Problèmes de contrôle optimal du type bilinéaire gouvernés par des équations aux dérivées partielles d'évolution

Jean-Marc Clérin

UNIVERSITÉ D'AVIGNON ET DES PAYS DE VAUCLUSE

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AVIGNON

Discipline : Mathématiques appliquées et applications des mathématiques
École Doctorale : Informations, Structures, Systèmes (ED 166)

présentée et soutenue publiquement par

Jean-Marc CLÉRIN

le 18 novembre 2009

Titre :

Problèmes de contrôle optimal du type bilinéaire gouvernés par des équations aux dérivées partielles d'évolution

JURY

F. BONNANS	Directeur de recherche	INRIA Saclay	Président
M. MOUSSAOUI	Maître de Conférence	Université d'Avignon	Directeur de Thèse
J.-P. RAYMOND	Professeur	Université Paul Sabatier	Rapporteur
L. THIBAULT	Professeur	Université Montpellier 2	Examinateur

RAPPORTEURS

M. BERGOUNIOUX	Professeur	Université d'Orléans
J.-P. RAYMOND	Professeur	Université Paul Sabatier, Toulouse 3

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de problèmes de contrôle optimal qui sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles non linéaires. Notre contribution à ce domaine de recherche actuel et très actif porte sur une classe particulière. Il s'agit des problèmes « bilinéaires » pour lesquels le caractère non linéaire se traduit par la présence dans les équations d'état d'un terme bilinéaire relativement à l'état et au contrôle. Les difficultés liées à la non linéarité demeurent dans le cas bilinéaire mais nous pouvons dégager certaines propriétés spécifiques.

La thèse est organisée de la façon suivante. La première étape de l'étude consiste à obtenir des estimations a priori sur les solutions à partir des inégalités de Willett et Wong. (Elles généralisent l'inégalité de Gronwall qui est peu adaptée ici.) Ces estimations sont utilisées de façon intensive dans la suite. Les équations d'états bilinéaires sont des problèmes d'évolution bien posés au sens de Hadamard. Dans le cas où les contrôles subissent une contrainte liée aux états, ces problèmes sont des inclusions différentielles. Ces estimations a priori s'avèrent des outils adaptés à la démonstration de l'existence de solutions.

La suite de cette thèse est consacrée à l'existence de contrôles optimaux, puis à l'étude de la sensibilité relativement à une perturbation qui intervient de façon additive dans l'équation d'état. Vérifier des conditions suffisantes d'optimalité du second ordre autorise l'utilisation du théorème des fonctions implicites (ou d'un théorème des fonctions implicites généralisé dans le cas de contraintes de boîte sur les contrôles). Nous fournissons enfin sur des exemples, respectivement avec contraintes d'égalités et d'inégalités, une formule explicite des dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale.

L'équation d'état

Les équations aux dérivées partielles permettent de modéliser mathématiquement des phénomènes observés, entre autres, dans les domaines de la mécanique, de la thermodynamique, de la chimie ou de l'économie. En particulier, les équations d'évolution autorisent la prise en compte des interactions entre les objets étudiés et les contrôles que l'on peut exercer sur les phénomènes au cours du temps. Une part importante de la littérature mathématique relative à la théorie du contrôle est consacrée à des problèmes linéaires : les équations d'états qui gouvernent ces problèmes sont linéaires. Dans le cas d'équations aux dérivées partielles on pourra se reporter par exemple au livre de J.-L. Lions [37]. En ce qui concerne le problème de Bolza avec un coût convexe nous renvoyons à R.-T. Rockafellar [49] dans le cas où les espaces sont de dimensions finies et à V. Barbu et Th. Precupanu [5] ainsi qu'à V. Barbu [4] dans le cadre plus général des espaces de Banach.

Les progrès de la recherche dans des champs aussi variés que la mécanique, la physique, la biologie et l'économie ont stimulé l'étude des modèles non linéaires. Nous portons notre attention sur la classe des systèmes de dimension infinie de type parabolique et bilinéaire en suivant la terminologie introduite par C. Bruni, G. Di Pillo et G. Koch dans [13] : la bilinéarité est relative à l'état et au contrôle (voir des exemples chez [19], [10], [1]). Nous étudions également des systèmes sous forme d'inclusion différentielle (voir les travaux de E. S. Pyatnitskii [46] et de N. Papageorgiou [27]).

L'inconnue est la fonction état notée z et il y a deux paramètres : l'état initial z_0 et une fonction de perturbation f. A ceci s'ajoute une fonction notée u qui dans un premier temps peut être vue comme un paramètre mais qui, dans un second temps, jouera le rôle d'une commande. Voici le système d'évolution de dimension infinie avec condition initiale qui nous intéresse :

$$(E_{z_0,u,f}) \begin{cases} \dot{z}(t) + A(t, z(t)) = B(t, u(t), z(t)) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

La notation *p.p.* vaut pour « presque partout » (l'ensemble des points où l'égalité est fausse est de mesure de Lebesgue nulle). L'espace fonctionnel des états est imposé par les conditions au bord et le calcul du coût que nous n'explicitons pas dans cette partie. Le contrôle u apparaît dans le terme B que nous supposons bilinéaire relativement au contrôle et à l'état. L'opérateur A est, en toute généralité, non linéaire.

Triplet de Gelfand

Les états, définis sur l'intervalle de temps $[0, T]$, sont à valeurs vectorielles. Leurs dérivées par rapport au temps sont à comprendre au sens des dérivées de distributions vectorielles (voir l'annexe B). Le cadre fonctionnel des triplets d'évolution de Gelfand permet de définir les espaces adaptés aux images $z(t)$ et $\dot{z}(t)$. L'intégrabilité est au sens de Bochner (voir l'annexe A).

Dans tout ce qui suit, H est un espace de Hilbert séparable et V est un sous-espace dense dans H. On munit V d'une structure de Banach réflexif et séparable et l'espace H est identifié avec son dual H^* (c'est l'« espace-pivot »). De plus, les injections ci-dessous sont supposées continues et denses :

$$V \subseteq H \subseteq V^*.$$

Un tel triplet $V \subseteq H \subseteq V^*$ est appelé « triplet d'évolution » ([52]) ou « triplet de Gelfand ». Les normes sur H, V et V^* sont notées respectivement $|.|$, $\|.\|$ et $\|.\|_*$. Le produit scalaire sur H est noté $(.,.)_H$ et le crochet de dualité entre les espaces V^* et V est $\langle .,. \rangle_{V^* \times V}$ (ou plus simplement $(.,.)$ et $\langle .,. \rangle$). On impose enfin la compatibilité entre les deux produits :

$$(.,.)_H = \langle .,. \rangle_{|H \times V}.$$

Nous imposons que p appartienne à $[2, \infty[$ et nous notons

$$L^p(V) := L^p(0,T;V)$$

l'ensemble des classes d'applications fortement mesurables $v : [0,T] \to V$, intégrables au sens de Bochner ([5]), telles que

$$\int_0^T \|v(t)\|^p \, dt < \infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_p := (\int_0^T \|v(t)\|^p \, dt)^{1/p}.$$

En cas d'ambigüité sur la norme nous serons amenés à préciser les notations. Par exemple : $\|.\|_{L^p(V)}$ ou $\|.\|_{L^p(H)}$. Comme p est a fortiori strictement supérieur à 1, on peut identifier les espaces $(L^p(V))^*$ et $L^{p^*}(V^*)$ où p^* est le conjugué de p (voir [5], page 50) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

L'ensemble des états

$$W_{pp^*}(0,T) := \{z \in L^p(V) | z \text{ est absolument continue et } \dot{z} \in L^{p^*}(V^*)\}$$

muni de la norme

$$\|z\|_{W_p} := (\|z\|_p^2 + \|\dot{z}\|_{p^*}^2)^{1/2}$$

est un espace de Banach réflexif et séparable qui s'injecte continûment dans $C([0,T];H)$; autrement dit, tout élément de $W_{pp^*}(0,T)$ a un unique représentant continu. Des précisions concernant la notation $\dot{z}$ sont données dans l'annexe B. Lorsque p est égal à deux nous notons l'espace des états $W(0,T)$.

Le contrôle u appartient à l'espace $L^r(Y)$ où $r = \dfrac{p}{p-2}$ (on pose $r = \infty$ lorsque $p = 2$). A moins de signaler expressément le contraire, Y est un espace de Banach réflexif et séparable.

Hypothèses générales

(H_p) $p \in [2, \infty[$.
(H_{z_0}) $z_0 \in H$.
(H_f) $f \in L^{p^*}(H)$.
(H_A) $A : [0,T] \times V \to V^*$

1. $\forall v \in V, A(., v) : [0,T] \longrightarrow V^*$ est mesurable.
2. $A(t,.) : V \longrightarrow V^*$ est bornée pour presque tout $t \in [0,T]$. Plus précisément, en notant $s := \frac{p}{p-1-\alpha}$:
$$\exists \alpha \in [0, p-1], \exists a_1 \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+), \exists a_2 \in L^s(0,T;\mathbb{R}^+) \text{ tels que}$$
$$\|A(t,v)\|_* \leq a_1(t) + a_2(t)\|v\|^\alpha \quad p.p. \quad t \in [0,T], \forall v \in V.$$
On ne peut pas choisir α strictement supérieur à $p-1$ sinon s serait négatif.
3. L'opérateur $A(t,.)$ est p-coercif pour presque tout $t \in [0,T]$:
$$\exists K > 0 : \forall v \in V, \langle A(t,v), v \rangle \geq K\|v\|^p.$$
4. L'opérateur $A(t,.)$ est monotone pour presque tout $t \in [0,T]$:
$$\langle A(t,v_1) - A(t,v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$
5. Pour tous v_1 et v_2 appartenant à V, pour presque tout $t \in [0,T]$, l'opérateur A est hémicontinu :
$$\lambda \in [0, \infty[\longmapsto \langle A(t, v_1 + \lambda v_2), v_2 \rangle$$
est continue.

(H_u) $u \in L^r(Y)$ où $r = \dfrac{p}{p-2}$ et Y est un espace de Banach réflexif et séparable.
(H_B) $B : [0,T] \times Y \times H \longrightarrow H$

1. $\forall u \in Y, \forall v \in H, B(., u, v) : [0,T] \longrightarrow H$ est mesurable,
2. $\forall v \in V, B(t, ., v) \in \mathscr{L}(Y, H)$ pour presque tout $t \in [0,T]$,
3. $\forall u \in Y, B(t, u, .) \in \mathscr{L}(H)$ pour presque tout $t \in [0,T]$,
4. $\exists b > 0, \forall u \in Y, \forall v \in H : |B(t,u,v)| \leq b\|u\|_Y |v|$ pour presque tout $t \in [0,T]$.
5. On suppose enfin l'hémicontinuité de $B(t,u,.)$. Pour tous v_1 et v_2 appartenant à V, pour tout u appartenant à Y et pour presque tout t appartenant à $[0,T]$:
$$\lambda \in [0, \infty[\longmapsto \langle B(t, u, v_1 + \lambda v_2), v_2 \rangle$$
est continue.

Remarques.

1. La relation $r = \dfrac{p}{p-2}$ reliant les exposants p et r n'est pas fortuite. Elle nous permet d'assurer que le terme bilinéaire appartient à $L^{p^*}(V^*)$.
2. L'hypothèse $p \geq 2$ assure que $r \geq 1$.
3. L'opérateur A est borné, hémicontinu et monotone donc il est continu de V fort dans V^* faible (voir le théorème 9 dans l'annexe C).
4. L'exposant α de $(H_A)(2)$ est généralement égal à $p-1$ (cf. [38], th.1.2, p. 162).
5. Dans les travaux classiques d'étude du cas non linéaire, on considère parfois (voir par exemple [27]) un jeu différent d'hypothèses sur B. Notamment :
$$|B(t,u,v)| \leq b(\|u\|_Y + |v|^{2/p^*}).$$
Il est à noter que cette hypothèse n'est pas comparable avec celle que nous utilisons.

Problème bien posé

Le fait de traiter à part la non linéarité de A de celle introduite par la bilinéarité nous permet de démontrer que l'équation d'état $(E_{z_0,u,f})$ est un problème bien posé au sens de Hadamard. Autrement dit, nous vérifions les trois conditions ci-dessous :

1. l'équation $(E_{z_0,u,f})$ admet une solution z,
2. cette solution est unique,
3. cette solution dépend continûment des paramètres z_0, u et f.

Résultat 1 (Théorème 1)**.–** *Soit $p \geq 2$, $z_0 \in H$, $f \in L^{p^*}(V^*)$. Sous les hypothèses (H_A), (H_u) et (H_B), si l'injection de V dans H est compacte alors il existe une fonction et une seule appartenant à $W_{pp^*}(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$ qui est solution de $(E_{z_0,u,f})$.*

De plus, en notant $z_{z_0,u,f}$ le représentant continu à valeurs dans H qui prolonge la solution de $(E_{z_0,u,f})$ à $[0,T]$, la fonction
$$\begin{array}{ccc} H \times L^r(Y) \times L^{p^*}(H) & \longrightarrow & C([0,T];H) \\ (z_0,u,f) & \longmapsto & z_{z_0,u,f} \end{array}$$
est localement lipschitzienne.

Nous comparerons (voir les remarques qui suivent l'énoncé du théorème 1) les résultats d'existence et d'unicité du théorème ci-dessus avec un théorème général de J.-L. Lions (Théorème 1.2., chapitre 2, page 162, [38]). L'équation d'état $(E_{z_0,u,f})$ fait apparaître une partie non linéaire et une partie bilinéaire contenant le contrôle ; dans la suite, elles seront estimées séparément. On pourrait considérer leur somme en tant qu'une seule partie non linéaire. Cependant, des hypothèses du théorème de J.-L. Lions ne seraient pas vérifiées.

Problème avec loi de feedback

Dans ce chapitre nous élargissons la classe des problèmes modélisés en considérant le problème d'inclusion différentielle ci-dessous. En plus de vérifier l'équation d'état, les contrôles sont restreints à une partie de l'espace des contrôles qui dépend du temps et de l'état.

$$(E_U)\begin{cases} \dot{z}(t) + A(t, z(t)) = B(t, u(t), z(t)) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \\ z(0) = z_0 \text{ et } u(t) \in U(t, z(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \end{cases} \tag{1.2}$$

Il s'agit d'un problème d'inclusion différentielle où l'inconnue est la paire état-contrôle (z, u). L'état initial z_0 et la perturbation f sont fixés. Le problème $(E_{z_0,u,f})$ est un cas particulier de (E_U) : les images de l'application multivoque U sont toutes égales à l'espace des contrôles. Si U ne dépend pas des états alors c'est une contrainte « de boîte ». Enfin, dans le cas général, on parle de rétrocontrôle (également de contrôle feedback ou a priori ; l'équation d'état est alors une loi de feedback).

Il est à noter que l'hypothèse usuelle qui consiste à borner les termes non linéaires comme chez [27], [10] et [15] n'est pas adéquate dans notre cas bilinéaire. En effet, là encore, le fait de traiter à part la non linéarité de A de celle introduite par la bilinéarité nous permet d'obtenir le résultat d'existence. Pour cette raison, nous imposons une hypothèse mieux adaptée aux contrôles.

La présence d'une hypothèse qui lie a priori les contrôles aux états implique que, même si pour chaque contrôle admissible le problème est bien posé (voir le théorème 1 et [19]), nous devons prouver l'existence d'une solution. Une solution du problème est un couple composé d'un contrôle et d'un état associé. Cette difficulté est franchie dans le cadre mathématique des inclusions différentielles (cf. [3]). En premier lieu, nous établissons des estimations a priori à l'aide du lemme de Willett et Wong (voir [51] et [18]) qui s'avère un meilleur outil que le lemme de Gronwall-Bellman dans notre cas. Le lemme de Gronwall est cependant suffisant quand un contrôle a été fixé. De plus le lemme de Willett et Wong nous permet d'obtenir des majorations uniformes relativement aux contrôles dans les estimations a priori des états (voir [20]). Nous démontrons l'existence d'une solution avec un théorème de sélection mesurable (cf. [16]) ainsi qu'une version de type L^p du théorème de sélection continue de Fryszkowski (voir [28]).

Nous ajoutons la contrainte de rétrocontrôle ci-dessous.

(H_U) L'application multivoque U définie sur $[0, T] \times H$ prend ses valeurs dans l'ensemble des parties fermées et non vides de Y et vérifie les hypothèses ci-dessous.

1. $U(.,.)$ est de graphe mesurable,
2. Pour presque tout $t \in [0, T]$, $U(t, .)$ est semi-continue inférieurement. C'est à dire que, pour toute partie fermée F de Y, l'ensemble

$$\{x \in H : U(t, x) \subset F\}$$

est fermé dans H. De façon équivalente (cf. [31], prop. 2.26) : pour tout y appartenant à Y, l'application $x \mapsto d(y, U(t,x))$ est semi-continue supérieurement sur H.

3. $\exists \gamma \in [0, \infty[, \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \forall v \in H$:
$$|U(t,v)| := \sup\{\|u\|_Y : u \in U(t,v)\} \leq c_1 + c_2 |v|^\gamma \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

Remarque. Dans les travaux classiques sur les cas non linéaires (voir par exemple [27]), d'une part l'hypothèse $(H_B)(4)$ est remplacée par
$$|B(t,u,v)| \leq b(\|u\|_Y + |v|^{2/p^*})$$
qui n'est évidemment pas satisfaite dans le cas bilinéaire. D'autre part l'inégalité de $(H_U)(3)$ est remplacée par :
$$|U(t,v)| \leq c_2(1 + |v|^{2/p^*}).$$

Estimations a priori

Résultat 2 (Théorème 2).– *Sous les hypothèses* (H_p), (H_{z_0}), (H_f), (H_U), (H_B), (H_A) (1), *si A est positive au sens ci-dessous :*
$$\forall v \in V, \langle A(t,v), v\rangle \geq 0 \quad p.p. \quad t \in [0,T],$$
et si la condition
$$(\mathscr{H}) \qquad (|z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)})^{-\gamma/2} - \frac{2bc_2}{2bc_1+1}(e^{(bc_1+1/2)\gamma T} - 1) > 0$$
est vérifiée, alors il existe une constante M_1 telle que pour toute solution z de $(E_{z_0,u,f})$ on a l'estimation suivante :
$$(E_1) \quad \|z\|_{C([0,T];H)} \leq M_1$$
Si de plus les hypothèses (H_A) (2) et (3) sont vérifiées alors il existe des constantes M_2 et M_3 avec lesquelles on a les estimations ci-dessous pour toute solution z de $(E_{z_0,u,f})$:
$$\begin{array}{lll} (E_2) & \|z\|_{L^p(V)} & \leq M_2, \\ (E_3) & \|\dot{z}\|_{L^{p^*}(V^*)} & \leq M_3. \end{array}$$

Les démonstrations de ces estimations a priori reposent sur le lemme de Willett et Wong ([51]) qui généralise le lemme de Gronwall. Le résultat d'existence annoncé est :

Résultat 3 (Théorème 3).– *Sous les hypothèses* (H_p), (H_{z_0}), (H_f), (H_A), (H_u), (H_B), (H_U), *si $(\mathscr{H})$ est vérifiée et si V s'injecte de façon compacte dans H alors l'équation (E_U) admet une solution dans $W_{pp^*}(0,T) \times L^r(Y)$.*

Contrôle optimal

Nous nous intéressons ensuite au contrôle optimal de systèmes gouvernés par l'équation d'état non linéaire et de type bilinéaire que nous avons étudié dans le premier chapitre. C'est un problème de Bolza posé dans des espaces de Banach. Nous considérons des coûts convexes qui sont des sommes de termes prenant en compte séparément les coûts relatifs aux états et aux contrôles. Il est à noter que nous n'imposons pas la positivité à ces coûts. Nous démontrons l'existence d'une paire optimale puis des conditions nécessaires d'optimalité pour une telle paire optimale à l'aide des régularisées de Yosida et d'une méthode de pénalisation du coût (cf. [4]).

La condition initiale z_0 et la perturbation f sont fixées. Le coût est défini par

$$\begin{array}{rlcl} J: & L^p(H) \times L^r(Y) & \longrightarrow &]-\infty,\infty] \\ & (z,u) & \longmapsto & \ell(z(T)) + \int_0^T F(z(t))dt + \int_0^T G(u(t))dt. \end{array}$$

Le problème de contrôle optimal est

$$(P_{z_0,f}) \qquad \inf\{J(z,u) | z \text{ est solution de } (E_{z_0,u,f})\}.$$

Rappelons que

$$(E_{z_0,u,f}) \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) + A(t,z(t)) = B(t,u(t),z(t)) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = z_0. \end{array} \right.$$

En plus des hypothèses qui assurent le fait que $(E_{z_0,u,f})$ soit bien posé, nous introduisons les hypothèses (H_ℓ), (H_F) et (H_G) qui portent sur le coût (cf. [5] page 250).

(H_ℓ) $\quad \ell : H \longrightarrow [0,\infty]$

1. ℓ est convexe, semi-continue inférieurement (sci) et propre.
2. $D(\ell) \cap C_{z_0} \neq \emptyset$ où l'on définit le domaine effectif de ℓ

$$D(\ell) := \{v \in H : \ell(v) < \infty\}$$

et l'ensemble des états atteignables depuis l'état initial z_0

$C_{z_0} := \{v \in H, \exists u \in L^r(Y) : z_u(T) = v$

$$\text{et } |\int_0^T F(z_u(t))dt + \int_0^T G(u(t))dt| < \infty\}$$

où z_u est l'unique solution de $(E_{z_0,u,f})$.

(H_F) $\quad F : H \longrightarrow]-\infty,\infty]$

1. F est convexe, semi-continue inférieurement et propre.
2. $\exists c > 0 : F(\zeta) \geq -c|\zeta|, \forall \zeta \in H.$

3. F est localement bornée.

(H_G) $\quad G : Y \longrightarrow [0, \infty]$

1. L'espace des contrôles Y est un espace de Hilbert séparable.
2. G est convexe, semi-continue inférieurement et propre.
3. Dans le cas où $p > 2$ il existe une fonction continue, convexe et croissante $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie $w(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{w(x^2)}{x} = \infty$ et telle que
$$G(v) \geq w(\|v\|_Y^r), \quad \forall \in L^r(Y).$$
Si $p = 2$ alors l'on suppose que $G(v) \geq w(\|v\|_\infty)$.
4. Il existe $u_0 \in L^r(Y)$ tel que $G(u_0) \in L^r(0, T; \mathbb{R})$.

Pour établir les conditions nécessaires d'optimalité nous imposons à l'opérateur A d'être différentiable pour presque tout $t \in [0, T]$. Sa différentielle notée A' vérifie les hypothèses ci-dessous.

$(H_{A'})$ $A'(t, .) : V \to \mathscr{L}(V, V^*)$ $\quad p.p. \quad t \in [0, T]$

Pour tous v et w appartenant à V et pour presque tout t appartenant à $[0, T]$:

1. $A'(., v)w$ est mesurable,
2. il existe $\alpha_1 \in L(0, T; \mathbb{R}^+)$ tel que $\|A'(t, v)w\|_* \leq \alpha_1(t)\|w\|$;
3. il existe $\alpha_2 > 0$ tel que $\langle A'(t, v)w, w\rangle \geq \alpha_2\|w\|^p$.
4. il existe $\alpha_3 \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^+)$ tel que pour tous v et w appartenant à H : $\|A'(t, v) - A'(t, w)\|_{\mathscr{L}(H)} \leq \alpha_3(t)|v - w|$.

Résultat 4 (Théorème 4)**.–** *Sous les hypothèses (H_p), (H_{z_0}), (H_f), (H_A), (H_u) et (H_B), si l'injection de V dans H est compacte et si de plus l'on considère les hypothèses (H_ℓ), (H_F) et (H_G) alors le problème $(P_{z_0,f})$ admet au moins une paire optimale dans $C([0, T]; H) \times L^r(Y)$.*

Nous obtenons le système d'optimalité du problème $(P_{z_0,f})$.

Résultat 5 (Théorème 5)**.–** *Si $(\bar{z}, \bar{u})$ est une paire optimale pour le problème $(P_{z_0,f})$, en supposant $(H_{A'})$ et si $\bar{z}(T)$ appartient à l'intérieur de $D(\ell)$ alors il existe $(\bar{p}, \bar{q})$ appartenant à $C([0, T]; H) \times L^1(H)$ telle que pour presque tout $t \in [0, T]$:*

$$\begin{cases} -\dot{\bar{p}}(t) + [A'(t, \bar{z}(t))]^* \bar{p}(t) \in [B(t, \bar{u}(t), .)]^* \bar{p}(t) + \partial F(\bar{z}(t)) \\ \bar{p}(T) \in \partial\ell(\bar{z}(T)) \\ -(\bar{p}(t), B(t, ., \bar{z}(t))_H \in \partial G(\bar{u}(t)). \end{cases}$$

Précisons les notations. Pour tout $v \in V$, pour presque tout $t \in [0, T]$, l'opérateur linéaire $A'(t, v) \in \mathscr{L}(V, V^*)$ admet l'opérateur adjoint $[A'(t, v)]^* \in \mathscr{L}(V^*, V)$. Pour tout $u \in Y$, pour presque tout $t \in [0, T]$, l'opérateur $B(t, u, .) \in \mathscr{L}(H)$ admet l'adjoint $[B(t, u, .)]^* \in \mathscr{L}(H)$.

Analyse de sensibilité

La bilinéarité des équations d'état est un cas particulier de non linéarité pour lequel nous obtenons des résultats de sensibilité. Nous nous intéressons à une perturbation qui est présente sous la forme d'un terme additif dans l'équation d'état. Afin de focaliser notre attention sur le terme bilinéaire, nous analysons la sensibilité relative à cette perturbation pour des problèmes dont les équations d'état sont de type semi-linéaire. C'est à dire que, l'opérateur B étant encore bilinéaire relativement au contrôle et à l'état, l'opérateur A est supposé, à partir de maintenant, linéaire. De plus, le coût est supposé différentiable, quadratique et strictement convexe.

De nombreux modèles s'occupent de contrôles bornés presque partout. Sachant que r est infini, cette hypothèse habituelle sur les contrôles est compatible avec le fait de prendre p égal à deux. Dans les deux modèles étudiés ci-dessous, nous sommes dans le cas particulier où l'espace des contrôles est de dimension finie : $Y = \mathbb{R}^n$; autrement dit, les contrôles ne sont pas distribués sur le domaine d'espace.

Un premier exemple est développé. C'est un problème de contrôle optimal avec contrainte d'égalité. Nous étudions un modèle de déformation mécanique de la glace utilisant l'opérateur bilaplacien qui est du quatrième ordre. Le terme bilinéaire est de la forme $u \cdot \nabla z$. Cette forme particulière (voir [14]) permet d'obtenir des majorants dans les deux premières estimations a priori qui ne dépendent pas des contrôles. A. Addou et A. Benbrik ont démontré dans [1] que, sous réserve d'imposer à l'état initial d'être suffisamment petit, ce contrôle optimal était unique. En exploitant le système d'optimalité on obtient un résultat nouveau : la majoration a posteriori du contrôle optimal au sens de la norme L^2 et sa régularité relativement à la perturbation. Ainsi l'on démontre un premier résultat de régularité ; la fonction valeur optimale est localement lipschitzienne.

Etablir des estimations a priori sur les solutions éventuelles de l'équation d'état permettra dans ce qui suit d'utiliser des résultats de compacité. Nous nous référerons alors aux résultats d'existences démontrés dans la première partie. Avant d'aborder les estimations a priori proprement dites nous établissons un lemme qui traduit une propriété du terme bilinéaire souvent rencontrée dans les applications (cf. [14]) : $\langle u \cdot \nabla z, z \rangle = 0$. Cette propriété se révélera d'importance lors de l'étude du problème de contrôle optimal. En effet, nous démontrerons non seulement l'existence d'un contrôle optimal mais également son unicité.

Soit l'application qui à un contrôle associe l'unique solution de l'équation d'état associée lorsque l'état initial est fixé.

$$\theta : L^2(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,T;H) \to W(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$$

Comme l'équation d'état admet une unique solution quand les paramètres sont fixés, nous introduisons le coût réduit. Pour tout contrôle $u \in L^\infty(0,T)$, nous noterons

$$j(u) := J(\theta(u,f),u).$$

L'opérateur bilaplacien a des propriétés de différentiabilité ainsi nous pouvons démontrer plus que dans la première partie quant à la régularité de la solution relativement aux contrôles : l'application $\theta(.,f)$ est différentiable au sens de Fréchet. Sa dérivée directionnelle étant la solution d'une équation notée $(E.D.)$, nous serons à même de caractériser le contrôle optimal à l'aide du système d'optimalité qui est alors un système ordinaire où n'apparaissent que des égalités.

Résultat 6 (Proposition 10)**.–** *Pour z_0 et f fixés, l'application $\theta(.,f)$ est différentiable au sens de Fréchet. Pour tous u et v appartenant à $L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ sa première dérivée partielle, notée $\dfrac{\partial\theta}{\partial u}(u,f).v$, est l'unique solution de l'équation*

$$(E.D.)\left\{\begin{array}{l}\dot y(t)+\Delta^2 y(t)=u(t)\cdot\nabla y(t)+v(t)\cdot\nabla z(t)\quad p.p.\quad t\in[0,T]\\ y(0)=0\end{array}\right.$$

où z est l'unique solution de $(E_{z_0,u,f})$.

Résultat 7 (Théorème 6)**.–** *Le coût réduit j est directionnellement dérivable et, pour tous u et v appartenant à $L^2(0,T)$:*

$$j'(u).v = 2\Sigma_{i=1}^n\langle v_i, u_i + (p, \frac{\partial z}{\partial x_i})\rangle_{L^2(0,T)} \tag{1.3}$$

où $p\in L^2(0,T;V)$ est l'unique solution de l'équation adjointe ci-dessous.

$$(E.A.)\left\{\begin{array}{l}-\dot p(t)+\Delta^2 p(t)=u(t)\cdot\nabla p(t)+z(t)\quad p.p.\quad t\in[0,T]\\ p(T)=0.\end{array}\right.$$

Nous en déduisons l'unicité de la paire optimale.

Résultat 8 (Proposition 11)**.–** *Si $|z_0|+\sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors la paire optimale est unique dans $(W(0,T)\cap L^\infty(0,T;H))\times L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$.*

De plus, les contrôles optimaux sont bornés et réguliers relativement aux perturbations.

Résultat 9 (Lemme 20)**.–** $\|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\leq\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Résultat 10 (Lemme 21)**.–** *Pour $j\in\{1,2\}$, soit u_j l'unique contrôle optimal associé à la perturbation f_j. On a*

$$\|u_2-u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}<\frac{2\alpha}{1-3\alpha^2}\|f_2-f_1\|_{L^2(0,T;H)}.$$

pour toute constante α *telle que*

$$|z_0| + \sqrt{2}\max\{\|f_j\|_{L^2(0,T;H)}|j \in \{1,2\}\} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour toute perturbation $f \in L^2(0,T;H)$, l'état initial z_0 étant fixé, la fonction valeur optimale est définie par

$$\varphi(f) := \inf\{J(\theta(u,f),u)|u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)\}.$$

Nous obtenons un premier résultat de stabilité de la valeur optimale.

Résultat 11 (Théorème 7)**.–** *La fonction valeur optimale* φ *est localement lipschitzienne sur* $\{f \in L^2(0,T;H) : |z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)} < \frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

La formulation lagrangienne du problème de contrôle optimal permet d'expliciter les dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale (cf. [8], 5.5 Contraintes d'image dans un convexe et [9], Section 2.3) sur deux exemples où $p = 2$. Il est important de noter que l'on pourra considérer que $r = 2$ au lieu de $r = \infty$ (cf. lemme 1). En effet, les problèmes (P_f) sont bien posés et différentiables au sens des normes L^2 relativement aux états et aux contrôles. Le fait que les normes $L^2(Y)$ et $L^\infty(Y)$ ne sont pas équivalentes n'est plus un obstacle à l'analyse de sensibilité (cf. [39]). Pour tout $(z,u,p,f) \in W(0,T) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;H)$:

$$\mathscr{L}(z,u,p,f) := J(z,u) + \langle \dot{z} + \Delta^2 z - u \cdot \nabla z - f, p\rangle_{L^2(H),L^2(V)} + (z(0) - z_0, p(0))_H.$$

Soit $(\bar{z},\bar{u})$ la paire optimale et $\bar{p}$ l'adjoint associés à la perturbation de référence nulle. Nous noterons $\bar{x} := (\bar{z},\bar{u},\bar{p})$ et $\bar{\mathscr{L}} := \mathscr{L}(\bar{z},\bar{u},\bar{p},0)$. Pour alléger les notations, des indices indiquerons les dérivations. Les conditions nécessaires d'optimalité en $\bar{x}$ se traduisent par la nullité du gradient de ce Lagrangien.

$$\bar{\mathscr{L}}_x := \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_z \\ \bar{\mathscr{L}}_u \\ \bar{\mathscr{L}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{L^2(V)} \\ 0_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \\ 0_{L^2(V)} \end{pmatrix}.$$

Soit $\bar{x} := (\bar{z},\bar{u},\bar{p})$ un point où les conditions nécessaires du premier ordre sont vérifiées. Par hypothèse $\bar{\mathscr{L}}_x$ est de classe C^1 et la hessienne du Lagrangien $\mathscr{H}\mathscr{L}(\bar{x})$ admet un inverse borné ainsi nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites (cf. [21], tome I, p. 275).

Résultat 12.– *Sous les conditions de la proposition 12, pour toute perturbation* $\delta f \in L^2(0,T;H)$*, la dérivée directionnelle de la fonction valeur optimale en* 0 *dans la direction* δf *est donnée par la formule ci-dessous.*

$$\varphi'(0;\delta f) = -\langle \delta f, \bar{p}\rangle_{L^2(0,T;H),L^2(0,T;V)}. \tag{1.4}$$

Nous traitons un second exemple de modèle de stockage thermique prenant en compte la réaction, la diffusion et la convection (voir [36]). C'est un problème de contrôle optimal avec contrainte d'inégalité. Ici, le terme bilinéaire uz n'a pas la propriété précédente qui permettait de borner les contrôles admissibles mais l'on impose une contrainte de boîtes aux contrôles. Le problème de contrôle optimal est alors un problème polyédrique pour lequel les conditions suffisantes d'optimalité sont encore vérifiées (cf. F. Mignot [44] pour l'introduction du concept de polyédricité, les travaux de J. F. Bonnans [8] (5.4) pour les techniques d'analyse de sensibilité sous des contraintes polyédriques et aussi la thèse de N. Merabet [43] où l'équation d'état est semilinéaire avec un contrôle qui y intervient de façon additive). Nous proposons, comme références, les travaux de F. Tröltzsch [50], R. Griesse et B. Vexler [30] pour obtenir encore des résultats de sensibilité dans le cas où des contraintes de boîte sont imposées aux contrôles ainsi que pour des contrôles distribués (voir aussi l'application récente à l'équation de Schrödinger [34]). Les conditions d'optimalité s'écrivent alors sous la forme d'une équation généralisée et c'est un théorème de S. Robinson (voir [48], [22] et [9]) qui joue le rôle du théorème classique des fonctions implicites.

Chapitre 2

Equation d'état de type bilinéaire

2.1 Notations et cadre fonctionnel

2.1.1 Motivations

Nous étudions dans ce chapitre des équations aux dérivées partielles (EDP) qui modélisent une large classe de problèmes d'évolutions. La grandeur appelée « état » est distribuée sur une partie de l'espace et évolue durant l'intervalle de temps $[0, T]$. Pour citer quelques exemples qui seront autant de prétextes à mettre en oeuvre nos résultats on utilisera des modèles de stockage thermique, de déformation de la glace ou de plaques vibrantes.

Au lieu de travailler directement sur ces EDP d'évolution, le choix d'un triplet d'évolution de Gelfand adapté aux ordres de dérivation et aux contraintes de bord permet de se ramener à une équation différentielle dont l'inconnue ne dépend plus que du temps. Par contre les solutions éventuelles sont à valeurs dans un espace fonctionnel.

L'inconnue est l'état noté z et il y a trois paramètres : l'état initial z_0, le contrôle u et la perturbation f. Voici le système qui nous intéresse :

$$(E_{z_0,u,f}) \begin{cases} \dot{z}(t) + A(t, z(t)) = B(t, u(t), z(t)) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans un second temps, en plus de vérifier l'équation d'état, les contrôles seront contingentés dans une partie de l'espace des contrôles qui dépendra du temps et de l'état. Nous noterons

$$(E_U) \begin{cases} \dot{z}(t) + A(t, z(t)) = B(t, u(t), z(t)) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \\ z(0) = z_0 \text{ et } u(t) \in U(t, z(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \end{cases} \tag{2.2}$$

le problème d'inclusion différentielle où l'inconnue est la paire état-contrôle (z, u). L'état initial z_0 et la perturbation f sont fixés. Remarquons que le problème (2.1) est le cas particulier de (2.2) où les images de la multiapplication U sont toutes égales à l'espace des contrôles. Enfin dans le cas général le terme « rétrocontrôle » (on dit aussi contrôle feedback ou a priori) fait référence au fait que les contrôles dépendent des états.

Tout d'abord des exemples sont présentés. Ensuite les estimations a priori sur les états seront démontrées en s'appuyant sur des inégalités de « type Gronwall ». L'inégalité classique de R. Bellman [6] suffit dans le cas où l'on peut se contenter de majorants qui font intervenir la norme des contrôles. Par exemple quand le contrôle est fixé. Une inégalité moins connue de D. Willett et J.S.W. Wong [51] s'avère particulièrement adaptée pour établir l'existence d'une solution au problème d'inclusion différentielle (2.2). Cette première partie se termine avec le théorème d'existence de solutions pour cette inclusion différentielle.

2.1.2 Exemples

Modèle de stockage thermique en dimension un (I)

Les échanges thermiques entre un fluide caloriporteur et un milieu poreux se traduisent par des phénomènes de diffusion, de conduction et de convection (cf. [26] et [32]). L'opérateur Laplacien et le terme bilinéaire en état et contrôle modélisent respectivement la diffusion et la convection. La température du fluide z_1 et celle du milieu poreux solide z_2 sont des fonctions de deux variables (t, x) définies sur $[0, T] \times [0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En agissant sur la vitesse d'écoulement v du fluide, l'on contrôle le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial t}(t,x) = k_1 \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(t,x) + k_1'[z_2(t,x) - z_1(t,x)] - v(t)\dfrac{\partial z_1}{\partial x}(t,x) + f_1(t,x) \\ z_1(0,x) = z_1^0(x) \\ z_1(t,0) = z_1(t,1) = 0 \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t}(t,x) = k_2 \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}(t,x) + k_2'[z_1(t,x) - z_2(t,x)] + f_2(t,x) \\ z_2(0,x) = z_2^0(x) \\ z_2(t,0) = z_2(t,1) = 0 \end{cases}$$

Pour fixer les idées nous supposons que les températures du fluide à l'entrée et à la sortie de l'échangeur thermique sont au niveau de référence 0.

Notons $V := H_2(0,1) \times H_2(0,1)$ où $H_2(0,1) := H^2(0,1) \times H^2(0,1)$ et $H := L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Nous définissons les opérateurs :

$$A := \begin{pmatrix} -k_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1' & -k_1' \\ -k_2' & -k_2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2' \end{pmatrix} : V \to V^*.$$

et

$$B := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : V \to H.$$

L'état $z : [0,T] \to V$ est donné par

$$z(t) := \begin{pmatrix} z_1(t,.) \\ z_2(t,.) \end{pmatrix}.$$

Sa dérivée $\dot{z}$ est au sens des distributions. Le contrôle est $v : t \in [0,1] \mapsto v(t,.) \in L^2(0,1)$; enfin $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ et $z_0 := \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix}$. Avec ces notations l'équation différentielle s'écrit comme ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) + A(t)z(t) = u(t)Bz(t) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Modèle de déformation mécanique de la glace avec le p-Laplacien

Une fine plaque est fixée le long de sa frontière. Considérons un contrôle u qui agit pendant l'intervalle de temps $[0,T]$ sur le gradient de déformation de cette plaque, le déplacement z est solution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (cf. [38]) :

$$(ED_{z_0,z_1,u,f}) \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(t,x,y) - \operatorname{div}(|\nabla z(t,x,y)|^{p-2}\nabla z(t,x,y)) \\ = \Sigma_{i=1}^2 u_i(t)\frac{\partial z}{\partial x_i}(t,x,y) + f(t,x,y) \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ z(t,x,y) = 0 \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ z(0,x,y) = z_0(x,y) \text{ et } \frac{\partial z}{\partial x_i}(0,x,y) = z_1(x,y) \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^2 et l'on note le p-Laplacien :

$$\Delta_p z := \operatorname{div}(|\nabla z|^{p-2}\nabla z).$$

Posons :

$$Z := \begin{pmatrix} z \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}, \mathscr{F} := \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \mathscr{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta_p & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathscr{B}_i := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_i} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation $(ED_{z_0,z_1,u,f})$ s'écrit donc sous la forme bilinéaire

$$(E_{z_0,u,f}) \begin{cases} \dot{Z}(t) + \mathscr{A}(t)Z(t) = \mathscr{B}(t,u(t),Z(t)) + \mathscr{F}(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

où

$$\mathscr{B}(t,u(t),Z(t)) := [\Sigma_{i=1}^{2} u_i(t)\mathscr{B}_i(t)]Z(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

et

$$Z_0 := \begin{pmatrix} z(0) \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}(0) \end{pmatrix}.$$

Il est à noter que dans cet exemple le contrôle n'est pas distribué sur le domaine d'espace.

Cas particulier des systèmes linéaires

Considérons les équations d'état linéaires de type :

$$(EL_{z_0,u,f}) \begin{cases} \dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Pour presque tout t appartenant à $[0,T]$, n et r étant deux entiers naturels non nuls, l'état est $z : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, le contrôle $u : [0,T] \to \mathbb{R}^r$, l'application $A(t)$ est à valeurs dans l'ensemble des matrices réelles de n lignes et n colonnes noté $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tandis que $B(t)$ est à valeurs dans $M_{r\times n}(\mathbb{R})$. En notant $B_i(t)$ la i-ème colonne de la matrice $B(t)$ nous définissons :

$$Z := \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, F := \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \mathscr{A} := \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathscr{B}_i := \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $u_i(t)$ la $i-$ème composante du vecteur $u(t)$, on a :

$$B(t)u(t) = \Sigma_{i=1}^{r} u_i(t)B_i(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

L'équation $(EL_{z_0,u,f})$ s'écrit donc sous la forme bilinéaire

$$(E_{z_0,u,f}) \begin{cases} \dot{Z}(t) + \mathscr{A}(t)Z(t) = \mathscr{B}(t,u(t),Z(t)) + F(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

où

$$\mathscr{B}(t,u(t),Z(t)) := [\Sigma_{i=1}^{r} u_i(t)\mathscr{B}_i(t)]Z(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

et

$$Z_0 := \begin{pmatrix} z(0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Cadre fonctionnel pour les états

Les états, définis sur l'intervalle de temps $[0, T]$, sont à valeurs vectorielles. Leurs dérivées par rapport au temps sont à comprendre au sens des dérivées de distributions vectorielles (cf. annexe B, lemme B.1). Le cadre fonctionnel des triplets d'évolution de Gelfand permet de définir les espaces adaptés aux images $z(t)$ et $\dot{z}(t)$. L'intégrabilité est au sens de Bochner (cf. annexe A).

Triplet d'évolution de Gelfand

Dans tout ce qui suit, H est un espace de Hilbert séparable et V est un sous-espace dense dans H. On munit V d'une structure de Banach réflexif et séparable et l'espace H est identifié avec son dual H^* (c'est l'« espace-pivot »). De plus, les injections ci-dessous sont supposées continues et denses :

$$V \subseteq H \subseteq V^*.$$

Un tel triplet $V \subseteq H \subseteq V^*$ est appelé « triplet d'évolution » (voir [52]) ou « triplet de Gelfand ». Les normes sur H, V et V^* sont notées respectivement $|.|$, $\|.\|$ et $\|.\|_*$. Le produit scalaire sur H est noté $(.,.)_H$ et le crochet de dualité entre les espaces V^* et V est $\langle .,. \rangle_{V^* \times V}$ ou plus simplement $\langle .,. \rangle$. On impose enfin la compatibilité entre les deux produits :

$$(.,.)_H = \langle .,. \rangle_{|H \times V}.$$

Espace des états

Nous imposons que p appartienne à $[2, \infty[$ et nous notons

$$L^p(V) := L^p(0, T; V)$$

l'ensemble des classes d'applications fortement mesurables $v : [0, T] \to V$ intégrables au sens de Bochner (voir [5] page 49) telles que

$$\int_0^T \|v(t)\|^p dt < +\infty.$$

C'est un Banach muni de la norme

$$\|v\|_p := (\int_0^T \|v(t)\|^p \, dt)^{1/p}.$$

En cas d'ambigüité sur la norme nous serons amenés à préciser les notations. Par exemple : $\|.\|_{L^p(V)}$ ou $\|.\|_{L^p(H)}$. Comme p est en particulier strictement supérieur à 1, on peut identifier les espaces $(L^p(V))^*$ et $L^{p^*}(V^*)$ où p^* est le conjugué de p.

L'ensemble des états

$$W_{pp^*}(0,T) := \{z \in L^p(V) | \dot{z} \in L^{p^*}(V^*)\}$$

muni de la norme

$$\|z\|_{W_p} := (\|z\|_p^2 + \|\dot{z}\|_{p^*}^2)^{1/2}$$

est un Banach réflexif et séparable qui s'injecte continûment dans $C([0,T];H)$; autrement dit, tout élément de $W_{pp^*}(0,T)$ a un unique représentant continu (cf. annexe B, théorème 23).

Le contrôle u appartient à l'espace $L^r(Y)$ où $r = \dfrac{p}{p-2}$ (on pose $r = \infty$ lorsque $p = 2$). A moins de signaler expressément le contraire, Y est un espace de Banach réflexif et séparable.

2.1.4 Hypothèses

(H_p) $p \in [2, \infty[$.
(H_{z_0}) $z_0 \in H$.
(H_f) $f \in L^{p^*}(H)$.
(H_A) $A : [0,T] \times V \to V^*$

1. $\forall v \in V, A(.,v) : [0,T] \longrightarrow V^*$ est mesurable.
2. $A(t,.) : V \longrightarrow V^*$ est bornée pour presque tout $t \in [0,T]$. Plus précisément, en notant $s := \frac{p}{p-1-\alpha}$:

$$\exists \alpha \in [0, p-1], \exists a_1 \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+), \exists a_2 \in L^s(0,T;\mathbb{R}^+) \text{ tels que}$$

$$\|A(t,v)\|_* \leq a_1(t) + a_2(t)\|v\|^\alpha \quad p.p. \quad t \in [0,T], \forall v \in V.$$

   On ne peut pas choisir α strictement supérieur à $p-1$ sinon s serait négatif.
3. L'opérateur $A(t,.)$ est p-coercif pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$\exists K > 0 : \forall v \in V, \langle A(t,v), v \rangle \geq K\|v\|^p.$$

4. L'opérateur $A(t,.)$ est monotone pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$\langle A(t,v_1) - A(t,v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

5. Pour tous v_1 et v_2 appartenant à V, pour presque tout $t \in [0,T]$, l'opérateur A est hémicontinu :

$$\lambda \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \langle A(t, v_1 + \lambda v_2), v_2 \rangle$$

   est continue.

(H_u) $u \in L^r(Y)$ où $r = \dfrac{p}{p-2}$ et Y est un Banach réflexif séparable.

(H_B) $B : [0,T] \times Y \times H \longrightarrow H$

1. $\forall u \in Y, \forall v \in H, B(.,u,v) : [0,T] \longrightarrow H$ est mesurable,
2. $\forall v \in V, B(t,.,v) \in \mathscr{L}(Y,H)$ pour presque tout $t \in [0,T]$,
3. $\forall u \in Y, B(t,u,.) \in \mathscr{L}(H)$ pour presque tout $t \in [0,T]$,
4. $\exists b > 0, \forall u \in Y, \forall v \in H : |B(t,u,v)| \leq b\|u\|_Y |v|$ pour presque tout $t \in [0,T]$.
5. On suppose enfin l'hémicontinuité de $B(t,u,.)$. Pour tous v_1 et v_2 appartenant à V, pour tout u appartenant à Y et pour presque tout t appartenant à $[0,T]$:$\lambda \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \langle B(t,u,v_1+\lambda v_2), v_2\rangle$ est continue.

2.1.5 Justification du choix des espaces

Proposition 1.– *Sous les hypothèses (H_p), (H_A) (1) et (2), pour tout v appartenant à $L^p(V)$:*

$$A(.,v(.)) \in L^{p^*}(V^*).$$

Démonstration. Commençons par le cas où α appartient à $]0,p-1[$. Sachant que :

$$\|A(.,v(.))\|_* \leq a_1(.) + a_2(.)\|v(.)\|^\alpha$$

et en utilisant le fait que $a_1(.)$ est p^*-intégable au sens de Lebesgue nous devons seulement montrer que $(a_2(.)\|v(.)\|^\alpha)$ est intégrable. Appliquons l'inégalité de Young :

$$(a_2(.)\|v(.)\|^\alpha)^{p^*} \leq \frac{p^*}{s}a_2(.)^s + \frac{\alpha p^*}{p}\|v(.)\|^p$$

où $a_2(.)^s$ et $\|v(.)\|^p$ sont supposées intégrables.

Si α est nul alors s est égal à p^* et si α est égal à $p-1$ alors s est infini. Dans ces deux cas on obtient évidemment le résultat attendu. $\square$

Proposition 2.– *Sous les hypothèses (H_p), (H_B) (1) et (2), pour tout u appartenant à $L^r(Y)$ et pour tout v appartenant à $L^p(H)$:*

$$B(.,u(.),v(.)) \in L^{p^*}(H).$$

Démonstration.

$$\int_0^T |B(t,u(t),v(t))|^{p^*}dt \leq \int_0^T b\|u(t)\|_Y^{p^*}|v(t)|^{p^*}dt.$$

Soit q le conjugué de $p-1$, on vérifie que $p^*q = r$ et $p^*(p-1) = p$. On applique l'inégalité de Hölder à $u \in L^s(0,T;U)$ et $v \in L^p(V)$.

$$\int_0^T |B(t,u(t),v(t))|^{p^*}dt \leq b(\int_0^T \|u(t)\|_Y^{p^*q}dt)^{1/q}(\int_0^T |v(t)|^{p^*(p-1)}dt)^{1/(p-1)}.$$

Donc

$$\|B(.,u(.),v(.))\|_{L^{p^*}(H)} \leq b\|u\|_r\|v\|_{L^p(H)}.$$

$\square$

Nous terminons cette section par une nouvelle majoration du terme bilinéaire quand $p = 2$. Le lemme ci-dessous sera utile dans le quatrième chapitre où l'on montrera que le problème $(E_{z_0,u,f})$ est bien posé avec l'hypothèse $u \in L^2(Y)$ au lieu de $u \in L^\infty(Y)$.

Lemme 1.– *Il existe une constante positive K telle que, pour tout $u \in L^2(Y)$ et pour tout $z \in W(0,T)$:*

$$\|B(u(.),z(.))\|_{L^2(H)} \leq bK\|u\|_{L^2(Y)}\|z\|_{W(0,T)}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Soit $u \in L^2(Y)$ et $z \in W(0,T)$. L'hypothèse $(H_B)(4)$ permet d'obtenir la majoration ci-dessous.

$$\int_0^T |B(u(t),z(t)|^2 dt \leq \int_0^T b^2\|u(t)\|_Y^2|z(t)|^2 dt \leq b^2\|u\|_{L^2(Y)}^2 \max_{t\in[0,T]}\{|z(t)|^2\}.$$

Notons K la constante de l'injection continue $W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H)$.

$$\int_0^T |B(u(t),z(t)|^2 dt \leq b^2K^2\|u\|_{L^2(Y)}^2\|z\|_{W(0,T)}^2.$$

$\square$

Solution

L'état initial z_0 et le contrôle u étant fixés respectivement aux espaces H et $L^r(Y)$, nous appellerons **solution** de $(E_{z_0,u,f})$ tout état z appartenant à $W_{pp^*}(0,T)$ tel que $(E_{z_0,u,f})$ soit satisfaite.

2.2 Problème bien posé

Nous démontrons que l'équation d'état $(E_{z_0,u,f})$ est un problème bien posé au sens de Hadamard. Autrement dit, l'équation $(E_{z_0,u,f})$ admet une solution $z_{z_0,u,f}$, cette solution est unique et dépend continûment des paramètres z_0, u et f.

Théorème 1.– *Soit $p \geq 2$, $z_0 \in H$, $f \in L^{p^*}(H)$. Sous les hypothèses (H_A), (H_u) et (H_B), si l'injection de V dans H est compacte alors il existe une fonction et une seule appartenant à $W_{pp^*}(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$ qui est solution de $(E_{z_0,u,f})$.*

De plus, en notant $z_{z_0,u,f}$ le représentant continu à valeurs dans H qui prolonge la solution de $(E_{z_0,u,f})$ à $[0,T]$, la fonction

$$\begin{array}{ll} H \times L^r(Y) \times L^{p^*}(H) & \longrightarrow C([0,T];H) \\ (z_0,u,f) & \longmapsto z_{z_0,u,f} \end{array}$$

est localement lipschitzienne.

Remarques. Il est intéressant de comparer les résultats d'existence et d'unicité du théorème ci-dessus avec un théorème général de J.-L. Lions (Théorème 1.2., chapitre 2, page 162, [38]). L'équation d'état $(E_{z_0,u,f})$ fait apparaître une partie non linéaire et une partie bilinéaire contenant le contrôle ; dans la suite, elles seront estimées séparément. On pourrait considérer leur somme en tant qu'une seule partie non linéaire. Cependant, des hypothèses du théorème de J.-L. Lions ne seraient pas vérifiées. Détaillons les différences entre ces deux théorèmes.

1. J.-L. Lions suppose que p est strictement supérieur à un. Nous imposons à p d'être supérieur ou égal à deux afin de pouvoir définir l'espace des contrôles de type L^r où $r = \dfrac{p}{p-2}$.
2. Les opérateurs non linéaires considérés par J.-L. Lions sont des cas particuliers de ceux du théorème 1 car ils sont définis sur V, au lieu de $[0,T] \times V$, et à valeurs dans V^*. De plus, c'est le cas particulier de $(H_A)(2)$ où α est égal à $p-1$ et a_1 est nulle.
3. Pour tout contrôle $u \in L^r(Y)$, notons $F(.,.) := A(.,.) - B(.,u,.)$. Si $p > 2$ alors l'hypothèse $(H_B)(4)$ ne permet d'assurer, pour $z \in V$, ni de majoration du type $\|F(z)\|_* \leq c\|z\|^{p-1}$, ni de p-coercivité de F.
4. Même dans le cas où $p = 2$, F n'est pas p-coercif. En effet, on peut considérer le cas particulier où A est nul et où l'opérateur bilinéaire a la propriété (voir la section 4.2.) :
$$\langle B(.,u,z), z\rangle = 0.$$

Le problème $(E_{z_0,u,f})$ est posé dans un espace de dimension infinie. On commence par montrer l'unicité de la solution afin de mettre en oeuvre la méthode d'approximation de Galerkin. Cette méthode consiste à résoudre des problèmes approchés dans une suite croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espaces de dimensions finies. Chaque problème approché est plus facile à résoudre que le problème initial et admet une unique solution. On construit ainsi une suite de solutions notée $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dont on montre la convergence quand la dimension des espaces d'approximation tend vers l'infini. (Cette convergence se démontre à l'aide d'estimations a priori.) La dernière étape est la preuve que cette limite est la solution du problème $(E_{z_0,u,f})$.

2.2.1 Unicité

Commençons par démontrer l'unicité d'une solution au problème $(E_{z_0,u,f})$. Supposons l'existence de deux solutions z_1 et z_2. Leur différence $z_1 - z_2$ notée z vérifie :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) + A(t, z_1(t)) - A(t, z_2(t)) = B(t, u(t), z(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Pour presque tout t appartenant à $[0, T]$, $z(t)$ appartient à V. Intégrons sur $[0, t]$ le produit de dualité ci-dessous.

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \dot{z}(\tau), z(\tau) \rangle \, d\tau + \int_0^t \langle A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau)), z_1(\tau) - z_2(\tau) \rangle \, d\tau \\ = \int_0^t \langle B(\tau, u(\tau), z(\tau)), z(\tau) \rangle \, d\tau. \\ \frac{1}{2}|z(t)|^2 + \int_0^t \langle A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau)), z_1(\tau) - z_2(\tau) \rangle \, d\tau \\ = \int_0^t \langle B(\tau, u(\tau), z(\tau)), z(\tau) \rangle \, d\tau. \end{aligned}$$

La monotonie de A $(H_A)(4)$ et l'hypothèse $(H_B)(4)$ fournissent la majoration :

$$|z(t)|^2 \leq 2b \int_0^t \|u(\tau)\|_Y |z(\tau)|^2 \, d\tau.$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure à la nullité de z pour presque tout t appartenant à $[0, T]$.

Remarque. Pour démontrer ce résultat d'unicité nous n'avons pas utilisé toutes les hypothèses.

2.2.2 Existence de solutions approchées

L'espace V est séparable. Il existe une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de V telle que :

1. pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, les premiers termes $e_1, e_2, ..., e_m$ sont linéairement indépendants et
2. l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de cette suite est dense dans V (et donc dans H et V^*).

Considérons le problème (P_m) ci-dessous posé dans l'espace engendré par $V_m := Vect\{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Les solutions de ces systèmes d'équations différentielles ordinaires sont notées $(z_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$.

$$(P_m) \begin{cases} \dot{z_m}(t) + A(t, z_m(t)) = B(t, u(t), z_m(t)) + f_m(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \\ z_m(0) = z_{0m}, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

où $f_m(.) := \sum_{j=1}^m \langle f(.), e_j \rangle \, e_j$ et $z_{0m} := \sum_{j=1}^m \langle z_0, e_j \rangle \, e_j$.

Proposition 3.– *Sous les hypothèses du Théorème 1, pour tout $m \geq 1$, le problème (P_m) admet une unique solution z_m qui appartient à V_m.*

Démonstration. Nous appliquons le théorème d'existence de Carathéodory (cf. annexe E, théorème 14) à la fonction $F_m : [0,T] \times V_m \to \mathbb{R}^m$ qui est définie ci-dessous. Pour tout $t \in [0,T]$ et tout $v \in V_m$, m étant fixé, l'on pose :

$$F_m(t,v) := \Sigma_{j=1}^m [\langle -A(t, z_m(t)) = B(t, u(t), v(t)), e_j\rangle + f_m(t)].$$

La mesurabilité de $F_m(.,v)$, pour tout $v \in V_m$ découle des hypothèses $(H_A)(1)$, $(H_B)(1)-(3)$ et (H_f). Sa continuité en v se déduit du fait que, pour presque tout $t \in [0,T]$, l'opérateur $A(t,.)$ est monotone et hémicontinu. Donc ses restrictions aux sous-espaces vectoriels de dimensions finies sont continues (cf. [11], prop. 9, page 123). Enfin, la condition de minoration sur tout compact de V_m est assurée par les hypothèses $(H_A)(2)$ et $(H_B)(4)$. □

2.2.3 Estimations a priori

Le lemme ci-dessous est utile pour démontrer la convergence dans $W_{pp^*}(0,T)$ de la suite des solutions approchées $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$.

Lemme 2.– *Sous les hypothèses (H_p), (H_{z_0}), (H_f), (H_u), (H_B), (H_A) (1), (2) et (3), il existe des constantes m_1, m_2 et m_3 telles que pour toute solution z de $(E_{z_0,u,f})$ on a les estimations suivantes :*

$$\begin{array}{lll} (E_1) & \|z\|_{C([0,T];H)} & \leq m_1, \\ (E_2) & \|z\|_{L^p(V)} & \leq m_2, \\ (E_3) & \|\dot{z}\|_{L^{p^*}(V^*)} & \leq m_3. \end{array}$$

Démonstration. Pour presque tout t appartenant à $[0,T]$:

$$\langle \dot{z}(t), z(t)\rangle + \langle A(t, z(t)), z(t)\rangle = \langle B(t, u(t), z(t)), z(t)\rangle + \langle f(t), z(t)\rangle \quad p.p.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + K\|z(t)\|^p \leq b\|u(t)\|_Y |z(t)|^2 + |f(t)||z(t)| \quad p.p. \quad t \in [0,T]. \qquad (2.4)$$

On applique deux fois l'inégalité généralisée de Young. (Pour tout $\epsilon > 0$, $a > 0$ et $b > 0$ l'on a : $ab \leq \dfrac{\epsilon^p a^p}{p} + \dfrac{b^{p^*}}{p^* \epsilon^{p^*}}$.) Pour tous ϵ et ν strictement positifs, sachant que le conjugué de r est $p/2$, pour presque tout t appartenant à $[0,T]$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + K\|z(t)\|^p \leq b(\frac{\epsilon^r}{r}\|u(t)\|_Y^r + \frac{2C^p}{\epsilon^{p/2}p}\|z(t)\|^p) + \frac{\nu^{p^*}}{p^*}\|f(t)\|_*^{p^*} + \frac{C^p}{\nu^p p}\|z(t)\|^p$$

L'on note C la constante d'injection de V dans H : $|.| \leq C\|.\|$. On peut choisir ϵ et ν tels que :

$$\frac{2b}{\epsilon^{p/2}} + \frac{1}{\nu^p} = \frac{pK}{C^p}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 \leq b\frac{\epsilon^r}{r}\|u(t)\|_Y^r + \frac{\nu^{p^*}}{p^*}\|f(t)\|_*^{p^*} \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

En intégrant sur $[0,t]$ inclus dans $[0,T]$:

$$|z(t)|^2 \leq |z_0^2| + \frac{2b\epsilon^r}{r}\|u\|_r^r + \frac{2\nu^{p^*}}{p^*}\|f\|_{L^{p^*}(H)}^{p^*} \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

On obtient la première estimation :

$$(E_1) \qquad \|z\|_{C([0,T];H)} \leq m_1$$

où

$$m_1 := (|z_0^2| + \frac{2b\epsilon^r}{r}\|u\|_r^r + \frac{2\nu^{p^*}}{p^*}\|f\|_{L^{p^*}(H)}^{p^*})^{1/2}.$$

La seconde estimation se déduit de (2.4) en intégrant sur $[0,T]$.

$$K\int_0^T \|z(t)\|^p\,dt \leq \frac{1}{2}|z_0|^2 + bm_1^2\int_0^T \|u(t)\|_Y dt + m_1\int_0^T |f(t)|dt.$$

Donc

$$(E_2) \qquad \|z\|_p \leq m_2$$

où

$$m_2 := \frac{1}{K^{1/p}}(\frac{1}{2}|z_0|^2 + bm_1^2\|u\|_1 + m_1\|f\|_1)^{1/p}.$$

La troisième estimation s'obtient en utilisant les deux estimations ci-dessus. Dans l'équation d'état, pour presque tout t appartenant à $[0,T]$:

$$\|\dot{z}(t)\|_* \leq \|A(t,z(t)\|_* + \|B(t,u(t),z(t))\|_* + \|f(t)\|_* \quad p.p.$$

$$\|\dot{z}(t)\|_* \leq a_1(t) + a_2(t)\|z(t)\|^\alpha + C|B(t,u(t),z(t))| + \|f(t)\|_* \quad p.p.$$

Notons : $a_3(t) := a_1(t) + bCm_1\|u(t)\|_Y + \|f(t)\|_*$.

$$\|\dot{z}(t)\|_*^{p^*} \leq 2^{p^*-1}(a_3^{p^*}(t) + a_2(t)^{p^*}\|z(t)\|^{\alpha p^*}) \quad p.p.$$

$$\|\dot{z}\|_{p^*}^{p^*} \leq 2^{p^*-1}(\int_0^T a_3^{p^*}(t)\,dt + \int_0^T a_2^{p^*}(t)\|z(t)\|^{\alpha p^*}\,dt).$$

D'après les hypothèses $(H_A)(2)$, (H_u) et (H_f), a_3 appartient à $L^{p^*}(V^*)$ et vérifie :

$$a_3^{p^*}(t) \leq 2^{p^*-1}[(a_1(t) + \|f(t)\|_*)^{p^*} + (bCm_1\|u(t)\|_Y)^{p^*}].$$

$$a_3^{p^*}(t) \leq 2^{p^*-1}[2^{p^*-1}(a_1^{p^*}(t) + \|f(t)\|_*^{p^*}) + (bCm_1\|u(t)\|_Y)^{p^*}].$$

Or $p^* \in]1;2]$ ainsi $a_1 \in L^{p^*}(\mathbb{R}^+)$ et $u \in L^{p^*}(Y)$.

$$\int_0^T a_3^{p^*}(t)\,dt \leq 2^{p^*-1}[2^{p^*-1}(\|a_1\|_{p^*}^{p^*} + \|f(t)\|_{p^*}^{p^*}) + (bCm_1\|u(t)\|_{p^*})^{p^*}].$$

De plus $(a_2(t)\|z(t)\|^\alpha)^{p^*}$ est sommable (voir la démonstration de la proposition 2).

$$\int_0^T a_2^{p^*}(t)\|z(t)\|^{\alpha p^*}\,dt \leq \frac{p^*}{s}\|a_2\|_s^s + \frac{\alpha p^*}{p}\|z\|_p^p.$$

On en déduit la troisième estimation :

$$(E_3) \qquad \|\dot{z}\|_{p^*} \leq m_3$$

où

$$m_3^{p^*} := 2^{p^*-1}(2^{p^*-1}[2^{p^*-1}(\|a_1\|_{p^*}^{p^*} + \|f\|_{p^*}^{p^*}) + (bCm_1\|u\|_{p^*})^{p^*}] + \frac{p^*}{s}\|a_2\|_s^s) + \frac{\alpha p^*}{p}m_2^p).$$

□

Estimations a priori dans le cas où $p = 2$

Ici $p = 2$ et r est infini. On applique une seule fois l'inégalité généralisée de Young. Pour tout ν strictement positif :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + K\|z(t)\|^2 \leq b\|u\|_\infty|z(t)|^2 + \frac{\nu^2}{2}\|f(t)\|_*^2 + \frac{C^2}{2\nu^2}\|z(t)\|^2 \quad p.p.$$

Où l'on note C la constante telle que : $|.| \leq C\|.\|$. Choisissons $\nu = \sqrt{\dfrac{C}{2K}}$.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 \leq b\|u\|_\infty|z(t)|^2 + \frac{\nu^2}{2}\|f(t)\|_*^2 \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

On intègre sur $[0,t]$ inclus dans $[0,T]$.

$$|z(t)|^2 \leq |z_0|^2 + \nu^2\|f\|_{L^2(V^*)} + 2b\|u\|_\infty\int_0^T |z(t)|^2\,dt \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

Le lemme de Gronwall permet d'obtenir la première estimation :

$$|z(t)|^2 \leq (|z_0|^2 + \nu^2\|f\|_{L^2(V^*)})e^{2bT\|u\|_\infty} \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

Ainsi

$$(E_1) \qquad \|z\|_{C([0,T];H)} \leq m_1$$

où

$$m_1 := \sqrt{(|z_0|^2 + \nu^2 \|f\|_{L^2(V^*)})} e^{2bT\|u\|_\infty}.$$

Les deux estimations suivantes s'obtiennent comme dans le cas où $p > 2$.

$$(E_2) \qquad \|z\|_p \leq m_2$$

où

$$m_2 := \frac{1}{K^{1/2}} (\frac{1}{2}|z_0|^2 + 2bTm_1^2\|u\|_\infty + m_1\|f\|_1)^{1/2}.$$

$$(E_3) \qquad \|\dot{z}\|_{p^*} \leq m_3$$

où

$$m_3^2 := 2(2[2(\|a_1\|_{p^*}^{p^*} + \|f\|_{p^*}^{p^*}) + (bTCm_1\|u\|_\infty)^2] + (1-\alpha)\|a_2\|_s^s) + \alpha m_2^2).$$

2.2.4 Passage à la limite

Montrons à présent la convergence de la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de solutions des problèmes (P_m) vers une fonction z dans $W_{pp^*}(0,T)$. Il nous restera à montrer que z est la solution de $(E_{z_0,u,f})$.

Convergence des états

Par construction, la suite des états initiaux $(z_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers z_0 dans H. L'estimation a priori (E_1) montre que les termes de la suite des approximations $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont dans un borné de $L^p(V)$ qui est un espace de Banach réflexif. On peut donc extraire de cette suite une sous-suite faiblement convergente au sens de $\sigma(L^p(V), L^{p^*}(V^*))$. Il existe $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $z_1 \in L^\infty(H)$ telles que :

$$z_{\phi(n)} \rightharpoonup z_1 \text{ faiblement dans } L^p(V).$$

Dans la suite, l'on notera directement n au lieu de $\phi(n)$. D'après l'estimation a priori (E_2) la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(H)$ qui est le dual de l'espace séparable $L^1(H)$. Donc il existe une sous-suite faiblement étoile convergente (i.e. au sens de $\sigma(L^\infty(H), L^1(H))$) vers $z_2 \in L^\infty(V)$ telle que :

$$z_n \rightharpoonup z_2 \quad \text{faiblement étoile dans } L^\infty(V).$$

La proposition ci-dessous va nous permettre de démontrer que ces limites sont égales. Nous noterons :

$$z := z_1 = z_2.$$

L'estimation a priori (E_3) assure l'existence de la limite faible $\alpha \in L^{p^*}(V^*)$ pour $\dot{z}_n$.

$$\dot{z}_n \rightharpoonup \zeta \quad \text{faiblement dans } L^{p^*}(V^*).$$

Les estimations a priori permettent de démontrer la convergence faible des dérivées $(\dot{z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il nous reste à vérifier que cette limite est $\dot{z}$.

Proposition 4.– *Supposons que l'injection de V dans H est compacte. Soit une suite d'applications $z_n : [0,T] \longrightarrow V$ telles que*

$$\begin{array}{rl}(i) & z_n(t) = z_0 + \int_0^t \dot{z}_n(s)ds, \dot{z}_n \in L^{p^*}(V^*) \\ (ii) & \exists M_1 \geq 0 \textit{ tel que } \sup_{n\geq 1} \|z_n\|_{L^\infty(H)} \leq M_1 \\ (iii) & \exists M_2 \geq 0 \textit{ tel que } \sup_{n\geq 1} \|\dot{z}_n\|_{L^{p^*}(V^*)} \leq M_2\end{array}$$

il existe alors $z : [0,T] \longrightarrow H$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que

$$\begin{array}{rl}(0) & z(t) = z_0 + \int_0^t \dot{z}(s)ds, \dot{z} \in L^{p^*}(V^*) \\ (1) & \|z_{\varphi(n)} - z\|_{L^\infty(H)} \longrightarrow 0 \\ (2) & \|z_{\varphi(n)} - z\|_{L^p(V)} \longrightarrow 0 \\ (3) & \dot{z}_{\varphi(n)} \rightharpoonup \zeta \textit{ faiblement dans } L^{p^*}(V^*)\end{array}$$

et

$$\zeta = \dot{z}.$$

Remarques. Le (2) est une conséquence immédiate du (1) car les intégrations s'effectuent sur le segment $[0,T]$. L'item (3) permet de démontrer que la limite faible des $\dot{z}_n$ est $\dot{z}$. Une conséquence de (2) est l'existence d'une sous-suite extraite notée encore (z_n) telle que pour presque tout t appartenant à $[0,T]$ $(z_n(t))_{\mathbb{N}^*}$ converge fortement vers $z(t)$. En considérant le représentant continu z on obtient la convergence forte de $(z_n(0))_{\mathbb{N}^*}$ vers $z(0)$ et de $(z_n(T))_{\mathbb{N}^*}$ vers $z(T)$.

Démonstration. L'injection de V dans H étant compacte, on a :

$$\forall t \in [0,T], \{z_n(t) : n \geq 1\} \text{ est relativement compacte dans } H.$$

Montrons que $\{z_n : n \geq 1\}$ est équicontinue dans $C([0,T];H)$. Soit $0 \leq t \leq t' \leq T$:

$$|z_n(t) - z_n(t')| \leq \int_t^{t'} \|\dot{z}_n\|_*(s)ds$$

$$\int_t^{t'} \|\dot{z}_n(s)\|_* ds = \int_0^T 1_{[t,t']} \|\dot{z}_n(s)\|_* ds$$

où $1_{[t,t']}$ est la fonction caractéristique qui vaut 1 sur $[t,t']$. L'inégalité de Hölder fournit la majoration :

$$\int_0^T 1_{[t,t']} \|\dot{z}_n(s)\|_* ds \leq \|1_{[t,t']}\|_p \|\dot{z}_n\|_{p^*}.$$

L'hypothèse (iii) permet de conclure :

$$\int_t^{t'} \|\dot{z}_n(s)\|_* ds \leq M_3(t'-t)^{1/p}.$$

On déduit du théorème d'Ascoli-Arzelà ([3]) que la suite (z_n) est relativement compacte dans $C([0,T],H)$ pour la norme uniforme. On peut extraire une sous-suite $(z_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément vers une limite z. De plus la suite $(\dot{z}_{\varphi(n)})$ admet une limite faible ζ dans $L^{p^*}(V^*)$. En particulier, pour l'application caractéristique $1_{[0,t]}$ qui appartient à $L^p(V)$ pour tout t de $[0,T]$ et pour tout v appartenant à V on peut écrire :

$$\int_0^T \left\langle 1_{[0,t]}v, \dot{z}_{\varphi(n)}(s) \right\rangle ds \longrightarrow \int_0^T \left\langle 1_{[0,t]}v, \zeta(s) \right\rangle ds.$$

Ainsi

$$\left\langle v, \int_0^t \dot{z}_{\varphi(n)}(t)ds \right\rangle \longrightarrow \left\langle v, \int_0^t \zeta(s)ds \right\rangle.$$

Quand n tend vers l'infini l'égalité (i) donne

$$\langle v, z(t)\rangle = \langle v, z_0\rangle + \left\langle v, \int_0^t \zeta(s)ds \right\rangle.$$

Donc ζ est égal à $\dot{z}$ et z est absolument continue.

□

Limite des termes $B(.,u_n(.),z_n(.))$

Lemme 3.– *Soit $p \geq 2$. Soit une suite d'applications $z_n : [0,T] \longrightarrow V$ qui vérifient les hypothèses de la Proposition 4. Supposons (H_B), alors :*

$$B(.,u(.),z_n(.)) \rightarrow B(.,u(.),z(.)) \text{ fortement dans } L^{p^*}(H).$$

Démonstration. L'application $v \in L^p(H) \mapsto B(.,u(.),v(.)) \in L^{p^*}(H)$ est continue, ainsi :

$$\|B(.,u(.),z_n(.)) - B(.,u(.),z(.))\|_{p^*} \leq b\|u\|_r\|z_n - z\|_p.$$

La proposition 4 nous permet d'extraire de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite qui converge fortement vers z dans $L^p(V)$. □

Lemme 4.– *Soit $p \geq 2$. Soit une suite d'applications $z_n : [0,T] \longrightarrow V$ qui vérifient les hypothèses de la Proposition 4. Supposons (H_B), alors :*

$$\int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)), z_n(t)\rangle \, dt \longrightarrow \int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)), z(t)\rangle$$

faiblement dans $L^{p^*}(H)$.

Démonstration. Rappelons que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge fortement dans $L^p(H)$ vers z et que pour tout $t \in [0,T]$ la suite $(z_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge fortement dans H vers $z(t)$. Ainsi :

$$\int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)),z_n(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)-z_n(t)),z_n(t)\rangle\, dt$$
$$-\int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)),z_n(t)\rangle\, dt.$$

D'une part :

$$\int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)-z_n(t)),z_n(t)\rangle\, dt \leq b\int_0^T \|u(t)\|_Y|z_n(t)-z_n(t)||z_n(t)|\, dt$$
$$\leq \|u(t)\|_r\|z_n(t)-z_n(t)\|_{L^p(H)}\|z_n(t)\|_{L^p(H)}$$

qui tend vers 0 quand z_n tend vers z au sens fort. D'autre part, sachant que $B(.,u(.),z(.)) \in L^{p^*}(V^*)$ et que z_n tend faiblement vers z on en déduit que

$$\int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)),z_n(t)\rangle\, dt \to \int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)),z(t)\rangle\, dt. \tag{2.5}$$

□

Limite des termes non linéaires

L'hypothèse $(H_A)(2)$ et la seconde estimation a priori permettent de borner $A(.,z_n(.))$ dans $L^{p^*}(V^*)$ ainsi on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^{p^*}(V^*)$ vers une application notée $\mathscr{A}$. Il reste à montrer que cette limite est égale à $A(.,z(.))$.

Proposition 5.– *Soit une suite d'applications $z_n : [0,T] \longrightarrow V$ qui vérifient les hypothèses de la Proposition 4. On note encore z sa limite au sens de $(0)-(3)$ de cette même proposition. Soit une sous-suite extraite de $A(.,z_n(.)) \in L^{p^*}(V^*)$ qui converge faiblement dans $L^{p^*}(V^*)$ vers une application notée $\mathscr{A}(z)$. On a :*

$$\mathscr{A}(z(.)) = A(.,z(.)).$$

Démonstration. Par monotonie de A, pour tout v appartenant à $L^p(V)$:

$$\int_0^T \langle A(t,z_n(t))-A(t,v(t)),z_n(t)-v(t)\rangle\, dt \geq 0 \tag{2.6}$$

La solution de (P_n) étant z_n :

$$\int_0^T \langle A(t,z_n(t)),z_n(t)\rangle\, dt = \frac{1}{2}|z_{0n}|^2 - \frac{1}{2}|z_n(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t),z_n(t)\rangle\, dt$$
$$+\int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)),z_n(t)\rangle\, dt.$$

On peut donc décomposer :

$$\int_0^T \langle A(t,z_n(t)) - A(t,v(t)), z_n(t)-v(t)\rangle\; dt = \frac{1}{2}|z_{0n}|^2 - \frac{1}{2}|z_n(T)|^2$$

$$+\int_0^T \langle f(t), z_n(t)\rangle\; dt + \int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)), z_n(t)\rangle\; dt$$

$$-\int_0^T \langle A(t,z_n(t)), v(t)\rangle\; dt - \int_0^T \langle A(t,v(t)), z_n(t)-v(t)\rangle\; dt.$$

Quand n tend vers $+\infty$ nous avons les convergences des différents termes :

$$|z_{0n}|^2 \to |z_0|^2.$$

$$|z_n(T)|^2 \to |z(T)|^2.$$

$$\int_0^T \langle f(t), z_n(t)\rangle\; dt \to \int_0^T \langle f(t), z(t)\rangle\; dt.$$

$$\int_0^T \langle A(t,z_n(t)), v(t)\rangle\; dt \to \int_0^T \langle \mathscr{A}(z(t)), v(t)\rangle\; dt.$$

$$\int_0^T \langle A(t,v(t)), z_n(t)-v(t)\rangle\; dt \to \int_0^T \langle A(t,v(t)), z(t)-v(t)\rangle\; dt.$$

On déduit du Lemme 2.5 la minoration ci-dessous.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|z_0|^2 - \frac{1}{2}|z(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t), z(t)\rangle\; dt + \int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)), z(t)\rangle\; dt\\ &-\int_0^T \langle A(t,z(t)), v(t)\rangle\; dt - \int_0^T \langle A(t,v(t)), z(t)-v(t)\rangle\; dt \geq 0\end{aligned} \tag{2.7}$$

Rappelons que le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z} + \mathscr{A}(z) = B(.,u,z) + f \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

En intégrant par parties sur $[0,T]$:

$$\int_0^T \langle \mathscr{A}(z(t)), z(t)\rangle\; dt = \frac{1}{2}|z_0|^2 - \frac{1}{2}|z(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t), z(t)\rangle\; dt$$

$$+\int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)), z(t)\rangle\; dt \tag{2.8}$$

On déduit de (2.6), (2.7) et (2.8) :

$$\int_0^T \langle \mathscr{A}(z(t)) - A(t,v(t)), z(t)-v(t)\rangle\, dt \geq 0.$$

Pour λ strictement positif et ω appartenant à $L^p(V)$ tels que $v = z - \lambda w$, l'hémi-continuité de A donne

$$\int_0^T \langle \mathscr{A}(z(t)) - A(t, z(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle \, dt \geq 0.$$

Quand λ tend vers 0,

$$\int_0^T \langle \mathscr{A}(z(t)) - A(t, z(.)), w(t)\rangle \, dt \geq 0.$$

Mais en échangeant w en $-w$ on obtient la nullité du terme de gauche. Donc

$$\mathscr{A}(z(.)) = A(., z(.)).$$

□

Solution de $(E_{z_0,u,f})$

Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé, pour tout $m \in \mathbb{N}$, en notant z_m l'unique solution de P_m et en faisant tendre m vers $+\infty$:
$\langle A(t, z_m(t)) - B(t, u(t), z_m(t)) - f_m(t), e_j\rangle \rightarrow$

$$\langle A(t, z_m(t)) - B(t, u(t), z(t)) - f(t), e_j\rangle .$$

Ainsi

$$\langle \dot{z}_m(t), e_j\rangle \rightarrow \langle \dot{z}(t), e_j\rangle .$$

La famille $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans V donc :

$$\dot{z}(t) + A(t, z(t)) - B(t, u(t), z(t)) - f(t), \quad p.p. \quad t \in [0, T].$$

Une des conséquences de la proposition 4 est l'existence d'une sous-suite extraite notée encore (z_n) telle que pour presque tout t appartenant à $[0, T]$ $(z_n(t))_{\mathbb{N}^*}$ converge fortement vers $z(t)$. En considérant le représentant continu z on obtient la convergence forte de $(z_n(0))_{\mathbb{N}^*}$ vers $z(0)$.

2.2.5 Démonstration de la régularité de la fonction d'état

Démonstration. Soit $\bar{z}$ l'unique solution de $(E_{z_0,u,f})$ et $\bar{z} + w$ celle de $(E_{z_0+\zeta,u+v,f+g})$ où z_0 et ζ appartiennent à H, u et v à $L^r(Y)$ et enfin f et g à $L^{p^*}(V^*)$. Ainsi w est la solution de :

$$\begin{cases} \dot{w}(t) + A(t, (\bar{z} + w)(t)) - A(t, \bar{z}(t)) = B(t, u(t), w(t)) \\ +B(t, v(t), (\bar{z} + w)(t)) + g(t) \quad p.p. \\ w(0) = \zeta. \end{cases}$$

En intégrant sur $[0,t]$ inclus dans $[0,T]$ on en déduit :

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 - \frac{1}{2}|\zeta|^2 + \int_0^t \langle A(s,(\bar{z}+w)(s) - A(s,\bar{z}(s)),(\bar{z}+w)(s) - \bar{z}(s)\rangle\, ds$$

$$= \int_0^t \langle B(s,u(s),w(s)),w(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle B(s,v(s),(\bar{z}+w)(s)),w(s)\rangle\, ds$$

$$+ \int_0^t \langle g(s),w(s)\rangle\, ds$$

D'une part, la monotonie de A donne

$$\int_0^t \langle A(s,(\bar{z}+w)(s) - A(s,\bar{z}(s)),w(s)\rangle\, ds \geq 0.$$

D'autre part,
$\int_0^t \langle B(s,u(s),w(s)),w(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle B(s,v(s),(\bar{z}+w)(s)),w(s)\rangle\, ds$

$$\leq b\int_0^t (\|u(s)\|_Y|w(s)|^2 + \|v(s)\|_Y|(\bar{z}+w)(s)|\,|w(s)|)\, ds.$$

Notons :

$$C_1(s) := 2(b\|v(s)\|_Y\|(\bar{z}+w)(s)\| + \|g(s)\|_*)$$

et

$$C_2(s) := 2b\|u(s)\|_Y.$$

Ainsi :

$$|w(t)|^2 \leq |\zeta|^2 + \int_0^t C_1(s)|w(s)|\, ds + \int_0^t C_2(s)|w(s)|^2\, ds.$$

L'inégalité de Willett-Wong (cf. lemme 5 et [18]) donne :

$$|w(t)| \leq e^{\frac{1}{2}\int_0^t C_2(s)\, ds}(|\zeta| + \frac{1}{2}\int_0^t C_1(s)\exp(-\frac{1}{2}\int_0^s C_2(\tau)\, d\tau)\, ds).$$

Ecrivons la première estimation a priori pour $\bar{z}+w$ qui est la solution de $(E_{z_0+\zeta,u+v,f+g})$. Il existe une constante $M_{\zeta,v,g}$ telle que si $|\zeta|$, $\|v\|_r$ et $\|g\|_{p^*}$ sont majorées. On a :

$$\|(\bar{z}+w)(t)\|_p \leq M_{\zeta,v,g}.$$

Comme r et p^* sont supérieurs à 1, nous avons les inclusions :

$$L^r(Y) \subset L^1(Y)$$

et

$$L^{p^*}(H) \subset L^1(H)$$

Sachant que $p \geq 2$ l'inégalité de Hölder donne :

$$\|u\|_1 \leq T^{1/r}\|u\|_r,$$

$$\|v\|_1 \leq T^{1/p}\|v\|_r,$$

$$\|g\|_1 \leq T^{1/p^*}\|g\|_{p^*}.$$

Ainsi l'on obtient la majoration :

$$|w(t)| \leq e^{bT^{1-1/r}\|u\|_r}(|\zeta| + bT^{1-1/p}M_{\zeta,v,g}\|\bar{z}+w\|_p + \frac{1}{2}T^{1-1/p^*}\|g\|_{p^*}.$$

En notant $\lambda := e^{bT^{1-1/r}\|u\|_r}\max\{1, bT^{1-1/p}M_{\zeta,v,g}, \frac{1}{2}T^{1-1/p^*}\}$, nous pouvons conclure :

$$|w(t)| \leq \lambda(|\zeta| + \|v\|_r + \|g\|_{p^*}).$$

□

2.2.6 Exemples de problèmes bilinéaires bien posés

Modèles de stockage thermique de dimension un (II)

Revenons au modèle de stockage thermique qui prend en compte les échanges par diffusion et convection entre une phase liquide (ou gazeuse) et une phase solide qui est poreuse. Vérifions les hypothèses (H_B). Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tous z et y appartenant à V nous avons la majoration ci-dessous.

$$|\langle Bz, y\rangle_{H,V}| = |\langle \frac{\partial z}{\partial x}, y\rangle_{L^2,H_2}| \leq \|\frac{\partial z}{\partial x}\|_{L^2}\|y\|_{H_2}.$$

On en déduit :

$$|Bz| \leq \|\frac{\partial z}{\partial x}\|_{L^2}.$$

L'inégalité de Poincaré assure l'existence d'une constante notée C telle que :

$$|Bz| \leq C\|z\|.$$

Vérifions les hypothèses (H_A). La norme sur H_2 est définie par (voir [12], page 208) : $\|.\|_{H^2} = \|\Delta.\|_{L^2} + \|.\|_{L^2}$. Pour tous z_1 et z_2 appartenant à V :

$$A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -k_1\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + k_1' z_1 - k_1' z_2 \\ -k_2' z_1 - k_2\dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + k_2' z_2 \end{pmatrix}$$

Pour tous z et y appartenant à V nous avons la majoration ci-dessous.

$$\langle Az, y\rangle_{V^*,V} = -k_1\langle \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}, y_1\rangle_{(H_2)*,H_2} + k_1'\langle z_1, y_1\rangle_{(H_2)*,H_2} - k_1'\langle z_2, y_1\rangle_{(H_2)*,H_2}$$

$$-k_2'\langle z_1, y_2\rangle_{(H_2)*,H_2} - k_2\langle \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}, y_2\rangle_{(H_2)*,H_2} + k_2'\langle z_2, y_2\rangle_{(H_2)*,H_2}.$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la relation de compatibilité :$\langle ., .\rangle_{|H,V} = (., .)_H$, pour tout y tel que $\|y\| \leq 1$:

$$|\langle Az, y\rangle_{V^*,V}| = |k_1|\|\Delta z_1\|_{L^2} + |k_1'|\|z_1\|_{L^2} + |k_1'|\|z_2|_{L^2}$$

$$+|k_2'|\|z_1\|_{L^2} + |k_2|\|\Delta z_2\|_{L^2} + |k_2'|\|z_2|_{L^2}.$$

Ainsi :

$$\|Az\|_* \leq \max\{|k_1| + |k_1'| + |k_2'|, |k_1'| + |k_2| + |k_2'|\}\|z\|.$$

Donc A est borné. Etudions le cas particulier où $z = y$.

$$\langle Az, z\rangle_{V^*,V} = k_1\|\frac{\partial z_1}{\partial x}\|_{L^2}^2 + k_1'\|z_1\|_{L^2}^2 - (|k_1' + k_2')(z_1, z_2) + k_2\|\frac{\partial z_2}{\partial x}\|_{L^2}^2 + k_2'\|z_2\|_{L^2}^2.$$

On déduit de $-(z_1, z_2) \geq -\frac{1}{2}(\|z_1\|_{L^2}^2 + \|z_2\|_{L^2}^2)$ la minoration ci-dessous. $\langle Az, z\rangle_{V^*,V} \geq k_1\|\nabla z_1\|_{L^2}^2 + k_2\|\nabla z_2\|_{L^2}^2 + (k_1' - \frac{1}{2}(|k_1' + k_2'))\|z_1\|_{L^2}^2$

$$+(k_2'\frac{1}{2}(|k_1' + k_2'))\|z_2\|_{L^2}^2.$$

Sous la condition nécessaire

$$k_1' \geq k_2' \tag{2.9}$$

$\langle Az, z\rangle_{V^*,V} \geq k_1\|\nabla z_1\|_{L^2}^2 + k_2\|\nabla z_2\|_{L^2}^2 + (\frac{1}{2}(|k_1' - k_2'))\|z_1\|_{L^2}^2.$

$$\langle Az, z\rangle_{V^*,V} \geq \min\{k_1, k_2, k_1', k_2'\}\|z\|_{H_0^1}^2$$

D'après l'inégalité de Poincaré il existe une constante positive C telle que :

$$\langle Az, z\rangle_{V^*,V} \geq C\|z\|^2.$$

En conclusion, A est coercif. L'opérateur A est linéaire et coercif donc il est monotone. Il est de plus fortement continu donc hémicontinu.

Modèle de réaction en chaîne

Soit un modèle de réaction où le contrôle agit de façon multiplicative sur l'état. Il est associé à des processus de réaction, diffusion et convection qui sont contrôlés par l'introduction de réactifs chimiques qui jouent le rôle de catalyseurs ou au contraire qui ralentissent une réaction en chaîne (voir [36]). C'est également un modèle d'échanges thermiques ; le contrôle est alors la vitesse du fluide. On peut encore penser à des échanges de masse lors de processus de diffusion.

Soit Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \{1,2,3\})$. L'équation d'état est :

$$(ERC)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x) - \Delta z(t,x) = u(t,x)z(t,x) + f(t,x) & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ z(t,x,y) = 0 \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ z(0,x) = z_0(x) \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Dans le cas de la seule diffusion, le contrôle u et la perturbation f sont nuls. Pour la seule réaction, l'équation (ERC) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x) = u(t,x)z(t,x) \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ z(t,x,y) = 0 \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ z(0,x) = z_0(x) \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Modèles de déformation mécanique de la glace avec contrôle distribué

Dans le contexte de l'élasticité non linéaire nous considérons à nouveau l'opérateur p-Laplacien. Mais, au contraire de l'exemple 2.1.2, le contrôle est distribué sur le domaine d'espace. Rappelons que le comportement de l'état à la frontière du domaine Ω est pris en compte dans le choix de l'espace $V := W_0^{1,p}(\Omega)$. L'on note pour tout $v \in V$:

$$\Delta_p v := -div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v).$$

Par hypothèse $z_0 \in L^2(\Omega)$, nous résolvons dans $W(0,T)$ l'équation différentielle ordinaire ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) + \Delta_p(t)z(t) = u(t)z(t) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = z_0 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Vérifions les hypothèse (H_A) pour l'opérateur Δ_p. Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ nous avons : $\nabla v \in L^p(\Omega)$. Sachant que $p \geq 2$ nous en déduisons :

$$||\nabla v|^{p-2}\nabla v|^{p^*} = |\nabla v|^p.$$

Donc $|\nabla v|^{p-2}\nabla v$ appartient à $L^{p^*}(V)$. De plus :

$$\|\nabla v\|_p^p = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v = \int_\Omega -div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)v = \langle \Delta_p v, v\rangle.$$

Nous déduisons de l'inégalité de Poincaré (cf. [12], cor. IX.19, page 174) que $\langle \Delta_p, . \rangle^{1/p}$ et $\|.\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ sont des normes équivalentes. Donc Δ_p est p-coercif et borné. La monotonie se déduit directement de :

$$\langle \Delta_p v - \Delta_p w, v - w \rangle = \|\nabla v - \nabla w\|_p^p \geq 0.$$

L'application $v \in L^p(\Omega) \mapsto |v|^{p-2} v \in L^{p^*}(V^*)$ est hémicontinue (voir l'annexe C) et pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$ l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ est continu donc l'opérateur p-Laplacien est hémicontinu.

L'hypothèse (H_B) est facile à vérifier et pour assurer (H_u) nous supposons que V^* est réflexif.

2.3 Loi de feedback

Nous établissons ici un résultat d'existence pour le problème bilinéaire d'évolution en présence de rétrocontrôles : l'équation d'état est encore bilinéaire, mais c'est une loi de feedback.

$$(E_U) \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) + A(t, z(t)) = B(t, u(t), z(t)) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \\ z(0) = z_0 \text{ et } u(t) \in U(t, z(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, T] \end{array} \right. \tag{2.10}$$

2.3.1 Introduction

L'hypothèse usuelle qui consiste à borner les termes non linéaires comme chez [27], [10] et [15]) n'est pas adéquate dans notre cas bilinéaire. Ici nous traitons à part la non linéarité de A de celle introduite par la bilinéarité. Pour cette raison nous imposons une hypothèse mieux adaptée aux contrôles.

La présence d'une hypothèse qui lie a priori les contrôles aux états implique que, même si pour chaque contrôle admissible le problème est bien posé (voir [19]), nous devons prouver l'existence d'une solution. Nous emploierons le terme de rétrocontrôle pour indiquer que les contrôles dépendent a priori des états. Une solution du problème est un couple composé d'un contrôle et d'un état associé. Cette difficulté est franchie dans le cadre mathématique des inclusions différentielles (cf. [3]). En premier lieu nous établissons des estimations a priori à l'aide du lemme de Willett et Wong (voir [51] et [20]) qui s'avère un meilleur outil que le lemme de Gronwall-Bellman dans notre cas. Le lemme de Gronwall est cependant suffisant quand un contrôle a été fixé. De plus le lemme de Willett et Wong nous permet d'obtenir des majorations uniformes relativement aux contrôles dans les estimations a priori des états (voir [20]). Nous démontrons l'existence d'une solution avec un théorème de sélection mesurable (cf. [16]) ainsi qu'une version de type L^p du théorème de sélection continue de Fryszkowski (voir [28]).

Dans la deuxième section de ce chapitre nous donnons le cadre fonctionnel. Il s'agit d'un triplet d'évolution de Gelfand (voir [29]). Les principaux résultats sont énoncés dans la troisième section. Les sections 4 et 5 sont consacrées respectivement aux preuves des estimations a priori et d'existence.

2.3.2 Notations et cadre fonctionnel

Aux hypothèses du premier chapitre nous ajoutons la contrainte de rétrocontrôle.

(H_U) L'application multivoque U définie sur $[0,T] \times H$ prend ses valeurs dans l'ensemble des parties fermées et non vides de Y et vérifie les hypothèses ci-dessous.

1. $U(.,.)$ est de graphe mesurable (i.e. son graphe appartient à $\mathscr{L} \otimes \mathscr{B}(H) \otimes \mathscr{B}(Y)$ où $\mathscr{L}$ est la tribu de Lebesgue sur $[0,T]$, $\mathscr{B}(H)$ et $\mathscr{B}(Y)$ sont respectivement les tribus boréliennes de H et Y)
2. Pour presque tout $t \in [0,T]$, $U(t,.)$ est semi-continue inférieurement. C'est à dire que, pour toute partie fermée F de Y, l'ensemble
$$\{x \in H : U(t,x) \subset F\}$$
est fermé dans H. De façon équivalente (cf. [31], prop. 2.26) : pour tout y appartenant à Y, l'application $x \mapsto d(y, U(t,x))$ est semi-continue supérieurement sur H.
3. $\exists \gamma \geq 0, \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \forall v \in H$:
$$|U(t,v)| := \sup\{\|u\|_Y : u \in U(t,v)\} \leq c_1 + c_2|v|^\gamma \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

2.3.3 Exemples

Contraintes de boîte sur le contrôle

Soit m et M deux applications appartenant à $L^\infty(0,T;\mathbb{R})$.

$$(E_{U_{ad}}) \begin{cases} \dot{z}(t) - \Delta z(t) = u(t)z(t) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = z_0 \text{ dans } H \\ u \in U_{ad} := \{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}) : m(t) \leq u(t) \leq M(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T]\}. \end{cases}$$

L'hypothèse (H_U) se vérifie aisément pour la multiapplication U_{ad}, définie sur $[0,T]$ et à valeurs dans $2^{\mathbb{R}}$, telle que :

$$U_{ad}(t) \in [m(t); M(t)] \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

En particulier, γ est nul et

$$c_1 := \max\{\|m\|_\infty, \|M\|_\infty\}.$$

Nous étudierons dans la dernière partie de cette thèse la sensibilité à la perturbation f de ce problème.

Sélecteurs linéaires

Considérons le problème bilinéaire ci-dessous qui est à la base des travaux de E. S. Pyatniskiy ([46]) dans le cadre de la recherche d'un critère de stabilité asymptotique (en faisant tendre T vers $+\infty$). Pour presque tout $t \in [0,T]$, l'état $z(.)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit les matrices $n \times n$ réelles $\{A_1, ..., A_q\}$, où q est un entier naturel supérieur à un, et les fonctions $u_i(.)$ définies sur $[0,T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$(E_{SL}) \begin{cases} \dot{z}(t) = [\Sigma_{i=1}^q u_i(t) A_i] z(t) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = 0 \\ 0 \leq u_i(t) \leq 1 \text{ et } \Sigma_{i=1}^q u(t) = 1. \end{cases}$$

Comme dans l'exemple ci-dessus, γ est nul et pour une norme matricielle, notée $|||.|||$:

$$c_1 := \max\{|||A_i|||, i \in \{0, ..., q\}\}.$$

2.3.4 Une inégalité de type Gronwall

Les démonstrations des estimations a priori qui suivent reposent sur une inégalité qui généralise le lemme de Gronwall. On utilise en particulier le résultat ci-dessous qui est une conséquence d'un résultat de Willett et Wong ([51]).

Lemme 5.– *Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $h \geq 0$, $x : [0,T] \to [0, \infty[$ et $y : [0,T] \to [0, \infty[$ deux fonctions intégrables. Soit $F : [0,T] \to [0, \infty[$ telle que*

1) xF^h et yF sont intégrables sur $[0,T]$

2) $F(t) \leq c + \int_0^t xF^h + \int_0^t yF \quad p.p. \quad t \in [0,T]$

Alors, pour presque tout t appartenant à $[0,T]$:

(i) si $h \in [0,1[$ alors

$$F(t) \leq e^{\|y\|_1} \left(c^{1-h} + (1-h) \int_0^t x(s) \exp[(h-1) \int_0^s y(\theta)\, d\theta] ds) \right)^{1/(1-h)}$$

(ii) si $h = 1$ alors

$$F(t) \leq c e^{\|y\|_1 + \|x\|_1}$$

(iii) si $h \in]1, \infty[$ alors l'inégalité de (i) est encore vraie sous la condition :

$$c^{1-h} + (1-h) \int_0^T x(s) \exp[(h-1) \int_0^s y(\theta)\, d\theta]\, ds > 0. \tag{2.11}$$

Démonstration. La démonstration originale du lemme de Willett-Wong est dans [51]. Nous écrivons ici une preuve qui met en évidence les conditions suffisantes d'obtention des estimations a priori en fonction de l'exposant h [18].

Commençons par le cas où $h \in [0, 1[$. Notons

$$\psi(t) := (c + \int_0^t xF^h + \int_0^t yF)^{1-h}.$$

Ainsi pour presque tout t appartenant à $[0, T]$

$$\psi'(t) = (1-h)[x(t)F^h(t) + y(t)F(t)]\,[\psi(t)]^{-h/(1-h)}.$$

L'hypothèse (2) s'écrit

$$F(t) \le [\psi(t)]^{1/(1-h)} \quad p.p. \quad t \in [0, T].$$

D'où la majoration

$$\psi'(t) \le (1-h)[x(t) + y(t)\psi(t)]. \qquad (*)$$

Notons

$$\Phi(t) := \frac{1}{1-h}\psi(t)\exp[(h-1)\int_0^t y(\theta)\,d\theta] - \int_0^t x(s)\exp[(h-1)\int_0^s y(\theta)\,d\theta]ds.$$

Montrons que Φ est monotone sur $[0, T]$.

$$\Phi'(t) = \frac{1}{1-h}\psi'(t)\exp[(h-1)\int_0^t y(\theta)\,d\theta] - \psi(t)y(t)\exp[(h-1)\int_0^t y(\theta)\,d\theta]$$

$$-x(t)\exp[(h-1)\int_0^t y(\theta)\,d\theta]$$

$$\Phi'(t) = \frac{1}{1-h}\exp[(h-1)\int_0^t y(\theta)\,d\theta]\{\psi'(t) - ((1-h)[x(t) + y(t)\psi(t)])\}.$$

Etudions le signe de Φ'. Si $h \in [0, 1[$ alors la majoration $(*)$ permet d'en déduire que $\Phi'(t)$ est négatif pour presque tout t appartenant à $[0, T]$. Ainsi $\Phi(t)$ est majorée par $\Phi(0)$ qui vaut $c^{1-h}/(1-h)$.

$$\frac{1}{1-h}\psi(t)\exp[(h-1)\int_0^s y(\theta)\,d\theta] \le \frac{c^{1-h}}{1-h} + \int_0^t x(s)\exp[(h-1)\int_0^s y(\theta)\,d\theta]ds.$$

$$\exp[(1-h)\int_0^s y(\theta)\,d\theta] \le \exp[(1-h)\|y\|_1]$$

et

$$F(t) \le [\psi(t)]^{1/(1-h)} \quad p.p. \quad t \in [0, T]$$

permettent d'en déduire (i).

Dans le cas où h est strictement supérieur à un la condition suffisante de (iii) assure que c n'est pas nul ; ψ est encore définie mais on a la minoration :

$$\psi'(t) \geq (1-h)[x(t)+y(t)\psi(t)] \qquad (**)$$

On en déduit que $\Phi'(t)$ est négatif pour presque tout t appartenant à $[0,T]$. Comme dans le cas précédent $\Phi(t)$ est majorée par $\Phi(0)$ mais $1-h$ est négatif.

$$\psi(t) \geq \exp[(1-h)\int_0^s y(\theta)\,d\theta]\{c^{1-h}+(1-h)\int_0^t x(s)\exp[(h-1)\int_0^s y(\theta)\,d\theta]ds\}.$$

Pour calculer la puissance $\dfrac{1}{1-h}$ nous imposons :

$$c^{1-h}+(1-h)\int_0^t x(s)\exp[(h-1)\int_0^s y(\theta)\,d\theta]ds > 0.$$

On obtient encore la majoration pour presque tout t appartenant à $[0,T]$.

$$F(t) \leq [\psi(t)]^{1/(1-h)}$$

$$\leq \left[\exp[(h-1)\int_0^s y(\theta)\,d\theta](c^{1-h}+(1-h)\int_0^t x(s)\exp[(h-1)\int_0^s y(\theta)\,d\theta]ds\right]^{1/(1-h)}.$$

Après simplification on obtient (iii).

Enfin, si h est égal à 1 c'est l'inégalité de Bellman-Gronwall qui donne directement (ii). □

2.3.5 Estimations a priori dans le cas de rétrocontrôles

On établit les estimations a priori qui seront utiles pour l'obtention du résultat d'existence d'une solution en présence de rétrocontrôles. Leur démonstration s'appuie sur l'inégalité de Willett-Wong ci-dessus (voir [51] et [20]).

Théorème 2.– *Sous les hypothèses* (H_p), (H_{z_0}), (H_f), (H_U), (H_B), (H_A) (1), *si* A *est positif, i.e.*

$$\forall v \in V, \langle A(t,v),v\rangle \geq 0 \quad p.p. \quad t\in[0,T],$$

et si la condition

$$(\mathscr{H}) \qquad (|z_0|^2+\|f\|^2_{L^2(0,T;H)})^{-\gamma/2} - \frac{2bc_2}{2bc_1+1}(e^{(bc_1+1/2)\gamma T}-1) > 0$$

est vérifiée, alors il existe une constante M_1 *telle que pour toute solution* (z,u) *de* (E_U) *:*

$$(E_1) \qquad \|z\|_{C([0,T];H)} \leq M_1.$$

De plus si nous supposons (H_A) (2) *et* (3) *alors il existe des constantes* M_2 *et* M_3 *telles que pour toute solution* (z, u) *de* (E_U) *:*

$$\begin{array}{lll}(E_2) & \|z\|_{L^p(V)} & \leq M_2, \\ (E_3) & \|\dot{z}\|_{L^{p^*}(V^*)} & \leq M_3.\end{array}$$

Remarque. Lorsque, pour presque tout $t \in [0, T]$, on a $A(t, 0) = 0$, alors la monotonie implique la positivité. C'est un cas particulier rencontré fréquemment dans les applications.

Démonstration. Pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\langle \dot{z}(t), z(t) \rangle + \langle A(t, z(t)), z(t) \rangle = \langle B(t, u(t), z(t)), z(t) \rangle + \langle f(t), z(t) \rangle.$$

D'après la positivité de A, (H_B), (H_U) et la compatibilité de $(.,.)$ avec $< .,. >_{|H \times V}$, on a pour presque tout t in $[0, T]$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 \leq b\|u(t)\|_Y |z(t)|^2 + |f(t)||z(t)|,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 \leq b(c_1 + c_2|z(t)|^\gamma)|z(t)|^2 + \frac{1}{2}|f(t)|^2 + \frac{1}{2}|z(t)|^2.$$

Donc

$$|z(t)|^2 \leq |z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)} + 2bc_2 \int_0^t (|z(s)|^2)^{1+\gamma/2}\, ds + (2bc_1 + 1) \int_0^t |z(s)|^2\, ds \quad p.p.$$

Dans la suite nous appliquons le lemme 5 avec : $F := |z(.)|^2$, $h := 1 + \gamma/2$, $c := |z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)}$, $x := 2bc_2$ et $y := 2bc_1 + 1$. Si $\gamma > 0$ alors la condition suffisante sur T dans la partie (iii) de ce lemme est :

$$(|z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)})^{-\gamma/2} - (\gamma/2) \int_0^T 2bc_2 \exp[(\gamma/2) \int_0^s (2bc_1 + 1)\, d\theta]\, ds > 0.$$

$$(\mathscr{H}) \qquad (|z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)})^{-\gamma/2} - \frac{2bc_2}{2bc_1 + 1}(e^{(bc_1+1/2)\gamma T} - 1) > 0.$$

Dans le cas où γ est non nul, on applique le lemme de Willett et Wong.

$$|z(t)|^2 \leq e^{T(1+2bc_1)}[(|z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)})^{-\gamma/2} - \frac{2bc_2}{2bc_1 + 1}(e^{(bc_1+1/2)\gamma T} - 1)]^{-2/\gamma} \quad p.p.$$

Nous obtenons la première estimation a priori :

$$\|z\|_{C([0,T];H)} \leq M_1$$

où

$$M_1 := e^{T(bc_1+1/2)}[(|z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)})^{-\gamma/2} - \frac{2bc_2}{2bc_1+1}(e^{(bc_1+1/2)\gamma T} - 1)]^{-1/\gamma}.$$

Si $\gamma = 0$ alors

$$|z(t)|^2 \leq |z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)} + (2b(c_1+c_2)+1)\int_0^t |z(s)|^2\, ds \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

$$|z(t)|^2 \leq (|z_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;H)})e^{(2b(c_1+c_2)+1)T}.$$

Le lemme de Bellman permet d'en déduire (E_1).

Démontrons (E_2). D'après la p-coercivité de A ($(H_A)(3)$) on obtient comme ci-dessus, pour presque tout t appartenant à $[0,T]$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + K\|z(t)\|^p \leq b\|u(t)\|_Y|z(t)|^2 + |f(t)||z(t)|,$$

$$K\int_0^T \|z(t)\|^p\, dt \leq \frac{1}{2}|z_0|^2 + b\int_0^T \|u(t)\|_Y|z(t)|^2\, dt + \int_0^T |f(t)||z(t)|\, dt,$$

$$K\int_0^T \|z(t)\|^p\, dt \leq \frac{1}{2}|z_0|^2 + bTM_1^2(c_1 + c_2M_1^\gamma) + M_1\|f\|_1.$$

Donc

$$\|z\|_{L^p(V)} \leq M_2$$

où

$$M_2 := \frac{1}{K^{1/p}}(\frac{1}{2}|z_0|^2 + bTM_1^2(c_1 + c_2M_1^\gamma) + M_1\|f\|_1)^{1/p}.$$

La preuve de la troisième estimation utilise l'hypothèse $(H_A)(2)$. Pour presque tout t appartenant à $[0,T]$, l'on a

$$\|\dot{z}(t)\|_* \leq \|A(t,z(t)\|_* + C(|B(t,u(t),z(t))| + |f(t)|)$$

où C est la constante telle que : $\|.\|_* \leq C|.|$.

$$\|\dot{z}(t)\|_* \leq a_1(t) + a_2(t)\|z(t)\|^\alpha + CbM_1(c_1 + c_2M_1^\gamma) + |f(t)|) \quad p.p.$$

Notons $a_3(.) := CbM_1(c_1 + c_2M_1^\gamma) + a_1(.) + |f(.)|$.

$$\|\dot{z}(t)\|_* \leq a_3(t) + a_2(t)\|z(t)\|^\alpha \quad p.p.$$

$$\|\dot{z}(t)\|_*^{p^*} \leq 2^{p^*-1}[|a_3(t)|^{p^*} + |a_2(t)|^{p^*}\|z(t)\|^{\alpha p^*}] \quad p.p.$$

$$\|\dot{z}\|_{p^*}^{p^*} \leq 2^{p^*-1}[\int_0^T |a_3(t)|^{p^*}\, dt + \int_0^T |a_2(t)|^{p^*}\|z(t)\|^{\alpha p^*}\, dt] \quad p.p.$$

Nous déduisons que a_3 appartient à $L^{p^*}(\mathbb{R}^+)$ de $(H_A)(2)$ et (H_f). De plus nous savons que $(a_2(.)\|z(.)\|^{\alpha})^{p^*}$ est sommable d'après l'inégalité de Young (voir la démonstration de la proposition 1).

$$\int_0^T |a_2(t)|^{p^*}\|z(t)\|^{\alpha p^*}\,dt \leq \frac{p^*}{s}\|a_2\|_s^s + \frac{\alpha p^*}{p}\|z\|_p^p.$$

En utlisant (E_2) l'on obtient (E_3)

$$\|\dot{z}\|_{p^*} \leq M_3$$

où

$$M_3 := \{2^{p^*-1}\|a_3\|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^+)} + \frac{p^*}{s}\|a_2\|^s_{L^s(\mathbb{R}^+)} + \frac{\alpha p^*}{p}{M_2}^p]\}^{1/p^*}.$$

Dans le cas particulier $p = 2$:

$$M_3 := \{2\|a_3\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \frac{2}{s}\|a_2\|^s_{L^s(\mathbb{R}^+)} + \alpha {M_2}^2]\}^{1/2}.$$

$\square$

2.3.6 Théorème d'existence en présence de rétrocontrôles

Théorème 3.– *Sous les hypothèses* (H_p), (H_{z_0}), (H_f), (H_A), (H_u), (H_B), (H_U), *si* $(\mathscr{H})$ *est vérifiée et si* V *s'injecte de façon compacte dans* H *alors l'équation* (E_U) *admet une solution dans* $W_{pp^*}(0,T) \times L^r(Y)$.

Démonstration du théorème d'existence

Etant donnés $z_0 \in H$, $f \in L^2(H)$ et $T > 0$ tels que la condition suffisante $(\mathscr{H})$ soit vérifiée, considérons l'équation d'état sans rétrocontrôle.

$$(E_{z_0,u,f})\begin{cases} \dot{z}(t) + A(t,z(t)) = B(t,u(t),z(t)) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

L'inconnue est l'état z. Cette équation est bien posée au sens de Hadamard (cf. Théorème 1). Dans toute cette démonstration, afin d'alléger les écritures, nous noterons $W_p := W_{pp^*}(0,T)$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \xi : & (L^r(Y), \|.\|_r) & \rightarrow & (W_p, \sigma(W_p, W_p^*)) \\ & u & \mapsto & z_u \end{array}$$

où z_u est l'unique solution du système (E_u).

Lemme 6.– *L'application* ξ *est continue de* $(L^r(Y), \|.\|_r)$ *dans* $(W_p, \sigma(W_p, W_p^*))$.

Démonstration. D'après le théorème 1, l'application ξ est localement lipschitzienne, donc continue, de $(L^r(Y), \|.\|_r)$ vers $(W_p, \|.\|_{W_p})$. $\square$

Notons

$$\mathscr{V} := \{u \in L^r(Y) : \|u\|_r \leq M\}$$

où $M := T^{1/r}(c_1 + c_2 M_1^\gamma)$.

Remarque. Nous avons choisi M de telle façon que pour chaque solution (z, u) de $(E_{z_0,u,f})$ le contrôle u appartienne à $\mathscr{V}$.

Lemme 7.– *L'ensemble $\bar{co}[\xi(\mathscr{V})]$ est compact dans $(W_p, \sigma(W_p, W_p^*))$.*

Ici $\bar{co}$ est l'adhérence de l'enveloppe convexe.

Démonstration. D'après les estimations a priori (E_2) and (E_3) le sous-ensemble $\bar{co}[\xi(\mathscr{V})]$ est borné dans l'espace de Banach réflexif $(W_p, \|.\|_{W_p})$ donc il est $\sigma(W_p, W_p^*)$ compact. $\square$

Notons $K := \bar{co}[\xi(\mathscr{V})]$ et définissons la multiapplication de K dans l'ensemble des parties fermées et non vides de $L^r(Y)$:

$$R(z) := \{u \in L^r(Y) : u(t) \in U(t, z(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, T]\}.$$

Un ensemble $\mathscr{D} \subset L^r(Y)$ est dit décomposable si pour tous u et v appartenant à $\mathscr{D}$ et pour toute partie A Lebesgue-mesurable incluse dans $[0, T]$, la fonction

$$w_A(t) := \begin{cases} u(t) \text{ si } t \in A, \\ v(t) \text{ si } t \in [0, T] \setminus A \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{D}$.

Proposition 6.– *Les valeurs de la multiapplication R sont décomposables et R est semi-continue inférieurement de $(K, \sigma(W_p, W_p^*))$ vers $(L^r(Y), \|.\|_r)$.*

Démonstration. Etant donné $z \in K$, pour tout u et pour tout v appartenant à $R(z)$ et pour toute partie A Lebesgue-mesurable incluse dans $[0, T]$, définissons :

$$w_A(t) := \begin{cases} u(t) \text{ si } t \in A, \\ v(t) \text{ si } t \in [0, T] \setminus A. \end{cases}$$

Du fait que $w_A(t) \in \{u(t), v(t)\} \subset U(t, z(t))$ nous en déduisons que $w_A \in R(z)$. La première partie de la proposition est démontrée.

Soit F un sous-ensemble fermé de $L^r(Y)$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui $\sigma(W_p, W_p^*)-$converge vers z et qui soit tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R(z_n) \subset F$, nous devons seulement démontrer que $R(z) \subset F$. Etant donné $\bar{u} \in R(z)$, définissons la multiapplication Γ_n ci-dessous.

$$\Gamma_n(t) := \{u \in U(t, z_n(t)) : d(\bar{u}(t), U(t, z_n(t)) + \frac{1}{n} \geq \|u - \bar{u}(t)\|_Y \; p.p. \; t \in [0,T]\}.$$

Lemme 8.– *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la multiapplication Γ_n est mesurable et donc elle admet une sélection mesurable $u_n : [0,T] \to Y$.*

Démonstration. Définissons :

$$\varphi_n(t,u) := d(\bar{u}(t), U(t, z_n(t)) + \frac{1}{n} - \|u - \bar{u}(t)\|_Y.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après $(H_U)(1)$ et (2), $\varphi_n(t,.)$ est mesurable et $\varphi_n(.,u)$ est continue. Dons $\varphi_n(.,.)$ est mesurable. De plus le graphe de Γ_n est :

$$Gr(\Gamma_n) := \{(t,u) \in [0,T] \times Y : u \in \Gamma_n(t)\}.$$

$$Gr(\Gamma_n) = \{(t,u) \in [0,T] \times Y : \varphi_n(t,u) \geq 0 \quad p.p. \quad t \in [0,T]\}.$$

La multiapplication Γ_n est mesurable et donc elle admet une sélection mesurable u_n (voir [16]) telle que :

$$\begin{cases} u_n(t) \in U(t, z_n(t)) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ \|u_n(t) - \bar{u}(t)\|_Y \leq \dfrac{1}{n} + d(\bar{u}(t), U(t, z_n(t))) \quad p.p. \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

□

En particulier u_n appartient à $R(z_n)$. A l'aide de la semi-continuité inférieure de $U(t,.)$ et d'après

$$z_n(t) \to z(t) \quad \text{for all } t \in [0,T]$$

on a

$$0 \leq \limsup_{n \to +\infty} d(\bar{u}(t), U(t, z_n(t))) \leq d(\bar{u}(t), U(t, z(t)))$$

où

$$d(\bar{u}(t), U(t, z(t))) = 0 \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

Donc pour presque tout $t \in [0,T]$, $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge fortement dans Y vers $\bar{u}(t)$. Du fait que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$

$$\|z_n\|_{C([0,T],H)} \leq M_1$$

on obtient

$$\|u_n(t)\|_Y \leq c_1 + c_2 M_1^\gamma \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue cette suite converge fortement dans $L^r(Y)$. Mais F est fermé, donc

$$\bar{u} \in F.$$

□

Les valeurs de la multiapplication R sont décomposables et R est semi-continue inférieurement, ainsi le théorème de sélection de Fryszkowski ([28], th.3.1) donne l'existence d'une fonction notée $r : K \to \mathscr{V}$ qui est continue de $(W_p, \sigma(W_p, W_p^*))$ vers $(L^r(Y), \|.\|_r)$ et telle que :

$$\forall z \in K, r(z)(t) \in U(t, z(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, T].$$

Nous en déduisons que la fonction composée $\xi \circ r : K \to K$ est $\sigma(W_p, W_p^*)$-continue du convexe faiblement compact K dans lui-même. Nous appliquons le théorème du point fixe de Schauder (voir [35], page 176) avec $\xi \circ r : K \to K$ pour déduire l'existence de $\bar{z} \in K$ tel que $(\xi \circ r)(\bar{z}) = \bar{z}$. Autrement dit $\bar{z}$ est la solution unique associée au contrôle $r(\bar{z})$ appartenant à $U(., \bar{z}(.))$ et $(\bar{z}, r(\bar{z}))$ est admissible pour $(E_{z_0,u,f})$.

Chapitre 3

Contrôle optimal

Dans ce chapitre nous nous intéressons au contrôle optimal de systèmes gouvernés par l'équation d'état non linéaire et de type bilinéaire $(E_{z_0,u,f})$ où la condition initiale z_0 et la perturbation f sont fixées. Le coût, convexe, est une somme de termes prenant en compte séparément les coûts relatifs aux états et aux contrôles. Au demeurant, nous ne lui imposons pas la positivité.

La première partie de ce chapitre présente la formulation du problème ainsi que les notations. En particulier nous détaillons les hypothèses qui portent sur le coût. Dans la seconde partie nous démontrons l'existence d'une paire optimale. La fin de ce chapitre est consacrée à l'obtention de conditions nécessaires d'optimalité en s'appuyant sur une méthode de pénalisation (voir [5], page 265).

3.1 Formulation du problème et hypothèses

Le problème de contrôle optimal est le problème de Bolza ci-dessous qui est posé dans des espaces de Banach.

$$(P_{z_0,f}) \qquad \inf\{J(z,u), z \text{ est solution de } (E_{z_0,u,f})\}.$$

Rappelons que

$$(E_{z_0,u,f}) \begin{cases} \dot{z}(t) + A(t, z(t)) = B(t, u(t), z(t)) + f(t) & p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

En plus des hypothèses (H_p), (H_{z_0}), (H_f), $(H_A)(1) - (5)$, (H_u) qui assurent le fait que $(E_{z_0,u,f})$ soit bien posé, nous introduisons les hypothèses (H_ℓ), (H_F) et (H_G) qui portent sur le coût défini ci-dessous.

$$\begin{array}{rccl} J: & L^p(H) \times L^r(Y) & \longrightarrow &]-\infty; +\infty] \\ & (z,u) & \longmapsto & \ell(z(T)) + \int_0^T F(z(t))dt + \int_0^T G(u(t))dt. \end{array}$$

$(H_\ell) \quad \ell : H \longrightarrow [0, \infty]$

1. ℓ est convexe, semi-continue inférieurement (sci) et propre.
2. $D(\ell) \cap C_{z_0} \neq \emptyset$ où l'on définit le domaine effectif de ℓ

$$D(\ell) := \{v \in H : \ell(v) < \infty\}$$

et l'ensemble des états atteignables depuis l'état initial z_0
$C_{z_0} := \{v \in H | \exists u \in L^r(Y) : z_u(T) = v$

$$\text{et } |\int_0^T F(z_u(t))dt + \int_0^T G(u(t))dt| < \infty\}$$

où z_u est l'unique solution de $(E_{z_0,u,f})$.

(H_F) $\quad F : H \longrightarrow]-\infty, \infty]$

1. F est convexe, semi-continue inférieurement et propre.
2. $\exists c > 0 : F(h) \geq -c|h|, \forall h \in H.$

(H_G) $\quad G : Y \longrightarrow [0, \infty]$

1. L'espace des contrôles Y est un espace de Hilbert séparable.
2. G est convexe, semi-continue inférieurement et propre.
3. Dans le cas où $p > 2$ il existe une fonction continue, convexe et croissante $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie $w(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{w(x^2)}{x} = \infty$ et telle que

$$G(v) \geq w(\|v\|_Y^r), \forall v \in Y.$$

Si $p = 2$ alors l'on suppose que $G(v) \geq w(\|v\|_\infty)$.

Remarques :

1. Le fait que ℓ soit propre est une conséquence de l'hypothèse $(H_\ell)(2)$.
2. Les hypothèses ci-dessus qui portent sur F et G impliquent que la somme $F + G$ est un intégrande normale convexe. Avec les hypothèses sur ℓ on en déduit que le coût J est convexe, sci et propre (voir l'annexe et [2]).
3. Le coût n'est pas supposé positif mais nous lui imposons une minoration par $(H_F)(2)$.
4. L'hypothèse $(H_G)(3)$ est utile pour borner les contrôles d'une suite minimisante du coût optimal.

3.2 Existence d'une paire optimale

Théorème 4.– *Sous les hypothèses (H_p), (H_{z_0}), (H_f), (H_A), (H_u) et (H_B), si l'injection de V dans H est compacte et si de plus l'on considère les hypothèses (H_ℓ), (H_F) et (H_G) alors le problème $(P_{z_0,f})$ admet au moins une paire optimale $(\bar{z}, \bar{u})$ avec $\bar{z} \in W_{pp^*}(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$ et $\bar{u} \in L^r(0,T;Y)$.*

Démonstration. Etape 1. Le jeu d'hypothèses qui a été choisi assure l'existence d'une unique solution à l'équation d'état $(E_{z_0,u,f})$ qui gouverne $(P_{z_0,f})$. Les paramètres z_0 et f étant fixés, nous noterons z_u cette unique solution. D'après l'hypothèse $(H_\ell)(2)$ il existe au moins un contrôle noté $\tilde{u}$ tel que $z_{\tilde{u}}(T)$ appartienne au domaine effectif de ℓ en étant atteignable depuis l'état initial z_0. Ainsi la borne inférieure des coûts sur l'ensemble des contrôles admissibles n'est pas ∞.

Si $p > 2$ alors les hypothèses $(H_F)(2)$, $(H_G)(2)$ et le fait que ℓ soit positive impliquent la minoration ci-dessous.

$$J(z_u, u) \geq \int_0^T w(\|u(t)\|_Y^r dt - \int_0^T c|z_u(t)|dt.$$

Utilisons la convexité de w et l'estimation a priori (E_1) (voir le lemme 2). Il existe deux constantes positives $k_{z_0,f}$ et $k'_{z_0,f}$ telles que :

$$J(z_u, u) \geq Tw(\frac{1}{T}\|u\|_r^r) - k_{z_0,f}\|u\|_r^{r/2} - k'_{z_0,f}. \tag{3.1}$$

Si $p = 2$ alors, c'est encore l'hypothèse $(H_G)(3)$ qui est utilisée pour établir la minoration ci-dessous avec deux constantes positives, notées comme précédemment, $k_{z_0,f}$, $k'_{z_0,f}$ et telles que :

$$J(z_u, u) \geq Tw(\frac{1}{T}\|u\|_\infty) - k_{z_0,f}\|u\|_\infty^{1/2} - k'_{z_0,f}. \tag{3.2}$$

Les hypothèses de convexité et de comportement à l'infini de w permettent d'en déduire que la borne inférieure des coûts n'est pas $-\infty$. Nous la noterons $\mathscr{J}_{z_0,f}$.

Etape 2. Montrons que toute suite minimisante de contrôles est bornée. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite minimisante et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des états associés à cette suite minimisante. Démontrons que cette suite de contrôles est bornée. Les minorations (3.1) et (3.2) s'écrivent

$$J(z_n, u_n) \geq Tw(\frac{1}{T}\|u_n\|_r^r) - k_{z_0,f}\|u_n\|_r^{r/2} + k'_{z_0,f}$$

et

$$J(z_n, u_n) \geq Tw(\frac{1}{T}\|u_n\|_\infty) - k_{z_0,f}\|u_n\|_\infty^{1/2} + k'_{z_0,f}$$

En raisonnant par l'absurde, si les contrôles de cette suite minimisante n'étaient pas bornés alors, d'après $(H_F)(3)$, on pourrait en déduire que $\dfrac{J(z_n, u_n)}{\|u_n\|_r^{r/2}}$ tend vers l'infini. La borne inférieure des coûts serait infinie. Ceci contredirait le résultat de la première étape donc ces contrôles sont bornés.

Etape 3. Nous démontrons que cette suite minimisante converge vers une paire $(\bar{z}, \bar{u})$ admissible, i.e. une paire telle que $\bar{z}$ soit la solution de $(E_{z_0,\bar{u},f})$. Si $2 < p < +\infty$ alors $L^r(Y)$ est réflexif car Y est un espace de Banach réflexif et $r = \dfrac{p}{p-2}$. Du fait que cette suite minimisante est bornée, on en extrait une sous-suite notée encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge au sens de $\sigma(L^r(Y), L^{r^*}(Y^*))$ vers un contrôle noté $\bar{u} \in L^r(Y)$:

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \text{ faiblement dans } L^r(Y).$$

Si p est égal à 2 alors r est infini et $\bar{u}$ est la limite faible-étoile :

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \text{ faiblement étoile dans } L^\infty(Y).$$

Les estimations a priori sur les états permettent de borner les suites $(\|z_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\|z_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\|\dot{z}_n\|_{p^*})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(|z_n(0)|_H)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par des constantes qui ne dépendent que de f et z_0. Dans le second chapitre (2.2.4) nous avons démontré que $(\|A(., z_n(.))\|_{p^*})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\|B(., u_n(.), z_n(.))\|_{p^*})_{n\in\mathbb{N}^*}$ étaient bornées. On peut extraire de ces suites des sous-suites qui convergent dans des sens faibles. Nous utilisons les mêmes indices pour les suites et les suites extraites. Il existe $\bar{z}_1$ dans $L^p(V)$ et $\bar{z}_2$ dans $L^\infty(V)$ telles que

$$z_n \rightharpoonup \bar{z}_1 \text{ faiblement dans } L^p(V).$$

et

$$z_n \rightharpoonup \bar{z}_2 \text{ faiblement étoile dans } L^\infty(V).$$

Nous avons démontré dans le second chapitre (cf. proposition 4) que :

$$\bar{z}_1 = \bar{z}_2,$$

état que nous noterons $\bar{z}$.

$$\dot{z}_n \rightharpoonup \dot{\bar{z}} \text{ faiblement dans } L^{p^*}(V^*),$$

L'injection de V dans H étant compacte :

$$z_n \to \bar{z} \text{ fortement dans } L^p(H),$$

et

$$z_n(T) \to \bar{z}(T) \text{ fortement dans } H.$$

On sait déjà que la suite $(B(., u_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement dans $L^{p^*}(V^*)$ ainsi il reste à démontrer que sa limite est $B(., \bar{u}, \bar{z})$.

Lemme 9.– *Si $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ faiblement dans $L^r(Y)$ et si $z_n \rightharpoonup \bar{z}$ faiblement dans $L^p(V)$ alors*

$$B(., u_n, z_n) \rightharpoonup B(., \bar{u}, \bar{z}) \textit{ faiblement dans } L^{p^*}(V^*).$$

Démonstration. Pour tout v appartenant à $L^p(V)$:
$\int_0^T \langle B(t,u_n(t),z_n(t)),v(t)\rangle\,dt = \int_0^T \langle B(t,u_n(t),z_n(t)-\bar z(t)),v(t)\rangle\,dt$

$$+\int_0^T \langle B(t,u_n(t),\bar z(t)),v(t)\rangle\,dt \tag{3.3}$$

On commence par majorer le premier terme du membre de droite de (3.3). L'injection de H dans V^* est continue ainsi il existe une constante positive C^* telle que : $\|.\|_* \leq C^*|.|$.
$\int_0^T \langle B(t,u_n(t),z_n(t)-\bar z(t)),v(t)\rangle\,dt \leq \int_0^T \|B(t,u_n(t),z_n(t)-\bar z(t))\|_*\|v(t)\|dt.$

$$\leq \int_0^T C^*|B(t,u_n(t),z_n(t)-\bar z(t))|\|v(t)\|dt.$$

D'après (H_B) :

$$\int_0^T \langle B(t,u_n(t),z_n(t)-\bar z(t)),v(t)\rangle\,dt \leq \int_0^T bC^*\|u(t)\|_Y|z_n(t)-\bar z(t)|\|v(t)\|dt.$$

L'inégalité de Hölder s'applique car $\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$.

$$\int_0^T \langle B(t,u_n(t),z_n(t)-\bar z(t)),v(t)\rangle\,dt \leq bC^*\|u_n\|_r\|z_n-\bar z\|_{L^p(H)}\|v\|_p.$$

La suite $(\|u_n\|_r)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge fortement vers $\bar z$ dans $L^p(H)$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T < B(t,u_n(t),z_n(t)-\bar z(t)),v(t) > dt = 0.$$

Le second terme du membre de droite de (3.3) tend vers

$$\int_0^T \langle B(t,\bar u(t),\bar z(t)),v(t)\rangle\,dt$$

car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\bar u$ dans $L^r(Y)$ et $B(t,.,\bar z(t)) : Y \to H$ est continue (cf. $(H_B)(2)$).

□

Dans le cas particulier où $p=2$ nous avons le lemme ci-dessous.

Lemme 10.– *Si $u_n \rightharpoonup \bar u$ faiblement étoile dans $L^\infty(Y)$ et si $z_{\phi(n)} \rightharpoonup \bar z$ faiblement dans $L^2(V)$ alors*

$$B(.,u_n,z_n) \rightharpoonup B(.,\bar u,\bar z) \textit{ faiblement dans } L^2(V^*).$$

Enfin, pour presque tout $t \in [0,T]$, l'opérateur $A(t,.)$ est borné, hémicontinu et monotone donc demicontinu (cf. annexe C). Autrement dit, pour presque tout $t \in [0,T]$, si la suite $(z_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge fortement dans V vers $\bar{z}(t)$ alors la suite $(A(t,z_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $\sigma(L^{p^*}(V^*),L^p(V))$ faiblement vers $(A(t,\bar{z}(t))$. Donc $\bar{z}$ vérifie l'équation d'état $(E_{z_0,\bar{u},f})$.

Etape 4. Il nous reste à démontrer que la limite $(\bar{z},\bar{u})$ est une paire optimale. Par hypothèse ℓ est sci et convexe donc elle est faiblement sci (cf. corollaire III.8, page 38 de [12]). En particulier $z_n(T)$ converge faiblement vers $\bar{z}(T)$ donc :

$$\ell(\bar{z}(T)) \leq \liminf_n \ell(z_n(T)).$$

Lemme 11.– *Le coût J est convexe, propre et semi continu inférieurement.*

Démonstration. Les hypothèses (H_F), (H_G) et (H_ℓ) entraînent que le coût est convexe et propre. Il reste à démontrer que J est sci. Soit $(z_n,u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $L^p(V)\times L^r(Y)$ qui converge fortement dans cet ensemble vers (z,u) alors il existe une sous-suite extraite notée encore $(z_n,u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$(z_n(t),u_n(t)) \longrightarrow (z(t),u(t)) \quad p.p. \text{ fortement dans } H\times Y.$$

Notons $L(z(t),u(t)) := F(z(t)) + G(z(t))$. La semi-continuité inférieure de F et G se traduit par :

$$L(z(t),u(t)) \leq \liminf_{n\to+\infty} L(t,z_n(t),u_n(t)). \tag{3.4}$$

L'intégrande étant de signe quelconque on commence par se ramener à une suite de fonctions positives sur $[0,T]$. La convexité de L et la minoration $(H_F)(2)$ autorisent la majoration ci-dessous.

$\exists y_0 \in L^{p^*}(0,T;H), \exists v_0 \in L^\infty(Y^*), \forall (z,u)\in H\times Y$:

$$L(z(t),u(t)) \geq \langle u, v_0(t)\rangle_{Y,Y^*} + (z,y_0(t)) \quad p.p. \quad t\in[0,T].$$

Nous appliquons le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives de $L^1(0,T)$: $(L(z_n(.),u_n(.) - \langle u_n(.),v_0(.)\rangle_{Y,Y^*} - (z_n(.),y_0(.)))_{n\in\mathbb{N}^*}$. La fonction $\liminf_{n\to+\infty} L(z_n(t),u_n(t)) \in L^1(0,T)$ est intégrable et

$$\int_0^T \liminf_{n\to+\infty} L(z_n(t),u_n(t))dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T L(z_n(t),u_n(t))dt.$$

Donc d'après (3.4) :

$$\int_0^T L(z(t),u(t))dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T L(z_n(t),u_n(t))dt.$$

L'hypothèse de semi-continuité inférieure de ℓ permet de conclure que le coût J est semi continu inférieurement. □

En revenant à la suite minimisante, on en déduit que :

$$\mathscr{J}_{z_0,f} \leq \ell(\bar{z}(T)) + \int_0^T L(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t))dt \leq \liminf_{n \to +\infty} J(z_n, u_n).$$

Donc $(\bar{z}, \bar{u})$ est optimale :

$$J(\bar{z}, \bar{u}) = \mathscr{J}_{z_0,f}.$$

□

3.3 Conditions nécessaires d'optimalité

Nous avons démontré dans la section précédente que le problème $(P_{z_0,f})$ admettait au moins une paire optimale. Dans la suite nous noterons $(\bar{z}, \bar{u})$ une telle paire optimale qui appartient à $C([0,T]; H) \times L^r(Y)$ et nous mettrons en oeuvre une méthode de régularisation et de pénalisation du coût (voir [5]). Dans un premier temps nous établissons des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre pour une famille de problèmes (P_λ) dont les coûts sont différentiables. Le système d'optimalité du problème $(P_{z_0,f})$ s'obtient ensuite par passage à la limite du paramètre λ.

3.3.1 Hypothèses suplémentaires

$(H_p)(2)$ $p \in [2, 4]$ et par conséquent $r \in [4; +\infty]$.
$(H_F)(3)$ F est localement bornée.
$(H_G)(4)$ Il existe $u_0 \in L^r(Y)$ tel que $G(u_0) \in L^r(0, T)$.
Nous imposons à l'opérateur A d'être différentiable pour presque tout $t \in [0, T]$. Sa différentielle notée A' vérifie les hypothèses ci-dessous.
$(H_{A'})$ $A'(t, .) : V \to \mathscr{L}(V, V^*)$ *p.p.* $t \in [0, T]$
Pour tous v et w appartenant à V et pour presque tout t appartenant à $[0, T]$:

1. $A'(., v)w$ est mesurable,
2. il existe $\alpha_1 \in L(0, T; \mathbb{R}^+)$ tel que $\|A'(t, v)w\|_* \leq \alpha_1(t)\|w\|$;
3. il existe $\alpha_2 > 0$ tel que $\langle A'(t, v)w, w\rangle \geq \alpha_2\|w\|^p$.
4. il existe $\alpha_3 \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^+)$ tel que pour tous v et w appartenant à H : $\|A'(t, v) - A'(t, w)\|_{\mathscr{L}(H)} \leq \alpha_3(t)|v - w|$.

3.3.2 Problèmes approchés

Nous savons par avance qu'il existe au moins une paire optimale $(\bar{z}, \bar{u}) \in C([0, T]; H) \times L^r(Y)$ pour le problème $(P_{z_0,f})$. Soit le paramètre strictement positif λ, nous noterons (P_λ) les problèmes approchés. Leur construction est basée sur les méthodes de régularisation et de pénalisation ([5]). Les régularisées au sens de Yosida des fonctions F, G et ℓ sont définies pour tout λ strictement positif, pour presque tout t appartenant à $[0,T]$, pour tout $z \in H$ et tout $u \in Y$ par :

$$F_\lambda(z) = \inf\{\frac{1}{2\lambda}|z-\zeta|^2 + F(\zeta), \zeta \in H\} \tag{3.5}$$

$$G_\lambda(u) = \inf\{\frac{1}{2\lambda}\|u-v\|_Y^2) + G(v), (\zeta, v) \in Y\} \tag{3.6}$$

$$\ell_\lambda(z(T)) = \inf\{\frac{1}{2\lambda}|z(T)-\zeta(T)|^2 + \ell(\zeta(T)), \zeta \in H\}. \tag{3.7}$$

Considérons la famille de problèmes (P_λ) définis par la même équation d'état que $(P_{z_0,f})$ mais dont le coût est pénalisé :

$$J_\lambda(z,u) := \ell_\lambda(z(T)) + \int_0^T F_\lambda(z(t))dt + \int_0^T G_\lambda(u(t))dt + \frac{1}{r}\|\bar{u}-u\|_r^r. \tag{3.8}$$

Si p est égal à deux alors les contrôles appartiennent à $L^\infty(Y)$ donc en particulier à $L^2(Y)$. Le coût est :

$$J_\lambda(z,u) := \ell_\lambda(z(T)) + \int_0^T F_\lambda(z(t))dt + \int_0^T G_\lambda(u(t))dt + \frac{1}{2}\|\bar{u}-u\|_2^2. \tag{3.9}$$

Nous commençons par établir les systèmes d'optimalité pour les problèmes approchés.

Lemme 12.– *Sous les hypothèses (H_p), (H_{z_0}), (H_f), (H_A), (H_u) et (H_B), si l'injection de V dans H est compacte et en supposant $(H_{A'})$, alors, pour tout $\lambda > 0$, le problème (P_λ) admet au moins une paire optimale notée (z_λ, u_λ) qui appartient à $C([0,T];H) \times L^r(0,T)$ et il existe une fonction notée p_λ appartenant à $W_{pp^*}(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$ telle que pour presque tout $t \in [0,T]$:*

$$\begin{cases} \dot{z}_\lambda(t) + A(t, z_\lambda(t)) = B(t, u_\lambda(t), z_\lambda(t)) + f(t) \\ z_\lambda(0) = z_0 \\ -\dot{p}_\lambda(t) + [A'(t, z_\lambda(t))]^* p_\lambda(t) = [B(t, u_\lambda(t), .]^* p_\lambda(t)) + F'_\lambda(z_\lambda(t)) \\ p_\lambda(T) = \ell'_\lambda(z_\lambda(T)) \\ -(p_\lambda(t), B(t, ., z_\lambda(t))_H = [\bar{u}_\lambda(t) - u_\lambda(t)]\|\bar{u}_\lambda(t) - u_\lambda(t)\|_Y^{r-2} + G'_\lambda(u_\lambda(t)) \end{cases}$$

Démonstration. Etape 1. Soit λ un nombre réel strictement positif et fixé. Commençons par démontrer l'existence d'une unique paire qui soit optimale pour le problème (P_λ). Par hypothèse, F et G sont des intégrandes normaux et positifs donc le coût J_λ est convexe, semi-continu inférieurement et propre (voir l'annexe D). Ainsi le théorème 4 assure l'existence d'une solution au problème (P_λ). De plus $r > 1$ ainsi le terme pénalisant $u \mapsto \dfrac{1}{r}\|u-\bar{u}\|^r$ rend le coût J_λ strictement convexe. Donc le problème (P_λ) admet une solution unique que nous noterons (z_λ, u_λ).

Etape 2. Les régularisées de Yosida ℓ_λ, F_λ et G_λ sont différentiables car H et Y sont des espaces de Hilbert (voir le théorème 2.3, page 121 de [5]).

Etape 3. Il existe un unique état adjoint associé à z_λ. En effet, le système

$$(E_{\ell'_\lambda(z_\lambda(T)),u_\lambda,F'_\lambda})\begin{cases} -\dot{p}_\lambda(t)+[A'(t,z_\lambda(t))]^*p_\lambda(t)=[B(t,u_\lambda(t),.)]^*p_\lambda(t))+F'_\lambda(z_\lambda(t)) \\ p_\lambda(T)=\ell'_\lambda(z_\lambda(T)) \end{cases}$$

est un problème bien posé d'après le théorème 1 (voir la seconde partie).

Etape 4. Le coût J_λ est différentiable au sens de Gâteaux (voir le théorème 10 de l'annexe D). La condition d'optimalité s'écrit, pour tout $v \in L^r(Y)$:

$$\int_0^T \langle F'_\lambda(z_\lambda(t)), (\Theta'_{z_\lambda}.v)(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle G'_\lambda(u_\lambda(t)), v(t)\rangle\,dt$$

$$+\langle \ell'_\lambda(z_\lambda(T)), (\Theta'_{z_\lambda}.v)(t)\rangle + \int_0^T [\bar{u}_\lambda(t)-u_\lambda(t)]\|\bar{u}_\lambda(t)-u_\lambda(t)\|_Y^{r-2}v(t)\,dt = 0. \quad (3.10)$$

où $\Theta'_{z_\lambda}.v$ est la dérivée dans la direction v au point z_λ de l'application qui à un contrôle v associe l'unique solution z_v de $(E_{z_0,v,f})$. C'est la solution de l'équation :

$$(E.D.)\begin{cases} \dot{y}(t)+A'(t,z_\lambda(t))=B(t,u_\lambda(t),y(t))+B(t,v(t),z_\lambda(t)) \quad p.p. \\ y(0)=y_0. \end{cases}$$

Notons $y := \Theta'_{z_\lambda}.v$ et intégrons par parties.

$$\int_0^T \langle F'_\lambda(z_\lambda(t)), (\Theta'_{z_\lambda}.v)(t)\rangle\,dt$$

$$= \int_0^T \langle -\dot{p}_\lambda(t)+A'^*(t,z_\lambda(t))p_\lambda(t)-B^*(t,u_\lambda(t),p_\lambda(t)), (\Theta'_{z_\lambda}.v)(t)\rangle\,dt$$

$$= -(p_\lambda(T),y(T))_H + \int_0^T \langle -p_\lambda(t),\dot{y}(t)\rangle + A'(t,z_\lambda(t))y(t)-B(t,u_\lambda(t),y(t))\rangle\,dt$$

$$= \int_0^T \langle p_\lambda(t),v(t)\rangle + B(t,v(t),z_\lambda(t))\,dt.$$

Pour tout contrôle v appartenant à $L^r(0,T)$, reportons le dernier membre ci-dessus dans l'équation (3.10).

$\int_0^T(\langle p_\lambda(t),v(t)\rangle + B(t,v(t),z_\lambda(t))$

$$+\langle G'_\lambda(u_\lambda(t))+[\bar{u}_\lambda(t)-u_\lambda(t)]\|\bar{u}_\lambda(t)-u_\lambda(t)\|_Y^{r-2}), v(t)\rangle\,dt = 0$$

Donc

$$G'_\lambda(u_\lambda(t)) = -(p_\lambda(t),B(t,.,z_\lambda(t)))-\bar{u}_\lambda(t)\|\bar{u}_\lambda(t)-u_\lambda(t)\|_Y^{r-2} \quad p.p.$$

$\square$

3.3.3 Passage à la limite

A présent, par passage à la limite nous obtenons le système d'optimalité du problème $(P_{z_0,f})$.

Théorème 5.– *Si* $(\bar{z}, \bar{u})$ *est une paire optimale pour le problème* $(P_{z_0,f})$ *et si* $\bar{z}(T)$ *appartient à l'intérieur de* $D(\ell)$ *alors il existe* $\bar{p}$ *appartenant à* $W_{pp^*}(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$ *telle que pour presque tout* $t \in [0,T]$ *:*

$$(CNO) \begin{cases} -\dot{\bar{p}}(t) + [A'(t, \bar{z}(t))]^* \bar{p}(t) - [B(t, \bar{u}(t), .)]^* \bar{p}(t) \in \partial F(\bar{z}(t)) \\ \bar{p}(T) \in \partial \ell(\bar{z}(T)) \\ -(\bar{p}(t), B(t, ., \bar{z}(t))_H \in \partial G(\bar{u}(t)). \end{cases}$$

Nous démontrons ce théorème en plusieurs étapes. Le premier lemme traduit la convergence forte des contrôles et états approchés. Ensuite deux lemmes permettent de borner les états adjoints. Ces trois lemmes sont utiles pour utiliser des théorèmes de compacités. On établira enfin les conditions nécessaires d'optimalité (5) par passage à la limite sur le paramètre λ.

Lemme 13.– *Sous les hypothèses du lemme 12 la suite* (u_λ) *converge fortement dans* $L^r(Y)$ *vers* $\bar{u}$ *et la suite* (z_λ) *converge fortement dans* $C([0,T];H)$ *vers* $\bar{z}$.

Démonstration. Etape 1. Convergences faibles des contrôles et des états approchés. Par définition : $\ell_\lambda \leq \ell$, $F_\lambda \leq F$ et $G_\lambda \leq G$. Ainsi.

$$J_\lambda(z_\lambda, u_\lambda) \leq J_\lambda(\bar{z}, \bar{u}) \leq \mathscr{J}_{z_0,f}.$$

En raisonnant par l'absurde, si les contrôles n'étaient pas bornés pour la norme $L^r(Y)$ alors $\mathscr{J}_{z_0,f}$ serait infini. Il y aurait contradiction. Donc $\|u_\lambda\|_r$ est majoré par une constante indépendante de λ. Il existe une suite extraite notée (u_λ^n) qui converge faiblement dans $L^r(Y)$ vers un contrôle noté $\tilde{u}$. Les estimations a priori permettent d'en déduire que la suite des états associés (z_λ^n) converge faiblement dans $W(0,T)$ vers un état noté $\tilde{z}$. Comme dans la seconde partie, $\tilde{z}$ est l'unique solution de $(E_{z_0,\tilde{u},f})$.

Etape 2. La définition des coûts approchés permet les majorations ci-dessous.

$$\liminf_{\lambda \to 0} \int_0^T F_\lambda(z_\lambda^n(t))dt \geq \int_0^T F(z_\lambda^n(t)) \tag{3.11}$$

et

$$\liminf_{\lambda \to 0} \int_0^T G_\lambda(u_\lambda^n(t))dt \geq \int_0^T G(u_\lambda^n(t)). \tag{3.12}$$

Les applications $z \mapsto \int_0^T F(z(t))dt$, $u \mapsto \int_0^T G(u(t))dt$ sont faiblement sci car elles sont convexes et sci (voir le théorème 10 de l'annexe D). Ainsi les convergences faibles des états et des contrôles approchés (cf. la première étape) permettent de déduire ce qui suit.

$$\liminf_{\lambda\to 0} \int_0^T F_\lambda(z_\lambda^n(t))dt \geq \int_0^T F(\tilde{z}(t)), \tag{3.13}$$

$$\liminf_{\lambda\to 0} \int_0^T G_\lambda(u_\lambda^n(t))dt \geq \int_0^T G(\tilde{u}(t)). \tag{3.14}$$

Le coût final ℓ est également faiblement sci ; on a encore :

$$\liminf_{\lambda\to 0} \ell_\lambda(z_\lambda^n(T))dt \geq \ell(\tilde{z}(T)), \tag{3.15}$$

Etape 3. Nous déduisons des trois majorations (3.13), (3.14) et (3.15) l'encadrement du coût optimal.

$$J_\lambda(z_\lambda^n, u_\lambda^n) \leq J(\bar{z}, \bar{u}) \leq J(\tilde{z}, \tilde{u}).$$

Ainsi

$$\liminf_{\lambda\to 0} J_\lambda(z_\lambda^n, u_\lambda^n) \leq J(\tilde{z}, \tilde{u}).$$

Or l'étape 2 nous a appris que :

$$\liminf_{\lambda\to 0} J_\lambda(z_\lambda^n, u_\lambda^n) \geq J(\tilde{z}, \tilde{u}) + \frac{1}{r}\|u_\lambda^n - \bar{u}\|_r^r.$$

Donc $\lim_{\lambda\to 0} \|u_\lambda^n - \bar{u}\|_r^r dt = 0$. L'unicité de la limite assure que $\tilde{u} = \bar{u}$ et $\tilde{z} = \bar{z}$. On en déduit les convergences fortes annoncées. □

Lemme 14.– *Si $\bar{z}(T)$ appartient à l'intérieur de $D(\ell)$ alors $|p_\lambda(T)|$ est majorée par une constante qui ne dépend pas de λ.*

Démonstration. Le coût final ℓ étant supposé convexe et sci, il est localement lipschitzien. Donc ℓ est localement borné sur l'intérieur de son domaine effectif $D(\ell)$. Pour tout $h \in H$ tel que $|h| = 1$, il existe deux constantes μ et d telles que :

$$\ell(\bar{z}(T) + \mu h) \leq d.$$

Comme $\ell_\lambda \leq \ell$ (cf. [5], théorème 2.3, page 121), nous en déduisons

$$\ell_\lambda(\bar{z}(T) + \mu h) \leq d.$$

Les coûts finaux ℓ_λ étant convexes, différentiables et $p_\lambda(T) = \ell'_\lambda(z_\lambda^n(T)$, nous pouvons écrire la minoration ci-dessous.

$$\ell_\lambda(z_\lambda(T)) - \ell_\lambda(\bar{z}(T) + \mu h) \leq (p_\lambda(T), z_\lambda(T) - \bar{z}(T) - \mu h). \tag{3.16}$$

D'autre part : $\ell_\lambda(z^n_\lambda(T)) \leq \mathscr{J}_{z_0,f}$. Utilisons (3.16) pour majorer $|p_\lambda(T)|$.

$$\mu(p_\lambda(T), h) \leq (p_\lambda(T), z_\lambda(T) - \bar{z}(T)) - \ell_\lambda(z_\lambda(T)) + \ell_\lambda(\bar{z}(T) + \mu h).$$

$$\mu|p_\lambda(T)| \leq |p_\lambda(T)||z_\lambda(T) - \bar{z}(T)| + d + \mathscr{J}_{z_0,f}.$$

$$(\mu - |z_\lambda(T) - \bar{z}(T)|)|p_\lambda(T)| \leq d + \mathscr{J}_{z_0,f}.$$

Nous utilisons enfin la convergence uniforme de z_λ vers $\bar{z}$ qui assure l'existence d'un rang n tel que $|z_\lambda(T) - \bar{z}(T)| \leq \mu/2$. En conclusion :

$$|p_\lambda(T)| \leq \frac{2(d + \mathscr{J}_{z_0,f})}{\mu}.$$

□

Lemme 15.– *Sous les hypothèses du Théorème 5 et les hypothèses supplémentaires (3.3.1) $(H_F)(3)$, $(H_G)(4)$ et (H_p), pour tout $t \in [0,T]$, $|p_\lambda(t)|$ est majoré par une constante qui ne dépend pas de λ.*

Démonstration. Soit l'équation adjointe :

$$\begin{cases} -\dot{p}\lambda(t) + [A'(t, z_\lambda(t))]^* p_\lambda(t) = [B(t, u_\lambda, .)]^* p_\lambda(t) + F'_\lambda(z_\lambda(t)) \\ p_\lambda(T) = \ell'_\lambda(z_\lambda(T)) \end{cases}$$

En multipliant par p_λ et en intégrant sur $[0,T]$ on obtient l'égalité ci-dessous.

$$|p_\lambda(t)|^2 \leq |p_\lambda(T)|^2 + 2b \int_t^T |u_\lambda(s)||p_\lambda(s)| ds + 2 \int_t^T |F'_\lambda(z_\lambda(s))||p_\lambda(s)| ds$$

On applique le lemme de Willett-Wong (cf. lemme 5) dans le cas particulier où l'exposant h est égal à 1/2.

$$|p_\lambda(t)| \leq (|p_\lambda(T)| + 2 \int_t^T |F'_\lambda(z_\lambda(s))| ds) \exp(2b \int_t^T \|u_\lambda(s)\|_Y \, ds).$$

D'après le lemme 14, il existe une constante (indépendante de λ) qui majore les $|p_\lambda(T)|$. Nous avons démontré dans le lemme 13 que la suite des contrôles u_λ converge fortement dans $L^r(Y)$ vers un contrôle optimal. Ainsi il existe une constante qui majore les $\|u_\lambda\|_r$. Il reste à majorer les $|F'_\lambda(z^n_\lambda(t))|$ pour conclure que les états finaux $|p_\lambda(t)|$ sont majorés par une constante indépendante de λ.

L'application F_λ est différentiable. Pour tout $h \in H$ tel que $|h| = 1$, il existe $\mu > 0$ vérifiant :

$$F_\lambda(z_\lambda(t)) - F_\lambda(\bar{z}(t) + \mu h) \leq \langle F'_\lambda(z_\lambda(t), z_\lambda(t) - \bar{z}(t) - \mu h\rangle.$$

$$\mu\langle F'_\lambda(z_\lambda(t), h\rangle \leq |F'_\lambda(z_\lambda(t)||z_\lambda(t) - \bar{z}(t)| + |F_\lambda(\bar{z}(t) + \mu h)| + |F_\lambda(z_\lambda(t))|.$$

Majorons le dernier terme en utilisant l'hypothèse $(H_F)(2)$ et le fait que : $F_\lambda \leq F$.

$$\mu\langle F'_\lambda(z_\lambda(t), h\rangle \leq |F'_\lambda(z_\lambda(t)||z_\lambda(t) - \bar{z}(t)| + |F_\lambda(\bar{z}(t) + \mu h)| + c|z_\lambda(t)|.$$

D'après le lemme 13, la suite des états z_λ converge fortement dans $C([0,T];H)$ et l'hypothèse (H_F) (3) assure la majoration de $F_\lambda(\bar{z}(t) + \mu h)$ par une constante indépendante de λ. Donc il existe K telle que :

$$|F'_\lambda(z^n_\lambda(t)| \leq K[\alpha_0(t) + (|u_\lambda(t)| + \beta_0(t))(|p_\lambda(t)| + |u^n_\lambda(t) - \bar{u}(t)|^{r-1}]. \tag{3.17}$$

□

Les trois lemmes ci-dessus permettent de mettre en oeuvre les théorèmes de compacité et d'extraire des sous-suites convergentes. Voici la fin de la démonstration du théorème 5.

Démonstration. Etape 1. Nous déduisons de (3.17) que la suite $F'_\lambda(z^n_\lambda(t)$ est bornée par des constantes indépendantes de λ, donc cette suite est bornée dans $L^1(H)$. Ainsi, pour toute partie mesurable $\Omega \subset [0,T]$ et de mesure inférieure au réel positif ϵ :

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon > 0, \int_\Omega |F'_\lambda(z^n_\lambda(t)|\, dt \leq \epsilon.$$

(Autrement dit, la famille $\{\int_\Omega |F'_\lambda(z^n_\lambda(t)|\, dt, \Omega \subset [0,T]\}_{\lambda>0}$ est uniformément absolument continue.) D'après le théorème de Dunford-Pettis, cette famille est faiblement relativement compacte dans $L^1(H)$. Il existe une suite extraite notée encore avec l'indice λ qui converge vers un élément $\mathscr{F}$ de $L^1(H)$.

Le lemme 15 montre que les $\|p_\lambda\|_{L^\infty(H)}$ sont majorés par une constante qui ne dépend pas de λ. Il existe donc une suite extraite qui converge faiblement étoile dans $L^\infty(H)$ vers un élément noté $\bar{p}_T$. On a encore la convergence faible dans $L^{p^*}(H)$ de $[A'(t, z_\lambda(t))]^* p_\lambda(t)$ vers $[A'(t, \bar{z}(.t))]^* \bar{p}(t)$ et de $[B(t, u_\lambda(t), .)]^* z_\lambda(t)$ vers $[B(t, \bar{u}(t), .)]^* \bar{z}(t)$.

La méthode utilisée dans la démonstration du théorème 1 s'applique et permet d'obtenir le système ci-dessous par passage à la limite du paramètre λ.

Etape 2.La convexité et la différentiabilité de F_λ et G_λ impliquent les majorations ci-dessous pour tout $y \in L^\infty(H)$ et tout $v \in L^r(0,T)$.

$$\int_0^T (F_\lambda(z_\lambda(t)) - F_\lambda(y(t)))\, dt \leq \int_0^T \langle F'_\lambda(z_\lambda(t)), z_\lambda(t) - y(t)\rangle dt$$

$$\textstyle\int_0^T (G_\lambda(u_\lambda(t)) - G_\lambda(v(t)))\, dt \leq -\int_0^T [(u_\lambda(t) - v(t))(\bar{u}(t) - u_\lambda(t))|(u_\lambda(t) - \bar{u}(t)|^{r-2}$$

$$+(p_\lambda(t), B(t, u_\lambda(t) - v(t), z_\lambda(t))]dt$$

On utilise les convergences fortes des contrôles et des états approchés (cf. lemme 13) et le fait que les applications $z \mapsto \int_0^T F(z(t))dt$ et $u \mapsto \int_0^T G(u(t))dt$ sont faiblement sci [voir (3.11) et (3.12)] pour en déduire l'existence de $\mathscr{F}'$ et les majorations qui suivent.

$$\int_0^T (F(\bar{z}(t)) - F(y(t)))\,dt \leq \int_0^T \langle \mathscr{F}'(t), \bar{z}(t) - y(t)\rangle dt$$

$$\int_0^T (G(u(t)) - G(v(t)))\,dt \leq -\int_0^T [(\bar{u}(t) - v(t), \bar{p}(t)) - B(t, \bar{u}(t) - v(t), \bar{z}(t))]dt$$

Etape 3.Pour tout $\Omega \subset\in [0,T]$, choisissons y et v telles que leurs restrictions respectives à $[0,T] - \Omega$ soient $\bar{z}$ et $\bar{z}$.

$$\int_\Omega (F(\bar{z}(t)) - F(y(t)))\,dt \leq \int_\Omega \langle \mathscr{F}'(t), \bar{z}(t) - y(t)\rangle dt$$

$$\int_\Omega (G(u(t)) - G(v(t)))\,dt \leq -\int_\Omega [(\bar{u}(t) - v(t), \bar{p}(t)) - B(t, \bar{u}(t) - v(t), \bar{z}(t))]dt$$

Donc

$$\mathscr{F}'(t) \in \partial F(\bar{z}(t))$$

et

$$-(\bar{p}(t), B(t, ., \bar{z}(t))_H \in \partial G(\bar{u}(t)) \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

On déduit également $\bar{p}(T) \in \partial\ell(\bar{z}(T))$ du fait que, pour tout $h \in H$:

$$\ell_\lambda(z_\lambda(T)) - \ell_\lambda(h) \leq (p_\lambda(T), z_\lambda(T) - h).$$

Donc

$$\ell_{\bar{z}(T)} - \ell(h) \leq \langle \bar{p}(T), \bar{z}(T) - h\rangle.$$

$\square$

Chapitre 4

Sensibilité

Introduction

L'analyse de sensibilité a pour objet l'étude de la stabilité d'un point critique. Dans le chapitre précédent, nous avons démontré que pour toute perturbation f il existe au moins un triplet (z_f, u_f, p_f) formé par une paire optimale et l'état adjoint associé. Ainsi, il existe un point critique qui est également un minimum local pour le problème de contrôle optimal. En particulier, nous cherchons à caractériser les variations de la fonction valeur optimale lorsque les perturbations décrivent un voisinage de f. Voici plusieurs questions qui se posent.

1. Tout d'abord sous quelles conditions existe-t-il une application $f \mapsto (z_f, u_f, p_f)$ qui associe un point critique à une perturbation ? Nous avons obtenu dans le chapitre précédent le système d'optimalité qui traduit les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre. En démontrant que le problème était bien posé nous avions partiellement répondu à cette question : l'état est une fonction de la perturbation et des contrôles. La difficulté essentielle porte ici sur les liens entre les contrôles et les perturbations. Le théorème classique des fonctions implicites permet de lever cette difficulté dans certains cas où l'on peut à la fois ne pas borner a priori les contrôles et n'avoir que des égalités dans le système d'optimalité. Sinon, une autre façon de procéder consiste à borner a priori les contrôles, par exemple à l'aide d'une contrainte polyédrique, dite "de boîte". Les conditions d'optimalité s'écrivent alors sous la forme d'une équation généralisée et c'est un théorème de S. Robinson (voir [48], [22] et [9]) qui joue le rôle du théorème classique des fonctions implicites.

2. Quand l'application $f \mapsto (z_f, u_f, p_f)$ existe, sous quelles conditions cette application est-elle au moins localement lipschitzienne ? Nous pouvons alors démontrer que la fonction valeur optimale est localement lipschitzienne relativement à la perturbation.

3. Quelles hypothèses imposer pour que l'application $f \mapsto (z_f, u_f, p_f)$ soit au moins directionnellement différentiable ? En toute généralité, le sous-différentiel au sens de Clarke de la fonction valeur optimale fournit des formules peu explicites. Dans ce cas nous calculons les dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale.

La bilinéarité des équations d'état est un cas particulier de non linéarité pour lequel nous pouvons apporter des éléments de réponses aux questions ci-dessus.

Comme précédemment, la perturbation est présente sous la forme d'un terme additif dans l'équation d'état. Nous allons faire porter l'analyse de sensibilité sur une classe générale de problèmes de contrôle optimal. En effet, pour focaliser notre attention sur ce terme bilinéaire qui apparaît dans l'équation d'état, nous nous limitons à des équations de type semi-linéaire (cf. [41] et [47]). C'est à dire que l'opérateur A est linéaire et la partie non linéaire est bilinéaire relativement au contrôle et à l'état. De plus, le coût est supposé différentiable, quadratique et strictement convexe. De nombreux modèles s'occupent de contrôles bornés presque partout (voir la bibliographie de [30]). Cette hypothèse habituelle sur les contrôles est compatible avec le fait de prendre p égal à deux et r infini. Mais il est important de noter que l'on pose $r = 2$ pour les deux exemples développés dans la suite. En effet, le lemme 1 permet de démontrer que, dans le cas particulier où $p = 2$, les problèmes (P_f) sont bien posés et différentiables au sens des normes L^2 relativement aux états et aux contrôles. Sur ces exemples, le fait que les normes $L^2(Y)$ et $L^\infty(Y)$ ne sont pas équivalentes n'est plus un obstacle à l'analyse de sensibilité (cf. [39]).

Le premier exemple développé est un modèle de déformation mécanique de la glace utilisant l'opérateur bilaplacien qui est du quatrième ordre. Le terme bilinéaire est de la forme $u \cdot \nabla z$. Cette forme particulière (voir [14]) permet d'obtenir des majorants dans les deux premières estimations a priori qui ne dépendent pas des contrôles. La première et la seconde sections sont respectivement consacrées à l'étude de l'équation d'état et au problème de contrôle optimal. A. Addou et A. Benbrik ont démontré dans [1] que, sous réserve d'imposer à l'état initial d'être assez petit, ce contrôle optimal était unique. En exploitant le système d'optimalité on obtient un résultat nouveau : la majoration a posteriori des contrôles au sens de la norme L^2. Ainsi l'on démontre un premier résultat de régularité ; la fonction valeur optimale est localement lipschitzienne.

Dans la troisième section nous utilisons les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre (cf. [8], (5.5) Contraintes d'image dans un convexe et [9], Section 2.3) pour obtenir les dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale. C'est le théorème classique des fonctions implicites qui fournit les formules attendues.

Dans la dernière section nous abordons un second exemple de modèle de stockage thermique prenant en compte la réaction, la diffusion et la convection (voir [36]). Ici le terme bilinéaire uz n'a pas la propriété précédente qui permettait de borner les contrôles admissibles. Mais le résultat obtenu sur la coercivité autorise la mise en oeuvre des méthodes développées par F. Tröltzsch, K. Malanowski ([50] et [41]), R. Griesse et B. Vexler [30] pour obtenir encore des résultats de sensibilité dans le cas où des contraintes de boîte sont imposées aux contrôles. Nous renvoyons en particulier à J.F. Bonnans (cf. [8], paragraphes (5.4) et (5.5) pour une synthèse de ces techniques. Notre classe de problèmes prend place ainsi dans la théorie qui étudie les conditions d'optimalité du second ordre et leurs liens avec la stabilité des problèmes de contrôle optimal (voir [23] et aussi la bibliographie de [40]).

4.1 Etude de l'équation d'état

Les notations sont celles de la première partie (voir les hypothèses générales dans l'introduction). Nous supposons que l'opérateur A est linéaire et que les contrôles sont à valeurs dans $Y = \mathbb{R}^n$ où n est un entier naturel égal à deux ou à trois. Nous considérons le domaine Ω qui est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, localement d'un seul côté de sa frontière notée $\partial\Omega$. Cette frontière est une variété de classe C^1 et de dimension $n-1$. Ici il n'est pas encore question d'étudier un contrôle optimal, mais nous considérerons ultérieurement un coût quadratique. Pour cette raison, nous cherchons les solutions de l'équation notée qui sera notée (E) dans l'ensemble $W(0,T)$ (p est égal à deux).

$$W(0,T) := \{w \in L^2(0,T;V) : \dot{w} \in L^2(0,T;V^*)\}.$$

Il s'agit d'un espace de Banach s'injectant de façon compacte dans $L^2(0,T;H)$ (voir l'annexe B). De plus, tout élément de $W(0,T)$ est presque partout continu sur $[0,T]$ et à valeurs dans H.

4.1.1 Résultats préliminaires

Nous cherchons à minimiser le coût

$$J(z,u) = \int_0^T \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \|u(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} dt$$

où z est l'unique solution de l'équation d'état :

$$(\mathscr{E}) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x) + \Delta^2 z(t,x) = \Sigma_{i=1}^n u_i(t) \dfrac{\partial z}{\partial x_i}(t,x) + f(t,x) \text{ sur } [0,T]\times\Omega \\ z(t,x) = \dfrac{\partial z}{\partial \nu}(t,x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times[0,T] \\ z(0,x) = z_0(x) \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

La variable de temps décrit l'intervalle de mesure finie $[0,T]$. Le cadre fonctionnel est composé d'un triplet de Gelfand : $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ où les injections sont continues, denses et compactes. Soit

$$V := H_0^2(\Omega),$$

$$H := L^2(\Omega),$$
$$V^* := H^{-2}(\Omega).$$

La norme usuelle de H sera notée $|.|$. L'espace de Sobolev V est muni de la norme $\|.\|$ qui est définie pour tout élément ϕ appartenant à V par :

$$\|\phi\| := (\Sigma_{|\alpha|=2}|D^\alpha \phi|^2)^{1/2}.$$

Cette norme est équivalente à celle de $H^2(\Omega)$

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} := (\Sigma_{|\alpha|\leq 2}|D^\alpha \phi|^2)^{1/2}$$

où α est un multi-indice. Enfin $\|.\|_* := \|.\|_{H^{-2}(\Omega)}$. Au lieu d'étudier l'EDP ci-dessus, nous allons résoudre l'équation différentielle ordinaire qui suit.

$$(E)\left\{\begin{array}{l} \dot{z}(t) + \Delta^2 z(t) = u(t)\cdot\nabla z(t) + f(t) \quad p.p. \quad t\in[0,T] \\ z(0) = z_0 \text{ dans } H. \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Dans $(\mathscr{E})$ les applications sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous conservons cependant les mêmes notations dans (E) pour les différentes applications qui sont cette fois-ci à valeurs vectorielles. En particulier, le contrôle u appartient dès lors à $L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ (cf. lemme 1). Définissons à présent l'espace des solutions de (E). Comme dans la première partie nous cherchons les solutions dans l'ensemble (cf. annexe B)

$$W(0,T) := \{w \in L^2(0,T;V) : \dot{w} \in L^2(0,T;V^*)\}.$$

L'opérateur bilaplacien

Lemme 16.– *L'opérateur bilaplacien $\Delta^2 : V \to V^*$ est un opérateur linéaire borné qui vérifie les hypothèses (H_A).*

Démonstration. Pour tous v et φ appartenant à V :

$$\int_\Omega \Delta^2 v\varphi = \int_\Omega \Delta v \Delta\varphi = (\Delta v, \Delta\varphi)_H.$$

Par définition : $\|\Delta^2 v\|_* := \sup_{\|\varphi\|\leq 1, \varphi\in V} |\langle \Delta v, \Delta\varphi\rangle_{V^*,V}|$. Par hypothèse, $n = 2$ ou $n = 3$, ainsi $V \hookrightarrow H$ est une injection continue et il existe une constante positive, notée C, telle que la majoration ci-dessous soit vérifiée.

$$\|\Delta^2 v\|_* \leq |\Delta v| \leq C\|\Delta v\|. \tag{4.2}$$

□

Nous déduisons la coercivité de cet opérateur du lemme ci-dessous. S'agissant d'un opérateur linéaire, sa monotonie en est une conséquence immédiate. Les hypothèses de Lebesgue-mesurabilité et d'hémicontinuité se vérifient aisément.

Remarque. Nous utiliserons le fait que l'application $v \in V \mapsto (\langle \Delta^2 v, v\rangle_{V^*,V})^{1/2}$ est une norme équivalente sur V à $\|.\|$.

Le terme bilinéaire

Lemme 17.– *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $y \in V$:*

$$|v \cdot \nabla y| \leq c\|v\|_{\mathbb{R}^n}\|y\|. \tag{4.3}$$

Démonstration. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $y \in V$:

$$|v \cdot \nabla y|^2 = \int_\Omega (\Sigma_{i=1}^n v_i \frac{\partial y}{\partial x_i})^2 \, dx$$

$$|v \cdot \nabla y|^2 \leq \int_\Omega (\Sigma_{i=1}^n v_i)^2 (\Sigma_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i})^2 \, dx \leq \|v\|_{\mathbb{R}^n}^2 \|y\|_{H^2(\Omega)}^2$$

Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_{H^2(\Omega)}$ étant équivalentes sur $H_0^2(\Omega)$, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$|v \cdot \nabla y|^2 \leq c^2 \|v\|_{\mathbb{R}^n}^2 \|y\|^2.$$

□

Les hypothèses de bilinéarité et de mesurabilité au sens de Lebesgue sont vérifiées. Nous imposons à la perturbation f d'être un élément de $L^2(0, T; H)$. Il reste à vérifier que le terme bilinéaire appartient à $L^2(0, T; H)$ afin d'assurer que le choix des espaces est compatible avec l'équation d'état (E). Ce résultat est un cas particulier du lemme 1, mais il est intéressant de signaler également la nouvelle majoration ci-dessous.

Lemme 18.– *Si $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ et $z \in L^2(0, T; V)$ alors $u \cdot \nabla z \in L^2(0, T; H)$. De plus :*

$$\|u \cdot \nabla z\|_{L^2(0,T;H)} \leq c\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)} \|z\|_{L^2(0,T;V)}. \tag{4.4}$$

Démonstration. Pour tout $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ et pour tout $z \in L^2(0, T; V)$:

$$\|u \cdot \nabla z\|_{L^2(0,T;H)}^2 = \int_0^T |u \cdot \nabla z|^2$$

Le lemme 17 permet d'obtenir la majoration ci-dessous.

$$\|u \cdot \nabla z\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq c^2 \int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \|z(t)\|^2 \, dt$$

On en déduit

$$\|u \cdot \nabla z\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq c^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)}^2 \|z\|_{L^2(0,T;V)}^2$$

qui permet de conclure. □

4.1.2 Estimations a priori

Etablir des estimations a priori sur les solutions éventuelles de l'équation d'état (E) permettra dans ce qui suit d'utiliser des résultats de compacité. Nous référerons alors aux résultats d'existences démontrés dans la première partie. Avant d'aborder les estimations a priori proprement dites nous établissons un lemme qui traduit une propriété du terme bilinéaire souvent rencontrée dans les applications (cf. [14]) :

$$\langle u \cdot \nabla z, z \rangle = 0.$$

Cette propriété se révélera d'importance lors de l'étude du problème de contrôle optimal. En effet, nous démontrerons non seulement l'existence d'un contrôle optimal mais également son unicité.

Lemme 19.– *Si $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ et $z \in L^2(0,T;V)$ alors, pour presque tout $t \in [0,T]$:*

$$\langle u(t) \cdot \nabla z(t), z(t) \rangle_{V^*,V} = 0.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule de Green. Pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$\langle u(t).\nabla z(t), z(t) \rangle_{V^*,V} = \int_\Omega u(t).\nabla z(t) z(t) = \Sigma_{i=1}^n u_i(t). \int_\Omega \frac{\partial^2 z}{\partial x_j^2}(t) z(t)$$

$$= -\Sigma_{i=1}^n u_i(t). \int_\Omega z(t) \frac{\partial^2 z}{\partial x_j^2}(t).$$

$\square$

Nous pouvons établir les estimations a priori.

Proposition 7.– *Si z est une solution de (E) alors*

$$\|z\|_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |z_0| + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)} \tag{4.5}$$

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq |z_0| + \sqrt{2} \|f\|_{L^2(0,T;V^*)} \tag{4.6}$$

$$\|\dot{z}\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}} |z_0| + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)})(C + \sqrt{2} \|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}) + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)} \tag{4.7}$$

Démonstration. Effectuons le produit scalaire des membres de (E) par $z(t)$. Pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$\langle \dot{z}(t), z(t) \rangle_{V^*,V} + \left\langle \Delta^2 z(t), z(t) \right\rangle_{V^*,V} = \langle u(t).\nabla z(t), z(t) \rangle_{V^*,V} + \langle f(t), z(t) \rangle_{V^*,V} \tag{4.8}$$

La formule d'intégration par parties (voir la proposition 17 dans l'annexe B) ainsi que les lemmes 4.1.1 et 19 permettent d'obtenir les minorations ci-dessous.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + \|z(t)\|^2 \leq \langle f(t), z(t)\rangle_{V^*,V} \quad p.p.$$

On intègre sur $[0, T]$. (Rappelons que $L^2(0, T; X) := L^2(X)$ pour alléger les notations.)

$$\frac{1}{2}|z(T)|^2 - \frac{1}{2}|z_0|^2 + \|z\|^2_{L^2(V)} \leq \|f\|_{L^2(V^*)}\|z\|_{L^2(V)}.$$

$$(\|z\|_{L^2(V)} - \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(V^*)})^2 \leq \frac{1}{2}|z_0|^2 + \frac{1}{4}\|f\|^2_{L^2(V^*)}.$$

On en déduit la première estimation. Pour démontrer la seconde nous commençons par intégrer l'équation (4.8) sur $[0, t]$ inclus dans $[0, T]$.

$$\frac{1}{2}|z(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|z_0|^2 + \|f\|_{L^2(V^*)}\|z\|_{L^2(V)} \quad p.p.$$

La première estimation (4.5) donne la majoration :

$$|z(t)|^2 \leq |z_0|^2 + \sqrt{2}|z_0|\|f\|_{L^2(V^*)} + (\sqrt{2}\|f\|_{L^2(V^*)})^2 \quad p.p.$$

On en déduit la seconde estimation (4.6). Considérons $\phi \in L^2(V)$:

$$|\int_0^T \langle \dot{z}(t), \phi(t)\rangle_{V^*,V}| \leq |\int_0^T \left\langle \Delta^2 z(t), \phi(t)\right\rangle_{V^*,V}| + |\int_0^T \langle u(t).\nabla z(t), \phi(t)\rangle_{V^*,V}|$$

$$+|\int_0^T \langle f(t), \phi(t)\rangle_{V^*,V}|$$

$$|\int_0^T \langle \dot{z}(t), \phi(t)\rangle_{V^*,V}| \leq (C\|z\|_{L^2(V)} + \|u\|_{L^2(0,T)}\|z\|_{L^\infty(H)} + \|f\|_{L^2(V^*)})\|\phi\|_{L^2(V)}$$

Remarque : la constante C est la constante d'injection continue $V \hookrightarrow H$ qui apparaît dans (4.2).

$$\|\dot{z}\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|\Delta^2 z\|_{L^2(0,T;H)} + \|u \cdot \nabla z\|_{L^2(0,T;H)} + \|f\|_{L^2(0,T;H)}.$$

On utilise les deux premières estimations (4.5) et (4.6). Il existe une constante positive C telle que :

$$\|\dot{z}\|_{L^2(V^*)} \leq C(\frac{1}{\sqrt{2}}|z_0| + \|f\|_{L^2(0,T;H)}) + \|u\|_{L^2(0,T)}(|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(V^*)}) + \|f\|_{L^2(V^*)}.$$

On en déduit la troisième estimation a priori (4.7). □

4.1.3 Existence et unicité de la solution

L'équation (E) est un problème bien posé. En effet les hypothèses d'application du théorème 1 sont vérifiées. Nous pouvons énoncer le résultat d'existence et d'unicité d'un état associé à un contrôle, une perturbation et un état initial fixés.

Proposition 8.– *Si $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$, $z_0 \in H$ et $f \in L^2(0,T;H)$ alors il existe un unique état $z \in W(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$ qui est solution de l'équation (E).*

Démonstration. Voir le théorème 1. □

4.2 Solution optimale

Dans la première partie nous avions démontré la stabilité de l'équation d'état. Soit l'application qui à un contrôle associe l'unique solution de l'équation d'état associée lorsque la perturbation et l'état initial sont fixés.

$$\theta : L^2(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,T;H) \to W(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$$

Comme l'équation d'état admet une unique solution quand les paramètres sont fixés, nous introduisons le coût réduit. Pour tout contrôle $u \in L^\infty(0,T)$, nous noterons

$$j(u) := J(\theta(u,f),u).$$

Proposition 9.– *L'état initial $z_0 \in H$ et la perturbation $f \in L^2(0,T;H)$ sont fixés. Il existe une paire optimale*

$$(\bar{z},\bar{u}) \in (W(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$$

telle que $\bar{z}$ soit l'unique solution de l'équation $(E_{z_0,\bar{u},f})$ et telle que le coût $J(\bar{z},\bar{u})$ soit minimal.

Démonstration. Voir le théorème 4. □

4.2.1 Différentiabilité du coût et conditions nécessaires d'optimalité

Dans cette section la perturbation $f \in L^2(0,T;H)$ et l'état initial $z_0 \in H$ sont fixés. L'opérateur bilaplacien a des propriétés de différentiabilité ainsi nous pouvons démontrer plus que dans la seconde partie quant à la régularité de la solution relativement aux contrôles : l'application θ est différentiable au sens de Fréchet. Sa dérivée directionnelle étant la solution d'une équation notée $(E.D.)$ nous serons à même de caractériser le contrôle optimal à l'aide du système d'optimalité qui est alors un système ordinaire où n'apparaissent que des égalités.

Proposition 10.– *L'application θ est différentiable au sens de Fréchet. Pour tous u et v appartenant à $L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ sa dérivée partielle $\frac{\partial\theta}{\partial u}(u,f).v$ est l'unique solution de l'équation*

$$(E.D.)\begin{cases} \dot{y}(t) + \Delta^2 y(t) = u(t)\cdot\nabla y(t) + v(t)\cdot\nabla z(t) \quad p.p. \quad t\in[0,T] \\ y(0)=0 \end{cases}$$

où z est l'unique solution de (E).

Démonstration. L'équation $(E.D.)$ est bien posée. En effet, avec les notations de la première partie, c'est l'équation $(E_{0,u,v\cdot\nabla z})$. Soit y la solution associée à u et v fixés. L'application $v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n) \mapsto y \in L^2(0,T;V)$ est linéaire et continue. Sachant que $\theta(u)$ et $\theta(u+v)$ sont les solutions uniques, respectivement, de $(E_{z_0,u,f})$ et $(E_{z_0,u+v,f})$ nous notons

$$Z := \theta(u+v) - \theta(u)$$

l'unique solution de l'équation $(E_{0,u,v\cdot\nabla\theta(u+v)})$. Soit

$$w := Z - y$$

l'unique solution de l'équation $E(0,u,v\cdot\nabla Z)$. Les estimations (4.5) et (4.7) et le lemme 1 permettent d'obtenir l'estimation ci-dessous. Il existe une constante positive k telle que :

$$\|w\|_{W(0,T)} = \|\theta(u+v)-\theta(u)-y\|_{W(0,T)} \le k\|v\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}.$$

□

Théorème 6.– *Le coût réduit j est directionnellement dérivable et, pour tous u et v appartenant à $L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$:*

$$j'(u).v = 2\Sigma_{i=1}^n \langle v_i, u_i + (p, \frac{\partial z}{\partial x_i})\rangle_{L^2(0,T)} \tag{4.9}$$

où $p\in L^2(0,T;V)$ est l'unique solution de l'équation adjointe ci-dessous.

$$(E.A.)\begin{cases} -\dot{p}(t) + \Delta^2 p(t) = -u(t)\cdot\nabla p(t) + z(t) \quad p.p. \quad t\in[0,T] \\ p(T)=0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Démonstration. Reprenons les notations de la proposition (10) : z est la solution de (E), y celle de l'équation $(E.D.)$ et $v\in L^2(0,T)$.

$$\int_0^T \langle(\theta'(u).v(t)), z(t)\rangle_{V^*,V} dt = \int_0^T \langle y(t), z(t)\rangle_{V^*,V} dt$$

$$= \int_0^T \langle y(t), -\dot{p}(t) + \Delta^2 p(t) + u(t) \cdot \nabla p(t) \rangle_{V^*,V} dt$$

La formule de Green donne l'égalité ci-dessous.

$$\int_0^T \langle (\theta'(u).v(t)), z(t) \rangle_{V^*,V} dt = -(y(T), p(T))_H + (y(0), p(0))_H$$

$$+ \int_0^T \langle -\dot{y}(t) + \Delta^2 y(t) - u(t) \cdot \nabla y(t), p(t) \rangle_{V^*,V} dt.$$

On utilise alors le fait que y soit la solution de l'équation $(E.D.)$.

$$\int_0^T \langle (\theta'(u).v(t)), z(t) \rangle_{V^*,V} dt = \int_0^T \langle v(t) \cdot \nabla z(t), p(t) \rangle_{V^*,V} dt.$$

Le coût réduit est différentiable au sens de Fréchet. Notons respectivement $\langle\langle .,. \rangle\rangle_{L^2(0,T;H)}$ et $((.,.))_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$ les produits scalaires des espaces de Hilbert $L^2(0,T;H)$ et $L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$. On calcule la dérivée directionnelle pour tout $v \in L^2(0,T)$.

$$\frac{1}{2} j'(u).v = \langle\langle \theta'(u).v, z \rangle\rangle_{L^2(0,T;H)} + ((v,u))_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} = \langle\langle v \cdot \nabla z, p \rangle\rangle_{L^2(0,T;H)} + ((v,u))_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}.$$

On en déduit l'expression de la dérivée directionnelle cherchée. Montrons l'unicité de la solution p de l'équation adjointe. Pour presque tout $t \in [0,T]$, notons : $q(t) := p(T-t)$, $w(t) := u(T-t)$ et $x(t) := z(T-t)$. De façon équivalente q est l'unique solution de $(E_{0,w,x})$ qui est un problème bien posé. $\square$

Nous en déduisons une condition nécessaire d'optimalité du premier ordre sur le contrôle en annulant la dérivée directionnelle.

Corollaire 1.– *Si u est un contrôle optimal associé à l'état z et à l'état adjoint p alors, pour tout $i \in \{0,1,...,n\}$:*

$$u_i(t) = -\langle p(t), \frac{\partial z}{\partial x_i}(t) \rangle_{V^*,V} \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

4.2.2 Unicité de la paire optimale

Dans cette section, nous exploitons l'unicité du contrôle optimal pour établir que les contrôles optimaux sont bornés.

Proposition 11.– *Si $|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors la paire optimale est unique dans $(W(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)) \times L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Nous suivons les étapes de la démonstration dans le cas non perturbé (f est nulle) que l'on peut trouver chez [1] (cor. 3.2., page 151). Les notations sont celles de la démonstration du théorème 6. Considérons deux contrôles optimaux u_1 et u_2. Nous noterons avec l'indice $j \in \{1, 2\}$ les états associés à ces contrôles optimaux.

Première étape. Les deux premières estimations a priori, appliquées à l'équation (E_{0,w_j,x_j}), permettent d'obtenir les majorations ci-dessous.

$$\|p_j\|_{L^2(V)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|z_0| + \|f\|_{L^2(V*)}$$

$$\|p_j\|_{L^\infty(H)} \leq |z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(V*)}$$

Deuxième étape. La différence $z := z_1 - z_2$ est l'unique solution de $(E_0, u_2, (u_2 - u_1) \cdot \nabla z_1)$. L'estimation a priori

$$\|z\|_{L^2(V)} \leq \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\|z_1\|_{L^\infty(V)}$$

fournit les deux estimations ci-dessous.

$$\|z\|_{L^2(V)} \leq (|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$$

$$\|z\|_{L^\infty(H)} \leq \sqrt{2}(|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$$

Troisième étape. La différence $q := q_1 - q_2$ est l'unique solution de $(E_0, w_2, (w_2 - w_1) \cdot \nabla q_1 + x_2 - x_1)$. Soit l'estimation a priori :

$$\|q\|_{L^2(V)} \leq \|w_1 - w_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\|q_1\|_{L^\infty(V)} + \|x_1 - x_2\|_{L^2(V^*)}$$

Notons $p := p_1 - p_2$ la différence des états adjoints. Par définition de q :

$$\|p\|_{L^2(V)} = \|q\|_{L^2(V)}$$

Avec les premières estimations respectives de la première et de la deuxième partie nous obtenons la majoration ci-dessous.

$$\|p\|_{L^2(V)} \leq 2(|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$$

Quatrième étape. Utilisons les conditions d'optimalité des deux contrôles optimaux. Pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$u_{2,i}(t) - u_{1,i}(t) = -\langle p_2(t), \frac{\partial z_2}{\partial x_i}(t)\rangle_{V*,V} + \langle p_1(t), \frac{\partial z_1}{\partial x_i}(t)\rangle_{V*,V}$$

$$= -\langle p_2(t), \frac{\partial z}{\partial x_i}(t)\rangle_{V*,V} - \langle p(t), \frac{\partial z_1}{\partial x_i}(t)\rangle_{V*,V}$$

Ainsi

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \|p_2\|_{L^2(V)}\|z\|_{L^\infty(H)} + \|p\|_{L^2(V)}\|z_2\|_{L^\infty(H)} \tag{4.11}$$

$\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq$

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}|z_0| + \|f\|_{L^2(V*)})(|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})\sqrt{2}\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)})$$

$$+2(|z_0|\sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)})$$

$$\leq 3(|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})^2\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$$

Cinquième étape. Si $3(|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})^2 < 1$ alors $u_2 = u_1$. □

Lemme 20.– *Soit u l'unique contrôle optimal associé à la perturbation f :*

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}. \tag{4.12}$$

Démonstration. Pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$:

$$u_i(t) = -\langle p(t), \frac{\partial z}{\partial x_i}(t)\rangle_{V,H} \quad p.p. \quad t \in [0, T].$$

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \|p\|_{L^2(V)}\|z\|_{L^\infty(H)} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}}|z_0| + \|z\|_{L^2(V)})(|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})$$

La première estimation a priori (4.5) appliquée à l'équation adjointe $(E.A.)$ (4.10) permet d'obtenir la majoration annoncée. □

Nous en déduisons la régularité des contrôles relativement aux perturbations qui permet d'établir que la fonction valeur optimale est elle-même localement lipschitzienne par rapport aux perturbations.

Lemme 21.– *Soit f_1 et f_2 appartenant à $L^2(H)$ et une constante α vérifiant :*

$$|z_0| + \sqrt{2}\max\{\|f_j\|_{L^2(0,T;H)}|j \in \{1, 2\}\} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

alors les contrôles optimaux u_1 et u_2, associés respectivement aux perturbations f_1 et f_2, sont tels que :

$$\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} < \frac{2\alpha}{1 - 3\alpha^2}\|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Démonstration. Rappelons la minoration (4.11).

$$\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \|p_2\|_{L^2(V)}\|z_2 - z_1\|_{L^2(V)} + \|p_2 - p_1\|_{L^2(V)}\|z_1\|_{L^\infty(H)}$$

On utilise les estimations a priori (4.5 et 4.6).

$$\|p_j\|_{L^2(V))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|z_0| + \|f_j\|_{L^2(0,T;H)}.$$

$$\|p_j\|_{L^2(V)} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{2}}. \tag{4.13}$$

$$\|z_j\|_{L^2(V)} \leq |z_0| + \sqrt{2}\|f_j\|_{L^2(0,T;H)}.$$

$$\|z_j\|_{L^2(V)} \leq \alpha. \tag{4.14}$$

L'unique solution de $(E_{0,u_2,(u_2-u_1)\cdot\nabla z_1+f_2-f_1)})$ est $z_2 - z_1$. Pour cette équation les estimations a priori (4.5 et 4.6) s'écrivent :

$$\|z_2 - z_1\|_{L^2(V)} \leq \|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\|z_1\|_{L^2(V)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}$$

$$\|z_2 - z_1\|_{L^2(V)} \leq \alpha\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}$$

$$\|z_2 - z_1\|_{L^\infty(H)} \leq \sqrt{2}(\alpha\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}).$$

Les estimations a priori pour l'équation adjointe donnent :

$$\|p_2 - p_1\|_{L^2(V)} \leq \|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\|p_1\|_{L^2(V)} + \|z_2 - z_1\|_{L^2(V)}.$$

$$\|p_2 - p_1\|_{L^2(V)} \leq \|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|z_2 - z_1\|_{L^2(V)}(|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)})$$
$$+\alpha\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}).$$

$$\|p_2 - p_1\|_{L^2(V)} < 2\alpha\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}).$$

En synthèse, on utilise les majorations ci-dessus et (4.11) pour obtenir le résultat annoncé.

$$\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{2}(\alpha\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)})$$
$$+(2\alpha\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)})\alpha.$$

$$\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} < 3\alpha^2\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + 2\alpha\|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}.$$

$$\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} < \frac{2\alpha}{1 - 3\alpha^2}\|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}.$$

□

4.3 Etude de la fonction valeur optimale

Pour toute perturbation $f \in L^2(0,T;H)$ la fonction valeur optimale est définie par

$$\varphi(f) := \inf\{J(\theta(u,f),u) | u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)\}.$$

4.3.1 Stabilité

Le résultat précédent de stabilité des contrôles optimaux relativement aux perturbations fournit le premier résultat de régularité de cette fonction ci-dessous.

Théorème 7.– *La fonction valeur optimale φ est localement lipschitzienne sur*

$$\{f \in L^2(0,T;H) : |z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)} < \frac{1}{\sqrt{3}}\}.$$

Démonstration. Si $z_0 \in H$ et $f \in L^2(0,T;V^*)$ vérifient cette inégalité alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$|z_0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;H)} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4.15}$$

Considérons deux perturbations f_1 et f_2 dans la boule ouverte de $L^2(0,T;H)$ centrée en f et de rayon $\dfrac{\alpha - |z_0|}{\sqrt{2}}$. Notons (z_1,u_1) et (z_2,u_2) les paires optimales associées respectivement à f_1 et f_2. Quitte à échanger ces deux paires de façon à avoir le second membre ci-dessous positif.

$$|\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| = \|z_2\|^2_{L^2(0,T;V)} - \|z_1\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u_2\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} - \|u_1\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| &\leq (\|z_2\|_{L^2(0,T;V)} + \|z_1\|_{L^2(0,T;V)})(\|z_2\|_{L^2(0,T;V)} - \|z_1\|_{L^2(0,T;V)}) \\
&\quad +(\|u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)})(\|u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} - \|u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}) \\
|\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| &= (\|z_2\|_{L^2(0,T;V)} + \|z_1\|_{L^2(0,T;V)})\|z_2 - z_1\|_{L^2(0,T;V)} \\
&\quad +(\|u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)})\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

En particulier, d'après la démonstration du lemme 21 :

$$\|z_2 - z_1\|_{L^2(V)} < \alpha\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Or les contrôles sont bornés (voir le lemme 20).

$$\|u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} < \sqrt{2}\alpha^2.$$

De plus (cf. lemme 21) :

$$\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} < \frac{2\alpha}{1-3\alpha^2}\|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}.$$

En synthèse :

$$\begin{aligned} |\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| < \sqrt{2}\alpha(\alpha\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}) \\ +\sqrt{2}\alpha^2\frac{2\alpha}{1-3\alpha^2}\|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}. \end{aligned}$$

$$|\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| < \sqrt{2}\alpha\frac{1+\alpha^2}{1-3\alpha^2}\|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;H)}.$$

□

4.3.2 Dérivées directionnelles de la valeur optimale

Le fait que la fonction valeur optimale soit localement lipschitzienne autorise le calcul de son sous-différentiel au sens de Clarke (cf. [17]). En fait nous allons démontrer ci-dessous que, pour l'exemple qui nous intéresse ici, cette fonction est même directionnellement différentiable. Dans un premier temps il faut établir l'existence d'une application qui associe un contrôle optimal à une perturbation. Nous montrerons ensuite la régularité de cette application. Pour mener cette étude, le cadre de la formulation lagrangienne semble adapté. Soit le Lagrangien du problème de contrôle optimal. Pour tout $(z, u, p, f) \in W(0,T) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;H)$:

$$\mathscr{L}(z,u,p,f) := J(z,u) + \langle \dot{z} + \Delta^2 z - u\cdot\nabla z - f, p\rangle_{L^2(0,T;H),L^2(0,T;V)} + (z(0) - z_0, p(0))_H.$$

Soit $(\bar{z}, \bar{u})$ la paire optimale et $\bar{p}$ l'adjoint associés à la perturbation de référence nulle. Nous noterons $\bar{x} := (\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$ et $\bar{\mathscr{L}} := \mathscr{L}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p}, 0)$. Pour alléger les notations, des indices permettront d'identifier les dérivations. Les conditions nécessaires d'optimalité en $\bar{x}$ se traduisent par la nullité du gradient de ce Lagrangien.

$$\bar{\mathscr{L}}_x := \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_z \\ \bar{\mathscr{L}}_u \\ \bar{\mathscr{L}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{L^2(0,T;V)} \\ 0_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \\ 0_{L^2(0,T;V)} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Explicitement, pour tout $(\delta z, \delta u, \delta p, \delta f) \in W(0,T) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;H)$:

$$(CNO_1)\left\{\begin{array}{l} 2(\bar{z}, \delta z)_{L^2(H)} + \langle \dot{\delta z} + \Delta^2\delta z - \bar{u}\cdot\nabla\delta z, \bar{p}\rangle_{L^2(H),L^2(V)} + (\delta z(0), \bar{p}(0))_H = 0 \\ 2\langle \bar{u}, \delta u\rangle_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n),L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \langle -\delta u\cdot\nabla\bar{z}, \bar{p}\rangle_{L^2(H),L^2(V)} = 0 \\ \langle \dot{\bar{z}} + \Delta^2\bar{z} - \bar{u}\cdot\nabla\bar{z}, \delta p\rangle_{L^2(H),L^2(V)} + (\bar{z}(0) - z_0, \delta p(0))_H = 0. \end{array}\right.$$

Dans toute la suite, nous supposons que $|z_0| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, condition qui intervient notamment pour assurer l'unicité de la solution optimale.

Lemme 22.– *Soit $\bar{x}$ qui vérifie les conditions nécessaires du premier ordre (CNO_1). Il existe des constantes $\tilde{a} > 0$ et $\tilde{b} > 0$ telles que, pour tous $(\delta z, \delta u) \in L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ vérifiant*

$$\dot{\delta z} + \Delta^2 \delta z = \bar{u} \cdot \nabla \delta z + \delta u \cdot \nabla \bar{z} \quad p.p. \tag{4.17}$$

on ait :

$$\|\dot{\delta z}\|^2_{L^2(0,T;V^*)} \leq \tilde{a} \|\delta u\|^2_{L^2(0,T;V^*)} \tag{4.18}$$

et

$$\langle \delta u \cdot \nabla \delta z, \bar{p} \rangle_{L^2(0,T;H),L^2(0,T;V)} \leq \tilde{b} \|\delta u\|_{L^2(0,T;V^*)} \|\delta z\|_{W(0,T)}. \tag{4.19}$$

Démonstration. Appliquons l'estimation a priori (4.7) aux directions critiques (i.e. qui vérifient l'égalité (4.17)).

$$\|\dot{\delta z}\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq (\frac{5}{3} + C) \|\delta u . \nabla \bar{z}\|_{L^2(0,T;V^*)}$$

On utilise le lemme 18 pour obtenir la majoration (4.18) ci-dessous.

$$\|\dot{\delta z}\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq \frac{c^2 K^2 C'}{6} (\frac{5}{3} + C)[1 + (C + \frac{2}{3})^2] \|\delta u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$$

Les inégalités (4.13) et (4.15) permettent d'obtenir une majoration de l'état adjoint associé.

$$\|\bar{p}\|_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

On déduit du lemme 1 la majoration (4.19) ci-dessous.

$$\langle \delta u \cdot \nabla \delta z, \bar{p} \rangle_{L^2(0,T;H),L^2(0,T;V)} \leq \frac{cK}{\sqrt{6}} \|\delta u\|_{L^2(0,T;V^*)} \|\delta z\|_{W(0,T)}.$$

□

On en déduit le résultat ci-dessous qui s'inscrit dans l'esprit de [42].

Proposition 12.– *Soit $\bar{x}$ qui vérifie les conditions nécessaires du premier ordre (CNO_1). Pour toute perturbation $g \in L^2(0,T;V^*)$, l'équation ci-dessous admet une solution unique dans $W(0,T)$:*

$$(\bar{E}) \begin{cases} \dot{y}(t) + \Delta^2 y(t) = \bar{u}(t) \cdot \nabla y(t) + g(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

De plus, avec les notations du lemme 22, si $2\tilde{a} + \tilde{b} < 2$, alors il existe $\rho > 0$ tel que la condition ci-dessous soit vérifiée

$$(\delta z \quad \delta u) \begin{pmatrix} \mathscr{L}_{zz} & \mathscr{L}_{zu} \\ \mathscr{L}_{uz} & \mathscr{L}_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta u \end{pmatrix} \geq \rho (\|\delta z\|^2_{W(0,T)} + \|\delta u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n))}) \tag{4.20}$$

pour tous $(\delta z, \delta u) \in L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ *tels que :*

$$\dot{\delta z} + \Delta^2 \delta z = \bar{u} \cdot \nabla \delta z + \delta u \cdot \nabla \bar{z} \quad p.p.$$

Démonstration. L'existence d'une solution unique de $(\bar{E})$ est assurée par le théorème 1. Il nous reste à démontrer la condition de coercivité (4.20) pour les directions critiques, i.e. pour δu et δz qui vérifient (4.17). Notons

$$\mathscr{H}\mathscr{L}(\delta z, \delta u)^2 := (\delta z \quad \delta u) \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_{zz} & \bar{\mathscr{L}}_{zu} \\ \bar{\mathscr{L}}_{uz} & \bar{\mathscr{L}}_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta u \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{H}\mathscr{L}(\delta z, \delta u)^2 = 2\|\delta z\|^2_{L^2(0,T;V)} + 2\langle \delta u \cdot \nabla \delta z, \bar{p}\rangle_{L^2(0,T;H),L^2(,T;V)} + 2\|\delta u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$$

On commence par utiliser la majoration (4.19) du lemme 22.

$$\mathscr{H}\mathscr{L}(\delta z, \delta u)^2 \geq 2\|\delta z\|^2_{L^2(0,T;V)} + 2\|\delta u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} - 2\tilde{b}\|\delta u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\|\delta z\|_{W(0,T)}$$

$$\mathscr{H}\mathscr{L}(\delta z, \delta u)^2 \geq 2\|\delta z\|^2_{L^2(0,T;V)} + 2\|\delta u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} - \tilde{b}(\|\delta u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|\delta z\|^2_{W(0,T)})$$

$$\mathscr{H}\mathscr{L}(\delta z, \delta u)^2 \geq (2 - \tilde{b})\|\delta z\|^2_{W(0,T)} + (2 - \tilde{b})\|\delta u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} - 2\|\dot{\delta z}\|^2_{L^2(0,T;V^*)}$$

La majoration (4.18) permet alors d'obtenir la minoration ci-dessous.

$$\mathscr{H}\mathscr{L}(\delta z, \delta u)^2 \geq (2 - \tilde{b})\|\delta z\|^2_{W(0,T)} + (2 - \tilde{b} - 2\tilde{a})\|\delta u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}$$

□

Proposition 13.– *Sous les hypothèses et avec les notations de la proposition 12, il existe un voisinage* $\mathscr{V}(\bar{x})$, *un voisinage* $\mathscr{V}(0_{L^2(0,T;H)})$ *et des applications de classe* C^1 *:*

$$(\zeta, \chi, \pi) : \mathscr{V}(0_{L^2(0,T;H)}) \to \mathscr{V}(\bar{x})$$

qui ont les propriétés suivantes.

1. *Pour tout* $f \in \mathscr{V}(0)$ $(\zeta(f), \chi(f), \pi(f))$ *est l'unique point vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité dans* $\mathscr{H}\mathscr{L}(\bar{x})$.
2. $(\zeta(0), \chi(0), \pi(0)) = (\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$.
3. *La dérivée directionnelle de* (ζ, χ, π) *dans la direction* δf *vérifie*

$$\mathscr{H}\mathscr{L}(\bar{x}) \begin{pmatrix} \zeta'(0)(\delta f) \\ \chi'(0)(\delta f) \\ \pi'(0)(\delta f) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_{zf}(\bar{x}, 0)(., \delta f) \\ \bar{\mathscr{L}}_{uf}(\bar{x}, 0)(., \delta f) \\ \bar{\mathscr{L}}_{pf}(\bar{x}, 0)(., \delta f) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Compte tenu de la proposition 12, notamment de l'inégalité de coercivité (4.20) et grâce au lemme 2.3. du (cf. [33]), $\mathscr{H}\mathscr{L}(\bar{x})$ admet un inverse borné. Le théorème des fonctions implicites appliqué à l'égalité (4.16) nous permet de conclure. □

Proposition 14.– *Sous les hypothèses de la proposition 12, la dérivée directionnelle de la fonction valeur optimale en* 0 *dans la direction* $\delta f \in L^2(0,T;H)$ *est donnée par la formule*

$$\varphi'(0;\delta f) = -\langle \delta f, \bar{p} \rangle_{L^2(0,T;H),L^2(0,T;V)} \tag{4.21}$$

où $\bar{p}$ *est l'unique état adjoint du problème non perturbé. La fonction valeur optimale est de plus Gâteaux-différentiable en* 0.

Démonstration. Soit $\delta f \in L^2(0,T;H)$, $(\zeta(\delta f), \chi(\delta f), \pi(\delta f))$ vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité nous avons l'égalité ci-dessous.

$$\varphi(f) = J(\zeta(f),\chi(f)) = \mathscr{L}(\zeta(f),\chi(f),\pi(f),f).$$

$$\varphi'(0;\delta f) = \bar{\mathscr{L}_z}(\zeta'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_u}(\chi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_p}(\pi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_f}(\delta f).$$

Par composition des dérivées l'on a :

$$(\mathscr{L}(\zeta(.),\chi(.),\pi(.),f))'(0;\delta f)$$

$$= \bar{\mathscr{L}_z}(\zeta'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_u}(\chi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_p}(\pi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_f}(\delta f) = 0.$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre montrent que les trois premiers termes sont nuls. On déduit la formule (4.21) de l'égalité :

$$\bar{\mathscr{L}_f}(\delta f) = -\langle \delta f, \bar{p} \rangle_{L^2(0,T;H),L^2(0,T;V)}.$$

□

Remarque. Il est à noter que la méthode mise en oeuvre ci-dessus s'applique à des perturbations du coût et de l'équation d'état plus générales. Pour autant, nous ne précisons pas ici les hypothèses. Considérons le problème de contrôle optimal où les perturbations notées f_i ($i \in \{0,1,...,6\}$ interviennent sur les différents termes.

$$J(z,u) = \|z\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;Y)}$$

$$(E)\begin{cases} (1+f_1(t))\dot{z}(t) + (1+f_2(t))\Delta^2 z(t) = (1+f_3(t))(u(t)\nabla z(t)) + f_4(t) \quad p.p. \\ z(0) = z_0 + f_5 \text{ dans } H. \end{cases}$$

Nous obtenons les dérivées directionnelles relatives à toutes les perturbations f_i, chacune dans une direction notée δf_i. Notons

$$(0;\delta f) := (0,0,0,0,0;\delta f_1,\delta f_2,\delta f_3,\delta f_4,\delta f_5).$$

La formule, sous des conditions appropriées, serait du type :

$$\varphi'(0;\delta f) = -\langle \delta f_1 \dot{\bar{z}} + \delta f_2 \Delta^2 \bar{z} - \delta f_3(\bar{u}\cdot\nabla\bar{z}) - \delta f_4, \bar{p}\rangle_{L^2(H),L^2(V)} - (\delta f_5, \bar{p}(0))_H.$$

4.4 Contraintes de boîte

Nous nous intéressons ici à un cas particulier pour lequel les contrôles ne sont pas bornés a posteriori à l'aide d'une propriété du terme bilinéaire. C'est au contraire une contrainte a priori qui est imposée aux contrôles. Les conditions sous lesquelles s'effectue l'analyse de sensibilité sont, d'une part la polyédricité de l'ensemble des contrôles admisibles, et d'autre part une condition suffisante d'optimalité du second ordre (au sens de la norme L^2) qui se traduit par la coercivité du Hessien de la fonction coût pour des directions critiques.

Afin de surmonter la difficulté de la divergence des normes qui est propre à la dimension infinie nous utiliserons la majoration (2.3) du lemme 1. De plus, comme chez ([43]), le contrôle intervient de façon quadratique dans le coût.

4.4.1 Equation et cadre fonctionnel

Soit n un entier naturel non nul, nous considérons le domaine Ω qui est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, localement d'un seul côté de sa frontière notée $\partial\Omega$. Cette frontière est une variété de classe C^1 et de dimension $n-1$. Autrement dit, le domaine Ω est suffisamment régulier. Nous cherchons à minimiser le coût

$$J(z,u) = \int_0^T \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T [u(t)]^2\, dt$$

où z est l'unique solution de l'équation d'état :

$$(\mathscr{E}) \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x) - \Delta z(t,x) = u(t)z(t,x) + f(t,x) \text{ sur } \Omega \times [0,T] \\ z(t,x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0,T] \\ z(0,x) = z_0(x) \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

La variable de temps décrit l'intervalle de mesure finie $[0,T]$. Le cadre fonctionnel est composé d'un triplet de Gelfand : $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ où les injections sont continues, denses et compactes. Soit

$$\begin{aligned} V &:= H^1_0(\Omega), \\ H &:= L^2(\Omega), \\ V^* &:= H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

La norme usuelle de H sera notée $|.|_H$ pour la différencier de la valeur absolue. Nous devons résoudre l'équation différentielle ordinaire ci-dessous où nous rajoutons une contrainte de boîte sur les contrôles. Soit m et M deux applications appartenant à $L^\infty(0,T)$.

$$(E_{U_{ad}}) \begin{cases} \dot z(t) - \Delta z(t) = u(t)z(t) + f(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T] \\ z(0) = z_0 \text{ dans } H \\ u \in U_{ad} := \{u \in L^2(0,T) : m(t) \le u(t) \le M(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T]\}. \end{cases}$$

L'espace des états est encore

$$W(0,T) := \{w \in L^2(0,T;V) : \dot{w} \in L^2(0,T;V^*)\}.$$

L'opérateur laplacien étant un isomorphisme de V dans V^* les hypothèses (H_A) et (H_B) sont vérifiées et l'on vérifie les hypothèses (H_U) (voir l'exemple 2.3.3). En particulier il est à noter que les estimations a priori sont vraies avec des majorants qui ne dépendent pas des normes des contrôles mais seulement de celles de la perturbation $f \in L^2(0,T;H)$ et de l'état initial $z_0 \in H$ qui sont fixés.

4.4.2 Formulation lagrangienne

Définissons le lagrangien du problème de contrôle optimal.

$$\mathscr{L}(z,u,p,f) := J(z,u) + \langle \dot{z} - \Delta z - u.\nabla z - f, p\rangle_{L^2(H),L^2(V)} + (z(0) - z_0, p(0))_H.$$

Soit $(\bar{z},\bar{u})$ la paire optimale et $\bar{p}$ l'adjoint associés à la perturbation de référence nulle. Nous noterons $\bar{x} := (\bar{z},\bar{u},\bar{p})$ et $\bar{\mathscr{L}} := \mathscr{L}(\bar{z},\bar{u},\bar{p},0)$.

A cause de la contrainte de boîte sur les contrôles, les conditions nécessaires d'optimalité en $\bar{x}$ se traduisent par l'équation généralisée ci-dessous (voir [9], section 5.1.2). Explicitement, pour tout $(\delta z, \delta u, \delta p, \delta f) \in L^2(V)\times L^\infty(0,T)\times L^2(V)\times L^2(H)$, soit le système (SO) :

$$\begin{cases} \bar{\mathscr{L}}_z(\delta z) = 2(\bar{z},\delta z)_H + \langle \dot{\delta z} - \Delta\delta z - \bar{u}\delta z, \bar{p}\rangle_{L^2(H),L^2(V)} + (\delta z(0), \bar{p}(0))_H = 0 \\ \forall \delta u \in U_{ad} \\ \bar{\mathscr{L}}_u(\delta u - \bar{u}) = 2\langle \bar{u}, \delta u - \bar{u}\rangle_{L^2(0,T),L^2(0,T)} + \langle (\delta u - \bar{u})\bar{z}, \bar{p}\rangle_{L^2(H),L^2(V)} \geq 0 \\ \bar{\mathscr{L}}_p(\delta p) = \langle f, \delta p\rangle_{L^2(H),L^2(V)} = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Soit $\mathscr{N}(\bar{u})$ le cône normal à U en $\bar{u}$. Si $\bar{u}$ n'appartient pas à U alors $\mathscr{N}(\bar{u})$ est l'ensemble vide. Sinon ce cône normal est une partie du dual de $L^2(0,T)$.

$$\mathscr{N}(\bar{u}) := \{\mu \in (L^\infty(0,T))^*, \int_0^T (u - \bar{u})d\mu \leq 0, \forall u \in U\}.$$

Nous noterons

$$N(\bar{u}) := \begin{pmatrix} \{0_{L^2(V)}\} \\ \mathscr{N}(\bar{u}) \\ \{0_{L^2(V)}\} \end{pmatrix}$$

et les conditions nécessaires du premier ordre s'écrivent sous la forme de l'équation généralisée ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 0_{L^2(V)} \\ 0_{L^\infty(0,T)} \\ 0_{L^2(V)} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_z \\ \bar{\mathscr{L}}_u \\ \bar{\mathscr{L}}_p \end{pmatrix} + N(\bar{u}) \tag{4.23}$$

4.4.3 Polyédricité et conditions d'optimalité

Un sous-ensemble K, convexe, fermé et inclus dans un espace de Hilbert H est dit polyédrique en $u \in H$ si

$$[adh(\cup_{\lambda>0}\lambda(K-\Pi_K(u)))] \cap [u-\Pi_K(u)]^\perp = adh[\cup_{\lambda>0}\lambda(K-\Pi_K(u)) \cap [u-\Pi_K(u)]^\perp]$$

où $[u-\Pi_K(u)]^\perp$ est le complémentaire orthogonal du sous-espace engendré par $u-\Pi_K(u)$ et $\Pi_K(u)$ le projeté de u sur K (voir la définition 3.3.3. de [43]). Le sous-ensemble K est dit polyédrique si et seulement s'il est polyédrique en tout $u \in H$.

Le concept de polyédricité (voir [44], [8] (5.4)) est appliqué à l'ensemble admissible de notre problème de contrôle optimal pour permettre de ne conserver de l'ensemble des solutions du système d'optimalité que celles qui vérifient la condition nécessire du second ordre. En dimension infinie, cette condition de polyédricité assure qu'il n'y a pas de saut entre les conditions suffisantes et nécessaires du second ordre. Autrement dit, l'ensemble des contraintes ne présente pas de courbure du second ordre et il n'y a pas de défaut de compacité pour les espaces de dimension infinie que nous avons choisis (cf. J.F. Bonnans [7] et [43] th. 3.3.1, chapitre 3.4 et le développement d'un contre-exemple dû à F. Troeltzsch p. 10).

La contrainte de boîte que nous imposons aux contrôles est :

$$u \in U_{ad} := \{u \in L^2(0,T) : m(t) \leq u(t) \leq M(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T]\}$$

où m et M sont deux éléments de $L^2(0,T)$. Cette contrainte est polyédrique (cf. [7] et [44]).

4.4.4 Dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale

Proposition 15.– *Sous les conditions de la proposition 12, pour toute perturbation $\delta f \in L^2(0,T;H)$, la dérivée directionnelle de la fonction valeur optimale en* 0 *dans la direction δf est donnée par la formule ci-dessous.*

$$\varphi'(0;\delta f) = -\langle \delta f, \bar{p}\rangle_{L^2(0,T;H),L^2(0,T;V)}. \tag{4.24}$$

Démonstration. Première étape– Commençons, comme dans la démonstration de la proposition 12, par utiliser le lemme 1 pour établir la condition de coercivité.

$$\begin{aligned} &(\delta z \quad \delta u)\begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_{zz} & \bar{\mathscr{L}}_{zu} \\ \bar{\mathscr{L}}_{uz} & \bar{\mathscr{L}}_{uu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta z \\ \delta u \end{pmatrix} \\ &= 2\|\delta z\|^2_{L^2(0,T;V)} + 2\langle \delta u \delta z, \bar{p}\rangle_{L^2(0,T;H),L^2(0,T;V)} + 2\|\delta u\|^2_{L^2(0,T)} \\ &\geq 2\|\delta z\|^2_{L^2(0,T;V)} + 2\|\delta u\|^2_{L^2(0,T)} - 2KT^{1/2}\|\delta u\|_{L^2(0,T)}\|\delta z\|_{W(0,T)}\|\bar{p}\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Mais l'état adjoint est majoré a priori par une constante liée seulement à l'état initial et aux contrôles qui sont bornés du fait de la contrainte de boîte. Ainsi, pour un état initial et une boîte assez petits, en utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve de la proposition 12, on peut trouver une constante $k' > 0$ tels que :

$$(\delta z \quad \delta u) \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_{zz} & \bar{\mathscr{L}}_{zu} \\ \bar{\mathscr{L}}_{uz} & \bar{\mathscr{L}}_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta u \end{pmatrix} \geq k'(\|\delta z\|^2_{W(0,T)} + \|\delta u\|^2_{L^2(0,T)}).$$

Seconde étape– Forte régularité

L'équation généralisée (4.23) est dite fortement régulière au point critique $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$ (noté plus simplement $\bar{x}$) pour la perturbation nulle

(i) si l'application

$$(\delta z, \delta u, \delta p) \mapsto \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_z \\ \bar{\mathscr{L}}_u \\ \bar{\mathscr{L}}_p \end{pmatrix}$$

est différentiable au sens de Fréchet en $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$

(ii) s'il existe des voisinages $\mathscr{V}(0_{L^2(0,T;H)})$ et $\mathscr{V}((\delta z, \delta u, \delta p))$ tels que pour tout triplet $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ (noté plus simplement ϵ) il existe une unique solution (z, u, p) dans $\mathscr{V}((\delta z, \delta u, \delta p))$ à l'équation généralisée linéarisée et perturbée :

$$\epsilon \in \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{L}}_z \\ \bar{\mathscr{L}}_u \\ \bar{\mathscr{L}}_p \end{pmatrix} + \mathscr{H}\bar{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} z - \bar{z} \\ u - \bar{u} \\ p - \bar{p} \end{pmatrix} + N(\bar{u}) \tag{4.25}$$

(iii) si cette solution est unique dans le voisinage $\mathscr{V}((\delta z, \delta u, \delta p))$ (on la notera alors $(z^\epsilon, u^\epsilon, p^\epsilon)$)

(iv) et enfin si l'application $\epsilon \mapsto (z^\epsilon, u^\epsilon, p^\epsilon)$ est lipschitzienne sur $\mathscr{V}(0_{L^2(0,T;H)})$

Dans la première étape nous avons vérifié les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre. Nous déduisons du théorème 4.2 de F. Tröltzsch (cf. [50]) que l'équation généralisée (4.23) est fortement régulière en $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$.

Troisième étape– Application du théorème des fonctions implicites à l'équation généralisée.

Nous renvoyons au théorème 3.11 établi par R. Griesse et B. Vexler (voir [30]) qui montre la dérivabilité directionnelle de l'application $\epsilon \mapsto (z^\epsilon, u^\epsilon, p^\epsilon)$ en $\epsilon = 0$ dans chaque direction $(\delta\epsilon_1, \delta\epsilon_2, \delta\epsilon_3)$. Son corollaire 3.12 qui est une application du théorème des fonctions implicites pour les équations généralisées d'A. L. Dontchev (cf. [22]) assure, sous les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre et sous des conditions de compacité vérifiées ci-dessous l'existence d'un voisinage $\mathscr{V}(0_{L^2(0,T;H)})$, d'un voisinage $\mathscr{V}((\bar{z}, \bar{u}, \bar{p}))$ et d'une application notée

$$(\zeta, \chi, \pi) : \mathscr{V}(0_{L^2(0,T;H)}) \to \mathscr{V}((\bar{z}, \bar{u}, \bar{p}))$$

tels que :

1. pour toute perturbation f appartenant à $\mathscr{V}(0_{L^2(0,T;H)})$, $(\zeta(f), \chi(f), \pi(f))$ est l'unique solution du système des conditions nécessaires du premier ordre et
2. $$(\zeta(0), \chi(0), \pi(0)) = (\bar{z}, \bar{u}, \bar{p}).$$

Quatrième étape– Calcul des dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale.

Soit $\delta f \in L^2(H)$, $(\zeta(\delta f), \chi(\delta f), \pi(\delta f))$ vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité nous avons l'égalité ci-dessous.

$$\varphi(\delta f) = J(\zeta(\delta f), \chi(\delta f)) = \mathscr{L}(\zeta(\delta f), \chi(\delta f), \pi(\delta f), f).$$

$$\varphi'(0; \delta f) = \bar{\mathscr{L}_z}(\zeta'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_u}(\chi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_p}(\pi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_f}(\delta f).$$

Par composition des dérivées l'on a :

$$(\mathscr{L}(\zeta(.), \chi(.), \pi(.), f))'(0; \delta f)$$

$$= \bar{\mathscr{L}_z}(\zeta'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_u}(\chi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_p}(\pi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathscr{L}_f}(\delta f) = 0.$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre montrent que le premier et le troisième termes sont nuls. Quant au second terme, il est également nul.

$$\bar{\mathscr{L}_u}(\chi'(0)(\delta f)) = 0$$

En effet, par définition, on a :

$$\chi(0) = \bar{u}.$$

La dérivée première du Lagrangien relativement aux contrôles est nulle si la contrainte n'est pas active. D'autre part, si la contrainte n'est pas active alors c'est $\chi'(0)\delta f)$ qui est nul.

En conclusion, le quatrième terme donne à nouveau les dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale en 0. $\square$

Annexe A

Intégrabilité au sens de Bochner

Soit $T > 0$ et V un espace de Banach, le segment $[0, T]$ est muni de la tribu de Lebesgue et l'espace de Banach V de la tribu des boréliens. Une fonction définie sur $[0, T]$ et à valeurs dans V est dite « simple » si elle est à valeurs vectorielles constantes et non nulles sur un nombre fini de parties Lebesgue-mesurables et disjointes qui sont incluses dans $[0, T]$ et si elle est nulle sur le complémentaire de leur réunion dans $[0, T]$. Une application $z : [0, T] \to V$ est dite « fortement mesurable » sur $[0, T]$ si, pour presque tout t appartenant à $[0, T]$, elle est la limite forte (i.e. au sens de la norme $\|.\|_V$) d'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions simples :

$$\|z_n(t) - z(t)\|_V \to 0 \quad p.p. \quad t \in [0, T]$$

Si, de plus,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|z_n(t) - z(t)\|_V \, dt = 0$$

alors la fonction z est dite « intégrable au sens de Bochner » pour la mesure de Lebesgue. La proposition ci-dessous donne une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité au sens de Bochner.

Proposition 16.– *Soit V est un espace de Banach séparable et $z : [0, T] \to V$ une application fortement mesurable. L'application z est intégrable au sens de Bochner pour la mesure de Lebesgue si, et seulement si,*

$$\int_0^T \|z(t)\|_V \, dt < \infty.$$

Soit $p \in [1, \infty[$, nous noterons $L^p(0, T; V)$ (respectivement $L^\infty(0, T; V)$) l'espace des fonctions $z : [0, T] \to V$ fortement mesurables (resp. bornées presque partout sur $[0, T]$) telles que $\int_0^T \|z(t)\|_V^p \, dt$ (resp. $\operatorname{infess}_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_V$) soit fini. C'est un espace de Banach ([5]) muni de la norme

$$\|z\|_p := (\int_0^T \|z(t)\|^p \, dt)^{1/p}.$$

Si V est un espace de Banach séparable et réflexif, et si $1 \leq p < \infty$, alors le dual de $L^p(0,T;V)$ est $L^{p^*}(0,T;V^*)$. En particulier, si $1 < p < \infty$, alors l'espace $L^p(0,T;V)$ est réflexif.

Théorème 8.– *([5], th. 3.1 p. 50) Soit V un espace de Banach réflexif, si $1 \leq p < \infty$ alors à tout $w \in (L^p(0,T;V))^*$ est associé un élément $y_w \in L^{p^*}(0,T;V^*)$ tel que*

$$\langle z, w \rangle = \int_0^T (z(t), w(t))\, dt, \quad \forall z \in L^p(0,T;V)$$

et

$$\|w\|_p = \|y_w\|_{p^*}.$$

Réciproquement, tout $y \in L^{p^*}(0,T;V^*)$ définit une fonctionnelle $w_y \in L^p(0,T;V)$ telle que

$$\langle z, w_y \rangle = \int_0^T (z(t), y(t))\, dt, \quad \forall z \in L^p(0,T;V)$$

et

$$\|y\|_{p^*} = \|w_y\|_p.$$

Annexe B

Espaces de Sobolev vectoriels

Soit H un espace de Hilbert séparable et V un sous-espace dense dans H. Supposons que V est muni d'une structure de Banach réflexif et séparable. L'espace H est identifié avec son dual H^* (c'est l'« espace-pivot »). De plus, les injections ci-dessous sont supposées continues et denses :

$$V \subseteq H \subseteq V^*.$$

Un tel triplet $V \subseteq H \subseteq V^*$ est appelé « triplet d'évolution » ([52]) ou « triplet de Gelfand ». Les normes sur H, V et V^* sont notées respectivement $|.|$, $\|.\|$ et $\|.\|_*$. Le produit scalaire sur H est noté $(.,.)_H$ et le crochet de dualité entre les espaces V^* et V est $\langle .,. \rangle_{V^* \times V}$ ou plus simplement $\langle .,. \rangle$. Nous imposons que p appartienne à $[2, \infty[$ et nous notons $L^p(0,T;V)$ l'ensemble des classes d'applications fortement mesurables $v : [0,T] \to V$, intégrables au sens de Bochner ([5]), telles que

$$\int_0^T \|v(t)\|^p \, dt < \infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_p := (\int_0^T \|v(t)\|^p \, dt)^{1/p}.$$

Comme p est a fortiori strictement supérieur à 1, on peut identifier les espaces $(L^p(0,T;V))^*$ et $L^{p^*}(0,T;V^*)$ où p^* est le conjugué de p (voir l'annexe A). Définissons l'ensemble

$$W_{pp^*}(0,T) := \{z \in L^p(0,T;V) | \exists w \in L^{p^*}(0,T;V^*), \exists w_0 \in V \mid$$

$$z(t) = w_0 + \int_0^t w(s) \, ds \quad p.p. \quad t \in [0,T]\}.$$

La notation $\dot{z}$ est utilisée pour indiquer que, en particulier, z appartient à l'ensemble des fonctions absolument continues de $[0,T]$ et à valeurs dans V. L'élément w étant unique dans $L^{p^*}(0,T;V^*)$ on le notera $\dot{z}$. La condition initiale s'écrit

$$w_0 = z_0.$$

On note plus simplement :

$$W_{pp^*}(0,T) := \{z \in L^p(0,T;V) | \dot{z} \in L^{p^*}(0,T;V^*)\}.$$

La dérivée de z au sens des distributions est définie, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(]0,T[)$ qui est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans $]0,T[$, par

$$\int_0^T \frac{dz}{dt}(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T z(t)\varphi'(t)dt. \tag{B.1}$$

Soit l'ensemble

$$Z := \{z \in L^p(0,T;V) / \exists v \in L^{p^*}(0,T;V^*), \forall \varphi \in \mathscr{D}(]0,T[) \mid$$

$$\int_0^T \varphi(t)v(t)dt = -\int_0^T \varphi'(t)z(t)dt\}$$

Lemme 23.–

$$Z = W_{pp^*}(0,T)$$

Démonstration. Commençons par démontrer l'inclusion de Z dans $W_{pp^*}(0,T)$. Soit z appartenant à Z, notons

$$\zeta(t) := z(t) - \int_0^t v(s)ds \quad p.p. \quad t \in [0,T]$$

Le membre de droite a un sens car $L^1(0,T;V)$ contient $L^{p^*}(0,T;V)$ $(1 \leq p^* \leq 2)$. L'espace V est séparable et réflexif donc son dual aussi. Soit un ensemble dénombrable et dense dans V^* noté D. Pour tout d appartenant à D :

$$\langle d, \zeta(t)\rangle = \langle d, z(t)\rangle - \int_0^t \langle d, v(s)\rangle ds$$

$$\int_0^T \varphi'(t)[\langle d, \zeta(t)\rangle + \int_0^t \langle d, v(s)\rangle ds]dt = \int_0^T \varphi'(t)\langle d, z(t)\rangle dt$$

$$\int_0^T \varphi'(t)\langle d, \zeta(t)\rangle dt + \int_0^T \varphi'(t)[\int_0^t \langle d, v(s)\rangle ds]dt$$

$$= -\int_0^T \varphi(t)\langle d, v(t)\rangle dt$$

D'où, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(]0,T[)$,

$$\int_0^T \varphi'(t)[\langle d, \zeta(t)\rangle = 0$$

Pour tout $t \in [0,T] - N_d$ et pour tout $d \in D$, il existe un réel α_d et une partie négligeable de $[0,T]$, notée N_d, tels que :

$$\langle d, \zeta(t)\rangle = \alpha_d.$$

Notons N la réunion des N_d pour les d de D.

$$\langle d, \zeta(t)\rangle = \alpha_d.$$

Soit à présent $x \in V'^*$, il existe une suite $(d_n)_{n\leq 1}$ d'éléments de D qui converge vers x dans V^*. Pour tout $t \in [0,T] - N$:

$$\langle d_n, \zeta(t)\rangle = \alpha_{d_n}$$

il en résulte que la suite $(\alpha_{d_n})_{n\leq 1}$ converge vers α_x dans R tel que, Ppour tout $t \in [0,T] - N$:

$$\langle x, \zeta(t)\rangle = \alpha_x$$

L'application $x \mapsto \alpha_x$ est une forme linéaire continue sur V' qui est réflexif. Donc il existe w_0 appartenant à V tel que, pour tout $x \in V'^*$:

$$\langle x, \zeta(t)\rangle = \langle x, w_0\rangle \quad \forall t \in [0,T] - N$$

ou encore

$$\zeta(t) = w_0 \quad \forall t \in [0,T] - N.$$

Réciproquement, montrons que $W_{pp^*}(0,T)$ est inclus dans Z. Soit z appartenant à $W_{pp^*}(0,T)$ tel que

$$z(t) = w_0 + \int_0^t w(s)ds \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

Pour tout φ appartenant à $\mathscr{D}(]0,T[)$

$$\int_0^T \varphi' z = \int_0^T \varphi'(t)\{w_0 + \int_0^t w(s)\,ds\}dt$$

En dérivant au sens des distributions, on obtient :

$$\int_0^T \varphi' z = -\int_0^T \varphi(t) w(t)\,dt.$$

En effet, z est sommable sur $[0,T]$ et

$$\frac{d}{dt}\{w_0 + \int_0^t w(s)\,ds\} = w(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

$\square$

On montre que, muni de la norme

$$\|z\|_{W_p} := (\|z\|_p^2 + \|\dot{z}\|_{p^*}^2)^{1/2}$$

l'ensemble $W_{pp^*}(0,T)$ est un espace de Banach réflexif et séparable qui s'injecte continûment dans $C([0,T];H)$. Autrement dit, tout élément de $W_{pp^*}(0,T)$ a un unique représentant continu.

Lemme 24.– *Pour $2 \leq p < \infty$, toute fonction de $W_{pp^*}(0,T)$ appartient à $C([0,T];H)$ après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle.*

Démonstration. Tout élément de $W_{pp^*}(0,T)$ qui n'est a priori défini que presque partout se prolonge à $[0,T]$. Pour tous $t \leq t'$ appartenant à $[0,T]$,

$$\|z(t) - z(t')\| = \| \int_t^{t'} \dot{z}\|$$

$$\|z(t) - z(t')\| = \| \int_0^T \chi_{[t,t']}\dot{z}\|$$

$$\|z(t) - z(t')\| \leq \int_0^T \|\chi_{[t,t']}\dot{z}(t)\|dt$$

Par l'inégalité de Hölder,

$$\|z(t) - z(t')\| \leq |t - t'|^{1/p}\|\dot{z}\|_{p^*}.$$

L'injection continue de V dans H permet de conclure. □

Remarque. Ce qui précède s'applique avec $p \geq 1$. Dans le cas particulier où p est infini, c'est le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui assure la continuité : soit une suite $(t_n)_{n\in N}$ convergeant vers t fixé dans $[0,T]$ alors

$$\|z(t) - z(t_n)\| \leq \| \int_0^T \chi_{[t,t_n]}\dot{z}\|$$

$$\|z(t) - z(t_n)\| \leq \int_0^T \|\chi_{[t,t_n]}\dot{z}(t)\|dt$$

On construit la suite $(v_n)_{n\in N}$ dans V définie par

$$v_n = \chi_{[t,t_n]}\dot{z}.$$

Elle converge vers 0 dans V, pour presque tout t appartenant à $[0,T]$, et :

$$\|v_n(t)\| \leq \|\dot{z}(t)\|.$$

Comme $\dot{z}(t)$ appartient à $L^1(0,T;V^*)$, on en déduit que $\|v_n\|_1$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ et donc $\|z(t) - z(t_n)\|$ tend vers 0.

Nous rappelons enfin les résultats qui justifient l'intégration par parties pour les EDP qui nous intéressent.

Proposition 17.– *[25] Soit $(p,q) \in [1,+\infty[$ et $1 \leq r \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire et continue alors B induit l'application bilinéaire continue :*

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(0,T;E) \times W^{1,q}(0,T;F) & \to & W^{1,r}(0,T;G) \\ (u,v) & \mapsto & B(u,v). \end{array}$$

De plus, pour tout $(u,v) \in W^{1,p}(0,T;E) \times W^{1,q}(0,T;F)$

$$(B(u,v))' = B(u',v) + B(u,v')$$

et pour tout t appartenant à $[0,T]$:

$$\int_0^t B(u(s),v'(s))\,ds = B(u(t),v(0)) - B(u(s),v(0)) - \int_0^t B(u'(s),v(s))\,ds.$$

Par exemple, soit u et v appartenant à $H^1(0,T;L^2(\Omega)$ et $B : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $B(f,g) := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$, alors

$$\int_0^T \int_\Omega u(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)\,dxdt = \int_\Omega u(T,x)v(T,x)\,dx - \int_\Omega u(0,x)v(0,x)\,dx$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(t,x)\,dxdt$$

Avec $B : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to L^1(\Omega)$ définie par $B(f,g) := fg$, pour toute application $u \in H^1(0,T;L^2(\Omega)$ on a $u^2 \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)$ et $\frac{\partial u^2}{\partial t} = 2u\frac{\partial u}{\partial t}$. On peut montrer que pour tous u et v appartenant à E :

$$\int_0^T \langle u'(t),v(t)\rangle_{E',E}(t,x)\,dt = (u(T),v(T))_{L^2(\Omega)} - (u(0),v(0))_{L^2(\Omega)}$$
$$- \int_0^T \langle v'(t),u(t)\rangle_{E',E}(t,x)\,dt.$$

Annexe C

Hémicontinuité

Dans cette annexe, nous notons V un espace de Banach réflexif et séparable et V^* son dual. Un opérateur $A : V \to V^*$ est dit

1. monotone si
$$\langle A(z) - A(y), z - y\rangle \geq 0, \quad \forall z, y \in V;$$
2. hémicontinu si l'application $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \langle A(z + \lambda y), y\rangle \in \mathbb{R}$ est continue ;
3. demicontinu s'il est continu de V fort dans V^* faible.

Théorème 9.– *Si un opérateur est borné, hémicontinu et monotone alors il est demicontinu.*

Démonstration. ([24], chapitre 8) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ une suite qui converge fortement dans V vers z. Cette suite est bornée donc, A étant supposé borné, la suite $A(z_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ est bornée dans V^*. Les espaces V et V^* étant réflexifs, il existe une sous-suite extraite de $A(z_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ que nous notons avec les mêmes indices et qui converge faiblement dans V^* vers un élément de V^* noté ζ.

L'opérateur A étant monotone, pour tout $y \in V$, nous avons la minoration :

$$\langle A(z_n) - A(y), z_n - y\rangle \geq 0.$$
$$\langle A(z_n), z_n - y\rangle - \langle A(y), z_n - y\rangle \geq 0 \tag{C.1}$$

La convergence forte de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ dans V vers z implique en particulier la convergence de $\langle A(y), z_n - y\rangle$ vers $\langle A(y), z - y\rangle$. De plus, $A(z_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge faiblement dans V^* vers ζ, ainsi $\langle A(z_n), z_n - y\rangle$ tend vers $\langle \zeta, z_n - y\rangle$. Enfin la convergence forte de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ entraîne celle de $\langle A(z_n), z_n - y\rangle$ vers $\langle \zeta, z - y\rangle$. Donc, quand n tend vers $+\infty$ l'inégalité C.1 donne la minoration ci-dessous. Pour tout $y \in V$:

$$\langle \zeta - A(y), z - y\rangle \geq 0 \tag{C.2}$$

Pour tout $\lambda > 0$, pour tous u et v appartenant à V, l'équation C.2 donne :

$$\langle \zeta - A(u + \lambda v), v\rangle \leq 0.$$

Du fait que A est hémicontinu, quand λ tend vers 0 nous obtenons pour tout $v \in V$:

$$\langle \zeta - A(u), v \rangle \leq 0. \tag{C.3}$$

En appliquant C.3 avec $-v$ au lieu de v on a même l'égalité ci-dessous.

$$\langle \zeta - A(u), v \rangle \leq 0.$$

Donc $\zeta = A(z)$. L'unicité de la limite faible permet de conclure que A est demicontinu. $\square$

Annexe D

Régularisation des fonctions convexes

Soit X un espace de Banach réflexif et strictement convexe. Supposons de plus que son dual X^* est strictement convexe. Soit $\varphi : H \to]-\infty; +\infty]$ une application convexe semi-continue inférieurement. Le sous-différentiel convexe de φ en $z \in X$ est défini par :

$$\partial\varphi(z) := \{z^* \in X^* : \varphi(y) - \varphi(z) \geq \langle z^*, y - z\rangle_{X^*,X}, \forall y \in X\}.$$

La multi application $\partial\varphi : z \in X \mapsto \partial\varphi(z)$ est maximale monotone. Ainsi, pour tout λ strictement positif, l'équation

$$0 \in \langle ., z_\lambda\rangle + \lambda\partial\varphi_\lambda$$

admet une unique solution que nous notons z_λ. (C'est une conséquence du corollaire 4.1 de [5].) En particulier on note $j_\lambda(\partial\varphi)$ cette unique solution $z_\lambda = j_\lambda(\partial\varphi)(z)$ qui est la résolvante de $\partial\varphi$. La régularisée de $\partial\varphi$ est :

$$\partial\varphi_\lambda z = \frac{1}{\lambda}\langle ., z_\lambda - z\rangle.$$

Soit H un espace de Banach réel et séparable. Soit $\varphi : H \to]-\infty; \infty]$ une application convexe sci et propre.

Théorème 10.– *([5] p. 119) L'application $I_\varphi : L^p(0,T;H) \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$I_\varphi(z) = \int_0^T \varphi(z)\,dt \text{ si } \varphi(z) \in L^1(0,T) \text{ et } \infty \text{ sinon,}$$

est convexe, sci et propre. De plus le sous-différentiel convexe de I_φ est :

$$\partial I_\varphi(z) = \{\zeta \in L^{p^*}(0,T;H), \zeta \in \partial\varphi(z(t)) \quad p.p. \quad t \in [0,T]\}.$$

Annexe E

Théorèmes d'existence

Nous renvoyons à ([35], pages 176–179) pour la démonstration du théorème du point fixe de Schauder ci-dessous.

Théorème 11.– *Toute application continue définie sur un convexe compact d'un espace de Banach et à valeurs dans ce même convexe compact admet un point fixe.*

On peut généraliser ce théorème en remarquant que l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble relativement compact dans un espace de Banach est également compacte.

Théorème 12.– *Toute application continue définie sur un convexe fermé noté $\mathscr{C}$ d'un espace de Banach et à valeurs dans un compact lui-même inclus dans $\mathscr{C}$ admet un point fixe.*

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et T un réel strictement positif. Le théorème de Schauder ci-dessus permet de démontrer le théorème d'existence de Carathéodory qui suit.

Théorème 13.– *Soit $F : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application telle que :*

1. *pour tout $x \in \Omega$, $t \in [0,T] \mapsto F(t,x) \in \mathbb{R}^n$ soit mesurable,*
2. *pour presque tout $t \in [0,T]$, $x \in \Omega \mapsto F(t,x) \in \mathbb{R}^n$ soit continue,*
3. *pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une application notée $m_K : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ intégrable sur $[0,T]$ et vérifiant*

$$|F(t,x)| \leq m_K(t) \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times K.$$

Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe au moins une solution au système dit « de Carathéodory » :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = F(t,x), \quad \forall t \in [0,T] \\ x(0) = x_0. \end{array} \right. \tag{E.1}$$

Démonstration. (voir [45], théorème 3, page 8) L'application m_K étant intégrable, il existe r strictement positif tel que, si x appartient à la boule fermée centrée en x_0 et de rayon r notée $\bar{B}(x_0, r)$ alors :

$$\int_0^T m_{\bar{B}(x_0,r)}(s)ds \leq r. \tag{E.2}$$

Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des applications continues de $[0, T]$ dans $\bar{B}(x_0, r)$. Il s'agit d'un convexe fermé de l'espace de Banach des applications continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $u \in \mathscr{C}$ et $t \in [0, h]$, nous définissons l'application Θ sur $\mathscr{C}$ pour tout $t \in [0, T]$:

$$\Theta(u)(t) = x_0 + \int_0^t F(s, u(s))ds.$$

En choisissant h qui vérifie (E.2), la première et la troisième hypothèses entraînent que $\Theta(u)$ est à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$. De plus :

$$|\Theta(u)(t_1) - \Theta(u)(t_2)| = \int_{t_1}^{t_2} F(s, u(s))ds$$

$$|\Theta(u)(t_1) - \Theta(u)(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} m_{\bar{B}(x_0,r)}(s)ds. \tag{E.3}$$

Or le membre de droite tend vers 0 quand t_1 tend vers t_2 donc pour tout $u \in \mathscr{C}$ l'application $\Theta(u)$ est continue sur $[0, h]$. Nous avons démontré que $\Theta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.

Avec l'hypothèse d'intégrabilité de $m_{\bar{B}(x_0,r)}$ nous déduisons de (E.3)que $\Theta(\mathscr{C})$ est uniformément équicontinue. Or $\Theta(\mathscr{C})$ est bornée donc, d'après le théorème d'Ascoli (cf. [12], page 72), $\Theta(\mathscr{C})$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}$.

Montrons que Θ est continue. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}$ tendant vers u et $t \in [0, h]$.

$$|\Theta(u_n)(t) - \Theta(u)(t_2)| = |\int_0^t F(s, u_n(s)) - F(s, u(s))ds|$$

$$|\Theta(u_n)(t) - \Theta(u)(t_2)| \leq \int_0^t |F(s, u_n(s)) - F(s, u(s))|ds.$$

Notons alors J l'ensemble des $t \in [0, h]$ tels que $x \in \Omega \mapsto F(t, x) \in \mathbb{R}^n$ soit continue. Du fait que $[0, T]$ J est négligeable, on a :

$$\|\Theta(u_n) - \Theta(u)\|_\infty \leq \int_J |F(s, u_n(s)) - F(s, u(s))|ds.$$

Or la suite (u_n) converge simplement vers u et la continuité de $x \in \Omega \mapsto F(s, x) \in \mathbb{R}^n$ (deuxième hypothèse) permet le passage à la limite ci-dessous.

$$|F(s, u_n(s)) - F(s, u(s))| \to 0.$$

On utilise la majoration

$$|F(s,u_n(s)) - F(s,u(s))| \leq 2m_{\bar{B}(x_0,r)}(s)$$

pour justifier l'application du théorème de convergence dominée.

$$\|\Theta(u_n) - \Theta(u)\|_\infty \to 0.$$

Donc Θ est continue. Le théorème 12 du point fixe de Schauder assure l'existence d'un point fixe noté $x(.,0,x_0) \in \mathscr{C}$ tel que, pour tout $t \in [0,h]$:

$$x(t,0,x_0) = x_0 + \int_0^t F(s,u(s))ds.$$

La fonction $t \mapsto F(t,x(t))ds$ est intégrable sur $[0,h]$ donc d'après le théorème de dérivation des intégrales au sens de Lebesgue, $x(t,0,x_0)$ est presque partout dérivable et pour presque tout $t \in [0,h]$ on a :

$$\dot{x}(t,0,x_0) = F(t,x(t,0,x_0)).$$

$\square$

Bibliographie

[1] A. Addou and A. Benbrik. Existence and uniqueness of optimal control for a distributed-parameter bilinear system. *J. Dynam. Control Systems*, 8(2) :141–152, 2002.

[2] H. Attouch. Familles d'opérateurs maximaux monotones et mesurabilité. *Ann. Mat. Pures Appl.*, 120 :35–111, 1979.

[3] J.-P. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions*, volume 264 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Set-valued maps and viability theory.

[4] V. Barbu. *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems*, volume 190 of *Mathematics in Science and Engineering*. 1993.

[5] V. Barbu and Th. Precupanu. *Convexity and optimization in Banach spaces*, volume 10 of *Mathematics and its Applications (East European Series)*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, romanian edition, 1986.

[6] P. R. Beesack. *Gronwall inequalities*. Carleton University, Ottawa, Ont., 1975. Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 11.

[7] J. F. Bonnans. Second order analysis for control constrained optimal control problems of semilinear elliptic systems. *Appl. Math. Optim.*, 38 :303–325, 1998.

[8] J. F. Bonnans. *Optimisation continue*. Dunod, Paris, 2006. Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI.

[9] J. F. Bonnans and A. Shapiro. *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2000.

[10] M. E. Bradley, S. Lenhart, and J. Yong. Bilinear optimal control of the velocity term in a Kirchhoff plate equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 238(2) :451–467, 1999.

[11] H. Brézis. Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 18(fasc. 1) :115–175, 1968.

[12] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[13] C. Bruni, G. DiPillo, and G. Koch. Bilinear systems : an appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-19 :334–348, 1974.

[14] Z. Brzeźniak, M. Capiński, and F. Flandoli. Stochastic partial differential equations and turbulence. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1(1) :41–59, 1991.

[15] N. Caroff. Semiconcavity of the value function for the Bolza control problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 315(1) :287–301, 2006.

[16] C. Castaing and M. Valadier. *Convex analysis and measurable multifunctions.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580.

[17] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis.* Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. A Wiley-Interscience Publication.

[18] J.-M. Clérin and M. Moussaoui. A priori estimates in perturbed bilinear optimal control. *Preprint 72—Mai 2007, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse*, 2007.

[19] J.-M. Clérin and M. Moussaoui. Problèmes aux limites non linéaires et de type bilinéaire bien posés. *Preprint, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse*, 2007.

[20] J.-M. Clérin and M. Moussaoui. Existence of solutions in bilinear control with a priori feedback. *Preprint 77—Férier 2008, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse*, 2008.

[21] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse. Tome I : Fondements de l'analyse moderne.* Traduit de l'anglais par D. Huet. Avant-propos de G. Julia. Nouvelle édition revue et corrigée. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXVIII. Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, 1968.

[22] A. L. Dontchev. Implicit function theorems for generalized equations. *Math. Programming*, 70(1, Ser. A) :91–106, 1995.

[23] A. L. Dontchev and K. Malanowski. A characterization of Lipschitzian stability in optimal control. In *Calculus of variations and optimal control (Haifa, 1998)*, volume 411 of *Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.*, pages 62–76. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[24] H. Le Dret. *Equations aux dérivées partielles elliptiques.* Notes de cours-M2. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2006. Disponible sur : http ://www.ann.jussieu.fr/ ledret/M2Elliptique.html.

[25] J. Droniou. *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles.* Polycopié gm3-02. Université de Provence, CMI, Marseille, 2001. Disponible sur : http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/index.html.

[26] N. ElAlami. *Analyse et commande optimale des systèmes bilinéaires distribués.* I.M.P., Perpignan, 1986. Doctorat d'Etat.

[27] A. Fiacca, N. S. Papageorgiou, and F. Papalini. On the existence of optimal controls for nonlinear infinite-dimensional systems. *Czechoslovak Math. J.*, 48(123)(2) :291–312, 1998.

[28] A. Fryszkowski. Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps. *Studia Math.*, 76(2) :163–174, 1983.

[29] I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin. *Generalized functions. Vol. 4 : Applications of harmonic analysis.* Translated by Amiel Feinstein. Academic Press, New York, 1964.

[30] R. Griesse and B. Vexler. Numerical sensitivity analysis for the quantity of interest in PDE-constrained optimization. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(1) :22–48 (electronic), 2007.

[31] S. Hu and N. Papageorgiou. *Handbook of Multivalued Analysis : Theory.* Mathematics and Its Applications, vol. 419. Springer, 1997.

[32] A. Idrissi. Admissibilité de l'observation pour des systèmes bilinéaires contrôlés par des opérateurs non bornés. *Ann. math. Blaise Pascal*, 8(1) :73–92, 2001.

[33] K. Ito and K. Kunisch. Augmented Lagrangian-SQP-methods in Hilbert spaces and application to control in the coefficients problems. *SIAM J. Optim.*, 6(1) :96–125, 1996.

[34] K. Ito and K. Kunisch. Optimal bilinear control of an abstract Schrödinger equation. *SIAM J. Control Optim.*, 46(1) :274–287 (electronic), 2007.

[35] L. Kantorovitch and G. Akilov. *Analyse fonctionnelle. Tome 2.* "Mir", Moscow, 1981. Équations fonctionnelles. [Functional equations], Translated from the second Russian edition by Djilali Embarek.

[36] A. Y. Khapalov. Controllability of the semilinear parabolic equation governed by a multiplicative control in the reaction term : a qualitative approach. *SIAM J. Control Optim.*, 41(6) :1886–1900 (electronic), 2003.

[37] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, volume 1962. Dunod, 1968.

[38] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, 1969.

[39] K. Malanowski. Sensitivity analysis for parametric optimal control of semlinear parabolic equations. *J. Convex Anal.*, 9(2) :543–561, 2002.

[40] K. Malanowski. Stability analysis for nonlinear optimal control problems subject to state constraints. *SIAM J. Optim.*, 18(3) :926–945 (electronic), 2007.

[41] K. Malanowski and F. Tröltzsch. Lipschitz stability of solutions to parametric optimal control problems for parabolic equations. *Z. Anal. Anwendungen*, 18(2) :469–489, 1999.

[42] H. Maurer and J. Zowe. First and second order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems. *Math. Programming*, 16(1) :98–110, 1979.

[43] N. Merabet. *Analyse de sensibilité des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des équations paraboliques semilinéaires.* Thèse. MAPMO, Université d'Orléans, 2000. Disponible sur : http ://www.univ-orleans.fr/mapmo/publications/merabet/these.php.

[44] F. Mignot. Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques. *J. Func. An.*, 22 :130–185, 1976.

[45] E. Moulay. *Stabilité des équations différentielles ordinaires.* Cours de Master. Inria, 1997. Disponible sur : http ://hal.inria.fr/docs/00/13/64/97/PDF/Cours-Lyapunov.pdf.

[46] E. S. Pyatnitsky and L. B. Rapoport. Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 43 :219–229, 1996.

[47] J.-P. Raymond and H. Zidani. Pontryagin's principles for state-constrained control problems governed by semilinear parabolic equations with unbounded controls. *SIAM J. Cont. Optim.*, 36 :1853–1879, 1998.

[48] S. M. Robinson. First order conditions for general nonlinear optimization. *SIAM J. Appl. Math.*, 30(4) :597–607, 1976.

[49] R. T. Rockafellar. Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. *J. Math. Anal. Appl.*, 32 :174–222, 1970.

[50] F. Tröltzsch. Lipschitz stability of solutions of linear-quadratic parabolic control problems with respect to perturbations. *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, 7(2) :289–306, 2000.

[51] D. Willett and J. S. W. Wong. On the discrete analogues of some generalizations of Gronwall's inequality. *Monatsh. Math.*, 69 :362–367, 1965.

[52] J. Wloka. *Partial differential equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987. Translated from the German by C. B. Thomas and M. J. Thomas.

Index

Titre : *Problèmes de contrôle optimal du type bilinéaire gouvernés par des équations aux dérivées partielles d'évolution*

Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude de problèmes de contrôle optimal dont le caractère non linéaire se traduit par la présence, dans les équations d'état, d'un terme bilinéaire relativement à l'état et au contrôle. Malgré les difficultés liées à la non linéarité, nous obtenons des propriétés spécifiques au cas bilinéaire.

L'introduction générale constitue la première partie. La seconde partie est consacrée à l'étude des équations d'état ; ce sont des équations aux dérivées partielles d'évolution. Nous établissons des estimations a priori sur les solutions à partir des inégalités de Willett et Wong et nous démontrons que les équations d'états sont bien posées. Dans le cas où les contrôles subissent une contrainte liée aux états, ces estimations permettent de déduire l'existence de solutions dans le cadre des inclusions différentielles. Les troisième et quatrième parties de ce mémoire sont dévolues à la démonstration de l'existence de contrôles optimaux, puis à l'analyse de la sensibilité relative à une perturbation qui intervient de façon additive dans l'équation d'état. Le caractère bilinéaire permet de vérifier des conditions suffisantes d'optimalité du second ordre. Nous fournissons sur des exemples, une formule explicite des dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale.

Mots-clés : contrôle optimal bilinéaire, estimations a priori, inclusions différentielles, problèmes d'évolution bien posés, lois de feedback, systèmes non linéaires de dimension infinie, sensibilité, régularité forte.

Title : *Analysis of bilinear optimal control problems governed by evolution partial differential equations*

Abstract

This thesis is devoted to the analysis of nonlinear optimal control problems governed by an evolution state equation involving a term which is bilinear in state and control. The difficulties due to nonlinearity remain, but bilinearity adds a lot of structure to the control problem under consideration. In Section 2, by using Willet and Wong inequalities we establish a priori estimates for the solutions of the state equation. These estimates allow us to prove that the state equation is well posed in the sense of Hadamard. In the case of a feedback constraint on the control, the state equation becomes a differential inclusion. Under mild assumptions, such a differential inclusion is solvable. In Section 3, we prove the existence of solutions to the optimal control problem. Section 4 is devoted to the sensitivity analysis of the optimal control problem. We obtain a formula for the directional derivative of the optimal value function. This general formula is worked out in detail for particular examples.

Key words : bilinear optimal control, a priori estimates, differential inclusion, well posed evolution problem, feedback control, nonlinear infinite system, sensitivity, strong regularity.

Discipline : Mathématiques appliquées et applications des mathématiques

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et de Géométrie (EA 2151), F-84018 Avignon, France.