frac{\int_D f u_t - \int_D f u}{t-1} \right| \leq \frac{1}{t} \|F\|_{L^2(D)} \sqrt{-2J(L)}.$$

Au final,

$$\limsup_{t \rightarrow 1, t < 1} \frac{J(tL) - J(L)}{1-t} \leq \|F\|_{L^2(D)} \sqrt{-2J(L)}.$$

□

Pour que la preuve soit complète, il ne nous reste donc plus qu'à démontrer le lemme 3.10 :

Preuve du lemme 3.10. Commençons par étudier le cas d'une fonction φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(D)$. On écrit, pour tout x dans D , que

$$\varphi(x) - \varphi_t(x) = \varphi(x) - \varphi(x/t) = \int_0^1 \frac{t-1}{t} \nabla \varphi \left(\frac{x}{t} + s \frac{t-1}{t} x \right) \cdot x \, ds.$$

On en déduit que

$$\left| \int_D f \varphi - \int_D f \varphi_t \right| \leq \int_D \int_0^1 \frac{|t-1|}{t} |xf(x)| \left| \nabla \varphi \left(\frac{x}{t} + s \frac{t-1}{t} x \right) \right| ds \, dx.$$

Or, comme l'intégrande est positive, les deux intégrations dans le terme de droite commutent :

$$\left| \int_D f \varphi - \int_D f \varphi_t \right| \leq \frac{|t-1|}{t} \int_0^1 \left\{ \int_D |xf(x)| \left| \nabla \varphi \left(\frac{x}{t} + s \frac{t-1}{t} x \right) \right| dx \right\} ds.$$

Maintenant, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_D |xf(x)| \left| \nabla \varphi \left(\frac{x}{t} + s \frac{t-1}{t} x \right) \right| dx \leq \|F\|_{L^2(D)} \left\{ \int_D \left| \nabla \varphi \left(\frac{1+s(t-1)}{t} x \right) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

On effectue un changement de variable dans l'intégrale apparaissant à la droite de cette expression :

$$\int_D \left| \nabla \varphi \left(\frac{1+s(t-1)}{t} x \right) \right|^2 dx = \frac{t^d}{|1+s(t-1)|^d} \int_D |\nabla \varphi|^2.$$

Au final, on obtient (puisque $t < 1$)

$$\left| \int_D f \varphi - \int_D f \varphi_t \right| \leq |t-1| \|F\|_{L^2(D)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(D)} t^{\frac{d}{2}-1} \int_0^1 \frac{ds}{|1+s(t-1)|^{d/2}}.$$

On calcule alors

$$\int_0^1 \frac{ds}{|1+s(t-1)|^{d/2}} = \frac{1}{1-t} \int_t^1 \frac{ds'}{s'^{d/2}} \leq \frac{1}{1-t} \int_t^1 \frac{ds'}{s'^{d/2}} \leq \frac{1}{t^{d/2}}.$$

On peut alors conclure la preuve :

$$\left| \int_D f \varphi - \int_D f \varphi_t \right| \leq |t-1| \|F\|_{L^2(D)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(D)} t^{\frac{d}{2}-1-\frac{d}{2}} \leq \frac{|t-1|}{t} \|F\|_{L^2(D)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(D)}.$$

□

3.4.2 Application

Maintenant considérons une forme optimale Ω_λ^* du problème (P) et supposons que $|\Omega_\lambda^*| > m$. Pour perturber cette forme en diminuant sa mesure, l'utilisation d'homothéties fonctionne quand la forme du domaine D s'y prête, i.e., quand D est étoilé. Supposons donc que D est étoilé par rapport à l'origine.

On fixe ε suffisamment petit pour que, pour tout $t \in]1-\varepsilon, 1[$, on ait $|t\Omega_\lambda^*| > m$. Pour un $t \in]1-\varepsilon, 1[$, en utilisant la condition d'optimalité de Ω_λ^* , on a

$$J(\Omega_\lambda^*) + P(\Omega_\lambda^*) + \lambda(|\Omega_\lambda^*| - m) \leq J(t\Omega_\lambda^*) + P(t\Omega_\lambda^*) + \lambda(|t\Omega_\lambda^*| - m),$$

c'est à dire, puisque l'on connaît de manière explicite les expressions du périmètre et de la mesure de $t\Omega_\lambda^*$,

$$(1-t^{d-1})P(\Omega_\lambda^*) + \lambda(1-t^d)|\Omega_\lambda^*| \leq J(t\Omega_\lambda^*) - J(\Omega_\lambda^*).$$

Puisque $t < 1$ et $|\Omega_\lambda^*| \geq m$, on a

$$\lambda(1-t^d)m \leq J(t\Omega_\lambda^*) - J(\Omega_\lambda^*).$$

Pour conclure, on divise par $1-t$ et on fait tendre t vers 1, pour obtenir, en utilisant le lemme 3.9

$$d\lambda m \leq \limsup_{t \rightarrow 1} \frac{J(t\Omega_\lambda^*) - J(\Omega_\lambda^*)}{1-t} \leq \|f(x)x\|_{L^2(D)} \sqrt{-2J(\Omega_\lambda^*)} \leq C_2 = C_2(f, m, D).$$

On a ainsi prouvé, avec $\Lambda_2 = \frac{C_2}{dm}$, que

Si une forme optimale Ω_λ^* du problème (P_λ) vérifie $|\Omega_\lambda^*| > m$, alors $\lambda \leq \Lambda_2$.

La preuve du théorème 3.1 est alors achevée en prenant $\lambda^* = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. \square

3.5 Remarque sur un autre problème

L'estimation précédente sur les variations de la fonctionnelles J lorsque l'on fait des homothéties des ensembles donne en passant une preuve plus simple d'un résultat d'équivalence que l'on peut trouver dans [BHP05] dans le cas où le domaine de travail est étoilé, et en particulier quand D est \mathbf{R}^d tout entier. Le résultat est le suivant :

Théorème 3.11 ([BHP05]). *Les problèmes*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(D) \text{ avec } |[u \neq 0]| \leq m \text{ tel que} \\ J(u) \leq \inf \{J(v) : v \in H_0^1(D), |[v \neq 0]| \leq m\} \end{cases} \quad (3.1)$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(D) \text{ avec } |[u \neq 0]| < \infty \text{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(D), J(u) + \lambda(|[u \neq 0]| - m)^+ \leq J(v) + \lambda(|[v \neq 0]| - m)^+. \end{cases} \quad (3.2)$$

ont les mêmes solutions si λ est assez grand.

Démonstration. La preuve suit un procédé semblable à celui de notre résultat d'équivalence : tout d'abord, il s'agit de prouver que les deux problèmes (3.1) et (3.2) admettent des formes optimales. Ceci est fait dans [BHP05] dans le cas général où l'ensemble D est un ouvert quelconque de \mathbf{R}^d , non nécessairement borné, et où la fonction f est dans $L^2(D)$.

Le résultat d'équivalence est alors prouvé de la façon suivante : on considère une solution u du problème (3.2) telle que

$$|[u \neq 0]| > m.$$

Cela implique en particulier que, pour t dans $]0, 1[$ assez proche de 1, en notant encore $u_t(\cdot) = u(\cdot/t)$

$$J(u) + \lambda(|[u \neq 0]| - m) \leq J(u_t) + \lambda(|[u_t \neq 0]| - m),$$

c'est à dire que

$$\lambda m(1 - t^d) \leq J(u_t) - J(u).$$

En divisant par $1 - t$ et en faisant tendre t vers 1, on trouve donc que

$$d \lambda m \leq C(\|F\|_{L^2(D)}, \sqrt{-J(u)}).$$

La preuve est alors achevée quand on prouve que $J(u)$ est minoré indépendamment de λ assez grand, ce qui est fait dans [BHP05], lors de la preuve de l'existence de solutions aux problèmes (3.1) et (3.2). \square

Chapitre 4

$\frac{1}{2}$ -Hölder continuité de la fonction d'état

Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le suivant, on supposera que Ω est une forme optimale du problème (P_λ) . La fonction $u = u_\Omega$ désigne sa fonction d'état. L'objectif de cette section est de prouver que la fonction u est $\frac{1}{2}$ -Hölder continue sur D . Notons d'abord que tous les résultats qui suivent sont purement locaux, et donc aucune hypothèse particulière n'est faite sur la forme de D . En particulier, D n'est pas nécessairement borné. On remarquera que, grâce au théorème 3.1, tous les résultats de régularité obtenus sur Ω ou sur sa fonction d'état sont encore valables pour les formes optimales du problème contraint (P) dans le cas où D vérifie les hypothèses du théorème d'équivalence.

L'étude de cette propriété de régularité se fera en plusieurs temps, et de plusieurs points de vue. Dans la première section, on va énoncer un certain nombre de résultats élémentaires sur u et Ω . Ces premiers résultats, pour lesquels on a seulement besoin de f dans $L^2(D)$, viennent de l'utilisation de l'optimalité de Ω pour des perturbations locales obtenues par des réunions de Ω avec de petites boules incluses dans D .

On obtient en particulier une première estimation sur l'objet Δu , qui est insuffisante pour prouver le résultat de régularité voulu. Il nous faut en effet une information sur la mesure $\Delta|u|$. C'est l'objet de la seconde section, où cette information est obtenue de deux façons différentes selon que

- (i) la fonction u est positive, auquel cas $\Delta|u| = \Delta u$ et on a déjà la bonne information,
- (ii) la fonction u n'est pas de signe constant, et $\Delta|u| = \Delta u^+ + \Delta u^-$ et il faut arriver à déduire de l'information connue sur Δu des informations séparées sur les mesures Δu^+ et Δu^- . Nous avons effectué cette étape à l'aide du lemme de Monotonie d'Alt, Caffarelli et Friedman ([ACF84]) en se basant sur les résultats développés dans [BHP05]. L'utilisation du lemme de Monotonie justifie l'hypothèse supplémentaire que nous faisons dans cette partie de la preuve, à savoir f bornée.

4.1 Premières propriétés de la forme optimale

On commence par énumérer quelques propriétés classiques de la forme optimale et de sa fonction d'état. Avant toute chose, remarquons que, Ω étant une forme optimale, c'est en particulier une forme admissible pour le problème (P_λ) , et donc c'est un ensemble de mesure finie. Notons enfin que pour l'instant, nous supposons encore que la fonction f est "seulement" dans $L^2(D)$.

Lemme 4.1. *Soit B un boule ouverte incluse dans D et $v \in H_0^1(\Omega \cup B)$. Alors*

$$J(\Omega) \leq G(v) + P(B) - P(\Omega \cap B) + \lambda|\Omega^c \cap B|.$$

Démonstration. On utilise la condition d'optimalité satisfaite par Ω :

$$J(\Omega) + P(\Omega) + \lambda||\Omega| - m| = \mathcal{E}_\lambda(\Omega) \leq \mathcal{E}_\lambda(\Omega \cup B) = J(\Omega \cup B) + P(\Omega \cup B) + \lambda||\Omega \cup B| - m|.$$

Comme on a $J(\Omega \cup B) \leq G(v)$, on obtient

$$J(\Omega) \leq G(v) + P(\Omega \cup B) - P(\Omega) + \lambda||\Omega \cup B| - |\Omega||.$$

Le résultat vient alors de l'inégalité classique $P(\Omega \cup B) + P(\Omega \cap B) \leq P(\Omega) + P(B)$ et de ce que $|\Omega \cup B| - |\Omega| = |\Omega^c \cap B|$. \square

Comme corollaire, on a les deux résultats suivants :

Lemme 4.2. *Soit $B(x, r)$ une boule incluse dans D avec $r \leq 1$, et soit v la solution de*

$$\begin{cases} -\Delta v = f \text{ dans } B(x, r), \\ v \in u + H_0^1(B(x, r)). \end{cases}$$

Alors,

$$\int_{B(x, r)} |\nabla(u - v)|^2 \leq C(\lambda)r^{d-1}.$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme précédent en remarquant que

$$J(\Omega) - G(v) = G(u) - G(v) = \frac{1}{2} \int_{B(x, r)} |\nabla(u - v)|^2$$

et que, puisque $r \leq 1$,

$$P(B) + \lambda|\Omega^c \cap B(x, r)| \leq C(\lambda)r^{d-1}.$$

\square

Lemme 4.3. *Soit B un boule ouverte incluse dans D et $\varphi \in C_c^\infty(B)$. Alors,*

$$|\langle \Delta u + f, \varphi \rangle| \leq 2 \left(\int |\nabla \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (P(B) - P(\Omega \cap B) + \lambda|\Omega^c \cap B|)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Soit $t \in]0, +\infty[$. On applique le lemme 4.1 à $v = u + t\varphi \in H_0^1(\Omega \cup B)$:

$$G(u) \leq G(u + t\varphi) + P(B) - P(\Omega \cap B) + \lambda|\Omega^c \cap B|.$$

En développant et en divisant par t on trouve que

$$\langle \Delta u + f, \varphi \rangle \leq t \int |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{t} (P(B) - P(\Omega \cap B) + \lambda|\Omega^c \cap B|),$$

la valeur absolue sur le terme de gauche est alors obtenue en changeant φ en $-\varphi$. Finalement, en minimisant le terme de droite en t , on obtient le résultat. \square

On peut maintenant déjà prouver la régularité de u dans “l’intérieur” de Ω .

Lemme 4.4. *Soit B une boule ouverte incluse dans D telle que $|\Omega^c \cap B| = 0$. Alors u est solution, au sens des distributions, de l’équation de Poisson suivante sur B :*

$$-\Delta u = f.$$

Démonstration. En effet, comme $|\Omega^c \cap B| = 0$, les ensembles $\Omega \cap B$ et B ne diffèrent que d’un ensemble de mesure nulle. Donc $P(\Omega \cap B) = P(B)$, d’où l’on a, en utilisant le lemme 4.3, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$,

$$\langle \Delta u + f, \varphi \rangle = 0.$$

\square

Remarque. Rappelons que, étant donnée la définition de $H_0^1(\Omega)$, la fonction u est nulle quasi-partout hors de Ω , et donc a fortiori presque partout hors de Ω . Ceci nous donne donc en un sens la régularité de u à “l’extérieur” de Ω : si B est une boule ouverte dans D telle que $|B \cap \Omega| = 0$, alors la fonction u est nulle presque partout sur B (et, par analogie avec le lemme précédent, vérifie l’équation de poisson $-\Delta u = 0$ au sens des distributions sur B).

Maintenant que l’on connaît Δu dans “l’intérieur” et “l’extérieur” de Ω (on formalisera bientôt ces deux notions), il nous reste à étudier sa valeur sur le bord de la forme optimale. Le lemme suivant donne une information *clé* à ce propos.

Lemme 4.5. *Il existe deux mesures positives μ_+ et μ_- telles que*

$$\Delta u^+ + f \mathbf{1}_{[u>0]} = \mu_+,$$

$$\Delta u^- - f \mathbf{1}_{[u<0]} = \mu_-$$

les deux équations étant à comprendre au sens des distributions sur D .

Démonstration. On prouve la première équation, le raisonnement pour la seconde équation étant tout à fait similaire.

On définit $p_n, q_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$p_n(x) = nx \mathbf{1}_{(0, \frac{1}{n})}(x) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, \infty)}(x), \quad q_n(x) = \int_0^x p_n(s) ds.$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ et $t \in (0, \infty)$. Comme $v = u + t\psi p_n(u) \in H_0^1(\Omega)$, on a $G(u) \leq G(v)$, i.e.,

$$t \int \nabla u \nabla(\psi p_n(u)) + t^2 \int \left| \nabla(\psi p_n(u)) \right|^2 \leq t \int f \psi p_n(u).$$

En divisant par t et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\int p_n(u) \nabla u \cdot \nabla \psi + \int p'_n(u) \psi |\nabla u|^2 - \int f p_n(u) \psi = 0.$$

i.e., au sens des distributions sur D , (on dira *dans* $\mathcal{D}'(D)$) :

$$n |\nabla u|^2 \mathbf{1}_{[0 < u < 1/n]} - \Delta(q_n(u)) - f p_n(u) = 0.$$

Mais $f p_n(u)$ converge vers $f \mathbf{1}_{[0 < u]}$ dans $L^1(D)$, et donc dans $\mathcal{D}'(D)$. De la même manière, $q_n(u)$ converge vers u^+ dans $L^2(D)$ et donc dans $\mathcal{D}'(D)$. Si maintenant on note μ_+^n la mesure positive $n |\nabla u|^2 \mathbf{1}_{[0 < u < 1/n]}$, on a

$$\Delta(q_n(u)) + f p_n(u) = \mu_+^n \text{ dans } \mathcal{D}'(D).$$

Comme le terme de gauche converge dans \mathcal{D}' , il en est de même du terme μ_+^n . Au final, la distribution $\Delta u^+ + f \mathbf{1}_{[0 < u]}$ est positive, et donc est une mesure de Radon positive, que l'on note μ_+ . On a alors, dans $\mathcal{D}'(D)$,

$$\Delta u^+ + f \mathbf{1}_{[0 < u]} = \mu_+.$$

□

Et comme conséquence de ce lemme :

Corollaire 4.6. *Au sens des distributions sur D , u vérifie*

$$-\Delta|u| \leq |f|.$$

Quand $f \in L^q(D)$ (pour un $q > d/2$), le fonction u est, en particulier, bornée sur D et on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{L^\infty(D)} \leq C(d, q, |\Omega|, \|f\|_{L^q(D)}).$$

Démonstration. On commence par calculer

$$-\Delta|u| = -\Delta u^+ - \Delta u^- = -\mu^+ - \mu^- + f \mathbf{1}_{[0 < u]} - f \mathbf{1}_{[0 > u]} \leq |f|.$$

Ensuite, étant donné que Ω est de mesure finie, on peut trouver un ouvert ω inclus dans D , contenant Ω et de mesure inférieure à $2|\Omega|$. L'application du théorème 8.16 de [GT83] donne alors l'estimation L^∞ annoncée. □

4.2 Énoncé du résultat

On a vu dans la section précédente que l'on pouvait arriver à prouver une certaine régularité de la fonction d'état dans l'intérieur et l'extérieur de Ω . Ces intérieurs et extérieurs ne sont bien sûr pas les intérieurs et extérieurs topologiques, mais sont à comprendre plutôt au sens de la mesure. On définit une fois pour toutes ces objets :

Définition 4.1. Soit L un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^d . On appelle *intérieur de L au sens de la mesure* l'ensemble

$$L_{\text{int}} = \{x \in D : \exists r > 0, |B(x, r) \setminus L| = 0\}.$$

On appelle *extérieur de L au sens de la mesure* l'ensemble

$$L_{\text{ext}} = \{x \in D : \exists r > 0, |B(x, r) \cap L| = 0\}.$$

On appelle enfin *bord de L au sens de la mesure* l'ensemble

$$\partial L = \{x \in D : \forall r > 0, 0 < |B(x, r) \cap L| < |B(x, r)|\}.$$

Remarque. On remarquera que les ensembles L_{int} et L_{ext} sont ouverts. En pratique, la notation ∂L désignera toujours, dans la suite, le bord au sens de la mesure de l'ensemble L . On notera alors $\partial_t L$ le bord topologique de L . Remarquons enfin que le bord au sens de la mesure est fermé et que les trois ensembles ainsi définis forment une partition de D .

Résoudre la question de la régularité reviendra dans la suite à pouvoir estimer assez précisément la mesure $\Delta|u|$ sur l'ensemble $\partial\Omega$. L'estimation que l'on obtiendra nous permettra alors de prouver le principal théorème de ce chapitre :

Théorème 4.7. Soit Ω une forme optimale du problème (P_λ) . Soit u la fonction d'état associée.

Si $f \in L^1(D) \cap L^q(D)$ pour un $q > d$ et $u \geq 0$, alors la fonction u est localement $\frac{1}{2}$ -Hölder continue.

Si $f \in L^1(D) \cap L^\infty(D)$, alors u est localement $\frac{1}{2}$ -Hölder continue, sans aucune hypothèse sur le signe de u .

4.3 Quelques rappels sur le Laplacien

L'idée de la preuve sera d'obtenir de *bonnes* estimations sur la mesure $\Delta|u|$ (rapelons que u est la fonction d'état associée à la forme optimale) et d'en déduire une certaine régularité sur u elle-même. Passer des estimations de $\Delta|u|$ à la régularité de u se fera essentiellement à l'aide des deux lemmes suivants. Dans toute la suite, la notation \bar{f} désignera l'intégrale moyennée.

Lemme 4.8. Soient $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte et $U \in \mathcal{C}^2(B(x_0, r_0))$. Alors, pour tout $r \in]0, r_0[$, on a

$$\int_{\partial B(x_0, r)} U - U(x_0) = (d\omega_d)^{-1} \int_0^r ds s^{1-d} \int_{B(x_0, s)} d(\Delta U). \quad (4.1)$$

Cette égalité reste vraie pour tout $U \in H^1(B(x_0, r_0))$ tel que ΔU est une mesure vérifiant

$$\int_0^r ds s^{1-d} \int_{B(x_0, s)} d|\Delta U| < \infty, \quad (4.2)$$

et où l'on a posé

$$U(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B(x_0, r)} U. \quad (4.3)$$

Enfin, (4.2) est en particulier vérifiée si $U \in L^\infty(B(x_0, r_0))$ et s'il existe une fonction $g \in L^q(B(x_0, r_0))$ avec $q > d/2$ telle que $\Delta U^+ \geq -g$ et $\Delta U^- \geq -g$.

Démonstration. Pour une fonction U régulière, on a l'égalité

$$\frac{d}{ds} \int_{\partial B_1} U(s_0 + s\xi) d\sigma(\xi) = \int_{\partial B_1} \nabla U(x_0 + s\xi) \cdot \xi = (d\omega_d)^{-1} s^{1-d} \int_{B(x_0, s)} d(\Delta U).$$

En intégrant cette égalité de ρ à r , on a

$$\int_{\partial B(x_0, r)} U - \int_{\partial B(x_0, \rho)} U = (d\omega_d)^{-1} \int_\rho^r ds s^{1-d} \int_{B(x_0, s)} d(\Delta U). \quad (4.4)$$

Pour des fonctions plus générales $U \in (L^\infty \cap H^1)(B(x_0, r_0))$ telles que ΔU est une mesure finie sur $B(x_0, r_0)$, on utilise une approximation à l'aide d'une suite régularisante $U_\rho = U * \rho_\rho$ pour obtenir de même l'égalité (4.4).

Lorsque l'estimation (4.2) est satisfaite, alors la limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B(x_0, \rho)} U$$

existe et on peut prendre cette limite dans l'équation (4.4).

Maintenant, pour une fonction $g \in L^q(B(x_0, r_0))$ avec $q > d/2$, on a

$$\int_{B(x_0, s)} |g| \leq C(d) s^{d(1-1/q)}$$

et ainsi la fonction

$$s \mapsto \tilde{g}(s) = s^{1-d} \int_{B(x_0, s)} |g|$$

est dans $L^1(0, s_0)$. Si $U \in L^\infty \cap H^1$, ΔU étant une mesure finie et $\Delta U^+ + g \geq 0$ sur $B(x_0, r_0)$, alors en utilisant (4.4), on a

$$\begin{aligned} \int_\rho^r ds s^{1-d} \int_{B(x_0, s)} d(|\Delta U^+|) &\leq \int_\rho^r ds \left[\tilde{g}(s) + s^{1-d} \int_{B(x_0, s)} d(\Delta U^+ + g) \right] \\ &\leq 2\|U\|_\infty + 2 \int_\rho^r \tilde{g}. \end{aligned}$$

Comme le même résultat est vrai pour U^- , on obtient la condition (4.2) pour ce type de fonctions. \square

Remarque. La preuve montre en particulier que la condition (4.2) implique l'existence d'une limite dans (4.3) pour tout x_0 . D'où la possibilité de prendre un représentant particulier de U défini à l'aide de la formule (4.3).

Lemme 4.9. *Soient $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte, $r_0 \leq 1$, et $F \in L^q(B(x_0, r_0))$, $q > d$. Alors il existe une certaine constante $C = C(d, \|F\|_{L^q(B(x_0, r_0))})$ telle que, pour tout $r \in]0, r_0[$,*

(i) *si $\Delta U = F$ sur $B(x_0, r_0)$, alors*

$$\|\nabla U\|_{L^\infty(B(x_0, r/2))} \leq C[1 + r^{-1}\|U\|_{L^\infty(B(x_0, r))}], \quad (4.5)$$

(ii) *si $\Delta U \geq F$ et $U \geq 0$ sur $B(x_0, r_0)$, alors*

$$\|U\|_{L^\infty(B(x_0, 2r/3))} \leq C \left[r + \int_{\partial B(x_0, r)} U \right]. \quad (4.6)$$

Démonstration. Pour la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta W = G \text{ dans } B_1, \\ W \in H_0^1(B_1), \end{cases}$$

on a, pour $G \in L^q(D)$ avec $q > d$, et pour une constant $C = C(d, q)$,

$$\|W\|_{C^1(B_1)} \leq C\|G\|_{L^q(B_1)}.$$

On considère les fonctions renormalisées :

$$\forall \xi \in B_1, V(\xi) = U(x_0 + r\xi), G(\xi) = r^2 F(x_0 + r\xi).$$

On remarque que $\Delta(V - W) = 0$ dans B_1 , de telle sorte que

$$\|\nabla(W - V)\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C(d)\|V\|_{L^\infty(\partial B_1)}.$$

Or, par la renormalisation de F , on a l'inégalité suivante sur W :

$$\|W\|_{C^1(B_1)} \leq C\|G\|_{L^q(B_1)} \leq Cr^{2-\frac{d}{q}}\|F\|_{L^q(B(x_0, r_0))} \leq Cr.$$

Ceci nous donne donc enfin

$$\|\nabla V\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C[r + \|V\|_{L^\infty(B_1)}].$$

En renormalisant pour refaire apparaître U , on trouve l'égalité (4.5).

Pour l'égalité (4.6), remarquons tout d'abord que

$$-\Delta(V - W) \leq 0.$$

En particulier, cela implique que

$$(V - W)(x) \leq \int_{\partial B_1} P_x(z)V(z)d\sigma(z)$$

où $P_x(\cdot)$ désigne le noyau de Poisson en x . En utilisant de nouveau l'estimation sur W et la positivité de V , on a

$$\|V\|_{L^\infty(B_{2/3})} \leq C \left[r + \int_{\partial B_1} V(z)d\sigma(z) \right].$$

L'inégalité (4.6) provient alors d'un changement de variables. \square

4.4 Un lemme clé

La preuve de la continuité Hölder découle de l'obtention d'une bonne estimation sur la mesure $\Delta|u|$. Cette estimation est la suivante :

Lemme 4.10 (Estimation Clé). *Si $f \in L^q(D)$ pour un certain $q > d$ et $u \geq 0$, ou si $f \in L^\infty(D)$ et u est de signe quelconque, alors pour tout $\delta \in (0, 1/2)$, il existe une constante $C = C(d, f, \lambda, \delta)$ telle que, pour toute boule ouverte $B(x_0, \delta) \subset D$ telle que $u(x_0) = 0$ et pour tout $r \leq \delta/4$, on a l'estimation*

$$|\Delta|u||(\overline{B(x_0, r)}) \leq Cr^{d-1-\frac{1}{2}}.$$

La preuve de ce lemme sera effectuée de deux manières distinctes selon que u est positive, ou que son signe change. Dans le premier cas, les résultats préliminaires permettent de conclure directement. Dans le second, la preuve de la continuité de u constitue une étape préliminaire nécessaire à l'application d'un outil indispensable : le lemme de Monotonie, qui permet de prouver l'estimation clé. Dans un second temps, une fois l'estimation obtenue, on prouvera la continuité Hölder de la fonction d'état.

Tout d'abord, remarquons que, à partir du lemme 4.8, on peut expliciter un représentant particulier de u . En effet, on a vu, lors du lemme 4.5, que l'on avait les inégalités suivantes, au sens des distributions sur D :

$$\Delta u^+ \geq -|f|, \quad \Delta u^- \geq -|f|.$$

En utilisant alors le lemme 4.8, puisque dans les deux cas du lemme clé, on a $f \in L^q(D)$ pour un $q > d/2$, la fonction u admet un représentant défini ponctuellement par la limite suivante :

$$\forall x \in D, \quad u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, r)} u.$$

On vérifie que, avec cette définition, on a de même,

$$\forall x \in D, \quad u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} u.$$

4.4.1 Cas où u est positive

Remarquons que dans ce cas, la distribution $\Delta|u| = \Delta u = \Delta u^+$ est une mesure de Radon positive à une fonction L^∞ près (c'est le lemme 4.5).

Preuve du lemme 4.10 dans le cas où la fonction u est positive. On considère une boule ouverte $B(x_0, 2r) \subset D$ avec $r \leq 1$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(B(x_0, 2r))$. Par le lemme 4.3, on a

$$|\langle \Delta u + f, \varphi \rangle| \leq C_1 \|\nabla \varphi\|_{L^2} (r^{d-1} + \lambda r^d)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\nabla \varphi\|_{L^2(B(x_0, 2r))} r^{\frac{d-1}{2}}.$$

On choisit alors la fonction φ comme vérifiant les critères suivants :

$$\varphi = 1 \text{ dans } B(x_0, r), \quad \varphi = 0 \text{ hors de } B(x_0, 2r),$$

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} \leq \frac{C(d)}{r},$$

et on obtient que

$$|\langle \Delta u + f, \varphi \rangle| \leq C(d, \lambda) r^{d-1-\frac{1}{2}}.$$

On utilise alors le lemme 4.5, et plus précisément que $0 \leq \mu_+ = \Delta u + f \mathbf{1}_{[u>0]}$. On trouve alors que

$$\begin{aligned} \mu_+(B(x_0, r)) &\leq \langle \mu_+, \varphi \rangle \leq |\langle \Delta u + f \mathbf{1}_{[u>0]}, \varphi \rangle| \leq |\langle \Delta u + f, \varphi \rangle| + \int_D |f| |\varphi| \\ &\leq C r^{d-1-\frac{1}{2}} + \int_{B(x_0, 2r)} |f|. \end{aligned}$$

On estime alors, si $1/p + 1/q = 1$, où q est tel que $f \in L^q(D)$ avec $q > d$.

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, 2r)} |f| &\leq |B(x_0, 2r)|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^q(B(x_0, 2r))} \\ &\leq C(d, q) r^{d(1-1/q)} \|f\|_{L^q(D)}. \end{aligned}$$

Maintenant, comme $q > d$, on a $d(1-1/q) > d-1 > d-1-1/2$, et comme $r \leq 1$, on a donc

$$r^{d(1-1/q)} \leq r^{d-1-1/2}.$$

On a donc prouvé que $\mu_+(B(x_0, r)) \leq C r^{d-1-1/2}$. On a de la même manière, comme $\Delta u = \mu_+ - f \mathbf{1}_{[u>0]}$,

$$|\Delta u| \leq \mu_+ + |f|,$$

et des estimations précédentes on déduit le résultat du lemme clé. \square

4.4.2 Cas général

La preuve du lemme clé va découler du lemme de Monotonie. Pour pouvoir l'appliquer, on a besoin de savoir que la fonction u est continue, ce qui constitue déjà un résultat de régularité préliminaire non trivial.

Lemme 4.11. *On suppose que $f \in L^q(D)$ pour un $q > d/2$. Alors, la fonction u est continue sur D .*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de D convergeant vers un x_∞ dans D . On pose $\delta_n = |x_n - x_\infty|$. On peut supposer que les δ_n décroissent. Si, pour un certain n , on a $|B(x_\infty, \delta_n) \cap \Omega^c| = 0$, alors on a vu que $-\Delta u = f$ dans $B(x_\infty, \delta_n)$ et donc u est continue en x_∞ .

On peut donc supposer que pour tout n , $|B(x_\infty, \delta_n) \cap \Omega^c| \neq 0$. On considère alors les fonctions $u_n(\xi) = u(x_\infty + \delta_n \xi)$. Comme elles sont uniformément bornées, on peut supposer (quitte à extraire) qu'elles convergent, au moins dans $L^\infty(\mathbf{R}^d)$ muni de sa topologie faible-*, vers une fonction u_∞ elle aussi dans $L^\infty(\mathbf{R}^d)$. L'objectif est donc de prouver que $u_\infty = 0$ et que la convergence est uniforme sur B_1 : en effet, on aura alors

$$\sup_{|\xi| \leq 1} |u(x_\infty + \delta_n \xi)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et en particulier,

$$u(x_n) = u(x_\infty + (x_n - x_\infty)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et la fonction égale à un représentant continu de u dans Ω_{int} et à 0 dans Ω_{int}^c est alors un représentant continu de u .

Pour tout $R \geq 1$, on introduit v_R la solution de

$$\begin{cases} -\Delta v_R = f \text{ dans } B(x_\infty, \delta_n R), \\ v_R \in u + H_0^1(B(x_\infty, \delta_n R)). \end{cases}$$

On appelle alors $v_n(\xi) = v_R(x_\infty + \delta_n \xi)$. On a

$$\int_{B_R} |\nabla(u_n - v_n)|^2 \leq C(\lambda, R)\delta_n,$$

et

$$-\Delta v_n = \delta_n^2 f(x_\infty + \delta_n \xi).$$

En particulier, $v_n - u_n$ tend vers 0 dans $H_0^1(B_R)$. Comme de plus, v_n est bornée et Δv_n converge vers 0 dans L^q , si f est L^q avec $q > d/2$, v_n converge uniformément sur tout compact de B_R . La limite des v_n est nécessairement u_∞ est harmonique sur B_R . Comme R a été choisi de manière arbitraire, on a donc que u_∞ est harmonique sur tout \mathbf{R}^d . Comme de plus u_∞ est dans L^∞ , c'est nécessairement une constante. On peut de plus supposer que la convergence des u_n a lieu dans $H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^d)$.

On veut maintenant prouver que $u_\infty = 0$. Pour cela, supposons par l'absurde que, par exemple, $u_\infty > 0$. Alors, u_n^- tend vers 0 dans $H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^d)$. Comme de plus, on a l'inégalité

$$-\Delta u_n^- \leq \delta_n^2 |f(x_\infty + \delta_n \xi)|,$$

alors la convergence est uniforme sur tout compact.

Comme pour tout n , on a $|B(x_\infty, \delta_n) \cap \Omega^c| \neq 0$, on peut choisir $y_n = x_\infty + \delta_n \xi_n$ pour un certain ξ_n dans B_1 avec $u(y_n) = 0$. Notons alors $B_s = B(y_n, s)$. On utilise le lemme 4.3 avec une fonction

$$\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_{2s}), \quad 0 \leq \varphi \leq 1,$$

$$\varphi|_{B_s} = 1, \quad \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(B_{2s})} \leq C/s.$$

On trouve, en utilisant la décomposition fournie dans le lemme 4.5

$$|\langle \mu_+ - \mu_-, \varphi \rangle| \leq C s^{d-1-1/2}.$$

D'où, comme μ_+ et μ_- sont deux mesures de Radon positives :

$$\mu_+(B_s) \leq C s^{d-1-1/2} + \mu_-(B_{2s})$$

soit encore,

$$\Delta u^+(B_s) \leq \Delta u^-(B_{2s}) + C s^{d-1-1/2}.$$

On multiplie cette dernière inégalité par s^{1-d} et on intègre entre 0 et δ_n pour obtenir

$$\int_{\partial B_{\delta_n}} u^+ \leq \int_{\partial B_{2\delta_n}} u^- + C \int_0^{\delta_n} s^{-1/2} ds \leq \int_{\partial B_{2\delta_n}} u^- + C \sqrt{\delta_n},$$

ce que l'on peut réécrire en

$$\int_{\partial B_1} u_n^+(\xi_n + \xi) d\xi \leq \int_{\partial B_2} u_n^-(\xi_n + \xi) d\xi + C\sqrt{\delta_n}.$$

Or, la partie de droite dans cette dernière inégalité tend vers 0 quand n tend vers ∞ , et la partie de gauche est positive. Elle tend donc elle aussi vers 0. De plus, la suite $(\xi_n)_n$ évolue dans B_1 . On peut donc, quitte à extraire, supposer qu'elle converge vers un ξ_∞ lui aussi dans $\overline{B_1}$. Et on a alors la convergence de la suite $(u_n(\xi_n + \cdot))_n$ dans $H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^d)$ vers $u_\infty(\xi_\infty + \cdot) = u_\infty$. D'où une contradiction. De même en supposant initialement que $u_\infty < 0$. En conclusion, $u_\infty = 0$.

Pour conclure, remarquons que

$$-\Delta|u_n| \leq \delta_n^2 |f(x_\infty + \delta_n \xi)|.$$

En effet,

$$-\Delta|u| = -\Delta(u^+) - \Delta(u^-) \tag{4.7}$$

$$= -\mu_+ - \mu_- + f\mathbf{1}_{[u>0]} - f\mathbf{1}_{[u<0]} \tag{4.8}$$

$$\leq |f| \tag{4.9}$$

et le résultat s'obtient par changement de variable. Si f évolue dans L^q , pour un $q > d/2$ le terme $\delta_n^2 |f(x_\infty + \delta_n \cdot)|$ converge vers 0 dans L^q , et donc la convergence de u_n vers 0 a lieu uniformément sur tout compact, ce qui achève la preuve. \square

On suppose maintenant que $f \in L^\infty(D)$. L'outil que l'on va utiliser dans la preuve du lemme clé est le lemme suivant :

Lemme 4.12 (Lemme de Monotonie, [ACF84], [CJK02]). *Soit $U \in H^1(B_{r_0})$, continue sur $\overline{B_{r_0}}$, avec $U(0) = 0$ et telle que, pour un certain $a \geq 0$, on ait*

$$\Delta U^+ \geq -a, \quad \Delta U^- \geq -a \quad \text{sur } B_{r_0}.$$

On définit alors

$$\Phi(r) = \left(\frac{1}{r^2} \int_{B_r} \frac{|\nabla U^+|^2}{|x|^{d-2}} \right) \left(\frac{1}{r^2} \int_{B_r} \frac{|\nabla U^-|^2}{|x|^{d-2}} \right).$$

Alors, si $a = 0$, la fonction Φ est croissante sur $]0, r_0[$. Dans tous les cas, il existe une constante C telle que

$$\forall r \in]0, r_0/2[, \quad \Phi(r) \leq C \left[1 + \int_{B_{r_0}} U^2 \right].$$

Dans la preuve du lemme clé que nous présentons maintenant, nous reprenons essentiellement la démonstration de [BHP05], mais avec des exposants différents pour les puissances de r .

Preuve du lemme 4.10 dans le cas où la fonction u est de signe quelconque et f bornée. On considère une boule ouverte $B(x_0, \delta) \subset D$ avec $u(x_0) = 0$. On peut alors appliquer le lemme de Monotonie à $U(\cdot) = u(x_0 + \cdot)$ sur B_δ , ceci car f est ici supposée bornée. Comme de plus u est bornée sur D , la fonction $\Phi(r)$ est bornée pour $r \in]0, \delta/2[$ par une constante $C(\delta)$. En translatant on obtient, pour $r \in]0, \delta/2[$,

$$r^{-2d} \left(\int_{B(x_0, r)} |\nabla u^+|^2 \right) \left(\int_{B(x_0, r)} |\nabla u^-|^2 \right) \leq \Phi(r) \leq C(\delta). \quad (4.10)$$

Pour tout r , on introduit les fonctions $v^r = v_+^r - v_-^r$ et $w^r = w_+^r - w_-^r$ où v_+^r, v_-^r, w_+^r et w_-^r sont les solutions de

$$\begin{aligned} -\Delta v_+^r &= f^+, \quad -\Delta v_-^r = f^- \quad \text{sur } B(x_0, r), \quad v_+^r - u^+, \quad v_-^r - u^- \in H_0^1(B(x_0, r)), \\ -\Delta w_+^r &= f^+, \quad -\Delta w_-^r = f^- \quad \text{sur } B(x_0, r), \quad w_+^r, \quad w_-^r \in H_0^1(B(x_0, r)). \end{aligned}$$

Comme, pour $i \in \{+, -\}$, $v_i^r - w_i^r$ est harmonique sur $B(x_0, r)$ et égale à u^i sur $\partial B(x_0, r)$, on a

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(v_i^r - w_i^r)|^2 \leq \int_{B(x_0, r)} |\nabla u^i|^2,$$

et aussi (comme $v_i^r - w_i^r$ est harmonique et $u_i - v_i^r + w_i^r = 0$ sur $\partial B(x_0, r)$),

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^i - v_i^r + w_i^r)|^2 = \int_{B(x_0, r)} \nabla(u^i - v_i^r + w_i^r) \cdot \nabla u^i \leq 2 \int_{B(x_0, r)} |\nabla u^i|^2.$$

D'où, en utilisant l'inégalité (4.10), on a

$$\left(r^{-d} \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^+ - v_+^r - w_+^r)|^2 \right) \left(r^{-d} \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^- - v_-^r - w_-^r)|^2 \right) \leq C(\delta). \quad (4.11)$$

D'un autre côté,

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(u - v^r + w^r)|^2 \leq C \int_{B(x_0, r)} |\nabla(v^r - u)|^2 + |\nabla w^r|^2.$$

On cherche maintenant à obtenir des bornes sur les deux intégrales de droite.

(i) Comme $v^r \in u + H_0^1(B(x_0, r))$, en utilisant la proposition 4.1, on a

$$G(u) \leq G(v^r) + Cr^{d-1},$$

i.e., en remarquant que $G(u) - G(v^r) = \frac{1}{2} \int |\nabla(u - v^r)|^2$ (puisque $-Dv^r = f$ sur $B(x_0, r)$), on a

$$\int |\nabla(u - v^r)|^2 \leq Cr^{d-1}.$$

(ii) Le second terme est borné par Cr^d et on a même le résultat suivant :

Lemme 4.13. *Puisque $f \in L^q$ pour un $q > d$, on a $\|\nabla w\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq Cr^{1-\frac{d}{q}} \leq C$ et $r^{-d} \int_{B(x_0, r)} |\nabla w_i^r|^2$ est borné.*

Le bilan :

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(u - v^r + w^r)|^2 \leq Cr^{d-1}.$$

Mais comme

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u - v^r + w^r)|^2 &= \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^+ - v_+^r + w_+^r)|^2 + \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^- - v_-^r + w_-^r)|^2 \\ &\quad + 2 \int_{B(x_0, r)} \nabla(u^+ - v_+^r + w_+^r) \cdot \nabla(u^- - v_-^r + w_-^r), \end{aligned}$$

on a (grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz),

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^+ - v_+^r + w_+^r)|^2 + \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^- - v_-^r + w_-^r)|^2 &\leq Cr^{d-1} \\ + \|\nabla(u^+ - v_+^r + w_+^r)\|_{L^2(B(x_0, r))} \|\nabla(u^- - v_-^r + w_-^r)\|_{L^2(B(x_0, r))}. \end{aligned}$$

Et avec l'estimation donnée par le lemme de Monotonie, i.e., l'inégalité (4.11),

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^+ - v_+^r + w_+^r)|^2 + \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^- - v_-^r + w_-^r)|^2 \leq Cr^{d-1}.$$

Enfin, de la borne sur $r^{-d} \int_{B(x_0, r)} |\nabla w_i^r|^2$, on déduit

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^+ - v_+^r)|^2 + \int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^- - v_-^r)|^2 \leq Cr^{d-1}. \quad (4.12)$$

On revient maintenant aux définitions de v_+^r et v_-^r . On a alors

$$\Delta(u^+ - v_+^r) = \mu^+ + f^+ - f \mathbf{1}_{[u > 0]} \geq \mu^+,$$

$$\Delta(u^- - v_-^r) = \mu^- - f^- + f \mathbf{1}_{[u < 0]} \geq \mu^-.$$

En procédant à une intégration par partie, après avoir remarqué que $u^+ - v_+^r$ est une fonction négative, on a

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^+ - v_+^r)|^2 = \int_{B(x_0, r)} (v_+^r - u^+) d(\Delta(u^+ - v_+^r)) \geq \int_{B(x_0, r)} (v_+^r - u^+) d\mu^+.$$

Comme de plus $\mu^+([u \neq 0]) = 0$, on a au final

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^+ - v_+^r)|^2 \geq \int_{B(x_0, r)} v_+^r d\mu^+,$$

et le résultat similaire sur u^- , v_-^r et μ^- :

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla(u^- - v_-^r)|^2 \geq \int_{B(x_0, r)} v_-^r d\mu^-.$$

Au final, l'équation (4.12) devient

$$\int_{B(x_0, r)} v_+^r d\mu^+ + \int_{B(x_0, r)} v_-^r d\mu^- \leq Cr^{d-1}.$$

On applique maintenant la formule (4.1) à la fonction $U = u^+ - v_+^r$ (de telle sorte que $\Delta U \geq \mu_1$ et $U \leq 0$). On peut donc écrire, pour tout $z \in B(x_0, r/4)$, (de telle sorte que $B(z, 3r/4) \subset B(x_0, r)$),

$$v_+^r(z) \geq \int_{\partial B(z, 3r/4)} U - U(z) \geq C(d) \int_0^{3r/4} ds s^{1-d} \int_{B(z, s)} d\mu^+. \quad (4.13)$$

On remarque tout d'abord que

$$\int_0^{3r/4} ds s^{1-d} \int_{B(z, s)} d\mu^+ \geq (3r/4)^{1-d} \int_{r/2}^{3r/4} ds \mu^+(B(z, s)) \geq Cr^{2-d} \mu^+(B(x_0, r/4)).$$

D'où, en intégrant (4.13) sur $B(x_0, r/4)$, on trouve

$$Cr^{d-1} \geq Cr^{2-d} \left(\mu^+(B(x_0, r/4)) \right)^2,$$

ou encore

$$\mu^+(B(x_0, r/4)) \leq Cr^{d-1-1/2}.$$

On a le même résultat sur μ^- , et donc finalement sur $|\Delta|u||$. \square

4.5 Fin de la preuve du théorème 4.7

Lemme 4.14. *Si $r \leq 1$ et $B(x_0, 2r) \subset D$, on a*

$$\int_0^r ds s^{1-d} \int_{B(x_0, s)} d|\Delta|u|| \leq C\sqrt{r}.$$

Démonstration. Ceci découle directement de l'intégration de l'inégalité obtenue dans le lemme 4.10. \square

Remarque. Rappelons que, dans tout ce qui suit, $\partial\Omega$ désigne toujours le bord au sens de la mesure de Ω , c'est à dire

$$\partial\Omega = \left\{ x \in D : \forall r > 0, 0 < |B(x, r) \cap \Omega| < |B(x, r)| \right\}.$$

De plus, on définit $d(x) = d(x, \partial\Omega)$.

Tout d'abord, on prouve que u (on parle toujours ici du représentant défini à partir d'intégrales sur des sphères) est une fonction nulle *partout* (et pas seulement presque partout) hors de l'intérieur au sens de la mesure de Ω . Ce résultat est bien sûr évident en supposant déjà prouvée la continuité de u . Néanmoins, notre objectif est de partir uniquement des estimations des lemmes 4.10 et 4.14, ainsi que du représentant de u défini par des moyennes sur des sphères, sans aucune autre hypothèse de régularité, et de prouver alors la continuité Hölder. En particulier dans le cas où la fonction u est positive, l'estimation du lemme 4.10 est obtenue facilement, dans avoir besoin de prouver la continuité, et les preuves suivantes permettent donc, dans ce cas là, de conclure directement à la continuité Hölder de u , sans avoir besoin à aucun moment de prouver la continuité.

Lemme 4.15. Soit x_0 dans D tel que $|B(x_0, r) \cap \Omega^c| > 0$ pour tout $r > 0$ (i.e., $x_0 \in \Omega_{int}^c$). Alors $u(x_0) = 0$.

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, 4r) \subset D$ et $x_1 \in B(x_0, r)$ tel que $u(x_1) = 0$ (un tel point existe bien puisque $u = 0$ presque partout dans Ω^c). Comme $\Delta|u| \geq -|f|$ (par le lemme 4.5), on peut appliquer le lemme 4.9 :

$$\|u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq \|u\|_{L^\infty(B(x_1, 2r))} \leq C \left[r + \int_{\partial B(x_1, 2r)} |u| \right].$$

Mais en appliquant le lemme 4.8 avec l'estimation du lemme 4.14, on obtient

$$\int_{\partial B(x_1, 2r)} |u| = \int_{\partial B(x_1, 2r)} |u| - |u|(x_1) \leq C\sqrt{r}$$

D'où $\|u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq C\sqrt{r}$. Au final,

$$0 \leq |u(x_0)| \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \|u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} = 0.$$

□

Preuve de la Hölder continuité de u . Soit $\delta \in (0, \frac{1}{3})$. On définit

$$D_\delta = \{x \in D : d(x, \partial D) \geq 6\delta\}.$$

Rappelons que l'on a défini la fonction

$$d : x \in D \mapsto d(x, \partial\Omega).$$

Lemme 4.16. Il existe $C_\delta = C_\delta(\|u\|_\infty) > 0$ tel que pour tout $x_0 \in D_\delta$, $|u(x_0)| \leq C_\delta d(x_0)^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Soit x_0 dans D_δ . On suppose tout d'abord que $d(x_0) \geq \delta$. Alors, comme u est bornée,

$$|u(x_0)| \leq \frac{\|u\|_\infty}{\sqrt{\delta}} d(x_0)^{\frac{1}{2}} \leq C(\delta) d(x_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Si maintenant $r_0 = d(x_0) < \delta$, on choisit $y_0 \in \partial\Omega$ tel que $r_0 = d(x_0, y_0)$. Par le lemme 4.15, on a $u(y_0) = 0$, de telle sorte que, en appliquant le lemme 4.8 et l'estimation du lemme 4.14, on a

$$\int_{\partial B(y_0, 2r_0)} |u| = \int_{\partial B(y_0, 2r_0)} |u| - |u(y_0)| = (d\omega_d)^{-1} \int_0^{2r_0} ds s^{1-d} \int_{B(z_0, s)} d(\Delta|u|) \leq C\sqrt{r_0}.$$

En appliquant enfin le (ii) du lemme 4.9 à la fonction $|u|$, on obtient

$$\|u\|_{L^\infty(B(x_0, r_0))} \leq \|u\|_{L^\infty(B(y_0, 2r_0))} \leq C \left(3r_0 + \int_{\partial B(y_0, 2r_0)} |u| \right)$$

et donc $|u(x_0)| \leq Cd(x_0)^{\frac{1}{2}}$.

□

Lemme 4.17. *Il existe $C'_\delta = C'_\delta(\|u\|_\infty) > 0$ tel que pour tout $x_0 \in D_\delta$ avec $d(x_0) > 0$, on a*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B(x_0, \frac{d(x_0)}{4}))} \leq C'_\delta \max \left\{ 1, \frac{1}{d(x_0)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Démonstration. On suppose d'abord que $|B(x_0, d(x_0)) \cap \Omega| = 0$. Grâce au lemme 4.15, on sait que la fonction u est identiquement nulle dans $B(x_0, d(x_0))$. En particulier, $|\nabla u(x_0)| = 0$.

Si maintenant on a $|B(x_0, d(x_0)) \cap \Omega^c| = 0$, alors $-\Delta u = f$ dans $B(x_0, d(x_0))$ (par le lemme 4.4) de telle sorte que, en appliquant le (i) du lemme 4.9 et le lemme 4.16,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B(x_0, \frac{d(x_0)}{4}))} \leq C \left[1 + \frac{1}{d(x_0)} \|u\|_{L^\infty(B(x_0, \frac{d(x_0)}{2}))} \right] \leq C \left[1 + \frac{1}{d(x_0)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

□

Maintenant, on peut conclure à la Hölder continuité de u . Soient x et y dans D_δ . Supposons tout d'abord que x ou y est dans Ω_{int}^c . Alors, par les lemmes 4.15 et 4.16, on prouve qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| \leq C d(x, y)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons maintenant que x et y sont dans Ω_{int} . Supposons d'abord que l'on a $d(x, y) \leq d(x)/4$. Comme u est régulière dans $B(x, d(x))$, en utilisant l'estimation donnée par le lemme 4.17, on trouve que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq C'_\delta \max \left\{ 1, \frac{1}{d(x)^{\frac{1}{2}}} \right\} d(x, y) \\ &\leq C \max \left\{ d(x, y), d(x, y)^{\frac{1}{2}} \right\} \leq C d(x, y)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si $d(x, y) \leq d(y)/4$, le résultat est le même par symétrie.

Si enfin $d(x, y) \geq \max \{d(y), d(x)\}/4$, alors

$$|u(x) - u(y)| \leq 2 \max \{u(x), u(y)\} \leq 2C \max \left\{ d(x)^{\frac{1}{2}}, d(y)^{\frac{1}{2}} \right\} \leq C d(x, y)^{\frac{1}{2}}.$$

Et donc il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous x, y dans D_δ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq C d(x, y)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Chapitre 5

Lipschitzianité de la fonction d'état quand $f \geq 0$

Dans cette section on va prouver le résultat principal de cette partie, c'est à dire la Lipschitzianité locale de la fonction d'état dans le cas où la fonction f est positive et Hölder continue.

Tout d'abord, on va prouver un résultat de densité du complémentaire de la forme optimale qui sera utilisé tout à la fin de la seconde partie de ce chapitre. Ce résultat dit que pour tout point x sur le bord de la forme optimale, la quantité $|\Omega^c \cap B(x, r)|/|B(x, r)|$ est bornée inférieurement indépendamment du choix de x et de r . La preuve de la continuité Lipschitz utilisera ce résultat. En annexe à ce chapitre, on prouvera un résultat de densité similaire mais concernant la forme optimale elle-même. Le premier résultat de densité est vrai en toute généralité, et n'utilise pas de résultat de régularité de la fonction d'état. En effet, la preuve utilise la décroissance de la fonctionnelle J et des perturbations de Ω de la forme $\Omega \cup B$ pour des boules B incluses dans D . Le second résultat de densité, quant à lui, demande une certaine régularité sur la fonction d'état. En pratique, la 1/2-Hölder continuité prouvée au chapitre précédent suffit.

Dans un second temps, on prouve alors la continuité Lipschitz de la fonction d'état. La preuve est directement inspirée de celle développée pour le traitement d'un problème voisin dans [ACKS01]. On suppose tout d'abord que la fonction f est bornée sur D et α -Hölder continue pour un $\alpha > 0$. On étudie alors, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $(u - \varepsilon)^+$. Cette fonction est Lipschitzienne sur D avec une constante de Lipschitz M_ε , et on observe le point "le plus mauvais", c'est à dire celui réalisant la constante de Lipschitz. L'objet de la preuve est alors d'utiliser la structure de ce point pour obtenir une borne sur M_ε indépendante de ε .

5.1 Un résultat de densité extérieure

Le résultat suivant est vrai en toute généralité, i.e., aucune hypothèse n'est nécessaire sur f autre que $f \in L^2(D)$.

Lemme 5.1. *Il existe des constantes $C(d)$ et $r_0(d, \lambda)$ telles que,*

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall r \in (0, \min\{r_0, d(x, \partial D)\}), |\Omega^c \cap B(x, r)| \geq Cr^d.$$

Démonstration. La preuve est classique. On peut la trouver par exemple dans [Giu84]. On considère des perturbations de Ω de la forme $\tilde{\Omega} = \Omega \cup B(x, r)$ pour des boules $B(x, r)$ incluses dans D . En utilisant que Ω est une forme optimale du problème (P_λ) , on a

$$\begin{aligned} J(\Omega) + P(\Omega) + \lambda||\Omega| - m| &= \mathcal{E}_\lambda(\Omega) \\ &\leq \mathcal{E}_\lambda(\Omega \cup B(x, r)) \\ &\leq J(\Omega \cup B(x, r)) + P(\Omega \cup B(x, r)) + \lambda||\Omega \cup B(x, r)| - m|. \end{aligned}$$

Mais comme la fonctionnelle J est décroissante,

$$P(\Omega) \leq P(\Omega \cup B(x, r)) + \lambda|\Omega^c \cap B(x, r)|. \quad (5.1)$$

(i) *D'un côté, on peut estimer le périmètre par en dessous :*

$$P(\Omega) \geq P(\Omega, B(x, r)) + P(\Omega, \overline{B(x, r)}^c). \quad (5.2)$$

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(\Omega) &\geq P(\Omega, B(x, r)) + P(\Omega, \partial B(x, r)) + P(\Omega, \overline{B(x, r)}^c) \\ &\geq P(\Omega, B(x, r)) + P(\Omega, \overline{B(x, r)}^c) \\ &\geq P(\Omega^c, B(x, r)) + P(\Omega, \overline{B(x, r)}^c). \end{aligned}$$

(ii) *On peut aussi estimer $P(\Omega \cup B(x, r))$ pour presque tout r :*

$$P(\Omega \cup B(x, r)) = P(\Omega, \overline{B(x, r)}^c) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial B(x, r) \cap \Omega^c). \quad (5.3)$$

En effet,

$$P(\Omega \cup B(x, r)) = P(\Omega \cup B(x, r), B(x, r)) + P(\Omega \cup B(x, r), \partial B(x, r)) + P(\Omega \cup B(x, r), \overline{B(x, r)}^c),$$

et comme $\mathbf{1}_{\Omega \cup B(x, r)} = \mathbf{1}_{B(x, r)}$ dans l'ouvert $B(x, r)$, on a

$$P(\Omega \cup B(x, r), B(x, r)) = 0,$$

et comme $\mathbf{1}_{\Omega \cup B(x, r)} = \mathbf{1}_\Omega$ dans l'ouvert $\overline{B(x, r)}^c$, on a

$$P(\Omega \cup B(x, r), \overline{B(x, r)}^c) = P(\Omega, \overline{B(x, r)}^c).$$

Enfin, pour presque tout r (voir [Giu84], remarque 2.14), on a

$$P(\Omega \cup B(x, r), \partial B(x, r)) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial B(x, r) \cap \Omega^c).$$

(iii) *En utilisant les inégalités (5.1), (5.2) et (5.3), on obtient :*

$$P(\Omega^c, B(x, r)) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial B(x, r) \cap \Omega^c) + \lambda|\Omega^c \cap B(x, r)|.$$

Mais, comme Ω est de périmètre fini, $P(\Omega^c, \partial B(x, r))$ est nul pour presque tout r , et grâce à l'inégalité

$$P(\Omega^c \cap B(x, r)) \leq P(\Omega^c, B(x, r)) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial B(x, r) \cap \Omega^c) + P(\Omega^c, \partial B(x, r)),$$

on a, pour presque tout r :

$$P(\Omega^c \cap B(x, r)) \leq 2\mathcal{H}^{d-1}(\partial B(x, r) \cap \Omega^c) + \lambda|\Omega^c \cap B(x, r)|,$$

i.e., en utilisant l'inégalité isopérimétrique sur le terme de gauche

$$C(d)|\Omega^c \cap B(x, r)|^{\frac{d-1}{d}} - \lambda|\Omega^c \cap B(x, r)| \leq 2\mathcal{H}^{d-1}(\partial B(x, r) \cap \Omega^c).$$

Comme $\frac{d}{dr}|\Omega^c \cap B(x, r)| = \mathcal{H}^{d-1}(\partial B(x, r) \cap \Omega^c)$, on a, pour presque tout r ,

$$C(d)|\Omega^c \cap B(x, r)|^{\frac{d-1}{d}} - \lambda|\Omega^c \cap B(x, r)| \leq 2\frac{d}{dr}|\Omega^c \cap B(x, r)|.$$

On peut étudier la fonction $g(x) = C(d)x^{\frac{d-1}{d}} - \lambda x$, et voir que

$$\lim_{x \gtrsim 0} \frac{g(x)}{x^{\frac{d-1}{d}}} = C(d).$$

Alors, pour r assez petit (i.e., plus petit qu'un certain $r_0(d, \lambda)$ et que $d(x, \partial D)$), et toujours pour presque tout r ,

$$\frac{C(d)}{4}|\Omega^c \cap B(x, r)|^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{d}{dr}|\Omega^c \cap B(x, r)|,$$

i.e., en divisant par $|\Omega^c \cap B(x, r)|^{\frac{d-1}{d}}$ et en intégrant de 0 à $s < \min\{r_0(d, \lambda), d(x, \partial D)\}$:

$$\hat{C}(d)s \leq |\Omega^c \cap B(x, r)|^{\frac{1}{d}}, \text{ i.e., } |\Omega^c \cap B(x, s)| \geq \hat{C}(d)s^d.$$

□

5.2 Lipschitzianité, principe de la preuve

Rappelons que notre objectif principal est de prouver un résultat de régularité sur la frontière de Ω . Une manière de faire consiste à appliquer des résultats connus sur les quasi-minimiseurs. Mais la régularité déjà connue sur la fonction d'état ne suffit pas pour ceci (voir le théorème 6.2). Dans la preuve de la continuité Hölder, on a fait des variations de la forme optimale en prenant des unions avec des boules. Ici, on va utiliser un autre type de perturbations extérieures, qui sera décrit en 5.3.

A partir de maintenant, on supposera que la fonction f est *positive, bornée, et localement α -Hölderienne*, pour un $\alpha > 0$. Par conséquent, la fonction u sera elle aussi positive. Notons enfin qu'une conséquence du chapitre précédent est que la fonction u est continue.

On veut étudier la Lipschitziannité locale de u dans D , i.e., prouver que pour tout point x de D , il existe un voisinage de x dans D tel que u est Lipschitzienne sur ce voisinage. Lorsque le point x est dans Ω_{int} (resp. dans Ω_{ext}), comme $-\Delta u = f$ dans Ω_{int} (resp. $-\Delta u = 0$ dans Ω_{ext}), alors par les résultats classiques sur le problème de Poisson, on sait que la fonction u est Lipschitzienne sur une boule $B(x, r)$ telle que $\overline{B(x, r)} \subset \Omega_{\text{int}}$ (resp. Ω_{ext}). Reste donc à prouver la Lipschitziannité locale dans des voisinages de points situés sur le bord de Ω .

On considère maintenant $\bar{x} \in \partial\Omega$ (Rappelons que $\partial\Omega$ désigne la frontière au sens de la mesure de Ω). On suppose que $B(\bar{x}, \delta) \subset D$. On va prouver la Lipschitziannité de la fonction u dans la boule $B(\bar{x}, \frac{\delta}{32})$. En particulier, la propriété sera locale et, quitte à renormaliser, on pourra supposer que $\delta = 1$. On désignera donc par $B_1 = B(\bar{x}, 1)$. Soit φ une fonction régulière telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 0$ dans $B(\bar{x}, \frac{1}{2})^c$, $\varphi = 1$ dans $B(\bar{x}, \frac{1}{4})$. Soit $\varepsilon > 0$. On définit

$$w_\varepsilon = [u - \varepsilon]^+.$$

La preuve présentée maintenant s'inspire directement de la seconde partie de [ACKS01]. On commence par définir M_ε la plus petite constante telle que

$$\forall x \in B_1, M_\varepsilon d(x) \geq w_\varepsilon(x)\varphi(x),$$

où $d(x) = d(x, \partial\Omega)$. On veut trouver une borne supérieure sur M_ε qui soit indépendante du choix de ε . Le résultat souhaité sera alors une conséquence directe du lemme suivant :

Lemme 5.2. *On suppose qu'il existe une constante $\mathcal{M} < \infty$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $M_\varepsilon < \mathcal{M}$. Alors u est Lipschitzienne dans $B(\bar{x}, \frac{1}{32})$.*

Démonstration. Soient y et z dans $B(\bar{x}, \frac{1}{32})$.

Si y ou z sont dans $\partial\Omega$, on a $0 = |u(y) - u(z)| \leq \mathcal{M}d(y, z)$.

Si $d(y)$ et $d(z)$ sont tous les deux inférieurs à $d(y, z)/6$, on trouve que

$$|u(y) - u(z)| \leq 2\mathcal{M} \max\{d(y), d(z)\} \leq \frac{2\mathcal{M}}{6}d(y, z).$$

Enfin si $r = d(y) > d(y, z)/6$, on a les estimations suivantes, en utilisant le lemme 4.9 :

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B(y, r/6))} \leq C + \frac{C'}{r}\|u\|_{L^\infty(B(y, r/3))}.$$

Soit $y_0 \in \partial\Omega$ tel que $r = d(y) = d(y, y_0)$. On a $B(y, \frac{r}{3}) \subset B(y_0, \frac{2r}{3})$. Alors

$$\|u\|_{L^\infty(B(y, r/3))} \leq 2\mathcal{M}\frac{r}{3},$$

d'où

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B(y, r/6))} \leq C + C'\frac{\mathcal{M}}{3}, \text{ et } |u(y) - u(z)| \leq C(\mathcal{M})|y - z|.$$

□

Dans l'étude de M_ε , on peut commencer par les deux propriétés suivantes :

Lemme 5.3. $\forall \varepsilon > 0, M_\varepsilon < \infty$.

Démonstration. Soit $(M_\varepsilon^n)_n$ une suite de réels positifs strictement inférieurs à M_ε et qui tendent vers M_ε . Par définition de M_ε , pour tout n , il existe un $x_n \in B_1$ tel que

$$w_\varepsilon(x_n)\varphi(x_n) > M_\varepsilon^n d(x_n).$$

Tout d'abord, on peut supposer, quitte à extraire, que la suite (x_n) converge vers un $x_\infty \in \overline{B_1}$. Par continuité de w_ε , φ et d , on a

$$w_\varepsilon(x_\infty)\varphi(x_\infty) \geq M_\varepsilon d(x_\infty).$$

Enfin remarquons que pour tout n , $w_\varepsilon(x_n) > 0$, et donc $u(x_n) > \varepsilon$. Toujours par continuité, on a donc encore que $u(x_\infty) \geq \varepsilon$, et donc $d(x_\infty) > 0$. En particulier,

$$M_\varepsilon \leq \frac{w_\varepsilon(x_\infty)\varphi(x_\infty)}{d(x_\infty)} < \infty.$$

□

Lemme 5.4. *Si $M_\varepsilon > 0$, alors il existe un $x_0 \in B(0, 1)$ tel que*

$$M_\varepsilon d(x_0) = w_\varepsilon(x_0)\varphi(x_0) > 0.$$

Démonstration. Il suffit de prendre pour x_0 l'élément x_∞ qui apparaît dans la preuve du lemme précédent en remarquant que lorsque $M_\varepsilon > 0$, on a $M_\varepsilon d(x_\infty) > 0$ et donc $\varphi(x_\infty) > 0$, ce qui implique $x_\infty \in B_1$. □

Fixons maintenant un ε positif petit. On considère le x_0 donné par le lemme précédent. Soit alors y_0 sur $\partial\Omega$ tel que $d(x_0) = d(x_0, y_0)$. Quitte à faire des rotations et des translations bien choisies, on peut supposer que $y_0 = 0$ et $x_0 = d(x_0)e_1$, en notant (e_1, \dots, e_d) la base standard de \mathbf{R}^d . Remarquons que, puisque $\varphi(x_0) > 0$, x_0 est dans $B(\bar{x}, \frac{1}{2})$ et ainsi $d(x_0) \leq d(x_0, \bar{x}) < \frac{1}{2}$, d'où finalement y_0 est dans $B(\bar{x}, 1)$. Notre objectif est ici de trouver une borne supérieure sur M_ε qui soit indépendante de ε . On supposera donc dans la suite que $M_\varepsilon \geq 1$, car dans l'autre cas l'estimation voulue est immédiate.

Dans la suite, on supposera que ε est fixé et on appellera $M = M_\varepsilon$ et $w = w_\varepsilon$. L'objectif de ce qui suit est de trouver une estimation par au dessus de M qui soit indépendante de ε .

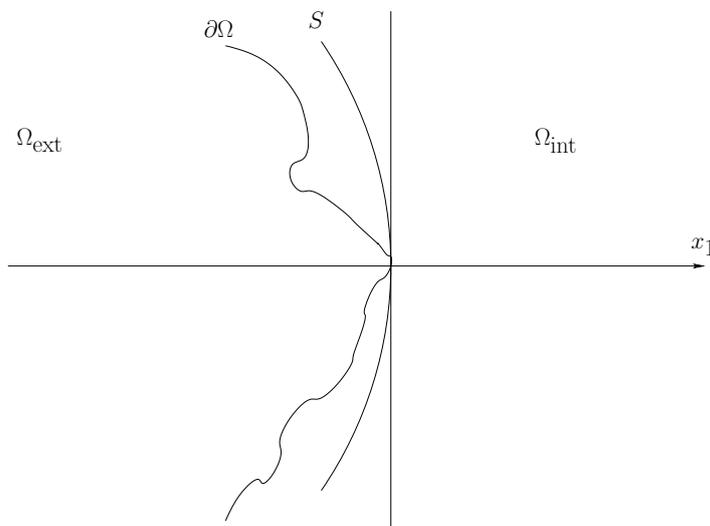
5.3 Description des perturbations

On suppose (et on prouvera dans la suite que c'est bien le cas) qu'il existe une surface \mathcal{C}^2 :

$$S = \{(x_1, x') \in \mathcal{V} : x_1 = \psi(x')\}$$

dans un voisinage \mathcal{V} (inclus dans B_1) de $y_0 = 0$ telle que ψ puisse être développée dans le sens suivant :

$$\psi(x') = Q'(x') + o_{x' \rightarrow 0}(|x'|^2)$$

FIG. 5.1 – les ensembles S et $\partial\Omega$

où Q' est une forme quadratique, le tout vérifiant la condition de courbure moyenne suivante :

$$\kappa(S)(x') \leq \frac{1}{d-1} \Delta\psi(x') \leq \frac{C}{M} + \frac{C}{\varphi(x_0)} \quad (5.4)$$

où les constantes notées C ne dépendent pas de ε , ni de x_0 , mais peuvent dépendre de la norme uniforme de φ ou de ses dérivées (et n'importe quelle constante notée C dans la suite sera de ce type). On suppose enfin (voir la figure 5.1) que

$$\partial\Omega \cap \mathcal{V} \subset \{(x_1, x') \in \mathcal{V} : x_1 \leq \psi(x')\}.$$

Comme x_0 est situé dans le demi-plan $[x_1 > 0]$, on en déduit que la surface S est incluse dans Ω_{int} , à l'intérieur du voisinage \mathcal{V} , et à l'exception du point 0 (voir la figure 5.1).

On va perturber Ω à partir de légères modifications de la surface S (voir la figure 5.2) :

$$S_t^- = \left\{ (x_1, x') \in \mathcal{V} : x_1 = \psi_t^-(x') = \psi(x') + \frac{\delta_0}{\varphi(x_0)} |x'|^2 - t \right\}$$

et

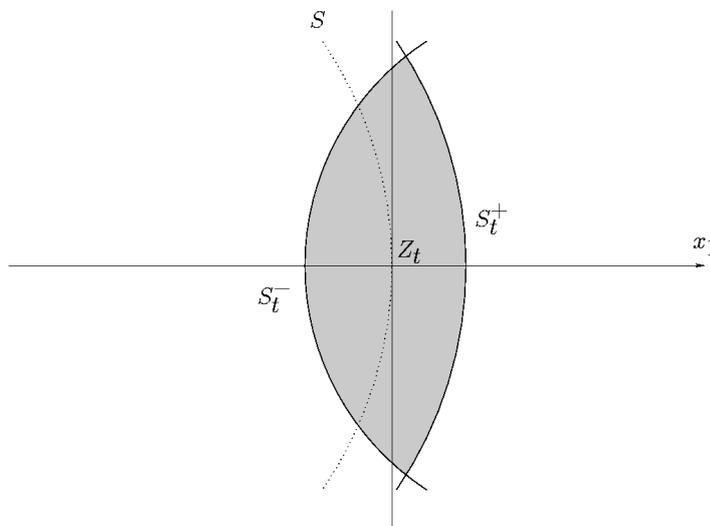
$$S_t^+ = \{(x_1, x') \in \mathcal{V} : x_1 = \psi_t^+(x') = \psi(x') + t\}$$

où $t \geq 0$ et $\delta_0 > 0$ sont tous les deux *petits*. En utilisant l'hypothèse faite sur la courbure de la surface S , c'est à dire l'équation (5.4), on remarque que, dans \mathcal{V} , il existe de nouvelles constantes C telles que

$$\kappa(S_t^\pm)(x) \leq \frac{C}{M} + \frac{C}{\varphi(x_0)}.$$

Soit Z_t le domaine entre S_t^+ et S_t^- (voir la figure 5.2), i.e.,

$$Z_t = \{(x_1, x') \in \mathcal{V} : \psi_t^-(x') < x_1 < \psi_t^+(x')\}.$$

FIG. 5.2 – l'ensemble Z_t

Comme S_t^+ et S_t^- s'intersectent pour $|x'|^2 = 2\frac{\varphi(x_0)}{\delta_0}t$, on aura $\overline{Z_t} \subset \mathcal{V}$ si t est assez petit (δ_0 étant fixé). On peut de plus en déduire la borne suivante sur les coordonnées des points de Z_t :

$$\forall (x_1, x') \in Z_t, |x'|^2 \leq 2\frac{\varphi(x_0)}{\delta_0}t. \quad (5.5)$$

Soit alors

$$\Omega_t = \Omega \cup Z_t,$$

et (voir la figure 5.3)

$$V_t = \{x_1 > \psi_t^-(x')\} \setminus \Omega \quad (= Z_t \setminus \Omega \text{ pour } t \text{ assez petit}).$$

Soit enfin u_t la solution au problème suivant (pour $u_t = u$ hors de Z_t) :

$$\begin{cases} -\Delta u_t = f & \text{dans } Z_t \\ u_t \in u + H_0^1(Z_t) \end{cases}$$

Comme l'ensemble Ω est une forme optimale du problème (P_λ) , on a

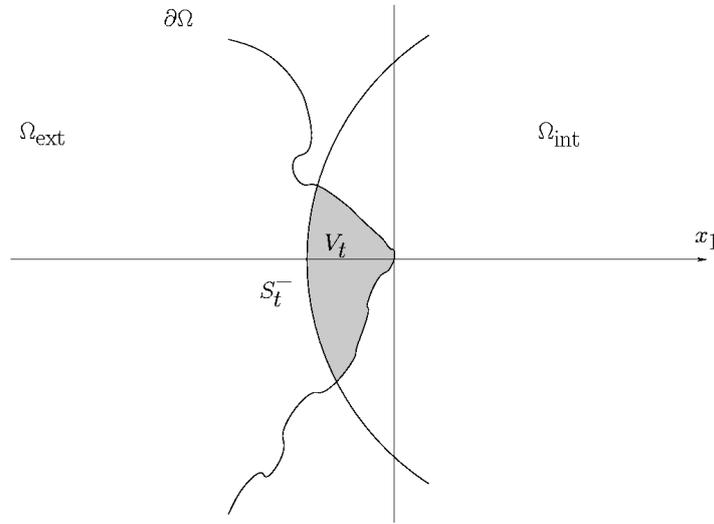
$$J(\Omega) + P(\Omega) + \lambda||\Omega| - m| \leq J(\Omega_t) + P(\Omega_t) + \lambda||\Omega_t| - m|,$$

de telle sorte que (puisque $J(\Omega) = G(u)$ et $J(\Omega_t) \leq G(u_t)$),

$$G(u) - G(u_t) \leq P(\Omega_t) - P(\Omega) + \lambda|V_t|.$$

5.4 Utilisation des perturbations

Dans cette section, on va trouver des estimations pour les différences $P(\Omega_t) - P(\Omega)$ par au dessus, et $G(u) - G(u_t)$ par en dessous avec l'aide des $|V_t|$ et $|V_{t/2}|$ et atteindre ainsi la borne sur M .

FIG. 5.3 – l'ensemble V_t

5.4.1 Variations du périmètre

Lemme 5.5.

$$P(\Omega_t) - P(\Omega) \leq \frac{C}{\varphi(x_0)} |V_t| + \frac{C}{M} |V_t|.$$

Démonstration. On commence par donner une expression des deux périmètres :

$$P(\Omega_t, B_1) = \mathcal{H}^{d-1}(S_t^- \setminus \Omega) + P(\Omega, B_1 \setminus \overline{Z_t}),$$

$$P(\Omega, B_1) \geq P(\Omega, Z_t) + P(\Omega, B_1 \setminus \overline{Z_t}).$$

En faisant la différence de ces deux équations, on trouve que

$$P(\Omega_t) - P(\Omega) \leq \mathcal{H}^{d-1}(S_t^- \setminus \Omega) - P(\Omega, Z_t). \quad (5.6)$$

Pour faire le calcul, si $d_t(\cdot) = d(\cdot, S_t^-)$, on a (Cf. [GT83], chapitre 14.6), en notant $K_j^t(y)$ la j -ème courbure de la surface S_t^- au point y , et si $d_t(x) = |x - y|$ pour un certain $y \in S_t^-$,

$$\Delta d_t(x) = - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{K_j^t(y)}{1 - K_j^t(y) d_t(x)}.$$

Soit maintenant, pour un t_0 petit (i.e., pour que la quantité définie soit finie),

$$K = \sup_{1 \leq j \leq d-1} \sup_{0 \leq t \leq t_0} \sup_{y \in B_{1/2} \cap S_t^-} |K_j^t(y)|.$$

On calcule, pour $t < t_0$, pour x dans V_t et pour le y sur S_t^- tel que $d_t(x) = |x - y|$,

$$\begin{aligned} \left| \Delta d_t(x) + \sum_{j=1}^{d-1} K_j^t(y) \right| &= \left| \sum_{j=1}^d K_j \left(\frac{1}{1 - d_t(x)K_k^t(y)} - 1 \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^d |K_j^t(y)|^2 \frac{d_t(x)}{|1 - d_t(x)K_j^t(y)|} \\ &\leq d K^2 \frac{d_t(x)}{1 - d_t(x)K}. \end{aligned}$$

Or, comme K est fini et comme la fonction d_t en restriction à V_t tend vers 0 en norme L^∞ , le terme de droite de la dernière inégalité tend vers 0 quand t tend vers 0. Quitte à prendre t assez petit, on peut donc supposer, puisque $\varphi(x_0) \leq 1$, que

$$\left| \Delta d_t(x) + \sum_{j=1}^{d-1} K_j^t(y) \right| \leq \frac{1}{\varphi(x_0)},$$

c'est à dire

$$\Delta d_t(x) \geq - \sum_{j=1}^{d-1} K_j^t(y) - \frac{1}{\varphi(x_0)} = -C(d)\kappa(S_t^-)(y) - \frac{1}{\varphi(x_0)} \geq -\frac{C}{\varphi(x_0)} - \frac{C}{M}.$$

On a donc, en notant ν la normale extérieure généralisée à $\partial_{\text{red}}V_t$, le bord réduit de V_t , et en utilisant la formule de Stokes pour calculer l'intégrale de Δd_t sur V_t :

$$\begin{aligned} - \left(\frac{C}{\varphi(x_0)} + \frac{C}{M} \right) |V_t| &\leq \int_{V_t} \Delta d_t(x) dx = \int_{\partial_{\text{red}}V_t} \langle \nabla d_t, \nu \rangle d\mathcal{H}^{d-1} \\ &\leq -\mathcal{H}^{d-1}(S_t^- \setminus \Omega) + P(\Omega, Z_t). \end{aligned}$$

En utilisant alors (5.6), on en déduit que

$$P(\Omega_t) - P(\Omega) \leq \mathcal{H}^{d-1}(S_t^- \setminus \Omega) - P(\Omega, Z_t) \leq \left(\frac{C}{\varphi(x_0)} + \frac{C}{M} \right) |V_t|,$$

ce qui conclut la preuve. \square

5.4.2 Variations de J

Avant de calculer la variation d'énergie, on a besoin d'un certain nombre d'estimations sur u et u_t qui nous sont données par les lemmes suivants. Tout d'abord, le résultat suivant découle facilement d'une renormalisation :

Lemme 5.6. *Soient v et g deux fonctions et R un réel strictement positif tels que*

$$\begin{cases} -\Delta v = g \text{ dans } B_R \\ v \in H_0^1(B_R). \end{cases}$$

On suppose que la fonction g est bornée. Alors, $v \in L^\infty(B_R)$ et $\|v\|_{L^\infty(B_R)} \leq C(d)\|g\|_\infty R^2$.

A partir de là, on obtient une première estimation sur u :

Lemme 5.7. *Il existe un voisinage $\bar{\mathcal{V}}$ de 0 dans \mathbf{R}^d tel que*

$$\forall x \in \bar{\mathcal{V}}, u(x) \geq \frac{C(d, f)M}{\varphi(x_0)}(x_1 - \psi(x')).$$

Pour prouver ce lemme, on effectue un travail préliminaire dans la boule $B(x_0, d(x_0))$. Tout d'abord, notons $\tilde{\psi}$ le graphe de $\partial B(x_0, d(x_0))$ près de 0, les ordonnées étant l'axe des x_1 .

Lemme 5.8. *Il existe un voisinage \mathcal{V}' de 0 dans \mathbf{R}^d et une constante $C' = C'(d, f) > 0$ tels que*

$$\forall x \in \mathcal{V}' \cap B(x_0, d(x_0)), u(x) \geq \frac{C'M}{\varphi(x_0)}d(x, \partial B(x_0, d(x_0))).$$

Démonstration. (i) *Il existe deux constantes strictement positives $\alpha_0 = \alpha_0(d, \|f\|_{L^\infty}) < 1/4$ et $C_0 = C_0(d)$ telles que*

$$\inf_{B(x_0, \alpha_0 d(x_0))} u \geq C_0 M \frac{d(x_0)}{\varphi(x_0)}.$$

En effet, on considère $\alpha < 1/4$ de telle sorte que $r = \alpha d(x_0) < d(x_0)/4$ et on prend pour w la solution de

$$\begin{cases} -\Delta w = f \text{ dans } B(x_0, 2r) \\ w = 0 \text{ sur } \partial B(x_0, 2r). \end{cases}$$

Le lemme 5.6 nous dit que $\|w\|_{L^\infty} \leq C(d)\|f\|_{L^\infty}4r^2$. On remarque maintenant que $u - w$ est une fonction harmonique égale à u sur $\partial B(x_0, 2r)$ de telle sorte que, en appliquant l'inégalité de Harnack à la fonction $u - w$ entre $B(x_0, r)$ et $B(x_0, 2r)$, on obtient

$$\inf_{B(x_0, r)} u \geq \inf_{B(x_0, r)} (u - w) \geq C(d)(u(x_0) - w(x_0)) \geq C(d) \left(M \frac{d(x_0)}{\varphi(x_0)} - 4r^2 C(d) \|f\|_{L^\infty} \right).$$

Mais comme $r \leq 4M \frac{d(x_0)}{\varphi(x_0)}$, on obtient

$$\inf_{B(x_0, r)} u \geq C(d)M \frac{d(x_0)}{\varphi(x_0)} (1 - 4rC(d)\|f\|_{L^\infty}) = C(d)M \frac{d(x_0)}{\varphi(x_0)} (1 - 4\alpha d(x_0)C(d)\|f\|_{L^\infty}),$$

et donc, comme $d(x_0) < 1$,

$$\inf_{B(x_0, r)} u \geq C(d)M \frac{d(x_0)}{\varphi(x_0)} (1 - 4\alpha C(d)\|f\|_{L^\infty}),$$

ce qui nous donne α_0 .

(ii) Soit maintenant v la solution de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ dans } B(x_0, d(x_0)) \setminus B(x_0, \alpha_0 d(x_0)) \\ v = C_0 M \frac{d(x_0)}{\varphi(x_0)} \text{ sur } \partial B(x_0, \alpha_0 d(x_0)) \\ v = 0 \text{ sur } \partial B(x_0, d(x_0)). \end{cases}$$

Comme $u \geq v$, et en calculant explicitement v , on obtient l'existence de la constante strictement positive $C'(d, f)$ et le voisinage \mathcal{V}' de 0 dans \mathbf{R}^d désirés. \square

Preuve du lemme 5.7. Pour tout x sur S , on note n_x le vecteur unitaire normal à S partant de x et orienté vers x_0 . Remarquons pour commencer qu'il existe un $r_1 \in \mathbf{R}^{*+}$ tel que la boule $B(4r_1n_0, 4r_1)$ est située entièrement au dessus de la surface S .

(i) En utilisant la régularité de la surface S , on trouve que pour tout x sur S dans un voisinage de 0, on a

$$B(x + 2r_1n_x, 2r_1) \subset \Omega.$$

Toujours en utilisant la régularité de S , on peut supposer que, pour tout x sur S assez proche de 0, on a

$$x + 2r_1n_x \in B(x_0, d(x_0) - r_1),$$

et donc, en utilisant le lemme 5.8, on a, pour tout x sur S assez proche de 0, (quitte à diminuer r_1 pour rester dans le voisinage \mathcal{V}_1 donné dans le lemme précédent)

$$u(x + 2r_1n_x) \geq \frac{C(d, f)M}{\varphi(x_0)}r_1.$$

Par une estimation similaire à celle utilisée dans le (i) de la preuve du lemme précédent, on trouve des constantes $\alpha_1(f, d) \in]0, 1[$ et $C_1 = C_1(d, \|f\|_{L^\infty}) > 0$ tels que, pour tout x sur S assez proche de 0, on a

$$\inf_{y \in B(x + 2r_1n_x, 2r_1\alpha_1)} u(y) \geq C_1M \frac{r_1}{\varphi(x_0)}.$$

en utilisant alors la solution v de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ dans } B(x + 2r_1n_x, 2r_1) \setminus B(x + 2r_1n_x, 2r_1\alpha_1) \\ v = C_1M \frac{r_1}{\varphi(x_0)} \text{ sur } \partial B(x + 2r_1n_x, 2r_1\alpha_1) \\ v = 0 \text{ sur } \partial B(x + 2r_1n_x, 2r_1). \end{cases}$$

on trouve que l'existence d'une constante $C_2(d, f)$ telle que

$$\forall x \text{ sur } S \text{ proche de } 0, \forall h \in (0, r_1), u(x + hn_x) \geq C_2M \frac{h}{\varphi(x_0)}.$$

C'est à dire, il existe un voisinage \mathcal{V}'' de 0 dans \mathbf{R}^d tel que

$$\forall x \in \mathcal{V}'' \cap \{x_1 > \psi(x')\}, u(x) \geq C_2 \frac{M}{\varphi(x_0)} d(x, S).$$

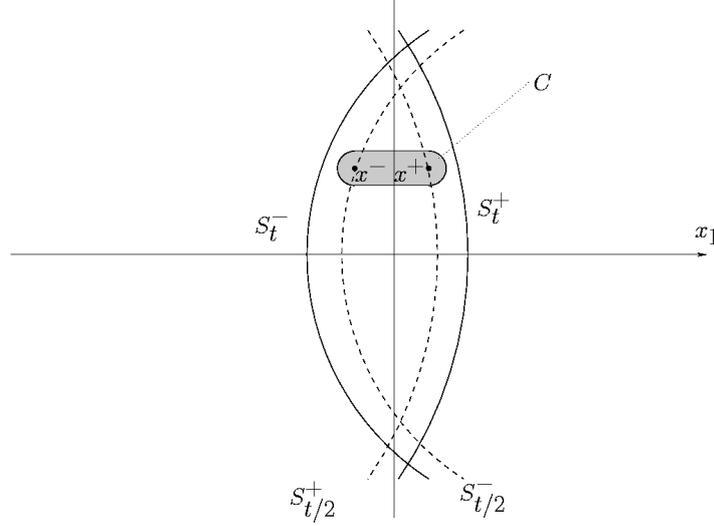
Mais si x est assez petit, $d(x, S) \geq C(d)(x_1 - \psi(x'))$ ce qui nous donne le résultat. \square

Lemme 5.9.

$$\inf_{Z_{t/2}} u_t \geq \frac{CM}{\varphi(x_0)}t.$$

Démonstration. On peut appliquer le lemme 5.7 pour obtenir, sur la surface $S_{t/2}^+$, l'estimation

$$\inf_{S_{t/2}^+} u \geq \frac{CM}{\varphi(x_0)}t.$$

FIG. 5.4 – les points x^+ et x^- , et l'ensemble C

Considérons maintenant un point $x = (x_1, x')$ dans $Z_{t/2}$. On construit les points (voir la figure 5.4)

$$x^- = (\psi_{t/2}^-(x'), x') \text{ et } x^+ = (\psi_{t/2}^+(x'), x').$$

On prend $r^+ = d(x^+, \partial Z_t)$ et $r^- = d(x^-, \partial Z_t)$. Une première remarque, dûe à la définition des fonctions $\psi_{t/2}^+$ et $\psi_{t/2}^-$ est que $d(x^+, x^-) \leq t$.

On prouve d'abord que si t est assez petit, $r^+ \geq t/4$ et $r^- \geq t/4$. Pour ce faire, si l'on considère un point $X = (\psi(x''), x'')$ sur ∂S_t^- . On veut donc prouver que, si t est assez petit, on a que $|x^- - X| \geq t/4$. Tout d'abord, si l'on suppose que $|x' - x''| \geq t/4$, le résultat est automatique puisque $|x^- - X| \geq |x' - x''|$. On peut donc supposer que l'on a $|x' - x''| \leq t/4$. On peut, en utilisant les expressions de ψ_t^+ et $\psi_{t/2}^-$, évaluer la quantité

$$\begin{aligned} |x^- - X| &= \left\{ (x' - x'')^2 + \left([\psi(x') - \psi(x'')] + \frac{\varphi(x_0)}{\delta_0} [|x'|^2 - |x''|^2] + \frac{t}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left| [\psi(x') - \psi(x'')] + \frac{\varphi(x_0)}{\delta_0} [|x'|^2 - |x''|^2] + \frac{t}{2} \right| \\ &\geq \frac{t}{2} - |\psi(x') - \psi(x'')| - \frac{\varphi(x_0)}{\delta_0} ||x'|^2 - |x''|^2| \end{aligned}$$

Mais comme les différences $\psi(x') - \psi(x'')$ et $|x'|^2 - |x''|^2$ sont des $o(t)$ quand t tend vers 0, car la fonction ψ et la fonction d'élevation au carré sont de dérivée nulle en 0, on trouve donc que, si $|x' - x''| \leq t/4$,

$$|x^- - X| \geq \frac{t}{2} - o(t).$$

On en déduit alors que, pour t assez petit, et pour tout X sur ∂S_t^- , $|x^- - X| \geq t/4$. Cela implique que $d(x^-, S_t^-) \geq t/4$ pour t assez petit. On utilise une argumentation

similaire pour prouver ensuite que, pour t petit, on a la même minoration pour les quantités

$$d(x^-, S_t^+), d(x^+, S_t^+) \text{ et } d(x^+, S_t^-).$$

Et l'assertion est prouvée.

Considérons maintenant les ensembles C défini comme le plus petit ensemble convexe contenant $B(x^+, t/4) \cup B(x^-, t/4)$ et C' défini comme le plus petit ensemble convexe contenant $B(x^+, t/8) \cup B(x^-, t/8)$. On peut appliquer une inégalité de Harnack uniforme au remplaçant harmonique de u_t sur ces ensembles et prouver que (la fonction u_t , étant sur-harmonique, est supérieure à son remplaçant harmonique, et de plus $u_t \geq u$)

$$u_t(x) \geq \inf_{C'} u_t \geq C(d) \sup_{C'} u_t \geq C(d) u_t(x^+) \geq C(d) u(x^+) \geq C(d) \frac{CM}{\varphi(x_0)} t.$$

□

Lemme 5.10.

$$G(u) - G(u_t) \geq \frac{CM^2}{\varphi(x_0)} |V_{t/2}|.$$

Démonstration. Rappelons d'abord que, grâce à la définition de u_t , on a

$$\int_{Z_t} \nabla u_t \cdot \nabla(u - u_t) = \int_{Z_t} f(u - u_t),$$

et donc

$$G(u) - G(u_t) \geq \frac{1}{2} \int |\nabla(u - u_t)|^2. \quad (5.7)$$

Maintenant, pour y dans S_t^- , soit l_y la droite passant par y et suivant le vecteur e_1 . Soit S'_t l'ensemble de tous les points y de S_t^- tels que $l_y \cap V_{t/2}$ n'est pas vide. Pour un tel point y , on appelle l'_y l'ensemble $(y, y + s_y e_1)$ où $s_y = \sup \{s : y + s e_1 \in \bar{V}_{t/2}\}$. Au final, soit

$$V'_{t/2} = \{y + s e_1 : 0 < s < s_y, y \in S'_t\}.$$

En intégrant sur les droites, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_{V'_{t/2}} |D_{e_1}(u_t - u)| dx &\geq \int_{S'_t} dy \int_{l'_y} D_{e_1}(u_t - u) ds \\ &\geq \int_{S'_t} (u_t - u)(y + s_y e_1) dy = \int_{S'_t} u_t(y + s_y e_1) dy. \end{aligned}$$

Mais,

$$u_t(y + s_y e_1) \geq \frac{CM}{\varphi(x_0)} t \geq \frac{CM}{\varphi(x_0)} |l'_y|,$$

et donc

$$\int_{V'_{t/2}} |D_{e_1}(u_t - u)| dx \geq \frac{CM}{\varphi(x_0)} |V'_{t/2}| \geq \frac{CM}{\varphi(x_0)} |V_{t/2}|.$$

Mais, grâce à l'inégalité de Schwarz,

$$\int_{V'_{t/2}} |D_{e_1}(u - u_t)| \leq |V'_{t/2}|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{V'_{t/2}} |D_{e_1}(u - u_t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - u_t)|^2 \geq \int_{V'_{t/2}} |D_{e_1}(u - u_t)|^2 \geq \frac{1}{|V'_{t/2}|} \left(\int_{V'_{t/2}} |D_{e_1}(u - u_t)| \right)^2 \geq \frac{CM^2}{\varphi(x_0)^2} |V'_{t/2}|$$

et donc, comme $V_{t/2} \subset V'_{t/2}$, et comme $\varphi(x_0) \leq 1$,

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - u_t)|^2 \geq \frac{CM^2}{\varphi(x_0)} |V_{t/2}|,$$

ce qui, en utilisant (5.7), termine la démonstration. \square

5.4.3 Conclusion

L'optimalité de Ω nous amène donc, en utilisant les estimations précédentes, à :

$$|V_{t/2}| \frac{CM^2}{\varphi(x_0)} \leq \left(\frac{C}{\varphi(x_0)} + CM + \lambda \right) |V_t|.$$

Mais pour tout t assez petit, $B(0, t/2) \subset Z_t$, et donc, grâce au lemme 5.1, on a

$$|V_t| \geq |\Omega^c \cap B(0, t/2)| \geq Ct^d.$$

Donc, en utilisant le lemme 5.11, il existe une constante $C(d)$ et une suite $t_i \downarrow 0$ telle que

$$\forall i, |V_{2t_i}| \leq C(d)|V_{t_i}|.$$

En rassemblant tous les termes dans l'inégalité de minimisation pour t_i assez petit, et après division par $|V_{t_i}|$, on trouve que

$$\frac{CM^2}{\varphi(x_0)} \leq \frac{C}{\varphi(x_0)} + \lambda + \frac{C}{M}$$

d'où l'on conclut que $M \leq C$. Au final, la fonction u est donc localement Lipschitzienne dans D .

5.5 Construction de la surface S

Par définition de x_0 , on a, pour tout y près de x_0 ,

$$Md(y) \geq Md(x_0) + w(y)\varphi(y) - w(x_0)\varphi(x_0).$$

Maintenant, comme f est localement Hölder continue et $u(x_0) > \varepsilon$, la fonction u peut être développée à l'ordre 2 près de x_0 . On a donc encore, pour tout y près de x_0 ,

$$Md(y) \geq Md(x_0) + \nabla(w\varphi)(x_0) \cdot (y - x_0) + Q(y - x_0) + o(|y - x_0|^2). \quad (5.8)$$

Ici, Q est un polynôme d'ordre 2 tel que $\Delta Q = \Delta(w\varphi)(x_0)$. Quelques conséquences :

(i) En utilisant le lemme 5.15 en x_0 avec l'inégalité (5.8), on trouve que d est différentiable en x_0 et que

$$M\nabla d(x_0) = \varphi(x_0)\nabla w(x_0) + w(x_0)\nabla\varphi(x_0).$$

(ii) En utilisant le lemme 5.12 en x_0 avec l'inégalité (5.8), on trouve (en identifiant la forme quadratique Q avec sa matrice Q), que

$$Q\nabla d(x_0) \cdot \nabla d(x_0) \leq 0.$$

Et on obtient que $\nabla d(x_0) = \frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|} = e_1$ d'où

$$Q_{1,1} = Qe_1 \cdot e_1 \leq 0.$$

(iii) On veut maintenant trouver une estimation de ΔQ par en dessous. On a

$$\Delta Q = \varphi(x_0)\Delta w(x_0) + 2\nabla w(x_0) \cdot \nabla\varphi(x_0) + w(x_0)\Delta\varphi(x_0).$$

En utilisant (i) et les estimations $|\nabla\varphi(x_0)| \leq C$ et $|\Delta\varphi(x_0)| \leq C$, on trouve que

$$\Delta Q \geq -C\|f\|_{L^\infty} - \frac{CM}{\varphi(x_0)}.$$

(iv) A partir du développement de Md obtenu dans (5.8), on trouve, pour x' proche de 0 dans \mathbf{R}^{d-1} , en utilisant que $\nabla d(x_0) = e_1$ et en posant $Q'(x') = Q(0, x')$,

$$d((d(x_0), x')) \geq d(x_0) + \frac{Q'(x')}{M} + o\left(\frac{|x'|^2}{M}\right)$$

avec, puisque $Q_{1,1} \leq 0$,

$$\Delta Q' \geq -C\|f\|_{L^\infty} - \frac{CM}{\varphi(x_0)}.$$

(v) Pour tout $x' \in \mathbf{R}^{d-1}$ assez petit, en appelant $y = (d(x_0), x')$, on définit

$$\psi(x') = -\frac{w(y)\varphi(y) - w(x_0)\varphi(x_0)}{M}.$$

Ce qui précède nous permet de dire que $\psi(x') = -\frac{Q'(x')}{M} + o\left(\frac{|x'|^2}{M}\right)$ et que, près de 0, i.e., dans un voisinage \mathcal{V} de 0 dans B_1 , $\partial\Omega$ est inclus dans l'ensemble

$$\{(x_1, x') : x_1 \leq \psi(x')\},$$

i.e., se trouve sous la surface

$$S = \{(x_1, x') : x_1 = \psi(x')\}.$$

et on peut estimer la courbure moyenne (vu par en dessus) de cette surface près de l'origine :

$$\kappa(S)(x) = \frac{1}{d-1}\Delta\psi(x') \leq \frac{C}{M} + \frac{C}{\varphi(x_0)}.$$

5.6 Quelques lemmes techniques

5.6.1 Un lemme utile

Lemme 5.11. *On considère une fonction $f :]0, r[\rightarrow \mathbf{R}^+$ telle qu'il existe des constantes strictement positives C_0 et α avec*

$$\forall x \in]0, r[, f(x) \geq C_0 x^\alpha. \quad (5.9)$$

Alors, il existe une certaine constante positive $C(\alpha)$ et une suite $(t_n)_n$ dans $(0, r/2)$ convergeant vers 0 telle que

$$\forall n, f(t_n) \leq C(\alpha) f(t_n/2).$$

Démonstration. Posons $C = 2^\alpha + 1$. On va tout d'abord prouver que, pour tout $r_0 < r$, il existe un t dans $]0, r_0$ tel que $f(t) \leq C f(t/2)$. D'où l'existence de t_n par récurrence en prenant $r_0 = \min\{1/n, t_{n-1}\}$.

Pour prouver l'assertion annoncée, supposons, par l'absurde, qu'il existe r_0 dans $(0, r/2)$ tel que

$$\forall t \in (0, r_0), f(t) \geq C f(t/2).$$

Alors, en prenant t_0 dans $(0, r_0)$, on a

$$f(t_0) \geq C f(t_0/2) \geq C^2 f(t_0/4) \geq C^k f(t_0/2^k) \geq \frac{C^k}{2^{\alpha k}} t_0^\alpha C_0 \geq \left(\frac{C}{2^\alpha}\right)^k C_0 t_0^\alpha.$$

et ceci est impossible puisque $f(t_0)$ est fini, et que l'expression $(C/2^\alpha)^k = (1 + 2^{-\alpha})^k$ peut être aussi grande que l'on veut. \square

5.6.2 Quelques résultats sur la fonction distance

Dans toute cette partie, on étudie un certain nombre de propriétés de la fonction distance à un ensemble. Dans ce qui suit, soit $d(x) = d(x, A)$, où A est un fermé de \mathbf{R}^d .

Lemme 5.12. *Dans A^c , la fonction $d(\cdot)$ est une sur-solution de viscosité de l'équation*

$$-\nabla^2 d \nabla d \cdot \nabla d = 0,$$

i.e., d est une solution, au sens des solutions de viscosité, de

$$\nabla^2 d \nabla d \cdot \nabla d \leq 0.$$

Démonstration. On commence par étudier les fonctions $f : x \mapsto d(x, y)$ sur $\mathbf{R}^d \setminus \{y\}$. On a

$$\nabla f(x) = \frac{x - y}{|x - y|}$$

et

$$\nabla^2 f(x) = \frac{I_d}{|x - y|} - \frac{(x - y) \cdot (x - y)^t}{|x - y|^3},$$

d'où

$$\nabla^2 f(x) \nabla f(x) \cdot \nabla f(x) = 0,$$

i.e., f est une solution classique de l'équation

$$H(\nabla f, \nabla^2 f) = 0$$

associée à l'opérateur elliptique $H(p, X) = -X p \cdot p$. Puisque l'on peut écrire d sous la forme

$$d(\cdot) = \inf \{d(\cdot, y) : y \in A\},$$

i.e., comme inf de solutions classiques, on trouve que $d(\cdot)$ est une sur-solution de viscosité de la même équation dans l'ouvert A^c . \square

Corollaire 5.13. *Soient x_0 un point de l'ouvert A^c , et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 dans un certain voisinage de x_0 avec*

$$d(\cdot) \geq f(\cdot) \text{ près de } x_0, \text{ et}$$

$$d(x_0) = f(x_0).$$

Alors

$$\nabla^2 f(x_0) \nabla f(x_0) \cdot \nabla f(x_0) \leq 0.$$

Lemme 5.14. *Soit $x_0 \in \mathbf{R}^d$. On suppose que $d(x_0) = r_0 > 0$. Alors, $d(\cdot)$ est différentiable en x_0 si et seulement si l'ensemble $\partial B(x_0, r_0) \cap A$ est un singleton $\{a\}$. De plus, dans ce cas, on a*

$$\nabla d(x_0) = \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|}.$$

Démonstration. On commence par supposer que d est différentiable en x_0 . Puisque d est 1-Lipschitzienne, on a $|\nabla d|(x_0) \leq 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe (au moins) deux points distincts a et b sur $A \cap \partial B(x_0, r_0)$. Pour tout $t \in (0, 1)$, on définit

$$x_a(t) = (1-t)x_0 + ta,$$

$$x_b(t) = (1-t)x_0 + tb.$$

On étudie x_a (x_b ayant les mêmes propriétés). On a

$$d(x_a(t)) = d(x_a(t), a) = (1-t)|x_0 - a|$$

d'où, pour t dans un certain voisinage de 0,

$$d(x_0 - t(x_0 - a)) \leq d(x_0) - t|x_0 - a|,$$

i.e.,

$$\frac{d(x_0 + t(a - x_0)) - d(x_0)}{t} \leq -|x_0 - a|,$$

et donc, en passant à la limite $t \rightarrow 0$,

$$\nabla d(x_0) \cdot (a - x_0) \leq -|x_0 - a|,$$

i.e.,

$$\nabla d(x_0) \cdot \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} \geq 1.$$

Puisque $|\nabla d(x_0)| \leq 1$, cela implique que $\nabla d(x_0) = \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|}$. On a de manière similaire $\nabla d(x_0) = \frac{x_0 - b}{|x_0 - b|}$ ce qui est impossible. En particulier, comme $A \cap \partial B(x_0, r_0)$ n'est pas vide, ce doit être un singleton.

Supposons maintenant que $A \cap \partial B(x_0, d(x_0))$ est le singleton $\{a\}$. Remarquons d'abord que, pour tout x , on a $d(x) \leq d(x, a)$. En particulier,

$$d(x) \leq d(x_0) + \frac{x - a}{|x - a|} \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, on fixe un $\varepsilon > 0$. On a

$$d(x_0, A \setminus B(a, \varepsilon)) > d(x_0),$$

et donc, pour x proche de x_0 , on obtient

$$d(x) = d(x, A \cap B(a, \varepsilon)).$$

Soit maintenant $b \in A \cap B(a, \varepsilon)$. On a

$$d(x, b) = d(x_0, b) + \frac{x_0 - b}{|x_0 - b|} \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|) \geq d(x_0, a) + \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Dans cette inégalité, quitte à choisir ε assez petit, on peut supposer que le $o(|x - x_0|)$ ne dépend ni du choix de b , ni de celui de ε . On en déduit que, pour x assez proche de x_0 ,

$$\begin{aligned} d(x) - d(x_0) - \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} \cdot (x - x_0) &\geq \inf_{b \in A \cap B(a, \varepsilon)} \left\{ \frac{x_0 - b}{|x_0 - b|} \cdot (x - x_0) - \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} \cdot (x - x_0) \right\} \\ &\quad + o(|x - x_0|), \\ &\geq - \sup_{b \in A \cap B(a, \varepsilon)} \left\{ \left| \frac{x_0 - b}{|x_0 - b|} - \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} \right| \right\} |x - x_0| \\ &\quad + o(|x - x_0|). \end{aligned}$$

Mais on peut choisir ε aussi petit que l'on veut. En particulier, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le sup précédent tend aussi vers 0, ce qui donne

$$d(x) \geq d(x_0) + \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Cela nous donne la différentiabilité de d en x_0 . □

Lemme 5.15. *Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage d'un point x_0 de A^c et vérifiant*

$$d(\cdot) \geq f(\cdot) \text{ près de } x_0,$$

$$d(x_0) = f(x_0).$$

Alors la fonction d est différentiable en x_0 et $\nabla f(x_0) = \nabla d(x_0)$.

Démonstration. (i) On prouve tout d'abord que $|\nabla f(x_0)| \leq 1$. Soit $v \in \mathbf{S}^{d-1}$. En utilisant la 1-Lipschitzianité de d , on a

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) \leq d(x_0 + tv) - d(x_0) \leq t|v| \leq t.$$

En divisant par $t > 0$ et en passant à la limite $t \rightarrow 0$, on trouve que

$$\nabla f(x_0) \cdot v \leq 1.$$

De la même manière, quand $t < 0$, on trouve que

$$\nabla f(x_0) \cdot v \geq -1.$$

Au final, $|\nabla f(x_0)| \leq 1$.

(ii) On suppose maintenant qu'il existe deux points distincts a et b sur $A \cap \partial B(x_0, d(x_0))$. En considérant, comme dans la preuve du lemme précédent

$$x_a(t) = (1-t)x_0 + ta,$$

$$x_b(t) = (1-t)x_0 + tb,$$

et en procédant à une étude similaire, on trouve, t étant proche de 0, que

$$f(x_0 - t(x_0 - a)) \leq f(x_0) - t|x_0 - a|,$$

i.e.,

$$\frac{f(x_0 + t(a - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq -|x_0 - a|,$$

et donc, à la limite $t \rightarrow 0$:

$$\nabla f(x_0) \cdot (a - x_0) \leq -|x_0 - a|,$$

i.e.,

$$\nabla f(x_0) \cdot \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} \geq 1.$$

Puisque $|\nabla f(x_0)| \leq 1$, cela implique que $\nabla f(x_0) = \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|}$. On a alors un résultat similaire sur b , ce qui est impossible

(iii) On conclut alors par l'application du lemme précédent. \square

5.7 Annexe : Un résultat de densité intérieure

Le résultat suivant, obtenu "en passant" n'est pas utilisé dans la suite. C'est cependant un premier résultat de régularité obtenu sur la forme optimale Ω en utilisant seulement la continuité Hölderienne prouvée dans le chapitre précédent.

Lemme 5.16. *On suppose que $u \in C^{0, \frac{1}{2}}(D)$. Soit $\delta > 0$. Soit x dans $\partial\Omega$ et tel que $d(x, \partial D) > \delta$. Alors, il existe des constantes $C(d, \delta)$ et $r_0(d, \lambda, \delta)$ indépendantes du choix de x telles que,*

$$\forall r \in (0, \min\{r_0, d(x, \partial D)\}), \quad |\Omega \cap B(x, r)| \geq Cr^d.$$

Etude des perturbations intérieures

On se donne un x sur $\partial\Omega$ tel que $d(x, \partial D) > \delta$. On considère deux boules $B(x, r) \subset B(x, r') \subset D$. On pose $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus B(x, r)$. On a alors

$$J(\Omega) + P(\Omega) + \lambda|\Omega| - m \leq J(\tilde{\Omega}) + P(\tilde{\Omega}) + \lambda|\tilde{\Omega}| - m,$$

ce qui donne

$$J(\Omega) + P(\Omega) \leq J(\tilde{\Omega}) + P(\tilde{\Omega}) + \lambda|\Omega \cap B(x, r)|. \quad (5.10)$$

On note

$$M_{r'} = \sup_{B(x, r')} u.$$

On considère la fonction $g : [r, r'] \rightarrow [0, 1]$ affine, valant 0 en r et 1 en r' . On définit alors, dans $B(x, r') \setminus B(x, r)$, la fonction $G_{r, r'}(y) = g(|y - x|)$. On considère enfin la fonction v égale à u sur $B(x, r')^c$, égale à 0 sur $B(x, r)$ et égale à $\min\{u, M_{r'} G_{r, r'}\}$ sur $B(x, r') \setminus \bar{B}(x, r)$. Notons que $v \in H_0^1(\tilde{\Omega}) \subset H_0^1(\Omega)$. On a alors

$$J(u) \leq J(v)$$

et donc

$$J(\tilde{\Omega}) - J(\Omega) \leq \frac{1}{2} M_{r'}^2 \int_{B(x, r') \cap \Omega} |\nabla G_{r, r'}|^2 + \int_{B(x, r') \cap \Omega} f \cdot (u - v),$$

i.e.,

$$J(\tilde{\Omega}) - J(\Omega) \leq C(d) \frac{M_{r'}^2}{(r - r')^2} |\Omega \cap B(x, r')| + C(\|f\|_{L^\infty}) M_{r'} |\Omega \cap B(x, r')|.$$

A ce niveau, on peut faire intervenir la höldériannité déjà prouvée sur u :

$$M_{r'}^2 \leq C \sup_{y \in B(x, r') \cap \Omega} \min\{r', d(y, \partial\Omega)\}$$

Mais, pour tout y dans $B(x, r') \cap \Omega$, on a

$$B(y, d(y, \partial\Omega)) \subset \Omega.$$

On définit z comme le milieu du segment $[x, y]$ et $s = d(y, \partial\Omega)/2$. Alors, on a d'un côté que

$$B(z, s) \subset B(y, d(y, \partial\Omega)) \subset \Omega,$$

et de l'autre que $B(z, s) \subset B(x, r')$. On en déduit que

$$B(z, s) \subset B(x, r') \cap \Omega$$

et donc que

$$d(y, \partial\Omega) \leq |\Omega \cap B(x, r')|^{\frac{1}{d}}.$$

On obtient donc l'estimation suivante sur $M_{r'}$:

$$M_{r'}^2 \leq C \sup_{y \in B(x, r') \cap \Omega} \min\{r', d(y, \partial\Omega)\} \leq C |\Omega \cap B(x, r')|^{\frac{1}{d}}.$$

On en déduit alors que

$$J(\tilde{\Omega}) - J(\Omega) \leq C(d) \frac{|\Omega \cap B(x, r')|^{1+\frac{1}{d}}}{(r-r')^2} + C(\|f\|_{L^\infty}) |\Omega \cap B(x, r')|^{1+\frac{1}{2d}}.$$

Pour étudier les variations de périmètre, notons juste que, pour presque tout r ,

$$P(\tilde{\Omega}, \partial B(x, r)) = \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial B(x, r)),$$

d'où, en injectant les estimations précédentes dans l'inégalité (5.10), on a, pour presque tout r ,

$$\begin{aligned} P(\Omega, B(x, r)) &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial B(x, r)) + C(d) \frac{|\Omega \cap B(x, r')|^{1+\frac{1}{d}}}{(r-r')^2} \\ &\quad + C(\|f\|_{L^\infty}) |\Omega \cap B(x, r')|^{1+\frac{1}{2d}} + \lambda |\Omega \cap B(x, r)|. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Un lemme préliminaire

Lemme 5.17. *Soit $(x_m)_m$ une suite dans \mathbf{R}^+ telle que*

$$x_{m+1} \leq C^m x_m^\alpha,$$

pour des constantes $C > 0$ et $\alpha > 1$. Alors il existe une constante $C' = C'(C, \alpha)$ telle que si $x_0 < C'$, alors $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = 0$.

Démonstration. Par récurrence, on a l'estimation suivante sur x_m :

$$x_m \leq C^{m+(m-1)\alpha+(m-2)\alpha^2+\dots+\alpha^{m-1}} x_0^{\alpha^m} \leq (\max\{C, 1\})^{m+(m-1)\alpha+(m-2)\alpha^2+\dots+\alpha^{m-1}} x_0^{\alpha^m}.$$

Soit maintenant un β strictement plus grand que 1. En étudiant la fonction

$$f_\beta : x \in (0, \infty) \mapsto \frac{x}{\beta x},$$

on montre que

$$\forall m \geq 1, m \leq f_\beta \left(\frac{1}{\ln(\beta)} \right) \beta^m.$$

Appelons c_β la constante $f \left(\frac{1}{\ln(\beta)} \right)$. On calcule

$$\begin{aligned} m + (m-1)\alpha + (m-2)\alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1} &= \alpha^{m-1} \left(1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} + \dots + \frac{m}{\alpha^{m-1}} \right) \\ &= \alpha^{m-1} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{3}{\sqrt{\alpha^2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}} + \dots + \frac{m}{\sqrt{\alpha^{m-1}}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^{m-1}}} \right) \\ &\leq c_{\sqrt{\alpha}} \alpha^{m-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\alpha^{m-1}}} \right) \\ &\leq c_{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \alpha^{m-1}, \\ &\leq c(\alpha) \alpha^m. \end{aligned}$$

En posant alors $C'(C, \alpha) = (\max\{C, 1\})^{c(\alpha)}$, on trouve que

$$x_m \leq C'^{\alpha^m} x_0^{\alpha^m} = (C' x_0)^{\alpha^m}$$

et donc, si $x_0 < \frac{1}{C'}$, x_m tend vers 0 quand m tend vers ∞ . \square

Etude de la densité près de la frontière

On se donne dans la suite un x_0 dans $\partial\Omega$. Considérons de plus un r_0 tel que $B(x_0, r_0) \subset D$. On construit une suite de rayons :

$$r_{m+1} = r_m - \frac{r_0}{4} 2^{-m}.$$

On remarque que la suite $(r_m)_m$ converge vers $r_\infty = \frac{r_0}{2}$. Pour tout m , on pose enfin

$$V_m = |\Omega \cap B(x_0, r_m)|$$

et

$$W_m = \frac{V_m}{r_0^d}.$$

On a, pour presque tout $r \in]r_{m+1}, r_m[$, en utilisant l'inégalité isopérimétrique sur l'ensemble $\Omega \cap B(x_0, r)$,

$$V_{m+1}^{\frac{d-1}{d}} \leq |\Omega \cap B(x_0, r)|^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d) \left\{ P(\Omega, B(x_0, r)) + \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial B(x_0, r)) \right\},$$

i.e., en utilisant l'équation (5.11), pour presque tout $r' > r$ tel que $B(x_0, r') \subset D$,

$$\begin{aligned} V_{m+1}^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d) & \left\{ 2\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial B(x_0, r)) + C(d) \frac{|\Omega \cap B(x, r')|^{1+\frac{1}{d}}}{(r-r')^2} \right. \\ & \left. + C(\|f\|_{L^\infty}) |\Omega \cap B(x, r')|^{1+\frac{1}{2d}} + \lambda |\Omega \cap B(x, r)| \right\}. \end{aligned}$$

On impose tout d'abord la contrainte $r' \leq r_m$ ce qui nous donne maintenant la formule :

$$V_{m+1}^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d) \left\{ 2\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial B(x_0, r)) + C(d) \frac{V_m^{1+\frac{1}{d}}}{(r-r')^2} + C(\|f\|_{L^\infty}) V_m^{1+\frac{1}{2d}} + \lambda V_m \right\}.$$

Comme ceci reste vrai pour presque tout $r' > r$, on peut approcher r_m par r' et cela nous donne donc, par continuité en r' de la formule ci-dessus

$$V_{m+1}^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d) \left\{ 2\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial B(x_0, r)) + C(d) \frac{V_m^{1+\frac{1}{d}}}{(r-r_m)^2} + C(\|f\|_{L^\infty}) V_m^{1+\frac{1}{2d}} + \lambda V_m \right\}.$$

Considérons maintenant r'_{m+1} le milieu du segment $]r_{m+1}, r_m[$. On a

$$r_m - r'_{m+1} \leq \frac{r_0}{8} 2^{-m}.$$

La dernière majoration de V_{m+1} étant valable pour *presque tout* $r \in]r_{m+1}, r_m[$, on peut l'intégrer en r sur l'intervalle $]r_{m+1}, r'_{m+1}[$ (voir la section 3.4.4. dans [EG92]). Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{8} 2^{-m} V_{m+1}^{\frac{d-1}{d}} &\leq C(d) \left\{ 2 \cdot |\Omega \cap [B(x, r'_{m+1}) \setminus B(x, r_{m+1})]| \right. \\ &\quad \left. + C(d) V_m^{1+\frac{1}{d}} \int_{r_{m+1}}^{r'_{m+1}} (r - r_m)^{-2} dr + \frac{r_0}{8} 2^{-m} C(\|f\|_{L^\infty}) V_m^{1+\frac{1}{2d}} + \lambda \frac{r_0}{8} 2^{-m} V_m \right\}. \end{aligned}$$

On peut bien-sûr majorer $|\Omega \cap [B(x, r'_{m+1}) \setminus B(x, r_{m+1})]|$ par V_m , et,

$$\int_{r_{m+1}}^{r'_{m+1}} (r - r_m)^{-2} = [(r - r_m)^{-1}]_{r_{m+1}}^{r'_{m+1}} \leq (r'_{m+1} - r_m)^{-1} \leq \frac{8}{r_0} 2^m.$$

Au final, on trouve

$$\frac{r_0}{8} 2^{-m} V_{m+1}^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d) \left\{ 2V_m + C(d) V_m^{1+\frac{1}{d}} \frac{8}{r_0} 2^m + \frac{r_0}{8} 2^{-m} C(\|f\|_{L^\infty}) V_m^{1+\frac{1}{2d}} + \lambda \frac{r_0}{8} 2^{-m} V_m \right\}.$$

On cherche à faire apparaître une inégalité similaire, mais en les W_m , et pour cela, on divise par r_0^d . On obtient :

$$\frac{2^{-m}}{8} W_{m+1}^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d) \left\{ 2W_m + C(d) W_m^{1+\frac{1}{d}} 8 \cdot 2^m + \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{8} 2^{-m} C(\|f\|_{L^\infty}) W_m^{1+\frac{1}{2d}} + \lambda \frac{r_0}{8} 2^{-m} W_m \right\}.$$

On conclut enfin, en utilisant que les W_m sont borné par une constante $C(d)$, étant une densité, et en utilisant que l'on peut supposer $r_0 < 1$:

$$\frac{2^{-m}}{8} W_{m+1}^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d, \|f\|_{L^\infty}, \lambda) C^m W_m,$$

soit encore

$$W_{m+1} \leq C(d, \|f\|_{L^\infty}, \lambda)^m W_m^{\frac{d}{d-1}}.$$

En utilisant le lemme 5.17, on en déduit l'existence d'un $C'(d, \|f\|_{L^\infty})$ tel que $W_0 < C'$ implique $W_\infty = 0$, ce qui est impossible puisque $x_0 \in \partial\Omega$, par définition de $\partial\Omega$.

On a donc prouvé l'existence d'un $C'(x) > 0$, que l'on peut choisir uniforme sur des voisinages de tout point du bord, tel que, pour tout r assez petit (cette notion là pouvant elle aussi être définie de manière uniforme sur le voisinage du point du bord),

$$|\Omega \cap B(x, r)| \geq C'|B(x, r)|.$$

Chapitre 6

Régularité supérieure

Dans cette section on va s'intéresser à la régularité du bord de Ω . Tout d'abord, on va prouver que, quand la fonction d'état u est lipschitzienne, alors la forme optimale Ω est un quasi-minimiseur. On en déduira que le bord réduit de Ω a une structure de variété $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ ainsi qu'une estimation sur la "taille" de l'ensemble $\partial\Omega \setminus \partial_{\text{red}}\Omega$.

Dans une seconde partie, on écrira, à partir du résultat de régularité ainsi obtenu sur le bord de Ω , l'équation d'Euler associée à ce problème d'optimisation. Cette équation s'écrit formellement

$$\kappa(x) = \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + C$$

où κ désigne la courbure moyenne. Ce κ , dans le premier temps, correspond à l'opérateur (pour h le graphe du bord réduit de Ω)

$$-\text{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right).$$

Mais cet opérateur est à étudier alors comme opérateur elliptique sous forme divergente, puisque l'on sait seulement pour l'instant que la fonction h est dans $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$.

En utilisant des résultats classiques sur les équations elliptiques, on prouve que h évolue en réalité dans \mathcal{C}^2 , et on utilise alors un argument de "bootstrap" pour lier la régularité de h à celle de la fonction f .

6.1 Quasi-minimiseurs et conséquences

Commençons par la définition :

Définition 6.1. Un sous-ensemble mesurable E de l'ouvert $D (\subset \mathbf{R}^d)$ est appelé un α -quasi-minimiseur (local) (pour un certain $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$) si pour tout sous-ensemble $A \subset\subset D$ (i.e., tel que \bar{A} est borné et inclus dans D), il existe un $R \in (0, \text{dist}(A, \partial D))$ et un $C > 0$ tels que

$$P(E, B_r(x)) \leq P(E', B_r(x)) + Cr^{d-1+2\alpha}$$

pour tous les $x \in A$, $r \in (0, R)$ et E' avec $E\Delta E' \subset\subset B_r(x)$ (on rappelle d'ailleurs qu'on a défini $E\Delta E' = (E \setminus E') \cup (E' \setminus E)$).

On va alors utiliser le résultat suivant (voir [Tam94] et [Alm76]) :

Théorème 6.1. *Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$. On suppose que E est un α -quasi-minimiseur. Alors,*

- (i) $\partial_{red}E \cap D$ est une $C^{1,\alpha}$ -hypersurface,
- (ii) $\mathcal{H}^s[(\partial E \setminus \partial_{red}E) \cap D] = 0$ pour tout $s > d - 8$.

Théorème 6.2. *Supposons que f est bornée et que Ω est une forme optimale du problème (P_λ) telle que $u = u_\Omega$ est localement Lipschitzienne sur D . Alors, Ω est un $\frac{1}{2}$ -quasi-minimiseur.*

Démonstration. Soient $A \subset\subset D$ et $R \in]0, \text{dist}(A, \partial D)[$. Soit L une constante de Lipschitz pour u sur $\overline{A + B(0, R)}$. On considère alors un $x \in A$, un $r \in]0, R[$ et un ensemble mesurable Ω' tel que $\Omega' \Delta \Omega \subset\subset B(x, r)$. Dans la fin de la preuve, on note $B_r = B(x, r)$ et $B_{2r} = B(x, 2r)$.

Le cas où $B_r \subset \Omega$ est facile, puisque l'on a

$$P(\Omega', B_r) \geq 0 = P(\Omega, B_r).$$

Supposons maintenant que $B_r \cap \partial\Omega$ n'est pas vide. Alors, $\|u\|_{L^\infty(B_{2r})} \leq 4rL$. On considère une fonction lisse φ telle que

$$\varphi = 0 \text{ dans } B_r, \quad \varphi = 1 \text{ dans } B_{2r}^c,$$

$$\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{r} \text{ (} C \text{ universelle) et } \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1.$$

On peut alors estimer

$$\begin{aligned} J(\Omega') - J(\Omega) &\leq G(\varphi u) - G(u) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_{2r}} (\varphi^2 - 1) |\nabla u|^2 + \int_{B_{2r}} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) u \varphi + \frac{1}{2} \int_{B_{2r}} u^2 |\nabla \varphi|^2 + \int_{B_{2r}} (1 - \varphi) u f \\ &\leq C(d, \|f\|_{L^\infty}, L) r^d \end{aligned}$$

Et donc Ω est un $\frac{1}{2}$ -quasi-minimiseur dans D . □

On peut alors résumer les résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème 6.3. *Supposons que f est bornée et que Ω est une forme optimale du problème (P_λ) telle que $u = u_\Omega$ est localement Lipschitzienne sur D . Alors,*

- (i) $\partial_{red}\Omega \cap D$ est une $C^{1,\frac{1}{2}}$ -hypersurface,
- (ii) $\mathcal{H}^s[(\partial\Omega \setminus \partial_{red}\Omega) \cap D] = 0$ pour tout $s > d - 8$.

Remarque. (i) Le théorème précédent s'applique aussi au problème (P), du moment que le théorème d'équivalence (théorème 3.1) est valide, par exemple lorsque le domaine D est un ouvert borné fortement étoilé par rapport à un point.

(ii) Il aurait suffi, pour que la forme optimale Ω soit un quasi-minimiseur, d'avoir l'estimation suivante :

$$\forall B(x, r) \subset D, \quad \int_{B(x, r)} |\nabla u|^2 \leq C r^{d-2+2\alpha}$$

pour un $\alpha > 1/2$. Cette estimation, qui se traduit entre autre par la α -Hölder continuité de la fonction d'état u , permet alors d'obtenir pour Ω une structure de $(\alpha - \frac{1}{2})$ -quasi-minimiseur. En particulier, la $1/2$ -Hölder continuité qui avait été prouvée dans le chapitre 4 n'est *a priori* pas suffisante en elle-même pour prouver de la régularité sur le bord de la forme optimale.

6.2 Équation d'Euler

Tout d'abord, il faut remarquer que, hormis les points singuliers, $\partial_{\text{red}}\Omega$ est *déjà* une $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ hyper-surface. L'équation d'Euler associée au problème d'optimisation de forme donné va en fait nous permettre de prouver que le bord réduit de la forme optimale est $\mathcal{C}^{2, \alpha}$, et même parfois davantage.

On va commencer dans cette section par rechercher un "bon" représentant de la forme optimale. On cherchera alors à écrire le bord réduit de Ω sous forme d'un graphe, pour écrire enfin l'équation d'Euler associée au problème (P_λ) .

6.2.1 Le bon représentant de la forme optimale

Rappelons tout d'abord que la forme optimale du problème considéré est *a priori* seulement mesurable. Néanmoins, connaissant sa fonction d'état $u_\Omega = u$, on sait que u est nul quasi-partout hors de Ω , et donc $\Omega \cup [\tilde{u} \neq 0]$ est un autre représentant de Ω . Rappelons encore que, \tilde{u} , le représentant quasi-continu de u est défini à un ensemble de capacité nulle près. Comme on a déjà prouvé que u est Lipschitzienne, on peut supposer que u et \tilde{u} désigne leur représentant continu partout. De même, quitte à remplacer Ω par $\Omega \cup [u \neq 0]$, on peut supposer que Ω contient l'ouvert $[u \neq 0]$.

Tout d'abord, on cherche à évacuer le problème de la nature du bord. En effet, pour notre forme optimale Ω , on est en présence de deux définitions du bord, en général différentes, l'une étant le bord topologique (noté $\partial_t\Omega$), l'autre le bord au sens de la mesure (noté $\partial\Omega$, défini dans la section 2 du chapitre 4). En utilisant la proposition 3.1 de [Giu84] : on trouve un ensemble mesurable $\tilde{\Omega}$ dans \mathbf{R}^d tel que

$$\begin{aligned} |\tilde{\Omega}\Delta\Omega| &= 0, \text{ et} \\ \partial_t\tilde{\Omega} &= \partial\tilde{\Omega}, \end{aligned}$$

Remarquons que de la première égalité vient que les ensembles Ω et $\tilde{\Omega}$ sont deux représentants d'un même ensemble (au sens de l'égalité presque sûre des fonctions $\mathbf{1}_\Omega$ et $\mathbf{1}_{\tilde{\Omega}}$). En particulier, Ω et $\tilde{\Omega}$ ont mêmes périmètre et mesure. Toujours de cette première égalité, on déduit que les deux ensembles ont le *même* bord au sens de la mesure. L'ensemble $\tilde{\Omega}$ a cet avantage sur l'ensemble Ω que son bord topologique est *exactement* son bord au sens de la mesure.

Enfin, on peut voir que l'ensemble ouvert $[u \neq 0]$ est contenu dans $\tilde{\Omega}$. En effet, de l'égalité $\Omega\Delta\tilde{\Omega}$ on déduit tout d'abord que les deux ensembles Ω et $\tilde{\Omega}$ ont le même intérieur au sens de la mesure et on a donc

$$[u \neq 0] \subset \Omega_{\text{int}} = \tilde{\Omega}_{\text{int}} \subset \tilde{\Omega}.$$

On peut donc conclure de la façon suivante :

Proposition 6.4. *Quitte à choisir un bon représentant de la forme optimale, on peut supposer que Ω contient l'ouvert $[u \neq 0]$, et que le bord topologique de Ω est exactement son bord au sens de la mesure.*

On supposera donc dans la suite que le représentant choisi vérifie ces propriétés.

6.2.2 Écriture sous forme de graphe du bord

On veut maintenant écrire l'équation d'Euler associée au problème d'optimisation près d'un point de la frontière réduite. Pour cela, fixons $X \in \partial_{\text{red}}\Omega$, et commençons par utiliser la structure de variété de $\partial_{\text{red}}\Omega$. Quitte à effectuer des rotations adéquates, on peut supposer qu'il existe une boule ouverte B_1 de \mathbf{R}^{d-1} , une boule ouverte B_2 de \mathbf{R} , et une application h de B_1 dans B_2 de classe $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$ tels que

- (i) $X \in B_1 \times B_2$,
- (ii) $\partial_{\text{red}}\Omega \cap B_1 \times B_2 = \{(x, h(x)) : x \in B_1\}$.

Ceci nous informe sur la structure du bord réduit de Ω dans l'ouvert $B_1 \times B_2$. Dans la suite, on notera \mathcal{U} l'ouvert $B_1 \times B_2$.

Afin d'écrire l'équation d'Euler, nous avons besoin d'informations sur tout le bord de Ω à l'intérieur de l'ouvert \mathcal{U} . Pour cela, on peut utiliser le théorème 4.4 de [Giu84], et en particulier que, Ω étant un ensemble à périmètre fini, son bord réduit est dense dans son bord au sens de la mesure. Le bord réduit ayant une structure de variété dans \mathcal{U} , c'est un ensemble fermé dans cet ouvert. On en déduit que

$$\partial\Omega \cap \mathcal{U} = \partial_{\text{red}}\Omega \cap \mathcal{U}.$$

En particulier, Ω est d'un seul côté de $\partial_{\text{red}}\Omega$. On résume tout cela dans la proposition suivante :

Proposition 6.5 (Structure du bord dans \mathcal{U}). *Quitte à choisir un bon représentant de la forme optimale Ω , on peut supposer que, outre les propriétés énumérées dans la proposition 6.4, Ω vérifie les propriétés suivantes :*

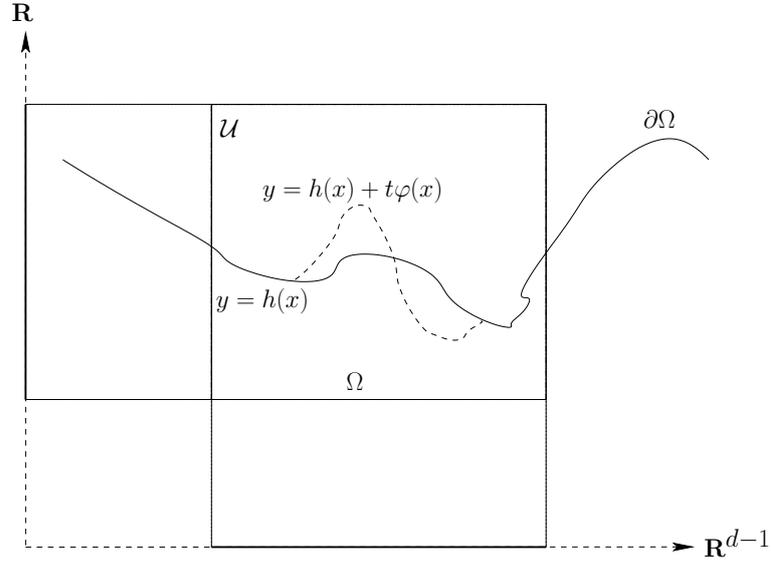
- (i) $\partial_{\text{red}}\Omega \cap \mathcal{U} = \partial\Omega \cap \mathcal{U} = \{(x, h(x)) : x \in B_1\}$,
- (ii) $\Omega \cap \mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathcal{U} : y < h(x)\}$.

Quitte à opérer des translations, et à diminuer la taille de \mathcal{U} , on pourra supposer que les boules B_1 et B_2 sont centrées en 0 et que le point X choisi sur le bord réduit est l'origine de \mathbf{R}^d .

6.2.3 Équation d'Euler

Pour écrire l'équation d'Euler, considérons une fonction φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(B_1)$ vérifiant $\int \varphi = 0$. Alors, pour tout t suffisamment petit, la fonction $h + t\varphi$ est encore dans $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}(B_1, B_2)$. On définit alors l'ensemble

$$\Omega_{h+t\varphi} = (\Omega \setminus \mathcal{U}) \cup \{(x, y) \in B_1 \times B_2 : y < h(x) + t\varphi(x)\}.$$

FIG. 6.1 – les ensembles Ω et $\Omega_{h+t\varphi}$

On remarque que les ensembles Ω et $\Omega_{h+t\varphi}$ ont exactement la même mesure. On en déduit, en utilisant l'optimalité de Ω , que

$$P(\Omega) + J(\Omega) \leq P(\Omega_{h+t\varphi}) + J(\Omega_{h+t\varphi})$$

c'est à dire, pour peu que les deux types de termes soient dérivables :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(\Omega_{h+t\varphi}) - P(\Omega)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_{h+t\varphi}) - J(\Omega)}{t} = 0.$$

On cherche maintenant à étudier l'existence de ces dérivées :

Dérivation du périmètre

Notons d'abord que, pour t suffisamment petit,

$$P(\Omega, \mathcal{U}^c) = P(\Omega_{h+t\varphi}, \mathcal{U}^c).$$

Comme de plus on peut calculer

$$P(\Omega_{h+t\varphi}, \mathcal{U}) = \int_{B_1} \sqrt{1 + |\nabla h + t\nabla\varphi|^2}$$

on trouve que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(\Omega_{h+t\varphi}) - P(\Omega)}{t} = \int_{B_1} \frac{\nabla h \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}}. \quad (6.1)$$

Dérivation de l'énergie de Dirichlet

Commençons par remarquer que, maintenant que l'on sait que le bord est $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ dans notre ouvert \mathcal{U} , on sait que la fonction d'état u sera elle aussi $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}(\overline{\Omega} \cap \mathcal{U})$. En effet, considérons une fonction φ constante égale à 1 dans un voisinage de X , à support compact dans \mathcal{U} , lisse et à valeurs comprises entre 0 et 1. On a alors

$$\Delta(u\varphi) = (\Delta u)\varphi + 2\nabla u \cdot \nabla \varphi + u(\Delta \varphi).$$

Donc, $u\varphi$ est une solution faible d'une équation de Laplace avec condition de Dirichlet 0 au bord. Notons ici que le second membre est a priori seulement borné (comme f). Donc, la théorie de la régularité au bord des solutions faibles du problème de Poisson nous dit alors que la fonction $u\varphi$ est $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ (On pourra par exemple se référer au théorème 8.34 dans [GT83]). Alors, quitte à restreindre le domaine \mathcal{U} , on peut donc supposer que $u \in \mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}(\overline{\Omega} \cap U)$.

Pour dériver J , commençons par appeler u_t la fonction d'état associée à $\Omega_{h+t\varphi}$, c'est à dire,

$$\begin{cases} -\Delta u_t = f \text{ dans } \Omega_{h+t\varphi}, \\ u_t = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{h+t\varphi}. \end{cases}$$

La dérivation s'effectue en deux étapes. La première étape consiste à étudier la dérivabilité de l'application $t \mapsto u_t$. Cela se fait à l'aide du théorème suivant, où est faite une hypothèse de régularité supplémentaire sur f :

Théorème 6.6. *On suppose que $f \in H^1(D)$. Alors l'application $t \mapsto u_t$, vue comme une fonction définie sur un voisinage de 0 dans \mathbf{R} et à valeurs dans $L^2(D)$, est dérivable en 0. Sa dérivée u' est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u' = 0 \text{ dans } \Omega \\ u' = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \mathcal{U} \\ u' + \varphi \nabla u \cdot \mathbf{e}_d = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \mathcal{U}. \end{cases}$$

Démonstration. La preuve est semblable à celle proposée dans le chapitre 5.3 de [HP05]. Pour cela, on considère une fonction Ψ régulière à support compact dans $2\mathcal{U}$, égale à 1 dans \mathcal{U} . On définit alors l'application

$$\Phi : (x', y') \in \mathbf{R}^{d-1} \times \mathbf{R} \mapsto \varphi(x')\Psi(x', y')\mathbf{e}_d$$

et on applique les théorème 5.3.1 et 5.3.2 de [HP05]. □

On peut réécrire la condition au bord vérifiée par u' :

$$u'(x', h(x')) + \partial_d u(x', h(x')) \varphi(x') = 0 \text{ pour } x' \in B_1.$$

Comme maintenant on a $J(\Omega_{h+t\varphi}) = -\frac{1}{2} \int f u_t$, on trouve que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_{h+t\varphi}) - J(\Omega)}{t} = -\frac{1}{2} \int f u'.$$

Comme $u' \Delta u = \operatorname{div}(u' \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla u'$, on trouve que

$$\int f u' = \int \operatorname{div}(u' \nabla u) - \int \nabla u' \cdot \nabla u$$

et comme

$$\int \nabla u' \cdot \nabla u = \langle -\Delta u', u \rangle = 0,$$

on a finalement, par une intégration par partie :

$$\int f u' = \int_{\partial\Omega} u' \nabla u \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{U}} u' \nabla u \cdot \mathbf{n}$$

où \mathbf{n} désigne la normale extérieure à Ω . On suppose dans la suite que la fonction u est positive. En particulier, cela nous donne que $\nabla u = -|\nabla u| \mathbf{n}$. D'où

$$\int f u' = \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{U}} |\nabla u|^2 \varphi \mathbf{e}_d \cdot \mathbf{n}.$$

Or, on peut calculer

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla h \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $\mathbf{e}_d \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}}$ et donc

$$\int f u' = \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{U}} \frac{|\nabla u|^2 \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}}.$$

Reste donc à faire un changement de variable pour obtenir une intégrale sur B_1 . Pour cela, on utilise la formule suivante :

$$\int_{\partial\Omega \cap \mathcal{U}} G(y) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = \int_{B_1} G(x', h(x')) \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2} dx'$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_{h+t\varphi}) - J(\Omega)}{t} = -\frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla u(x', h(x'))|^2 \varphi(x') dx'. \quad (6.2)$$

Formulation de l'équation d'Euler

En utilisant alors les équations (6.1) et (6.2), on obtient, pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(B_1, \mathbf{R})$ et de moyenne nulle,

$$\int_{B_1} \frac{\nabla h \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} - \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla u(x', h(x'))|^2 \varphi(x') dx' = 0.$$

Cela revient donc à dire, au sens des distributions, que pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(B_1)$ et de moyenne nulle, on a

$$\left\langle -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} |\nabla u(\cdot, h(\cdot))|^2, \varphi \right\rangle.$$

Considérons maintenant une fonction θ particulière dans $\mathcal{C}_c^\infty(B_1)$ de moyenne égale à 1. Pour toute fonction φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(B_1)$, on a $\varphi - \theta \int_{B_1} \varphi$ de moyenne nulle et encore dans $\mathcal{C}_c^\infty(B_1)$, et donc

$$\left\langle -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right), \varphi - \theta \int_{B_1} \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} |\nabla u(\cdot, h(\cdot))|^2, \varphi - \theta \int_{B_1} \varphi \right\rangle$$

d'où l'existence d'une constante C telle que, pour tout φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(B_1)$,

$$\left\langle -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} |\nabla u(\cdot, h(\cdot))|^2, \varphi \right\rangle + \langle C, \varphi \rangle,$$

ce qui revient à dire qu'au sens des distributions sur B_1 , h est solution de l'équation suivante, dite *équation d'Euler du problème* :

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right) = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + C. \quad (6.3)$$

On peut interpréter dès à présent cette équation à l'aide de la courbure moyenne (dont la valeur en un point x de $\partial_{\operatorname{red}}\Omega$ est notée $\kappa(x)$) par la formule :

$$\exists C, \forall x \in D \cap \partial_{\operatorname{red}}\Omega, \kappa(x) = \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + C. \quad (6.4)$$

6.3 Résolution dans le cas $d = 2$

Dans ce cas particulier, on a l'écriture suivante :

$$-\left(\frac{h'}{\sqrt{1 + |h'|^2}} \right)' = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + C, \quad (6.5)$$

et donc la fonction $\frac{h'}{\sqrt{1 + |h'|^2}}$ est dans $W^{1,\infty}$.

Lemme 6.7. *La fonction h est dans $\mathcal{C}^{1,\alpha} \cap W_{loc}^{2,\infty}$.*

Démonstration. On sait déjà que la fonction h est $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. De plus, la fonction h' est localement bornée (puisque continue). On considère alors la fonction

$$g : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

On observe que

$$g'(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}.$$

Considérons alors un ouvert borné $O \subset\subset B_1$. Alors, pour tous x et y dans O , on a

$$|g(h'(x)) - g(h'(y))| = \left| \int_{h'(x)}^{h'(y)} g'(t) dt \right| \geq \frac{|h'(x) - h'(y)|}{(1 + \|h'\|_{L^\infty(O)})^{3/2}}.$$

En particulier, la fonction $g \circ h'$ étant lipschitzienne (car de dérivée égale à $-\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + C$), on trouve le résultat. \square

Lemme 6.8. *La fonction h est dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ et on a*

$$h'' = \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u(\cdot, h(\cdot))|^2 + C \right\} (1 + h'^2)^{3/2}.$$

Démonstration. Pour cela, on va prouver le résultat suivant :

$$\forall H \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}, g(H) \in W_{\text{loc}}^{1,\infty} \text{ et } (g(H))' = \frac{H'}{(1+H^2)^{3/2}}.$$

Pour prouver cela, prenons une fonction $H \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}$. La propriété à démontrer étant locale, on peut supposer que H est à support compact. On approche alors cette fonction par une suite de fonctions H_n obtenue en opérant la convolution de H avec une suite régularisante. La fonction H étant lipschitzienne, la suite H_n converge uniformément vers H . De plus, comme H' est dans L^2 , on peut supposer que H'_n converge faiblement dans L^2 vers H' . En considérant une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, on calcule

$$\int g(H_n)\varphi' = - \int \frac{H'_n}{(1+H_n^2)^{3/2}}\varphi$$

et en passant à la limite, on trouve bien que

$$\int g(H)\varphi' = - \int \frac{H'}{(1+H^2)^{3/2}}\varphi.$$

En particulier, en appliquant ceci à $H = h'$ et en lisant (6.5), on a

$$\frac{h''}{(1+h'^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + C.$$

et donc,

$$h'' = \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + C \right\} (1+h'^2)^{3/2},$$

d'où l'on déduit que la dérivée seconde de h est de classe \mathcal{C}^α , ce qui prouve le résultat. \square

Remarque. On voit donc apparaître dans le lemme précédent le lien entre la régularité de h et celle de u .

Théorème 6.9. *On suppose que, dans \mathcal{U} , la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$. Alors, $\partial\Omega \cap \mathcal{U}$ est le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^{k+3,\alpha}$.*

Démonstration. Pour cela supposons que $\partial\Omega$ est le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^{j,\alpha}$ (on a vu que cela était déjà le cas pour $j = 2$ d'après le résultat précédent) pour un $j \in \{2, \dots, k+2\}$. On a donc que $j-1 \leq k$, et donc $f \in \mathcal{C}^{j-1,\alpha}$. Alors, en appliquant le théorème 9.19 de [GT83], on trouve que $u \in \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$. D'où $\nabla u \in \mathcal{C}^{j-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, et donc, vue l'expression de h'' , on trouve que $h \in \mathcal{C}^{j+1,\alpha}$. Par récurrence finie, on trouve que $h \in \mathcal{C}^{k+3,\alpha}$. \square

Corollaire 6.10. *Si la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ , alors le bord de Ω est une variété \mathcal{C}^∞ .*

6.4 Régularité $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ dans le cas général $2 \leq d$

Théorème 6.11. *Si $f \in H^1(D)$ (condition nécessaire pour pouvoir écrire la dérivation), f localement Hölder continue, u localement lipschitzienne, alors le bord réduit de Ω a localement une structure locale de variété $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ pour un certain $\alpha > 0$.*

Démonstration. En reprenant les notations précédentes, on a vu que le bord réduit de Ω pouvait s'écrire localement comme le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$ solution, au sens des distributions dans une boule B de \mathbf{R}^{d-1} , de l'équation

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right) = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + C.$$

Notons que, quitte à diminuer la taille de la boule, on peut supposer que h est \mathcal{C}^1 dans le compact \overline{B} . En particulier, $(\nabla h)^2$ est borné dans B , par une constante M . Considérons donc une fonction auxiliaire $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$,
- (ii) g est paire,
- (iii) $g|_{\mathbf{R}^+}$ est décroissante,
- (iv) $g|_{(-M,M)}$ est constante égale à 1,
- (v) $g|_{(-2M,2M)^c}$ est constante nulle.

Alors, h est encore solution de l'équation

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2 g(|\nabla h|^2)}} \right) = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + C.$$

Notons que le membre de droite de l'égalité est une fonction que l'on peut supposer $\mathcal{C}^\alpha(\overline{B_1})$ pour un certain $\alpha > 0$. Notons F cette fonction. On introduit alors le problème suivant, vu comme une équation elliptique en forme divergencielle :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{\sqrt{1 + |\nabla U|^2 g(|\nabla U|^2)}} \right) = F \text{ dans } B_1, \\ U = h \text{ sur } \partial B_1. \end{cases} \quad (6.6)$$

Remarquons tout d'abord que, puisque

$$\exists a_0 > 0, \exists b_0 > 0, \forall p \in \mathbf{R}^{d-1}, a_0 < \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 g(p^2)}} < b_0,$$

l'équation (6.6) a bien un sens dans $H^1(B_1)$. Cela donne la formulation suivante :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in H_0^1(B_1), \int_{B_1} \frac{\nabla U \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla U|^2 g(|\nabla U|^2)}} = \int_{B_1} F \varphi, \\ U \in h + H_0^1(B_1). \end{cases} \quad (6.7)$$

Remarquons que h est solution du problème (6.7). La preuve du théorème consistera donc en l'obtention de deux résultats : l'unicité des solutions à l'équation (6.7) et l'existence de solutions régulières à (6.7).

Lemme 6.12. *On note, pour $p \in \mathbf{R}^{d-1}$, $A(p) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2g(p^2)}}$. On a*

$$\forall p \in \mathbf{R}^{d-1}, \forall \xi \in \mathbf{R}^{d-1}, DA(p)\xi \cdot \xi \geq \frac{\xi^2}{(1+p^2g(p^2))^{\frac{3}{2}}} \geq a_0^3 \xi^2.$$

Lemme 6.13. *Il existe une solution U au problème (6.7) qui vérifie*

$$U \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(B_1) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_1}) \text{ et } U|_{\partial B_1} = h|_{\partial B_1}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on utilise le théorème 15.19 dans [GT83]. Cela nous donne l'existence d'une fonction $U \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(B_1) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_1})$ vérifiant, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_1)$,

$$\int_{B_1} \frac{\nabla U \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla U|^2 g(|\nabla U|^2)}} = \int_{B_1} F \varphi, \quad (6.8)$$

ainsi que la condition au bord

$$U|_{\partial B_1} = h|_{\partial B_1}.$$

Comme U est continue sur $\overline{B_1}$, c'est bien une fonction de $L^2(B_1)$. Il nous faut donc maintenant vérifier que son gradient est bien lui aussi dans $L^2(B_1)$. Formellement, le calcul que l'on va faire revient, au moins formellement, à prendre la fonction $U - h$ comme fonction test dans le problème (6.7). On obtient alors que

$$\int_{B_1} \frac{\nabla U \cdot \nabla(U - h)}{\sqrt{1 + |\nabla U|^2 g(|\nabla U|^2)}} = \int_{B_1} F(U - h)$$

et donc on s'attend à avoir l'estimation

$$a_0 \int_{B_1} |\nabla U|^2 \leq b_0 \int_{B_1} |\nabla U| |\nabla h| + \int_{B_1} F(U - h) \leq C \|\nabla U\|_{L^2(B_1)} + C \|U - h\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Pour formaliser cela, commençons par remarquer que, U étant par exemple $\mathcal{C}^1(B_1)$, l'équation (6.8) a bien un sens pour tout φ pris dans un $H_0^1(O)$ pour n'importe quel ouvert $O \subset\subset B_1$. En particulier, si on prend $\varepsilon > 0$, la fonction $(U - h - \varepsilon)^+$ est bien de cette forme. Et son gradient s'écrit $(\nabla U - \nabla h)\mathbf{1}_{[U-h>\varepsilon]}$. On a donc

$$\int_{[U-h>\varepsilon]} \frac{\nabla U \cdot \nabla(U - h)}{\sqrt{1 + |\nabla U|^2 g(|\nabla U|^2)}} = \int_{[U-h>\varepsilon]} F(U - h - \varepsilon)^+.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} a_0 \|\nabla U\|_{L^2([U-h>\varepsilon])}^2 &\leq \int_{[U-h>\varepsilon]} \frac{\nabla U \cdot \nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla U|^2 g(|\nabla U|^2)}} + \int_{[U-h>\varepsilon]} F(U - h - \varepsilon)^+, \\ &\leq b_0 \int_{B_1} |\nabla U| |\nabla h| + \int_{B_1} F|U - h|, \\ &\leq C \|\nabla U\|_{L^2(B_1)} + C. \end{aligned}$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve que

$$a_0 \|\nabla U\|_{L^2(U-h>0)}^2 \leq C \|\nabla U\|_{L^2(B_1)} + C.$$

En utilisant comme fonction test la fonction $(U - h + \varepsilon)^-$, on trouve de même que

$$a_0 \|\nabla U\|_{L^2(U-h<0)}^2 \leq C \|\nabla U\|_{L^2(B_1)} + C.$$

Enfin, la fonction $\nabla(U - h)$ est nulle presque partout sur l'ensemble $[U - h = 0]$ (voir [HP05] par exemple), et donc

$$a_0 \|\nabla U\|_{L^2(B_1)}^2 \leq C \|\nabla U\|_{L^2(B_1)} + C.$$

On en déduit que $\|\nabla U\|_{L^2(B_1)} < \infty$, i.e., que $U \in H^1(B_1)$. Comme de plus $U \in C^0(\overline{B_1})$ et $U|_{\partial B_1} = h|_{\partial B_1}$, on a bien $U \in h + H_0^1(B_1)$. \square

Lemme 6.14. *Il existe au plus une solution au problème (6.7) qui soit dans $C^1(B_1)$.*

Démonstration. Soient U et V deux telles solutions. On a donc, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$,

$$\int_{B_1} \frac{\nabla U \cdot \nabla p}{\sqrt{1 + |\nabla U|^2 g(|\nabla U|^2)}} = \int_{B_1} \frac{\nabla V \cdot \nabla p}{\sqrt{1 + |\nabla V|^2 g(|\nabla V|^2)}},$$

i.e.,

$$\int_{B_1} (A(\nabla U) - A(\nabla V)) \cdot \nabla \varphi = 0.$$

On définit alors la fonction

$$U_t(x) = tU(x) + (1-t)V(x).$$

Notons $\mathcal{A}_x(t) = A(\nabla U_t(x)) = A(t\nabla U(x) + (1-t)\nabla V(x))$. On a donc,

$$0 = \int_{B_1} (\mathcal{A}_x(1) - \mathcal{A}_x(0)) \cdot \nabla \varphi(x) dx,$$

i.e.,

$$0 = \int_{B_1} \left(\int_0^1 \mathcal{A}'_x(t) dt \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx,$$

i.e.,

$$0 = \int_{B_1} \left(\int_0^1 DA(\nabla U_t(x)) \nabla(U - V)(x) dt \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

Maintenant, remarquons que la fonction A est C^∞ sur tout \mathbf{R}^{d-1} , et égale à l'identité sur le complémentaire d'une boule assez grande. Donc, la fonction DA est bornée. Comme maintenant U et V sont dans $H^1(B_1)$ et comme φ est dans $C_c^\infty(B_1)$ donc dans $H^1(B_1)$, on trouve que

$$\int_{B_1} \int_0^1 |DA(\nabla U_t(x)) \nabla(U - V)(x) \cdot \nabla \varphi(x)| dt dx < \infty.$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Fubini,

$$0 = \int_{B_1} \int_0^1 DA(\nabla U_t(x)) \nabla(U - V)(x) \cdot \nabla \varphi(x) dt dx.$$

Remarquons maintenant que l'égalité précédente est continue en φ par rapport à la topologie $H_0^1(B_1)$. Par densité, on peut donc prendre $\varphi = U - V$. En utilisant le lemme 6.12, on trouve que

$$0 = \int_{B_1} \int_0^1 DA(\nabla U_t(x)) \nabla(U - V)(x) \cdot \nabla(U - V)(x) dt dx \geq a_0^3 \|\nabla(U - V)\|_{L^2(B_1)}^2,$$

et donc $U = V$. □

Et ce dernier lemme conclut la preuve du théorème. □

6.5 Régularité supérieure

Une fois la régularité $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ obtenue pour le bord réduit, il devient possible de réécrire l'équation d'Euler

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right) = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + C$$

sous la forme

$$-\frac{\Delta h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} + \frac{\nabla h \cdot \nabla h}{(1 + |\nabla h|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + C$$

soit encore

$$-\Delta h = \sqrt{1 + |\nabla h|^2} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + C \right) + 1 - \frac{1}{1 + |\nabla h|^2}. \quad (6.9)$$

On peut alors mettre en place un argument de type *bootstrap* pour monter en régularité.

Tout d'abord, comme le bord de Ω est, à l'intérieur de l'ouvert \mathcal{U} , de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, on trouve, si la fonction f est $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ dans \mathcal{U} , en utilisant le théorème 9.19 dans [GT83], que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ au moins jusqu'au bord de Ω dans \mathcal{U} , i.e., $\partial\Omega \cap \mathcal{U}$. On en déduit que le second membre de l'équation 6.9 est de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. Toujours en utilisant le théorème 9.19 dans [GT83], on en déduit que h est de classe $\mathcal{C}^{3,\alpha}$ dans B_1 . On peut alors prouver, par récurrence, le résultat suivant :

Proposition 6.15. *Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ dans le voisinage \mathcal{U} étudié, alors le bord de Ω est de classe $\mathcal{C}^{k+3,\alpha}$ dans \mathcal{U} .*

Et comme corollaire immédiat :

Corollaire 6.16. *Si la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ dans \mathcal{U} , alors le bord de Ω est de classe \mathcal{C}^∞ dans \mathcal{U} .*

On peut alors formuler un cas particulier du théorème 6.3

Théorème 6.17. *Supposons que f est une fonction \mathcal{C}^∞ positive sur D et que Ω est une forme optimale du problème (P_λ) . Alors*

- (i) $\partial_{red}\Omega \cap D$ est une \mathcal{C}^∞ -hypersurface,
- (ii) $\mathcal{H}^s[(\partial\Omega \setminus \partial_{red}\Omega) \cap D] = 0$ pour tout $s > d - 8$.

Chapitre 7

Cas de la première valeur propre du Laplacien-Dirichlet

7.1 La fonctionnelle

On définit maintenant de la manière suivante la fonctionnelle d'énergie.

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2} : u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

Les nouveaux problèmes sont alors :

$$\begin{cases} \text{Minimiser la quantité } \lambda_1(\Omega) + P(\Omega) \\ \text{parmi les } \Omega \in \mathcal{A}_m, \end{cases} \quad (\text{P}^{\text{lap}})$$

et

$$\begin{cases} \text{Minimiser la quantité } \lambda_1(\Omega) + P(\Omega) + \lambda ||\Omega| - m| \\ \text{parmi les } \Omega \in \mathcal{A}. \end{cases} \quad (\text{P}_{\lambda}^{\text{lap}})$$

On va prouver le résultat suivant :

Théorème 7.1. *Soit Ω une forme optimale pour le problème $(\text{P}_{\lambda}^{\text{lap}})$. Le bord réduit $\partial_{\text{red}}\Omega$ est une C^{∞} -hypersurface, et l'ensemble $\partial\Omega \setminus \partial_{\text{red}}\Omega$ est de mesure \mathcal{H}^s nulle pour tout $s > d - 8$.*

Remarque. Le résultat s'étend par conséquent aux formes optimales du problème (P^{lap}) quand existe une résultat d'équivalence entre les problèmes (P^{lap}) et $(\text{P}_{\lambda}^{\text{lap}})$.

7.2 Résultats d'existence

L'existence de formes optimales est semblable au cas de l'énergie de Dirichlet.

Proposition 7.2. *On suppose D borné. Il existe des solutions aux problèmes (P^{lap}) et $(\text{P}_{\lambda}^{\text{lap}})$.*

Démonstration. On procède comme dans le cas de l'énergie de Dirichlet, en relaxant le problème à l'aide des espaces $\hat{H}_0^1(\Omega)$, puis en revenant au problème initial. \square

Dans le cas où l'on travaille sur l'espace tout entier, on a cette fois, et contrairement au cas de l'énergie de Dirichlet, un théorème d'existence.

Proposition 7.3. *On suppose que $D = \mathbf{R}^d$. Il existe des solutions aux problèmes (P^{lap}) et (P_λ^{lap}) .*

Démonstration. Dans le cas du problème (P^{lap}) , considérons un sous-ensemble Ω mesurable de \mathbf{R}^d et de mesure m . Soit alors u une fonction propre du Laplacien-Dirichlet sur Ω associée à la première valeur propre. En effectuant une symétrisation radiale de Ω et de u (voir [HP05]), on trouve, en notant B la boule de mesure m dans \mathbf{R}^d centrée à l'origine, que

$$\lambda_1(B) + P(B) \leq \lambda_1(\Omega) + P(\Omega).$$

La boule B est donc une forme optimale au problème (P^{lap}) . On a de plus que toutes les formes optimales à ce problème sont des boules de mesure m .

Dans le cas du problème (P_λ^{lap}) , considérons une suite minimisante $(\Omega_n)_n$. Pour tout n , on appelle B^n la boule de \mathbf{R}^d centrée en 0 et de mesure $|\Omega_n|$. On a alors, pour tout n ,

$$\lambda_1(B^n) + P(B^n) + \lambda||B^n| - m| \leq \lambda_1(\Omega_n) + P(\Omega_n) + \lambda||\Omega_n| - m|.$$

La suite $(B^n)_n$ est donc une nouvelle suite minimisante pour le problème (P_λ^{lap}) . Le problème consiste donc maintenant à minimiser la quantité $\lambda_1(B) + P(B) + \lambda||B| - m|$ parmi toutes les boules B de \mathbf{R}^d . Notons alors B_R la boule de rayon R dans \mathbf{R}^d centrée à l'origine, et définissons la fonction

$$\Phi_\lambda : \mathbf{R} \in (0, \infty) \mapsto \lambda_1(B_R) + P(B_R) + \lambda||B_R| - m|.$$

On peut calculer

$$\Phi_\lambda(R) = R^{-2}\lambda_1(B_1) + R^{d-1}P(B_1) + \lambda|R^d|B_1| - m|.$$

On remarque alors que

$$\Phi_\lambda(R) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \lambda |B_1| R^d \text{ et } \Phi_\lambda(R) \underset{R \rightarrow 0}{\sim} \lambda_1(B_1) R^{-2}$$

et donc Φ_λ atteint son minimum sur \mathbf{R} en au moins un point R_0 . La boule B_{R_0} est alors une forme optimale du problème (P_λ^{lap}) . \square

7.3 Résultats d'équivalence

Tout d'abord, remarquons que la première partie du raisonnement d'équivalence du chapitre 3 peut être appliquée ici, la fonctionnelle λ_1 étant elle-aussi décroissante. En ce qui concerne la seconde partie, il s'agit cette fois encore de dériver λ_1 selon des transformations classiques :

Proposition 7.4. *Soit Ω un ensemble mesurable borné de \mathbf{R}^d et t un réel strictement positif. Alors*

$$\lambda_1(t\Omega) = t^{-2}\lambda_1(\Omega).$$

En particulier,

$$\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} \frac{\lambda_1(t\Omega) - \lambda_1(\Omega)}{1 - t} = 2\lambda_1(\Omega).$$

Démonstration. Remarquons que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$u_t(\cdot) = u(\cdot/t) \in H_0^1(t\Omega).$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \lambda_1(t\Omega) &\leq \inf \left\{ \frac{\int |\nabla u_t|^2}{\int u_t^2} : u \in H_0^1(\Omega) \right\} \\ &\leq \inf \left\{ t^{-2} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} : u \in H_0^1(\Omega) \right\} \\ &\leq t^{-2} \lambda_1(\Omega) \end{aligned}$$

Comme de la même manière, $\lambda_1(\Omega) \leq t^2 \lambda_1(t\Omega)$, on a même l'égalité. D'où le résultat. \square

Le résultat d'équivalence déduit de cette proposition est alors le suivant :

Théorème 7.5. *On suppose ici que D est borné et fortement étoilé. Alors, il existe $\lambda^* = \lambda^*(m, D)$ tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, les problèmes (P_λ^{lap}) et (P^{lap}) ont les mêmes solutions.*

Démonstration. La preuve s'organise comme celle du chapitre 3. Déjà, on a vu que dans le cas où l'ensemble D est borné, les deux problèmes (P_λ^{lap}) et (P^{lap}) admettent des solutions. Pour prouver l'équivalence, on prend donc une forme optimale Ω du problème (P_λ^{lap}) , vérifiant $|\Omega| \neq m$, et on prouve que cela implique que $\lambda \leq C$, pour un constant C dépendant de la dimension et du domaine D . Dans le cas où $|\Omega| < m$, on utilise la décroissance de λ_1 et la preuve s'organise comme dans la section 3.3.

Dans le cas où $|\Omega| > m$, on utilise que l'ensemble D est fortement étoilé et des perturbations de Ω par des homothéties. La proposition précédente permet alors de conclure. \square

Dans le cas de la première valeur propre de l'opérateur Laplacien, cette équivalence est insuffisante pour atteindre directement les résultats voulus. Le résultat suivant nous permet alors de passer du problème (P_λ) à un nouveau problème plus adéquat à la preuve de la régularité.

Corollaire 7.6. *Soit Ω une forme optimale du problème (P_λ^{lap}) et $u \in H_0^1(\Omega)$ un vecteur propre associé à la première valeur propre du Laplacien-Dirichlet de norme L^2 égale à 1. Alors pour tout Ω' mesurable inclus dans D et tout $v \in H_0^1(\Omega')$, on a*

$$\begin{aligned} \left[\int |\nabla u|^2 + P(\Omega) + \lambda(|\Omega| - m) \right] &\leq \left[\int |\nabla v|^2 + P(\Omega') + \lambda(|\Omega'| - m) \right] \\ &+ \left(1 - \int v^2 \right) \int |\nabla u|^2 + \left(\int v^2 - 1 \right) (P(\Omega') - P(\Omega)) \\ &+ \lambda(|\Omega'| - |\Omega|) \left(1 + \int v^2 \right). \end{aligned}$$

Démonstration. On suppose que $v \neq 0$. La propriété d'optimalité de Ω se traduit alors par

$$\int |\nabla u|^2 + P(\Omega) + \lambda||\Omega| - m| \leq \frac{\int |\nabla v|^2}{\int v^2} + P(\Omega') + \lambda||\Omega'| - m|.$$

En multipliant par $\int v^2$,

$$0 \leq \int v^2(P(\Omega') - P(\Omega)) + \lambda||\Omega'| - |\Omega|| \int v^2 + \int |\nabla v|^2 - \int v^2 \int |\nabla u|^2.$$

On ajoute alors à cette inégalité l'expression $\int |\nabla u|^2 + P(\Omega) + \lambda||\Omega| - m|$ pour obtenir l'inégalité annoncée. \square

7.4 $\frac{1}{2}$ -Hölder continuité de la fonction d'état

Ici, le procédé est très similaire pour peu que l'on n'utilise pas directement le problème (P_λ^{lap}) mais le résultat du théorème 7.6. Considérons donc une forme optimale Ω pour le problème (P_λ^{lap}) et u une fonction propre associée à l'opérateur Laplacien-Dirichlet sur Ω . Quitte à renormaliser, on peut supposer que $\int u^2 = 1$. Et en remarquant que $u^+ + u^-$ est aussi une fonction propre pour la même valeur propre, on peut donc supposer que u est une fonction positive. Commençons par étudier la structure de Δu :

Lemme 7.7. *Il existe une mesure de Radon positive μ telle que*

$$\Delta u + \lambda_1(\Omega) u \mathbf{1}_{[u>0]} = \mu.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{R}^+)$. On remarque que, pour $t > 0$, $(u - t\varphi)^+$ est dans $H_0^1(\Omega)$, et n'est pas nul, pourvu que t soit assez petit. Donc,

$$\int |\nabla u|^2 \leq \frac{\int |\nabla(u - t\varphi)^+|^2}{\int |(u - t\varphi)^+|^2}.$$

Or, dans $H_0^1(D)$, on a

$$\int |\nabla(u - t\varphi)|^2 = \int |\nabla(u - t\varphi)^+|^2 + \int |\nabla(u - t\varphi)^-|^2,$$

et donc, en posant $f(t) = \int |\nabla(u - t\varphi)|^2$ et $g(t) = \int |(u - t\varphi)^+|^2$, on a, pour $t > 0$,

$$\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{f(0)}{g(0)} \geq 0.$$

Or, les fonction f et g sont dérivables en 0, avec

$$f'(0) = -2 \int \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

et

$$g'(0) = -2 \int u \varphi \mathbf{1}_{[u>0]}.$$

Et on a donc, en divisant par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0,

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g(0)^2} \geq 0,$$

i.e.,

$$-2 \int \nabla u \cdot \nabla \varphi + 2\lambda_1(\Omega) \int u \varphi \mathbf{1}_{[u>0]} \geq 0.$$

Au final, on a donc, au sens des distributions sur D ,

$$\Delta u + \lambda_1(\Omega) u \mathbf{1}_{[u>0]} \geq 0,$$

et on identifie la distribution positive ainsi trouvée avec une mesure de Radon positive. \square

D'où l'on déduit une estimation L^∞ de u .

Corollaire 7.8. *La fonction u est dans $L^\infty(D)$.*

Démonstration. C'est l'application directe du théorème 8.15 de [GT83]. \square

Comme la fonction u est positive, on a vu, lors de l'étude du problème de Dirichlet, que la preuve de la continuité Hölder passait par une bonne estimation de la mesure $|\Delta u|$. Cette estimation provient du lemme suivant :

Lemme 7.9. *Soit B un ouvert dans D et $\varphi \in C_c^\infty(B)$. Alors*

$$\begin{aligned} & \langle \Delta u + [\lambda_1(\Omega) + P(\Omega) - P(\Omega \cup B)]u, \varphi \rangle \leq \\ & C \left[\int |\nabla \varphi|^2 + \|\varphi\|_\infty^2 |B| (\lambda|B| + P(B)) \right]^{\frac{1}{2}} [P(B) + \lambda|B|]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour cela, on applique le corollaire 7.6 en posant

$$\Omega' = \Omega \cup B \text{ et } v = u + t\varphi$$

pour un t réel strictement positif que l'on fixera plus loin. En développant les différents termes qui apparaissent dans l'inégalité obtenue, on obtient :

$$\begin{aligned} 2t \langle \Delta u + [\lambda_1(\Omega) + P(\Omega) - P(\Omega \cup B)]u, \varphi \rangle \leq \\ [P(B) + 4\lambda|B|] + t^2 \left[\int |\nabla \varphi|^2 + P(B) \int \varphi^2 + 2\lambda|B| \int \varphi^2 \right]. \end{aligned}$$

En divisant par $2t$ et en regroupant les différentes constantes, on obtient

$$\langle \Delta u + [\lambda_1(\Omega) + P(\Omega) - P(\Omega \cup B)]u, \varphi \rangle \leq \frac{C}{t} [P(B) + \lambda|B|] + Ct \left[\int |\nabla \varphi|^2 + \|\varphi\|_\infty^2 |B| (P(B) + \lambda|B|) \right].$$

En minimisant cette inégalité en t , on obtient alors le résultat voulu. \square

Théorème 7.10. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $r \in (0, 1)$ et $x_0 \in D$ tels que $B(x_0, 2r) \subset D$, on ait*

$$|\Delta u|(B(x_0, r)) \leq Cr^{d-1-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Pour prouver ce résultat, on va appliquer le lemme précédent en prenant pour B la boule $B(x_0, 2r)$, et pour φ une fonction $C_c^\infty(B(x_0, 2r))$ constante égale à 1 sur $B(x_0, r)$, uniformément bornée par 1 et de gradient uniformément borné par un $C(d)/r$. On calcule les ordres de grandeur des différents termes :

$$\int |\nabla \varphi|^2 \leq Cr^{d-2},$$

$$P(B) \leq Cr^{d-1} \text{ et } |B| \leq Cr^d.$$

On a alors

$$\langle \Delta u + [\lambda_1(\Omega) + P(\Omega) - P(\Omega \cup B)]u, \varphi \rangle \leq C \left[r^{d-2} + r^d(\lambda r^d + r^{d-1}) \right]^{\frac{1}{2}} \left[r^{d-1} + \lambda r^d \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $r \leq 1$, chaque somme de r^α peut être majorée (à une constante multiplicative près) par le terme de plus petit exposant, et donc

$$\langle \Delta u + [\lambda_1(\Omega) + P(\Omega) - P(\Omega \cup B)]u, \varphi \rangle \leq C \left[r^{d-2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[r^{d-1} \right]^{\frac{1}{2}} \leq Cr^{d-1-\frac{1}{2}}.$$

Maintenant, $P(\Omega \cup B) \leq P(\Omega) + P(B) \leq C$, et donc, u étant une fonction bornée sur D , on a

$$|\langle [P(\Omega) - P(\Omega \cup B)]u, \varphi \rangle| \leq Cr^d.$$

On trouve finalement que

$$\langle \Delta u + \lambda_1(\Omega)u, \varphi \rangle \leq Cr^{d-1-\frac{1}{2}} + Cr^d \leq Cr^{d-1-\frac{1}{2}}.$$

Comme on a vu que la distribution $\Delta u + \lambda_1(\Omega)u$ est une mesure positive sur D , on a

$$\begin{aligned} |\Delta u|(B(x_0, r)) &\leq \langle |\Delta u|, \varphi \rangle \\ &\leq \langle |\Delta u + \lambda_1(\Omega)u|, \varphi \rangle + \langle |\lambda_1(\Omega)u|, \varphi \rangle \\ &\leq \langle \Delta u + \lambda_1(\Omega)u, \varphi \rangle + Cr^d \\ &\leq Cr^{d-1-\frac{1}{2}} + Cr^d \\ &\leq Cr^{d-1-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

On en déduit, comme dans le cas du problème de Laplace,

Théorème 7.11. *Si Ω est une forme optimale du problème (P_λ^{lap}) et u une fonction propre associée à cette forme, alors u est localement $\frac{1}{2}$ -Hölderienne.*

7.5 Lipschitzianité de la fonction d'état

Dans la suite, Ω désigne une forme optimale du problème (P_λ^{lap}) , et u une fonction d'état associée à Ω . On suppose de plus que u est positive et que $\int u^2 = 1$.

7.5.1 Résultat de densité

Étant basé sur la décroissance de la fonctionnelle d'énergie, le résultat de densité obtenu pour le problème (P_λ) se transpose immédiatement au problème (P_λ^{lap}) :

Lemme 7.12. *Il existe des constantes $C(d)$ et $r_0(d, \lambda)$ telles que,*

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall r \in (0, \min\{r_0, d(x, \partial D)\}), |\Omega^c \cap B(x, r)| \geq Cr^d.$$

7.5.2 Preuve de la lipschitzianité

La preuve est basée sur le même type de variation que pour la preuve de la lipschitzianité pour le problème (P_λ) . La surface est construite de la même façon en remarquant que la fonction u est solution, à l'intérieur de Ω , de l'équation $-\Delta u = \lambda_1(\Omega)u$. De la borne L^∞ de u sur D , on déduit le même type d'estimations sur la courbure des variations que dans le cas du problème de Laplace. On construit ainsi les "perturbés"

$$\Omega_t = \Omega \cup Z_t$$

et la fonction u_t solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_t = \lambda_1(\Omega)u \text{ dans } Z_t, \\ u_t \in u + H_0^1(Z_t). \end{cases}$$

On a alors, en utilisant le résultat d'équivalence (7.6),

$$\begin{aligned} \left[\int |\nabla u|^2 + P(\Omega) + \lambda||\Omega| - m| \right] &\leq \left[\int |\nabla u_t|^2 + P(\Omega_t) + \lambda||\Omega_t| - m| \right] \\ &+ \left(1 - \int u_t^2\right) \int |\nabla u|^2 + \left(\int u_t^2 - 1\right) (P(\Omega_t) - P(\Omega)) \\ &+ \lambda||\Omega_t| - |\Omega|| \left(1 + \int u_t^2\right), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \int |\nabla u|^2 - \int |\nabla u_t|^2 - \lambda_1(\Omega) \left(\int u^2 - \int u_t^2 \right) &\leq [P(\Omega_t) - P(\Omega)] \left[\int u_t^2 \right] \\ &+ \lambda|V_t| \left(1 + \int u_t^2\right). \end{aligned}$$

Remarquons que, quitte à prendre t petit, on peut supposer que $\int u_t^2 \leq 1 + \int u^2$. On obtient alors la majoration suivante du terme de droite de l'équation précédente :

$$[P(\Omega_t) - P(\Omega)] \left[\int u_t^2 \right] + \lambda|V_t| \left(1 + \int u_t^2\right) \leq \left(2 + \int u^2\right) ([P(\Omega_t) - P(\Omega)] + \lambda|V_t|).$$

Pour minorer la différence d'énergie, on remarque que, suite à la définition de u_t , on a

$$\int \nabla u_t \cdot \nabla u - \int |\nabla u_t|^2 - \lambda_1(\Omega) \left(\int u^2 - \int u \cdot u_t \right) = 0.$$

D'où

$$\int |\nabla u|^2 - \int |\nabla u_t|^2 - \lambda_1(\Omega) \left(\int u^2 - \int u_t^2 \right) = \int |\nabla(u - u_t)|^2 + \lambda_1(\Omega) \int (u - u_t)^2.$$

Au final, on obtient

$$\int |\nabla(u - u_t)|^2 + \lambda_1(\Omega) \int (u - u_t)^2 \leq \left(2 + \int u^2 \right) ([P(\Omega_t) - P(\Omega)] + \lambda|V_t|).$$

Soit encore, puisque $\lambda_1(\Omega) \int (u - u_t)^2 \geq 0$,

$$\int |\nabla(u - u_t)|^2 \leq \left(2 + \int u^2 \right) ([P(\Omega_t) - P(\Omega)] + \lambda|V_t|). \quad (7.1)$$

On reprend alors les estimations obtenues lors de l'étude du problème de Laplace :

$$P(\Omega_t) - P(\Omega) \leq \frac{C}{\varphi(x_0)} |V_t| + \frac{C}{M} |V_t|,$$

et

$$\int |\nabla(u - u_t)|^2 \geq \frac{CM^2}{\varphi(x_0)} |V_{t/2}|.$$

Au final, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{CM^2}{\varphi(x_0)} |V_{t/2}| &\leq \left(2 + \int u^2 \right) \left(\frac{C}{\varphi(x_0)} |V_t| + \frac{C}{M} |V_t| + \lambda|V_t| \right) \\ &\leq \frac{C}{\varphi(x_0)} |V_t| + \frac{C}{M} |V_t|. \end{aligned}$$

Et on conclut à la locale lipschitzianité de u comme dans le cas du problème de Laplace.

7.6 Régularité supérieure

Dans cette partie, on suppose que la première valeur propre de l'opérateur Laplacien-Dirichlet sur Ω est simple. On procède alors comme pour le problème de Laplace, c'est à dire on écrit que $\partial^*\Omega$ est une variété $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, et on travaille localement sur des graphes. Sur un tel graphe (on note h la fonction de graphe définie sur une boule B_1 de \mathbf{R}^{d-1} et à valeur dans une boule B_2 de \mathbf{R}), en utilisant le théorème 5.7.1 de [HP05], on trouve que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_1, \mathbf{R})$ et de moyenne nulle,

$$\int_{B_1} \frac{\nabla h \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} - \int_{B_1} |\nabla u(x', h(x'))|^2 \varphi(x') dx' = 0.$$

L'équation d'Euler devient donc, au sens des équation elliptiques en forme divergente :

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right) = |\nabla u|^2 + C,$$

pour une constante C donnée.

De la même manière que dans le cas de l'équation de Laplace, on déduit facilement que le bord réduit est une variété de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, et on lance un argument de bootstrap pour conclure la preuve du théorème (7.1).

Chapitre 8

Cas de l'énergie de Dirichlet associée à un opérateur elliptique en forme divergente

Dans ce chapitre, on étudie une variation du problème initial, où l'EDP considérée n'est plus l'équation de Poisson $-\Delta u = f$, mais une version plus générale :

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f.$$

Le principal résultat de ce chapitre est la preuve de la $\frac{1}{2}$ -Hölder continuité de la fonction d'état d'une forme optimale, lorsque la fonction f est bornée et positive. L'approche est différente de celle du chapitre 4. Nous utiliserons d'abord le terme régularisant du périmètre pour montrer un résultat de densité au bord de la forme optimale. Puis, nous déduirons la propriété de Hölder continuité en utilisant quelques techniques utilisées aussi dans le chapitre 5.

8.1 Le problème

Soit D un ouvert borné régulier de \mathbf{R}^d . Soit m un réel dans l'intervalle $]0, |D|[$. On s'intéresse cette fois encore au problème

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \mathcal{E}_\lambda(\Omega) = J(\Omega) + P(\Omega) + \lambda||\Omega| - m| \\ \text{parmi les sous-ensembles mesurables } \Omega \text{ de } D. \end{cases} \quad (\mathbf{P}_\lambda^{\operatorname{div}})$$

Néanmoins, la fonction J est maintenant l'énergie de Dirichlet associée à un opérateur elliptique de forme divergente. Soit donc une application

$$A : \mathbf{R}^d \mapsto \mathcal{S}^{d \times d}$$

où $\mathcal{S}^{d \times d}$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de taille $d \times d$. On verra dans la suite les conditions précises de régularité et d'ellipticité de A selon les propriétés que l'on cherche à prouver. Cependant, on peut déjà supposer que, pour tout x dans \mathbf{R}^d , la matrice $A(x)$ est symétrique définie positive.

Soit $f \in H^{-1}(D)$. On définit alors l'énergie J par l'expression suivante :

$$J(\Omega) = \inf \{G(u) : u \in H_0^1(\Omega)\},$$

avec, pour tout u dans $H_0^1(D)$,

$$G(u) = \frac{1}{2} \int A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - \langle f, u \rangle.$$

Une première remarque, importante dans la suite, est la suivante :

Lemme 8.1. *La fonctionnelle J est décroissante.*

On peut trouver une première condition sur A pour que la fonctionnelle J soit bien définie :

Lemme 8.2. *Si la fonction A vérifie la condition suivante :*

$$\exists \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbf{R}^d, A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2,$$

alors, pour tout sous-ensemble mesurable Ω de D , il existe un $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $J(\Omega) = G(u)$.

Démonstration. Considérons une suite minimisante $(u_n)_n$ dans $H_0^1(\Omega)$. On peut supposer que, pour tout n , $G(u_n) \leq G(0) = 0$. Par conséquent, pour tout n , on a

$$\frac{\alpha}{2} \int |\nabla u_n|^2 \leq \frac{1}{2} \int A \nabla u_n \cdot \nabla u_n \leq \int f u_n \leq C \|f\|_{H^{-1}(D)} \|\nabla u_n\|_{L^2(D)},$$

en utilisant, pour obtenir la dernière inégalité, l'inégalité de Poincaré dans D . Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(D)$, et on peut donc supposer qu'elle converge faiblement (dans $H_0^1(D)$) vers une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$. Par un argument de semi-continuité inférieure de la norme

$$N(v) = \left[\int A \nabla v \cdot \nabla v \right]^{1/2}$$

pour la topologie faible, on trouve donc que

$$G(u) \leq \liminf_n G(u_n)$$

ce qui conclut la preuve. □

On peut alors conclure à l'existence de formes optimales :

Théorème 8.3. *Sous la même hypothèse que dans le lemme précédent pour la fonction A , on trouve que le problème (P_λ^{div}) admet des formes optimales.*

Démonstration. La preuve est sensiblement la même que celle du cas de l'équation de Poisson. □

Dans la suite, on supposera que la fonction A vérifie la condition du théorème d'existence, i.e., que pour un $\alpha > 0$, on a

$$\forall x \in D, \forall \xi \in \mathbf{R}^d, A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

On désigne par Ω une forme optimale au problème (P_λ^{div}) , et par u la fonction d'état associée à Ω , qui vérifie, au moins formellement :

$$\begin{cases} -\text{div}(A \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

8.2 Les estimations

On suppose dans la suite que la fonction f est dans $L^2(D)$.

8.2.1 Estimations directes

En utilisant la condition d'optimalité entre Ω et $\Omega \cup B$, on trouve tout d'abord l'estimation suivante :

Lemme 8.4. *Soit B une boule incluse dans D et $v \in H_0^1(\Omega \cup B)$. Alors,*

$$J(\Omega) \leq G(v) + P(\Omega \cup B) - P(\Omega) + \lambda|B \setminus \Omega|.$$

D'où l'on déduit le cas particulier suivant :

Lemme 8.5. *Soit B_r une boule incluse dans D et de rayon $r \leq 1$. Alors soit v la fonction égale à u sur B_r^c et vérifiant*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla v) = f \text{ dans } B_r, \\ v \in u + H_0^1(B_r). \end{cases}$$

Alors

$$\alpha \int |\nabla(u-v)|^2 \leq \int A\nabla(u-v) \cdot \nabla(u-v) \leq C(\lambda, d)r^{d-1}.$$

Démonstration. En effet, on remarque tout d'abord que

$$J(\Omega) - G(v) = G(u) - G(v) = \frac{1}{2} \int A\nabla(u-v) \cdot \nabla(u-v)$$

par définition de v , ensuite que

$$P(\Omega \cup B) - P(\Omega) \leq P(B) \leq C(d)r^{d-1},$$

et enfin que

$$\lambda|B \setminus \Omega| \leq \lambda Cr^d \leq C(\lambda, d)r^{d-1}$$

car $r \leq 1$. □

8.2.2 Étude de la mesure $\operatorname{div}(A\nabla u)$

On définit encore une fois les trois domaines au sens de la mesure :

$$\Omega_{\text{int}} = \{x \in D : \exists B(x, r) \subset D, |B(x, r) \setminus \Omega| = 0\},$$

$$\Omega_{\text{ext}} = \{x \in D : \exists B(x, r) \subset D, |B(x, r) \cap \Omega| = 0\},$$

$$\partial\Omega = \{x \in D : \forall B(x, r) \subset C, 0 < |B(x, r) \cap \Omega| < |B(x, r)|\}.$$

On remarque que Ω_{int} et Ω_{ext} sont deux ouverts.

Lemme 8.6 (Régularité à l'intérieur et l'extérieur de Ω). *(i) Dans Ω_{int} , la fonction u est solution, au sens des distributions de l'équation*

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f.$$

(ii) La fonction u est nulle presque partout dans Ω_{ext} .

Lemme 8.7 (Structure de $\operatorname{div}(A\nabla u)$). Il existe deux mesures de Radon positives μ_+ et μ_- telles que

$$\operatorname{div}(A\nabla u^+) + f\mathbf{1}_{[u>0]} = \mu_+,$$

$$\operatorname{div}(A\nabla u^-) - f\mathbf{1}_{[u<0]} = \mu_-.$$

De plus, si u est continue sur D ,

$$\mu_+([u \neq 0]) = \mu_-([u \neq 0]) = 0.$$

Démonstration. On considère une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{R}^+)$. Pour tout $t > 0$, on définit alors la fonction

$$u_t = (u - t\varphi)^+ - u^- \in H_0^1(\Omega).$$

On a donc $G(u) \leq G(u_t)$, ce qui se traduit par

$$\frac{1}{2} \int A\nabla u^+ \cdot \nabla u^+ - \int f u^+ \leq \frac{1}{2} \int A\nabla(u - t\varphi)^+ \cdot \nabla(u - t\varphi)^+ - \int f (u - t\varphi)^+.$$

On remarque d'une part que $(u - t\varphi)^+ = (u^+ - t\varphi)^+$ et donc, puisque

$$\int A\nabla(u^+ - t\varphi)^- \cdot \nabla(u^+ - t\varphi)^- \geq 0,$$

on a

$$\begin{aligned} \int A\nabla(u - t\varphi)^+ \cdot \nabla(u - t\varphi)^+ &\leq \int A\nabla(u^+ - t\varphi)^+ \cdot \nabla(u^+ - t\varphi)^+ + \int A\nabla(u^+ - t\varphi)^- \cdot \nabla(u^+ - t\varphi)^- \\ &\leq \int A\nabla(u^+ - t\varphi) \cdot \nabla(u^+ - t\varphi). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$0 \leq - \int A\nabla u^+ \cdot \nabla \varphi + \varepsilon(t) + \frac{\int f (u - t\varphi)^+ - \int f u^+}{t}$$

où $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. Comme la limite de la fraction de droite est $\int f \varphi \mathbf{1}_{[u>0]}$, on trouve donc que la distribution $\operatorname{div}(A\nabla u^+) + f \mathbf{1}_{[u>0]}$ est positive.

Le résultat sur u^- est obtenu en prenant les fonctions $u^+ - (u + t\varphi)^-$. \square

Corollaire 8.8. En particulier, on trouve que

$$-\operatorname{div}(A\nabla|u|) \leq |f|,$$

et donc, si f est dans $L^q(D)$ pour un $q > d/2$, on trouve que u est bornée sur D .

Démonstration. C'est l'application du théorème 8.16 de [GT83]. \square

8.3 Continuité de la fonction d'état

Dans cette section, on fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

- (i) la fonction f est dans $L^q(D)$ pour un $q > \max\{d/2, 2\}$,
- (ii) la fonction A est bornée et Hölder-continue sur D .

Dans la preuve de la continuité, on utilisera le résultat suivant, qui a déjà été prouvé dans l'étude de l'énergie de Dirichlet associé au Laplacien. Ce résultat n'utilise en réalité que la décroissance de J .

Lemme 8.9 (Une estimation de la densité au bord). *Il existe des constantes $C(d)$ et $r_0(d, \lambda)$ telles que,*

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall r \in (0, \min\{r_0, d(x, \partial D)\}), |\Omega^c \cap B(x, r)| \geq Cr^d.$$

Théorème 8.10. *La fonction u est continue sur D .*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que la fonction u est nulle presque partout sur Ω_{ext} , et admet un représentant continu sur Ω_{int} (c'est l'application du théorème 8.24 dans [GT83]). Dans la suite, on supposera donc que le représentant choisi de u est égal à 0 sur Ω_{ext} et égal à une fonction continue sur Ω_{int} .

Pour prouver la continuité, il suffit donc de prouver la continuité sur $\partial\Omega$. Soit alors $x_0 \in \partial\Omega$. Soit $(\delta_n)_n$ une suite décroissante de réels strictement positifs tendant vers 0. On suppose que $\delta_0 \leq 1$. On considère alors la suite de fonctions

$$u_n(\xi) = u(x_0 + \delta_n \xi).$$

Tout d'abord, comme la fonction u est bornée, on remarque que les fonctions u_n sont bornées. On peut donc supposer qu'elles convergent vers une fonction u_∞ dans $L^\infty(\mathbf{R}^d)$ muni de sa topologie faible-*.

Lemme 8.11. *La suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(B(0, R))$ pour tout $R > 0$.*

Démonstration. On fixe R . On définit les fonctions V_n^R et W_n^R par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla V_n^R) = f \text{ dans } B(x_0, \delta_n R), \\ V_n^R \in H_0^1(B(x_0, \delta_n R)). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla W_n^R) = 0 \text{ dans } B(x_0, \delta_n R), \\ W_n^R \in u + H_0^1(B(x_0, \delta_n R)). \end{cases}$$

En utilisant le lemme 8.5, on trouve que

$$\int_{B(x_0, \delta_n R)} |\nabla(u - (V_n^R + W_n^R))|^2 \leq C(d, \lambda) R^{d-1} \delta_n^{d-1}.$$

En utilisant le lemme 8.18, on trouve que

$$\int_{B(x_0, \delta_n R)} |\nabla V_n^R|^2 \leq C(d, \|f\|_{L^q(D)}) R^{d-2} \delta_n^{d-2}.$$

Et en utilisant le lemme 8.19, on trouve que

$$\int_{B(x_0, \delta_n R/2)} |\nabla W_n^R|^2 \leq C R^{d-2} \delta_n^{d-2}.$$

Au final, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, \delta_n R/2)} |\nabla u|^2 &\leq C \int |\nabla(u - (V_n^R + W_n^R))|^2 + C \int |\nabla V_n^R|^2 + C \int |\nabla W_n^R|^2 \\ &\leq C(d, \|f\|_{L^q(D)}, R) (\delta_n^{d-1} + \delta_n^{d-2} + \delta_n^{d-2}) \leq C(d, \|f\|_{L^q(D)}, R) \delta_n^{d-2}. \end{aligned}$$

Soit, en renormalisant,

$$\int_{B(0, R/2)} |\nabla u_n|^2 = \delta_n^{2-d} \int_{B(0, \delta_n R/2)} |\nabla u|^2 \leq C(d, \|f\|_{L^q(D)}, R).$$

ce qui conclut la preuve du lemme. \square

On peut supposer de plus que la suite (u_n) converge vers u_∞ dans $H^1(B(0, R))$ pour sa topologie faible. En utilisant un théorème de Rellich, on peut donc supposer que la suite $(u_n)_n$ converge vers u_∞ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d)$, et presque partout.

Lemme 8.12. *La fonction u_∞ est solution de*

$$-\text{div}(A(x_0)\nabla u_\infty) = 0$$

dans \mathbf{R}^d .

Démonstration. On se donne un $R > 0$. Pour tout n , on définit

$$\begin{cases} -\text{div}(A\nabla V_n) = f \text{ dans } B(x_0, \delta_n R), \\ V_n \in u + H_0^1(B(x_0, \delta_n R)). \end{cases}$$

On rappelle que l'on a

$$\int_{B(x_0, \delta_n R)} |\nabla(u - V_n)|^2 \leq C(R) \delta_n^{d-1}.$$

On définit alors $v_n(\xi) = V_n(x_0 + \delta_n \xi)$. On trouve donc que

$$\int_{B(0, R)} |\nabla(u_n - v_n)|^2 \leq C(R) \delta_n.$$

En particulier, on trouve donc que la suite $(\nabla v_n)_n$ converge faiblement dans $L^2(B_R)$ vers ∇u_∞ .

Mais on a

$$-\text{div}(A_n \nabla v_n) = \delta_n^2 f_n \text{ dans } B(0, R)$$

où $A_n(\xi) = A(x_0 + \delta_n \xi)$ et $f_n(\xi) = f(x_0 + \delta_n \xi)$. Si maintenant on prend $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0, R))$, on a donc

$$\int A_n \nabla v_n \cdot \nabla \varphi = \delta_n^2 \int f_n \varphi.$$

D'où

$$\left| \int A_n \nabla v_n \cdot \nabla \varphi \right| \leq C \delta_n^2.$$

Or, comme $(\nabla v_n)_n$ converge faiblement vers ∇u_∞ dans $L^2(B_R)$ et comme

$$\lim_n \|A_n - A(x_0)\|_{L^\infty(B(0,R))} = 0,$$

on trouve donc que

$$\int A(x_0) \nabla u_\infty \cdot \nabla \varphi = 0.$$

Cette dernière égalité est indépendante du R choisi et du φ choisi dans $\mathcal{C}_c^\infty(B(0,R))$. \square

On en déduit donc que la fonction u_∞ est constante. En effet, par un changement de variable, on se ramène à une fonction u'_∞ harmonique sur \mathbf{R}^d et bornée, donc constante.

De plus, on peut voir que u_∞ est nulle. En effet, on définit l'ensemble

$$C_n = \frac{[\Omega^c \cap B(x_0, \delta_n)] - x_0}{\delta_n}.$$

Par le résultat de densité précédent (lemme 8.9), on trouve donc que

$$|C_n| \geq C$$

pour un C indépendant de n . Et comme la fonction u_n est identiquement nulle sur C_n ,

$$\begin{aligned} C|u_\infty| &\leq \int_{C_n} |u_\infty - u_n| \leq \int_{B(0,1)} |u_\infty - u_n| \\ &\leq C \|u_\infty - u_n\|_{L^2(B(0,1))}, \end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

Maintenant, on peut voir que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbf{R}^d vers 0. En effet, on voit facilement que

$$-\operatorname{div}(A_n \nabla |u_n|) \leq \delta_n^2 |f_n|.$$

En utilisant alors le théorème 8.17 de [GT83], on trouve que

$$\sup_{B(0,1/2)} |u_n| \leq C(d, q, \alpha, \|A\|_\infty, q) (\|u_n\|_{L^2(B(0,1))} + \|\delta_n^2 f_n\|_{L^q(B_1)}).$$

mais on peut calculer

$$\|\delta_n^2 f_n\|_{L^q(B_1)}^q \leq \delta_n^{2q-d} \|f\|_{L^q(D)},$$

et le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque l'on a supposé $q > d$.

En conclusion,

$$\lim_n \sup_{B(x_0, \delta_n/2)} |u| = \lim_n \sup_{B(0,1/2)} |u_n| = 0.$$

De ces deux dernières limites, on déduit donc que la fonction u est nulle presque partout sur $\partial\Omega$. Si l'on suppose donc que le représentant choisi de u est nul *partout* sur $\partial\Omega$, on a donc, encore grâce aux limites précédentes, la continuité de u sur tout D . \square

8.4 Hölder continuité de la fonction d'état

Dans cette section, on suppose toujours que A est bornée et Hölder continue sur D .

Théorème 8.13. *On suppose que la fonction f est bornée et à valeurs positives. Alors, la fonction u est $\frac{1}{2}$ -Hölder continue sur D .*

Remarque. L'hypothèse faite sur f dans l'énoncé du théorème est particulièrement importante, puisque la preuve utilise fortement les propriétés de type surharmonicité.

La clé de la preuve réside dans le résultat suivant :

Lemme 8.14. *Soit $\delta \in]0, 1[$. On pose $D_\delta = \{x \in D : d(x, \partial D) > 2\delta\}$. Alors, il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant des données du problème et de δ telle que, pour tout x dans D_δ tel que $d(x, \partial\Omega) \leq \delta$, on ait*

$$u(x) \leq C_0 d(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Pour cela, considérons un $x_0 \in D_\delta$ tel que $r_0 = d(x_0, \partial\Omega) \leq \delta$. Tout d'abord, comme $r_0 \leq 1$, on suppose que $u(x_0) \geq r_0$, car si ce n'est pas le cas, on a automatiquement $u(x_0) \leq r_0^{\frac{1}{2}}$.

On fixe un $y_0 \in \partial\Omega$ tel que $d(x_0, y_0) = r_0$. Alors, on a

$$d(y_0, \partial D) \geq d(x_0, \partial D) - d(x_0, y_0) \geq 2\delta - \delta = \delta \geq r_0.$$

En particulier, $B(y_0, r_0) \subset D$. On considère alors l'ensemble $\Omega' = \Omega \cup B(y_0, r_0)$ et v la fonction solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla v) = f \text{ dans } B(y_0, r_0), \\ v \in u + H_0^1(B(y_0, x_0)). \end{cases}$$

Alors, on a vu que

$$\frac{\alpha}{2} \int_{B(y_0, r_0)} |\nabla(u - v)|^2 \leq G(u) - G(v) \leq C(d, \lambda) r_0^{d-1}. \quad (8.1)$$

L'essentiel de la preuve consiste alors à estimer inférieurement la quantité $\int_{B(y_0, r_0)} |\nabla(v - u)|^2$.

Pour ce faire, remarquons d'abord que l'on peut supposer, quitte à faire une translation et une rotation, que $y_0 = 0$ et que $x_0 = r_0 e_d$. Dans la suite, on notera

$$B' = B(y_0, r_0/2) \text{ et } V = B' \setminus \Omega.$$

Remarquons, en passant, que, par l'estimation déjà mentionnée de densité du complémentaire de Ω au bord (lemme 8.9, on a $|V| \geq C(d)r_0^d$. On définit la demisphère inférieure de $\partial B(x_0, r_0)$:

$$S = \{(x_1, \dots, x_d) \in \partial B(y_0, r_0) : x_d < 0\},$$

et pour tout $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans S , on définit l_y :

$$l_y = \{(y_1, \dots, y_{d-1}, x_d) : x_d \leq 0\}.$$

Soit alors S' l'ensemble des y dans S tels que $l_y \cap V \neq \emptyset$. Pour tout y dans S' , on appelle X_y le point de $l_y \cap V$ de plus grand d -ième coordonnée. On définit alors l'_y comme le segment (y, X_y) .

L'objectif de cette construction est de permettre la découpe d'une intégrale sur $B(y_0, r_0)$ en intégrales sur les lignes l'_y . Voici ce calcul :

$$\begin{aligned}
\int_{B(y_0, r_0)} |D_d(v - u)| &\geq \int_{S'} dy \int_{l'_y} D_d(v - u) \\
&\geq \int_{S'} (v - u)(X_y) \text{ car } v(y) = u(y) \\
&\geq \int_{S'} v(X_y) \text{ car } X_y \in \Omega_{\text{int}}^c \\
&\geq \inf \left\{ \frac{v(X)}{r_0} : X \in V \right\} r_0 |S'| \\
&\geq C(d) \inf \left\{ \frac{v(X)}{r_0} : X \in V \right\} |V|.
\end{aligned}$$

Maintenant, grâce à l'inégalité de Schwarz, on a

$$\int_{B(y_0, r_0)} |D_d(v - u)| \leq |B(y_0, r_0)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(y_0, r_0)} |D_d(v - u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_{B(y_0, r_0)} |\nabla(u - v)|^2 &\geq \int_{B(y_0, r_0)} |D_d(u - v)|^2 \\
&\geq \frac{1}{|B(y_0, r_0)|} \left(\int_{B(y_0, r_0)} |D_d(u - v)| \right)^2 \\
&\geq C(d) \inf \left\{ \frac{v(X)}{r_0} : X \in V \right\}^2 \frac{|V|^2}{r_0^d} \\
&\geq C(d) \left(\inf_V v \right)^2 r_0^{d-2} \text{ en utilisant l'estimation de densité du lemme 8.9.}
\end{aligned}$$

En utilisant alors l'inégalité (8.1), on trouve donc que

$$\left(\inf_V v \right)^2 \leq C(d, \lambda, \alpha) r_0.$$

La fin de la preuve va consister à estimer inférieurement l'infimum de gauche. Pour ce faire, on procède en deux étapes.

Lemme 8.15. *Il existe deux constantes $C'_0(d)$ et $\alpha_0(d, \|f\|_\infty)$ strictement positives telles que*

$$\inf_{B(x_0, \alpha_0 r_0)} u \geq C'_0 u(x_0).$$

Démonstration. Soit $\alpha < 1/4$ (donc tel que $r = \alpha r_0 < r_0/4$). Soit w la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla w) = f \text{ dans } B(x_0, 2r) \\ w = 0 \text{ sur } \partial B(x_0, 2r). \end{cases}$$

Puisque $B(x_0, 2r) \subset \Omega$, on y a aussi $-\operatorname{div}(\nabla u) = f$. En particulier, $u \geq w$ sur $B(x_0, 2r)$. On a aussi $\|w\|_\infty \leq C(d)\|f\|_\infty r^2$. En appliquant alors l'inégalité de Harnack sur $u - w$, on trouve (en utilisant que $u(x_0) \geq r_0 \geq r$),

$$\begin{aligned} \inf_{B(x_0, r)} u &\geq \inf_{B(x_0, r)} (u - w) \\ &\geq C(d)(u(x_0) - w(x_0)) \\ &\geq C(d)(u(x_0) - C(d)r^2\|f\|_\infty) \\ &\geq C(d)u(x_0)(1 - \alpha C(d)\|f\|_\infty) \\ &\geq \frac{C(d)}{2}u(x_0), \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant vraie pour tout $\alpha \leq \alpha_0 \leq \frac{1}{2C(d)\|f\|_\infty}$. □

Pour conclure, on considère w la solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla w) = 0 \text{ dans } B(y_0, r_0), \\ w \in u + H_0^1(B(y_0, r_0)). \end{cases}$$

L'application du lemme précédent et du lemme 8.20, ainsi que du principe du maximum, nous donne donc l'estimation

$$\inf_{B(y_0, r_0/2)} w \geq \alpha_1 C'_0 u(x_0),$$

où la constante α_1 dépend du α_0 du lemme précédent, donc de d et de $\|f\|_\infty$, de la norme $\|A\|_{C^{0,\beta}}$, et de α et Λ , la constante d'ellipticité et la norme infini de A , c'est à dire, en un mot, des données du problème. On trouve alors que (noter que $v \geq w$ sur $B(y_0, r_0)$) :

$$\begin{aligned} \inf_V v &\geq \inf_{B(y_0, r_0/2)} v \\ &\geq \inf_{B(y_0, r_0/2)} w \\ &\geq C u(x_0). \end{aligned}$$

Au final, on obtient l'estimation cherchée :

$$u(x_0) \leq C r_0^{\frac{1}{2}}.$$

□

À partir de maintenant, on définit encore la fonction $d : x \in D \mapsto d(x, \partial\Omega)$. On prouve alors les deux corollaires suivants :

Corollaire 8.16. Soit $\delta \in]0, 1[$. Il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant des données du problème et de δ telle que, pour tout x_0 dans D_δ ,

$$u(x_0) \leq c_0 d(x_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Soit x_0 dans D_δ . Si $d(x_0) > \delta$, on a

$$u(x_0) \leq \frac{\|u\|_\infty}{\delta^{\frac{1}{2}}} d(x_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Si au contraire $d(x_0) \leq \delta$, on applique le résultat précédent et :

$$u(x_0) \leq C_0 d(x_0)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Corollaire 8.17. Soit $\delta \in]0, 1[$. Il existe une constante $c_1 > 0$ dépendant des données du problème et de δ telle que, pour tout x_0 dans D_δ avec $d(x_0) > 0$,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B(x_0, d(x_0)/4))} \leq c_1 \max \left\{ 1, \frac{1}{d(x_0)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Démonstration. Soit x_0 dans D_δ tel que $d(x_0) > 0$. Dans le premier cas, si $x_0 \in \Omega_{\text{ext}}$, alors u est identiquement nul sur toute la boule $B(x_0, d(x_0))$ et le résultat est immédiat.

Dans le cas contraire, on a $B(x_0, d(x_0)) \subset \Omega_{\text{int}}$, et donc u est solution de l'équation

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } B(x_0, d(x_0)).$$

Dans le cas où $d(x_0) > 1$, on trouve que

$$B(x_0, d(x_0)/2) \subset O_\delta = \{y \in \Omega_{\text{int}} : d(y) \geq 1/2\}.$$

Or, $u \in C^1(\overline{O_\delta})$ et donc

$$\|\nabla u\|_{\infty, B(x_0, d(x_0))} \leq \|u\|_{\infty, O_\delta}.$$

Si au contraire $d(x_0) \leq 1$, l'estimation découle directement de l'application du lemme 8.21. □

Preuve du théorème. Soient x et y dans D_δ . Supposons pour commencer qu'au moins l'un des deux x ou y est dans Ω_{int}^c . Du premier corollaire, on déduit que

$$|u(x) - u(y)| \leq C d(x, y)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère maintenant le cas où x et y sont tous les deux dans Ω_{int} . On suppose tout d'abord que $d(x, y) \leq d(x)/2$. L'estimation du corollaire précédent nous dit alors que

$$|u(x) - u(y)| \leq c_1 \max \left\{ 1, \frac{1}{d(x)^{\frac{1}{2}}} \right\} d(x, y) \leq C d(x, y)^{\frac{1}{2}}.$$

On trouve, par symétrie, la même estimation si l'on suppose que $d(x, y) \leq d(y)/2$.

Si maintenant $d(x, y) \geq \max\{d(x), d(y)\}/2$, alors

$$|u(x) - u(y)| \leq 2 \max\{u(x), u(y)\} \leq 2C (\max\{d(x), d(y)\})^{\frac{1}{2}} \leq C d(x, y)^{\frac{1}{2}}.$$

□

8.5 Quelques lemmes techniques

Dans les lemmes suivants, A désigne une application d'un sous-ensemble D de \mathbf{R}^d (celui étudié dans le lemme correspondant) à valeurs dans $\mathcal{S}^{d \times d}$. On note α et Λ ses constantes associées :

$$\forall x \in D, \forall \xi \in \mathbf{R}^d, A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha \xi^2,$$

$$\sup_{x \in D} \sup_{i,j} |a_{ij}(x)| \leq \Lambda.$$

Lemme 8.18. Soit $B_r = B(x_0, r)$ une boule incluse dans \mathbf{R}^d avec $r \leq 1$. Soit $f \in L^q(B_r)$ pour un $q > \max\{d/2, 2\}$ et v la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla v) = f \text{ dans } B_r, \\ v = 0 \text{ sur } \partial B_r. \end{cases}$$

Alors

$$\int_{B_r} |\nabla v|^2 \leq C(d, \alpha) r^{d-2} \|f\|_{L^q(B_r)}^2.$$

Démonstration. On procède par renormalisation. Soit $B_1 = B(0, 1)$. On pose :

$$\forall \xi \in B_1, \tilde{v}(\xi) = v(x_0 + r\xi), \tilde{A}(\xi) = A(x_0 + r\xi), \tilde{f}(\xi) = f(x_0 + r\xi).$$

La fonction \tilde{v} est alors solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla\tilde{v}) = r^2\tilde{f} \text{ dans } B_1, \\ \tilde{v} = 0 \text{ sur } \partial B_1. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \alpha \int_{B_1} |\nabla\tilde{v}|^2 &\leq \int_{B_1} \tilde{A}\nabla\tilde{v} \cdot \nabla\tilde{v} = r^2 \int_{B_1} \tilde{f} \tilde{v} \\ &\leq C(d) r^2 \|\tilde{f}\|_{L^2(B_1)} \|\nabla\tilde{v}\|_{L^2(B_1)}. \end{aligned}$$

Au final, on trouve donc que

$$\int_{B_1} |\nabla\tilde{v}|^2 \leq C(d, \alpha) r^4 \int_{B_1} \tilde{f}^2.$$

En faisant un changement de variables pour revenir sur B_r , on trouve donc que

$$\int_{B_r} |\nabla v|^2 \leq C(d, \alpha) r^2 \int_{B_r} f^2.$$

Or, la fonction f est dans $L^q(B_r)$ pour un $q > \max\{d/2, 2\}$. En particulier, on a $q > 2$, et donc $p = q/2 > 1$. En appliquant alors l'inégalité de Hölder, en posant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

on trouve que

$$\int_{B_r} f^2 \leq |B_r|^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{B_r} f^{2p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et donc

$$\int_{B_r} |\nabla v|^2 \leq C(d, \alpha) r^{2 + \frac{d}{p'}} \|f\|_{L^q(B_r)}^2.$$

En évaluant maintenant l'exposant de r , sachant que $2p = q > d/2$, on trouve que

$$2 + \frac{d}{p'} = 2 + d - \frac{d}{p} > 2 + d - 4 = d - 2.$$

Et donc, comme $r \leq 1$,

$$r^{2 + \frac{d}{p'}} \leq r^{d-2}.$$

□

Lemme 8.19. Soit $B_r = B(x_0, r)$ une boule incluse dans \mathbf{R}^d . Soit $u \in (H^1 \cap L^\infty)(B_r)$. Soit alors w la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla w) = 0 & \text{dans } B_r, \\ w = u & \text{sur } \partial B_r. \end{cases}$$

Alors, si l'on suppose que $A \in C^{0,\beta}(B_r)$ pour un certain $\beta > 0$, on a

$$\int_{B_{r/2}} |\nabla w|^2 \leq C(d, \alpha, \Lambda, \|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B_r})}) r^{d-2} \|u\|_{L^\infty(B_r)}.$$

Démonstration. On renormalise une nouvelle fois : soit donc $B_1 = B(0, 1)$. On pose :

$$\forall \xi \in B_1, \tilde{w}(\xi) = w(x_0 + r\xi), \tilde{A}(\xi) = A(x_0 + r\xi), \tilde{u}(\xi) = u(x_0 + r\xi).$$

La fonction \tilde{w} est alors solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla\tilde{w}) = 0 & \text{dans } B_1, \\ \tilde{w} = \tilde{u} & \text{sur } \partial B_1. \end{cases}$$

En appliquant le théorème 8.36 de [GT83], on trouve donc que

$$\|\nabla\tilde{w}\|_{L^\infty(B(0,1/2))} \leq C(d, \alpha, \Lambda) \|\tilde{w}\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Mais on a

$$\|\tilde{w}\|_{L^\infty(\partial B_1)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\partial B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(B_r)}.$$

Et par le principe du maximum,

$$\|\tilde{w}\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|\tilde{w}\|_{L^\infty(\partial B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(B_r)}.$$

On trouve donc que

$$\|\nabla\tilde{w}\|_{L^\infty(B(0,1/2))} \leq C(d, \alpha, \Lambda) \|u\|_{L^\infty(B_r)}$$

c'est à dire, en revenant sur B_r ,

$$\|\nabla w\|_{L^\infty(B(x_0, r/2))} \leq C(d, \alpha, \Lambda) \|u\|_{L^\infty(B_r)} r^{-1},$$

et ceci donne le résultat. □

Lemme 8.20. On note $X = e_d = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{R}^d$ et $B_1 = B(0, 1)$. On suppose que $A \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{B_1})$ pour un $\beta > 0$. Soit $\alpha_0 > 0$, et soit w la solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla w) = 0 & \text{dans } B_1 \\ w = 0 & \text{sur } \partial B_1 \setminus B(X, \alpha_0) \\ w = 1 & \text{sur } \partial B(0, 1) \cap B(X, \alpha_0). \end{cases}$$

Alors, il existe une constante $\alpha_1(d, \alpha_0, \alpha, \Lambda, \|A\|_{\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{B_1})}) > 0$ telle que

$$\inf_{B(0,1/2)} w \geq \alpha_1.$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que le lemme soit faux. On trouve donc une suite $(A_n)_n$ bornée dans $\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{B_1})$ et avec les mêmes constantes d'ellipticité telle que, en considérant les fonctions w_n associées, on ait

$$\lim_n \inf_{B(0,1/2)} w_n = 0.$$

Pour prouver que ceci est impossible, on commence par considérer une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi_{B(X, \alpha_0)^c} = 0, \quad \varphi_{B(X, \alpha_0/2)} = 1.$$

Soit alors v_n les solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_n \nabla v_n) = 0 & \text{dans } B_1 \\ v_n = \varphi & \text{sur } \partial B_1. \end{cases}$$

Par le principe du maximum, on sait que, pour tout n , $0 \leq v_n \leq w_n$. Comme les A_n ont toutes le même coefficient d'ellipticité et la même norme uniforme, on peut appliquer l'inégalité de Harnack :

$$\forall n, \quad \sup_{B(0,1/2)} v_n \leq C(d, \alpha, \Lambda) \inf_{B(0,1/2)} v_n \leq C(d, \alpha, \Lambda) \inf_{B(0,1/2)} w_n,$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand n tend vers ∞ . D'où

$$\lim_n \|v_n\|_{L^\infty(B(0,1/2))} = 0.$$

Maintenant, la suite (v_n) est bornée dans $H^1(B_1)$. En effet, en utilisant la définition de v_n contre la fonction $v_n - \varphi$, on trouve que

$$\int A_n \nabla v_n \cdot \nabla (v_n - \varphi) = 0$$

et donc

$$\alpha \|\nabla v_n\|_{L^2(B_1)}^2 \leq \int A_n \nabla v_n \cdot \nabla v_n \leq \int A_n \nabla v_n \cdot \nabla \varphi \leq C \|\nabla v_n\|_{L^2(B_1)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(B_1)}.$$

De cette borne sur $\|\nabla v_n\|_{L^2(B_1)}$ et de la condition de Dirichlet au bord vérifiée par les v_n , on déduit que $(v_n)_n$ est une suite bornée dans $H^1(B_1)$. On peut donc supposer (quitte à extraire), que la suite $(v_n)_n$ converge faiblement dans $H^1(B_1)$ vers une fonction v_∞ .

Comme les A_n sont bornées dans $\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{B_1})$, on peut supposer, quitte à extraire, qu'elles convergent uniformément sur tout compact de B_1 vers une fonction A_∞ dont la norme uniforme est inférieure à Λ et qui admet α comme constante d'ellipticité.

Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_1)$. En passant à la limite dans l'équation

$$\int_{B_1} A_n \nabla v_n \cdot \nabla \psi = 0,$$

on trouve donc que

$$\int_{B_1} A_\infty \nabla v_\infty \cdot \nabla \psi = 0,$$

et donc v_∞ est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\infty \nabla v_\infty) = 0 \text{ dans } B_1 \\ v_\infty = \varphi \text{ sur } \partial B_1. \end{cases}$$

Mais on peut de plus supposer que la suite $(v_n)_n$ converge vers v_∞ presque partout, et donc la fonction v_∞ est identiquement nulle sur $B(0, 1/2)$. Par le principe du maximum, ceci est impossible. Cela conclut la preuve. \square

Lemme 8.21. *Soit $B_r = B(x_0, r)$ une boule incluse dans \mathbf{R}^d avec $r \leq 1$. Soit $f \in L^\infty(B_r)$. On suppose que A appartient à $\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{B_r})$. Soit u une fonction bornée sur B_r vérifiant*

$$-\operatorname{div}(A \nabla u) = f \text{ dans } B_r.$$

Alors

$$\|\nabla u\|_{\infty, B(x_0, r/2)} \leq C(d, \alpha, \|A\|_{\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{B_r})}, \|f\|_{\infty}) \left(1 + \frac{\|u\|_{\infty, B_r}}{r}\right).$$

Démonstration. On définit encore une fois,

$$\forall \xi \in B_1, \tilde{u}(\xi) = u(x_0 + r\xi), \tilde{A}(\xi) = A(x_0 + r\xi), \tilde{f}(\xi) = f(x_0 + r\xi).$$

Comme \tilde{u} est solution de

$$-\operatorname{div}(\tilde{A} \nabla \tilde{u}) = r^2 \tilde{f},$$

en appliquant le théorème 8.36 de [GT83], on trouve que

$$\|\nabla \tilde{u}\|_{\infty, B(0, 1/2)} \leq C(d, \alpha, \|A\|_{\mathcal{C}^{0,\beta}}) (\|\tilde{u}\|_{\infty, B(0, 1)} + r^2 \|\tilde{f}\|_{\infty, B(0, 1)}).$$

C'est à dire,

$$r \|\nabla u\|_{\infty, B(x_0, r/2)} \leq C(d, \alpha, \|A\|_{\mathcal{C}^{0,\beta}}) (\|u\|_{\infty, B(x_0, r)} + r^2 \|f\|_{\infty, B(x_0, r)})$$

et on obtient le résultat en divisant par r . \square

Deuxième partie

Simulations numériques pour des partitionnements optimaux

Introduction

Dans cette partie, on s'est intéressé à la résolution numérique et à quelques questions théoriques associées pour des problèmes de partitionnements optimaux de domaines. Les simulations numériques ont été effectuées à l'aide d'algorithmes génétiques. Outre la mise en place de ces algorithmes eux-mêmes, ce qui a constitué la première motivation de ce travail, l'objectif était d'utiliser ces méthodes pour obtenir des renseignements quant à *l'allure* des formes optimales, afin d'utiliser ces informations pour lancer ensuite des méthodes de résolution plus précises, par exemple par variation de frontière.

Commençons par énumérer les trois problèmes étudiés. Pour cela on définit, pour un $k \geq 2$ un ensemble de formes admissibles

$$\mathcal{A}^k = \{(A_1, \dots, A_k) : \forall i, A_i \subset D, A_i \text{ mesurable}, \forall j \neq i, A_i \cap A_j = \emptyset\}.$$

Le premier problème concerne les partitions en deux domaines et la somme des premières valeurs propres du Laplacien-Dirichlet associées :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (A_1, A_2) \text{ dans } \mathcal{A}^2 \text{ tel que, pour tout } (B_1, B_2) \in \mathcal{A}^2, \\ \lambda_1(A_1) + \lambda_1(A_2) \leq \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2). \end{cases} \quad (\mathcal{P}_1)$$

Le second problème concerne les partitions en trois domaines et le maximum des premières valeurs propres :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (A_1, A_2, A_3) \text{ dans } \mathcal{A}^3 \text{ tel que, pour tout } (B_1, B_2, B_3) \in \mathcal{A}^3, \\ \max \{ \lambda_1(A_1), \lambda_1(A_2), \lambda_1(A_3) \} \leq \max \{ \lambda_1(B_1), \lambda_1(B_2), \lambda_1(B_3) \}. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_2)$$

Un des objectifs principaux dans l'étude de ce problème a été de fournir un élément de réponse à des conjectures de B.Helffer portant sur la nature des partages optimaux dans les cas où le domaine D est un disque ou un carré.

Enfin, le troisième problème fait apparaître une contrainte : on définit d'abord un nouvel ensemble de formes admissibles, pour un $m \in (0, |D|)$, par

$$\mathcal{A}_m^k = \{(A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{A}^k : |\cup_{1 \leq i \leq k} A_i| \leq m\}.$$

Le troisième problème se formule alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (A_1, A_2) \text{ dans } \mathcal{A}_m^2 \text{ tel que, pour tout } (B_1, B_2) \in \mathcal{A}_m^2, \\ \lambda_1(A_1) + \lambda_1(A_2) \leq \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2). \end{cases} \quad (\mathcal{P}_3)$$

Ce dernier problème présente certains aspects communs avec ceux traités dans la première partie, en particulier la contrainte de mesure. Et, de même que l'on traitait difficilement le problème contraint de la première partie, il est difficile de traiter

directement ce problème par un algorithme génétique. En effet, les perturbations que l'on effectue sur les approximations successives ne préservent pas la mesure. Il serait donc nécessaire de définir une *projection numérique* de \mathcal{A}^2 sur \mathcal{A}_m^2 . On cherchera donc plutôt à étudier le problème pénalisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (A_1, A_2) \text{ dans } \mathcal{A}^2 \text{ tels que, pour tous } (B_1, B_2) \in \mathcal{A}^2, \\ \lambda_1(A_1) + \lambda_1(A_2) + \Lambda[|A_1 \cup A_2| - m]^+ \leq \\ \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2) + \Lambda[|B_1 \cup B_2| - m]^+. \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}_3^\Lambda)$$

De la même manière que pour les problèmes (P) et (P_λ) , on prouvera que, pour Λ assez grand, les problèmes (\mathcal{P}_3) et (\mathcal{P}_3^Λ) ont les mêmes formes optimales. On mettra ensuite en place les méthodes numériques de résolution.

Cette partie sera découpée en deux chapitres :

- Dans un premier temps, on énoncera quelques résultats théoriques connus sur les problèmes ci-dessus. De plus, pour le premier problème, on détaillera un exemple étudié en réponse à une question de G. Butazzo : pour un partitionnement optimal (A_1, A_2) pour le problème (\mathcal{P}_1) , a-t-on nécessairement $\lambda_1(A_1) = \lambda_1(A_2)$? On prouvera l'existence d'un ensemble ne vérifiant pas cette propriété.
- Dans un second temps, on s'intéressera à l'utilisation des algorithmes génétiques sur ces problèmes. On commencera par faire un court inventaire des types de méthodes utilisables sur cette classe de problèmes. Ensuite, après avoir brièvement expliqué le mode de fonctionnement des algorithmes génétiques et indiqué quelques références, on verra plus précisément la façon dont nous les avons mis en place. On donnera alors les résultats de leur application aux problèmes ci-dessus. En particulier, dans l'étude du premier problème, on présentera alors un contre-exemple numérique à la question de G. Butazzo mentionnée précédemment.

Chapitre 9

Les problèmes étudiés

9.1 Problème de la somme des valeurs propres pour deux domaines

9.1.1 Origine du problème, résultats connus

Le premier problème rencontré est un cas particulier d'un problème énoncé par exemple dans [CTV05b] dans un cas général : on considère l'ensemble des formes admissibles

$$\mathcal{P}_k = \{(A_1, \dots, A_k) : A_i \text{ ouvert connexe } \subset D, A_i \cap A_j \text{ si } i \neq j\}$$

et, pour un $p > 0$, le problème de minimisation :

$$\inf_{(A_i) \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\lambda_1(A_i)). \quad (9.1)$$

L'intérêt théorique de l'étude de ce problème est détaillé dans [CTV05b], en particulier son importance dans l'obtention du lemme de Monotonie. Les auteurs prouvent en particulier à partir de ce problème (posé non plus dans \mathbf{R}^d mais sur la sphère unité de \mathbf{R}^d) de nouveaux lemmes de Monotonie, où apparaissent plus de deux phases.

Dans cite [CTV05b], les auteurs obtiennent très rapidement une nouvelle formulation, fonctionnelle cette fois, du problème (9.1) :

$$\inf_{\substack{u_i \in H_0^1(D) \setminus \{0\} \\ u_i \cdot u_j = 0}} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\int_D |\nabla u_i|^2}{\int_D |u_i|^2} \right)^p. \quad (9.2)$$

Les auteurs appliquent cette fois un certain nombre de leurs résultats précédents à cette nouvelle formulation. En particulier, ils avaient étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (a_i(x) \nabla u_i(x)) = F(x, u_i(x)) \text{ pour } x \in [u_i > 0], \\ u_i \cdot u_j = 0 \text{ presque partout pour } i \neq j, \\ u_i = \varphi_i \text{ sur } \partial D. \end{cases}$$

qui, dans leur version optimisation s'écrivent encore, en définissant les formes admissibles

$$\mathbf{H} = \{(u_1, \dots, u_k) \in (H^1(D))^k : \forall i, u_i|_{\partial D} = \varphi_i|_{\partial D}, \forall j \neq i, u_i \cdot u_j = 0 \text{ presque partout}\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U} = (u_1, \dots, u_k) \text{ dans } \mathbf{H} \text{ tel que, pour tout } \mathbf{V} \text{ dans } \mathbf{H}, \\ \sum_{i=1}^k J_i(u_i) \leq \sum_{i=1}^k J_i(v_i) \end{array} \right.$$

où chaque J_i est définie, par exemple, par

$$J_i(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} a_i(x) |\nabla u|^2 - F_i(x, u(x)).$$

Les résultats d'existence et de régularité des solutions de ces problèmes, ainsi que la structure des lignes nodales (quand D est un domaine plan) pour ces problèmes d'exclusion a été étudiée dans [CTV03], dans [CTV05c], et encore dans [CTV05a]

L'adaptation de ces résultats au problème (9.1) a été réalisée dans [CTV05b].

L'étude des résultats de régularité a été effectuée dans un cas plus général que celui des formes optimales aux problèmes considérés. Elle a consisté à étudier la famille de k -uplets (voir [CTV05b])

$$\mathcal{S} = \left\{ (v_1, \dots, v_k) \in (H_0^1(D))^k : \begin{array}{l} v_i \geq 0, v_i \cdot v_j = 0 \text{ si } i \neq j \\ -\Delta v_i \leq f_i(x, v_i), -\Delta \hat{v}_i \geq \hat{f}(x, \hat{v}_i). \end{array} \right\}.$$

où les fonctions f_i et \hat{f} vérifient de "bonnes" propriétés (voir encore [CTV05b]) et où l'on a défini

$$\hat{v}_i = v_i - \sum_{j \neq i} v_j.$$

Les auteurs prouvent alors que les solutions du problèmes (9.2) appartiennent à cette classe de fonctions pour des données f_i et \hat{f} bien choisies. Ils utilisent alors les résultats connus sur la classe de fonctions pour conclure. Pour ce faire, ils définissent, pour une fonction $v \in \mathcal{S}$ et un point x dans D :

$$m(x) = \text{card} \{i : \forall r > 0, |[v_i > 0] \cap B(x, r)| > 0\}.$$

Le théorème de régularité est alors le suivant :

Théorème 9.1. ([CTV05c]) *Soit $(v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{S}$. On note $A_i = [v_i > 0]$ et $V = \sum_{i=1}^k v_i$. Alors,*

- (i) *la fonction V est lipschitzienne dans D . Si ∂D est régulier, V est même lipschitzienne jusqu'au bord de D . En particulier, les ensembles $[v_i > 0]$ sont ouverts.*
- (ii) *Si $x \in \Omega$ vérifie $m(x) = 2$, et les ensembles rencontrés par x sont $[v_i > 0]$ et $[v_j > 0]$, alors*

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ v_i(y) > 0}} \nabla v_i(y) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ v_j(y) > 0}} \nabla v_j(y).$$

- (iii) *En dimension $d = 2$, l'ensemble $\{x : m(x) \geq 3\}$ est constitué d'un nombre fini de points où ∇V s'annule.*

(iv) En dimension $d = 2$, si $x \in D$ vérifie $m(x) = h$, alors V admet un développement autour de x de la forme

$$V(r, \theta) = r^{\frac{h}{2}} \left| \cos \left(\frac{h}{2}(\theta + \theta_0) \right) \right| + o(r^{\frac{h}{2}})$$

où (r, θ) est un système de coordonnées polaires autour de x .

(v) En dimension $d = 2$, l'ensemble $\{x : m(x) = 2\}$ est constitué d'un nombre fini d'arcs \mathcal{C}^1 se terminant soit à des points y tels que $m(y) \geq 3$, soit sur le bord de D .

9.1.2 Deux formulations du problème

On commence par définir les formes admissibles :

$$\mathcal{A}^2 = \{(A_1, A_2) : A_1 \cup A_2 \subset D, A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \text{ et } A_2 \text{ ouverts}\}.$$

Le premier problème que nous considérons est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (A_1, A_2) \text{ dans } \mathcal{A}^2 \text{ tel que, pour tout } (B_1, B_2) \in \mathcal{A}^2, \\ \lambda_1(A_1) + \lambda_1(A_2) \leq \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2). \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}_1)$$

Ce problème ne possède a priori pas de solution. En effet, le caractère ouvert des ensembles passe mal à la limite, et rien ne permet donc de passer de l'étude d'une suite minimisante à l'obtention d'une forme optimale.

En revanche, on peut étudier un problème relaxé. Pour n'importe quel sous-ensemble mesurable Ω de D , on utilise la définition affaiblie des espaces H_0^1 introduite au chapitre 2 :

$$\hat{H}_0^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(D) : u = 0 \text{ presque partout dans } \Omega^c\}.$$

Cela permet de définir une version relaxée de la fonctionnelle λ_1 :

$$\hat{\lambda}_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_D |\nabla u|^2}{\int_D |u|^2} : u \in \hat{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

Les formes admissibles pour le problème relaxé sont donc :

$$\hat{\mathcal{A}}^2 = \{(A_1, A_2) : A_1 \cup A_2 \subset D, A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \text{ et } A_2 \text{ mesurables}\}$$

et le problème relaxé consiste alors à réaliser l'infimum suivant :

$$\inf_{(A_1, A_2) \in \hat{\mathcal{A}}^2} \hat{\lambda}_1(A_1) + \hat{\lambda}_1(A_2).$$

Ce dernier problème admet immédiatement une formulation "fonctionnelle" : on définit les fonctions admissibles par

$$\mathcal{F}^2 = \{(u_1, u_2) \in (H_0^1(D) \setminus \{0\})^2 : u_1 \cdot u_2 = 0 \text{ presque partout}\}.$$

Et l'on peut alors formuler le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_1, u_2) \text{ dans } \mathcal{F}^2 \text{ tel que, pour tout } (v_1, v_2) \in \mathcal{F}^2, \\ \frac{\int_D |\nabla u_1|^2}{\int_D |u_1|^2} + \frac{\int_D |\nabla u_2|^2}{\int_D |u_2|^2} \leq \frac{\int_D |\nabla v_1|^2}{\int_D |v_1|^2} + \frac{\int_D |\nabla v_2|^2}{\int_D |v_2|^2}. \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}_1^f)$$

Les résultats obtenus dans [CTV05b] nous permettent alors d'affirmer que, pour toute solution (u_1, u_2) du problème (\mathcal{P}_1^f) , les fonctions u_1 et u_2 sont lipschitziennes, et donc que le couple

$$([u_1 \neq 0], [u_2 \neq 0])$$

est une forme optimale pour le problème (\mathcal{P}_1) . Le problème de l'existence d'une forme optimale quant à lui est encore une fois développé dans [CTV05b]. Signalons encore que, dans le contexte des quasi-ouverts, le résultat d'existence pour le problème général des partages optimaux a été étudié dans [BBH98]. On peut résumer toutes ces propriétés dans le résultat suivant :

Proposition 9.2. (i) *Il existe des solutions aux problèmes (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_1^f) .*

(ii) *Si (u_1, u_2) est une solution du problème (\mathcal{P}_1^f) , les fonctions u_1 et u_2 sont lipschitziennes et $([u_1 \neq 0], [u_2 \neq 0])$ est une forme optimale du problème (\mathcal{P}_1) .*

(iii) *Si (A_1, A_2) est une forme optimale du problème (\mathcal{P}_1) , et si u_1 (resp. u_2) est une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1(A_1)$ (resp. à $\lambda_1(A_2)$), alors le couple (u_1, u_2) est une solution du problème (\mathcal{P}_1^f) .*

Remarque. En pratique, les deux formulations sont utiles. La première, ensembliste, sera celle utilisée dans la résolution de ce problème via les algorithmes génétiques. La seconde formulation a été utilisée pour des résolutions numériques par M.Conti, S.Terracini et G.Verzini. Cette seconde formulation sera aussi importante dans l'étude théorique développée dans la section suivante.

9.1.3 Lien avec la γ -convergence, un contre-exemple

Problématique

Cette section est née du problème suivant : si l'on considère un ouvert borné connexe D de \mathbf{R}^d , et une forme optimale (A_1, A_2) du problème (\mathcal{P}_1) ,

$$\text{a-t-on } \lambda_1(A_1) = \lambda_1(A_2) ?$$

Cette question contient celle de savoir si la partition optimale du problème (\mathcal{P}_1) correspond à une deuxième fonction propre de D (auquel cas les ensembles nodaux de cette fonction propre constitueraient une partition optimale et, si D est connexe, donneraient un même λ_1 pour chacun d'eux).

La réponse est non et l'objectif de cette section est d'exhiber un contre-exemple. Le résultat est clairement faux lorsque l'on considère un ouvert borné non connexe bien choisi (par exemple, la réunion disjointe de deux boules, l'une de mesure double de l'autre). L'idée est alors d'approcher cet ensemble par des ouverts connexes (au sens de la γ -convergence) et de prouver que les solutions passent "bien" à la limite. Une autre contre-exemple, numérique cette fois, a été obtenu en effectuant des simulations numériques du problème (\mathcal{P}_1) sur un domaine triangulaire. Il sera détaillé à la section 10.7.1.

Le résultat de continuité

Pour la définition de la γ -convergence et ses propriétés, on pourra par exemple consulter la section 3.5 dans [HP05].

Théorème 9.3. *On se donne un ouvert borné B (qui fera office de “boite” de travail) dans \mathbf{R}^d . On considère une suite d'ouverts $(D_n)_n$ inclus dans B et tendant, au sens de la γ -convergence, vers un ouvert non vide D inclus dans B . Pour tout n , soit (u_1^n, u_2^n) une solution du problème (\mathcal{P}_1^f) sur D_n telle que $\int (u_1^n)^2 = \int (u_2^n)^2 = 1$. Alors,*

- (i) *on peut extraire des sous-suites $(u_1^{n_k})_k$ et $(u_2^{n_k})_k$ qui convergent (fortement) dans $H_0^1(B)$ vers des fonctions u_1 et u_2 ,*
- (ii) *le couple (u_1, u_2) est une solution du problème (\mathcal{P}_1^f) sur D .*

Démonstration. Étape 1 : les suites $(u_1^n)_n$ et $(u_2^n)_n$ sont bornées dans $H_0^1(B)$.

En effet, D est ouvert, on peut trouver deux fonctions φ et ψ dans $\mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{R}^+)$, non identiquement nulles, et dont les supports sont disjoints. En utilisant la γ -convergence, on trouve des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ convergeant fortement dans $H_0^1(B)$ respectivement vers φ et ψ et telles que, pour tout n , les fonctions φ_n et ψ_n soient dans $H_0^1(D_n)$. On a alors, en utilisant que (u_1^n, u_2^n) est une solution du problème (\mathcal{P}_1^f) sur D_n ,

$$\int |\nabla u_1^n|^2 + \int |\nabla u_2^n|^2 \leq \frac{\int |\nabla \varphi_n|^2}{\int |\varphi_n|^2} + \frac{\int |\nabla \psi_n|^2}{\int |\psi_n|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\int |\nabla \varphi|^2}{\int |\varphi|^2} + \frac{\int |\nabla \psi|^2}{\int |\psi|^2}.$$

et donc les suites $(u_1^n)_n$ et $(u_2^n)_n$ sont bornées dans $H_0^1(B)$.

En particulier, on peut en extraire des sous-suites qui convergent faiblement dans H_0^1 vers des fonctions u_1 et u_2 . En utilisant encore la γ -convergence, on trouve que les fonctions u_1 et u_2 sont dans $H_0^1(D)$. Dans la suite, pour simplifier les notations, on supposera que les suites $(u_1^n)_n$ et $(u_2^n)_n$ tout entières convergent vers u_1 et u_2 . En utilisant l'injection compacte de H_0^1 dans L^2 , on a donc

$$\int |u_1|^2 = \int |u_2|^2 = 1.$$

Enfin, par une propriété de semi-continuité inférieure de la norme, on a donc, en particulier,

$$\int |\nabla u_1|^2 + \int |\nabla u_2|^2 \leq \liminf_n \int |\nabla u_1^n|^2 + \int |\nabla u_2^n|^2.$$

Étape 2 : on a $\limsup_n \int |\nabla u_1^n|^2 + \int |\nabla u_2^n|^2 \leq \int |\nabla u_1|^2 + \int |\nabla u_2|^2$.

En effet, on se donne un couple de fonctions (v_1, v_2) dans $H_0^1(D)$, toutes les deux non identiquement nulles. En utilisant la γ convergence, on trouve des suites de fonctions $(v_1^n)_n$ et $(v_2^n)_n$ qui convergent respectivement vers v_1 et v_2 dans $H_0^1(B)$, les fonctions v_1^n et v_2^n étant dans $H_0^1(D_n)$. En particulier, pour n assez grand, les fonctions v_1^n et v_2^n sont toutes les deux non nulles, et on a donc, puisque $(u_1^n, u_2^n)_n$ est une solution du problème (\mathcal{P}_1^f) ,

$$\int |\nabla u_1^n|^2 + \int |\nabla u_2^n|^2 \leq \frac{\int |\nabla v_1^n|^2}{\int |v_1^n|^2} + \frac{\int |\nabla v_2^n|^2}{\int |v_2^n|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\int |\nabla v_1|^2}{\int |v_1|^2} + \frac{\int |\nabla v_2|^2}{\int |v_2|^2}. \quad (9.3)$$

En particulier, en prenant pour couple (v_1, v_2) le couple (u_1, u_2) , on a l'inégalité voulue.

Étape 3 : la convergence des $(u_1^n)_n$ et $(u_2^n)_n$ est forte dans H_0^1 .

En effet, des inégalités précédentes, on déduit que

$$\limsup_n \int |\nabla u_1^n|^2 + \int |\nabla u_2^n|^2 \leq \int |\nabla u_1|^2 + \int |\nabla u_2|^2 \leq \liminf_n \int |\nabla u_1^n|^2 + \int |\nabla u_2^n|^2.$$

Au final, on a donc

$$\lim_n \int |\nabla u_1^n|^2 + \int |\nabla u_2^n|^2 = \int |\nabla u_1|^2 + \int |\nabla u_2|^2.$$

Comme on a de plus

$$\liminf_n \int |\nabla u_1^n|^2 \geq \int |\nabla u_1|^2 \text{ et } \liminf_n \int |\nabla u_2^n|^2 \geq \int |\nabla u_2|^2,$$

a donc nécessairement $\lim_n \int |\nabla u_1^n|^2 = \int |\nabla u_1|^2$ et $\lim_n \int |\nabla u_2^n|^2 = \int |\nabla u_2|^2$. C'est à dire que la suite $(u_1^n)_n$ (resp. la suite $(u_2^n)_n$) converge fortement dans $H_0^1(B)$ vers u_1 et u_2 .

Étape 4 : (u_1, u_2) est une solution du problème (\mathcal{P}_1^f) .

En effet, en utilisant encore une fois l'inégalité (9.3), pour un couple de fonctions de $H_0^1(D)$ toutes deux non identiquement nulles, on trouve que

$$\int |\nabla u_1|^2 + \int |\nabla u_2|^2 \leq \frac{\int |\nabla v_1|^2}{\int |v_1|^2} + \frac{\int |\nabla v_2|^2}{\int |v_2|^2},$$

ce qui conclut la preuve. □

Construction d'un contre-exemple

Soit \tilde{D} l'union de deux boules disjointes B_1 et B_2 de \mathbf{R}^d telles que $|B_2| = (1+\varepsilon)|B_1|$ pour un ε dans $]0, 1[$. Alors, la seule partition optimale est formée par (B_1, B_2) . En effet, on peut raisonner par l'absurde : si (A_1, A_2) est une partition optimale telle que $|A_1 \cap B_1| > 0$ et $|A_1 \cap B_2| > 0$, on a

$$\lambda_1(A_i) = \min \{ \lambda_1(A_i \cap B_1), \lambda_1(A_i \cap B_2) \}.$$

Alors, deux cas se présentent :

- ou bien $|A_1 \cap B_2| \leq |B_1|$ et alors $\lambda_1(A_1) \geq \lambda_1(B_1)$ et $\lambda_1(A_2) > \lambda_1(B_2)$,
- ou bien $|A_1 \cap B_2| \geq |B_1|$ et alors $|A_2 \cap B_2| \leq \varepsilon|B_1|$, $\lambda_1(A_2) > \lambda_1(B_1)$ et $\lambda_1(A_1) \geq \min \{ \lambda_1(B_1), \lambda_1(B_2) \} \geq \lambda_1(B_2)$.

Dans tous les cas, on a donc

$$\lambda_1(A_1) + \lambda_1(A_2) > \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2)$$

ce qui contredit l'optimalité du partage (A_1, A_2) .

On construit maintenant D_n comme la réunion de \tilde{D} avec un cylindre reliant les centres des deux boules et de rayon $1/n$. Chaque D_n est connexe et la suite $(D_n)_n$ γ -converge vers \tilde{D} .

Supposons par l'absurde que, pour tout n , il y ait une partition optimale avec des solutions (u_1^n, u_2^n) du problème (\mathcal{P}_1^f) sur D_n telles que

$$\int (u_1^n)^2 = \int (u_2^n)^2 = 1, \quad \int |\nabla u_1^n|^2 = \int |\nabla u_2^n|^2.$$

En utilisant le théorème précédent, on peut donc supposer (à extraction d'une sous-suite près) que (u_1^n, u_2^n) converge fortement dans H_0^1 vers un couple (u_1, u_2) solution du problème (\mathcal{P}_1^f) sur \tilde{D} . D'après la remarque préliminaire, les supports de u_1 et u_2 sont respectivement B_1 et B_2 , et donc

$$\lim_n \int |\nabla u_1^n|^2 = \lim_n \int |\nabla u_1|^2 = \lambda_1(B_1) \neq \lambda_1(B_2) = \lim_n \int |\nabla u_2|^2 = \lim_n \int |\nabla u_2^n|^2$$

ce qui est une contradiction. On peut résumer ce résultat dans la proposition suivante :

Proposition 9.4. *Il existe un ouvert connexe D dans \mathbf{R}^d tel que, pour forme optimale (Ω_1, Ω_2) du problème (\mathcal{P}_1) sur D , on ait*

$$\lambda_1(\Omega_1) \neq \lambda_1(\Omega_2).$$

9.2 Problème du maximum des valeurs propres pour trois domaines

Le second problème considéré se formule ainsi :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (A_1, A_2, A_3) \text{ dans } \mathcal{A}^3 \text{ tel que, pour tout } (B_1, B_2, B_3) \in \mathcal{A}^3, \\ \max \{ \lambda_1(A_1), \lambda_1(A_2), \lambda_1(A_3) \} \leq \max \{ \lambda_1(B_1), \lambda_1(B_2), \lambda_1(B_3) \}. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_2)$$

où l'ensemble des formes admissibles est défini comme suit :

$$\mathcal{A}^3 = \{ (A_1, A_2, A_3) : \cup_i A_i \subset D, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j, \text{ les } A_i \text{ ouverts} \}.$$

Ce problème apparaît naturellement dans l'étude des cas limites des problèmes précédents. Ceci est développé dans [CTV05b]. Ce passage à la limite découle de la constatation classique :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max \{ a_1, \dots, a_k \}.$$

La théorie développée dans [CTV05b] permet de prouver l'*existence* d'une forme optimale à ces problèmes ayant les propriétés de régularité décrites dans le théorème 9.1. En particulier, ces propriétés sont obtenues par passage à la limite, et on sait donc a priori seulement qu'il existe une solution régulière.

Une approche semblable est réalisée dans [HHOT06]. Le problème ici provient de l'analyse d'un opérateur de type Schrödinger. Les auteurs y étudient les relations entre les domaines nodaux, les partitions minimales de problèmes semblables à (\mathcal{P}_2) , et les propriétés spectrales des opérateurs associés. Les auteurs reviennent eux-aussi sur les

propriétés d'existence et de régularité. En particulier, des conjectures y sont faites sur l'éventualité d'avoir des symétries dans la forme optimale lorsque le domaine présente des symétries. Dans le cas où le domaine de travail est un carré, la question est posée de savoir si les formes optimales présentes des symétries selon l'un des axes de symétrie du carré. Une autre question est posée quant à l'allure de la forme optimale dans le cas d'un disque. En particulier, on se demande si cette forme optimale n'est pas un découpage du disque en trois secteurs angulaires d'angle 120 degrés.

Ces deux conjectures ont été étudiées numériquement. Nous présentons plus loin les résultats obtenus.

9.3 Problème de la somme des valeurs propres avec pénalisation de volume

9.3.1 Le problème

Le troisième problème est une adaptation du premier problème avec une contrainte posée sur la mesure des ensembles étudiés. L'objectif était d'adapter le code pour prendre en compte cette contrainte. L'idée, encore une fois, a été de prouver l'équivalence entre le problème contraint et un problème pénalisé, lui tout à fait adapté au code d'algorithmes génétiques déjà existant. C'est l'objet de cette section.

Le problème étudié est une variante du problème (\mathcal{P}_1) , à savoir la somme de la première valeur propre associée à deux domaines, muni d'une contrainte sur la mesure de l'union de ces deux domaines.

Commençons par énoncer le problème considéré. Soit D un ouvert régulier de \mathbf{R}^d . On a défini l'ensemble des formes admissibles comme

$$\mathcal{A}_m^2 = \{(A_1, A_2) : A_1 \cup A_2 \subset D, A_1 \cap A_2 = \emptyset, |A_1 \cup A_2| \leq m\}.$$

et le problème se formule alors comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_m^2 \text{ tel que} \\ \lambda_1(A_1) + \lambda_2(A_2) \leq \inf \{ \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2) : (B_1, B_2) \in \mathcal{A}_m^2 \}. \end{cases} \quad (\text{P})$$

9.3.2 Propriété d'existence

Théorème 9.5. *Lorsque le domaine D est borné, il existe une solution au problème (P).*

Démonstration. Pour cela, on considère une suite minimisante $((A_n^1, A_n^2))_n$. Pour tout n , les ensembles A_n^1 et A_n^2 sont tous deux mesurables, d'intersection vide, et leur union a pour mesure m . Pour chaque n , on considère u_n^1 et u_n^2 des vecteurs propres de norme L^2 égale à 1 associés aux ensembles A_n^1 et A_n^2 .

En particulier, les suites $(u_n^1)_n$ et $(u_n^2)_n$ sont des suites bornées de $H_0^1(D)$. On peut donc supposer, quitte à extraire, qu'elles convergent faiblement dans $H_0^1(D)$ vers des éléments u^1 et u^2 de $H_0^1(D)$. On peut supposer de plus, en utilisant le théorème de Rellich, que la convergence est forte dans $L^2(D)$, et par le théorème de Lebesgue inverse, que la convergence est presque sûre. Pour tout n , on a donc que

$$u_n^1 \cdot u_n^2 = 0 \text{ presque partout.}$$

En passant à la limite, on en déduit donc que

$$u^1 \cdot u^2 = 0 \text{ presque partout.}$$

Il en est donc encore de même pour le produit $\tilde{u}^1 \cdot \tilde{u}^2$, mais comme la fonction $\tilde{u}^1 \cdot \tilde{u}^2$ est quasi-continue, on a de plus

$$\tilde{u}^1 \cdot \tilde{u}^2 = 0 \text{ quasi-partout.}$$

En appelant N l'ensemble de capacité nulle $[\tilde{u}^1 \cdot \tilde{u}^2 \neq 0]$, on définit alors

$$A^1 = [\tilde{u}^1 \neq 0] \text{ et } A^2 = [\tilde{u}^2 \neq 0] \setminus N.$$

Les ensembles A^1 et A^2 sont d'intersection vide, et on a $u^i \in H_0^1(A^i)$. On a alors, par la convergence faible dans H_0^1 et forte dans L^2 des $(u_n^i)_n$,

$$\lambda_1(A^i) \leq \int |\nabla u^i| \leq \liminf_n \lambda_1(A_n^i).$$

Il ne reste donc plus à vérifier qu'une condition de mesure, à savoir $|B_1 \cup B_2| \leq m$. Et ceci provient de la propriété de semi-continuité

$$|[u^i \neq 0]| \leq \liminf_n |[u_n^i \neq 0]|.$$

□

9.3.3 Résultat d'équivalence

Une remarque

Le résultat d'équivalence suit la remarque suivante : soit (u_1, u_2) un couple de fonctions propres associées à un partage optimal du problème (P). On peut supposer que

$$\int u_1^2 = \int u_2^2 = 1.$$

Alors,

$$\lambda_m = \int |\nabla u_1|^2 + \int |\nabla u_2|^2 = \inf \{ \lambda_1(A_1) + \lambda_2(A_2) : A_1 \cap A_2 = \emptyset, |A_1 \cup A_2| \leq m \}.$$

Si maintenant (v_1, v_2) est un couple de fonctions toutes deux non nulles de $H_0^1(D)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$|[v_1 \neq 0] \cup [v_2 \neq 0]| \leq m$$

$$\tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2 = 0 \text{ quasi-partout,}$$

alors quitte à choisir les bon représentants quasi-continus de v_1 et v_2 , on peut supposer que la seconde condition est

$$\tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2 = 0 \text{ partout.}$$

On peut donc supposer que les ensembles $B_1 = [\tilde{v}_1 \neq 0]$ et $B_2 = [\tilde{v}_2 \neq 0]$ sont disjoints et vérifient $|B_1 \cup B_2| \leq m$. On a donc

$$\lambda_m \leq \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2) \leq \frac{\int |\nabla v_1|^2}{\int v_1^2} + \frac{\int |\nabla v_2|^2}{\int v_2^2}.$$

En faisant le produit par $\int u_1^2 \cdot \int u_2^2$, on trouve que

$$\int v_2^2 \int |\nabla v_1|^2 + \int v_1^2 \int |\nabla v_2|^2 - \lambda_m \int v_1^2 \int v_2^2 \geq 0,$$

et donc, en ajoutant λ_m à droite et à gauche, on trouve que,

$$\forall (v_1, v_2) \in (H_0^1(D))^2 \text{ tel que}$$

$$|[v_1 \neq 0] \cup [v_2 \neq 0]| \leq m \text{ et } v_1 \cdot v_2 = 0 \text{ quasi-partout,}$$

$$\begin{aligned} \int |\nabla u_1|^2 + \int |\nabla u_2|^2 &\leq \int v_2^2 \int |\nabla v_1|^2 + \int v_1^2 \int |\nabla v_2|^2 + \lambda_m \left(1 - \int v_1^2 \int v_2^2\right)^+ \\ &\leq \int v_2^2 \int |\nabla v_1|^2 + \int v_1^2 \int |\nabla v_2|^2 + (\lambda_m + 1) \left(1 - \int v_1^2 \int v_2^2\right)^+. \end{aligned}$$

Un nouveau problème

Suite à la remarque précédente, on va étudier le problème suivant. On définit l'ensemble des couples de fonctions admissibles :

$$\mathcal{A}^f = \{(u_1, u_2) \in (H_0^1(D))^2 : \tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2 = 0 \text{ quasi partout}\}.$$

Et la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} J_\Lambda : (u_1, u_2) \in \mathcal{A}^2 \mapsto &\int u_2^2 \int |\nabla u_1|^2 + \int u_1^2 \int |\nabla u_2|^2 \\ &+ (\lambda_m + 1) \left(1 - \int u_1^2 \int u_2^2\right)^+ + \Lambda(|\Omega_{u_1} \cup \Omega_{u_2}| - m)^+. \end{aligned}$$

Le problème étudié est alors le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_1, u_2) \text{ dans } \mathcal{A}^f \text{ tel que} \\ J_\Lambda(u_1, u_2) = \inf \{J_\Lambda(v_1, v_2) : (v_1, v_2) \in \mathcal{A}^f\}. \end{cases} \quad (\text{P}_\Lambda^f)$$

Commençons par étudier l'existence de solutions à ce problème :

Proposition 9.6. *Si D est borné, il existe des solutions au problème (P_Λ^f) .*

Démonstration. On considère une suite minimisante $((u_n, v_n))_n$. On commence par modifier cette suite en posant

$$U_n = \frac{u_n}{\left(\int u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}} \text{ et } V_n = v_n \left(\int u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On vérifie immédiatement que la suite $((U_n, V_n))_n$ est encore une suite minimisante. Si l'on considère un couple de fonctions $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}^f$ associées à une forme optimale du problème (P) et telles que $\int a_1^2 = \int a_2^2 = 1$, on voit qu'il s'agit d'un couple admissible pour le problème (P_Λ^f) qui vérifie en outre

$$J_\Lambda(a_1, a_2) = \lambda_m.$$

On peut donc supposer, pour tout n , que $J_\Lambda(U_n, V_n) \leq \lambda_m$. En particulier, cela implique, en utilisant la forme de J_Λ et le fait que $\int U_n^2 = 1$, que

$$\forall n, \int |\nabla V_n|^2 + \int V_n^2 - \int |\nabla U_n|^2 + (\lambda_m + 1) \left(1 - \int V_n^2\right)^+ + \Lambda(|\Omega_{U_n} \cup \Omega_{V_n}| - m)^+ \leq \lambda_m.$$

Commençons par étudier la convergence de la suite $(V_n)_n$. De ce que $\int |\nabla V_n|^2 \leq \lambda_m$, et comme D est borné, on trouve que $(V_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(D)$, et on peut donc supposer que cette suite converge vers un V_∞ , faiblement dans $H_0^1(D)$, fortement dans $L^2(D)$ et presque partout.

Maintenant, de ce que

$$(\lambda_m + 1) \left(1 - \int V_n^2\right)^+ \leq \lambda_m$$

on déduit que

$$\int V_n^2 \geq \frac{1}{\lambda_m + 1},$$

et en particulier, V_∞ n'est pas identiquement nulle.

Maintenant, de ce que $\int V_n^2 \geq \frac{1}{\lambda_m + 1}$, on trouve que

$$\frac{1}{\lambda_m + 1} \int |\nabla U_n|^2 \leq \lambda_m$$

et donc la suite $(U_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(D)$. Encore une fois, quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge vers un U_∞ dans $H_0^1(D)$, faiblement dans $H_0^1(D)$, fortement dans $L^2(D)$ (et donc $\int U_\infty^2 = 1$), et presque partout.

On vérifie alors que (U_∞, V_∞) est bien une forme optimale au problème considéré. \square

Maintenant, on peut étudier plus précisément une forme optimale :

Proposition 9.7. *Il existe un $\Lambda_0 = \Lambda_0(d, D, m)$ tel que, pour tout $\Lambda > \Lambda_0$, toute forme optimale (u, v) du problème (P_Λ^f) vérifie*

$$|\Omega_u \cup \Omega_v| \leq m.$$

Démonstration. On considère une forme optimale. Comme on sait que l'infimum est plus petit que λ_m , on voit que nécessairement u et v sont tous deux non identiquement nuls.

On travaille par contraposée. On suppose que $|\Omega_u \cup \Omega_v| > m$, et on veut en déduire une majoration de Λ . Comme $|\Omega_u \cup \Omega_v| = |\Omega_u| + |\Omega_v|$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $|\Omega_u| \geq \frac{m}{2}$. Remarquons ensuite que, quitte à remplacer u par $|u|$ et v par $|v|$, on peut supposer u et v positives. De même, quitte à remplacer v par $\frac{v}{\int v^2}$ et u par $u \int v^2$, on peut supposer que $\int v^2 = 1$. Remarquons alors que $\int |\nabla u|^2 \leq \lambda_m$.

Maintenant, pour t suffisamment petit, on voit que la fonction $u_t = (u - t)^+$ est encore non identiquement nulle, que $u_t \cdot v$ est quasi-partout nul, et que $|\Omega_{u_t} \cup \Omega_v| > m$. On déduit alors de l'inégalité

$$J_\Lambda(u, v) \leq J_\Lambda(u_t, v)$$

que

$$\begin{aligned} \int |\nabla u|^2 + \int u^2 \int |\nabla v|^2 + (\lambda_m + 1) \left(1 - \int u^2\right)^+ + \Lambda(|\Omega_u \cup \Omega_v| - m) &\leq \int |\nabla u_t|^2 \\ &+ \int u_t^2 \int |\nabla v|^2 + (\lambda_m + 1) \left(1 - \int u_t^2\right)^+ + \Lambda(|\Omega_{u_t} \cup \Omega_v| - m) \end{aligned}$$

On remarque que $0 \leq u_t \leq u$, d'où l'on voit que

$$\left(\int u^2 - \int u_t^2\right) \int |\nabla v|^2 \geq 0$$

et donc

$$\int |\nabla u|^2 - \int |\nabla u_t|^2 + \Lambda|\Omega_u \setminus \Omega_{u_t}| \leq (\lambda_m + 1) \left| \int u^2 - \int u_t^2 \right|.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \int_{[0 < u < t]} |\nabla u|^2 + \Lambda|[0 < u < t]| &\leq (\lambda_m + 1) \left| \int u^2 - \int u_t^2 \right| \\ &\leq (\lambda_m + 1) \int_{[0 < u < t]} u^2 + 2t(\lambda_m + 1) \int u. \end{aligned}$$

En utilisant alors la formule de la coaire (les calculs suivants sont menés en réalité seulement formellement, c'est à dire en supposant que les fonctions sont régulières, mais les estimations obtenues, elles, sont générales, en utilisant un procédé de régularisation pour les justifier), on trouve

$$\int_0^t ds \int_{[u=s]} \left[|\nabla u| + \frac{\Lambda - (\lambda_m + 1)s^2}{|\nabla u|} \right] d\mathcal{H}^{d-1} \leq 2t(\lambda_m + 1) \int u.$$

Maintenant, on remarque que, pour t suffisamment petit, la quantité $\Lambda - (\lambda_m + 1)s^2$ est strictement positive pour tout s entre 0 et t . Sous de telles conditions, on trouve que

$$|\nabla u| + \frac{\Lambda - (\lambda_m + 1)s^2}{|\nabla u|} \geq 2\sqrt{\Lambda - (\lambda_m + 1)s^2} \geq 2\sqrt{\Lambda - (\lambda_m + 1)t^2}.$$

En particulier, si t est assez petit, on peut supposer que

$$|\nabla u| + \frac{\Lambda - (\lambda_m + 1)s^2}{|\nabla u|} \geq \sqrt{2\Lambda}.$$

Si t est assez petit, on a donc

$$\sqrt{2\Lambda} \int_0^t \mathcal{H}^{d-1}([u = s]) ds = \sqrt{2\Lambda} \int_0^t ds \int_{[u=s]} d\mathcal{H}^{d-1} \leq 2t(\lambda_m + 1) \int u.$$

En passant, remarquons que, grâce à l'inégalité de Hölder, puis à l'inégalité de Poincaré,

$$\int u \leq |D|^2 \left(\int u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(d, D) \left(\int |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(d, D) \sqrt{\lambda_m} \leq C(d, D, m).$$

D'où,

$$\sqrt{2\Lambda} \int_0^t \mathcal{H}^{d-1}([u = s]) ds \leq 2tC(d, D, m).$$

Maintenant, on utilise l'inégalité isopérimétrique pour minimiser le terme de gauche de cette dernière inégalité :

$$C(d) |[u \geq s]|^{\frac{d-1}{d}} \leq \mathcal{H}^{d-1}([u = s]).$$

On trouve donc

$$\sqrt{2\Lambda} \int_0^t |[u \geq s]|^{\frac{d-1}{d}} ds \leq 2tC(d, D, m).$$

En divisant par t (strictement positif) et en faisant tendre t vers 0, on trouve donc

$$\sqrt{2\Lambda} |[u > 0]|^{\frac{d-1}{d}} \leq 2C(d, D, m).$$

Comme maintenant on a choisi u tel que $|[u > 0]| \geq \frac{m}{2}$, on a donc

$$\Lambda \leq C(d, D, m),$$

ce qui conclut la preuve. □

On peut alors caractériser l'infimum du problème (P_Λ^f) :

Proposition 9.8. *Soient $\Lambda \geq \Lambda_0$ et (u, v) une solution du problème (P_Λ^f) . Alors*

$$J_\Lambda(u, v) = \lambda_m.$$

Démonstration. Par la proposition précédente, on a déjà vu que $|\Omega_u \cup \Omega_v| \leq m$. On a donc, en particulier,

$$\lambda_m \leq \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} + \frac{\int |\nabla v|^2}{\int v^2},$$

d'où

$$\lambda_m \int u^2 \int v^2 \leq \int v^2 \int |\nabla u|^2 + \int u^2 \int |\nabla v|^2. \quad (9.4)$$

Maintenant, on a déjà vu que $J_\Lambda(u, v) \leq \lambda_m$, c'est à dire

$$\int v^2 \int |\nabla u|^2 + \int u^2 \int |\nabla v|^2 + (\lambda_m + 1) \left(1 - \int u^2 \int v^2 \right)^+ \leq \lambda_m. \quad (9.5)$$

En utilisant les inégalités (9.4) et (9.5), on trouve donc

$$\lambda_m \int u^2 \int v^2 + (\lambda_m + 1) \left(1 - \int u^2 \int v^2\right)^+ \leq \lambda_m,$$

soit encore

$$\lambda_m \int u^2 \int v^2 + \lambda_m \left(1 - \int u^2 \int v^2\right) + \left(1 - \int u^2 \int v^2\right)^+ \leq \lambda_m$$

et donc, après simplification,

$$\left(1 - \int u^2 \int v^2\right)^+ \leq 0, \text{ c'est à dire } \int u^2 \int v^2 \geq 1.$$

Maintenant, remarquons que le cas $\int u^2 \int v^2 > 1$ n'est pas possible. En effet, pour un t proche de 1 et strictement inférieur à 1, on aurait alors

$$J_\Lambda(u, tv) < J_\Lambda(u, v)$$

et ceci est impossible puisque (u, v) est solution de (P_Λ^f) .

On a donc $\int u^2 \int v^2 = 1$, et ceci signifie exactement que

$$J_\Lambda(u, v) = \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} + \frac{\int |\nabla v|^2}{\int v^2} \geq \lambda_m.$$

L'inégalité dans l'autre sens a déjà été vue. □

On peut alors conclure au résultat d'équivalence voulu :

Théorème 9.9. *Pour tout $\Lambda \geq \Lambda_0(d, D, m)$, le problème*

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \lambda_1(A_1) + \lambda_2(A_2) + \Lambda(|A_1 \cup A_2| - m)^+ \text{ parmi les } (A_1, A_2) \text{ tels que} \\ A_1 \subset D, A_2 \subset D, A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1, A_2 \text{ mesurables.} \end{cases} \quad (P_\Lambda)$$

a exactement les mêmes formes optimales que le problème (P).

Démonstration. L'existence de solutions au problème (P_Λ) se montre de la même manière que pour le problème (P). Soit alors (A_1, A_2) une forme optimale au problème (P_Λ) . Pour prouver le résultat, il suffit de prouver que $|A_1 \cup A_2| \leq m$. Soit (u_1, u_2) un couple de fonctions telles que

$$u_i \in H_0^1(A_i), \int u_i^2 = 1, u_i \geq 0, \lambda_1(A_i) = \int |\nabla u_i|^2.$$

Alors

$$\lambda_m \leq J_\Lambda(u_1, u_2) = \lambda_1(A_1) + \lambda_1(A_2) + \Lambda(|A_1 \cup A_2| - m)^+ \leq \lambda_m.$$

D'où égalité. En particulier, le couple (u_1, u_2) est donc une solution du problème (P_Λ^f) . Par le résultat précédent, on sait donc que $|\Omega_{u_1} \cup \Omega_{u_2}| \leq m$, et donc

$$\int |\nabla u_1|^2 + \int |\nabla u_2|^2 = \lambda_m.$$

Et de cette dernière égalité, on déduit enfin que

$$\Lambda(|A_1 \cup A_2| - m)^+ \leq 0,$$

c'est à dire

$$|A_1 \cup A_2| \leq m,$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque. Dans la suite, plutôt qu'essayer de résoudre numériquement le problème (P), on s'intéressera au problème (P_Λ).

Chapitre 10

Traitement numérique

Ce chapitre traite des simulations numériques qui ont été effectuées sur les problèmes de partitionnement optimaux énoncés dans le chapitre précédent.

Ce chapitre s'organise comme suit :

- Tout d'abord, on va proposer un survol rapide des méthodes numériques traditionnellement mises en place sur ces problèmes.
- Dans un second temps, on décrira le principe général des algorithmes génétiques et l'implémentation qui en a été faite. On ne détaillera pas les résultats théoriques existants sur ces méthodes.
- Dans un dernier temps, on montrera quelques résultats obtenus sur les trois problèmes considérés.

10.1 Un survol des méthodes existantes

Les méthodes numériques d'optimisation de forme sont traditionnellement classées en deux parties : les méthodes géométriques et les méthodes numériques. Le cours [All07] décrit l'ensemble de ces méthodes.

Les méthodes géométriques sont basées sur le déplacement de domaines selon une direction privilégiée. Pour ce faire, on se donne une forme initiale, dont on va déplacer la frontière (d'où le nom de méthode de variation de frontière). Pour ce faire, il faut pouvoir calculer la dérivée de la fonctionnelle de forme, et déduire de cette dérivée un "bon" champ de vecteur de déplacement. En pratique, cette méthode pose un certain nombre de problèmes, d'abord la conservation de la topologie de la forme initiale, et donc a priori la convergence vers seulement un minimum local, ensuite la nécessité d'avoir une fonctionnelle de forme dérivable, ce qui n'est bien sûr pas toujours le cas. Enfin, cette méthode, demandant des remaillages incessants des domaines considérées, passe difficilement à des dimensions supérieures ou égales à 3.

Les méthodes topologiques sont a priori plus adaptables, notamment parce qu'elles permettent, plus ou moins efficacement de résoudre le problème topologique présent lors de l'utilisation de la méthode de variation de frontière. Une première méthode topologique est celle des *lignes de niveaux*. C'est une méthode de relaxation : plutôt que de travailler sur les formes à optimiser elles-mêmes, ou de manière équivalente sur les fonctions caractéristiques associées, c'est à dire des fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$, on

peut essayer de relaxer le problème pour travailler sur l'ensemble des fonctions à valeurs dans $[0, 1]$. Par exemple, l'intégrale d'une fonction sur la forme à optimiser

$$\int_{\Omega} u = \int_D \mathbf{1}_{\Omega} u$$

est une notion que l'on élargit à toute fonction $\chi \in L^{\infty}(D, [0, 1])$ (espace dans lequel se trouvent entre autre les fonctions $\mathbf{1}_{\Omega}$) :

$$\int_D \chi u.$$

Des problèmes de partages optimaux ont ainsi été traités, par exemple dans [BC03]. On peut citer comme référence sur cette classe de méthodes [Ben95]. Ces méthodes ont été particulièrement étudiées dans les problèmes de compliance optimale (premiers travaux : [KS86a], [KS86b]).

Les algorithmes génétiques constituent une seconde méthode topologique. Le principe en sera décrit dans la section suivante. On peut commencer néanmoins à citer comme référence la partie de la thèse d'Édouard Oudet qui leur est consacrée (chapitre 3 dans [Oud02]), ou encore [KS96], ainsi que les travaux cités dans ces documents.

10.2 Le problème générique, son traitement

Le problème général d'optimisation peut se formuler de manière générale de la façon suivante :

Soit X un ensemble, P une application définie sur X à valeurs dans \mathbf{R}^{*+} . On suppose que le maximum de P sur X est atteint en au moins un point de X . Le problème est alors de trouver un tel point, i.e.,

$$\begin{cases} \text{Trouver } x \in X \text{ tel que} \\ P(x) = \max \{P(y) : y \in X\}. \end{cases}$$

Les algorithmes génétiques tentent d'adapter les principes d'évolutions des populations d'êtres vivants décrits par C. Darwin afin de réaliser cette maximisation. L'idée sous-jacente est que l'évolution des individus d'une espèce dans le temps opère une maximisation de certains critères (résistance à telle maladie, adaptation à tel ou tel milieu, etc.). On considère donc les éléments de X comme *individus* potentiels d'une espèce que l'on veut faire évoluer afin de maximiser P . On considère donc une *population*, i.e., un ensemble d'*individus* de X , et on fait évoluer cette population dans le temps en lui fixant un certain nombre de règles, en se fixant toujours pour but que cette évolution ait lieu vers la maximisation de la fonction P . En pratique, un élément x de X sera appelé dans la suite *individu*, et la quantité $P(x)$ sera appelée *performance*.

On commence par décrire de manière abstraite le fonctionnement de cette méthode.

10.2.1 Création d'une population

La première étape consiste à se donner une population initiale. Pour cela, on se donne un nombre N , correspondant à la taille de la population, et on choisit N éléments

dans l'ensemble X . Tous les éléments de la population sont appelés *individus*. On appelle \mathcal{P}_0 la population initiale, une *liste* de N éléments de X .

On remarquera que le choix des individus de la population initiale fait intervenir une part plus ou moins grande d'aléatoire.

10.2.2 Description d'une itération de l'algorithme génétique

À l'itération i , on a construit la population \mathcal{P}_i et on veut la faire évoluer en une population \mathcal{P}_{i+1} . Pour ce faire, on procède en quatre étapes.

Évaluation

Cette étape ne modifie pas encore la population. On se contente, pour chaque individu x de la population \mathcal{P}_i , de calculer $P(x)$.

Sélection

Tout d'abord, on crée une population de transition $\tilde{\mathcal{P}}_i$, possédant elle aussi N individus, et dans laquelle apparaissent des éléments de la population \mathcal{P}_i proportionnellement à leur performance.

En pratique, des trois étapes, la sélection est celle qui assure la convergence de l'algorithme.

Croisement

À partir de la population de transition $\tilde{\mathcal{P}}_i$, on construit une seconde population de transition $\hat{\mathcal{P}}_i$, obtenue en *croisant* un certain nombre de couples de la population $\tilde{\mathcal{P}}_i$. En pratique, pour chaque croisement, on sélectionne (là encore avec plus ou moins d'aléa) un certain nombre de couples (x_k, y_k) d'éléments de la population $\tilde{\mathcal{P}}_i$, et on applique à chacun d'entre eux un opérateur \mathcal{C} dit de *croisement* de manière à obtenir de nouveaux couples d'individus de X :

$$(x'_k, y'_k) = \mathcal{C}((x_k, y_k)).$$

La population $\hat{\mathcal{P}}_i$ est alors obtenue en remplaçant dans $\tilde{\mathcal{P}}_i$ chaque couple *parent* (x_k, y_k) par son couple *enfant* associé (x'_k, y'_k) .

En pratique, le nombre d'individus ayant participé au croisement correspond à un certain pourcentage de la population, appelé *taux de croisement* (et noté τ_c), en général assez élevé (de l'ordre de 1).

Mutation

Enfin, à partir de la population de transition $\hat{\mathcal{P}}_i$, on construit la population \mathcal{P}_{i+1} . Pour cela, on choisit un certain nombre d'individus x_k de la population $\hat{\mathcal{P}}_i$ et on applique à chacun d'entre eux un opérateur \mathcal{M} dit de *Mutation* :

$$x'_k = \mathcal{M}(x_k).$$

La population \mathcal{P}_{i+1} est alors obtenue en remplaçant dans $\hat{\mathcal{P}}_i$ tout x_k par le x'_k associé.

En pratique, le nombre d'individus ayant subi une mutation correspond à un certain pourcentage de la population, appelé *taux de mutation* (et noté τ_m), en général assez petit (de l'ordre de 0.01).

Au final

L'algorithme renvoie le meilleur individu parmi tous les individus qui ont été évalués durant le calcul.

10.2.3 Utilisation

La méthode décrite précédemment ne fait intervenir la fonction P qu'au moment de l'évaluation. En particulier, l'algorithme génétique est un méthode d'ordre 0. On l'utilise en pratique dans les problèmes où la régularité du critère d'optimisation fait défaut. On peut aussi remarquer que l'algorithme peut traiter les cas où existent de nombreux optima locaux. Enfin, un dernier avantage consiste en ce que cette méthode est très facilement parallélisable, les calculs des performances pouvant être séparés facilement entre plusieurs machines.

Au rayon des inconvénients, cette fois, signalons le grand nombre de paramètres à ajuster (taille de la population, taux de croisement, taux de mutation, principe de sélection, opérateur de croisement, opérateur de mutation), pour trouver un bon compromis entre les différents critères que sont la convergence de l'algorithme, la convergence vers un optimum global, et la rapidité de convergence. Enfin signalons qu'il est très difficile d'établir des résultats de convergence et de vitesse de convergence pour ces algorithmes.

10.3 Notre problème, Question de la représentation

Rappelons le problème étudié : Soient D un ouvert borné de \mathbf{R}^d , et K un entier strictement positif. On définit les formes admissibles comme les K -partages (en ensembles mesurables) de D , i.e.,

$$\mathcal{A}_K = \left\{ (D_1, \dots, D_K) : \begin{array}{l} \forall k, D_k \text{ est un sous-ensemble mesurable de } D \\ \cup_{k=1}^K D_k = D \\ \forall (k, k'), \text{ si } k \neq k', \text{ alors } D_k \cap D_{k'} = \emptyset \end{array} \right\}.$$

Le problème étudié est alors le suivant, où \mathcal{F} est la fonctionnelle de forme définie sur \mathcal{A}_K et à valeurs dans \mathbf{R}^{*+} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } A \in \mathcal{A}_K \text{ tel que} \\ \mathcal{F}(A) = \inf \{ \mathcal{F}(B) : B \in \mathcal{A}_K \}. \end{array} \right.$$

Lors de la résolution numérique du problème, on va chercher à travailler sur un maillage fixe de D , que l'on suppose constitué de M cellules : C_i (on supposera les C_i fermés). On ne considèrera donc comme formes admissibles que les partages de D *adaptés* à ce maillage. On va présenter deux manières de représenter ces partages.

10.3.1 Représentation par liste de cellules

Une première manière de représenter les partages, la plus directe, consiste à travailler que l'espace

$$X = \{1, \dots, K\}^M$$

où à chaque individu $x = (x_1, \dots, x_M) \in X$, on associera le partage de D en $(D_1(x), \dots, D_K(x))$ avec

$$D_k(x) = \overbrace{\bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, M\} \\ x_i = k}} C_i}^{\circ}.$$

On étudie alors un problème d'optimisation sur l'espace X .

10.3.2 Représentation par diagrammes de Voronoï

Une autre possibilité de représentation consiste à faire abstraction du maillage fixé. Pour ce faire, on représentera les partages à l'aide de diagrammes de Voronoï. On définit alors l'ensemble X_v comme

$$X_v = \bigcup_{n>0} \{((P_j, x_j))_{1 \leq j \leq n} : P_j \in D, 1 \leq x_j \leq K\}.$$

Un élément de X est donc une suite finie de couples (P_j, x_j) constitués d'un point P_j de D et d'un numéro de domaine x_j . On définit la cellule de Voronoï V_j associée à P_j comme (la fermeture de) l'ensemble des points de D plus proches de P_j que de tous les autres P_h pour $h \neq j$. Toutes ces cellules définissent alors le partage $(D_k)_{1 \leq k \leq K}$ par

$$D_k = \overbrace{\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ x_j = k}} V_j}^{\circ}$$

Pour continuer à travailler sur les partages adaptés à un maillage donné, on peut *projeter* ce partage sur un partage adapté. Pour chaque cellule C_i associée du maillage donné, on appelle G_i son centre de gravité, et on pose alors

$$D'_k = \overbrace{\bigcup_{G_i \in D_k} C_i}^{\circ}$$

On étudie alors un problème d'optimisation sur l'espace X_v .

10.4 Implémentation des listes de cellules

Dans cette section, on va décrire les mécanismes mis en place pour traiter les différentes étapes de l'algorithme lorsque l'on a choisit de représenter les partages par des listes de cellules.

Une idée de base exploitée tout du long est que, si les individus sont représentés comme des M -uplets d'entiers compris entre 1 et K , ce sont *avant tout* des formes géométriques. Une possibilité d'implémentation des algorithmes génétiques consiste à traiter les individus étudiés comme de pures listes de nombres. On observe cependant une meilleure convergence si l'implémentation fait référence à une certaine *structure* ou *géométrie* supérieure à la représentation sous forme de listes.

En particulier, dans les problèmes que nous avons étudiés, la fonctionnelle \mathcal{F} était liée à la première valeur propre, souvent dans le sens suivant :

$$\mathcal{F}(A_1, \dots, A_K) = f(\lambda_1(A_1), \dots, \lambda_1(A_K)).$$

où la fonction f est *décroissante variable par variable*, i.e.,

$$\forall k \in \{1, \dots, K\}, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in \mathbf{R}^K, \forall \alpha'_k \in \mathbf{R},$$

$$(\alpha_k \leq \alpha'_k) \Rightarrow \left(f(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha'_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_K) \leq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_K) \right).$$

On peut alors prouver qu'il existe des partages optimaux en ensembles *connexes*. Une application sera de chercher des croisements et des mutations ayant à voir avec un traitement des "grosses" composantes connexes, i.e., celles qui influent sur la première valeur propre.

10.4.1 Initialisation

La méthode d'initialisation retenue est totalement aléatoire. Pour chaque individu que l'on cherche à choisir au début, on tire M nombres choisis au hasard entre 1 et K et on définit l'individu comme la liste constituée de ces M nombres.

10.4.2 Croisement

Croisement de listes

La première méthode de croisement mise en place est la méthode classique de croisement de listes. On considère deux listes (les parents)

$$x = (x_1, \dots, x_M) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_M).$$

La méthode consiste à choisir (à chaque appel de la procédure de croisement) un nombre i au hasard entre 1 et M , et à construire les deux listes filles de la manière suivante :

$$f = (x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_M) \text{ et } g = (y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_M).$$

Croisement des domaines

Une autre méthode, implémentée ensuite et apportant de meilleurs résultats (pratiques) de convergence est plus géométrique. Dans la méthode précédente, on intervertissait les valeurs de x_k et y_k pour certaines valeurs de k . Mais ces interventions n'avaient aucune propriété géométrique, et en particulier, lorsque les parents étaient

des partages en ensembles connexes, elles pouvaient créer des fils dont les ensembles de base aient des multitudes de composantes. L'idée du croisement suivant est de faire un croisement de liste, mais en tenant compte de la géométrie sous-jacente.

Le méthode consiste tout d'abord à choisir une droite "au hasard" (et ceci est encore à définir) coupant le domaine D . On note cette droite \mathcal{D} . Cette droite coupe l'espace \mathbf{R}^2 en deux demi-espaces, E_1 et E_2 (on supposera E_1 fermé et E_2 ouvert). Pour chaque cellule du maillage C_i , on peut calculer son centre de gravité g_i (opération plutôt simple dans les cas des maillages que nous avons considérés, toujours constitués de triangles), et voir que celui ci est soit dans le domaine E_1 , soit dans E_2 . On définit donc deux familles d'indices :

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, M\} : g_i \in E_1\} \text{ et } I_2 = \{i \in \{1, \dots, M\} : g_i \in E_2\}.$$

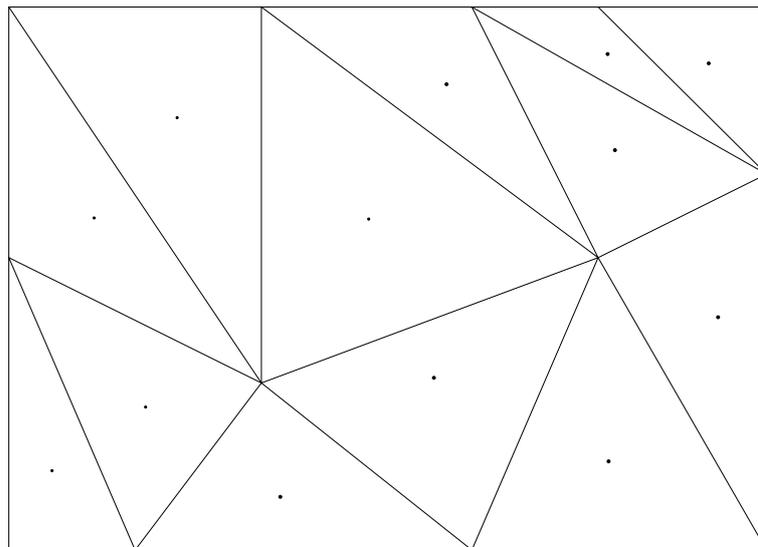
Alors, on a

$$\{1, \dots, M\} = I_1 \cup I_2 \text{ et } I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

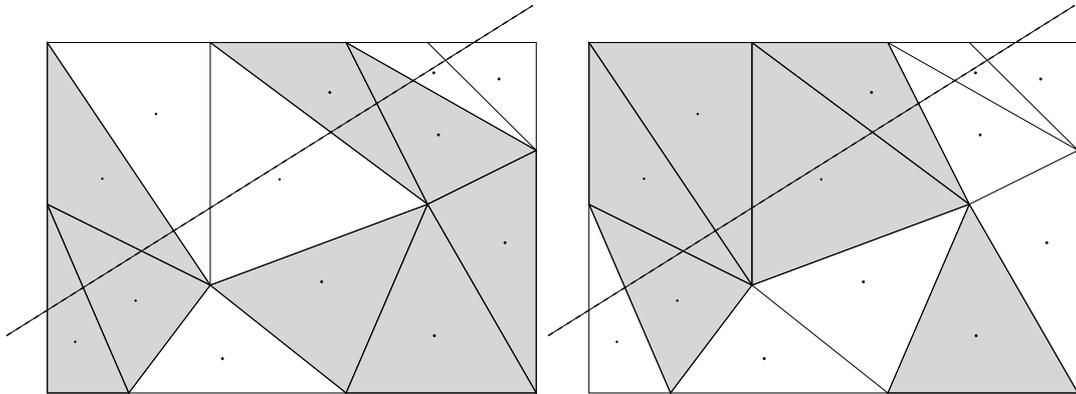
On opère alors à un croisement de listes selon ces deux ensembles d'indices. Si $x = (x_1, \dots, x_M)$ et $y = (y_1, \dots, y_m)$ sont les deux parents, on définit les fils $f = (f_1, \dots, f_M)$ et $g = (g_1, \dots, g_M)$ par

$$f_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in I_1 \\ y_i & \text{si } i \in I_2. \end{cases} \quad \text{et} \quad g_i = \begin{cases} y_i & \text{si } i \in I_1 \\ x_i & \text{si } i \in I_2. \end{cases}$$

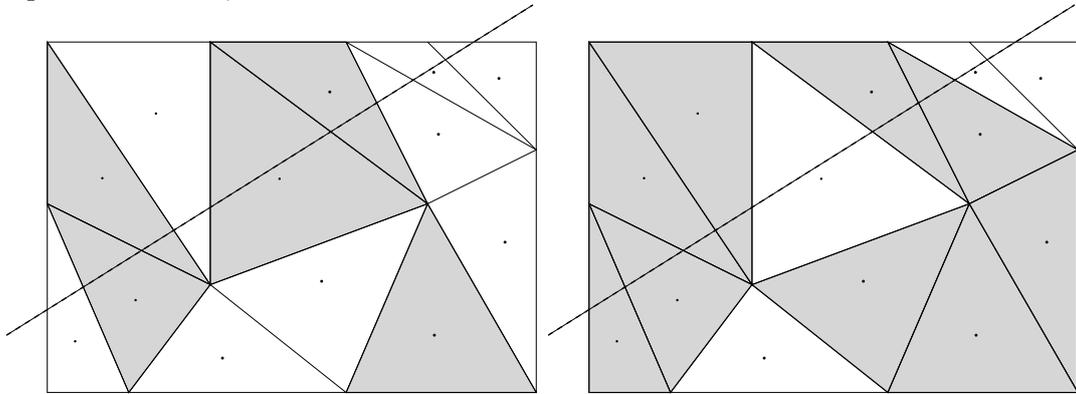
Voici une illustration de ce procédé de croisement : on considère un maillage d'un rectangle avec des triangles. On a indiqué les centres de gravité sur la figure.



On présente, sur les deux figures suivantes, les deux individus parents ainsi que la droite utilisée pour le croisement. Ici, on travaille sur des partages en deux domaines, le premier domaine étant grisé, le second laissé blanc :



Après croisement, les individus enfants sont alors suivants :



10.4.3 Mutation

Mutation des listes

À l'instar de l'étape de croisement, on a commencé par effectuer des mutations en ne prenant en compte que la structure de liste. De manière générale, on a découpé le procédé de mutation en deux. Avec une certaine probabilité, l'individu mute entièrement, i.e., est retiré au hasard comme dans l'initialisation. Sinon, seule une partie de son "génomme" est modifiée. En pratique, le second type de mutation s'effectue ainsi : soit $x = (x_1, \dots, x_M)$ l'individu que l'on veut faire muter. On choisit p nombres i_1, \dots, i_p deux à deux distincts entre 1 et K , le ratio $\frac{p}{M}$ correspondant au pourcentage du génomme que n'on souhaite faire muter.

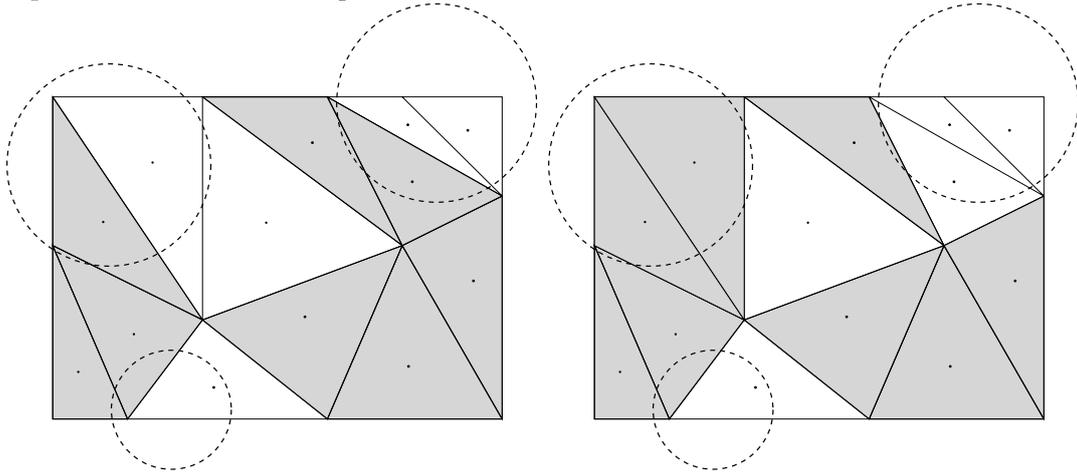
On définit alors l'élément muté $x' = (x'_1, \dots, x'_M)$ de la façon suivante : Si i n'est pas un des i_j , on pose $x'_i = x_i$, et, sinon, on prend pour x'_i un nombre au hasard entre 1 et K .

Encore une fois, cette méthode a l'inconvénient majeur qu'elle ne prend pas en compte la structure géométrique sous-jacente. En effet, perturber une cellule du maillage n'améliore quasiment jamais la qualité des individus. Lorsque l'objectif est d'accélérer la convergence, la méthode géométrique que l'on va décrire est particulièrement efficace.

Mutation des domaines

L'objectif est encore une fois de modifier une partie du génome, mais plutôt que de partir de la seule structure de liste, on préfère partir de la géométrie. Le procédé de mutation sera donc le suivant : on va choisir au hasard un certain nombre de disques D_1, \dots, D_p dans le plan, chacun de ces disques intersectant le domaine D . Pour chaque disque D_i , on va choisir au hasard un nombre X_i compris entre 1 et K . On considère l'individu $x = (x_1, \dots, x_M)$ que l'on veut faire muter. On commence par faire muter les x_j tels que le centre de gravité g_j de la cellule C_j est dans le disque D_1 . On définit alors un individu $x^1 = (x_1^1, \dots, x_M^1)$ tel que $x_i^1 = x_i$ si g_i n'est pas dans D_1 , et $x_i^1 = X_1$ si g_i est dans D_1 . On construit par le même procédé à partir de l'individu x^1 un nouvel individu x^2 en utilisant le disque D_2 et la valeur X_2 . Par récurrence, on construit ainsi x^1, x^2, \dots, x^p . Et on finit par prendre pour mutation de x l'individu $x' = x^p$.

Pour illustrer ce procédé géométriquement, voici un individu avant (à gauche) et après (à droite) mutation, les disques à l'intérieur desquels s'effectue la mutation étant représentés sur les deux figures :



10.5 Implémentation des diagrammes de Voronoï

Présentons maintenant les détails de l'implémentation de l'algorithme lorsque l'on a choisi de représenter les partages sous forme de diagrammes de Voronoï.

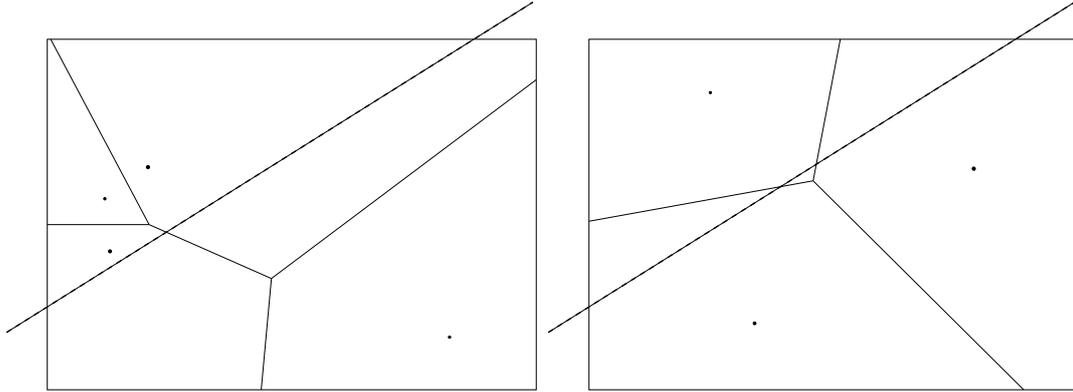
10.5.1 Initialisation

Pour chaque individu de la population, on tire un diagramme de Voronoï au hasard au sens suivant. On choisit le nombre de sites du diagramme : un nombre n tiré au hasard entre 1 et N (le nombre maximal de sites autorisés). Pour le site d'indice j , on tire alors au hasard un point P_j de D et un numéro de domaine x_j , compris entre 1 et K .

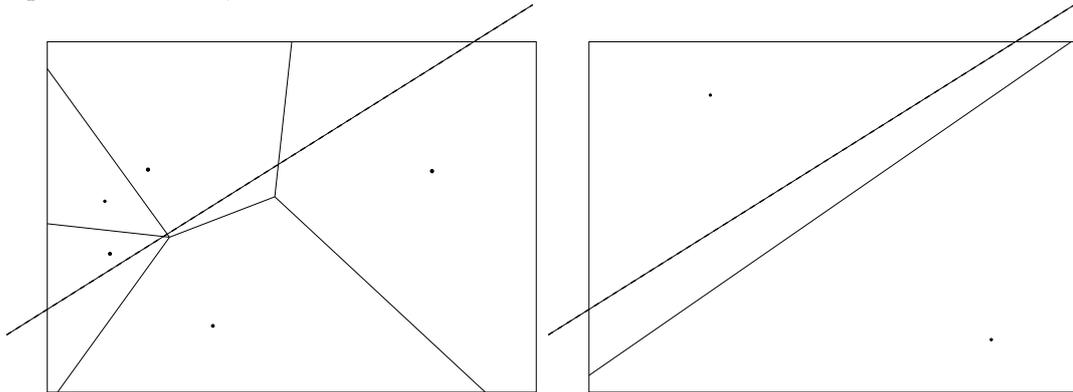
10.5.2 Croisement

Pour le croisement, le procédé est similaire à celui utilisé pour les listes de cellules. Pour tout couple d'individus à croiser, on prend une droite Δ intersectant D et on échange les sites de Voronoï situés de part et d'autre de Δ .

Avant croisement : les individus parents :



Après croisement, les individus enfants :



10.5.3 Mutation

En ce qui concerne les mutations, elles peuvent être de quatre types :

- (i) ajout un nouveau site,
- (ii) suppression d'un site,
- (iii) modification du numéro associé à un site,
- (iv) modification de la position d'un site.

10.5.4 Comparaison entre les deux représentations

Les deux représentations permettent d'explorer tous les partages adaptés au maillage donné, mais en terme de temps de calcul les deux représentation ne donnent pas les mêmes résultats.

En effet, lorsque les frontières libres des formes optimales sont régulière, l'utilisation des diagrammes de Voronoï, elle permet de représenter des partages en domaines

réguliers et connexes avec très peu d'information, alors que quel que soit la régularité des domaines, la représentation sous forme de liste de cellule utilise toujours la même quantité d'information. Vu qu'on a alors une petite quantité d'information, on peut alors utiliser en parallèle de petites tailles de population, et des nombres d'itérations faibles. La méthode est dans ce cas là plus rapide.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'on avait justement régularité C^1 des frontières libres dans les problèmes considérés. Pour comparer la vitesse et l'efficacité des deux types de représentation, on les a utilisées toutes les deux sur les mêmes données, et on a effectivement observé une convergence beaucoup plus rapide (on gagne au moins un ordre de grandeur) avec l'utilisation des diagrammes de Voronoï.

10.6 Matériel utilisé

10.6.1 Description

Le code produit a visé uniquement à la mise en place de l'algorithme génétique à proprement parler. La résolution numérique du problème de la première valeur propre de l'opérateur Laplacien-Dirichlet a été traitée en utilisant le logiciel Melina.

Afin d'obtenir de meilleurs temps de calculs, l'algorithme génétique a été implémenté de manière à ce que les calculs soient distribués sur un certain nombre des ordinateurs de l'Antenne de Bretagne de l'ÉNS Cachan, en pratique un quadri-processeur Xéon, trois Core-2, seize Pentium 4, un bi-processeur G5, et trois quadri-processeur PowerPC.

En pratique, on fait tourner sur ce réseau trente-six calculs de valeur propre en parallèle.

10.6.2 Exemples de temps de calculs

Voici deux exemples dans le cas de calculs portant sur un partage du domaine en deux ensembles.

Premier exemple

Nombre de triangles dans le maillage	186
Taille de la population	2000
Nombre d'itérations	1500
nombre de calculs en parallèle	19
temps de calcul total	4 jours et 13 heures
Nombre total de calcul de valeur propre	6000000
temps total divisé par le nombre de calcul	0.065 secondes

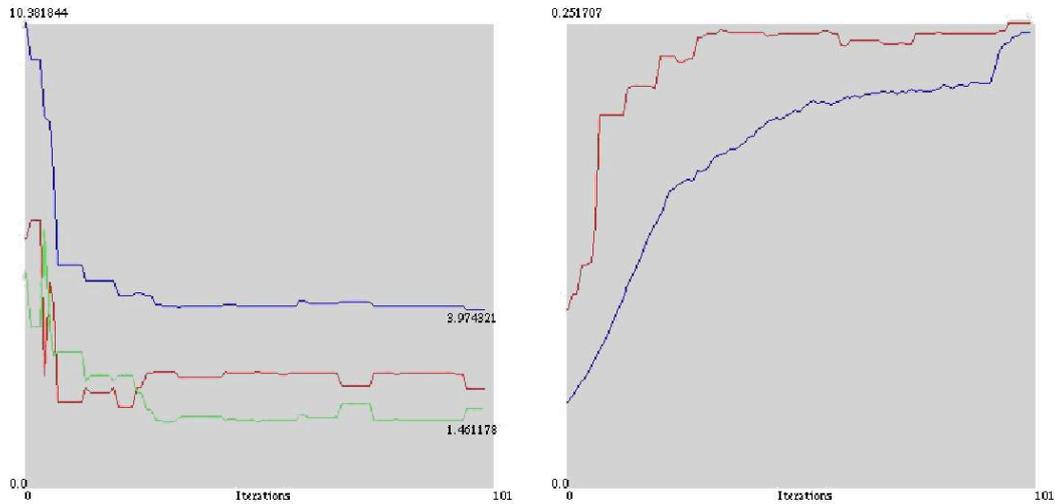


FIG. 10.1 – À gauche : $\lambda_1(\Omega_1) + \lambda_1(\Omega_2)$ (courbe du haut), $\lambda_1(\Omega_1)$, et $\lambda_1(\Omega_2)$ en fonction des itérations. À droite : meilleure performance et performance moyenne en fonction des itérations.

Second exemple

Nombre de triangles dans le maillage	328
Taille de la population	3000
Nombre d'itérations	1000
nombre de calculs en parallèle	32
temps de calcul total	3 jours et 5 heures
Nombre total de calcul de valeur propre	6000000
temps total divisé par le nombre de calcul	0.045 secondes

10.7 Résultats

10.7.1 Premier problème

Sur le premier problème, on a travaillé en deux temps. Tout d'abord, on a mis en place un algorithme génétique pour obtenir l'allure de la frontière libre, puis on a précisé cette frontière en utilisant une méthode de variation de frontière.

Les résultats qui suivent porte sur un triangle de coordonnées $(0, 0)$, $(9, 0)$, et $(5.33, 5.96)$.

Algorithmes Génétiques

Pour ce problème, où une méthode plus fine suit, on s'est contenté d'appliquer l'algorithme génétique sur un maillage plutôt grossier du triangle, ici, avec seulement 81 éléments. On présente sur la figure 10.1, les courbes de convergence.

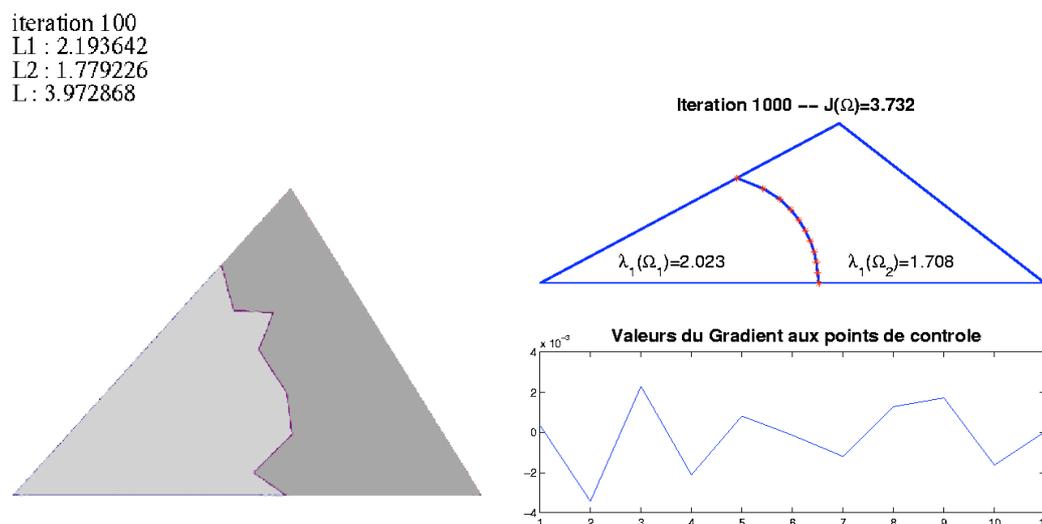


FIG. 10.2 – À gauche : meilleur partage obtenu en 100 itération. À droite : résultats de la méthode de variation de frontière.

La partie gauche de la figure 10.2 quant à elle montre le meilleur individu, qui sert d’initialisation à la méthode de variation de frontière qui suit.

Méthode de variation de frontière

La partie droite de la figure 10.2 fait le bilan de l’application de cette méthode à notre problème. À partir des informations obtenues précédemment, on initialise la méthode en regardant une frontière libre joignant les deux côtés les plus longs du triangle. Pour ce faire, on initialise la méthode de variation de frontière par une droite joignant les milieux de ces côtés.

La différentielle de forme est obtenue de manière classique. On se donne un partage (Ω_1, Ω_2) du triangle en deux ouverts connexes non vides, la frontière commune à ces deux ensembles étant un ensemble “régulier” Γ . On note u_1 (resp. u_2) la première fonction propre (positive et de norme L^2 égale à 1) de l’opérateur $-\Delta$ sur Ω_1 (resp. sur Ω_2). Enfin, on notera $\mathbf{n}(x)$, en tout point x de Γ , la normale à Γ orientée de Ω_1 vers Ω_2 .

On considère alors des déplacements selon un champ \mathbf{V} de classe \mathcal{C}^∞ et à support compact inclus dans le triangle. En notant alors

$$\mathcal{E}((\Omega_1, \Omega_2))$$

la fonctionnelle de forme considérée, on trouve que

$$D \mathcal{E}((\Omega_1, \Omega_2)) (\mathbf{V}) = \int (|\nabla u_2|^2 - |\nabla u_1|^2) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}.$$

Remarque. On a vu précédemment (proposition 9.4 l’exemple théorique d’un domaine ouvert connexe et borné D dans \mathbf{R}^d tel que, tout partage optimal (A_1, A_2) pour le

problème (\mathcal{P}_1) vérifie nécessairement

$$\lambda_1(A_1) \neq \lambda_1(A_2).$$

Ici, on a au contraire exhibé un exemple numérique illustrant encore cette propriété.

Autres résultats

On s'est intéressé dans la suite à des cas présentant de fortes où l'on s'attendait à une perte de vitesse dû à la présence de multiples optima globaux. La perte de vitesse observée n'a été en rien significative, et on a pu observer que la convergence de l'algorithme pouvait avoir lieu vers tous les optima. Cela dépend en pratique fortement du maillage considéré. Celui ci peut notamment détruire certaines des symétries du domaine. On a cependant effectuées deux simulations avec les mêmes paramètres sur le même maillage et amenant à des optima différents (illustration de droite et du bas sur la figure 10.3).

10.7.2 Second problème

Pour ce problème, les résultats ont été plus difficiles à obtenir, la convergence étant nettement plus lente. La seule raison à ceci semble être la partage en trois domaines au lieu des deux précédents. On présente dans le tableau suivant les caractéristiques des calculs dont les résultats sont présentés sur les figures 10.4 et 10.5 :

domaine	méthode	taille du maillage	itérations	taille de la population	temps de calcul
carré	listes	186	1300	2000	53h
disque	listes	313	1300	3000	123h
disque	Voronoi	1003	300	100	6h

10.7.3 Troisième problème

On a étudié le problème (\mathcal{P}_3^A) dans les deux cas distincts qui peuvent se présenter.

- D'abord le cas de non saturation, c'est à dire, on peut placer deux boules disjointes de mesure $m/2$ dans le domaine D . On sait alors que les optima globaux sont des réunions disjointes de deux boules de ce type.
- Ensuite, le cas contraire, où il est impossible de placer deux boules disjointes de mesure $m/2$ à l'intérieur du domaine D . Dans ce cas là, les "partages" optimaux (A_1, A_2) ont une partie de leur frontière en commun.

Ces deux propriétés ont bien été illustrées par les simulations numériques effectuées. On présente dans le tableau suivant les caractéristiques des calculs dont les résultats sont présentés sur les figures 10.6 et (10.7) :

domaine	méthode	taille du maillage	itérations	taille de la population	temps de calcul
carré	listes	186	500	2000	11h
carré	listes	498	600	5000	245h
rectangle	Voronoi	634	400	300	15h

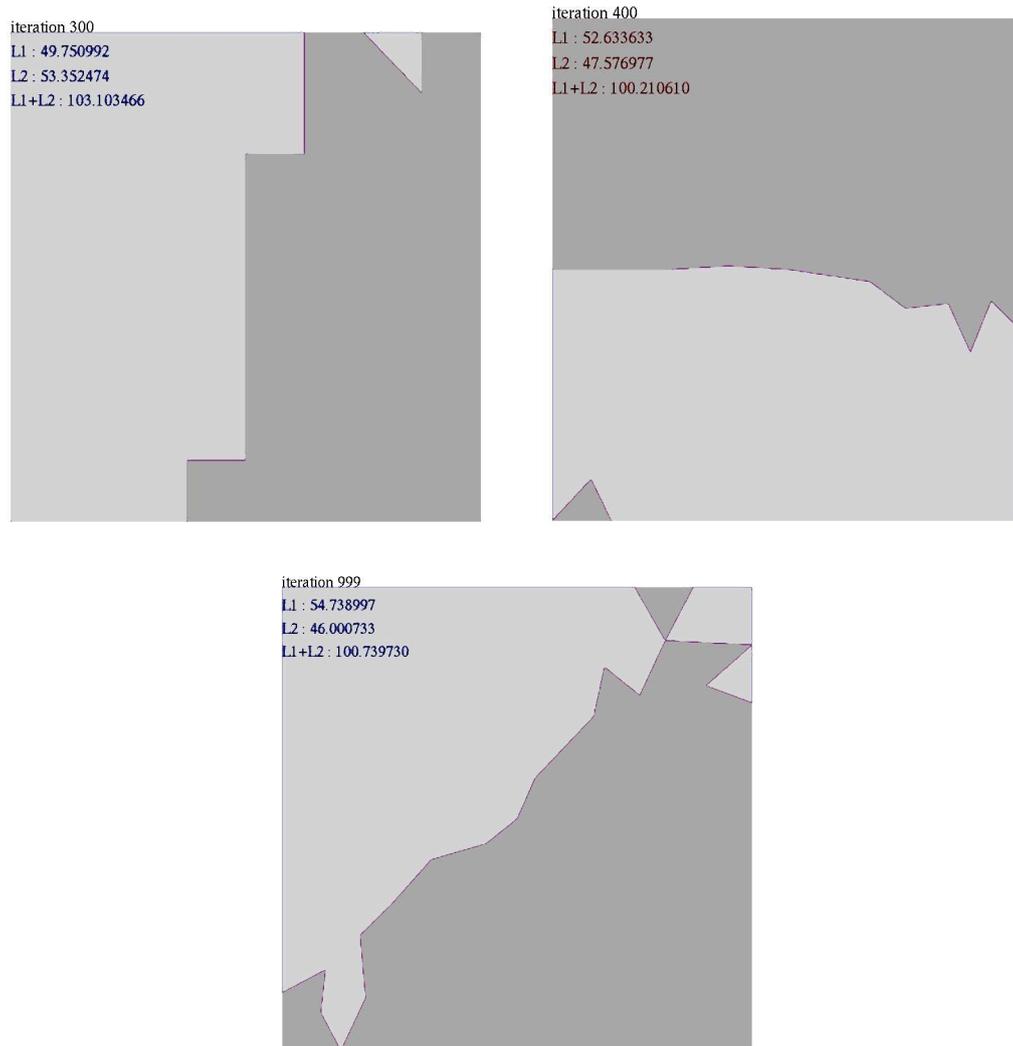


FIG. 10.3 – trois simulations du problème (\mathcal{P}_1) sur le carré amenant à des optima différents.

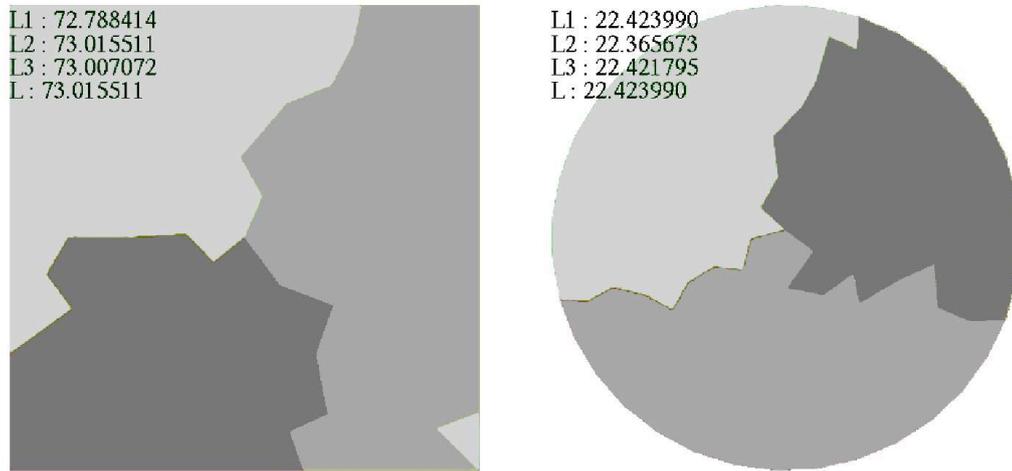


FIG. 10.4 – Résultats des simulations pour le problème (\mathcal{P}_2) sur un carré et sur un disque.

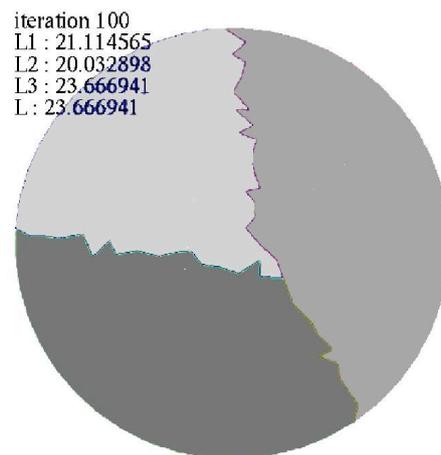


FIG. 10.5 – Résultats d'une pour le problème (\mathcal{P}_2) sur un disque en utilisant les diagrammes de Voronoï.

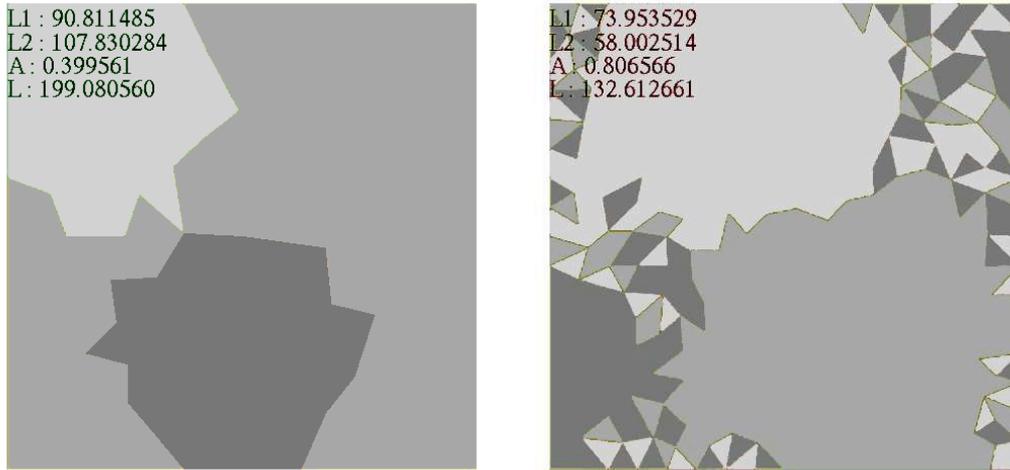


FIG. 10.6 – Résultats des simulations pour le problème (\mathcal{P}_3^A) sur un carré avec et sans saturation. À gauche, le partage optimal correspond à l'ensemble clair et à l'ensemble foncé. À droite, le partage optimal correspond à l'ensemble clair et à l'ensemble grisé.

iteration 184
 L1 : 30.671944
 L2 : 20.863874
 A : 1.701148
 L : 51.765335



FIG. 10.7 – Résultats d'une simulation pour le problème (\mathcal{P}_3^A) sur un rectangle avec saturation en utilisant les diagrammes de Voronoï.

Conclusion, Perspectives

En guise de conclusion, j'aimerais faire le point sur quelques problèmes que j'ai eu l'occasion d'attaquer pendant ma thèse et qui m'ont, malheureusement, beaucoup résisté.

- *Régularité Lipschitz*. Dans le cas général, i.e., quand la fonction f peut changer de signe, prouver encore une fois la régularité Lipschitz de la fonction d'état est un des points les plus importants. D'abord pour la beauté du résultat en lui-même, mais surtout car l'objectif sous-jacent dans la recherche de ce résultat est l'obtention d'une preuve faisant l'impasse sur les propriétés trop spécifiques des fonctions harmoniques.
- *Régularité Höldérienne dans le cas des opérateurs sous forme divergente*. Ici encore, dans le cas général. L'enjeu est le même que précédemment. Néanmoins, j'ai commencé à étudier certaines pistes pour ce résultat, notamment la méthode développée dans [BW07].
- *Extension du résultat d'équivalence*. Le résultat d'équivalence tel qu'énoncé dans ce travail est assez peu satisfaisant. On demande en effet au domaine étudié d'être fortement étoilé par rapport à un point. Un objectif important reste donc d'obtenir le même résultat pour un domaine D qui soit seulement un ouvert borné connexe. De plus, le résultat d'équivalence étudié portait sur le périmètre total, une autre extension à étudier concernerait le périmètre relatif. Dans les deux cas, il devient nécessaire de pratiquer des perturbations locales des ensembles en jeu tout en gardant le contrôle des variations de périmètre et de l'énergie de Dirichlet.
- Enfin, un autre point qui aurait rendu l'étude plus complète concerne l'existence de forme optimale dans le cas où le domaine D est l'espace \mathbf{R}^d tout entier, et où la fonction f est \mathcal{C}_c^∞ .

Bibliographie

- [ACF84] H. W. Alt, L. A. Caffarelli, and A. Friedman. Variational problems with two phases and their free boundaries. *Transactions of the American Mathematical Society*, 282(2) :431–461, 1984.
- [ACKS01] I. Athanasopoulos, L. A. Caffarelli, C. Kenig, and S. Salsa. An area-Dirichlet integral minimization problem. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 54(4) :479–499, 2001.
- [All07] G. Allaire. *Conception Optimale de Structures*. Mathématiques et Applications. Springer, 2007.
- [Alm76] F.J. Almgren. *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, volume 165 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. 1976.
- [BBH98] D. Bucur, G. Buttazzo, and A. Henrot. Existence results for some optimal partition problems. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 8(2) :571–579, 1998.
- [BC03] B. Bourdin and A. Chambolle. Design-dependent loads in topology optimization. *ESAIM : COCV*, 9 :19–48, 2003.
- [Ben95] M.P. Bendsoe. *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*. Springer-Verlag, 1995.
- [BHP05] T. Briançon, M. Hayouni, and M. Pierre. Lipschitz continuity of state functions in some optimal shaping. *Calculus of Variations and PDE*, 23(1) :13–32, 2005.
- [Bri04] T. Briançon. Regularity of optimal shapes for the Dirichlet’s energy with volume constraint. *ESAIM : COCV*, 10 :99–122, 2004.
- [BW07] C. Bandle and A. Wagner. Optimization problems for weighted Sobolev constants. *Calculus of Variations*, 2007.
- [CJK02] L. A. Caffarelli, D. Jerison, and C. E. Kenig. Some new Monotonicity theorems with applications to free boundary problems. *Annals of Mathematics*, 155(2) :369–404, 2002.
- [CL03] A. Chambolle and C. J. Larsen. C^∞ regularity of the free boundary of a two-dimensional optimal compliance problem. *Calculus of Variations and PDE*, 18(1) :77–94, 2003.
- [Cro91] M. Crouzeix. Variational approach of a magnetic shaping problem. *European Journal of Mechanics B Fluids*, 10 :527–536, 1991.

- [CTV03] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues. *Journal of Functional Analysis*, 198 :160–196, 2003.
- [CTV05a] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. Asymptotic estimates for the spatial segregation of competitive systems. *Advances in Mathematics*, 195(2) :524–560, 2005.
- [CTV05b] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. On a class of optimal partition problems related to the Fucik spectrum and to the monotonicity formulae. *Calculus of Variations and PDE*, 22 :45–72, 2005.
- [CTV05c] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems. *Indiana University Mathematics Journal*, 54(3) :779–815, 2005.
- [EG92] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Math. CRC Press, 1992.
- [Fed69] H. Federer. *Geometric measure theory*. Grundlehren des mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, New York, 1969.
- [Giu84] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variations*. Birkhäuser, 1984.
- [GMT83] E. Gonzalez, U. Massari, and I. Tamanini. On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint. *Indiana University Mathematics Journal*, 32(1), 1983.
- [GT83] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [HHOT06] B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, and S. Terracini. Nodal domains and spectral minimal partitions. 2006.
- [HP05] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et Optimisation de Formes : une analyse géométrique*. Springer-Verlag, 2005.
- [KS86a] R.V. Kohn and G. Strang. Optimal design and relaxation of variational problems i-iii. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 39 :113–137, 139–182, 353–377, 1986.
- [KS86b] R.V. Kohn and G. Strang. Optimal design in elasticity and plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22 :183–188, 1986.
- [KS96] C. Kane and M. Schoenauer. Topological optimum design using genetic algorithms. *Control and Cybernetics*, 5(25) :1059–1087, 1996.
- [Lan07a] N. Landais. Hölder continuity in a shape optimization problem with perimeter. *Differential and Integral Equations*, 20(6) :657–670, 2007.
- [Lan07b] N. Landais. A regularity result in a shape optimisation problem with perimeter. *Journal of Convex Analysis*, 14, 2007.
- [Oud02] E. Oudet. *Quelques résultats en optimisation de forme et stabilisation, thèse de doctorat*. 2002.

- [Tam88] Italo Tamanini. Variational problems of least area type with constraints. *Annals of the University of Ferrara*, 34 :183–217, 1988.
- [Tam94] Italo Tamanini. Regularity results for almost minimal oriented hypersurface in \mathbf{R}^n . *Quaderni del dipartimento di Matematica*, (1), 1994.
- [Wag05] A. Wagner. Optimal shape problems for eigenvalues. *Communications in Partial Differential Equations*, 30 :1039–1063, 2005.
- [Zie89] W.P. Ziemer. *Weakly differentiable functions*. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1989.