



HAL
open science

Théorie homotopique des schémas d'Atiyah et Hitchin

Christophe Cazanave

► **To cite this version:**

Christophe Cazanave. Théorie homotopique des schémas d'Atiyah et Hitchin. Mathématiques [math].
Université Paris-Nord - Paris XIII, 2009. Français. NNT: . tel-00463680

HAL Id: tel-00463680

<https://theses.hal.science/tel-00463680>

Submitted on 14 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Christophe CAZANAVE

le 18 septembre 2009

**Théorie homotopique
des schémas d'Atiyah et Hitchin**

Jury

M. Denis-Charles CISINSKI	<i>examineur</i>
M. Frederick COHEN	<i>rapporteur</i>
M. Sadok KALLEL	<i>rapporteur (absent)</i>
M. Jean LANNES	<i>directeur</i>
M. François LOESER	<i>rapporteur</i>
M. Christophe MARGERIN	<i>examineur</i>
M. Fabien MOREL	<i>examineur</i>
M. Lionel SCHWARTZ	<i>examineur</i>
M. Graeme SEGAL	<i>président</i>

**Théorie homotopique
des schémas d'Atiyah et Hitchin**

Christophe Cazanave

Remerciements

Jean Lannes est un mathématicien extraordinaire et je suis chaque jour plus admiratif de l'étendue de son savoir et de sa compétence scientifique. Je sais la chance que j'ai eue de passer quatre années à ses côtés et c'est pour moi un immense honneur d'être aujourd'hui son élève. Je saurai me montrer digne des valeurs qu'il m'a transmises.

Il est bien évident que cette thèse lui doit beaucoup : il a su m'aider à définir mon sujet de recherche, puis guider mes travaux en m'accordant de nombreux entretiens, durant lesquels il a partagé ses idées avec moi avec la plus grande générosité. Ces modestes lignes sont bien peu pour lui exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Je suis très impressionné devant la qualité des membres du jury qui apprécie aujourd'hui mes travaux :

- Fred Cohen a eu la gentillesse et la patience de répondre à mes questions et d'accepter la tâche ingrate de rapporter mon mémoire. C'est un grand plaisir de le rencontrer enfin en personne.
- Je remercie également Sadok Kallel (malheureusement absent) et François Loeser pour leur lecture attentive de mon manuscrit et pour la qualité des rapports qu'ils ont écrits à son propos.
- Graeme Segal, dont les travaux sont à l'origine d'une bonne partie des miens, me fait un immense honneur en acceptant de présider le jury et je lui en suis gré.
- J'ai connu Christophe Margerin comme examinateur de concours, puis comme enseignant et enfin comme collègue. J'ai la plus grande estime pour ses travaux et nos discussions relatives aux voisinages tubulaires m'ont été précieuses. Je considère sa présence aujourd'hui comme une preuve de notre amitié.
- Fabien Morel est un des fondateurs d'une théorie subtile à laquelle ce mémoire apporte une bien modeste contribution. Je suis très touché qu'il ait pu se libérer aujourd'hui.
- Je remercie également Denis-Charles Cisinski et Lionel Schwartz avec qui j'ai eu à diverses reprises des discussions sur des sujets attenants à mes travaux.

Bien nombreuses sont les personnes qui peuvent prétendre à quelques petits fours supplémentaires :

- Parmi elles, je compte ceux qui m'ont aidé à résoudre diverses problèmes techniques. Je voudrais remercier en particulier Jean Barge, Frédéric Déglise, Yves Laszlo et Fabrice Orgogozzo pour les questions d'ordre mathématique, et Yolande Jimenez, Carole Juppín et Michèle Lavallette pour d'autres affaires plus terre à terre.
- J'adresse également un chaleureux merci à tous ceux qui ont porté de l'intérêt à mes résultats et qui m'ont invité à les leur exposer. Je voudrais mentionner notamment Carl-Friedrich Bödigheimer, David Chataur, François-Xavier Dehon, Benoit Fresse, Gérald Gaudens, Jesper Grodal, Jens Hornbostel, Patrick Popescu-Pampu, Claude Sabbah et Bernard Teissier.
Haynes Miller also deserves a very warm "thank you" for inviting me to attend the Kan seminar at MIT in fall 2005 and for his interest in this work.
- J'ai bénéficié au cours de ma thèse de l'accueil chaleureux de l'équipe de topologie algébrique du laboratoire d'analyse, géométrie et applications à Paris XIII ainsi que du centre de mathématiques Laurent Schwartz à Polytechnique. Je tiens à saluer mes amis (ex-)thésards avec qui j'ai eu plaisir à discuter de mathématiques ou d'autre chose : David Burguet, Gabriel Giabicani, Olivier Jaulent, Vincent Humilière, Sylvain Rairat, Gabriel Rivière, Benoit Tonnelier. Je réserve une mention très

spéciale pour mon grand ami Nguyen Dang Ho Hai : « cảm ơn bạn ! »

- Avant mon doctorat, j'ai eu la chance de bénéficier de l'enseignement enthousiaste de Nicolas Tosel. C'est incontestablement lui qui a fait naître en moi le goût de l'esthétique mathématique.
- Martine Lannes a eu très souvent la gentillesse d'emprunter, pour me raccompagner, la route sinueuse et étroite qui mène au RER, et j'en ai toujours été très touché.

La majeure partie de ce texte a été tapée dans la tranquillité des murs de la bibliothèque de l'institut Henri Poincaré le jour et dans les locaux d'Acte 3 la nuit. Je remercie ces deux institutions.

Enfin, je n'oublie pas ma chère famille : mes parents pour la chaleur de leurs repas dominicaux, Nicolas pour la diligence avec laquelle il a réalisé les dessins qui apparaissent dans le mémoire et Sophie pour son exemple brillant.

J'ai maintenant moi aussi fondé ma famille : Alexis et Catherine sont une grande source de bonheur et d'inspiration. J'ai gardé les mots les plus doux¹ pour ma tendre et chère Ася, dont le sourire sait apaiser mes découragements et le regard restaurer ma confiance.

Quant à toi, lecteur, ne referme pas encore ce mémoire. Parcours en au moins l'introduction qui te donnera un aperçu de son contenu. Alors tu auras bien mérité tes petits fours !

¹Communication privée !

Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude, d'un point de vue homotopique, d'une famille de schémas baptisés *schémas d'Atiyah-Hitchin*. Le texte se divise en deux parties relativement indépendantes. On y considère des objets de nature semblable, mais sous des angles différents.

Le Chapitre 1 constitue à lui seul la première partie. On y étudie une famille particulière — mais fondamentale parce que c'est elle qui motive la définition générale — de schémas d'Atiyah-Hitchin : les schémas de fractions rationnelles pointées de degré m , notés \mathcal{F}_m .

Le résultat principal détermine l'ensemble $(\pi_0\mathcal{F}_m)(K)$ des composantes connexes au sens algébrique *naïf*, pour tout entier positif m et pour tout corps de base K . L'intérêt de ce calcul réside dans sa simplicité et dans sa comparaison avec le calcul des classes d'homotopie *motivique* d'endomorphismes pointés de la droite projective \mathbf{P}^1 (au-dessus de $\text{Spec } K$) effectué par Morel dans [Mor08].

La seconde partie comprend les Chapitres 2 à 5. Elle s'inscrit dans le prolongement des travaux de Segal [Seg79] sur la topologie des espaces de fractions rationnelles. En nous inspirant du point de vue adopté par Atiyah et Hitchin dans [AH88] sur les schémas de fractions rationnelles, nous définissons pour tout schéma Y « raisonnable » et pour tout entier positif m un nouveau schéma, noté $\mathcal{R}_m Y$, que nous baptisons m -ème schéma d'Atiyah-Hitchin. La famille \mathcal{F}_m étudiée au Chapitre 1 correspond au cas particulier $Y = \mathbf{G}_m$.

Cette partie culmine sur la formulation d'une série de conjectures visant à généraliser les travaux de Segal au cadre de la théorie homotopique des schémas, et sur la démonstration de certaines de leurs conséquences naturelles sur la topologie de l'espace de points complexes $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$, lorsque Y est défini sur \mathbf{C} .

Même si ce mémoire ne contient pas de résultat important de nature purement motivique, notre travail est fortement influencé par la théorie homotopique des schémas telle que développée par Morel et Voevodsky. Puisque notre mémoire s'adresse à un topologue algébriste non nécessairement familier de cette théorie, nous commençons par esquisser brièvement le cadre de travail que fournit l'article fondateur [MV99].

Théorie homotopique des schémas

Soit K un corps de base. La catégorie Sch_K des schémas quasi-projectifs lisses au-dessus de K joue en géométrie algébrique un rôle analogue à celle des variétés différentiables en topologie. Un topologue algébriste cherche alors naturellement à définir une catégorie homotopique $\text{Ho}(\text{Sch}_K)$ dont les objets sont des schémas à équivalence d'homotopie près et dont les morphismes sont des classes d'homotopie de morphismes de schémas.

Le point de départ de la théorie consiste à définir une notion d'homotopie algébrique *naïve* entre morphismes de schémas en remplaçant formellement dans la définition classique d'homotopie entre applications continues le segment topologique $[0, 1]$ par la droite affine algébrique \mathbf{A}^1 . Si l'idée précédente est très simple, c'est qu'elle est également très naïve. Sa mise en œuvre demande des élaborations techniques non triviales si l'on veut que la catégorie $\text{Ho}(\text{Sch}_K)$ construite ait les bonnes propriétés que l'on attend

d'elle.

Les travaux de Quillen [Qui67] ont dégagé le bon cadre formel pour définir des catégories homotopiques : il s'agit de la notion de *catégorie de modèle*. Morel et Voevodsky ont trouvé une bonne catégorie d'espaces notée $\mathcal{E}sp$, contenant Sch_K comme sous-catégorie pleine, qu'ils ont muni d'une structure de modèle convenable. Sans rentrer dans trop de considérations techniques, indiquons juste au lecteur qu'un choix de catégorie possible pour $\mathcal{E}sp$ est celle des faisceaux simpliciaux d'ensembles pour la topologie Nisnevich. Travailler avec des faisceaux est une façon de s'assurer l'existence de colimites. La topologie Nisnevich est une topologie de Grothendieck qui réunit les avantages de la topologie de Zariski et de la topologie étale. Utiliser des objets simpliciaux est analogue au fait de manipuler des ensembles simpliciaux plutôt que des espaces topologiques. La structure de modèle est obtenue en localisant cette catégorie par rapport à l'application canonique $\mathbf{A}^1 \rightarrow \text{pt} := \text{Spec } K$, c'est-à-dire en forçant l'espace \mathbf{A}^1 à être contractile.

Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux schémas (ou espaces) pointés. Le formalisme précédent permet de donner un sens aux notions de topologie algébrique usuelles suivantes.

- Pour tout entier positif i , on définit un *faisceau* $\pi_i^{\mathbf{A}^1}(X, x_0)$ de groupe d'homotopie. Morel et Voevodsky montrent un théorème de Whitehead : un morphisme $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ d'espaces \mathbf{A}^1 -connexes est une \mathbf{A}^1 -équivalence d'homotopie si et seulement si le morphisme de faisceaux induit $f_* : \pi_i^{\mathbf{A}^1}(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_i^{\mathbf{A}^1}(Y, y_0)$ est un isomorphisme.
- Le « smash-produit » $X \wedge Y$ est défini. En particulier, on dispose des foncteurs de suspensions

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^s : & \mathcal{E}sp \longrightarrow \mathcal{E}sp & \text{et} & \Sigma^t : & \mathcal{E}sp \longrightarrow \mathcal{E}sp \\ & X \mapsto S^s \wedge X & & & X \mapsto S^t \wedge X \end{array}$$

où $S^s := \Delta^1 / \partial \Delta^1$ désigne le *cercle simplicial* et $S^t := \mathbf{G}_m := \mathbf{A}^1 - \{0\}$ le *cercle de Tate*.

- Le foncteur $X \mapsto X \wedge Y$ admet un adjoint à droite, noté $\text{map}^{\text{mot}}(Y, -)$ et appelé espace motivique des morphismes pointés issus de Y . Lorsque $Y = S^s$ (resp. lorsque $Y = S^t$, resp. lorsque $Y = \mathbf{P}^1$), le foncteur $\text{map}^{\text{mot}}(Y, -)$ est plutôt noté Ω^s (resp. Ω^t , resp. $\Omega^{\mathbf{P}^1}$).
- On note $[X, Y]^{\text{mot}}$ l'ensemble des classes d'homotopie motivique pointée de morphismes de X dans Y . Lorsque X est une suspension, c'est-à-dire lorsqu'il existe un espace $X' \in \mathcal{E}sp$ tel que l'on ait une équivalence d'homotopie $X \approx \Sigma^s X'$, l'ensemble $[X, Y]^{\text{mot}}$ est naturellement muni d'une structure de groupe. Lorsque X est une double suspension, le groupe $[X, Y]^{\text{mot}}$ est abélien.
- L'ensemble $[X, Y]^{\text{N}}$ des classes d'*homotopie naïve* est par définition le quotient de l'ensemble des morphismes de schémas de X dans Y , par la relation d'homotopie naïve décrite précédemment. On dispose d'une application canonique

$$[X, Y]^{\text{N}} \longrightarrow [X, Y]^{\text{mot}}$$

qui n'est généralement pas bijective. Par exemple, si X est projectif et si Y est affine — et à homotopie près tout schéma est affine, *c.f.* [Jou73] — l'ensemble des morphismes de schémas de X dans Y est réduit aux morphismes constants.

- On définit la notion de spectres (par exemple par rapport à la suspension $\Sigma^s \wedge \Sigma^t$) et l'on obtient une catégorie *homotopique stable*. On note $\{X, Y\}^{\text{mot}}$ l'ensemble des classes d'homotopie stable de morphismes de X dans Y . Morel a démontré dans [Mor04b] que l'on a un isomorphisme

$$\{S^0, S^0\}^{\text{mot}} \simeq \text{GW}(K) \quad ,$$

où $\text{GW}(K)$ désigne le groupe de Grothendieck-Witt du corps K , c'est-à-dire le complété en groupe du monoïde (pour la somme directe \oplus) des classes d'isomorphisme de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur K .

- Pour toute petite catégorie \mathcal{I} et tout diagramme d’espaces $\mathcal{F} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}sp$ la colimite homotopique $\text{hocolim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$ est définie. Une \mathbf{A}^1 -équivalence d’homotopie de diagrammes $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ induit une \mathbf{A}^1 -équivalence d’homotopie $f_* : \text{hocolim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} \text{hocolim}_{\mathcal{I}} \mathcal{G}$.
- Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, on note Y/h_X la cofibre homotopique de f . En particulier, pour toute immersion fermée de schémas lisses $i : X \hookrightarrow Y$, on définit l’espace de Thom de i comme la cofibre homotopique

$$\text{th}(i) := Y/h_X(Y - X) \quad .$$

Morel a montré que l’on a un *isomorphisme canonique* dans $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$ (c.f. [Mor99], § 3.2)

$$\text{th}(i) \simeq \text{th}(\nu_i) \quad ,$$

où ν_i désigne le fibré normal de l’immersion i et $\text{th}(\nu_i)$ l’espace de Thom de la section nulle $X \hookrightarrow E(\nu_i)$.

- Pour tout schéma en groupe G , on définit son espace classifiant $\mathbf{B}G$. En particulier, si l’on pose $\mathbf{BGL}_{\infty} := \text{colim}_n \mathbf{BGL}_n$, Morel a démontré la version suivante de la périodicité de Bott (c.f. [Mor99], § 4.3.3)

$$\Omega^{\mathbf{P}^1}(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_{\infty}) \approx \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_{\infty} \quad .$$

- Les fibrations et les cofibrations induisent de longues suites exactes entre classes d’homotopie d’applications.
- Lorsque $K = \mathbf{R}$ (le corps des nombres réels), le foncteur de réalisation topologique, qui à toute variété $Y \in \text{Sch}_{\mathbf{R}}$ associe le $\mathbf{Z}/2$ -espace $Y(\mathbf{C})$ muni de l’involution associé à la conjugaison complexe induit un foncteur

$$\text{Ho}(\mathcal{E}sp_{\mathbf{R}}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathbf{Z}/2\text{-}\mathcal{T}op) \quad .$$

Venons en maintenant à une description plus précise des principaux résultats de notre thèse.

Classes d’homotopie de fractions rationnelles

Pour deux schémas pointés X et Y de Sch_K fixés, la détermination de l’ensemble $[X, Y]^{\text{mot}}$ des classes d’homotopie motivique de morphismes de X dans Y est en général compliquée. Sa définition fait intervenir implicitement des remplacements fibrants qui sont difficilement manipulables. Dans [Mor08], Morel a calculé (entre autres) le groupe $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$. Dans la catégorie $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$, on a une équivalence d’homotopie $\mathbf{P}^1 \approx \mathbf{S}^s \wedge \mathbf{S}^t$. Le groupe $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ est donc l’analogue motivique du groupe $\pi_2 \mathbf{S}^2$ en topologie algébrique classique.

- Dans le Chapitre 1, nous déterminons l’ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ des classes d’*homotopie naïve* d’endomorphismes pointés de \mathbf{P}^1 (lorsque la base est un corps K) et nous constatons que notre résultat donne une certaine intuition dans le calcul de $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ effectué par Morel. Notre calcul est simple et se résume comme suit.

Les endomorphismes du K -schéma \mathbf{P}^1 sont les fractions rationnelles à coefficients dans K . Une homotopie naïve $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ s’interprète alors concrètement comme une fraction rationnelles à coefficients dans l’anneau de polynômes $K[T]$. La source et le but de l’homotopie sont les fractions rationnelles obtenues en évaluant les coefficients respectivement en $T = 0$ et en $T = 1$. Le problème consiste à déterminer l’ensemble, noté $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$, des classes d’homotopie naïve de fractions rationnelles au sens ci-dessus. Deux idées majeures interviennent dans notre calcul :

- On associe, par une méthode algébrique due à Bézout, à toute fraction rationnelle f une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée à coefficients dans K , notée $\text{Béz}(f)$. Supposons ici pour simplifier que la caractéristique de K soit différente de 2. Dans ce cas, la classe d'isomorphisme pour l'action de \mathbf{SL} de la forme $\text{Béz}(f)$ est invariante par homotopie naïve. On définit ainsi un invariant d'homotopie

$$\text{Béz} : [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N \rightarrow \mathcal{S}/\mathbf{SL} \quad ,$$

où \mathcal{S} désigne le schéma des matrices symétriques inversibles sur lequel le groupe spécial linéaire \mathbf{SL} agit *via* l'action standard. Le résultat principal du chapitre est que cet invariant distingue toutes les classes de fractions rationnelles.

- Pour montrer que l'invariant d'homotopie précédent Béz est complet, nous mettons en évidence une loi de monoïde, noté \oplus^N , sur le schéma des fractions rationnelles. L'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ est par conséquent muni d'une structure de *monoïde* et nous montrons que le morphisme Béz induit un isomorphisme de monoïdes (toujours lorsque $\text{car}(K) \neq 2$)

$$\text{Béz} : \left([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N, \oplus^N \right) \xrightarrow{\cong} \left(\mathcal{S}/\mathbf{SL}, \oplus \right) \quad .$$

C'est la mise en évidence d'une structure de monoïde sur l'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ qui rend le calcul simple et élémentaire. L'apparition de cette structure est d'autant plus frappante que, puisque l'espace $\mathbf{P}^1 \approx \Sigma^s \mathbf{G}_m$ est une suspension dans $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$, l'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ est muni, de manière complètement formelle, d'une structure de groupe. Et l'on constate, à partir du calcul de Morel, que l'on a un isomorphisme (abstrait) entre le complété en groupe du monoïde $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N, \oplus^N)$ et le groupe $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}})$.

Schémas d'Atiyah-Hitchin

La seconde partie est de nature plus topologique.

- Le Chapitre 2 rappelle au lecteur des résultats déjà connus sur la topologie des espaces de fractions rationnelles à coefficients complexes, $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$, et à coefficients réels, $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$. Parmi les travaux qui ont le plus influencé notre recherche, il faut citer :

- L'article fondateur [Seg79], dans lequel Segal montre que les inclusions canoniques

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \hookrightarrow \text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \quad ,$$

(où $\text{map}_m(-, -)$ désigne l'espace des applications continues pointées de degré topologique m) induisent une équivalence d'homotopie

$$\text{colim}_m \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \xrightarrow{\cong} \text{colim}_m \text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \approx \Omega^2 S^3 \quad .$$

- Les articles [CCMM91, CCMM93], où F. Cohen, R. Cohen, Mann et Milgram montrent que les espaces $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ admettent le même scindement stable (c'est-à-dire après suspension)

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i S^1$$

que les crans $F_m \mathcal{C}_2 S^1$ de la filtration naturelle du modèle de May-Milgram $\mathcal{C}_2 S^1$ du double espace de lacets $\Omega^2 S^3 \simeq \Omega^2 \Sigma^2 S^1$.

Autrement dit, les espaces de fractions rationnelles $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ tendent à approximer l'espace $\Omega^2 S^3$ lorsque m tend vers $+\infty$. De plus, le terme d'erreur entre ces deux espaces est stablement bien compris.

• Nous définissons au Chapitre 3 les schémas d’Atiyah-Hitchin. La définition s’inspire du point de vue d’Atiyah et Hitchin dans [AH88] sur les schémas de fractions rationnelles \mathcal{F}_m en termes de schémas de Hilbert. Notre approche est toutefois élémentaire et « self-contained ».

Pour tout entier positif m et pour tout schéma raisonnable Y , le foncteur qui à une K -algèbre R associe l’ensemble des couples (A, B) , où

- $A \in R[X]$ est un polynôme unitaire de degré m
- et B est un élément de $Y\left(R[X]/(A)\right)$

est représentable par un schéma que nous notons $\mathcal{R}_m Y$ et que nous baptisons m -ème schéma d’Atiyah-Hitchin de Y . Il faut considérer cette famille comme une généralisation naturelle de celle des schémas de fractions rationnelles pointées \mathcal{F}_m . On a un isomorphisme canonique $\mathcal{R}_m \mathbf{G}_m \simeq \mathcal{F}_m$. En effet, la donnée d’une fraction rationnelle $f := \frac{A}{B} \in \mathcal{F}_m(R)$ équivaut à la donnée d’un polynôme $A \in R[X]$ unitaire de degré m et d’un élément B de $\mathbf{G}_m\left(R[X]/(A)\right)$, c’est-à-dire par définition d’un élément inversible de l’anneau $R[X]/(A)$. Par exemple, lorsque $R = K$, un tel B s’identifie à un polynôme de $K[X]$ premier au polynôme A .

Nous conjecturons que les schémas d’Atiyah-Hitchin sont à la base d’une généralisation des résultats de Segal à la théorie homotopique des schémas. Lorsque Y est pointé et \mathbf{A}^1 -connexe, les schémas $\mathcal{R}_m Y$ seraient des approximations (finies) de l’espace d’applications motiviques $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$ au même titre que les résultats de Segal et Cohen *et al.* montrent que l’espace topologique $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ approxime $\Omega^2 \Sigma^2 \mathbf{S}^1$. Notre première avancée dans cette direction est la construction d’un morphisme *de nature algébrique*

$$\iota_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_m Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} (\mathbf{P}^1 \wedge Y)$$

reliant ces deux espaces. Un élément important qui apparaît dans la situation topologique et qui nous manque encore dans le cadre algébrique est une version motivique de l’opérade des petits disques, disons \mathcal{P}^{mot} . Cette opérade agirait sur l’espace $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y$ et permettrait de définir l’espace complété

en groupe $\Omega \mathbf{B}(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y)$. Noter cependant que la mise en évidence d’une structure de monoïde sur $\mathcal{F} = \coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m \simeq \coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m \mathbf{G}_m$ au Chapitre 1 est un pas encourageant dans cette direction.

Les résultats de F. Cohen *et al.* admettraient également une version motivique. Nous conjecturons un scindement stable (pour la suspension $\Sigma^{\mathbf{P}^1}$)

$$\mathcal{R}_m Y \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i^{\text{mot}} Y \quad ,$$

où les D_i^{mot} sont des versions motiviques des sous-quotients topologiques de la filtration des modèles de May-Milgram.

Vu sous cet angle, le Chapitre 1 donne des arguments de *nature algébrique* en faveur de nos conjectures dans le cas particulier $Y = \mathbf{G}_m$. Les Chapitres 4 et 5 fournissent d’autres indices, de *nature topologique* cette fois ci. On y étudie la type d’homotopie (stable et instable) de l’espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ lorsque Y est définie sur \mathbf{C} .

• Le Chapitre 4 étudie la topologie de l’espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ lorsque Y est une variété algébrique définie sur \mathbf{C} . Nous y donnons une description du type d’homotopie de l’espace topologique $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ comme un foncteur explicite du type d’homotopie de $Y(\mathbf{C})$.

Malgré un formalisme lourd et rebutant, le résultat que nous obtenons est assez simple. L’espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ est, à homotopie près, un analogue *non-pointé* du m -ème cran de la filtration du modèle de

May-Milgram $\mathcal{C}_2Y(\mathbf{C})$ pour $\Omega^2\Sigma^2Y(\mathbf{C})$. Il s'agit d'un espace de configuration de m points dans \mathbf{C} auxquels sont attachés des « étiquettes » à valeurs dans $Y(\mathbf{C})$. On autorise ces éléments à fusionner lorsqu'ils ont la même étiquette dans $Y(\mathbf{C})$.

La démonstration que nous donnons utilise la théorie des stratifications et notamment la théorie du contrôle, telle que développée par Mather. Un résultat assez folklorique qui ressort de notre étude est que l'opérade des petits disques apparaît naturellement dans la stratification de multiplicité de l'espace des polynômes unitaires complexes. Cet espace admet pour strates des espaces de configuration de points dans \mathbf{C} (ces points correspondent aux racines des polynômes). Les applications de structure de l'opérade des petits disques permettent de décrire les applications d'attache. L'inclusion d'une série de petits disques dans un grand disque modélise le fait d'éclater une racine multiple en plusieurs racines de multiplicités moindres.

- Le Chapitre 5 étudie le type d'homotopie *stable* (c'est-à-dire après suspension) de l'espace $(\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C})$ lorsque la variété algébrique Y est définie sur \mathbf{C} . Nous y montrons le scindement stable

$$(\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C}) \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_iY(\mathbf{C})$$

prédit par nos conjectures.

Notre approche s'inspire des travaux de Vassiliev. On remplace l'étude du type d'homotopie stable de $(\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C})$ par celle de son dual de Spanier-Whitehead, disons $\mathcal{D}(\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C})$. De manière frappante, cette dualisation simplifie la situation : l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C})$ admet, à homotopie près, une filtration naturelle et cette filtration se scinde stablement après une suspension. Les sous-quotients de la filtration de $\mathcal{D}(\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C})$ sont duaux des sous-quotients de la filtration du modèle de May-Milgram.

Viennent ensuite des annexes.

- L'Annexe A, traitant de l'inégalité d'Hermite, est utile au Chapitre 1. Cette inégalité pour les formes bilinéaires symétriques à coefficients dans l'anneau de polynômes $K[T]$ permet de démontrer, par des méthodes d'algèbre linéaire élémentaire, que la classe de la forme de Bézout d'une fraction rationnelle définit bien un invariant d'homotopie naïve.

- L'Annexe B contient quelques rappels sur les opérades. Nous nous concentrons principalement sur l'exemple de l'opérade des petits disques car elle joue un rôle majeur dans notre mémoire.

- L'Annexe C est une brève présentation de la théorie des stratifications, utile pour le Chapitre 4. On y présente notamment la *théorie du contrôle* développée par Mather pour les stratifications régulières au sens de Whitney.

- L'Annexe D contient des rappels sur la dualité de Spanier-Whitehead utiles au Chapitre 5. Nous y présentons les cadres classique et équivariant.

Sommaire

Introduction	v
Théorie homotopique des schémas	v
Classes d'homotopie de fractions rationnelles	vii
Schémas d'Atiyah-Hitchin	viii
Sommaire	xiii
Index des notations	xv
1 Classes d'homotopie de fractions rationnelles	1
1.1 Fractions rationnelles et homotopies	3
a) Résultant de deux polynômes	3
b) Morphismes dans les projectifs	5
c) Fractions rationnelles	7
d) Homotopies algébriques entre fractions rationnelles	8
1.2 Classes d'homotopie pointée de fractions rationnelles	10
a) Structure de monoïde sur $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$	11
b) Forme de Bézout	12
c) Matrices de Hankel	15
d) Théorème principal	17
e) Comparaison entre $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$	20
1.3 Généralisations	21
a) Classes d'homotopie libre	21
b) Composition de fractions rationnelles	22
c) Le cas de la caractéristique quelconque	24
d) Classes d'homotopie de morphismes de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^d pour $d \geq 2$	25
1.4 Perspectives	28
a) Classes d'homotopie de fractions rationnelles <i>entières</i>	28
b) Autour de la loi \oplus^N	30
c) Sur la comparaison entre $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$	30
2 Le type d'homotopie des espaces de fractions rationnelles	33
2.1 Topologie des espaces de fonctions rationnelles	34
a) Topologie des espaces de fractions rationnelles complexes	34
b) Topologie de l'espace des fractions rationnelles réelles	36
c) Version équivariante	37
d) Topologie des espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$	38
2.2 Comparaison entre espaces de fractions rationnelles et modèles de May-Milgram	38
a) Modèles de May-Milgram	39
b) Scindement stable	41
c) Comparaison entre $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ et $F_m \mathcal{C}_2 S^{2d-1}$	41

3	Schémas d'Atiyah-Hitchin	45
3.1	Fractions rationnelles et schémas de Hilbert	46
	a) Foncteur des points	46
	b) Schémas de Hilbert	48
	c) L'approche d'Atiyah et Hitchin	48
3.2	Schémas d'Atiyah-Hitchin	48
3.3	Variétés analytiques d'Atiyah-Hitchin	53
	a) Prolongement holomorphe de fonctions de plusieurs variables complexes	53
	b) Construction de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$	54
	c) Stabilisation	56
3.4	Des applications motiviques stables	58
	a) Le morphisme ι_m^{mot}	58
	b) Applications de transfert motiviques	61
	c) Vers des modèles de May-Milgram motiviques	62
3.5	Conjectures	64
	a) Conjectures instables	64
	b) Conjectures stables	67
4	Le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$.	69
4.1	Description des strates	71
	a) Strates de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$	71
	b) Strates de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$	74
4.2	Les foncteurs Ψ^2 et Ψ^3	75
	a) Description de $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$	76
	b) Description de $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$	79
4.3	Le foncteur Ψ^m	87
	a) Formalisme	88
	b) Définition du foncteur Ψ^m	92
	c) Démonstration du Théorème 4.3.11	92
4.4	Prolongements	98
	a) Le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{R})$	98
	b) Stratification de multiplicité d'un produit symétrique	99
5	Scindements stables	101
5.1	La méthode de Vassiliev	102
	a) Espace de barycentres formels	102
	b) Résolutions canoniques	103
	c) Filtration	104
5.2	Scindement stable	105
	a) Dualisation	106
	b) Scindement de $\widehat{\Sigma}_m$	108
	c) L'application ρ_m	111
5.3	Variantes	113
	a) Espace des points réels	113
	b) Autres espaces polynomiaux	114
	c) Remarques	115
	Annexes	116
A	Inégalité d'Hermite	117
A.1	Inégalité d'Hermite	117

A.2	Démonstration	119
B	Opérades	121
B.1	Définition et exemples	121
C	Stratifications	123
C.1	Définitions et exemples	123
C.2	Conditions de Whitney	124
C.3	Voisinages tubulaires	125
a)	Cadre classique	126
b)	Théorie (équivariante) du contrôle	127
D	Dualité de Spanier-Whitehead	133
D.1	Cadre classique	133
a)	Définition	133
b)	Détermination de duaux	134
D.2	Cadre équivariant	135
a)	Définition	136
b)	Détermination de G -duaux	137
D.3	Comparaison entre dualités classique et équivariante	138
	Bibliographie	143
	Résumé	145

Index des notations

$ A $	Suprémum du module des racines du polynôme A .	Notations p. 57
Alg_K	Catégorie des K -algèbres.	
B_{y_0}	Boule de \mathbf{C}^d centrée en y_0 et contenue dans Y .	Notations p. 111
\underline{B}	Multi-polynôme $\underline{B} = (B_1, \dots, B_d)$.	Convention p. 54
\mathbf{B}	Espace classifiant.	
$\text{Béz}_m(A, B)$	Forme de Bézout des polynômes A et B .	Définition 1.2.5 p. 12
$\text{Béz}(f)$	Forme de Bézout de la fraction rationnelle $f = \frac{A}{B}$.	Définition 1.2.8 p. 13
$\mathcal{B}_k(X)$	Espace des barycentres formels de k points de X .	Définition 5.1.1 p. 102
$\mathbf{C}^{(n)}$	Espace de configuration de n points distincts dans \mathbf{C} .	Définition 2.2.1 p. 39
\mathcal{C}	Catégorie de Čech.	Définition 4.3.1 p. 88
$\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$	Modèle de May-Milgram pour l'espace topologique $\Omega^2\Sigma^2\mathcal{Y}$.	Définition 2.2.3 (1) p. 39
$\mathcal{C}_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}}Y$	Modèle de May-Milgram motivique pour $\Omega^{\mathbf{P}^1}\Sigma^{\mathbf{P}^1}Y$.	Définition 3.4.10 p. 63
$\text{deg}(f)$	Degré d'une fraction rationnelle f .	Définition 1.1.11 p. 7
\mathbf{D}	Disque unité $\mathbf{D}(0, 1)$ de \mathbf{C} .	
$\mathbf{D}_i\mathcal{Y}$	Le i -ème sous-quotient $\mathbf{C}_+^{(i)} \wedge_{\mathfrak{S}_i} \mathcal{Y}^{\wedge i}$ de la filtration naturelle de $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$.	Définition 2.2.8 p. 41
\mathbf{D}_nX	n -dual de Spanier-Whitehead de l'espace topologique X .	Définition D.1.1 p. 133
\mathbf{D}_VX	Dual de Spanier-Whitehead équivariant, pour la G -représentation V , du G -espace X .	Définition D.2.1 p. 136
\mathcal{D}_k	Catégorie des k -drapeaux.	Définition 4.3.4 p. 89
$\delta_{A,B}(X, Y)$	Polynôme servant à définir la forme de Bézout.	Définition 1.2.5 p. 12
Δ^k	Simplexe de dimension k .	Notation p. 102
$\mathcal{E}ns$	Catégorie des ensembles.	
$\mathcal{E}ns^f$	Catégorie des ensembles finis et bijections.	
$\mathcal{E}sp$	Catégorie des espaces de l'homotopie motivique.	
\mathcal{E}^Y	Stratification de l'espace $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$.	
\mathcal{E}^{pt}	Stratification de l'espace \mathbf{C}^m .	
ε	Application $\mathcal{C}_2Y \longrightarrow \Omega^2\Sigma^2Y$.	Définition 2.2.5 p. 40
ε^{mot}	Application motivique $\mathcal{C}_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}}Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1}\Sigma^{\mathbf{P}^1}Y$.	Définition 3.4.12 p. 63
$\text{Fonct}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$	Catégorie des foncteurs de \mathcal{A} dans \mathcal{B} .	

$F_\ell \mathcal{C}_2 Y$	Le ℓ -ème cran de la filtration naturelle de l'espace $\mathcal{C}_2 Y$.	Définition 2.2.3 (2) p. 39
$F_k \widehat{\Sigma}_m$	Le k -ème cran de la filtration de $\widehat{\Sigma}_m$.	Définition 5.2.10 p. 107
\mathcal{F}_m	Schéma des fractions rationnelles pointées de degré m .	Définition 1.1.13 p. 8
\mathcal{F}_m^d	Schéma des applications algébriques pointées de degré m de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^d .	Définition 1.3.11 p. 26
\mathbf{G}_a	Le groupe additif $\mathbf{G}_a = \mathbf{A}^1$.	Notations p. 16
\mathbf{G}_m	Le groupe multiplicatif $\mathbf{A}^1 - \{0\}$.	
$GW(K)$	Groupe de Grothendieck-Witt des classes d'isomorphisme de formes bilinéaires symétriques sur le corps K .	
$GW_m(K)$	Composante de dimension m dans $GW(K)$.	Notation p. 24
$Ho(\mathcal{E}sp)$	Catégorie homotopique de $\mathcal{E}sp$.	
\mathcal{H}_m	Schéma des matrices de Hankel $m \times m$ non dégénérées.	Définition 1.2.15 p. 15
l_m	Application continue $\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \longrightarrow \Omega_m^2 \mathbf{S}^2$.	Théorème 2.1.2 p. 35.
l_m^{mot}	Application motivique $\mathcal{R}_m Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$ définie pour Y pointé.	Définition 3.4.5 p. 60
\tilde{l}_m^{mot}	Application motivique $\mathcal{R}_m Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y_+$.	Définition 3.4.5 p. 60
$J^k \mathcal{Y}$	Fibré des k -jets $\mathcal{Y}(\mathbf{C}[X]/(X^k))$ de la variété holomorphe \mathcal{Y} .	Conventions p. 54.
K	Corps de base.	
χ_{A_1, A_2}	Isomorphisme chinois pour des polynômes A_1 et A_2 premiers entre eux.	Notations p. 111
\mathcal{L}_m	Schéma des fractions rationnelles <i>libres</i> de degré m .	Définition 1.1.8 p. 7
$\lambda_{m, m-k}^{\text{mot}}$	Application motivique de transfert.	Définition 3.4.8 p. 62
\underline{m}	L'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$.	
$\text{map}_{(m)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$	Espace des applications continues pointées de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} (de degré m).	
$\text{map}_{(m)}^{\text{mot}}(X, Y)$	Espace motivique des morphismes pointés de X dans Y (de degré m).	
$MW(K)$	Monoïde des classes d'isomorphismes de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur K .	Définition 1.2.12
\underline{n}	L'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.	
N_m	Entier valant $m(d+1)$.	Notation p. 106
\mathcal{O}	Une opérade topologique.	

$\Omega_{(k)}^2$	Espaces des applications continues pointées issues de S^2 (de degré k).	
Ω^s	Espace <i>motivicque</i> des morphismes pointés issus de S^s .	Introduction p. vi
$\Omega^{\mathbf{P}^1}$	Espace <i>motivicque</i> des morphismes pointés issus de \mathbf{P}^1 .	Introduction p. vi
Pol_m	Schéma des polynômes unitaires de degré m .	
\mathbf{P}_m	L'espace topologique $(\mathcal{R}_m(\mathbf{A}^d))(\mathbf{C})$.	Convention p. 106
$\mathbf{P}_m^{ A <1}$	Sous-espace de \mathbf{P}_m où A a ses racines de module < 1 .	Notations p. 111
\mathcal{P}	Opérateur des petits disques.	Exemple B.1.2 (2) p.122
\mathcal{P}^{mot}	Opérateur <i>motivicque</i> des petits disques <i>conjecturale</i> .	Conjecture 3.D p. 64
\mathfrak{p}	Un drapeau de \mathcal{D}_k .	
$[\pi]$	Partition de l'entier m définie par la surjection $\pi : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$.	Définition 4.1.2 p. 71
$\bar{\pi}$	Classe d'équivalence de surjections modulo automorphisme au but.	Définition 4.1.2 p. 71
$\pi_0 \mathcal{F}$	π_0 algébrique du foncteur $\mathcal{F} : \text{Alg}_K \rightarrow \mathcal{E}ns$.	Définition 1.1.24 p. 10
Ψ^m	Foncteur tel que $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \approx \Psi^m(Y(\mathbf{C}))$.	Définition b) p. 92
$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]_{(m)}^N$	Classes d'homotopie naïve d'endomorphismes pointés de \mathbf{P}^1 (de degré m).	Définition 1.1.23 p. 9
$\langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle_{(m)}^N$	Classes d'homotopie naïve d'endomorphismes <i>libre</i> de \mathbf{P}^1 (de degré m).	Définition 1.1.23 p. 9
$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$	Classes d'homotopie motivique d'endomorphismes pointés de \mathbf{P}^1 .	
$\text{rés}_{m,n}(A, B)$	Résultant des polynômes A et B .	Définition 1.1.2 p. 4
$\text{rés}(f)$	Résultant de la fraction rationnelle f .	Définition 1.1.17 p. 8
$\mathcal{R}_m Y$	m -ème schéma d'Atiyah-Hitchin associé au schéma Y .	Définition 3.2.2 p. 49
$\mathcal{R}^{\text{hol}} \mathcal{Y}$	Variété d'Atiyah-Hitchin de la variété holomorphe \mathcal{Y} .	Définition 3.3.5 p. 56
$(\mathcal{R}_{m-1}^{ A <1} Y)(\mathbf{C})$	Sous-espace de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} Y(\mathbf{C})$ où l'on a $ A < 1$.	Notations p. 57
$(\widehat{\mathcal{R}_m Y})(\mathbf{C})$	Schéma au-dessus de $\mathcal{R}_m Y$.	Notation p. 74
ρ_m	Application $\widehat{\Sigma}_m \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^{d+1}} \wedge \widehat{\Sigma}_{m-1}$.	Définition 5.2.21 p. 111
Sch_K	Catégorie des K -schémas.	
$\text{SP}^m(X)$	Produit symétrique X^m / \mathfrak{S}_m .	
$\text{Syl}_{m,n}(A, B)$	Matrice de Sylvester des polynômes A et B .	Définition 1.1.1 p. 4.
S^s	Le cercle simplicial $\Delta^1 / \partial \Delta^1 \in \mathcal{E}sp$.	
S^t	Le cercle de Tate $\mathbf{G}_m \in \mathcal{E}sp$.	
S^W	Sphère de la représentation W du groupe G .	Notations p. 136
S_H^n	La « G -cellule » $S^n \wedge (G/H)_+$.	Notations p. 136
$\mathcal{S}_{(m)}$	Schéma des matrices symétriques inversibles $(m \times m)$.	Notations p. 13
\mathcal{S}^Y	Stratification de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$.	
\mathcal{S}^{pt}	Stratification de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$.	
σ_m	Application de stabilisation $(\mathcal{R}_{m-1} Y)(\mathbf{C}) \rightarrow (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$	Définition 3.3.8 p. 57
σ_m^g, σ_m^d	Morphismes <i>motivicques</i> de stabilisation $\mathcal{F}_{m-1} \rightarrow \mathcal{F}_m$.	Remarque 3.3.10 p. 57
σ_m^{mot}	Morphisme <i>motivicque</i> de stabilisation <i>conjectural</i> $\mathcal{R}_{m-1} Y \rightarrow \mathcal{R}_m Y$.	Conjecture 3.C p. 64
$\Sigma^\infty X$	Spectre de suspension de X .	

$\Sigma^{\vee} X$	G -spectre de suspension de X .	Notations p. 136
$\widetilde{\Sigma}_{[\pi]}$	Sous- \mathfrak{S}_m -variété de $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$.	Remarque 4.1.12 p. 75.
Σ_m	S -Dual de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} Y$.	Définition 5.2.4 p. 106
$\widetilde{\Sigma}_m$	Résolution de Σ_m .	Définition 5.2.6 p. 106
\mathfrak{S}_m	Groupe symétrique d'ordre m .	
$\mathfrak{S}_{\overline{\pi}}$	Sous-groupe de \mathfrak{S}_m fixant $E_{\overline{\pi}}$.	Proposition-définition 4.1.4 p. 72
$T_{[\pi]}^Y$	Voisinage tubulaire de la strate $S_{[\pi]}^Y$ dans $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$.	
$\widetilde{T}_{[\pi]}^Y$	\mathfrak{S}_m -voisinage tubulaire de la strate $E_{[\pi]}^Y$ dans $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$.	
$\widetilde{T}_{\overline{\pi}}^Y$	Voisinage tubulaire $\mathfrak{S}_{\overline{\pi}}^Y$ -équivariant de $E_{\overline{\pi}}$ dans $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$.	
$\widetilde{T}_{\overline{\pi}}^{\text{restr}}$	Restriction de $\widetilde{T}_{\overline{\pi}}^Y$ à $E_{\overline{\pi}}^{\text{restr}}$.	
$\widetilde{T}_{\overline{\pi}}^{\Sigma}$	Voisinage tubulaire de $E_{\overline{\pi}}^{\text{restr}}$ dans $\widetilde{\Sigma}^Y$.	
$\text{th}(\xi)$	Espace de Thom du fibré vectoriel ξ .	Définition 3.4.1 p. 58
$\text{Th}(X)$	Spectre de Thom de la variété X .	Définition D.1.10 p. 135
$\text{th}^G(\xi)$	Espace de Thom du G -fibré vectoriel ξ	
$\text{Th}^G(X)$	G -spectre de Thom de la G -variété X	Définition D.2.12 p. 138
\mathcal{S}^Y	Système de voisinages tubulaires de \mathcal{S}^Y .	
$\widetilde{\mathcal{S}}^Y$	Système de voisinages tubulaires de \mathcal{E}^Y .	
$\tau_{m,k}^{\text{mot}}$	Morphisme motivique de « transfert ».	Définition 3.4.8 p. 62
τ_{\bullet}	Diagramme de Čech d'un recouvrement ouvert.	
$\theta = \sum t_i x_i$	Barycentre formel des points $x_i \in \mathbf{C}$.	
$\Theta_{\bullet}^{\mathcal{O}}$	Foncteur intervenant dans la définition de Ψ^m .	Exemple 4.3.8 p. 91
$\langle u_1, \dots, u_m \rangle$	Forme bilinéaire symétrique diagonale $\langle u_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle u_m \rangle \in \mathcal{S}_m$	Notations p. 18
$[u_1, \dots, u_m]$	Fraction rationnelle pointée $\frac{X}{u_1} \oplus^{\mathbf{N}} \dots \oplus^{\mathbf{N}} \frac{X}{u_m} \in \mathcal{F}_m$	Notations p. 18
$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$	Classes d'homotopie d'applications continues pointées entre \mathcal{X} et \mathcal{Y} .	
$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_G$	Classes d'homotopie G -équivariante d'applications G -équivariantes pointées entre les G -espaces \mathcal{X} et \mathcal{Y} .	Notations p. 136
$[X, Y]^{\text{mot}}$	Classes d'homotopie motivique de morphismes pointés de X dans Y .	
$\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$	Classes d'homotopie stable d'applications entre \mathcal{X} et \mathcal{Y}	
$\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}_G$	Classes d'homotopie G -équivariante stable d'applications G -équivariantes entre les G -espaces \mathcal{X} et \mathcal{Y}	Notations p. 136
$\{X, Y\}^{\text{mot}}$	Classes d'homotopie motivique stable de morphismes pointés de X dans Y .	
$X \star Y$	L'espace joint : $\text{hocolim} (X \xleftarrow{\text{pr}} X \times Y \xrightarrow{\text{pr}} Y)$.	
X/h_Y	Cofibre homotopique d'une application $X \rightarrow Y$.	
Y	Schéma (souvent supposé quasi-projectif lisse).	
Y_+	La réunion disjointe de Y et du point.	
$Y^{[m]}$	Schéma de Hilbert ponctuel du schéma Y .	Théorème 3.1.6 p. 48
\mathcal{Y}	Espace topologique ou variété holomorphe.	

y_0	Point de base de \mathcal{Y} .	
\widehat{Z}	Compactifié d'Alexandroff de l'espace topologique Z .	
\sim^ℓ	Relation d'équivalence d'homotopie libre entre fractions rationnelles.	Définition 1.1.23 p. 9
\sim^p	Relation d'équivalence d'homotopie pointée entre fractions rationnelles pointées.	Définition 1.1.23 p. 9
$\oplus^{\mathbf{N}}$	Loi de monoïde sur $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}$.	Proposition-définition 1.2.1
\oplus^{mot}	Loi de groupe de $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$.	Corollaire 1.2.36
\dashrightarrow	Application stable	
\sim^{st}	Equivalence d'homotopie stable	
\preceq	Relation d'ordre naturelle entre les strates d'une stratification.	Définition 4.1.4 p. 72

Indiquons également quelques conventions qui peuvent éclaircir la logique de nos notations.

- Nous nous sommes efforcé de distinguer les isomorphismes stricts, notés \simeq , des isomorphismes à *homotopie près*, notés \approx .
- Lorsqu'il existe une variante topologique et une variante algébrique, les espaces topologiques sont plutôt notés avec des lettres cursives (exemple : \mathcal{Y}) et les schémas avec des lettres droites (exemple : Y). Les morphismes motiviques sont ornés de l'exposant \cdot^{mot} . Ainsi, par exemple, ι_m désigne une application continue tandis que ι_m^{mot} renvoie au morphisme motivique analogue.

Chapitre 1

Classes d'homotopie de fractions rationnelles

Soit K un corps de base. On note \mathbf{P}^1 la droite projective (au-dessus de $\text{Spec } K$) munie de son point de base $\infty = [1 : 0]$.

L'origine de ce chapitre est une tentative de comprendre de façon plus concrète le calcul, effectué par Fabien Morel dans [Mor08], du groupe $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ des classes d'homotopie *motivique* d'endomorphismes *pointés* de \mathbf{P}^1 .

Les endomorphismes de K -schémas de \mathbf{P}^1 ont une description explicite simple : il s'agit des fractions rationnelles à coefficients dans K . On rappelle que la notion d'homotopie algébrique *naïve* entre endomorphismes de \mathbf{P}^1 est obtenue en remplaçant formellement dans la définition classique d'homotopie entre applications continues l'intervalle $[0, 1]$ par la droite affine \mathbf{A}^1 . Une homotopie est donc un morphisme de schémas

$$H : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1 \quad .$$

Ces homotopies admettent encore une description concrète simple en termes de fractions rationnelles : il s'agit essentiellement des fractions rationnelles à coefficients dans l'anneau de polynômes $K[T]$.

Nous considérons le problème de déterminer l'ensemble, noté $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{N}}$, des classes d'homotopie algébrique *naïve* de fractions rationnelles. Le résultat est simple. Par exemple, lorsque K est de caractéristique différente de 2, il se résume ainsi (pour un énoncé plus précis, voir le Théorème 1.2.24).

Théorème. *Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et notons $\text{MW}(K)$ le monoïde gradué des classes d'isomorphisme des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur K . L'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{N}}$ est naturellement muni d'une structure de monoïde gradué, de loi notée \oplus^{N} . De plus, on a un isomorphisme explicite de monoïdes gradués*

$$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{N}} \xrightarrow{\cong} \text{MW}(K) \times_{K^\times / K^{\times 2}} K^\times \quad .$$

(Ci-dessus, le membre de droite désigne le produit fibré canonique fourni par l'application discriminant $\text{MW}(K) \longrightarrow K^\times / K^{\times 2}$ et muni de sa structure de monoïde naturelle).

L'apparition d'une structure de monoïde sur l'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{N}}$ est tout à fait remarquable : elle provient d'une structure de monoïde sur le schéma des fractions rationnelles. C'est la mise en évidence de cette structure qui rend notre calcul simple.

D'autre part, dans la catégorie homotopique $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$ des espaces de l'homotopie motivique, le schéma \mathbf{P}^1 est une suspension — on a $\mathbf{P}^1 \approx \Sigma^s \mathbf{G}_m$. L'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ des classes d'homotopie motivique

d'endomorphismes de \mathbf{P}^1 est par conséquent muni (de manière formelle) d'une structure de groupe dont nous notons la loi \oplus^{mot} . En remarquant que dans ce groupe les éléments de $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ n'ont pas d'inverse, on déduit que l'application canonique $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N \longrightarrow [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ ne peut pas être une bijection. Le terme d'erreur entre $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ est cependant « aussi petite que possible » : grâce au calcul de F. Morel, on constate que le complété en groupe du monoïde $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N, \oplus^N)$ est un groupe (abstraitement) isomorphe à $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}})$. Autrement dit, on a un isomorphisme de groupes :

$$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}} \simeq \text{GW}(K) \times_{K^\times / K^{\times 2}} K^\times .$$

Ci-dessus, $\text{GW}(K)$ désigne le groupe de Grothendieck-Witt du corps K , c'est-à-dire le complété en groupe du monoïde $\text{MW}(K)$. Le membre de droite est muni de sa structure de groupe naturelle.

N.B.: Le résultat principal de ce chapitre a été publié sous une forme plus concise dans la note [Caz08].

Voici le plan du chapitre :

1.1 Fractions rationnelles et homotopies. — Il s'agit d'un paragraphe de rappels et de propriétés élémentaires sur les endomorphismes de schémas de la droite projective. On y établit notamment la correspondance précise entre endomorphismes de \mathbf{P}^1 et fractions rationnelles, puis la correspondance entre homotopie algébrique *naïve* d'endomorphismes de \mathbf{P}^1 et fractions rationnelles à coefficients un anneau de polynômes. Ce paragraphe est écrit dans une généralité suffisante pour couvrir également le cas, évoqué au § 1.3.a), où la base est l'anneau des entiers \mathbf{Z} .

1.2 Classes d'homotopie pointée de fractions rationnelles. — Nous déterminons tout d'abord l'ensemble des classes d'homotopie *pointée* de fractions rationnelles sur le corps K . Il s'agit du cœur du chapitre.

a) Structure de monoïde sur $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$. — Le schéma des fractions rationnelles pointées est

muni d'une structure de monoïde gradué remarquable que nous décrivons. Il en résulte que l'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ est muni d'une structure de monoïde.

b) Forme de Bézout. — On peut, par une construction classique due à Bézout, associer à toute fraction rationnelle une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Nous montrons que la classe de la forme de Bézout définit un invariant d'homotopie naïve.

c) Matrices de Hankel. — Nous établissons la correspondance classique entre fractions rationnelles et matrices de Hankel non-dégénérées. Nous en déduisons la compréhension des classes d'homotopie de fractions rationnelles de degré 2.

d) Théorème principal. — Nous montrons, grâce à ce qui précède, que l'invariant associé à la forme de Bézout d'une fraction rationnelle est en fait le seul invariant d'homotopie.

e) Comparaison entre $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$. — Nous comparons le résultat de notre calcul avec celui de F. Morel : le groupe $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}})$ est abstraitement isomorphe au complété du monoïde $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N, \oplus^N)$.

1.3 Généralisations. — Le calcul précédent se généralise aux situations suivantes.

a) Classes d'homotopie libre. — Nous déterminons l'ensemble $\langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle^N$ des classes d'homotopie naïve et *libre* d'endomorphismes de \mathbf{P}^1 .

b) Composition de fractions rationnelles. — L'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ est muni d'une seconde loi de monoïde associée à la composition des endomorphismes de \mathbf{P}^1 . Nous explicitons cette nouvelle structure.

c) Le cas de la caractéristique quelconque. — Nous déterminons l'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ sans hypothèse de caractéristique sur K .

- d) **Classes d'homotopie de morphismes de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^d pour $d \geq 2$.** — La détermination de l'ensemble des classes d'homotopie naïve de morphismes pointés de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^d est beaucoup plus simple lorsque d est un entier ≥ 2 . Là encore, cet ensemble se compare à son analogue motivique $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^{\text{mot}}$ via une complétion en groupe.

1.4 Perspectives. —

- a) **Classes d'homotopie de fractions rationnelles entières.** — Le calcul de $[\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1]^N$ est un problème d'arithmétique que nous ne savons pas résoudre. Nous donnons quelques résultats partiels et nous émettons une conjecture.
- b) **Autour de la loi \oplus^N .** — Nous dressons une liste (non-exhaustive) de quelques questions fondamentales liées à la loi \oplus^N qu'il nous reste à comprendre.

Convention: Dans ce chapitre, K est un corps et l'on travaille essentiellement dans la catégorie Sch_K des K -schémas. Le cas où K est de caractéristique différente de 2 est légèrement plus simple. Pour faciliter la lecture d'un lecteur pressé, nous avons choisi de traiter ce cas en détail au § 1.2, en repoussant l'étude du cas général au § 1.3.c). Lorsqu'un énoncé n'est vrai qu'en caractéristique différente de 2, le texte le stipule.

D'autre part, il est parfois utile (notamment au § 1.1.b)) de travailler dans la catégorie des \mathbf{Z} -schémas. Lorsqu'un schéma Y est considéré au dessus de \mathbf{Z} , nous insistons en le notant plutôt $Y_{\mathbf{Z}}$.

1.1 Fractions rationnelles et homotopies

En géométrie algébrique classique, lorsque la base est un anneau assez simple les endomorphismes de \mathbf{P}^1 admettent une description en termes de fractions rationnelles. La notion d'homotopie naïve entre fractions rationnelles, c'est-à-dire de morphisme de schémas $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$, est très proche et admet aussi une description en termes de fractions rationnelles.

Nous établissons les correspondances précises entre ces notions, en distinguant le cas *libre* (non-pointé) du cas *pointé*.

a) Résultant de deux polynômes

Ce paragraphe rappelle pour la commodité du lecteur des faits élémentaires sur le résultants de deux polynômes. Le résultant est la bonne notion algébrique pour « mesurer » si deux polynômes à coefficients dans un anneau quelconque sont premiers entre eux. Notre présentation suit de près celle de Bourbaki, [Bou50] § 6, n6, IV. En particulier, nous reprenons les mêmes notations et les mêmes conventions.

Notations:

- Soient R un anneau et m et n deux entiers positifs.
- Soit (A, B) un couple de polynômes de $R[X]$ avec $\deg A \leq m$ et $\deg B \leq n$ et notons

$$\begin{aligned} A &= a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_0 \\ B &= b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_0 \end{aligned}$$

- Pour tout entier $k \geq 0$, soit $R[X]_{<k}$ le sous- R -module de $R[X]$ formé des polynômes de degré strictement inférieur à k .
- On munit le R -module libre $R[X]_{<n} \times R[X]_{<m}$ de la base

$$\mathcal{B} = ((X^{n-1}, 0), \dots, (X, 0), (1, 0), (0, X^{m-1}), \dots, (0, X), (0, 1))$$

et le R -module libre $R[X]_{<m+n}$ de la base

$$\mathcal{B}' = (X^{m+n-1}, \dots, X, 1)$$

– Soit $\varphi_{A,B}$ l'application R -linéaire

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B} : R[X]_{<n} \times R[X]_{<m} &\longrightarrow R[X]_{<m+n} \\ (U, V) &\longmapsto AU + BV \end{aligned}$$

Définition 1.1.1. On appelle *matrice de Sylvester* (sous-entendu de type (m, n)) des polynômes A et B , et l'on note $\text{Syl}_{m,n}(A, B)$, la matrice de $\varphi_{A,B}$ prise dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

Il s'agit donc d'une matrice carrée $(n+m) \times (n+m)$.

Par exemple, si $m = 2$ et $n = 3$, $\text{Syl}_{2,3}(A, B)$ est de la forme suivante :

$$\text{Syl}_{2,3}(A, B) = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

Définition 1.1.2. On appelle *résultant* (de type (m, n)) des polynômes A et B et l'on note $\text{rés}_{m,n}(A, B)$ le déterminant de la matrice de Sylvester $\text{Syl}_{m,n}(A, B)$.

Lorsque $m = \deg A$ et $n = \deg B$, on parle juste de résultant de A et de B et l'on note simplement

$$\text{rés}(A, B) := \text{rés}_{\deg A, \deg B}(A, B) \quad .$$

Remarque 1.1.3. Dans le cas « universel », c'est-à-dire lorsque les coefficients de A et B sont des indéterminées, $\text{rés}_{m,n}(A, B)$ est un polynôme homogène de degré $m+n$ en ces indéterminées.

Nous listons ci-après quelques propriétés élémentaires du résultant toutes démontrées dans *loc. cit.*

Proposition 1.1.4. Soient A et B des polynômes de $R[X]$ avec $\deg A \leq m$ et $\deg B \leq n$.

1. On a

$$\text{rés}_{m,n}(A, B) = (-1)^{mn} \text{rés}_{n,m}(B, A) \quad .$$

2. Soient λ et μ deux scalaires de R . Alors on a

$$\text{rés}_{m,n}(\lambda A, \mu B) = \lambda^n \mu^m \text{rés}_{m,n}(A, B) \quad .$$

3. Si l'on a $m \geq n$, pour tout polynôme C de degré $\leq m-n$, on a

$$\text{rés}_{m,n}(A + BC, B) = \text{rés}_{m,n}(A, B) \quad .$$

4. Supposons que A et B soient scindés et notons $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$ les racines de A et $(\beta_j)_{1 \leq j \leq n}$ les racines de B . Alors, on a

$$\text{rés}_{m,n}(A, B) = a_m^n b_n^m \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (\alpha_i - \beta_j) \quad .$$

5. En particulier, pour tout polynôme C de degré $\leq p$, on a

$$\text{rés}_{m,n+p}(A, BC) = \text{rés}_{m,n}(A, B) \cdot \text{rés}_{m,p}(A, C) \quad .$$

6. Pour tout entier $r \geq 0$, on a

$$\text{rés}_{m,n+r}(A, B) = a_m^r \text{rés}_{m,n}(A, B) \quad .$$

En particulier, lorsque A est unitaire de degré m , on a pour tout $r \geq 0$, $\text{rés}_{m,n+r}(A, B) = \text{rés}_{m,n}(A, B)$. Dans ce cas, nous utiliserons plutôt la notation $\text{rés}(A, B)$ pour désigner ce résultant puisqu'aucune confusion n'est possible.

7. On suppose $n = m$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'élément $\text{rés}_{n,n}(A, B)$ est inversible dans R .
- (ii) Il existe deux polynômes U et V dans $R[X]$ et deux scalaires u et v dans R tels que l'on ait les relations « de Bézout » suivantes :

$$AU + BV = 1 \quad \text{et} \quad a_n u + b_n v = 1 \quad .$$

8. Comme cas particulier du point (7), on déduit que si A est unitaire de degré m et si B est de degré $< m$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'élément $\text{rés}(A, B)$ est inversible dans R .
- (ii) Il existe deux polynômes U et V dans $R[X]$ tels que l'on ait la relation « de Bézout » suivante :

$$AU + BV = 1 \quad .$$

- (iii) L'élément B est inversible dans l'anneau $R[X]/(A)$.

b) Morphismes dans les projectifs

Soient d un entier positif et \mathbf{P}^d le schéma projectif de dimension d muni de son point de base $\infty := [1 : 0 : \dots : 0]$. La description¹ des points de \mathbf{P}^d dans un anneau quelconque est importante dans la suite et nous la rappelons brièvement, en renvoyant le lecteur à [EH00], § III.2.5 pour une démonstration.

Proposition 1.1.5. *Soit R un anneau. L'ensemble $\mathbf{P}^d(R)$ des morphismes de schémas $\text{Spec } R \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^d$ est en bijection avec l'ensemble des surjections $R^{d+1} \xrightarrow{\varphi} P$, avec P un R -module projectif de rang 1, deux morphismes φ et φ' devant être identifiés s'il existe $\lambda \in R^\times$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} R^{d+1} & \xrightarrow{\varphi} & P \\ & \searrow \varphi' & \downarrow \times \lambda \\ & & P \end{array} \quad .$$

Dans les situations que nous allons rencontrer les modules projectifs de rang 1 sont libres. En particulier, rappelons le lemme suivant.

Lemme 1.1.6.

- 1. Soit R un anneau local. Alors tout R -module projectif est libre.
- 2. Soit R un anneau factoriel. Alors tout R -module projectif de rang 1 est libre.

Pour de tels anneaux (en particulier, pour les anneaux $R = K$, $R = K[T]$, $R = \mathbf{Z}$ et $R = \mathbf{Z}[T]$), un élément de $\mathbf{P}^d(R)$ est une famille $(r_0 : \dots : r_d)$ d'éléments de R qui engendrent R , cette famille n'étant déterminée qu'à la multiplication par une unité dans R^\times près.

Le lemme suivant décode en termes concrets la notion de morphisme de schémas de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^d ainsi que celle d'homotopie entre deux tels morphismes. Ce lemme, d'apparence un peu technique, prend tout son sens dans la lecture des § 1.1.c) et 1.1.d).

¹En prévision du § 1.3.a), nous nous plaçons au dessus de $\text{Spec } \mathbf{Z}$. Mais on rappelle que pour tout K -schéma X , on a une bijection canonique

$$\text{Morph}_{\text{Sch}_K}(X, \mathbf{P}_K^d) \simeq \text{Morph}_{\text{Sch}_{\mathbf{Z}}}(X, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^d) \quad .$$

Le lecteur qui voudrait se limiter à la base $\text{Spec } K$ doit juste lire « K -algèbre » là où ses yeux semblent voir écrit « anneau ».

Lemme 1.1.7. *Soit R un anneau factoriel.*

1. *La donnée d'un morphisme de schémas*

$$f : \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1 \times \text{Spec } R \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^d$$

équivalent à la donnée d'un entier positif m et d'une famille $(A : B_1 : \dots : B_d)$ de polynômes de $R[X]$ avec $\max\{\deg A, \dots, \deg B_d\} = m$ et engendrant $R[X]$, cette famille n'étant déterminée qu'à la multiplication par une unité dans $R[X]^\times = R^\times$ près.

2. *Si l'on demande en plus que f soit pointée, c'est-à-dire que l'on ait $f_{|\{\infty\} \times \text{Spec } R} = \infty$, alors f admet une unique représentation de la forme (A, B_1, \dots, B_d) avec A unitaire de degré m et $\deg B_i \leq m - 1$ pour tout $1 \leq i \leq d$.*

DÉMONSTRATION —

1. Le schéma $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1 \times \text{Spec } R$ est la réunion des deux schémas affines

$$U_0 := (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1 - \{0\}) \times \text{Spec } R \simeq \text{Spec } R[X] \quad \text{et} \quad U_\infty := (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1 - \{\infty\}) \times \text{Spec } R \simeq \text{Spec } R[X]$$

le long de leur intersection

$$U_{0,\infty} := (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \times \text{Spec } R \simeq \text{Spec } R[X, X^{-1}] \quad .$$

Se donner un morphisme $f : \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1 \times \text{Spec } R \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^d$ équivaut se donner deux morphismes f_0 et f_∞ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & U_\infty & \\ \nearrow & & \searrow^{f_\infty} \\ U_{0,\infty} & & \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^d \\ \searrow & & \nearrow_{f_0} \\ & U_0 & \end{array} \quad .$$

Puisque l'anneau $R[X]$ est factoriel, l'élément $f_\infty \in \mathbf{P}^d(R[X])$ est représenté par une liste $(A : B_1 : \dots : B_d)$ de polynômes engendrant $R[X]$ à la multiplication par un élément de $R[X]^\times = R^\times$ près.

De même, l'élément $f_0 \in \mathbf{P}^d(R[X])$ est représenté par une liste $(C : D_1 : \dots : D_d)$ de polynômes engendrant $R[X]$ à la multiplication par un élément de $R[X]^\times = R^\times$ près.

Fixons des représentants (A, B_1, \dots, B_d) et (C, D_1, \dots, D_d) . Dire que le diagramme précédent commute signifie qu'il existe une unité dans $R[X, X^{-1}]^\times$ — c'est-à-dire un élément de la forme λX^m , avec $\lambda \in R^\times$ et $m \in \mathbf{Z}$ — telle que

$$(A, B_1, \dots, B_d) = \lambda X^k \left(C \left(\frac{1}{X} \right), D_1 \left(\frac{1}{X} \right), \dots, D_d \left(\frac{1}{X} \right) \right) \quad .$$

On constate que l'entier m est nécessairement positif, égal à $\max\{\deg A, \deg B_1, \dots, \deg B_d\}$. La donnée de $(A : B_1 : \dots : B_d)$ et de m détermine alors complètement $(C : D_1 : \dots : D_d)$.

Ceci montre le résultat annoncé.

2. Le fait que f soit pointée se traduit par le fait que l'on ait

$$(C(0) : D_1(0) : \dots : D_d(0)) = (1 : 0 : \dots : 0) \quad .$$

Ceci entraîne alors $\deg A = m$ et $\deg(B_i) \leq m - 1$ pour tout $1 \leq i \leq d$. De plus, le coefficient dominant de A est nécessairement une unité de R . En effet, puisque (A, B_1, \dots, B_d) engendrent $R[X]$, il existe des polynômes U, V_1, \dots, V_d de degrés $\leq m - 1$ tels que l'on ait

$$AU + B_1V_1 + \dots + B_dV_d = X^{2m-1} \quad .$$

Le coefficient dominant u_{m-1} du polynôme U est un inverse de a_m .

Le morphisme f admet donc un unique représentant avec A unitaire de degré m . □

c) Fractions rationnelles

A partir du paragraphe précédent, nous établissons la correspondance précise entre endomorphismes de \mathbf{P}^1 au-dessus de $\text{Spec } K$ et fractions rationnelles à coefficients dans K .

i) Fractions rationnelles libres

Soient m un entier positif, $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$ une liste de $2m + 2$ indéterminées et A et B les polynômes « universels » de $\mathbf{Z}[a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m][X]$, c'est-à-dire :

$$A := \sum_{k=0}^m a_k X^k \quad \text{et} \quad B := \sum_{k=0}^m b_k X^k \quad .$$

Définition 1.1.8. On appelle schéma des fractions rationnelles libres de degré m et l'on note \mathcal{L}_m le sous-schéma ouvert de $\text{Proj}(\mathbf{Z}[a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m]) \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{2m+1}$ complémentaire de l'hypersurface d'équation

$$\text{rés}_{m,m}(A, B) = 0 \quad .$$

Les rappels sur le foncteur des points des schémas projectifs donnent la description du foncteur des points de \mathcal{L}_m suivante.

Lemme 1.1.9. Soit m un entier positif. Pour tout anneau factoriel R (en particulier pour $R = K$, $R = K[T]$, $R = \mathbf{Z}$ et $R = \mathbf{Z}[T]$), la donnée d'un élément de $\mathcal{L}_m(R)$ est la donnée d'un couple (A, B) de polynômes de $R[X]$ à la multiplication par une unité de R près et tel que l'on ait (pour tout choix d'un représentant)

$$\text{rés}_{m,m}(A, B) \in R^\times \quad .$$

D'après la Proposition 1.1.4(7), cette dernière condition équivaut à l'existence de deux polynômes U et V de $R[X]$ et de deux scalaires u et v dans R tels que l'on ait des relations de Bézout :

$$AU + BV = 1 \quad \text{et} \quad a_m u + b_m v = 1 \quad .$$

La proposition suivante, qui est un cas particulier du Lemme 1.1.7 dans le cas $R = K$, justifie l'introduction des schémas \mathcal{L}_m .

Proposition 1.1.10. La donnée d'un endomorphisme (libre) de \mathbf{P}^1 équivaut à la donnée d'un entier positif m et d'un élément de $\mathcal{L}_m(K)$.

Définition 1.1.11. Soit f un endomorphisme de \mathbf{P}^1 . On appelle degré de f , et l'on note $\text{deg}(f)$, l'entier m qui apparaît dans la Proposition 1.1.10 précédente. Autrement dit, si l'on représente f comme le quotient $\frac{A}{B}$ de deux polynômes premiers entre eux de $K[X]$, on a par définition

$$\text{deg} \left(\frac{A}{B} \right) = \sup\{\text{deg } A, \text{deg } B\} \quad .$$

Remarque 1.1.12. Lorsque $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$, le degré d'une fraction rationnelle f est égal au degré topologique de l'application $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ associée.

ii) Fractions rationnelles pointées

Soient m un entier positif, $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{m-1}$ une liste de $2m$ indéterminées et A et B les polynômes universels de $\mathbf{Z}[a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{m-1}][X]$, c'est-à-dire :

$$A := X^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \quad \text{et} \quad B := \sum_{k=0}^{m-1} b_k X^k \quad .$$

Soit également ρ l'élément de $\mathbf{Z}[a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{m-1}]$ suivant :

$$\rho := \text{rés}_{m,m}(A, B) \quad .$$

Définition 1.1.13. On appelle schéma des fractions rationnelles *pointées* de degré m et l'on note \mathcal{F}_m le sous-schéma ouvert de $\text{Spec}(\mathbf{Z}[a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{m-1}]) \simeq \mathbf{A}^{2m}$ complémentaire de l'hypersurface d'équation

$$\text{rés}_{m,m}(A, B) = 0 \quad .$$

Par définition, \mathcal{F}_m s'identifie au schéma affine $\text{Spec}(\mathbf{Z}[a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{m-1}, \rho^{-1}])$.

Le lemme suivant est une traduction des définitions.

Lemme 1.1.14. *Pour tout anneau R , la donnée d'un élément de $\mathcal{F}_m(R)$ est la donnée d'un couple (A, B) de polynômes de $R[X]$ avec A unitaire de degré m , B de degré $< m$ et tel que l'on ait*

$$\text{rés}_{m,m}(A, B) \in R^\times \quad .$$

D'après la Proposition 1.1.4 (8), cette dernière condition équivaut à l'existence de deux polynômes U et V de $R[X]$ tels que l'on ait la relation de Bézout :

$$AU + BV = 1 \quad .$$

Remarque 1.1.15. Soient R un anneau, m un entier positif et (A, B) un R -point du schéma \mathcal{F}_m . L'ensemble des couples de polynômes (U, V) tels que l'on ait une relation de Bézout n'est pas unique. Cependant, puisque A est unitaire, il existe un unique couple de tels polynômes (U, V) tels que l'on ait

$$\deg U \leq m - 2 \quad \text{et} \quad \deg V \leq m - 1 \quad .$$

L'introduction des schémas \mathcal{F}_m est justifiée par la proposition suivante, qui correspond au cas particulier du Lemme 1.1.7 lorsque $R = K$.

Proposition 1.1.16. *La donnée d'un endomorphisme pointé de \mathbf{P}^1 équivaut à la donnée d'un entier positif m et d'un élément de $(A, B) \in \mathcal{F}_m(K)$. Nous notons $f = \frac{A}{B}$ un tel morphisme.*

Définition 1.1.17. Soit $f = \frac{A}{B}$ un endomorphisme *pointé* de \mathbf{P}^1 . On appelle résultant de f , et l'on note $\text{rés}(f)$, le scalaire $\text{rés}(A, B) \in K^\times$.

d) Homotopies algébriques entre fractions rationnelles

Définition 1.1.18.

- Une homotopie libre (sous-entendu algébrique) entre fractions rationnelles est un morphisme

$$F : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1 \quad .$$

- On dit que l'homotopie F est pointée si elle satisfait à la condition

$$F|_{\{\infty\} \times \mathbf{A}^1} = \infty \quad .$$

- Soit F une homotopie entre fractions rationnelles. La fraction rationnelle $f_0 := F|_{\mathbf{P}^1 \times \{0\}}$ (resp. $f_1 := F|_{\mathbf{P}^1 \times \{1\}}$) s'appelle la source (resp. le but) de F . On dit aussi que F est une homotopie entre f_0 et f_1 .

La proposition suivante donne une description concrète de la notion d'homotopie en termes de fractions rationnelles. C'est un cas particulier du Lemme 1.1.7 dans le cas particulier $R = K[T]$.

Proposition 1.1.19.

1. *La donnée d'une homotopie libre entre fractions rationnelles équivaut à la donnée d'un entier positif m et d'un élément de $\mathcal{L}_m(K[T])$.*
2. *La donnée d'une homotopie pointée entre fractions rationnelles équivaut à la donnée d'un entier positif m et d'un élément de $\mathcal{F}_m(K[T])$.*

Dans les deux cas, la source et le but de F sont déterminés grâce aux morphismes $K[T] \longrightarrow K$ d'évaluation en 0 et en 1.

Corollaire 1.1.20. *Si F est une homotopie pointée entre deux fractions rationnelles f_0 et f_1 , alors on a*

$$\begin{aligned} \deg(f_0) &= \deg(f_1) \\ \text{rés}(f_0) &= \text{rés}(f_1) \end{aligned} .$$

Autrement dit, le degré et le résultant des fractions rationnelles sont des invariants d'homotopie pointée. Nous allons voir ci-après que ce ne sont pas les seuls invariants.

Remarque 1.1.21. Le degré et le résultant sont même des invariants d'homotopie *motivique*.

De la suite fibrée

$$\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{SL}_2/\mathbf{G}_m \approx \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{BG}_m = \mathbf{P}^\infty$$

on déduit une longue suite exacte de groupes

$$\dots \longrightarrow [\mathbf{P}^1, \mathbf{SL}_2]^{\text{mot}} \longrightarrow [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}} \longrightarrow [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^\infty]^{\text{mot}} \longrightarrow 0 \quad .$$

- On a un isomorphisme $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^\infty]^{\text{mot}} \simeq \text{Pic}(\mathbf{P}^1) \simeq \mathbf{Z}$ (c.f. [Mor99], Corollaire 4.4.1). On vérifie que l'entier ainsi associé à un endomorphisme pointé de \mathbf{P}^1 est son degré au sens de la Définition 1.1.11.
- Le choix d'une fraction rationnelle de degré 1, disons $\frac{X}{1}$, donne un scindement

$$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}} \simeq \mathbf{Z} \times [\mathbf{P}^1, \mathbf{SL}_2]^{\text{mot}} \quad .$$

L'inclusion naturelle $\mathbf{SL}_2 \hookrightarrow \mathbf{GL}_\infty$ induit un morphisme de groupes $[\mathbf{P}^1, \mathbf{SL}_2]^{\text{mot}} \longrightarrow [\mathbf{P}^1, \mathbf{GL}_\infty]^{\text{mot}}$. Mais on a les isomorphismes

$$[\mathbf{P}^1, \mathbf{GL}_\infty]^{\text{mot}} \simeq [S^0, \mathbf{GL}_\infty]^{\text{mot}} \simeq K^\times \quad ,$$

le premier isomorphisme découlant de la périodicité de Bott (c.f. [Mor99], § 4.3.3) et le second du fait que \mathbf{GL}_∞ soit fibrant. On vérifie que l'élément de K^\times ainsi associé à un endomorphisme pointé de \mathbf{P}^1 est son résultant.

Remarque 1.1.22. Nous devons mentionner une différence notable entre le formalisme algébrique ci-dessus et le formalisme topologique auquel le lecteur est habitué.

La relation d'homotopie algébrique naïve (pointée ou non) entre fractions rationnelles n'est pas automatiquement transitive : étant donné trois fractions rationnelles f, g, h et des homotopies entre f et g et entre g et h , il n'est pas évident de construire une homotopie algébrique entre f et h .

Dans la suite, nous allons considérer les relations d'équivalence *engendrées* par les homotopies naïves.

Définition 1.1.23. Soient f et g deux fractions rationnelles (resp. deux fractions rationnelles pointées). On dit que f et g sont dans la même classe d'homotopie libre (resp. d'homotopie pointée) et l'on note $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ (resp. $f \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} g$) s'il existe une suite finie, disons (f_i) avec $0 \leq i \leq N$, de fractions rationnelles (resp. de fractions rationnelles pointées) telles que

- $f_0 = f$ et $f_N = g$
- pour tout $0 \leq i \leq N$ on ait $f_i \stackrel{\ell}{\sim} f_{i+1}$ (resp. $f_i \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} f_{i+1}$).

Les relations $\stackrel{\ell}{\sim}$ et $\stackrel{\mathcal{P}}{\sim}$ sont des relations d'équivalence et nous notons $\langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle^N$ l'ensemble des classes d'équivalence de fractions rationnelles pour la relation $\stackrel{\ell}{\sim}$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ l'ensemble des classes d'équivalence de fractions rationnelles pointées pour la relation $\stackrel{\mathcal{P}}{\sim}$.

Puisque le degré des fractions rationnelles est un invariant d'homotopie naïve (c.f. Corollaire 1.1.20), chacun de ces deux ensembles est réunion de ses composantes de différents degrés :

$$\langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle^N = \coprod_{m \geq 0} \langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle_m^N \quad \text{et} \quad [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N = \coprod_{m \geq 0} [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]_m^N \quad ,$$

Dans la suite, il est commode d'avoir à disposition le formalisme du π_0 naïf d'un foncteur.

Définition 1.1.24. Soient Alg_K la catégorie des K -algèbres et $\mathcal{F} : \text{Alg}_K \rightarrow \mathcal{E}ns$ un foncteur. On appelle π_0 du foncteur \mathcal{F} le nouveau foncteur $\pi_0\mathcal{F} : \text{Alg}_K \rightarrow \mathcal{E}ns$ qui à toute K -algèbre R associe le coégalisateur de la double flèche

$$\mathcal{F}(R[T]) \rightrightarrows \mathcal{F}(R)$$

donnée par l'évaluation en $T = 0$ et en $T = 1$.

Remarque 1.1.25.

1. Soient \mathcal{F}, \mathcal{G} deux foncteurs de $\text{Alg}_K \rightarrow \mathcal{E}ns$. Une transformation naturelle $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induit une transformation naturelle $\pi_0(\mathcal{F}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{G})$.
2. Avec la définition précédente, la Proposition 1.1.19 se reformule en la bijection pour tout entier positif m :

$$\langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle_m^{\mathbf{N}} \simeq (\pi_0\mathcal{L}_m)(K) \quad \text{et} \quad [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]_m^{\mathbf{N}} \simeq (\pi_0\mathcal{F}_m)(K) \quad .$$

Voici quelques exemples d'homotopies algébriques entre fractions rationnelles.

Exemple 1.1.26. Soit $b_0 \in K^\times$ un scalaire.

1. Soit $A \in K[T]$ un polynôme unitaire de degré m et notons $A = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_0$. L'élément

$$\frac{X^m + Ta_{m-1}X^{m-1} + \dots + Ta_0}{b_0} \in \mathcal{F}_m(K[T])$$

fournit une homotopie pointée entre $\frac{A}{b_0}$ et $\frac{X^m}{b_0}$.

2. Soit $B \in K[T]$ un polynôme de degré $\leq m-1$ tel que l'on ait $B(0) = b_0$ et notons $B = b_{m-1}X^{m-1} + \dots + b_0$. La fraction $\frac{X^m}{B}$ fournit un K -point de \mathcal{F}_m et la fraction

$$\frac{X^m}{Tb_{m-1}X^{m-1} + \dots + Tb_1 + b_0}$$

fournit une homotopie entre $\frac{X^m}{B}$ et $\frac{X^m}{b_0}$.

3. Soit $g : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ un morphisme (resp. un morphisme pointé) et $F : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ une homotopie (resp. une homotopie pointée) entre des fractions rationnelles f_0 et f_1 . Alors $g \circ F$ et $F \circ (g \times \text{id})$ sont des homotopies (resp. des homotopies pointées) entre $g \circ f_0$ et $g \circ f_1$ et entre $f_0 \circ g$ et $f_1 \circ g$.
4. Comme cas particulier du point précédent, pour toute fraction rationnelle $f \in \mathcal{L}_m(K)$, les éléments $f(X+T)$ et $f(X)+T$ de $\mathcal{L}_m(K[T])$ définissent des homotopies. Lorsque f est pointée, ces homotopies sont pointées.

Les exemples présentés ci-dessus sont extrêmement simples. D'une manière générale, il est assez difficile de construire des homotopies de fractions rationnelles. Nous allons voir au § 1.2.a) (*c.f.* Remarque 1.2.2 (2)) comment créer suffisamment d'homotopies, lorsque la base est un corps, pour permettre la détermination de l'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}$.

1.2 Classes d'homotopie pointée de fractions rationnelles

Dans ce paragraphe, qui constitue le cœur de ce chapitre, nous déterminons le monoïde des classes d'homotopie d'endomorphismes *pointés* de \mathbf{P}^1 . Nous en déduirons au § 1.3.a) le calcul des classes d'homotopie libre.

a) Structure de monoïde sur $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$

i) Définition

Nous allons définir ici une loi de monoïde gradué, notée \oplus^N , sur le schéma $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$. Une telle structure correspond à la donnée, pour tout couple (m_1, m_2) d'entiers positifs, de morphismes

$$\oplus^N : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{m_1+m_2}$$

satisfaisant une condition d'associativité. Voici comment décrire ces morphismes au niveau du foncteur des points.

Proposition-définition 1.2.1. *Soient (m_1, m_2) un couple d'entiers positifs et R un anneau.*

Des R -points (A_i, B_i) de \mathcal{F}_{m_i} (pour $i = 1, 2$) définissent des uniques couples (U_i, V_i) de polynômes de $R[X]$ tels que l'on ait :

- $\deg U_i \leq m_i - 2$ et $\deg V_i \leq m_i - 1$
- l'identité de Bézout $A_i U_i + B_i V_i = 1$.

En posant

$$\begin{bmatrix} A_3 & -V_3 \\ B_3 & U_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A_1 & -V_1 \\ B_1 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & -V_2 \\ B_2 & U_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

on définit un R -point (A_3, B_3) de $\mathcal{F}_{m_1+m_2}$ et l'on note

$$\frac{A_3}{B_3} =: \frac{A_1}{B_1} \oplus^N \frac{A_2}{B_2} \quad .$$

La loi \oplus^N ainsi définie munit le schéma $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$ d'une structure de monoïde gradué.

DÉMONSTRATION — Par définition, les matrices $\begin{bmatrix} A_1 & -V_1 \\ B_1 & U_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A_2 & -V_2 \\ B_2 & U_2 \end{bmatrix}$ sont dans $\mathbf{SL}_2(K[T])$, de sorte que $\begin{bmatrix} A_3 & -V_3 \\ B_3 & U_3 \end{bmatrix}$ y est aussi. On a ainsi une relation de Bézout entre les polynômes A_3 et B_3 .

On constate que $A_3 = A_1 A_2 - V_1 B_2$ est unitaire de degré $m_1 + m_2$ et que $B_3 = B_1 A_2 + U_1 B_2$ est de degré $< m_1 + m_2$. Le couple (A_3, B_3) définit bien un R -point de $\mathcal{F}_{m_1+m_2}$.

Le fait que la loi \oplus^N ainsi définie soit associative est conséquence de l'associativité du produit matriciel. \square

Remarques 1.2.2.

1. Il est important de remarquer que cette loi de monoïde en induit une, encore notée \oplus^N , sur $\coprod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{F}_m)(K)$ et donc sur $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$.
2. En particulier, ceci donne une nouvelle façon de construire des homotopies pointées entre fractions rationnelles. Si F et G sont des homotopies pointées entre fractions rationnelles, alors $F \oplus^N G$ est une nouvelle homotopie pointée.
3. En dépit de nos notations, la loi de monoïde sur $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$ n'est pas commutative². Par contre, nous allons montrer (c.f. Corollaire 1.2.25) que la loi de monoïde induite sur $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ est commutative.

²Nous ne savons pas si cette loi est commutative à homotopie près.

ii) Interprétation en termes de fractions continues

Exemple 1.2.3. Voici quelques exemples d'additions de fraction rationnelles.

1. Pour toute fraction rationnelle pointée $\frac{A}{B}$, on a

$$X \oplus^N \frac{A}{B} = \frac{AX - B}{A} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} \oplus^N X = \frac{AX - V}{BX + U} \quad .$$

2. Plus généralement, pour tout polynôme unitaire P , et pour tout scalaire non nul $b_0 \in K^\times$, on a

$$\frac{P}{b_0} \oplus^N \frac{A}{B} = \frac{AP - \frac{B}{b_0}}{b_0 A} = P - \frac{1}{b_0^2} \frac{B}{A} \quad .$$

Soit $f = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle pointée de $\mathcal{F}_m(K)$. Elle admet un unique développement en fraction continue *tordu*, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$\frac{A}{B} = \frac{P_0}{b_0} - \frac{1}{b_0^2 \left(\frac{P_1}{b_1} - \frac{1}{b_1^2(\dots)} \right)} \quad ,$$

où pour tout i , $P_i \in K[X]$ est un polynôme unitaire et b_i est un scalaire non nul de K . Un tel développement est toujours fini, la somme des degrés des polynômes P_i égalant le degré de A .

Remarque 1.2.4.

1. D'après l'Exemple 1.2.3 (2) précédent, une fraction rationnelle $f \in \mathcal{F}_m(K)$ est tautologiquement une somme finie (pour la loi \oplus^N) de polynômes :

$$f = \frac{P_0}{b_0} \oplus^N \frac{P_1}{b_1} \oplus^N \dots \oplus^N \frac{P_r}{b_r} \quad .$$

2. Cette description en termes de fractions continues n'est bien adaptée que lorsque les coefficients sont dans un corps (où un élément non nul est inversible). En particulier les homotopies entre fractions rationnelles se décrivent mal dans ce formalisme.

b) Forme de Bézout

Soient m un entier et R un anneau.

Définition 1.2.5. Pour tout couple (A, B) de polynômes de $R[X]$ de degrés inférieurs ou égaux à m , on pose

$$\delta_{A,B}(X, Y) := \frac{A(X)B(Y) - A(Y)B(X)}{X - Y} = \sum_{1 \leq p, q \leq m} c_{p,q} X^{p-1} Y^{q-1}.$$

On note $\text{Béz}_m(A, B)$ la matrice $[c_{p,q}]_{1 \leq p, q \leq m}$.

Proposition 1.2.6 (Bézout). *La matrice $\text{Béz}_m(A, B)$ est symétrique : on a pour tous entiers $1 \leq p, q \leq m$*

$$c_{p,q} = c_{q,p} \quad .$$

De plus, on a la formule de Bézout

$$\det \text{Béz}_m(A, B) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \text{rés}_{m,m}(A, B).$$

DÉMONSTRATION — Plaçons-nous dans le cas universel, c'est-à-dire lorsque les coefficients a_0, \dots, a_m et b_0, \dots, b_m de A et de B sont des indéterminées et $R = \mathbf{Z}[a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m]$.

Les quantités $\text{rés}_{m,m}(A, B)$ et $\text{dét Béz}_m(A, B)$ sont des polynômes homogènes de même degré $2m$ en les a_i et b_j . Nous allons montrer que le premier polynôme divise le second. On en conclura qu'il existe une constante λ_m telle que l'on ait

$$\text{dét Béz}_m A, B = \lambda_m \text{rés}_{m,m}(A, B) \quad .$$

La détermination de la constante $\lambda_m = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ se fait par exemple en examinant le cas particulier $A = X^m$ et $B = 1$.

Soit k une clôture algébrique du corps des fractions de R . Dans k , les polynômes A et B sont scindés à racines simples. Puisque $\text{rés}_{m,m}(A, B)$ et $\text{dét Béz}_m(A, B)$ ont même multiplicativité par rapport aux coefficients dominants a_m et b_m , on peut supposer que l'on a $A = \prod_{1 \leq i \leq m} (X - \alpha_i)$ et $B = \prod_{1 \leq i \leq m} (X - \beta_i)$,

avec α_i et β_j des indéterminées. Le lemme suivant montre qu'alors pour tout i et pour tout j le polynôme $(\alpha_i - \beta_j)$ divise $\text{dét Béz}_m(A, B)$ et donc que $\text{rés}_{m,m}(A, B)$ divise $\text{dét Béz}_m(A, B)$.

Lemme 1.2.7. *Si A et B ont une racine en commun dans k , alors on a $\text{dét Béz}_m(A, B) = 0$.* □

Définition 1.2.8. Soit f un endomorphisme pointé de \mathbf{P}^1 de degré m . On écrit $f = \frac{A}{B}$ avec A unitaire de degré m et l'on appelle alors *forme de Bézout* de f la forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\text{Béz}(f)$ de K^m dont la matrice dans la base canonique est $\text{Béz}_m(A, B)$.

Remarque 1.2.9. Pour une définition plus conceptuelle de la forme de Bézout en termes de dualité de Serre, on renvoie le lecteur à l'exemple III.4.8 de [GKZ94].

Notation: Soit \mathcal{S}_m le schéma des matrices $m \times m$ symétriques inversibles. Nous notons \mathcal{S} le schéma des matrices symétriques inversibles, c'est-à-dire $\mathcal{S} := \coprod_{m \geq 0} \mathcal{S}_m$.

Les considérations précédentes définissent un morphisme de schémas

$$\text{Béz}_m : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{S}_m \quad .$$

Ce morphisme induit une application $(\pi_0 \mathcal{F}_m)(K) \longrightarrow (\pi_0 \mathcal{S}_m)(K)$. Pour montrer que l'on obtient ainsi un invariant d'homotopie intéressant, nous commençons par déterminer $(\pi_0 \mathcal{S}_m)(K)$.

Proposition 1.2.10. *Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Pour tout entier positif m , l'ensemble $(\pi_0 \mathcal{S}_m)(K)$ s'identifie aux orbites sous l'action de $\mathbf{SL}_m(K)$ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur K^m . Autrement dit, on a une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{S}_m)(K) \simeq \mathcal{S}_m(K) / \mathbf{SL}_m(K) \quad .$$

Remarque 1.2.11. La proposition précédente serait fautive sur un anneau R dans lequel 2 n'est pas inversible. Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_2(K[T])$$

définit une homotopie algébrique entre $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ bien que ces matrices ne soient pas $\mathbf{SL}_2(R)$ -équivalentes.

Nous donnons deux démonstrations du Théorème 1.2.10 : la première est destinée au lecteur pressé qui ne s'intéresse qu'au calcul de $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ sur un corps de caractéristique différente de 2. La seconde, qui est donnée à l'Annexe A (c.f. Proposition A.0.9), n'utilise que des notions élémentaires d'algèbre linéaire.

Elle sera utilisée au § 1.3.c) pour déterminer $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}$ sur un corps de caractéristique quelconque. Cette seconde démonstration est basée sur l'inégalité de Hermite pour les formes bilinéaires symétriques sur l'anneau principal $K[T]$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2.10 — Soient m un entier positif et $S(T)$ un $K[T]$ -point de \mathcal{S}_m . D'après un théorème de Karoubi (*c.f.* [Oja84], Theorem 2), on a un isomorphisme canonique entre les groupes de Witt $W(K) \simeq W(K[T])$ puisque $\text{car}(K) \neq 2$. Ceci assure que les formes bilinéaires symétriques sur K^m associées aux matrices symétriques $S(0)$ et $S(1)$ sont égales dans $W(K)$. Puisque K est un corps, deux formes égales dans $W(K)$ sont même équivalentes. Comme l'on a $\det S(0) = \det S(1)$, ces deux matrices sont $\mathbf{SL}_m(K)$ -équivalentes.

Réciproquement, soient $S_0 \in \mathcal{S}_m(K)$ et $P_1 \in \mathbf{SL}_m(K)$ et posons $S_1 = {}^t P_1 S_0 P_1$. Une décomposition de P_1 en produit de matrices élémentaires fournit un élément $P(T) \in \mathbf{SL}_m(K[T])$ reliant id_m à P_1 . Le $\mathcal{S}_m(K[T])$ -point ${}^t P(T) S_0 P(T)$ relie donc S_0 à S_1 . \square

La Proposition 1.2.10 admet une reformulation en termes du monoïde de Witt $\text{MW}(K)$.

Définition 1.2.12. Pour tout anneau R , on appelle monoïde de Witt de R , et l'on note $\text{MW}(R)$ le monoïde (pour la somme directe \oplus) gradué (par le degré) des classes d'isomorphisme de formes bilinéaires symétriques sur R non dégénérées.

Remarque 1.2.13. L'énoncé de la Proposition 1.2.10 se reformule donc comme suit. Pour tout corps K de caractéristique différente de 2, l'application canonique

$$(\pi_0 \mathcal{S})(K) \xrightarrow[\simeq]{[-] \times \det} \text{MW}(K) \times_{\substack{K^\times \\ / K^{\times 2}}} K^\times$$

est un isomorphisme de monoïdes gradués.

Ce qui précède montre que, sur un corps K de caractéristique différente de 2, la classe de $\mathbf{SL}_m(K)$ -équivalence de la forme de Bézout d'une fraction rationnelle pointée de degré m est un invariant d'homotopie naïve pointée. Il est clair que l'on retrouve ainsi les invariants déjà mis en évidence : le degré se retrouve comme la dimension de la forme de Bézout, tandis que le résultant est, à un signe près, le déterminant de cette forme.

Exemple 1.2.14.

1. Lorsque $K = \mathbf{C}$, on a un isomorphisme

$$(\pi_0 \mathcal{S})(\mathbf{C}) \xrightarrow[\det \times \dim]{\simeq} \mathbf{C}^\times \times \mathbf{N} \quad .$$

L'invariant donné par la classe de $\mathbf{SL}(\mathbf{C})$ -équivalence de la forme de Bézout d'une fraction rationnelle n'est que la conjonction des invariants résultant et degré.

2. Lorsque $K = \mathbf{R}$, on a

$$(\pi_0 \mathcal{S})(\mathbf{R}) \xrightarrow[\det \times \text{sign}]{\simeq} \mathbf{R}^\times \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \quad ,$$

sign désignant la signature. La classe de $\mathbf{SL}(\mathbf{R})$ -équivalence de la forme de Bézout d'une fraction rationnelle fournit un invariant plus fin que le degré et le résultant. Si l'on veut penser topologiquement, nous venons de montrer que le degré topologique de l'application sous-jacente $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ est invariant par homotopies naïves.

c) Matrices de Hankel

Soit m un entier positif. Nous avons vu comment au § 1.2.b) comment associer à toute fraction rationnelle f une matrice symétrique non-dégénérée en lui associant sa matrice de Bézout. Réciproquement, étant donnée une matrice symétrique S non-dégénérée, existe-t-il une fraction rationnelle f telle que l'on ait l'identité $\text{Béz}(f) = S$? De plus, une telle fraction rationnelle f est-elle unique?

Pour des raisons de dimension assez grossières — dues à ce que le schéma \mathcal{F}_m est de dimension $2m$ tandis que le schéma \mathcal{S}_m est de dimension $\frac{m(m+1)}{2}$ — on constate que le morphisme Béz_m ne peut pas être surjectif pour $m \geq 4$. Voici comment décrire son image.

Définition 1.2.15. On dit qu'une matrice symétrique S est de Hankel si ses coefficients $s_{p,q}$ ne dépendent que de la valeur de $p + q$. Pour tout entier positif m , on note \mathcal{H}_m le sous-schéma fermé de \mathcal{S}_m formé des matrices de Hankel $m \times m$ non dégénérées.

Théorème 1.2.16. Soit R un anneau et S une matrice symétrique $m \times m$ non dégénérée à coefficients dans R (c'est-à-dire un R -point de \mathcal{S}_m). Alors :

1. Il existe une fraction rationnelle $f \in \mathcal{F}_m(R)$ telle que l'on ait $\text{Béz}_m(f) = S$ si et seulement si la matrice S^{-1} est de Hankel.
2. Si g est une autre fraction rationnelle telle que l'on ait $\text{Béz}(g) = S$, alors il existe un scalaire $r \in R$ (nécessairement unique) tel que l'on ait $g = f + r$.

DÉMONSTRATION — La démonstration est donnée dans le Lemme 1.2.17, le Lemme 1.2.19 et la Proposition 1.2.20 ci-après. □

Lemme 1.2.17. Soient R un anneau, m un entier positif et $f = \frac{A}{B} \in \mathcal{F}_m(R)$ une fraction rationnelle. Alors la matrice $\text{Béz}_m(f)^{-1}$ est de Hankel.

DÉMONSTRATION — Plaçons nous dans le cas universel où les coefficients de A et B sont des indéterminées et travaillons dans une clôture algébrique du corps des fractions de $R = \mathbf{Z}[a_i, b_j]$, disons k .

Le polynôme A est scindé à racines simples dans k ; notons $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$ ses racines. Soit E la k -algèbre étale $k[X]/(A)$. Nous allons montrer que la matrice $\text{Béz}_m(f)^{-1}$ est la matrice, dans la base canonique $(1, X, \dots, X^{m-1})$ de E , de la forme trace suivante

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow k \\ (P, Q) &\longmapsto \text{tr}_{E/k} \left(\frac{PQ}{AB} \right) \end{aligned}$$

Le terme générique de cette matrice est $\text{tr}_{E/k} \left(\frac{X^{p+q}}{AB} \right)$ si bien que cette matrice est effectivement de Hankel.

Soit V la matrice de Vandermonde des racines de A , c'est-à-dire

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{bmatrix} .$$

Par définition de $\text{Béz}_m(A, B)$, on a l'identité

$${}^tV \cdot \text{Béz}_m(A, B) \cdot V = [\delta_{A,B}(\alpha_p, \alpha_q)]$$

On constate que l'on a pour tout entier $1 \leq p, q \leq m$,

$$\delta_{A,B}(\alpha_p, \alpha_q) = \begin{cases} A'(\alpha_p)B(\alpha_p) & \text{lorsque } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ceci montre que la matrice $\text{Béz}_m(f)^{-1}$ est bien la matrice de la forme trace décrite ci-dessus. □

Remarque 1.2.18. Reprenons les notations de la démonstration du Lemme 1.2.17 ci-dessus. Soit également ρ la forme linéaire *résidu*

$$\begin{aligned} \rho : E &\longrightarrow k \\ X^i &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si l'on a } i = m - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Par une identité classique due à Euler (*c.f.* [Ser68]), on a

$$\forall P \in E, \quad \rho(P) = \operatorname{tr}_{E/k} \left(\frac{P}{A'} \right) .$$

La matrice $\operatorname{Béz}_m(A, B)^{-1}$ est donc la matrice de la forme bilinéaire symétrique $(P, Q) \mapsto \rho \left(\frac{PQ}{B} \right) = \rho(PQV)$, où V est un polynôme fournissant la relation de Bézout $AU + BV = 1$.

On en déduit l'algorithme suivant pour calculer la matrice de Hankel $\operatorname{Béz}_m(A, B)^{-1}$. On développe formellement dans $R[X, X^{-1}]$

$$\frac{V}{A} = s_1 X^{-1} + s_2 X^{-2} + \cdots + s_{2m-1} X^{-(2m-1)} + s_{2m} X^{-2m} + O(X^{-(2m+1)}) .$$

On a alors

$$\operatorname{Béz}_m(A, B)^{-1} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_m \\ s_2 & s_3 & \cdots & \cdots & s_{m+1} \\ s_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & \cdots & s_{2m-1} \end{bmatrix} .$$

Lemme 1.2.19. Soient R un anneau, m un entier positif et $f = \frac{A}{B} \in \mathcal{F}_m(R)$ une fraction rationnelle. Pour tout scalaire $r \in R$, on a l'identité

$$\operatorname{Béz}_m(f + r) = \operatorname{Béz}_m(f) .$$

DÉMONSTRATION — Pour tout $r \in R$, on a l'identité

$$\delta_{A+rB, B}(X, Y) = \delta_{A, B}(X, Y) .$$

□

Notations: Soit R un anneau et m un entier positif.

- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{F}_m(R)$, il existe un unique couple (U_1, V_1) de polynômes de degré $\leq m - 1$ tel que l'on ait

$$AU_1 + BV_1 = X^{2m-1} .$$

On définit un morphisme de schémas $v_{m-1} : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathbf{A}^1$ en associant au couple (A, B) l'opposé du coefficient de X^{m-1} dans V_1 .

Remarquer que le scalaire $v_{m-1}(A, B)$ défini ci-dessus est également l'opposé du coefficient s_{2m} de X^{-2m} dans le développement formel de $\frac{V}{A}$ à la Remarque 1.2.18 précédente.

- On note \mathbf{G}_a le groupe additif, c'est-à-dire $\mathbf{G}_a = \mathbf{A}^1$ muni de sa structure de schéma en groupe.
- Le schéma \mathcal{F}_m est muni d'une action libre de \mathbf{G}_a décrite au niveau de ses points par

$$r \cdot (A, B) = (A + rB, B) .$$

Remarquer qu'alors le morphisme de schémas $v_{m-1} : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathbf{A}^1$ est \mathbf{G}_a -équivariant.

- On note Hank_m le morphisme de schémas

$$\begin{aligned} \operatorname{Hank}_m : \mathcal{F}_m &\longrightarrow \mathcal{H}_m \\ (A, B) &\longmapsto \operatorname{Béz}_m(A, B)^{-1} \end{aligned}$$

Proposition 1.2.20. *Le morphisme*

$$\mathcal{F}_m \xrightarrow{\text{Hank}_m \times v_{m-1}} \mathcal{H}_m \times \mathbf{A}^1$$

est un isomorphisme de \mathbf{G}_a -schémas.

DÉMONSTRATION — Nous venons de remarquer que ce morphisme est bien équivariant.

La remarque 1.2.18 dicte comment construire le morphisme inverse.

Soit

$$\begin{aligned} \varphi_m : \mathcal{H}_m \times \mathbf{A}^1 &\longrightarrow \mathcal{F}_m \\ (H, v) &\longmapsto (A, B) \end{aligned}$$

où A est le polynôme unitaire de degré m dont les coefficients a_i sont donnés par

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{m-2} \\ a_{m-1} \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} -s_{m+1} \\ -s_{m+2} \\ \dots \\ -s_{2m-1} \\ v \end{bmatrix},$$

et où B est l'unique polynôme de degré $\leq m - 1$ donné par la relation de Bézout $AU + BV = 1$ avec $V = E((\sum_{i=1}^m s_i X^{-i})A)$, E désignant la partie entière.

On vérifie que φ_m est inverse de $\text{Hank}_m \times v_{m-1}$. □

Remarques 1.2.21.

1. Le schéma \mathcal{F}_m est un \mathbf{G}_a -torseur au-dessus du schéma affine \mathcal{H}_m . Il n'est pas étonnant que ce toseur soit trivial puisqu'il en est toujours ainsi au-dessus d'une base affine.
2. La relation entre fractions rationnelles et matrices de Hankel que nous avons dégagée ici est classique depuis le XIX-ème siècle.

En observant que dans le cas $m = 2$, le schéma des matrices de Hankel \mathcal{H}_2 coïncide avec le schéma des matrices symétriques \mathcal{S}_2 , on obtient le corollaire suivant. *Ce corollaire est important pour la suite.*

Corollaire 1.2.22. *On a un isomorphisme de foncteurs*

$$\pi_0 \mathcal{F}_2 \simeq \pi_0 (\mathcal{S}_2 \times \mathbf{A}^1) \simeq \pi_0 \mathcal{S}_2 \quad .$$

Remarque 1.2.23. Une façon concrète de construire des homotopies dans $\mathcal{S}_m(K)$ est de décomposer les matrices de $\mathbf{SL}_m(K)$ en produit de matrices élémentaires. En particulier, on constate que si deux matrices symétriques sont homotopes, alors on peut passer de l'une à l'autre en une seule homotopie.

On déduit du Corollaire 1.2.22 ci-dessus qu'il en est de même pour les fractions rationnelles de degré 2 : toutes les homotopies peuvent se faire sans intermédiaire.

Une question amusante, quoiqu'anecdotique, est de déterminer s'il en est ainsi en toute dimension.

d) Théorème principal

i) Énoncé

La forme de Bézout nous a permis au paragraphe précédent de construire un invariant d'homotopie Béz : $(\pi_0 \mathcal{F})(K) \longrightarrow (\pi_0 \mathcal{S})(K)$. Le théorème suivant montre qu'il s'agit en fait du seul.

Théorème 1.2.24. *L'application Béz est un isomorphisme de monoïdes gradués*

$$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}} \simeq (\pi_0 \mathcal{F})(K) = \coprod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{F}_m)(K) \xrightarrow{\text{Béz}_m} \coprod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{S}_m)(K) = (\pi_0 \mathcal{S})(K) \quad ,$$

$(\pi_0 \mathcal{S})(K)$ étant muni de sa structure de monoïde gradué usuelle donnée par la somme orthogonale \oplus .

Corollaire 1.2.25. *Puisque le monoïde $(\pi_0\mathcal{S}(K), \oplus)$ est abélien, il en est de même du monoïde $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N, \oplus^N)$.*

Remarque 1.2.26.

1. Pour l'instant, nous n'avons décrit le monoïde $(\pi_0\mathcal{S})(K)$ que dans le cas où K est de caractéristique différente de 2. Nous donnons une description de ce monoïde sans hypothèse sur la caractéristique au §1.3.c). Cependant l'énoncé du Théorème 1.2.24 ci-dessus ainsi que sa démonstration ci-après sont valables *sans restriction*.
2. Le Corollaire 1.2.22 a déjà montré que Béz_2 induit une bijection entre $(\pi_0\mathcal{F}_2)(K)$ et $(\pi_0\mathcal{S}_2)(K)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2.24 — On procède en deux temps. On montre d'abord la surjectivité puis l'injectivité de l'application Béz : $\prod_{m \geq 0} (\pi_0\mathcal{F}_m)(K) \longrightarrow \prod_{m \geq 0} (\pi_0\mathcal{S}_m)(K)$.

ii) Surjectivité de Béz

Le monoïde $\prod_{m \geq 0} (\pi_0\mathcal{S}_m)(K)$ est engendré par $(\pi_0\mathcal{S}_1)(K)$ (par exemple, sur un corps de caractéristique différente de 2, toute forme bilinéaire symétrique est diagonalisable). Pour montrer la surjectivité de l'application Béz, il suffit donc de montrer que l'application Béz respecte les lois d'addition \oplus^N et \oplus , puisque $\text{Béz}_1 : (\pi_0\mathcal{F}_1)(K) \longrightarrow (\pi_0\mathcal{S}_1)(K)$ est surjective.

Lemme 1.2.27. *Soient (A, B) un K -point de \mathcal{F}_m et $u \in K^\times$. Alors, la forme de Bézout de $\frac{X}{u} \oplus^N \frac{A}{B}$ est $\mathbf{SL}_{m+1}(K)$ -équivalente à la forme diagonale par blocs $\langle u \rangle \oplus \text{Béz}_m(A, B)$.*

DÉMONSTRATION — On a $\frac{X}{u} \oplus^N \frac{A}{B} = \frac{XA - \frac{B}{u}}{uA}$. De plus, en reprenant les notations de la Définition 1.2.5, on a

$$\delta_{XA - \frac{B}{u}, uA}(X, Y) = uA(X)A(Y) + \delta_{A,B}(X, Y) \quad .$$

Il en résulte que dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1}, A(X))$, la forme de Bézout est diagonale par blocs comme annoncé. \square

Notations: Soit u_1, \dots, u_m une liste d'éléments de K^\times .

- Nous notons $[u_1, \dots, u_m]$ la fraction rationnelle pointée $\frac{X}{u_1} \oplus^N \dots \oplus^N \frac{X}{u_m}$ de $\mathcal{F}_m(K)$.
- Nous notons $\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ la forme bilinéaire symétrique diagonale $\langle u_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle u_m \rangle \in \mathcal{S}_m(K)$.

Corollaire 1.2.28. *Soit m entier positif et $u_1, \dots, u_m \in K^\times$ une liste d'unités .*

1. *La forme de Bézout d'une fraction rationnelle de la forme $[u_1, \dots, u_m]$ est $\mathbf{SL}_m(K)$ -équivalente à la forme diagonale $\langle u_1, \dots, u_m \rangle$.*
2. *En particulier, puisque sur un corps toute forme bilinéaire symétrique est \mathbf{SL} -équivalente à une forme diagonale, on en déduit que l'application Béz est surjective.*

iii) Injectivité de Béz

Soit m un entier fixé et montrons l'injectivité de l'application $\text{Béz}_m : (\pi_0\mathcal{F}_m)(K) \longrightarrow (\pi_0\mathcal{S}_m)(K)$.

Lemme 1.2.29. *Soit f une fraction rationnelle pointée de degré m . Alors, il existe des unités u_1, \dots, u_m dans K^\times telles que l'on ait*

$$f \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} [u_1, \dots, u_m] \quad .$$

DÉMONSTRATION — On procède par récurrence sur le degré m .

Puisque f est tautologiquement une somme $P_1 \oplus^N \dots \oplus^N P_k$ de polynômes $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ de $K[X]$ (c.f. Remarque 1.2.4 (1)), on peut supposer que f est un polynôme. On a vu à l'Exemple 1.1.26 (1) qu'un polynôme est toujours homotope à son monôme dominant. Nous sommes donc ramenés à traiter le cas

d'un monôme $\frac{X^m}{u}$ avec $u \in K^\times$.

D'après l'Exemple 1.1.26 (2), l'élément $\frac{X^m}{TX^{m-1}+u} \in \mathcal{F}_m(K[T])$ définit une homotopie entre $\frac{X^m}{u}$ et $\frac{X^m}{X^{m-1}+u}$. Cette dernière fraction rationnelle se décompose sous la forme $X \oplus^N g$ où g est une fraction rationnelle pointée de degré $m-1$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à g . \square

Corollaire 1.2.30. *Il résulte du Lemme 1.2.29 précédent et du Lemme 1.2.27 que l'application*

$$\text{Béz} : \left(\prod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{F}_m)(K), \oplus^{\mathbb{N}} \right) \longrightarrow \left(\prod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{S}_m)(K), \oplus \right)$$

est bien un morphisme de monoïdes gradués.

D'après le Lemme 1.2.29 précédent, l'injectivité de Béz_m se reformule en l'énoncé de la proposition suivante.

Proposition 1.2.31. *Soient $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ des éléments de K^\times . Si les formes diagonales $\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ et $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ sont $\mathbf{SL}_m(K)$ -équivalentes alors on a la relation $[u_1, \dots, u_m] \stackrel{p}{\sim} [v_1, \dots, v_m]$ dans $\mathcal{F}_m(K)$.*

DÉMONSTRATION — Le Lemme 1.2.33 suivant permet de se ramener au cas particulier $m=2$, où le théorème a déjà été démontré (c.f. Corollaire 1.2.22). \square

Définition 1.2.32. On dit que deux formes diagonales $\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ et $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ sont équivalentes par une \mathbf{SL}_2 -transformation élémentaire s'il existe un indice $1 \leq i \leq m-1$ tel que :

- les 2-formes $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ et $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ soient $\mathbf{SL}_2(K)$ -équivalentes;
- pour tout indice $j \neq i, i+1$, on ait $u_j = v_j$.

On notera $\langle u_i, u_{i+1} \rangle \rightsquigarrow \langle v_i, v_{i+1} \rangle$ une telle transformation.

Le lemme suivant est démontré dans [MH73], Chapter III, Lemma 5.6, où il permet de donner une présentation du groupe $\text{GW}(K)$ par générateurs et relations. Ce lemme est vrai en toute caractéristique.

Lemme 1.2.33. *Deux formes diagonales $\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ et $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ sont $\mathbf{SL}_m(K)$ -équivalentes si et seulement s'il existe une suite finie de $\mathbf{SL}_2(K)$ -transformations élémentaires permettant de passer de l'une à l'autre.*

DÉMONSTRATION — On procède par récurrence sur m .

Le cas $m=2$ est trivial.

Si $m \geq 3$, supposons tout d'abord les deux formes anisotropes. L'équation

$$v_1 = u_1 \lambda_1^2 + \dots + u_m \lambda_m^2$$

a une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^m$. Soit $\ell \geq 1$ le nombre d'indices i tels que $\lambda_i \neq 0$ et montrons l'assertion par une nouvelle récurrence sur ℓ .

- Si $\ell = 1$, on peut supposer que l'on a $v_1 = \lambda_1^2 u_1$. La transformation $\langle u_1, u_2 \rangle \rightsquigarrow \langle v_1, \frac{u_2}{\lambda_1^2} \rangle$ nous permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\langle \frac{u_2}{\lambda_1^2}, \dots, u_m \rangle$ et $\langle v_2, \dots, v_m \rangle$.
- Si $\ell \geq 2$, soient i et j des indices tels que $\lambda_i \neq 0$ et $\lambda_j \neq 0$. Par une suite de transformations élémentaires, on peut supposer que i et j sont consécutifs, disons $j = i+1$. Puisque la forme est anisotrope, $\lambda_i^2 u_i + \lambda_{i+1}^2 u_{i+1} \neq 0$ et la \mathbf{SL}_2 -transformation élémentaire

$$\langle u_i, u_{i+1} \rangle \rightsquigarrow \left\langle \lambda_i^2 u_i + \lambda_{i+1}^2 u_{i+1}, \frac{u_i u_{i+1}}{\lambda_i^2 u_i + \lambda_{i+1}^2 u_{i+1}} \right\rangle$$

fait diminuer strictement l'entier ℓ .

Supposons maintenant les deux formes isotropes. Soit alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ une solution non triviale de l'équation

$$\lambda_1^2 u_1 + \dots + \lambda_m^2 u_m = 0 \quad .$$

Notons encore $l \geq 2$ le nombre d'indices i tels que $\lambda_i \neq 0$. Nous allons montrer ci-après que par une série de transformations élémentaires on peut se ramener à avoir $u_2 = -\frac{1}{u_1}$ et $v_2 = -\frac{1}{v_1}$. On conclut alors en appliquant l'hypothèse de récurrence à $[u_3, \dots, u_m]$ et $[v_3, \dots, v_m]$.

Reste à montrer l'affirmation précédente. On procède par récurrence sur l'entier ℓ .

- Si $\ell = 2$, on peut supposer que l'on a $\lambda_1^2 u_1 + \lambda_2^2 u_2 = 0$, i.e. $-\frac{1}{u_1} = \mu^2 u_2$ pour $\mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 u_1}$. Alors, la transformation élémentaire $\langle u_2, u_3 \rangle \rightsquigarrow \langle -\frac{1}{u_1}, \frac{u_3}{\mu^2} \rangle$ convient.
- Si $\ell \geq 3$, on peut supposer avoir $\lambda_1^2 u_1 + \lambda_2^2 u_2 \neq 0$. Alors la transformation élémentaire

$$\langle u_1, u_2 \rangle \rightsquigarrow \langle \lambda_1^2 u_1 + \lambda_2^2 u_2, \frac{u_1 u_2}{\lambda_1^2 u_1 + \lambda_2^2 u_2} \rangle$$

fait diminuer strictement la valeur de ℓ . □

e) Comparaison entre $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$

On rappelle que l'on note $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$ la catégorie homotopique des espaces de l'homotopie motivique.

Définition 1.2.34. Soit $X \in \mathcal{E}sp$ un espace. On note Σ^s le foncteur suspension par rapport à la sphère simpliciale. Autrement dit, on a par définition

$$\Sigma^s X := \text{hocolim} \left(\begin{array}{ccc} \text{pt} & & \text{pt} \\ & \swarrow & \searrow \\ & X & \end{array} \right)$$

Lemme 1.2.35. On a une équivalence d'homotopie dans $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$

$$\mathbf{P}^1 \approx \Sigma^s \mathbf{G}_m \quad .$$

DÉMONSTRATION — Le schéma \mathbf{P}^1 est réunion de deux sous-schémas ouverts isomorphes à des droites affines le long de leur intersection $\mathbf{A}^1 - \{0\} =: \mathbf{G}_m$. D'après la propriété de Mayer-Vietoris (c.f. [Mor99], Théorème 3.1.1), l'application canonique

$$\text{hocolim} \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^1 & & \mathbf{A}^1 \\ & \swarrow & \searrow \\ & \mathbf{G}_m & \end{array} \right) \xrightarrow{\approx} \mathbf{P}^1$$

est une équivalence d'homotopie. De plus, dans la transformation naturelle de diagrammes suivante

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}^1 & \overset{\text{pr}}{\underset{\approx}{\dashrightarrow}} & \text{pt} & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ & \mathbf{A}^1 & \overset{\text{pr}}{\underset{\approx}{\dashrightarrow}} & \text{pt} & \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nearrow & \\ \mathbf{G}_m & \overset{\text{pr}}{\underset{\approx}{\dashrightarrow}} & \mathbf{G}_m & & \end{array}$$

toutes les applications horizontales sont des équivalences d'homotopie. Il en résulte formellement que l'application induite entre les colimites homotopiques est une équivalence d'homotopie. □

Corollaire 1.2.36. *L'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ est naturellement muni d'une structure de groupe. Nous notons \oplus^{mot} sa loi.*

Il ne peut donc pas y avoir de bijection entre les ensembles $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbb{N}}$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$: une fraction rationnelle est de degré nécessairement positif alors que $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ contient des éléments de tous degrés. Mis à part ce défaut, le calcul de F. Morel montre que l'ensemble des classes d'homotopie naïve est aussi proche que possible de l'ensemble des classes d'homotopie motivique. Le groupe $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}})$ est *abstraitement* isomorphe au groupe de Grothendieck du monoïde $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbb{N}}, \oplus^{\mathbb{N}})$.

Théorème 1.2.37 (Morel, [Mor08] Theorem 4.36). *On a un isomorphisme de groupes*

$$([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}}) \simeq \text{GW}(K) \times_{K^\times / K^{\times 2}} K^\times,$$

où $\text{GW}(K)$ désigne le groupe de Grothendieck-Witt de K et où le membre de droite est muni de sa structure naturelle de groupe.

Conjecture 1.A. *L'application canonique*

$$([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbb{N}}, \oplus^{\mathbb{N}}) \longrightarrow ([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}})$$

est une complétion en groupe.

Remarque 1.2.38. La raison pour laquelle il ne découle pas directement du Théorème 1.2.37 que l'application canonique $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbb{N}} \longrightarrow [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ est une complétion en groupe est qu'il n'est pas évident que la loi d'addition naïve $\oplus^{\mathbb{N}}$ sur les fractions rationnelles pointées soit compatible à la loi d'addition \oplus^{mot} donnée par le fait que \mathbf{P}^1 est une suspension dans $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$.

1.3 Généralisations

Nous présentons maintenant quelques prolongements naturels au calcul des classes d'homotopie pointée d'endomorphismes de \mathbf{P}^1 .

a) Classes d'homotopie libre

Soient m un entier positif et $f = \frac{A}{B}$ un endomorphisme de \mathbf{P}^1 de degré m . Puisque le couple de polynômes (A, B) est seulement défini à la multiplication par un scalaire non nul près, la forme bilinéaire $\text{Béz}_m(A, B)$ n'est définie qu'à la multiplication par le carré d'un scalaire non nul près. Considérons l'action de $\mathbf{SL}_m(K) \times K^\times$ sur $\mathcal{S}_m(K)$ donnée par $(P, a) \cdot S = a^2 {}^tPSP$. Nous allons montrer que l'orbite de la forme de Bézout sous cette action est le seul invariant d'homotopie.

Théorème 1.3.1. *On a une bijection canonique d'ensembles gradués*

$$\langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle^{\mathbb{N}} = \coprod_{m \geq 0} \langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle_m^{\mathbb{N}} \xrightarrow[\simeq]{\text{Béz}_m} \coprod_{m \geq 0} \mathcal{S}_m(K) / (\mathbf{SL}_m(K) \times K^\times).$$

Remarque 1.3.2.

1. Là encore on peut exprimer le résultat en terme du monoïde de Grothendieck-Witt $\text{MW}(K)$. Pour tout entier positif m , on a une bijection

$$\langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle_m^{\mathbb{N}} \simeq \text{MW}_m(K) \times_{K^\times / K^{\times 2m}} K^\times$$

2. L'énoncé du Théorème 1.3.1 est moins esthétique que celui du Théorème 1.2.24 car l'on ne sait pas munir *naturellement* l'ensemble $\langle \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \rangle^N$ d'une structure de monoïde.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3.1 — Le théorème est une conséquence du Théorème 1.2.24 et du Lemme 1.3.3 suivant. \square

Lemme 1.3.3.

1. Toute fraction rationnelle libre est homotope à une fraction rationnelle pointée.
2. Soient f et g deux fractions rationnelles pointées. Alors, on a la relation $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ si et seulement s'il existe une unité $\lambda \in K^\times$ telle que l'on ait $f \stackrel{\mathfrak{P}}{\sim} \lambda^2 g$.

DÉMONSTRATION —

1. Soit $f = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle et soit $\alpha \in \mathbf{SL}_2(K)$ une matrice telle que l'on ait $\alpha \cdot \infty = f(\infty)$ (pour l'action usuelle de $\mathbf{SL}_2(K)$ sur $\mathbf{P}^1(K)$). Soit $\alpha(T)$ un chemin algébrique dans $\mathbf{SL}_2(K[T])$ reliant α à id , par exemple obtenu en décomposant α en produit de matrices élémentaires. Le vecteur $\alpha(T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ fournit une homotopie entre f et la fraction rationnelle pointée $\alpha^{-1} \cdot f$.
2. Supposons que l'on ait $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ et montrons qu'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que l'on ait $f \stackrel{\mathfrak{P}}{\sim} \lambda^2 g$.
Soit

$$f = f_0 \underset{F_0(T)}{\sim} f_1 \cdots \underset{F_{N-1}(T)}{\sim} f_N$$

une suite d'homotopies libres entre f et g . Soit $\alpha_0(T) \in \mathbf{SL}_2(K[T])$ telle que l'on ait $F_0(T, \infty) = \alpha_0(T) \cdot \infty$ et $\alpha_0(0) = \text{id}$. Le chemin $\alpha_0(T)^{-1} \cdot F_0(T)$ est une homotopie pointée entre les deux fractions rationnelles pointées f_0 et $\alpha_0(1)^{-1} \cdot f_1$. De plus, si $N > 1$, on a une suite d'homotopies libres de longueur $N - 1$

$$\alpha_0(1)^{-1} \cdot f_1 \underset{\alpha_0(1-T)^{-1} F_1(T)}{\sim} f_2 \underset{F_2(T)}{\sim} \cdots \underset{F_{N-1}(T)}{\sim} f_N$$

de sorte qu'on peut conclure par récurrence si l'on traite le cas $N = 1$.

Lorsque $N = 1$, $\alpha_0(1)^{-1}$ est de la forme $\begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$. On constate alors que $\begin{bmatrix} 1 & T\lambda\mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha_0(T)^{-1} \cdot F_0(T)$ est une homotopie pointée entre f_0 et $\lambda^2 f_1$.

Réciproquement, pour tout $\lambda \in K^\times$, un chemin dans $\mathbf{SL}_2(K[T])$ entre id et la matrice $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ montre qu'une fraction rationnelle f est librement homotope à $\lambda^2 f$. \square

b) Composition de fractions rationnelles

Les endomorphismes pointés de \mathbf{P}^1 se composent. Il résulte de ce constat que l'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ est muni d'une seconde loi de monoïde, que nous noterons \circ .

Attention: Le triplet $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N, \oplus^N, \circ)$ n'est pas un semi-anneau : on n'a distributivité de \circ par rapport à \oplus^N qu'à gauche, c'est-à-dire que l'on a pour tout triplet (f, g_1, g_2) de fractions rationnelles pointées

$$f \circ (g_1 \oplus^N g_2) \stackrel{\mathfrak{P}}{\sim} (f \circ g_1) \oplus^N (f \circ g_2) \quad ,$$

mais en général, on n'a pas

$$(g_1 \oplus^N g_2) \circ f \stackrel{\mathfrak{P}}{\sim} (g_1 \circ f) \oplus^N (g_2 \circ f) \quad .$$

Définition 1.3.4. On munit le monoïde $\text{MW}(K) \times_{K^\times/K^{\times 2}} K^\times$ de la loi de composition, notée \circ , suivante :

$$(b_1, \lambda_1) \circ (b_2, \lambda_2) := (b_1 \otimes b_2, \lambda_1^{\dim b_2} \lambda_2^{(\dim b_1)^2}) \quad .$$

Cette loi est associative et munit $\text{MW}(K) \times_{K^\times/K^{\times 2}} K^\times$ d'une nouvelle structure de monoïde.

Théorème 1.3.5. L'application suivante induit un isomorphisme de « bi-monoïdes » gradués :

$$\begin{aligned} ([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N, \oplus^N, \circ) &\longrightarrow (\text{MW}(K) \times_{K^\times/K^{\times 2}} K^\times, \oplus, \circ) \\ f &\longmapsto [\text{Béz}(f), \text{rés}(f)] \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION — Puisqu'à homotopie près toute fraction rationnelle est une somme (pour \oplus^N) de fractions rationnelles de degré 1, le Théorème 1.3.5 est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 1.3.6. Soient $a \in K^\times$ un scalaire, m et n deux entiers positifs, $f = \frac{A}{B} \in \mathcal{F}_m(K)$ et $g = \frac{C}{D} \in \mathcal{F}_n(K)$. Alors

1. On a $a \frac{X}{a} \circ f = \frac{1}{a} f$.
2. On a dans $\text{MW}(K)$, l'identité

$$\text{Béz}_{(m+1)n}((X \oplus^N f) \circ g) = \text{Béz}_n(g) \oplus^N \text{Béz}_{mn}(f \circ g) \quad .$$

3. On a l'identité :

$$\det \text{Béz}_{(n+1)m}((X \oplus^N f) \circ g) = \det \text{Béz}_n(g)^{2m+1} \cdot \det \text{Béz}_{nm}(f \circ g) \quad .$$

DÉMONSTRATION —

1. Cela est vrai par définition.
2. Soient $\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}$ la fraction rationnelle représentant $f \circ g$. On a donc par définition :

$$\tilde{A}(X) = \sum_{i=0}^m a_i C(X)^i D(X)^{m-i} \quad \text{et} \quad \tilde{B}(X) = \sum_{i=0}^m b_i C(X)^i D(X)^{m-i} \quad .$$

Puisque l'on a $X \oplus^N \frac{A}{B} = X - \frac{B}{A}$, l'endomorphisme $(X \oplus^N f) \circ g$ est représenté par la fraction rationnelle

$$\frac{C}{D} - \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} = \frac{C\tilde{A} - D\tilde{B}}{D\tilde{A}} \quad .$$

De plus, on a l'identité

$$\delta_{C\tilde{A} - D\tilde{B}, D\tilde{A}}(X, Y) = \tilde{A}(X)\tilde{A}(Y)\delta_{C,D}(X, Y) + D(X)D(Y)\delta_{\tilde{A}, \tilde{B}}(X, Y) \quad .$$

En remarquant que l'on a la congruence $\tilde{A} \equiv C^m \pmod{D}$, on déduit

$$\text{rés}(\tilde{A}, D) = \text{rés}(C^m, D) = \text{rés}(C, D)^m \in K^\times \quad .$$

Il en résulte que la famille $(D(X), X \cdot D(X), \dots, X^{mn-1} \cdot D(X), \tilde{A}(X), X \cdot \tilde{A}(X), \dots, X^{m-1} \tilde{A}(X))$ forme une base du K espace vectoriel $K[X]_{<(n+1)m-1}$ et dans cette base, la matrice de la forme $\text{Béz}_{(n+1)m}((X \oplus^N f) \circ g)$ est

$$\begin{bmatrix} \text{Béz}_{mn}(\tilde{A}, \tilde{B}) & 0 \\ 0 & \text{Béz}_m(C, D) \end{bmatrix} \quad .$$

3. Ce point est une conséquence de la démonstration du point précédent : on vient de montrer que l'on a l'identité matricielle

$$\text{Béz}_{(n+1)m}(C\tilde{A} - D\tilde{B}, D\tilde{A}) = {}^t\text{Syl}(\tilde{A}, D) \begin{bmatrix} \text{Béz}_{mn}(\tilde{A}, \tilde{B}) & 0 \\ 0 & \text{Béz}_m(C, D) \end{bmatrix} \text{Syl}(\tilde{A}, D) \quad ,$$

et la relation $\text{rés}(\tilde{A}, D) = \text{rés}(C, D)^m$. □

Ceci termine la démonstration du Théorème 1.3.5. □

c) Le cas de la caractéristique quelconque

Soit K un corps de caractéristique quelconque.

Notation : Pour tout entier m , nous notons $\text{GW}_m(K)$ la composante de dimension m dans $\text{GW}(K)$.

Remarque 1.3.7. Si K est de caractéristique différente de 2, on a pour tout entier m , $\text{GW}_m(K) = \text{MW}_m(K)$.

Par contre, lorsque K est de caractéristique 2, pour tout $\alpha \in K$, l'identité matricielle

$${}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

montre que les formes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sont égales dans $\text{GW}_2(K)$, alors qu'elles ne le sont pas en général dans $\text{MW}_2(K)$. Si l'on veut, on peut considérer $(\coprod_{m \geq 0} \text{GW}_m(K), \oplus)$ comme le monoïde des formes bilinéaires symétriques *diagonalisables*.

Proposition 1.3.8. Soit K un corps (de caractéristique quelconque). Alors, l'application canonique

$$\mathcal{S}_m(K) \xrightarrow{[-] \times \det} \text{GW}_m(K) \times_{K^\times / K^{\times 2}} K^\times$$

induit une bijection

$$(\pi_0 \mathcal{S}_m)(K) \simeq \text{GW}_m(K) \times_{K^\times / K^{\times 2}} K^\times \quad .$$

L'essentiel est de montrer que l'application canonique

$$\mathcal{S}_m(K) \xrightarrow{[-]} \text{GW}_m(K)$$

passse bien au quotient par la relation d'homotopie naïve.

Proposition 1.3.9. Soit $S(T) \in \mathcal{S}_m(K[T])$ une matrice symétrique non-dégénérée à coefficients polynomiaux. Alors, dans $\text{GW}(K)$, on a l'identité

$$[S(0)] = [S(1)] \quad .$$

DÉMONSTRATION — La démonstration de la Proposition A.0.9, montre qu'il existe une matrice $P(T) \in \mathbf{SL}_m(K[T])$ telle que la matrice ${}^t P(T) \cdot S(T) \cdot P(T)$ soit diagonale par blocs

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ & & & B_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & & & & B_r \end{bmatrix}$$

avec pour tout $1 \leq i \leq k$, $\lambda_i \in K^\times$ et pour tout $1 \leq j \leq r$ B_j un bloc de la forme $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha_j \end{bmatrix}$ avec $\alpha_j \in K[T]$.

Comme dans $\mathbf{GW}(K)$, les formes B_j sont toutes égales à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c.f. la Remarque 1.3.7 précédente) on en déduit le résultat. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.3.8 — L'application en question est clairement surjective. Pour montrer l'injectivité, on remarque qu'à homotopie près toute forme bilinéaire symétrique est diagonalisable (encore grâce à l'homotopie $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T\alpha \end{bmatrix}$). On conclut alors grâce au Lemme 1.2.33 donnant une présentation de $\mathbf{GW}_m(K)$ par générateurs et relations. \square

Remarque 1.3.10.

1. L'énoncé du Théorème 1.2.24 ainsi que sa démonstration donnés précédemment sont vrais sans hypothèse de caractéristique.
2. La comparaison entre $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ est inchangée : le groupe $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}})$ est (abstraitement) isomorphe au complété en groupe du monoïde $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^N, \oplus^N)$.
3. Nous venons de montrer que la classe dans $\mathbf{GW}(K)$ de la forme de Bézout d'une fraction rationnelle définit un invariant d'homotopie naïve. Un analogue motivique de cet invariant serait le composé :

$$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}} \longrightarrow \{S^0, S^0\}^{\text{mot}} \simeq \mathbf{GW}(K) \quad ,$$

où $\{S^0, S^0\}^{\text{mot}}$ désigne les classes d'homotopie motivique *stable* (pour la suspension $\Sigma^{\mathbf{P}^1}$). L'isomorphisme du membre de droite est démontré par F. Morel dans [Mor04b].

d) Classes d'homotopie de morphismes de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^d pour $d \geq 2$

Soit $d \geq 2$ un entier. Le calcul des classes d'homotopie naïve de morphismes de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^d est beaucoup plus simple. Nous présentons rapidement le calcul en nous limitant par souci de concision à l'étude des classes d'homotopie *pointée* de morphismes de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^d . (On rappelle que notre convention est de pointer \mathbf{P}^d en $\infty := [1 : 0 : \dots : 0]$).

De même qu'au § 1.1, nous commençons par décoder en termes concrets la notion de morphisme de schémas $\mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^d$.

Soient m un entier positif, $a_0, \dots, a_{m-1}, b_{0,1}, \dots, b_{m-1,1}, \dots, b_{0,d}, \dots, b_{m-1,d}$ une liste de $m(d+1)$ indéterminées et A, B_1, \dots, B_d les polynômes universels de $R := \mathbf{Z}[a_0, \dots, a_{m-1}, b_{0,1}, \dots, b_{m-1,d}]$, c'est-à-dire

$$A = X^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k, \quad B_1 = \sum_{k=0}^{m-1} b_{k,1} X^k, \quad \dots, \quad B_d = \sum_{k=0}^{m-1} b_{k,d} X^k \quad .$$

Soit $\varphi_{A,B_1,\dots,B_d}$ l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B_1,\dots,B_d} : R[X]_{<m} \times R[X]_{<m}^d &\longrightarrow R[X]_{<2m} \\ U, (V_1, \dots, V_d) &\longmapsto AU + B_1V_1 + \dots + B_dV_d \end{aligned}$$

Nous appelons matrice de Sylvester généralisée des polynômes A, B_1, \dots, B_d , et nous notons $\text{Syl}_{A,B_1,\dots,B_d}^1$, la matrice de l'application $\varphi_{A,B_1,\dots,B_d}$ dans « les bases canoniques ».

Définition 1.3.11. Pour tout entier positif m , soit \mathcal{F}_m^d le sous-schéma ouvert de $\text{Spec } \mathbf{Z}[a_0, \dots, b_{m-1,d}] \simeq \mathbf{A}^{m(d+1)}$ complémentaire de l'intersection des hypersurfaces d'équations données par l'annulation des mineurs d'ordre m de la matrice $\text{Syl}_{A,B_1,\dots,B_d}^1$.

Remarque 1.3.12. Pour tout anneau R , la donnée d'un R -point de \mathcal{F}_m^d équivaut à la donnée d'un polynôme A unitaire de degré m et à la donnée d'un élément $\underline{B} = (B_1, \dots, B_d)$ dans $(\mathbf{A}^d - \{0\}) \left(R[X] / (A) \right)$.

La proposition suivante justifie l'introduction des schémas \mathcal{F}_m^d . Il s'agit encore d'un cas particulier du Lemme 1.1.7 (pour les anneaux $R = K$ et $R = K[T]$).

Proposition 1.3.13.

1. La donnée d'un morphisme pointé de schémas $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^d$ équivaut à la donnée d'un entier positif m et à la donnée d'un K -point de \mathcal{F}_m^d .
2. La donnée d'une homotopie pointée $F : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^d$ équivaut à la donnée d'un entier positif m et d'un $K[T]$ -point de \mathcal{F}_m^d .

Définition 1.3.14.

1. Soit $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^d$ un morphisme pointé.
On appelle degré de f et l'on note $\deg(f)$ l'entier m qui apparaît dans la proposition précédente. Autrement dit, on a $\deg(f) = \deg A$ si f est représenté par le K -point (A, B_1, \dots, B_d) de \mathcal{F}_m^d .
Il résulte de la Proposition 1.3.13 que le degré est un invariant d'homotopie pointée.
2. Comme à la Remarque 1.1.21, on montrerait à partir de la fibration

$$\mathbf{A}^d - \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^d \longrightarrow \mathbf{P}^\infty$$

que le degré est un invariant d'homotopie de nature *motivique*.

3. On note \simeq la relation d'équivalence engendrée par la relation d'homotopie naïve et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^N$ l'ensemble des classes d'homotopie pointée de morphismes pour cette relation.
Puisque le degré d'un morphisme est un invariant d'homotopie, l'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^N$ se scinde comme réunion de ses composantes de différents degrés :

$$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^N = \coprod_{m \geq 0} [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]_m^N \quad .$$

Théorème 1.3.15. Pour $d \geq 2$, l'application de degré

$$[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^N \xrightarrow[\simeq]{\deg} \mathbf{N}$$

est une bijection.

DÉMONSTRATION — Soit m un entier positif fixé et montrons que l'ensemble $(\pi_0 \mathcal{F}_m^d)(K)$ est réduit à un élément. Plus précisément, soit (A, B_1, \dots, B_d) un K -point de \mathcal{F}_m^d et indiquons comment construire une suite d'homotopies pointées reliant (A, B_1, \dots, B_d) à $(X^m, 1, \dots, 1)$.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de construire une suite d'homotopies pointées reliant (A, B_1, \dots, B_d) à $(A, 1, \dots, 1)$ puisque $((1-T)A + TX^m, 1, \dots, 1)$ relie $(A, 1, \dots, 1)$ à $(X^m, 1, \dots, 1)$.
 Décomposons le polynôme A en produit de facteurs irréductibles :

$$A = \prod_{i=1}^k P_i^{r_i} \quad .$$

L'ensemble des K -points de \mathcal{F}_m^d dont la première composante est égale à A s'identifie à $(\mathbf{A}^d - \{0\}) \left(K[X]/(A) \right)$.
 D'après l'isomorphisme chinois, cet ensemble est en bijection avec

$$\prod_{i=1}^k (\mathbf{A}^d - \{0\}) \left(K[X]/(P_i^{r_i}) \right) \quad .$$

Ceci montre qu'il suffit de traiter le cas où A est une puissance d'un polynôme irréductible, disons $A = P^r$. Dans ce cas, puisque l'anneau $K[X]/(P^r)$ est local, la famille (B_1, \dots, B_d) engendre l'anneau $K[X]/(P^r)$ si et seulement si l'un des B_i est une unité de cet anneau. On peut supposer qu'il s'agisse de B_1 .

Le $K[T]$ -point

$$(A, B_1, (1-T)B_2 + T, \dots, (1-T)B_d + T)$$

fournit alors une homotopie entre (A, B_1, \dots, B_d) et $(A, B_1, 1, \dots, 1)$.

Le $K[T]$ -point $(A, (1-T)B_1 + T, 1, \dots, 1)$ est l'homotopie nécessaire pour conclure. \square

Remarque 1.3.16.

1. Puisque \mathbf{N} est un monoïde, la bijection précédente permet de munir $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^{\mathbf{N}}$ d'une structure de monoïde. Noter toutefois que cette structure est ici beaucoup moins naturelle que celle mise en évidence sur $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}$ au §1.2 a). En particulier, elle ne provient pas d'une structure de monoïde sur le schéma $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m^d$. Nous conjecturons qu'une telle structure existe, au moins à homotopie près. Cette question sera abordée dans la seconde partie de ce mémoire, dédiée aux schémas d'Atiyah-Hitchin, *c.f.* §3.5.
2. Cette remarque ne s'adresse qu'au lecteur ayant déjà lu la définition des schémas d'Atiyah-Hitchin (*c.f.* Définition 3.2.1). L'argument précédent montre en fait que pour tout schéma Y naïvement connexe (il suffirait même que pour tout anneau local R , l'ensemble $(\pi_0 Y)(R)$ soit réduit à un seul élément) alors pour tout entier positif m , le schéma d'Atiyah-Hitchin $\mathcal{R}_m Y$ est encore naïvement connexe.

Là encore la comparaison entre le calcul naïf et le calcul motivique est heureuse.

Théorème 1.3.17 (Morel, [Mor08], Theorem 4.13). *On a un isomorphisme de groupes*

$$\left([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}} \right) \simeq (\mathbf{Z}, +) \quad .$$

Corollaire 1.3.18. *L'application canonique*

$$\left([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^{\mathbf{N}}, \oplus^{\mathbf{N}} \right) \longrightarrow \left([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^d]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}} \right)$$

est une complétion en groupe.

1.4 Perspectives

a) Classes d'homotopie de fractions rationnelles *entières*

Nous considérons ici le problème *délicat* du calcul du monoïde $[\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1]$ des classes d'homotopie naïve d'endomorphismes pointés de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1$ sur l'anneau des entiers.

La reformulation en termes de fractions rationnelles est encore valable. Il s'agit toujours d'un cas particulier du Lemme 1.1.7 pour $K = \mathbf{Z}$ et $K = \mathbf{Z}[T]$.

Proposition 1.4.1.

1. La donnée d'un endomorphisme pointé de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1$ équivaut à la donnée d'un entier positif m et d'un \mathbf{Z} -point de \mathcal{F}_m .
2. La donnée d'une homotopie pointée $F : \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1 \times \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^1 \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1$ équivaut à la donnée d'un entier positif m et d'un $\mathbf{Z}[T]$ -point de \mathcal{F}_m .

La classification des formes bilinéaires symétriques *entières* est d'une complexité redoutable : il y a plus de 80 millions de classes d'isomorphisme de formes entières définies positives en dimension 32. (Renvoyons le lecteur au Chapitre V de [Ser77] pour un aperçu de la théorie des formes bilinéaires symétriques entières).

La proposition suivante est remarquable : à homotopie près, toute la complexité de la classification des formes bilinéaires symétriques entières disparaît.

Proposition 1.4.2. La signature induit un isomorphisme

$$\text{sign} : \pi_0 \left(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{S}_m \right) (\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{N} \times \mathbf{N} \quad .$$

DÉMONSTRATION — Nous distinguons le cas des formes *indéfinies* du cas — plus complexe — des formes définies (positives ou négatives).

La classe d'isomorphisme d'une forme quadratique entière indéfinie est entièrement déterminée par son *type* (pair ou impair) et sa signature. Il suffit donc de montrer que toute forme bilinéaire symétrique paire est homotope à une forme bilinéaire symétrique impaire. Ce point est une conséquence de l'existence de l'homotopie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{bmatrix} \quad .$$

Passons au cas des formes définies : fixons un entier m et montrons que toutes les formes bilinéaires symétriques entières définies positives de dimension m sont homotopes. Nous allons déduire ce fait du théorème suivant, dû à Kneser.

N.B.: Dans ce qui suit, il est d'usage de remplacer la terminologie « forme bilinéaire symétrique entière non-dégénérée » par « réseau unimodulaire ».

Définition 1.4.3. Soient L et M deux réseaux. On dit que L et M sont *voisins au sens de Kneser* s'il existe un sous-réseau $N \subset L$ d'indice 2 qui soit aussi (isomorphe à) un sous-réseau de M d'indice 2.

Le théorème suivant, dû à Kneser, est une conséquence folklorique du théorème d'approximation forte (c.f. [O'M63], 104.4)

Théorème 1.4.4 (Kneser). Soient m un entier positif et L et M deux réseaux unimodulaires définis positifs de même dimension m . Alors il existe une suite finie de réseaux

$$L = L_0, \quad L_1, \quad \dots, \quad L_N = M$$

telle que pour tout entier $0 \leq i \leq N - 1$, les réseaux L_i et L_{i+1} sont voisins au sens de Kneser.

La proposition est donc impliquée par le lemme suivant.

Lemme 1.4.5. *Soient L et M deux réseaux unimodulaires voisins au sens de Kneser. Alors L et M sont homotopes.*

DÉMONSTRATION — Soit N le réseau d'indice 2 commun à L et M . Par définition, il existe une base $\mathcal{B}_N = (2e_1, 2e_2, e_3, \dots, e_m)$ de N telle que $\mathcal{B}_L := (e_1, 2e_2, e_3, \dots, e_m)$ soit une base de L et $\mathcal{B}_M := (2e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)$ soit une base de M . La matrice de Gram de la forme bilinéaire symétrique sur N dans la base \mathcal{B}_N est donc de la forme

$$G_N = \begin{bmatrix} 4p & 2q & \dots \\ 2q & 4r & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

avec $p, q, r \in \mathbf{Z}$. Les matrices de Gram des formes sur L et M dans les bases \mathcal{B}_L et \mathcal{B}_M sont alors respectivement :

$$G_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_{m-2} \end{bmatrix} \cdot G_N \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_{m-2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_{m-2} \end{bmatrix} \cdot G_N \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_{m-2} \end{bmatrix} .$$

Soit $J(T)$ une homotopie dans $\mathbf{Z}[T]$ entre les matrices $J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (donnée par exemple par une décomposition de J en produit de matrices élémentaires). On vérifie que la matrice

$$\begin{bmatrix} {}^t J(T) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot J(T) & 0 \\ 0 & \text{id}_{m-2} \end{bmatrix} \cdot G_N \cdot \begin{bmatrix} {}^t J(T) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot J(T) & 0 \\ 0 & \text{id}_{m-2} \end{bmatrix}$$

est à coefficients dans $\mathbf{Z}[T]$. Elle fournit donc une homotopie entre G_L et G_M . □

Ceci achève la démonstration de la Proposition 1.4.2. □

Exemple 1.4.6. En appliquant l'algorithme décrit dans la démonstration du Lemme 1.4.5, on obtient l'exemple explicite suivant d'homotopie entre les deux réseaux unimodulaires définis positifs en dimension 8 : \mathbb{I}_8 et \mathbb{E}_8 .

$$\begin{bmatrix} T^4 - T^3 + T + 1 & 2T^5 - 2T^4 - 2T^3 + 4T^2 - 1 & -T^2 + 1 \\ 2T^5 - 2T^4 - 2T^3 + 4T^2 - 1 & 4T^6 - 4T^5 - 8T^4 + 12T^3 - 8T + 8 & -2T^3 + 4T \\ -T^2 + 1 & -2T^3 + 4T & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -T^2 + 1 & -2T^3 + 4T & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -T^2 + 1 & -2T^3 + 4T & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -T^2 + 1 & -2T^3 + 4T & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -T^2 + 1 & -2T^3 + 4T & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -T^2 + 1 & -2T^3 + 4T & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Conjecture 1.B. *Le morphisme de monoïdes gradués*

$$\text{Béz} : \left(\prod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{F}_m)(\mathbf{Z}), \oplus^{\mathbf{N}} \right) \longrightarrow \left(\prod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{S}_m)(\mathbf{Z}), \oplus \right)$$

serait un isomorphisme.

Remarque 1.4.7. Une question indirectement reliée est celle de décrire l'image de $\mathcal{F}_m(\mathbf{Z})$ par Béz_m ou, de manière équivalente, de décrire l'ensemble $\mathcal{H}_m(\mathbf{Z})$.

Toute classe d'isomorphisme de réseau unimodulaire défini positif contient-elle un élément de la forme

Béz(f) pour une certaine fraction rationnelle f ? De manière équivalente, toute classe d'isomorphisme de réseau unimodulaire défini positif contient-elle un réseau de Hankel?

Nous conjecturons que la réponse à ces questions est affirmative. Par exemple, en travaillant sur les anneaux d'entiers de corps cyclotomiques, on a pu construire des fractions rationnelles³ f_8 et f_{24} telles que

$$\text{Béz}(f_8) \simeq E_8 \quad \text{et} \quad \text{Béz}(f_{24}) \simeq L_{24} \quad ,$$

L_{24} désignant le réseau de Leech en dimension 24.

Nous n'avons cependant pas su construire d'homotopie entre f_8 et une fraction rationnelle dont la forme de Bézout est I_8 .

b) Autour de la loi $\oplus^{\mathbf{N}}$

La loi de monoïde sur $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$ mise en évidence au § 1.2.a) est tout à fait remarquable. Malgré la simplicité de sa définition, cette loi est encore mal comprise. Voici quelques problèmes fondamentaux la concernant :

Questions 1.4.8.

1. La loi $\oplus^{\mathbf{N}}$ sur $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$ est-elle commutative à homotopie près (sur un corps K , sur \mathbf{Z}) ?

Le fait que la loi induite sur $\coprod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{F}_m)(K)$ soit commutative à homotopie près est un indice en faveur d'une réponse affirmative à cette question. Nous ne savons pas si la loi $\oplus^{\mathbf{N}}$ induite sur l'ensemble $\coprod_{m \geq 0} (\pi_0 \mathcal{F}_m)(\mathbf{Z})$ est commutative.

2. Soient f et g deux fractions rationnelles de $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(K)$. Il y a au moins quatre façons « d'additionner » f et g dans $\Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1$:

$$f \oplus^{\mathbf{N}} g, \quad g \oplus^{\mathbf{N}} f, \quad f \oplus^{\text{mot}} g \quad \text{et} \quad g \oplus^{\text{mot}} f \quad .$$

Quel lien relie ces quatre lois? En particulier sont-elles homotopes?

Même la relation précise entre les lois induites sur les espaces de points complexes $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ n'est pas bien comprise.

3. Comment généraliser la loi $\oplus^{\mathbf{N}}$ aux schémas $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m^d$ pour $d \geq 2$?

Remarque 1.4.9. Au premier abord, il peut sembler déraisonnable que la loi d'addition \oplus^{mot} sur $\Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1$ soit commutative à homotopie près puisque \mathbf{P}^1 n'est pas une double suspension dans $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$. Le lecteur remarquera qu'il en est pourtant ainsi pour l'espace topologique $\Omega^1 S^1$, cet espace se rétractant par déformation sur l'espace discret \mathbf{Z} . En particulier, les lois d'addition sur les espaces topologiques $(\Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1)(\mathbf{C}) \simeq \Omega^2 S^2$ et $(\Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1)(\mathbf{R}) \approx \Omega^2 S^2 \times \Omega^1 S^1$ sont bien commutatives à homotopie près.

c) Sur la comparaison entre $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$

Il est clair que les Questions 1.4.8 précédentes sont intimement liées à la comparaison entre le monoïde $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}, \oplus^{\mathbf{N}})$ et le groupe $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}})$, *c.f.* Conjecture 1.A.

Il est raisonnable de penser que le phénomène de complétion en groupe qui semble apparaître ici ne soit qu'un cas particulier d'une situation générale formelle dont il faut déterminer le cadre. Nous espérons même pouvoir calculer d'autres groupes de classes d'homotopie motivique d'applications à partir des monoïdes de classes d'homotopie naïve. En particulier, la question se pose de savoir s'il est possible de

³On peut prendre par exemple $f_8 = \frac{X^8 - 7X^6 + 14X^4 - X^2 + 1}{12X^7 + 13X^6 - 58X^5 - 62X^4 + 44X^3 + 45X^2 - 6X - 6}$.

donner une nouvelle démonstration du résultat de F. Morel à partir du nôtre.

Un autre aspect de la question est le suivant. Il est apparu très rapidement dans notre calcul que $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}$ ne pouvait pas coïncider avec $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$: les fractions rationnelles sont de degré positif uniquement. Il serait intéressant d'exhiber un schéma explicite, disons $\widetilde{\mathbf{P}}^1$, ayant le même type d'homotopie que \mathbf{P}^1 dans $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$ et tel que l'application canonique

$$[\widetilde{\mathbf{P}}^1, \widetilde{\mathbf{P}}^1]^{\mathbf{N}} \longrightarrow [\widetilde{\mathbf{P}}^1, \widetilde{\mathbf{P}}^1]^{\text{mot}} \simeq [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$$

soit une bijection.

Soit $\overline{\mathbf{P}}^1$ le schéma des projecteurs de rang 1 en dimension 2, c'est-à-dire

$$\overline{\mathbf{P}}^1 := \text{Spec} \left(K[X, Y, Z] / (X(1 - X) - YZ) \right) .$$

On vérifie que le morphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{P}}^1 & \longrightarrow & \mathbf{P}^1 \\ p & \mapsto & \text{Im}(p) \end{array}$$

est une \mathbf{A}^1 -équivalence d'homotopie. Ce schéma est un candidat raisonnable pour $\widetilde{\mathbf{P}}^1$: par exemple, l'application

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{P}}^1 & \longrightarrow & \overline{\mathbf{P}}^1 \\ p & \mapsto & 1 - p \end{array}$$

est de degré -1 !

Chapitre 2

Le type d'homotopie des espaces de fractions rationnelles

Le type d'homotopie des espaces de fractions rationnelles à coefficients complexes et réels est particulièrement riche et a donné lieu à de nombreux travaux qui sont le point de départ d'un nouvel axe de notre étude. Nous résumons dans ce chapitre les résultats fondamentaux sur lesquels nous nous basons dans les chapitres suivants.

Pour tout entier positif m , l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ est l'espace des endomorphismes holomorphes de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Cet espace se plonge naturellement dans l'espace $\text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ de toutes les applications continues pointées de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans lui-même de degré topologique m . Dans son article fondateur [Seg79], Graeme Segal montre que lorsque m tend vers $+\infty$ l'inclusion canonique

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \hookrightarrow \text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \approx \Omega^2 S^3$$

tend à devenir une équivalence d'homotopie, au sens où la connexité de cette application tend vers l'infini lorsque m tend vers l'infini. On peut ainsi considérer $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ comme une approximation finie d' $\Omega^2 S^3$, l'erreur étant d'autant plus petite que m est plus grand.

Dans le même article, Segal généralise ses résultats au deux cadres suivants.

- Les espaces de fractions rationnelles à coefficients réels $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$ sont, en un sens analogue à ce qui précède, mais un peu plus délicat à formuler, une approximation finie de l'espace $\text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^{\mathbf{Z}/2}$ des applications continues de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans lui-même de degré m et commutant à la conjugaison complexe.
- Pour tout entier positif d , les espaces de fonctions rationnelles à coefficients complexes $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ sont des approximations finies au sens précédent de l'espace $\text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^d(\mathbf{C})) \approx \Omega^2 S^{2d+1}$.

La seconde avancée majeure dans la compréhension de la topologie des espaces de fractions rationnelles est due au quatuor F. Cohen, R. Cohen, B. Mann et R. Milgram. Dans les articles [CCMM91] et [CCMM93], ces quatre auteurs déterminent de deux façons différentes le type d'homotopie stable des espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ pour tous entiers positifs m et d . Ils montrent que l'espace $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ admet le même scindement stable

$$\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C}) \overset{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i S^{2d-1}$$

que le m -ème cran de la filtration du modèle de May-Milgram $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ pour l'espace $\Omega^2 S^{2d+1} \simeq \Omega^2 \Sigma^2 S^{2d-1}$.

Les trois articles mentionnés précédemment ont eu une descendance féconde. De nombreux auteurs, parmi lesquels M. Guest, S. Kallel, Y. Kamiyama, K. Kosłowski, J. Mostovoy, D. Shimamoto, V. Vassiliev, K. Yamaguchi ont développé les idées de ces articles pour fournir d'autres approximations finies d'espaces

d'applications continues analogues à celles évoquées ci-avant.

La suite de notre mémoire vise à donner une version algébrique englobant partiellement ces résultats. Dans ce chapitre, nous énonçons de manière précise les résultats évoqués ci-dessus en esquissant leurs démonstrations.

Voici le plan du chapitre.

2.1 Topologie des espaces de fonctions rationnelles. — Nous résumons les résultats de Segal sur la topologie des espaces de fractions rationnelles $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$, $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$, $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ et $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{R})$.

2.2 Comparaison entre espaces de fractions rationnelles et modèles de May-Milgram. — Nous résumons les travaux de F. Cohen *et al.* déterminant le type d'homotopie stable des espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$.

Avertissement : *nos notations diffèrent parfois de celles des articles résumés. En particulier, par cohérence avec la première partie, nous notons $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ et $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ les espaces qui sont notés respectivement Rat_m et $\text{Rat}_m(\mathbf{CP}^d)$ dans la littérature.*

2.1 Topologie des espaces de fonctions rationnelles

Nous présentons dans un premier temps l'œuvre pionnière de G. Segal sur le type d'homotopie des espaces de fractions rationnelles $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ et $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{R})$. Ces résultats sont publiés¹ dans [Seg79].

Pour simplifier les notations et parce qu'il s'agit du cas principal, nous nous concentrons sur le cas $d = 1$, c'est-à-dire sur l'étude des espaces de fractions rationnelles $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ et $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$. Les arguments s'adaptent pour les espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ et nous énonçons les modifications à apporter lorsque $d > 1$ au § 2.1.d).

a) Topologie des espaces de fractions rationnelles complexes

Soit m un entier positif fixé. Une fraction rationnelle $f \in \mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ définit une application continue pointée (holomorphe)

$$f : (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \infty) \longrightarrow (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \infty) \quad .$$

L'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ apparaît donc comme un sous-espace fermé de l'espace $\text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ de toutes les applications continues pointées de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans lui-même. Compte tenu de l'homéomorphisme usuel $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \simeq S^2$, nous identifierons² parfois $\text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ à l'espace $\Omega^2 S^2$ de toutes les applications continues pointées de la sphère S^2 dans elle-même. Notons $i : \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \hookrightarrow \Omega^2 S^2$ ce plongement.

L'espace $\Omega^2 S^2$ n'est pas connexe : on a un isomorphisme canonique

$$\pi_0(\Omega^2 S^2) \simeq \pi_2(S^2) \xrightarrow[\text{deg}]{\simeq} \mathbf{Z} \quad .$$

Pour tout entier k , notons $\Omega_k^2 S^2$ la composante connexe formée des applications pointées de degré topologique k . L'inclusion précédente i se factorise comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\iota_m} & \Omega_m^2 S^2 \\ & \searrow i & \downarrow \\ & & \Omega^2 S^2 \end{array} \quad .$$

¹L'article [Seg79] ne se limite pas au résumé que nous en faisons : il contient notamment des résultats que nous ne mentionnerons pas sur la topologie des espaces d'applications holomorphes d'une surface de Riemann compacte de genre $g > 0$ dans $\mathbf{P}^d(\mathbf{C})$.

²Cette identification est agréable pour alléger les notations. L'inconvénient est que l'involution liée à la conjugaison complexe est un peu masquée.

En effet, le degré d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B} \in \mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ au sens de la Définition 1.1.11 (c'est-à-dire le degré du polynôme A) correspond bien au degré *topologique* de l'application $S^2 \rightarrow S^2$ sous-jacente. De plus, puisque $\Omega^2 S^2$ est un H-espace, toutes ses composantes connexes ont le même type d'homotopie. Il s'agit par exemple de celui de la composante connexe de l'application constante, $\Omega_0^2 S^2$. En appliquant le foncteur double lacets Ω^2 à la fibration de Hopf,

$$S^1 \longrightarrow S^3 \xrightarrow{\eta} S^2 \quad ,$$

on obtient la fibration d'espaces connexes suivante :

$$\Omega^2 S^1 \longrightarrow \Omega^2 S^3 \xrightarrow{\Omega^2 \eta} \Omega_0^2 S^2 \quad .$$

Puisque l'espace $\Omega^2 S^1$ est contractile, l'application $\Omega^2 \eta : \Omega^2 S^3 \xrightarrow{\simeq} \Omega_0^2 S^2$ est une équivalence d'homotopie. En conclusion, nous venons de montrer que l'on a un homéomorphisme

$$\Omega^2 S^2 \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Z} \times \Omega^2 S^3 \quad .$$

Remarque 2.1.1. Dans l'homéomorphisme ci-dessus, chacun des deux espaces ci-dessus est muni d'une action de l'opérate des petits disques \mathcal{P}_2 . Mais cet homéomorphisme ne respecte pas ces actions, même à homotopie près !

L'énoncé suivant correspond au Theorem 1.1 de [Seg79].

Théorème 2.1.2. *Pour tout entier positif m , l'application*

$$\iota_m : \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \longrightarrow \Omega_m^2 S^2$$

est une m -équivalence d'homotopie ³.

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION — Le point de départ de la démonstration est une reformulation du problème en termes d'espaces de configuration. Puisque l'espace des polynômes unitaires de degré m s'identifie au produit symétrique $\text{SP}^m(\mathbf{C})$, la donnée d'une fraction rationnelle complexe de degré m équivaut à la donnée d'un couple de diviseurs effectifs dans \mathbf{C} , chacun de degré m et dont les supports ne se rencontrent pas. La situation présente alors une certaine analogie avec celle étudiée par D. McDuff dans [McD75].

La démonstration du théorème se divise en trois étapes relativement indépendantes entre elles.

1. Segal montre d'abord une version « stabilisée » du théorème. A homotopie près, l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ peut être vu comme un sous-espace⁴ de $\mathcal{F}_{m+1}(\mathbf{C})$. Les inclusions $\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathcal{F}_{m+1}(\mathbf{C})$ sont telles que le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{m+1}(\mathbf{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_m^2 S^2 & \xrightarrow{+\text{id}} & \Omega_{m+1}^2 S^2 \end{array} \quad .$$

Segal montre que l'application induite

$$\iota : (\text{ho})\text{colim}_m \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \longrightarrow (\text{ho})\text{colim}_m \Omega_m^2 S^2 \simeq \Omega^2 S^3$$

est une équivalence d'homotopie. (Comparer à la Proposition 1.5 de [Seg79]).

La démonstration de ce point utilise les méthodes liées aux espaces de configurations.

³Par définition, cela signifie que l'application induite sur les groupes d'homotopie $(\iota_m)_* : \pi_k(\mathcal{F}_m(\mathbf{C})) \rightarrow \pi_k(\Omega_m^2 S^2)$ est un isomorphisme pour tout entier $0 \leq k < m$ et qu'elle est surjective pour $k = m$.

⁴Une façon de plonger $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{F}_{m+1}(\mathbf{C})$ consiste à rajouter à toute fraction rationnelle f de degré m un zéro et un pôle distincts « au voisinage de l'infini » (c'est-à-dire d'ordres de grandeur beaucoup plus grands que les coefficients de f). A homotopie près, l'application $\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathcal{F}_{m+1}(\mathbf{C})$ obtenue ne dépend pas des choix.

2. Indépendamment de ce qui précède et en s'inspirant de travaux d'Arnol'd, Segal montre une propriété de stabilité de l'homologie des espaces de fractions rationnelles. Précisément, il montre que pour tout $m \geq 0$, l'inclusion $\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathcal{F}_{m+1}(\mathbf{C})$ est une m -équivalence d'homologie.
3. A ce stade, il résulte des points (1) et (2) que pour tout entier $m \geq 0$, l'application $\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \longrightarrow \Omega_m^2 S^2$ est une m -équivalence d'homologie. Pour pouvoir conclure en appliquant le théorème de Whitehead, Segal montre que l'action du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{F}_m(\mathbf{C})) \simeq \mathbf{Z}$ sur les groupes d'homotopie supérieurs est nilpotente. \square

b) Topologie de l'espace des fractions rationnelles réelles

Soit m un entier positif. Le bon point de vue — et c'est celui de la géométrie algébrique! — est de considérer l'espace des fractions rationnelles à coefficients réels $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$ comme le sous-espace des points fixes de l'involution associée à la conjugaison complexe sur l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$. L'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$ s'envoie, *via* l'inclusion ι_m précédente, dans l'espace $\text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))_m^{\mathbf{Z}/2}$ des endomorphismes continus pointés de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, dont le degré topologique vaut m et qui commutent à l'action de la conjugaison complexe.

La situation est ici légèrement plus délicate que précédemment car l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$ n'est pas connexe. Un élément $f \in \mathcal{F}_m(\mathbf{R})$ induit par restriction une application $f_{\mathbf{R}} : \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$. Pour faire le lien avec le Chapitre 1, le degré, disons r , de $f_{\mathbf{R}}$ se calcule comme la signature algébrique⁵ de la forme bilinéaire symétrique réelle $\text{Béz}_m(f)$. On constate que l'entier r est soumis aux seules restrictions suivantes :

$$-m \leq r \leq m \quad \text{et} \quad r \equiv m \pmod{2} \quad .$$

Conventions:

- Nous dirons qu'un entier r satisfaisant aux conditions ci-dessus est une valeur de degré *admissible*.
- Pour toute valeur admissible de degré r , soit $\mathcal{F}_{m,r}(\mathbf{R})$ le sous-espace de $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$ formé des fractions rationnelles f telles que l'on ait $\text{deg}(f_{\mathbf{R}}) = r$.
Les espaces $\mathcal{F}_{m,r}(\mathbf{R})$ sont connexes par arcs et forment les composantes connexes de $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$.
- De même, pour tout entier $r \equiv m \pmod{2}$, soit $(\Omega_m^2 S^2)_r^{\mathbf{Z}/2} \subset (\Omega_m^2 S^2)^{\mathbf{Z}/2}$ le sous-espace formé des applications *équivariantes* $f : S^2 \longrightarrow S^2$ de degré m et dont la restriction $f_{\mathbf{R}}$ à S^1 est de degré r .

Théorème 2.1.3. *Pour tout entier positif m et pour tout degré r admissible, l'application canonique*

$$\mathcal{F}_{m,r}(\mathbf{R}) \hookrightarrow (\Omega_m^2 S^2)_r^{\mathbf{Z}/2}$$

est une $\frac{1}{2}(m - |r|)$ -équivalence d'homotopie.

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION — Segal déduit essentiellement ce résultat du Théorème 2.1.2 comparant le type d'homotopie des espaces $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ et $\Omega_m^2 S^2$. Pour cela, Segal montre les points suivants :

1. L'application canonique

$$\text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^{\mathbf{Z}/2} \approx \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \times \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{R}), \mathbf{P}^1(\mathbf{R}))$$

est une équivalence d'homotopie entre espaces bigradués.

En particulier, puisque $\Omega^1 S^1 \approx \mathbf{Z}$ est homotopiquement discret, on a une équivalence d'homotopie

$$(\Omega_m^2 S^2)_r^{\mathbf{Z}/2} \approx \Omega^2 S^2 \quad .$$

⁵C'est-à-dire la différence entre le nombre de 1 et le nombre de -1 .

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers positifs, soit $\mathcal{F}_{p,q}$ le schéma dont les points sont les couples de polynômes *unitaires* (A, B) avec $\deg A = p$, $\deg B = q$ et tels que $\text{rés}_{p,q}(A, B)$ soit inversible. On constate, grâce à la division euclidienne, que ce schéma est canoniquement isomorphe au schéma $\mathcal{F}_{\min(p,q)} \times \mathbf{A}^{|p-q|}$.

Pour tout entier positif m et pour toute valeur admissible de degré r , on a un homéomorphisme

$$\mathcal{F}_{m,r}(\mathbf{R}) \simeq \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{C}) \quad ,$$

où (p, q) est l'unique couple d'entiers tel que $p + q = m$ et $p - q = r$. En remarquant que l'on a $\min(p, q) = \frac{1}{2}(m - |r|)$, on obtient ainsi une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{F}_{m,r}(\mathbf{R}) \approx \mathcal{F}_{\frac{1}{2}(m-|r|)}(\mathbf{C}) \quad .$$

3. Grâce au théorème 2.1.2, on déduit des points (1) et (2) précédents que les espaces $\mathcal{F}_{m,r}(\mathbf{R})$ et $(\Omega_m^2 S^2)_r^{\mathbf{Z}/2}$ ont mêmes groupes d'homotopie jusqu'en dimension $\frac{1}{2}(m - |r|)$. Segal vérifie que l'inclusion canonique $\mathcal{F}_{m,r}(\mathbf{R}) \hookrightarrow (\Omega_m^2 S^2)_r^{\mathbf{Z}/2}$ induit un isomorphisme entre ces groupes d'homotopie. \square

c) Version équivariante

Il est naturel de chercher à condenser les Théorèmes 2.1.2 et 2.1.3 précédent en un unique énoncé $\mathbf{Z}/2$ -équivariant. Toutefois, puisque l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{R})$ contient toujours deux composantes connexes contractiles (à savoir $\mathcal{F}_{m,m}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{F}_{m,-m}(\mathbf{R})$), on s'aperçoit que c'est la version stabilisée (telle que dans le point (1) de la démonstration du Théorème 2.1.2) qui peut admettre un énoncé équivariant.

Théorème 2.1.4. *L'espace $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ est muni d'une action $\mathbf{Z}/2$ -équivariante (pour la conjugaison complexe) de l'opérade des petits disques \mathcal{P}_2 compatible à l'inclusion canonique*

$$\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \hookrightarrow \coprod_{m \geq 0} \text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$$

De plus, l'application canonique induite entre les complétions en groupes

$$\Omega \mathbf{B} \left(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \right) \xrightarrow{\approx} \Omega \mathbf{B} \left(\coprod_{m \geq 0} \text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \right) \simeq \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$$

est une $\mathbf{Z}/2$ -équivalence d'homotopie.

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION — Posons

$$M(\mathbf{C}) := \coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \quad \text{et} \quad M(\mathbf{R}) := \coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(\mathbf{R}) \quad .$$

On a des équivalences d'homotopie

$$\Omega \mathbf{B}(M(\mathbf{C})) \approx \mathbf{Z} \times \Omega_0 \mathbf{B}(M(\mathbf{C})) \quad \text{et} \quad (\Omega \mathbf{B}(M(\mathbf{C})))^{\mathbf{Z}/2} \simeq \Omega \mathbf{B}(M(\mathbf{R})) \approx \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \Omega_{(0,0)} \mathbf{B}(M(\mathbf{R})) \quad .$$

Les Théorèmes 2.1.2 et 2.1.3 précédents montrent que les applications canoniques

$$\Omega_0 \mathbf{B}(M(\mathbf{C})) \longrightarrow \text{map}_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \quad \text{et} \quad \Omega_0 \mathbf{B}(M(\mathbf{R})) \longrightarrow \text{map}_{(0,0)}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^{\mathbf{Z}/2}$$

sont des équivalences d'homologie. On conclut en utilisant qu'une application d'espaces de lacets⁶ qui est une équivalence d'homologie est une équivalence d'homotopie, *c.f.* [CCMT84], Lemma 1.1. \square

⁶C'est-à-dire de la forme Ωf , pour une certaine application f .

d) Topologie des espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$

L'ensemble des résultats précédents s'étend *mutatis mutandis* au cas $d > 1$. Dans ce cas, les démonstrations sont même plutôt plus simples puisque les espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ sont simplement connexes et puisque les espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{R})$ sont connexes.

Voici les énoncés précis qui généralisent les précédents :

Théorème 2.1.5. *Soit $d \geq 2$ un entier.*

1. *Pour tout entier positif m , l'application canonique*

$$\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C}) \hookrightarrow \Omega_m^2(\mathbf{P}^d(\mathbf{C})) \approx \Omega^2 S^{2d+1}$$

est $m(2d - 1)$ -connexe .

2. *Pour tout entier positif m , l'application canonique*

$$\mathcal{F}_m^d(\mathbf{R}) \hookrightarrow \text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^d(\mathbf{C}))^{\mathbf{Z}/2}$$

est $m(d - 1)$ -connexe.

3. *L'espace $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ est muni d'une action $\mathbf{Z}/2$ -équivariante (pour la conjugaison complexe) de l'opérateur des petits disques \mathcal{P}_2 compatible à l'inclusion canonique*

$$\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m^d(\mathbf{C}) \hookrightarrow \coprod_{m \geq 0} \text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^d(\mathbf{C})) = \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^d(\mathbf{C})) \quad .$$

De plus, l'application canonique induite entre les complétions en groupes

$$\Omega \mathbf{B} \left(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m^d(\mathbf{C}) \right) \xrightarrow{\approx} \Omega \mathbf{B} \left(\coprod_{m \geq 0} \text{map}_m(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^d(\mathbf{C})) \right) \simeq \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^d(\mathbf{C}))$$

est une $\mathbf{Z}/2$ -équivalence d'homotopie.

2.2 Comparaison entre espaces de fractions rationnelles et modèles de May-Milgram

Soit d un entier positif. Les travaux de Segal rappelés au paragraphe précédent pourraient se résumer ainsi : « la suite d'espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ tend lorsque m tend vers $+\infty$ vers le double espace de lacets $\Omega^2 S^{2d+1}$ ». Or l'espace $\Omega^2 S^{2d+1} \simeq \Omega^2 \Sigma^2 S^{2d-1}$ (plus généralement $\Omega^2 \Sigma^2 \mathcal{Y}$ pour tout espace topologique pointé \mathcal{Y}) est, dans la bonne catégorie des doubles espaces de lacets, l'objet libre construit sur S^{2d-1} (resp. sur \mathcal{Y}). Cette observation a conduit P. May et R. Milgram (entre autres) à décrire un modèle permettant de reconstruire $\Omega^2 \Sigma^2 \mathcal{Y}$ à partir de \mathcal{Y} par des moyens « combinatoires » (*c.f.* [May72] par exemple). Cet espace, noté $\mathcal{C}_2 \mathcal{Y}$, est naturellement filtré. La suite des crans successifs de la filtration de $\mathcal{C}_2 S^{2d-1}$ tend également vers $\Omega^2 S^{2d+1}$.

Se pose alors la question de la comparaison entre ces deux approximations d' $\Omega^2 S^{2d+1}$. La réponse, due essentiellement au quadruplet d'auteurs (F. Cohen, R. Cohen, B. Mann, R. Milgram), est la suivante : ces approximations sont en général distinctes, au sens où les espaces ont des types d'homotopie différents, mais après suspensions, elles coïncident.

a) Modèles de May-Milgram

Soient (\mathcal{Y}, y_0) un CW-complexe pointé (non nécessairement connexe). Nous rappelons dans ce paragraphe la définition et les principales propriétés du modèle de May-Milgram $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ pour l'espace $\Omega^2\Sigma^2\mathcal{Y}$. Nous renvoyons le lecteur non familier de l'opérade des petits disques à l'Annexe B.

Définition 2.2.1. Soit n un entier positif. On appelle espace de configuration de n points distincts dans \mathbf{C} , et l'on note $\mathbf{C}^{(n)}$, le sous-espace de \mathbf{C}^n formé des n -uplets $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que l'on ait $z_i \neq z_j$ pour tout $i \neq j$. (Par convention, on convient que $\mathbf{C}^{(0)} := \text{pt}$).

Noter que cet espace est, par définition, muni d'une action libre du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . La conjugaison complexe y induit également une involution commutant à l'action de \mathfrak{S}_n et dont l'espace des points fixes est l'espace de configuration de n points distincts dans \mathbf{R} , noté $\mathbf{R}^{(n)}$.

Exemples 2.2.2. Soit n un entier ≥ 1 .

1. L'espace $\mathbf{C}^{(n)}$ est l'espace classifiant du groupe des tresses pures.
2. L'espace $\mathbf{C}^{(n)}/\mathfrak{S}_n$ est l'espace classifiant du groupe des tresses d'Artin β_n .
3. L'existence d'un ordre total sur \mathbf{R} permet de construire une équivalence d'homotopie $\mathbf{R}^{(n)} \simeq \mathfrak{S}_n$.

Lorsque l'espace \mathcal{Y} est connexe, on peut reconstruire l'espace $\Omega^2\Sigma^2\mathcal{Y}$ à partir d'espaces de configurations de points dans \mathbf{C} auxquels sont attachés des éléments de \mathcal{Y} (des *étiquettes* dans la terminologie anglo-saxonne).

Définition 2.2.3.

1. Le modèle de May-Milgram pour l'espace de lacets $\Omega^2\Sigma^2\mathcal{Y}$, noté $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ est l'espace quotient

$$\mathcal{C}_2\mathcal{Y} := \coprod_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}^{(n)} \times_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{Y}^n / \sim \quad ,$$

où \sim est la relation d'équivalence engendrée par

$$[(z_1, \dots, z_n), (y_1, \dots, y_n)] \sim [(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}), (y_1, \dots, y_n, y_0)]$$

pour tout point z_{n+1} de \mathbf{C} distinct de z_1, \dots, z_n . (On rappelle que ci-dessus y_0 désigne le point de base de \mathcal{Y}).

2. L'espace $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ est naturellement filtré. Pour tout entier positif ℓ , soit $F_\ell\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ l'espace quotient

$$F_\ell\mathcal{C}_2\mathcal{Y} = \coprod_{n=0}^{\ell} \mathbf{C}^{(n)} \times_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{Y}^n / \sim \quad ,$$

\sim désignant la relation d'équivalence induite par la précédente.

3. Il est commode d'introduire une variante de l'espace précédent où l'on remplace les espaces de configuration de points dans \mathbf{C} par des espaces de configuration de petits disques disjoints $\mathcal{P}_2(n)$. Définissons l'espace $\mathcal{P}_2\mathcal{Y}$ comme l'espace quotient

$$\mathcal{P}_2\mathcal{Y} := \coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_2(n) \times_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{Y}^n / \sim \quad ,$$

où \sim est la relation d'équivalence engendrée par

$$[(c_1, \dots, c_n), (y_1, \dots, y_n)] \sim [(c_1, \dots, c_n, c_{n+1}), (y_1, \dots, y_n, y_0)]$$

pour tout petit carré c_{n+1} dont l'image ne rencontre pas c_1, \dots, c_n .

Les applications canoniques $\mathcal{P}_2(n) \rightarrow \mathbf{C}^{(n)}$ induisent une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{P}_2\mathcal{Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_2\mathcal{Y} \quad .$$

Remarque 2.2.4. Par construction, les espaces $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ et $\mathcal{P}_2\mathcal{Y}$ sont munis d'une action de l'opérade des petits disques \mathcal{P}_2 . En particulier, les espaces $\mathbf{B}\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ et $\mathbf{B}\mathcal{P}_2\mathcal{Y}$ sont définis. (Nous renvoyons le lecteur à l'Annexe B pour des rappels sur le foncteur \mathbf{B}).)

Voici comment relier les modèles précédents à l'espace $\Omega^2\Sigma^2\mathcal{Y}$.

Définition 2.2.5. Pour tout petit disque $c_i : D \hookrightarrow D$, soit $\varphi_{c_i} : \overline{\text{Im}(c_i)} / \partial\overline{\text{Im}(c_i)} \simeq S^2$ l'homéomorphisme « standard ». On définit alors l'application

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_2\mathcal{Y} & \longrightarrow & \text{map}(\widehat{\mathbf{C}}, S^2 \wedge \mathcal{Y}) \simeq \Omega^2\Sigma^2\mathcal{Y} \\ [c_1, \dots, c_n, y_1, \dots, y_n] & \mapsto & z \mapsto \begin{cases} [\varphi_{c_i}(z), y_i] & \text{si } z \in c_i \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Théorème 2.2.6. Soit (\mathcal{Y}, y_0) un espace topologique connexe pointé. Alors, on a des équivalences d'homotopies

$$\mathcal{C}_2\mathcal{Y} \xleftarrow{\approx} \mathcal{P}_2\mathcal{Y} \xrightarrow{\approx} \Omega^2\Sigma^2\mathcal{Y} \quad .$$

En général, c'est-à-dire lorsque (\mathcal{Y}, y_0) n'est pas supposé connexe, l'application ε n'induit une équivalence d'homotopie qu'au niveau des complétés en groupe :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2\mathcal{Y} & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^2\Sigma^2\mathcal{Y} \\ & \searrow & \nearrow \approx \\ & \Omega\mathbf{B}(\mathcal{C}_2\mathcal{Y}) & \end{array} \quad .$$

Remarque 2.2.7.

1. Dans ce qui précède, nous nous sommes limités aux modèles pour les doubles espaces de lacets de doubles suspensions. En fait pour tout entier $k \geq 1$ et pour $k = \infty$, on définit de manière tout à fait analogue des espaces de May-Milgram $\mathcal{C}_k\mathcal{Y}$ modélisant le type d'homotopie de l'espace $\Omega^k\Sigma^k\mathcal{Y}$ en un sens analogue à celui du Théorème 2.2.6 précédent.
2. *Modèles de May-Milgram équivariants.* Soient G un groupe fini, (\mathcal{Y}, y_0) un G -CW-complexe pointé (y_0 est supposé fixe sous l'action de G) et V une représentation réelle de G contenant la représentation triviale 1. Les espaces de configurations de points distincts dans V sont alors naturellement munis d'une action de G . On construit à partir de ces espaces un modèle de May-Milgram G -équivariant $\mathcal{C}_V\mathcal{Y}$ muni d'une G -application

$$\varepsilon_G : \mathcal{C}_V\mathcal{Y} \longrightarrow \Omega^V\Sigma^V\mathcal{Y}$$

qui est une équivalence d'homotopie lorsque \mathcal{Y} est G -connexe.

Cette approche est développée en détails dans [CWW90] (voir en particulier Corollary 1.4).

3. Comme cas particulier de ce qui précède, lorsque $\mathcal{Y} = Y(\mathbf{C})$ est l'espace des points complexes d'une variété algébrique Y définie sur \mathbf{R} , l'espace $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ est naturellement muni d'une involution induite par la conjugaison complexe. Lorsque $Y(\mathbf{C})$ et $Y(\mathbf{R})$ sont connexes⁷, l'application

$$\varepsilon : \mathcal{C}_2\mathcal{Y} \longrightarrow \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \wedge Y(\mathbf{C}))$$

est une $\mathbf{Z}/2$ -équivalence d'homotopie. Ce cas particulier est analysé en détails dans [Xic06].

⁷C'est-à-dire lorsque $Y(\mathbf{C})$ est $\mathbf{Z}/2$ -connexe.

b) Scindement stable

Soit (\mathcal{Y}, y_0) un CW-complexe (bien) pointé, non nécessairement connexe. Le modèle de May-Milgram $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ décrit au paragraphe précédent est naturellement filtré (c.f. Définition 2.2.3 (2)). V. Snaith a montré que stablement cette filtration se scindait en le bouquet de ses sous-quotients.

Définition 2.2.8. Pour tout entier $i \geq 1$, l'inclusion $F_{i-1}\mathcal{C}_2\mathcal{Y} \hookrightarrow F_i\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ est une cofibration et l'on note $D_i\mathcal{Y}$ la cofibre de cette inclusion. Par définition, on a un homéomorphisme

$$D_i\mathcal{Y} \simeq \mathbf{C}_+^{(i)} \wedge_{\mathfrak{S}_i} \mathcal{Y}^{\wedge i} \quad .$$

La filtration $F_\ell\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ se scinde stablement. Précisément, le théorème suivant est dû à Snaith.

Théorème 2.2.9 (Snaith). *La filtration de $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ se scinde stablement. Autrement dit, on a un scindement stable :*

$$\mathcal{C}_2\mathcal{Y} \overset{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^{\infty} D_i\mathcal{Y} \quad .$$

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION — Une démonstration simple et élégante est donnée par F. Cohen dans l'annexe de [Coh83]. Tout revient essentiellement à construire une application

$$\mathcal{C}_2\mathcal{Y} \longrightarrow \mathbf{Q} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} D_i\mathcal{Y} \right) \quad ,$$

\mathbf{Q} désignant le foncteur $\Omega^\infty \Sigma^\infty$. On construit plutôt, par des moyens combinatoires, une application

$$\mathcal{C}_2\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{C}_\infty \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} D_i\mathcal{Y} \right) \quad ,$$

dont on montre que c'est une équivalence d'homotopie. □

Remarque 2.2.10. Le théorème de Snaith admet une version équivariante. Soient G un groupe fini, (\mathcal{Y}, y_0) un G -CW-complexe (bien) pointé et V une représentation (réelle) de G . Pour tout entier positif i , les sous-quotients

$$D_i^V\mathcal{Y} \simeq V_+^{(i)} \wedge_{\mathfrak{S}_i} \mathcal{Y}^{\wedge i}$$

de la filtration naturelle de l'espace $\mathcal{C}_V\mathcal{Y}$ sont munis d'une action de G et l'on a un G -scindement stable

$$\mathcal{C}_V\mathcal{Y} \overset{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^{\infty} D_i^V\mathcal{Y} \quad .$$

Ce scindement est intimement lié à l'existence d'un scindement (instable) de l'espace $(\Omega^V \Sigma^V \mathcal{Y})^G$ des applications G -équivariantes en un produit d'espaces d'applications non-équivariantes

$$\prod_{(H)} \Omega^{W_H} \Sigma^{W_H} \mathcal{Y}^H \quad .$$

pour lesquels le scindement de Snaith vaut. (Ci-dessus, le produit est pris sur les classes de conjugaison de sous-groupes H de G et W_H est une certaine représentation que nous ne décrivons pas. Nous renvoyons à [CWW90], Theorem 2.1 pour plus de détails).

c) Comparaison entre $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ et $F_m\mathcal{C}_2S^{2d-1}$

Soit d un entier positif fixé. Pour tout entier positif m , nous abordons la question de la comparaison entre les types d'homotopie des espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ et $F_m\mathcal{C}_2S^{2d-1}$. Le résultat est que ces espaces ont toujours même type d'homotopie *stable*, tandis qu'*instablement* les types d'homotopie ne coïncident que pour $d > 1$.

i) Résultats sur le type d'homotopie stable

Les articles [CCMM91, CCMM93] montrent (de 2 façons différentes) que *stablement*, pour tout entier positif m , l'espace $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ a le type d'homotopie stable du cran $F_m \mathcal{C}_2 S^{2d-1}$ de la filtration du modèle de May-Milgram.

Théorème 2.2.11. *Pour tout entier positif m , on a une équivalence d'homotopie stable*

$$\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C}) \stackrel{\text{st}}{\approx} F_m \mathcal{C}_2 S^{2d-1} \quad .$$

Etant donné le scindement de Snaith $F_m \mathcal{C}_2 S^{2d-1} \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i S^{2d-1}$ rappelé au Théorème 2.2.9, l'énoncé précédent équivaut à l'existence d'un scindement stable

$$\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C}) \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i S^{2d-1} \quad .$$

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION — Les quatre auteurs proposent deux démonstrations distinctes : l'une dans [CCMM91] et l'autre dans [CCMM93]. La première repose sur une analyse délicate et technique de suite spectrale tandis que la seconde est plus géométrique et moins technique. La méthode de [CCMM91] est toutefois plus puissante et les auteurs peuvent l'appliquer à des problèmes plus généraux. Pour simplifier les notations, nous nous limitons au cas $d = 1$, le cas $d > 1$ se traitant de façon analogue.

Les deux méthodes de démonstration sont de nature homologique. Leur point de départ commun est le suivant : l'espace des fractions rationnelles complexes contient un ouvert dense dont le type d'homotopie est très bien compris. En effet, soit \mathcal{O}_m le sous-espace de $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ formé des fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ telles que le polynôme A soit à racines simples. \mathcal{O}_m est un ouvert algébrique⁸, donc dense, de $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$. Un point (A, B) de cet espace est uniquement déterminé par la donnée de la configuration des racines α_i de A dans \mathbf{C} ainsi que par la liste des valeurs $B(\alpha_i) \in \mathbf{C}^\times$. On a ainsi un homéomorphisme

$$\mathcal{O}_m \simeq \mathbf{C}^{(m)} \times_{\mathfrak{S}_m} (\mathbf{C}^\times)^m \quad .$$

Remarquer que l'espace de droite dans l'expression ci-dessus a le type d'homotopie de l'espace $\mathbf{C}^{(m)} \times_{\mathfrak{S}_m} (S^1)^m$, ce dernier étant naturellement inclus dans le modèle de May-Milgram $\mathcal{C}_2 S^1$.

L'inclusion naturelle $\mathcal{O}_m \hookrightarrow \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \hookrightarrow \Omega_m^2 S^2$ induit une surjection $H_*(\mathcal{O}_m) \rightarrow H_*\left(\bigvee_{i=1}^m D_i S^1\right) \subset H_*(\Omega^2 S^3)$.

Cela donne une borne inférieure sur la taille de l'homologie de $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$. Le reste de la preuve consiste essentiellement à montrer que cette borne supérieure est également une borne inférieure.

- Dans [CCMM91], les auteurs construisent pour tout entier j une application stable $\Phi_j : \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \dashrightarrow D_j S^1$ et montrent que l'application stable « somme »

$$\bigvee_{j=1}^m \Phi_j : \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \dashrightarrow \bigvee_{j=1}^m D_j S^1$$

est une équivalence d'homologie (et donc une équivalence d'homotopie stable).

- Dans [CCMM93], les auteurs construisent une application stable $h_m : D_m S^1 \dashrightarrow \mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ telle que la composée

$$D_m S^1 \dashrightarrow \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) / \mathcal{F}_{m-1}(\mathbf{C})$$

soit une équivalence d'homologie (et donc une équivalence d'homotopie stable). Il s'ensuit un scindement stable $\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \simeq \mathcal{F}_{m-1}(\mathbf{C}) \vee D_m S^1$, dont le résultat se déduit par récurrence.

⁸Dans le chapitre 4, \mathcal{O}_m est baptisé « ouvert générique » de $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$.

Concluons par quelques commentaires :

1. Dans [CCMM91] comme dans [CCMM93], la démonstration donnée utilise la version stable théorème de Segal, c'est-à-dire le fait que l'on a une équivalence d'homotopie $\operatorname{colim}_m \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \simeq \operatorname{colim}_m \Omega_m^2 S^2 \simeq \Omega^2 S^3$.

2. Le fait que les applications $\bigvee_{j=1}^m \Phi_j$ (dans [CCMM91]) et h_m (dans [CCMM93]) soient des équivalences d'homologie utilisent la commutativité à homotopie près pour tout entier positif k du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{(k)} \times_{\mathfrak{S}_k} (S^1)^k & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}_k(\mathbf{C}) \\ \downarrow q & & \downarrow e \\ \mathcal{C}_2 S^1 & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^2 S^3 \end{array} \quad ,$$

où l'application i est la composée $\mathbf{C}^{(k)} \times_{\mathfrak{S}_k} (S^1)^k \approx \mathcal{O}_k \hookrightarrow \mathcal{F}_k(\mathbf{C})$, q est l'application canonique de passage au quotient et e est donnée par l'équivalence d'homotopie « standard » $\Omega_m^2 S^2 \approx \Omega_0^2 S^2 \approx \Omega^2 S^3$.

Le diagramme précédent ne nous semble pas commutatif, même à homotopie près. Ce point a également été relevé par Guest *et al.* dans [GKMY95], et dans une certaine mesure par R. Cohen et D. Shimamoto dans [CS91]. S'il est bien vrai que l'application naturelle

$$\prod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \longrightarrow \prod_{m \geq 0} \Omega_m^2 S^2$$

respecte les \mathcal{P}_2 -structures (*c.f.* [BM88]), l'application $\Omega^2 S^2 \approx \mathbf{Z} \times \Omega^2 S^3 \longrightarrow \Omega^2 S^3$ quant à elle ne respecte pas cette action (*c.f.* Remarque 2.1.1). \square

Remarques 2.2.12.

1. Soit m un entier positif m . Compte tenu du scindement stable de l'espace classifiant du groupe des tresses

$$\mathbf{C}^{(2m)} / \mathfrak{S}_{2m} \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m \mathbf{D}_i S^1 \quad ,$$

le théorème 2.2.11 est équivalent lorsque $d = 1$ à l'existence d'une équivalence d'homotopie stable

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \stackrel{\text{st}}{\approx} \mathbf{C}^{(2m)} / \mathfrak{S}_{2m} \quad .$$

V. Vassiliev a proposé une méthode de démonstration directe de ce résultat (*c.f.* [Vas95]) qui sera rappelée au Chapitre 5 (*c.f.* § 5.1).

2. Nous proposons au Chapitre 5 (*c.f.* Théorème 5.2.1) une généralisation du Théorème 2.2.11 donnant le scindement stable des espaces de points complexes des schémas d'Atiyah-Hitchin. Notre approche fait suite aux travaux de Vassiliev et se base sur la dualité de Spanier-Whitehead.
3. Le Théorème 5.2.1 que nous allons montrer renforce *légèrement* l'énoncé du théorème 2.2.11. Pour tout entier positif m , Les espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ et $F_m \mathcal{C}_2 S^{2d-1} \approx F_m \mathcal{C}_2(\mathbf{C}^d - \{0\})$ sont naturellement munis d'une involution induite par la conjugaison complexe. Et l'équivalence d'homotopie stable $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C}) \stackrel{\text{st}}{\approx} F_m \mathcal{C}_2 S^{2d-1}$ est valable en tant que $\mathbf{Z}/2$ -espaces.

ii) **Résultats sur le type d'homotopie instable**

Il est naturel de se demander si le théorème 2.2.11 admet une version instable. Le théorème suivant, dû à R. Cohen et D. Shimamoto, est le résultat principal de l'article [CS91].

Théorème 2.2.13. *Soit d un entier positif. Alors,*

1. *Lorsque $d = 1$, les espaces $\mathcal{F}_2(\mathbf{C})$ et $F_2\mathcal{C}_2S^1$ n'ont pas le même type d'homotopie instable.*
2. *Pour $d > 1$ et pour tout entier positif m les espaces $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ et $F_m\mathcal{C}_2S^{2d-1}$ ont le même type d'homotopie instable.*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION —

1. Les auteurs montrent que l'on a $\pi_2(\mathcal{F}_2(\mathbf{C})) \simeq \mathbf{Z}$ tandis que l'on a $\pi_2(F_2\mathcal{C}_2S^1) \simeq \mathbf{Z}/2[t, t^{-1}]$. (En fait, de manière plus grossière, on peut montrer que les structures d'algèbres de $H^*(\mathcal{F}_2(\mathbf{C}), \mathbf{F}_2)$ et $H^*(F_2\mathcal{C}_2S^1, \mathbf{F}_2)$ ne sont pas isomorphes, *c.f.* Remarque 2.2.14 ci-après).
2. L'idée est la suivante. Le modèle de May-Milgram $\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ d'un espace topologique \mathcal{Y} est par définition la colimite d'un certain diagramme d'espaces de configuration de points de \mathbf{C} avec des étiquettes dans \mathcal{Y} . Soit $\mathcal{C}_2^h\mathcal{Y}$ l'espace obtenu en prenant plutôt la colimite homotopique de ce même diagramme. Les auteurs affirment que pour tout entier m l'application canonique $F_m\mathcal{C}_2^h\mathcal{Y} \rightarrow F_m\mathcal{C}_2\mathcal{Y}$ est une équivalence d'homotopie⁹.

Mais alors construire une application $F_m\mathcal{C}_2S^{2d-1} \rightarrow \mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ revient à construire une application $F_m\mathcal{C}_2^hS^{2d-1} \rightarrow \mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$, c'est-à-dire une famille d'applications $\mathbf{C}^{(k)} \times_{\mathfrak{S}_k} (S^{2d-1})^k \rightarrow \mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ pour

$1 \leq k \leq m$ vérifiant certaines relations de compatibilité à homotopie près.

Les auteurs montrent que les applications $\mathbf{C}^{(k)} \times_{\mathfrak{S}_k} (S^{2d-1})^k \approx \mathcal{O}_k \hookrightarrow \mathcal{F}_k^d(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ satisfont de

telles conditions. Ils montrent également que l'application $F_m\mathcal{C}_2S^{2d-1} \rightarrow \mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ ainsi obtenue induit un isomorphisme en homologie. Il reste à conclure en utilisant le théorème de Whitehead (les espaces sont ici simplement connexes). \square

Remarque 2.2.14. Soit m un entier positif. B. Totato a montré (*c.f.* [Tot90]) que les structures d'algèbres $H^*(\mathcal{F}_m(\mathbf{C}), \mathbf{F}_2)$ et $H^*(F_m\mathcal{C}_2S^1, \mathbf{F}_2)$ diffèrent lorsque $m + 1$ n'est pas une puissance de 2.

Il est très plausible que pour tout entier $m > 1$, les espaces $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ et $F_m\mathcal{C}_2S^1$ n'aient pas le même type d'homotopie.

⁹Il nous semble que ceci n'est pas vrai dans une telle généralité. Par exemple, pour $m = 2$ et $\mathcal{Y} = S^1$, une application du théorème de Van-Kampen montre que les groupes fondamentaux de ces espaces ne sont pas isomorphes. Par contre, le résultat nous semble plausible lorsque l'espace \mathcal{Y} est pris simplement connexe et donc *a fortiori* ici pour $\mathcal{Y} = S^{2d-1}$ avec $d > 1$.

Chapitre 3

Schémas d'Atiyah-Hitchin

Dans ce chapitre les objets éponymes du mémoire apparaissent. Un schéma raisonnable Y étant fixé, les schémas d'Atiyah-Hitchin de Y forment une famille de nouveaux schémas indexée par les entiers positifs m et notée $\mathcal{R}_m Y$. Cette famille généralise les schémas de fractions rationnelles \mathcal{F}_m^d étudiés au Chapitre 1 au sens où, pour tous entiers positifs m et d , on a un isomorphisme canonique des schémas (c.f. Proposition 3.2.4 (3))

$$\mathcal{R}_m(\mathbf{A}^d - \{0\}) \simeq \mathcal{F}_m^d \quad .$$

Les schémas d'Atiyah-Hitchin ont vocation à « approximer » l'espace $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$ des applications *motiviques* pointées de \mathbf{P}^1 dans $\mathbf{P}^1 \wedge Y$ de la même manière que les espaces topologiques de fonctions rationnelles $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ approximent l'espace topologique $\Omega^2 S^{2d+1} \approx \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \wedge (\mathbf{C}^d - \{0\}))$ d'après les résultats de Segal et Cohen *et al.* rappelés au Chapitre 2.

Pour tout Y , nous construisons une application motivique

$$\tilde{\iota}_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_m Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y_+ \quad .$$

Lorsque Y est pointé, ce morphisme se raffine en une application *motivique*

$$\iota_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_m Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y \quad .$$

La construction de ces deux morphismes repose sur la *pureté homotopique*. Le slogan est que partout où en topologie on utilise des petits disques se cache une application de Thom. Grâce aux travaux de Morel, on dispose d'une bonne théorie des espaces de Thom qui permet de rendre les constructions algébriques.

Les deux applications précédentes sont à la source d'une série de conjectures. Nous conjecturons tout d'abord des versions motiviques au théorème de Segal.

- Pour tout Y , l'analogue de la version stabilisée du théorème de Segal serait que $\tilde{\iota}_m$ induisît une \mathbf{A}^1 -équivalence d'homotopie¹ :

$$\Omega^{\mathbf{S}^1} \mathbf{B} \left(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y \right) \approx \Omega^{\mathbf{P}^1} (\mathbf{P}^\infty \wedge Y_+) \quad .$$

- Lorsque Y est pointé et connexe, l'analogue de la version forte du théorème de Segal serait que l'application ι_m fût de connexité tendant vers l'infini proportionnellement à m .

Nous conjecturons également un scindement motivique stable des espaces $\mathcal{R}_m Y$ analogue à celui des travaux de Cohen *et al.*.

¹Que cette affirmation ait un sens fait partie de la conjecture.

- Pour tout Y , il y aurait un scindement stable (pour la suspension $\Sigma^{\mathbf{P}^1}$)

$$\mathcal{R}_m Y \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i^{\text{mot}} Y \quad .$$

Nous laissons aux chapitres suivants le soin de convaincre le lecteur du bien fondé de nos spéculations. Nous y obtenons des résultats, principalement de nature topologique, qui sont des conséquences naturelles de nos conjectures.

Voici le plan du chapitre :

- 3.1 Fractions rationnelles et schémas de Hilbert.** — Nous présentons brièvement les travaux de M. Atiyah et N. Hitchin à l'origine de la définition de $\mathcal{R}_m Y$ dans le cadre de la théorie des schémas de Hilbert.
- 3.2 Schémas d'Atiyah-Hitchin.** — Ce paragraphe donne une définition directe ainsi que les premières propriétés des schémas d'Atiyah-Hitchin. La construction est élémentaire, indépendante de la théorie des schémas de Hilbert. Nous présentons ensuite quelques exemples fondamentaux.
- 3.3 Variétés analytiques d'Atiyah-Hitchin.** — Nous définissons l'analogie des schémas d'Atiyah-Hitchin en géométrie analytique. Pour toute variété holomorphe \mathcal{Y} , on construit ainsi une variété holomorphe $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$ qui coïncide avec $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ lorsque $\mathcal{Y} = Y(\mathbf{C})$.
- 3.4 Des applications motiviques stables.** — On construit dans ce paragraphe les applications algébriques $\tilde{\iota}_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_m Y \rightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y_+$ et $\iota_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_m Y \rightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$.
- 3.5 Conjectures.** — Au moyen des applications précédentes, nous énonçons nos conjectures sur le type d'homotopie motivique des schémas d'Atiyah-Hitchin.

Convention: Dans tout le chapitre, K est un corps de base fixé et l'on note Sch_K la catégorie des K -schémas. Tous les schémas et tous les morphismes de schémas qui apparaissent sont implicitement dans Sch_K .

3.1 Fractions rationnelles et schémas de Hilbert

L'origine de la définition des schémas d'Atiyah-Hitchin, telle que donnée dans la suite à la Définition 3.2.1, est une reformulation d'idées dues à M. Atiyah et N. Hitchin apparaissant dans [AH88], Chapter 5.

Pour des raisons de physique liées à l'étude des monopoles magnétiques — ces considérations sortent largement du cadre de cette thèse! — Atiyah et Hitchin sont amenés à considérer les schémas de fractions rationnelles \mathcal{F}_m^d dans le cadre algébrique de la théorie des schémas de Hilbert. Nous présentons ici brièvement leur point de vue.

a) Foncteur des points

Ce paragraphe rappelle quelques faits élémentaires sur le foncteur des points d'un schéma.

Notation: Soient Alg_K la catégorie des K -algèbres, $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles et $\text{Fonct}(\text{Alg}_K, \mathcal{E}ns)$ la catégorie des foncteurs de cette première catégorie dans la seconde.

A tout K -schéma Y , on associe son foncteur des points $h_Y : \text{Alg}_K \rightarrow \mathcal{E}ns$. Rappelons en sa définition.

Définition 3.1.1. Pour toute K -algèbre R , soit $Y(R)$ l'ensemble des applications de schémas de $\text{Spec } R$ dans Y . L'association

$$R \mapsto Y(R)$$

fournit un foncteur $h_Y : \text{Alg}_K \rightarrow \mathcal{E}ns$ appelé *foncteur des points* de Y .

D'après le lemme de Yoneda, le schéma Y est entièrement caractérisé par son foncteur des points. Précisément, on a

Proposition 3.1.2. *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} h : \text{Sch}_K & \longrightarrow & \text{Fonct}(\text{Alg}_K, \mathcal{E}ns) \\ Y & \longmapsto & h_Y \end{array}$$

induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des K -schémas et une sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{Fonct}(\text{Alg}_K, \mathcal{E}ns)$.

Définition 3.1.3. On dit qu'un sous-foncteur $G \subset F$ est ouvert si pour toute K -algèbre R et tout élément $\psi \in F(R)$ le foncteur produit fibré G_ψ

$$\begin{array}{ccc} G_\psi & \longrightarrow & h_{\text{Spec } R} \\ \downarrow & & \downarrow \psi \\ G & \longrightarrow & F \end{array}$$

est représenté par un sous-schéma ouvert de $\text{Spec } R$.

Concrètement, ceci signifie qu'il existe une famille d'éléments de R , disons $(f_i)_{i \in I}$ telle que l'ensemble des morphismes de K -algèbres $\varphi : R \longrightarrow S$ pour lesquels l'élément $\psi \circ \varphi$ appartient à $G(S) \subset F(S)$ soit exactement l'ensemble des morphismes $\varphi : R \longrightarrow S$ tels que la famille $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ engendre S .

Fait 3.1.4. Un sous-schéma $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si le sous-foncteur $h_U \subset h_Y$ est ouvert.

Tout foncteur de $\text{Fonct}(\text{Alg}_K, \mathcal{E}ns)$ ne provient pas d'un schéma Y . L'image du foncteur h est déterminée par la proposition suivante.

Proposition 3.1.5. *Soit F un foncteur $\text{Alg}_K \longrightarrow \mathcal{E}ns$. Alors, il existe un K -schéma Y dont F est le foncteur des points si et seulement si*

1. F est un faisceau au sens de Zariski.

Ceci signifie que pour toute K -algèbre R et tout recouvrement de $X := \text{Spec } R$ par des ouverts affines $(X_i)_{i \in I}$ de la forme $X_i := \text{Spec } R \left[\frac{1}{f_i} \right]$ avec $f_i \in R$, l'ensemble $F(R)$ est le coégalisateur de la double flèche canonique

$$\prod_{i \in I} F \left(R \left[\frac{1}{f_i} \right] \right) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I^2} F \left(R \left[\frac{1}{f_i f_j} \right] \right) .$$

2. F admet un recouvrement ouvert par des sous-foncteurs ouverts.

Ceci signifie qu'il existe une famille de K -algèbres $(R_j)_{j \in J}$ et de transformations naturelles

$$\alpha_j : h_{R_j} \longrightarrow F$$

telles que :

- pour tout j , h_{R_j} soit un sous-foncteur ouvert de F ;
- pour toute extension de corps $K \subset \kappa$, l'on ait

$$F(\kappa) = \bigcup_{j \in J} \alpha_j (h_{R_j}(\kappa)) .$$

b) Schémas de Hilbert

Dans tout ce paragraphe, soient $m \geq 1$ un entier fixé et Y un K -schéma quasi-projectif fixé. Nous rappelons brièvement la définition du m -ème schéma de Hilbert ponctuel de Y . Heuristiquement, il s'agit de l'espace de modules algébrique des sous-schémas fermés de dimension 0 et de longueur m de Y .

Le théorème suivant est un cas particulier du Théorème 3.2 de [Gro95].

Théorème 3.1.6. *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \text{Hilb}^m : \text{Alg}_K &\longrightarrow \mathcal{E}ns \\ R &\longmapsto \left\{ \text{sous-}R\text{-schémas fermés } Z \subset Y_R \text{ plats et de polynôme de Hilbert } P_Z = m \right\} \end{aligned}$$

est représentable par un schéma quasi-projectif, noté $Y^{[m]}$, et appelé schéma de Hilbert ponctuel de Y .

Voici quelques propriétés importantes de ces schémas.

Proposition 3.1.7.

1. Si Y est une courbe lisse, alors on a un isomorphisme canonique $Y^{[m]} \simeq \text{SP}^m Y$ (il s'agit ici du produit symétrique au sens de la géométrie algébrique).
2. Si Y est une surface lisse, alors $Y^{[m]}$ est une désingularisation du produit symétrique $\text{SP}^m Y$.
3. En général, pour Y un schéma lisse de dimension ≥ 3 , $Y^{[m]}$ n'est pas lisse.

c) L'approche d'Atiyah et Hitchin

En général, le schéma de Hilbert $Y^{[m]}$ n'est pas lisse, même si Y est lisse. Cependant, M. Atiyah et N. Hitchin remarquent que l'on peut construire une désingularisation du produit symétrique $\text{SP}^m(Y \times \mathbf{A}^1)$ à partir de $\text{Hilb}^m(Y \times \mathbf{A}^1)$ de la façon suivante.

Soit $\mathcal{R}_m(Y)$ le sous-foncteur de $\text{Hilb}^m(Y \times \mathbf{A}^1)$ suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(Y) : \text{Alg}_K &\longrightarrow \mathcal{E}ns \\ R &\longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{sous-}R\text{-schémas fermés } Z \subset (Y \times \mathbf{A}^1)_R \text{ plats et de polynôme de Hilbert } P_Z = m \\ \text{tels que } Z \hookrightarrow (Y \times \mathbf{A}^1)_R \xrightarrow{\text{pr}} \mathbf{A}_R^1 \text{ soit encore une immersion fermée.} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

La donnée d'un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_R^1 de dimension 0 et de longueur m équivaut à la donnée d'un polynôme $A \in R[X]$ unitaire de degré m et l'on a alors un isomorphisme $Z \simeq \text{Spec} \left(R[X]/(A) \right)$. La donnée de l'immersion $Z \hookrightarrow (Y \times \mathbf{A}^1)_R$ est alors équivalente à la donnée d'un morphisme $\text{Spec} \left(R[X]/(A) \right) \longrightarrow Y$, c'est-à-dire à la donnée d'un élément de $Y \left(R[X]/(A) \right)$.

Les auteurs expliquent que l'on obtient ainsi un sous-schéma lisse du schéma de Hilbert $(Y \times \mathbf{A}^1)^{[m]}$. Ils montrent également que l'on retrouve le schéma des fractions rationnelles \mathcal{F}_m (et plus généralement \mathcal{F}_m^d) lorsque Y est le schéma $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}^d - \{0\})$.

3.2 Schémas d'Atiyah-Hitchin

Inspirés par le paragraphe précédent, nous donnons ici une construction directe élémentaire des schémas d'Atiyah-Hitchin, indépendante de la théorie des schémas de Hilbert.

Définition 3.2.1. Pour toute K -algèbre R , soit $(\mathcal{R}_m Y)(R)$ l'ensemble des couples (A, B) où

- A est un polynôme unitaire de degré m à coefficients dans R ;

- B est un élément de $Y \left(R[X]/(A) \right)$, c'est-à-dire un morphisme $\text{Spec} \left(R[X]/(A) \right) \rightarrow Y$.

On définit ainsi un foncteur $\mathcal{R}_m Y \in \text{Fonct}(\text{Alg}_K, \mathcal{E}ns)$.

La proposition suivante montre que lorsque Y est un schéma raisonnable le foncteur $\mathcal{R}_m Y$ défini ci-dessus est représentable par un schéma que l'on notera par abus encore $\mathcal{R}_m Y$.

Proposition 3.2.2. *Soit $m \geq 1$ un entier.*

1. Pour tout sous-schéma ouvert U de Y , le foncteur $\mathcal{R}_m U$ est un sous-foncteur ouvert de $\mathcal{R}_m(Y)$.
2. Pour tout schéma affine Z , le foncteur $\mathcal{R}_m Z$ est représentable par un schéma affine.
3. Pour tout schéma quasi-projectif Y , le foncteur $\mathcal{R}_m Y$ est représentable par un schéma quasi-projectif.
4. Si le schéma quasi-projectif Y précédent est lisse de dimension d , le schéma $\mathcal{R}_m Y$ est lisse de dimension $m(d+1)$.
5. Soit Pol_m le schéma des polynômes unitaires de degré m . Lorsque Y est quasi-projectif lisse, la projection canonique

$$\begin{aligned} \wp : \mathcal{R}_m Y &\longrightarrow \text{Pol}_m \\ (A, B) &\longmapsto A \end{aligned}$$

est lisse.

Remarques 3.2.3. Même dans le cas où Y est projectif, le schéma $\mathcal{R}_m Y$ est en général non projectif. Par exemple, on a un isomorphisme canonique de schémas $\mathcal{R}_1 Y \simeq \mathbf{A}^1 \times Y$ (c.f. Exemples 3.2.4 (1)).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2.2 —

1. Soit U un sous-schéma ouvert de Y et montrons que $\mathcal{R}_m U$ est un sous-foncteur ouvert de $\mathcal{R}_m Y$.

Soient R une K -algèbre et $\psi := (A_R, B_R)$ un élément fixé de $(\mathcal{R}_m Y)(R)$. Pour tout morphisme de K -algèbres $\varphi : R \rightarrow S$, notons (A_S, B_S) l'élément de $(\mathcal{R}_m Y)(S)$ induit par φ . Dire que (A_S, B_S) appartient à $(\mathcal{R}_m U)(S)$ signifie que l'application $B_S : \text{Spec} \left(S[X]/(A_S) \right) \rightarrow Y$ se factorise par U . Or le foncteur h_U est un sous-foncteur ouvert de h_Y . Soient $f_i \in R[X]/(A_R)$ les éléments décrits à la Définition 3.1.3 pour la K -algèbre $R[X]/(A_R)$. Pour tout morphisme de K -algèbres $\varphi : R \rightarrow S$, l'élément $\psi \circ \varphi \in (\mathcal{R}_m Y) \left(S[X]/(\varphi(A_R)) \right)$ est dans $(\mathcal{R}_m U) \left(S[X]/(\varphi(A_R)) \right)$ si et seulement si les éléments $\varphi(f_i)$ engendrent $S[X]/(\varphi(A_R))$. Cela s'écrit comme une condition ouverte (d'inversibilité de mineurs de la matrice de Sylvester Syl_{A, f_i} introduite dans la Définition 1.3.11 des schémas \mathcal{F}_m^d) sur les coefficients $f_{i,k} \in R$ des f_i .

Ceci montre que $\mathcal{R}_m U$ est un sous-foncteur ouvert de $\mathcal{R}_m Y$.

2. Soit Z le schéma $Z := \text{Spec} \left(K[X_1, \dots, X_{n+d}]/(P_1, \dots, P_n) \right)$ et montrons que le foncteur $\mathcal{R}_m Z$ est représentable par un schéma affine.

Soient \underline{u} et \underline{v} les ensembles d'indéterminées

$$\underline{u} := \{u_0, \dots, u_{m-1}\} \quad \text{et} \quad \{v_{1,0}, \dots, v_{1,m-1}, \dots, v_{n+d,0}, \dots, v_{n+d,m-1}\}$$

et U, V_1, \dots, V_{n+d} les polynômes tautologiques de $K[\underline{u}, \underline{v}][X]$:

$$U := X^m + \sum_{k=0}^{m-1} u_k X^k \quad \text{et} \quad V_i := \sum_{k=0}^{m-1} v_{i,k} X^k \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq n+d \quad .$$

Pour tout $1 \leq j \leq n$, notons $\rho_j(\underline{u}, \underline{v})$ le polynôme de $K[\underline{u}, \underline{v}][X]$ reste de la division euclidienne de $P_j(V_1, \dots, V_{n+d})$ par U en tant que polynômes en l'indéterminée X (U est unitaire!). On écrit

$$\rho_j(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{k=0}^{m-1} \rho_{j,k}(\underline{u}, \underline{v}) X^k \quad ,$$

$\rho_{j,k}(\underline{u}, \underline{v})$ désignant donc un élément de $K[\underline{u}, \underline{v}]$.

Soit R une K -algèbre et (A, B) un élément de $(\mathcal{R}_m Z)(R)$. Notons $a_k \in R$ les coefficients du polynôme A :

$$A = X^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \quad .$$

L'élément $B \in Z\left(R[X]/(A)\right)$ s'identifie à un $(n+d)$ -uplet $(\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_{n+d})$ d'éléments de $R[X]/(A)$ satisfaisant les équations

$$P_j(\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_{n+d}) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

dans $R[X]/(A)$. Puisque A est unitaire, B se relève en une liste (B_1, \dots, B_{n+d}) de polynômes de $R[X]$ de degrés strictement inférieurs à m . Soit $b_{i,k}$ le coefficient de X^k dans B_i . La réduction de (B_1, \dots, B_{n+d}) modulo A représente un élément de $Z\left(K[X]/(A)\right)$ si et seulement si l'on a pour tout entier $1 \leq j \leq n$ et tout entier $0 \leq k \leq m-1$,

$$\rho_{j,k}(a_0, \dots, a_{m-1}, b_{1,0}, \dots, b_{1,m-1}, \dots, b_{n+d,0}, \dots, b_{n+d,m-1}) = 0 \quad .$$

Ceci signifie précisément que le foncteur $\mathcal{R}_m Z$ est représentable par le schéma affine

$$\text{Spec} \left(K[\underline{u}, \underline{v}] / (\rho_{j,k})_{\substack{0 \leq k \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq n}} \right) \quad .$$

3. Nous appliquons le critère de représentabilité de la Proposition 3.1.5 pour montrer que $\mathcal{R}_m Y$ définit bien un schéma.

– Montrons que le foncteur $\mathcal{R}_m Y$ est un faisceau au sens de Zariski.

Soient R et (f_i) comme dans la Proposition 3.1.5 et $(A_i, B_i) \in (\mathcal{R}_m Y)(R[f_i^{-1}])$ une famille d'éléments dans l'égalisateur de la double flèche

$$\prod_i (\mathcal{R}_m Y)(R[f_i^{-1}]) \rightrightarrows \prod_{i,j} (\mathcal{R}_m)(R[(f_i f_j)^{-1}]) \quad .$$

Puisque Pol_m est un schéma, la famille (A_i) provient d'un unique polynôme $A \in \text{Pol}_m$.

La famille des schémas $\text{Spec} \left(R_{f_i}[X]/(A) \right)$ forme un recouvrement ouvert de $\text{Spec} \left(R[X]/(A) \right)$.

Le fait que le foncteur des points de Y soit un faisceau au sens de Zariski fournit le polynôme $B \in Y \left(R[X]/(A) \right)$ recherché.

– Montrons que le foncteur $\mathcal{R}_m Y$ est recouvert par des sous-foncteurs ouverts.

Dans un schéma quasi-projectif, tout ensemble fini de points est contenu dans un ouvert affine (*c.f.* [Liu02], Chapitre 3, Proposition 3.36). Par conséquent, pour tout K -schéma quasi-projectif Y , pour toute extension de corps $K \subset \kappa$ et pour tout polynôme unitaire $A \in \kappa[X]$, un morphisme de K -schémas $\text{Spec} \left(\kappa[X]/(A) \right) \longrightarrow Y$ se factorise par un ouvert affine de U de Y .

Ceci montre que la famille de sous-foncteurs ouverts $\mathcal{R}_m U$ recouvre $\mathcal{R}_m Y$ lorsque U décrit les ouverts affines de Y .

La conjonction des deux points précédents montre que $\mathcal{R}_m Y$ est représentable.

Pour voir que $\mathcal{R}_m Y$ est quasi-projectif, remarquer que le sous-foncteur $\mathcal{R}_m Y$ est un sous-foncteur ouvert du foncteur de Hilbert $\text{Hilb}^m(Y \times \mathbf{A}^1)$ qui est (quasi-)projectif lorsque Y est (quasi-)projectif d'après [Gro95], Théorème 3.2 et §4).

4. Montrons la lissité de $\mathcal{R}_m Y$.

C'est une condition locale et puisque $\mathcal{R}_m Y$ est recouvert par les ouverts affines $\mathcal{R}_m U$ lorsque U parcourt les ouverts affines de Y , on peut supposer que Y est affine. On note alors Y plutôt Z et l'on reprend les notations du point (2).

Pour montrer la lissité de $\mathcal{R}_m Z$, il suffit de montrer que la variété $(\mathcal{R}_m Z)_{\overline{K}}$ est non-singulière (c.f. [Har77], Theorem III.10.2). Soit (A, B) un point de $(\mathcal{R}_m Z)_{\overline{K}}$. Lorsque l'on a une factorisation $A = A_1 A_2$ avec A_1 et A_2 unitaires et premiers entre eux, on note B_1 et B_2 les réductions de B dans $Z(\overline{K}[X]/(A_1))$ et dans $Z(\overline{K}[X]/(A_2))$ respectivement. Le schéma $\mathcal{R}_m Z$ est localement au voisinage de (A, B) produit d'un voisinage de (A_1, B_1) dans $\mathcal{R}_{\deg A_1} Z$ et d'un voisinage de (A_2, B_2) dans $\mathcal{R}_{\deg A_2} Z$. Par conséquent, on est ramené à montrer que $(\mathcal{R}_m Z)_{\overline{K}}$ est non-singulière en un point où $A = X^m$.

On suppose donc $A = X^m$. Remarquer qu'alors $\underline{b}_0 := (b_{1,0}, b_{2,0}, \dots, b_{n+d,0})$ est alors un point de $Z(\overline{K}[X]/X^m)$. De plus, pour tout entier $1 \leq j \leq n$, en différentiant l'identité

$$P_j(V_1, \dots, V_{n+d}) = \sum_{k=0}^{m-1} \rho_{j,k}(\underline{u}, \underline{v}) X^k + U Q_j(\underline{u}, \underline{v})$$

par rapport à l'indéterminée $v_{l,p}$ ($1 \leq l \leq n+d$, $0 \leq p \leq m-1$) on constate que $\frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial v_{l,p}}(X^m, B)$ est le coefficient de X^k dans $\frac{\partial P_j}{\partial X_l}(B_1, \dots, B_{n+d}) \cdot X^p$. En particulier, on a

$$\frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial v_{l,p}}(X^m, B) = \begin{cases} \frac{\partial P_j}{\partial X_l}(\underline{b}_0) & \text{si } k = p \\ 0 & \text{si } k > p \end{cases}.$$

Ordonnons les couples d'entiers (j, k) et (l, p) suivant l'ordre lexicographique suivant :

$$(1, 1) < (2, 1) < \dots < (1, 2) < (2, 2) < \dots,$$

et notons $J(\underline{b}_0)$ la matrice $\left[\frac{\partial P_j}{\partial X_l}(\underline{b}_0) \right]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq l \leq n+d}}$. La matrice $\left[\frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial v_{l,p}}(X^m, B) \right]_{\substack{(1,0) \leq (j,k) \leq (n,m-1) \\ (1,0) \leq (l,p) \leq (n+d,m-1)}}$

est une matrice $m \times m$ de blocs $n \times (n+d)$ de la forme

$$\begin{bmatrix} J(\underline{b}_0) & 0 & \dots & 0 \\ * & J(\underline{b}_0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & J(\underline{b}_0) \end{bmatrix}.$$

La matrice jacobienne $\left[\frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial v_{l,p}} \middle| \frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial u_p} \right](X^m, B)$ est donc de rang maximum. Ceci démontre la lissité de $\mathcal{R}_m Z$ en (X^m, B) .

5. La lissité de la projection \wp est une conséquence de la démonstration du point précédent : on y a vu que la matrice jacobienne $\left[\frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial v_{l,p}} \middle| \frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial u_p} \right](X^m, B)$ est de rang maximum uniquement grâce à sa partie $\left[\frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial v_{l,p}} \right]$. □

Voici quelques exemples fondamentaux de schémas d'Atiyah-Hitchin.

Proposition 3.2.4. *Soit m un entier positif.*

1. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{R}_1 Y \simeq Y \times \mathbf{A}^1 \quad .$$

2. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{R}_m \mathbf{G}_m \simeq \mathcal{F}_m \quad .$$

3. *Pour tout entier positif d , on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{R}_m (\mathbf{A}^d - \{0\}) \simeq \mathcal{F}_m^d \quad .$$

4. *On rappelle que le schéma du point est par définition $\text{pt} := \text{Spec } K$. On a l'identité*

$$\mathcal{R}_m \text{pt} = \text{Pol}_m \quad ,$$

Pol_m désignant le schéma des polynômes unitaires de degré m .

5. *Soit \mathbf{S}^0 le schéma $\text{Spec} \left(K[X] / (X(X-1)) \right)$. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{R}_m \mathbf{S}^0 \simeq \coprod_{m_1+m_2=m} \mathcal{F}_{m_1, m_2} \quad ,$$

les schémas \mathcal{F}_{m_1, m_2} désignant les schémas de fractions rationnelles introduits page 36.

6. *De même, pour tout entier positif n tel que l'on dispose de n points distincts dans K , on note $(\mathbf{S}^0)^{\vee n-1}$ le schéma réunion disjointe de n points. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{R}_m (\mathbf{S}^0)^{\vee n-1} \simeq \coprod_{m_1+\dots+m_n=m} \mathcal{F}_{m_1, \dots, m_n} \quad ,$$

où $\mathcal{F}_{m_1, \dots, m_n}$ désigne le schéma des n -uplets (A_1, \dots, A_n) de polynômes unitaires avec $\deg A_i = m_i$, $\sum_{i=1}^n m_i = m$ et tels que $\text{rés}(A_i, A_j)$ soit inversible pour tout couple (i, j) d'entiers distincts.

7. *Soit d un entier positif. Voici une description des k -points de $\mathcal{R}_m \mathbf{P}^d$ pour tout corps k .*

Les éléments de $(\mathcal{R}_m \mathbf{P}^d)(k)$ sont les couples (A, B) où $A \in k[X]$ est unitaire de degré m et $B = (B_0, \dots, B_d)$ est une famille génératrice d'éléments de $k[X] / (A)$ à la multiplication par une unité de $k[X] / (A)$ près.

DÉMONSTRATION — Soit R une K -algèbre.

1. Un R -point de $\mathcal{R}_1 Y$ est un couple (A, B) avec $A = X - \alpha$, $\alpha \in R$ et $B \in Y \left(R[X] / (X - \alpha) \right) \simeq Y(R)$. Donc l'ensemble $(\mathcal{R}_1 Y)(R)$ est canoniquement en bijection avec $R \times Y(R)$.
2. Un R -point de $\mathcal{R}_m Y$ est un couple (A, \bar{B}) où A est un polynôme de $R[X]$ unitaire de degré m et où \bar{B} est un $\left(R[X] / (A) \right)$ -point du schéma \mathbf{G}_m , c'est-à-dire une unité de l'anneau $R[X] / (A)$. Un tel \bar{B} admet un unique relevé B dans $R[X]$ de degré $< m$. Le couple (A, B) ainsi obtenu est une fraction rationnelle de $\mathcal{F}_m(R)$. Ceci décrit une bijection canonique entre $(\mathcal{R}_m \mathbf{G}_m)(R)$ et $\mathcal{F}_m(R)$.
3. De même que précédemment, un R -point de $\mathcal{R}_m (\mathbf{A}^d - \{0\})$ est un couple (A, \bar{B}) où A est un polynôme de $R[X]$ unitaire de degré m et où \bar{B} est un $\left(R[X] / (A) \right)$ -point du schéma $\mathbf{A}^d - \{0\}$, c'est-à-dire une liste $\bar{B} = (\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_d)$ d'éléments de $R[X] / (A)$ qui engendrent l'anneau $R[X] / (A)$. Un tel \bar{B} admet un unique relevé $B = (B_1, \dots, B_d)$, liste de polynômes de $R[X]$ de degré $< m$. Le couple (A, B) ainsi obtenu est une fonction rationnelle de $\mathcal{F}_m^d(R)$. Ceci décrit une bijection canonique entre $(\mathcal{R}_m (\mathbf{A}^d - \{0\}))(R)$ et $\mathcal{F}_m^d(R)$.

4. Se donner un R -point de $\mathcal{R}_{m\text{pt}}$ revient juste à se donner un polynôme $A \in R[X]$ unitaire de degré m . D'où l'isomorphisme annoncé.
5. Soit $A \in R[X]$ un polynôme unitaire de degré m . La donnée d'un $R[X]/(A)$ -point de S^0 correspond à la donnée de deux idempotents orthogonaux de l'anneau $R[X]/(A)$. De manière équivalente, c'est la donnée d'un couple de polynômes unitaires $(A_1, A_2) \in R[X]^2$ avec $\deg(A_1) = m_1$, $\deg(A_2) = m_2$, $\text{rés}_{m_1, m_2}(A_1, A_2) \in R^\times$ et tels que $A = A_1 A_2$. L'élément (A_1, A_2) est donc un R -point de \mathcal{F}_{m_1, m_2} .
6. La démonstration est la stricte généralisation du point précédent.
7. Pour tout corps k et tout polynôme unitaire de $k[X]/(A)$, l'anneau $\left(k[X]/(A)\right)$ est un produit d'anneaux locaux. Le résultat est donc conséquence de la description des points de l'espace projectif \mathbf{P}^d dans un anneau local. \square

3.3 Variétés analytiques d'Atiyah-Hitchin

Nous venons de construire au paragraphe précédent pour toute variété algébrique Y raisonnable et tout entier positif m une nouvelle variété algébrique $\mathcal{R}_m Y$ raisonnable. Nous indiquons maintenant au lecteur que la géométrie algébrique effraye comment transposer cette construction dans le cadre analytique (voire topologique). Pour toute variété holomorphe \mathcal{Y} , et pour tout entier positif m , nous définissons une nouvelle variété holomorphe, notée $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$. Cette variété est telle que dans le cas où \mathcal{Y} est l'espace des points complexes $Y(\mathbf{C})$ d'une variété algébrique lisse définie sur \mathbf{C} , on ait un isomorphisme

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y} \simeq (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \quad .$$

a) Prolongement holomorphe de fonctions de plusieurs variables complexes

Nous commençons par une petite digression sur la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes dont le but est d'énoncer le théorème de prolongement de Riemann (Théorème 3.3.3) dont nous avons besoin un peu après. Le lecteur peut sauter ce passage jusqu'à sa lecture de la démonstration de la Proposition-définition 3.3.4.

Soient $n \geq 1$ un entier et Ω un ouvert de \mathbf{C}^n .

Définition 3.3.1. Un sous-ensemble $A \subset \Omega$ est dit analytique si pour tout élément $\omega \in \Omega$, il existe un voisinage U de ω et des applications holomorphes $f_1, \dots, f_p : U \rightarrow \mathbf{C}$ telles que l'on ait

$$U \cap A = \{z \in U, f_1(z) = \dots, f_p(z) = 0\} \quad .$$

Remarque 3.3.2. Un sous-ensemble analytique A est nécessairement fermé. De plus, si Ω est connexe, alors $\Omega - A$ est connexe et dense dans Ω .

Le théorème suivant, dit théorème de prolongement de Riemann, généralise un phénomène de prolongement analytique bien connu pour les fonctions d'une unique variable complexe. Une démonstration se trouve par exemple dans [Nar71], Proposition 2 p. 50.

Théorème 3.3.3. Soient A un sous-ensemble analytique de Ω tel que $\Omega - A$ soit dense et $f : \Omega - A \rightarrow \mathbf{C}$ une application holomorphe. On suppose que pour tout $a \in A$, il existe un voisinage U de a dans Ω tel que $f|_{U-A}$ soit bornée. Alors f admet un unique prolongement holomorphe $F : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$.

b) Construction de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$

Soient m et d des entiers positifs fixés.

Conventions:

- Un multi-polynôme $\underline{B} = (B_1, \dots, B_d)$ est une liste de polynômes. Le degré de \underline{B} est par définition le suprémum des degrés des B_i . Un multi-polynôme \underline{B} est généralement considéré comme une application $\underline{B} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^d$.
- Pour alléger, on désigne par $\mathbf{P}_m^d(\mathbf{C})$ l'espace $(\mathcal{R}_m \mathbf{A}^d)(\mathbf{C})$. C'est donc l'ensemble des couples (A, \underline{B}) où A est un polynôme complexe unitaire de degré m et $\underline{B} := (B_1, \dots, B_d)$ est un multi-polynôme complexe de degré $< m$.
- Pour toute variété holomorphe \mathcal{Y} , et pour tout entier positif k , on note $\mathbf{J}^k \mathcal{Y}$ le fibré des k -jets de \mathcal{Y} . Par définition, $\mathbf{J}^k \mathcal{Y}$ est un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de \mathcal{Y} dont la fibre au-dessus d'un point $y_0 \in \mathcal{Y}$ est l'ensemble des classes de chemins holomorphes $\gamma : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{Y}$ envoyant 0 sur y_0 pour la relation d'équivalence

$$\gamma \sim_k \tilde{\gamma} \iff \forall 0 \leq \ell \leq k, \quad \gamma^{(\ell)}(0) = \tilde{\gamma}^{(\ell)}(0) \quad .$$

Par définition, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{J}^0 \mathcal{Y} \simeq \mathcal{Y} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}^1 \mathcal{Y} \simeq \text{TY} \quad ,$$

TY désignant le fibré tangent de \mathcal{Y} .

De plus, une application holomorphe $\varphi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ induit une application holomorphe $\mathbf{J}^k \varphi : \mathbf{J}^k \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbf{J}^k \mathcal{Z}$.

Les points suivants guident la construction. Lorsque Y est une variété algébrique quasi-projective lisse définie sur \mathbf{C} , on a les propriétés suivantes :

1. Pour tout atlas² $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ de Y , la famille des ouverts affines $\mathcal{R}_m U_\alpha$ forme un recouvrement ouvert du schéma $\mathcal{R}_m Y$.
2. Si Y est une sous-variété quasi-affine de \mathbf{A}^d , alors $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ est la sous-variété de $(\mathcal{R}_m \mathbf{A}^d)(\mathbf{C}) = \mathbf{P}_m^d(\mathbf{C})$ suivante

$$\left\{ (A, \underline{B}) \in \mathbf{P}_m^d(\mathbf{C}) \left| \begin{array}{ll} (A(\alpha)=0) & \implies \underline{B}(\alpha) \in Y(\mathbf{C}) \\ (A(\alpha)=0, A'(\alpha)=0) & \implies (\underline{B}(\alpha), \underline{B}'(\alpha)) \in \mathbf{J}^1(Y(\mathbf{C})) \\ \dots & \dots \\ (A(\alpha)=0, A'(\alpha)=0, \dots, A^{(m)}(\alpha)=0) & \implies (\underline{B}(\alpha), \underline{B}'(\alpha), \dots, \underline{B}^{(m)}(\alpha)) \in \mathbf{J}^m(Y(\mathbf{C})) \end{array} \right. \right\} .$$

3. En particulier, lorsque Y est un sous-schéma ouvert de \mathbf{A}^d , disons U , les conditions sur les dérivées de \underline{B} s'évanouissent :

$$(\mathcal{R}_m U)(\mathbf{C}) = \{(A, \underline{B}) \in \mathbf{P}_m^d(\mathbf{C}) \mid A(\alpha) = 0 \implies \underline{B}(\alpha) \in U(\mathbf{C})\} \quad .$$

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbf{C}^d . Le point (3) précédent dicte la définition de l'ouvert $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{U} \subset \mathbf{C}^{m(d+1)}$. Pour toute variété holomorphe \mathcal{Y} , le point (1) suggère de construire la variété $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$ en recollant les ouverts $\mathcal{R}_m U_\alpha \subset \mathbf{C}^{m(d+1)}$ issus d'un atlas maximal $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ de \mathcal{Y} . C'est l'approche que nous allons suivre pour définir $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$.

²C'est-à-dire une famille d'ouverts affines recouvrant Y tel que tout ensemble fini de points de Y soit contenu dans l'un de ces ouverts.

Proposition-définition 3.3.4. Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbf{C}^d et ε l'application suivante

$$\begin{aligned} \varepsilon : \quad \mathbf{P}_m^d(\mathbf{C}) &\longrightarrow \mathbf{SP}^m(\mathbf{C}^d) \\ \left(A = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i), \underline{B} \right) &\mapsto [\underline{B}(\alpha_i)]_{1 \leq i \leq m} \end{aligned}$$

On pose

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U} := \varepsilon^{-1}(\mathbf{SP}^m(\mathcal{U})) \quad .$$

Autrement dit, $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U}$ est le sous-espace de $\mathbf{P}_m^d(\mathbf{C})$

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U} := \left\{ (A, \underline{B}) \in \mathbf{P}_m^d(\mathbf{C}) \mid A(\alpha) = 0 \implies \underline{B}(\alpha) \in \mathcal{U} \right\} \quad .$$

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1. L'espace $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbf{P}_m^d(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^{m(d+1)}$.

Soit \mathcal{V} un autre ouvert de \mathbf{C}^d .

2. Un biholomorphisme $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V}$ induit un biholomorphisme

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\varphi : \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{V} \quad .$$

3. On a l'identité

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U} \cap \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{V} = \mathcal{R}_m^{\text{hol}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \quad .$$

DÉMONSTRATION —

1. $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbf{P}_m^d(\mathbf{C})$ puisque $\mathbf{SP}^m(\mathcal{U})$ est un ouvert de $\mathbf{SP}^m(\mathbf{C}^d)$.

2. Soit $(A, \underline{B}) \in \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U}$. Lorsque le polynôme A admet des racines complexes α_i de multiplicités m_i , i.e. $A = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$, alors l'élément \underline{B} est déterminé de manière unique par la liste des valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_1 &:= \underline{B}(\alpha_1) \in \mathcal{U}, \quad \underline{\beta}'_1 := \underline{B}'(\alpha_1) \in \mathbf{C}^d, \quad \dots, \quad \underline{\beta}_1^{(m_1)} := \underline{B}^{(m_1)}(\alpha_1) \in \mathbf{C}^d \\ &\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \underline{\beta}_k &:= \underline{B}(\alpha_k) \in \mathcal{U}, \quad \underline{\beta}'_k := \underline{B}'(\alpha_k) \in \mathbf{C}^d, \quad \dots, \quad \underline{\beta}_k^{(m_k)} := \underline{B}^{(m_k)}(\alpha_k) \in \mathbf{C}^d \end{aligned}$$

En particulier, $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U}$ admet $\mathbf{C}^{(m)} \times_{\mathfrak{S}_m} \mathcal{U}^m$ comme sous-espace ouvert dense : il s'agit de l'ouvert correspondant aux couples (A, \underline{B}) pour lesquels A est à racines simples. Cet « ouvert générique » est le complémentaire de l'ensemble analytique \mathcal{A} donné par l'annulation du discriminant de A . Un biholomorphisme $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V}$ induit un biholomorphisme entre ouverts génériques :

$$\mathbf{C}^{(m)} \times_{\mathfrak{S}_m} \mathcal{U}^m \xrightarrow[\simeq]{1 \times \varphi^d} \mathbf{C}^{(m)} \times_{\mathfrak{S}_m} \mathcal{V}^m \subset \mathbf{C}^{m(d+1)} \quad .$$

Cette application est bornée au voisinage de l'ensemble analytique \mathcal{A} . Elle se prolonge donc d'après le théorème de prolongement de Riemann (Théorème 3.3.3) en une application holomorphe $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\varphi : \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U} \longrightarrow \mathbf{C}^{m(d+1)}$.

Par continuité, $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\varphi$ est nécessairement donnée par :

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}}(\varphi) \left(A = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}, \underline{B} \right) = (A, \underline{B}_\varphi) \quad ,$$

où \underline{B}_φ est le multi-polynôme déterminé de manière unique par les conditions :

$$\begin{aligned} \left(\underline{\beta}_{1,\varphi}, \underline{\beta}'_{1,\varphi}, \dots, \underline{\beta}_{1,\varphi}^{(m_1)} \right) &= (\mathbf{J}^{m_1}\varphi) \left(\underline{\beta}_1, \underline{\beta}'_1, \dots, \underline{\beta}_1^{(m_1)} \right) \\ &\dots \\ \left(\underline{\beta}_{k,\varphi}, \underline{\beta}'_{k,\varphi}, \dots, \underline{\beta}_{k,\varphi}^{(m_k)} \right) &= (\mathbf{J}^{m_k}\varphi) \left(\underline{\beta}_k, \underline{\beta}'_k, \dots, \underline{\beta}_k^{(m_k)} \right) \end{aligned}$$

Ceci assure que l'application $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\varphi$ se factorise bien par $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{V}$.

Enfin, $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\varphi$ est bien un biholomorphisme : son inverse est $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\varphi^{-1}$.

3. L'identité $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U} \cap \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{V} = \mathcal{R}_m^{\text{hol}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ est vraie par construction. \square

Venons-en à la construction de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ pour une variété holomorphe \mathcal{Y} de dimension d . Soit \mathcal{U} un atlas maximal de \mathcal{Y} ; \mathcal{U} est, entre autres, la donnée :

- d'une famille $(\mathcal{U}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'ouverts de \mathbf{C}^d ;
- pour tout couple d'indices $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$, d'un ouvert $\mathcal{U}_{\lambda, \mu} \subset \mathcal{U}_\lambda$;
- d'une famille de biholomorphismes

$$\varphi_{\lambda, \mu} : \mathcal{U}_{\lambda, \mu} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{\mu, \lambda}$$

satisfaisant la condition de cocycle.

Définition 3.3.5. Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{U})$ une variété holomorphe de dimension d comme ci-dessus. La variété d'Atiyah-Hitchin $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ est la variété obtenue en recollant les ouverts $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U}_\lambda \subset \mathbf{C}^{m(d+1)}$ avec les biholomorphismes

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\varphi_{\lambda, \mu} : \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U}_{\lambda, \mu} \longrightarrow \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{U}_{\mu, \lambda} \quad .$$

Le fait que la famille des $(\varphi_{\lambda, \mu})$ vérifie la condition de cocycle est une conséquence formelle des points (2) et (3) de la Proposition-définition 3.3.4 précédente.

La proposition suivante résume les principales propriétés de la variété $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ conséquences de sa construction.

Proposition 3.3.6. Soient \mathcal{Y} une variété holomorphe de dimension (complexe) d . Alors :

1. La variété holomorphe $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ est de dimension (complexe) $m(d+1)$.
2. Si \mathcal{Y} est l'espace des points complexes d'une variété algébrique quasi-projective lisse Y , c'est-à-dire $\mathcal{Y} = Y(\mathbf{C})$, alors on a un biholomorphisme $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y} \simeq (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$.
3. Si \mathcal{Z} est une sous-variété de \mathcal{Y} , alors $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Z}$ est une sous-variété de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$.
En particulier, un plongement de \mathcal{Y} dans \mathbf{C}^N induit un plongement de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathbf{C}^N \simeq \mathbf{C}^{N(m+1)}$.
4. L'application de « projection »

$$\begin{aligned} \wp : \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y} &\longrightarrow \text{Pol}_m(\mathbf{C}) \\ (A, \underline{B}) &\longmapsto A \end{aligned}$$

est une submersion.

Exemple 3.3.7. Dans le cas où \mathcal{Y} est l'ouvert $\mathbf{C}^d - (\{0\}^{d-1} \times \mathbf{R})$, $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ coïncide avec l'espace noté G_m^d par Y. Kamiyama dans [Kam04].

c) Stabilisation

Les applications de stabilisation $\mathcal{F}_{m-1} \hookrightarrow \mathcal{F}_m$ qu'utilise Segal (c.f. §2.1.a)) se généralisent bien dans le contexte des variétés holomorphes d'Atiyah-Hitchin.

Pour toute variété holomorphe \mathcal{Y} pointée, nous allons définir similairement des applications continues de stabilisation

$$\sigma_m : \mathcal{R}_{m-1}^{\text{hol}}\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y} \quad .$$

Puisque le cas particulier où \mathcal{Y} est l'espace des points complexes d'une variété algébrique Y est le plus intéressant, nous nous y limitons dans la suite, laissant au lecteur le soin d'adapter les détails dans le cas général.

Dans ce paragraphe, Y est une variété algébrique lisse de dimension d , définie sur \mathbf{C} et pointée. On note y_0 le point de base de $Y(\mathbf{C})$.

Notations:

– Pour tout $A \in \text{Pol}_m(\mathbf{C})$, on pose

$$|A| := \sup_{\alpha_i \text{ racine de } A} |\alpha_i| \quad .$$

– Notons $(\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1}Y)(\mathbf{C})$ le sous-espace de $(\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C})$ formé des couples (A, B) tels que A ait toutes ses racines contenues dans le disque unité $D = D(0, 1)$ de \mathbf{C} .

Remarquer que l'application

$$\begin{aligned} \psi : (\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C}) &\longrightarrow (\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1}Y)(\mathbf{C}) \\ (A(X), B(X)) &\mapsto \left(A\left(\frac{X}{1+|A|}\right), B\left(\frac{X}{1+|A|}\right) \right) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. Ci-dessus, la notation $B\left(\frac{X}{1+|A|}\right)$ désigne l'image de B par l'application $Y\left(\mathbf{C}[X]/(A)\right) \longrightarrow Y\left(\mathbf{C}[X]/\left(A\left(\frac{X}{1+|A|}\right)\right)\right)$ induite par le morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[X]/(A) &\longrightarrow \mathbf{C}[X]/\left(A\left(\frac{X}{1+|A|}\right)\right) \\ P &\mapsto P\left(\frac{X}{1+|A|}\right) \end{aligned}$$

Définition 3.3.8. On définit l'application de stabilisation $\sigma_m : (\mathcal{R}_{m-1}Y)(\mathbf{C}) \longrightarrow (\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C})$ comme la composée de l'homéomorphisme $\psi^{-1} : (\mathcal{R}_{m-1}Y)(\mathbf{C}) \simeq (\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1}Y)(\mathbf{C})$ défini ci-avant et de l'application suivante

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1}Y)(\mathbf{C}) &\longrightarrow (\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C}) \\ (A, B) &\mapsto ((X-1)A, \chi_{A, X-1}(B, y_0)) \end{aligned}$$

où $\chi_{A, X-1}$ désigne l'homéomorphisme

$$\chi_{A, X-1} : Y\left(\mathbf{C}[X]/(A)\right) \times Y\left(\mathbf{C}[X]/(X-1)\right) \xrightarrow{\cong} Y\left(\mathbf{C}[X]/((X-1)A)\right)$$

induit par l'isomorphisme chinois.

Remarque 3.3.9. L'application de stabilisation que nous venons de décrire provient d'une action de l'opérateur des petits disques sur l'espace $\coprod_{m \geq 0} (\mathcal{R}_mY)(\mathbf{C})$.

La construction précédente n'est pas très satisfaisante pour les deux raisons suivantes :

- Tout d'abord, nous ne sommes pas en mesure de décrire une application de stabilisation de nature algébrique, mais seulement une application topologique (pas holomorphe³) entre les espaces de points complexes. La seule exception concerne les schémas de fractions rationnelles \mathcal{F}_m ; on renvoie à la Remarque 3.3.10 ci-après.
- De plus, la construction de σ_m dépend d'un certain nombre de choix. Heureusement, à homotopie près, l'application n'en dépend pas.

Remarque 3.3.10. L'exemple des fractions rationnelles (c'est-à-dire lorsque $Y = \mathbf{G}_m$) est particulièrement intéressant puisque l'on dispose de candidats naturels à être des morphismes de stabilisation. Voici deux morphismes possibles, fournis par la loi de monoïde \oplus décrite au Chapitre 1, § 1.2.a)

$$\begin{aligned} \sigma_m^g : \mathcal{F}_{m-1} &\longrightarrow \mathcal{F}_m & \text{et} & & \sigma_m^d : \mathcal{F}_{m-1} &\longrightarrow \mathcal{F}_m \\ \frac{A}{B} &\mapsto \frac{X}{(-1)^m} \oplus \frac{A}{B} & & & \frac{A}{B} &\mapsto \frac{A}{B} \oplus \frac{X}{(-1)^m} \quad . \end{aligned}$$

Ces applications de stabilisation nous sont encore assez mystérieuses et soulèvent les questions suivantes.

³Elle est tout de même équivariante vis-à-vis de la conjugaison complexe.

Questions 3.3.11.

1. Les applications de stabilisation σ_m^g et σ_m^d sont-elles homotopes ? D'après le Corollaire 1.2.22, les applications σ_2^g et σ_2^d sont homotopes. .
Cette question est reliée à celle sur la commutativité à homotopie près de la loi \oplus , *c.f.* Questions 1.4.8(2).
2. Les applications topologiques induites $\mathcal{F}_{m-1}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ au niveau des espaces de points complexes par σ_m^g et σ_m^d sont-elles homotopes à l'application de stabilisation σ_m décrite à la Définition 3.3.8 ?
3. Comment construire une application de stabilisation *algébrique* pour un schéma Y quelconque ?

3.4 Des applications motiviques stables

Fixons un entier positif m et une variété algébrique quasi-projective lisse Y . Lorsque Y est *pointée*, le schéma d'Atiyah-Hitchin $\mathcal{R}_m Y$ a pour vocation d'approximer l'espace $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$. Nous indiquons ici comment construire un morphisme

$$\iota_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_m Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$$

permettant au moins de relier ces deux espaces.

Une légère variante de cette construction fournit également pour tout entier $0 \leq k \leq m$ des morphismes *algébriques* de « transfert »

$$\begin{array}{lcl} \tau_{m,k}^{\text{mot}} : & (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} & \longrightarrow (\mathcal{R}_k Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \\ \lambda_{m,m-k}^{\text{mot}} : & (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} & \longrightarrow (\mathcal{R}_{m-k} Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \end{array} .$$

a) Le morphisme ι_m^{mot}

On ne suppose pas Y pointée *a priori*. On commence par décrire une application motivique pointée

$$\tilde{\iota}_m^{\text{mot}} : (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge \mathbf{P}^1 \longrightarrow Y_+ \wedge \mathbf{P}^1 .$$

Lorsque Y est de plus supposée pointée, la donnée du point de base équivaut à la donnée d'une application $y_0 : Y_+ \longrightarrow Y$. L'application $\tilde{\iota}_m^{\text{mot}}$ se raffine alors en le morphisme (non pointé)

$$\iota_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_m Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$$

adjoint à la composée $(\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\tilde{\iota}_m^{\text{mot}}} Y_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{y_0 \wedge 1} Y \wedge \mathbf{P}^1$.

Rappelons tout d'abord brièvement la définition de l'espace de Thom et de l'application de Thom associés à une immersion fermée dans le cadre de l'homotopie motivique. On renvoie le lecteur à [Mor99], § 3.2.1. pour plus de détails.

Définition 3.4.1. Soit $i : N \hookrightarrow M$ une immersion fermée de schémas lisses. On appelle espace de Thom de i (ou, par abus, espace de Thom de N dans M) et l'on note $\text{th}(i)$ (ou $\text{th}(N)$) la cofibre homotopique

$$\text{th}(i) := M /_h M - i(N) .$$

L'application de Thom associée est le morphisme canonique

$$M \xrightarrow{\text{Thom}} \text{th}(i) .$$

Le théorème suivant est dû à Morel (*c.f.* [Mor99] § 3.2).

Théorème 3.4.2. Soit $i : N \hookrightarrow M$ une immersion fermée de schémas lisses. On note ν_N le fibré normal de l'immersion i et $\text{th}(\nu)$ l'espace de Thom de la section nulle $N \hookrightarrow E(\nu_N)$. Alors, on a un isomorphisme canonique dans $\text{Ho}(\mathcal{E}sp)$

$$\text{th}(i) \simeq \text{th}(\nu_N)$$

Le lemme suivant est formel.

Lemme 3.4.3. Soit M une variété algébrique et N_1 et N_2 deux sous-variétés (fermées) qui ne se rencontrent pas (c'est-à-dire telles que N_2 soit une sous-variété fermée de $M - N_1$). Alors l'application de Thom associée à N_1 se factorise par l'application quotient canonique $M \longrightarrow M/h_{N_2}$ comme suit :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\text{Thom}} & \text{th}(N_1) \\ \downarrow & \nearrow & \\ M/h_{N_2} & & \end{array}$$

Proposition-définition 3.4.4.

1. Soit

$$\begin{aligned} f_m : \mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^1 &\longrightarrow \mathbf{P}^1 \\ (A, B, \gamma) &\mapsto A(\gamma) \end{aligned}$$

le morphisme adjoint à la composée

$$\mathcal{R}_m Y \xrightarrow{\wp} \text{Pol}_m \hookrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1 \quad ,$$

\wp désignant la projection canonique et $\text{Pol}_m \hookrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1$ désignant le morphisme canonique qui associe à un polynôme unitaire A l'endomorphisme pointé de \mathbf{P}^1 donné par la fraction rationnelle $\frac{A}{1}$.

2. Soit W_m le sous-schéma de $\mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^1$:

$$W_m := f_m^{-1}(\{0\}) \quad .$$

Puisqu'en tout point (A, B, γ) de W_m l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial a_0}(A, B, \gamma) = 1 \quad ,$$

W_m est lisse et munie d'une trivialisatoin de son fibré normal $\varphi_m : \nu_{W_m} \simeq \varepsilon$.

3. En tant que sous-variété de $\mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^1$, W_m ne rencontre pas la sous-variété $\mathcal{R}_m Y \times \{\infty\}$. Le Lemme 3.4.3 précédent fournit la factorisation de l'application de Thom suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{\text{Thom}} & \text{th}(\nu_{W_m}) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge \mathbf{P}^1 & & \end{array} \quad .$$

4. Soit w le morphisme canonique

$$\begin{aligned} w : W_m &\longrightarrow Y \\ (A, B, \gamma) &\mapsto B(\gamma) \end{aligned}$$

(un couple (A, γ) tel que $A(\gamma) = 0$ fournit un morphisme canonique $R[X]/(A) \longrightarrow R$).

Définition 3.4.5. Pour toute variété algébrique Y quasi-projective, on définit le morphisme $\tilde{\iota}_m^{\text{mot}}$ comme la composée

$$\tilde{\iota}_m^{\text{mot}} : (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\text{Thom}} \text{Th}(\nu_{W_m}) \xrightarrow{\varphi_m} (W_m)_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{w \wedge 1} Y_+ \wedge \mathbf{P}^1 \quad .$$

Si de plus y_0 est un point de base de Y , on définit le morphisme ι_m comme la composée

$$\iota_m^{\text{mot}} : (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\tilde{\iota}_m} Y_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{y_0 \wedge \text{id}} Y \wedge \mathbf{P}^1 \quad .$$

Lorsque $K = \mathbf{C}$ et que Y est pointé, les applications topologiques sous-jacentes ι_m sont compatibles aux applications de stabilisation topologiques σ_m (c.f. Définition 3.3.8) au sens du lemme suivant.

Lemme 3.4.6. *Le diagramme d'espaces topologiques et applications continues suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{R}_{m-1} Y)(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\iota_{m-1}} & \text{map}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \wedge Y(\mathbf{C})) \simeq \Omega^2 \Sigma^2 Y \\ \sigma_m \downarrow & \nearrow \iota_m & \\ (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) & & \end{array} \quad .$$

DÉMONSTRATION — Ce lemme résulte de la conjonction des points suivants :

- L'inclusion $(\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y)(\mathbf{C}) \hookrightarrow (\mathcal{R}_{m-1} Y)(\mathbf{C})$ est homotope à l'homéomorphisme $\psi^{-1} : (\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y)(\mathbf{C}) \simeq (\mathcal{R}_{m-1} Y)(\mathbf{C})$ décrit dans les Notations p. 57.
- Soit M une variété, N une sous-variété fermée et U un ouvert de M . Alors $N \cap U$ est une sous-variété fermée de U et le diagramme suivant commute strictement :

$$\begin{array}{ccccc} X - N & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{\text{Thom}} & \text{th}(N) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U - (N \cap U) & \hookrightarrow & U & \xrightarrow{\text{Thom}} & \text{th}(N \cap U) \end{array} \quad .$$

- L'intersection $W_m \cap ((\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y)(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ a deux composantes connexes : $W_{m-1}^{|A|<1}$ et $(\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y)(\mathbf{C}) \times \{1\}$. D'après le point précédent, le diagramme suivant commute strictement :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y)(\mathbf{C})_+ \wedge \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\text{Thom}} & \text{th}(W_{m-1}^{|A|<1}) \vee \text{th}((\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y)(\mathbf{C}) \times \{1\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})_+ \wedge \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\text{Thom}} & \text{th}(W_m) \end{array} \quad .$$

- La différence entre les trivialisations induites par φ_m et φ_{m-1} est telle que le diagramme suivant commute strictement :

$$\begin{array}{ccc} \text{th}(W_{m-1}^{|A|<1}) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{m-1}} & (W_{m-1}^{|A|<1})_+ \wedge \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \times (-\text{id}) \\ \text{th}(W_{m-1}) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_m} & (W_m)_+ \wedge \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \end{array} \quad .$$

- Par construction, la composée

$$(\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y)(\mathbf{C})_+ \wedge \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \xrightarrow{\text{Thom}} \text{th}((\mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y)(\mathbf{C}) \times \{1\}) \longrightarrow Y_+ \wedge \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \longrightarrow Y \wedge \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$$

se factorise par $\{y_0\} \wedge \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. □

b) Applications de transfert motiviques

Soit $1 \leq k \leq m$ un entier. Une variante de la construction de \tilde{v}_m précédente permet de définir des morphismes de *transfert* :

$$\begin{aligned} \tau_{m,k}^{\text{mot}} : & (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \longrightarrow (\mathcal{R}_k Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \\ \lambda_{m,m-k}^{\text{mot}} : & (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \longrightarrow (\mathcal{R}_{m-k} Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \end{aligned}$$

Proposition-définition 3.4.7.

1. Soit

$$\begin{aligned} f_{m,k} : \mathcal{R}_m Y \times \text{Pol}_k & \longrightarrow \mathbf{A}^k \\ (A, B, D) & \longmapsto (R_0, \dots, R_{k-1}) \end{aligned}$$

où $\sum_{i=0}^{k-1} R_i X^i$ désigne le reste de la division euclidienne de A par D .

2. Soit $W_{m,k}$ le sous-schéma de $\mathcal{R}_m Y \times \text{Pol}_k$

$$W_{m,k} := f_{m,k}^{-1}(\{0\})$$

Autrement dit, un point de $W_{m,k}$ est un triplet (A, B, D) où (A, B) est un point de $\mathcal{R}_m Y$ et D un diviseur de A unitaire de degré k .

3. Puisqu'en tout point (A, B, D) de $W_{m,k}$ on a

$$\left[\frac{\partial R_i}{\partial a_\ell} \right]_{0 \leq i, \ell \leq k-1} = \text{Id}_k$$

$W_{m,k}$ est lisse et munie d'une trivialisatoin de son fibré normal $\varphi_{m,k} : \nu_{W_{m,k}} \simeq \varepsilon^{\oplus k}$.

4. On identifie Pol_k à l'espace affine \mathbf{A}^k plongé dans \mathbf{P}^k ; \mathbf{P}^{k-1} désigne le schéma complémentaire à l'infini. Le schéma $W_{m,k}$ est une sous-variété fermée de $\mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^k$ ne rencontrant pas $\mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^{k-1}$ de sorte que le Lemme 3.4.3 fournit la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^k & \xrightarrow{\text{Thom}} & \text{th}(\nu_{W_{m,k}}) \\ \downarrow & \nearrow t & \\ (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} & & \end{array}$$

5. Soient w_k et w_{m-k} les morphismes

$$\begin{aligned} w_k : W_{m,k} & \longrightarrow \mathcal{R}_k Y & \text{et} & & w_{m-k} : W_{m,k} & \longrightarrow \mathcal{R}_{m-k} Y \\ (A, B, D) & \longmapsto (D, B \pmod{D}) & & & (A, B, D) & \longmapsto \left(\frac{A}{D}, B \pmod{\frac{A}{D}} \right) \end{aligned}$$

Ci-dessus la notation $B \pmod{D}$ désigne l'image de B par l'application canonique $Y \left(R[X] / (A) \right) \longrightarrow Y \left(R[X] / (D) \right)$.

DÉMONSTRATION — Le point essentiel à vérifier est que $W_{m,k}$, qui est par définition un sous-schéma fermé de $\mathcal{R}_m Y \times \mathbf{A}^k$, est également un sous-schéma fermé de $\mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^k$.

Pour s'en convaincre, il suffit de montrer que le morphisme de projection $W_{m,k} \longrightarrow \mathcal{R}_m Y$ est propre. Pour cela, on applique le critère valuatif de propreté (c.f. [Har77], Theorem 4.7). La condition à vérifier est alors la suivante.

Soit R un anneau de valuation, κ son corps des fractions et A un polynôme unitaire à coefficients dans R . On suppose que A admet une factorisation $A = CD$ par des polynômes C et D unitaires de $\kappa[X]$. Il faut montrer que C et D sont en fait dans $R[X]$.

Cela s'obtient en utilisant que C et D sont unitaires. \square

Définition 3.4.8. On définit les morphismes $\tau_{m,k}^{\text{mot}}$ et $\lambda_{m,m-k}^{\text{mot}}$ comme les composées

$$\begin{aligned} \tau_{m,k}^{\text{mot}} : (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} &\longrightarrow \text{th}(\nu_{M_{m,k}}) \stackrel{\varphi}{\simeq} (W_{m,k})_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \xrightarrow{w_k \wedge 1^{\wedge k}} (\mathcal{R}_k Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \\ \lambda_{m,m-k}^{\text{mot}} : (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} &\longrightarrow \text{th}(\nu_{M_{m,k}}) \stackrel{\varphi}{\simeq} (W_{m,k})_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \xrightarrow{w_{m-k} \wedge 1^{\wedge k}} (\mathcal{R}_k Y)_+ \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge k} \end{aligned}$$

Remarque 3.4.9. Les applications $\tau_{m,k}^{\text{mot}}$ et $\lambda_{m,m-k}^{\text{mot}}$ se comportent, d'un point de vue combinatoire⁴, de manière analogue aux applications de transferts

$$\begin{aligned} \text{tr}_{m,k} : (\mathbf{B}\mathfrak{S}_m)_+ &\longrightarrow \mathbf{B}(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{m-k})_+ \xrightarrow{\text{pr}} \mathbf{B}(\mathfrak{S}_k)_+ \\ \text{tr}_{m,m-k} : (\mathbf{B}\mathfrak{S}_m)_+ &\longrightarrow \mathbf{B}(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{m-k})_+ \xrightarrow{\text{pr}} \mathbf{B}(\mathfrak{S}_{m-k})_+ \end{aligned}$$

Dans cet exemple, l'application stable $\bigvee_{k=0}^m (-1)^k \sigma_{m-k,m-1} \text{tr}_{m,m-k} : \mathbf{B}\mathfrak{S}_m \rightarrow \mathbf{B}\mathfrak{S}_{m-1}$ est une rétraction de $\mathbf{B}\mathfrak{S}_m$ sur $\mathbf{B}\mathfrak{S}_{m-1}$. Si l'on disposait d'applications de stabilisation $\sigma_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_{m-1} Y \rightarrow \mathcal{R}_m Y$, on pourrait espérer montrer que $\mathcal{R}_{m-1} Y$ est un facteur stable de $\mathcal{R}_m Y$ par cette formule. (Il s'agit essentiellement de la méthode de Dold pour calculer l'homologie du groupe symétrique).

Le point faible de cette approche est que l'on n'identifierait pas ainsi le type d'homotopie de la cofibre homotopique $\mathcal{R}_m Y / {}^h \mathcal{R}_{m-1} Y$. Au Chapitre 5 nous montrons une version topologique de ce scindement stable par une autre méthode inspirée par les travaux de Vassiliev et permettant d'identifier le type d'homotopie stable de la cofibre homotopique $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) / {}^h (\mathcal{R}_{m-1} Y)(\mathbf{C})$.

c) Vers des modèles de May-Milgram motiviques

Ce paragraphe est une digression non nécessaire pour la suite.

Soit (Y, y_0) une variété algébrique quasi-projective lisse pointée. Une variante de ce qui précède permet de définir formellement, pour toute variété algébrique Y pointée, un modèle de May-Milgram *motivique*, noté $\mathcal{C}_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}} Y$, analogue à l'espace $\mathcal{E}_2 \mathcal{Y}$ pour un espace topologique \mathcal{Y} . De plus, on le munit d'un morphisme algébrique

$$\varepsilon^{\text{mot}} : \mathcal{C}_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}} Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y \quad .$$

Notations : Soit i un entier positif.

- On note $\mathbf{A}^{(i)} / \mathfrak{S}_i$ le sous-schéma ouvert de Pol_i des polynômes à racines simples. Ce schéma est donc par définition le complémentaire de l'hypersurface d'équation $\text{discr}(A) = 0$.
- Soit $\mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i$ le sous-schéma ouvert de $\mathcal{R}_i Y$ image inverse de $\mathbf{A}^{(i)} / \mathfrak{S}_i$ par la projection canonique $\varphi : \mathcal{R}_i Y \rightarrow \text{Pol}_i$.
- Soit également $\mathbf{A}^{(i+1)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i$ le sous-schéma ouvert de $(\mathcal{R}_i Y) \times \mathbf{A}^1$ dont les points sont les triplets (A, B, α) avec $(A, B) \in \mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i$ et $\alpha \in \mathbf{A}^1$ tel que $A(\alpha)$ soit inversible.

⁴Il y a ici une petite subtilité : la trivialisation du fibré normal de la variété $W_{m,k}$ diffère selon que l'on utilise $\varphi_{m-1,k}$ ou bien $\varphi_{m,k}$. Par exemple, la formule, au niveau topologique, donnant la composée stable $(\mathcal{R}_{m-1} Y)(\mathbf{C}) \xrightarrow{\sigma_{m-1,m}} (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \xrightarrow{\tau_{m,m-1}} (\mathcal{R}_{m-1} Y)(\mathbf{C})$ comme $\text{Id}_{\mathcal{R}_{m-1} Y} + \sigma_{m-2,m-1} \circ \tau_{m-1,m-2}$ n'est vraie qu'à homotopie près.

– Le point de base y_0 de Y permet de définir une application

$$\begin{aligned} j_i : \mathbf{A}^{(i+1)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i &\longrightarrow \mathbf{A}^{(i+1)} \times_{\mathfrak{S}_{i+1}} Y^{i+1} \\ (A, B, \alpha) &\mapsto ((X - \alpha) \cdot A, \chi_{A, (X - \alpha)}(B, y_0)) \end{aligned}$$

(χ_{A_1, A_2} désigne l'isomorphisme chinois $R[X]/(A_1) \times R[X]/(A_2) \simeq R[X]/(A_1 A_2)$).

– On note enfin pr_i la projection canonique de $\mathbf{A}^{(i+1)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i$ sur $\mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i$.

Définition 3.4.10. On appelle modèle de May-Milgram motivique, et l'on note $\mathcal{C}_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}} Y$, le coégalisateur de la double flèche

$$\coprod_{i \geq 0} \mathbf{A}^{(i+1)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i \xrightarrow[\text{j}_i]{\text{pr}_i} \coprod_{i \geq 0} \mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i \quad .$$

Nous construisons une application motivique de $\mathcal{C}_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}} Y$ dans $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$.

Proposition-définition 3.4.11. Soit i un entier positif.

1. Soit g_i le morphisme

$$\begin{aligned} g_i : (\mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i) \times \mathbf{P}^1 &\longrightarrow \mathbf{P}^1 \\ (A, B, \gamma) &\mapsto \frac{A}{A'}(\gamma) \end{aligned}$$

2. Soit V_i le sous-schéma de $(\mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i) \times \mathbf{P}^1$:

$$V_i := g_i^{-1}(\{0\}) \quad .$$

W_i est lisse et muni d'une trivialisatation de son fibré normal $\varphi_i : \nu \simeq \varepsilon$.

3. En tant que sous-variété de $(\mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i) \times \mathbf{P}^1$, W_m ne rencontre pas la sous-variété $(\mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i) \times \{\infty\}$.

Le Lemme 3.4.3 fournit la factorisation de l'application de Thom suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_m Y \times \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{\text{Thom}} & \text{th}(\nu_{W_m}) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (\mathcal{R}_m Y)_+ \wedge \mathbf{P}^1 & & \end{array} \quad .$$

4. Soit v_i le morphisme canonique

$$\begin{aligned} v_i : V_i &\longrightarrow Y \\ (A, B, \gamma) &\mapsto B(\gamma) \end{aligned}$$

Proposition-définition 3.4.12. Soit i un entier positif. Nous définissons un morphisme composé ε_i comme suit :

$$\varepsilon_i : (\mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i)_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\text{Thom}} \text{Th}(\nu_{V_i}) \xrightarrow{\varphi} (V_i)_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{v \wedge 1} Y_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{y_0 \wedge 1} Y_+ \wedge \mathbf{P}^1 \quad .$$

On vérifie que le diagramme suivant commute strictement

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{A}^{(i+1)} \times_{\mathfrak{S}_{i+1}} Y^i & \\ & \nearrow & \searrow j_{i+1} \\ \mathbf{A}^{(i+1)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i & & \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y \\ & \searrow \text{pr} & \nearrow j_i \\ & \mathbf{A}^{(i)} \times_{\mathfrak{S}_i} Y^i & \end{array} \quad .$$

Nous baptisons ε^{mot} l'application induite

$$\varepsilon^{\text{mot}} : \mathcal{C}_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}} Y \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y \quad .$$

La question de la comparaison entre les espaces $\mathcal{C}_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}} Y$ et $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$ n'est pas traitée dans cette thèse. Cela fait l'objet d'une future recherche.

3.5 Conjectures

Nous énonçons ici nos principales conjectures concernant les schémas d'Atiyah et Hitchin. Ces conjectures visent essentiellement à donner des analogues motiviques aux théorèmes de Segal et F. Cohen *et al.* (Théorème 2.1.2 et Théorème 2.2.11).

Fixons un entier positif m et une variété quasi-projective lisse Y . Le schéma d'Atiyah-Hitchin $\mathcal{R}_m Y$ est donc aussi une variété quasi-projective lisse.

a) Conjectures instables

Voici l'analogue conjectural du théorème de Segal, *c.f.* Théorème 2.1.2.

Conjecture 3.C.

1. Le type d'homotopie motivique du schéma $\mathcal{R}_m Y$ ne dépendrait que du type d'homotopie motivique du schéma Y .

Lorsque l'on suppose de plus Y pointé, alors :

2. Il existerait un morphisme motivique de stabilisation $\sigma_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_{m-1} Y \rightarrow \mathcal{R}_m Y$ compatible aux morphismes ι_{m-1}^{mot} et ι_m^{mot} , c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commutât (à homotopie près) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{m-1} Y & & \\ \downarrow \sigma_m^{\text{mot}} & \searrow \iota_{m-1}^{\text{mot}} & \\ & & \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y \\ & \nearrow \iota_m^{\text{mot}} & \\ \mathcal{R}_m Y & & \end{array} .$$

De plus, l'application ainsi obtenue

$$\iota^{\text{mot}} : \text{hocolim}_m \mathcal{R}_m Y \rightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$$

serait une équivalence d'homotopie motivique.

Lorsque l'on suppose également Y \mathbf{A}^1 -connexe, alors :

3. La connexité de l'application

$$\iota_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_m Y \rightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$$

se comporterait, pour m grand, comme le produit de m et de la connexité de Y .

Examinons le cas particulier des schémas de fractions rationnelles \mathcal{F}_m , c'est-à-dire lorsque $Y = \mathbf{G}_m$. On a vu que l'on dispose alors de deux candidats à être des morphismes de stabilisation : les morphismes σ_m^g et σ_m^d décrits à la Remarque 3.3.10. Cette dualité suggère même l'existence d'une opérade des petits disques motivique, disons \mathcal{P}^{mot} , agissant sur l'espace $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y$.

L'action de l'opérade des petits disques sur les espaces de fractions rationnelles complexes nous avait conduit à énoncer une version stabilisée (équivariante) du théorème de Segal (*c.f.* Théorème 2.1.4) comparant $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ à $\Omega^2 S^2$ plutôt que $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ à $\Omega_m^2 S^2 \approx \Omega^2 S^3$. En voici l'analogue motivique conjectural.

Conjecture 3.D.

1. Il existerait une opérade motivique des petits disques \mathcal{P}^{mot} .
2. L'opérade \mathcal{P}^{mot} agirait sur les espaces $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$ et $\Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1 = \coprod_{m \geq 0} \Omega_m^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1$ de telle sorte que l'application naturelle

$$\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m \hookrightarrow \coprod_{m \geq 0} \Omega_m^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1$$

respectât cette action.

De plus, cette application induirait au niveau des complétions en groupes une équivalence d'homotopie :

$$\Omega^s \mathbf{B} \left(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m \right) \longrightarrow \Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1 \quad .$$

Remarques 3.5.1.

1. A homotopie près, les espaces qui interviennent dans l'opérade topologique des petits disques \mathcal{P}_2 proviennent de variétés algébriques : pour tout entier positif n , $\mathcal{P}_2(n)$ a le type d'homotopie de l'espace $\mathbf{C}^{(n)}$ des points complexes de l'ouvert de \mathbf{A}^n complémentaire des hypersurfaces diagonales. Par contre, il ne nous paraît pas évident de construire des morphismes de structure *algébriques* entre ces espaces.
2. Les résultats du Chapitre 1 sont en accord avec la Conjecture 3.D précédente et pourraient expliquer le phénomène de complétion en groupe qui apparaît lorsque l'on compare $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}$ et $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}$ au § 1.3.e).

En effet, la conjecture précédente se traduirait au niveau des composantes connexes en un isomorphisme

$$\pi_0^{\mathbf{A}^1} \left(\Omega^s \mathbf{B} \coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m \right) (K) \simeq \pi_0^{\mathbf{A}^1} \left(\Omega^{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1 \right) (K) \simeq [\mathbf{P}_K^1, \mathbf{P}_K^1]^{\text{mot}} \quad .$$

Le terme de gauche se calculerait, d'après une conjecture de Morel (*c.f.* [Mor04a], p. 26), comme la complétion en groupe du $\pi_0 \left(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{F}_m \right) (K)$ (au sens naïf!). On retrouverait ainsi l'isomorphisme

de groupes que nous avons constaté entre le complété en groupe du monoïde $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\mathbf{N}}, \oplus^{\mathbf{N}})$ et le groupe $([\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^{\text{mot}}, \oplus^{\text{mot}})$ et ceci montrerait également la compatibilité entre $\oplus^{\mathbf{N}}$ et \oplus^{mot} que nous conjecturons, *c.f.* Conjecture 1.A.

Autrement dit, les résultats du Chapitre 1 constituent un indice *de nature algébrique* en faveur de la Conjecture 3.D.

La conjecture précédente admet la généralisation suivante lorsque l'on suppose Y muni d'une action libre du groupe multiplicatif \mathbf{G}_m .

Le joint de Y et de \mathbf{G}_m

$$Y \star \mathbf{G}_m := \text{hocolim} \left(\begin{array}{ccc} Y & & \mathbf{G}_m \\ & \swarrow \text{pr}_1 & \nearrow \text{pr}_2 \\ & Y \times \mathbf{G}_m & \end{array} \right)$$

est alors muni d'une action libre de \mathbf{G}_m ; on note $Y \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m$ l'espace quotient de cette action.

La contemplation de la longue suite exacte

$$[\mathbf{P}^1, Y \star \mathbf{G}_m] \longrightarrow [\mathbf{P}^1, Y \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m] \longrightarrow [\mathbf{P}^1, \mathbf{B}\mathbf{G}_m] \simeq \mathbf{Z}$$

montre que l'espace $\Omega^{\mathbf{P}^1} (Y \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m)$ se scinde en composantes — non nécessairement connexes! — $\Omega_m^{\mathbf{P}^1} (Y \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m)$ indexées par les entiers. Chaque composante a le type d'homotopie de $\Omega^{\mathbf{P}^1} (Y \star \mathbf{G}_m) \simeq$

$\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$. En remarquant que l'on a $\mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{G}_m \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m$, l'action de \mathbf{G}_m sur Y fournit un morphisme

$$Y_+ \wedge \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\alpha} Y \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m \quad .$$

Soit alors κ_m le morphisme composé

$$\kappa_m : \mathcal{R}_m Y \xrightarrow{\tilde{\gamma}_m^{\text{mot}}} \Omega^{\mathbf{P}^1} (Y_+ \wedge \mathbf{P}^1) \xrightarrow{\Omega^{\mathbf{P}^1} \alpha} \Omega^{\mathbf{P}^1} (Y \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m) \quad .$$

Conjecture 3.E. *On suppose Y muni d'une action libre de \mathbf{G}_m . (On ne suppose pas Y pointé).*

Il existerait une action de l'opérade des petits disques \mathcal{P}^{mot} sur l'espace $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y$ telle que l'application naturelle

$$\coprod_{m \geq 0} \kappa_m : \coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y \longrightarrow \coprod_{m \geq 0} \Omega_m^{\mathbf{P}^1} (Y \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m)$$

respectât les \mathcal{P}^{mot} -structures.

De plus, cette application induirait au niveau des complétions en groupes une équivalence d'homotopie :

$$\Omega^{\mathbf{S}^{\mathbf{B}}} \left(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y \right) \xrightarrow{\approx} \Omega^{\mathbf{P}^1} (Y \star_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m) \quad .$$

La discussion précédente est en fait plus générale qu'il ne paraît. En effet, tout espace Y a le type d'homotopie d'un espace muni d'une action libre de \mathbf{G}_m : on a toujours une équivalence d'homotopie $Y \approx Y' := Y \times \mathbf{E}\mathbf{G}_m$. On a alors des équivalences d'homotopie :

$$\mathbf{G}_m \star_{\mathbf{G}_m} Y' \approx \text{hocolim} \left(\begin{array}{ccc} \text{pt} & & Y \times \mathbf{B}\mathbf{G}_m \\ & \swarrow & \nearrow \\ & Y & \end{array} \right) \approx Y_+ \wedge \mathbf{P}^\infty \quad .$$

Soit alors κ'_m le morphisme composé

$$\kappa'_m : \mathcal{R}_m Y \xrightarrow{\tilde{\gamma}_m} \Omega^{\mathbf{P}^1} (Y_+ \wedge \mathbf{P}^1) \approx \Omega^{\mathbf{P}^1} ((\mathbf{E}\mathbf{G}_m \times Y)_+ \wedge \mathbf{P}^1) \xrightarrow{\Omega^{\mathbf{P}^1}(\alpha)} \Omega^{\mathbf{P}^1} (Y_+ \wedge \mathbf{P}^\infty) \quad .$$

La conjecture 3.E précédente impliquerait alors la suivante :

Conjecture 3.F. *Pour tout Y , il existerait une action de l'opérade des petits disques \mathcal{P}^{mot} sur l'espace $\coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y$ telle que l'application naturelle*

$$\coprod_{m \geq 0} \kappa'_m : \coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y \longrightarrow \coprod_{m \geq 0} \Omega_m^{\mathbf{P}^1} (Y_+ \wedge \mathbf{P}^\infty)$$

respectât les \mathcal{P}^{mot} -structures.

De plus, cette application induirait au niveau des complétions en groupes une équivalence d'homotopie :

$$\Omega^{\mathbf{S}^{\mathbf{B}}} \left(\coprod_{m \geq 0} \mathcal{R}_m Y \right) \xrightarrow{\approx} \Omega^{\mathbf{P}^1} (Y_+ \wedge \mathbf{P}^\infty) \quad .$$

b) Conjectures stables

Nous pensons que les résultats de F. Cohen *et al.* admettent également une version motivique.

Pour énoncer nos conjectures, définissons tout d'abord des analogues motiviques D_i^{mot} aux sous-quotients topologiques D_i des modèles de May-Milgram.

Définition 3.5.2. Pour tout entier positif i et pour toute une variété algébrique pointée (Y, y_0) , soit $D_i^{\text{mot}}Y$ l'espace $\mathbf{A}_+^{(i)} \wedge_{\mathfrak{S}_i} Y^{\wedge i}$, c'est-à-dire la cofibre homotopique de l'application $j_i : \mathbf{A}_{\mathfrak{S}_i}^{(i)} \times Y^{i-1} \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathfrak{S}_i}^{(i)} \times Y^i$ associée à y_0 (*c.f.* Notations p. 63).

Conjecture 3.G.

1. Le morphisme de stabilisation $\sigma_m^{\text{mot}} : \mathcal{R}_{m-1}Y \longrightarrow \mathcal{R}_mY$ ferait du schéma $\mathcal{R}_{m-1}Y$ un facteur stable de \mathcal{R}_mY . Autrement dit, on aurait une équivalence d'homotopie stable (par rapport à la suspension $\Sigma^{\mathbf{P}^1}$) :

$$\mathcal{R}_mY \overset{\text{st}}{\approx} \mathcal{R}_{m-1}Y \vee \left(\mathcal{R}_mY / \mathcal{R}_{m-1}Y \right) .$$

Ce scindement s'obtiendrait après environ au plus m suspensions .

2. On aurait une équivalence d'homotopie (éventuellement stable)

$$\left(\mathcal{R}_mY / \mathcal{R}_{m-1}Y \right) \overset{(st)}{\approx} D_m^{\text{mot}}Y .$$

Il en résulterait alors le scindement stable

$$\mathcal{R}_mY \overset{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i^{\text{mot}}Y .$$

Lorsque l'on suppose de plus Y \mathbf{A}^1 -connexe, alors :

3. On aurait un scindement stable « de Snaith »

$$\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y \overset{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i \geq 0} D_i^{\text{mot}}Y$$

compatible avec t_m^{mot} .

Remarque 3.5.3.

1. Une façon de procéder pour montrer la Conjecture 3.G (1) serait de suivre l'approche « à la Dold » suggérée dans la Remarque 3.4.9.
2. La méthode développée dans le Chapitre 5 pourrait également admettre une version motivique et permettre de démontrer la Conjecture 3.G (2).

Ceci est l'objet de futurs travaux.

Chapitre 4

Le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$.

Soient m un entier positif et Y un schéma quasi-projectif lisse. Nous abordons dans ce chapitre un aspect de la Conjecture 3.C (1) selon laquelle le type d'homotopie *motivative* du schéma d'Atiyah-Hitchin $\mathcal{R}_m Y$ ne dépendrait que du type d'homotopie motivique du schéma Y .

Lorsque Y est définie sur \mathbf{C} , l'énoncé de notre conjecture implique en particulier que le type d'homotopie de la variété $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ ne dépend que du type d'homotopie de $Y(\mathbf{C})$. Cela est vrai et il s'agit du résultat principal de ce chapitre.

Plus précisément, nous allons décrire le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ comme un foncteur explicite, que nous noterons Ψ^m , en le type d'homotopie de $Y(\mathbf{C})$. Autrement dit, nous construisons un foncteur $\Psi^m : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{T}op$ tel que l'on ait une équivalence d'homotopie

$$\Psi^m(Y(\mathbf{C})) \approx (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \quad .$$

De plus, l'équivalence d'homotopie ci-dessus est aussi riche que l'on puisse l'espérer. Lorsque Y est définie sur \mathbf{R} , la conjugaison complexe agit sur les deux espaces $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ et $\Psi^m(Y(\mathbf{C}))$ et l'équivalence d'homotopie précédente est valable en tant que $\mathbf{Z}/2$ -espaces. Ceci implique en particulier que le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{R})$ est un foncteur explicite en les espaces $Y(\mathbf{C})$ et $Y(\mathbf{R})$.

Notre point de départ prolonge l'idée de la démonstration du Théorème 2.2.11. L'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ est naturellement une réunion disjointe de sous-variétés bien comprises séparément. En effet, soit $\varphi : (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Pol}_m(\mathbf{C})$ la projection canonique :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) &\longrightarrow \text{Pol}_m(\mathbf{C}) \\ (A, B) &\longmapsto A \end{aligned}$$

La fibre au-dessus d'un polynôme $A \in \text{Pol}_m(\mathbf{C})$ est par définition $\varphi^{-1}(A) = Y\left(\mathbf{C}[X]/(A)\right)$. Le type d'homotopie de cet espace varie comme la nature de la \mathbf{C} -algèbre $\mathbf{C}[X]/(A)$. Or d'après l'isomorphisme

chinois, cette nature ne dépend que de la multiplicité des racines du polynôme A . Si $A = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i}$ est une factorisation de A en produit de facteurs irréductibles, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{C}[X]/(A) \simeq \prod_{i=1}^r \mathbf{C}[X]/((X - \alpha_i)^{n_i}) \simeq \prod_{i=1}^r \mathbf{C}[X]/(X^{n_i}) \quad ,$$

et il en résulte l'homéomorphisme suivant :

$$\varphi^{-1}(A) \simeq \prod_{i=1}^r Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^{n_i})\right) \quad .$$

Les espaces $Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^{n_i})\right)$ apparaissant ci-dessus sont des espaces totaux des fibrés de jets $J^{n_i}(Y(\mathbf{C}))$ d'ordres supérieurs de $Y(\mathbf{C})$ (par exemple, il est bien connu que l'espace $Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^2)\right)$ est l'espace total du fibré tangent de $Y(\mathbf{C})$). En particulier, pour tout entier $n \geq 1$, $Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^n)\right)$ se rétracte par déformation sur $Y(\mathbf{C})$ (considéré comme la section nulle du fibré $J^n(Y(\mathbf{C}))$).

Il ressort de cette discussion que l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ est naturellement la réunion disjointe de sous-variétés dont le type d'homotopie est une fonction simple de $Y(\mathbf{C})$. Cette décomposition possède de bonnes propriétés topologiques : le bon concept sous-jacent est celui de *stratification*¹. La stratification de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ que nous venons de mettre en évidence vérifie une condition de régularité, la condition de Whitney. Cela assure que l'on dispose d'une bonne théorie des voisinages tubulaires. Le résultat principal de ce chapitre donne une description explicite des strates ainsi que de la façon dont ces strates sont attachées les unes aux autres.

Malgré un formalisme lourd, le résultat peut se résumer assez simplement. Par exemple, dans le cas où $Y = \text{pt}$ l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ est l'espace $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$. Les strates sont des espaces de configuration de points distincts dans \mathbf{C} (les racines du polynôme) et les applications d'attache sont des applications de structure de l'opérade des petits disques. Le fait de plonger une famille de petits disques dans un autre est une façon de décrire comment éclater une racine multiple du polynôme en plusieurs racines de multiplicités moindres.

Voici le plan du chapitre :

4.1 Description des strates. — Nous commençons notre étude par la formalisation et la généralisation de la discussion précédente. Nous obtenons une description explicite du type d'homotopie des strates de la stratification de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ comme des espaces de configuration de points dans \mathbf{C} avec des étiquettes dans $Y(\mathbf{C})$, en un sens légèrement plus général que celui du § 2.2.a).

4.2 Les foncteurs Ψ^2 et Ψ^3 . — Pour illustrer le formalisme précédent et pour motiver la définition générale du foncteur Ψ^m nous détaillons l'étude complète de la stratification des espaces $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$ et $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$. L'étude de l'espace $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$ contient déjà toute la difficulté technique autre que d'ordre rédactionnel.

Un lecteur pressé pourrait se contenter de la lecture de ce paragraphe pour avoir une idée sur le foncteur Ψ^m ainsi que sur les techniques de démonstration utilisées.

4.3 Le foncteur Ψ^m . — Le premier but de ce paragraphe est d'énoncer le résultat principal du chapitre, le Théorème 4.3.11, décrivant le type d'homotopie de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ comme un foncteur explicite (le foncteur Ψ^m) en le type d'homotopie de $Y(\mathbf{C})$. La principale difficulté consiste à trouver le bon formalisme encodant la combinatoire.

- On introduit au § 4.3.a) le formalisme nécessaire — diagrammes de Čech et catégories de drapeaux — à la définition du foncteur Ψ^m .
- Au § 4.3.b), on peut alors définir, pour tout m , le foncteur $\Psi^m : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{T}op$ et énoncer le Théorème 4.3.11.
- Le paragraphe § 4.3.c) démontre le Théorème 4.3.11 par une méthode parallèle à celle exposée précédemment pour $m = 3$.

4.4 Prolongements. — On considère des prolongements des résultats précédents. En particulier :

- Au § 4.4.a), on montre que l'équivalence d'homotopie précédente $\Psi^m(Y(\mathbf{C})) \approx (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ est compatible avec l'action de la conjugaison complexe lorsque Y est définie sur \mathbf{R} . Ceci donne une description du type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{R})$ comme un foncteur explicite en les espaces $Y(\mathbf{R})$ et $Y(\mathbf{C})$.

¹Nous avons écrit à l'Annexe C un résumé succinct des résultats de la théorie des stratifications qui nous seront utiles. Dans un premier temps, le lecteur peut se contenter de lire le § C.1 qui introduit la notion, donne des exemples fondamentaux et les premières propriétés.

- Au § 4.4.b), on montre que l'étude précédente se généraliserait pour décrire la stratification de multiplicité du produit symétrique d'une variété.

Convention: Dans tout le chapitre, Y est une variété algébrique quasi-projective lisse définie sur \mathbf{C} . On a vu au Chapitre 3 qu'alors $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ est une variété holomorphe (c.f. Proposition 3.2.2 (4)).

4.1 Description des strates

Soit m un entier positif fixé. Dans ce paragraphe, nous décrivons le type d'homotopie des strates de la stratification \mathcal{S}^Y de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$. Nous allons montrer que chaque strate est à homotopie près un espace de configuration de points dans \mathbf{C} avec des étiquettes dans $Y(\mathbf{C})$ (en un sens légèrement plus général que celui du § 2.2 a)).

Nous commençons la description des strates de la stratification \mathcal{S}^{pt} de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$. Ceci peut aussi être considéré comme le cas particulier $Y = \text{pt}$.

a) Strates de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$

Définition 4.1.1. Soit \mathcal{S}^{pt} la stratification de l'espace $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$ associée à l'hypersurface algébrique d'équation $\text{discr}(P) = 0$ (On renvoie à l'Annexe pour cette notion, notamment à l'Exemple C.1.4).

La stratification \mathcal{S}^{pt} joue pour nous un rôle majeur : pour tout polynôme $A \in \text{Pol}_m(\mathbf{C})$, la nature de la \mathbf{C} -algèbre $\mathbf{C}[X]/(A)$ ne dépend que de la strate de \mathcal{S}^{pt} où se situe A . Cette stratification est relevée le long de la projection $\wp : (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Pol}_m(\mathbf{C})$ et induit la stratification \mathcal{S}^Y .

Notation: Pour tout entier strictement positif e , on note \underline{e} l'ensemble $\{1, 2, \dots, e\}$.

Définition 4.1.2. Soit e un entier strictement positif.

- Une partition de e est la donnée d'un entier positif n et d'une classe de surjections $\underline{e} \xrightarrow{\pi} \underline{n}$ pour la relation d'équivalence \sim définie par :

$$(\underline{e} \xrightarrow{\pi} \underline{n}) \sim (\underline{e} \xrightarrow{\pi'} \underline{n}) \iff \exists \alpha : \underline{e} \xrightarrow{\cong} \underline{e} \text{ et } \beta : \underline{n} \xrightarrow{\cong} \underline{n} \text{ tels que } \pi' \circ \alpha = \beta \circ \pi \quad .$$

On note $[\pi]$ la classe de la surjection π .

- Pour toute surjection $\pi : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$, on note $\bar{\pi}$ la classe de π modulo composition au but par un élément de \mathfrak{S}_n . Autrement dit, on a l'égalité $\bar{\pi} = \bar{\pi'}$ si et seulement s'il existe une permutation $\beta \in \mathfrak{S}_n$ telle que l'on ait $\pi' = \beta \circ \pi$.

Bien évidemment, pour des surjections $\pi, \pi' : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$, on a l'implication :

$$(\bar{\pi} = \bar{\pi'}) \implies ([\pi] = [\pi']) \quad .$$

Convention: L'ensemble des partitions d'un entier e forme un ensemble partiellement ordonné pour la relation d'ordre suivante : on convient que $[\pi] \succeq [\pi']$ s'il existe des représentants respectifs π et π' de $[\pi]$ et $[\pi']$ et une surjection $\varphi : \underline{n} \rightarrow \underline{n'}$ telle que l'on ait $\pi = \varphi \circ \pi'$.

On définit de manière strictement analogue une relation d'ordre sur les classes de surjections $\bar{\pi}$.

Exemple 4.1.3. Pour tout entier m , on a toujours les deux partitions suivantes de m .

- La partition générique², notée $[\pi_g]$, correspondant à la classe de $\text{id}_{\underline{m}}$. C'est l'élément maximal de l'ensemble des partitions de m .
- La partition triviale, notée $[\pi_t]$, correspondant à la classe de l'unique application de \underline{m} dans $\underline{1}$. C'est l'élément minimal de l'ensemble des partitions de m .

²On renvoie à l'Exemple 4.1.5 ci-après pour la terminologie.

On a ici les propriétés $([\pi] = [\pi_g]) \implies (\bar{\pi} = \bar{\pi}_g)$ et $([\pi] = [\pi_t]) \implies (\bar{\pi} = \bar{\pi}_t)$, mais ce sont les seules partitions pour lesquelles ceci est vrai.

Convention: Dans la suite, on identifie souvent l'espace $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$ avec le produit symétrique $\text{SP}^m(\mathbf{C}) := \mathbf{C}^m / \mathfrak{S}_m$. Un polynôme de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$ est alors plutôt vu comme une orbite d'applications de \underline{m} dans \mathbf{C} sous l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_m .

Soit $q : \mathbf{C}^m \longrightarrow \text{SP}^m(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^m / \mathfrak{S}_m$ la projection canonique. Pour des raisons techniques qui apparaîtront ultérieurement, il est utile de décrire également les strates de la stratification \mathfrak{S}_m -équivariante $\mathcal{E}^{\text{pt}} := q^{-1}(\mathcal{S}^{\text{pt}})$ de \mathbf{C}^m . Voici la description des strates de \mathcal{S}^{pt} et \mathcal{E}^{pt} .

Proposition-définition 4.1.4. *Soit m un entier ≥ 1 .*

1. La stratification \mathcal{S}^{pt} de l'espace $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$ admet des strates³ $S_{[\pi]}^{\text{pt}}$ indexées par les partitions $[\pi]$ de l'entier m .
Par définition, pour toute une partition $[\pi]$ de m , la strate $S_{[\pi]}^{\text{pt}}$ est formée des orbites sous l'action de \mathfrak{S}_m des applications $x : \underline{m} \longrightarrow \mathbf{C}$ pour lesquelles il existe un représentant $\pi : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ de $[\pi]$ et une factorisation $x = \varphi \circ \pi$ avec $\varphi : \underline{n} \hookrightarrow \mathbf{C}$ injective.
2. Les strates $E_{[\pi]}^{\text{pt}}$ de la stratification \mathcal{E}^{pt} de \mathbf{C}^m sont indexées par les partitions $[\pi]$ de l'entier m . Par définition, on a $E_{[\pi]}^{\text{pt}} = q^{-1}(S_{[\pi]}^{\text{pt}})$. La stratification \mathcal{E}^{pt} de \mathbf{C}^m ainsi obtenue est \mathfrak{S}_m -équivariante : chaque strate est stable sous l'action de \mathfrak{S}_m .
3. Les relations d'ordre partiel (c.f. Définition C.1.1) sur les ensembles de strates \mathcal{S}^{pt} et \mathcal{E}^{pt} sont données par

$$\left(S_{[\pi]}^{\text{pt}} \succeq S_{[\pi']}^{\text{pt}} \right) \iff ([\pi] \succeq [\pi']) \quad \text{et} \quad \left(E_{[\pi]}^{\text{pt}} \succeq E_{[\pi']}^{\text{pt}} \right) \iff ([\pi] \geq [\pi']) \quad .$$

4. Soit $[\pi]$ une partition de m . Les composantes connexes $E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}}$ de la strate $E_{[\pi]}^{\text{pt}}$ sont indexées par les classes de surjections $\bar{\pi} \in [\pi]$:

$$E_{[\pi]}^{\text{pt}} = \coprod_{\bar{\pi} \in [\pi]} E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \quad .$$

Pour toute classe de surjections $\bar{\pi}$, l'espace $E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}}$ est le sous-espace de \mathbf{C}^m des applications $x : \underline{m} \longrightarrow \mathbf{C}$ telles que pour tout représentant $\pi : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ de $\bar{\pi}$, il existe une factorisation $x = \varphi \circ \pi$ avec $\varphi : \underline{n} \hookrightarrow \mathbf{C}$ injective.

Pour tout choix d'un représentant π de $\bar{\pi}$, l'application $E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}^{(n)}$ qui à tout x associe l'(unique) application φ précédente réalise un homéomorphisme.

5. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_m opère sur $E_{[\pi]}^{\text{pt}}$. L'action échange les composantes connexes selon la règle

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_m, \quad \sigma \cdot E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} = E_{\bar{\pi} \circ \sigma^{-1}}^{\text{pt}} \quad .$$

6. Soient $\bar{\pi}$ une classe de surjections et $\pi : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ un représentant de $\bar{\pi}$. Le sous-groupe de \mathfrak{S}_m formé des permutations σ telles qu'il existe une (nécessairement unique) permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ satisfaisant la relation $\pi \circ \sigma = \tau \circ \pi$ ne dépend pas du choix du représentant⁴ π . On le note $\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}$.
C'est le groupe d'isotropie de la composante connexe $E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}}$.

³L'auteur s'excuse pour la lourdeur des notations, mais il la croit nécessaire pour éviter toute confusion entre les strates de \mathcal{S}^Y et de \mathcal{S}^{pt} lorsque qu'elles apparaîtront simultanément dans la suite.

⁴ Par contre, le morphisme de groupes $\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_{\bar{\pi}} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \tau \end{array}$ dépend du choix du représentant π .

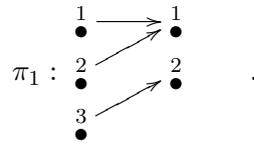
7. Pour toute partition $[\pi]$ de m et pour tout élément $\bar{\pi} \in [\pi]$, on a des homéomorphismes canoniques

$$E_{[\pi]}^{\text{pt}}/\mathfrak{S}_m \xrightarrow{\simeq} S_{[\pi]}^{\text{pt}} \xleftarrow{\simeq} E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}}/\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}$$

décrivant $S_{[\pi]}^{\text{pt}}$ comme un espace de configuration⁵ de points dans \mathbf{C} .

Exemple 4.1.5.

1. La strate $S_{[\pi_g]}^{\text{pt}}$ est « l'ouvert générique » de l'espace des polynômes, c'est-à-dire l'espace des polynômes à racines simples. La strate $E_{[\pi_g]}^{\text{pt}}$ est l'ouvert $\mathbf{C}^{(m)}$ de \mathbf{C}^m (c'est ici un espace connexe).
2. La strate $S_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$ est l'espace des polynômes ayant une racine d'ordre m . La strate $E_{\bar{\pi}_g}^{\text{pt}}$ correspond à la diagonale $x_1 = \dots = x_m$ de \mathbf{C}^m .
3. Si $m = 3$, soit $\pi_1 : \underline{3} \rightarrow \underline{2}$ la surjection suivante :



La strate $S_{[\pi_1]}^{\text{pt}}$ est l'espace des polynômes de degré 3 ayant exactement une racine double. On a un homéomorphisme $S_{[\pi_1]}^{\text{pt}} \simeq \mathbf{C}^{(2)}$ (On rappelle que la notation $\mathbf{C}^{(2)}$ désigne l'espace de configuration de deux points distincts dans \mathbf{C}).

L'espace $E_{\bar{\pi}_1} \subset \mathbf{C}^3$ est formé des triplets (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 = x_2$ et $x_1 \neq x_3$ et l'on a

$$E_{[\pi_1]} = E_{\bar{\pi}_1} \coprod \tau_{1,3} E_{\bar{\pi}_1} \coprod \tau_{2,3} E_{\bar{\pi}_1} \quad ,$$

$\tau_{i,j}$ désignant la transposition $(i, j) \in \mathfrak{S}_3$. Le groupe $\mathfrak{S}_{\bar{\pi}_1}$ est le sous-groupe de \mathfrak{S}_3 engendré par la transposition $\tau_{1,2}$. Ce sous-groupe agit ici trivialement sur $E_{\bar{\pi}_1}$.

Remarque 4.1.6. Voici une reformulation plus intrinsèque (ne dépendant pas d'un choix) de l'égalité du (7) de la Proposition-définition 4.1.4.

Soient $[\pi]$ une partition de m et $\mathcal{D}_0([\pi])$ la catégorie — le groupoïde! — suivante. Les objets de $\mathcal{D}_0([\pi])$ sont les surjections $\underline{m} \xrightarrow{\pi_0} \underline{n_0}$ telles que $[\pi_0] = [\pi]$. Un morphisme entre les objets π_0 et π'_0 est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{m} & \xrightarrow[\simeq]{\alpha} & \underline{m} \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow \pi'_0 \\ \underline{n_0} & \xrightarrow[\simeq]{\alpha_0} & \underline{n_0} \end{array} .$$

Soit \mathbf{E}^{pt} l'unique foncteur de $\mathcal{D}_0([\pi])$ dans $\mathcal{T}op$ tel que $\mathbf{E}^{\text{pt}}(\pi_0) = E_{\bar{\pi}_0}^{\text{pt}}$ et tel que pour tout morphisme (α, α_0) entre des objets π_0 et π'_0 dans $\mathcal{D}_0([\pi])$, le morphisme $\mathbf{E}^{\text{pt}}(\alpha, \alpha_0)$ soit induit par l'action de l'élément $\alpha \in \mathfrak{S}_m$. L'égalité au (7) de la Proposition-définition 4.1.4 se reformule alors :

$$S_{[\pi]}^{\text{pt}} \simeq \text{colim}_{\pi_0 \in \mathcal{D}_0([\pi])} \mathbf{E}_0^{\text{pt}}(\pi_0) \quad .$$

Pour avoir une bonne théorie des voisinages tubulaires, il faut que les stratifications considérées soient régulières au sens de Whitney. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.1.7. *Les stratifications \mathcal{S}^{pt} et \mathcal{E}^{pt} sont de Whitney (On renvoie le lecteur au paragraphe C.2 de l'annexe pour la définition et une discussion des conséquences des conditions de Whitney).*

⁵Ce terme est ici pris en au sens large, au sens où nous ne précisons pas à quel point la configuration est ordonnée.

DÉMONSTRATION — Le fait que la stratification \mathcal{S}^{pt} soit de Whitney est l'objet de l'article [Dim84]. Nous y renvoyons le lecteur.

Le fait que la stratification \mathcal{E}^{pt} soit alors de Whitney est une conséquence⁶ de la Proposition C.2.4. \square

b) Strates de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$

Nous venons de décrire les strates de la stratification \mathcal{S}^{pt} de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$. La stratification \mathcal{S}^Y de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ que nous considérons est par définition son image inverse par la projection canonique $\wp : (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Pol}_m(\mathbf{C})$ de \mathcal{S}^{pt} . Nous explicitons dans ce paragraphe le type d'homotopie des strates $S_{[\pi]}^Y$ de \mathcal{S}^Y en fonction de celui des strates $S_{[\pi]}^{\text{pt}}$ de \mathcal{S}^{pt} et de celui de $Y(\mathbf{C})$.

Soit $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$ le produit fibré canonique de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ et de \mathbf{C}^m au dessus de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$. Par définition, le diagramme suivant est donc cartésien :

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\tilde{q}} & (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \\ \tilde{\wp} \downarrow & & \downarrow \wp \\ \mathbf{C}^m & \xrightarrow{q} & \text{Pol}_m(\mathbf{C}) \end{array} .$$

Pour des raisons techniques, nous considérons et décrivons aussi dans ce paragraphe les strates de la stratification \mathcal{E}^Y de l'espace $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$, image inverse de \mathcal{S}^{pt} par l'application $\wp \circ \tilde{q}$.

Par définition, les strates de \mathcal{S}^Y et \mathcal{E}^Y sont encore indexées par les partitions de l'entier m : pour toute partition $[\pi]$ de m , on pose

$$S_{[\pi]}^Y = \wp^{-1}(S_{[\pi]}^{\text{pt}}) \quad \text{et} \quad E_{[\pi]}^Y = (\wp \circ \tilde{q})^{-1}(S_{[\pi]}^{\text{pt}}) .$$

Remarquer que la stratification \mathcal{E}^Y est \mathfrak{S}_m -équivariante.

La proposition suivante précise la discussion de l'introduction du chapitre. Elle donne une description du type d'homotopie des strates précédentes.

Proposition 4.1.8.

1. Soit $[\pi] : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ une partition de m . Les composantes connexes $E_{\bar{\pi}}^Y$ de la strate $E_{[\pi]}^Y$ sont indexées par les classes de surjection $\bar{\pi} \in [\pi]$. Pour représentant π d'une classe de surjections $\bar{\pi}$, on a un homéomorphisme $\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}$ -équivariant :

$$E_{\bar{\pi}}^Y \simeq E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \times \prod_{i=1}^n Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^{|\pi^{-1}(i)|})\right) .$$

(Ci-dessus, $\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}$ opère sur le produit du membre de droite par permutation de \underline{n} , via le morphisme $\mathfrak{S}_{\bar{\pi}} \rightarrow \mathfrak{S}_n$ associé au choix d'un représentant π , c.f. note 4 p. 72).

De plus, la strate $E_{\bar{\pi}}^Y$ se rétracte par déformation $\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}$ -équivariante sur son sous-espace

$$E_{\bar{\pi}}^{\text{restr}} := E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \times Y(\mathbf{C})^{\underline{n}} \subset E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \times \prod_{i=1}^n Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^{|\pi^{-1}(i)|})\right) .$$

2. Pour toute partition $[\pi] : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$, et pour tout représentant π de $[\pi]$, on a un homéomorphisme :

$$S_{[\pi]}^Y \simeq E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \times_{\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}} \left(\prod_{i=1}^n Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^{|\pi^{-1}(i)|})\right) \right) \quad (4.1.9)$$

⁶Pour obtenir ce résultat sans référer à [Dim84], voir [Pfl01] Theorem 4.3.7.

indépendant du choix de π .

De plus, la strate $S_{[\pi]}^Y$ se rétracte par déformation sur son sous-espace

$$S_{[\pi]}^{restr} := E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \times_{\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}} Y(\mathbf{C})^n \subset E_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \times_{\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}} \prod_{i=1}^n Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^{|\pi^{-1}(i)|})\right) .$$

Remarque 4.1.10. De manière analogue à la Remarque 4.1.6, on pourrait donner une expression plus intrinsèque de la formule (4.1.9) précédente en termes d'une colimite adéquate.

Les propriétés de régularité des stratifications \mathcal{S}^{pt} et \mathcal{E}^{pt} se transfèrent. Précisément, on a :

Proposition 4.1.11. *Les stratifications \mathcal{S}^Y et \mathcal{E}^Y sont de Whitney.*

DÉMONSTRATION — C'est une conséquence des Propositions 4.1.7 et C.2.4. □

Remarque 4.1.12 (Autres sous-variétés remarquables de $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$).

Pour tout partition $[\pi] = [\underline{m} \rightarrow \underline{n}]$ de m , soit $\Sigma_{[\pi]}^Y$ le sous-espace de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ formé des couples (A, B) tels que

- il existe une factorisation $A = A_1 \cdots A_n$ avec A_i des polynômes unitaires de degrés respectifs $|\pi^{-1}(i)|$, deux à deux premiers entre eux ;
- B appartienne à $Y(\mathbf{C})^n \subset Y\left(\mathbf{C}[X]/(A_1)\right) \times \cdots \times Y\left(\mathbf{C}[X]/(A_n)\right)$.

En général, $\Sigma_{[\pi]}^Y$ n'est pas une sous-variété de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$.

Soit également $\widetilde{\Sigma}_{[\pi]}^Y$ le sous-espace de $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$

$$\widetilde{\Sigma}_{[\pi]}^Y := \wp^{-1}(\Sigma_{[\pi]}^Y) .$$

Ici, $\widetilde{\Sigma}_{[\pi]}^Y$ est une sous- \mathfrak{S}_m -variété de $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$, réunion (non disjointe) de sous-variétés $\widetilde{\Sigma}_{\bar{\pi}}^Y$ stables par $\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}$ ($\bar{\pi} \in [\pi]$). On vérifie que $\widetilde{\Sigma}_{[\pi]}^Y$ est transverse à la stratification \mathcal{E}^Y (c'est-à-dire transverse à toutes les strates).

Exemple 4.1.13.

1. Pour la strate générique, on a $\Sigma_{[\pi_g]}^Y = S_{[\pi_g]}^Y$ et $\widetilde{\Sigma}_{[\pi_g]}^Y = E_{[\pi_g]}^Y$.
2. Pour la strate triviale, on a $\Sigma_{[\pi_t]}^Y = \text{Pol}_m(\mathbf{C}) \times Y$ et $\widetilde{\Sigma}_{[\pi_t]}^Y = \mathbf{C}^m \times Y$.
3. Si $Y = \text{pt}$, pour toute partition $[\pi]$ de m , $\Sigma_{[\pi]}^{\text{pt}}$ est l'ouvert $\bigcup_{[\pi'] \geq [\pi]} S_{[\pi']}^{\text{pt}}$ de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$.
4. Pour toute surjection $\pi : \underline{m} \twoheadrightarrow \underline{n}$, on a un homéomorphisme $\mathfrak{S}_{\bar{\pi}}$ -équivariant : $\widetilde{\Sigma}_{\bar{\pi}}^Y \simeq \widetilde{\Sigma}_{\bar{\pi}}^{\text{pt}} \times Y(\mathbf{C})^n$.

4.2 Les foncteurs Ψ^2 et Ψ^3

Le paragraphe précédent a donné une description du type d'homotopie des strates de \mathcal{S}^Y . Pour décrire complètement le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$, il faut encore décrire comment attacher ces strates ensemble.

Nous illustrons dans le cas $m = 2$ et $m = 3$ une méthode pour décrire ces données d'attache. Ceci permet de familiariser le lecteur avec les notations et la méthode employées ci-après. Le cas $m = 3$ contient déjà toute la difficulté technique autre que rédactionnelle.

a) Description de $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$

L'entier $m = 2$ n'admet que les deux partitions $[\pi_g] \succ [\pi_t]$. La stratification \mathcal{S}^Y de l'espace $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$ n'est donc composée que de deux strates :

- La strate $S_{[\pi_g]}^Y$ est l'ouvert générique. On a un homéomorphisme

$$S_{[\pi_g]}^Y \simeq \mathbf{C}^{(2)} \times_{\mathfrak{S}_2} Y(\mathbf{C})^2 \quad .$$

- La strate $S_{[\pi_t]}^Y$ est une sous-variété de codimension (complexe) 1 dans $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$. On a un homéomorphisme

$$S_{[\pi_t]}^Y \simeq \mathbf{C} \times Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^2)\right) \quad .$$

Cet espace se rétracte par déformation sur son sous-espace $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}} \simeq \mathbf{C} \times Y(\mathbf{C})$.

En tant que sous-espaces de $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$, les strates $S_{[\pi_g]}$ et $S_{[\pi_t]}$ sont disjointes. Pour compléter la description du type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$, il faut encore expliciter comment les attacher ensemble. Une façon de procéder consiste à épaissir la strate $S_{[\pi_t]}^Y$ (sans changer son type d'homotopie) en la remplaçant par un voisinage tubulaire⁷ ouvert, disons $T_{[\pi_t]}^Y$. L'intersection $S_{[\pi_g]}^Y \cap T_{[\pi_t]}^Y$ est alors non vide. Nous allons décrire cette intersection ainsi que les deux inclusions $S_{[\pi_g]}^Y \cap T_{[\pi_t]}^Y \hookrightarrow S_{[\pi_g]}^Y$ et $S_{[\pi_g]}^Y \cap T_{[\pi_t]}^Y \hookrightarrow T_{[\pi_t]}^Y$.

Les ouverts $S_{[\pi_g]}^Y$ et $T_{[\pi_t]}^Y$ recouvrent $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$, de sorte que l'application canonique

$$\text{hocolim} \left(\begin{array}{ccc} S_{[\pi_g]}^Y & & T_{[\pi_t]}^Y \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & S_{[\pi_g]}^Y \cap T_{[\pi_t]}^Y & \end{array} \right) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$$

est une équivalence d'homotopie (*c.f.* [Seg68],). Le diagramme ci-dessus est appelé le *diagramme de Cech* associé au système (ici il n'y en a qu'un !) de voisinages tubulaires $(T_{[\pi_t]}^Y)$. Ci-dessus, l'emploi d'une colimite homotopique plutôt qu'une colimite simple est motivé par le lemme suivant — lemme que nous allons appliquer à répétition jusqu'à la fin du chapitre.

Lemme 4.2.1. *Soient \mathcal{A} une petite catégorie, F et G deux foncteurs $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}op$ et $\varphi : F \rightarrow G$ une équivalence d'homotopie naturelle⁸. Alors l'application canonique*

$$\varphi_* : \text{hocolim}_{\mathcal{A}} F \xrightarrow{\cong} \text{hocolim}_{\mathcal{A}} G$$

est une équivalence d'homotopie.

i) Réduction au cas $Y = \text{pt}$

Commençons par analyser le type d'homotopie de l'espace $S_{[\pi_g]}^Y \cap T_{[\pi_t]}^Y$. Cet espace est un voisinage tubulaire *épointé* (c'est-à-dire privé de sa section nulle) de $S_{[\pi_t]}^Y$ dans $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$ et nous le noterons $T_{[\pi_t]}^{Y,\text{ép}}$. La base $S_{[\pi_t]}^Y$ de ce tube se rétracte par déformation sur son sous-espace $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}} \simeq \mathbf{C} \times Y(\mathbf{C})$. Le Lemme de restriction 4.2.2 suivant montre la rétraction précédente induit une rétraction par déformation de $T_{[\pi_t]}^{Y,\text{ép}}$ sur sa restriction à $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$, notée $T_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$ et que cette rétraction se restreint en une rétraction par déformation de $T_{[\pi_t]}^{Y,\text{ép}}$ sur sa restriction $T_{[\pi_t]}^{\text{restr,ép}}$ à $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$.

⁷Il s'agit ici de la notion classique de voisinage tubulaire de la sous-variété $S_{[\pi_t]}^Y \subset (\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$.

⁸C'est-à-dire une transformation naturelle φ induisant pour chaque objet $a \in \mathcal{A}$ une équivalence d'homotopie $\varphi_a : F(a) \xrightarrow{\cong} G(a)$.

Lemme 4.2.2 (Lemme de restriction⁹). *Soient M une variété, S une sous-variété de M et T_S un voisinage tubulaire de S dans M . On suppose que S se rétracte par déformation sur un sous-espace S^{restr} . Alors, le voisinage tubulaire T_S se rétracte par déformation sur sa restriction T_S^{restr} à S^{restr} et cette rétraction se restreint en une rétraction par déformation de $T_S^{\text{ép}}$ sur sa restriction $T_S^{\text{restr,ép}}$ à S^{restr} .*

D'autre part, soit $\Sigma_{[\pi_t]}^Y$ la sous-variété de $(\mathcal{R}_2Y)(\mathbf{C})$ définie par la condition

$$\Sigma_{[\pi_t]}^Y := \left\{ (A, B) \in (\mathcal{R}_2Y)(\mathbf{C}), B \in Y(\mathbf{C}) \subset Y(\mathbf{C}[X]/(A)) \right\}$$

On a ici un homéomorphisme $\Sigma_{[\pi_t]}^Y \simeq \text{Pol}_2(\mathbf{C}) \times Y(\mathbf{C})$. On constate que $\Sigma_{[\pi_t]}^Y$ est transverse à $S_{[\pi_t]}^Y$ le long de leur intersection $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$.

Remarque 4.2.3. Il est utile de remarquer que se donner un voisinage tubulaire $T_{[\pi_t]}^\Sigma$ de $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$ dans $\Sigma_{[\pi_t]}^Y$ revient à se donner un voisinage tubulaire $T_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$ de $S_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$ dans $\text{Pol}_2(\mathbf{C})$. On a alors un homéomorphisme (compatible au précédent)

$$T_{[\pi_t]}^\Sigma \simeq T_{[\pi_t]}^{\text{pt}} \times Y(\mathbf{C}) \quad .$$

Fixons nous un voisinage tubulaire $T_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$ quelconque de $S_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$ dans $\text{Pol}_2(\mathbf{C})$ et soit $T_{[\pi_t]}^\Sigma$ le voisinage tubulaire de $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$ dans $\Sigma_{[\pi_t]}^Y$ correspondant. Quitte à comprimer $T_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$, on peut supposer que $T_{[\pi_t]}^\Sigma$ est inclus dans $T_{[\pi_t]}^Y$.

Le Lemme d'unicité des voisinages tubulaires 4.2.4 suivant montre alors qu'il existe une isotopie dans $T_{[\pi_t]}^Y$ entre $T_{[\pi_t]}^\Sigma$ et $T_{[\pi_t]}^{\text{restr,ép}}$.

Lemme 4.2.4 (Lemme d'unicité des voisinages tubulaires¹⁰). *Soient M une variété, S et Σ deux sous-variétés transverses le long de leur intersection S^{restr} . Soient également T un voisinage tubulaire de S dans M , T^{restr} la restriction de T à S^{restr} et T^Σ un voisinage tubulaire de S^{restr} dans Σ tel que $T^\Sigma \subset T$. Alors, il existe une isotopie dans T entre T^Σ et (une compression de) T^{restr} au-dessus de S^{restr} .*

La proposition suivante résume la discussion précédente.

Proposition 4.2.5. *Dans le diagramme commutatif suivant, les applications en pointillés (données par les inclusions canoniques) sont toutes des équivalences d'homotopie.*

$$\begin{array}{ccc} S_{[\pi_g]}^Y & \hookrightarrow & S_{[\pi_g]}^Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_{[\pi_t]}^\Sigma & \hookrightarrow & T_{[\pi_t]}^\Sigma \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ T_{[\pi_t]}^{\Sigma, \text{ép}} & \hookrightarrow & T_{[\pi_t]}^{\text{ép}} \end{array} \quad .$$

⁹On renvoie au Lemme C.3.13 pour un énoncé et une démonstration dans un cadre plus général.

¹⁰c.f. Annexe C, Proposition C.3.7.

Corollaire 4.2.6. *Puisque l'on a par construction un homéomorphisme de diagrammes¹¹*

$$\begin{array}{ccc}
 S_{[\pi_g]}^Y \subset & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & S_{[\pi_g]}^{\text{pt}} \times Y^2 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 T_{[\pi_t]}^\Sigma \subset & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & T_{[\pi_t]}^{\text{pt}} \times Y \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 T_{[\pi_t]}^{\Sigma, \acute{e}p} \subset & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & T_{[\pi_t]}^{\text{pt}, \acute{e}p} \times Y
 \end{array}
 , \quad \Delta$$

nous sommes ramenés à traiter le cas $Y = \text{pt}$. (Ci-dessus, l'application notée Δ est induite par l'application diagonale $Y \rightarrow Y^2$.)

En particulier, le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$ ne dépend que du type d'homotopie de l'espace $Y(\mathbf{C})$.

ii) Le cas $Y = \text{pt}$

Dans l'étape de réduction précédente, nous n'avons fait aucune hypothèse sur le voisinage tubulaire $T_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$ que nous avons choisi. Par conséquent, tous les choix sont équivalents. Il suffit donc de décrire le diagramme de Cech pour un choix explicite de voisinages tubulaires. (Si l'on ne veut pas référer à la réduction précédente, on peut utiliser directement l'unicité des voisinages tubulaires.)

Parce que cela se généralisera bien pour des valeurs de m plus grandes, nous allons plutôt décrire un système de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_2 -équivariants dans le \mathbf{C}^2 au dessus de $\text{Pol}_2(\mathbf{C})$ et nous quotienterons par l'action de \mathfrak{S}_2 à la fin.

Conventions:

- On rappelle que la notation $\mathbf{C}^{(2)}$ désigne l'espace de configuration de 2 points distincts de \mathbf{C} .
- On note $D = D(0, 1)$ le disque unité de \mathbf{C} .
- Soit \tilde{D}^2 la représentation de permutation réduite de \mathfrak{S}_2 , c'est-à-dire le sous-espace formé des éléments $(x_1, x_2) \in D^2$, tels que $x_1 + x_2 = 0$.
- Soit également $\tilde{D}^{(2)}$ le sous-espace de $D^{(2)}$ formé des éléments $(x_1, x_2) \in D^2$ tels que $x_1 + x_2 = 0$ et $x_1 \neq x_2$.

Ici $S_{[\pi_g]}^{\text{pt}}$ est l'espace de configuration $\mathbf{C}^{(2)} \subset \mathbf{C}^2$ et $S_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$ est le sous-espace diagonal $\mathbf{C} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{C}^2$.

Soit alors $\tilde{T}_{[\pi_t]}$ le \mathfrak{S}_2 -voisinage tubulaire normal

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{T}_{[\pi_t]} : & \mathbf{C} \times \tilde{D}^2 & \xrightarrow{\tilde{e}_{[\pi_t]}} \mathbf{C}^2 \\
 & (x, (y_1, y_2)) & \mapsto (x + y_1, x + y_2)
 \end{array}$$

On a alors un \mathfrak{S}_2 -homéomorphisme naturel de diagrammes de Cech :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{C}^{(2)} \dashrightarrow & \tilde{T}_{[\pi_g]}^{\text{pt}} \\
 \uparrow \tilde{e}_{[\pi_t]} & \uparrow \\
 \mathbf{C} \times \tilde{D}^2 \dashrightarrow & \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\text{pt}} \\
 \uparrow & \uparrow \\
 \mathbf{C} \times \tilde{D}^{(2)} \dashrightarrow & \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\text{pt}, \acute{e}p}
 \end{array}
 .$$

¹¹Pour alléger les diagrammes, nous notons Y plutôt que $Y(\mathbf{C})$ lorsque cela ne prête pas à confusion.

L'analyse est essentiellement finie. Toutefois, pour des raisons esthétiques, nous faisons apparaître l'opérade des petits disques. On a des \mathfrak{S}_2 -équivalences d'homotopie de diagrammes (de Cech) :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{P}(\underline{2}) & \leftarrow \text{---} \approx \text{---} \hookrightarrow & \mathbf{C}^{(2)} & \text{---} \equiv \text{---} \triangleright & \mathbf{C}^{(2)} \\
 \uparrow \mu & \nearrow \text{pr} & \uparrow \mu & \nearrow \text{pr} & \uparrow \tilde{e}_{\pi_t} \\
 \mathcal{P}(\underline{1}) & \leftarrow \text{---} \approx \text{---} \hookrightarrow & \{0\} & \text{---} \approx \text{---} \triangleright & \mathbf{C} \times \tilde{D}^2 \\
 \uparrow \mu & \nearrow \text{pr} & \uparrow \mu & \nearrow \text{pr} & \uparrow \tilde{e}_{\pi_t} \\
 \mathcal{P}(\underline{2}) \times \mathcal{P}(\underline{1}) & \leftarrow \text{---} \approx \text{---} \hookrightarrow & \{0\} \times \tilde{D}^{(2)} & \text{---} \approx \text{---} \triangleright & \mathbf{C} \times \tilde{D}^{(2)}
 \end{array} .$$

Dans le diagramme ci-dessus, l'application notée μ est l'application de structure de l'opérade des petits disques associée à la surjection $\pi_t : \underline{2} \twoheadrightarrow \underline{1}$. Les morphismes horizontaux de gauche sont induits par « l'inclusion de l'opérade des tresses pures dans l'opérade des petits disques ».

Pour conclure, il reste à quotienter par l'action de \mathfrak{S}_2 .

Définition 4.2.7. Pour tout espace topologique Z , on pose

$$\psi_0^2(Z) := \mathcal{P}(2) \times_{\mathfrak{S}_2} Z^2 \amalg \mathcal{P}(1) \times Z$$

$$\psi_1^2(Z) := (\mathcal{P}(2) / \mathfrak{S}_2 \times \mathcal{P}(1)) \times Z$$

$$\text{et } \psi_i^2 = \emptyset \text{ pour } i \geq 2$$

Soit alors

$$\Psi^2 Z = |\psi_{\bullet}^2| := \text{hocolim} \left(\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}(2) \times_{\mathfrak{S}_2} Z^2 & & \mathcal{P}(1) \times Z \\
 \swarrow \mu \times \Delta & & \nearrow \text{pr} \times \text{id} \\
 (\mathcal{P}(2) / \mathfrak{S}_2 \times \mathcal{P}(1)) \times Z & &
 \end{array} \right) . \quad (4.2.8)$$

On définit ainsi un foncteur $\Psi^2 : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{T}op$.

Nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 4.2.9. Pour tout voisinage tubulaire $T_{[\pi_t]}^Y$ de $S_{[\pi_t]}^Y$ dans $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$, soit τ_{\bullet} le diagramme de Cech

$$\tau_{\bullet} := S_{[\pi_g]} \amalg T_{[\pi_t]} \xleftarrow{\quad} S_{[\pi_g]} \cap T_{[\pi_t]} .$$

Quitte à comprimer $T_{[\pi_t]}^Y$, il existe un zigzag d'équivalences d'homotopie naturelles de diagrammes de Cech entre ψ_{\bullet}^2 et τ_{\bullet} . En particulier, on a une équivalence d'homotopie

$$\Psi^2(Y(\mathbf{C})) \approx (\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C}) .$$

b) Description de $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$

Nous détaillons également l'analyse du cas $m = 3$ pour laquelle la théorie des stratifications devient pleinement utile.

L'entier $m = 3$ admet les trois partitions :

$$[\pi_g] \succ [\pi_1] \succ [\pi_t] ,$$

π_1 désignant la surjection de $\underline{3} \twoheadrightarrow \underline{2}$ décrite à l'Exemple 4.1.5 (3). La stratification \mathcal{S}^Y de l'espace $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$ comporte trois strates :

- L'ouvert générique $S_{[\pi_g]}^Y$, tel que l'on a un homéomorphisme

$$S_{[\pi_t]}^Y \simeq \mathbf{C}^{(3)} \times_{\mathfrak{S}_3} Y(\mathbf{C})^3 \quad .$$

- Une sous-variété de codimension (complexe) 1, $S_{[\pi_1]}^Y$, telle que l'on a un homéomorphisme

$$S_{[\pi_1]}^Y \simeq \mathbf{C}^{(2)} \times Y \left(\mathbf{C}[X]/(X^2) \right) \times Y \quad .$$

Cette strate se rétracte par déformation sur son sous-espace $S_{[\pi_1]}^{\text{restr}} \simeq \mathbf{C}^{(2)} \times Y(\mathbf{C})^2$.

- Une sous-variété de codimension (complexe) 2, $S_{[\pi_t]}^Y$, telle que l'on a un homéomorphisme

$$S_{[\pi_t]}^Y \simeq \mathbf{C} \times Y \left(\mathbf{C}[X]/(X^3) \right) \quad .$$

Cette strate se rétracte par déformation sur son sous-espace $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}} \simeq \mathbf{C} \times Y$.

Soit \mathcal{F}^Y un système de voisinages tubulaires de la stratification de $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$, c'est-à-dire la donnée d'un voisinage tubulaire de chaque strate¹². On obtient ainsi un recouvrement ouvert de l'espace $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$. Décrire la stratification \mathcal{F}^Y revient à décrire le type d'homotopie des intersections multiples de ces espaces ainsi que des inclusions naturelles entre eux. L'ensemble de ces données est résumé dans le diagramme (de Cech)

$$\tau_\bullet = \left(\coprod_{i \in \{g,1,t\}} T_{[\pi_i]}^Y \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \coprod_{i \neq j \in \{g,1,t\}} T_{[\pi_i],[\pi_j]}^Y \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} T_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^Y \right)$$

associé à \mathcal{F}^Y .

Pour analyser le type d'homotopie de ce diagramme de Cech, nous allons choisir un système de voisinages tubulaires « compatibles » les uns par rapport aux autres¹³.

Pour toute variété stratifiée M Whitney-régulière, la théorie du contrôle développée par Mather dans [Mat70] a dégagé la notion de système *contrôlé* de voisinages tubulaires (*c.f.* Définition C.3.8). En autres, un tel système satisfait pour toute strate S les propriétés de régularité suivantes :

- La projection du tube T_S sur sa base S est une fibration localement triviale *en un sens stratifié*. Ceci signifie que pour tout point s de S , il existe un voisinage U de s dans M , un voisinage V de s dans S et un espace stratifié F tel que l'on ait un homéomorphisme d'espaces stratifiés

$$U \simeq V \times \Gamma F \quad ,$$

la notation Γ désignant « l'endofoncteur cône » de la catégorie des espaces stratifiés. (Voir le premier lemme d'isotopie de Thom — Théorème C.3.12 — et le Corollaire C.2.5).

- Pour toute strate $R \succ S$, l'intersection $T_S \cap T_R$ est la restriction du tube T_R au sous-espace ouvert $R \cap T_S$ de R .

Nous renvoyons à la lecture du §C.3 b) de l'Annexe C pour une présentation plus détaillée de la théorie du contrôle.

Dans la suite, nous supposons que \mathcal{F}^Y est un système contrôlé de voisinages tubulaires. (L'existence d'un tel système est assurée par le fait que la stratification \mathcal{S}^Y est de Whitney, *c.f.* Théorème C.3.11).

Il est équivalent de se donner un système contrôlé de voisinages tubulaires \mathcal{F}^Y de $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$ ou un système contrôlé de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_3 -équivariant $\widehat{\mathcal{F}}^Y$ de $(\widetilde{\mathcal{R}}_3 Y)(\mathbf{C}) := (\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C}) \times_{\text{Pol}_m(\mathbf{C})} \mathbf{C}^m$. Le

¹²La strate générique $S_{[\pi_g]}^Y$ est son propre voisinage tubulaire !

¹³Précédemment, pour le cas $m = 2$, nous n'avions pas besoin de ce genre d'hypothèse car il n'y avait qu'un seul tube.

diagramme de Cech du premier s'obtient en quotientant le diagramme de Cech du second par l'action de \mathfrak{S}_3 . (Pour un énoncé précis, voir la Proposition 4.3.14). Et il est en fait plus agréable de conduire une étude \mathfrak{S}_3 -équivariante d'un système contrôlé de voisinages tubulaires équivariants dans $(\widetilde{\mathcal{R}}_3 Y)(\mathbf{C})$, puis de quotienter.

Tout revient donc à décrire le type d'homotopie \mathfrak{S}_3 -équivariant de la stratification \mathcal{E}^Y de l'espace $(\widetilde{\mathcal{R}}_3 Y)(\mathbf{C})$.

La stratification \mathcal{E}^Y de l'espace $(\widetilde{\mathcal{R}}_3 Y)(\mathbf{C})$ est composée de 3 strates :

- L'ouvert générique $E_{[\pi_g]}^Y$, tel que l'on a un homéomorphisme \mathfrak{S}_3 -équivariant ($\mathfrak{S}_g = \mathfrak{S}_3$)

$$E_{[\pi_t]}^Y \simeq \mathbf{C}^{(3)} \times Y(\mathbf{C})^3 \quad .$$

- Une sous-variété de codimension (complexe) 1, $E_{[\pi_1]}^Y$, telle que l'on ait

$$E_{[\pi_1]}^Y = E_{\pi_1}^Y \amalg (\tau_{1,3} \cdot E_{\pi_1}^Y) \amalg (\tau_{2,3} \cdot E_{\pi_1}^Y) \quad .$$

Le sous-groupe d'isotropie \mathfrak{S}_{π_1} de $E_{\pi_1}^Y$ est le sous-groupe \mathfrak{S}_2 engendré par la transposition $\tau_{1,2}$. Ce groupe agit trivialement sur $E_{\pi_1}^Y$. De plus, on a un homéomorphisme (\mathfrak{S}_{π_1} -équivariant pour l'action triviale)

$$E_{\pi_1}^Y \simeq \mathbf{C}^{(2)} \times Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^2)\right) \times Y(\mathbf{C}) \quad .$$

Enfin, l'espace $E_{[\pi_1]}^Y$ se rétracte par déformation équivariante sur son sous-espace

$$E_{[\pi_1]}^{\text{restr}} = E_{\pi_1}^{\text{restr}} \amalg (\tau_{1,3} \cdot E_{\pi_1}^{\text{restr}}) \amalg (\tau_{2,3} \cdot E_{\pi_1}^{\text{restr}})$$

et l'on a un homéomorphisme \mathfrak{S}_{π_1} -équivariant $E_{\pi_1}^{\text{restr}} \simeq \mathbf{C}^{(2)} \times Y(\mathbf{C})^2$.

- Une sous-variété de codimension (complexe) 2, $E_{[\pi_t]}^Y$, telle que l'on a un homéomorphisme \mathfrak{S}_3 -équivariant (on a $\mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}_3$)

$$E_{[\pi_t]}^Y \simeq \mathbf{C} \times Y\left(\mathbf{C}[X]/(X^3)\right) \quad .$$

Cette strate se rétracte par déformation équivariante sur son sous-espace $S_{[\pi_t]}^{\text{restr}} \simeq \mathbf{C} \times Y$.

Venons en à la description \mathfrak{S}_3 -équivariante du diagramme de Cech

$$\tilde{\tau}_\bullet^Y := \coprod_{i \in \{g,1,t\}} \tilde{T}_{[\pi_i]}^Y \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \coprod_{i \neq j \in \{g,1,t\}} \tilde{T}_{[\pi_i],[\pi_j]}^Y \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^Y \quad .$$

Notation: Comme le veut l'usage, nous utilisons des multi-indices pour désigner les intersections multiples. Par exemple, $\tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_t]}^Y$ désigne l'espace $\tilde{T}_{[\pi_g]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^Y$ et $\tilde{T}_{\pi_1,\pi_t}^Y$ désigne l'espace $\tilde{T}_{\pi_1}^Y \cap \tilde{T}_{\pi_t}^Y$.

Notre point de départ est le suivant. L'application canonique

$$|\tilde{\tau}_\bullet^Y| := \text{hocolim} \left(\begin{array}{ccccc} & & & \tilde{T}_{[\pi_g]}^Y & \\ & & & \nearrow & \\ \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1]}^Y & \hookrightarrow & & \tilde{T}_{[\pi_1]}^Y & \\ & & & \downarrow & \\ & & \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_t]}^Y & \hookrightarrow & \tilde{T}_{[\pi_t]}^Y \\ & & & \downarrow & \\ \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^Y & \hookrightarrow & & \tilde{T}_{[\pi_1],[\pi_t]}^Y & \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\mathcal{R}}_3 Y)(\mathbf{C})$$

est une équivalence d'homotopie \mathfrak{S}_3 -équivariante. Le reste de ce paragraphe explicite la colimite homotopique ci-dessus *via* l'utilisation répétée de l'analogie équivariant du Lemme 4.2.1.

i) **Réduction au cas $Y = \text{pt}$**

Comme pour l'analyse de $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$, nous allons montrer que l'étude se ramène à celle du cas $Y = \text{pt}$. Les deux outils essentiels étaient le Lemme de restriction 4.2.2 et le Lemme d'unicité des voisinages tubulaires 4.2.4. Voici les généralisations adéquates de ces énoncés dans un contexte équivariant et stratifié.

Soient G un groupe fini et (M, \mathcal{S}) une G -variété stratifiée Whitney-régulière.

Lemme 4.2.10 (Lemme de restriction). *Soient S une G -strate de M et T_S un G -voisinage tubulaire de S dans M . On suppose que S admet un sous- G -espace S^{restr} sur lequel elle se rétracte par déformation G -équivariante. Alors (quitte à le comprimer) le tube T_S se rétracte par déformation G -équivariante stratifiée sur sa restriction à S^{restr} , notée T_S^{restr} .*

En particulier, pour toute G -strate $R \supseteq S$, l'espace $T_S \cap R$ se rétracte par déformation G -équivariante sur son sous- G -espace $T_S^{\text{restr}} \cap R$.

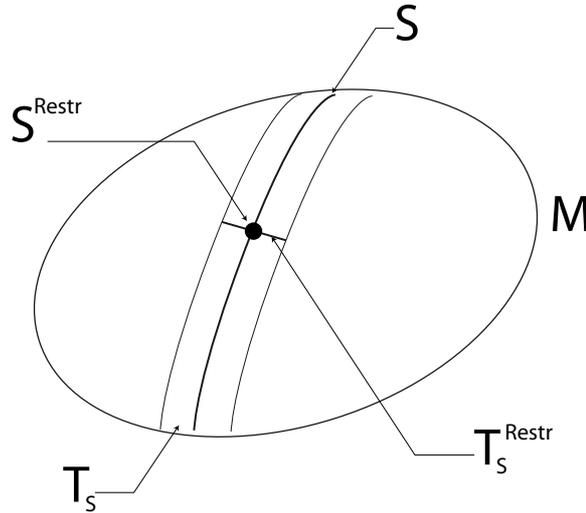


FIG. 4.1 – Lemme de restriction

Ce lemme est démontré à l'Annexe C, *c.f.* Lemme C.3.13 (2).

Lemme 4.2.11 (Lemme d'isotopie). *Soit S une G -strate de M et Σ une sous- G -variété de M transverse¹⁴ à \mathcal{S} . On note S^{restr} l'intersection $S \cap \Sigma$. Soient également T_S un G -voisinage tubulaire de S dans M , T_S^{restr} la restriction de T_S à S^{restr} et $T^\Sigma \subset T_S$ un G -voisinage tubulaire de S^{restr} dans Σ . Alors, les espaces T_S^{restr} et T^Σ héritent de stratifications de Whitney et, quitte à les comprimer, il existe une G -isotopie stratifiée dans T_S entre T_S^{restr} et T^Σ au-dessus de S^{restr} .*

Ce lemme est démontré à l'Annexe C, *c.f.* Proposition C.3.19 (2).

Remarque 4.2.12. Dans la suite, à chaque utilisation du lemme de restriction 4.2.10 ou du lemme d'isotopie 4.2.11, les compressions de tubes éventuelles seront sous-entendues.

Il est important de remarquer que

- Il n'y a au final qu'un nombre fini de compressions.

¹⁴C'est-à-dire transverse à toutes les strates de \mathcal{S} . En particulier, \mathcal{S} induit une stratification de Σ encore Whitney-régulière.

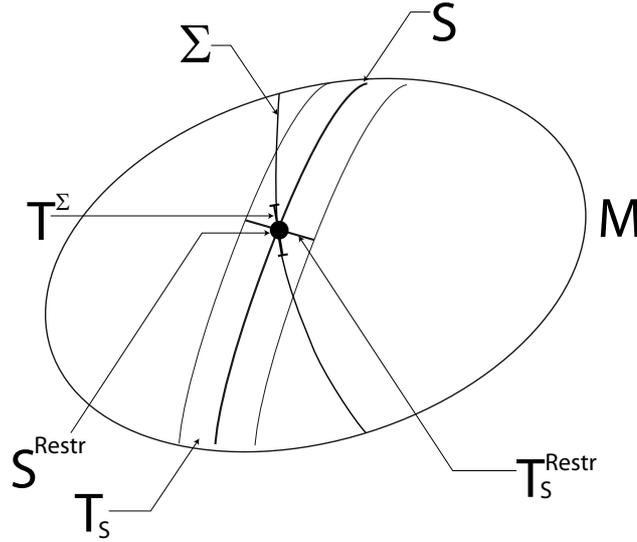


FIG. 4.2 – Lemme d'isotopie.

- La compression supplémentaire d'un tube à un instant donné ne remet pas en cause ce qui a été montré auparavant.

Un autre élément important dans l'analyse de $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$ était la variété $\Sigma_{[\pi_t]}^Y$. On rappelle que pour toute surjection $\pi : \underline{m} \twoheadrightarrow \underline{n}$, on a introduit une sous-variété $\tilde{\Sigma}_{[\pi]}^Y$ de $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$ dans la Remarque 4.1.12.

- Pour la surjection π_1 décrite à l'Exemple 4.1.5 (3), on a¹⁵ :

$$\tilde{\Sigma}_{[\pi_1]}^Y = \tilde{\Sigma}_{\pi_1}^Y \cup (\tau_{1,3} \cdot \tilde{\Sigma}_{\pi_1}^Y) \cup (\tau_{2,3} \cdot \tilde{\Sigma}_{\pi_1}^Y) \quad ,$$

et un homéomorphisme \mathfrak{S}_{π_1} -équivariant

$$\tilde{\Sigma}_{\pi_1}^Y \simeq \mathbf{C}^{(2,1)} \times Y(\mathbf{C})^2 \quad ,$$

l'espace $\mathbf{C}^{(2,1)}$ désignant l'ouvert de \mathbf{C}^3 formé des triplets (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 \neq x_3$ et $x_2 \neq x_3$, cet espace étant muni de l'action de $\mathfrak{S}_{\pi_1} \simeq \mathfrak{S}_2$ échangeant x_1 et x_2 . Ci-dessus, l'action de \mathfrak{S}_{π_1} sur le membre de droite est triviale sur le facteur $Y(\mathbf{C})^2$.

- Pour la surjection π_t , on a un homéomorphisme \mathfrak{S}_3 -équivariant

$$\tilde{\Sigma}_{[\pi_t]}^Y = \tilde{\Sigma}_{\pi_t}^Y \simeq \mathbf{C}^3 \times Y(\mathbf{C}) \quad .$$

Remarque 4.2.13. Soit $\pi : \underline{m} \twoheadrightarrow \underline{n}$ une surjection. Se donner un voisinage tubulaire \mathfrak{S}_3 -équivariant $\tilde{T}_{[\pi]}^{\tilde{\Sigma}}$ de $E_{[\pi]}^{\text{restr}}$ dans $\tilde{\Sigma}_{[\pi]}^Y$ revient à se donner un voisinage tubulaire \mathfrak{S}_{π} -équivariant de E_{π}^{pt} dans \mathbf{C}^3 , disons $\tilde{T}_{\pi}^{\text{pt}}$. On a alors un homéomorphisme :

$$\tilde{T}_{\pi}^{\tilde{\Sigma}} \simeq \tilde{T}_{\pi}^{\text{pt}} \times Y(\mathbf{C})^n$$

compatible aux homéomorphismes précédents.

Soit $\tilde{\mathcal{F}}^{\text{pt}}$ un système contrôlé de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_3 -équivariants de la stratification \mathcal{E}^{pt} de \mathbf{C}^3 fixé. Pour toute partition $[\pi]$ de m , soit alors $\tilde{T}_{[\pi]}^{\tilde{\Sigma}}$ le voisinage tubulaire de $E_{[\pi]}^{\text{restr}}$ dans $\tilde{\Sigma}_{[\pi]}^Y$ associé au tube $\tilde{T}_{[\pi]}^{\text{pt}}$ comme dans la Remarque 4.2.13 précédente. Quitte à compresser, nous pouvons supposer avoir

¹⁵ **Attention** : la réunion n'est pas disjointe. Les espaces s'intersectent le long de $\mathbf{C}^{(3)} \times Y(\mathbf{C})$.

l'inclusion $\tilde{T}_{[\pi]}^{\tilde{\Sigma}} \subset \tilde{T}_{[\pi]}^Y$.

Par unicité des voisinages tubulaires, on a alors une isotopie \mathfrak{S}_3 -équivariante stratifiée dans $\tilde{T}_{[\pi]}^Y$ entre $\tilde{T}_{[\pi]}^{\text{restr}}$ et $\tilde{T}_{[\pi]}^{\tilde{\Sigma}}$.

La proposition suivante montre que tout se ramène à l'étude du cas $Y = \text{pt}$.

Proposition 4.2.14. *Soit $\tau_{\bullet}^{\tilde{\Sigma}}$ le diagramme de Cech*

$$\tau_{\bullet}^{\tilde{\Sigma}} := \left(\coprod_{i \in \{g,1,t\}} \tilde{T}_{[\pi_i]}^{\tilde{\Sigma}} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \coprod_{i \neq j \in \{g,1,t\}} \tilde{T}_{[\pi_i],[\pi_j]}^{\tilde{\Sigma}} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^{\tilde{\Sigma}} \right) .$$

L'inclusion canonique $\tilde{\tau}_{\bullet}^{\tilde{\Sigma}} \hookrightarrow \tilde{\tau}_{\bullet}^Y$ est (quitte à comprimer des tubes) une équivalence d'homotopie naturelle \mathfrak{S}_3 -équivariante de diagrammes (de Cech).

DÉMONSTRATION — Il faut montrer que toutes les inclusions sont des équivalences d'homotopies. Ce fait se déduit des lemmes de restriction 4.2.2 et d'isotopie 4.2.11. Voici par exemple comment se convaincre que l'inclusion canonique

$$\tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^{\tilde{\Sigma}} \hookrightarrow \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^Y$$

est une équivalence d'homotopie. Les autres cas se traitent de manière similaire.

Puisque le système de voisinages tubulaires est contrôlé, $\tilde{T}_{[\pi_1],[\pi_t]}^Y$ est la restriction de $\tilde{T}_{[\pi_1]}$ à $E_{[\pi_1]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^Y$. Or $E_{[\pi_t]}^Y$ se rétracte par déformation \mathfrak{S}_3 -équivariante sur $E_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$, donc d'après le lemme de restriction, $E_{[\pi_1]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^Y$ se rétracte par déformation \mathfrak{S}_3 -équivariante sur $E_{[\pi_1]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$. Par unicité des voisinages tubulaires, on a une isotopie \mathfrak{S}_3 -équivariante entre $E_{[\pi_1]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\text{restr}}$ et $E_{[\pi_1]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\tilde{\Sigma}}$. Puisque l'on a l'inclusion $E_{[\pi_1]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\tilde{\Sigma}} \subset E_{[\pi_1]}^{\text{restr}}$, l'unicité des voisinages tubulaires fournit une isotopie entre $E_{[\pi_g]}^Y \cap (\tilde{T}_{[\pi_1]}^Y)|_{E_{[\pi_1]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\tilde{\Sigma}}}$ et $E_{[\pi_g]}^Y \cap (\tilde{T}_{[\pi_1]}^{\tilde{\Sigma}})|_{E_{[\pi_1]}^Y \cap \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\tilde{\Sigma}}} = \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^{\tilde{\Sigma}}$. \square

Corollaire 4.2.15. *Puisque l'on a par construction un homéomorphisme naturel \mathfrak{S}_3 -équivariant de diagrammes (de Cech) :*

$$\tau_{\bullet}^{\tilde{\Sigma}} \simeq \begin{array}{ccccc} & & \tilde{T}_{[\pi_g]}^{\text{pt}} \times Y^3 & & \\ & \nearrow \iota \times \Delta & \uparrow & \xrightarrow{\iota \times \text{id}} & \tilde{T}_{[\pi_1]}^{\text{pt}} \times Y^2 \\ \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1]}^{\text{pt}} \times Y^2 & \xrightarrow{\quad} & & & \\ & \downarrow \iota \times \text{id} & & & \uparrow \iota \times \text{id} \\ & & \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_t]}^{\text{pt}} \times Y & \xrightarrow{\iota \times \text{id}} & \tilde{T}_{[\pi_t]}^{\text{pt}} \times Y \\ \uparrow \iota \times \Delta & & \downarrow \iota \times \Delta & & \downarrow \iota \times \Delta \\ \tilde{T}_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^{\text{pt}} \times Y & \xrightarrow{\iota \times \text{id}} & \tilde{T}_{[\pi_1],[\pi_t]}^{\text{pt}} \times Y & & \end{array} ,$$

(où ι désigne une inclusion et Δ une application diagonale) le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$ ne dépend que du type d'homotopie de $Y(\mathbf{C})$.

ii) Le cas $Y = \text{pt}$

Comme pour l'étude de $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$ précédemment, l'étape de réduction précédente montre qu'il suffit de décrire le diagramme de Cech $\tilde{\tau}_\bullet(\mathcal{I})$ d'un système contrôlé de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_3 -équivariants de \mathbf{C}^3 particulier \mathcal{I} .

Ici, on a

- $E_{[\pi_t]}^{\text{pt}} = \mathbf{C}^{(3)}$.
- $E_{[\pi_1]}^{\text{pt}}$ est réunion de $E_{\pi_1}^{\text{pt}} \simeq \mathbf{C}^{(\pi_1)} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3, \quad x_1 = x_2 \neq x_3\}$ et de ses images sous l'action de $\tau_{1,3}$ et de $\tau_{2,3}$.
- $E_{[\pi_t]}^{\text{pt}}$ est le sous-espace diagonal $\mathbf{C}^{(\pi_t)} := \mathbf{C} \subset \mathbf{C}^3$.

Notations:

- On rappelle que $D = D(0, 1)$ désigne le disque unité de \mathbf{C} .
- Soit \tilde{D}^3 le sous-espace de D^3 formé des triplets (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
- Soit $\tilde{D}^{(3)} := \tilde{D}^3 \cap D^{(3)}$. Autrement dit, il s'agit du sous-espace de \tilde{D}^3 où l'on impose en plus la condition que x_1, x_2 et x_3 soit deux à deux distincts.
- Soit $\tilde{D}^{(\pi_1)}$ le sous-espace de \tilde{D}^3

$$\tilde{D}^{(\pi_1)} := \{(u_1, u_2, u_3) \in D^3, \quad u_1 = u_2 \neq u_3 \text{ et } u_1 + u_2 + u_3 = 0\}$$

- On a des applications de composition

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(\pi_1)} \times \tilde{D}^{(2)} &\xrightarrow{\mu} \tilde{D}^{(3)} \\ (x_1 = x_2, x_3), (u_1, u_2) &\longmapsto (x_1 + \varepsilon_x u_1, x_2 + \varepsilon_x u_2) \quad \text{avec } \varepsilon_x = \frac{1}{10}|x_1 - x_3| \\ \mathbf{C}^{(\pi_t)} \times \tilde{D}^{(\pi_1)} &\xrightarrow{\mu} \mathbf{C}^{(\pi_1)} \\ (x, x, x), (u_1, u_2, u_3) &\longmapsto (x + u_1, x + u_2, x + u_3) \end{aligned}$$

Remarquer à quel point ces application de composition sont proches de celle de l'opérateur des petits disques analogues.

Soient \tilde{T}_{π_1} et $\tilde{T}_{[\pi_t]}$ les voisinages tubulaires suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\pi_1}^{\text{pt}} : \quad \mathbf{C}^{(\pi_1)} \times \tilde{D}^2 &\xrightarrow{\tilde{e}_{\pi_1}} \mathbf{C}^3 \\ (x_1, x_2, x_3), (u_1, u_2) &\longmapsto (x_1 + \varepsilon_x u_1, x_2 + \varepsilon_x u_2, x_3) \quad \text{avec } \varepsilon_x = \frac{1}{10}|x_1 - x_3| \\ \tilde{T}_{\pi_t}^{\text{pt}} : \quad \mathbf{C}^{(\pi_t)} \times \tilde{D}^3 &\xrightarrow{\tilde{e}_{\pi_t}} \mathbf{C}^3 \\ (x_1, x_2, x_3), (u_1, u_2, u_3) &\longmapsto (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3) \end{aligned}$$

On constate que l'on a des homéomorphismes équivariants

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}^{(\pi_t)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(3)} & \xrightarrow{\cong} & \tilde{T}_{\pi_g, \pi_t}^{\text{pt}} \\
(x_1, x_2, x_3), (u_1, u_2, u_3) \vdash & \longrightarrow & (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3) \\
\\
\mathbf{C}^{(\pi_1)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} & \xrightarrow{\cong} & \tilde{T}_{\pi_g, \pi_1}^{\text{pt}} \\
(x_1, x_2, x_3), (u_1, u_2) \vdash & \longrightarrow & (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3) \\
\\
\mathbf{C}^{(\pi_t)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(\pi_1)} \times \tilde{\mathbf{D}}^2 & \xrightarrow{\cong} & \tilde{T}_{\pi_1, \pi_t}^{\text{pt}} \\
(x_1, x_2, x_3), (u_1, u_2, u_3) (v_1, v_2) \vdash & \longrightarrow & (x_1 + u_1 + \varepsilon_u v_1, x_2 + u_2 + \varepsilon_u v_2, x_3 + u_3) \\
\\
\mathbf{C}^{(\pi_t)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(\pi_1)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} & \xrightarrow{\cong} & \tilde{T}_{\pi_g, \pi_1, \pi_t}^{\text{pt}} \\
(x_1, x_2, x_3), (u_1, u_2, u_3) (v_1, v_2) \vdash & \longrightarrow & (x_1 + u_1 + \varepsilon_u v_1, x_2 + u_2 + \varepsilon_u v_2, x_3 + u_3)
\end{array}$$

avec un homéomorphisme équivariant naturel :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}^{(\pi_1)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} & & \mathbf{C}^{(\pi_t)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(3)} \\
\swarrow \mu \times \text{id} & & \searrow \text{id} \times \mu \\
& \mathbf{C}^{(\pi_t)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(\pi_1)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} & \\
& \downarrow & \\
& \mathbf{C}^{(\pi_t)} \times \tilde{\mathbf{D}}^{(\pi_1)} \times \tilde{\mathbf{D}}^2 & \\
& \cong & \\
& \tilde{T}_{\pi_g, \pi_1, \pi_t}^{\text{pt}} & \\
& \downarrow & \\
& \tilde{T}_{\pi_1, \pi_t}^{\text{pt}} &
\end{array}$$

où la notation μ désigne une application de composition décrite précédemment.

Pour conclure, il reste à quotienter par l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_3 . Pour des raisons d'ordre esthétique, nous nous ramenons à un diagramme faisant intervenir l'opérate des petits disques plutôt que des espaces de configuration de points et les applications de composition précédentes.

Définition 4.2.16. Pour tout espace topologique Z , on pose

$$\begin{aligned}
\psi_0^3(Z) &= \mathcal{P}(3) \times_{\mathfrak{S}_3} Z^3 \amalg \mathcal{P}(2) \times Z^2 \amalg \mathcal{P}(1) \times Z \quad , \\
\psi_1^3(Z) &= (\mathcal{P}(2) / \mathfrak{S}_2 \times \mathcal{P}(2)) \times Z^2 \amalg \mathcal{P}(3) / \mathfrak{S}_3 \times Z \amalg (\mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(1)) \times Z \quad , \\
\psi_2^3(Z) &= (\mathcal{P}(2) / \mathfrak{S}_2 \times \mathcal{P}(2)) \times Z \quad , \\
\text{et } \psi_i^3(Z) &= \emptyset \quad \text{pour tout } i \geq 3 \quad .
\end{aligned}$$

On définit à l'aide d'applications de structure de l'opérate des petits disques un diagramme (de Cech)

$$\psi_0^3(Z) \longleftarrow \psi_1^3(Z) \longleftarrow \psi_2^3(Z) \quad .$$

Soit alors

$$\Psi^3 Z := |\psi_\bullet^3(Z)| := \text{hocolim} \left(\begin{array}{ccc} & & \mathcal{P}(3) \times Z^3 \\ & \nearrow^{\mu \times \Delta} & \uparrow \\ (\mathcal{P}(2)/\mathfrak{S}_2 \times \mathcal{P}(2)) \times Z^2 & \xrightarrow{\text{pr}} & \mathcal{P}(2) \times Z^2 \\ & \downarrow^{\mu \times \Delta} & \uparrow \\ & (\mathcal{P}(3)/\mathfrak{S}_3 \times \mathcal{P}(1)) \times Z & \xrightarrow{\text{pr}} \mathcal{P}(1) \times Z \\ & \nearrow^{(\mu \times \text{id}) \times \text{id}} & \downarrow^{\mu \times \Delta} \\ (\mathcal{P}(2)/\mathfrak{S}_2 \times \mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(1)) \times Z & \xrightarrow{\text{pr}} & (\mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(1)) \times Z \end{array} \right) \quad (4.2.17)$$

où les flèches notées μ désignent une application de structure de l'opérade des petits disques. On définit ainsi un foncteur $\Psi^3 : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{T}op$.

La discussion précédente montre le théorème suivant :

Théorème 4.2.18. *Pour tout système contrôlé de voisinages tubulaires \mathcal{T}^Y de $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$, soit τ_\bullet le diagramme (de Čech) associé :*

$$\tau_\bullet = \coprod_{i \in \{g,1,t\}} T_{[\pi_i]}^Y \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \coprod_{i \neq j \in \{g,1,t\}} T_{[\pi_i],[\pi_j]}^Y \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} T_{[\pi_g],[\pi_1],[\pi_t]}^Y \quad .$$

Alors, quitte à comprimer les voisinages tubulaires de \mathcal{T}^Y , il existe un zigzag d'équivalences d'homotopie naturelles de diagrammes de Čech entre τ_\bullet et $\psi_\bullet^3(Y(\mathbf{C}))$.

En particulier, on a une équivalence d'homotopie

$$\Psi^3(Y(\mathbf{C})) \approx (\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C}) \quad .$$

4.3 Le foncteur Ψ^m

Le paragraphe précédent a défini des foncteurs Ψ^2 et Ψ^3 de $\mathcal{T}op$ dans $\mathcal{T}op$ tels que l'on ait des équivalences d'homotopie

$$\Psi^2(Y(\mathbf{C})) \xrightarrow{\approx} (\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \Psi^3(Y(\mathbf{C})) \xrightarrow{\approx} (\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C}) \quad .$$

Nous généralisons ces résultats en définissant pour tout entier positif m , un foncteur $\Psi^m : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{T}op$ tel que l'on ait une équivalence d'homotopie

$$\Psi^m(Y(\mathbf{C})) \xrightarrow{\approx} (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \quad .$$

Le foncteur Ψ^m est complètement explicite : il est défini comme la colimite homotopique d'un certain diagramme dont les objets sont des espaces de configuration de petits disques avec des étiquettes dans $Y(\mathbf{C})$ et reliés entre eux grâce à des morphismes de structure de l'opérade des petits carrés \mathcal{P} .

Parce que la catégorie sur laquelle est définie le diagramme est compliquée (elle encode entre autres toute la combinatoire de la catégorie des partitions de l'entier m), le foncteur Ψ^m est peu utile en pratique. Les deux principaux usages que nous en faisons : ce foncteur permet de montrer que le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ ne dépend bien que du type d'homotopie de l'espace $Y(\mathbf{C})$. Par ailleurs, le foncteur Ψ^2 nous permet de comprendre le groupe fondamental de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ lorsque $Y(\mathbf{C})$ est connexe.

a) Formalisme

i) Diagrammes de Cech

De l'étude des stratifications des espaces $(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{C})$ et $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$ précédentes, il ressort l'intérêt de formaliser la donnée de l'ensemble des intersections multiples d'un recouvrement ouvert ainsi que des inclusions de ces intersections les unes dans les autres.

Définitions 4.3.1.

1. On appelle catégorie de Cech, et l'on note \mathcal{C} , la catégorie simpliciale Δ^{op} privée des morphismes de dégénérescences. Autrement dit, les objets de \mathcal{C} sont les entiers positifs et pour tout couple d'entiers positifs $i < j$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(j, i)$ est l'ensemble des applications croissantes (au sens large) de \underline{i} dans \underline{j} .
2. Par analogie avec la terminologie simpliciale, nous appelons diagramme de Cech d'espaces topologiques tout foncteur $X_{\bullet} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}op$. Comme le suggère la notation, pour tout élément i de \mathcal{C} , on note plutôt X_i l'espace $X_{\bullet}(i)$.

Concrètement, un diagramme de Cech d'espaces topologiques X_{\bullet} est la donnée d'un diagramme d'espaces topologiques

$$X_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{d_{1,1}} \\ \xleftarrow{d_{0,1}} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{d_{2,2}} \\ \xleftarrow{d_{0,2}} \end{array} X_2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \cdots \quad ,$$

satisfaisant les conditions suivantes :

$$\forall i < j \leq k, \quad d_{i,k-1} \circ d_{j,k} = d_{j-1,k-1} \circ d_{i,k} \quad .$$

3. Soit X_{\bullet} un diagramme de Cech d'espaces topologiques. On appelle réalisation de X_{\bullet} et l'on note $|X_{\bullet}|$ l'espace

$$|X_{\bullet}| := \text{hocolim}_{i \in \mathcal{C}} X_i \quad .$$

4. Soient X_{\bullet} et Y_{\bullet} deux diagrammes de Cech. Un morphisme (de diagrammes de Cech) $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ est une transformation naturelle entre ces foncteurs.

On définit aussi de manière analogue les notions d'homéomorphisme et d'équivalence d'homotopie de diagrammes de Cech.

Exemple 4.3.2.

1. Dans notre étude ne vont apparaître que des diagrammes de Cech X_{\bullet} qui seront *finis*, c'est-à-dire pour lesquels il existe un entier $N \geq 0$ tel que $X_n = \emptyset \forall n \geq N$.

Un exemple typique de diagrammes de Cech fini (pour $N = 2$) est un diagramme « de Mayer-Vietoris »

$$X_{\bullet} = \begin{array}{ccc} A_0 & & B_0 \\ & \swarrow g & \nearrow f \\ & C_1 & \end{array} \quad .$$

La réalisation géométrique $|X_{\bullet}|$ de ce diagramme est le double mapping-cylindre $M(f, g)$.

2. Une façon bien connue d'obtenir des diagrammes de Cech est de partir d'un recouvrement partiellement ordonné (c'est-à-dire tel que l'ensemble d'indices I soit partiellement ordonné) $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ d'un espace X . Pour tout entier $k \geq 0$, on pose

$$\mathcal{U}_k = \coprod_{i_0 < \cdots < i_k} U_{i_0, \dots, i_k} \quad ,$$

la notation U_{i_0, \dots, i_k} désignant l'intersection $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}$.

Pour tout entier $0 \leq j \leq k$, soit $d_{j,k} : \mathcal{U}_k \rightarrow \mathcal{U}_{k-1}$ l'application induite par les inclusions canoniques

$$\coprod_{i_0 < \cdots < i_k} U_{i_0, \dots, i_k} \hookrightarrow \coprod_{i_0 < \cdots < \widehat{i}_j < \cdots < i_k} U_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_k} \quad .$$

Le foncteur \mathcal{U}_\bullet ainsi défini est appelé le diagramme de Cech associé au recouvrement \mathcal{U} . Dans ce contexte, la proposition suivante est importante.

Proposition 4.3.3. *Soient \mathcal{U} un recouvrement ouvert partiellement ordonné d'un espace topologique X , et \mathcal{U}_\bullet le diagramme de Cech associé. Alors l'application canonique*

$$|\mathcal{U}_\bullet| \xrightarrow{\cong} X$$

est une équivalence d'homotopie.

3. Comme cas particulier du point (2) précédent, on compte le diagramme de Cech associé à un système de voisinages tubulaires d'une variété stratifiée.

Soient (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée (c.f. définition C.1.1) et \mathcal{T} un système de voisinages tubulaires de \mathcal{S} — c'est-à-dire la donnée pour toute strate S de \mathcal{S} d'un voisinage tubulaire T_S de S dans \mathcal{S} . La collection des espaces $(T_S)_{S \in \mathcal{S}}$ forme un recouvrement ouvert partiellement ordonné de M . Pour tout couple de strates (R, S) de \mathcal{S} , la relation d'ordre est donnée par $T_R \succeq T_S \iff R \succeq S$. On note $\tau_\bullet(\mathcal{T})$ le diagramme de Cech d'espaces topologiques associé.

ii) Catégories de drapeaux

Soit $m \geq 1$ un entier fixé. Pour tout entier $0 \leq k \leq m - 1$, nous introduisons la notion de k -drapeau de m . Il s'agit (en première approximation) d'un formalisme qui modélise la donnée combinatoire d'une liste de strates $\pi_0 \succeq \pi_1 \succeq \dots \succeq \pi_k$ de $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$.

Définition 4.3.4. Pour tout entier $0 \leq k \leq m - 1$, on appelle catégorie des k -drapeaux et l'on note \mathcal{D}_k la catégorie suivante.

- Les objets de \mathcal{D}_k sont les suites de surjections

$$\underline{m} \xrightarrow{p_0} \underline{n_0} \xrightarrow{p_1} \dots \xrightarrow{p_k} \underline{n_k}$$

où $n_0 > n_1 > \dots > n_k > 0$ est une suite *strictement décroissante* d'entiers strictement positifs.

- Un morphisme $\underline{\alpha} = (\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_k)$ entre les drapeaux $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k)$ et $\mathbf{p}' = (p'_0, \dots, p'_k)$ est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{m} & \xrightarrow{p_0} & \underline{n_0} & \xrightarrow{p_1} & \dots & \xrightarrow{p_k} & \underline{n_k} \\ \simeq \downarrow \alpha & & \simeq \downarrow \alpha_0 & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \alpha_k \\ \underline{m} & \xrightarrow{p'_0} & \underline{n'_0} & \xrightarrow{p'_1} & \dots & \xrightarrow{p'_k} & \underline{n'_k} \end{array}$$

où toutes les applications verticales sont des bijections.

Remarques 4.3.5.

1. Par hypothèse, la suite d'entiers n_i est strictement décroissante, mais nous ne supposons pas $m > n_0$.
2. Soit \mathbf{p} un k -drapeau. Pour tout entier $0 \leq i \leq k$, on pose $\pi_i = p_i \circ \dots \circ p_0$. La donnée de la liste (p_0, \dots, p_k) est équivalente à celle de la liste (π_0, \dots, π_k) . Nous nous réservons le droit de noter un drapeau de \mathcal{D}_k par (p_0, \dots, p_k) ou (π_0, \dots, π_k) selon la commodité.
3. Soit $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k)$ un drapeau de \mathcal{D}_k fixé. On note $\text{aut}(\mathbf{p})$ le groupe des automorphismes de \mathbf{p} dans \mathcal{D}_k . En associant à un automorphisme $(\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_k)$ l'élément α de \mathfrak{S}_m , on définit un morphisme de groupes $\text{aut}(\mathbf{p}) \hookrightarrow \mathfrak{S}_m$ injectif. Ceci justifie dans la suite de considérer $\text{aut}(\mathbf{p})$ comme un sous-groupe de \mathfrak{S}_m .

La famille de catégories $(\mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq m-1}$ est ce qu'il conviendrait d'appeler un « diagramme de Čech de catégories ». Pour tout entier $1 \geq k \geq m-1$ et pour tout entier $0 \leq i \leq k$, soit $d_{i,k} : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D}_{k-1}$ le foncteur caractérisé par

$$d_{i,k}(\pi_0, \dots, \pi_k) = (\pi_0, \dots, \widehat{\pi}_i, \dots, \pi_k) \quad ,$$

où $\widehat{\pi}_i$ désigne l'omission de cet élément. L'identité fonctorielle $d_{i,k-1} \circ d_{j,k} = d_{j-1,k-1} \circ d_{i,k}$ est satisfaite pour $i < j$.

Définition 4.3.6.

1. Soit $\mathcal{A}_\bullet = (\mathcal{A}_k)_{0 \leq k \leq m-1}$ une famille de foncteurs $\mathcal{A}_k : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{T}op$.

On dit que la famille de foncteurs \mathcal{A}_\bullet est de Čech s'il existe pour tout k des transformations naturelles $\delta_{i,k} : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k-1} \circ d_{i,k}$ ($0 \leq i \leq k$) satisfaisant les conditions

$$\delta_{i,k-1} \circ \delta_{j,k} = \delta_{j-1,k-1} \circ \delta_{i,k} \quad .$$

Dans ce cas, on pose $A_k = \operatorname{colim}_{x \in \mathcal{D}_k} \mathcal{A}_k(x)$. Le foncteur $\delta_{i,k}$ induit alors une application $A_k \rightarrow A_{k-1}$ que nous noterons également $\delta_{i,k}$. L'ensemble des applications $\delta_{i,k}$ fait de la famille d'espaces A_\bullet un diagramme de Čech d'espaces topologiques.

2. Soient \mathcal{A}_\bullet et \mathcal{B}_\bullet deux familles de foncteurs de Čech. Une transformation naturelle de foncteurs de Čech $f : \mathcal{A}_\bullet \rightarrow \mathcal{B}_\bullet$ est une famille de transformations naturelles $f_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$, $0 \leq k \leq m-1$ telles que pour tout entier $1 \leq i \leq k$ et pour tout drapeau \mathbf{p} de \mathcal{D}_k , le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_k(\mathbf{p}) & \xrightarrow{f_k} & \mathcal{B}_k(\mathbf{p}) \\ d_{i,k} \downarrow & & \downarrow d_{i,k} \\ \mathcal{A}_{k-1}(d_{i,k}(\mathbf{p})) & \xrightarrow{f_{k-1}} & \mathcal{B}_{k-1}(d_{i,k}(\mathbf{p})) \end{array}$$

commute.

3. On définit de manière analogue les notions d'équivalence d'homotopie naturelle et d'homéomorphisme naturel de foncteurs de Čech.

Une équivalence d'homotopie naturelle est dite *équivariante* lorsque pour tout drapeau $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_k$ l'application $\mathcal{A}_k(\mathbf{p}) \rightarrow \mathcal{B}_k(\mathbf{p})$ est une $\operatorname{aut}(\mathbf{p})$ -équivalence d'homotopie.

Dans ce formalisme, voici un analogue du Lemme 4.2.1.

Lemme 4.3.7. *Soient \mathcal{A}_\bullet et \mathcal{B}_\bullet deux familles de foncteurs de Čech et $f : \mathcal{A}_\bullet \rightarrow \mathcal{B}_\bullet$ une transformation naturelle de Čech.*

1. *La transformation naturelle f induit un morphisme entre les diagrammes de Čech (d'espaces topologiques) $f : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$.*
2. *Lorsque f est une équivalence d'homotopie équivariante naturelle, le morphisme $f : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ précédent est une équivalence d'homotopie de diagrammes de Čech.*
3. *En particulier, lorsque f est une équivalence d'homotopie équivariante naturelle, l'application induite*

$$|A_\bullet| \xrightarrow{\cong} |B_\bullet|$$

est une équivalence d'homotopie d'espaces topologiques.

DÉMONSTRATION —

1. Ce point a déjà été remarqué dans la Définition 4.3.6 précédente.
2. Les catégories \mathcal{D}_k sont par construction des groupoïdes. Or la colimite d'un foncteur \mathcal{F} défini sur un groupoïde \mathcal{G} s'identifie à la réunion disjointe prise sur toutes les classes d'isomorphismes d'objets $[x]$ de $\mathcal{F}(x) / \operatorname{aut}(x)$. Ici, les applications induites $\mathcal{A}_k(\mathbf{p}) / \operatorname{aut}(\mathbf{p}) \rightarrow \mathcal{B}_k(\mathbf{p}) / \operatorname{aut}(\mathbf{p})$ sont des équivalences d'homotopie car f est supposée équivariante.

3. Ce point est une conséquence du Lemme 4.2.1. \square

Exemples 4.3.8.

1. Pour tout espace topologique Z et pour tout entier $0 \leq k \leq m-1$, soit \mathcal{N}_k^Z le foncteur de \mathcal{D}_k dans $\mathcal{T}op$ tel que pour tout morphisme $\underline{\alpha} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}'$, on ait

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_k^Z(\mathfrak{p}) = Z^{\underline{n}_k} & & \\ \mathcal{N}_k^Z(\underline{\alpha}) \downarrow & & \downarrow Z^{\alpha_k} \\ \mathcal{N}_k^Z(\mathfrak{p}') = Z^{\underline{n}_{k'}} & & \end{array} .$$

Les transformations naturelles $\delta_{i,k} : \mathcal{N}_k^Z \rightarrow \mathcal{N}_{k-1}^Z$ données par

$$\delta_{i,k}(p_0, \dots, p_k) = \begin{cases} \text{id} : Z^{\underline{n}_k} \rightarrow Z^{\underline{n}_k} & \text{si } 0 \leq i \leq k-1 \\ p_k^* : Z^{\underline{n}_k} \rightarrow Z^{\underline{n}_{k-1}} & \text{si } i = k \end{cases} .$$

font de \mathcal{N}_\bullet^Z une famille de foncteurs de Čech.

2. Soit \mathcal{O} une opérade topologique fixée.

Pour tout entier $0 \leq k \leq m-1$, soit $\Theta_k^\mathcal{O} : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{T}op$ l'unique foncteur tel que pour tout morphisme $\underline{\alpha} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}'$ de \mathcal{D}_k l'on ait

$$\begin{array}{ccc} \Theta_k^\mathcal{O}(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}(\underline{n}_k) \times \prod_{x_k \in \underline{n}_k} \mathcal{O}(p_k^{-1}(x_k)) \times \dots \times \prod_{x_1 \in \underline{n}_1} \mathcal{O}(p_1^{-1}(x_1)) & & \\ \Theta_k^\mathcal{O}(\underline{\alpha}) \downarrow & & \downarrow \mathcal{O}(\alpha_k) \quad \downarrow \mathcal{O}(\alpha_{k-1}) \quad \downarrow \mathcal{O}(\alpha_0) \\ \Theta_k^\mathcal{O}(\mathfrak{p}') = \mathcal{O}(\underline{n}_{k'}) \times \prod_{y_k \in \underline{n}_{k'}} \mathcal{O}(p_{k'}'^{-1}(y_k)) \times \dots \times \prod_{y_1 \in \underline{n}_1'} \mathcal{O}(p_1'^{-1}(y_1)) & & \end{array} .$$

Ci-dessus, les flèches verticales sont définies en remarquant que pour tout $1 \leq i \leq k$ et pour tout $x_i \in \underline{n}_i$, l'application α_{i-1} induit une bijection entre $p_i^{-1}(x_i)$ et $p_i'^{-1}(\alpha_i(x_i))$.

On définit une transformation naturelle $\delta_{0,k} : \Theta_k^\mathcal{O} \rightarrow \Theta_{k-1}^\mathcal{O} \circ d_{0,k}$ par la projection naturelle.

Pour tout $1 \leq i \leq k-1$, les applications de structure de l'opérade \mathcal{O}

$$\mathcal{O}(p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})) \times \prod_{x_i \in p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})} \mathcal{O}(p_i^{-1}(x_i)) \longrightarrow \mathcal{O}(p_i^{-1}(p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})))$$

associées aux surjections $p_i^{-1}(p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})) \rightarrow p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})$ pour tout $x_{i+1} \in \underline{n}_{i+1}$, induisent une application

$$\prod_{x_{i+1} \in \underline{n}_{i+1}} \mathcal{O}(p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})) \times \prod_{x_i \in \underline{n}_i} \mathcal{O}(p_i^{-1}(x_i)) \longrightarrow \prod_{x_{i+1} \in \underline{n}_{i+1}} \mathcal{O}((p_{i+1} \circ p_i)^{-1}(x_{i+1})) .$$

Cela fournit une transformation naturelle $\delta_{i,k} : \Theta_k^\mathcal{O} \rightarrow \Theta_{k-1}^\mathcal{O} \circ d_{i,k}$.

Pour $i = k$, l'application de structure de \mathcal{O}

$$\mathcal{O}(\underline{n}_k) \times \prod_{x_k \in \underline{n}_k} \mathcal{O}(p_k^{-1}(x_k)) \longrightarrow \mathcal{O}(\underline{n}_{k-1})$$

associée à la surjection $\underline{n}_{k-1} \rightarrow \underline{n}_k$ fournit une transformation naturelle $\delta_{k,k} : \Theta_k^\mathcal{O} \rightarrow \Theta_{k-1}^\mathcal{O} \circ d_{k,k}$. L'ensemble des transformations naturelles $\delta_{i,k}$, $0 \leq i \leq k$, fait de $\Theta_\bullet^\mathcal{O}$ une famille de foncteurs de Čech.

b) Définition du foncteur Ψ^m

Soit m un entier positif. A l'aide du formalisme précédent, nous pouvons enfin définir le foncteur $\Psi^m : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{T}op$ qui généralise les foncteurs Ψ^2 et Ψ^3 définis précédemment (c.f. Définitions 4.2.7 et 4.2.16).

Définition 4.3.9. Nous reprenons les notations des Exemples 4.3.8(1) et 4.3.8(2) précédents.

1. Pour tout espace topologique Z , pour toute opérade topologique \mathcal{O} et pour tout entier $k \geq 0$ on pose

$$\psi_k^m(\mathcal{O}, Z) = \begin{cases} \operatorname{colim}_{\mathcal{D}_k} \Theta_k^{\mathcal{O}} \times \mathcal{N}_k^Z & \text{si } 0 \leq k \leq m-1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} .$$

La famille $\psi_{\bullet}^m(\mathcal{O}, Z)$ munie des applications $\delta_{i,k}$ précédentes forme un diagramme de Čech d'espaces topologiques.

2. En associant à tout espace topologique Z le nouvel espace

$$\Psi^m(Z) := |\psi_{\bullet}^m(\mathcal{P}, Z)| := \operatorname{hocolim}_{k \in \mathbf{C}} \psi_k^m(\mathcal{P}, Z) \quad ,$$

on définit un foncteur $\Psi^m : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{T}op$. (On rappelle que ci-dessus \mathcal{P} désigne l'opérade des petits disques).

Exemple 4.3.10. On vérifie que les foncteurs Ψ^2 et Ψ^3 introduits précédemment en 4.2.8 et 4.2.17 correspondent bien aux cas particuliers $m = 2$ et $m = 3$.

Le résultat principal du chapitre est que *pour tout* système contrôlé de voisinages tubulaires « assez petits » de la stratification \mathcal{S}^Y de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$, disons \mathcal{T}^Y , le diagramme de Čech d'espaces topologiques $\tau(\mathcal{T}^Y)$ associé est homotopiquement équivalent à $\psi_{\bullet}^m(\mathcal{P}, Y(\mathbf{C}))$. Précisément, on énonce le théorème suivant.

Théorème 4.3.11. Soient \mathcal{T}^Y un système contrôlé de voisinages tubulaires de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ et τ_{\bullet} le diagramme de Čech associé. Alors, quitte à compresser les voisinages tubulaires de \mathcal{T}^Y , il existe un zigzag d'équivalences d'homotopie naturelles de diagrammes de Čech entre τ_{\bullet} et $\psi_{\bullet}^m(\mathcal{P}, Y(\mathbf{C}))$.

Corollaire 4.3.12. On a une équivalence d'homotopie

$$\Psi^m(Y(\mathbf{C})) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \quad .$$

En particulier, le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ ne dépend que du type d'homotopie de l'espace $Y(\mathbf{C})$.

Remarque 4.3.13. Lorsque Y est définie sur \mathbf{R} , le théorème admet une version raffinée, prenant en compte l'action de $\mathbf{Z}/2$ associée à la conjugaison complexe, c.f. Théorème 4.4.2.

c) Démonstration du Théorème 4.3.11

Le schéma de démonstration est parallèle à celui des cas particuliers $m = 2$ et $m = 3$ détaillés précédemment. Nous analysons le diagramme de Čech associé au système \mathcal{T}^Y en étudiant un système contrôlé de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_m -équivariant de $(\widetilde{\mathcal{R}_m Y})(\mathbf{C})$ et en quotientant ensuite.

Le *i*) justifie cette approche. Puis au *ii*) une première étape nous ramène à l'étude du cas $Y = \text{pt}$. Ce cas particulier est enfin analysé au §*iii*).

i) Préliminaires

Ce paragraphe a pour but de fixer des notations et de formaliser le fait qu'il est équivalent de mener une étude \mathfrak{S}_m -équivariante dans $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$ ou une étude dans $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$.

On rappelle que \tilde{q} désigne l'application canonique $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C}) \longrightarrow (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ (c.f. p.74).

Proposition 4.3.14. *Soit \mathcal{T}^Y un système de voisinages tubulaires de \mathcal{S}^Y . Alors, la famille des espaces $\tilde{q}^{-1}(T_{[\pi]}^Y)$ lorsque $[\pi]$ décrit l'ensemble des partitions de m forme un système $\widetilde{\mathcal{T}}^Y$ de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_m -équivariants de \mathcal{E}^Y .*

Réciproquement, pour tout un système $\widetilde{\mathcal{T}}^Y$ de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_m -équivariants de \mathcal{E}^Y , la famille des sous-espaces $T_{[\pi]}^Y$ de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ définis par $T_{[\pi]}^Y = \widetilde{T}_{[\pi]}^Y / \mathfrak{S}_m$ pour $[\pi]$ décrivant l'ensemble des partitions de m forme un système de voisinages tubulaires de \mathcal{S}^Y .

De plus, on a les propriétés suivantes :

1. *Le système de voisinages tubulaires \mathcal{T}^Y est contrôlé si et seulement si le système $\widetilde{\mathcal{T}}^Y$ l'est.*
2. *Le diagramme de Cech $\tau_{\bullet}(\mathcal{T}^Y)$ s'obtient en quotientant le diagramme de Cech $\tau_{\bullet}(\widetilde{\mathcal{T}}^Y)$ par l'action de \mathfrak{S}_m . Autrement dit, pour tout $(k+1)$ -uplet de partitions $([\pi_0], \dots, [\pi_k])$, on a un homéomorphisme*

$$\left(\widetilde{T}_{[\pi_0], \dots, [\pi_k]}^Y \right) / \mathfrak{S}_m \xrightarrow{\cong} T_{[\pi_0], \dots, [\pi_k]}^Y \quad .$$

La proposition précédente est un cas particulier de la proposition plus générale suivante valable pour les stratifications dites par *type d'orbite* (c.f. [Pfl01], § 4.3).

Proposition 4.3.15. *Soient G un groupe fini, M une G -variété et $q : M \longrightarrow M/G$ la projection canonique. L'espace quotient M/G admet une stratification naturelle \mathcal{S} ; la stratification \mathcal{E} de M associée est dite par type d'orbite.*

Soit \mathcal{T} un système de tubes de \mathcal{S} . La famille des espaces $\tilde{q}^{-1}(T_S)$ lorsque S décrit l'ensemble des strates de \mathcal{S} forme un système $\widetilde{\mathcal{T}}$ de voisinages tubulaires G -équivariants de \mathcal{E} .

Réciproquement, pour tout système $\widetilde{\mathcal{T}}$ de voisinages tubulaires G -équivariants de \mathcal{E} , la famille des sous-espaces T_S de M/G définis par $T_S = \widetilde{T}_S / G$ lorsque S décrit \mathcal{S} forme un système de tubes de \mathcal{S} . De plus, on a les propriétés suivantes :

1. *Le système de tubes \mathcal{T} est contrôlé si et seulement si le système $\widetilde{\mathcal{T}}$ est contrôlé.*
2. *Le diagramme de Cech $\tau_{\bullet}(\mathcal{T})$ s'obtient en quotientant le diagramme de Cech $\tau_{\bullet}(\widetilde{\mathcal{T}})$ par l'action de G . Autrement dit, pour tout $(k+1)$ -uplet de partitions (S_0, \dots, S_k) , on a un homéomorphisme*

$$\left(\widetilde{T}_{S_0, \dots, S_k} \right) / G \xrightarrow{\cong} T_{S_0, \dots, S_k} \quad .$$

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de la démonstration du théorème, on se fixe¹⁶ un système \mathcal{T}^Y contrôlé de voisinages tubulaires de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ et l'on note $\widetilde{\mathcal{T}}^Y$ le système contrôlé de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_m -équivariants induit sur $(\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$.

Pour toute partition $[\pi]$ de m , la strate $E_{[\pi]}^Y \subset (\widetilde{\mathcal{R}}_m Y)(\mathbf{C})$ admet pour composantes connexes les espaces E_{π}^Y . Le tube $\widetilde{T}_{[\pi]}^Y$ est donc réunion disjointe de ses restrictions \widetilde{T}_{π}^Y aux E_{π}^Y . L'espace \widetilde{T}_{π}^Y est en fait un voisinage tubulaire \mathfrak{S}_{π} -équivariant de E_{π}^Y et l'on peut reconstruire tout $\widetilde{t}_{[\pi]}^Y$ à partir de \widetilde{T}_{π}^Y en faisant agir \mathfrak{S}_m . La compréhension des diagrammes de Cech $\tau_{\bullet}(\widetilde{\mathcal{T}}^Y)$ et $\tau_{\bullet}(\mathcal{T}^Y)$ revient à la compréhension de la famille de foncteurs de Cech associant à tout k -drapeau (π_0, \dots, π_k) l'espace $\widetilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^Y := \widetilde{T}_{\pi_0}^Y \cap \dots \cap \widetilde{T}_{\pi_k}^Y$.

De manière plus formelle, on a la proposition-définition suivante.

¹⁶A ceci près qu'on s'autorise quand même à comprimer les tubes de ce système, c.f. Remarque 4.2.12 p. 82.

Proposition-définition 4.3.16.

1. Pour tout entier $0 \leq k \leq m-1$, il existe un foncteur $\tilde{\mathbf{T}}_k^Y : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{T}op$ prenant sur tout k -drapeau $\mathbf{p} = (\pi_0, \dots, \pi_k)$ la valeur :

$$\tilde{\mathbf{T}}_k^Y(\mathbf{p}) = \tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^Y := \tilde{T}_{\pi_0}^Y \cap \dots \cap \tilde{T}_{\pi_k}^Y \quad .$$

2. La famille de foncteurs $\tilde{\mathbf{T}}_\bullet^Y$ est de Čech (c.f. Définition 4.3.6).
Les espaces $\operatorname{colim}_{\mathcal{D}_k} \tilde{\mathbf{T}}_k^Y$ pour $0 \leq k \leq m-1$ forment ainsi un diagramme de Čech d'espaces topologiques, noté $\operatorname{colim}_{\mathcal{D}_\bullet} \tilde{\mathbf{T}}_\bullet^Y$.

3. L'application de passage au quotient \tilde{q} induit un homéomorphisme de diagrammes de Čech d'espaces topologiques

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{D}_\bullet} \tilde{\mathbf{T}}_\bullet^Y \longrightarrow \tau_\bullet(\mathcal{T}^Y) \quad .$$

DÉMONSTRATION —

1. Pour caractériser le foncteur $\tilde{\mathbf{T}}_k^Y$, il faut définir l'image des morphismes de \mathcal{D}_k .
Soit $\underline{\alpha} = (\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_k) : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ un morphisme de k -drapeaux. Par définition, pour tout entier $0 \leq i \leq k$, nous avons l'identité $\bar{\pi}_i = \bar{\pi}'_i \circ \alpha$. L'action de la permutation $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ envoie donc le sous-espace $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^Y$ de $(\widetilde{\mathcal{R}_m Y})(\mathbf{C})$ sur $\tilde{T}_{\pi'_0, \dots, \pi'_k}^Y$. Aussi est-il légitime de définir $\tilde{\mathbf{T}}_k^Y(\underline{\alpha})$ comme l'action de la permutation $\alpha \in \mathfrak{S}_m$. On constate que cela définit bien un foncteur.
2. Pour tout $0 \leq i \leq k$, les inclusions canoniques $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^Y \hookrightarrow \tilde{T}_{\pi_0, \dots, \widehat{\pi}_i, \dots, \pi_k}^Y$ (la notation $\widehat{\pi}_i$ désignant l'omission de l'indice π_i) fournissent les transformations naturelles $\delta_{i,k}$.
3. Pour tout drapeau $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_k$, l'application $\tilde{q} : (\widetilde{\mathcal{R}_m Y})(\mathbf{C}) \rightarrow (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ se restreint en une application $\tilde{q}_\mathbf{p} : \tilde{\mathbf{T}}_k^Y(\mathbf{p}) \rightarrow T_{[\pi_0], \dots, [\pi_k]}^Y$. Ces applications sont compatibles à l'action de \mathfrak{S}_m : si l'action de $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ sur $(\widetilde{\mathcal{R}_m Y})(\mathbf{C})$ échange $\tilde{\mathbf{T}}_k^Y(\mathbf{p})$ et $\tilde{\mathbf{T}}_k^Y(\mathbf{p}')$, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{T}}_k^Y(\mathbf{p}) & \xrightarrow{\alpha \cdot} & \tilde{\mathbf{T}}_k^Y(\mathbf{p}') \\ & \searrow \tilde{q}_\mathbf{p} & \swarrow \tilde{q}_{\mathbf{p}'} \\ & T_{[\pi_0], \dots, [\pi_k]}^Y & \end{array} \quad .$$

En particulier, l'application \tilde{q} induit bien un morphisme de diagrammes de Čech $\operatorname{colim}_{\mathcal{D}_\bullet} \tilde{\mathbf{T}}_\bullet^Y \rightarrow \tau_\bullet$.

Que cette application induise un homéomorphisme de diagrammes de Čech est une reformulation de l'homéomorphisme $T_{[\pi_0], \dots, [\pi_k]}^Y \simeq \tilde{T}_{[\pi_0], \dots, [\pi_k]}^Y / \mathfrak{S}_m$ en tenant compte des décompositions $\tilde{T}_{[\pi_i]}^Y =$

$$\coprod_{\bar{\pi}_i \in [\pi_i]} \tilde{T}_{\bar{\pi}_i}^Y \quad \text{et du fait que } \mathcal{D}_k \text{ soit un groupoïde.} \quad \square$$

ii) Réduction au cas $Y = \text{pt}$

Comme lors de l'étude de la stratification de $(\mathcal{R}_3 Y)(\mathbf{C})$, nous allons montrer que le Lemme de restriction 4.2.10 et le Lemme d'isotopie 4.2.11 permettent de ramener l'étude au cas particulier $Y = \text{pt}$.

Notations:

- On fixe un système contrôlé de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_m -équivariants de \mathbf{C}^m que l'on note $\tilde{\mathcal{F}}^{\text{pt}}$.
- On rappelle que l'on a défini pour toute surjection $\pi : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ des sous- \mathfrak{S}_m -variétés $\tilde{\Sigma}_\pi$ de $(\widetilde{\mathcal{R}_m Y})(\mathbf{C})$ à la Remarque 4.1.12. Grâce à $\tilde{\mathcal{F}}^{\text{pt}}$, on définit une famille (\tilde{T}_π^Σ) de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_π -équivariants de E_π^{restr} dans $\tilde{\Sigma}_\pi$. Par définition, on a un homéomorphisme \mathfrak{S}_π -équivariant :

$$\tilde{T}_\pi^\Sigma \simeq \tilde{T}_\pi^{\text{pt}} \times Y(\mathbf{C})^n \quad (4.3.17)$$

compatible aux homéomorphismes $E_{\pi}^{\text{restr}} \simeq E_{\pi}^{\text{pt}} \times Y(\mathbf{C})^n$ de la Proposition 4.1.8 (1) et $\tilde{\Sigma}_{\pi}^Y \simeq \tilde{\Sigma}_{\pi}^{\text{pt}} \times Y(\mathbf{C})^n$ de l'Exemple 4.1.13 (4).

- Nous supposons, quitte à comprimer les tubes, avoir pour tout π l'inclusion $\tilde{T}_{\pi}^{\tilde{\Sigma}} \subset \tilde{T}_{\pi}^Y$. D'après le Lemme d'isotopie 4.2.11, on a une isotopie équivariante et stratifiée entre $\tilde{T}_{\pi}^{\tilde{\Sigma}}$ et $\tilde{T}_{\pi}^{\text{restr}}$ dans \tilde{T}_{π}^Y .
- Pour tout k -drapeau $\mathbf{p} = (\pi_0, \dots, \pi_k)$, on pose $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\tilde{\Sigma}} := \tilde{T}_{\pi_0}^{\tilde{\Sigma}} \cap \dots \cap \tilde{T}_{\pi_k}^{\tilde{\Sigma}}$. On a un homéomorphisme $\mathfrak{S}_{\pi_0, \dots, \pi_k}$ -équivariant

$$\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\tilde{\Sigma}} \simeq \tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\text{pt}} \times Y(\mathbf{C})^{n_k}, \quad (4.3.18)$$

compatible avec les homéomorphismes 4.3.17, en considérant $Y(\mathbf{C})^{n_k}$ comme le sous-espace diagonal de $Y(\mathbf{C})^{n_i}$ via la surjection $\underline{n}_i \rightarrow \underline{n}_k$.

Proposition-définition 4.3.19.

Pour tout entier $0 \leq k \leq m-1$, il existe un foncteur $\tilde{\mathbf{T}}_k^{\tilde{\Sigma}} : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{T}\text{op}$ prenant sur tout k -drapeau $\mathbf{p} = (\pi_0, \dots, \pi_k)$ la valeur :

$$\tilde{\mathbf{T}}_k^{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{p}) = \tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\tilde{\Sigma}}.$$

La famille de foncteurs $\tilde{\mathbf{T}}_{\bullet}^{\tilde{\Sigma}}$ est de Čech et l'on a un homéomorphisme équivariant de foncteurs de Čech

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\bullet}^{\tilde{\Sigma}} \simeq \tilde{\mathbf{T}}_{\bullet}^{\text{pt}} \times \mathcal{N}_{\bullet}^Y.$$

(La notation \mathcal{N}_{\bullet}^Y a été introduite dans l'Exemple 4.3.8 (1)).

DÉMONSTRATION — Comme à la démonstration de la Proposition-définition 4.3.16, l'image par $\tilde{\mathbf{T}}_k^{\tilde{\Sigma}}$ d'un morphisme $\underline{\alpha} = (\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_k)$ est donnée par l'action de la permutation $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ et les transformations naturelles $\delta_{i,k}$ proviennent des inclusions naturelles.

L'homéomorphisme (4.3.18) précédemment décrit montre que l'on a pour tout entier k un homéomorphisme de foncteurs $\tilde{\mathbf{T}}_k^{\tilde{\Sigma}} \simeq \tilde{\mathbf{T}}_k^{\text{pt}} \times \mathcal{N}_k^Y$. \square

La proposition suivante, qui est l'analogie de la Proposition 4.2.14, ramène l'étude au cas $Y = \text{pt}$.

Proposition 4.3.20. *L'inclusion canonique $i_{\bullet} : \tilde{\mathbf{T}}_{\bullet}^{\tilde{\Sigma}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{T}}_{\bullet}$ est une équivalence d'homotopie équivariante naturelle de foncteurs de Čech.*

Corollaire 4.3.21. *On a une équivalence d'homotopie*

$$(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \approx |\text{colim}_{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{T}}_{\bullet}^{\text{pt}} \times \mathcal{N}_{\bullet}^Y|.$$

En particulier, le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ ne dépend que du type d'homotopie de l'espace $Y(\mathbf{C})$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.3.20 — Soient $0 \leq k \leq m-1$ un entier et $\mathbf{p} = (\pi_0, \dots, \pi_k) \in \mathcal{D}_k$ un drapeau. Nous allons montrer que l'inclusion $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\tilde{\Sigma}} \hookrightarrow \tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^Y$ est une équivalence d'homotopie.

Pour toute surjection π , on rappelle que $\tilde{T}_{\pi}^{\text{restr}}$ désigne la restriction de \tilde{T}_{π}^Y à l'ouvert $E_{\pi}^{\text{restr}} \subset E_{\pi}$. De là, on définit récursivement l'espace $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\text{restr}}$ comme la restriction de $\tilde{T}_{\pi_0}^{\text{restr}}$ au sous-espace ouvert $E_{\pi_0} \cap \tilde{T}_{\pi_1, \dots, \pi_k}^{\text{restr}} \subset E_{\pi_0}$. Une application répétée du Lemme de restriction 4.2.10 montre que $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^Y$ se rétracte par déformation équivariante sur $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\text{restr}}$.

D'autre part, le Lemme d'isotopie 4.2.11 fournit une isotopie stratifiée et équivariante entre $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\tilde{\Sigma}}$ et $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\text{restr}}$ dans $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^Y$.

On en déduit que l'inclusion canonique $\tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\tilde{\Sigma}} \hookrightarrow \tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^Y$ est une équivalence d'homotopie $\mathfrak{S}_{\pi_0, \dots, \pi_k}$ -équivariante. \square

iii) Le cas $Y = \text{pt}$

Comme lors de l'étude du cas $m = 3$, la réduction précédente montre que pour tous les systèmes contrôlé de voisinages tubulaires \mathfrak{S}_m -équivariants \mathcal{T}^{pt} de \mathbf{C}^m « suffisamment petits », les familles de foncteurs de Cech $\tilde{\mathbf{T}}^{\text{pt}}$ correspondantes sont équivalentes. Nous allons donner une description explicite d'un d'entre eux ici.

Nous choisissons le système de voisinages tubulaires équivariants normal aux strates E_{π}^{pt} et avec des rayons suffisamment petits pour ne rencontrer que les strates supérieures. Les espaces et les applications qui apparaissent naturellement forment ce qu'il conviendrait d'appeler l'« opérade des configurations de points ». Il s'agit (à des détails techniques mineurs et pénibles près) d'une sous-opérade de l'opérade de \mathcal{P} .

Notations: Soient E et F deux ensembles finis et $\pi : E \twoheadrightarrow F$ une surjection.

- On rappelle que l'on note \mathbf{C}^{π} le sous-espace de \mathbf{C}^E formé des applications $\varphi : E \rightarrow \mathbf{C}$ qui admettent une factorisation $\varphi = \varphi' \circ \pi$.

Et l'on note $\mathbf{C}^{(\pi)}$ le sous-espace de \mathbf{C}^{π} des applications pour lesquelles $\varphi' : F \hookrightarrow \mathbf{C}$ est injective. L'espace $\mathbf{C}^{(\pi)}$ est homéomorphe à l'espace de configuration de points $\mathbf{C}^{(F)}$.

- Introduisons la variante « normale » de la notation précédente. On note $\tilde{\mathbf{C}}^{\pi}$ (resp. $\tilde{\mathbf{C}}^{(\pi)}$) le sous-espace de \mathbf{C}^{π} (resp. de $\mathbf{C}^{(\pi)}$) formé des applications $\varphi : E \rightarrow \mathbf{C}$ qui vérifient en plus

$$\sum_{e \in E} \varphi(e) = 0 \quad .$$

- Pour alléger les formules, nous introduisons la version relative de la notation précédente. Pour toute partie $A \subset F$, soit $\pi_A : \pi^{-1}(A) \rightarrow A$ la restriction de π . On pose

$$\tilde{\mathbf{C}}_A^{(\pi)} := \tilde{\mathbf{C}}^{(\pi_A)} \quad .$$

- On rappelle que $D = D(0, 1)$ désigne le disque unité de \mathbf{C} . On note $\tilde{D}^{\pi}, \tilde{D}^{(\pi)}, \tilde{D}_A^{(\pi)}$ les espaces analogues des précédents mais où l'on a remplacé \mathbf{C} par D .
- Pour toute application $\varphi : E \rightarrow \mathbf{C}$, soit l'application

$$\varepsilon_{\varphi} : E \rightarrow \mathbf{R}^+ \\ e \mapsto \begin{cases} \frac{1}{10} & \inf_{\substack{f \in E \\ \varphi(f) \neq \varphi(e)}} |\varphi(e) - \varphi(f)| \quad \text{si Card(Im}(\varphi)) \neq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Pour toute composition de surjections

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & F \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow p \\ & & G \end{array}$$

et pour toute partie $A \subset G$, on a des applications de composition

$$\begin{aligned} \tilde{D}_A^{(\pi_1)} \times \prod_{a \in A} \tilde{D}_{p^{-1}(a)}^{(\pi)} &\longrightarrow \tilde{D}_{p^{-1}(A)}^{(\pi)} \\ (\varphi, \varphi_a) &\longmapsto \left(g \mapsto \varphi(g) + \varepsilon_{\varphi_{\pi_1(g)}}(g) \cdot \varphi_{\pi_1(g)}(g) \right) \end{aligned}$$

Remarque 4.3.22. Prévenons le lecteur que nous allons tricher un peu, parce que nous pensons que le formalisme est déjà assez lourd. Nous allons faire comme si les espaces de configuration de points et leurs applications de composition définissait une sous-opérade de de l'opérade des petits disques. Notre hypothèse simplificatrice traduit notre incapacité à trouver une description simple d'une opérade des configurations de points.

Définition 4.3.23. Pour toute surjection $\pi : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$, soit \tilde{T}_{π} le voisinage tubulaire \mathfrak{S}_{π} -équivariant de E_{π}^{pt} dans \mathbf{C}^m suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\pi} : \mathbf{C}^{(\pi)} \times \prod_{x \in \underline{n}} \tilde{D}_{\{x\}}^{\pi^{-1}(x)} &\xrightarrow{\tilde{e}_{\pi}} \mathbf{C}^m \\ (\varphi, (\varphi_x)_{x \in \underline{n}}) &\mapsto \left(i \mapsto \varphi(i) + \varepsilon_{\varphi}(i) \cdot \varphi_{\pi(i)}(i) \right) \end{aligned}$$

On constate que le tube \tilde{T}_{π} ne rencontre que les strates $E_{\bar{\pi}'}$ avec $\bar{\pi}' \succeq \bar{\pi}$.

Voici la variante technique de l'Exemple 4.3.8 (2) adaptée à notre situation. Il s'agit presque du cas particulier où $\mathcal{O} = \mathcal{C}$ est l'opérade des configurations de points.

Définition 4.3.24. Soit $\tilde{\Theta}_k^{\mathcal{C}} : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{T}op$ l'unique foncteur tel que pour tout morphisme $\underline{\alpha} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}'$ dans \mathcal{D}_k l'on ait

$$\begin{array}{c} \tilde{\Theta}_k^{\mathcal{C}}(\mathfrak{p}) = \mathbf{C}^{(\pi_k)} \times \prod_{x_k \in \underline{n}_k} \tilde{D}_{p_k^{-1}(x_k)}^{(\pi_{k-1})} \times \cdots \times \prod_{x_1 \in \underline{n}_1} \tilde{D}_{p_1^{-1}(x_1)}^{(\pi_0)} \times \prod_{x_0 \in \underline{n}_0} \tilde{D}_{p_0^{-1}(x_0)} \\ \tilde{\Theta}_k^{\mathcal{C}}(\underline{\alpha}) \downarrow \quad \quad \quad \downarrow (\alpha_k)_* \quad \quad \quad \downarrow (\alpha_{k-1})_* \quad \quad \quad \downarrow (\alpha_0)_* \quad \quad \quad \downarrow \alpha_* \\ \tilde{\Theta}_k^{\mathcal{C}}(\mathfrak{p}') = \mathbf{C}^{(\pi'_k)} \times \prod_{y_k \in \underline{n}'_k} \tilde{D}_{p'_k^{-1}(y_k)}^{(\pi'_{k-1})} \times \cdots \times \prod_{y_1 \in \underline{n}'_1} \tilde{D}_{p'_1^{-1}(y_1)}^{(\pi'_0)} \times \prod_{y_0 \in \underline{n}'_0} \tilde{D}_{p'_0^{-1}(y_0)} \end{array} .$$

Pour tout entier $0 \leq i \leq k-1$, on dispose d'une application

$$\prod_{x_{i+1} \in \underline{n}_{i+1}} \tilde{D}_{p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})}^{(\pi_i)} \times \prod_{x_i \in \underline{n}_i} \tilde{D}_{p_i^{-1}(x_i)}^{(\pi_{i-1})} \longrightarrow \prod_{x_{i+1} \in \underline{n}_{i+1}} \tilde{D}_{(p_{i+1} \circ p_i)^{-1}(x_{i+1})}^{(\pi_{i-1})}$$

induite par les applications de structure

$$\tilde{D}_{p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})}^{(\pi_i)} \times \prod_{x_i \in p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})} \tilde{D}_{p_i^{-1}(x_i)}^{(\pi_{i-1})} \longrightarrow \prod_{x_{i+1} \in \underline{n}_{i+1}} \tilde{D}_{(p_{i+1} \circ p_i)^{-1}(x_{i+1})}^{(\pi_{i-1})}$$

associées aux surjections $p_i^{-1}(p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})) \rightarrow p_{i+1}^{-1}(x_{i+1})$ pour tout $x_{i+1} \in \underline{n}_{i+1}$. Ceci fournit une transformation naturelle $\delta_{i,k} : \tilde{\Theta}_k^{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\Theta}_{k-1}^{\mathcal{C}} \circ d_{i,k}$.

De même, pour $i = k$, on a une application

$$\mathbf{C}^{(\pi_k)} \times \prod_{x_k \in \underline{n}_k} \tilde{D}_{p_k^{-1}(x_k)}^{(\pi_{k-1})} \longrightarrow \mathbf{C}^{(\pi_{k-1})}$$

associée à la surjection $\underline{n}_{k-1} \rightarrow \underline{n}_k$ fournissant une transformation naturelle $\delta_{k,k} : \tilde{\Theta}_k^{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\Theta}_{k-1}^{\mathcal{C}} \circ d_{k,k}$.

Ces transformations naturelles font de $\tilde{\Theta}_{\bullet}^{\mathcal{C}}$ une famille de foncteurs de Čech (à la simplification de la Remarque 4.3.22 près).

La proposition suivante justifie la définition précédente.

Proposition 4.3.25. On a un homéomorphisme équivariant de foncteurs de Čech

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\bullet}^{\text{pt}} \simeq \tilde{\Theta}_{\bullet}^{\mathcal{C}}$$

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION — Soit $0 \leq k \leq m-1$ un entier. Pour tout k -drapeau $\mathfrak{p} = (\pi_0, \dots, \pi_k)$ on a par construction un homéomorphisme $\mathfrak{S}_{\pi_0, \dots, \pi_k}$ -équivariant

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_k^{\mathcal{C}}(\mathfrak{p}) &\longrightarrow \tilde{T}_{\pi_0, \dots, \pi_k}^{\text{pt}} \subset \mathbf{C}^m \\ \left(\varphi, (\varphi_{x_k}), \dots, (\varphi_{x_1}), (\varphi_{x_0}) \right) &\mapsto \left(i \mapsto \varphi(i) + \varepsilon_{\varphi}(i) \left[\varphi_{\pi_k(i)}(i) + \varepsilon_{\varphi_{\pi_k(i)}}(i) \left[\varphi_{\pi_{k-1}(i)}(i) + \cdots + \varepsilon_{\varphi_{\pi_1(i)}}(i) \varphi_{\pi_0(i)}(i) \right] \cdots \right] \right) \end{aligned}$$

Nous ne détaillons pas la compatibilité des ces homéomorphismes aux applications $\delta_{i,k}$, c.f. Remarque 4.3.22.

□

Pour conclure, il reste à comparer les familles de foncteurs de Čech $\tilde{\Theta}_{\bullet}^{\mathcal{C}}$ et $\Theta_{\bullet}^{\mathcal{P}}$.

Proposition 4.3.26. *On a un zigzag d'équivalences d'homotopie équivariantes entre $\tilde{\Theta}_\bullet^{\mathcal{C}}$ et $\Theta_\bullet^{\mathcal{P}}$.*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION — A la simplification de la Remarque 4.3.22 près, la démonstration consiste essentiellement à supprimer les facteurs contractiles $\tilde{D}^{p_0^{-1}(x_0)}$ dans $\tilde{\Theta}_\bullet^{\mathcal{C}}$ (en projetant) et à constater que le plongement $\tilde{D}_{p_i^{-1}(x_i)}^{(\pi_i^{-1})} \hookrightarrow \mathcal{P}(p_i^{-1}(x_i))$ est une équivalence d'homotopie équivariante. \square

4.4 Prolongements

On présente dans ce paragraphe quelques commentaires et variantes liés à l'étude précédente.

- Comme annoncé précédemment, nous montrons au *a)* que lorsque Y est définie sur \mathbf{R} , l'équivalence d'homotopie $\Psi^m Y(\mathbf{C}) \approx (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ est $\mathbf{Z}/2$ -équivariante (pour l'action de la conjugaison complexe).
- Le § *b)* est un prolongement de l'étude de la stratification de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$. Notre analyse se généraliserait à l'étude de la stratification *de multiplicité* d'un produit symétrique d'une variété riemannienne (l'espace $\text{pol}_m(\mathbf{C})$ correspondant au cas particulier $\text{SP}(\mathbf{C})$).

Remarque 4.4.1. Il convient aussi de remarquer que tous les résultats de ce chapitre sur le type d'homotopie de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ restent valable lorsque l'on remplace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ par $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$, avec \mathcal{Y} une variété holomorphe.

a) Le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{R})$

Soit Y une variété algébrique lisse définie sur \mathbf{R} . L'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$, muni de l'involution donnée par la conjugaison complexe, est un $\mathbf{Z}/2$ -espace. L'espace des points réels $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{R})$ est (presque par définition) le sous-espace de ses points fixes.

Toute la démonstration du Théorème 4.3.11 s'adapte à des voisinages tubulaires $\mathbf{Z}/2$ -équivariants et l'on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.4.2. *Soient \mathcal{T}^Y un système contrôlé de voisinages tubulaires $\mathbf{Z}/2$ -équivariants de $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ et τ_\bullet le diagramme de Čech associé. Alors, quitte à compresser les voisinages tubulaires de \mathcal{T}^Y , il existe un zigzag de $\mathbf{Z}/2$ -équivalences d'homotopie naturelles de diagrammes de Čech entre τ_\bullet et $\psi_\bullet^m(\mathcal{P}, Y(\mathbf{C}))$. En particulier, on a une $\mathbf{Z}/2$ -équivalence d'homotopie*

$$\Psi^m(Y(\mathbf{C})) \xrightarrow{\approx} (\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \quad .$$

Corollaire 4.4.3. *En particulier, le type d'homotopie de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{R})$ ne dépend que des types d'homotopie des espaces $Y(\mathbf{C})$ et $Y(\mathbf{R})$.*

Exemple 4.4.4. Soit \mathcal{P}_1 l'opérade des petits segments et $\mathcal{P}_2^{\mathcal{H}}$ l'espace des petits disques contenus dans le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} . On constate qu'après simplification, on a une équivalence d'homotopie

$$(\mathcal{R}_2 Y)(\mathbf{R}) \approx \text{hocolim} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_1(2) \times_{\mathfrak{S}_2} (Y(\mathbf{R}))^2 & & \mathcal{P}_2^{\mathcal{H}}(1) \times Y(\mathbf{C}) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \mathcal{P}_1(2) / \mathfrak{S}_2 \times \mathcal{P}_1(1) \times Y(\mathbf{R}) & \end{array} \right) \quad .$$

Le lecteur intéressé pourrait décrire la flèche oblique de droite.

b) Stratification de multiplicité d'un produit symétrique

L'analyse conduite pour décrire le diagramme de Cech d'un système de tubes de $\text{Pol}_m(\mathbf{C})$ se généraliserait à l'étude de la stratification *de multiplicité* du produit symétrique d'une variété riemannienne Z de dimension d .

Tout d'abord pour tout fibré vectoriel ξ muni d'une métrique, on définirait la notion du « fibré en petites d -boules¹⁷ » de ξ . Nous le noterions $\xi^{\mathcal{P}_d}$. Par définition, cet espace serait muni d'une fibration vers Z et la fibre d'un point $z \in Z$ serait un espace de configuration de petites boules de l'espace vectoriel ξ_z . Par analogie avec la Proposition-définition 4.3.24, on construirait un foncteur de Cech $\Theta_{\bullet}^{\mathcal{P}_d}$ tel que l'on ait pour tout k -drapeau \mathbf{p} :

$$\Theta_k^{\mathcal{P}_d}(\mathbf{p}) = Z^{(\pi_k)} \times_{Z^{(\pi_k)}} \prod_{x_k \in \underline{n}_k} \tau_Z^{\mathcal{P}_d(p_k^{-1}(x_k))} \times \cdots \times_{Z^{(\pi_k)}} \prod_{x_1 \in \underline{n}_1} \tau_Z^{\mathcal{P}_d(p_1^{-1}(x_1))} ,$$

τ_Z désignant le fibré tangent de Z . (On utiliserait l'application exponentielle pour définir $\delta_{k,k}$ et les applications de structure de l'opérade des petites boules fibre à fibre pour définir les autres $\delta_{i,k}$).

On monterait alors la proposition suivante.

Proposition 4.4.5. *Pour tout système contrôlé de tubes « assez petits » de la stratification de $\text{SP}^m Z$, disons \mathcal{T} , il existe un zigzag d'équivalences d'homotopie naturelles entre $\tau_{\bullet}(\mathcal{T})$ et $\Theta_{\bullet}^{\mathcal{P}_d}$.*

Une application

Au § 4.3, nous aurions pu définir pour toute opérade topologique \mathcal{O} un foncteur $\Psi_{\mathcal{O}}^m$ en posant pour tout espace topologique Z

$$\Psi_{\mathcal{O}}^m(Z) := |\psi_{\bullet}^m(\mathcal{O}, Z)| .$$

Le foncteur Ψ^m du § 4.3 correspond au cas particulier $\mathcal{O} = \mathcal{P}_2$. De la Proposition 4.4.5 précédente à montrer que pour toute variété algébrique réelle quasi-projective Y , l'espace $\Psi_{\mathcal{P}_1}^m(Y(\mathbf{R}))$ a le type d'homotopie de l'espace

$$\left\{ (A, B), \text{ où } A \in \text{Pol}_m(\mathbf{R}) \text{ est hyperbolique}^{18} \text{ et } B \in Y \left(\mathbf{R}[X]/(A) \right) \right\}$$

il n'y a qu'un pas. Nous laissons le lecteur le faire seul.

Remarque 4.4.6. Ici, on montrerait que la projection canonique $\Psi_{\mathcal{P}_1}^m(Z) \longrightarrow \mathbf{R}^{(m)} \times_{\mathfrak{S}_m} Z^m \approx Z^m$ est une équivalence d'homotopie.

Questions 4.4.7.

1. Pour $d \geq 2$, que dire du type d'homotopie des espaces $\Psi_{\mathcal{P}_d}^m(Z)$?
2. Plus généralement, que dire de $|\psi_{\bullet}^m(\mathcal{O}, Z)|$ pour \mathcal{O} une opérade topologique quelconque ?
3. Ce chapitre semble montrer un certain lien entre opérades et stratifications. Une meilleure compréhension de ce lien nous semble intéressant.

¹⁷Une boule est ici juste la donnée d'un centre et d'un rayon. Autrement dit, on ne distingue pas les différents plongements possibles.

¹⁸Un polynôme réel est dit hyperbolique s'il a toutes ses racines réelles. L'espace des polynômes hyperboliques unitaires de degré m s'identifie avec le produit symétrique $\text{SP}^m(\mathbf{R})$.

Chapitre 5

Scindements stables

Ce chapitre détermine le type d'homotopie stable des espaces de points complexes des schémas d'Atiyah-Hitchin et montre que le résultat est en accord avec la Conjecture 3.G.

Le Théorème 5.2.1, qui constitue le résultat principal, généralise les travaux de F. Cohen, R. Cohen, B. Mann et R. Milgram sur le type d'homotopie stable des espaces de fractions rationnelles¹. On y montre que pour tout entier m et pour tout schéma quasi-projectif lisse Y défini sur \mathbf{C} , on a une équivalence d'homotopie stable entre $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ et $F_m \Omega^2 \Sigma^2 Y(\mathbf{C})$. De manière équivalente, on montre le scindement stable

$$(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i Y(\mathbf{C}) \quad ,$$

$D_i Y(\mathbf{C})$ désignant le i -ème sous-quotient du modèle de May-Milgram, *c.f.* Définition 2.2.8. De plus, lorsque Y est définie sur \mathbf{R} , l'équivalence d'homotopie stable précédente est $\mathbf{Z}/2$ -équivariante.

Notre approche est fortement influencée par les travaux de Vassiliev² sur la topologie des complémentaires de discriminants. On remplace l'étude de l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ par celle de son dual de Spanier-Whitehead $\widehat{\Sigma}$. On définit, en suivant Vassiliev, une « résolution » $\widehat{\widetilde{\Sigma}} \xrightarrow{\cong} \widehat{\Sigma}$ qui est naturellement filtrée. Et nous montrons, par une méthode géométrique, que la filtration de $\widehat{\widetilde{\Sigma}}$ se scinde stablement (après une suspension) et que les sous-quotients qui apparaissent sont les duaux de Spanier-Whitehead des sous-quotients $D_i Y(\mathbf{C})$ du modèle de May-Milgram.

Voici le plan du chapitre :

5.1 La méthode de Vassiliev. — Nous présentons ici les idées des travaux de Vassiliev sur la topologie des espaces complémentaires de discriminants. On illustre la résolution canonique d'un résultant ainsi que sa filtration naturelle sur les exemples de l'espace des fractions rationnelles $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ et des polynômes sans racines multiples.

5.2 Scindement stable. — C'est le cœur de ce chapitre. On y montre le scindement stable de l'espace des points complexes d'un schéma d'Atiyah-Hitchin.

5.3 Variantes. — On présente quelques variantes du paragraphe précédent.

Au 5.3.a), on étudie le scindement stable de l'espace des points réels d'un schéma d'Atiyah-Hitchin.

Au 5.3.b), on esquisse ce que serait un analogue du Théorème 5.2.1 en géométrie algébrique réelle.

Avertissement : *Ce chapitre fait un usage essentiel de la dualité de Spanier-Whitehead (équivariante). Le lecteur trouvera à l'Annexe D une brève présentation de cette théorie à laquelle nous le renvoyons.*

¹Ces résultats sont rappelés au § 2.2.c) (i)

²Il faut aussi reconnaître une influence du travail de Y. Kamiyama : c'est en cherchant à déchiffrer l'article [Kam04] que l'auteur a dégagé le théorème.

5.1 La méthode de Vassiliev

Dans [Vas95], Vassiliev étudie la topologie des complémentaires de discriminants. Il obtient des résultats spectaculaires basés sur les deux observations clefs suivantes :

- Si l'on ne s'intéresse qu'au type d'homotopie stable d'un espace, alors il est équivalent d'étudier son dual de Spanier-Whitehead. (C'est à Arnol'd qu'il faut attribuer d'avoir remarqué la pertinence de ce point dans ce contexte).
- Si X est le complémentaire d'une variété discriminant, « son » dual de Spanier-Whitehead, disons Σ , a plus de structure que X : c'est une variété algébrique (singulière). Vassiliev en construit une résolution de ses singularités (plus ou moins canonique), disons $\tilde{\Sigma}$. L'espace $\tilde{\Sigma}$ est naturellement filtré et les sous-quotients de cette filtration sont (parfois) assez bien compris. D'où une suite spectrale (*la suite spectrale de Vassiliev*) de terme E_2 (parfois) assez bien compris et d'aboutissement la (co)homologie de X .

Parmi les nombreuses applications que Vassiliev donne de sa méthode, on compte une démonstration directe de l'équivalence d'homotopie stable

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{C}) \overset{\text{st}}{\approx} \mathbf{C}^{(2m)} / \mathfrak{S}_{2m}$$

démontrée par F. Cohen *et al.*. Vassiliev montre plus généralement, que pour tout entier positif d , l'espace $\mathcal{F}_m^d(\mathbf{C})$ a le même type d'homotopie stable que le sous-espace de $\text{Pol}_{md}(\mathbf{C})$ des polynômes dont la multiplicité des racines n'excède pas d .

Pour simplifier la lecture, nous nous concentrons juste sur le cas $d = 1$, laissant le lecteur adapter pour un entier d quelconque.

Notation: On note P_m l'espace des couples de polynômes (A, B) où A est unitaire de degré m et B est de degré $\leq m - 1$.

Comme indiqué précédemment, pour comprendre le type d'homotopie stable de l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$, il suffit de comprendre celui de son dual de Spanier-Whitehead. Ici, l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ est naturellement un ouvert de $P_m \simeq \mathbf{C}^{2m}$. Soit Σ_m le complémentaire de $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ dans P_m , c'est-à-dire l'espace des couples de polynômes (A, B) tels que A et B aient une racine en commun. D'après la Proposition D.1.9, on a une dualité

$$\mathcal{D}_{4m-1}(\mathcal{F}_m(\mathbf{C})) \simeq \widehat{\Sigma_m} \quad .$$

De même, l'espace $\mathbf{C}^{(2m)} / \mathfrak{S}_{2m}$ est un ouvert de $\text{Pol}_{2m}(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^{2m}$. Soit Δ_{2m} son complémentaire dans $\text{Pol}_{2m}(\mathbf{C})$, c'est-à-dire l'espace des polynômes ayant au moins une racine multiple. On a également une dualité

$$\mathcal{D}_{4m-1}\left(\mathbf{C}^{(2m)} / \mathfrak{S}_{2m}\right) \simeq \widehat{\Delta_{2m}} \quad .$$

Les espaces Σ_m et Δ_{2m} sont des exemples de discriminants. Ces espaces sont singuliers et nous illustrons ci-après sur ces exemples comment Vassiliev résout leurs singularités.

a) Espace de barycentres formels

Il est commode d'introduire la notion d'espace de barycentres formels de points de \mathbf{C} .

Notation: Pour tout entier positif k , on note Δ^k le k -simplexe standard, c'est-à-dire le sous-espace de $[0, 1]^{k+1}$ formé des $(k + 1)$ -uplets (t_1, \dots, t_{k+1}) satisfaisant la relation $\sum_1^{k+1} t_i = 1$.

Définition 5.1.1. Soit n un entier positif et X un espace topologique. L'espace $\mathcal{B}_n(X)$ des n -barycentres formels de points de X est le coégalisateur des deux doubles flèches³ δ et δ' définies ci-après. Soient $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ la double flèche suivante :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{k=2}^n \Delta^{k-2} \times_{\mathfrak{S}_{k-1}} X^k & \xrightarrow[\delta_1]{\delta_2} & \prod_{k=1}^n \Delta^{k-1} \times_{\mathfrak{S}_k} X^k \\ \delta_1 : [(t_1, \dots, t_{k-1}), (x_1, \dots, x_k)] & \longmapsto & [(t_1, \dots, t_{k-1}, 0), (x_1, \dots, x_k)] \\ \delta_2 : [(t_1, \dots, t_{k-1}), (x_1, \dots, x_k)] & \longmapsto & [(t_1, \dots, t_{k-1}), (x_1, \dots, x_{k-1})] \end{array} ,$$

et $\delta' = (\delta'_1, \delta'_2)$ la double flèche suivante :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{k=1}^n \Delta^{k-1} \times_{\mathfrak{S}_{k-1}} X^{k-1} & \xrightarrow[\delta'_1]{\delta'_2} & \prod_{k=1}^n \Delta^{k-1} \times_{\mathfrak{S}_k} X^k \\ \delta'_1 : [(t_1, \dots, t_k), (x_1, \dots, x_{k-1})] & \longmapsto & [(t_1, \dots, t_k), (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k-1})] \\ \delta'_2 : [(t_1, \dots, t_k), (x_1, \dots, x_{k-1})] & \longmapsto & [(t_1, \dots, t_{k-1} + t_k), (x_1, \dots, x_{k-1})] \end{array} .$$

Remarques 5.1.2.

1. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit une application continue

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_n(f) : \mathcal{B}_n(X) & \longrightarrow & \mathcal{B}_n(Y) \\ \sum t_i x_i & \longmapsto & \sum t_i f(x_i) \end{array}$$

2. Si A est un sous-espace fermé de X , $\mathcal{B}_n(A)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}_n(X)$.
3. Tout élément de $\mathcal{B}_n(X)$ admet une unique écriture réduite, c'est-à-dire comme une somme $\theta = \sum_{i=1}^k t_i x_i$ où tous les t_i sont non nuls et où les x_i sont deux à deux disjoints. L'entier k qui apparaît ci-dessus est noté $k(\theta)$.

Ceci induit une filtration croissante de l'espace \mathcal{B}_n : pour tout entier $1 \leq r \leq n$, on note $F_r \mathcal{B}_n(X)$ le sous-espace fermé constitué de l'ensemble des θ tels que $k(\theta)$ soit inférieur à r .

Pour tout r , on a un homéomorphisme $F_r \mathcal{B}_n(X) \simeq \mathcal{B}_r(X)$.

Dans la suite, c'est principalement l'espace $\mathcal{B}_n(\mathbf{C})$ qui apparaît même si cet espace est contractile.

Remarque 5.1.3. Signalons que dans [KK] S. Kallel et R. Karoui ont étudié la topologie de l'espace des barycentres formels de points dans X . Les auteurs décrivent le type d'homotopie (et le type d'homotopie stable) de $\mathcal{B}_n(X)$ comme un foncteur simple du type d'homotopie de X .

b) Résolutions canoniques

Soit m un entier. On rappelle que Σ_m désigne l'espace des couples de polynômes $(A, B) \in \mathbf{P}_m$ tels que A et B aient une racine en commun. Nous allons construire une résolution des singularités $\pi_1 : \tilde{\Sigma}_m \rightarrow \Sigma_m$ telle que π_1 soit propre et induise une équivalence d'homotopie (stable)

$$\widehat{\pi}_1 : \widehat{\tilde{\Sigma}}_m \xrightarrow{\cong} \widehat{\Sigma}_m .$$

Soit Φ l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \Sigma_m \times \mathcal{B}_m(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{B}_m(\mathbf{C} \times \mathbf{C}) \\ (A, B, \sum t_i x_i) & \longmapsto & \sum t_i (A(x_i), B(x_i)) \end{array}$$

On pose alors

$$\tilde{\tilde{\Sigma}}_m := \Phi^{-1}(\{(0, 0)\}) .$$

³Le coégalisateur de deux doubles flèches $Y \rightrightarrows X$ et $Z \rightrightarrows X$ est le coégalisateur de la double flèche évidente $Y \amalg Z \rightrightarrows X$.

$\widetilde{\Sigma}_m$ est donc le sous-espace formé des couples $((A, B), \theta)$ où θ est un barycentre formel de racines communes à A et B , c'est-à-dire $\theta = \sum_{i=1}^r t_i \alpha_i$ avec $A(\alpha_i) = B(\alpha_i) = 0$.

Soit $\pi_1 : \widetilde{\Sigma}_m \rightarrow \Sigma_m$ la projection sur le premier facteur.

Proposition 5.1.4. *L'application π_1 est propre. Elle induit donc une application entre les compactifiés d'Alexandroff*

$$\widehat{\pi}_1 : \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m \rightarrow \widehat{\Sigma}_m \quad .$$

L'application $\widehat{\pi}_1$ est une équivalence d'homotopie stable.

DÉMONSTRATION — On renvoie le lecteur à [Vas95] ou à la démonstration ci-après de la Proposition 5.2.7 qui est plus générale. \square

Remarque 5.1.5. Dans [Vas95] (Remark p.90), Vassiliev affirme que $\widehat{\pi}$ est même une équivalence d'homotopie instable.

On construit de même une résolution des singularités $\pi_2 : \widetilde{\Delta}_{2m} \rightarrow \Delta_{2m}$.

Soit Ψ l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \Delta_{2m} \times \mathcal{B}_m(\mathbf{C}) &\longrightarrow \mathcal{B}_m(\mathbf{C} \times \mathbf{C}) \\ (A, \sum t_i x_i) &\longmapsto \sum t_i (A(x_i), A'(x_i)) \end{aligned}$$

On pose alors

$$\widetilde{\Delta}_{2m} := \Psi^{-1}(\{(0, 0)\}) \quad .$$

$\widetilde{\Delta}_{2m}$ est donc le sous-espace de $\Delta_{2m} \times \mathcal{B}_m(\mathbf{C})$ formé des couples (A, θ) où θ est un barycentre formel en des racines multiples de A . On note $\pi_2 : \widetilde{\Delta}_{2m} \rightarrow \Delta_{2m}$ la projection évidente.

On a de même la proposition suivante.

Proposition 5.1.6. *L'application π_2 est propre. Elle induit donc une application*

$$\widehat{\pi}_2 : \widehat{\widetilde{\Delta}}_{2m} \rightarrow \widehat{\Delta}_{2m} \quad .$$

L'application $\widehat{\pi}_2$ induit une équivalence d'homotopie stable.

c) Filtration

Il est important d'observer que la filtration de $\mathcal{B}_m(\mathbf{C})$ induit une filtration des espaces $\widehat{\widetilde{\Sigma}}_m$ et $\widehat{\widetilde{\Delta}}_{2m}$.

Pour tout entier $1 \leq r \leq m$, on pose $f_r \widetilde{\Sigma}_m := \text{pr}_2^{-1}(F_r \mathcal{B}_m)$ (resp. $f_r \widetilde{\Delta}_{2m} := \text{pr}_2^{-1}(F_r \mathcal{B}_m)$). On obtient ainsi une filtration croissante de $\widetilde{\Sigma}_m$ (resp. de $\widetilde{\Delta}_{2m}$) par des fermés. Cette filtration induit à son tour une filtration de $\widehat{\widetilde{\Sigma}}_m$ (resp. de $\widehat{\widetilde{\Delta}}_{2m}$) en posant $F_r \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m := \widehat{f_r \widetilde{\Sigma}_m}$ (resp. $F_r \widehat{\widetilde{\Delta}}_{2m} := \widehat{f_r \widetilde{\Delta}_{2m}}$).

Ces filtrations induisent des suites spectrales convergeant vers les cohomologies de $\widehat{\widetilde{\Sigma}}_m$ et de $\widehat{\widetilde{\Delta}}_{2m}$. Leur page E_1 se calcule à partir des cohomologies relatives $H^*(F_k \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m, F_{k-1} \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m)$ et $H^*(F_k \widehat{\widetilde{\Delta}}_{2m}, F_{k-1} \widehat{\widetilde{\Delta}}_{2m})$.

On a le lemme de topologie générale.

Lemme 5.1.7. *Soit F un fermé d'un espace topologique X . Alors l'application*

$$\begin{aligned} \widehat{X} &\longrightarrow \widehat{X - F} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin \widehat{F}. \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

se factorise en un homéomorphisme $\widehat{X} / \widehat{F} \xrightarrow{\cong} \widehat{X - F}$.

DÉMONSTRATION — On vérifie que l'application décrite est continue et se factorise bien par \widehat{X}/\widehat{F} . C'est alors une bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé. \square

Le lemme suivant est démontré dans un cadre plus général au Lemme 5.2.16.

Lemme 5.1.8. *On des homéomorphismes :*

$$f_k \widetilde{\Sigma}_m - f_{k-1} \widetilde{\Sigma}_m \simeq \left(\mathbf{C}^{(k)} \times_{\mathfrak{S}_k} \overset{\circ}{\Delta}^{k-1} \right) \times \mathbf{C}^{2(m-k)} \simeq f_k \widetilde{\Delta}_{2m} - f_{k-1} \widetilde{\Delta}_{2m} \quad .$$

En particulier, d'après le lemme précédent, les suites spectrales convergeant vers $H^*(\widehat{\Sigma}_m)$ et vers $H^*(\widehat{\Delta}_{2m})$ ont des pages E_1 isomorphes.

Vassiliev pousse l'argument jusqu'à montrer que toutes les pages des suites spectrales coïncident. L'argument est assez technique et nous ne le reproduisons pas. Une des raisons de la complexité de la démonstration est que la flèche naturelle que l'on pourrait construire

$$f : \begin{array}{ccc} \widehat{\Sigma}_m & \longrightarrow & \widehat{\Delta}_m \\ (A, B) & \mapsto & A \cdot B \end{array}$$

n'induit pas une équivalence d'homotopie stable. Heuristiquement, l'application reliant ces deux espaces va plutôt dans l'autre sens : pour tout polynôme $A \in \text{Pol}_{2m}(\mathbf{C})$ qui a des racines multiples, les polynômes A et A' ont une racine en commun. Le problème est que ceci ne respecte pas les degrés des polynômes. La prouesse de l'argument de Vassiliev est d'arriver à corriger ce défaut.

5.2 Scindement stable

Le théorème suivant est le résultat principal du chapitre. Il constitue un indice en faveur de la Conjecture 3.G.

Théorème 5.2.1. *Soit \mathcal{Y} une variété (complexe) pointée, ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe fini. Alors, l'espace topologique $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$ admet le scindement stable suivant :*

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y} \overset{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i \mathcal{Y} \quad .$$

En particulier, pour toute variété algébrique quasi-projective lisse Y , on a le scindement stable

$$(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C}) \overset{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_i(Y(\mathbf{C})) \quad .$$

On rappelle que l'on a défini pour toute variété \mathcal{Y} et pour tout m des applications de stabilisation (c.f. Définition 3.3.8) :

$$\sigma_m : \mathcal{R}_{m-1}^{\text{hol}} \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y} \quad .$$

Pour montrer le Théorème 5.2.1, nous allons plus précisément montrer les deux points suivants :

- L'application σ_m admet une rétraction stable.
- La cofibre homotopique de σ_m a stablement le type d'homotopie de $D_m \mathcal{Y}$.

Compte tenu de la forte connexité de $D_m \mathcal{Y}$ lorsque m est grand, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.2. *Soit ℓ un entier positif. Si \mathcal{Y} est ℓ -connexe, l'application de stabilisation*

$$\sigma_m : \mathcal{R}_{m-1}^{\text{hol}} \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$$

est $(\ell m - 1)$ -connexe.

a) Dualisation

Comme nous l'avons déjà signalé, une des idées principales de la démonstration du théorème est de montrer plutôt le scindement stable du dual de Spanier-Whitehead de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$.

La remarque suivante conduit à une réduction commode.

Remarque 5.2.3. Le chapitre 4 a été consacré à montrer que le type d'homotopie (instable!) de l'espace $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ ne dépend que du type d'homotopie de \mathcal{Y} . En particulier, quitte à plonger \mathcal{Y} dans un espace euclidien de grande dimension et à considérer un voisinage tubulaire ouvert, on peut supposer que \mathcal{Y} est un ouvert d'un espace euclidien. Dans ce cas, comme on l'a vu à la Proposition 3.3.4, $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ est encore un ouvert d'un espace euclidien. L'avantage de cette réduction est de simplifier les duaux de Spanier-Whitehead (*c.f.* Proposition D.1.8).

Convention: Dans toute la suite du § 5.2, d est un entier fixé et l'on suppose que \mathcal{Y} est un ouvert non vide de \mathbf{C}^d ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe fini et tel que son complémentaire $Z := \mathbf{C}^d - \mathcal{Y}$ ait aussi le type d'homotopie d'un CW-complexe fini.

Notations: Soient

- Z le fermé complémentaire de \mathcal{Y} dans \mathbf{C}^d .
- P_m l'espace formé des couples (A, \underline{B}) où A est un polynôme unitaire de degré m et \underline{B} est un d -uplet (B_1, \dots, B_d) de polynômes de degrés $\leq m-1$.
- $N_m := m(d+1)$. L'espace P_m est donc par définition homéomorphe à \mathbf{C}^{N_m} .
- e l'application

$$e : \begin{array}{ccc} P_m & \longrightarrow & \text{SP}^m(\mathbf{C}^d) \\ \left(A = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i), \underline{B} \right) & \longmapsto & [\underline{B}(\alpha_i)] \end{array}$$

Définition 5.2.4. On note Σ_m le fermé complémentaire de $\mathcal{R}^{\text{hol}}\mathcal{Y} = e^{-1}(\text{SP}^m\mathcal{Y})$ dans P_m . De manière moins formelle, on a la description :

$$\Sigma_m := \left\{ (A, \underline{B}) \in P_m, \text{ il existe } \alpha \in \mathbf{C} \text{ tel que l'on ait } A(\alpha) = 0 \text{ et } B(\alpha) \in Z \right\} .$$

Fait 5.2.5. D'après le Corollaire D.1.9, nous avons les S-dualités suivantes :

$$\mathcal{D}_{2d}\mathcal{Y} \simeq \Sigma \widehat{Z} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{2N_m-1}(\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}) \simeq \widehat{\Sigma}_m .$$

i) Résolution

En suivant l'approche de Vassiliev (*c.f.* § 5.1.b), on définit une « résolution » $\pi : \widetilde{\Sigma}_m \longrightarrow \Sigma_m$ comme suit.

Définition 5.2.6. Soit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \Sigma_m \times \mathcal{B}_m(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{B}_m(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^d) \\ (A, \underline{B}, \sum t_i \alpha_i) & \longmapsto & \sum t_i (A(\alpha_i), \underline{B}(\alpha_i)) \end{array}$$

L'espace $\mathcal{B}_m(\{0\} \times Z)$ est un fermé de $\mathcal{B}_m(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^d)$ et l'on pose

$$\widetilde{\Sigma}_m := \Phi^{-1}(\mathcal{B}_m(\{0\} \times Z)) .$$

Par définition, un point de $\widetilde{\Sigma}_m$ est un triple $(A, \underline{B}, \theta)$, avec $(A, \underline{B}) \in \Sigma_m$ et avec θ un barycentre formel de racines de A en lesquelles \underline{B} prend une valeur appartenant à Z .

Proposition 5.2.7. *La projection $\pi : \widetilde{\Sigma}_m \longrightarrow \Sigma_m$ est propre.*

De plus, l'application canonique induite

$$\widehat{\pi} : \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m \longrightarrow \widehat{\Sigma}_m$$

est une équivalence d'homologie.

Corollaire 5.2.8. *Puisque les espaces $\widehat{\widetilde{\Sigma}}_m$ et $\widehat{\Sigma}_m$ sont connexes par arcs (ce sont des compactifiés d'Alexandroff d'espaces raisonnables), l'application $\Sigma\widehat{\pi} : \Sigma\widehat{\widetilde{\Sigma}}_m \longrightarrow \Sigma\widehat{\Sigma}_m$ est une équivalence d'homotopie.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.2.7 — Montrons tout d'abord que l'application π est propre. Soit K un compact de Σ_m et montrons que $L := \pi^{-1}(K)$ est compact. Pour cela, on va montrer que tout suite d'éléments de L admet une extraction convergente.

Soit $(A_n, \underline{B}_n, \theta_n)$ une suite d'éléments de L . Puisque K est compact, la suite (A_n, \underline{B}_n) admet une extraction convergente. Pour alléger les notations, on peut supposer que (A_n, \underline{B}_n) converge vers un élément $(A, \underline{B}) \in K$. On rappelle que l'on note $k(\theta_n)$ le nombre de racines distinctes de A apparaissant dans θ_n avec un coefficient non nul. Pour tout n , on a $1 \leq k(\theta_n) \leq m$. Il existe donc un entier $1 \leq \kappa \leq m$ et une extraction ψ telle que pour tout n , l'on ait $k(\theta_{\psi(n)}) = \kappa$. On fixe un tel κ et pour alléger les notations, on peut supposer que $\psi = id$. On se fixe également une numérotation des racines de A_n , disons $\alpha_i(n)$, telle que les κ premières racines soient celles qui interviennent dans θ_n et telle que pour tout $1 \leq i \leq \kappa$ la suite $\alpha_i(n)$ soit convergente. (C'est possible car la suite A_n converge).

La donnée de l'élément $\theta_n = \sum_{i=1}^{\kappa} t_i(n)\alpha_i(n)$ est alors équivalente à la donnée de l'élément $(t_1(n), \dots, t_{\kappa}(n)) \in \overset{\circ}{\Delta}^{\kappa-1}$. Par compacité de $\overset{\circ}{\Delta}^{\kappa-1}$, la suite d'éléments de $\overset{\circ}{\Delta}^{\kappa-1} \subset \overset{\circ}{\Delta}^{k-1}$ admet une extraction φ convergente dans $\overset{\circ}{\Delta}^{\kappa-1}$. La suite $\theta_{\varphi(n)}$ converge alors dans $\mathcal{B}_{\kappa}(\mathbf{C})$. La sous-suite $(A_{\varphi(n)}, \underline{B}_{\varphi(n)}, \theta_{\varphi(n)})$ est alors convergente dans $\widetilde{\Sigma}_m$. Ceci montre que L est compact.

L'application induite $\widehat{\pi}$ est telle que la pré-image de tout point de Σ_m est un simplexe, donc en particulier contractile. Il résulte alors du théorème de Vietoris-Begle que $\widehat{\pi}$ induit une équivalence d'homologie. \square

Remarque 5.2.9. Il est probable que l'application $\widehat{\pi}$ soit même une équivalence d'homotopie instable (c.f. Remarque 5.1.5). Ce serait un résultat plus fin et nous nous contentons d'une équivalence d'homotopie stable.

ii) Filtration

La filtration de \mathcal{B}_m induit comme précédemment des filtrations croissantes de $\widetilde{\Sigma}_m$ et de $\widehat{\widetilde{\Sigma}}_m$ comme suit.

Définition 5.2.10. Soit pr la projection de $\widetilde{\Sigma}_m$ sur \mathcal{B}_m . Pour tout entier $0 \leq k \leq m$, on pose :

$$f_k \widetilde{\Sigma}_m := \text{pr}^{-1}(\mathcal{B}_k(\mathbf{C})) \quad .$$

Ceci définit une filtration croissante de $\widetilde{\Sigma}_m$

$$\emptyset = f_0 \widetilde{\Sigma}_m \subset \dots \subset f_m \widetilde{\Sigma}_m = \widetilde{\Sigma}_m$$

par des sous-espaces fermés.

Les espaces

$$F_k \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m := \widehat{f_k \widetilde{\Sigma}_m}$$

forment alors une filtration croissante de $\widehat{\widetilde{\Sigma}}_m$

$$\{\infty\} = F_0 \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m \subset \dots \subset F_m \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m = \widehat{\widetilde{\Sigma}}_m \quad .$$

Exemple 5.2.11. Par définition, $F_1 \widehat{\widehat{\Sigma}}_m$ est le compactifié d'Alexandroff de l'ensemble des triplets $(A, \underline{B}, \alpha)$ avec $(A, \underline{B}) \in P_m$ et $\alpha \in \mathbf{C}$ tels que l'on ait $A(\alpha) = 0$ et $\underline{B}(\alpha) \in Z$.

Le lemme technique suivant permet de confondre dans la suite les sous-quotients et les sous-quotients homotopiques de la filtration $F_\bullet \widehat{\widehat{\Sigma}}_m$.

Lemme 5.2.12. *Les inclusions successives $F_k \widehat{\widehat{\Sigma}}_m \hookrightarrow F_{k+1} \widehat{\widehat{\Sigma}}_m$ sont des cofibrations.*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION — On montre que $F_k \widehat{\widehat{\Sigma}}_m$ est rétracte d'un voisinage dans $F_{k+1} \widehat{\widehat{\Sigma}}_m$ (un « NDR » dans la terminologie anglo-saxonne). Précisément, on montre que

- L'inclusion $\mathcal{B}_k(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathcal{B}_{k+1}(\mathbf{C})$ est une cofibration.
- Une rétraction d'un voisinage de $\mathcal{B}_k(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{B}_{k+1}(\mathbf{C})$ se relève en une rétraction d'un voisinage de $F_k \widehat{\widehat{\Sigma}}_m$ dans $F_{k+1} \widehat{\widehat{\Sigma}}_m$. □

iii) Énoncé dual

Le Théorème 5.2.1 est conséquence de l'énoncé dual suivant. C'est cet énoncé que nous allons montrer.

Théorème 5.2.13. *La filtration de l'espace $\widehat{\widehat{\Sigma}}_m$ se scinde stablement : on a une équivalence d'homotopie stable (après une suspension)*

$$\widehat{\widehat{\Sigma}}_m \overset{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m F_i \widehat{\widehat{\Sigma}}_m / F_{i-1} \widehat{\widehat{\Sigma}}_m .$$

En outre, pour tout entier $1 \leq i \leq m$, on a une $(2N_m - 1)$ -dualité

$$\mathcal{D}_{2N_m-1} \left(F_i \widehat{\widehat{\Sigma}}_m / F_{i-1} \widehat{\widehat{\Sigma}}_m \right) \simeq D_i \mathcal{Y} .$$

Remarques 5.2.14.

1. Bien que le scindement stable de $\widehat{\widehat{\Sigma}}_m$ soit obtenu après une seule suspension, l'utilisation de la dualité de Spanier-Whitehead fait perdre le contrôle sur le nombre de suspensions nécessaires pour scinder $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$. Par l'approche « à la Dold » suggérée au § 3.4.b) on montrerait qu'il faut au plus $2m$ suspensions.
2. L'énoncé du Théorème 5.2.13 est moins bancal que celui du Théorème 5.2.1 : le compactifié d'Alexandroff d'un espace topologique est naturellement muni d'un point de base.

Le reste du § 5.2 est dévolu à démontrer le Théorème 5.2.13.

b) Scindement de $\widehat{\widehat{\Sigma}}_m$

Dans tout ce paragraphe, m est un entier positif fixé. Pour alléger les notations, on pose

$$F_i := F_i \widehat{\widehat{\Sigma}}_m \quad \text{et} \quad f_i := f_i \widehat{\widehat{\Sigma}}_m .$$

Le théorème 5.2.13 se reformule en les propositions 5.2.18 et 5.2.15 suivantes.

Proposition 5.2.15. *Pour tout entier $1 \leq i \leq m$, on a un homéomorphisme*

$$F_i / F_{i-1} \simeq \left(\widehat{\mathbf{C}}^{(i)} \wedge \widehat{\Delta}^{i-1} \wedge \widehat{Z}^{\wedge i} \right) / \mathfrak{S}_i \wedge \widehat{P}_{m-i} .$$

De plus, pour tout choix de point de base dans \mathcal{Y} , on a une $(2N_i - 1)$ -dualité

$$\mathcal{D}_{2N_i-1} \left(\left(\widehat{\mathbf{C}}^{(i)} \wedge \widehat{\Delta}^{i-1} \wedge \widehat{Z}^{\wedge i} \right) / \mathfrak{S}_i \right) \simeq \mathbf{C}_+^{(i)} \wedge_{\mathfrak{S}_i} \mathcal{Y}^{\wedge i} .$$

DÉMONSTRATION — Soit $1 \leq i \leq m$ un entier. D'après le lemme 5.1.7, on a un homéomorphisme

$$F_i / F_{i-1} \simeq \widehat{f_i - f_{i-1}} \quad .$$

L'homéomorphisme annoncé est équivalent au lemme suivant :

Lemme 5.2.16. *On a un homéomorphisme*

$$f_i - f_{i-1} \simeq \left(\mathbf{C}^{(i)} \times \overset{\circ}{\Delta}^{i-1} \times Z^i \right) / \mathfrak{S}_i \times P_{m-i} \quad .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.2.16 — L'espace $f_i - f_{i-1}$ est composé des triplets $(A, \underline{B}, \theta) \in f_i$ en lesquels l'on a $k(\theta) = i$. (La fonction k a été introduite à la Remarque 5.1.2 (3)).

Posons $\theta = \sum_{k=1}^i t_k \alpha_k$. Le polynôme A se factorise alors par $\prod_{k=1}^i (X - \alpha_k)$. Posons de plus $z_k := \underline{B}(\alpha_k) \in Z$.

Le multi-polynôme \underline{B} admet une unique écriture de la forme $\underline{B} = \Lambda([\alpha_k, z_k]) + \underline{B}_1 \prod_{k=1}^i (X - \alpha_k)$, où :

- $\Lambda([\alpha_k, z_k])$ désigne le polynôme interpolateur de Lagrange (de degré $\leq i$) prenant en chaque α_i la valeur z_i .
- \underline{B}_1 est un multi-polynôme de degré $< m - i$.

L'application

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{C}^{(i)} \times \overset{\circ}{\Delta}^{i-1} \times Z^i \right) / \mathfrak{S}_i \times P_{m-i} &\longrightarrow f_i - f_{i-1} \\ ([\alpha_k, t_k, z_k], (A_1, \underline{B}_1)) &\longmapsto \left(A_1 \prod_{k=1}^i (X - \alpha_k), \Lambda([\alpha_k, z_k]) + \underline{B}_1 \prod_{k=1}^i (X - \alpha_k), \sum_{k=1}^i t_k \alpha_k \right) \end{aligned}$$

est donc un homéomorphisme. □

Ceci montre l'homéomorphisme annoncé⁴ :

$$F_i / F_{i-1} \simeq \left(\widehat{\mathbf{C}^{(i)}} \wedge \overset{\circ}{\Delta}^{i-1} \wedge \widehat{Z}^{\wedge i} \right) / \mathfrak{S}_i \wedge \widehat{P}_{m-i} \quad .$$

Passons au calcul de dualité.

On rappelle que Π_i désigne la représentation de permutations de \mathfrak{S}_i sur \mathbf{R}^i . *Via* l'homéomorphisme \mathfrak{S}_i -équivariant classique :

$$\mathbf{R} \times \overset{\circ}{\Delta}^{i-1} \simeq \Pi_i \quad ,$$

le calcul se ramène à celui du $2N_i$ -dual de $\widehat{\mathbf{C}^{(i)}} \wedge_{\mathfrak{S}_i} \left(\widehat{\Sigma Z} \right)^{\wedge i}$.

L'action de \mathfrak{S}_i sur $\widehat{\mathbf{C}^{(i)}} \wedge \left(\widehat{\Sigma Z} \right)^{\wedge i}$ est libre en dehors du point de base. La Proposition D.3.2 s'applique (pour $N = G = \mathfrak{S}_i$) et donne

$$\mathcal{D}_{2N_i} \left(\widehat{\mathbf{C}^{(i)}} \wedge_{\mathfrak{S}_i} \left(\widehat{\Sigma Z} \right)^{\wedge i} \right) \simeq \mathcal{D}_{\Pi_i^{\oplus 2(d+1)}}^{\mathfrak{S}_i} \left(\mathbf{C}^{(i)} \wedge (\Sigma Z)^{\wedge i} \right) / \mathfrak{S}_i \quad .$$

La dualité annoncée résulte de la conjonction des deux dualités suivantes :

- D'une part

$$\mathcal{D}_{\Pi_i^{\oplus 2d}}^{\mathfrak{S}_i} \left(\left(\widehat{\Sigma Z} \right)^{\wedge i} \right) \simeq \mathcal{Y}^{\wedge i} \quad .$$

Cette dualité est conséquence du Lemme D.3.3.

⁴Lorsqu'un groupe fini G opère sur des espaces E et F , on a un homéomorphisme canonique $\widehat{E \times F}_G \simeq \widehat{E} \wedge \widehat{F}_G$.

– D'autre part

$$\mathcal{D}_{\Pi^{\oplus 2}}(\widehat{\mathbf{C}}^{(i)}) \simeq \mathbf{C}_+^{(i)}$$

Cette dualité se déduit du Corollaire D.2.14 de la dualité d'Atiyah appliqué à la variété $M = \mathbf{C}^{(i)}$. (Cette variété est bien parallélisable puisque c'est un ouvert de \mathbf{C}^i .) □

Remarque 5.2.17. Il est important d'observer la compatibilité entre les filtrations $F_\bullet \widehat{\Sigma}_m$ pour différentes valeurs de m . Pour tout entier $1 \leq i \leq m-1$, on a un homéomorphisme

$$F_i \widehat{\Sigma}_m / F_{i-1} \widehat{\Sigma}_m \simeq \widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \wedge \left(F_i \widehat{\Sigma}_{m-1} / F_{i-1} \widehat{\Sigma}_{m-1} \right) .$$

L'apparition ci-dessus de la suspension $\widehat{\mathbf{C}}^{d+1}$ est tout à fait naturelle. Elle compense le décalage entre les indices des dualités : $\mathcal{R}_m^{\text{hol}} \mathcal{Y}$ est un N_m -dual de $\widehat{\Sigma}_m$ tandis que $\mathcal{R}_{m-1}^{\text{hol}} \mathcal{Y}$ est un N_{m-1} -dual de $\widehat{\Sigma}_{m-1}$.

Proposition 5.2.18. *Pour tout entier $1 \leq i \leq m$, on a une équivalence d'homotopie stable*

$$\widehat{\Sigma}_m \stackrel{\text{st}}{\approx} \left(\bigvee_{k=1}^i F_k \widehat{\Sigma}_m / F_{k-1} \widehat{\Sigma}_m \right) \vee \widehat{\Sigma}_m / F_i \widehat{\Sigma}_m .$$

Cette équivalence d'homotopie peut même être obtenue après une seule suspension.

Pour $i = m$, on a le scindement stable du Théorème 5.2.1.

La démonstration se base sur l'existence des applications (instables) suivantes.

Lemme 5.2.19. *Pour tout entier positif m , il existe une application (instable)*

$$\rho_m : \widehat{\Sigma}_m \longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \wedge \widehat{\Sigma}_{m-1}$$

respectant les filtrations, c'est-à-dire telle que l'on ait pour tout $0 \leq k \leq m$,

$$\rho_m \left(F_k \widehat{\Sigma}_m \right) \subset \widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \wedge F_k \widehat{\Sigma}_{m-1} .$$

De plus, pour tout entier $1 \leq k \leq m-1$ l'application induite entre les sous-quotients

$$F_k \widehat{\Sigma}_m / F_{k-1} \widehat{\Sigma}_m \longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \wedge \left(F_k \widehat{\Sigma}_{m-1} / F_{k-1} \widehat{\Sigma}_{m-1} \right) \simeq F_k \widehat{\Sigma}_m / F_{k-1} \widehat{\Sigma}_m$$

est une équivalence d'homotopie.

Admettons provisoirement ce lemme et démontrons la Proposition 5.2.18.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.2.18 — Pour tout entier $1 \leq i \leq m$, la contemplation du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{\Sigma}_m / F_i \widehat{\Sigma}_m & \xrightarrow{\rho_m} & \widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \wedge \left(\widehat{\Sigma}_{m-1} / F_i \widehat{\Sigma}_{m-1} \right) & \xrightarrow{1 \wedge \rho_{m-1}} \dots \xrightarrow{1 \wedge \rho_{i+2}} & \left(\widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \right)^{\wedge (m-i-1)} \wedge \left(\widehat{\Sigma}_{i+1} / F_i \widehat{\Sigma}_{i+1} \right) & \xrightarrow{\simeq} & F_{i+1} \widehat{\Sigma}_m / F_i \widehat{\Sigma}_m \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ F_{i+1} \widehat{\Sigma}_m / F_i \widehat{\Sigma}_m & \xrightarrow{\simeq} & \widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \wedge \left(F_{i+1} \widehat{\Sigma}_m / F_i \widehat{\Sigma}_m \right) & \xrightarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} & \left(\widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \right)^{\wedge (m-i-1)} \wedge \left(\widehat{\Sigma}_{i+1} / F_i \widehat{\Sigma}_{i+1} \right) & & \end{array}$$

montre que la cofibration $F_{i+1}\widehat{\Sigma}_m / F_i\widehat{\Sigma}_m \hookrightarrow \widehat{\Sigma}_m / F_i\widehat{\Sigma}_m$ admet une rétraction stable (après une suspension). Ceci fournit le scindement stable (après une suspension) suivant :

$$\widehat{\Sigma}_m / F_i\widehat{\Sigma}_m \stackrel{st}{\approx} \left(F_{i+1}\widehat{\Sigma}_m / F_i\widehat{\Sigma}_m \right) \vee \left(\widehat{\Sigma}_m / F_{i+1}\widehat{\Sigma}_m \right) .$$

Le scindement stable de l'énoncé s'en déduit par récurrence. □

c) L'application ρ_m

Nous construisons ici l'application ρ_m telle que décrite dans le Lemme 5.2.19.

On insiste tout d'abord sur le fait bien connu suivant (contenu implicitement dans le Lemme 5.1.7) :

Fait 5.2.20. Soient E un espace topologique et O un ouvert de E . Alors l'inclusion $O \hookrightarrow E$ induit une application canonique entre les compactifiés d'Alexandrov

$$\widehat{E} \longrightarrow \widehat{O} .$$

Si de plus E est supposé filtré par des sous-espaces fermés E_i , les espaces \widehat{E}_i forment une filtration de \widehat{E} . L'espace \widehat{O} est de même filtré par les espaces $\widehat{O} \cap \widehat{E}_i$ et l'application précédente $\widehat{E} \longrightarrow \widehat{O}$ respecte ces filtrations.

Notations:

- Soit $P_m^{|A|<1}$ (resp. $\widetilde{\Sigma}_m^{|A|<1}$, resp. $\mathcal{R}_m^{|A|<1}\mathcal{Y}$) le sous-espace ouvert de P_m (resp. de $\widetilde{\Sigma}_m$, resp. de $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$) formé des couples (A, \underline{B}) (resp. des triplets (A, \underline{B}, t) , resp. des couples (A, \underline{B})) tels que le polynôme A ait toutes ses racines de module < 1 .
- Soit $D = D(0, 1)$ le disque unité ouvert du plan complexe.
- Soient $y_0 \in Y$ le point base de Y et $B_{y_0} = B(y_0, \varepsilon)$ une boule ouverte de \mathbf{C}^d contenue dans Y . (On rappelle que Y est supposé ouvert dans \mathbf{C}^d .)
- Soient $(A_1, \underline{B}_1) \in P_{m_1}$ et $(A_2, \underline{B}_2) \in P_{m_2}$ tels que les polynômes A_1 et A_2 soient premiers entre eux. On note alors $\chi_{A_1, A_2}(\underline{B}_1, \underline{B}_2)$ le multi-polynôme \underline{B} de degré $< m_1 + m_2$ donné par l'isomorphisme chinois tel que l'on ait $\underline{B} \equiv \underline{B}_1 \pmod{A_1}$ et $\underline{B} \equiv \underline{B}_2 \pmod{A_2}$. En toute racine α de A_j ($j = 1$ ou 2), on a $\underline{B}(\alpha) = \underline{B}_j(\alpha)$. Par conséquent, si l'on a de plus $(A_j, \underline{B}_j) \in \Sigma_j$ pour $j = 1$ et $j = 2$, alors $(A_1 A_2, \chi_{A_1, A_2}(\underline{B}_1, \underline{B}_2)) \in \Sigma_{m_1 + m_2}$.

Proposition-définition 5.2.21. *L'application*

$$i_m : D \times B_{y_0} \times \widetilde{\Sigma}_{m-1}^{|A|<1} \longrightarrow \widetilde{\Sigma}_m$$

$$\left(\alpha, \underline{\beta}, (A, \underline{B}, \theta) \right) \mapsto \left((X - (3 + \alpha))A, \chi_{X - (3 + \alpha), A}(\underline{\beta}, \underline{B}), \theta \right)$$

réalise un homéomorphisme de $D \times B_{y_0} \times \widetilde{\Sigma}_{m-1}^{|A|<1}$ sur un ouvert de $\widetilde{\Sigma}_m$.

Soit alors ρ_m l'application canonique induite entre les compactifiés d'Alexandrov :

$$\rho_m : \widehat{\Sigma}_m \longrightarrow \widehat{D} \wedge \widehat{B}_{y_0} \wedge \widehat{\Sigma}_{m-1}^{|A|<1} \simeq \widehat{\mathbf{C}^{d+1}} \wedge \widehat{\Sigma}_{m-1} .$$

Par construction, l'application ρ_m respecte les filtrations. De plus, elle induit une équivalence d'homotopie entre les sous-quotients $F_i\widehat{\Sigma}_m / F_{i-1}\widehat{\Sigma}_m$ et $\widehat{\mathbf{C}^{d+1}} \wedge \left(F_i\widehat{\Sigma}_{m-1} / F_{i-1}\widehat{\Sigma}_{m-1} \right)$.

DÉMONSTRATION — Par construction, l'image I de l'application i_m est l'ouvert de $\widetilde{\Sigma}_m$ formé des triplets $(a_1, \underline{B}_1, \theta_1)$ tels que a_1 ait $m - 1$ racines de module < 1 et une racine proche de 3 en laquelle \underline{B}_1 prenne une valeur proche de y_0 . L'application i_m est bien un homéomorphisme puisque l'on a $f_{m-1}\widetilde{\Sigma}_m \cap I = I$. Montrons que pour tout entier $i \leq m$ l'application ρ_m induit des équivalences d'homotopie entre les sous-quotients $F_i\widehat{\Sigma}_m / F_{i-1}\widehat{\Sigma}_m$ et $\widehat{\mathbf{C}}^{d+1} \wedge \left(F_i\widehat{\Sigma}_{m-1} / F_{i-1}\widehat{\Sigma}_{m-1} \right)$.

Via les isomorphismes de la Proposition 5.2.15, l'application entre les sous-quotients s'identifie à l'application

$$\left(\widehat{\mathbf{C}}^{(i)} \wedge \widehat{\Delta}^{i-1} \wedge \widehat{Z}^{\wedge i} \right) / \mathfrak{S}_i \wedge \widehat{P}_{m-i} \longrightarrow \left(\widehat{D}^{(i)} \wedge \widehat{\Delta}^{i-1} \wedge \widehat{Z}^{\wedge i} \right) / \mathfrak{S}_i \wedge \left(\widehat{D} \wedge \widehat{B}_{y_0} \wedge \widehat{P}_{m-i-1}^{|A|<1} \right)$$

induite par les applications canoniques :

- $\widehat{\mathbf{C}}^{(i)} \xrightarrow{\cong} \widehat{D}^{(i)}$ induite par l'inclusion de l'ouvert $\widehat{D}^{(i)} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{C}}^{(i)}$. C'est une équivalence d'homotopie : un inverse est par exemple l'application $\widehat{D}^{(i)} \longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}^{(i)}$ induite par l'homéomorphisme $\widehat{D}^{(i)} \simeq \widehat{\mathbf{C}}^{(i)}$. Une homotopie entre les composées et l'identité s'obtient en faisant varier le rayon de \widehat{D} entre 1 et ∞ .
- $\widehat{P}_{m-i} \xrightarrow{\cong} \widehat{D} \wedge \widehat{B}_{y_0} \wedge \widehat{P}_{m-i-1}^{|A|<1}$ induite par l'application

$$\begin{aligned} D \times B_{y_0} \times P_{m-1}^{|A|<1} &\longrightarrow P_m \\ (\alpha, \beta)(A, \underline{B}) &\mapsto ((X - (3 + \alpha))A, \chi_{(X - (3 + \alpha), A)}(\underline{\beta}, \underline{B})) \end{aligned}$$

qui réalise un homéomorphisme sur son image.

L'application entre les compactifiés d'Alexandroff est une équivalence d'homotopie : il s'agit d'une application de degré 1 entre des sphères. \square

On rappelle que l'on a introduit une application de stabilisation $\sigma_m : \mathcal{R}_{m-1}^{\text{hol}} Y \hookrightarrow \mathcal{R}_m^{\text{hol}} Y$ à la Définition 3.3.8).

Proposition 5.2.22. *L'application ρ_m est S-duale de l'application de stabilisation*

$$\sigma_m : \mathcal{R}_{m-1}^{\text{hol}} Y \hookrightarrow \mathcal{R}_m^{\text{hol}} Y \quad .$$

DÉMONSTRATION — L'application de stabilisation s'identifie à homotopie près à l'inclusion⁵ $\sigma_m : D \times B_{y_0} \times \mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} Y \hookrightarrow \mathcal{R}_m Y$. Il s'agit de l'inclusion d'un ouvert dans un autre ouvert de l'espace euclidien P_m . Son application S-duale est donnée par l'inclusion inverse des complémentaires, disons $i : \widehat{\Sigma}_m \hookrightarrow \widehat{P}_m - D \times B_{y_0} \times \mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1}$.

L'espace $\widehat{P}_m - D \times B_{y_0} \times \mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1}$ est réunion de $D \times B_{y_0} \times \Sigma_{m-1}^{|A|<1}$ et du fermé $\widehat{P}_m - D \times B_{y_0} \times P_{m-1}^{|A|<1}$ qui est contractile (comme complémentaire de la boule $D \times B_{y_0} \times P_{m-1}^{|A|<1}$ dans la sphère \widehat{P}_m). L'application de passage au quotient

$$\kappa : \widehat{P}_m - D \times B_{y_0} \times P_{m-1}^{|A|<1} \longrightarrow \left(\widehat{P}_m - D \times B_{y_0} \times \mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} \right) / \left(\widehat{P}_m - D \times B_{y_0} \times P_{m-1}^{|A|<1} \right) \simeq \widehat{D} \wedge \widehat{B}_{y_0} \wedge \widehat{\Sigma}_{m-1}$$

est donc une équivalence d'homotopie.

La commutativité du diagramme suivant assure que ρ_m est bien S-duale de σ_m :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Sigma}_m & \xrightarrow{i} & \widehat{P}_m - D \times B_{y_0} \times \mathcal{R}_{m-1}^{|A|<1} \\ \downarrow = & & \downarrow \approx \kappa \\ \widehat{\Sigma}_m & \xrightarrow{\rho_m} & \widehat{D} \wedge \widehat{B}_{y_0} \wedge \widehat{\Sigma}_{m-1} \end{array} \quad .$$

\square

⁵Pour alléger les notations, on identifie un espace à son image par un plongement.

Remarque 5.2.23. On dispose également d'une application instable

$$j_m : \begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{C}^{d+1}} \wedge \widehat{\Sigma}_{m-1} & \longrightarrow & \widehat{\Sigma}_m \\ ((\alpha, \beta), (A, \underline{B}, t)) & \mapsto & ((X - \alpha)A, \underline{B} + \beta A, t) \end{array}$$

respectant les filtrations. Attention : la composée $\rho_m \circ j_m$ n'est pas une équivalence d'homotopie.

5.3 Variantes

Nous donnons ici quelques applications de la méthode utilisée au § 5.2.

Soit E un espace pointé. Dans ce paragraphe, il convient de différencier les sous-quotients des modèles de May-Milgram pour les espaces $\Omega\Sigma E$ et $\Omega^2\Sigma^2 E$. On note

$$D_{i,1}(E) := \mathbf{R}_+^{(i)} \wedge_{\mathfrak{S}_i} X^{\wedge i} \quad \text{et} \quad D_{i,2}(E) := \mathbf{C}_+^{(i)} \wedge_{\mathfrak{S}_i} X^{\wedge i} \quad .$$

La relation d'ordre sur \mathbf{R} fournit une équivalence d'homotopie : $D_{i,1}(E) \approx E^{\wedge i}$.

a) Espace des points réels

Un bon indice que le scindement du Théorème 5.2.1 est de nature algébrique (*c.f.* Conjecture 3.G) est qu'il est $\mathbf{Z}/2$ -équivariant lorsque Y est définie sur \mathbf{R} .

Théorème 5.3.1. *Soit \mathcal{Y} une sous-variété complexe de \mathbf{C}^d , stable sous l'action de $\mathbf{Z}/2$ par conjugaison et pointée en un point y_0 réel (fixe). Alors, le $\mathbf{Z}/2$ -espace topologique $\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y}$ admet le scindement stable suivant :*

$$\mathcal{R}_m^{\text{hol}}\mathcal{Y} \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_{i,2}\mathcal{Y} \quad .$$

En particulier, pour toute variété algébrique quasi-projective Y définie sur \mathbf{R} , on a le scindement stable de $\mathbf{Z}/2$ -espaces

$$(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{R}) \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m (D_{i,2}(Y(\mathbf{C})))^{\mathbf{Z}/2} \quad .$$

DÉMONSTRATION — On vérifie que les arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 5.2.1 sont $\mathbf{Z}/2$ -équivariants. \square

Remarque 5.3.2. Soit E un $\mathbf{Z}/2$ -espace. Pour tout entier i , on a un homéomorphisme

$$(D_{i,2}E)^{\mathbf{Z}/2} \simeq \bigvee_{2c+r=i} (D_{c,2}E) \vee D_{r,1}(E^{\mathbf{Z}/2}) \quad .$$

En particulier, pour toute variété algébrique Y et pour tout entier i , on a un homéomorphisme

$$(D_{i,2}Y(\mathbf{C}))^{\mathbf{Z}/2} \simeq \bigvee_{2c+r=i} (D_{c,2}Y(\mathbf{C})) \vee D_{r,1}(Y(\mathbf{R})) \quad .$$

Ce scindement stable est en accord avec l'équivalence d'homotopie (*c.f.* [Xic06])

$$\text{map}_*(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \wedge Y(\mathbf{C}))^{\mathbf{Z}/2} \approx \Omega^2\Sigma^2(Y(\mathbf{C})) \times \Omega\Sigma(Y(\mathbf{R}))$$

et appuie la thèse que $\mathcal{R}_m Y$ tend à approximer $\Omega^{\mathbf{P}^1}\Sigma^{\mathbf{P}^1}Y$ lorsque $m \rightarrow \infty$.

b) Autres espaces polynomiaux

On esquisse ici une variante du Théorème 5.2.1 pour la géométrie algébrique réelle inspirée par les articles [GKY99, KY00, Kam05]. Pour tout espace semi-algébrique \mathcal{Y} , on définirait un espace semi-algébrique $\mathcal{R}'_m \mathcal{Y}$. Cet espace a vocation à approximer $\Omega(\mathbf{P}^1 \wedge \mathcal{Y})$.

Remarque 5.3.3. Attention : si Y est une variété algébrique définie sur \mathbf{R} , les espaces $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{R})$ et $\mathcal{R}'_m(Y(\mathbf{R}))$ ont en général des topologies bien différentes.

Pour simplifier, nous nous limitons au cas où \mathcal{Y} est un ouvert de \mathbf{C}^d .

Convention: Dans la suite du § 5.3.b), d est un entier strictement positif, (\mathcal{Y}, y_0) un ouvert non vide pointé de \mathbf{R}^d ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe fini et tel que l'espace complémentaire $Z := \mathbf{R}^d - Y$ ait aussi le type d'homotopie d'un CW-complexe fini.

Définition 5.3.4. Pour tout entier positif m , soit $\mathcal{R}'_m \mathcal{Y}$ le sous-espace ouvert de P_m décrit par

$$\mathcal{R}'_m \mathcal{Y} := \left\{ (A, \underline{B}) \in P_m, \quad (\alpha \in \mathbf{R} \text{ et } A(\alpha) = 0) \implies (\underline{B}(\alpha) \in \mathcal{Y}) \right\} .$$

Soit également Σ'_m le sous-espace complémentaire de $\mathcal{R}'_m \mathcal{Y}$ dans P_m :

$$\Sigma'_m := \left\{ (A, \underline{B}) \in P_m, \quad \exists \alpha \in \mathbf{R}, \quad A(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \underline{B}(\alpha) \in Z \right\} .$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.3.5. Pour tout entier positif m , l'espace $\mathcal{R}'_m \mathcal{Y}$ admet le scindement stable suivant :

$$\mathcal{R}'_m \mathcal{Y} \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_{i,1}(\Sigma \mathcal{Y}) \approx \bigvee_{i=1}^m (\Sigma \mathcal{Y})^{\wedge i} .$$

Il s'agit même d'un scindement stable au sens des $\mathbf{Z}/2$ -espaces lorsque l'on munit la suspension de l'action de la conjugaison complexe sur S^1 .

Le corollaire suivant est à rapprocher des résultats de [Kam05].

Corollaire 5.3.6. En particulier, l'espace des points fixes admet le scindement stable :

$$(\mathcal{R}'_m \mathcal{Y})^{\mathbf{Z}/2} \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^m D_{i,1}(\mathcal{Y}^{\mathbf{Z}/2}) \approx \bigvee_{i=1}^m (\mathcal{Y}^{\mathbf{Z}/2})^{\wedge i} .$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.3.5 — La démonstration est analogue à celle du Théorème 5.2.1. On montre plutôt le scindement stable du dual de Spanier-Whitehead $\widehat{\Sigma}'_m$.

Pour cela, soit $\widetilde{\Sigma}'_m$ le sous-espace de $\Sigma'_m \times \mathcal{B}_m(\mathbf{C})$ formé des triplets (A, \underline{B}, t) où t est un barycentre formel de racines réelles de A en lesquelles \underline{B} prend une valeur dans Z .

L'application de projection $\pi' : \widetilde{\Sigma}'_m \longrightarrow \Sigma'_m$ est propre et induit une équivalence d'homotopie (après une suspension).

La filtration de $\mathcal{B}_m(\mathbf{C})$ induit une filtration de $\widetilde{\Sigma}'_m$ qui se scinde après une suspension. Le dual du i ème sous-quotient de cette filtration est exactement dual de l'espace $D_{i,1} \mathcal{Y}$. \square

Remarque 5.3.7. Le scindement stable du Théorème 5.3.5 est en accord avec le scindement stable $\mathbf{Z}/2$ -équivariant

$$\Omega(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \wedge \mathcal{Y}) \stackrel{\text{st}}{\approx} \bigvee_{i=1}^{\infty} (\Sigma \mathcal{Y})^{\wedge i} .$$

On définirait une application $\iota'_m : \mathcal{R}'_m \mathcal{Y} \longrightarrow \Omega(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \wedge \mathcal{Y})$ comme au § 3.4.a) et l'on conjecturerait que cette application est fortement $\mathbf{Z}/2$ -connexe lorsque \mathcal{Y} l'est.

c) Remarques

La technique de scindement stable mise en œuvre dans les paragraphes précédents a un cadre d'application plus vaste que celui des espaces d'Atiyah-Hitchin. Elle conduit souvent à de nouvelles démonstrations (assez simples) de scindements stables déjà connus.

Par exemple, on retrouve très naturellement le scindement stable des espaces classifiants des groupes des tresses. De plus, en reprenant les notations du § 5.1, il est amusant de constater que la proposition suivante est une conséquence immédiate de l'égalité $F_{2m}\widehat{\Delta}_{2m+1} = \widehat{\Delta}_{2m+1}$.

Proposition 5.3.8. *L'application de stabilisation*

$$\mathbf{C}^{(2m)} / \mathfrak{S}_{2m} \longrightarrow \mathbf{C}^{(2m+1)} / \mathfrak{S}_{2m+1}$$

est une équivalence d'homotopie stable.

L'auteur croit que cette méthode s'applique à l'étude du type d'homotopie stable des espaces de nœuds. En particulier, elle pourrait permettre de montrer le scindement stable de l'espace des plongements de S^1 dans \mathbf{R}^n pour $n \geq 4$ conjecturé par Vassiliev (*c.f.* [Vas99] § 5.1). Il faudrait pour cela comprendre comment Vassiliev parvient à utiliser la dualité de Spanier-Whitehead sur des espaces de dimension infinie. Ceci est l'objet d'un futur travail.

Annexe A

Inégalité d'Hermité

Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Le but de cette annexe est de donner une démonstration élémentaire de la Proposition 1.2.10 n'utilisant que des notions de base d'algèbre linéaire et l'inégalité de Hermite pour les formes bilinéaires sur l'anneau $K[T]$. En fait, nous allons montrer que tout « chemin algébrique » de matrices symétriques non dégénérées sur K est obtenu en conjuguant une matrice symétrique constante par un « chemin algébrique » de matrices spéciales linéaires. Précisément on a la proposition suivante.

Proposition A.0.9. *Soit n un entier positif et $S(T)$ une matrice symétrique $n \times n$ à coefficients polynomiaux dans $K[T]$ et non dégénérée, c'est-à-dire telle que $\det(S(T)) \in K[T]^\times = K^\times$. (Autrement dit, $S(T)$ est un $K[T]$ -point du schéma \mathcal{S}_n des matrices symétriques non dégénérées). Alors, il existe une matrice symétrique constante $S_0 \in \mathcal{S}_n(K)$ et une matrice $P(T) \in SL_n(K[T])$ telle que l'on ait l'identité*

$$S(T) = {}^t P(T) S_0 P(T) \quad .$$

L'approche développée dans cette annexe est plus ou moins contenue dans [Oja90].

A.1 Inégalité d'Hermité

Rappelons tout d'abord ce qu'est l'inégalité de Hermite dans sa forme la plus classique, c'est-à-dire pour les formes bilinéaires symétriques entières.

Théorème A.1.1 (Inégalité de Hermite). *Soient n un entier positif, L un \mathbf{Z} -module libre de rang n et $b : L \times L \rightarrow \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique (éventuellement dégénérée).*

Posons

$$\mu(b) := \min_{x \in L - \{0\}} |b(x, x)| \quad .$$

Alors, on a l'inégalité suivante :

$$\mu(b) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} |D(b)|^{\frac{1}{n}} \quad ,$$

la notation $D(b)$ désignant le discriminant¹ de la forme b .

L'existence d'une inégalité de Hermite telle qu'énoncée ci-dessus est intimement liée au fait que tout nombre réel est à distance au plus $\frac{1}{2}$ d'un entier.

Voici le bon cadre algébrique de généralisation.

¹C'est-à-dire le déterminant de la matrice de Gram $[b(e_i, e_j)]$ pour toute base (e_i) de L .

Définition A.1.2. Soit k un corps. Une valeur absolue sur k est une application

$$\begin{aligned} k &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

- $\forall x \in k, \quad |x| \geq 0$;
- $|x| = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y \in k, \quad |xy| = |x||y|$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

On dit que la valeur absolue est *non-archimédienne* si l'on a de plus

$$\forall x, y \in k, \quad |x + y| \leq \max(|x|, |y|) \quad .$$

Proposition-définition A.1.3. Soit k un corps muni d'une valeur absolue. Un sous-anneau $A \subset k$ est dit de *Hermité* lorsqu'il satisfait aux conditions :

$$\begin{aligned} \forall a \neq 0, \quad |a| &\geq 1 \\ \exists 0 < \rho < 1, \quad \forall x \in k, \quad \exists a \in A, \quad |x - a| &\leq \rho \end{aligned}$$

On a alors les propriétés suivantes :

- Un sous-anneau de Hermité A est nécessairement principal.
- Un élément a de A est une unité si et seulement s'il vérifie $|a| = 1$.

Remarque A.1.4. Soit k un corps muni d'une valeur absolue, A un sous-anneau de Hermité de k , L un A -module libre de rang n et $b : L \times L \longrightarrow K$ une forme A -bilinéaire symétrique.

Alors le réel $|\det [b(e_i, e_j)]|$ ne dépend pas du choix de la base (e_i) de L choisie.

On l'appelle discriminant de b et on le note $|D(b)|$.

Théorème A.1.5 (Inégalité de Hermité généralisée). Soient k un corps muni d'une valeur absolue, A un sous-anneau de Hermité de k , L un A -module libre de rang n et $b : L \times L \longrightarrow K$ une forme A -bilinéaire symétrique.

Posons

$$\mu(b) := \min_{x \in L - \{0\}} b(x, x) \quad .$$

On a alors l'inégalité de Hermité généralisée :

$$\mu(b) \leq \left(\frac{1}{1 - \rho^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} |D(b)|^{\frac{1}{n}} \quad ,$$

ρ désignant la constante attachée à A .

Lorsque que l'on suppose la valeur absolue de k non archimédienne, l'inégalité précédente se précise en

$$\mu(b) \leq |D(b)|^{\frac{1}{n}} \quad .$$

Exemples A.1.6.

1. Pour $k = \mathbf{R}$ muni de sa valeur absolue usuelle. Le sous-anneau $A = \mathbf{Z}$ est de Hermité pour $\rho = \frac{1}{2}$. On retrouve l'inégalité de Hermité du Théorème A.1.1.
2. Soit $q > 1$ un réel fixé. On muni le corps des fractions rationnelles $K(T)$ de la valeur absolue suivante. On pose $|0| = 0$. Et pour toute fraction rationnelle $f \neq 0$, on écrit $f = \frac{A}{B}$ avec A et B des polynômes non nuls de $K[T]$ et l'on pose

$$|f| := q^{\deg A - \deg B} \quad .$$

Cette valeur absolue est non-archimédienne.

De plus, le sous-anneau A est de Hermité pour $\rho = \frac{1}{q}$. (Toute fraction rationnelle f s'écrit comme la somme de son polynôme partie entière et d'une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur).

A.2 Démonstration

La démonstration de la Proposition A.0.9 procède par récurrence sur l'entier n . Le cas $n = 1$ est évident (la matrice est constante).

Soit $S(T) \in \mathcal{S}_n(K[T])$ et soit $b : K[T] \times K[T] \rightarrow K[T]$ la forme bilinéaire symétrique associée. On reprend les notations de l'Exemple A.1.6 (2). Puisque $S(T)$ est non-dégénérée, on a $|D(b)| = 1$. Donc d'après l'inégalité de Hermite généralisée sur les corps non-archimédiens, on a

$$\mu(b) \leq 1 \quad .$$

Puisque S est à coefficients polynomiaux, on a $\mu(b) \in \mathbf{N}$ donc deux cas sont possibles.

- Soit $\mu(b) = 1$. Ceci signifie qu'il existe $x \in K[T]^n$ tel que l'on ait $b(x, x) = \lambda \in K[T]^\times = K^\times$. La matrice de Gram de b dans $L = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^\perp$, est donc de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad .$$

On applique l'hypothèse de récurrence à la restriction de b à $\langle x \rangle^\perp$ pour conclure.

- Soit $\mu(b) = 0$. Dans ce cas, il existe $x \in K[T]^n$ tel que l'on ait $b(x, x) = 0$. On peut même supposer x indivisible.

Puisque b est non-dégénérée, il existe $y \in K[T]^n$ tel que l'on ait $b(x, y) = 1$. La restriction de b à $\langle x, y \rangle$ est non dégénérée : sa matrice de Gram est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \quad ,$$

avec $\alpha \in K[T]$.

D'autre part, lorsque l'on remplace y par $y' := y + \lambda x$ pour $\lambda \in K[T]$, on change la valeur $b(x, y)$ en $b(x, y') = \alpha + 2\lambda$. Du fait que 2 est supposé inversible, on peut donc supposer $\alpha = 0$. Et l'on conclut alors en appliquant l'hypothèse de récurrence à la restriction de b à $\langle x, y \rangle^\perp$. \square

Annexe B

Opérades

Cette annexe présente succinctement la notion d'opéade. L'accent est mis sur l'exemple de l'opéade des petits disques qui joue un rôle important dans notre mémoire.

B.1 Définition et exemples

Notations:

- On note $\mathcal{E}ns^f$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et dont les morphismes sont les bijections.
- On note $\text{Fonct}(\mathcal{E}ns^f, \mathcal{T}op)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}ns^f$ dans $\mathcal{T}op$. Il s'agit d'une catégorie monoïdale (c.f. [Fre98], § 1.1.3).

Définition B.1.1. Une opéade topologique \mathcal{O} est un monoïde de la catégorie monoïdale $\text{Fonct}(\mathcal{E}ns^f, \mathcal{T}op)$. De manière plus concrète, une opéade topologique est un foncteur de $\mathcal{E}ns^f$ dans $\mathcal{T}op$ tel que :

- $\mathcal{O}(\emptyset) = \text{pt.}$
- pour toute surjection $p : E \twoheadrightarrow F$, on a une application *naturelle*¹

$$\mathcal{O}(F) \times \prod_{f \in F} \mathcal{O}(p^{-1}(f)) \xrightarrow{\mu_p} \mathcal{O}(E) \quad .$$

- Pour toutes surjections composées $E \xrightarrow{p} F \xrightarrow{q} G$ d'ensembles finis, on ait la relation d'associativité suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(G) \times \prod_{g \in G} \mathcal{O}((q \circ p)^{-1}(g)) & \xrightarrow{\mu_{q \circ p}} & \mathcal{O}(E) \\ \uparrow \prod_{g \in G} \mu_{(q \circ p)^{-1}(g) \rightarrow q^{-1}(g)} & & \uparrow \mu_p \\ \mathcal{O}(G) \times \prod_{g \in G} \left[\mathcal{O}(q^{-1}(g)) \times \prod_{h \in q^{-1}(g)} \mathcal{O}(p^{-1}(h)) \right] & \xrightarrow{\mu_q} & \mathcal{O}(F) \times \prod_{f \in F} \mathcal{O}(p^{-1}(f)) \end{array}$$

Un morphisme d'opérades topologiques est un morphisme de monoïdes dans la catégorie $\text{Fonct}(\mathcal{E}ns^f, \mathcal{T}op)$.

Exemples B.1.2. Soit $D := D(0, 1)$ le disque unité ouvert de \mathbf{C} .

1. Pour tout espace topologique X , l'opéade des endomorphismes de X , notée \mathcal{E}_X est le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}ns^f & \longrightarrow & \mathcal{T}op \\ E & \longmapsto & \text{map}_*(X^E, X) \end{array}$$

Les morphismes de structure sont induits par la composition des morphismes.

¹C'est-à-dire telle que pour tout diagramme commutatif $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & F \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ E' & \xrightarrow{p'} & F' \end{array}$, on ait la relation de compatibilité évidente.

2. L'opérade des petits disques est le foncteur $\mathcal{P} : \mathcal{E}ns^f \longrightarrow \mathcal{T}op$ tel que pour tout ensemble fini (non vide) E , $\mathcal{P}(E)$ soit l'ensemble des plongements $E \times D \hookrightarrow D$ de la forme

$$(e, z) \mapsto \lambda_e z + \tau_e$$

avec $\lambda_e \in \mathbf{R}_+^\times$ et $\tau_e \in D$ pour tout e dans E . Les morphismes de structure sont induits par la composition des plongements.

Annexe C

Stratifications

Cet annexe présente très succinctement la théorie des stratifications. Un de nos objectifs principaux est la théorie du contrôle, telle que développée par Mather dans [Mat70].

De bonnes références sur ce sujet sont entre autres :

- [Pfl01] et en particulier les paragraphes numérotés 1.2, 1.4, 3.1, 3.6, 3.7, 3.9 et 4.3.
- [GWdPL76], chapitres I et II.

Convention: Dans toute cette annexe, le terme variété signifie variété \mathbf{C}^∞ (riemannienne).

C.1 Définitions et exemples

Définition C.1.1. Soit X un espace topologique séparé. Une stratification (finie¹) \mathcal{S} de X est la donnée d'un ensemble fini I et pour tout élément i de I d'une sous-variété S_i de M (une *strate*) telle que :

- La famille $(S_i)_{i \in I}$ forme une partition de M .
- Pour tout couple $(i, j) \in I^2$ tel que l'intersection $S_i \cap \overline{S_j}$ soit non vide, on a $S_i \subset \overline{S_j}$.

Remarques C.1.2.

- L'ensemble des strates I est naturellement muni d'un ordre partiel : pour tout couple d'éléments (i, j) de I , on convient que $S_i \preceq S_j$ si et seulement si l'on a l'inclusion $S_i \subset \overline{S_j}$.
- On ne suppose pas les strates connexes *a priori*, mais en général on s'arrange pour qu'elles le soient.

Exemples C.1.3. Soit M une variété.

1. La stratification comportant pour seule strate l'espace M tout entier est qualifiée de *stratification triviale*.
2. Soit N une sous-variété fermée de M . Les strates $M - N$ et N forment une stratification de M . En général, si l'on spécialise les énoncés qui suivent sur ce cas particulier, on retrouve un résultat de topologie différentielle classique.

Les exemples les plus naturels de stratifications sont fournies par les ensembles algébriques.

Exemple C.1.4. Soit $n \geq 1$ un entier et $V \subset \mathbf{C}^n$ un ensemble algébrique, c'est-à-dire le lieu d'annulation d'une famille finie de polynômes de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$. L'ensemble des points singuliers de V est encore un ensemble algébrique (éventuellement vide) que nous notons $\text{Sing}(V)$. L'espace $V \setminus \text{Sing}(V)$ est un ouvert dense de V ; en particulier une sous-variété de \mathbf{C}^n . On pose alors $V_0 = V$ et $S_0 = \mathbf{C}^n \setminus V$, puis on définit par récurrence pour tout $i \geq 0$, $V_{i+1} = \text{Sing}(V_i)$ et $S_{i+1} = V_i \setminus V_{i+1}$ jusqu'à ce que l'on ait $V_i = \emptyset$.

Par construction, la famille des variétés (S_i) forme une stratification de \mathbf{C}^n que nous notons \mathcal{S}_V et que

¹Parce que c'est le seul cas qui nous intéresse, toutes les stratifications sont supposées finies, c'est-à-dire telles que l'ensemble des strates I soit fini. Les résultats de cette annexe s'adaptent aux stratifications localement finies, c'est-à-dire telle que tout point admet un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini des strates.

nous appelons stratification associée à l'ensemble algébrique V .

On a bien sûr pour tout entier i , $S_i \succ S_{i+1}$.

Exemple C.1.5. Soit $n \geq 1$ un entier ; on rappelle que le discriminant d'un polynôme complexe P unitaire de degré n de $\mathbf{C}[X]$ est par exemple défini par

$$\text{discr}(P) = \text{rés}_{n,n}(P, P') \quad .$$

L'espace $\text{Pol}_n(\mathbf{C})$ des polynômes complexes unitaires de degré n est homéomorphe à \mathbf{C}^n . Le sous-espace Δ_n de $\text{Pol}_n(\mathbf{C})$ constitué des polynômes ayant au moins une racine multiple est algébrique : c'est le lieu d'annulation du discriminant. La stratification $\mathcal{S}_{\Delta_n} = \mathcal{S}^{\text{pt}}$ de $\text{Pol}_n(\mathbf{C})$ associée à cette hypersurface algébrique joue un rôle majeur dans le chapitre 4 de ce mémoire. Ses strates sont décrites en détail au paragraphe 4.1 a).

Exemple C.1.6 (foncteur cône). Pour tout espace topologique X , on note ΓX le cône de X , c'est-à-dire la cofibre de l'inclusion $\{0\} \times X \hookrightarrow I \times X$. Une stratification \mathcal{S} de X induit une stratification sur ΓX admettant pour strates $\{0\}$ et les espaces $]0, 1] \times S$ pour toute strate S de \mathcal{S} .

Proposition C.1.7. Soit (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée.

1. Soit N une variété et $f : N \rightarrow M$ une application transverse à \mathcal{S} , c'est-à-dire transverse à toutes les strates de \mathcal{S} . Alors, la famille des sous-variétés $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(M)$ lorsque S parcourt l'ensemble des strates de \mathcal{S} forme une stratification de $f^{-1}(M)$, notée $f^{-1}(\mathcal{S})$ et appelée stratification pré-image de \mathcal{S} par f .
2. En particulier, une sous-variété $N \subset M$ transverse à \mathcal{S} est munie d'une stratification induite.

Nous avons également besoin de la notion de stratification équivariante.

Définition C.1.8. Soient G un groupe fini et M une G -variété. Une stratification G -équivariante de M est la donnée d'une stratification \mathcal{S} de M dans laquelle toutes les strates S de \mathcal{S} sont des sous- G -variétés de M .

C.2 Conditions de Whitney

Soit (M, \mathcal{S}) un espace stratifié. Lorsque l'espace total M est une variété stratifiée — ce qui est souvent le cas pour nous — H. Whitney a introduit dans [Whi65] des conditions de régularité sur la stratification \mathcal{S} assurant de bonnes propriétés locales. Nous rappelons ci-dessous ces conditions ainsi que quelques unes de leurs conséquences.

Définition C.2.1. Soient (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée et $R \preceq S$ deux strates de \mathcal{S} .

1. On dit que S est Whitney (A)-régulière par rapport à R lorsque la condition suivante (dite condition (A) de Whitney) est vérifiée :

Pour tout point r de $R \cap \overline{S}$ et pour toute suite (s_i) d'éléments de S convergeant vers r telle
 (A) que la suite des espaces tangents $T_{s_i}S$ converge¹ vers un espace T , alors on a $T_r R \subset T$.

Lorsque cette condition est vérifiée pour tout couple de strates $R \preceq S$, on dit que la stratification \mathcal{S} de M est (A)-régulière.

2. On dit que S est Whitney (B)-régulière par rapport à R lorsque la condition suivante (dite condition (B) de Whitney) est vérifiée :

Pour tout point r de $R \cap \overline{S}$ et pour toutes suites (r_i) et (s_i) d'éléments de R et S toutes
 (B) deux convergeant vers r et telles que la suite des espaces tangents T_{s_i} converge¹ vers un espace T et que la suite des droites $(x_i y_i)$ converge¹ vers une droite L alors on a $L \subset T$.

¹La notion de convergence mentionnée est bien définie si l'on choisit une carte au voisinage de r . Il s'agit alors de convergence dans un espace de grassmanniennes de \mathbf{R}^m , m désignant la dimension de M . On constate que cette notion ne dépend pas du choix de la carte, ce qui permet de lui donner un sens sur une variété quelconque.

Lorsque cette condition est vérifiée pour tout couple de strates $R \preceq S$, on dit que la stratification \mathcal{S} de M est (B)-régulière.

Lorsque ces deux conditions sont réalisées, on dit que la stratification est Whitney régulière ou encore que la stratification est de Whitney.

Remarque C.2.2. La condition (B) implique la condition (A) : une stratification (B)-régulière est automatiquement de Whitney.

Exemple C.2.3.

1. Pour toute sous-variété $N \subset M$, la stratification $M = N \amalg M - N$ de l'Exemple C.1.3 2 est de Whitney.
2. H. Whitney a montré dans [Whi65] que toute variété algébrique admet une stratification canonique qui est régulière.

La proposition suivante correspond à la Proposition 1.4 de [GWdPL76].

Proposition C.2.4.

1. L'image réciproque par une application transverse (c.f. Proposition C.1.7 (1)) d'une stratification de Whitney est une stratification de Whitney.
2. La stratification induite sur l'intersection de deux variétés stratifiées Whitney-régulières est de Whitney.

La régularité au sens de Whitney assure que la stratification n'est pas topologiquement monstrueuse. En particulier, la proposition suivante, qui est une conséquence du premier lemme d'isotopie de Thom, montre qu'une stratification de Whitney est toujours localement triviale.

Proposition C.2.5 ([Pfl01], Corollary 3.9.3). *Soient (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée de Whitney, S une strate et x un point de S . Alors, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et un voisinage ouvert V de x dans S et un espace stratifié F tel que l'on ait un homéomorphisme stratifié*

$$U = V \times \Gamma F \quad .$$

Ci-dessus, la notation Γ désigne le foncteur cône introduit dans l'Exemple C.1.6.

Remarque C.2.6. Noter que dans l'énoncé de la proposition précédente, il ne peut s'agir que de trivialité topologique. En général, l'homéomorphisme précédent n'est pas un difféomorphisme comme le montre l'exemple suivant.

Considérons la stratification de \mathbf{R}^2 associée à l'hypersurface algébrique C d'équation $y^2 = x^3$ (un *cusps*). Cette stratification est de Whitney ; elle comporte les trois strates :

$$\{0\} \quad , \quad C - \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^2 - C \quad .$$

Si l'on considère la stratification de S^1 associée à la décomposition $S^1 = S^0 \amalg S^1 - S^0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, un homéomorphisme stratifié de $B(0, \varepsilon)$ sur $\{0\} \times \Gamma S^1$. Cet homéomorphisme ne peut pas être différentiable en 0.

Pour nous, l'intérêt de cette condition de trivialité topologique de la stratification est que l'on dispose alors d'une bonne théorie de « voisinages tubulaires » d'une strate dans une strate adjacente.

C.3 Voisinages tubulaires

Dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur la notion de voisinage tubulaire. Nous rappelons au *a)* des résultats de topologie différentielle classique concernant les voisinages tubulaires d'une sous-variété. Puis, au *b)*, nous présentons les travaux de Mather qui permettent de donner une version équivariante et stratifiée des résultats précédents.

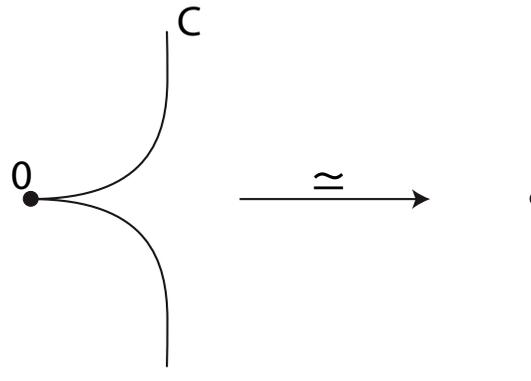


FIG. C.1 – Une stratification de Whitney est topologiquement localement triviale.

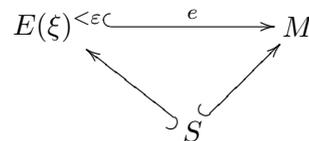
a) Cadre classique

Définition C.3.1. Soient M une variété (riemannienne) et S une sous-variété de M . Un voisinage tubulaire de S dans M est un triplet (ξ, ε, e) où

- ξ est un fibré vectoriel sur S .
On note $E(\xi)$ l'espace total de ce fibré, par la projection canonique $E(\xi) \xrightarrow{\text{pr}} S$ et $\rho : E(\xi) \rightarrow \mathbf{R}^+$ la norme riemannienne.
- $\varepsilon : S \rightarrow \mathbf{R}^+ - \{0\}$ est une fonction continue. (Pour tout point s de S , $\varepsilon(s)$ est le rayon du tube en s).
- e est un plongement du sous-espace

$$E(\xi)^{<\varepsilon} := \{x \in E(\xi), \rho(x) < \varepsilon(\text{pr}(x))\} \subset E(\xi)$$

dans M tel que le diagramme suivant commute :



Remarque C.3.2. On identifie souvent abusivement un voisinage tubulaire avec le sous-espace $T := e(E(\xi)^{<\varepsilon})$ de M . On note encore $\text{pr} : T \rightarrow S$, $\varepsilon : T \rightarrow \mathbf{R}^+ - \{0\}$, $\rho : T \rightarrow \mathbf{R}^+$ le « transfert par e » des applications pr , ε et ρ précédentes.

Définition C.3.3. On dit que le voisinage tubulaire (ξ', ε', e') est une compression de (ξ, ε, e) lorsque

- On a $\xi' = \xi$.
- Pour tout s de S , on a $\varepsilon'(s) \leq \varepsilon(s)$.
- Le plongement e' est la restriction de e au sous-espace $E(\xi')^{<\varepsilon'}$ de $E(\xi)^{<\varepsilon}$.

Proposition C.3.4. Soient M une variété et N une sous-variété de M . On construit grâce à l'application exponentielle un voisinage tubulaire (ν, ε, e) de N dans M , ν désignant le fibré normal de N dans M .

Théorème C.3.5. Soient M une variété, S une sous-variété et T et T' deux voisinages tubulaires de S dans M . Alors, il existe une isotopie² de voisinages tubulaires entre T et (un voisinage tubulaire isomorphe à) T' au-dessus de S .

DÉMONSTRATION — Quitte à comprimer T , on peut supposer que l'on a $T \subset T'$. On est alors ramené au lemme suivant.

²C'est-à-dire une application $H : T \times I \rightarrow M$ telle que pour tout $t \in I$, H_t soit un voisinage tubulaire.

Lemme C.3.6. Soient S une variété et ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de dimension d sur S . Soit également $f : E(\xi) \rightarrow E(\xi')$ un voisinage tubulaire de S (identifié à la section nulle de $E(\xi')$) dans $E(\xi')$. Alors, il existe une isotopie

$$F : E(\xi) \times I \rightarrow E(\xi')$$

telle que $F_1 = f$ et F_0 soit un isomorphisme de fibrés vectoriels.

DÉMONSTRATION DU LEMME C.3.6 (c.f. [LAN02], PROPOSITION 6.1) — On définit une isotopie F_t par la formule suivante :

$$\begin{aligned} F : E(\xi) \times I &\rightarrow E(\xi') \\ (e, t) &\mapsto \frac{1}{t}f(te) \end{aligned}$$

A priori, la formule précédente ne fait sens que lorsque $t > 0$; nous allons montrer qu'elle se prolonge en $t = 0$ et qu'elle fournit une isotopie entre f et isomorphisme de fibrés vectoriels entre ξ et ξ' .

Etudions le comportement de la formule lorsque $t \rightarrow 0$.

Le problème est local : on peut supposer que les fibrés ξ et ξ' sont triviaux. Le plongement $f : E(\xi) \hookrightarrow E(\xi')$ se représente donc comme une application $(\sigma, \nu) : S \times \mathbf{R}^d \rightarrow S \times \mathbf{R}^d$ où $\sigma : S \times \mathbf{R}^d \rightarrow S$ et $\nu : S \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$. On a :

$$f(s, v) = (\sigma(s, v), \nu(s, v)) \quad \forall s \in S, v \in \mathbf{R}^d \quad .$$

Dans ces coordonnées, on a $F((s, v), t) = (\sigma(s, tv), \frac{\nu(s, tv)}{t})$. Lorsque t tend vers 0, cette expression tend vers $(s, \frac{\partial \nu}{\partial y}(s, 0)(v))$. On pose donc $F((s, v), 0) := (s, \frac{\partial \nu}{\partial y}(s, 0)(v))$. Puisque f est un plongement, $\frac{\partial \nu}{\partial y}(s, 0)$ est injective et F_0 induit donc un isomorphisme de fibrés vectoriels entre ξ et ξ' . \square

Il est utile de noter que la démonstration du théorème C.3.5 conduit *mutatis mutandis* à la proposition suivante :

Proposition C.3.7. Soient M une variété, S et Σ deux sous-variétés transverses le long de leur intersection S^{restr} . Soient également T un voisinage tubulaire de S dans M , T^{restr} la restriction de T à S^{restr} et T^Σ un voisinage tubulaire de S^{restr} dans Σ . Alors, il existe une isotopie dans M entre T^{restr} et T^Σ au-dessus de S^{restr} .

b) Théorie (équivariante) du contrôle

On présente ici la théorie du contrôle développée par Mather dans [Mat70] qui garantit qu'une variété stratifiée de Whitney admet des voisinages tubulaires satisfaisant certaines conditions de régularité. Nous énonçons également les variantes de cette théorie dans un cadre équivariant.

Définition C.3.8. Soit (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée.

1. Un système \mathcal{T} de voisinages tubulaires de \mathcal{S} est la donnée pour chaque strate S de \mathcal{S} d'un voisinage tubulaire³ T_S de S dans M .
2. On dit que \mathcal{T} est contrôlé si les différents tubes vérifient les conditions de compatibilité suivantes
 - pour toutes strates R et S de \mathcal{S} , on a l'implication

$$(T_R \cap T_S \neq \emptyset) \implies (R \prec S \text{ ou } R = S \text{ ou } R \succ S) \quad .$$

- pour toute paire de strates $R \succ S$ de \mathcal{S} , on a

$$x \in T_R \cap T_S \implies \text{pr}_R(x) \in T_S \quad , \quad (\text{pr}_S \circ \text{pr}_R)(x) = \text{pr}_R(x) \quad \text{et} \quad \rho_S \circ \pi_R(x) = \rho_S(x) \quad .$$

L'espace $T_R \cap T_S$ est alors la restriction du tube T_R au sous-espace ouvert⁴ $T_S \cap R$ de R .

³Chaque strate est une sous-variété de M et il s'agit d'un voisinage tubulaire au sens classique, c.f. Définition C.3.1.

⁴L'espace $T_S \cap \bar{R}$ doit être considéré comme un voisinage tubulaire de S dans la strate R .

3. Si (M, \mathcal{S}) admet un tel système contrôlé de voisinages tubulaires, on dit que (M, \mathcal{S}) est contrôlable.

Définition C.3.9. Soient (M, \mathcal{S}) et (M', \mathcal{S}') deux variétés stratifiées contrôlées (c'est-à-dire munis de systèmes contrôlés de voisinages tubulaires), alors une application stratifiée $f : M \rightarrow M'$ est dite contrôlée si pour toute composante connexe S_0 d'une strate S de \mathcal{S} , il existe une strate R_{S_0} de \mathcal{S}' telle que l'on ait :

- $f(T_{S|S_0}) \subset T_{R_{S_0}}$.
- pour tout x dans T_{S_0} , $(f \circ \text{pr}_S)(x) = (\text{pr}_{R_{S_0}} \circ f)(x)$
- pour tout x dans T_{S_0} , $\rho_S(x) = (\rho_{R_{S_0}} \circ f)(x)$.

Exemple C.3.10.

1. Soit M une variété munie de sa stratification triviale (c.f. Exemple C.1.3 (1)). L'application $T = \text{id}_M$ fournit un système contrôlé de voisinages tubulaires que nous qualifierons de trivial.
2. Si $N \subset M$ est une sous-variété, tout voisinage tubulaire de N fournit un système de voisinages tubulaires contrôlé.

A part les exemples triviaux ci-dessus, il n'est pas *a priori* évident que des systèmes de voisinages tubulaires contrôlés existent. Le théorème suivant, qui est un cas particulier du théorème 3.6.9 de [Pfl01], montrent leur existence.

Théorème C.3.11. *Une variété stratifiée Whitney régulière est contrôlable.*

Le théorème suivant est le Lemma 3.9.2 de [Pfl01].

Théorème C.3.12 (Premier lemme d'isotopie de Thom). *Soient (M, \mathcal{S}) un espace contrôlé, N une variété munie de son système de voisinages tubulaires contrôlé trivial. Alors, une submersion propre contrôlée $f : M \rightarrow N$ est une fibration localement triviale.*

Le lemme suivant est un résultat *ad hoc* utile pour notre analyse de stratifications au Chapitre 4.

Lemme C.3.13 (Lemme de restriction, c.f. Lemme 4.2.10).

1. Soient (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée Whitney-régulière, S une strate de \mathcal{S} et T_S un voisinage tubulaire de S dans M . On suppose que S admet une sous-variété S^{restr} sur laquelle elle se rétracte par déformation.

Alors, quitte à le comprimer, le tube T_S se rétracte par déformation stratifiée sur sa restriction à S^{restr} , notée T_S^{restr} .

En particulier, pour toute strate $R \succeq S$, l'espace $T_R \cap S$ se rétracte par déformation sur son sous-espace $T_S^{\text{restr}} \cap R$.

2. Soient G un groupe fini, (M, \mathcal{S}) une G -variété stratifiée Whitney-régulière, S une G -strate et T_S un G -voisinage tubulaire de S dans M . On suppose que S admet une sous- G -variété S^{restr} sur laquelle elle se rétracte par déformation G -équivariante. Alors, quitte à le comprimer, le tube T_S se rétracte par déformation G -équivariante stratifiée sur sa restriction à S^{restr} , notée T_S^{restr} .

En particulier, pour toute G -strate $R \succeq S$, l'espace $T_R \cap S$ se rétracte par déformation G -équivariante sur son sous- G -espace $T_S^{\text{restr}} \cap R$.

DÉMONSTRATION — Nous démontrons le point (1), le second étant une adaptation du premier.

Soient $\rho : S \rightarrow S^{\text{restr}}$ la rétraction par déformation de S sur S^{restr} et $i : S^{\text{restr}} \hookrightarrow S$ l'inclusion. Par définition, il existe une homotopie $\tilde{\rho} : S \times I \rightarrow S$ entre $\tilde{\rho}_0 = \text{id}_S$ et $\tilde{\rho}_1 = i \circ \rho$. Soit alors T le produit fibré de $S \times I$ et T_S au dessus de S :

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & T_S \\ p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_R \\ S \times I & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & S \end{array}$$

L'application $T \rightarrow T_S$ est submersive et permet de relever la stratification de T_S en une stratification de Whitney de T . D'après le premier lemme d'isotopie de Thom (c.f. Théorème C.3.12), la projection canonique $p : T \rightarrow S \times I$ est une fibration localement triviale : pour tout x dans $S \times I$, il existe un ouvert U contenant x et un espace stratifié F tel que l'on ait un homéomorphisme d'espaces stratifiés

$$p^{-1}(U) \simeq U \times F \quad .$$

Puisqu'une fibration localement triviale au dessus d'une base du type $B = X \times I$ est triviale, on a un homéomorphisme d'espaces stratifiés $\varphi : T_S \times I \simeq T$. L'application composée $T_S \xrightarrow{\simeq} T_{|S \times \{1\}} = \rho^*(T_S^{\text{restr}}) \rightarrow T_S^{\text{restr}}$ donne une rétraction par déformation de T_S sur T_S^{restr} qui respecte la stratification. \square

Définition C.3.14. Soit (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée.

1. Un champ de vecteurs stratifié V sur M est la donnée, pour chaque strate S de \mathcal{S} , d'un champ de vecteurs lisse V_S sur S .
2. Un champ de vecteurs stratifié V sur M est dit contrôlé s'il existe un système contrôlé de voisinages tubulaires de M tel que pour toute paire de strates $R \succ S$ l'on ait :

$$T_{\text{pr}_S} \circ V_{T_S \cap R} = V \circ (\text{pr}_S)_{|T_S \cap R} \quad \text{et} \quad T_{\rho_S} \circ V_{|T_S \cap R} = 0 \quad .$$

Remarque C.3.15. Noter en particulier qu'un champ de vecteurs stratifié (même contrôlé) n'induit pas globalement de champ de vecteurs sur M : l'application sous-jacente $M \rightarrow TM$ n'est en général pas continue.

Par contre, le flot associé à un champ de vecteurs stratifié et contrôlé est continu sur M .

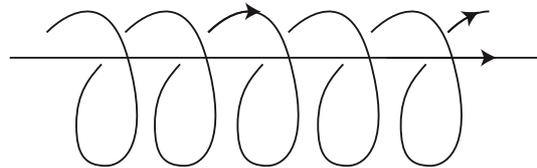


FIG. C.2 – Le flot est continu.

La proposition suivante est démontrée dans les théorèmes 3.7.3 et 3.7.6 de [Pfl01].

Proposition C.3.16. Soient X un espace contrôlé, M une variété (munie de sa stratification triviale) et $f : X \rightarrow M$ une submersion contrôlée. Alors, pour tout champ de vecteurs $W : M \rightarrow TM$, il existe un champ de vecteurs contrôlé $V : X \rightarrow TX$ satisfaisant la condition suivante :

$$Tf \circ V = W \circ f \quad .$$

De plus, si f est propre, et si W est intégrable, alors V est aussi intégrable.

Définition C.3.17. Soient (X, \mathcal{S}) une variété stratifiée, M_1 et M_2 deux sous-variétés stratifiées de X et $\iota_i : M_i \hookrightarrow X$ les inclusions canoniques ($i=1,2$). Une isotopie stratifiée entre M_1 et M_2 dans X est une application

$$F : M_1 \times I \rightarrow X$$

vérifiant les conditions suivantes :

- Pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $F_t = f_{|M_1 \times \{t\}}$ est un homéomorphisme stratifié de M_1 sur son image dans X .
- On a $F_0 = \iota_1$.
- Il existe un homéomorphisme stratifié $\varphi : M_1 \simeq M_2$ tel que l'on ait : $F_1 = \iota_2 \circ \varphi$.

Lorsque X est muni d'une application vers une base B , on définit une notion analogue d'isotopie au dessus de B .

Voici comment on peut énoncer l'unicité des voisinages tubulaires dans un contexte stratifié Whitney-régulier.

Théorème C.3.18.

1. Soient (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée Whitney-régulière, S une strate et T et T' deux voisinages tubulaires de S dans M . Les images de T et T' héritent de structures de variétés stratifiées Whitney-régulières. Alors, quitte à comprimer T et T' , il existe une isotopie stratifiée entre T et T' au-dessus de S .

En particulier, pour toute strate $R \succeq S$, et pour tous voisinages tubulaires T et T' assez petits de S , il existe un homéomorphisme $f : T \cap R \simeq T' \cap R$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} T \cap R & \xrightarrow{f} & T' \cap R \\ & \searrow pr & \swarrow pr' \\ & S & \end{array}$$

2. Soient G un groupe fini, (M, \mathcal{S}) une G -variété stratifiée Whitney-régulière, S une strate et T et T' deux G -voisinages tubulaires de S dans M . Les images de T et T' héritent de structures de G -variétés stratifiées Whitney régulières. Alors, quitte à comprimer T et T' , il existe une isotopie stratifiée G -équivariante entre T et T' au-dessus de S .

En particulier, pour toute strate $R \succeq S$, et pour tous voisinages tubulaires T et T' assez petits de S , il existe un homéomorphisme G -équivariant $f : T \cap R \simeq T' \cap R$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} T \cap R & \xrightarrow{f} & T' \cap R \\ & \searrow pr & \swarrow pr' \\ & S & \end{array}$$

DÉMONSTRATION — Démontrons l'énoncé (1).

Comme dans la proposition C.3.5 (l'unicité classique des voisinages tubulaires), on peut, quitte à comprimer T , supposer que l'on a $T \subset T'$.

Soit alors $\iota : T \times I \hookrightarrow T' \times I$ une isotopie entre T et T' donnée par la proposition C.3.5. *A priori* ι ne respecte pas la stratification. L'application ι est un plongement ; l'image par ι_* du champ de vecteurs $(0, \frac{\partial}{\partial t})$ définit un champ de vecteurs, disons V , sur $T' \times I$ (quitte à prolonger hors de l'ouvert image de ι). Par construction, V est intégrable et le flot associé « redresse » $\iota_1(T)$ sur $\iota_0(T)$.

Considérons l'espace $T' \times_S T'$ muni de ses deux projections pr_1 et pr_2 sur T' . Cet espace $T' \times_S T'$ hérite de la stratification pré-image donnée par la projection pr_1 sur le premier facteur. Cette stratification est de Whitney. Il y a une bijection entre l'ensemble des strates de $T' \times_S T'$ et celui de T' : un point (x_1, x_2) de $T' \times_S T'$ est dans une strate R si et seulement si le point $x_1 \in T'$ est dans R .

La Proposition C.3.16 appliquée à la projection $p_2 \times \text{id}$ montre qu'il existe un champ de vecteurs stratifié, contrôlé et intégrable W sur $T' \times_S T' \times I$ tel que $(p_2 \times \text{id})_*(W) = V \circ (p_2 \times \text{id})$. Soit $D \simeq T' \times I \hookrightarrow T' \times_S T' \times I$ le sous-espace « diagonal ». L'image par $(p_1 \times \text{id})_*$ de la restriction de W à D donne un champ de vecteurs \tilde{V} stratifié, contrôlé et intégrable sur $T' \times I$. Par construction, pour tout point (x, t) de $T' \times I$, on a

$$pr'_*(V(x, t)) = pr'_*(\tilde{V}(x, t))$$

(pr' désignant ici la projection canonique de T' sur S).

L'intégration de ce flot fournit une isotopie stratifiée entre T et (une compression de) T' . \square

De même que dans le cas classique (*c.f.* Proposition C.3.7), la démonstration du théorème C.3.18 conduit *mutatis mutandis* à la proposition suivante :

Proposition C.3.19 (Lemme d'isotopie, *c.f.* Lemme 4.2.11).

1. Soient (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée de Whitney, S une strate et Σ une sous-variété de M transverse à \mathcal{S} (c'est-à-dire transverse à toute les strates de \mathcal{S}). On note S^{restr} l'intersection $S \cap \Sigma$. Soient également T un voisinage tubulaire de S dans M , T^{restr} la restriction de T à S^{restr} et T^Σ un voisinage tubulaire de S^{restr} dans Σ . Les espaces T^{restr} et T^Σ héritent de stratifications de Whitney et quitte à comprimer T^{restr} et T^Σ , il existe une isotopie stratifiée entre T^{restr} et T^Σ au-dessus de S^{restr} .
2. Soient G un groupe fini, (M, \mathcal{S}) une G -variété stratifiée de Whitney, S une strate et Σ une sous- G -variété de M transverse à \mathcal{S} (c'est-à-dire transverse à toute les strates de \mathcal{S}). En particulier, \mathcal{S} induit une G -stratification de Σ encore Whitney-régulière. On note S^{restr} l'intersection $S \cap \Sigma$. Soient également T un G voisinage tubulaire de S dans M , T^{restr} la restriction de T à S^{restr} et T^Σ un G -voisinage tubulaire de S^{restr} dans Σ . Les espaces T^{restr} et T^Σ héritent de stratifications de Whitney et quitte à les comprimer, il existe une isotopie stratifiée G -équivariante entre T^{restr} et T^Σ au-dessus de S^{restr} .

On en déduit l'unicité du diagramme de Cech associé à un système contrôlé de voisinages tubulaires au sens suivant.

Corollaire C.3.20. Soient (M, \mathcal{S}) une variété stratifiée (finie) de Whitney et \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux systèmes de voisinages tubulaires contrôlés. Alors, quitte à comprimer les voisinages tubulaires, on a une équivalence d'homotopie naturelle entre les diagrammes de Cech $\tau_\bullet(\mathcal{T})$ et $\tau_\bullet(\mathcal{T}')$.

DÉMONSTRATION — Quitte à comprimer, on peut supposer que tous les tubes de \mathcal{T} sont contenus dans ceux de \mathcal{T}' . Nous allons montrer que l'inclusion canonique $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}'$ induit une équivalence d'homotopie naturelle entre les diagrammes de Cech.

On montre par récurrence sur k l'assertion suivante :

(A)_k On a une isotopie dans la strate S_1 entre $S_1 \cap T_{S_2} \cap \cdots \cap T_{S_k}$ et $S_1 \cap T'_{S_2} \cap \cdots \cap T'_{S_k}$.

Cette assertion implique l'énoncé du Corollaire car T_{S_1, \dots, S_k} est la restriction de T_{S_1} à $S_1 \cap T_{S_2, \dots, S_k}$ et que par unicité des voisinages tubulaires, la restriction de T_{S_1} à $S_1 \cap T'_{S_2, \dots, S_k}$ est isotope à la restriction de T'_{S_1} à $S_1 \cap T'_{S_2, \dots, S_k}$.

La récurrence est basée sur une utilisation analogue du lemme d'unicité des voisinages tubulaires. \square

Annexe D

Dualité de Spanier-Whitehead

Ce paragraphe présente succinctement les quelques points de dualité (équivariante) de Spanier-Whitehead dont nous avons besoin pour prouver le scindement stable de l'espace des points complexes des schémas d'Atiyah-Hitchin au Chapitre 5. Nous renvoyons le lecteur à [Spa59], [Ada74] et à [Ada84] pour des exposés intuitifs mais parfois vagues et au chapitre III de [LMSM86] pour un traitement plus que complet, mais d'abord plus difficile, de la théorie équivariante.

D.1 Cadre classique

Convention: Dans ce paragraphe, convenons qu'un espace noté X ou Y est pointé et a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini.

a) Définition

Définition D.1.1. Soit n un entier. Une n -dualité de X est la donnée d'un espace topologique pointé Y et d'une application stable

$$\varepsilon : X \wedge Y \dashrightarrow S^n$$

telle que, pour tout entier $q \in \mathbf{Z}$, l'application canonique

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_* : \{S^q, Y\} & \longrightarrow & \{S^q \wedge X, S^n\} \\ \varphi & \longmapsto & \varepsilon \circ (1_X \wedge \varphi) \end{array}$$

soit un isomorphisme. On dit alors que Y est un n -dual de X et l'on note¹ $Y \simeq \mathcal{D}_n X$.

Remarque D.1.2. Si Y est un n -dual de X , alors ΣY est un $(n+1)$ -dual de X .

Lemme D.1.3. Soit $\varepsilon : X \wedge Y \dashrightarrow S^n$ une n -dualité. Alors, pour tous CW-complexes finis Z et T , l'application canonique $\{T, Z \wedge Y\} \xrightarrow{\varepsilon_*} \{T \wedge X, Z \wedge S^n\}$ est une bijection.

DÉMONSTRATION — On fait une récurrence sur le nombre de cellules de Z et T . □

On a la caractérisation suivante des n -dualités.

Lemme D.1.4. Une application stable $\varepsilon : X \wedge Y \dashrightarrow S^n$ est une n -dualité si et seulement s'il existe une application stable $\eta : S^n \dashrightarrow X \wedge Y$ telle que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} S^n \wedge X & \xrightarrow{\eta \wedge 1_X} & X \wedge Y \wedge X \\ & \searrow \tau & \downarrow 1_X \wedge \varepsilon \circ \tau \\ & & X \wedge S^n \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y \wedge S^n & \xrightarrow{1_Y \wedge \eta} & Y \wedge X \wedge Y \\ \tau \downarrow & & \downarrow \varepsilon \circ \tau \wedge 1_Y \\ S^n \wedge Y & \xrightarrow{\sigma \wedge 1_Y} & S^n \wedge Y \end{array} .$$

¹L'auteur est bien conscient que cette notation est abusive puisque Y n'est pas un foncteur en X . Il faudrait plutôt considérer le spectre de suspension de Y et écrire $\Sigma^\infty Y \simeq \mathcal{D}_n X$ (c.f. Proposition D.1.7). Pour alléger les notations, on omet le symbole Σ^∞ .

Ci-dessus, τ désigne une application d'échange de deux facteurs et $\sigma : S^n \longrightarrow S^n$ l'application de signe, induite par l'application $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto -x \in \mathbf{R}^n$.

De plus, si η est comme ci-dessus, alors, pour tous CW-complexes finis Z et T , l'application canonique $\eta^* : \{T \wedge X, Z\} \longrightarrow \{T, Y \wedge Z\}$ est un inverse de l'application ε_* .

DÉMONSTRATION — Soit ε une n -dualité. On définit η comme l'image inverse de la transposition $\tau : S^n \wedge X \longrightarrow X \wedge S^n$ dans la bijection $\varepsilon_* : \{S^n, X \wedge Y\} \longrightarrow \{S^n \wedge X, X \wedge S^n\}$ du lemme D.1.3 pour $Z = X$ et $T = S^n$. On vérifie alors la commutativité des deux diagrammes ci-dessus.

Réciproquement, si η fait commuter les deux diagrammes, l'application canonique $\eta^* : \{S^q \wedge X, S^n\} \longrightarrow \{S^q, Y\}$ fournit un inverse à ε_* .

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur au Théorème 1.6 et au Lemme 3.5 de [LMSM86]. \square

Corollaire D.1.5.

- Si Y est un n -dual de X , alors X est un n -dual de Y .
- Si Y_1 est un n -dual de X_1 et Y_2 est un n -dual de X_2 , alors $Y_1 \vee Y_2$ est un n dual de $X_1 \vee X_2$.
- Si Y_1 est un n_1 -dual de X_1 et Y_2 est un n_2 -dual de X_2 , alors $Y_1 \wedge Y_2$ est un $n_1 + n_2$ dual de $X_1 \wedge X_2$.

Définition D.1.6. Soit X un CW-complexe fini. On note $F(X)$ le dual fonctionnel de X dans la catégorie des spectres; $F(X)$ est par définition le spectre formé des espaces $(\text{map}_*(X, S^k))_k$ et des applications

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge \text{map}_*(X, S^k) & \longrightarrow & \text{map}_*(X, S^{k+1}) \\ (t, f) & \longmapsto & (x \mapsto (f(x), t)) \end{array} \quad .$$

Proposition D.1.7. Soit Y un n -dual de X . Alors on a une équivalence d'homotopie (faible) de spectres

$$\Sigma^\infty Y \xrightarrow{\cong} \Sigma^n F(X) \quad .$$

En particulier, le type d'homotopie stable d'un n -dual de X ne dépend que du type d'homotopie (stable) de X .

b) Détermination de duaux

La proposition suivante, due à Spanier et Whitehead, est importante et classique. Elle permet le calcul du dual d'un sous-espace raisonnable d'un espace euclidien. La présentation que l'on donne est tirée de [LMSM86], c.f. Théorème 4.2.

Proposition D.1.8. Soit X un sous-espace de \mathbf{R}^n rétracte d'un voisinage ouvert (ENR, dans la terminologie anglo-saxonne). Soit également A un sous-espace fermé de X tel que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ soit une cofibration. Alors on a une n dualité entre les mapping cônes $C(X, A)$ et $C(S^n - A, S^n - X)$.

En particulier, pour X un CW-complexe fini non vide pointé plongé dans \mathbf{R}^{n+1} et A son point de base, on a une n -dualité

$$Y := S^{n+1} - X \simeq \mathcal{D}_n(X) \quad .$$

Corollaire D.1.9. Soient X un CW-complexe fini ouvert de l'espace euclidien \mathbf{R}^{n+1} et $Z := \mathbf{R}^{n+1} - X$ l'espace complémentaire. Alors on a une n -dualité

$$\widehat{Z} \simeq \mathcal{D}_n X \quad .$$

(On rappelle que la notation \widehat{Z} désigne le compactifié d'Alexandroff de l'espace topologique Z).

Voici enfin le calcul du dual d'une variété. On y réfère souvent sous le nom de *dualité d'Atiyah* (c.f. [Ati61]).

Soit X une variété de dimension (réelle) d et φ un plongement de X dans \mathbf{R}^n . On note $\text{th}(\nu_\varphi)$ l'espace de Thom du fibré normal de X dans \mathbf{R}^n et $\text{Th}(\nu_\varphi)$ le spectre $\Sigma^{d-n}\Sigma^\infty\text{th}(\nu_\varphi)$. La normalisation est telle que la classe de Thom dans la cohomologie de $\text{Th}(\nu_\varphi)$ soit en degré 0.

Si $m > n$, on considère \mathbf{R}^n comme le sous-espace de \mathbf{R}^m via l'inclusion standard. Si φ est un plongement dans \mathbf{R}^n , on note $\varphi \times \{0\}$ le plongement dans \mathbf{R}^m associé. On a alors un homéomorphisme $\Sigma^{m-n}\text{th}(\nu_\varphi) \simeq \text{th}(\nu_{\varphi \times \{0\}})$. Soient φ et ψ deux plongements quelconques de X dans \mathbf{R}^n . Si m est suffisamment grand, φ et ψ sont isotopes dans \mathbf{R}^m . Une telle isotopie induit une équivalence d'homotopie $\text{th}(\nu_\varphi) \approx \text{th}(\nu_\psi)$. Ceci montre le spectre $\text{Th}(\nu_\varphi)$ ne dépend que de X (et pas du plongement φ).

Définition D.1.10. Le spectre de la discussion précédente est appelé spectre de Thom de X et noté $\text{Th}(X)$.

Proposition D.1.11. Soit X une variété de dimension (réelle) d . Alors on a une d -dualité

$$\mathcal{D}_d(\widehat{X}) \simeq \text{Th}(X) \quad .$$

Corollaire D.1.12. Soit X une variété de dimension réelle d .

– Si X est compacte, on a une d -dualité

$$\mathcal{D}_d(X_+) \simeq \text{Th}(X) \quad .$$

– Si X est stablement parallélisable, on a une d -dualité

$$\mathcal{D}_d(\widehat{X}) \simeq X_+ \quad .$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE D.1.12 — C'est une conséquence de l'homéomorphisme canonique $\widehat{X} \simeq X_+$ lorsque X est compacte et de l'équivalence de spectres $\text{Th}(X) \simeq \Sigma^\infty(X_+)$ lorsque X est stablement parallélisée. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION D.1.11 — Soient X une variété de dimension d et $\varphi : X \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ un plongement propre de X dans un espace euclidien. Puisque φ est propre, il se prolonge en une application $\widehat{\varphi} : \widehat{X} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{R}^{n+1}} \simeq S^{n+1}$. Dans la suite, on omet de mentionner φ et l'on considère X comme une sous-variété fermée de \mathbf{R}^{n+1} . On considère également \widehat{X} comme un sous-espace de S^{n+1} . Pour montrer la proposition, on va montrer que l'on a une $(n+1)$ -dualité

$$\mathcal{D}_{n+1}(\widehat{X}) \simeq \text{th}(\nu_X) \quad .$$

D'après la Proposition D.1.8, on a une n -dualité

$$\mathcal{D}_n(\widehat{X}) \simeq \mathbf{R}^{n+1} - X \quad .$$

Soit C la cofibre homotopique de l'inclusion $Y = \mathbf{R}^{n+1} - X \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. Puisque \mathbf{R}^{n+1} est contractile, on a une équivalence d'homotopie stable $C \overset{\text{st}}{\simeq} \Sigma Y$ (une suspension suffit).

D'autre part, soit T un voisinage tubulaire (ouvert) standard (c'est-à-dire donné par l'exponentielle de la métrique euclidienne) de X dans \mathbf{R}^{n+1} . L'inclusion $\mathbf{R}^{n+1} - T \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1} - X$ est une équivalence d'homotopie et l'inclusion $\mathbf{R}^{n+1} - T \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ est une cofibration. L'espace C a donc le type d'homotopie de l'espace quotient $\mathbf{R}^{n+1} / (\mathbf{R}^{n+1} - T) = \text{th}(\nu_X)$.

Ceci montre la dualité annoncée. \square

D.2 Cadre équivariant

Soit G un groupe fini. On présente dans ce paragraphe la notion de dualité de Spanier-Whitehead G -équivariante.

Convention: Convenons que, dans ce paragraphe, les G -espaces topologiques notés X et Y sont pointés² et ont le type d'homotopie G -équivariant d'un G -CW-complexe fini.

Notations:

- Si X et Y sont deux G -espaces topologiques, on note $[X, Y]_G$ les classes d'homotopie G -équivariante d'applications G -équivariantes entre X et Y .
- Il est commode de fixer un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations (réelles) irréductibles de G , disons $\mathbf{V} = \{V_1, \dots, V_r\}$. On note 1 la représentation triviale (c'est-à-dire \mathbf{R} muni de l'action triviale) et n la somme directe $1 \oplus \dots \oplus 1$ de n exemplaires de cette représentation.
- Pour toute représentation $V \in \mathbf{V}$ de G , on note S^V le G -espace pointé \widehat{V} et Σ^V le foncteur $X \mapsto S^V \wedge X$.
- Pour tout $V \in \mathbf{V}$ et pour tous G espaces X et Y , on dispose d'un morphisme de suspension $[X, Y]_G \longrightarrow [\Sigma^V X, \Sigma^V Y]_G$.
- Soit \mathcal{V} la catégorie dont les objets sont les sommes directes finies d'éléments de \mathbf{V} et dont les morphismes sont donnés par les inclusions.
- Pour tous G -espaces X et Y , on définit l'ensemble des classes d'homotopie stables d'applications équivariantes

$$\{X, Y\}_G := \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{V}} [\Sigma^W X, \Sigma^W Y]_G \quad ,$$

la colimite étant prise sur les applications de suspension.

- Pour tout sous-groupe $H \subset G$, on note S_H^n la G -cellule $S^n \wedge (G/H)_+$. Par définition un G -CW complexe s'obtient en recollant de telles cellules.
- Pour tout G -espace X , $\Sigma^{\mathcal{V}} X$ désigne le G -spectre de suspension de X .

a) Définition

Définition D.2.1. Soit $V \in \mathcal{V}$ une représentation de G . Une V -dualité de X est la donnée d'un G -CW complexe fini et pointé Y et d'une application stable G -équivariante

$$\varepsilon : X \wedge Y \dashrightarrow S^V$$

telle que pour tout $q \in \mathbf{Z}$ et tout sous-groupe H , l'application canonique

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_* : \{S_H^q, Y\}_G & \longrightarrow & \{S_H^q \wedge X, S^V\}_G \\ \varphi & \longmapsto & \varepsilon \circ (1_X \wedge \varphi) \end{array}$$

soit un isomorphisme. On dit alors que Y est un V -dual de X et l'on note³ $Y = \mathcal{D}_V X$.

Remarque D.2.2.

- Dans le cas où $G = \{1\}$, on retrouve la notion de dualité du paragraphe précédent.
- Si Y est un V -dual de X , alors pour tout $W \in \mathcal{V}$, $\Sigma^W Y$ est un $(V \oplus W)$ -dual de X .

De même que dans le cadre non équivariant, on a les lemmes suivants.

Lemme D.2.3. Soit $\varepsilon : X \wedge Y \dashrightarrow S^V$ une V -dualité. Alors, pour tous G -CW-complexes finis Z et T , l'application canonique $\{T, Z \wedge Y\}_G \xrightarrow{\varepsilon_*} \{T \wedge X, Z \wedge S^V\}_G$ est une bijection.

On a la caractérisation suivante des G -dualités.

²Le point base est supposé fixe sous l'action de G .

³Là encore, la notation est abusive : on devrait noter $\Sigma^{\mathcal{V}} Y \simeq \mathcal{D}_V(X)$.

Lemme D.2.4. Une application stable $\varepsilon : X \wedge Y \dashrightarrow S^n$ est une V -dualité si et seulement si il existe une G -application stable $\eta : S^V \dashrightarrow X \wedge Y$ telle que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} S^V \wedge X & \xrightarrow{\eta \wedge 1_X} & X \wedge Y \wedge X \\ & \searrow \tau & \downarrow 1_X \wedge \varepsilon \circ \tau \\ & & X \wedge S^V \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y \wedge S^V & \xrightarrow{1_Y \wedge \eta} & Y \wedge X \wedge Y \\ \tau \downarrow & & \downarrow \varepsilon \circ \tau \wedge 1_Y \\ S^V \wedge Y & \xrightarrow{\sigma \wedge 1_Y} & S^V \wedge Y \end{array} .$$

De plus, si η est comme ci-dessus, alors, pour tous G -CW-complexes finis Z et T , l'application canonique $\eta^* : \{T \wedge X, Z\}_G \longrightarrow \{T, Y \wedge Z\}_G$ est un inverse de l'application ε_* .

Corollaire D.2.5.

- Si Y est un V -dual de X , alors X est un V -dual de Y .
- Si Y_1 est un V -dual de X_1 et Y_2 est un V -dual de X_2 , alors $Y_1 \vee Y_2$ est un V -dual de $X_1 \vee X_2$.
- Si Y_1 est un V_1 -dual de X_1 et Y_2 est un V_2 -dual de X_2 , alors $Y_1 \wedge Y_2$ est un $(V_1 \oplus V_2)$ -dual de $X_1 \wedge X_2$.

La proposition suivante est remarquable en ce qu'elle donne un critère *non équivariant* pour reconnaître une G -dualité. Il s'agit du Théorème 3.6 de [LMSM86].

Proposition D.2.6. Une G -application stable $\varepsilon : X \wedge Y \dashrightarrow S^V$ est une V -dualité si et seulement si pour tout sous-groupe $H \subset G$, l'application restreinte aux points fixes

$$\varepsilon^H : X^H \wedge Y^H \dashrightarrow (S^V)^H$$

est une $\dim(V^H)$ -dualité (non équivariante).

Corollaire D.2.7. Soient X un CW-complexe (non équivariant) et Y un d -dual (non équivariant) de X . On considère X et Y comme munis de l'action triviale de G . Alors, Y est un d -dual équivariant de X .

Définition D.2.8. On note $F^G(X)$ le G -dual fonctionnel de X (dans la catégorie des G -spectres). Par définition, $F^G(X)$ est le G -spectre formé des espaces $(\text{map}_*^G(X, S^W))_W$ et des G -applications

$$\begin{array}{ccc} S^{V_i} \wedge \text{map}_*(X, S^W) & \longrightarrow & \text{map}_*(X, S^{W \oplus V_i}) \\ (t, f) & \longmapsto & (x \mapsto (f(x), t)) \end{array} .$$

Proposition D.2.9. Soient $V \in \mathcal{V}$ une représentation de G et Y un V -dual de X . Alors on a une équivalence d'homotopie (faible) de G -spectres

$$\Sigma^\infty Y \xrightarrow{\cong} \Sigma^V F^G(X) .$$

En particulier, le type d'homotopie G -équivariant stable d'un V -dual de X ne dépend que du type d'homotopie équivariant (stable) de X .

b) Détermination de G -duaux

Voici l'analogie G -équivariant de la Proposition D.1.8. Il s'agit du Théorème 4.1 de [LMSM86].

Proposition D.2.10. Soient $V \in \mathcal{V}$ une représentation de G et X un sous- G -espace de \mathbf{R}^V rétracte d'un voisinage ouvert G -équivariant (G -ENR). Soit également A un sous- G -espace fermé de X tel que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ soit une cofibration. Alors, les mapping cônes $C(X, A)$ et $C(S^V - A, S^V - X)$ sont V -duaux.

En particulier, pour X un G -CW-complexe fini non vide pointé plongé dans $\mathbf{R}^{V \oplus 1}$ et A son point base, on a une V -dualité

$$Y := S^{V \oplus 1} - X = \mathcal{D}_V(X) .$$

Corollaire D.2.11. *Soient X un sous- G -CW complexe ouvert de l'espace euclidien $\mathbf{R}^{V \oplus 1}$ et $Z := \mathbf{R}^{V \oplus 1} - X$ le G -espace complémentaire. Alors on a une V -dualité*

$$\mathcal{D}_V X \simeq \widehat{Z} \quad .$$

(Ci-dessus \widehat{Z} est le compactifié d'Alexandroff, muni de sa structure naturelle de G -espace).

Voici l'analogie équivariant de la Proposition D.1.11 pour le calcul du dual d'une G -variété.

Soit X une G -variété de dimension (réelle) d , $V \in \mathcal{V}$ une représentation de G et φ un plongement équivariant de X dans \mathbf{R}^V . On note $\text{th}(\nu_\varphi)$ l'espace de Thom du fibré normal de X dans \mathbf{R}^V . Cet espace est naturellement muni d'une action de G . On note $\text{Th}(\nu_\varphi)$ le G -spectre $\Sigma^{d \oplus V} \Sigma^{\mathcal{V}} \text{th}(\nu_\varphi)$. Si W est une autre représentation de G , on considère \mathbf{R}^V comme le sous- G -espace de $\mathbf{R}^{V \oplus W}$ via l'inclusion standard. Si φ est un plongement dans \mathbf{R}^V , on note $\varphi \times \{0\}$ le plongement dans $\mathbf{R}^{V \oplus W}$ associé. On a alors un homéomorphisme G -équivariant $\Sigma^W \text{th}(\nu_\varphi) \simeq \text{th}(\nu_{\varphi \times \{0\}})$. Soient φ et ψ deux plongements quelconques de X dans \mathbf{R}^V . Si W est suffisamment « grand », φ et ψ sont G -isotopes dans $\mathbf{R}^{V \oplus W}$. Une telle isotopie induit une G -équivalence d'homotopie $\text{th}(\nu_\varphi) \approx \text{th}(\nu_\psi)$.

Ceci montre le G -spectre $\text{Th}(\nu_\varphi)$ ne dépend que de X (et pas du plongement φ).

Définition D.2.12. Le spectre de la discussion précédente est appelé G -spectre de Thom de X et noté $\text{Th}^G(X)$.

Proposition D.2.13. *Soit X une G -variété de dimension d . Alors, on a une d -dualité*

$$\mathcal{D}_d(\widehat{X}) \simeq \text{Th}^G(X) \quad .$$

DÉMONSTRATION — La démonstration est *mutatis mutandis* la même que celle de la Proposition D.1.11. Nous indiquons juste des références pour les adaptations techniques relatives à l'action de G .

- Une G -variété se plonge *proprement* dans un G -espace euclidien \mathbf{R}^V (c.f. [Bre72] Chapter II, Corollary 10.2).
- Une sous- G -variété d'une G -variété admet un voisinage tubulaire G -équivariant (c.f. [Bre72] Chapter VI, Theorem 2.2).
- Si $A \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow \Sigma A \rightarrow \dots$ est une suite cofibrée de G -espaces telle que X soit G -contractile, alors l'application $C \rightarrow \Sigma A$ induit une G -équivalence d'homotopie stable. \square

Corollaire D.2.14. *Soit X une G -variété de dimension d .*

- *Si X est compacte, on a une d -dualité :*

$$\mathcal{D}_d X_+ \simeq \text{Th}^G(X) \quad .$$

- *Si X est stablement G -parallélisée, on a une d -dualité :*

$$\mathcal{D}_d \widehat{X} \simeq X_+ \quad .$$

D.3 Comparaison entre dualités classique et équivariante

On dispose toujours du foncteur d'oubli \mathcal{O} de la catégorie des G -CW complexes finis dans la catégorie des CW-complexes finis.

Fait D.3.1. Soient G un groupe fini, V une représentation de G et X un G -CW-complexe. Si Y est un V -dual de X , alors $\mathcal{O}(Y)$ est un $\dim(V)$ -dual de $\mathcal{O}(X)$.

Le résultat suivant est nettement plus subtil. Il s'agit de la Proposition 2.12 de [LMSM86] et des Théorèmes 8.4 et 8.5 de [Ada84].

Proposition D.3.2. *Soient N un sous-groupe distingué de G et X un G -espace muni d'une action libre de N . Alors, il existe une représentation W de G/N et un W -dual (pour le groupe G) de X muni d'une action libre de N , disons $Y = \mathcal{D}_W(X)$. De plus, on a dans ce cas une W -dualité relative au groupe G/N :*

$$\mathcal{D}_W(X/N) \simeq Y/N \quad .$$

Le lemme suivant est un lemme *ad hoc* utile au Chapitre 5. Lorsque G est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agissant par permutations sur $X^{\wedge n}$, il permet de déterminer le dual G -équivariant à partir du dual non-équivariant de X . il s'agit d'un cas particulier de la Proposition 2.11 de [LMSM86] avec $H := \mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n =: G$, X, Y munis de l'action triviale de \mathfrak{S}_{n-1} .

Lemme D.3.3. *Soient X un G -espace pointé, d un entier et Y un d -dual de X (il s'agit ici de dualité non-équivariante). Pour tout entier positif n , les espaces $X^{\wedge n}$ et $Y^{\wedge n}$ sont munis de l'action de \mathfrak{S}_n par permutations. On a alors une $\Pi_n^{\oplus d}$ -dualité :*

$$\mathcal{D}_{\Pi_n^{\oplus d}}(X^{\wedge n}) \simeq Y^{\wedge n} \quad ,$$

Π_n désignant la représentation de permutations de \mathfrak{S}_n sur \mathbf{R}^n .

DÉMONSTRATION — Soient $\varepsilon : X \wedge Y \dashrightarrow \mathbf{S}^d$ une d -dualité et $\eta : \mathbf{S}^d \dashrightarrow X \wedge Y$ comme dans la caractérisation des d -dualités du Lemme D.1.4. On vérifie que les applications $\varepsilon^{\wedge n} : X^{\wedge n} \wedge Y^{\wedge n} \dashrightarrow (\mathbf{S}^d)^{\wedge n} \simeq \widehat{\Pi_n^{\oplus d}}$ et $\eta^{\wedge n} : \widehat{\Pi_n^{\oplus d}} \simeq (\mathbf{S}^d)^{\wedge n} \dashrightarrow X^{\wedge n} \wedge Y^{\wedge n}$ satisfont à la caractérisation G -équivariante du Lemme D.2.4 et fournissent une $\Pi_n^{\oplus d}$ -dualité. \square

Bibliographie

- [Ada74] J. F. Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1974. Chicago Lectures in Mathematics.
- [Ada84] J. F. Adams. Prerequisites (on equivariant stable homotopy) for Carlsson’s lecture. In *Algebraic topology, Aarhus 1982*, volume 1051 of *Lecture Notes in Math.*, pages 483–532. Springer, Berlin, 1984.
- [AH88] M. Atiyah and N. Hitchin. *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*. M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.
- [Ati61] M. F. Atiyah. Thom complexes. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 11 :291–310, 1961.
- [BM88] Charles P. Boyer and Benjamin M. Mann. Monopoles, nonlinear σ models, and two-fold loop spaces. *Comm. Math. Phys.*, 115(4) :571–594, 1988.
- [Bou50] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Chapitre IV : Polynômes et fractions rationnelles*. Actualités Sci. Ind., no. 1102. Hermann et Cie., Paris, 1950.
- [Bre72] Glen E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 46.
- [Caz08] C. Cazanave. Classes d’homotopie de fractions rationnelles. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 346(3-4) :129–133, 2008.
- [CCMM91] F. Cohen, R. Cohen, B. Mann, and R. Milgram. The topology of rational functions and divisors of surfaces. *Acta Math.*, 166(3-4) :163–221, 1991.
- [CCMM93] F. Cohen, R. Cohen, B. Mann, and R. Milgram. The homotopy type of rational functions. *Math. Z.*, 213(1) :37–47, 1993.
- [CCMT84] J. Caruso, F. R. Cohen, J. P. May, and L. R. Taylor. James maps, Segal maps, and the Kahn-Priddy theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 281(1) :243–283, 1984.
- [Coh83] Frederick R. Cohen. The unstable decomposition of $\Omega^2\Sigma^2X$ and its applications. *Math. Z.*, 182(4) :553–568, 1983.
- [CS91] R. Cohen and D. Shimamoto. Rational functions, labelled configurations, and Hilbert schemes. *J. London Math. Soc. (2)*, 43(3) :509–528, 1991.
- [CWW90] S. R. Costenoble, S. Waner, and G. S. Wells. Approximating equivariant mapping spaces. *Pacific J. Math.*, 144(1) :15–45, 1990.
- [Dim84] Rodica Dimca, Alexandru et Rosian. The Samuel stratification of the discriminant is Whitney regular. *Geom. Dedicata*, 17(2) :181–184, 1984.
- [EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Fre98] Benoit Fresse. Lie theory of formal groups over an operad. *J. Algebra*, 202(2) :455–511, 1998.
- [GKMY95] M. A. Guest, A. Kozłowski, M. Murayama, and K. Yamaguchi. The homotopy type of the space of rational functions. *J. Math. Kyoto Univ.*, 35(4) :631–638, 1995.
- [GKY99] M. A. Guest, A. Kozłowski, and K. Yamaguchi. Spaces of polynomials with roots of bounded multiplicity. *Fund. Math.*, 161(1-2) :93–117, 1999. Algebraic topology (Kazimierz Dolny, 1997).

- [GKZ94] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [Gro95] Alexander Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, pages Exp. No. 221, 249–276. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [GWdPL76] Christopher G. Gibson, Klaus Wirthmüller, Andrew A. du Plessis, and Eduard J. N. Looijenga. *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Jou73] J. P. Jouanolou. Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K -théorie algébrique. In *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 293–316. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.
- [Kam04] Yasuhiko Kamiyama. A polynomial model for the double-loop space of an even sphere. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 47(1) :155–162, 2004.
- [Kam05] Yasuhiko Kamiyama. Relationship between polynomials with multiple roots and rational functions with common roots. *Math. Scand.*, 96(1) :31–48, 2005.
- [KK] S. Kallel and R. Karoui. Symmetric joins and weighted barycenters. <http://math.univ-lille1.fr/~kallel/pubs.html>.
- [KY00] Andrzej Kozłowski and Kohhei Yamaguchi. Topology of complements of discriminants and resultants. *J. Math. Soc. Japan*, 52(4) :949–959, 2000.
- [Lan02] Serge Lang. *Introduction to differentiable manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [LMSM86] L. G. Lewis, Jr., J. P. May, M. Steinberger, and J. E. McClure. *Equivariant stable homotopy theory*, volume 1213 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With contributions by J. E. McClure.
- [Mat70] John Mather. Notes on topological stability, 1970. Disponible à l'adresse http://www.math.princeton.edu/facultypapers/mather/notes_on_topological_stability.pdf.
- [May72] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.
- [McD75] Dusa McDuff. Configuration spaces of positive and negative particles. *Topology*, 14 :91–107, 1975.
- [MH73] John Milnor and Dale Husemoller. *Symmetric bilinear forms*. Springer-Verlag, New York, 1973. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73.
- [Mor99] Fabien Morel. Théorie homotopique des schémas. *Astérisque*, 256 :vi+119, 1999.
- [Mor04a] Fabien Morel. An introduction to \mathbb{A}^1 -homotopy theory. In *Contemporary developments in algebraic K-theory*, ICTP Lect. Notes, XV, pages 357–441 (electronic). Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004.
- [Mor04b] Fabien Morel. On the motivic π_0 of the sphere spectrum. In *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, volume 131 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 219–260. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [Mor08] Fabien Morel. \mathbb{A}^1 -algebraic topology over a field. *Preprint*, 2008.

- [MV99] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky. \mathbf{A}^1 -homotopy theory of schemes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 90 :45–143 (2001), 1999.
- [Nar71] Raghavan Narasimhan. *Several complex variables*. The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1971. Chicago Lectures in Mathematics.
- [Oja84] Manuel Ojanguren. On Karoubi’s theorem : $W(A) = W(A[t])$. *Arch. Math. (Basel)*, 43(4) :328–331, 1984.
- [Oja90] Manuel Ojanguren. *The Witt group and the problem of Lüroth*. Dottorato di Ricerca in Matematica. [Doctorate in Mathematical Research]. ETS Editrice, Pisa, 1990. With an introduction by Inta Bertuccioni.
- [O’M63] O. T. O’Meara. *Introduction to quadratic forms*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 117. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.
- [Pfl01] Markus J. Pflaum. *Analytic and geometric study of stratified spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1768. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Seg68] Graeme Segal. Classifying spaces and spectral sequences. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 34 :105–112, 1968.
- [Seg79] G. Segal. The topology of spaces of rational functions. *Acta Math.*, 143(1-2) :39–72, 1979.
- [Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l’Université de Nancago, No. VIII.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Cours d’arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.
- [Spa59] E. H. Spanier. Function spaces and duality. *Ann. of Math. (2)*, 70 :338–378, 1959.
- [Tot90] B. Totaro. The cohomology ring of the space of rational functions. *Non publié*, 1990.
- [Vas95] Victor A. Vassiliev. Topology of discriminants and their complements. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 209–226, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [Vas99] V. A. Vassiliev. Homology of i -connected graphs and invariants of knots, plane arrangements, etc. In *The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997)*, volume 24 of *Fields Inst. Commun.*, pages 451–469. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Whi65] Hassler Whitney. Tangents to an analytic variety. *Ann. of Math. (2)*, 81 :496–549, 1965.
- [Xic06] Miguel A. Xicoténcatl. On \mathbb{Z}_2 -equivariant loop spaces. In *Recent developments in algebraic topology*, volume 407 of *Contemp. Math.*, pages 183–191. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

Théorie homotopique des schémas d'Atiyah et Hitchin

Ce travail introduit la notion de schéma d'Atiyah et Hitchin. Une variété algébrique raisonnable Y étant fixée, il s'agit d'une famille de nouveaux schémas, indexée par un entier positif m et notée $\mathcal{R}_m Y$. Nous étudions les propriétés homotopiques de ces « espaces » au sens de Morel et Voevodsky.

Les schémas \mathcal{F}_m des fractions rationnelles pointées de degré m constituent un exemple fondateur et fondamental. Du point de vue topologique, les travaux de G. Segal et F. Cohen *et al.* montrent que l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ approxime l'espace de lacets $\Omega^2 S^3$. Nous formulons une série précise de conjectures visant à généraliser ces résultats dans un cadre algébrique. Le schéma $\mathcal{R}_m Y$ approximerait l'espace de lacets motivique $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$. Nous obtenons plusieurs résultats dans cette direction. En particulier :

- Nous déterminons l'ensemble des composantes connexes algébriques *naïves* du schéma de fractions rationnelles \mathcal{F}_m , au-dessus d'un corps de base. Le calcul est simple et élémentaire. On retrouve, à une complétion près, le groupe des classes d'homotopie d'endomorphismes pointés de la droite projective \mathbf{P}^1 , tel que calculé par Morel.
- Nous construisons un morphisme *algébrique* reliant $\mathcal{R}_m Y$ à $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$.
- Lorsque Y est une variété algébrique complexe, nous explicitons le type d'homotopie de l'espace topologique $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ comme un foncteur en $Y(\mathbf{C})$. De plus, nous montrons que l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ admet un scindement stable dont les facteurs sont ceux du scindement de Snaith de l'espace $\Omega^2 \Sigma^2 Y(\mathbf{C})$.

Mots clés : Schémas d'Atiyah et Hitchin, homotopie motivique, fractions rationnelles, espaces de lacets, espaces de configuration.

Homotopy theory of Atiyah and Hitchin schemes

This work introduces Atiyah-Hitchin schemes. They are a family, indexed by a positive integer m , of algebraic varieties $\mathcal{R}_m Y$ attached to a fixed algebraic variety Y . We study the motivic homotopy properties of these “spaces” in the sense of Morel and Voevodsky.

The schemes \mathcal{F}_m of pointed rational functions of degree m form a fundamental example. From the topological viewpoint, Segal and F. Cohen *et al.* proved that the topological space $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ approximates the loop space $\Omega^2 S^3$. We formulate a precise series of conjectures aiming to generalize these results to the algebraic framework. The slogan is that the scheme $\mathcal{R}_m Y$ should approximate the motivic loop space $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$. We establish several results in this direction, among which:

- First, we determine the monoid of naive algebraic connected components of the schemes of rational functions \mathcal{F}_m over a base field. The method is simple and elementary. We recover, up to a completion, the group of motivic homotopy classes of endomorphisms of the projective line \mathbf{P}^1 , as computed by Morel.
- We construct an *algebraic* morphism linking $\mathcal{R}_m Y$ to $\Omega^{\mathbf{P}^1} \Sigma^{\mathbf{P}^1} Y$.
- When the algebraic variety Y is defined over \mathbf{C} , we give an explicit description of the homotopy type of the topological space $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ as a functor in $Y(\mathbf{C})$. Moreover, we show that the space $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ stably splits with the same summands as in the Snaith splitting of $\Omega^2 \Sigma^2 Y(\mathbf{C})$.

Keywords: Atiyah and Hitchin schemes, motivic homotopy theory, rational functions, loop spaces, configuration spaces.

Mathématiques

Laboratoire d'analyse, géométrie et applications
99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse.