



**HAL**  
open science

# Calculs de plaques fissurées en flexion avec la méthode des éléments finis étendue (XFEM)

Jérémy Lasry

► **To cite this version:**

Jérémy Lasry. Calculs de plaques fissurées en flexion avec la méthode des éléments finis étendue (XFEM). Mathématiques [math]. INSA de Toulouse, 2009. Français. NNT : . tel-00465635

**HAL Id: tel-00465635**

**<https://theses.hal.science/tel-00465635>**

Submitted on 20 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 994

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'Université de Toulouse**

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

préparée au laboratoire **Institut de Mathématique de Toulouse, équipe MIP**

dans le cadre de l'École Doctorale **Mathématiques Informatique et  
Télécommunications de Toulouse**

présentée et soutenue publiquement par

**Jérémy LASRY**

Titre:

## **Calculs de plaques fissurées en flexion avec la méthode des éléments finis étendue (XFEM)**

Directeurs de thèse : **Yves RENARD** et **Michel SALAÛN**

Jury

M. Patrick LABORDE	Université de Toulouse	Président
M. Anthony GRAVOUIL	INSA Lyon	Rapporteur
M. Patrick HILD	Université de France-Comté	Rapporteur
M. Marc BALZANO	Airbus France	Examineur
M. Yves RENARD	Université de Lyon	Directeur de thèse
M. Michel SALAÛN	ISAE/ENSICA	Directeur de thèse

---

## Remerciements

Je remercie vivement mes directeurs de thèse Yves Renard et Michel Salaün, pour leurs très grandes qualités scientifiques et humaines. Leur encadrement a été efficace et constructif, tout en laissant beaucoup de place pour mes initiatives personnelles. Ils m'ont poussés à être exigeant, et m'ont soutenu dans les moments difficiles. Leur rencontre m'a énormément apporté.

Je remercie également Patrick Laborde, qui dirige notre équipe de recherche. Il m'a suivi de près avec beaucoup de bienveillance, et m'a donné de nombreux conseils très judicieux. Son action a été très importante, notamment pour le démarrage et le suivi de la thèse.

Celle-ci n'aurait pu voir le jour sans l'intérêt et le soutien de Marc Balzano, ingénieur à Airbus-France. Son dynamisme, ses qualités d'écoutes, et ses capacités à porter notre projet dans son entreprise ont été déterminantes pour amorcer la thèse. Je le remercie également pour la confiance qu'il m'a témoigné et la motivation qu'il m'a transmis, tout au long de la thèse.

Je remercie également les deux rapporteurs de cette thèse, Anthony Gravouil et Patrick Hild. Leur expertise scientifique fait référence, et je suis très reconnaissant qu'ils s'associent à ce travail.

Il me faut également saluer Julien Pommier, ingénieur de recherche, qui m'a beaucoup aidé pendant la thèse. Il m'a transmis un peu de sa grande expérience du calcul numérique, avec beaucoup de générosité et de pertinence.

Je remercie également mes plus proches collègues thésards : ils ont partagé mon bureau, et en même temps tous les événements forts de ma thèse. Une amitié forte s'est nouée. Ce sont Yanwen, Cynthia, et bien sur Elie, Matthieu et Erwan.

Un grand merci à tous les membres du département Génie Mathématique et Modélisation de l'INSA. J'ai beaucoup apprécié l'ambiance chaleureuse qui y règne et les valeurs humaines qui y sont défendues.

J'ai également beaucoup de gratitude envers les personnes que j'ai rencontré à Airbus, pour leurs encouragements et leur intérêt : Laurence Le Divenah, Pierre-Jean Rohic, Bruno Rosenberg et Delphine Gardonio.

Je remercie enfin toutes les personnes qui m'ont soutenu et qui ont tant comptées pour moi. Corinne, au début de la thèse. Et Elise. Tous mes amis : Marie qui me suit depuis longtemps (bientôt ton tour de soutenir !), Fanny, Juliette et Guillaume. Du labo : Tiphaine et Aude. Et bien sur les anciens : Marc, Ludo, Gino, Sylvain et Jean. Ainsi que Pablo, Raphaël, Stéphanie, Déborah, Cécile, Steve, Antoine et Gwénaël.

Je ne peux trouver les bons mots pour ma famille, qui est formidable, et riche de ses différences. Je veux citer en particulier mon père, mes frères Benjamin et Cédric, et mes petites perles de soeurs Julia et Clara. Les autres aussi m'entourent avec beaucoup d'affection, et je souhaite les remercier chaleureusement. Pour finir, une pensée affectueuse pour mon grand-père, irremplaçable, et pour ma mère, qui manque tant.

---

## Résumé

Cette thèse est consacrée au développement de méthodes numériques pour la simulation de plaques et coques fissurées. Pour ce problème, les méthodes classiques sont basées sur la Méthode des Elements Finis (MEF). En raison de la présence d'une singularité en fond de fissure, la MEF souffre de plusieurs défauts. Son taux de convergence n'est pas optimal. De plus, en cas de propagation de la fissure, le domaine doit être remaillé.

Une nouvelle méthode d'éléments finis, introduite en 1999 et baptisée XFEM, permet de s'affranchir de ces inconvénients. Dans cette méthode, la base éléments finis est enrichie par des fonctions de forme spécifiques qui représentent la séparation du matériau et la singularité de fond de fissure. Ainsi, domaine et fissure sont indépendants et le taux de convergence est optimal.

Dans cette thèse, on développe deux formulations XFEM adaptées à un modèle de plaques minces. Ces méthodes ont pu être implémentées dans la bibliothèque d'éléments finis Getfem++, et testées sur des exemples où la solution exacte est connue. L'étude d'erreur montre que la méthode XFEM possède un taux de convergence optimal, alors que la MEF montre une convergence plus lente.

L'autre contribution de cette thèse concerne le calcul de Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC) : ces grandeurs indiquent le risque de propagation de la fissure. Nous proposons deux méthodes de calcul originales, basées sur nos formulations XFEM. La première méthode utilise l'intégrale-J, et la deuxième fournit une estimation directe, sans post-traitement.

---

## Abstract

This thesis is devoted to the development of numerical methods for cracked plate and shell computations. For this issue, classical methods are based on the Finite Element Method (FEM). Due to the presence of a singularity near the crack tip, the FEM has several drawbacks. Its convergence rate is not optimal. Moreover, if the crack propagates, the domain must be remeshed.

A new finite element method, introduced in 1999 and called XFEM, enables to avoid these drawbacks. In this method, the finite element base is enriched by specific shape functions which represent the discontinuity of the material and the crack tip singularity. In consequence, domain and crack are independent and the rate of convergence is optimal.

In this thesis, we develop two XFEM formulations adapted to thin plates. These methods have been implemented in the finite element toolbox Getfem++, and tested on benchmark problems where the exact solution is known. The measure of the error shows that XFEM has an optimal rate of convergence, whereas the FEM shows a lower convergence.

The other contribution of this thesis deals with the Stress Intensity Factors (SIF) : these variables indicate the risk of propagation of a crack. We propose two original computation methods, based on our XFEM formulations. The first uses the J-integral, and the other provides a direct estimation, without post-treatment.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>Table des figures</b>	<b>9</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 Modélisation en éléments finis des plaques fissurées</b>	<b>21</b>
1 Modèles de plaques . . . . .	22
1.1 Généralités . . . . .	22
1.2 Modèle de Kirchhoff-Love . . . . .	23
1.3 Modèle de Mindlin-Reissner-Naghdi . . . . .	32
2 Discrétisation par la Méthode des Eléments Finis (MEF) . . . . .	39
2.1 Discrétisation du modèle de Kirchhoff-Love en éléments finis $C^1$ .	39
2.2 Traitement du verrouillage numérique pour le modèle de Mindlin-Reissner . . . . .	42
3 Mécanique de la rupture . . . . .	51
3.1 Modes de rupture et facteurs d'intensité de contrainte (FIC) . . .	51
3.2 Calcul de FIC par Intégrale-J . . . . .	54
3.3 Simulation numérique de la propagation de fissure en MEF . . . .	56
<b>2 Etat de l'art de la méthode XFEM appliquée aux plaques fissurées en flexion</b>	<b>59</b>
1 Méthode XFEM appliquée aux problèmes d'élasticité bidimensionnelle .	60
1.1 Première version de la méthode . . . . .	60
1.2 Améliorations et contributions diverses . . . . .	62
2 Méthode XFEM appliquée aux plaques en flexion . . . . .	67
2.1 XFEM avec éléments finis MITC 4 . . . . .	67
2.2 XFEM appliquée à un modèle de coque non-linéaire . . . . .	69

2.3	Couplage XFEM 3D / coque . . . . .	69
<b>3</b>	<b>The eXtended Finite Element Method for thin cracked plates with Kirchhoff-Love theory</b>	<b>71</b>
1	Introduction . . . . .	71
2	The Model Problem . . . . .	73
2.1	Notations and variational formulation . . . . .	73
2.2	Asymptotic displacement near the crack tip and Fracture Modes .	75
3	Finite element approximation of the Kirchhoff-Love model . . . . .	76
3.1	Choice of the finite element discretization . . . . .	76
3.2	Integral matching . . . . .	77
4	XFEM enrichments . . . . .	78
4.1	Basics . . . . .	78
4.2	An incompatibility between H-enrichment and the FVS element .	80
4.3	First enrichment strategy : adding degrees of freedom on each node	82
4.4	Two dofs enrichment strategies . . . . .	83
4.5	Second enrichment strategy : global nonsmooth functions and integral matching . . . . .	84
5	Numerical experiments . . . . .	85
5.1	Test problem . . . . .	85
5.2	Convergence curves . . . . .	85
5.3	Condition number . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Calcul de Facteurs d'Intensité de Contrainte (FIC)</b>	<b>93</b>
1	Méthodes de calcul . . . . .	94
1.1	Première méthode : estimation directe . . . . .	94
1.2	Deuxième méthode : calcul par intégrale-J . . . . .	97
2	Résultats Numériques . . . . .	103
2.1	Description de l'étude numérique . . . . .	103
2.2	Estimation directe . . . . .	104
2.3	Intégrale-J . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Travaux préliminaires pour l'application de la méthode XFEM au modèle de Mindlin-Reissner</b>	<b>121</b>
1	Deux solutions exactes du modèle de Mindlin-Reissner avec fissure . . .	122

2	Etude d'erreur de la méthode XFEM, en l'absence de verrouillage . . . .	123
2.1	Formulation XFEM utilisée . . . . .	124
2.2	Expériences numériques . . . . .	124
3	Conclusion du chapitre . . . . .	131
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>133</b>
	<b>Annexes</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>
	<b>Notations</b>	<b>165</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Table des figures

1	Boite à fissure : les 8 éléments ont un sommet sur le fond de fissure. . . . .	16
2	Transformation du quadrangle $Q_2$ en un triangle "Barsoum". . . . .	16
1.1	Repérage de la plaque . . . . .	22
1.2	Schématisation des degrés de liberté de l'élément d'Argyris . . . . .	40
1.3	Schématisation des degrés de liberté de l'élément HCT . . . . .	40
1.4	Schématisation des degrés de liberté de l'élément FVS . . . . .	41
1.5	Schéma du cas-test : plaque en flexion . . . . .	44
1.6	Coupe de la solution numérique, pour plusieurs valeurs de $\varepsilon$ . . . . .	45
1.7	En haut : erreur de l'élément QUAD 4. En bas : la solution numérique pour $\varepsilon = 5.10^{-6}$ (maillage structuré). . . . .	49
1.8	En haut : erreur de l'élément MITC 4. En bas : la solution numérique pour $\varepsilon = 5.10^{-6}$ (maillage structuré). . . . .	50
1.9	Repère polaire, avec la fissure en trait gras. . . . .	52
1.10	Mode 1, dans les deux modèles ( $K_I$ et $K_I$ ). . . . .	52
1.11	Mode 2 du modèle de Mindlin-Reissner ( $K_{II}$ ) . . . . .	53
1.12	Mode 3 du modèle de Mindlin-Reissner ( $K_{III}$ ) . . . . .	53
1.13	Mode 2 du modèle de Kirchhoff-Love ( $K_2$ ). . . . .	53
2.1	A gauche, MEF classique : la fissure coïncide avec les interfaces des mailles. A droite, XFEM : la fissure est libre. . . . .	60
2.2	Noeuds enrichis. . . . .	61
2.3	Transformation d'une méthode d'intégration sur un carré en une méthode définie sur un triangle. . . . .	63
2.4	Sous-découpage de l'élément contenant le fond de fissure. . . . .	63
2.5	Enrichissement XFEM, avec zone d'enrichissement de rayon $\mathcal{R}$ . . . . .	65
2.6	Précision du FIC $K_I$ en fonction de l'épaisseur, avec MEF (No Enrichment) et XFEM (Enrichment). . . . .	68

TABLE DES FIGURES

---

3.1	Cracked thin plate (the thickness is oversized for the sake of clarity). . . .	73
3.2	Fracture modes for Kirchhoff-Love bending model ( $\Gamma_C$ is the cracked part of the boundary). Left : a symmetric bending leads to mode I. Right : a shear bending leads to mode II. . . . .	75
3.3	System of polar coordinates relatively to the crack tip (the crack is in bold line). . . . .	76
3.4	HCT triangle and FVS quadrangle. Location of degrees of freedom and sub-triangles. . . . .	77
3.5	Matching decomposition of the domain $\Omega$ . . . . .	78
3.6	Comparison of the accuracy between classical FEM and integral matching. . . . .	79
3.7	Set of nodes to be enriched along the crack. . . . .	80
3.8	A particular FVS function : both this function and its derivatives are completely zero on two adjacent sub-triangles. . . . .	81
3.9	Left : only two sub-triangles are crossed, which leads to a singular matrix. Right : three subtriangles are crossed, which leads to an invertible matrix. . . . .	81
3.10	Left : example of mesh leading to a non-invertible linear system, with the crack (in bold line). Right : zoom on the crack. . . . .	81
3.11	Left : entire modified mesh (the straight line is the crack). Right : zoom on the crack. . . . .	82
3.12	Set of nodes enriched by the nonsmooth functions. . . . .	83
3.13	Set of elements which represents the support of the nonsmooth functions (set $\Omega_1$ ). . . . .	85
3.14	Graph of the exact solution, with the Von Mises stress criteria. . . . .	86
3.15	Convergence curves for FEM and XFEM on <u>structured</u> meshes. Top : triangular meshes. Bottom : quadrangular meshes. . . . .	87
3.16	Convergence curves for FEM and XFEM on <u>non-structured</u> meshes. Top : triangular meshes. Bottom : quadrangular meshes. . . . .	88
3.17	Condition numbers of FEM and XFEM first strategy (with 2 or 4 singular dofs). . . . .	90
3.18	Condition numbers of FEM and all XFEM. . . . .	90
4.1	Contours d'intégration pour le calcul de $I^{(1,2)}$ . . . . .	100
4.2	Couronne d'éléments entourant le fond de fissure. . . . .	102
4.3	Schéma du second cas-test de plaque, avec une fissure centrale, soumise à des moments au bord. . . . .	104
4.4	Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en triangles ( $\mathcal{R}$ variable). . . . .	106

4.5	Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en quadrangles ( $\mathcal{R}$ variable).	107
4.6	Calcul de FIC, estimation directe, deuxième cas-test ( $\mathcal{R}$ fixe).	108
4.7	Calcul de FIC, estimation directe, deuxième cas-test ( $\mathcal{R}$ variable).	109
4.8	Convergence des FIC en intégrale-J, maillages triangulaires.	110
4.9	Convergence des FIC en intégrale-J, maillages quadrangulaires.	111
4.10	Calcul du FIC $K_1$ , pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés.	112
4.11	Calcul du FIC $K_1$ , pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés.	113
4.12	Calcul du FIC $K_1$ , pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés.	114
4.13	Calcul du FIC $K_1$ , pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés.	115
4.14	Calcul de FIC, pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangulaires structurés.	117
4.15	Calcul de FIC, pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangulaires non-structurés.	118
4.16	Calcul de FIC, pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadrangulaires non-structurés.	119
5.1	Précisions des méthodes XFEM et FEM, première solution, $\varepsilon = 0.5$ .	126
5.2	Précisions des méthodes XFEM et FEM, première solution, $\varepsilon = 0.1$ et $0.05$ .	127
5.3	Effet de la suppression de l'enrichissement singulier sur $\theta$ , $\varepsilon = 0.5$ .	128
5.4	Précisions des méthodes XFEM et MEF, deuxième solution, $\varepsilon = 0.5$ .	129
5.5	Précisions des méthodes XFEM et MEF, deuxième solution, $\varepsilon = 0.1$ .	130
5.6	Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en triangles ( $\mathcal{R}$ fixe).	137
5.7	Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en quadrangles ( $\mathcal{R}$ fixe).	138
5.8	Calcul du FIC $K_2$ , pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés.	140
5.9	Calcul du FIC $K_2$ , pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés.	141
5.10	Calcul du FIC $K_2$ , pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés.	142
5.11	Calcul du FIC $K_2$ , pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés.	143

TABLE DES FIGURES

---

5.12	Calcul du FIC $K_1$ , pour $\mathcal{R}$ fixe , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés. . . . .	145
5.13	Calcul du FIC $K_1$ , pour $\mathcal{R}$ fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés. . . . .	146
5.14	Calcul du FIC $K_1$ , pour $\mathcal{R}$ fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés. . . . .	147
5.15	Calcul du FIC $K_1$ , pour $\mathcal{R}$ fixe , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés. . . . .	148
5.16	Calcul du FIC $K_2$ , pour $\mathcal{R}$ fixe , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés. . . . .	150
5.17	Calcul du FIC $K_2$ , pour $\mathcal{R}$ fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés. . . . .	151
5.18	Calcul du FIC $K_2$ , pour $\mathcal{R}$ fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés. . . . .	152
5.19	Calcul du FIC $K_2$ , pour $\mathcal{R}$ fixe , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés. . . . .	153
5.20	Calcul de FIC, pour $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadrangles structurés. . . . .	155
5.21	Calcul de FIC, pour $\mathcal{R}$ fixe, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangles structurés. . . . .	157
5.22	Calcul de FIC, pour $\mathcal{R}$ fixe, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangles non-structurés. . . . .	158
5.23	Calcul de FIC, pour $\mathcal{R}$ fixe, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadrangles structurés. . . . .	159
5.24	Calcul de FIC, pour $\mathcal{R}$ fixe, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadrangles non-structurés. . . . .	160

# Introduction

## Contexte industriel

Les plaques et coques minces sont abondamment utilisées en aéronautique. En raison des contraintes importantes que subit la structure d'un avion en vol, l'apparition de petites fissures y est inévitable. Selon les situations, ces fissures sont plus ou moins dangereuses. Certaines fissures ne se propageront pas, d'autres présentent un risque important. Il faut donc maîtriser ce risque.

Une fois qu'une fissure a été détectée, il faut savoir si elle peut être dangereuse ou pas. La sûreté des personnes impose évidemment de réparer la structure dans le premier cas. Mais il ne faut pas réparer toutes les fissures, car dans le deuxième cas où la fissure n'est pas dangereuse, la réparer aura un coût important pour la compagnie aérienne, et causera du retard pour les passagers.

Il faut donc savoir précisément si la fissure est dangereuse ou pas. En dehors de cas extrêmes (fissure très petite ou très grande), ce diagnostic n'est pas facile à poser, car même une petite fissure peut se propager brutalement. Il est clair que l'acuité de ce diagnostic est un enjeu important.

## Mécanique de la rupture

Cette branche de la mécanique étudie l'apparition et la propagation des fissures dans les matériaux. Les travaux fondateurs de cette science sont dus à Griffith (1920), Irwin et Rice (années 1950-1960). Cette théorie postule l'existence d'une énergie de cohésion, qui ne dépend que du matériau. Lorsqu'une fissure se propage, l'énergie libérée par la structure est appelée taux de restitution d'énergie. On considère qu'il y a rupture si le taux de restitution d'énergie est supérieur à l'énergie de cohésion.

Des expériences de rupture seront toujours nécessaires pour en évaluer le risque. Mais la mécanique de la rupture permet d'extrapoler les résultats expérimentaux au cas de structures aéronautiques, et donc de connaître le risque de propagation de fissure. Avec un certain succès : de nos jours les fissures ne sont plus les causes d'accident aérien.

En mécanique de la rupture, l'ensemble des matériaux est divisé en 2 catégories. Ceux dont la rupture est dite fragile, c'est-à-dire ceux dont la rupture se produit pour

une contrainte inférieure à celle de la limite d'élasticité. Donc avant un certain nombre de phénomènes non-linéaire comme la plasticité ou les grandes déformations. L'étude des matériaux fragiles s'appelle la mécanique linéaire de la rupture. Les matériaux dont la rupture n'est pas fragile sont dits ductiles.

Il peut sembler paradoxal de modéliser le comportement relatif à la fissuration par un modèle linéaire. En effet, la présence de fissure implique celle d'une singularité, aussi la contrainte tend vers l'infini près du fond de fissure. Or le modèle linéaire est obtenu en faisant l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations, ce qui montre une contradiction évidente. Cependant, cette théorie donne des résultats intéressants, réalistes et parfois suffisants selon le type d'application visée.

Le concept de Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC) est également une notion importante de la mécanique de la rupture. Les FIC sont équivalents au taux de restitution d'énergie, et donnent une information supplémentaire sur la sollicitation mécanique de la fissure. En outre, ils sont plus souvent utilisés que le taux de restitution d'énergie.

## **La simulation numérique**

A coté des expériences de ruptures, qui permettent de connaître la résistance des matériaux, la simulation numérique apparaît comme un outil de tout premier choix : elle permet de réaliser autant d'expérience que voulu, et de modifier les paramètres physiques, dans les seules limites du logiciel. Ainsi la simulation numérique permet de réduire le nombre d'expériences nécessaires. Elle permet aussi parfois de faire des expériences qui seraient trop coûteuses, impossibles à réaliser, ou même dangereuses.

En calcul de structure, l'outil de base pour la simulation numérique est la méthode des éléments finis. Introduite dans les années 50, elle a été largement diffusée dans le monde industriel dans les années 1960-70 grâce à de nombreux travaux, citons notamment le livre de Zienkiewicz. D'un autre coté, les travaux de nombreux mathématiciens ont permis d'établir le formalisme mathématique nécessaire pour cette méthode. Citons notamment les livres de Ciarlet [5] et Strang & Fix [44], parus pendant les années 1970. Tous ces livres font encore office de références, de nos jours.

## **Modélisation numérique des plaques et coques (sans fissure)**

Les plaques et coques sont des structures tridimensionnelles dont l'épaisseur est mince par rapport aux autres grandeurs caractéristiques. Ces structures peuvent se déformer dans les trois directions de l'espace. Or, des modèles mécaniques ont été développés pour ramener ces problèmes à une étude bidimensionnelle sur le plan médian de la structure. Pour les plaques citons les modèles de Mindlin-Reissner et Kirchhoff-Love, qui sont les plus connus.

La discrétisation numérique de ces deux modèles pose des difficultés particulières, de nature assez différentes. Le modèle de Kirchhoff-Love doit être discrétisé par un élément fini  $C^1$  pour garder une méthode conforme. Ce type d'élément fini est considéré a priori comme coûteux. Quant au modèle de Mindlin-Reissner, il est sujet au phénomène dit de "verrouillage numérique" : la solution numérique de ce modèle est faussée pour les plaques dont le rapport de l'épaisseur sur la longueur est faible. Des éléments sans verrouillage ont été développés, et permettent de traiter ce phénomène. Dans les codes de calcul industriels, parmi les deux modèles cités ici c'est presque toujours le modèle de Mindlin-Reissner qui est choisi.

Pour les modèles de coques, le plan moyen est courbe. Mathématiquement, cela conduit à poser le problème sur une sous-variété différentielle : cet aspect ajoute une difficulté significative dans la formulation et la résolution numérique du problème. Ainsi, dans l'industrie, les coques sont modélisées selon une autre stratégie : la structure est représentée par une collection de facettes planes, qui suivent un modèle de plaque. Le raccord entre chaque facette se fait grâce au lien entre le déplacement tridimensionnel global, et les déplacements de membrane et de flexion, qui sont les grandeurs inconnues dans les modèles de plaque.

## Modélisation des fissures par la méthode des éléments finis

Avec cette méthode, le maillage doit tenir compte de la fissure : celle-ci doit être positionnée sur des interfaces entre les mailles, et le fond de fissure sur un noeud du maillage. Au voisinage du fond de fissure, la mécanique de la rupture prédit que le champ de contrainte tend vers l'infini. Cette description est peut-être discutable physiquement, mais mathématiquement cela implique que le déplacement devient singulier près du fond de fissure.

Le taux de convergence d'une méthode numérique dépend principalement du degré des fonctions de forme utilisées et de la régularité de la solution exacte. Signalons que la présence de cette singularité empêche généralement que le taux de convergence optimal de l'élément fini soit atteint. Par exemple, en élasticité bidimensionnelle, avec des éléments finis  $P_1$ , une solution suffisamment régulière permet d'obtenir une erreur en norme de l'énergie homogène à  $O(h)$  (où  $h$  désigne le pas de maillage). La présence d'une fissure fait descendre ce taux à  $O(\sqrt{h})$ .

Afin de représenter cette singularité le plus précisément possible, il faut raffiner le maillage autour du fond de fissure, ou utiliser un élément spécifique. Pour la deuxième alternative, l'élément de Barsoum [45] est considéré comme une bonne méthode. Il s'agit de construire une "boîte à fissure", constituée d'un carré contenant 8 éléments triangulaires ayant chacun une pointe sur le fond de fissure voir Fig. 1. Sur ces triangles, un élément spécifique est utilisé (Fig 2). Partant d'un quadrangle  $Q_2$ , la longueur d'un des cotés est mise à zéro, ce qui produit un triangle, avec trois noeuds confondus près du fond de fissure. Ensuite, sur les 2 cotés qui touchent le fond de fissure, les noeuds médians sont rapprochés du fond de fissure, d'un quart de la longueur du coté.

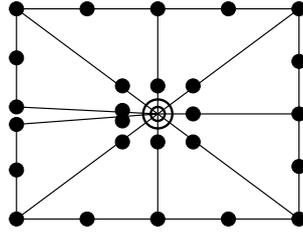


FIG. 1 – Boite à fissure : les 8 éléments ont un sommet sur le fond de fissure.

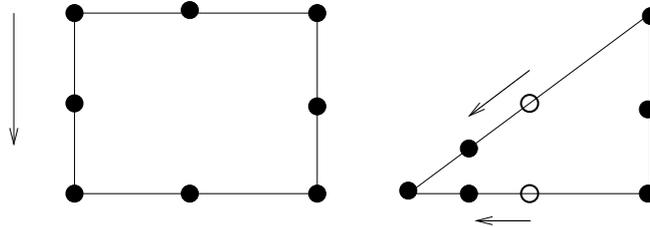


FIG. 2 – Transformation du quadrangle  $Q_2$  en un triangle "Barsoum".

Dans un deuxième temps, le déplacement du domaine est calculé, et le taux de restitution d'énergie est déduit, en général au moyen d'un post-traitement. Si celui-ci dépasse l'énergie de cohésion, et que la fissure doit être propagée, alors cette opération est simulée de manière itérative.

Une loi de propagation indique de quelle longueur on prolonge la fissure (il peut aussi être question d'un changement de direction). Il faut ensuite recalculer le taux de restitution d'énergie. Ce qui nécessite de remailler le domaine, et de mettre à jour le raffinement près du fond de fissure ou les éléments spécifiques de fond de fissure. Cette opération de remaillage est coûteuse, et pas toujours facile à maîtriser. Ensuite, il faut recalculer le déplacement, puis le taux de restitution d'énergie. Tant qu'il est supérieur à l'énergie de cohésion on répète cette procédure.

Dans le codes industriel SAMCEF, le modèle de Mindlin est utilisé, et pour le calcul en domaine fissuré, la zone qui entoure le fond de fissure est extrudée, c'est-à-dire qu'un maillage tridimensionnel est obtenu à partir du maillage de la plaque (ou de la coque). Plusieurs couches d'éléments de Barsoum sont introduites (la version tridimensionnelle de ces éléments suit la même construction que celle décrite pour la version bidimensionnelle).

Le calcul du taux de restitution d'énergie ou des FIC se fait ensuite au moyen de post-traitements définis pour le modèle d'élasticité tridimensionnelle.

## La méthode XFEM

La méthode des éléments finis n'est donc pas bien adaptée à la modélisation de la propagation de fissure, puisque sa mise en oeuvre nécessite des opérations de remaillage et de raffinement de maillage assez lourdes, qui peuvent être difficiles à maîtriser (le maillage automatique de domaines bidimensionnel complexes n'est pas évident).

La méthode des éléments finis étendue, désignée par le sigle XFEM, développée par Moës & co. [17], permet de s'affranchir de ces contraintes. En effet, dans cette méthode, la fissure est représentée indépendamment du maillage, par une représentation explicite. Le domaine est donc maillé sans tenir compte de la fissure, qui est indépendante du maillage. On définit d'abord une méthode d'éléments finis classique sur le maillage. Sur les éléments touchés par la fissure, la base élément fini reçoit des degrés de liberté spécifiques pour représenter les effets de la fissure :

- le long de la fissure, pour représenter la séparation du matériau, on multiplie les fonctions de forme classiques par une fonction de Heaviside.
- Sur l'élément contenant le fond de fissure, les fonctions de forme classique sont multipliées par les singularités du modèle.

Signalons qu'un élément indispensable de la méthode XFEM est une connaissance précise et à priori des singularités du modèle résolu.

L'introduction de la singularité exacte permet d'éviter de raffiner près du fond de fissure. De plus, en cas de propagation, il n'est pas nécessaire de remailler le domaine, car le maillage n'est pas modifié : seuls les degrés de liberté spécifiques qui représentent la fissure et ses effets doivent être mis à jour.

## Autres méthodes

Dans la méthode XFEM, l'idée de l'utilisation de la fonction de Heaviside pour représenter la fissure est quelque chose de nouveau et original. Par contre, l'idée d'enrichir la base élément fini par la singularité n'est pas nouvelle. Par exemple, la méthode dite de la singularité ("Singular Function Method") [44, 42] est antérieure à XFEM, et applique cette idée. C'est une simple méthode d'élément fini où la singularité est ajoutée dans la base. Cette méthode permet d'obtenir un taux de convergence optimal, au moins en théorie.

D'autres méthodes dites "sans maillages" se rapprochent d'XFEM. La méthode GFEM ("Generalized Finite Element Method") permet d'enrichir localement la base élément fini par un large type de fonction de forme spécifique.

Citons également la méthode PUFEM ("Partition of Unity Finite Element Method"). Cette méthode permet d'améliorer les propriétés des espaces éléments finis, en incluant localement des connaissances à priori sur la solution ou l'équation résolue. L'espace élément fini construit reste conforme, grâce à l'utilisation d'une partition de l'unité sur les différentes parties du domaine. Signalons que cette méthode PUFEM a fortement inspiré la formulation de la méthode XFEM.

## Cadre de l'étude

On se place dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, qui correspond au cas de matériaux fragiles. Rappelons que le verre et les aciers à basse température peuvent être classés dans cette catégorie. Dans ce cadre, le modèle de l'élasticité linéarisée est employé. Cette hypothèse est d'ailleurs sous-jacente dans les modèles de plaque de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner.

On suppose de plus que le matériau est homogène isotrope, et que les fissures sont traversantes. Le front de fissure est supposé droit, perpendiculaire au plan moyen de la plaque. L'évolution de la fissure est quasi-statique, afin de pouvoir négliger les effets d'inertie.

## Objet de la thèse

On se propose de développer une méthode XFEM qui soit précise, au coût de calcul raisonnable, et pour laquelle les post-traitements habituels de la mécanique de la rupture soient praticables. Nous porterons une attention particulière au fait que la méthode soit précise jusqu'à des rapports d'épaisseurs sur longueur de  $10^{-4}$ . En effet, cette gamme de valeur n'est pas impossible à rencontrer en aéronautique, car l'épaisseur de tôle peut descendre jusqu'à 1.4 mm.

Dans le cas d'un matériau homogène isotrope, on verra que les équations des modèles de plaques sont découplées : la détermination des déplacements de membrane et ceux de flexion se fait en résolvant deux équations indépendantes. Or, la partie membrane est identique au cas de l'élasticité bidimensionnelle, pour laquelle les références [15, 14] permettent de dire que la méthode XFEM est maîtrisée. C'est la raison pour laquelle notre étude se restreint à la partie flexion du modèle.

Au niveau des post-traitements de mécanique de la rupture, on se limite au calcul des facteurs d'intensité de contrainte. On ne fera pas de propagation, car de nombreux critères existent déjà. Ainsi, nous ne "propagerons" pas de fissure.

Plus généralement, on ne traite pas de matériau composite, de délaminage, de fissure de fatigue.

## Contributions de la thèse

Cette thèse propose deux méthodologies numériques pour l'application de la méthode XFEM aux plaques fissurées en flexion. Ces méthodologies sont basées sur l'utilisation du modèle de Kirchhoff-Love, dont la précision de la résolution numérique ne dépend pas de l'épaisseur. Ces méthodologies ont été implémentées dans la bibliothèque de calcul Getfem++ [9], et les résultats numériques montrent que le taux de convergence est optimal, dans le sens où le taux de convergence de la méthode est identique au cas d'un

problème régulier (sans fissure). Le coût de calcul n'est que légèrement supérieur à celui d'un calcul sur une structure non-fissurée, mené avec le modèle de Mindlin-Reissner.

En se basant sur cette formulation, nous proposons ensuite deux méthodologies pour le calcul des FIC. Ces méthodes ont aussi été implémentées et testées sur des problèmes académiques. La précision obtenue est toujours inférieure à 5%, ce qui est une marge d'erreur acceptable pour un grand nombre d'applications industrielles.

Pour finir, nous donnons quelques résultats préliminaires en vue de l'application d'X-FEM au modèle de Mindlin-Reissner. Il s'agit de deux solutions exactes singulières de ce modèle (en présence d'une fissure), et d'une étude d'erreur utilisant ces solutions dans une situation exempte de verrouillage numérique. Cette étude permet de valider le choix des fonctions singulières d'enrichissement.

## Plan de la thèse

Les chapitres 1 et 2 rappellent les notions essentielles permettant de décrire les résultats nouveaux de cette thèse. Ces résultats nouveaux sont exposés chapitres 3 à 5.

Le premier chapitre regroupe toutes les notions liées à la discrétisation de plaques fissurées en flexion avec la méthode des éléments finis. Il est sous-découpé en 3 parties : la première décrit précisément les formulations des modèles de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner. Il apparaît notamment que le premier modèle aboutit à une formulation variationnelle posée dans  $H^2$ , alors que pour le second modèle elle l'est dans  $H^1$ . Dans la deuxième sous-partie, nous passons en revue des méthodes d'éléments finis pour les deux modèles. Pour le modèle de Kirchhoff-Love, nous portons une attention particulière sur les éléments HCT et FVS réduits. Pour le modèle de Mindlin-Reissner, les éléments présentés sont sans verrouillage numérique, et quelques tests numériques montrent la stabilité de l'erreur relative en fonction de l'épaisseur. Ces éléments de Mindlin sont considérés comme la référence pour les codes de calcul industriels, comportent autant de degrés de liberté que les éléments HCT/FVS réduits. La troisième sous-partie du chapitre expose plusieurs notions de mécanique linéaire de la rupture : les singularités et les FIC des deux modèles, ainsi que les sollicitations mécaniques correspondantes. Ensuite, on présente l'intégrale-J pour le modèle de Kirchhoff-Love, qui permet de calculer les FIC.

Dans le second chapitre, on présente un état de l'art du sujet de cette thèse. Dans un premier temps on expose un certain nombre de travaux consacrés au problème de l'élasticité bidimensionnelle, mais qui s'adaptent directement au cas des plaques. Ces contributions améliorent la précision ou la méthodologie numérique, citons notamment [15, 14], dans lesquels l'introduction d'une zone d'enrichissement singulier de rayon fixe permet d'obtenir un taux de convergence optimal. Rappelons que la première formulation XFEM [17] montre une amélioration de l'erreur mais pas du taux de convergence. Dans un deuxième temps, on présente les travaux sur la méthode XFEM consacrés précisément aux plaques et aux coques fissurées. Les travaux les plus aboutis sont [16], où la méthodologie XFEM utilise le modèle de Mindlin-Reissner. Les résultats numériques y sont très intéressants. Cependant, malgré l'utilisation d'un élément sans verrouillage numérique, la

méthode XFEM montre une perte de précision sur les plaques les plus minces, indiquant un verrouillage numérique résiduel.

Dans le troisième chapitre (rédigé en anglais), on présente deux formulations XFEM originales, basées sur le modèle de Kirchhoff-Love. La première partie est inspirée de la méthode XFEM telle que présentée dans [15], où chaque noeud dans la zone d'enrichissement singulier reçoit un jeu de degrés de libertés singuliers. Dans la deuxième méthode, l'enrichissement est remplacé par un nombre réduit de fonctions de forme singulières : une par mode singulier, dont le support recouvre la zone d'enrichissement total. Pour ces deux méthodes, des tests numériques montrent que le taux de convergence est optimal, identique à celui d'un problème régulier sans fissure, bien qu'un conditionnement relativement élevé soit mis en évidence.

Dans le quatrième chapitre, on présente deux méthodes de calculs de FIC, leurs formulations, ainsi que des références indiquant le type de convergence auquel on peut s'attendre. Dans un second temps, on présente des résultats numériques de ces deux méthodes sur deux cas-tests académiques, dont la taille de la fissure est différente. Les résultats numériques montrent que l'erreur globale est inférieure à 5 % en maillages non-structurés, et à 1 % en maillages structurés. Pour la première méthode de calcul, nous proposons une règle pratique permettant de créer un maillage dont le raffinement est suffisant pour obtenir une bonne valeur des FIC.

Le chapitre 5 est consacré à l'application de la méthode XFEM au modèle de Mindlin-Reissner. La difficulté principale pour réaliser cet objectif est de formuler des enrichissements singuliers qui ne produisent pas de verrouillage numérique. Cette difficulté n'est pas traitée dans cette thèse ; en revanche nous donnons les premiers éléments utiles en vue de la validation d'une telle formulation. Dans la première partie du chapitre, nous donnons deux solutions exactes du modèle de Mindlin-Reissner en présence d'une fissure. Ces solutions sont inédites. Dans la seconde partie nous présentons une étude d'erreur, dans une situation exempte de verrouillage numérique. En partant d'une méthode XFEM standard utilisant les singularités du modèle de Mindlin-Reissner, le taux de convergence optimal (identique à celui d'un problème sans fissure) est atteint. Ceci permet de valider le choix des fonctions d'enrichissement.

# Chapitre 1

## Modélisation en éléments finis des plaques fissurées

Une plaque est un solide tridimensionnel, dont l'épaisseur est bien plus petite que les 2 autres dimensions. En partant d'hypothèses adéquates, et en intégrant dans l'épaisseur, l'étude de cet objet se ramène à celle d'un problème bidimensionnel, ce qui la simplifie considérablement.

Les deux modèles de plaques les plus utilisés sont les modèles de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner. Ils sont obtenus en partant d'hypothèses physiques légèrement différentes, tout en suivant des méthodologies globalement similaires.

Nous verrons que selon les modèles, le problème variationnel obtenu est assez différent. Notamment, l'un est posé dans  $H^2$ , l'autre dans  $H^1$  (ces espaces sont définis dans [1]). Et, naturellement, la résolution numérique par éléments finis se fait au moyen de méthodes très différentes :

- pour le modèle de Kirchhoff-Love (problème posé dans  $H^2$ ), il est indispensable d'utiliser un élément fini  $C^1$  pour garder une méthode conforme, ce qui peut être considéré comme coûteux, numériquement.
- Les éléments  $C^0$  suffisent pour le modèle de Mindlin-Reissner, mais ce modèle a la particularité d'être sujet au phénomène de verrouillage numérique. Des méthodologies particulières existent pour traiter ce phénomène.

Nous passerons en revue quelques méthodes courantes de bas degré, et nous verrons au final qu'elles sont de coût et de précision analogues.

En présence d'une fissure, les solutions de ces modèles présentent des singularités. Nous passerons en revue leurs expressions pour les deux modèles. Il apparaîtra clairement que ces singularités empêchent les méthodes d'éléments finis standards d'atteindre leurs taux de convergence optimal.

Nous présenterons enfin quelques notions de mécanique de la rupture, comme les Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC), qui mesurent l'amplitude des singularités. Les FIC sont des grandeurs importantes du point de vue applicatif.

Ce chapitre est donc découpé en 3 parties :

1. Présentation des modèles de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner
2. Quelques méthodes de discrétisation par éléments finis
3. Notions de mécanique de la rupture et singularités en présence de fissure.

## 1 Modèles de plaques

### 1.1 Généralités

Une plaque est une structure tridimensionnelle plane, dont l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions. Pour fixer les idées, nous supposons que le plan moyen de la plaque, que l'on désigne par  $\Omega$ , est inclus dans le plan d'altitude nulle  $x_3 = 0$ , voir Fig. 1.1. Le déplacement inconnu est à 3 dimensions, comme en élasticité 3D. Mais les hypothèses physiques des modèles de plaque permettent de ramener ce problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel, posé sur le plan moyen. Ceci se fait en intégrant dans l'épaisseur. La dépendance en  $x_3$  est donc explicite dans les modèles. Ainsi les déplacements inconnus seront bidimensionnels, ce qui les rend plus simple à étudier.

Le solide complet  $\Omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  est noté  $\Omega^\varepsilon$ . L'épaisseur de la plaque vaut donc  $2\varepsilon$ . Le bord supérieur de la plaque est noté  $\Gamma_+^\varepsilon$ , et le bord inférieur  $\Gamma_-^\varepsilon$ . La tranche est notée  $\Gamma^\varepsilon$ , et elle est partagée en 3 parties disjointes  $\Gamma_0^\varepsilon$ ,  $\Gamma_1^\varepsilon$  et  $\Gamma_2^\varepsilon$ , sur lesquelles la plaque est supposée respectivement encastree, en appui simple et libre.

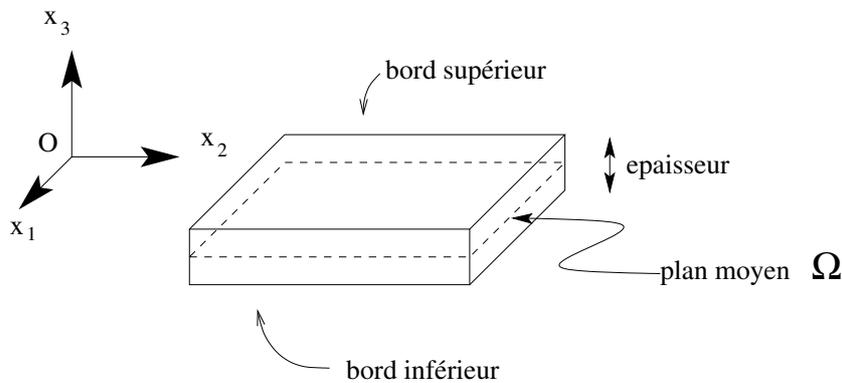


FIG. 1.1 – Repérage de la plaque

**Convention 1** *Sauf indication contraire, nous utiliserons la convention de sommation implicite sur les indices répétés. Les indices en caractères **grecs** vont de 1 à 2, tandis que les indices en caractères **latins** vont de 1 à 3.*

Dans les deux modèles de plaques de ce chapitre, on se place dans le cadre de l'élasticité linéarisée, ce qui correspond à supposer que les déformations et les déplacements sont petits. Le tenseur des déformations, qui dépend du déplacement tridimensionnel  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , sera noté  $\gamma_{ij}(u)$ .

**Hypothèse 1 (Elasticité linéarisée)** *Le tenseur des déformations est linéarisé. Son expression est :*

$$\gamma_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (1.1)$$

où  $\partial_i$  désigne  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

On fait aussi l'hypothèse dite des "sections planes" :

**Hypothèse 2 (Section planes)** *On suppose qu'un segment normal au plan moyen reste droit et de longueur constante après déformation, ce qui entraîne notamment :*

$$\gamma_{33}(u) = 0. \quad (1.2)$$

## 1.2 Modèle de Kirchhoff-Love

### Hypothèses physiques

Le modèle de Kirchhoff-Love est parfois appelé dans la littérature le modèle "classique" de plaque. On considère les deux hypothèses suivantes, en plus des hypothèses ci-dessus.

**Hypothèse 3** *La déformation dite de "cisaillement transverse" est supposée nulle :*

$$\gamma_{\alpha 3}(u) = 0. \quad (1.3)$$

**Hypothèse 4** *Les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{\alpha 3}$  et celles de pincement  $\sigma_{33}$  sont supposées négligeables devant les contraintes planes  $\sigma_{\alpha\beta}$  (mais elles ne sont pas supposées identiquement nulles).*

Au niveau géométrique, ces hypothèses se traduisent par le fait que la normale au plan moyen reste orthogonale à la surface moyenne après déformation. Cette propriété géométrique différencie le modèle de Kirchhoff-Love de celui de Mindlin-Reissner.

### Expression du déplacement dans le modèle de Kirchhoff-Love

Les hypothèses physiques de ce modèle donnent une forme particulière au champ de déplacement tridimensionnel :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \underline{u}_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha u_3(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.4)$$

Ainsi, la connaissance des 3 fonctions  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, u_3$  permet de reconstituer le déplacement total. Ces 3 fonctions inconnues ne dépendent que des 2 variables  $x_1$  et  $x_2$ , et la dépendance en  $x_3$  est explicite.

Les déplacements horizontaux  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  sont appelés les déplacements de *membrane*, tandis que le déplacement vertical  $u_3$  est appelé la *flèche*. Les fonctions  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  s'interprètent simplement comme les déplacements dans le plan  $(O, x_1, x_2)$  des points du plan moyen  $\Omega$ . Il s'agit donc de son déplacement de membrane.

Notons que le terme  $-\partial_\alpha u_3$  correspond à la rotation des fibres verticales de la plaque. Ce terme est couramment appelé "rotation de la normale". Dans le modèle de Kirchhoff-Love, étant donné qu'il reste perpendiculaire au plan moyen après déformation, il est défini par le gradient de  $u_3$ . Mais ce n'est pas le cas dans le modèle de Mindlin-Reissner, où cette grandeur constitue une variable indépendante (et donc une inconnue supplémentaire du problème).

On peut déduire l'expression du tenseur des déformations à partir de l'équation (1.4). C'est un tenseur  $2 \times 2$  (car  $\gamma_{\alpha 3}(u) = 0$  dans le modèle de Kirchhoff-Love) :

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(u) &= \frac{1}{2} [\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\alpha (\underline{u}_\beta - x_3 \partial_\beta u_3) + \partial_\beta (\underline{u}_\alpha - x_3 \partial_\alpha u_3)] \\ &= \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}) - x_3 \partial_{\alpha\beta}^2 u_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

### Loi de comportement

La loi de comportement relie la déformation à la contrainte. On considère une loi de comportement élastique linéaire ; la relation entre ces deux tenseurs est donc linéaire, de la forme  $\gamma_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta\lambda\mu} \sigma_{\lambda\mu}$ , où  $S_{\alpha\beta\lambda\mu}$  est la restriction plane du tenseur de souplesse, d'ordre 4. On cherche donc la loi qui donne la relation inverse, de la forme :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \overline{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}, \quad (1.6)$$

en notant  $\overline{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}$  l'inverse du tenseur  $S_{\alpha\beta\lambda\mu}$ .

Dans le cas homogène isotrope, on considère pour  $S_{\alpha\beta\lambda\mu}$  la restriction plane de la loi de Hooke :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\lambda\lambda} \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.7)$$

où  $\delta_{\alpha\beta}$  désigne le symbole de Kronecker ( $\delta_{\alpha\beta} = 1$  si  $\alpha = \beta$ , 0 sinon).

En inversant cette relation, on obtient donc la loi de comportement pour une plaque de Kirchhoff-Love :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta} + \nu \gamma_{\lambda\lambda} \delta_{\alpha\beta}]. \quad (1.8)$$

### Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème de Kirchhoff-Love conduit à séparer les contraintes en deux parties : les efforts dits de *membrane* et ceux de *flexion*. Les premiers interviennent dans le déplacement tangentiel (composantes  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$ ), les seconds influencent le déplacement vertical (la composante  $u_3$ ).

**Définition 1** *L'effort de membrane (ou effort résultant) est défini par :*

$$n_{\alpha\beta} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} dx_3. \quad (1.9)$$

**Définition 2** *Le moment de flexion vaut :*

$$m_{\alpha\beta} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3. \quad (1.10)$$

Sous certaines hypothèses que nous détaillerons plus loin, cette séparation des contraintes conduit à 2 problèmes découplés : le premier ayant le déplacement  $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$  comme inconnu, le second  $u_3$ .

**Chargement** Les forces volumiques appliquées sur la plaque sont notées  $f_i^V$ . On note  $g_i^+$  la force surfacique appliquée sur le bord supérieur  $\Gamma_+^\varepsilon$ , et  $g_i^-$  la force appliquée sur la partie inférieure  $\Gamma_-^\varepsilon$ . On considère qu'il n'y a pas de force surfacique appliquée sur la tranche de la plaque.

Pour écrire le principe des travaux virtuels (ou formulation variationnelle), on part de l'expression générique. En notant  $u$  et  $v$  des déplacements tridimensionnels de composantes  $u_i$  et  $v_i$ , on a la formulation :

*Trouver  $u$ , tel que*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(v) dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^V v_i dx + \int_{\Gamma_\pm^\varepsilon} g_i^\pm v_i dx \quad \forall v. \quad (1.11)$$

On va faire apparaître les déplacements de Kirchhoff-Love, de la forme du membre de droite de (1.4). Dans le membre de gauche de (1.11), en décomposant  $\int_{\Omega^\varepsilon}$  en  $\int_\Omega \int_{-\varepsilon}^\varepsilon$ , et en transformant  $\gamma_{\alpha\beta}(v)$  selon l'expression (1.5), on fait apparaître les tenseurs  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(v) dx &= \int_\Omega \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \sigma_{\alpha\beta} [\gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) - x_3 \partial_{\alpha\beta}^2 v_3] dx_3 d\Omega \\ &= \int_\Omega \left[ \underbrace{\left( \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right)}_{n_{\alpha\beta}} \gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) - \underbrace{\left( \int_{-\varepsilon}^\varepsilon x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right)}_{m_{\alpha\beta}} \partial_{\alpha\beta}^2 v_3 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (1.12)$$

Rappelons que  $\gamma_{\alpha\beta}(\underline{v})$  et  $\partial_{\alpha\beta}^2 v_3$  sont indépendants de  $x_3$ .

Le second membre sera noté  $l(v)$  ou  $l(\underline{v}_\alpha, v_3)$ . Décomposons le chargement afin d'isoler les contributions qui travaillent dans les différents déplacements  $\underline{v}_\alpha$ ,  $v_3$ ,  $\partial_\alpha v_3$ . Pour cela nous décomposons encore  $\int_{\Omega^\varepsilon}$  en  $\int_\Omega \int_{-\varepsilon}^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^V v_i dx &= \int_{\Omega} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f_\alpha^V (\underline{v}_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3) + f_3^V v_3] dx_3 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left[ \underbrace{\left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\alpha^V dx_3 \right)}_{F_\alpha} \underline{v}_\alpha + \underbrace{\left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3^V dx_3 \right)}_{F_3} v_3 - \underbrace{\left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_\alpha^V dx_3 \right)}_{M_\alpha} \partial_\alpha v_3 \right] d\Omega
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\int_{\Gamma_\pm^\varepsilon} g_i^\pm v_i dx = \int_{\Omega, x_3=\pm\varepsilon} [g_\alpha^\pm (\underline{v}_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3) + g_3^\pm v_3] d\Omega \tag{1.14}$$

$$= \int_{\Omega} \left[ \underbrace{(g_\alpha^+ + g_\alpha^-)}_{F_\alpha} \underline{v}_\alpha + \underbrace{(g_3^+ + g_3^-)}_{F_3} v_3 - \varepsilon \underbrace{(g_\alpha^+ - g_\alpha^-)}_{M_\alpha} \partial_\alpha v_3 \right] d\Omega \tag{1.15}$$

En regroupant les contributions qui travaillent sur chacun des déplacements, on peut donc exprimer le second membre en fonction des déplacements de Kirchhoff-Love. Ces contributions sont notées :

$$F_i = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_i^V dx_3 + g_i^+ + g_i^- \tag{1.16}$$

$$M_\alpha = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_\alpha^V dx_3 + \varepsilon (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) \tag{1.17}$$

Avec ces notations, on peut exprimer le second membre en fonction de  $\underline{v}_\alpha, v_3, \partial_\alpha v_3$  :

$$l(v) = l(\underline{v}_\alpha, v_3) = \int_{\Omega} F_\alpha \underline{v}_\alpha d\Omega + \int_{\Omega} F_3 v_3 d\Omega - \int_{\Omega} M_\alpha \partial_\alpha v_3 d\Omega \tag{1.18}$$

Pour donner l'expression de la formulation variationnelle (ou principe des travaux virtuels), on note  $V$  l'espace des déplacements  $(\underline{v}_\alpha, v_3)$  de la forme (1.4) et vérifiant les conditions aux limites du problème.

**Equation (Formulation variationnelle)** *Le problème se formule : Trouver  $(\underline{u}_\alpha, u_3) \in V$ , tel que  $\forall (\underline{v}_\alpha, v_3) \in V$ , on ait :*

$$\int_{\Omega} n_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega} m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 v_3 d\Omega = l(\underline{v}_\alpha, v_3). \tag{1.19}$$

**Remarque 1** *A propos de cette formulation (1.19) :*

- le déplacement inconnu  $u = (\underline{u}_\alpha, u_3)$  ne figure pas explicitement. Il faut donc exprimer les tenseurs  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$  avec la loi de comportement pour le faire apparaître.
- Les notions introduites permettent de manipuler une formulation qui fait appel à des intégrales sur le plan moyen  $\Omega$ , et non plus sur le volume complet. On est passé d'un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel.

### Expression du problème en déplacement

Pour obtenir cette expression, on va introduire la loi de comportement. On obtiendra donc l'expression des tenseurs  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$  en fonction de  $(\underline{u}_\alpha, u_3)$ . Afin de formuler des équations valables pour toute loi élastique linéaire (pas forcément homogène istrope), on introduira 3 tenseurs  $E_{\alpha\beta\lambda\mu}$ ,  $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$  et  $D_{\alpha\beta\lambda\mu}$ .

Calculons donc les expressions des tenseurs  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$  en fonction de  $\underline{u}$  et  $u_3$  :

$$\begin{aligned}
 n_{\alpha\beta} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \\
 &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u) dx_3 \\
 &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} (\gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) - x_3 \partial_{\lambda\mu}^2 u_3) dx_3 \\
 &= \left( \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \right) \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) - \left( \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \right) \partial_{\lambda\mu}^2 u_3 \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

car  $\gamma_{\lambda\mu}(\underline{u})$  et  $\partial_{\lambda\mu}^2 u_3$  ne dépendent pas de  $x_3$ . De la même manière, on obtient :

$$m_{\alpha\beta} = \left( \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \right) \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) - \left( \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3^2 \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \right) \partial_{\lambda\mu}^2 u_3 \quad (1.21)$$

On introduit maintenant les 3 notations suivantes :

$$E_{\alpha\beta\lambda\mu} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \quad (1.22)$$

$$H_{\alpha\beta\lambda\mu} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \quad (1.23)$$

$$D_{\alpha\beta\lambda\mu} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3^2 \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \quad (1.24)$$

Et finalement, on obtient l'expression des tenseurs  $n$  et  $m$  en fonction du champ de déplacement  $u$  :

$$\begin{aligned}
 n_{\alpha\beta} &= E_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) - H_{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 u_3 \\
 m_{\alpha\beta} &= H_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) - D_{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 u_3
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ce qui donne l'expression du problème variationnel en déplacement :

**Equation (Problème en déplacement)** Trouver le déplacement  $u = (\underline{u}, u_3) \in V$ , tel que

$$\begin{aligned}
 \forall v = (\underline{v}, v_3) \in V, \text{ on ait : } &\int_{\Omega} (E_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) - H_{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 u_3) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) d\Omega \\
 &- \int_{\Omega} (H_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) - D_{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 u_3) \partial_{\alpha\beta}^2 v_3 d\Omega = l(\underline{v}, v_3)
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

avec :  $l(\underline{v}, v_3)$  donné par (1.18).

Faisons maintenant une remarque importante :

**Remarque 2** Si le matériau est homogène par rapport à  $x_3$ , le tenseur  $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$  est nul, ce qui a pour effet de découpler le problème variationnel en 2 sous-problèmes indépendants. Ce sera le cas pour un matériau homogène isotrope, que nous traitons en détails.

**Cas homogène isotrope** Dans le cas d'un matériau homogène, le tenseur  $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$  ne dépend pas de  $x_3$ , donc les tenseurs  $E_{\alpha\beta\lambda\mu}$ ,  $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ ,  $D_{\alpha\beta\lambda\mu}$  (définis par (1.22), (1.23) et (1.24)) valent :

$$E_{\alpha\beta\lambda\mu} = 2\varepsilon \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} ; H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0 ; D_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{2\varepsilon^3}{3} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \quad (1.27)$$

Et ainsi, en utilisant l'expression de la loi de comportement (1.8), et les expressions (1.25) des tenseurs  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$  :

$$n_{\alpha\beta} = \frac{2E\varepsilon}{1-\nu^2} [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}) + \nu \gamma_{\lambda\lambda}(\underline{u}) \delta_{\alpha\beta}] \quad (1.28)$$

$$m_{\alpha\beta} = -\frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu) \partial_{\alpha\beta}^2(u_3) + \nu \Delta u_3 \delta_{\alpha\beta}] \quad (1.29)$$

Ainsi les expressions des formulations variationnelles des problèmes de membrane et flexion sont :

**Equation (Problème de membrane)** Trouver  $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$  tel que :

$$\forall \underline{v}, \frac{2E\varepsilon}{1-\nu^2} \int_{\Omega} (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) + \nu \gamma_{\alpha\alpha}(\underline{u}) \gamma_{\beta\beta}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} F_{\alpha} v_{\alpha} d\Omega \quad (1.30)$$

avec  $F_{\alpha} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_{\alpha}^V dx_3 + g_{\alpha}^{+} + g_{\alpha}^{-}$ .

**Equation (Problème de flexion)** Trouver  $u_3$  tel que :

$$\forall v_3, \frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} \int_{\Omega} [(1-\nu) \partial_{\alpha\beta}^2 u_3 \partial_{\alpha\beta}^2 v_3 + \nu \Delta u_3 \Delta v_3] d\Omega = \int_{\Omega} F_3 v_3 - M_{\alpha} \partial_{\alpha} v_3 d\Omega \quad (1.31)$$

avec  $F_3 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_3^V dx_3 + g_3^{+} + g_3^{-}$  et  $M_{\alpha} = \varepsilon(g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-}) + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 f_{\alpha}^V dx_3$ .

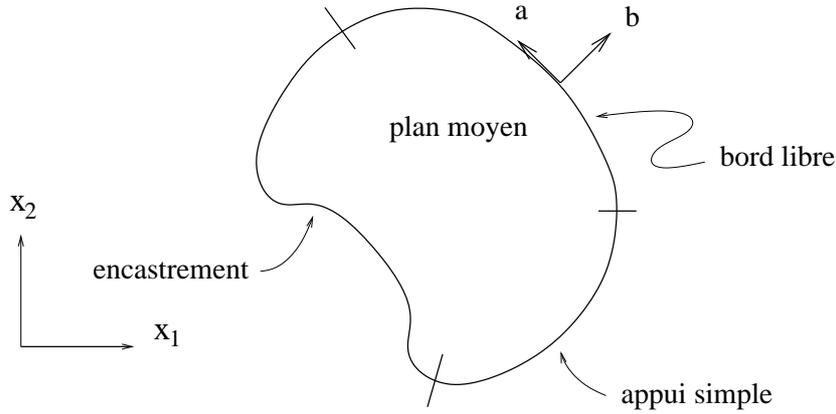
### Existence et unicité

Il existe une solution unique aux problèmes (1.30) et (1.31) sous deux conditions :

- Les mouvements de corps rigides sont bloqués, par exemple quand une partie du bord du domaine, de mesure non-nulle, porte une condition aux limites d'encastrement ou d'appui simple.
- Les solutions  $\underline{u}_{\alpha}$  et  $u_3$  sont cherchées dans les espaces  $[H^1(\Omega)]^2$  dans  $H^2(\Omega)$ , dont la définition précise peut être trouvée dans [1].

### Equations d'équilibre dans le cas homogène isotrope

Après avoir donné les expressions des formulations variationnelles dans le cas homogène isotrope, nous donnons les équations des problèmes au sens "fort". Le bord du domaine  $\Omega$  est noté  $\Gamma$ , et on en fait une partition en 3 sous-domaines  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ , sur lesquels la condition aux limites est respectivement un encastrement, un appui simple et un bord libre. Le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur est noté  $b$ . On considère également le vecteur tangent au bord, noté  $a$ , tel que  $(b, a)$  soit un repère direct. Les dérivées normales et tangentiels sont notées  $\partial_b$  et  $\partial_a$ .



#### Equation de membrane :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{E\varepsilon}{1-\nu^2} [(1-\nu)\partial_{\beta\beta}^2 \underline{u}_\alpha + (1+\nu)\partial_{\alpha\beta}^2 \underline{u}_\beta] = F_\alpha \quad \text{sur } \Omega \\ \underline{u}_\alpha = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \\ n_\alpha b_\alpha = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

L'équation sur  $\Omega$  peut également s'écrire en fonction de l'effort de membrane :

$$-\partial_\beta n_{\alpha\beta} = F_\alpha. \quad (1.33)$$

Les expressions de  $n_{\alpha\beta}$  et  $F_\alpha$  ont été données équations (1.28) et (1.16).

#### Equation de flexion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2Ee^3}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 u_3 = F_3 + \partial_\alpha M_\alpha \quad \text{sur } \Omega \\ \left. \begin{array}{l} u_3 = 0 \\ \partial_b u_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \left. \begin{array}{l} u_3 = 0 \\ m_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \left. \begin{array}{l} \partial_a (m_{\alpha\beta} b_\alpha a_\beta) + (\partial_\alpha m_{\alpha\beta}) b_\beta = -M_\alpha b_\alpha \\ m_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (1.34)$$

L'équation sur  $\Omega$  peut aussi s'écrire en fonction du moment de flexion :

$$-\partial_{\alpha\beta}^2 m_{\alpha\beta} = F_3 + \partial_\alpha M_\alpha. \quad (1.35)$$

Les expressions de  $m_{\alpha\beta}$  et  $M_\alpha$  ont été données par (1.29) et (1.17).

**Remarque 3** *Le problème de membrane possède une seule condition aux limites qui est vectorielle, alors que le problème de flexion en possède 2, qui sont scalaires. Ceci est dû au fait que le premier est un problème vectoriel d'ordre 2, alors que le second est un problème scalaire d'ordre 4.*

### Contrainte de cisaillement transverse

L'une des hypothèses fondamentales du modèle de Kirchhoff-Love est de supposer que la contrainte de cisaillement transverse  $\sigma_{\alpha 3}$  est négligeable devant les contraintes planes  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Cette hypothèse conduit à négliger cette contrainte dans la loi de comportement.

Toutefois, les contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$  ne sont pas nulles dans le modèle de Kirchhoff-Love. Notamment, la contrainte de cisaillement transverse peut jouer un rôle important dans l'évaluation des grandeurs significatives de la fissuration. Il est donc important de disposer d'une estimation de cette contrainte. Classiquement, celle-ci s'obtient à partir des équations d'équilibre tri-dimensionnelles.

Appliquons donc ces équations à la plaque, avec le chargement défini dans cette section (forces volumiques  $f_i^V$ , et surfaciques  $g_i^+$  et  $g_i^-$  sur  $\Gamma_+^\varepsilon$  et  $\Gamma_-^\varepsilon$ ). On obtient :

$$\begin{cases} -\partial_j \sigma_{ij} = f_i^V & \text{sur } \Omega^\varepsilon \\ \sigma_{i3} b_3 = g_i^\pm & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon \end{cases} \quad (1.36)$$

La première équation peut se décomposer selon :

$$\partial_3 \sigma_{i3} = -\partial_\alpha \sigma_{i\alpha} - f_i^V. \quad (1.37)$$

Remarquons que la condition de bord libre sur  $\Gamma_-^\varepsilon$  implique que  $\sigma_{i3} = -g_i^-$  sur  $\Gamma_-^\varepsilon$  (c'est-à-dire en  $x_3 = -\varepsilon$ ). Puis intégrons la dernière expression par rapport à  $x_3$  :

$$\sigma_{i3} = -g_i^- - \int_{-\varepsilon}^{x_3} \partial_\alpha \sigma_{i\alpha} - \int_{-\varepsilon}^{x_3} f_i \quad (1.38)$$

On en déduit, pour le cisaillement transverse  $\sigma_{\alpha 3}$  :

$$\sigma_{\alpha 3} = -g_\alpha^- - \int_{-\varepsilon}^{x_3} \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} - \int_{-\varepsilon}^{x_3} f_\alpha \quad (1.39)$$

On va maintenant expliciter cette expression. Dans le modèle de Kirchhoff-Love, les contraintes planes  $\sigma_{\alpha\beta}$  s'expriment en fonction de la déformation  $\gamma_{\alpha\beta}(u)$  via la loi de comportement :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u) = \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} [\gamma_{\lambda\mu}(u) - x_3 \partial_{\lambda\mu}^2 u_3] \quad (1.40)$$

Par ailleurs, on a établi les expression de  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$ , équation (1.25). Pour simplifier, on suppose que la plaque est homogène dans l'épaisseur, donc  $\bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}$  ne dépend pas de  $x_3$ . Ceci simplifie l'expression (1.25) (en annulant le tenseur  $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ ), et on obtient :

$$\begin{aligned} n_{\alpha\beta} &= 2\varepsilon \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) \\ m_{\alpha\beta} &= -\frac{2\varepsilon^3}{3} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 u_3 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ainsi, on en déduit l'expression de  $\sigma_{\alpha\beta}$  en fonction des grandeurs  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$ , qui sont indépendantes de  $x_3$  :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\varepsilon} \left( n_{\alpha\beta} + x_3 \frac{3}{\varepsilon^2} m_{\alpha\beta} \right) \quad (1.42)$$

Remplaçons  $\sigma_{\alpha\beta}$  par son expression (1.42) dans l'expression (1.39) :

$$\sigma_{\alpha 3} = -g_{\alpha}^{-} - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{x_3} \left( \partial_{\beta} n_{\alpha\beta} + s \frac{3}{\varepsilon^2} \partial_{\beta} m_{\alpha\beta} \right) ds - \int_{-\varepsilon}^{x_3} f_{\alpha} ds. \quad (1.43)$$

L'équation d'équilibre du problème de membrane a aussi été exprimée par  $-\partial_{\beta} n_{\alpha\beta} = F_{\alpha}$ , (1.33), où  $F_{\alpha}$  est la résultante des forces  $f_{\alpha}^V$  et  $g_{\alpha}^{\pm}$ . De plus, comme  $m_{\alpha\beta}$  ne dépend pas de  $x_3$ , on peut calculer facilement :

$$\sigma_{\alpha 3} = -g_{\alpha}^{-} + \frac{x_3 + \varepsilon}{2\varepsilon} F_{\alpha} - \frac{3(x_3^2 - \varepsilon^2)}{4\varepsilon^3} \partial_{\beta} m_{\alpha\beta} - \int_{-\varepsilon}^{x_3} f_{\alpha} ds. \quad (1.44)$$

**Remarque 4** Comme  $F_{\alpha} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_{\alpha}^V dx_3 + g_{\alpha}^{+} + g_{\alpha}^{-}$ , on peut voir ici que :

$$\sigma_{\alpha 3}(+\varepsilon) = g_{\alpha}^{+}, \quad (1.45)$$

ce qui est consistant avec la condition tridimensionnelle de bord libre.

**Définition 3** L'effort tranchant  $T_{\alpha}$ , pour le modèle de Kirchhoff-Love, est défini par :

$$T_{\alpha} = \partial_{\beta} m_{\alpha\beta} \quad (1.46)$$

En intégrant la relation (1.44), on va montrer que l'intégrale du cisaillement transverse est liée à  $T_{\alpha}$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha 3} dx_3 &= -2\varepsilon g_{\alpha}^{-} + \left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{x_3 + \varepsilon}{2\varepsilon} dx_3 \right) F_{\alpha} \\ &\quad - \left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{3(x_3^2 - \varepsilon^2)}{4\varepsilon^3} dx_3 \right) T_{\alpha} - \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left( \int_{-\varepsilon}^{x_3} f_{\alpha}(x_1, x_2, s) ds \right) dx_3 \end{aligned} \quad (1.47)$$

Cette équation (1.47) va se simplifier. D'abord, on a :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{x_3 + \varepsilon}{2\varepsilon} dx_3 = \varepsilon,$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{3(x_3^2 - \varepsilon^2)}{4\varepsilon^3} dx_3 = -1,$$

puis en utilisant une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left( \int_{-\varepsilon}^{x_3} f_\alpha(x_1, x_2, s) ds \right) dx_3 &= \left[ x_3 \int_{-\varepsilon}^{x_3} f_\alpha(x_1, x_2, s) ds \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_\alpha dx_3 \\ &= \varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\alpha dx_3 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_\alpha dx_3. \end{aligned}$$

En regroupant, l'équation (1.47) devient :

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = -2\varepsilon g_\alpha^- + \varepsilon F_\alpha + T_\alpha - \varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\alpha dx_3 + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_\alpha dx_3 \quad (1.48)$$

En remplaçant  $F_\alpha$  par sa valeur, on obtient :

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = \varepsilon(g_\alpha^+ - g_\alpha^-) + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_\alpha dx_3}_{M_\alpha} + T_\alpha \quad (1.49)$$

Le terme souligné a été défini, équation (1.17), comme la résultante du moment appliqué  $M_\alpha$ .

On obtient finalement la relation suivante :

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = T_\alpha + M_\alpha, \quad (1.50)$$

qui montre un résultat important ; l'effort tranchant  $T_\alpha$ , défini par  $\partial_\beta m_{\alpha\beta}$ , est homogène à l'intégrale sur l'épaisseur du cisaillement transverse lorsque  $M_\alpha = 0$ .

### 1.3 Modèle de Mindlin-Reissner-Naghdi

#### Hypothèses physiques

Dans ce modèle, en plus des hypothèses déjà formulées dans la partie 1.1, (élasticité linéarisée, et hypothèse dite des "sections planes"), on fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5** la contrainte  $\sigma_{33}$ , dite de pincement, est négligeable devant les autres contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$ .

### Expression du déplacement dans le modèle de Mindlin-Reissner

Dans ce modèle, un segment normal au plan moyen peut ne pas lui rester orthogonal après déformation. Ainsi, la *rotation de la normale*, notée  $\theta_\alpha$  est une inconnue supplémentaire du problème (dans le modèle de Kirchhoff-Love, on avait  $\theta_\alpha = -\partial_\alpha u_3$ ).

Ainsi, dans le modèle de Mindlin-Reissner, on considère des champs de déplacements de la forme :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= \underline{u}_\alpha(x_1, x_2) + x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.51)$$

Par conséquent, la déformation de cisaillement transverse n'est pas nulle. Les termes  $\gamma_{\alpha 3}(u)$  valent :

$$\gamma_{\alpha 3}(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_3 + \partial_3 u_\alpha) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha) \neq 0 \quad (1.52)$$

Dans le modèle de Kirchhoff-Love, ces termes étaient supposés nuls.

A partir de (1.51), on peut déduire l'expression du tenseur des déformation. Comme  $\gamma_{33}$  est supposé nul, on présente séparément les composantes planes  $\gamma_{\alpha\beta}(u)$  et celles de cisaillement transverse  $\gamma_{\alpha 3}(u)$  :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) = \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}) + x_3 \gamma_{\alpha\beta}(\theta) \quad (1.53)$$

$$\gamma_{\alpha 3}(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha) \quad (1.54)$$

### Loi de comportement

Par rapport au modèle de Kirchhoff-Love, on a en plus les termes  $\sigma_{\alpha 3}$  et  $\gamma_{\alpha 3}$  (rappelons que  $\gamma_{33}$  est supposé nul, et que  $\sigma_{33}$  sera négligé devant les autres composantes  $\sigma_{\alpha i}$ ). On va faire l'hypothèse des matériaux monocliniques (qui englobe le cas homogène isotrope), ce qui signifie :

- les termes  $\sigma_{\alpha\beta}$  ne dépendent pas de  $\gamma_{\alpha 3}$ ,
- et les termes  $\sigma_{\alpha 3}$  ne dépendent ni de  $\gamma_{\alpha\beta}$  ni de  $\gamma_{33}$ .

On en déduit que la loi de comportement est de la forme :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = \overline{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu} \\ \sigma_{\alpha 3} = \overline{R}_{\alpha 3\lambda 3} \gamma_{\lambda 3} + \overline{R}_{\alpha 33\lambda} \gamma_{3\lambda} = 2 \overline{R}_{\alpha 3\lambda 3} \gamma_{\lambda 3} \end{cases} \quad (1.55)$$

Dans le cas homogène isotrope, on utilise la loi de Hooke. Pour les termes  $\sigma_{\alpha\beta}$ , la relation est identique à celle obtenue dans le cas Kirchhoff-Love, équation (1.8) :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta} + \nu \gamma_{\lambda\lambda} \delta_{\alpha\beta}]. \quad (1.56)$$

Pour les termes  $\sigma_{\alpha 3}$ , un facteur de correction  $\kappa$  est souvent introduit. En prenant en compte ce facteur, la loi de Hooke conduit à :

$$\sigma_{\alpha 3} = \kappa \frac{E}{1+\nu} \gamma_{\alpha 3}. \quad (1.57)$$

Le coefficient  $\kappa$  est souvent pris égal à  $\frac{5}{6}$ .

### Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, on va écrire le problème variationnel du modèle de Mindlin, d'abord indépendamment de la loi de comportement. Le chargement est exprimé de la même manière qu'avec Kirchhoff-Love : des forces volumiques  $f_i^V$  sont appliquées sur la plaque, et des forces surfaciques  $g_i^+$  et  $g_i^-$  sont appliquées sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Les conditions aux limites du modèle sont les mêmes que précédemment (encastrement, appui simple et bord libre).

En notant  $u$  et  $v$  deux déplacements tridimensionnels de composantes  $u_i$  et  $v_i$ , l'expression du principe des travaux virtuels donne :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij} \gamma_{ij}(v) dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^V v_i dx + \int_{\Gamma_\pm^\varepsilon} g_i^\pm v_i dx, \forall v. \quad (1.58)$$

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème de plaque, il faut ramener le problème sur le plan moyen, et l'exprimer en fonction des inconnues de Mindlin-Reissner, définies en (1.51).

Dans l'intégrande du membre de gauche, on remplace  $\gamma_{ij}(v)$  par son expression (1.53 - 1.54). De plus  $v$  est défini par un triplet des déplacements de Mindlin-Reissner, notés  $(\underline{v}_\alpha, v_3, \psi_\alpha)$  :

$$\sigma_{ij} \gamma_{ij}(v) = \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) + x_3 \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\psi) + \sigma_{\lambda 3} (\partial_\alpha v_3 + \psi_\alpha) \quad (1.59)$$

Pour le terme cisaillement transverse, le facteur  $\frac{1}{2}$  dans (1.54) disparaît car la double somme  $\sigma_{ij} \gamma_{ij}(v)$  contient  $\sigma_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}(v) + \sigma_{3\alpha} \gamma_{3\alpha}(v)$ , qui vaut  $2 \sigma_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}(v)$ .

On introduit cette expression dans (1.58), et en transformant  $\int_{\Omega^\varepsilon}$  en  $\int_\Omega \int_{-\varepsilon}^\varepsilon$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij} \gamma_{ij}(v) d\Omega^\varepsilon \\ &= \int_\Omega \left( \underbrace{\int_{-\varepsilon}^\varepsilon \sigma_{\alpha\beta}}_{n_{\alpha\beta}} \right) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) + \left( \underbrace{\int_{-\varepsilon}^\varepsilon x_3 \sigma_{\alpha\beta}}_{m_{\alpha\beta}} \right) \gamma_{\alpha\beta}(\psi) + \left( \underbrace{\int_{-\varepsilon}^\varepsilon \sigma_{\alpha 3}}_{T_\alpha} \right) (\partial_\alpha v_3 + \psi_\alpha) d\Omega \quad (1.60) \end{aligned}$$

De cette manière, on a mis en évidence 3 grandeurs importantes. Les grandeurs  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$ , qui désignent les efforts de membrane et le moment de flexion, sont définies comme pour le modèle de Kirchhoff-Love, expressions (1.9) et (1.10). Définissons maintenant la troisième grandeur :

**Définition 4** *L'effort tranchant est défini par :*

$$T_\alpha = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (1.61)$$

Passons maintenant au membre de droite. Par un calcul similaire à celui mené équations (1.13) à (1.18), on obtient l'expression du second membre, en fonction des différents déplacements  $(\underline{v}_\alpha, v_3, \psi_\alpha)$  (il suffit de remplacer  $-\partial_\alpha v_3$  par  $\psi_\alpha$ ). Ensuite, les composantes du chargement  $f_i^V$  et  $g_i^\pm$  sont regroupées dans des résultantes globales, notées  $F_i$  et  $M_\alpha$ , dont les expressions ont déjà été données équations (1.16) et (1.17). Donc le membre de droite peut s'écrire :

$$l(v) = l(\underline{v}_\alpha, v_3, \psi_\alpha) = \int_{\Omega} F_\alpha \underline{v}_\alpha d\Omega + \int_{\Omega} F_3 v_3 d\Omega + \int_{\Omega} M_\alpha \psi_\alpha d\Omega \quad (1.62)$$

En notant  $W$  l'espace des déplacements admissibles de la forme (1.51), on peut écrire l'expression de la formulation variationnelle :

**Equation** Trouver  $(\underline{u}_\alpha, u_3, \theta_\alpha) \in W$ , tel que  $\forall (\underline{v}_\alpha, v_3, \psi_\alpha) \in W$ , on ait :

$$\int_{\Omega} n_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) d\Omega + \int_{\Omega} m_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\psi) d\Omega + \int_{\Omega} T_\alpha (\partial_\alpha v_3 + \psi_\alpha) d\Omega = l(\underline{v}_\alpha, v_3, \psi_\alpha) \quad (1.63)$$

Cette formulation (1.63) est posée sur le plan moyen. Pour faire apparaître les inconnues  $(\underline{u}_\alpha, u_3, \theta_\alpha)$ , il faut calculer  $n_{\alpha\beta}$ ,  $m_{\alpha\beta}$ , et  $T_\alpha$  au moyen de la loi de comportement.

### Expression du problème en déplacement

Pour calculer les tenseurs  $n_{\alpha\beta}$ ,  $m_{\alpha\beta}$  et  $T_\alpha$ , on va suivre la même démarche que pour le modèle de Kirchhoff-Love, et introduire les mêmes tenseurs  $E_{\alpha\beta\lambda\mu}$ ,  $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$  et  $D_{\alpha\beta\lambda\mu}$  :

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta\lambda\mu} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \\ H_{\alpha\beta\lambda\mu} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \\ D_{\alpha\beta\lambda\mu} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3^2 \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} dx_3 \end{aligned}$$

De plus, on introduit ici le tenseur  $G_{\alpha\lambda}$  :

$$G_{\alpha\lambda} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 2 \bar{R}_{\alpha 3 \lambda 3} dx_3 \quad (1.64)$$

Dans le cas du modèle de Kirchhoff-Love, les tenseurs  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$  ont été calculés équations (1.20) à (1.25). Il suffit de remplacer  $-\partial_\alpha u_3$  par  $\theta_\alpha$  dans ces équations pour déduire les expressions de  $n_{\alpha\beta}$  et  $m_{\alpha\beta}$  dans le modèle de Mindlin-Reissner. Ce qui donne :

$$n_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) + H_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\theta) \quad (1.65)$$

$$m_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) + D_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\theta) \quad (1.66)$$

De la même manière, en utilisant l'expression (1.55), le tenseur  $T_\alpha$  vaut :

$$T_\alpha = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 2 \bar{R}_{\alpha 3 \lambda 3} \gamma_{\lambda 3}(u) dx_3 = \frac{1}{2} G_{\alpha \lambda} (\partial_\lambda u_3 + \theta_\lambda) \quad (1.67)$$

car  $\gamma_{\lambda 3}(u)$  ne dépend pas de  $x_3$ . En reprenant l'expression du principe des travaux virtuels (1.63), on fait apparaître  $(\underline{u}_\alpha, u_3, \theta_\alpha)$  ainsi que la loi de comportement :

**Principe des travaux virtuels** Trouver  $(\underline{u}_\alpha, u_3, \theta_\alpha) \in W$ , tel que  $\forall (\underline{v}_\alpha, v_3, \psi_\alpha) \in W$ , on ait :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [E_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) + H_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\theta)] \gamma_{\alpha\beta}(\underline{v}) \\ & + \int_{\Omega} [H_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\underline{u}) + D_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\theta)] \gamma_{\alpha\beta}(\psi) \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{\alpha\lambda} (\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha) (\partial_\lambda v_3 + \psi_\lambda) = l(\underline{v}, v_3, \psi) \end{aligned} \quad (1.68)$$

L'expression du second membre a été donnée par l'équation (1.62).

**Remarque 5** Comme dans le modèle de Kirchhoff-Love, si le tenseur  $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$  s'annule, alors on peut découpler le problème en deux sous-problèmes : l'un dit de membrane, l'autre dit de "flexion-rotation" (qui détermine les inconnues  $(u_3, \theta_\alpha)$ ).

**Cas homogène isotrope** Dans ce cas, pour exprimer la formulation variationnelle, il suffit d'explicitier les tenseurs  $E_{\alpha\beta\lambda\mu}$ ,  $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ ,  $D_{\alpha\beta\lambda\mu}$  et  $G_{\alpha\lambda}$ , puis de reporter ces expressions dans les expressions de  $n_{\alpha\beta}$ ,  $m_{\alpha\beta}$  et  $T_\alpha$ , équations (1.65), (1.66) et (1.67).

De la même manière qu'avec le modèle de Kirchhoff-Love, on calcule facilement :

$$E_{\alpha\beta\lambda\mu} = 2\varepsilon \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} ; H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0 ; D_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{2\varepsilon^3}{3} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \quad (1.69)$$

Comme  $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$  est nul, le problème de membrane sera découplé de celui de flexion. De plus, comme les résultats sont identiques au cas Kirchhoff-Love, l'expression de  $n_{\alpha\beta}$  sera identique, et celle de  $m_{\alpha\beta}$  ne diffèrera que par le changement de  $\partial_{\alpha\beta}^2 u_3$  en  $\gamma_{\alpha\beta}(\theta)$  :

$$n_{\alpha\beta} = \frac{2E\varepsilon}{1-\nu^2} [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}) + \nu \gamma_{\lambda\lambda}(\underline{u}) \delta_{\alpha\beta}] \quad (1.70)$$

$$m_{\alpha\beta} = \frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\theta) + \nu \gamma_{\lambda\lambda}(\theta) \delta_{\alpha\beta}] \quad (1.71)$$

Le tenseur  $G_{\alpha\lambda}$  se calcule facilement à partir de (1.55) :

$$G_{\alpha\lambda} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 2 \bar{R}_{\alpha 3 \lambda 3} dx_3 = \frac{2E\kappa\varepsilon}{1+\nu}, \quad (1.72)$$

ce qui permet d'exprimer  $T_\alpha$  :

$$T_\alpha = \frac{2 E \kappa \varepsilon}{1 + \nu} \gamma_{\alpha 3}(u) = \frac{E \kappa \varepsilon}{1 + \nu} (\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha). \quad (1.73)$$

Comme le tenseur  $n_{\alpha\beta}$  possède la même expression dans les 2 modèles, le problème variationnel de membrane en Mindlin-Reissner est identique à l'expression (1.30).

Le problème de flexion-rotation sera lui assez différent :

**Equation (Flexion-Rotation)** Trouver  $(u_3, \theta_\alpha)$  tel que :

$$\begin{aligned} \forall (v_3, \psi_\alpha), \frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} \int_\Omega [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\theta) \gamma_{\alpha\beta}(\psi) + \nu \gamma_{\alpha\alpha}(\theta) \gamma_{\beta\beta}(\psi)] d\Omega \\ + \frac{E \kappa \varepsilon}{1 + \nu} \int_\Omega (\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha) (\partial_\alpha v_3 + \psi_\alpha) d\Omega = \int_\Omega (F_3 v_3 + M_\alpha \psi_\alpha) d\Omega \end{aligned} \quad (1.74)$$

avec  $F_3 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_3^V dx_3 + g_3^+ + g_3^-$  et  $M_\alpha = \varepsilon(g_\alpha^+ - g_\alpha^-) + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 f_\alpha^V dx_3$ .

**Remarque 6** Dans cette formulation (1.74), on peut remarquer que le paramètre d'épaisseur  $\varepsilon$  ne joue pas le même rôle dans les 2 termes : pour la flexion il est élevé au cube, alors qu'il n'apparaît qu'à la puissance 1 pour l'autre terme. Dans le cas où  $\varepsilon$  est petit, ce déséquilibre est source de verrouillage numérique (cet aspect sera exposé dans la section suivante).

### Existence et unicité

Le problème (1.74) admet une unique solution sous 2 conditions.

- Les déplacements de corps rigides sont bloqués (par exemple une partie du bord du domaine, de mesure non-nulle, porte une condition d'encastrement ou d'appui simple).
- Les fonctions inconnues  $\underline{u}_\alpha$ ,  $u_3$  et  $\theta_\alpha$  sont cherchées dans  $H^1(\Omega)$  (espace défini dans [1]).

### Equations d'équilibre

Il y a trois équations d'équilibre : l'équation de membrane, celle de flexion et celle de rotation. Celle de membrane, découplée des 2 autres, est identique à celle obtenue avec le modèle de Kirchhoff-Love, voir équation (1.32). Les inconnues  $u_3$  et  $\theta_\alpha$  sont couplées dans les équations de flexion et de rotation.

De la même manière que dans le modèle de Kirchhoff-Love, la normale unitaire extérieure est notée  $b$ , et le vecteur tangent  $a$ , de telle manière que  $(b, a)$  soit un repère direct.

**Equation de flexion dans le cas homogène isotrope**

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{E \kappa \varepsilon}{1 + \nu} (\partial_{\alpha\alpha}^2 u_3 + \partial_\alpha \theta_\alpha) = F_3 \quad \text{sur } \Omega \\ u_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \\ T_\alpha b_\alpha = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right.$$

avec  $F_3$  et  $T_\alpha$  donnés par (1.16) et (1.73).

**Equation de rotation dans le cas homogène isotrope**

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)\partial_{\beta\beta}^2\theta_\alpha + (1+\nu)\partial_{\alpha\beta}^2\theta_\beta] + \frac{E\kappa\varepsilon}{1+\nu}(\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha) = M_\alpha \quad \text{sur } \Omega \\ \theta_\alpha = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ m_{\alpha\beta} b_\beta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (1.75)$$

Les expressions de  $M_\alpha$  et  $m_{\alpha\beta}$  ont été données par (1.17) et (1.71).

Les deux équations sur  $\Omega$  de ces deux problèmes peuvent aussi s'écrire respectivement :

$$-\partial_\alpha T_\alpha = F_3 \quad (1.76)$$

$$-\partial_\beta m_{\alpha\beta} + T_\alpha = M_\alpha. \quad (1.77)$$

## 2 Discrétisation par la Méthode des Éléments Finis (MEF)

Dans ce chapitre nous présentons quelques éléments sur le calcul du champ de déplacement d'une plaque avec la méthode des éléments finis. Pour chacun des deux modèles considérés, la discrétisation pose des difficultés spécifiques.

Le modèle de Kirchhoff-Love conduit à une formulation variationnelle posée dans  $H^2$ . Or, pour construire un espace d'approximation conforme, il faut un élément fini  $C^1$ . Nous passerons en revue quelques éléments, en terminant sur les éléments HCT/FVS réduits, dont le coût raisonnable et la bonne précision ont retenu notre attention.

Le modèle de Mindlin-Reissner pose des difficultés d'un tout autre genre. Sa formulation variationnelle est posée dans  $H^1$ , ce qui permet donc l'utilisation d'un élément fini  $C^0$ . Mais il est bien connu des numériciens que ce modèle de Mindlin-Reissner est sujet au phénomène dit de "verrouillage numérique". En effet, pour les plaques dont le rapport épaisseur/longueur est faible, les éléments  $P_1$ -triangulaires ou  $Q_1$ -quadrangulaires, qui auraient dûs être suffisants, conduisent à des résultats entachés d'erreurs. Beaucoup de travaux ont été dédiés à cette difficulté, et de nombreux éléments ont été développés qui évitent ce phénomène, le plus célèbre étant le QUAD 4. Nous passerons en revue quelques uns de ces éléments et les principes sous-jacents qui permettent d'éviter le verrouillage numérique.

### 2.1 Discrétisation du modèle de Kirchhoff-Love en éléments finis $C^1$

La formulation variationnelle du modèle de Kirchhoff-Love est posée dans  $H^2$ , et elle met en jeu des dérivées d'ordre 2. L'utilisation d'éléments finis de continuité seulement  $C^0$  n'est donc pas adéquat, car la dérivée seconde de telles fonctions n'est en général pas  $L^2$ , ce qui n'est pas utilisable dans un cadre standard.

Notre présentation des éléments finis  $C^1$  se restreint aux méthodes d'approximation conforme : l'espace d'approximation est inclus dans  $H^2$ . L'essentiel de ce que nous présentons est issu de la référence [5].

L'exemple le plus célèbre d'élément fini  $C^1$  est le triangle d'Argyris. Ses fonctions de forme sont des polynômes  $P_5$  sur chaque élément. Notons  $(a_1, a_2, a_3)$  les sommets du triangle, et  $(a_{12}, a_{13}, a_{23})$  les milieux de ses cotés.

$$\Sigma_k = \{p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_{11}^2 p(a_i), \partial_{12}^2 p(a_i), \partial_{22}^2 p(a_i), 1 \leq i \leq 3, \partial_n p(a_{12}), \partial_n p(a_{13}), \partial_n p(a_{23})\}$$

La dimension de l'espace  $P_5$  est 21, et l'élément d'Argyris possède 6 degrés de liberté par noeud, plus un degré de liberté (ddl) sur chaque arête.

Pour diminuer le coût de calcul, il est possible de restreindre l'espace  $P_5$  : on peut ajouter la contrainte que la dérivée normale le long de l'arête soit de degrés 3 seulement (au lieu de 4), ce qui supprime les 3 ddl sur les arêtes. Ceci conduit à l'élément dit de Bell, ou Argyris réduit. La dimension de l'espace  $P_5$  réduit est 18.

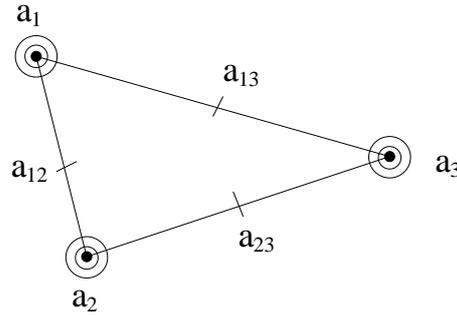


FIG. 1.2 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément d'Argyris

Cependant, il a pu être prouvé qu'en prenant des fonctions polynomiales par élément, ce triangle de Bell est optimal : il n'est pas possible de construire un élément fini  $C^1$ , avec des fonctions polynomiales sur chaque triangle, dont la dimension soit inférieure à 18. Donc pour réduire encore le coût de calcul, il faut utiliser des fonctions de forme non-polynomiales.

Dans l'élément HCT (du nom de ses 3 concepteurs : Hsieh, Clough et Tocher), l'utilisation de fonctions polynomiales par morceaux a permis de faire baisser le coût. Dans cet élément, le triangle est sous-divisé en 3 sous-triangles, et les fonctions de forme sont polynomiales par morceaux : ce sont des polynômes  $P_3$  sur chacun des sous-triangles, raccordés globalement  $C^1$  sur tout l'élément. Pour ce raccord, il suffit d'imposer la continuité de la fonction et de ses dérivées au centre de l'élément (noté  $a$  sur la figure 1.3), ainsi que l'égalité de la dérivée normale au centre des 3 segments  $[a, a_i]$ . Les 3 sous-triangles sont notés  $K_i$ .

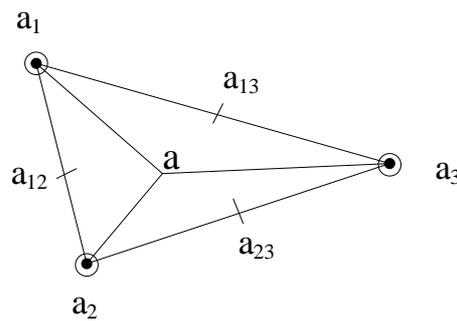


FIG. 1.3 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément HCT

Les 3 polynômes  $P_3$  font 30 degrés de liberté. L'égalité de la fonction et de ses dérivées en chaque noeud  $a_i$  induit 9 contraintes. Le raccord  $C^1$  au centre ajoute 6 contraintes, et la continuité de la dérivée normale le long des segments  $[a, a_i]$  ajoute aussi 3 contraintes. Il reste donc 12 degrés de liberté : la fonction et ses 2 dérivées en chaque noeud, ainsi que

la dérivée normale le long des côtés.

$$\begin{aligned}
 P_K &= \{p \in \mathcal{C}^1(K); p|_{K_i} \in P_3(K_i), 1 \leq i \leq 3\} ; \dim P_K = 12 \\
 \Sigma_k &= \{p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), 1 \leq i \leq 3 \\
 &\quad \partial_n p(a_{12}), \partial_n p(a_{13}), \partial_n p(a_{23})\}
 \end{aligned}$$

Ce nombre de 12 degrés de liberté est presque satisfaisant. Il est encore possible de le faire baisser, en appliquant l'idée de réduction qui a conduit au triangle de Bell. En effet, on peut réduire l'espace  $P_K$  des fonctions de forme du HCT, en imposant que la dérivée normale ne soit que  $P_1$  (au lieu de  $P_2$ ) le long des bords. Ceci permet d'éliminer les 3 ddl de dérivée normale le long du bord, et on obtient un élément à 3 degrés de liberté par noeud (la fonction et ses 2 dérivées).

Passer de 12 à 9 peut sembler une économie marginale. En réalité, en terme de nombre total de ddl, l'impact est important. Dans le cas d'un maillage triangulaire structuré, le nombre de ddl est presque divisé par 2. En effet, sur un quadrillage de  $N^2$  carrés, avec chaque carré divisé en 2 triangles rectangles isocèles, on a  $(N + 1)^2$  noeuds, donc  $3(N + 1)^2$  ddl en HCT réduit. Passer en HCT complet ajoute 1 ddl par arête, et on peut facilement voir qu'il y a  $3N^2 + 2N$  arêtes. Asymptotiquement, le HCT complet double le nombre de ddl.

L'élément HCT, réduit ou complet, possède un équivalent en quadrilatère, nommé FVS (pour Fraejijs de Veubeke et Sanders). Le quadrilatère est divisé en 4 triangles, voir Fig 1.4. Comme pour le triangle HCT, les fonctions de forme sont des polynômes  $P_3$  sur chaque sous-triangle, raccordés  $\mathcal{C}^1$ .

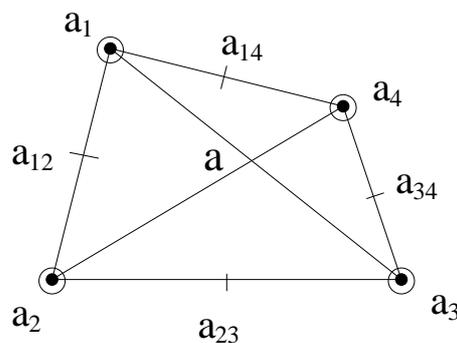


FIG. 1.4 – Schématisation des degrés de liberté de l'élément FVS

En partant de 4 polynômes  $P_3$ , on a 40 ddl. L'égalité de la fonction et de ses dérivées aux 4 sommets ajoute 12 contraintes. Les raccords de la dérivée normale aux milieux des 4 segments  $[a, a_i]$  ajoute 4 contraintes. Ensuite, il y a la continuité au centre  $a$ , qui ajoute 3 contraintes, et la continuité des dérivées. A première vue on peut croire que ça ajoute 6 contraintes, mais en fait ça n'en ajoute que 5. Ce qui conduit donc à  $40 - 24 = 16$  ddls, qui sont les valeurs et les dérivées en chaque noeud, plus les 4 dérivées normales le long des 4 cotés.

De la même manière que pour le HCT, on peut réduire l'espace de polynômes, pour éliminer les 4 ddl le long des arêtes, et retomber sur un élément à 3 degrés de liberté par noeud.

**Précision des éléments et régularité minimale** Dans les estimations d'erreur a priori formulées dans [5], un principe est conservé : plus le degré de l'espace de polynômes est grand, et plus l'élément est précis. Mais, bien sur, plus l'élément est "précis", plus la solution exacte doit être supposée régulière pour que l'estimation d'erreur optimale soit vérifiée.

Les données chiffrées sont résumées dans le tableau TAB. 1.1 suivant (où  $h$  désigne le pas de maillage, et  $\|u - u^h\|_2$  désigne l'erreur en norme  $H^2$  de la solution approchée  $u^h$  par rapport à la solution exacte  $u$ ).

Élément fini	dim $P_K$	$\ u - u^h\ _2$	Régularité de $u$
Argyris	21	$O(h^4)$	$u \in H^6$
Bell	18	$O(h^3)$	$u \in H^5$
HCT/FVS	12/16	$O(h^2)$	$u \in H^4$
HCT/FVS réduit	9/12	$O(h)$	$u \in H^3$

TAB. 1.1 – Précision des éléments finis  $C^1$ .

## 2.2 Traitement du verrouillage numérique pour le modèle de Mindlin-Reissner

La formulation variationnelle du modèle de Mindlin-Reissner est posée dans  $H^1$ , donc des éléments  $C^0$  sont suffisants, en théorie, pour définir une méthode conforme satisfaisante. Par exemple des éléments finis  $P_1$ -triangulaires ou  $Q_1$ -quadrangulaires. Mais en pratique, sur des plaques d'épaisseur faible, ces éléments ne donnent pas satisfaction : plus l'épaisseur est mince, et plus les résultats sont faussés. Ce phénomène, connu depuis longtemps, est appelé verrouillage numérique.

Nous présentons ce phénomène, et aussi quelques techniques usuelles permettant de le traiter. Nous nous limitons à des éléments de bas degrés, qui sont les plus utilisés dans les applications industrielles.

Les techniques qui permettent de traiter le verrouillage numérique ont permis de développer des éléments dits sans verrouillage ("locking-free"). Citons notamment :

- l'intégration réduite du terme de cisaillement transverse (utilisée dans l'élément QUAD 4),
- l'insertion, au niveau discret, des relations de Kirchhoff-Love (éléments DKT/DKQ et DST/DSQ),
- la projection sur des polynômes de plus bas degrés (élément MITC 4).

**Remarque 7** *En parlant du verrouillage numérique, le terme d'"épaisseur" est en réalité imprécis. C'est l'élanement, c'est-à-dire le rapport de l'épaisseur sur une dimension caractéristique de la plaque qui conditionne le verrouillage numérique. Cette considération se vérifie numériquement. Néanmoins, dans cette section, on parlera d'épaisseur car les tests numériques ne mettent en jeu que des plaques carrées de côté 1.*

### Le verrouillage numérique

Nous avons évoqué ci-dessus la source de ce phénomène : il s'agit de l'influence de l'épaisseur dans le problème de flexion-rotation. Nous rappelons que ce problème peut s'écrire :

#### Formulation variationnelle du problème de flexion-rotation en homogène isotrope

Trouver  $(u_3, \theta_\alpha)$  tel que  $\forall (v_3, \psi_\alpha)$ , on ait :

$$\frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} \int_{\Omega} [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\theta) \gamma_{\alpha\beta}(\psi) + \nu \gamma_{\alpha\alpha}(\theta) \gamma_{\beta\beta}(\psi)] d\Omega$$

$$+ \frac{E\varepsilon\kappa}{1+\nu} \int_{\Omega} (\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha) (\partial_\alpha v_3 + \psi_\alpha) d\Omega = l(v_3, \psi_\alpha)$$

Le terme de cisaillement transverse est fonction du paramètre  $\varepsilon$ , alors que le terme de flexion est fonction de  $\varepsilon^3$ . Donc, plus l'épaisseur est faible et plus le cisaillement transverse est prépondérant, ce qui se traduit par une pénalisation du terme de cisaillement transverse. Le terme  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha$  a tendance à devenir très petit, ce qui induit un couplage indésirable entre  $u_3$  et  $\theta$ .

La conséquence est que les éléments finis de type  $P_1$  ou  $Q_1$  ne sont pas du tout adaptés à ce type de résolution. Pour illustrer ce propos, nous présentons un exemple de verrouillage numérique, en utilisant l'élément  $Q_1$ .

### Un exemple de verrouillage numérique

Le cas-test suivant sera utilisé tout au long de cette section. Il s'agit d'une plaque carrée de côté 1, d'épaisseur  $2\varepsilon$ . Deux cotés opposés de la plaque sont encastés, avec une condition de bord libre sur les deux autres, voir Fig. 1.5. La face supérieure est soumise à une pression uniforme perpendiculaire, notée  $P$ . Le matériau est homogène et isotrope de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ .

On dispose de l'expression exacte de la solution dans le cas particulier où le coefficient de Poisson  $\nu$  est pris égal à 0. Dans ce cas,  $\theta_2$  est nul, et  $u_3$  et  $\theta_1$  ne dépendent pas de la

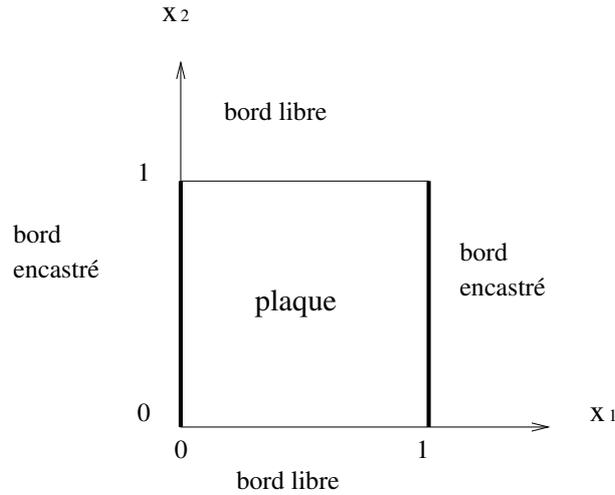


FIG. 1.5 – Schéma du cas-test : plaque en flexion

variable  $x_2$ . Voici l'expression de la solution exacte :

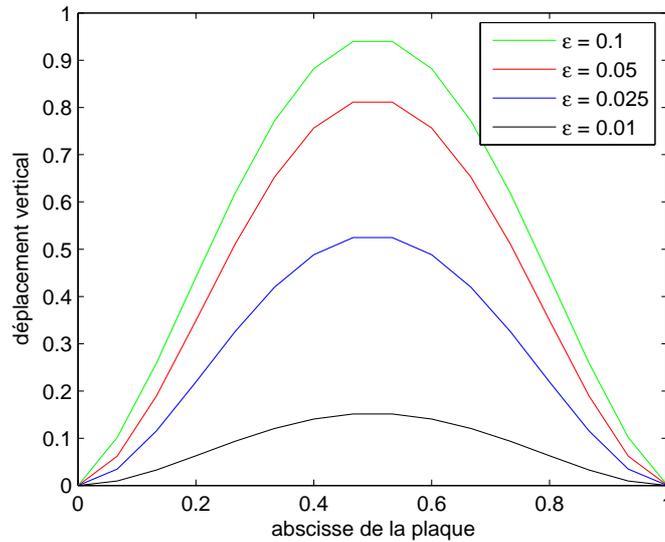
$$\begin{aligned} u_3(x_1) &= \frac{P}{16E\varepsilon^3} x_1(x_1 - L)(x_1^2 - Lx_1 - 8\varepsilon^2) \\ \theta_1(x_1) &= \frac{-P}{8E\varepsilon^3} x_1(2x_1^2 - 3Lx_1 + L^2) \\ \theta_2(x_1) &= 0 \end{aligned}$$

La longueur de la plaque est notée  $L$ , et vaut 1 dans les applications. Le déplacement vertical est maximal en  $x_1 = 1/2$ . La pression  $P$  est choisie de manière à normaliser le déplacement par rapport à l'épaisseur. Ainsi, on pourra comparer l'erreur commise sur cette valeur maximale en faisant varier l'épaisseur.

### Utilisation des polynômes $Q_1$ , sans traitement anti-verrouillage

Ce cas-test a été programmé dans la bibliothèque de calcul développée dans notre équipe, Getfem++ [9].

Sur un maillage structuré  $15 \times 15$ , nous avons testé des valeurs de  $\varepsilon$  variant de 0.1 à 0.01. La solution exacte étant monodimensionnelle, nous ne représentons sur la Fig. 1.6 qu'une coupe longitudinale de la solution obtenue, pour les différentes valeurs de  $\varepsilon$ . On peut constater que le déplacement maximal normalisé baisse régulièrement avec  $\varepsilon$ , au lieu de rester proche de 1. La solution numérique n'a progressivement plus rien à voir avec la solution exacte.


 FIG. 1.6 – Coupe de la solution numérique, pour plusieurs valeurs de  $\varepsilon$ 

### Interprétation mathématique du verrouillage, dans le cas de l'élément $P_1$ -triangulaire

Dans le cas de l'élément  $P_1$ , on peut donner une interprétation simple du phénomène. Le terme  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha$  étant pénalisé, il est très petit. Dans le cas de polynômes  $P_1$ ,  $\partial_\alpha u_3$  est constant par élément. Comme  $\theta_\alpha \simeq -\partial_\alpha u_3$ , on déduit que  $\theta_\alpha$  est constant par élément. Or  $\theta_\alpha$  est aussi continu, donc constant sur tout le domaine. Comme une partie du bord est encastree,  $\theta_\alpha$  est globalement nul. Donc  $\partial_\alpha u_3$  l'est aussi. Ce qui implique que  $u_3$  est constant sur  $\Omega$ , et comme une partie du bord est encastree,  $u_3$  est également nul.

Dans ce cas, il y a verrouillage car l'élément fini  $P_1$  n'est pas "assez riche" pour représenter une solution vérifiant  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha \simeq 0$ .

### Quelques techniques classiques pour éviter le verrouillage numérique

Nous présentons trois techniques classiques permettant d'éviter le verrouillage numérique. Ensuite, pour deux des méthodes, nous présentons des tests illustrant leur efficacité.

#### Intégration réduite (QUAD 4)

Cette technique est très souvent utilisée dans les codes industriels. Elle consiste à utiliser un élément fini classique, comme l'élément  $Q_1$  par exemple. Mais dans l'assemblage du terme de cisaillement transverse, on utilise une formule d'intégration de degré plus faible que celui qui est théoriquement requis pour avoir un calcul exact de la matrice élémentaire.

Pour l'élément  $Q_1$ , on peut utiliser par exemple une formule d'intégration d'ordre 2,

et une formule de degré 1 (a un seul point de Gauss) pour le cisaillement transverse. C'est le principe de l'élément "QUAD 4".

La sous-intégration peut s'interpréter comme une manière de relaxer la contrainte  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha \simeq 0$ . Avec une formule d'intégration peu précise, on peut avoir la nullité au sens intégral, mais pas point par point, ce qui permet d'éviter le couplage indésirable entre  $\partial_\alpha u_3$  et  $\theta_\alpha$ .

### Méthodes discrètes (DKT/DKQ et DST/DSQ)

Les initiales DKT/DKQ signifient "Discrete Kirchhoff Triangle/Quadrangle", alors que DST/DSQ signifient "Discrete Shear Triangle/Quadrangle". Pour ces éléments, des versions pour triangle et quadrangle ont pu être construites sur les mêmes principes. Notre présentation de ces méthodes est issue de [25, 26].

**Eléments avec relation de Kirchhoff (DKT/DKQ)** L'idée de base de ces éléments est de partir du modèle de Mindlin-Reissner, et de négliger le terme de cisaillement transverse. Ensuite, pour avoir un problème bien posé, la relation de Kirchhoff-Love  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha = 0$  est imposée en un certain nombre de noeuds.

Voici, plus précisément, la manière dont se construit l'élément. La rotation de la normale est définie aux sommets de l'élément et au milieu des segments, donc représentée en  $P_2$  ou  $Q_2$ -incomplet (pour les triangles ou les quadrangles), et la flèche est prise en  $P_3$ -Hermite incomplet (3 ddl par noeud : un pour la valeur de  $u_3$ , et deux pour les dérivées).

Ensuite, on impose plusieurs contraintes :

- Au milieu des arêtes de l'élément, la combinaison  $\theta_\alpha b_\alpha$  est réduite du degré 2 au degré 1 (une contrainte par arête),
- aux sommets, on impose  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha = 0$  (2 contraintes par sommet),
- au milieu des arêtes, cette relation est imposée de façon tangentielle :  $(\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha) a_\alpha = 0$ , où  $a_\alpha$  est la tangente à l'arête (1 contrainte par arête).

Si on fait le bilan en terme de nombre de degrés de liberté, on obtient :

Triangle	Quadrangle
6 x 2 ddl en rotation	8 x 2 ddl en rotation
3 x 3 ddl en flèche	4 x 3 ddl en flèche
- (3 + 6 + 3) ddl contraintes	- (4 + 8 + 4) contraintes
9 ddl	12 ddl

Ce qui fait bien 3 ddl par noeud. Signalons pour finir que la solution numérique construite avec cet élément converge vers la solution du modèle de Kirchhoff-Love. Il est donc préférable d'utiliser cet élément sur des plaques minces.

**Représentation discrète du cisaillement transverse (DST/DSQ)** Signalons que cet élément, en version quadrangle, est l'élément par défaut dans le logiciel SAMCEF (pour les plaques en flexion). Nous n'en faisons ici qu'une présentation abrégée.

Dans les éléments DKT/DKQ ci-dessus, le cisaillement transverse est négligé, ce qui n'est pas toujours souhaitable. En se basant sur les idées du DKT/DKQ, il a été possible de construire des éléments possédant une représentation du cisaillement transverse, d'où l'appellation DST/DSQ (Discrete Shear Triangle/Quadrangle).

Afin d'éviter le verrouillage numérique, la déformation de cisaillement transverse est remplacée par une expression qui est fonction du moment de flexion :

1. On suppose d'abord que

$$T_\alpha = \partial_\beta m_{\alpha\beta}, \quad (1.78)$$

ce qui a été exprimé par l'équation d'équilibre (1.77), au terme de moment appliqué près.

2. Ensuite, la relation (1.67) entre l'effort tranchant  $T_\alpha$  et la déformation de cisaillement transverse  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha$  est inversible, d'où :

$$\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha = 2 G_{\alpha\beta}^{-1} T_\beta = 2 G_{\alpha\beta}^{-1} \partial_\lambda m_{\beta\lambda}. \quad (1.79)$$

3. Ainsi, le terme de cisaillement transverse  $\int_K T_\alpha(u)(\partial_\alpha v_3 + \psi_\alpha)$  est remplacé par :

$$\int_K \partial_\lambda m_{\alpha\lambda} G_{\alpha\beta}^{-1} \partial_\mu m_{\beta\mu}. \quad (1.80)$$

La rotation de la normale est représentée en  $P_2$  (pour le DST) ou  $Q_2$  incomplet (8 ddl, pour le DSQ), et la flèche en  $P_1$  ou  $Q_1$ . On impose une réduction de la rotation normale :  $\theta_\alpha b_\alpha$  est pris linéaire, ce qui supprime 1 ddl par coté. Il reste donc 1 ddl à supprimer sur chaque arête pour ramener la rotation à 2 ddl par noeud.

Remarquons que l'approximation numérique du terme (1.80) ne mettra en jeu que les fonctions de forme de degré 2 de  $\theta$ . Mais surtout, la construction ci-dessus a fait disparaître  $u_3$ .

Pour éliminer le dernier ddl et retrouver  $u_3$ , on impose que la déformation de cisaillement transverse construite via la contrainte  $T_\alpha$  soit reliée à la déformation standard  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha$ . On impose l'égalité des composantes tangentielles, au sens intégral et sur chaque bord  $l$  :

$$\int_l \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha) a_\alpha = \int_l (G_{\alpha\beta}^{-1} \partial_\mu m_{\beta\mu}) a_\alpha, \quad (1.81)$$

en notant  $a_\alpha$  le vecteur tangentiel au bord.

Cette contrainte permet donc de retomber sur un élément à 3 ddl par noeud (1 pour la flèche, 2 pour la rotation de la normale).

#### L'élément MITC 4

Comme pour les autres éléments, le MITC 4 est basé sur un traitement spécifique du terme de cisaillement transverse (le terme de flexion est traité avec l'élément  $Q_1$  standard). On introduit un opérateur de projection (dit aussi de réduction), noté  $R_{\alpha\beta}$ , dans le terme de cisaillement transverse :  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha$  est remplacé par  $\partial_\alpha u_3 + R_{\alpha\beta} \theta_\beta$ .

Cet opérateur  $R_{\alpha\beta}$ , appliqué à  $\theta_\beta$ , projette les polynômes  $[Q_1]^2$  sur l'espace des polynômes  $Q_{0,1} \times Q_{1,0}$  (où  $Q_{i,j}$  désigne les polynômes de degrés  $i$  en la première variable et  $j$  en la deuxième). Ainsi,  $R_{\alpha\beta}$  transforme toute fonction  $(\psi_1, \psi_2)$  de la forme  $\begin{pmatrix} a_1 + b_1x + c_1y + d_1xy \\ a_2 + b_2x + c_2y + d_2xy \end{pmatrix}$  en  $R_{\alpha\beta}\psi_\beta = \begin{pmatrix} a + by \\ c + dx \end{pmatrix}$ . Cet opérateur est donc une application linéaire.

Plus précisément, l'opérateur  $R_{\alpha\beta}$  est défini, pour toute fonction  $\psi$  appartenant à  $[Q_1]^2$ , par :

$$\int_l R_{\alpha\beta}\psi_\beta a_\alpha = \int_l \psi_\alpha a_\alpha \quad \forall l \text{ arête du maillage.} \quad (1.82)$$

Une présentation plus précise, avec notamment l'expression générique de la matrice  $R_{\alpha\beta}$  (valable pour des maillages non-structurés), est donnée en annexe.

### Tests numériques

Nous avons testé le QUAD 4 et le MITC 4 sur le même cas que précédemment. Sur la même grille structurée  $15 \times 15$ , plusieurs épaisseurs ont été testées. L'erreur en norme  $H^1$  est tracée en fonction de la demi-épaisseur  $\varepsilon$ . Les résultats sont très stables jusqu'à des épaisseurs presque irréalisables. Nous représentons les graphes de  $u_3$  pour  $\varepsilon = 5.10^{-6}$ , en QUAD 4 et en MITC 4.

Les mêmes tests ont ensuite été menés sur des grilles non-structurées. Les résultats sont satisfaisants, en particulier pour le MITC 4 dont l'erreur n'augmente presque pas.

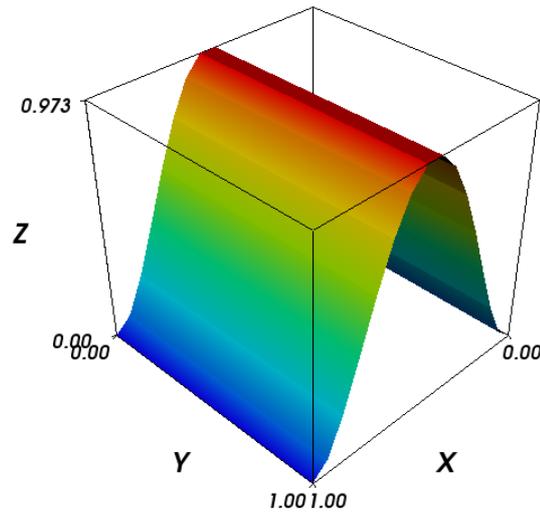
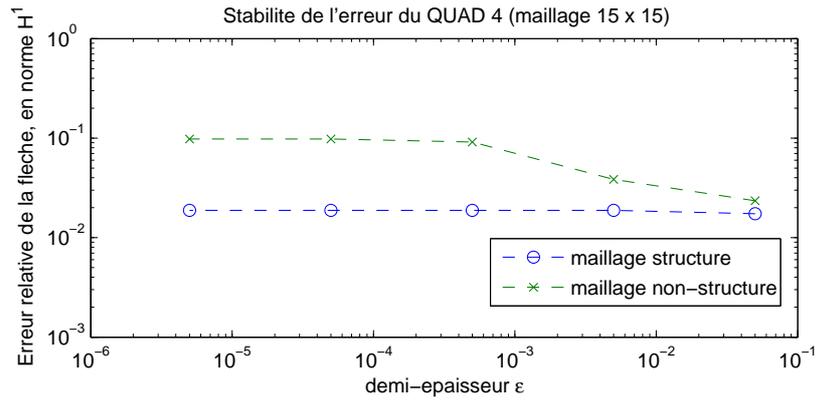


FIG. 1.7 – En haut : erreur de l'élément QUAD 4. En bas : la solution numérique pour  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-6}$  (maillage structuré).

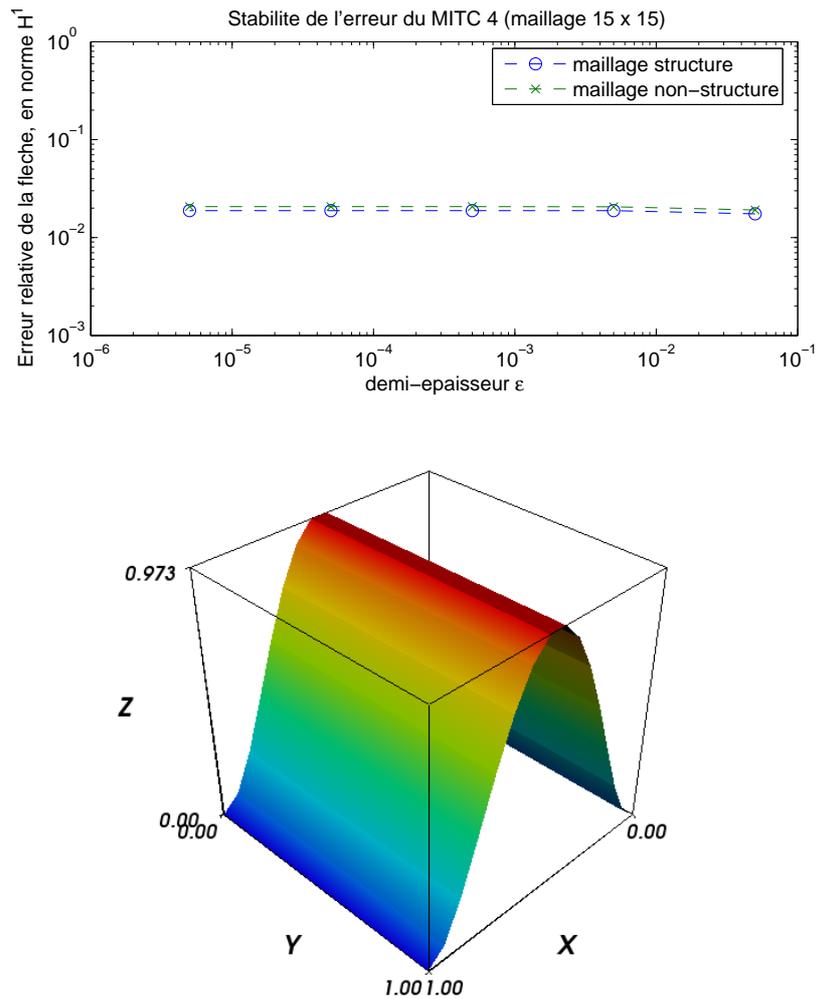


FIG. 1.8 – En haut : erreur de l'élément MITC 4. En bas : la solution numérique pour  $\epsilon = 5.10^{-6}$  (maillage structuré).

### 3 Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a pour objet d'étudier et de prédire l'amorçage et la propagation des fissures. L'idée de base est la suivante : une fissure se propage si l'énergie reçue par le matériau dépasse son énergie de cohésion.

Dans cette discipline, l'ensemble des matériaux est divisé en 2 catégories. Un matériau est dit fragile si la rupture apparaît sous une contrainte inférieure à sa limite d'élasticité. Dans ce cas les phénomènes de rupture apparaissent notamment avant les phénomènes de plasticité, ce qui signifie qu'il y a rupture alors que le comportement du matériau reste élastique linéaire. Dans le cas contraire, si la rupture se produit au-delà du seuil d'élasticité, on parle de matériau ductile.

La branche qui étudie les matériaux fragiles s'appelle la mécanique linéaire de la rupture. C'est le modèle de rupture le plus simple à étudier, mais il apporte des renseignements intéressants et très pertinents, qui peuvent parfois être suffisants selon l'application mécanique étudiée. Le verre, et les aciers à basse température sont des exemples de matériaux dits fragiles.

**Concept de Taux de Restitution d'Énergie** Lorsqu'une fissure (ou plus généralement un défaut) est présente dans un matériau, et lorsque celle-ci est sollicitée, alors il se produit une concentration des contraintes près du défaut. Dans le modèle linéaire, cela se traduit par l'apparition d'une singularité du champ de contraintes : celui-ci tend vers l'infini à la pointe du fond de fissure. Or, une extension de la fissure s'accompagnerait d'une variation d'énergie élastique. Cette variation d'énergie, associée à l'extension de la fissure, a été définie par Griffith, comme le taux de restitution d'énergie (TRE), noté  $\mathcal{G}$ . Dans la mécanique de la rupture, on considère qu'il y a propagation de la fissure si le TRE est supérieur à l'énergie de cohésion du matériau, c'est-à-dire si le TRE  $\mathcal{G}$  atteint une valeur critique  $\mathcal{G}_c$ . Cette valeur est une constante caractéristique du matériau.

#### 3.1 Modes de rupture et facteurs d'intensité de contrainte (FIC)

Selon le type de structure (poutre, plaque...), l'expression des singularités est différente. Du point de vue mathématique, les modèles de plaques présentés ici sont des problèmes elliptiques. En domaine fissuré, leur solution  $u$  se décompose comme la somme d'une partie régulière  $u^r$  et d'une partie singulière  $u^s$  (voir [10]). La partie singulière est composée d'un nombre réduit de modes, définis à une constante multiplicative près.

Ces constantes multiplicatives sont appelées Facteur d'Intensité de Contraintes (FIC), et notées  $K_1$  et  $K_2$  pour le modèle de Kirchhoff-Love, et  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  pour celui de Mindlin-Reissner. Elles indiquent la présence ou non de la singularité, et l'amplitude de celle-ci. Elles ont donc une grande importance en pratique, car elles permettent d'interpréter le risque de propagation de fissure.

Les singularités du modèle de Kirchhoff-Love appartiennent à  $H^{5/2-\eta}(\Omega) \forall \eta > 0$ , (voir [22, 10]), et comportent 2 modes singuliers (qui sont exprimés en coordonnées po-

lares, dans le repère indiqué Fig. 1.9) :

$$u_3^{s,KL}(r, \varphi) = \mathcal{A}_{KL} r^{3/2} \left[ K_1 \left( \frac{\nu + 7}{3(\nu - 1)} \cos \frac{3}{2}\varphi + \cos \frac{\varphi}{2} \right) + K_2 \left( \frac{3\nu + 5}{3(\nu - 1)} \sin \frac{3}{2}\varphi + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad (1.83)$$

$$\text{avec } \mathcal{A}_{KL} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - \nu^2}{E\varepsilon(3 + \nu)}.$$

Pour les singularités du modèle de Mindlin-Reissner, qui sont dans  $H^{3/2}(\Omega)$ , (voir [37, 38]), on ne donne que les premiers termes du développement en puissance de  $r$ , pour les 3 inconnues singulières  $\theta_1^s, \theta_2^s, u_s$  :

$$\theta_r^{s,MR} = \sqrt{r} \left\{ K_I \left( \cos \frac{3\varphi}{2} - \frac{5 - 3\nu}{1 + \nu} \cos \frac{\varphi}{2} \right) + K_{II} \left( \sin \frac{3\varphi}{2} - \frac{5 - 3\nu}{3(1 + \nu)} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\} + O(r) \quad (1.84)$$

$$\theta_\varphi^{s,MR} = \sqrt{r} \left\{ K_I \left( -\sin \frac{3\varphi}{2} - \frac{7 - \nu}{1 + \nu} \sin \frac{\varphi}{2} \right) + K_{II} \left( \cos \frac{3\varphi}{2} - \frac{7 - \nu}{3(1 + \nu)} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right\} + O(r) \quad (1.85)$$

$$u_3^{s,MR} = K_{III} \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} + O(r), \quad (1.86)$$

la notation  $O(r)$  désignant un terme d'ordre  $r$ .

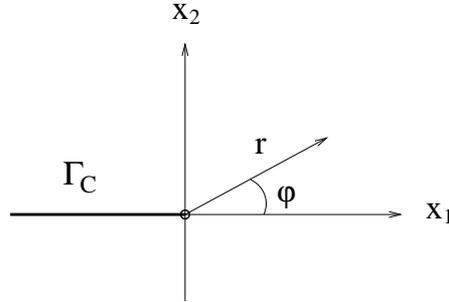


FIG. 1.9 – Repère polaire, avec la fissure en trait gras.

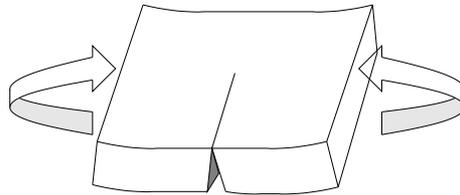


FIG. 1.10 – Mode 1, dans les deux modèles ( $K_1$  et  $K_I$ ).

Les deux modes singuliers du modèle de Kirchhoff-Love sont schématisés Fig. 1.10 et 1.13. Les 3 modes singuliers du modèle de Mindlin-Reissner sont représentés Fig. 1.10, 1.11 et 1.12.

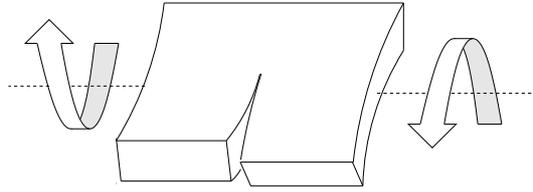


FIG. 1.11 – Mode 2 du modèle de Mindlin-Reissner ( $K_{II}$ )

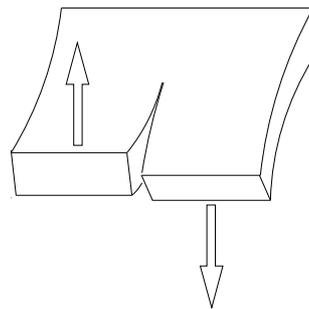


FIG. 1.12 – Mode 3 du modèle de Mindlin-Reissner ( $K_{III}$ )

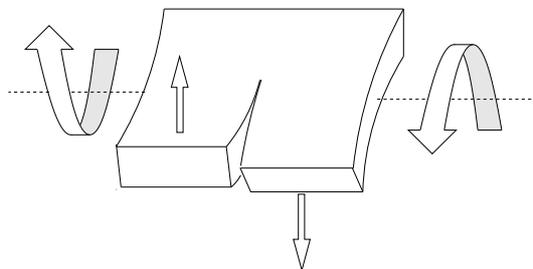


FIG. 1.13 – Mode 2 du modèle de Kirchhoff-Love ( $K_2$ ).

Les chargements de modes 2 et 3, dans le modèle de Mindlin-Reissner, conduisent tous les deux au mode 2 dans le modèle de Kirchhoff-Love. On peut d'ailleurs remarquer que les modes 2 et 3 du modèle de Mindlin-Reissner, de chargements différents, correspondent à peu près à la même déformation. Le tableau 1.2 indique quel chargement fait apparaître chacun des modes.

Mode 1 : Flexion symétrique	$K_1, K_I$
Mode 2 : Flexion anti-symétrique	$K_2, K_{II}$
Mode 3 : Cisaillement	$K_2, K_{III}$

TAB. 1.2 – Sollicitation mécanique et FIC concerné

**Remarque 8** *En élasticité 3D, les modes ne correspondent pas aux mêmes sollicitations. Une comparaison numérique des singularités du modèle tridimensionnel avec celles des modèles de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner a été faite dans [23].*

### 3.2 Calcul de FIC par Intégrale-J

L'intégrale de contour dite "Intégrale-J", est un concept de la mécanique de la rupture, qui établit une équivalence entre le taux de restitution d'énergie et les FIC (voir par exemple dans [27]). C'est donc une notion très importante, qui justifie l'utilisation des FIC comme critère de propagation.

L'intégrale-J consiste en l'intégration d'une fonctionnelle énergie sur un contour fermé entourant le fond de fissure. Son expression dans le cadre du modèle de Mindlin-Reissner peut être trouvée dans [16]. Pour le modèle de Kirchhoff-Love, elle est donnée dans [22]. Nous proposons ici un calcul différent de cette dernière référence, mais qui aboutit au même résultat.

Nous partons de l'expression de l'intégrale-J dans un solide tridimensionnel (issue de [22, 17]), pour la propagation d'une fissure dans la direction  $x_1$  ( $S$  est une surface fermée de normale unitaire extérieure  $b_j$ ) :

$$J = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} \gamma_{ij} b_1 dS - \int_S \sigma_{ij} b_j \partial_1 u_i dS \quad (1.87)$$

où  $u_i$  représente les composantes du déplacement tridimensionnel.

**Hypothèse 6** *Dans un voisinage contenant le contour d'intégration (et donc le fond de fissure), on suppose que les forces volumiques appliquées  $f_i^V$  et surfaciques  $g_i^\pm$  sont nulles.*

Cette hypothèse est standard. Par ailleurs, on ne considère que la partie flexion du modèle de Kirchhoff-Love (qui est indépendante de la partie membrane dans le cas d'un matériau homogène isotrope).

On part donc de (1.87), et on décompose  $J$  en deux termes :

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} \gamma_{ij} b_1 dS}_A - \underbrace{\int_S \sigma_{ij} b_j \partial_1 u_i dS}_B.$$

Calculons  $A$  :

$$A = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} \gamma_{ij} b_1 dS = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} b_1 dS$$

car  $\gamma_{i3} = 0$  dans le modèle de Kirchhoff-Love, selon (1.3). Ensuite, on suppose que la surface  $S$  est un cylindre dans l'épaisseur de la plaque, dont le disque d'intersection avec le plan moyen est noté  $D$ . Le contour de ce disque est noté  $\Gamma$ . Décomposons  $A$  en une somme de 3 intégrales : le bord du cylindre plus les 2 disques inférieur et supérieur. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} 2A &= \int_S \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} b_1 dS \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} b_1 dS}_{A_1} + \underbrace{\int_{D, x_3=-\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} b_1 dS}_{A_2} + \underbrace{\int_{D, x_3=+\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} b_1 dS}_{A_3}. \end{aligned}$$

Or,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) = -x_3 \partial_{\alpha\beta} u_3.$$

On en déduit :

$$A_1 = - \int_{\Gamma} \left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right) \partial_{\alpha\beta} u_3 b_1 dl = - \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} u_3 b_1 dl,$$

où on a utilisé la définition  $m_{\alpha\beta} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta}$ . Les termes  $A_2$  et  $A_3$  s'annulent, car  $b$  étant vertical sur les 2 disques inférieurs et supérieurs, la composante  $b_1$  vaut 0. Ce qui annule les intégrales. Finalement, on a :

$$A = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} u_3 b_1 dl \quad (1.88)$$

Calculons  $B$ . De la même manière que pour le calcul de  $A$ , on décompose le domaine  $S$  en 3 sous-domaines :

$$\begin{aligned} B &= \int_S \sigma_{ij} b_j \partial_1 u_i dS \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{ij} b_j \partial_1 u_i dS}_{B_1} + \underbrace{\int_{D, x_3=-\varepsilon} \sigma_{ij} b_j \partial_1 u_i dS}_{B_2} + \underbrace{\int_{D, x_3=+\varepsilon} \sigma_{ij} b_j \partial_1 u_i dS}_{B_3} \end{aligned}$$

Le long du cylindre, on a  $b_3 = 0$ , donc :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \int_{\Gamma} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{i\beta} b_{\beta} \partial_1 u_i dS \\
 &= \int_{\Gamma} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} b_{\beta} \partial_1 u_{\alpha} dS + \int_{\Gamma} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{3\beta} b_{\beta} \partial_1 u_3 dS \\
 &= - \int_{\Gamma} \left( \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right) b_{\beta} \partial_1 u_{\alpha} dl + \int_{\Gamma} \left( \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{3\beta} dx_3 \right) b_{\beta} \partial_1 u_3 dl \\
 &= - \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} b_{\beta} \partial_1 u_{\alpha} dl + \int_{\Gamma} T_{\beta} b_{\beta} \partial_1 u_3 dl. \tag{1.89}
 \end{aligned}$$

L'effort tranchant  $T_{\beta}$  a été défini en (1.46) par  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma_{\beta 3} dx_3$ , et on a pu établir que  $T_{\alpha} = \partial_{\beta} m_{\alpha\beta}$ , en (1.50), si le moment surfacique appliqué  $M_{\alpha}$  est nul (ce qui a été supposé ici par hypothèse).

Pour les termes  $B_2$  et  $B_3$  maintenant. Sur les 2 disques inférieurs et supérieurs, les termes  $b_1$  et  $b_2$  sont nuls. Ainsi,  $B_2$  se réduit à :

$$B_2 = \int_{D, x_3 = -\varepsilon} \sigma_{i3} b_3 \partial_1 u_i dS.$$

Or  $b_3 = -1$ ,  $\sigma_{33}$  est supposé nul, et  $u_{\alpha} = -x_3 \partial_{\alpha} u_3$ . Donc,  $B_2$  vaut :

$$B_2 = -\varepsilon \int_{D, x_3 = -\varepsilon} \sigma_{\alpha 3} \partial_1 u_3 dS.$$

On a également remarqué, équation (1.45), que  $\sigma_{\alpha 3}(\pm\varepsilon) = g_{\alpha}^{\pm}$ . Ceci permet de dire que  $B_2$  s'annule, en raison de l'hypothèse de nullité des forces imposées. Le même raisonnement peut être mené sur  $B_3$ , avec la même conclusion.

Si on voulait prendre  $g_3^{\pm}$  non nul (indépendamment de la validité physique du modèle) il faudrait alors considérer les termes suivants :

$$B_2^* = -\varepsilon \int_{D, x_3 = -\varepsilon} g_3^- \partial_1 u_3 dS ; B_3^* = +\varepsilon \int_{D, x_3 = +\varepsilon} g_3^+ \partial_1 u_3 dS. \tag{1.90}$$

En conclusion, l'intégrale-J vaut :

$$J = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} u_3 b_1 dl + \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} b_{\beta} \partial_1 u_{\alpha} dl - \int_{\Gamma} \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta} b_{\beta} \partial_1 u_3 dl \tag{1.91}$$

Cette expression (1.91) est identique à celle obtenue dans [22].

### 3.3 Simulation numérique de la propagation de fissure en MEF

Pour simuler numériquement une propagation de fissure, l'approche est itérative. On considère une fissure d'une certaine taille. Un chargement est appliqué ayant pour effet

de solliciter la fissure, et le déplacement du matériau est calculé au moyen de la méthode des éléments finis. On en déduit la valeur du TRE  $\mathcal{G}$  ou des FIC avec un post-traitement (intégrale-J par exemple).

Si le TRE  $\mathcal{G}$  ou les FIC  $K$  atteignent la valeur critique du critère de rupture  $\mathcal{G}_c$  ou  $K_c$ , alors on étend la fissure d'un petit incrément (on peut également utiliser des critères pour déterminer la direction de propagation). La propagation de la fissure modifie le domaine : il faut donc le remailler, et en général raffiner près du fond de fissure. On recalcule le déplacement puis le TRE ou les FIC, et si la valeur critique est encore dépassée, on prolonge à nouveau. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que le TRE soit en-dessous de la valeur critique.

Algorithme :

1. Initialisation du domaine, de la fissure, et du chargement.
2. Calcul du déplacement (résolution MEF), puis du TRE (post-traitement).
3. Si  $\text{TRE } \mathcal{G} > \mathcal{G}_c$  (ou  $K > K_c$ ), retour à 2. Sinon, fin du calcul.

## Conclusion du chapitre 1

Pour la simulation numérique de propagation de fissures, la méthode des éléments finis souffre de plusieurs défauts.

**Problème de précision** Récapitulons la régularité des solutions exactes en domaine fissurée, et comparons-les à la régularité requise pour que les éléments HCT/FVS réduits atteignent leur taux de convergence optimal :

Modèle	Singularité	Régularité requise pour convergence optimale
Kirchhoff-Love	$u \in H^{5/2-\eta}$	$u \in H^3$
Mindlin-Reissner	$u \in H^{3/2-\eta}$	$u \in H^2$

On voit que l'estimation d'erreur optimale n'est plus valide, à cause d'un défaut de régularité, d'ordre  $1/2$ . Il est possible de prouver que le taux de convergence passe de  $h$  à  $\sqrt{h}$ .

**Problème de mise en oeuvre** Le calcul par éléments finis d'un domaine fissuré nécessite un maillage conforme : la fissure doit être localisée sur les interfaces des éléments, et le fond de fissure doit coïncider avec un noeud du maillage. De plus, au niveau pratique, il faut raffiner le maillage près du fond de fissure afin de représenter correctement la singularité (à cause du taux de convergence en  $\sqrt{h}$ ).

La simulation d'une propagation de fissure étant itérative, après une modification de la fissure il est nécessaire de remailler le domaine, ce qui est une opération couteuse en temps de calcul et peut poser des problèmes de précision numérique.



## Chapitre 2

# Etat de l'art de la méthode XFEM appliquée aux plaques fissurées en flexion

La méthode des éléments finis étendue, aussi appelée XFEM (pour "eXtended Finite Element Method"), a été formulée pour la première fois à la fin des années 1990. L'objectif de ses auteurs était de s'affranchir des inconvénients, présentés en fin de chapitre précédent, concernant la méthode des éléments finis classique (MEF) sur les problèmes fissurés.

Bien que ce chapitre précédent soit consacré aux plaques, certains des inconvénients qui y sont mis en évidence sont en fait communs à tout type de structure fissurée :

- problème de précision : en raison de la singularité en fond de fissure, le taux de convergence n'est pas optimal (par exemple, pour un matériau homogène isotrope, en élasticité 2D, l'erreur de l'élément  $P_1$  est en  $O(\sqrt{h})$  au lieu de  $O(h)$ ).
- Contraintes au niveau du maillage : celui-ci doit être conforme à la fissure, qui doit ainsi coïncider avec les interfaces entre les mailles. Le fond de fissure doit être situé sur un noeud du maillage.

Au niveau pratique, ces inconvénients conduisent les utilisateurs de la MEF à devoir définir des maillages très raffinés près du fond de fissure, afin de représenter la singularité le plus fidèlement possible. En cas de prolongement de la fissure, il faut alors mettre à jour le maillage, ce qui est une procédure lourde.

Historiquement, la méthode XFEM a d'abord été appliquée à des problèmes d'élasticité bidimensionnelle. Depuis le premier article sur cette méthode [17], publié en 1999, un grand nombre de travaux et développements ont été proposés, notamment depuis 2005. Il ne serait pas possible de tous les citer ici. Par contre, les applications de cette méthode aux plaques en flexion et aux coques ont suscité assez peu de travaux.

Ainsi, pour donner une bonne idée des travaux existants sur la méthode XFEM appliquée aux plaques en flexion, ce chapitre est découpé en 2 parties :

- dans une première partie, nous exposons les notions qui ont été introduites pour résoudre des problèmes d'élasticité bidimensionnelle (et qui sont à la base de ce

- que nous mettrons en oeuvre pour les plaques).
- Dans une seconde partie, nous présentons les articles traitant spécifiquement de l'adaptation de XFEM aux plaques en flexion et aux coques.

## 1 Méthode XFEM appliquée aux problèmes d'élasticité bidimensionnelle

Dans la méthode XFEM, le domaine est maillé sans tenir compte de la fissure, car celle-ci est repérée indépendamment du maillage, voir Fig. 2.1. On pourra donc mettre à jour la fissure sans avoir à remailler la pièce.

D'abord, on définit une méthode d'éléments finis classique sur le domaine non-fissuré. Puis, sur les éléments contenant la fissure, l'espace des fonctions de forme classique est enrichi : on y ajoute des fonctions singulières pour représenter les déplacements discontinus à travers la fissure, ainsi que le déplacement singulier autour du fond de fissure. Lors de la propagation, il suffit de mettre à jour ces fonctions de forme.

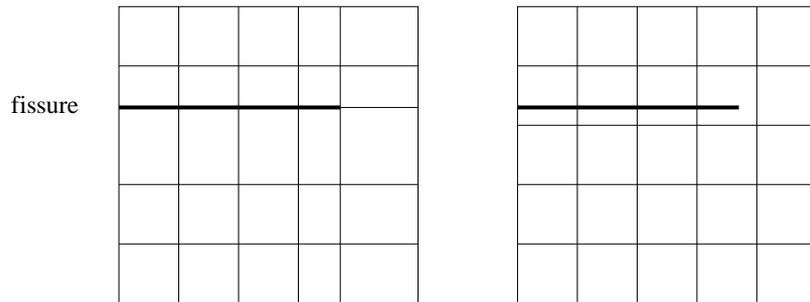


FIG. 2.1 – A gauche, MEF classique : la fissure coïncide avec les interfaces des mailles. A droite, XFEM : la fissure est libre.

### 1.1 Première version de la méthode

Nous présentons d'abord la méthode telle qu'elle a été formulée dans le premier article ayant introduit la méthode [17]. La solution discrète est développée sur une base éléments finis classique, à laquelle on rajoute des degrés de liberté spécifiques représentant la fissure. Ces derniers sont de deux types.

**Fonctions représentant la séparation du matériau** Pour représenter la fissure, des degrés de libertés (ddl) représentant le "saut" du déplacement sont ajoutés. Ces ddl sont obtenus en multipliant une fonction de forme élément fini classique par une fonction de type Heaviside, notée  $H$ , et valant  $+1$  ou  $-1$  de part et d'autre de la fissure. Ce produit

représente une fonction à support limité, et qui représente bien une discontinuité à la traversée de la fissure.

Pour chaque fonction de forme classique dont le support est complètement traversé par la fissure, on ajoute une fonction de forme discontinue, voir Fig. 2.2, où les noeuds enrichis de cette manière sont marqués d'un carré.

**Fonctions représentant le déplacement singulier dans le voisinage du fond de fissure** Pour le problème d'élasticité linéarisé bidimensionnel, dans le cas d'un matériau homogène isotrope, l'expression des modes singuliers est connue explicitement. En coordonnées polaires (voir Fig. 1.9), celle-ci est :

$$u_I = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \cos(\phi/2)(\delta - \cos \phi) \\ \sin(\phi/2)(\delta - \cos \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$u_{II} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \sin(\phi/2)(\delta + 2 + \cos \phi) \\ \cos(\phi/2)(\delta - 2 + \cos \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

où  $\delta$  vaut  $3 - 4\nu$  en contrainte planes, et où  $E$  et  $\nu$  désignent le module d'Young et le coefficient de Poisson.

Sur le même principe que pour le saut du déplacement, on peut obtenir des fonctions de forme représentant la singularité de fond de fissure en multipliant les fonctions de forme élément fini classique par la singularité ci-dessus. Plus précisément, cette singularité est développée sur les 4 fonctions singulières :

$$\{F_l\}_{l=1..4} = \{ \sqrt{r} \sin(\phi/2), \sqrt{r} \cos(\phi/2), \sqrt{r} \sin(\phi/2) \sin(\phi), \sqrt{r} \cos(\phi/2) \sin(\phi), \}. \quad (2.3)$$

Ainsi, dans la méthode XFEM, pour chaque ddl classique de l'élément contenant le fond de fissure, on rajoute un jeu de 4 degrés de liberté. Sur la Fig. 2.2, les noeuds enrichis par des degrés de liberté singuliers sont notés par un point noir.

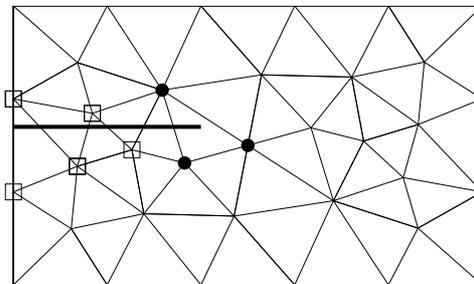


FIG. 2.2 – Noeuds enrichis.

Dans [17], l'expression finale du déplacement  $u^h$  approchant la solution exacte  $u$  est :

$$\mathbf{u}^h = \sum_i \mathbf{u}_i \varphi_i + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j H \varphi_j + \sum_{k \in K} \varphi_k \left( \sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_k^l F_l \right) \quad (2.4)$$

où  $J$  désigne les indices des ddl à enrichir par des fonctions  $H$ , et où  $K$  désigne ceux à enrichir par les singularités. Les termes en gras désignent des quantités vectorielles.

**Calculs de FIC et conclusions** Les auteurs ont également proposé une méthodologie originale de calcul de FIC, via l'intégrale-J. Les résultats numériques de validation consistent essentiellement en des tests de robustesse et des calculs de FIC, dont l'erreur est souvent inférieure à 2 %.

La méthode ainsi formulée peut être étendue à d'autres types de problèmes, à condition de connaître l'expression précise des singularités.

## 1.2 Améliorations et contributions diverses

Bien qu'il ne soit pas possible de présenter tous les travaux consacrés à la méthode XFEM, nous en évoquons un certain nombre qui ont permis des améliorations substantielles. Notamment à propos de la méthodologie numérique et de la précision de la méthode XFEM.

### Utilisation de level-set

Dans la version originale de la méthode, il faut une représentation explicite de la fissure. Dans les articles [28, 29], les auteurs ont eu l'idée de coupler XFEM avec la méthode des level-set, ce qui est très utile pour repérer ou mettre à jour la position de la fissure.

### Intégration des fonctions de forme singulières par une formule quasi-polaire

Il est crucial de disposer d'une expression très précise des singularités pour que la méthode XFEM soit efficace. Dans le cas de l'élasticité linéarisée, on dispose d'expressions analytiques. Mais il convient aussi que l'intégration numérique soit elle aussi suffisamment précise.

Dans [17], les auteurs pratiquaient un sous-découpage des éléments contenant les ddl singuliers. Cette méthode a permis d'atteindre une précision correcte. Cependant, dans les articles [15, 14], les auteurs proposent des formules d'intégration dites "quasi-polaire".

L'utilisation de fonctions singulières conduit à devoir calculer, pour la matrice de rigidité, des intégrales de la forme suivante :

$$\int_T \nabla(F_i \varphi_j) \cdot \nabla(F_k \varphi_l) dx, \quad (2.5)$$

où  $T$  désigne un triangle du maillage. Le gradient des singularités  $F_i$  est singulier en  $r^{-1/2}$ . Mais en exprimant cette intégrale en coordonnées polaires, la transformation de  $dx$  en  $r dr d\phi$  annule ces termes singuliers.

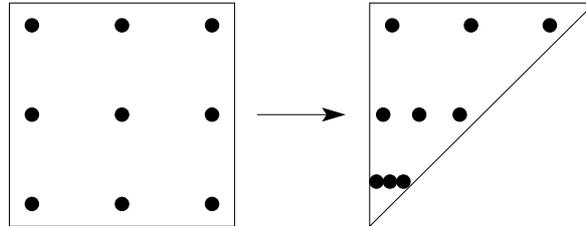


FIG. 2.3 – Transformation d'une méthode d'intégration sur un carré en une méthode définie sur un triangle.

L'élément contenant le fond de fissure est divisé en 3 sous-triangles, voir Fig. 2.4. La singularité sera donc localisé sur un sommet de chaque sous-triangle. Pour avoir plus de points d'intégration près du fond de fissure, on introduit la transformation géométrique suivante

$$\tau : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

qui transforme un carré en triangle (voir Fig. 2.3), et permet ainsi de construire des formules de quadratures sur un triangle à partir des formules sur le carré. Ces formules auront donc plus de points près du fond de fissure.

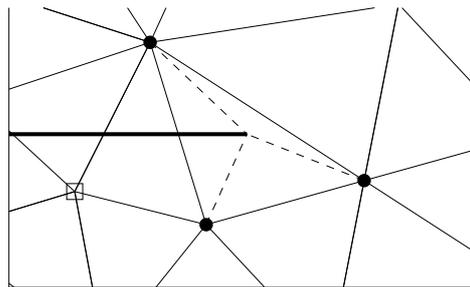


FIG. 2.4 – Sous-découpage de l'élément contenant le fond de fissure.

Dans [15, 14], des tests numériques montrent que ces formules sont plus précises que la méthodologie classique de sous-découpage (qui consiste à raffiner plusieurs fois les triangles en pointillés de la Fig. 2.4).

### Utilisation d'une zone d'enrichissement de taille fixe

Des améliorations de la méthode XFEM ont été proposées dans les articles [15, 14], notamment sur le taux de convergence de la méthode et le conditionnement du système linéaire. Rappelons que le taux de convergence est le nombre réel  $\alpha$  tel que  $\|u - u^h\| = O(h^\alpha)$ .

En éléments finis classiques, on sait que la présence d'une fissure entraîne une baisse du taux de convergence. Dans la méthode XFEM, comme la singularité exacte est ajoutée dans la base élément fini, les auteurs de [15, 14] font remarquer qu'on pourrait attendre de cette méthode qu'elle reproduise sans erreur la singularité. Par conséquent, la singularité étant exacte, l'erreur de la méthode XFEM devrait se limiter à celle sur l'approximation de la partie régulière, qui est optimale vis-à-vis de la précision de l'élément fini utilisé. Donc la méthode XFEM devrait permettre d'obtenir un taux de convergence optimal, c'est-à-dire le même que si le problème était régulier (sans fissure). Par exemple, l'élément fini  $P_1$  devrait permettre d'obtenir une erreur en  $O(h)$ , malgré la fissure (pour la norme de l'énergie).

Cependant, des tests numériques présentés dans [15, 14] montrent que la méthode XFEM, telle que formulée dans [17], ne réalise pas un taux de convergence optimal. Dans ces deux articles, les auteurs mettent en cause la stratégie d'enrichissement singulier donnée par (2.4), où seul l'élément contenant le fond de fissure est enrichi par des fonctions singulières. Cette stratégie n'est pas complètement satisfaisante : en effet lorsque le pas du maillage tend vers 0, le support de cette zone enrichie tend aussi vers 0.

Face à ce constat, il est proposé que la zone d'enrichissement singulier soit de taille indépendante du pas de maillage. Une zone de rayon  $\mathcal{R}$  est définie, et chaque noeud du maillage situé dans cette zone est enrichi par les fonctions de forme singulière. Précisons que  $\mathcal{R}$  est indépendant du pas de maillage. Cette méthode est nommée "XFEM with fixed enrichment area" dans [15]. L'expression du terme d'enrichissement singulier est le même que celui dans [17], équation (2.4) :

$$\sum_{k \in K} \varphi_k \left( \sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_k^l F_l \right),$$

sauf que cette fois-ci l'ensemble  $K$  peut contenir beaucoup plus de ddl que précédemment ; il s'agit des indices des ddl contenus dans la zone d'enrichissement de taille fixe  $\mathcal{R}$ , voir Fig. 2.5.

Cet enrichissement modifié permet d'obtenir le taux de convergence optimal. Cependant, les auteurs ont remarqué parallèlement une augmentation très importante du conditionnement du système linéaire. Rappelons qu'un conditionnement trop élevé peut dégrader la précision numérique de la solution et rend difficile la résolution du système linéaire par des méthodes itératives.

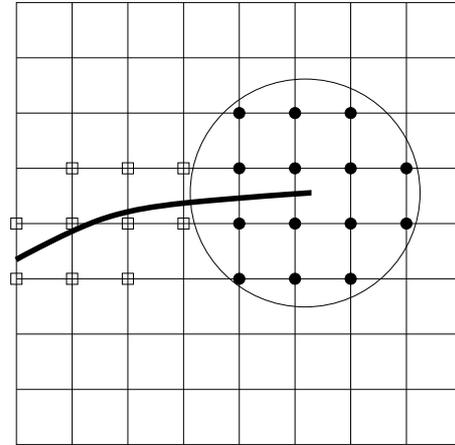


FIG. 2.5 – Enrichissement XFEM, avec zone d'enrichissement de rayon  $\mathcal{R}$ .

### Une méthode pour corriger le conditionnement

Dans [14], afin de corriger le mauvais conditionnement des matrices du système linéaire, les auteurs ont développé une méthode originale de préconditionnement, qui consiste, en un certain sens, à orthogonaliser les fonctions de forme singulière. Cette procédure n'empêche pas l'utilisation supplémentaire de préconditionneurs classiques. Avec cette procédure d'orthogonalisation, le conditionnement est du même ordre que celui d'une méthode d'élément fini classique (non-enrichie).

### Fonction d'enrichissement global et raccord nodal

Les auteurs de [15] ont relevé que l'utilisation d'une zone d'enrichissement fixe pouvait augmenter fortement le nombre de ddl supplémentaires. En plus du coût numérique, cette augmentation du nombre de ddl pourrait peser dans l'augmentation du conditionnement. Ils ont alors proposé une modification de la méthode. Tout en gardant cette zone d'enrichissement de taille fixe, l'ensemble des ddl singuliers sont remplacés par un seul ddl pour chaque fonction singulière : ces nouvelles fonctions singulières ont donc pour support la zone d'enrichissement globale. Comme les singularités sont développées sur une base de 4 fonctions singulières, équation (2.3), cela ne fait que 8 fonctions singulières (4 par composantes du déplacement). L'expression de l'enrichissement devient alors :

$$\sum_{l=1}^4 c_l F_l. \quad (2.7)$$

où  $c_l \in \mathbb{R}^2$ .

Une analyse a montré que la transition de la zone enrichie avec le reste du domaine devait être gérée soigneusement. Les auteurs ont proposé un raccord nodal : l'inconnue enrichie doit avoir la même valeur que celle non-enrichie sur le reste du domaine, en

chaque noeud situé à l'interface de la zone d'enrichissement. Cette méthode est nommée "XFEM with pointwise matching" dans [15].

### **Résultats de convergence**

Pour clore cet aperçu des développements sur la méthode XFEM, citons la publication récente de plusieurs résultats théoriques de convergence [30, 31, 32]. Ces résultats montrent que plusieurs formulations XFEM (dont celles de [15, 14]) convergent avec un taux de convergence optimal.

## 2 Méthode XFEM appliquée aux plaques en flexion

Nous passons maintenant en revue trois articles consacrés à l'application de la méthode XFEM aux plaques et aux coques.

### 2.1 XFEM avec éléments finis MITC 4

Dans [16], paru en 1999, une méthode XFEM a été formulée pour le modèle de plaque de Mindlin-Reissner, de manière assez proche de celle définie dans [17] pour des problèmes d'élasticité bidimensionnelle.

#### Formulation de la méthode

L'élément fini considéré est le MITC 4 (que nous avons brièvement présenté dans le chapitre précédent, page 47) : ses fonctions de forme sont celles du  $Q_1$  pour la flèche  $u_3$ . Voici l'expression de son approximation XFEM :

$$u_3^h = \sum_i a_i \varphi_i + \sum_{j \in J} b_j H \varphi_j + \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 c_{kl} \varphi_k F_l, \quad (2.8)$$

C'est le même espace pour la rotation de la normale  $\theta_\alpha$ , mais dans le terme de flexion seulement. Pour le terme de cisaillement transverse, les fonctions de forme de  $\theta_\alpha$  sont les fonctions  $[Q_1]^2$  projetées sur l'espace  $Q_{0,1} \times Q_{1,0}$ . Si on note respectivement  $\varphi_i$  et  $\tilde{\varphi}_i$  les fonctions  $Q_1$  et les fonctions projetées, l'expression de la solution approchée  $\theta_\alpha^h$ , dans le terme de flexion s'écrit :

$$\theta_\alpha^h = \sum_i \mathbf{a}_i \varphi_i + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j H \varphi_j + \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_{kl} \varphi_k F_l, \quad (2.9)$$

où les ensembles  $J$  et  $K$  sont définis de la même manière que dans l'équation (2.4). Dans le terme de cisaillement transverse,  $\theta_\alpha^h$  s'écrit :

$$\theta_\alpha^h = \sum_i \mathbf{a}_i \tilde{\varphi}_i + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j H \tilde{\varphi}_j + \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_{kl} \tilde{\varphi}_k F_l. \quad (2.10)$$

Le choix de l'élément MITC 4 semble judicieux. L'élément QUAD 4 montre des résultats aussi bons vis-à-vis du verrouillage numérique, mais il ne peut pas être utilisé ici, car il conduit à pratiquer une sous-intégration. Or les singularités doivent absolument être intégrées avec beaucoup de précision pour être efficacement prises en compte dans la méthode XFEM.

### Résultats obtenus

Si la méthodologie proposée ci-dessus paraît intéressante, elle réintroduit potentiellement un problème de verrouillage numérique. Les termes réguliers et ceux incluant la fonction  $H$  ne sont vraisemblablement pas affectés par le verrouillage numérique. Mais comme aucun traitement n'est apporté aux singularités de fond de fissure, et que la déformation de cisaillement transverse singulière  $\partial_\alpha u_3^S + \theta_\alpha^S$  n'est pas nulle, le terme d'enrichissement singulier peut tout à fait causer du verrouillage.

Dans [16], des tests numériques mettent en évidence une perte de précision sur le cas-test dont l'épaisseur est la plus mince. Nous reproduisons le graphique de ces tests, Fig. 2.6. L'expérience numérique consiste en une comparaison du calcul du FIC  $K_I$  avec la MEF classique et XFEM. Or, sur les plaques les plus minces, la discrétisation XFEM devient moins précise que celle en MEF, alors qu'elle est plus riche.

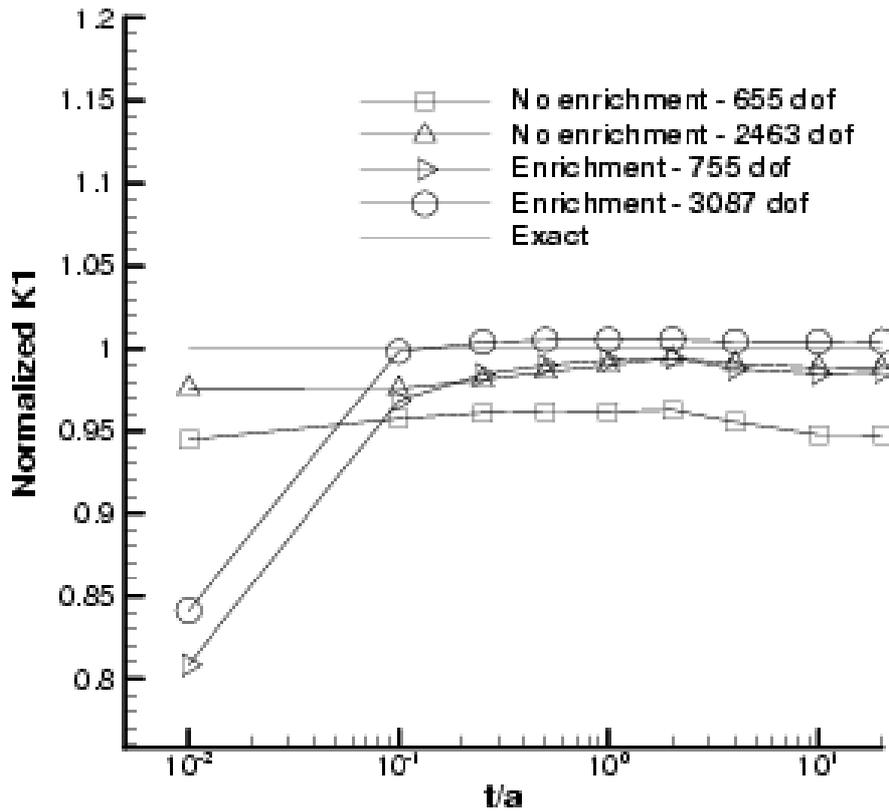


FIG. 2.6 – Précision du FIC  $K_I$  en fonction de l'épaisseur, avec MEF (No Enrichment) et XFEM (Enrichment).

La plaque la plus mince correspond en fait à un rapport épaisseur sur longueur de  $1/2000$  (le terme  $a$ , en abscisse de la Fig. 2.6, est 20 fois plus petit que la longueur de la plaque). Or, dans le test du MITC 4 présenté au chapitre précédent, le verrouillage est

correctement corrigé pour un tel élancement. Ceci nous fait penser que ce résultat pourrait être amélioré.

Signalons de plus que l'enrichissement singulier de  $u_3$  ne contient pas le terme de premier ordre en  $\sqrt{r}$ , mais seulement les termes d'ordre suivant en  $r^{3/2}$ . Ce terme négligé est censé porter la singularité de mode III ; or justement d'autres tests numériques montrent que le FIC  $K_{III}$  n'est pas calculé aussi précisément que les deux autres FIC  $K_I$  et  $K_{II}$ .

## 2.2 XFEM appliquée à un modèle de coque non-linéaire

Dans [33], une méthode XFEM est proposée pour des coques. La difficulté particulière du problème des coques fissurées impose quelques limitations : l'expression des singularités n'est pas connue, ni celle du taux de restitution d'énergie (sur une surface non-plane).

Ainsi, la méthode XFEM proposée n'a pas d'enrichissement singulier. Seul l'enrichissement par la fonction  $H$  est utilisé, de manière à s'affranchir d'un maillage construit autour de la fissure.

Pour le problème de la détermination des FIC, le déplacement numérique obtenu est extrapolé jusqu'au fond de fissure. Par analogie avec les singularités des modèles de Mindlin-Reissner et d'élasticité bidimensionnelle, une valeur du FIC est obtenue. Sur les cas-tests présentés dans l'article, les valeurs des FIC sont en accord avec des valeurs de référence issues de la littérature.

Signalons aussi que, dans les tests de validation, le paramètre d'épaisseur est fixe. Donc vis-à-vis du problème de verrouillage numérique, bien qu'un élément "sans verrouillage" soit utilisé, il est difficile de se faire une idée précise des performances de cette méthode.

## 2.3 Couplage XFEM 3D / coque

Dans cet article [34], les auteurs ont couplé un code XFEM tridimensionnel avec un code d'élément fini standard pour coque. De cette manière, la zone non fissurée est traitée par un élément fini classique de coque, alors que le reste du domaine entourant la fissure est traité par une méthode XFEM tridimensionnelle. Donc les aspects XFEM sont appliqués au modèle tridimensionnel, et non pas au modèle de plaque/coque, ce qui "sort" significativement du cadre de notre thèse (qui se restreint aux plaques en flexion, et ne traite pas du modèle tridimensionnel).

La méthodologie numérique se fait en plusieurs étapes.

1. pour séparer le domaine en FEM/XFEM, une décomposition de domaine est faite, gérée par l'algorithme FETI [35].
2. Ensuite, pour obtenir le maillage 3D : la zone contenant la fissure est extrudée, puis découpée en tétraèdres. Il faut ensuite raffiner la ligne de front de fissure.

3. La transition 2D/3D est gérée via la méthode dite de “Displacement compatibility” [36].

Les tests numériques de validation montrent que les FIC sont calculés à moins de 5% d'erreur (via l'intégrale-J en 3D).

Les points forts de cette méthode viennent naturellement de l'utilisation du modèle 3D, qui permet de représenter des fissures non-traversantes. De plus, le problème de verrouillage numérique lié aux singularités ne se pose pas.

# Chapitre 3

## The eXtended Finite Element Method for thin cracked plates with Kirchhoff-Love theory

**Abstract** *A modelization of cracked plates under bending loads in the XFEM framework is addressed. As it is well-suited for very thin plates, commonly used in aircraft structures, the Kirchhoff-Love model is chosen. Reduced HCT and FVS elements are used for the numerical discretization of this model. Then, two kinds of strategies are proposed for the enrichment around the crack tip with, for both of them, an enrichment area of fixed size (i.e. independant of the mesh size parameter). In the first one, each degree of freedom inside this area is enriched with the nonsmooth functions that describe the asymptotic displacement near the crack tip. The second strategy consists in introducing these functions in the finite element basis with a single degree of freedom for each one. An integral matching is then used in order to ensure the  $C^1$  continuity of the solution at the interface between the enriched and the non-enriched areas. Finally, numerical convergence results for these strategies are presented and discussed.*

### 1 Introduction

This paper deals with an adaptation of XFEM (eXtended Finite Element Method) to the computation of thin plates, which present a through the thickness crack, as it may appear in aircraft structures. Let us recall that XFEM is a way to introduce the discontinuity across the crack and the asymptotic displacement into the finite element space. It has been initially developed for plane elasticity problems (see [17, 18]) and is now the subject of a wide literature (see for instance [19, 15, 14, 21, 2, 3]).

As far as we know, the unique attempt to adapt XFEM for plate models is [16], in which a Mindlin-Reissner model is used. However, in this paper, an important locking effect for thin plate has been detected despite the use of some classical locking-free elements. This suggests that this locking effect is due to the XFEM enrichment. In fact,

to avoid locking, some special treatments are mandatory, for example selective reduced integration in the case of the QUAD 4 element (see [20]). But these treatments are not straightforwardly adaptable to an enrichment by singular functions, which are not polynomials.

Even if most of the industrial finite element codes use the Mindlin-Reissner model to represent plates, another theory can also be convenient : the Kirchhoff-Love model, which is not submitted to the so-called "shear locking" phenomenon for the finite element discretization, when the thickness becomes very small. This last theory has already been used for the purpose of fracture mechanics (for instance, see [22]). It provides a realistic description of the displacement of thin plates, and especially very thin ones, since it is the limit model when the thickness vanishes (see [4]). It is worth noticing that panels used in aeronautic structures are about one millimeter thin for several meters long. Moreover, for through the thickness cracks, the limit of the energy release rate of the three-dimensional model can be expressed with the Kirchhoff-Love model solution (see [8] and [7]).

Now, let us emphasize on some particularities of the Kirchhoff-Love model. First, it corresponds to a fourth order partial differential equation. Consequently, a conformal finite element method needs the use of  $C^1$  (continuously differentiable) finite elements. To avoid too costly elements, the reduced Hsieh-Clough-Tocher triangle (reduced HCT) and Fraeijis de Veubeke-Sanders quadrilateral (reduced FVS) were chosen (see [5]). They lead to a satisfactory theoretical accuracy, with a reasonable computational cost. Let us also remark that, for this plate model, the crack tip asymptotic bending displacement is well-known for an isotropic plate : it corresponds to the bilaplacian problem one.

Then, let us move to the features of the specific XFEM enrichment. In order to represent the discontinuity due to the crack, a "jump function" (or Heaviside function) is used. Following the ideas already presented in [15], we propose two strategies for the crack tip enrichment. In both of them, an enrichment area of fixed size is defined, centered on the crack tip. In the first strategy, each node, contained in the enrichment area, has all its degrees of freedom which are enriched with the crack tip asymptotic bending. For the second strategy, the asymptotic bending displacements are introduced in a global way. Then a matching condition is needed in order to ensure the continuity of the displacement and its derivatives across the interface between the enrichment area and the remaining part of the domain.

This work was done in such a way that the numerical methodology could be straightforwardly introduced in an industrial software. So we took care to use the simplest features we found ; we also payed attention to the computational cost as much as possible. In addition, along this paper, it will be underlined that our XFEM formulation presents a sense of optimality, both about accuracy and computational cost, since they are nearly equal to those of a classical finite element method on a regular non-cracked problem. Finally, to keep this paper in a reasonable length, we have chosen to adress the computation of stress intensity factors in a forthcoming paper.

So, this paper is organized as follows. Section 2 describes the model problem. Section 3 is devoted to some aspects of the finite element discretization of the Kirchhoff-Love model. In Section 4, the enrichment strategies are presented and evaluated on a test problem

in Section 5.

## 2 The Model Problem

### 2.1 Notations and variational formulation

Let us consider a thin plate, *i.e.* a plane structure for which one dimension, called the thickness, is very small compared to the others. For this kind of structures, starting from *a priori* hypotheses on the expression of the displacement fields, a two-dimensional problem is usually derived from the three-dimensional elasticity formulation by means of integration along the thickness. Then, the unknown variables are set down on the mid-plane of the plate. In all the following, this mid-plane will be denoted by  $\Omega$ . It is an open subset of  $\mathbb{R}^2$ . So, in a three-dimensional cartesian referential, the plate is the set

$$\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in \Omega \text{ and } x_3 \in ]-\varepsilon; \varepsilon[ \} .$$

The  $x_3$  coordinate corresponds to the transverse direction. All the mid-plane points have their third coordinate equal to 0 and the thickness is  $2\varepsilon$  (see Fig. 3.1). Finally, we assume that the plate has a through the thickness crack (see Fig. 3.1) and that the material, the plate is made of, is isotropic, of Young's modulus  $E$  and Poisson's ratio  $\nu$ .

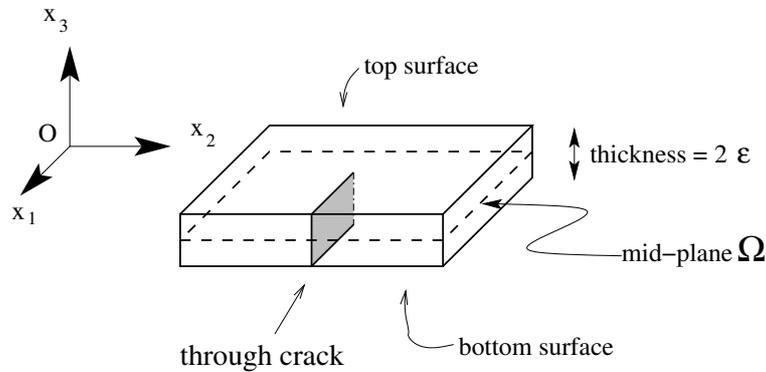


FIG. 3.1 – Cracked thin plate (the thickness is oversized for the sake of clarity).

In plate theory, it is usual to consider the following approximation of the three-dimensional displacements for  $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_1(x_1, x_2) + x_3 \theta_1(x_1, x_2) , \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_2(x_1, x_2) + x_3 \theta_2(x_1, x_2) , \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2) . \end{cases} \quad (3.1)$$

In these expressions,  $\bar{u}_1$  and  $\bar{u}_2$  are the membrane displacements of the mid-plane points while  $u_3$  is the deflection,  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are the section rotations. In the case of an isotropic material, the variational plate model splits into two independent problems : the first, called

the membrane problem, deals only with the membrane displacements, while the second, called the bending problem, concerns the deflection and the rotations. The membrane problem corresponds to the classical plane elasticity problem and has been already treated in many references (see for instance [15, 14]). So, in this paper, we shall only adress the bending problem.

In industrial finite element codes, the most widely used plate model is the Mindlin-Reissner one, for which the displacement is given by (3.1). Nevertheless, for reasons mentioned in the introduction, we chose here to work with the Kirchhoff-Love model, which can be seen as a particular case of (3.1), as it is obtained by introducing the Kirchhoff-Love assumptions, which read as

$$\theta = -\nabla u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = -\partial_1 u_3 \\ \theta_2 = -\partial_2 u_3 \end{cases}, \quad (3.2)$$

where, as in the following, the notation  $\partial_\alpha$  stands for the partial derivative with respect to  $x_\alpha$  (for  $\alpha = 1, 2$ ). A first consequence of this relation is that the transverse shear strain is identically zero, which avoids the shear locking problem. A second consequence of (3.2) is that the section rotation only depends on the transverse displacement. It means that this displacement is the only unknown function for the bending problem. For convenience, it will be denoted by  $u$  all along the following of this paper. So, in the Kirchhoff-Love framework and for a pure bending problem, the three-dimensional displacement reads as

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial_1 u(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial_2 u(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) \end{cases}.$$

As far as boundary conditions are concerned, for the sake of simplicity, we assume the plate is clamped on its boundary, except along the crack. As usual, the crack faces are traction free. Then, the plate is subject to a volume force, say  $f$  of coordinates  $(f_1, f_2, f_3)$ , and two surface forces, say  $g^+$  and  $g^-$ , applied on the top and bottom surfaces. The variational formulation (or virtual work formulation) of the Kirchhoff-Love model reads as

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H_0^2(\Omega) \text{ such that for any } v \in H_0^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu) \partial_{\alpha\beta}^2 u + \nu \Delta u \delta_{\alpha\beta}] \partial_{\alpha\beta}^2 v \, dx = \int_{\Omega} [F v + M_\alpha \partial_\alpha v] \, dx \end{cases}. \quad (3.3)$$

where :

$$\circ F = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3 \, dx_3 + g_3^+ + g_3^-, \text{ which is the resulting transverse loading,}$$

$$\circ M_\alpha = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_\alpha \, dx_3 + \varepsilon (g_\alpha^+ - g_\alpha^-), \text{ which is the resulting moment loading.}$$

Moreover  $\delta_{\alpha\beta}$  stands for the Kronecker's symbol and the summation convention over repeated indices is adopted, Greek indices varying in  $\{1, 2\}$ . Finally,  $H_0^2(\Omega)$  is the classical Sobolev space, the definition of which can be found in [1] for instance.

## 2.2 Asymptotic displacement near the crack tip and Fracture Modes

In the Kirchhoff-Love plate model, there are two fracture modes. Applying a symmetric bending leads to the first fracture mode, while applying an anti-symmetric bending or a transverse shear, leads to the second one (see Fig. 3.2).

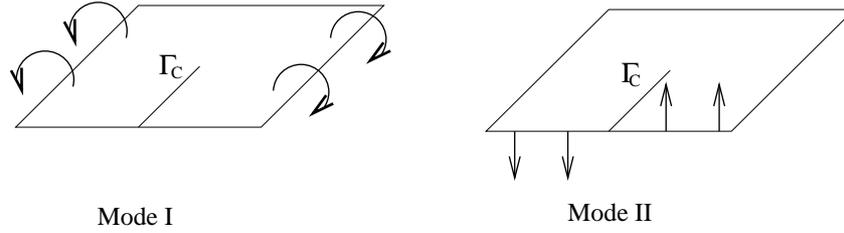


FIG. 3.2 – Fracture modes for Kirchhoff-Love bending model ( $\Gamma_C$  is the cracked part of the boundary). Left : a symmetric bending leads to mode I. Right : a shear bending leads to mode II.

To characterize them, let us recall that the governing equation related to the bending variational problem (3.3) reads

$$\frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 u = F + \partial_\alpha M_\alpha \quad (3.4)$$

on the mid-plane  $\Omega$ . It is a bilaplacian problem for which the singularities are well-known (see [10]). So, close to the crack tip, the displacement may be written as  $u = u_r + u_s$ , where  $u_r$  stands for the regular part of the transverse displacement and belongs to  $H^3(\Omega)$ . The singular part  $u_s$  belongs to  $H^{5/2-\eta}(\Omega)$ , for any  $\eta > 0$ , and reads

$$u_s(r, \theta) = A r^{3/2} \left[ K_1 \left( \frac{\nu+7}{3(\nu-1)} \cos \frac{3}{2}\theta + \cos \frac{\theta}{2} \right) + K_2 \left( \frac{3\nu+5}{3(\nu-1)} \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (3.5)$$

in polar coordinates relatively to the crack tip (see Fig. 3.3). Moreover, in the above equation, we have set :  $A = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-\nu^2}{E\varepsilon(3+\nu)}$ . Finally, the scalar coefficients  $K_1$  and  $K_2$  are the so-called "Stress Intensity Factors". They are widely used in fracture mechanics for crack propagation.

**Remark 1** *Let us recall that the Kirchhoff-Love plate theory is the limit of the three-dimensional elasticity theory, when the thickness vanishes. However, the modes we present here are deduced from the Kirchhoff-Love theory, and not from the three-dimensional elasticity theory. The reader, who is interested by the link between the singularities associated with these two theories, is referred to [23].*

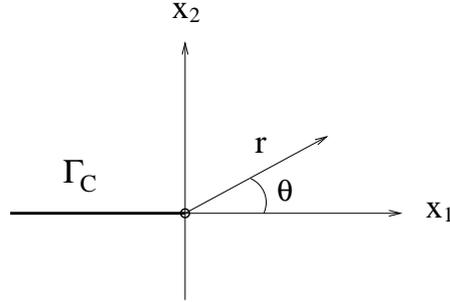


FIG. 3.3 – System of polar coordinates relatively to the crack tip (the crack is in bold line).

### 3 Finite element approximation of the Kirchhoff-Love model

#### 3.1 Choice of the finite element discretization

Let us introduce now the finite element discretization of the variational formulation (3.3). As usual, a finite dimensional approximation space  $V^h$  of the continuous space of solutions is built. For the Kirchhoff-Love problem, this last space is  $H_0^2(\Omega)$ . In order to have a conformal method, *i.e.*  $V^h \subset H_0^2(\Omega)$ , the functions of  $V^h$  must be continuously differentiable, which needs to use  $C^1$  finite elements. Among the available elements having this regularity (see [5]), the reduced HCT triangles and FVS quadrangles are of particular interest. For both of these elements, the triangle (resp. quadrangle) is divided into three (resp. four) sub-triangles (see Fig. 3.4). The basis functions of these elements are  $P_3$  polynomials on each sub-triangle and matched  $C^1$  across each internal edge. In addition, to decrease the number of degrees of freedom (dof), the normal derivative is assumed to vary linearly along the external edges of the elements (this assumption does not hold on the internal edges). Finally, both for triangles and quadrangles, there are only three dof on each node : the value of the function and its first derivatives. So, these elements have the two following properties :

1. With the reduction, the computational cost is limited to three dof for each node of the mesh, like a classical Mindlin-Reissner element for which each node has also three dof (the deflection and the two section rotations).
2. For regular problems (see [6]), the theoretical error is in  $O(h)$  for the *energy norm* and  $O(h^2)$  for the *displacement norm*, where  $h$  stands for the mesh parameter.

Then, the reduced HCT or FVS elements and the standard Mindlin elements have the same features as far as numerical cost and accuracy are concerned.

**Remark 2** *One can also notice that reduced HCT/FVS elements have the same degrees of freedom. Consequently, it is possible to use meshes made of triangles and quadrangles at the same time.*

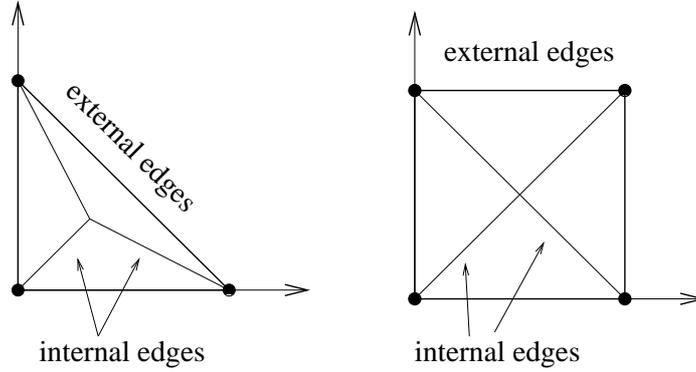


FIG. 3.4 – HCT triangle and FVS quadrangle. Location of degrees of freedom and sub-triangles.

### 3.2 Integral matching

As mentioned in the introduction, one of the strategies, which will be presented further, needs to match the enriched subdomain with the non-enriched one. So we shall have to carry out calculations in the case of a domain splitting into two subdomains, including an *integral matching* at the subdomains boundary.

Some theoretical results exist on the convergence of the mortar methods for fourth order problems. For instance, in [12, 13], it is shown that the use of mortar methods with reduced HCT/FVS elements can achieve an error in  $O(h)/O(h^2)$  for the energy/displacement norms. Nevertheless, as far as we know, no numerical experiment checking the accuracy of such a method has been published. Moreover, we don't use exactly the method described in [12, 13]. So, before introducing our enrichment strategy on a cracked domain, it appeared meaningful to test our integral matching conditions first.

Let us consider the problem (3.4) without crack. The loading  $F$  is such that the exact solution is  $u(x_1, x_2) = \sin 10(x_1 + x_2)$ . Let us observe that it also implies non-homogeneous Dirichlet boundary conditions. In a first step, we compute the solution of this problem on structured and non-structured meshes, with the reduced HCT/FVS elements. By the way, we can check also that the errors in energy and displacement norms are in accordance with what is expected. It also establishes a reference error level which will be compared to the mortar method one.

Then, we consider the domain is splitted into two subdomains, say  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , with matching triangulations. It means that, on both sides of the boundary  $\Gamma$  between the two subdomains, the nodes are located at the same place, see Fig. 3.5. It is identical to the so-called "*mortar method with matching triangulations*", in [12]. The matching conditions, which involve the values of the unknowns, say  $u_i$  on each part  $\Omega_i$ , are introduced in order to ensure the continuity of the function and its normal derivative. The following relations

were chosen at this aim

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u_1 \lambda &= \int_{\Gamma} u_2 \lambda \quad , \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad , \\ \int_{\Gamma} \partial_n u_1 \mu &= \int_{\Gamma} -\partial_n u_2 \mu \quad , \quad \forall \mu \in M \quad , \end{aligned} \quad (3.6)$$

where  $\Lambda$  and  $M$  are appropriate multiplier spaces. Let us notice that the change of sign in front of the normal derivative  $\partial_n u_i$  (second equation of (3.6)) is due to the fact that the outside normal vector has an opposite sign whether it belongs to  $\Omega_1$  or  $\Omega_2$ . In our numerical experiments, the multipliers spaces  $\Lambda$  and  $M$  are spaces of piecewise polynomials of degree 2 and 1, respectively.

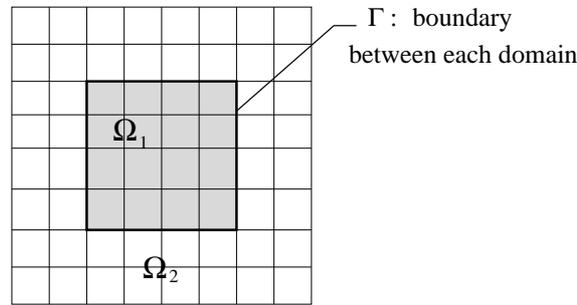


FIG. 3.5 – Matching decomposition of the domain  $\Omega$ .

The numerical results for the mortar method, on structured, non-structured, triangular and quadrangular meshes, are given Fig. 3.6, where they are compared with the classical method. It shows that our integral matching does not affect the accuracy : the convergence curves are nearly identical in all cases.

## 4 XFEM enrichments

### 4.1 Basics

The means used to define XFEM enrichments are very close to what has already been presented in previous papers [17, 15, 14]. The displacement discontinuity across the crack is represented using a Heaviside-like function, which is multiplied by the finite element shape functions. For the nonsmooth enrichment near the crack tip, we suggest two main strategies. In both of them, an enrichment area of fixed size is defined and the nonsmooth functions are added inside this area. Then, the global unknown function may be written as :

$$u^h = \sum_i a_i \varphi_i + \sum_{j \in J} b_j H \varphi_j + \sum_{k \in K} c_k f_k \quad ,$$

where function  $H$  is equal to  $+1$  on one side of the crack and  $-1$  on the other ; and  $\varphi_i$  stands for the reduced HCT/FVS shape functions. The set  $J$  denotes the degrees of

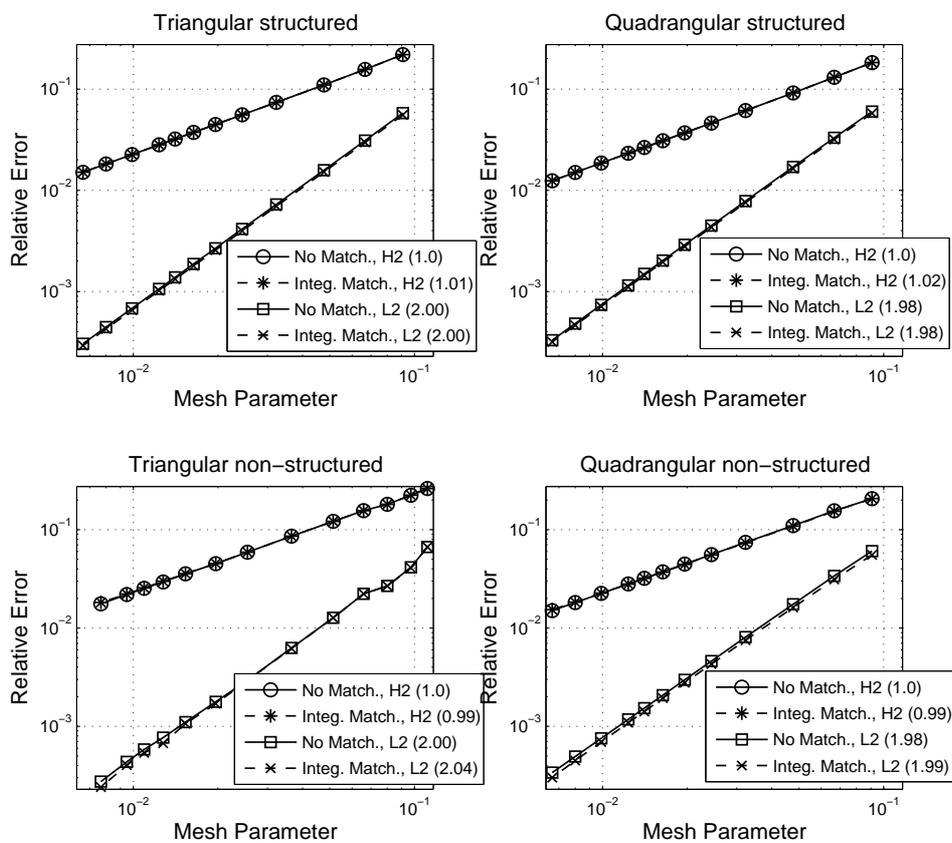


FIG. 3.6 – Comparison of the accuracy between classical FEM and integral matching.

freedom whose associated shape functions support is completely crossed by the crack (see Fig. 3.7). The set  $K$  and functions  $f_k$  are connected with the crack tip enrichment ; their exact meaning and expressions will be detailed further, after next section dealing with a numerical problem we met and the way we chose to overcome it.

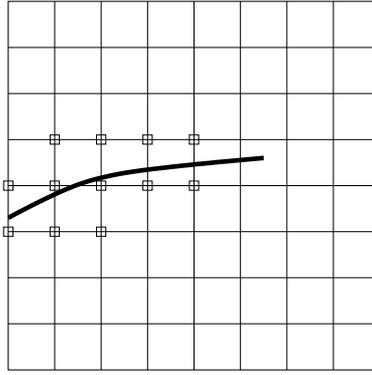


FIG. 3.7 – Set of nodes to be enriched along the crack.

## 4.2 An incompatibility between H-enrichment and the FVS element

It appears a kind of numerical incompatibility between the Heaviside-like enrichment and the FVS element, reduced or not. If a straight crack crosses two adjacent edges of a quadrangle, then a *non-invertible* linear system may result. The reason is there exists a function, in the FVS functions space, that is completely zero on two adjacent sub-triangles of the quadrangle and not on the two others (see Fig. 3.8). Consequently, if the quadrangle is cut along those two sub-triangles (see Fig. 3.9, left), the regular degrees of freedom associated with the opposite node are linear combinations of the  $H$ -enriched ones. This is not a proof that the resulting matrix will be singular, but at least an insight. In our numerical applications, with not too coarse meshes, the linear system was always singular. An example of such a mesh is given Fig. 3.10. In addition, this problem is independant of the distance between nodes and crack : whether they are far or not, the non-invertibility remains. Let us also remark that it is not particularly due to the fact that the mesh is structured or not, even if, in our tests, the problem arises only with non-structured meshes. By the way, in the case of a straight crack and structured meshes, the quadrangles had always three sub-triangles crossed by the crack (see Fig. 3.9, right), which does not cause any non-invertibility.

To solve this problem, several ideas were studied, like moving the crack or the nodes. However, they are not convenient. Moving the crack in order to avoid to cross two sub-triangles is quite complicated and, moreover, it may introduce a significant error. If we choose to move the nodes, it is mandatory to move almost all the nodes belonging to cracked quadrangles and to line up them with the crack. This method can be considered as a remeshing of a part of the domain. It is numerically expensive and in total contradiction with the philosophy of XFEM. So we tried something else. Starting from the fact that this

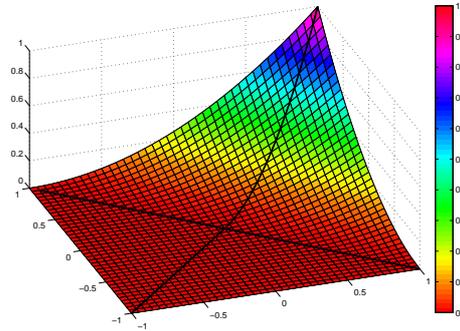


FIG. 3.8 – A particular FVS function : both this function and its derivatives are completely zero on two adjacent sub-triangles.

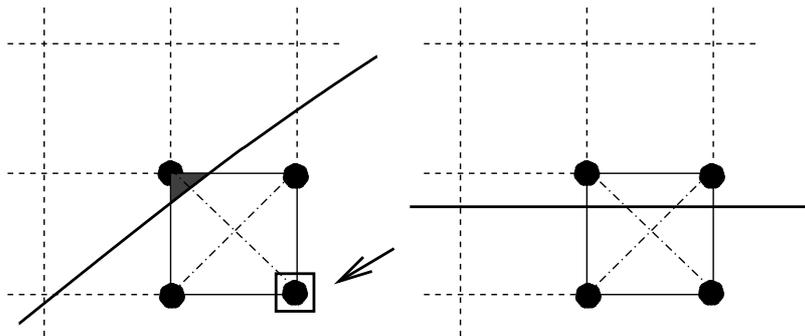


FIG. 3.9 – Left : only two sub-triangles are crossed, which leads to a singular matrix. Right : three sub-triangles are crossed, which leads to an invertible matrix.

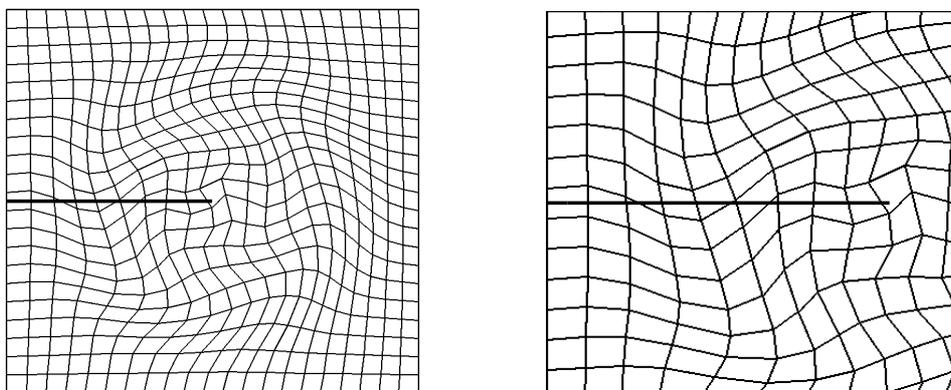


FIG. 3.10 – Left : example of mesh leading to a non-invertible linear system, with the crack (in bold line). Right : zoom on the crack.

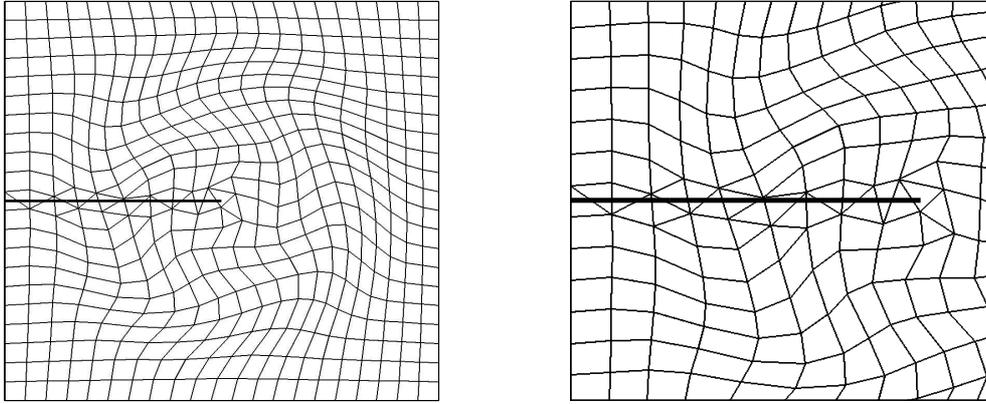


FIG. 3.11 – Left : entire modified mesh (the straight line is the crack). Right : zoom on the crack.

incompatibility problem does not occur with the HCT triangle, the idea is then to divide each quadrangle crossed by the crack in two triangles (see an example Fig. 3.11). It is an easy and quite cheap method, and we emphasize on the fact that it is not a remeshing : the nodes of the "new" mesh are exactly the same as those of the "old" one.

To conclude this section, let us notice that it may certainly exist other possibilities to overcome this non-invertibility, for example, looking for the "singular" degrees of freedom to eliminate them. This could be an area for further research.

### 4.3 First enrichment strategy : adding degrees of freedom on each node

This strategy is directly inspired from [14, 15] for plane elasticity problems. In these two references, this method was denoted respectively "geometrical enrichment" or "XFEM with fixed enrichment area". The main idea is that every node included in a fixed area will be enriched with the singular functions (see Fig. 3.12). So, for each enriched node, four degrees of freedom are added for each degree of freedom of the classical finite element. This enrichment is obtained by multiplying the nonsmooth functions with the finite element shape functions. Then, the unknown reads

$$u^h = \sum_i a_i \varphi_i + \sum_{j \in J} b_j H \varphi_j + \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 c_{kl} F_l \varphi_k . \quad (3.7)$$

where the nonsmooth functions are linked to the expression of the bilaplacian singularity (3.5) and given by

$$\begin{cases} F_1(r, \theta) = r^{3/2} \sin \frac{3\theta}{2} ; & F_2(r, \theta) = r^{3/2} \sin \frac{\theta}{2} ; \\ F_3(r, \theta) = r^{3/2} \cos \frac{3\theta}{2} ; & F_4(r, \theta) = r^{3/2} \cos \frac{\theta}{2} , \end{cases} \quad (3.8)$$

in polar coordinates relatively to the crack tip (see Fig. 3.3). Moreover,  $K$  denotes the set of degrees of freedom associated with the nodes that are inside the enrichment zone : they are indicated by a small circle on Fig. 3.12. As both reduced HCT and FVS elements have three degrees of freedom at each node, the addition of four nonsmooth functions means that twelve additional degrees of freedom are used for each node included in the nonsmooth enrichment area. Let us also remark that some nodes are enriched both with  $H$  and nonsmooth functions.

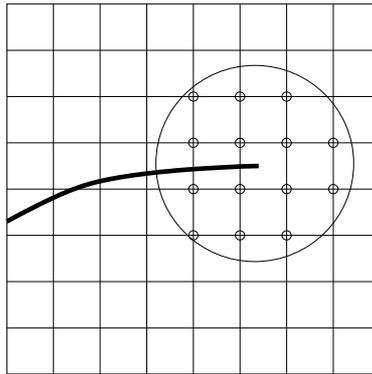


FIG. 3.12 – Set of nodes enriched by the nonsmooth functions.

#### 4.4 Two dofs enrichment strategies

From [15], we know that a large number of additionnal degrees of freedom in the enrichment area generally leads to a very high condition number for the associated linear system. A first attempt in decreasing the number of singular enrichment dofs, and then decreasing the condition number, is obtained by making the following modification in the singular enrichment.

The asymptotic displacements near the crack (3.5) are function of the 2 unknown stress intensity factors  $K_1$  and  $K_2$ . But, in the XFEM enrichment (3.7), these functions are developed on 4 degrees of freedom. So our idea is to develop the asymptotic displacements on only 2 degrees of freedom. It means that the 4  $F_l$  functions are replaced by the

two following ones, say  $G_l$

$$\begin{cases} G_1(r, \theta) = r^{3/2} \left( \frac{\nu + 7}{3(\nu - 1)} \cos \frac{3}{2}\theta + \cos \frac{\theta}{2} \right) ; \\ G_2(r, \theta) = r^{3/2} \left( \frac{3\nu + 5}{3(\nu - 1)} \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) . \end{cases} \quad (3.9)$$

So the singular enrichment term  $\sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 c_{kl} F_l \varphi_k$  becomes  $\sum_{k \in K} \sum_{l=1}^2 c_{kl} G_l \varphi_k$  in the expression (3.7) of the approximate solution  $u^h$ . To conclude, let us just remark that this idea is not new : it has been tested in several references (see [11] for instance).

#### 4.5 Second enrichment strategy : global nonsmooth functions and integral matching

The second strategy is inspired by the so called "XFEM dof gathering with pointwise matching", introduced in [15]. The idea of such method is to reduce the number of degrees of freedom that are introduced in the finite element basis. For this, the support of the singular added functions is the whole enrichment area (see Fig. 3.13) and they are not multiplied by the finite element basis functions. So, instead of 12 additional degrees of freedom per node inside the enrichment area, there are only 4 singular degrees of freedom for the whole system : they are associated with the functions given by (3.8).

We introduce the boundary of the enrichment area, say  $\Gamma$ . It cuts  $\Omega$  into two subdomains : the enrichment area, say  $\Omega_1$ , and the rest of  $\Omega$ , say  $\Omega_2$  (see Fig. 3.13). The unknowns defined on each domain  $\Omega_i$  are denoted by  $u_i^h$  and their expressions read

$$\begin{cases} u_1^h = \sum_{i \in N_1} a_i \varphi_i + \sum_{j \in J_1} b_j H \varphi_j + \sum_{i=1}^4 c_i F_i ; \\ u_2^h = \sum_{i \in N_2} a_i \varphi_i + \sum_{j \in J_2} b_j H \varphi_j , \end{cases} \quad (3.10)$$

where  $N_1$  and  $N_2$  are the sets of degrees of freedom that are located in  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  ( $N_1 \cap N_2$  is not empty : it corresponds to the set of nodes that are on the boundary  $\Gamma$ ). In a same way,  $J_i$  are the sets of degrees of freedom of  $J$  that are located in  $\Omega_i$  ( $J_1 \cap J_2$  is not empty for the same reason). Naturally, a matching condition is needed at the interface between the enrichment area and the rest of the domain, in order to insure the continuity of the function and its derivatives. Instead of the pointwise matching introduced in [15], we use the integral matching given by (3.6).

**Remark 3** *Like in the previous section, it is also possible to develop the singularities on the 2 dofs given by (3.9). This possibility will be considered further.*

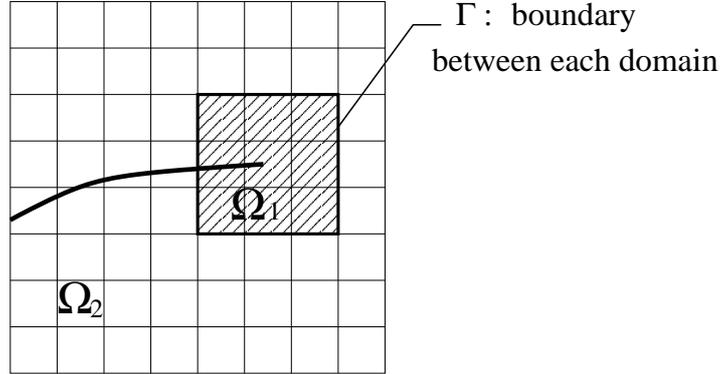


FIG. 3.13 – Set of elements which represents the support of the nonsmooth functions (set  $\Omega_1$ ).

## 5 Numerical experiments

The numerical experiments that we present in this section have been performed with the open-source finite element library Getfem++ [9].

### 5.1 Test problem

We test the previous methods on a benchmark problem : a plate with a straight through crack. The plate is a square of edge 1, and the material is assumed to be isotropic. In the experiments, we took  $E = 14.98 \text{ kPa}$  for Young's modulus and  $\nu = 0.3$  for Poisson's ratio. Moreover, half the thickness is  $\varepsilon = 0.045$ . However, let us recall that, for the Kirchhoff-Love model, the thickness is irrelevant with respect to numerical accuracy. The exact solution of the problem is the pure mode II (see Fig. 3.14) which reads

$$u(r, \theta) = \frac{1}{10} r^{3/2} \left( \frac{3\nu + 5}{3(\nu - 1)} \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (3.11)$$

in polar coordinates. It is quite easy to check this function is such that  $\frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 u = 0$ , and satisfies free-edge boundary conditions on the crack faces. Finally, let us just observe that, for this test problem, there is no volume nor surface forces : the loading is due to non-homogeneous boundary conditions, given by (3.11).

### 5.2 Convergence curves

The classical and eXtended Finite Element Methods (FEM and XFEM) were applied to the previous problem. In particular, three XFEM strategies were investigated : they are called XFEM 1 (first strategy with 4 singularities, see Section 4.3), XFEM 1 bis (first strategy with 2 singularities, see Section 4.4) and XFEM 2 (second strategy, see Section 4.5).

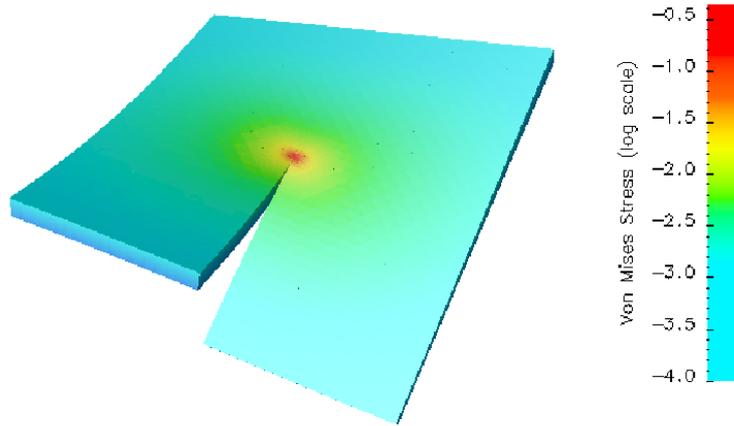


FIG. 3.14 – Graph of the exact solution, with the Von Mises stress criteria.

The  $L^2$  (displacement) and  $H^2$  (energy) errors were measured, on triangular, quadrangular, structured and non-structured meshes. Let us notice that the coarsest meshes had 11 elements on each edge of the domain, and the more refined ones 151. The enrichment area diameter was 0.30.

The convergence curves are given Fig. 3.15 and Fig. 3.16. They show the errors decrease when the mesh is refined. More precisely, we can first observe that the three XFEM are more accurate than classical FEM. Among them, the most accurate is the second enrichment strategy (XFEM 2) and the less one is the first strategy with 2 singularities (XFEM 1 bis). So it exhibits to use 4 numerical singularities instead of the 2 asymptotics singularities lead to more accurate numerical results. A kind of superconvergence behaviour also appears for XFEM 1, especially with quadrangular meshes : thanks to it, its accuracy reaches XFEM 2 for the thinnest meshes. Moreover, it can be noticed that, for non-structured meshes and particularly for triangular ones, the displacement norm error is quite "oscillatory". However, we can see that the error globally decreases. So, even though this curve is less smooth than the others, the numerical results remain perfectible, but satisfactory.

Then, the rates of convergence were carefully examined. Let us recall that, denoting  $u$  and  $u^h$  the analytical and numerical solutions, the so-called rate of convergence is the number  $\alpha$  such that  $\|u^h - u\|_V = O(h^\alpha)$ . It also depends on the choice of space  $V$ . For example, on regular problems, with reduced HCT/FVS elements, we can expect  $\|u^h - u\|_{H^2} = O(h)$  and  $\|u^h - u\|_{L^2} = O(h^2)$  (see [6]). So, the results we obtained are summarized in Tab. 3.1. First, we observe that, for classical FEM, due to singularities, the rates of convergence remain limited around  $1/2$  in energy norm and 1 in displacement norm. Second, as expected, the XFEM rates of convergence are close to be optimal, *i.e.* they are the same as those of a regular problem. Finally, the superconvergence behaviour of XFEM 1 clearly appears.

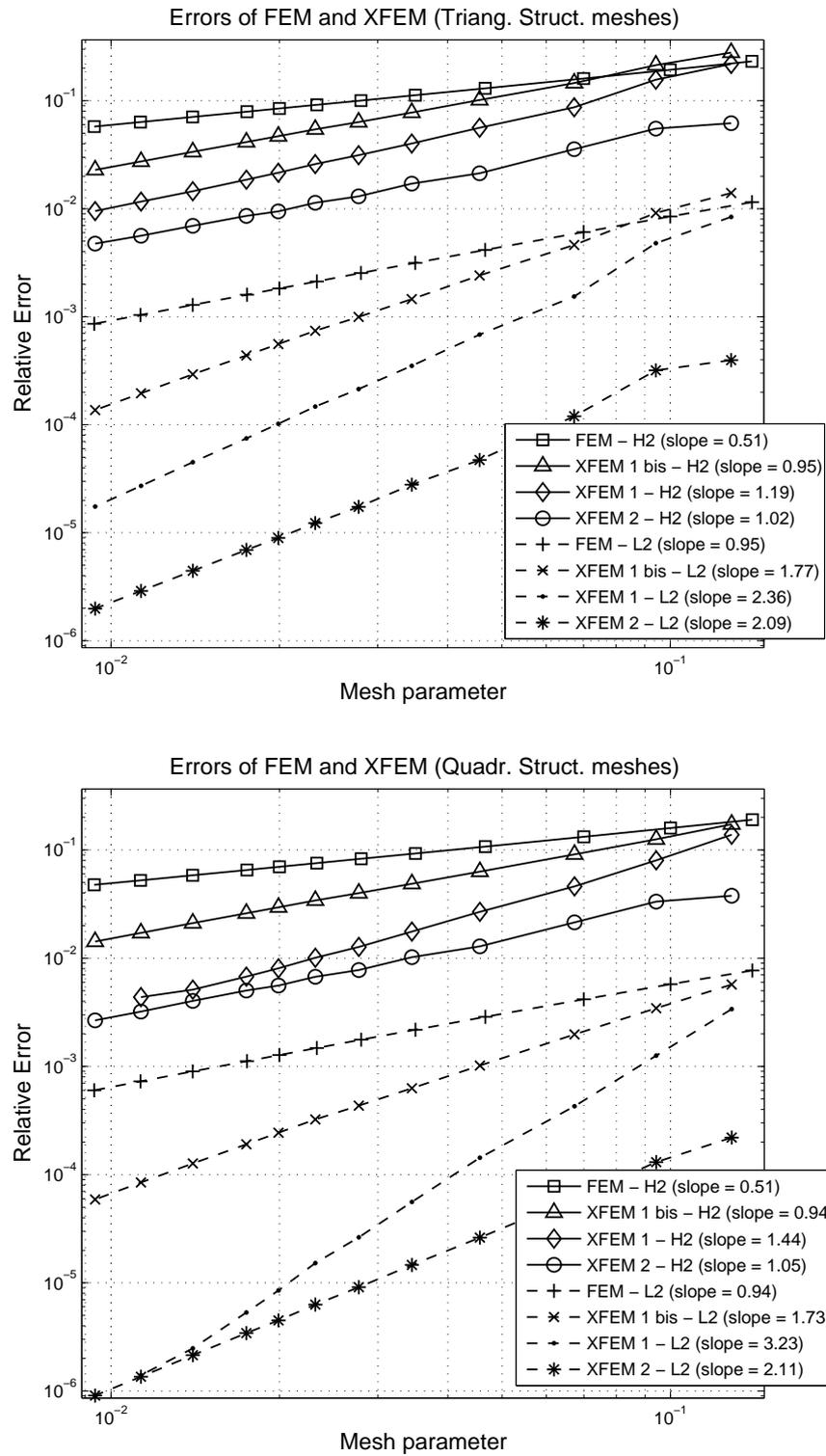


FIG. 3.15 – Convergence curves for FEM and XFEM on structured meshes. Top : triangular meshes. Bottom : quadrangular meshes.

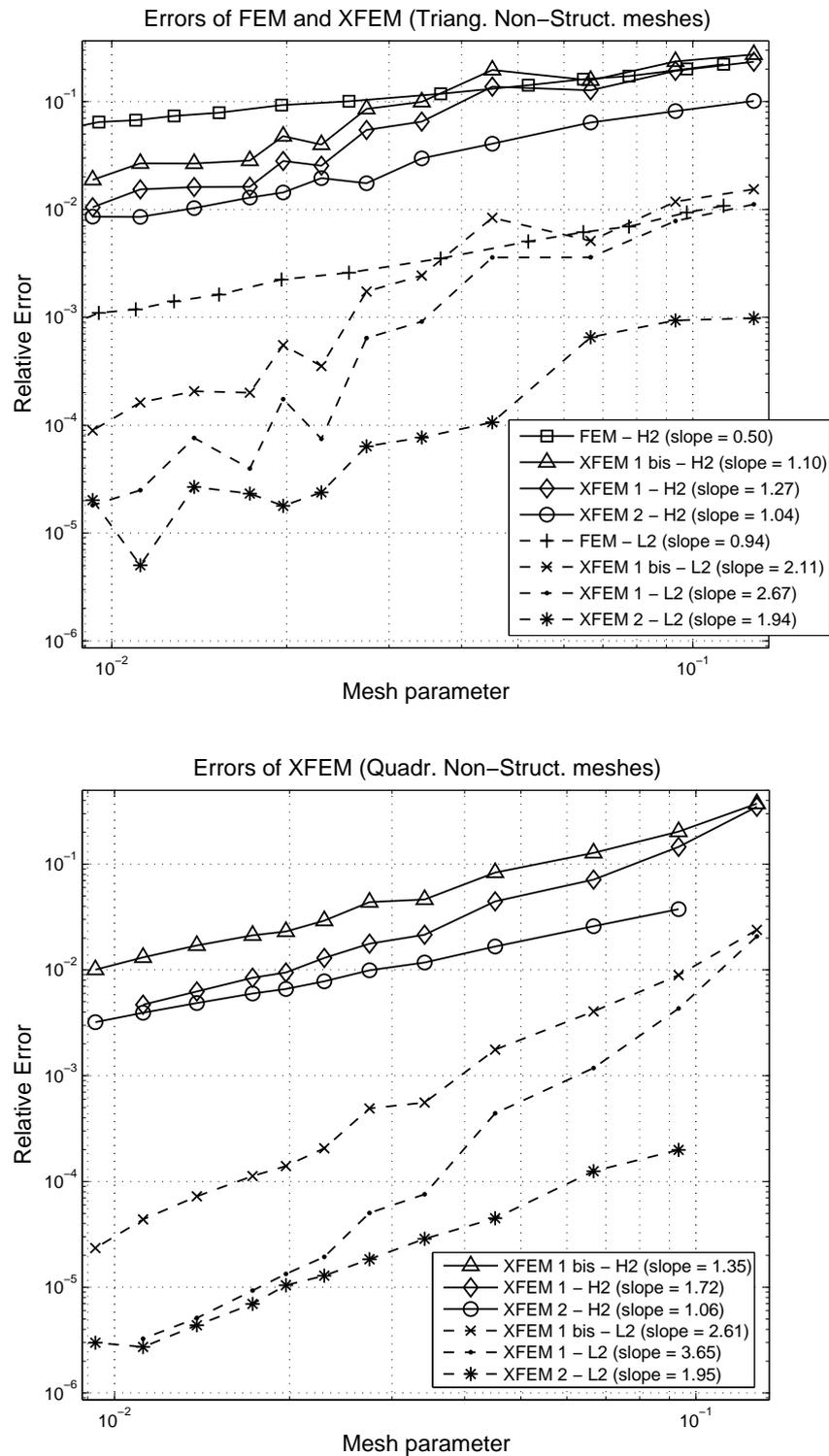


FIG. 3.16 – Convergence curves for FEM and XFEM on non-structured meshes. Top : triangular meshes. Bottom : quadrangular meshes.

	Struct. meshes		Non-Struct. meshes	
	$H^2$ norm	$L^2$ norm	$H^2$ norm	$L^2$ norm
FEM Tri.	0.51	0.95	0.50	0.94
FEM Quad.	0.51	0.94	Not tested	
XFEM 1 bis Tri.	0.95	1.77	1.10	2.11
XFEM 1 bis Quad.	0.94	1.73	1.35	2.61
XFEM 1 Tri.	1.19	2.36	1.27	2.67
XFEM 1 Quad.	1.44	3.23	1.72	3.65
XFEM 2 Tri.	1.02	2.09	1.04	1.94
XFEM 2 Quad.	1.05	2.11	1.06	1.95

TAB. 3.1 – Rates of convergence for FEM and XFEM.

### 5.3 Condition number

It is well-known that the application of a finite element method leads to solve a linear system. This one can be more or less well-conditioned. This section deals with this point in XFEM strategies framework. The numerical results are given Fig. 3.17 and 3.18.

The classical FEM is taken as a reference. It can be observed that its condition number grows at a rate close to 4. As expected, since XFEM uses additional singular shape functions, its condition numbers are higher. More precisely, XFEM 1 produces the more ill-conditioned linear systems. It is close to  $10^{16}$  for the thinnest meshes. So this phenomenon could limitate the capabilities of such a method as, beyond this value, a matrix cannot be numerically inverted. Moreover, the rates of growth are the hugest : between 6.7 and 8.4. XFEM 2 and XFEM 1 bis produce better conditioned linear systems since their rate of growth remains close to 4, like the classical FEM.

Let us recall that the high condition number of XFEM 1 was already mentionned in [15, 14]. So, to avoid this drawback, alternative enrichment strategies were developed. In [14], the authors introduced a numerical procedure that allows, in a sense, to orthogonalize the enrichment functions. Some key features of our "Integral Matching" strategy (XFEM 2) are directly inspired from [15] : the use of global enrichment functions instead of enriching each node decreases the number of dofs and also the condition number. Hence, it is not surprising to observe that the condition number of XFEM 2 is significantly lower than XFEM 1. However, what can be observed here is that the development of the singularities on 2 dofs, instead of 4, is also a very efficient way to reduce the condition number, even if it leads to a slight loss of accuracy.

**Remark 4** *We also tested the singularities developed on 2 dofs for the Integral Matching enrichment strategy. The singular enrichment term  $\sum_{k=1}^4 c_k F_k$  of (3.10) is simply replaced*

*by  $\sum_{k=1}^2 c_k G_k$ , where functions  $G_k$  are expressed in (3.9). With this modification, the errors*

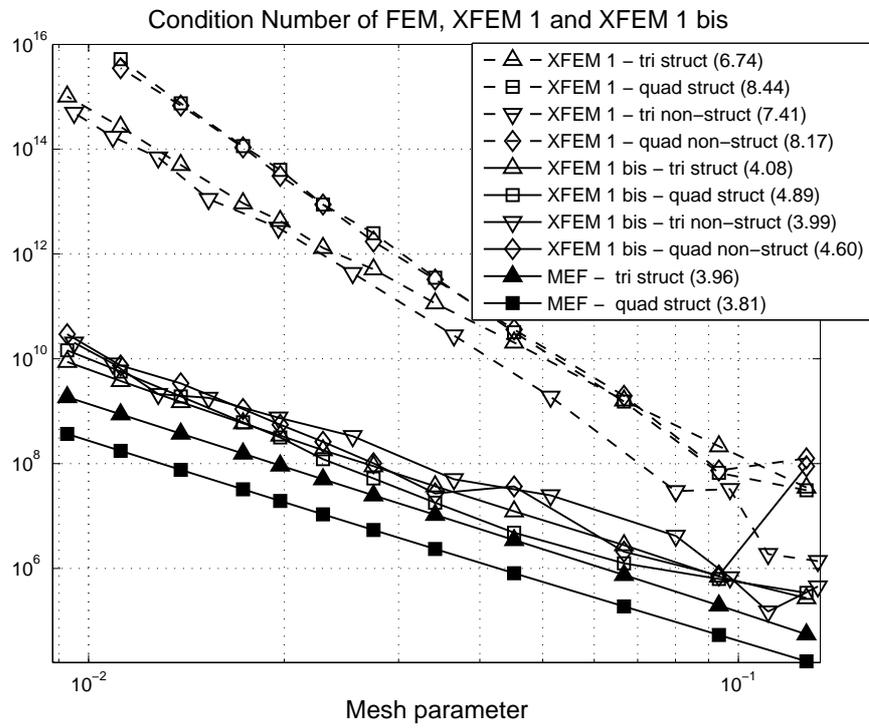


FIG. 3.17 – Condition numbers of FEM and XFEM first strategy (with 2 or 4 singular dofs).

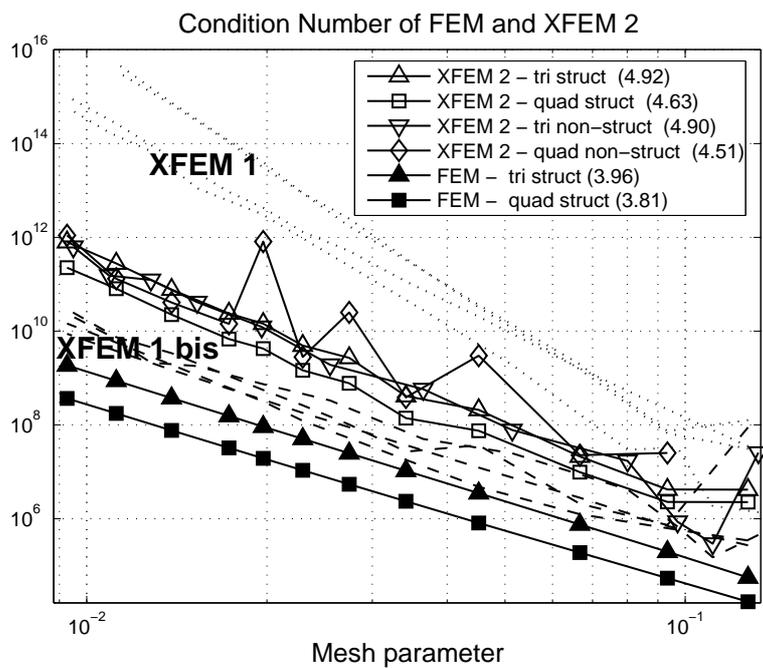


FIG. 3.18 – Condition numbers of FEM and all XFEM.

*remain unchanged : their numerical values are exactly the same on about 3 significant figures. Hence the curves are the same as those of XFEM 2 in Fig. 3.15 and 3.16. It is why we do not present any graphic here. The condition number is just slightly decreased compared to XFEM 2 : it is divided by a factor that varies between 1 and 3 for most of the meshes.*

## **Concluding remarks**

We presented the adaptation of XFEM to the Kirchhoff-Love plate model. Several XFEM formulations have been presented and we stress the fact that the features of these methods make possible an implementation in an industrial software :

- for all formulations, it was shown that the accuracy was nearly equal to the one of a classical finite element method on a regular non-cracked problem ;
- the computational cost is nearly equal to the one of the Mindlin-Reissner model, which is the reference model for plate problems in industrial softwares ;
- our formulation is not subject to numerical locking due to the enrichment, unlike the Mindlin-Reissner model and the strategy presented in [16].

The results of our numerical experiments recommend the use of the "Integral matching" formulation, which is the less costly and the more accurate (especially on coarse meshes), and which keeps a not too huge condition number.

Even if all these numerical tests seem to indicate that the accuracy of these XFEM formulations is optimal, no mathematical proof of this optimality result is given. However, we think it could be possible to formulate one and such a research should be a very interesting complement to this work.



# Chapitre 4

## Calcul de Facteurs d'Intensité de Contrainte (FIC)

### Introduction

Le concept de Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC) est très important dans les applications, car il intervient dans les critères indiquants le risque de propagation d'une fissure déjà existante. En pratique, on calcule les FIC par un post-traitement, à partir du déplacement de la structure fissurée (lui-même obtenu préalablement via une méthode numérique). Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories :

- les méthodes directes, qui comparent l'expression analytique de la singularité avec le déplacement élément fini,
- les méthodes globales, dont le calcul se fait sur une zone plus ou moins grande entourant le fond de fissure.

Les méthodes globales sont plus utilisées dans l'industrie, et notamment celles basées sur l'intégrale-J (présentée au chapitre 1 en (1.87), page 54). Une première méthode consiste à estimer numériquement (1.87). Une deuxième méthode (introduite dans [7]) consiste à transformer l'expression en une intégrale de surface.

Dans ce chapitre nous proposons deux méthodes originales de calcul de FIC définies pour le modèle de Kirchhoff-Love. La première se propose d'exploiter l'une des caractéristiques de la variante dite "global non-smooth functions and integral matching", présentée dans le chapitre précédent. La présence des singularités exactes dans la base élément fini permet de déduire une estimation des FIC. Cette méthode, très simple, ne nécessite pas de post-traitement. Cette méthode est locale, et ne nécessite aucun calcul.

La deuxième méthode est basée sur l'intégrale-J. Le principe est d'intégrer la solution numérique obtenue via XFEM, sur une couronne d'éléments entourant le fond de fissure.

Signalons que le fait de développer des méthodes pour le modèle de Kirchhoff-Love est assez différent de ce qui est utilisé dans les codes industriels. Par exemple, dans le code SAMCEF, le modèle de Mindlin est utilisé, et le fond de fissure est modélisé localement par le modèle d'élasticité tridimensionnelle. Ainsi, les concepts de mécanique de la rupture utilisés sont ceux définis sur ce modèle, bien que l'intégrale-J soit définie pour le

modèle de Mindlin-Reissner [38].

## Plan du chapitre

Ce chapitre est découpé en deux sous-parties. Dans la première, nos méthodes de calculs de FIC sont présentées. La seconde partie est consacrée aux expériences numériques. Deux cas-tests sont présentés. Les résultats de nos méthodes appliquées à ces cas-tests sont ensuite présentés et analysés.

Cette partie sur les FIC présente plusieurs intérêts. D'abord, c'est une application des méthodes formulées au chapitre précédent. Il est toujours intéressant de montrer les développements d'une méthode. Mais dans notre cas de figure, c'est aussi une manière de compléter l'exposé des méthodes XFEM que nous proposons. De même que le coût de calcul et la précision ont été étudiées, nous tâchons de montrer maintenant que nos formulations permettent d'évaluer les FIC de manière satisfaisante.

Un autre intérêt de ce chapitre sur les FIC, est d'apporter des éléments de réponse à la question de la taille qu'il faut donner au rayon  $\mathcal{R}$  de la zone d'enrichissement. C'est une question récurrente sur les formulations XFEM ayant une zone d'enrichissement de taille fixe, comme les méthodes proposées dans [14] et [15].

# 1 Méthodes de calcul

## 1.1 Première méthode : estimation directe

### Description de la méthode

L'expression du déplacement singulier dans le modèle de Kirchhoff-Love (1.83) ou (3.5) montre qu'en présence de fissure il n'y a que 2 modes singuliers, dont la présence est quantifiée par la valeur des FIC  $K_1$  et  $K_2$ . Or, dans la deuxième formulation XFEM proposée au chapitre précédent, nommée "global nonsmooth functions and integral matching", il est possible de prendre comme enrichissement singulier les deux fonctions  $G_l$  (3.9), dont l'expression est identique aux deux modes singuliers. Ainsi, dans la partie du domaine  $\Omega_1$  contenant le fond de fissure, la solution numérique est exprimée par :

$$u_1^h = \sum_{i \in N_1} a_i \varphi_i + \sum_{j \in J_1} b_j H \varphi_j + \sum_{l=1}^2 c_l G_l . \quad (4.1)$$

On peut voir facilement que les coefficients  $c_l$  peuvent être des approximations variables des deux FIC, à un coefficient multiplicatif près. En effet, dans le modèle de Kirchhoff-Love, la définition mathématique des FIC est

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \sigma_{22}(r, \theta = 0, x_3 = \varepsilon) \\ K_2 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \sqrt{2r} \sigma_{12}(r, \theta = 0, x_3 = \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les contraintes singulières sont en  $O(1/\sqrt{r})$  au voisinage du fond de fissure. Or, en calculant les contraintes  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  associées au déplacement  $u_1^h$  ci-dessus, puis en multipliant par  $\sqrt{r}$  et en passant à la limite, tous les termes réguliers s'annulent, et ne resteront que les coefficients  $c_l$ , à un facteur multiplicatif près. Ainsi ces coefficients coïncident bien avec la définition des FIC.

Il reste juste à évaluer le facteur multiplicatif. Faisons le calcul en détail pour  $K_1$  (la même démarche est valable pour  $K_2$ ). Dans la formule (4.2), on remplace  $\sigma_{22}$  par  $\sigma_{22}^h$ , que nous exprimons en fonction du déplacement approché  $u_1^h$  (4.1). En combinant la loi de comportement (1.8) du modèle de Kirchhoff-Love avec l'expression du tenseur de déformation (1.7), et en se restreignant au problème de flexion ( $u_3$  comme seule inconnue), la relation entre  $\sigma_{22}$  et  $u_3$  est :

$$\sigma_{22} = -x_3 \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \partial_{11}^2 u_3 + \partial_{22}^2 u_3]. \quad (4.3)$$

On remplaçant  $u_3$  par sa fonction d'approximation  $u_1^h$  dans  $\sigma_{22}$ , puis en reportant dans (4.2), on obtient :

$$K_1^h = -\frac{E \varepsilon \sqrt{2}}{1-\nu^2} \left( \underbrace{\nu \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{11}^2 u_1^h}_{l_1} + \underbrace{\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{22}^2 u_1^h}_{l_2} \right) \quad (4.4)$$

Les deux limites  $l_1$  and  $l_2$  existent, car la partie la plus singulière de  $u_1^h$  étant en  $O(r^{3/2})$ , on a donc  $\partial_{\alpha\beta}^2 u = O(r^{-1/2})$ . A part sur la fissure, sur les bords des éléments et sur le sous-découpage des éléments (liés à l'utilisation du HCT/FVS), les fonctions de base de  $u_1^h$  sont  $\mathcal{C}^2$ , donc  $\partial_{\alpha\beta}^2 u_1^h$  existe, et on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{\alpha\beta}^2 u_1^h = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_l c_l \sqrt{r} \partial_{\alpha\beta}^2 G_l \quad (4.5)$$

car  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{\alpha\beta}^2 \varphi_i = 0$  et  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{\alpha\beta}^2 \varphi_j H = 0$ . Le calcul des dérivées secondes des fonctions  $G_l$  est un peu long mais n'est pas difficile. On obtient :

$$\begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{11}^2 G_1(r, 0) = \frac{\nu+1}{\nu-1} \quad \left| \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{22}^2 G_1(r, 0) = \frac{\nu-3}{\nu-1} \right. \\ \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{11}^2 G_2(r, 0) = 0 \quad \left| \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{22}^2 G_2(r, 0) = 0 \right. \end{array}$$

Ce calcul confirme que  $G_2$  n'interviendra pas dans le calcul de  $K_1^h$ . On en déduit surtout que  $l_1 = c_1 \frac{\nu+1}{\nu-1}$ ,  $l_2 = c_1 \frac{\nu-3}{\nu-1}$ , et finalement :

$$K_1^h = -\frac{E \varepsilon (\nu+3) \sqrt{2}}{1-\nu^2} c_1. \quad (4.6)$$

Le calcul de  $K_2$  est mené de la même manière. La définition (4.2) fait intervenir  $\sigma_{12}$ , qui est homogène à  $\partial_{12}^2 u_3$ , donc il faut calculer les dérivées croisées des fonctions  $G_l$ . On

obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{12}^2 G_1(r, 0) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{12}^2 G_2(r, 0) &= \frac{\nu+1}{\nu-1},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$K_2^h = -\frac{E \varepsilon (\nu + 3) \sqrt{2}}{1 - \nu^2} c_2. \quad (4.7)$$

La valeur des coefficients  $c_l$  se trouve dans le vecteur solution du système linéaire résultant du calcul de la solution approchée  $u_1^h$ . Il n'y a donc aucun post-traitement nécessaire pour obtenir l'approximation  $(K_1^h, K_2^h)$  du couple de FIC  $(K_1, K_2)$ .

### Taux de convergence attendu

Il n'existe pas résultat théorique de convergence pour cette méthode. Signalons tout de même trois référence significatives, dont les 2 dernières concernent le problème de l'élasticité bidimensionnelle.

La référence [42] montre la convergence théorique d'une méthode d'estimation de FIC très proche de la notre. Il s'agit de la méthode dite de "Singular Function Method", introduite dans le courant des années 1970. C'est une simple méthode d'élément fini classique, où la base élément fini est enrichie par la singularité du problème traité. La différence principale est que le support de la singularité s'étend sur tout le domaine. la solution numérique  $u^h$  s'écrit donc comme la somme

$$u^h = \sum_i u_i \varphi_i + \sum_j c_j S_j, \quad (4.8)$$

où  $S_j$  désigne les singularités, et  $\varphi_i$  désigne les fonctions de forme de la base élément fini classique.

Ainsi, après résolution du système linéaire, les coefficients  $c_j$  approchent les FIC. Or, dans [42], le cas d'un opérateur elliptique général appliqué à un domaine présentant un nombre arbitraire de coins est traité. Pour le cas de l'opérateur bilaplacien avec une fissure (cas d'un coin d'ouverture  $2\pi$ ), le résultat prouvé indique que l'erreur sur les FIC ainsi calculés est en  $O(\sqrt{r})$ . Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de résultat numérique illustrant cette estimation.

La référence [30] concerne le cas de l'élasticité bidimensionnelle. Une résultat théorique de convergence y est donné, pour une méthode d'estimation "directe" de FIC relativement proche de la notre. La formulation XFEM de [30] utilise un degré de liberté avec support global pour chaque singularité, multiplié par une fonction dite "cutoff", notée  $\chi$ , très régulière. Cette fonction est définie par deux cercles de rayons  $r_0$  et  $r_1$ , telle que :

$$\begin{cases} \chi(r) = 1 \text{ si } r \leq r_0 \\ \chi(r) \in ]0, 1[ \text{ si } r \in ]r_0, r_1[ \\ \chi(r) = 0 \text{ si } r \geq r_1 \end{cases} . \quad (4.9)$$

Avec cette formulation, un résultat de convergence théorique est prouvé, énonçant que  $|K_i^h - K_i| \leq C \sqrt{h}$ . De plus, dans [30], des tests numériques montrent que cette convergence en  $\sqrt{h}$  peut être atteinte, bien que le taux effectivement atteint dépende du choix de  $r_0$  et  $r_1$ . Les résultats numériques montrent que plus la fonction cutoff est “raide”, c’est-à-dire avec  $r_0$  et  $r_1$  proches, et moins le taux de convergence est bon (il peut même passer en dessous de  $h^{1/2}$ ). En revanche, pour un passage de très progressif de 1 à 0 ( $r_0$  et  $r_1$  éloignés), le taux de convergence dépasse 1/2. Signalons tout de même que le niveau d’erreur reste toujours relativement élevé (de 8 % dans le meilleur des cas).

Dans [11], une méthode numérique assez proche de celle que nous proposons est testée, sur un problème d’élasticité bidimensionnelle. Cette méthode utilise la variante XFEM nommée “adding enrichment on each node” dans le chapitre précédent, (ou “geometrical enrichment” dans [14] et “XFEM with fixed enrichment area” dans [15, 30]). Sauf qu’au lieu de définir un zone d’enrichissement de rayon fixe, les auteurs sélectionnent de une à trois couches de noeud entourant le fond de fissure.

Trois maillages sont utilisés, de pas de maillage divisé par deux à chaque fois. Pour une seule couche de noeud enrichis, l’erreur sur les FIC oscille autour de 15 %. Le raffinement de maillage n’améliore pas significativement la précision, car l’erreur ne baisse pas en  $O(\sqrt{h})$ . En raffinant une deuxième couche d’élément, l’erreur tombe globalement à 1 %, et avec la troisième couche, au-dessous de 1 %. Toutefois, on peut nettement voir que le raffinement de maillage n’assure pas une baisse stricte de l’erreur. Ainsi, la convergence de la méthode numérique n’est pas avérée.

Les similitudes entre notre méthode et celles décrites dans [42] et [30] nous font penser qu’on pourrait espérer une convergence en  $O(\sqrt{h})$  pour notre méthode d’estimation directe, bien que l’extension de ces résultats à notre méthode reste à prouver.

## 1.2 Deuxième méthode : calcul par intégrale-J

### Description et formulation de la méthode

Pour le modèle de Kirchhoff-Love, l’expression de l’intégrale-J a déjà été établie en (1.91), page 56. Toutefois, cette expression n’est pas celle qui est utilisée dans les calculs numériques, car elle ne permet pas de séparer les contributions de chaque FIC au taux de restitution d’énergie. De plus, elle demande de pratiquer des intégrations sur des contours, ce qui n’est pas très pratique pour une solution issue d’un calcul éléments finis.

La démarche standard permettant de réaliser des calculs de FIC précis via l’intégrale-J est décrite dans [17]. Cette démarche est basée sur des travaux de P. Destuynder, décrits par exemple dans [7, 43].

Présentons maintenant la formulation adaptée au cas du modèle de plaque de Kirchhoff-Love. Notre démarche suivra d’assez près celle décrite dans [17] (qui concernait le cas de l’élasticité bidimensionnelle).

L'intégrale-J (1.91) peut être re-écrite ainsi :

$$J = \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} \left( \partial_{1\alpha} u_3 b_{\beta} - \frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} u_3 b_1 \right) dl - \int_{\Gamma} \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta} b_{\beta} \partial_1 u_3 dl \quad (4.10)$$

Signalons aussi qu'on dispose d'une formule, établie dans [22], reliant cette intégrale-J aux facteurs d'intensité de contraintes :

$$J = a (K_1^2 + K_2^2), \quad (4.11)$$

où  $a = \frac{2\varepsilon\pi(1+\nu)}{3E(3+\nu)}$ . Le calcul de (4.11) est décrit par les auteurs de [22] comme très délicat, et mené avec le logiciel de calcul formel mathematica.

A partir de maintenant, toujours en suivant la démarche décrite dans [17], nous considérons 2 états. L'état (1)  $(m_{\alpha\beta}^{(1)}, u_3^{(1)})$  correspond à l'état de déformation présent, c'est-à-dire la solution numérique dont on souhaite calculer les FIC. L'état (2)  $(m_{\alpha\beta}^{(2)}, u_3^{(2)})$  est un état auxiliaire correspondant au déplacement asymptotique du mode I ou II, selon le FIC que l'on souhaite calculer. L'intégrale J pour la somme de ces 2 états est :

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta}^{(1)} + m_{\alpha\beta}^{(2)}) \left[ (\partial_{1\alpha} u_3^{(1)} + \partial_{1\alpha} u_3^{(2)}) b_{\beta} - \frac{1}{2} (\partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)} + \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)}) b_1 \right] dl \\ &- \int_{\Gamma} (\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} + \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(2)}) (\partial_1 u_3^{(1)} + \partial_1 u_3^{(2)}) b_{\beta} dl \end{aligned} \quad (4.12)$$

En développant, on trouve :

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (4.13)$$

où  $I^{(1,2)}$  représente l'intégrale d'interaction suivante :

$$\begin{aligned} I^{(1,2)} &= \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) b_{\beta} - \frac{1}{2} (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)}) b_1 dl \\ &- \int_{\Gamma} (\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) b_{\beta} dl \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si on re-écrit (4.11) pour la somme des 2 états, on trouve :

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + 2a \left( K_1^{(1)} K_1^{(2)} + K_2^{(1)} K_2^{(2)} \right) \quad (4.15)$$

Les seconds membres de (4.13) et (4.15) étant égaux, on en déduit la relation :

$$I^{(1,2)} = 2a \left( K_1^{(1)} K_1^{(2)} + K_2^{(1)} K_2^{(2)} \right) \quad (4.16)$$

Dans cette équation, il suffit que l'état 2 soit le mode I (avec  $K_1^{(2)} = 1$  et  $K_2^{(2)}$  nul), pour déduire la valeur du FIC  $K_1$  en fonction de l'intégrale d'interaction, car l'équation précédente devient :

$$I^{(1,2)} = 2a K_1^{(1)} \quad (4.17)$$

On peut calculer  $K_2$  de la même manière.

### Transformation en une intégrale de domaine

Ainsi, calculer l'intégrale d'interaction (4.14) avec les champs asymptotiques permet de déduire les valeurs des FIC. Cependant, dans l'optique du calcul numérique, l'intégrale d'interaction est transformée en une intégrale de domaine. Nous suivons toujours la démarche de [17].

Re-écrivons l'expression (4.14) de l'intégrale d'interaction  $I^{(1,2)}$  de manière plus compact :

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \mathcal{A}_{\beta} b_{\beta} + \mathcal{B} b_1 dl \quad (4.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\beta} &= (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) - (\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \\ \mathcal{B} &= -\frac{1}{2} (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)}) \end{aligned}$$

La valeur de  $I^{(1,2)}$  ne change pas si on multiplie l'intégrande par une fonction régulière  $q$ , qui vaut 1 sur un voisinage du fond de fissure recouvrant la zone que  $\Gamma$  délimite, et 0 sur un contour  $C_0$  qui entoure  $\Gamma$ . Ainsi, si on suppose qu'il n'y a pas de force surfacique appliquée sur le disque  $A$  délimité par le contour  $C_0$ , alors  $I^{(1,2)}$  peut s'écrire :

$$I^{(1,2)} = \int_C (\mathcal{A}_{\beta} B_{\beta} + \mathcal{B} B_1) q dl \quad (4.19)$$

où le contour  $C$  est la réunion des contours  $C = \Gamma \cup C_+ \cup C_- \cup C_0$ , et  $B$  désigne la normale extérieur à  $C$  (voir Fig. 4.1). Ensuite, on utilise le théorème de la divergence, et on fait tendre le contour  $\Gamma$  vers l'origine  $(0, 0)$ . Ainsi, l'intégrale de contour est transformée en une intégrale de surface, et le domaine  $A$  devient le disque complet entourant le fond de fissure, délimité par  $C_0$ . Et donc, on a :

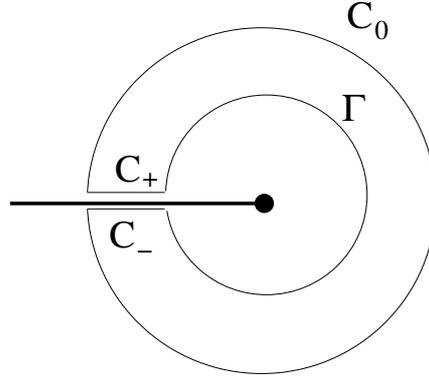
$$\begin{aligned} I^{(1,2)} &= \int_A \partial_{\beta} (\mathcal{A}_{\beta} q) + \partial_1 (\mathcal{B} q) dA \\ &= \int_A (\partial_{\beta} \mathcal{A}_{\beta} + \partial_1 \mathcal{B}) q + \mathcal{A}_{\beta} \partial_{\beta} q + \mathcal{B} \partial_1 q dA \end{aligned}$$

Par un calcul direct, il est possible de montrer que  $\partial_{\beta} \mathcal{A}_{\beta} + \partial_1 \mathcal{B}$  vaut 0 (le calcul est fait en annexe, page 135). Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} I^{(1,2)} &= \int_A \left[ (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) - (\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \right] \partial_{\beta} q \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)}) \right] \partial_1 q dA \end{aligned} \quad (4.20)$$

Un dernière simplification. Montrons que  $m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} = m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)}$ . En effet :

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} &= -D[(1 - \nu) \partial_{\alpha\beta}^2 u^{(1)} + \nu \Delta u^{(1)} \delta_{\alpha\beta}] \partial_{\alpha\beta}^2 u^{(2)} \\ &= -D[(1 - \nu) \partial_{\alpha\beta}^2 u^{(1)} \partial_{\alpha\beta}^2 u^{(2)} + \nu \Delta u^{(1)} \Delta u^{(2)}] \end{aligned}$$


 FIG. 4.1 – Contours d'intégration pour le calcul de  $I^{(1,2)}$ .

Cette dernière expression étant totalement symétrique, on en déduit le résultat. Ainsi, l'expression finale de l'intégrale d'interaction est :

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[ (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) - (\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \right] \partial_\beta q - m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} \partial_1 q \, dA \quad (4.21)$$

### Calcul numérique de l'intégrale d'interaction $I^{(1,2)}$

A partir de maintenant, on ne suit plus la démarche de [17], car notre démarche devient spécifique au cas du modèle de Kirchhoff-Love, traité avec l'élément HCT/FVS réduit (notre démarche est originale).

On s'intéresse au calcul numérique de l'intégrale d'interaction  $I^{(1,2)}$ , dans son expression (4.21). L'expression mathématique a déjà été établie précédemment, et elle contient trois termes. Les deux premiers peuvent être approchés numériquement sans grande difficulté, mais le troisième pose problème, en raison de la présence de dérivées troisièmes.

D'abord, les fonctions que nous intégrons ne sont pas forcément dans  $H^3(\Omega)$ . De plus, il n'est pas établi que la dérivée troisième d'une fonction soit correctement approximée par l'élément fini HCT/FVS réduit (on obtient une approximation seulement jusqu'à la dérivée seconde). Il faut donc transformer l'expression (4.21) pour éviter ces dérivées troisièmes.

Voici l'expression du terme à approcher :

$$X = - \int_A (\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \partial_\beta q \quad (4.22)$$

On sépare l'intégrale en deux termes :

$$X = - \int_A \underbrace{\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} \partial_\beta q}_{X_1} + \underbrace{\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)} \partial_\beta q}_{X_2} \quad (4.23)$$

Le terme  $X_2$  peut être calculé sans difficulté particulière, en calculant les dérivées troisièmes des singularités (le calcul est direct). Dans le terme  $X_1$ , on peut faire une intégration par partie :

$$X_1 = - \int_A \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} \partial_\beta q = \underbrace{\int_A m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_\alpha (\partial_1 u_3^{(2)} \partial_\beta q)}_{X_{11}} - \underbrace{\int_{\partial A} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} \partial_\beta q b_\alpha}_{X_{12}} \quad (4.24)$$

Le terme  $X_{11}$  se calcule sans problème. Pour le terme  $X_{12}$ , dans le cas où  $u_3^{(2)}$  est le mode I exacte, on peut vérifier que  $\partial_1 u_3^{(2)}$  s'annule le long du bord de la fissure (ce terme s'annule en  $\theta = \pi$ ). Donc dans ce cas,  $X_{12}$  s'annule.

Mais dans le cas du mode II, le calcul de  $X_{12}$  pose toujours problème. Signalons toutefois que ce terme n'est non-nul que sur les bords de la fissure où  $\partial_\beta q$  est non-nul (c'est-à-dire le long de l'intersection des bords de la fissure avec la couronne d'intégration).

Dans les tests numériques, pour le mode II, on négligera ce terme  $X_{12}$ . Malgré cette simplification, les calculs de  $K_2$  n'ont pas été moins précis que ceux de  $K_1$ .

### Taux de convergence attendu

Pour l'élasticité bidimensionnelle, la référence [43] contient des résultats théoriques de convergence montrant que l'erreur sur les FIC est en  $O(h)$ , pour des éléments  $P_1$ , avec une méthode d'éléments finis classique.

Dans [15], pour un problème d'élasticité bidimensionnelle, des calculs de FIC via l'intégrale-J ont été menés, sur des solutions calculées par la méthode XFEM. Pour un élément  $P^1$ , bien que l'erreur soit assez oscillante, la courbe d'erreur semble converger en  $O(h^2)$ . Le niveau d'erreur atteint est très satisfaisant (de 3 % à 0.05 %).

Ainsi, pour notre formulation utilisant les éléments HCT/FVS réduits dont l'erreur en norme  $L^2$  est en  $O(h^2)$ , on pourrait aussi espérer atteindre un taux de convergence en  $O(h^2)$  (si les résultats de [43] s'étendent au cas de l'opérateur bilaplacien avec l'élément que nous avons choisi).

### Implémentation

Nous ne présentons que deux aspects particuliers de l'implémentation. L'évaluation numérique de l'intégrale d'interaction  $I^{(1,2)}$  nécessite de définir explicitement la fonction  $q$ , qui vaut 1 à l'intérieur d'une zone entourant le fond de fissure, 0 à l'extérieur d'une zone entourant la première, et se raccorde continûment d'une zone à l'autre. Comme on ne calcule que le gradient de  $q$ , cette fonction n'est non-nulle que sur l'intervalle entre ces deux zones. Numériquement, on définit donc une couronne d'élément entourant le fond de fissure, et l'intégrale-J n'est évaluée que sur cette couronne.

Dans nos tests numériques, nous nous sommes contentés de sélectionner la collection d'éléments situés à un certain rayon  $\mathcal{R}_j$  du fond de fissure. La fonction  $q$  est représentée

sur l'élément HCT/FVS réduit : les degrés de liberté associés à des dérivées sont mis à 0. Les valeurs nodales sont fixées à 1 sur le bord intérieur de la couronne, et à 0 sur le bord extérieur. Voir Fig. 4.2, le cas d'un maillage régulier qui aboutit à une couronne en forme de "cadre".

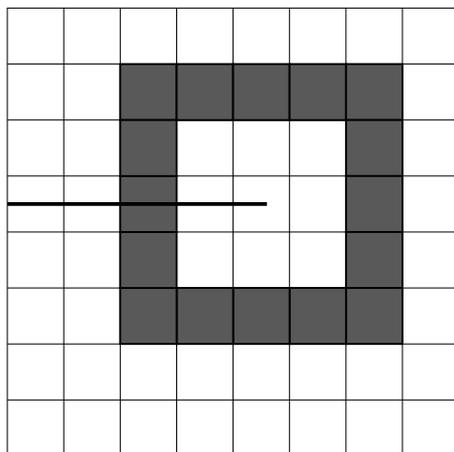


FIG. 4.2 – Couronne d'éléments entourant le fond de fissure.

## 2 Résultats Numériques

### 2.1 Description de l'étude numérique

#### Cas-tests étudiés

Deux cas-tests avec une fissure droite sont considérés. Le premier consiste à prendre la somme des deux modes singuliers comme solution exacte :

$$u^{ex} = G_1 + G_2 \quad (4.25)$$

Les bords de la fissure suivent une condition de bord libre, et le reste du bord suit une condition de Dirichlet non-homogène, où la valeur imposée est celle de  $u^{ex}$ . Ainsi, les valeurs exactes de  $K_1$  et  $K_2$  sont  $1/\mathcal{A}_{KL}$  (où  $\mathcal{A}_{KL}$ , défini équation (1.83), vaut  $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-\nu^2}{E\varepsilon(3+\nu)}$ ). Dans les tests nous avons pris une plaque carrée  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ , avec le fond de fissure à l'origine.

Le deuxième cas-test est issu de [39]. Il s'agit d'une plaque carrée avec une fissure centrale, droite, de longueur  $2a$ , et un moment  $M_0$  constant est appliqué sur les bords parallèles à la fissure. Les dimensions de la plaque sont dites "infinies", ce qui signifie que les valeurs de référence de FIC ne sont valables que si la fissure est de petite taille par rapport aux dimensions du domaine. Ces valeurs de référence sont :

$$K_1 = \frac{3 M_0 \sqrt{a}}{2 \varepsilon^2} ; K_2 = 0 \quad (4.26)$$

Pour les tests numériques, nous avons pris un plaque de côté 1, avec une fissure de taille  $2a = 0.2$ . Ce qui reste significatifs vis-à-vis de la référence [40], où des calculs sont menés avec  $2a = 0.18$ . Le problème étant symétrique, nous ne calculons qu'une moitié du domaine.

#### Objectifs de l'étude

L'objectif des expériences numériques est d'étudier l'erreur commise par nos méthodes de calcul de FIC, en fonction des paramètres suivants :

- le pas de maillage  $h$
- le rayon d'enrichissement  $\mathcal{R}$
- le rayon de la couronne d'intégration  $\mathcal{R}_J$  (pour l'intégrale-J seulement)
- la distorsion du maillage.

De plus, les résultats seront comparés avec ceux de la méthode des éléments finis classique avec l'intégrale-J.

L'objectif des tests numériques est double. D'abord, l'étude de l'erreur et la validation des méthodes, qui permettent d'illustrer l'intérêt des méthodes présentées au chapitre précédent. Mais aussi, comme on l'a déjà souligné dans l'introduction, d'apporter des éléments de réponse à la question de l'influence des paramètres  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_J$ , et de proposer éventuellement des règles pratiques de choix de ces paramètres, en fonction de  $h$ .

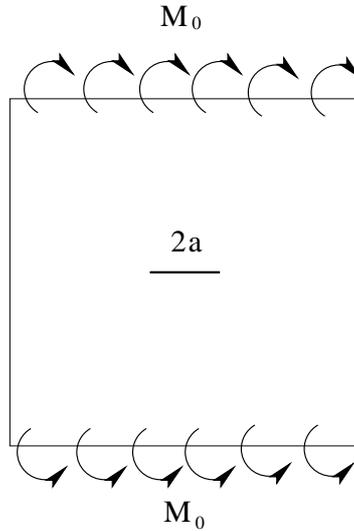


FIG. 4.3 – Schéma du second cas-test de plaque, avec une fissure centrale, soumise à des moments au bord.

Dans les références [14] et [15], la zone d'enrichissement est circulaire, de rayon 0.05 et 0.1, respectivement. Dans nos tests numériques du chapitre précédent,  $\mathcal{R}$  vaut 0.15.

D'une manière générale, il est probable que le choix de  $\mathcal{R}$  dépende du résultat que l'on cherche à obtenir. Pour faire des courbes de convergences sur l'erreur en norme  $L^2$  ou  $H^2$ , et qu'on cherche à mettre en évidence le taux de convergence optimal, prendre  $\mathcal{R}$  indépendant du pas de maillage  $h$  est suffisant.

Toutefois, sur les maillages les plus raffinés, le choix de  $\mathcal{R}$  fixe conduit à enrichir de nombreuses couches d'éléments, ce qui est peut-être superflu si l'on n'utilise qu'un seul maillage. Ainsi, dans notre étude numérique, nous envisageons deux stratégies pour le choix de  $\mathcal{R}$ . D'abord, nous testons plusieurs valeurs de  $\mathcal{R}$  fixe. Dans un deuxième temps, nous envisageons que  $\mathcal{R}$  dépende de  $h$  et recouvre un certain nombre de couronnes d'éléments. Ainsi,  $\mathcal{R}$  vaut  $kh$ , où  $k$  est un nombre entier entre 1 et 5.

Notons aussi que prendre  $\mathcal{R} = h$  est très proche de la première formulation XFEM de [17, 16], où seul l'élément contenant le fond de fissure était enrichi.

## 2.2 Estimation directe

Cette première méthode a été testée sur les deux cas-test, avec des maillages triangulaires et quadrangulaires, structurés et non-structurés, et pour différentes valeurs du pas de maillage.

Sur le premier cas-test, où la fissure mesure 0.5, nous avons testé  $\mathcal{R} = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ . Ensuite, nous avons testé  $\mathcal{R} = kh$ , où  $k$  varie de 1 à 5.

Les résultats montrent que cette méthode donne une bonne estimation du FIC, toujours à moins de 5 % d'erreur, et souvent à moins de 1 % d'erreur. Le choix de  $\mathcal{R}$  fixe ne donne

pas des résultats significativement meilleurs qu'avec  $\mathcal{R} = k h$ . C'est donc ces résultats-ci que nous présentons, Fig. 4.4 et 4.5. Les graphes avec  $\mathcal{R}$  fixe sont disponibles en annexe, pages 137 et 138, Fig. 5.6 et 5.7.

Notons que les courbes montrent que la méthode converge très lentement. Ceci est peut-être lié au conditionnement élevé de la méthode, qui atteint  $10^{11}$  en maillages structurés et  $10^{12}$  en non-structurés.

Sur le second cas-test, la fissure est de taille  $a = 0.11$  sur le demi-domaine (le rectangle  $[0, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ ). Par rapport au cas-test précédent, la fissure est de plus petite taille par rapport à l'ensemble du domaine. Or, la zone d'enrichissement ne doit pas toucher le bord : vu que celui-ci porte une condition de symétrie que l'enrichissement singulier ne vérifie pas, les singularités se verraient imposer la condition de symétrie, ce qui affecterait aux singularités des coefficients éléments finis  $c_l$  proches de zéro. Et les valeurs des FIC seraient fausses.

Sur ce cas-test, nous utilisons des maillages de densité équivalente à ceux utilisés avec le premier cas-test. Ceci conduit à une contrainte plus importante sur le choix de  $\mathcal{R}$ . Pour  $\mathcal{R}$  fixe, nous avons testé 0.05, 0.075, 0.10. Pour la stratégie  $\mathcal{R}$  variable, nous avons testé les mêmes valeurs de  $k$ . Une grande valeur de  $k$  nécessite un niveau initial de raffinement important. Ainsi, pour  $k = 5$ , le maillage le moins raffiné (en quadrangles structurés) compte environ  $30 \times 60$  éléments.

Quand ce niveau de raffinement minimum est atteint, l'erreur est inférieure à 5 %. Les résultats sont présentés Fig. 4.6 et 4.7, en rayons "variables" et "fixes".

## Conclusions et règle de construction de maillage

Malgré sa convergence lente, cette méthode "estimation directe" présente indéniablement de l'intérêt, de par sa simplicité et sa capacité à fournir des résultats proches de la valeur exacte.

Au vu des tests, augmenter  $\mathcal{R}$  améliore les résultats, et vu la convergence lente, ce peut être plus intéressant que raffiner le maillage. Dans le cas du rayon variable, on voit que prendre  $\mathcal{R} = 5 h$  permet d'atteindre une précision satisfaisante. Ceci nous permet de proposer une règle de construction pour un calcul numérique. Etant donné une fissure de taille  $a$ , le domaine doit être maillé avec un  $h$  minimum de  $a/5$ .

Cette règle indique que plus la fissure est petite, plus sa prise en compte nécessite un maillage raffiné. Ce qui est conforme à l'intuition : plus une fissure est petite par rapport à la taille des mailles, moins elle a d'influence sur le déplacement global. Un maillage raffiné est donc nécessaire pour en "capter" l'influence.

## 2.3 Intégrale-J

De même que pour la méthode "Estimation directe", nous testerons plusieurs valeurs pour le rayon de la zone d'enrichissement  $\mathcal{R}$  : des valeurs "fixes" et des valeurs "variables". Le rayon de la couronne d'intégration  $\mathcal{R}_J$  sera aussi testé.

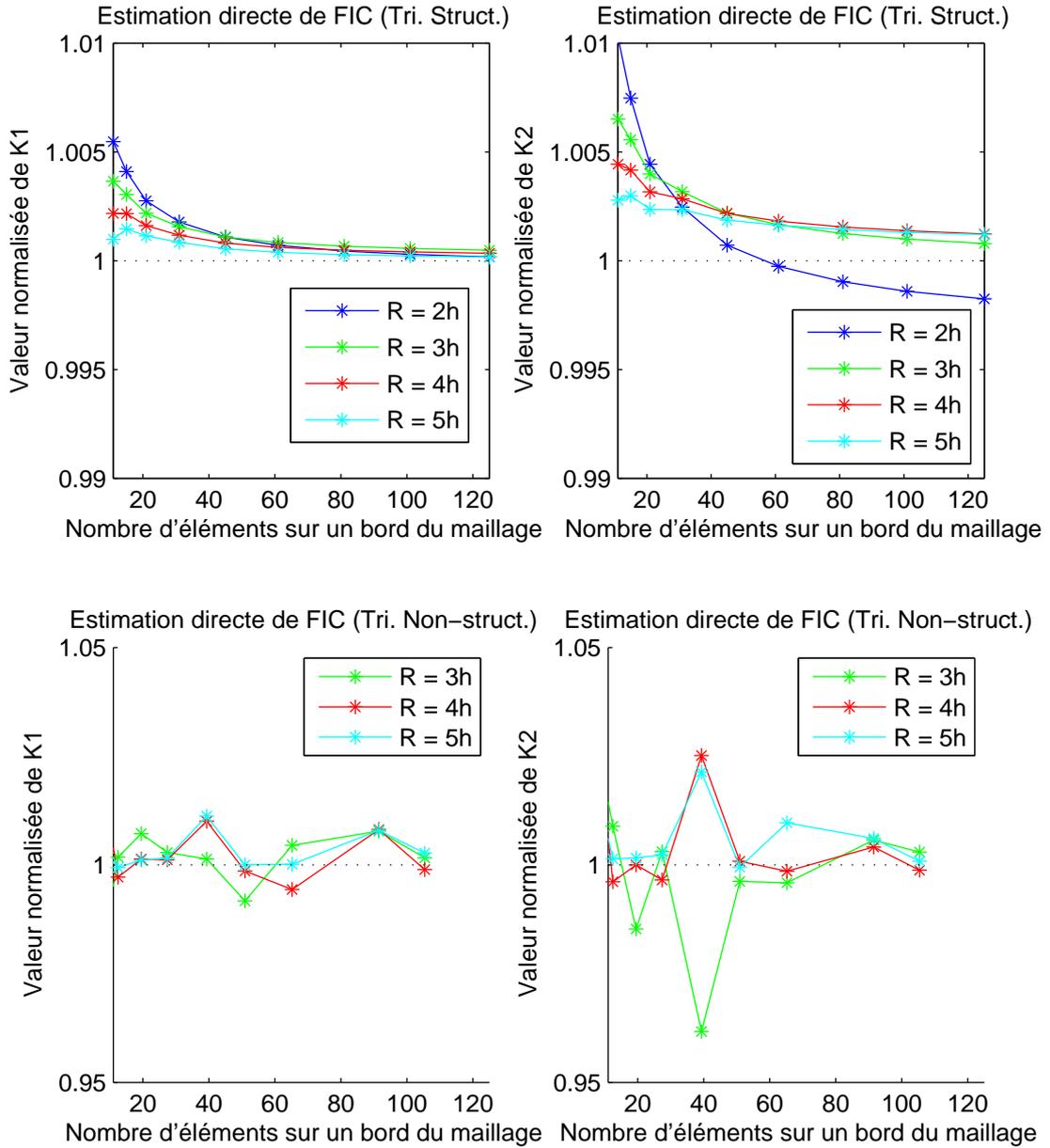


FIG. 4.4 – Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en triangles ( $\mathcal{R}$  variable).

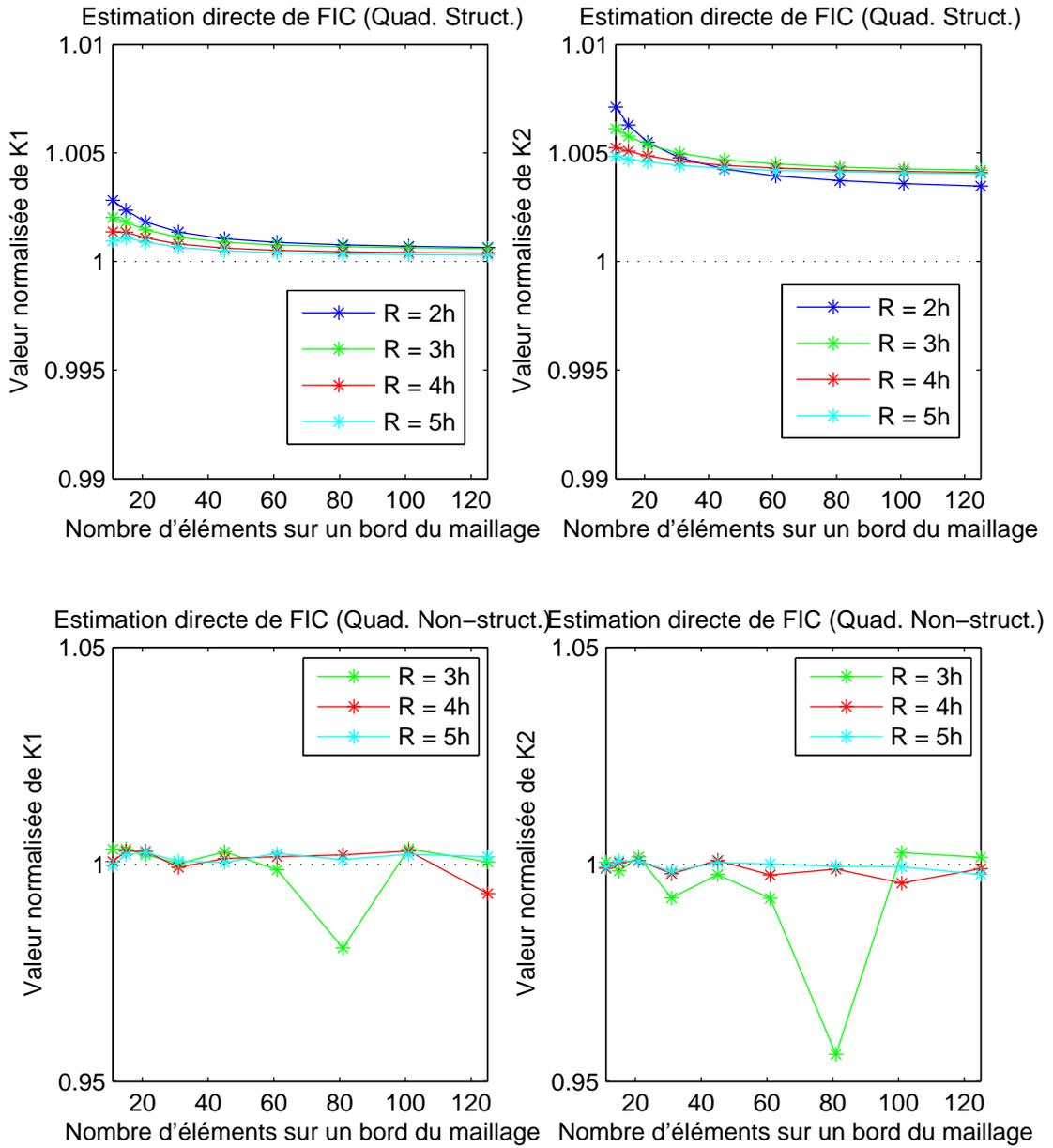


FIG. 4.5 – Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en quadrangles ( $\mathcal{R}$  variable).

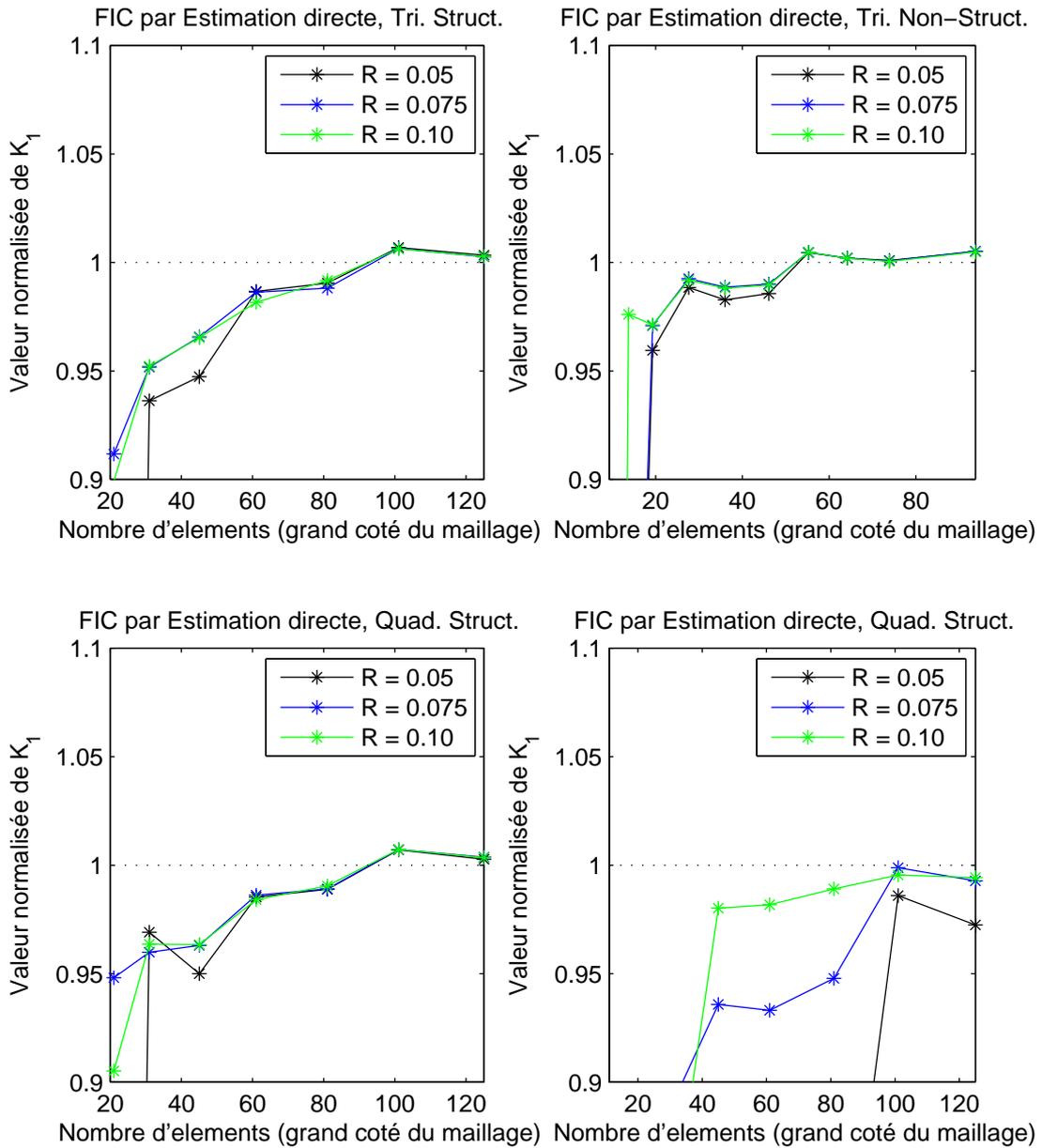


FIG. 4.6 – Calcul de FIC, estimation directe, deuxième cas-test ( $\mathcal{R}$  fixe).

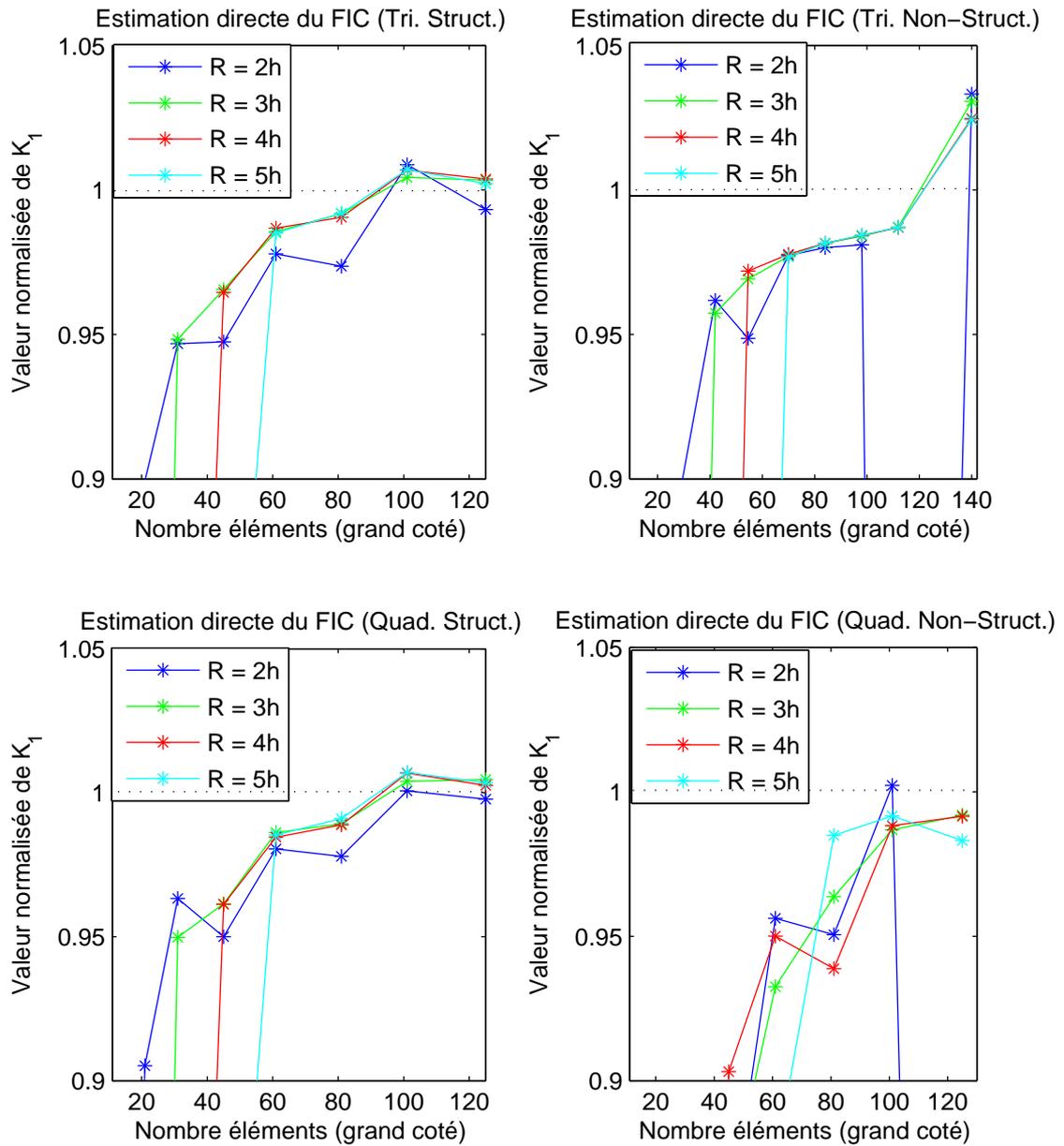


FIG. 4.7 – Calcul de FIC, estimation directe, deuxième cas-test ( $\mathcal{R}$  variable).

Les résultats obtenus sont précis, et les valeurs sont proches des valeurs exactes. Par contre, d'un maillage à l'autre, l'erreur n'est pas forcément décroissante, en raison du fait que la valeur approchée fournie par l'intégrale-J oscille autour de la valeur exacte. Ainsi, il peut arriver qu'un maillage donne une erreur légèrement supérieure à celle d'un maillage un peu plus grossier, mais l'erreur reste globalement bonne.

Pour cette raison, nous ne donnerons des courbes de convergence que sur le premier cas-test, et dans le cas de maillages structurés, qui donnent des valeurs moins oscillantes. Dans un deuxième temps, nous présenterons l'étude globale, en nous basant sur les graphiques de valeurs normalisées des FIC, en fonction de  $h$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_J$ .

### Premier cas-test

**Courbes de convergences** Nous présentons des courbes de convergence dans le cas de maillages structurés (triangulaires et quadrangulaires), Fig 4.8 et 4.9. La méthode XFEM utilise une rayon d'enrichissement  $\mathcal{R}$  égal à 0.15. Sur ces cas particuliers, la comparaison avec la Méthode des Eléments Finis (MEF) indique qu'XFEM est capable d'améliorer l'erreur et le taux de convergence, puisque les pentes restent autour de 1 en MEF, et sont comprises entre 1.4 et 1.8 pour XFEM.

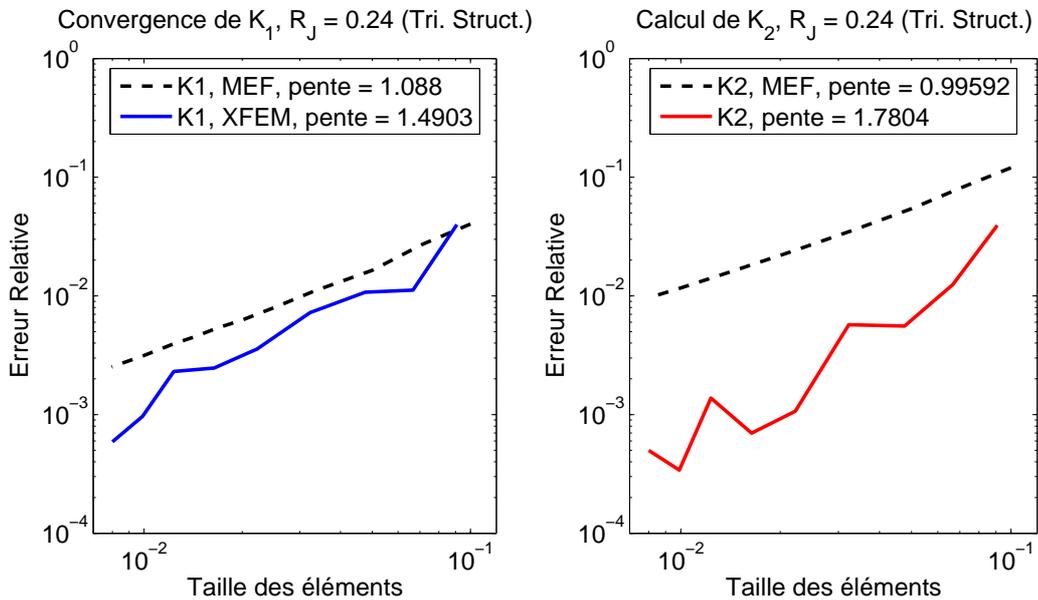


FIG. 4.8 – Convergence des FIC en intégrale-J, maillages triangulaires.

**Graphes des valeurs de FIC normalisées** Nos résultats montrent que l'erreur obtenue est globalement inférieure à 5 %. Les maillages structurés permettent très facilement d'atteindre une erreur inférieure à 1 %. C'est le cas en triangles, pour n'importe quel maillage avec  $\mathcal{R} = 0.2$  ou 0.25, ou pour n'importe quel rayon à partir d'un maillage à partir de

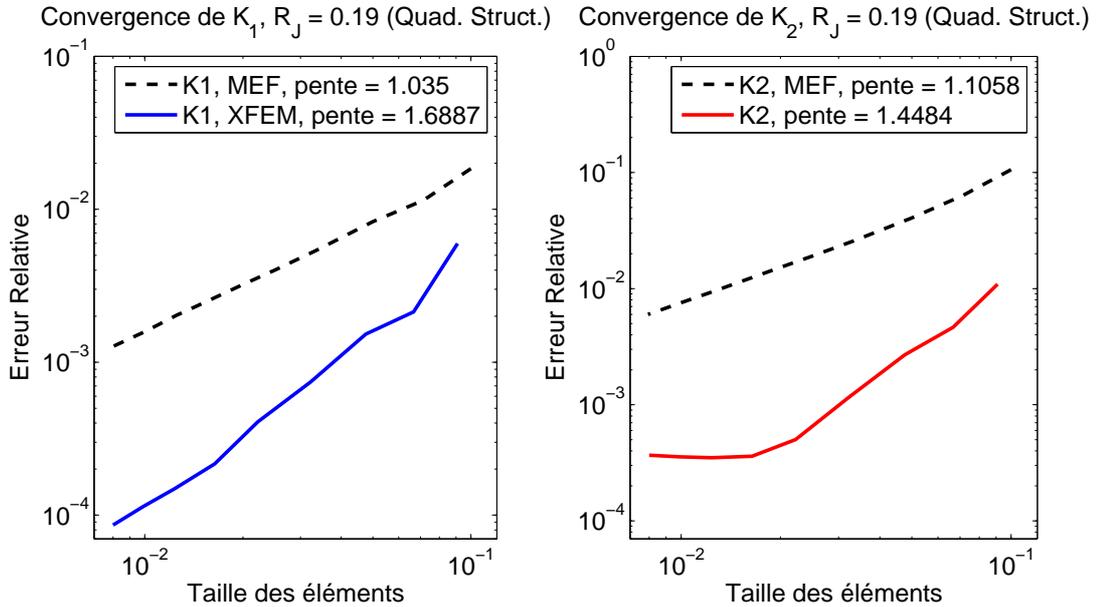


FIG. 4.9 – Convergence des FIC en intégrale-J, maillages quadrangulaires.

$60 \times 60$ . En quadrangles structurés, sauf pour  $\mathcal{R} = h$ , l'erreur est inférieure à 1 %, et est remarquablement stable vis-à-vis de  $\mathcal{R}_J$ .

En maillages non-structurés, prendre  $\mathcal{R} = 3h$  ou 0.2 suffit pour obtenir un erreur inférieure ou égale à 5 %, sur tous les maillages. On peut noter qu'entre  $\mathcal{R} = h$  ou  $2h$  et  $\mathcal{R} = 3h$  il y a parfois une différence très significative. On peut en déduire que  $3h$  est une valeur minimale.

Indiquons aussi une limite de la méthode : sur les maillages les plus grossiers, avec  $\mathcal{R} = h$  ou 0.1, l'erreur est souvent supérieur à 10 %.

Globalement, nos tests montrent des résultats relativement stables par rapport au rayon de la couronne  $\mathcal{R}_J$ .

A part en triangles structurés, la stratégie de zone fixe ne permet pas d'atteindre une précision significativement meilleur que la stratégie  $\mathcal{R} = kh$ . Nos résultats suggèrent donc que pour les maillages les plus raffinés, dans l'optique d'un calcul de FIC, il n'est pas utile de prendre  $\mathcal{R}$  plus grand que 5 couches d'éléments.

Nous présentons les résultats pour  $\mathcal{R} = kh$  en maillages triangulaires ou quadrangulaires, structurés ou non-structurés, Fig. 4.10 à 4.13. Seuls les résultats sur  $K_1$  sont présentés (les courbes de  $K_2$ , similaires, sont présentées en annexe, pages 140 à 143). Les courbes de  $\mathcal{R}$  fixe sont également disponibles en annexe, pages 145 à 153.

## Deuxième cas-test

Pour ce deuxième cas-test, rappelons que la fissure est plus petite taille, ce qui limite les choix de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_J$ . Comme pour la méthode "estimation directe", en rayon fixe nous

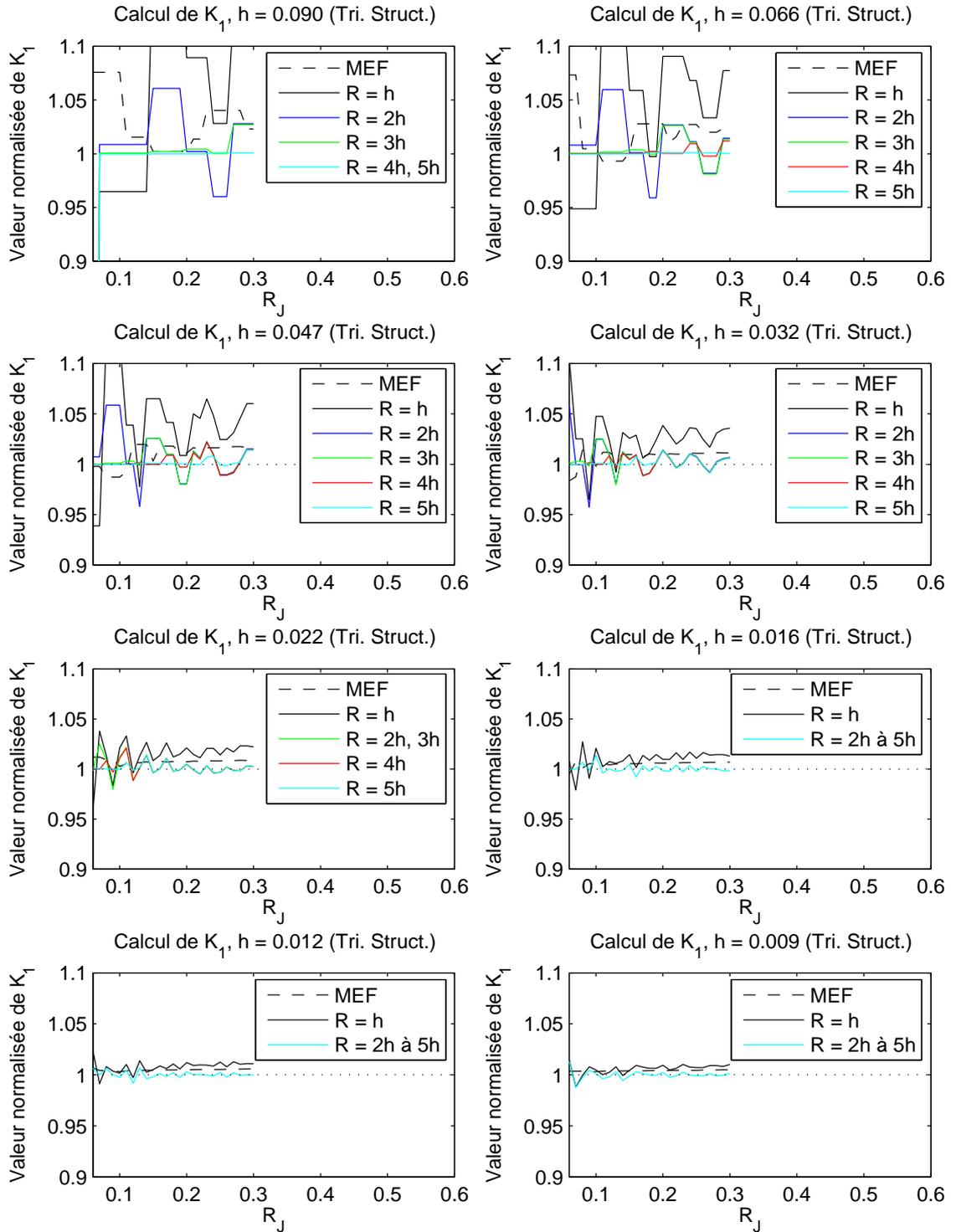


FIG. 4.10 – Calcul du FIC  $K_1$ , pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés.

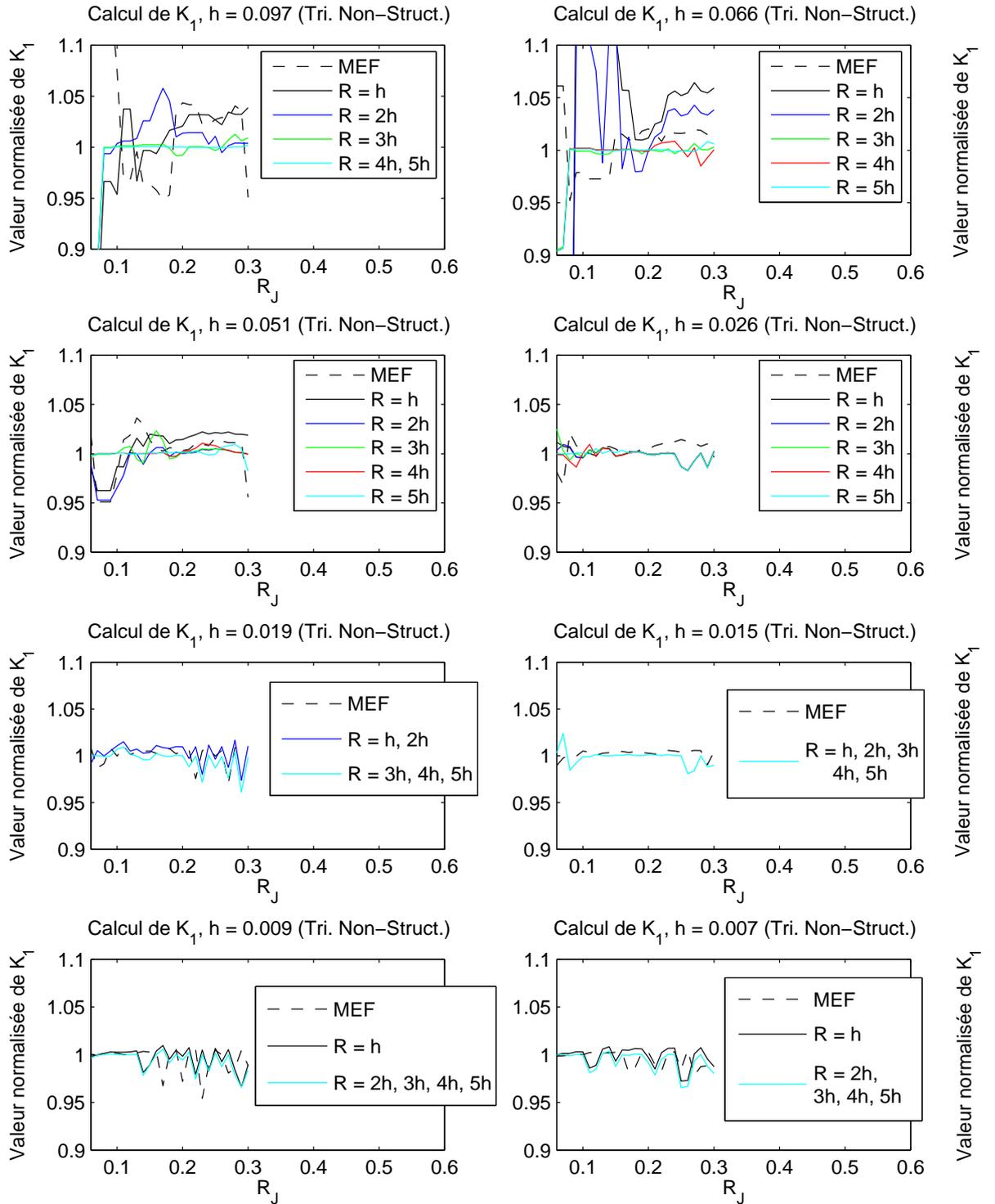


FIG. 4.11 – Calcul du FIC  $K_1$ , pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés.

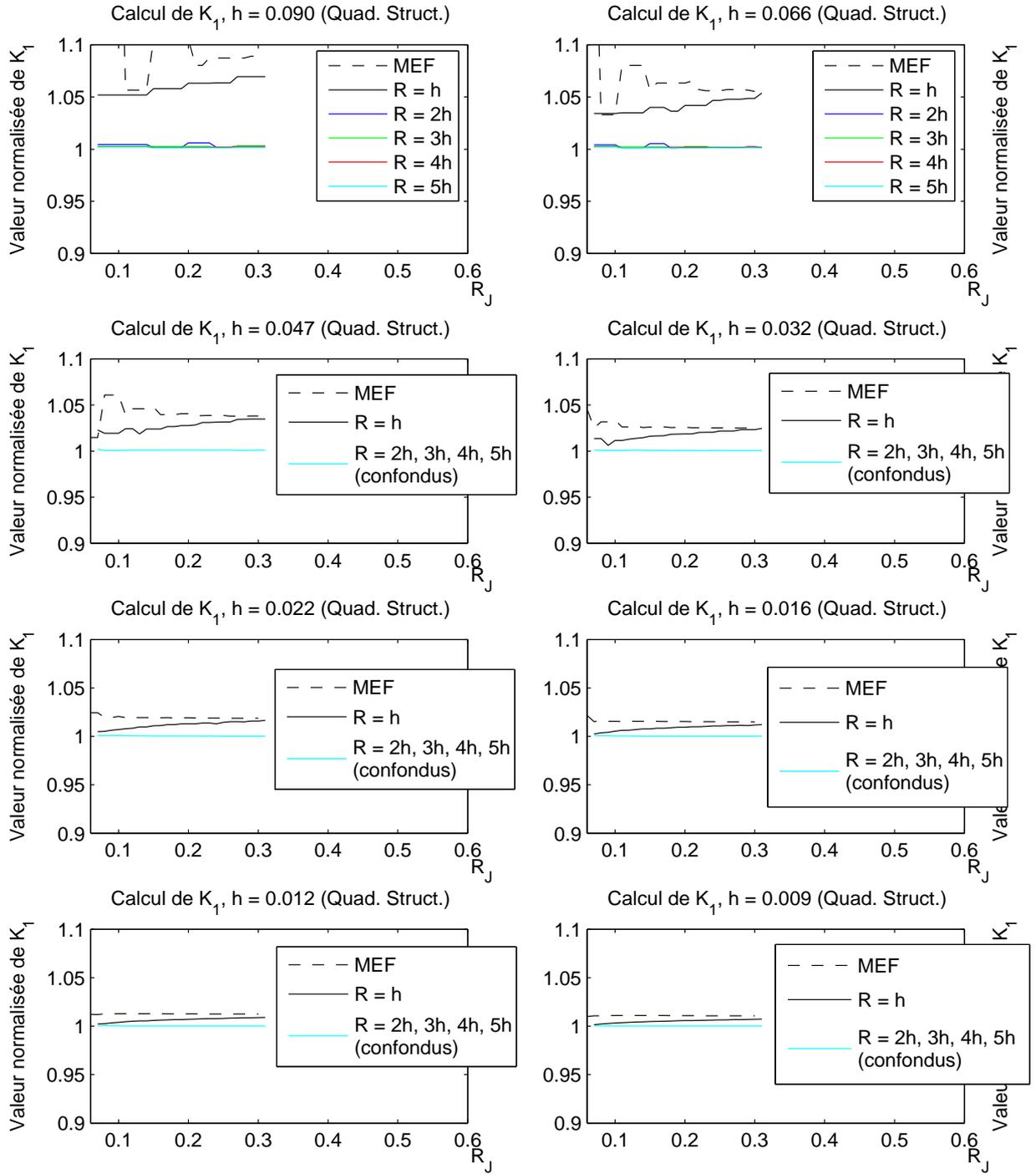


FIG. 4.12 – Calcul du FIC  $K_1$ , pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés.

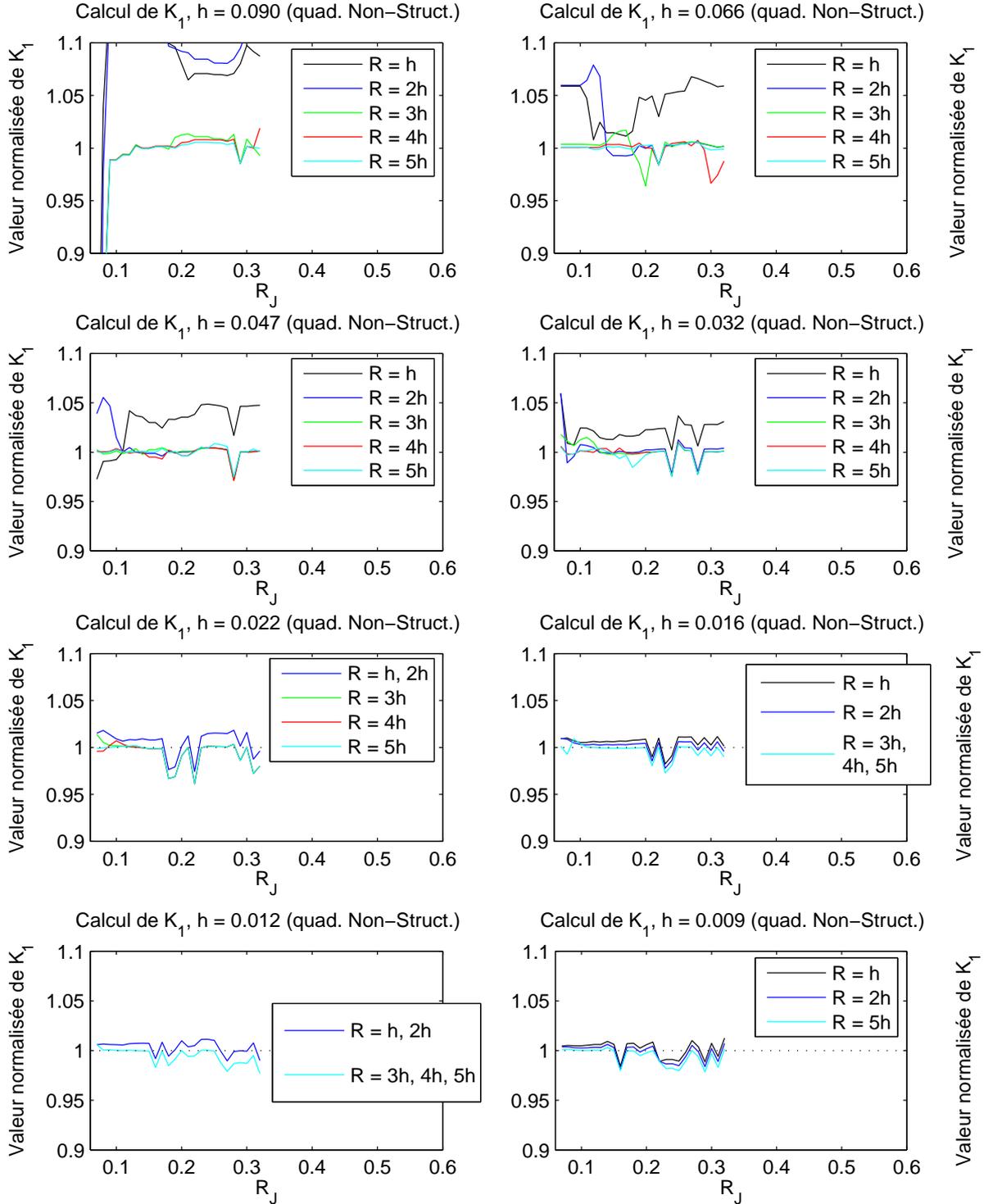


FIG. 4.13 – Calcul du FIC  $K_1$ , pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés.

testons  $\mathcal{R} = 0.05, 0.075$  et  $0.1$ . En rayon variable, nous testons toujours  $\mathcal{R} = k h$ , pour  $k$  sz 1 à 5. Dans tous les cas la couronne d'intégration  $\mathcal{R}_J$  varie de 0.05 à 0.11 (la couronne peut toucher le bord).

Sur nos résultats, on voit clairement que la précision obtenue dépend principalement du rayon de la couronne  $\mathcal{R}_J$ . A mesure que  $\mathcal{R}_J$  grandi, le FIC approché se rapproche du FIC exact, la meilleur valeur est obtenue pour  $\mathcal{R}_J$  maximal. A part pour les maillages les plus grossiers, la meilleur valeur est toujours inférieur à 5 % (les maillages pour lesquels la fissure s'étant sur moins de 2 mailles posent problème).

Le choix d'un rayon fixe donne à peut près la même précision que si  $\mathcal{R} = k h$  (la seule différence notable concerne le fait qu'en rayon "variable" le raffinement minimal est plus important pour que le rayon  $\mathcal{R}$  ne touche pas le bord du domaine). De plus, les cas de maillages structurés triangulaires et quadrangulaires sont également similaires.

Ainsi nous ne présentons que les résultats en rayon "variable", en maillages triangulaires structurés et non-structurés, et quadrangulaires non-structurés, Fig 4.14 à 4.16. Les 5 autres graphiques sont présentés en annexe, page 155 à 160.

En conclusion, sur ce deuxième cas-test, on voit que pour les maillages raffinés il n'est pas indispensable d'enrichir tout le domaine. Par contre, probablement en raison de la diminution de la taille de la fissure par rapport aux mailles du domaine, il faut prendre une couronne d'intégration maximale pour que le FIC soit évalué le plus précisément possible.

Ainsi, la règle de construction que nous proposons est toujours de prendre  $h = a/5$ , pour une fissure de taille  $a$ , avec une intégrale-J de rayon  $\mathcal{R}_J$  maximale.

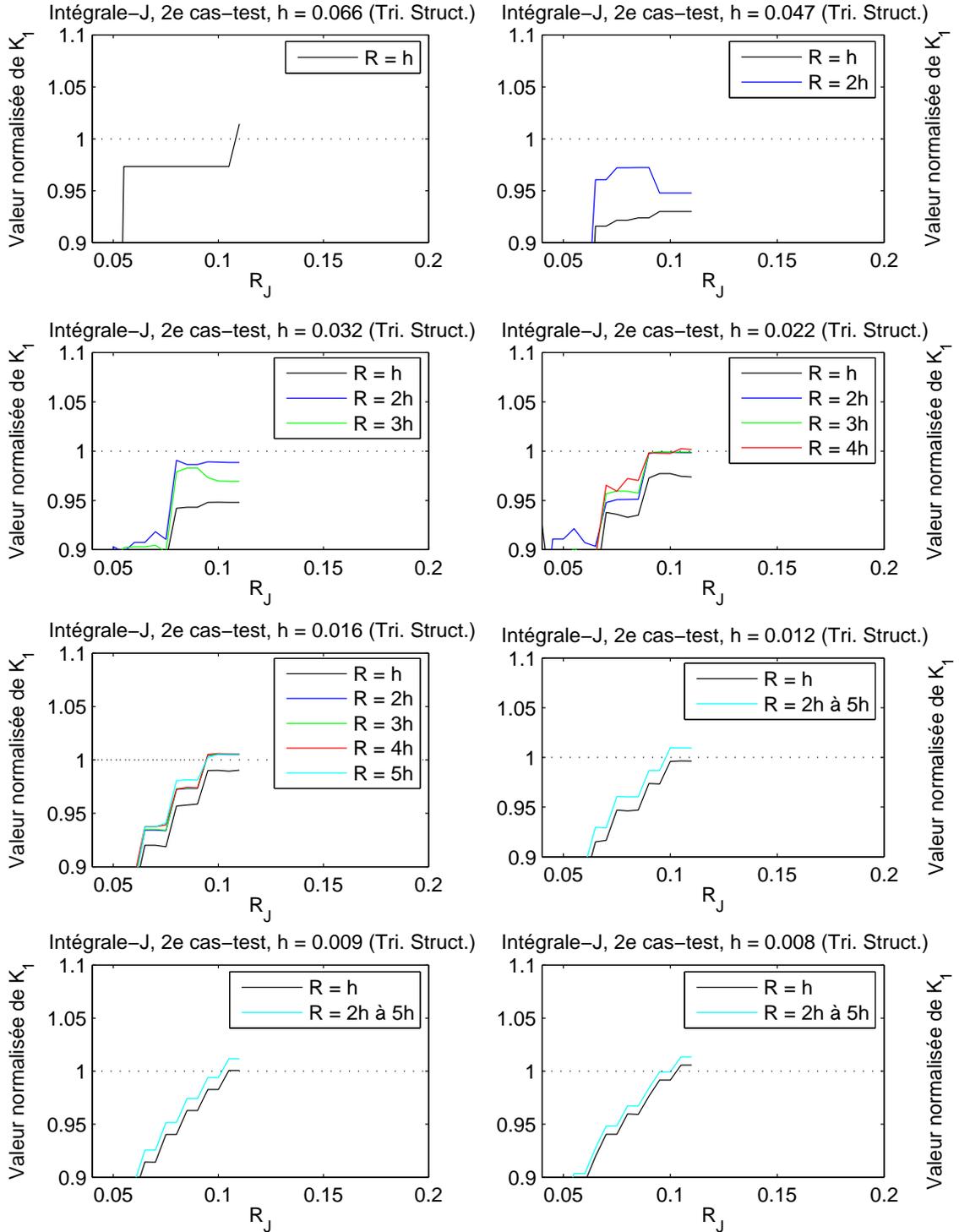


FIG. 4.14 – Calcul de FIC, pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangulaires structurés.

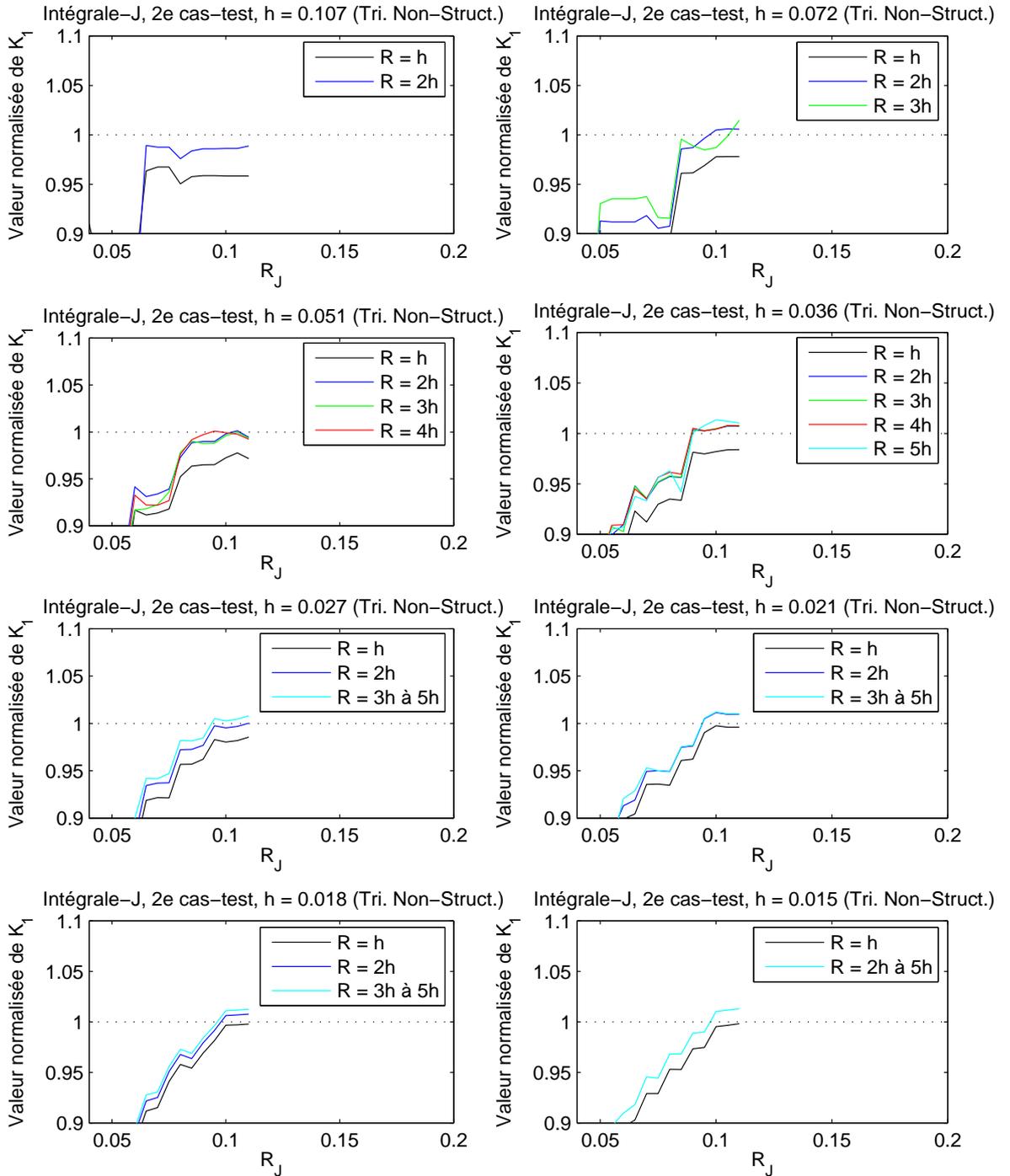


FIG. 4.15 – Calcul de FIC, pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangulaires non-structurés.

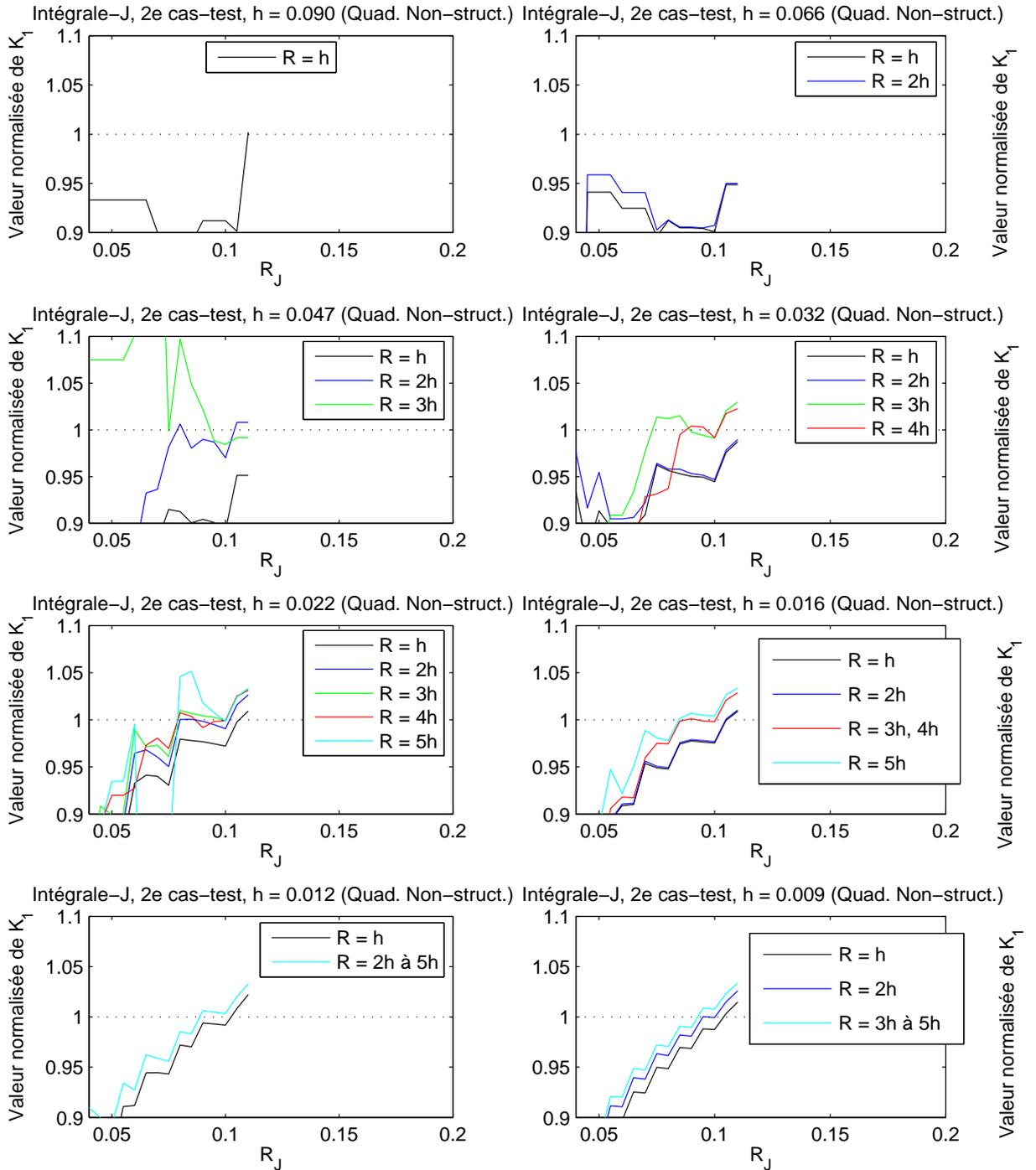


FIG. 4.16 – Calcul de FIC, pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadrangulaires non-structurés.



## Chapitre 5

# Travaux préliminaires pour l'application de la méthode XFEM au modèle de Mindlin-Reissner

Pour décrire les plaques et coques fissurées, le modèle de Mindlin-Reissner est également très intéressant. Par rapport au modèle de Kirchhoff-Love, il est plus souvent utilisé dans les codes de calcul industriels, et il apporte une information physique supplémentaire (la déformation de cisaillement transverse).

Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 1, l'inconvénient principal de ce modèle est d'être sujet au phénomène de verrouillage numérique. Ce qui impose d'utiliser un élément fini spécifique permettant de corriger le phénomène.

La difficulté principale pour l'application de XFEM sera donc de formuler des enrichissements singuliers qui ne verrouillent pas. En effet, les traitements développés en éléments finis classiques ne s'étendent pas aux fonctions singulières d'enrichissement. Par exemple, pour les éléments que nous avons présenté au chapitre 1, pages 45 à 47 :

- avec l'élément QUAD 4 il faut sous-intégrer le terme de cisaillement transverse, or les singularités doivent au contraire être intégrées avec beaucoup de précision.
- les éléments DKT/DKQ et DST/DSQ, qui utilisent les relations de Kirchhoff au niveau discret sont basés sur des relations entre polynômes. Sur des fonctions non-polynômiales ces relations ne sont plus applicables.
- L'élément MITC 4 utilise un opérateur de projection, qui abaisse le degré des polynômes des fonctions de forme. Pour la même raison, cet opérateur n'est pas facile à définir sur les fonctions singulières.

Rappelons que le seul article à ce jour où la méthode XFEM a été appliquée au modèle de Mindlin-Reissner est [16], dont nous avons déjà présenté le contenu au chapitre 2, page 67. La formulation proposée dans cet article a été testée sur des calculs de facteurs d'intensité de contraintes. L'erreur globale entre la solution exacte et celle donnée par la méthode XFEM n'y est pas étudiée.

Dans ce chapitre, nous ne proposons pas une formulation XFEM qui tienne compte du verrouillage. Par contre, nous donnons les premiers éléments pour la validation d'une telle

formulation. Dans une première partie, nous donnons deux solutions exactes singulières du modèle de Mindlin-Reissner, inédites à notre connaissance, et qui permettent de tester l'erreur d'une formulation XFEM pour ce modèle. Dans la seconde partie, en utilisant une formulation XFEM tirée de [15, 14], et en se plaçant dans une situation où le verrouillage numérique n'intervient pas, nous présentons une étude d'erreur permettant de valider le choix des fonctions d'enrichissement singulier.

## 1 Deux solutions exactes du modèle de Mindlin-Reissner avec fissure

On propose ici deux solutions exactes du modèle de Mindlin en présence d'une fissure. Ces solutions vérifient les équations (1.76) et (1.77) du modèle, données page 38, ainsi que les conditions de bord libre le long de la fissure (données à la même page et sur la page précédente). Ajoutons que ces solutions sont singulières, ce qui est indispensable pour mettre en évidence le gain de précision apporté par XFEM.

### Première solution

Cette solution a été trouvée par Yves Renard, et nous l'exprimons dans la base polaire habituelle (voir Fig. 3.3, page 76).

$$u_3 = \sqrt{r} \frac{2 E^2 \varepsilon^4}{3(1+\nu)^2} \left[ \frac{20 \varepsilon^2}{1-\nu} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 5 k r^2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{k(5\nu+3)}{1-\nu} r^2 \sin\left(\frac{5\varphi}{2}\right) \right] \quad (5.1)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_r \\ \theta_\varphi \end{pmatrix} = r^{3/2} \frac{5 E^2 \varepsilon^4 k}{3(1+\nu)^2} \begin{pmatrix} 5 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{5\nu+3}{1-\nu} \left(\sin\frac{5\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{5\nu+3}{1-\nu} \left(\cos\frac{5\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Les chargements qui donnent cette solution, notés  $F_3$  et  $M_\alpha$  dans les équations (1.76) et (1.77), sont nuls. Sur le bord du domaine (en excluant la fissure), on impose une condition de Dirichlet non-homogène égale à la solution exacte.

Signalons maintenant quelques particularités de cette solution.

Elle n'est singulière qu'en  $u_3$ , car l'expression de la rotation de la normale, en  $r^{3/2}$ , est suffisamment régulière. En effet, les singularités de Kirchhoff-Love, aussi en  $r^{3/2}$ , sont dans  $H^{5/2-\eta}$ ,  $\forall \eta > 0$ . Or, une régularité  $H^2$  suffit pour que l'élément  $Q_1$  soit de précision optimale. Donc  $\theta$  n'est pas singulière.

Cependant, dès que  $\varepsilon$  est pris petit, le seul terme singulier de  $u_3$ , qui est fonction de  $20 \varepsilon^2/(1-\nu)$ , sera négligeable devant les deux autres termes réguliers, fonctions de  $5 k$  et

$k(5\nu + 3)/(1 - \nu)$ . Rappelons que  $k$ , le facteur de correction de cisaillement transverse, est souvent pris égal à  $5/6$ .

Ainsi, quand  $\varepsilon$  devient petit, la solution de ce problème tend à devenir régulière. Ceci indique que cette solution ne permettra de tester la précision de l'enrichissement singulier que pour des épaisseurs relativement élevées.

## Deuxième solution

Cette deuxième solution est aussi donnée en coordonnées polaires. La seule différence est que la rotation de la normale est donnée dans la base cartésienne.

$$u_3 = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (5.3)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \sqrt{r} \begin{pmatrix} (1+c) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) \\ (1-c) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

avec  $c = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ .

Cette solution possède les particularités de vérifier  $\partial_\beta m_{\alpha\beta}(\theta) = \Delta u_3 = 0$ . Ainsi, pour obtenir les chargements  $F_3$  et  $M_\alpha$  correspondant à cette solution, en partant des deux équations (1.76) et (1.77), qui valent :

$$-\partial_\alpha T_\alpha = F_3$$

$$-\partial_\beta m_{\alpha\beta} + T_\alpha = M_\alpha,$$

on obtient que  $M_\alpha = T_\alpha$ , et  $F_3 = -\partial_\alpha \theta_\alpha$ . Comme  $T_\alpha$  est homogène à  $\partial_\alpha u_3 + \theta_\alpha$ , on en déduit que  $M_\alpha = O(1/\sqrt{r})$ , et pour la même raison, comme  $\theta_\alpha = O(\sqrt{r})$ , on aura  $F_3 = O(1/\sqrt{r})$ . Les deux chargements tendent ponctuellement vers l'infini près du fond de fissure, mais l'énergie associée à ce chargement reste bornée. Donc cette solution est bien utilisable, à condition d'intégrer le second membre suffisamment précisément. Signalons que si  $\text{div}(m(\theta))$  ou  $\Delta u_3$  était non-nul, alors l'un des chargements serait en  $O(r^{-3/2})$ , et son énergie ne serait plus bornée.

## 2 Etude d'erreur de la méthode XFEM, en l'absence de verrouillage

Pour faire cette étude, on va définir une méthode XFEM, en reprenant simplement la méthode publiée dans [15, 14], intitulée respectivement "XFEM with fixed enrichment area" et "XFEM with geometrical enrichment" dans les deux références. Ensuite, on programme les deux cas-tests liés aux solutions ci-dessus, et on mesure l'erreur de la méthode XFEM, ainsi que celle d'une méthode d'éléments finis classiques, en fonction du pas de maillage (noté  $h$ ).

## 2.1 Formulation XFEM utilisée

Les fonctions inconnues  $u_3$  et  $\theta_\alpha$  utilisent l'élément fini  $Q_1$  standard (sans sous-intégration du terme de cisaillement transverse). Les expressions approchées de  $u_3$  et  $\theta$  sont :

$$u_3^h = \sum_i a_i \varphi_i + \sum_{j \in J} b_j H \varphi_j + \sum_{k \in K} c_k F \varphi_k, \quad (5.5)$$

$$\theta^h = \sum_i \mathbf{a}_i \varphi_i + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j H \varphi_j + \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_k^l F_l \varphi_k, \quad (5.6)$$

avec  $a_i, b_j, c_k$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j, \mathbf{c}_k^l$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Les fonctions d'enrichissement  $F$  et  $\{F_l\}_{l=1..4}$  valent :

$$F = \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (5.7)$$

$$F_1 = \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} \quad ; \quad F_2 = \sqrt{r} \sin \frac{3\varphi}{2} \quad (5.8)$$

$$F_3 = \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} \quad ; \quad F_4 = \sqrt{r} \cos \frac{3\varphi}{2}, \quad (5.9)$$

conformément aux singularités du modèle, qui ont été présentées au chapitre 1, équations (1.84) à (1.86), page 52.

La stratégie d'enrichissement est la même que celles proposée dans [15, 14] : pour rappels, l'ensemble  $J$  désigne les degrés de liberté (ddl) dont le support est complètement traversé par la fissure. L'ensemble  $K$  désigne les ddl dont le noeud est situé à l'intérieur du cercle de rayon  $\mathcal{R}$ , centré sur le fond de fissure.

## 2.2 Expériences numériques

Les expériences numériques de ce chapitre ont été menées avec la bibliothèque Getfem++ [9]. Elles consistent simplement à mesurer les erreurs numériques des méthodes d'éléments finis classique (FEM) et d'éléments finis étendue (XFEM). Seuls des maillages quadrangulaires structurés ont été utilisés. Le domaine est un carré de coordonnées  $[-0.5, 0.5]^2$ , la fissure est localisée en  $(x_1, x_2)$  tels que  $x_1 < 0$  et  $x_2$  est nul. L'élément fini utilisé est le quadrangle  $Q_1$ , pour  $u_3$  et pour chacune des deux composantes de  $\theta$ . Pour une solution régulière, c'est-à-dire  $(u_3, \theta)$  dans  $[H^2]^3$ , son taux de convergence théorique en normes  $H^1/L^2$  est  $O(h)/O(h^2)$  (voir [5]). Dans les tests numériques, le rayon  $\mathcal{R}$  du disque de convergence est pris à 0.15.

### Résultat sur la première solution

Pour cette solution, trois épaisseurs ont été testées, pour des valeurs de  $\varepsilon$  égales à 0.5, 0.1 et 0.05. La première valeur est très élevée, et conduit à une épaisseur égale au coté de la plaque : ce choix est imposé par le fait d'éviter les situations où l'élément

$Q_1$  verrouille. Il en résulte que pour cette valeur le cas-tests simulé n'est plus dans le domaine de validité mécanique du modèle de plaque. Malgré cette limitation, l'expérience numérique permettra tout de même de tirer des conclusions.

Les courbes d'erreur pour les 3 épaisseurs sont données Fig. 5.1 et 5.2. Sur la première figure, on peut voir que la méthode des éléments finis classique, notée "FEM" ne réalise pas une erreur optimale. En norme  $H^1$ , le taux de convergence de l'erreur sur  $u_3$  est de 0.51, mais sur  $\theta$  il est égal à 0.99 (c'est-à-dire optimal). En norme  $L^2$ , les taux de convergences sont proches de 1. La méthode XFEM donne des taux de convergences proche de ceux optimaux, de 1 et 2 en norme  $L^2$  et  $H^1$  (signalons une légère perte sur l'erreur  $L^2$  sur  $\theta$ , à 1.68 au lieu de 2). Pour cette valeur de  $\varepsilon$ , on voit clairement que la méthode XFEM permet d'obtenir le taux de convergence optimal, qui n'est pas atteint en éléments finis classiques.

Pour les deux valeurs suivantes de  $\varepsilon$ , la singularité dans  $u_3$  devient très petite par rapport aux parties régulières. C'est la raison pour laquelle les méthodes XFEM et FEM donnent pratiquement la même erreur en norme  $H^1$ , dont le taux de convergence est optimal : la singularité ne l'altère plus. En norme  $L^2$ , la méthode XFEM donne des taux de convergence quasi-optimaux. Par contre, pour la méthode "FEM", malgré l'aspect négligeable de la singularité, le taux de convergence n'est pas proche de 2, mais autour de 1.1 pour  $\varepsilon = 0.1$  et de 1.5 pour  $\varepsilon = 0.05$ .

Malgré les épaisseurs élevées, il y a sans doute un peu de verrouillage numérique dans ces simulations. La présence de celui-ci est difficile à évaluer, car la quantité  $\nabla u_3 + \theta$  dépend de  $\varepsilon$ , et est différente à chaque épaisseur. Or l'amplitude et le graphe de cette quantité influencent le verrouillage. Néanmoins, pour  $\varepsilon = 0.5$  le verrouillage est certainement quasi-inexistant.

### **Première solution, enrichissement partiel**

Cette première solution n'étant singulière qu'en  $u_3$ , nous nous sommes demandés si l'enrichissement singulier en  $\theta$  était nécessaire. Nous avons donc mené la même expérience numérique que ci-dessus, pour les trois mêmes épaisseurs, mais sans enrichissement singulier sur  $\theta$ . Les résultats de cette méthode avec enrichissement "partiel" sont quasi-similaires à ceux avec enrichissement complet, pour les trois valeurs de  $\varepsilon$ . C'est pourquoi nous ne présentons que la courbe de  $\varepsilon = 0.5$ , Fig. 5.3.

### **Deuxième solution**

#### **Etude préliminaire du verrouillage numérique**

L'expression de la deuxième solution ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Ainsi, en partant de la valeur  $\varepsilon = 1$ , on peut obtenir le niveau d'erreur de l'élément  $Q_1$  sans verrouillage. En faisant baisser  $\varepsilon$ , le verrouillage apparaît, et l'erreur augmente. Ceci permet de donner une idée du niveau de verrouillage. L'étude a été menée sur un maillage  $15 \times 15$ , les résultats sont donnés TAB. 5.1 et TAB. 5.2. Pour les courbes de convergences de cette

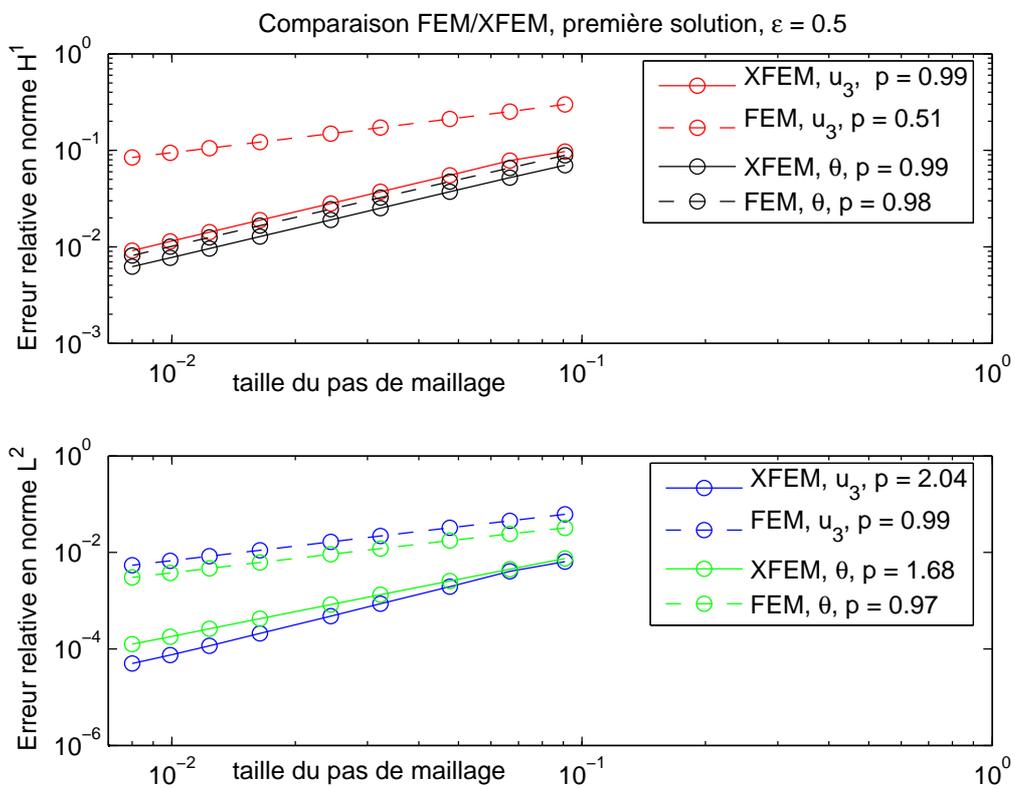


FIG. 5.1 – Précisions des méthodes XFEM et FEM, première solution,  $\varepsilon = 0.5$ .

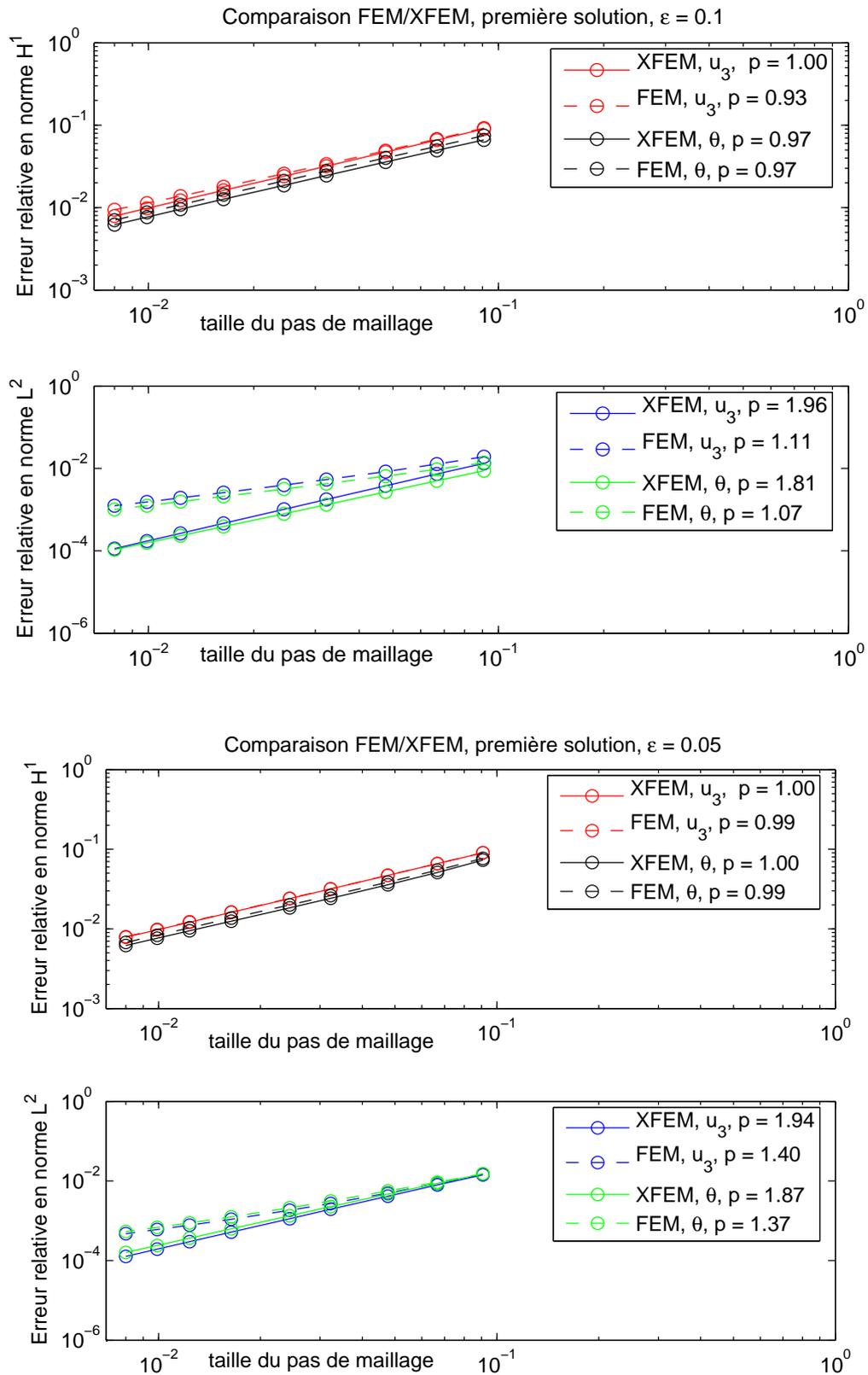


FIG. 5.2 – Précisions des méthodes XFEM et FEM, première solution,  $\varepsilon = 0.1$  et  $0.05$ .

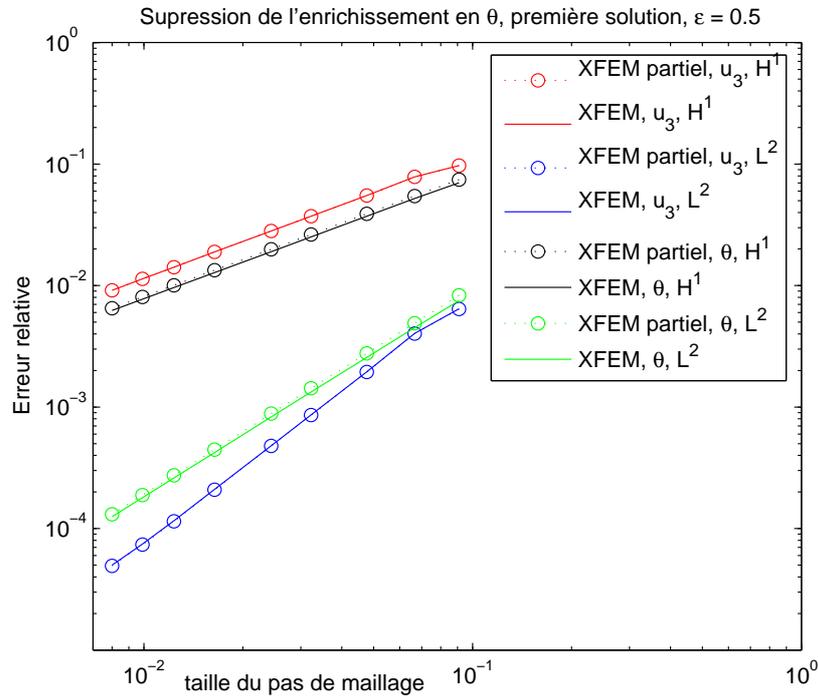


FIG. 5.3 – Effet de la suppression de l’enrichissement singulier sur  $\theta$ ,  $\varepsilon = 0.5$ .

étude, nous jugeons que le verrouillage est négligeable pour  $\varepsilon = 0.5$ , et qu’il est faible et acceptable pour  $\varepsilon = 0.1$ . Dans [26], par exemple, cette dernière épaisseur est considérée comme faisant partie du domaine de validité mécanique du modèle de plaque de Mindlin-Reissner.

$\varepsilon$	1	0.5	0.1	0.05
$\ u_3 - u_3^h\ _{L^2}$	0.001122	0.001129	0.001656	0.003537
$\ u_3 - u_3^h\ _{H^1}$	0.074712	0.074713	0.075589	0.083144
$\ \theta - \theta^h\ _{L^2}$	0.004843	0.004924	0.014675	0.041107
$\ \theta - \theta^h\ _{H^1}$	0.237375	0.237436	0.377132	1.023830

TAB. 5.1 – Erreur en fonction de l’épaisseur, XFEM, maillage  $15 \times 15$ .

### Courbes de convergence

Pour nos courbes de convergence, nous utilisons les deux valeurs de  $\varepsilon$  citées ci-dessus. Les résultats sont donnés Fig. 5.4 et Fig. 5.5.

Dans la cas où  $\varepsilon$  vaut 0.5, les taux de convergence correspondent assez précisément à ce que l’on attend : une convergence en  $O(h)/O(h^2)$  pour les normes  $H^1/L^2$ , avec la méthode XFEM. Avec la méthode “FEM“, on obtient une convergence en  $O(\sqrt{h})/O(h)$ .

$\varepsilon$	1	0.5	0.1	0.05
$\ u_3 - u_3^h\ _{L^2}$	0.017224	0.017665	0.024167	0.030959
$\ u_3 - u_3^h\ _{H^1}$	0.271814	0.272118	0.288954	0.321644
$\ \theta - \theta^h\ _{L^2}$	0.050527	0.051688	0.136770	0.223830
$\ \theta - \theta^h\ _{H^1}$	0.971461	0.975419	1.631990	3.119030

TAB. 5.2 – Erreur en fonction de l'épaisseur, FEM, maillage  $15 \times 15$ .

Le seul cas un peu différent est l'erreur en norme  $L^2$  sur  $u_3$ , dont le taux de convergence est de 1.58, au lieu de la valeur optimale 2. Nous pensons que cette valeur de 1.58 pourrait être améliorée en prenant en compte le chargement plus soigneusement. Rappelons qu'il est en  $O(1/\sqrt{r})$ , c'est-à-dire qu'il tend vers l'infini vers le fond de fissure. Dans nos tests numériques, le chargement est interpolé sur un élément fini  $Q_3$ .

Le cas où  $\varepsilon$  vaut 0.1 présente des résultats globalement similaires, bien que les taux de convergences soient légèrement différents. Ainsi, sur ce deuxième cas-test on constate aussi que l'enrichissement XFEM permet de retrouver le taux de convergence optimal de l'élément  $Q_1$ . Donc la singularité est bien prise en compte, ce qui valide le choix des expressions (5.7) et (5.8).

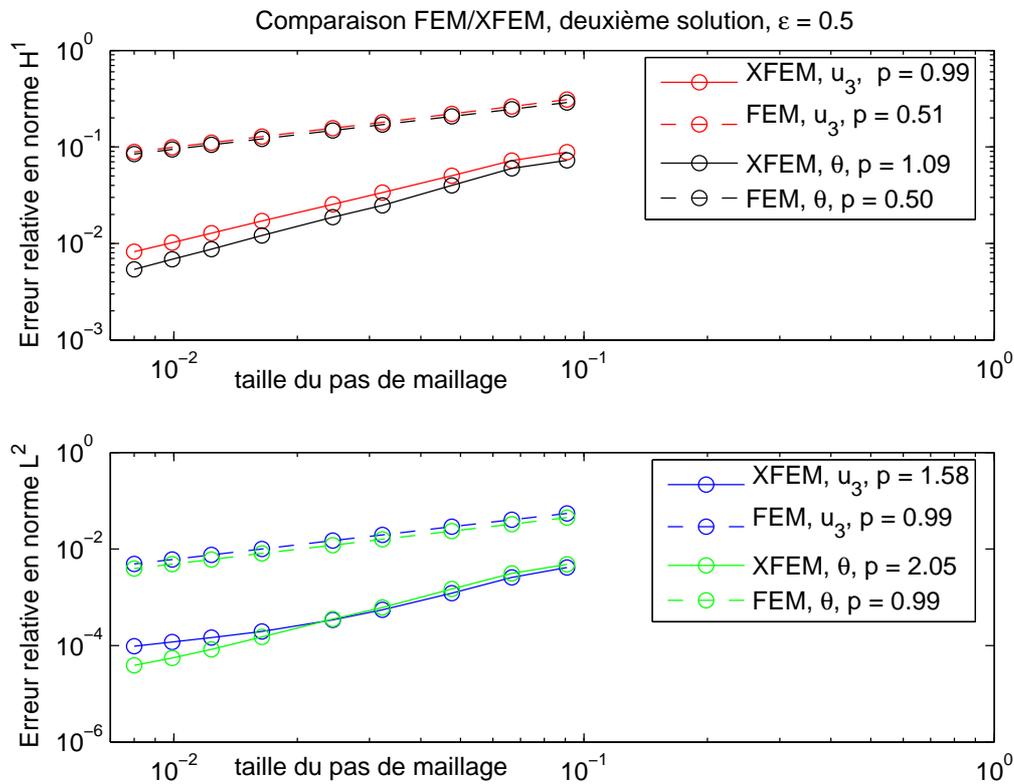


FIG. 5.4 – Précisions des méthodes XFEM et MEF, deuxième solution,  $\varepsilon = 0.5$ .

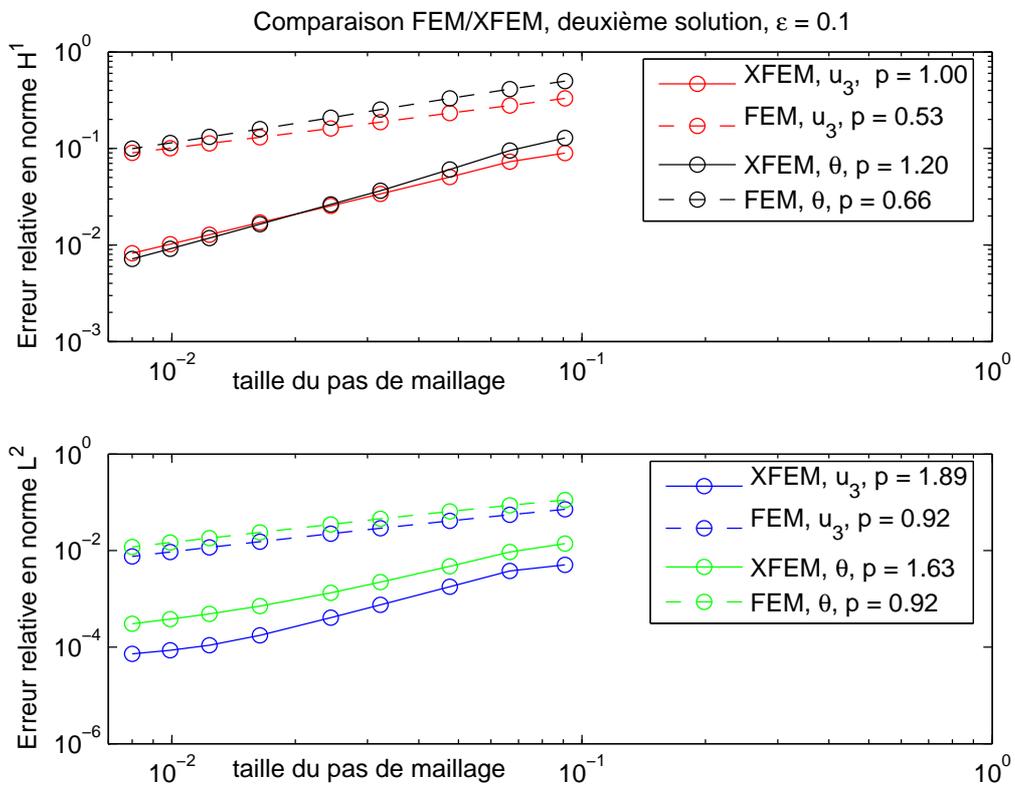


FIG. 5.5 – Précisions des méthodes XFEM et MEF, deuxième solution,  $\varepsilon = 0.1$ .

### 3 Conclusion du chapitre

Les résultats de ce chapitre montrent qu'en présence d'une singularité, l'enrichissement singulier permet d'obtenir une erreur dont le taux de convergence est optimal vis-à-vis de l'élément utilisé, c'est-à-dire le même taux que sur un problème régulier sans fissure. Ceci permet de conclure que les fonctions d'enrichissement singulier utilisées sont correctes. Rappelons qu'une telle étude n'avait jamais été réalisée.

Signalons que dans [16], les fonctions d'enrichissement singulières de  $u_3$  sont différentes de celle que nous avons choisi. Le déplacement vertical  $u_3$  y est enrichi par l'ensemble des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} r^{3/2} \sin \frac{\theta}{2} & ; & r^{3/2} \sin \frac{3\theta}{2}, \\ r^{3/2} \cos \frac{\theta}{2} & ; & r^{3/2} \cos \frac{3\theta}{2}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

qui sont les termes d'ordre supérieur à  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  dans l'expression de la singularité exacte de  $u_3$  (voir [38]). Remarquons aussi qu'elles sont égales aux fonctions d'enrichissement singulier du modèle de Kirchhoff-Love, équation (3.8), page 83.

Nous ne concluons pas pour autant que les fonctions choisies dans [16] sont inappropriées, car les expériences numériques de validation de cette référence sont différentes des nôtres (il s'agissait de calcul de facteurs d'intensité de contraintes). Nous pensons plutôt que le choix des fonctions d'enrichissement pourrait dépendre du résultat qu'on cherche à obtenir.

Ce chapitre constitue donc les premiers éléments en vue du développement d'une méthode XFEM applicable au modèle de Mindlin-Reissner. La difficulté suivante sera de définir un enrichissement singulier sans verrouillage numérique.

Pour tenter de résoudre cette difficulté, l'approche développée dans [16] et décrite au chapitre 2 page 67, consiste à remplacer les fonctions de forme de l'élément  $Q_1$  par celles de l'élément MITC 4. Ce qui ne produit aucun traitement particulier sur les fonctions d'enrichissement singulier : le résultat reproduit Fig. 2.6 page 68 montre qu'il y a du verrouillage, ce qui laisse à penser qu'un traitement spécifique est nécessaire sur ces fonctions.



# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons proposé deux formulations XFEM, basées sur le modèle de Kirchhoff-Love, puis deux méthodes de calcul de FIC adaptées à ces formulations. L'erreur de ces formulations présente un taux de convergence optimal. Cette méthode est fiable pour tout type d'épaisseur, et son coût de calcul est du même ordre que celui du modèle de Mindlin-Reissner (qui est le modèle de référence dans les codes de calcul industriels).

Le chapitre sur le calcul de FIC montre que nos formulations sont potentiellement utilisables pour des applications industrielles. Pour la méthode dite d'estimation directe, nos tests numériques nous ont suggérés une règle simple de choix du rayon de la zone d'enrichissement  $\mathcal{R}$  et du pas de maillage. Une des limites de la méthode XFEM est la difficulté à modéliser les fissures de très petite taille : celles-ci ne sont modélisables qu'au moyen de maillages très raffinés. Pour la méthode d'intégrale-J, quand la fissure est petite, les tests suggèrent de prendre une couronne d'intégration de rayon maximal.

Ce travail pourrait être étendu de nombreuses manières. Nous énonçons des possibilités par ordre de complexité croissant.

- une méthode dite de "raccord hybride" pourrait être proposée : la zone d'enrichissement utiliserait le modèle de Kirchhoff-Love, et le reste de la plaque serait modélisé par le modèle de Mindlin-Reissner.
- L'étude théorique et la preuve mathématique de la convergence théorique de nos méthodes augmenterait la confiance qu'on peut leur porter.
- Il serait intéressant aussi de formuler des enrichissements singuliers sans verrouillage numérique, pour le modèle de Mindlin-Reissner. Une première tentative pourrait être d'enrichir ce modèle par les singularités de Kirchhoff-Love. En effet, les singularités de ce modèle sont sans verrouillage, et l'article [46] montre que pour des épaisseurs très petite, les FIC de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner sont équivalents.



# Annexes

## Annexes du chapitre "Calcul de FIC"

### Calcul de $\partial_\beta \mathcal{A}_\beta + \partial_1 \mathcal{B} = 0$

Montrons que :

$$\partial_\beta \mathcal{A}_\beta + \partial_1 \mathcal{B} = 0$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\beta &= (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) - (\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \\ \mathcal{B} &= -m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} \end{aligned}$$

Passons au calcul :

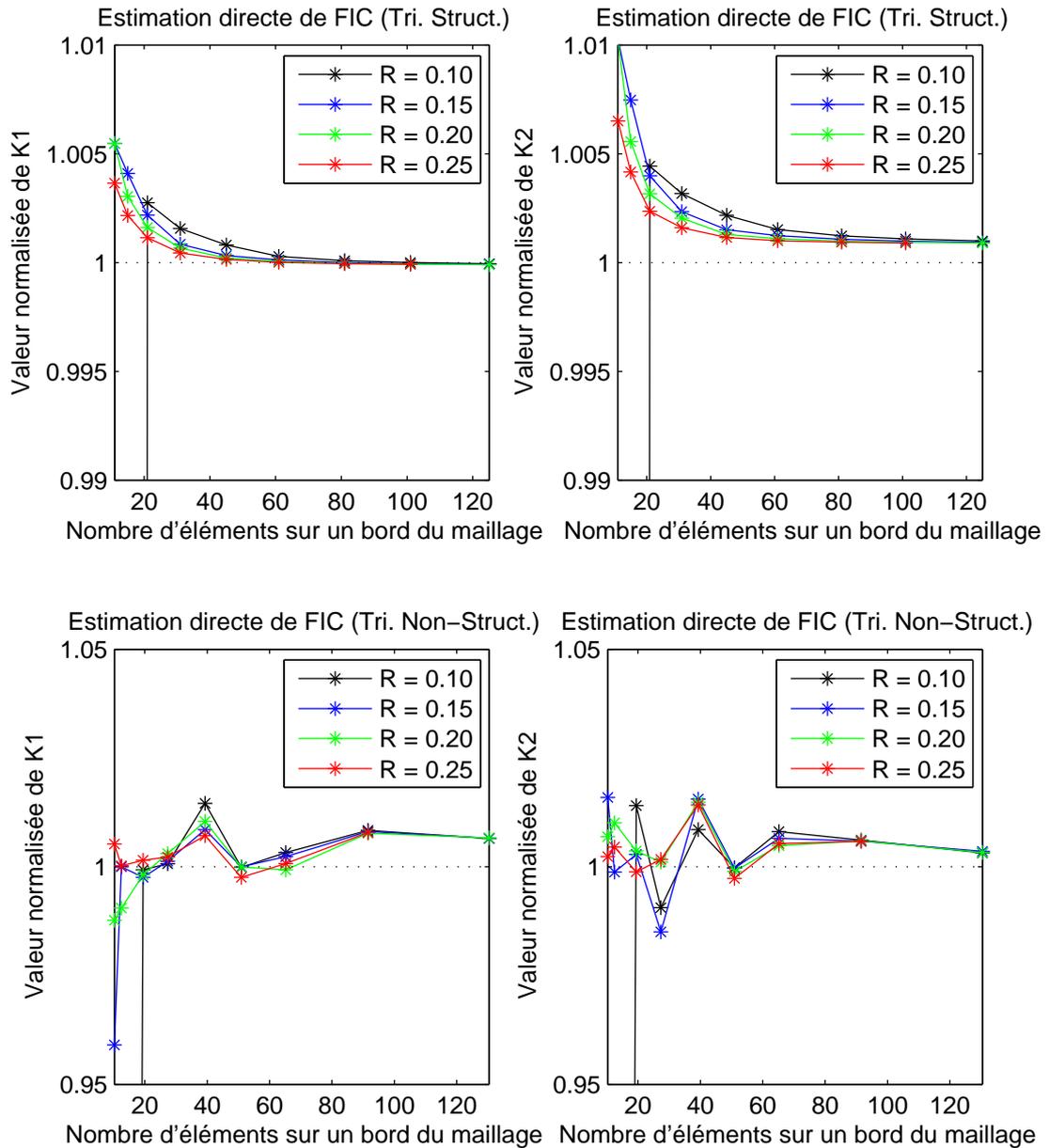
$$\begin{aligned} \partial_\beta \mathcal{A}_\beta + \partial_1 \mathcal{B} &= \underbrace{\partial_\beta m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)}}_{E_1} + \underbrace{m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(2)}}_{E_2} + \underbrace{\partial_\beta m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}}_{E_3} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(1)} \\ &\quad - \underbrace{\partial_\beta \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)}}_{=div\ div\ m=0} - \underbrace{\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\beta} u_3^{(2)}}_{E_1} - \underbrace{\partial_\beta \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}}_{=div\ div\ m=0} - \underbrace{\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\beta} u_3^{(1)}}_{E_3} \\ &\quad - \partial_1 m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} - \underbrace{m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(2)}}_{E_2} \\ &= m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(1)} - \partial_1 m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} \end{aligned}$$

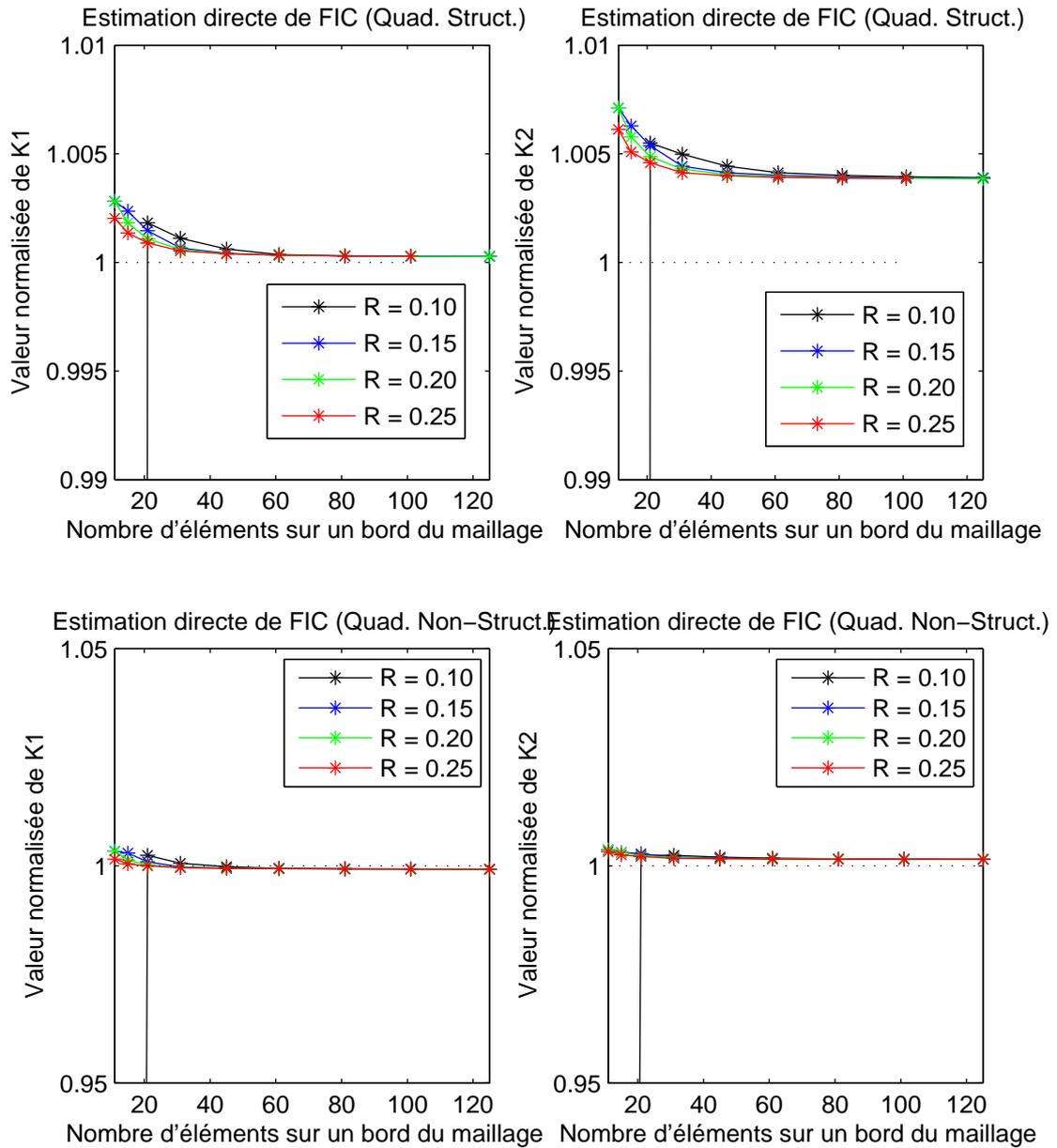
Calculons les deux termes restants et montrons qu'ils sont égaux. Comme  $m_{\alpha\beta}^{(i)} = -D[\partial_{\alpha\beta} u_3^{(i)} + \nu \Delta u^{(i)} \delta_{\alpha\beta}]$ , on peut directement les calculer :

$$\begin{aligned} \partial_1 m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} &= -D[\partial_{1\alpha\beta} u_3^{(1)} + \nu \partial_1 \Delta u^{(1)} \delta_{\alpha\beta}] \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} \\ &= -D[\partial_{1\alpha\beta} u_3^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} + \nu \partial_1 \Delta u^{(1)} \Delta u_3^{(2)}] \\ m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(1)} &= -D[\partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} + \nu \Delta u^{(2)} \delta_{\alpha\beta}] \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(1)} \\ &= -D[\partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(1)} + \nu \Delta u^{(2)} \partial_{1\alpha\alpha} u_3^{(1)}] \end{aligned}$$

Ce qui conclut le calcul, et montre que  $\partial_\beta \mathcal{A}_\beta + \partial_1 \mathcal{B} = 0$ .

**Résultats de FIC en estimation directe, premier cas-test, pour  $\mathcal{R}$  fixe**

FIG. 5.6 – Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en triangles ( $\mathcal{R}$  fixe).

FIG. 5.7 – Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en quadrangles ( $\mathcal{R}$  fixe).

**Résultats en Intégrale-J, premier cas-test, pour  $K_2$ , en rayon "variable"**

Pour le premier cas-test, défini en (4.25), nous présentons ici les résultats qui concernent le cas du rayon de la zone d'enrichissement  $\mathcal{R}$  variable. Les quatre graphes ci-après montrent le FIC  $K_2$  normalisé (ces cas correspondent aux maillages triangles/quadrangles et structurés/non-structurés).

Dans le corps du texte, on avait présenté les 4 même cas de graphes, pour  $K_1$ .

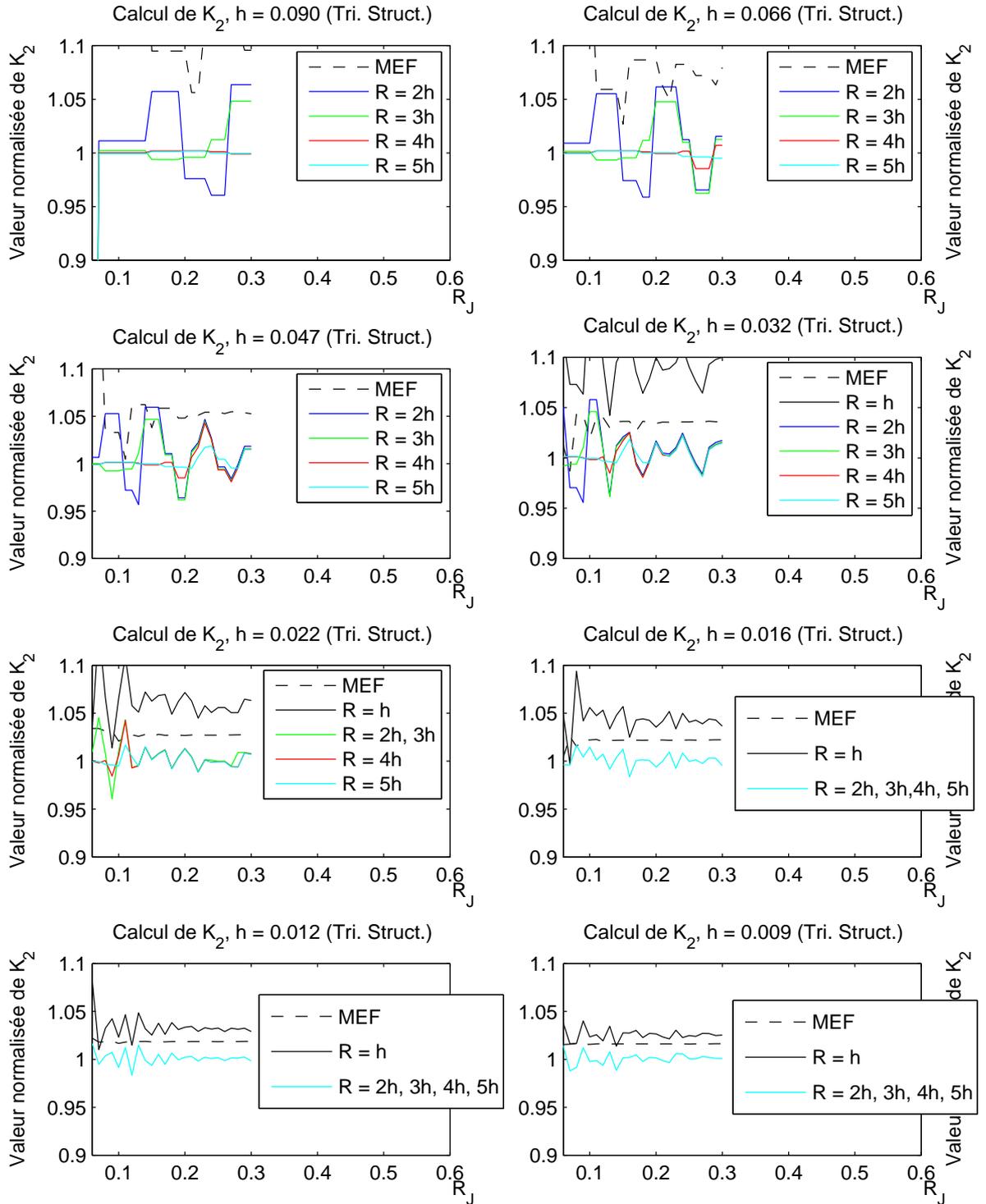


FIG. 5.8 – Calcul du FIC  $K_2$ , pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés.

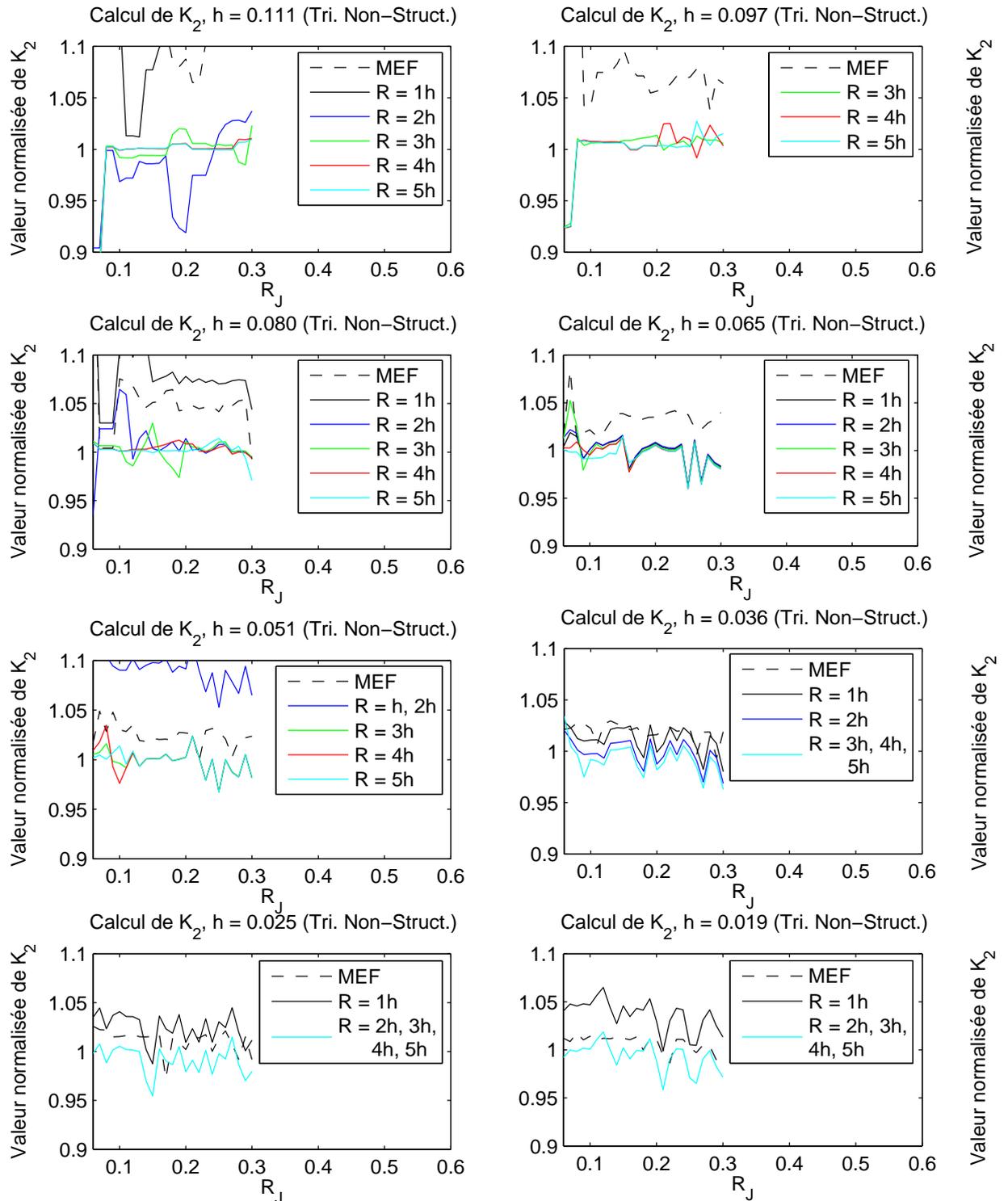


FIG. 5.9 – Calcul du FIC  $K_2$ , pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés.

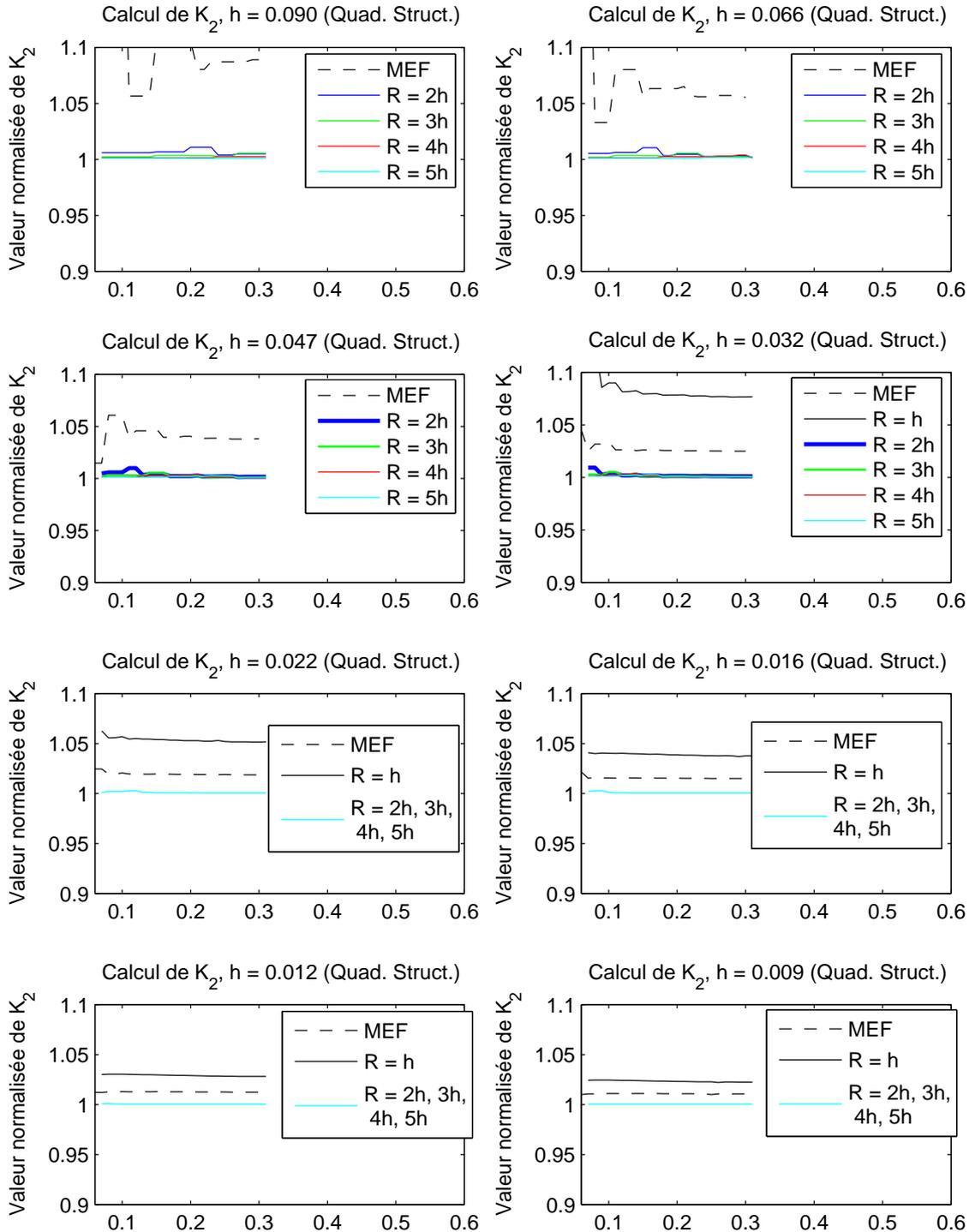


FIG. 5.10 – Calcul du FIC  $K_2$ , pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés.

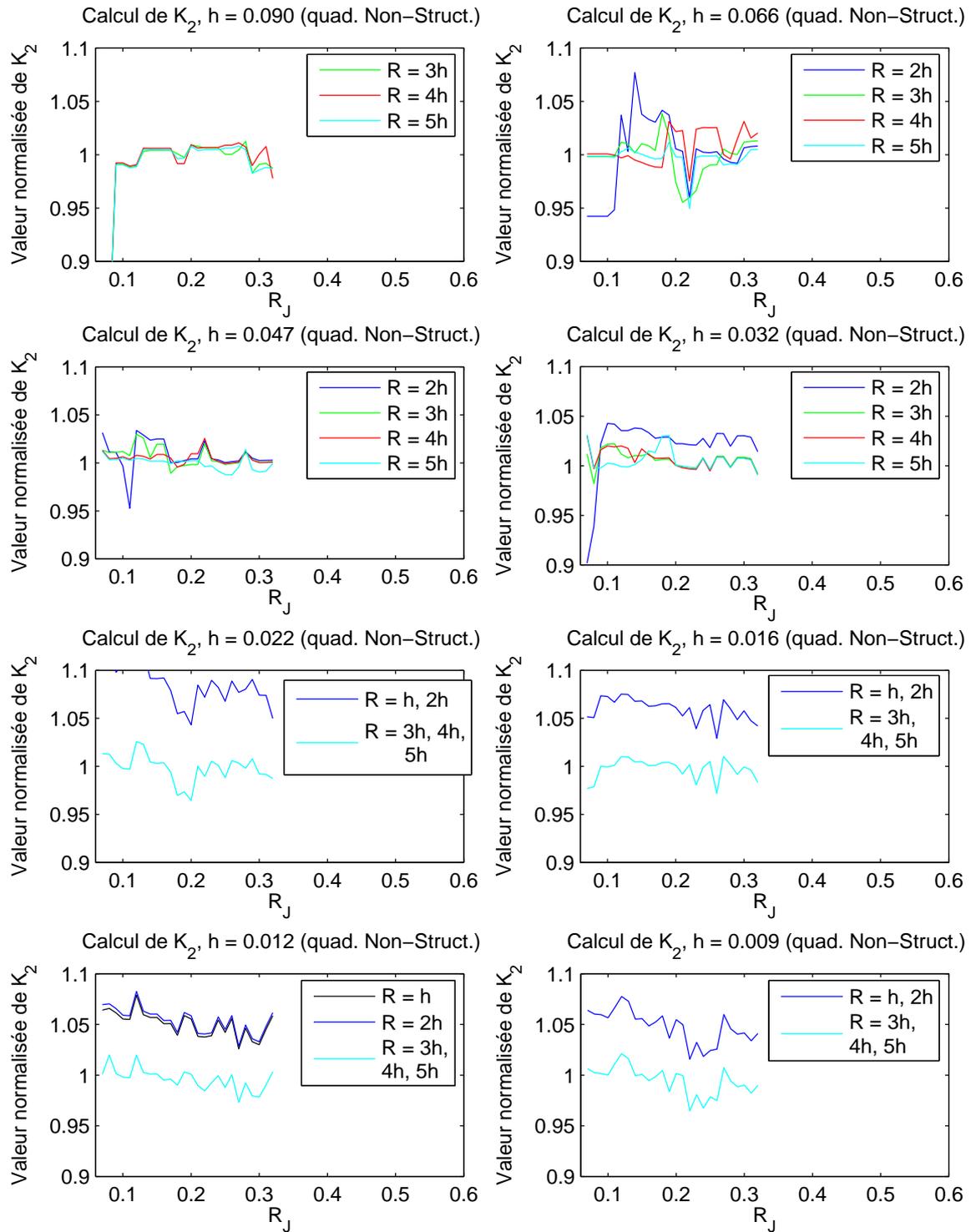


FIG. 5.11 – Calcul du FIC  $K_2$ , pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés.

### **Résultats en Intégrale-J, premier cas-test, pour $K_1$ , en rayon "fixe"**

Toujours pour le premier cas-test, défini en (4.25), nous présentons ici les résultats qui concernent le cas du rayon de la zone d'enrichissement  $\mathcal{R}$  fixe. Il y a 8 graphes :

- les quatre premiers correspondent au calcul de  $K_1$  normalisé, pour les cas des maillages triangles/quadrangles et structurés/non-structurés,
- les quatre suivants montrent les même calculs, mais pour  $K_2$  normalisé.

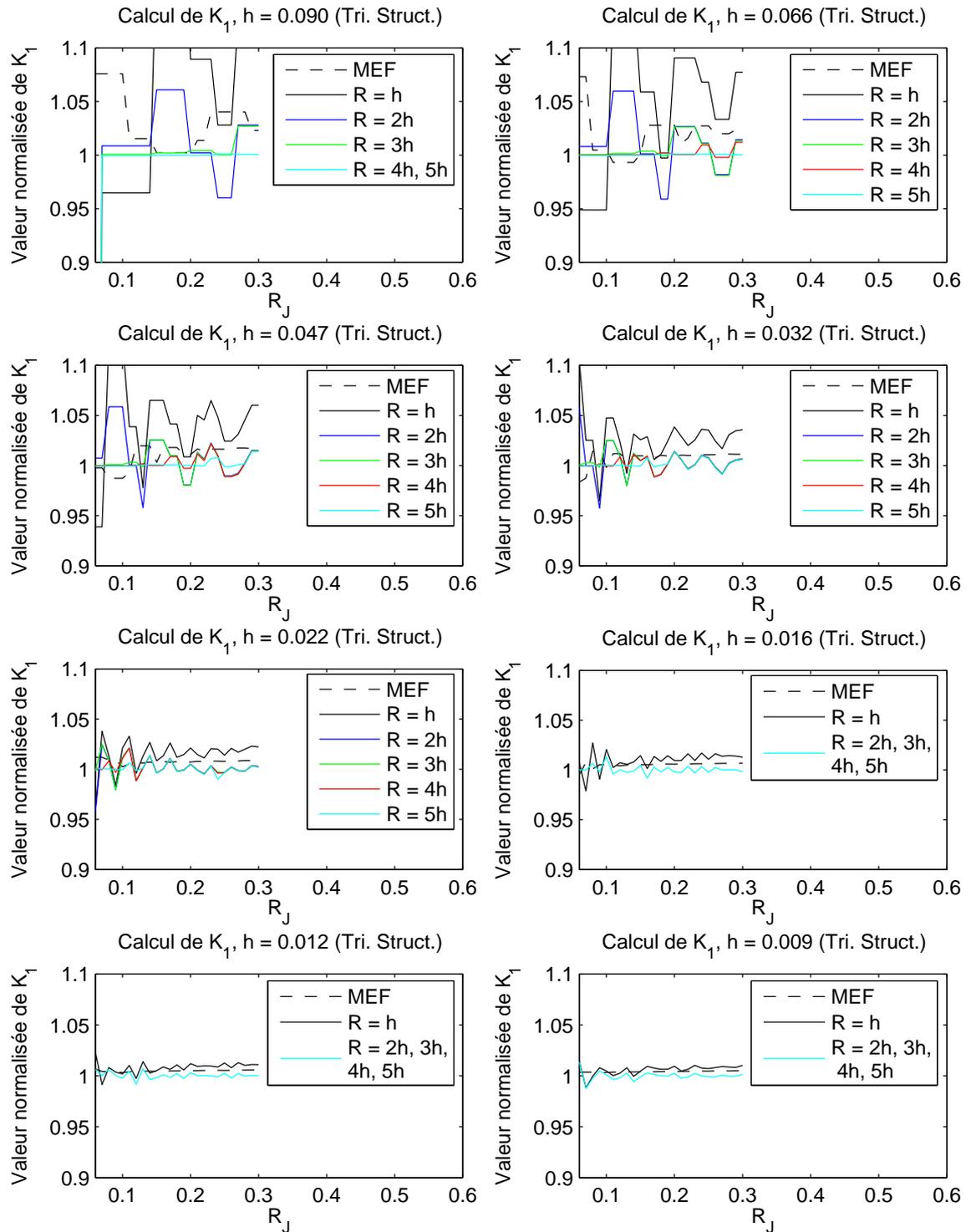


FIG. 5.12 – Calcul du FIC  $K_1$ , pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés.

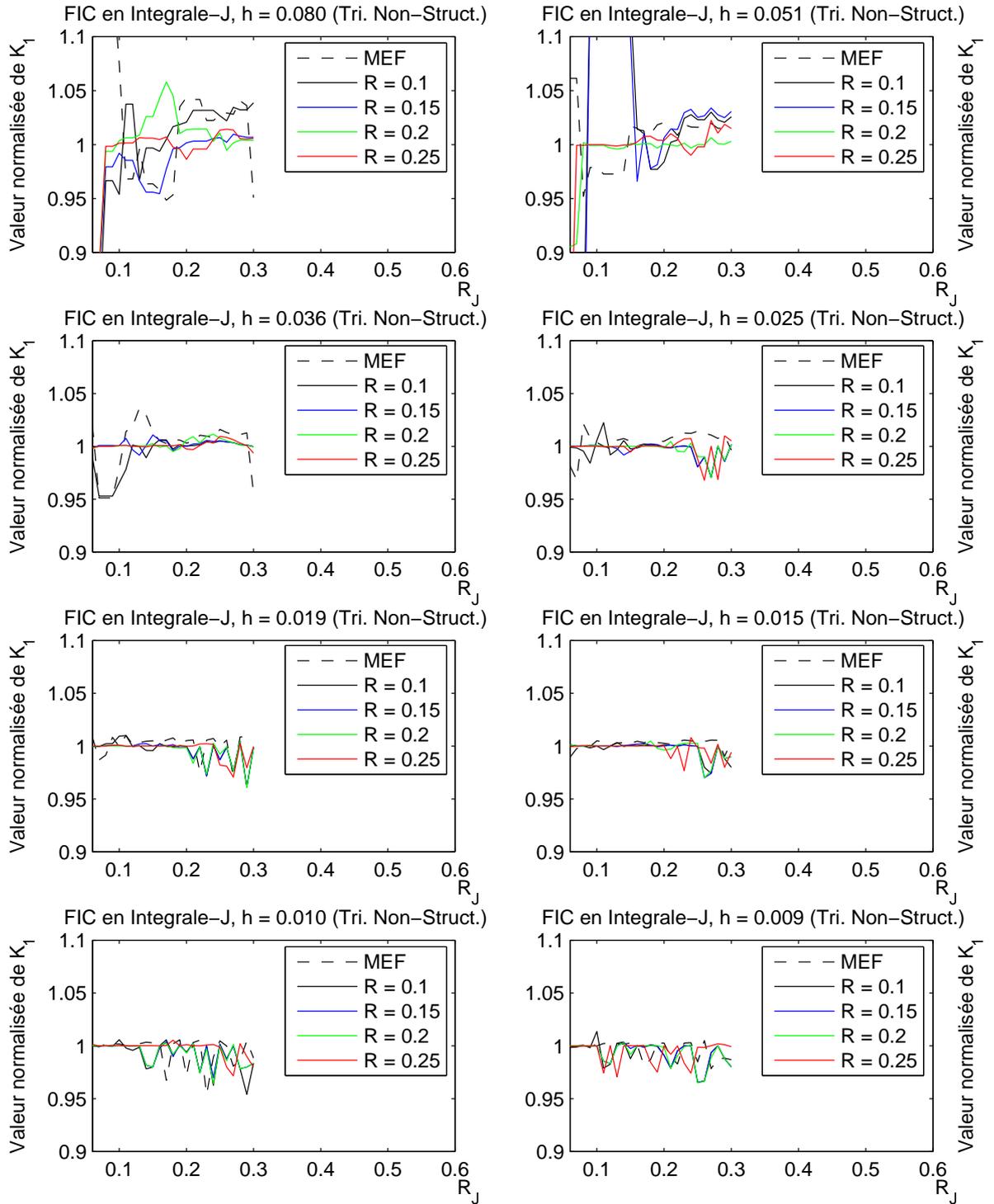


FIG. 5.13 – Calcul du FIC  $K_1$ , pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés.

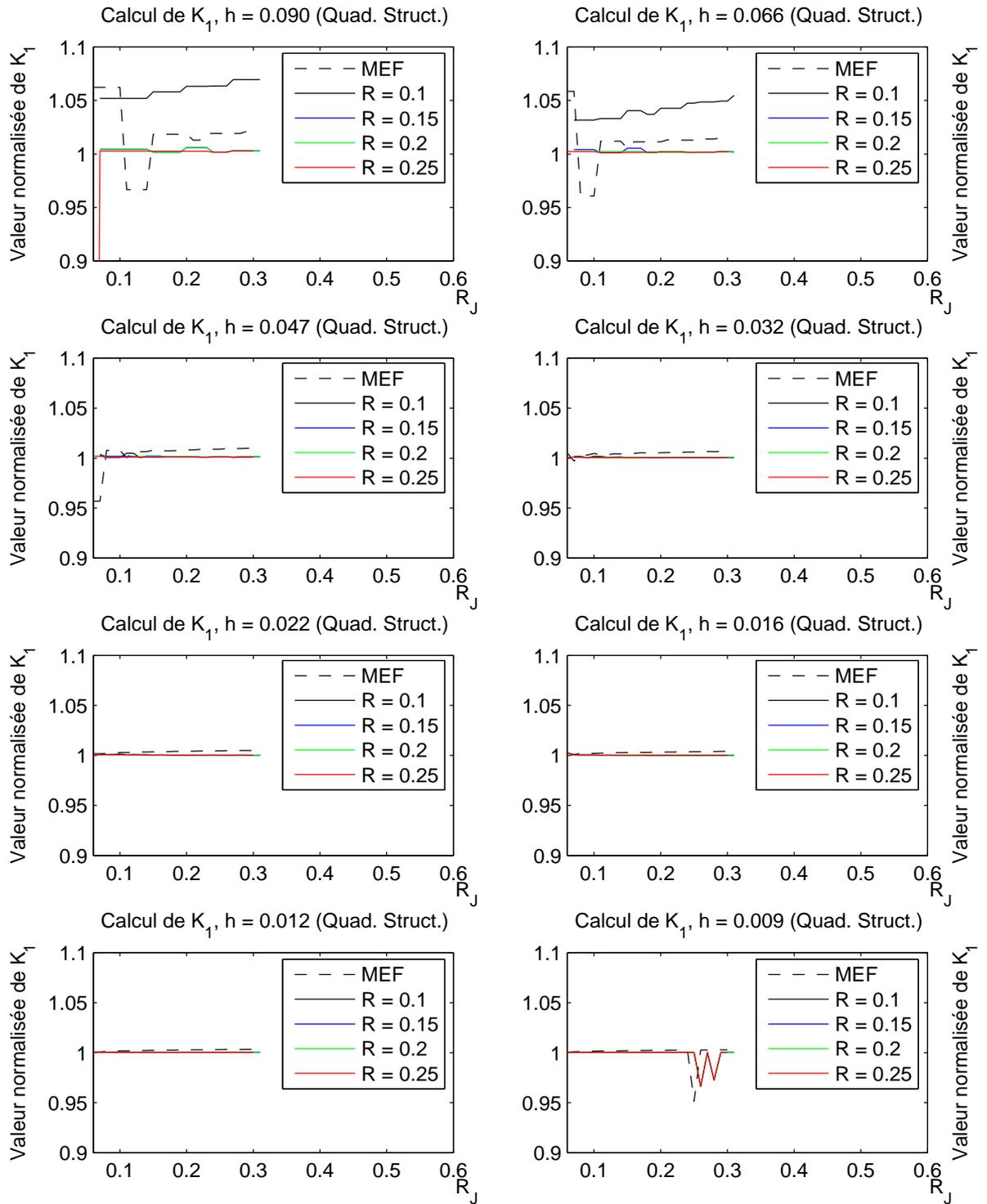


FIG. 5.14 – Calcul du FIC  $K_1$ , pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés.

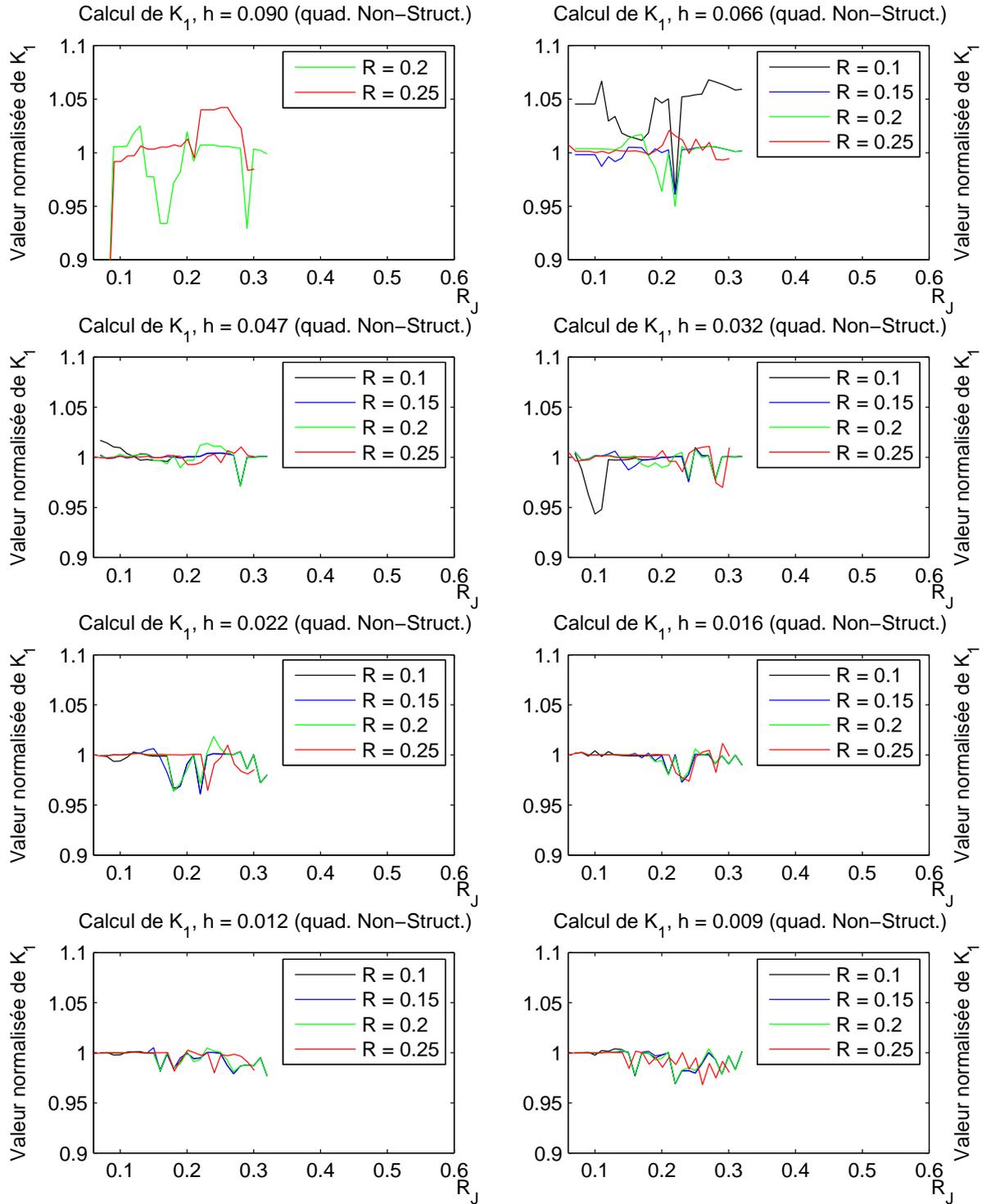


FIG. 5.15 – Calcul du FIC  $K_1$ , pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés.

**Résultats en Intégrale-J, premier cas-test, pour  $K_2$ , en rayon "fixe"**

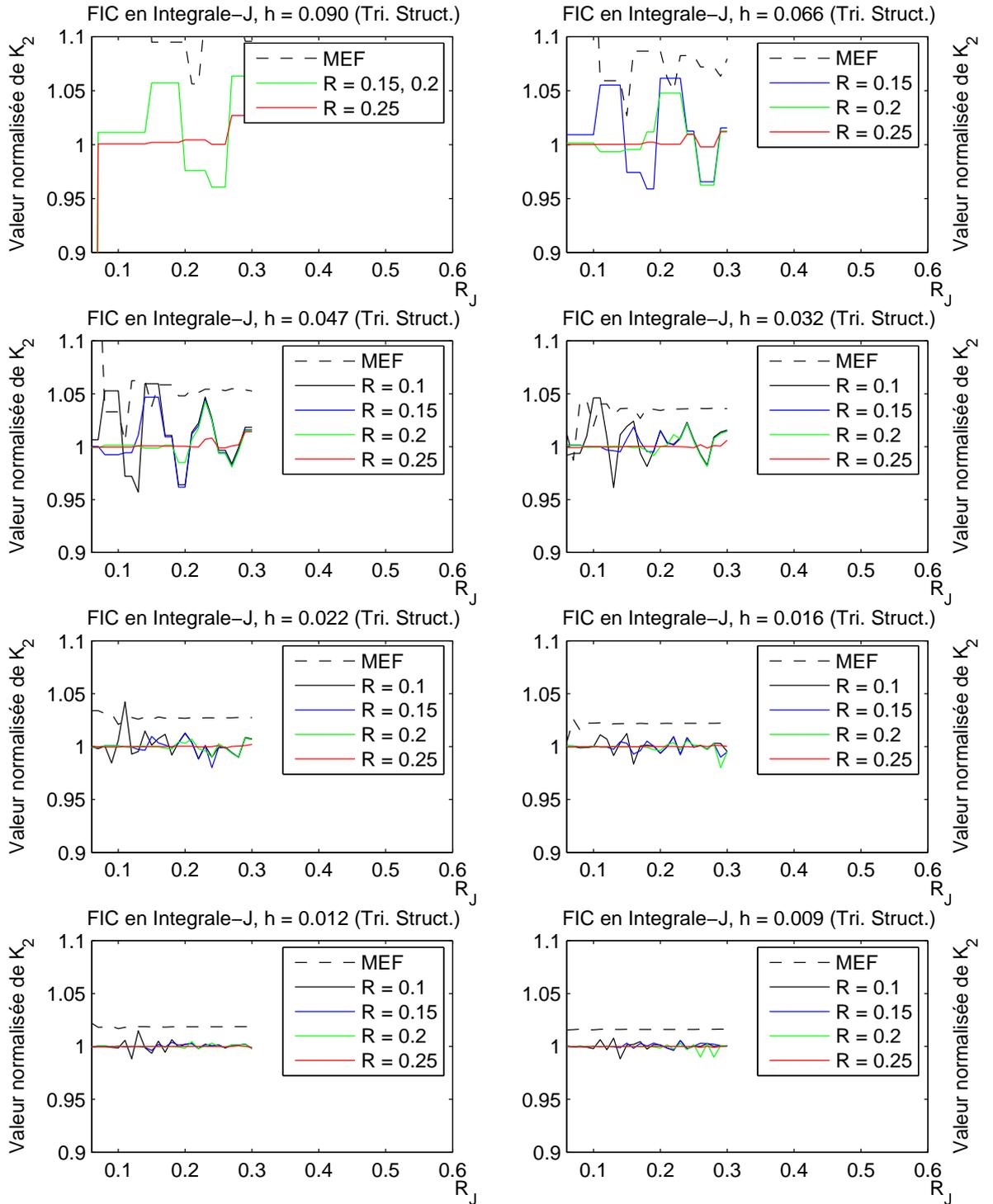


FIG. 5.16 – Calcul du FIC  $K_2$ , pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés.

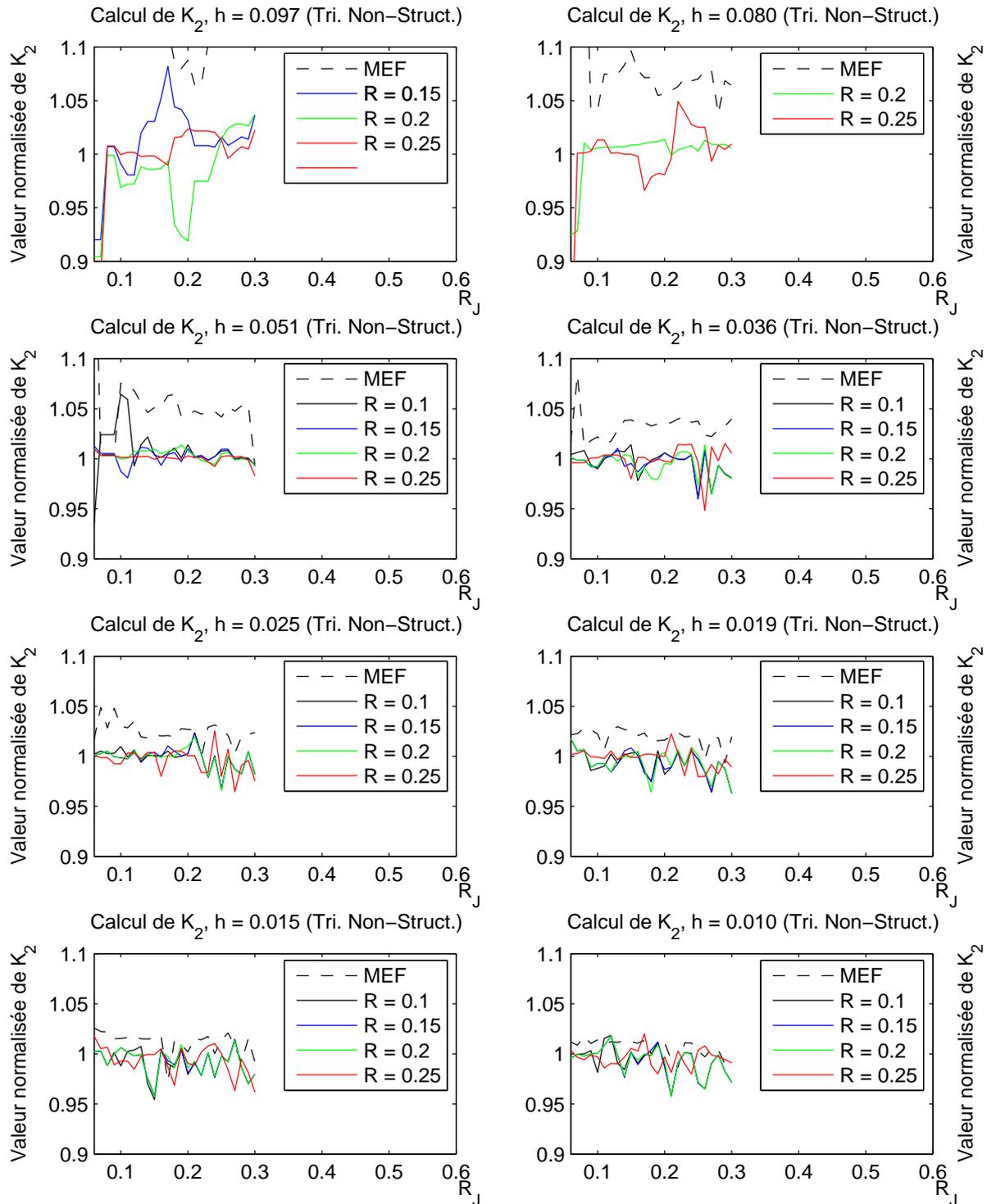


FIG. 5.17 – Calcul du FIC  $K_2$ , pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés.

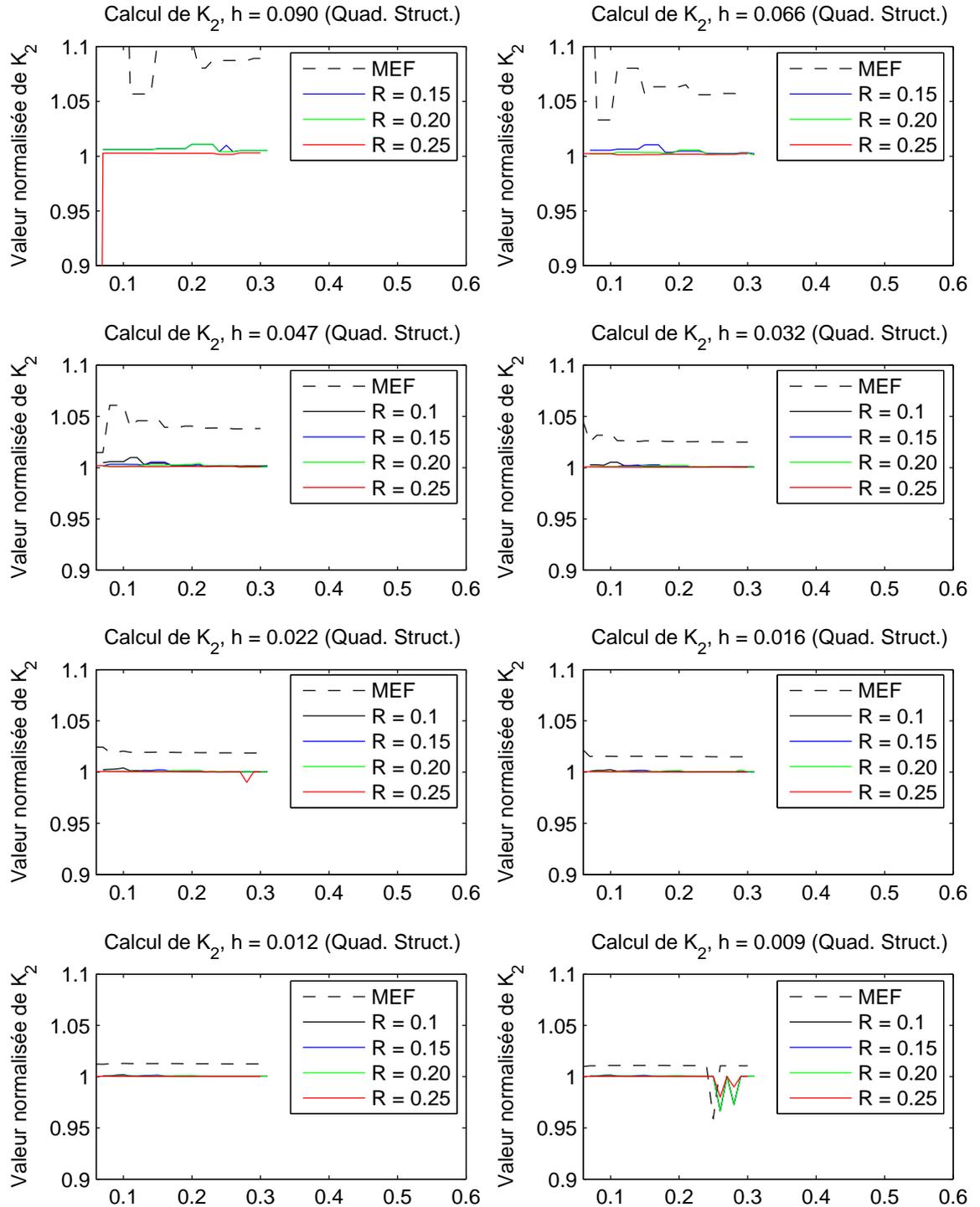


FIG. 5.18 – Calcul du FIC  $K_2$ , pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés.

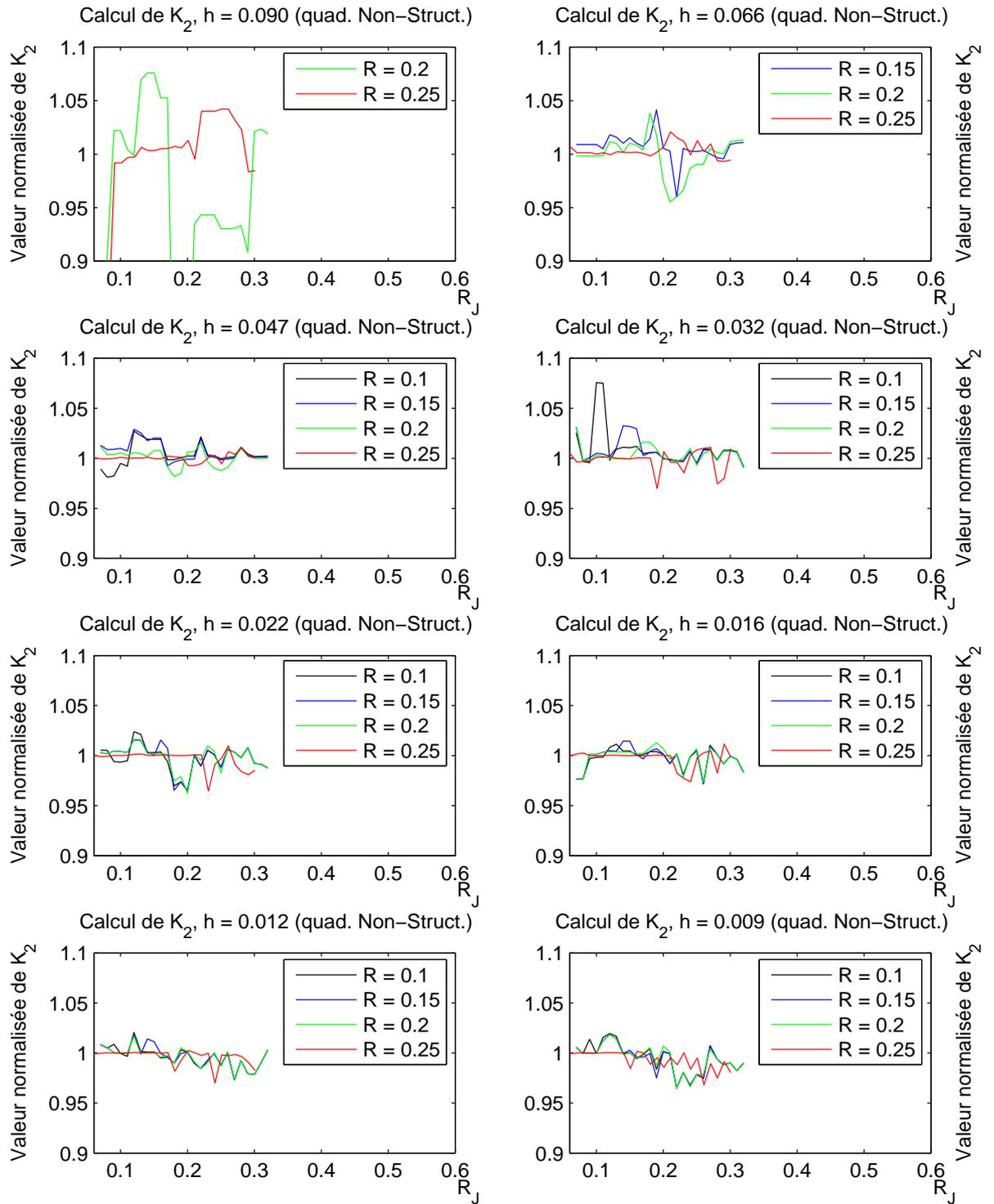


FIG. 5.19 – Calcul du FIC  $K_2$ , pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés.

**Résultats en Intégrale-J, deuxième cas-test, en rayon "variable" (maillages Quad. Struct.)**

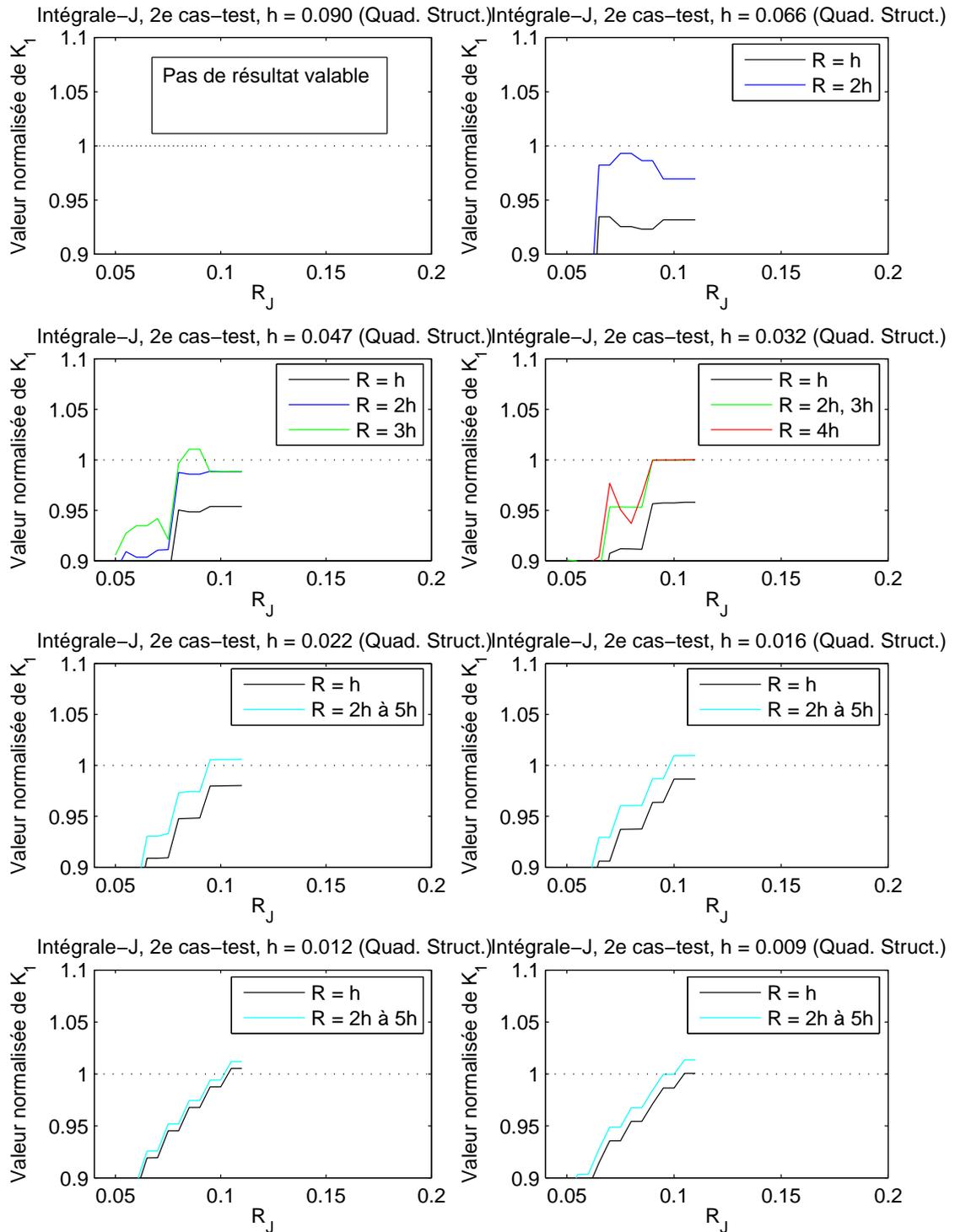


FIG. 5.20 – Calcul de FIC, pour  $\mathcal{R} = kh$ , en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadrangles structurés.

**Résultats en Intégrale-J, deuxième cas-test, en rayon "fixe"**

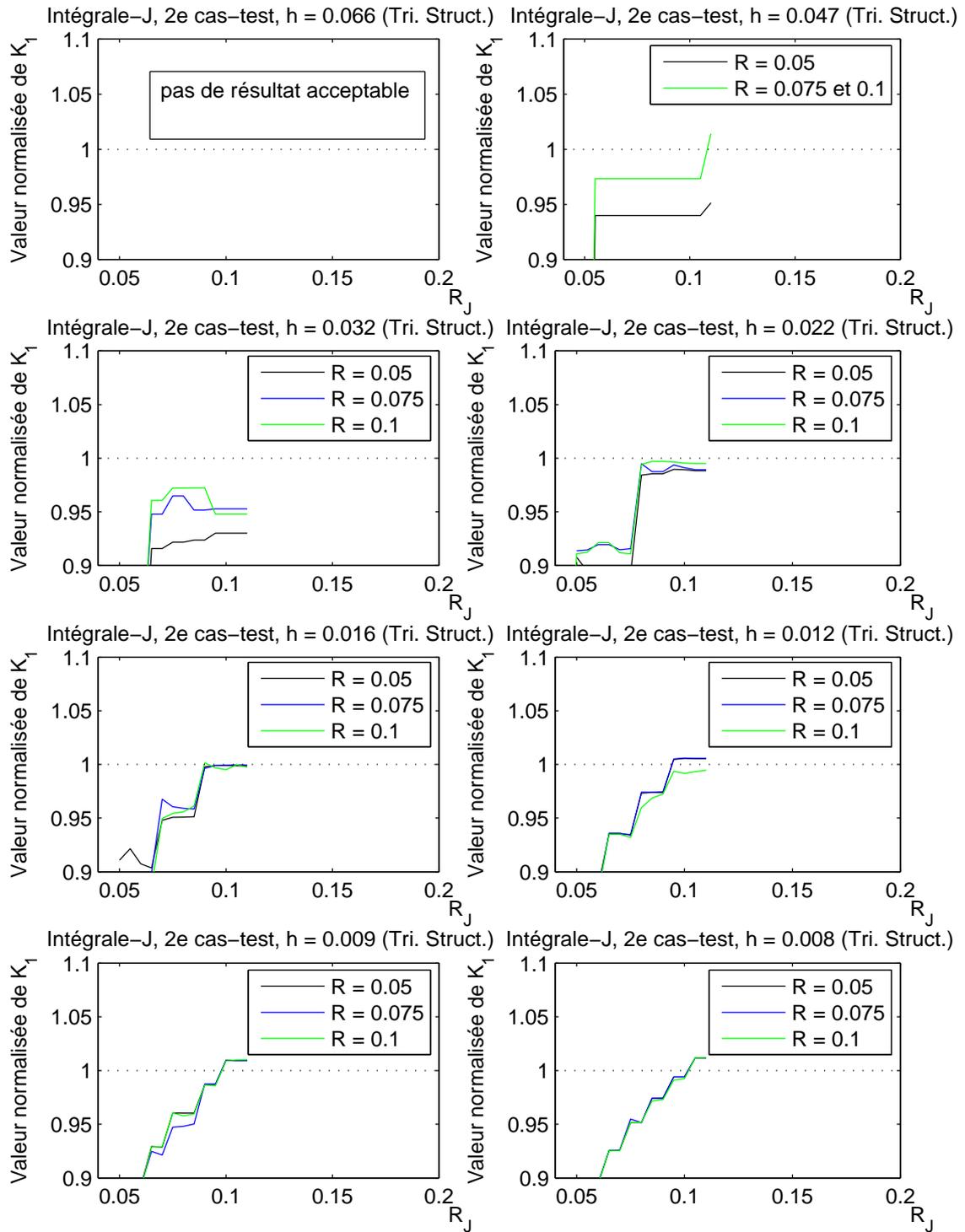


FIG. 5.21 – Calcul de FIC, pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangles structurés.

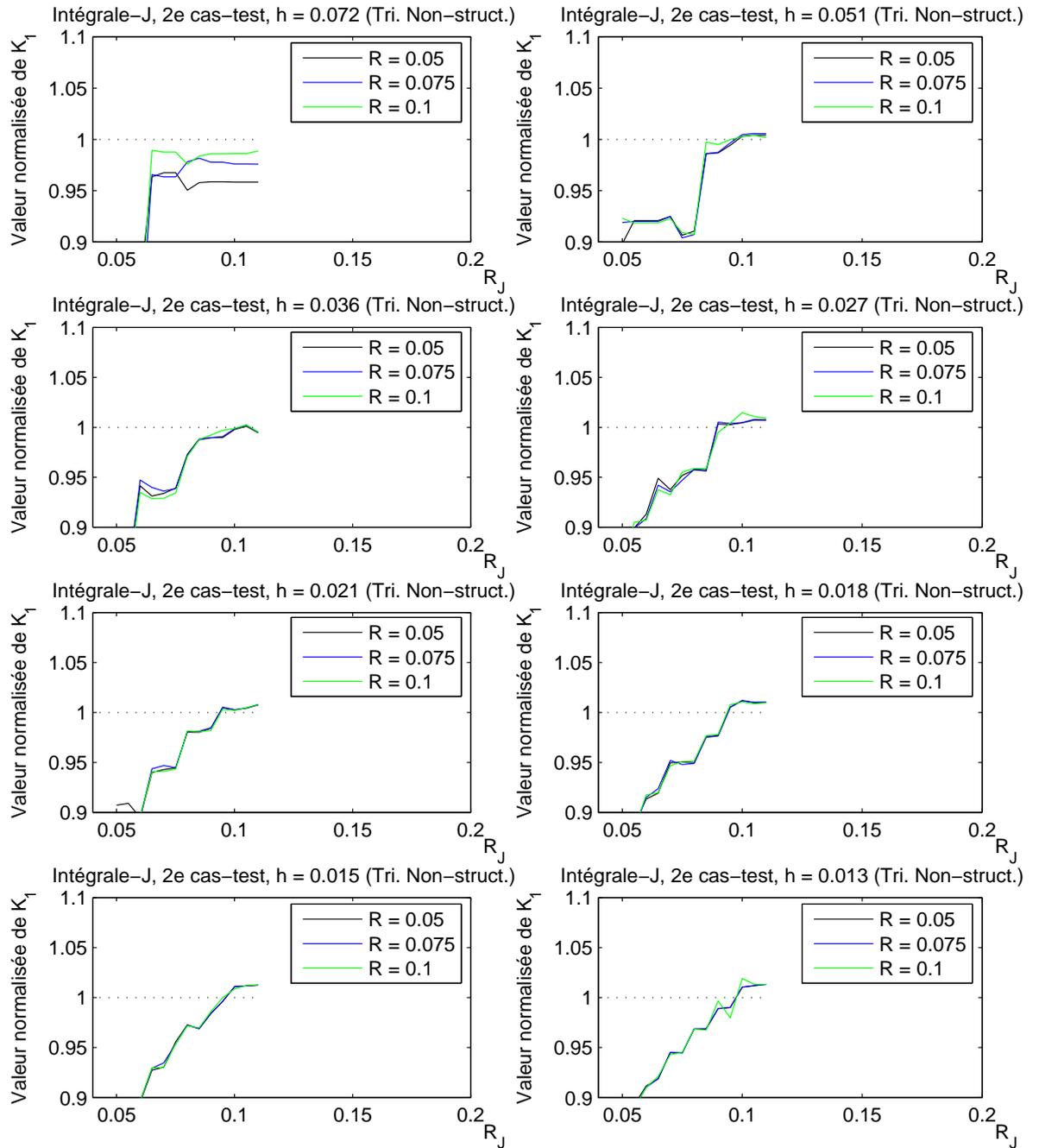


FIG. 5.22 – Calcul de FIC, pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangles non-structurés.

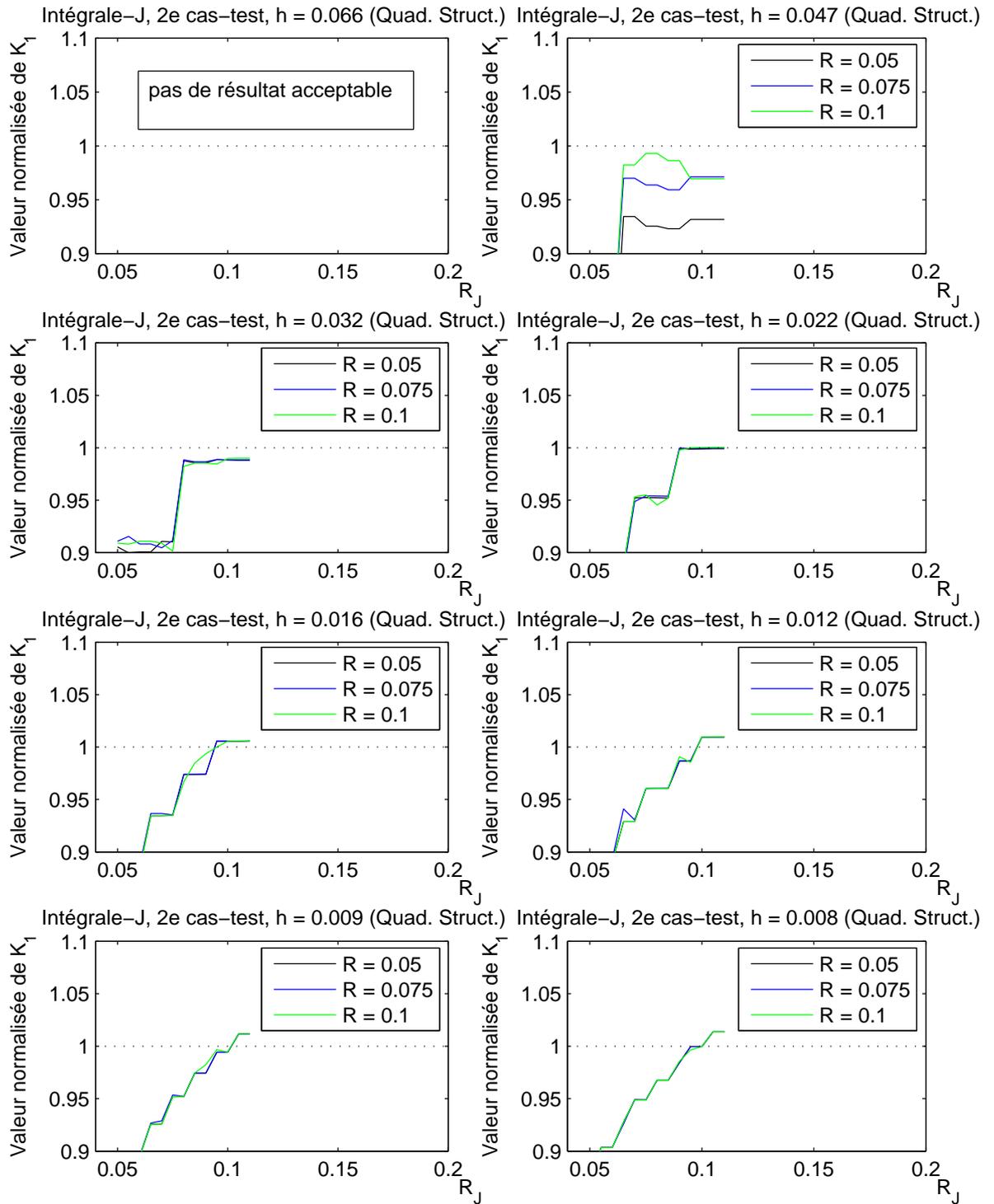


FIG. 5.23 – Calcul de FIC, pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadangles structurés.

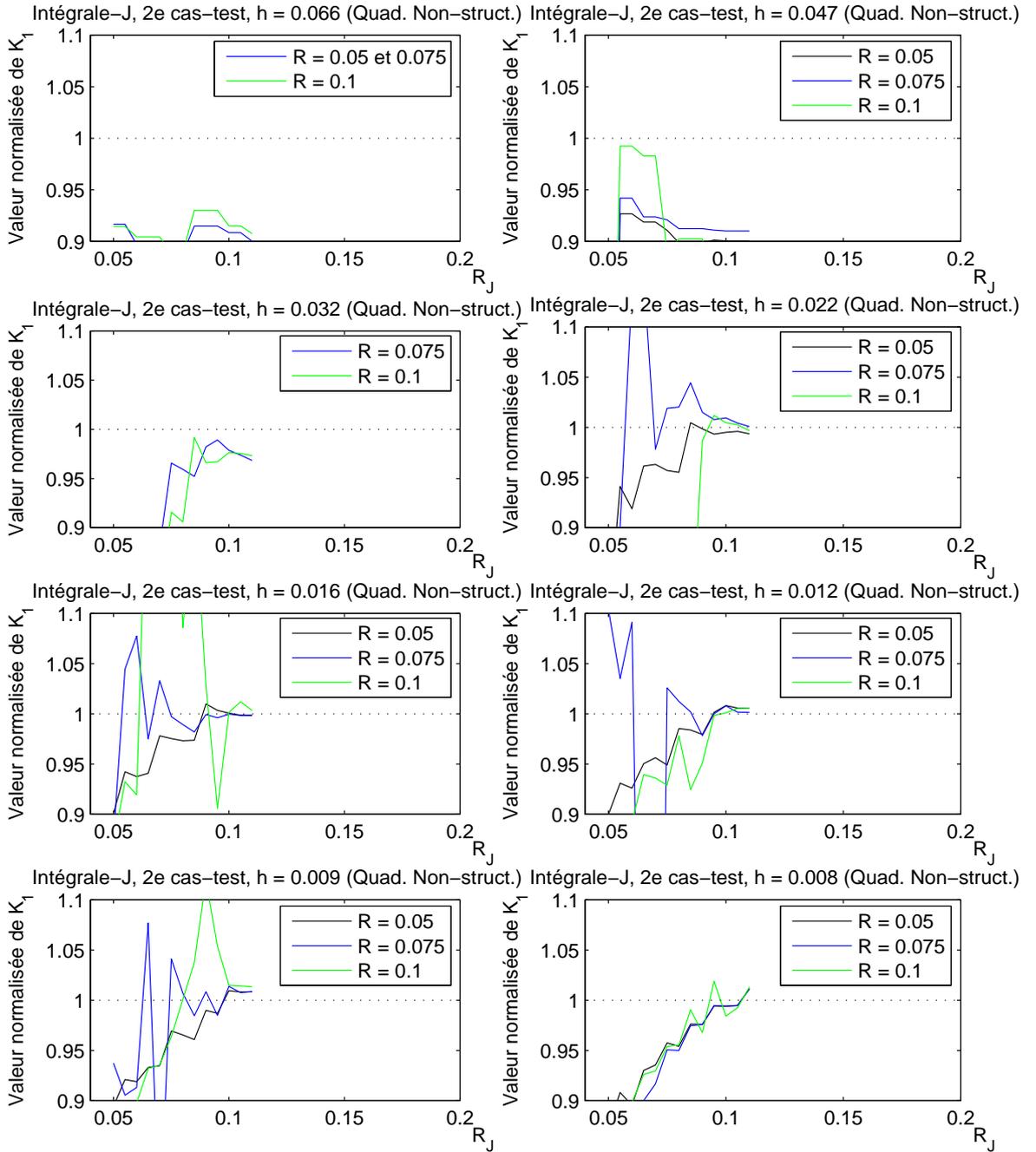


FIG. 5.24 – Calcul de FIC, pour  $\mathcal{R}$  fixe, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadangles non-structurés.

# Bibliographie

- [1] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] P.M.A. Areias, T. Belytschko. *Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method*. Int. J. Num. Meth. Engng, **63** :760–788, 2005.
- [3] S. Bordas, B. Moran. *Enriched Finite Elements and Level Sets for Damage Tolerance Assessment of Complex Structures*. Engng. Frac. Mech., **73** :1176–1201, 2006.
- [4] P.G. Ciarlet, Ph. Destuynder. *A justification of two-dimensionnal linear plate model*. J. Mécanique, **18(2)** :315–343, 1979.
- [5] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978.
- [6] P. G. Ciarlet. *Basic error estimates for elliptic problems*. In "Handbook of numerical analysis, Vol. II", pages 17-351. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [7] Ph. Destuynder, M. Djaoua. *Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile*. Math. Meth. Appl. Sc., **3** :70–87, 1981.
- [8] Ph. Destuynder. *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire*. Masson, 1986.
- [9] J. Pommier, Y. Renard. *Getfem++, an open source generic C++ library for finite element methods*. <http://home.gna.fr/getfem>.
- [10] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Masson, 1992.
- [11] X.Y. Liu, Q.Z. Xiao, B.L. Karihaloo. *XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials*. Int. J. Num. Meth. Engng., **59** :1103–1118, 2004.
- [12] L. Marcinkowski. *Mortar methods for some second and fourth order elliptic equations*. Distinguished Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Informatics and Mechanics, Warsaw University, adviser : prof. M. Dryja, January 1999.
- [13] L. Marcinkowski. *A Mortar Finite Element Method for Fourth Order Problems in Two Dimensions with Lagrange Multipliers*. SIAM J. Num. Anal., **5** :1998–2019, 2005.
- [14] E. Béchet, H. Minnebo, N. Moës, B. Burgardt. *Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks*. Int. J. Num. Meth. Engng., **64** :1033–1056, 2005.
- [15] P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard, M. Salaün. *High order extended finite element method for cracked domains*. Int. J. Num. Meth. Engng., **64** :354–381, 2005.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [16] J. Dolbow, N. Moës, T. Belytschko. *Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method*. Int. J. Solids Struct., **37** :7161–7183, 2005.
- [17] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*. Int. J. Num. Meth. Engng., **46** :131–150, 1999.
- [18] N. Moës, T. Belytschko. *X-fem : Nouvelles frontières pour les éléments finis*. Revue européenne des éléments finis, **11** :131–150, 1999.
- [19] N. Moës, A. Gravouil, T. Belytschko. *Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets, Part I : Mechanical model*. Int. J. Num. Meth. Engng., **53** :2549–2568, 2000.
- [20] R.H. McNeal. *A simple quadrilateral shell element*. Comp. Struct., **8** :175–183, 1978.
- [21] N. Sukumar, Z.Y. Huang, J.-H. Prévost, Z. Suo. *Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks*. Int. J. Num. Meth. Engng., **59** :1075–1102, 2004.
- [22] C.Y. Hui, A.T. Zehnder. *A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments*. Int. J. of Fracture, **61** :211–229, 1993.
- [23] A. Zucchini, C. Y. Hui, A. T. Zehnder. *Crack tip stress fields for thin, cracked plates in bending, shear and twisting : A comparison of plate theory and three-dimensional elasticity theory solutions*. Int. J. of Fracture, **104** :387–407, 2000.
- [24] Ricardo G. Duràn, Erwin Hernández, Luis Hervella-Nieto, Elsa Liberman, Rodolfo Rodriguez. *Error estimates for low-order isoparametric quadrilateral finite elements for plates* SIAM J. Num. Anal. **41(5)** :1751-1772, 2003.
- [25] Michel Salaün. *Modélisation et calcul scientifique en mécanique des structures*. photocopié de cours dispensé au CNAM, année 2002-2003.
- [26] J.-L. Batoz, G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis. Volume 2 : poutres et plaques*. Hermes, 1990.
- [27] J.-B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes, Lavoisier, 2003.
- [28] N. Moës, A. Gravouil, T. Belytschko. *Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level-sets - Part II : Mechanical Model*. Int. J. Num. Meth. Engng., **53** :2549–2568, 2002.
- [29] A. Gravouil, N. Moës, T. Belytschko. *Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level-sets - Part II : level-set update*. Int. J. Num. Meth. Engng., **53** :2569–2586, 2002.
- [30] S. Nicaise, Y. Renard, E. Chahine. *Optimal convergence analysis for the extended finite element method*. Submitted.
- [31] E. Chahine. *Étude mathématique et numérique de méthodes d'éléments finis étendues pour le calcul en domaines fissurés*. Thèse de Doctorat de l'INSA de Toulouse, 2008.
- [32] E. Chahine, P. Laborde, Y. Renard. *Crack-tip enrichment in the Xfem method using a cut-off function*. Int. J. Num. Meth. Engng., **75(6)** :629-646, 2008.
- [33] P. M. A. Areias, T. Belytschko *Non-linear analysis of shells with arbitrary evolving cracks using XFEM*. Int. J. Num. Meth. Engng., **62** :384-415, 2004.

- 
- [34] E. Wyart, D. Coulon, M. Duflot, T. Pardoën, J.-F. Remacle, F. Lani. *A sustructured FE-shell/XFE-3D method for crack analysis in thin-walled structures*. Int. J. Num. Meth. Engng., **72** :757-779, 2007.
- [35] C. Farhat, F.X. Roux. *A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm*. Int. J. Num. Meth. Engng., **32** :1205-1227, 2004.
- [36] J.E. Schiermeir, R.K. Kansakar, J.B. Ransom, W.J. Stroud. *Interface elements in global/local analysis-Part 3 : shell-to-solid transition*. The 1999 MSC Worldwide Aerospace Conference, Long Beach, U.S.A., 1999.
- [37] A. Rössle, A.-M. Sändig. *Corner singularities and regularity results for the Reissner/Mindlin plate model*. Preprint, Stuttgart, 2001.
- [38] H. Sosa, G. Herrmann. *On invariant integrals in the analysis of cracked plates*. Int. J. Fracture, **40** :111-126, 1989.
- [39] A. T. Zehnder, C. Y. Hui *Stress Intensity Factors for Plate Bending and Shearing Problems*. J. Applied Mechanics, **61** :719-722, 1994.
- [40] M. J. VIZ, D. O. Potyondy, A. T. Zehnder, C. C. Rankin, E. Riks. *Computation of membrane and bending stress intensity Factors for thin, cracked plates*. Int. J. of Fracture, **72** :21-38, 1995.
- [41] P. Destuynder. *Sur la propagation des fissures dans les plaques minces en flexion*. J. Méc. théo. appli., **1**(4) :579-594, 1982.
- [42] M. Bourlard, M. Dauge, S. Nicaise. *Error Estimates on the coefficients obtained by the singular function method*. Numer. Funct. Anal. Optim., **10(11-12)** :1077-1113, 1990.
- [43] M. Djaoua. *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes en mécanique de la rupture*. Thèse d'Etat de l'université Paris 6 (1983).
- [44] G. Strang, G. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [45] R.S. Barsoum *Application of quadratic isoparametric elements in linear fracture mechanics*. Int. J. Fracture, **10** :603-605, 1974.
- [46] J.G. Simmonds, J. Duva. *Thickness Effects Are Minor in the Energy-Release Rate Integral for Bent Plates Containing Elliptic Holes or Cracks*. J. of Applied Mechanics **48(2)** :320-32, 1981

## BIBLIOGRAPHIE

---

# Notations

$\partial_i$	Dérivée partielle dans la direction $x_i$
$u_i$	Déplacement dans le modèle élastique tridimensionnel (avec $u_3$ valable aussi en plaques)
$\gamma_{ij}$	Tenseur des déformations
$\sigma_{ij}$	Tenseur de contraintes
$\underline{u}_\alpha$	Déplacement membranaire (modèles de plaques)
$\theta_\alpha$	Rotation de la normale (modèle de Mindlin-Reissner)
$b_i$	Vecteur normal unitaire extérieur
$a_i$	Vecteur tangent unitaire extérieur, tel que $(b, a)$ soit une base directe
$n_{\alpha\beta}$	Tenseur de l'effort de membrane (modèles de plaques)
$m_{\alpha\beta}$	Tenseur du moment de flexion (modèles de plaques)
$T_\alpha$	Effort tranchant (modèles de plaques)
$\varepsilon$	Demi-épaisseur de la plaque
$E$	Module de Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\Omega$	Plan moyen de la plaque, inclus dans le plan d'altitude nulle $x_3 = 0$
$\Omega^\varepsilon$	Domaine physique occupé par la plaque : $(x_1, x_2) \in \Omega$ et $x_3 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$
$\mathcal{G}$	Taux de restitution d'énergie
$K_1, K_2$	Facteur d'Intensité de Contraintes (FIC) pour le modèle de Kirchhoff-Love
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Facteur d'Intensité de Contraintes (FIC), pour le modèle de Mindlin-Reissner
$r, \varphi$	Cordonnées polaires
$P_k$	Espace des fonctions polynomiales par morceaux, de degrés $k$ sur des triangles
$Q_k$	Espace des fonctions polynomiales par morceaux, produits tensoriel de fonctions monodimensionnelles de degrés $k$ (sur des quadrangles)
$\mathcal{R}$	Dimension de la zone d'enrichissement singulier (formulations XFEM)
$\mathcal{R}_K$	Dimension de la couronne d'intégration de l'intégrale-J