



HAL
open science

Observation et commande de quelques systèmes à paramètres distribués

Xiaodong Li

► **To cite this version:**

Xiaodong Li. Observation et commande de quelques systèmes à paramètres distribués. Autre. Université Claude Bernard - Lyon I, 2009. Français. NNT : 2009LYO10316 . tel-00456850v2

HAL Id: tel-00456850

<https://theses.hal.science/tel-00456850v2>

Submitted on 12 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Délivrée par

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I

ÉCOLE DOCTORALE Électronique Électrotechnique Automatique

DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

soutenue publiquement le 9 décembre 2009

par

Xiao-Dong LI

Titre :

OBSERVATION ET COMMANDE DE QUELQUES SYSTÈMES À PARAMÈTRES DISTRIBUÉS

Directeur de thèse : Cheng-Zhong XU

Jury :

Pierre ROUCHON	Professeur, École des Mines de Paris	Président du jury
Michel FLIESS	DR CNRS, École Polytechnique, Paris	Rapporteur
Gauthier SALLET	Professeur, Université de Metz	Rapporteur
Hassan HAMMOURI	Professeur, Université Lyon 1	Examineur
Yue-Jun PENG	Professeur, Université Clermont-Ferrand 2	Examineur
Gérard SCORLETTI	Professeur, École Centrale de Lyon	Examineur
Cheng-Zhong XU	Professeur, Université Lyon 1	Directeur de thèse

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON I

Président de l'Université	M. le Professeur L. COLLET
Vice-Président du Conseil Scientifique	M. le Professeur J.-F. MORNEX
Vice-Président du Conseil d'Administration	M. le Professeur G. ANNAT
Vice-Présidente du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire	M. le Professeur D. SIMON
Secrétaire Général	M. G. GAY

SECTEUR SANTÉ

Composantes

UFR de Médecine Lyon Est-Claude Bernard	Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE
UFR de Médecine Lyon Sud-Charles Mérieux	Directeur : M. le Professeur F.-N. GILLY
UFR d'Odontologie	Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques	Directeur : M. le Professeur F. LOCHER
Institut Techniques de Réadaptation	Directeur : M. le Professeur Y. MATILLON
Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directeur : M. le Professeur P. FARGE

SECTEUR SCIENCES

Composantes

Faculté des Sciences et Technologies	Directeur : M. le Professeur F. GIERES
UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives	Directeur : M. C. COLLIGNON
Observatoire de Lyon	Directeur : M. B. GUIDERDONI
Institut des Sciences et des Techniques de l'Ingénieur de Lyon	Directeur : M. le Professeur J. LIETO
IUT A	Directeur : M. le Professeur C. COULET
IUT B	Directeur : M. le Professeur R. LAMARTINE
Institut de Science Financière et d'Assurances	Directeur : M. le Professeur J.-C. AUGROS
Institut Universitaire de Formation des Maîtres	Directeur : M. R. BERNARD

À Mes Parents.

We never know how high we are
Till we are called to rise ;

Emily Dickinson, *We never know how high we are* (1924).

Remerciement

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP) à l'Université Claude Bernard Lyon 1, dont le directeur est M. Hatem FESSI. Qu'il soit remercié pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire ainsi que l'ensemble des membres du LAGEP.

Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, M. Cheng-Zhong XU, pour ces trois années passées au sein du LAGEP. Je le remercie chaleureusement pour m'avoir encadré ce travail, pour ses qualités humaines et surtout ses qualités scientifiques, qui m'ont permis de réaliser cette thèse dans les meilleures conditions possibles. Qu'il trouve ici toute ma gratitude pour sa patience, pour m'avoir formé en automatique, et initié à ce monde privilégié de la recherche.

Je souhaite également remercier très chaleureusement M. Hassan HAMMOURI, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche au LAGEP, pour m'avoir aidé énormément à trouver les soutiens financiers et résoudre des problèmes administratifs, et d'avoir été présent chaque fois que nécessaire, ainsi que d'avoir accepté d'examiner mon mémoire et de faire partie de mon jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à M. Yue-Jun PENG, pour avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury de ma thèse, pour ses conseils et remarques très constructifs au début de ma thèse et surtout pour m'avoir donné l'envie de poursuivre dans la recherche lors de mon Master 2 recherche.

Ma gratitude va également à M. Michel FLIESS et M. Gauthier SALLET pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail, ainsi que M. Pierre ROUCHON et M. Gérard SCORLETTI, qui me font l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Je remercie vivement M. Marius TUCSNAK et M. Karim RAMDANI, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe-projet CORIDA à l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA) antenne Nancy-Grand Est, pour leur encadrement lors de mes séjours sur Nancy, pour nos discussions, leurs remarques et leurs idées très pertinentes.

Merci à tous les membres de l'équipe de recherche Systèmes Non Linéaires et Procédés du LAGEP pour m'avoir accueilli aussi chaleureusement parmi eux. Merci à Madiha, Pascal, Vincent, Valérie, Jean-Claude, Thierry, Sami, Nida et tous les professeurs et maîtres de conférences qui m'ont reçu dans leurs équipes de recherches et d'enseignements, pour leur aide, leurs conseils précieux, et les discussions animées aux pauses café (Pierre et Koffi entre autre).

Je souhaite remercier tous les personnels du service technique et administratif du LAGEP pour leur dévouement au laboratoire, leur grande efficacité et sérénité.

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont prêté main forte : Bruno, Thibault, Goma, Rafael, Saida et Hui, docteurs et doctorants, pour leur sympathie, leur aide et leur générosité, en somme pour tout ce que nous avons partagé au cours de ces trois dernières années. Je remercie tout particulièrement Solo, Eric et Estella pour leur énorme soutien moral. J'adresse aussi mes remerciements à Xi et sa famille, à James, Hendrik, Silvina, Marc, Louis, Cristina, Jenny, Lotte et Nicole pour des très bons moments que nous avons passés ensemble. Je ne saurais oublier aussi ceux qui ont rendu ces dernières années agréables : Sister Caféine et Brother Nicotine ainsi que Don Al Cool. Thanx to Bob Dylan.

Je dédie ce travail à mes chers parents sans qui je ne serais pas là. Je les remercie infiniment pour leur amour, leur confiance et leur soutien inconditionnel pendant ces années.

Table des matières

I	Introduction Générale	3
1	Motivation du travail, état de l'art et objets d'étude	5
1.1	Introduction	7
1.2	Motivation	7
1.3	Etat de l'art et objets d'étude	9
1.3.1	Généralité : contrôle de systèmes décrits par des EDP	9
1.3.1.1	Classification méthodologique	10
1.3.1.2	Classification des approches	10
1.3.2	Objets d'étude 1 : système du corps-poutre en rotation :	11
1.3.3	Objets d'étude 2 : systèmes d'échangeurs thermiques :	14
II	Observation et commande d'une structure flexible	17
2	Observabilité et observateurs	19
2.1	Introduction	21
2.2	Observabilité et contrôlabilité	21
2.2.1	Observabilité et observabilité exacte	21
2.2.1.1	Observabilité	21
2.2.1.2	Observabilité exacte	22
2.2.2	Contrôlabilité exacte et principe de dualité	24
2.2.3	Régularité : système bien-posé	25
2.3	Observateurs	27
2.3.1	Observateur du type Luenberger en dimension finie	28
2.3.2	Observateur en dimension infinie	31
2.4	Observateur du système du corps-poutre en rotation	32
2.4.1	Description du modèle	33
2.4.2	Observateur du type Luenberger pour le modèle	34
2.4.3	Convergence de l'observateur	36
2.4.4	Observateur avec une vitesse de convergence voulue	43

3	Etudes numériques de l'observateur et simulations	47
3.1	Introduction	49
3.2	Schéma des éléments finis : espace de discrétisation	49
3.2.1	Fonctions polynomiales hermitiennes	50
3.2.2	Quelques propriétés des fonctions ϕ_l^k	51
3.2.3	Espace de discrétisation	52
3.3	Cas où ω_* est une constante	53
3.3.1	Formulation variationnelle et régularité	53
3.3.2	Structure et distribution spectrale	56
3.3.3	Convergence de l'approche <i>conception-approximation</i>	61
3.3.4	Choix des conditions initiales	62
3.3.4.1	Fonctions propres et solution exacte	62
3.3.4.2	\mathcal{C}^1 -conditions de compatibilité	66
3.3.5	Simulations numériques	67
3.4	Cas où $\omega(t)$ varie en fonction du temps	73
3.5	Robustesse	75
4	Etudes de la boucle fermée	79
4.1	Introduction	81
4.2	Mise en cascade de l'observateur et la loi de commande	81
4.2.1	Cas où $\bar{\omega} \neq 0$	81
4.2.2	Cas où $\bar{\omega} = 0$	84
4.3	Simulation du système en boucle fermée	86
4.4	Stabilité en boucle fermée	91
4.4.1	Rappel sur le théorème d'ensemble invariant de LaSalle	91
4.4.2	Principe de séparation	91
4.4.3	Une conjecture sur la stabilité du système couplé	92
III	Stabilité d'un système d'échangeurs thermiques	93
5	Stabilité L^p exponentielle d'un système d'échangeurs thermiques	95
5.1	Introduction	97
5.2	Présentation des modèles	98
5.3	Stabilité du modèle avec diffusion dans $(L^p(0, 1))^4$	99
5.3.1	Rappels de la dissipativité dans les espaces L^p	99
5.3.2	Stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans X_p	101
5.4	Stabilité du modèle avec diffusion dans $(\mathcal{C}[0, 1])^4$	105
5.4.1	Générateur infinitésimal	105
5.4.2	Stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans X_∞	107
5.5	Stabilité du modèle sans diffusion dans $(\mathcal{C}[0, 1])^4$ et $(L^p(0, 1))^4$	110

IV	Conclusions et perspectives	117
6	Conclusion et perspectives	119
6.1	Conclusions générales	121
6.2	Perspectives	122
6.2.1	Objectifs à court terme	122
6.2.2	Futurs objectifs : observateur du retournement temporel	122
V	Appendice	125

Table des figures

2.1	Principe de l'observateur.	28
2.2	Modèle du corps-poutre en rotation.	34
3.1	Fonctions hermitiennes.	51
3.2	Localisation des paramètres ρ_n vérifiant l'équation caractéristique $\cosh(\rho) \cdot \cos(\rho) + 1 = 0$; courbes $C_1 : y = -1/\cosh(x)$; $C_2 : y = \cos(x)$	65
3.3	Vecteurs des déplacements du système d'observation et de l'observateur où $\omega_* = 0$ (en haut) et $\omega_* = 3$ (en bas), respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	68
3.4	Evolution des déplacements au 2-ème point pour le système d'observation (en tiret) et de l'observateur(en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	68
3.5	Evolution des déplacements au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et de l'observateur (en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	69
3.6	Vecteurs des vitesses du système d'observation et de l'observateur où $\omega_* = 0$ (en haut) et $\omega_* = 3$ (en bas), respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	69
3.7	Evolution des vitesses au 2-ème point pour le système d'observation (en tiret) et de l'observateur(en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	70
3.8	Evolution des vitesses au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et de l'observateur (en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	70
3.9	Evolution de l'erreur des déplacements (en haut) et de l'erreur des vitesses (en bas) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	71
3.10	Evolution des déplacements au 2-ème point pour le système d'observation (en tiret) et de l'observateur(en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 100$. Temps de simulation $T = 16s$	72

3.11	Evolution des déplacements au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et de l'observateur (en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 100$. Temps de simulation $T = 16s$	72
3.12	Distribution des valeurs propres du système d'erreur dans le cas où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de point $N = 20$	73
3.13	Evolution des déplacements au 2-ème et au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et l'observateur (en solide) avec $\omega(t) = \omega_* \cdot \sin^2(t)$. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	75
3.14	Evolution des vitesses au 2-ème et au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et l'observateur (en solide) avec $\omega(t) = \omega_* \cdot \sin^2(t)$. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	75
3.15	La mesure (sortie) corrompue par un bruit aléatoire.	77
3.16	Evolution des déplacements au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et l'observateur (en solide) avec $\omega_* = 0$ et le bruit. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	77
3.17	Evolution de l'erreur de l'obsevateur $w - \hat{w}$ avec $\omega_* = 0$ et le bruit. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$	78
4.1	Evolution des déplacements du système commandé avec l'état réel. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$	86
4.2	Evolution des vitesses du système commandé avec l'état réel. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$	87
4.3	Evolution de la vitesse angulaire du système commandé avec l'état réel. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$	87
4.4	Evolution des déplacements du système couplé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$	88
4.5	Evolution des vitesses du système couplé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$	88
4.6	Evolution de la vitesse angulaire du système couplé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$	89
4.7	Evolution des déplacements du système commandé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 0)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0.05$. Temps de simulation $T = 2000s$	89

4.8	Evolution des vitesses du système commandé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 0)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0.05$. Temps de simulation $T = 2000s$	90
4.9	Evolution de la vitesse angulaire du système commandé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 0)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0.05$. Temps de simulation $T = 2000s$	90
4.10	Principe de la mise en cascade de la loi de commande et l'observateur.	92
5.1	Réseau d'échangeurs thermiques.	98

Liste des tableaux

3.1	Temps nécessaire (en seconds et période ratio) pour que l'observateur rat- trape la trajectoire du système d'observation en $x = 1$ avec une précision de 5%.	71
3.2	La distribution spectrale de A^κ avec $\kappa = 10$ dans le cas $\omega_* = 0$	74

Résumé

L'objectif principal de cette thèse consiste à étudier plusieurs thématiques : l'étude de l'observation et la commande d'un système de structure flexible et l'étude de la stabilité asymptotique d'un système d'échangeurs thermiques. Ce travail s'inscrit dans le domaine du contrôle des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP).

On s'intéresse au système du corps-poutre en rotation dont la dynamique est physiquement non mesurable. On présente un observateur du type Luenberger de dimension infinie exponentiellement convergent afin d'estimer les variables d'état. L'observateur est valable pour une vitesse angulaire en temps variant autour d'une constante. La vitesse de convergence de l'observateur peut être accélérée en tenant compte d'une seconde étape de conception. La contribution principale de ce travail consiste à construire un simulateur fiable basé sur la méthode des éléments finis. Une étude numérique est effectuée pour le système avec la vitesse angulaire constante ou variante en fonction du temps. L'influence du choix de gain est examinée sur la vitesse de convergence de l'observateur. La robustesse de l'observateur est testée face à la mesure corrompue par du bruit. En mettant en cascade notre observateur et une loi de commande stabilisante par retour d'état, on souhaite obtenir une stabilisation globale du système. Des résultats numériques pertinents permettent de conjecturer la stabilité asymptotique du système en boucle fermée.

Dans la seconde partie, l'étude est effectuée sur la stabilité exponentielle des systèmes d'échangeurs thermiques avec diffusion et sans diffusion. On établit la stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans un espace de Banach. Le taux de décroissance optimal du système est calculé pour le modèle avec diffusion. On prouve la stabilité exponentielle dans l'espace L^p pour le modèle sans diffusion. Le taux de décroissance n'est pas encore explicité dans ce dernier cas.

Mots-Clés : systèmes à paramètres distribués, systèmes hybrides, équations aux dérivées partielles, systèmes de vibration, équation de la poutre, observabilité exacte, C_0 semi-groupes, opérateurs anti-adjoints, observateurs, stabilité exponentielle, méthode des éléments finis, principe de séparation, méthode directe de Lyapunov, système d'échangeurs thermiques, semi-groupes analytiques.

Abstract

The main objective of this thesis consists to investigate the following themes : observation and control of a flexible structure system and asymptotic stability of a heat exchangers system. This work is placed in the field of the control of systems described by partial differential equations (PDEs).

We consider a rotating body-beam system whose dynamics are not physically measurable. An infinite-dimensional exponentially convergent Luenberger-like observer is presented in order to estimate the state variables. The observer is also valid for a time-varying angular velocity around some constant. We can accelerate the decay rate of the observer by a second step design. The main contribution of this work consists in building a numerical simulator based on the finite element method (FEM). A numerical investigation is carried out for the system with constant or time-varying angular velocity. We examine the influence of the gain choice on the decay rate of the observer. The robustness of the observer is tested with the measurement corrupted by noise. By cascading our observer and a feedback control law, we wish to obtain a global stabilization of the rotating body-beam system. The relevant numerical results make it possible for us to conjecture that the closed-loop system is locally asymptotically stable.

We investigate the exponential stability of the heat exchangers systems with diffusion or without diffusion. We establish the exponential stability of the model with diffusion in a Banach space. Moreover, the optimal decay rate of the system is computed for the model with diffusion. We prove exponential stability in $(\mathcal{C}[0, 1])^4$ space for the model without diffusion. The optimal decay rate in the latter case is not yet found.

Keywords : distributed parameter systems, hybrid systems, partial differential equations, vibrating systems, beam equation, exact observability, C_0 -semigroups, skew-adjoint operators, observers, exponential stability, finite element method, separation principle, Lyapunov's direct method, heat exchangers system, analytic semigroups.

Introduction

L'objectif principal de cette thèse consiste à étudier plusieurs thématiques :

- étude de l'observation et la commande d'un système de structure flexible ;
- étude de la stabilité asymptotique d'un système d'échangeurs thermiques.

Ce travail s'inscrit, d'un point de vue théorique, dans le domaine du contrôle des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP).

Ce travail est composé de 4 parties.

La première partie est consacrée à la motivation du travail et l'état de l'art des objets d'étude. En ingénierie ou dans l'aérospatiale, le mouvement des systèmes mécaniques comme robots à bras flexibles contrôlés ou vaisseaux spatiaux avec antennes peut être décrit par un ensemble d'EDP linéaires ou non linéaires couplés avec des EDO, dit systèmes hybrides. Le problème de la modélisation ainsi que l'étude sur les comportements dynamiques et la commande des systèmes hybrides sont devenus un domaine de recherche très actif depuis des décennies. Dans l'industrie de la transformation, l'étude des systèmes à paramètres distribués prend aussi une importance croissante, en cohérence avec la description de plus en plus fine des phénomènes physiques au sein des procédés.

Dans la deuxième partie de cette thèse, on s'intéresse à un système du corps-poutre en rotation dont la dynamique du système est physiquement non mesurable. Il est constitué d'un corps rigide couplé avec une structure élastique. Le modèle représente le mouvement d'un engin aérospatial simplifié. On présente dans le Chapitre 2, sous la forme explicite d'EDP, un observateur du type Luenberger de dimension infinie exponentiellement convergent, afin d'estimer les variables d'état. L'observateur construit est valable pour une vitesse angulaire en temps variant autour d'une vitesse angulaire constante. On peut accélérer la vitesse de convergence de l'observateur aussi vite que l'on veut en tenant compte d'une seconde étape de conception dans la construction. Les principaux outils mathématiques utilisés proviennent de la théorie des semi-groupes et la théorie spectrale.

Le Chapitre 3 est dédié à une étude numérique. Cette étude est effectuée dans le but de développer un simulateur fiable, efficace, robuste et performant. La contribution principale de ce travail consiste à construire un simulateur numérique basé sur la méthode des éléments finis et l'interpolation hermitienne. Plusieurs simulations sont illustrées dans le cas où la vitesse angulaire est constante ou variante en fonction du temps. L'influence du choix de gain de correction est examinée sur la vitesse de convergence de l'observateur. La robustesse de l'observateur est testée face à la mesure corrompue par du bruit.

Le chapitre 5 traite le système en boucle fermée. En mettant en cascade notre observateur et la loi de commande stabilisante par retour d'état proposée par J.-M. Coron et B.d'Andréa-Novel, on souhaite obtenir une stabilisation globale du système de corps-poutre en rotation. Après avoir effectué de nombreuses expérimentations numériques, cette approche aboutit à des résultats numériques pertinents. Ceci permet de mettre en valeur la conjecture sur la stabilité asymptotique du système en boucle fermée.

La troisième partie aborde une étude, dans un cadre d'espaces de Banach, sur la stabilité exponentielle des systèmes d'échangeurs thermiques avec diffusion et sans diffusion. Les systèmes sont régis par un système d'EDP du type parabolique et un système hyperbolique, respectivement.

On établit la stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans un espace de Banach en utilisant la L^p stabilité exponentielle du système considéré et la théorie des opérateurs sectoriels. De plus, le taux de décroissance optimal du système est calculé pour le modèle avec diffusion. A l'aide de la théorie de perturbation, on prouve la stabilité exponentielle dans l'espace L^p pour le modèle sans diffusion. En revanche, le taux de décroissance n'est pas encore explicité dans ce dernier cas car le semi-groupe associé n'est pas analytique.

Ce travail finit par une conclusion générale et quelques perspectives qui permettent d'ouvrir un autre horizon de ma poursuite de recherche après la thèse.

Première partie
Introduction Générale

Chapitre 1

Motivation du travail, état de l'art et objets d'étude

La curiosité n'est que vanité le plus souvent ; on ne veut savoir que pour en parler.

Blaise Pascal, *Pensées* (1670).

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Motivation	7
1.3	Etat de l'art et objets d'étude	9

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'expliquer la motivation de notre travail et l'importance de l'étude des systèmes à paramètres distribués dans le domaine de l'automatique et du contrôle.

Un bref rappel dans le domaine du contrôle en dimension infinie permet de situer cette thèse dans son contexte scientifique qui est le contrôle des équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) en général, et dans le cadre particulier qui est le contrôle d'un système de structures flexibles.

Ce travail se classe parmi les méthodes directes aux espaces fonctionnels des EDP et se situe dans le cadre des approches temporelles par la représentation d'état. La théorie de perturbation des opérateurs, la théorie spectrale et des semi-groupes aux espaces de Banach ou Hilbert sont des outils mathématiques principaux de l'étude.

On présente d'abord la motivation du travail, ensuite l'état de l'art du domaine concerné et enfin les objets d'étude de la thèse, plus précisément, 1) la commande d'un système mécanique de structure flexible et la construction d'observateur et 2) la stabilité des échangeurs thermiques.

1.2 Motivation

Depuis plusieurs décennies, la recherche dans le domaine du contrôle des systèmes à paramètres distribués représente un champ d'investigation très important. Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes décrits essentiellement par des EDP linéaires ou non linéaires, éventuellement couplé avec des équations différentielles ordinaires (EDO en abrégé), des équations intégrales ou intégro-différentielles et des équations algébriques. Des systèmes d'EDP sont représentés dans des espaces fonctionnels de dimension infinie. Les variables indépendantes sont le temps et l'espace, les variables spatiales pouvant être mono- ou multi-dimensionnels.

Grâce aux progrès modernes dans la fabrication des instruments de mesure, des grandeurs physiques sont mesurées de manière de plus en plus précise. De ce fait, on a besoin d'employer le gradient pour décrire la variation quantitative des grandeurs non seulement en fonction du temps mais aussi par rapport à l'espace. Des systèmes complexes décrivant une grande finesse d'échelle microscopique sont souvent gouvernés par des EDP car cela permet de tenir compte des phénomènes répartis dans les variables d'état. Ces dernières années, beaucoup de classes d'EDP étudiées concernent ce genre de problèmes. Parallèlement, le développement de la théorie du contrôle en dimension infinie, dans des espaces fonctionnels de Banach ou Hilbert, entre autre, permet d'appréhender beaucoup plus de problèmes en gardant cette description relativement fine que constitue la représentation d'état par des EDP.

D'autre part, depuis une quinzaine d'années, la technologie des ordinateurs à grande

mémoire et à grande vitesse ne cesse d'évoluer à tel point qu'il devient accessible de développer des simulateurs de grands systèmes complexes issus de la mécanique des fluides, de la mécanique des structures et du génie des procédés :

- *mécanique des structures flexibles* : en particulier, des systèmes hybrides font partie de cette classe de systèmes dynamiques complexes. D'un point de vue mathématique, ce sont des systèmes gouvernés par un ensemble d'EDP linéaires ou non linéaires couplés avec des EDO. Les systèmes hybrides sont souvent appelés pour décrire le mouvement des systèmes mécaniques constitués des corps rigides couplés avec des structures élastiques, qui sont largement utilisés dans la pratique en ingénierie comme robots à bras flexibles contrôlés ou dans l'aérospatiale comme vaisseaux spatiaux avec antennes, panneaux solaires, etc. Le problème de la modélisation ainsi que l'étude sur les comportements dynamiques et la commande des systèmes hybrides sont devenus un domaine de recherche très actif depuis des décennies. Ces systèmes ont favorisé l'émergence d'autres théories mathématiques généralisant celles obtenues en contrôle des équations d'évolution en dimension infinie.

- *génie des procédés* : 1) dans l'industrie de la transformation, l'étude des systèmes à paramètres distribués prend en effet une importance croissante, en cohérence avec la description de plus en plus fine des phénomènes physiques au sein des procédés. Par exemple, un procédé courant dans le domaine énergétique se déroule au travers d'un dispositif d'échange de chaleur constitué de deux cylindres coaxiaux séparés entre eux par la paroi du milieu et isolés de l'extérieur par la seconde paroi. Deux fluides de caractéristiques différentes circulent à contre-courant dans les cylindres. Ces fluides échangent de la chaleur à travers la paroi du milieu. Dans ce modèle le phénomène de transfert se modélise par des EDP. Le système d'EDP est du type parabolique lorsque le modèle tient compte de la diffusion de la chaleur dans les différents corps, et il est du type hyperbolique dans le cas où le phénomène de la diffusion de la chaleur est négligé par rapport à la convection.

2) D'autres exemples sont constitués des modèles des procédés de polymérisation et de cristallisation. Ils sont décrits par des EDP ayant des non-linéarités structurelles et des termes de couplages non locaux. Dans un premier temps, il s'agit de reprendre l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions et leurs continuités vis à vis des perturbations. Puis on s'intéresse aux problèmes comme celui de la contrôlabilité, de la stabilisation et de l'observabilité (observateurs) pour les systèmes issus du génie des procédés. Certains modèles provenant des bilans de populations pour les procédés de cristallisation et de polymérisation développés dans la littérature (en génie des procédés) se modélisent parfois par des équations mathématiques très complexes. Par exemple les conditions aux limites sont parfois fortement non linéaires.

Dans ces cas une étude qualitative et numérique suivie d'une simplification des modèles s'avère tout à fait indispensable afin de pouvoir représenter le principe physico-chimique inhérent et afin de pouvoir servir de ces modèles dans la prédiction. Avant toute implémentation d'algorithme de commande, une étape de faisabilité est nécessaire. Cette étape consiste à analyser l'atteignabilité (contrôlabilité) de l'objectif ciblé. Cela revient à étudier

l'existence des commandes en boucle ouverte qui permettent de faire passer le système d'un état à un autre, tout en respectant les contraintes sur la commande et l'état. En pratique, la commande en boucle ouverte n'est pas souhaitable du fait qu'elle ne garantit pas la stabilité et la robustesse du système contrôlé. La rétroaction en boucle fermée est une méthode de conception pour réaliser une stabilité robuste. Comme pour la commande, l'analyse de l'observabilité est nécessaire pour étudier la faisabilité de l'estimation. Cela consiste à étudier la sensibilité de la mesure (dite sortie) par rapport aux variables à estimer. Ces variables regroupent les variables d'état et les paramètres inconnus et non mesurés. Après cette étude, la construction des observateurs (estimateurs) consiste à développer un algorithme pouvant estimer en temps réel ces variables non mesurées. Ces algorithmes sont conçus à partir d'un modèle du procédé et certaines mesures issues de l'instrumentation. Les algorithmes de commande et d'estimation d'état seront validés en simulation sur des modèles considérés et ultérieurement sur des procédés expérimentaux.

Ce genre de travaux permet de mener une collaboration entre des chercheurs en différentes disciplines avec des compétences complémentaires : l'automatique d'un côté et les mathématiques appliquées de l'autre, en tenant compte aussi de la mécanique et du génie des procédés, afin de réaliser des projets.

3) La commande par modèle interne (CMI) introduite dans les années 70, est étendue au cas des systèmes décrits par des EDP dans le cas des méthodes directes et ceci depuis les années 90, d'abord en linéaire (cf. Josserrand [57]), puis en non linéaire (cf. Dufour [35]). Encore une fois, l'observateur en dimension infinie s'avère utilisé dans le schéma de la commande frontière par modèle interne. L'observateur est le module d'adaptation qui agit sur le modèle pour le faire tendre vers le processus et les variables estimées sont ensuite utilisées par le module de contrôle.

Dans cette approche, pour le cas linéaire, la théorie de perturbation des opérateurs et des semi-groupes a été utilisée, que ce soit au niveau de la synthèse de commande ou au niveau de l'étude de stabilité. Cette théorie est établie de manière générale depuis les travaux de Kato [61] dans les années 60.

1.3 Etat de l'art et objets d'étude

1.3.1 Généralité : contrôle de systèmes décrits par des EDP

Dans l'analyse et la commande des systèmes gouvernés par EDP, il existe plusieurs approches, que ce soit au niveau méthodologique, ou au niveau synthèse de contrôle (au sens large du terme, i.e., identification, synthèse de la commande, synthèse d'observateurs, étude de stabilité, etc.)

L'intéressé peut se rapporter à Russell [97] par exemple pour une rétrospective. Il est juste rappelé ici pour une classification succincte afin de situer ce travail.

1.3.1.1 Classification méthodologique

Selon la démarche méthodologique, l'étude des systèmes à paramètres distribués, en termes de théorie du contrôle, peut être classifiée en deux catégories différentes :

- *les méthodes indirectes* : le système des EDP évoluant dans un espace fonctionnel de dimension infinie est d'abord approché par un système des EDO dans un espace de dimension finie (\mathbb{R}^n dans la plupart des cas), soit par une approximation des équations au travers d'une discrétisation des opérateurs de dérivation/différentiation (des schémas de différences finies sont couramment pratiqués), soit par une approximation des solutions du système (par des fonctions orthogonales des variables spatiales ou par la méthode des éléments finis essentiellement).

Comme dans tous les cas, le système ainsi obtenu est représenté dans \mathbb{R}^n , l'avantage des méthodes indirectes consiste en l'accès à de nombreux outils bien développés dans la théorie du contrôle en dimension finie (au sens large). En revanche, certains résultats théoriques pour le système seront fortement subordonnés à la méthode d'approximation et il n'est pas évident de pouvoir prouver la convergence de ces propriétés pour le système en dimension finie vers les propriétés intrinsèques du système en dimension infinie.

- *les méthodes directes* : dans toute la phase d'étude théorique et de synthèse, le système des EDP est représenté dans les espaces fonctionnels appropriés, donc de dimension infinie. Bien que les outils mathématiques que l'on emploie pour étudier le système soient plus délicats à maîtriser, l'approche directe nous permet de préserver toutes les informations du système. Les méthodes d'approximation ne sont appliquées que dans la simulation ou lors de l'implémentation finale, de ce fait de résolution numérique.

Le travail que nous allons présenter dans cette thèse s'inscrit dans le cadre des méthodes directes d'étude des systèmes EDP.

1.3.1.2 Classification des approches

Bien que l'espace d'état soit de dimension infinie quant à un système dynamique décrit par des EDP, l'espace du contrôle et l'espace de l'observation sont souvent de dimension finie.

Dans ce cas on peut calculer, par la transformée de Laplace, la fonction de transfert entrée-sortie (cf. Weiss [112] et Xu & Sallet [123]). La fonction de transfert obtenue n'est pas rationnelle mais transcendante. Il existe des méthodes du type H^∞ permettant de concevoir des correcteurs stabilisants par l'approche fréquentielle. On peut citer par exemple le travail de Xu [115] et les travaux de Lenz et al. [69]. Dans le domaine fréquentiel on dispose aussi du théorème de Huang (voir [56]) pour déterminer si un C_0 semi-groupe est exponentiellement stable ou non à partir de la résolvante de son générateur.

En même temps il existe une théorie très développée dans l'approche temporelle qui permet de généraliser en dimension infinie des notions telles la représentation d'état, la commandabilité, l'observabilité, la boucle ouverte, la boucle fermée, la stabilisation par

retour d'état (cf. Luo et al. [80] ou Curtain & Zwart [28]).

Au début des années 90, notamment à l'initiative de Fliess et ses collaborateurs (cf. [39]), une approche de l'algèbre différentielle a été introduite dans le domaine de l'automatique, initialement pour étudier la notion de *système plat* dans le cadre des systèmes non-linéaires de dimension finie, puis étendue aux systèmes de dimension infinie (systèmes linéaires à retards ou décrits par des EDP, voir Fliess & Mounier [40], Mounier & Fliess [41] et Laroche et al. [65]). Cette approche consiste à exprimer explicitement l'état et la commande en fonction de la sortie et ses dérivées successives sans calcul d'intégration du système différentiel. Les systèmes plats sont très nombreux dans des modèles mécaniques ou du génie chimique, voir Martin & Rouchon [81]. En dimension infinie, un rapport entre équations différentielles et équations algébriques peut être établi au travers d'un module sur un anneau différentiel, ce qui permet d'étendre l'application des critères de Kalman d'observabilité et de contrôlabilité à une classe de systèmes de dimension infinie [41]. Le contrôle basé sur la platitude, qui dépend de la sortie plate mais pas des variables d'état, est aussi conçu pour la poursuite de trajectoires, voir Rudolph [96]. Des reconstruteurs d'état basés sur la platitude sont également proposés pour des systèmes linéaires et non-linéaires, cf. Fliess & Sira-Ramírez [43], [44].

Cette thèse se situe du côté de l'approche temporelle par la représentation d'état.

1.3.2 Objets d'étude 1 : système du corps-poutre en rotation :

Historiquement, il existait de nombreux exemples de missions spatiales qui n'arrivaient pas atteindre leurs objectifs initiaux car certains effets mécaniques à long terme n'étaient jamais pris en compte dans le planning des missions. Par exemple, Explorer I, le premier satellite lancé avec succès par les Etats-Unis était supposé à tourner autour de son axe principal d'inertie une fois son orbite atteinte. Néanmoins, les signaux radio indiquaient qu'un mouvement non désiré se produisait avec une croissance en amplitude.

Parmi des variétés des structures flexibles aérospatiales de grandes échelles, un modèle prototype est celui de NASA spacecraft control laboratory experiment (SCOLE en abrégé, cf. Chen et al. [20]). Le modèle SCOLE est constitué d'un long mât flexible ou d'une poutre élastique qui relie deux corps rigides dont l'un représente la sonde orbitale du vaisseau spatial et l'autre l'antenne à réflecteur, chacun ayant des propriétés d'inertie prescrites et étant contrôlé à travers des EDO. La poutre élastique satisfait une EDP avec des conditions frontières imposées aux deux extrémités par les forces et les couples qui agissent sur la sonde orbitale et l'antenne. En pratique, les mesures sont prises par des capteurs piézoélectriques alors que le contrôle est réalisé par des jets de gaz.

A la fin des années 80, Baillieul et Levi ont proposé (cf. [6]) une méthode systématique pour écrire les équations dynamiques de ces systèmes avec la formulation lagrangienne. De plus, cette méthode permet d'incorporer l'effet de dissipation énergétique dans la formulation lagrangienne. Une analyse qualitative et quantitative de ces systèmes mécaniques a été effectuée dans le travail pour tenter d'expliquer des comportements dynamiques

imprévus dans le satellite Explorer I. En même temps un modèle de structure mécanique du corps-poutre en rotation a été proposé dans ce travail pour illustrer des phénomènes de bifurcation et de sélection des vitesses angulaires, qui sont propres à un tel système. On peut constater que ce modèle reflète aussi certaines propriétés dynamiques des modèles simplifiés de bras souples et de vaisseaux spatiaux rencontré dans la littérature (voir Biswas & Ahmed [10], Balakrishnan [7]). Ainsi les résultats que l'on peut obtenir sur la *stabilisabilité* et l'*observabilité* seront indicatifs pour les contrôles du mouvement des engins aérospatiaux ou d'autres modèles mécaniques. L'une de nos motivations consiste à étudier la stabilisabilité et la stabilisation de ces systèmes hybrides. Les techniques comme la fonction de Lyapunov et le principe d'ensemble invariant de LaSalle utilisées en dimension finie se sont relevés utiles dans le contexte de dimension infinie avec des adaptations nécessaires.

En particulier, le modèle à étudier qui représente la source de nos motivations est le système du corps-poutre en rotation (simplifié), gouverné par les EDP suivantes :

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = \omega_*^2 w(x, t) \quad \forall (x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad w_{xx}(1, t) = w_{xxx}(1, t) = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x). \end{cases}$$

avec la mesure $y(t) = w_{xx}(0, t)$.

Le problème de stabilisation de ce système a été beaucoup étudié dans la littérature :

1) avec frottements

Baillieul et Levi ont montré dans leur travail qu'en présence d'un frottement du type structurel et en absence du contrôle, le système possède un nombre fini d'états d'équilibre en rotation. Dans un cas du frottement visqueux (et sans contrôle), Bloch et Titi ont prouvé (cf. [11]) l'existence d'une variété inertielle pour le système.

En prenant en compte l'effet de frottement visqueux ou structurel, Xu et Baillieul ont montré (cf. [118]) que pour toute vitesse angulaire constante inférieure à une valeur critique (déterminée uniquement à partir des paramètres physique de la poutre), le système est exponentiellement et fortement (au sens topologique) stabilisable par une seule commande du couple à l'aide du retour d'état (vitesse angulaire).

2) sans frottement et avec contrôles frontières

Au cours de ces dernières années il s'est posé le problème de la stabilisation du système dans un cadre où les sorties (mesures) et les entrées (contrôles) sont situées à la frontière (bord du domaine spatial ou une partie du bord). La raison fondamentale d'utiliser la commande frontière est la facilité d'agir (contrôler) au système et d'accéder aux mesures par la frontière.

Le problème de la stabilisation frontière à l'extrémité libre de la poutre a été largement étudié. Dans un travail de Laouisy et al. [64], via le principe de LaSalle, la stabilisation exponentielle du système sans frottement a été établie en appliquant deux contrôles fron-

tières linéaires à l'extrémité libre de la poutre et un contrôle du type moment. Chentouf & Couchouron [21] ont étendu ces résultats à une classe de contrôles frontières non linéaires en proposant une loi de commande constituée d'un contrôle du couple exercé sur le disque et un contrôle de la force/moment appliqué à l'extrémité libre de la poutre.

3) sans frottement et sans contrôle frontière

Dès lors que la stabilisation du système est possible pour des mesures et des lois de commande par retour d'état à l'extrémité libre de la poutre ($x = 1$), il se pose tout naturellement la stabilisabilité du système avec des mesures recueillies à l'extrémité d'encastrement de la poutre ($x = 0$).

Dans le travail de Coron & d'Andrea-Novel [25], une loi de commande du couple par retour d'état a été construite qui permet de stabiliser asymptotiquement et globalement le système autour d'un point d'équilibre dans un espace de Hilbert.

Notre étude est motivée par la constatation que leur variable de commande est en effet le couple appliqué sur la partie du corps rigide. Par conséquent la loi de commande proposée est simple à réaliser en pratique, à condition que l'on ait accès à toutes les variables d'état. Or ces variables d'état sont définies dans un espace de dimension infinie, ce qui nous empêche d'y accéder directement. Afin de pouvoir appliquer la loi de commande en temps réel, nous proposons d'estimer ces variables par un observateur. On applique ensuite la commande par retour d'état basée sur les variables d'état estimées.

Sous l'hypothèse de l'observabilité exacte pour le système considéré, nous proposons un observateur du type Luenberger qui converge exponentiellement, ce qui constitue une amélioration des résultats antérieurs dans la construction des observateurs (cf. Conrad & Pierre [26], Celle et al. [18], Xu et al. [121] et Gauthier et al. [48]). Cette amélioration s'obtient à l'aide des opérateurs d'observation non-bornés (ils sont typiquement des observations frontières). Ensuite nous menons une étude sur la robustesse de l'observateur vis à vis de la perturbation et de la variation des constantes.

En appliquant au système les résultats théoriques développés dans Deguenon et al. [30], on présente un observateur sous la forme explicite d'EDP pour le système du corps-poutre en rotation. En utilisant la méthode des éléments finis nous entreprenons une étude numérique sur la dynamique du système de vibration et celle de l'observateur. Cela nous permet de mieux comprendre l'obstacle à la mise en oeuvre pratique de l'observateur. En particulier, nous présentons ici quelques résultats numériques sur la distribution spectrale et l'évolution dynamique des systèmes simulés. Cette analyse numérique nous permet de vérifier le résultat théorique obtenu et de choisir un schéma numérique mieux adapté.

Ces démarches sont instructives pour l'application réelle de l'observateur. La contribution ici consiste à exploiter les potentiels d'applications de l'observateur à travers des études numériques à partir de l'exemple d'un modèle de poutre élastique. En constatant que l'observateur converge bien avec la vitesse angulaire variant dans le temps, nous sommes amenés à envisager dans les travaux futurs l'extension de l'observateur à d'autres systèmes de vibration et une démonstration de la stabilité en boucle fermée observateur-loi

de commande.

Dans un cadre général de système de vibration en dimension infinie, on prouve que l'observateur proposé est exponentiellement convergent si le gain de correction est petit. Afin de montrer l'application potentielle de notre observateur, nous travaillons sur un système de poutre élastique en rotation comme un exemple. Dans cet exemple, nous expliquons comment obtenir une vitesse de convergence arbitraire de l'observateur en utilisant une seconde étape de conception. L'observateur proposé possède une structure du type capteur-actionneur colocalisé relativement simple telle que l'extension à d'autres systèmes de vibration est praticable, tels les systèmes étudiés dans Guo & Shao [53] et Guo & Zhang [52].

1.3.3 Objets d'étude 2 : systèmes d'échangeurs thermiques :

Les systèmes d'échangeurs thermiques sont des modèles très classiques et souvent rencontrés dans le génie des procédés (cf. Friedly [45]). Nous faisons les hypothèses usuelles suivantes :

1) les débits de fluides sont indépendants de la variable spatiale x ;

2) les paramètres tels que la densité, la capacité calorifique et les coefficients d'échange sont constants. Suivant le principe du bilan d'énergie thermique, on obtient les EDP qui décrivent la dynamique des températures pour le modèle avec diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = \alpha_1 \partial_{xx} u_1 - F_1 \partial_x u_1 + h_1(u_2 - u_1) \quad \forall (x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+, \\ \partial_t u_2 = \alpha_2 \partial_{xx} u_2 + h_2(u_1 - u_2) + h_3(u_3 - u_2), \\ \partial_t u_3 = \alpha_3 \partial_{xx} u_3 + F_2 \partial_x u_3 + h_4(u_2 - u_3) + h_5(u_4 - u_3), \\ \partial_t u_4 = \alpha_4 \partial_{xx} u_4 + h_6(u_3 - u_4) \end{cases}$$

avec les conditions frontières

$$\begin{cases} u_1(0, t) = 0, \quad \partial_x u_1(1, t) = 0, \\ \partial_x u_2(0, t) = 0, \quad \partial_x u_2(1, t) = 0, \\ \partial_x u_3(0, t) = 0, \quad u_3(1, t) = 0, \\ \partial_x u_4(0, t) = 0, \quad \partial_x u_4(1, t) = 0, \end{cases}$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \forall x \in]0, 1[.$$

et les EDP pour le modèle sans diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = -F_1 \partial_x u_1 + h_1(u_2 - u_1) \quad \forall (x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+ \\ \partial_t u_2 = h_2(u_1 - u_2) + h_3(u_3 - u_2), \\ \partial_t u_3 = F_2 \partial_x u_3 + h_4(u_2 - u_3) + h_5(u_4 - u_3), \\ \partial_t u_4 = h_6(u_3 - u_4), \\ u_1(0, t) = 0, \quad u_3(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

On remarque que le modèle avec diffusion est régi par un système d'EDP du type parabolique et celui sans diffusion (avec convection) est décrit par un système hyperbolique dégénéré du premier ordre.

D'un point de vue de l'automatique, ce genre de systèmes ont été étudiés comme exemple de systèmes linéaire de dimension infinie afin de tester des méthodes de synthèses de contrôleurs. Dans Gauthier & Xu [47], la synthèse du contrôleur H^∞ -optimal a été effectuée dans le domaine fréquentiel. Des contrôleurs robustes ont été proposés pour un échangeur thermique avec diffusion par Prohjolainen & Lätti [88]. Dans Xu & Gauthier [119], en utilisant les techniques de Lyapunov, ils ont établi pour le modèle linéarisé avec diffusion la stabilité exponentielle et la stabilité forte et faible selon la capacité calorifique des parois. En même temps, la stabilité en boucle fermée est montrée pour une loi de commande simple.

En appliquant la méthode de Lyapunov directe, Xu [117] a montré la stabilité exponentielle d'un système d'échangeur thermique avec et sans diffusion dans l'espace de Hilbert $(L^2(0, 1))^4$.

L'objectif de cette partie de thèse consiste à étudier la stabilité exponentielle de ces deux systèmes dans un contexte d'espaces de Banach, plus précisément, dans l'espace $(\mathcal{C}[0, 1])^4$. La stabilité exponentielle du modèle de diffusion dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}[0, 1])^4$ (muni de la norme uniforme) est démontrée par établir d'abord la L^p stabilité exponentielle du système. De plus, le taux de décroissance optimal du système est aussi caractérisé pour le modèle de diffusion en utilisant la théorie des opérateurs sectoriels. Par la théorie de perturbation, on prouve aussi la stabilité exponentielle dans l'espace $(\mathcal{C}[0, 1])^4$ pour le modèle de convection. Par contre, on n'a pas trouvé une méthode efficace pour calculer le taux de décroissance optimal du modèle de convection puisque le semi-groupe associé n'est pas analytique.

La première étape consiste à étudier la stabilité du système dans l'espace de Banach réel $(L^p(0, 1))^4$ muni de la norme L^p , $1 < p < \infty$. En passant à la limite $p \rightarrow \infty$ on peut étendre quelques résultats de stabilité exponentielle de $(L^p(0, 1))^4$ à l'espace $(\mathcal{C}[0, 1])^4$. En effet, la dissipativité du système considéré dans tous les espaces $L^p(0, 1)$ implique la dissipativité dans $\mathcal{C}[0, 1]$.

Les outils principaux que l'on utilise dans l'étude sont des notions de dissipativité dans l'espace de Banach (l'espace de Lebesgue L^p en particulier) et la théorie des opérateurs sectoriels. Ce travail présente une extension de la méthode de Lyapunov directe dans le contexte d'espaces de Banach. Ceci complète les résultats antérieurs obtenus dans un contexte des espaces de Hilbert.

Deuxième partie

Observation et commande d'une structure flexible

Chapitre 2

Observabilité et observateurs

Dans la mesure où chaque chose a son lieu, son moment et sa durée, il n'y a jamais deux choses semblables.

Martin Heidegger, *Qu'est-ce qu'une chose (1935-1936)*.

Sommaire

2.1	Introduction	21
2.2	Observabilité et contrôlabilité	21
2.3	Observateurs	27
2.4	Observateur du système du corps-poutre en rotation	32

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre consiste à construire, sous la forme explicite d'EDP, un observateur du type Luenberger exponentiellement convergent pour un système mécanique de structure flexible, plus précisément, un système hybride du corps-poutre en rotation. Cet observateur permet de reconstituer l'état du système d'observation en temps réel, qui n'est pas toujours physiquement mesurable. L'état estimé sert à appliquer une loi de commande stabilisante par retour d'état dans le chapitre 4.

La première partie de ce chapitre est consacrée à rappeler quelques notions essentielles de la théorie du contrôle, notamment l'observabilité, la contrôlabilité et la régularité d'un système linéaire, qui sont utiles dans la construction d'observateur. Dans la deuxième partie, en passant par une courte révision sur l'observateur de dimension finie, on explique la difficulté de la synthèse d'un observateur dans le cas de la dimension infinie. Enfin, dans ce cas particulier, on prouve la convergence exponentielle de l'observateur régi par des EDP. La démonstration est différente de celle de Deguenon [29]. On donne également une seconde conception d'observateur pour rendre sa vitesse de convergence aussi vite que l'on veut.

2.2 Observabilité et contrôlabilité

L'observabilité et la contrôlabilité font parties des notions fondamentales et essentielles dans la théorie de contrôle. Elles sont introduites par Kalman (cf. [59]) dans les années 60 dans le cadre de systèmes en dimension finie. Les notions analogues pour le cas de la dimension infinie existent aussi dans la littérature depuis des décennies. Dans les paragraphes suivants, nous rappellerons brièvement les définitions inhérentes à ces notions qui sont indispensables pour la construction de notre observateur.

2.2.1 Observabilité et observabilité exacte

2.2.1.1 Observabilité

Considérons une classe de systèmes dynamiques s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = g(x) \end{cases}$$

où l'état $x(t)$ évolue dans une variété analytique, \dot{x} désigne la dérivée de x par rapport à t , l'entrée $u \in U = \mathbb{R}^p$ et la sortie $y \in \mathbb{R}^q$ sont de dimension finie. Ce genre de systèmes constitue dans beaucoup de cas la représentation du comportement dynamique des modèles physiques ou chimiques. Etant donné une entrée u , l'évolution des trajectoires des variables d'états dépendent des conditions initiales.

L'observabilité, en résumé, est une propriété à partir laquelle on peut déterminer de façon exacte ou approchée l'état du système considéré, tout en connaissant quelques mesures (sorties) et contrôles (entrées).

La notion d'observabilité est basée sur la possibilité de distinguer deux conditions initiales différentes. On parlera ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales (cf. Bornard et al. [12]).

Définition 2.2.1 *Deux états initiaux $x_0, x_1 \in \mathcal{V}$ tels que $x_0 \neq x_1$ sont dits **distinguables** dans \mathcal{V} s'il existe un instant $t_0 \geq 0$ et une entrée admissible $u : [0, t_0] \rightarrow U$ tels que les trajectoires des sorties issues respectivement de x_0 et x_1 restent dans \mathcal{V} pendant la durée $[0, t_0]$ et vérifient que $y(x_0, u(t_0)) \neq y(x_1, u(t_0))$. Dans ce cas, on dit que u distingue x_0 et x_1 dans \mathcal{V} . Au cas contraire, x_0 et x_1 sont dits indistinguables.*

Définition 2.2.2 *Un système est **observable en** $x_0 \in \mathcal{V}$ si tout autre état $x_1 \neq x_0$ est distinguable de x_0 dans \mathcal{V} . Un système est **observable** s'il est observable en tout point $x_0 \in \mathcal{V}$.*

Pour les systèmes linéaires, l'observabilité ne dépend pas de l'entrée appliquée u . Si un système est observable pour l'entrée nulle $u(t) = 0, \forall t \geq 0$, alors il est observable pour toute entrée. Il faut indiquer également que pour un système linéaire observable, une entrée distingue toujours deux états distincts. En revanche, ceci n'est pas le cas pour des systèmes non-linéaires. Même si le système est observable, il existe certaines entrées qui n'arrivent pas à distinguer des états différents (cf. Celle et al. [18]).

2.2.1.2 Observabilité exacte

S'agissant d'un système à paramètre distribué dont l'état est de dimension infinie, son état ne peut pas toujours être physiquement mesuré d'une manière directe. Cependant, il est parfois possible de recueillir certaines informations sur le système et de suivre son évolution pendant une période finie.

En ignorant l'entrée u , considérons le système linéaire en dimension infinie suivant :

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t),$$

où l'état ϕ évolue dans un espace fonctionnel X et A est un opérateur. En particulier, si A est le générateur d'un C_0 semi-groupe noté $(T_t)_{t \geq 0}$, alors la solution généralisée du système s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi(t) = T_t \phi_0.$$

Il s'agit donc de connaître la valeur de la condition initiale ϕ_0 pour déterminer l'état ϕ à chaque instant t .

Supposons que l'on recueille q mesures

$$y(t) = C\phi(t) = (y_1(t), \dots, y_q(t))$$

sur le système, où C est un opérateur non-borné et son domaine $\mathcal{D}(C)$ est supposé invariant sous l'action du C^0 semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ et $y \in L^2(0, T; \mathbb{R}^q)$. Alors on a

$$y = CT_t \phi_0 = \Psi \phi_0.$$

Le problème de l'observabilité revient à l'existence d'un opérateur Υ défini par

$$\begin{aligned} \Upsilon : L^2(0, T; \mathbb{R}^q) &\rightarrow X \\ y &\mapsto \Upsilon y = \phi_0 \end{aligned}$$

Si Ψ est inversible, il est clair qu'on peut observer tous les états en posant $\Upsilon = \Psi^{-1}$. Ceci n'est pas le cas en général, on ne peut pas observer n'importe quel état ϕ_0 lorsque Ψ n'est pas inversible. En revanche, on peut observer des états aussi proches qu'on le souhaite.

Notons Ψ^* l'adjoint de Ψ et posons $G = \Psi^* \Psi$. On constate que l'opérateur G est normal donc auto-adjoint. S'il est de plus défini positif, alors il est inversible. Or $y = \Psi \phi_0$ implique que $\Psi^* y = \Psi^* \Psi \phi_0$, de sorte que $\phi_0 = G^{-1} \Psi^* y$. Dans ce cas, le système est dit *exactement observable* et G est le *Grammien d'observabilité*. Remarquons que ces notions sont analogues à celles qui sont déjà bien connues dans le cas de la dimension finie.

Dans le cadre d'espaces normés, il se trouve également dans la littérature (cf. Curtain & Zwart [28] par exemple) une autre définition équivalente de l'observabilité exacte, qui est parfois pratique à utiliser grâce aux formes analytiques. Soient X et Y deux espaces de Banach munis des normes $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ respectivement. Soient $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ le générateur d'un C_0 semi-groupe sur X noté $(T_t)_{t \geq 0}$ et $C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), Y)$ un opérateur d'observation (borné ou pas). Considérons dans un contexte général des systèmes d'observation gouvernés par des équations suivantes :

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad z(0) = z_0, \tag{2.2.1}$$

$$y(t) = Cz(t), \tag{2.2.2}$$

dans lesquelles on désigne par \dot{z} la dérivée de z par rapport au temps t , z désigne l'état à l'instant t , $z_0 \in X$ est l'état initial et y est la sortie observée.

En particulier, lorsque A est un opérateur anti-adjoint, i.e., $A^* = -A$, on sait que, d'après le théorème de Stone, l'opérateur A génère un C_0 semi-groupe d'isométrie sur X . La raison pour laquelle on va s'intéresser particulièrement à ce cas, est que ce genre de systèmes couvrent une grande partie des modèles physiques des vibrations, entre autre, l'équation des ondes, de la poutre ou des plaques dans le cadre de systèmes mécaniques, l'équation de Maxwell dans la théorie d'électromagnétisme, ou l'équation de Schrödinger dans la mécanique quantique, etc. Bien entendu, notre modèle du corps-poutre en rotation à étudier plus tard entre dans ce cadre-là.

Il est clair que $z(t) = T_t z_0$ est une solution généralisée de (2.2.1). Afin de donner un sens à l'équation (2.2.2), on suppose que C est un opérateur d'observation admissible (voir Weiss [110] par exemple).

Définition 2.2.3 L'opérateur dans le système (2.2.1)-(2.2.2) est un **opérateur d'observation admissible** si pour chaque $\tau > 0$ il existe une constante $K_\tau \geq 0$ telle que

$$\int_0^\tau \|CT_t z_0\|_Y^2 dt \leq K_\tau \|z_0\|_X^2, \quad \forall z_0 \in \mathcal{D}(A). \quad (2.2.3)$$

On dit parfois que le couple (A, C) est **admissible**.

En particulier, si C est borné, i.e., $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors il est clair que C est un opérateur d'observation admissible.

Définition 2.2.4 Le système (2.2.1)-(2.2.2) avec l'opérateur d'observation C admissible est dit **exactement observable** en temps τ s'il existe constante $k_\tau > 0$ telle que

$$k_\tau \|z_0\|_X^2 \leq \int_0^\tau \|CT_t z_0\|_Y^2 dt. \quad (2.2.4)$$

Le système (2.2.1)-(2.2.2) est **exactement observable** s'il est exactement observable en un certain temps $t_0 > 0$.

La notion d'observabilité exacte sert en effet à la construction de l'observateur en dimension infinie.

2.2.2 Contrôlabilité exacte et principe de dualité

Etant donné un système dynamique, supposons que la variable d'état x évolue dans l'espace d'état X (qui est un espace vectoriel pour le cas de la dimension finie et un espace fonctionnel pour le cas de la dimension infinie). On dit que le système est *contrôlable*, ou *commandable*, si on peut joindre deux points distincts quelconques de l'espace d'état, c'est-à-dire, si quelques soient deux points $x_0, x_1 \in X$ il existe deux instants t_0, t_1 avec $t_0 < t_1$ et une commande u , définie sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, telle que $x(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$ (voir Fliess [42]). La contrôlabilité, avec l'observabilité, est due aussi à Kalman [59], un concept clé pour la compréhension des propriétés structurelles et qualitatives, comme la stabilisation.

La contrôlabilité exacte est une propriété duale à l'observabilité exacte, voir Dolecki & Russell [33]. En tenant compte de cette dualité, le problème de la contrôlabilité exacte d'un système gouverné par des EDP revient à l'estimation d'observabilité (sous le nom 'inégalité inverse' dans l'ouvrage de Lions [76]). Dans la littérature courante, la plupart des études traitant de la contrôlabilité exacte et de l'observabilité exacte des systèmes décrits par des EDP sont basées sur l'approche *temporelle*. Autrement dit, on considère directement la solution d'un système d'EDP ou son dual, qui est investiguée au travers des différentes méthodes : l'analyse non-harmonique des séries de Fourier (cf. Avdonin & Ivanov [5]), la méthode de multiplicateurs (cf. Komornik [62], Lions [76]) ou l'analyse microlocale (cf. Bardos et al. [8]).

Il existe aussi une autre approche dite *fréquentielle*, liée au test du rang de Popov-Belevitch-Hautus (PBH) dans la théorie de systèmes en dimension finie (voir Hautus [55]). Cette approche fréquentielle pour l'observabilité du système d'observation est formulée uniquement en termes d'opérateurs A , C et d'un paramètre (la fréquence). Ceci signifie que la variable temporelle t n'apparaît pas dans le calcul. Donc la résolution de l'équation d'évolution peut être contournée. Les cas où l'opérateur d'observation C est borné et non-borné sont étudiés, respectivement, par Liu et al. [77] et Burq & Zworski [16].

Dans [90], Ramdani et al. ont donné une caractérisation de l'observabilité exacte formulée en termes de C et des éléments spectraux d'un opérateur A anti-adjoint ayant la résolvante compacte. En particulier, pour les équations des plaques et de Schrödinger, le système est exactement observable avec une observation frontière arbitrairement petite.

2.2.3 Régularité : système bien-posé

Soient U , X et Y des espaces de Hilbert. Considérons dans l'espace d'état X le système linéaire temps invariant avec l'entrée u :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.2.5)$$

avec l'espace d'entrée U et l'espace de sortie Y . La trajectoire d'état $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, X)$, la fonction d'entrée $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+, U)$ et la fonction de sortie $y \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+, Y)$. L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ sur X , B est l'opérateur de contrôle (éventuellement non borné) et $C : \mathcal{D}(A) \rightarrow Y$ l'opérateur d'observation.

Définition 2.2.5 Un couple (A, B) est dit **admissible** si $\forall \tau > 0$,

$$\int_0^\tau T_{\tau-t} Bu(t) dt \in X, \quad \forall u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; U).$$

Alors l'opérateur de contrôle B est dit **admissible** pour T_t .

Définition 2.2.6 Le système linéaire (2.2.5) ou le triple (A, B, C) est dit **régulier** si

i) (A, B) et (A, C) sont admissibles et

ii) le système (2.2.5) est un système bien-posé tel qu'il existe un $D \in \mathcal{L}(U; Y)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s)u &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow +\infty} Du + C_\Lambda (sI - A)^{-1} Bu \\ &= Du, \quad \forall u \in U, \end{aligned}$$

où la fonction de transfert G du système (2.2.5) appartient à $H^\infty(\mathbb{C}_\alpha, \mathcal{L}(U; Y))$, (i.e. G est analytique et bornée dans un demi-plan complexe droit $\mathbb{C}_\alpha = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > \alpha\}$, avec

$\alpha \in \mathbb{R}^+$) et C_Λ une Λ -extension de C définie par

$$C_\Lambda x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} C\lambda(\lambda I - A)^{-1}x, \quad x \in \mathcal{D}(C_\Lambda),$$

où $\mathcal{D}(C_\Lambda)$ contient tous les $x \in X$ dont la limite existe.

Ces notions sont connues depuis plus d'une dizaine d'années, voir Weiss [111], Staffans & Weiss [101] et Curtain & Weiss [27], pour plus de détails.

Soit (2.2.5) un système bien posé avec B admissible. On impose deux hypothèses suivantes, qui sont vérifiées pour beaucoup de modèles de structures flexibles contrôlés :

Hypothèse (H_1) : L'opérateur A est *essentiellement anti-adjoint et dissipative*, c.-à-d., $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et il existe un $Q \in \mathcal{L}(X)$ avec $Q \geq 0$ tel que

$$Ax + A^*x = -Qx, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 2.2.7 *Cette hypothèse implique que T_t est un semi-groupe de contractions. En particulier, lorsque $Q = 0$, on retrouve que A est anti-adjoint et T_t est unitaire. On s'y intéresse particulièrement car ce genre d'opérateur sert souvent à décrire les comportements dynamiques des systèmes de vibration, par exemple, les équations des ondes, des poutres, des plaques ou d'autres structures mécaniques flexibles.*

Hypothèse (H_2) : $Y = U$ et $C = B^*$.

Remarque 2.2.8 *Dans le cadre du contrôle des systèmes de vibration, afin de stabiliser des structures, on se sert souvent d'une implémentation des capteurs et actionneurs dont leurs positionnements sont colocalisés, c.-à-d., le capteur et l'actionneur agissent sur la même position physique. Une approche colocalisée est relativement simple, et ses propriétés de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des dynamiques non modélisées ont été démontrées. Cette colocalisation capteur/actionneur vérifie souvent l'hypothèse (H_2) avec l'espace d'entrée U de dimension finie.*

Sous ces deux hypothèses, Curtain & Weiss [27] ont montré un résultat important concernant la stabilisation des systèmes anti-adjoints et dissipatifs :

Théorème 2.2.9 *Supposons que (2.2.5) est un système linéaire bien posé exactement contrôlable, exactement observable et vérifiant les hypothèses (H_1) , (H_2) . Alors il existe un $\kappa_0 > 0$ (éventuellement $\kappa_0 = \infty$) tel que pour tout $\kappa \in]0, \kappa_0[$, le système en boucle fermée avec la commande par retour de sortie statique $u = -\kappa y + v$ (où v est une autre fonction d'entrée) est bien posé et exponentiellement stable.*

Rappelons que dans le cas de la dimension finie, quand A est une matrice réelle dissipative, alors quelque soit B une matrice réelle, la fonction de transfert $G(s)$ est réelle positive et analytique sur le demi-plan droit \mathbb{C}_0 . Il est prouvé que dans le cas de la dimension infinie, avec A dissipatif et B borné ($B \in \mathcal{L}(U, X)$), $G(s)$ est une fonction de

transfert positive à valeur dans $\mathcal{L}(U)$. Lorsque B est non borné, il n'appartient pas à $\mathcal{L}(U, X)$ mais à $\mathcal{L}(U, X_{-1})$, où X_{-1} désigne la complétude de X munie de la norme induite $\|x\|_{-1} = \|(\beta I + A)^{-1}x\|$. Son espace dual, noté par X_1 , est le domaine $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe $\|x\|_1 = \|(\beta I - A)x\|$. En plus, les injections $X_1 \subset X \subset X_{-1}$ sont continues et denses.

Proposition 2.2.10 *Soient $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ un opérateur à domaine dense et avec l'ensemble de résolvant $\rho(A) = \emptyset$ et $\beta \in \rho(A)$. Alors on a $A \in \mathcal{L}(X_1, X)$ et A possède une extension unique dans $\mathcal{L}(X, X_{-1})$, noté aussi par A . De plus, on a*

$$(\beta I - A) \in \mathcal{L}(X, X_1), \quad (\beta I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X_{-1}, X)$$

et ils sont des isomorphismes isométriques.

Remarque 2.2.11 *Il faut indiquer que même si certaines hypothèses sur le système en boucle ouverte ne sont pas vérifiées, par exemple, le système n'est pas bien posé, on peut également obtenir la stabilité exponentielle du système en boucle fermée.*

2.3 Observateurs

Etant donné un système dynamique (en dimension finie ou infinie) observable, un observateur est un système auxiliaire qui produit une estimation d'état courant tout en utilisant des observations enregistrées et disponibles.

Il existe une multitude de raisons pour lesquelles la reconstitution d'état est souhaitée, y compris des raisons techniques (construction et positionnement des capteurs) ou économiques (coût des capteurs). L'utilisation d'un observateur en automatique est sollicitée principalement dans trois situations : la supervision des procédés, la détection de défaillances et la synthèse de commande.

- *supervision des procédés* : dans certains processus, l'intérêt d'une estimation de l'état consiste à entreprendre une action appropriée. Prenons l'exemple de pilotage d'avion, l'aviateur ou la sonde doit surveiller l'angle de tangage de l'appareil pour atteindre le bon angle de décrochage. Un autre exemple est constitué de l'opérateur dans un procédé qui a besoin de l'estimation de l'état afin de déterminer le moment d'arrêt. L'observateur fournit une estimation de l'état du processus à partir de ses entrées et sorties. Dans ce cas, l'état estimé en temps réel ne sert qu'aux utilisateurs en boucle ouverte.

- *détection de défaillance* : la détection de défaillance dans des processus est fort importante car une défaillance peut provoquer des conséquences sérieuses comme une perte de production ou un accident. Un détecteur permet de comparer l'état estimé par l'observateur avec l'état réel du procédé pour détecter l'occurrence de défaillance, localiser son emplacement et déterminer l'amplitude du défaut. En effet, si l'observateur est convergent, l'écart entre l'état réel et l'état estimé doit converger vers zéro. Si ce n'était pas le cas, il existerait certainement des anomalies (défaillances) dans le processus.

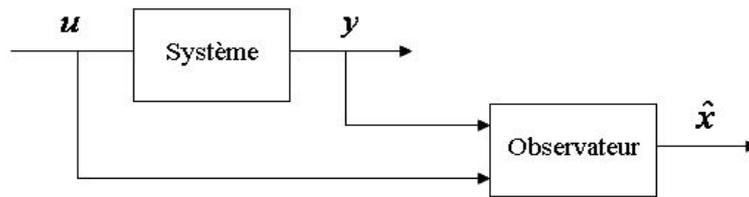


FIGURE 2.1 – Principe de l'observateur.

- *synthèse de commande* : en dimension finie, la synthèse d'une loi de commande par retour d'état suppose en général que tous les variables d'état du système sont connues. Néanmoins, des raisons techniques nous empêchent parfois d'y accéder directement. Cette absence d'information incite à estimer l'état courant en vue de réaliser l'implantation des lois de commande par retour d'état. En dimension infinie, l'estimation de l'état est toujours exigée en raison de la dimension infinie de l'espace d'état. En effet, la dimension des mesures physiques est toujours finie et limitée dans la pratique. Si l'on veut accéder aux variables d'état, construire un observateur est tout à fait raisonnable. Dans ce cas, l'état estimé en temps réel sert aux contrôleurs en boucle fermée.

Le problème d'approximation d'état d'un système linéaire en dimension finie est résolu par l'observateur du type Luenberger (cf. [79]) tant que le système est observable ou détectable. En restant dans le même esprit avec des adaptations nécessaires, on peut construire un observateur analogue du type Luenberger en dimension infinie. Dans le cas de systèmes non-linéaires, une extension du filtre de Kalman se prête à l'étude. Dans cette thèse, on s'intéresse à la construction des observateurs essentiellement dans le cas linéaire.

2.3.1 Observateur du type Luenberger en dimension finie

Avant d'aborder une étude sur notre système à paramètres distribués, on commence par une courte révision d'un système linéaire en dimension finie.

1) Observateur du type Luenberger

Considérons le système linéaire anti-symétrique dans l'espace d'état $X = \mathbb{R}^n$, s'écrivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx \end{cases}$$

avec $A^T = -A$. Supposons que le couple (A, C) est observable.

Dans ce cas, un observateur du type Luenberger classique est gouverné par l'équation différentielle linéaire :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - \kappa C^T(y(t) - C\hat{x}), \quad \forall \kappa > 0.$$

Autrement dit, il est constitué d'une copie du système d'observation et un terme de correction basé sur la sortie avec un gain de correction positif (voir la figure Fig.2.1).

On s'intéresse naturellement à la convergence de l'observateur, ceci est équivalent à la stabilité du système d'erreur.

2) Quelques rappels sur la stabilité

Introduisons d'abord quelques notions sur les principaux types de stabilité. Soit un système autonome (linéaire ou non linéaire)

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

avec f une application continue et localement lipschitzienne définie sur le domaine qui contient l'origine. Il existe des différents types de stabilités pour caractériser l'évolution d'un point vers son état stable. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre du système qui satisfait $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Ce point d'équilibre du système est dit :

- *stable (au sens large de Lyapunov)* si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon, \forall t > 0$. Autrement dit, les solutions qui démarrent suffisamment près du point d'équilibre 0 (avec une distance δ) restent toujours suffisamment proche de 0 (avec une distance ε).

Remarquons que cela doit être vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Il est *instable* s'il n'est pas stable.

- *asymptotiquement stable* s'il est stable et $\|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow \infty$. Cela signifie que non seulement les solutions qui démarrent suffisamment près du point d'équilibre 0 restent toujours proche de 0, mais aussi qu'elles convergent vers le point d'équilibre.

- *exponentiellement stable* s'il est stable et $\exists \alpha, \beta > 0 / \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \forall t > 0$. Dans ce cas-là, les solutions sont non seulement convergentes, mais aussi convergent plus vite qu'une fonction exponentielle.

On appelle *fonction de Lyapunov* au voisinage d'un point d'équilibre x_0 une fonction V définie au voisinage de ce point telle que 1) $V(x) \geq 0$ est définie positive ; 2) la fonction V et sa dérivée sont continues et $\dot{V}(x) \leq 0$.

L'existence d'une fonction de Lyapunov autour d'un point d'équilibre permet d'établir directement la stabilité de ce point. Toute la difficulté consiste à trouver une fonction de Lyapunov dans le cas général.

Théorème 2.3.1 (Lyapunov) *S'il existe une fonction $V(x)$ dite de Lyapunov telle que*

1) $\exists V_1, V_2$ non décroissantes telles que $V_1(\|x\|) \leq V(x) \leq V_2(\|x\|)$,

2) $V(x) \geq 0$ est définie positive, et $\dot{V}(x) \leq 0$ est définie négative.

Alors le système est asymptotiquement stable.

D'un point de vue physique, cette méthode est liée à l'énergie du système. Si le système perd l'énergie au fil du temps et s'il n'y a pas d'énergie récupérée, alors forcément le système s'arrêtera et atteindra une phase finale. Cet état final est appelé *attracteur*.

3) Problème de stabilité du système d'erreur

En faisant la différence entre le système d'observation et l'observateur, on obtient le système d'erreur :

$$\dot{\varepsilon} = (A - \kappa C^T C)\varepsilon,$$

où l'erreur $\varepsilon = x - \hat{x}$.

Prenons la forme quadratique $V(\varepsilon) = \varepsilon^T \varepsilon$ comme la fonction de Lyapunov. En dérivant $V(\varepsilon(t))$ suivant la trajectoire du système d'erreur, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= 2\varepsilon^T \dot{\varepsilon} \\ &= 2\varepsilon^T (A - \kappa C^T C)\varepsilon \\ &= -2\kappa \varepsilon^T C^T C \varepsilon \\ &= -2\kappa \|C\varepsilon\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Du fait que la matrice A est anti-symétrique, on peut déduire que $\varepsilon^T A \varepsilon = 0$.

Puisque $V(\varepsilon) > V(0)$ et \dot{V} est semi-définie négative, on souhaite appliquer le principe d'ensemble invariant de LaSalle afin de montrer la stabilité asymptotique du système au point d'équilibre 0. Il est clair que toute trajectoire de ε est bornée car $V(\varepsilon) = \varepsilon^T \varepsilon$ est bornée. En fait, $\dot{V}(\varepsilon) = -2\kappa \|C\varepsilon\|^2$ implique que

$$V(\varepsilon(t)) = V(\varepsilon(0)) - 2\kappa \int_0^t \|C\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau.$$

Donc ε est bornée et converge vers l'ensemble ω -limite non vide

$$W(\varepsilon_0) = \{\varepsilon^* \in X \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \text{ telle que } t_n \rightarrow \infty \text{ et } \varepsilon(t_n) \rightarrow \varepsilon^* \text{ quand } n \rightarrow \infty\}.$$

En plus, comme ε est bornée et \dot{V} est semi-définie négative, d'après le principe d'invariant de LaSalle, on conclut que $W(\varepsilon_0) \subset M$ où M est le plus grand ensemble invariant contenu dans Λ

$$\Lambda = \{\varepsilon \in X \mid \dot{V} = 0\} = \{\varepsilon \in X \mid C\varepsilon = 0\}.$$

(M est donc l'union de tous les ensembles invariants contenu dans l'ensemble Λ).

Pour montrer la stabilité asymptotique du système au point d'équilibre 0, il suffit de montrer que $W(\varepsilon_0) = \{0\}$. Par l'invariance de M sous l'action e^{tA} et le fait que $A^\kappa \varepsilon = (A - \kappa C^T C)\varepsilon = A\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in \Lambda$, on a l'invariance de M sous e^{tA} , c.-à-d., pour un élément $\varepsilon^* \in W(\varepsilon_0)$, on a $e^{tA}\varepsilon^* \in W(\varepsilon_0) \subset \Lambda$. Par conséquent, on trouve $Ce^{tA}\varepsilon^* = 0$. En dérivant successivement $Ce^{tA}\varepsilon^*$ par rapport au temps, on obtient

$$\begin{cases} Ce^{tA}\varepsilon^* = 0, \\ CAe^{tA}\varepsilon^* = 0, \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{tA}\varepsilon^* = 0. \end{cases}$$

Or (A, C) est observable par l'hypothèse. En faisant $t = 0$ dans les dernières équations et par le critère de Kalman, on a $\varepsilon^* = 0$. Donc l'ensemble ω -limite $W(\varepsilon_0) = \{0\}$. Par le principe de LaSalle, on conclut que $\{0\}$ est asymptotiquement stable.

Comme on est en dimension finie, la variable d'état estimée $\hat{x}(t)$ converge exponentiellement vers la variable d'état réel $x(t)$ en fonction du temps et cela quelque soit $\kappa > 0$.

2.3.2 Observateur en dimension infinie

La synthèse d'un observateur est une tâche particulièrement importante et difficile dans le contexte de systèmes dynamiques en dimension infinie. En effet, la dimension de l'espace des observations physiques à notre disposition est toujours finie et limitée dans la pratique, alors que l'espace d'état du système est de dimension infinie. Parfois dans l'application il est besoin de reconstituer un nombre infini de variables d'état afin d'appliquer des lois de commande par retour d'état en temps réel. Par exemple, une loi de commande stabilisante a été proposée dans Coron & d'Andréa-Novel [25] pour contrôler un système du corps-poutre en rotation. Cette loi de commande est très intéressante car le contrôle est le couple appliqué sur le corps rigide, et par conséquent, sa réalisation pratique serait relativement simple si toutes les variables d'état étaient accessibles. Or ces variables d'état sont définies dans un espace de dimension infinie, ce qui nous empêche d'y accéder directement. Afin de rendre possible l'application pratique de cette loi de commande, nous proposons d'estimer ces variables d'état en utilisant un observateur. La loi de commande peut donc être réalisée basée sur ces variables d'état estimées.

Dans le contexte de systèmes non-linéaires en dimension finie, un observateur du type Luenberger en dimension infinie a été proposé dans Celle et al. [18]. La construction d'observateur a été généralisée pour des systèmes bilinéaires dissipatifs en dimension infinie avec des entrées régulièrement persistantes (voir Xu et al. [121] et Gauthier et al. [48]). En revanche, seule la stabilité au sens faible a été obtenue pour l'observateur, qui est le meilleur résultat que l'on puisse espérer acquérir. En effet, sous l'hypothèse imposée sur la continuité et la dimension finie de l'opérateur d'observation, la stabilité exponentielle, souhaitée pour les applications, n'était pas réalisable.

Au point de vue d'application, des systèmes de vibration sont souvent décrits par des EDP du second ordre. Dans [31] Demetriou a proposé de construire des observateurs directement à partir des systèmes à paramètres distribués du second ordre, tout en utilisant des fonctions de Lyapunov qui dépendent de paramètres. L'avantage de l'observateur naturel du second ordre est de garantir que la dérivée du composant déplacement estimé est en effet le composant vitesse estimée quelque soit le temps t positif, ce qui n'est pas toujours vrai si le système est placé sous la forme du premier ordre. L'autre bénéfice d'un observateur du second ordre consiste en l'effort réduit dans le calcul du gain d'observateur. Cependant, seule la convergence forte (au sens topologique) du système d'erreur a été garantie. L'observateur du type Luenberger que nous avons proposé ici a pour la convergence d'erreur un taux de décroissance exponentiel vers zéro par rapport au temps.

Ceci est en fait une propriété désirable que nous cherchons à obtenir pour l'observateur en vue de son application. En plus, l'observateur naturel du second ordre proposé dans [31] ainsi que dans le travail récent de [32] ne peut pas être appliqué dans notre cas. En effet, dans leur conception le terme du frottement visqueux lié au composant de vitesse a été introduit afin de rendre l'observateur convergent, or notre système d'observation est un système de vibration conservatif sans frottement et sans aucune mesure en vitesse.

En ce qui concerne la conception récente d'observateurs, nous citons les résultats obtenus par Nguyen et Egeland dans [83] et [84]. Ils ont considéré plusieurs systèmes hybrides consistant de l'équation de la poutre ou l'équation des ondes couplés avec des EDO par frontière. Plus précisément, dans [83] un observateur a été proposé pour un système motorisé avec la poutre d'Euler-Bernoulli, et la convergence exponentielle a été prouvée. Néanmoins, la vitesse de convergence n'a pas été donnée. Dans [84] l'observateur proposé est globalement asymptotiquement convergent et localement exponentiellement convergent pour le système des câbles sismiques en remorque, en tenant compte de certaines non-linéarités. Pourtant aucune indication a été fournie concernant la vitesse de convergence de l'observateur. On remarque aussi que dans [83] et [84], les observations multi-sorties ont été requises pour garantir la convergence asymptotique de l'observateur conçu.

Sous l'hypothèse de la régularité et de l'observabilité exacte pour le système considéré, notre observateur du type Luenberger est exponentiellement convergent, ce qui constitue une amélioration des résultats précédents (voir Celle et al. [18], Gauthier et al. [48] et Xu et al. [121]) dans le domaine de construction d'observateur. Cette amélioration est obtenue à l'aide des opérateurs d'observation non-bornés (ils sont typiquement des observations frontières). En ce sens-là, notre travail est la continuité et le prolongement des travaux précédents sur la construction d'observateurs. L'idée de la construction d'observateur est proche de celles de la stabilisation des systèmes de vibration avec contrôle et observation colocalisées. La convergence exponentielle d'un tel observateur est bien connue en dimension finie comme démontrée dans la section précédente. Par contre, le même observateur ne fonctionne pas toujours en dimension infinie. Par exemple, en dimension infinie une grande valeur de gain de correction peut provoquer l'instabilité exponentielle de l'erreur de l'observateur. Pour cette raison, nous avons besoin d'effectuer une étude plus précise sur l'observateur. En même temps nous menons une étude sur la robustesse de l'observateur vis à vis de la perturbation et de la variation des constantes.

2.4 Observateur du système du corps-poutre en rotation

Nous proposerons ici un observateur du type Luenberger pour un système de vibration en dimension infinie dit système du corps-poutre en rotation. Le système est décrit par une équation d'EDP, de plus, son dynamique est gouverné par un groupe unitaire. L'observateur proposé est capable de reconstituer l'évolution dynamique du profil de la

poutre, en mesurant seulement le moment de force à la frontière.

Dans la suite, nous allons étudier le modèle simplifié du corps-poutre en rotation et montrer la convergence de l'observateur, ou la stabilité du système d'erreur de manière équivalente.

2.4.1 Description du modèle

Le modèle hybride du corps-poutre en rotation que nous considérons est un système mécanique constitué d'un disque tournant avec comme appendice une poutre du type Euler-Bernoulli encastree au centre du disque. Le disque tourne librement autour de son axe fixé avec une vitesse angulaire $\omega(t)$ (en particulier, elle peut être une constante positive ou nulle). La poutre est supposée non extensible et contrainte à se déplacer dans un plan qui est perpendiculaire au plan du disque.

Le lagrangien \mathcal{L} et l'énergie totale \mathcal{E} du système sont, respectivement :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}I_d\omega^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^1 [\rho\omega^2(t)u^2(x,t) + \rho u_t^2(x,t)] dx - \frac{1}{2}\int_0^1 EIu_{xx}^2(x,t) dx, \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2}I_d\omega^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^1 [\rho\omega^2(t)u^2(x,t) + \rho u_t^2(x,t)] dx + \frac{1}{2}\int_0^1 EIu_{xx}^2(x,t) dx.\end{aligned}$$

D'après Baillieul & Levi [6], la formulation lagrangienne permet d'écrire les équations dynamiques du déplacement $u(t)$ de la poutre et de la vitesse angulaire $\omega(t)$ du disque telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt}(x,t) + EIu_{xxxx}(x,t) + \rho B u_t(x,t) = \rho\omega^2(t)u(x,t) \quad x \in [0, L], t \geq 0 \\ u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(L,t) = u_{xxx}(L,t) = 0, \\ \omega_t(t) = \frac{\Gamma(t) - 2\omega(t) \int_0^L \rho u(x,t)u_t(x,t)dx}{I_d + \int_0^L \rho u^2(x,t)dx}, \end{array} \right. \quad (2.4.6)$$

dans laquelle

L est la longueur de la poutre (qui a pour unité $[m]$) ;

ρ , la densité massique de la poutre ($[kg/m]$) ;

E , le module élastique de Young ($[N/m^2]$) ;

I , le moment quadratique (on dit aussi parfois EI est la rigidité élastique) ($[m^4]$) ;

I_d , le moment d'inertie du disque ($[kg \cdot m^2]$) ;

Γ , le contrôle du couple ;

et l'opérateur B caractérise le frottement du système, (voir Fig.2.2).

Remarque 2.4.1 *L'un des avantages principaux de l'approche lagrangienne consiste à l'invariance des équations lagrangiennes par rapport aux changements de variables. On indique ici qu'il existe aussi d'autres approches, par exemple, l'approche hamiltonienne (méthode d'énergie-Casimir), voir Krishnaprasad & Marsden [63].*

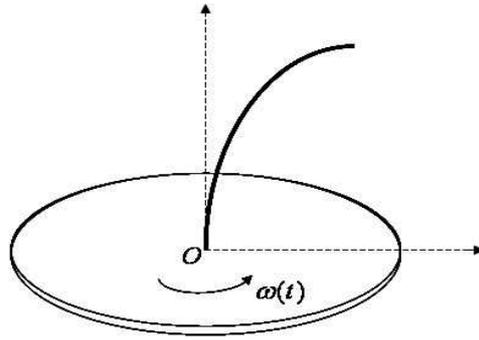


FIGURE 2.2 – Modèle du corps-poutre en rotation.

2.4.2 Observateur du type Luenberger pour le modèle

Comme nous avons indiqué au premier chapitre, de nombreux auteurs ont travaillé sur des lois de commande par retour d'état pour ce système. En particulier, la loi de commande par retour d'état considérée dans Coron & d'Andréa-Novel [25] est non-locale, dans le sens que la loi de commande demande la connaissance en temps réel de toutes les variables d'état sur tout le domaine spatial. Par conséquent, pour les applications, on est obligé de mesurer toutes les variables d'état qui sont de dimension infinie et donc physiquement non réalisables. Cependant, le moment de force et la force latérale sur l'extrémité de l'encastrement sont physiquement mesurables tout comme la vitesse angulaire du disque. Alors nous proposons de construire un observateur pour estimer les variables d'état à partir de ces mesures et puis en appliquant le principe de séparation, proposé dans Gauthier & Kupka [46], à mettre en cascade notre observateur et la loi de commande par retour d'état dans [25], afin de réaliser la stabilisation.

On commence par étudier le modèle du corps-poutre en rotation que l'on a simplifié en supposant la vitesse angulaire constante dans un premier temps. Sans perte de généralité, on normalise à l'unité les paramètres physiques comme la raideur élastique, la longueur et la masse volumique de la poutre. Le comportement dynamique du système du corps-poutre en rotation avec une vitesse angulaire constante est décrit par les EDP suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = \omega_*^2 w(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega^+, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad w_{xx}(1, t) = w_{xxx}(1, t) = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \\ y(t) = w_{xx}(0, t), \end{array} \right. \quad (2.4.7)$$

où $\Omega^+ =]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+$, la vitesse angulaire ω_* est une constante réelle (éventuellement nulle). Il est important d'indiquer que la mesure de sortie $y(t)$ est le moment de force frontière de la poutre à l'extrémité encastree, qui est de dimension finie. Pour la construction des observateurs on suppose que $|\omega_*| < \sqrt{l_1}$, où l_1 est la plus petite valeur propre de

l'opérateur différentiel P défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(P) &= \{f \in H^4(0, 1) \mid f(0) = f_x(0) = 0; f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0\}; \\ Pf &= f_{xxxx} \quad \forall f \in \mathcal{D}(P). \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Remarque 2.4.2 *Il est clair que P ainsi défini est un opérateur linéaire non borné, positif et auto-adjoint avec la résolvante compacte. Par conséquent, son spectre $\sigma(P)$ est discret, c.-à-d., il ne contient que des valeurs propres réelles strictement positives avec la multiplicité algébrique simple. On les note par $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, elles forment une suite tendant vers l'infini et ses vecteurs propres associés, notés par $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, forment une base orthonormée dans $L^2(0, 1)$.*

Remarque 2.4.3 *En fait, Xu & Baillieul [118] ont proposé une loi de commande par retour d'état qui stabilise le système d'observation globalement et asymptotiquement autour du point d'équilibre $(w, \omega) = (0, \bar{\omega})$, $|\bar{\omega}| < \omega_c$, où $\omega_c = \sqrt{l_1}$ est une vitesse angulaire critique. Ils ont aussi montré qu'au delà de la vitesse critique il n'existe pas de loi de commande stabilisante par retour d'état.*

L'observateur du type Luenberger que l'on propose est gouverné par des EDP suivantes :

$$\begin{cases} \hat{w}_{1t}(x, t) = \hat{w}_2(x, t) - \kappa F(x) [\hat{w}_{1xx}(0, t) - y(t)], \quad \forall (x, t) \in \Omega^+, \\ \hat{w}_{2t}(x, t) = -\hat{w}_{1xxxx}(x, t) + \omega_*^2 \hat{w}_1(x, t), \\ \hat{w}_1(0, t) = \hat{w}_{1x}(0, t) = 0, \quad \hat{w}_{1xx}(1, t) = \hat{w}_{1xxx}(1, t) = 0, \\ \hat{w}(x, 0) = \hat{w}_0(x), \quad \hat{w}_t(x, 0) = \hat{w}_1(x), \end{cases} \quad (2.4.9)$$

où $\kappa > 0$ est une constante positive et $F(x)$ est la solution unique de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} F_{xxxx} - \omega_*^2 F = 0, \\ F(0) = F_{xx}(1) = F_{xxx}(1) = 0, \\ F_x(0) = 1. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Désignons par $H^n(0, 1)$ l'espace de Sobolev usuel (l'espace de Hilbert en particulier) pour chaque indice entier positive n et on définit l'espace H_L^2 par

$$H_L^2 = \{f \in H^2(0, 1) \mid f(0) = f_x(0) = 0\} \quad (2.4.11)$$

En effet, H_L^2 est un sous-espace de H^2 dont ses éléments s'annulent à $x = 0$ ainsi que leurs dérivées premières. L'espace d'état pour le système d'observation (2.4.7) est le même $X = H_L^2 \times L^2(0, 1)$ que pour l'observateur (2.4.9). En munissant X d'un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_X = \int_0^1 [f_{1xx} g_{1xx} + f_2 g_2 - \omega_*^2 f_1 g_1] dx, \quad (2.4.12)$$

on peut prouver que X est un espace de Hilbert (cf. Xu & Baillieul [118] pour une preuve). En revanche, on remarque que si $|\omega_*| > \sqrt{l_1}$, la forme bilinéaire ci-dessus ne sera pas forcément un produit scalaire pour X .

2.4.3 Convergence de l'observateur

Une fois que nous avons l'observateur, on s'intéresse naturellement au problème fondamental : est-ce que l'observateur ainsi construit peut bien estimer les variables d'état du système dynamique d'origine ? A quelle vitesse peut-il rapprocher la dynamique du système d'observation ? Ceci nous ramène au problème de la convergence pour l'observateur. En fait, en notant par $\varepsilon(t) = \hat{w}(t) - w(t)$ l'erreur entre les trajectoires de l'état estimé et de l'état réel, la convergence de l'observateur n'est rien d'autre que la stabilité du système d'erreur régi par les EDP suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{1t}(x, t) = \varepsilon_2(x, t) - \kappa F(x) \varepsilon_{1xx}(0, t), \\ \varepsilon_{2t}(x, t) = -\varepsilon_{1xxxx}(x, t) + \omega_*^2 \varepsilon_1, \\ \varepsilon_1(0, t) = \varepsilon_{1x}(0, t) = 0, \\ \varepsilon_{1xx}(1, t) = \varepsilon_{1xxx}(1, t) = 0. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

Montrons d'abord la stabilité du système en appliquant la méthode de Lyapunov. Prenons la norme de X (avec $|\omega_*| < \sqrt{l_1}$) comme la fonction de Lyapunov :

$$V(t) = \|\varepsilon\|_X^2 = \int_0^1 \varepsilon_{1xx}^2 + \varepsilon_2^2 - \omega_*^2 \varepsilon_1^2 dx.$$

En faisant l'intégration par partie et en tenant compte des conditions frontières, la dérivée de V par rapport à t nous donne

$$\begin{aligned} \dot{V} = \frac{d}{dt} \|\varepsilon\|_X^2 &= 2 \int_0^1 (\varepsilon_{1xx} \varepsilon_{1xxt} + \varepsilon_2 \varepsilon_{2t} - \omega_*^2 \varepsilon_1 \varepsilon_{1t}) dx \\ &= 2 \int_0^1 [(\varepsilon_{1t} + \kappa F(x) \varepsilon_{1xx}(0, t))(-\varepsilon_{1xxxx} + \omega_*^2 \varepsilon_1) \\ &\quad + (\varepsilon_{1xxxx} - \omega_*^2 \varepsilon_1) \varepsilon_{1t}] dx \\ &= -2\kappa \varepsilon_{1xx}(0, t) \int_0^1 (\varepsilon_{1xxxx} - \omega_*^2 \varepsilon_1) F(x) dx. \end{aligned}$$

Or la fonction F doit vérifier $F^{(4)} = \omega_*^2 F$ et les conditions frontières $F(0) = F''(1) = F'''(1) = 0$, $F'(1) = 1$, alors on a

$$\int_0^1 \varepsilon_{1xxxx} F(x) dx = \int_0^1 \varepsilon_1 \omega_*^2 F(x) dx + \varepsilon_{1xx}(0, t).$$

Ceci implique que

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} \|\varepsilon\|_X^2 = -2\kappa \varepsilon_{1xx}^2(0, t) \leq 0.$$

Ainsi on prouve que le système d'erreur est stable au sens de Lyapunov.

En plus, on a

$$\|\varepsilon(t)\|_X^2 = \|\varepsilon_0\|_X^2 - 2\kappa \int_0^t \varepsilon_{1xx}^2(0, \tau) d\tau.$$

Comme expliqué précédemment, on souhaite la stabilité exponentielle pour les applications. Dans le cas de la dimension infinie, on a la notion analogue sur la stabilité exponentielle :

Définition 2.4.4 L'observateur (2.4.9) est dit **convergent** si ε converge vers zéro dans l'espace d'état X lorsque le temps t tend vers l'infinie. Il est **exponentiellement convergent** s'il existe certaines constantes $M > 0$ et $\omega > 0$ telles que

$$\|\varepsilon(t)\|_X \leq M e^{-\omega t} \|\varepsilon(0)\|_X \quad \forall t \geq 0.$$

La borne supérieure de $\omega > 0$ telle que l'inégalité précédente a lieu est appelée **taux de décroissance** ou **vitesse de convergence** de l'observateur.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de la convergence exponentielle de l'observateur dans le cadre du système du corps-poutre en rotation.

Théorème 2.4.5 Supposons que la constante $|\omega_*| < \sqrt{l_1}$. Alors le système d'observation (2.4.7) et l'observateur (2.4.9) ont une solution unique dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, X^2)$ pour chaque condition initiale $(w_0, w_1, \hat{w}_0, \hat{w}_1) \in X^2$. De plus l'observateur (2.4.9) est exponentiellement convergent pour tous les gains de correction positifs : étant donné un $\kappa > 0$, il existe des constantes positives M et α telles que l'erreur de l'observateur converge exponentiellement vers zéro quand $t \rightarrow \infty$:

$$\left\| \begin{pmatrix} \hat{w}_1(\cdot, t) - w(\cdot, t) \\ \hat{w}_2(\cdot, t) - w_t(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq M e^{-\alpha t} \left\| \begin{pmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{w}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \right\|_X \quad \forall \begin{pmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{w}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in X.$$

Munissons l'espace de sortie $Y = \mathbb{R}$ du produit scalaire euclidien usuel. Définissons l'opérateur A^κ par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A^\kappa) = \{ & (f_1 \ f_2)^T \in (H^4(0, 1) \cap H_L^2) \times H^2(0, 1) \mid f_2(0) = 0; \\ & f_{2x}(0) = \kappa f_{1xx}(0); f_{1xx}(1) = 0; f_{1xxx}(1) = 0 \} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

et pour tous $(u \ v)^T \in \mathcal{D}(A^\kappa)$,

$$A^\kappa \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa F(x)\Psi & I \\ -\partial_x^4 + \omega_*^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

où Ψ désigne la forme linéaire définie par $\Psi f = f_{xx}(0)$ et F est la solution unique de l'équation différentielle (2.4.10). Le système d'observateur (2.4.9) a pour la représentation d'état sous forme de l'équation d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\varphi}}(t) = A^\kappa \hat{\varphi}(t) + \kappa \begin{pmatrix} F(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} y(t), \\ \hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}^0, \end{cases} \quad (2.4.15)$$

où $\hat{\varphi}_1(t) = \hat{w}_1(\cdot, t)$, $\hat{\varphi}_2(t) = \hat{w}_2(\cdot, t)$ et $y(t)$ est la sortie mesurée.

Proposition 2.4.6 Soit κ une constante positive fixée quelconque (éventuellement zéro). L'opérateur A^κ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X .

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème de Lumer-Phillips (Theorem 4.3, p.14 Pazy [86]). Montrons que A^κ est dissipative. En effet, en intégrant (2.4.15) par parties on obtient

$$\begin{aligned} \langle A^\kappa f, f \rangle_X &= \int_0^1 \{ [f_{2xx} + \kappa F_{xx} f_{1xx}(0)] f_{1xx} + [-f_{1xxxx} + \omega_*^2 f_1] f_2 \\ &\quad - \omega_*^2 [f_2 + \kappa F f_{1xx}(0)] f_1 \} dx \\ &= -[f_{1xxx} f_2]_0^1 + [f_{1xx} f_{2x}]_0^1 \\ &= -f_{1xx}(0) f_{2x}(0) \\ &= -\kappa f_{1xx}^2(0) \leq 0, \quad \forall f = (f_1 \ f_2)^T \in \mathcal{D}(A^\kappa). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.4.6, $Im(I - A^\kappa)$ est l'espace X tout entier. En fait, étant donné un $g \in X$, l'équation différentielle suivante admet une solution unique :

$$\begin{cases} f_1 + \kappa F(x) f_{1xx}(0) - f_2 = g_1, \\ f_2 + f_{1xxxx} - \omega_*^2 f_1 = g_2 \end{cases}$$

avec les conditions frontières

$$\begin{cases} f_1(0) = f_{1x}(0) = 0, \\ f_{1xx}(1) = f_{1xxx}(1) = 0, \\ f_2(0) = 0, \quad f_{2x}(0) = \kappa f_{1xx}(0). \end{cases}$$

Ainsi on a $Im(I - A^\kappa) = X$, autrement dit, A^κ est maximal. D'après le théorème de Lumer-Phillips, A^κ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions. ■

Lemme 2.4.7 *L'opérateur A^κ est maximal.*

Preuve : Voir Annexe A. ■

Définissons l'opérateur A par

$$\mathcal{D}(A) = \{(f_1 \ f_2)^T \in (H^4(0, 1) \cap H_L^2) \times H_L^2 \mid f_{1xx}(1) = 0; f_{1xxx}(1) = 0\} \quad (2.4.16)$$

et pour tous $(u \ v)^T \in \mathcal{D}(A)$,

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\partial_x^4 + \omega_*^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (2.4.17)$$

Remarquons que $A^\kappa = A$ quand $\kappa = 0$. Lorsque $\kappa \neq 0$, on peut écrire

$$A^\kappa = A - \kappa \begin{pmatrix} F(\cdot)\Psi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A - \kappa \begin{pmatrix} F(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} C, \quad (2.4.18)$$

où C est un opérateur d'observation linéaire de $\mathcal{D}(A)$ à \mathbb{R} tel que

$$Cf = f_{1xx}(0) \quad \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 2.4.8 *Il est clair que $1 \in \rho(A)$, la résolvante $(I - A)^{-1}$ est compacte sur X et $A^* = -A$, i.e., l'opérateur A est anti-adjoint à résolvante compacte. Ce genre d'opérateur possède certaines propriétés similaires que celles d'opérateur auto-adjoint. En effet, A est anti-adjoint implique que iA est auto-adjoint. Lorsque la vitesse angulaire ω_* est non nulle, l'opérateur A^κ est anti-adjoint si et seulement si la valeur absolue $|\omega_*|$ est plus petite qu'une certaine valeur (qui vaut en fait la plus petite valeur propre de l'opérateur auto-adjoint correspondant).*

Remarque 2.4.9 *On peut considérer A^κ comme une perturbation de l'opérateur A . En appliquant le théorème de perturbation bornée nous prouvons que l'opérateur non borné A^κ , $\kappa \geq 0$, est aussi le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions non seulement pour chaque constante $|\omega_*| < \sqrt{l_1}$ mais aussi pour une ω_* constante quelconque.*

Le système d'observation (2.4.7) a pour la représentation d'état l'équation d'évolution suivante

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \\ \varphi(0) = \varphi^0, \\ y(t) = C\varphi(t), \end{cases} \quad (2.4.19)$$

où $\varphi_1(t) = w(\cdot, t)$ et $\varphi_2(t) = w_t(\cdot, t)$.

Proposition 2.4.10 *Pour toute vitesse angulaire ω_* constante, le système d'observation (2.4.7) ou (2.4.19) est exactement observable, i.e., il existe des constantes positives $T > 0$ et $K > 0$ telles que*

$$K\|\varphi^0\|_X^2 \leq \int_0^T y^2(\tau)d\tau \leq K^{-1}\|\varphi^0\|_X^2 \quad \forall \varphi^0 \in X. \quad (2.4.20)$$

Preuve : Soit m le plus petit nombre entier tel que $\omega_*^2 < l_m$, où $l_m \in \sigma(P)$, le spectre de l'opérateur P défini par 2.4.8 (dont ses éléments ne sont que des valeurs propres dans ce cas). D'après un résultat de Xu & Baillieul [118], il existe un ensemble des vecteurs propres généralisés de A qui forment une base de Riesz dans X . Soient H_1^{m-1} le sous-espace vectoriel linéaire engendré par les premiers $2(m-1)$ vecteurs propres généralisés, correspondant aux $2(m-1)$ valeurs propres $\pm i\sqrt{l_k}$, $k = 1, \dots, m-1$, et H_m^∞ le sous-espace vectoriel linéaire engendré par le reste des vecteurs propres. Nous avons donc la décomposition en somme directe $X = H_1^{m-1} \oplus H_m^\infty$. L'observabilité exacte du système sur H_1^{m-1} peut être prouvée par le fait que la matrice d'observabilité de Kalman est de rang maximal. Pour montrer l'observabilité exacte du système sur H_m^∞ , nous employons la méthode de multiplicateur avec $(x-1)w_x$ comme multiplicateur appliqué à l'équation (2.4.7). Soient A_m et A_∞ les parties de A sur H_1^{m-1} et H_m^∞ , respectivement, et soit P_m le projecteur de X sur H_1^{m-1} suivant H_m^∞ . Considérons deux sous-systèmes (A_m, CP_m) et $(A_\infty, C(1-P_m))$. Puisque A_m et A_∞ ne possèdent aucune valeur propre en commun, suite à un résultat de Tucsnak et Weiss (voir p.190 dans [107]), les deux sous-systèmes ont

l'observabilité exacte simultanée, et donc le système (2.4.19) est exactement observable. ■

Considérons le système d'observation suivant avec un contrôle u

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ \xi(0) = 0, \\ \tilde{y} = C\xi, \end{cases} \quad (2.4.21)$$

où A , F et C sont définis comme dans (2.4.17), (2.4.10) et (2.4.19), respectivement. Les lemmes suivants sont un peu techniques mais utiles pour prouver le Théorème 2.4.5.

Pour chaque $T > 0$, à partir du système (2.4.21) on définit une application linéaire

$$L_T : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T), \quad (2.4.22)$$

qui associe la sortie \tilde{y} à chaque entrée $u \in L^2(0, T)$ dans (2.4.21).

Lemme 2.4.11 *Quelque soit $\omega_* \in \mathbb{R}$ et quelque soit $T > 0$ constant, l'application linéaire L_T est continue de $L^2(0, T)$ à $L^2(0, T)$.*

Preuve : Lorsque la condition initiale est nulle et le contrôle $u \in C_c^\infty(0, T)$, l'équation admet une solution unique $\xi \in C^1([0, T]; X)$ et l'équation (2.4.21) a bien lieu dans X . La manière la plus facile pour montrer ce lemme est de revenir à l'EDP correspondante :

$$\begin{cases} \psi_{1t} = \psi_2 + F(x)u, \\ \psi_{2t} = -\psi_{1xxxx} + \omega_*^2\psi_1, \\ \psi_1(0, t) = \psi_{1x}(0, t) = 0, \quad \psi_{1xx}(1, t) = \psi_{1xxx}(1, t) = 0, \\ \psi_2(0, t) = 0, \quad \psi_{2x}(0, t) = -u(t), \\ \psi_1(x, 0) = \psi_2(x, 0) = 0, \\ \tilde{y}(t) = \psi_{1xx}(0, t), \end{cases} \quad (2.4.23)$$

où $\psi(\cdot, t) = \xi(t)$.

Penons

$$E(\psi(\cdot, t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\psi_{1xx}^2(x, t) + \psi_2^2(x, t) - \omega_*^2\psi_1^2(x, t)] dx.$$

(Remarquons ici que $\omega_* \in \mathbb{R}$ et $E(\cdot)$ est pas forcément une norme). En faisant différentier $E(\psi(\cdot, t))$ suivant le trajectoire de (2.4.23) et en l'intégrant sur l'intervalle $[0, T]$ on obtient

$$\int_0^T \tilde{y}(t)u(t)dt = E(\psi(\cdot, T)). \quad (2.4.24)$$

D'après la Proposition 2.4.10, l'application linéaire $\varphi^0 \mapsto \Phi_T\varphi^0(t) = Ce^{tA}\varphi^0$ est continue de X à $L^2(0, T)$. Soit

$$B = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $B = C^*$, par le principe de dualité l'application linéaire

$$u \mapsto \Psi_T u = \int_0^T e^{(T-\tau)A} B u(\tau) d\tau$$

est aussi continue de $L^2(0, T)$ à X , puisque l'application de l'observation est continue par la Proposition 2.4.10. Il existe une constante positive $K > 0$ telle que

$$\left| \int_0^T \tilde{y}(t) u(t) dt \right| = |E(\psi(\cdot, T))| \leq K \|u\|_{L^2(0, T)}^2. \quad (2.4.25)$$

Comme l'inégalité ci dessus est vraie pour tout $u \in C_c^\infty(0, T)$ qui est dense dans $L^2(0, T)$, nous avons

$$\|\tilde{y}(t)\|_{L^2(0, T)} \leq K \|u\|_{L^2(0, T)}. \quad (2.4.26)$$

Ainsi l'application linéaire L_T est continue. ■

Considérons la dynamique d'erreur de l'observateur $\varepsilon(t) = \hat{\varphi}(t) - \varphi(t)$ qui est décrit par

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A^\kappa \varepsilon(t), \\ \varepsilon(0) &= \varepsilon_0 = \hat{\varphi}^0 - \varphi^0. \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Afin de montrer le Théorème 2.4.5, on considère pour le système (2.4.27) la sortie d'observation suivante

$$z(t) = C\varepsilon(t)$$

avec C défini comme ci-dessus.

Remarque 2.4.12 *En termes de la physique, l'inégalité d'observabilité exacte 2.4.20 signifie que l'énergie de la sortie est limitée par celle de l'entrée.*

Lemme 2.4.13 *Soient $\omega_*^2 \in \mathbb{R}$ et $\kappa > 0$ deux constantes. Alors le système d'observation (2.4.27) avec z comme sortie est exactement observable, autrement dit, l'inégalité suivante a lieu pour certaines constantes positives T et K*

$$K \|\varepsilon_0\|_X^2 \leq \int_0^T \varepsilon_{1xx}^2(0, t) dt \leq K^{-1} \|\varepsilon_0\|_X^2 \quad \forall \varepsilon_0 \in X. \quad (2.4.28)$$

Preuve : En considérant (2.4.18) on peut écrire le système (2.4.27) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) - \kappa \begin{pmatrix} F(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} C\varepsilon(t), \quad \varepsilon(0) = \varepsilon^0, \\ z(t) &= C\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

Par la formule de variation de constantes, on obtient la solution généralisée de (2.4.29)

$$\varepsilon(t) = e^{At} \varepsilon_0 - \int_0^t e^{A(t-\tau)} \kappa \begin{pmatrix} F(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} z(\tau) d\tau$$

et on en déduit que

$$z(t) = \Phi_T \varepsilon^0(t) - \kappa L_T z(t), \quad (2.4.30)$$

où l'application d'état-observation Φ_T et l'application entrée-sortie L_T ont été définies dans le Lemme 2.4.11 et sa preuve. Par la Proposition 2.4.11 et de (2.4.30), il existe une certaine constante K_T (qui est indépendant de ε^0 et z) telle que

$$\|z\|_{L^2(0,T)} \geq \|\Phi_T \varepsilon^0\|_{L^2(0,T)} - \kappa K_T \|z\|_{L^2(0,T)}.$$

Or le Lemme 2.4.10 implique que

$$\|z\|_{L^2(0,T)} \geq (1 + \kappa K_T)^{-1} K \|\varepsilon^0\|_X.$$

L'inégalité au sens opposé est plus facile à prouver et la preuve est admise. ■

On peut prouver alternativement l'observabilité exacte du système en boucle fermée à travers de l'admissibilité de l'opérateur de feedback $K = -\kappa I$.

Lemme 2.4.14 *Quelque soit κ une constante positive, l'opérateur de feedback $K = -\kappa I$ est admissible.*

Preuve : On désire appliquer quelques résultats de Curtain & Weiss [27]. Il est clair que notre opérateur de contrôle $B = (F(\cdot) \ 0)^T$ est admissible et non borné (car il n'appartient pas à $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$ mais à $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X_{-1})$). On introduit ici la notion de *degré de non bornitude* de B désigné par $\alpha(B)$, c'est-à-dire, la borne inférieure de tous les $\alpha \geq 0$ pour lesquels il existe des constantes positives δ, ω telles que

$$\|(\lambda I - A)^{-1} B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, X)} \leq \frac{\delta}{\lambda^{1-\alpha}} \quad \lambda \in (\omega, \infty).$$

D'après Rebarber & Weiss [94], pour chaque $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$ admissible, nous avons $\alpha(B) \leq \frac{1}{2}$, cela signifie que B n'est pas 'trop non borné' (en particulier, si B est borné on a $\alpha(B) = 0$). Alors le système est régulier. Soit $E = -\frac{1}{2}(D^* + D)$. Il est facile à vérifier que dans le cas où $\omega_* = 0$, la fonction de transfert du système en boucle ouverte

$$G(s) = \frac{1}{4\sqrt{2s}} \frac{-e^{-\sqrt{2s}} - ie^{(-i-1)\sqrt{2s}} + ie^{(i-1)\sqrt{2s}} + 1}{4e^{-\sqrt{2s}} + e^{-2\sqrt{2s}} + e^{(-i-1)\sqrt{2s}} + e^{(i-1)\sqrt{2s}} + 1} \rightarrow 0$$

lorsque $s \rightarrow +\infty$, ceci implique que $D = \lim G(s) = 0$ est un opérateur feedthrough et que $E = 0$. Ainsi nous avons $c = \|E^+\| = 0$ où E^+ désigne la partie positive de E et $\kappa_0 = \frac{1}{c} = \infty$. En plus, dans notre cas nous avons 1) l'opérateur A est anti-adjoint et dissipatif, 2) l'opérateur $B = (F(\cdot) \ 0)^T$ est en effet l'adjoint de l'opérateur d'observation C défini par $C(u \ v)^T = u_{xx}(0)$. Ainsi d'après Théorème 5.8 dans Curtain & Weiss [27], pour chaque $\kappa \in (0, \kappa_0) = \mathbb{R}_*^+$, $K = -\kappa I$ est un opérateur de feedback admissible pour le système en boucle ouverte. ■

Comme le système en boucle ouverte est exactement observable et $K = -\kappa I$ est un opérateur de feedback admissible, on conclut que le système en boucle fermée est aussi exactement observable.

Preuve du Théorème 2.4.5 : Il est équivalent à prouver que le système d'erreur de l'observateur (2.4.27) est exponentiellement stable. Il est clair que le système d'erreur est stable au sens de Lyapunov. Prenons la fonction suivante comme la fonction Lyapunov

$$V(\varepsilon) = \|\varepsilon\|_X^2 = \int_0^1 \varepsilon_{1xx}^2 + \varepsilon_2^2 - \omega_*^2 \varepsilon_1^2 dx.$$

En faisant différentier $V(\varepsilon(t))$ suivant le trajectoire de (2.4.27), on obtient

$$\frac{dV}{dt} = 2 \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt}, \varepsilon \right\rangle_X = 2 \langle A^\kappa \varepsilon, \varepsilon \rangle_X = -2\kappa \varepsilon_{1xx}^2(0, t) < 0.$$

Ainsi

$$\|\varepsilon(t)\|_X^2 = \|\varepsilon_0\|_X^2 - 2\kappa \int_0^t \varepsilon_{1xx}^2(0, \tau) d\tau. \quad (2.4.31)$$

Par le Lemme 2.4.13 le système d'erreur est exactement observable. Alors il existe des constantes positives T et K telles que

$$\int_0^T \varepsilon_{1xx}^2(0, \tau) d\tau \geq K \|\varepsilon_0\|_X^2. \quad (2.4.32)$$

En substituant (2.4.32) dans (2.4.31) ceci nous donne $\|\varepsilon(T)\|_X^2 \leq (1 - M) \|\varepsilon_0\|_X^2$ avec $M = 2\kappa K$. On peut écrire $t = nT + \gamma$, où $n = [t/T]$ est la partie entière de t/T et $\gamma \in [0, T[$ est le reste. Comme A^κ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe, l'inégalité suivante a lieu

$$\|\varepsilon(t)\|_X^2 \leq \|e^{TA^\kappa}\|^{2n} \cdot \|e^{\gamma A^\kappa}\|^2 \cdot \|\varepsilon_0\|_X^2 \leq (1 - M)^{2n} \tilde{K}^2 \|\varepsilon_0\|_X^2,$$

où $\tilde{K} = \sup_{\gamma \in [0, T[} \|e^{\gamma A^\kappa}\|$. Un calcul simple nous permet de trouver que

$$\|\varepsilon(t)\|_X \leq \tilde{M} e^{-\omega t} \|\varepsilon_0\|_X,$$

où $\tilde{M} = \tilde{K} (1 - M)^{-1}$ et $\omega = T^{-1} \ln((1 - M)^{-1})$. Ceci achève la preuve du Théorème 2.4.5. ■

2.4.4 Observateur avec une vitesse de convergence voulue

Dans un premier temps, on se restreint dans le cas où $\omega^* = 0$. Nous souhaitons accélérer la vitesse de convergence de l'observateur. Ceci nous ramène à étudier la distribution spectrale de l'opérateur A^κ , qui détermine la stabilité du système d'erreur. Rappelons d'abord un résultat de Deguenon et al. [30] concernant l'estimation de la borne spectrale de A^κ . Voir Guo [51] pour plus de détails.

Théorème 2.4.15 *Les valeurs propres $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ de l'opérateur A^κ sont algébriquement simples à partir d'un certain rang et leurs parties réelles tendent vers -2κ lorsque $n \rightarrow \infty$. Leurs vecteurs propres généralisés forment une base de Riesz sur X . De plus, le taux de décroissance exponentielle du C_0 semi-groupe est déterminé par le spectre de son générateur.*

Comme en dimension finie, on souhaite effectuer cette accélération à l'aide du placement de pôles. En s'inspirant d'un travail de Triggiani [106], on partitionne l'espace X en un sous-espace de dimension finie et un autre de dimension infinie qui sont invariants par rapport à l'action de A^κ .

L'idée essentielle consiste à introduire une projection P_m telle que

$$\begin{aligned} P_m &: X \rightarrow X_m, \\ I - P_m &: X \rightarrow X_\infty \end{aligned}$$

et $X = X_m \oplus X_\infty$. Sans perte de généralité, supposons que les valeurs propres λ_i , $i \in J = \{1, \dots, m\}$ sont algébriquement simples. Alors à chaque λ_i , il existe un vecteur propre associé, noté par e_i , tel que $X_m = Vect\{e_1, \dots, e_m\}$.

Comme le système est exactement observable sur le sous-espace X_m de dimension finie, les pôles simples peuvent être arbitrairement placés. Il est donc possible d'accélérer la vitesse de convergence de l'observateur par une seconde étape de conception en appliquant une méthode de placement de pôles (cf. Deguenon et al. [30]).

Théorème 2.4.16 *L'observateur (2.4.9) est exponentiellement convergent pour tous les gains de correction $\kappa > 0$. En plus, la vitesse de convergence exponentielle est déterminée par les bornes spectrales du générateur A^κ . D'ailleurs, la vitesse de convergence peut être rendue aussi grande que l'on veut, en remplaçant $\kappa [x \ 0]^T$ par $\kappa [x \ 0]^T + B(x)$ avec des κ et $B(x)$ appropriées.*

Supposons que $B \in X_m$. Dans ce cas, le système d'erreur s'écrit

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{A}^\kappa \varepsilon = A^\kappa \varepsilon - B \varepsilon_{1xx}(0). \quad (2.4.33)$$

En appliquant respectivement les projections P_m et $I - P_m$ au système (2.4.33), on obtient

$$\begin{aligned} (I - P_m) \dot{\varepsilon} &= A^\kappa (I - P_m) \varepsilon, \\ P_m \dot{\varepsilon} &= A^\kappa P_m \varepsilon - P_m B \varepsilon_{1xx}(0). \end{aligned}$$

En effet, A^κ est commutatif avec $I - P_m$ et $B \in X_m$.

Commençons par placer une seule valeur propre, celle la plus proche de l'origine, notée par λ_1 . Désignons par $e_1 = (u_1 \ v_1)^T$ son vecteur associé et $\tilde{\lambda}_1$ la valeur désirée. Ainsi on a

$$\begin{aligned} A^\kappa e_1 &= \lambda_1 e_1, \\ \tilde{A}^\kappa e_1 &= A^\kappa e_1 - B u_{1xx}(0) = \tilde{\lambda}_1 e_1. \end{aligned}$$

En soustrayant les deux équations, on trouve $B = M e_1$ avec

$$M = \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1}{u_{1xx}(0)}.$$

Il reste à calculer la forme explicite du vecteur propre $e_1 = (u_1 \ v_1)^T$ pour déterminer M et B . On cherche la valeur propre λ_1 et son vecteur propre associé, i.e., trouver un nombre complexe λ et un couple $(u_1 \ v_1)^T$ non nul tels que

$$\begin{cases} v_1 = \lambda_1 u_1 + \kappa x u_{1xx}(0), \\ -u_{1xxxx} = \lambda_1 v_1, \\ u_1(0) = u_{1x}(0) = 0, \\ u_{1xx}(1) = u_{1xxx}(1) = 0. \end{cases} \quad (2.4.34)$$

En substituant la première équation dans la deuxième, on obtient une équation différentielle d'ordre 4 non homogène :

$$u_{1xxxx} + \lambda_1^2 u_1 + \lambda_1 \kappa x u_{1xx}(0) = 0. \quad (2.4.35)$$

On pose $\lambda_1 = i\mu^2$. Cette équation admet une solution

$$\begin{aligned} u_1(x) = & \frac{c_1}{\mu^2} [\cosh(\mu(1-x)) - \cos(\mu(1-x))] + \frac{c_2}{\mu^2} [\sinh(\mu(1-x)) - \sin(\mu(1-x))] \\ & + \frac{c_1}{\mu} x (\sinh(\mu) - \sin(\mu)) + \frac{c_2}{\mu} x (\cosh(\mu) + \cos(\mu)) \\ & - \frac{c_1}{\mu^2} (\cosh(\mu) + \cos(\mu)) - \frac{c_2}{\mu^2} (\sinh(\mu) - \sin(\mu)), \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

où c_1 et c_2 des constantes réelles vérifient

$$c_2 = -\frac{\cosh(\mu) + \cos(\mu)}{\sinh(\mu) + \sin(\mu)} c_1$$

et μ est la solution de l'équation caractéristique

$$1 + \cosh(\mu)\cos(\mu) + i\frac{\kappa}{\mu}(\cosh(\mu)\sin(\mu) - \cos(\mu)\sinh(\mu)) = 0.$$

Remarque 2.4.17 Comme nous avons indiqué avant, la vitesse de convergence de la solution $\varepsilon(t)$ du système d'erreur est déterminée par la borne spectrale. Supposons que

$$Re(\lambda_1) = \sup_{\lambda \in \sigma(A^\kappa)} Re(\lambda) < 0$$

et que $Re(\tilde{\lambda}_1) < Re(\lambda_1)$. L'observateur ayant la meilleure vitesse de convergence s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{w}_{1t}(x, t) = \hat{w}_2(x, t) - \kappa F(x) [\hat{w}_{1xx}(0, t) - y(t)] - \frac{\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1}{u_{1xx}(0)} u_1(x) [\hat{w}_{1xx}(0, t) - y(t)], \\ \hat{w}_{2t}(x, t) = -\hat{w}_{1xxxx}(x, t) + \omega_*^2 \hat{w}_1(x, t) - \frac{\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1}{u_{1xx}(0)} v_1(x) [\hat{w}_{1xx}(0, t) - y(t)], \\ \hat{w}_1(0, t) = \hat{w}_{1x}(0, t) = 0, \quad \hat{w}_{1xx}(1, t) = \hat{w}_{1xxx}(1, t) = 0, \\ \hat{w}(x, 0) = \hat{w}_0(x), \quad \hat{w}_t(x, 0) = \hat{w}_1(x), \end{cases}$$

où F a été définie par (3.3.7) et u_1, v_1 sont définies dans (2.4.36) et (2.4.34).

Chapitre 3

Etudes numériques de l'observateur et simulations

Although this may seem a paradox, all exact science is dominated by the idea of approximation.

Bertrand Russell, *The scientific outlook* (1931).

Sommaire

3.1	Introduction	49
3.2	Schéma des éléments finis : espace de discrétisation	49
3.3	Cas où ω_* est une constante	53
3.4	Cas où $\omega(t)$ varie en fonction du temps	73
3.5	Robustesse	75

3.1 Introduction

Etant donné un système à paramètres distribués, il existe, en principe, deux approches différentes sur la construction d'observateur. La première consiste à discrétiser d'abord le système d'observation en dimension infinie et obtenir un système en dimension finie, puis construire un observateur basé sur le système en dimension finie obtenu. Quant à la deuxième, il s'agit de construire un observateur à partir du système à paramètres distribués avant la discrétisation du système. Il est clair qu'on est plus à l'aise avec la première approche. En effet, il existe des outils et théories relativement bien développés pour la conception des observateurs en dimension finie. En revanche, dans un contexte général, on ne peut pas montrer que la construction d'observateur est indépendante du schéma de discrétisation. Autrement dit, on ne sait pas si le même observateur construit en dimension finie, qui dépend du nombre de point de discrétisation, reste encore valable lorsque ce nombre varie et vers quoi converge l'observateur quand le nombre tend vers l'infini.

Dans ce chapitre, basé sur la méthode des éléments finis, un schéma numérique fiable est proposé pour simuler le système d'observation et l'observateur. L'intérêt de la simulation numérique est multiple :

- 1) la simulation numérique permet de valider certains résultats théoriques. Elle permet aussi d'étudier des différences entre des résultats théoriques et numériques. Surtout dans ce travail où on traite des systèmes d'EDP en dimension infinie tandis que des systèmes discrétisés sont toujours de dimension finie, elle donne des idées ou conjectures heuristiques avant qu'on fournisse une preuve mathématique rigoureuse ;
- 2) d'un point de vue technique, il est aussi très important de construire un simulateur fiable, efficace et applicable aux autres systèmes similaires ou plus généraux, car finalement des observateurs ou des lois de commandes proposés ont pour objectif finalisé la mise en oeuvre pratique à travers des outils informatiques. Pour cette raison, il est nécessaire de tester plusieurs schémas différents et pouvoir choisir un algorithme d'implémentation en faisant un compromis entre la précision et l'efficacité.

3.2 Schéma des éléments finis : espace de discrétisation

Comme les erreurs d'arrondis se cumulent à cause des termes de dérivées partielles d'ordre très élevé (les dérivées spatiales ici sont d'ordre 4) dans l'équation de poutre. En outre, la continuité sur la dérivée spatiale d'ordre 1 de la solution (la pente de la courbe) entre les intervalles adjacents doit être garantie car la solution devrait évoluer dans $H^2(0, 1)$.

Afin de surmonter la première difficulté, nous proposons un schéma des éléments finis semi-discrétisé en espace (cf. Le Pourhiet [68]). En effet, une approche variationnelle nous permet de diminuer le degré de dérivées à travers de l'intégration par partie. Quant à la

deuxième difficulté, nous avons besoin d'introduire l'interpolation dite *hermitienne* avec une classe de fonctions polynomiales spécifiques qui vérifient la contrainte sur la continuité.

3.2.1 Fonctions polynomiales hermitiennes

Le premier but du travail numérique consiste à construire un espace approprié de fonctions de la classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur l'intervalle $E = [0, 1]$. Supposons que E est subdivisé en N sous-intervalles $E_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$, *i.e.* $E = \cup_{i=0}^{N-1} E_i$. En particulier, si la subdivision est uniforme, désignons la longueur de pas par $h = 1/N$ et le i -ième élément par $E_i = [ih, (i+1)h]$.

Cherchons alors les fonctions polynomiales H_j^i , $i = 0, \dots, N-1$, $j = 1, 2, 3, 4$, de degré 3, qui vérifient les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1^i(x_i) = 1, H_{1x}^i(x_i) = H_1^i(x_{i+1}) = H_{1x}^i(x_{i+1}) = 0, \\ H_{2x}^i(x_i) = 1, H_2^i(x_i) = H_2^i(x_{i+1}) = H_{2x}^i(x_{i+1}) = 0, \\ H_3^i(x_{i+1}) = 1, H_3^i(x_i) = H_{3x}^i(x_i) = H_3^i(x_{i+1}) = 0, \\ H_{4x}^i(x_{i+1}) = 1, H_4^i(x_i) = H_{4x}^i(x_i) = H_4^i(x_{i+1}) = 0, \quad \forall x \in E_i. \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Faisons une transformation affine composée d'une translation et d'une homothétie :

$$\xi_i = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \forall i = 0, \dots, N-1,$$

permettant de manipuler toutes les opérations sur l'unique élément canonique $[-1, 1]$. Il est avantageux d'effectuer ces transformations puisque le calcul matriciel du système global sera simplifié en concaténant les sous-matrices de bloc obtenues sur chaque élément canonique. Les variables intermédiaires ξ_i sont appelées *coordonnées locales*. Alors sous ces coordonnées, les fonctions cherchées $\tilde{H}_j(\xi)$, $\forall \xi \in [-1, 1]$, $j = 1, 2, 3, 4$ doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}_1(-1) = 1, \tilde{H}_{1\xi}(-1) = \tilde{H}_1(1) = \tilde{H}_{1\xi}(1) = 0, \\ \tilde{H}_{2\xi}(-1) = 1, \tilde{H}_2(-1) = \tilde{H}_2(1) = \tilde{H}_{2\xi}(1) = 0, \\ \tilde{H}_3(1) = 1, \tilde{H}_3(-1) = \tilde{H}_{3\xi}(-1) = \tilde{H}_3(1) = 0, \\ \tilde{H}_{4\xi}(1) = 1, \tilde{H}_4(-1) = \tilde{H}_{4\xi}(-1) = \tilde{H}_4(1) = 0. \end{array} \right.$$

Il est facile d'obtenir les expressions explicites de ces fonctions :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2), \\ \tilde{H}_2(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1), \\ \tilde{H}_3(\xi) &= \frac{1}{4}(-\xi^3 + 3\xi + 2), \\ \tilde{H}_4(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \end{aligned}$$

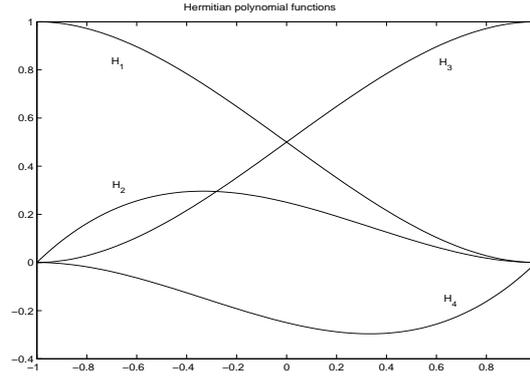


FIGURE 3.1 – Fonctions hermitiennes.

En faisant le prolongement par zéro sur $E \setminus E_i$, on peut définir les *fonctions hermitiennes* sur E tout entier comme suivant :

$$\begin{aligned} H_j^i(x) &= \tilde{H}_j(\xi_i) \Big|_{\xi_i = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{h}}, \quad j = 1, 3, \\ H_j^i(x) &= \frac{h}{2} \tilde{H}_j(\xi_i) \Big|_{\xi_i = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{h}}, \quad j = 2, 4, \\ H_j^i|_{E \setminus E_i} &= 0, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

En concaténant les fonctions hermitiennes ainsi obtenues, nous pouvons définir sur E les fonctions de base :

$$\begin{aligned} \phi_1^0(x) &= H_1^0(x), \\ \phi_2^0(x) &= H_2^0(x) \end{aligned}$$

avec le support E_0 ,

$$\begin{aligned} \phi_1^i(x) &= H_3^{i-1}(x) + H_1^i(x), \\ \phi_2^i(x) &= H_4^{i-1}(x) + H_2^i(x) \end{aligned}$$

avec les supports $E_{i-1} \cup E_i$, $i = 1, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} \phi_1^N(x) &= H_3^{N-1}(x), \\ \phi_2^N(x) &= H_4^{N-1}(x) \end{aligned}$$

avec le support E_N .

L'ensemble $\mathcal{B} = \{\phi_l^k, k = 0, \dots, N, l = 1, 2\}$ forme une base, qui engendre un sous-espace de H^2 de dimension $2N + 2$ noté par \tilde{V}_h .

3.2.2 Quelques propriétés des fonctions ϕ_l^k

Donnons ici quelques propriétés élémentaires des fonctions ϕ_l^k :

	$\phi_1^0(x)$	$\phi_{1x}^0(x)$	$\phi_{1xx}^0(x)$	$\phi_{1xxx}^0(x)$
$x = 0$	1	0	$-\frac{6}{h^2}$	$\frac{12}{h^3}$
$x = h$	0	0	$\frac{6}{h^2}$	$\frac{12}{h^3}$

	$\phi_2^0(x)$	$\phi_{2x}^0(x)$	$\phi_{2xx}^0(x)$	$\phi_{2xxx}^0(x)$
$x = 0$	0	1	$-\frac{4}{h}$	$\frac{6}{h^2}$
$x = h$	0	0	$\frac{2}{h}$	$\frac{6}{h^2}$

	$\phi_1^N(x)$	$\phi_{1x}^N(x)$	$\phi_{1xx}^N(x)$	$\phi_{1xxx}^N(x)$
$x = (N-1)h$	0	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^3}$
$x = Nh = 1$	1	0	$-\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^3}$

	$\phi_2^N(x)$	$\phi_{2x}^N(x)$	$\phi_{2xx}^N(x)$	$\phi_{2xxx}^N(x)$
$x = (N-1)h$	0	0	$-\frac{2}{h}$	$\frac{6}{h^2}$
$x = Nh = 1$	0	1	$\frac{4}{h}$	$\frac{6}{h^2}$

3.2.3 Espace de discrétisation

Avec la séparation des variables, la solution approchée $w_h \in \tilde{V}_h$ que nous cherchons peut s'écrire comme

$$w_h(t, x) = \sum_{k=0}^N [w_h^k(t) \phi_1^k(x) + \tilde{w}_h^k(t) \phi_2^k(x)]. \quad (3.2.2)$$

Ainsi les conditions aux limites $w(0, t) = w_x(0, t) = 0$ impliquent que

$$\begin{aligned} w_h^0 \phi_1^0(0) + \tilde{w}_h^0 \phi_2^0(0) + w_h^1 \phi_1^1(0) + \tilde{w}_h^1 \phi_2^1(0) &= 0, \\ w_h^0 \phi_{1x}^0(0) + \tilde{w}_h^0 \phi_{2x}^0(0) + w_h^1 \phi_{1x}^1(0) + \tilde{w}_h^1 \phi_{2x}^1(0) &= 0. \end{aligned}$$

De sorte que nous avons

$$w_h^0 = \tilde{w}_h^0 = 0. \quad (3.2.3)$$

Nous pouvons alors choisir l'espace $V_h = Vect(\phi_1^1, \phi_2^1, \dots, \phi_1^N, \phi_2^N)$ (qui est de dimension $2N$) comme notre espace de discrétisation contenu dans H^2 .

3.3 Cas où ω_* est une constante

Dans ce paragraphe, nous menons une étude numérique sur les comportements dynamiques de l'observateur appliqué au système du corps-poutre en rotation avec une vitesse angulaire constante quelconque.

3.3.1 Formulation variationnelle et régularité

Considérons le système d'observation sous la forme de la représentation d'état :

$$\begin{cases} w_{1t}(x, t) = w_2(x, t), & t > 0, x \in (0, 1), \\ w_{2t}(x, t) = -w_{1xxxx}(x, t) + \omega_*^2 w_1(x, t), \\ w_1(0, t) = w_{1x}(0, t) = 0, \\ w_{1xx}(1, t) = w_{1xxx}(1, t) = 0, \\ w_1(x, 0) = w_1^0(x), \quad w_2(x, 0) = w_2^0(x) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

avec $w_1 = w$, $w_2 = w_t$ et ω_* une constante quelconque (éventuellement nulle).

Soient $H_L^2 = \{f \in H^2(0, 1) \mid f(0) = f_x(0) = 0\}$ défini comme dans le chapitre précédent et $X = H_L^2 \times L^2(0, 1)$, muni du produit scalaire défini par

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_X = \int_0^1 f_{1xx} g_{1xx} + f_2 g_2 dx.$$

Choisissons et $(\phi_l^k \ 0)^T$ et $(0 \ \phi_l^k)^T$, $k = 1, \dots, N$; $l = 1, 2$ comme fonctions de test pour le système (3.3.4). Nous avons

$$\frac{d}{dt} \left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_l^k \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_X = \left\langle \begin{pmatrix} w_2 \\ -w_{1xxxx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_l^k \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_X,$$

et

$$\frac{d}{dt} \left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_l^k \end{pmatrix} \right\rangle_X = \left\langle \begin{pmatrix} w_2 \\ -w_{1xxxx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_l^k \end{pmatrix} \right\rangle_X.$$

En tenant compte des conditions frontières, l'intégrale par parties nous donne les formulations variationnelles associées à (3.3.4) :

$$\begin{cases} \int_0^1 w_{1txx} \varphi_{xx} dx = \int_0^1 w_{2xx} \varphi_{xx} dx, \\ \int_0^1 w_{2t} \varphi dx = - \int_0^1 w_{1xx} \varphi_{xx} dx + \omega_*^2 \int_0^1 w_1 \varphi dx. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

De même façon, à partir des équations d'observateur du type Luenberger

$$\begin{cases} \hat{w}_{1t}(x, t) = \hat{w}_2(x, t) - \kappa F(x) \{ \hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t) \}, \\ \hat{w}_{2t}(x, t) = -\hat{w}_{1xxx}(x, t) + \omega_*^2 \hat{w}_1(x, t), \\ \hat{w}_1(0, t) = \hat{w}_{1x}(0, t) = 0, \\ \hat{w}_{1xx}(1, t) = \hat{w}_{1xxx}(1, t) = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

avec F la solution unique de l'équation différentielle

$$\begin{cases} F_{xxxx}(x) - \omega_*^2 F(x) = 0, \\ F(0) = F_{xx}(1) = F_{xxx}(1) = 0, \\ F_x(0) = 1, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

on trouve ses formulations variationnelles associées

$$\begin{cases} \int_0^1 \hat{w}_{1txx} \varphi_{xx} dx = \int_0^1 \hat{w}_{2xx} \varphi_{xx} dx - \kappa \{ \hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t) \} \int_0^1 F_{xx}(x) \varphi_{xx} dx, \\ \int_0^1 \hat{w}_{2t} \varphi dx = - \int_0^1 \hat{w}_{1xx} \varphi_{xx} dx + \omega_*^2 \int_0^1 \hat{w}_1 \varphi dx. \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Définition 3.3.1 La fonction vectorielle $w(x, t) = (w_1(x, t), w_2(x, t))^T$ est une **solution classique** de (3.3.4) si elle est suffisamment régulière telle que toutes les équations sont satisfaisantes y comprises les conditions frontières et la condition initiale.

Définition 3.3.2 La fonction $w(x, t)$ est une solution de l'équation variationnelle (3.3.5) (ou bien **solution faible**) si elle est régulière par rapport à x et t , de telle sorte que les équations dans (3.3.5) sont satisfaites pour toutes les fonctions de test $\varphi \in H_L^2$.

Proposition 3.3.3 (1). Une solution classique w de (3.3.4) est une solution de (3.3.5).
(2). Réciproquement, une solution w de (3.3.5) est une solution de (3.3.4) si $w \in H_L^2 \times H_L^2$.

Preuve : L'assertion (1) est évidente. La formulation variationnelle est en particulier vérifiée par les solutions classiques, en intégrant par parties les équations après les avoir multipliées par les fonctions $\varphi \in H_L^2$. Réciproquement, supposons que $w \in H_L^2 \times H_L^2$ vérifie l'équation (3.3.5). Puisque l'opérateur différentiel $\partial_{xx} : H^2 \rightarrow L^2$ est un isomorphisme (isométrique), alors de la première équation de (3.3.5) on déduit que $w_{1txx} - w_{2xx} = 0$

(presque partout). Ceci implique que $w_{1tx} - w_{2x} = C_1$ avec C_1 une constante à déterminer. En tenant compte que $w_1, w_2 \in H_L^2$ et de la régularité, on a $w_{1xt}(0, t) = 0$. On déduit que $C_1 = 0$. De même, en intégrant encore une fois aux deux membres de l'équation, on obtient $w_{1t} - w_2 = C_2$. Encore une fois, en vertu du fait $w \in H_L^2 \times H_L^2$ et de la régularité, on a $w_{1t}(0, t) = 0$ et finalement $C_2 = 0$. Ainsi on retrouve $w_{1t} = w_2$ qui est exactement la première équation de (3.3.4). Ensuite, partons de la solution de la deuxième équation variationnelle de (3.3.5). Prenons $\varphi \in C_c^\infty(0, 1)$, de l'équation (3.3.5), on a $\langle w_{2t}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = -\langle w_{1xxxx}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \omega_*^2 \langle w_1, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$ et on en déduit que $w_{2t} = -w_{1xxxx} + \omega_*^2 w_1$ au sens des distributions. Comme w_1 et w_2 sont des fonctions régulières, l'égalité au sens des distributions devient une égalité au sens des fonctions. D'où la deuxième équation de (3.3.5) est satisfaite. De ce fait, w_1 est suffisamment régulières par rapport à x . Il reste à vérifier que $w_{1xx}(1, t) = w_{1xxx}(1, t) = 0$. En multipliant la deuxième équation de (3.3.5) par $\varphi \in H_L^2$ et en faisant l'intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 w_{2t} \varphi = - \int_0^1 w_{1xx} \varphi_{xx} + \omega_*^2 \int_0^1 w_1 \varphi - [w_{1xxx} \varphi]_0^1 + [w_{1xx} \varphi_x]_0^1.$$

Par (3.3.5), on obtient $[w_{1xxx} \varphi]_0^1 - [w_{1xx} \varphi_x]_0^1 = 0$. Or, $\varphi \in H_L^2$ signifie que $\varphi(0) = \varphi_x(0) = 0$. De sorte que $w_{1xxx}(1, t) \varphi(1) - w_{1xx}(1, t) \varphi_x(1) = 0, \forall t > 0, \forall \varphi \in H_L^2$. Ceci implique que $w_{1xxx}(1, t) = w_{1xx}(1, t) = 0$ (en prenant par exemple $\varphi \in H_L^2$ tel que $\varphi(1) = 1, \varphi_x(1) = 0$ et $\varphi(1) = 0, \varphi_x(1) = 1$, respectivement). Ainsi la preuve de la Proposition 3.3.3 est complète. ■

Proposition 3.3.4 (1). Une solution classique \hat{w} de (3.3.6) est une solution de (3.3.8).
 (2). Réciproquement, une solution \hat{w} de (3.3.8) est aussi une solution de (3.3.6) si $\hat{w} \in H_L^2 \times H^2(0, 1)$ avec $\hat{w}_2(0, t) = 0$ et $\hat{w}_{2x}(0, t) = \kappa(\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t))$.

Preuve : La démonstration de la proposition est analogue à celle de la proposition précédente. Le seul point différent consiste à prouver que la solution de la première équation de (3.3.8) est aussi une solution de (3.3.6). Supposons que $\hat{w} \in H_L^2 \times H^2(0, 1)$ avec $\hat{w}_2(0, t) = 0$ et $\hat{w}_{2x}(0, t) = \kappa[\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)]$, Puisque l'opérateur différentiel $\partial_{xx} : H^2 \rightarrow L^2$ est un isomorphisme, alors de la première équation de (3.3.8) on déduit que $\hat{w}_{1txx} - \hat{w}_{2xx} + \kappa\{\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)\}F_{xx} = 0$ (presque partout). Ceci implique que $\hat{w}_{1tx} - \hat{w}_{2x} + \kappa\{\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)\}F_x = C_1$ avec C_1 une constante à déterminer. Comme $\hat{w}_{1xt}(0, t) = 0, \hat{w}_{2x}(0, t) = \kappa(\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t))$ et $F_x(0) = 0$, on conclut que $C_1 = 0$. En intégrant deux membres de l'équation par rapport à x , on obtient $\hat{w}_{1t} - \hat{w}_2 + \kappa\{\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)\}F = C_2$. Or $\hat{w}_{1t}(0, t) = 0, \hat{w}_2(0, t) = 0$ et $F(0) = 0$, on a $C_2 = 0$. Ainsi on prouve que \hat{w} est une solution de la première équation de (3.3.6). ■

3.3.2 Structure et distribution spectrale

Rappelons que d'après (3.2.2) et (3.2.3), la solution approchée $(w_{h,1}, w_{h,2}) \in V_h^2$ s'écrivent comme une combinaison linéaire des fonctions de base :

$$\begin{aligned} w_{h,1}(t, x) &= \sum_{k=1}^N [w^k(t) \phi_1^k(x) + \tilde{w}^k(t) \phi_2^k(x)], \\ w_{h,2}(t, x) &= \sum_{k=1}^N [w_t^k(t) \phi_1^k(x) + \tilde{w}_t^k(t) \phi_2^k(x)]. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

En substituant (3.3.9) dans (3.3.4) on obtient le système d'observation de dimension infinie approximé par un système de dimension finie, ayant la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} R^N & 0 \\ 0 & S^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{W}_1 \\ \dot{W}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R^N \\ -R^N + \omega_*^2 S^N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix},$$

où

$$W_1(t) = [w^1(t), \tilde{w}^1(t), \dots, w^N(t), \tilde{w}^N(t)]^T$$

et

$$W_2(t) = [w_t^1(t), \tilde{w}_t^1(t), \dots, w_t^N(t), \tilde{w}_t^N(t)]^T,$$

S^N et R^N désignent, respectivement, la matrice de masse et la matrice de rigidité données par

$$\begin{aligned} S_{p,q}^N &= \int_0^1 \phi_l^k(x) \phi_{l'}^{k'}(x) dx, \\ R_{p,q}^N &= \int_0^1 \phi_{lxx}^k(x) \phi_{l'xx}^{k'}(x) dx \end{aligned}$$

avec les indices $p = 2k + l - 2$ et $q = 2k' + l' - 2$, pour $k, k' = 1, \dots, N$, $l, l' = 1, 2$.

Afin de déterminer les éléments de J et K , on commence par calculer sur E_i la matrice de masse

$$S_{E_i}^N = \int_{E_i} Y^T Y dx$$

et la matrice de rigidité

$$R_{E_i}^N = \int_{E_i} Z^T Z dx,$$

où

$$Y(x) = [H_1(x) \quad H_2(x) \quad H_3(x) \quad H_4(x)].$$

Comme tout élément E_i peut être transformé en un intervalle canonique $[-1, 1]$, nous faisons le calcul en coordonnées locales ξ directement.

Avec la notation

$$\begin{aligned} Y(\xi) &= [\tilde{H}_1(\xi) \quad \frac{h}{2} \tilde{H}_2(\xi) \quad \tilde{H}_3(\xi) \quad \frac{h}{2} \tilde{H}_4(\xi)] \\ &= \left[\frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2) \quad \frac{h}{8}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) \quad \frac{1}{4}(-\xi^3 + 3\xi + 2) \quad \frac{h}{8}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1) \right], \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} Z(\xi) &= Y_{xx} = \frac{4}{h^2} Y_{\xi\xi} \\ &= \left[\frac{6\xi}{h^2} \quad \frac{6\xi-2}{2h} \quad \frac{-6\xi}{h^2} \quad \frac{6\xi+2}{2h} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons les sous-matrices de bloc

$$\begin{aligned} S_i &= \int_{E_i} Y^T Y dx = \int_{-1}^1 Y^T Y \frac{h}{2} d\xi \\ &= \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_5 & -S_4 & S_6 \\ S_3 & -S_4 & S_1 & -S_2 \\ S_4 & S_6 & -S_2 & S_5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i &= \int_{E_i} Z^T Z dx = \int_{-1}^1 Z^T Z \frac{h}{2} d\xi \\ &= \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & -R_1 & R_2 \\ R_2 & 2R_3 & -R_2 & R_3 \\ -R_1 & -R_2 & R_1 & -R_2 \\ R_2 & R_3 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

définie sur chaque sous-intervalle E_i , où

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{13}{35}h, & S_2 &= \frac{11}{210}h^2, & S_3 &= \frac{9}{70}h, \\ S_4 &= -\frac{13}{420}h^2, & S_5 &= \frac{1}{105}h^3, & S_6 &= -\frac{1}{140}h^3, \\ R_1 &= \frac{12}{h^3}, & R_2 &= \frac{6}{h^2}, & R_3 &= \frac{2}{h}. \end{aligned}$$

Par la concaténation diagonale, nous obtenons les matrices correspondantes sur l'in-

tervalle entier E

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ S_2 & S_5 & -S_4 & S_6 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_3 & -S_4 & 2S_1 & 0 & S_3 & S_4 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_4 & S_6 & 0 & 2S_5 & -S_4 & S_6 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & S_3 & -S_4 & 2S_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & S_4 & S_6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & S_3 & S_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2S_5 & -S_4 & S_6 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & S_3 & -S_4 & 2S_1 & 0 & S_3 & S_4 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & S_4 & S_6 & 0 & 2S_5 & -S_4 & S_6 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & S_3 & -S_4 & S_1 & -S_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & S_4 & S_6 & -S_2 & S_5 \end{pmatrix},$$

et

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & -R_1 & R_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ R_2 & 2R_3 & -R_2 & R_3 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_1 & -R_2 & 2R_1 & 0 & -R_1 & R_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R_2 & R_3 & 0 & 4R_3 & -R_2 & R_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -R_1 & -R_2 & 2R_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_2 & R_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -R_1 & R_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 4R_3 & -R_2 & R_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -R_1 & -R_2 & 2R_1 & 0 & -R_1 & R_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & R_2 & R_3 & 0 & 4R_3 & -R_2 & R_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -R_1 & -R_2 & R_1 & -R_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & R_2 & R_3 & -R_2 & 2R_3 \end{pmatrix}.$$

Or, les conditions frontières du système d'observateur $\hat{w}_1(0) = \tilde{w}_1(0) = 0$ et $\hat{w}_2(0) = 0$ se traduisent comme $\hat{w}_1^0 = \tilde{w}_1^0 = 0$ et $\hat{w}_1^0 = 0$, respectivement. De ce fait, la solution

approchée $(\hat{w}_{h,1}, \hat{w}_{h,2})$ s'écrit comme suivant

$$\hat{w}_{h,1} = \sum_{i=1}^N [\hat{w}_1^i \phi_1^i + \tilde{w}_1^i \phi_2^i], \quad (3.3.10)$$

$$\hat{w}_{h,2} = \tilde{w}_2^0 \phi_2^0 + \sum_{i=1}^N [\hat{w}_2^i \phi_1^i + \tilde{w}_2^i \phi_2^i]. \quad (3.3.11)$$

On remarque que cette dernière expression signifie que \hat{w}_2 appartient à un sous-espace vectoriel affine de l'espace $H_L^2(0, 1; \mathbb{R}^+)$ tandis que $w_2 \in H_L^2(0, 1; \mathbb{R}^+)$ (en effet, de $w_{1t} = w_2$ et $w_1(0, t) = w_{1x}(0, t) = 0$, on déduit que $w_2(0, t) = w_{2x}(0, t) = 0$).

Afin que les résultats de simulation sur l'implémentation pratique de l'observateur soit plus significatif, prenons moins d'échantillons pour l'observateur que pour le système dynamique, soi-disant N' éléments au lieu de N avec $N' \ll N$.

Prenons les fonctions hermitiennes $(\psi_l^k \ 0)^T$ et $(0 \ \psi_l^k)^T$, $k = 1, \dots, N'$, $l = 1, 2$ (définies sur $[0, 1]$ discrétisée en N' éléments) comme fonctions de test. En prenant

$$U_h = Vect(\psi_1^1, \psi_2^1, \dots, \psi_1^{N'}, \psi_2^{N'})$$

comme espace discrétisé pour le système d'observateur.

En combinant les formulations variationnelles (3.3.5) and (3.3.8) correspondant au système d'observation et à l'observateur, on peut récrire le problème discrétisé comme suivant :

Trouver $W = (W_1, W_2, \hat{W}_1, \hat{W}_2)^T \in (V_h)^2 \times (U_h)^2$ telles que

$$M_l \dot{W} = M_r W, \quad (3.3.12)$$

où

$$M_l = \begin{pmatrix} R^N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{N'} & 0 \\ -M_1 & 0 & M_1' & S^{N'} \end{pmatrix}, \quad M_r = \begin{pmatrix} 0 & R^N & 0 & 0 \\ -R^N + \omega_*^2 S^N & 0 & 0 & 0 \\ P - M_2 & 0 & M_2' - P' & R^{N'} \\ 0 & 0 & -R^{N'} + \omega_*^2 S^{N'} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les éléments des matrices M_1 , M_2 et P sont donnés par

$$\begin{aligned} (M_1')_{p, q'} &= \kappa \psi_{lxx}^{k'}(0) \int_0^1 \psi_2^0 \psi_l^k dx, & (M_1)_{p, q} &= \kappa \phi_{lxx}^{\tilde{k}}(0) \int_0^1 \psi_2^0 \psi_l^k dx, \\ (M_2')_{p, q'} &= \kappa \psi_{lxx}^{k'}(0) \int_0^1 \psi_{2xx}^0 \psi_{lxx}^k dx, & (M_2)_{p, q} &= \kappa \phi_{lxx}^{\tilde{k}}(0) \int_0^1 \psi_{2xx}^0 \psi_{lxx}^k dx, \\ (P)_{p, q'}' &= \kappa \psi_{lxx}^{k'}(0) \int_0^1 F_{xx} \psi_{lxx}^k dx, & (P)_{p, q} &= \kappa \phi_{lxx}^{\tilde{k}}(0) \int_0^1 F_{xx} \psi_{lxx}^k dx \end{aligned}$$

avec $p = 2k + l - 2$, $q' = 2k' + \tilde{l} - 2$ et $q = 2\tilde{k} + \tilde{l} - 2$, pour $k, k' = 1, \dots, N'$, $\tilde{k} = 1, \dots, N$, $l, \tilde{l} = 1, 2$. On donne également leurs représentations matricielles :

$$M_1 = \kappa \begin{pmatrix} -S_4 \times \frac{6}{h^2} & -S_4 \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ S_6 \times \frac{6}{h^2} & S_6 \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & O & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \kappa \begin{pmatrix} -R_2 \times \frac{6}{h^2} & -R_2 \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ R_3 \times \frac{6}{h^2} & R_3 \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & O & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

et

$$P = \kappa \begin{pmatrix} a_1^1 \times \frac{6}{h^2} & a_1^1 \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 \times \frac{6}{h^2} & a_2^1 \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^i \times \frac{6}{h^2} & a_1^i \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^i \times \frac{6}{h^2} & a_2^i \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^N \times \frac{6}{h^2} & a_1^N \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^N \times \frac{6}{h^2} & a_2^N \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec a_j^i une combinaison linéaire des fonctions trigonométriques qu'on va préciser dans l'Annexe B.

Les matrices M_1 et M_2 sont issues de la condition imposée dans $\mathcal{D}(A^\kappa)$. On remarque que pour tous les $q \geq 3$, on a $(M_1)_{p,q} = 0$, $(M_2)_{p,q} = 0$ et $P_{p,q} = 0$. En effet, ceci est dû au fait que

$$w_{1xx}(0, t) = w^1(t) \phi_{1xx}^1(0) + \tilde{w}^1(t) \phi_{2xx}^1(0)$$

et

$$\hat{w}_{1xx}(0, t) = \hat{w}^1(t) \phi_{1xx}^1(0) + \tilde{\hat{w}}^1(t) \phi_{2xx}^1(0),$$

qui signifie que la sortie est de dimension finie.

Pour déterminer les produits scalaires $P_{p,q}$ avec $q = 1$ ou 2 , qui correspondent au terme de correction dans la formulation variationnelle, nous avons besoin de la solution explicite $F(x)$ de l'équation différentielle (3.3.7).

Remarque 3.3.5 *Le choix du produit scalaire n'est pas unique, si l'on prend le produit scalaire de X*

$$\langle f, g \rangle_X = \int_0^1 (f_{1xx}g_{1xx} + f_2g_2 - \omega_*^2 f_1g_1) dx,$$

alors les formulations variationnelles deviennent

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\hat{w}_{1txx}\phi_{lxx}^k - \omega_*^2 \hat{w}_{1t}\phi_l^k) dx &= \int_0^1 (w_{2xx}\phi_{lxx}^k - \omega_*^2 \hat{w}_2\phi_l^k) dx, \\ \int_0^1 w_{2t}\phi_l^k dx &= \int_0^1 (-w_{1xx}\phi_{lxx}^k + \omega_*^2 w_1\phi_l^k) dx \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\hat{w}_{1txx}\phi_{lxx}^k - \omega_*^2 \hat{w}_{1t}\phi_l^k) dx &= \int_0^1 [\hat{w}_{2xx} - \kappa(\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t))F_{xx}] \phi_{lxx}^k \\ &\quad - \omega_*^2 w_2\phi_l^k - \omega_*^2 F\phi_k^l dx, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

$$\int_0^1 \hat{w}_{2t}\phi_l^k dx = \int_0^1 (-\hat{w}_{1xx}\phi_{lxx}^k + \omega_*^2 \hat{w}_1\phi_l^k) dx.$$

Ainsi la forme matricielle du système discrétisé devient

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} R - \omega_*^2 S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R - \omega_*^2 S & 0 \\ -M_1 & 0 & M_1 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{W}_1 \\ \dot{W}_2 \\ \dot{\hat{W}}_1 \\ \dot{\hat{W}}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & R - \omega_*^2 S & 0 & 0 \\ -R + \omega_*^2 S & 0 & 0 & 0 \\ P - \omega_*^2 Q - M_2 & 0 & M_2 + \omega_*^2 Q - P & R - \omega_*^2 S \\ 0 & 0 & -R + \omega_*^2 S & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \hat{W}_1 \\ \hat{W}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On constate plus loin que dans la simulation numérique, même avec des produits scalaires équivalents, les résultats numériques peuvent être différents.

3.3.3 Convergence de l'approche *conception-approximation*

Dans les paragraphes précédents, on a proposé un schéma numérique basé sur la méthode des éléments finis, dans l'optique de simuler la dynamique du système d'observation et de l'observateur. Nous adaptons alors une approche *conception-approximation*

afin d'articuler la convergence de notre schéma numérique proposé. Autrement dit, nous concevons d'abord un observateur sous forme d'EDP pour notre système d'observation d'EDP, et puis nous approximations numériquement le comportement dynamique de l'observateur conçu au travers de la méthode des éléments finis. De ce fait, nous obtenons le comportement dynamique de l'observateur numériquement approximé (que nous appelons *observateur numérique*). On se pose alors la question suivante : comment peut-on expliquer que l'observateur est capable de rattraper la trajectoire du système observé après un certain temps transitoire ?

D'abord la trajectoire de l'observateur d'EDP conçu converge vers celle du système observé après un certain temps transitoire. Puis la trajectoire de l'observateur numérique converge vers celle de l'observateur d'EDP conçu, quand le diamètre de l'élément tend vers zéro (grâce à la méthode des éléments finis). D'après un raisonnement successif nous pouvons conclure que la trajectoire de l'observateur numérique converge vers celle du système observé, lorsque le diamètre de l'élément tend vers zéro.

Notons par $W(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))$ l'état du système d'observé et désignons l'état de l'observateur numérique par

$$\hat{W}^h(t) = \left(\sum_{k=1}^{N'} [\hat{w}^k(t)\psi_1^k + \hat{\hat{w}}^k(t)\psi_2^k], \sum_{k=1}^{N'} [\hat{w}_t^k(t)\psi_1^k + \hat{\hat{w}}_t^k(t)\psi_2^k] \right),$$

où $\hat{w}(t)$, $\hat{\hat{w}}^k(t)$, $\hat{w}_t(t)$ et $\hat{\hat{w}}_t^k(t)$, $k = 1, \dots, N'$ sont la solution du (3.3.12). Introduisons le projecteur orthogonal Π_h de l'espace d'état X sur le sous-espace de dimension finie engendré par les fonctions de base. Il est clair que l'égalité suivante a lieu :

$$\|W(t) - \hat{W}^h(t)\|_X \leq \|W(t) - \hat{W}(t)\|_X + \|\hat{W}(t) - \Pi_h \hat{W}(t)\|_X + \|\Pi_h \hat{W}(t) - \hat{W}^h(t)\|_X. \quad (3.3.13)$$

Par la convergence exponentielle de l'observateur, le premier terme au deuxième membre dans (3.3.13) tend vers zéro exponentiellement lorsque le temps tend vers l'infini. Grâce à la méthode des éléments finis, le deuxième ainsi que le troisième terme tendent vers zéro sur chaque horizon du temps fini quand le diamètre h de l'élément tend vers zéro (voir [22] pour d'autres exemples). Par conséquent, la représentation en dimension finie de l'observateur ou l'observateur numérique converge vers l'état du système original de dimension infinie.

3.3.4 Choix des conditions initiales

3.3.4.1 Fonctions propres et solution exacte

Afin de juger la qualité de notre simulation, on souhaite faire comparer les solutions simulées avec une certaine solution exacte. L'un des choix les plus simples est de prendre des fonctions propres associées aux valeurs propres de l'opérateur A . En effet, on sait que

le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = A\varphi, \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

admet une solution $\varphi(t) = e^{At}\varphi_0$. Notons $\lambda \in \sigma(A)$ une valeur propre de A et $(f \ g)^T$ sa fonction propre associée, alors en prenant $(f \ g)^T$ comme condition initiale, on aura

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}\varphi_0. \quad (3.3.14)$$

Pour calculer ces fonctions, il s'agit de résoudre le problème spectral associé à l'équation de poutre. On va appliquer la méthode de séparation des variables. Supposons que la solution peut s'écrire sous la forme :

$$w(x, t) = X(x)T(t),$$

alors la première équation devient $XT'' + X''''T = 0$, ou encore

$$\frac{X''''}{X} = -\frac{T''}{T} = \rho^4,$$

avec ρ une constante strictement positive. On a donc

$$\begin{cases} T'' + \rho^4 T = 0, \\ X'''' - \rho^4 X = 0. \end{cases} \quad (3.3.15)$$

La deuxième équation de (3.3.15) admet une solution générale

$$X(x) = A \cosh(\rho x) + B \sinh(\rho x) + C \cos(\rho x) + D \sin(\rho x). \quad (3.3.16)$$

Ainsi ses dérivées s'écrivent comme suivant

$$\begin{aligned} X'(x) &= \rho[A \sinh(\rho x) + B \cosh(\rho x) - C \sin(\rho x) + D \cos(\rho x)], \\ X''(x) &= \rho^2[A \cosh(\rho x) + B \sinh(\rho x) - C \cos(\rho x) - D \sin(\rho x)], \\ X'''(x) &= \rho^3[A \sinh(\rho x) + B \cosh(\rho x) + C \sin(\rho x) - D \cos(\rho x)]. \end{aligned}$$

En considérant les conditions aux limites et le fait que $T(t) \neq 0$, on a

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X''(1) = 0, \quad X'''(1) = 0.$$

D'après les conditions $X(0) = X'(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} X(0) &= A + C = 0, \\ X'(0) &= \rho(B + D) = 0, \end{aligned}$$

d'où $A = -C$ et $B = -D$, et la solution s'écrit comme

$$X(x) = A[\cosh(\rho x) - \cos(\rho x)] + B(\sinh(\rho x) - \sin(\rho x)). \quad (3.3.17)$$

Pareillement, les conditions $X''(1) = X'''(1) = 0$ impliquent que

$$\begin{aligned} \rho^2[A(\cosh(\rho) + \cos(\rho)) + B(\sinh(\rho) + \sin(\rho))] &= 0, \\ \rho^3[A(\sinh(\rho) - \sin(\rho)) + B(\cosh(\rho) + \cos(\rho))] &= 0. \end{aligned}$$

En prenant $(A \ B)^T$ comme variables, on peut récrire les deux équations (3.3.17) sous la forme matricielle

$$M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\rho) + \cos(\rho) & \sinh(\rho) + \sin(\rho) \\ \sinh(\rho) - \sin(\rho) & \cosh(\rho) + \cos(\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0.$$

Pour que la solution soit non triviale, il faut et il suffit que le déterminant $\det M = 0$. Ceci nous donne l'équation caractéristique :

$$1 + \cosh(\rho) \cdot \cos(\rho) = 0. \quad (3.3.18)$$

Or cette équation algébrique est transcendante, il est difficile de trouver une solution explicite. Cependant, en traçant les courbes des fonction $y = \cos(x)$ et $y = -1/\cosh(x)$, on peut quand même avoir une idée indicative sur la localisation des solutions à travers des points d'intersection des deux courbes. On constate bien que l'équation admet des racines complexes. On les note par ρ_n , $n \in \mathbb{N}$. Les coefficients A et B sont donnés par

$$A = -\frac{\sinh(\rho_n) + \sin(\rho_n)}{\cosh(\rho_n) + \cos(\rho_n)} B = -\frac{\cosh(\rho_n) + \cos(\rho_n)}{\sinh(\rho_n) - \sin(\rho_n)} B$$

et les fonctions propres s'écrivent comme suivant

$$X_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{\sinh(\rho_n) + \sin(\rho_n)}{\cosh(\rho_n) + \cos(\rho_n)} [\cosh(\rho_n x) - \cos(\rho_n x)] + [\sinh(\rho_n x) - \sin(\rho_n x)].$$

Avec les notations précédentes, de l'équation

$$A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (3.3.19)$$

on déduit que

$$\begin{aligned} g &= \lambda f, \\ -f'''' &= \lambda g. \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$f'''' + \lambda^2 f = 0 \quad (3.3.20)$$

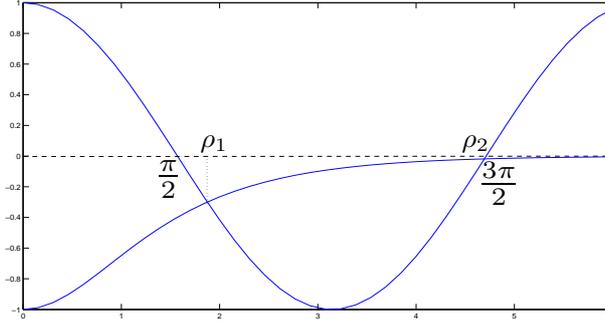


FIGURE 3.2 – Localisation des paramètres ρ_n vérifiant l'équation caractéristique $\cosh(\rho) \cdot \cos(\rho) + 1 = 0$; courbes $C_1 : y = -1/\cosh(x)$; $C_2 : y = \cos(x)$.

et que la fonction propre associée à λ peut s'écrire comme $(f \ \lambda f)^T$. En identifiant (3.3.20) avec la deuxième équation de (3.3.15) $X'''' - \rho X = 0$, on obtient

$$\lambda = \pm i\rho^2. \quad (3.3.21)$$

En revanche, si l'on prenait $f(x) = X_n(x)$, de (3.3.21) on aurait $g(x) = \lambda X_n(x) = \pm i\rho^2 X_n(x)$ qui serait purement imaginaire. Ceci produirait des inconvénients dans le calcul numérique. Alors pour cette raison, au lieu de $(f \ g)^T$ on prend la somme

$$\varphi_0(x) = \psi_n(x) + \bar{\psi}_n(x) = \begin{pmatrix} 2 X_n(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.22)$$

comme condition initiale, où

$$\psi_n(x) = \begin{pmatrix} X_n(x) \\ \lambda_n X_n(x) \end{pmatrix} \quad (3.3.23)$$

et son conjugué

$$\bar{\psi}_n(x) = \begin{pmatrix} X_n(x) \\ \bar{\lambda}_n X_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n(x) \\ -\lambda_n X_n(x) \end{pmatrix}. \quad (3.3.24)$$

Ainsi on obtient une solution exacte

$$\begin{aligned} e^{At} \varphi_0(x) &= e^{\lambda_n t} \psi_n(x) + e^{-\lambda_n t} \bar{\psi}_n(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cosh(\lambda_n t) X_n(x) \\ 2 \lambda_n \sinh(\lambda_n t) X_n(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos(\rho_n^2 t) X_n(x) \\ -2 \rho_n^2 \sin(\rho_n^2 t) X_n(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avec cette condition initiale, le système d'observation comporte comme une oscillation harmonique simple.

3.3.4.2 C^1 -conditions de compatibilité

Pour que la solution \hat{w} et sa dérivée temporelle \hat{w}_t soient bien dans l'espace d'état $X = H_L^2 \times L^2$, les conditions initiales doivent vérifier certaines conditions de compatibilité. D'après les conditions limites imposées sur $x = 0$, il est clair que $\hat{w} \in X$ est automatiquement vérifiée. Il reste à chercher des conditions telles que $\hat{w}_t \in X$. La première équation de l'observateur ainsi que sa dérivée spatiale nous donnent, respectivement,

$$\begin{cases} \hat{w}_{1t}(x, t) = \hat{w}_2(x, t) - \kappa F(x)[\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)] & \forall (x, t) \in \Omega^+, \\ \hat{w}_{1tx}(x, t) = \hat{w}_{2x}(x, t) - \kappa F_x(x)[\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)]. \end{cases} \quad (3.3.26)$$

En évaluant (3.3.26) en $x = 0$, on obtient

$$\begin{cases} \hat{w}_{1t}(0, t) = \hat{w}_2(0, t), \\ \hat{w}_{1tx}(0, t) = \hat{w}_{2x}(0, t) - \kappa[\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)] \end{cases}$$

en tenant compte que $F(0) = 0$ et $F_x(0) = 1$. Or la condition limite à l'extrémité gauche $\hat{w}_1(0, t) = \hat{w}_{1x}(0, t) = 0$ implique que $\hat{w}_{1t}(0, t) = \hat{w}_{1tx}(0, t) = 0$, alors on en déduit que $\hat{w}_2(0, t) = 0$ et $\hat{w}_{2x}(0, t) = \kappa[\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)]$, $\forall t \geq 0$. D'où en particulier, à l'instant $t = 0$, on a

$$\begin{cases} \hat{w}_2(0, 0) = 0, \\ \hat{w}_{2x}(0, 0) = \kappa[\hat{w}_{1xx}(0, 0) - w_{1xx}(0, 0)]. \end{cases}$$

D'ailleurs, il faut tenir compte des deux autres conditions frontières de \hat{w}_1 évaluées à $t = 0$, c.-à-d.,

$$\begin{cases} \hat{w}_{1xx}(1, 0) = 0, \\ \hat{w}_{1xxx}(1, 0) = 0. \end{cases}$$

D'où les conditions qu'on doit vérifier dans le calcul numérique. Il faut faire attention à ne pas confondre cette condition avec celle qu'on trouve dans la définition du domaine de l'opérateur A^κ car les solutions du système (donc les conditions initiales) doivent appartenir à l'espace d'état X . (Si l'on veut augmenter la régularité de solution, on peut obtenir aisément d'autres conditions de compatibilité, par exemple, $\hat{w}_{2xx}(1, 0) = \hat{w}_{2xxx}(1, 0) = 0$, d'une manière pareille. En effet, d'une part, on trouve $\hat{w}_{1txx}(1, 0) = \hat{w}_{1txxx}(1, 0) = 0$ à partir des conditions initiales de \hat{w}_1 , et d'autre part, on constate bien dans le raisonnement ci-dessus que les conditions de compatibilité sont liées à la nature de la fonction F vérifiant $F_{xx}(1) = F_{xxx}(1) = 0$).

Le choix le plus simple consiste à prendre une fonction polynomiale

$$\hat{w}_1(x, 0) = \delta\left(\frac{x^4}{3} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right),$$

où δ est une constante. Avec les conditions initiales du système d'observation précédemment imposées dont

$$w_1(x, 0) = 2X_n = 2\gamma[ch(\rho x) - \cos(\rho x)] - 2[sh(\rho x) - \sin(\rho x)],$$

on obtient $w_{1xx}(0, 0) = 4\rho^2\gamma$. Comme pour l'observateur la variable d'état \hat{w}_2 n'est plus la dérivée temporelle de \hat{w}_1 , alors pour imposer une condition initiale bien posée pour \hat{w}_2 , il s'agit de trouver une fonction satisfaisant les conditions de compatibilité. En revanche, on constate que $\hat{w}_{2x}(0, 0) = \kappa[\hat{w}_{1xx}(0, 0) - w_{1xx}(0, 0)]$ est une constante qui dépend de la valeur du gain κ si le deuxième membre ne s'annule pas. Par conséquent, κ va intervenir dans le temps de rattrapage à la trajectoire du système. Ceci est gênant car le gain optimal doit être indépendant du choix des conditions initiales. Alors il nous oblige à identifier la valeur de $\hat{w}_1(0, 0)$ à $w_1(0, 0)$, de sorte que l'on a $\delta = \gamma\rho^2$. Le choix de $\hat{w}_2(x, 0)$ ne dépend qu'alors la condition $\hat{w}_2(0, 0) = \hat{w}_{2x}(0, 0) = 0$. On peut prendre donc par exemple $\hat{w}_2(x, 0) = x^2 f(x)$ avec f une fonction quelconque.

3.3.5 Simulations numériques

Prenons dans un premier temps le maillage avec le nombre de points de discrétisation $N = N' = 16$, le gain $\kappa = 1$ et la vitesse angulaire $\omega_* = 3 \text{ rad/s}$ dans le cas où $\omega_* \neq 0$. Pour le système d'observation, on impose la condition initiale suivante :

$$\begin{cases} w_1(x, 0) = 2\gamma[ch(\rho x) - \cos(\rho x)] - 2[sh(\rho x) - \sin(\rho x)], \\ w_2(x, 0) = 0, \end{cases}$$

où $\gamma = (sh(\rho) + \sin(\rho))/(ch(\rho) + \cos(\rho))$ avec $\rho \simeq 1.8751$ (qui vérifie l'équation caractéristique $ch(\rho)\cos(\rho) + 1 = 0$). Pour l'observateur, prenons

$$\begin{cases} \hat{w}_1(x, 0) = \gamma\rho^2\left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right), \\ \hat{w}_2(x, 0) = x^3 - 2x^2 \end{cases}$$

comme condition initiale, qui est différente de celle du système d'observation mais respecte les \mathcal{C}^1 -conditions de compatibilité.

On emploie la subroutine *ode23* de Matlab[®] Version 7.2.0.232 pour résoudre le système dynamique avec les conditions initiales précédentes.

Les profils désignés par $w_1(x, t)$ et $\hat{w}_1(x, t)$ représentent, respectivement, le déplacement du système d'observation et le déplacement estimé par l'observateur du type Luenberger, et leurs vitesses sont désignées par $w_2(x, t)$ et $\hat{w}_2(x, t)$, respectivement. Comme illustré dans la figure Fig.3.3, dans les deux cas $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, le profil \hat{w}_1 converge rapidement vers w_1 , même si leurs profils initiaux sont assez différents. En particulier, la figure Fig.3.4 (respectivement, la figure Fig.3.5) donne la comparaison des dynamiques de déplacement entre le système d'observation et l'observateur au 2-ème (respectivement au

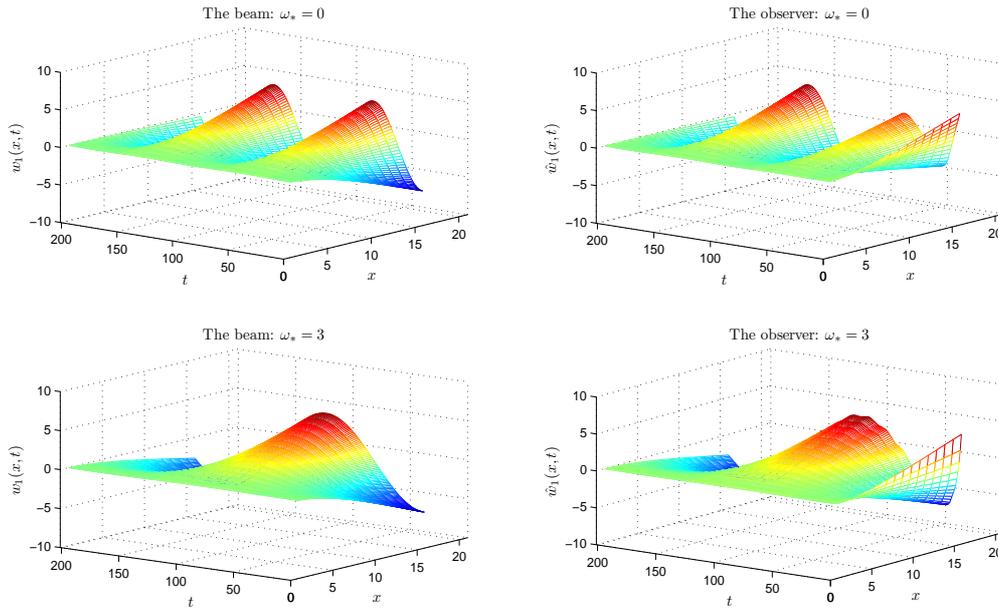


FIGURE 3.3 – Vecteurs des déplacements du système d’observation et de l’observateur où $\omega_* = 0$ (en haut) et $\omega_* = 3$ (en bas), respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

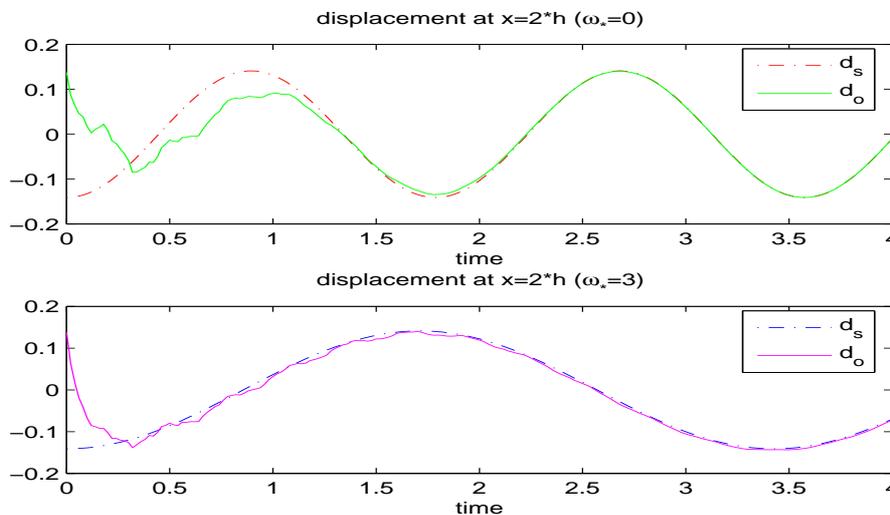


FIGURE 3.4 – Evolution des déplacements au 2-ème point pour le système d’observation (en tiret) et de l’observateur(en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

N -ième) point de l’intervalle $[0, 1]$ pour $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$. Parallèlement, les dynamiques de vitesses $w_2(x, t)$ et $\hat{w}_2(x, t)$, dans les deux cas $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, sont présentés dans la figure Fig.3.6. La comparaison des vitesses aux points particuliers est donnée dans les

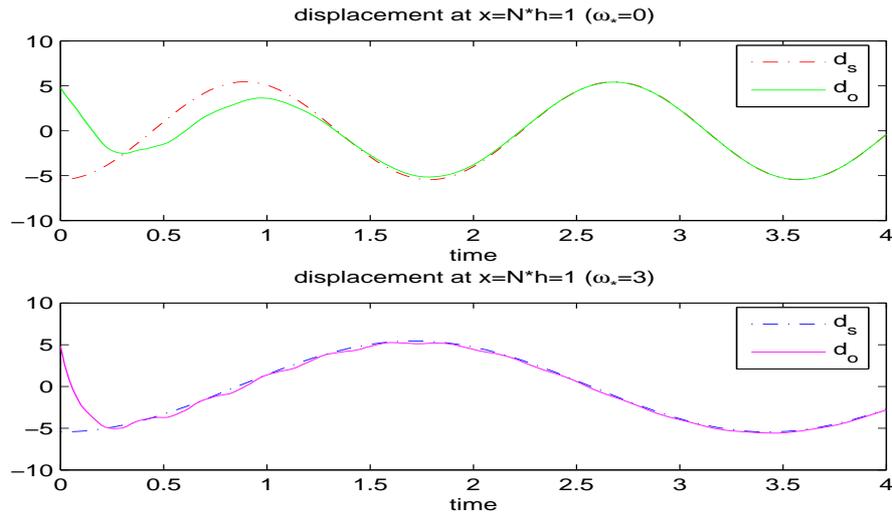


FIGURE 3.5 – Evolution des déplacements au N -ième point pour le système d’observation (en tiret) et de l’observateur (en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

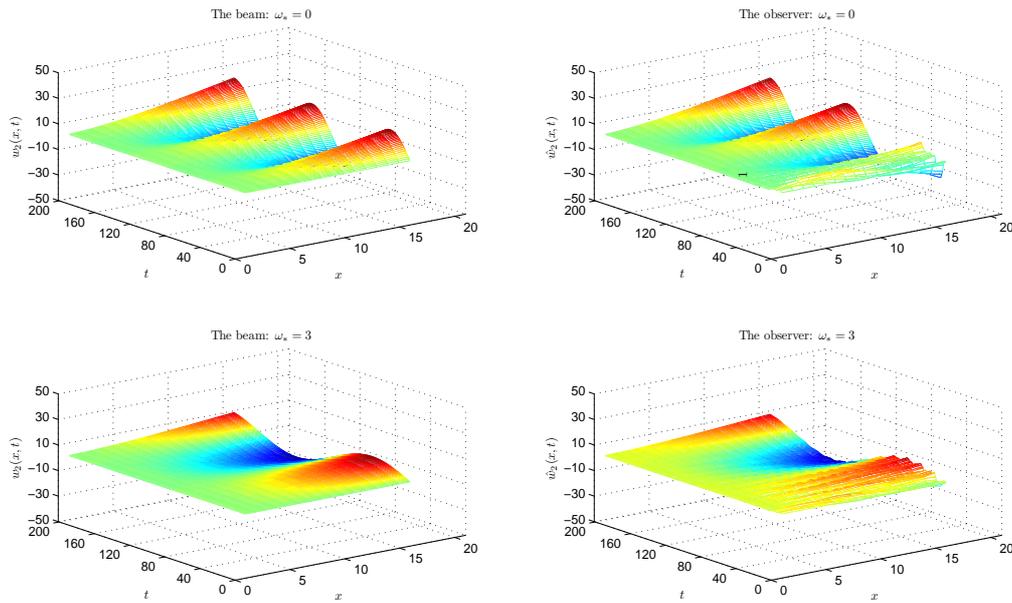


FIGURE 3.6 – Vecteurs des vitesses du système d’observation et de l’observateur où $\omega_* = 0$ (en haut) et $\omega_* = 3$ (en bas), respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

figures Fig.3.7 et Fig.3.8. On constate ici que la convergence de la vitesse est moins rapide que celle du déplacement. Afin de mieux visualiser la dynamique d’erreur de l’observation, l’évolution de l’erreur des déplacements et des vitesses à chaque point de l’intervalle $[0, 1]$

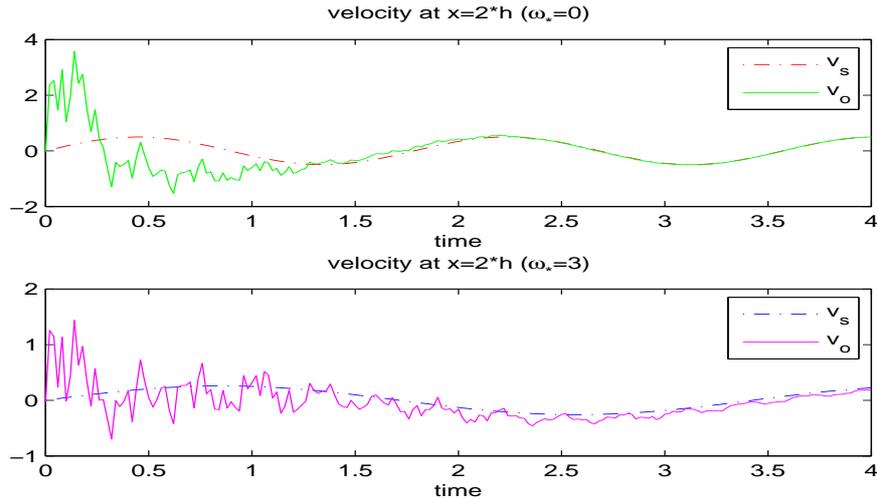


FIGURE 3.7 – Evolution des vitesses au 2-ème point pour le système d’observation (en tiret) et de l’observateur(en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

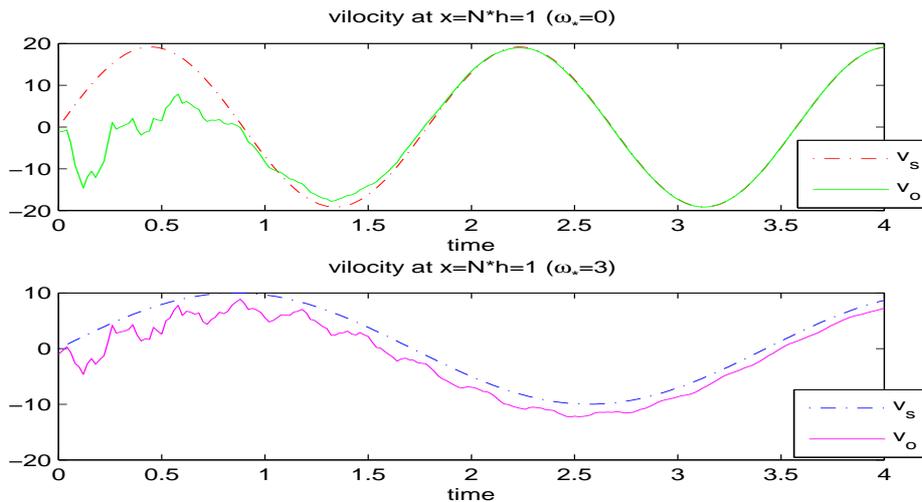


FIGURE 3.8 – Evolution des vitesses au N -ième point pour le système d’observation (en tiret) et de l’observateur (en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

(pour les deux cas $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$) est présentée dans la figure Fig.3.9.

Pour quantifier la performance de l’observer, dans le tableau Tab.3.1 est donné le bilan de durées nécessaires (en seconds et en période ratio) pour que l’observateur rattrape la trajectoire du système de corps-poutre en rotation au point d’extrémité libre $x = 1$, en fonction de différents gains de correction pour $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$. Remarquons que le comportement dynamique de l’observateur dépend de la valeur du paramètre de gain κ . En effet, la vitesse de convergence de l’erreur d’observateur est dominée par la distribution

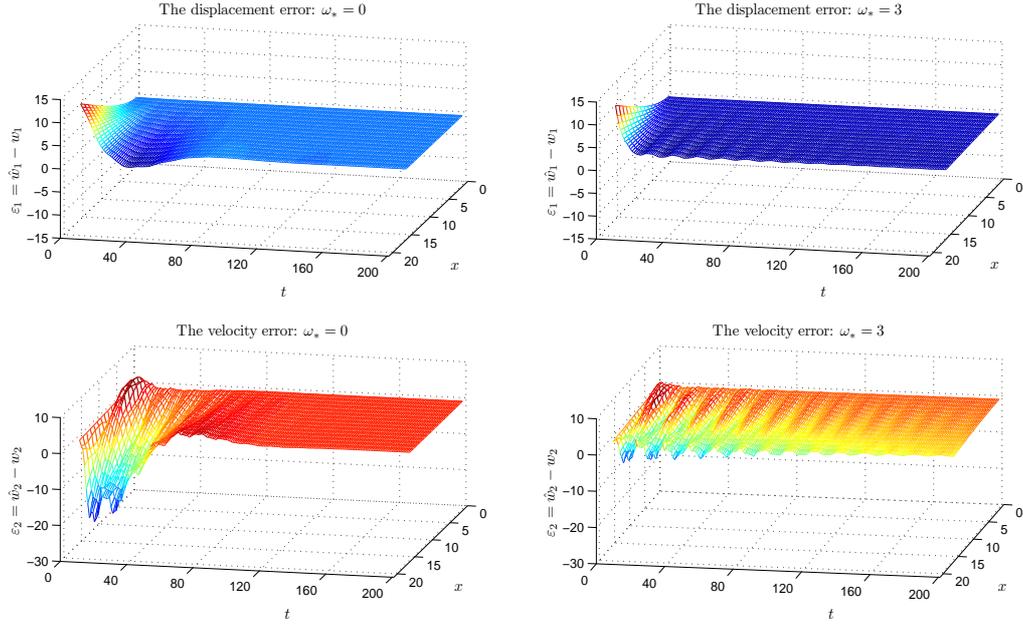


FIGURE 3.9 – Evolution de l’erreur des déplacements (en haut) et de l’erreur des vitesses (en bas) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

spectrale de A^κ et le gain optimal (au sens où le temps de rattrapage est minimal) pour chaque ω_* est indépendant des conditions initiales. Par exemple, le gain optimal pour la vitesse de convergence d’erreur se trouve auprès de $\kappa = 5$ quand $\omega_* = 0$, et le gain optimal pour $\omega_* = 3$ est alentour de $\kappa = 2$, voir Tab.3.1. Nous pouvons améliorer la vitesse de convergence en mieux choisissant des paramètres de gain, qui fait partie de notre tâche en cours.

		gain							
		10	5	3	2	1	0.5	0.1	
$\omega_* = 0$	(seconds)	2.35 s	1.15 s	1.45 s	1.5 s	1.95 s	3.7 s	18 s	
	(periods)	1.32	0.64	0.81	0.84	1.09	2.07	10.07	
$\omega_* = 3$	(seconds)	5.75 s	3 s	2.1 s	1.55 s	2.15 s	3.05 s	5.85 s	
	(periods)	1.68	0.88	0.61	0.45	0.63	0.89	1.71	

TABLE 3.1 – Temps nécessaire (en seconds et période ratio) pour que l’observateur rattrape la trajectoire du système d’observation en $x = 1$ avec une précision de 5%.

On présente, dans la figure Fig.3.12, la distribution des valeurs propres de l’opérateur A^κ (correspondant au système d’erreur) pour $\omega_* = 0$. On remarque que les valeurs propres tendent vers l’axe imaginaire en haute fréquence. Ceci est différent avec le ré-

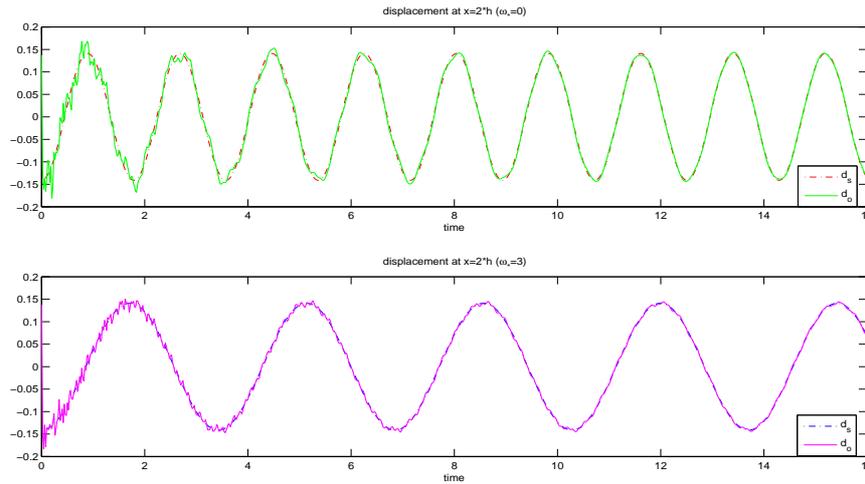


FIGURE 3.10 – Evolution des déplacements au 2-ème point pour le système d’observation (en tiret) et de l’observateur(en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 100$. Temps de simulation $T = 16s$.

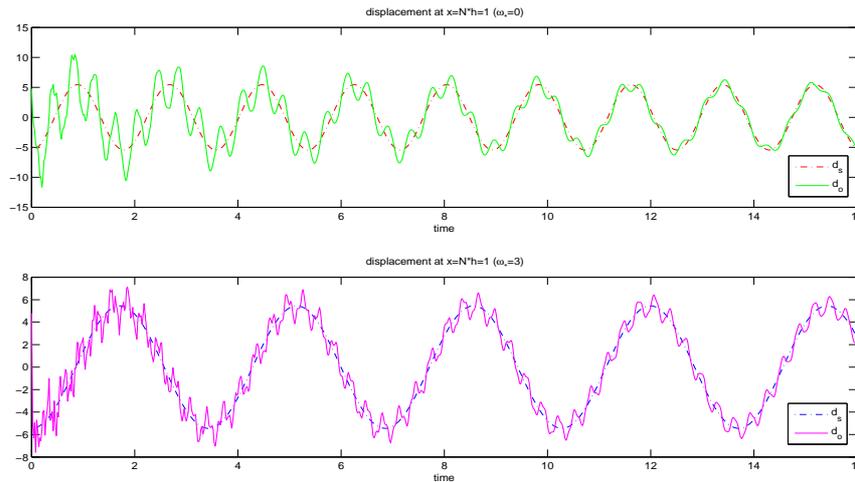


FIGURE 3.11 – Evolution des déplacements au N -ième point pour le système d’observation (en tiret) et de l’observateur (en solide) où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 100$. Temps de simulation $T = 16s$.

sultat que l’on prouve théoriquement, qui montre que les valeurs propres tendent vers -2κ comme l’asymptote verticale (cf. le Théorème 2.4.15). Ceci est une situation typique que nous pouvons rencontrer dans la résolution d’un problème d’EDP par un schéma numérique. En fait, on approxime le comportement dynamique d’un système intrinsèquement de dimension infinie par celui d’un système en dimension finie. Etant donnée une donnée initiale à un système, les composants en haute fréquence de la solution sont relativement négligeables par rapport aux composants en basse fréquence. De ce fait, à

partir d'un certain rang, les valeurs propres présentées dans la figure Fig.3.12 ne sont pas significatives aux dynamiques du système étudié ainsi qu'aux résultats numériques. Par exemple, en augmentant la taille de maillage de $N = 20$ à $N = 50$, on constate que les résultats numériques sont similaires. En revanche, en passant de $N = 20$ à $N = 50$, on peut obtenir beaucoup plus de valeurs propres qui approchent à l'axe imaginaire (voir le tableau Tab.3.2). On a comparé la distribution spectrale du système approximé dans la figure Fig.3.12 avec le spectre théorique de l'opérateur A^k et on trouve que leurs premières valeurs propres (de petit module) sont proche l'une avec l'autre. Spécifiquement les valeurs propres proche de l'origine sont exactement les même. On a mené une seconde étape de conception pour déplacer ces valeurs propres vers gauche sur le plan complexe, afin d'accélérer la vitesse de convergence de l'observateur.

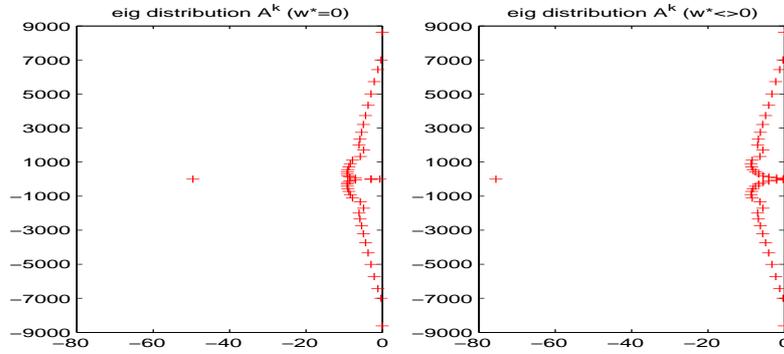


FIGURE 3.12 – Distribution des valeurs propres du système d'erreur dans le cas où $\omega_* = 0$ et $\omega_* = 3$, respectivement. Nombre de point $N = 20$.

3.4 Cas où $\omega(t)$ varie en fonction du temps

Une fois on obtient les expressions pour le cas où ω_* est une constante non nulle, on peut s'étendre au cas où $\omega(t)$ est variante. Etant donné un $|\omega_*| < \sqrt{l_1}$, nous pouvons trouver une constante positive $\delta > 0$ telle que l'observateur converge exponentiellement avec ω_* étant remplaçant par une fonction $\omega(t)$ vérifiant $|\omega(t) - \omega_*| < \delta$, for $t \geq 0$. En prenant $\omega(t) = \omega_* \cdot \sin^2(t)$, les trajectoires du système d'observation et de l'observateur sont présentées dans les figures Fig.3.13 et Fig.3.14 pour donner une idée sur comment l'observateur marche encore avec quelque vitesse angulaire en temps variant.

Il s'agit de remplacer notre constant $\alpha = \sqrt{\omega_*}$ par une fonction du temps $\alpha(t) = \sqrt{\omega(t)}$.

	théorique	numérique (N=20)	numérique (N=50)
λ_1	-0.3022	-0.3022	-0.3022
λ_2	-1.4711+15.5954i	-1.4710+15.5964i	-1.4711+15.5955i
λ_3	-4.8376+51.4879i	-4.8324+51.4987i	-4.8372+51.4886i
λ_4	-8.9598+109.0736i	-8.9252+109.1098i	-8.9574+109.0755i
λ_5	-12.5599+188.2823i	-12.4576+188.3523i	-12.5528+188.2848i
λ_6	-14.9943+288.0895i	-14.8016+288.2192i	-14.9813+288.0914i
λ_7	-16.4969+407.7406i	-16.2021+408.0271i	-16.4778+407.7433i
λ_8	-17.4333+546.9828i	-17.0205+547.6357i	-17.4079+546.9911i
λ_9	-18.0425+705.7827i	-17.4877+707.1716i	-18.0102+705.8063i
λ_{10}	-18.4577+884.1649i	-17.7294+886.8826i	-18.4172+884.2201i
λ_{11}	-18.7526+1082.1609i	-17.8129+1087.1011i	-18.7023+1082.2732i
λ_{12}	-18.9694+1299.7977i	-17.7758+1308.2426i	-18,9075+1300.0053i
λ_{13}	-19.1336+1537.0965i	-17.6391+1550.8078i	-19.0576+1537.4539i
λ_{14}	-19.2610+1794.0730i	-17.4149+1815.3745i	-19.1681+1794.6561i
λ_{15}	-19.3619+2070.7394i	-17.1087+2102.5604i	-19.2491+2071.6504i
λ_{16}	-19.4433+2367.1047i	-16.7175+2412.9150i	-19.3068+2368.4793i
λ_{17}	-19.5098+2683.1762i	-16.2158+2746.6048i	-19.3459+2685.1898i

 TABLE 3.2 – La distribution spectrale de A^κ avec $\kappa = 10$ dans le cas $\omega_* = 0$.

Par conséquent, le système s'écrit

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ -M_1 & 0 & M_1 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{W}_1 \\ \dot{W}_2 \\ \dot{\hat{W}}_1 \\ \dot{\hat{W}}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & R & 0 & 0 \\ -R + \omega^2(t)S & 0 & 0 & 0 \\ -M_2 + P(t) & 0 & M_2 - P(t) & R - \omega^2(t)S \\ 0 & 0 & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \hat{W}_1 \\ \hat{W}_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $\omega(t)$ est temps-variante, le comportement de vitesse estimée est aussi très important car on a besoin de tous les deux composants du vecteur d'état pour réaliser la loi de commande par retour d'état. On constate ici que l'observateur reste exponentiellement convergent (pour le déplacement et la vitesse) lorsque la vitesse angulaire $\omega(t)$ varie en fonction du temps autour d'une constante ω_* .

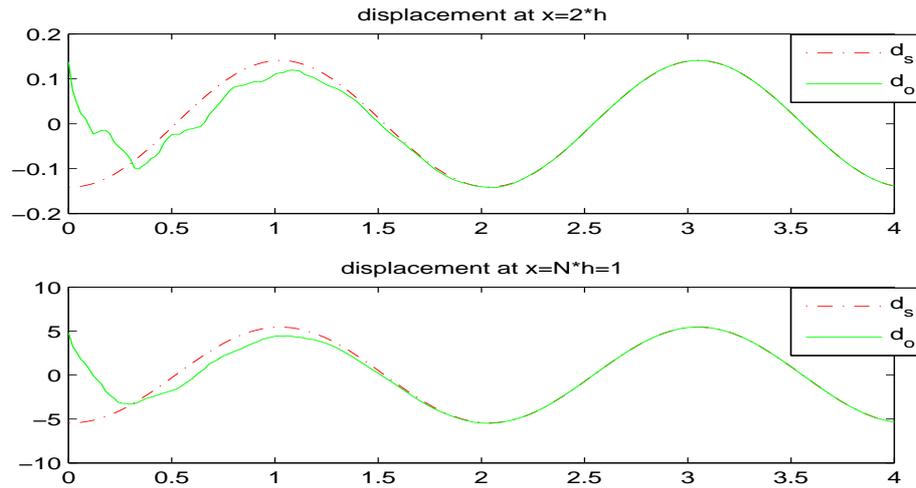


FIGURE 3.13 – Evolution des déplacements au 2-ème et au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et l'observateur (en solide) avec $\omega(t) = \omega_* \cdot \sin^2(t)$. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

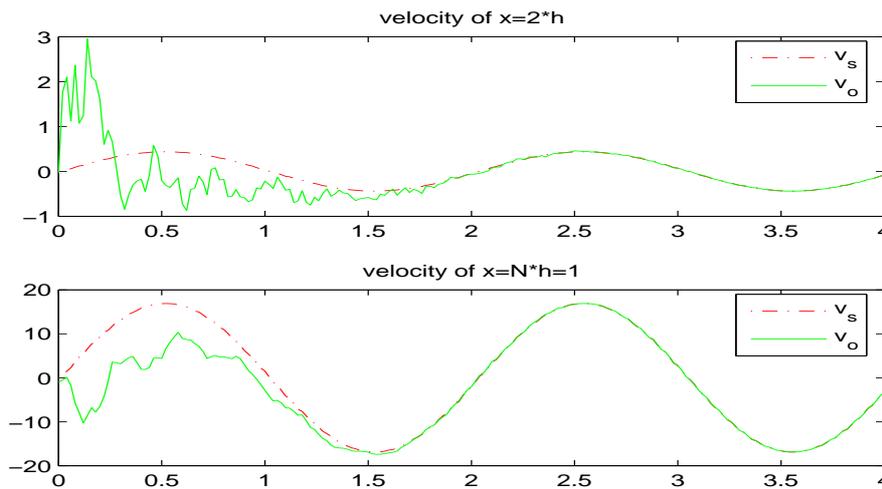


FIGURE 3.14 – Evolution des vitesses au 2-ème et au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et l'observateur (en solide) avec $\omega(t) = \omega_* \cdot \sin^2(t)$. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

3.5 Robustesse

Un problème important dans la théorie du contrôle est de fournir une robustesse aux systèmes qui sont exposés à la perte de qualité (dégradation des paramètres, incertitude de types structurels, perturbations de types stochastiques), à des perturbations ou bruits polluant les mesures ou bien l'état du système. La construction d'observateurs doit tenir compte de ces incertitudes.

Dans la suite, on s'intéresse à la robustesse de l'observateur en considérant des mesures bruitées. L'objectif consiste à déterminer les conditions telles que l'observateur reste efficace pour estimer les dynamiques du système. Au lieu de prendre la mesure $y = w_{1xx}(0, t)$, prenons $\tilde{y} = w_{1xx}(0, t) + b(t)$, où $b(t)$ désigne le bruit (simulé par une variable aléatoire).

D'après l'expression de $\tilde{w}_0^{(2)}$ associée à y qu'on a obtenue précédemment, on retrouve $\tilde{w}_0^{(2)}$ associée à \tilde{y} :

$$\tilde{w}_0^{(2)}(t) = \kappa \left(\frac{6}{h^2} \hat{w}_1^{(1)}(t) - \frac{2}{h} \tilde{w}_1^{(1)}(t) - \frac{6}{h^2} w_1^{(1)}(t) + \frac{2}{h} \tilde{w}_1^{(1)}(t) - b(t) \right).$$

Alors le système avec mesure bruitée devient

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ -M_1 & 0 & M_1 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{W}_1 \\ \dot{W}_2 \\ \dot{\hat{W}}_1 \\ \dot{\hat{W}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & R & 0 & 0 \\ -R + \omega_*^2 S & 0 & 0 & 0 \\ -M_2 + P & 0 & M_2 - P & R - \omega_*^2 S \\ 0 & 0 & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \hat{W}_1 \\ \hat{W}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$B_1 = \kappa \begin{pmatrix} \frac{13}{420} h^2 \\ \frac{-1}{140} h^3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \times b(t) \quad \text{et} \quad B_2 = \kappa \begin{pmatrix} \frac{-6}{h^2} \\ \frac{2}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \times b(t).$$

On teste la robustesse du système en ajoutant à la mesure un bruit $b(t)$ (via la fonction *rand*) avec l'amplitude égale à 4 (soit 20% de l'amplitude du profil de la mesure) et la valeur moyenne égale à zéro, voir la figure Fig.3.15. L'évolution du N -ième point et l'évolution de l'erreur sont illustrées sans la figure Fig.3.16 et Fig.3.17, respectivement. On constate ici que l'observateur est robuste vis à vis d'un bruit blanc.

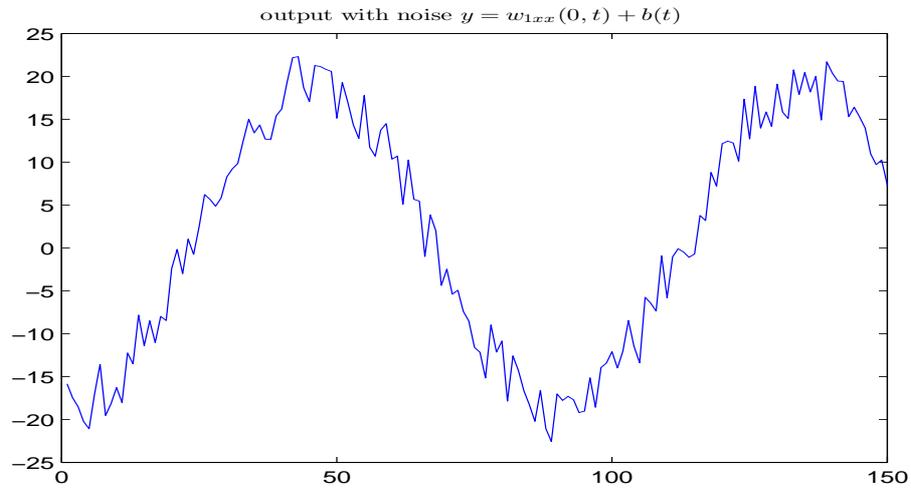


FIGURE 3.15 – La mesure (sortie) corrompue par un bruit aléatoire.

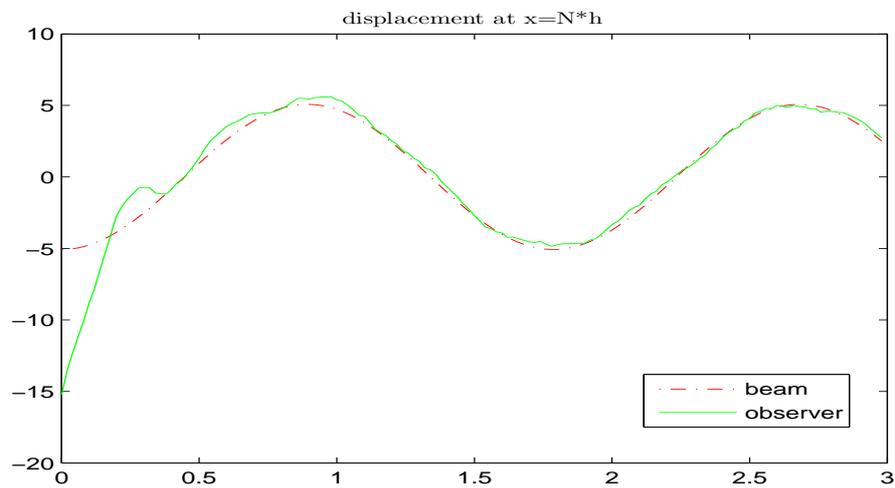


FIGURE 3.16 – Evolution des déplacements au N -ième point pour le système d'observation (en tiret) et l'observateur (en solide) avec $\omega_* = 0$ et le bruit. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

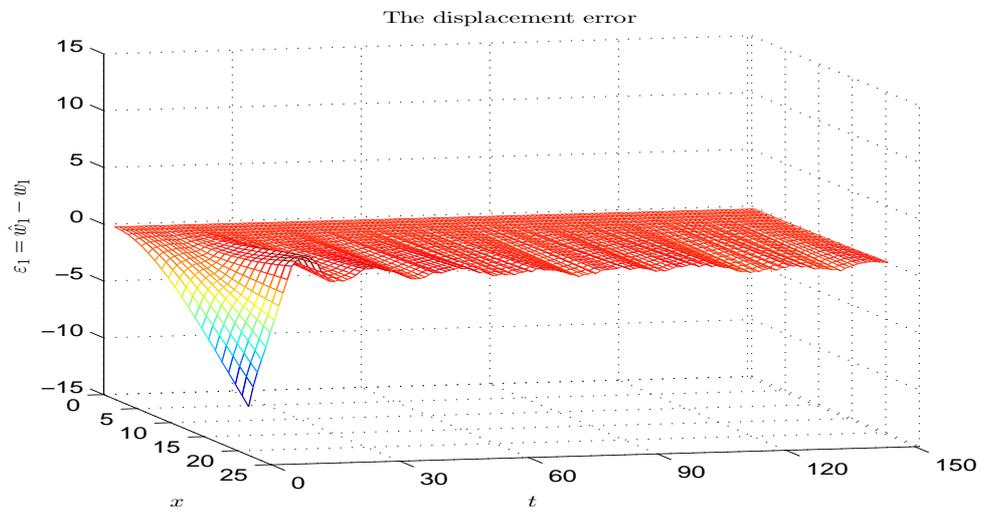


FIGURE 3.17 – Evolution de l’erreur de l’obsevateur $w - \hat{w}$ avec $\omega_* = 0$ et le bruit. Nombre de points $N = 16$. Gain $\kappa = 1$. Temps de simulation $T = 4s$.

Chapitre 4

Etudes de la boucle fermée

Le faux est susceptible d'une infinité de combinaisons, mais la vérité n'a qu'une manière d'être.

Jean-Jacques Rousseau, *Discours sur les sciences et les arts* (1750).

Sommaire

4.1	Introduction	81
4.2	Mise en cascade de l'observateur et la loi de commande . . .	81
4.3	Simulation du système en boucle fermée	86
4.4	Stabilité en boucle fermée	91

4.1 Introduction

Ce chapitre consiste en l'étude du système en boucle fermée en se servant des lois de commandes stabilisantes par retour d'état proposées dans Coron & d'Andréa-Novel [25] et en appliquant notre observateur développé. On effectue d'abord des simulations numériques pour le système commandé directement par retour d'état et, par la suite, le système couplé de la loi de commande et l'observateur. Basé sur les résultats numériques obtenus, on conjecture sur la stabilité asymptotique locale du système couplé. On souhaite appliquer le principe de LaSalle pour construire une preuve mathématique de la stabilité, ceci fait partie de nos travaux en cours.

4.2 Mise en cascade de l'observateur et la loi de commande

Dans [25], Coron et d'Andréa-Novel ont construit une loi de commande du couple par retour d'état non linéaire, qui stabilise asymptotiquement le système du corps-poutre en rotation sans amortissement et sans commande à l'extrémité libre autour du point d'équilibre $(w, \omega) = (0, \bar{\omega})$ avec $|\bar{\omega}| < \omega_c = \sqrt{l_1}$. Sans perte de la généralité, on ne considère que $\bar{\omega} \geq 0$ dans la suite.

4.2.1 Cas où $\bar{\omega} \neq 0$

Commençons par le cas où le point d'équilibre $(w, \omega) = (0, \bar{\omega})$ avec $\bar{\omega} \neq 0$. En effet, il est plus facile à simuler le système en boucle fermée dans ce cas puisque la loi de commande proposée dans [25] pour ce cas est relativement plus simple.

Sous la représentation d'état, le système commandé s'écrit comme suit

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = \omega^2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}, \quad (4.2.1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Gamma(w, w_t, \omega) - 2\omega \int_0^1 w w_t dx}{I_d + \int_0^1 w^2 dx}. \quad (4.2.2)$$

Dans ce cas, la loi de commande stabilisante par retour d'état proposée est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \gamma(w, w_t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dt} &= -(\omega + \bar{\omega} - \sigma(s))s - C_2(\omega - \bar{\omega} + \sigma(s)) \\ &\quad - \sigma'(s) \int_0^1 (w_t^2 - w_{xx}^2 + \omega^2 w^2) dx, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

où

$$s = \int_0^1 w w_t dx$$

et $\sigma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction spécifique qui vérifie les conditions suivantes :

$$(2\bar{\omega} - \sigma(s))s\sigma(s) > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.2.4)$$

$$\exists C_3 > 0 \quad \text{telle que} \quad \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{\sigma(s)}{s} = C_3. \quad (4.2.5)$$

Une loi de commande ainsi définie stabilise asymptotiquement et fortement le point d'équilibre $(0, \bar{\omega})$ du système de contrôle (4.2.1)-(4.2.2) au sens suivant :

1) quelque soit la solution de (4.2.1)-(4.2.2),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |w(t)|_X + |\omega(t) - \bar{\omega}| = 0; \quad (4.2.6)$$

2) quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ telle que

$$(|w(0)|_X + |\omega(0) - \bar{\omega}| < \eta) \Rightarrow (|w(t)|_X + |\omega(t) - \bar{\omega}| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0). \quad (4.2.7)$$

Remarque 4.2.1 *D'un point de vue physique, la vraie commande dans la pratique est en fait le couple Γ appliqué au corps rigide, mais mathématiquement, on peut se contenter de trouver une loi de commande stabilisante $\gamma(w, w_t, \omega)$ sous la forme (4.2.3), car on retrouve facilement $\Gamma(w, w_t, \omega)$ en tenant compte de l'expression (4.2.2).*

Cette loi de commande stabilisante applicable au modèle hybride du corps-poutre en rotation est particulièrement intéressante car elle est facile à mettre en oeuvre dans la pratique à condition que l'on ait l'accès à toutes les informations sur l'état qui est de dimension infinie. Comme nous avons indiqué précédemment, l'un des notre objectifs principaux consiste à mettre en cascade l'observateur et la loi de commande en utilisant le principe de séparation. En d'autres termes, on remplace dans (4.2.2) le couple $\Gamma(w, w_t, \omega)$ par le couple $\Gamma(\hat{w}, \hat{w}_t, \omega)$ qui est basé sur l'état estimé. On donne l'expression explicite du couple appliqué au corps rigide :

$$\begin{aligned} \Gamma(\hat{w}, \hat{w}_t, \omega) = & 2\omega \int_0^1 \hat{w} \hat{w}_t dx - \left[I_d + \int_0^1 \hat{w}^2 dx \right] \cdot \left\{ (\omega + \bar{\omega} - \sigma(s))s \right. \\ & \left. + C_2(\omega - \bar{\omega} + \sigma(s)) + \sigma'(s) \int_0^1 (\hat{w}_t^2 - \hat{w}_{xx}^2 + \omega^2 \hat{w}^2) dx \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

où

$$s = \int_0^1 \hat{w} \hat{w}_t dx \quad (4.2.9)$$

est une fonction dépend des variables d'état estimées \hat{w} et \hat{w}_t .

Le système couplé du système commandé et de l'observateur s'écrit comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{w}(x, t) = w_t(x, t), \\ \dot{w}_t(x, t) = -w_{xxxx}(x, t) + \omega^2(t)w(x, t), \\ \dot{\hat{w}}(x, t) = \hat{w}_t(x, t) - \kappa F(x) [\hat{w}_{xx}(0, t) - w_{xx}(0, t)], \\ \dot{\hat{w}}_t(x, t) = -\hat{w}_{xxxx}(x, t) + \omega^2(t)\hat{w}(x, t), \\ \dot{\omega} = \frac{2\omega \int_0^1 (\hat{w}\hat{w}_t - w w_t) dx}{I_d + \int_0^1 w^2 dx} - \frac{I_d + \int_0^1 \hat{w}^2 dx}{I_d + \int_0^1 w^2 dx} \left\{ (\omega + \bar{\omega} - \sigma(s))s \right. \\ \left. + C_2(\omega - \bar{\omega} + \sigma(s)) + \sigma'(s) \int_0^1 (\hat{w}_t^2 - \hat{w}_{xx}^2 + \omega^2 \hat{w}^2) dx \right\}, \end{array} \right. \quad (4.2.10)$$

où s est défini par (4.2.9). On constate que cette fois-ci, le système n'est plus linéaire.

Choisissons une fonction σ sous la forme explicite. Etant donné un $\bar{\omega} > 0$, la condition (4.2.4) implique que $\sigma(s) \in]0, 2\bar{\omega}[$ si $s > 0$ et que $\sigma(s) \in]-\infty, 0[\cup]2\bar{\omega}, \infty[$ si $s < 0$. De la condition (4.2.5) on déduit que $\lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \sigma(s) = 0$ et qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que $\lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \sigma'(s) = C_3$. On propose donc une fonction comme suit :

$$\sigma(s) = \bar{\omega}(1 - e^{-s}), \quad (4.2.11)$$

qui est infiniment dérivable. Il est facile de vérifier que $(2\bar{\omega} - \sigma(s))s\sigma(s) = \bar{\omega}(1 + e^{-s})s\bar{\omega}(1 - e^{-s}) = \bar{\omega}^2(1 - e^{-2s})s$ est toujours positif. D'ailleurs, on a

$$\lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{\sigma(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{\bar{\omega}(1 - e^{-s})}{s} = \bar{\omega} > 0.$$

Par contre, on constate dans la simulation que la vitesse de convergence du système couplé vers le point d'équilibre est relativement lente avec ce choix de fonction. En effet, ceci est à cause de la régularité de σ (elle est de classe \mathcal{C}^∞ au lieu de \mathcal{C}^2). On peut donc choisir la fonction suivante comme candidat :

$$\sigma(s) = \begin{cases} \bar{\omega} \left(\frac{(s - s_0)^3}{3s_0^2} + \frac{s_0}{3} \right) & \text{sur }]-\infty, s_0[, \\ \bar{\omega} \frac{s_0}{3} & \text{sur } [s_0, \infty[, \end{cases} \quad (4.2.12)$$

où $0 < s_0 < 6$. Il est facile de vérifier les conditions imposées sur σ : 1) $\lim_{s \rightarrow 0} \sigma(s)/s = \lim_{s \rightarrow 0} (s - s_0)^2/s_0^2 > 0$; 2) sur $[s_0, \infty[$, comme $2 - s_0/3 > 0$, il est évident que $(2 - s_0/3)s(s_0/3) > 0$; sur $]-\infty, s_0[$, par la monotonie croissante de σ , on a $2 - \sigma(s) > 2 - s_0/3 > 0$. Or $s \cdot \sigma(s)$ est de même signe que $\sigma(s)/s$, qui est toujours positif sur l'intervalle, ceci implique que $(2\bar{\omega} - \sigma(s))s\sigma(s) > 0$.

4.2.2 Cas où $\bar{\omega} = 0$

Dans ce cas, la construction de la loi de commande est un peu plus compliquée que le cas précédent. Rappelons que X est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_X = \int_0^1 (u_{1xx}u_{2xx} + v_1v_2) dx. \quad (4.2.13)$$

Au point d'équilibre, la loi de commande $\gamma(w, w_t, \omega)$ que l'on cherche doit satisfaire la condition

$$\gamma(0, 0, 0) = 0. \quad (4.2.14)$$

Pour tous les couples $(w, \omega) \in X \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, la loi de commande stabilisante autour du point d'équilibre $(0, 0)$ est donnée par

$$\dot{\omega} = \gamma(w, w_t, \omega) = -(\omega - \psi^{\frac{1}{3}}) - \frac{D}{\omega^2 + \psi^{\frac{1}{3}}\omega + \psi^{\frac{2}{3}}}, \quad (4.2.15)$$

où

$$\begin{aligned} D &= -\dot{\psi} + K(\omega + \psi^{\frac{1}{3}}) \int_0^1 ww_t dx, \\ \psi &= \left\{ K^{-1} \left[F(|w|_X) - \bar{\sigma} \left(\int_0^1 ww_t dx \right) \right] \right\}^{\frac{3}{2}}, \\ K &= 1 - F'(|w|_X) \int_0^1 w^2 dx \end{aligned}$$

avec $F \in C^3(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ vérifiant

$$\sup_{s \geq 0} F(s) < \frac{\lambda_1}{2} = \frac{\omega_c^2}{2}, \quad (4.2.16)$$

$$0 \leq F'(s)s < \lambda_1 - F(s) = \omega_c^2 - F(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \quad (4.2.17)$$

$$\exists C_4 > 0 \quad \text{telle que} \quad \lim_{s \rightarrow 0, s > 0} \frac{F(s)}{s} = C_4 \quad (4.2.18)$$

et $\bar{\sigma} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$s\bar{\sigma}(s) > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.2.19)$$

$$\exists C_5 > 0 \quad \text{telle que} \quad \lim_{s \rightarrow 0, s > 0} \frac{\bar{\sigma}(s)}{s} = C_5, \quad (4.2.20)$$

$$\bar{\sigma}(s) < F(2\sqrt{\lambda_1}s) = F(2\omega_c s). \quad (4.2.21)$$

De (4.2.16) et (4.2.17), on déduit que F est une fonction bornée et croissante sur \mathbb{R}^+ avec $(F(s)s)' < \omega_c^2$. On peut prendre une fois encore la fonction positive qu'on trouve pour le cas où $\bar{\omega} \neq 0$:

$$F(s) = C_4(1 - e^{-s}) \quad (4.2.22)$$

avec $C_4 < \frac{\omega_c^2}{2}$. En effet, on a $(C_4(1 - e^{-s}))' = C_4(1 - s)e^{-s} < \frac{C_4}{e}$. Alors on peut également prendre

$$\bar{\sigma}(s) = C_5(1 - e^{-2\omega_c s}) \quad (4.2.23)$$

avec $C_5 < C_4$.

L'expression explicite de $\dot{\psi}$ est également donnée. Elle est utile à la fois dans l'aspect théorique et l'application numérique. En tenant compte que

$$\begin{aligned} (K^{-1})' &= K^{-2} \left(F''(|w|_X)(|w|_X)' \int_0^1 w^2 dx - 2sF'(|w|_X) \right), \\ (|w|_X)' &= 2\omega^2 \int_0^1 ww_t dx = 2\omega^2 s, \\ s' &= \int_0^1 (w_t^2 - w_{xx}^2 + \omega^2 w^2) dx, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{3\psi^{\frac{1}{3}}}{2K} \left[2F'(|w|_X)\omega^2 s - \sigma'(s) \int_0^1 (w_t^2 - w_{xx}^2 + \bar{\omega}^2 w^2) dx \right] \\ &\quad + \frac{3\psi}{K} s \left(\omega^2 F''(|w|_X) \int_0^1 w^2 dx + F'(|w|_X) \right). \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Avec la loi de commande définie par (4.2.15), la stabilité du système en boucle fermée a été établie :

Théorème 4.2.2 *La loi de commande par retour d'état définie par (4.2.15) stabilise asymptotiquement et globalement le point d'équilibre $(0,0)$ pour le système commandé (4.2.1) et (4.2.15).*

Comme dans le cas précédent, on s'intéresse à mettre en cascade notre observateur et le système commandé. En bref, dans ce cas là, le système couplé du système commandé et de l'observateur s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{w}(x,t) = w_t(x,t), \\ \dot{w}_t(x,t) = -w_{xxxx}(x,t) + \omega^2(t)w(x,t), \\ \dot{\hat{w}}(x,t) = \hat{w}_t(x,t) - \kappa F(x) [\hat{w}_{xx}(0,t) - w_{xx}(0,t)], \\ \dot{\hat{w}}_t(x,t) = -\hat{w}_{xxxx}(x,t) + \omega^2(t)\hat{w}(x,t), \\ \dot{\omega} = \frac{2\omega \int_0^1 (\hat{w}\hat{w}_t - ww_t) dx}{I_d + \int_0^1 w^2 dx} - \frac{I_d + \int_0^1 \hat{w}^2 dx}{I_d + \int_0^1 w^2 dx} \left\{ (\omega - \psi^{\frac{1}{3}}(\hat{w}, \hat{w}_t)) \right. \\ \left. + \frac{D(\hat{w}, \hat{w}_t, \omega)}{\omega^2 + \psi^{\frac{1}{3}}(\hat{w}, \hat{w}_t) \cdot \omega + \psi^{\frac{2}{3}}(\hat{w}, \hat{w}_t)} \right\}. \end{array} \right. \quad (4.2.25)$$

Dans le dernier chapitre, on a déjà prouvé la robustesse de notre observateur avec une vitesse angulaire $\omega(t)$ variante. La fonction bornée $\omega(t)$ était arbitrairement choisie. Basé sur ce modèle, on va simuler le système commandé dont $\omega(t)$ variante est déterminée par la loi de commande par retour d'état.

4.3 Simulation du système en boucle fermée

Puisque la loi de commande est non linéaire dans tous les deux cas, on va donc utiliser la subroutine *ode15s* sous Matlab pour simuler le système. La simulation est constituée de deux étapes. Dans un premier temps, on simule le système commandé sans observateur. Cette approche nous permet d'avoir une idée sur la façon à laquelle la commande agit sur le système. Ensuite on simule le système couplé de l'observateur et la loi de commande.

Commençons par le cas où le point d'équilibre $(w, w_t, \bar{w}) = (0, 0, 2)$. Afin d'alléger le temps de calcul, prenons le maillage avec le nombre de point de discrétisation $N = 6$. Le gain est fixé par $\kappa = 1$. Choisissons $C_2 = 1000$ et $\sigma(s)$ définie par (4.2.12) comme la fonction \mathcal{C}^2 pour la loi de commande. Prenons la vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1,8$. Comme dans la simulation du système en boucle ouverte, pour le système d'observation, on impose la condition initiale suivante :

$$\begin{cases} w(x, 0) = 0, 2\gamma[ch(\rho x) - \cos(\rho x)] - 2[sh(\rho x) - \sin(\rho x)], \\ w_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

où $\gamma = (sh(\rho) + \sin(\rho))/(ch(\rho) + \cos(\rho))$ avec $\rho \simeq 1.8751$. Pour l'observateur, prenons

$$\begin{cases} \hat{w}(x, 0) = 0, 1(\gamma\rho^2(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2)), \\ \hat{w}_t(x, 0) = 0, 1(x^3 - 2x^2) \end{cases}$$

comme condition initiale. Ces données initiales sont prises assez proches de l'origine car la loi de commande proposée stabilise localement le système.

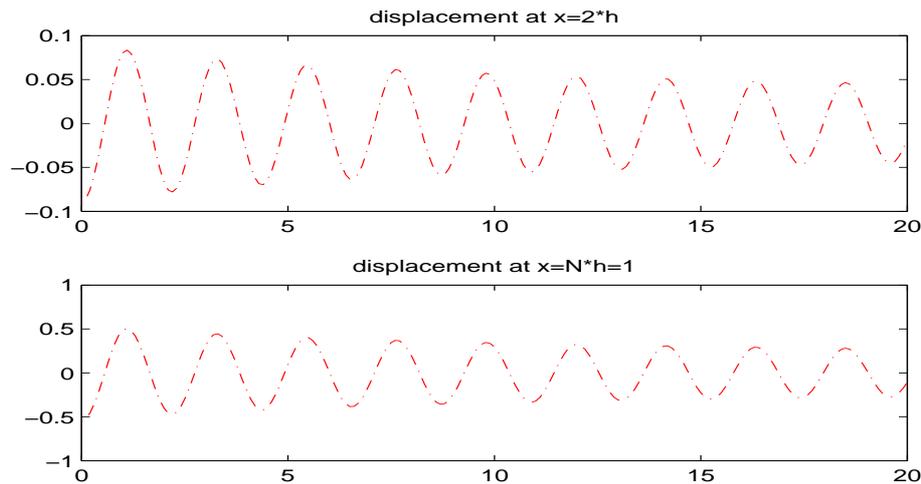


FIGURE 4.1 – Evolution des déplacements du système commandé avec l'état réel. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$.

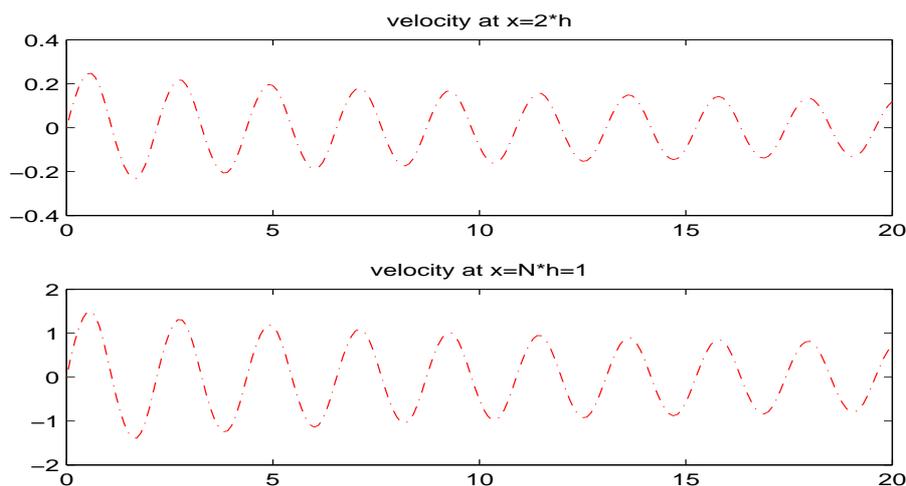


FIGURE 4.2 – Evolution des vitesses du système commandé avec l'état réel. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$.

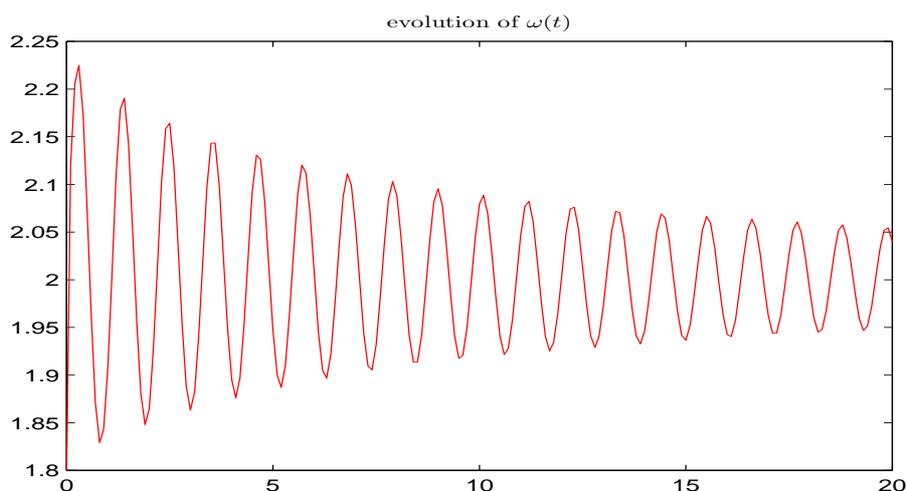


FIGURE 4.3 – Evolution de la vitesse angulaire du système commandé avec l'état réel. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$.

Pour le système commandé sans observateur, les dynamiques de déplacements (respectivement de vitesses) du 2-ème et N-ème point de l'intervalle $[0, 1]$ sont présentées dans la figure Fig.4.1 (respectivement Fig.4.2). L'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ en fonction du temps est illustrée dans la figure Fig.4.3. On constate que les profils (w, w_t, ω) convergent bien vers le point d'équilibre $(0, 0, 2)$, ceci coïncide avec le résultat théorique. En revanche, la vitesse de convergence est bien lente (il reste environ 50% de résidus par rapport à l'amplitude maximale après 20 secondes de simulation). En effet, la loi de

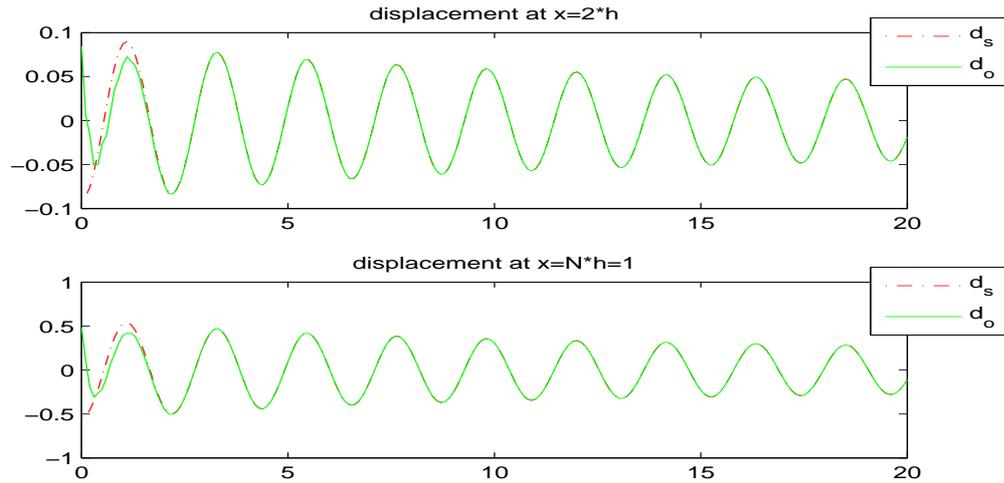


FIGURE 4.4 – Evolution des déplacements du système couplé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$.

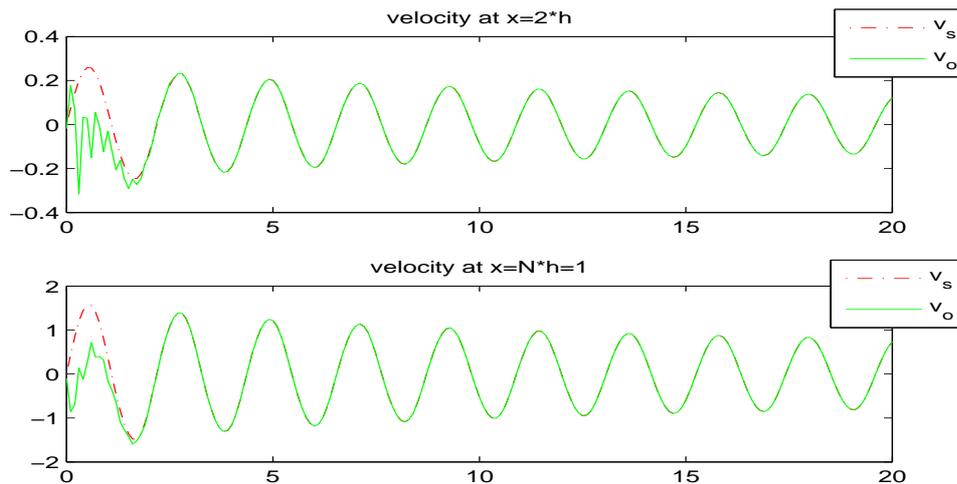


FIGURE 4.5 – Evolution des vitesses du système couplé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$.

commande proposée stabilise asymptotiquement le système.

Ensuite on simule le système couplé de l'observateur et la loi de commande. On présente, dans les figures Fig.4.4, Fig.4.5 et Fig.4.6, respectivement, l'évolution des profils \hat{w} , \hat{w}_t (du 2-ème et N-ième point de l'intervalle $[0, 1]$) et ω . Puisque notre observateur est exponentiellement convergent, l'état estimé rattrape rapidement l'état réel. Par contre, comme la loi de commande stabilisante est asymptotique, les dynamiques de l'état estimé, qui coïncident avec celles de l'état réel à partir d'un certain moment, convergent

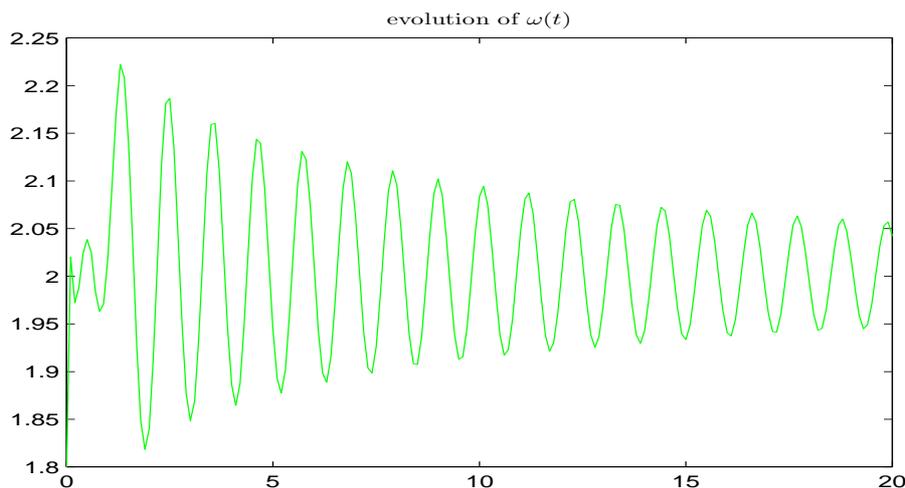


FIGURE 4.6 – Evolution de la vitesse angulaire du système couplé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 2)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 1.8$. Temps de simulation $T = 20s$.

très lentement vers le point d'équilibre $(0, 0, 2)$.

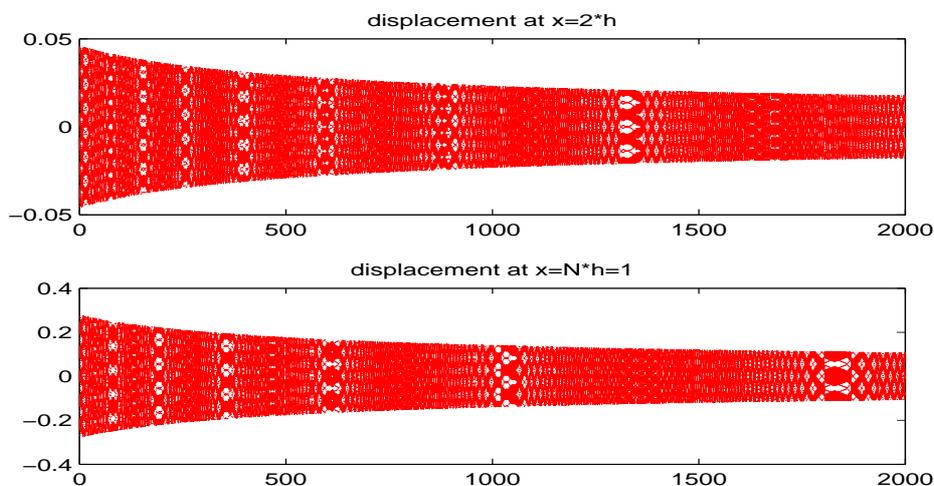


FIGURE 4.7 – Evolution des déplacements du système commandé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 0)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0.05$. Temps de simulation $T = 2000s$.

Dans le cas où le point d'équilibre $(w, w_t, \bar{w}) = (0, 0, 0)$, prenons la vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0,05$. L'évolution des profils \hat{w} , \hat{w}_t (du 2-ème et N-nième point de l'intervalle $[0, 1]$) et ω est également illustrée dans les figures Fig.4.7, Fig.4.8 et Fig.4.9, respectivement. On observe le ralentissement de la dynamique du système en boucle fermée et au niveau du temps de calcul numérique (20414 secondes pour 2000 secondes de simulation).

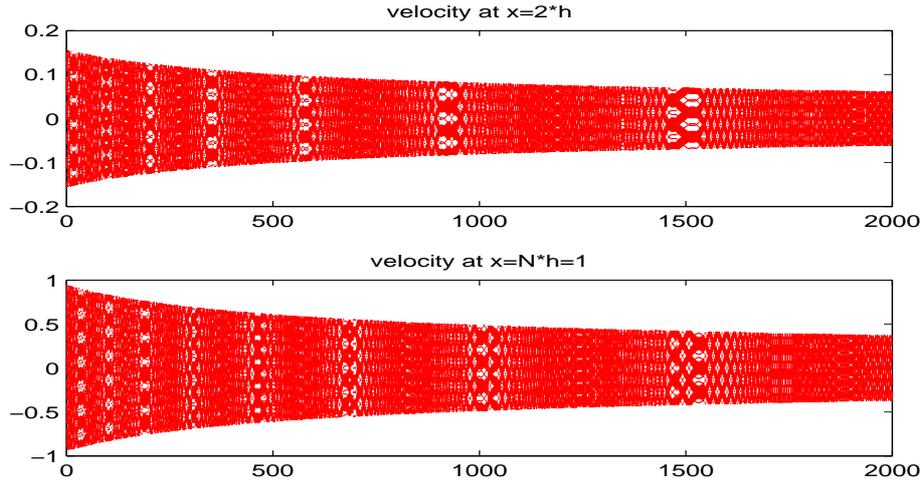


FIGURE 4.8 – Evolution des vitesses du système commandé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 0)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0.05$. Temps de simulation $T = 2000s$.

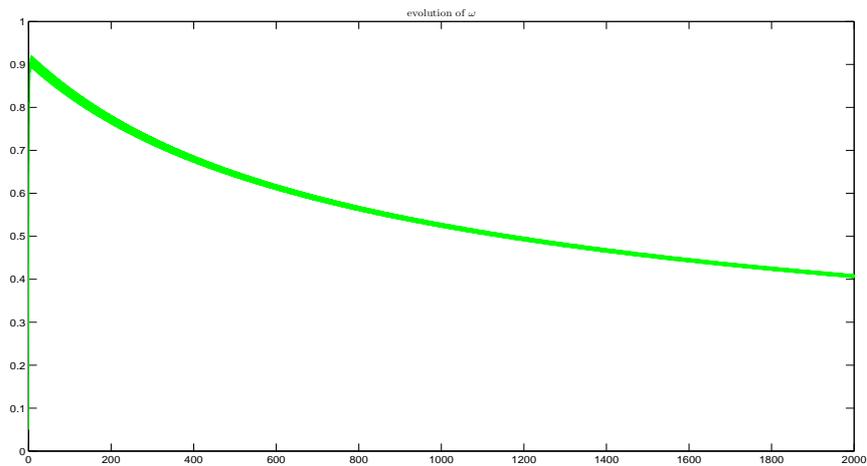


FIGURE 4.9 – Evolution de la vitesse angulaire du système commandé avec l'état estimé. Nombre de points $N = 6$. Gain $\kappa = 1$. Point d'équilibre $(0, 0)$. Vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0.05$. Temps de simulation $T = 2000s$.

En effet, la commande est fortement non linéaire et elle possède une forme assez compliquée. On se pose ensuite la question sur l'intérêt réel de cette loi de commande. D'un côté, la loi de commande stabilisante est simple à réaliser car il s'agit du couple appliqué au corps rigide, et de l'autre, seule la stabilité asymptotique et locale est garantie. On s'interroge sur l'influence du choix des fonctions σ , F et $\bar{\sigma}$ sur la vitesse de convergence du système couplé vers le point d'équilibre. Cela fait partie de notre travail en cours.

4.4 Stabilité en boucle fermée

Dans la dernière section plusieurs expérimentations numériques ont été effectuées, cette approche aboutit à des résultats numériques pertinents. Ceci permet de mettre en valeur la conjecture sur la stabilité asymptotique locale du système en boucle fermée avec le couplage observateur-loi de commande.

4.4.1 Rappel sur le théorème d'ensemble invariant de LaSalle

On considère le système dynamique de la forme $\dot{x} = f(x)$. Il est parfois difficile de trouver une fonction de Lyapunov dont la dérivée est définie négative (mais elle est semi-définie négative). Par conséquent, on ne peut pas aboutir à la stabilité asymptotique en utilisant le théorème de Lyapunov. Ceci est gênant parce que la stabilité asymptotique est une propriété importante. En revanche, il est encore possible, dans ce cas-là, de conclure la stabilité asymptotique par le théorème d'ensemble invariant de LaSalle.

Définition 4.4.1 *Un ensemble S est dit **invariant** si tous les trajectoires $x(t)$ issues de S restent toujours dans S .*

Théorème 4.4.2 *(Théorème d'ensemble invariant local) Considérons le système autonome $\dot{x} = f(x)$ dans l'espace d'état X avec f continue. Soit $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire de la classe \mathcal{C}^1 et $\Omega_l = \{x \in X : V(x) \leq l\}$ pour certain $l > 0$. Posons $R = \{x \in \Omega_l : \dot{V}(x) = 0\}$ et M le plus grand ensemble invariant contenu dans R . Supposons que 1) Ω_l est borné, 2) $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega_l$. Alors toutes les solutions $x(t)$ partant d'un point dans Ω_l tendent vers M lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Remarque 4.4.3 *L'ensemble M est le plus grand ensemble invariant contenu dans R signifie que M est l'union de tous les ensembles invariants dans R .*

Théorème 4.4.4 *(Principe de LaSalle) Soit $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 telle que sur l'ensemble $\Omega_l = \{x \in X : V(x) \leq l\}$, on a $\dot{V}(x) \leq 0$. Soit $R = \{x \in X : \dot{V}(x) = 0\}$. Si R ne contient que le trajectoire $x = 0$, alors l'origine 0 est asymptotiquement stable.*

Remarque 4.4.5 *Si l'on peut étendre la conclusion ci-dessus de Ω_l à l'espace X tout entier, on obtient la stabilité asymptotique globale.*

4.4.2 Principe de séparation

Notre objectif de départ consiste à démontrer la stabilisation globale du système en boucle fermée au travers d'un observateur exponentiellement convergent. Autrement dit, on souhaite appliquer le principe de séparation (voir Curtain & Pritchard [26], Sontag [100] et Gauthier & Kupka [46]) pour un système de dimension infinie.

Dans Bounit & Hammouri [13], ils ont montré le principe de séparation globale pour une classe d'EDP en utilisant le retour d'état borné dans le cas où l'opérateur de contrôle et d'observation sont bornés. En revanche, peu de résultats existent concernant le cas où l'opérateur de contrôle et d'observation sont non-bornés. Ici nous travaillons sur un système hybride non-linéaire décrit par une EDP couplé avec une EDO. Dans notre cas, l'opérateur d'observation est en effet non-borné et la commande est localisée.

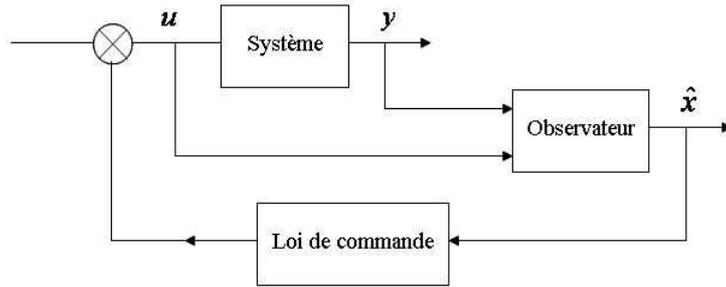


FIGURE 4.10 – Principe de la mise en cascade de la loi de commande et l'observateur.

Nous avons une loi de commande stabilisante par retour d'état F et un observateur $\hat{\Sigma}$ exponentiellement convergent. Dans ce cas, le principe de séparation consiste à dire que le système en boucle fermée obtenu par l'observateur et la loi de commande par retour d'état en cascade reste stabilisé (indiqué dans la figure Fig.4.10).

4.4.3 Une conjecture sur la stabilité du système couplé

Conjecture 4.4.6 Soit $\bar{\omega} \in]-\sqrt{l_1}, \sqrt{l_1}[\setminus\{0\}$. Le point $(0, 0, \bar{\omega})$ est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable dans $X \times X \times \mathbb{R}$ pour le système (4.2.10), i.e., il existe une boule centrée à $(0, 0, \bar{\omega})$ et de rayon δ , notée par $B((0, 0, \bar{\omega}), \delta)$ telle que
 1) la solution $(\hat{w}, \hat{w}_t, \omega)$ de (4.2.10) issue de $B((0, 0, \bar{\omega}), \delta)$ vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |w(t)|_X + |\hat{w}(t)|_X + |\omega(t) - \bar{\omega}| = 0; \quad (4.4.26)$$

2) quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta \in]0, \delta[$ tel que

$$(|w(0)|_X + |\hat{w}(0)|_X + |\omega(0) - \bar{\omega}| < \eta) \Rightarrow (|w(t)|_X + |\hat{w}(t)|_X + |\omega(t) - \bar{\omega}| < \varepsilon, \forall t \geq 0). \quad (4.4.27)$$

De même, le point $(0, 0, 0)$ est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable dans $X \times X \times \mathbb{R}$ pour le système (4.2.25).

Troisième partie

Stabilité d'un système d'échangeurs thermiques

Chapitre 5

Stabilité L^p exponentielle d'un système d'échangeurs thermiques

*'S*tabil*ity,*' insisted the Controller, 'stabil*ity.*
The primal and the ultimate need. Stability.
Hence all this.'

Aldous Huxley, *Brave new world* (1932).

Sommaire

5.1	Introduction	97
5.2	Présentation des modèles	98
5.3	Stabilité du modèle avec diffusion dans $(L^p(0, 1))^4$	99
5.4	Stabilité du modèle avec diffusion dans $(C[0, 1])^4$	105
5.5	Stabilité du modèle sans diffusion dans $(C[0, 1])^4$ et $(L^p(0, 1))^4$.	110

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la stabilité exponentielle des systèmes d'échangeurs thermiques, respectivement, avec diffusion et sans diffusion, dans le cadre de l'espace de Banach réel $X = (\mathcal{C}[0, 1])^4$ muni de la norme uniforme. La stabilité exponentielle de ces deux modèles dans l'espace de Hilbert $X_2 = (L^2(0, 1))^4$ a été établie dans Xu [117] en utilisant la méthode de Lyapunov directe.

La démarche entreprise ici consiste à étudier le problème de la stabilité dans les espaces de Banach réels $X_p = (L^p(0, 1))^4$ muni de la norme L^p avec $1 < p < \infty$. Par passage à la limite $p \rightarrow +\infty$, on peut dans certains cas étendre les résultats de stabilité exponentielle de X_p à l'espace X . En effet, la dissipativité du système étudié dans tous les espaces X_p , $1 < p < \infty$, entraîne la dissipativité dans X (voir le Lemme 5.4.1).

La deuxième section est consacrée au rappel des modèles des échangeurs. Le processus avec diffusion se modélise par un système d'EDP du type parabolique, tandis que le processus sans diffusion est un système hyperbolique d'ordre un du type dégénéré.

La troisième section traite de la stabilité exponentielle du système parabolique dans le cadre des espaces $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$. La stabilité exponentielle est obtenue à l'aide de la dissipativité des opérateurs et la théorie de perturbation. On en déduit des résultats pour l'espace X . Néanmoins cette étude ne permet pas de déduire la stabilité exponentielle du système dans X .

Les résultats de stabilité exponentielle dans X pour le modèle avec diffusion sont établis dans la quatrième section en utilisant la théorie des opérateurs sectoriels. Mieux, cette théorie permet de prouver la stabilité exponentielle dans l'espace $(\mathcal{C}^1[0, 1])^4$.

Dans la cinquième section, en utilisant un résultat de perturbation on démontre la stabilité exponentielle pour le modèle sans diffusion dans tous les espaces X_p , $1 < p < \infty$. On utilise alors le passage à la limite évoquée plus haut pour déduire la stabilité exponentielle du système dans l'espace X .

Dans la suite on appelle *modèle de diffusion* le modèle d'échangeurs thermiques avec diffusion et, de même, *modèle de convection* le modèle d'échangeurs thermiques sans diffusion. Nous nous servons de l'analyticité du semi-groupe associé au modèle de diffusion pour estimer son taux de décroissance exponentielle. Pourtant le semi-groupe associé au modèle de convection n'est pas analytique. Pour ce dernier cas nous n'avons pas encore trouvé de méthode efficace permettant de déterminer exactement le taux de décroissance exponentielle.

Les principaux outils que l'on utilise pour cette étude sont la notion de dissipativité dans les espaces de Banach, plus particulièrement dans les espaces L^p , et la théorie des opérateurs sectoriels.

Dans la suite on notera par $A_{d,p}$ l'opérateur associé au modèle de diffusion, et par $A_{c,p}$ celui de convection, respectivement. L'indice p indique l'espace $L^p(0, 1)$ dans lequel le système évolue et l'opérateur $A_{d,p}$ est étudié. Ainsi $A_{d,p}$ (resp. $A_{c,p}$) désignera l'opérateur diffusif (resp. convectif) dans l'espace X_p .

5.2 Présentation des modèles

Le dispositif du réseau d'échangeurs thermiques que l'on étudie est présenté par la Figure 5.1,

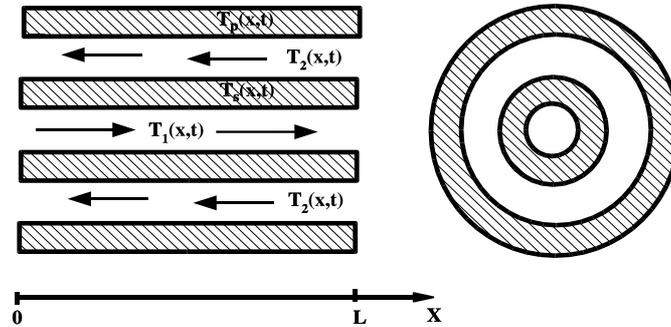


FIGURE 5.1 – Réseau d'échangeurs thermiques.

où

T_1 désigne la température du fluide à chauffer,
 T_2 désigne la température du fluide chauffant,
 T_p désigne la température de la paroi isolatrice,
 T_s désigne la température de la paroi séparatrice.

Il s'agit d'un dispositif d'échange de chaleur constitué de deux cylindres coaxiaux séparés entre eux par la paroi du milieu et isolés de l'extérieur par la seconde paroi. Deux fluides de caractéristiques différentes circulent à contre-courant dans les cylindres. Ces fluides échangent de la chaleur à travers la paroi du milieu. Il existe deux modèles permettant de décrire ce phénomène :

- Le premier modèle qui tient compte de la diffusion de la chaleur dans les différents corps, i.e., le modèle avec diffusion. Dans ce cas le modèle est du type parabolique (*modèle de diffusion*).
- Le second modèle dans lequel la diffusion de la chaleur est négligée par rapport au phénomène du transport (de la convection). On obtient le modèle sans diffusion (*modèle de convection*). Dans ce dernier cas le modèle est décrit par des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique d'ordre un, mais dégénéré. Pour plus de détails sur la modélisation des échangeurs thermiques, on peut se rapporter à Xu [117] et à la littérature citée dans [117].

Posons $u_1 = T_1, u_2 = T_s, u_3 = T_2, u_4 = T_p$. Le système d'échangeurs diffusifs se

modélise comme suit :

$$(\Sigma_d) : \begin{cases} \partial_t u_1 = \alpha_1 \partial_{xx} u_1 - F_1 \partial_x u_1 + h_1(u_2 - u_1) \quad \forall (x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+ \\ \partial_t u_2 = \alpha_2 \partial_{xx} u_2 + h_2(u_1 - u_2) + h_3(u_3 - u_2), \\ \partial_t u_3 = \alpha_3 \partial_{xx} u_3 + F_2 \partial_x u_3 + h_4(u_2 - u_3) + h_5(u_4 - u_3), \\ \partial_t u_4 = \alpha_4 \partial_{xx} u_4 + h_6(u_3 - u_4), \\ u_1(0, t) = 0, \quad \partial_x u_1(1, t) = 0, \\ \partial_x u_2(0, t) = 0, \quad \partial_x u_2(1, t) = 0, \\ \partial_x u_3(0, t) = 0, \quad u_3(1, t) = 0, \\ \partial_x u_4(0, t) = 0, \quad \partial_x u_4(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \forall x \in (0, 1), \end{cases}$$

où α_i , $i = 1, \dots, 4$, h_j , $j = 1, \dots, 6$, et F_k , $k = 1, 2$, sont des constantes positives. Les EDP dans (Σ_d) permettent de décrire la dynamique des variations de températures par rapport au point d'équilibre défini par les températures constantes d'entrée à l'échangeur des fluides. Les gradients nuls à la frontière expriment le fait que le flux de chaleur vers l'extérieur est nul.

Le modèle de convection est gouverné par les EDP hyperboliques suivantes :

$$(\Sigma_c) : \begin{cases} \partial_t u_1 = -F_1 \partial_x u_1 + h_1(u_2 - u_1) \quad \forall (x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+ \\ \partial_t u_2 = h_2(u_1 - u_2) + h_3(u_3 - u_2), \\ \partial_t u_3 = F_2 \partial_x u_3 + h_4(u_2 - u_3) + h_5(u_4 - u_3), \\ \partial_t u_4 = h_6(u_3 - u_4), \\ u_1(0, t) = 0, \quad u_3(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

De même que dans le modèle de diffusion, les constantes sont réelles et positives.

5.3 Stabilité du modèle avec diffusion dans $(L^p(0, 1))^4$

5.3.1 Rappels de la dissipativité dans les espaces L^p

Considérons l'espace de Banach réel $L^p(0, 1)$, avec $1 < p < +\infty$. Les propriétés suivantes sont classiques :

- (1) $L^p(0, 1)$ est un espace réflexif et séparable.
- (2) Le dual de $L^p(0, 1)$ est identifiable (isomorphisme de Banach) à $L^q(0, 1)$, avec $q = \frac{p}{p-1} \in]1, +\infty[$.
- (3) Le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,p}$ de la dualité sur $L^p \times L^q$ s'écrit :

$$\forall f \in L^p(0, 1), g \in L^q(0, 1); \quad \langle g, f \rangle_{q,p} = \int_0^1 g(x)f(x)dx.$$

Pour les espaces produits $X_p = (L^p(0, 1))^n$, $1 < p < +\infty$ et $n \geq 1$, les propriétés similaires sont vraies :

(1') X_p est un espace de Banach pour la norme suivante :

$$\forall f \in X_p; \quad \|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.3.1)$$

$$\text{où } \|f_i\|_p = \left(\int_0^1 |f_i(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(2') X_p est un espace Banach réflexif et séparable.

(3') Le dual topologique de $(L^p(0, 1))^n$ est identifiable (isomorphisme de Banach) à $(L^q(0, 1))^n$ avec $q = \frac{p}{p-1} \in]1, +\infty[$.

(4') Le produit de la dualité sur $X_p \times X_q$ s'écrit :

$$\forall f \in X_p, g \in X_q; \quad \langle g, f \rangle_{q,p} = \int_0^1 g(x) \cdot f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_0^1 g_i(x) f_i(x) dx.$$

La notion de la dissipativité d'un opérateur linéaire A dans un espace de Hilbert H est bien connue. A est dissipatif si et seulement si $\forall f \in \mathcal{D}(A), \langle Af, f \rangle_H \leq 0$. Par contre, dans un espace de Banach il faut avoir recours à la notion d'ensemble de dualité pour définir la dissipativité.

Définition 5.3.1 Soit X un espace de Banach et soit X^* son dual topologique. Pour $f \in X$, l'ensemble de dualité de f , noté $J(f)$, est défini par :

$$J(f) = \{g \in X^* : \|g\|_{X^*} = \|f\|_X, \langle g, f \rangle_{X^*, X} = \|f\|_X^2\}.$$

Un opérateur linéaire A sur X est dit **dissipatif** si

$$\forall f \in \mathcal{D}(A), \exists g \in J(f) / \langle g, Af \rangle_{X^*, X} \leq 0.$$

On a aussi la caractérisation suivante des opérateurs dissipatifs.

Proposition 5.3.2 Un opérateur linéaire A sur un Banach X est dissipatif si et seulement si

$$\forall f \in \mathcal{D}(A), \quad \forall \lambda > 0, \quad \|(\lambda I - A)f\|_X \geq \lambda \|f\|_X.$$

Preuve : Voir Pazy [86] Théorème 1.4.2. ■

Revenons aux espaces $L^p(0, 1)$ et $X_p = (L^p(0, 1))^n$, $1 < p < +\infty$ et $n \geq 1$. Dans $L^p(0, 1)$, on caractérise complètement l'ensemble de dualité.

Lemme 5.3.3 Soit $f \in L^p(0, 1)$, l'ensemble de dualité de f dans $L^p(0, 1)$ est le singleton

$$J_p(f) = \left\{ f^* = \frac{|f|^{p-2} f}{\|f\|_p^{p-2}} \right\}.$$

Pour le Banach $X_p = (L^p(0, 1))^n$, l'ensemble de dualité pour chaque élément est aussi un singleton.

Lemme 5.3.4 Soit $f \in X_p$, l'ensemble de dualité $J(f)$ de f dans X_p est constitué d'un seul élément $g = (g_1, \dots, g_n)^T$ défini par

$$g_i = \frac{|f_i|^{p-2} f_i}{\|f_i\|_p^{p-2}}; \quad i = 1, \dots, n.$$

Preuve : Evidemment, $g \in X_q$, avec $q = \frac{p}{p-1}$, car

$$\|g_i\|_q = \frac{1}{\|f_i\|_p^{p-2}} \left[\int_0^1 (|f_i(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} = \|f_i\|_p < +\infty.$$

et

$$\|g\|_q = \left(\sum_{i=1}^n \|g_i\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_p.$$

Enfin, on a

$$\langle g, f \rangle_{q,p} = \sum_{i=1}^n \int_0^1 g_i(x) f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_0^1 |f_i(x)|^p dx / \|f_i\|_p^{p-2} = \|f\|_p^2.$$

Donc, $g \in J(f)$. D'autre part, puisque $X_p^* = X_q$ est strictement convexe, $J(f)$ est réduit à un seul élément (voir p.3 dans Brézis [15]). ■

5.3.2 Stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans X_p

Considérons le système (Σ_d) d'échangeurs thermiques avec diffusion. On se place dans l'espace de Banach $X_p = (L^p(0, 1))^4$, $1 < p < +\infty$, muni de la norme définie par (5.3.1). Associons à ce système l'opérateur $A_{d,p}$ dans X_p défini par

$$\mathcal{D}(A_{d,p}) = \left\{ f \in (W^{2,p}(0, 1))^4 \left| \begin{array}{l} f_1(0) = 0, \quad f_2'(0) = 0, \quad f_3'(0) = 0, \quad f_4'(0) = 0 \\ f_1'(1) = 0, \quad f_2'(1) = 0, \quad f_3(1) = 0, \quad f_4(1) = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (5.3.2)$$

$$A_{d,p} f = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + h_1(f_2 - f_1) \\ \alpha_2 f_2'' + h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3 - f_2) \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + h_4(f_2 - f_3) + h_5(f_4 - f_3) \\ \alpha_4 f_4'' + h_6(f_3 - f_4) \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

avec les espaces de Sobolev $W^{2,p}$, $1 < p < +\infty$, définis par

$$W^{2,p}(0, 1) = \{f_1 \in L^p(0, 1) \mid f_1', f_1'' \in L^p(0, 1)\}.$$

Effectuons la transformation suivante sur l'opérateur $A_{d,p}$:

$$A_p = T A_{d,p} T^{-1}$$

avec T une matrice diagonale d'ordre 4 sous la forme

$$T = \text{diag}\left(1, \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}, \sqrt{\frac{h_2 h_4}{h_1 h_3}}, \sqrt{\frac{h_2 h_4 h_6}{h_1 h_3 h_5}}\right). \quad (5.3.4)$$

Définissons l'opérateur A_p par

$$\mathcal{D}(A_p) = \mathcal{D}(A_{d,p}), \quad (5.3.5)$$

$$A_p f = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' - h_1 f_1 + \sqrt{h_1 h_2} f_2 \\ \alpha_2 f_2'' + \sqrt{h_1 h_2} f_1 - (h_2 + h_3) f_2 + \sqrt{h_3 h_4} f_3 \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + \sqrt{h_3 h_4} f_2 - (h_4 + h_5) f_3 + \sqrt{h_5 h_6} f_4 \\ \alpha_4 f_4'' + \sqrt{h_5 h_6} f_3 - h_6 f_4 \end{bmatrix}. \quad (5.3.6)$$

Remarquons que l'opérateur A_p peut se décomposer en une somme d'un opérateur différentiel et d'une application bornée de la façon suivante :

$$A_p = B + C$$

avec

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A_{d,p}), \quad (5.3.7)$$

$$Bf = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + \theta_1 f_1 \\ \alpha_2 f_2'' \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + \theta_2 f_3 \\ \alpha_4 f_4'' \end{bmatrix}, \quad (5.3.8)$$

$$Cf = \begin{bmatrix} -(h_1 + \theta_1) & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2 + h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4 + h_5 + \theta_2) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix} f, \quad (5.3.9)$$

où θ_1 et θ_2 sont des constantes positives que nous préciserons par la suite.

Proposition 5.3.5 *Il existe des constantes $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ telles que l'opérateur B défini par (5.3.7) et (5.3.8) soit le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X_p .*

Preuve : (i) En tenant compte de (5.3.2) et de (5.3.7), le domaine $\mathcal{D}(B)$ est dense dans $X_p = (L^p(0, 1))^4$. En effet il contient l'ensemble $(C_0^\infty(0, 1))^4$ des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans $(0, 1)$.

(ii) Prouvons que l'on peut choisir $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ tels que l'opérateur B soit dissipatif. Notons d'abord que

$$Bf = (B_1 f_1, B_2 f_2, B_3 f_3, B_4 f_4)^T, \quad \forall f = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in X_p,$$

où les B_i sont des opérateurs sur $L^p(0, 1)$ définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B_1) &= \{f_1 \in W^{2,p} \mid f_1(0) = 0, f_1'(1) = 0\}, & B_1 f_1 &= \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + \theta_1 f_1; \\ \mathcal{D}(B_2) &= \{f_2 \in W^{2,p} \mid f_2'(0) = 0, f_2'(1) = 0\}, & B_2 f_2 &= \alpha_2 f_2''; \\ \mathcal{D}(B_3) &= \{f_3 \in W^{2,p} \mid f_3'(0) = 0, f_3(1) = 0\}, & B_3 f_3 &= \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + \theta_2 f_3; \\ \mathcal{D}(B_4) &= \{f_4 \in W^{2,p} \mid f_4'(0) = 0, f_4'(1) = 0\}, & B_4 f_4 &= \alpha_4 f_4''. \end{aligned}$$

Il est clair que la dissipativité de tous les opérateurs B_i sur $L^p(0, 1)$ entraîne celle de l'opérateur B dans X_p .

Montrons la dissipativité de l'opérateur B_1 . Soit $f_1 \in \mathcal{D}(B_1)$. Sans perte de généralité on suppose que $\|f_1\|_p = 1$. Par la Définition 5.3.1 et le Lemme 5.3.4, on passe par les calculs suivants :

$$\begin{aligned} \langle f_1^*, B_1 f_1 \rangle_{q,p} &= \int_0^1 |f_1|^{p-2} f_1 (\alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + \theta_1 f_1) dx \\ &= -\alpha_1 (p-1) \int_0^1 |f_1|^{p-2} f_1'^2 dx - \frac{F_1}{p} |f_1|^p(1) + \theta_1 \int_0^1 |f_1|^p dx. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Rappelons l'inégalité du type Poincaré suivante :

$$\int_0^1 |g|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |g'|^2 dx, \quad \forall g \in W^{1,2}, g(0) = 0.$$

En prenant $g = |f_1|^{\frac{p}{2}}$, on obtient l'inégalité

$$- \int_0^1 |f_1|^{p-2} |f_1'|^2 dx \leq -\frac{8}{p^2} \int_0^1 |f_1|^p dx. \quad (5.3.11)$$

En tenant compte de (5.3.10) et de (5.3.11), on déduit que

$$\langle f_1^*, B_1 f_1 \rangle_{q,p} \leq - \left(\frac{8\alpha_1(p-1)}{p^2} - \theta_1 \right) \int_0^1 |f_1|^p dx. \quad (5.3.12)$$

Ainsi le choix

$$\theta_1 = \theta_1(p) = \frac{8\alpha_1(p-1)}{p^2}$$

donne la dissipativité de l'opérateur B_1 .

Des calculs similaires conduisent à la dissipativité des opérateurs B_2 , B_4 et B_3 en choisissant

$$\theta_2 = \theta_2(p) = \frac{8\alpha_3(p-1)}{p^2}.$$

(iii) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, l'image de l'opérateur $(I - B_i)$ est en fait l'espace L^p tout entier. Il s'agit de résoudre, pour tout $\varphi \in L^p(0, 1)$, l'équation différentielle linéaire avec second membre

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1'' - F_1 u_1' - u_1 = \varphi \\ u_1(0) = 0, \\ u_1'(1) = 0. \end{cases} \quad (5.3.13)$$

Cette équation admet une unique solution $u_1 \in W^{2,p}$. Donc $R((\theta_1 + 1)I - B_1)$ est surjectif. Ce qui implique que $R(I - B_1) = L^p(0, 1)$ (voir Théorème 1.4.5 dans Pazy [86]). On conclut que B vérifie la condition d'image et qu'il est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X_p , $\forall 1 < p < \infty$. ■

Proposition 5.3.6 *Il existe une constante $\alpha_p > 0$ telle que l'opérateur $C + \alpha_p I$, C étant défini par l'équation (5.3.9), soit dissipatif dans X_p .*

Preuve : Soit $f \in X_p$. On note $g = (g_1, \dots, g_4)^T$ tel que

$$g_i = \frac{|f_i|^{p-2} f_i}{\|f_i\|_p^{p-2}}; \quad i = 1, \dots, 4.$$

Il s'agit de prouver qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que

$$\langle g, (C + \alpha I)f \rangle_{q,p} \leq 0, \quad \forall f \in X_p.$$

On effectue les calculs successifs suivants :

$$\begin{aligned} \langle g, (C + \alpha I)f \rangle_{q,p} &= \sum_{i=1}^4 \int_0^1 ((C + \alpha I)f)_i(x) g_i(x) dx \\ &= \int_0^1 [(-h_1 - \theta_1 + \alpha)f_1 + \sqrt{h_1 h_2} f_2] g_1 dx \\ &\quad + \int_0^1 [\sqrt{h_1 h_2} f_1 + (-h_2 - h_3 + \alpha)f_2 + \sqrt{h_3 h_4} f_3] g_2 dx \\ &\quad + \int_0^1 [\sqrt{h_3 h_4} f_2 + (-h_4 - h_5 - \theta_2 + \alpha)f_3 + \sqrt{h_5 h_6} f_4] g_3 dx \\ &\quad + \int_0^1 [\sqrt{h_5 h_6} f_3 + (-h_6 + \alpha)f_4] g_4 dx. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

On poursuit les calculs en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \langle g, (C + \alpha I)f \rangle_{q,p} &\leq (-h_1 - \theta_1 + \alpha) \|f_1\|_p^2 + (-h_2 - h_3 + \alpha) \|f_2\|_p^2 \\ &\quad + (-h_4 - h_5 - \theta_2 + \alpha) \|f_3\|_p^2 + (-h_6 + \alpha) \|f_4\|_p^2 \\ &\quad + 2\sqrt{h_1 h_2} \|f_1\|_p \|f_2\|_p + 2\sqrt{h_3 h_4} \|f_2\|_p \|f_3\|_p \\ &\quad + 2\sqrt{h_5 h_6} \|f_3\|_p \|f_4\|_p. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

On remarque à ce niveau que si la matrice symétrique $C + \alpha I$ est définie négative, l'opérateur $C + \alpha I$ dans X_p est dissipatif. Puisque la matrice C est définie négative, il suffit de prendre α_p égal à la plus petite valeur propre de la matrice définie positive $(-C)$ telle que $(C + \alpha I)$ devienne semi-définie négative. ■

Corollaire 5.3.7 *L'opérateur A_p défini par (5.3.5)-(5.3.6) est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions S_t sur X_p , $1 < p < +\infty$. De plus il existe une constante positive α_p telle que*

$$\|S_t\|_p \leq e^{-\alpha_p t}, \quad \forall t \geq 0,$$

c'est-à-dire, le semi-groupe S_t (ou l'opérateur A_p) est exponentiellement stable sur X_p .

Preuve : D'après les Propositions 5.3.5 et 5.3.6, l'opérateur B est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X_p et l'opérateur $C + \alpha_p I$ est borné et dissipatif dans X_p . En vertu d'un résultat de perturbation (voir Corollaire 3.3, p.82, Pazy [86]) on conclut que $A_p + \alpha_p I = B + (C + \alpha_p I)$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X_p . En utilisant $e^{tA_p} = e^{t(A_p + \alpha_p I)} e^{-t\alpha_p}$, on complète la preuve du Corollaire 5.3.7. ■

Corollaire 5.3.8 *Pour chaque $p \in]1, +\infty[$, l'opérateur $A_{d,p}$ associé au système d'échangeurs thermiques avec diffusion est le générateur d'un C_0 semi-groupe (noté Z_t) sur X_p . De plus il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\|Z_t\|_p \leq M e^{-\alpha_p t}, \quad \forall t \geq 0,$$

i.e., le semi-groupe Z_t (ou l'opérateur $A_{d,p}$) est exponentiellement stable sur X_p .

Preuve : On remarque que si A_p est le générateur d'un C_0 semi-groupe S_t , alors $A_{d,p} = T^{-1}A_p T$ est aussi le générateur d'un C_0 semi-groupe Z_t défini par

$$Z_t = T^{-1}S_t T.$$

Par conséquent,

$$\|Z_t\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\| \cdot \|S_t\|.$$

Le résultat cherché découle du Corollaire 5.3.7. ■

5.4 Stabilité du modèle avec diffusion dans $(\mathcal{C}[0, 1])^4$

5.4.1 Générateur infinitésimal

On considère le système (Σ_d) d'échangeurs thermiques dans le Banach $X = (\mathcal{C}[0, 1])^4$ muni de la norme de la convergence uniforme sur chaque composante, plus précisément :

$$\forall f \in X, \quad \|f\|_X = \|f\|_\infty = \left[\sum_{i=1}^4 \|f_i\|_\infty^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.4.16)$$

L'espace d'état que l'on choisit pour (Σ_d) est le sous-espace fermé X_∞ dans X défini par

$$X_\infty = \{f \in X \mid f_1(0) = 0, f_3(1) = 0\} \subset X.$$

L'opérateur associé sur X_∞ est défini par

$$\mathcal{D}(A_{d,\infty}) = \left\{ f \in (C^2[0, 1])^4 \cap X_\infty \left| \begin{array}{l} \alpha_1 f_1''(0) - F_1 f_1'(0) + h_1 f_2(0) = 0, \\ \alpha_3 f_3''(1) + F_2 f_3'(1) + h_4 f_2(1) + h_5 f_4(1) = 0, \\ f_2'(0) = 0, \quad f_3'(0) = 0, \quad f_4'(0) = 0 \\ f_1'(1) = 0, \quad f_2'(1) = 0, \quad f_4'(1) = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (5.4.17)$$

$$A_{d,\infty} f = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + h_1(f_2 - f_1) \\ \alpha_2 f_2'' + h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3 - f_2) \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + h_4(f_2 - f_3) + h_5(f_4 - f_3) \\ \alpha_4 f_4'' + h_6(f_3 - f_4) \end{bmatrix}. \quad (5.4.18)$$

De même, définissons l'opérateur A_∞ sur X_∞ par

$$A_\infty = T^{-1}A_{d,\infty}T$$

avec T la matrice diagonale donnée par (5.3.4). On remarque facilement que, pour $1 < p < q < +\infty$, on a

$$\mathcal{D}(A_\infty) \subset \mathcal{D}(A_q) \subset \mathcal{D}(A_p) \quad (5.4.19)$$

et A_p prolonge A_q qui lui même prolonge A_∞ .

Lemme 5.4.1 *Les propriétés suivantes ont lieu :*

- 1) L'opérateur A_∞ est dissipatif dans X_∞ .
- 2) L'image $R(I - A_\infty)$ de l'opérateur $I - A_\infty$ est X_∞ .

Preuve : 1) Soit $f \in \mathcal{D}(A_\infty)$, alors $f \in \mathcal{D}(A_p)$ pour tout $1 < p < +\infty$. D'après le Corollaire 5.3.7, l'opérateur A_p est dissipatif dans X_p . La Proposition 5.3.2 entraîne que

$$\|(\lambda I - A_\infty)f\|_p \geq \lambda\|f\|_p, \quad \forall \lambda > 0, \forall p > 1. \quad (5.4.20)$$

Or les normes $\|f_i\|_p$ tendent vers $\|f_i\|_\infty$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$, lorsque p tend vers $+\infty$. En passant à la limite l'inégalité (5.4.20), on obtient

$$\|(\lambda I - A_\infty)f\|_\infty \geq \lambda\|f\|_\infty, \quad \forall \lambda > 0. \quad (5.4.21)$$

Donc A_∞ est dissipatif dans X .

2) On écrit $A_\infty = B_\infty + C_\infty$, où B_∞ et C_∞ sont des opérateurs de X définis par

$$\mathcal{D}(B_\infty) = \mathcal{D}(A_\infty), \quad (5.4.22)$$

$$B_\infty f = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' \\ \alpha_2 f_2'' \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' \\ \alpha_4 f_4'' \end{bmatrix}, \quad (5.4.23)$$

$$C_\infty f = \begin{bmatrix} -h_1 & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2 + h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4 + h_5) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix} f. \quad (5.4.24)$$

On montre que

$$\rho(B_\infty) \supset (0, +\infty), \quad \|(\lambda - B_\infty)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}, \quad \forall \lambda \in (0, +\infty).$$

Or le domaine $\mathcal{D}(B_\infty)$ est dense, par le Théorème de Hille-Yosida, p.8, Pazy [86], on a B_∞ est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X_∞ .

Comme l'opérateur C_∞ est borné dans X_∞ , en utilisant un résultat de perturbation (voir Théorème 1.1, p.76, Pazy [86]), on établit que

$$\rho(B_\infty + C_\infty) \supset (\|C_\infty\|, +\infty).$$

En particulier, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0 I - A_\infty) = X_\infty$. D'après le Théorème 4.5, p.15, Pazy [86], $R(I - A_\infty) = X_\infty$. ■

Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Proposition 5.4.2 *Les opérateurs A_∞ et $A_{d,\infty}$ sont tous les deux le générateur d'un C_0 semi-groupe uniformément borné sur X_∞ .*

5.4.2 Stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans X_∞

Dans cette section, on montre que le C_0 semi-groupe engendré par l'opérateur $A_{d,\infty}$ est exponentiellement stable dans X_∞ et dans $Y = (\mathcal{C}^1[0, 1])^4$. Ensuite on propose de caractériser le taux de décroissance exponentielle pour le semi-groupe.

Pour cela nous allons utiliser la théorie des opérateurs sectoriels (voir Pazy [86]).

Définition 5.4.3 *Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ est dit **sectoriel** si*

- 1) A est fermé et $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X ;
- 2) il existe $\omega \in \mathbb{R}$, $M > 0$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que le secteur

$$S_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda - \omega)| \leq \frac{\pi}{2} + \theta\} \cup \{\omega\}$$

est inclus dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$ et

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda \in S_{\theta,\omega}.$$

Remarque 5.4.4 *Si A est le générateur d'un C_0 semi-groupe T_t , et $\omega \in \rho(A)$, alors d'après le Théorème 5.2, p.62, Pazy [86], il existe un prolongement analytique de T_t sur le domaine sectoriel $\Delta_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda - \omega)| \leq \theta\}$. De plus, $\|T_t\|$ est uniformément borné dans chaque sous-domaine sectoriel fermé de $\Delta_{\theta,\omega}$.*

On montre d'abord que l'opérateur $A_{d,\infty}$ est un opérateur sectoriel sur X_∞ et sur Y_∞ avec Y_∞ un sous-espace fermé dans Y défini par

$$Y_\infty = \left\{ f \in Y \left| \begin{array}{l} f_1(0) = f'_1(1) = 0 \\ f_2(0) = f'_2(1) = 0 \\ f_3(0) = f_3(1) = 0 \\ f_4(0) = f'_4(1) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Proposition 5.4.5 *L'opérateur $A_{d,\infty}$ est un opérateur sectoriel sur X_∞ et sur Y_∞ .*

Preuve : 1) Par la preuve du Lemme 5.4.1, l'opérateur B_∞ est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X_∞ . Pour montrer que $A_{d,\infty}$ est un opérateur sectoriel, il suffit de prouver que chaque opérateur composant $B_{\infty,i}$ de B_∞ est sectoriel sur le sous-espace correspondant de $\mathcal{C}[0, 1]$. Pour atteindre cet objectif il suffit de prouver qu'il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$, $M > 0$ et $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ telles que, pour tout $i = 1, 2, 3$ ou 4 , on ait

$$\rho(B_{\infty,i}) \supset S_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\text{Arg}(\lambda - \omega)| \leq \theta\} \cup \{\omega\},$$

$$\|(\lambda - B_{\infty,i})^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \forall \lambda \in S_{\theta,\omega}.$$

Ceci se réalise par un calcul direct de l'opérateur de résolvante en résolvant l'équation différentielle, cf. Chapitre 4, Tchouso [103]. On en déduit, par le théorème 5.2, p.61, Pazy [86], que l'opérateur B_∞ est sectoriel sur X_∞ . Comme $A_{d,\infty}$ est une perturbation bornée de B_∞ , le résultat découle du Théorème 2.1, p.80, Pazy [86].

2) Pour l'opérateur $A_{d,Y}$ défini sur le sous-espace correspondant dans $Y = (\mathcal{C}^1[0, 1])^4$, le raisonnement est similaire mais avec un calcul plus élaboré. On commence par prouver que chaque opérateur composant est sectoriel. On laisse au lecteur le soin de la preuve complète pour $A_{d,Y}$ dans Y_∞ . ■

Dans la suite, on propose de caractériser les ensembles spectraux pour l'opérateur $A_{d,\infty}$ et pour $A_{d,Y}$.

Proposition 5.4.6 *Les opérateurs définis sur les espaces de Banach différents $A_{d,Y}$, $A_{d,\infty}$ et $A_{d,q}$ ont le même ensemble des valeurs propres :*

$$\sigma_p(A_{d,Y}) = \sigma_p(A_{d,\infty}) = \sigma_p(A_{d,q})$$

et

$$\sigma(A_{d,Y}) \subset \sigma(A_{d,\infty}) \subset \sigma(A_{d,q}), \quad \forall 1 < q < \infty.$$

Preuve : Rappelons que

$$\mathcal{D}(A_{d,Y}) = \{f \in Y_\infty \cap (\mathcal{C}^3[0, 1])^4 \mid A_{d,\infty}f \in Y_\infty\}.$$

(1) Montrons d'abord l'égalité des spectres ponctuels $\sigma_p(A_{d,\infty}) = \sigma_p(A_{d,Y})$. Soit $\lambda \in \sigma_p(A_{d,Y})$. Alors il existe $f \in \mathcal{D}(A_{d,Y})$ non nul tel que $(\lambda I - A_{d,Y})f = 0$. Puisque $A_{d,\infty}$ prolonge $A_{d,Y}$, alors $f \in \mathcal{D}(A_{d,\infty})$ et $(\lambda I - A_{d,\infty})f = 0$. Donc $\lambda \in \sigma_p(A_{d,\infty})$. On en déduit que

$$\sigma_p(A_{d,\infty}) \supset \sigma_p(A_{d,Y}).$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{D}(A_{d,\infty})$ et soit $(\lambda I - A_{d,\infty})f = 0$. Par définition, l'équation

différentielle ci-dessous admet une solution non triviale $f \in \mathcal{D}(A_{d,\infty})$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 f_1''(x) \\ \alpha_2 f_2''(x) \\ \alpha_3 f_3''(x) \\ \alpha_4 f_4''(x) \end{bmatrix} = \lambda f(x) - \begin{bmatrix} -F_1 f_1'(x) + h_1(f_2(x) - f_1(x)) \\ h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3(x) - f_2(x)) \\ F_2 f_3'(x) + h_4(f_2(x) - f_3(x)) + h_5(f_4(x) - f_3(x)) \\ h_6(f_3(x) - f_4(x)), \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la solution $f \in (\mathcal{C}^3[0, 1])^4$ et $A_{d,\infty}f \in Y_\infty$. Donc $f \in \mathcal{D}(A_{d,Y})$. On vient de montrer que

$$\sigma_p(A_{d,\infty}) \subset \sigma_p(A_{d,Y}).$$

On a ainsi prouvé l'égalité des spectres ponctuels.

(2) Le raisonnement similaire à celui du point (1) permet d'établir que

$$\sigma_p(A_{d,\infty}) = \sigma_p(A_{d,q}).$$

(3) Il est évident que $\rho(A_{d,Y}) \supset \rho(A_{d,\infty}) \supset \rho(A_{d,q})$, ce qui permet d'écrire

$$\sigma(A_{d,Y}) \subset \sigma(A_{d,\infty}) \subset \sigma(A_{d,q}). \quad (5.4.25)$$

■

Nous sommes en mesure d'établir le théorème de stabilité dans le cadre des espaces de Banach X_∞ et Y_∞ .

Théorème 5.4.7 *Les taux de décroissance exponentielle des semi-groupes engendrés par $A_{d,\infty}$ et $A_{d,Y}$, respectivement, sur X_∞ et Y_∞ sont identiques :*

$$\omega_0(A_{d,\infty}) = \omega_0(A_{d,Y}) = S(A_{d,\infty}) = \sup_{\lambda \in \sigma_p(A_{d,\infty})} \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Par conséquent, le semi-groupe associé au système d'échangeurs thermiques avec diffusion est exponentiellement stable sur X_∞ et Y_∞ .

Preuve : D'après le Corollaire 5.3.8, l'opérateur $A_{d,2}$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe exponentiellement stable sur $Y_2 = (L^2(0, 1))^4$. De plus, on montre que le semi-groupe engendré est analytique. Donc,

$$\omega_0(A_{d,2}) = S(A_{d,2}) = \sup_{\lambda \in \sigma_p(A_{d,2})} \operatorname{Re}(\lambda) < 0. \quad (5.4.26)$$

Puisque $A_{d,\infty}$ et $A_{d,Y}$ sont sectoriels sur X_∞ et Y_∞ , respectivement, alors on a aussi

$$\omega_0(A_{d,\infty}) = S(A_{d,\infty}), \quad \omega_0(A_{d,Y}) = S(A_{d,Y}). \quad (5.4.27)$$

A l'aide de la Proposition 5.4.6, on obtient de (5.4.26)-(5.4.27) :

$$\omega_0(A_{d,Y}) = \omega_0(A_{d,\infty}) = \omega_0(A_{d,2}) < 0. \quad (5.4.28)$$

D'où le résultat cherché. ■

5.5 Stabilité du modèle sans diffusion dans $(\mathcal{C}[0, 1])^4$ et $(L^p(0, 1))^4$

On considère le système (Σ_c) d'échangeurs thermiques sans diffusion (i.e., avec convection). On note par $A_{c,\infty}$ et $A_{c,p}$, respectivement, les opérateurs sur $X = (\mathcal{C}[0, 1])^4$ et $Y_p = (L^p(0, 1))^4$ associés au système (Σ_c) . Ils sont définis par :

$$\mathcal{D}(A_{c,\infty}) = \{f \in (\mathcal{C}^1(0, 1))^4 \mid f_1(0) = 0, f_3(1) = 0\} \quad (5.5.29)$$

$$\mathcal{D}(A_{c,p}) = \{f \in (W^{1,p}(0, 1))^4 \mid f_1(0) = 0, f_3(1) = 0\} \quad (5.5.30)$$

$$A_{c,p}f = A_{c,\infty}f = \begin{bmatrix} -F_1 f'_1 + h_1(f_2 - f_1) \\ h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3 - f_2) \\ F_2 f'_3 + h_4(f_2 - f_3) + h_5(f_4 - f_3) \\ h_6(f_3 - f_4) \end{bmatrix} \quad (5.5.31)$$

Rappelons que

$$W^{1,p}(0, 1) = \{f_1 \in L^p(0, 1) \mid f'_1 \in L^p(0, 1)\}.$$

On effectue la même transformation que précédemment sur les opérateurs :

$$E_c = T A_{c,\infty} T^{-1}, \quad E_p = T A_{c,p} T^{-1}$$

où T est la matrice diagonale d'ordre 4 donnée par (5.3.4).

On décompose E_p comme la somme d'un opérateur différentiel et d'une application matricielle bornée :

$$E_p = G + \Lambda$$

avec

$$\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(A_{c,p}) \quad (5.5.32)$$

$$Gf = \begin{bmatrix} -F_1 f'_1 \\ 0 \\ F_2 f'_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.33)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -h_1 & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2 + h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4 + h_5) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix} \quad (5.5.34)$$

Nous pouvons démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.5.1 (i) L'opérateur E_p est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur Y_p .

(ii) L'opérateur $A_{c,p}$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe $S_p(t)$ borné sur Y_p .

(iii) La trace de l'opérateur $A_{c,\infty}$ sur l'espace $X_0 = \{f \in X \mid f_1(0) = f_3(0) = 0\}$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe $W_0(t)$ borné sur X_0 .

Preuve : Pour prouver (i), on montre d'abord que l'opérateur G précédent engendre un C_0 semi-groupe de contractions sur Y_p . Soit $f \in Y_p$, notons $g = (g_1, \dots, g_4)^T$ tel que

$$g_i = \frac{|f_i|^{p-2} f_i}{\|f_i\|_p^{p-2}}; \quad i = 1, \dots, 4.$$

$$\begin{aligned} \langle g, Gf \rangle_{Y_q, Y_p} &= \sum_{i=1}^4 \int_0^1 (Gf)_i(x) g_i(x) dx \\ &= -\frac{F_1}{\|f_1\|_p^{p-2}} \int_0^1 |f_1(x)|^{p-2} f_1(x) f_1'(x) dx \\ &\quad + \frac{F_2}{\|f_3\|_p^{p-2}} \int_0^1 |f_3(x)|^{p-2} f_3(x) f_3'(x) dx \\ &= -\frac{1}{p} \frac{F_1}{\|f_1\|_p^{p-2}} [|f_1(x)|^p]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{p} \frac{F_2}{\|f_3\|_p^{p-2}} [|f_3(x)|^p]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{1}{p} \frac{F_1}{\|f_1\|_p^{p-2}} |f_1(1)|^p - \frac{1}{p} \frac{F_2}{\|f_3\|_p^{p-2}} |f_3(0)|^p \leq 0. \end{aligned}$$

D'où la dissipativité de l'opérateur G sur Y_p . On montre que G vérifie la condition d'image en utilisant la même démarche qu'à la preuve de la Proposition 5.3.5. Donc G engendre un C_0 semi-groupe de contractions sur Y_p , puisque Y_p est un Banach réflexif.

On voit clairement que la matrice Λ est dissipative dans Y_p (voir la preuve de la Proposition 5.3.6). On déduit, par un résultat de perturbations, que $A_{c,p} = G + \Lambda$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur Y_p .

On établit (ii) exactement comme à la preuve du Corollaire 5.3.8.

Enfin pour (iii), on établit que l'opérateur E_c est dissipatif et vérifie la condition d'image sur X par le même raisonnement qu'au Lemme 5.4.1. Puis par le même raisonnement qu'à la Proposition 5.4.2 on montre que la trace de E_c sur X_0 est dissipative, vérifie la condition d'image et est de domaine dense dans X_0 . D'où le résultat voulu. ■

Pour la suite, donnons la définition suivante.

Définition 5.5.2 Le C_0 semi-groupe sur Y_p (resp. X_0) engendré par l'opérateur $A_{c,p}$ (resp. trace de $A_{c,\infty}$ sur X_0) est appelé le semi-groupe associé au modèle de convection sur Y_p (resp. X_0).

Pour étudier la stabilité du semi-groupe engendré par $A_{c,\infty}$ sur X (ou plutôt sa trace sur X_0), nous allons passer par changement d'opérateur.

On effectue dans le système (Σ_c) le changement de fonction inconnue de la façon suivante :

$$u_i = v_i e^{\theta x}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

où θ est un réel arbitraire. Alors $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ est la solution du système suivant :

$$(\tilde{\Sigma}_c) : \begin{cases} \partial_t v_1 = -F_1 \partial_x v_1 - \theta F_1 v_1 + h_1(v_2 - v_1), & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ \partial_t v_2 = h_2(v_1 - v_2) + h_3(v_3 - v_2), \\ \partial_t v_3 = F_2 \partial_x v_3 + \theta F_2 v_3 + h_4(v_2 - v_3) + h_5(v_4 - v_3), \\ \partial_t v_4 = h_6(v_3 - v_4), \\ v_1(0, t) = 0, \quad v_3(1, t) = 0, \\ v(x, 0) = v^0(x), \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

On introduit les opérateurs $A_{c,\theta}$ et $A_{p,\theta}$ sur X_0 et Y_p respectivement ;

$$\mathcal{D}(A_{c,\theta}) = \{f \in (\mathcal{C}^1(0, 1))^4 \mid f_1(0) = 0, f_3(1) = 0\} \quad (5.5.35)$$

$$\mathcal{D}(A_{p,\theta}) = \{f \in (W^{1,p}(0, 1))^4 \mid f_1(0) = 0, f_3(1) = 0\} \quad (5.5.36)$$

$$A_{p,\theta} f = A_{c,\theta} f = \begin{bmatrix} -F_1 f'_1 - \theta F_1 f_1 + h_1(f_2 - f_1) \\ h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3 - f_2) \\ F_2 f'_3 + \theta F_2 f_3 + h_4(f_2 - f_3) + h_5(f_4 - f_3) \\ h_6(f_3 - f_4) \end{bmatrix}. \quad (5.5.37)$$

On effectue la même transformation que précédemment :

$$E_{c,\theta} = T^{-1} A_{c,\theta} T, \quad E_{p,\theta} = T^{-1} A_{p,\theta} T.$$

On fait la décomposition de $E_{p,\theta}$ comme la somme d'un opérateur différentiel et d'une application matricielle bornée : $E_{p,\theta} = G + \Lambda_\theta$ avec

$$\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(A_{p,\theta}) \quad (5.5.38)$$

$$Gf = \begin{bmatrix} -F_1 f'_1 \\ 0 \\ F_2 f'_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.39)$$

$$\Lambda_\theta = \begin{bmatrix} -(h_1 + \theta F_1) & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2 + h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4 + h_5 - \theta F_2) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix} \quad (5.5.40)$$

On établit le résultat important suivant.

Proposition 5.5.3 *Il existe des constantes $\theta > 0$ et $\mu > 0$ indépendantes de p telles que l'opérateur $E_{p,\theta} + \mu I$ soit le générateur d'un semi-groupe de contractions sur Y_p .*

Pour prouver cette proposition, nous aurons besoin des lemmes qui suivent.

Lemme 5.5.4 *Il existe des constantes $\theta > 0$ et $\mu > 0$ indépendantes de p telles que l'opérateur $\Lambda_\theta + \mu I$ soit dissipatif dans Y_p .*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(G)$, notons $g = (g_1, \dots, g_4)^T$ tel que

$$g_i = \frac{|f_i|^{p-2} f_i}{\|f_i\|_p^{p-2}}; \quad i = 1, \dots, 4.$$

On effectue les mêmes calculs qu'à la preuve de la Proposition 5.3.6. A l'aide des inégalités de Hölder et de Cauchy, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \langle g, (\Lambda_\theta + \mu I)f \rangle_{Y_q, Y_p} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [-h_1 - \theta F_1 + \mu]f_1 + \sqrt{h_1 h_2} f_2 \\ \sqrt{h_1 h_2} f_1 + [-h_2 - h_3 + \mu]f_2 + \sqrt{h_3 h_4} f_3 \\ \sqrt{h_3 h_4} f_2 + [-h_4 - h_5 + \theta F_2 + \mu]f_3 + \sqrt{h_5 h_6} f_4 \\ \sqrt{h_5 h_6} f_3 - h_6 f_4 + \mu f_4 \end{bmatrix} \right\rangle_{q,p} \\ &= \langle g_1, (-h_1 - \theta F_1 + \mu)f_1 + \sqrt{h_1 h_2} f_2 \rangle_{q,p} \\ & \quad + \langle g_2, \sqrt{h_1 h_2} f_1 + (-h_2 - h_3 + \mu)f_2 + \sqrt{h_3 h_4} f_3 \rangle_{q,p} \\ & \quad + \langle g_3, \sqrt{h_3 h_4} f_2 + (-h_4 - h_5 + \theta F_2 + \mu)f_3 + \sqrt{h_5 h_6} f_4 \rangle_{q,p} \\ & \quad + \langle g_4, \sqrt{h_5 h_6} f_3 + (-h_6 + \mu)f_4 \rangle_{q,p} \\ & \leq \begin{bmatrix} \|f_1\|_p \\ \|f_2\|_p \\ \|f_3\|_p \\ \|f_4\|_p \end{bmatrix}^\top (\tilde{\Lambda}_\theta + \mu I) \begin{bmatrix} \|f_1\|_p \\ \|f_2\|_p \\ \|f_3\|_p \\ \|f_4\|_p \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{5.5.41}$$

où

$$\tilde{\Lambda}_\theta = \begin{bmatrix} -(h_1 + \theta F_1) & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2 + h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4 + h_5 - \theta F_2) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix}.$$

On peut trouver une constante $\theta > 0$ telle que la matrice $(-\tilde{\Lambda}_\theta)$ soit définie positive, il suffit de prendre sa plus petite valeur propre pour μ :

$$\mu = \min_{i=1, \dots, 4} \sigma_i(-\tilde{\Lambda}_\theta).$$

Cela permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\langle g, (\Lambda_\theta + \mu I)f \rangle_{Y_q, Y_p} \leq - \begin{bmatrix} \|f_1\|_p \\ \|f_2\|_p \\ \|f_3\|_p \\ \|f_4\|_p \end{bmatrix}^\top (-\tilde{\Lambda}_\theta - \mu I) \begin{bmatrix} \|f_1\|_p \\ \|f_2\|_p \\ \|f_3\|_p \\ \|f_4\|_p \end{bmatrix} \leq 0.$$

On complète ainsi la preuve du Lemme 5.5.4. ■

Remarque 5.5.5 On peut aussi choisir une constante $\theta < 0$ telle que $(-\tilde{\Lambda}_\theta)$ soit définie positive. Par conséquent il existe des constantes $\theta < 0$ et $\mu > 0$ telles que $(\Lambda_\theta + \mu I)$ soit dissipatif.

Lemme 5.5.6 *L'opérateur G défini par (5.5.38)-(5.5.39) est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur Y_p .*

Preuve : La preuve de ce lemme est donnée au début de la preuve du Théorème 5.5.1. ■

Preuve de la Proposition 5.5.3 : D'après le Lemme 5.5.4, il existe $\theta > 0$ et $\mu > 0$ telles que $(\Lambda_\theta + \mu I)$ soit dissipatif. Par le Lemme 5.5.6, l'opérateur $E_{p,\theta} + \mu I = G + \Lambda_\theta + \mu I$ est aussi dissipatif et donc le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur Y_p . ■

Maintenant, nous énonçons le résultat de stabilisation.

Théorème 5.5.7 (i) *Pour tout $1 < p < +\infty$, le semi-groupe $W_p(t)$ sur $Y_p = (L^p(0, 1))^4$ associé au modèle de diffusion est exponentiellement stable.*

(ii) *Le semi-groupe $W_0(t)$ sur X_0 associé au modèle de convection est exponentiellement stable.*

Preuve : (i) La Proposition 5.5.3 assure l'existence de $\mu > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que l'opérateur $E_{p,\theta} + \mu I$ soit générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur Y_p . En notant par $T_{p,\theta}(t)$ le C_0 semi-groupe sur Y_p engendré par $E_{p,\theta}$, on établit que

$$\forall w \in Y_p, \quad W_p(t) w(x) = e^{\theta x} T_{p,\theta}(t) (e^{-\theta \cdot} w) (x). \quad (5.5.42)$$

Le semi-groupe $T_{p,\theta}$ est exponentiellement stable :

$$T_{p,\theta} = e^{-\mu t} e^{(E_{p,\theta} + \mu I)t}.$$

Par conséquent, il existe une constante $M > 0$ dépendant de θ telle que

$$\|W_p(t)\| \leq M e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) En vertu de la Proposition 5.5.3, il existe $\mu > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (indépendants de p) tels que l'opérateur sur Y_p $E_{p,\theta} + \mu I$ soit dissipatif. En passant en limite, on prouve que l'opérateur $E_{c,\theta} + \mu I$ est dissipatif (similaire à la preuve de la Proposition 5.5.1 (iii)) sur X_0 et vérifie la condition d'image. Par conséquent, l'opérateur $E_{c,\theta}$ sur X_0 engendre un semi-groupe uniformément borné sur X_0 que nous notons $T_\theta(t)$. En notant $W_0(t)$ le semi-groupe sur X_0 engendré par E_c , on établit une relation similaire à (5.5.41) entre $W_0(t)$ et $T_\theta(t)$. Par conséquent, il existe une constante $M > 0$ dépendant de θ telle que

$$\|W_0(t)\| \leq M e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi on achève la preuve du Théorème 5.5.7. ■

Enfin nous indiquons que le semi-groupe associé au modèle de convection n'est pas analytique.

Proposition 5.5.8 *le semi-groupe (sur Y_p ou X_0) associé au modèle de convection n'est pas analytique.*

Preuve Proposition 5.5.8 : Il suffit de prouver que l'opérateur de transport \mathcal{T} sur $\mathcal{C}[0, 1]$ suivant

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \{f \in \mathcal{C}^1[0, 1] : f(0) = 0\}; \quad \mathcal{T}f = -f_x$$

n'est pas sectoriel. En effet l'opérateur de résolvante s'écrit

$$R(\lambda, \mathcal{T})f(x) = u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi-x)} f(\xi) d\xi, \quad \forall f \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5.5.43)$$

Supposons que \mathcal{T} est sectoriel. Puisque son semi-groupe engendré est borné, son ensemble de résolvante $\rho(\mathcal{T})$ contient l'ensemble Σ des $\lambda = n + im$ tels que $n < 0$ et $|\frac{n}{m}|$ soit suffisamment petit. De plus, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|\lambda| \|R(\lambda, \mathcal{T})f\| \leq M \|f\|, \quad \forall \lambda \in \Sigma, \forall f \in \mathcal{C}[0, 1]. \quad (5.5.44)$$

Soit $f \equiv 1$ et soit $\lambda = n + im$. La relation (5.5.42) entraîne

$$|u(x)| = \left| \frac{1 - e^{-(n+im)x}}{n + im} \right| \geq \frac{e^{-nx} - 1}{|\lambda|}.$$

Cela permet d'écrire l'inégalité suivante pour n grand :

$$\begin{aligned} \|u\|_p &\geq \left(\int_{1/2}^1 |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \frac{1}{|\lambda|} \left(\int_{1/2}^1 (e^{-nx} - 1)^p dx \right)^{1/p} \geq \frac{1}{2|\lambda|} \left(\int_{1/2}^1 e^{-pnx} dx \right)^{1/p} \\ &= \frac{1}{2|\lambda|} \left(\frac{e^{-np} - e^{-np/2}}{-np} \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (5.5.45)$$

Comme la fonction exponentielle emporte sur le polynôme, à partir de (5.5.44) on obtient

$$|\lambda| \|R(\lambda, \mathcal{T})\| = |\lambda| \cdot \|u\| \rightarrow +\infty$$

lorsque $n \rightarrow -\infty$. Ceci est en contradiction avec (5.5.43). Donc le semi-groupe n'est pas analytique dans Y_p .

Maintenant, soit $f(x) = e^x - 1$. Soit $\lambda \in \Sigma$. Par (5.5.42), on trouve $u(x)$:

$$u(x) = \frac{e^x}{\lambda + 1} - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda(\lambda + 1)}.$$

Alors,

$$|\lambda| \|R(\lambda, \mathcal{T})f\|_\infty = |\lambda| \|u\|_\infty \geq \frac{e^{-n}}{|\lambda + 1|} - 1 - \left| \frac{\lambda e}{\lambda + 1} \right|. \quad (5.5.46)$$

La fonction exponentielle emportant sur le polynôme, le membre de la extrême droite de (5.5.45) tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow -\infty$. Or, cela est en contradiction avec (5.5.43). Par conséquent le semi-groupe n'est pas analytique dans X_0 , non plus. ■

Quatrième partie

Conclusions et perspectives

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.

Henri Poincaré, *Science et méthode* (1908).

Sommaire

6.1	Conclusions générales	121
6.2	Perspectives	122

6.1 Conclusions générales

Les objectifs principaux de cette thèse ont été : 1) l'étude de l'observation et la commande d'un système de structure flexible et 2) l'étude de la stabilité asymptotique d'un système d'échangeurs thermiques en génie de procédés. Tous les deux modèles sont régis par des EDP.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons présenté un observateur du type Luenberger en dimension infinie, sous la forme explicite d'EDP, pour un système de corps-poutre en rotation. Nous avons montré la convergence exponentielle de l'observateur. L'observateur construit est prouvé valable pour une vitesse angulaire temps-variant qui est proche d'une vitesse constante dans l'espace $L^\infty(0, \infty)$. Autrement dit, l'observateur est exponentiellement convergent quelque soit la vitesse angulaire $\omega(t)$ restreinte à l'intérieur d'une petite boule de L^∞ centrée à une certaine constante ω_* . Nous pouvons accélérer la vitesse de convergence aussi vite que l'on veut en tenant compte d'une seconde étape de conception dans la construction. L'idée essentielle a été illustrée en effectuant le placement de pôle dans le cas d'une valeur propre.

Une étude numérique a été effectuée dans le but de développer un simulateur fiable, efficace, robuste et performant. La contribution principale de ce travail consiste à construire un simulateur numérique basé sur la méthode des éléments finis. Plusieurs simulations ont été effectuées pour le cas où la vitesse angulaire est constante ou variante en fonction du temps. Nous avons examiné l'influence du choix de gain de correction sur la vitesse de convergence de l'observateur. La robustesse de l'observateur a été testée face à la mesure corrompue par du bruit.

Dans le dernier chapitre de cette partie, nous avons mis en cascade notre observateur et la loi de commande par retour d'état proposée dans Coron et d'Andréa-Novel [25] afin d'obtenir une stabilisation globale du système de corps-poutre en rotation. Après avoir effectué de nombreuses expérimentations numériques, les résultats numériques pertinents ont été obtenus. Ceci permet de mettre en valeur la conjecture sur la stabilité asymptotique du système en boucle fermée.

Dans la troisième partie, dans un cadre d'espaces de Banach, nous avons mené une étude sur la stabilité exponentielle des systèmes d'échangeurs thermiques avec diffusion et sans diffusion, régis par un système d'EDP du type parabolique et un système hyperbolique, respectivement.

La stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans l'espace de Banach $(C[0, 1])^4$ (muni de la norme uniforme) a été établie en utilisant la L^p stabilité exponentielle du système considéré et la théorie des opérateurs sectoriels. De plus, le taux de décroissance optimal du système a été aussi calculé pour le modèle avec diffusion. A l'aide de la théorie de perturbation, on a aussi prouvé la stabilité exponentielle dans l'espace $(C[0, 1])^4$ pour le modèle sans diffusion. En revanche, on n'a pas encore trouvé le taux de décroissance du modèle sans diffusion car le semi-groupe associé n'est pas analytique.

6.2 Perspectives

6.2.1 Objectifs à court terme

L'objectif à court terme consiste à donner une preuve mathématique sur la stabilité asymptotique locale du système en boucle fermée avec le couplage observateur-loi de commande. En d'autre terme, on veut montrer que le principe de séparation reste valable au moins localement pour le système en question. Un autre objectif est destiné à étendre la construction d'observateur à d'autres systèmes de vibration en dimension infinie, par exemple des systèmes étudiés dans Guo & Shao [53], Guo & Zhang [52] et Lasiecka [66]. La construction d'observateur va être poursuivie dans un contexte plus général contenant des cas non-linéaires (voir Lasiecka [66]).

Quant au système d'échangeurs thermiques, nous avons pour le futur objectif de mener une étude numérique et une étude sur la stabilité en boucle fermée.

6.2.2 Futurs objectifs : observateur du retournement temporel

Notre objectif dans un futur proche est d'appliquer les techniques des observateurs pour résoudre le problème dit du *retournement temporel*.

(1) Dans de différents domaines scientifiques, il est important d'estimer l'état initial (ou final) d'un système à paramètres distribués à partir des entrées et sorties mesurées sur un intervalle temporel fini. Ce problème porte le nom d'*assimilation de données* dans les domaines comme la géophysique, l'océanologie ou encore la météorologie (voir Auroux [4]). Dans ces cas, on a besoin d'estimer rapidement et avec une grande précision l'état d'un système turbulent. Autrement dit, il s'agit de fournir une estimation de la condition initiale du système tout en connaissant une observation du système à d'autres instants. Le problème est également posé en traitement d'images médicales par la tomographie d'impédance acoustique (cf. Gebauer & Scherzer [49]). Pour cette raison, on lui attribue le nom *retournement temporel*. Il s'agit donc de reconstruire une image dans une zone où elle n'était pas connue (*inpaiting*), restaurer et débruiter l'image (*restauration*), classifier l'image en différentes classes selon couleurs et luminosités (*classification*) et détecter automatiquement de différentes composantes de l'image (*segmentation*) (cf. Auroux [4]). On souligne ici que dans ce genre de problème, seul l'état initial (ou final) est intéressé par l'utilisateur, ce qui est différent du cas de l'implémentation de la loi de commande par retour d'état discuté dans la deuxième partie de cette thèse. En effet, dans ce dernier cas, l'état réel (à chaque instant) est demandé par la loi de commande.

(2) D'autre application consiste à la résolution des problèmes inverses de sources (cf. Alves et al [2]). Admettons qu'un problème direct de la physique mathématique est bien posé. Autrement dit, dès que l'on connaît les informations complètes sur les paramètres (par exemple, les coefficients, le terme de source ou les données initiales, etc) d'un modèle physique, on obtient une description totale sur l'existence, l'unicité et la stabilité

d'une solution du problème mathématique associé au modèle. Néanmoins, certains de ces paramètres qui décrivent le modèle restent parfois inconnus ou expérimentalement non mesurables. Le motif des problèmes inverses consiste à déterminer les valeurs de ces paramètres à partir des données connues.

On considère le problème de sources de systèmes en dimension infinie avec des opérateurs d'observation appropriés. Ce genre de problèmes est étroitement lié à la notion de la contrôlabilité (voir Fliess [42]) et l'observabilité. Par exemple, Alves et al. [2] ont donné une relation entre l'observabilité exacte (qui est dual à la contrôlabilité exacte) et l'identifiabilité du terme de sources.

Soient X, Y des espaces de Hilbert et $\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(C) \in X$. Soit $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ le générateur d'un C_0 -groupe en X et $C : \mathcal{D}(C) \rightarrow Y$ l'opérateur d'observation. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + g(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec $\tau > 0, x_0 \in X$ données et $g : [0, \tau] \rightarrow X$ est (partiellement) connue.

On considère le problème de la détermination de g à partir d'une mesure y appropriée. Les propriétés typiques liées au problème à étudier sont :

* identifiabilité : l'application $g \mapsto y$ est-elle bijective ?

* stabilité : sachant qu'on a deux termes de sources $g^{(1)}, g^{(2)}$ et les observations correspondantes $y^{(1)}, y^{(2)}$, existe-il une constante positive K telle que

$$\|g^{(1)} - g^{(2)}\| \leq K \|y^{(1)} - y^{(2)}\|$$

avec les normes bien choisies ?

* reconstitution : est-il possible de reconstituer la source g à partir d'une observation (partielle) y ?

Dans les problématiques (1) et (2) énumérés ci-dessus, la construction d'observateur permet d'apporter une solution aussi précise que l'on veut au problème de la reconstitution de l'état initial. En effet, dans le passé on faisait l'inversion de l'opérateur grammien d'observabilité pour obtenir l'état initial à partir de la sortie mesurée sur un horizon fini du temps. L'un des inconvénients de cette méthode est le manque de la robustesse, au sens qu'une telle solution est très sensible à des erreurs dans les mesures.

Néanmoins, le mécanisme d'un observateur permet d'introduire une correction des erreurs issues des mesures bruitées par la rétroaction. Dans l'étude effectuée dans cette thèse, on utilise l'observateur pour estimer l'état lorsque l'information que l'on recueille sur l'état (la mesure) se limite par rapport à l'espace. Si de plus, elle est limitée en temps, i.e., la sortie est mesurée sur un horizon fini du temps $[0, T]$, alors il est prouvé que l'observateur reste utile pour restaurer l'état initial. Plus précisément, sur un intervalle temporel fini, on emploie alternativement et itérativement l'observateur progressif et rétrograde en temps.

Par exemple, pour le problème d'assimilation de données, l'algorithme alternatif consiste à appliquer l'observateur rétrograde

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_k^-}{dt} = A\hat{x}_k^- + \kappa C^*(y - C\hat{x}_k^-), & k \geq 1, \\ \hat{x}_k^-(T) = \hat{x}_k^+(T), \end{cases}$$

dans le sens de T à 0 , et appliquer l'observateur progressif

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_k^+}{dt} = A\hat{x}_k^+ - \kappa C^*(y - C\hat{x}_k^+), & k \geq 1, \\ \hat{x}_k^+(0) = \hat{x}_{k-1}^-(0) \end{cases}$$

dans le sens de 0 à T . L'estimation $\hat{x}_0^-(0)$ ainsi obtenue à l'instant 0 n'est rien d'autre que l'estimation de la condition initiale \hat{x}_0 .

Cette technique est appelée *méthode du nudging* ou *du retournement temporel*. Dans cette direction, on peut citer des travaux de Auroux [4] ou des travaux en cours de Ramdani et al. [91].

Cela ouvre un autre horizon dans les perspectives de ma poursuite de recherche après ma thèse.

Cinquième partie

Appendice

Appendice

Rappels sur la théorie des semi-groupes

C^0 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

Cette partie est consacrée à un bref rappel sur semi-groupes continus dans un espace de Banach X et quelques propriétés importantes.

Définition 6.2.1 Une famille $(T_t)_{t \geq 0}$ est un **semi-groupe fortement continu** (ou C_0 **semi-groupe**) d'opérateur linéaire borné sur X si

- 1) $T_0 = I$ (I désigne l'identité dans X),
- 2) $T_t T_s = T_{t+s}$, $\forall t, s > 0$ (propriété de semi-groupe),
- 3) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T_t x = x$, $\forall x \in X$.

Définition 6.2.2 Un opérateur A est le **générateur infinitésimal d'un semi-groupe** T_t si

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_t x - x}{t}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 6.2.3 Soit T_t un C_0 semi-groupe, alors le générateur infinitésimal A est un unique opérateur linéaire borné tel que $T_t = e^{tA}$. Il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$. De plus,

- 1) si $\omega = 0$, T_t est **uniformément borné**;
- 2) si de plus $M = 1$, T_t est un C_0 **semi-groupe de contractions**.

Dans la pratique, on s'intéresse au minimum de la constante ω .

Définition 6.2.4 La constante définie par

$$\omega_0(A) = \inf \{ \omega; \exists M \text{ telle que } \|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \}$$

est appelé le **taux de décroissance exponentielle** (ou la vitesse de convergence) de T_t . On dit que le semi-groupe T_t est **exponentiellement stable** quand $\omega_0 < 0$.

Cette constante peut également être caractérisée par

$$\omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{\|T_t\|}{t}.$$

Définition 6.2.5 Soit A un opérateur linéaire (borné ou non), l'ensemble **résolvant** $\rho(A)$ est l'ensemble des complexes λ tels que $\lambda - A$ est inversible et $(\lambda - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X . La famille des opérateurs linéaires bornés $R(\lambda; A) = \{(\lambda - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)\}$ est appelée la **résolvante** de A .

Le théorème de Hille-Yosida donne une condition nécessaire et suffisante sur la résolvante de A pour que A soit le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions.

Théorème 6.2.6 (Hille-Yosida) Un opérateur linéaire (non borné) A est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions $T_t, t \geq 0$ si et seulement si

- 1) A est fermé et de domaine dense, i.e., $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$,
- 2) l'ensemble résolvant $\rho(A) \supset \mathbb{R}^+$, et $\forall \lambda \geq 0, \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Semi-groupes dissipatifs

Définition 6.2.7 Un opérateur linéaire A dans X est dit **dissipatif** si $\langle Ax, x \rangle \leq 0, \forall x \in X$. Il est **m-dissipatif** s'il est dissipatif et $Im(\lambda I - A) = X, \forall \lambda > 0$.

On donne une caractérisation des opérateurs dissipatifs.

Théorème 6.2.8 Un opérateur linéaire est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0, \|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Théorème 6.2.9 (Lumer-Phillips) Soit A un opérateur linéaire de domaine dense sur X .

- 1) Si A est dissipatif, et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que l'image $Im(\lambda_0 - A) = X$, alors A est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions.
- 2) Réciproquement, si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe, alors A est m-dissipatif. De plus, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ et $\forall x^* \in \mathcal{F}(x)$, on a $Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Corollaire 6.2.10 Soit A un opérateur de domaine dense sur X . Si A et son adjoint A^* sont dissipatifs, alors A est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions.

Définition 6.2.11 Un opérateur A est dit **fermé** si son graphe $G(A)$ est fermé. Un opérateur A_1 est une **extension** si son graphe $G(A) \subset G(A_1)$, autrement dit, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_1)$ et $Ax = A_1x, \forall x \in \mathcal{D}(A)$. L'opérateur A est dit **fermable** s'il existe une extension fermée de A .

Théorème 6.2.12 Soit A un opérateur dissipatif sur X .

- 1) Si il exist $\lambda_0 > 0, Im(\lambda_0 - A) = X$, alors $\forall \lambda > 0$, on a $Im(\lambda - A) = X$.
- 2) Si A est fermable, alors la fermeture \bar{A} est aussi dissipatif.
- 3) Si $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, alors A est fermable.

Groupes d'opérateurs bornés

Définition 6.2.13 Si dans la Définition 6.2.1, la propriété de semi-groupe (2) est valable pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, alors on dit que T_t est un C_0 **groupe d'opérateurs bornés**.

Théorème 6.2.14 (Stone) A est le générateur d'un groupe d'opérateur unitaire sur X si et seulement si A est anti-adjoint, i.e. $A^* = -A$.

Semi-groupes analytiques

Théorème 6.2.15 Soit A le générateur d'un C_0 semi-groupe uniformément borné T_t . Supposons que $0 \in \rho(A)$, alors on a l'équivalence entre les assertions suivantes :

1) T_t peut se prolonger en un semi-groupe analytique sur un domaine sectoriel

$$\Delta_\theta = \{z; |\arg(z)| < \theta\}$$

et il est uniformément borné dans chaque sous-domaine sectoriel fermé de Δ_θ .

2) Il existe une constante C telle que pour chaque $\delta > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|(\sigma + i\tau - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

3) Il existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ et $M > 0$ telles que

$$\rho(A) \supset S_\theta = \{\lambda; |\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$$

et

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in S_\theta, \lambda \neq 0.$$

4) T_t est différentiable par rapport à $t > 0$ et il existe une constante C telle que

$$\|AT_t\| \leq \frac{C}{t}, \quad t > 0.$$

Théorie de perturbation des semi-groupes

- perturbation des opérateurs linéaires bornés

Théorème 6.2.16 Soient X un espace de Banach, A le générateur d'un C_0 semi-groupe T_t sur X vérifiant $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$. Si B est un opérateur linéaire borné sur X , alors $A + B$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe S_t sur X vérifiant $\|S_t\| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$.

- perturbation des semi-groupes analytiques

Théorème 6.2.17 Soient A le générateur d'un semi-groupe analytique, B un opérateur linéaire fermé vérifiant $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ et

$$\|Bx\| \leq \alpha\|Ax\| + \beta\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que quand $0 \leq \alpha \leq \delta$, $A + B$ est le générateur d'un semi-groupe analytique.

Corollaire 6.2.18 (*perturbation bornée*) Soit A le générateur d'un semi-groupe analytique. Si B est un opérateur linéaire borné, alors $A+B$ est le générateur d'un semi-groupe analytique.

Corollaire 6.2.19 (*perturbation de Kato*) Soient A le générateur d'un semi-groupe analytique, B un opérateur fermé vérifiant $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ et

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que quand $0 \leq \alpha \leq \delta$, $A+B$ est le générateur d'un semi-groupe analytique.

- perturbation des semi-groupes de contractions

Théorème 6.2.20 Soit A le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions. Soit B un opérateur dissipatif vérifiant $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ et

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

pour certains $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta \geq 0$. Alors $A+B$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions.

Corollaire 6.2.21 (*perturbation bornée*) Soit A le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions. Si B est un opérateur dissipatif et borné ($\|Bx\| \leq \beta \|x\|$), alors $A+B$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions.

Equations d'évolution linéaires

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{\phi} = A\phi, & t \geq 0, \\ \phi(0) = \phi_0. \end{cases}$$

Le théorème suivant permet d'établir un rapport entre l'existence de solution du problème de Cauchy et la dissipativité de l'opérateur A .

Théorème 6.2.22 (*Hille-Yosida-Phillips*) Supposons que A est m -dissipatif sur un espace de Banach X , de domaine dense $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Alors il existe un unique semi-groupe de contractions T_t tel que

1) Pour tout $\phi_0 \in \mathcal{D}(A)$, $\phi(t) = T_t\phi_0$ est une solution forte du problème de Cauchy (Σ) . De plus,

$$\phi \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty); X).$$

2) Pour tout $\phi_0 \in X$, $\phi(t) = T_t\phi_0$ est une solution faible du problème de Cauchy (Σ) . De plus,

$$\phi \in \mathcal{C}([0, \infty); X).$$

Soit A le générateur d'un C_0 semi-groupe T_t . Dans un espace de Banach de dimension finie, il est clair que si la condition spectrale $\sup\{Re(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\} = \sigma < 0$ est vérifiée, alors $\|T_t\|$ décroît exponentiellement. En effet, le spectre d'un opérateur linéaire dans un espace de Banach de dimension finie n'est qu'un spectre ponctuel. Dans un espace de Banach de dimension infinie, seule la condition spectrale ne suffit pas de garantir la décroissance exponentielle. En prolongeant $T - t$ dans un domaine sectoriel complexe, on a

Théorème 6.2.23 *Soit A le générateur d'un semi-groupe analytique T_t . Si la condition spectrale*

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} Re(\lambda) = \sigma < 0$$

est vérifiée, alors il existe des constantes $M \geq 1$ et $\mu > 0$ telles que $\|T_t\| \leq Me^{-\mu t}$.

***P**roof is the idol before whom the pure mathematician tortures himself.*

Sir Arthur Eddington, *The nature of the physical world* (1935).

Annexe A

Preuve du Lemme 2.4.7 : Il s'agit de montrer que $Im(I - A^\kappa) = X$. On commence par le cas où $\omega_* = 0$. Pour un élément $g \in X$, on cherche à résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} g_1 = f_1 + \kappa x f_{1xx}(0) - f_2, \\ g_2 = f_2 + f_{1xxxx}, \end{cases} \quad (6.2.1)$$

vérifiant

$$\begin{cases} f_1(0) = f_{1x}(0) = 0, \\ f_{1xx}(1) = f_{1xxx}(1) = 0, \\ f_2(0) = 0, \\ f_{2x}(0) = \kappa f_{1xx}(0). \end{cases}$$

On remarque que les deux dernières conditions frontières ne sont pas nécessaires d'être imposées, comme elles sont satisfaites automatiquement au travers de la première équation de (6.2.1). En effet, supposons que f est la solution de cette équation, alors en évaluant la première équation en $x = 0$, on aura $f_2(0) = f_1(0) - g_1(0)$, or $f_1(0) = 0$ et $g \in X$ implique que $g_1(0) = 0$, on retrouve $f_2(0) = 0$. De même, en faisant dériver la première équation, on obtient $f_{2x}(0) = f_{1x}(0) + \kappa f_{1xx}(0) - g_{1x}(0)$, et on en déduit que $f_{2x}(0) = \kappa f_{1xx}(0)$.

En remplaçant la deuxième équation dans la première, on obtient

$$f_{1xxxx} + f_1 = g_1 + g_2 - \kappa x f_{1xx}(0).$$

On peut écrire l'équation sous la forme suivante

$$(\partial_x - \lambda_1)(\partial_x - \lambda_2)(\partial_x - \lambda_3)(\partial_x - \lambda_4)f_1 = \tilde{g},$$

où $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, $\lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$, $\lambda_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i)$ et $\tilde{g} = g_1 + g_2 - \kappa x f_{1xx}(0)$. En effet,

$$\begin{aligned} & (\partial_x - \lambda_1)(\partial_x - \lambda_2)(\partial_x - \lambda_3)(\partial_x - \lambda_4)f_1 \\ &= f_1^{(4)} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)f_1''' \\ & \quad + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)f_1'' \\ & \quad - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4)f_1' + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 f_1 \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 &= 1,\end{aligned}$$

d'où on retrouve $(\partial_x - \lambda_1)(\partial_x - \lambda_2)(\partial_x - \lambda_3)(\partial_x - \lambda_4)f_1 = f_1^{(4)} + f_1$.

En posant $\psi_1 = (\partial_x - \lambda_2)(\partial_x - \lambda_3)(\partial_x - \lambda_4)f_1$, $\psi_2 = (\partial_x - \lambda_3)(\partial_x - \lambda_4)f_1$ et $\psi_3 = (\partial_x - \lambda_4)f_1$, on obtient

$$\begin{cases} \psi_1(x) = e^{\lambda_1 x} \psi_1(0) + \int_0^x e^{\lambda_1(x-\tau)} \tilde{g}(\tau) d\tau, \\ \psi_2(x) = e^{\lambda_2 x} \psi_2(0) + \int_0^x e^{\lambda_2(x-\tau)} \psi_1(\tau) d\tau, \\ \psi_3(x) = e^{\lambda_3 x} \psi_3(0) + \int_0^x e^{\lambda_3(x-\tau)} \psi_2(\tau) d\tau, \\ f_1(x) = e^{\lambda_4 x} f_1(0) + \int_0^x e^{\lambda_4(x-\tau)} \psi_3(\tau) d\tau. \end{cases}$$

En tenant compte de la condition $f_1(0) = 0$, on a

$$f_1(x) = \int_0^x e^{\lambda_4(x-\tau)} \psi_3(\tau) d\tau.$$

Comme $f_{1x} = \lambda_4 f_1(x) + \psi_3(x)$ et $f_{1x}(0) = 0$, on en déduit que $\psi_3(0) = 0$. Ceci implique que

$$\psi_3(x) = \int_0^x e^{\lambda_3(x-\tau)} \psi_2(\tau) d\tau.$$

De $\psi_3 = f_{1x} - \lambda_4 f_1$ on a $\psi_{3x} = f_{1xx} - \lambda_4 f_{1x}$, d'où on a

$$\psi_2 = \psi_{3x} - \lambda_3 \psi_3 = f_{1xx} - (\lambda_3 + \lambda_4) f_{1x} + \lambda_3 \lambda_4 f_1.$$

En plus on a

$$\psi_2(0) = f_{1xx}(0)$$

et

$$\psi_2(x) = e^{\lambda_2 x} f_{1xx}(0) + \int_0^x e^{\lambda_2(x-\tau)} \psi_1(\tau) d\tau.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_{2x} - \lambda_2 \psi_2 \\ &= f_{1xxx} - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) f_{1xx} + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_4 \lambda_2) f_{1x} - \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 f_1.\end{aligned}$$

et

$$\psi_1(0) = f_{1xxx}(0) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) f_{1xx}(0)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \psi_1(0) + \int_0^x e^{\lambda_1(x-\tau)} (g_1 + g_2 - \kappa \tau f_{1xx}(0)) d\tau \\ &= e^{\lambda_1 x} \psi_1(0) + \int_0^x e^{\lambda_1(x-\tau)} (g_1 + g_2) d\tau - \kappa f_{1xx}(0) \int_0^x e^{-\lambda_1(x-\tau)} \tau d\tau.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \psi_2(0) + \int_0^x e^{\lambda_2(x-\tau)} \psi_1(\tau) d\tau \\ &= e^{\lambda_2 x} \psi_2(0) + e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau} \cdot \\ &\quad \left\{ \psi_1(0) + \int_0^\tau e^{-\lambda_1 \tau_2} (g_1 + g_2) d\tau_2 - \kappa f_{1xx}(0) \int_0^\tau e^{-\lambda_1 \tau_2} \tau_2 d\tau_2 \right\} d\tau.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_3(x) &= e^{\lambda_3 x} \psi_3(0) + \int_0^x e^{\lambda_3(x-\tau)} \psi_2(\tau) d\tau \\ &= e^{\lambda_3 x} \psi_3(0) + e^{\lambda_3 x} \int_0^x e^{(\lambda_2 - \lambda_3)\tau} \cdot \left\{ \psi_2(0) + \int_0^\tau e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau_2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[\psi_1(0) + \int_0^{\tau_2} e^{-\lambda_1 \tau_3} (g_1 + g_2) d\tau_3 - \kappa f_{1xx}(0) \int_0^{\tau_2} e^{-\lambda_1 \tau_3} \tau_3 d\tau_3 \right] d\tau_2 \right\} d\tau.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_1(x) &= e^{\lambda_4 x} \psi_4(0) + \int_0^x e^{\lambda_4(x-\tau)} \psi_3(\tau) d\tau \\ &= e^{\lambda_4 x} \psi_3(0) + e^{\lambda_4 x} \int_0^x e^{(\lambda_3 - \lambda_4)\tau} \int_0^\tau e^{(\lambda_2 - \lambda_3)\tau_2} \cdot \left\{ \psi_2(0) + \int_0^{\tau_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau_3} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[\psi_1(0) + \int_0^{\tau_3} e^{-\lambda_1 \tau_4} (g_1 + g_2) d\tau_4 - \kappa f_{1xx}(0) \int_0^{\tau_3} e^{-\lambda_1 \tau_4} \tau_4 d\tau_4 \right] d\tau_3 \right\} d\tau_2 d\tau.\end{aligned}$$

En résumé, $f_1(x) = C_1(x)\psi_1(0) + C_2(x)\psi_2(0) + C_3(x)f_{1xx}(0) + C_4(x)$ avec C_i indépendant de f_1 . Ainsi les conditions frontières à droite $f_{1xx}(1) = f_{1xxx}(1) = 0$ se traduisent comme suivant

$$\begin{cases} C_1''(1)\psi_1(0) + C_2''(1)\psi_2(0) + C_3''(1)f_{1xx}(0) + C_4''(1) = 0 \\ C_1'''(1)\psi_1(0) + C_2'''(1)\psi_2(0) + C_3'''(1)f_{1xx}(0) + C_4'''(1) = 0 \end{cases}$$

Or $\psi_1(0) = f_{1xxx}(0) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)f_{1xx}(0)$ et $\psi_2(0) = f_{1xx}(0)$, on a alors

$$\begin{cases} [C_2''(1) + C_3''(1) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)C_1''(1)]f_{1xx}(0) + C_1''(1)f_{1xxx}(0) = -C_4''(1) \\ [C_2'''(1) + C_3'''(1) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)C_1'''(1)]f_{1xx}(0) + C_1'''(1)f_{1xxx}(0) = -C_4'''(1). \end{cases}$$

Pour que le système ci-dessus admette au moins une paire de solutions $(f_{1xx}(0), f_{1xxx}(0))$ non triviale, il suffit que le déterminant

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} C_2''(1) + C_3''(1) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)C_1''(1) & C_1''(1) \\ C_2'''(1) + C_3'''(1) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)C_1'''(1) & C_1'''(1) \end{pmatrix} \\ &= C_2''(1)C_1'''(1) + C_3''(1)C_1'''(1) - C_2'''(1)C_1''(1) - C_3'''(1)C_1''(1) \neq 0. \end{aligned}$$

(D'après des calculs, on peut donner ici les expressions explicites de chaque terme.

$$\begin{aligned} C_2(x) &= e^{\lambda_4 x} \int_0^x e^{(\lambda_3 - \lambda_4)\tau} \cdot \left(\int_0^\tau e^{(\lambda_2 - \lambda_3)\tau_2} d\tau_2 \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} \left[\frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_4 x}}{\lambda_2 - \lambda_4} - \frac{e^{\lambda_3 x} - e^{\lambda_4 x}}{\lambda_3 - \lambda_4} \right] \end{aligned}$$

$$C_2''(1) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} \left[\frac{\lambda_2^2 e^{\lambda_2} - \lambda_4^2 e^{\lambda_4}}{\lambda_2 - \lambda_4} - \frac{\lambda_3^2 e^{\lambda_3} - \lambda_4^2 e^{\lambda_4}}{\lambda_3 - \lambda_4} \right]$$

$$C_2'''(1) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} \left[\frac{\lambda_2^3 e^{\lambda_2} - \lambda_4^3 e^{\lambda_4}}{\lambda_2 - \lambda_4} - \frac{\lambda_3^3 e^{\lambda_3} - \lambda_4^3 e^{\lambda_4}}{\lambda_3 - \lambda_4} \right]$$

$$\begin{aligned} C_1(x) &= e^{\lambda_4 x} \int_0^x e^{(\lambda_3 - \lambda_4)\tau} \cdot \left[\int_0^\tau e^{(\lambda_2 - \lambda_3)\tau_2} \cdot \left(\int_0^{\tau_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau_3} d\tau_3 \right) d\tau_2 \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_4 x}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} - \frac{e^{\lambda_3 x} - e^{\lambda_4 x}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_4 x}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} + \frac{e^{\lambda_3 x} - e^{\lambda_4 x}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1''(1) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1^2 e^{\lambda_1} - \lambda_4^2 e^{\lambda_4}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} - \frac{\lambda_3^2 e^{\lambda_3} - \lambda_4^2 e^{\lambda_4}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_2^2 e^{\lambda_2} - \lambda_4^2 e^{\lambda_4}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} + \frac{\lambda_3^2 e^{\lambda_3} - \lambda_4^2 e^{\lambda_4}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1'''(1) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1^3 e^{\lambda_1} - \lambda_4^3 e^{\lambda_4}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} - \frac{\lambda_3^3 e^{\lambda_3} - \lambda_4^3 e^{\lambda_4}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_2^3 e^{\lambda_2} - \lambda_4^3 e^{\lambda_4}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} + \frac{\lambda_3^3 e^{\lambda_3} - \lambda_4^3 e^{\lambda_4}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3(x) &= e^{\lambda_4 x} \int_0^x e^{(\lambda_3 - \lambda_4)\tau} \cdot \left\{ \int_0^\tau e^{(\lambda_2 - \lambda_3)\tau_2} \cdot \left[\int_0^{\tau_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau_3} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\int_0^{\tau_3} e^{-\lambda_1 \tau_4} \tau_4 d\tau_4 \right) d\tau_3 \right] d\tau_2 \right\} d\tau \\ &= \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2^2 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ &\quad + \frac{e^{\lambda_3 x}}{\lambda_3^2 (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} + \frac{e^{\lambda_4 x}}{\lambda_4^2 (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} x + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} \right) \end{aligned}$$

$$C_3''(1) = \frac{e^{\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \frac{e^{\lambda_2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ + \frac{e^{\lambda_3}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} + \frac{e^{\lambda_4}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)}$$

$$C_3'''(1) = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ + \frac{\lambda_3 e^{\lambda_3}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} + \frac{\lambda_4 e^{\lambda_4}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)}$$

$$C_4(x) = e^{\lambda_4 x} \int_0^x e^{(\lambda_3 - \lambda_4)\tau} \cdot \left\{ \int_0^\tau e^{(\lambda_2 - \lambda_3)\tau_2} \cdot \left[\int_0^{\tau_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau_3} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \left(\int_0^{\tau_3} e^{-\lambda_1 \tau_4} (g_1 + g_2) d\tau_4 \right) d\tau_3 \right] d\tau_2 \right\} d\tau.$$

et on vérifie que $C_2''(1)C_1'''(1) + C_3''(1)C_1'''(1) - C_2'''(1)C_1''(1) - C_3'''(1)C_1''(1) \neq 0.$ ■

***L'**analyse est parfois un moyen de se dégouter en détail de ce qui était supportable dans son ensemble.*

Paul Valéry, *Mauvaises pensées et autres* (1942).

Annexe B

Calcul des matrices M_1 , M_2 , P et Q

De l'expression

$$\hat{w}_2 = \tilde{w}_0^{(2)}(t) \phi_2^0(x) + \sum_{i=1}^N [\hat{w}_i^{(2)}(t) \phi_1^i(x) + \tilde{w}_i^{(2)}(t) \phi_2^i(x)]$$

on déduit que

$$\hat{w}_{2x}(0, t) = \tilde{w}_0^{(2)}$$

car on a $\phi_{2x}^0(0) = 1$ et $\phi_{jx}^i(0) = 0$, $\forall j = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$ d'après la construction de fonctions hermitiennes (prolongement par zéro). De même, en tenant compte que $\phi_{1xx}^1(0) = H_{3xx}^0(0) + H_{1xx}^1(0) = \frac{6}{h^2}$, $\phi_{2xx}^1(0) = H_{4xx}^0(0) + H_{2xx}^1(0) = \frac{-2}{h}$ et $\phi_{jxx}^i(0) = 0$ $\forall j = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned} w_{1xx}(0, t) &= \sum_{i=1}^N w_i^{(1)}(t) \phi_1^i(x) + \tilde{w}_i^{(1)}(t) \phi_2^i(x) \\ &= \frac{6}{h^2} w_1^{(1)} - \frac{2}{h} \tilde{w}_1^{(1)} \end{aligned}$$

et

$$\hat{w}_{1xx}(0, t) = \frac{6}{h^2} \hat{w}_1^{(1)} - \frac{2}{h} \tilde{w}_1^{(1)}.$$

Ainsi la condition frontière $\hat{w}_{2x}(0, t) = \kappa(\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t))$ se traduit comme

$$\tilde{w}_0^{(2)}(t) = \kappa \left(\frac{6}{h^2} \hat{w}_1^{(1)}(t) - \frac{2}{h} \tilde{w}_1^{(1)}(t) - \frac{6}{h^2} w_1^{(1)}(t) + \frac{2}{h} \tilde{w}_1^{(1)}(t) \right).$$

Or on sait que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_2^0 \phi_1^1 dx &= \frac{104}{105} h, & \int_0^1 \phi_{2xx}^0 \phi_{1xx}^1 dx &= -6h, \\ \int_0^1 \phi_2^0 \phi_2^1 dx &= \frac{-8}{35} h^2, & \int_0^1 \phi_{2xx}^0 \phi_{2xx}^1 dx &= 2h^2, \\ \int_0^1 \phi_2^0 \phi_j^i dx &= 0, & \int_0^1 \phi_{2xx}^0 \phi_{jxx}^i dx &= 0 \quad \forall i = 2, \dots, N, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Ceci donne les expressions de M_1 et M_2 .

Il reste à calculer le produit scalaire $\int_0^1 F_{xx} \phi_{jxx}^i dx$. Lorsque $\omega_* = 0$, il est clair que $F(x) = x$ et $F_{xx}(x) = 0$. Considérons le cas où la vitesse angulaire ω_* est non nulle. Commençons par le cas où ω_* est une constante. D'après le calcul, la solution de l'équation différentielle (3.3.7) :

$$\begin{cases} F_{xxxx}(x) - \omega_*^2 F(x) = 0, \\ F(0) = F_{xx}(1) = F_{xxx}(1) = 0, \\ F_x(0) = 1 \end{cases}$$

est de la forme

$$F(x) = A[ch(\alpha x) - \cos(\alpha x)] + B[sh(\alpha x) - \sin(\alpha x)] + \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x),$$

où

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2\alpha [1 + ch(\alpha) \cos(\alpha)]} \begin{pmatrix} ch(\alpha) \sin(\alpha) - sh(\alpha) \cos(\alpha) \\ ch(\alpha) \cos(\alpha) - sh(\alpha) \sin(\alpha) + 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \sqrt{\omega_*}$.

Ainsi la dérivée seconde de F s'écrit comme

$$F_{xx}(x) = \alpha^2 \{ A[ch(\alpha x) + \cos(\alpha x)] + B[sh(\alpha x) + \sin(\alpha x)] - \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) \}.$$

Rappelons les fonctions hermitiennes

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2), & \tilde{H}_2(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1), \\ \tilde{H}_3(\xi) &= \frac{1}{4}(-\xi^3 + 3\xi + 2), & \tilde{H}_4(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \end{aligned}$$

En tenant compte du changement de variables $\xi_i = \frac{2x - (2i + 1)h}{h} = \frac{2x}{h} - (2i + 1)$ avec $\beta = \frac{2}{h}$, $\gamma_i = -(2i + 1)$ et $\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h}$, on obtient

$$\begin{aligned} H_{1xx}^i(x) &= \frac{6}{h^2}(\beta x + \gamma_i), & H_{2xx}^i(x) &= \frac{3}{h}(\beta x + \gamma_i) - \frac{1}{h}, \\ H_{3xx}^i(x) &= \frac{-6}{h^2}(\beta x + \gamma_i), & H_{4xx}^i(x) &= \frac{3}{h}(\beta x + \gamma_i) + \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \phi_1^0(x) &= H_1^0(x), \\ \phi_2^0(x) &= H_2^0(x) \end{aligned}$$

avec le support $\text{supp}(\phi_{jxx}^0) = E_0$,

$$\phi_{1xx}^i(x) = H_{3xx}^{i-1}(x) + H_{1xx}^i(x),$$

$$\phi_{2xx}^i(x) = H_{4xx}^{i-1}(x) + H_{2xx}^i(x)$$

avec le support $\text{supp}(\phi_{jxx}^i) = E_{i-1} \cup E_i, i = 1, \dots, N-1$ et

$$\phi_{1xx}^N(x) = H_{3xx}^{N-1}(x),$$

$$\phi_{2xx}^N(x) = H_{4xx}^{N-1}(x)$$

avec le support $\text{supp}(\phi_{jxx}^N) = E_N$.

En résumé, pour $1 < i < N$ on a

$$\begin{aligned} a_1^i &= \int_0^1 F_{xx} \phi_{1xx}^i dx = \int_0^1 F_{xx} H_{1xx}^i(x) dx + \int_0^1 F_{xx} H_{3xx}^{i-1} dx \\ &= \frac{6\alpha^2}{h^2} \left\{ A(ch_1^i + \cos_1^i - ch_1^{i-1} - \cos_1^{i-1}) + B(sh_1^i + \sin_1^i - sh_1^{i-1} - \sin_1^{i-1}) - \frac{1}{\alpha}(\sin_1^i - \sin_1^{i-1}) \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_2^i &= \int_0^1 F_{xx} \phi_{2xx}^i dx = \int_0^1 F_{xx} H_{2xx}^i(x) dx + \int_0^1 F_{xx} H_{4xx}^{i-1} dx \\ &= \frac{3\alpha^2}{h} \left\{ A(ch_1^i + \cos_1^i + ch_1^{i-1} + \cos_1^{i-1}) + B(sh_1^i + \sin_1^i + sh_1^{i-1} + \sin_1^{i-1}) - \frac{1}{\alpha}(\sin_1^i - \sin_1^{i-1}) \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{h} \left\{ A(ch_0^i + \cos_0^i - ch_0^{i-1} - \cos_0^{i-1}) + B(sh_0^i + \sin_0^i - sh_0^{i-1} - \sin_0^{i-1}) - \frac{1}{\alpha}(\sin_0^i - \sin_0^{i-1}) \right\}, \end{aligned}$$

où

$$ch_1^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} ch(\alpha x)(\beta x + \gamma_i) = [sh(\alpha x_{i+1}) + sh(\alpha x_i)] \frac{1}{\alpha} - [ch(\alpha x_{i+1}) - ch(\alpha x_i)] \frac{\beta}{\alpha^2},$$

$$ch_0^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} ch(\alpha x) = [sh(\alpha x_{i+1}) - sh(\alpha x_i)] \frac{1}{\alpha},$$

$$sh_1^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} sh(\alpha x)(\beta x + \gamma_i) = [ch(\alpha x_{i+1}) + ch(\alpha x_i)] \frac{1}{\alpha} - [sh(\alpha x_{i+1}) - sh(\alpha x_i)] \frac{\beta}{\alpha^2},$$

$$sh_0^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} sh(\alpha x) = [ch(\alpha x_{i+1}) - ch(\alpha x_i)] \frac{1}{\alpha},$$

$$\cos_1^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \cos(\alpha x)(\beta x + \gamma_i) = [\sin(\alpha x_{i+1}) + \sin(\alpha x_i)] \frac{1}{\alpha} + [\cos(\alpha x_{i+1}) - \cos(\alpha x_i)] \frac{\beta}{\alpha^2},$$

$$\cos_0^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \cos(\alpha x) = [\sin(\alpha x_{i+1}) - \sin(\alpha x_i)] \frac{1}{\alpha},$$

$$\sin_1^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(\alpha x)(\beta x + \gamma_i) = -[\cos(\alpha x_{i+1}) + \cos(\alpha x_i)] \frac{1}{\alpha} + [\sin(\alpha x_{i+1}) - \sin(\alpha x_i)] \frac{\beta}{\alpha^2},$$

$$\sin_0^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(\alpha x) = -[\cos(\alpha x_{i+1}) - \cos(\alpha x_i)] \frac{1}{\alpha}.$$

Notons ici que comme ϕ_i^k sont de support compact, il suffit de calculer le produit scalaire sur le support.

En conclusion, on a

$$P = \kappa \begin{pmatrix} a_1^1 \times \frac{6}{h^2} & a_1^1 \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 \times \frac{6}{h^2} & a_2^1 \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^i \times \frac{6}{h^2} & a_1^i \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^i \times \frac{6}{h^2} & a_2^i \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^N \times \frac{6}{h^2} & a_1^N \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^N \times \frac{6}{h^2} & a_2^N \times \frac{-2}{h} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas ω_* variante, il s'agit de remplacer ω_* par $\omega(t)$ pour obtenir l'expression de P . L'expression de la matrice Q est aussi facile à déterminer. En effet, d'après la définition de F on a $F_{xxxx} = \omega_*^2 F$, ceci implique que

$$\int_0^1 F_{xx} \phi_{jxx}^i dx = \omega_*^2 \int_0^1 F \phi_j^i dx.$$

Ainsi on obtient $Q = \omega_*^{-2} P$.

Il reste à déterminer les éléments de Q lorsque $\omega_* = 0$, c.-à-d., du produit scalaire

$$\int_0^1 x \phi_j^i dx.$$

On a pour $1 < i < N$

$$\begin{aligned} b_1^i &= \int_0^1 x \phi_1^i dx = \int_0^1 x H_1^i(x) dx + \int_0^1 x H_3^{i-1} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(d_i^3 - 3d_i^1 + 2d_i^0 - d_{i-1}^3 + 3d_{i-1}^1 + 2d_{i-1}^0 \right) \\ b_2^i &= \int_0^1 x \phi_2^i dx = \int_0^1 x H_2^i(x) dx + \int_0^1 x H_4^{i-1} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(d_i^3 - d_i^2 - d_i^1 + d_i^0 + d_{i-1}^3 + d_{i-1}^2 - d_{i-1}^1 - d_{i-1}^0 \right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}d_i^3 &= \beta^3 \left(\frac{x_{i+1}^5}{5} - \frac{x_i^5}{5} \right) + 3\beta^2 \gamma_i \left(\frac{x_{i+1}^4}{4} - \frac{x_i^4}{4} \right) + 3\beta \gamma_i^2 \left(\frac{x_{i+1}^3}{3} - \frac{x_i^3}{3} \right) + \gamma_i^3 \left(\frac{x_{i+1}^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} \right) \\d_i^2 &= \beta^2 \left(\frac{x_{i+1}^4}{4} - \frac{x_i^4}{4} \right) + 2\beta \gamma_i \left(\frac{x_{i+1}^3}{3} - \frac{x_i^3}{3} \right) + \gamma_i^2 \left(\frac{x_{i+1}^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} \right) \\d_i^1 &= \beta \left(\frac{x_{i+1}^3}{3} - \frac{x_i^3}{3} \right) + \gamma_i \left(\frac{x_{i+1}^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} \right) \\d_i^0 &= \frac{x_{i+1}^2}{2} - \frac{x_i^2}{2}.\end{aligned}$$

***I**l faut se méfier des ingénieurs, ça commence par la machine à coudre, ça finit par la bombe atomique.*

Marcel Pagnol, *Critique des critiques* (1949).

Bibliographie

- [1] S.Agmon. On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problem. *Comm. Pure Appl. Math.* 15 :119-147, 1962.
- [2] C.Alves, A.L.Silvestre, T.Takahashi and M.Tucsnak. Solving inverse source problems using observability. Applications to the Euler-Bernoulli plate equation. *accepté*, 2008.
- [3] B.d'Andréa-Novel. *Stabilisation exponentielle d'un système hybride de type pont roulant avec câble flexible par une approche cascade*. Ecole du CIMPA, Porto-Novo, Juillet 1997.
- [4] D.Auroux. *Algorithmes rapides pour le traitement d'images et l'assimilation de données*. Mémoire de l'Habilitation à Diriger la Recherche, Université de Toulouse 3, 2008.
- [5] S.A.Avdonin and W.Moran. Simultaneous control problems for systems of elastic strings and beams. *Syst. Contr. Lett.*, 44 :147-155, 2001.
- [6] J.Baillieul and M.Levi. Rotational elastic dynamics. *Physica*, 27D :43-62, 1987.
- [7] A.V.Balakrishnan. Compensator design for stability enhancement with collocated controllers. *IEEE Trans. Auto. Control*, 36 :994-1007, 1991.
- [8] C.Bardos, G.Lebeau and J.Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Contr. Optim.*, 30 : 1024-1065, 1992.
- [9] P.Bénilan and H.Touré. Sur l'équation générale $u_t = a(., u, \varphi(., u)_x)_x$ dans L^1 , II, Etude du problème d'évolution. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 12 :727-761, 1995.
- [10] S.K.Biswas and N.U.Ahmed. Optimal control of large space structures governed by a coupled system of ordinary and partial differential equations. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2 :1-18, 1989.
- [11] A.M.Bloch and E.S.Titi. On the dynamics of rotating elastic beams. *Proc. Conf. New Trends System Theory*, (Conte, Perdon and Wyman Eds.). Birkhäuser, Genova, Italy, 1990.
- [12] G.Bornard, F.Celle, G.Dauphin-Tanguy, G.Gilles, J.Lottin, L.Pronzato, S.Scavarda, D.Thomasset and E.Walter. *Systèmes non linéaires. 1. modélisation - estimation, chapter Observabilité et observateurs*, pp. 177-221. Automatique. Masson, 1993.

- [13] H.Bounit, H.Hammouri. Bounded feedback stabilization and global separation principle of distributed parameter systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, 42-3 :414-419, 1997.
- [14] H.Brézis. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [15] H.Brézis. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [16] N.Burq and M.Zworski. Geometric control in the presence of a black box. *J. Amer. Math. Soc.*, 17 :443-471, 2004.
- [17] L.A.Calvillo Corona. *Quelques contributions aux observateurs non linéaires à horizon glissant*. Thèse de Doctorat, INPG, 2002.
- [18] F.Celle, J.P.Gauthier, D.Kazakos and G.Sallet. Synthesis of nonlinear observers : a harmonic analysis approach. *Math. System Theory*, 22 :291-322, 1989.
- [19] N.Chafee. Asymptotic behaviour for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions. *J. Differential Equations* 18 : 111-134, 1975.
- [20] G.Chen, S.G.Krants, D.W.Ma, C.E.Wayne and H.H.West. The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation. *Operator Method For Control Problem, S.J. Lee (Ed.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Marcell-Dekker Inc., New York, 67-96, 1987.
- [21] B.Chentouf and J.F.Couchouren. Nonlinear feedback stabilization of a rotating body-beam system without damping. *ESAIM COCV*, 4 :515-535, 1999.
- [22] N.Cîndea, S.Micu and M.Tucsnak. An approximation method for exact controls of vibrating systems. *manuscrit*.
- [23] B.F.Conrad and M.Pierre. Stabilization of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback. *Rapport de recherche de l'INRIA*, No.1235, 1990.
- [24] J.M.Coron. On the null asymptotic stabilization of the two-dimensional incompressible Euler equations in a simply connected domain. *SIAM J. Contr. Optim.*, 37 : 1874-1896, 1999.
- [25] J.M.Coron and B.d'Andréa-Novel. Stabilization of a rotating body-beam without damping. *IEEE Trans. Auto. Control*, 43 :608-618, 1998.
- [26] R.F.Curtain and A.J.Pritchard. *Infinite Dimensional Linear Systems*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [27] R.F.Curtain and G.Weiss. Exponential stabilization of well-posed systems by collocated feedback. *SIAM J. Contr. Optim.*, 45 :273-297, 2006.
- [28] R.F.Curtain and H.Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer, New York, 1995.
- [29] A.J.Deguenon. *Observateurs des systèmes anti-adjoints de dimension infinie et applications*. Thèse de Doctorat, Université de Metz, 2005.

-
- [30] A.J.Deguenon, G.Sallet and C.Z.Xu. A Luenberger observer for infinite dimensional skew-symmetric systems with application to an elastic beam. *Proc. 2nd Int. Symp on Comm. Control and Signal*, Marrakech, 2006.
- [31] M.Demetriou. Natural second-order observers for second-order distributed parameter systems. *Syst. Contr. Lett.*, 51 :225-234, 2004.
- [32] M.Demetriou and F.Fahroo. Model reference adaptive control of structurally perturbed second-order distributed parameter systems. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 16 :773-799, 2006.
- [33] S.Dolecki and D.L.Russell. A general theory of observation and control. *SIAM J. Contr. Optim.*, 15 :185-220, 1977.
- [34] V.Dos Santos. *Contrôle frontière par modèle interne de systèmes hyperboliques : application à la régulation de canaux d'irrigation*. Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, 2004.
- [35] P.Dufour. *Contribution à la commande prédictive des systèmes à paramètres répartis non linéaires*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2000.
- [36] A.El Jai and A.J.Pritchard. *Capteurs et Actionneurs dans l'Analyse des Systèmes Distribués*. Masson, 1986.
- [37] L.C.Evans. *Partial Differential Equations*. Amer. Math. Society, Providence, RI, 1998.
- [38] K.J.Engel and R.Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer-Verlag, New York Inc., 1999.
- [39] M.Fliess, J.Lévine, P.Martin, and P.Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 61-6 :1327-1361, 1995.
- [40] M.Fliess and H.Mounier. Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach. *ESAIM COCV*, 3 :301-314, 1998.
- [41] H.Mounier and M.Fliess. An algebraic framework for infinite dimensional linear systems. *E-sta*, 1-1, 2004. <http://www.e-sta.see.asso.fr>.
- [42] M.Fliess. Variations sur la notion de contrôlabilité. *Constructive Algebra and Systems Theory*, (Hanzon and Hazewinkel Eds.). Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 267-305, 2006.
- [43] M.Fliess and H.Sira-Ramírez. Reconstructeurs d'état. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I*, 338 :91-96, 2004.
- [44] M.Fliess and H.Sira-Ramírez. Control via state estimations of some nonlinear systems. *Proc. Symp. Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Stuttgart, 2004. <http://hal.inria.fr/inria-00001096>.
- [45] J.C.Friedly. *Dynamic Behavior of Processes*. Prentice-Hall, INC, 1972.
- [46] J.P.Gauthier and I.Kupka. A separation principle for bilinear systems with dissipative drifts. *IEEE Trans. Auto. Control*, 37 :1970-1974, 1992.

- [47] J.P.Gauthier and C.Z.Xu. H^∞ -control of a distributed parameter system with non-minimum phase. *Int. J. Control*, 53 :45-79, 1991.
- [48] J.P.Gauthier, C.Z.Xu and A.Bounabat. An observer for infinite-dimensional skew-adjoint bilinear systems. *J. Math. Sys., Estimation and Control*, 8 :31-50, 1998.
- [49] B.Gebauer and O.Scherzer. Impedance-acoustic tomography. *SIAM J. Appl. Math.*, 69 :565-576, 2008.
- [50] B.Z.Guo. Riesz basis approach to the stabilization of flexible beam with a tip mass. *SIAM J. Contr. Optim.*, 39 :1736-1747, 2001.
- [51] B.Z.Guo. Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients. *SIAM J. Contr. Optim.*, 40 :1905-1923, 2002.
- [52] B.Z.Guo and X.Zhang. The regularity of the wave equation with partial Dirichlet control and colocated observation. *SIAM J. Contr. Optim.*, 44 :1598-1613, 2005.
- [53] B.Z.Guo and Z.C.Shao. Regularity of a Schrodinger equation with Dirichlet control and colocated observation. *Syst. Contr. Lett.*, 54 :1135-1142, 2005.
- [54] A.Haraux. *Systèmes Dynamiques Dissipatifs et Applications*. Masson, Paris, 1991.
- [55] M.Hautus. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, 72 :443-448, 1969.
- [56] F.L.Huang. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. Diff. Eqns* 1 :45-53, 1985.
- [57] L.Josserand. *Commande frontière par modèle interne de systèmes à paramètres distribués. Application à un double échangeur de chaleur*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 1996.
- [58] V.Jurdjevic and J.P.Quinn. Controllability and stability. *J. Differential Equations*, 28 :381-389, 1978.
- [59] R.E.Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5 :102-119, 1960
- [60] R.E.Kalman. A new approach to linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME J. Basic Eng, Ser. D*, 82 :35-45. 1960.
- [61] T.Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, 1966.
- [62] V.Komornik. *Exact Controllability and Stabilization : The Multiplier Method*. John Wiley and Masson, Chichester and Paris, 1994.
- [63] P.S.Krishnaprasad and J.E.Marsden. Hamiltonian structures and stability for rigid bodies with flexible attachments. *Rational Mechanics and Analysis*, 98-1 :71-93, 1987
- [64] H.Laousy, C.Z.Xu and G.Sallet. Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system. *IEEE Trans. Auto. Control*, 41 :241-245, 1996.

-
- [65] B.Laroche, P.Martin and P.Rouchon. Motion planing for the heat equation. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 10 :629-643, 2000.
- [66] I.Lasiecka. Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary. *J. Differential Equations*, 79 :340-381, 1989.
- [67] I.Lasiecka and R.Triggiani. $L^2(\Sigma)$ -regularity of the boundary to boundary operator B^*L for hyperbolic and Petrowski PDEs. *Abstract and Applied Analysis* 19 :1061-1139, 2003.
- [68] A.Le Pourhiet. *Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*, Cépaduès-Editions, Toulouse; 1988.
- [69] K.Lenz, H.Özbay, A.Tannenbaum, J.Turi and B.Morton. Frequency domain analysis and robust control design for an ideal flexible beam. *Automatica*, 27 :947-961, 1991.
- [70] L.Léon and E.Zuazua. Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretization of the beam equation. *ESAIM : COCV*, 8 :827-862, 2002.
- [71] X.D.Li, C.Z.Xu, Y.J.Peng and M.Tucsnak. On the numerical investigation of a Luenberger type observer for infinite-dimensional vibrating systems. *17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, July 2008.
- [72] X.D.Li, C.Z.Xu, Y.J.Peng and M.Tucsnak. Etude numérique sur un observateur du type Luenberger pour des systèmes de vibration en dimension infinie. *3^{èmes} Journées Doctorales/Journées Nationales MACS*, Angers, France, Mars 2009.
- [73] X.D.Li, C.Z.Xu. A further numerical investigation on Luenberger type observers for vibrating systems. *48th IEEE Conference on Decision and Control/Chinese Control Conference World Congress*, Shanghai, China, December 2009.
- [74] X.D.Li, C.Z.Xu. Infinite-dimensional Luenberger-like observers for a rotating body-beam system. *Syst. Contr. Lett.*, accepté sous révision.
- [75] J.Liéto. *Le Génie Chimique à l'Usage des Chimistes*. Lavoisier TEC & DOC, 1998.
- [76] J.L.Lions. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués. Tome 1 : Contrôlabilité exacte, vol. 8, Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris, 1988.
- [77] K.Liu, Z.Liu and B.Rao. Exponential stability of an abstract nondissipative linear system. *SIAM J. Contr. Optim.*, 40 :149-165, 2001.
- [78] C.Lobry. *Bases Mathématiques de la Théorie des Systèmes Asservis Non Linéaires, Analyse Appliquée et Informatique*. Université Bordeaux 1, 1976.
- [79] D.G.Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. AC-11, 2 :190-197, 1966.
- [80] Z.H.Luo, B.Z.Guo and O.Mörgul. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. Springer, London, 1999.
- [81] P.Martin and P.Rouchon. *Systèmes différentiellement plats*. Notes de cours, Journées XUPS, 1999.

- [82] O.Mörgül. Control of a rotating flexible structure. *IEEE Trans. Auto. Control*, 39 : 351-356, 1994.
- [83] T.D.Nguyen and O.Egeland. Tracking and observer design for a motorized Euler-Bernoulli beam. *Proc. 42th IEEE Conference on Decision and Control*, 3325-3330, Maui, Hawaii USA, 2003.
- [84] T.D.Nguyen and O.Egeland. Observer design for a towed seismic cable. *Proc. American Control Conference*, 2233-2238, Boston, Massachusetts, 2004.
- [85] U.Nieken, G.Kolios and G.Eigenberger. Limiting cases and approximate solutions for a fixed-bed reactors with periodic flow reversal. *AiChe*, 41-8, August 1995.
- [86] A.Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [87] K.Phung and X.Zhang. Time reversal focusing of the initial state for Kirchhoff plate. *SIAM J. Appl. Math.*, 68 :1535-1556, 2008.
- [88] S.Pohjolainen and I.Lätti. Robust controller for boundary control systems. *Int. J. Control*, 38 :1189-1197, 1983.
- [89] M.H.Protter and H.F.Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [90] K.Ramdani, T.Takahashi, G.Tenenbaum and M.Tucsnak. A spectral approach for the exact observability of infinite dimensional systems with skew-adjoint generator. *J. Funct. Anal*, 226 :193-229, 2005.
- [91] K.Ramdani, M.Tucsnak and G.Weiss. Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers. *Automatica*, to appear.
- [92] B.P.Rao. Le taux optimal de décroissance de l'énergie dans l'équation de poutre de Rayleigh. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 325 :737-742, 1997.
- [93] J.Rauch and M.Taylor. Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domain. *Indiana University Mathematics Journal*, 24 :79-86, 1974.
- [94] R.Rebarber and G.Weiss. Necessary conditions for exact controllability with a finite-dimensional input space. *Syst. Contr. Lett.*, 40 :217-227, 2000.
- [95] M.Renardy. On the linear stability of hyperbolic PDE's and viscoelastic flows. *Z. Angew Math. Phys. (ZAMP)*, 45 :854-865, 1994.
- [96] J.Rudolph. *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems*. Shaker Verlag, 2003.
- [97] D.L.Russell. Distributed parameter systems : an overview. *Encyclopedia of LIFE Support on Control Systems, Robotics and Automation I*, 933-979, 2002.
- [98] F.Simondon and H.Touré. A Lyapunov functional and long-time behaviour for a degenerate parabolic problem. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Gakkôtosho, Tokyo, 6-1 :243-266, 1996.

-
- [99] M.Slemrod. A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert spaces. *SIAM J. Contr. Optim.*, 12 :500-508, 1974.
- [100] E.D.Sontag. *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [101] O.J.Staffans and G.Weiss. *Transfer functions of regular linear systems Part II : The System Operator and the Lax-Phillips Semigroup*. Manuscript, 2000.
- [102] G.Strange and G.Fix. *An Analysis of the Finite Element Methods*. Patric-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1973.
- [103] A.Tchouso. *Étude de la stabilité asymptotique de quelques modèles de transfert de chaleur*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2004.
- [104] A.Tchouso, X.D.Li, C.Z.Xu and G. Sallet. Stabilité L^p exponentielle d'un réseau d'échangeurs thermiques avec diffusion et sans diffusion, *ARIMA, numéro spécial du colloque en l'honneur du professeur Claude Lobry*, Vol.9, 2009.
- [105] H.Touré. *Etude des équations générales $u_t - \varphi(u)_{xx} + f(u)_x = v$ par la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1* . Thèse de Doctorat, Université de Franche Comté, 1982.
- [106] R.Triggiani. On the stabilizability problem on the Banach space. *J. Math. Analysis and Applications*, 52 :383-403, 1975.
- [107] M.Tucsnak and G.Weiss. Simultaneous exact controllability and some applications. *SIAM J. Contr. Optim.*, 38 :1408-1427, 2000.
- [108] M.Tucsnak and G.Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Basel, 2009.
- [109] D.Vortmeyer and R.J. Schaefer. Equivalence of one- and two-phase models for heat transfer processes in packed beds : one dimensional theory. *Chemical Engineering Science*, 29 :485-491, 1974.
- [110] G.Weiss. Admissible observation operators for linear semigroups. *Israel J. Math.*, 65 :17-43, 1989.
- [111] G.Weiss. Regular linear systems with feedback. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 7 :23-57, 1994.
- [112] G.Weiss. Transfer functions of regular linear systems. Part I : Characterizations of regularity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 342 :827-854, 1994.
- [113] G.Weiss and R.F.Curtain. Exponential stabilization of vibrating systems by collocated feedback. *Proc. 7th IEEE Mediterranean Symposium on Control and Automation*. Haifa, Israel, June 1999.
- [114] G.Weiss and R.F.Curtain. Exponential stabilization of a Rayleigh beam using collocated control. *IEEE Trans. Auto. Control*, 53-3 :643-654, 2008.
- [115] C.Z.Xu. *Quelques résultats concrets sur la commande linéaire par l'approche H^∞* . Thèse de Doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble, Avril 1989.

- [116] C.Z.Xu. *Contrôle des systèmes hybrides EDO-EDP*. Ecole du CIPMA, Porto-Novo, Juillet 1997.
- [117] C.Z.Xu. *Commande des systèmes à paramètres distribués*. Mémoire de l'Habilitation à Diriger la Recherche, Université de Metz, 1997.
- [118] C.Z.Xu and J.Baillieul. Stabilizability and stabilization of a rotating body beam system with torque control. *IEEE Trans. Auto. Control*, 38 :1754-1765, 1993.
- [119] C.Z.Xu and J.P.Gauthier. Analyse et commande d'un échangeur thermique à contre-courant. *RAIRO APPII*, 25 :377-396, 1991.
- [120] C.Z.Xu, J.P.Gauthier and I.Kupka. Exponential stability of the heat exchanger equation. *Proc. European Control Conference*. 303-307, Groningen, The Netherlands, 1993.
- [121] C.Z.Xu, P.Ligarius and J.P.Gauthier. An observer for infinite-dimensional dissipative bilinear systems. *Computers Math. Applic.*, 29 :13-21, 1995.
- [122] C.Z.Xu and G.Sallet. Boundary stabilization of rotating flexible system. *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, 185. (Curtain, Bensoussan, and Lions Eds.). Springer-Verlag, New York, 347-365, 1992.
- [123] C.Z.Xu and G.Sallet. Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems. *ESAIM : COCV*, 7 :421-442, 2002.
- [124] C.Z.Xu and G.Weiss. Spectral properties of infinite-dimensional closed-loop systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17 :153-172, 2005.
- [125] K.Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.
- [126] T.I.Zelenyak. Stabilisation of solutions of boundary value problems for a second order parabolic equation with one space variable. *Differentsial'nye Uralvneniya*, 4 : 34-35, 1968 (Translated as *Diff. Eq.*, 4 :17-22, 1968).

