



HAL
open science

Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique partiellement remplie par un liquide incompressible

Jean-Sébastien Schotté

► **To cite this version:**

Jean-Sébastien Schotté. Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique partiellement remplie par un liquide incompressible. Mécanique [physics.med-ph]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2001. Français. NNT: . tel-00462154

HAL Id: tel-00462154

<https://theses.hal.science/tel-00462154>

Submitted on 8 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Conservatoire National des Arts et Métiers
2, rue Conté 75003 Paris

Chaire de Mécanique
LMSSC (EA3196)

Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique contenant un liquide incompressible

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 14 décembre 2001

pour l'obtention du diplôme de

Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers
(spécialité Mécanique)

par

Jean-Sébastien SCHOTTÉ

Composition du jury

Président : P. Le Tallec, Professeur, École Polytechnique
Rapporteurs : A. Bermúdez de Castro, Professeur, Universidad de Santiago de Compostela
A. Combescure, Professeur, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
Examineur : J.-P. Grisval, Ingénieur, Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
Directeur de thèse : R. Ohayon, Professeur, Conservatoire National des Arts et Métiers

ONERA

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
29, av. de la Division Leclerc 92322 Châtillon

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je désire remercier ici toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de ce travail de thèse, en particulier :

- le Professeur Roger Ohayon, qui m’a proposé ce sujet de recherche. Ses conseils ont toujours été très précieux, tant sur le plan scientifique que professionnel. Je le remercie pour la confiance qu’il m’a témoignée et la liberté qu’il m’a laissée pour mener ce travail, ainsi que pour sa disponibilité malgré ses nombreuses activités.
- messieurs les Professeurs Alfredo Bermudez et Alain Combescure pour avoir accepté de rapporter sur ce mémoire, et ce malgré leurs emplois du temps chargés. Leur relecture précise, leurs remarques et leurs suggestions m’ont été d’une aide très précieuse pour la correction de ce manuscrit.
- monsieur le Professeur Patrick Le Tallec pour avoir bousculé son emploi du temps afin de pouvoir faire partie de la commission d’examen de cette thèse et pour en avoir accepté la présidence.
- l’ensemble de mes collègues de l’unité de recherche Modélisation Mécanique et Simulation Numérique du Département Dynamique des Structures et des Systèmes couplés de l’ONERA : Pierre-Marie Hutin, directeur du département, Jean-Pierre Grisval, directeur-adjoint et chef de l’unité, Jean-Luc Akian, Léon Barthe-Batsalle, Christophe Blondeau, Jean-Michel David, Annick Desanti, Alain Dugeai, Eric Savin, Véronique Kehr-Candille, Cédric Liauzun, Guy Daniel Mortchelewicz, Philippe Girodroux, Nicolas Piet, Fabrice Poirion, Marc Rapin, Anne-Sophie Sens-Rougeault, Duc Minh Tran, pour tout ce qu’ils m’ont appris en mécanique des structures pendant ces trois années, pour leur disponibilité, leur aide toujours précieuse et leur contribution à créer un environnement de travail agréable. Je souhaite que notre collaboration soit encore fructueuse pendant de nombreuses années.
- tous mes camarades doctorants et stagiaires : Ludovic Daudois, Béatrice Faverjon, Hamid Chébli, Jérôme Duchereau, Samy Mziou, Nicolas Marie, Bénédicte Puig, pour le climat d’entraide et de dialogue qui a régné entre nous. Je leur souhaite beaucoup de courage et de réussite pour la continuation de leur travail de thèse ainsi que pour leur projets à venir.
- toutes les personnes qui ont aidé d’une façon ou d’une autre au bon déroulement de ce travail de thèse et à la correction du mémoire, en particulier Valerie Gallina pour son aide logistique, Eric, Fabrice et Chantal pour leur relecture assidue de ce document, ma famille et mes amis pour leur soutien au quotidien.

Enfin, je souhaite dédier ce mémoire de thèse à mes parents, à mon épouse Nadine et à ma fille Margot.

Table des matières

Notations	xi
Introduction générale	1
Partie I Étude Théorique	5
Introduction	7
Chapitre 1 Équations linéarisées d'une structure précontrainte	9
1.1 Problématique et notations	10
1.1.1 Le système	10
1.1.2 Mouvements autour d'un état précontraint	10
1.2 Principe des travaux virtuels en coordonnées eulériennes	12
1.2.1 Configuration actuelle	12
1.2.2 Configuration initiale	12
1.3 Transport lagrangien sur la configuration naturelle	13
1.3.1 Configuration actuelle	14
1.3.2 Configuration initiale	14
1.4 Étude des petites déformations autour de l'état initial	15
1.4.1 Notation utilisée pour le développement limité de Taylor	15
1.4.2 Équation non-linéaire	15
1.4.3 Linéarisation du terme d'énergie potentielle	16
1.4.4 Linéarisation du travail des efforts extérieurs	18
1.4.5 Équation variationnelle linéarisée de la structure	19
1.5 Approche énergétique	20
Chapitre 2 Équations linéarisées d'un fluide parfait incompressible	23
2.1 Problématique et notations	24
2.1.1 Le système	24
2.1.2 Fluide en présence de la gravité	24
2.2 Équations locales	26
2.2.1 Équations du fluide parfait incompressible	26
2.2.2 Représentation du fluide	27
2.2.3 Configuration actuelle	28

2.2.4	Configuration initiale	28
2.3	Étude des petites déformations autour de l'état initial	28
2.3.1	Équations locales en $p_{\mathcal{L}}$ et U^F	28
2.3.2	Équations locales en $p_{\mathcal{L}}$ et φ	29
2.3.3	Expression de $p_{\mathcal{L}}$ en fonction de φ	29
2.3.4	Principe des travaux virtuels	30
Chapitre 3 Équations couplées linéarisées d'une structure et d'un fluide interne incompressible		33
3.1	Problématique et notations	34
3.1.1	Le système	34
3.1.2	L'interface fluide/structure	34
3.2	Influence de la présence de la structure sur les équations du fluide	34
3.2.1	Conditions de contact sur l'interface fluide/structure	35
3.2.2	Équation variationnelle couplée du fluide	36
3.2.3	Équations locales associées	36
3.3	Influence de la présence du fluide sur les équations de la structure	37
3.3.1	Configuration actuelle	37
3.3.2	Configuration initiale	37
3.3.3	Équation couplée des déformations de la structure autour de l'état initial	38
3.4	Propriétés des différents opérateurs	39
3.4.1	Étude de la forme bilinéaire k_{Σ}	40
3.5	Retour aux équations locales	43
Chapitre 4 Effets de Pressurisation		45
4.1	Problématique et notations	46
4.1.1	Le système	46
4.1.2	Hypothèses sur le gaz	46
4.2	Influence du gaz sur les équations du liquide	47
4.2.1	Modification des équations locales	47
4.2.2	Formulation explicite de $\delta V^{(1)}$	48
4.2.3	Prise en compte de la pressurisation dans l'expression de $p_{\mathcal{L}}$	48
4.3	Influence du gaz sur les équations de la structure	49
4.3.1	Effet direct	49
4.3.2	Effet indirect	49
4.3.3	Termes supplémentaires dans la formulation variationnelle	50
4.4	Approche énergétique	51
Chapitre 5 Systèmes libres		53
5.1	Problématique et notations	54
5.2	Étude des vibrations d'un système libre structure-fluide interne	54
5.2.1	Définition de l'état naturel	54
5.2.2	Équations de l'état initial précontraint	55
5.2.3	Autoéquilibrage du système	58

5.2.4	Vibrations libres autour de la configuration initiale en mouvement	61
5.2.5	Conclusion	62
5.3	Modes de corps rigide de l'opérateur \mathcal{K}	63
5.3.1	Energie de déformation	63
5.3.2	Mouvements rigides de translation	63
5.3.3	Mouvements rigides de rotation	64
5.3.4	Influence de la pressurisation	71
5.3.5	Conclusion	72
Chapitre 6 Discrétisation et Symétrisation		75
6.1	Problématique et notations	76
6.2	Formulation non symétrique en (U, φ)	76
6.3	Formulation symétrique en (U, η, π) du cas sans pressurisation	77
6.3.1	Modification des équations du fluide	78
6.3.2	Modification des équations de la structure	79
6.3.3	Discrétisation du problème couplé	79
6.3.4	Choix pratique de la condition d'unicité $\ell(\varphi)$	80
6.4	Formulation symétrique en (U, η, π) du cas avec pressurisation	80
6.4.1	Modification des équations du fluide	80
6.4.2	Modification des équations de la structure	81
6.4.3	Discrétisation du problème couplé	82
6.5	Formulation symétrique en (U, η, π, λ)	82
6.5.1	Modifications des équations du fluide	83
6.5.2	Modifications des équations de la structure	84
6.5.3	Discrétisation du problème couplé	84
6.6	Formulation symétrique par projection modale	84
Chapitre 7 Réduction modale		85
7.1	Problématique et notations	86
7.2	Projection du fluide sur ses modes de ballottement	86
7.2.1	Modes de ballottement $(\varphi_\alpha, \omega_\alpha^F)$	86
7.2.2	Solution statique φ°	87
7.2.3	Relations de conjugaison entre φ° et φ_α	88
7.2.4	Équations réduites	88
7.2.5	Discrétisation des équations	89
7.2.6	Expression de \mathcal{M}_F°	90
7.3	Réduction modale complète	92
7.3.1	Choix de la base modale $(U_\alpha, \omega_\alpha^S)$	92
7.3.2	Équations réduites	92
7.3.3	Discrétisation des équations	93

Partie II Étude Numérique	95
Introduction	97
Chapitre 8 Implémentation	99
8.1 Problématique et notations	100
8.1.1 Discrétisation spatiale	100
8.1.2 Interpolation géométrique	101
8.1.3 Interpolation du champ inconnu	101
8.1.4 Expression du gradient	102
8.1.5 Choix des fonctions tests	102
8.2 Numérisation des opérateurs	103
8.2.1 Opérateurs intégraux tridimensionnels	103
8.2.2 Opérateurs intégraux bidimensionnels	105
8.3 Implémentation du logiciel FSI3D	110
8.3.1 Stratégie	110
8.3.2 Interface MatLab	110
8.3.3 Modules NASTRAN	111
Chapitre 9 Validations	113
9.1 Validation analytique et numérique	114
9.1.1 Ballottement	114
9.1.2 Couplage hydroélastique (sans gravité)	118
9.1.3 Effets de pressurisation	120
9.1.4 Couplage entre mouvements d'ensemble et ballottement pour un système libre	122
9.1.5 Modèles réduits	128
9.2 Validation expérimentale	132
9.2.1 Couplage entre mouvements d'ensemble et ballottement pour un système libre	132
9.2.2 Couplage entre déformations hydroélastiques et ballottement	132
Chapitre 10 Exemple d'application	137
10.1 Introduction	138
10.2 Étude du bidon 1200 L	139
10.2.1 Prise en compte du mouvement du fluide	139
10.2.2 Effets de la gravité	141
10.3 Étude du bidon sous voilure	144
10.4 Conclusion	144
Conclusion générale	147
Bibliographie	149
Annexes	155

Annexe A Hypothèse des petites perturbations et état précontraint	155
A.1 Hypothèse des petites perturbations	156
A.1.1 Définition	156
A.1.2 Passage en H.P.P. des variables lagrangiennes aux variables eulériennes	156
A.1.3 Petites perturbations autour d'un état naturel	157
A.2 État précontraint	157
A.2.1 Petites perturbations autour d'un état précontraint	157
A.2.2 Application à un exemple simple	158
A.2.3 Effets du second ordre	158
Annexe B Système libre et autoéquilibrage	161
B.1 Théorie	162
B.1.1 Cas statique	162
B.1.2 Cas dynamique	164
B.2 Exemple d'un système à deux d.d.l.	167
B.2.1 Cas statique	167
B.2.2 Cas dynamique	169
B.3 Application à l'étude des vibrations d'une structure libre précontrainte	169
B.3.1 Étude de l'état initial précontraint	169
B.3.2 Vibrations libres autour de la configuration initiale précontrainte	171
B.3.3 Calcul de $g^{\text{éq}}$	172
B.4 Exemple d'application	173
B.4.1 Sphère sous pression libre dans un champ de pesanteur	173
Annexe C Quelques développements	177
C.1 Équivalence entre les différentes expressions de la variation d'énergie interne de déformation	178
C.2 Variation de volume au second ordre	179
C.2.1 Première méthode	179
C.2.2 Deuxième méthode	180
C.3 Symétrie des formes bilinéaires k_F et k_P	181
C.4 Calcul d'un volume englobé par une surface discrétisée en éléments finis	181
C.5 Modes de ballotement analytiques pour une cuve parallélépipédique	182
Annexe D Quelques formules utiles	185
D.1 Propriétés de l'opérateur Trace	186
D.2 Formules d'analyse vectorielle	186
D.2.1 Equivalent matriciel du produit vectoriel : matrice <i>spin</i>	186
D.2.2 Double produit vectoriel	186
D.2.3 Polynôme caractéristique en dimension 3	186
D.2.4 Relations vectorielles	187
D.2.5 Formule de Green	187
D.2.6 Formule de Stokes intégrale	187
D.3 Changements de variable	188

D.3.1	Dans les intégrales de volume	188
D.3.2	Dans les intégrales de surface	188
D.3.3	Formulations locales	188

Table des figures

1.1	La structure seule en présence de la gravité	10
1.2	Les 3 configurations de la structure : naturelle, initiale et actuelle	11
2.1	Le fluide seul en présence de la gravité	24
2.2	La surface libre du fluide	25
2.3	Les 3 configurations du fluide : naturelle, initiale et actuelle	26
3.1	Structure et fluide interne en présence de la gravité	34
3.2	Déplacement du point fluide et du point structure	35
3.3	Condition de contact	35
3.4	Repères locaux dans les configurations naturelle, initiale et actuelle	41
4.1	Configuration avec gaz en pression, en présence de la gravité	46
5.1	Rotation infinitésimale et rotation finie	67
7.1	Décomposition modale du fluide	86
8.1	Élément de référence et interpolation géométrique	101
8.2	Interface MatLab de pré- et post-traitement pour FSI3D	111
9.1	Cuve parallélépipédique	114
9.2	Maillage de la cuve parallélépipédique	115
9.3	Exemples de modes de ballotement pour la cuve parallélépipédique	116
9.4	Approximation par des fonctions lineaires continues par morceaux	117
9.5	Effet du raffinement de maillage sur la prédiction des fréquences propres de ballotement	117
9.6	Décroissance de l'énergie potentielle des modes de ballotement	118
9.7	Cuve cylindrique à fond plat encastree	118
9.8	Maillage de la cuve cylindrique pour le calcul NASTRAN	119
9.9	Maillage de la cuve cylindrique pour le calcul ASTRAL	119
9.10	Maillage de la cuve cylindrique pour le calcul FSI3D	119
9.11	Exemple de mode hydroélastique (n=6, mode 1) obtenu avec Nastran en axi.	119
9.12	Exemple de mode hydroélastique sans gravité (n=4, mode 1) obtenu avec FSI3D	120
9.13	Réservoir sphérique	121
9.14	Maillages du réservoir sphérique (10459 noeuds, 2844 quadrangles, 8532 hexaèdres)	121
9.15	Maillage du réservoir type LOX (17150 noeuds, 3720 quadrangles, 14120 hexaèdres)	123
9.16	Décomposition du mode 9 couplant mode rigide et modes de ballotement	125
9.17	Modèle du <i>benchmark</i> de Kreis et Klein	125
9.18	Mode de rotation du modèle de Kreis et Klein obtenu par notre modélisation (0.19 Hz)	127

9.19	Mode du modèle de Kreis et Klein couplant mouvement de rotation et premier mode de ballonnement	127
9.20	Mode du modèle de Kreis et Klein impliquant le 4 ^{ème} mode de ballonnement	127
9.21	Cuve parallélépipédique	128
9.22	Evolution des fréquences propres hydroélastiques avec gravité en fonction du nombre de modes de ballonnement considérés	129
9.23	Evolution de l'erreur sur la fréquence propre des modes hydroélastiques avec gravité en fonction du nombre de modes de ballonnement considérés	130
9.24	Evolution de certains modes hydroélastiques avec gravité en fonction du nombre de modes de ballonnement dans la base de réduction	131
9.25	Schéma expérimental	133
9.26	1 ^{er} mode avec gravité de la cuve expérimentale	134
9.27	2 ^{ème} mode avec gravité de la cuve expérimentale	134
9.28	3 ^{ème} mode avec gravité de la cuve expérimentale	134
9.29	Effet du ballonnement sur le premier mode hydroélastique	135
10.1	Avion militaire avec bidon auxiliaire sous voilure	138
10.2	Modèle de voilure avec 2 bidons auxiliaires	138
10.3	Maillage du réservoir	139
10.4	Modèle Dassault simplifié d'une aile avec 2 bidons auxiliaires	140
10.5	Représentation par le modèle hydroélastique du déplacement du fluide dans un mouvement de translation horizontal	141
10.6	Déplacement du liquide pour un mouvement de rotation du réservoir	142
10.7	Mode couplant le mouvement de rotation en tangage du bidon et les 3 premiers modes de ballonnement du liquide (fréq. = 0.48 Hz)	142
10.8	Fluctuation de pression eulérienne dans le liquide en présence ou non de la gravité	143
10.9	Comparaison des diagrammes de flottement obtenus selon la modélisation du fluide	145
10.10	Mode hydroélastique avec gravité caractérisé par un mouvement de lacet du bidon 1200 L (fréq. = 6.64 Hz)	146
10.11	Mode hydroélastique avec gravité couplant une flexion de la voilure et un mouvement pendulaire du bidon 1200 L (fréq. = 10.0 Hz)	146
A.1	Câble avec masse centrale	158
B.1	Système libre à 2 d.d.l.	167
B.2	Sphère sous pression libre dans un champ de pesanteur	173

Notations

1. Constantes

$\mathbb{1}_N$: vecteur unité de dimension N : $(\mathbb{1}_i)_{i=1 \text{ à } N} = 1$

Id : opérateur identité (ou matrice identité associée)

g : vecteur représentant un champ constant de pesanteur : $g = -|g| i_z$

$cste$: constante générique

δ_{ij} : symbole de Kronecker (égal à 1 si $i = j$, 0 sinon)

2. Ensembles

\mathbb{R} : Corps des nombres réels

C^m : Espace vectoriel des fonctions m fois continûment dérivables sur \mathbb{R}

$\mathcal{L}^2(\Omega)$: Espace des fonctions de carré sommable sur l'ouvert Ω . Espace de Hilbert pour le produit scalaire $\int_{\Omega} \varphi \psi \, d\Omega$

$\mathcal{H}^1(\Omega)$: Espace de Sobolev d'ordre 1 sur l'ouvert Ω pour le produit scalaire $\int_{\Omega} (\varphi \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) \, d\Omega$, défini par : $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega), \partial \varphi / \partial x \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}$

3. Domaines

Ω : domaine volumique

$\partial \Omega$: frontière du domaine Ω

Σ ou Γ : domaine surfacique

4. Variables

$M(x)$: vecteur défini par les coordonnées x

u ou U : champ vectoriel de déplacement

γ : champ vectoriel d'accélération

φ : champ scalaire de potentiel de déplacement

P : champ scalaire de pression

p : champ scalaire de variation de pression

f : force surfacique externe

ρ : champ scalaire de masse volumique

σ : champ tensoriel des contraintes de Cauchy

Π : champ tensoriel des contraintes de Piola-Kirchhoff I ou tenseur non symétrique de Boussinesq

S : champ tensoriel des contraintes de Piola-Kirchhoff II ou tenseur symétrique de Piola-Lagrange

E : champ tensoriel de déformation de Green-Lagrange
 ε^L ou ε : partie linéaire du tenseur de déformation E ou champ tensoriel des déformations linéarisées
 ε^Q : partie quadratique du tenseur de déformation E
 \mathbf{T} : énergie interne élastique
 \mathcal{T} : densité d'énergie potentielle élastique de déformation

5. Exposants

v^F : variable v relative au fluide interne
 v^S : variable v relative à la structure
 v^G : variable v relative au gaz interne
 A^\top : transposée d'une matrice ou d'un vecteur A

6. Indices

v_{00} : variable v relative à l'état naturel
 v_0 : variable v relative à l'état initial
 v : variable v relative à l'état actuel

7. Operateurs

$\det(A)$: déterminant d'une matrice A
 $\text{Tr}(A)$: trace d'une matrice A
 ∇f : gradient d'une fonction scalaire f (vecteur ligne)
 $\text{div}(v)$: divergence d'un vecteur v
 $\text{Div}(A)$: divergence d'un tenseur A
 $\text{rot}(v)$: rotationnel d'un vecteur v
 Dv : matrice jacobienne des dérivées partielles d'une fonction vectorielle v
 $|a|$: valeur absolue du scalaire a ou norme euclidienne du vecteur a
 $\|\Omega\|$: mesure d'une sous-variété Ω de l'espace euclidien physique (aire, volume, longueur, etc.)
 $\nabla^2 f$: matrice Hessienne d'une fonction scalaire f (matrice des dérivées partielles du 2nd ordre)
 $u \cdot v$: produit scalaire de 2 vecteurs u et v , notation équivalente à $u^\top v$
 $u \wedge v$: produit vectoriel de 2 vecteurs u et v
 (u, v, w) : produit mixte de 3 vecteurs u, v et w , équivalent à $u \cdot (v \wedge w)$
 Av : produit entre la matrice A et le vecteur v
 $A : B$: produit scalaire entre 2 tenseurs d'ordre 2 A et B , défini par $\text{Tr}(A B^\top)$

8. Dérivation temporelle

\dot{x} : simple dérivation partielle par rapport au temps de la variable x , équivalent à $\frac{\partial x}{\partial t}$
 \ddot{x} : double dérivation partielle par rapport au temps de la variable x , équivalent à $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

9. Abréviations

H.P.P. : hypothèse des petites perturbations
d.d.l. : degré de liberté
E.F. : éléments finis

Introduction générale

Le couplage fluide-structure, domaine de la mécanique aux multiples finalités, regroupe deux grands types de problèmes : ceux où le fluide est en écoulement par rapport à la structure et ceux où fluide et structure évoluent autour d'une configuration statique initiale.

Dans la première catégorie, on retrouve principalement les problèmes d'*aéroélasticité* et les problèmes d'écoulement à l'intérieur ou autour de structures tubulaires. Dans le premier cas, on s'attache à représenter la stabilité des oscillations couplées entre un fluide infini en écoulement, stationnaire ou instationnaire, et une structure déformable [82]. Cette problématique est par exemple adaptée à l'étude des profils d'aile d'avion en vol ou des aubes de turbomachine. La deuxième configuration concerne principalement le domaine nucléaire en vue d'étudier les écoulements dans les canalisations [37, 38] ou dans le coeur du réacteur autour des crayons combustibles [42].

La deuxième catégorie regroupe l'étude de phénomènes aussi divers que :

le ballonnement qui décrit les mouvements de vagues de la surface libre d'un liquide contenu dans une structure,

l'hydroélasticité qui modélise les vibrations de la structure couplées à celles d'un fluide incompressible interne (réservoir) ou externe (barrage),

la vibroacoustique qui traite des vibrations d'une structure contenant un fluide compressible (confort acoustique) ou du rayonnement d'une structure dans un fluide extérieur (bruit rayonné).

Ces trois phénomènes apparaissent en règle générale sur des plages de fréquence relativement distinctes :

- Le ballonnement apparaît à des fréquences suffisamment faibles (de l'ordre du dixième de Hertz ou du Hertz) que les modes de déformation élastique de la structure ne sont pas, en général, excités. Pour ce phénomène, la structure se comporte donc comme un corps rigide. Le ballonnement est intimement lié à la présence d'un champ de gravité puisque les transferts d'énergie qui régissent ce phénomène se font entre l'énergie cinétique du liquide et son énergie potentielle de pesanteur¹. Les ondulations de la surface libre peuvent être interprétées comme des ondes stationnaires de gravité (combinaisons linéaires des ondes directes et des ondes réfléchies par les parois rigides de la structure).
- Les déformations hydroélastiques du système apparaissent à des fréquences plus élevées, lorsque les modes de la structure commencent à intervenir et à se coupler aux mouvements du liquide. L'énergie potentielle élastique de la structure s'ajoute donc à l'énergie potentielle de pesanteur du fluide. Cependant, quand la fréquence augmente, les ondulations de la surface libre ont des

1. On considère en effet que dans cette gamme de fréquence, l'énergie potentielle de compressibilité du fluide est négligeable

longueurs d'onde et des amplitudes de plus en plus faibles : l'énergie de déformation de surface libre liée à la gravité devient négligeable en regard des autres énergies mises en jeu.

- Les phénomènes vibroacoustiques apparaissent à des fréquences encore plus élevées en faisant intervenir l'énergie due à la compressibilité du fluide.

L'étude de ces phénomènes et de leurs couplages a enrichi considérablement la littérature scientifique et technique depuis plus d'un demi-siècle et ce parallèlement au développement et à l'élaboration des grands défis technologiques qui ont marqué cette période (conquête de l'espace, développement des moyens de transport aériens ...). Puisque le présent exposé est concerné par les deux premiers phénomènes, nous ne citerons que quelques ouvrages en rapport avec le domaine de la vibroacoustique ([68], [88], [53], [81] chapitre 8 et 9, [57], [89]).

Depuis la fin des années 50, le phénomène de ballonnement dans les réservoirs des engins spatiaux et aériens préoccupe le National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) américain qui dès 1958 effectue des campagnes d'essais pour évaluer l'importance de ce phénomène sur la stabilité en vol des avions [106]. En 1962, Abramson, qui fait figure de pionnier dans l'étude du ballonnement, met en évidence l'importance du ballonnement des ergols à l'intérieur des réservoirs de lanceurs spatiaux [1]. Parallèlement, les russes Rapoport, Moiseyev & Rumyantsev effectuent des travaux, traduits et publiés en 1968, concernant la stabilité des structures contenant un fluide [93, 77]. Des nombreuses études analytiques ou expérimentales visant à déterminer les fréquences propres de ballonnement de réservoirs aux géométries simples ont également été menées : citons par exemple celles de Bauer en 1963 [9] et Mac Iver en 1989 [56].

Parmi les précurseurs de l'analyse des phénomènes hydroélastiques, citons, par exemple, Zienkiewicz *et al.*, en 1968, pour ses études concernant les barrages avec l'une des premières introductions au concept de matrice de masse ajoutée [112], Belytschko pour ses travaux relatifs au domaine nucléaire dès 1977 [13, 14] et Bishop pour son ouvrage sur l'hydroélasticité des navires publié en 1979 [20]. Citons également les méthodes numériques développées par Coppolino en 1976 dans le logiciel MSC/NASTRAN pour le calcul hydroélastique par éléments finis des lanceurs axisymétriques [34].

Ces différents phénomènes sont de nos jours bien maîtrisés isolément, mais les effets de couplage et leurs influences sur la stabilité du système mécanique concerné fait encore l'objet de nombreuses études. Un exemple très connu et particulièrement critique dans le domaine spatial est l'effet *Pogo* qui fait intervenir un couplage entre déformations hydroélastiques du réservoir et écoulement compressible dans la ligne d'alimentation² [110, 73]. Dans ce mémoire, on s'intéressera plus particulièrement aux couplages entre déformations hydroélastiques et mouvements de ballonnement de la surface libre. La conception d'engins de plus en plus élancés et légers amène, en effet, à modéliser des structures de plus en plus souples aux premières fréquences propres très faibles (typiquement entre 1 et 2 Hertz pour un lanceur Ariane). Pour de tels systèmes, les domaines de fréquences hydroélastiques et de fréquences de ballonnement peuvent se superposer et les deux phénomènes peuvent être couplés. L'importance de ce couplage sur les fréquences propres du système a été confirmé par les études de Miles en 1958 [74]. Le premier modèle visant à représenter ce couplage utilise une analogie pendulaire avec les modes de ballonnement [49]. Sous une forme révisée par Ding & Zeng [41], ce modèle est encore parfois utilisé de nos jours.

En 1966, Tong propose une première formulation variationnelle symétrique, adaptée aux méthodes éléments finis, comportant cependant certaines approximations [108]. Les travaux de Tong et les hypothèses simplificatrices qu'il a formulées inspirent un certain nombre de modèles dont celui que proposent Ber-

2. Une partie de la puissance propulsive est détournée de son rôle initial pour entretenir un couplage avec les vibrations de la structure qui peut mener à une rupture d'alimentation des moteurs.

ger, Boujot & Ohayon en 1975 [16]. Certaines autres formulations proposant une représentation unifiée des couplages entre hydroélasticité, ballonnement et vibroacoustique voient le jour [71], mais très peu d'entre elles prennent en compte l'ensemble des effets liés aux forces de gravité qui sont à l'origine du ballonnement. En 1986, Debongnie montre les avantages, pour ce genre de problème, d'utiliser un formalisme lagrangien pour le fluide comme pour la structure et parvient à exhiber une formulation exacte des termes simplifiés par Tong [40]. Finalement, en 1992, Morand & Ohayon proposent une formulation variationnelle symétrique complète, capable de représenter, sans aucune hypothèse simplificatrice, le ballonnement, les déformations hydroélastiques et leurs éventuels couplages ([80], chapitre 6).

Parmi les études menées récemment dans ce domaine, il faut noter les travaux analytiques, ainsi qu'expérimentaux, réalisés sur un modèle bidimensionnel par Chai & Genevax en 1998, qui mettent en évidence des couplages forts entre déformations hydroélastiques et ballonnement [25, 26]. Parallèlement aux efforts menés sur le plan de la modélisation, citons également les travaux d'ordre mathématique menés depuis quelques années sur ces problèmes par Bermúdez & Rodríguez [18] ainsi que Ryan [97], dans le but d'établir la convergence des solutions éléments finis exhibées et de construire des estimateurs d'erreur adaptés.

Les travaux présentés ici se situent dans la continuité de ceux de Morand et Ohayon. Leur originalité consiste d'une part en une réécriture plus systématique de la formulation proposée en 1992, qui la rende synthétique et généralisable à d'autres phénomènes, tels que la pressurisation, et d'autre part, en une validation de ce modèle. Son adaptation et son application au cas des systèmes libres a également été menée.

Les systèmes fluide-structure étant présents dans de nombreux domaines industriels, les applications de ces travaux sont très diversifiées :

- dans le domaine aéronautique, les applications concernent principalement les réservoirs de lanceurs spatiaux à kérosène liquide ou les réservoirs embarqués sur les avions militaires ou civils (réservoirs auxiliaires sous voilure ou en bout d'aile, réservoirs intégrés dans les ailes, etc.)
- dans le secteur des transports, la modélisation proposée pourrait avoir certaines retombées sur le dimensionnement et la conception des camions citernes et des bateaux super-tankers,
- dans le domaine nucléaire, des modélisations de cet ordre sont utilisées pour l'étude du comportement vibratoire et sismique des structures internes de réacteurs à refroidissement par eau ou sodium liquide, des faisceaux tubulaires des échangeurs et des piscines de stockage [33].

Ce document est constitué d'une partie théorique et d'une partie numérique. Dans la première partie sont établies successivement l'équation de la structure sous l'action du fluide (chapitre 1) et celle du fluide sous l'action de la structure (chapitre 2). Le troisième chapitre, où sont données les équations couplées du problème fluide-structure, présente un nouvel opérateur, dit d'*élastogravité*, et ses caractéristiques. Le chapitre 4 montre comment retrouver, par la démarche générale qui est proposée, l'ensemble des effets de pressurisation dus à un éventuel gaz en pression au dessus du liquide. Au chapitre 5, les équations du système couplé sont adaptées au cas d'un système fluide-structure libre en vibration autour d'une trajectoire. Le chapitre 6 est consacré à la discrétisation par éléments finis des équations continues obtenues aux chapitres 3 et 4. Le chapitre 7 propose quelques exemples de modèles réduits pouvant être obtenus par réduction modale sur des bases de modes ad-hoc. La deuxième partie du document présente tout d'abord rapidement les divers développements réalisés pour effectuer l'implémentation informatique du système discret (chapitre 8). Le chapitre 9 regroupe une ensemble de tests effectués sur des modèles simples afin de valider chaque aspect de notre modélisation. Finalement, le chapitre 10 proposera un résumé d'une étude effectuée à partir de notre modèle sur un cas semi-industriel.

Première partie

Étude Théorique

Introduction

Selon les propriétés géométriques et physiques du système fluide-structure, ballonnement et déformations hydroélastiques peuvent apparaître dans des domaines fréquentiels parfaitement distincts ou au contraire être couplés.

S'il y a découplage, l'étude des interactions hydroélastiques peut être menée en supposant que l'énergie potentielle de pesanteur du liquide (associée aux mouvements de ballonnement) est négligeable face à l'énergie potentielle élastique de la structure. Dans un calcul hydroélastique classique, la gravité est par conséquent éliminée de la modélisation. Le liquide agit sur la structure uniquement par effet d'inertie puisque seule son énergie cinétique est prise en compte³. Au niveau de l'équation de la structure, la présence du fluide se traduit donc par un opérateur de masse ajouté ([81], chapitre 5) :

$$\mathcal{K}^S(u^S, \delta u^S) + \mathcal{M}^S(\ddot{u}^S, \delta u^S) + \mathcal{M}_A^F(\ddot{u}_N^S, \delta u_N^S) = f(\delta u^S) \quad (1)$$

où \mathcal{M}^S et \mathcal{K}^S sont les opérateurs de masse et de raideur de la structure, \mathcal{M}_A^F l'opérateur de masse ajoutée du fluide, u^S le champ de déplacement de la structure, u_N^S le champ de déplacement normal à la paroi de la structure en contact avec le fluide et δu^S un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible pour la structure.

Dans le cas où les modes hydroélastiques du système sont suffisamment bas pour interagir avec les modes de ballonnement (par exemple pour une structure souple⁴ et/ou un liquide dense), négliger la gravité n'est plus légitime. Certains modèles proposent de réintégrer l'énergie de ballonnement du fluide dans l'expression de l'énergie potentielle du système [62, 2]. Cependant, les effets de raideur additionnelle dus à la pression hydrostatique sur l'interface fluide-structure sont rarement pris en compte. En 1966, Tong propose un modèle les intégrant mais au travers de quelques approximations destinées à assurer le caractère conservatif du modèle [108]. En effet, l'opérateur de raideur \mathcal{K}^g , associé à l'énergie potentielle de pesanteur due à la gravité g , qui apparaît lorsque l'on considère la fluctuation hydrostatique de pression dans le fluide $p_g^F = -\rho^F g \cdot u^F$, n'est pas symétrique. Une expression approchée de p_g^F proposée par Tong permet de symétriser cet opérateur :

$$p_g^F \simeq -\rho^F (g \cdot n)(u^F \cdot n) \implies \mathcal{K}_{\text{Tong}}^g(u_N^S, \delta u_N^S) = \int_{\Sigma_i} \rho^F (g \cdot n) u_N^S \delta u_N^S d\Sigma \quad (2)$$

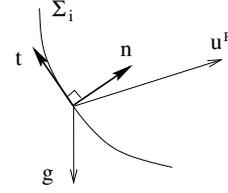
où Σ_i est l'interface fluide-structure (de normale n) et ρ^F la masse volumique du fluide.

L'expression approchée proposée par Tong introduit une erreur proportionnelle à $g \cdot t (u^F \cdot t)$ (où t est tangent à la surface Σ_i) puisque :

3. On remarque que l'énergie potentielle de pesanteur du fluide n'est réellement nulle qu'à fréquence infinie. La modélisation du fluide utilisée dans le modèle hydroélastique sans gravité correspond donc à un comportement extrapolé à l'infini.

4. Par exemple, les premières fréquences propres de flexion d'un lanceur spatial sont autour de 1. Hertz.

$$\begin{aligned} g \cdot u^F &= g \cdot n (u^F \cdot n) + g \cdot t (u^F \cdot t) \\ &= g \cdot n (u^S \cdot n) + g \cdot t (u^F \cdot t) \end{aligned}$$



L'approximation de Tong de l'opérateur \mathcal{K}^g est donc exacte sur les portions de l'interface fluide-structure Σ_i horizontales ($g \cdot t = 0$) ou sur lesquelles le glissement du fluide est nul ($u^F \cdot t = 0$). Cependant, l'erreur sur le reste de l'interface Σ_i n'est pas négligeable.

Dans le modèle que nous allons développer ici, on désire s'affranchir de cette approximation. Pour cela, nous montrerons qu'il est nécessaire de considérer l'ensemble des effets de la gravité sur le système et non pas uniquement sa contribution à l'énergie potentielle du liquide. En effet, nous mettrons en évidence l'importance de la prise en compte des termes de précontrainte associés à la gravité pour assurer la conservativité du modèle⁵.

Alors que certaines études actuelles s'intéressent aux non linéarités associées aux mouvements de fluide de grande amplitude ([83], impact du liquide sur les parois [96, 44], etc.), le modèle présenté ici est un modèle linéaire destiné à l'analyse vibratoire (libre ou en réponse forcée) et se place donc dans le cadre des petites déformations autour d'une configuration d'équilibre.

D'autre part, la dissipation d'énergie dans ces systèmes est, en pratique, représentée par des amortissements modaux, déterminés à partir d'estimations empiriques et de mesures expérimentales. C'est pourquoi, nous nous intéresserons au modèle conservatif (non dissipatif) associé en supposant la structure parfaitement **élastique**.

Pour la même raison, le fluide considéré est **non visqueux**. D'autre part, dans le domaine de fréquence considéré, on suppose que les phénomènes acoustiques dans le fluide sont négligeables et qu'il peut être considéré comme **incompressible**. En présence de la gravité, cette hypothèse est nécessaire pour que le fluide soit **homogène**. Cette hypothèse est valable tant que :

$$\omega \ll \frac{c}{L} \quad (3)$$

où ω est la pulsation propre considérée, c la célérité du son dans le fluide et L une dimension caractéristique du domaine fluide. Actuellement, Andrianarison développe une formulation qui vise à s'affranchir de cette hypothèse [4, 5, 3] de façon à pouvoir traiter les couplages entre compressibilité et effets de gravité.

Pour finir, les effets de tension superficielle, ou effets de capillarité, seront négligés par rapport aux effets de gravité. On montre que cette hypothèse est vérifiée tant que :

$$\left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (4)$$

où α est la longueur de capillarité et L une dimension caractéristique des variations spatiales de la surface libre. Dans le cas d'une interface eau/air, les effets de la capillarité sont négligeables par rapport à ceux de la gravité dès que L est supérieur à quelques millimètres [6]. En l'absence de gravité, ou en état de microgravité, les effets de tension superficielle redeviennent par contre essentiels [45]. Leur modélisation est discutée dans l'article de Morand & Ohayon [86].

⁵. C'est en effet l'omission des effets de précontrainte liés à la gravité qui a obligé Tong à introduire des approximations pour symétriser sa formulation.

Chapitre 1

Équations linéarisées d'une structure précontrainte

Sommaire

1.1	Problématique et notations	10
1.1.1	Le système	10
1.1.2	Mouvements autour d'un état précontraint	10
1.2	Principe des travaux virtuels en coordonnées eulériennes	12
1.2.1	Configuration actuelle	12
1.2.2	Configuration initiale	12
1.3	Transport lagrangien sur la configuration naturelle	13
1.3.1	Configuration actuelle	14
1.3.2	Configuration initiale	14
1.4	Étude des petites déformations autour de l'état initial	15
1.4.1	Notation utilisée pour le développement limité de Taylor	15
1.4.2	Équation non-linéaire	15
1.4.3	Linéarisation du terme d'énergie potentielle	16
1.4.4	Linéarisation du travail des efforts extérieurs	18
1.4.5	Équation variationnelle linéarisée de la structure	19
1.5	Approche énergétique	20

1.1 Problématique et notations

Le système fluide-structure sera modélisé par 2 équations couplées obtenues en considérant :

1. l'équilibre dynamique de la structure sous l'action des forces extérieures, dont la pression du fluide,
2. l'équilibre dynamique du fluide sous l'action des contraintes extérieures, dont le mouvement de la structure.

Dans ce chapitre, on adoptera le point de vue de la structure. L'action de la gravité et de la pression hydrostatique du fluide nous amène à considérer la structure comme un système précontraint. L'équation variationnelle linéarisée décrivant les petits mouvements d'un tel système est établie ici.

1.1.1 Le système

L'objectif de ce chapitre est donc d'établir les équations linéaires d'une structure précontrainte S schématisée par la figure 1.1.

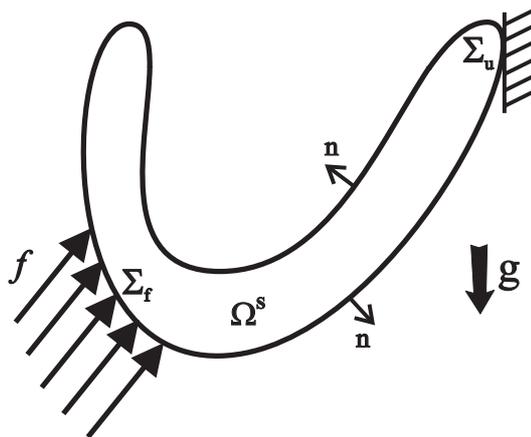


FIG. 1.1 – La structure seule en présence de la gravité

Légende :

g : champ de pesanteur constant en espace et en temps

f : forces extérieures **surfaiques** (suiveuses ou non suiveuses)

Ω^S : domaine volumique occupé par la structure, délimité par la surface fermée $\partial\Omega^S = \Sigma_f \cup \Sigma_u$

Σ_u : surface où sont appliquées des conditions aux limites en déplacement

Σ_f : surface où sont appliquées les forces extérieures f

n : vecteur normal extérieur à la surface $\partial\Omega^S$

1.1.2 Mouvements autour d'un état précontraint

Même dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.), l'étude des mouvements autour d'un état précontraint ne peut être menée avec les mêmes approximations qu'une analyse autour d'un état

naturel. En effet, lorsque l'état de référence est un état naturel, l'hypothèse H.P.P. permet de confondre géométrie initiale et actuelle ainsi que coordonnées lagrangiennes et eulériennes, mais cette approximation n'est plus valable si la configuration initiale est précontrainte (pour quelques explications complémentaires, consulter l'annexe A). Dans la mise en équations du problème, il faut donc travailler en tenant compte des différents états de référence de la structure. On distingue alors 3 configurations :

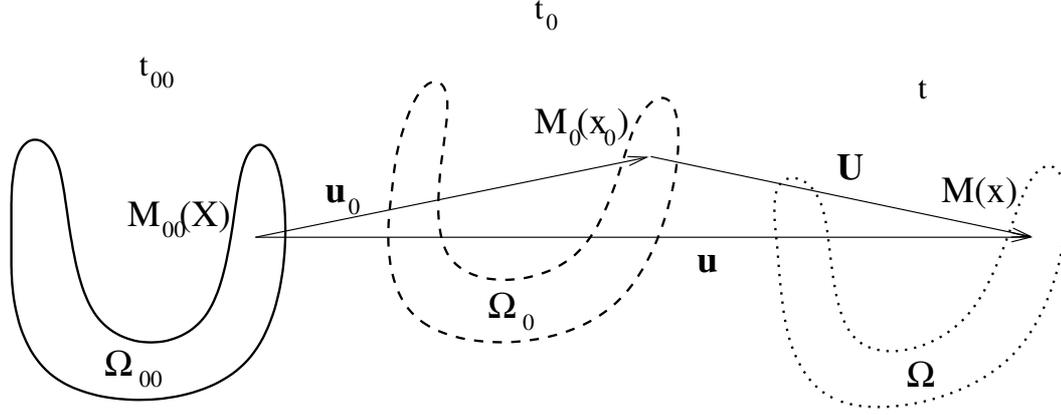


FIG. 1.2 – Les 3 configurations de la structure : naturelle, initiale et actuelle

configuration naturelle : c'est l'état dans lequel la structure n'est soumise à aucun chargement, pas même au champ de pesanteur g . Seules sont appliquées les conditions aux limites en déplacement¹ sur Σ_{u00} . Les grandeurs relatives à la configuration naturelle seront indicées par 00 .

configuration initiale : c'est l'état d'équilibre autour duquel on désire étudier les déformations de la structure. Dans cette configuration, la structure subit une déformation statique sous l'action d'une part des forces de pesanteur liées à g et d'autre part de forces surfaciques extérieures constantes f_0 . Cet état est donc un état de référence précontraint. Les grandeurs relatives à la configuration initiale seront indicées par 0 .

configuration actuelle : c'est l'état de la structure à tout instant de l'analyse dynamique. La structure est soumise d'une part aux forces de pesanteur et d'autre part à des forces surfaciques extérieures f . Les grandeurs se rapportant à la configuration actuelle seront sans indice.

Les équations du mouvement de la structure autour de l'état précontraint peuvent être obtenues, dans certains cas, par le principe d'Hamilton (cf. ouvrage de Géradin & Rixen [46]). Cependant, si les énergies potentielles mises en jeu ne sont pas simples à exprimer, une méthode basée sur le *principe des travaux virtuels* peut être utilisée de façon plus systématique. En effet, le déplacement de la structure dans la configuration actuelle par rapport à sa configuration initiale peut être exprimée comme son déplacement dans l'état actuel par rapport à l'état naturel moins son déplacement dans l'état initial par rapport à l'état naturel. Ce que l'on peut exprimer par : $U = u - u_0$.

Cette méthode nous amène donc à appliquer le principe des travaux virtuels d'une part à l'état actuel et d'autre part à l'état initial. Ils peuvent tous deux être écrits en coordonnées eulériennes puisqu'ils ont tous deux comme référence l'état naturel. Cependant, pour pouvoir les comparer (et calculer leur différence), il faudra les exprimer sur une géométrie commune : la configuration naturelle.

1. On remarquera que la nature de la condition imposée à la surface Σ_{u00} fait que $\Sigma_{u00} \equiv \Sigma_{u0} \equiv \Sigma$

La formulation variationnelle qui régit les petits mouvements de la structure autour de l'état initial précontraint sera donc obtenu en 3 étapes :

1. expression du principe des travaux virtuels pour les états initial et actuel en coordonnées eulériennes.
2. transfert sur la configuration naturelle
3. linéarisation de la différence entre ces 2 formulations variationnelles

1.2 Principe des travaux virtuels en coordonnées eulériennes

1.2.1 Configuration actuelle

Les déformations en tout point $M(x)$ de la structure sont décrites à tout instant t par le champ de déplacement $u(x, t)$. Ce champ vectoriel vérifie les équations du problème aux limites suivant :

$$\text{Div}_x \sigma(u(x)) + \rho(x) g = \rho(x) \gamma(x) \quad \text{dans } \Omega^S \quad (1.1a)$$

$$\sigma(u(x)) n = f \quad \text{sur } \Sigma_f \quad (1.1b)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_u \quad (1.1c)$$

Le principe des travaux virtuels est ensuite appliqué en faisant "travailler" l'équation (1.1a) dans un champ de déplacement virtuel $\delta u(M)$, défini sur Ω^S , suffisamment régulier et cinématiquement admissible ($\delta u \equiv 0$ sur Σ_u). En utilisant la formule de Green (D.7) et les équations (1.1b) et (1.1c), on trouve :

$$\underbrace{\int_{\Omega^S} \text{Tr}[\sigma(u(x)) D_x \delta u(x)^T] d\Omega}_{(1)} + \underbrace{\int_{\Omega^S} \rho(x) \gamma(x) \cdot \delta u(x) d\Omega}_{(2)} = \dots$$

$$\underbrace{\int_{\Omega^S} \rho(x) g \cdot \delta u(x) d\Omega}_{(3)} + \underbrace{\int_{\Sigma_f} f(x) \cdot \delta u(x) d\Sigma}_{(4)} \quad (1.2)$$

1.2.2 Configuration initiale

Dans la configuration initiale, les déformations de la structure, supposée à l'équilibre, sont données en tout point $M_0(x_0)$ par le champ de déplacement $u_0(x_0)$. Les équations d'équilibre du problème aux limites s'écrivent donc pour cette configuration :

$$\text{Div}_{x_0} \sigma(u_0(x_0)) + \rho_0(x_0) g = 0 \quad \text{dans } \Omega_0^S \quad (1.3a)$$

$$\sigma(u_0) n_0 = f_0 \quad \text{sur } \Sigma_{f0} \quad (1.3b)$$

$$u_0 = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{u0} \quad (1.3c)$$

On écrit de la même façon le principe des travaux virtuels vérifié par le champ de déplacement $u_0(x_0)$ pour tout champ de déplacement virtuel suffisamment régulier et cinématiquement admissible $\delta u_0(M_0)$ défini sur Ω_0^S :

$$\underbrace{\int_{\Omega_0^S} \text{Tr} \left[\sigma(u_0(x_0)) \mathbf{D}_{x_0} \delta u_0(x_0)^\top \right] d\Omega_0}_{(1)} = \underbrace{\int_{\Omega_0^S} \rho_0(x_0) g \cdot \delta u_0(x_0) d\Omega_0}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Sigma_{f_0}} f_0(x_0) \cdot \delta u_0(x_0) d\Sigma_0}_{(3)} \quad (1.4)$$

1.3 Transport lagrangien sur la configuration naturelle

Pour transposer les équations (1.2) et (1.4) sur la configuration naturelle, il est nécessaire d'introduire les applications bijectives différentiables Φ_0 et Φ qui décrivent les états initial et actuel à partir de l'état naturel. Ces deux bijections sont définies par (cf. chapitre 1, tome 1 de Salençon [98]) :

$$\begin{aligned} \Phi_0 : \quad \Omega_{00}^S &\longrightarrow \Omega_0^S \\ M_{00} &\longmapsto M_0 = M_{00} + u_0(M_{00}) \\ X &\longmapsto x_0 = X + u_0(X) \\ \\ \Phi : \quad \Omega_{00}^S &\longrightarrow \Omega^S \\ M_{00} &\longmapsto M = M_{00} + u(M_{00}) \\ X &\longmapsto x = X + u(X) \end{aligned}$$

On associe respectivement à Φ_0 et Φ les applications linéaires tangentes F_0 et F qui vérifient les relations :

$$\begin{aligned} F_0 &= \mathbf{D}_X M_0(x_0) = Id + \mathbf{D}_X u_0(X) \\ F &= \mathbf{D}_X M(x) = Id + \mathbf{D}_X u(X) \end{aligned}$$

Pour effectuer le changement de variable entre x (respectivement x_0) et X , on associe à une fonction $G(x)$ (respectivement $G_0(x_0)$), définie sur Ω^S (respectivement Ω_0^S), une fonction $G^*(X)$ (respectivement $G_0^*(X)$), définie sur Ω_{00}^S par :

$$\begin{aligned} G_0(x_0) &= G_0 \circ \Phi_0(X) = G_0^*(X) \\ G(x) &= G \circ \Phi(X) = G^*(X) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega_0^S & \xrightarrow{G_0} & G_0(\Omega^S) \\ \Phi_0 \uparrow & \nearrow G_0^* & \\ \Omega_{00}^S & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega^S & \xrightarrow{G} & G(\Omega^S) \\ \Phi \uparrow & \nearrow G^* & \\ \Omega_{00}^S & & \end{array}$$

Cependant, pour simplifier les notations, on utilisera la notation $u(X)$ et $u_0(X)$ (plutôt que $u^*(X)$ et $u_0^*(X)$) pour désigner les images réciproques de $u(x)$ et $u_0(x)$.

1.3.1 Configuration actuelle

Les formules de changement de variable (D.11) permettent de transposer chaque terme de l'équation (1.2) sur la géométrie de la configuration naturelle :

le terme (1) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^S} \text{Tr} [\sigma(u(x)) \mathbf{D}_x \delta u(x)^\top] \, d\Omega &= \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [\sigma^*(u(X)) (\mathbf{D}_X \delta u^*(X) F^{-1})^\top] \det(F) \, d\Omega_{00} \\ &= \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [\Pi(u(X)) (\mathbf{D}_X \delta u^*(X))^\top] \, d\Omega_{00} \end{aligned} \quad (1.7a)$$

où Π est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff ou tenseur non-symétrique de Boussinesq, défini par :

$$\Pi = \det(F) \sigma^* F^{-\top} \quad (1.7b)$$

En utilisant de plus la relation : $\rho^*(X) \det(F) \, d\Omega_{00} = \rho_{00}(X) \, d\Omega_{00}$, qui traduit la conservation de la masse de la structure, le terme (2) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^S} \rho(x) \gamma(x) \cdot \delta u(x) \, d\Omega &= \int_{\Omega_{00}^S} \rho^*(X) \frac{\partial^2 u(X, t)}{\partial t^2} \cdot \delta u^*(X) \det(F) \, d\Omega_{00} \\ &= \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}(X) \ddot{u}(X, t) \cdot \delta u^*(X) \, d\Omega_{00} \end{aligned} \quad (1.7c)$$

le terme (3) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^S} \rho(x) g \cdot \delta u(x) \, d\Omega &= \int_{\Omega_{00}^S} \rho^*(X) g \cdot \delta u^*(X) \det(F) \, d\Omega_{00} \\ &= \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}(X) g \cdot \delta u^*(X) \, d\Omega_{00} \end{aligned} \quad (1.7d)$$

le terme (4) devient :

$$\int_{\Sigma_f} f(x) \cdot \delta u(x) \, d\Sigma = \int_{\Sigma_{f00}} (f \, d\Sigma)^* \cdot \delta u^*(X) \quad (1.7e)$$

où $(f \, d\Sigma)^*$ représente l'expression des forces surfaciques $f \, d\Sigma$ transposées sur la configuration naturelle.

1.3.2 Configuration initiale

D'une façon similaire, le terme (1) de l'équation (1.4) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^S} \text{Tr} [\sigma(u_0(x_0)) \mathbf{D}_{x_0} \delta u_0(x_0)^\top] \, d\Omega_0 &= \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [\sigma^*(u_0(X)) (\mathbf{D}_X \delta u_0^*(X) F_0^{-1})^\top] \det(F_0) \, d\Omega_{00} \\ &= \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [\Pi(u_0(X)) \mathbf{D}_X \delta u_0^*(X)^\top] \, d\Omega_{00} \end{aligned} \quad (1.8a)$$

le terme (2) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^S} \rho_0(x_0) g \cdot \delta u_0(x_0) \, d\Omega_0 &= \int_{\Omega_{00}^S} \rho_0^*(X) g \cdot \delta u_0^*(X) \det(F_0) \, d\Omega_{00} \\ &= \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}(X) g \cdot \delta u_0^*(X) \, d\Omega_{00} \end{aligned} \quad (1.8b)$$

le terme (3) devient :

$$\int_{\Sigma_{f_0}} f_0(x_0) \cdot \delta u_0(x_0) \, d\Sigma_0 = \int_{\Sigma_{f_{00}}} (f_0 \, d\Sigma_0)^* \cdot \delta u_0^*(X) \quad (1.8c)$$

où $(f_0 \, d\Sigma_0)^*$ représente l'expression des forces surfaciques $f_0 \, d\Sigma_0$ transposées sur la configuration naturelle.

1.4 Étude des petites déformations autour de l'état initial

Dans cette étude, on supposera que u , u_0 , et par conséquent U , sont des déplacements infinitésimaux. Cependant, le lecteur trouvera dans ce chapitre, une brève digression au cas plus général où u_0 serait un grand déplacement.

1.4.1 Notation utilisée pour le développement limité de Taylor

Rappelons ici la formule de Taylor généralisée sur les espaces de Banach [24] :

Soit une application $f : U \rightarrow F$, n fois différentiable, où U est un ouvert sur un espace de Banach E et F un espace de Banach. Le développement à l'ordre n de f au voisinage de $a \in U$ s'écrit :

$$\|f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot h^n\| = o(\|h\|^n) \quad (1.9)$$

Pour simplifier les notations, cette relation sera notée par la suite :

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \cdot h \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot h^n \quad \text{au } n^{\text{ème}} \text{ ordre en } h \quad (1.10)$$

1.4.2 Équation non-linéaire

Les équations (1.7) et (1.8) sont écrites pour des déplacements virtuels δu^* et δu_0^* quelconques, définis sur le même domaine Ω_{00}^S . Il est donc possible de les choisir égaux et de les noter δU . En notant \mathcal{C}_u l'espace des champs de déplacements² définis sur Ω_{00}^S , suffisamment réguliers et cinématiquement admissibles ($u \equiv 0$ sur Σ_{u00}), la différence entre ces deux équations donne :

Pour tout champ de déplacement virtuel δU appartenant à \mathcal{C}_u ,

2. $\mathcal{C}_u = \{u \in (\mathcal{H}^1(\Omega_{00}^S))^3, \text{ tel que } u \equiv 0 \text{ sur } \Sigma_{u00}\}$.

$$\underbrace{\int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[(\Pi(u) - \Pi(u_0)) \mathbf{D}_X \delta U^\top \right] d\Omega_{00}}_{(1)} + \underbrace{\int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \delta U d\Omega_{00}}_{(2)} = \dots$$

$$\underbrace{\int_{\Sigma_{f00}} \left((f d\Sigma)^* - (f_0 d\Sigma_0)^* \right) \cdot \delta U}_{(3)} \quad (1.11)$$

1.4.3 Linéarisation du terme d'énergie potentielle

La linéarisation du terme (1) de l'équation (1.11) nécessite de rappeler quelques définitions relatives aux tenseurs Π et Π_0 . Pour cela, considérons :

\mathcal{T} : la densité d'énergie potentielle élastique (par unité de volume de l'état naturel),

S : le deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff ou tenseur symétrique de Piola-Lagrange, qui vérifie :

$$\Pi(u) = F S = (Id + \mathbf{D}_X u) S(u) \quad (1.12)$$

E : le tenseur des déformations de Green-Lagrange définit par :

$$E(u) = \frac{1}{2} (F^\top F - Id) = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_X u + \mathbf{D}_X u^\top + \mathbf{D}_X u^\top \mathbf{D}_X u) \quad (1.13)$$

La partie linéaire de E sera notée ε^L , ou plus simplement ε , et sa partie quadratique sera notée ε^Q :

$$\varepsilon_X^L(u) = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_X u + \mathbf{D}_X u^\top) \quad (1.14a)$$

$$\varepsilon_X^Q(u, u) = \frac{1}{2} \mathbf{D}_X u^\top \mathbf{D}_X u \quad (1.14b)$$

La théorie générale de l'hyperélasticité montre qu'il existe une relation entre les 3 grandeurs \mathcal{T} , S et E [31] :

$$S_{ij} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial E_{ij}} \quad (1.15)$$

L'hypothèse d'un comportement élastique linéarisé pour la structure nous permet de prendre un développement au 2^{ème} ordre en E de \mathcal{T} autour de l'état d'équilibre. L'équation (1.15) devient :

$$S_{ij} \simeq \frac{\partial \mathcal{T}^{(1)}}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{T}^{(2)}}{\partial E_{ij}}$$

Le premier terme est nul si le développement a été fait autour d'un état sans précontrainte tel que l'état naturel. S est donc une fonction linéaire en E et l'on peut écrire :

$$S(u) = C E(u) \quad (1.16)$$

$$\text{soit } S(u) = S_0 + C (E(u) - E(u_0)) = S_0 + C \left(\varepsilon_X^L(U) + \varepsilon_X^Q(u, u) - \varepsilon_X^Q(u_0, u_0) \right) \quad (1.17)$$

où $S_0 = S(u_0)$ est le tenseur des contraintes dans l'état initial et $C = \frac{d\psi}{dE}$ est le tenseur constant d'ordre 4 des coefficients élastiques caractérisant la loi de comportement³.

La différence $\Pi(u) - \Pi(u_0)$ extraite du terme (1) de l'équation (1.11) se réécrit :

$$\Pi(u) - \Pi(u_0) = (Id + D_X u_0 + D_X U) S(u) - (Id + D_X u_0) S_0 \quad (1.18)$$

En utilisant (1.17), cette relation devient :

$$\Pi(u) - \Pi(u_0) = (Id + D_X u_0 + D_X U) C \left(\varepsilon_X^L(U) + \varepsilon_X^Q(u, u) - \varepsilon_X^Q(u_0, u_0) \right) + D_X U S_0 \quad (1.19)$$

Linéarisation par rapport à U

Le développement au 1^{er} ordre en U de cette expression donne :

$$\begin{aligned} \Pi(u) - \Pi(u_0) &\simeq (Id + D_X u_0) C \left(\varepsilon_X^L(U) + \varepsilon_X^Q(u_0, U) + \varepsilon_X^Q(U, u_0) \right) + D_X U S_0 \\ &\simeq C \varepsilon_X^L(U) + D_X U S_0 + D_X u_0 C \varepsilon_X^L(U) \cdots \\ &\quad + C \left(\varepsilon_X^Q(u_0, U) + \varepsilon_X^Q(U, u_0) \right) + D_X u_0 C \left(\varepsilon_X^Q(u_0, U) + \varepsilon_X^Q(U, u_0) \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur Trace (D.1) ainsi que la symétrie de $C \varepsilon^L$ et de $C(\varepsilon^Q + (\varepsilon^Q)^\top)$, des simplifications apparaissent quand on introduit cette relation dans l'expression du terme (1) de l'équation (1.11) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[(\Pi(u) - \Pi(u_0)) D_X \delta U^\top \right] d\Omega_{00} &\simeq \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[C \varepsilon_X^L(U) \varepsilon_X^L(\delta U) + D_X U S_0 D_X \delta U^\top \cdots \right. \\ &\quad + C \varepsilon_X^L(\delta U) \left(\varepsilon_X^Q(u_0, U) + \varepsilon_X^Q(U, u_0) \right) + C \varepsilon_X^L(U) \left(\varepsilon_X^Q(u_0, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, u_0) \right) \cdots \\ &\quad \left. + C \left(\varepsilon_X^Q(u_0, U) + \varepsilon_X^Q(U, u_0) \right) \left(\varepsilon_X^Q(u_0, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, u_0) \right) \right] d\Omega_{00} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Le développement au 1^{er} ordre en U du terme (1) de l'équation (1.11) donne donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[(\Pi(u) - \Pi(u_0)) D_X \delta U^\top \right] d\Omega_{00} &\simeq \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[C \varepsilon_X^L(U) \varepsilon_X^L(\delta U) \right] d\Omega_{00} \cdots \\ &\quad + k_G^{u_0}(U, \delta U) + k_L^{u_0}(U, \delta U) + k_Q^{u_0}(U, \delta U) \end{aligned} \quad (1.22)$$

avec

$$k_G^{u_0}(U, \delta U) = \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [D_X U S_0 D_X \delta U^\top] d\Omega_{00} \quad (1.23)$$

$$k_L^{u_0}(U, \delta U) = \int_{\Omega_{00}^S} 2 \text{Tr} \left[C \varepsilon_X^L(\delta U) \varepsilon_X^Q(u_0, U) + C \varepsilon_X^L(U) \varepsilon_X^Q(u_0, \delta U) \right] d\Omega_{00} \quad (1.24)$$

$$k_Q^{u_0}(U, \delta U) = \int_{\Omega_{00}^S} 4 \text{Tr} \left[C \varepsilon_X^Q(u_0, U) \varepsilon_X^Q(u_0, \delta U) \right] d\Omega_{00} \quad (1.25)$$

3. Le tenseur C est symétrique et défini positif dès que T est strictement convexe en E .

$k_G^{u_0}$: traduit la rigidité géométrique due aux précontraintes S_0 (dépendantes de u_0) présentes dans la structure à l'instant initial,

$k_L^{u_0}$ et $k_Q^{u_0}$: sont des opérateurs symétriques, respectivement linéaires et quadratiques en u_0 , qui traduisent le changement de raideur associé à la modification de la géométrie de la structure dans l'état initial.

Le terme (1.22) représente l'énergie de déformation associée aux petites vibrations U de la structure autour d'une configuration initiale déformée par le champ de déplacement u_0 quelconque ("grand" déplacement). Les termes de raideur géométrique additionnels $k_L^{u_0}$ et $k_Q^{u_0}$ sont particulièrement utilisés pour la prédiction du flambage non linéaire [32].

Linéarisation par rapport à U et u_0

Dans la suite, nous supposons que la déformation initiale est infinitésimale et que les états naturel et initial ne diffèrent que par la présence de précontraintes. Dans ce cas, la relation (1.22) peut être linéarisée en u_0 également.

Le développement au 1^{er} ordre en U et u_0 , ou de façon équivalente en u et u_0 , amène à éliminer l'ensemble des termes à l'origine des opérateurs $k_L^{u_0}$ et $k_Q^{u_0}$ de l'expression (1.19). En considérant, de plus, que dans $S_0 = \det(F_0) F_0^{-1} \sigma(u_0) F_0^{-T}$, on peut approcher F_0 par Id , on obtient :

$$\Pi(u) - \Pi(u_0) \simeq C \varepsilon_X^L(U) + D_X U \sigma_0 \quad \text{au 1^{er} ordre en } u \text{ et } u_0 \quad (1.26)$$

où $\sigma_0 = \sigma(u_0)$ est le tenseur des contraintes de Cauchy dans l'état initial.

1.4.4 Linéarisation du travail des efforts extérieurs

La linéarisation du terme (3) de l'équation (1.11) nécessite de distinguer les forces surfaciques suiveuses f_F ("follower forces") qui dépendent du déplacement u , des forces surfaciques constantes en direction f_D ("dead loads") qui s'appliquent sur la surface Σ_f :

$$f = f_F + f_D \quad \text{sur } \Sigma_f \quad (1.27)$$

Forces suiveuses

On ne traitera ici que les forces suiveuses dont la direction d'application est portée par la normale n à la surface. Introduisons $|\widetilde{f}_F|$, la variation d'amplitude (supposée connue) des forces suiveuses définie par :

$$|\widetilde{f}_F|(M_{00}) = |f_F^*(M_{00})| - |f_{F0}^*(M_{00})| \quad (1.28)$$

ainsi que τ_{00} , fonction linéaire de U , le vecteur représentant la rotation de normale n entre les instants initial et actuel :

$$\tau_{00}(U) d\Sigma_{00} \simeq n d\Sigma - n_0 d\Sigma_0 \quad \text{au 1^{er} ordre en } u \text{ et } u_0 \quad (1.29)$$

Une forme explicite de τ_{00} en fonction de U sera donnée en §3.4.1.

L'expression linéarisée par rapport à u et u_0 du terme $f_F d\Sigma - f_{F0} d\Sigma_0$ donne :

$$\begin{aligned} |f_F| n d\Sigma - |f_{F0}| n_0 d\Sigma_0 &= |f_F| n d\Sigma - |f_{F0}| n d\Sigma + |f_{F0}| n d\Sigma - |f_{F0}| n_0 d\Sigma_0 \\ &= (|f_F| - |f_{F0}|) n d\Sigma + |f_{F0}| (n d\Sigma - n_0 d\Sigma_0) \\ &\simeq \widetilde{|f_F|} n_{00} d\Sigma_{00} + |f_{F0}| \tau_{00}(U) d\Sigma_{00} \end{aligned} \quad (1.30a)$$

Forces non suiveuses

Le cas des forces non suiveuses est classique. Leur variation (supposée connue) \tilde{f}_D est définie par la relation suivante :

$$\tilde{f}_D(M_{00}) d\Sigma_{00} = \left(f_D d\Sigma \right)^* - \left(f_{D0} d\Sigma_0 \right)^* \quad (1.30b)$$

Finalement, on notera :

$$\tilde{f}(M_{00}) = \tilde{f}_D(M_{00}) + \widetilde{|f_F|}(M_{00}) n_{00} \quad (1.31)$$

Le développement au 1^{er} ordre en u et u_0 du terme (3) de l'équation (1.11) donne finalement :

$$\int_{\Sigma_{f00}} \left((f d\Sigma)^* - (f_0 d\Sigma_0)^* \right) \cdot \delta U \simeq \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U d\Sigma_{00} + \int_{\Sigma_{f00}} |f_{F0}^*| \tau_{00}(U) \cdot \delta U d\Sigma_{00} \quad (1.32)$$

1.4.5 Équation variationnelle linéarisée de la structure

En introduisant (1.26) et (1.32) dans l'équation (1.11) et en utilisant le fait que $\ddot{u}_0 = 0$, on obtient la formulation variationnelle, **linéarisée** en u et u_0 , qui régit les petites déformations U autour de l'état initial précontraint :

$$\begin{aligned} \exists U \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta U \in \mathcal{C}_u, \\ k_E(U, \delta U) + k_G(U, \delta U) + k_F(U, \delta U) + \mathcal{M}(\ddot{U}, \delta U) = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U d\Sigma_{00} \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec

$$k_E(U, \delta U) = \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [C \varepsilon_X(U) \varepsilon_X(\delta U)] d\Omega_{00} \quad (1.34)$$

$$k_G(U, \delta U) = \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [D_X U \sigma_0 D_X \delta U^T] d\Omega_{00} \quad (1.35)$$

$$k_F(U, \delta U) = - \int_{\Sigma_{f00}} |f_{F0}^*| \tau_{00}(U) \cdot \delta U d\Sigma_{00} \quad (1.36)$$

$$\mathcal{M}(\ddot{U}, \delta U) = \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} \ddot{U} \cdot \delta U d\Omega_{00} \quad (1.37)$$

k_E : est associé à la raideur élastique de la structure,

k_G : traduit la rigidité géométrique due aux précontraintes présentes dans la structure à l'instant initial,
 k_F : est une raideur générée par la présence de forces suiveuses f_F ,
 \mathcal{M} : représente l'inertie de la structure.

La méthode lagrangienne utilisée ici, qui peut au départ sembler inutilement complexe dans notre cas (puisqu'on se place en H.P.P. *in fine*), a l'avantage de faire apparaître les termes liés à la précontrainte et aux forces suiveuses de façon naturelle lors de la phase de linéarisation. D'autre part, cette méthode est assez générale et on a montré par l'équation (1.22) qu'elle peut être adaptée au cas où u_0 serait un grand déplacement⁴ (structures gonflées, etc.).

1.5 Approche énergétique

Le terme (1) de l'équation (1.11) peut également être obtenu par des considérations énergétiques.

Notons $\mathbf{T}(u_0)$ et $\mathbf{T}(u)$ les énergies internes élastiques emmagasinées lors des déformations qui aboutissent respectivement à la configuration initiale et à la configuration actuelle :

$$\mathbf{T}(\Omega^S) = \int_{\Omega_{00}^S} \mathcal{T}(u) \, d\Omega_{00} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr}[S(u) E(u)] \, d\Omega_{00} \quad (1.38a)$$

$$\mathbf{T}(\Omega_0^S) = \int_{\Omega_{00}^S} \mathcal{T}(u_0) \, d\Omega_{00} = \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr}[S(u_0) E(u_0)] \, d\Omega_{00} \quad (1.38b)$$

Le terme (1) de l'équation (1.11) peut alors s'exprimer comme la différence des variations de ces énergies pour des perturbations δu_0 et δu des champs de déplacement u_0 et u (cf. §C.1) :

$$\int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[S(u) \delta E(u, \delta u) - S(u_0) \delta E(u_0, \delta u_0) \right] \, d\Omega_{00} \quad (1.39)$$

Le taux de déformation, noté δE , s'exprime comme suit en utilisant les notations (1.14) :

$$\begin{aligned} \delta E(u, \delta u) &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{D}_X \delta u + \mathbf{D}_X \delta u^\top + \mathbf{D}_X u^\top \mathbf{D}_X \delta u + \mathbf{D}_X \delta u^\top \mathbf{D}_X u \right) \\ &= \varepsilon_X^L(\delta u) + \varepsilon_X^Q(u, \delta u) + \varepsilon_X^Q(\delta u, u) \end{aligned} \quad (1.40)$$

En utilisant de plus la relation (1.17), on obtient :

$$\begin{aligned} S(u) \delta E(u, \delta u) - S(u_0) \delta E(u_0, \delta u_0) &= \left(S_0 + C(E(u) - E(u_0)) \right) \left(\varepsilon_X^L(\delta u) + \varepsilon_X^Q(u, \delta u) + \varepsilon_X^Q(\delta u, u) \right) \\ &\quad \dots - S_0 \left(\varepsilon_X^L(\delta u_0) + \varepsilon_X^Q(u_0, \delta u_0) + \varepsilon_X^Q(\delta u_0, u_0) \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Comme δu et δu_0 sont deux champs de déplacements quelconques, cinématiquement admissibles et définis sur Ω_{00}^S , on peut décider de les choisir égaux et de les noter δU . En utilisant d'autre part $u =$

4. Les termes intégraux de l'équation variationnelle peuvent être simplifiés s'ils sont transposés sur la configuration initiale (plutôt que naturelle) que l'on détermine par un calcul statique non linéaire [32].

$u_0 + U$, on obtient après simplifications :

$$\begin{aligned} S(u) \delta E(u, \delta u) - S(u_0) \delta E(u_0, \delta u_0) &= S_0 \left(\varepsilon_X^Q(U, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, U) \right) + \dots \\ C \left(\varepsilon_X^L(U) + \varepsilon_X^Q(u, u) - \varepsilon_X^Q(u_0, u_0) \right) &\left(\varepsilon_X^L(\delta U) + \varepsilon_X^Q(u, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, u) \right) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Linéarisation par rapport à U

Le développement au 1^{er} ordre en U de cette expression donne :

$$\begin{aligned} S(u) \delta E(u, \delta u) - S(u_0) \delta E(u_0, \delta u_0) &\simeq S_0 \left(\varepsilon_X^Q(U, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, U) \right) + \dots \\ C \left(\varepsilon_X^L(U) + \varepsilon_X^Q(u_0, U) + \varepsilon_X^Q(U, u_0) \right) &\left(\varepsilon_X^L(\delta U) + \varepsilon_X^Q(u_0, \delta U) + \varepsilon_X^Q(U, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, u_0) + \varepsilon_X^Q(\delta U, U) \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Après simplifications, cette expression devient :

$$\begin{aligned} S(u) \delta E(u, \delta u) - S(u_0) \delta E(u_0, \delta u_0) &\simeq S_0 \left(\varepsilon_X^Q(U, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, U) \right) + C \varepsilon_X^L(U) \varepsilon_X^L(\delta U) \dots \\ &+ C \varepsilon_X^L(U) \left(\varepsilon_X^Q(u_0, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, u_0) \right) + C \left(\varepsilon_X^Q(u_0, U) + \varepsilon_X^Q(U, u_0) \right) \varepsilon_X^L(\delta U) \dots \\ &+ C \left(\varepsilon_X^Q(U, u_0) + \varepsilon_X^Q(u_0, U) \right) \left(\varepsilon_X^Q(u_0, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, u_0) \right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur Trace (D.1) ainsi que la symétrie de $C \varepsilon^L$ et de $C(\varepsilon^Q + (\varepsilon^Q)^\top)$, des simplifications apparaissent quand on introduit cette relation dans (1.39). On obtient ainsi une expression linéarisée en U de ce terme identique à (1.22) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[S(u) \delta E(u, \delta u) - S(u_0) \delta E(u_0, \delta u_0) \right] d\Omega_{00} &\simeq \dots \\ &k_E(U, \delta U) + k_G^{u_0}(U, \delta U) + k_L^{u_0}(U, \delta U) + k_Q^{u_0}(U, \delta U) \end{aligned} \quad (1.45)$$

avec

$$k_G^{u_0}(U, \delta U) = \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[S_0 \varepsilon_X^Q(U, \delta U) \right] d\Omega_{00} = \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[\mathbf{D}_X U S_0 \mathbf{D}_X \delta U^\top \right] d\Omega_{00} \quad (1.46)$$

Linéarisation par rapport à U et u_0

Faisons désormais l'hypothèse que les géométries des configurations naturelle et initiale sont quasiment identiques (u_0 infinitésimal).

Le développement au 1^{er} ordre en U et u_0 , ou de façon équivalente en u et u_0 , de l'expression (1.44) donne :

$$\begin{aligned} S(u) \delta E(u, \delta u) - S(u_0) \delta E(u_0, \delta u_0) &\simeq \dots \\ C \varepsilon_X^L(U) \varepsilon_X^L(\delta U) + \sigma_0 &\left(\varepsilon_X^Q(U, \delta U) + \varepsilon_X^Q(\delta U, U) \right) \quad \text{au 1^{er} ordre en } u \text{ et } u_0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

En utilisant les relations (D.1), on vérifie qu'on retrouve par cette approche des expressions identiques pour k_E et k_G .

Références bibliographiques

Les références consultées pour rédiger ce chapitre sont les ouvrages ou manuels de Morand & Ohayon [81], Mandel [72] (tome 2, annexe XIV), Ciarlet [31], Bonet & Wood [21], Belytschko *et al.* [15], Géraadin & Rixen [46], Salençon [98], Le Tallec [107] et Combescure [32].

Chapitre 2

Équations linéarisées d'un fluide parfait incompressible

Sommaire

2.1	Problématique et notations	24
2.1.1	Le système	24
2.1.2	Fluide en présence de la gravité	24
2.2	Équations locales	26
2.2.1	Équations du fluide parfait incompressible	26
2.2.2	Représentation du fluide	27
2.2.3	Configuration actuelle	28
2.2.4	Configuration initiale	28
2.3	Étude des petites déformations autour de l'état initial	28
2.3.1	Équations locales en $p_{\mathcal{L}}$ et U^F	28
2.3.2	Équations locales en $p_{\mathcal{L}}$ et φ	29
2.3.3	Expression de $p_{\mathcal{L}}$ en fonction de φ	29
2.3.4	Principe des travaux virtuels	30

2.1 Problématique et notations

Dans ce chapitre, c'est le point de vue du liquide qui est adopté. La formulation variationnelle linéarisée décrivant les petits mouvements d'un liquide parfait incompressible en présence d'un champ de pesanteur est établie ici.

2.1.1 Le système

On s'intéresse désormais aux petits mouvements d'un fluide incompressible non visqueux F en présence d'un champ de pesanteur constant g . Un tel système peut être schématisé par la figure 2.1.

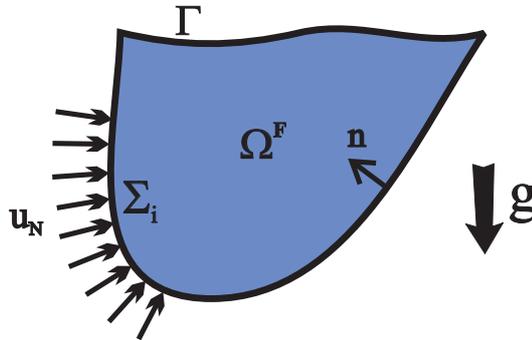


FIG. 2.1 – Le fluide seul en présence de la gravité

Légende :

g : champ de pesanteur constant en espace et en temps

u_N : déplacement normal imposé à la paroi Σ_i

Ω^F : domaine volumique occupé par le fluide, délimité par la surface fermée $\partial\Omega^F = \Sigma_i + \Gamma$

Γ : surface libre du fluide

Σ_i : surface où est imposé le déplacement normal u_N

n : vecteur normal **intérieur** à la surface $\partial\Omega^F$

2.1.2 Fluide en présence de la gravité

Fluctuation de pression eulérienne et lagrangienne

Il faut tout d'abord rappeler qu'en présence de la gravité, les fluctuations de pression eulérienne $p_{\mathcal{E}}$ et lagrangienne $p_{\mathcal{L}}$ d'un fluide ne sont pas équivalentes, et ceci même dans le cas de l'H.P.P. En effet, $p_{\mathcal{L}}(M)$ est défini pour tout point M_0 de la configuration d'origine en suivant la particule de fluide entre les deux instants :

$$p_{\mathcal{L}}(M_0) = P(M) - P_0(M_0) \quad \text{avec } M = M_0 + u^F(M_0) \quad (2.1a)$$

alors que $p_{\mathcal{E}}(M_0)$ est défini au point géométrique M_0 par :

$$p_{\mathcal{E}}(M_0) = P(M_0) - P_0(M_0) \quad (2.1b)$$

En calculant la différence entre ces 2 expressions, on obtient, au 1^{er} ordre en u^F :

$$p_{\mathcal{L}}(M_0) - p_{\mathcal{E}}(M_0) \simeq \nabla P(M_0) \cdot u^F(M_0)$$

En présence de la gravité g et en supposant que $\nabla P \simeq \nabla P_0 = \rho^F g^\top$, l'expression précédente devient :

$$p_{\mathcal{L}}(M_0) - p_{\mathcal{E}}(M_0) \simeq \rho^F g \cdot u^F(M_0) \quad (2.2)$$

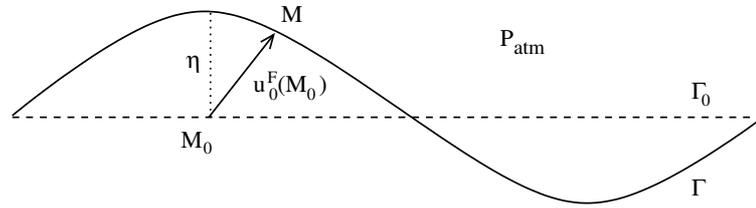


FIG. 2.2 – La surface libre du fluide

La figure 2.2 donne une illustration simple de la formule (2.2) : en effet, pour un point M_0 de la surface Γ_0 du fluide au repos, les fluctuations de pression lagrangienne et eulérienne valent :

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{L}}(M_0) &= P(M) - P_0(M_0) = P_{\text{atm.}} - P_{\text{atm.}} = 0 \\ p_{\mathcal{E}}(M_0) &= P(M_0) - P_0(M_0) = P_{\text{atm.}} + \rho^F |g| \eta - P_{\text{atm.}} = \rho^F |g| \eta \end{aligned}$$

où η est la hauteur de la colonne de fluide au dessus du point M_0 . En supposant l'hypothèse des petites perturbations, η peut être confondu, au premier ordre, avec la composante verticale du déplacement $u^F(M_0)$. On vérifie alors que les valeurs de fluctuation de pression obtenues sont en accord avec la formule (2.2). Pour plus de détails sur ce point, le lecteur pourra se référer au chapitre 2 de l'ouvrage de Morand & Ohayon [81].

De la même façon que dans le cas de la structure, la présence d'un champ de pesanteur agit donc comme une précontrainte sur le fluide et empêche de confondre les points de vue lagrangien et eulérien. De nouveau, pour la mise en équations du problème, il nous faut donc travailler en distinguant les différents états de référence du fluide :

configuration naturelle : c'est une configuration virtuelle dans laquelle le fluide n'est soumis à aucune action extérieure, pas même à la gravité. Le volume qu'il occupe est délimité par les parois du récipient qui le contient, à l'état naturel, et par une surface libre que l'on suppose horizontale. Les grandeurs relatives à la configuration naturelle seront indicées par $_{00}$.

configuration initiale : c'est l'état d'équilibre autour duquel on désire étudier les mouvements du fluide. Cette configuration statique est déterminée d'une part par l'action des forces de pesanteur liées à g et d'autre part par un déplacement statique u_{0N} imposé à la paroi Σ_i . La présence de g en fait un état de référence précontraint. Les grandeurs relatives à la configuration initiale seront indicées par $_0$.

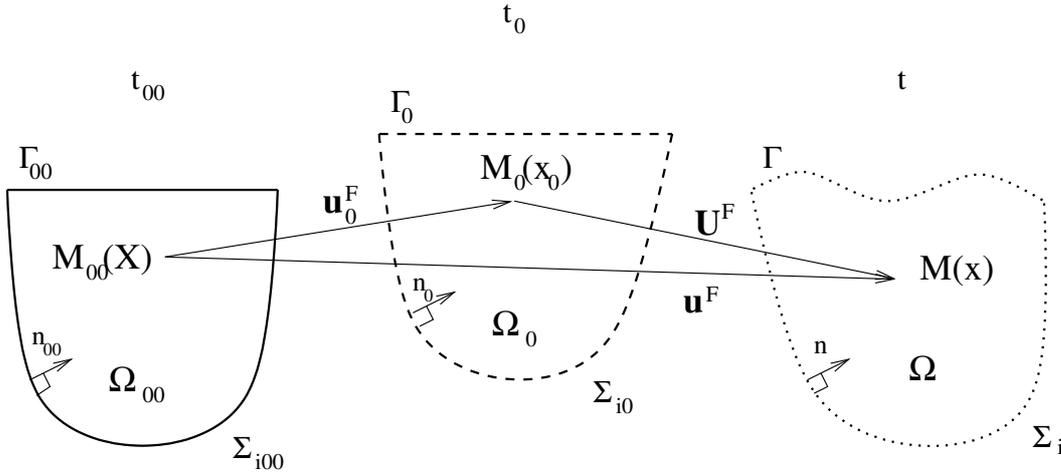


FIG. 2.3 – Les 3 configurations du fluide : naturelle, initiale et actuelle

configuration actuelle : c'est l'état du fluide à tout instant de l'analyse dynamique. Le fluide est soumis d'une part aux forces de pesanteur et d'autre part aux déplacements imposés u_N . Les grandeurs se rapportant à la configuration actuelle seront sans indice.

La méthode utilisée pour déterminer les équations des petits mouvements du fluide autour de l'état initial précontraint sera similaire à celle qui a été utilisée pour la structure. Cependant, on établira tout d'abord les équations locales du problème desquelles on déduira ensuite une formulation variationnelle.

2.2 Équations locales

2.2.1 Équations du fluide parfait incompressible

Rappelons tout d'abord que pour un fluide parfait (non visqueux), soumis au champ de pesanteur g , l'équation d'Euler s'écrit en tout point M de Ω^F :

$$\nabla_x P(M) = \rho^F(M) (g - \gamma(M)^F)^\top \quad (2.3)$$

Une deuxième relation est obtenue en traduisant l'incompressibilité du fluide : traditionnellement, on écrit $\text{div}_x v^F(M) = 0$ dans Ω^F . Cependant, ici on utilisera la relation linéarisée qui fait intervenir la déformation¹ u^F plutôt que la vitesse v^F :

$$\text{div}_X u^F(M_{00}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (2.4)$$

Cette relation peut être obtenue directement en considérant la loi de conservation de la masse en coordonnées lagrangiennes, qui s'écrit :

$$\rho^F \det(F) = \rho_{00}^F$$

1. La même simplification de notation qu'au §1.3 nous amènera à noter $u^F(M_{00})$ et $u_0^F(M_{00})$ les images réciproques de $u^F(M)$ et $u_0^F(M_0)$.

où F est l'application linéaire tangente associée à l'application bijective différentiable $\Phi : \Omega_{00}^F \longrightarrow \Omega^F$.

Pour un fluide incompressible, $\rho^F = \rho_{00}^F$ donc $\det(F) = 1$. Comme $\det(F) \simeq 1 + \operatorname{div}_X u^F(M_{00})$ au 1^{er} ordre en u^F , on obtient bien la relation (2.4).

On montre également la propriété suivante :

Proposition 1. *Les petits mouvements harmoniques d'un fluide parfait incompressible, à fréquence non nulle, sont irrotationnels.*

Pour démontrer cette proposition, prenons le rotationnel de l'équation (2.3), en tenant compte du fait que $\rho^F = \text{cste}$:

$$\rho^F(M) \omega^2 \operatorname{rot}_X (u^F(M_{00})) = 0$$

Pour $\omega \neq 0$, $\operatorname{rot}_X (u^F(M_{00}))$ doit s'annuler.

2.2.2 Représentation du fluide

Il y a plusieurs choix de variable d'état possibles pour écrire les équations du fluide :

- soit son champ de déplacement u^F [58, 18, 91] : la compatibilité des déplacements à l'interface avec la structure est ainsi facilement satisfaite, mais l'apparition de "modes de circulation" non physiques apporte des problèmes numériques. Bien que des méthodes aient été développées pour faire disparaître ces modes indésirables (soit par ajout d'un terme de pénalité proportionnel à $\operatorname{rot} U^F$ [28], soit par l'utilisation d'éléments finis de type Raviart-Thomas en imposant la relation $\operatorname{div} U^F$ [19, 17, 18]), ces méthodes restent exigeantes en terme de capacité de calcul, vue la taille des modèles qu'elles engendrent².
- soit la pression P dans le fluide : cependant, l'introduction d'une variable duale dans la formulation rend le système obtenu non symétrique et moins facilement implémentable dans des codes de calcul standards [70]. La symétrisation nécessite alors une projection modale [84].
- soit, grâce à la proposition 1, un potentiel³ de déplacement $\varphi(M_{00})$, défini par la relation $u^F \tau = \nabla_X \varphi$. En introduisant ce potentiel, on élimine les solutions stationnaires irrotationnelles parasites qui peuvent exister dans le cas de domaines non simplement connexes⁴, ainsi que les mouvements rotationnels permanents (qui ne sont pas le sujet de l'analyse vibratoire qu'on désire faire ici).

C'est cette dernière possibilité qui sera utilisée par la suite.

2. Si la viscosité du fluide devait être prise en compte, une formulation en déplacement pour le fluide serait certainement le seul choix possible.

3. Dans le cas de domaines fluides multiples, il faut définir des potentiels φ_i pour chaque domaine.

4. Rappelons que, d'un point de vue mathématique, le *lemme de Poincaré "global"* n'assure l'existence du potentiel φ que sous certaines hypothèses restrictives sur le domaine Ω (cf. Dautray & Lions [36], tome 5, §IX A). Ces hypothèses sont en particulier vérifiées pour des domaines Ω réguliers et simplement connexes, ou de plus généralement "étoilés par rapport à un point".

2.2.3 Configuration actuelle

A tout instant t , l'état du fluide est décrit en tout point $M(x)$ par les champs de déplacement $u^F(x, t)$ et de pression $P(x, t)$ qui vérifient les équations du problème aux limites suivant :

$$\nabla_x P(M) = \rho^F (g - \gamma^F(M))^\top \quad \text{dans } \Omega^F \quad (2.5a)$$

$$\operatorname{div}_X u^F(M_{00}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (2.5b)$$

$$u^F(M_{00}) \cdot n_{00} = u_N \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (2.5c)$$

$$P(M) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.5d)$$

2.2.4 Configuration initiale

Dans la configuration initiale, l'état du fluide, supposé à l'équilibre, est décrit en tout point $M_0(x_0)$ par les champs de déplacement $u_0^F(x_0)$ et de pression $P_0(x_0)$ qui vérifient les équations d'équilibre du problème aux limites suivant :

$$\nabla_{x_0} P_0(M_0) = \rho^F g^\top \quad \text{dans } \Omega_0^F \quad (2.6a)$$

$$\operatorname{div}_X u_0^F(M_{00}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (2.6b)$$

$$u_0^F(M_{00}) \cdot n_{00} = u_{0N} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (2.6c)$$

$$P_0(M_0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (2.6d)$$

2.3 Étude des petites déformations autour de l'état initial

2.3.1 Équations locales en $p_{\mathcal{L}}$ et U^F

On introduit ensuite le champ de déplacement $U^F(M_{00}) = u^F(M_{00}) - u_0^F(M_{00})$ qui représente les déformations autour de l'état initial en tout point M_{00} de la configuration naturelle. En conservant ce point de vue lagrangien, on est amené à définir la fluctuation de pression lagrangienne entre les configurations initiales et actuelle, $p_{\mathcal{L}}$, par (cf. chapitre 2 de l'ouvrage [81]) :

$$p_{\mathcal{L}}(M_{00}) = P^*(M_{00}) - P_0^*(M_{00}) \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (2.7)$$

La première équation locale qui relie U^F et $p_{\mathcal{L}}$ est obtenue en calculant le gradient de $p_{\mathcal{L}}$ grâce à (2.5a) et (2.6a) :

$$\begin{aligned} \nabla_X p_{\mathcal{L}}(M_{00}) &= \nabla_X P^*(M_{00}) - \nabla_X P_0^*(M_{00}) \\ &= \nabla_x P(M) F - \nabla_{x_0} P_0(M_0) F_0 \\ &= \rho^F (g - \gamma^F(M))^\top F - \rho^F g^\top F_0 \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $F = Id + D_X u^F$ et $F_0 = Id + D_X u_0^F$, et en développement au 1^{er} ordre en u^F et u_0^F , on obtient :

$$\boxed{\nabla_X p_{\mathcal{L}} \simeq \rho^F g^\top D_X U^F - \rho^F \frac{\partial^2 U^F(X, t)^\top}{\partial t^2}} \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (2.8)$$

Les 3 autres équations locales sont obtenues directement par différence entre (2.5b) et (2.6b), (2.5c) et (2.6c), et (2.5d) et (2.6d). Finalement, les équations locales du problème **linéarisé** autour de la configuration initiale s'écrivent, en coordonnées lagrangiennes relatives à la configuration naturelle :

$$\begin{aligned} \nabla_X p_{\mathcal{L}} &= \rho^F g^\top D_X U^F - \rho^F \ddot{U}^{F\top} && \text{dans } \Omega_{00}^F && (2.9a) \\ \operatorname{div}_X U^F &= 0 && \text{dans } \Omega_{00}^F && (2.9b) \\ U^F \cdot n_{00} &= U_N && \text{sur } \Sigma_{i00} && (2.9c) \\ p_{\mathcal{L}} &= 0 && \text{sur } \Gamma_{00} && (2.9d) \end{aligned}$$

2.3.2 Équations locales en $p_{\mathcal{L}}$ et φ

En introduisant le champ de potentiel de déplacement φ , défini par l'équation :

$$U^F(M_{00})^\top = \nabla_X \varphi(M_{00}) \quad (2.10)$$

les équations locales (2.9) deviennent :

$$\begin{aligned} \nabla_X p_{\mathcal{L}} &= \rho^F g^\top \nabla_X^2 \varphi - \rho^F \nabla_X \ddot{\varphi} && \text{dans } \Omega_{00}^F && (2.11a) \\ \Delta_X \varphi &= 0 && \text{dans } \Omega_{00}^F && (2.11b) \\ \nabla_X \varphi \cdot n_{00} &= U_N && \text{sur } \Sigma_{i00} && (2.11c) \\ p_{\mathcal{L}} &= 0 && \text{sur } \Gamma_{00} && (2.11d) \end{aligned}$$

où la notation $\nabla_X^2 \varphi$ représente la matrice Hessienne de φ (matrice des dérivées partielles du second ordre par rapport aux coordonnées X_i).

2.3.3 Expression de $p_{\mathcal{L}}$ en fonction de φ

Une intégration en X de l'équation (2.11a) nous donne une relation entre $p_{\mathcal{L}}$ et φ :

$$p_{\mathcal{L}} = \rho^F g \cdot \nabla \varphi - \rho^F \ddot{\varphi} + \pi \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (2.12)$$

où π est une constante sur Ω_{00}^F que l'on détermine par le choix d'une condition d'unicité⁵ sur φ que l'on note $\ell(\varphi) = 0$ avec $\ell(1) \neq 0$ (cf. [85] et le chapitre 3 de [81]).

Pour déterminer une valeur de la constante π , on intègre la relation (2.11b) sur le domaine Ω_{00}^F :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{00}^F} \Delta \varphi \, d\Omega_{00} \\ 0 &= \int_{\Sigma_{i00} + \Gamma_{00}} \nabla \varphi \cdot (-n_{00}) \, d\Sigma_{00} \\ 0 &= \int_{\Sigma_{i00}} U_N \, d\Sigma_{00} - \int_{\Gamma_{00}} \nabla \varphi \cdot i_z \, d\Gamma_{00} \end{aligned} \quad (2.13)$$

car on a supposé que la surface libre Γ_{00} est telle que le vecteur normal n_{00} soit colinéaire au vecteur gravité g et donc au vecteur i_z . Sur la surface libre, l'expression (2.12) s'écrit donc :

$$p_{\mathcal{L}} = -\rho^F |g| \nabla \varphi \cdot i_z - \rho^F \ddot{\varphi} + \pi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (2.14)$$

5. En effet, φ est déterminé à une constante près par la relation (2.10)

En utilisant (2.11d), on déduit que :

$$\nabla\varphi \cdot i_z = -\frac{\ddot{\varphi}}{|g|} + \frac{\pi}{\rho^F |g|} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (2.15)$$

En substituant (2.15) dans (2.13), on obtient :

$$\int_{\Sigma_{i00}} U_N \, d\Sigma_{00} + \frac{1}{|g|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} \right) - \frac{\pi}{\rho^F |g|} \|\Gamma_{00}\| = 0$$

On choisit alors la condition d'unicité $\ell(\varphi)$ telle que⁶ :

$$\ell(\varphi) = \int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0 \quad (2.16)$$

Ainsi π vaut :

$$\pi = \frac{\rho^F |g|}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U_N \, d\Sigma_{00} \quad (2.17)$$

Finalement, l'expression explicite de $p_{\mathcal{L}}$ devient :

$$p_{\mathcal{L}} = \rho^F g \cdot \nabla\varphi - \rho^F \ddot{\varphi} + \frac{\rho^F |g|}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U_N \, d\Sigma_{00} \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad \text{avec } \int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0 \quad (2.18)$$

2.3.4 Principe des travaux virtuels

On appelle \mathcal{C}_φ l'ensemble des fonctions scalaires $\varphi(M_{00})$ définies sur Ω_{00}^F suffisamment régulières⁷, et \mathcal{C}_φ^* le sous-ensemble de \mathcal{C}_φ restreint aux fonctions φ qui vérifient la condition (2.16).

La solution φ recherchée appartient à \mathcal{C}_φ^* et vérifie les équations locales suivantes :

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (2.19a)$$

$$\nabla\varphi \cdot n_{00} = U_N \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (2.19b)$$

$$\nabla\varphi \cdot i_z = -\frac{\ddot{\varphi}}{|g|} + \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U_N \, d\Sigma_{00} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (2.19c)$$

Le principe des travaux virtuels associé à ces équations s'obtient en multipliant (2.19a) par un champ scalaire virtuel $\delta\varphi$ appartenant à \mathcal{C}_φ et en intégrant sur le volume Ω_{00}^F :

$$\forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi, \quad \int_{\Omega_{00}^F} \Delta\varphi \delta\varphi \, d\Omega_{00} = 0$$

6. On vérifie que si le liquide possède une surface libre $\int_{\Gamma_{00}} d\Gamma_{00} = \|\Gamma_{00}\| \neq 0$

7. $\mathcal{C}_\varphi = \{\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_{00}^F)\}$ et $\mathcal{C}_\varphi^* = \{\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_{00}^F), \text{ tel que } \int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0\}$

En utilisant la formule de Green (D.7), ainsi que les relations (2.19b) et (2.19c), l'équation précédente devient :

$$\int_{\Omega_{00}^F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \varphi \, d\Omega_{00} + \frac{1}{|g|} \int_{\Gamma_{00}} \ddot{\varphi} \delta \varphi \, d\Gamma_{00} - \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \left(\int_{\Sigma_{i00}} U_N \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Gamma_{00}} \delta \varphi \, d\Gamma_{00} \right) = \dots$$

$$- \int_{\Sigma_{i00}} U_N \delta \varphi \, d\Sigma_{00}$$

En choisissant les fonctions test $\delta \varphi$ dans \mathcal{C}_φ^* plutôt que \mathcal{C}_φ , la relation précédente se simplifie en :

$$\boxed{\exists \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que } \forall \delta \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \int_{\Omega_{00}^F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \varphi \, d\Omega_{00} + \frac{1}{|g|} \int_{\Gamma_{00}} \ddot{\varphi} \delta \varphi \, d\Gamma_{00} = - \int_{\Sigma_{i00}} U_N \delta \varphi \, d\Sigma_{00}}$$

(2.20)

Références bibliographiques

Les références consultées pour rédiger ce chapitre sont les ouvrages de Morand & Ohayon [81], Landau & Lifchitz [65] et le tome 1 de Mandel [72].

Chapitre 3

Équations couplées linéarisées d'une structure et d'un fluide interne incompressible

Sommaire

3.1	Problématique et notations	34
3.1.1	Le système	34
3.1.2	L'interface fluide/structure	34
3.2	Influence de la présence de la structure sur les équations du fluide	34
3.2.1	Conditions de contact sur l'interface fluide/structure	35
3.2.2	Équation variationnelle couplée du fluide	36
3.2.3	Équations locales associées	36
3.3	Influence de la présence du fluide sur les équations de la structure	37
3.3.1	Configuration actuelle	37
3.3.2	Configuration initiale	37
3.3.3	Équation couplée des déformations de la structure autour de l'état initial	38
3.4	Propriétés des différents opérateurs	39
3.4.1	Étude de la forme bilinéaire k_{Σ}	40
3.5	Retour aux équations locales	43

3.1 Problématique et notations

Les équations relatives d'une part à la structure (chapitre 1) et d'autre part au fluide (chapitre 2) sont adaptées de façon à mettre en évidence les termes de couplage. Les équations du système fluide-structure en découlent directement.

3.1.1 Le système

Nous sommes à présent intéressés par le problème linéarisé relatif aux déformations couplées d'une structure S avec un fluide F en présence d'un champ de force gravitationnel constant g . Un tel système peut être schématisé par la figure 3.1.

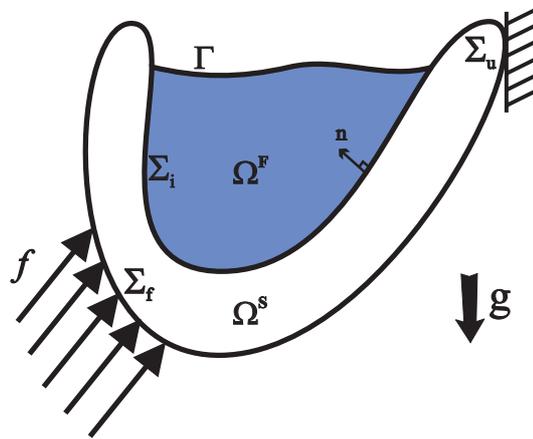


FIG. 3.1 – Structure et fluide interne en présence de la gravité

3.1.2 L'interface fluide/structure

La surface de contact entre le fluide et la structure sera notée Σ_i . En tout point géométrique M_{00} de cette interface coïncident, dans la configuration naturelle, un point matériel fluide (indiqué F) et un point matériel structure (indiqué S) qui, au cours de la déformation, vont avoir deux trajectoires différentes, du fait du déplacement relatif du liquide par rapport à la structure, comme le montre la figure 3.2.

3.2 Influence de la présence de la structure sur les équations du fluide

Lorsque la structure se déforme, elle impose une déformation au contour Σ_i du fluide. Le terme de couplage provient donc de la relation qui existe entre les déplacements u^S et u^F au niveau de l'interface fluide/structure.

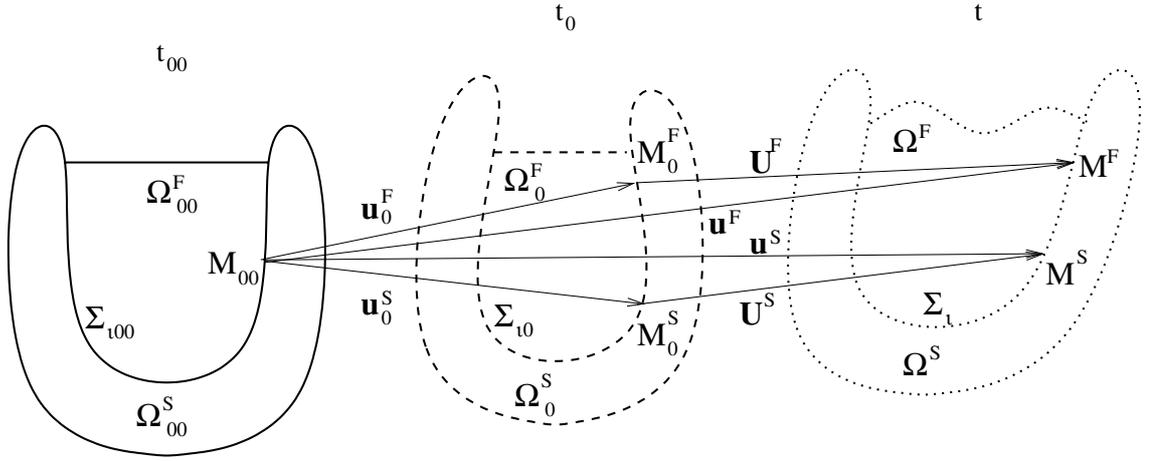


FIG. 3.2 – Déplacement du point fluide et du point structure

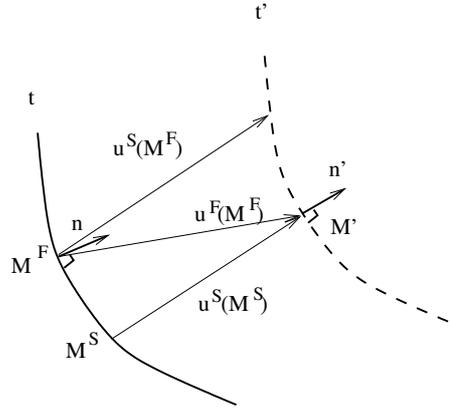


FIG. 3.3 – Condition de contact

3.2.1 Conditions de contact sur l'interface fluide/structure

La condition de contact classique d'un fluide parfait (non visqueux) sur une paroi traduit la continuité de la composante normale des vitesses aux points de l'interface et s'écrit :

$$v^F(M').n'(M') = v^S(M').n'(M') \quad (3.1)$$

Quelques transformations sont nécessaires pour écrire une relation linéarisée équivalente sur les déplacements, plutôt que sur les vitesses. Tout d'abord, remarquons que :

$$\begin{aligned} v^F(M') &= \frac{\partial u^F}{\partial t}(M^F) \\ v^S(M') &= \frac{\partial u^S}{\partial t}(M^S) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $u^S(M^S) \simeq u^S(M^F)$ et $n'(M') \simeq n(M^F)$ au 1^{er} ordre en u , la relation (3.1) peut

être linéarisée et on obtient ainsi une condition de contact sur les déplacements :

$$\begin{aligned} v^F(M').n'(M') = v^S(M').n'(M') &\Rightarrow \frac{\partial u^F}{\partial t}(M^F).n(M^F) \simeq \frac{\partial u^S}{\partial t}(M^F).n(M^F) \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } u \\ &\Rightarrow \boxed{u^F(M^F).n(M^F) \simeq u^S(M^F).n(M^F)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2.2 Équation variationnelle couplée du fluide

La condition de contact (3.2) nous permet d'écrire le déplacement imposé U_N sur la surface Σ_{i00} du domaine liquide Ω_{00}^F , en fonction de U^S :

$$U_N \equiv U^F.n_{00} \simeq U^S.n_{00} \quad (3.3)$$

En remplaçant U_N par $U^S.n_{00}$ dans la formulation variationnelle (2.20), on traduit donc l'effet de la présence de la structure sur les équations du fluide. Cette relation s'écrit alors¹ :

$$\boxed{\exists \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \mathcal{F}(\varphi, \delta\varphi) + \mathcal{S}(\ddot{\varphi}, \delta\varphi) + \mathcal{C}(U^S, \delta\varphi) = 0} \quad (3.4)$$

avec

$$\mathcal{F}(\varphi, \delta\varphi) = \rho^F \int_{\Omega_{00}^F} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega_{00} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{S}(\ddot{\varphi}, \delta\varphi) = \frac{\rho^F}{|g|} \int_{\Gamma_{00}} \ddot{\varphi} \delta\varphi \, d\Gamma_{00} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{C}(U^S, \delta\varphi) = \rho^F \int_{\Sigma_{i00}} U^S.n_{00} \delta\varphi \, d\Sigma_{00} \quad (3.7)$$

\mathcal{F} : est la forme bilinéaire associée à l'énergie cinétique de ballonnement du fluide,

\mathcal{S} : est la forme bilinéaire associée à l'énergie potentielle de ballonnement du fluide,

\mathcal{C} : représente le terme de couplage à l'interface fluide/structure.

3.2.3 Équations locales associées

Pour mémoire, récrivons les équations locales du fluide (2.19) couplées à la structure :

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (3.8a)$$

$$\nabla\varphi.n_{00} = U^S.n_{00} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (3.8b)$$

$$\nabla\varphi.i_z = -\frac{\ddot{\varphi}}{|g|} + \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U^S.n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (3.8c)$$

$$\int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0 \quad (3.8d)$$

1. On rappelle que $\mathcal{C}_\varphi^* = \{\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_{00}^F), \text{ tel que } \int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0\}$.

3.3 Influence de la présence du fluide sur les équations de la structure

Le fluide agit sur la structure par l'intermédiaire de forces de pression P situées sur l'interface Σ_i . Ces forces sont des forces suiveuses extérieures à la structure et sont donc incluses dans f_F . Cependant, pour pouvoir les exprimer en fonction des paramètres du fluide, on les distinguera des autres forces f_F . La partie de la frontière Σ_f qui est au contact du fluide sera donc renommée Σ_i .

3.3.1 Configuration actuelle

Pour tenir compte des forces de pression qui agissent sur la surface Σ_i , on ajoute une relation aux équations locales (1.1) :

$$\text{Div}_x \sigma(u(x)) + \rho(x) g = \rho(x) \gamma(x) \quad \text{dans } \Omega^S \quad (3.9a)$$

$$\sigma(u(x)) n = f \quad \text{sur } \Sigma_f \quad (3.9b)$$

$$\sigma(u(x)) n = -P(x) n \quad \text{sur } \Sigma_i \quad (3.9c)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_u \quad (3.9d)$$

Dans le principe des travaux virtuels sur la configuration actuelle (1.2), un terme supplémentaire apparaît donc au second membre :

$$\int_{\Sigma_i} -P(x) n \cdot \delta u(x) d\Sigma \quad (3.10)$$

Dans le principe des travaux virtuels transposé sur la configuration naturelle (1.7), ce terme devient :

$$\int_{\Sigma_i} -P(M^S) n \cdot \delta u(x) d\Sigma = \int_{\Sigma_{i00}} -P^*(M_{00}) \delta u^*(X) \cdot (n d\Sigma)^*$$

3.3.2 Configuration initiale

De même, dans le principe des travaux virtuels sur la configuration initiale (1.4), le terme supplémentaire qui apparaît au second membre s'écrit :

$$\int_{\Sigma_{i0}} -P_0(x_0) n_0 \cdot \delta u_0(x_0) d\Sigma_0 \quad (3.11)$$

Dans le principe des travaux virtuels transposé sur la configuration naturelle (1.8), ce terme devient :

$$\int_{\Sigma_{i0}} -P_0(M_0^S) n_0 \cdot \delta u_0 d\Sigma_0 = \int_{\Sigma_{i00}} -P_0^*(M_{00}) \delta u_0^* \cdot (n_0 d\Sigma_0)^* \quad (3.12)$$

3.3.3 Équation couplée des déformations de la structure autour de l'état initial

En prenant $\delta u^* = \delta u_0^* = \delta U$, le terme supplémentaire qui apparaît dans l'équation (1.11) s'écrit donc :

$$- \int_{\Sigma_{i00}} \left(P^*(M_{00}) (n \, d\Sigma)^* - P_0^*(M_{00}) (n_0 \, d\Sigma_0)^* \right) \cdot \delta U \quad (3.13)$$

Pour faire intervenir la fluctuation lagrangienne de pression définie par (cf. équation (2.7)) :

$$p_{\mathcal{L}}(M_{00}) = P^*(M_{00}^F) - P_0^*(M_{00}^F) \quad \text{dans } \Omega_{00}, \quad (3.14)$$

on introduit les points M^F et M_0^F :

$$\begin{aligned} P^*(M_{00}) &= P(M^S) \\ &= P(M^F) + \nabla_x P(M^F) \cdot (u^S - u^F) \\ &\simeq P(M^F) + \nabla_{x_0} P_0(M_0^F) \cdot (u^S - u^F) \quad \text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } u \\ &\simeq P^*(M_{00}^F) + \rho^F g \cdot (u^S - u^F) \quad \text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } u \\ \text{et } P_0^*(M_{00}) &= P_0(M_0^S) \\ &= P_0(M_0^F) + \nabla_{x_0} P_0(M_0^F) \cdot (u_0^S - u_0^F) \\ &= P_0^*(M_{00}^F) + \rho^F g \cdot (u_0^S - u_0^F) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une approximation au 1^{er} ordre² en u et u_0 du terme $P^*(M_{00})(n \, d\Sigma)^* - P_0^*(M_{00})(n_0 \, d\Sigma_0)^*$ qui intervient dans (3.13) :

$$\begin{aligned} &P^*(M_{00}) (n \, d\Sigma)^* - P_0^*(M_{00}) (n_0 \, d\Sigma_0)^* \\ &= P^*(M_{00}) (n \, d\Sigma)^* - P_0^*(M_{00}) (n \, d\Sigma)^* + P_0^*(M_{00}) (n \, d\Sigma)^* - P_0^*(M_{00}) (n_0 \, d\Sigma_0)^* \\ &\simeq \left(P_0^*(M_{00}^F) + \rho^F g \cdot (u^S - u^F) - P_0^*(M_{00}^F) - \rho^F g \cdot (u_0^S - u_0^F) \right) (n \, d\Sigma)^* \dots \\ &\quad + P_0^*(M_{00}) \left((n \, d\Sigma)^* - (n_0 \, d\Sigma_0)^* \right) \\ &\simeq \left(p_{\mathcal{L}}(M_{00}) + \rho^F g \cdot (U^S - U^F) \right) n_{00} \, d\Sigma_{00} + P_0^*(M_{00}) \tau_{00}(U^S) \, d\Sigma_{00} \end{aligned} \quad (3.15)$$

où τ_{00} est le vecteur, linéairement dépendant de U^S , représentant la rotation de la normale n et défini par la relation 1.29.

La valeur de $P_0^*(M_{00}) = P_0(M_0^S)$ peut être calculée grâce à (2.6a) et (2.6d) :

$$P_0(M_0) = -\rho^F |g| z_0 \quad (3.16)$$

où z_0 est l'altitude du point M_0 par rapport à Γ_0 dans la configuration initiale. Puisqu'on suppose que, dans l'état initial, la déformation de la géométrie du système est infinitésimale, z_0 peut être approché, au 1^{er} ordre en u_0 , par z_{00} , sa valeur dans la configuration naturelle.

D'autre part l'expression (2.18) de $p_{\mathcal{L}}$ peut s'écrire ici :

$$p_{\mathcal{L}} = \rho^F g \cdot U^F - \rho^F \ddot{\varphi} + \frac{\rho^F |g|}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad (3.17)$$

2. on suppose que si u et u_0 sont des infiniment petits, alors $p_{\mathcal{L}}$ l'est également.

En utilisant (3.15), (3.16) et (3.17), on obtient l'expression linéarisée du terme supplémentaire (3.13) :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Sigma_{i00}} \left(P^*(M_{00}) (n \, d\Sigma)^* - P_0^*(M_{00}) (n_0 \, d\Sigma_0)^* \right) \cdot \delta U = \dots \\
 & \int_{\Sigma_{i00}} \rho^F \ddot{\varphi} n_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} - \frac{\rho^F |g|}{\|\Gamma_{00}\|} \left(\int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{i00}} n_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \right) \dots \\
 & - \rho^F \int_{\Sigma_{i00}} (g \cdot U^S) (\delta U \cdot n_{00}) \, d\Sigma_{00} + \rho^F |g| \int_{\Sigma_{i00}} z_{00} \delta U \cdot \tau_{00} \, d\Sigma_{00} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Finalement, l'expression complète de la formulation variationnelle qui régit les petites déformations U^S de la structure autour de l'état initial précontraint³ est donnée par :

$$\boxed{\exists U^S \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta U \in \mathcal{C}_u, \quad \mathcal{K}(U^S, \delta U) + \mathcal{M}(\ddot{U}^S, \delta U) - \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00}} \quad (3.19)$$

avec

$$\mathcal{K}(U^S, \delta U) = k_E(U^S, \delta U) + k_G(U^S, \delta U) + k_F(U^S, \delta U) + k_B(U^S, \delta U) + k_\Sigma(U^S, \delta U) \quad (3.20)$$

et

$$k_B(U^S, \delta U) = \frac{\rho^F |g|}{\|\Gamma_{00}\|} \left(\int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{i00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \quad (3.21)$$

$$k_\Sigma(U^S, \delta U) = -\rho^F |g| \int_{\Sigma_{i00}} \left((i_z \cdot U^S) (\delta U \cdot n_{00}) + z_{00} \delta U \cdot \tau_{00}(U^S) \right) \, d\Sigma_{00} \quad (3.22)$$

$$\mathcal{C}(\varphi, \delta U) = \rho^F \int_{\Sigma_{i00}} \varphi \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad (3.23)$$

k_B : est une rigidité associée à la variation de pression quasi-statique du fluide due à l'élévation du niveau moyen de la surface libre,

k_Σ : est lié à la présence de forces suiveuses sur l'interface fluide/structure (comme la pression du fluide due à la gravité),

\mathcal{K} : est un nouvel opérateur de raideur, appelé "opérateur d'élastogravité" (cf. Morand & Ohayon [81])⁴.

Remarquons que la prise en compte de la gravité n'introduit aucun amortissement dans le modèle, contrairement au cas d'un domaine fluide non borné (phénomène de radiation et dissipation à l'infini) [111].

3.4 Propriétés des différents opérateurs

\mathcal{F} : est symétrique, semi-définie positive (pour $\varphi = cste$, $\mathcal{F}(\varphi, \varphi) = 0$),

\mathcal{S} : est symétrique, semi-définie positive (pour $\varphi = 0$ sur Γ_{00} et $\neq 0$ sur $\Omega_{00}^F/\Gamma_{00}$, $\mathcal{S}(\varphi, \varphi) = 0$),

3. Rappelons que $\mathcal{C}_u = \{u \in (\mathcal{H}^1(\Omega_{00}^S))^3, \text{ tel que } u \equiv 0 \text{ sur } \Sigma_{u00}\}$.

4. L'opérateur d'élastogravité a également été utilisé en géophysique pour l'étude des vibrations de la terre avec prise en compte de l'inertie des fluides internes et des précontraintes dues à la gravité [109].

- k_E : est symétrique, semi-définie positive dans le cas d'une structure libre ou définie positive sinon,
- k_G : est symétrique et sans signature (par exemple : positif dans le cas d'une barre précontrainte en traction et négatif dans le cas d'une barre en compression),
- k_B : est symétrique, semi-définie positive (il existe des déformations U^S qui ne font pas monter le niveau du liquide : $\int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n \, d\Sigma_{00} = 0 \not\Rightarrow U^S = 0$),
- k_Σ : est symétrique (cf. §3.4.1) et sans signature,
- k_F : n'est en règle générale pas symétrique (cf. annexes C.3). Hibbitt propose alors d'utiliser une version symétrisée $k_F^S = 1/2(k_F + k_F^\top)$ pour garder le caractère conservatif du système [52]. Cette technique est reprise par Mohan [76]. Dans la suite, on postulera donc que k_F est symétrique.

Finalement, \mathcal{K} est un opérateur symétrique mais sans signature et le système fluide-structure peut donc avoir des valeurs propres négatives et présenter des instabilités.

3.4.1 Étude de la forme bilinéaire k_Σ

Expression de τ_{00} en fonction de U^S

L'expression en fonction de U^S du vecteur τ_{00} défini par la relation (1.29), peut être obtenue grâce à la formule de transformation d'une surface orientée (D.12) :

$$(n \, d\Sigma)^* = \det(F) F^{-\top} n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad \text{et} \quad (n_0 \, d\Sigma_0)^* = \det(F_0) F_0^{-\top} n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad (3.24)$$

En utilisant de plus, le fait que, au 1^{er} ordre en u et u_0 :

$$\begin{aligned} \det(F) F^{-1} - \det(F_0) F_0^{-1} &\simeq (1 + \operatorname{div}_X u) (Id + D_X u)^{-1} - (1 + \operatorname{div}_X u_0) (Id + D_X u_0)^{-1} \\ &\simeq (1 + \operatorname{div}_X u) (Id - D_X u) - (1 + \operatorname{div}_X u_0) (Id - D_X u_0) \\ &\simeq (1 + \operatorname{div}_X u) Id - D_X u - (1 + \operatorname{div}_X u_0) Id + D_X u_0 \\ &\simeq (\operatorname{div}_X U^S) Id - D_X U^S \end{aligned} \quad (3.25)$$

on peut écrire que :

$$\tau_{00}(U^S) = (\operatorname{div}_X U^S) n_{00} - (D_X U^S)^\top n_{00} \quad (3.26)$$

Ce qui nous permet d'écrire une première expression de $k_\Sigma(U^S, \delta U)$ où apparaît explicitement U^S :

$$k_\Sigma(U^S, \delta U) = -\rho^F |g| \int_{\Sigma_{i00}} \left((i_z \cdot U^S) (\delta U \cdot n_{00}) + z_{00} \left((\operatorname{div}_X U^S) Id - D_X U^S \right) \delta U \cdot n_{00} \right) d\Sigma_{00} \quad (3.27)$$

La formule (3.26) a l'inconvénient de faire intervenir les dérivées cartésiennes (volumiques) de U^S , or, dans certains cas, il peut être utile d'avoir une expression qui ne fasse intervenir que ses dérivées curvilignes (surfaiques) (cf. §8.2.2).

Supposons alors que l'équation de la surface Σ_{i00} soit donnée par une fonction ϕ de 2 paramètres indépendants ξ et η , appelés coordonnées curvilignes, selon la relation $M_{00} = \phi(\xi, \eta)$. ξ et η varient alors sur un sous-domaine de \mathbb{R}^2 , noté Σ_R , image réciproque de Σ_{i00} par ϕ^{-1} .

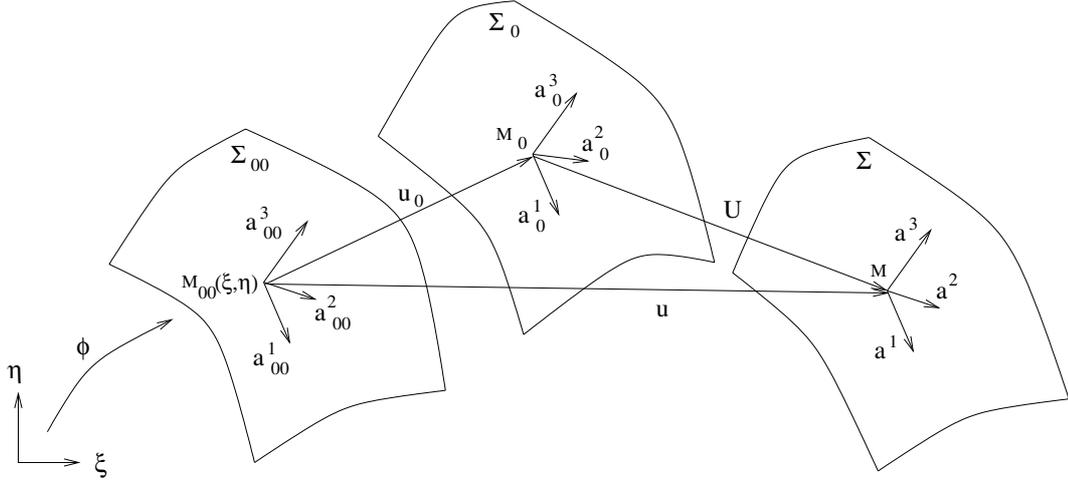


FIG. 3.4 – Repères locaux dans les configurations naturelle, initiale et actuelle

Les vecteurs de la base locale⁵, appelée aussi repère mobile, a_{00}^1 et a_{00}^2 sont obtenus par les relations :

$$a_{00}^1 = \frac{\partial M_{00}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (3.28a)$$

$$a_{00}^2 = \frac{\partial M_{00}}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (3.28b)$$

L'élément de surface orientée $n_{00} d\Sigma_{00}$ peut alors être obtenu par la relation :

$$n_{00} d\Sigma_{00} = (a_{00}^1 \wedge a_{00}^2) d\xi d\eta \quad (3.29)$$

Les équations des surfaces Σ_{i0} et Σ_i étant données par :

$$M_0 = M_{00} + u_0 = \phi(\xi, \eta) + u_0(\xi, \eta) \quad (3.30)$$

$$M = M_{00} + u = \phi(\xi, \eta) + u(\xi, \eta) \quad (3.31)$$

on obtient de même les éléments de surface orientée $n_0 d\Sigma_0$ et $n d\Sigma$ par :

$$(n_0 d\Sigma_0)^* = (a_0^1 \wedge a_0^2) d\xi d\eta = \left(a_{00}^1 + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right) \wedge \left(a_{00}^2 + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (3.32)$$

$$(n d\Sigma)^* = (a^1 \wedge a^2) d\xi d\eta = \left(a_{00}^1 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \wedge \left(a_{00}^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (3.33)$$

On obtient alors une nouvelle expression linéarisée de $(n d\Sigma)^* - (n_0 d\Sigma_0)^*$ en développant au 1^{er} ordre en u et u_0 l'expression suivante :

$$(n d\Sigma)^* - (n_0 d\Sigma_0)^* \simeq \left(a_{00}^1 \wedge \frac{\partial U^s}{\partial \eta} + \frac{\partial U^s}{\partial \xi} \wedge a_{00}^2 \right) d\xi d\eta \quad (3.34)$$

5. Par définition, les vecteurs a_{00}^1 et a_{00}^2 sont tangents aux lignes coordonnées et donc à la surface Σ_{i0} , par contre, ils ne sont ni normés, ni orthogonaux (sauf si ξ et η sont des coordonnées principales).

Cette dernière relation permet d'écrire une deuxième expression de $k_\Sigma(U^S, \delta U)$ où n'apparaît que les dérivées surfaciques de U^S :

$$k_\Sigma(U^S, \delta U) = -\rho^F |g| \left(\int_{\Sigma_{i00}} (i_z \cdot U^S) (\delta U \cdot n_{00}) \, d\Sigma_{00} + \int_{\Sigma_R} z_{00} \left(a_{00}^1 \wedge \frac{\partial U^S}{\partial \eta} + \frac{\partial U^S}{\partial \xi} \wedge a_{00}^2 \right) \cdot \delta U \, d\xi d\eta \right) \quad (3.35)$$

Symétrie de la forme bilinéaire

Dans l'équation 3.19, seul le terme k_Σ n'est pas d'évidence symétrique. Pour démontrer la symétrie de la forme bilinéaire k_Σ , il faut montrer que, pour tout couple de vecteurs (U, V) définis sur Σ_{00} , $k_\Sigma(U, V) = k_\Sigma(V, U)$. Pour cela, on utilise l'expression de k_Σ donnée en (3.27) :

$$k_\Sigma(U, V) - k_\Sigma(V, U) = -\rho^F |g| \left(\underbrace{\int_{\Sigma_{i00}} \left((i_z \cdot U)V - (i_z \cdot V)U \right) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00}}_{(1)} \dots + \underbrace{\int_{\Sigma_{i00}} z_{00} \left(V \operatorname{div}_X U - (D_X U)V - U \operatorname{div}_X V + (D_X V)U \right) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00}}_{(2)} \right) \quad (3.36)$$

Le terme (1) de l'équation (3.36) est transformé grâce à l'identité classique sur le double produit vectoriel (D.3) :

$$(1) = \int_{\Sigma_{i00}} (i_z \wedge (V \wedge U)) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00}$$

En remarquant que la notation $(D_X A)B$ est équivalente à la notation "nabla" $(B \cdot \nabla_X)A$, on reconnaît, dans le terme (2) de l'équation (3.36), l'identité de l'analyse vectorielle (D.5a). (2) se réécrit donc :

$$(2) = \int_{\Sigma_{i00}} z_{00} \operatorname{rot}(V \wedge U) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00}$$

En utilisant l'identité de l'analyse vectorielle (D.5b), on effectue la transformation suivante :

$$(2) = \int_{\Sigma_{i00}} \operatorname{rot}(z_{00} V \wedge U) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} - \int_{\Sigma_{i00}} (\nabla z_{00} \wedge (V \wedge U)) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00}$$

On fait ensuite intervenir la formule de Stokes (D.10). Tous les points appartenant au contour de Σ_{00} sont sur Γ_{00} . Ils ont donc une altitude $z_{00} = 0$, ce qui nous permet d'effectuer la simplification suivante :

$$\begin{aligned} (2) &= \int_{\partial \Sigma_{i00}} z_{00} (V \wedge U) \cdot dl - \int_{\Sigma_{i00}} (\nabla z_{00} \wedge (V \wedge U)) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \\ &= - \int_{\Sigma_{i00}} (i_z \wedge (V \wedge U)) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

On constate alors que (2) = -(1), donc $k_\Sigma(U, V) - k_\Sigma(V, U) = 0$. Ceci démontre que k_Σ est une forme bilinéaire symétrique.

3.5 Retour aux équations locales

A partir du principe variationnel (3.19), on désire établir les équations locales de la structure en présence du fluide.

Tout d'abord, définissons en tout point M_{00} de la zone de la structure Σ_{i00} en contact avec le fluide, une variation lagrangienne de pression $p_{\mathcal{L}}^S$ par :

$$p_{\mathcal{L}}^S(M_{00}) = P(M) - P_0(M_0) = p_{\mathcal{L}}(M_{00}) + \rho^F g \cdot (U^S - U^F) \quad (3.37)$$

La formulation variationnelle (3.19) se réécrit :

$\exists U^S \in \mathcal{C}_u$ tel que $\forall \delta U \in \mathcal{C}_u$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [C \varepsilon_X(U^S) D_X \delta U^\top + D_X U^S \sigma_{\text{ini}} D_X \delta U^\top] d\Omega_{00} + \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} \ddot{U}^S \cdot \delta U d\Omega_{00} = \dots \\ \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U d\Sigma_{00} - \int_{\Sigma_{i00}} (p_{\mathcal{L}}^S(M_{00}) n_{00} + P_0^*(M_{00}) \tau_{00}) \cdot \delta U d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

Grâce aux relations (D.1) et à la formule de Green (D.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \exists U^S \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta U \in \mathcal{C}_u, \int_{\Omega_{00}^S} (\text{Div}_X(\sigma_{PC}) - \rho_{00} \ddot{U}^S) \cdot \delta U d\Omega_{00} = \dots \\ \int_{\Sigma_{f00}} (\sigma_{PC} n_{00} - \tilde{f}) \cdot \delta U d\Sigma_{00} + \int_{\Sigma_{i00}} (\sigma_{PC} n_{00} + p_{\mathcal{L}}^S n_{00} + P_0^* \tau_{00}) \cdot \delta U d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\boxed{\sigma_{PC}(U^S) = C \varepsilon_X(U^S) + D_X U^S \sigma_{\text{ini}}} \quad (3.38)$$

En prenant successivement $\delta U = 0$ sur $\Sigma_{i00} + \Sigma_{f00}$ puis sur Σ_{f00} et finalement sur Σ_{i00} , on établit les équations locales du problème :

$$\text{Div}_X \sigma_{PC} = \rho_{00} \ddot{U}^S \quad \text{dans } \Omega_{00}^S \quad (3.39a)$$

$$\sigma_{PC} n_{00} = f \quad \text{sur } \Sigma_{f00} \quad (3.39b)$$

$$\sigma_{PC} n_{00} = -p_{\mathcal{L}}^S n_{00} - P_0 \tau_{00} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (3.39c)$$

$$U^S = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{u00} \quad (3.39d)$$

Pour obtenir une expression des termes supplémentaires dus à la viscosité, on pourra se référer à Ryan qui s'est intéressé au cas d'un fluide visqueux rotationnel [97] (dans un contexte où les effets de précontrainte et de rotation de normale sont négligés).

Références bibliographiques

Cette partie est inspirée des idées originales énoncées par Morand & Ohayon au chapitre 6 de l'ouvrage [81] et dans l'article [79]. Les formules d'analyse vectorielle sont extraites de [22]. Des rappels sur la théorie des surfaces peuvent être trouvés dans le premier chapitre du livre de Leissa [67].

Chapitre 4

Effets de Pressurisation

Sommaire

4.1	Problématique et notations	46
4.1.1	Le système	46
4.1.2	Hypothèses sur le gaz	46
4.2	Influence du gaz sur les équations du liquide	47
4.2.1	Modification des équations locales	47
4.2.2	Formulation explicite de $\delta V^{(1)}$	48
4.2.3	Prise en compte de la pressurisation dans l'expression de $p_{\mathcal{L}}$	48
4.3	Influence du gaz sur les équations de la structure	49
4.3.1	Effet direct	49
4.3.2	Effet indirect	49
4.3.3	Termes supplémentaires dans la formulation variationnelle	50
4.4	Approche énergétique	51

4.1 Problématique et notations

Une extension de la méthode utilisée dans les chapitres précédents, pour établir les équations du système fluide-structure, permet une généralisation au cas d'un réservoir pressurisé.

4.1.1 Le système

Supposons désormais que le fluide soit enfermé dans une cavité interne de la structure et que le volume restant soit occupé par un gaz. Un tel système peut être schématisé par la figure 4.1.

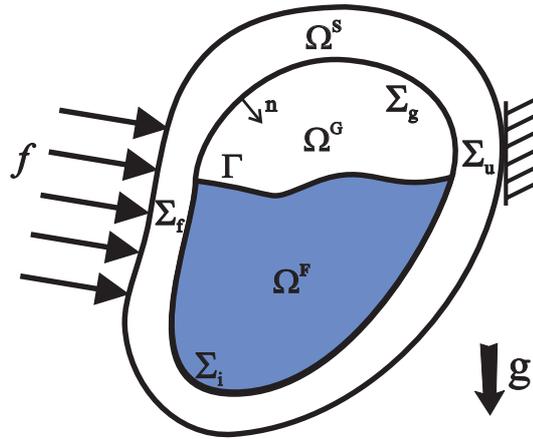


FIG. 4.1 – Configuration avec gaz en pression, en présence de la gravité

Légende :

Ω^G : domaine volumique occupé par le gaz, délimité par la surface fermée $\partial\Omega^G = \Sigma_g + \Gamma$

Σ_g : zone de la surface de la structure en contact avec le gaz interne

n : vecteur normal extérieur à la surface $\partial\Omega^s$

On note la pression du gaz $P_{00}^{G \text{ int}}$ dans l'état naturel et la pression ambiante extérieure au système $P_{00}^{G \text{ ext}}$ (égale à la pression atmosphérique ou à 0 si le système est dans le vide). C'est la différence de pression $P_{00}^G = P_{00}^{G \text{ int}} - P_{00}^{G \text{ ext}}$ qui est pertinente pour la modélisation du problème. On remarque que P_{00}^G peut être aussi bien positive, dans le cas d'une surpression du réservoir, que négative, dans le cas d'une dépression dans le réservoir.

4.1.2 Hypothèses sur le gaz

Dans cette étude, la prise en compte du gaz sera envisagée au travers de l'hypothèse des déformations quasi-statiques : cette hypothèse est valable tant que le critère suivant est satisfait :

$$\omega L \ll c$$

où ω est la pulsation du mouvement harmonique, L la longueur caractéristique du domaine occupé par le gaz, et c la célérité du son dans le gaz.

Cette approximation permet de négliger les gradients de pression dans le gaz : la répartition exacte du champ acoustique dans le gaz ne sera donc pas prise en compte. La pression du gaz sera approchée par une valeur uniforme dans tout le domaine Ω^G .

Les transformations que subira le gaz seront supposées vérifier la loi de transformation isentropique d'un gaz parfait :

$$P V^\gamma = cste \quad (4.1)$$

4.2 Influence du gaz sur les équations du liquide

4.2.1 Modification des équations locales

La présence d'un gaz en pression au dessus de la surface libre du fluide introduit quelques modifications dans les équations locales (2.5d) et (2.6d) :

$$\begin{aligned} (2.5d) &\implies P(M) = P^G \quad \text{sur } \Gamma \\ (2.6d) &\implies P_0(M_0) = P_0^G \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{aligned}$$

La variation lagrangienne de pression $p_{\mathcal{L}}$ n'est donc plus nulle sur la surface libre Γ_{00} (2.9d) mais égale à la variation de pression dans le gaz :

$$(2.9d) \implies p_{\mathcal{L}}(M_{00}) = P^{G*}(M_{00}) - P_0^{G*}(M_{00}) \quad \text{sur } \Gamma_{00}$$

En utilisant la loi de transformation isentropique des gaz parfaits (4.1) et en posant $\Delta V = \|\Omega^G\| - \|\Omega_{00}^G\|$ et $\Delta V_0 = \|\Omega_0^G\| - \|\Omega_{00}^G\|$, on obtient les relations suivantes :

$$P^G = P_{00}^G \left(\frac{\|\Omega_{00}^G\|}{\|\Omega^G\|} \right)^\gamma = P_{00}^G \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta V}{\|\Omega_{00}^G\|} \right)^\gamma} \quad (4.2a)$$

$$P_0^G = P_{00}^G \left(\frac{\|\Omega_{00}^G\|}{\|\Omega_0^G\|} \right)^\gamma = P_{00}^G \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta V_0}{\|\Omega_{00}^G\|} \right)^\gamma} \quad (4.2b)$$

Dans le cadre de l'étude des petites déformations, on peut supposer que les variations de volume ΔV et ΔV_0 seront infiniment petites et les expressions précédentes peuvent donc être linéarisées au 1^{er} ordre. En posant $\delta V = \Delta V - \Delta V_0 = \|\Omega^G\| - \|\Omega_0^G\|$, l'équation (2.9d) se réécrit finalement :

$$(2.9d) \implies p_{\mathcal{L}}(M_{00}) \simeq -P_{00}^G \gamma \frac{\delta V^{(1)}}{\|\Omega_{00}^G\|} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (4.3)$$

où $\delta V^{(1)}$ est l'expression, linéarisée au 1^{er} ordre en U de δV .

4.2.2 Formulation explicite de $\delta V^{(1)}$

En rappelant qu'au 1^{er} ordre en u et u_0 , $\det(F) \simeq 1 + \text{div}_X u$ et $\det(F_0) \simeq 1 + \text{div}_X u_0$, l'expression de δV se linéarise comme suit :

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_{\Omega^G} d\Omega - \int_{\Omega_0^G} d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_{00}^G} \det(F) d\Omega_{00} - \int_{\Omega_{00}^G} \det(F_0) d\Omega_{00} \\ \text{donc } \delta V^{(1)} &= \int_{\Omega_{00}^G} \text{div}_X U d\Omega_{00} \\ &= - \int_{\Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} d\Sigma_{00} - \int_{\Gamma_{00}} U^F \cdot i_z d\Gamma_{00} \end{aligned}$$

D'autre part, rappelons que le fluide est incompressible. En intégrant (2.9b) sur le volume Ω_{00}^F et en utilisant la condition de contact (3.2), on obtient la relation :

$$\int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n_{00} d\Sigma_{00} = \int_{\Gamma_{00}} U^F \cdot i_z d\Gamma_{00} \quad (4.4)$$

Finalement, la variation linéarisée $\delta V^{(1)}$ du volume Ω^G s'écrit :

$$\delta V^{(1)} = - \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \quad (4.5)$$

du fait de l'incompressibilité du fluide, elle est en fait égale à la variation de volume de la cavité de la structure.

Remarquons que l'équation (4.3) en M_{00} , faisant intervenir la valeur de la déformée de la structure en d'autres points, traduit une condition aux limites non locale [31].

4.2.3 Prise en compte de la pressurisation dans l'expression de $p_{\mathcal{L}}$

Sur la surface libre Γ_{00} , la relation (2.14) s'écrit donc :

$$(2.14) \implies -\rho^F |g| \nabla \varphi \cdot i_z - \rho^F \ddot{\varphi} + \pi = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \quad \text{sur } \Gamma_{00}$$

En prenant la condition d'unicité (2.16) pour φ , la valeur de la constante π devient :

$$\pi = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} d\Sigma_{00} + \frac{\rho^F |g|}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \quad (4.6)$$

Finalement, l'expression (2.18) de $p_{\mathcal{L}}$ se réécrit :

$$\boxed{p_{\mathcal{L}} = \rho^F g \cdot \nabla \varphi - \rho^F \ddot{\varphi} + \frac{\rho^F |g|}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n_{00} d\Sigma_{00} + \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} d\Sigma_{00}} \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (4.7)$$

Par contre, les équations locales en φ (2.19) ne sont pas modifiées et la formulation variationnelle du fluide couplé à la structure reste donc identique à (3.4) :

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \mathcal{F}(\varphi, \delta\varphi) + \mathcal{S}(\ddot{\varphi}, \delta\varphi) + \mathcal{C}(U^S, \delta\varphi) = 0 \quad (4.8)$$

La pressurisation n'ayant pas d'effet sur les équations du mouvement du fluide interne, le phénomène de ballonnement n'est pas modifié par la présence du gaz en pression au niveau de la surface libre. Le seul effet de la pressurisation sur le fluide est d'augmenter sa pression interne d'une constante (cf. 4.7).

4.3 Influence du gaz sur les équations de la structure

4.3.1 Effet direct

Le gaz agit directement sur la structure par l'intermédiaire de forces de pression situées sur l'interface Σ_g . L'influence de la présence du gaz sur les équations de la structure s'apparente donc à celle du fluide : l'effet du gaz se traduit, dans la formulation variationnelle (1.11), par un terme supplémentaire similaire au terme (3.13) :

$$- \int_{\Sigma_{g00}} \left(P^{G*}(M_{00}) (n \, d\Sigma)^* - P_0^{G*}(M_{00}) (n_0 \, d\Sigma_0)^* \right) \cdot \delta U \quad (4.9)$$

La pression dans le gaz étant supposée uniforme (constante en espace) à tout instant, le terme précédent peut se récrire :

$$-(P^G - P_0^G) \int_{\Sigma_{g00}} (n \, d\Sigma)^* \cdot \delta U - P_0^G \int_{\Sigma_{g00}} \left((n \, d\Sigma)^* - (n_0 \, d\Sigma_0)^* \right) \cdot \delta U$$

En utilisant les expressions (4.2), (4.3) et (4.5), la linéarisation au 1^{er} ordre en u et u_0 du terme supplémentaire (4.9) donne :

$$\begin{aligned} (4.9) &\simeq P_{00}^G \gamma \frac{\delta V}{\|\Omega_{00}^G\|} \int_{\Sigma_{g00}} (n \, d\Sigma)^* \cdot \delta U - P_0^G \int_{\Sigma_{g00}} \left((n \, d\Sigma)^* - (n_0 \, d\Sigma_0)^* \right) \cdot \delta U \\ &\simeq - \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{g00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) - P_0^G \int_{\Sigma_{g00}} \tau_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3.2 Effet indirect

D'autre part, la présence du gaz introduit quelques modifications au terme supplémentaire dû au fluide (3.13). En effet, la pressurisation du gaz transmet par l'intermédiaire du fluide (cf. modification de l'expression de la variation de pression $p_{\mathcal{L}}$ (4.7)) un effort de pression supplémentaire à l'interface fluide/structure Σ_i :

$$\begin{aligned} (3.13) &= \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) - k_B(U^S, \delta U) - \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{i00}} n_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \right) \cdots \\ &\quad + \rho^F |g| \int_{\Sigma_{i00}} (i_z \cdot U^S) (\delta U \cdot n_{00}) \, d\Sigma_{00} - \int_{\Sigma_{i00}} P_0^* \delta U \cdot \tau_{00} \, d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

La valeur de P_0 est modifiée également par la pressurisation et vaut :

$$P_0(M_0) = -\rho^F |g| z_0(M_0) + P_0^G \quad (4.11)$$

de ce fait, après linéarisation, le terme supplémentaire dû au fluide s'écrit :

$$(3.13) = \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) - k_B(U^S, \delta U) - k_\Sigma(U^S, \delta U) \dots \\ - \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{i00}} n_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \right) - P_0^G \int_{\Sigma_{i00}} \tilde{\tau}_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (4.12)$$

4.3.3 Termes supplémentaires dans la formulation variationnelle

Finalement, après ajout des termes de pressurisation, la formulation variationnelle (3.19) se réécrit :

$$\exists U^S \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta U \in \mathcal{C}_u, \quad \mathcal{K}(U^S, \delta U) + \mathcal{M}(\vec{U}^S, \delta U) - \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (4.13)$$

avec

$$\mathcal{K}(U^S, \delta U) = k_E(U^S, \delta U) + k_G(U^S, \delta U) + k_B(U^S, \delta U) \dots \\ + k_\Sigma(U^S, \delta U) + k_C(U^S, \delta U) + k_P(U^S, \delta U) \quad (4.14)$$

et

$$k_C(U^S, \delta U) = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \quad (4.15)$$

$$k_P(U^S, \delta U) = P_0^G \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} \tau_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (4.16)$$

k_C : est appelé terme de rigidité de compressibilité (ou "tank ullage gaz contribution" en anglais.),

k_P : est lié à la présence des forces suiveuses de pression sur l'interface gaz/structure¹.

Sur les deux opérateurs de raideur ainsi exhibés, on peut faire les remarques suivantes :

1. Dans l'expression de k_P , la pression P_0^G sera approchée par sa valeur P_{00}^G dans l'état naturel (cf. approximation identique sur P_0 pour k_Σ au §3.3.3).
2. La forme bilinéaire $k_C(U^S, \delta U)$ est symétrique et non définie (car il existe des déformations U^S qui laissent le volume de gaz invariant). Par une méthode analogue à celle que l'on a employée pour k_Σ , on montre que $k_P(U^S, \delta U)$ est symétrique également (cf. annexes §C.3) et non défini (dans le cas d'une structure libre par exemple). Leur signature dépend essentiellement du signe de P_{00}^G (surpression ou dépression).
3. Le terme de raideur k_C s'annule si le volume de la cavité n'est pas modifié dans la déformation du système. D'autre part, le facteur en $1/\|\Omega_{00}^G\|$ montre que plus le réservoir est rempli et plus l'effet de k_C est important.
4. Les effets de précontrainte dus à la pressurisation du réservoir sont pris en compte dans k_G avec l'ensemble des autres effets de précontrainte.

1. L'origine du terme de rigidité k_P est identique à celle du terme k_Σ .

4.4 Approche énergétique

Les opérateurs de raideur liés à la pressurisation peuvent également être obtenus par une méthode énergétique en considérant le travail W des forces de pression lors de la déformation U^S [79, 21] :

$$W = \int_{\|\Omega_0^G\|}^{\|\Omega^G\|} P^G d\Omega^G \quad (4.17)$$

En remarquant qu'au premier ordre en U^S :

$$P^G = P_0^G \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta V}{\|\Omega_0^G\|}\right)^\gamma} \simeq P_0^G - P_0^G \frac{\gamma \delta V}{\|\Omega_0^G\|} \quad (4.18)$$

l'équation (4.17) devient :

$$W \simeq P_0^G \delta V - P_0^G \frac{\gamma (\delta V)^2}{2 \|\Omega_0^G\|} \quad (4.19)$$

On utilise un développement de δV au 2^{ème} ordre en U^S : $\delta V \simeq \delta V^{(1)} + \delta V^{(2)}$, pour ne garder dans l'expression de W que les termes quadratiques² :

$$W^{(2)} = P_0^G \delta V^{(2)} - P_0^G \frac{\gamma (\delta V^{(1)})^2}{2 \|\Omega_{00}^G\|} \quad (4.20)$$

L'équation (4.5) permet d'exprimer $\delta V^{(1)}$. D'autre part, $\delta V^{(2)}$ est donné par (C.5b) (cf. annexe C.2) :

$$\delta V^{(2)} = -1/2 \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} \tau_{00}(U^S).U^S d\Sigma_{00} \quad (4.21)$$

Finalement, l'expression de W donne deux termes quadratiques en U^S :

$$W_P = -\frac{P_0^G}{2} \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} \tau_{00}(U^S).U^S d\Sigma_{00} \quad (4.22)$$

$$W_C = -\frac{\gamma P_0^G}{2 \|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S.n_{00} d\Sigma_{00} \right)^2 \quad (4.23)$$

Du fait que l'expression variationnelle de ces deux termes pour un petit déplacement virtuel δU , notés δW_P et δW_C , correspond à une diminution de l'énergie potentielle interne du système, on retrouve l'expression des opérateurs de raideur k_C et k_P :

$$k_C(U^S, \delta U) = -\delta W_C(\delta U) = \frac{\gamma P_0^G}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U^S.n_{00} d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} \delta U.n_{00} d\Sigma_{00} \right) \quad (4.24)$$

$$k_P(U^S, \delta U) = -\delta W_P(\delta U) = -P_0^G \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} \tau_{00}(U^S).\delta U d\Sigma_{00} \quad (4.25)$$

en utilisant la propriété de symétrie démontrée §C.3.

2. Les termes d'ordre supérieur sont négligés et les termes linéaires en U^S n'interviennent que dans l'équilibre statique du système pressurisé et ne nous intéressent pas ici

Références bibliographiques

Certaines idées présentées ici sont reprises ou inspirées de l'article de Morand & Ohayon [79].

Chapitre 5

Systemes libres

Sommaire

5.1	Problématique et notations	54
5.2	Étude des vibrations d'un système libre structure-fluide interne	54
5.2.1	Définition de l'état naturel	54
5.2.2	Équations de l'état initial précontraint	55
5.2.3	Autoéquilibrage du système	58
5.2.4	Vibrations libres autour de la configuration initiale en mouvement	61
5.2.5	Conclusion	62
5.3	Modes de corps rigide de l'opérateur \mathcal{K}	63
5.3.1	Energie de déformation	63
5.3.2	Mouvements rigides de translation	63
5.3.3	Mouvements rigides de rotation	64
5.3.4	Influence de la pressurisation	71
5.3.5	Conclusion	72

5.1 Problématique et notations

La méthodologie mise en oeuvre pour établir les équations couplées d'un système fluide-structure en présence de la gravité fait l'hypothèse qu'il est possible de définir un état initial statique précontraint autour duquel se déforme le système (§1.1.2). Si le système n'est pas suffisamment supporté, une telle configuration statique peut ne pas exister et le système se déforme alors autour d'un mouvement d'ensemble (trajectoire). Il s'agit de vérifier dans ce chapitre, qu'il est possible d'étudier les vibrations libres du système dans un repère accéléré en séparant la composante rigide (mouvement d'ensemble) de la composante élastique. Pour cela, la méthode d'autoéquilibrage présentée en annexe B sera mise en oeuvre et adaptée au cas d'un système fluide-structure.

La configuration libre ainsi définie permettra d'étudier les mouvements de corps rigide du nouvel opérateur d'élastogravité \mathcal{K} défini par la relation (3.19) et de répondre à la question suivante : Ce nouvel opérateur génère-t'il ou non une énergie de déformation vis à vis des mouvements d'ensemble selon les 6 degrés de liberté d'un corps libre (3 translations selon les 3 axes (i_x, i_y, i_z) et 3 rotations autour de ces mêmes axes) ?

Pour présenter cette démarche, nous nous placerons dans le cas d'un système totalement libre ($\Sigma_u = \emptyset$), mais celle-ci sera facilement transposable à un système partiellement supporté.

5.2 Étude des vibrations d'un système libre structure-fluide interne

Appliquons la méthode d'autoéquilibrage de §B.3 au cas d'une structure contenant un liquide. Parmi les forces f_0 et f exercées sur la structure, on distinguera les "forces suiveuse" f_F des "charges mortes" f_D . Par soucis de clarté, la présence d'un gas en pression n'est pas prise en compte, mais l'exposé s'adapte facilement à ce cas.

Dans un premier temps, l'état initial précontraint sera redéfini pour un système libre.

5.2.1 Définition de l'état naturel

Rappelons que dans l'état naturel, aucun effort extérieur n'est appliqué ni à la structure ni au fluide. La position de la surface libre du fluide peut donc être choisie arbitrairement. Dans le cas où la structure est fixée, nous avons choisi de positionner la surface libre de l'état naturel orthogonale à la direction de la gravité afin que les mouvement du fluide u_0^F et u^F soient petits et que la linéarisation des équations du fluide soit possible.

Dans le cas d'une structure libre en mouvement autour d'une trajectoire, nous verrons que le champ d'accélération qui agit sur le fluide n'est pas la gravité g mais une gravité *apparente* qui dépend de l'accélération du système. Dans l'état naturel, la surface libre Γ_{00} du fluide sera donc choisie, par convention, orthogonale à l'axe i_z porté par la valeur moyenne de cette gravité apparente définie ultérieurement.

5.2.2 Équations de l'état initial précontraint

Dans l'état initial, le système est soumis au champ de pesanteur g et des efforts f_0 s'appliquent sur la structure. Nous considérons le cas général où l'ensemble de ces forces n'est pas équilibré. Rappelons que, dans ce cas, l'état initial n'est pas un état statique.

Équations du fluide

Dans l'équation d'Euler, il faut tenir compte de l'accélération du fluide. Les équations locales s'écrivent donc :

$$\nabla_{x_0} P_0(M_0) = \rho^F (g - \gamma_0(M_0))^T \quad \text{dans } \Omega_0^F \quad (5.1a)$$

$$\operatorname{div}_X u_0^F(M_{00}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (5.1b)$$

$$u_0^F(M_{00}) \cdot n_{00} = u_0^S \cdot n_{00} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (5.1c)$$

$$P_0(M_0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (5.1d)$$

La fluctuation de pression lagrangienne $p_{\mathcal{L}_0}$ entre l'état naturel de référence et l'état initial vaut donc :

$$p_{\mathcal{L}_0}(M_{00}) = P_0^*(M_{00}) - \underbrace{P_{00}^*(M_{00})}_0 = P_0^*(M_{00}) \quad (5.2)$$

L'équation (5.1a) permet de calculer le gradient de cette fluctuation de pression lagrangienne :

$$\begin{aligned} \nabla_X p_{\mathcal{L}_0}(M_{00}) &= \nabla_{x_0} P_0(M_0) F_0 = \rho^F (g - \gamma_0(M_0))^T (Id + D_X u_0) \\ &= \rho^F (g - \gamma_0(M_0))^T + \rho^F (g - \gamma_0(M_0))^T D_X u_0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

En introduisant un champ de potentiel en déplacement φ_0 tel que :

$$u_0(M_{00}) = \nabla_X \varphi_0(M_{00}) \quad \text{avec} \quad \ell_0(\varphi_0) = 0 \text{ et } \ell_0(1) \neq 0 \quad (5.4)$$

L'accélération des particules de fluide γ_0 peut donc s'exprimer en fonction de φ_0 par $\gamma_0(M_0) = \nabla_X \ddot{\varphi}_0$ mais pourra être approchée, dans le cadre d'une approximation au premier ordre en u_0^F , par un champ moyen constant $\bar{\gamma}_0$. On parvient ainsi à une expression linéarisée de $p_{\mathcal{L}_0}$ en intégrant (5.3) :

$$\boxed{p_{\mathcal{L}_0} \simeq \rho^F g \cdot O M_{00} - \rho^F \ddot{\varphi}_0 + \rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot \nabla_X \varphi_0 + \pi_0} \quad (5.5)$$

la constante π_0 sera déterminée en choisissant la condition d'unicité l_0 sur φ_0 .

La relation $p_{\mathcal{L}_0} = 0$ sur Γ_{00} , déduite de (5.1d), s'exprime en fonction de φ_0 :

$$i_z \cdot (g - \bar{\gamma}_0) (i_z \cdot \nabla_X \varphi_0) = \ddot{\varphi}_0 - g \cdot O M_{00} - \frac{\pi_0}{\rho^F} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (5.6)$$

Remarquons que pour exprimer le déplacement $i_z \cdot \nabla_X \varphi_0$ du fluide au niveau de la surface libre Γ_{00} , il faut supposer $g - \bar{\gamma}_0 \neq 0$. En effet, dans le cas d'une chute libre ($g = \bar{\gamma}_0$), du fait de l'absence de pesanteur

apparente, toute configuration du fluide qui ne modifie pas son volume est admissible (puisqu'elle laisse invariante l'énergie du système) [6]. La surface libre du fluide n'est donc pas définie et nous écarterons ce cas qui nécessite un traitement spécial¹ (cf études en microgravité [51])

Les équation locales en φ_0 qui définissent l'état initial s'écrivent donc :

$$p_{\mathcal{L}_0} \simeq \rho^F g \cdot OM_{00} - \rho^F \ddot{\varphi}_0 + \rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot \nabla_X \varphi_0 + \pi_0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (5.7a)$$

$$\Delta_X \varphi_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (5.7b)$$

$$\nabla_X \varphi_0 \cdot n_{00} = u_0^S \cdot n_{00} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (5.7c)$$

$$\nabla_X \varphi_0 \cdot i_z = \frac{\ddot{\varphi}_0 - g \cdot OM_{00}}{(g - \bar{\gamma}_0) \cdot i_z} - \frac{\pi_0}{\rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot i_z} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (5.7d)$$

Pour déterminer π_0 , on intègre (5.7b) sur Ω_{00}^F avec (5.7c) et (5.7d). En choisissant le point O au centre C de la surface libre défini par :

$$\int_{\Gamma_{00}} CM_{00} = 0 \quad (5.8)$$

et en choisissant la condition $\ell(\varphi_0)$ telle que :

$$\ell(\varphi_0) = \int_{\Gamma_{00}} \varphi_0 \, d\Gamma_{00} = 0 \quad \implies \quad \varphi_0 \in \mathcal{C}_\varphi^* = \left\{ \varphi / \int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0 \right\} \quad (5.9)$$

on déduit la valeur de π_0 associée :

$$\pi_0 = - \frac{\rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot i_z}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} u_0^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad (5.10)$$

Finalement, l'expression de $p_{\mathcal{L}_0}$ devient, avec $\varphi_0 \in \mathcal{C}_\varphi^*$:

$$p_{\mathcal{L}_0} = \rho^F g \cdot CM_{00} - \rho^F \ddot{\varphi}_0 + \rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot \nabla_X \varphi_0 - \frac{\rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot i_z}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} u_0^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (5.11)$$

Pour déterminer l'équation variationnelle du fluide dans l'état initial, on remplace l'équation locale (5.7d) par une version approchée :

$$(5.7d) \quad \implies \quad \nabla_X \varphi_0 \cdot i_z \simeq - \frac{(g - \bar{\gamma}_0) \cdot CM_{00}}{(g - \bar{\gamma}_0) \cdot i_z} + \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} u_0^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (5.12)$$

En appliquant le principe des travaux virtuels, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \exists \varphi_0 \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi, \quad & \int_{\Omega_{00}^F} \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \delta\varphi \, d\Omega_{00} + \int_{\Gamma_{00}} CM_{00} \cdot i_z \delta\varphi \, d\Sigma_{00} \cdots \\ & - \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \left(\int_{\Sigma_{i00}} u_0^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Gamma_{00}} \delta\varphi \, d\Sigma_{00} \right) + \int_{\Sigma_{i00}} u_0^S \cdot n_{00} \delta\varphi \, d\Sigma_{00} = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

1. Dans le cadre de la microgravité, c'est la tension superficielle du fluide qui régit la position de la surface libre.

En prenant $\delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*$ et en tenant compte du fait que la surface libre Γ_{00} est par définition orthogonale au vecteur i_z dans l'état naturel, la relation précédente se simplifie :

$$\exists \varphi_0 \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \int_{\Omega_{00}^F} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega_{00} + \int_{\Sigma_{i00}} u_0^S \cdot n_{00} \delta\varphi \, d\Sigma_{00} = 0 \quad (5.14)$$

Ce qui se récrit en prenant les notations habituelles :

$$\exists \varphi_0 \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \boxed{\mathcal{F}(\varphi_0, \delta\varphi) + \mathcal{C}(u_0^S, \delta\varphi) = 0} \quad (5.15)$$

Équations de la structure

Désormais, sauf précision contraire, u_0 désigne u_0^S . Les équations locales de la structure libre sont données par :

$$\text{Div}_{x_0} \Pi(u_0(x_0)) + \rho_0(x_0) g = \rho_0(x_0) \gamma_0(x_0) \quad \text{dans } \Omega_0^S \quad (5.16a)$$

$$\sigma(u_0) \cdot n_0 = f_0 \quad \text{sur } \Sigma_{f0} \quad (5.16b)$$

$$\sigma(u_0) \cdot n_0 = -P_0(x_0) n_0 \quad \text{sur } \Sigma_{i0} \quad (5.16c)$$

L'équation variationnelle associée s'écrit :

$$\begin{aligned} \exists u_0 \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta u \in \mathcal{C}_u, \quad & \int_{\Omega_{00}^S} \sigma(u_0) : D_X \delta u \, d\Omega_{00} + \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \cdot \delta u \, d\Omega_{00} = \dots \\ & \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} g \cdot \delta u \, d\Omega_{00} + \int_{\Sigma_{f00}} f_0^* (d\Sigma_0)^* \cdot \delta u - \int_{\Sigma_{i00}} P_0^* (n_0 d\Sigma_0)^* \cdot \delta u \end{aligned} \quad (5.17)$$

Comme $P_0(M_0^S) = P_0(M_0^F) + \rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot (u_0^S - u_0^F)$ au 1^{er} ordre en u_0 , et que $P_0(M_0^F) = p_{\mathcal{L}_0}$, l'expression de $P_0(M_0^S)$ devient :

$$P_0 = \rho^F g \cdot OM_{00} - \rho^F \ddot{\varphi}_0 + \rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot u_0^S - \frac{\rho^F (g - \bar{\gamma}_0) \cdot i_z}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} u_0^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (5.18)$$

D'autre part, au 1^{er} ordre en u_0 , on a :

$$\begin{aligned} P_0 n_0 \, d\Sigma_0 & \simeq P_0 n_{00} \, d\Sigma_{00} + P_0 \tau_{00}(u_0) \, d\Sigma_{00} \\ |f_{F0}| n_0 \, d\Sigma_0 & \simeq |f_{F0}| n_{00} \, d\Sigma_{00} + |f_{F0}| \tau_{00}(u_0) \, d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

où τ_{00} est défini par : $\tau_{00}(u_0) \, d\Sigma_{00} \simeq n_0 \, d\Sigma_0 - n_{00} \, d\Sigma_{00}$

Avec les notations habituelles, l'équation variationnelle de la structure se réécrit donc :

$$\begin{aligned}
 & \exists u_0 \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta u \in \mathcal{C}_u, \\
 & k_E(u_0, \delta u) + \rho^F \int_{\Sigma_{i00}} \left((u_0 \cdot (g - \bar{\gamma}_0)) (\delta u \cdot n_{00}) + (g - \bar{\gamma}_0) \cdot OM_{00} \tau_{00}(u_0) \cdot \delta u \right) d\Sigma_{00} \cdots \\
 & - \frac{\rho^F i_z \cdot (g - \bar{\gamma}_0)}{\|\Gamma_{00}\|} \left(\int_{\Sigma_{i00}} u_0 \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{i00}} \delta u \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \right) - \int_{\Sigma_{f00}} |f_{F0}^*| \tau_{00}(u_0) \cdot \delta u d\Sigma_{00} + \mathcal{M}(\ddot{u}_0, \delta u) = \cdots \\
 & \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} g \cdot \delta u d\Omega_{00} + \int_{\Sigma_{f00}} f_{00} \cdot \delta u d\Sigma_{00} - \int_{\Sigma_{i00}} \rho^F g \cdot OM_{00} n_{00} \cdot \delta u d\Sigma_{00} + \int_{\Sigma_{i00}} \rho^F \ddot{\varphi}_0 n_{00} \cdot \delta u d\Sigma_{00}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\text{où } f_{00} = |f_{F0}| n_{00} + f_{D0}.$$

Ce qui se réécrit avec des notations étendues au cas où g est remplacé par $g - \bar{\gamma}_0$:

$$\begin{aligned}
 & \exists u_0 \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta u \in \mathcal{C}_u, \\
 & k_E(u_0, \delta u) + k_F(u_0, \delta u) + k_B^{(g-\bar{\gamma}_0)}(u_0, \delta u) + k_\Sigma^{(g-\bar{\gamma}_0)}(u_0, \delta u) + \mathcal{M}(\ddot{u}_0, \delta u) - \mathcal{C}(\ddot{\varphi}_0, \delta u) = \mathcal{Q}_0(\delta u)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

et

$$\mathcal{Q}_0(\delta u) = \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} g \cdot \delta u d\Omega_{00} - \int_{\Sigma_{i00}} \rho^F g \cdot OM_{00} n_{00} \cdot \delta u d\Sigma_{00} + \int_{\Sigma_{f00}} f_{00} \cdot \delta u d\Sigma_{00} \tag{5.21}$$

5.2.3 Autoéquilibrage du système

Pour résoudre le système d'équations couplées (5.15),(5.20) en (u_0, φ_0) et déterminer les composantes rigide et élastique de u_0 , il faut équilibrer le système.

Détermination du mouvement rigide

Les modes rigides du système fluide structure (u_0^r, φ_0^r) sont définis par :

$$k_E(u_0^r, \delta u) + k_F(u_0^r, \delta u) + k_B^{(g-\bar{\gamma}_0)}(u_0^r, \delta u) + k_\Sigma^{(g-\bar{\gamma}_0)}(u_0^r, \delta u) = 0 \tag{5.22a}$$

$$\mathcal{F}(\varphi_0^r, \delta \varphi) + \mathcal{C}(u_0^r, \delta \varphi) = 0 \tag{5.22b}$$

L'équation (5.22a) a pour solution les 3 mouvements de translation $u_0^r = r$, avec $r = i_x, i_y$ ou i_z . On vérifie alors que $\varphi_0^r = u_0^r \cdot CM_{00}$ est solution de (5.22b), c'est à dire des équations locales suivantes :

$$\varphi_0^r \in \mathcal{C}_\varphi^* \tag{5.23a}$$

$$\Delta_X \varphi_0^r = \Delta_X (u_0^r \cdot CM_{00}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \tag{5.23b}$$

$$\nabla_X \varphi_0^r \cdot n_{00} = u_0^r \cdot n_{00} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \tag{5.23c}$$

$$\nabla_X \varphi_0^r \cdot i_z = u_0^r \cdot i_z \quad \text{sur } \Gamma_{00} \tag{5.23d}$$

On partitionne la solution du problème (u_0, φ_0) en une partie rigide décomposée sur les modes (u_0^r, φ_0^r) et une partie élastique (u_0^e, φ_0^e) :

$$u_0 = \sum_{r=1}^3 \lambda_r u_0^r + u_0^e \quad (5.24a)$$

$$\varphi_0 = \sum_{r=1}^3 \lambda_r \varphi_0^r + \varphi_0^e \quad (5.24b)$$

On fait alors l'hypothèse que la partie élastique de la solution est statique dans l'état initial :

$$\ddot{u}_0^e = 0 \quad (5.25a)$$

$$\ddot{\varphi}_0^e = 0 \quad (5.25b)$$

En introduisant la décomposition de (u_0, φ_0) dans les équations du système et en utilisant les relations (5.22) et (5.25), on obtient le système suivant, $\forall (\delta u, \delta \varphi) \in \mathcal{C}_u \times \mathcal{C}_\varphi^*$:

$$F(\varphi_0^e, \delta \varphi) = -\mathcal{C}(u_0^e, \delta \varphi) \quad (5.26a)$$

$$(k_E + k_F + k_\Sigma^{(g-\bar{\gamma}_0)} + k_B^{(g-\bar{\gamma}_0)})(u_0^e, \delta u) + \sum_{r=1}^3 \ddot{\lambda}_r \mathcal{M}(u_0^r, \delta u) = \mathcal{Q}_0(\delta u) + \sum_{r=1}^3 \ddot{\lambda}_r \mathcal{C}(\varphi_0^r, \delta u) \quad (5.26b)$$

Si $(\delta u, \delta \varphi) = (u_0^r, \varphi_0^r)$, le système précédent se simplifie grâce à (5.22). La deuxième équation permet alors de déterminer $\ddot{\lambda}_r$:

$$\ddot{\lambda}_r = \frac{\mathcal{Q}_0(u_0^r)}{\mathcal{M}(u_0^r, u_0^r) + \mathcal{F}(\varphi_0^r, \varphi_0^r)} \quad (5.27)$$

Équation autoéquilibrée en u_0^e

La partie rigide du mouvement étant déterminée, il reste à évaluer la déformation élastique initiale u_0^e .

La première équation du système autoéquilibré est donnée par (5.26a), alors qu'avec l'expression (5.27) de $\ddot{\lambda}_r$, l'équation (5.26b) devient, $\forall \delta u \in \mathcal{C}_u$:

$$\begin{aligned} (k_E + k_F + k_\Sigma^{(g-\bar{\gamma}_0)} + k_B^{(g-\bar{\gamma}_0)})(u_0^e, \delta u) &= \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}^S \left(g - \sum_{r=1}^3 \frac{\mathcal{Q}_0(u_0^r)}{\mathcal{M}(u_0^r, u_0^r) + \mathcal{F}(\varphi_0^r, \varphi_0^r)} u_0^r \right) \cdot \delta u \, d\Omega_{00} \cdots \\ &- \int_{\Sigma_{i00}} \rho^F \left(g \cdot OM_{00} - \sum_{r=1}^3 \frac{\mathcal{Q}_0(u_0^r)}{\mathcal{M}(u_0^r, u_0^r) + \mathcal{F}(\varphi_0^r, \varphi_0^r)} \varphi_0^r \right) n_{00} \cdot \delta u \, d\Sigma_{00} + \int_{\Sigma_{f00}} f_{00} \cdot \delta u \, d\Sigma_{00} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Posons

$$g^{\text{éq.}} = g - \sum_{r=1}^3 \frac{\mathcal{Q}_0(u_0^r)}{\mathcal{M}(u_0^r, u_0^r) + \mathcal{F}(\varphi_0^r, \varphi_0^r)} u_0^r = g - \sum_{r=1}^3 \ddot{\lambda}_r u_0^r \quad (5.29)$$

On remarque que $g^{\acute{e}q.}$ peut s'écrire $g^{\acute{e}q.} = g - \gamma_0^r$ avec $\gamma_0^r = cste = \bar{\gamma}_0$, donc cette gravité autoéquilibrée n'est autre que la gravité apparente annoncée au §5.2.1.

Puisque $\varphi_0^r = u_0^r.CM_{00}$, l'équation autoéquilibrée de la structure permettant de calculer u_0^e se récrit :

$$\boxed{\begin{aligned} \exists u_0^e \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta u \in \mathcal{C}_u, \quad & (k_E + k_F + k_{\Sigma}^{g^{\acute{e}q.}} + k_B^{g^{\acute{e}q.}})(u_0^e, \delta u) = \dots \\ & \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}^S g^{\acute{e}q.} \cdot \delta u \, d\Omega_{00} - \int_{\Sigma_{i00}} \rho^F g^{\acute{e}q.} . CM_{00} n_{00} \cdot \delta u \, d\Sigma_{00} + \int_{\Sigma_{f00}} f_{00} \cdot \delta u \, d\Sigma_0 \end{aligned}}$$

(5.30)

Les équations locales du problème autoéquilibré peuvent s'écrire :

$$\text{Div}_{x_0} \sigma_0 + \rho_0 g^{\acute{e}q.} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0^S \quad (5.31a)$$

$$\sigma_0 n_0 = f_0 \quad \text{sur } \Sigma_{f0} \quad (5.31b)$$

$$\sigma_0 n_0 = -P_0^{\acute{e}q.} n_0 \quad \text{sur } \Sigma_{i0} \quad (5.31c)$$

Calcul de $g^{\acute{e}q.}$

Pour $u_0^r = r$ et $\varphi_0 = r.CM_{00}$:

$$\int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}^S r^2 \, d\Omega_{00} = \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}^S \, d\Omega_{00} = m^S \quad (5.32)$$

$$\int_{\Omega_{00}^F} \rho^F (\nabla(r.CM_{00}))^2 \, d\Omega_{00} = \int_{\Omega_{00}^F} \rho^F \, d\Omega_{00} = m^F \quad (5.33)$$

$$\int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} g \cdot r \, d\Omega_{00} = m^S g \cdot r \quad (5.34)$$

$$\int_{\Sigma_{f00}} f_{00} \cdot r \, d\Sigma_{00} = F_0 \cdot r \quad (5.35)$$

D'autre part, la définition du point C permet d'affirmer que :

$$\int_{\Sigma_{i00}} \rho^F (g.CM_{00}) n_{00} \cdot r \, d\Sigma_{00} = \int_{\Sigma_{00}} \rho^F (g.CM_{00}) n_{00} \cdot r \, d\Sigma_{00} \quad (5.36)$$

$$= - \int_{\Omega_{00}^F} \text{div}((g.CM_{00}) r) \quad (5.37)$$

$$= -m^F g \cdot r \quad (5.38)$$

Ces différents calculs permettent d'exprimer $g^{\acute{e}q.}$:

$$\boxed{g^{\acute{e}q.} = g - g - \frac{F_0}{m^S + m^F} = -\frac{F_0}{m^S + m^F}} \quad (5.39)$$

La surface libre du liquide dans l'état naturel est donc orthogonale à la direction définie par $F_0 = \int_{\Sigma_{f00}} f_{00} \, d\Sigma_{00}$.

5.2.4 Vibrations libres autour de la configuration initiale en mouvement

On s'intéresse aux vibrations libres du système autour du mouvement en translation à accélération constante γ_0^r définie précédemment. On suppose donc que les efforts extérieurs appliqués au système dans l'état actuel sont tels que le mouvement rigide du système n'est pas modifié, c'est à dire que $\gamma^r = \gamma_0^r$. Cette condition sera explicitée par la suite.

Équations du fluide

Dans l'état actuel, les équations locales du fluide s'écrivent :

$$\nabla_x P(M) = \rho^F (g - \gamma(M)) \quad \text{dans } \Omega^F \quad (5.40a)$$

$$\operatorname{div}_X u^F(M_{00}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (5.40b)$$

$$u^F(M_{00}) \cdot n_{00} = u^S \cdot n_{00} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (5.40c)$$

$$P(M) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (5.40d)$$

Les équations (5.1a) et (5.40a) permettent de donner une expression linéarisée au premier ordre en U de $\nabla_X p_{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned} \nabla_X p_{\mathcal{L}}(M_{00}) &= \nabla_x P(M) F - \nabla_{x_0} P_0(M_0) F_0 \\ &= \rho^F (g - \gamma) (Id + D_X u^F) - \rho^F (g - \gamma_0) (Id + D_X u_0^F) \\ &\simeq \rho^F (g^{\acute{e}q.})^\top D_X U^F - \rho^F \gamma(U^F) \end{aligned} \quad (5.41)$$

En posant $U^F = \nabla_X \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*$, on retrouve l'expression habituelle de $p_{\mathcal{L}}$ où g est remplacé par $g^{\acute{e}q.} = g - \bar{\gamma}_0$:

$$p_{\mathcal{L}} = \rho^F g^{\acute{e}q.} \cdot \nabla_X \varphi - \rho^F \ddot{\varphi} - \frac{\rho^F g^{\acute{e}q.} \cdot i_z}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad (5.42)$$

La condition $p_{\mathcal{L}} = 0$ sur Γ_{00} se traduit par :

$$i_z \cdot \nabla_X \varphi = \frac{\ddot{\varphi}}{g^{\acute{e}q.} \cdot i_z} + \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U \cdot n_{00}^S \, d\Sigma_{00} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (5.43)$$

Finalement, l'équation variationnelle du fluide s'écrit :

$\exists \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*$ tel que $\forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*$,

$$\int_{\Omega_{00}^F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi \, d\Omega_{00} - \frac{1}{g^{\acute{e}q.} \cdot i_z} \int_{\Gamma_{00}} \ddot{\varphi} \delta\varphi \, d\Gamma_{00} = - \int_{\Sigma_{i00}} U^S \cdot n_{00} \delta\varphi \, d\Sigma_{00} \quad (5.44)$$

Équations de la structure

L'équation variationnelle de la structure dans l'état actuel s'écrit en variable lagrangienne par rapport à l'état naturel :

$$\begin{aligned} \exists u \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta u \in \mathcal{C}_u, \quad & \int_{\Omega_{00}^S} \Pi(u) : \mathbf{D}_X \delta u \, d\Omega_{00} + \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \delta u \, d\Omega_{00} = \dots \\ & \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00} g \cdot \delta u \, d\Omega_{00} + \int_{\Sigma_{f00}} f^* (d\Sigma)^* \cdot \delta u - \int_{\Sigma_{i00}} P^* (n \, d\Sigma)^* \cdot \delta u \quad (5.45) \end{aligned}$$

Le terme $P(M_{00}) n \, d\Sigma - P_0(M_{00}) n_0 \, d\Sigma_0$, qui apparaît quand on soustrait à cette équation la relation analogue (5.17) caractérisant l'état initial, s'écrit :

$$\begin{aligned} & P(M_{00}) n \, d\Sigma - P_0(M_{00}) n_0 \, d\Sigma_0 \\ & \simeq \left(p_{\mathcal{L}}(M_{00}) + \rho^F g^{\text{éq.}} \cdot (U^S - U^F) \right) n_{00} \, d\Sigma_{00} + P_0(M_{00}) \tau_{00}(U^S) \, d\Sigma_{00} \quad (5.46) \\ & \simeq \left(p_{\mathcal{L}}(M_{00}) + \rho^F g^{\text{éq.}} \cdot (U^S - U^F) \right) n_{00} \, d\Sigma_{00} + \rho^F g^{\text{éq.}} \cdot O M_{00} \tau_{00}(U^S) \, d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

D'autre part, la condition de vibrations libres, qui s'écrit $\tilde{f} = 0$, c'est à dire $\tilde{f}_D = 0$ et $|\tilde{f}_F| = 0$, permet d'affirmer que le mouvement de corps rigide du système dans l'état actuel est égal à celui du système dans l'état initial : $\gamma^r = \gamma_0^r$. Le déplacement de la structure par rapport à l'état initial, défini par $U = u - u_0 = u^e - u_0^e$ ne contient donc qu'une composante élastique. L'équation variationnelle pour la structure s'écrit donc, après linéarisation :

$$\boxed{\begin{aligned} \exists U \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta U \in \mathcal{C}_u, \\ \underbrace{(k_E + k_G^{u_0^e} + k_F + k_B^{g^{\text{éq.}}} + k_{\Sigma}^{g^{\text{éq.}}})}_{\mathcal{K}}(U, \delta U) + \mathcal{M}(\ddot{U}, \delta U) - \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) = 0 \end{aligned}} \quad (5.47)$$

5.2.5 Conclusion

Pour un système fluide structure libre dans l'espace :

- L'accélération en translation du système est définie par la formule classique :

$$\gamma^r = \sum_{r=i_x, i_y, i_z} \frac{\mathcal{Q}_0(r)}{\mathcal{M}(r, r) + \mathcal{F}(r, C M_{00}, r, C M_{00})} r = g + \frac{F_0}{m^S + m^F} \quad (5.48)$$

L'accélération en rotation n'est pas représentée par ce modèle. L'étude des réservoirs en rotation autour d'un axe tels que ceux des satellites spinnés nécessitent une analyse particulière (prise en compte des forces de Coriolis ...) [77, 50, 105, 75].

- Bien que la notion de trajectoire ait été introduite, la théorie présentée ici reste linéaire et limitée aux petites perturbations. On ne détermine pas la trajectoire du système au sens propre, mais juste l'accélération instantanée associée aux mouvements de corps rigide participant au champ de déplacement global du système.

- Les précontraintes dans l'état initial sont obtenues par résolution du système autoéquilibré (5.26a)-(5.30) en appliquant la méthode des liaisons temporaires.
- Les vibrations libres du système autour de sa trajectoire sont données par les équations classiques des systèmes fluide structure avec gravité (5.44)-(5.47), mais où g est remplacé par une gravité apparente $g^{\acute{e}q}$ définie par (5.39).

5.3 Modes de corps rigide de l'opérateur \mathcal{K}

A partir de l'opérateur \mathcal{K} défini par l'équation (5.47), une étude de l'énergie de déformation engendrée par les différents mouvements d'ensemble du système est menée. Dans ce qui suit, la gravité apparente $g^{\acute{e}q}$ sera notée plus simplement g pour ne pas alourdir les notations.

5.3.1 Energie de déformation

Pour un mouvement de corps rigide $U_R(M_{00})$ de la structure autour de la configuration initiale, l'énergie de déformation associée à l'opérateur \mathcal{K} se compose des termes suivants :

$$E_{k_E}(U_R) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [C \varepsilon_X(U_R) \varepsilon_X(U_R)] d\Omega_{00} \quad (5.49)$$

$$E_{k_G}(U_R) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} [D_X U_R \sigma_{\text{ini}} D_X U_R^T] d\Omega_{00} \quad (5.50)$$

$$E_{k_F}(U_R) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{f00}} |f_{F0}^*| \tau_{00}(U_R) \cdot U_R d\Sigma_{00} \quad (5.51)$$

$$E_{k_B}(U_R) = \frac{\rho^F |g|}{2 \|\Gamma_{00}\|} \left(\int_{\Sigma_{i00}} U_R \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \right)^2 \quad (5.52)$$

$$E_{k_{\Sigma}^1}(U_R) = -\frac{\rho^F |g|}{2} \int_{\Sigma_{i00}} (i_z \cdot U_R)(U_R \cdot n_{00}) d\Sigma_{00} \quad (5.53)$$

$$E_{k_{\Sigma}^2}(U_R) = -\frac{\rho^F |g|}{2} \int_{\Sigma_{i00}} z_{00} \tau_{00}(U_R) \cdot U_R d\Sigma_{00} \quad (5.54)$$

5.3.2 Mouvements rigides de translation

Pour un mouvement de translation : $U_R = cste$:

$$E_{k_E}(U_R) = 0 \quad (5.55)$$

$$E_{k_G}(U_R) = 0 \quad (5.56)$$

$$E_{k_F}(U_R) = 0 \quad (5.57)$$

$$E_{k_B}(U_R) = \frac{\rho^F |g|}{2 \|\Gamma_{00}\|} \left(U_R \cdot \int_{\Sigma_{i00}} n_{00} d\Sigma_{00} \right)^2 \quad (5.58)$$

$$E_{k_\Sigma^1}(U_R) = -\frac{\rho^F |g|}{2} (i_z \cdot U_R) \left(U_R \cdot \int_{\Sigma_{i00}} n_{00} d\Sigma_{00} \right) \quad (5.59)$$

$$E_{k_\Sigma^2}(U_R) = 0 \quad (5.60)$$

En considérant de plus le fait que :

$$\int_{\Sigma_{i00}} n_{00} d\Sigma_{00} - \|\Gamma_{00}\| i_z = \int_{\Sigma_{i00}} n_{00} d\Sigma_{00} - \int_{\Gamma_{00}} i_z d\Gamma_{00} \quad (5.61)$$

$$= \int_{\Sigma_{00}} n_{00} d\Sigma_{00} = \int_{\Omega_{00}^F} \operatorname{div}(1) d\Omega_{00} = 0 \quad (5.62)$$

on démontre que $E_{\mathcal{K}}(U_R) = E_{k_E}(U_R) + E_{k_F}(U_R) + E_{k_G}(U_R) + E_{k_B}(U_R) + E_{k_\Sigma^1}(U_R) + E_{k_\Sigma^2}(U_R) = 0$.
Les mouvements de corps rigide en translation ne génèrent donc aucune énergie de déformation.

5.3.3 Mouvements rigides de rotation

Un mouvement d'ensemble en rotation est défini par un vecteur rotation θ et un centre de rotation O . Le champ U représentant la déformation de la structure autour de l'état initial, on écrira le champ de déplacement relatif à la rotation de vecteur θ par rapport à la géométrie initiale :

$$U_R = \theta \wedge OM_0 = \theta \wedge OM_{00} + \theta \wedge u_0 \quad (5.63)$$

La déformation initiale u_0 étant supposée de faible amplitude², on décide, en première approximation, de négliger les termes en u_0 .

D'autre part, au vecteur de rotation θ , on associe la matrice antisymétrique $\Theta = \operatorname{spin}(\theta)$ (cf annexe §D.2.1) telle que :

$$U_R = \theta \wedge OM_0 = \Theta OM_0 \quad (5.64)$$

2. Il est utile de rappeler que les déformations u_0 considérées ici sont en fait les déformations élastiques u_0^e .

Étude du terme $E_{k_E}(U_R)$

Rappelons que les termes en u_0 sont négligés dans ce calcul :

$$\begin{aligned} E_{k_E}(U_R) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[C \varepsilon_X(\theta \wedge OM_0^*) \varepsilon_X(\theta \wedge OM_0^*) \right] d\Omega_{00} \\ &\simeq \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[C \varepsilon_X(\theta \wedge OM_{00}) \varepsilon_X(\theta \wedge OM_{00}) \right] d\Omega_{00} \\ &\simeq \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[C \varepsilon_X(\Theta OM_{00}) \varepsilon_X(\Theta OM_{00}) \right] d\Omega_{00} \end{aligned}$$

En considérant le fait que :

$$\varepsilon_X(\Theta OM_{00}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{D}_X(\Theta OM_{00}) + \mathbf{D}_X(\Theta OM_{00})^\top \right) = \frac{1}{2}(\Theta + \Theta^T) = 0$$

l'équation précédente se simplifie en :

$$\boxed{E_{k_E}(U_R) \simeq 0} \quad (5.65)$$

Étude du terme $E_{k_G}(U_R)$

$$E_{k_G}(U_R) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[\mathbf{D}_X U_R \sigma_{\text{ini}} \mathbf{D}_X U_R^\top \right] d\Omega_{00} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[(\mathbf{D}_X U_R \sigma_{\text{ini}})^\top \mathbf{D}_X U_R \right] d\Omega_{00}$$

Pour effectuer une intégration de cette expression, la formule de Green (D.6) est utilisée. On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_{k_G}(U_R) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{div} \left((\mathbf{D}_X U_R \sigma_{\text{ini}})^\top U_R \right) d\Omega_{00} - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Div}_X \left(\mathbf{D}_X U_R \sigma_{\text{ini}} \right) \cdot U_R d\Omega_{00} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{00}} \mathbf{D}_X U_R \sigma_{\text{ini}} n_{00} \cdot U_R d\Sigma_{00} - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Div}_X \left(\mathbf{D}_X U_R \sigma_{\text{ini}} \right) \cdot U_R d\Omega_{00} \end{aligned}$$

Dans cette formule, on rappelle que σ_{ini} est une approximation de $S_0 = \det(F_0) F_0^{-1} \sigma_0^* F_0^{-\top}$. De plus, en dérivant la formule (5.64), on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{D}_X U_R = \Theta F_0 \quad (5.66)$$

Ces deux remarques permettent de simplifier notre expression :

$$E_{k_G}(U_R) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{00}} \det(F_0) \Theta \sigma_0^* F_0^{-\top} n_{00} \cdot U_R d\Sigma_{00} - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \text{Div}_X \left(\det(F_0) \Theta \sigma_0^* F_0^{-\top} \right) \cdot U_R d\Omega_{00} \quad (5.67)$$

En coordonnées lagrangiennes, l'équation (5.31a) décrivant l'état initial libre autoéquilibré se réécrit :

$$\text{Div}_X \left(\det(F_0) \sigma_0^* F_0^{-\top} \right) = -\rho_{00}^S g \quad \text{dans } \Omega_{00} \quad (5.68)$$

Θ étant une matrice constante, on peut modifier l'équation (5.68) comme suit :

$$\text{Div}_X \left(\det(F_0) \Theta \sigma_0^* F_0^{-\top} \right) = -\rho_{00}^S \Theta g \quad \text{dans } \Omega_{00} \quad (5.69)$$

En utilisant cette relation ainsi que (5.31b) et (5.31c), l'expression de $E_{k_G}(U_R)$ devient :

$$\begin{aligned} E_{k_G}(U_R) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \Theta \sigma_0 n_{00} \cdot U_R \, d\Sigma_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}^S (\Theta g) \cdot U_R \, d\Omega_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_{i0}} P_0 (\Theta n_0) \cdot U_R \, d\Sigma_0 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{f0}} (\Theta f_0) \cdot U_R \, d\Sigma_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}^S (\Theta g) \cdot U_R \, d\Omega_{00} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{i0}} P_0 n_0 \cdot (\Theta U_R) \, d\Sigma_0 - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{f0}} f_0 \cdot (\Theta U_R) \, d\Sigma_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}^S g \cdot (\Theta U_R) \, d\Omega_{00} \end{aligned}$$

En introduisant le point G^S , centre de gravité de la structure dans la configuration naturelle :

$$G^S \text{ défini par : } \quad m^S OG^S = \int_{\Omega_{00}^S} \rho_{00}^S OM_{00} \, d\Omega_{00} \quad (5.70)$$

où m^S est la masse de la structure seule (sans liquide). L'expression précédente devient alors :

$$\boxed{2 E_{k_G}(U_R) = \int_{\Sigma_{i0}} P_0 n_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) \, d\Sigma_0 - \int_{\Sigma_{f0}} f_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) \, d\Sigma_0 - m^S g \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OG^S))} \quad (5.71)$$

L'énergie de déformation relative au terme de raideur géométrique k_G que l'on vient d'exprimer, peut s'interpréter de façon physique (cf Morand & Ohayon [79]) : En effet, considérons la rotation *finie* $U_{\mathcal{R}}$ associée à la rotation *infinitésimale* U_R de vecteur θ . Un développement à l'ordre 2 du champ de déplacement induit par cette rotation *finie* $U_{\mathcal{R}}$ s'écrit (cf figure 5.1) :

$$U_{\mathcal{R}} = U^{(1)} + U^{(2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U^{(1)} = \theta \wedge OM_0 = U_R \\ U^{(2)} = \theta \wedge (\theta \wedge OM_0) \end{cases} \quad (5.72)$$

Cette remarque nous permet donc d'écrire $E_{k_G}(U_R)$ comme l'opposé du travail effectué par les forces extérieures de précontrainte P_0 , f_0 et $m^S g$, quand on les considère comme figées en direction et en intensité ("dead loads"), durant une rotation *finie*³ autour de O .

3. En effet, la nullité du travail correspondant à $U^{(1)}$ résulte de l'équilibre de la structure dans l'état initial.

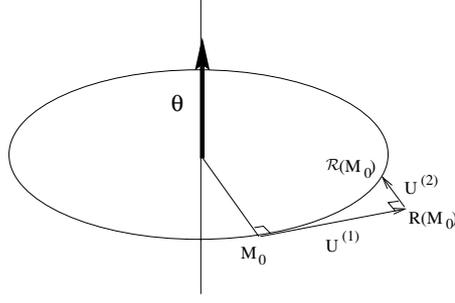


FIG. 5.1 – Rotation infinitésimale et rotation finie

Étude du terme $E_{k_{\Sigma}^2}(U_R)$

On utilise ici une expression de k_{Σ}^2 avant la linéarisation de $(n \, d\Sigma)^* - (n_0 \, d\Sigma_0)^*$:

$$E_{k_{\Sigma}^2}(U_R) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{i00}} P_0^* ((n \, d\Sigma)^* - (n_0 \, d\Sigma_0)^*) \cdot U_R = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{i0}} P_0 ((n \, d\Sigma)^* - n_0 \, d\Sigma_0) \cdot U_R \quad (5.73)$$

Pour simplifier cette expression, il faut exprimer $n \, d\Sigma - n_0 \, d\Sigma_0$ en fonction de θ . En se référant aux notations de la figure 3.4, on a :

$$a^1 = \frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{\partial M_0}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \xi} = a_0^1 + \theta \wedge a_0^1 \quad (5.74a)$$

$$a^2 = \frac{\partial M}{\partial \eta} = \frac{\partial M_0}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \eta} = a_0^2 + \theta \wedge a_0^2 \quad (5.74b)$$

$$\begin{aligned} n \, d\Sigma &= (a^1 \wedge a^2) \, d\xi \, d\eta \\ &= (a_0^1 \wedge a_0^2 + a_0^1 \wedge (\theta \wedge a_0^2) + (\theta \wedge a_0^1) \wedge a_0^2 + (\theta \wedge a_0^1) \wedge (\theta \wedge a_0^2)) \, d\xi \, d\eta \\ &= n_0 \, d\Sigma_0 + \left(\theta(a_0^1 \cdot a_0^2) - a_0^2(a_0^1 \cdot \theta) - \theta(a_0^1 \cdot a_0^2) + a_0^1(\theta \cdot a_0^2) + \theta \left((\theta \wedge a_0^1) \cdot a_0^2 \right) - a_0^2 \underbrace{((\theta \wedge a_0^1) \cdot \theta)}_0 \right) d\xi \, d\eta \\ &= n_0 \, d\Sigma_0 + \theta \wedge n_0 \, d\Sigma_0 + \theta \left((a_0^1 \wedge a_0^2) \cdot \theta \right) d\xi \, d\eta \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire que, dans le cas d'une rotation de vecteur θ :

$$n \, d\Sigma - n_0 \, d\Sigma_0 = \theta \wedge n_0 \, d\Sigma_0 + \theta(\theta \cdot n_0) \, d\Sigma_0 \quad (5.75)$$

En introduisant cette relation dans l'expression de $E_{k_{\Sigma}^2}(U_R)$:

$$\begin{aligned} E_{k_{\Sigma}^2}(U_R) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{i0}} P_0 (\theta \wedge n_0) \cdot (\theta \wedge OM_0) \, d\Sigma_0 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{i0}} P_0 (\theta \cdot n_0) \underbrace{\left(\theta \cdot (\theta \wedge OM_0) \right)}_0 \, d\Sigma_0 \\ &= \boxed{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma_{i0}} P_0 n_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) \, d\Sigma_0} \quad (5.76) \end{aligned}$$

On remarque que l'énergie de déformation associée à k_Σ^2 compense parfaitement la composante de l'énergie associée à k_G relative aux forces de pression hydrostatique. Ceci paraît satisfaisant d'un point de vue physique puisque $E_{k_\Sigma^2}(U_R)$ représente l'opposé du complément d'énergie qui apparaît quand on considère les forces de pression comme suiveuses plutôt que figées.

Étude du terme $E_{k_F}(U_R)$

Une démonstration analogue à la précédente permet d'affirmer que :

$$\boxed{E_{k_F}(U_R) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{f_0}} |f_{F0}| n_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) d\Sigma_0} \quad (5.77)$$

Étude du terme $E_{k_B}(U_R)$

Rappelons que les termes en u_0 sont négligés dans ce calcul :

$$\begin{aligned} E_{k_B}(U_R) &= \frac{\rho^F |g|}{2 \|\Gamma_{00}\|} \left(\int_{\Sigma_{i00}} (\theta \wedge OM_0^*) \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \right)^2 \\ &\simeq \frac{\rho^F |g|}{2 \|\Gamma_{00}\|} \underbrace{\left(\int_{\Sigma_{i00}} (\theta \wedge OM_{00}) \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \right)^2}_{(A)} \end{aligned}$$

Grâce à l'identité d'analyse vectorielle (D.5c), on effectue quelques simplifications sur le terme (A) :

$$\begin{aligned} (A) &= - \int_{\Sigma_{00}} (\theta \wedge OM_{00}) \cdot (-n_{00}) d\Sigma_{00} + \int_{\Gamma_{00}} (\theta \wedge OM_{00}) \cdot i_z d\Gamma_{00} \\ &= - \int_{\Omega_{00}^F} \operatorname{div}_X (\theta \wedge OM_{00}) d\Omega_{00} + (i_z \wedge \theta) \cdot \left(\int_{\Gamma_{00}} OM_{00} d\Gamma_{00} \right) \\ &= \theta \cdot \left(\int_{\Omega_{00}^F} \operatorname{rot}_X (OM_{00}) d\Omega_{00} \right) + (i_z \wedge \theta) \cdot \left(\int_{\Gamma_{00}} OM_{00} d\Gamma_{00} \right) \end{aligned}$$

En considérant le fait que $\operatorname{rot}_X (OM_{00}) = 0$, le terme (A) se simplifie en :

$$(A) = (i_z \wedge \theta) \cdot \left(\int_{\Gamma_{00}} OM_{00} d\Gamma_{00} \right)$$

On introduit ensuite le point C , barycentre de la surface libre Γ_{00} :

$$C \text{ défini par : } \quad \|\Gamma_{00}\| OC = \int_{\Gamma_{00}} OM_{00} d\Gamma_{00} \quad (5.78)$$

Finalement, l'énergie $E_{k_B}(U_R)$ s'écrit :

$$\boxed{E_{k_B}(U_R) \simeq \frac{\rho^F |g|}{2 \|\Gamma_{00}\|} \left(\|\Gamma_{00}\| (i_z \wedge \theta) \cdot OC \right)^2} \quad (5.79)$$

Étude du terme $E_{k_\Sigma^1}(U_R)$

$$\begin{aligned} E_{k_\Sigma^1}(U_R) &= -\frac{\rho^F |g|}{2} \int_{\Sigma_{i00}} \left(i_z \cdot (\theta \wedge OM_0^*) \right) \left((\theta \wedge OM_0^*) \cdot n_{00} \right) d\Sigma_{00} \\ &= -\frac{\rho^F |g|}{2} \int_{\Sigma_{i00}} \left(OM_0^* \cdot (i_z \wedge \theta) \right) \left((n_{00} \wedge \theta) \cdot OM_0^* \right) d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

Tout d'abord, on remarque que si le vecteur rotation θ est colinéaire à i_z , alors $E_{k_\Sigma^1}(U_R) = 0$

Sinon, on effectue les simplifications suivantes, en négligeant les termes en u_0 :

$$\begin{aligned} E_{k_\Sigma^1}(U_R) &\simeq -\frac{\rho^F |g|}{2} \int_{\Sigma_{i00}} \left(OM_{00} \cdot (i_z \wedge \theta) \right) \left((n_{00} \wedge \theta) \cdot OM_{00} \right) d\Sigma_{00} \\ &\simeq -\frac{\rho^F |g|}{2} \underbrace{\int_{\Sigma_{i00}} \left(OM_{00} \cdot (i_z \wedge \theta) \right) \left((n_{00} \wedge \theta) \cdot OM_{00} \right) d\Sigma_{00}}_{(\alpha)} \end{aligned}$$

Le terme (α) est ensuite simplifié :

$$\begin{aligned} (\alpha) &= \int_{\Sigma_{00}} \left(OM_{00} \cdot (\theta \wedge i_z) \right) \left((\theta \wedge OM_{00}) \cdot (-n_{00}) \right) d\Sigma_{00} + \int_{\Gamma_{00}} \left(OM_{00} \cdot (i_z \wedge \theta) \right) \left((i_z \wedge \theta) \cdot OM_{00} \right) d\Gamma_{00} \\ &= \underbrace{\int_{\Omega_{00}^F} \operatorname{div} \left(\left(OM_{00} \cdot (\theta \wedge i_z) \right) (\theta \wedge OM_{00}) \right) d\Omega_{00}}_{(A)} + \underbrace{\int_{\Gamma_{00}} \left(OM_{00} \cdot (i_z \wedge \theta) \right)^2 d\Gamma_{00}}_{(B)} \end{aligned}$$

Grâce aux identités d'analyse vectorielle (D.5c), (D.5d) et (D.5e), le terme (A) se simplifie en :

$$\begin{aligned} (A) &= \int_{\Omega_{00}^F} \left(OM_{00} \cdot (\theta \wedge i_z) \right) \operatorname{div}(\theta \wedge OM_{00}) d\Omega_{00} + \int_{\Omega_{00}^F} (\theta \wedge OM_{00}) \cdot \operatorname{grad} \left(OM_{00} \cdot (\theta \wedge i_z) \right) d\Omega_{00} \\ &= \int_{\Omega_{00}^F} \left(OM_{00} \cdot (\theta \wedge i_z) \right) \left(-\theta \cdot \underbrace{\operatorname{rot}_X(OM_{00})}_0 \right) d\Omega_{00} + \int_{\Omega_{00}^F} (\theta \wedge OM_{00}) \cdot \operatorname{grad} \left(OM_{00} \cdot (\theta \wedge i_z) \right) d\Omega_{00} \\ &= \int_{\Omega_{00}^F} (\theta \wedge OM_{00}) \cdot \left(\underbrace{D_X(OM_{00})}_{Id} (\theta \wedge i_z) \right) d\Omega_{00} + \int_{\Omega_{00}^F} (\theta \wedge OM_{00}) \cdot \left((\theta \wedge i_z) \wedge \underbrace{\operatorname{rot}_X(OM_{00})}_0 \right) d\Omega_{00} \\ &= (\theta \wedge i_z) \cdot \left(\theta \wedge \int_{\Omega_{00}^F} OM_{00} d\Omega_{00} \right) \end{aligned}$$

On introduit alors le point G_{00}^F , centre de gravité du liquide dans l'état naturel :

$$G_{00}^F \text{ défini par : } \quad \rho^F \|\Omega_{00}^F\| OG_{00}^F = \rho^F \int_{\Omega_{00}^F} OM_{00} d\Omega_{00} \quad (5.80)$$

ce qui nous permet d'effectuer la simplification suivante :

$$(A) = -i_z \cdot \left(\theta \wedge \left(\theta \wedge \|\Omega_{00}^F\| OG_{00}^F \right) \right)$$

En introduisant le point C barycentre de Γ_{00} , défini par (5.78), le terme (B) se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned}
 (B) &= \int_{\Gamma_{00}} \left((OC + CM_{00}) \cdot (i_z \wedge \theta) \right)^2 d\Gamma_{00} \\
 &= \int_{\Gamma_{00}} \left(OC \cdot (i_z \wedge \theta) \right)^2 + 2 \left(OC \cdot (i_z \wedge \theta) \right) \left(CM_{00} \cdot (i_z \wedge \theta) \right) + \left(CM_{00} \cdot (i_z \wedge \theta) \right)^2 d\Gamma_{00} \\
 &= \|\Gamma_{00}\| \left(OC \cdot (i_z \wedge \theta) \right)^2 + 2 \left(OC \cdot (i_z \wedge \theta) \right) \underbrace{\left(\int_{\Gamma_{00}} CM_{00} d\Gamma_{00} \right)}_0 + (i_z \wedge \theta)^\top \mathfrak{S}_{\Gamma_{00}}^C (i_z \wedge \theta)
 \end{aligned}$$

où $\mathfrak{S}_{\Gamma_{00}}^C$ représente le tenseur des moments d'inertie par rapport au point C de la surface Γ_{00} , défini par :

$$\mathfrak{S}_{\Gamma_{00}}^C = \int_{\Gamma_{00}} CM_{00} (CM_{00})^\top d\Gamma_{00} \quad (5.81)$$

Finalement, l'énergie $E_{k_\Sigma^1}(U_R)$ s'écrit :

$$\boxed{E_{k_\Sigma^1}(U_R) \simeq -\frac{m^F}{2} g \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OG_{00}^F)) - \frac{\rho^F |g|}{2} \left(\|\Gamma_{00}\| \left(OC \cdot (i_z \wedge \theta) \right)^2 + (i_z \wedge \theta)^\top \mathfrak{S}_{\Gamma_{00}}^C (i_z \wedge \theta) \right)} \quad (5.82)$$

Résumé

Finalement, pour un mouvement de corps rigide en rotation $U_R = \theta \wedge OM_0$, l'énergie de déformation $E_{\mathcal{K}}(U_R)$ associée à l'opérateur \mathcal{K} s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E_{\mathcal{K}}(U_R) &= E_{k_E}(U_R) + E_{k_G}(U_R) + E_{k_F}(U_R) + E_{k_B}(U_R) + E_{k_\Sigma^1}(U_R) + E_{k_\Sigma^2}(U_R) \\
 &\simeq -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_{f_0}} f_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) d\Sigma_0 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{f_0}} |f_{F0}| n_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) d\Sigma_0 \dots \\
 &\quad -\frac{m^F}{2} g \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OG_{00}^F)) - \frac{\rho^F |g|}{2} (i_z \wedge \theta)^\top \mathfrak{S}_{\Gamma_{00}}^C (i_z \wedge \theta) - \frac{m^S}{2} g \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OG^S)) \\
 &\simeq -\frac{m}{2} g \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OG)) - \frac{\rho^F |g|}{2} (i_z \wedge \theta)^\top \mathfrak{S}_{\Gamma_{00}}^C (i_z \wedge \theta) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{f_0}} f_{D0} \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) d\Sigma_0
 \end{aligned} \quad (5.83)$$

où G est le centre de gravité du système "fluide-structure dans l'état naturel", et m sa masse globale.

En utilisant (5.39), le premier terme de cette expression peut se récrire :

$$\frac{m^S + m^F}{2} g^{\text{éq.}} \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OG)) = -\frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma_{f_0}} f_{D0} d\Sigma_0 + \int_{\Sigma_{f_0}} |f_{F0}| n_0 d\Sigma_0 \right) \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OG)) \quad (5.84)$$

On constate que l'énergie générée par les forces suiveuses est nulle si f_{F0} vérifie la condition de symétrie de l'opérateur k_F ($|f_{F0}|$ constant et Σ_{f_0} surface fermée, cf. annexes C.3). Sinon, en positionnant le centre

de rotation O au centre de gravité G du système, le travail des forces suiveuses f_{F0} peut être éliminé. Par contre, le terme qui dépend des forces mortes f_{D0} reste. Finalement, l'expression de $E_{\mathcal{K}}(U_R)$ (5.83) devient :

$$E_{\mathcal{K}}(U_R) \simeq -\frac{\rho^F |g|}{2} (i_z \wedge \theta)^\top \mathfrak{S}_{\Gamma_{00}}^C (i_z \wedge \theta) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{f0}} f_{D0} \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge GM_0)) \, d\Sigma_0 \quad (5.85)$$

5.3.4 Influence de la pressurisation

Supposons maintenant que la configuration du système fluide structure soit celui de la figure 4.1 et que le gaz qui occupe le volume Ω^G soit pressurisé.

Dans le cas de mouvements de corps rigide, les deux opérateurs k_C et k_P qui apparaissent dans la formulation variationnelle (4.13) génèrent des énergies de déformation :

$$E_{k_C}(U_R) = \frac{P_{00}^G \gamma}{2 V_{00}} \left(\int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} U_R \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right)^2 \quad (5.86)$$

$$E_{k_P}(U_R) = \frac{P_0^G}{2} \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} \tau_{00}(U_R) \cdot U_R \, d\Sigma_{00} \quad (5.87)$$

Mouvements de corps rigide en translation

Pour les trois mouvements d'ensemble en translation $U_R = cste$ donc :

$$E_{k_C}(U_R) = \frac{P_{00}^G \gamma}{2 \|\Omega_{00}^G\|} \left(U_R \cdot \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} n_{00} \, d\Sigma_{00} \right)^2 = \frac{P_{00}^G \gamma}{2 \|\Omega_{00}^G\|} \left(U_R \cdot \int_{\Omega_{00}^F} \underbrace{\text{div}(1)}_0 \, d\Omega_{00} \right)^2 = 0$$

$$\text{et } E_{k_P}(U_R) = \frac{P_0^G}{2} \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} \underbrace{\tau_{00}(U_R)}_0 \cdot U_R \, d\Sigma_{00} = 0$$

Mouvements de corps rigide en rotation

Pour les 3 mouvements d'ensemble en rotation, $U_R = \theta \wedge OM_0$. En utilisant la formule de Stokes (D.10) et en négligeant les termes en u_0 , on obtient pour $E_{k_C}(U_R)$:

$$E_{k_C}(U_R) \simeq \frac{P_{00}^G \gamma}{2 \|\Omega_{00}^G\|} \left(\theta \cdot \int_{\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}} OM_{00} \wedge n_{00} \, d\Sigma_{00} \right)^2 \simeq \frac{P_{00}^G \gamma}{2 \|\Omega_{00}^G\|} \left(\theta \cdot \int_{\Omega_{00}^F} \underbrace{\text{rot}(OM_{00})}_0 \, d\Omega_{00} \right)^2 \simeq 0$$

En utilisant la formule de rotation de l'élément de surface orientée (5.75), on obtient pour $E_{k_P}(U_R)$ une relation équivalente à (5.76) :

$$E_{k_P}(U_R) = -\frac{P_0^G}{2} \int_{\Sigma_{i0} + \Sigma_{g0}} n_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) \, d\Sigma_{00}$$

Cependant, les équations locales (5.31) sont modifiées par la présence de la pressurisation : d'une part, à la pression P_0 sur Σ_{i0} , il faut ajouter la pression dans le gaz P_0^G et d'autre part, il faut ajouter la relation $\sigma_0 n_0 = -P_0^G n_0$ sur Σ_{g0} . L'énergie $E_{k_G}(U_R)$ comprend alors deux termes supplémentaires par rapport à (5.71) qui s'annulent exactement avec $E_{k_P}(U_R)$:

$$E_{k_G}(U_R) = \dots + \frac{P_0^G}{2} \int_{\Sigma_{i0}} n_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) d\Sigma_{00} + \frac{P_0^G}{2} \int_{\Sigma_{g0}} n_0 \cdot (\theta \wedge (\theta \wedge OM_0)) d\Sigma_{00} \quad (5.88)$$

5.3.5 Conclusion

Pour conclure sur ce point, on peut affirmer que :

- Les mouvements de **translation** de corps rigide ne génèrent pas d'énergie de déformation vis à vis de l'opérateur \mathcal{K} .
- Si les forces extérieures f_0 ne sont pas suiveuse ("forces mortes"), les mouvements d'ensemble en rotation ne sont plus, en règle générale, des modes rigides du système. Comme le montre l'équation (5.85), le signe de l'énergie générée par les forces extérieures est positif (effet stabilisant) ou négatif (effet destabilisant) suivant leur répartition par rapport au centre de gravité du système. On retrouve un résultat énoncé par Kreis & Klein [63].
- Pour que la précontrainte ne perturbe pas le système libre, il faut qu'elle soit assurée exclusivement par des forces suiveuses symétriques⁴. Dans ce cas, un terme de rotation de normale (terme k_F ou k_P dans le cas des pressions) vient annuler l'énergie de déformation qui apparaît au niveau de la raideur géométrique k_G .

En supposant que le système est précontraint uniquement par des forces suiveuses symétriques :

- Pour des déformations élastiques initiales u_0^e faibles, le mouvement de corps rigide en **rotation autour de l'axe z** ne génère pas d'énergie de déformation vis à vis de l'opérateur \mathcal{K} .
- Les mouvements de corps rigide **en rotation autour des deux autres axes x et y** génèrent, en général, une énergie de déformation non nulle. Ceci peut s'expliquer par le fait que le système précontraint fluide/structure n'est pas invariant dans une rotation autour de ces deux axes. En effet, si la structure tourne, le fluide, lui, par action des forces de pesanteur, garde une surface horizontale. Dans ce type de mouvement, le champ de précontrainte génère donc un travail. D'autre part, on remarque que, suivant la géométrie du système fluide-structure, le terme (5.85) peut être négatif et l'opérateur \mathcal{K} peut posséder une ou plusieurs valeurs propres négatives. Le système peut donc être instable.

Le tableau 5.1 récapitule dans ce cas les contributions de chaque terme de l'opérateur de raideur d'élastogravité \mathcal{K} à l'énergie de déformation associée aux différents mouvements d'ensemble en translation et rotation. On constate le rôle important des opérateurs k_Σ , k_P et k_F pour assurer l'existence des modes rigides en annulant l'énergie générée par les termes de précontrainte. D'autre part, l'opérateur k_B s'avère indispensable pour la même raison à partir du moment où k_Σ est pris en compte. Les différents termes de raideur de l'opérateur d'élastogravité forment donc un ensemble cohérent qui permet de conserver les modes rigides d'un système fluide-structure libre et les théories qui ne prendraient pas l'ensemble de ces termes en compte perdraient forcément certains modes rigides.

4. On appellera "forces suiveuses symétriques" des forces qui vérifient les conditions de symétrie de l'opérateur k_F énoncée en §C.3.

	$E_{k_E} + E_{k_G^g} + E_{k_G^{P00}} + E_{k_G^{fF0}} + E_{k_F} + E_{k_P} + E_{k_C} + E_{k_B} + E_{k_\Sigma^1} + E_{k_\Sigma^2} = E_{\mathcal{K}}$
$T_{x \text{ ou } y}$	$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$
T_z	$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \textcircled{1} + (-\textcircled{1}) + 0 = 0$
R_z	$0 + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + (-\textcircled{4}) + (-\textcircled{3}) + 0 + 0 + 0 + (-\textcircled{2}) = 0$
$R_{x \text{ ou } y}$	$0 + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + (-\textcircled{4}) + (-\textcircled{3}) + 0 + \textcircled{1} + \textcircled{5} - \textcircled{1} + (-\textcircled{2}) = \textcircled{5}$

TAB. 5.1 – Récapitulatif des différentes contributions à l'énergie de déformation associée aux mouvements d'ensemble.

Références bibliographiques

Les références sur l'autoéquilibrage ont été citées dans l'annexe B. Certaines idées présentées, en rapport avec l'étude des modes rigides de l'opérateur d'élastogravité, ont été inspirées par les articles de Morand & Ohayon [79] et de Kreis & Klein [64].

Chapitre 6

Discrétisation et Symétrisation

Sommaire

6.1	Problématique et notations	76
6.2	Formulation non symétrique en (U, φ)	76
6.3	Formulation symétrique en (U, η, π) du cas sans pressurisation	77
6.3.1	Modification des équations du fluide	78
6.3.2	Modification des équations de la structure	79
6.3.3	Discrétisation du problème couplé	79
6.3.4	Choix pratique de la condition d'unicité $\ell(\varphi)$	80
6.4	Formulation symétrique en (U, η, π) du cas avec pressurisation	80
6.4.1	Modification des équations du fluide	80
6.4.2	Modification des équations de la structure	81
6.4.3	Discrétisation du problème couplé	82
6.5	Formulation symétrique en (U, η, π, λ)	82
6.5.1	Modifications des équations du fluide	83
6.5.2	Modifications des équations de la structure	84
6.5.3	Discrétisation du problème couplé	84
6.6	Formulation symétrique par projection modale	84

6.1 Problématique et notations

La résolution directe des différents systèmes d'équations obtenus dans les chapitres précédents n'est pas envisageable. Il existe, par contre, des méthodes approchées adaptées aux formulations variationnelles établies. Parmi ces méthodes, la méthode de Ritz-Galerkin est la plus simple et la plus utilisée. Elle consiste à rechercher une approximation \tilde{X} de X dans un sous-espace \mathcal{C}_X^h de dimension finie N de \mathcal{C}_X . Si $(e_j)_{j=1,\dots,N}$ est une base du sous-espace vectoriel \mathcal{C}_X^h , un élément $X_h \in \mathcal{C}_X^h$ peut s'écrire sous la forme :

$$X_h = \sum_{j=1}^N \chi_j e_j \quad (6.1)$$

La recherche de la solution continue X est ainsi remplacée par celle d'un nombre fini d'inconnues $(\chi_j)_{j=1,\dots,N}$.

Cette discrétisation des inconnues du problème entraîne une discrétisation des équations du système en transformant les équations variationnelles intégrales en un système matriciel symétrique. De nombreux ouvrages détaillent cette méthode : citons entre autre ceux de Ciarlet [30], Raviart & Thomas [94] et Hughes [54].

Dans ce qui suit, les inconnues U et φ seront des vecteurs de dimension respectivement N_U et N_φ appartenant aux sous-espaces de dimension finie \mathcal{C}_u^h et \mathcal{C}_φ^{*h} , denses respectivement dans \mathcal{C}_u et \mathcal{C}_φ^* .

On s'intéresse désormais aux solutions stationnaires (vibrations à fréquence constante) du système. Les forces d'excitation du système \tilde{f} sont donc supposées harmoniques, de la forme : $\tilde{f}(t) = \tilde{f} \cos(\omega t)$, et les inconnues du problème U^S et φ sont recherchées sous la forme : $U^S(M_{00}, t) = U^S(M_{00}) \cos(\omega t)$ et $\varphi(M_{00}, t) = \varphi(M_{00}) \cos(\omega t)$.

De plus, puisque la variable de déplacement relative au fluide U^F a disparu de la formulation et qu'il n'y a ainsi plus de confusion possible, nous noterons simplement U le déplacement des points de la structure, noté auparavant U^S . D'autre part, dans la suite, la variable de dérivation est systématiquement X et pour alléger les notations, on se dispensera de le préciser.

6.2 Formulation non symétrique en (U, φ)

Le problème couplé général est constitué à partir des équations (4.13) et (3.19) :

$\exists (U, \varphi) \in \mathcal{C}_u \times \mathcal{C}_\varphi^*$ tels que $\forall (\delta U, \delta \varphi) \in \mathcal{C}_u \times \mathcal{C}_\varphi^*$

$$\mathcal{K}(U, \delta U) - \omega^2 \mathcal{M}(U, \delta U) + \omega^2 \mathcal{C}(\varphi, \delta U) = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (6.2a)$$

$$\mathcal{F}(\varphi, \delta \varphi) - \omega^2 \mathcal{S}(\varphi, \delta \varphi) + \mathcal{C}(U, \delta \varphi) = 0 \quad (6.2b)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(U, \delta U) = & k_E(U, \delta U) + k_F(U, \delta U) + k_G(U, \delta U) + k_\Sigma(U, \delta U) + k_B(U, \delta U) \\ & (\dots + k_C(U, \delta U) + k_P(U, \delta U) \quad \text{si pressurisation}) \end{aligned} \quad (6.2c)$$

La discrétisation des inconnues entraîne une discrétisation des formes linéaires et bilinéaires intervenant dans ces équations :

$$\mathcal{F}(\varphi, \delta\varphi) \implies \delta\varphi^\top F \varphi \quad (6.3a)$$

$$\mathcal{S}(\varphi, \delta\varphi) \implies \delta\varphi^\top S \varphi \quad (6.3b)$$

$$\mathcal{K}(U, \delta U) \implies \delta U^\top K U \quad (6.3c)$$

$$\mathcal{M}(U, \delta U) \implies \delta U^\top M U \quad (6.3d)$$

$$\int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \implies \delta U^\top \cdot \tilde{f} \quad (6.3e)$$

$$\mathcal{C}(U, \delta\varphi) \implies \delta\varphi^\top C^\top U \quad \mathcal{C}(\varphi, \delta U) \implies \delta U^\top C \varphi \quad (6.3f)$$

où K et M sont des matrices $N_U \times N_U$, C est une matrice $N_U \times N_\varphi$, F et S sont des matrices $N_\varphi \times N_\varphi$ et \tilde{f} est un vecteur $N_U \times 1$.

Après discrétisation, le problème (6.2) se réécrit :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ C^\top & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \varphi \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & -C \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

sans oublier la contrainte (2.16) sur φ :

$$\ell(\varphi) = \int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0$$

On constate que le système obtenu n'est pas symétrique alors qu'en théorie des milieux continus, la propriété de symétrie du système est assurée par l'existence, pour tout système linéaire conservatif, d'opérateurs quadratiques associés à des concepts énergétiques. Cependant, dans le cas présent, le choix d'une variable primale (le déplacement U) pour la structure, associée à une variable duale (le potentiel φ que l'on peut apparenter à une pression) pour le fluide rend le problème de la recherche d'une formulation symétrique non standard d'un point de vue théorique et aboutit naturellement à des formulations non symétriques [90]. Les nombreuses formulations non symétriques exhibées, pour des problèmes linéaires conservatifs en couplage fluide-structure, sont dues à un choix inapproprié des variables d'état pour décrire le système. Le choix de variables de déplacement primales pour la structure (U^S) et pour le fluide (U^F) peut sembler plus intéressant de ce point de vue, mais la discrétisation de l'espace des fonctions admissibles est alors plus complexe¹. On préférera plutôt rechercher une méthode de symétrisation des équations qui nous permettra ensuite d'utiliser les algorithmes de résolution standards réservés aux systèmes symétriques (méthode de Lanczos etc.).

6.3 Formulation symétrique en (U, η, π) du cas sans pressurisation

La première méthode de symétrisation consiste à introduire une ou plusieurs nouvelles inconnues dans le problème. Dans l'article [78], Morand a proposé d'introduire la variable η décrivant le déplacement

1. Des problèmes numériques apparaissent, qui sont liés à l'existence d'un sous-espace de dimension infinie associé à la valeur propre 0 [58].

normal à sa surface libre du fluide :

$$\eta = \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = U_Z^F \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (6.5)$$

C'est cette méthode que nous présentons ici, tout d'abord dans le cas non pressurisé.

6.3.1 Modification des équations du fluide

Introduisons la variable η dans les équations locales (2.11) et (2.12) :

$$p_{\mathcal{L}} = \rho^F g \cdot \nabla \varphi - \rho^F \ddot{\varphi} + \pi \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (6.6a)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (6.6b)$$

$$\nabla \varphi \cdot n_{00} = U_N = U \cdot n_{00} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (6.6c)$$

$$\nabla \varphi \cdot i_z = \eta \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (6.6d)$$

$$\rho^F |g| \eta = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (6.6e)$$

$$\ell(\varphi) = 0 \quad \text{avec } \ell(1) \neq 0 \quad (6.6f)$$

Nous décidons ici de conserver la constante π comme inconnue et de garder la condition d'unicité $\ell(\varphi)$ arbitraire.

Soit l'ensemble \mathcal{C}_η des fonctions admissibles η . Pour tout $\delta\eta$ appartenant à \mathcal{C}_η , l'équation (6.6e) intégrée sur la surface libre Γ_{00} donne le formulation variationnelle suivante :

$$\exists \eta \in \mathcal{C}_\eta \text{ tel que } \forall \delta\eta \in \mathcal{C}_\eta, \quad \int_{\Gamma_{00}} \rho^F |g| \eta \delta\eta \, d\Gamma_{00} - \pi \int_{\Gamma_{00}} \delta\eta \, d\Gamma_{00} + \int_{\Gamma_{00}} \rho^F \ddot{\varphi} \delta\eta \, d\Gamma_{00} = 0 \quad (6.7)$$

On note désormais $\mathcal{C}_\varphi^\diamond = \{\varphi \in \mathcal{C}_\varphi \text{ tel que } \ell(\varphi) = 0\}$ où $\ell(\varphi)$ est une condition d'unicité non déterminée pour l'instant. La formule de Green appliquée aux équations (6.6b), (6.6c) et (6.6d), donne le principe variationnel suivant :

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^\diamond \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi, \quad \int_{\Omega_{00}^F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi \, d\Omega_{00} - \int_{\Gamma_{00}} \eta \delta\varphi \, d\Gamma_{00} + \int_{\Sigma_{i00}} U \cdot n_{00} \delta\varphi \, d\Sigma_{00} = 0 \quad (6.8)$$

Afin que la relation précédente soit symétrique, il faudrait que φ et $\delta\varphi$ appartiennent au même espace $\mathcal{C}_\varphi^\diamond$. En remarquant que $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}_\varphi^\diamond \oplus \mathbb{R}$, on remplace dans cette équation $\delta\varphi$, appartenant à \mathcal{C}_φ , par $\delta\varphi + \delta\pi$ appartenant respectivement à $\mathcal{C}_\varphi^\diamond$ et \mathbb{R} [81]. L'équation (6.8) est alors remplacée par les 2 équations suivantes :

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^\diamond \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^\diamond, \quad \int_{\Omega_{00}^F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi \, d\Omega_{00} - \int_{\Gamma_{00}} \eta \delta\varphi \, d\Gamma_{00} + \int_{\Sigma_{i00}} U \cdot n_{00} \delta\varphi \, d\Sigma_{00} = 0 \quad (6.9a)$$

$$\forall \delta\pi \in \mathbb{R}, \quad \delta\pi \int_{\Sigma_{i00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} - \delta\pi \int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} = 0 \quad (6.9b)$$

6.3.2 Modification des équations de la structure

En remplaçant $p_{\mathcal{L}}$ par son expression (6.6a) dans (3.15), la formulation variationnelle (3.19) relative à la structure se réécrit :

$$(6.10)$$

$\exists U \in \mathcal{C}_u$ tel que $\forall \delta U \in \mathcal{C}_u$,

$$\widehat{\mathcal{K}}(U, \delta U) + \mathcal{M}(\ddot{U}, \delta U) - \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) + \pi \int_{\Sigma_{i00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (6.11)$$

avec

$$\widehat{\mathcal{K}}(U, \delta U) = k_E(U, \delta U) + k_F(U, \delta U) + k_G(U, \delta U) + k_{\Sigma}(U, \delta U) \quad (6.12)$$

On remarque qu'en conservant la contante π dans la modélisation, on fait disparaître le terme de rigidité k_B de l'expression de l'opérateur $\widehat{\mathcal{K}}$.

Dans [19], Bermúdez *et al.* retrouvent un système d'équations variationnelles équivalent à (6.7)(6.9)(6.10) à ceci près qu'il ne prend pas en compte les effets de gravité représentés par les termes de raideur k_G et k_{Σ} .

6.3.3 Discrétisation du problème couplé

L'inconnue η est discrétisée en un vecteur de dimension N_{η} . En plus des matrices déjà définies, nous introduisons K_{η} , la matrice de dimension $N_{\eta} \times N_{\eta}$ définie par :

$$k_{\eta}(\eta, \delta \eta) = \int_{\Gamma_{00}} \rho^F |g| \eta \delta \eta \, d\Gamma_{00} \implies \delta \eta^T K_{\eta} \eta \quad (6.13)$$

ainsi que les matrices et vecteurs de couplage :

$$\pi \int_{\Sigma_{i00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \implies \delta U^T c \pi \quad \delta \pi \int_{\Sigma_{i00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \implies \delta \pi c^T U \quad (6.14a)$$

$$\int_{\Gamma_{00}} \rho^F \ddot{\varphi} \delta \eta \, d\Gamma_{00} \implies -\omega^2 \delta \eta^T B \varphi \quad \int_{\Gamma_{00}} \rho^F \eta \delta \varphi \, d\Gamma_{00} \implies \delta \varphi^T B^T \eta \quad (6.14b)$$

$$\pi \int_{\Gamma_{00}} \delta \eta \, d\Gamma_{00} \implies \delta \eta^T b \pi \quad \delta \pi \int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} \implies \delta \pi b^T \eta \quad (6.14c)$$

où c est de dimension $N_u \times 1$, b de dimension $N_{\eta} \times 1$ et B de dimension $N_{\eta} \times N_{\varphi}$.

Avec $(U, \eta, \varphi, \pi) \in \mathcal{C}_u^h \times \mathcal{C}_{\eta}^h \times \mathcal{C}_{\varphi}^{oh} \times \mathbb{R}$, la discrétisation des équations précédentes donne :

$$(6.10) \implies \widehat{K} U - \omega^2 M U + \omega^2 C \varphi + c \pi = \tilde{f} \quad (6.15a)$$

$$(6.7) \implies K_{\eta} \eta - b \pi - \omega^2 B \varphi = 0 \quad (6.15b)$$

$$(6.9a) \implies F \varphi - B^T \eta + C^T U = 0 \quad (6.15c)$$

$$(6.9b) \implies c^T U - b^T \eta = 0 \quad (6.15d)$$

6.3.4 Choix pratique de la condition d'unicité $\ell(\varphi)$

Rappelons que jusqu'alors, le vecteur φ est soumis à une condition d'unicité arbitraire $\ell(\varphi)$ qui n'a pas encore été choisie : supposons que l'on décide que $\ell(\varphi)$ soit telle que φ soit nul en un point de discrétisation du volume Ω_{00}^F correspondant à la valeur nodale φ_1 . On supprime alors les lignes et/ou les colonnes correspondant à φ_1 dans les différentes matrices comme suit :

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12}^\top & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad [B_1 \quad B_2] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

La matrice F_{22} est inversible² ce qui permet d'exprimer φ en fonction des autres inconnues (U, η, π) et de l'éliminer du système d'équations :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{22}^{-1} B_2^\top \eta - F_{22}^{-1} C_2^\top U \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{K} & 0 & c \\ 0 & K_\eta & -b \\ c^\top & -b^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \eta \\ \pi \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M + C_2 F_{22}^{-1} C_2^\top & -C_2 F_{22}^{-1} B_2^\top & 0 \\ -B_2 F_{22}^{-1} C_2^\top & B_2 F_{22}^{-1} B_2^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \eta \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

L'introduction d'une variable primale η pour le fluide et l'élimination de la variable duale φ de la formulation a permis de rétablir la symétrie du système. Cette formulation met également en évidence que la constante π peut être interprétée comme un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte d'invariance de volume du fluide (6.15d).

D'autre part, dans le chapitre 6 de leur ouvrage [81], Morand & Ohayon démontrent que la matrice de masse obtenue est positive et donnent une méthode efficace pour la calculer.

6.4 Formulation symétrique en (U, η, π) du cas avec pressurisation

La méthode précédente est étendue dans le cas d'un système pressurisé.

6.4.1 Modification des équations du fluide

L'effet de pressurisation apparaît au niveau de l'équation locale (6.6e) qui se réécrit :

$$(6.6e) \implies \rho^F |g| \eta = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi + \frac{P_{00}^G \gamma \delta V^{(1)}}{\|\Omega_{00}^G\|} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (6.18)$$

Avec l'expression de $\delta V^{(1)}$ suivante :

$$\delta V^{(1)} = - \int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} - \int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} \quad (6.19)$$

2. contrairement à F dont le noyau est l'espace vectoriel de dimension 1 généré par $\mathbb{1}_\varphi$.

le principe variationnel (6.7) devient :

$\exists \eta \in \mathcal{C}_\eta$ tel que $\forall \delta\eta \in \mathcal{C}_\eta$,

$$k_\eta(\eta, \delta\eta) + k_\Gamma(\eta, \delta\eta) - \pi \int_{\Gamma_{00}} \delta\eta \, d\Gamma_{00} + \int_{\Gamma_{00}} \rho^F \ddot{\varphi} \delta\eta \, d\Gamma_{00} + \mathcal{D}(U, \delta\eta) = 0 \quad (6.20)$$

avec

$$k_\Gamma(\eta, \delta\eta) = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} \right) \left(\int_{\Gamma_{00}} \delta\eta \, d\Gamma_{00} \right) \quad (6.21)$$

$$\mathcal{D}(U, \delta\eta) = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Gamma_{00}} \delta\eta \, d\Gamma_{00} \right) \quad (6.22)$$

Les autres équations locales ne sont pas modifiées, et par conséquent les relations (6.9) restent identiques.

6.4.2 Modification des équations de la structure

En utilisant plutôt l'expression de $\delta V^{(1)}$ (6.19), le terme supplémentaire direct dû à la pressurisation (4.10) s'exprime :

$$(4.10) \implies -\frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{g00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \cdots \\ - \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{g00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) - P_{00}^G \int_{\Sigma_{g00}} \tau_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (6.23)$$

L'expression de $p_{\mathcal{L}}$ (6.6a) fait que le terme supplémentaire indirect dû à la pressurisation (4.12) s'écrit :

$$(4.12) \implies \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) - k_\Sigma(U, \delta U) - \pi \int_{\Sigma_{i00}} n_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} - P_{00}^G \int_{\Sigma_{i00}} \tau_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (6.24)$$

En additionnant ces deux effets, la formulation variationnelle de la structure (6.10) devient :

$\exists U \in \mathcal{C}_u$ tel que $\forall \delta U \in \mathcal{C}_u$,

$$\tilde{\mathcal{K}}(U, \delta U) + \mathcal{M}(\ddot{U}, \delta U) - \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) + \pi \int_{\Sigma_{i00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} + \mathcal{D}(\eta, \delta U) = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (6.25)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{K}}(U, \delta U) = k_E(U, \delta U) + k_F(U, \delta U) + k_G(U, \delta U) + k_\Sigma(U, \delta U) + k_P(U, \delta U) + k_{C_g}(U, \delta U) \quad (6.26)$$

où

$$k_{C_g}(U, \delta U) = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{g00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \quad (6.27)$$

On remarque que le terme de rigidité k_B n'apparaît plus dans l'expression de l'opérateur $\tilde{\mathcal{K}}$ et que le terme k_C est remplacé par un terme similaire mais restreint à Σ_{g00} , noté k_{C_g} .

6.4.3 Discrétisation du problème couplé

La discrétisation des formes bilinéaires introduites précédemment fait intervenir les matrices suivantes :

$$k_\Gamma(\eta, \delta\eta) \implies \delta\eta^\top K_\Gamma \eta \quad (6.28a)$$

$$k_{C_g}(U, \delta U) \implies \delta U^\top K_{C_g} U \quad (6.28b)$$

où K_Γ est une matrice de dimension $N_\eta \times N_\eta$ et K_{C_g} est de dimension $N_U \times N_U$.

ainsi que la matrice de couplage D de dimension $N_U \times N_\eta$:

$$\mathcal{D}(U, \delta\eta) \implies \delta\eta^\top D^\top U \quad \mathcal{D}(\eta, \delta U) \implies \delta U^\top D \eta \quad (6.28c)$$

Avec $(U, \eta, \varphi, \pi) \in \mathcal{C}_u^h \times \mathcal{C}_\eta^h \times \mathcal{C}_\varphi^{\text{oh}} \times \mathbb{R}$, la discrétisation du problème couplé donne :

$$(6.25) \implies \tilde{K} U - \omega^2 M U + \omega^2 C \varphi + c \pi + D \eta = \tilde{f} \quad (6.29a)$$

$$(6.20) \implies (K_\eta + K_\Gamma) \eta - b \pi - \omega^2 B \varphi + D^\top U = 0 \quad (6.29b)$$

$$(6.9a) \implies F \varphi - B^\top \eta + C^\top U = 0 \quad (6.29c)$$

$$(6.9b) \implies c^\top U - b^\top \eta = 0 \quad (6.29d)$$

En faisant le choix d'une condition d'unicité $\ell(\varphi)$ telle que $\varphi_1 = 0$, les équations discrétisées du système fluide structure couplé avec gaz pressurisé s'écrivent sous la forme matricielle symétrique suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{K} & D & c \\ D^\top & K_\eta + K_\Gamma & -b \\ c^\top & -b^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \eta \\ \pi \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M + C_2 F_{22}^{-1} C_2^\top & -C_2 F_{22}^{-1} B_2^\top & 0 \\ -B_2 F_{22}^{-1} C_2^\top & B_2 F_{22}^{-1} B_2^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \eta \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

La prise en compte de la pressurisation fait donc apparaître quelques termes supplémentaires mais ne modifie pas la symétrie du problème posé en (U, η, π) . De plus, on remarque qu'en prenant $P_{00}^G = 0$ dans l'équation (6.30), on retrouve l'équation (6.17). Le cas sans pressurisation peut donc être traité comme un cas particuliers du cas général avec pressurisation.

6.5 Formulation symétrique en (U, η, π, λ)

On remarque que la discrétisation des formes bilinéaires variationnelles k_{C_g} , k_Γ et \mathcal{D} introduites précédemment conduit à des matrices pleines. En effet, à partir du vecteur b , défini par (6.14c), et du vecteur c_g de dimension $N_U \times 1$ défini par :

$$\pi \int_{\Sigma_{g00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \implies \delta U^\top c_g \pi \quad \delta \pi \int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \implies \delta \pi c_g^\top U \quad (6.31)$$

on peut exprimer les matrices K_{C_g} , K_Γ et D comme suit :

$$k_{C_g}(U, \delta U) = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Sigma_{g00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \implies K_{C_g} = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} c_g c_g^\top \quad (6.32)$$

$$k_\Gamma(\eta, \delta \eta) = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} \right) \left(\int_{\Gamma_{00}} \delta \eta \, d\Gamma_{00} \right) \implies K_\Gamma = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} b b^\top \quad (6.33)$$

$$\mathcal{D}(\eta, \delta U) = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Gamma_{00}} \delta \eta \, d\Gamma_{00} \right) \implies D = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} c_g b^\top \quad (6.34)$$

La forme pleine de ces matrices met en évidence le caractère non local de la condition aux limites (6.18) que l'on réécrit ici :

$$\rho^F |g| \eta = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi - \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \left(\int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} + \int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} \right) \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (6.35)$$

On propose d'établir une formulation équivalente dans laquelle n'apparaissent pas explicitement ces matrices pleines. Pour cela, on introduit une inconnue supplémentaire λ telle que :

$$\lambda = -\delta V^{(1)} = \int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} + \int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} \quad (6.36)$$

6.5.1 Modifications des équations du fluide

Les équations locales du fluide sont identiques aux équations (6.6) où (6.6e) est remplacée par les deux équations suivantes :

$$\rho^F |g| \eta + \rho^F \ddot{\varphi} - \pi + \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \lambda = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (6.37a)$$

$$\lambda - \int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} - \int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} = 0 \quad (6.37b)$$

On remplace donc (6.20) par deux formulations variationnelles associées aux équations locales précédentes :

$$\exists \eta \in \mathcal{C}_\eta \text{ tel que } \forall \delta \eta \in \mathcal{C}_\eta, \quad k_\eta(\eta, \delta \eta) + \int_{\Gamma_{00}} \rho^F \ddot{\varphi} \delta \eta \, d\Gamma_{00} - \pi \int_{\Gamma_{00}} \delta \eta \, d\Gamma_{00} + \beta \lambda \int_{\Gamma_{00}} \delta \eta \, d\Gamma_{00} = 0 \quad (6.38a)$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \delta \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \delta \lambda - \delta \lambda \int_{\Sigma_{g00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} - \delta \lambda \int_{\Gamma_{00}} \eta \, d\Gamma_{00} = 0 \quad (6.38b)$$

avec

$$\beta = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \quad (6.39)$$

Les équations (6.9) ne sont pas modifiées par l'introduction de λ et sont donc conservées.

6.5.2 Modifications des équations de la structure

La formulation variationnelle de la structure (6.25) se réécrit en fonction de λ :

$\exists U \in \mathcal{C}_u$ tel que $\forall \delta U \in \mathcal{C}_u$,

$$\bar{\mathcal{K}}(U, \delta U) + \mathcal{M}(\ddot{U}, \delta U) - \mathcal{C}(\ddot{\varphi}, \delta U) + \pi \int_{\Sigma_{i00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} + \lambda \int_{\Sigma_{g00}} \delta U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \quad (6.40)$$

$$\text{avec } \bar{\mathcal{K}}(U, \delta U) = k_E(U, \delta U) + k_F(U, \delta U) + k_G(U, \delta U) + k_\Sigma(U, \delta U) + k_P(U, \delta U) \quad (6.41)$$

6.5.3 Discrétisation du problème couplé

En faisant le choix d'une condition d'unicité $\ell(\varphi)$ telle que $\varphi_1 = 0$, les équations discrétisées du système s'écrivent sous la forme matricielle symétrique suivante, où $(U, \eta, \pi, \lambda) \in \mathcal{C}_u^h \times \mathcal{C}_\eta^h \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{K} & 0 & c & \beta c_g \\ 0 & K_\eta & -b & \beta b \\ c^\top & -b^\top & 0 & 0 \\ \beta c_g^\top & \beta b^\top & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \eta \\ \pi \\ \lambda \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M + C_2 F_{22}^{-1} C_2^\top & -C_2 F_{22}^{-1} B_2^\top & 0 & 0 \\ -B_2 F_{22}^{-1} C_2^\top & B_2 F_{22}^{-1} B_2^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \eta \\ \pi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^{\circ h}$ est obtenu à partir de U et η par l'intermédiaire de l'équation (6.16).

6.6 Formulation symétrique par projection modale

La deuxième méthode de symétrisation a été proposée par Morand & Ohayon au chapitre 9 de leur ouvrage [81]. Elle consiste à projeter les équations du problème non symétrique (6.2) sur des bases de modes propres des solutions (U, φ) . Comme nous le verrons dans le chapitre 7, les formulations réduites ainsi obtenues sont symétriques.

Références bibliographiques

Cette partie résume les idées présentées dans l'article de Morand [78] et dans les chapitres 6 et 9 de l'ouvrage de Morand & Ohayon [81]. Citons également la possibilité, évoquée par Kim, Lee & Kabe dans [59], de condenser sur leur diagonale les matrices de fluide F et S afin d'augmenter les performances de calcul. D'autre part, le lecteur se référera à Bermúdez *et al.* [19] et Ryan [97] pour l'analyse de l'existence des solutions et la caractérisation mathématique précise du spectre des opérateurs d'un problème simplifié mais proche de la formulation présente, ainsi que pour l'étude de convergence de la solution E. F. et la construction d'estimateurs *a priori* de l'erreur.

Chapitre 7

Réduction modale

Sommaire

7.1	Problématique et notations	86
7.2	Projection du fluide sur ses modes de ballonnement	86
7.2.1	Modes de ballonnement ($\varphi_\alpha, \omega_\alpha^F$)	86
7.2.2	Solution statique φ°	87
7.2.3	Relations de conjugaison entre φ° et φ_α	88
7.2.4	Équations réduites	88
7.2.5	Discretisation des équations	89
7.2.6	Expression de \mathcal{M}_F°	90
7.3	Réduction modale complète	92
7.3.1	Choix de la base modale ($U_\alpha, \omega_\alpha^S$)	92
7.3.2	Équations réduites	92
7.3.3	Discretisation des équations	93

7.1 Problématique et notations

L'application des méthodes de synthèse modale dans le cadre des interactions fluide structure a deux objectifs. Avant tout, il s'agit bien sûr de réduire la taille du modèle en cherchant à exprimer l'ensemble, ou une partie, des inconnues physiques du système à partir d'une combinaison linéaire de certains modes propres de ce système. Cependant, il s'agit aussi, comme nous l'avons évoqué en §6.6, de présenter une méthode permettant d'aboutir naturellement à un système symétrique, sans passer par l'introduction artificielle de variables auxiliaires telles que η et π .

7.2 Projection du fluide sur ses modes de ballottement

La première méthode de réduction modale présentée ici a été proposée par Morand & Ohayon au chapitre 9 de leur ouvrage [81]. Elle consiste à conserver comme inconnue physique le champ de déplacement U de la structure, et à représenter le comportement du fluide, selon une méthode de synthèse modale de type Craig & Bampton [35, 88], à partir d'une solution statique¹ φ° et d'une combinaison linéaire des modes de ballottement φ_α :

$$\varphi = \varphi^\circ + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \kappa_\alpha \varphi_\alpha \quad (7.1)$$

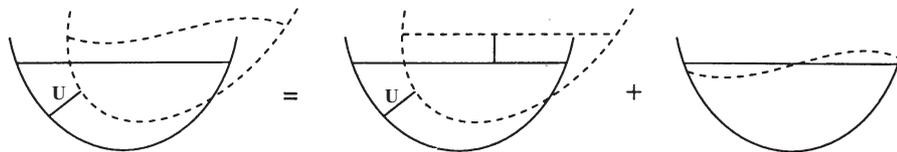


FIG. 7.1 – Décomposition modale du fluide

7.2.1 Modes de ballottement $(\varphi_\alpha, \omega_\alpha^F)$

Les modes de ballottement sont les modes propres du fluide dans un réservoir indéformable en présence de la gravité. Ils présentent des ondulations de la surface libre, interprétées comme des ondes stationnaires de gravité en domaine borné, combinaisons linéaires des ondes directes et des ondes réfléchies par les parois rigides de la structure [6]. Les équations locales vérifiées par les modes de ballottements φ_α

1. D'un point de vue plus général, φ° doit être *non-résonant*, c'est à dire indépendant de ω . Morand & Ohayon proposent également, au chapitre 9 de [81], d'utiliser φ^∞ la solution du problème hydroélastique sans gravité.

sont obtenues à partir des équations (2.19) dans lesquelles $U_N = 0$:

$$\Delta\varphi_\alpha = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (7.2a)$$

$$\nabla\varphi_\alpha \cdot n_{00} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (7.2b)$$

$$\nabla\varphi_\alpha \cdot i_z = \frac{\omega_\alpha^{F^2}}{|g|} \varphi_\alpha \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (7.2c)$$

$$\varphi_\alpha \in \mathcal{C}_\varphi^* \quad \text{où } \mathcal{C}_\varphi^* = \left\{ \varphi / \int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0 \right\} \quad (7.2d)$$

Les modes propres de ballotement sont donc obtenus à partir du problème aux valeurs propres associé à la formulation variationnelle (3.4) dans laquelle $U \cdot n_{00} = 0$:

$$\exists (\varphi_\alpha, \omega_\alpha^F) \in \mathcal{C}_\varphi^* \times \mathbb{R}, \text{ tels que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \mathcal{F}(\varphi_\alpha, \delta\varphi) - \omega_\alpha^{F^2} \mathcal{S}(\varphi_\alpha, \delta\varphi) = 0 \quad (7.3)$$

On remarque que $\omega = 0$ n'est pas une valeur propre de ce problème². En effet, pour $\omega = 0$, la seule solution serait $\varphi = \text{cste}$, mais la condition (7.2d) imposerait alors $\varphi = 0$.

Les formes bilinéaires intervenant dans ce problème aux valeurs propres généralisé étant symétriques et positives, il existe une famille infinie de solutions $(\varphi_\alpha, \omega_\alpha^F \geq 0)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ constituant une base de l'espace \mathcal{C}_φ^* .

Ces solutions, une fois normées, vérifient les relations d'orthogonalité suivantes³ :

$$\mathcal{F}(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \rho^F \int_{\Omega_{00}^F} \nabla\varphi_\alpha \cdot \nabla\varphi_\beta \, d\Omega_{00} = \delta_{\alpha\beta} \quad (7.4a)$$

$$\mathcal{S}(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \frac{\rho^F}{|g|} \int_{\Gamma_{00}} \varphi_\alpha \varphi_\beta \, d\Gamma_{00} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega_\alpha^{F^2}} \quad (7.4b)$$

7.2.2 Solution statique φ°

La solution φ° représente la déformée statique du fluide soumis au déplacement U de l'interface fluide structure. Les équations locales vérifiées par cette solution sont obtenues à partir des équations (2.19) dans lesquelles $\omega = 0$:

$$\Delta\varphi^\circ = 0 \quad \text{dans } \Omega_{00}^F \quad (7.5a)$$

$$\nabla\varphi^\circ \cdot n_{00} = U \cdot n_{00} \quad \text{sur } \Sigma_{i00} \quad (7.5b)$$

$$\nabla\varphi^\circ \cdot i_z = \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Sigma_{i00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \quad \text{sur } \Gamma_{00} \quad (7.5c)$$

$$\varphi^\circ \in \mathcal{C}_\varphi^* \quad (7.5d)$$

La formulation variationnelle associée à ces équations locales se réécrit donc à partir de (3.4) :

$$\exists \varphi^\circ \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \mathcal{F}(\varphi^\circ, \delta\varphi) = -\mathcal{C}(U, \delta\varphi) \quad (7.6)$$

2. D'un point de vue pratique, Morand & Ohayon ont remarqué au §3.3 de [81], que la recherche des modes propres φ_α peut s'effectuer dans \mathcal{C}_φ plutôt que dans \mathcal{C}_φ^* , à condition d'éliminer ensuite la valeur propre 0 de l'ensemble des valeurs propres ω_α obtenues. En effet, la condition $\int_{\Gamma_{00}} \varphi \, d\Gamma_{00} = 0$ étant trivialement vérifiée par les φ_α associés à des $\omega_\alpha \neq 0$, la seule utilité de cette condition est d'assurer que $\omega_\alpha = 0$ ne soit pas valeur propre de ce problème.

3. La normalisation des φ_α n'est pas classique : elle est effectuée "par rapport à la raideur" et non pas "par rapport à la masse".

Cette relation montre qu'il existe une application linéaire qui définit φ° en fonction de U , que l'on notera $\varphi^\circ(U)$.

7.2.3 Relations de conjugaison entre φ° et φ_α

La première relation de conjugaison est obtenue à partir de la formule de Green (D.9) appliquée à φ° et φ_α :

$$\int_{\Omega_{00}^F} \left(\varphi^\circ \Delta \varphi_\alpha - \varphi_\alpha \Delta \varphi^\circ \right) d\Omega_{00} = \int_{\partial\Omega_{00}^F} \left(\varphi^\circ (\nabla \varphi_\alpha \cdot n_{00}) - \varphi_\alpha (\nabla \varphi^\circ \cdot n_{00}) \right) d\Sigma_{00} \quad (7.7)$$

En utilisant les propriétés de φ° (7.5) et de φ_α (7.2), l'équation précédente se simplifie :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{00}} \left(\varphi^\circ (\nabla \varphi_\alpha \cdot i_z) - \varphi_\alpha (\nabla \varphi^\circ \cdot i_z) \right) d\Gamma_{00} - \int_{\Sigma_{i00}} \left(\varphi^\circ (\nabla \varphi_\alpha \cdot n_{00}) - \varphi_\alpha (\nabla \varphi^\circ \cdot n_{00}) \right) d\Sigma_{00} \\ 0 &= \int_{\Gamma_{00}} \varphi^\circ \frac{\omega_\alpha^{F^2}}{|g|} \varphi_\alpha d\Gamma_{00} - \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_{00}} \varphi_\alpha d\Gamma_{00} \right)}_0 \left(\int_{\Sigma_{i00}} U \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \right) + \int_{\Sigma_{i00}} \varphi_\alpha U \cdot n_{00} d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\text{pour } \varphi^\circ \text{ et } \varphi_\alpha \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \mathcal{S}(\varphi^\circ, \varphi_\alpha) = -\frac{1}{\omega_\alpha^{F^2}} \mathcal{C}(U, \varphi_\alpha) \quad (7.8a)$$

La deuxième relation de conjugaison est obtenue grâce à (7.6) avec $\delta\varphi = \varphi_\alpha \in \mathcal{C}_\varphi^*$:

$$\text{pour } \varphi^\circ \text{ et } \varphi_\alpha \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \mathcal{F}(\varphi^\circ, \varphi_\alpha) = -\mathcal{C}(U, \varphi_\alpha) \quad (7.8b)$$

7.2.4 Équations réduites

Puisque φ° et φ_α appartiennent à \mathcal{C}_φ^* , φ appartient également à \mathcal{C}_φ^* . Son expression (7.1) peut donc être reportée dans les équations du système couplé (6.2).

La relation (6.2b) devient :

$$\begin{aligned} \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \\ \mathcal{F}(\varphi^\circ, \delta\varphi) + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \kappa_\alpha \mathcal{F}(\varphi_\alpha, \delta\varphi) - \omega^2 \mathcal{S}(\varphi^\circ, \delta\varphi) - \omega^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \kappa_\alpha \mathcal{S}(\varphi_\alpha, \delta\varphi) + \mathcal{C}(U, \delta\varphi) = 0 \quad (7.9) \end{aligned}$$

En prenant $\delta\varphi = \varphi_\beta$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}$, on obtient une famille d'équations. L'utilisation des conditions d'orthogonalité (7.4) et des relations de conjugaison (7.8) permet d'obtenir :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}, \quad -\mathcal{C}(U, \varphi_\beta) + \kappa_\beta + \frac{\omega^2}{\omega_\beta^{F^2}} \mathcal{C}(U, \varphi_\beta) - \frac{\omega^2}{\omega_\beta^{F^2}} \kappa_\beta + \mathcal{C}(U, \varphi_\beta) = 0$$

Finalement, une première famille d'équations réduites du système fluide structure s'écrit :

$$\boxed{\forall \beta \in \mathbb{N}, \quad (\omega_\beta^{F^2} - \omega^2) \kappa_\beta + \omega^2 \mathcal{C}(U, \varphi_\beta) = 0} \quad (7.10a)$$

D'autre part, à partir de la relation (6.2a) on obtient la seconde équation réduite du système :

$$\boxed{\forall \delta U \in \mathcal{C}_u, \quad \mathcal{K}(U, \delta U) - \omega^2 \mathcal{M}(U, \delta U) - \omega^2 \mathcal{M}_F^\circ(U, \delta U) + \omega^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \kappa_\alpha \mathcal{C}(\varphi_\alpha, \delta U) = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00}} \quad (7.10b)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{K}(U, \delta U) &= (k_E + k_F + k_G + k_\Sigma + k_B + k_C + k_P)(U, \delta U) \\ \text{et } \mathcal{M}_F^\circ(U, \delta U) &= -\mathcal{C}(\varphi_{(U)}^\circ, \delta U) = -\rho^F \int_{\Sigma_{i00}} \varphi_{(U)}^\circ (\delta U \cdot n_{00}) \, d\Sigma_{00} \end{aligned} \quad (7.11)$$

\mathcal{M}_F° : est appelé opérateur de masse hydrostatique du fluide

7.2.5 Discrétisation des équations

La recherche d'une solution approchée aux équations réduites (7.10) s'effectue dans des sous-espaces de dimension finie \mathcal{C}_U^h et \mathcal{C}_φ^{n*} , appartenant à des familles denses respectivement dans \mathcal{C}_U et \mathcal{C}_φ^* . Alors que le sous-espace \mathcal{C}_U^h de dimension N_U est construit par la méthode des éléments finis, on définit ici \mathcal{C}_φ^{n*} comme le sous-espace de \mathcal{C}_φ^* , de dimension n , généré par les n premières fonctions propres de la base $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$. De plus, les fonctions propres φ_α sont elles mêmes obtenues de façon approchée par la méthode des éléments finis et appartiennent donc à un sous-espace \mathcal{C}_φ^{h*} de \mathcal{C}_φ^* , de dimension finie N_φ . Le système aux valeurs propres matriciel associé à (7.3) s'écrit :

$$\forall \alpha \in [1, n], \quad F \varphi_\alpha = \omega_\alpha^{F^2} S \varphi_\alpha \quad (7.12)$$

Dans ce qui suit, les inconnues U et φ sont donc des vecteurs de dimension respective N_U et N_φ . En plus des notations et des matrices déjà définies au chapitre 6, on introduit le vecteur κ de dimension n , la matrice Φ de dimension $N_\varphi \times n$ constituée des vecteurs approximant les n premières fonctions propres de la base φ_α , la matrice diagonale Ω_F^2 de dimension $n \times n$ dont les termes sont les $\omega_\alpha^{F^2}$, ainsi que la matrice M_F° de dimension $N_U \times N_U$ qui sera explicitée au §7.2.6 et qui est définie par :

$$\mathcal{M}_F^\circ(U, \delta U) \implies \delta U^\top M_F^\circ U \quad (7.13)$$

Les équations réduites (7.10) discrétisées deviennent :

$$K U - \omega^2 (M + M_F^\circ) U + \omega^2 C \Phi \kappa = \tilde{f} \quad (7.14a)$$

$$(\Omega_F^2 - \omega^2 Id) \kappa + \omega^2 \Phi^\top C^\top U = 0 \quad (7.14b)$$

$$\text{avec } \varphi = \varphi^\circ + \Phi \kappa \quad (7.14c)$$

Le système matriciel associé s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \Omega_F^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \kappa \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M + M_F^\circ & -C \Phi \\ -\Phi^\top C^\top & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

On constate que la projection sur la base φ_α de l'inconnue φ a transformé le système non symétrique (6.2) en système symétrique.

Cependant, d'un point de vue pratique, le système matriciel obtenu présente l'inconvénient de faire intervenir les matrices pleines K_B et K_C . L'introduction de deux inconnues supplémentaires λ et μ permet de ne pas faire apparaître explicitement ces deux matrices dans la formulation⁴ :

$$\lambda = \int_{\Sigma_{z00} + \Sigma_{g00}} U.n_{00} d\Sigma_{00} = -\delta V^{(1)} \quad (7.16)$$

$$\mu = \int_{\Sigma_{z00}} U.n_{00} d\Sigma_{00} \quad (7.17)$$

En notant $\bar{K} = K_E + K_F + K_G + K_\Sigma + K_P$, le système matriciel (7.15) se réécrit finalement :

$$\begin{bmatrix} \bar{K} & 0 & \beta(c + c_g) & \beta'c \\ 0 & \Omega_F^2 & 0 & 0 \\ \beta(c^\top + c_g^\top) & 0 & -\beta & 0 \\ \beta'c^\top & 0 & 0 & -\beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M + M_F^\circ & -C \Phi & 0 & 0 \\ -\Phi^\top C^\top & Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

avec

$$\beta = \frac{P_{00}^G \gamma}{\|\Omega_{00}^G\|} \quad \text{et} \quad \beta' = \frac{\rho^F |g|}{\|\Gamma_{00}\|} \quad (7.19)$$

7.2.6 Expression de \mathcal{M}_F°

Plusieurs méthodes permettant de donner une formule explicite de $M_F^\circ(U, \delta U)$ sont données aux chapitres 3 et 9 de [81]. Une de ces méthodes est exposée ici à titre d'exemple.

Tout d'abord, il faut expliciter la fonction linéaire $\varphi_{(U)}^\circ$ introduite en §7.2.2. Pour cela, résolvons le système matriciel associé à la formulation variationnelle (7.6). La condition $\varphi^\circ \in \mathcal{C}_\varphi^{h*}$ peut être traduite de façon matricielle par $b.\varphi^\circ = 0$. En associant un multiplicateur de Lagrange χ à cette contrainte, on obtient le système à résoudre pour déterminer φ° :

$$\begin{bmatrix} F & b \\ b^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^\circ \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C^\top U \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

L'expression de la contrainte intégrale sur φ° présente l'inconvénient de rendre l'expression de $\varphi_{(U)}^\circ$ implicite et donc inutilisable pour exprimer $\mathcal{M}_F^\circ(U, \delta U)$. Une solution consiste à transformer l'expression de \mathcal{M}_F° de façon à s'affranchir de cette condition sur φ° . Pour cela, intéressons nous à la solution, notée $\varphi_{(\delta U)}^\circ$, des équations (7.5) où le déplacement imposé U est remplacé par le déplacement virtuel δU . Le champ $\varphi_{(\delta U)}^\circ$ est alors défini par :

$$\exists \varphi_{(\delta U)}^\circ \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^*, \quad \mathcal{F}(\varphi_{(\delta U)}^\circ, \delta\varphi) = -\mathcal{C}(\delta U, \delta\varphi) \quad (7.21)$$

4. Pour plus de détails sur les modifications introduites dans la formulation, se reporter à §6.5.

En choisissant le champ $\delta\varphi = \varphi_{(U)}^\circ \in \mathcal{C}_\varphi^*$, la relation précédente donne une nouvelle expression de \mathcal{M}_F° :

$$\mathcal{M}_F^\circ(U, \delta U) = \mathcal{F}(\varphi_{(U)}^\circ, \varphi_{(\delta U)}^\circ) = \rho^F \int_{\Omega_{00}^F} \nabla \varphi_{(U)}^\circ \cdot \nabla \varphi_{(\delta U)}^\circ \, d\Omega_{00} \quad (7.22)$$

Cette relation montre tout d'abord que la forme bilinéaire \mathcal{M}_F° est symétrique et positive. D'autre part, le fait que φ° n'apparaisse dans cette expression que par son gradient, montre que la valeur de \mathcal{M}_F° est en fait indépendante du choix de la condition d'unicité sur φ° . La recherche d'une expression explicite de $\varphi_{(U)}^\circ$ à introduire dans cette relation peut donc se faire dans le cadre plus général où φ° appartient à $\mathcal{C}_\varphi^\circ = \{\varphi \in \mathcal{C}_\varphi \text{ tel que } \ell(\varphi) = 0\}$, avec $\ell(1) \neq 0$. Le champ φ° vérifie alors les équations locales (7.5) où l'équation (7.5d) est remplacée par : $\varphi^\circ \in \mathcal{C}_\varphi^\circ$. La formulation variationnelle associée est obtenue classiquement en utilisant la formule de Green (D.8) :

$$\exists \varphi_{(U)}^\circ \in \mathcal{C}_\varphi^\circ \text{ tel que } \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi, \quad \mathcal{F}(\varphi_{(U)}^\circ, \delta\varphi) = \mathcal{R}(U, \delta\varphi) - \mathcal{C}(U, \delta\varphi) \quad (7.23)$$

avec

$$\mathcal{R}(U, \delta\varphi) = \frac{\rho^F}{\|\Gamma_{00}\|} \left(\int_{\Sigma_{i00}} U \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \right) \left(\int_{\Gamma_{00}} \delta\varphi \, d\Sigma_{00} \right) \quad (7.24)$$

En notant R la matrice de dimension $N_U \times N_\varphi$ définie par :

$$\mathcal{R}(U, \delta\varphi) \implies \delta\varphi^\top R^\top U \quad \mathcal{R}(\varphi, \delta U) \implies \delta U^\top R \varphi \quad (7.25)$$

la forme discrétisée de l'équation (7.23) s'écrit :

$$F \varphi_{(U)}^\circ = (R^\top - C^\top) U \quad \text{avec } (U, \varphi^\circ) \in \mathcal{C}_U^h \times \mathcal{C}_\varphi^{\circ h} \quad (7.26)$$

En choisissant la condition $\ell(\varphi)$ telle que $\varphi_1 = 0$, et en notant par un indice $_2$ les matrices dans lesquelles les lignes et les colonnes correspondant à φ_1 ont été supprimées, on obtient l'expression du vecteur $\varphi_{(U)}^\circ$ en fonction du vecteur U :

$$\varphi_{(U)}^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{22}^{-1} (R_2^\top - C_2^\top) U \end{bmatrix} \quad \text{avec } (U, \varphi^\circ) \in \mathcal{C}_U^h \times \mathcal{C}_\varphi^{\circ h} \quad (7.27)$$

Il peut être intéressant de chercher la relation qui existe entre le champ φ° appartenant à \mathcal{C}_φ^* et intervenant dans la relation (7.1), et le champ φ° appartenant à $\mathcal{C}_\varphi^\circ$ qui vient d'être déterminé. Ces deux champs sont par définition égaux à une constante près :

$$\varphi_*^\circ = \varphi_\diamond^\circ - \frac{1}{\|\Gamma_{00}\|} \int_{\Gamma_{00}} \varphi_\diamond^\circ \, d\Sigma_{00} \quad (7.28)$$

Finalement, en utilisant (7.27) et la relation similaire qui existe entre $\varphi_{(\delta U)}^\circ$ et δU , ainsi que l'expression (7.22) de \mathcal{M}_F° , on déduit une expression de la matrice M_F° :

$$M_F^\circ = (R_2 - C_2) F_{22}^{-1} (R_2^\top - C_2^\top) \quad (7.29)$$

7.3 Réduction modale complète

Cette deuxième méthode, présentée également par Morand & Ohayon au chapitre 9 de [81], prolonge la méthode précédente. En effet, elle propose de projeter non seulement le fluide sur ses modes de ballottage comme précédemment, mais aussi, d'exprimer le champ de déplacement U de la structure sur une base de modes appropriée :

$$\varphi = \varphi^\circ + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \kappa_\alpha \varphi_\alpha \quad \text{et} \quad U = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} q_\alpha U_\alpha \quad (7.30)$$

7.3.1 Choix de la base modale $(U_\alpha, \omega_\alpha^S)$

La base modale utilisée pour décomposer le champ de déplacement U de la structure peut être choisie, par exemple⁵, de façon à diagonaliser les matrices qui interviennent dans l'expression (7.15) ou dans l'expression (7.18). Les modes propres de cette base modale sont donc solutions du système aux valeurs propres suivant :

$$\exists (U_\alpha, \omega_\alpha^S) \in \mathcal{C}_U \times \mathbb{R}, \text{ tels que } \forall \delta U \in \mathcal{C}_U, \quad \mathcal{K}(U_\alpha, \delta U) - \omega_\alpha^{S^2} \left(\mathcal{M}(U_\alpha, \delta U) + \mathcal{M}_F^\circ(U_\alpha, \delta U) \right) = 0 \quad (7.31)$$

avec

$$\mathcal{K} = k_E + k_F + k_G + k_\Sigma + k_B + k_C + k_P$$

Les formes bilinéaires intervenant dans ce problème aux valeurs propres généralisé étant symétriques, il existe une famille infinie de solutions $(U_\alpha, \omega_\alpha^S)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ constituant une base de l'espace \mathcal{C}_U . Ces solutions, une fois normées vérifient les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\mathcal{K}(U_\alpha, U_\beta) = \omega_\alpha^{S^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (7.32a)$$

$$\mathcal{M}(U_\alpha, U_\beta) + \mathcal{M}_F^\circ(U_\alpha, U_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (7.32b)$$

7.3.2 Équations réduites

Le report de l'expression de U (7.30) dans l'équation (7.10b) donne :

$$\begin{aligned} & \forall \delta U \in \mathcal{C}_u, \\ & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} q_\alpha \mathcal{K}(U_\alpha, \delta U) - \omega^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} q_\alpha \left(\mathcal{M}(U_\alpha, \delta U) + \mathcal{M}_F^\circ(U_\alpha, \delta U) \right) + \omega^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \kappa_\alpha \mathcal{C}(\varphi_\alpha, \delta U) = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \end{aligned} \quad (7.33)$$

En prenant $\delta U = U_\beta$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}$, on obtient une famille d'équations. L'utilisation des relations d'orthogonalité (7.32) permet d'obtenir une première famille d'équations réduites :

$$\boxed{\forall \beta \in \mathbb{N}, \quad (\omega_\beta^{S^2} - \omega^2) q_\beta + \omega^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \kappa_\alpha \mathcal{C}(\varphi_\alpha, U_\beta) = \int_{\Sigma_{f00}} \tilde{f} \cdot U_\beta \, d\Sigma_{00}} \quad (7.34a)$$

5. D'autres choix de base modale ont été proposés par Morand & Ohayon au chapitre 9 de [81].

Une deuxième famille d'équations réduites est obtenue à partir de (7.10a)

$$\boxed{\forall \beta \in \mathbb{N}, \quad (\omega_\beta^{F^2} - \omega^2) \kappa_\beta + \omega^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} q_\alpha \mathcal{C}(U_\alpha, \varphi_\beta) = 0} \quad (7.34b)$$

7.3.3 Discrétisation des équations

La recherche d'une solution approchée aux équations réduites (7.34) s'effectue dans des sous-espaces de dimension finie \mathcal{C}_U^m et \mathcal{C}_φ^{n*} denses respectivement dans \mathcal{C}_U et \mathcal{C}_φ^* . Ces sous-espaces, de dimension respective m et n , sont générés respectivement par les m premières fonctions propres de la base $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$, et par les n premières fonctions propres de la base $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$.

D'autre part, les fonctions propres U_α et φ_α sont elles mêmes obtenues de façon approchée par la méthode des éléments finis et appartiennent donc respectivement aux sous-espaces \mathcal{C}_U^h de \mathcal{C}_U et \mathcal{C}_φ^{h*} de \mathcal{C}_φ^* , de dimension finie respective N_U et N_φ . Le système aux valeurs propres matriciel associé à (7.31) s'écrit :

$$\forall \alpha \in [1, m], \quad K U_\alpha = \omega_\alpha^{S^2} (M + M_F^o) U_\alpha \quad (7.35)$$

soit, en introduisant deux variables supplémentaires λ et μ :

$$\begin{bmatrix} \bar{K} & c + c_g & c \\ c^\top + c_g^\top & -1 & 0 \\ c^\top & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\alpha \\ \lambda_\alpha \\ \mu_\alpha \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M + M_F^o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\alpha \\ \lambda_\alpha \\ \mu_\alpha \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

En notant q le vecteur de dimension m , \mathcal{U} la matrice de dimension $N_U \times m$ constituée des vecteurs approximant les m premières fonctions propres de la base U_α , ainsi que Ω_S^2 la matrice diagonale des $\omega_\alpha^{S^2}$ de dimension $m \times m$, la forme discrétisée des équations réduites (7.34) s'écrit :

$$(\Omega_S^2 - \omega^2 Id) q + \omega^2 \mathcal{U}^\top C \Phi \kappa = \mathcal{U}^\top \tilde{f} \quad (7.37a)$$

$$(\Omega_F^2 - \omega^2 Id) \kappa + \omega^2 \Phi^\top C^\top \mathcal{U} q = 0 \quad (7.37b)$$

$$\text{avec } \varphi = \varphi^o + \Phi \kappa \quad (7.37c)$$

$$\text{et } U = \mathcal{U} q \quad (7.37d)$$

auquel est associé le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} \Omega_S^2 & 0 \\ 0 & \Omega_F^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \kappa \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} Id & -\mathcal{U}^\top C \Phi \\ -\Phi^\top C^\top \mathcal{U} & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}^\top \tilde{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

Références bibliographiques

Cette partie reprend certaines idées présentées par Morand & Ohayon aux chapitres 3 et 9 de leur ouvrage [81].

Deuxième partie

Étude Numérique

Introduction

La deuxième partie de ce document est consacrée majoritairement à la validation numérique de la modélisation hydroélastique avec gravité développée en première partie⁶. Il faut d'une part montrer la capacité de ce modèle à traiter le ballonnement et les déformations hydroélastiques, sur toute la gamme basse fréquence, en tenant compte des éventuels couplages, puisque c'est cette spécificité qui fait l'originalité de cette méthode. D'autre part, il faut s'assurer de la cohérence et de la précision des résultats par comparaison avec des solutions de référence obtenues sur des cas tests. Finalement, il faut s'assurer que la méthode développée est "industrialisable" et efficace en la testant sur des modèles de taille industrielle.

6. Seul l'aspect "forces suiveuses" (opérateur k_F) n'a pas fait l'objet d'une implémentation et d'une validation complète (si ce n'est par le biais de la pressurisation). Des études ultérieures seront dédiées à cet aspect.

Chapitre 8

Implémentation

Sommaire

8.1	Problématique et notations	100
8.1.1	Discrétisation spatiale	100
8.1.2	Interpolation géométrique	101
8.1.3	Interpolation du champ inconnu	101
8.1.4	Expression du gradient	102
8.1.5	Choix des fonctions tests	102
8.2	Numérisation des opérateurs	103
8.2.1	Opérateurs intégraux tridimensionnels	103
8.2.2	Opérateurs intégraux bidimensionnels	105
8.3	Implémentation du logiciel FSI3D	110
8.3.1	Stratégie	110
8.3.2	Interface MatLab	110
8.3.3	Modules NASTRAN	111

8.1 Problématique et notations

Pour numériser les opérateurs matriciels des chapitres 6 et 7, il faut choisir les fonctions de base $(e_j)_{j=1,\dots,N}$ introduites par la méthode de Galerkin, équation (6.1). Nous avons choisi ici d'utiliser la méthode des Éléments-Finis (E. F.) et les bases d'interpolation associées. De nombreux ouvrages détaillent cette méthode : citons entre autre ceux de Zienkiewicz & Taylor [112], Ciarlet [30] et Bathe [8].

Bien que le système étudié ici soit à géométrie finie, certains auteurs discrétisent le fluide par des éléments de frontière [69, 43], habituellement réservés au traitement des fluides externes infinis (pour l'étude du rayonnement acoustique par exemple). Cette méthode s'affranchit de la construction d'un maillage volumique du fluide et peut donc être avantageuse dans le cas où plusieurs configurations de remplissage doivent être étudiées. Notons que des méthodes ont également été développées pour coupler les deux techniques [61]. Pour des facilités d'implémentation dans les codes standards, nous avons malgré tout opté pour une discrétisation E. F. classique.

8.1.1 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale du domaine d'intégration s'effectue par le biais d'un maillage définissant k sous-domaines de forme géométrique simple, appelés éléments finis, que l'on notera $(E_i)_{i \in [1..k]}$. Les variables U et φ qui apparaissent dans les différentes formes bilinéaires à discrétiser appartiennent à des espaces de Sobolev de type $\mathcal{H}^1(\Omega)$ ce qui nous conduit à choisir des éléments finis conformes¹ \mathcal{H}^1 tels que les éléments isoparamétriques P_1 et Q_1 . Pour de tels éléments, l'interpolation géométrique et l'interpolation du champ inconnu sont définies à l'aide de fonctions de forme polynomiales de degré 1 (fonctions linéaires), notées N_i . Nous rappelons que dans ce cas, les inconnues χ_j coïncident avec les valeurs des variables continues aux noeuds du maillage.

La numérisation de l'ensemble des opérateurs passe par celle des cinq formes bilinéaires suivantes, où φ et $\delta\varphi$ sont des champs scalaires de $\mathcal{H}^1(\Omega)$, et u et δu sont des champs vectoriels de $[\mathcal{H}^1(\Omega)]^3$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi, \delta\varphi) &= \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega \\ \mathcal{S}(\varphi, \delta\varphi) &= \int_{\Sigma} \varphi \delta\varphi \, d\Sigma \\ \mathcal{C}(U, \delta\varphi) &= \int_{\Sigma} (U \cdot n) \delta\varphi \, d\Sigma \\ \mathcal{P}(U, \delta U) &= \int_{\Sigma} \tau(U) \cdot \delta U \, d\Sigma \\ \mathcal{Z}(U, \delta U) &= \int_{\Sigma} z \tau(U) \cdot \delta U \, d\Sigma\end{aligned}$$

La recherche d'une approximation \tilde{U} et $\tilde{\varphi}$ des champs U et φ sur chaque élément fini nous amène à

1. Pour assurer une approximation globalement conforme \mathcal{H}^1 , il suffit d'avoir une régularité élémentaire \mathcal{H}^1 (élément par élément) et une continuité aux interfaces des éléments.

décomposer ces formes bilinéaires en une somme sur chaque sous domaine. Par exemple pour \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}(\varphi, \delta\varphi) \simeq \sum_{i=1}^k \mathcal{F}_{E_i}(\tilde{\varphi}, \delta\varphi) \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_{E_i}(\tilde{\varphi}, \delta\varphi) = \int_{\Omega_{E_i}} \nabla \tilde{\varphi} \cdot \nabla \delta\varphi \, d\Omega_E \quad (8.1)$$

8.1.2 Interpolation géométrique

A chaque élément fini E est associé un élément de référence E_R de géométrie simple sans dimension. La bijection T qui associe à un point du domaine de référence m de coordonnées Ξ , un point du domaine physique M de coordonnées X s'écrit :

$$X = T(\Xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\Xi) X_i = M_d N \quad (8.2)$$

où N est le vecteur colonne de dimension n (nombre de noeuds de l'élément fini considéré) constitué par les n fonctions de base N_i exprimées dans les coordonnées intrinsèques de l'élément, et $(X_i)_{i \in [1..n]}$ sont les coordonnées des n sommets de l'élément constituant les colonnes de la matrice M_d .

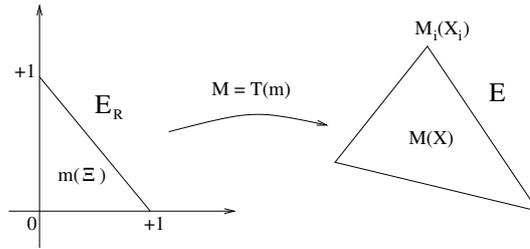


FIG. 8.1 – Élément de référence et interpolation géométrique

8.1.3 Interpolation du champ inconnu

L'expression du champ scalaire approché $\tilde{\varphi}$ en tout point M de l'élément, à partir des valeurs φ_i aux noeuds, s'écrit directement en coordonnées intrinsèques :

$$\tilde{\varphi}(X) = \sum_{i=1}^n N_i(\Xi) \varphi_i = N^T \varphi_d \quad (8.3)$$

où φ_d est le vecteur colonne des valeurs discrètes φ_i .

Dans le cas du champ vectoriel approché \tilde{U} , on obtient une relation équivalente à l'expression précédente :

$$\tilde{U}(X) = \sum_{i=1}^n N_i(\Xi) U_i = N^T U_d \quad (8.4)$$

où U_d est le vecteur colonne constitué des vecteurs déplacement U_i au noeud M_i comme suit :

$$U_d^T = \{U_x^1, U_x^2, U_x^3, \dots, U_y^1, U_y^2, U_y^3, \dots, U_z^1, U_z^2, U_z^3, \dots\} \quad (8.5)$$

et \mathcal{N} est la matrice de dimension $3n \times 3$ (où n est le nombre de noeuds de l'élément fini considéré) constitué comme suit :

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

8.1.4 Expression du gradient

La formule de dérivation des fonctions composées permet d'exprimer le gradient d'un champ scalaire $\tilde{\varphi}$ (ou vectoriel \tilde{U}) par rapport aux coordonnées physiques X en fonction de son gradient par rapport aux coordonnées intrinsèques et de la matrice des dérivées partielles de la transformation T que l'on notera $D_{\Xi}T$ (T étant une bijection, cette matrice est inversible) :

$$\nabla_X \tilde{\varphi}(X) = \nabla_{\Xi} \tilde{\varphi}(\Xi) [D_{\Xi}T]^{-1} \quad (8.7a)$$

$$\nabla_X \tilde{U}(X) = \nabla_{\Xi} \tilde{U}(\Xi) [D_{\Xi}T]^{-1} \quad (8.7b)$$

où $D_{\Xi}T$ et $\nabla_{\Xi} \tilde{\varphi}$ peuvent être exprimés en fonction des valeurs aux noeuds M_d et φ_d grâce à (8.2) et (8.3) :

$$D_{\Xi}T = M_d \nabla_{\Xi} N \quad (8.8a)$$

$$\nabla_{\Xi} \tilde{\varphi}(\Xi) = \varphi_d^T \nabla_{\Xi} N \quad (8.8b)$$

Une expression matricielle de $\nabla_{\Xi} \tilde{U}(\Xi)$ en fonction de U_d nécessiterait de faire intervenir la matrice à trois dimensions $\nabla_{\Xi} \mathcal{N}$. Afin de ne pas compliquer les notations en introduisant des produits matriciels à trois dimensions, nous exprimerons plutôt $\nabla_{\Xi_i} \tilde{U}(\Xi)$ où Ξ_i décrit les coordonnées intrinsèques (ξ, η) de l'élément :

$$\nabla_{\Xi_i} \tilde{U}(\Xi) = \nabla_{\Xi_i} \mathcal{N}^T U_d \quad (8.9)$$

8.1.5 Choix des fonctions tests

La méthode de Galerkin consiste à utiliser comme fonction test les fonctions de base N_i . Le nombre de fonctions test (et donc le nombre d'équations scalaires) est ainsi automatiquement égal au nombre d'inconnues aux noeuds. De plus, la forme des fonctions de base simplifie le calcul de la plupart des intégrales.

Dans la suite, on notera :

$$\delta\varphi(X) = \sum_{i=1}^n N_i(\Xi) \delta\varphi_i = N^T \delta\varphi_d \quad (8.10a)$$

$$\delta U(X) = \sum_{i=1}^n N_i(\Xi) \delta U_i = \mathcal{N}^T \delta U_d \quad (8.10b)$$

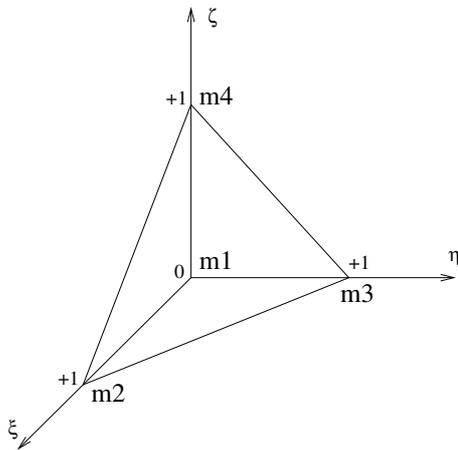
8.2 Numérisation des opérateurs

8.2.1 Opérateurs intégraux tridimensionnels

Dans cette section, les coordonnées intrinsèques seront notées $\Xi = (\xi, \eta, \zeta)$ et les coordonnées physiques $X = (x, y, z)$.

Voici deux exemples d'élément finis volumiques les plus utilisés :

L'élément tétraédrique P_1

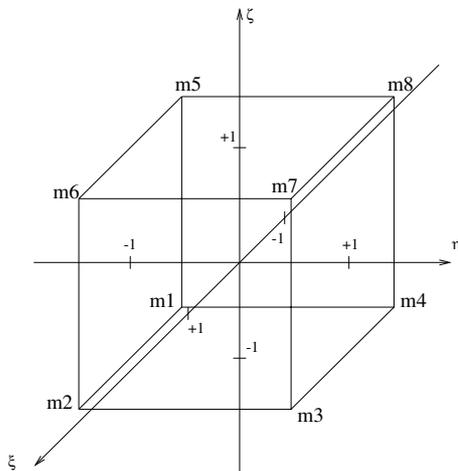


Le vecteur N des fonctions de base de cet élément s'écrit :

$$N = \begin{Bmatrix} 1 - (\xi + \eta + \zeta) \\ \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad (8.11)$$

$$\nabla_{\Xi} N = \begin{Bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (8.12)$$

L'élément hexaédrique Q_1



Le vecteur N des fonctions de base de cet élément s'écrit :

$$N = \begin{Bmatrix} 1/8 (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ 1/8 (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ 1/8 (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ 1/8 (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ 1/8 (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ 1/8 (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ 1/8 (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ 1/8 (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{Bmatrix} \quad (8.13)$$

$$\nabla_{\Xi} N = \left\{ \begin{array}{ccc} -1/8 (1 - \eta)(1 - \zeta) & -1/8 (1 - \xi)(1 - \zeta) & -1/8 (1 - \xi)(1 - \eta) \\ 1/8 (1 - \eta)(1 - \zeta) & -1/8 (1 + \xi)(1 - \zeta) & -1/8 (1 + \xi)(1 - \eta) \\ 1/8 (1 + \eta)(1 - \zeta) & 1/8 (1 + \xi)(1 - \zeta) & -1/8 (1 + \xi)(1 + \eta) \\ -1/8 (1 + \eta)(1 - \zeta) & 1/8 (1 - \xi)(1 - \zeta) & -1/8 (1 - \xi)(1 + \eta) \\ -1/8 (1 - \eta)(1 + \zeta) & -1/8 (1 - \xi)(1 + \zeta) & 1/8 (1 - \xi)(1 - \eta) \\ 1/8 (1 - \eta)(1 + \zeta) & -1/8 (1 + \xi)(1 + \zeta) & 1/8 (1 + \xi)(1 - \eta) \\ 1/8 (1 + \eta)(1 + \zeta) & 1/8 (1 + \xi)(1 + \zeta) & 1/8 (1 + \xi)(1 + \eta) \\ -1/8 (1 + \eta)(1 + \zeta) & 1/8 (1 - \xi)(1 + \zeta) & 1/8 (1 - \xi)(1 + \eta) \end{array} \right\} \quad (8.14)$$

Discrétisation de \mathcal{F}_E

La formule de changement de variable D.11 permet de transporter² l'expression de \mathcal{F}_E sur l'élément de référence E_R :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_E(\tilde{\varphi}, \delta\varphi) &= \int_{\Omega_E} \nabla_X \tilde{\varphi} \cdot \nabla \delta\varphi \, d\Omega_X \\ &= \int_{\Omega_{E_R}} \nabla_{\Xi} \delta\varphi(\Xi) [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-1} [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-\top} [\nabla_{\Xi} \tilde{\varphi}(\Xi)]^{\top} \det(\mathbf{D}_{\Xi} T) \, d\Omega_{\Xi} \end{aligned} \quad (8.15)$$

En utilisant (8.8) et (8.10), on obtient la matrice élémentaire F_E associée à la forme bilinéaire \mathcal{F}_E :

$$\mathcal{F}_E(\tilde{\varphi}, \delta\varphi) \rightarrow \delta\varphi_d^{\top} F_E \varphi_d \quad \text{avec } F_E = \int_{\Omega_{E_R}} \nabla_{\Xi} N [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-1} [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-\top} [\nabla_{\Xi} N]^{\top} \det(\mathbf{D}_{\Xi} T) \, d\Omega_{\Xi} \quad (8.16)$$

- dans le cas d'éléments finis tétraédriques P_1 : $\nabla_{\Xi} N$, $\det(\mathbf{D}_{\Xi} T)$ et $\mathbf{D}_{\Xi} T$ sont constants (indépendants de Ξ) :

$$\mathbf{D}_{\Xi} T = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

donc, le calcul effectif de F_E ne nécessite pas d'intégration numérique. On obtient directement :

$$F_E = \frac{1}{6} \nabla_{\Xi} N [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-1} [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-\top} [\nabla_{\Xi} N]^{\top} \det(\mathbf{D}_{\Xi} T) \quad (8.18)$$

- dans le cas d'éléments finis hexaédriques Q_1 : $\nabla_{\Xi} N$, $\det(\mathbf{D}_{\Xi} T)$ et $\mathbf{D}_{\Xi} T$ dépendent des coordonnées Ξ . Du fait de la présence des deux termes $\mathbf{D}_{\Xi} T$, la fonction à intégrer est une fraction rationnelle de dénominateur égal à $\det(\mathbf{D}_{\Xi} T)$. Une intégration numérique par les méthodes de Newton-Cotes ou de Gauss³ est donc nécessaire [8].

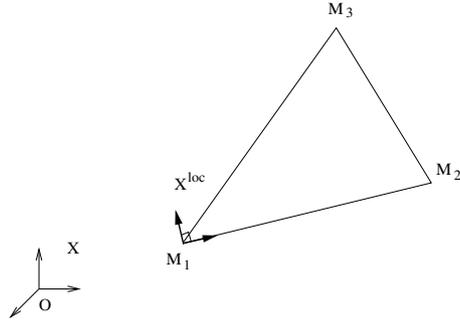
2. Remarquons que le jacobien $\det(\mathbf{D}_{\Xi} T)$ est strictement positif si T est une transformation bijective directe.

3. Rappelons que ces méthodes intègrent exactement des polynômes de degré $2k - 1$ avec k points d'intégration.

8.2.2 Opérateurs intégraux bidimensionnels

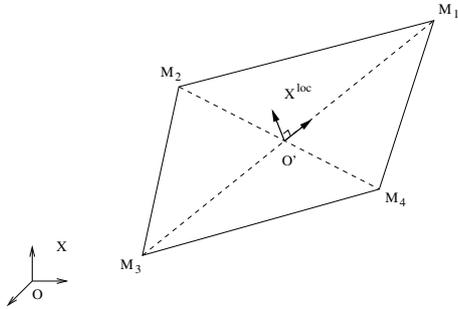
Repère local

Bien que la transformation T entre les deux variétés (de dimension 2) Σ_R et Σ soit définie dans l'espace physique de dimension 3, l'interpolation des déplacements n'a de sens que sur la surface Σ . De ce fait, les dérivées de T par rapport aux coordonnées X n'ont pas de sens et il faut introduire la notion de "dérivée surfacique". Pour cela, un changement de variable est nécessaire pour se placer dans les coordonnées intrinsèques de la surface⁴ que l'on notera $X^{\text{loc}} = (x^{\text{loc}}, y^{\text{loc}})$.



$$\begin{aligned} a &= \|M_1 M_2\| \\ c &= M_1 M_2 \cdot M_1 M_3 \\ d &= \|M_1 M_2 \wedge M_1 M_3\| \\ n &= \frac{M_1 M_2 \wedge M_1 M_3}{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1^{\text{loc}} &= (0, 0) \\ M_2^{\text{loc}} &= (a, 0) \\ M_3^{\text{loc}} &= (d/a, v/a) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_d^{\text{loc}} = \begin{bmatrix} 0 & a & d/a \\ 0 & 0 & v/a \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} a_1 &= \|O' M_1\| & d_1 &= \|O' M_1 \wedge O' M_2\| \\ a_2 &= \|O' M_3\| & d_2 &= \|O' M_1 \wedge O' M_4\| \\ c_1 &= O' M_1 \cdot O' M_2 & n &= \frac{M_1 M_2 \wedge M_3 M_4}{\|M_1 M_2 \wedge M_3 M_4\|} \\ c_2 &= O' M_1 \cdot O' M_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1^{\text{loc}} &= (a_1, 0) \\ M_2^{\text{loc}} &= (c_1/a, d_1/a) \\ M_3^{\text{loc}} &= (-a_2, 0) \\ M_4^{\text{loc}} &= (c_2/a, -d_2/a) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_d^{\text{loc}} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1/a & -a_2 & c_2/a \\ 0 & d_1/a & 0 & -d_2/a \end{bmatrix}$$

Les formules (8.2) et (8.8a) sont alors remplacées par :

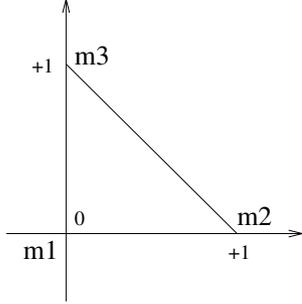
$$X^{\text{loc}} = T(\Xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\Xi) X_i^{\text{loc}} = M_d^{\text{loc}} N \quad (8.19)$$

$$D_{\Xi} T = M_d^{\text{loc}} \nabla_{\Xi} N \quad (8.20)$$

4. Dans le cas d'éléments surfaciques pas tout à fait plans, une projection des sommets de l'élément sur son plan moyen permet de se ramener à un élément 2D.

Voici les fonctions d'interpolation pour les deux élément finis surfaciques les plus utilisés :

L'élément triangulaire P_1

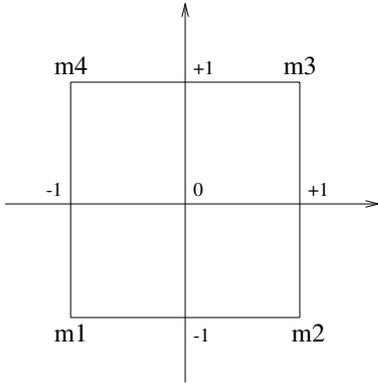


Le vecteur N des fonctions de base de cet élément s'écrit :

$$N = \begin{Bmatrix} 1 - (\xi + \eta) \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (8.21)$$

$$\nabla_{\Xi} N = \begin{Bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (8.22)$$

L'élément quadrangulaire Q_1



Le vecteur N des fonctions de base de cet élément s'écrit :

$$N = \begin{Bmatrix} 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta) \\ 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta) \\ 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta) \\ 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta) \end{Bmatrix} \quad (8.23)$$

$$\nabla_{\Xi} N = \begin{Bmatrix} -1/4 (1 - \eta) & -1/4 (1 - \xi) \\ 1/4 (1 - \eta) & -1/4 (1 + \xi) \\ 1/4 (1 + \eta) & 1/4 (1 + \xi) \\ -1/4 (1 + \eta) & 1/4 (1 - \xi) \end{Bmatrix} \quad (8.24)$$

Discrétisation de \mathcal{S}_E

La formule de changement de variable permet de transporter l'expression de \mathcal{S}_E sur l'élément de référence E_R :

$$\mathcal{S}_E(\tilde{\varphi}, \delta\varphi) = \int_{\Sigma_E} \tilde{\varphi} \delta\varphi \, d\Sigma_X = \int_{\Sigma_{E_R}} \delta\varphi(\Xi)^T \tilde{\varphi}(\Xi) \det(\mathbf{D}_{\Xi}T) \, d\Sigma_{\Xi} \quad (8.25)$$

La matrice élémentaire S_E associée à la forme bilinéaire \mathcal{S}_E est définie par :

$$\mathcal{S}_E(\tilde{\varphi}, \delta\varphi) \rightarrow \delta\varphi_d^T S_E \varphi_d \quad \text{avec } S_E = \int_{\Sigma_{E_R}} N N^T \det(\mathbf{D}_{\Xi}T) \, d\Sigma_{\Xi} \quad (8.26)$$

- dans le cas d'éléments finis triangulaires P_1 : $\det(\mathbf{D}_{\Xi}T)$ est constant (indépendant de Ξ) et le calcul effectif de S_E ne nécessite pas d'intégration numérique. D'autre part, dans le cas particulier

du calcul de S_E , la surface libre du liquide, sur laquelle s'effectue l'intégration, étant par définition orthogonale à l'axe z , le changement de repère vers le repère local des éléments est immédiat : il suffit de supprimer la coordonnée en z des points. On obtient alors directement :

$$S_E = \frac{[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)]}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

- dans le cas d'éléments finis quadrangulaires Q_1 : $\det(D_{\Xi}T)$ dépend des coordonnées Ξ . Une intégration numérique est donc nécessaire.

Discrétisation de C_E

Cas d'une interpolation linéaire des déplacements U de la structure :

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où les éléments finis utilisés pour discrétiser la structure sont des éléments linéaires⁵ P_1 ou Q_1 .

La formule de changement de variable permet de transporter l'expression de C_E sur l'élément de référence E_R :

$$C_E(\tilde{U}, \delta\varphi) = \int_{\Sigma_E} \delta\varphi \tilde{U} \cdot n \, d\Sigma_X = \int_{\Sigma_{E_R}} \delta\varphi(\Xi) \tilde{U}(\Xi) \cdot n \det(D_{\Xi}T) \, d\Sigma_{\Xi} \quad (8.28)$$

La matrice élémentaire C_E associée à la forme bilinéaire C_E est définie par :

$$C_E(\tilde{U}, \delta\varphi) \rightarrow \delta\varphi_d^T C_E U_d \quad \text{avec} \quad C_E = \int_{\Sigma_{E_R}} N n^T \mathcal{N}^T \det(D_{\Xi}T) \, d\Sigma_{\Xi} \quad (8.29)$$

Remarquons que, comme le vecteur normal n est constant sur tout l'élément (puisque que l'interpolation des déplacements de la structure est linéaire), il peut être sorti de l'intégrale.

- dans le cas d'éléments finis triangulaires P_1 : $\det(D_{\Xi}T)$ est constant (indépendant de Ξ) et vaut

$$D_{\Xi}T = \begin{bmatrix} x_2^{\text{loc}} - x_1^{\text{loc}} & x_3^{\text{loc}} - x_1^{\text{loc}} \\ y_2^{\text{loc}} - y_1^{\text{loc}} & y_3^{\text{loc}} - y_1^{\text{loc}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c/a \\ 0 & d/a \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

Le calcul effectif de C_E donne directement :

$$C_E = \frac{d}{24} \begin{bmatrix} 2n_x & n_x & n_x & 2n_y & n_y & n_y & 2n_z & n_z & n_z \\ n_x & 2n_x & n_x & n_y & 2n_y & n_y & n_z & 2n_z & n_z \\ n_x & n_x & 2n_x & n_y & n_y & 2n_y & n_z & n_z & 2n_z \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

- dans le cas d'éléments finis quadrangulaires Q_1 : $\det(D_{\Xi}T)$ dépend des coordonnées Ξ . Une intégration numérique est donc nécessaire.

5. La matrice U_d ne contient donc que des d.d.l. de translation.

Cas d'une interpolation d'ordre supérieur des déplacements U de la structure :

Dans le cas particulier des structures élancées (plaques, coques), la discrétisation du terme d'énergie potentielle de déformation introduit une interpolation cubique du déplacement normal de la structure (du fait de la prise en compte de degrés de liberté en rotation, pour représenter la flexion, dans la formulation des éléments). La même interpolation doit donc, a priori, être utilisée pour discrétiser les autres opérateurs qui font intervenir \tilde{U} , dont \mathcal{C} qui nous intéresse ici. Cependant, en faisant intervenir, pour la discrétisation de \mathcal{C} , les degrés de liberté en rotation dans l'interpolation de \tilde{U} , on génère des matrices de masse ajoutée pleines pour le fluide⁶ qui couplent tous les degrés de liberté des noeuds sur l'interface fluide-structure (d.d.l. de translation et de rotation). Pour éviter cela, nous avons négligé la participation des termes de rotation dans le déplacement \tilde{U} , ce qui correspond à considérer, pour l'estimation de cet opérateur, que la surface des éléments reste plane lors de leur déformation. Nous avons vérifié, en hydroélasticité sans gravité, sur quelques exemples que cette approximation donne des résultats corrects (cf. §9.1.2).

Une solution exacte à ce problème consisterait à développer un élément de plaque qui considère les translations et les rotations comme des degrés de liberté totalement découplés et interpolés indépendamment par des fonctions linéaires. Un élément de plaque de révolution ayant cette propriété a été développé par Ohayon & Nicolas-Vullierme [87] et est actuellement utilisé dans le logiciel ASTRAL.

Discrétisation de \mathcal{P}_E

Comme dans la section précédente, on suppose que la contribution des d.d.l. de rotation est négligeable. Christensen a observé numériquement, pour le calcul de K_P , que cette hypothèse est valide [27].

Pour numériser \mathcal{P}_E , on utilise la relation (3.34) donnée en §3.4.1. Cette expression permet d'écrire directement \mathcal{P}_E sur l'élément de référence E_R :

$$\mathcal{P}_E(\tilde{U}, \delta U) = \int_{\Sigma_E} \tau(U) \cdot \delta U \, d\Omega_X = \int_{\Sigma_{E_R}} (a_{00}^1 \wedge \nabla_\eta U - a_{00}^2 \wedge \nabla_\xi U) \cdot \delta U \, d\xi d\eta \quad (8.32)$$

Les expressions de a_{00}^1 et a_{00}^2 données par (3.28) permettent d'écrire que :

$$a_{00}^1 = M_d^{\text{loc}} \nabla_\xi N \quad (8.33a)$$

$$a_{00}^2 = M_d^{\text{loc}} \nabla_\eta N \quad (8.33b)$$

Pour exprimer les produits vectoriels sous une forme matricielle, on utilise la matrice antisymétrique associée que l'on note *spin* (cf. annexe §D.2.1). L'expression de la matrice élémentaire P_E associée à la forme bilinéaire \mathcal{P}_E est donc :

$$\mathcal{P}_E(\tilde{U}, \delta U) \rightarrow \delta U_d^T P_E U_d$$

avec
$$P_E = \int_{\Sigma_{E_R}} \mathcal{N} [spin(M_d^{\text{loc}} \nabla_\xi N) \nabla_\eta \mathcal{N}^T - spin(M_d^{\text{loc}} \nabla_\eta N) \nabla_\xi \mathcal{N}^T] \, d\xi d\eta \quad (8.34)$$

6. Par exemple, la matrice de masse hydrostatique du fluide dont l'expression matricielle est donnée par l'équation (7.29).

- dans le cas d'éléments finis triangulaires P_1 : $\nabla_{\Xi}N$ et $\nabla_{\Xi}\mathcal{N}$ sont constants (indépendants de Ξ).
Le calcul effectif de P_E ne nécessite donc pas d'intégration numérique, on obtient directement :

$$P_E = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} [spin(M_d^{loc} \nabla_{\xi}N) \nabla_{\eta}\mathcal{N}^T - spin(M_d^{loc} \nabla_{\eta}N) \nabla_{\xi}\mathcal{N}^T] \quad (8.35)$$

- dans le cas d'éléments finis quadrangulaires Q_1 : $\nabla_{\Xi}N$ et $\nabla_{\Xi}\mathcal{N}$ dépendent des coordonnées Ξ .
Une intégration numérique est donc nécessaire.

Discrétisation de \mathcal{Z}_E

La méthode de numérisation de \mathcal{Z}_E est très proche de celle que l'on a utilisé pour \mathcal{P}_E . L'expression de la matrice élémentaire Z_E associée à la forme bilinéaire \mathcal{Z}_E est donc :

$$Z_E(\tilde{U}, \delta U) \rightarrow \delta U_d^T Z_E U_d$$

avec $Z_E = \int_{\Sigma_{E_R}} \mathcal{N} M_d^z N [spin(M_d^{loc} \nabla_{\xi}N) \nabla_{\eta}\mathcal{N}^T - spin(M_d^{loc} \nabla_{\eta}N) \nabla_{\xi}\mathcal{N}^T] d\xi d\eta \quad (8.36)$

où M_d^z est la ligne de la matrice M_d correspondant aux cotes (par rapport à la surface libre) des noeuds de l'élément dans le repère absolu.

- dans le cas d'éléments finis triangulaires P_1 : $\nabla_{\Xi}N$ et $\nabla_{\Xi}\mathcal{N}$ sont constants (indépendants de Ξ).
Le calcul effectif de Z_E ne nécessite donc pas d'intégration numérique, on obtient directement :

$$Z_E = \frac{1}{24} \left(z_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \dots \right) \times [spin(M_d^{loc} \nabla_{\xi}N) \nabla_{\eta}\mathcal{N}^T - spin(M_d^{loc} \nabla_{\eta}N) \nabla_{\xi}\mathcal{N}^T] \quad (8.37)$$

où z_1, z_2 et z_3 sont les cotes (par rapport à la surface libre) des 3 noeuds de l'élément triangulaire dans le repère absolu.

- dans le cas d'éléments finis quadrangulaires Q_1 : $\nabla_{\Xi}N$ et $\nabla_{\Xi}\mathcal{N}$ dépendent des coordonnées Ξ .
Une intégration numérique est donc nécessaire.

8.3 Implémentation du logiciel FSI3D

Le logiciel développé a été baptisé **FSI3D** pour **F**luid-**S**tructure **I**nteractions en **3D**.

8.3.1 Stratégie

Un ensemble de programmes de résolution fluide-structure a été écrit autour du logiciel MSC/NASTRAN⁷. L'ensemble des fonctionnalités éléments finis spécifiques à la structure, ainsi que les algorithmes de résolution numérique et l'architecture en base de données de ce logiciel ont ainsi pu être directement exploités pour la résolution de notre problème. Cependant, l'assemblage dans NASTRAN des matrices dépendant du fluide ou de la gravité auraient nécessité la création de nouveaux éléments finis de volume et de surface spécifiques. Bien que NASTRAN offre la possibilité aux utilisateurs expérimentés de définir de nouveaux éléments, appelés "dummy elements", par l'intermédiaire du module "user modifiable", nous avons préféré nous orienter vers une solution plus simple qui consiste à importer dans NASTRAN ces matrices assemblées à l'extérieur par un programme externe. De même, par soucis de commodité, nous avons développé une interface de visualisation en MatLab qui permet une grande liberté dans le post-traitement des résultats.

8.3.2 Interface MatLab

L'interface MatLab, représentée figure 8.2, sert à la fois au pré- et au post-traitement.

Le pré-traitement des données

La relecture des fichiers de géométrie au format NASTRAN donne la description des maillages E. F. du volume fluide et des interfaces fluide-structure, fluide-gaz et gaz-structure. Les matrices F , S , C , P et Z sont assemblées à partir des matrices élémentaires F_E (8.16), S_E (8.26), C_E (8.29), P_E (8.34) et Z_E (8.36) par des fonctions MatLab⁸. Toutes les matrices relatives au fluide (F , S , C), aux effets de gravité ou de pressurisation (K_B , K_Σ , K_C , K_P), ainsi que certaines matrices ou vecteurs qui apparaissent dans les formulations symétriques du chapitre 6 (K_η , c , c_g , b , B , D . . .) sont générées dans Nastran à partir de ces 5 matrices de base.

Des programmes mexfiles Fortran d'écriture (et de relecture) ont été développés pour exporter des matrices (en stockage creux, plein ou skyline) de MatLab vers NASTRAN (ou pour importer des résultats de NASTRAN vers MatLab) en utilisant le format binaire NASTRAN *output4*.

L'ensemble des données nécessaires au calcul NASTRAN peut également être préparé via l'interface MatLab (création des d.d.l. supplémentaires pour le fluide, génération des chargements statiques dus au fluide et à la pressurisation, calcul du volume du gaz en pression⁹ . . .).

7. Ce logiciel possédait déjà quelques fonctionnalités en calcul couplé fluide-structure standard, mais la philosophie utilisée ne permettait pas une introduction aisée des effets de gravité présentés ici.

8. L'utilisation de *mexfiles* Fortran ou C pourrait diminuer les temps de calcul mais les matrices n'étant assemblées qu'une fois, le gain serait relativement limité. De plus, les formulations matricielles que nous avons utilisées sont relativement optimisées et l'assemblage de toutes les matrices prend seulement quelques dizaines de minutes pour les plus gros modèles étudiés

9. La méthode utilisée pour calcul V_{00}^g est exposée en annexe C.4.

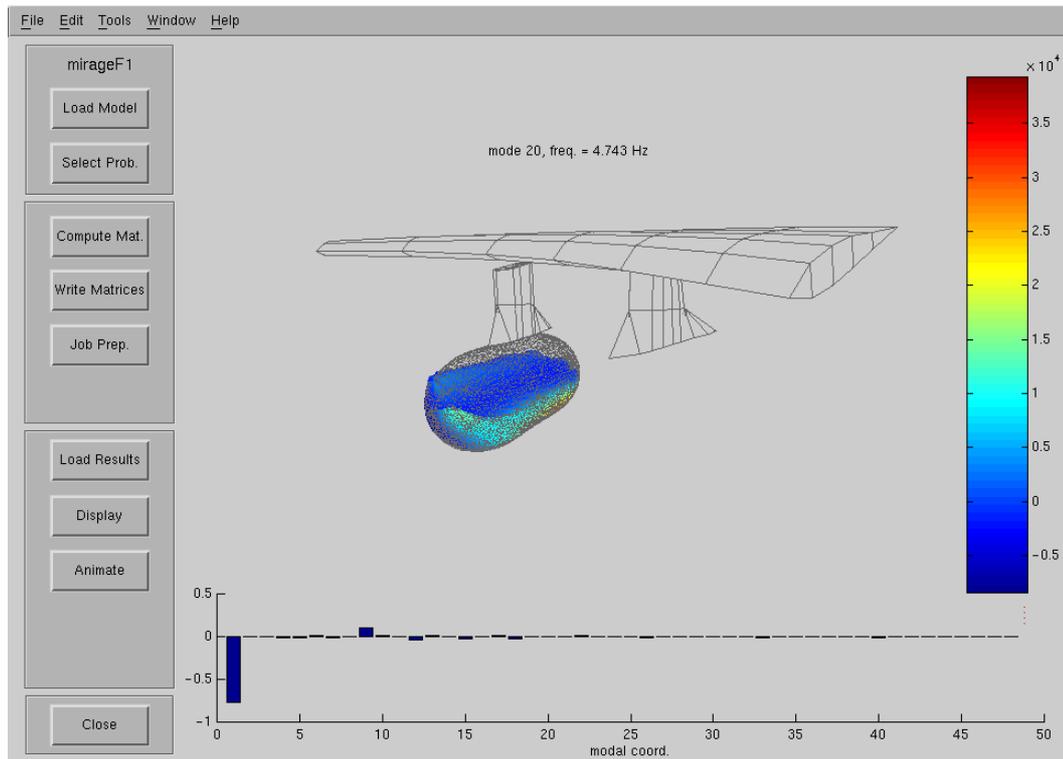


FIG. 8.2 – Interface MatLab de pré- et post-traitement pour FSI3D

le post-traitement des résultats

Les résultats obtenus par NASTRAN sont importés dans MatLab (par l'intermédiaire des programmes mexfiles cités précédemment) pour le post-traitement et la visualisation.

A partir de la valeur du potentiel scalaire de déplacement φ en tout point du fluide, le déplacement $U^F = \nabla\varphi$ est reconstitué en utilisant la valeur du gradient¹⁰ ∇N_i des fonctions de forme aux noeuds du maillage selon la relation suivante, obtenue à partir de (8.7a) et (8.8b) :

$$U_d^F = \nabla_X \tilde{\varphi}(X) = \varphi_d^T \nabla_{\Xi} N [D_{\Xi} T]^{-1} \quad (8.38)$$

En plus des déplacements du fluide et de la structure, les fluctuations de pression eulérienne ainsi que les participations modales des modes de ballonnement (dans le cas d'une réduction sur la base modale des modes de ballonnement, cf. chapitre 7) peuvent être visualisés et animés.

8.3.3 Modules NASTRAN

Des modules de calcul de modes propres associées aux différentes modélisations fluide-structure (ballonnement, hydroélasticité avec ou sans gravité, avec ou sans réduction modale, pour systèmes libres ou non)

10. Les fonctions de forme de degré 1 que nous utilisons assurent la continuité C^0 de φ d'un élément fini à l'autre, mais pas sa continuité C^1 . Pour obtenir une valeur unique de $\nabla\varphi$ en chaque point du maillage fluide, nous prenons la moyenne des valeurs obtenues sur chaque élément ayant ce noeud pour sommet.

ont été programmés en langage DMAP à partir de la solution d'extraction modale standard de NASTRAN (SOL 103). Pour cela, il suffit de construire les matrices globales de raideur et de masse du système couplé à partir des matrices de raideur et de masse de la structure (assemblées par NASTRAN¹¹) ainsi que des matrices dépendant du fluide, de la gravité et de la pressurisation, générées à partir des matrices F , S , C , P et Z qui ont été importées depuis MatLab.

D'autre part, pour représenter la valeur des variables φ ou η aux noeuds du fluide, un d.d.l. supplémentaire est créé en chaque point du maillage.

Après la résolution du problème aux valeurs propres, le vecteur solution φ est recomposé, si besoin est, dans NASTRAN à partir de U^S , η ou φ_α (selon la formulation utilisée).

Références bibliographiques

L'ouvrage théorique principalement utilisé pour rédiger cette partie est celui de Bathe [8]. Concernant l'implémentation dans MSC/Nastran, on notera les travaux de développement d'un module DMAP d'hydroélasticité, avec prise en compte de l'énergie de ballottement (mais sans effets de précontrainte), menés par Kim & Lee [60, 66].

11. La matrice de raideur géométrique K_G est obtenue par un calcul NASTRAN statique préliminaire

Chapitre 9

Validations

Sommaire

9.1	Validation analytique et numérique	114
9.1.1	Ballotement	114
9.1.2	Couplage hydroélastique (sans gravité)	118
9.1.3	Effets de pressurisation	120
9.1.4	Couplage entre mouvements d'ensemble et ballotement pour un système libre	122
9.1.5	Modèles réduits	128
9.2	Validation expérimentale	132
9.2.1	Couplage entre mouvements d'ensemble et ballotement pour un système libre	132
9.2.2	Couplage entre déformations hydroélastiques et ballotement	132

La validation de la formulation présentée dans la partie théorique a été effectuée sur des cas tests de réservoirs à géométrie très simple par comparaison

- soit avec une solution analytique connue et référencée dans la littérature,
- soit avec des résultats numériques obtenus avec d'autres logiciels commerciaux ou industriels, parfois dans le cadre d'un *benchmark*,
- soit avec des mesures expérimentales.

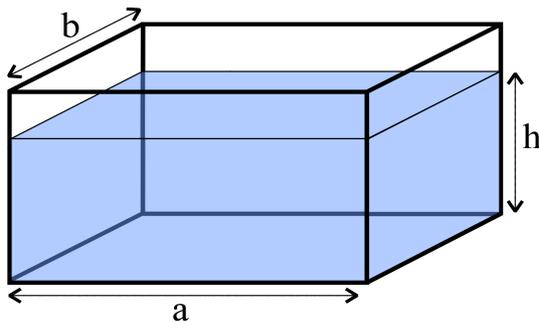
Chaque cas test est dimensionné ou étudié de façon à mettre en évidence un phénomène particuliers afin de valider indépendamment chaque aspect de la modélisation. Ensuite, quelques exemples mettant en évidence des couplages entre les phénomènes peuvent être testés mais cette initiative est limitée par la rareté des solutions de références (analytique, numériques ou expérimentales) présentes dans la littérature.

9.1 Validation analytique et numérique

9.1.1 Ballotement

Le calcul des modes de ballotement est disponible dans de nombreux logiciels éléments finis possédant quelques fonctionnalités de calcul d'interactions fluide-structure (Nastran, Astral ...) et de nombreuses comparaisons numériques ont pu être réalisées.

L'exemple présenté ici, pour une cuve parallélépipédique (figure 9.1), a l'avantage d'avoir une solution analytique simple que l'on peut trouver dans la littérature [1] et dont la démonstration complète est donnée en annexe C.5 :



$$\begin{aligned} a &= 10 \text{ m} \\ b &= 7 \text{ m} \\ h &= 5 \text{ m} \end{aligned}$$

FIG. 9.1 – Cuve parallélépipédique

$$\omega_{m,n}^2 = g k \tanh(k h) \quad \text{avec} \quad k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (9.1a)$$

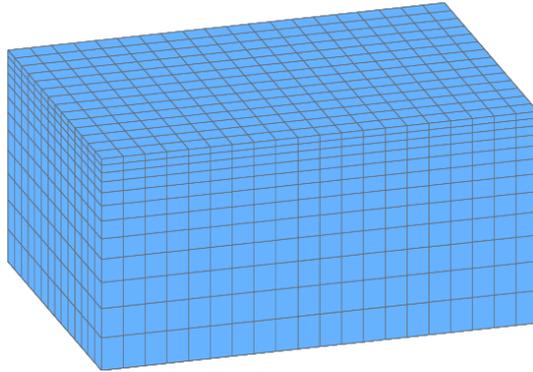
$$\varphi^{m,n}(x, y, z) = \cos\left(\frac{m \pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{n \pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \cosh\left(k \left(z + \frac{h}{2}\right)\right) \quad (9.1b)$$

où m et n sont des entiers appartenant à \mathbb{N} et $\varphi(x, y, z)$ est le potentiel de déplacement dans le liquide.

Le déplacement de la surface libre $u_z = \partial\varphi/\partial z$ donne la forme de la déformée de la surface libre :

$$u_z^{m,n}(x,y) \propto \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \quad (9.1c)$$

Le maillage du volume de fluide (figure 9.2) est un maillage réglé en hexaèdres et celui de la surface libre est un maillage réglé en quadrangles. Les phénomènes de ballonnement étant des phénomènes de surface, le maillage du fluide est raffiné dans la zone proche de la surface libre.



4095 noeuds
3360 hexaèdres
280 quadrangles

FIG. 9.2 – Maillage de la cuve parallélépipédique

Les fréquences propres de ballonnement obtenues avec notre modèle sont comparées à leur valeur analytique dans le tableau 9.1. Quelques exemples de déformées modales de la surface libre sont représentés par les figures 9.3.

mode	valeur analytique fréq. (Hz)	calcul	
		fréq. (Hz)	erreur (%)
m = 1 , n = 0	0.268	0.268	0.
m = 0 , n = 1	0.330	0.331	0.
m = 1 , n = 1	0.367	0.368	0.
m = 2 , n = 0	0.394	0.395	0.
m = 2 , n = 1	0.438	0.439	0.
m = 0 , n = 2	0.472	0.475	0.5
m = 3 , n = 0	0.484	0.487	0.5
m = 1 , n = 2	0.486	0.488	0.5
m = 3 , n = 1	0.509	0.512	0.5
m = 2 , n = 2	0.522	0.524	0.5
m = 4 , n = 0	0.559	0.564	1.

TAB. 9.1 – Comparaison des 12 premières fréquences propres de ballonnement avec leur valeur analytique

Un test similaire a également été réalisé avec un maillage tétraédrique et les résultats obtenus ont été comparables. Ces bons résultats ont permis d'affirmer que la discrétisation des opérateurs \mathcal{F} et \mathcal{S} , qui interviennent dans le calcul des modes de ballonnement, est correcte.

D'autre part, l'existence d'une solution analytique nous a permis d'effectuer quelques tests sur la précision du calcul en fonction du maillage éléments finis. En effet, le phénomène de ballonnement a la particularité d'être un phénomène très basse fréquence dont les premières fréquences propres sont de l'ordre de la fraction de Hertz. Cette spécificité amène à se poser le problème du raffinement de maillage

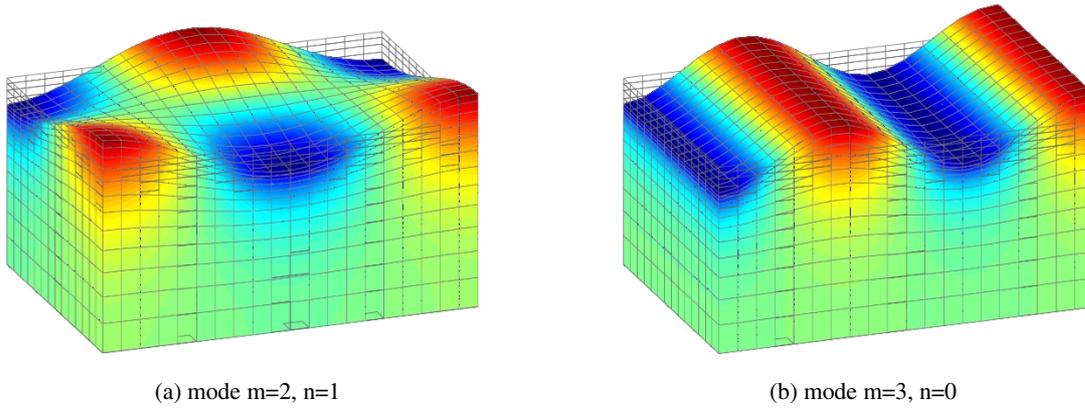


FIG. 9.3 – Exemples de modes de ballonnement pour la cuve parallélépipédique

nécessaire pour obtenir les modes de ballonnement du liquide à des fréquences qui peuvent paraître peu élevées, mais qui sont en fait, pour le phénomène de ballonnement, déjà des moyennes fréquences.

En effet, pour obtenir une erreur acceptable sur le calcul des fréquences propres, il faut s'assurer que l'interpolation imposée par les fonctions de forme linéaires associées aux E.F., peut représenter correctement la solution exacte (9.1b). La forme sinusoïdale de cette solution dans les directions x et y nécessite au moins 4 éléments par longueur d'onde λ (figure 4(a)). Pour représenter un mode de fréquence f , la taille de maillage $d_{x,y}$ nécessaire selon ce critère est donc égale à :

$$d_{x,y} = \frac{\lambda}{4} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \Rightarrow \quad d_{x,y} \simeq \frac{g}{8\pi f^2} \quad (9.2a)$$

Dans la direction z , la forme exponentielle de la solution nécessite une taille de maillage d_z égale à $1/k$ selon le schéma représenté figure 4(b) :

$$d_z = \frac{1}{k} \simeq \frac{g}{4\pi^2 f^2} \quad (9.2b)$$

Les valeurs obtenues pour $d_{x,y}$ et d_z sont toutes deux en $1/f^2$, ce qui signifie que pour monter en fréquence, il faut raffiner de la même façon la surface libre et le volume de fluide à sa proximité.

Les deux graphiques 9.5 permettent d'apprécier l'effet du raffinement de maillage dans les direction x et y de la surface libre du fluide (de 0.5 m à 0.25 m) ainsi que celui d'un raffinement de maillage dans la direction z (de 0.15 m à 0.05 m) à proximité de la surface libre. Ces courbes montrent que pour notre exemple concret, l'erreur obtenue sur les fréquences de ballonnement croît très rapidement : avec les maillages proposés, la précision se dégrade fortement dès 1 Hz.

Ce défaut de précision peut paraître gênant pour le problème qui nous intéresse *in fine*. En effet, dans l'optique où l'on désire étudier les couplages entre les modes de ballonnement et des modes hydroélastiques ayant des fréquences plus élevées, il paraît essentiel d'être capable de représenter correctement les modes de ballonnement jusqu'à ces fréquences (que l'on peut considérer comme élevées du point de vue de ce phénomène). Pour cela, il faudrait des maillages fluides très raffinés en surface et l'utilisation de techniques particulières (meshless ...) pour éviter les problèmes de "pollution" que Ihlenburg

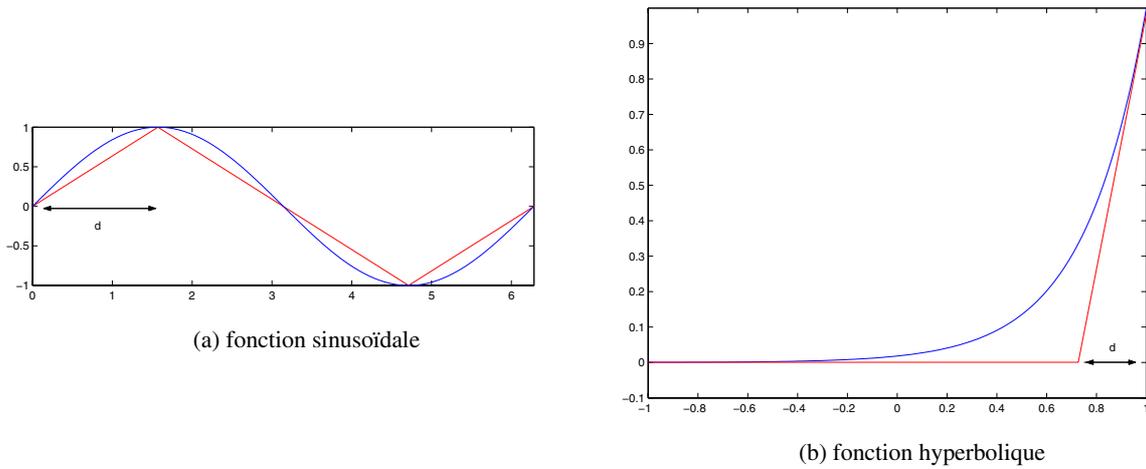


FIG. 9.4 – Approximation par des fonctions linéaires continues par morceaux

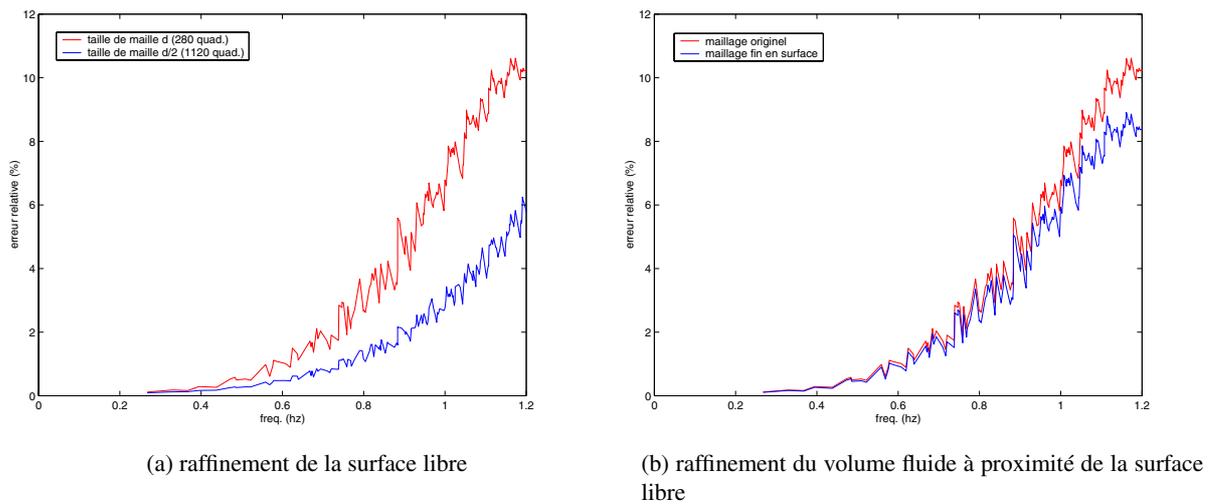


FIG. 9.5 – Effet du raffinement de maillage sur la prédiction des fréquences propres de ballonnement

& Babuška ont mis en évidence pour les solutions de l'équation d'Helmoltz [55, 7]. Cependant, la figure 9.6 montre que l'énergie potentielle des modes de ballonnement est décroissante en $1/\omega^2$ (à énergie cinétique constante), ce qui signifie que les modes de ballonnement de "haute fréquence" deviennent rapidement négligeables en terme d'énergie potentielle apportée au système. Cette remarque incite à penser que l'on peut se contenter des premiers modes de ballonnement dans l'étude du couplage avec le système hydroélastique, mais, à notre connaissance, aucune démonstration rigoureuse n'a encore été proposée pour répondre à cette question, et ce point fera l'objet de développements futurs.

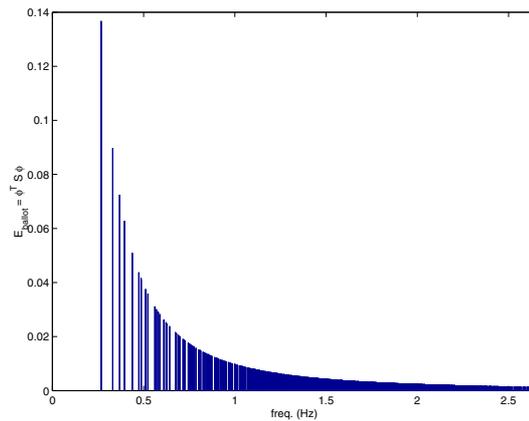
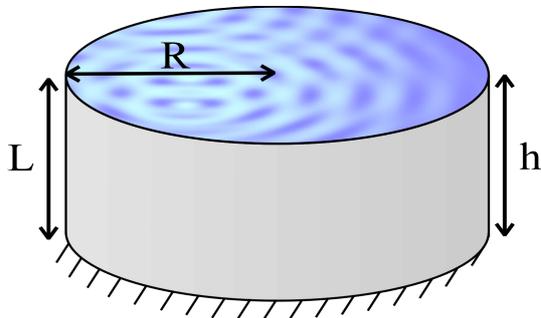


FIG. 9.6 – Décroissance de l'énergie potentielle des modes de ballotement

9.1.2 Couplage hydroélastique (sans gravité)

Le calcul des modes hydroélastiques standards par la méthode de la masse ajoutée (cf. chapitre 5 de [81]) est validé par comparaison avec des résultats numériques obtenus par ASTRAL et MSC/NASTRAN. ASTRAL étant limité au traitement des systèmes axisymétriques, le modèle test utilisé est une cuve cylindrique à fond plat encasté (figure 9.7).

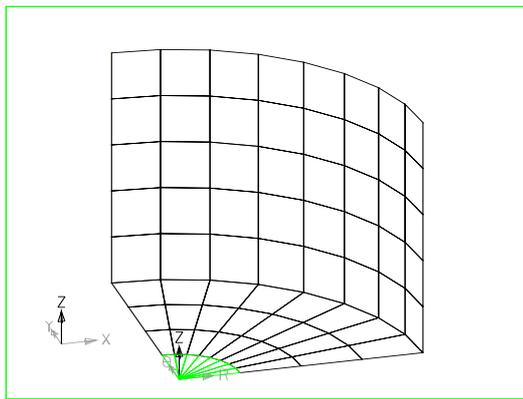


$$\begin{aligned}
 R &= 2. \text{ m} \\
 L &= 2. \text{ m} \\
 h &= 2. \text{ m} \\
 \rho^F &= 1000. \text{ kg/m}^3 \\
 e &= 10 \text{ cm} \\
 \rho^S &= 8000. \text{ kg/m}^3 \\
 E &= 2.e + 11 \text{ S.I.} \\
 \nu &= 0.25
 \end{aligned}$$

FIG. 9.7 – Cuve cylindrique à fond plat encastée

La figure 9.8 représente le quart du maillage structure utilisé dans NASTRAN. Le maillage du volume fluide est axisymétrique et s'appuie sur les noeuds du maillage structure. La figure 9.9 montre la projection sur un plan de symétrie du maillage axisymétrique utilisé dans ASTRAL. Quant à la figure 9.10, elle représente un huitième du maillage tétraédrique utilisé pour un calcul tridimensionnel avec notre modélisation.

Les fréquences propres hydroélastiques obtenues d'une part avec notre modèle et d'autre part avec NASTRAN et ASTRAL sont reportées dans le tableau 9.2. Les erreurs sont calculées en prenant pour référence le calcul ASTRAL. Quelques exemples de déformées modales obtenues sont représentées par les figures 9.11 et 9.12. Les bons résultats obtenus ont permis d'affirmer que la discrétisation de l'opérateur de couplage fluide-structure \mathcal{C} est correcte.



561 noeuds, 528 éléments

FIG. 9.8 – Maillage de la cuve cylindrique pour le calcul NASTRAN

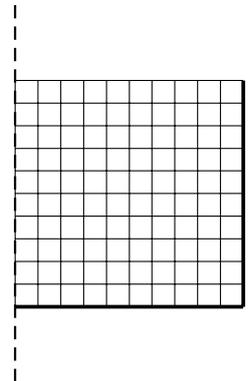
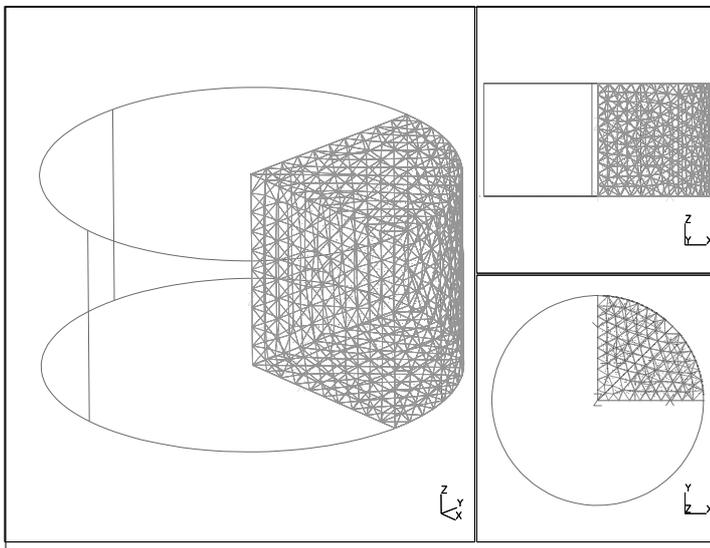


FIG. 9.9 – Maillage de la cuve cylindrique pour le calcul ASTRAL



456 noeuds
1790 tétraèdres
324 triangles

FIG. 9.10 – Maillage de la cuve cylindrique pour le calcul FSI3D

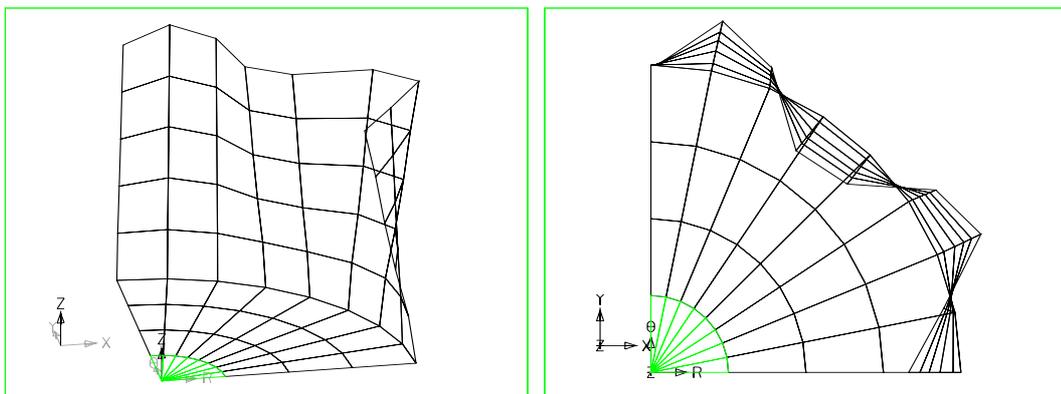


FIG. 9.11 – Exemple de mode hydroélastique ($n=6$, mode 1) obtenu avec Nastran en axi.

Description	ASTRAL	NASTRAN Axi.		FSI3D	
	fréq. (Hz)	fréq. (Hz)	diff. (%)	fréq. (Hz)	diff. (%)
n = 3, mode 1	95.03	94.00	-1.	96.19	1.
n = 4, mode 1	103.19	102.43	-1.	104.10	1.
n = 2, mode 1	122.80	121.41	-1.	124.35	1.
n = 5, mode 1	140.15	140.65	0.5	142.20	1.
n = 1, mode 1	184.99	183.08	-1.	186.34	1.
n = 6, mode 1	195.22	198.79	2.	198.95	2.
n = 0, mode 1	240.60	238.43	-1.	241.35	0.5
n = 4, mode 2	266.07	254.06	-5.	263.82	-1.
n = 3, mode 2	274.32	262.75	-4.	275.30	0.5
n = 5, mode 2	284.56	269.58	-5.	280.29	-2.
n = 7, mode 1	264.08	272.92	3.	270.70	2.
n = 2, mode 2	303.26	287.98	-5.	306.98	1.

TAB. 9.2 – Comparaison Astral / Nastran Axi. / FSI3D sur les 12 premières fréquences propres hydroélastiques

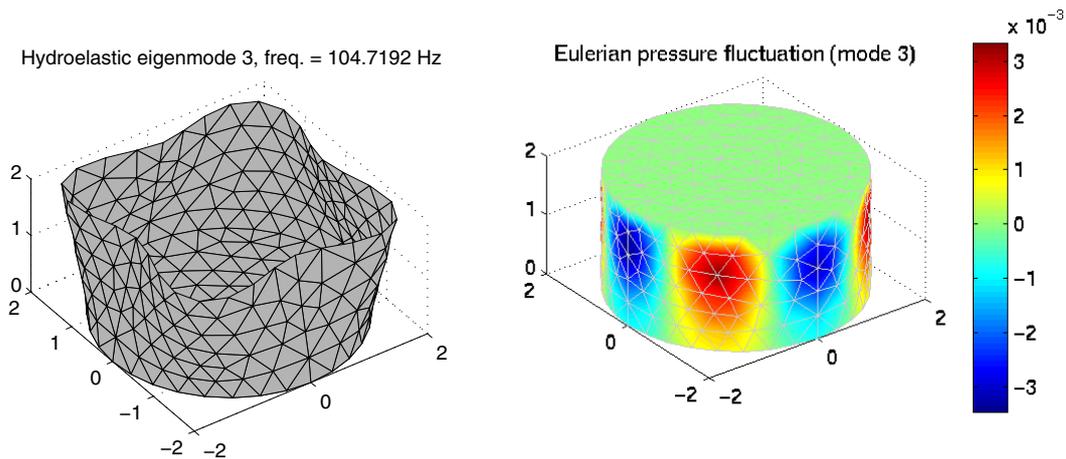


FIG. 9.12 – Exemple de mode hydroélastique sans gravité (n=4, mode 1) obtenu avec FSI3D

9.1.3 Effets de pressurisation

La validation des effets de pressurisation a été réalisée par comparaison avec les résultats obtenus par différents logiciels utilisés dans le domaine aérospatial (ASTRAL et DYNOST). Le modèle utilisé a été proposé dans le cadre d'un *benchmark* dont le but était d'évaluer l'influence de la pressurisation dans un réservoir sphérique (figure 9.13). Les maillages utilisés dans DYNOST et FSI3D sont identiques (figure 9.14). Le maillage utilisé dans ASTRAL est bidimensionnel mais comporte autant d'éléments sur la circonférence (36). Deux configurations de remplissage sont envisagées : vide et demi-pleine. Les conditions aux limites sont "libre-libre".

Il est vérifié au préalable que les résultats obtenus par les différents logiciels dans un cas sans pressurisation sont équivalents à moins de 1%. Ceci nous permet d'affirmer que les différences constatées ultérieurement sont bien dues à la prise en compte de la pressurisation.

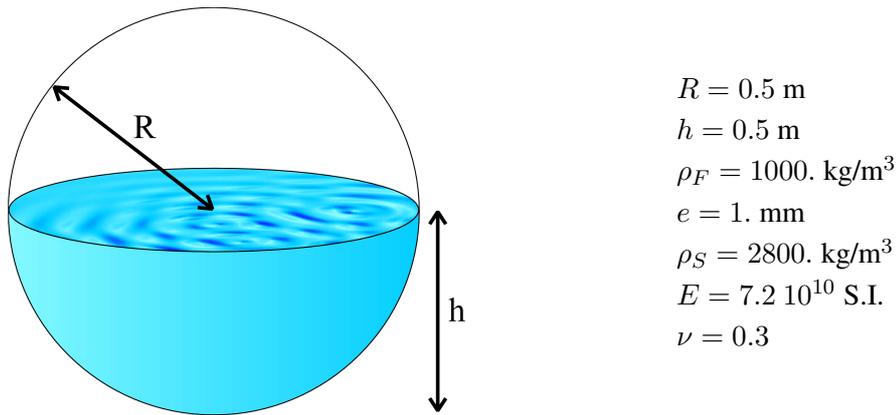


FIG. 9.13 – Réservoir sphérique

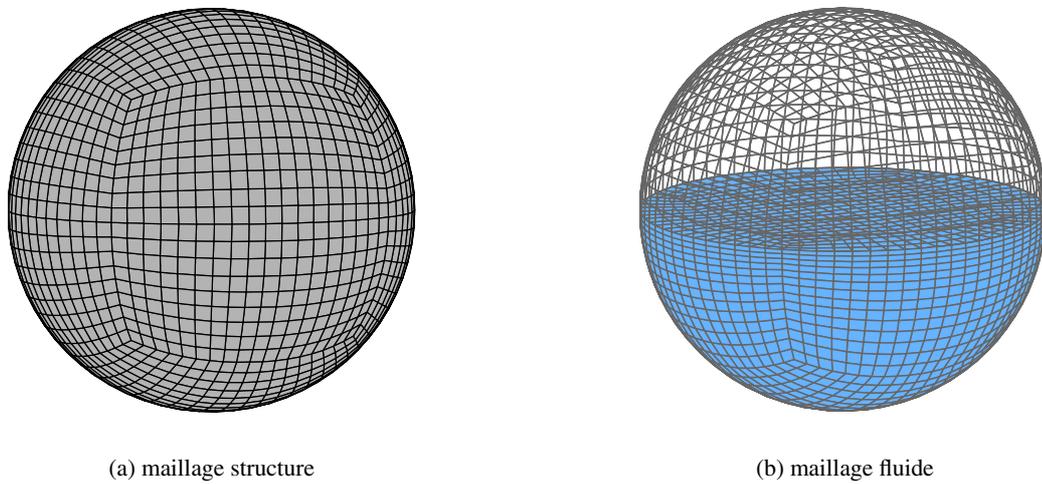


FIG. 9.14 – Maillages du réservoir sphérique (10459 noeuds, 2844 quadrangles, 8532 hexaèdres)

mode	sans pression fréq. théorique (Hz)	Astral 2D fréq. (Hz)	FSI3D	
			fréq. (Hz)	diff. (%)
trans. X,Y	0.	3.97	0.	
trans. Z	0.	$3.8 i (\omega^2 < 0)$	0.	
rot. X,Y	0.	$3.2 i (\omega^2 < 0)$	$\sim 0.$	
rot. Z	0.	4.48	$\sim 0.$	
	1186.	1201.	1201.	0.
	1407.	1437.	1437.	0.
	1410.	1441.	1441.	0.

TAB. 9.3 – Fréquences propres du réservoir sphérique vide avec pressurisation (10 bars)

Le tableau 9.3 résume les fréquences propres obtenues avec les différents logiciels pour une pression interne du réservoir de 10 bars, dans la configuration vide. Le tableau 9.4 présente les résultats obtenus pour la configuration demi-pleine et une pression interne toujours égale à 10 bars. Les valeurs données par ASTRAL sont prises comme référence.

mode	ASTRAL 2D	DYNOST		FSI3D	
	fréq. (Hz)	fréq. (Hz)	diff. (%)	fréq. (Hz)	diff. (%)
trans. X,Y	1.07	?		0.	
trans. Z	0.69	?		0.	
rot. X,Y	3.97	?		0.71	
rot. Z	4.48	?		~ 0.	
ovalisation	195.4	195.3	~ 0.	194.7	~ 0.
longitudinal	200.1	200.3	~ 0.	199.5	~ 0.
flexion	224.7	225.1	~ 0.	224.2	~ 0.
	274.6	?		273.6	~ 0.
	276.2	?		276.	~ 0.

TAB. 9.4 – Fréquences propres du réservoir sphérique demi-plein avec pressurisation (10 bars) (les ? désignent des valeurs non disponibles)

L'analyse de ces deux tableaux amène les remarques suivantes :

- La comparaison des fréquences propres des modes élastiques pour les deux configurations montre une très bonne cohérence entre les différents logiciels et permet de valider la prise en compte des effets de précontrainte dus à la pressurisation dans notre modèle.
- La prédiction des modes rigides en rotation à des fréquences quasi nulles (pour la configuration vide) permet de valider la prise en compte des effets de rotation de normale intégrés dans l'opérateur \mathcal{K}_P ainsi que la discrétisation de cet opérateur (le tableau 9.5 présente les différences de fréquences propres obtenues pour les modes rigides du système avec et sans prise en compte de l'opérateur K_P).
- On constate que notre modélisation donne une meilleure prédiction des modes rigides qu'ASTRAL car, bien que les 2 formulations prennent en compte l'opérateur \mathcal{K}_P , ce dernier utilise des formules analytiques approchées pour estimer l'état de précontrainte dans la structure¹.
- On constate que la fréquence propre de rotation autour de X et Y n'est pas nulle dans le cas du réservoir demi-plein. Cette remarque sera discutée au §9.1.4.
- Les fréquences obtenues pour les mouvement de rotation autour de Z (et de rotation autour de X et Y dans le cas du réservoir vide), bien qu'assez faibles (de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1}), ne sont pas tout à fait nulles car la compensation des énergies de déformation associées aux opérateurs \mathcal{K}_P et \mathcal{K}_G n'est pas parfaite du point de vue numérique (cf. tableau 9.6). De plus, les opérateurs concernés étant proportionnels à la valeur de la pressurisation, cet imprécision numérique est amplifiée quand la valeur de P_{00}^G augmente.
- Pour finir, on a pu constater dans cet exemple, que la prise en compte ou non de K_C a peu d'influence sur les résultats. Ceci confirme que l'opérateur \mathcal{K}_C a une raideur négligeable tant que le réservoir n'est pas presque plein.

9.1.4 Couplage entre mouvements d'ensemble et ballottement pour un système libre

Le chapitre 5 sur l'étude des systèmes fluide-structure libres a mis en évidence, grâce à l'équation (5.85), l'apparition d'une énergie de déformation non nulle pour des mouvements de rotation du système autour

1. Dans le cas où la structure a un contour non C^1 , ces différences sont encore plus significatives.

mode	sans K_P fréq. (Hz)	avec K_P fréq. (Hz)
trans. X,Y	$\sim 0.$	$\sim 0.$
trans. Z	$\sim 0.$	$\sim 0.$
rot. X,Y	134.5	$\sim 0.$
rot. Z	134.5	$\sim 0.$

TAB. 9.5 – Effet de K_P sur les fréquences propres des mouvements d'ensemble du réservoir sphérique vide avec pressurisation (10 bars)

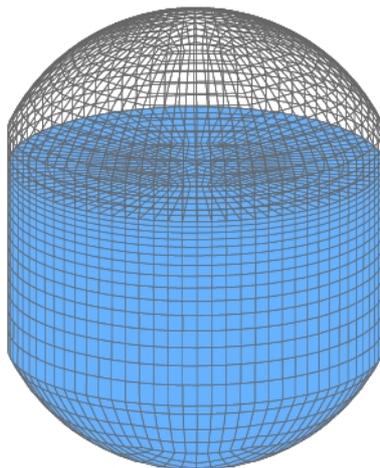
$X^T K X$	rot. X et Y	rot. Z
K_G	+0.1046118e+7	+0.1046367e+7
K_P	-0.1045205e+7	-0.1045205e+7
$K_G + K_P$	0.9126007e+3	1.1620530e+3

TAB. 9.6 – Valeurs comparatives des énergies associées aux mouvements de corps rigide en rotation (configuration vide)

d'un axe horizontal quand les effets de la gravité sont pris en compte. Les modes propres associés à ces mouvements de rotation ont donc des fréquences non nulles, contrairement à ce que prédit le modèle hydroélastique classique (sans prise en compte de la gravité).

Observations sur un cas test

Afin d'observer ce résultat sur une simulation numérique, nous avons fait l'étude d'un cas test de réservoir libre illustré par la figure 9.15. La géométrie de ce réservoir a été choisie assez proche de celle d'un réservoir à oxygène liquide de type Ariane V mais dans le but de simplifier le modèle éléments finis, les propriétés mécaniques des plaques ont été uniformisées sur l'ensemble de la structure (épaisseur, matériau ...)².



$$\begin{aligned}
 R &= 2.7 \text{ m} \\
 L &= 6.7 \text{ m} \\
 h &= 4.5 \text{ m} \\
 \rho_F &= 1138.7 \text{ kg/m}^3 \\
 e &= 5. \text{ mm} \\
 \rho_S &= 4450. \text{ kg/m}^3 \\
 E &= 8.14 \cdot 10^{10} \text{ S.I.} \\
 \nu &= 0.33
 \end{aligned}$$

FIG. 9.15 – Maillage du réservoir type LOX (17150 noeuds, 3720 quadrangles, 14120 hexaèdres)

Les fréquences des premiers modes propres obtenus par notre modélisation avec gravité sont reportées

2. Ce qui bien sûr ne correspond pas à la réalité puisque des surépaisseurs localisées sur certaines tranches servent à former des cadres de rigidification pour le réservoir. Toute interprétation quantitative des résultats est donc à proscrire.

dans le tableau 9.7. L'étude de ces résultats amène les remarques suivantes :

- Les modes de translation selon X et Y sont obtenus, comme le prévoit la théorie, à des fréquences quasi nulles (de l'ordre de 10^{-5}).
- Les modes de rotation et de translation selon l'axe vertical Z sont obtenus à des fréquences pas tout à fait nulles (de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-2}), ceci à cause d'un problème de compensation numériquement imparfaite entre les énergies de déformations associées aux différents opérateurs. Ce problème est équivalent à celui qui a été évoqué en §9.1.3 mais concerne cette fois les opérateurs \mathcal{K}_G , \mathcal{K}_B et \mathcal{K}_Σ (cf. chapitre 5 pour plus d'informations quant à l'effet de chaque opérateur sur les différents modes de corps rigide). Il est certainement dû à des différences existant entre la formulation des éléments de plaque utilisés dans MSC/NASTRAN et celle que nous avons utilisée pour discrétiser les matrices K_Σ (et K_P). On remarque cependant que ce problème se limite aux seuls modes mettant en jeu un mouvement de rotation du système et n'affecte pas la précision sur les autres modes.
- Comme prévu, les 2 mouvements de rotation autour des axes horizontaux X et Y apparaissent à des fréquences non nulles et mettent en évidence un couplage avec certains modes de ballonnement antisymétriques (les fréquences des premiers modes de ballonnement sont répertoriées dans le tableau 9.8). Une réduction modale par projection sur les modes de ballonnement (cf. §7.2) permet de mettre en évidence les participations modales des 48 premiers modes de ballonnement. Cette décomposition est illustrée dans le cas du mode 9 (à 0.59 Hz) par la figure 9.16.
- Les autres modes obtenus, ne faisant intervenir aucune déformation de la structure (dans cette gamme de fréquences³) s'apparentent donc à des modes de ballonnement et leurs fréquences propres sont obtenues avec une bonne précision (par comparaison avec le tableau 9.8).

mode		fréq. (Hz)
1 et 2	trans. X et Y	0.
3 et 4	trans. Z et rot. Z	~ 0 .
5	rot. X + ballonnement 1	0.395
6	rot. Y + ballonnement 2	0.395
7 et 8	ballonnement 3 ou 4	0.53
9	rot. X + ballonnement 1 et 10	0.59
10	rot. Y + ballonnement 2 et 11	0.59
11	ballonnement 5	0.595
12 et 13	ballonnement 6 ou 7	0.62
...		...

TAB. 9.7 – Premiers modes couplés du réservoir type LOX en présence de la gravité

mode	fréq. (Hz)
1 et 2	0.41
3 et 4	0.53
5	0.595
6 et 7	0.62
8 et 9	0.70
10 et 11	0.705
12 et 13	0.77
...	...

TAB. 9.8 – Fréquences des premiers modes de ballonnement du réservoir LOX

Ces quelques observations nous permettent de valider, au moins d'un point de vue qualitatif, l'aspect prise en compte des couplages entre modes rigides et modes de ballonnement de notre modélisation. Cependant, on peut penser que l'erreur numérique observée sur les modes en rotation autour de Z se répercute sur les autres modes de rotation et la précision sur les fréquences des modes de rotation autour de X et Y est certainement assez mauvaise.

3. Ce modèle est tel que le couplage entre modes hydroélastiques et modes de ballonnement, observé au §9.2.2, n'intervient qu'à des fréquences plus élevées.

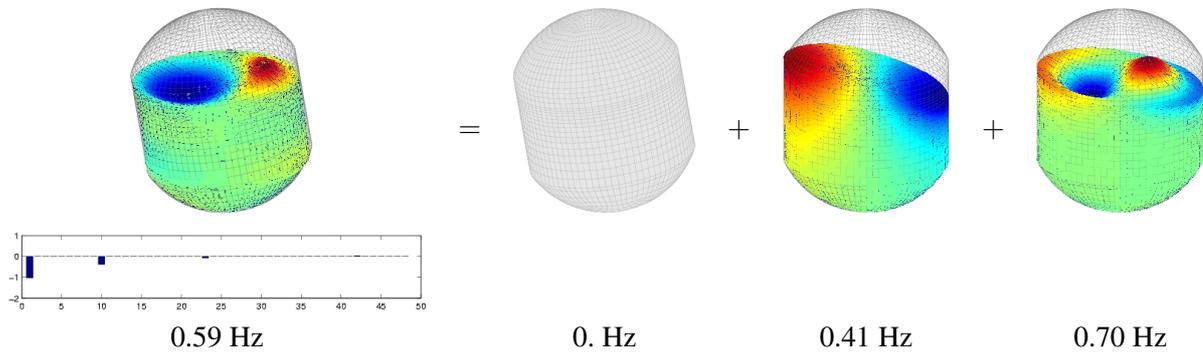
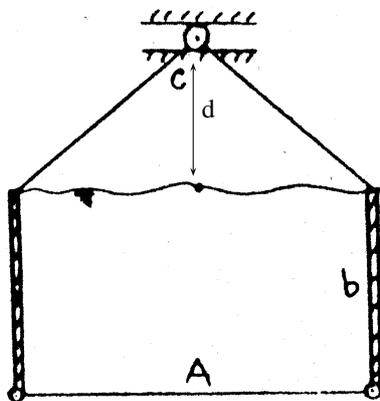


FIG. 9.16 – Décomposition du mode 9 couplant mode rigide et modes de ballotement

Benchmark de Kreis et Klein

L'étude du couplage entre mouvements d'ensemble et modes de ballotement est, à notre connaissance, assez peu traité dans la littérature. Un *benchmark* a cependant été proposé par Kreis & Klein en 1991 pour valider certains développements du logiciel FABE2D/ASKA, mais aucune confrontation avec des résultats obtenus dans d'autres logiciels, ou avec des mesures expérimentales, n'est présentée dans cet article [63]. Nous avons cependant utilisé ce *benchmark* comme modèle de test afin de comparer les résultats obtenus avec notre modélisation à ceux qu'ont obtenu Kreis et Klein.

Le modèle utilisé pour cette étude est représenté figure 9.17. Les cotés du réservoir (notés b) sont rigides, seul le fond (noté A) est flexible⁴. Le système est attaché par des éléments rigides à une charnière (liaison pivot, notée C) de façon à ce que le seul mode rigide du système soit la rotation autour de l'axe horizontal.



$$\begin{aligned}
 A &= 1. \text{ m} \\
 b &= 0.5 \text{ m} \\
 d &= 1. \text{ m} \\
 \rho_F &= 1000. \text{ kg/m}^3 \\
 e &= 5. \text{ cm} \\
 \rho_S &= 3000. \text{ kg/m}^3 \\
 E &= 10^{10} \text{ S.I.} \\
 \nu &= 0.3
 \end{aligned}$$

FIG. 9.17 – Modèle du benchmark de Kreis et Klein

La méthode employée par Kreis & Klein est très différente de la nôtre. Elle consiste à introduire dans le modèle éléments-finis des degrés de libertés supplémentaires pour représenter les mouvements de corps rigide du système qu'il faut donc connaître a priori. Un changement de repère permet ensuite d'étudier les déformations dans un système d'axes lié à l'objet dans lequel les modes rigides sont filtrés et les forces suivieuses invariantes [63, 64]. Le fluide est représenté comme un sous système couplé par un mouvement pendulaire à la structure.

4. Comme seul le couplage entre les modes de ballotement et les modes rigides de ce système nous intéresse ici, la structure peut-être considérée comme entièrement rigide.

Les premiers modes propres obtenus avec notre modélisation sur un modèle éléments-finis 3D du système proposé sont comparés dans le tableau 9.9 aux premiers modes propres obtenus par Kreis et Klein. L'analyse de ces résultats amène les remarques suivantes :

- Le premier mode obtenu avec la formulation de Kreis et Klein est un mode rigide pur à fréquence nulle. Selon nous, ce mode n'est pas physique puisque la rotation du réservoir entraîne un mouvement du liquide et un travail des forces de pesanteur. La fréquence d'un tel mode, qui ne laisse pas l'énergie du système invariante, ne peut être nulle. Le mode que nous obtenons avec notre modélisation (représenté figure 9.18) est différent de zéro et l'on voit nettement que le liquide se déplace dans le réservoir de façon à garder une surface libre horizontale. L'étude des coefficients de participation des différents modes de ballonnement nous indique que ce mode est légèrement couplé avec le premier mode de ballonnement mais le déplacement du liquide est représenté ici en majeure partie par la solution statique φ_0 de l'équation (7.1).
- Sur le second mode, les deux formulations s'accordent assez bien, au moins sur la déformée modale obtenue⁵ (cf. figures 9.19). L'erreur sur la fréquence propre est cependant de presque 10%. Une partie de cette erreur s'explique certainement par les problèmes d'imprécision numérique de notre modèle, évoqués plus haut.
- Les modes de ballonnement pur du liquide sont retrouvés par les 2 modélisations et à des fréquences identiques aux fréquences théoriques (cf. tableau 9.10).
- Kreis & Klein mettent en évidence un mode qu'ils appellent "mode de pendule" [63], couplant le mouvement de rotation du réservoir et le mode de ballonnement 4 (cf. figure 20(a)). Notre modélisation ne donne aucun mode correspondant : le mode de ballonnement 4 est obtenu mais, étant symétrique, il n'induit aucun couplage avec le mouvement de rotation de la structure (cf. figure 20(b)).

mode	Kreis et Klein fréq. (Hz)	FSI3D fréq. (Hz)	diff. (%)
rotation	0.	0.19	-
rot. + ballonnement 1	0.99	0.91	8.
ballonnement 2	1.25	1.25	0.
ballonnement 3	1.54	1.54	0.
rot. + ballonnement 4	1.76	-	-
ballonnement 4	1.77	1.77	0.
...	

TAB. 9.9 – Comparaison des premières fréquences propres du modèle de Kreis et Klein

Bien que les résultats obtenus par notre modélisation ne correspondent pas parfaitement aux résultats publiés par Kreis et Klein, il existe certaines similitudes qui tendent à montrer que notre modélisation, sans être spécifiquement prévue pour prendre en compte les couplages entre modes de ballonnement et mouvements de corps rigide, parvient à appréhender ce phénomène. Cependant, comme on l'avait pressenti au paragraphe 9.1.4, une erreur de presque 10% entre nos résultats et les résultats de Kreis et

5. La déformée modale que nous obtenons figure 19(b) semble ne pas vérifier l'hypothèse d'incompressibilité du liquide. Il s'agit en fait d'un problème de visualisation : en effet, la relation linéaire assurant la condition d'incompressibilité du liquide (4.4) ne fait intervenir que les déplacements normaux des contours du domaine fluide puisque, dans le cas de petites perturbations, l'effet des déplacements tangentiels sur la variation de volume est négligeable. Cependant, la représentation du mode à une échelle permettant la visualisation du mouvement de rotation accentue les déplacements horizontaux de la surface libre du liquide et donne cette impression que le volume du liquide n'est pas conservé.

mode	fréq. (Hz)
1	0.85
2	1.25
3	1.53
4	1.77
...	...

TAB. 9.10 – Fréquences analytiques des premiers modes propres de ballottement

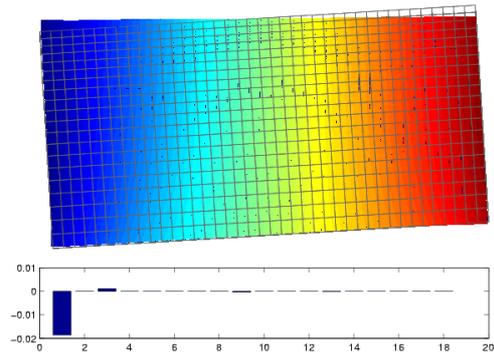
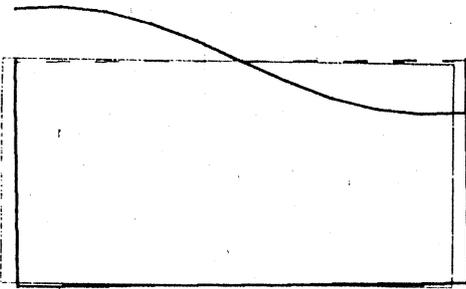
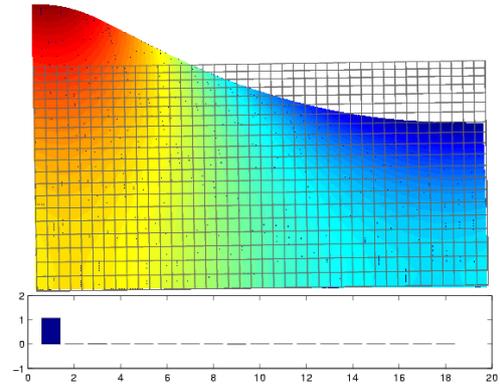


FIG. 9.18 – Mode de rotation du modèle de Kreis et Klein obtenu par notre modélisation (0.19 Hz)

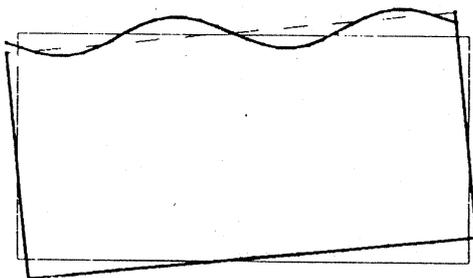


(a) mode obtenu par Kreis et Klein (0.99 Hz)

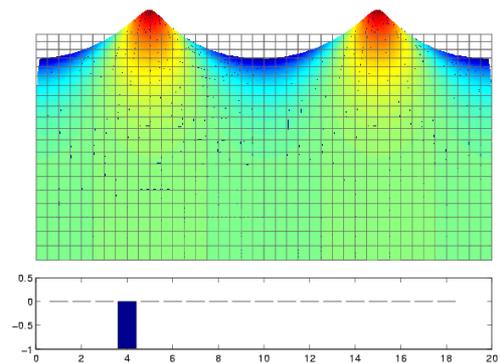


(b) mode obtenu par notre modélisation (0.91 Hz)

FIG. 9.19 – Mode du modèle de Kreis et Klein couplant mouvement de rotation et premier mode de ballottement



(a) mode obtenu par Kreis et Klein (1.76 Hz)



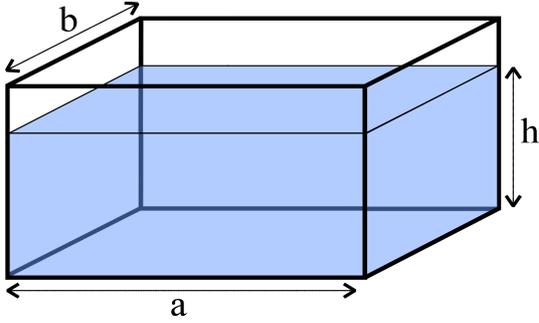
(b) mode obtenu par notre modélisation (1.77 Hz)

FIG. 9.20 – Mode du modèle de Kreis et Klein impliquant le 4^{ème} mode de ballottement

Klein (cf. figures 9.19) confirme que les problèmes d'imprécision numérique relevés sur les modes de rotation autour de l'axe z sont généralisés aux autres modes en rotation.

9.1.5 Modèles réduits

La méthode de réduction modale par projection sur les modes de ballotement, proposée au chapitre I.7, est validée sur un modèle de cuve parallélépipédique libre, représenté figure 9.21. Le maillage utilisé est identique à celui de la figure 9.2.



$$\begin{aligned}
 a &= 10. \text{ m} \\
 b &= 7. \text{ m} \\
 h &= 5. \text{ m} \\
 \rho^F &= 1000. \text{ kg/m}^3 \\
 e &= 3 \text{ cm} \\
 \rho^S &= 8000. \text{ kg/m}^3 \\
 E &= 2.e + 11 \text{ S.I.} \\
 \nu &= 0.25
 \end{aligned}$$

FIG. 9.21 – Cuve parallélépipédique

La force extérieure destinée à équilibrer le système est une force volumique appliquée à toute la structure, de densité f_0 égale à :

$$f_0 = - \left(1 + \frac{m^F}{m^S} \right) \rho_{00}^S g \quad \Rightarrow \quad g^{\text{éq.}} = - \frac{\int_{\Omega_{00}^S} f_0 \, d\Omega_{00}}{m^S + m^F} = g \quad (9.3)$$

de façon à ce que la gravité apparente, définie par l'équation (5.39) soit égale à la gravité g .

La convergence des modes propres du système réduit est étudiée en fonction de l'indice n de troncature de la base des modes de ballotement, défini tel que :

$$(7.1) \quad \longrightarrow \quad \tilde{\varphi} = \varphi^\circ + \sum_{\alpha=1}^n \kappa_\alpha \varphi_\alpha \quad (9.4)$$

Le graphe de la figure 9.22 représente l'évolution des fréquences propres hydroélastiques du modèle réduit (avec gravité) de la bande fréquentielle [0. 4.] Hz quand n augmente, tandis que le graphe de la figure 9.23 représente l'erreur relative par rapport à la fréquence propre du système complet (n infini). L'analyse de ces courbes amène les commentaires suivants :

- sur le graphe 9.22, on constate que les fréquences propres se stabilisent assez rapidement à partir du moment où les modes de ballotement qui interviennent principalement dans chacun des modes sont présents dans la base modale de projection (l'introduction de chacun de ces modes correspond aux sauts qui apparaissent au début de chaque courbe).
- Le graphe 9.23 confirme cette constatation : avec une projection sur les 20 premiers modes de ballotement du fluide, l'erreur relative sur les fréquences propres considérée est inférieure à 5 % et avec 60 modes, l'erreur maximale sur cette bande de fréquence est d'environ 2%. Il semblerait sur cet exemple que l'erreur relative maximale décroisse en $1/N$ mais des études plus approfondies seraient nécessaires pour généraliser ce résultat.

La comparaison entre les déformées modales obtenues avec le modèle réduit et celles du modèle complet (cf. figure 9.24) permet d'apprécier la légère perturbation apportée par la réduction de modèle à la

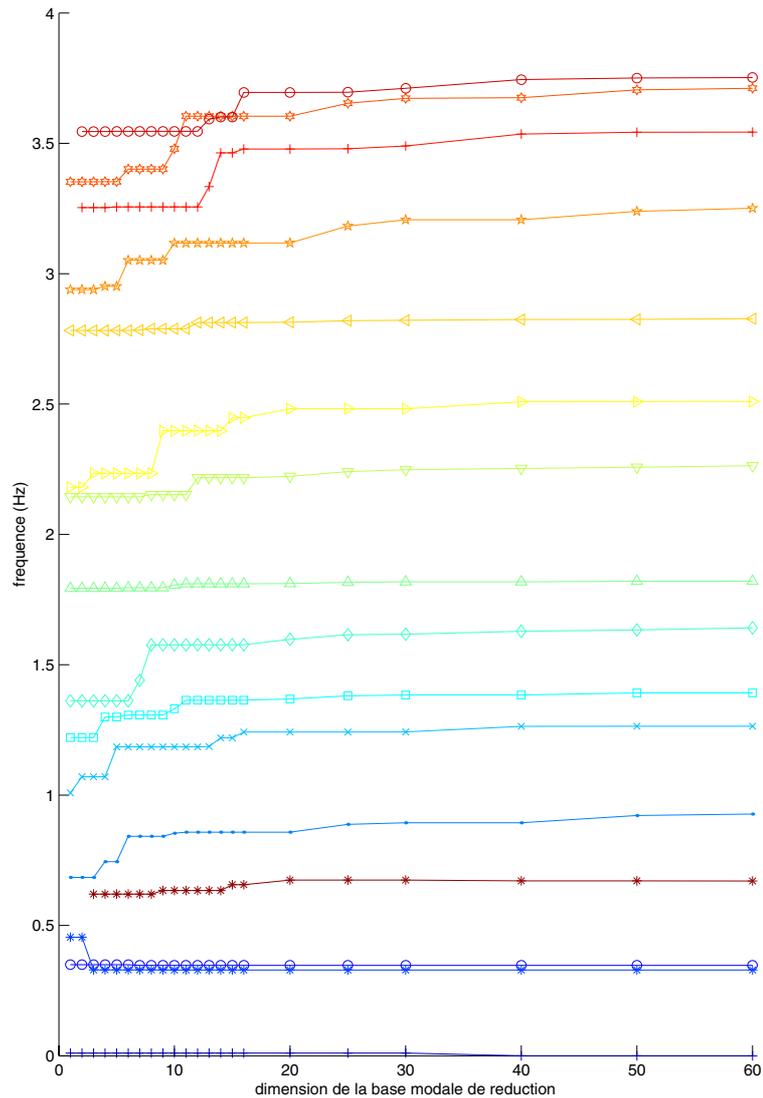


FIG. 9.22 – Evolution des fréquences propres hydroélastiques avec gravité en fonction du nombre de modes de ballonnement considérés

représentation de la surface libre du liquide :

- La convergence du premier mode hydroélastique illustré est rapide car les modes de ballonnement qu'il fait intervenir sont principalement contenus dans la base des 20 premiers modes. On constate en effet sur la représentation des facteurs de participations des modes de la base de réduction (coordonnées généralisées) que les 40 modes de ballonnement supplémentaires n'ont pratiquement pas d'utilité pour représenter ce mode. Les déformées de surface libre et les fréquences propres des modèles réduits sont d'ailleurs très proches de celles du modèle complet.
- Le deuxième mode représenté figure 9.24 fait intervenir des modes de ballonnement de plus haute fréquence (la participation des modes au delà du vingtième n'est pas négligeable). Même avec 60 modes, la représentation de la surface libre n'est pas encore fidèle à celle du modèle complet, cependant, l'erreur en fréquence reste inférieure à 2% car l'énergie associée aux modes de ballonnement manquants est très faible.

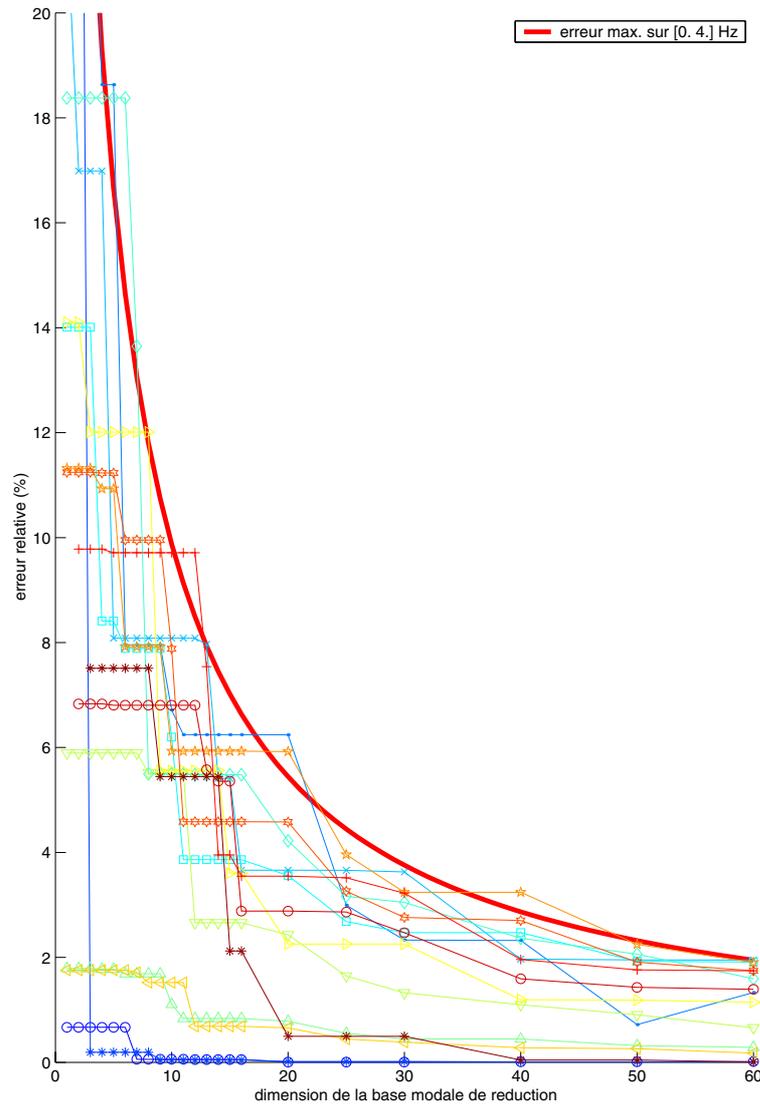


FIG. 9.23 – Evolution de l’erreur sur la fréquence propre des modes hydroélastiques avec gravité en fonction du nombre de modes de ballonnement considérés

- Sur les troisième et quatrième modes présentés, on constate que les oscillations de la surface libre diminuent quand la fréquence augmente. Certains modes de ballonnement de fréquence élevée sont nécessaires pour que la surface libre des modèles réduits converge vers celle de la solution complète, mais l’erreur en fréquence reste faible.

Les résultats présentés montrent des taux de convergence corrects qui permettent de valider cette méthode de réduction modale. L’erreur observée sur les premiers modes est très faible. En effet, d’après l’équation 7.10a, quand ω tend vers 0, κ_α tend vers 0 et la solution approchée du modèle réduit $\tilde{\varphi}$ tend vers la solution exacte φ° . À plus haute fréquence, l’erreur inhérente à la troncature modale, bien que faible, n’est par contre pas nulle. Si l’intérêt est porté sur la représentation du comportement à fréquence élevée, d’autres méthodes de réduction peuvent être employées qui donnent un comportement limite du modèle réduit à fréquence infini sans biais par rapport au modèle non réduit. On citera principalement la méthode

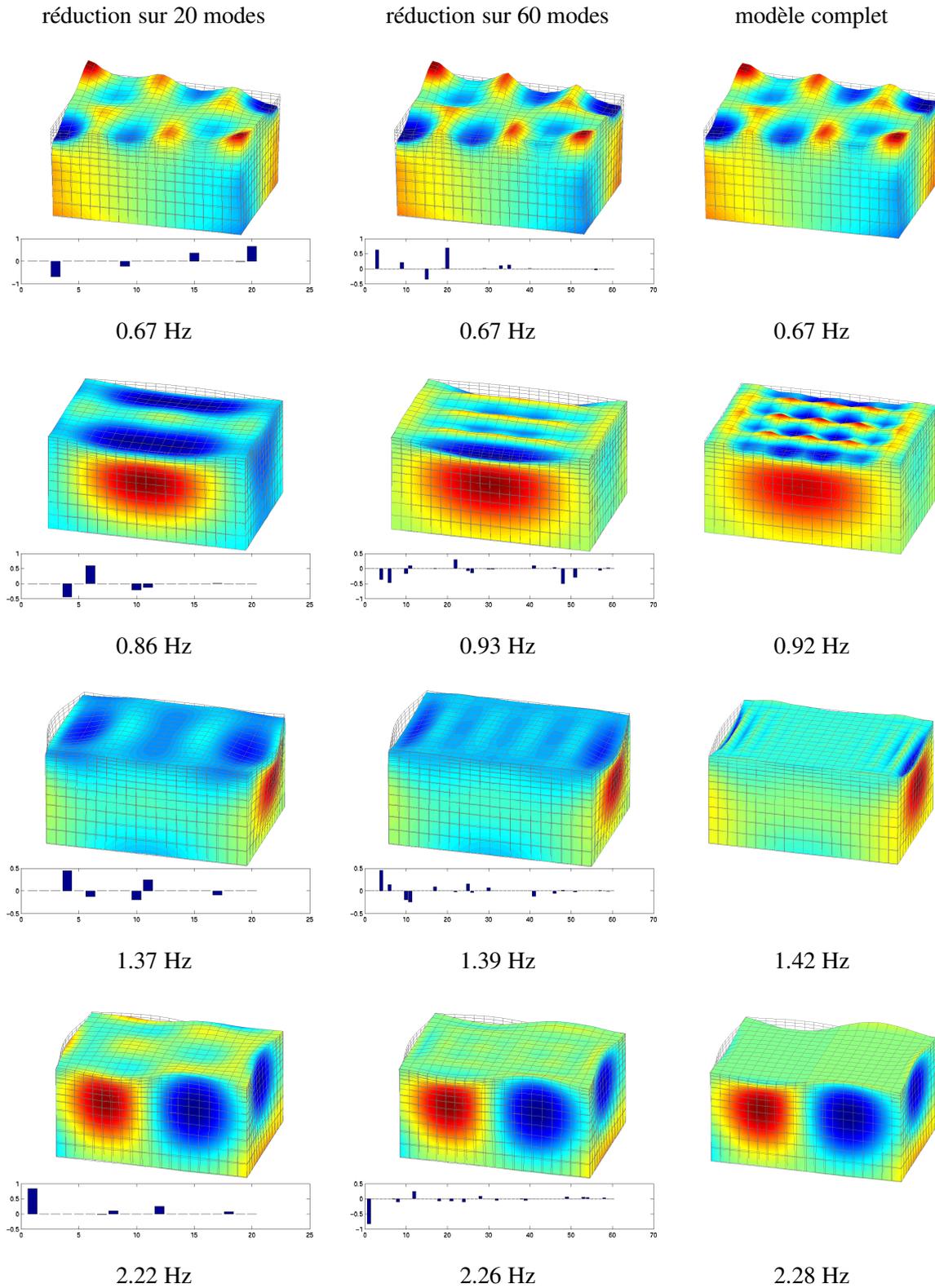


FIG. 9.24 – Evolution de certains modes hydroélastiques avec gravité en fonction du nombre de modes de ballottage dans la base de réduction

proposée par Morand & Ohayon au chapitre 9 de leur ouvrage [81] qui consiste à utiliser comme solution statique non pas φ° mais la solution hydroélastique⁶ sans gravité φ^∞ dans la projection de φ .

9.2 Validation expérimentale

9.2.1 Couplage entre mouvements d'ensemble et ballonnement pour un système libre

Les confrontations entre résultats de simulation numérique et mesures expérimentales pour des systèmes fluide-structure libres sont très rares dans la littérature et nous ne sommes pas parvenus à en obtenir. Ceci s'explique certainement par la relative complexité de mise en place d'un tel système expérimental. En effet, aux difficultés inhérentes à la représentation des conditions aux limites libres en laboratoire, s'ajoutent celles de la mesure des déplacement d'un liquide faiblement amorti.

Le modèle du *benchmark* présenté en §9.1.4 a l'avantage de mettre en évidence certains couplages entre modes rigides et ballonnement du liquide tout en simplifiant grandement le problème de support du montage. Dans le soucis de valider le modèle que nous proposons, une analyse expérimentale d'un tel système pourrait être menée par l'ONERA à court terme.

9.2.2 Couplage entre déformations hydroélastiques et ballonnement

La prise en compte de la gravité dans notre modèle intervient sur le calcul des modes hydroélastiques du système, d'une part, par un effet de précontrainte dans la structure et, d'autre part, par un couplage avec le ballonnement du liquide. Ces deux aspects sont validés indépendamment :

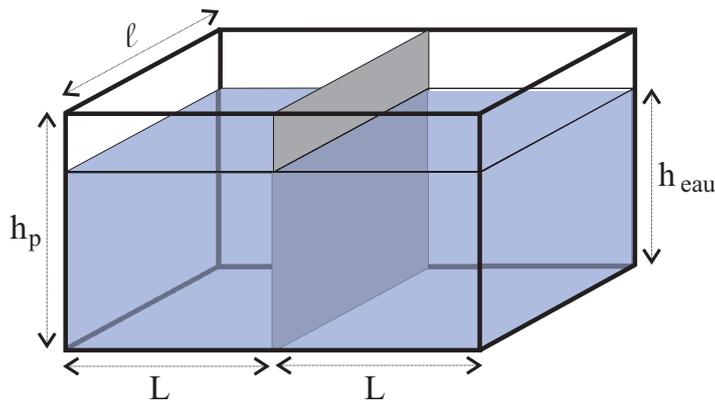
1. La prise en compte des effets de précontrainte se fait par l'intermédiaire de l'opérateur de raideur géométrique \mathcal{K}_G qui est calculé par le logiciel éléments finis à partir des chargements dans l'état initial. Cet aspect ne nécessite donc pas de validation spécifique.
2. La validation de la prise en compte des effets du couplage avec le ballonnement sera effectuée par comparaison avec les résultats d'une expérience menée à l'Institut National Polytechnique de Lorraine par X.-J. Chai en 1996 [25].

Le dispositif expérimental est constitué d'une cuve parallélépipédique fixe en plexiglass (considérée comme rigide). Une plaque métallique encastrée à sa base sur le fond du réservoir est la seule partie déformable de la structure (cf. figure 9.25). Elle sépare la cavité en deux compartiments⁷ remplis d'eau. La plaque est excitée par un électro-aimant selon un balayage en fréquence afin d'observer les résonances du système couplé (pour plus de détails sur le dispositif expérimental, se référer à [26]). La rigidité de la plaque a été choisie de manière à mettre en évidence des couplages entre les modes hydroélastiques du réservoir et les modes de ballonnement du liquide.

Les premiers modes couplés antisymétriques obtenus avec notre modélisation sont comparés aux trois modes mesurés expérimentalement. Les fréquences propres obtenues par le calcul sont très proches des

6. La solution hydroélastique est notée φ^∞ car elle correspond au comportement limite du fluide à fréquence infinie [81].

7. L'interstice entre la plaque et le réservoir est tellement faible que l'on peut considérer qu'il n'y a aucun échange de liquide entre les deux domaines fluides.



$$\begin{aligned}
 L &= 0.231 \text{ m} \\
 l &= 0.099 \text{ m} \\
 h_p &= 0.266 \text{ m} \\
 e &= 0.57 \text{ mm} \\
 \rho^S &= 7800. \text{ kg/m}^3 \\
 E &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\
 h_{\text{eau}} &= 0.21 \text{ m} \\
 \rho^F &= 1000. \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$

FIG. 9.25 – Schéma expérimental

fréquences mesurées (cf. tableau 9.11). Quant aux déformées modales, elles sont qualitativement identiques aux déformées observées et représentées par Chai [25] (cf. figures 9.26, 9.27 et 9.28). Le schéma 9.29 montre que ces 3 modes sont le résultat du couplage entre le premier mode hydroélastique de flexion de la plaque et les 3 premiers modes de ballottage du liquide. On constate que l'effet de la prise en compte de la gravité sur les fréquences hydroélastiques et la fluctuation de pression dans le fluide est significatif.

Du fait de la présence du liquide sur les deux faces de la plaque, les forces de pression s'équilibrent et ne génèrent aucune précontrainte dans la structure. L'influence de la gravité sur les modes propres se réduit donc purement à l'effet de ballottage de la surface libre. Cette validation expérimentale permet donc d'affirmer que cet effet est correctement représenté par notre modélisation.

Cependant, remarquons que la position verticale de la plaque implique que l'opérateur \mathcal{K}_Σ est identiquement nul. Cette configuration ne permet donc pas de tester l'effet de cet opérateur.

expérience	calcul	erreur
1.56 Hz	1.58 Hz	1.5 %
2.39 Hz	2.42 Hz	1. %
2.95 Hz	2.98 Hz	1. %

TAB. 9.11 – Comparaison entre fréquences propres de la cuve expérimentale mesurées et calculées

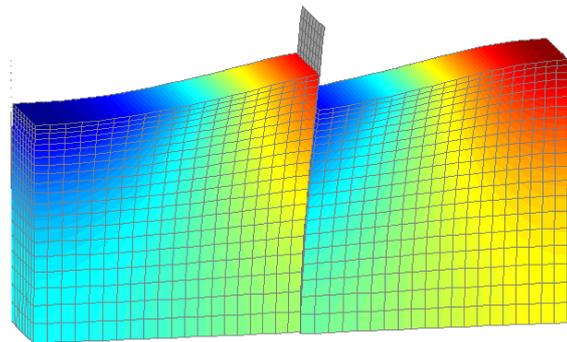


FIG. 9.26 – 1^{er} mode avec gravité de la cuve expérimentale

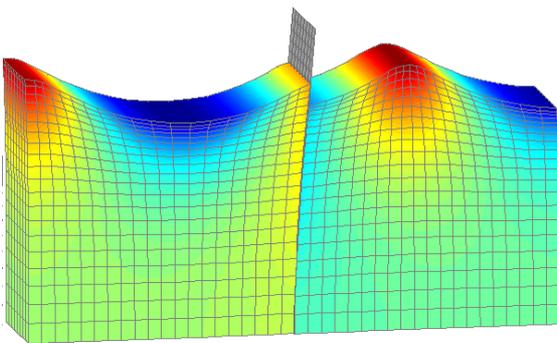


FIG. 9.27 – 2^{ème} mode avec gravité de la cuve expérimentale

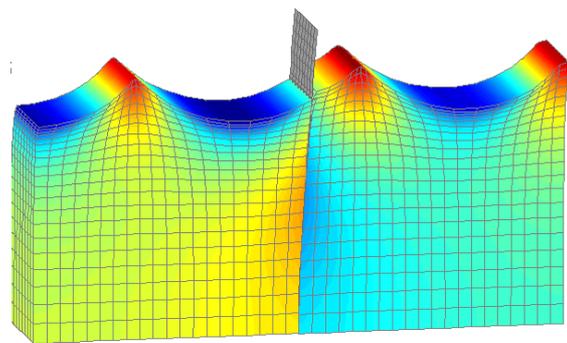


FIG. 9.28 – 3^{ème} mode avec gravité de la cuve expérimentale

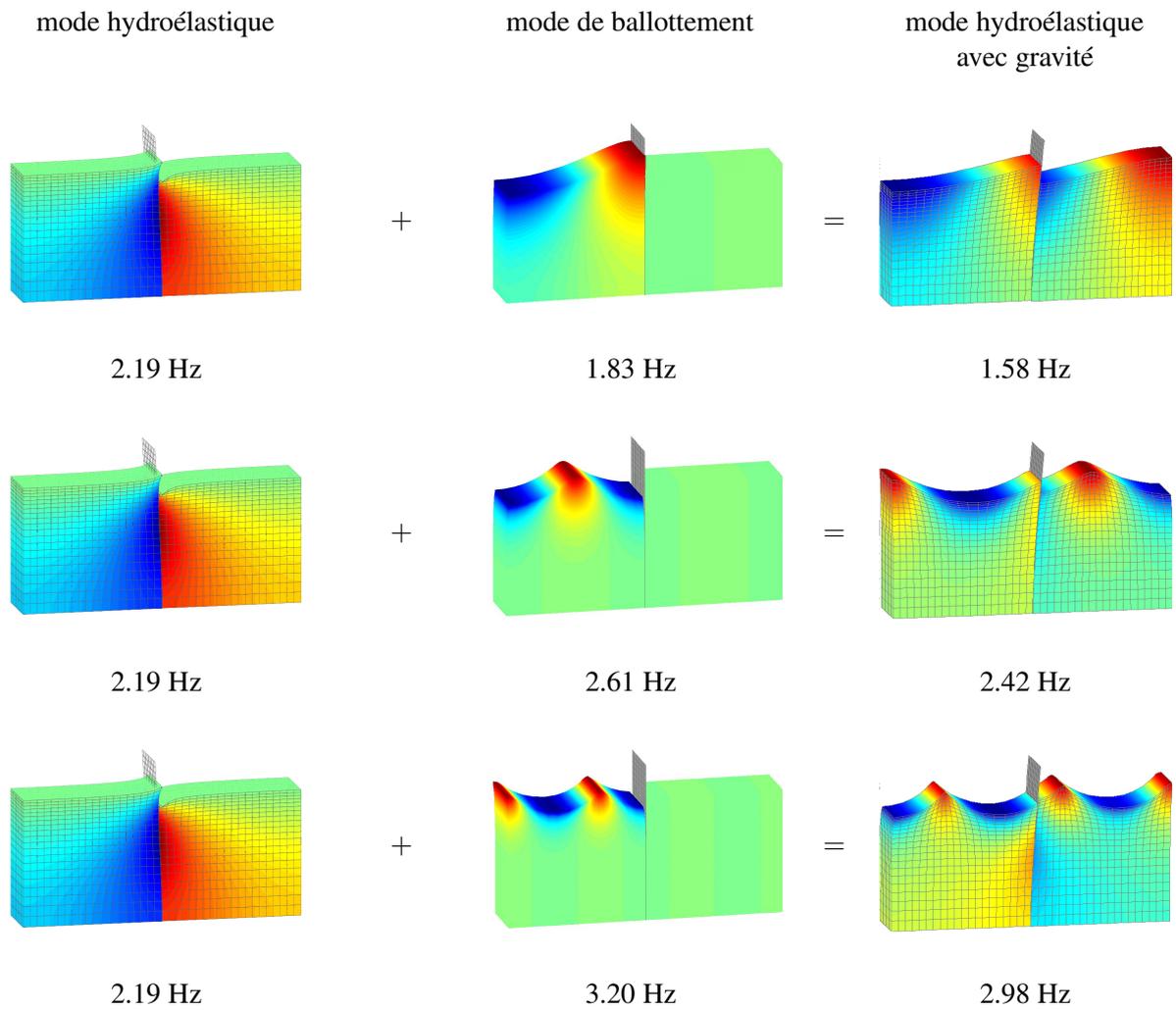


FIG. 9.29 – Effet du ballonnement sur le premier mode hydroélastique

Chapitre 10

Exemple d'application

Sommaire

10.1 Introduction	138
10.2 Étude du bidon 1200 L	139
10.2.1 Prise en compte du mouvement du fluide	139
10.2.2 Effets de la gravité	141
10.3 Étude du bidon sous voileure	144
10.4 Conclusion	144

10.1 Introduction

Dans le passé, l'effet du ballonnement des liquides contenus dans les réservoirs des avions était relativement peu important car le poids du carburant était généralement assez faible par rapport au poids total de l'engin et même quand une grande quantité de kérosène était emportée, c'était souvent dans plusieurs réservoirs séparés et de tailles réduites. Cependant, avec la recherche constante de gains sur la masse de la structure, le poids du kérosène devient de plus en plus comparable au poids à vide de l'engin, et comme le transport du carburant est de plus en plus souvent assuré par un ou deux grands réservoirs, l'effet du ballonnement devient de plus en plus problématique. En 1948, une des premières études du NACA menée par C. C. Smith [106] a démontré l'importance de ce problème et depuis, les entreprises du secteur aéronautique s'intéressent de près à l'influence que peut avoir le mouvement du kérosène sur la stabilité en vol de leurs engins et en particuliers sur la prédiction du phénomène de flottement. C'est dans ce cadre que Dassault-Aviation nous a proposé d'étudier les couplages fluide-structure à l'intérieur d'un réservoir de type bidon auxiliaire sous voilure d'avion militaire (cf. figure 10.1).

Les modèles utilisés actuellement par les industriels représentent le kérosène par un ensemble de masses ponctuelles réparties en divers points du modèle de réservoir. La première phase fut donc de montrer que la prise en compte des couplages hydroélastiques modifie suffisamment la base modale de la voilure pour avoir un effet non négligeable sur la prédiction du phénomène de flottement. Cette étude nous a également donné l'opportunité, dans un deuxième temps, d'estimer sur ce cas concret les effets du ballonnement et de la précontrainte liés à la gravité, afin de tirer certaines conclusions quant au domaine de pertinence de la modélisation que nous présentons ici.

La configuration étudiée, illustrée figure 10.2, est composée d'un modèle grossier de voilure, à laquelle sont suspendus deux réservoirs auxiliaires par l'intermédiaires de mâts d'attache. Le bidon de 2000 litres est maillé grossièrement et le kérosène qu'il contient est représenté par des masses ponctuelles. Un modèle fin du bidon de 1200 litres a été réalisé¹ et la modélisation du carburant est assurée par une représentation volumique (cf. figure 10.3). Ce sont les couplages hydroélastiques à l'intérieur de ce réservoir qui nous intéressent ici.



FIG. 10.1 – Avion militaire avec bidon auxiliaire sous voilure

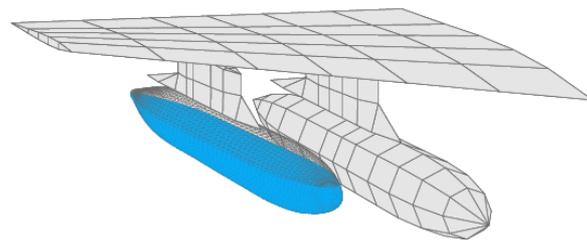


FIG. 10.2 – Modèle de voilure avec 2 bidons auxiliaires

1. Le modèle éléments finis tridimensionnel a été réalisé à partir des dimensions extérieures, de la répartition de masse et des fréquences des premiers modes de flexion/torsion.

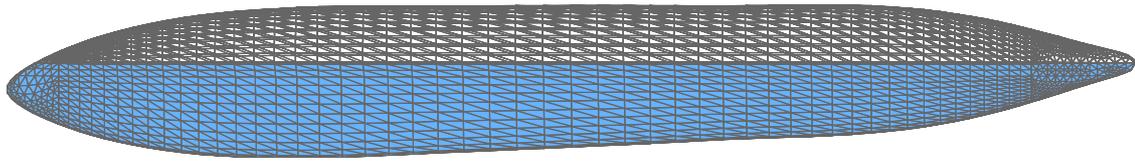


FIG. 10.3 – Maillage du réservoir

longueur $L = 4.78$ m

rayon max. $R_{\max.} = 0.62$ m

volume complet $V = 1.0205$ m³

volume liquide $V^F = 0.6465$ m³

volume gaz $V^G = 0.374$ m³

$\rho_F = 800$. kg/m³

$m^F = 517.2$ kg

$e = 2.38$ mm

$\rho_S = 7800$. kg/m³

$E = 6.8 \cdot 10^9$ S.I.

$\nu = 0.3$

$m^S = 140$. kg

noeuds	8626
tétraèdres fluide	33966
triangles sur la surface libre	1752
triangles sur l'interface fluide/structure	3160
triangles sur l'interface gaz/structure	2565
nombre total de triangles structure	5722

10.2 Étude du bidon 1200 L

On s'intéresse tout d'abord au bidon 1200 litres libre, isolé de la voilure, sans son mât d'attache, ni sa cage de renfort.

10.2.1 Prise en compte du mouvement du fluide

Le modèle utilisé par Dassault-Aviation pour le calcul de flottement ne tient compte d'aucun mouvement interne du fluide : celui-ci est considéré comme "gelé" et ses masses et inerties sont représentées par l'intermédiaire de masses ponctuelles réparties sur un modèle poutre équivalent au bidon (cf. figures 10.4).

La modélisation hydroélastique (sans gravité) permet de donner une première représentation des petits mouvements irrotationnels du carburant à l'intérieurs du réservoir. Ces déplacements internes au fluide ont un effet important sur l'inertie globale en rotation du carburant que l'on peut évaluer en calculant l'énergie cinétique du fluide pour des mouvements de rotation unitaires à partir des matrices de masse ajoutée M_A^F pour le modèle hydroélastique (cf. équation 1 ou (5.14) et (5.15) de [81]) et M_F^o pour le modèle hydroélastique avec gravité (cf. équation (7.15)). Les valeurs obtenues sont répertoriées dans le tableau 10.1. On constate que pour une même masse de fluide et une répartition à peu près équivalente, les énergies cinétiques en rotation obtenues avec le modèle hydroélastique sont bien inférieures aux énergies cinétiques obtenues pour un fluide considéré comme gelé : environ 50% de différence pour un mouvement de lacet (rotation autour de z) ou tangage (rotation autour de y). Quant au mouvement de roulis (rotation autour de x), l'énergie cinétique obtenue avec le modèle hydroélastique est nulle. En effet,

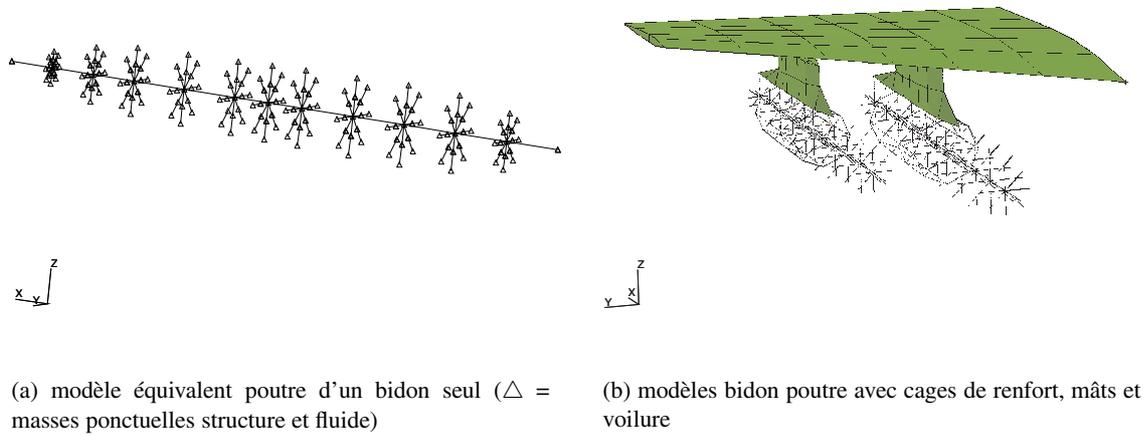


FIG. 10.4 – Modèle Dassault simplifié d'une aile avec 2 bidons auxiliaires

le fluide étant considéré comme non visqueux, une rotation du réservoir autour de son axe de révolution laisse le fluide invariant. Des résultats équivalents furent démontrés de manière analytique par Fraeijs de Veubeke pour des réservoirs entièrement remplis de liquide [39].

inerties du fluide en rotation ($N.m$)	fluide "gelé"	hydroélasticité (sans gravité)
roulis	15.8	0.
tangage	616.	342.
lacet	622.	288.

TAB. 10.1 – Représentation par le modèle hydroélastique des inerties en rotation du fluide

masse du fluide (kg)	hydroélasticité (sans gravité)
517.2	$m_x = 21.9$ $m_y = 255.7$ $m_z = 517.2$

TAB. 10.2 – Représentation par le modèle hydroélastique de la masse de fluide en mouvement

Cependant, si on s'intéresse aux mouvements de translation du système, on constate que le modèle hydroélastique classique (sans prise en compte des effets de gravité) donne une représentation imparfaite des mouvements du fluide pour des mouvements de translation horizontaux du système. Le calcul de l'énergie cinétique du fluide associée à des translations unitaires du système donne une idée de la masse de liquide mise en mouvement (cf. tableau 10.2). On constate que cette masse est inférieure à la masse globale du fluide pour les deux mouvements de translation horizontaux. En effet, l'hypothèse du modèle hydroélastique $\varphi = 0$ sur Γ (cf. chapitre 5 de [81]) empêche de représenter les mouvements horizontaux de translation de la surface libre du liquide puisque $U^F = \text{grad } \varphi = 0$ sur Γ . Si la surface libre du fluide est importante, cette contrainte peut immobiliser une fraction importante de la masse du liquide (cf. figure 10.5). Le déplacement vertical de la surface libre du liquide n'est par contre assujéti à aucune contrainte de ce type et la représentation de l'inertie en translation verticale du fluide est correcte.

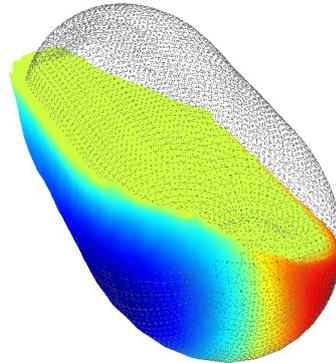


FIG. 10.5 – Représentation par le modèle hydroélastique du déplacement du fluide dans un mouvement de translation horizontale

10.2.2 Effets de la gravité

En prenant en compte les effets de la gravité, notre modélisation donne une représentation complète du mouvement de la surface libre du liquide et corrige le problème précédent. Puisque l'énergie potentielle de pesanteur sur la surface libre est restituée : $\varphi \neq 0$ sur Γ , le déplacement de la surface libre du liquide n'est soumis à aucune restriction et, comme le montre le tableau 10.3, la représentation de la masse du fluide en mouvement dans les trois translations est correcte.

On remarque également que la prise en compte de la gravité dans le modèle hydroélastique modifie de façon importante la valeur de l'énergie cinétique du fluide en rotation (appelée par abus de langage "inertie en rotation" du fluide dans le tableau 10.3). En effet, alors qu'avec un modèle hydroélastique sans gravité, le fluide tourne en bloc en suivant le mouvement de rotation du réservoir (figure 6(a)), dans notre modélisation, la présence de la gravité impose à la surface libre de rester horizontale (figure 6(b)). Une telle différence de comportement du fluide explique que l'effet de la gravité sur la valeur obtenue en tangage soit si important.

masses (<i>kg</i>) et inerties (<i>kg.m²</i>)	fluide "gelé"	hydroélasticité (sans gravité)	hydroélasticité avec gravité
m_x	517.2	21.9	571.2
m_y	517.2	255.7	571.2
m_z	517.2	517.2	571.2
I_{roulis}	15.8	0.	0.
I_{tangage}	616.	342.	1670.
I_{acet}	622.	288.	578.

TAB. 10.3 – Représentation de la masse et des inerties du fluide par les différentes modélisations

Le tableau 10.4 permet de constater l'effet de la prise en compte de la gravité sur les fréquences propres hydroélastiques du bidon isolé. Pour pouvoir distinguer dans l'effet de rigidification (ou d'assouplisse-

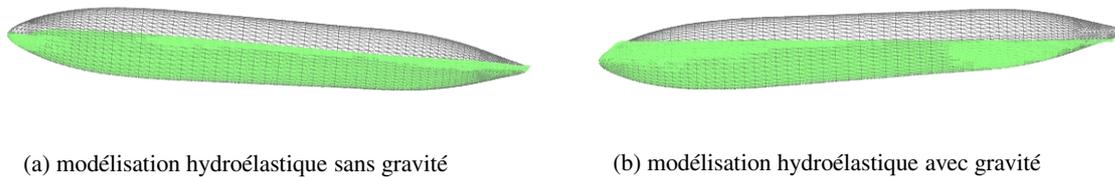


FIG. 10.6 – Déplacement du liquide pour un mouvement de rotation du réservoir

ment) du système, les contributions dues à la précontrainte hydrostatique ou au couplage avec le ballonnement, les résultats d'un calcul ne prenant en compte que l'effet de précontrainte sont également présentés. L'analyse de ces résultats amène les remarques suivantes :

- la prise en compte de la gravité peut modifier les fréquences propres hydroélastiques du système de presque 10%, mais l'effet semble diminuer quand la fréquence augmente.
- dans ce cas précis, la précontrainte hydrostatique explique en grande partie la rigidification apportée au modèle par la prise en compte de la gravité (cf. colonnes (1) et (2)).
- l'effet de couplage entre le ballonnement et les déformations hydroélastiques sur les fréquences des modes propres est quant à lui inférieur à 3%. Mis à part pour le premier mode élastique, sa prise en compte assouplit la structure (cf. colonnes (2) et (3)).
- des modes couplant mouvement de rotation en tangage du réservoir et ballonnement de la surface libre du fluide sont mis en évidence. La figure 10.7 représente l'un de ces modes.

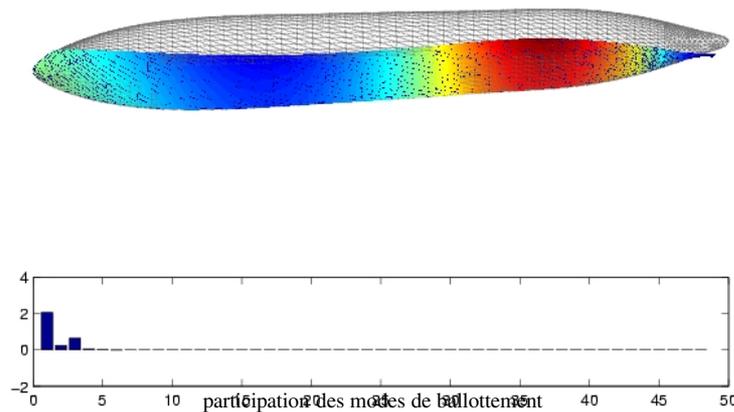


FIG. 10.7 – Mode couplant le mouvement de rotation en tangage du bidon et les 3 premiers modes de ballonnement du liquide (fréq. = 0.48 Hz)

Les figures 10.8 illustrent, pour l'un des modes obtenus, l'effet de la gravité sur le déplacement du fluide et sur sa fluctuation de pression eulérienne. Pour ces deux aspects, on note une nette amélioration de la représentation de la surface libre quand les effets de la gravité (et donc le ballonnement) sont pris en compte.

modélisation	(1) hydroélasticité (sans gravité)	(2) hydroélasticité avec précontrainte	(3) hydroélasticité avec gravité	diff. (1)/(3) (%)
trans. X, Y, Z	0.	0.	0.	
rot. X	0.	2.15	—	
rot. Y	0.	0.257	—	
rot. Z	0.	0.281	~ 0.	
modes couplant rotation et ballotement	—	—	0.385	
	—	—	0.48	
	—	—	0.624	
	—	—	...	
modes de ballotement pur	—	—	1.1	
	—	—	1.19	
	—	—	1.27	
	—	—	...	
modes hydroélastiques	4.91	5.34	5.35	8.5
	5.36	5.84	5.73	6.5
	7.78	8.35	8.24	5.5
	8.37	8.99	8.8	5.
	12.2	12.7	12.7	4.
	12.5	13.1	12.8	2.5
	13.3	14.2	14.1	6.
	13.9	14.8	14.4	3.5
	15.7	16.4	16	2.
	16.4	16.8	16.6	1.
	

TAB. 10.4 – Comparaison des fréquences propres du bidon isolé pour les différentes modélisations du fluide

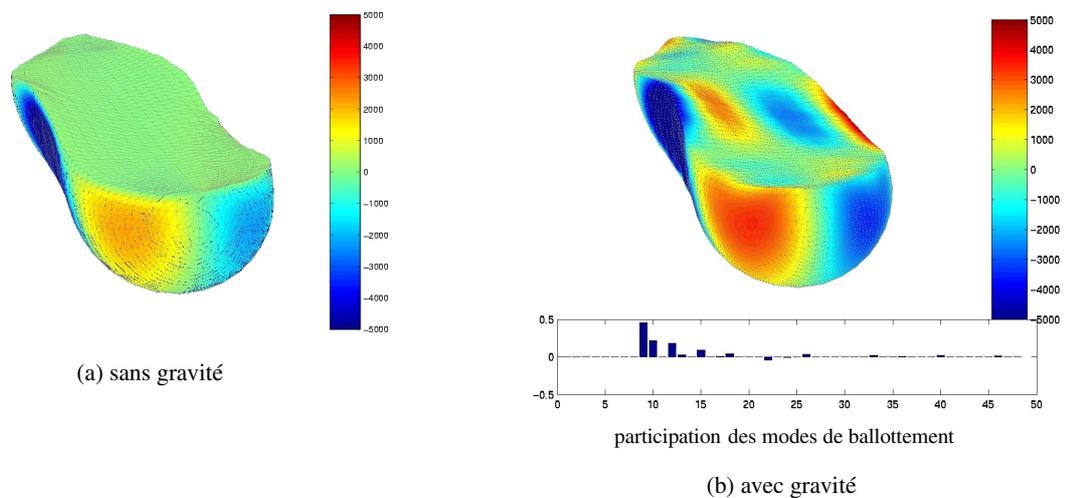


FIG. 10.8 – Fluctuation de pression eulérienne dans le liquide en présence ou non de la gravité

10.3 Étude du bidon sous voilure

Le bidon est désormais attaché à son pylône par une cage de renfort (cf. figure 10.2). L'ensemble est suspendu à la voilure encastrée à l'emplanture en trois points. Le second bidon de 2000 litres conserve la modélisation simplifiée d'origine.

L'étude préliminaire sur le bidon isolé a permis de mieux appréhender les avantages que pouvait présenter la modélisation hydroélastique avec gravité pour la représentation des inerties de l'ensemble bidon + carburant. Il s'agit ici de se rendre compte du véritable impact de cette modélisation sur les modes de l'ensemble voilure + bidon afin de déterminer si le coût de calcul supplémentaire est justifié, dans le cas présent, par rapport à un modèle sans gravité voire sans mouvement interne de fluide (fluide "gelé").

Le tableau 10.5 compare les fréquences des premiers modes obtenus avec les différentes modélisations². Les différences inhérentes entre les deux modélisations du bidon ainsi que les nombreux phénomènes qui interviennent (couplage hydroélastique, ballotement, précontrainte ...) rendent l'interprétation de ces résultats assez délicate. On peut cependant remarquer que :

- Le modèle hydroélastique (sans gravité) apporte une amélioration non négligeable par rapport au modèle de fluide gelé même si les différences sont bien inférieures aux différences observées sur le bidon isolé (cf. colonnes (1) et (2)). Un calcul de flottement à partir de cette base modale hydroélastique a montré que ces différences ont un effet sensible sur la prédiction des vitesses de flottement (cf. figure 10.9).
- Par contre, les effets de gravité ne semblent pas apporter d'amélioration significative au modèle hydroélastique (cf. colonnes (2) et (4)). En effet, le modèle étant relativement rigide, les effets de précontrainte hydrostatique sont négligeables (cf. colonne (3)). D'autre part, les corrections de masse et d'inertie apportées par la modélisation avec gravité ne modifient pas sensiblement les résultats. En effet, les modes considérés faisant intervenir essentiellement la flexion de la voilure, c'est l'inertie du liquide en translation verticale qui intervient principalement et les corrections apportées sur les inerties en translation horizontale n'interviennent qu'au deuxième ordre.
- La plupart des modes faisant intervenir simultanément des mouvements de lacet, roulis et tangage du bidon, il est difficile de discerner les effets liés aux modifications des inerties en rotation du liquide par la présence de la gravité. Cependant, le quatrième mode (cf. figures 10.10) qui met en évidence un mouvement de lacet du bidon de 1200 L presque pur, permet, puisque l'effet de précontrainte hydrostatique est négligeable (cf. colonnes (3) et (4)), d'observer l'effet, même très faible (1%), du ballotement du liquide sur un tel mode.

10.4 Conclusion

Malgré des effets notables lors de l'étude du bidon seul, la prise en compte de la gravité a un effet négligeable sur le système complet bidons sur aile encastrée. Ceci s'explique essentiellement par la relative rigidité du modèle : cette aile d'avion militaire est relativement courte et rigide et le bidon est de plus raidi par une cage de renfort. La modélisation hydroélastique sans gravité suffit donc pour rendre compte du couplage fluide structure pour de tels systèmes où mouvements de ballotement et déformations hy-

2. Seuls les six premiers modes sont présentés car l'appariage des modes suivants, obtenus avec les différentes modélisations, est plus difficile à réaliser.

modélisation	(1) fluide gelé	(2) hydroélasticité sans gravité	(1)/(2) diff. (%)	(3) hydroélasticité avec précontrainte	(4) hydroélasticité avec gravité	(2)/(4) diff. (%)
fréquences propres	4.01	4.14	3.	4.16	4.16	0.5
	4.47	4.74	6.	4.75	4.74	0.
	5.44	5.50	1.	5.50	5.50	0.
	6.81	6.72	-1.5	6.73	6.64	-1.
	7.15	7.08	-1.	7.09	7.08	0.
	7.91	7.94	0.5	7.94	7.94	0.

TAB. 10.5 – Comparaison des fréquences propres de l'aile pour les différentes modélisations du fluide

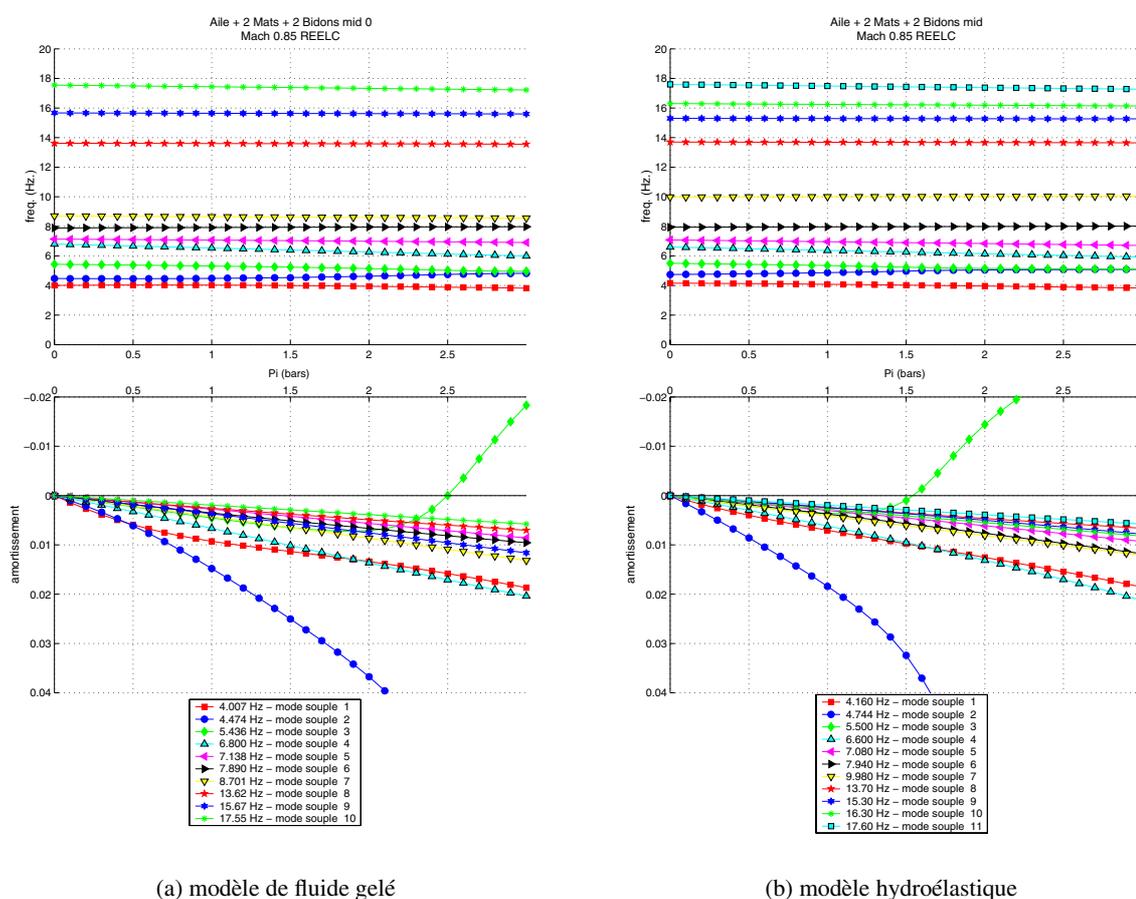


FIG. 10.9 – Comparaison des diagrammes de flottement obtenus selon la modélisation du fluide

droélastiques ont des domaines de fréquences assez éloignés. De futures études portant sur des modèles plus sensibles aux effets de gravité (ailes de grand allongement sur gros porteur, drone etc.) devraient permettre de préciser le "domaine de pertinence" de la formulation hydroélastique avec gravité.

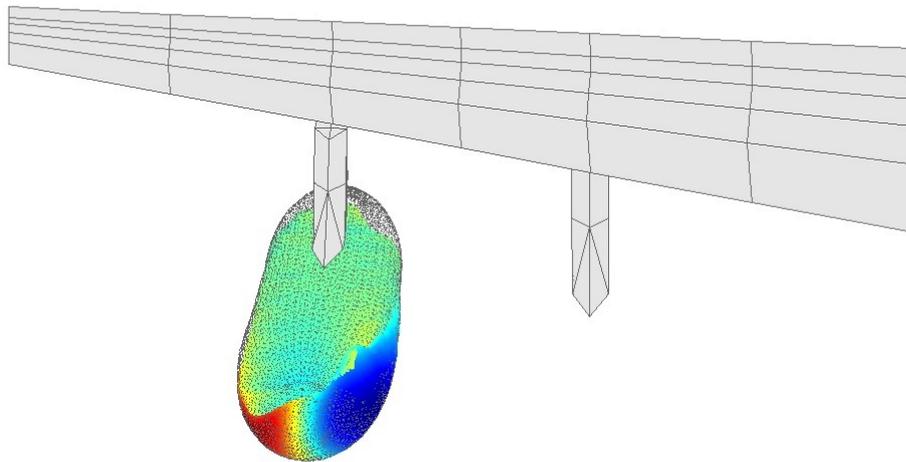


FIG. 10.10 – Mode hydroélastique avec gravité caractérisé par un mouvement de lacet du bidon 1200 L (fréq. = 6.64 Hz)

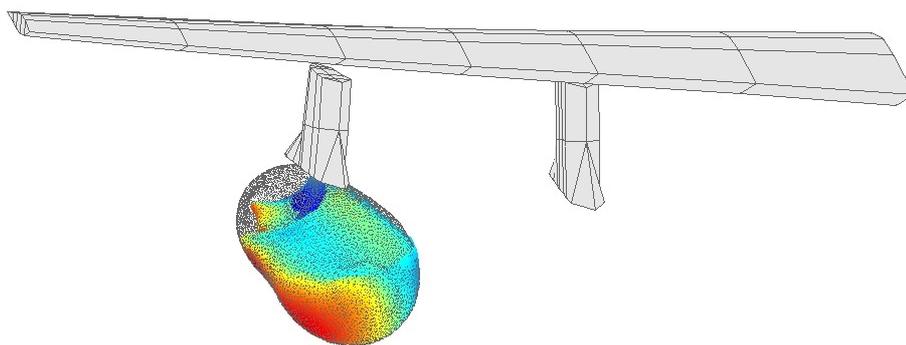


FIG. 10.11 – Mode hydroélastique avec gravité couplant une flexion de la voilure et un mouvement pendulaire du bidon 1200 L (fréq. = 10.0 Hz)

Conclusion générale

La modélisation hydroélastique avec effets de gravité que nous avons établie et validée dans ce document a montré de nombreux avantages sur les modélisations hydroélastiques antérieures (hydroélasticité sans gravité et modèle de Tong). Elle permet avant tout de tenir compte des couplages avec le phénomène de ballonnement qui, en fonction des propriétés géométriques et mécaniques du système, peuvent avoir une influence non négligeable sur ses fréquences propres et modes propres. D'autre part, ce modèle a prouvé sa capacité à représenter le couplage entre le ballonnement du liquide et les modes rigides de la structure, phénomène jusque-là mal modélisé.

Le formalisme lagrangien utilisé a permis de retrouver les équations établies par Morand et Ohayon en 1992, tout en évitant d'éventuelles confusions entre aspects lagrangien et eulérien dans les différents principes mis en jeu. De plus, cette méthode s'est avérée facilement généralisable à la prise en compte de phénomènes tels que les effets de forces suiveuses ou de pressurisation initiale du réservoir. D'autre part, la formulation tridimensionnelle établie permet d'appliquer ce modèle à des systèmes de géométrie quelconque quelque soit la configuration du liquide³ et peut-être implémentée dans n'importe quel solveur éléments-finis standard.

Certains développements restent cependant à faire, principalement pour résoudre les problèmes d'imprécision numérique sur les fréquences des modes rigides (cf. §9.1.4). L'erreur est certainement introduite par une incompatibilité entre la formulation des éléments de plaque structure du logiciel éléments-finis et celle que nous avons utilisée pour discrétiser les opérateurs fluides surfaciques. Ce peut être dû à l'omission des termes de rotation dans notre discrétisation (cf. §8.2.2 et 8.2.2) ou à celle des "termes en ν^2 " dans les formulations de plaques classiques comme l'avaient fait remarqué Morand & Ohayon dans leur article [79]. Comme ce problème de précision ne concerne que quelques modes, nous ne nous sommes pas encore attardés sur sa résolution, mais des études futures pourront y être consacrées.

D'autre part, les temps de calcul sont relativement longs du fait que la matrice de masse fluide est pleine. Dans le soucis de diminuer la taille des problèmes, il pourrait être intéressant d'adapter des techniques de maillage incompatible à l'interface fluide-structure afin que les raffinements de maillage dans le domaine fluide n'induisent pas une augmentation artificielle du nombre de d.d.l. dans la structure et réciproquement. Park *et al.* proposent dans cette optique une méthode par multiplicateurs de Lagrange "localisés" qui permet, d'une part, de résoudre les problèmes fluide et structure sur des maillages indépendants (voire dans deux solveurs distincts), mais aussi, d'éviter les problèmes numériques dus aux différences de raideur des deux milieux dans le cas d'un fluide compressible [92].

Sur le plan théorique, une analyse plus approfondie relative à l'influence des modes de ballonnement

3. Alors que les premières formulations avaient été développées pour des problèmes fluide-structure uniquement à géométrie axisymétrique (dans Astral ou Nastran par exemple).

d'ordre élevé doit également être menée (cf. §9.1.1). La difficulté réside dans le calcul de ces modes : en effet, même si les fréquences peuvent paraître faibles dans l'absolu (parfois seulement quelques Hertz), vis à vis du phénomène de ballonnement, il s'agit de hautes fréquences et les méthodes basse fréquence ne sont pas adaptées. S'il s'avérait que, dans certains cas, il était nécessaire de prendre en compte ces modes, leur calcul nécessiterait de développer des méthodes spécifiques telles que celles que proposent Ihlenburg et Babuška pour l'équation d'Helmoltz [55, 7].

D'un point de vue mathématique, la question de l'existence ou de la convergence des solutions de la formulation présentée ici n'a pas encore été examinée. Le modèle simplifié de Tong a fait l'objet d'une analyse approfondie [18, 97], mais l'opérateur d'élastogravité de l'équation 3.19 n'a jamais été étudié de façon aussi détaillée et ce sujet devra être l'objet d'études futures.

Des extensions aux travaux présentés ici peuvent également être envisagées : à court terme, il est prévu, dans le cadre du projet "Sciences et Technologies pour le Transport Supersonique", d'adapter cette formulation au calcul transitoire pour l'étude de chocs, nécessitant, entre autre, une investigation des effets de dissipation (effets visqueux [11, 10], etc.). D'autres concepts d'amortissement pourraient également être étudiés, que ce soit au travers de méthodes passives (recouvrement de la surface libre du fluide par une paroi [12], chicanes anti-ballonnement [23], dissipateur constitué de couches viscoélastiques précontraintes CLD [99], etc.) ou de contrôle actif [48].

La prise en compte simultanée des effets de gravité et de compressibilité pourrait être un thème de recherche intéressant. Certaines études ont montré récemment que la compressibilité de l'hydrogène liquide (LH_2) avait une influence non négligeable sur la prédiction des modes vibratoires de l'étage ESC d'Ariane V [95]. La difficulté essentielle à surmonter viendra de la non-homogénéité du fluide compressible en présence de la gravité⁴. Dans cette situation, la condition d'irrotationalité du fluide n'est plus vérifiée dans l'intégralité de son volume, mais uniquement dans tout plan perpendiculaire à la direction de la gravité. Des études menées par Andrianarison & Ohayon sont en cours actuellement sur ce thème [4, 5, 3].

4. Le milieu fluide est stratifié par la présence du champ de pesanteur.

Bibliographie

- [1] H. N. Abramson. *The dynamic behaviour of liquids in moving containers*. NASA SP-106, 1966.
- [2] M. Amabili, M. P. Païdoussis, and A. A. Lakis. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. *Journal of Sound and Vibration*, 213(2) :259–299, 1998.
- [3] O. Andrianarison. *Modélisation mécanique et numérique des interactions gravité/compressibilité dans les vibrations de structures couplées à des fluides internes*. PhD thesis, CNAM, Paris, en préparation.
- [4] O. Andrianarison and R. Ohayon. Linear vibrations of a fluid contained in a tank, with compressibility and gravity effects. In *Proc. of the European Conference on Computational Mechanics*, Munich, Germany, August 31-September 3 1999.
- [5] O. Andrianarison and R. Ohayon. Gravity-compressibility interaction effects in internal liquid-structure vibrations. Variational formulations. In *Proc. of the Sixth U.S. National Congress on Computational Mechanics*, Dearborn, Michigan, USA, August 1-4 2001.
- [6] F. Axisa. *Modélisation des systèmes mécaniques*, volume 3 : Interactions fluide-structure. Hermes Science Publications, 2001.
- [7] I. Babuška, F. Ihlenburg, E. Paik, and S. Sauter. A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. *Comp. Methods in Applied Mech. and Engr.*, 128(3-4) :325–359, 1995.
- [8] K.-J. Bathe. *Finite-Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [9] H. F. Bauer. Liquid sloshing in a cylindrical quarter tank. *AIAA Journal*, 1(11) :2601–2606, 1963.
- [10] H. F. Bauer and M. Chiba. Viscous hydroelastic vibrations in a cylindrical container with an elastic bottom. *Journal of Sound and Vibration*, 247(1) :33–57, 2001.
- [11] H. F. Bauer and W. Eidel. Free oscillations and response of a viscous liquid in a rigid circular cylindrical tank. *Aerospace Science and technology*, 3 :495–512, 1999.
- [12] H. F. Bauer and W. Eidel. Frictionless liquid sloshing in circular cylindrical container configurations. *Aerospace Science and Technology*, 5 :301–311, 1999.
- [13] T. Belytschko. Methods and programs for analysis of fluid-structure systems. *Nuclear Engineering and Design*, 42 :41–52, 1977.
- [14] T. Belytschko and W. K. Liu. Computer methods for transient fluid-structure analysis of nuclear reactors. *Nuclear Safety*, 26 :14–31, 1985.
- [15] T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Element Analysis for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, 2000.
- [16] H. Berger, J. Boujot, and R. Ohayon. Computations of elastic tanks partially filled with liquids. *J. Math. Anal. Appl.*, 51 :272–298, 1975.

- [17] A. Bermúdez, R. Durán, and R. Rodríguez. Finite element solution of incompressible fluid-structure vibration problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :1435–1448, 1997.
- [18] A. Bermúdez and R. Rodríguez. Finite element analysis of sloshing and hydroelastic vibrations under gravity. *Mathematical modelling and numerical analysis*, 33 :305–327, 1999.
- [19] A. Bermúdez, R. Rodríguez, and D. Santamarina. A finite element solution of an added mass formulation for coupled fluid-solid vibrations. *Numer. Math.*, 87 :201–227, 2000.
- [20] R. E. D. Bishop and W. G. Price. *Hydroelasticity of ships*. Cambridge University Press, 1979.
- [21] J. Bonet and R. D. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [22] D. E. Bourne and P. C. Kendall. *Vector Analysis and Cartesian Tensors*. Van Nostrand Reinhold, 1977.
- [23] V. A. Buzhinskii. Vortex damping of sloshing in tanks with baffles. *J. Appl. Maths Mechs*, 2 :217–224, 1998.
- [24] H. Cartan. *Calcul Différentiel*. Hermann Paris, 1967.
- [25] X.-J. Chai. *Influence de la gravité sur les interactions fluide-structure pour un fluide dans un domaine borné à surface libre*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1996.
- [26] X.-J. Chai, J.-M. Genevaux, and J.-P. Brancher. Gravity effects on the coupled frequencies of a 2D fluid-structure problem with a free surface. *Journal of Sound and Vibration*, 215(2) :331–342, 1998.
- [27] E. R. Christensen. Effect of pressure stiffness on the dynamics of solid rocket motors. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 17(1) :62–68, 1994.
- [28] E. R. Christensen. Vibration analysis of fluid-structure systems in the space shuttle main engine. In *Proc. of the 35th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, volume AIAA 94-1643, pages 2580–2587, Hilton Head, April 1994.
- [29] B. Christophe and N. Piet-Lahanier. Flexible launcher dynamics prevision. In *Proc. of the 45th Congress of the International Astronautical Federation*, Jerusalem, Israel, October 9-14 1994.
- [30] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1979.
- [31] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*, volume 1 : Three Dimensional Elasticity. North-Holland, 1993.
- [32] A. Combescure. *Méthodes Numériques*. photocopié, ENS Cachan, 2000.
- [33] A. Combescure, R. J. Gibert, F. Jeanpierre, A. Hoffmann, and M. Livolant. Fluid-structure interactions : a general method used in the CEASEMT computer programs. *Computer and Structures*, 12 :471–474, 1980.
- [34] R. N. Coppelino. *A numerical efficient finite element hydroelastic analysis*. NASA CR-2662, 1976.
- [35] R. R. Craig and M. C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *A.I.A.A. Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [36] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique, pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris, 1987.
- [37] E. de Langre. *Fluides et Solides*. Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [38] E. de Langre and O. Doaré. Flow-induced bending instabilities of long fluid-conveying risers. In *Proc. of the Euromech 398 colloquium*, Hamburg-Harburg, Germany, October 11-14 1999. Technische Universität.

-
- [39] B. Fraeijns de Veubeke. The inertia tensor of an incompressible fluid bounded by walls in rigid body motion. *International Journal of Engineering Science*, 1 :23–32, 1963.
- [40] J. F. Debonnie. On a purely lagrangian formulation of sloshing and fluid-induced vibrations of tanks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :1–18, 1986.
- [41] W. Ding and Q. Zeng. Identification in frequency domain for dynamic parameters of pendulum model of sloshing liquid. *Journal of Vibration Engineering*, 5(3) :211–218, September 1992.
- [42] M. P. Paidoussis. *Fluid-Structure Interactions : Slender Structures and Axial flow*, volume 1. London : Academic Press, 1998.
- [43] S. Dutta and M. K. Laha. Analysis of the small amplitude sloshing of a liquid in a rigid container of arbitrary shape using a low-order boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 :1633–1648, 2000.
- [44] O. M. Faltinsen and O. F. Rognebakke. Sloshing and slamming in tanks. In *Proc. of Hydronav'99 and Manoeuvring'99*, Gdansk-Ostrada, Poland, 1999.
- [45] M. F. Fisher, G. R. Schmidt, and J. J. Martin. Analysis of cryogenic propellant behavior in microgravity and low thrust environments. In *Proc. of the 27th Joint Propulsion Conference*, Sacramento, June 1991.
- [46] M. Géradin and D. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Applications to Structural Dynamics*. Wiley & Sons, 1997 (2nd Ed.).
- [47] P. Germain. *Mécanique*, volume 1. Ellipses, 1986.
- [48] V. Gorge. *Modélisation des vibrations de coques axisymétriques intelligentes contenant un fluide acoustique*. PhD thesis, CNAM Paris, France, Décembre 2001.
- [49] E. W. Graham. The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics. Technical Report SM 14212, Douglas Aircraft Company, 1951.
- [50] H. P. Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, 1986.
- [51] R. J. Hansman. Low gravity fluid measurement and fluid structure interactions. In *Proc. of the In-Space Research, Technology and Engineering Workshop*, volume 3, October 1985.
- [52] H. D. Hibbitt. Some follower forces and load stiffness. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 14 :937–941, 1979.
- [53] J. Sanchez Hubert and E. Sanchez Palencia. *Vibration and coupling of continuous systems – Asymptotic methods*. Springer-Verlag, 1989.
- [54] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, 1987.
- [55] F. Ihlenburg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Springer Verlag, 1998.
- [56] P. Mc Iver. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth. *J. Fluid Mech.*, 201 :243–257, 1989.
- [57] M. C. Junger and D. Feit. *Sound, structures and their interaction*. Acoustical Society of America Publications on Acoustics, 1993.
- [58] L. Kiefling and G. C.Feng. Fluid-structure finite element vibrational analysis. *A.I.A.A. Journal*, 14 :199–203, 1976.
- [59] M. C. Kim, S. S. Lee, , and A. M. Kabe. An analytical study of area formulations in fluid-structure interactions. *A.I.A.A. Journal*, pages 2001–2011, 1998.
- [60] M. C. Kim and S. S. Lee. Hydroelastic analysis of a rectangular tank. In *Proc. of MSC 1997 Aerospace Users' Conference*, 1997.
- [61] M. Klein, S. M. Niku, R. A. Adey, and A. Kreis. Analysis of the behaviour of liquid filled tanks by coupling boundary element and finite element methods. Technical Report www.compmech.com/beasy, Computational Mechanics BEASY, Ashurst Southampton, USA.

- [62] E. Kock and L. Olson. Fluid-structure interaction analysis by the finite-element method – a variational approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31 :463–491, 1991.
- [63] A. Kreis and M. Klein. On the analysis of liquid filled free-free tanks. In *Proc. of International Conference : Spacecraft Structures and Mechanical Testing*, pages 437–442, Noordwijk, The Netherlands, April 1991.
- [64] A. Kreis and M. Klein. On the analysis of free-free prestressed structures. In *Proc. of the International FEM'92 Congress*, pages 265–278, Baden-Baden, Germany, November 16-17 1992. IKOSS GmbH.
- [65] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique Théorique*, volume 6 : Mécanique des Fluides. Editions de Moscou, 1971.
- [66] S. S. Lee, M. C. Kim, and D. R. Williamson. Implementation of a fluid-structure interaction formulation using MSC/NASTRAN. In *Proc. of MSC 1997 Aerospace Users' Conference*, 1997.
- [67] A. W. Leissa. *Vibration of Shells*. NASA SP-288, 1973.
- [68] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures – Vibroacoustique, interactions fluide-structure*. Editions Eyrolles, 1988.
- [69] J. L. Liow. Boundary integral method for slosh simulation. In *Proc. of the 6th Asian Congress of Fluid Mechanics*, volume 2, pages 1524–1527, Singapore, May 22-26 1995. Nanyang Technological University.
- [70] W. K. Liu and D. C. Ma. Coupling effect between liquid sloshing and flexible fluid-filled systems. *Nucl. Engrg. Des.*, 72 :345–357, 1982.
- [71] W. K. Liu and R. A. Uras. Variational approach to fluid-structure interaction with sloshing. *Nuclear Engineering and Design*, 106 :69–85, 1988.
- [72] J. Mandel. *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, volume 1,2. Gauthier-Villars Éditeurs, 1966.
- [73] Y. Mauriot, G. Ordonneau, and N. Piet. Use of an elastic-acoustic element for Pogo stability analysis of the Ariane 5 upper stage. In *Proc. of the Launch Vehicle Vibrations, First European conference on Launcher Technology*. CNES Toulouse (France), December 1999.
- [74] J. W. Miles. *On the sloshing of a liquid in a flexible tank*, volume 25. June 1958.
- [75] J. W. Miles and B. A. Troesch. *Surface oscillations of a rotating liquid*. December 1961.
- [76] P. Mohan. *Development and applications of a flat triangular element for thin laminated shells*. PhD thesis, Blacksburg, Virginia, USA, November 1997.
- [77] N. N. Moiseyev and V. V. Romyantsev. *Dynamic stability of bodies containing fluid*. Springer-Verlag, 1968.
- [78] H. J.-P. Morand. Vibrations en vol des lanceurs à liquides : formulation variationnelle symétrique complète. In R. Ohayon J. M. Fouet, P. Ladevèze, editor, *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, volume 1. Pluralis, 1987.
- [79] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. Internal pressure effects on the vibration of partially filled elastic tanks. In *Proc. of the World Congress on Application of Finite Element Methods to Structural Mechanics*, Bournemouth (U.K.), 1975. TP ONERA 66.
- [80] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Interactions Fluides-Structures*. Collection RMA P.G. Ciarlet et J.L. Lions, Masson, 1992.
- [81] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Fluid-Structure Interactions*. Wiley, 1995.
- [82] G. D. Mortchéléwicz. Flutter simulations. *Aerosp. Sci. Technol.*, 4 :33–40, 2000.
- [83] T. Nakayama and K. Washizu. Nonlinear analysis of liquid motion in a container subjected to forced pitching oscillation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15 :1207–1220, 1980.

-
- [84] R. Ohayon. Reduced symmetric models for modal analysis of internal structural-acoustic and hydroelastic-sloshing systems. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering - special issue on Advanced Numerical Method for Fluid-Structure Interaction and Coupled Problems*, pages 3009–3019, March 2001.
- [85] R. Ohayon and C. A. Felippa. The effect of wall motion on the governing equations of contained fluids. *Journal of Applied Mechanics*, 57 :783–785, 1990.
- [86] R. Ohayon and H. Morand. Mechanical and numerical modelling of fluid-structure vibration instabilities of liquid propelled launch vehicle. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5(9) :1705–1724, 1995.
- [87] R. Ohayon and B. Nicolas-Vullierme. An efficient shell element for the computation of the vibrations of fluid-structure systems of revolution. In *Proc. of the SMIRT-6 Conference*. North-Holland, 1981.
- [88] R. Ohayon, R. Sampaio, and C. Soize. Dynamic substructuring of damped structures using Singular Value Decomposition. *Journal of Applied Mechanics*, 64(2) :292–298, 1997.
- [89] R. Ohayon and C. Soize. *Structural Acoustics and Vibration – Mechanical models, variational formulations and discretization*. Academic Press, 1998.
- [90] R. Ohayon and R. Valid. True symmetric variational formulations for fluid-structure interaction in bounded domains - finite element results. In E. Hinton R.W. Lewis, P. Bettess, editor, *Numerical Methods in Coupled Systems*, number 10. John Wiley and Sons Ltd, 1984.
- [91] L. Olson and T. Vandini. Eigenproblems from finite element analysis of fluid-structure interactions. *Computers and Structures*, 33 :679–687, 1989.
- [92] K. C. Park, C. A. Felippa, and R. Ohayon. Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :2989–3007, 2001.
- [93] I. M. Rapoport. *Dynamics of Elastic Containers Partially Filled with Liquids*. Springer-Verlag, 1968.
- [94] P.-A. Raviart and J. M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1982.
- [95] A. Rittweger, R. Gajdacz, and S. Dieker. The influence of compressibility on the dynamic behaviour of the ESC-tanks. In *Proc. of the Launch Vehicle Vibrations, First European conference on Launcher Technology*. CNES Toulouse (France), December 1999.
- [96] O. F. Rognebakke and O. M. Faltinsen. Damping of sloshing due to tank roof impact. In *Proc. of the 15th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Ceasarea, Israel, 2000.
- [97] P. Ryan. *Eigenvalue and eigenfunction error estimates for finite element formulations of slosh-structure interaction*. PhD thesis, Stanford University, USA, 1998.
- [98] J. Salençon. *Mécanique des Milieux Continus*, volume 1,2. Ellipses, 1988.
- [99] C. Saravanan, N. Ganesan, and V. Ramamurti. Study on energy dissipation pattern in vibrating fluid filled cylindrical shells with a constrained viscoelastic layer. *Computers & Structures*, 75 :575–591, 2000.
- [100] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Vibration analysis of elastic tanks partially filled with incompressible liquids in presence of a gravity field. In *Proc. of the Launch Vehicle Vibrations, First European conference on Launcher Technology*. CNES Toulouse (France), December 1999.
- [101] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Couplage structure-fluide interne en présence de la gravité. In *Actes du 5ème Colloque National en Calcul des Structures*, volume 1, pages 311–317, Giens (Var), France, Mai 2001. CSMA, Teknea.

- [102] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Interactions between sloshing modes and incompressible hydroelastic modes for internal fluid-structure systems. In *Proc. of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*. Elsevier Science Ltd., June 2001.
- [103] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Effect of gravity on a free-free fluid-structure system. In *Proc. of the 5th International Symposium on FSI, AE & FIV+N*, New Orleans, Louisiana, US, November 17-22 2002. ASME.
- [104] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Vibration analysis of elastic tanks partially filled with incompressible liquids in presence of a gravity field. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, to be submitted.
- [105] R. M. Schulkes and C. Cuvelier. On the computation of normal modes of a rotating, viscous incompressible fluid with a capillary free boundary. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 92(1):97–120, 1991.
- [106] C. C. Smith. The effect of fuel sloshing on the lateral stability of a free-flying airplane model. Technical Report NACA RM L8C16, Langley Memorial Aeronautical Laboratory, June 1948.
- [107] P. Le Tallec. *Introduction à la dynamique des structures*. Ellipses, 2000.
- [108] P. Tong. *Liquid sloshing in an elastic container*. AFOSR-66-0943, Cal. Tech., 1966.
- [109] B. Valette. About the influence of pre-stress upon adiabatic perturbations of the earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 85:179–208, 1986.
- [110] R. Valid, R. Ohayon, and H. Berger. Le calcul des réservoirs élastiques partiellement remplis de liquides pour la prévision de l'effet pogo. In *Actes du 23ème Congrès de la Fédération Internationale d'Astronautique*, Vienne, Octobre 1972.
- [111] O. C. Zienkiewicz and P. Bettess. Fluid-structure interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 13:1–17, 1978.
- [112] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1,2. Mc Graw-Hill, 2000 (5th Ed.).

Annexe A

Hypothèse des petites perturbations et état précontraint

Sommaire

A.1	Hypothèse des petites perturbations	156
A.1.1	Définition	156
A.1.2	Passage en H.P.P. des variables lagrangiennes aux variables eulériennes	156
A.1.3	Petites perturbations autour d'un état naturel	157
A.2	État précontraint	157
A.2.1	Petites perturbations autour d'un état précontraint	157
A.2.2	Application à un exemple simple	158
A.2.3	Effets du second ordre	158

Soit un système décrit dans sa configuration initiale Ω_0 par la variable lagrangienne X et soit x la variable eulérienne associée à l'état actuel Ω de ce système. Notons Φ la transformation définie par :

$$x = \Phi(X, t) = X + U(X, t) \quad (\text{A.1})$$

où U est le déplacement du système entre l'instant initial et l'instant actuel.

A.1 Hypothèse des petites perturbations

A.1.1 Définition

L'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.) suppose que le module des vecteurs du champ U reste "petit". Pour donner un sens précis à cette affirmation, on doit imaginer que le mouvement considéré appartient à une famille de mouvements dépendant d'un paramètre positif η pour lesquels le déplacement est de la forme :

$$U(X, t; \eta) = \eta \bar{U}(X, t) + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (\text{A.2})$$

On suppose alors que le mouvement étudié correspond à une valeur particulière de η [47]. L'hypothèse des petites perturbations suppose alors que η est suffisamment petit devant une longueur caractéristique du système pour que, dans le calcul des différentes grandeurs géométriques ou cinématiques, l'on puisse ne garder que les termes du développement en η , qui peuvent être explicitement calculés à l'aide du seul terme $\eta \bar{U}$ dans l'expression (A.2).

A.1.2 Passage en H.P.P. des variables lagrangiennes aux variables eulériennes

Soit $f_{\mathcal{L}}(X, t)$ et $f_{\mathcal{E}}(x, t)$ les expressions d'une même grandeur f en variables lagrangienne et eulérienne.

Proposition 2. *Dans le cadre de l'H.P.P., si f et ses dérivées premières sont $\mathcal{O}(\eta)$, alors leurs expressions sont les mêmes en variables lagrangiennes et eulériennes à un $\mathcal{O}(\eta^2)$ près, si bien qu'on peut supprimer les indices \mathcal{L} et \mathcal{E} . De même, pour ces grandeurs, il y a identité entre leurs dérivées partielles et dérivées partielles par rapport au temps (en variables eulériennes). On peut alors écrire :*

$$f_{\mathcal{E}}(x, t) \simeq f_{\mathcal{L}}(x, t) \quad \text{et} \quad f_{\mathcal{E}}(X, t) \simeq f_{\mathcal{L}}(X, t) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial x}(x, t) \simeq \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial X}(X, t) \simeq \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial X}(x, t) \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial t}(X, t) = \frac{df_{\mathcal{E}}}{dt}(x, t) \simeq \frac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial t}(x, t) \quad (\text{A.5})$$

On établit immédiatement cette proposition en remarquant que :

$$f_{\mathcal{L}}(X, t) = f_{\mathcal{E}}(X + U(X, t), t)$$

et en négligeant les termes en $\mathcal{O}(\eta^2)$ dans les développements limités en η .

A.1.3 Petites perturbations autour d'un état naturel

Un état naturel est par définition une configuration dans laquelle les forces extérieures et le champ des tenseurs de contrainte sont identiquement nuls. Dans le cadre de l'H.P.P., les forces extérieures volumiques et surfaciques ainsi que les tenseurs de contraintes dans l'état actuel sont donc des $\mathcal{O}(\eta)$. La Proposition 2 s'applique et on déduit alors que, à un $\mathcal{O}(\eta^2)$ près :

- les forces volumiques et surfaciques sont les mêmes, qu'elles soient définies dans la configuration actuelle ou dans la configuration de référence ;
- les matrices de Cauchy σ et de Piola-Kirchhoff Π et S représentant le tenseur des contraintes ont des expressions identiques ;
- toutes ces grandeurs ont même expression en variables lagrangiennes et en variables eulériennes, et la distinction devient superflue.

L'avantage considérable que représente le cas des petites perturbations autour d'un état naturel sur le cas général est que, d'une part, on peut travailler sur le domaine initial qui est fixe et connu (c'est l'avantage de toute formulation lagrangienne), et que, d'autre part, les grandeurs qui interviennent ont une signification directe dans la configuration actuelle (c'est l'avantage de toute formulation eulérienne). C'est donc une situation privilégiée qui cumule les avantages des 2 formulations.

A.2 État précontraint

A.2.1 Petites perturbations autour d'un état précontraint

Si la configuration de référence autour de laquelle s'effectue le mouvement est un état précontraint alors, même en H.P.P., les propriétés énoncées précédemment au §A.1.3 sont mises en défaut. En effet, les efforts extérieurs ainsi que les contraintes ne sont plus des $\mathcal{O}(\eta)$. En H.P.P., ces grandeurs s'écrivent :

$$f_{\mathcal{L}}(X, t) = f_{\mathcal{L}}^0(X, t) + \eta f_{\mathcal{L}}^1(X, t) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

On montrera alors que :

$$f_{\mathcal{E}}(x, t) = f_{\mathcal{L}}(x, t) - \frac{\partial f_{\mathcal{L}}^0}{\partial X_i} U_i(x, t) + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (\text{A.6})$$

L'hypothèse des petites perturbations apporte certes d'importantes simplifications par rapport au cas général, mais dans cette situation, il convient, d'une part, de travailler avec les équations écrites en variables de Lagrange (qui devront être distinguées des variables d'Euler) et, d'autre part, de considérer les différences entre les différentes matrices de contraintes [47]. En effet, on montre par exemple que, si S_0 désigne la matrice symétrique des contraintes dans l'état initial, et Π et S les matrices de contraintes non symétrique et symétriques de Piola-Kirchhoff dans l'état actuel, on a la relation :

$$\Pi = S + \nabla U S_0$$

A.2.2 Application à un exemple simple

L'exemple simple de l'étude des vibrations d'une masse centrée sur un câble tendu entre 2 points (tension T_0), illustré figure A.1, permet de mettre en évidence l'importance de la distinction entre formulation lagrangienne et eulérienne pour la prise en compte des effets de précontrainte.

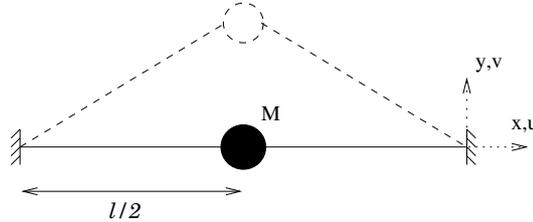


FIG. A.1 – Câble avec masse centrale

Si, malgré les remarques du §A.2.1, une formulation linéarisée classique est utilisée pour traiter ce problème, on obtient :

$$M \ddot{v} \delta v + \int_0^l \text{Tr}[\sigma \delta \varepsilon^\top] dl = 0 \quad (\text{A.7})$$

Comme $\sigma_{xx} = E A \varepsilon_{xx}$ est le seul terme *a priori* non nul du tenseur σ mais que $\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x = 0$, l'énergie potentielle de ce système est nulle et aucun mouvement vibratoire ne semble possible !

Par contre, si on utilise la formulation lagrangienne linéarisée en H.P.P. (1.26), l'équation du mouvement de notre problème s'écrit :

$$M \ddot{v} \delta v + \int_0^l \text{Tr}[\sigma \delta \varepsilon^\top + DU \sigma_0 (D\delta U)^\top] dl = 0 \quad (\text{A.8})$$

Le tenseur σ_0 représente la précontrainte due à la tension du câble dans l'état initial. Seul le terme $(\sigma_0)_{xx} = T_0$ de ce tenseur est non nul. Le terme d'énergie de déformation de l'équation précédente se simplifie donc en :

$$\text{Tr}[\sigma \delta \varepsilon^\top + DU \sigma_0 (D\delta U)^\top] = T_0 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial x} = \frac{4 T_0}{l^2} v \delta v \quad (\text{A.9})$$

Cette formulation permet donc de rendre compte de l'importance de la prise en compte de la précontrainte pour l'étude des vibrations de ce système. La pulsation propre obtenue est finalement égale à $\sqrt{\frac{4 T_0}{M l}}$.

A.2.3 Effets du second ordre

On peut proposer une présentation des effets de précontrainte un peu différente qui mette en évidence leur relation avec les termes du second ordre du tenseur des déformations¹ [46]. Pour cela, utilisons la formulation lagrangienne de l'énergie interne \mathbf{T} suivante :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int \text{Tr}[S(u) E(u)] \quad (\text{A.10})$$

1. Ce qui explique que les effets de précontrainte soient considérés comme des effets non-linéaires.

où $E(u)$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange défini par (1.13).

Dans le cadre de l'H.P.P., on peut écrire que² $E = E_0 + E_*$ où E_0 représente la déformation dans l'état initial et E_* la déformation additionnelle dans l'état actuel. La relation $S = C E$, qui fait intervenir le tenseur du 4^{ème} ordre C des coefficients matériels, permet d'écrire :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int \text{Tr} [C (E_0 + E_*) (E_0 + E_*)] = \mathbf{T}_0 + \int \text{Tr} \left[C E_0 E_* + \frac{1}{2} C E_* E_* \right] \quad (\text{A.11})$$

où \mathbf{T}_0 , l'énergie initiale de déformation, est une constante. Ce terme n'engendre donc pas de contribution et peut être oublié par la suite. Dans la déformation additionnelle E_* , séparons les termes linéaires ε_*^L , noté aussi ε_* , et quadratiques ε_*^Q :

$$E_* = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\mathbf{D}_X U + \mathbf{D}_X U^\top}_{\varepsilon_*^L} + \underbrace{\mathbf{D}_X U^\top \mathbf{D}_X U}_{\varepsilon_*^Q} \right) \quad (\text{A.12})$$

L'énergie de déformation s'écrit, en se limitant aux termes du second ordre en U :

$$\mathbf{T} = \int \text{Tr} \left[\underbrace{\sigma_0 \varepsilon_*^L}_{\mathbf{W}_0} + \sigma_0 \varepsilon_*^Q \right] + \frac{1}{2} \int \text{Tr} [C \varepsilon_*^L \varepsilon_*^L] \quad (\text{A.13})$$

On montre facilement que \mathbf{W}_0 s'annule avec le travail des forces de précontrainte qu'elles soient intérieures ou extérieures [46]. On vérifie que la variation des deux termes restants permet de retrouver une expression identique à celle qui apparaît dans l'équation (A.8). Cette formulation montre que le terme énergétique associé à la précontrainte σ_0 dépend directement de la prise en compte de la partie non linéaire ε_*^Q du tenseur de déformation.

Références bibliographiques

Cette partie est grandement inspirée de l'ouvrage de Germain [47] §VI.3 et VI.4, ainsi que de celui de Gérardin & Rixen [46] §4. Citons également l'ouvrage de Le Tallec [107] et l'annexe XIV du tome 2 de Mandel [72].

2. En grandes déformations, les déformations ne sont pas directement cumulatives comme en petites déformations : $E = E_0 + F_0^\top E_* F_0$.

Annexe B

Systeme libre et autoequilibrage

Sommaire

B.1	Théorie	162
B.1.1	Cas statique	162
B.1.2	Cas dynamique	164
B.2	Exemple d'un système à deux d.d.l.	167
B.2.1	Cas statique	167
B.2.2	Cas dynamique	169
B.3	Application à l'étude des vibrations d'une structure libre précontrainte	169
B.3.1	Étude de l'état initial précontraint	169
B.3.2	Vibrations libres autour de la configuration initiale précontrainte	171
B.3.3	Calcul de $g^{éq}$	172
B.4	Exemple d'application	173
B.4.1	Sphère sous pression libre dans un champ de pesanteur	173

B.1 Théorie

Soit une structure non amortie libre-libre soumise à des forces $F(\omega)$. La forme matricielle du principe général de la dynamique s'écrit pour cette structure :

$$K u - \omega^2 M u = F(\omega) \quad \text{avec} \quad \det(K) = 0 \quad (\text{B.1})$$

B.1.1 Cas statique

Traisons tout d'abord le cas $\omega = 0$ qui nous ramène à un problème statique. L'équation (B.1) devient alors :

$$K u = F \quad \text{avec} \quad \det(K) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Le théorème d'algèbre linéaire suivant permet d'affirmer que, la matrice de rigidité K étant singulière, le problème (B.2) n'a pas de solution dans le cas général où F est quelconque :

Théorème 1. *Le système linéaire $D x = y$ avec $\det(D) = 0$ admet une solution si et seulement si le second membre y est orthogonal aux solutions v du système linéaire homogène adjoint $D^\top v = 0$, soit $v^\top y = 0$.*

D'un point de vue mécanique, c'est la présence de modes de corps rigide qui explique l'indétermination sur u . On propose alors d'étudier séparément la composante rigide des déplacements de la structure, notée u_r , de la partie élastique u_e . Pour cela, il est nécessaire de décomposer les efforts F en forces d'inertie associées aux modes rigides U_r et en forces d'inertie associées aux modes¹ élastiques U_e :

$$F = M U_r \alpha + M U_e \beta \quad (\text{B.3})$$

L'équation (B.2) se décompose donc en deux relations :

$$K u_e = M U_e \beta = F^* \quad (\text{B.4a})$$

$$K u_r = M U_r \alpha = F_i \quad (\text{B.4b})$$

Le coefficient α peut être déterminé en prémultipliant la relation (B.3) par U_r^\top :

$$U_r^\top F = U_r^\top M U_r \alpha + \underbrace{U_r^\top M U_e}_0 \beta = U_r^\top M U_r \alpha \implies \alpha = [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top F \quad (\text{B.5})$$

Ceci permet d'obtenir l'expression de F^* :

$$F^* = F - M U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top F = A^\top F \quad \text{avec} \quad A = Id - U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top M \quad (\text{B.6})$$

- Le chargement F^* ainsi défini respecte la condition nécessaire et suffisante du théorème précédent ($U_r^\top F^* = 0$) et l'équation $K u_e = F^*$ a donc des solutions. Le chargement F^* est dit *autoéquilibré*.
- Cette condition appliquée au chargement F_i s'écrit $U_r^\top F_i = U_r^\top F \neq 0$. L'indétermination du problème se retrouve donc intégralement dans la deuxième équation et u_r ne pourra pas être déterminé.

1. La détermination de ces modes propres nécessite de connaître la répartition de masse M .

La matrice K étant toujours singulière, u_e ne peut pas être déterminé directement en inversant le système :

$$K u_e = F^* \quad (\text{B.7})$$

Il faut passer par une méthode dite "des liaisons temporaires" [46] qui consiste à rendre le système isostatique en fixant arbitrairement certains d.d.l. du système de manière à bloquer l'ensemble des mouvements de corps rigide. La matrice de raideur du système isostatique, notée K^{iso} , obtenue en éliminant les lignes et les colonnes correspondant à ces d.d.l., est désormais inversible. La solution du système élastique isostatique est notée u_e^{iso} :

$$u_e^{\text{iso}} = [K^{\text{iso}}]^{-1} F^{*\text{iso}} \quad (\text{B.8})$$

La prise en compte de ces liaisons temporaires a uniquement permis de fixer la position géométrique du système en levant l'indétermination sur l'amplitude des mouvements rigides². La solution u_e du système (B.7) sera donc obtenue en ajoutant à u_e^{iso} une combinaison linéaire des mouvements de corps rigide qui ont été bloqués par les liaisons temporaires. Cette composante rigide pouvant être exprimée à partir des modes U_r , on l'écrira sous la forme $U_r \mu$, où μ sera déterminé grâce à la relation d'orthogonalité qui existe entre U_r et u_e :

$$U_r^\top M u_e = 0 = U_r^\top M u_e^{\text{iso}} + U_r^\top M U_r \mu \implies \mu = - [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top M u_e^{\text{iso}} \quad (\text{B.9})$$

Finalement :

$$u_e = u_e^{\text{iso}} + U_r \mu = (Id - U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top M) u_e^{\text{iso}} = A u_e^{\text{iso}} \quad (\text{B.10})$$

Pour obtenir le champ de déplacement u complet, solution du problème de départ (B.2), il faudrait ensuite ajouter une composante rigide aux déformations élastiques u_e obtenues :

$$u = u_e + U_r \lambda \quad (\text{B.11})$$

mais, comme on l'a fait remarqué plus haut, dans le cas statique, une indétermination existe sur la valeur de λ .

Remarque 1

On peut montrer que la matrice A est indépendante du choix des modes rigides U_r , et que par conséquent, la construction de F^* et u_e est unique. En effet, soit U'_r une autre expression des mouvements de corps rigide de la structure. Il existe une relation linéaire entre U_r et U'_r que l'on note $U'_r = U_r D$. Le calcul de A' , matrice d'autoéquilibrage construite avec U'_r , donne une expression équivalente à A :

$$\begin{aligned} A' &= Id - U'_r [U_r'^\top M U_r']^{-1} U_r'^\top M \\ &= Id - U_r D [D^\top U_r^\top M U_r D]^{-1} D^\top U_r^\top M \\ &= Id - U_r D D^{-1} [U_r^\top M U_r]^{-1} D^{-\top} D^\top U_r^\top M \\ &= A \end{aligned}$$

2. On pourrait démontrer qu'une force autoéquilibrée ne génère aucune force de réaction au niveau des liaisons ajoutées.

Remarque 2

Dans le cas où le chargement F est autoéquilibré, c'est à dire si $U_r^\top F = 0$, le théorème nous assure de l'existence d'au moins une solution u . Cependant, si u est solution, alors $u + U_r \lambda$ est également solution $\forall \lambda \in \mathbb{R}^r$. Le système (B.2) a donc une infinité de solutions.

La matrice K étant singulière, une solution particulière u ne peut pas être déterminée directement par inversion du système $K u = F$. Il faut utiliser la méthode des liaisons temporaires et résoudre le système inversible $K^{\text{iso}} u^{\text{iso}} = F^{\text{iso}}$. L'ensemble des solutions s'écrit donc $u^{\text{iso}} + U_r \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}^r$.

Remarque 3

Le passage de l'équation (B.2) à l'équation (B.7) peut être vu comme un changement d'origine du repère, l'origine du nouveau repère dans lequel est défini u_e étant lié au centre de gravité de la structure.

B.1.2 Cas dynamique

On suppose désormais que $\omega \neq 0$.

La résolution du système dynamique (B.1) passe par l'inversion de la matrice $K - \omega^2 M$. Si ω^2 n'est pas valeur propre du système ($\det(K - \omega^2 M) \neq 0$), cette matrice est inversible et on obtient :

$$u = [K - \omega^2 M]^{-1} F \quad (\text{B.12})$$

Le champ de déplacement u ainsi obtenu contient à la fois la composante en mouvement de corps rigide et la partie déformation élastique. Pour isoler séparément ces deux composantes, on pourrait projeter u respectivement sur les modes rigides U_r ou sur les modes élastiques U_e de la structure :

$$u = u_r + u_e \quad \text{avec} \quad u_r = U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top M u \quad \text{et} \quad u_e = U_e [U_e^\top M U_e]^{-1} U_e^\top M u \quad (\text{B.13})$$

Cependant, en appliquant au cas dynamique la méthode d'autoéquilibrage mise en oeuvre dans le cas statique, on obtient directement une expression explicite des composantes rigide et élastique du déplacement u . Pour cela, décomposons à nouveau u en un déplacement élastique u_e et un mouvement d'ensemble exprimé sur la base des modes rigides U_r (cf. équation B.11).

Contrairement au cas statique, il n'y a pas d'indétermination sur le mouvement de corps rigide, et le coefficient λ peut être calculé en introduisant l'expression (B.11) dans (B.1) et en prémultipliant par U_r^\top :

$$\underbrace{U_r^\top K}_{0} u_e + U_r^\top \underbrace{K U_r}_{0} \lambda - \omega^2 \underbrace{U_r^\top M u_e}_{0} - \omega^2 U_r^\top M U_r \lambda = U_r^\top F \quad \Rightarrow \quad \lambda = -[U_r^\top M U_r]^{-1} \frac{U_r^\top F}{\omega^2} \quad (\text{B.14})$$

L'introduction des expressions de u et de λ dans la relation (B.1) permet d'écrire directement l'équation

en u_e du système autoéquilibré :

$$K u_e + \underbrace{K U_r}_0 \lambda - \omega^2 M u_e + M U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top F = F \Rightarrow \boxed{K u_e - \omega^2 M u_e = A^\top F} \quad (\text{B.15})$$

Si ω n'est pas valeur propre de $K - \omega^2 M$, on obtient les expressions des parties élastique u_e et rigide u_r du déplacement u solution du problème initial (B.1) :

$$u_r = -U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} \frac{U_r^\top F}{\omega^2} \quad (\text{B.16a})$$

$$u_e = [K - \omega^2 M]^{-1} A^\top F \quad (\text{B.16b})$$

Remarquons que lorsque ω tend vers 0 et que l'on se rapproche du cas statique, la composante rigide u_r devient infinie.

Remarque 4

La méthode exposée ci-dessus permet d'obtenir rapidement l'équation du système autoéquilibré (B.15). Cependant, on aurait pu suivre une démarche beaucoup plus proche de la méthode développée dans le cas statique comme le propose Géradin & Rixen dans [46]. Pour cela, récrivons le système (B.1) sous une forme qui nous rapproche de l'équation statique en notant Q l'ensemble des efforts appliqués à la structure (chargements extérieurs et forces d'inerties) :

$$K u = Q \quad \text{avec} \quad Q = F + \omega^2 M u \quad \text{et} \quad \det(K) = 0 \quad (\text{B.17})$$

Pour justifier l'existence d'une solution à cette équation, on vérifie que $U_r^\top Q = 0$:

$$U_r^\top Q = U_r^\top F + \omega^2 U_r^\top M u = U_r^\top F + \underbrace{U_r^\top (K u - F)}_0 = 0 \quad (\text{B.18})$$

Comme dans le cas statique, on cherche à décomposer u en une déformation élastique et un déplacement de corps rigide. L'ensemble des efforts Q est décomposé en forces d'inertie associées aux modes rigides U_r et en forces d'inertie associées aux modes élastiques U_e :

$$Q = M U_r \alpha + M U_e \beta \quad (\text{B.19})$$

De la même façon, l'équation (B.17) se décompose en deux relations (cf équations B.4) :

$$K u_e = M U_e \beta = Q^* \quad (\text{B.20a})$$

$$K u_r = M U_r \alpha \quad (\text{B.20b})$$

Par analogie avec le cas statique, Q^* est obtenu en filtrant les efforts Q par une matrice d'autoéquilibrage A (cf équation B.6) :

$$\begin{aligned} Q^* &= A^\top Q = A^\top F + \omega^2 A^\top M u_e + \omega^2 \underbrace{A^\top M U_r}_0 \lambda \\ &= A^\top F + \omega^2 M u_e - \omega^2 M U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} \underbrace{U_r^\top M u_e}_0 \\ &= A^\top F + \omega^2 M u_e \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

L'équation (B.20a) permet donc de retrouver l'équation dynamique autoéquilibrée (B.15).

D'autre part, la valeur de α est obtenue en prémultipliant (B.19) par U_r^\top :

$$\alpha = [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top Q = [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top F + \omega^2 [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top M u \quad (\text{B.22})$$

En reportant cette expression dans (B.20b), on retrouve l'équation vérifiée par u_r :

$$\underbrace{K U_r}_0 \underbrace{\lambda}_{\neq \infty} = M U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top F + \omega^2 M U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} \underbrace{U_r^\top M (u_e + U_r \lambda)}_0$$

$$0 = M U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} U_r^\top F + \omega^2 M u_r$$

La matrice M étant inversible, on retrouve l'expression de u_r (B.16a) :

$$u_r = -U_r [U_r^\top M U_r]^{-1} \frac{U_r^\top F}{\omega^2} \quad (\text{B.23})$$

Remarque 5

Dans le cas où la structure est excitée à une fréquence correspondant à l'un de ses modes propres ($\det(K - \omega^2 M) = 0$), elle entre en résonance et ses déformations élastiques u_e sont théoriquement infinies (en l'absence d'amortissement). Cette indétermination ne permet pas de calculer le déplacement total u , mais sa partie rigide u_r peut cependant être déterminée en appliquant une méthode inspirée de la méthode précédente.

En effet, récrivons (B.1) sous la forme :

$$K_{dyn} u = F(\omega) \quad \text{avec} \quad K_{dyn} = K - \omega^2 M \quad \text{et} \quad \det(K_{dyn}) = 0 \quad (\text{B.24})$$

Le théorème 1 permet d'exprimer l'alternative suivante (connue sous le nom d'*alternative de Fredholm*) :

- si le second membre F est orthogonal aux solutions v du système $(K - \omega^2 M)^\top v = 0$, il existe une solution (non unique) au problème,
- sinon, il n'y a pas de solution.

On vérifie que, les modes propres élastiques U_e étant les solutions du problème adjoint $K_{dyn} U_e = 0$, l'équation (B.24) n'admet pas de solution dans le cas général où $U_e^\top F \neq 0$. En effet, c'est l'indétermination sur les déformations élastiques qui empêche de calculer u . Il faut dans ce cas séparer la partie élastique du reste du déplacement pour déterminer le mouvement rigide.

Comme précédemment, F est décomposé en forces d'inertie associées aux modes rigides U_r et en forces d'inertie associées aux modes élastiques U_e :

$$F = M U_r \alpha + M U_e \beta \quad (\text{B.25})$$

F^\diamond est donc obtenu en filtrant des efforts F par une matrice d'autoéquilibrage B :

$$F^\diamond = B^\top F \quad \text{avec} \quad B = Id - U_e [U_e^\top M U_e]^{-1} U_e^\top M \quad (\text{B.26})$$

Le phénomène de déformation élastique ayant été filtré, la solution rigide u_r est donc solution de l'équation :

$$K_{dyn} u_r = B^T F(\omega) \quad (B.27)$$

Comme $K u_r = 0$ et que $\omega \neq 0$, cette relation donne directement :

$$u_r = - \frac{M^{-1} B^T F}{\omega^2} \quad (B.28)$$

B.2 Exemple d'un système à deux d.d.l.

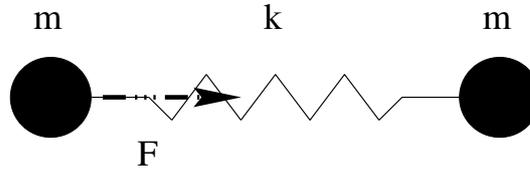


FIG. B.1 – Système libre à 2 d.d.l.

Considérons le système libre à deux d.d.l. illustré figure B.1 et appliquons à la masse 1 une force F . Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.29)$$

B.2.1 Cas statique

Intéressons nous tout d'abord au problème statique ($\omega = 0$).

Le problème devient :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.30)$$

Le système étant libre, la matrice K n'est pas inversible et possède un mode rigide $(1, 1)$. Le chargement $(F, 0)$ n'est pas équilibré puisque $(1, 1) \cdot (F, 0) \neq 0$, le système n'a donc pas de solution. Cependant, comme la théorie l'a montré, l'indétermination sur le déplacement de la structure est contenue dans la partie rigide, et les déformations élastiques peuvent par contre être calculées si la répartition de masse (matrice M) de la structure est connue.

En effet, en développant $(F, 0)$ en termes de force d'inertie associée au mode rigide $(1, 1)$ et force d'inertie associée au mode élastique $(-1, 1)$, on construit un vecteur d'efforts autoéquilibrés F^* :

$$\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -m \\ m \end{pmatrix} \implies \alpha = \frac{F}{2m}$$

$$F^* = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F/2 \\ F/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F/2 \\ -F/2 \end{pmatrix} = A^T F \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

L'équation en u_e (B.4a) s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F/2 \\ -F/2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

Puisque $(F/2, -F/2) \cdot (1, 1) = 0$, cette équation a une solution u_e . Pour la déterminer, appliquons la méthode des liaisons temporaires : comme K a un mode rigide, on place une liaison temporaire sur $u_1^e \text{ iso} = 0$ et on calcule $u_2^e \text{ iso}$:

$$k u_2^e \text{ iso} = -F/2 \quad \implies \quad u_2^e \text{ iso} = -\frac{F}{2k} \quad (\text{B.32})$$

Pour reconstituer la solution élastique sans liaison temporaire u_e à partir de u_e^{iso} , il faut ajouter une contribution proportionnelle au mode rigide qui a été supprimé :

$$\begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F}{2k} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.33})$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité de u_e et du mode rigide $(1, 1)$ par rapport à la masse, β peut-être déterminé :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \beta - \frac{F}{2k} \end{pmatrix} = 0 \quad \implies \quad \beta = \frac{F}{4k} \quad \implies \quad u_e = \begin{pmatrix} \frac{F}{4k} \\ -\frac{F}{4k} \end{pmatrix} \quad (\text{B.34})$$

La partie rigide du déplacement du système reste indéterminée car l'équation (B.4b) n'a pas de solution :

$$(B.4b) \quad \implies \quad \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^r \\ u_2^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F/2 \\ F/2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

Remarque 6

Si le chargement du système est équilibré au départ, par exemple si on applique des forces $F/2$ et $-F/2$ sur les masses 1 et 2 :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F/2 \\ -F/2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.36})$$

La condition d'existence des solutions est vérifiée, et le système a une infinité de solutions que l'on peut écrire sous la forme $u = u_p + \lambda (1, 1)$ si u_p est une solution particulière.

En appliquant la méthode des liaisons temporaires à l'équation (B.36), on détermine une solution particulière u^{iso} :

$$k u_2^{\text{iso}} = -\frac{F}{2} \quad \implies \quad u^{\text{iso}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F}{2k} \end{pmatrix} \quad \implies \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F}{2k} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{B.37})$$

B.2.2 Cas dynamique

Désormais, on suppose que $\omega \neq 0$ et l'on considère à nouveau l'équation (B.29) :

$$\begin{bmatrix} k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

La résolution directe s'effectue par inversion du système, ce qui nécessite que $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{2m}}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{F}{\omega^2 m (\omega^2 m - 2k)} \begin{pmatrix} (k - \omega^2 m) \\ k \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

Cette solution contient une partie élastique u_e et une partie rigide u_r , que l'on peut extraire par projection sur les modes rigide (1, 1) et élastique (1, -1) :

$$\begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \frac{F}{2(2k - \omega^2 m)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^r \\ u_2^r \end{pmatrix} = -\frac{F}{2m\omega^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.41})$$

Remarquons que lorsque ω tend vers 0, on retrouve la déformée élastique statique, mais la déformée rigide devient infinie.

On vérifie également facilement que les deux démarches d'autoéquilibrage redonnent exactement les mêmes expressions de u_e et u_r .

B.3 Application à l'étude des vibrations d'une structure libre précontrainte

Dans le cas d'une structure libre, la configuration initiale précontrainte n'est pas un état statique (contrairement au cas d'une structure encastree) : La structure vibre autour d'une trajectoire. La théorie précédente permet de décomposer le mouvement de la structure en un mouvement de corps rigide (trajectoire moyenne) et une déformation élastique autour de celle-ci, et d'établir les équations qui régissent ces deux mouvements.

Les forces extérieures f_0 et f sont décomposées en forces suivieuses f_F dépendantes de u ou u_0 , et charges mortes f_D .

B.3.1 Étude de l'état initial précontraint

Dans l'état initial, la structure est précontrainte par des forces surfaciques f_0 et un champ de pesanteur g . L'équation variationnelle associée s'écrit :

$$\forall \delta u \text{ c.a.}, \int_{\Omega_0} \sigma(u_0) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u}_0 \cdot \delta u \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot \delta u \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot \delta u \, d\Sigma_0 \quad (\text{B.42})$$

La structure étant libre, son déplacement u est décomposé (par analogie avec la méthode exposée au §B.1.2) en une déformation élastique u_0^e et un mouvement d'ensemble exprimé sur les modes rigides U_r , avec les propriétés suivantes :

$$u_0 = u_0^e + \sum_r \lambda_0^r U_r \quad (\text{B.43a})$$

$$\text{avec } U_r \quad \text{tel que} \quad \int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_{r'} \, d\Omega_0 = \mu_r \delta_{r r'} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_0} \sigma(U_r) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega_0 = 0 \quad (\text{B.43b})$$

$$\text{et } u_0^e \quad \text{tel que} \quad \int_{\Omega_0} \rho_0 u_0^e \cdot U_r \, d\Omega_0 = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_0} \sigma(u_0^e) : \varepsilon(U_r) \, d\Omega_0 = 0 \quad (\text{B.43c})$$

En utilisant la décomposition de u_0 et les propriétés précédentes, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \forall \delta u \text{ c.a.}, \quad \int_{\Omega_0} \sigma(u_0^e) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega_0 + \sum_{r'} \ddot{\lambda}_0^{r'} \int_{\Omega_0} \rho_0 U_{r'} \cdot \delta u \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u}_0^e \cdot \delta u \, d\Omega_0 = \dots \\ \dots \int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot \delta u \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot \delta u \, d\Sigma_0 \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

En prenant $\delta u = U_r$, il est possible de déterminer les coefficients λ_0^r et d'exprimer \ddot{u}_0^r :

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_0^r \int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot U_r \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot U_r \, d\Sigma_0 \\ \Rightarrow \boxed{\ddot{u}_0^r = \sum_r \left(\frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot U_r \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot U_r \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega_0} \right) U_r} \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

En réintroduisant l'expression de \ddot{u}_0^r dans (B.44), on obtient l'équation autoéquilibrée en u_0^e :

$$\begin{aligned} \forall \delta u \text{ c.a.}, \quad \int_{\Omega_0} \sigma(u_0^e) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u}_0^e \cdot \delta u \, d\Omega_0 + \dots \\ \dots \sum_r \left(\frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot U_r \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot U_r \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega_0} \right) \int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot \delta u \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot \delta u \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot \delta u \, d\Sigma_0 \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} \forall \delta u \text{ c.a.}, \quad \int_{\Omega_0} \sigma(u_0^e) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u}_0^e \cdot \delta u \, d\Omega_0 = \dots \\ \dots \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot \delta u \, d\Sigma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \underbrace{\left(g - \sum_r \left(\frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot U_r \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot U_r \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega_0} \right) U_r \right)}_{g^{\text{éq}}} \cdot \delta u \, d\Omega_0 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Si on fait l'hypothèse que, dans l'état initial, les déformations élastiques sont statiques, $\ddot{u}_0^e = 0$:

$$\forall \delta u \text{ c.a.}, \quad \boxed{\int_{\Omega_0} \sigma(u_0^e) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 g^{\text{éq}} \cdot \delta u \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot \delta u \, d\Sigma_0} \quad (\text{B.48})$$

La discrétisation par éléments finis de cette équation ramène à (B.2). Le champ $g^{\text{éq}}$ est tel que les efforts qui génèrent la déformation élastique de la structure soient équilibrés. On vérifie en effet que :

$$\sum_r \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot U_r \, d\Sigma_0 + \sum_r \int_{\Omega_0} \rho_0 g^{\text{éq}} \cdot U_r \, d\Omega_0 = U_r^T \cdot F^{\text{éq}} = 0 \quad (\text{B.49})$$

B.3.2 Vibrations libres autour de la configuration initiale précontrainte

Dans l'état actuel, la structure est soumise à des forces surfaciques f et au même champ de pesanteur g . L'équation variationnelle associée s'écrit :

$$\forall \delta u \text{ c.a.}, \quad \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho g \cdot \delta u \, d\Omega + \int_{\Sigma} f \cdot \delta u \, d\Sigma \quad (\text{B.50})$$

Comme précédemment, la structure étant libre, son déplacement u peut être décomposé en une déformation élastique u^e et un mouvement d'ensemble $\sum_r \lambda^r U_r$ déterminé par le même raisonnement :

$$\ddot{u}^r = \sum_r \left(\frac{\int_{\Omega} \rho g \cdot U_r \, d\Omega + \int_{\Sigma} f \cdot U_r \, d\Sigma}{\int_{\Omega} \rho U_r \cdot U_r \, d\Omega} \right) U_r \quad (\text{B.51})$$

que l'on peut récrire sur la configuration initiale par transport lagrangien :

$$\ddot{u}^r = \sum_r \left(\frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot U_r \, d\Omega + \int_{\Sigma_0} f^* \, d\Sigma^* \cdot U_r}{\int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega} \right) U_r \quad (\text{B.52})$$

Dans ce cas, en utilisant les relations (1.30), on écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{u}^r - \ddot{u}_0^r &= \sum_r \left(\frac{\int_{\Sigma_0} (f^* \, d\Sigma^* - f_0 \, d\Sigma_0) \cdot U_r}{\int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega} \right) U_r \\ &= \sum_r \left(\frac{\int_{\Sigma_{00}} \tilde{f} \cdot U_r \, d\Sigma_{00} + \overbrace{k_F(U, U_r)}^0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega} \right) U_r \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

puisque que, dans le cas où k_F est symétrique, $k_F(U, U_r) = k_F(U_r, U) = 0$.

Les vibrations sont dites "libres" si $\tilde{f} = 0$, c'est à dire si $\tilde{f}_D = 0$ et $|\tilde{f}_F| = 0$. Dans ce cas, le mouvement de corps rigide u^r du système dans l'état actuel est égal à celui du système dans l'état initial : $\ddot{u}^r = \ddot{u}_0^r$. Le déplacement de la structure par rapport à l'état initial, défini par $U = u - u_0 = u^e - u_0^e$ ne contient donc qu'une composante élastique. L'équation variationnelle vérifiée par U est obtenue par différence entre (B.50) et (B.42). On retrouve la même équation que dans le cas des vibrations d'une structure encastree précontrainte, à la différence que l'état initial autour duquel la structure vibre, n'est pas un état statique, mais un état en mouvement :

$$k_E(U, \delta U) + k_G(U, \delta U) + k_F(U, \delta U) + \mathcal{M}(U, \delta U) = 0 \quad (\text{B.54})$$

B.3.3 Calcul de $g^{\text{éq}}$.

Rappelons que :

$$g^{\text{éq}} = g - \sum_r \left(\frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot U_r \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} f_0 \cdot U_r \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega_0} \right) U_r \quad (\text{B.55})$$

Dans le calcul qui suit, l'hypothèse des petites perturbations permet d'assimiler état naturel et état initial (notés $_0$).

Les six modes rigides U_r peuvent être divisés en deux catégories : les mouvements d'ensemble en translation, notés $U_r = r$ (avec $r = i_x, i_y$ ou i_z) et les mouvements d'ensemble en rotation, notés $U_r = r \wedge OM_0$ (avec $r = x, y$ ou z).

pour $U_r = r$:

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot r \, d\Omega_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 r^2 \, d\Omega_0} r &= \frac{(g \cdot r) \int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0} r = (g \cdot r) r \\ \frac{\int_{\Sigma_0} f_0 \cdot r \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 r^2 \, d\Omega_0} r &= \frac{r \cdot \int_{\Sigma_0} f_0 \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0} r = \frac{F^{\text{tot}} \cdot r}{m^S} r \end{aligned}$$

avec $F^{\text{tot}} = \int_{\Sigma_0} f_0 \, d\Sigma_0$ et $m^S = \int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0$

pour $U_r = r \wedge OM_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot (r \wedge OM_0) \, d\Omega_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 (r \wedge OM_0)^2 \, d\Omega_0} r \wedge OM_0 &= \frac{(g \wedge r) \cdot \int_{\Omega_0} \rho_0 OM_0 \, d\Omega_0}{r \cdot \int_{\Omega_0} \rho_0 OM_0 \wedge (r \wedge OM_0) \, d\Omega_0} r \wedge OM_0 \\ &= \frac{m^S r \cdot (OG^S \wedge g)}{r \cdot \mathcal{I}_O(r)} (r \wedge OM_0) \\ \frac{\int_{\Sigma_0} f_0 \cdot (r \wedge OM_0) \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 (r \wedge OM_0)^2 \, d\Omega_0} r \wedge OM_0 &= \frac{r \cdot \int_{\Sigma_0} OM_0 \wedge f_0 \, d\Sigma_0}{r \cdot \int_{\Omega_0} \rho_0 OM_0 \wedge (r \wedge OM_0) \, d\Omega_0} r \wedge OM_0 \\ &= \frac{r \cdot C_O}{r \cdot \mathcal{I}_O(r)} (r \wedge OM_0) \end{aligned}$$

avec $C_O = \int_{\Sigma_0} OM_0 \wedge f_0 \, d\Sigma_0$ le moment des efforts f_0 par rapport à O , $\mathcal{I}_O(v) = \int_{\Omega_0} \rho_0 OM_0 \wedge (v \wedge OM_0) \, d\Omega_0$ l'opérateur d'inertie de la structure et $m^S OG^S = \int_{\Omega_0} \rho_0 OM_0 \, d\Omega_0$ son centre de gravité.

Finalement, en choisissant O en G^S , on obtient l'expression de $g^{\text{éq}}$:

$$\boxed{g^{\text{éq}}(M) = -\frac{F^{\text{tot}}}{m^S} - \sum_r \frac{r \cdot C_{G^S}}{r \cdot \mathcal{I}_{G^S}(r)} (r \wedge G^S M)} \quad (\text{B.56})$$

Remarque 7

On constate donc que le champ de pesanteur ainsi défini n'est pas constant en espace, sauf si $C_{GS} = 0$, c'est à dire si le moment des efforts extérieurs par rapport au centre de gravité est nul³ :

$$C_{GS} = 0 \implies g^{\text{éq.}}(M) = -\frac{F^{\text{tot.}}}{m^S} \quad (\text{B.57})$$

B.4 Exemple d'application

B.4.1 Sphère sous pression libre dans un champ de pesanteur

La seule force extérieure est la force suiveuse de pression P_0 (figure B.2).

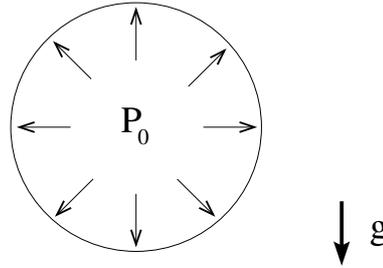


FIG. B.2 – Sphère sous pression libre dans un champ de pesanteur

État initial

L'équation variationnelle (B.42) du système s'écrit dans ce cas :

$$\forall \delta u \text{ c.a.}, \int_{\Omega_0} \sigma(u_0) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u}_0 \cdot \delta u \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot \delta u \, d\Omega_0 - \int_{\Sigma_0} P_0 n_0 \cdot \delta u \, d\Sigma_0 \quad (\text{B.58})$$

La décomposition $u_0 = u_0^e + \sum_{r=1}^6 \lambda_0^r U_r$ permet de calculer la partie rigide du déplacement, décomposée sur les six modes de corps rigide U_r de la sphère libre soumise à aucun effort :

$$\ddot{u}_0^r = \sum_{r=1}^6 \left(\frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot U_r \, d\Omega_0 - \int_{\Sigma_0} P_0 n_0 \cdot U_r \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 U_r \cdot U_r \, d\Omega_0} \right) U_r = \gamma_0^r \quad (\text{B.59})$$

3. Dans ce cas, la trajectoire est un mouvement de translation pur.

Le calcul effectif de γ_0^r donne :

– Pour $U_r = r$, avec $r = i_x, i_y$ ou i_z :

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot r \, d\Omega_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 r^2 \, d\Omega_0} r &= \frac{(g \cdot r) \int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0} r = (g \cdot r) r \\ - \frac{\int_{\Sigma_0} P_0 n_0 \cdot r \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 r^2 \, d\Omega_0} r &= \frac{-P_0 r \cdot \int_{\Sigma_0} n_0 \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0} r = \frac{-P_0 r \cdot \int_{\Omega_0} \text{div} 1 \, d\Omega_0}{m^S} r = 0 \end{aligned}$$

– Pour $U_r = r \wedge GM_0$ avec G , centre de gravité de la sphère :

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega_0} \rho_0 g \cdot (r \wedge GM_0) \, d\Omega_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 (r \wedge GM_0)^2 \, d\Omega_0} r \wedge GM_0 &= \frac{(g \wedge r) \cdot \int_{\Omega_0} \rho_0 GM_0 \, d\Omega_0}{r \cdot \mathcal{I}_G(r)} r \wedge GM_0 = 0 \\ - \frac{\int_{\Sigma_0} P_0 n_0 \cdot (r \wedge GM_0) \, d\Sigma_0}{\int_{\Omega_0} \rho_0 (r \wedge GM_0)^2 \, d\Omega_0} r \wedge GM_0 &= \frac{-P_0 r \cdot \int_{\Sigma_0} GM_0 \wedge n_0 \, d\Sigma_0}{r \cdot \mathcal{I}_G(r)} r \wedge GM_0 = 0 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient : $\gamma_0^r = g$. On retrouve bien que le corps est en chute libre dans un champ de pesanteur. En intégrant dans le temps et en tenant compte des conditions initiales, la trajectoire moyenne du système peut être déterminée $u_0^r(t) = 1/2 g t^2 + \dot{u}_0^r(0) t + u_0^r(0)$.

L'équation (B.47) qui régit la déformation élastique autour de cette trajectoire s'écrit en fonction de $g^{\text{éq}} = g - \gamma_0^r = 0$, donc après simplification :

$$\forall \delta u \text{ c.a.}, \quad \int_{\Omega_0} \sigma(u_0^e) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega_0 = - \int_{\Sigma_0} P_0 n_0 \cdot \delta u \, d\Sigma_0 \quad (\text{B.60})$$

On vérifie que le chargement uniforme en pression P_0 est bien autoéquilibré et on constate qu'il est seul à l'origine de la déformation élastique initiale de la sphère.

État actuel

L'équation variationnelle (B.50) caractérisant l'état actuel s'écrit :

$$\forall \delta u \text{ c.a.}, \quad \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(\delta u) \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho g \cdot \delta u \, d\Omega - \int_{\Sigma} P n \cdot \delta u \, d\Sigma \quad (\text{B.61})$$

La partie rigide u_r du déplacement se décompose sur les modes rigides U_r :

$$\ddot{u}^r = \sum_r \left(\frac{\int_{\Omega} \rho g \cdot U_r \, d\Omega - \int_{\Sigma} P n \cdot U_r \, d\Sigma}{\int_{\Omega} \rho U_r \cdot U_r \, d\Omega} \right) U_r = g = \ddot{u}_0^r \quad (\text{B.62})$$

La déformation entre l'état initial et l'état actuel $U = u - u_0 = u^e - u_0^e$ est donc purement élastique. L'équation linéarisée vérifiée par U s'écrit, $\forall \delta U$ c.a. :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{00}} \left(\Pi(u^e) - \sigma(u_0^e) \right) : \varepsilon(\delta U) \, d\Omega_{00} + \int_{\Omega_{00}} \rho_{00} \ddot{U} \cdot \delta U \, d\Omega_{00} \dots \\ \dots = - \int_{\Sigma_{00}} \left((P n \, d\Sigma)^* - (P_0 n_0 \, d\Sigma_0)^* \right) \cdot \delta U \\ \dots = -(P - P_0) \int_{\Sigma_{00}} n_{00} \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} - P_0 \int_{\Sigma_{00}} \tau_{00}(U) \cdot \delta U \, d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

La condition de vibrations libres $\widetilde{F}_F = 0$ se traduisant ici par $P = P_0$, l'équation précédente devient :

$$\exists U \in \mathcal{C}_u \text{ tel que } \forall \delta U \in \mathcal{C}_u, \quad (k_E + k_G + k_P)(U, \delta U) + \mathcal{M}(\ddot{U}, \delta U) = 0 \quad (\text{B.63})$$

On démontrera au §5.3 que la sphère libre pressurisée décrite par cette équation possède bien trois modes de corps rigides en translation et trois en rotation, entre autre grâce à la prise en compte du terme de rotation de normale k_P qui assure que la pression qui précontraint la structure est bien considérée comme une force suiveuse.

Références bibliographiques

Pour plus de détails sur la méthode d'autoéquilibrage des forces, on pourra se référer à l'ouvrage de Géraudin & Rixen [46] ainsi qu'à l'article de Christophe & Piet-Lahanier [29].

Annexe C

Quelques développements

Sommaire

C.1	Équivalence entre les différentes expressions de la variation d'énergie interne de déformation	178
C.2	Variation de volume au second ordre	179
	C.2.1 Première méthode	179
	C.2.2 Deuxième méthode	180
C.3	Symétrie des formes bilinéaires k_F et k_P	181
C.4	Calcul d'un volume englobé par une surface discrétisée en éléments finis . . .	181
C.5	Modes de ballotement analytiques pour une cuve parallélépipédique	182

C.1 Équivalence entre les différentes expressions de la variation d'énergie interne de déformation

On démontre ici que l'on peut exprimer la variation d'énergie interne de déformation $\delta\mathbf{T}$ de différentes façons équivalentes suivant que l'on adopte le point de vue lagrangien ou eulérien.

Le principe des travaux virtuels exprimé sur la configuration déformée (point de vue eulérien) donne pour expression de $\delta\mathbf{T}$:

$$\delta\mathbf{T} = \int_{\Omega^S} \text{Tr} \left[\boldsymbol{\sigma}(u(x)) \mathbf{D}_x \delta u(x)^\top \right] d\Omega \equiv \int_{\Omega^S} \text{Tr} \left[\boldsymbol{\sigma}(u(x)) \boldsymbol{\varepsilon}_x(\delta u(x)) \right] d\Omega \quad (\text{C.1})$$

Comme nous l'avons vu au §1.3, le transport lagrangien de cette expression sur la configuration naturelle fait apparaître le premier tenseur de Piola-Kirchhoff Π :

$$\delta\mathbf{T} = \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[\Pi(u(X)) \mathbf{D}_X \delta U(X)^\top \right] d\Omega_{00} \quad (\text{C.2})$$

Il nous reste à montrer le lien entre ces deux expressions et la formulation lagrangienne que nous avons utilisé au §1.5, qui fait intervenir le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff S :

$$\delta\mathbf{T} = \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[S(u) \delta E(u) \right] d\Omega_{00} \quad (\text{C.3})$$

Pour cela, démontrons tout d'abord la relation suivante¹ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x(\delta u(x)) = F^{-\top} \delta E(u(X)) F^{-1} \quad (\text{C.4})$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\delta u) &= \frac{1}{2} (\mathbf{D}_x \delta u + \mathbf{D}_x \delta u^\top) \\ &= F^{-\top} \frac{1}{2} (F^\top \mathbf{D}_x \delta u F + F^\top \mathbf{D}_x \delta u^\top F) F^{-1} \\ &= F^{-\top} \frac{1}{2} (F^\top \mathbf{D}_X \delta u + \mathbf{D}_X \delta u^\top F) F^{-1} \\ &= F^{-\top} \frac{1}{2} ((Id + \mathbf{D}_X u^\top) \mathbf{D}_X \delta u + \mathbf{D}_X \delta u^\top (Id + \mathbf{D}_X u)) F^{-1} \\ &= F^{-\top} \frac{1}{2} (\mathbf{D}_X \delta u + \mathbf{D}_X \delta u^\top + \mathbf{D}_X u^\top \mathbf{D}_X \delta u + \mathbf{D}_X \delta u^\top \mathbf{D}_X u) F^{-1} \\ &= F^{-\top} \frac{1}{2} (\mathbf{D}_X \delta u + \mathbf{D}_X \delta u^\top + \delta(\mathbf{D}_X u^\top \mathbf{D}_X u)) F^{-1} \\ &= F^{-\top} \delta E(u) F^{-1} \end{aligned}$$

1. Cette relation n'est valable qu'entre les variations $\boldsymbol{\varepsilon}(\delta u)$ et $\delta E(u)$ et non pas entre $\boldsymbol{\varepsilon}(u)$ et $E(u)$

On démontre maintenant l'équivalence entre les formulations eulérienne (C.1) et lagrangienne (C.3) de $\delta\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{T} &= \int_{\Omega^S} \text{Tr} \left[\boldsymbol{\sigma}(u(x)) \boldsymbol{\varepsilon}_x(\delta u(x)) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[\boldsymbol{\sigma}(u(X)) F^{-\top} \delta E(u(X)) F^{-1} \right] \det(F) d\Omega_{00} \\ &= \int_{\Omega_{00}^S} \text{Tr} \left[S(u) \delta E(u) \right] d\Omega_{00}\end{aligned}$$

C.2 Variation de volume au second ordre

On désire calculer la variation de volume δV , au 2^{ème} ordre en U , d'un domaine fermé Ω_0 de frontière $\partial\Omega_0 = \Sigma_0$ entre les instants initial et actuel : $\delta V = \|\Omega\| - \|\Omega_0\|$.

C.2.1 Première méthode

La méthode qui suit est extraite de [79].

Tout d'abord, supposons que l'équation de la surface Σ_0 soit donnée par une fonction ϕ de deux paramètres ξ et η selon la relation $M_0 = \phi(\xi, \eta)$. ξ et η varient alors sur le sous-domaine de \mathbb{R}^2 , noté Σ_R , image réciproque de Σ_0 par ϕ^{-1} (cf. figure 3.4).

Chaque point M du volume δV peut être repéré par 3 coordonnées (ξ, η, ζ) selon le paramétrage suivant :

$$M(\xi, \eta, \zeta) = M_0(\xi, \eta) + \zeta U(\xi, \eta) \quad \text{avec } (\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma_R \times [0, 1]$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}\delta V &= \int_{\delta\Omega} d\Omega = \int_{\Sigma_R \times [0, 1]} \left(\frac{\partial M}{\partial \xi}, \frac{\partial M}{\partial \eta}, \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \int_{\Sigma_R \times [0, 1]} \left(\frac{\partial M_0}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial M_0}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial U}{\partial \eta}, U \right) d\xi d\eta d\zeta\end{aligned}$$

au 2^{ème} ordre en U , cette expression se simplifie en :

$$\begin{aligned}\delta V &\simeq \int_{\Sigma_R \times [0, 1]} \left(\frac{\partial M_0}{\partial \xi}, \frac{\partial M_0}{\partial \eta}, U \right) + \zeta \left(\frac{\partial M_0}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}, U \right) + \zeta \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial M_0}{\partial \eta}, U \right) d\xi d\eta d\zeta \\ &\simeq \int_{\Sigma_R} \left(\frac{\partial M_0}{\partial \xi}, \frac{\partial M_0}{\partial \eta}, U \right) \underbrace{\int_0^1 d\zeta}_1 + \int_{\Sigma_R} \left(a_0^1, \frac{\partial U}{\partial \eta}, U \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}, a_0^2, U \right) \underbrace{\int_0^1 \zeta d\zeta}_{1/2}\end{aligned}$$

Le terme linéaire en U est appelé $\delta V^{(1)}$. Transposé sur la géométrie de la configuration initiale, il s'écrit :

$$\delta V^{(1)} = \int_{\Sigma_0} n_0 \cdot U d\Sigma_0 \quad (\text{C.5a})$$

Le terme du 2^{ème} ordre en U est appelé $\delta V^{(2)}$. En utilisant la relation (3.34), ce terme peut se récrire :

$$\delta V^{(2)} = -1/2 \int_{\Sigma_0} \tau_{00}(U) \cdot U \, d\Sigma_0 \quad (\text{C.5b})$$

C.2.2 Deuxième méthode

Cette méthode est plus directe mais nécessite une certaine aisance avec les notations indicielles (la notation d'Einstein de sommation sur les indices répétés est utilisée) :

$$\begin{aligned} \delta V &= \|\Omega^G\| - \|\Omega_0^G\| \\ &= \int_{\Omega} d\Omega - \int_{\Omega_0} d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\det(Id + DU) - 1 \right) d\Omega_0 \end{aligned}$$

Le développement de $\det(Id + DU)$ au 2^{ème} ordre en U nous est donné par la formule du polynôme caractéristique en dimension 3 (D.4) dans laquelle λ est remplacé par -1 :

$$\det(Id + DU) \simeq 1 + \operatorname{div}(U) + 1/2 \left((\operatorname{div}(U))^2 - \operatorname{Tr}[(DU)^2] \right) \quad (\text{C.6})$$

d'où

$$\delta V = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(U) + 1/2 \left((\operatorname{div}(U))^2 - \operatorname{Tr}[(DU)^2] \right) d\Omega_0 \quad (\text{C.7})$$

Le premier terme de cette expression donne directement la partie linéaire de δV :

$$\delta V^{(1)} = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(U) \, d\Omega_0 = \int_{\Sigma_0} n_0 \cdot U \, d\Sigma_0 \quad (\text{C.8})$$

Après intégration par partie, et sans oublier que, dans nos notations, n est le vecteur normal **entrant**, on retrouve l'expression de $\delta V^{(2)}$:

$$\begin{aligned} 2 \delta V^{(2)} &= \int_{\Omega_0} \left((\operatorname{div}(U))^2 - \operatorname{Tr}[(DU)^2] \right) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial U_i}{\partial X_i} \frac{\partial U_j}{\partial X_j} - \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \, d\Omega_0 \\ &= - \int_{\Omega_0} \underbrace{\frac{\partial^2 U_i}{\partial X_i \partial X_j} U_j - \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_i} U_j}_{0} \, d\Omega_0 + \int_{\Sigma_0} \frac{\partial U_i}{\partial X_i} U_j (-n_{0j}) - \underbrace{\frac{\partial U_i}{\partial X_j} U_j (-n_{0i})}_{\equiv -\frac{\partial U_j}{\partial X_i} U_i n_{0j}} \, d\Sigma_0 \\ &= - \int_{\Sigma_0} (\operatorname{div}_X U) U \cdot n_0 - (D_X U) U \cdot n_0 \, d\Sigma_0 \\ &= - \int_{\Sigma_0} \tau_{00}(U) \cdot U \, d\Sigma_0 \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

C.3 Symétrie des formes bilinéaires k_F et k_P

Les formes bilinéaires k_F et k_P , définies par les expressions (1.36) et (4.15), ont une forme identique que l'on note :

$$\begin{aligned} k_\alpha(U, V) &= \int_{\Sigma_{\alpha 00}} \alpha(M_{00}) \tau_{00}(U) \cdot V \, d\Sigma_{00} \\ &= \int_{\Sigma_{\alpha 00}} \alpha(M_{00}) \left(V \operatorname{div}_X U - (D_X U) V \right) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

où $\alpha = -|f_{F0}|$ et $\Sigma_{\alpha 00} = \Sigma_{f00}$ dans le cas de k_F , ou bien $\alpha = P_{00}^G$ et $\Sigma_{\alpha 00} = \Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}$ dans le cas de k_P .

Pour démontrer la symétrie de la forme bilinéaire k_α , il faut montrer que $k_\alpha(U, V) = k_\alpha(V, U)$, pour tout couple de vecteurs (U, V) définis sur $\Sigma_{\alpha 00}$.

Grâce aux formules d'analyse vectorielle (D.5a) et (D.5b), et à la formule de Stokes (D.10), cette relation se transforme en :

$$\begin{aligned} k_\alpha(U, V) - k_\alpha(V, U) &= \int_{\Sigma_{\alpha 00}} \alpha \left(V \operatorname{div}_X U - (D_X U) V - U \operatorname{div}_X V + (D_X V) U \right) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \\ &= \int_{\Sigma_{\alpha 00}} \alpha \operatorname{rot}(V \wedge U) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \\ &= \int_{\Sigma_{\alpha 00}} \operatorname{rot}(\alpha V \wedge U) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} - \int_{\Sigma_{\alpha 00}} \left(\nabla \alpha \wedge (V \wedge U) \right) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \\ &= \int_{\partial \Sigma_{\alpha 00}} \alpha (V \wedge U) \cdot dl - \int_{\Sigma_{\alpha 00}} \left(\nabla \alpha \wedge (V \wedge U) \right) \cdot n_{00} \, d\Sigma_{00} \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit identiquement nulle quelques soient $(U, V) \in \mathcal{C}_u^2$, il faut :

1. d'une part, que α soit constant sur $\Sigma_{\alpha 00}$ ($\nabla \alpha \equiv 0$),
2. d'autre part, soit que $\Sigma_{\alpha 00}$ soit une surface fermée ($\partial \Sigma_{\alpha 00} = \emptyset$), soit que les déplacements sur la frontière $\partial \Sigma_{\alpha 00}$ soient connus c'est à dire que $\partial \Sigma_{\alpha 00} \subset \Sigma_{u00}$ (dans ce cas, la fonction test vérifie la condition d'admissibilité cinématique : $V = \delta U \equiv 0$ sur Σ_{u00}).

Dans le cas de k_P , la pression P_{00}^G est supposée uniforme et appliquée sur la surface fermée $\Sigma_{i00} + \Sigma_{g00}$ donc ces deux hypothèses sont vérifiées et l'opérateur est symétrique. Par contre, pour que k_F soit symétrique, il faudra que les forces suiveuses extérieures soient constantes en norme et appliquée sur une surface Σ_{f00} telle que $\partial \Sigma_{f00} \subset \Sigma_{u00}$.

Une démonstration équivalente qui mène à la même analyse est donnée par Bonet & Wood dans leur ouvrage [21].

C.4 Calcul d'un volume englobé par une surface discrétisée en éléments finis

Les notations éléments finis utilisées dans cette section sont celles du chapitre 8.

En remarquant que $\text{div}(OM) = 3$ en dimension 3 et en utilisant le théorème d'Ostrogradski, on peut ramener le calcul d'un volume $V = \|\Omega\|$ à celui d'une intégrale sur la surface frontière $\partial\Omega = \Sigma$:

$$\|\Omega\| = \int_{\Omega} 1 \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{3} \text{div}(OM) \, d\Omega = \int_{\Sigma} -\frac{1}{3} OM \cdot n \, d\Sigma \quad (\text{C.10})$$

où n est le vecteur normal entrant.

La discrétisation en éléments finis de la surface $\partial\Omega$ permet d'obtenir une valeur approchée \tilde{V} de cette intégrale :

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^m \tilde{V}_{E_i} \quad \text{avec} \quad \tilde{V}_{E_i} = \int_{\Sigma_{E_i}} -\frac{1}{3} OM \cdot n \, d\Sigma \quad (\text{C.11})$$

Après transport sur l'élément de référence, cette expression devient :

$$\tilde{V}_{E_i} = -n^{\top} M_d \int_{\Sigma_{E_R}} N \det(D_{\Xi}T) \, d\Sigma_{\Xi} \quad (\text{C.12})$$

- dans le cas d'éléments finis triangulaires P_1 : $\det(D_{\Xi}T)$ est constant (indépendant de Ξ) et le calcul effectif de \tilde{V}_{E_i} ne nécessite pas d'intégration numérique. On obtient alors directement :

$$\tilde{V}_{E_i} = -d n^{\top} M_d \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

- dans le cas d'éléments finis quadrangulaires Q_1 : $\det(D_{\Xi}T)$ dépend des coordonnées Ξ . Une intégration numérique est donc nécessaire.

C.5 Modes de ballonnement analytiques pour une cuve parallélépipédique

Rappelons les équations locales de ballonnement (7.2) :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 && \text{dans } \Omega^F \\ \nabla\varphi \cdot n &= 0 && \text{sur } \Sigma_i \\ \nabla\varphi \cdot i_z &= \frac{\omega^2}{|g|} \varphi && \text{sur } \Gamma \\ \int_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

Sur un domaine Ω^F parallélépipédique, ces équations se récrivent :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \quad (\text{C.14a})$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\pm \frac{a}{2}} = 0 \quad (\text{C.14b})$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (\text{C.14c})$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{-\frac{h}{2}} = 0 \quad (\text{C.14d})$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{\frac{h}{2}} = \frac{\omega^2}{|g|} \varphi(x, y, h/2) \quad (\text{C.14e})$$

$$\int_{(x,y) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]} \varphi(x, y, h/2) \, dx dy = 0 \quad (\text{C.14f})$$

La résolution sera faite par séparation des variables :

$$\varphi(x, y, z) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z) \quad (\text{C.15})$$

Les équations (C.14a) à (C.14e) deviennent :

$$\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + \frac{\beta''(y)}{\beta(y)} + \frac{\gamma''(z)}{\gamma(z)} = 0 \quad (\text{C.16a})$$

$$\alpha'(\pm a/2) = 0 \quad (\text{C.16b})$$

$$\beta'(\pm b/2) = 0 \quad (\text{C.16c})$$

$$\gamma'(-h/2) = 0 \quad (\text{C.16d})$$

$$\gamma'(h/2) = \frac{\omega^2}{|g|} \gamma(h/2) \quad (\text{C.16e})$$

L'équation (C.16a) étant vérifiée pour tout (x, y, z) du domaine fluide, elle impose que chaque terme soit constant de façon à ce que la somme des constantes soit nulle :

$$(C.16a) \Rightarrow \begin{cases} \alpha'' = A \alpha \\ \beta'' = B \beta \\ \gamma'' = -(A + B) \gamma \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

On cherche des solutions sous forme exponentielles réelles ou complexes suivant le signe des constantes A et B . En utilisant les conditions aux limites (C.16b) à (C.16e), on montre que pour A ou B négatif, le système n'admet pas de solution non nulle. Dans le cas A et B positifs, on cherche une solution de la forme :

$$\alpha(x) = \alpha_1 \cos\left(\sqrt{A}(x + \alpha_2)\right) \quad (\text{C.18a})$$

$$\beta(y) = \beta_1 \cos\left(\sqrt{B}(y + \beta_2)\right) \quad (\text{C.18b})$$

$$\gamma(x) = \gamma_1 \cosh\left(\sqrt{A+B}(z + \gamma_2)\right) \quad (\text{C.18c})$$

Les conditions aux limites (C.16b) à (C.16e) permettent de déterminer certaines constantes :

$$A = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \quad \text{avec } m \in \mathbb{N} \quad (\text{C.19a})$$

$$\alpha_2 = \frac{a}{2} \quad (\text{C.19b})$$

$$B = \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.19c})$$

$$\beta_2 = \frac{b}{2} \quad (\text{C.19d})$$

$$\left(\sqrt{A+B}\right) \tanh\left(h\sqrt{A+B}\right) = \frac{\omega^2}{|g|} \quad (\text{C.19e})$$

$$\gamma_2 = \frac{h}{2} \quad (\text{C.19f})$$

Finalement, si on note :

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad (\text{C.20a})$$

Les pulsations propres et modes propres de ballonnement s'écrivent :

$$\omega_{m,n}^2 = |g| k \tanh(k h) \quad (\text{C.20b})$$

$$\varphi(x, y, z) = C \cos\left(\frac{m \pi}{a}(x + a/2)\right) \cos\left(\frac{n \pi}{b}(y + b/2)\right) \cosh\left(k(z + h/2)\right) \quad (\text{C.20c})$$

On vérifie que la solution φ vérifie bien la relation (C.14f).

Remarquons d'une part que, dès que $k \gg 1/h$, les pulsation propres sont données de façon approchée par la relation :

$$\omega_{m,n}^2 \simeq |g| \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (\text{C.21})$$

D'autre part, on constate sur cet exemple que les mouvements de ballonnement font intervenir essentiellement la surface libre du liquide puisque la solution présente une décroissance exponentielle en k à partir de la surface.

Annexe D

Quelques formules utiles

Sommaire

D.1 Propriétés de l'opérateur Trace	186
D.2 Formules d'analyse vectorielle	186
D.2.1 Equivalent matriciel du produit vectoriel : matrice <i>spin</i>	186
D.2.2 Double produit vectoriel	186
D.2.3 Polynôme caractéristique en dimension 3	186
D.2.4 Relations vectorielles	187
D.2.5 Formule de Green	187
D.2.6 Formule de Stokes intégrale	187
D.3 Changements de variable	188
D.3.1 Dans les intégrales de volume	188
D.3.2 Dans les intégrales de surface	188
D.3.3 Formulations locales	188

D.1 Propriétés de l'opérateur Trace

Soit 3 matrices carrées A, B, C et une matrice symétrique S :

$$\text{Tr}[A B] = \text{Tr}[B A] = \text{Tr}[B^\top A^\top] = \text{Tr}[A^\top B^\top] \quad (\text{D.1a})$$

$$\text{Tr}[S A] = \text{Tr}[S A^\top] = \text{Tr}\left[\frac{1}{2}S(A + A^\top)\right] \quad (\text{D.1b})$$

$$\text{Tr}[A B C] = \text{Tr}[C^\top B^\top A^\top] = \text{Tr}[C A B] = \text{Tr}[B C A] = \text{Tr}[B^\top A^\top C^\top] = \text{Tr}[A^\top C^\top B^\top] \quad (\text{D.1c})$$

D.2 Formules d'analyse vectorielle

D.2.1 Equivalent matriciel du produit vectoriel : matrice *spin*

Soit 2 vecteurs u et v de \mathbb{R}^3 :

$$u \wedge v = \text{spin}(u) v \quad \text{avec} \quad \text{spin}(u) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

D.2.2 Double produit vectoriel

Soit 3 vecteurs u, v et w de \mathbb{R}^3 :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w \quad (\text{D.3})$$

D.2.3 Polynôme caractéristique en dimension 3

Soit A une matrice de dimension 3 et λ un scalaire :

$$\det(A - \lambda Id) = -\lambda^3 + \mathcal{I}_1(A) \lambda^2 - \mathcal{I}_2(A) \lambda + \mathcal{I}_3(A) \quad (\text{D.4a})$$

où $\mathcal{I}_{i=1..3}$ sont les invariants principaux du tenseur A :

$$\mathcal{I}_1(A) = \text{Tr}[A] \quad (\text{D.4b})$$

$$\mathcal{I}_2(A) = 1/2 (\text{Tr}[A])^2 - 1/2 \text{Tr}[A^2] \quad (\text{D.4c})$$

$$\mathcal{I}_3(A) = \det(A) \quad (\text{D.4d})$$

D.2.4 Relations vectorielles

Soit 2 vecteurs u et v de \mathbb{R}^3 et un scalaire α :

$$\nabla \wedge (u \wedge v) = (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v + (\nabla \cdot v)u - (\nabla \cdot u)v \quad (\text{D.5a})$$

$$\nabla \wedge (\alpha u) = \alpha \nabla \wedge u + (\nabla \alpha) \wedge u \quad (\text{D.5b})$$

$$\text{div}(u \wedge v) = v \cdot \text{rot}(u) - u \cdot \text{rot}(v) \quad (\text{D.5c})$$

$$\text{div}(\alpha u) = \alpha \text{div}(u) + u \cdot \text{grad}(\alpha) \quad (\text{D.5d})$$

$$\nabla(u \cdot v) = (v \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)v + v \wedge \nabla \wedge u + u \wedge \nabla \wedge v \quad (\text{D.5e})$$

D.2.5 Formule de Green

Soit un tenseur A et un champ vectoriel w :

Forme locale :

$$\text{div}(A^T w) = \text{Div}(A) \cdot w + \text{Tr}[A^T Dw] \quad (\text{D.6})$$

Forme intégrale tensorielle :

$$\int_{\Omega} \text{Div}(A) \cdot w \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (A \cdot n) \cdot w \, d\Sigma - \int_{\Omega} \text{Tr}[A^T Dw] \, d\Omega \quad (\text{D.7})$$

Pour des champs scalaires :

Soit φ et ψ , deux fonctions scalaires :

$$\int_{\Omega} \psi \Delta \varphi \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \psi \nabla(\varphi \cdot n) \, d\Sigma - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, d\Omega \quad (\text{D.8})$$

d'où on déduit :

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \varphi (\nabla \psi \cdot n) - \psi (\nabla \varphi \cdot n) \, d\Sigma \quad (\text{D.9})$$

D.2.6 Formule de Stokes intégrale

Soit un champ vectoriel u :

$$\iint_S \text{rot}(u) \cdot n \, dS = \oint_{\partial S} u \cdot dl \quad (\text{D.10})$$

D.3 Changements de variable

D.3.1 Dans les intégrales de volume

Soit une application vectorielle bijective régulière Φ différentiable et de dérivée F , alors les intégrales sur les domaines Ω et $\Phi(\Omega)$ se déduisent l'une de l'autre par la formule de changement de variable suivante :

$$\int_{x \in \Phi(\Omega)} f(x) \, d\Omega_x = \int_{X \in \Omega} f(\Phi(X)) \, \det(F) \, d\Omega_X \quad (\text{D.11a})$$

D.3.2 Dans les intégrales de surface

Soit une application vectorielle bijective régulière Φ différentiable et de dérivée F . Soit $\partial\Omega$, la frontière du domaine Ω , n_x et n_X les normales extérieures aux domaines respectivement $\Phi(\Omega)$ et Ω . Alors les intégrales sur les frontières $\partial\Omega$ et $\Phi(\partial\Omega)$ se déduisent l'une de l'autre par la formule de changement de variable suivante :

$$\int_{x \in \Phi(\partial\Omega)} f(x) \, n_x \, d\Sigma_x = \int_{X \in \partial\Omega} f(\Phi(X)) \, \det(F) \, F^{-\top} \, n_X \, d\Omega_X \quad (\text{D.11b})$$

D.3.3 Formulations locales

Des formulations locales de changement de variable peuvent être déduites des relations intégrales précédentes :

Transport par changement de variable d'un élément de volume :

$$d\Omega_x = \det(F) \, d\Omega_X \quad (\text{D.12a})$$

Transport par changement de variable d'un élément de surface orienté :

$$n_x \, d\Sigma_x = \det(F) \, F^{-\top} \, n_X \, d\Sigma_X \quad (\text{D.12b})$$

Résumé

L'étude présentée dans ce document a pour objet l'analyse vibratoire basse fréquence des interactions fluide-structure dans un réservoir déformable partiellement rempli par un liquide incompressible non visqueux. L'originalité de ce travail est de conserver l'intégralité des effets de la gravité dans la modélisation afin de tenir compte du couplage fort entre le ballonnement de la surface libre du liquide et les déformations hydroélastiques du réservoir, alors que les méthodes traditionnelles appréhendent ces deux phénomènes sur des plages de fréquence supposées distinctes et sous certaines hypothèses réductrices. La gravité agissant comme une précontrainte dans la structure et dans le fluide, le formalisme "grands déplacements" en coordonnées lagrangiennes est utilisé. La linéarisation des termes non linéaires obtenus dans la formulation variationnelle symétrique du problème fait apparaître un opérateur de rigidité dépendant de la gravité, appelé opérateur d'*élastogravité*. L'étude de cet opérateur et de ses modes rigides a montré que la prise en compte de la gravité dans la modélisation hydroélastique permet d'obtenir des résultats cohérents dans le calcul des mouvements d'ensemble d'un système fluide-structure libre dans l'espace, ce qui n'était pas le cas avec les méthodes classiques. Après discrétisation par éléments finis, la méthode est validée sur différents cas tests et appliquée sur un modèle semi-industriel.

Mots-clés: interactions fluide-structure, hydroélasticité, ballonnement, gravité, précontrainte hydrostatique

Abstract

The present study deals with the low frequency vibrational analysis of the fluid-structure interactions in an elastic tank partially filled with an incompressible inviscid liquid. The originality of this work is to keep the contribution of all terms depending on gravity in the modelling, in order to represent the strong coupling between the sloshing of the liquid and the hydroelastic deformations of the structure, whereas the classical models study this two phenomena on two distinct frequency domains using some simplifying assumptions. Since gravity effects can be considered as prestresses in structure and fluid, we use a "large displacement" formalism in lagrangian coordinates. The non linear terms of the symmetric variational formulation are linearized to exhibit a stiffness operator depending on the gravity, named *elastogravity* operator. The study of this operator and its rigid body modes shows that taking the gravity into account in the hydroelastic model allows to correctly predict the body motions of a free-free fluid-structure system, in opposition to the classical modelling. After finite element discretization, this method is validated with some test cases and applied to a semi-industrial problem.

Keywords: fluid-structure interactions, hydroelasticity, sloshing, gravity, hydrostatic prestress

