THÈSE

présentée

devant l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT
École doctorale E.E.A.

Spécialité : Automatique

Saida FLILA

Identification optimale et commande prédictive : applications en génie des procédés

Directeur de thèse : M. Hassan HAMMOURI
Co-directeur de thèse : M. Pascal DUFOUR

soutenue publiquement le 5 Février 2010 devant le jury composé de :

M. Mohammed M'SAAD	Professeur, Université de Caen-Basse Normandie	Rapporteur
M. Boutaib DAHHOU	Professeur, Université Toulouse III	Rapporteur
Mme Alina VODA	Maître de Conférences, Université de Grenoble	Examinateur
M. Jose RAGOT	Professeur, INPL	Examinateur
M. Hassan HAMMOURI	Professeur, Université Lyon 1	Examinateur
M. Pascal DUFOUR	Maître de Conférences, Université Lyon 1	Examinateur

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON I

Président de l'Université	**M. le Professeur L. COLLET**
Vice-Président du Conseil Scientifique	M. le Professeur J.F. MORNEX
Vice-Président du Conseil d'Administration	M. le Professeur G. ANNAT
Vice-Présidente du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire	M. le Professeur D. SIMON
Secrétaire Général	M. G. GAY

SECTEUR SANTÉ

Composantes

UFR de Médecine Lyon Est-Claude Bernard	Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE
UFR de Médecine Lyon Sud-Charles Mérieux	Directeur : M. le Professeur F.N. GILLY
UFR d'Odontologie	Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques	Directeur : M. le Professeur F. LOCHER
Institut Techniques de Réadaptation	Directeur : M. le Professeur Y. MATILLON
Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directeur : M. le Professeur P. FARGE

SECTEUR SCIENCES

Composantes

Faculté des Sciences et Technologies	Directeur : M. le Professeur F. GIERES
UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives	Directeur : M. C. COLLIGNON
Observatoire de Lyon	Directeur : M. B. GUIDERDONI
Institut des Sciences et des Techniques de l'Ingénieur de Lyon	Directeur : M. le Professeur J. LIETO
IUT A	Directeur : M. le Professeur M. C. COULET
IUT B	Directeur : M. le Professeur R. LAMARTINE
Institut de Science Financière et d'Assurances	Directeur : M. le Professeur J.C. AUGROS
Institut Universitaire de Formation des Maîtres	Directeur : R. BERNARD

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP) dans l'équipe "Systèmes non linéaires et procédés".

Tout d'abord, je remercie Monsieur Hatem Fessi, directeur du LAGEP, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Monsieur Hassan HAMMOURI, Professeur à l'Université Lyon 1, pour m'avoir accueilli dans son groupe de recherche, avoir dirigé mon travail et pour tout l'intérêt qu'il y a porté.

Je tiens à remercier très particulièrement Monsieur Pascal DUFOUR, Maître de Conférences à l'Université Lyon 1, pour sa rigueur scientifique et la confiance qui m'a témoignée. Sans son soutien et ses encouragements, ce travail n'aurait pu aboutir.

Cette thèse n'aurait certainement pas abouti sans les conseils judicieux et les discussions fructueuses que j'ai eues avec de nombreux membres de l'équipe, Systèmes non linéaires et procédés , en particulier avec Madame Madiha NADRI-WOLF, Monsieur Koffi FIATY et Madame Nida SHEIBAT-OTHMAN . Il en va de même pour les thésards et anciens thésards Lagepiens.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du personnel, administratif et technique, du LAGEP qui m'a aidé à accomplir mon travail dans les meilleures conditions et dans un environnement très agréable. Merci à Nadia, Olivier, Serge et Jean-Pierre.

Je remercie Monsieur Mohammed M'SAAD (Professeur à l'université de Caen) et Monsieur Boutaib DAHHOU (Professeur à Toulouse) pour avoir accepté de rapporter ce travail. Je suis très honorée de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Leurs lectures très attentives de ce manuscrit a permis la correction de nombreuses erreurs et imprécisions.

Je remercie tous les membres de mon jury de thèse, Jose RAGOT, Mme Alina VODA, Hassan HAMMOURI et Pascal DUFOUR, de m'avoir fait l'honneur d'assister à ma soutenance. J'ai beaucoup appris de leurs commentaires et questions.

Un grand merci à tous mes amis à Lyon qui m'ont aidé à faire de mon séjour à

Lyon une aventure inoubliable. Je ne cite pas leurs noms car ils sont si nombreux que je risque d'en oublier quelques-uns. Si ce document arrive entre leurs mains, ils sauront sûrement se reconnaître.

Last but not least, pour leurs encouragements et leur soutien sans faille, je remercie mes supporters inconditionnels : mes parents, mes sœurs, mes frères et en particulier à O. TAIBI de sa confiance en moi. Je voudrais leur exprimer toute ma reconnaissance pour toute l'aide financière et morale qu'ils m'ont portée. Sans doute ce travail n'aurait jamais pu voir le jour sans eux.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Etat de l'art sur l'identification optimale **4**
1.1 Introduction 4
1.2 Contrôle optimal pour l'identification 4
1.3 Travaux de Stigter et Keesman 8
1.3.1 Contrôle optimal de la sensibilité paramétrique dans un bioréacteur 8
1.3.2 Résultats 9
1.4 Travaux de Stigter, Vries et Keesman 10
1.4.1 Problème de contrôle optimal 10
1.4.2 Cas d'étude et résultats 11
1.5 Conclusion 11

2 Observabilité et les observateurs des systèmes non linéaires **12**
2.1 Introduction 12
2.2 Quelques notions d'observabilité 13
2.3 Systèmes affines en l'état 16
2.3.1 Observabilité 16
2.3.2 Observateurs 18
2.3.3 Une extention aux systèmes affines en l'état 18
2.4 Formes canoniques et observateurs des systèmes uniformément observables 19
2.4.1 Formes canoniques 19
2.4.1.1 Cas mono-sortie 19
2.4.1.2 Cas multi-sorties 21
2.4.2 Observateurs à grand gain 22
2.4.2.1 Cas mono-sortie 22
2.4.2.2 Cas multi-sorties 24
2.5 Observateurs à grand gain pour des systèmes non uniformément observables 26
2.5.1 Quelques remarques sur les observateurs pour les entrées localement régulières 26
2.5.2 Synthèse des observateurs pour les systèmes (2.31) n'ayant pas la structure d'observabilité uniforme 32

2.6 Conclusion 36

3 Commande prédictive **37**
3.1 Introduction 37
3.2 Généralités sur la commande prédictive 37
3.2.1 Bref aperçu de l'évolution de la commande prédictive 37
3.2.2 Domaines d'application en industrie 38
3.3 Principes de base de la commande prédictive 40
3.3.1 Variables de commande et de sortie 40
3.3.2 Objectif de fonctionnement 41
3.3.3 Modèle 41
3.3.4 Problème d'optimisation 42
3.3.5 Principe général de fonctionnement 43
3.4 Méthodologie de la commande prédictive 45
3.4.1 Formulation mathématique 45
3.4.2 Notions de stabilité 48
3.5 Structure de commande prédictive utilisée 50
3.5.1 Formulation du problème d'optimisation 50
3.5.2 Structure de commande prédictive par modèle interne non linéaire 51
3.5.3 Structure de commande prédictive par modèle interne linéaire temps variant 53
3.6 Conclusion 56

4 Approche d'identification couplant observateur et commande prédictive **57**
4.1 Introduction 57
4.2 Présentation de l'approche 58
4.3 Formulation initiale du problème d'identification optimale 58
4.4 Formulation du problème de commande prédictive sous contraintes pour l'identification 60
4.4.1 Problème initial d'optimisation sous contraintes 60
4.4.2 Modèle du procédé 62
4.4.3 Observateur non linéaire 63
4.4.4 Modèle de sensibilité 64
4.4.5 Approche de la commande par modèle pour l'identification . . 65
4.4.6 Formulation finale 66
4.4.6.1 Structure de commande prédictive par modèle interne non linéaire 66
4.4.6.2 Structure de commande prédictive par modèle interne linéaire temps variant 68
4.5 Conclusion 72

5 Mise en œuvre **73**
5.1 Introduction . . . 73
5.2 Méthodes d'optimisation utilisées . . . 73
5.2.1 Contraintes sur les entrées : méthode hyperbolique . . . 74
5.2.2 Contraintes sur les sorties : méthode des pénalités externes . . 77
5.3 Formulation finale de problème d'optimisation pénalisé sans contraintes pour l'identification . . . 79
5.3.1 Approche basée sur le modèle non linéaire . . . 79
5.3.2 Approche basée sur le modèle linéaire temps variant . . . 80
5.4 Méthode de résolution du gradient et structure du contrôle . . . 83
5.4.1 Résolution du problème pénalisé basé sur le modèle non linéaire 83
5.4.1.1 Etude des sensibilités . . . 85
5.4.2 Résolution du problème pénalisé basé sur le modèle linéaire temps variant . . . 87
5.4.2.1 Etude des sensibilités . . . 88
5.4.3 Structure finale du contrôle pour l'identification . . . 90
5.4.3.1 Structure de contrôle basé sur le modèle non linéaire 91
5.4.3.2 Structure de contrôle basé sur le modèle linéaire temps variant . . . 91
5.5 Conclusion . . . 92

6 Réacteur chimique : réaction de saponification **93**
6.1 Introduction . . . 93
6.2 Description du procédé de saponification . . . 93
6.3 Modèle . . . 94
6.3.1 Modèle simplifié considéré . . . 96
6.4 Problématique de contrôle pour l'identification . . . 96
6.4.1 Synthèse de l'observateur . . . 96
6.4.2 Formulation du problème d'optimisation . . . 97
6.5 Résultats de simulation . . . 98
6.5.1 Conditions de simulation . . . 98
6.5.2 Estimation en boucle ouverte . . . 100
6.5.3 Identification optimale basée sur le modèle non linéaire . . . 104
6.5.4 Identification optimale basée sur le modèle linéaire temps variant 106
6.5.5 Comparaison des deux approches de commande pour l'identification . . . 112
6.6 Conclusion . . . 115

7 Procédé de cuisson radiatif des peintures en poudre **116**
7.1 Introduction . . . 116
7.2 Peintures en poudre . . . 116
7.3 Description du procédé de cuisson . . . 117
7.4 Modèle . . . 119
7.4.1 Cinétique de reticulation . . . 119
7.4.2 Bilan thermique . . . 120

7.4.3 Conditions aux limites et initiales . . . 121
7.4.4 Système non linéaire à paramètres distribués . . . 122
7.4.5 Méthodes numériques de résolution . . . 123
7.4.5.1 Généralités . . . 123
7.4.5.2 Discrétisation du bilan thermique par différences finies 124
7.4.6 Résolution numérique du modèle en boucle ouverte . . . 126
7.5 Problématique de contrôle pour l'identification . . . 127
7.5.1 Synthèse de l'observateur . . . 129
7.5.2 Formulation du problème d'optimisation . . . 131
7.6 Résultats de simulation . . . 132
7.6.1 Conditions de simulation . . . 132
7.6.2 Estimation en boucle ouverte . . . 133
7.6.3 Identification optimale basée sur le modèle non linéaire . . . 135
7.6.4 Identification optimale basée sur le modèle linéaire temps variant 140
7.6.5 Comparaison des deux approches de commande pour l'identification . . . 140
7.7 Conclusion . . . 144

Conclusion et perspectives **146**

Table des figures

2.1 Schéma de principe d'un observateur. 13

3.1 Schéma de principe d'une commande prédictive 44
3.2 Structure de commande prédictive en boucle fermée 50
3.3 Structure de commande prédictive par modèle interne 52
3.4 Schéma de linéarisation du modèle non linéaire autour d'un fonctionnement nominal 54
3.5 Structure de commande prédictive avec linéarisation du modèle . . . 55

4.1 Structure de commande prédictive, pour l'identification, avec modèle non linéaire 68
4.2 Schéma de linéarisation d'un modèle de sensibilité non linéaire autour d'un modèle nominal 69
4.3 Structure de commande prédictive, pour l'identification, avec modèle linéaire temps variant 71

5.1 Schéma de la loi de transformation hyperbolique 76
5.2 Exemple de fonction de pénalité externe 79
5.3 Structure de commande prédictive par modèle non linéaire pour l'identification, dans une approche de type gradient 90
5.4 Structure de commande prédictive par modèle linéaire temps variant pour l'identification, dans une approche de type gradient 91

6.1 Débit d'alimentation en mode continu, en boucle ouverte 100
6.2 Concentration d'acétate d'éthyle, en boucle ouverte 101
6.3 Estimation de la vitesse de réaction, en boucle ouverte 101
6.4 Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, en boucle ouverte 102
6.5 Concentration d'acétate d'éthyle, avec mesure bruitée, en boucle ouverte 102
6.6 Estimation de la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle ouverte 103
6.7 Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle ouverte 103
6.8 Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire 105

6.9 Débit d'entrée optimal pour l'identification, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire . . . 105
6.10 Concentration d'acétate d'éthyle, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire . . . 106
6.11 Estimation de la vitesse de réaction, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire . . . 106
6.12 Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire . . . 107
6.13 Débit d'entrée optimal pour l'identification, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire . . . 107
6.14 Estimation de la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire . . . 108
6.15 Concentration d'acétate d'éthyle, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire . . . 108
6.16 Concentration d'acétate d'éthyle, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant . . . 109
6.17 Estimation de la vitesse de réaction, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant . . . 110
6.18 Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant . . . 110
6.19 Débit d'entrée optimal pour l'identification, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant . . . 111
6.20 Concentration d'acétate d'éthyle, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant . . . 111
6.21 Estimation de la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant . . . 112
6.22 Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant . . . 112
6.23 Débit d'alimentation optimal pour l'identification, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant . . . 113
6.24 Temps nécessaire au programme pour résoudre le problème d'identification optimale, comparaison entre les approches non linéaire et linéaire temps variant . . . 113

7.1 Procédé pilote de cuisson des peintures en poudre [Bombard 2007] . . . 118
7.2 Echanges thermiques dans le système peinture+support . . . 121
7.3 Classification des méthodes de résolution numérique [Pourhiet 1988] . . . 123
7.4 Taux de conversion en boucle ouverte ($u = 23200$ W.m^{-2}) . . . 127
7.5 Température de sortie en boucle ouverte ($u = 23200$ W.m^{-2}) . . . 128
7.6 Ecart entre la sortie expérimentale et celle du modèle en boucle ouverte ($u = 23200$ W.m^{-2}) . . . 128
7.7 Flux infrarouge, en boucle ouverte . . . 134

7.8 Estimation du coefficient d'absorption, en boucle ouverte 134
7.9 Température face inférieure du support, en boucle ouverte 135
7.10 Sensibilité de la température face inférieure du support par rapport au coefficient d'absorption, en boucle ouverte 136
7.11 Température face inférieure du support, avec mesure bruitée, en boucle ouverte ($u = 5000$ W.m^{-2}) 136
7.12 Estimation du coefficient d'absorption, avec mesure bruitée, en boucle ouverte ($u = 5000$ W.m^{-2}) 137
7.13 Sensibilité de la température face inférieure du support par rapport au coefficient d'absorption, avec mesure bruitée, en boucle ouverte ($u = 5000$ W.m^{-2}) 137
7.14 Sensibilité de la température face inférieure du support par rapport au coefficient d'absorption, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire 138
7.15 Flux infrarouge optimal pour l'identification, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire 138
7.16 Température face inférieure du support, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire 139
7.17 Estimation du coefficient d'absorption, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire 139
7.18 Sensibilité de la température face inférieure du support par rapport au coefficient d'absorption, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant 140
7.19 Flux infrarouge optimal pour l'identification, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant 141
7.20 Température face inférieure du support, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant 141
7.21 Estimation du coefficient d'absorption, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant 142
7.22 Temps nécessaire au programme pour résoudre le problème d'identification optimale, comparaison entre les approches non linéaire et linéaire temps variant 142

Liste des tableaux

3.1 Bilan des applications industrielles de la commande prédictive linéaire, en 2003 [Qin 2003] 39
3.2 Bilan des applications industrielles de la commande prédictive non linéaire, en 2003 [Qin 2003] 39

6.1 Paramètres de simulation du procédé simulé pour la réaction de saponification 99
6.2 Comparaison des résultats obtenus pour la réaction de saponification avec les deux lois de commande 114

7.1 Paramètres de simulation pour la cuisson des peintures en poudre . . 127
7.2 Comparaison des résultats obtenus pour le procédé de cuisson des peintures avec les deux lois de commande 143

Introduction générale

L'ingénieur automaticien fait appel à beaucoup de méthodes pour la conduite des procédés, notamment basées sur des représentations par modèle. Les modèles font aussi l'objet de manipulations mathématiques à des fins d'analyse. La détermination d'un modèle, qui soit d'une part exploitable par les méthodes d'analyse et de synthèse de commande, et d'autre part qui soit suffisamment représentatif du système, est du ressort de l'automaticien (en collaboration bien sur avec des experts du domaine de modélisation concerné par l'application).

En réalité, le modèle décrivant un processus comporte généralement des paramètres physico-chimiques qui ne sont pas a priori tous connus de façon précise. Ces paramètres devront donc être identifiés pour obtenir un modèle qui représente de manière satisfaisante le processus. L'identification paramétrique du modèle d'un procédé est donc une tâche primordiale afin d'assumer la conception et l'évolution des performances de contrôle. L'identification consiste à réaliser des expérimentations sur le processus réel, par excitation sur l'entrée de commande du système à contrôler, et à traiter les données entrée/sortie obtenues pour en extraire la valeur des paramètres du modèle de comportement du processus. Le choix de cette entrée d'excitation est une question décisive pendant la phase d'identification, puisqu'elle influe sur la qualité des mesures utilisées lors de l'identification, et donc sur la valeur de ces paramètres.

Le problème de conception du contrôle optimal pour l'identification a suscité une certaine attention dans la littérature. En effet, il est l'un des problèmes classiques dans l'identification qui cherche à aborder une question essentielle, à savoir : est-il possible de concevoir une certaine expérience de telle manière que les paramètres dans la structure du modèle puissent être uniquement identifiés ? D'ailleurs, comment concevoir un signal d'entrée qui maximise une norme choisie a priori par la Matrice d'Information de Fisher (MIF) liée à l'expérience spécifique et au signal d'entrée choisi ?

Ce travail de thèse porte sur le contrôle optimal d'un procédé, non pas pour assurer sa conduite lors de l'exploitation (comme cela est fait classiquement), mais principalement pour assurer l'identification, de façon optimale, des paramètres inconnus du modèle choisi. Il s'agit de trouver la commande à appliquer pendant l'expérience qui permet d'optimiser un critère qui est fonction des sensibilités des mesures, utilisées pour l'identification, par rapport aux paramètres du modèle à

identifier. Le tout, en prenant tout de même compte des contraintes d'utilisation du procédé. On se focalise donc ici sur le problème couplé de design optimal d'expérience et d'identification en ligne, où la question principale est la suivante : comment le signal d'excitation d'un procédé (à son entrée), à appliquer pour obtenir les mesures utilisées pour l'identification, peut-il être choisi en ligne (d'une façon optimale) de telle manière que le paramètre inconnu du modèle soit en même temps estimé, et ce en prenant compte de diverses contraintes d'exploitation ?

Cette approche, couplant contrôleur prédictif et estimateur, résout en ligne le problème d'identification à chaque instant en utilisant l'observateur. Un modèle dynamique de sensibilité paramétrique est également employé en ligne pour obtenir la sensibilité paramétrique qui doit être optimisée. Ce modèle est explicitement dérivé du modèle et est employé par le contrôleur. La stratégie de la commande pour l'identification est la commande prédictive. C'est une approche qui est relativement simple à mettre en œuvre, les contraintes d'exploitation sont conjointement prises en compte dans la formulation du problème.

Dans le cadre de cette étude, on se propose d'étendre l'utilisation de la stratégie de commande prédictive avec un observateur non linéaire pour résoudre le problème d'identification optimale en ligne des paramètres inconnus du modèle. Ceci constitue la première ambition de ce travail.

D'autre part, la démarche méthodologique proposée est orientée dans un souci d'applicabilité, notamment par l'aspect implémentation en temps réel. Dans ce contexte, et c'est la deuxième contribution de ce travail, des exemples réels issus du Génie des Procédés ont été traités.

L'organisation de ce mémoire est la suivante :

- Dans le chapitre 1, nous faisons un point sur quelques travaux récents sur le contrôle optimal pour l'identification pour des systèmes linéaires et non linéaires. Plus particulièrement, nous citons les travaux de Keesman, Stigter et Vries sur l'identification optimale des paramètres d'un bioréacteur.

- Le chapitre 2 est consacré aux quelques généralités sur l'observation des systèmes non linéaires. Nous présentons les propriétés nécessaires et suffisantes à la synthèse d'un observateur ainsi que les équations de l'observateur pour des classes de systèmes non linéaires. Nous développons une théorie pour la synthèse des observateurs pour des systèmes non uniformément observables. Ce dernier travail constitue une de nos contributions dans ce mémoire. .

- Le chapitre 3 est dédié à la commande prédictive. Les principes de base de la commande prédictive sont rappelés. La formulation et la structure de la commande prédictive utilisée dans ce travail sont présentées. Deux stratégies de commande prédictive sont finalement rappelées, l'une basée sur un modèle non linéaire et l'autre sur un modèle linéaire temps variant autour d'un

fonctionnement nominal (plus soucieux de la problématique liée au temps de calcul).

• Dans le chapitre 4, l'apport principal de cette thèse liée à l'approche du contrôle optimal pour l'identification en ligne des paramètres inconnus du modèle est donné. La stratégie couplant le contrôleur prédictif et l'observateur non linéaire est présentée. Deux stratégies de contrôle optimal pour l'identification seront retenues : la première concerne la structure de commande prédictive à modèle interne non linéaire et la deuxième à modèle linéaire temps variant (qui remplace la première approche si le temps de calcul devient un paramètre critique pour l'implémentation de l'approche). Ceci mène à la formulation des problèmes d'optimisation sous contraintes pour l'identification en ligne, à travers deux algorithmes basés sur une méthode de descente de type gradient que nous utilisons dans cette étude.

• Dans le chapitre suivant, en vue de la mise en œuvre de l'approche, les méthodologies utilisées pour la prise en compte des contraintes sont introduites. Employées dans un contexte d'optimisation en ligne, ces méthodologies permettent d'aboutir aux deux structures finales du contrôleur prédictif par modèle pour les deux approches proposées.

Les deux derniers chapitres, 6 et 7, concernent les applications étudiées :

• Le premier exemple est consacré au contrôle optimal d'un procédé chimique simple : un procédé de saponification. Un modèle non linéaire constitué par une équation aux dérivées ordinaires est considéré. La problématique d'identification optimale est d'estimer la vitesse de réaction tout en assurant la limitation des contraintes physiques d'exploitation en jouant sur le débit d'entrée.

• Le deuxième exemple concerne le problème de cuisson radiatif étudié dans l'équipe "transferts couplés de matière et de chaleur" du laboratoire LAGEP. Il s'agit de cuisson des peintures en poudre sous infrarouge. Le modèle non linéaire est décrit par des équations aux dérivées partielles à commande frontière. La problématique d'identification optimale est d'estimer le paramètre principal, le coefficient d'absorption, sur la face supérieure, en jouant sur le flux infrarouge. Le tout, en assurant la conduite sous des contraintes d'exploitation. Ceci est basé sur un autre récent travail de thèse.

Ces deux applications permettent de conclure sur cette approche de contrôle optimal et de donner quelques perspectives.

Chapitre 1

Etat de l'art sur l'identification optimale

1.1 Introduction

Peu de personnes affirment que les automaticiens ont été parmi les acteurs clé dans le développement de la théorie de l'identification. Mais, il est juste d'indiquer, que pour une grande partie des années 70 et des années 80 (l'âge d'or du développement de la théorie d'identification), seulement une attention limitée a été donnée au design de la commande optimale couplée à la conception des méthodes d'identification.

Dans ce chapitre, nous allons, dans un premier temps, rappeler les différentes techniques de contrôle optimal pour l'identification pour des systèmes linéaires et non linéaires. Puis, nous nous focaliserons sur les travaux les plus intéressants dans ce domaine : ceux de Keesman, Stigter et Vries sur l'identification optimale des paramètres d'un bioréacteur.

1.2 Contrôle optimal pour l'identification

La simulation et l'optimisation des modèles mathématiques des procédés exigent que le problème de l'estimation des paramètres du modèle doit être abordé. Les études sur l'estimation des paramètres des modèles physiques ont montré que l'identification, sous la présence du bruit de mesure, peut être pratiquement non accessible. Une question essentielle se pose dans le cadre de l'estimation paramétrique : pendant une certaine expérience, comment le signal d'entrée peut-il être choisi de telle manière que les paramètres sont estimés d'une façon optimale ? C'est le problème bien connu de la conception d'entrée optimale qui est un problème classique dans la littérature d'identification [Goodwin 1977][Zarrop 1979]. L'étude pour la synthèse du signal d'entrée optimal pour l'estimation des paramètres, dans le cas des systèmes linéaires, a commencé au début des années 70 (voir par exemple [Mehra 1974] et [Krolikowski 1985]). Un critère basé sur la matrice d'information de Fisher (MIF),

ou son inverse, était fréquemment utilisé. Kalaba et Spingarn [Kalaba 1973] ont donné une solution optimale pour le cas d'un modèle linéaire de premier ordre, avec un critère quadratique sur l'entrée $u(t)$ et la sensibilité paramétrique $\frac{\partial y}{\partial \theta}$.

Pendant les années 70, la théorie d'identification des systèmes linéaires a connu un grand essor, où les acteurs [Goodwin 1977] [Zarrop 1979] sont les pionniers dans la conception de l'entrée optimale en boucle ouverte. Certaines approches pour l'identification en boucle fermée ont été introduites dans la littérature, celles-ci peuvent être classées dans : la famille des méthodes d'erreurs de prédiction [Ljung 1987], l'approche de sous-espace [Overschee 1996], et la méthode par analyse de corrélation non paramétrique et spectrale [Brillinger 1981].
Parmi les techniques d'identification en boucle fermée trouvées dans la littérature est l'utilisation des algorithmes d'erreur de sortie. L'erreur de prédiction entre la sortie réelle du système bouclé et la sortie du prédicteur de la boucle fermée est une mesure de l'écart entre le vrai modèle du procédé et son estimation. Cette erreur peut être utilisée afin d'adapter le modèle du procédé dans le but de minimiser l'erreur de prédiction en boucle fermée. L'utilisation de cette méthode se base sur la connaissance du régulateur. D'après [Landau 1997], les algorithmes d'identification appartenant à cette classe sont :

- CLOE-Erreur de sortie en boucle fermée,
- F-CLOE-Erreur de sortie en boucle fermée filtrée,
- AF-CLOE-Erreur de sortie en boucle fermée avec filtrage adaptatif,
- X-CLOE-Erreur de sortie en boucle fermée avec prédicteur étendu.

Pour plus de détails sur ces techniques et des résultats expérimentaux voir [Landau 1997].
Dans l'ouvrage récent [Garnier 2008], les auteurs ont donné un point sur les travaux récents dans le domaine de la modélisation expérimentale et de l'identification des systèmes.

Le problème fondamental des données en boucle fermée est la corrélation entre le bruit immesurable et l'entrée. C'est la raison pour laquelle plusieurs méthodes, qui fonctionnent en boucle ouverte, seront inapplicables en boucle fermée. Cela concerne par exemple l'approche et les méthodes non paramétriques, à moins que des mesures spéciales soient prises. Dans [Forssell 1999], on trouve un point sur les travaux sur l'identification en boucle fermée existant depuis les années 70, où le cadre commun de ces différentes approches est basé sur la méthode d'erreur de prédiction. Ils ont traité les méthodes de dérivée dans le cadre d'erreur de prédiction et la plupart des résultats sont donnés dans le cas des systèmes multi-entrées multi-sorties.

Toutes les approches de la conception d'une expérience pour le contrôle optimale se sont jusqu'ici concentrées sur la dérivée d'un signal d'entrée (ou le spectre de signal d'entrée) qui réduit au minimum une certaine mesure d'erreur entre le système en boucle fermée nominal et le système en boucle fermée réel, sous une contrainte sur l'entrée (par exemples les travaux de [Cooley 2001] [Forssell 2000] [Gevers 1986] [Hildebrand 2003] [Ljung 1999]). Dans [Bombois 2006], a été abordé le problème de conception d'expérience de point de vue dual et en boucle fermée, où l'objectif est

de concevoir une expérience d'identification au plus petit possible coût qui satisfait juste les demandes de l'exécution de commande robuste en termes de contraintes de qualité sur le modèle de prédiction.

Des problèmes typiques rencontrés lors de conception du contrôle optimal en boucle ouverte correspondent aux programmes non convexes. Par conséquent, les aspects informatiques peuvent limiter l'application de la conception d'entrée optimale. Une façon pour éviter ce problème est de considérer des expressions d'ordre plus élevé pour l'exécution du modèle. Des outils informatiques, fournissant une certaine robustesse contre les propriétés du système fondamental, sont alors utilisés. Dans ce contexte, les auteurs [Jansson 2005] ont prolongé en boucle fermée les résultats de boucle ouverte récemment présentées par [Jansson 004a] [Jansson 004b].

Dans le domaine des bioréacteurs, beaucoup des travaux ont été abordés [Versyck 1999], [Stigter 2004], [Keesman 2002] [Stigter 2001], [Stigter 2003]. Les auteurs dans [Versyck 1999] ont présenté une méthodologie optimale du plan d'expérience pour l'estimation prédictive des paramètres dans le domaine de la microbiologie. Cette étude précise que la conception optimale des signaux dynamiques d'entrée est nécessaire afin de maximiser l'information contenue dans les données expérimentales. Ils ont montré qu'à partir de peu d'expériences dynamiques, une information plus convenable peut être extraite, plutôt qu'à partir d'expériences statiques classiques. Par la présentation optimale du plan d'expérience dans le champ de la microbiologie, une nouvelle expérience pour la maximisation de la teneur en information des données expérimentales pour l'estimation des paramètres est fournie. Ces résultats ont été appliqués et améliorés par [Bernaerts 2000]. La méthodologie du plan d'expérience optimal pour l'estimation des paramètres est appliquée pour obtenir des évaluations non-corrélatives des paramètres du modèle [Ratkowsky 1982]. Indépendamment de la conception optimale d'une variable dans le temps, le profil de température est basé sur une étude de sensibilité du modèle. Une contribution importante de cette publication est une première validation expérimentale d'une approche dynamique innovatrice pour l'identification des paramètres non-corrélés. Cela concerne une application avec l'Escherichia coli.

Dans le domaine des sciences aérospatiales, une technique de conception d'entrée optimale pour l'estimation des paramètres d'avions est présentée dans [Jauberthie 2006]. L'idée originale est la combinaison d'une méthode de programmation dynamique avec un algorithme de gradient pour la synthèse d'entrée optimale. Cette approche inclut des contraintes physiques sur les variables d'entrée et de sortie. Une description de cette approche est présentée, suivi d'un exemple au sujet d'un vol d'avion. Dans ce cadre d'étude, les méthodes qui sont seulement basées sur la programmation dynamique exigent un grand nombre de calculs [Morelli 1999] et sont ainsi sujet à beaucoup de contraintes de temps réel. Les méthodes du gradient ou quasi-newtoniennes ont par ailleurs besoin d'une condition initiale afin d'exécuter les algorithmes correspondants. La méthode proposée dans [Jauberthie 2007] réduit sensiblement la

complexité informatique et la durée de la transformation nécessaire tout en agrandissant l'ensemble des entrées admissibles. Elle est basée sur deux étapes successives qui combinent l'efficacité de la programmation dynamique et des méthodes quasi-newtoniennes.

En 2001-2002, Stigter et Keesman ont trouvé des solutions analytiques pour la conception d'un signal d'entrée optimal en ce qui concerne un paramètre spécifique θ_i dans la structure du modèle [Keesman 2002] [Stigter 2001]. Dans ce cas, la matrice d'information de Fisher est réduite à une valeur scalaire, qui peut être optimisée en utilisant une loi de commande u singulière, appliquée sur un arc singulier dans l'espace d'état qui peut être atteint par la loi de commande de type bang-bang. La loi de commande singulière est dérivée en résolvant un ensemble d'équations algébriques, produit par la différentiation répétée de la condition d'optimalité de Pontryagin $\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$ sur l'intervalle $[t1, t2]$, où H est la formulation hamiltonienne associée au modèle et à la fonction coût, dépendant de la sensibilité paramétrique $\frac{\partial y(t)}{\partial \theta}$. La solution de cet ensemble d'équations algébriques a mené à une expression explicite pour la fonction d'entrée $u^{\star}(t)$. En outre, si le critère de coût est basé sur la trace de la matrice d'information de Fisher (c.-à-d., le critère-A), le problème de conception de commande peut également être résolu analytiquement. Cela conduit à une maximisation de fonction de sensibilité d'un certain nombre de paramètres pour trouver le signal d'entrée optimal.

Les travaux de Versyck [Versyck 2000] incluent la solution du problème optimal de conception d'entrée concernant le critère E-modifié pour plusieurs cas d'études, en utilisant une approche dans laquelle l'évolution dynamique des équations de sensibilité est analysée en détail [Versyck 2000]. Cette analyse a conduit à un problème de contrôle optimal qui est résolu numériquement et qui est appliqué pour un bioréacteur. Bien que les résultats analytiques et numériques rapportés soient prometteurs, leur application dans un cas d'étude pratique pour une vraie installation expérimentale est encore limitée. C'est particulièrement le cas en biochimie où le nombre de sondes est habituellement limité. Egalement, les incertitudes élevées présentes sur les mesures détériorent l'estimation des paramètres et la conception du contrôle correspondant. La recherche des algorithmes les plus avancés qui dépassent ces limitations est donc un problème qui a une signification pratique importante. Dans ce cadre, Stigter, Vries et Keesman [Stigter 2003] ont présenté une nouvelle approche adaptative pour laquelle le problème de conception du contrôle est résolu en ligne pour le cas d'un bioréacteur. Dans ce cas, les meilleurs estimations de l'ensemble des paramètres θ, c.-à-d. $\hat{\theta}(t_k)$, sont introduites dans la loi de commande pour concevoir un signal d'entrée optimal avec un critère de coût (basé sur la MIF). L'estimation courante de $\hat{\theta}(t_{k+1})$ est trouvée en utilisant un algorithme récursif d'estimation paramétrique.
Ces travaux de Stigter, Vries et Keesman sont finalement les plus proches de ceux que nous allons proposer ici, et nécessitent donc d'être discutés plus en détails.

1.3 Travaux de Stigter et Keesman

Les travaux de Stigter et Keesman [Stigter 2004] sont basés sur une loi de commande qui maximise la sensibilité paramétrique de la sortie y mesurée par rapport au paramètre à identifier θ : $\frac{\partial y}{\partial \theta}$. La méthode fournit une alternative à un problème de conception d'entrée et tout récemment a été appliquée [Stigter 2001] [Keesman 2002] [Keesman 2003]. En outre, un problème de conception d'entrée formulé avec le critère-A, c.-à-d. la trace de la matrice d'information de Fisher, a été également résolue, mais c'est seulement pour comparer avec d'autres résultats dans la littérature d'identification des systèmes. En cas de modèles plus complexes structurellement, des lois de commande optimales ne peuvent être facilement obtenues et on doit se fonder sur des méthodes d'optimisation numérique, impliquant des calculs numériques intensifs. Pour cela, et dans le but d'une démonstration de l'idée de la commande optimale de sensibilité paramétrique, Stigter et Keesman ont présenté une solution analytique au problème de contrôle optimal pour un simple cas d'étude impliquant deux paramètres et une équation d'état. On peut se référer à [Keesman 2002] [Stigter 2003].

1.3.1 Contrôle optimal de la sensibilité paramétrique dans un bioréacteur

Les auteurs cherchent un contrôleur singulier qui excite au maximum les sensibilités de l'état par rapport aux deux paramètres spécifiés $\{\theta_k, \theta_l, k \neq l\}$ de l'ensemble des parties du modèle $\{\theta_i, i = 1, ..., p\}$. L'expérience prise ici est un exemple de bioréacteur qui est conçue, par exemple, pour déterminer le taux respiratoire d'une population de bactéries en alimentant un substrat par $u(t)$ [Vanrolleghem 1995] [Dochain 1995]. Dans cette étude, la dynamique de croissance inclut la cinétique de Monod, de sorte que le modèle est :

$$\dot{x_1}(t) = -\frac{\mu_{max} X(t)}{Y} \frac{x_1(t)}{K_S + x_1(t)} + u(t) \tag{1.1}$$

où $x_1(t)$ est la concentration en substrat dans le bioréacteur, $X(t)$ est la biomasse et $u(t)$ est le débit d'alimentation. Le réacteur est supposé parfaitement agité.

L'observation de la concentration en substrat peut alors être employée pour déterminer certaines combinaisons des paramètres biocinétiques caractéristiques, c.-à-d. le taux maximum de croissance μ_{max}, le coefficient de rendement Y et la constante de saturation K_S. Le profile optimal de taux d'alimentation $u(t)$ (en termes du critère de conception E-optimal modifié) est obtenu dans cette expérience pour estimer μ_{max} et K_S. Pour éviter un problème de mesure de substrat (parfois rencontré dans le traitement des eaux usées), l'étude se concentre sur les substrats directement observables tels que le nitrate et l'ammonium. Tandis que l'observation d'autres substrats est difficile à réaliser dans la pratique, ceci ne forme pas une contrainte

sérieuse pour la méthode proposée. En effet, la méthode peut être modifiée pour utiliser, par exemple, la mesure de l'oxygène ou la vitesse de la consommation d'oxygène au lieu de la concentration de substrat [Keesman 2002].

Un contrôleur singulier, pour l'excitation optimale de la sensibilité $x_2(t) \equiv \frac{\partial x_1(t)}{\partial K_S}$ et $x_3(t) \equiv \frac{\partial x_1(t)}{\partial(\mu_{max} X/Y)}$, a été présenté. La fonction coût est définie par :

$$J = \int_{\tau=0}^{t_f} (q_1 x_2^2(\tau) + q_2 x_3^2(\tau)) d\tau \tag{1.2}$$

avec $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^+$. L'Hamiltonien est défini par :

$$H(x(t), \lambda(t)) = -q_1 x_2^2(t) - q_2 x_3^2(t) + \sum_{i=0}^{3} \lambda_i(t) \dot{x}_i(t) \tag{1.3}$$

avec $\{\lambda_i(t), i = 1, 2, 3\}$ des sous-états. La variable de commande $u(t)$ est un contrôleur singulier qui réduit au minimum l'Hamiltonien H pour toutes les séquences des entrées possibles $u(t)$, et est dérivé par l'expression :

$$\forall i \in \{0, 1, 2, ...\} : \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{1.4}$$

$u(t)$ est alors ici déterminé explicitement par deux différentiations [Stigter 2001].

1.3.2 Résultats

L'étude mène à un contrôleur pour l'estimation de la constante K_S (la cinétique supposée de Monod pour la consommation de substrat). Les résultats sont satisfaisants, dans le sens que la commande excite de façon optimale la sensibilité de la concentration mesurée en substrat par rapport au paramètre K_S. En outre, l'estimation des deux paramètres (la combinaison $\mu_{max} X/Y$ et la constante de saturation K_S) a également été démontrée et une solution optimale a été présentée. La solution générale était étudiée en plus de détails pour chacune des différentes sensibilités paramétriques [Stigter 2004]. Pour le cas d'une sensibilité paramétrique plus compliquée, l'Hamiltonien impliquant des expressions plus compliquées, une solution numérique a été considérée qui optimise les sensibilités sur la base d'un gradient [Bryson 1999]. Dans [Keesman 2002] [Keesman 2003], ce problème est discuté plus en détail pour une étude de cas semblable. En cas de modèle complexe comme on en trouve en Génie des Procédés, cette approche reste donc limitée et complexe, et ne peut pas être utilisée.

1.4 Travaux de Stigter, Vries et Keesman

1.4.1 Problème de contrôle optimal

La structure du modèle considéré est la suivante :

$$M(\theta) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \theta) \\ y(t_k) = h(x(t_k), u(t_k), \theta) + \eta(t_k) \end{cases} \tag{1.5}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de vecteurs à valeurs réelles, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est l'équation d'observation, θ est un vecteur des paramètres de p- dimension, $x(t)$ est un vecteur d'état de n-dimension, $u(t)$ est un vecteur de commande de r-dimension et $y(t)$ est un vecteur de sortie de m-dimension. Les observations sont $Y(t_N) = \{y(t_k), 0 < k < N\}$, où N marque la fin de l'expérience, avec le bruit de mesure Gaussien $\{\eta(t_k), 0 < k < N\}$. La structure classique du modèle défini ci-dessus est continu-discret. Le problème de contrôle pour identifier d'une façon optimale l'ensemble de paramètre θ est défini par :

$$max_{u(t) \in \mathbb{U}_{adm}} \quad \phi(t_f) = \|\mathcal{F}(\theta, t_f\|_E \tag{1.6}$$

sous les contraintes dynamiques (1.5), y compris l'évolution dynamique de la sensibilité paramétrique de sortie $y_\theta(t) \equiv \frac{\partial y(t)}{\partial \theta}$ (qui est simplement dérivée des équations du modèle (1.5) et des équations d'observation). Le critère-E de la matrice d'information de Fisher est utilisé (c.à.d. la maximisation de sa valeur propre minimale au temps final t_f). D'autres critères peuvent être appliqués pour ce cas d'étude (critère-D, critère-E-modifié, ou critère-A)(Annexe A), chacun avec ses propres avantages et inconvénients [Munack 1989]. La fonction coût $\phi(t_f)$ dépend des paramètres θ dont la valeur est a priori inconnue. La commande optimale $u^\star(t_k \mid t_k)$ est calculée sur la base d'estimation $\hat{\theta}(t_k)$ et des données de procédé $Y(t_k)$.
Le problème d'identification est résolu comme problème de commande adaptative sur un horizon récursif telle que l'estimation paramétrique est donnée à chaque instant en prenant des nouvelles mesures $y(t_{k+1})$. L'algorithme de reconstruction paramétrique utilisé est "l'erreur de prédiction récursive", algorithme de format continu-discret [Ljung 1983],[Munack 1989]. L'avantage de cet algorithme est qu'il utilise la sensibilité paramétrique des états, c.à.d $W(t) \equiv \frac{\partial x(t, \hat{\theta})}{\partial \theta}$, pour minimiser l'erreur de la prédiction $\hat{y}(t_{k+1}, \theta)$. Cet algorithme utilise la formule suivante :

$$\epsilon(t_k) = y(t_k) - \hat{y}(t_k, \hat{\theta}(t_k)) \tag{1.7}$$

L'interprétation de cette formule est donnée par le calcul de la matrice de gain qui est calculée explicitement sur la base d'une matrice de variance-covariance pour l'estimation des paramètres du modèle. Alors, les sensibilités paramétriques $W(t)$, deviennent disponibles sur un horizon récursif une fois le problème de commande

optimale résolu à l'instant t_k. Ces sensibilités peuvent être employées immédiatement pour une mise à jour du vecteur de paramètre $\hat{\theta}(t_k)$.

1.4.2 Cas d'étude et résultats

Le cas d'étude adressé dans ces travaux a été définie initialement dans le travail de Vanrolleghem [Vanrolleghem 1994] pour la détermination des paramètres μ_{max} et K_S d'un bioréacteur pour une identification expérimentale avec un dispositif rapide de toxicité d'oxygène (RODTOX). Pour cette expérience, la fonction coût à minimiser a été choisie pour le critère-E (c.à.d. la maximisation au minimum de la valeur propre de $\mathcal{F}(t_f)$). D'autres critères ont été appliqués pour ce cas d'étude, afin de faire une comparaison de diverses solutions optimales. Plus de détails sur les résultats de l'expérience sont donnés dans [Stigter 2003].

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cité des travaux sur les techniques de contrôle optimal pour l'identification pour les systèmes linéaires et non linéaires. Plus précisément, nous nous sommes concentrés sur les travaux de Keesman, Stigter et Vries pour l'identification optimale des paramètres d'un bioréacteur. Bien que ces méthodes analytiques et numériques sont assez satisfaisantes, leur application dans un cas d'étude pratique, est encore limitée. C'est particulièrement le cas des modèles plus complexes où le nombre de variables d'état est plus élevé, et où surtout la solution analytique du modèle dans ce cas reste compliqué voire impossible. Par exemple, pour un modèle décrit par des équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires, la résolution du problème d'optimisation, dans ce cas, doit se fonder sur des méthodes d'optimisation numérique, impliquant des calculs numériques intensifs. La recherche d'algorithmes plus avancés qui dépassent ces limitations est donc un problème ouvert. Tous ces facteurs, nous ont motivé à apporter une nouvelle contribution de contrôle optimal pour la phase d'identification en ligne.

Chapitre 2

Observabilité et les observateurs des systèmes non linéaires

2.1 Introduction

De nos jours les modèles dynamiques décrivant les systèmes physiques (systèmes électriques, mécaniques, thermiques, chimiques, etc.) font partie non seulement de la culture des universitaires, mais aussi du monde industriel. Un modèle dynamique d'un système physique est sensé prédire l'évolution du système ou au moins donner la tendance de son évolution. Pour les automaticiens le développement d'un modèle a comme objectif la conduite, la commande ou encore le diagnostic du système. Pour réaliser l'un des trois objectifs, l'accès en ligne à l'état du système est souvent nécessaire. L'état du système est formé d'un nombre de variables décrivant l'évolution du système. Ces variables décrivent généralement un comportement physique et peuvent inclure certains paramètres intervenant dans le modèle. Les modèles considérés dans les problèmes de l'automatique sont décrits par des équations différentielles ordinaires ou par des équations aux dérivées partielles. Dans la plupart des procédés physiques, l'état du système n'est pas mesuré en ligne ; seulement quelques mesures en ligne donnant une information sur l'évolution du système sont à la disposition de l'opérateur. Afin de reconstituer l'état du système, l'automaticien fait recours aux méthodes d'estimation en ligne. Un **observateur ou capteur logiciel** est un système dynamique combinant le modèle du système et les informations contenues dans les mesures en ligne des entrées et des sorties pour donner en ligne une estimation de l'état inconnu du système. La figure 2.1 ci-dessous fournit le schéma de principe de l'observateur.

Comme pour la plupart des problèmes d'estimation, l'analyse de sensibilité est une étape nécessaire avant toute réalisation d'algorithme d'estimation. En ce qui concerne la synthèse de l'observateur (estimation de l'état), l'analyse de l'observabilité permet de savoir si la reconstitution de l'état est réalisable. Ce problème consiste à analyser si pour une entrée donnée, la sortie associée contient suffisamment d'information sur l'état du système. En d'autre terme, si la connaissance de cette sortie

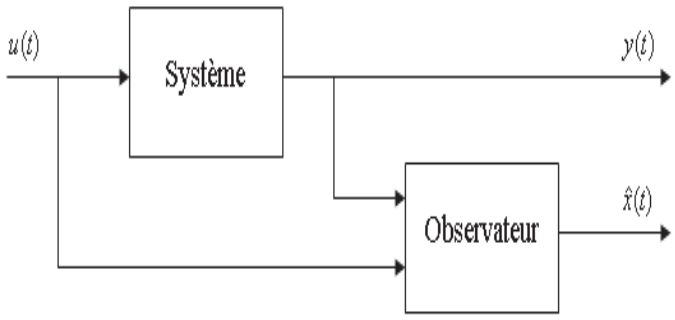


FIGURE 2.1 – Schéma de principe d'un observateur.

sur un intervalle de temps $[0, T]$ permet de reconstituer l'état du système. Mathématiquement, cela veut dire qu'il y a une correspondance biunivoque entre la condition initiale de l'état et la sortie définie sur l'intervalle $[0, T]$. En effet en l'absence de toute perturbation et pour un modèle parfait, la donnée de la condition initiale et de l'entrée définit d'une manière unique l'état du système.
Dans les paragraphes qui suivent, nous allons donner quelques notions sur l'observabilité et sur la synthèse des observateurs.

2.2 Quelques notions d'observabilité

Pour les systèmes non linéaires plusieurs notions d'observabilité existent dans la littérature. Dans ce qui suit, nous allons rappeler quelques unes d'elles.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état, l'entrée et la sortie à l'instant t. U est un domaine de $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.1 *Observabilité*
Le système (2.1) est dit observable si, pour deux conditions initiales quelconques $x(0) \neq \overline{x}(0)$ *; il existe une entrée* u *définie sur* $[0, T]$ *; il existe* $t_0 \in [0, T]$ *tels que* $h(x(t_0)) \neq h(\overline{x}(t_0))$ *où* $x(t)$, $\overline{x}(t)$ *sont respectivement les trajectoires (2.1) associées à* u*. Dans ce cas, on dira que* u *distingue les conditions initiales* $x(0)$, $\overline{x}(0)$ *sur* $[0, T]$.

Définition 2.2 *Entrée universelle*
Une entrée u est dite ***universelle*** *sur $[0,T]$, si elle distingue tout couple de points distincts x, $\overline{x}$ sur $[0,T]$. On dit que u rend le système observable sur $[0,T]$. Dans le cas contraire, nous dirons que u est une entrée singulière (entrée qui rend le système non observable sur $[0,T]$).*

Exemple 2.1 *L'exemple qui suit montre que bien qu'un système non linéaire est observable, il peut avoir des entrées qui le rendent non observable :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

Il est clair que pour un $T > 0$, l'entrée u qui est nulle sur $[0,T]$ est singulière. Maintenant considérons l'entrée $\widetilde{u}$ définie sur $[0,2T]$, qui est nulle sur $[0,T]$ et non identiquement nulle sur $[T,2T]$. Alors $\widetilde{u}$ est universelle sur $[0,2T]$.

Pour les systèmes linéaires stationnaires, cette situation n'existe pas. Autrement dit, si un système linéaire est observable, alors toute entrée est universelle. De plus l'observabilité est caractérisée par une condition de rang, donnée par le critère de Kalman. En effet considérons un système linéaire stationnaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

Le critère de Kalman affirme que ce système est observable si, et seulement si, le rang de la matrice $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n.$

Ci-dessous nous allons étendre cette condition du rang aux systèmes non linéaires (2.1) de la manière :

Dans toute la suite si X est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ (autrement dit une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans lui même) et si φ est une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on note par $L_X(\varphi)$ la dérivée de Lie de φ par rapport à X. Cette dérivée est donnée par $L_X(\varphi)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \dfrac{\varphi(x + \epsilon X(x)) - \varphi(x)}{\epsilon}$. Un simple calcul donne $L_X(\varphi)(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$, où X_i est la ième composante de X.

Maintenant notons par f_u la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans lui même définie par $f_u(x) = f(x,u)$ ou $f(x,u)$ est la fonction définissant la dynamique du système (2.1). Notons aussi par $\mathcal{O}$ le plus petit espace vectoriel réel contenant les fonctions de sorties $h_1, \ldots, h_p$ est tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{O}$, $L_{f_u}(\varphi) \in \mathcal{O}$.

Définition 2.3 *1) On appelle espace d'observation du système (2.1) et on le note par $\mathcal{O}$, le plus petit espace vectoriel contenant les fonctions de sorties $h_1, \ldots, h_p$, et tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{O}$, $L_{f_u}(\varphi) \in \mathcal{O}$, pour tout $u \in U$.*

2) Le système (2.1) est dit observable au sens du rang en un point $x^0 \in \mathbb{R}^n$, si on peut trouver n fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de $\mathcal{O}$ telles que le jacobien de Φ en x^0 est égal à n ; où Φ est la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ ayant pour composantes les φ_i.

3) Le système (2.1) est observable au sens du rang s'il est en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ y(t) = x^2(t) \end{cases} \tag{2.4}$$

Ici $\mathcal{O}$ est l'espace vectoriel engendré par x^2, x et 1. si on prend $\Phi = x$, on voit que le système est observable au sens du rang.
Ce système est également observable. En effet, considérons l'entrée constante $u(t) = 1$, comme $x^2(t) = \overline{x}^2(t)$ sur $[0, T]$, alors les dérivées temporelles sont aussi égales, donc, $x(t) = \overline{x}(t)$.

Dans cet exemple l'observabilité au sens du rang et l'observabilité sont toutes les deux satisfaites. Il n'en est pas le cas en général. En effet l'exemple suivant donne un système qui est observable au sens du rang, mais qui n'est pas observable sur tout l'espace.

Exemple 2.3

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ y(t) = cos(x(t)) \end{cases} \tag{2.5}$$

Ici $\mathcal{O}$ est l'espace vectoriel engendré par $cos(x)$, $sin(x)$. Si on prend $\Phi(x) = (cos(x), sin(x))$, alors le rang de son jacobien est toujours égal à 1, quelque soit x.
En revanche, le système n'est pas observable. En effet, prenons $x(0) = \overline{x}(0) + 2\pi$, alors $cos(x(t)) = cos(\overline{x}(t))$, pour tout t. Donc $x(0)$ et $\overline{x}(0) + 2\pi$ ne peuvent jamais être distingués par aucune entrée.

Par contre si $|x(0) - \overline{x}(0)| < 2\pi$, ces conditions initiales peuvent être distinguées par une entrée (il suffit de prendre $u = 1$ pour exemple). Cela nous conduit à une définition plus faible que celle de l'observabilité :

Définition 2.4 *Le système (2.1) est dit localement faiblement observable en x^0, s'il existe un voisinage V de x^0 tel que pour tout voisinage de V' et pour toutes conditions initiales $x(0)$, $\overline{x}(0)$ dans V' ; il existe une entrée sur $[0, T]$ telle que les trajectoires $x(t)$ et $\overline{x}(t)$ restent dans V' et $h(x(t_0) \neq h(\overline{x}(t_0))$ pour un certain $t_0 \in [0, T]$.*
Le système est faiblement observable s'il est en tout point de l'espace d'état considéré.

Remarque 2.1 *Le système de l'exemple ci-dessus est faiblement observable.*

On a le résultat général suivant :

Théorème 2.1 *[Hermann 1977]*
Si le système (2.1) est observable au sens du rang, alors il est localement faiblement observable en x^0. Donc l'observabilité au sens du rang implique la locale faible observabilité.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons présenter l'état de l'art de ces notions d'observabilité, ainsi que les observateurs pour deux classes de systèmes. Tout d'abord, nous allons traiter les systèmes qui sont affines en l'état, ensuite, nous présenterons quelques classes de systèmes dont l'observabilité n'est pas affectée par les entrées (systèmes uniformément observables).

2.3 Systèmes affines en l'état

2.3.1 Observabilité

Les systèmes affines en l'état sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + B(u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.6}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A(u)$ est une matrice $n \times n$, $B(u)$ de dimension $n \times 1$, C est une matrice constante de type $p \times n$. $A(u)$ et $B(u)$ sont continues par rapport à u.

En utilisant des arguments mathématiques développés par [Sussman 1979], voir aussi [Hammouri 2010], il est montré que les diverses notions d'observabilités du paragraphe ci-dessus sont équivalentes dans le cas des systèmes affines en l'état. Cependant, l'universalité des entrées peut être caractérisée par la définie positivité du Grammien d'observabilité que nous allons donner ci-dessous.

Dans la suite, nous notons par $\phi_u(t, t_0)$ la matrice de transition du système (2.6) associée à l'entrée u qui est l'unique solution de :

$$\frac{d\phi_u(t, t_0)}{dt} = A(u(t)).\phi_u(t, t_0) \tag{2.7}$$

avec la condition initiale $\phi_u(t_0, t_0) = I$ la matrice identité.

Cette matrice de transition a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \phi_u(t,t_0) = \phi_u^{-1}(t_0,t) \\ \phi_u(t_1,t_2)\phi_u(t_2,t_3) = \phi_u(t_1,t_3) \end{cases}$$

On appelle **Grammien d'observabilité** associée à une entrée u sur l'intervalle $[t_0, t_0{+}T]$, la matrice symétrique positive $G(u,t_0,t_0{+}T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \phi_u^T(t,t_0)C^TC\phi_u(t,t_0)dt$. Il n'est pas difficile de voir :

Proposition 2.1 *u est universelle sur l'intervalle $[t_0, t_0+T]$, si, et seulement si, $G(u,t_0,t_0+T)$ est symétrique définie positive.*

Cette proposition nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.5 *Entrée régulièrement persistante*
Une entrée bornée $u : \mathbb{R}^+ \to U$ est dite régulièrement persistante si, $\exists \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0; \exists t_0 \geq 0$ tel que $\forall t \geq t_0$. Le Grammien du système (2.6) vérifie :

$$\begin{cases} \lambda_{min}(G(u,t,t+T)) \geq \alpha_1 \\ \lambda_{max}(G(u,t,t+T)) \leq \alpha_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

où λ_{min} (resp. λ_{max}) désigne la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre du Grammien.

Le résultat ci-dessous fait partie de la littérature classique du filtrage de Kalman et des observateurs des systèmes linéaires temps variants (voir par exemple [Kalman 1961] [Hammouri 1990]).

Théorème 2.2 *Soit $S(t)$ la solution de l'une des équations suivantes :*

$$\dot{S} = -SQS - A^T(u)S - SA(u) + C^TRC \tag{2.9}$$

$$\dot{S} = -\theta_o S - A^T(u)S - SA(u) + C^TRC \tag{2.10}$$

où $S(0)$, Q et R sont des matrices symétriques définies positives.
Si u est une entrée régulièrement persistante, alors :

$$\alpha I \leq S(t) \leq \beta I, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.11}$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sont des constantes et I désigne la matrice identité.

Ce résultat est fondamental dans la synthèse des observateurs des systèmes affines en l'état que nous allons donner dans le sous paragraphe 2.3.3.

2.3.2 Observateurs

L'observateur du système (2.6) prend la forme suivante :

- le premier type d'observateur est l'observateur de type Kalman donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + B(u) - S^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \\ \dot{S} = F(u, S) \end{cases} \tag{2.12}$$

  où $\dot{S} = F(u, S)$ prend l'une des équations citée ci-dessus ((2.9) et (2.10)) ; $S(0)$ est symétrique définie positive
  .

- dans la situation stochastique et lorsque $\dot{S} = F(u, S)$ est donnée par l'équation de Riccati, les matrices Q et R représentent respectivement les matrices de covariance du bruit sur l'état et sur la sortie, qui sont supposées être blancs et Gaussiens. Dans le cas déterministe, Q et R sont des matrices de pondération quelconques.
- le deuxième type d'observateur est basé sur la minimisation d'un critère quadratique avec facteur d'oubli exponentiel (voir [Hammouri 1990] et [Bornard 1988]). L'obtention de l'observateur dont le gain provient de l'équation de Lyapunov différentielle donnée dans (2.9) provient de la minimisation du critère de type moindre carré avec facteur d'oubli ci-dessous :

$$e^{-\theta_o t}\|\xi - \widehat{x}(0)\|^2 + \int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}\|C\Phi_u(s,0)\xi + C\Phi_u(s,\tau)d\tau - y(s)\|_R^2 ds \tag{2.13}$$

  où $\|z\|_R^2 = z^T R z$, pour un p-vecteur colonne z. La minimisation de ce critère se fait par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$. La variable ξ obtenue dépend de t, et constitue la condition initiale telle que si le système (2.6) est initialisé en cette valeur, la sortie associée devient la plus proche de la sortie mesurée au sens du critère ci-dessus. L'exponentielle qui figure dans le critère est introduit pour oublier l'effet des mesures passées afin de remettre à jour l'estimation en tenant compte des mesures les plus récentes.

2.3.3 Une extention aux systèmes affines en l'état

Les systèmes affines en l'état modulo une injection de sortie s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), y(t))x(t) + B(u(t), y(t)) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \tag{2.14}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

En termes de commande, ces systèmes sont fortement non linéaires. Quant à leur observabilité, ils ont une structure semblable à celle des systèmes affines en l'état.

En effet, vue que les vecteurs $u(t)$ et $y(t)$ sont mesurés, $(u(t), y(t))$ peut être considéré comme entrée pour le problème de l'estimation.
Les auteurs dans [Fargeot 1994] ont montré le résultat suivant :

Proposition 2.2 *: Si* $u : [t_0, t_0+T] \to \mathrm{U}$*, est une entrée universelle pour le système (2.14) alors,* $(u(t), y(t))$ *est une entrée universelle pour le système :*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(u(t), y(t))z(t) + B(u(t), y(t)) \\ y(t) = C(t)z(t) \end{cases} \tag{2.15}$$

Notons que seulement quand $z(t_0) = x(t_0)$*, on a* $z(t) = x(t), \forall t \geq t_0$*.*

Comme pour les systèmes qui sont affines en l'état, un observateur pour la classe de systèmes (2.14) prend la forme (2.12) en rajoutant à sa dynamique l'injection de sortie $y(t)$.

2.4 Formes canoniques et observateurs des systèmes uniformément observables

2.4.1 Formes canoniques

Nous avons vu que l'observabilité des systèmes non linéaires dépend des entrées qui lui sont appliquées. Dans cette section, nous allons nous intéresser à une classe de systèmes qui sont observables indépendamment de l'entrée (systèmes uniformément observables).

Définition 2.6 *Observabilité uniforme*
Le système (2.1) est dit uniformément observable, si toute entrée le rend observable sur tout intervalle $[0, T]$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons rappeler quelques formes canoniques (formes normales) pour les systèmes uniformément observables.

2.4.1.1 Cas mono-sortie

Tout d'abord, nous commençons par le cas des systèmes non linéaires qui sont affines en la commande, ensuite nous donnerons le cas général.

Considérons les systèmes mono-sortie, affines en la commande suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}$. Les auteurs dans [Gauthier 1981] et [Gauthier 1992]

ont donné une forme canonique pour les systèmes (2.16), qui sont uniformément observables. Cette forme canonique prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + G(z) + \sum_{i=1}^{m} u_i F_i(z) \\ y = Cz \end{cases} \tag{2.17}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; C = [1, 0, \dots, 0]$$

$$G(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G_n(z) \end{pmatrix}$$

$$F_i(z) = \begin{pmatrix} F_{i1}(z_1) \\ F_{i2}(z_1, z_2) \\ \vdots \\ F_{in}(z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}$$

En effet, dans [Gauthier 1981], [Gauthier 1992], les auteurs montrent le résultat suivant :

Théorème 2.3 *Forme canonique*
Si le système (2.16) est uniformément observable, alors il se transforme localement presque par tout par changement de coordonnées sous la forme (2.18).
Réciproquement, tout système se transformant sous la forme canonique (2.18) est uniformément observable.

Le changement de variables utilisé est de la forme $z = \phi(x)$, où $\phi(x) = [h(x), L_{f_0}(h)(x), \dots, L_{f_0}^{n-1}(h)(x)]^T$.

Dans le cas des systèmes non affines par rapport à l'entrée, le résultat ci-dessus a été étendu par [Gauthier 1994] dans le cas mono-sortie et par [Hammouri 2003]. Afin de simplifier l'exposé, le système (2.1) est dit **uniformément infinitésimalement observable**, si le système (2.1) augmenté par son linéarisé autour de ses trajectoires est uniformément observable.

En fixant un $u_0 \in U$, il a été démontré ([Gauthier 1994]) que comme dans le cas affine en la commande, la transformation $z = [h(x), L_{f_{u_0}}(h)(x), \dots, L_{f_{u_0}}^{n-1}(h)(x)]^T$

où $f_u(x) = f(u, x)$ transforme le système (2.1) dans le cas mono-sortie (lorsque ce dernier est uniformément infinitésimalement observable) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = F(u, z) \\ y = Cz \end{cases} \tag{2.18}$$

où $F_i(u, z) = F_i(u, z_1, \ldots, z_{i+1})$, avec $\frac{\partial F^i}{\partial z^{i+1}}(u, z) \neq 0, \ \forall (u, z)$.

2.4.1.2 Cas multi-sorties

L'extension du résultat ci-dessus aux systèmes multi-sorties a été réalisé par [Hammouri 2003].
La notion d'observabilité infinitésimal a été formulé d'une manière géométrique et analytique plus simple. La notion utilisée par les auteurs est celle de la structure d'observabilité uniforme. Cette notion se résume de la façon suivante :
Considérons :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, z) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{2.19}$$

Ici, $h = (h_1, \ldots, h_p)$.

1) Nous considérons la co-distribution engendrée par les 1-formes différentielles $\{dh_1, \ldots, dh_p\}$ que nous notons par D_u^1. Notons que l'indice u n'a pas d'importance dans ce cas-ci, mais les codistributions qui vont suivre, vont en dépendre.
2) Par récurrence, nous définissons D_u^{k+1}, comme la co-distribution engendrée par la codistribution D_u^k et par toutes les 1-formes différentielles $L_{f_u}(\omega)$, où $\omega \in D_u^k$.
Ici f_u est le champ de vecteur défini par $f_u(x) = f(u, x)$ et $L_{f_u}(\sum_{i=1}^n a_i(x)dx_i) = \sum_{i=1}^n L_{f_u}(a_i)(x)dx_i + \sum_{i=1}^n a_i(x)dL_{f_u}(x_i)$ et $dL_{f_u}(x_i) = df_{ui}(x)$, où $f_{ui}(x)$ est la $i$ème composante de f_u.

Maintenant, nous considérons les co-distributions d'observabilité du système (2.1) qui sont définies comme suit :

1) Nous considérons la co-distribution engendrée par les 1-formes différentielles $\{dh_1, \ldots, dh_p\}$ que nous notons par D^1 ($D^1 = D_u^1$).
2) Par récurrence, nous définissons la co-distribution D^{k+1}, comme étant la co-distribution engendrée par la codistribution D^k et par toutes les 1-formes différentielles $L_{f_u}(\omega)$, avec u décrivant le domaine des entrées U et ω décrivant la codistribution D^k.

Définition 2.7 *On dit que le système (2.1) possède la structure d'observabilité uniforme sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, si :*

i) Pour tout k, D^k a une dimension constante sur V :
$\forall x, x' \in V$; $\forall k$, $\dim D^k(x) = \dim D^k(x') = n_k$

ii) $\forall x \in V$; $\forall k$, $\dim D_u^k(x) = \dim D^k(x)$

Théorème 2.4 *([Hammouri 2003])*
Si le système (2.19) possède la structure d'observabilité uniforme sur un ouvert V, alors il se transforme localement par changement de coordonnées sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = F^1(u, z^1, z^2) \\ \vdots \\ \dot{z}^i = F^i(u, z^1, \ldots, z^{i+1}) \\ \vdots \\ \dot{z}^q = F(u, z) \\ y = Cz \end{cases} \tag{2.20}$$

$$z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^q \end{pmatrix}, \; z^i \in \mathbb{R}^{n_i},$$

$p = n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_q$; $\quad n_1 + n_2 + \ldots + n_q$=n.

$$\text{Rang } \left(\frac{\partial F^i}{\partial z^{i+1}}(u, z) \right) = n_{i+1} \; \forall z \in \mathbb{R}^n; \forall u \in \text{U} \tag{2.21}$$

2.4.2 Observateurs à grand gain

La dénomination observateur à grand gain provient du fait qu'on utilise des gains assez grands pour amortir l'effet de la non linéarité du système. La synthèse de ces observateurs est basée sur des formes canoniques (comme celles citées ci-dessus).

2.4.2.1 Cas mono-sortie

Tout d'abord, nous commençons par examiner les observateurs pour la forme canonique (2.18) :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + G(z) + \sum_{i=1}^{m} u_i F_i(z) \\ y = Cz \end{cases} \tag{2.22}$$

A est la matrice anti-shift donnée ci-dessus, $C = [1, 0, \ldots, 0]$, $F_{ij}(z) = F_{ij}(z_1, \ldots, z_j)$, $G_j = 0$ pour $1 \leq j \leq n-1$.

Afin de montrer la convergence de l'observateur à grand gain (voir ci-dessous), l'hypothèse suivante est suggérée :

Hypothèse 2.1 *Les fonctions G et F_i sont globalement Lipschitziennes. Autrement dit, il existe une constante $c > 0$, telle que $\forall (z, z') \in \mathbb{R}^n, \|\psi(z) - \psi(z')\| \leq c\|z - z'\|$, où c ne dépend que de l'ensemble borné U dans lequel $u(t)$ prend ses valeurs.*

Théorème 2.5 *Sous l'hypothèse 2.1, un observateur exponentiel pour le système (2.22) prend la forme :*

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + G(\hat{z})\sum_{i=1}^{n} F_i(\hat{z}) + K\Delta_{\theta_o}(C\hat{z} - y) \tag{2.23}$$

où $\Delta_{\theta_o} = \begin{pmatrix} \theta_o & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_o^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \theta_o^n \end{pmatrix}$ *et* $K = [k_1, \dots, k_n]^T$ *tel que* $A + KC$ *admet toutes ses valeurs propres à valeurs réelles négatives.*
Plus précisément, pour toute entrée bornée prenant ses valeurs dans U *:* $\exists \theta_0 \geq 1\,;\, \forall \theta_o > \theta_0\,;\, \exists \lambda > 0\,;\, \exists \mu \in [0, 1[\,;\, \forall x(0)\,;\, \forall \hat{x}(0),\, \|\hat{z}(t) - z(t)\|^2 \leq \lambda e^{-\mu\theta_o t}\|\hat{z}(0) - z(0)\|^2$.

Ce résultat a été étendu aux systèmes mono-sortie non affines par rapport à l'entrée [Gauthier 1994]. L'observateur pour les formes canoniques (2.18) prend la forme suivante :

$$\dot{\hat{z}} = F(u, \hat{z}) + \Delta_{\theta_o} K(C\hat{z} - y) \tag{2.24}$$

Le choix de K est plus compliqué que dans le cas des systèmes affines par rapport à l'entrée (donné ci-dessus). En effet, il est démontré dans [Gauthier 1994] que si $a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ sont $n-1$ fonctions non forcément connues et satisfaisant les inégalités suivantes :

$$0 < a \leq a_i(t) \leq a', \quad a, a' \text{ sont des constantes} \tag{2.25}$$

alors, on a le lemme suivant :

Lemma 2.1 *il existe un* n*-vecteur colonne* K*, une matrice symétrique définie positive* P *et une constante* $\alpha > 0$ *tels que :*

$$(A(t) + KC)^T P + P(A(t) + KC) \leq -\alpha I \tag{2.26}$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1(t) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

En utilisant ce lemme, les auteurs dans [Gauthier 1994] montrent le résultat suivant :

Théorème 2.6 *Si pour tout* i, $1 \leq i \leq n-1$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial z_{i+1}}(u, z)$ *ne change jamais de signe et que* $a \leq |\dfrac{\partial F^i}{\partial z^{i+1}}(u, z)| \leq a'$*, pour tout* (u, z)*, où* $0 < a < a'$ *sont des constantes et* F_i *est la* i*ème composante de* $F(u, z)$ *donnée dans (2.18), alors il existe un* n*-vecteur colonne* K *tel que le système (2.24) forme un observateur exponentiel de (2.18).*

Ce résultat a été étendu par [Hammouri 2001] et ensuite par [Hammouri 2003] dans le cas multi-sorties que nous donnerons par la suite.

2.4.2.2 Cas multi-sorties

L'extension des observateurs à grand gain ont été étudiés par plusieurs auteurs, nous donnons quelques références sur ce sujet :
Dans [Bornard 1991], les auteurs ont proposé une classe de systèmes sous une forme canonique. Ces systèmes sont composés de sous systèmes interconnectés. Chaque sous système est sous la forme canonique par rapport aux variables de son bloc, un couplage structuré existe entre les variables des divers blocs. Le gain de l'observateur doit être judicieusement bien choisi en fonction du couplage d'interconnection. Une synthèse détaillée de ces observateurs a été donnée dans les thèses de [Busawon 1996], de [Kaboré 1998] et de [Ticlea 2006].
Deux types d'observateurs ont été donnés pour la classe de systèmes (2.20) (voir travaux de [Hammouri 2003]).

Ici, nous nous contentons de donner un de ces observateurs basé sur une hypothèse de convexité. Ensuite, nous omettons cette hypothèse pour donner un observateur dont le gain dépendra de l'entrée et de l'état estimé.

Observateur à gain constant :

Notons par $\mathbb{M}(k,l)$ l'espace vectoriel réel des matrices $k \times l$ et considérons une matrice $N \in \mathbb{M}(k,l)$ de rang l. Considérons le convexe de $\mathbb{M}(k,l)$ défini par $\mathcal{C}(k,l;\alpha;N) = \{M \in \mathbb{M}(k,l);\ t.q.\ M^TN + N^TM < \alpha I_l\}$ où α est une constante non nulle et I_l est la matrice identité de type $l \times l$.
Nous supposons que les fonctions $F^i(u,z)$ du système (2.20) satisfont l'hypothèse de convexité suivante :

$$\begin{cases} \text{Pour } 1 \leq k \leq q-1, \text{ il existe } \ n_k \times n_{k+1} \text{ une matrice constante } S_{k,k+1} \text{ telle que :} \\ \dfrac{\partial F^k}{\partial z^{k+1}}(u,z) \in (n_k, n_{k+1}; -1; S_{k,k+1});\ \text{pour chaque } (u,z) \in U \times \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.27}$$

où $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_q$ et $z^i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

Comme dans le cas mono-sortie, la condition de Lipschitz suivante est fondamentale dans la preuve de la convergence de l'observateur :

Hypothèse 2.2 $\exists c > 0; \forall u \in U; \forall z, z' \in \mathbb{R}^n, \|F(u,z) - F(u,z')\| \leq c\|z - z'\|$.

Proposition 2.3 *Sous l'hypothèse 2.2 et la condition (2.27), il exist une $n \times n$ matrice symétrique définie positive P et deux constantes $\rho > 0$, $\eta > 0$ satisfaisant les inégalités suivantes :*

$$PA(u,z) + A^T(u,z)P - \rho C^TC \leq -\eta I, \quad \forall (u,z) \in U \times \mathbb{R}^n \tag{2.28}$$

$$\text{où } A(u,z) = \begin{pmatrix} 0 & A_1(u,z) & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & 0 & A_2(u,z) & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & A_{q-1}(u,z) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } A_k(u,z) = \frac{\partial F^k}{\partial z^{k+1}}(u,z)$$

En utilisant cette proposition un observateur à gain constant est formulé comme suit :

Théorème 2.7 *Sous l'hypothèses 2.2 et la condition (2.27), un observateur pour le système (2.20) prend la forme suivante :*

$$\dot{\hat{z}} = F(u,\hat{z}) - \Delta_{\theta_o} P^{-1} C^T (C\hat{z} - y) \tag{2.29}$$

où P est donnée par la proposition 2.3,

$$\Delta_{\theta_o} = \begin{pmatrix} \theta_o I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_o^2 I_{n_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \theta_o^q I_{n_q} \end{pmatrix}, \; I_{n_k} \text{ est la matrice identité de type } n_k \times n_k,$$

$\theta_o > 0$ est un paramètre de réglage.

Remarque 2.2 *La condition de convexité (2.27) est trop forte. En effet les systèmes (2.20) vérifiant la condition (2.27) forment une classe particulière de la classe de systèmes ayant une structure d'observabilité uniforme, autrement dit les systèmes (2.20) vérifiant la condition du rang (2.21).*

En omettant l'hypothèse de convexité (2.27), dans [Hammouri 2003] les auteurs ont montré le résultat suivant :

Théorème 2.8 *Si le système (2.20) vérifie la condition (2.21). Si les entrées sont absolument continues et de dérivées essentiellement bornées, alors un observateur pour le système (2.20) est de la forme :*

$$\dot{\hat{z}} = F(u,\hat{z}) - \Lambda(u,\hat{z}) \Delta_{\theta_o} \widetilde{K} (C\hat{z} - y) \tag{2.30}$$

$$\text{où } \Delta_{\theta_o} = \begin{pmatrix} \theta_o I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_o^2 I_{n_1} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \theta_o^q I_{n_1} \end{pmatrix}, \; I_{n_1} \text{ est la matrice identité } n_1 \times n_1.$$

$\widetilde{K}$ est une matrice constante de type $qn_1 \times n_1$ et $\Lambda(u,\hat{z})$ est une matrice $n \times qn_1$ dépendant continûment de la variable $(u,\hat{z})$.

2.5 Observateurs à grand gain pour des systèmes non uniformément observables

Dans ce chapitre, nous considérons des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = A(u)z + F(u,z) \\ y = Cz \end{cases} \tag{2.31}$$

où $u \in U$ un sous ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^n$, F est supposée suffisamment différentiable par rapport (u, z),

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(u) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23}(u) & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & A_{q-1,q}(u) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(u,z) = \begin{pmatrix} F^1(u, z^1) \\ \vdots \\ F^k(u, z^1, \dots, z^k) \\ \vdots \\ F^q(u,z) \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^k \\ \vdots \\ z^q \end{pmatrix}, z^k \in \mathbb{R}^{n_k}, C = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

I_1 est la matrice identité de type $n_1 \times n_1$, $A_{k,k+1}(u)$ est une matrice de type $n_k \times n_{k+1}$ dépendant continûment de u.
Les observateurs pour les systèmes (2.31) ont été étudiés dans le cas où ces systèmes possèdent la structure d'observabilité uniforme (voir les théorèmes 2.6, 2.7 et 2.8 ci-dessous). Dans ce qui suit nous allons faire la synthèse des observateurs pour les systèmes (2.31) n'ayant pas forcément la structure de l'observabilité uniforme.

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante : dans la première partie, nous allons rappeler un observateur basé sur l'hypothèse que l'entrée est localement régulière (voir définition ci-dessous) et nous concluons cette partie par quelques remarques. Dans la deuxième partie, nous donnerons notre contribution sur ce sujet. En effet, nous donnerons une synthèse de l'observateur pour des entrées satisfaisantes une hypothèse plus faible que la locale régularité.

2.5.1 Quelques remarques sur les observateurs pour les entrées localement régulières

Avant de donner la synthèse d'observateur pour la classe de systèmes (2.31), nous allons faire quelques remarques.

- Dans le cas où les n_k sont tous égaux à 1 (les $A_{k,k+1}(u)$ sont donc des scalaires), on peut alors faire la remarque suivante :

Remarque 2.3 *En remplaçant dans le système (2.18) l'expression* $F_k(u, z_1, \ldots, z_{k+1})$ *par* $A_{k,k+1}(u)z_{k+1} + F_k(u, z_1, \ldots, z_k)$*, si pour une entrée* $u(.)$ *donnée à valeur dans* U*,* $A_{k,k+1}(u(.))$ *vérifie l'hypothèse suivante :*

Hypothèse 2.3 *Pour* $1 \leq k \leq n-1$*, pour tout* $t \geq 0$*,* $A_{k,k+1}(u(.))$ *ne change pas de signe et qu'il existe une constante* $a > 0$ *telle que* $|A_{k,k+1}(u(t))| \geq a$ *, pour tout* $t \geq 0$*.*

Alors d'après le théorème 2.6, un observateur pour (2.31) est de la forme (2.24).

- Dans le cas où les n_k ne sont pas tous égaux à 1, la remarque 2.3 peut se généraliser de la manière suivante.

  Remarque 2.4 *Supposons que pour une entrée* $u(.)$ *prenant ses valeurs dans* U*, l'hypothèse de convexité (2.27) est vérifiée pour* $u(t)$*, à savoir :*

$$\begin{cases} \text{Pour } 1 \leq k \leq q-1, \text{ il existe une matrice constante } n_k \times n_{k+1} \; S_{k,k+1} \text{ telle} \\ \text{que : } A_{k,k+1}(u(t)) \in (n_k, n_{k+1}; -1; S_{k,k+1}); \text{ pour tout } t \geq 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

  Alors pour cette entrée $u(.)$*, un observateur pour le système (2.31) prend la forme (2.29).*

Pour clarifier cette situation, considérons l'exemple suivant :

Exemple 2.4 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = uz_2 + F(u, z_1) \\ \dot{z}_2 = F(u, z_1, z_2) \\ y = z_1 \end{cases} \tag{2.33}$$

Si $u(.)$ *est une entrée bornée, ne change pas de signe et telle que* $|u(t)| \geq a > 0$*, où* a *est une constante, alors l'hypothèse 2.3 est satisfaite et pour cette entrée* $u(.)$*, on peut concevoir un observateur à grand gain de type (2.24). La question qu'on peut se poser maintenant est comment peut-on concevoir un observateur pour des entrées qui changent de signe à des instants* t_k *avec* $\lim t_k = \infty$ *? C'est l'objet du travail que nous allons développer dans la suite.*

Historiquement, la synthèse de l'observateur à grand gain pour les systèmes sous la forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + F(u, z) \\ y = z_1 \end{cases} \tag{2.34}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, $C = (1, 0, \ldots, 0)$ et $F_i(u, z) = F_i(u, z_1, \ldots, z_i)$

peut prendre l'expression :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + F(u,\hat{z}) - S_{\theta_o}^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \tag{2.35}$$

où $S_{\theta o}$ est l'unique solution de l'équation stationnaire :

$$\theta_o S_{\theta o} + A^T S_{\theta o} + S_{\theta o}A - C^T C = 0 \tag{2.36}$$

Notons que $S_{\theta o}$ est aussi la solution stationnaire de l'équation :

$$\dot{S} = -\theta_o S + A^T S + SA - C^T C \tag{2.37}$$

et que :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A\hat{z} + F(u,\hat{z}) - S_{\theta_o}^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \\ \dot{S} = -\theta_o S + A^T S + SA - C^T C \end{cases} \tag{2.38}$$

Cette idée a été étendue pour les systèmes (2.31) dans [Bornard 1993] dans le cas où tous les n_i sont égaux à 1 et dans [Besançon 2007] dans le cas où les n_i sont quelconques. Le résultat énoncé par ces auteurs fonctionne pour des entrées dites **localement régulières** données par la définition suivante :

Définition 2.8 *Une entrée u est dite localement régulière pour le système (2.31), s'il existe $t_0 \geq 0$, $\theta_0 > 0$, $\alpha > 0$, tels que pour tout $\theta_o \geq \theta_0$; pour tout $t \geq \max\{\frac{1}{\theta_0}, t_0\}$ on a :*

$$G(u, t - \frac{1}{\theta_o}, t) = \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^{t} \phi_u^T(s,t)C^T C\phi_u(s,t)ds \geq \alpha\theta_o\Delta_{\theta_o}^{-2} \tag{2.39}$$

où $A(u)$ est la matrice donnée dans (2.31), où $\Delta_{\theta_o} = \begin{pmatrix} \theta_o I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_o^2 I_{n_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \theta_o^q I_{n_q} \end{pmatrix}$

et $\phi_u(s,t)$ est la matrice de transition $n \times n$: du système $\dfrac{d(\phi_u(s,t))}{ds} = A(u(s))\phi_u(s,t)$, $\phi_u(t,t) = I$.

Théorème 2.9 *([Besançon 2007])*
Si u est une entrée locale régulière, alors un observateur pour le système (2.31) prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A(u)\hat{z} + F(u,\hat{z}) - \Delta_{\theta_o}S^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \\ \dot{S} = -\theta_o(\gamma S + A^T(u)S + SA(u) - C^T C) \end{cases} \tag{2.40}$$

où $\theta_o > 0$ est un paramètre qui doit être suffisamment grand et $\gamma > 0$ est une constante assurant la stabilité du système $\dot{S}_0 = -\gamma S_0 + A^T(u)S_0 + S_0A(u) - C^T C)$, dans le sens que $\alpha_0 I \leq S_0(t) \leq \beta_0 I$, pour tout $t \geq 0$, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ sont des constantes.

Avant de donner notre résultat concernant les observateurs pour les systèmes (2.31), nous allons commenter ce théorème.

- Commençons par le cas où tous les n_i sont égaux à 1, donc :

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & a_1(u) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}(u) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad C = [1, 0, \dots, 0],$$

on a alors le résultat suivant :

Lemma 2.2 *Si $u(.)$ est une entrée continue localement régulière, alors :*

i) $\exists a > 0\,;\, \forall t \geq \max\{t_0, \frac{1}{\theta_0}\}\,;\, \forall i,\ 1 \leq i \leq n-1,$ *on a* $|a_1(u(t))| \geq a$

ii) Il existe un n-vecteur constant K tel que

$$\dot{\hat{z}} = A(u)\hat{z} + F(u, \hat{z}) + \Delta_{\theta_o} K(C\hat{z} - y) \tag{2.41}$$

est un observateur exponentiel pour le système (2.31).

Démonstration.

i) $A(u)$ est une matrice nilpotente et $C = [1, 0, \dots, 0]$, on obtient alors :
$C\phi_u(s,t) = [1, \int_t^s a_1(u(t_1))dt_1, \dots, \int_t^s \int_t^{t_1} \dots \int_t^{t_{n-2}} a_1(u(t_1)) \dots$
$a_{n-1}(u(t_{n-1}))dt_1 \dots dt_{n-1}]$.
Posons $\alpha_1(t,s) = 1, \alpha_2(t,s) = \int_t^s a_1(u(t_1))dt_1, \dots,$
$\alpha_n(t,s) = \int_t^s \int_t^{t_1} \dots \int_t^{t_{n-2}} a_1(u(t_1)) \dots a_{n-1}(u(t_{n-1}))dt_1 \dots dt_{n-1}$, on obtient :

$$\int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^t \phi_u^T(s,t) C^T C \phi_u(s,t) ds = \psi(t, \theta_o) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t,\theta_o) & \psi_{12}(t,\theta_o) & \dots & \psi_{1n}(t,\theta_o) \\ \psi_{12}(t,\theta_o) & \psi_{22}(t,\theta_o) & \dots & \psi_{2n}(t,\theta_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1n}(t,\theta_o) & \psi_{2n}(t,\theta_o) & \dots & \psi_{nn}(t,\theta_o) \end{pmatrix},$$

où $\psi_{ij}(t,\theta_o) = \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^t \alpha_i(t,s)\alpha_j(t,s)ds$.

La condition (2.39) implique :

$$\begin{cases} \exists \theta_0 > 0; \exists t_0 \geq 0; \exists \beta > 0; \forall \theta_o \geq \theta_0, \text{ on a :} \\ \forall t \geq \max\{t_0, \theta_o\}; \forall i, 1 \leq i \leq n, \psi_{ii}(t,\theta_o) \geq \frac{\beta}{\theta_o^{2i-1}} \end{cases} \tag{2.42}$$

Analysons la condition (2.42) pour $i = 2, \dots, n$:
Pour $i = 2$,

$$\begin{cases} \psi_{22}(t,\theta_o) = \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^t (\int_t^s a_1(u(t_1))dt_1)^2 ds \leq \max\{a_1^2(u(\tau)), t - \frac{1}{\theta_o} \leq \tau \leq t\} \\ \qquad \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^t (t-s)^2 ds \leq \max\{a_1^2(\tau), t - \frac{1}{\theta_o} \leq \tau \leq t\} \dfrac{1}{3\theta_o^3} \end{cases} \tag{2.43}$$

Pour $i > 2$, posons $\gamma_i = \max\{a_1^2(u(\tau_1))\dots a_{i-1}^2(u(\tau_{i-1})), t - \frac{1}{\theta_o} \leq \tau_j \leq t, 1 \leq j \leq i-1\}$, on a alors :

$$\begin{cases} \psi_{ii}(t,\theta_o) = \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^{t} (\int_t^s \dots \int_t^{t_{i-2}} a_1(u(t_1))\dots a_{i-1}u((t_{i-1}))dt_1\dots dt_{i-1})^2 ds \\ \leq \gamma_i \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^{t} (\int_t^s \dots \int_t^{t_{i-2}} dt_1\dots dt_{i-1})^2 ds \leq \dfrac{\gamma_i}{(2i-1)((i-1)!)^2\theta_o^{2i-1}} \end{cases} \tag{2.44}$$

Combinons (2.42) et (2.43), nous déduisons pour $|a_i(u(t))| \geq \tilde{\gamma}$, pour $1 \leq i \leq n-1$ et $\tilde{\gamma}$ est une constante positive. Comme $a(.)$ et $u(.)$ sont continues, donc $a(u(.))$ ne change pas de signe.

ii) est une conséquence du lemme 2.1 et du théorème 2.6 :
En effet, en utilisant (2.42)-(2.43)-(2.44), nous déduisons :

$$\exists \gamma > 0, \forall t \geq \max\{t_0, \frac{1}{\theta_0}\}; \forall \theta_o \geq \theta_0, |a_i(u(t))| \geq \gamma, \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \tag{2.45}$$

Comme $\dfrac{\partial(F_i(u,z))}{\partial z_{i+1}} = a_i(u)$, on en déduit que les conditions du théorème 2.6 sont satisfaites, d'où le lemme ci-dessus.

■

Remarque 2.5 *Ce lemme montre que si une entrée bornée est continue et satisfaisant la condition (2.39) de la définition 2.8, alors un observateur à gain constant peut être synthétisé. Par conséquent, on peut se passer des* $\dfrac{n^2+n}{2}$ *équations différentielles permettant de calculer le gain de l'observateur énoncé dans le théorème 2.9.*

- Maintenant, nous allons examiner le cas général où les n_i ne sont pas forcément égaux à 1 et nous considérons des entrées $u(.)$ continues, bornées.
Nous allons procéder comme dans le cas précédent :

Ici, $A(u) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(u) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A_{q-1,q}(u) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente, $A_{12}(u)$ est une matrice $n_{i-1} \times n_i$ et $C = [I_{n_1}, 0, \dots, 0]$.

Lemma 2.3 *Si le système (2.31) admet une entrée $u(.)$ continue, bornée et vérifiant la condition (2.39) de la définition 2.8, alors :*

1) $n_1 \geq \dots \geq n_q$, *de plus :*
$\exists a > 0\,; \forall t \geq \max\{t_0, \frac{1}{\theta_0}\}\,; \forall i,\ 1 \leq i \leq q-1$, *on a* $A_{i,i+1}^T(u(t))A_{i,i+1}(u(t)) \geq aI_{n_{i+1}}$.

2) Si en plus $u(.)$ satisfait la condition de convexité ([Hammouri 2003]) (resp. si $u(.)$ est absolument continue), alors un observateur pour le système (2.31) est de la forme (2.29) (resp. (2.30)). Sinon dans le cas général un observateur prend la forme (2.30).

Démonstration.

1) Utilisons le fait que $A(u)$ est une matrice nilpotente et que $C = [I_{n_1}, 0, \ldots, 0]$, on obtient :

$C\phi_u(s,t) = [I_{n_1} \ \int_t^s A_{12}(u(t_1))dt_1 \ \ldots$
$\int_t^s \int_t^{t_1} \ldots \int_t^{t_{n-2}} A_{12}(u(t_1)) \ldots A_{n-1,n}(u(t_{n-1}))dt_1 \ldots dt_{n-1}]$.

Posons $\varphi_1(t,s) = I_{n_1}, \varphi_2(t,s) = \int_t^s A_{12}(u(t_1))dt_1, \ldots,$
$\varphi_n(t,s) = \int_t^s \int_t^{t_1} \ldots \int_t^{t_{n-2}} A_{12}(u(t_1)) \ldots A_{n-1,n}(u(t_{n-1}))dt_1 \ldots dt_{n-1}$, on obtient :

$$\int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^t \phi_u^T(s,t)C^TC\phi_u(s,t)ds = \psi(t,\theta_o) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t,\theta_o) & \psi_{12}(t,\theta_o) & \ldots & \psi_{1n}(t,\theta_o) \\ \psi_{12}(t,\theta_o) & \psi_{22}(t,\theta_o) & \ldots & \psi_{2n}(t,\theta_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1n}(t,\theta_o) & \psi_{2n}(t,\theta_o) & \ldots & \psi_{nn}(t,\theta_o) \end{pmatrix},$$

où $\psi_{ij}(t,\theta_o) = \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^t \varphi_i^T(t,s)\varphi_j(t,s)ds$.

Et par conséquent, la condition (2.39) implique :

$$\begin{cases} \exists\theta_0 > 0; \exists t_0 \geq 0; \exists\beta > 0; \forall\theta_o \geq \theta_0, \text{ on a :} \\ \forall t \geq \max\{t_0, \theta_o\}; \forall i, 1 \leq i \leq n, \psi_{ii}(t,\theta_o) \geq \frac{\beta}{\theta_o^{2i-1}} I_{n_i} \end{cases} \tag{2.46}$$

Comme ci-dessus, analysons la condition (2.42) pour $i = 2, \ldots, n$:
Pour $i = 2$,

$$\begin{cases} \psi_{22}(t,\theta_o) = \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^t (\int_t^s A_{12}^T(u(t_1))dt_1)(\int_t^s A_{12}(u(t_1))dt_1)ds \\ = \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^t (\int_t^s A_{12}^T(u(t) + E^T(t,t_1))dt_1)(\int_t^s A_{12}(u(t_1)) + E(t,t_1)dt_1)ds \\ \text{où} \quad \lim_{t_1 \to t} E(t,t_1) = 0 \ \text{ car } A(u(.)) \text{ est continue.} \end{cases} \tag{2.47}$$

Comme la matrice $A(u(.))$ est continue et bornée, posons
$a_\infty = \sup\{\|A(u(t))\|, t \geq 0\}$, $\epsilon(t,\theta_o) = \sup\{\|E(t,t_1)\|, t - \frac{1}{\theta_o} \leq t_1 \leq t\}$,
d'où $\lim_{\theta_o \to \infty} \epsilon(t,\theta_o) = 0$.
De (2.47), nous déduisons :

$$\psi_{22}(t,\theta_o) \leq \frac{1}{3\theta_o^3} A_{12}^T(u(t))A_{12}(u(t)) + (\frac{2a_\infty\epsilon(t,\theta_o)}{3\theta_o^3} + \frac{\epsilon^2(t,\theta_o)}{3\theta_o^3})I_{n_2} \tag{2.48}$$

Combinons (2.46), (2.48) et le fait que $\lim_{\theta_o \to \infty} \epsilon(t,\theta_o) = 0$, on obtient :

$$\exists\widetilde{\beta}_2 > 0; \forall t \geq \max\{t_0, \theta_0^{-1}\}, \quad A_{12}^T(u(t))A_{12}(u(t)) \geq \widetilde{\beta}I_{n_2} \tag{2.49}$$

De la même façon, pour $i > 2$, utilisons la continuité de $A_{j,j+1}(u(.))$, on obtient :

$$A_{j,j+1}(u(\tau)) = A_{j,j+1}(u(t)) + E_j(t,\tau), \text{ avec } \lim_{\tau \to t} E_j(t,\tau) = 0 \qquad (2.50)$$

Comme ci-dessus, posons $\epsilon(t,\theta_o) = \sup\{\|E_j(t,\tau)\|, t - \frac{1}{\theta_o} \leq \tau \leq t,$ $1 \leq j \leq i-1\}$, on a alors $\lim_{\theta_o \to \infty} \epsilon(t,\theta_o) = 0$ et,

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{ii}(t,\theta_o) = \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^{t} (\int_t^s \int_t^{t_1} \dots \int_t^{t_{i-2}} A_{i-1,i}^T(u(t_{i-1})) \\ \dots A_{12}^T(u(t_{i-1}))dt_1 \dots dt_{i-1})(\int_t^s \int_t^{t_1} \dots \int_t^{t_1} A_{12}(u(t_1)) \dots A_{i-1,i}(u(t_{i-1}))dt_1 \\ \dots dt_{i-1})ds \leq \gamma_i \int_{t-\frac{1}{\theta_o}}^{t} (\int_t^s \dots \int_t^{t_{i-2}} dt_1 \dots dt_{i-1})^2 ds \leq \dfrac{\gamma_i}{(2i-1)((i-1)!)^2 \theta_o^{2i-1}} \end{array} \right. \qquad (2.51)$$

Combinons (2.50), (2.51) avec le fait que $\lim_{\theta_o \to \infty} \epsilon(t,\theta_o) = 0$, il existe une constante $a > 0$, il existe $\theta_1 \geq \theta_0$ tels que pour tout $\theta_o \geq \theta_1$; pour tout $t \geq \max\{t_0, \theta_0^{-1}\}$, on ait :

$$\psi_{ii}(t,\theta_o) \leq \frac{a}{\theta_o^{2i-1}} (A_{i-1,i}^T(u(t)) \dots A_{12}^T(u(t)) A_{12}(u(t)) \dots A_{i-1,i}(u(t)) + \epsilon(t,\theta_o) I_{n_i}) \qquad (2.52)$$

En combinant (2.49) et (2.52), une simple récurrence donne :

- $n_1 \geq \dots \geq n_q$
- $\exists \widetilde{\beta}_i > 0\,; \forall t \geq \max\{t_0, \theta_0^{-1}\}$, $A_{i-1,i}^T(u(t)) \dots A_{12}^T(u(t)) A_{12}(u(t)) \dots A_{i-1,i}$ $(u(t)) \geq \widetilde{\beta}_i I_{n_i}$.

2) est une conséquence immédiate des théorèmes 2.7 et 2.8.

■

Les lemmes 2.2 et 2.3 montrent qu'un observateur du type (2.29) ou (2.30) peut être utilisé pour estimer l'état du système (2.31). De plus, le système (2.31) doit vérifier nécessairement la condition $n_1 \geq \dots \geq n_q$.

2.5.2 Synthèse des observateurs pour les systèmes (2.31) n'ayant pas la structure d'observabilité uniforme

Les lemmes 2.2 et 2.3 montrent que si une entrée $u(.)$ continue, bornée et vérifiant la condition (2.39) de la définition 2.8, alors un observateur à grand gain de type (2.24) (dans le cas mono-entrée) ou encore de type (2.29) ou (2.30) (dans le cas multi-sorties) peut être synthétisé.

Dans ce paragraphe, nous allons donner une condition suffisante caractérisant la classe des entrées pour lesquelles un observateur de type grand gain peut être

synthétisé. Contrairement aux entrées vérifiant la condition (2.39) de la définition 2.8, un observateur de type (2.24), (2.29) et (2.30) ne peut pas fonctionner pour cette classe d'entrées.

Revenons sur l'équation de Lyapunov :

$$\dot{S} = -\theta_o S - A^T(u)S - SA(u) + C^T C \tag{2.53}$$

où $A(u)$ est la matrice $n \times n$ du système (2.31) et $S(0)$ est une matrice symétrique définie positive. Les solutions de (2.53) sont données par :

$$S(t) = e^{-\theta_o t}\Phi_u^T(0,t)S(0)\Phi_u(0,t) + \int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}\Phi_u^T(s,t)C^T C\Phi_u(s,t)ds \tag{2.54}$$

où $\Phi_u(0,t) = \Phi_u^{-1}(t,0)$ et $\Phi_u(t,0)$ est la matrice de transition du système $\dot{x} = A(u)x$ telle que $\Phi_u(0,0) = I$ la matrice identité. Dans toute la suite $u(.)$ est une entrée bornée et donc, $\|\Phi_u(s,t)\| \leq e^{m(t-s)}$ où $m = \|A(u(.))\|_\infty$.

Remarque 2.6 *1) Pour $\theta_o > 2m$, $e^{-\theta_o t}\Phi_u^T(0,t)S(0)\Phi_u(0,t)$ tend exponentiellement vers 0 et par conséquent, pour t grand, $S(t)$ se comporte comme :*

$$\Psi(t,\theta_o) = \int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}\Phi_u^T(s,t)C^T C\Phi_u(s,t)ds =$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11}(t,\theta_o) & \Psi_{12}(t,\theta_o) & \dots & \Psi_{1n}(t,\theta_o) \\ \Psi_{12}(t,\theta_o) & \Psi_{22}(t,\theta_o) & \dots & \Psi_{2n}(t,\theta_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{1n}(t,\theta_o) & \Psi_{2n}(t,\theta_o) & \dots & \Psi_{nn}(t,\theta_o) \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

2) $\Psi_{ij}(t,\theta_o) = \Psi_{ji}^T(t,\theta_o)$ est une matrice $n_i \times n_j$ définie par :

- $\Psi_{11}(t,\theta_o) = \int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}ds I_{n_1}$
- $\Psi_{12}(t,\theta_o) = \int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}\int_s^t A_{12}(u(t_1))dt_1 ds$
- *Pour* $i \geq 3$, $\Psi_{1i}(t,\theta_o) = \int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}\int_s^t \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{i-2}} A_{12}(u(t_1)) \dots A_{1i}(u(t_1))dt_1 \dots dt_{i-1}ds$
- *Pour* $i = 2$, $\Psi_{22}(t,\theta_o) = \int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}(\int_s^t A_{12}^T(u(t_1))dt_1)(\int_s^t A_{12}(u(t_1))dt_1)ds$
- *Pour* $i \geq 3$, $\Psi_{2i}(t,\theta_o) =$ $\int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}(\int_s^t A_{12}^T(u(t_1))dt_1)(\int_s^t \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{i-2}} A_{12}(u(t_1)) \dots A_{i-1,i}(u(t_1))dt_1 \dots dt_{i-1})ds$
- *Pour* $i,j \geq 3$, $\Psi_{ij}(t,\theta_o) =$ $\int_0^t e^{-\theta_o(t-s)}(\int_s^t A_{12}^T(u(t_1)) \dots A_{i-1,i}^T(u(t_1))dt_1 \dots dt_{i-1})(\int_s^t \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{i-2}} A_{12}(u(t_1)) \dots A_{j-1,j}(u(t_1))dt_1 \dots dt_{j-1})ds$

Notons par $\mathcal{C}_{RP}$ la classe des entrées régulièrement persistantes, autrement dit les entrées satisfaisant la condition (2.8) de la définition 2.5. Notons également par $\mathcal{C}_{LR}$ la classe des entrées localement régulières (des entrées satisfaisant la condition (2.39) de la définition 2.8). Finalement, notons par $\mathcal{C}_{FP}$ la classe des entrées fortement persistantes. Ces entrées sont définies comme suit :
Notons par $\Gamma(t,\theta_o)$ la diagonale de $\Psi(t,\theta_o)$ (la matrice définie dans (2.55)). Par construction, celle-ci est positive.

Définition 2.9 *Nous dirons qu'une entrée bornée $u(.)$ est fortement persistante si : $\exists\theta_0 > 0$; $\exists t_0 \geq 0$; $\forall\theta_o > \theta_0$; $\forall t \geq t_0$:*

i) $\Gamma(t,\theta_o)$ *est inversible et satisfaisant :*
$\Gamma(t,\theta_o) \leq \alpha(\theta_o)\Psi(t,\theta_o)$, *avec* $\lim_{\theta_o\to\infty} \dfrac{\alpha(\theta_o)}{\theta_o} = 0.$

ii) $\exists\gamma > 0$, $\|\Gamma_{jj}^{-1}(t,\theta_o)\|\|\Gamma_{ii}(t,\theta_o)\| \leq \gamma$, *for* $1 \leq j \leq i$.

L'ensemble de ces entrées est noté par $\mathcal{C}_{FP}$.

Remarque 2.7 *:* $\mathcal{C}_{LR} \subset \mathcal{C}_{FP} \subset \mathcal{C}_{RP}$

Exemple 2.5

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & u(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) \\ y(t) = (1 \quad 0)x(t) \end{cases} \tag{2.56}$$

L'entrée $u(t) = \cos(t)$ *est dans* $\mathcal{C}_{FP}$ *mais elle n'appartient pas à* $\mathcal{C}_{LR}$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 2.10 *Supposons que $F(u,z)$ est une fonction globalement Lipschitzienne par rapport à z, localement uniformément par rapport à u. Alors pour tout $u \in \mathcal{FP}$, un observateur exponentiel pour le système (2.31) prend la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A(u)\hat{z} + F(u,\hat{z}) - S^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \\ \dot{S} = -\theta_o S - A^T(u)S - SA(u) + C^TC \end{cases} \tag{2.57}$$

Démonstration.

Soit $z(t)$ l'état à estimer du système (2.31) et $\hat{z}(t)$ son estimé donné par (2.58). Notons par $e(t) = \hat{z}(t) - z(t)$ l'erreur d'estimation, utilisons les équations (2.31)-(2.58), nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{e} = (A(u) - S^{-1}C^TC)e + \delta(F) \\ \dot{S} = -\theta_o S - A^T(u)S - SA(u) + C^TC \end{cases} \tag{2.58}$$

où $\delta(F) = F(u,\widehat{z}) - F(u,z)$.

Posons $S(t) = \Lambda(t)\Lambda^T(t)$ où $\Lambda(t)$ est une matrice triangulaire inférieure dont la diagonale est formée de termes positifs, donnée par la décomposition de Cholesky. Faisons le changement de variables $\epsilon(t) = \Lambda^T(t)e(t)$, nous déduisons :

$$\dot{\epsilon} = (\Lambda^T A(u)\Lambda^{-T} - \Lambda^{-1}C^T C\Lambda^{-T})\epsilon + \Lambda^T\delta(F) + \dot{\Lambda}^T\Lambda^{-T}\epsilon \tag{2.59}$$

où Λ^{-T} désigne l'inverse Λ^T.

Utilisons la relation $S(t) = \Lambda(t)\Lambda^T(t)$ et le fait que $S(t)$ est une solution de la deuxième équation de (2.58), on obtient :

$$\dot{\Lambda}\Lambda^T + \Lambda\dot{\Lambda}^T = -\theta_o\Lambda\Lambda^T - A^T(u)\Lambda\Lambda^T - \Lambda\Lambda^T A(u) + C^T C \tag{2.60}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (2.60) à gauche et à droite par Λ^{-1} et par Λ^{-T} respectivement, nous déduisons la relation suivante :

$$\Lambda^{-1}\dot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^T\Lambda^{-T} = -\theta_o I - \Lambda^{-1}A^T(u)\Lambda - \Lambda^T A(u)\Lambda^{-T} + \Lambda^{-1}C^T C\Lambda^{-T} \tag{2.61}$$

Posons $V(t) = \epsilon^T(t)\epsilon(t)$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{V} = \dot{\epsilon}^T\epsilon + \epsilon^T\dot{\epsilon} \\ = \epsilon^T[\Lambda^{-1}A^T(u)\Lambda - \Lambda^{-1}C^T C\Lambda^{-T}]\epsilon + \epsilon^T[\Lambda^T A(u)\Lambda^{-T} - \Lambda^{-1}C^T C\Lambda^{-T}]\epsilon \\ +2\epsilon^T\Lambda^T\delta(F) + (\delta(F))^T\Lambda\Lambda^T\delta(F) + \epsilon^T[\Lambda^{-1}\dot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^T\Lambda^{-T}]\epsilon \end{cases} \tag{2.62}$$

De (2.61) et (2.62), il découle :

$$\begin{cases} \dot{V} = -\theta_o\|\epsilon\|^2 + 2\epsilon^T\Lambda^T\delta(F) + (\delta(F))^T\Lambda\Lambda^T\delta(F) - \epsilon^T\Lambda^{-1}C^T C\Lambda^{-T}\epsilon \\ \leq -\theta_o\|\epsilon\|^2 + 2\|\epsilon\|\|\Lambda^T\delta(F)\| + (\delta(F))^T\Lambda\Lambda^T\delta(F) \end{cases} \tag{2.63}$$

où $\|\|$ désigne la norme euclidienne.

Utilisons 1) de la remarque 2.6, il existe $\tau_0 > 0$; il existe $a > 0$, tels que pour tout $t \geq \tau_0$, on ait $S(t) = \Lambda(t)\Lambda^T(t) \leq a\Psi(t,\theta_o)$. Combinons cette inégalité avec (2.63), nous déduisons que pour $t \geq t_0$:

$$\dot{V} \leq -\theta_o\|\epsilon\|^2 + 2\sqrt{a}\|\epsilon\|\sqrt{(\delta(F))^T\Psi(t,\theta_o)\delta(F)} + a(\delta(F))^T\Psi(t,\theta_o)\delta(F) \tag{2.64}$$

$\Psi(t,\theta_o)$ étant une matrice diagonale, nous obtenons :
$(\delta(F))^T\Psi(t,\theta_o)\delta(F) = \sum_{i=1}^{q}(\delta(F))_i^T\Psi_{ii}(t,\theta_o)\delta(F)_i$. En utilisant le théorème des accroissements finis, $\delta(F)_i = \sum_{j=1}^{i} Aij(.)e_j$ où $e_j = \hat{z}_j - z_j$ et $A_{ij}(.)$ est une matrice $n_i \times n_j$ qui est une fonction bornée de $(u, z, \hat{z})$, et donc :

$$\begin{cases} (\delta(F))_i^T\Psi_{ii}(t,\theta_o)\delta(F)_i = \sum_{l,k=1}^{i} e_k^T A_{ik}^T(.)\Psi_{ii}(t,\theta_o)A_{il}(.)e_l \\ \leq \widetilde{a}\|\Psi_{ii}(t,\theta_o)\|\sum_{l=1}^{i} e_l^T e_l, \text{ où } \widetilde{a} > 0 \text{ est une constante} \end{cases} \tag{2.65}$$

Maintenant posons $\Psi_{ii}(t,\theta_o) = \widetilde{\Psi}_{ii}\widetilde{\Psi}_{ii}^T$ où $\widetilde{\Psi}_{ii}$ est une matrice triangulaire inférieure de diagonale positive donnée par la décomposition de Cholesky. Posons également

$\widetilde{\epsilon}_i = \widetilde{\Psi}_{ii} e_i$ et $\widetilde{\epsilon} = (\widetilde{\epsilon}_1^T, \ldots, \widetilde{\epsilon}_q^T)^T$, de (2.65) et de l'inégalité ii) de la définition 2.9, nous déduisons :

$$\begin{cases} (\delta(F))_i^T \Psi_{ii}(t,\theta_o)\delta(F)_i \leq \widetilde{a}\|\Psi_{ii}(t,\theta_o)\| \sum_{l=1}^{i} \|\Psi_{ll}^{-1}(t,\theta_o)\| \widetilde{\epsilon}_l^T \widetilde{\epsilon}_l \\ \leq b \sum_{l=1}^{i} \widetilde{\epsilon}_l^T \widetilde{\epsilon}_l, \text{ où } b > 0 \text{ est une constante.} \end{cases} \tag{2.66}$$

Combinons (2.64) et (2.66), on peut trouver deux constantes $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ ne dépendant pas de θ_o, telles que pour tout $t \geq \tau_0$ on a :

$$\dot{V} \leq -\theta_o \|\epsilon\|^2 + \alpha_1 \|\epsilon\| \sqrt{\widetilde{\epsilon}^T \widetilde{\epsilon}} + \alpha_2 \widetilde{\epsilon}^T \widetilde{\epsilon} \tag{2.67}$$

Par définition de $\widetilde{\epsilon}$ on a $\widetilde{\epsilon}^T \widetilde{\epsilon} = e^T \Gamma(t,\theta_o) e$, où $\Gamma(t,\theta_o)$ est la matrice diagonale par bloc dont la diagonale est formée des Ψ_{ii}. Maintenant utilisons i) de la définition 2.9 :

$\exists \theta_0 > 0\,;\, \exists t_0 \geq 0\,;\, \forall \theta_o > \theta_0\,;\, \forall t \geq t_0$, $\Gamma(t,\theta_o) \leq \alpha(\theta_o)\Psi(t,\theta_o)$, avec $\lim_{\theta_o \to \infty} \dfrac{\alpha(\theta_o)}{\theta_o} = 0$,

et le fait que $\epsilon^T \epsilon = e^T S(t) e$ et que $\Psi(t,\theta_o)$ a le même comportement que $S(t)$ (voir 1) de la remarque 2.6), il existe alors deux constantes $\widetilde{\alpha}_1 > 0$, $\widetilde{\alpha}_2 > 0$ ne dépendant pas de θ_o telles que :

$$\dot{V} \leq -\theta_o \|\epsilon\|^2 + \widetilde{\alpha}_1 \sqrt{\alpha(\theta_o)} \|\epsilon\|^2 + \widetilde{\alpha}_2 \alpha(\theta_o) \|\epsilon\|^2 \tag{2.68}$$

Comme $\lim_{\theta_o \to \infty} \dfrac{\alpha(\theta_o)}{\theta_o} = 0$, nous concluons que $V(t)$ tend exponentiellement vers 0. Il en est de même pour $\|e(t)\|$.

■

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions d'observabilité. Ces notions ont été explicitées dans le cas des systèmes linéaires stationnaires et dans le cas des systèmes non linéaires affines en l'état. Des formes normales des systèmes observables indépendamment des entrées ont été présentées. Nous avons fait le lien entre ces formes normales et les observateurs à grand gain existants dans la littérature. Dans le dernier paragraphe, nous avons rappelé un résultat concernant les observateurs à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires, ayant une forme normale et pour lesquels il existe des entrées qui les rendent non observable. Nous avons donc donné un observateur provenant de la littérature. Cet observateur converge dans le cas où les entrées appliquées satisfont une hypothèse d'observabilité assez forte (la régularité locale des entrées). Cet observateur admet un gain dérivant d'une équation de Lyapunov dynamique. Sous la même hypothèse de régularité locale, nous avons montré qu'on peut synthétiser un observateur dont le gain ne nécessite aucune résolution d'équation différentielle. Ensuite, nous avons affaibli l'hypothèse de la régularité locale afin d'élargir la classe des entrées pour laquelle on peut synthétiser un observateur pour la même classe de systèmes. Ce dernier résultat constitue une de nos contributions de ce mémoire.

Chapitre 3

Commande prédictive

3.1 Introduction

L'objectif de ce travail est de résoudre en ligne le problème d'identification en employant une approche couplant la commande prédictive par modèle interne et un observateur non linéaire.

Avant de présenter la structure et le principe de fonctionnement de cette approche, il est nécessaire de présenter la commande prédictive, les bases de la stratégie de commande adoptée, ainsi que les éléments et les points clefs de sa mise en œuvre.

Dans ce chapitre, on trouve d'abord un bref aperçu historique sur l'essor de la commande prédictive. Le principe de base et la structure de cette stratégie sont ensuite énoncés. Enfin, nous posons les problèmes d'optimisation sous contraintes liés à une problématique générale de commande.

3.2 Généralités sur la commande prédictive

3.2.1 Bref aperçu de l'évolution de la commande prédictive

L'idée de la commande prédictive se trouve déjà entre les lignes de l'ouvrage fondateur de la commande optimale de [Bellman 1957]. L'étude de la stabilité d'une telle loi de commande en boucle fermée remonte quand à elle à Kalman en 1960, qui note que l'optimalité n'implique pas la stabilité [Kalman 1960a] [Kalman 1960b] et à [Propoï 1963] avec sa forme de commande prédictive basée sur un modèle en utilisant une méthode de programmation linéaire.

Historiquement, cette idée ne sera mise en oeuvre industriellement qu'avec Richalet en 1978 dans le logiciel IDCOM (identification, commande) [Richalet 1978]. Le formalisme choisi alors permet de considérer les systèmes linéaires comme des filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR pour Finite Impulse Response). Les coûts considérés sont quadratiques, la partie estimation repose sur une approche de type

moindres carrés. En 1980 apparaît DMC (Dynamic Matrix Control) de Cutler et Ramaker. DMC reprend de nombreuses idées de IDCOM, mais les systèmes y sont représentés par leur réponse à l'échelon. Dans ces deux approches, le modèle était de type boite noire, l'objectif était de poursuivre une référence mais les contraintes n'étaient pas encore prises en compte. Ces algorithmes eurent un impact énorme sur la commande des procédés industriels et permirent de définir le paradigme de commande prédictive basée sur un modèle.

Peu de temps après, [Garcia 1986] donnent une description détaillée de l'algorithme Quadratic Dynamic Matrix Control (QDMC). Cette formulation sous forme de problème quadratique implémente directement les contraintes d'entrée et de sortie et apparaît comme la seconde génération de cette variété de commande. En 1988, il est possible grâce à SMOC (Shell Multivariable Optimizing Control) de considérer les systèmes sous forme de modèle d'état. La partie estimation est assurée par un filtre de Kalman. Outre ces outils plus modernes de l'automatique, SMOC intègre la notion de contraintes dures (à vérifier absolument) et molles (à vérifier si possible) et permet de les ordonner. C'est en effet en pratique une possibilité intéressante.

La troisième génération (IDCOM-M, HEICON, SMCA, SMOC) s'attache à améliorer les algorithmes existant tout en étant capable de traiter une variété plus importante de procédés. Elle fait la distinction de plusieurs niveaux de contraintes et fournit un panel plus étendu en termes de solutions et d'objectifs.

La génération actuelle (DMC+ et RMPCT) constitue une amélioration des solutions déjà proposées, avec une interface graphique, des possibilités d'optimisation et des méthodes d'identification plus perfectionnées. Le lecteur peut se reporter à [Qin 2003] pour suivre la généalogie des algorithmes et pour obtenir de plus d'amples précisions sur les évolutions technologiques et industrielles de la commande prédictive.

3.2.2 Domaines d'application en industrie

De toutes les commandes dites "avancées", la commande prédictive est la plus utilisée dans l'industrie, aussi bien pour les qualités techniques auxquelles elle doit ses performances que pour sa facilité de mise en oeuvre. Son champ d'application s'étend à tous les domaines industriels, notamment aux cas où la régulation PID n'est pas efficace.
Depuis les années 1970, la commande prédictive a été utilisée avec succès dans différentes applications industrielles et pour plusieurs champs d'activités. Selon [Qin 2003], cela concernent en 2003 plus de 4000 applications au total dans le monde (tableau 3.1 pour les approches linéaires et tableau 3.2 pour les approches non linéaires), sans rajouter les solutions locales développées en interne des entreprises.
Les auteurs de cette étude concluent que la commande prédictive a prouvé ses performances au travers de nombreuses applications industrielles, qu'elle est toujours

Area	Aspen Technology	Honeywell Hi-Spec	Adersa	Invensys	Total	%
Raffinage	1200	480	280	25	1985	48,5
Pétrochimie	450	80	-	20	550	13,4
Chimie	100	20	3	21	144	3,5
Papier	18	50	-	-	68	1,7
Air et Gaz	-	10	-	-	10	0,2
Métallurgie	8	6	7	16	37	0,9
Alimentaire	-	-	41	10	51	1,3
Polymère	17	-	-	-	17	0,4
Cuisson	-	-	42	3	45	1,1
Aérospatial	-	-	13	-	13	0,3
Automobile	-	-	7	-	7	0,2
Autre	40	50	1045	30	1165	28,5
Total	1833	696	1438	125	4092	100

TABLEAU 3.1 – Bilan des applications industrielles de la commande prédictive linéaire, en 2003 [Qin 2003]

Area	Adersa	Aspen Technology	Continental Controls	DOT Products	Pavillon Technologies	Total	%
Chimie	2		15		5	22	23,7
Polymère		1		5	15	21	22,6
Air et gaz			18			18	19,3
Raffinage					13	13	14
Alimentaire					9	9	9,7
Autres	1	5	3			9	9,7
Papier					1	1	1
Total	3	6	36	5	43	93	100

TABLEAU 3.2 – Bilan des applications industrielles de la commande prédictive non linéaire, en 2003 [Qin 2003]

présente dans la majorité des domaines, et que pour des raisons différentes, deux secteurs industriels ont été les premiers intéressés et ont financé le développement de la méthode. En effet, même si la commande prédictive offre de nombreuses caractéristiques intéressantes, historiquement, seules deux entre elles ont joué un rôle déterminant : le domaine du raffinage et la pétrochimie.
Enfin, l'application de cette technique n'a cessé d'évoluer et de multiples avancées ont été réalisées dans des domaines plus variés, par exemple les robots de chirurgie [Ginhoux 2003].

3.3 Principes de base de la commande prédictive

Un objectif général de toute structure de commande est de maintenir les variables de sortie proches de leurs consignes tout en respectant les contraintes opératoires du procédé. La commande prédictive basée sur le modèle a été conçue pour remplir ces buts. Elle a pour idée d'insérer dans la boucle de retour un élément prédictif, constitué par le modèle de procédé à commander. Le calculateur détermine alors, à l'instant d'échantillonnage présent, la séquence de commande à appliquer sur un horizon de prédiction. A la prochaine période d'échantillonnage, seule la première composante de cette séquence est réellement appliquée au procédé. La structure de la commande prédictive est basée sur les éléments suivants :

1. des grandeurs variables du système : variables de commande (à manipuler) et de sortie (à mesurer et/ou à commander),
2. un critère d'optimisation formulant les objectifs du fonctionnement désirés du procédé,
3. un modèle du procédé à commander,
4. une méthode de résolution qui permet de trouver une solution au problème d'optimisation et la séquence de commande à appliquer au procédé.

3.3.1 Variables de commande et de sortie

Les contraintes peuvent concerner les variables de commande, les variables régulées et plus généralement les variables d'état :

- les variables manipulées (les entrées) doivent rester dans une zone de fonctionnement des contraintes physiques, car les actionneurs sont limités en amplitude, voir en vitesse et voir aussi en accélération,
- les grandeurs du système (sortie et état) doivent rester dans une certaine plage de fonctionnement connu par les contraintes d'exploitation. Elles peuvent être liées à la qualité du produit, à la marge de sécurité.

3.3.2 Objectif de fonctionnement

L'utilisateur définit un objectif de fonctionnement souhaité à partir du cahier des charges, qui impose au procédé un certain comportement répondant aux performances exigées du procédé en boucle fermé. Cet objectif peut être :

- de réaliser la régulation ou bien la poursuite de trajectoire de référence en sortie du procédé. C'est un problème de commande qui traduit les performances souhaitées telles que la rapidité, la précision et la stabilité du comportement du procédé en boucle fermée. La consigne ou la référence sont fournis par l'utilisateur. La question qui se pose est : ce choix est-il optimal vis-à-vis du fonctionnement du procédé ?
- d'optimiser un critère qui traduit mathématiquement certaines performances : augmenter le rendement, maximiser la vitesse, maximiser la fonction de sensibilité paramètrique, minimiser la consommation en matières premières ou énergétique, etc. Ceci remplacee donc implicitement le choix ci-dessus de la référence.

3.3.3 Modèle

Le modèle de commande, ou modèle de prédiction, intervient directement dans la stratégie de commande prédictive. Il traduit l'évolution prévisible du comportement du procédé en fonction des entrées appliquées. L'élaboration de ce modèle peut se faire selon deux méthodes :

1. **Modèle' boite noire'** : L'établissement du modèle se fait à partir d'un ensemble de couples entrées-sorties. Il s'agit de choisir une représentation (fonction de transfert, réseaux de neurones, etc.) de la sortie en fonction de l'entrée et d'effectuer une identification des paramètres du modèle. Toutefois, pour être exploité en commande, il devra être dynamique pour représenter les variations du procédé au cours du temps. Le modèle obtenu est donc purement mathématique et a priori n'a aucune signification physique. Cette approche s'avère plus simple et plus rapide, mais peut être très difficile voir impossible à la mettre en oeuvre dans le cas des systèmes multivariables ou de fortes non-linéarité. Le domaine de validité est plus restreint que celui obtenu avec un modèle de connaissance.

2. **Modéle de connaissance** : La prise en compte des phénomènes en jeu (physiques, chimiques, biologiques, etc.) permet, à partir des bilans (d'énergie, de population, etc.) d'établir un modèle de connaissance. Cette modélisation donne lieu à des équations dynamiques, souvent non linéaires, aux dérivées ordinaires, voir à des équations aux dérivées partielles dès lors que les évolutions spatio-temporelles pour des variables du procédé sont prisent en compte. Cette approche permet d'arriver à une représentation plus proche de la réa-

lité. La complexité de cette méthode réside dans la difficulté de simuler le comportement du procédé et à l'analyser formellement.

Si la commande prédictive permet d'augmenter les exigences en terme de contrôle, c'est en partie du au fait qu'elle fait appel explicitement en ligne au modèle du procédé, contrairement à d'autres types de commande et notamment le PID. Le modèle joue donc un rôle central dans la conception de la commande prédictive. Il doit être capable de rendre compte de la dynamique du processus pour prédire précisément les sorties futures et doit être simple à implementer et à comprendre.

3.3.4 Problème d'optimisation

Le problème d'optimisation se traduit mathématiquement par une certaine fonction J. Le plus souvent, il s'agit de minimiser ou de maximiser cette fonctionnelle (appelé critère de performances ou fonction coût) qui dépend :

- des variables manipulables de commande représentées par le vecteur $u(t) \in \mathbb{R}^m$,
- des variables d'état avec le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme :

$$J(x(t_i), u(.)) = \int_{t_i}^{t_f} F(x(t), u(t))dt + E(x(t_f)), \forall t > 0 \tag{3.1}$$

où la fonction coût $F : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est souvent continue et satisfait $F(0, 0) = 0$. Souvent, une forme quadratique pour F est employée :

$$F(x, u) = x^T Q x + u^T R u \tag{3.2}$$

avec Q et R des matrices de pondération symétriques définies positives. Le terme de pénalité terminal E dépend de la région terminale des contraintes $x(t_f) \in \mathcal{X}$. L'ensemble $\mathcal{U}$ (respectivement $\mathcal{X}$) est défini par la vérification des contraintes sur les entrées (respectivement sur les variables d'état) du système.

Le problème d'optimisation est ramené, le plus souvent, à la minimisation du critère qui détermine la commande optimale sur l'horizon de prédiction fini :

$$\tilde{u} = arg(\min_{u(.)\in\mathcal{U}} J(x(t_i), u(.))) \tag{3.3}$$

La commande prédictive cherche donc à déterminer une séquence de commandes futures $u(t)$ qui permet de minimiser le critère de performance (3.1), tout en assurant la vérification des contraintes. La résolution de ce problème d'optimisation peut être simple et exploitable lorsque l'argument recherché $u(t)$ est ramené à une suite

d'arguments $u(k)$ pris à des instants discrets k connus ou à une fonction du temps paramétrisée par un nombre fini n_{p_u} de coefficients qui sont alors les arguments à déterminer.

La résolution de ce problème d'optimisation constitue la pièce maîtresse de la commande prédictive. Cependant, il s'appuie sur le principe de base de ce type de commande : la prédiction. Le prédicteur établit un projet de commande sur un horizon futur fini, en s'efforçant de faire coïncider le comportement prédit à partir du modèle au comportement futur souhaité.

3.3.5 Principe général de fonctionnement

Le problème de commande prédictive revient à déterminer le vecteur de commande $\tilde{u}$ qui permet de minimiser le critère de performance choisi J. Son principe permet de transformer ce problème d'optimisation en temps continu infini en un problème en temps discret sur un horizon fini. La méthodologie de l'approche prédictive peut s'illustrer sur le schéma représenté sur la figure 3.1 :

1. A chaque instant discret k, les sorties futures sur un horizon déterminé N_p, appelé *l'horizon de prédiction*, sont prédites à l'aide du modèle de processus à commander. Ces prédictions sont notées $y(k+j|k)$ avec $j = 1, ..., N_p - 1$. Elles dépendent des valeurs des entrées et des mesures connues jusqu'à l'instant k et des commandes futures $u(k+j|k)$, $j = 0, .., N_p - 1$ qui doivent être calculées.

2. L'ensemble des commandes futures $u(k+j|k)$, $j = 0, .., N_p - 1$ est calculé en optimisant un certain critère déterminé afin que la sortie prédite $y(k+j|k)$ soit aussi proche que possible de la trajectoire de référence $y_{ref}(k+j|k)$. Si le critère est quadratique et, si le modèle linéaire et s'il n'y a pas des contraintes sur la sortie ou sur la commande, la solution est obtenue explicitement. Sinon une méthode d'optimisation itérative doit être utilisée.
3. La première composante $u(k|k)$ de la séquence de commande optimale $u(k+j|k)$, $j = 0, .., N_p - 1$ est appliquée au procédé et les autres valeurs de commande sont oubliées. A l'instant suivant $k+1$, la résolution recommence avec l'étape 1 en prenant en compte les nouvelles mesures actualisées du procédé $y_p(k+1)$ et une nouvelle séquence de commande $u(k+1+j|k+1)$, $j = 0, .., N_p - 1$ est déterminée. La séquence de commande est améliorée à chaque période d'échantillonnage puisque des nouvelles mesures ont pu être prises et par conséquent le vecteur du signal de commande $u(k+1+j|k+1)$, $j = 0, .., N_p - 1$ sera assez probablement différent de $u(k+j|k)$, $j = 1, .., N_p$. Ceci est connu comme le concept de l'horizon fuyant (ou glissant).

En résumé, le principe de la commande prédictive revient à optimiser un critère de performance à chaque période d'échantillonnage sur un horizon de prédiction N_p dont la solution est la meilleure séquence de commandes. A la prochaine période

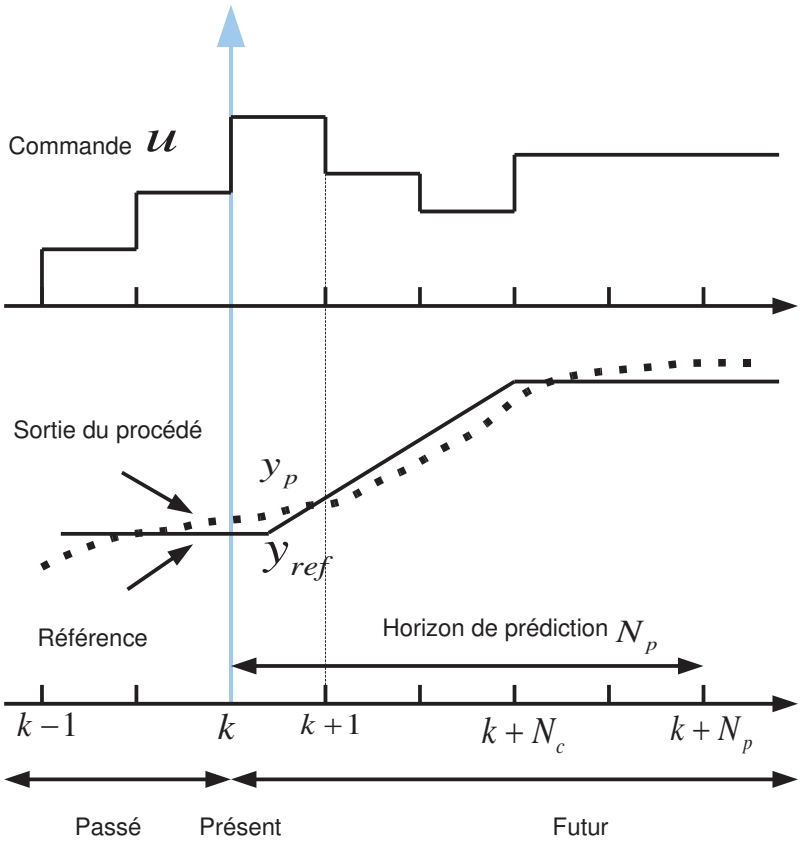


FIGURE 3.1 – Schéma de principe d'une commande prédictive

d'échantillonnage, seul le premier élément de la séquence est appliqué et la résolution du problème d'optimisation recommence en prenant en considération les nouvelles mesures.

La résolution du problème d'optimisation est une partie fondamentale de la stratégie de commande et dépend étroitement de la complexité du modèle. En effet, à chaque période d'échantillonnage, la méthode d'optimisation retenue est associée à la méthode de résolution choisie du modèle du procédé sur l'horizon de prédiction. La complexité du problème d'optimisation dépend du nombre de variables, de la valeur des différents horizons mais également de la présence des contraintes sur les commandes et/ou sur les sorties. Pour ces raisons, et malgré la puissance croissance des calculateurs, la résolution en temps réel à l'aide d'algorithmes coûteux en temps de calcul s'avère parfois compliquée et devient de plus en plus complexe. Nous abordons justement dans le chapitre suivant l'aspect implémentation des solutions

proposées ici.

3.4 Méthodologie de la commande prédictive

De nombreux aspects théoriques pour la commande prédictive sont présentés dans la littérature. Des formulations mathématiques, ainsi que des études théoriques de la stabilité, sont abordées. Toute étude varie en fonction de problème du commande posé.

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à la stratégie de commande prédictive non linéaire. La formulation adoptée dans cette section reprend notamment les éléments théoriques de [Findeisen 2002] bien que des notations utilisées dans la synthèse effectuée par [Mayne 2000] ainsi que la reformulation reprise par [Silva 2008]. En outre, les conditions et les hypothèses garantissant la stabilité pour différentes approches portant sur l'horizon de prédiction seront abordées, même si cet important aspect n'est pas étudié dans cette thèse.

3.4.1 Formulation mathématique

Nous considérons le problème de formulation de commande prédictive pour une classe de systèmes non linéaires décrits par des équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in \mathbb{R}^* \\ \dot{y}(t) = h(x(t)), & t \in \mathbb{R}^* \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{3.4}$$

avec les contraintes d'entrée et d'état de la forme :

$$u(t) \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0 \quad x(t) \in \mathcal{X}, \forall t \geq 0, \tag{3.5}$$

où $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'état et de commande du modèle. L'ensemble des valeurs des entrées admissibles est noté par $\mathcal{U}$ et l'ensemble des états par $\mathcal{X}$. Les ensembles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{X}$ satisfont les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1 *$\mathcal{U}$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{X}$ est un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et $(0,0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$.*
Sous la forme la plus simple, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{X}$ sont donnés par les contraintes suivantes :

$$\mathcal{U} := \{u(t) \in \mathbb{R}^m \mid u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}\}, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.6}$$

$$\mathcal{X} := \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid x_{min} \leq x(t) \leq x_{max}\}, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.7}$$

avec u_{min}, u_{max} des vecteurs constants et x_{min}, x_{max} des vecteurs constants ou temps variants.

Hypothèse 3.2 *Le champ de vecteur $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application continue et qui satisfait $f(0,0) = 0$. f est localement Lipschitzienne continue en x.*

Hypothèse 3.3 *Le système (3.4) a une solution unique et continue pour tout état initial et pour toute fonction d'entrée continue par morceaux $u(.) : [0, N_p] \to \mathcal{U}$.*

Le système à contrôler est habituellement décrit, ou rapproché, par des équations différentielles ordinaires continues, mais puisque la commande prédictive est implémentée numériquement sur un calculateur, on considère le système (3.4) à des instants discrets k. La commande a pour objectif de stabiliser le système à l'origine ou en un point d'équilibre x_r pour lequel la sortie $y_r = h(x_r) = r$ où r est la référence constante. A chaque temps d'échantillonnage k et pour tout état x, la fonction coût est définie par :

$$V(x, k, \tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \Big(F(x(j), u(j), k) \Big) + E(x(k + N_p)) \tag{3.8}$$

où le profil de commande $\tilde{u}$ est défini par :

$$\tilde{u} = \{p_u(1), ..., p_u(n_{pu})\} \tag{3.9}$$

et $x(j)$ dans l'équation (3.8) désigne l'état du système à l'instant j sous l'application de la séquence de commande $\tilde{u}$:

$$x(j) = x^{\tilde{u}}(j, (x, k)) \ ; \ j \in \{k, \ldots, k + N_p\} \tag{3.10}$$

La fonction F du terme intégral (3.8) portant sur la trajectoire est supposée satisfaire l'hypothèse technique :

$$F(x, u) \geq c(\mid (x, u) \mid)^2 \tag{3.11}$$

Cette hypothèse est équivalente à $F(x, u) \geq c(\mid (z, u) \mid)^2$ où $z = h(x)$, (f, h) est détectable et $F(0, 0) = 0$.

La fonction coût V comporte un terme de pondération E sur l'état final $x(k+N_p)$. Le temps final $k + N_p$ qui augmente suivant k se rattache à la notion d'horizon glissant. De nombreuses formulations stabilisantes imposent une contrainte finale :

$$x(k + N_p) \in X_f \subset \mathcal{X} \tag{3.12}$$

où X_f est un sous ensemble fermé convexe de $\mathcal{X}$.

Pour tout état x à chaque l'instant k, le problème de commande optimale $\mathcal{P}(x,k)$, lié à la minimisation de la fonction coût $V(x,k,\tilde{u})$ qui satisfait les contraintes sur les entrées et la contrainte terminale, est donné par la séquence de commande suivante :

$$\tilde{u}(x,k) = (u(k;(x,k))u(k+1;(x,k)) \ \ldots \ u(k+N_p-1;(x,k))) \tag{3.13}$$

et la fonction de valeur :

$$V(x,k,\tilde{u}) = V(x,k,\tilde{u}(x,k)) \tag{3.14}$$

où l'argument (x,k) désigne l'état initial x à l'instant k .La première composante $u(k;(x,k))$ de la séquence optimale $\tilde{u}(x,k)$ est appliquée au système à l'instant k. Ceci définit une loi de commande prédictive implicite et indépendante du temps qui s'écrit comme suit :

$$\kappa(x,k) := u(k;(x,k)) \tag{3.15}$$

Puisque les fonctions f et F sont invariantes dans le temps, il suffit donc de résoudre le problème d'optimisation $\mathcal{P}_{N_p}(x) := \mathcal{P}(x,k)$ en prenant comme origine du temps $k=0$.

Par conséquent, le problème $\mathcal{P}_{N_p}(x)$ est défini par :

$$\mathcal{P}_{N_p}(x) : \min_{\tilde{u}} \{V_{N_p}(x,\tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_{N_p}(x)\} \tag{3.16}$$

$$V_{N_p}(x,\tilde{u}) = \sum_{j=0}^{N_p-1} F(x(j),u(j)) + E(x(N_p)) \tag{3.17}$$

soit $\mathcal{U}_{N_p}(x)$, l'ensemble des profils de commandes admissibles satisfaisant les contraintes sur les entrées, les états et la contrainte terminale. Comme l'horizon de prédiction N_p est fini, il existe un minimum pour le problème d'optimisation généralement non convexe, si les fonctions f, E et F sont continues.

Pour un état x à un instant quelconque, la solution du problème d'optimisation $\mathcal{P}_{Np}(x)$ est donnée par la séquence suivante :

$$\tilde{u}^0(x) = (u^0(0;x) \ u^0(1;x) \ \ldots \ u^0(N_p-1;x)) \tag{3.18}$$

reliée à la trajectoire optimale de l'état :

$$x^0(x) = (x^0(0;x) \ x^0(1;x) \ \ldots \ x^0(N_p;x)) \tag{3.19}$$

conduisant à la valeur optimale :

$$V_{N_p}^0(x) = V_{Np}(x,\tilde{u}^0(x)) \tag{3.20}$$

Avec $x^0(0;x) = 0$. La première composante $u^0(0;x)$ de la séquence optimale $\tilde{u}^0(x)$ est appliquée sur l'intervalle $[k,\ k+1]$. La loi de commande prédictive implicite est donnée donc par :

$$\kappa_{N_p}(x) := u^0(0;x) \tag{3.21}$$

3.4.2 Notions de stabilité

Pour toute loi de commande, une étude de stabilité est toujours abordée. Dans le cas de la commande prédictive linéaire non contrainte, une solution explicite est introduite et l'étude de la stabilité est résumée à une loi de commande par retour d'état $u = Kx$. Sous la présence des contraintes, les auteurs [Oliviera 1995] introduisent des termes de pénalités dans le critère d'optimisation de sorte que la solution optimale s'exprime par un retour d'état augmenté. Cette technique s'avère cependant difficile à exploiter, voire impossible dans le cas de la commande non linéaire.

De nombreux travaux existent dans la littérature sur l'étude de la stabilité dans le cas de la commande non linéaire prédictive :

- ***Horizon de prédiction infini***

  La méthode la plus intuitive à atteindre la stabilité en boucle fermée est le cas où l'horizon de prédiction est infini. Les preuves de stabilité sont basées en principe sur l'utilisation de la fonction coût comme fonction de Layapunov [Keerthi 2003] [Meadows 1993]. Sous certaines conditions, la stabilité du système en boucle fermée est garantie. La littérature montre que les résultats obtenus par cette technique sont plus simples en théorie et irréalisables pratiquement. Cependant, la troncature de l'horizon de prédiction introduit différentes hypothèses.

- ***Conditions de stabilité sur horizon fini***

  Différentes formulations sont proposées pour l'étude de la stabilité de la commande prédictive sur un horizon fini voir [Alamir 1995] [Oliveira 2000] [Mayne 1990]. La plupart de ces approches modifient le problème de commande de sorte que la stabilité puisse être garantie indépendamment du choix des paramètres de performances dans la fonction coût. Cet aspect de formulation introduit des contraintes d'égalités terminales ou tout ou moins un terme de pondération finale dans le critère. Ces contraintes additionnées n'ont aucune spécification physique, mais leurs objectif unique est d'enforcer la stabilité en boucle fermée. Elles sont connus comme des contraintes de stabilité.

- ***Horizon quasi-infini***

  Sur un horizon de prédiction quasi-infini, les auteurs [Chen 1996] ont posé

une contrainte inégalitaire de stabilité et un terme de pénalité quadratique portant sur l'état dans la problématique de commande initiale. La résolution de problème d'optimisation est alors menée à la résolution d'un problème d'optimisation sur un horizon fini.

L'étude de stabilité est liée donc à certaines hypothèses : à la convergence de l'algorithme d'optimisation, à la fonction coût et au choix des pondérations, à l'ajout de contraintes, aux paramètres de l'algorithme (horizon de prédiction, conditions d'arrêt...), aux erreurs de modélisation et aux perturbations qu'il est nécessairement difficile de prendre en compte dans la prédiction, alors ils sont parmi les éléments qui détruisent l'aspect stable du système.

Les hypothèses que nous venons de citer nous conduisent à nous pencher, sans rentrer dans les détails, sur les problèmes de la faisabilité et de la robustesse liées à la commande prédictive non linéaire.

• ***Faisabilité et robustesse***

L'étude de la faisabilité est liée étroitement à la stabilité. Il s'agit de l'existence ou non de solution au problème d'optimisation sous contraintes qui traduit l'objectif de commande. L'ensemble admissible définit par les contraintes peut être vide au départ ou passer pendant un instant dans un ensemble vide. Cela revient en d'autres termes à se retrouver dans une situation où le système n'est pas commandable, tout au moins tel que le problème a été formulé.

Les raisons principales provoquant ce phénomène d'infaisabilité en pratique sont les suivantes :

- Le mauvais choix des paramètres de l'algorithme d'optimisation engendre un problème d'optimisation mal défini.
- Les objectifs de commande sont incompatibles avec les contraintes : la référence n'est pas atteignable compte tenu des contraintes.
- Le comportement du modèle de commande et celui du procédé diffèrent de manière trop importante.
- Une perturbation extérieure agit sur le procédé. Ce signal de perturbation est non mesuré ou tout au moins sa dynamique est inconnue.

Les causes d'infaisabilité sont donc nombreuses et variées, les deux dernières listées ci-dessus prennent en considération les incertitudes de modèle et les perturbations. Par ailleurs, la formulation prédictive n'est pas des plus appropriées à l'analyse de la robustesse et les travaux effectués sur la robustesse dans le cadre de commande prédictive non linéaire utilisent des hypothèses restrictives sur le signal de perturbation ou sur des informations portant sur les perturbations [Boucher 2006].

3.5 Structure de commande prédictive utilisée

Nous présentons, dans cette section, la structure de commande à modèle interne et plus précisément deux stratégies de commande : à modèle non linéaire et à modèle linéaire temps variant. L'idée est aussi de proposer des stratégies de commande predictive pour les systèmes dont le problème d'implémentation en temps réel s'avère difficile.

3.5.1 Formulation du problème d'optimisation

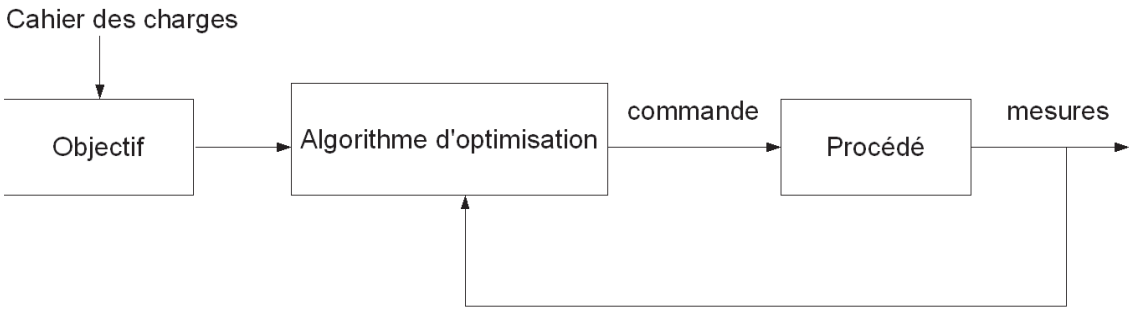


FIGURE 3.2 – Structure de commande prédictive en boucle fermée

La structure de commande prédictive en boucle fermée est présentée par la configuration basique donnée à la figure 3.2. Une fois la problématique de commande posée par l'utilisateur du procédé, un critère de performance est défini traduisant les objectifs issues du cahier des charges. Le problème d'optimisation est alors déterminé et un algorithme numérique est utilisé qui permet de déterminer, à chaque instant k, le projet de commandes à appliquer à chaque période d'échantillonnage sur un horizon de prédiction N_p en minimisant le critère de performance J. A partir de la formulation de commande prédictive établie (section 3.4.1), ce critère s'écrit :

$$J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} F(y_p(j), u(j-1)) \tag{3.22}$$

où la séquence de commande à déterminer est donnée par :

$$\tilde{u} = \{p_u(1), ..., p_u(n_{pu})\} \tag{3.23}$$

Les commandes à appliquer sur la fin de l'horizon de prédiction étant :

$$u(j) = f_u(p_u(1), ..., p_u(n_{pu})), \quad \forall\, j \in \{k, \ldots, k+N_p-1\} \tag{3.24}$$

Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\mathcal{P}_{N_p} : \min_{\tilde{u}} \{J(\tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_{N_p}\} \tag{3.25}$$

où $\mathcal{U}_{N_p}$ est l'ensemble des profils de commandes admissibles sur l'horizon de prédiction N_p. Ce problème d'optimisation est résolu, sur l'horizon de prédiction, sous des contraintes sur les variables de commande u et les variables de sortie y_p du procédé :

$$\begin{cases} c_i\left(y_p(j), u(j-1)\right) \leq 0 \\ u \in \mathcal{U} \\ i \in \{1, \ldots, n_{con}\} \\ j \in \{k+1, \ldots, k+N_p\} \end{cases} \tag{3.26}$$

avec n_{con} le nombre de contraintes sorties.

Hypothèse 3.4 *La fonction F intervenant dans la définition de la fonction coût J est de forme quadratique sur les fonctions de sortie.*

Hypothèse 3.5 *Les fonctions de contraintes c_i sont de classe C^1.*

Hypothèse 3.6 *Les variables intervenant dans l'évolution de la fonction coût sont soit directement mesurées, soit estimées.*

Le problème d'optimisation sous contraintes, comme il est définit de (3.22) à (3.26), ne peut être résolu car les sorties futures du procédé y_p ne sont pas connues dans le futur. Cependant, l'introduction du modèle dans la structure de commande va permettre de poser un problème resolvable sur l'horizon de prédiction N_p.

3.5.2 Structure de commande prédictive par modèle interne non linéaire

Largement étudiée pour les systèmes linéaires [Morari 1983], la structure de commande prédictive à modèle interne a souvent été appliquée pour des procédés industriels.

La structure de commande par modèle interne est utilisée ici pour ses propriétés de robustesse par rapport aux incertitudes du modèle et aux perturbations qui joint sa structure et son action intégrale. Dans sa configuration donnée sur la figure 3.3, la commande est non seulement appliquée au procédé, mais aussi à son modèle. Le modèle de prédiction du procédé à commander constitue la pierre angulaire dans la stratégie de la commande prédictive. Il est un élément indispensable pour maîtriser idéalement le procédé car il prédit l'évolution des sorties en fonction des entrées

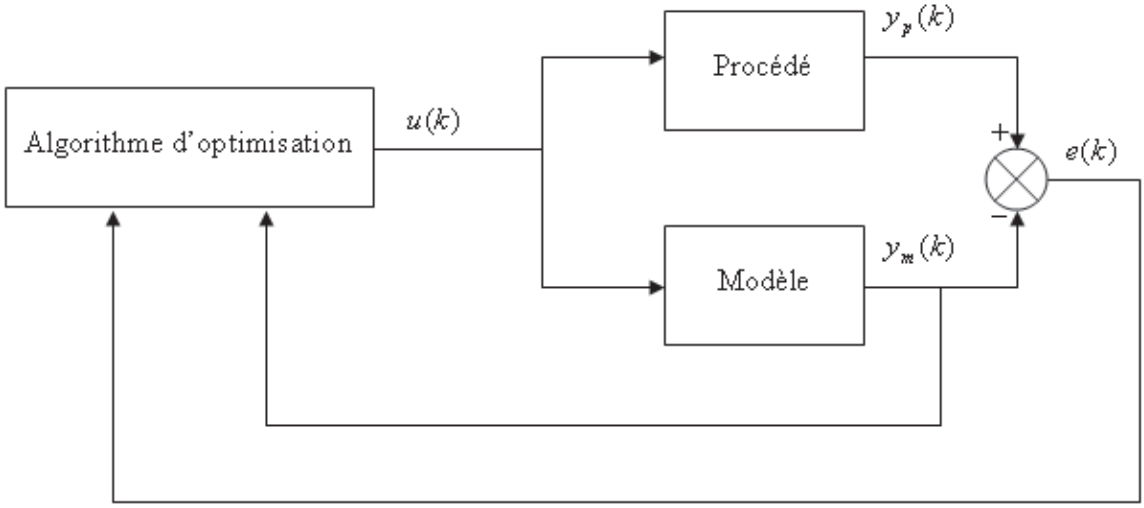


FIGURE 3.3 – Structure de commande prédictive par modèle interne

appliquées. Il doit être suffisamment simple, doit traduire correctement le comportement du procédé et doit surtout qualitativement être juste au niveau des tendances vis-à-vis du procédé. La structure présentée dans la figure 3.3 permet d'écrire la sortie du procédé $y_p(k)$ via la sortie du modèle $y_m(k)$ et l'écart $e(k)$ entre le procédé et le modèle :

$$y_p(k) = y_m(k) + e(k) \tag{3.27}$$

Aux instants futurs j, l'équation (3.27) est utilisée, combinée à l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.7 *Sur l'horizon de prédiction N_p, le vecteur d'écart $e(j)$ existant entre les sorties du procédé et celles du modèle est pris constant et égal à la dernière valeur disponible $e(k)$. A chaque période d'échantillonnage, cet écart est mis à jour par les nouvelles mesures actualisées du procédé.*

Étant adoptée l'hypothèse 3.7, le nouveau problème d'optimisation à résoudre soumis à la contrainte inhérente au modèle est élaborée comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{N_p} : \min\limits_{\tilde{u}} \{J(\tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_{N_p}\} \\ J(\tilde{u}) = \sum\limits_{j=k+1}^{k+N_p} F(y_m(j), u(j-1)) \\ \tilde{u} = \{p_u(1), ..., p_u(n_{pu})\} \\ u \in \mathcal{U} \\ c_i\left(y_m(j), u(j-1)\right) \leq 0, \quad i \in \{1, \ldots, n_{con}\} \end{cases} \tag{3.28}$$

3.5.3 Structure de commande prédictive par modèle interne linéaire temps variant

Du point de vue pratique, la réalisation d'une loi de commande prédictive pour des systèmes comportant de fortes nonlinéarités est possible, mais c'est une méthode gourmande en temps de calcul. [Dufour 2000] et [Dufour 2003] proposent une modification de la structure précédente pour faciliter la mise en œuvre de la commande. En effet, cette approche est utilisée pour réduire le temps de calcul, qui peut s'avérer critique dans le cas des systèmes à paramètres distribués qui nécessitent le plus souvent un temps de calcul important. Cette stratégie visant à diminuer le temps de calcul peut bien entendu être utilisée dans le cas de système de dimension infinie, puisqu'elle est basée sur un modèle de contrôle non linéaire à paramètres localisés obtenu par discrétisation du système d'équations aux dérivées partielles. L'idée consiste à supposer que la variation vers un comportement désiré peut être décrite par une linéarisation du modèle initial autour d'un fonctionnement nominal.

Soit le système non linéaire à contrôler modélisé par un système d'équations différentielles continues :

$$(S_{NL}) \begin{cases} \dot{x}_m(t) = f(x_m(t), u(t)), & t \in \mathbb{R}^* \\ y_m(t) = h(x_m(t), u(t)), & t \in \mathbb{R}^* \\ x_m(0) = x_m^0 \end{cases} \tag{3.29}$$

où $x_m \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y_m \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du modèle.

Une approximation du système non linéaire est traitée en deux étapes (Figure 3.4) :

- la détermination hors ligne d'un **comportement nominal** en tenant compte des objectifs et des contraintes ; c'est la résolution hors ligne (S_0) du système non linéaire (S_{NL}) pour une trajectoire nominale définie par le triplet (u_0,x_0,y_0).
- la mise en place d'un **modèle linéaire qui décrit les variations** en ligne du modèle par rapport au comportement nominal. Le système linéarisé est déterminé autour du fonctionnement nominal (u_0,x_0,y_0). Le modèle de commande utilise conjointement le système non linéaire déterminé hors ligne (S_0) et le système linéaire temps variant (S_{LTV}) intégré en ligne.

Hypothèse 3.8 *Pour un système non linéaire (S_{NL}), on suppose qu'il existe un triplet (u_0,x_0,y_0) vérifiant le modèle (S_0) considéré, et cela pour toute condition initiale.*

Définition 3.1 *Modèle linéaire temps variant (S_{LTV})*

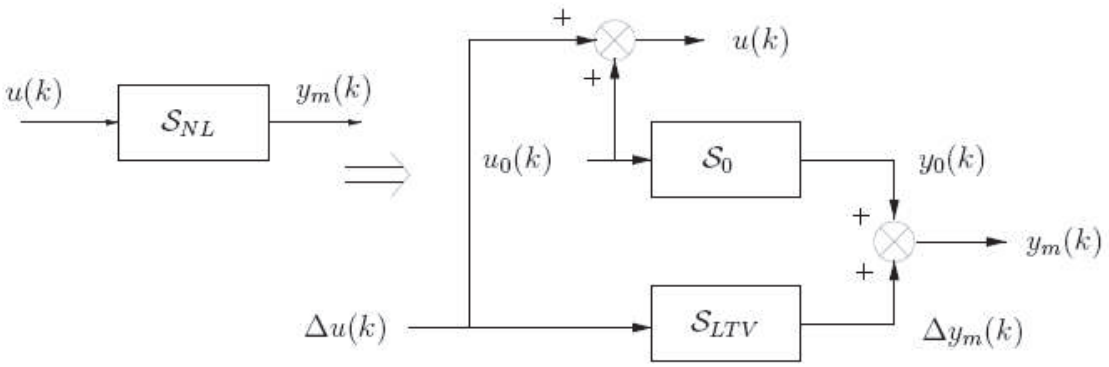


FIGURE 3.4 – Schéma de linéarisation du modèle non linéaire autour d'un fonctionnement nominal

Soit le comportement nominal défini par le triplet $(x_0(t), u_0(t), y_0(t))$ *:*

$$\begin{cases} u_0(t) = u(t) - \Delta u(t) \\ x_0(t) = x_m(t) - \Delta x_m(t) \\ y_0(t) = y_m(t) - \Delta y_m(t) \end{cases} \tag{3.30}$$

avec $\Delta x_m \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u \in \mathbb{R}^m$, $\Delta y_m \in \mathbb{R}^p$.
Au voisinage du comportement nominal $(x_0(t), u_0(t), y_0(t))$*, une approximation de l'évolution du système est effectuée en utilisant un développement en série de Taylor à l'ordre 1 des fonctions non linéaires* f *et* h.
Le modèle linéaire temps variant (S_{LTV}) *est donné par :*

$$(S_{LTV}) \begin{cases} \Delta\dot{x}_m(t) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{(x_0,u_0)} \Delta x_m(t) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} \Delta u(t) \\ \Delta y_m(t) = \left.\dfrac{\partial h}{\partial x_m}\right|_{(x_0,u_0)} \Delta x_m(t) + \left.\dfrac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} \Delta u(t) \end{cases} \tag{3.31}$$

avec $\Delta x_m(t) = x_m(t) - x_0(t)$ *et* $\Delta u(t) = u(t) - u_0(t)$*, définit dans (3.30)*

Toutes les grandeurs dépendent a priori du temps puisque le triplet $(u_0(t), x_0(t), y_0(t))$ décrit une trajectoire du système. Le modèle linéaire temps variant (S_{LTV}) peut s'écrire sous la forme :

$$(S_{LTV}) \begin{cases} \Delta\dot{x}_m(t) = \underline{A}(t)\Delta x_m(t) + \underline{B}(t)\Delta u(t) \\ \Delta y_m(t) = \underline{C}(t)\Delta x_m(t) + \underline{D}(t)\Delta u(t) \end{cases} \tag{3.32}$$

avec les matrices temps variant $\underline{A}(t)$ $(n\times n)$, $\underline{B}(t)$ $(n\times m)$, $\underline{C}(t)$ $(p\times n)$ et $\underline{D}(t)$ $(p\times m)$.

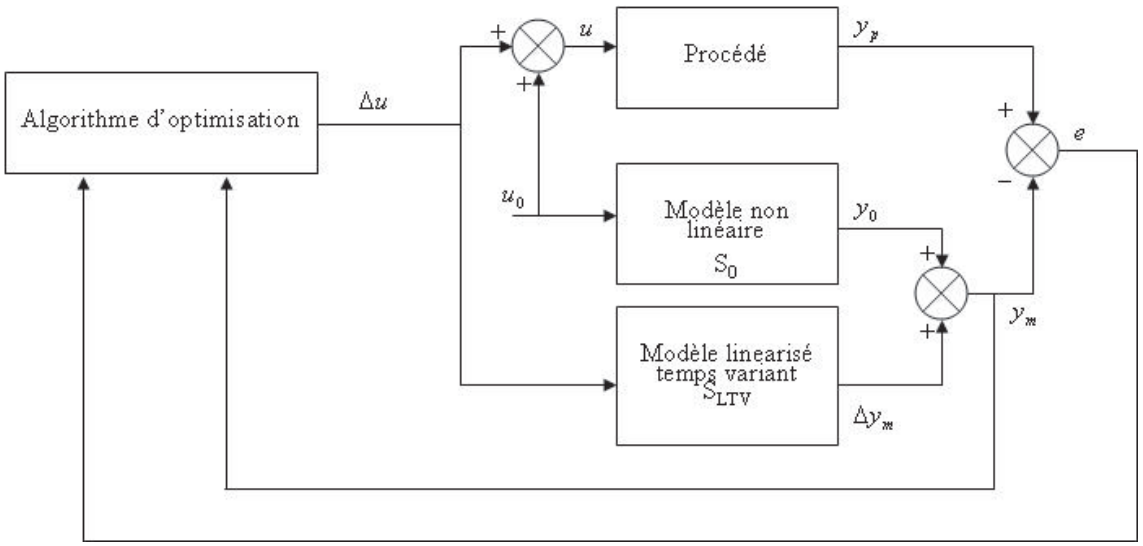


FIGURE 3.5 – Structure de commande prédictive avec linéarisation du modèle

La formulation générale du critère (3.22) devient alors dans le cas d'un modèle de commande linéaire temps variant :

$$J(\Delta\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} F(\Delta y_m(j), \Delta u(j-1)) \tag{3.33}$$

où la séquence de commande à déterminer est donnée par :

$$\Delta\tilde{u} = \{\Delta p_u(1), ..., \Delta p_u(n_{pu})\} \tag{3.34}$$

Les commandes à appliquer sur la fin de l'horizon de prédiction sont :

$$u(j) = f_u(\Delta p_u(1), ..., \Delta p_u(n_{pu})), \quad \forall\, j \in \{k, \ldots, k+N_p-1\} \tag{3.35}$$

Finalement, la structure de commande (Figure 3.3), après la linéarisation du modèle interne, devient celle de la figure 3.5 et le problème d'optimisation (3.28) devient :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{N_p} : \min\limits_{\Delta\tilde{u}} \{J(\Delta\tilde{u}) \mid \Delta\tilde{u} \in \mathcal{U}_{N_p}\} \\ J(\Delta\tilde{u}) = \sum\limits_{j=k+1}^{k+N_p} F(\Delta y_m(j), \Delta u(j-1)) \\ \Delta\tilde{u} = \{\Delta p_u(1), ..., \Delta p_u(n_{pu})\} \\ u \in \mathcal{U} \\ c_i\left(\Delta y_m(j), \Delta u(j-1)\right) \leq 0, \quad i \in \{1, \ldots, n_{con}\} \end{cases} \tag{3.36}$$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe de la commande prédictive en insistant sur ses particularités qui en font une méthode de commande particulièrement efficace et très répondue dans le milieu industriel.

Nous nous sommes intéressés à une stratégie de commande prédictive utilisant le modèle de commande non linéaire. Si le temps de calcul devient critique, une autre structure à modèle interne utilisant un modèle linéarisé autour d'un fonctionnement nominal, à la place du modèle non linéaire, peut être utilisée. En effet, cette solution permet de réduire le temps de calcul dédié à la résolution du modèle mathématique, et donc le temps considéré par l'optimisation.

Ces deux stratégies de commande seront employées dans l'approche de l'identification optimale qui fait sujet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Approche d'identification couplant observateur et commande prédictive

4.1 Introduction

L'objectif principal de ce travail est de proposer une méthode de résolution du problème d'identification optimale en ligne des paramètres inconnus du modèle en utilisant des mesures entrée/sortie et le modèle du procédé. Ceci se fait en injectant au procédé une entrée spécialement conçue de façon optimale. Nous proposons donc une stratégie couplant un contrôleur prédictif sous contraintes et un observateur non linéaire. L'aspect temps réel pouvant être un problème, il doit pouvoir être aussi pris en compte dans la formulation de la solution apportée.

Dans cette partie, nous commençons par spécifier le problème d'identification optimale dans son cadre général. Ensuite, la stratégie adoptée pour l'identification optimale en ligne des paramètres inconnus du modèle est exposée, où nous introduisons deux approches de commande :

- la première est basée sur un modèle de prédiction non linéaire et est utilisable si le temps de calcul de la commande n'est pas important devant le temps d'échantillonnage disponible,

- la seconde sur un modèle linéaire temps variant, qui peut remplacer l'approche non linéaire si le temps de calcul de la commande devient un paramètre critique face à la dynamique du système.

Ces outils d'optimisation pour l'identification en ligne sont exposés avant d'en voir les aspects de résolution numérique dans le chapitre concernant la mise en œuvre de ces deux approches.

4.2 Présentation de l'approche

Il est bien connu que la qualité des paramètres identifiés pendant une expérience d'identification dépend du signal d'excitation appliqué. En effet, en fonction de ce signal d'entrée, les informations contenues dans les mesures ne seront pas forcément assez riches (sensibles) à chaque paramètre à identifier, ce qui mène ensuite à des problèmes structurels et numériques dans cette identification.

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à présenter un contrôleur basé sur la sensibilité paramétrique pour l'identification optimale des paramètres inconnus du modèle. Pour ce faire, nous utilisons des outils contraints de commande en boucle fermée et un observateur, dans le but de maximiser la sensibilité des mesures vis-à-vis des paramètres à identifier, tout en tenant compte des diverses contraintes : c'est ce qu'on appelle ici problème de commande ou de contrôle optimal.

Cette approche couplant contrôleur prédictif et estimateur résout en ligne le problème d'identification à chaque instant en utilisant l'observateur. Cette approche peut être employée pour un procédé modélisé par un modèle dynamique continu en temps (appartenant à une famille particulière de modèles), décrit par des équations aux dérivées ordinaires non linéaires (EDO) ou par des équations aux dérivées partielles (EDP). Le modèle de sensibilité paramétrique est explicitement déduit du modèle et est employé par le contrôleur. Le contrôle optimal et l'estimation des paramètres du modèle sont donc obtenus conjointement en ligne.
Dans un souci de synthèse d'entrée, on traite ici une approche à une entrée manipulable, une sortie mesurée et un paramètre inconnu à estimer.

4.3 Formulation initiale du problème d'identification optimale

Dans les modèles paramétriques, la sensibilité de la sortie du procédé y_p par rapport aux paramètres du modèle θ détermine si les paramètres peuvent être identifiés à partir des données expérimentales entrée/sortie. Si la sensibilité d'une sortie y_p par rapport à un paramètre θ est petite ou nulle, alors soit le paramètre n'influence pas sur la sortie, soit la sortie n'est pas bien choisie, soit le signal d'entrée choisi n'excite pas suffisamment la sensibilité paramétrique. Ici, on s'interesse à la troisième problématique.

D'autre part, les méthodes d'identification ne peuvent être appliquées que si certaines conditions sont satisfaites : les paramètres doivent être identifiables et les sorties mesurées doivent être suffisamment sensibles aux paramètres à identifier. L'analyse des sensibilités permet d'étudier l'influence d'un paramètre sur la sortie de système. Cette approche est un outil de décision important quant à la nécessité d'identifier ou non certains paramètres. Dans [Dotsch 1996], il a été montré que, pour un système linéaire, l'identifiabilité peut être interprétée en termes de contrô-

labilité et d'observabilité du système augmenté (comprenant le modèle du système linéaire et le modèle de sensibilité associé).

Entre autres, on sait également que le gradient $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}$ donne les informations contenues dans les mesures expérimentales. Plus précisément, ce gradient apparaît dans la matrice bien connue de l'information de Fisher ($\mathcal{M}$) :

$$\mathcal{M} = \int_0^{t_f} \frac{\partial y_p(\tau)^T}{\partial \theta} \, Q^{-1} \, \frac{\partial y_p(\tau)}{\partial \theta} d\tau \tag{4.1}$$

où Q est une matrice de pondération (le plus souvent sous forme diagonale), où chaque élément est inversement proportionnel à la covariance du bruit sur les mesures. La matrice $\mathcal{M}$ fournit (selon la définition et le choix a priori du critère) les informations contenues dans les mesures données par une expérience spécifique.

Dans ce cadre, l'idée principale de notre l'algorithme d'identification est d'estimer en ligne les paramètres inconnus du modèle du procédé en utilisant : le modèle, l'observateur et un modèle de sensibilité issu du modèle, le tout dans une approche de commande prédictive. La question est : comment choisir la séquence d'entrée $u(t)$ optimale telle que ce signal de sortie soit le plus riche pour son utilisation dans l'observateur ? Ceci est traduit comme maximisation de la sensibilité $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}$ des mesures du procédé y_p par rapport aux paramètres θ.

Hypothèse 4.1 *La sensibilité $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}$ des mesures du procédé y_p par rapport aux paramètres θ est non nulle.*

Par ailleurs, pendant l'utilisation du procédé pour l'identification, on exige que quelques contraintes doivent être satisfaites à tout moment, afin de maintenir l'utilisation du procédé dans une zone de fonctionnement :

- en effet, les entrées doivent rester dans une zone de fonctionnement des contraintes physiques. Tout actionneur, selon la technologie utilisée, aura une plage d'utilisation limitée, une vitesse et une accélération caractéristiques.

- les grandeurs mesurées ou estimées doivent rester dans une certaine zone de fonctionnement définie pour les contraintes d'activité. Elles peuvent être étroitement liées à la sécurité, à la stabilité, ou à l'objectif à atteindre en terme de produit final.

Ces deux types de contraintes s'écrivent donc selon :

• celles portant uniquement sur l'entrée du procédé u qui doit pouvoir être appliqué physiquement :

$$\begin{cases} u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \ , \ \forall \, t \geq 0 \\ \Delta u_{min} \leq \frac{du(t)}{dt} \leq \Delta u_{max} \ , \ \forall \, t \geq 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

• celles ne portant pas uniquement sur l'entrée du procédé, notamment celles portant sur la sortie du procédé y_p et également quelques sorties non mesurés (obtenus en fonction de l'état de procédé) peuvent être contraints :

$$c_i(y_p, x_p, \alpha, \theta, u) \leq 0, \quad \forall\, t \geq 0 \;\; \forall\, i \in \mathrm{I}^{n_c} = \{1, ..., n_c\} \tag{4.3}$$

Remarque 4.1 *La différence entre les deux vecteurs α et θ est que α est le vecteur des paramètres du modèle à valeurs connues, tandis que θ est le vecteur des paramètres du modèle à valeurs inconnues pour lequel le problème de conception de l'entrée optimale est énoncé ici.*

Hypothèse 4.2 *Les fonctions de contraintes c_i sont de classe C^1.*

4.4 Formulation du problème de commande prédictive sous contraintes pour l'identification

4.4.1 Problème initial d'optimisation sous contraintes

Le principe de la commande prédictive permet de transformer un problème d'optimisation en temps continu infini en un problème en temps discret sur un horizon fini. Cela revient à optimiser un critère de performance J à chaque période d'échantillonnage sur un horizon de prédiction N_p dont la solution est le projet de commande $\tilde{u}$. Dans les formulations de commande prédictive, le modèle peut être : soit explicitement sous forme discrète, soit sous forme continue résolue par un solveur numérique à des temps discrets. Le problème d'identification est implémenté sur un calculateur, par conséquent on considère ici les signaux issus du modèle continu à des instants discrets.

Puisque la résolution du problème d'identification optimale est implémentée sur un calculateur, on considère le modèle à des instants discrets. Le signal d'entrée, l'état et la sortie sont considérés à l'instant présent (resp. futur) de l'indice de temps discrétisé k (resp. j), où $t = k * T_e$ (resp. $t = j * T_e$) et où T_e est la période d'échantillonnage.

Cette approche s'applique pour toute formulation de modèle continu, et notamment aux systèmes qui ont des entrées qui les rendent inobservables. En effet, ces entrées interdites peuvent être formulées en tant que nouvelles contraintes dans le problème d'optimisation posé. Il est possible d'ajouter n_{co} contraintes introduites par l'analyse d'observation, afin d'avoir une entrée qui maintient le système observable.

La formulation de la commande prédictive établie peut s'écrire via la fonction coût J :

$$J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(j) \right)^2 \tag{4.4}$$

Selon la formulation initiale du problème d'optimisation pour l'identification, il peut être reformulé comme problème d'optimisation contraint pour l'identification $(POCI_I)$:

$$(POCI_I)\begin{cases} \mathcal{P}_{N_p} : \max\limits_{\tilde{u}}\{J(\tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_{N_p}\} \\ J(\tilde{u}) = \sum\limits_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\dfrac{\partial y_p}{\partial \theta}(j)\right)^2 \\ \begin{cases} u_{min} \leq u(j) \leq u_{max}\ ,\ \forall\, j \in [k, k+N_p-1] \\ \Delta u_{min} \leq u(j) - u(j-1) \leq \Delta u_{max}\ ,\ \forall\, j \in [k, k+N_p-1] \end{cases} \\ c_i\left(y_p(j), x_p(j), \alpha, \theta, u(j-1)\right) \leq 0,\ \forall\, k \geq 0\ \forall\, j \in [k+1, k+N_p], \\ \quad \forall\, i \in \mathrm{I}^{n_c+n_{co}} = \{1, ..., n_c + n_{co}\} \end{cases} \tag{4.5}$$

Hypothèse 4.3 *Les fonctions de contraintes c_i sont de classe C^1.*

Quelques problèmes pratiques sont présents dans cette formulation par modèle interne :

• Le premier est lié à l'argument $\tilde{u}$ dans la tâche d'optimisation, qui est l'ensemble des paramètres d'entrée à élaborer en ligne par l'approche d'optimisation. Afin d'être résolu numériquement, l'argument $\tilde{u}$ est paramétrisé dans le temps en dimension finie, qui peut être fait de plusieurs manières :

1. soit la séquence $\tilde{u}$ est une fonction de temps paramétrisée de n_{pu} paramètres :

$$\begin{cases} \tilde{u} = [p_u(1) \dots p_u(n_{pu})]^T \\ u(j) = f_u(p_u(1), \dots, p_u(n_{pu}), k * T_e, j * T_e)\ k \geq 0,\ \forall\, j \in [k, k+N_p-1] \end{cases} \tag{4.6}$$

2. soit $\tilde{u}$ est un cas particulier du cas précédent, selon une série N_c échelons :

$$\begin{cases} \tilde{u} = [u_k \quad u_{k+1} \dots u_{k+N_c-1}]^T \\ u(k) = u_k,\ \forall k \geq 0 \\ \dots \\ u(k+N_c-1) = u_{k+N_c-1},\ \forall k \geq 0 \\ u(j) = u_{k+N_c-1}\ \forall k \geq 0,\ \forall\, j \in [k+N_c, k+N_p-1] \end{cases} \tag{4.7}$$

En résumé, la commande prédictive procède de façon spécifique, cherchant à établir un projet de commandes futures $u(t)$ pris à des instants discrets k. Le problème

est ouvert lorsque la forme de la suite d'arguments discrets notés $u(k)$ est laissée entièrement libre. Il est possible de restreindre la recherche à un sous domaine fonctionnel des contraintes, ou de la modifier en paramétrisant l'argument $u(t)$ comme une fonction du temps avec un nombre fini de coefficients qui sont alors les arguments à optimiser.

• Le second problème dans la formulation (4.5) est que, à l'instant présent k, cette formulation est basée sur des signaux dans le futur j : la sensibilité $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}$ de la sortie mesurée y_p du procédé par rapport aux paramètres θ, la mesure du procédé y_p, les paramètres θ et l'état du procédé x_p. Malheureusement, ces valeurs ne sont pas disponibles dans le futur à l'instant présent k, alors que la mesure du procédé y_p est la seule valeur disponible à chaque instant k. Afin d'obtenir un problème d'optimisation résolvable, l'idée est d'approcher ces signaux en utilisant les mesures ou les états estimés à l'instant k, et l'intégration du modèle du procédé dans une structure de commande par modèle interne (où l'entrée u est appliquée en parallèle sur le procédé et sur des modèles).

L'approche proposée résout en ligne deux problèmes, le contrôle optimal et l'identification, couplés comme problème global de commande où les paramètres inconnus sont estimés à chaque période de temps par un observateur. Leurs valeurs sont également introduites dans le contrôleur afin d'améliorer le choix de la séquence de commande.
Dans ce cadre, nous développons une stratégie de commande combinant un modèle de procédé, un modèle de sensibilité paramétrique, un observateur non linéaire et une stratégie de commande prédictive par modèle. Il faut donc décrire ces éléments puis les adapter à la structure de la commande prédictive par modèle interne.

4.4.2 Modèle du procédé

Le modèle fait partie intégrante de la commande prédictive et doit par conséquent susciter une attention particulière lors de sa conception. Il est nécessaire de prendre en compte certains paramètres indépendants de la modélisation qui interviennent directement dans la stratégie de commande : le temps de simulation du modèle pendant une période d'échantillonnage fait ainsi parti de ces particularités à considérer lors de la validation du modèle que l'on appelle communément "modèle de commande" ou "modèle de prédiction". L'approche est basée ici sur un modèle du procédé, qui permet :

1. de concevoir un observateur qui estime l'état du système et les paramètres à estimer,
2. de générer le signal de sensibilité à maximiser, via un contrôleur prédictif qui permet de régler la commande u appliquée au procédé et à l'observateur qui, d'une part, maximise la sensibilité de la mesure y_p par rapport au paramètre

estimé θ, et d'autre part garantie l'utilisation du procédé dans une zone spécifiée explicitement à travers les contraintes,

3. de générer divers modèles de sensibilité.

Pour l'élaboration d'une loi de commande par modèle interne, un modèle décrivant le comportement du processus sous une certaine sollicitation connue de l'entrée est nécessaire. Soit le modèle de procédé à contrôler décrit par un système d'équations différentielles continues :

$$(M)\begin{cases} \dot{x}_m(t) = f(x_m(t), \alpha, \theta, u(t)), & t \in \mathbb{R}^* \\ y_m(t) = h(x_m(t), \alpha, \theta, u(t)), & t \in \mathbb{R}^* \\ x_m(0) = x_m^0 \end{cases} \tag{4.8}$$

où $x_m \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y_m \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du modèle, α et θ des vecteurs des paramètres du modèle. La commande prédictive se base sur la connaissance a priori du procédé par l'intermédiaire d'un modèle plus ou moins précis. Le modèle doit être correct au niveau des tendances vis-à-vis du procédé et traduire quantitativement le comportement du procédé. Ainsi, le modèle, qui représente l'élément essentiel de la structure de commande, peut assurer la prédiction de l'évolution des sorties.

4.4.3 Observateur non linéaire

L'observateur (ou bien l'estimateur) occupe une place clef dans la stratégie de l'approche proposée. En effet, en fonction des informations contenues dans les mesures entrée/sortie et le modèle du procédé (M), on résout le problème d'identification des paramètres θ a priori inconnus du modèle.

Rappelons que notre intérêt s'est inévitablement penché sur des observateurs fournissant une estimation des paramètres inconnus du modèle. C'est une autre utilisation des observateurs qui est liée au problème d'identification. Pour cela, les paramètres à estimer sont considérés comme de nouvelles variables d'états. Leurs évolutions sont décrites à partir des connaissances disponibles sur eux. On obtient alors un système augmenté pour lequel on cherche à réaliser un observateur d'état. L'utilisation de cette approche initiée par Kalman [Kalman 1958] est de plus en plus utilisée notamment dans le domaine de la chimie pour l'identification des cinétiques de réactions.

Plusieurs facteurs doivent être pris en compte lors de l'application des observateurs non linéaires : la forme du modèle, l'observabilité des états et la sensibilité des mesures vis-à-vis des changements d'état. Par conséquent, la conception et la synthèse d'un tel observateur est étroitement liée à la structure du modèle (M) et aux

projets de commande (élaboré par le régulateur) appliqué au système. Cet aspect de formulation du problème d'estimation, nous amène à énoncer l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.4 *L'état augmenté de l'observateur $\tilde{x}$, constitué de l'état estimé du procédé $\hat{x}_p$ augmenté de celui des paramètres à estimer $\hat{\theta}$: $\tilde{x} = [\hat{x}_p\ \hat{\theta}]$, est observable.*

En utilisant l'hypothèse 4.4 et la synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires établie (chapitre 2), un observateur est basé sur le modèle (M) pour estimer en ligne les variables d'états $\hat{x}_p$ et les paramètres inconnus $\hat{\theta}$. Ces paramètres sont donc estimés à chaque période de temps par cet observateur, et leurs valeurs est également introduite dans le contrôleur prédictif afin d'améliorer le choix de la séquence de commande.

4.4.4 Modèle de sensibilité

Le modèle de sensibilité détermine si la sortie du modèle y_m est sensible au paramètre du procédé θ pour l'identifier d'une façon optimale. L'état de ce modèle de sensibilité est la sensibilité de l'état du modèle (M) par rapport au paramètre θ, et est donné par l'intégration du modèle $(M_{x_{m\theta}})$:

$$(M_{x_{m\theta}}) \begin{cases} \dot{x}_{m\theta}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial \theta} = f_{x_m\theta}(x_{m\theta}(t), x_m(t), \alpha, \theta, u(t)) \\ y_{m\theta}(t) = \dfrac{\partial h}{\partial x_m} x_{m\theta}(t) = h_{x_m\theta}(x_{m\theta}(t), x_m(t), \alpha, \theta, u(t)) \\ x_{m\theta}(0) = x^0_{m\theta} \end{cases} \tag{4.9}$$

où $x_{m\theta} = \frac{\partial x_m}{\partial \theta} \in \mathbb{R}^n$ et $y_{m\theta} = \frac{\partial y_m}{\partial \theta} \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement la sensibilité de l'état et de la sortie du modèle par rapport au paramètre θ.

Remarque 4.1 *En toute généralité, la résolution de $(M_{x_{m\theta}})$ est donc couplée à celle de (M).*

Le modèle de sensibilité de la sortie du procédé y_p par rapport au vecteur de paramètres θ est issue de $(M_{x_{m\theta}})$, et est donné par l'integration du modèle $(M_{x_{p\theta}})$:

$$(M_{x_{p\theta}}) \begin{cases} \dot{x}_{p\theta}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x_p}\dfrac{\partial x_p}{\partial \theta} = f_{x_p\theta}(x_{p\theta}(t), x_p(t), \alpha, \theta, u(t)) \\ y_{p\theta}(t) = \dfrac{\partial h}{\partial x_p} x_{p\theta}(t) = h_{x_p\theta}(x_{p\theta}(t), x_p(t), \alpha, \theta, u(t)) \\ x_{p\theta}(0) = x^0_{p\theta} \end{cases} \tag{4.10}$$

où $x_{p\theta} = \frac{\partial x_p}{\partial \theta} \in \mathbb{R}^n$ et $y_{p\theta} = \frac{\partial y_p}{\partial \theta} \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement la sensibilité de l'état et de la sortie du procédé par rapport au paramètre θ.

Remarque 4.2 *En toute généralité, la résolution de $(M_{x_{p\theta}})$ dépend donc de l'état du procédé (mesuré ou estimé).*

4.4.5 Approche de la commande par modèle pour l'identification

Dans ce cadre, nous développons une stratégie de commande combinant un modèle du procédé, un modèle de sensibilité paramétrique, un observateur non linéaire et une stratégie de commande prédictive par modèle. Dans le cas de la commande prédictive, la sortie du modèle (y_m) est utilisée pour prédire le comportement futur du procédé (y_p) sur l'horizon de prédiction, en tenant compte de l'écart (e) actuel entre le procédé et le modèle. Cette erreur étant classiquement supposée constante sur l'horizon de prédiction, cette relation est valable aux instants futurs j. Grâce à l'hypothèse 3.7 (chapitre 3), les signaux, utilisés dans la formulation initiale de commande prédictive par modèle du problème d'optimisation sous contraintes pour l'identification, peuvent être approchés à chaque instant présent k dans les instants futures j :

$$\begin{cases} y_p(j) = y_m(j) + (y_p(k) - y_m(k)), & \forall k \geq 0,\ \forall\ j \in [k+1, k+N_p] \\ x_p(j) = x_m(j) + (\hat{x}_p(k) - x_m(k)), & \forall k \geq 0,\ \forall\ j \in [k+1, k+N_p] \\ \frac{\partial y_p}{\partial \theta}(j) = \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(j) + (\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)), & \forall k \geq 0,\ \forall\ j \in [k+1, k+N_p] \\ \theta = \hat{\theta}(k), & \forall k \geq 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

où :

– $y_p(k)$ est le vecteur des mesures disponibles du procédé à l'instant k.

– $\hat{\theta}(k)$ est le vecteur des paramètres estimés à l'instant k, calculé à l'instant $k-1$ par l'observateur, avec la meilleure entrée $u(k-1)$ et les conditions initiales $[\hat{x}_p(k-1)\ \hat{\theta}(k-1)]^T$. A l'instant $k=0$, $\hat{\theta}(k)$ doit être initialisé. $\hat{\theta}(k)$ est introduit dans le terme de retour d'état.

– $\hat{x}_p(k)$ est l'état du procédé estimé à l'instant $k-1$ par l'observateur, avec la meilleure entrée $u(k-1)$, sous les conditions initiales $[\hat{x}_p(k-1)\ \hat{\theta}(k-1)]^T$. A l'instant $k=0$, $\hat{x}_p(k)$ doit être initialisé. $\hat{x}_p(k)$ est introduit dans le terme de retour d'état.

– $x_m(k)$ est l'état de modèle obtenu à l'instant $k-1$ par l'intégration des équations du système (M) de $k-1$ à k, avec la meilleure entrée $u(k-1)$, sous l'état initial $x_m(k-1)$ et le paramètre estimé $\hat{\theta}(k-1)$. A l'instant $k=0$, $x_m(k)$ doit être initialisé.

– $y_m(k)$ est la sortie du modèle donné par $x_m(k)$.

– $x_m(j)$ est l'état du modèle à l'instant futur j, trouvé à l'instant k, par l'intégration des équations du système (M) sur l'horizon de prédiction N_p avec la séquence de commande $\tilde{u}$, sous l'état initial $x_m(k)$ et avec le paramètre estimé $\hat{\theta}(k)$.

– $y_m(j)$ est la sortie du modèle donné par $x_m(j)$.

– $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k)$ est la sensibilité modélisée de la sortie du procédé y_p par rapport au vecteur de paramètres θ, donnée à l'instant $k-1$, par l'intégration du modèle de sensibilité $(M_{x_p\theta})$ de $k-1$ à k, avec la meilleure entrée $u(k-1)$, avec l'estimation de paramètre $\hat{\theta}(k-1)$, l'état estimé du procédé $\hat{x}_p$ et l'état initial $\frac{\partial x_p}{\partial \theta}(k-1)$. A l'instant $k=0$, $\frac{\partial x_p}{\partial \theta}(k)$ doit être initialisé.

– $\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)$ est la sensibilité modélisée de la sortie du modèle y_m par rapport au vecteur de paramètres θ donnée à l'instant $k-1$, par l'intégration du modèle de sensibilité $(M_{x_m\theta})$ de $k-1$ à k, avec la meilleure entrée $u(k-1)$, avec l'estimation de paramètre $\hat{\theta}(k-1)$, couplé avec l'intégration du modèle (M) et l'état initial $\frac{\partial x_m}{\partial \theta}(k-1)$. A l'instant $k=0$, $\frac{\partial x_m}{\partial \theta}(k)$ doit être initialisé.

– $\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(j)$ est la sensibilité modélisée de la sortie du modèle y_m par rapport au vecteur de paramètres θ à l'instant j, donné à l'instant k, par l'intégration du modèle de sensibilité $(M_{x_m\theta})$ sur l'horizon de prédiction N_p, avec la séquence de commande $\tilde{u}$, avec l'estimation de paramètre $\hat{\theta}(k-1)$, couplé avec l'intégration du modèle (M) et l'état initial $\frac{\partial x_m}{\partial \theta}(k)$.

4.4.6 Formulation finale

4.4.6.1 Structure de commande prédictive par modèle interne non linéaire

Basée sur ces approximations, la formulation initiale de commande prédictive du problème d'optimisation contrainte pour l'identification $(POCI_I)$ est reformulée comme suit $(POCI_{NL})$:

$$
(POCI_{NL}) \begin{cases}
\mathcal{P}_{N_p} : \max\limits_{\tilde{u}} \{J(\tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_{N_p}\} \\
J(\tilde{u}) = \sum\limits_{j=k+1}^{k+N_p} \Big(\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(j) + (\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)) \Big)^2 \\
\text{soumis aux contraintes sur la commande :} \\
\begin{cases} u_{min} \leq u(j) \leq u_{max} \ , \ \forall\, j \in [k, k+N_p-1] \\ \Delta u_{min} \leq u(j) - u(j-1) \leq \Delta u_{max} \ , \ \forall\, j \in [k, k+N_p-1] \end{cases} \\
\text{soumis aux contraintes sur la sortie :} \\
\begin{cases} c_i \Big(y_m(j) + (y_p(k) - y_m(k)), x_m(j) + (\hat{x}_p(k) - x_m(k)), \alpha, \hat{\theta}(k), u(j) \Big) \\ \leq 0, \ \forall\, k \geq 0 \ \forall\, j \in [k+1, k+N_p], \ \forall\, i \in \mathrm{I}^{n_c+n_{co}} \end{cases} \\
\text{basé sur la résolution des modèles } (M) \text{ et } (M_{x_m\theta}).
\end{cases}
\tag{4.12}
$$

Cette formulation de commande prédictive par modèles du problème d'optimisation contraint pour l'identification peut être présentée par le schéma de la figure 4.1. Cela schématise les instructions suivantes :

– **Détermination du profil du procédé prédictif sur un horizon fini** : à chaque instant k, à l'aide du modèle du procédé commandé, les sorties futures sont déterminées sur l'horizon de prédiction N_p. Ces prédictions à l'instant k sur l'intervalle de temps discret $[k+1, k+N_p]$ dépendent des entrées et des mesures connues jusqu'à l'instant k et de la séquence de commandes futures $\tilde{u}$.

– **Estimation paramètrique** : les valeurs des paramètres incertains du modèle $\hat{\theta}(k)$ sont estimés par un observateur non linéaire conjointement aux variables d'états $\hat{x}_p(k)$ non mesurées. A partir des mesures $y_p(k)$, de la commande $u(k)$ et du modèle du procédé, les variables du modèle sont déterminées avec la correction des erreurs entre la sortie du modèle $y_m(k)$ et celle du procédé mesurée $y_p(k)$.

– **Calcul de la sensibilité paramètrique :** à l'aide du modèle du procédé commandé et du modèle de sensibilité paramétrique, la sensibilité $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(j)$ est calculé sur l'horizon de prédiction N_p.

– **Détermination du projet de commande en minimisant un critère sur un horizon fini** : les signaux de commande futurs $u(j)$, $j = 0, .., N_p$ sont déterminés en résolvant (4.12) pour que la sensibilité paramètrique $\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)$ soit aussi maximale que possible. La minimisation de la fonction coût est généralement obtenue par itération dans le cas de systèmes non linéaires.

L'idée de cette stratégie est de résoudre en ligne un problème d'optimisation en temps discret sur un horizon prédictif fini. En résumé, cela revient à maximiser la sensibilité paramétrique à chaque période d'échantillonnage sur l'horizon de prédiction N_p dont la solution est le projet de la commande. Seule la première composante $u(k)$ de la séquence de commande $\tilde{u}$ est appliquée pendant le prochain temps d'échantillonnage. La résolution du problème d'optimisation recommence à $k+1$ en prenant en compte les nouvelles mesures du procédé.

La résolution du problème d'optimisation dépend étroitement de la complexité du modèle et des objectifs à atteindre. A chaque période d'échantillonnage, la méthode d'optimisation retenue est associée à la méthode de résolution choisie du modèle du procédé sur l'horizon de prédiction. Dans le cas d'un modèle linéaire et d'une fonction coût quadratique, la solution du problème d'optimisation est simplement une fonction explicite des entrées futures et des sorties passées. Dans cette approche, la résolution du problème d'optimisation s'avère plus compliquée du fait du nombre de variables, de la complexité des équations dynamiques à résoudre mais également de

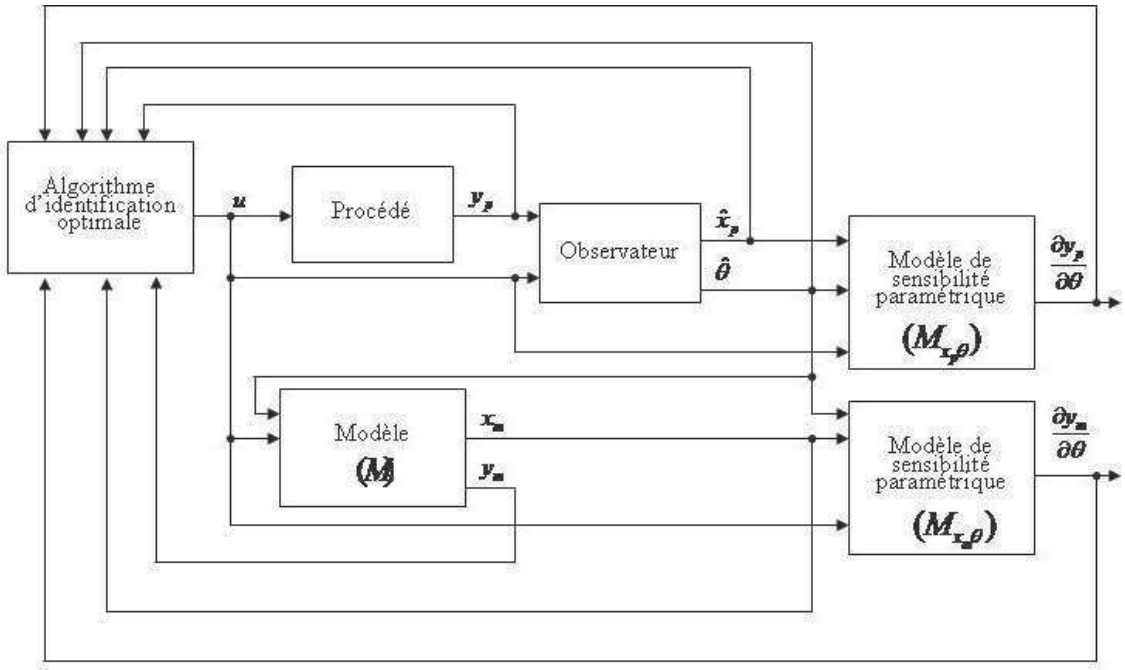


FIGURE 4.1 – Structure de commande prédictive, pour l'identification, avec modèle non linéaire

la présence des contraintes sur les commandes et/ou sur les sorties. Pour ces raisons, et malgré la puissance croissance des calculateurs, la résolution en temps réel à l'aide d'algorithmes coûteux en temps de calcul, s'avère parfois compliquée et devient de plus en plus complexe. Pour ces raisons, on propose ici une version linéarisée de cette approche, qui permet de baisser le temps de calcul de la commande.

4.4.6.2 Structure de commande prédictive par modèle interne linéaire temps variant

Un des problèmes numériques liés à la commande prédictive basé sur un modèle est de réduire le temps de calcul nécessaire pour résoudre le problème d'optimisation sous contrainte au cours d'une petite période d'échantillonnage (petite devant la dynamique du procédé). Pour pallier à ce problème, les auteurs dans [Dufour 2000] et [Dufour 2003] ont donné une approche de commande prédictive, où le problème de contrôle optimal est résolu en ligne, basé sur des calculs faits hors ligne.

Nous employons cette approche sur la méthode d'identification basée sur le modèle non linéaire (4.8) et de modèle non linéaire de sensibilité paramétrique (4.10). La résolution de ces systèmes non linéaires est traitée en deux étapes (Figure 4.2) :

- la détermination hors ligne d'un **comportement nominal** en tenant compte

des objectifs et des contraintes ; c'est la résolution hors ligne de :

- (M_0) du système non linéaire (M) pour une trajectoire nominale définie par (u_0,x_0,θ_0,y_0).
- $(M_{x_m\theta 0})$ du système non linéaire $(M_{x_m\theta})$ pour une trajectoire nominale définie par $(u_0,x_0,\theta_0,x_{\theta 0},y_0)$.

• la mise en place des **modèles linéaires qui décrivent les variations** en ligne du modèle de procédé et du modèle de sensibilité paramètrique rapport au comportement nominal. Les systèmes linéarisés sont déterminés autour du fonctionnement nominal $(u_0,x_0,\theta_0,x_{\theta 0},y_0)$. Le modèle de commande utilise conjointement les systèmes non linéaires déterminés hors ligne (M_0) et $(M_{x_m\theta 0})$ et les systèmes linéaires temps variant (M_{LTV}) et $(M_{x_m\theta LTV})$ intégrés en ligne.

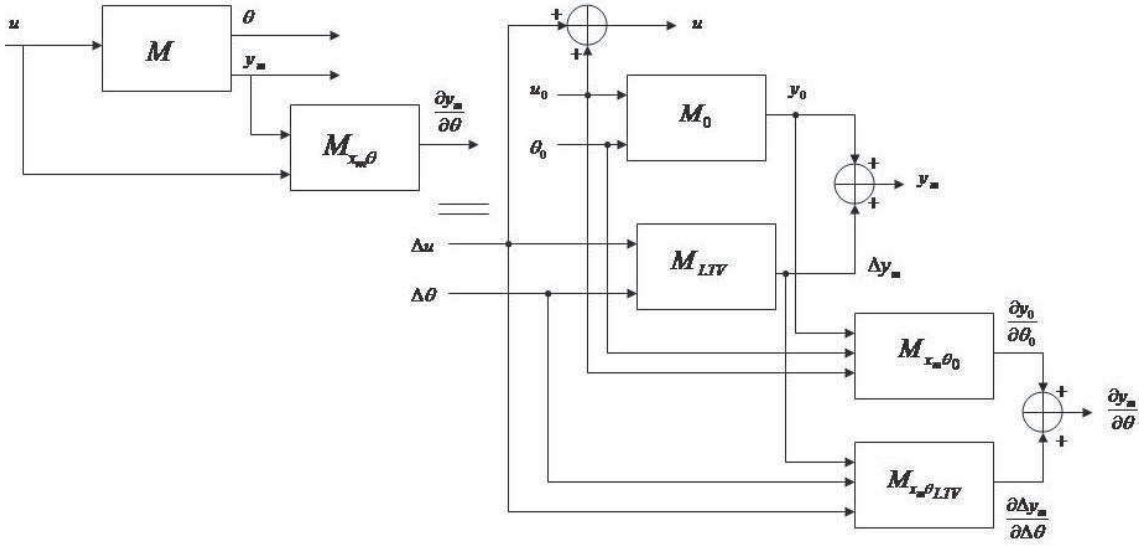


FIGURE 4.2 – Schéma de linéarisation d'un modèle de sensibilité non linéaire autour d'un modèle nominal

Hypothèse 4.5 *Pour les systèmes non linéaire (M) et $(M_{x_m\theta})$, on suppose qu'il existe $(u_0,x_0,\theta_0,x_{\theta 0},y_0)$ vérifiant les modèles (M_0) et $(M_{x_m\theta 0})$ considérés, et cela pour toute condition initiale.*

Définition 4.1 *Les variations dans les modèles linéaires temps variant (M_{LTV}) et $(M_{x_m\theta LTV})$ sont définies autour du comportement nominal défini par $(u_0,x_0,\theta_0,x_{\theta 0},y_0)$:*

$$\begin{cases} u_0(t) = u(t) - \Delta u(t) \\ x_0(t) = x_m(t) - \Delta x_m(t) \\ \theta_0 = \theta - \Delta\theta \\ x_{\theta 0}(t) = x_{m\theta}(t) - \Delta x_{m\theta}(t) \\ y_0(t) = y_m(t) - \Delta y_m(t) \end{cases} \tag{4.13}$$

avec $\Delta x_m \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u \in \mathbb{R}^m$, $\Delta y_m \in \mathbb{R}^p$, $\Delta\theta \in \mathbb{R}^q$, $\Delta x_{m\theta} \in \mathbb{R}^n$.

Au voisinage du comportement nominal (u_0,x_0,θ_0,y_0) *et* (u_0,x_0,θ_0,$x_{\theta 0}$,y_0), *une approximation de l'évolution des systèmes est effectuée en utilisant un développement en série de Taylor à l'ordre 1 des fonctions non linéaires* f, h, $f_{x_m\theta}$ *et* $h_{x_m\theta}$.

Les modèles linéaires temps variant (M_{LTV}) *et* ($M_{x_m\theta LTV}$) *sont donnés par :*

$$(M_{LTV}) \begin{cases} \Delta\dot{x}_m(t) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{(x_0,\theta_0,u_0)} \Delta x_m(t) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right|_{(x_0,\theta_0,u_0)} \Delta\theta + \left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,\theta_0,u_0)} \Delta u(t) \\ \Delta y_m(t) = \left.\dfrac{\partial h}{\partial x_m}\right|_{(x_0,\theta_0,u_0)} \Delta x_m(t) + \left.\dfrac{\partial h}{\partial \theta}\right|_{(x_0,\theta_0,u_0)} \Delta\theta + \left.\dfrac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x_0,\theta_0,u_0)} \Delta u(t) \end{cases} \tag{4.14}$$

$$(M_{x_m\theta LTV}) \begin{cases} \Delta\dot{x}_{m\theta}(t) = \left.\dfrac{\partial f_{x_m\theta}}{\partial x_{m\theta}}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_{m\theta}(t) + \left.\dfrac{\partial f_{x_m\theta}}{\partial x_m}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_m(t) + \\ \qquad \left.\dfrac{\partial f_{x_m\theta}}{\partial \theta}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta\theta + \left.\dfrac{\partial f_{x_m\theta}}{\partial u}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta u(t) \\ \Delta y_{m\theta}(t) = \left.\dfrac{\partial h_{x_m\theta}}{\partial x_{m\theta}}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_{m\theta}(t) + \left.\dfrac{\partial h_{x_m\theta}}{\partial x_m}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_m(t) + \\ \qquad \left.\dfrac{\partial h_{x_m\theta}}{\partial \theta}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta\theta + \left.\dfrac{\partial h_{x_m\theta}}{\partial u}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta u(t) \end{cases} \tag{4.15}$$

avec $\Delta x_m(t)$, $\Delta x_{m\theta}(t)$, $\Delta\theta$ *et* $\Delta u(t)$ *issus de (4.13).*

Toutes les grandeurs dépendent a priori du temps puisque (u_0,x_0,θ_0,y_0) et (u_0,x_0,θ_0,$x_{\theta 0}$,y_0) décrivent une trajectoire des systèmes (M) et ($M_{x_m\theta}$). Les modèles linéaires temps variant (M_{LTV}) et ($M_{x_m\theta LTV}$) peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$(M_{LTV}) \begin{cases} \Delta\dot{x}_m(t) = \underline{A}(t)\Delta x_m(t) + \underline{B_u}(t)\Delta u(t) + \underline{B_\theta}(t)\Delta\theta \\ \Delta y_m t) = \underline{C}(t)\Delta x_m(t) + \underline{D_u}(t)\Delta u(t) + \underline{D_\theta}(t)\Delta\theta \end{cases} \tag{4.16}$$

avec les matrices temps variant $\underline{A}(t)$ $(n \times n)$, $\underline{B_u}(t)$ $(n \times m)$, $\underline{B_\theta}(t)$ $(n \times q)$, $\underline{C}(t)$ $(p \times n)$, $\underline{D_u}(t)$ $(p \times m)$ et $\underline{D_\theta}(t)$ $(p \times q)$.

$$(M_{x_m\theta LTV}) \begin{cases} \Delta\dot{x}_{m\theta}(t) = \underline{A_S}(t)\Delta x_{m\theta}(t) + \underline{B_{S_u}}(t)\Delta u(t) + \underline{B_{S_\theta}}(t)\Delta\theta \\ \Delta y_{m\theta}(t) = \underline{C_S}(t)\Delta x_{m\theta}(t) + \underline{D_{S_u}}(t)\Delta u(t) + \underline{D_{S_\theta}}(t)\Delta\theta \end{cases} \tag{4.17}$$

avec les matrices temps variant $\underline{A_S}(t)$ $(n \times n)$, $\underline{B_{S_u}}(t)$ $(n \times m)$, $\underline{B_{S_\theta}}(t)$ $(n \times q)$, $\underline{C_S}(t)$ $(p \times n)$, $\underline{D_{S_u}}(t)$ $(p \times m)$ et $\underline{D_{S_\theta}}(t)$ $(p \times q)$.

La résolution du modèle non linéaire (M_0) et du modèle non linéaire de sensibilité $(M_{x_m\theta 0})$ se fait hors ligne. Le problème initial de résolution en ligne des systèmes non linéaires (M) et $(M_{x_m\theta})$ est donc remplacé par un problème de résolution en ligne des systèmes linéarisés (M_{LTV}) et $(M_{x_m\theta LTV})$. Le temps de calcul en ligne des modèles s'en trouve donc diminué.

La formulation générale du critère défini dans (4.12) devient alors :

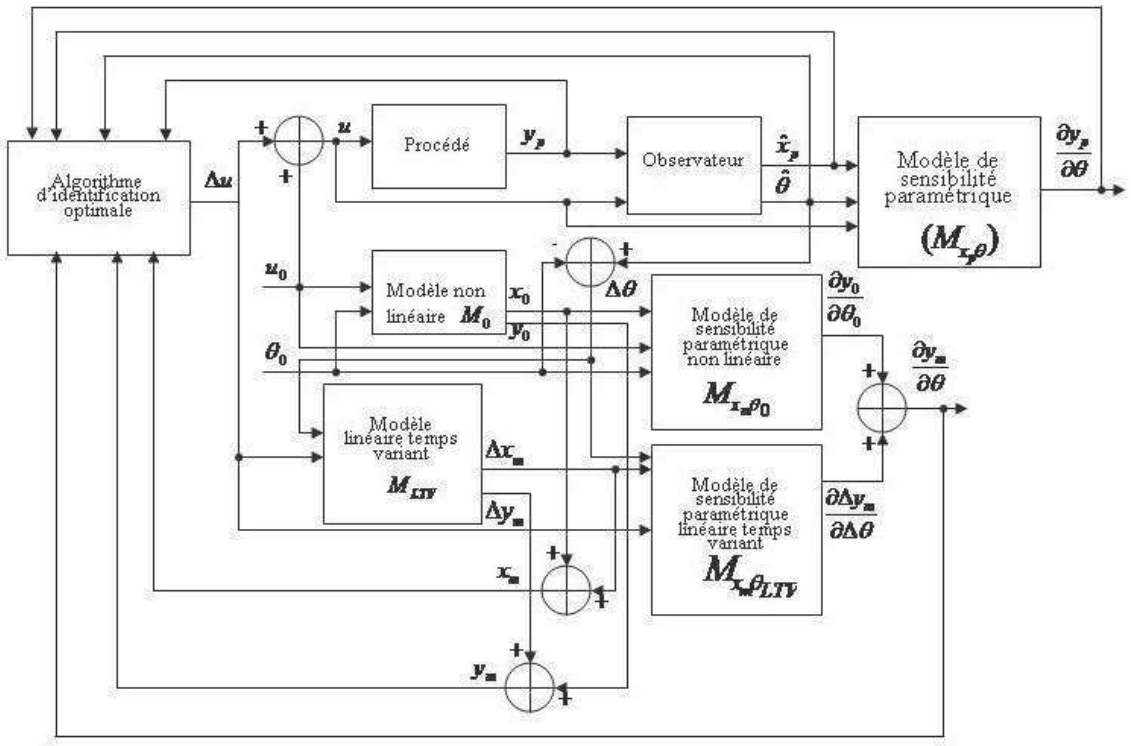


FIGURE 4.3 – Structure de commande prédictive, pour l'identification, avec modèle linéaire temps variant

$$J(\Delta\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(j) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta\theta}(j) + \left(\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \left(\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(k) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta\theta}(k) \right) \right) \right)^2 \tag{4.18}$$

où $\Delta\tilde{u}$ est issu soit de la définition (4.6), soit de la définition (4.7) et de la linéarisation (4.13). Finalement, la structure de commande définie sur la figure 4.1, après

linéarisation du modèle interne, est explicitée sur la figure 4.3, et le problème d'optimisation $(POCI_{NL})$ devient $(POCI_{LTV})$:

$$(POCI_{LTV}) \begin{cases} \mathcal{P}_{N_p} : \max_{\Delta\tilde{u}} \{J(\Delta\tilde{u}) \mid \Delta\tilde{u} \in \mathcal{U}_{N_p}\} \\ J(\Delta\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left((\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(j) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta\theta}(j)) + \left(\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - (\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(k) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta\theta}(k)) \right) \right)^2 \\ \text{soumis aux contraintes sur la commande :} \\ \begin{cases} u_{min} \leq u_0(j) + \Delta u(j) \leq u_{max}, \forall j \in [k, k+N_p-1] \\ \Delta u_{min} \leq u_0(j) + \Delta u(j) - (u_0(j-1) + \Delta u(j-1)) \leq \Delta u_{max}, \\ \forall j \in [k, k+N_p-1] \end{cases} \\ \text{soumis aux contraintes sur la sortie :} \\ \begin{cases} c_i \left(y_0(j) + \Delta y_m(j) + (y_p(k) - (y_0(k) + \Delta y_m(k))), x_0(k) + \Delta x_m(k) + \right. \\ \quad \left. (\hat{x}_p(k) - (x_0(k) + \Delta x_m(k))), \alpha, \theta_0 + \Delta\theta, \Delta u(j) \leq 0, \right. \\ \quad \left. \forall\, k \geq 0 \; \forall\, j \in [k+1, k+N_p], \; \forall\, i \in \mathrm{I}^{n_c+n_{co}} = \{1, ..., n_c + n_{co}\} \right. \end{cases} \end{cases} \tag{4.19}$$

4.5 Conclusion

Nous avons proposé un algorithme pour l'identification optimale des paramètres inconnus du modèle. Cette nouvelle approche a permis de définir le problème d'optimisation sous contraintes pour l'identification à résoudre en ligne.

Etant donné la problématique liée au problème d'identification paramétrique, nous avons utilisé la technique des observateurs qui fournissent une estimation en ligne des paramètres du modèle via un système augmenté.

Entres autres, nous nous sommes intéressés à deux structures de commande prédictive à modèle interne l'une non linéaire et l'autre linéaire temps variant. Si le temps devient un paramètre critique pour l'implémentation de l'approche, cette seconde structure vise à réduire le temps de calcul lié à l'optimisation ainsi que le temps alloué à l'optimisation. Les problèmes d'optimisation sous contraintes pour les deux structures de commande utilisées on été posées. A ce niveau, ces deux problèmes d'optimisation peuvent être résolus par n'importe quel algorithme disponible pour ce type du problème.

Une fois le problème d'optimisation sous contraintes défini, un appel aux outils numériques pour la résolution du problème d'optimisation en ligne est nécessaire, ce qui est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Mise en œuvre

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit le problème d'identification optimale comme étant un problème d'optimisation sous contraintes.

Avant de présenter les résultats de simulation relatifs au contrôle optimal de procédés pour l'identification, il est nécessaire de présenter des outils possibles concernant la prise en compte des contraintes (entrées et sorties) dans la résolution du problème d'identification en ligne, ainsi qu'une méthode de résolution adaptée. Les structures du contrôleur prédictif pour l'identification seront présentées, pour les deux approches proposées précédemment.

5.2 Méthodes d'optimisation utilisées

L'inconvénient majeur des problèmes d'optimisation avec contraintes est que la solution du problème contraint n'est pas forcément un optimum de la fonction objectif. Il s'agit seulement du minimum de la fonction objectif sur l'ensemble des éléments du domaine de recherche consistants avec les contraintes du problème. Or, cet ensemble de points consistants n'est pas nécessairement un ensemble continu, c'est-à-dire connexe ou convexe.

Il existe des méthodes de résolution numérique performantes et robustes pour le problème d'optimisation sous contraintes. Mais, dans l'approche d'identification optimale proposée, la résolution du problème se répète plusieurs fois dans un instant donné et change à chaque instant. L'objectif n'est pas d'obtenir un optimum absolu, ni seulement une bonne solution qui garantie l'existence d'une solution sensiblement meilleure, mais d'atteindre une résolution au bout d'un temps de calcul imparti.

Dans le cadre de notre approche de la commande prédictive pour l'identification, nous avons considéré deux types de contraintes :

1. les contraintes sur les entrées : des contraintes "dures" qui doivent être respectées en tout cas, à chaque instant, à chaque itération dans la recherche de la solution,
2. les contraintes sur les sorties : des contraintes "douces" qui peuvent ne pas être vérifiées à chaque instant (soit car le temps de calcul est trop court pour trouver une solution, soit car il n'y a pas de solution).

Si les contraintes ne sont pas considérées dans la conception de la commande, il en résulte une dégradation des performances en boucle fermée et même un risque d'avoir un comportement indésirable, voire instable.

On considère l'écriture du problème d'optimisation (5.1) contraint sur l'argument Λ.

$$\begin{cases} \min\limits_{\Lambda} J(\Lambda) \\ \Lambda \in \mathbb{R}^n \\ \text{avec des contraintes sur } \Lambda \end{cases} \tag{5.1}$$

La prise en compte des contraintes relatives aux variables de commande et aux grandeurs du système (sortie et état) sera ici réalisée par des méthodes ramenant le problème contraint initialement en un problème approché non contraint. Pour les contraintes sur les commandes, la méthode de transformation de variable employée est la transformation hyperbolique [Fletcher 1987]. En ce qui concerne la prise en compte des contraintes sur les grandeurs de sortie, la méthode qui sera préférée est celle des pénalités externes [Fletcher 1987]. Ces deux méthodes déjà discutées dans [Dufour 2000] seront rappelées dans les paragraphes suivants.

5.2.1 Contraintes sur les entrées : méthode hyperbolique

La méthode de transformation de variable est la méthode la plus simple permettant de ramener le problème d'optimisation en un autre non contraint [Minoux 1983].

Etant donné $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ l'argument d'optimisation, les variables sont contraintes sur leur amplitude :

$$\Lambda_{min} \leq \Lambda \leq \Lambda_{max} \tag{5.2}$$

soit g une famille de fonctions faisant intervenir des nouvelles variables non contraintes w :

$$\begin{cases} \Lambda = g(w) \\ w \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{5.3}$$

Hypothèse 5.1 *La fonction g est inversible et univoque.*

Le problème d'optimisation contraint 5.1 est alors transformé en un problème non contraint sur w :

$$\begin{cases} \min\limits_{w} J(w) \\ w \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{5.4}$$

ainsi le problème d'optimisation se ramène au choix d'une fonction de transformation par exemple, (5.5) a été choisie par [Dufour 2000] et est utilisée dans notre travail :

$$\Lambda = g_{moy} + g_{amp} \tanh\left[\frac{w - g_{moy}}{g_{amp}}\right] \tag{5.5}$$

avec

$$\begin{cases} g_{moy} = \dfrac{\Lambda_{max} + \Lambda_{min}}{2} \\ g_{amp} = \dfrac{\Lambda_{max} - \Lambda_{min}}{2} \end{cases} \tag{5.6}$$

Dans le cadre de notre approche de commande prédictive, nous utilisons cette transformation pour les contraintes sur la commande ($u \in \mathbb{R}$) sur :

– l'amplitude :

$$u_{min} \leq u(j) \leq u_{max},\ j \in \{k, \ldots, k + N_p - 1\} \tag{5.7}$$

– la vitesse de variation :

$$\Delta u_{min} \leq \frac{u(j) - u(j-1)}{T_e} \leq \Delta u_{max}\ j \in \{k, \ldots, k + N_p - 1\} \tag{5.8}$$

avec T_e : la période d'échantillonnage.

En utilisant la transformation hyperbolique (5.5) pour les contraintes (5.7) et (5.8), on obtient :

– dans le cas de contraintes portant uniquement sur l'amplitude :

$$\begin{cases} u(j) = g(w(j)) = g_{moy} + g_{amp} \tanh\left[\dfrac{w(j) - g_{moy}}{g_{amp}}\right] \\ w(j) \in \mathbb{R} \\ g_{moy} = \dfrac{u_{max} + u_{min}}{2} \\ g_{amp} = \dfrac{u_{max} - u_{min}}{2} \end{cases} \tag{5.9}$$

– dans le cas de contraintes portant uniquement sur la vitesse :

$$\begin{cases} u(j) = g(w(j)) = g_{moy} + g_{amp} \tanh\left[\dfrac{w(j) - g_{moy}}{g_{amp}}\right] \\ w(j) \in \mathbb{R} \\ g_{moy} = u(j-1) + \dfrac{T_e(\Delta u_{max} + \Delta u_{min})}{2} \\ g_{amp} = \dfrac{T_e(\Delta u_{max} - \Delta u_{min})}{2} \end{cases} \tag{5.10}$$

– dans le cas de contraintes portant conjointement sur l'amplitude et la vitesse (Figure 5.1) :

$$\begin{cases} u(k) = g(w(j)) = g_{moy} + g_{amp} \tanh\left[\dfrac{w(j) - g_{moy}}{g_{amp}}\right] \\ w(j) \in \mathbb{R} \\ g_{moy} = \dfrac{g_{max} + g_{min}}{2} \\ g_{amp} = \dfrac{g_{max} - g_{min}}{2} \\ g_{min} = \max(u_{min}, u(j-1) + T_e \Delta u_{min}) \\ g_{max} = \min(u_{max}, u(j-1) + T_e \Delta u_{max}) \end{cases} \tag{5.11}$$

Les valeurs de g_{moy} et g_{amp} sont mises à jour à chaque instant k selon l'action de commande $u(k-1)$ trouvée à l'instant précédent $k-1$.

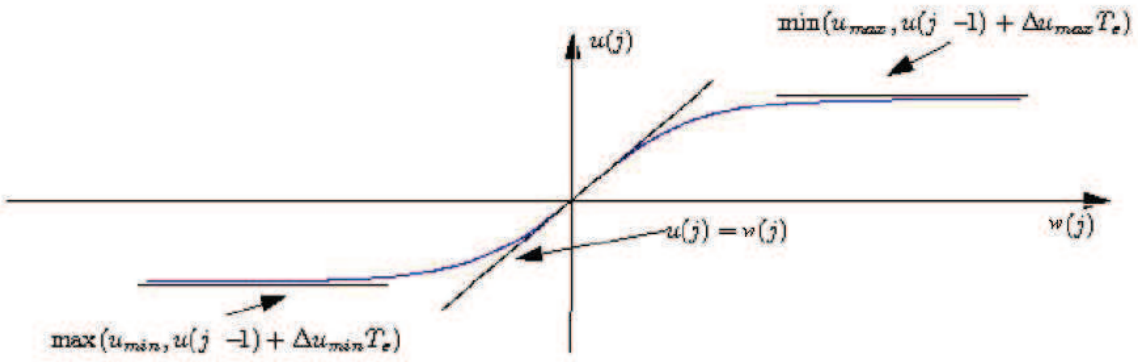


FIGURE 5.1 – Schéma de la loi de transformation hyperbolique

L'inconvénient est que cette transformation présente une forte diminution de sensibilité de la fonction coût par rapport à l'argument d'optimisation quand u atteint ses limites (c.à.d. $\frac{dJ}{dw}$ tend vers zéro). Par contre, l'un des avantages est que la fonction non linéaire g (5.11) se comporte de manière linéaire quand $u(j)$ tends vers $u(j-1)$, c.à.d. quand il y a des petits changements dans l'action de commande.

Concernant notre problème d'identification en ligne, cette transformation mène au changement des paramètres d'argument p_u de $\tilde{u}$ aux paramètres d'argument p_w de $\tilde{w}$.

5.2.2 Contraintes sur les sorties : méthode des pénalités externes

Les pénalités permettent de transformer un problème d'optimisation sous contraintes en un problème d'optimisation non contraint. Le principe des pénalités est tout naturellement de pénaliser les points non consistants du domaine. On optimise alors la nouvelle fonction objective, définie par la somme de la fonction objectif initiale avec des pénalités appliquées pour chaque contrainte du problème.

Notons que l'optimisation d'une telle fonction ne garantit pas de résoudre le problème contraint initial. En effet, on peut imaginer que la fonction objectif initiale présente un bassin d'attraction non consistant telles que les pénalités appliquées à ce bassin ne soient pas suffisantes pour éviter au processus d'optimisation non contraint de déterminer ce bassin comme la solution du problème courant. L'équivalence entre le problème initial et le problème pénalisé s'obtient à l'infini du temps : on applique aux pénalités un coefficient positif ω évolué qui tend vers l'infini. Ceci implique un nombre non déterminé d'itérations jusqu'à atteindre l'équivalence.

Le choix de ces méthodes revient à leur simplicité de mise en oeuvre et à leur efficacité. Il s'agit de transformer le problème primal en un problème pénalisé en ajoutant au critère de performance J, une fonction de pénalité à valeurs positives ou nulles H liée aux contraintes. Le problème initial contraint est remplacé par un problème pénalisé non contraint, alors la nouvelle fonction coût J_{tot} à minimiser s'écrit :

$$\begin{cases} \min\limits_{\Lambda} \; J_{tot}(\Lambda) = J(\Lambda) + \omega H(c_i(\Lambda)) \\ \Lambda \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{5.12}$$

où ω est le coefficient de pénalité positif.

On note les contraintes portant sur les sorties :

$$c_i(\Lambda) \leq 0, \quad i \in \{1, ..., n_{con}\} \tag{5.13}$$

Hypothèse 5.2 *Les fonctions de contraintes c_i sont de classe C^1.*

L'idée est de trouver la solution à ce problème d'optimisation pénalisé et de faire évoluer le poids ω pour que la quantité $\omega H(c_i(\Lambda))$ soit suffisamment prise en compte

au cours de la résolution numérique du problème.

Le processus de la résolution du problème d'optimisation se déroule comme suit [Minoux 1983] :

1. fixer une pénalité ω,
2. définir le critère augmenté J_{tot},
3. résoudre le problème pénalisé avec un algorithme d'optimisation sans contrainte,
4. si la solution obtenue verifie les contraintes, la solution est retenue. La pénalité ω augmente quand la fonction $H(c_i(\Lambda))$ tend vers zéro, il diminue quand $H(c_i(\Lambda))$ tend vers l'infini.

On distingue deux types de méthode des pénalités :

• la méthodes des pénalités internes : l'idée est de faire approcher la solution par l'intérieur du domaine des contraintes. Cela implique qu'à l'initialisation, les contraintes doivent être vérifiées. Cette méthode assure la vérification des contraintes, mais présente des inconvénients d'ordre numérique, notamment aux frontières du domaine des contraintes. L'inconvénient majeur est qu'une solution doit être donnée initialement.
• la méthode des pénalités externes : l'idée est de faire approcher la solution par l'extérieur du domaine admissible. Ce qui facilite l'initialisation de Λ dans sa recherche. Cela traduit qu'à l'initialisation ces contraintes ne sont pas forcément vérifiées : l'initialisation est libre. Par ailleurs, s'il n'y a pas de solution, le cas le moins pire est trouvé.

En regard des types de contraintes considérés sur la sortie, nous avons retenu la méthode des pénalités externes. Soient c_i les contraintes traitées par la méthode des pénalités externes. La fonction de pénalité externe h_i, associée à chaque contrainte c_i, doit être continue, à dérivée continue, et respecter :

$$\begin{cases} h(c_i(\Lambda)) = 0 \text{ si } c_i(\Lambda) \leq 0 \\ h(c_i(\Lambda)) > 0 \text{ si } c_i(\Lambda) > 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

La fonction (5.15) remplit les conditions énoncées précédemment, comme on peut le voir figure 5.2 :

$$h_i(c_i(\Lambda)) = [\max(0, c_i(\Lambda))]^2 \tag{5.15}$$

Ainsi, quand la contrainte est loin du domaine admissible, la fonction de pénalité associée h_i augmente et pénalise la minimisation du critère. La fonction de pénalité externe H associée à l'ensemble des contraintes s'écrit :

$$H(c_i(\Lambda)) = \sum_{i=1}^{n_{con}} h_i(c_i(\Lambda)) = \sum_{i=1}^{n_{con}} [\max(0, c_i(\Lambda))]^2 \tag{5.16}$$

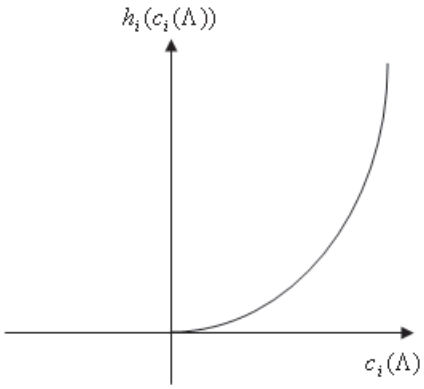


FIGURE 5.2 – Exemple de fonction de pénalité externe

Ce terme de pénalité H doit être minimisé durant la procédure d'optimisation. La solution idéale est que l'argument d'optimisation Λ soit obtenu tel que toutes les contraintes sont satisfaites ($H = 0$).

5.3 Formulation finale de problème d'optimisation pénalisé sans contraintes pour l'identification

L'idée de l'approche proposée est de transformer le problème d'optimisation contraint basé par le modèle initial pour l'identification ($POCI_{NL}$) et ($POCI_{LTV}$) en un problème d'optimisation pénalisé sans contrainte pour l'identification. Deux formulations peuvent donc être écrites, une basée sur un modèle non linéaire et l'autre sur un modèle linéaire autour d'un fonctionnement nominal.

5.3.1 Approche basée sur le modèle non linéaire

Les contraintes sur la sortie considérées ici dans le problème d'optimisation ($POCI_{NL}$) s'écrivent en utilisant J_{ext} la fonction de pénalité externe (5.16) :

$$J_{ext}(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\sum_{i=1}^{n_c+n_{nco}} \Big(max^2(0, c_i(j)) \Big) \right) \tag{5.17}$$

avec :

$$c_i(j) = \Big(y_m(j) + (y_p(k) - y_m(k)), x_m(j) + (\hat{x}_p(k) - x_m(k)), \alpha, \hat{\theta}(k), u(j) \Big) \tag{5.18}$$

Pour le problème d'identification, l'idée est d'utiliser le terme J_{ext} pour pénaliser la minimisation de la fonction coût définie positive basée sur la sensibilité de sortie de procédé y_p par rapport aux paramètres du modèle θ, tel que toutes les

contraintes de sortie tendent à être satisfaites pendant la tâche d'optimisation. Le problème d'optimisation pénalisé est formulé :

$$\min_{\tilde{u}} \; J_{tot}(\tilde{u}) = J_{min}(\tilde{u}) + \omega J_{ext}(\tilde{u}) \tag{5.19}$$

avec $J_{min}(\tilde{u})$ déduit de $J(\tilde{u})$ défini dans (4.12) :

$$J_{min}(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\frac{1}{\left(\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(j) + (\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)) \right)^2 + \kappa^2} \right) \tag{5.20}$$

où κ est une constante non nulle réglée pour éviter d'éventuelles divisions par zéro.

Pour les contraintes sur les entrées, l'argument d'optimisation $\tilde{u}$, qui manipule les contraintes sur les entrées u, est transformé en argument $\tilde{w}$, tel que l'entrée w transformée par (5.9), (5.10) ou (5.11) selon les contraintes d'entrée présentes, est sans contrainte.

A partir du $(POCI_{NL})$, il en découle le nouveau problème d'optimisation pénalisé sans contrainte pour l'identification en ligne $(POPSCI_{NL})$ utilisant un modèle de commande et un modèle de sensibilité non linéaire s'écrit :

$$(POPSCI_{NL}) \begin{cases} \min\limits_{\tilde{w}} \; J_{tot}(\tilde{w}) = J_{min}(\tilde{w}) + \omega J_{ext}(\tilde{w}) \\ \text{avec :} \\ \tilde{w} = [p_w(1), ..., p_w(n_{p_u})] \\ J_{min}(\tilde{w}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\frac{1}{\left(\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(j) + (\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)) \right)^2 + \kappa^2} \right) \\ J_{ext}(\tilde{w}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\sum_{i=1}^{n_c+n_{co}} \left(max^2(0, c_i(j)) \right) \right) \\ \text{avec :} \\ c_i(j) = \left(y_m(j) + (y_p(k) - y_m(k)), x_m(j) + (\hat{x}_p(k) - x_m(k)), \alpha, \hat{\theta}(k), w(j) \right) \\ \text{basé sur la résolution des modèles } (M) \text{ et } (M_{x_m\theta}) \text{ définit dans le chapitre 4} \end{cases} \tag{5.21}$$

5.3.2 Approche basée sur le modèle linéaire temps variant

Pour le problème d'optimisation basé sur le modèle linéaire temps variant $(POCI_{LTV})$, on considère la transformation hyperbolique (5.9), (5.10) ou (5.11) qui permet de définir w_0 autour du ($u_0(t)$,$x_0(t)$,θ_0,$x_{\theta 0}(t)$,$y_0(t)$) donné page 59 :

– dans le cas de contraintes portant uniquement sur l'amplitude :

$$\begin{cases} u_0(j) = g(w_0(j)) = g_{moy} + g_{amp} \tanh\left[\dfrac{w_0(j) - g_{moy}}{g_{amp}}\right] \\ w_0(j) \in \mathbb{R} \\ g_{moy} = \dfrac{u_{max} + u_{min}}{2} \\ g_{amp} = \dfrac{u_{max} - u_{min}}{2} \end{cases} \tag{5.22}$$

– dans le cas de contraintes portant uniquement sur la vitesse :

$$\begin{cases} u_0(j) = g(w_0(j)) = g_{moy} + g_{amp} \tanh\left[\dfrac{w_0(j) - g_{moy}}{g_{amp}}\right] \\ w_0(j) \in \mathbb{R} \\ g_{moy} = u_0(j-1) + \dfrac{T_e(\Delta u_{max} + \Delta u_{min})}{2} \\ g_{amp} = \dfrac{T_e(\Delta u_{max} - \Delta u_{min})}{2} \end{cases} \tag{5.23}$$

– dans le cas de contraintes portant conjointement sur l'amplitude et la vitesse :

$$\begin{cases} u_0(k) = g(w_0(j)) = g_{moy} + g_{amp} \tanh\left[\dfrac{w_0(j) - g_{moy}}{g_{amp}}\right] \\ w_0(j) \in \mathbb{R} \\ g_{moy} = \dfrac{g_{max} + g_{min}}{2} \\ g_{amp} = \dfrac{g_{max} - g_{min}}{2} \\ g_{min} = \max(u_{min}, u_0(j-1) + T_e \Delta u_{min}) \\ g_{max} = \min(u_{max}, u_0(j-1) + T_e \Delta u_{max}) \end{cases} \tag{5.24}$$

avec les variations qui sont calculées en ligne :

$$\begin{cases} \Delta w(j) = w(j) - w_0(j) \\ \Delta u(j) = g(w_0(j) + \Delta w(j)) - g(w_0(j)) \\ g(.) = g_{moy} + g_{amp} \tanh\left[\dfrac{. - g_{moy}}{g_{amp}}\right] \end{cases} \tag{5.25}$$

Cette méthode de la transformation de variable permet donc de ramener un problème d'optimisation contraint sur sa commande (u ou Δu), à un problème non contraint. Le vecteur de commande contraint ($\tilde{u}$ ou $\Delta\tilde{u}$) est transformé en un vecteur de commande non contraint ($\tilde{w}$ ou $\Delta\tilde{w}$) à l'aide d'une fonction $g(.)$. La fonction inverse $g^{-1}(.)$ permet de revenir à la commande réelle appliquée au procédé.

Les contraintes portant sur les grandeurs de sortie, par la pénalisation externe, s'écrivent :

$$J_{ext}(\Delta\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\sum_{i=1}^{n_c+n_{co}} \Big(max^2(0, c_i(j)) \Big) \right) \tag{5.26}$$

avec :

$$\begin{aligned} c_i(j) = \Big(& y_0(j) + \Delta y_m(j) + (y_p(k) - (y_0(k) + \Delta y_m(k))), x_0(j) + \\ & \Delta x_m(j) + (\hat{x}_p(k) - (x_0(k) + \Delta x_m(k))), \alpha, \theta_0 + \Delta\theta, \Delta u(j) \Big) \end{aligned} \tag{5.27}$$

Il est alors possible d'écrire une nouvelle fonction coût J_{tot} à minimiser :

$$\min_{\tilde{u}} \; J_{tot}(\Delta\tilde{u}) = J_{min}(\Delta\tilde{u}) + \omega J_{ext}(\Delta\tilde{u}) \tag{5.28}$$

avec $J_{min}(\Delta\tilde{u})$ déduit de $J(\Delta\tilde{u})$ donnée en (4.19) :

$$J_{min}(\Delta\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\frac{1}{\left(\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(j) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta\theta}(j) + (\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k) - (\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(k) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta\theta}(k))) \right)^2 + \kappa^2} \right) \tag{5.29}$$

où κ est une constante non nulle réglée pour éviter d'éventuelles divisions par zéro.

Finalement à partir du ($POCI_{LTV}$), le problème d'optimisation pénalisé sans contraint pour l'identification en ligne ($POPSCI_{LTV}$) utilisant un modèle de commande et un modèle de sensibilité linéaires temps variant autour d'un comportement

nominal s'écrit :

$$(POPSCI_{LTV})\begin{cases} \min\limits_{\Delta\tilde{w}} \; J_{tot}(\Delta\tilde{w}) = J_{min}(\Delta\tilde{w}) + \omega_i J_{ext}(\Delta\tilde{w}) \\ J_{min}(\Delta\tilde{w}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\frac{1}{\left(\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(j) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta \theta}(j) + (\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k) - (\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(k) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta \theta}(k))) \right)^2 + \kappa^2} \right) \\ J_{ext}(\Delta\tilde{w}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\sum_{i=1}^{n_c+n_{co}} \left(max^2(0, c_i(j)) \right) \right) \\ \text{avec :} \\ \quad c_i(j) = \Big(y_0(j) + \Delta y_m(j) + (y_p(k) - (y_0(k) + \Delta y_m(k))), x_0(j) + \\ \qquad \Delta x_m(j) + (\hat{x}_p(k) - (x_0(k) + \Delta x_m(k))), \alpha, \theta_0 + \Delta\theta, \Delta u(j) \Big) \\ \text{basé sur la résolution en ligne des modèles } (M_{LTV}) \text{ et } (M_{x_m\theta LTV}) \\ \text{définit dans le chapitre 4.} \end{cases} \tag{5.30}$$

avec le vecteur de commande des systèmes (M_{LTV}) et $(M_{x_m\theta LTV})$:

$$\Delta\tilde{u} = g(\Delta\tilde{w}) \tag{5.31}$$

avec g les fonctions de transformation pour chaque entrée $\Delta\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$.

$\Delta\tilde{w}$ est issu de la définition de $\tilde{u}$ ((4.6) et (4.7)) et de la linéarisation.

5.4 Méthode de résolution du gradient et structure du contrôle

Nous avons présenté deux approches de commande prédictive par modèle pour l'identification optimale en ligne, une utilise un modèle non linéaire et l'autre un modèle linéarisé autour d'un fonctionnement nominal. Les problèmes pénalisés sans contrainte étant posés, un appel aux outils numériques pour la résolution est nécessaire. Le choix de la méthode de résolution et la prise en compte des contraintes sont étroitement liés.

5.4.1 Résolution du problème pénalisé basé sur le modèle non linéaire

Le choix d'un algorithme d'optimisation n'est pas chose aisée. Il existe de nombreux méthodes avec ou sans contraintes. Chaque calcul est fonction de la résolution du modèle. La méthode retenue doit être robuste et être capable d'atteindre un optimum en nombre réduit de simulations. De plus, le nombre total de paramètres à déterminer ne doit pas avoir une influence important sur son coût de calcul. Ainsi on

élimine les algorithmes probabilistes qui semblent en effet beaucoup trop gourmands en nombre d'évaluations de la fonction. En conséquence, il semble plus raisonnable d'utiliser des algorithmes de descente moins coûteux en temps de résolution dans la recherche de la solution optimale.

Largement connu et utilisé pour ses propriétés de robustesse et de convergence, l'algorithme de Levenberg-Marquardt ([Dufour 2000],[Fletcher 1987]) est utilisé dans notre cas d'étude ou le problème d'optimisation est non contraint et pénalisé. L'argument d'optimisation $p_w(.)$ est déterminé de manière itérative (index l) à chaque instant k en utilisant les mesures de procédé, les estimations et les divers modèles introduit dans $(POPSCI_{NL})$:

$$\begin{cases} p_w^{k,l+1}(i) = p_w^{k,l}(i) + \delta p_w^{k,l}(i) \\ (\nabla^2 J_{tot}^l(i) + \lambda I)\delta p_w^{k,l}(i) = -\nabla J_{tot}^l(i) \end{cases} \tag{5.32}$$

- $\nabla J_{tot}^l(i) = \dfrac{\partial J_{tot}}{\partial p_w(i)}$: gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres d'optimisation p_w à l'itération l,
- $\nabla^2 J_{tot}^l(i) = \dfrac{\partial^2 J_{tot}}{\partial p_w^2(i)}$: hessien de la fonction coût par rapport aux paramètres d'optimisation p_w à l'itération l,

Dans le but d'éviter des problèmes numériques dûs à des écarts trop importants entre l'ordre des variables, une normalisation des variables pour assurer le bon conditionnement de la matrice hessienne est nécessaire. Pour le cas des contraintes prises en compte par la méthode des pénalités externes, il est élémentaire d'effectuer une normalisation de ces contraintes, par exemple entre 0 et 1 pour que toutes les contraintes dans le cadre des pénalités externes aient le même poids.

Des modifications ont été introduit à l'algorithme de Levenberg Marquardt [Dufour 2000] pour que celui puisse résoudre le problème d'optimisation posé en prenant en compte de :

- la limitation du temps de calcul,
- la méthode de pénalité externe, en formulant un test d'arrêt [Fletcher 1987] :

$$\max(c_i(u(j), y_m(j))) \leq \varepsilon_{con} \tag{5.33}$$

Le choix des différents paramètres d'initialisation (λ_0, ω_0), des pas d'évolution ($\alpha_\lambda \geq 1$, $\alpha_\omega \geq 1$, $\alpha_{T_e} \leq 1$), les différents tests d'arrêts (ε_{con}) influencent sur la précision des solutions et la convergence de l'algorithme. Le choix de chacun de ces paramètres diffère pour chaque problème posé.

5.4.1.1 Etude des sensibilités

L'étude des sensibilités intervient à deux niveaux :

- dans l'étude de faisabilité du problème,
- dans l'algorithme d'optimisation et dans le calcul de la matrice hessienne.

a) Etude de faisabilité

L'étude de faisabilité est une approche pratique de la commandabilité du système. Le critère doit être sensible aux variations des commandes à déterminer :

$$\frac{\partial J_{tot}}{\partial p_w(i)} \not\equiv 0 \tag{5.34}$$

b) Calcul des sensibilités

Les équations de sensibilité du modèle (M) intervenant dans l'algorithme d'optimisation permettent de calculer la sensibilité de chaque sortie considérée par rapport à chaque argument de commande p_w. Trois sensibilités peuvent être obtenues à partir du modèle de procédé (M) :

• Le modèle de sensibilité paramétrique $(M_{x_m\theta})$.

• Le deuxième modèle de sensibilité détermine si la sortie du modèle y_m est sensible à l'entrée u. L'état de ce modèle est la sensibilité de l'état du modèle par rapport à la commande u, et est la solution du modèle (M_{x_mu}) :

$$(M_{x_mu}) \begin{cases} \dot{x}_{mu}(t) = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial x_m}{\partial u}) = f_{x_mu}(x_{mu}(t), x_m(t), \alpha, \theta, u(t)) \\ y_{mu}(t) = \dfrac{\partial y_m}{\partial u}(t) = h_{x_mu}(x_{mu}(t), x_m(t), \alpha, \theta, u(t)) \\ x_{mu}(0) = x^0_{mu} \end{cases} \tag{5.35}$$

où f_{x_mu} et h_{x_mu} sont des fonctions non linéaires obtenues des fonctions f et h.

Remarque 5.1 *La résolution de ce modèle (M_{x_mu}) est donc couplée avec celle du modèle (M) car f_{x_mu} et h_{x_mu} sont en fonction de x_m.*

• Le troisième modèle de sensibilité détermine si la sensibilité paramétrique $\frac{\partial y_m}{\partial \theta}$ est sensible par rapport à l'entrée u. L'état de ce modèle $x_{mx_m\theta u} = \frac{\partial^2 x_m}{\partial \theta \partial u}$ est la sensibilité de l'état du modèle de sensibilité $x_{mx_m\theta} = \frac{\partial x_m}{\partial \theta}$ du modèle $(M_{x_m\theta})$ par rapport à la commande u (qui est équivalente à la sensibilité de l'état de modèle de sensibilité $x_{mx_mu} = \frac{\partial x_m}{\partial u}$ du modèle (M_{x_mu}) par rapport au

paramètre du modèle θ, et est la solution du modèle $(M_{x_m\theta u})$:

$$(M_{x_m\theta u})\begin{cases} \dot{x}_{mx_m\theta u}(t) = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\dfrac{\partial x_m}{\partial u})\Big) = f_{x_m\theta u}(x_{mx_m\theta u}(t), x_{mx_m\theta}(t), x_{mu}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_m(t), \alpha, \theta, u(t)) \\ y_{mx_m\theta u}(t) = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big(\dfrac{\partial y_m}{\partial u}\Big) = h_{x_m\theta u}(x_{mx_m\theta u}(t), x_{mx_m\theta}(t), x_{mu}(t), x_m(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha, \theta, u(t)) \\ \frac{\partial^2 x_m}{\partial\theta\partial u}(0) = \frac{\partial^2 x_m}{\partial\theta\partial u}^0 \end{cases} \tag{5.36}$$

avec $f_{x_mx_m\theta u}$ et $h_{x_mx_m\theta u}$ sont des fonctions non linéaires obtenues des fonctions f et h.

Remarque 5.2 *La résolution de ce modèle $(M_{x_m\theta u})$ est donc couplée avec la résolution des modèles (M), $(M_{x_m\theta})$ et (M_{x_mu}) car l'état $x_{mx_m\theta u}$ est en fonction de x_m, $x_{mx_m\theta}$ et x_{mx_mu}.*

c) Calcul du hessien

Pour le calcul du déplacement des paramètres dans l'algorithme d'optimisation, les gradients et hessiens peuvent être calculés numériquement. La fonction de coût J est quadratique et Q est une matrice de pondération symétrique définie semi-positive. Soit J_{tot} le critère à minimiser par rapport au vecteur $p_w(i)$ défini par :

$$\begin{cases} J_{tot}(p_w(i)) = J(p_w(i)) + \omega J_{ext}(p_w(i)) \\ J(p_w(i)) = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{k+N_p} \varepsilon(j)^T Q\ \varepsilon(j) \\ J_{ext}(p_w(i)) = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{k+N_p} \sum_{i=1}^{n_c+n_{co}} \overset{2}{\max}[0, c_i(j)] \end{cases} \tag{5.37}$$

Les gradients par rapport à $p_w(i)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla J(p_w(i)) = 2\displaystyle\sum_{j=k+1}^{k+N_p} \nabla\varepsilon(j)^T Q\ \varepsilon(j) \\ \nabla J_{ext}(p_w(i)) = 2\displaystyle\sum_{j=k+1}^{k+N_p} \sum_{i=1}^{i=n_c+n_{co}} \nabla c_i(j) \max(0, c_i(j)) \end{cases} \tag{5.38}$$

et les hessiens par rapport à $p_w(i)$:

$$\begin{cases} \nabla^2 J(p_w(i)) = 2 \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\nabla^2 \varepsilon(j)\right)^T Q\ \varepsilon(j) + \nabla\varepsilon(j)^T Q \nabla\varepsilon(j)^T \\ \nabla^2 J_{ext}(p_w(i)) = 2 \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} \sum_{i=1}^{i=n_c+n_{co}} \left(\nabla^2 c_i(j) c_i(j) + \nabla^T c_i(j) \nabla c_i(j)\right) \frac{\max(0, c_i(j))}{c_i(j)} \end{cases} \tag{5.39}$$

Hypothèse 5.3 *le hessien $\nabla^2 J_{tot}(i)$ est calculé par l'approximation de Gauss-Newton, et on ne garde que les termes du premier ordre quadratique par rapport au gradient.*

Les expressions approchées des hessiens sont :

$$\begin{cases} \nabla^2 J(p_w(i)) \approx 2 \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\nabla^2 \varepsilon(j)\right)^T Q\ \varepsilon(j) \\ \nabla^2 J_{ext}(p_w(i)) \approx 2 \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} \sum_{i=1}^{i=n_c+n_{co}} \left(\nabla^T c_i(j) \nabla c_i(j)\right) \frac{\max(0, c_i(j))}{c_i(j)} \end{cases} \tag{5.40}$$

Ces expressions sont utilisées dans l'algorithme d'optimisation et nécessitent la résolution des équations de sensibilité du modèle par rapport aux paramètres $p_w(i)$.

5.4.2 Résolution du problème pénalisé basé sur le modèle linéaire temps variant

Dans ce cas, les adaptations nécessaires dans la méthode de résolution concernent : les modifications à l'algorithme d'optimisation en ligne (Levenberg-Marquardt), le calcul des sensibilités et le calcul de la matrice hessien, ont étaient prises en compte. A chaque instant k, la loi de variation du paramètre $\Delta p_w(.)$ à chaque itération l est donnée par :

$$\begin{cases} \Delta p_w^{k,l+1}(i) = \Delta p_w^{k,l}(i) + \delta(\Delta p_w^{k,l}(i)) \\ (\nabla^2 J_{tot}^l(i) + \lambda I)\delta(\Delta p_w^{k,l}(i)) = -\nabla J_{tot}^l(i) \end{cases} \tag{5.41}$$

- $\nabla J_{tot}^l(i) = \dfrac{\partial J_{tot}}{\partial \Delta p_w(i)}$: gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres d'optimisation Δp_w à l'itération l,
- $\nabla^2 J_{tot}^l(i) = \dfrac{\partial^2 J_{tot}}{\partial \Delta p_w^2(i)}$: hessien de la fonction coût par rapport aux paramètres d'optimisation Δp_w à l'itération l,

Quelques modifications de cet algorithme sont nécessaires pour que celui-ci puisse résoudre le problème d'optimisation ($POPSCI_{LTV}$) posé en reformulant le test d'arret de la façon suivante :

$$\max(c_i(\Delta u(j), \Delta y_m(j))) \leq \varepsilon_{con} \tag{5.42}$$

5.4.2.1 Etude des sensibilités

a) Etude de faisabilité

Le critère doit être sensible aux variations des commandes $\Delta p_w(i)$ à déterminer :

$$\frac{\partial J_{tot}}{\partial \Delta p_w(i)} \not\equiv 0 \tag{5.43}$$

b) Calcul des sensibilités

L'idée consiste à calculer la sensibilité de chaque sortie des modèles linéaires temps variant par rapport à chaque argument de commande $\Delta p_w(i)$. Ces modèles sont liées par les modèles de linéarisation des modèles initials (M, $M_{x_m\theta}$, M_{x_mu} et $M_{x_m\theta u}$) autour de (u_0,x_0,θ_0,$x_{\theta 0}$,y_0) :

• Le modèle de sensibilité paramétrique linéaire temps variant ($M_{x_m\theta LTV}$) défini page 60.

• Le modèle de sensibilité de commande linéaire temps variant détermine si la sortie du modèle linéarisé Δy_m est sensible à l'entrée Δu. L'état de ce modèle est la sensibilité de l'état du modèle (M_{LTV}) par rapport à la commande Δu, et est la solution du modèle (M_{x_muLTV}) :

$$(M_{x_muLTV}) \begin{cases} \Delta\dot{x}_{mu}(t) = \left.\frac{\partial f_{x_mu}}{\partial x_{mu}}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_{mu}(t) + \left.\frac{\partial f_{x_mu}}{\partial x_m}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_m(t) + \\ \qquad \left.\frac{\partial f_{x_mu}}{\partial \theta}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta\theta + \left.\frac{\partial f_{x_mu}}{\partial u}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta u(t) \\ \qquad = f_{\Delta x_{mu}}(\Delta x_{mu}(t), \Delta x_m(t), \alpha, \Delta\theta, \Delta u(t)) \\ \Delta y_{mu}(t) = \left.\frac{\partial h_{x_mu}}{\partial x_{mu}}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_{mu}(t) + \left.\frac{\partial h_{x_mu}}{\partial x_m}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_m(t) + \\ \qquad \left.\frac{\partial h_{x_mu}}{\partial \theta}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta\theta + \left.\frac{\partial h_{x_mu}}{\partial u}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta u(t) \\ \qquad = h_{\Delta x_{mu}}(\Delta x_{mu}(t), \Delta x_m(t), \alpha, \Delta\theta, \Delta u(t)) \\ \Delta x_{mu}(0) = \Delta x^0_{mu} \end{cases} \tag{5.44}$$

avec $f_{\Delta x_m u}$ et $h_{\Delta x_m u}$ des fonctions linéaires obtenues par la linéarisation des fonctions $f_{x_m u}$ et $h_{x_m u}$.

Remarque 5.3 *La résolution de ce modèle est couplée avec celle du modèle* (M_{LTV}) *car* $f_{\Delta x_m u}$ *et* $h_{\Delta x_m u}$ *sont en fonction de* Δx_m.

• Le modèle de sensibilité paramètrique de commande linéaire temps variant détermine si la sensibilité paramétrique $\frac{\Delta y_m}{\Delta \theta}$ est sensible par rapport à l'entrée Δu. L'état de ce modèle $\Delta x_{m x_m \theta u} = \frac{\Delta^2 x_m}{\Delta \theta \Delta u}$ est la sensibilité de l'état du modèle de sensibilité $x_{m x_m \theta} = \frac{\partial x_m}{\partial \theta}$ du modèle $(M_{x_m \theta LTV})$ par rapport à la commande Δu (qui est équivalente à la sensibilité de l'état de modèle de sensibilité $\Delta x_{m x_m u} = \frac{\Delta x_m}{\Delta u}$ du modèle $(M_{x_m u LTV})$ par rapport à la variation $\Delta\theta$, et est la solution du modèle $(M_{x_m \theta u LTV})$:

$$
(M_{x_m\theta u LTV}) \begin{cases}
\begin{aligned}
\Delta \dot{x}_{m\theta u}(t) = {} & \left.\frac{\partial f_{x_m\theta u}}{\partial x_{mu}}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_{mu}(t) + \left.\frac{\partial f_{x_m\theta u}}{\partial x_m}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_m(t) + \\
& \left.\frac{\partial f_{x_m\theta u}}{\partial \theta}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta\theta + \left.\frac{\partial f_{x_m\theta u}}{\partial u}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta u(t) + \\
& \left.\frac{\partial f_{x_m\theta u}}{\partial x_m\theta}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_{m\theta}(t) \\
= {} & f_{\Delta x_m x_m \theta u}(\Delta x_{m x_m \theta u}(t), \Delta x_{m x_m \theta}(t), \Delta x_{mu}(t), \Delta x_m(t), \alpha, \Delta\theta, \Delta u(t))
\end{aligned} \\
\begin{aligned}
\Delta y_{m\theta u}(t) = {} & \left.\frac{\partial h_{x_m\theta u}}{\partial x_{mu}}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_{mu}(t) + \left.\frac{\partial h_{x_m\theta u}}{\partial x_m}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_m(t) + \\
& \left.\frac{\partial h_{x_m\theta u}}{\partial \theta}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta\theta + \left.\frac{\partial h_{x_m\theta u}}{\partial u}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta u(t) + \\
& \left.\frac{\partial h_{x_m\theta u}}{\partial x_m\theta}\right|_{(x_0,\theta_0,x_{\theta 0},u_0)} \Delta x_{m\theta}(t) \\
= {} & h_{\Delta x_m x_m \theta u}(\Delta x_{m x_m \theta u}(t), \Delta x_{m x_m \theta}(t), \Delta x_{mu}(t), \Delta x_m(t), \alpha, \Delta\theta, \Delta u(t))
\end{aligned} \\
\frac{\Delta^2 x_m}{\Delta\theta\Delta u}(0) = \frac{\Delta^2 x_m}{\Delta\theta\Delta u}^0
\end{cases}
\tag{5.45}
$$

avec $f_{\Delta x_m x_m \theta u}$ et $h_{\Delta x_m x_m \theta u}$ des fonctions linéaires obtenues par la linéarisation des fonctions f et h.

Remarque 5.4 *La résolution de ce modèle* $(M_{x_m\theta uLTV})$ *est couplée avec la résolution du modèle* (M_{LTV}), $(M_{x_m\theta LTV})$ *et* (M_{x_muLTV}).

c) Calcul du hessien

Soit le nouveau critère J_{tot} à minimiser par rapport au vecteur $\Delta p_w(i)$ défini par :

$$J_{tot}(\Delta p_w(i)) = J(\Delta p_w(i)) + \omega J_{ext}(\Delta p_w(i)) \tag{5.46}$$

Pour le calcul numérique des gradients et des hessiens du problème d'optimisation, il suffit de remplacer le vecteur $\Delta p_w(i)$ par $p_w(i)$ dans les expressions (5.38), (5.39) et (5.40).

5.4.3 Structure finale du contrôle pour l'identification

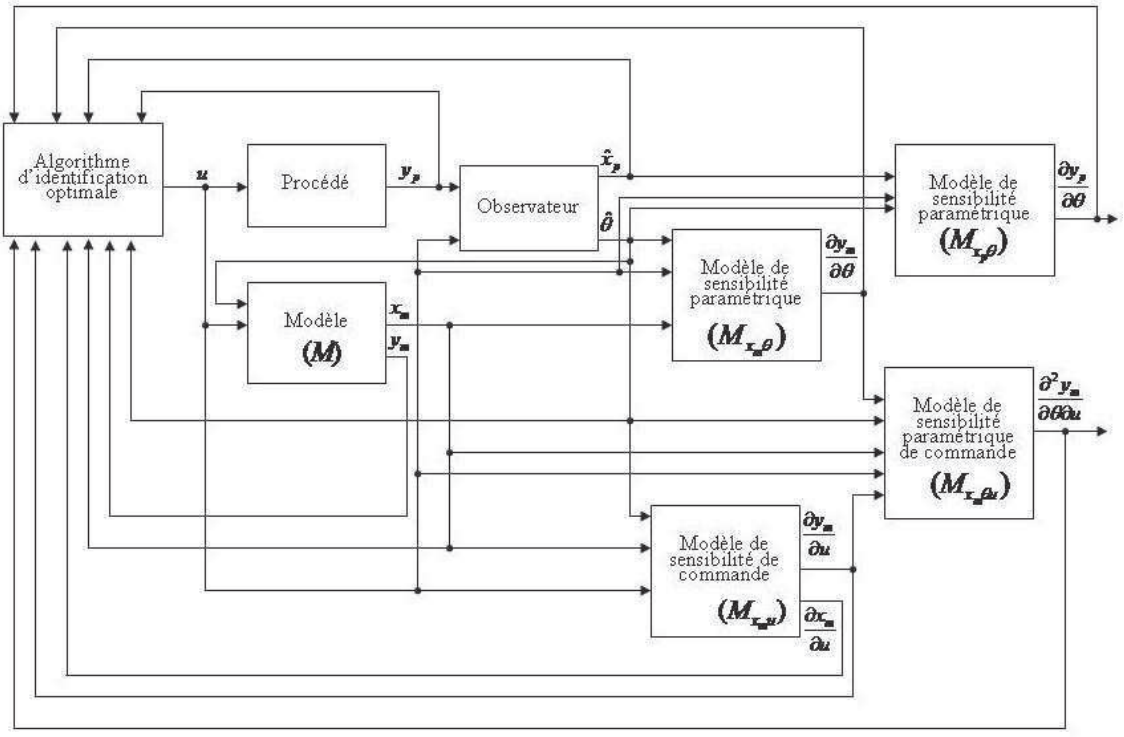


FIGURE 5.3 – Structure de commande prédictive par modèle non linéaire pour l'identification, dans une approche de type gradient

Finalement, deux structures de contrôle optimal pour l'identification en ligne seront adoptées. La première associée à la méthode d'optimisation basé sur le modèle non linéaire dans une méthode du gradient et la seconde est une méthode d'optimisation basé sur le modèle linéarisé dans une méthode du gradient.

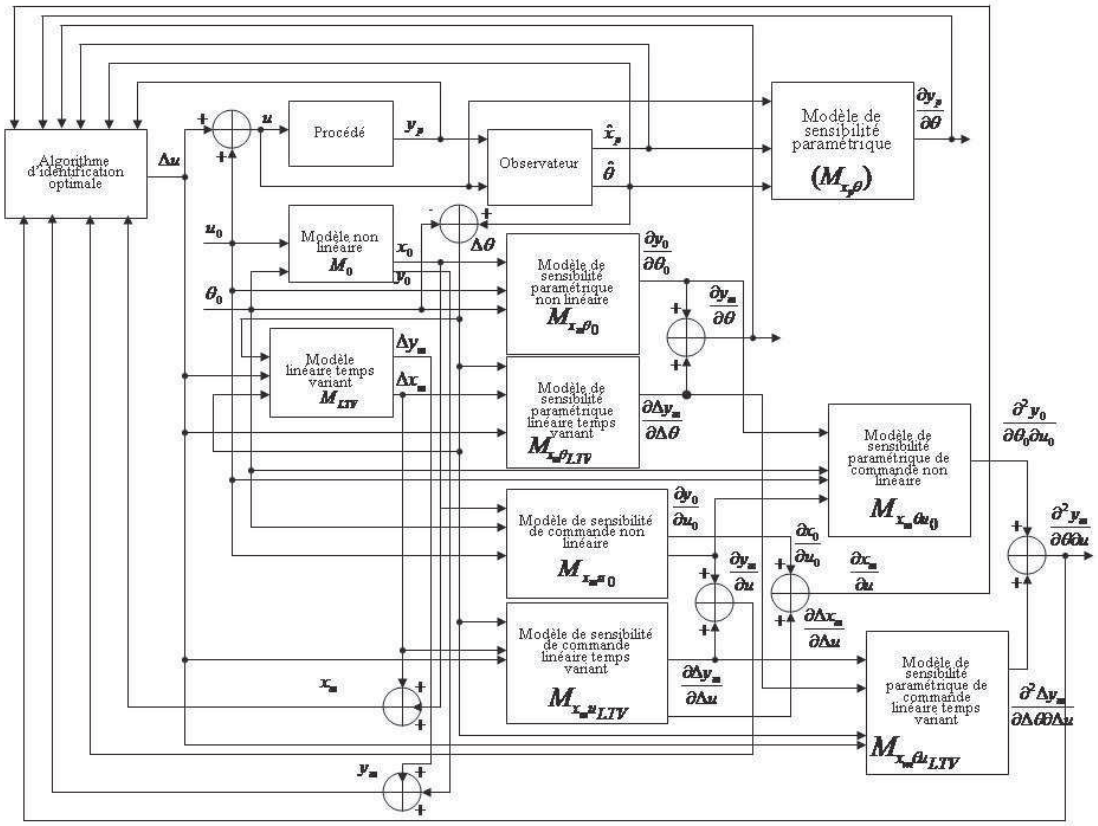


FIGURE 5.4 – Structure de commande prédictive par modèle linéaire temps variant pour l'identification, dans une approche de type gradient

5.4.3.1 Structure de contrôle basé sur le modèle non linéaire

Dans le cas non linéaire, la structure du contrôle optimal pour l'identification introduit la sortie de procédé, l'observateur pour l'estimation des états du procédé non mesurées et les paramètres du modèle, le modèle de commande non linéaire, les trois modèles de sensibilités déduits à partir du modèle de procédé (Figure 5.3) et le modèle de procédé de sensibilité ($M_{x_p\theta}$).

5.4.3.2 Structure de contrôle basé sur le modèle linéaire temps variant

Dans l'algorithme précédent, la limitation du temps du calcul était peut-être à prendre en compte dans la résolution en temps réel. Dans le cadre du problème d'identification optimale, la structure du contrôle implique la sortie de procédé, l'observateur pour l'estimation des états du procédé non mesurées et des paramètres du modèle, le modèle de commande non linéaire, les trois modèles de sensibilités non linéaires, ainsi que le modèle linéarisé, les trois modèles de sensibilités linéaires temps variant déduit à partir du modèle de procédé (Figure 5.4) et le modèle de procédé

de sensibilité ($M_{x_p\theta}$).

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre ont été présentées les grandes étapes de la mise en œuvre algorithmique de la stratégie du contrôle optimal pour l'identification paramétrique.

La formulation des contraintes portant sur les commandes et sur les grandeurs de sortie ont par la suite conduit à l'écriture finale du problème d'optimisation pénalisé sans contrainte pour l'identification en ligne. En ce qui concerne les contraintes sur la commande, l'outil adopté est la méthode de transformation hyperbolique, tandis que les contraintes portant sur la sortie sont traitées par la méthode des pénalités externes.

Notre intérêt s'est penché sur la problématique du temps de calcul. Pour cette raison, nous avons retenus deux approches de commandes pour l'identification optimale : une utilise le modèle non linéaire et l'autre un modèle linéarisé autour d'un fonctionnement nominal. Ceci a permis d'aboutir, pour les stratégies proposées, aux deux structures de contrôle optimal pour l'identification en ligne :

- la première utilise un modèle de prédiction non linéaire et est basée sur une méthode de résolution de type gradient.

- la seconde introduit un modèle linéaire temps variant et une méthode de résolution de type gradient.

Dans les chapitres suivants, sont présentées des applications de ces stratégies de contrôle optimal pour l'identification en ligne telles que nous l'avons considéré dans ce chapitre.

Chapitre 6

Réacteur chimique : réaction de saponification

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons l'approche de contrôle optimal pour l'identification en ligne d'un paramètre du modèle sur un premier procédé simple : un procédé chimique de saponification. Dans le chapitre suivant, on traitera un procédé modélisé de façon plus complexe.

Deux stratégies de commande prédictive par modèle pour l'identification, précédemment décrites dans cette thèse, seront traitées pour ce cas d'étude : l'une basée sur le modèle non linéaire, l'autre sur le modèle linéaire temps variant. Une étude de comparaison des deux approches de contrôle pour l'identification sera menée.

Afin de valider l'algorithme de contrôle optimal pour l'identification sur un procédé relativement simple, un modèle non linéaire de réaction de saponification constitué par une équation aux dérivées ordinaires a été considéré. Nous nous sommes intéressés à l'estimation de la vitesse de la réaction d'une façon optimale, tout en garantissant le contrôle sous contraintes du débit d'alimentation.

6.2 Description du procédé de saponification

La saponification est la réaction de base pour faire du savon. Il existe plusieurs procédés de saponification :

- le procédé discontinu (ou marseillais) qui est ancien mais toujours utilisé ;

- les procédés continus.

Pour accélérer la réaction, on peut jouer sur plusieurs facteurs :

– maintenir une température élevée ;

– agiter le mélange pour permettre aux réactifs de se rencontrer plus facilement et maintenir une émulsion.

Le procédé de saponification considéré est un réacteur parfaitement agité continu isotherme avec une double-enveloppe. Il est le siège d'une réaction exothermique, caractérisée par une enthalpie de réaction négative. On souhaite saponifier l'acétate d'éthyle (A) par la soude (B) en un produit (C). La réaction est de type :

$$A \quad + \quad B \quad \longrightarrow \quad C \tag{6.1}$$

La vitesse de réaction suit une loi d'Arrhénius du type

$$k_v = k_0 \;\; exp(-E_a/RT) \tag{6.2}$$

avec

- k_0 : le facteur de fréquence [l.mol^{-1}.min^{-1}]
- E_a : l'énergie d'activation [J.mol^{-1}]
- R : la constante universelle des gaz parfaits [J.mol^{-1}.K^{-1}]
- T : la température du milieu réactionnel [K]

6.3 Modèle

Le modèle mathématique du procédé de saponification est issu de deux bilans : un bilan de matière et un bilan d'énergie. La modélisation est réalisée sous les hypothèses suivantes :

– le réacteur est considéré parfaitement agité : les températures et les concentrations sont donc identiques en tout point du réacteur,

– les températures de la paroi du réacteur et de la paroi de la double enveloppe sont supposées uniformes,

– les débits d'alimentation en soude et en acétate d'éthyle sont identiques,

– il n'y a pas d'échange thermique entre l'extérieur et le milieu réactionnel.

Le comportement dynamique du réacteur est donné par un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires :

$$\begin{cases} \dot{C}_a = -k_v C_a C_b + D_{in}(C_{a_{in}} - C_a)/V \\ \dot{C}_b = -k_v C_a C_b + D_{in}(C_{b_{in}} - C_b)/V \\ \dot{T} = D_{in}/V(T_{in} - T) - \Delta H k_v \; C_a C_b/(\rho \; C_p) - UA(T - T_j)/(\rho V C_p) \\ \dot{T}_j = D_j/V_j(T_{j_{in}} - T_j) + UA(T - T_j)/(\rho_j V_j C_j) \\ k_v = k_0 \;\; exp(-E_a/RT) \\ C_a(0) = C_a^0 \\ C_b(0) = C_b^0 \\ T(0) = T^0 \\ T_j(0) = T_j^0 \end{cases} \tag{6.3}$$

- A : surface d'échange entre le réacteur et la double enveloppe [m^2]
- C_a : concentration de l'acétate d'éthyle dans le réacteur [$mol.l^{-1}$]
- C_a^0 : concentration initiale de l'acétate d'éthyle dans le réacteur [$mol.l^{-1}$]
- $C_{a_{in}}$: concentration d'alimentation en acétate d'éthyle [$mol.l^{-1}$]
- C_b : concentration de la soude dans le réacteur [$mol.l^{-1}$]
- C_b^0 : concentration initiale de la soude dans le réacteur [$mol.l^{-1}$]
- $C_{b_{in}}$: concentration d'alimentation en soude [$mol.l^{-1}$]
- C_p : capacité calorifique du produit dans le réacteur [$kg.mol^{-1}$]
- C_j : capacité calorifique du fluide dans double-enveloppe [$kg.mol^{-1}$]
- D_{in} : débit d'alimentation en soude et en l'acétate d'éthyle [$mol.min^{-1}$]
- D_j : débit constant de fluide dans la double-enveloppe [$mol.min^{-1}$]
- T : température dans le réacteur [K]
- T^0 : température initiale dans le réacteur [K]
- T_{in} : température d'alimentation dans le réacteur [K]
- T_j : température dans la double-enveloppe [K]
- T_j^0 : température initiale dans la double-enveloppe [K]
- $T_{j_{in}}$: température d'entrée du fluide dans la double-enveloppe [K]
- U : coefficient d'échange thermique entre le réacteur et la double enveloppe [$kJ.m^{-2}.min^{-1}$]
- V : volume constant du réacteur [l]
- V_j : volume de la double-enveloppe [l]
- ΔH : enthalpie de réaction [$kJ.mol^{-1}$]
- k_v : constante de vitesse de la réaction [$l.mol^{-1}.min^{-1}$]
- ρ : masse volumique dans le réacteur [$kg.mol^{-1}$]
- ρ_j : masse volumique du fluide dans la double enveloppe [$kg.mol^{-1}$]

Du point de vue du système (6.3), l'état est $(C_a(t), C_b(t), T(t), T_j(t))^T$, la commande est $D_{in}(t)$ et la sortie mesurée $T(t)$. Le système (6.3) est donc clairement un système non linéaire continu auquel il faut ajouter les contraintes physiques d'exploitation : seuils sur la sortie (zone de fonctionnement limitée), amplitude et vitesse d'entrée limitées (débit et variation du débit d'ouverture des vannes d'alimentation limités).

6.3.1 Modèle simplifié considéré

En vu d'une application de l'approche d'identification optimale sur un modèle assez simple, on prend un système réduit : on suppose que la concentration d'entrée en soude et la concentration d'entrée en acétate d'éthyle sont identiques, et qu'initialement, les concentrations en soude et d'acétate d'éthyle sont les mêmes dans le réacteur. On suppose aussi que la réaction est isotherme et que la concentration en acétate d'éthyle est mesurée en ligne. On considère alors le modèle simplifié qui s'écrit sous la forme d'une équation non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{C}_a(t) = -k_v C_a^2(t) + \frac{D_{in}(t)}{V}(C_{a_{in}} - C_a(t)) \\ C_a(0) = C_a^0 \end{cases} \tag{6.4}$$

où C_a est la concentration d'acétate d'éthyle mesurée en ligne et $D_{in}(t)$ le débit manipulable. Les paramètres V et $C_{a_{in}}$ sont connus et k_v est le paramètre à déterminer par l'approche. En notant $x_1(t) = C_a(t)$, $\theta_1 = k_v$, $u(t) = D_{in}(t)$, α_1 et α_2 sont respectivement V et $C_{a_{in}}$, ce modèle est ainsi reformulé selon la forme générale du modèle (M) utilisée dans l'approche développée dans le chapitre 4 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\theta_1 x_1^2(t) + \frac{u(t)}{\alpha_1}(\alpha_2 - x_1(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{6.5}$$

6.4 Problématique de contrôle pour l'identification

Les réacteurs chimiques exothermiques ont plusieurs points stationnaires, doivent être commandés autour d'un point instable et leurs caractéristiques sont fortement non linéaires. Pour ces raisons, la commande non linéaire s'avère bien adaptée au contrôle d'un tel système. Notre objectif de contrôle optimal pour l'identification est de maximiser la sensibilité de la sortie mesurée (la concentration d'acétate d'éthyle C_a dans le réacteur) par rapport à la constante de vitesse de réaction k_v à estimer. Ceci en jouant sur le débit d'alimentation en soude D_{in}.

6.4.1 Synthèse de l'observateur

L'idée consiste en la synthèse d'un observateur pour l'estimation de la vitesse de réaction qui n'est pas modélisé. Cet aspect pour la synthèse de tels observateurs a été exploitée par plusieurs auteurs pour l'estimation des vitesses de réactions biologiques [Dochain 1986] [Nadri 2001] : elle consiste à augmenter le modèle du procédé par des équations décrivant la dynamique des variables que l'on considère non modélisées, telles que les vitesses de réactions. L'auteur dans [Nadri 2001] a proposé deux hypothèses : la première suppose que la dynamique de la vitesse de réaction est décrite par une fonction du temps qui est inconnue. La deuxième consiste à augmenter le modèle du procédé par les vitesses de réaction et par leur dérivée

première par rapport au temps et à considérer que les dynamiques des dérivées premières sont décrites par des fonctions inconnues (qui dépendent du temps).

Nous allons considérer dans cette application que la vitesse de réaction est un paramètre constant à dynamique nulle. Pour étudier le problème d'estimation en ligne de la vitesse de réaction k_v, nous utilisons le modèle simplifié (6.5). Nous supposons que :

- la mesure en ligne de concentration d'acétate d'éthyle est à notre disposition,
- la vitesse de réaction de saponification est constante.

La première étape consiste à augmenter le vecteur d'état du modèle initial (6.5) par le paramètre k_v à estimer, puis à appliquer l'algorithme d'observation d'état. Le modèle augmenté prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\theta_1 x_1^2 + u(t)\frac{\alpha_2 - x_1}{\alpha_1} \\ \dot{\theta}_1 = 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

La connaissance à chaque instant de la concentration permet de remonter à la vitesse de réaction. Le système (6.6) se met sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(y(t))x(t) + B(u(t), y(t)) \\ y = Cx(t) \end{cases} \tag{6.7}$$

où $x(t) = (x_1, \theta_1)^T$.
Le système (6.7) est observable et prend la forme (2.14) du chapitre 2. Par conséquent, un estimateur est donné par [Hammouri 1990] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(y(t))\hat{x}(t) + B(u(t), y(t)) - S^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \\ \dot{S}_{\theta_o} = -\theta_o S_{\theta_o} - A^T(y(t))S_{\theta_o} - S_{\theta_o}A(y(t)) + C^T C \end{cases} \tag{6.8}$$

où $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1, \hat{\theta}_1)^T$ est l'estimation de $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie, où :

$$A(y(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -y(t)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(u(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(t)\frac{\alpha_2 - y(t)}{\alpha_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = [1\ 0]$$

6.4.2 Formulation du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation pour l'identification en ligne est de trouver un profil optimal de débit d'alimentation en soude $D_{in}(t)$ qui maximise la sensibilité $\frac{\partial C_a}{\partial k_v}(t)$ de la concentration d'acétate d'éthyle $C_a(t)$ par rapport à la constante de vitesse de réaction k_v. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{cases} \max\limits_{\tilde{D}_{in}} J(\tilde{D}_{in}) = \sum\limits_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\dfrac{\partial C_a}{\partial k_v}(j)\right)^2 \\ \tilde{D}_{in} = [D_{in}(k), ..., D_{in}(k+N_c-1)]^T \end{cases} \tag{6.9}$$

ce qui revient au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{\tilde{D}_{in}} J(\tilde{D}_{in}) = \sum\limits_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\dfrac{1}{\left(\frac{\partial C_a}{\partial k_v}(j)\right)^2 + \kappa^2}\right) \\ \tilde{D}_{in} = [D_{in}(k), ..., D_{in}(k+N_c-1)]^T \end{cases} \tag{6.10}$$

avec des contraintes d'amplitude et de vitesse sur la commande :

$$\begin{cases} D_{min} \leq D_{in}(j) \leq D_{max} \ , \ \forall \ j \in [k, k+N_p-1] \\ \Delta D_{min} \leq D_{in}(j) - D_{in}(j-1) \leq \Delta D_{max} \ , \ \forall \ j \in [k, k+N_p-1] \end{cases} \tag{6.11}$$

Par ailleurs, la concentration d'acétate d'éthyle dans le réacteur doit être limitée pour des questions de qualité du produit final :

$$C_a(.) \leq C_a^{max} \tag{6.12}$$

Tout ceci revient donc à fixer comme objectif de contrôle optimal la maximisation de sensibilité $\frac{\partial C_a}{\partial k_v}$ sans dépasser le maximum C_a^{max} avec une commande physiquement appliquable.

6.5 Résultats de simulation

Les deux stratégies de commande détaillées dans les chapitres précédents ont été appliquées, l'une basée sur le modèle non linéaire ($POPSCI_{NL}$), l'autre utilisant un modèle linéaire temps variant ($POPSCI_{LTV}$). Elles sont comparées ici sans bruit et avec bruit de mesure.

6.5.1 Conditions de simulation

Dans les simulations, les conditions dans chaque cas traité sont les suivantes :
- l'horizon de commande N_c est égal à 1,
- l'horizon de prédiction N_p est fixé à 10,
- la période d'échantillonnage T_e est 60 s,

– concernant les contraintes d'amplitude et de vitesse sur l'entrée, les limitations sont :

$$\begin{cases} D_{max} = 5 \times 10^{-3} \ \text{mol.s}^{-1} \\ D_{min} = 0 \ \text{mol.s}^{-1} \\ \Delta D_{max} = +8.33 \times 10^{-6} \text{mol.s}^{-2} \\ \Delta D_{min} = -8.33 \times 10^{-6} \text{mol.s}^{-2} \end{cases} \tag{6.13}$$

– concernant les contraintes sur la sortie, les limitations sont :

$$C_a^{max} = 15 \times 10^{-3} \text{mol.l}^{-1} \tag{6.14}$$

– les paramètres du procédé simulé sont donnés dans le tableau 6.1

Paramètre	Définition	Valeur
k_0	le facteur préexponentiel de fréquence	$1,83 \times 10^8$ l.mol^{-1}.s^{-1}
E_a	l'energie d'activation	$1,0360 \times 10^4$ J.mol^{-1}
T	température de réacteur	25^oC
V	volume de réacteur	100l
$C_{a_{in}}$	concentration d'alimentation en acétate d'éthyle	1mol.l^{-1}

TABLEAU 6.1 – Paramètres de simulation du procédé simulé pour la réaction de saponification

– de fait, avec (6.2) la valeur recherchée de k_v est 7.89×10^{-2}l.mol^{-1}.s^{-1},
– les paramètres du modèle et de l'observateur sont : $V = 100$ l et $C_{a_{in}} = 1$ mol.l^{-1},
– les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} \text{pour le procédé simulé :} \\ C_a(0) = 10^{-4} \text{mol.l}^{-1} \\ \text{pour l'observateur et le modèle :} \\ \hat{C}_a(0) = 0.7 \times 10^{-4} \text{mol.l}^{-1} \\ \hat{k}_v(0) = 5.52 \times 10^{-2} \text{l.mol}^{-1}.\text{s}^{-1} \end{cases} \tag{6.15}$$

Pour la résolution du problème d'optimisation :

• les contraintes portant sur l'amplitude et la vitesse de la commande posées dans le chapitre 5 sont traitées en utilisant une transformation hyperbolique ;

• la contrainte sortie est introduite à l'aide d'une fonction de pénalités externes H ;

• les simulations sont effectuées sous Matlab R14 pour Windows XP sur un Pentium(R)4 CPU cadencé à 2.80Ghz avec 1Go de mémoire vive.

6.5.2 Estimation en boucle ouverte

Nos premières simulations sont effectuées en boucle ouverte, avec deux entrées différentes : la première, où le débit est un échelon de valeur 2×10^{-3} mol.s^{-1} et la deuxième, où le débit évolue sous forme d'un système du premier ordre (Figure 6.1).

a) Mesures non bruitées :

Les résultats de simulation sont reportés sur les figures 6.2, 6.3 et 6.4. Ils correspondent à l'estimation de la concentration d'acétate d'éthyle C_a, à la vitesse de réaction k_v et à la sensibilité de la sortie C_a par rapport à k_v en boucle ouverte. La valeur de θ_o dans l'observateur (6.8) est prise égale à 0.02. Nous pouvons remarquer que les estimées $\hat{C}_a$ et $\hat{k}_v$ convergent rapidement vers les valeurs réelles (données par la simulation du procédé). Sur la figure 6.3, l'évolution de l'estimée de la vitesse de réaction $\hat{k}_v$ converge vers la valeur réelle constante. Une erreur sur la valeur initiale de la vitesse de réaction a été introduite (30 %) lors de la simulation de l'estimateur pour observer son comportement vis-à-vis de cette erreur d'initialisation, ainsi que l'influence de celle-ci sur la vitesse de convergence. Après convergence, cette erreur est très faible. Par conséquent, notre stratégie d'estimation fonctionne bien.

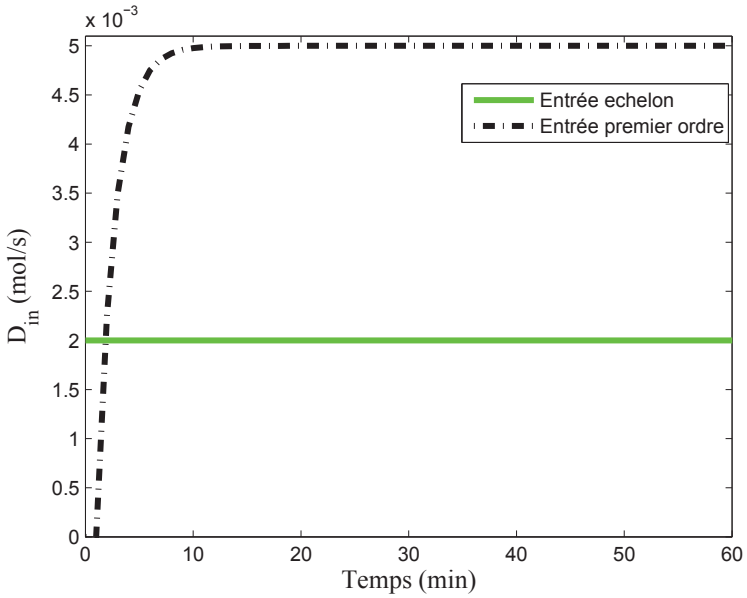


FIGURE 6.1 – Débit d'alimentation en mode continu, en boucle ouverte

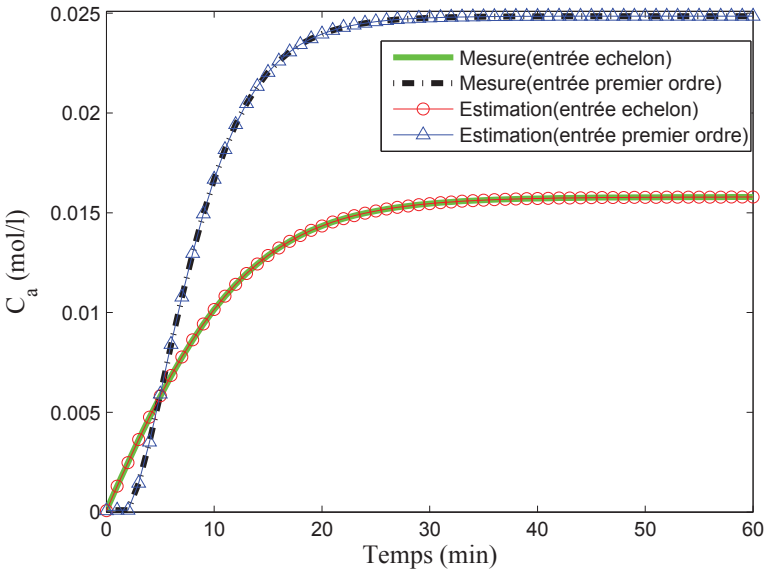


FIGURE 6.2 – Concentration d'acétate d'éthyle, en boucle ouverte

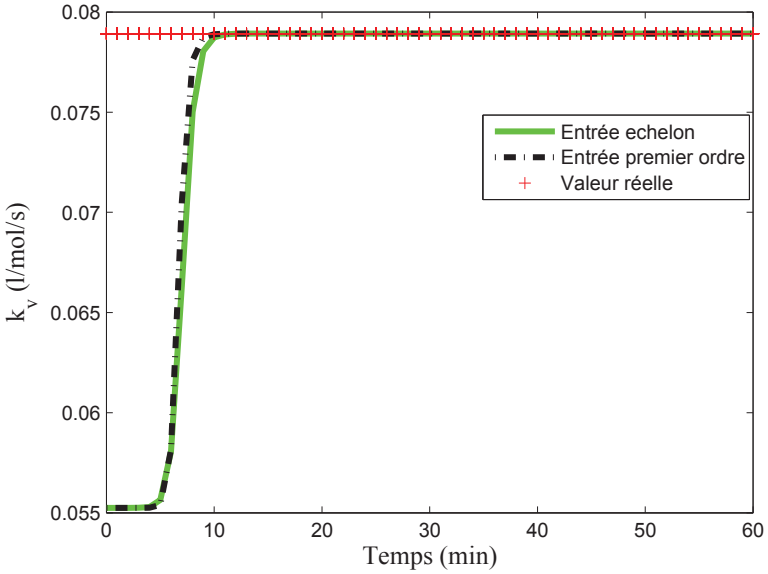


FIGURE 6.3 – Estimation de la vitesse de réaction, en boucle ouverte

b) Mesures bruitées :

La mesure de C_a issue des simulations a été bruitée par un bruit blanc de moyenne nulle et dont l'amplitude est égale à 5 % de l'amplitude de la sortie. Le paramètre de réglage de l'observateur considéré (donnant un compromis entre la convergence et la sensibilité de mesures) est $\theta_o = 0.02$. Les résultats obtenus dans ce cas sont

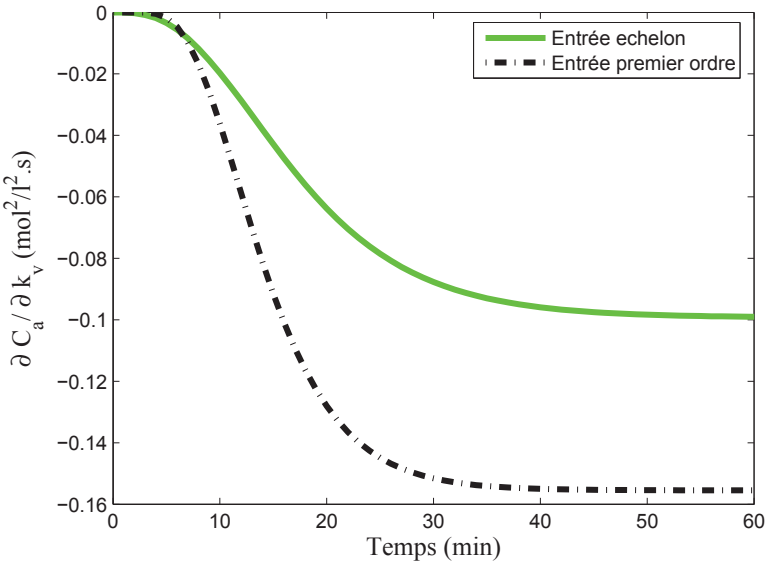


FIGURE 6.4 – Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, en boucle ouverte

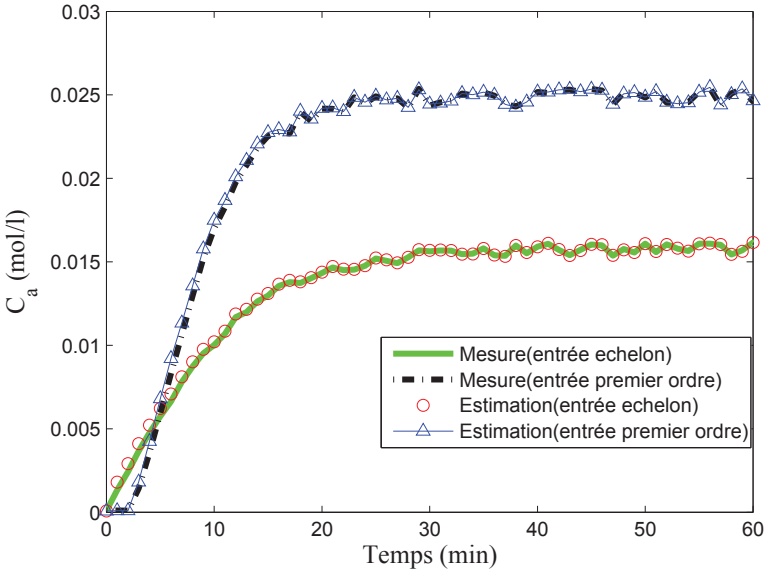


FIGURE 6.5 – Concentration d'acétate d'éthyle, avec mesure bruitée, en boucle ouverte

présentés dans les figures 6.5, 6.6 et 6.7.

Nous pouvons observer dans le cas de la mesure bruitée que les performances de l'observateur se sont dégradées en présence du bruit. Toutefois, les résultats d'estimation restent satisfaisants et ce paramètre principale k_v est estimé entre 10

et 15% d'erreur.

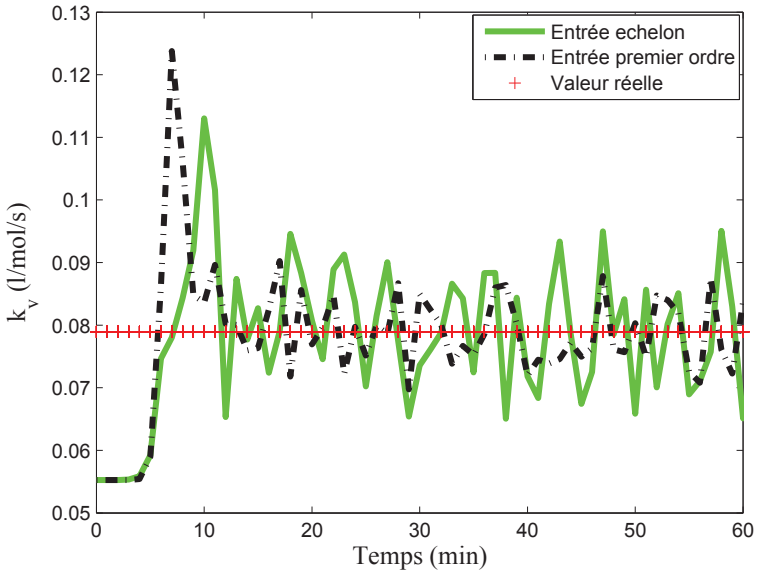


FIGURE 6.6 – Estimation de la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle ouverte

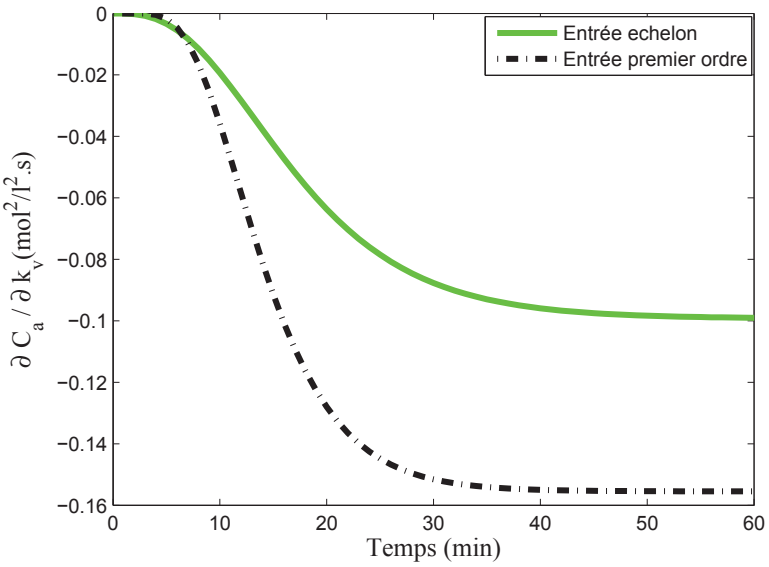


FIGURE 6.7 – Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle ouverte

6.5.3 Identification optimale basée sur le modèle non linéaire

Nous considérons ici la structure de contrôle pour l'identification basée sur la commande prédictive par modèle interne non linéaire et la méthode de résolution associée. Pour l'optimisation, nous avons opté pour la routine fmincon de la boîte à outils d'Optimisation de Matlab (Toolbox Optimization). Ce solveur est une implémentation de programmation quadratique successive avec recherche linéaire et gestion des contraintes actives. Il construit une approximation quasi-newtonienne du Hessien. Là aussi, les cas non bruité et bruité ont été traités, avec ou sans la contrainte sortie.

a) Mesures non bruitées :

Deux cas ont été simulés dans les conditions suivantes :

- Cas 1 : la maximisation recherchée de sensibilité n'est soumise qu'aux deux contraintes d'amplitude sur la commande, l'évolution de la sortie est libre.

- Cas 2 : idem cas 1, mais la sortie doit désormais rester en dessous d'un maximum fixé par (6.14). Ceci afin de se placer dans le cas général de l'algorithme d'optimisation sous contraintes.

En termes de maximisation de sensibilité de la sortie par rapport au paramètre recherché, la figure 6.8 montre que la prise en compte de la contrainte sortie réduit la valeur de la sensibilité maximisée et que cette sensibilité est bien supérieure à celle obtenue en boucle ouverte (Figure 6.4) dans le cas non contraint. En termes de commande, cette maximisation se traduit sur la figure 6.9 où la commande est à chaque fois saturée (cas 1) soit en vitesse, soit en amplitude. Dans le cas 2, après avoir suivi pendant les 5 premières minutes le même comportement que dans le cas 1, la commande diminue en amplitude pour aller se stabiliser à une valeur constante. Ceci est dûe à la prise en compte de la contrainte sortie (Figure 6.10) qui arrive à saturation à partir de 30 minutes. Parallèlement, dans les deux cas, la commande appliquée au procédé et à l'observateur permet d'identifier le paramètre constant inconnu, et ce malgré une erreur initiale d'estimation de 30% (Figure 6.11). La convergence vers cette valeur est assez similaire dans les deux cas, alors que le cas deux permet de garantir un fonctionnement optimal (pour l'identification) désiré du réacteur, via la contrainte de sortie qui est posée et vérifiée. Par ailleurs, la dynamique de la convergence de l'observateur et la prise en compte des contraintes ont lieu en même temps (entre 10 et 20 minutes), ce qui montre que l'observation et l'optimisation sous contraintes sont bien traitées de façon couplée dynamiquement en même temps.

b) Mesures bruitées :

La sortie simulée est maintenant bruitée par un bruit blanc de moyenne nulle et dont l'amplitude est égale à 5 % d'amplitude de la sortie. Les résultats sont reportés

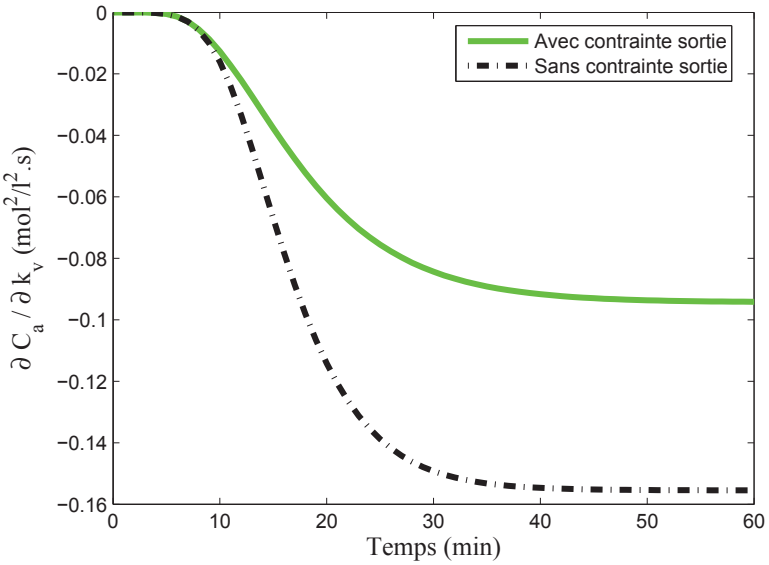


FIGURE 6.8 – Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

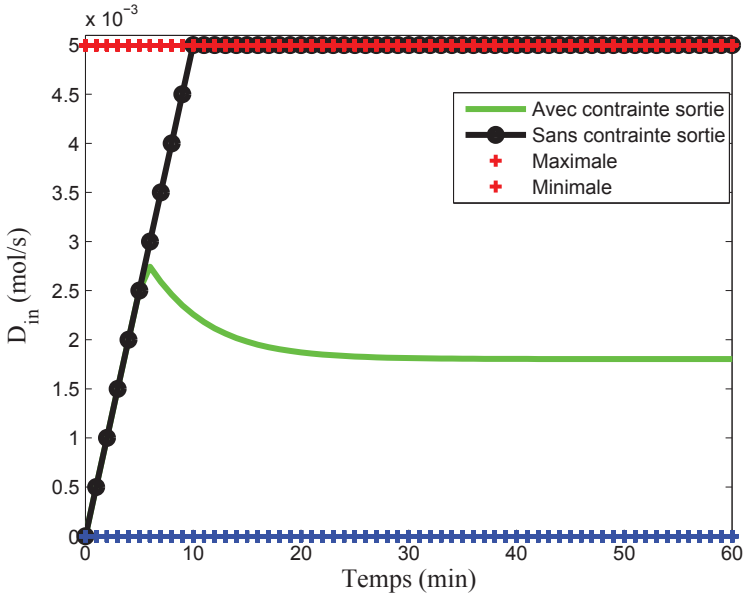


FIGURE 6.9 – Débit d'entrée optimal pour l'identification, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

sur les figures 6.12 à 6.15. Nous pouvons observer que les estimées dans ce cas ont un comportement acceptable vis-à-vis du rejet de bruit de mesures. La commande a peu changé par rapport au cas non bruité.

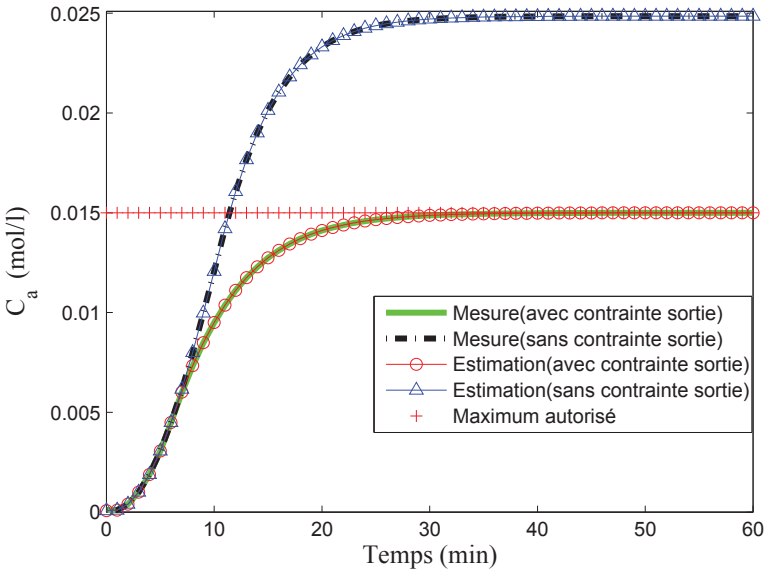


FIGURE 6.10 – Concentration d'acétate d'éthyle, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

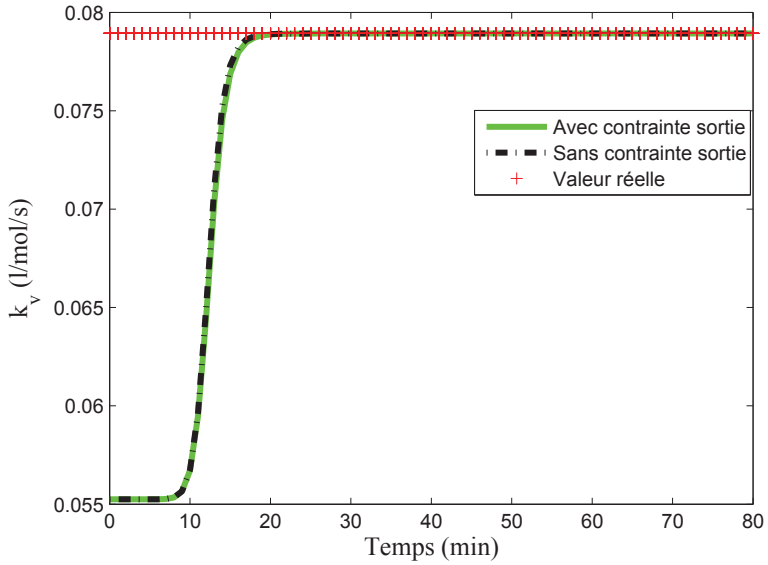


FIGURE 6.11 – Estimation de la vitesse de réaction, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

6.5.4 Identification optimale basée sur le modèle linéaire temps variant

Pour cette approche de commande, nous avons utilisé le logiciel MPC@CB[1], basé sur une méthodologie initialement proposée par [Dufour 2000]. Les auteurs

[1]MPC-AT-CB.univ-lyon1.fr

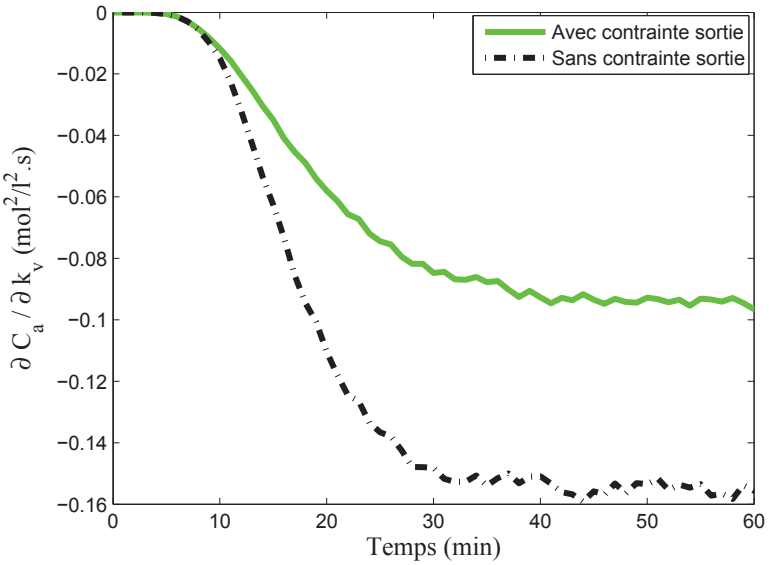


FIGURE 6.12 – Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

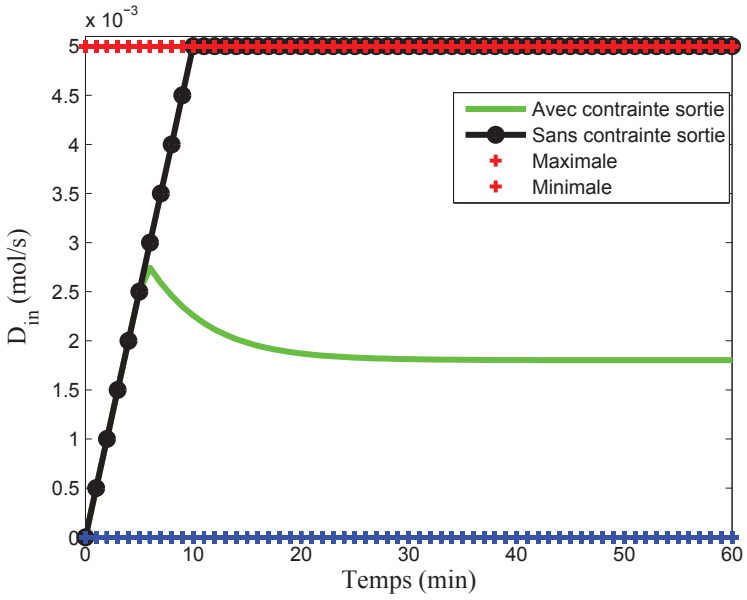


FIGURE 6.13 – Débit d'entrée optimal pour l'identification, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

[Abid 2007] l'ont développé pour les systèmes mono-entrée mono-sortie. Il a été étendu dans le cadre des travaux de thèse [Silva 2008] aux cas multi-entrées multi-sorties pour une application au modèle de polymérisation en émulsion.

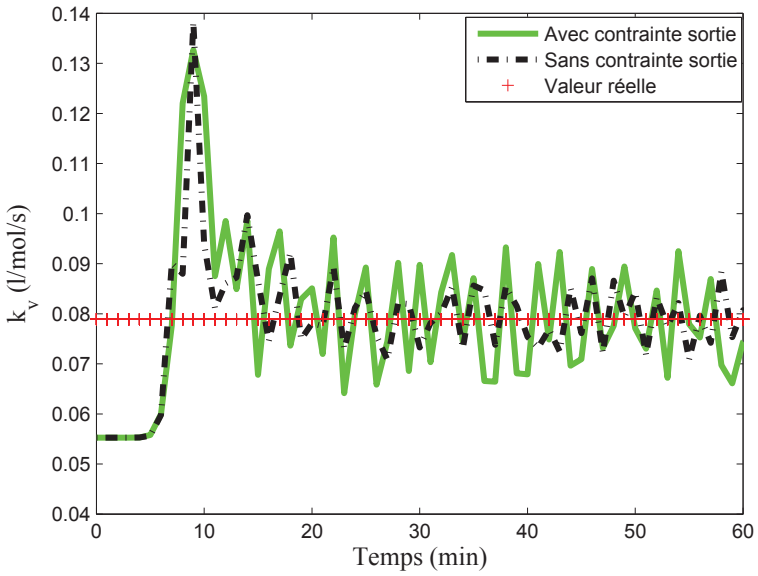


FIGURE 6.14 – Estimation de la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

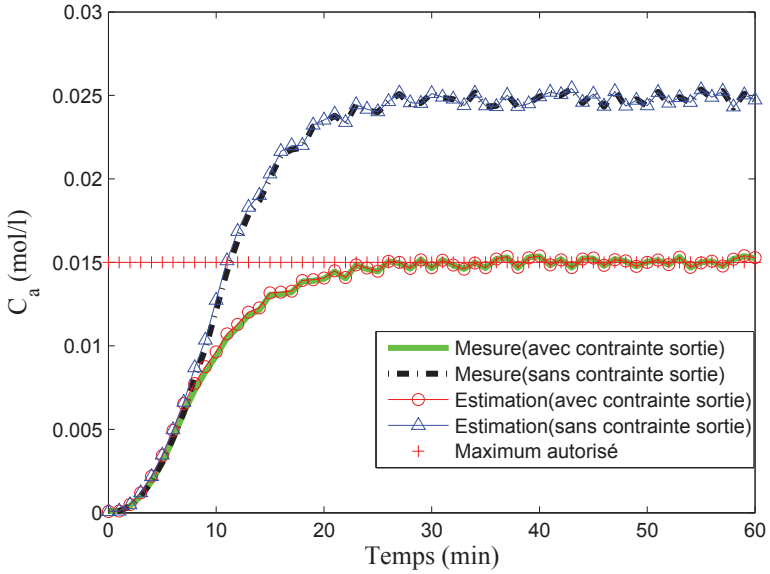


FIGURE 6.15 – Concentration d'acétate d'éthyle, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

Pour la résolution du problème d'identification, où la commande prédictive est basée sur le modèle linéarisé autour d'un comportement nominal, on utilise les mêmes conditions initiales considérées dans l'approche de commande prédictive non linéaire pour l'identification. La linéarisation autour des modèles (M_0) et $(M_{x_m\theta 0})$

s'effectue hors ligne avec les conditions initiales (6.15) et pour :

$$\begin{cases} D_{in_0}(t) = 4.75 \times 10^{-3} \text{ mol.s}^{-1} \\ k_{v_0} = 0.11 \text{ l.mol}^{-1}.\text{s}^{-1} \\ \frac{\partial C_{a0}}{\partial k_{v0}}(0) = 0 \end{cases} \tag{6.16}$$

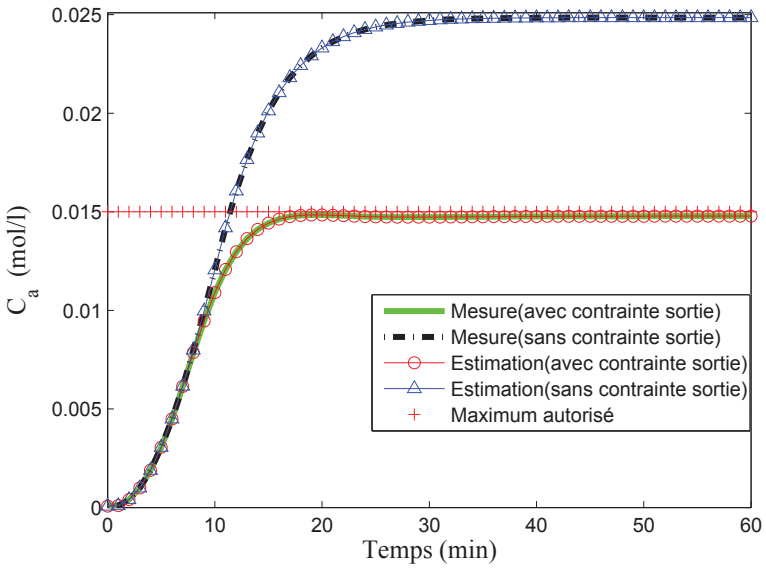


FIGURE 6.16 – Concentration d'acétate d'éthyle, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

a) Mesures non bruitées :

Dans la première série de simulations, l'objectif est de tester la performance de l'algorithme d'identification pour le cas du modèle de commande linéaire temps variant en absence du bruit. Nous avons effectué des simulations pour deux cas considérés dans l'approche non linéaire :

- la maximisation de sensibilité sans contrainte sur la mesure C_a (cas 1).

- la sensibilité paramètrique $\frac{\partial C_a}{\partial k_v}$ est maximisée sous condition que la concentration d'acétate d'éthyle est limitée.

Les figures 6.16 à 6.19 montrent les performances de l'algorithme pour les deux cas. Le problème couplé d'identification et du contrôle optimal est bien traité. Nous pouvons remarquer que les résultats sont satisfaisants et sont proches de ceux obtenus en non linéaire.

b) Mesures bruitées :

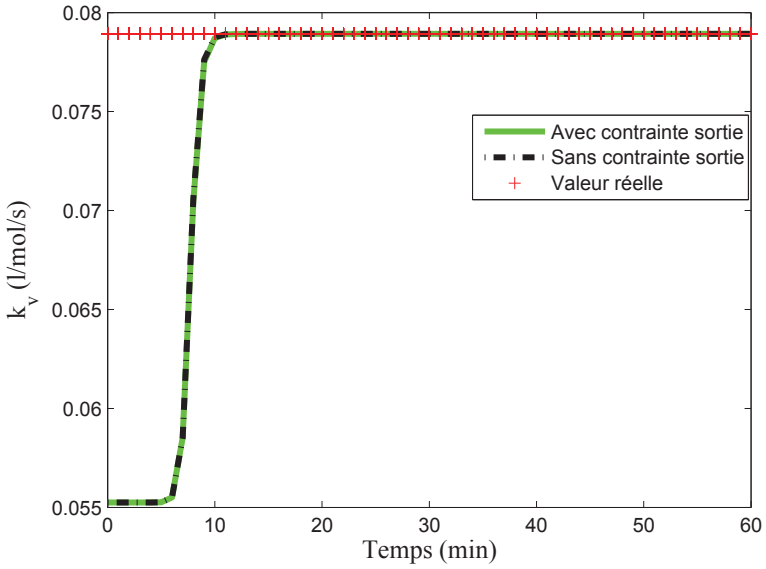


FIGURE 6.17 – Estimation de la vitesse de réaction, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

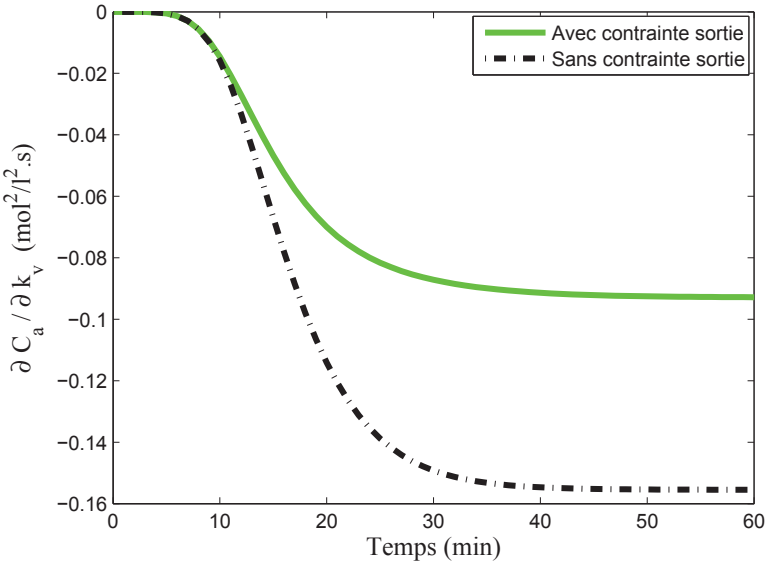


FIGURE 6.18 – Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

Dans la seconde série de simulations, le but est de traiter le même cas en présence du bruit de mesure.
Les courbes des figures 6.20 à 6.23 corespondent aux résultats de simulations avec des données buitées. Ici aussi on remarque que l'estimation de la vitesse de réaction $\hat{k}_v$ est acceptable. La sensibilité à maximiser est moins sensible que dans le cas

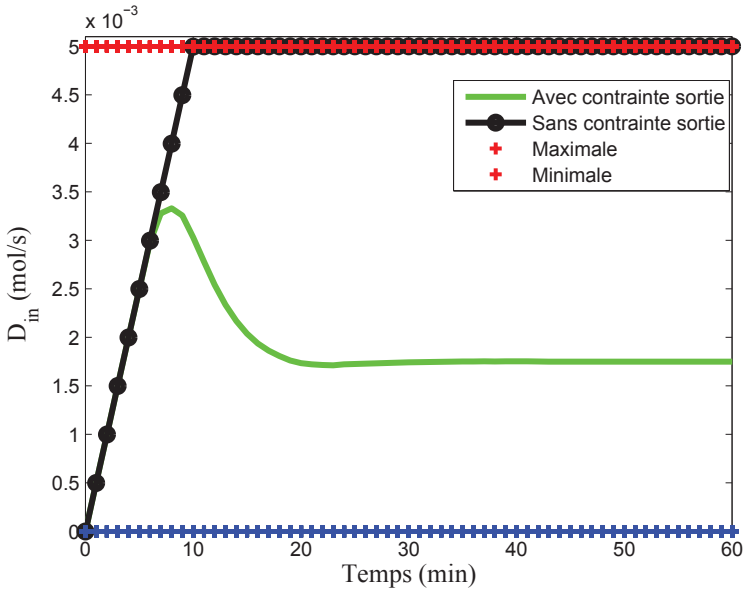


FIGURE 6.19 – Débit d'entrée optimal pour l'identification, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

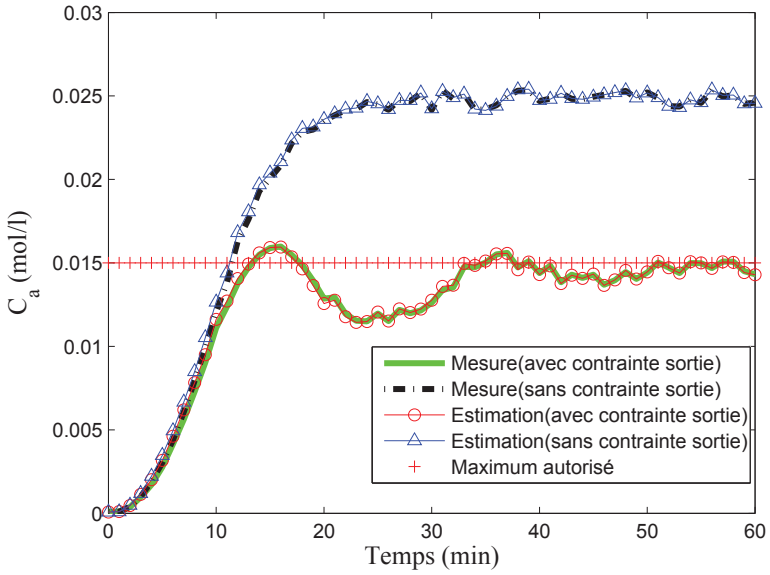


FIGURE 6.20 – Concentration d'acétate d'éthyle, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

non linéaire. Par contre, c'est le contraire pour la commande qui est cette fois plus sensible au bruit, car l'estimation du paramètre est injectée dans la commande.

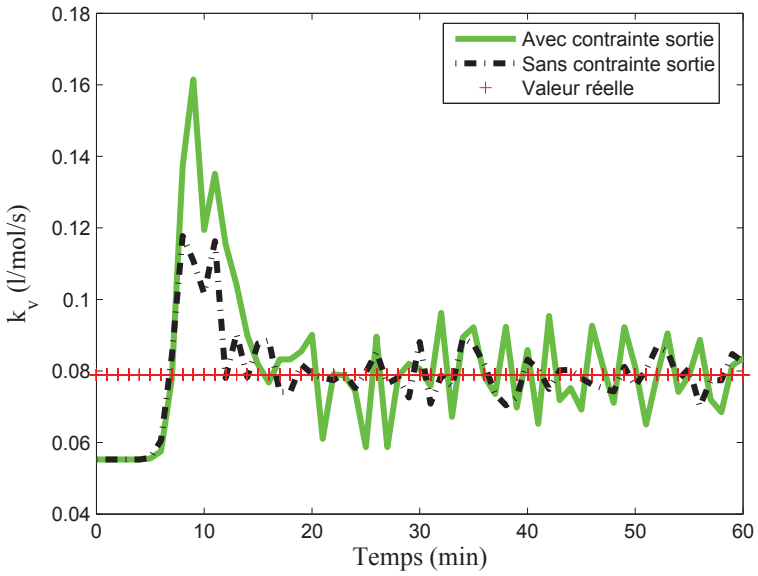


FIGURE 6.21 – Estimation de la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

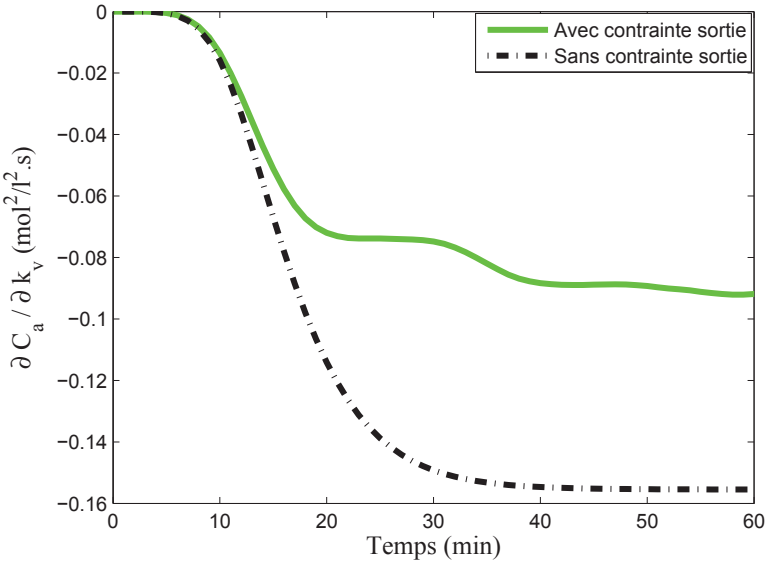


FIGURE 6.22 – Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

6.5.5 Comparaison des deux approches de commande pour l'identification

Les résultats obtenus dans le cas non linéaire et linéaire temps variant, en termes de commande, de sensibilité paramétrique et d'estimation, sont assez similaires.

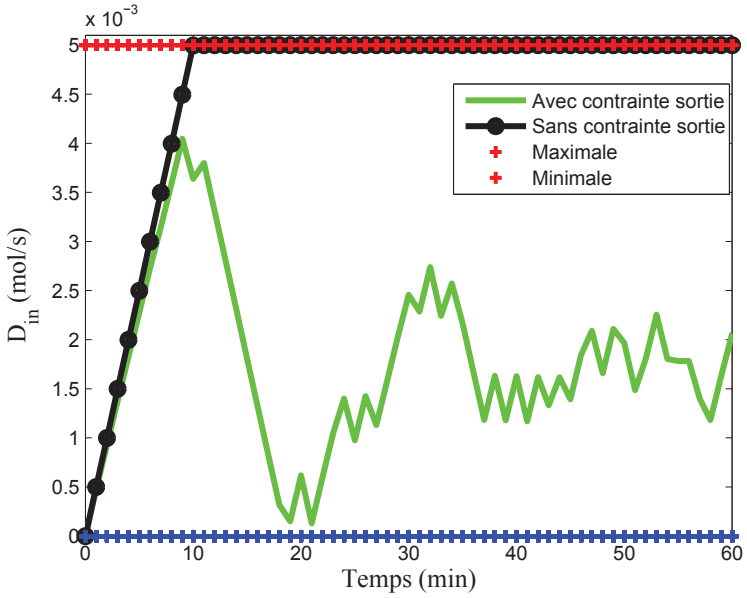


FIGURE 6.23 – Débit d'alimentation optimal pour l'identification, avec mesure bruitée, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

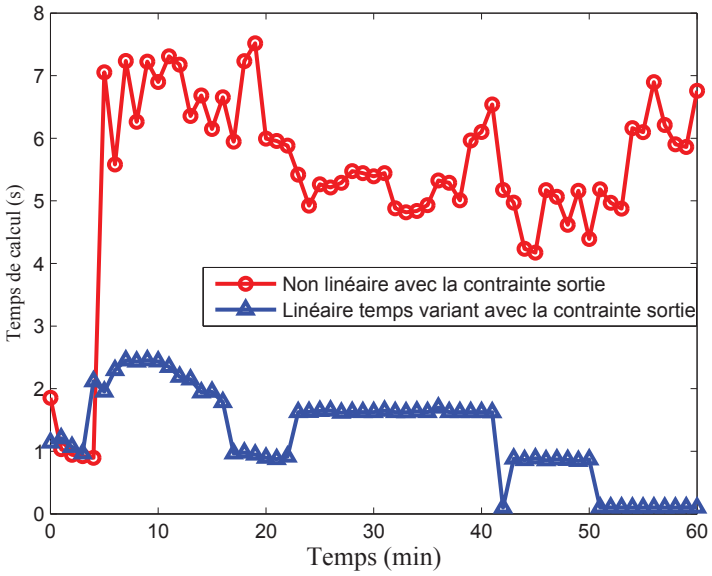


FIGURE 6.24 – Temps nécessaire au programme pour résoudre le problème d'identification optimale, comparaison entre les approches non linéaire et linéaire temps variant

L'utilisation d'un modèle linéaire temps variant à la place d'un modèle non linéaire permet cependant de diminuer le temps de calcul d'un facteur 3 (Figure 6.24). Comme, le temps de calcul maximal est toujours inférieur à la période d'échan-

Loi de commande	Temps de calcul moyen (s)	Temps de calcul maximum (s)
Non linéaire	5.38	7,52
Linéaire temps variant	1.27	2.45

TABLEAU 6.2 – Comparaison des résultats obtenus pour la réaction de saponification avec les deux lois de commande

tillonnage, les deux lois de commande sont implémentables en ligne.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établis des résultats de simulations sur un modèle simple de procédé de saponification non linéaire constitué par une équation aux dérivées ordinaires. Ce modèle simple a permis de valider l'algorithme d'identification optimale basé sur le modèle de commande non linéaire, ainsi que l'algorithme d'identification optimale basé sur le modèle linéaire temps variant. Nous avons pu comparer le temps de calcul ainsi que la qualité des résultats obtenus avec les deux stratégies de contrôle optimal dans le cadre d'une identification en ligne. Nous avons pu voir l'impact du bruit de mesure sur la commande et sur le paramètre à estimer. Le temps de calcul occupé par l'algorithme de commande non linéaire n'est pas critique pour cette application, et les résultats obtenus en non linéaire et linéaire temps variant sont quasi-identiques.

Chapitre 7

Procédé de cuisson radiatif des peintures en poudre

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous cherchons à montrer la faisabilité de l'algorithme d'identification, et à comparer les deux approches de commande prédictive par modèle pour l'identification sur un procédé de cuisson des peintures en poudre, l'une basée sur le modèle non linéaire, l'autre sur le modèle linéaire temps variant.

Nous nous sommes intéressés au contrôle optimal pour l'identification d'un procédé de cuisson sous infrarouge, basé sur un modèle régi par des équations aux dérivées partielles. Notre attention s'est penché sur le problème d'estimation d'un paramètre principal du modèle, tout en assurant la conduite du procédé sous contraintes du flux infrarouge.

7.2 Peintures en poudre

Les peintures en poudre sont des polymères organiques thermoplastiques ou thermodurcissables finement divisés et contenant en général un ou plusieurs liants, des pigments, des charges et des additifs. Les peintures thermoplastiques sont formées à partir de polymères qui fondent sous l'action de la chaleur mais conservent la même composition chimique quand ils se solidifient par refroidissement, tandis que les poudres thermodurcissables permettent d'obtenir des feuils de peinture par fusion des particules de polymères (coalescence) puis par polymérisation. Elles sont généralement classées suivant la nature chimique des liants : époxy, polyester, polyuréthane.

L'utilisation des peintures en poudre est l'un des meilleurs moyens pour faire face aux normes environnementales de plus en plus strictes, car ces peintures, composées de 100 % d'extraits secs ne contiennent pas de COV (Composés Organiques Volatils). C'est pourquoi, depuis l'introduction des poudres thermodurcissables dans

les années 1960, leur développement a subi une forte croissance. Les revêtements en poudre sont maintenant utilisés dans de nombreux domaines industriels, comme le bâtiment ou l'industrie de l'électroménager. Les peintures en poudre deviennent ainsi une alternative qui se justifie de plus en plus sur le plan technologique et économique, et le monde industriel, en particulier automobile, semble s'intéresser par cette technique. Pourtant, la grande percée des peintures en poudre ne pourra en effet avoir lieu que lorsque leur technique sera reconnue comme étant la meilleure, tant du point de vue de la consommation des ressources que de la consommation d'énergie primaire, par rapport aux autres procédés de peinturage non polluants. Toutefois, le contrôle commande des émetteurs qui assure une procédure de cuisson optimisée reste encore un problème. Dans ce contexte, une thèse au sein de Laboratoire de Génie des Procédés a porté sur l'étude concernant l'optimisation de la cuisson des peintures en poudres [Bombard 2007].

En ce qui concerne les modes de cuisson des peintures en poudre, la plus grande partie des pièces peintes est actuellement cuite dans des fours à convection et/ou des fours équipés d'émetteurs infrarouges moyens. Le suivi de cuisson est réalisé principalement au moyen de profils de température. Néanmoins d'autres techniques comme l'utilisation du proche infrarouge et de l'UV existent et se développent. En fin de cuisson, les tests classiques de contrôle de la qualité du revêtement sont généralement appliqués : mesure de la couleur et brillance, épaisseur, rugosité, dureté, adhérence, etc.

Une thèse a porté sur l'étude théorique et expérimentale de cuisson des peintures en poudres par rayonnement infrarouge avec validation d'un modèle sur un four pilote monté au sein du laboratoire [Bombard 2007].

On s'intéresse dans ce travail de thèse au contrôle optimal de ce procédé de cuisson en terme d'identification optimal en ligne des paramètres du modèle.

Dans ce qui suit, nous présentons tout d'abord le procédé pilote de cuisson des peintures sous infrarouge existant au sein du laboratoire. Après avoir décrit les phénomènes physico-chimiques mis en jeu, le modèle non linéaire à commande frontière est défini. Le problème de contrôle optimal pour l'identification est alors posé. Une étude numérique de la résolution du modèle est d'abord mené puis l'algorithme d'estimation est donné et enfin les résultats de simulation pour les deux stratégies de contrôle optimal sont présentés.

7.3 Description du procédé de cuisson

Un four infrarouge de laboratoire a été conçu pour le travail de thèse cité ci-dessus [Bombard 2007]. Avec une densité de flux variant de 0 à $23,2 \mathrm{kW.m}^{-2}$, il permet de cuire un film de peinture déposé sur un échantillon. Ce four instrumenté a permis, à partir des mesures de température au cours de cinétiques expérimentales de cuisson de peintures, de valider un modèle de connaissance que nous utilisons dans le cadre

de ce travail.

La figure 7.1 est une représentation schématique du four expérimental développé et utilisé pour étudier les cuissons de peinture en poudre. L'application de la poudre se fait sur des panneaux standards Q-PANEL de dimension 76 x 127 x 0,8 mm^3 à l'aide d'un pistolet électrostatique à décharge Corona Gema PGC1. Ce four est constitué des éléments suivants [Bombard 2007] :

• la surface de travail est la partie inférieure du four sur laquelle est posé le porte-échantillon, elle est rendue isotherme par une circulation d'eau alors que sa couleur noire mat permet l'élimination (par absorption) d'une grande partie du flux infrarouge parasite réfléchi.

• les quatre parois en aluminium réfléchissantes sont en contact avec la surface de travail sur 25 mm, ce qui permet de limiter leur échauffement et l'emission parasite d'énergie infrarouge.

• le panneau infrarouge positionné entre les quatre parois, est ajustable en hauteur, au moyen de tiges filetées soudées sur sa paroi arrière et fixées sur la structure du four. Cette conception du four permet ainsi un changement rapide du module infrarouge, ce qui permet de tester aisément la cuisson sous différents types d'infrarouges et de flux énergétiques incidents.

• le porte échantillon coulissant sur un rail permet de positionner rapidement et précisément l'échantillon au centre du panneau infrarouge dans le champ de la mesure de température de surface sans contact par pyrométrie.

• un pyromètre Heiman KT 15.82 permet de mesurer la température au support de l'échantillon. La mesure est faite dans la gamme de longueur d'onde comprise entre 8 et 14 μm.

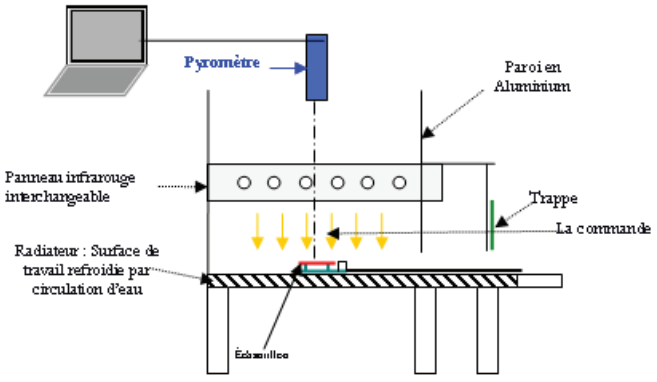


FIGURE 7.1 – Procédé pilote de cuisson des peintures en poudre [Bombard 2007]

7.4 Modèle

Au cours de la cuisson, la face supérieure de l'échantillon de peinture est irradiée par le flux infrarouge (IR) émis par les émetteurs IR et la peinture absorbe ϕ_{abs}, une fraction de la densité de puissance incidente selon sa capacité d'absorption du rayonnement IR, représentée par le coefficient d'absorptivité α_p .

Le flux de chaleur ainsi apporté à la surface de l'échantillon de peinture est ensuite transmis par conduction au sein du film de peinture et de son support. L'élévation de température au sein de ces domaines est régie par la loi de transfert de chaleur décrite par la loi de Fourier (conduction pure). La couche de peinture et le support sont supposés être homogènes et aucune résistance au transfert de chaleur entre les deux domaines n'est considérée.

Enfin, l'épaisseur cumulée du film de peinture et de son support est suffisamment faible pour considérer que les pertes de chaleur dues aux échanges radiatifs et convectifs des surfaces latérales avec le milieu ambiant sont négligeables. Les échanges radiatifs et convectifs du système considéré ont donc uniquement lieu au niveau des surfaces supérieures et inférieures de ce dernier et une modélisation en une dimension des transferts de chaleur intervenant lors de la cuisson peut-être réalisée.

L'étude cinétique de la réaction chimique d'une peinture thermodurcissable a pour finalité l'établissement d'un modèle cinétique permettant la prévision du degré de conversion et du flux de chaleur dégagé par la réaction en fonction de l'histoire thermique. Le couplage de ce modèle cinétique avec l'équation de la chaleur permettra ensuite la prédiction de l'évolution des champs de conversion et de température qui définissent les propriétés du système réactif lors de la mise en oeuvre du procédé.

Finalement le modèle de cuisson de peinture des poudres sous infrarouge peut être représenté par les variables d'état $T(z,t)$ et $X(z,t)$. L'écriture de bilan thermique et la cinétique de réticulation permet d'aboutir à un système d'équations aux dérivées partielles à commande frontière.

7.4.1 Cinétique de reticulation

La plupart des travaux existant utilisent les méthodes d'analyse thermique comme la thermogravimétrie ou la calorimétrie à balayage différentielle pour caractériser la cuisson des peintures en poudre en termes de cinétique. Certaines études corrèlent aussi l'analyse thermique avec une analyse rhéologique, parfois à température variable. Dans tous les cas, les cinétiques de nombreuses réactions en phase condensée (décomposition, cristallisation, polymérisation, etc.) la cinétique de polymérisation des peintures en poudre étudiées est décrite par le modèle de Sestak - Berggren sont généralement décrites par l'équation suivante :

$$\frac{dX}{dt} = k(T)f(X) \tag{7.1}$$

avec :

$$\begin{cases} k(T) = A \ \ exp(-\frac{E}{RT}) \\ f(X) = X^m(1-X)^n \end{cases} \tag{7.2}$$

avec :

- A :facteur-pré-exponentiel (encore appelé facteur de fréquence) [s^{-1}]
- E : énergie d'activation [$J.mol^{-1}$]
- R : constante des gaz parfaits [$J.mol^{-1}.K^{-1}$]
- T : température [K]
- X : degré de conversion $(-)$
- $f(X)$: expression mathématique du modèle cinétique
- $k(T)$: constante de vitesse d'Arrhenius [s^{-1}]
- m : paramètre cinétique $(-)$
- n :paramètre cinétique $(-)$

7.4.2 Bilan thermique

La cuisson des peintures en poudre est régie par les lois de transferts de chaleur. Les flux thermiques représentés schématiquement sur la figure 7.2 sont traduits par les équations (7.3) et (7.4). Le modèle de transferts thermiques consiste ainsi à intégrer numériquement l'équation de la chaleur écrite, dans chacun des milieux (support et peinture), sous la forme :

$$\nabla(\lambda_{c,s}\nabla T_s) = \rho_s C_{p_s}\frac{\partial T_s}{\partial t}, \qquad \text{dans le support d'épaisseur } e_s \tag{7.3}$$

$$\nabla(\lambda_{c,p}\nabla T_p) = \rho_p C_{p_p}\frac{\partial T_p}{\partial t} + \phi_{reaction}, \qquad \text{dans la peinture d'épaisseur } e_p \tag{7.4}$$

où ρ est la masse volumique, C_p la capacité calorifique massique, λ_c la conductivité thermique et ou les indices p et s correspondent à la peinture et au support respectivement. La chaleur de réaction $\phi_{reaction}$ correspond à la chaleur dégagée par la réaction exothermique de polymérisation :

$$\phi_{reaction} = \rho_p e_p \Delta H_0 \frac{dX}{dt} \tag{7.5}$$

où e_p représente l'épaisseur de la couche de peinture et ΔH_0 l'enthalpie de la réaction de polymérisation Ce terme de chaleur de réaction représente le couplage entre les modèles thermique et cinétique.

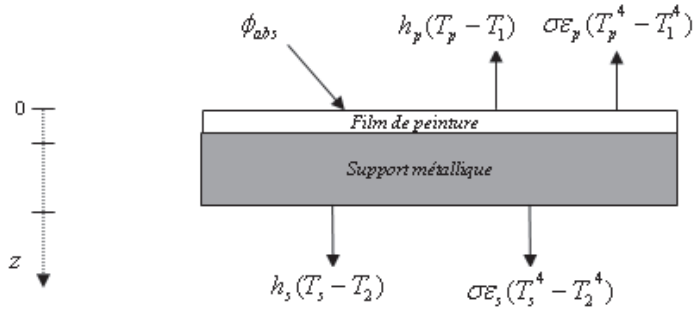


FIGURE 7.2 – Echanges thermiques dans le système peinture+support

7.4.3 Conditions aux limites et initiales

Les équations aux dérivées partielles (EDP) (7.3) et (7.4) sont d'ordre deux avec deux conditions initiales aux frontières et une condition initiale pour chacune.

- Conditions aux limites

• pour $z = 0$, à la surface du film de peinture :

$$-\lambda_{c,p}\frac{\partial T_p}{\partial z}(z,t) = \phi_{abs(t)} - \varepsilon_p\sigma(T_p^4 - T_1^4) - h_p(T_p - T_1) \tag{7.6}$$

$$\phi_{abs} = \alpha_p\phi_{ir}(t) \tag{7.7}$$

où h_p est le coefficient d'échange convectif de la peinture, ϕ_{abs} représente le flux absorbé par le système « support + peinture », ϕ_{ir} le flux infrarouge incident sur la surface de la peinture et α_p le coefficient d'absorption de la peinture. La température T_1 représente la température du milieu ambiant. L'hypothèse majeure retenue dans l'écriture de cette condition limite supérieure est que le rayonnement infrarouge est absorbé à la surface de l'échantillon et que ce dernier est parfaitement opaque au rayonnement infrarouge.

• pour $z = e_p$, à l'interface peinture-support : Le contact entre la peinture et le support est supposé parfait ; aucune résistance au transfert thermique n'est considérée et il y a continuité des flux de chaleur à l'interface peinture-support.

$$-\lambda_{c,p}\frac{\partial T_p}{\partial z} = -\lambda_{c,s}\frac{\partial T_s}{\partial z} \tag{7.8}$$

• pour $z = e_p + e_s$, à la surface inférieure du support :

$$-\lambda_{c,s}\frac{\partial T_s}{\partial z} = \varepsilon_s\sigma(T_s^4 - T_2^4) - h_s(T_s - T_2) \tag{7.9}$$

où h_s est le coefficient d'échange convectif de la peinture et T_2 la température du milieu ambiant.

- Conditions initiales

Initialement, le système « support+échantillon » est à température ambiante et la réaction de polymérisation n'a pas commencé.

$$\begin{cases} T_p(z,0) = T_1, & \forall z \\ T_s(z,0) = T_2, & \forall z \\ X_p(z,0) = 0^+, & \forall z \end{cases} \tag{7.10}$$

7.4.4 Système non linéaire à paramètres distribués

Le modèle s'écrit donc sous la forme d'un système non linéaire décrit par des équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_p(z,t)}{\partial t} = f_1(\nabla^2(T_p(z,t)), X(z,t)), & \forall z \in [0, e_p], & \forall t > 0 \\ \frac{\partial T_s(z,t)}{\partial t} = f_2(\nabla^2(T_s(z,t)), & \forall z \in]e_p, e_p + e_s[, & \forall t > 0 \\ \text{avec les conditions aux limites :} \\ \frac{\partial T_p(z,t)}{\partial z} = f_3(T_p(z,t), \phi_{ir}(t)), & z = 0, & \forall t > 0 \\ -\lambda_{c,p}\frac{\partial T_p(z,t)}{\partial z} = -\lambda_{c,s}\frac{\partial T_s(z,t)}{\partial z}, & z = e_p, & \forall t > 0 \\ \frac{\partial T_s(z,t)}{\partial z} = f_4((T_s(z,t)), & z = e_p + e_s, & \forall t > 0 \\ \text{avec les conditions initiales :} \\ T_p(z,t) = T_1, \quad T_s(z,t) = T_2 & \forall z \in [e_p + e_s], & t = 0 \\ X(z,t) = 0^+ & \forall z \in [0, e_p], & t = 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

Dans le modèle utilisé pour la stratégie de contrôle optimal, le terme $\phi_{reaction}$ sera négligé, l'énergie dégagée par la réaction étant négligeable par rapport à l'énergie apportée par le rayonnement infrarouge [Bombard 2007]. La non-linéarité du système intervient donc finalement uniquement dans les conditions aux limites, le terme différentiel à l'intérieur du domaine $]0, ep + es[$ étant un opérateur linéaire.

Par ailleurs, le système d'équations aux dérivées partielles est à commande frontière, ce qui signifie que la variable de commande apparaît dans les conditions limites du problème (ici, la condition à la limite supérieure).

Une des contraintes les plus importantes dans la stratégie de commande prédictive est le temps de calcul de la commande qui doit être inférieur à la période d'échantillonnage caractéristique de la mesure de sortie. Le modèle résolu dans la loi de commande doit donc l'être en un temps minimum. Une étude préliminaire à l'établissement de la commande concerne donc la résolution numérique du modèle non linéaire.

7.4.5 Méthodes numériques de résolution

7.4.5.1 Généralités

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont des équations différentielles mettant en jeu plusieurs variables indépendantes : des variables d'espace et de temps. Cependant, dans un problème d'évolution temporelle posé sur un domaine spatiale, la résolution à l'aide d'un calculateur est impossible sans qu'il soit transformé en un nombre fini d'inconnues.

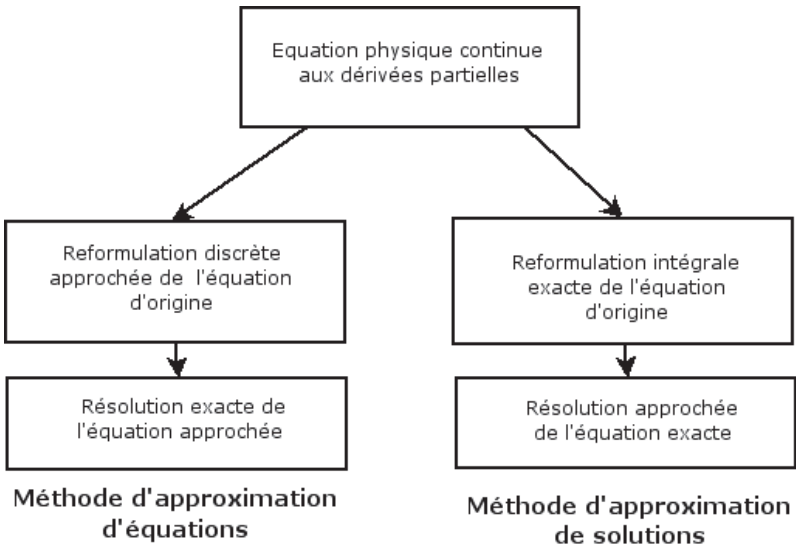


FIGURE 7.3 – Classification des méthodes de résolution numérique [Pourhiet 1988]

Les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles sont généralement classés en deux grandes familles radicalement opposées dans leurs principes (Figure 7.3) :

- la première famille est basée sur les équations continues discrétisées et résolues de proche en proche. L'opérateur différentiel est exprimé en un point en

fonction des inconnues aux points voisins, on parle de méthode d'approximation d'équations ou aux différences finies,

• la seconde regroupe les méthodes qui traitent le problème non pas par les équations approchées, mais directement par une approximation de la solution.

Nous avons utilisé la méthode des différences finies qui pour son avantage de préserver la structure du système, identique quelque soit le nombre de points de discrétisation, seul l'opérateur discrétisé est approché.

7.4.5.2 Discrétisation du bilan thermique par différences finies

La résolution numérique du modèle de cuisson des peintures en poudres s'effectue en transformant le problème initial de dimension infinie en un système d'équations aux dérivées ordinaires par une discrétisation spatiale. La transformation s'effectue ici par la méthode la méthode des différences finies. Considérons le problème défini par l'équation suivante :

$$L[y(z,t)] = m(x,t) \tag{7.12}$$

avec les conditions aux limites du type Dirichlet sur l'extrémité gauche :

$$y(z_{min},t) = q(x) \tag{7.13}$$

et la condition initiale :

$$y(z,0) = v(z) \tag{7.14}$$

dans lequel l'inconnue est la fonction y définie pour $(z,t) \in [z_{min}, z_{max}]\times]0,+\infty[$, l'opérateur L est un opérateur linéaire. Les conditions (7.13) et (7.14) sont compatibles :$v(z_{min}) = q(0)$.

La méthode des différences finies est un outil numérique basé sur l'équation locale qui est discrétisée et résolue de proche en proche. Le schéma aux différences finies établit un maillage de l'espace z et le divise en un nombre fini d'intervalles qui est le pas de discrétisation Δz, il peut être variable ou constant. Ces points de discrétisation se composent d'un nombre fini de points z_i du domaine $[z_{min}, \ldots, z_{max}]$. Notons $y_i(t) = y(z_i,t)$ la solution numérique obtenue aux point z_i. Sur l'axe discrétisé à pas constant Δz, les développements de Taylor au voisinage de z_i s'écrivent :

$$y(z_i+\Delta z,t) = y_{i+1}(t) = y_i(t)+\Delta z \left.\frac{\partial y(t)}{\partial z}\right|_{z=z_i} + \frac{\Delta z^2}{2} \left.\frac{\partial^2 y(t)}{\partial z^2}\right|_{z=z_i} + \frac{\Delta z^3}{6} \left.\frac{\partial^3 y(t)}{\partial z^3}\right|_{z=z_i} + \ldots \tag{7.15}$$

$$y(z_i-\Delta z,t) = y_{i-1}(t) = y_i(t)-\Delta z \left.\frac{\partial y(t)}{\partial z}\right|_{z=z_i} + \frac{\Delta z^2}{2} \left.\frac{\partial^2 y(t)}{\partial z^2}\right|_{z=z_i} - \frac{\Delta z^3}{6} \left.\frac{\partial^3 y(t)}{\partial z^3}\right|_{z=z_i} + ... \tag{7.16}$$

En limitant le développement à l'ordre 1, la dérivée première s'ecrit :

- les différences finies à droite ou progressive :

$$\left.\frac{\partial y(t)}{\partial z}\right|_{z=z_i} \approx \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{\Delta z} \tag{7.17}$$

- le schéma de différences finies à gauche ou rétrograde :

$$\left.\frac{\partial y(t)}{\partial z}\right|_{z=z_i} \approx \frac{y_i(t) - y_{i-1}(t)}{\Delta z} \tag{7.18}$$

- la différence, membre à membre, des équations (7.15) et (7.16) approchées à l'ordre 1, donne le schéma de différences finies centré :

$$\left.\frac{\partial y(t)}{\partial z}\right|_{z=z_i} \approx \frac{y_{i+1}(t) - y_{i-1}(t)}{2\Delta z} \tag{7.19}$$

Il est aussi possible d'obtenir les approximations pour des dérivées d'ordre supérieur en utilisant plus de points de discrétisation voins de z_i. En considérant le développement à l'ordre 2, la dérivée seconde en schéma centré s'écrit :

$$\left.\frac{\partial^2 y(t)}{\partial z^2}\right|_{z=z_i} \approx \frac{y_{i+1}(t) - 2y_i(t) + y_{i-1}(t)}{\Delta z^2} \tag{7.20}$$

Il existe également une formulation à gauche et à droite pour la dérivée seconde :

$$\left.\frac{\partial^2 y(t)}{\partial z^2}\right|_{z=z_i} \approx \frac{y_{i+2}(t) - 2y_{i+1}(t) + y_i(t)}{2\Delta z^2} \tag{7.21}$$

$$\left.\frac{\partial^2 y(t)}{\partial z^2}\right|_{z=z_i} \approx \frac{y_i(t) - 2y_{i-1}(t) + y_{i-2}(t)}{2\Delta z^2} \tag{7.22}$$

Dans [Bombard 2007], une étude numérique comparative a été effectuée. La conclusion était que la méthode des différences finies était la plus appropriée pour cet exemple.

En appliquant la méthode aux équations du modèle de différences finies aux équations du modèle (7.11) de cuisson des peintures. Les équations sont approchées sur un nombre fini de points de discrétisation $N_p + N_s - 1$ tel que N_p et N_s représentent le nombre de points de discrétisation dans la peinture et le support respectivement.

Appliquée au modèle (7.11), les équations issues de cette discrétisation sont :

$$
\begin{cases}
\frac{dT_{p_i}}{dt} = \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p \Delta z_1^2}(T_{p_{i-1}} - 2T_{p_i} + T_{p_{i+1}}), & \forall i \in]1, N_p[, \quad \forall t > 0 \\
\frac{dT_{s_i}}{dt} = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_s \Delta z_2^2}(T_{s_{i-1}} - 2T_{s_i} + T_{s_{i+1}}), & \forall i \in]1, N_s[, \quad \forall t > 0 \\
\text{avec les conditions aux limites :} & \\
\frac{dT_{p_1}}{dt} = \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p \Delta z_1^2}(T_{p_1} + 2T_{p_2}) + \frac{2h_1}{\lambda_p}[\alpha_p \phi_{ir} - \sigma \varepsilon_p (T_{p_1}^4 - T_1^4) & \\
\quad -h_{a_p}(T_{p_1} - T_1)], & \forall t > 0 \\
\frac{dT_{p_{N_p}}}{dt} = \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p \Delta z_1^2}[T_{p_{N_p-1}} - (1 + \frac{\lambda_s h_1}{\lambda_p h_2})T_{p_{N_p}} + \frac{\lambda_s h_1}{\lambda_p h_2} T_{s+1}] & \\
\quad -\rho_p \Delta H_0 \frac{dX_1}{dt}, & \forall t > 0 \\
\frac{dT_{s_{N_s}}}{dt} = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_s \Delta z_2^2}[(T_{s_{N_s-1}} - 2T_{s_{N_s}}) - \frac{2h_2}{\lambda_s}(\sigma \varepsilon_s (T_{s_{N_s}}^4 - T_2^4) & \\
\quad +h_{a_s}(T_{s_{N_s}} - T_2))], & \forall t > 0 \\
\text{avec les conditions initiales :} & \\
T_p(z,t) = T_1, \quad T_s(z,t) = T_2 & \forall z \in [e_p + e_s], \quad t = 0 \\
X(z,t) = 0^+ & \forall z \in [0, e_p], \quad t = 0
\end{cases}
\tag{7.23}
$$

7.4.6 Résolution numérique du modèle en boucle ouverte

Dans la section précédente, nous avons discrétisé les équations du système (7.11) du modèle étudié. Les paramètres du modèle sont issus de [Bombard 2007] et repris dans le tableau 7.1. Les équations aux dérivées ordinaires obtenu après discrétisation des équations aux dérivées partielles sont résolues numériquement en utilisant les routines d'intégration de Matlab. Nous faisons varier le nombre de points de discrétisation dans le film de peinture N_p et dans le support N_s. Les figures 7.4 et 7.5 représentent le taux de conversion et le profil de température à la face inférieure de support pour $\phi_{ir} = 23200$ W.m^{-2}. La figure 7.6 représente l'écart entre la sortie expérimentale et la sortie du modèle. L'utilisation de $N_p = N_s = 3$ points de discrétisation conduit à une représentation de la température de cuisson assez bonne puisque l'écart entre la température du procédé et du modèle est assez acceptable.

Paramètre	Définition	Valeur
α_p	coefficient d'absorption	0.5286 (−)
C_{p_p}	chaleur spécifique dans le film de peinture	1500 J.kg^{-1}.K^{-1}
C_{p_s}	chaleur spécifique dans le support	469 J.kg^{-1}.K^{-1}
λ_p	conductivité thermique dans le film de peinture	0.08 W.m^{-1}.K^{-1}
λ_S	conductivité thermique dans le support	44.5 W.m^{-1}.K^{-1}
ρ_p	masse volumique dans le film de peinture	1590 kg.m^{-3}
ρ_s	masse volumique dans le support	8237 kg.m^{-3}
ε_p	emissivité dans le film de peinture	0.9424 (−)
ε_s	emissivité volumique dans le support	0.5 (−)
h_p	coefficient d'échange convectif dans le film de peinture	5.7 W.K.m^{-2}
h_s	coefficient d'échange convectif dans le support	3 W.K.m^{-2}
A	facteur préexponentiel	4814400 s^{-1}
E	énergie d'activation	67722.25 J.mol^{-1}
m	constante	1.0752 (−)
n	constante	0.0966 (−)
R	constante des gaz parfaits	8.314 J.mol^{-1}.K^{-1}
σ	constante de Stefan-Bolzmann	5.67×10^{-4} J.mol^{-1}.K^{-1}

TABLEAU 7.1 – Paramètres de simulation pour la cuisson des peintures en poudre

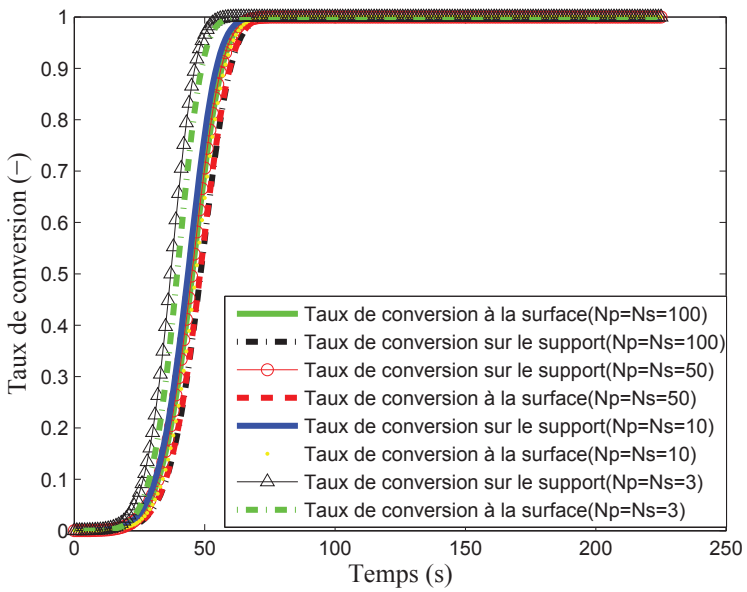


FIGURE 7.4 – Taux de conversion en boucle ouverte ($u = 23200$ W.m^{-2})

7.5 Problématique de contrôle pour l'identification

La stratégie de commande prédictive précédemment décrites dans le chapitre 3 a été appliquée à ce procédé de cuisson de peintures en poudres durant des travaux

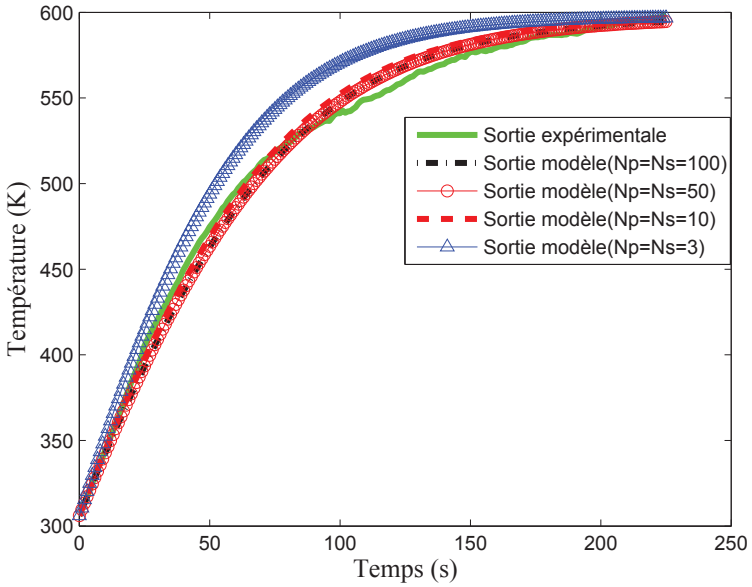


FIGURE 7.5 – Température de sortie en boucle ouverte ($u = 23200$ W.m^{-2})

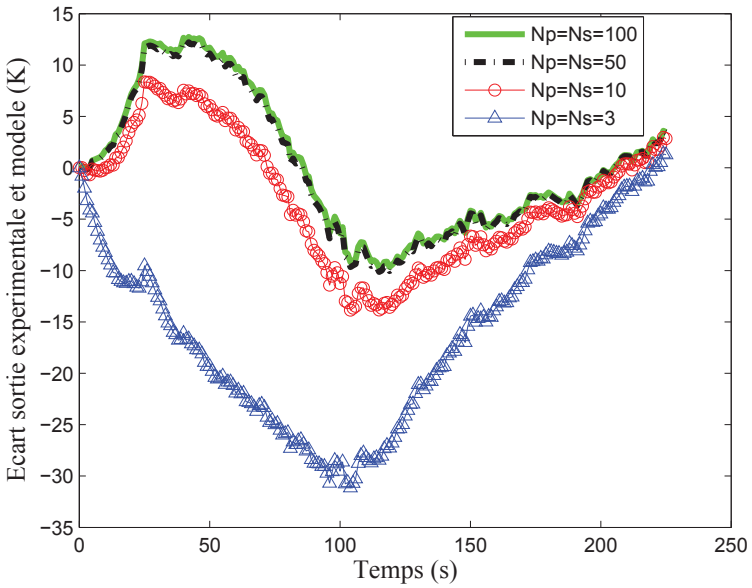


FIGURE 7.6 – Ecart entre la sortie expérimentale et celle du modèle en boucle ouverte ($u = 23200$ W.m^{-2})

de thèse [Bombard 2007] dans l'objectif de conduite du cycle de cuisson.

Dans ce contexte, notre étude s'est penché ici sur le contrôle pour l'optimisation de la cuisson de peintures dans un problème d'identification en ligne du paramètre principal du modèle a priori inconnu.

Nous nous sommes intéressés à trouver la commande optimale $\phi_{ir}(t)$ qui maximise la sensibilité de la mesure $T_s(e_p+e_s,t)$ par rapport au paramètre α_p, tel que α_p est identifié d'une façon optimale. En effet, une étude à conclure que le paramètre qui influe plus sur la cinétique de cuisson de peinture est le coefficient d'absorption α_p qui est difficile à identifier et est modélisé constant dans la loi de commande [Bombard 2010].

Le problème de contrôle pour l'identification est donc de trouver un profil optimal de flux infrarouge $\phi_{ir}(t)$ appliqué au procédé de cuisson des peintures en poudre et à l'observateur qui, d'une part, maximise la sensibilité de la sortie de procédé mesurée $T_s(e_p + e_s, t)$ par rapport au coefficient d'absorption α_p, et d'autre part d'assurer la conduite de système tout en tenant compte des divers contraintes de fonctionnement : le flux infrarouge calculé doit être physiquement admissible et le film de peinture doit être acceptable en terme de qualité.

7.5.1 Synthèse de l'observateur

Il s'agit ici de mettre en œuvre les observateurs donnés dans le chapitre 2 pour l'estimation du paramètre α_p et les températures (états) non mesurées à partir de la mesure de température disponible sur la face inférieure du support. Toutefois, avant d'utiliser ces observateurs, une étude est nécessaire sur l'observabilité du système global et sur une synthèse de l'observateur permettant l'estimation simultanée du coefficient d'absorption et des températures.

Nous reprenons dans cette section le modèle discrétisé de cuisson de peinture (7.23). La seule mesure disponible est celle de la température en bas de support $T_s(e_p + e_s, t)$. Notre objectif consiste à utiliser cette mesure pour estimer simultanément le coefficient d'absorption α_p ainsi que les températures dans le film de peinture et support (T_s et T_p) non mesurées et cela en utilisant la synthèse des observateurs.

L'étude de l'observabilité du système global nous a mené à faire une rotation au modèle (7.23) et à augmenter le vecteur d'état pour que le système global puisse être observable. Nous obtenons alors le nouveau système écrit sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\frac{dT_{s_{N_s}}}{dt} = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_s \Delta z_2^2}[(T_{s_{N_s-1}} - 2T_{s_{N_s}}) - \frac{2h_2}{\lambda_s}(\sigma\varepsilon_s(T_{s_{N_s}}^4 - T_2^4) & \\
\quad +h_{a_s}(T_{s_{N_s}} - T_2))], & \forall t > 0 \\
\frac{dT_{s_i}}{dt} = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_s \Delta z_2^2}(T_{s_{i-1}} - 2T_{s_i} + T_{s_{i+1}}), & \forall i \in]1, N_s[, \quad \forall t > 0 \\
\frac{dT_{p_{N_p}}}{dt} = \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p \Delta z_1^2}[T_{p_{N_p-1}} - (1 + \frac{\lambda_s h_1}{\lambda_p h_2})T_{p_{N_p}} + \frac{\lambda_s h_1}{\lambda_p h_2} T_{s_{N_p+1}}] & \\
\quad -\rho_p \Delta H_0 \frac{dX_1}{dt}, & \forall t > 0 \\
\frac{dT_{p_i}}{dt} = \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p \Delta z_1^2}(T_{p_{i-1}} - 2T_{p_i} + T_{p_{i+1}}), & \forall i \in]1, N_p[, \quad \forall t > 0 \\
\frac{dT_{p_1}}{dt} = \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p \Delta z_1^2}(T_{p_1} + 2T_{p_2}) + \frac{2h_1}{\lambda_p}[\alpha_p \phi_{ir} - \sigma\varepsilon_p(T_{p_1}^4 - T_1^4) & \\
\quad -h_{a_p}(T_{p_1} - T_1)], & \forall t > 0 \\
\frac{d\alpha_p}{dt} = 0, & \forall t > 0
\end{array}\right. \tag{7.24}$$

On remarque que le système (7.24) est sous la forme (2.6) affine en l'état. Par conséquent, l'estimation de α_p et de (T_s, T_p) peut être obtenue en utilisant un observateur donné par [Hammouri 1990], où le paramètre α_p rajouté au vecteur d'état est considéré avec un état dont la dynamique est nulle. L'observateur s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot{\hat{x}}(t) = A(u)\hat{x}(t) + \varphi(y, \hat{x}) - S_{\theta_o}^{-1} C^T (C\hat{x} - y) \\
\dot{S}_{\theta_o} = -\theta_o S_{\theta_o} - A^T(u) S_{\theta_o} - S_{\theta_o} A(u) + C^T C
\end{array}\right. \tag{7.25}$$

où $\hat{x}(t) = (\hat{T}_{s_i}, \hat{T}_{p_i}, \hat{\alpha}_p)^T$ est l'estimation de $x(t) = (T_{s_i}, T_{p_i}, \alpha_p)^T$, $u(t) = \phi_{ir}(t)$ et $y(t) = T_s(e_p + e_s, t) = T_{s_{N_s}}(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie, où :

$$A(u) = \begin{pmatrix}
0 & 2\frac{\lambda_s}{\rho_s C_s h_2^2} & 0 & \cdots & & 0 \\
\vdots & 0 & \frac{\lambda_s}{\rho_s C_s h_2^2} & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p h_2^2} \frac{2\Delta z_1^2}{\lambda_p} u \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

$$\varphi(y,\hat{x}) = \begin{pmatrix} -2\frac{\lambda_s}{\rho_s C_s h_2^2}\frac{2\Delta z_2}{\lambda_s}\sigma_s(y^4 - T_2^4) \\ \frac{\lambda_s}{\rho_s C_s h_2^2}(-2\hat{T}_{sN_s-1} + y) \\ \vdots \\ -(1+\frac{\lambda_s h_1}{\lambda_p h_2})\hat{T}_{p_{N_p}} + \frac{\lambda_s h_1}{\lambda_p h_2}\hat{T}_{s_{N_p+1}} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p h_1^2}(-2\hat{T}_{p2} + \hat{T}_{p3}) \\ \vdots \\ \frac{\lambda_p}{\rho_p C_p h_1^2}(-2\hat{T}_{p1} + 2\hat{T}_{p2} - 2\frac{2\Delta z_1}{\lambda_p}\sigma_p\varepsilon_p(\hat{T}_{p_1}^4 - T_1^4) + h_{ap}(\hat{T}_{p_1} - T_1)) \end{pmatrix}$$

et :

$$C = (1\ 0\ \ldots\ 0)$$

7.5.2 Formulation du problème d'optimisation

L'objectif du contrôle optimal est de déterminer le flux infrarouge $\phi_{ir}(t)$ qui maximise la sensibilité $\frac{\partial T_s(e_p+e_s)}{\partial \alpha_p}$, du coefficient d'absorption α_p par rapport à la température de support $T_s(e_p + e_s)$ mesurée. Le tout, en respectant la contrainte d'amplitude du flux infrarouge ainsi que la limitation en température de la sortie mesurée. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{cases} \min\limits_{\tilde{\phi}_{ir}} J(\tilde{\phi}_{ir}) = \sum\limits_{j=k+1}^{k+N_p} \left(\dfrac{1}{\left(\frac{\partial T_s(e_p+e_s)}{\partial \alpha_p}(j)\right)^2 + \kappa^2} \right) \\ \tilde{\phi}_{ir} = [\phi_{ir}(k), ..., \phi_{ir}(k+N_c-1)]^T \end{cases} \tag{7.26}$$

avec des limitations sur l'amplitude de la commande :

$$\phi_{irmin} \leq \phi_{ir}(j) \leq \phi_{irmax}\ ,\ \forall\ j \in [k, k+N_p-1] \tag{7.27}$$

et la température de support $T_s(e_p + e_s)$ doit être limitée pour des questions de qualité du produit final :

$$T_s(e_p + e_s)(.) \leq T_s(e_p + e_s)^{max} \tag{7.28}$$

7.6 Résultats de simulation

Les deux approches d'identification détaillées dans le chapitre 5 ont été appliquées, une basée sur le modèle non linéaire ($POPSCI_{NL}$), l'autre utilisant un modèle linéaire temps variant ($POPSCI_{LTV}$).

7.6.1 Conditions de simulation

Les simulations ont été réalisées dans les conditions suivantes :

• la période d'échantillonnage T_e vaut 1s (ce qui rend le temps de calcul critique vis-à-vis de la dynamique du procédé),

• pour la résolution numérique du modèle, différentes simulations utilisant la méthode des différences finies ont été effectuées. Le procédé est simulé avec une discrétisation de 3 points dans le film peinture et 3 points dans le support métallique. Ce choix parait un nombre optimal de points assurant une discrétisation optimale, dans le sens que si on prend plus de points, la solution du modèle n'est gère améliorée alors que le temps de calcul augmente fortement,

• l'horizon de commande N_c est égal à 1,

• l'horizon de prédiction N_p est fixé à 10,

• les bornes des contraintes sur l'amplitude de la commande sont les suivantes :

$$0 \;\; W.m^{-2} \leq \phi_{ir}(t) \leq 23200 \;\; W.m^{-2} \tag{7.29}$$

• concernant les contraintes sur la sortie, la température maximale à ne pas dépasser :

$$T_s(e_p + e_s)^{max} = 420 \; K \tag{7.30}$$

• les paramètres du modèle, du procédé simulé et du paramètre à identifier α_p sont donnés dans le tableau 7.1,

• les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} \text{pour le procédé simulé :} \\ \\ T_{p_i}(0) = 306.12 \text{ K} \\ T_{s_i}(0) = 306.12 \text{ K} \\ \\ \text{pour l'observateur et le modèle :} \\ \\ \hat{T}_{p_i}(0) = 299 \text{ K} \\ \hat{T}_{s_i}(0) = 299 \text{ K} \\ \hat{\alpha}_p(0) = 0.42 \end{cases} \tag{7.31}$$

• les contraintes portant sur l'amplitude de la commande posées dans (7.29) sont traitées en utilisant une transformation hyperbolique ;

• la contrainte restante est introduite à l'aide d'une fonction de pénalités externes H.

• les simulations sont effectuées sous Matlab R14 pour Windows XP sur un Pentium(R)4 CPU cadencé à 2.80Ghz avec 1Go de mémoire vive.

7.6.2 Estimation en boucle ouverte

Les simulations sont effectuées en boucle ouverte, avec deux entrées différentes : la première, où le flux infrarouge ϕ_{ir} est pris constant ($u = 5000$ W.m^{-2}) et la deuxième, où le flux infrarouge évolue sous forme d'un système de premier ordre (Figure 7.7). Une erreur sur la valeur initiale du coefficient d'absorption a été introduite lors de la simulation pour observer son comportement vis-à-vis l'estimation.

a) Mesures non bruitées :

Le paramètre de réglage choisi θ_o est pris égal 165. La courbe de la figure 7.8 présente l'estimation de α_p délivrée par l'estimateur comparée avec sa valeur de procédé simulé. Nous pouvons observer que les valeurs estimées convergent rapidement vers les valeurs réelles (Figures 7.9 et 7.8). La figure 7.10 montre que la sensibilité est plus forte avec le premier ordre. Par ailleurs, l'estimation fonctionne donc bien sans bruit de mesures.

b) Mesures bruitées :

Pour se placer dans le cadre de mesures réalistes, la mesure $T_s(e_p + e_s)$, issue du procédé simulé, a été bruitée avant son utilisation par l'estimateur, via un bruit

blanc de moyenne nulle et d'espérance égale à 3% de la mesure initiale (voir figures 7.11 et 7.12). De plus, nous avons intentionnellement introduit une erreur (égale à

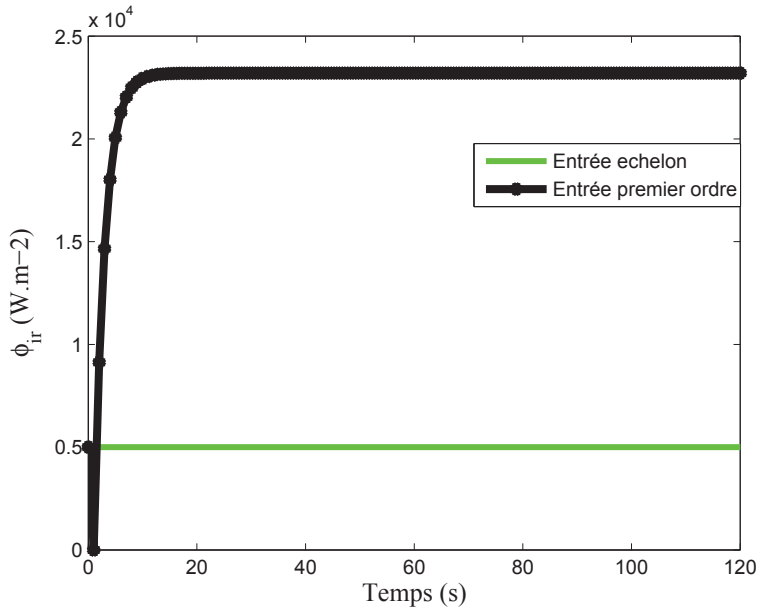


FIGURE 7.7 – Flux infrarouge, en boucle ouverte

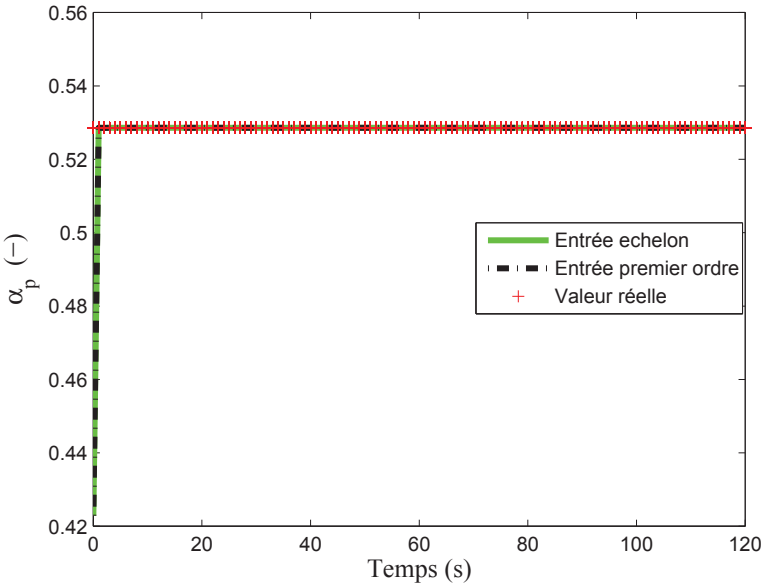


FIGURE 7.8 – Estimation du coefficient d'absorption, en boucle ouverte

20%) sur la condition initiale du paramètre à estimer, et une erreur de 3% sur des températures à estimer. Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 7.11 et 7.12

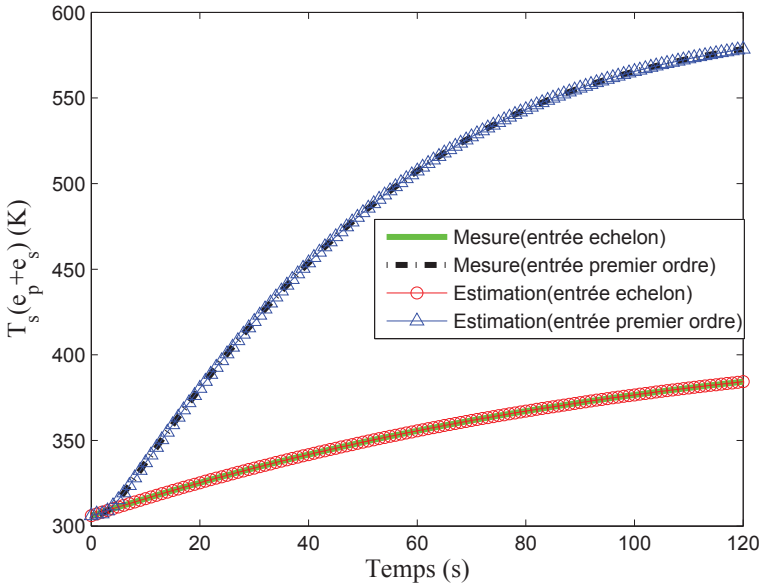


FIGURE 7.9 – Température face inférieure du support, en boucle ouverte

où les variables estimées sont comparées à leur "vraies" valeur, issues du procédé simulé avec uniquement $u = 5000$ W.m^{-2}. Nous remarquons dans les deux cas que l'estimée de α_p converge vers sa valeur réelle. Notons également la bonne concordance entre les estimées de α_p et (T_s, T_p) et leurs valeurs données par le procédé simulé.

7.6.3 Identification optimale basée sur le modèle non linéaire

Dans cette section, nous avons utilisé pour les différents simulations les conditions de simulation définies précédemment et la structure de contrôle pour identification basé sur la commande prédictive par modèle interne non linéaire définie dans le chapitre 4 et par la méthode de résolution donnée dans le chapitre 5 de mise en œuvre de l'approche proposée. Pour l'optimisation, nous avons opté pour la routine fmincon de la boîte à outils d'Optimisation de Matlab (Toolbox Optimization).

Afin de tester les performances de l'algorithme d'identification proposé, nous avons effectué deux simulations dans deux conditions différentes :

- la première : la maximisation recherchée de sensibilité n'est soumis qu'à la contrainte d'amplitude sur la commande, l'évolution de la sortie est libre.

- la deuxième : idem première condition, mais la sortie doit désormais rester en dessous d'un maximum fixé. Ceci afin de se placer dans le cas général de l'algorithme d'optimisation sous contraintes.

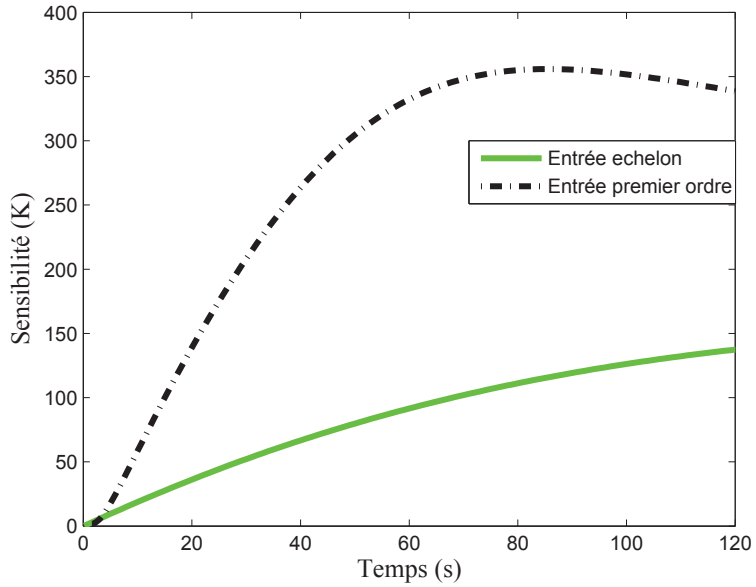


FIGURE 7.10 – Sensibilité de la température face inférieure du support par rapport au coefficient d'absorption, en boucle ouverte

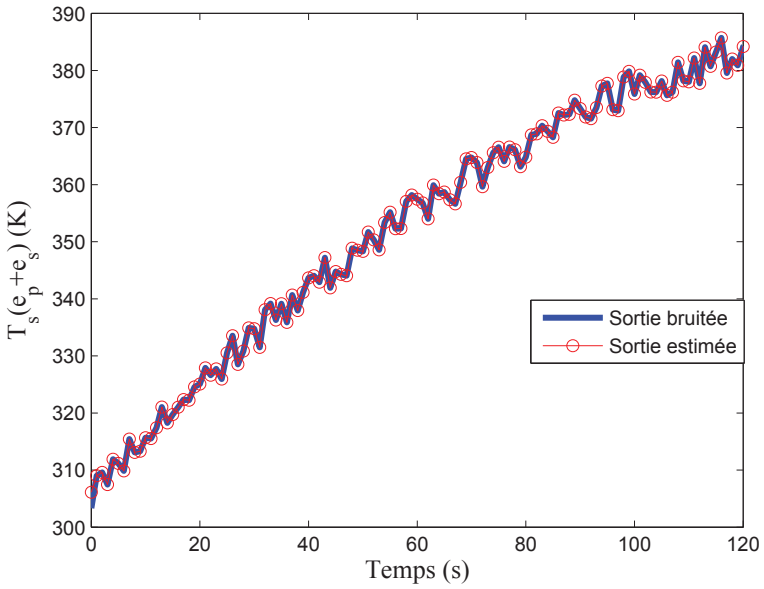


FIGURE 7.11 – Température face inférieure du support, avec mesure bruitée, en boucle ouverte ($u = 5000$ W.m^{-2})

La figure 7.14 montre que la prise en compte de la contrainte sortie réduit la valeur de la sensibilité maximisée. En termes de commande, cette maximisation se traduit sur la figure 7.15 où l'amplitude de la commande reste limitée en respectant

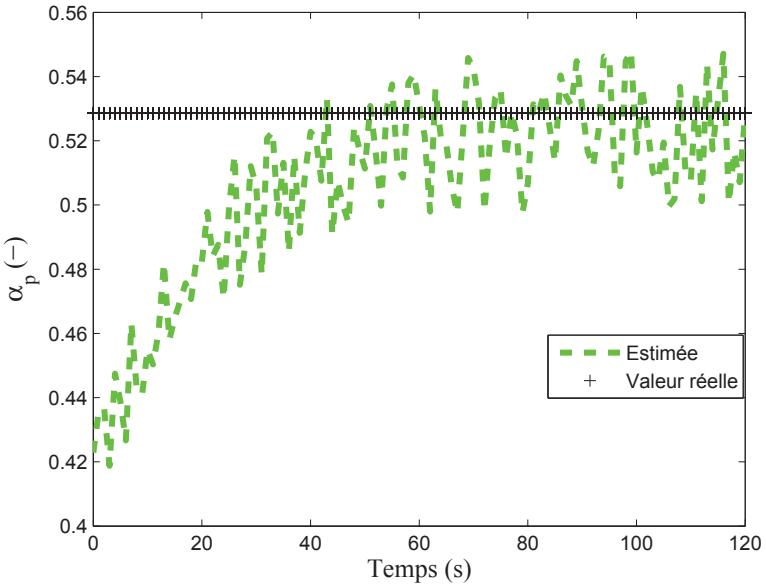


FIGURE 7.12 – Estimation du coefficient d'absorption, avec mesure bruitée, en boucle ouverte ($u = 5000$ W.m^{-2})

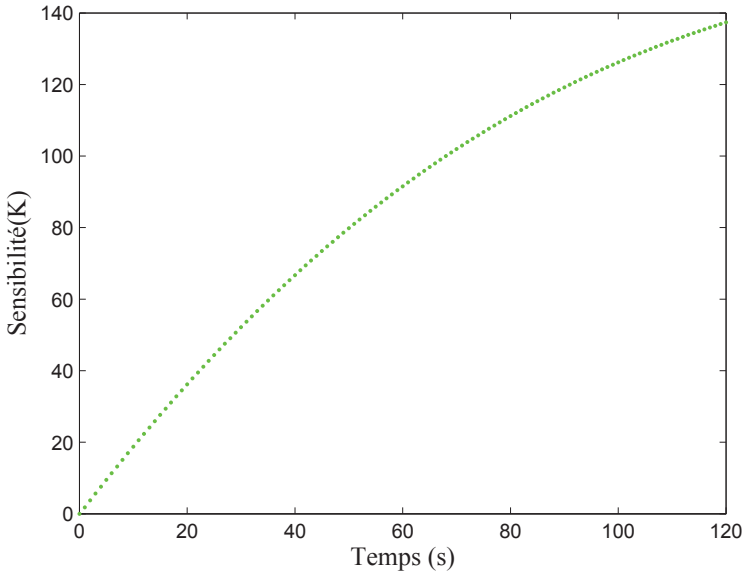


FIGURE 7.13 – Sensibilité de la température face inférieure du support par rapport au coefficient d'absorption, avec mesure bruitée, en boucle ouverte ($u = 5000$ W.m^{-2})

les contraintes. Dans le cas où la sortie est contrainte (deuxième cas), après avoir suivi pendant les 70 secondes le même comportement que dans le cas précédent, la commande diminue en amplitude pour aller se stabiliser à une valeur constante. Ceci est dûe à la prise en compte de la contrainte sortie qui arrive à saturation à partir de

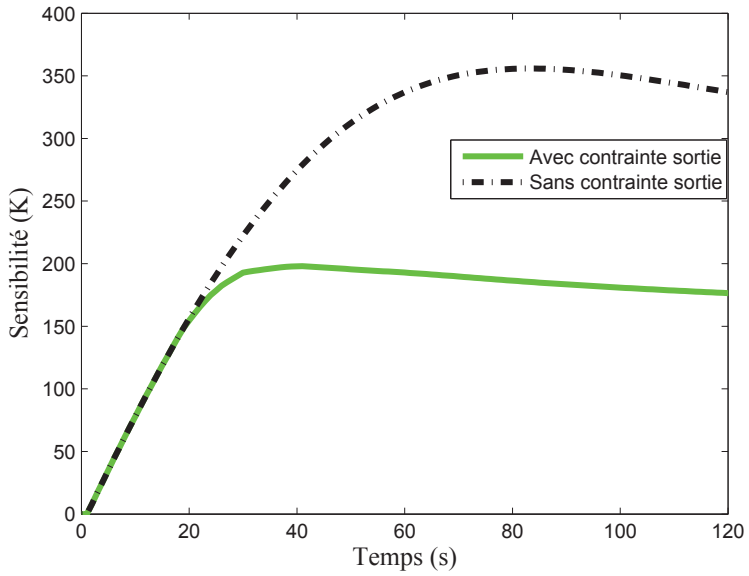


FIGURE 7.14 – Sensibilité de la température face inférieure du support par rapport au coefficient d'absorption, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

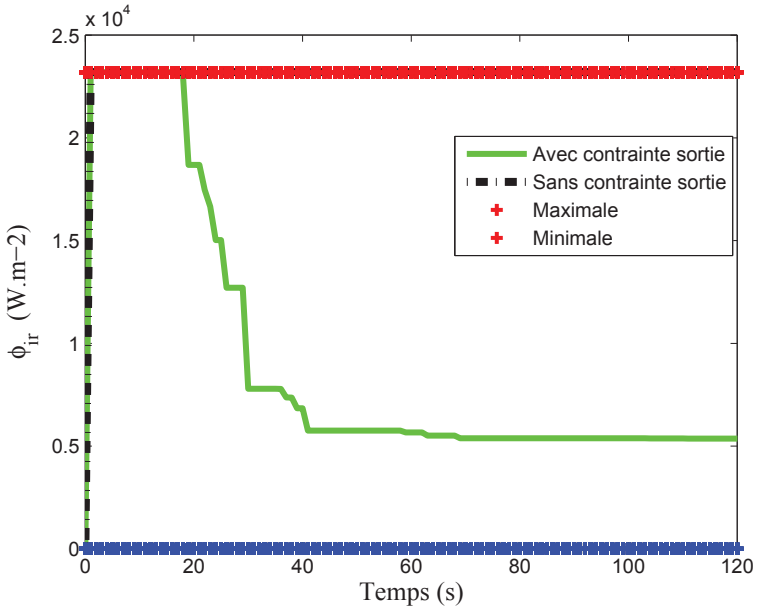


FIGURE 7.15 – Flux infrarouge optimal pour l'identification, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

80 secondes (Figure 7.16). En termes d'identification, dans les deux cas, la commande appliquée au procédé et à l'observateur permet d'estimer le coefficient d'absorption avec une vitesse de convergence élevée, et ce malgré une erreur initiale d'estimation de 20% (Figure 7.17). La convergence vers cette valeur est assez similaire dans les

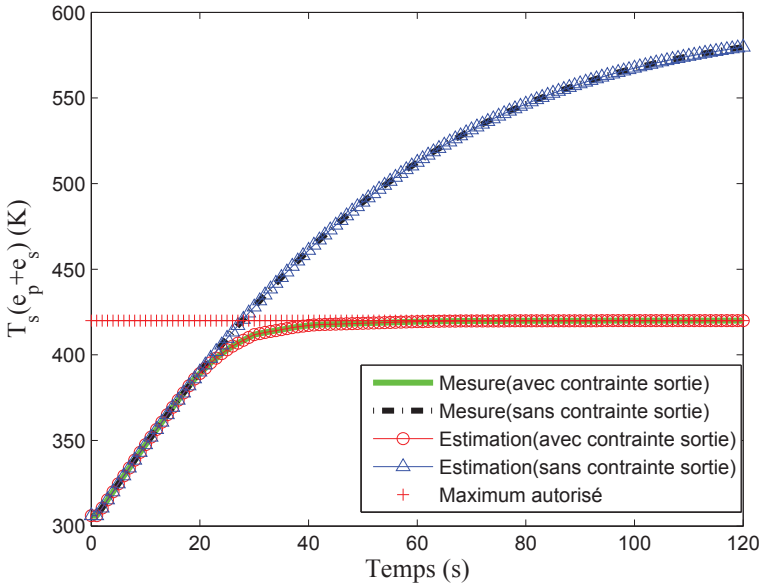


FIGURE 7.16 – Température face inférieure du support, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

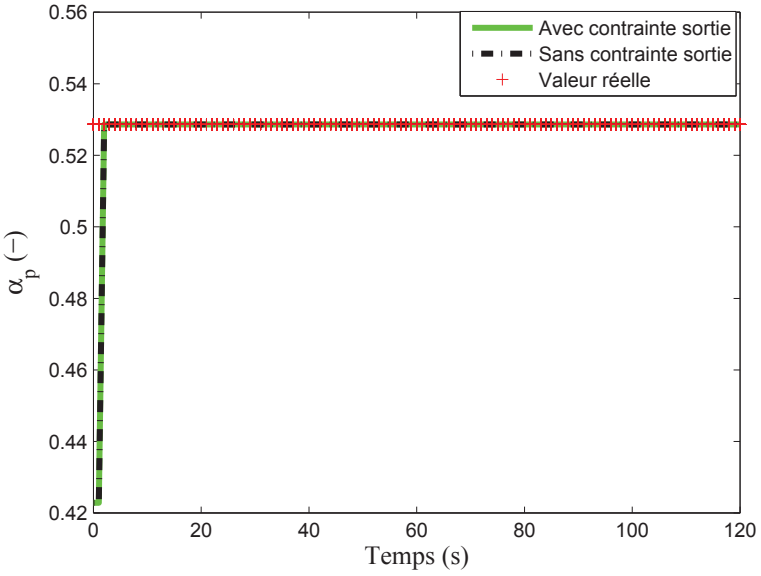


FIGURE 7.17 – Estimation du coefficient d'absorption, en boucle fermée, modèle de commande non linéaire

deux cas, alors que le cas deux permet de garantir un fonctionnement optimal (pour l'identification) désiré du procédé de cuisson, via la contrainte de sortie qui est posée et vérifiée.

7.6.4 Identification optimale basée sur le modèle linéaire temps variant

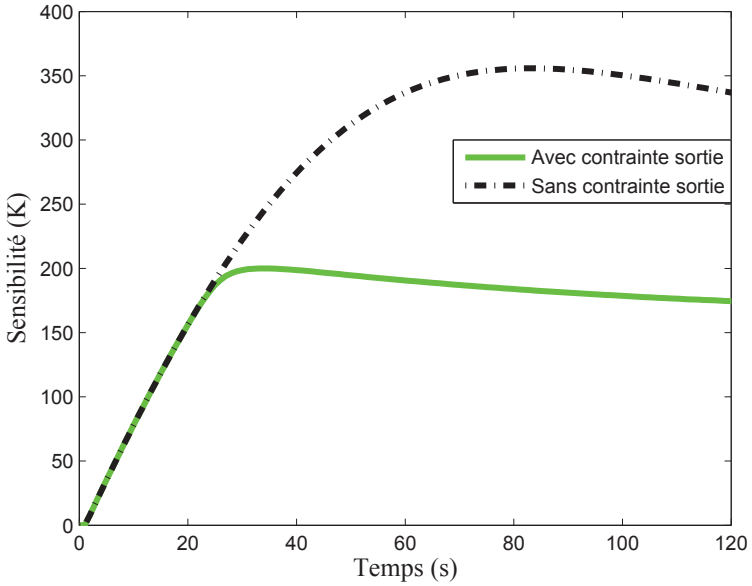


FIGURE 7.18 – Sensibilité de la température face inférieure du support par rapport au coefficient d'absorption, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

Pour la résolution de problème d'identification, dont la commande prédictive est basée sur le modèle linéaire autour d'un comportement nominal, on utilise les mêmes conditions initiales considérées dans l'approche de commande prédictive non linéaire pour identification. La linéarisation autour des modèles (M_0) et $(M_{x_m\theta 0})$ s'effectue hors ligne avec les conditions initiales (7.31) et pour :

$$\begin{cases} \phi_{ir0}(t) = 2900 \quad W.m^{-2} \\ \theta_0 = 0.5339 \\ \frac{\partial T_s(e_p+e_s)_0}{\partial \alpha_{p0}}(0) = 0 \end{cases} \tag{7.32}$$

Les résultats sont donnés sur les figures de 7.18 à 7.21. Ces résultats montrent la performance de l'algorithme d'identification utilisé pour les deux cas traités dans l'approche non linéaire. Nous remarquons aussi que les résultats sont proches de ceux trouvés en non linéaire.

7.6.5 Comparaison des deux approches de commande pour l'identification

Afin de comparer les résultats obtenus avec les deux stratégies de commande, nous allons nous intéresser aussi au temps de calcul occupé par l'optimisation et la

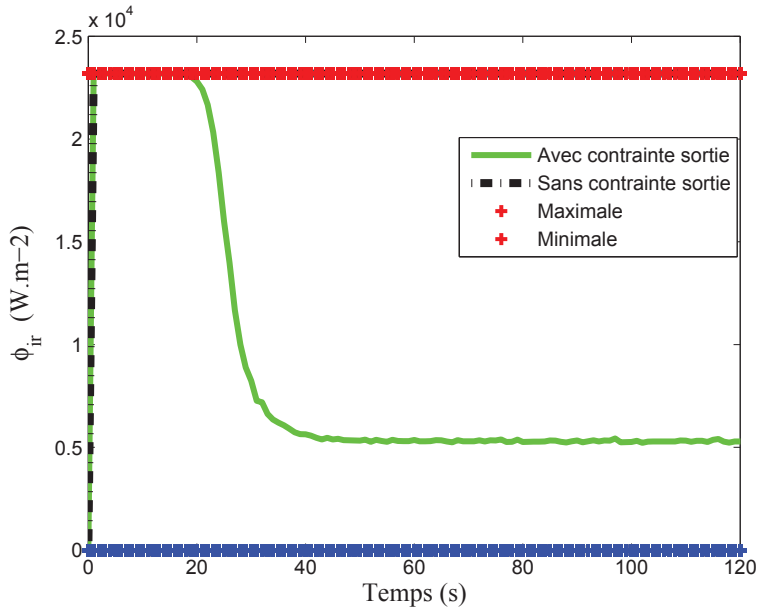


FIGURE 7.19 – Flux infrarouge optimal pour l'identification, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

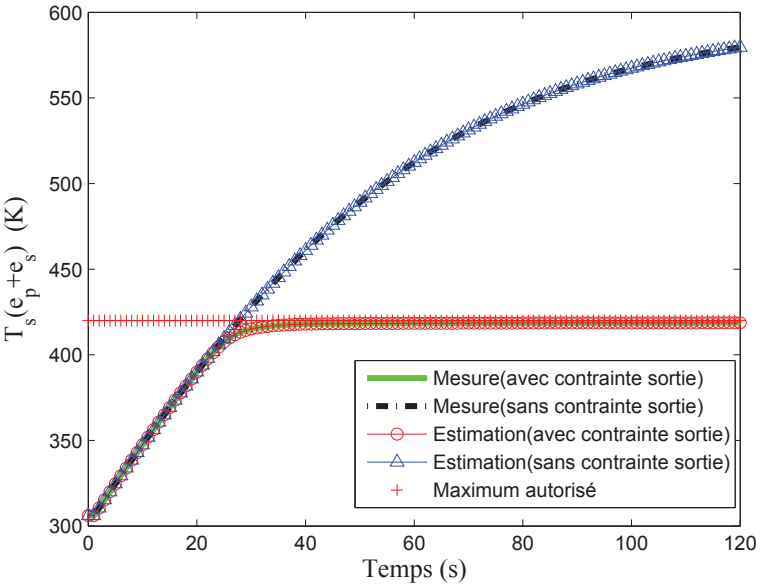


FIGURE 7.20 – Température face inférieure du support, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

résolution des modèles. Ce paramètre est important dans le cadre d'une application en ligne. Le tableau 7.2 montre le temps de calcul moyen ainsi que le temps de calcul maximum. La figure 7.22 montre le temps de calcul nécessaire aux deux approches

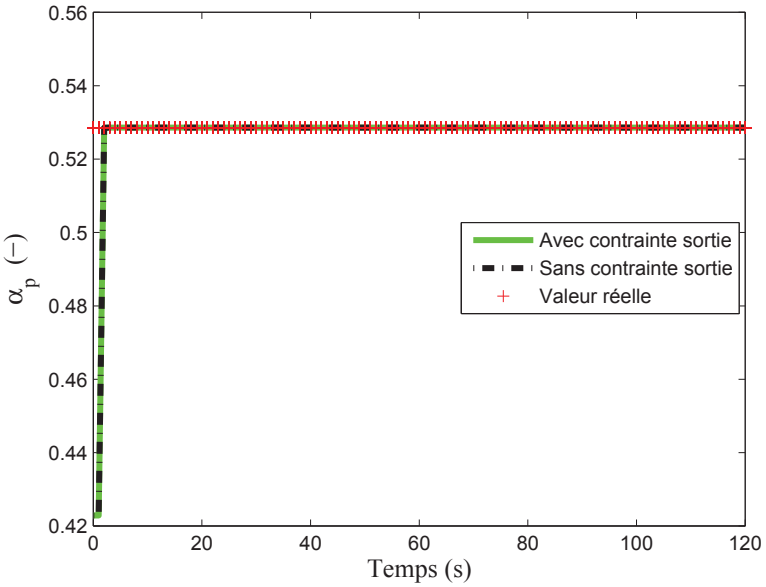


FIGURE 7.21 – Estimation du coefficient d'absorption, en boucle fermée, modèle de commande linéaire temps variant

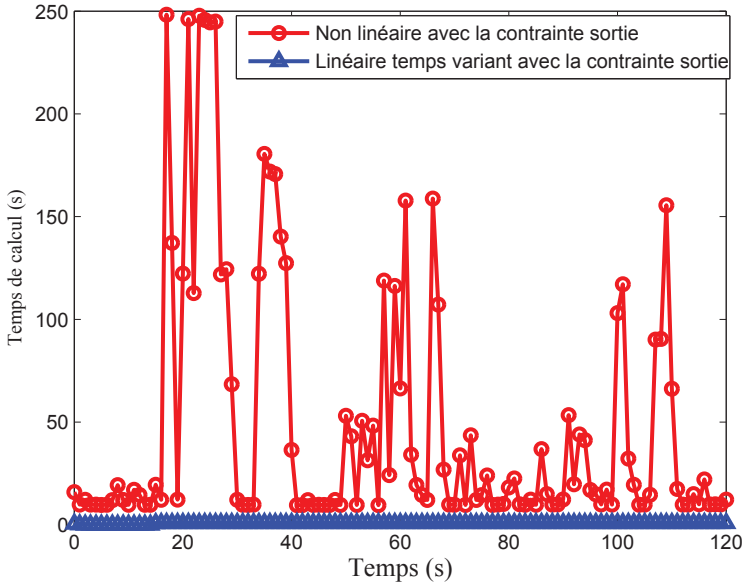


FIGURE 7.22 – Temps nécessaire au programme pour résoudre le problème d'identification optimale, comparaison entre les approches non linéaire et linéaire temps variant

d'identification optimal tout au long de la simulation. L'utilisation d'un modèle linéaire temps variant à la place d'un modèle non linéaire permet de diminuer le temps de calcul d'un facteur 250. D'autre part, pour les deux approches, le signal de sensi-

bilité de la sortie par rapport au paramètre garantit le fonctionnement optimal pour l'identification, sous présence de la contrainte de sortie, qui est vérifiée. Cependant, le temps de calcul maximal pour l'approche de commande linéaire temps variant étant toujours inférieur à la période d'échantillonnage, cette loi de commande est implémentable en ligne. Par contre, la mise en œuvre expérimentale de l'algorithme d'identification utilisant le modèle de commande non linéaire est impossible à ce jour. Au niveau des résultats d'estimation et de commande, les deux approches sont assez similaires. Pour ce procédé, la méthode linéaire est donc recommandée.

Loi de commande	Temps de calcul moyen (s)	Temps de calcul maximum (s)
Non linéaire	38,29	250,83
Linéaire temps variant	0,60	0,93

TABLEAU 7.2 – Comparaison des résultats obtenus pour le procédé de cuisson des peintures avec les deux lois de commande

7.7 Conclusion

Les résultats de simulation ont été établis sur un modèle de procédé de cuisson de peinture non linéaire régi par des équations aux dérivées partielles non linéaires et à commande frontière. Ce modèle complexe a permis de valider l'algorithme d'identification optimale basé sur le modèle de commande non linéaire, ainsi que l'algorithme d'identification optimale basé sur le modèle linéaire temps variant. Nous avons pu comparer le temps de calcul ainsi que la qualité des résultats obtenus avec les deux stratégies de contrôle optimal dans le cadre d'une identification en ligne. Dans les deux cas, les deux approches sont exploitable en termes de simulation et d'estimation. Seule l'approche linéaire temps variant pour le moment peut être utilisée en expérience car le temps de calcul occupé par l'algorithme de commande est critique pour cette application.

Conclusions et Perspectives

Conclusion et perspectives

L'objectif principal de ce travail a été d'apporter une nouvelle contribution quant à l'approche de contrôle optimal en boucle fermée pendant la phase d'identification. Il s'agissait de trouver la commande à appliquer pendant l'expérience et qui permettait d'optimiser un critère qui est fonction des sensibilités des sorties par rapport aux paramètres du modèle à identifier. En ce sens, c'est une approche permettant d'automatiser et d'optimiser le design d'expérience, tout en réalisant conjointement l'identification d'un paramètre du modèle spécifié.

Cette approche couplant un contrôleur prédictif et un estimateur a permis de déterminer une méthodologie assurant d'une part, le mode de fonctionnement pour la conduite de système sous la limitation des contraintes physiques d'exploitation et d'autre part, d'assurer l'identification optimale en ligne des paramètres inconnus du modèle. En vue d'un contrôle optimal, la commande prédictive par modèle interne a été retenue, et dans l'objectif d'une identification, des observateurs ont été adoptés pour une estimation des paramètres du modèle. Les deux problèmes, le contrôle optimal et l'identification, ont été couplés comme problème global de commande. Deux approches ont été déduites : la première basée sur une approche totalement non linéaire au niveau des modèles, la seconde basée sur une linéarisation des modèles non linéaires, afin de diminuer le temps de calcul nécessaire pour calculer la commande, aidant à l'implémentation en ligne de cet algorithme. Diverses contraintes ont pu être prises en compte : celles classiques sur l'entrée et la sortie (aussi l'état qui est estimé ici), mais aussi celles sur les contraintes d'observabilité.

L'approche d'identification optimale a finalement été appliquée à deux exemples issus du Génie des Procédés. Ces exemples ont permis de vérifier en simulation, l'efficacité et la faisabilité de l'approche :

- La première application concernait le réacteur chimique pour une réaction de saponification, un modèle non linéaire constitué par une équation aux dérivées ordinaires est considéré. On a montré que pour les deux approches adoptées de l'identification, les résultats sont quasi-identiques. Les approches étaient implémentables en ligne puisque le temps de calcul n'etait pas critique,

- Pour la deuxième application, il s'agissait de procédé radiatif de cuisson des peintures en poudre. Un modèle non linéaire était décrit par des équations aux dérivées partielles à commande frontière. Vu les résultats obtenus, nous

avons constaté que l'approche linéaire temps variant était plus intéressante tandis que l'approche non linéaire était très gourmande en temps de calcul, d'où l'intérêt d'utiliser la première pour l'implémentation en temps réel.

Les perspectives de ce travail sont assez nombreues et peuvent se résumer comme suit :

• Etudes de cas et applications de l'approche pour les systèmes non uniformément observables, où le problème principal va être la prise en compte de nouvelles contraintes issues de l'étude de l'observabilité.

• Améliorer l'approche pour le cas des mesure bruitées, afin de diminuer l'impact du bruit sur les sorties et les paramètres. Par exemple, l'utilisation de l'observateur à horizon glissant pour atténuer l'impact du bruit.

• Développer l'approche pour des paramètres temps variants, dans le cas d'une commande adaptative.

• Application sur des EDP où le nombre de points est plus élevé.

• Application pour un cas d'étude plus complexe où l'identification comporte un cas d'étude multi-entrées multi-sorties et multi-paramètres.

• Etude théorique de la faisabilité et de la stabilité du système ainsi bouclé.

• Applications pratiques : réalisation d'un logiciel en vue de son utilisation pour le design optimal d'expériences couplé à l'identification paramétrique.

Annexes

Annexe A

Le gradient de sensibilité $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}$ donne les informations contenues dans les mesures expérimentales. Plus précisément, ce gradient apparaît dans la matrice bien connu de l'information de Fisher ($\mathcal{M}$) :

$$\mathcal{M} = \int_0^{t_f} \frac{\partial y_p(\tau)^T}{\partial \theta} \, Q^{-1} \, \frac{\partial y_p(\tau)}{\partial \theta} d\tau \tag{7.33}$$

où Q est une matrice de pondération (le plus souvent sous forme diagonale), où chaque élément est inversement proportionnel à la covariance du bruit sur les mesures et $\theta = \theta_i, ..., \theta_l$ est le vecteur de paramètres à identifier.

Plusieurs critères de la conception optimale, chacun d'eux est basé sur une fonction scalaire de la matrice d'information de Fisher, ont été proposés dans la littérature pour mesurer la qualité de l'estimation des paramètres (par exemple, [Munack 1989] [Walter 1997]). Tous les critères de conception sont basés sur la matrice de l'information de Fisher.

Le plan d'expérience décrit une région commune où les paramètres peuvent être tous estimés. Cette région constitue un ellipsoïde qui est l'interprétation géométrique des critères définie par la matrice d'information de Fisher. Ces critères sont :

- critère-A : Réduisant au minimum la longueur moyenne de demi-axe de l'ellipsoïde respectivement la variance moyenne des paramètres. Ceci maximise la trace de la matrice d'information ou réduit au minimum la matrice de variance-covariance

$$\phi_A(\mathcal{M}) = \frac{1}{l} trace(\mathcal{M}) \tag{7.34}$$

- critère-E : Maximise la plus petite valeur propre de la matrice d'information ou réduit au minimum la plus grande valeur propre de la matrice de variance-covariance.

$$\phi_E(\mathcal{M}) = \lambda_{max}(\mathcal{M}) \tag{7.35}$$

où λ_{max} dénote la plus grande valeur propre du $\mathcal{M}$.

– critère-E-modifié :

$$\phi_{E-modifi}(\mathcal{M}) = \frac{\lambda_{max}(\mathcal{M})}{\lambda_{min}(\mathcal{M})} \tag{7.36}$$

– critère-D : Minimisation du volume de l'ellipsoïde. Ce qui maximise le déterminant de la matrice d'information ou réduit celui de la matrice de variance-covariance.

$$\phi_D(\mathcal{M}) = (det\mathcal{M})^{\frac{1}{l}} \tag{7.37}$$

le critère D-optimal vise à réduire au minimum le volume de cette région de confiance commune, l'E-optimal la taille de son axe principal et A-optimal les dimensions autour de la région de confiance commune.

Bibliographie

Bibliographie

[Abid 2007] K. Abid, P. Dufour, I. Bombard et P. Laurent. *Model Predictive Control of a Powder Coating Curing Process : an Application of the MPC@CB Software.* In Proceedings of the IEEE Chinese Control Conference, Zhangjiajie, China, vol. 2, pages 630–634, 2007.

[Alamir 1995] M. Alamir et G. Bornard. *Stability of a truncated infinite constrained horizon scheme : the general discrete nonlinear case.* Automatica, vol. 31, no. 9, pages 1353–1356, 1995.

[Bellman 1957] R.E. Bellman. Dynamic programming. Princeton University Press, 1957.

[Bernaerts 2000] K. Bernaerts, K.J. Versyck et J.F. Van Impe. *On the design of optimal dynamic experiments for parameter estimation of a Ratkowsky-type growth kinetics at suboptimal temperatures.* International Journal of Food Microbiology, vol. 54, pages 27–38, 2000.

[Besançon 2007] G. Besançon et A. Ticlea. *An Immersion-Based Observer Design for Rank-Observable Nonlinear Systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, n°. 1, pages 83–88, 2007.

[Bombard 2007] I. Bombard. *Contribution à l'étude, au contrôle et à la commande d'un procédé de cuisson radiatif de peintures en poudre.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2007.

[Bombard 2010] I. Bombard, B. Da Silva, P. Dufour et P. Laurent. *Experimental predictive control of the infrared cure of a powder coating : a non-linear distributed parameter model based approach.* A paraître dans Chemical Engineering Science Journal, CES-D-08-01198, vol. 65 (2), pages 962–975, 2010.

[Bombois 2006] X. Bombois, G. Scorletti, M. Gevers, P.M.J. Van den Holf et R. Hildebrand. *Least costly identification experiment for control.* Automatica, vol. 42, pages 1651–1662, 2006.

[Bornard 1988] G. Bornard, N. Couenne et F. Celle. *Regularly persistent observers for bilinear systems.* In Proceedings 29ème Conférence Internationale " New trends in Nolinear control theory", vol. 122, pages 130–140, Nantes, France. Springer,Verlag, 1988.

[Bornard 1991] G. Bornard et H. Hammouri. *A high gain observer for a class of uniformly observable systems.* In Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, page 14941496, 1991.

[Bornard 1993] G. Bornard, F. Celle-Couenne et G. Gilles. *Observabilité et observateurs.* Dans A. J. Foossard et D. Normand-Cyrot, eds, Systèmes Non Linéaires, vol. 1. Modélisation-Estimation, pages 177–221. Masson, 1993.

[Boucher 2006] P. Boucher et D. Dumur. La commande prédictive : avancées et perspectives. Hermes science, 2006.

[Brillinger 1981] D. R. Brillinger. *Times series : Data analysis and theory.* San-Francisco, CA : Holden-Day, 1981.

[Bryson 1999] A.E. Bryson. Dynamic optimization. Reading, MA : Addision Wesley, 1999.

[Busawon 1996] K. Busawon. *Sur les observateurs des systèmes non-linéaires et le principe de séparation.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon1, Lyon, France, 1996.

[Chen 1996] H. Chen et F. Allgower. *A quasi-infinite horizon predictive control sheme for constrained nonlinear systems.* In Proceeding of 16th Chinese Control Conference, Qindao, pages 309–316, 1996.

[Cooley 2001] B. Cooley et J. Lee. *Control-relevant experiment design for multi variable systems described by expanions in othonormal bases.* Automatica, vol. 37(2), pages 273–281, 2001.

[Dochain 1986] D. Dochain. *On-line estimation, adaptative state estimation and adaptative control of fermentation of process.* Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, 1986.

[Dochain 1995] D. Dochain, P.A. Vanrolleghem et M.V. Daele. *Structural identifiability of a biokinetic model of activated sludge respiration.* Water Research, vol. 29(11), pages 2571–2578, 1995.

[Dotsch 1996] H.G.M Dotsch et P.M.J. Van den Holf. *Test local structural identifiability of high-order non-linearly parametrized state space models.* Automatica, vol. 32(6), pages 875–883, 1996.

[Dufour 2000] P. Dufour. *Contribution à la commande prédictive des systèmes à paramètres répartis non linéaires.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2000.

[Dufour 2003] P. Dufour, Y. Touré, D. Blanc et P. Laurent. *On nonlinear distributed parameter model predictive control strategy : on-line calculation time reduction and application to an experimental drying process.* Computers and Chemical Engineering, vol. 27, pages 1533–1542, 2003.

[Fargeot 1994] A. M. Fargeot, H. Hammouri et F. Celle. *Nonlinear estimators for chemical reactors.* Ches, vol. 49, pages 2287–2300, 1994.

[Findeisen 2002] R. Findeisen et F. Allgower. *An introduction to nonlinear model predictive control.* In 21st Benelux Meeting on Systems and Control, Veldhove, 2002.

[Fletcher 1987] R. Fletcher. Practical methods of optimization. John Wiley and Sons, 1987.

[Forssell 1999] U. Forssell et L. Ljung. *Closed-loop identification revisited.* Automatica, vol. 35, pages 1215–1241, 1999.

[Forssell 2000] U. Forssell et L. Ljung. *Some results on optimal experiment design.* Automatica, vol. 36, pages 749–756, 2000.

[Garcia 1986] C.E. Garcia et A.M. Morshedi. *Quadratic programming solution of dynamic matric control (QDMC).* Chemical Engineering Communications, vol. 46, pages 73–87, 1986.

[Garnier 2008] H. Garnier, M. MSaad et T. Poinot. Identification des systèmes. JESA, Vol 42, n°2-3, 2008.

[Gauthier 1981] J.P. Gauthier et G. Bornard. *Observability for any u(t) of a class of nonlinear systems.* IEEE Transations on Automatic Control, vol. 26(4), pages 922–926, 1981.

[Gauthier 1992] J.P. Gauthier, H. Hammouri et S. Othman. *A simple observer for non linear systems application to bioreactors.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, pages 875–880, 1992.

[Gauthier 1994] J.P. Gauthier et I. Kupka. *Observability and observers for nonlinear systems.* Journal of Control and optimization, vol. 32, pages 975–994, 1994.

[Gevers 1986] M. Gevers et L.Ljung. *Optimal experiment designs with respect to the intended model application.* Automatica, vol. 5, pages 543–554, 1986.

[Ginhoux 2003] R. Ginhoux. *Compensation des mouvements physiologiques en chirurgie robotisée par commande prédictive.* Thèse de doctorat, Université du Languedoc, Montpellier II, 2003.

[Goodwin 1977] G.C. Goodwin et R.L. Payne. *Dynamic system identification : Experiment design and data analysis.* Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, vol. 136, 1977.

[Hammouri 1990] H. Hammouri et J. De Leon Morales. *Topological properties of observer's inputs analysis of controlled dynamical systems.* Proceedings of the International Conference on Controlled Dynamical Systems, Lyon, France, 1990.

[Hammouri 2001] H. Hammouri et A. Targui. *High gain observer based on a triangular structure.* International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 12(6), pages 497–518, 2001.

[Hammouri 2003] H. Hammouri et M. Farza. *Nonlinear observer for locally uniformly observable systems.* ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations, vol. 9, pages 353–370, 2003.

[Hammouri 2010] H. Hammouri et Z. Tmar. *Unknown input observer for state affine systems : A necessary and sufficient condition.* A paraître dans Automatica, DOI : 10.1016/j.automatica.2009.11.004, 2010.

[Hermann 1977] R. Hermann et A.J. Krener. *Nonlinear Controllability and Observability.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 22, pages 728–740, 1977.

[Hildebrand 2003] H. Hildebrand et M. Gevers. *Identification for control : Optimal input design with respect to a worst-case v-gap cost function.* SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 41(5), pages 1586–1608, 2003.

[Jansson 004a] H. Jansson et H. Hjalmarsson. *A general framework for mixed H_∞ and H_2 input design.* IEEE Transactions on Automatic Control, pages 3132–3137, 2004a.

[Jansson 004b] H. Jansson et H. Hjalmarsson. *Mixed H_∞ and H_2 input design for identification.* Conference on Decision and Control, Bahamas, 2004b.

[Jansson 2005] H. Jansson et H. Hjalmarsson. *Optimal experiment design in closed loop.* In Proceeding IFAC World Conferences, papier 04528, 2005.

[Jauberthie 2006] C. Jauberthie, F. Bournonville et F. Rendell P. Coton. *Optimal input design for aircraft parameter estimation.* Aerospace Science and Technology, vol. 10, pages 331–337, 2006.

[Jauberthie 2007] C. Jauberthie, L. Denis-Vidal, P. Coton et G. Joly-Blanchard. *An optimal input design procedure.* Automatica, vol. 42, pages 881–884, 2007.

[Kaboré 1998] P. Kaboré. *Contribution à la détection et isolation des pannes dans les systèmes non-linéaires.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon1, Lyon, France, 1998.

[Kalaba 1973] R.E. Kalaba et K. Spingarn. *Optimal input and sensitivities for parameter estimation.* Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 11, pages 56–67, 1973.

[Kalman 1958] R.E. Kalman. *Design of a self-optimizing control system.* Transactions of The ASME, Journal Basic Engineering, vol. 80, pages 468–478, 1958.

[Kalman 1960a] R.E. Kalman. *Contributions to the theory of optimal control.* Bulletin de la Société Mathematique de Mexicana, vol. 5, pages 102–119, 1960.

[Kalman 1960b] R.E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems.* Transactions of ASME, Journal of Basic Engineering, vol. 87, pages 35–45, 1960.

[Kalman 1961] R.E. Kalman et R.S. Bucy. *New results in linear filtering and prediction theory.* Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, vol. 83, pages 95–108, 1961.

[Keerthi 2003] S.S. Keerthi et E.G. Gilbert. *Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems : Stability and moving-horizon approximations.* Journal of optimization Theory and Applications, vol. 57(2), pages 265–293, 2003.

[Keesman 2002] K.J. Keesman et J.D. Stigter. *Optimal parametric sensitivity control for estimation of kinetic parameters in bioreactors.* Mathematical Biosciences, vol. 179, pages 95–111, 2002.

[Keesman 2003] K.J. Keesman et J.D. Stigter. *Optimal input design for low-dimensional systems : A haldane kinetics example.* In proceedings of the European Control Conference, Cambridge, UK, papier 268, 2003.

[Krolikowski 1985] A. Krolikowski et P. Eykhoff. *Input signal design for system identification : A comparative analysis.* In IFAC symposium on identification and system parameter estimation, York, UK, pages 915–920, 1985.

[Landau 1997] I.D. Landau, R. Lozano et M. M'Saad. Adaptive control. Springer Verlag, London, 1997.

[Ljung 1983] L. Ljung et T. Soderstrom. *Theory and practice of recursive identification.* M.I.T. Press, Massachusetts, 1983.

[Ljung 1987] L. Ljung. System identification : Theory for the user. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1987.

[Ljung 1999] L. Ljung. System identification : Theory for the user. 2ème édition, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1999.

[Mayne 1990] D.Q. Mayne et H. Michalska. *Receding horizon control of nonlinear systems : Stability and optimality.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 35, pages 814–824, 1990.

[Mayne 2000] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao et P.O.M. Scokaert. *Constrained model predictive control : Stability and optimality.* Automatica, vol. 36, pages 789–814, 2000.

[Meadows 1993] E. S. Meadows et J. B. Rawlings. *Receding horizon control with an infinte horizon.* In Proceeding American Control Conferences, San Francisco, pages 2926–2930, 1993.

[Mehra 1974] R. Mehra. *Optimal input signals for parameter estimation in dynamical systems : Survey and new results.* IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC 19(6), pages 753–768, 1974.

[Minoux 1983] M. Minoux. Programmation mathématique : Théorie et algorithmes. Dunod, 1983.

[Morari 1983] M. Morari et E. Zafiriou. Robust control. Dunod, 1983.

[Morelli 1999] E.A. Morelli. *Flight test of optimal inputs and comparaison with conventional inputs.* Journal of aircraft, vol. 36(2), pages 389–397, 1999.

[Munack 1989] A. Munack. *Optimal feeding strategy for identification of monod-type models by fed-batch experiments.* In N. M. Fish, editor,

Computer Applications in Fermentation Technology, Modelling and Control of Biotechnological Process, pages 195–204, 1989.

[Nadri 2001] M. Nadri. *Observation et commande des systèmes non linéaires et application aux bioprocédés.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2001.

[Oliveira 2000] S. De Oliveira et M. Morari. *Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45(6), pages 1053–1071, 2000.

[Oliviera 1995] N.M.C De Oliviera et L.T. Biegler. *An extension of Newton-type Algorithms for Nonlinear Process Control.* Automatica, vol. 31, pages 281–286, 1995.

[Overschee 1996] P. Van Overschee et B. De Moor. *Subspace identification for linear systems.* Dordrecht : Kluwer, 1996.

[Pourhiet 1988] A. Le Pourhiet. Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Une première approche. Cepadues, 1988.

[Propoï 1963] A.I. Propoï. *Use of linear programming methods for synthesizing sample-data automatic systems nonlinear predictive controller.* Automation and Remote Control, vol. 24, pages 837–844, 1963.

[Qin 2003] S.J. Qin et T.A. Badgwell. *A survey of industrial model predictive control technology.* Control Engineering Practice, vol. 11, pages 733–764, 2003.

[Ratkowsky 1982] D.A. Ratkowsky, J. Olley, T.A. McMeekin et A. Ball. *Relationship between temperature and growth rate of bacterial cultures.* Journal of Bacteriology, vol. 149, pages 1–15, 1982.

[Richalet 1978] J. Richalet, A. Rault, J.L. Testud et J. Papon. *Model predictive heuristic control : Applications to industrial processes.* Automatica, vol. 14, pages 413–428, 1978.

[Silva 2008] B. Da Silva. *Contribution au contrôle de procédés de polymérisation en émulsion.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2008.

[Stigter 2001] J.D. Stigter et K.J. Keesman. *Optimal parametric sensitivity control of a fed batch reactor.* In Proceedings European Control Conference, Porto, Portugal, pages 2841–2844, 2001.

[Stigter 2003] J.D. Stigter, D. Vries et K.J. Keesman. *On adaptative optimal input design.* In Proceedings of the European Control Conference 2003, Cambridge,UK. Available on CDROM, 2003.

[Stigter 2004] J.D. Stigter et K.J. Keesman. *Optimal parametric sensitivity control of a fed batch reactor.* Automatica, vol. 40, pages 1459–1464, 2004.

[Sussman 1979] H.J. Sussman. *Single-Input observability of continuous-time systems.* Math. System Theory, vol. 12, pages 371–393, 1979.

[Ticlea 2006] A.I. Ticlea. *Techniques d'immersion pour l'estimation non linéaire. Application aux systèmes de puissance.* Thèse de doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble, 2006.

[Vanrolleghem 1994] P. A. Vanrolleghem et M. Van Daele. *Optimal experimental design for structure characterization of biodegradation models : One-line implementation in a respirographic biosensor.* Water Science and Technology, vol. 30(4), pages 243–253, 1994.

[Vanrolleghem 1995] P.A. Vanrolleghem, M.V. Daele et D. Dochain. *Practical identifiability of a biokinetic model of activated sludge respiration.* Water Research, vol. 29(11), pages 2561–2570, 1995.

[Versyck 1999] K.J. Versyck, K. Bernaerts, A.H. Geeraerd et J.F. Van Impe. *Introducing optimal experimental design in predictive modeling : A motiving example.* International Journal of Food Microbiology, vol. 51, pages 39–51, 1999.

[Versyck 2000] K.J. Versyck. *Dynamic input design for optimal estimation of kinetic parameters in bioprocess models.* Thèse de doctorat, Katholieke Universiteit Leuven, 2000.

[Walter 1997] E. Walter et L. Pronzato. *Identification of parametric models from experemental data.* Springer, Masson, page 413, 1997.

[Zarrop 1979] M. Zarrop. *Optimal experiment design for dynamic system identification.* Heidelberg : Springer, 1979.

Résumé

L'objectif principal de ce travail a été d'apporter une nouvelle contribution quant à l'approche de contrôle optimal pendant la phase d'identification. Il s'agissait de trouver la commande à appliquer pendant l'expérience qui permet d'optimiser un critère qui est fonction des sensibilités des sorties par rapport aux paramètres du modèle à identifier. Cette approche couplant contrôleur prédictif sous contraintes et estimateur a résolu en ligne le problème d'identification à chaque instant en utilisant l'observateur. En ce sens, c'est une approche permettant d'automatiser et d'optimiser le design d'expérience, tout en réalisant conjointement l'identification d'un paramètre du modèle spécifié. L'aspect temps réel a été pris en compte dans la formulation de la solution apportée. Dans ce contexte, nous avons introduit deux stratégies de commande pour l'identification optimale. La première était basée sur un modèle de prédiction non linéaire et la seconde sur un modèle linéaire temps variant. Si le temps devient un paramètre critique pour l'implémentation de l'approche, cette dernière vise à réduire le temps alloué à l'optimisation. L'approche d'identification optimale en ligne a été appliquée à deux problèmes concrets du Génie des Procédés (réaction de saponification et cuisson de peintures). Ces exemples ont permis de vérifier en simulation, l'efficacité et la faisabilité de cette approche.

Mots-clés
Identification optimale en ligne, plan d'expérience, sensibilité paramètrique, systèmes non-linéaires, commande prédictive, observateurs non-linéaires, résolution numérique, optimisation sous contraintes.

Abstract

The main aim of this work is to give a new approach of optimal control during the phase of identification. The question is how to tune the control action to be applied during the experiment that optimize a criterion which is function of the sensitivities of the mesure with respect to the parameters of the model to be identified. This approach coupling constrained predictive controller and estimator solves on line the problem of identification by using the observer. In that sense, it is an approach allowing an optimal and automatic design of experiment, while performing at the same time the identification of one parameter of the specified model. The real time aspect was taken into account in the formulation of the solution. In this context, we introduced two strategies for optimal identification : the first one is based on a nonlinear model of prediction and the second one is based on a linear time varying model that may be used if the real time aspect becomes a critical parameter for the implementation of the approach. This approach of on line optimal identification was applied on two concrete problems in Chemical Engineering. These examples show the performance and the feasibility of this approach.

Keywords
Online optimal input design, design of experiment, parametric sensitivity, nonlinear system, MPC, observer, numerical resolution, constrained optimization.