



HAL
open science

Invariants locaux en géométrie modérées.

Georges Comte

► **To cite this version:**

Georges Comte. Invariants locaux en géométrie modérées.. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2010. tel-00450299

HAL Id: tel-00450299

<https://theses.hal.science/tel-00450299>

Submitted on 26 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
LABORATOIRE J.-A. DIEUDONNÉ

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée et soutenue publiquement par :

Georges COMTE

le 10 novembre 2008

Titre :

INVARIANTS LOCAUX EN GÉOMÉTRIE MODÉRÉE

—

Devant le Jury composé de :

M. Edward BIERSTONE (Univ. de Toronto - Institut Fields, Rapporteur)
M. Michel COSTE (Univ. de Rennes, Rapporteur)
M. François LOESER (ENS Paris, Rapporteur)
M. Michel MERLE (Univ. de Nice)
M. Adam PARUSIŃSKI (Univ. d'Angers)
M. Yosef YOMDIN (Institut Weizmann)

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
LABORATOIRE J.-A. DIEUDONNÉ

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée et soutenue publiquement par :

Georges COMTE

le 10 novembre 2008

Titre :

INVARIANTS LOCAUX EN GÉOMÉTRIE MODÉRÉE

—

Devant le Jury composé de :

M. Edward BIERSTONE (Univ. de Toronto - Institut Fields, Rapporteur)
M. Michel COSTE (Univ. de Rennes, Rapporteur)
M. François LOESER (ENS Paris, Rapporteur)
M. Michel MERLE (Univ. de Nice)
M. Adam PARUSIŃSKI (Univ. d'Angers)
M. Yosef YOMDIN (Institut Weizmann)

Remerciements

Si un jour tu vois
qu'une pierre te sourit,

iras-tu le dire ?

Guillevic, *Terraqué*

Les occasions offertes de rendre grâce ne sont pas nombreuses. Quand, comme c'est le cas aujourd'hui elles se présentent, elles revêtent toutes les apparences d'un malentendu ; convier à l'issue d'un travail ceux qui veulent bien le juger abouti, alors que je ne lui accordai du prix qu'inachevé, alors que ce moment est seul celui de remercier et que, selon le mot de G. Braque, de ces remerciements, *les preuves en fatiguent la vérité*. Mais le consentement commun et lucide à ce malentendu en fixe peut-être la valeur singulière, à mesure qu'elle semble se dissoudre dans le rite et la cérémonie. Puissent ainsi mes quelques mots trouver, en ce terrain incertain, leur chemin vers le sens qu'ils portent.

Edward Bierstone a accepté de rapporter sur mon travail et honore ma soutenance de sa présence. Je lui suis profondément reconnaissant de cet investissement. Depuis le semestre organisé en 1997 à l'Institut Fields, il a toujours été, avec l'élégance mystérieuse qu'on lui envie, bienveillant à mon égard.

J'exprime également à Michel Coste ma plus profonde gratitude pour avoir accepté la tâche de rapporteur. Nous savons tous que nous devons à son aura l'exceptionnelle effervescence scientifique qui a prévalu au sein du réseau européen RAAG durant des années. Sa puissance mathématique, la beauté juste et dépouillée de ses écrits et son injustifiable et douce modestie forcent mon admiration.

François Loeser n'a pas hésité, lui non plus, entre deux tours du monde, à pieds ou en avion, à passer du temps à juger mon travail. Je le remercie de cette marque d'amitié. Comprendre à ses côtés est une fête de l'esprit toujours renouvelée, *au nord de l'avenir*. Nos séances triangulaires de doutes avec Raf Cluckers forgeront encore des souvenirs précieux, tenus par les maternelles lumières d'automne parisien, à l'ambre et au parfum de thés rares.

J'exprime ma chaleureuse reconnaissance à Michel Merle, Adam Parusiński et Yosef Yomdim, qui ont bien voulu faire partie de mon jury. Michel est le modèle du mathématicien intuitif et désintéressé, vibrant du désir de comprendre, ne comptant ni les heures ni les explications, au risque d'un divorce toujours en suspens ; je dois

beaucoup à la chance de son voisinage. Adam promène un sourire de Joconde et un regard de cristal sur les mathématiques, il les rend singulièrement humaines et profondes. Quant à Yosi, il est pour moi la musique qui va et dénoue par son art de sorcier les noeuds de sa science.

Je mêle à ma pensée reconnaissante tous ceux que ces années m'ont permis de cotoyer, Raf Cluckers, François-Xavier Dehon, Antoine Ducros, Krzysztof Kurdyka, Jean-Marie Lion, Tadeusz Mostowski, Wieslaw Pawlucki, Jean-Philippe Rollin, Bernard Teissier, Ingo Waschkes, avec, quoique probablement d'origine anglaise, une attention particulière pour mon directeur de thèse, David Trotman. Sa patience à m'endurer n'a jusque-là pas failli.

Le laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné a été le lieu favorable principal de mon travail, j'en remercie tous ses membres, qui contribuent à en faire un lieu agréable. Parmi ceux-ci, qu'il me soit permis d'isoler L. Almeida, J. Blum (et son téléphone portable), S. Boissière, Y. Brenier, J. -L. Cathelineau, A. Dimca, A. Douai, , D. Dupont, A. Galligo, P. Graftieaux, A. Habbal, G. Loeper, P. Maisonobe, F. Patras, P. Poupaud, F. Rapetti, M. Raibaut.

Brigitte et Martin, sources de bonheur.

Nice, le 7 novembre 2008

Sommaire

Préliminaire

1- Introduction : invariants additifs de courbure

1.1 Courbures de Lipschitz-Killing	1
1.2 Cycle conormal et cycle caractéristique	8
1.3 Théorie des valuations	12
1.4 Les invariants de Vitushkin	14

2- Invariants additifs locaux

2.1 Les invariants de Lipschitz-Killing locaux	18
2.2 Les invariants polaires réels	19
2.3 Formule locale de Cauchy-Crofton pour les ensembles sous-analytiques p -adiques	22
2.4. Formule multidimensionnelle locale de Cauchy-Crofton	23

3- Équisingularité réelle

3.1 Régularité des invariants polaires σ_i dans le cas complexe	28
3.2 Régularité des invariants polaires réels σ_i	30

4- Enlacement de trajectoires de champs de vecteurs Lipschitz

Références	36
------------	----

Préliminaire

Ce mémoire donne une présentation qui se veut cohérente des résultats obtenus dans [Co1], [Co2], [Co3], [Co-Cl-Lo], [Co-Li-Ro], [Co-Me], [Co-Yo1], et [Co-Yo2]. Ces articles portent sur les propriétés géométriques et métriques locales des singularités des ensembles sous-analytiques réels (ou p -adique dans la section 2.3 qui rend compte de [Cl-Co-Lo]) mais le plus souvent dans le texte “sous-analytique” vaut pour “définissable dans une structure o-minimale sur les réels” (excepté peut-être dans **Équising** $_{\mathbb{R}}$ (ii), section 3.2).

Les invariants locaux de toutes natures des singularités analytiques complexes, comme la multiplicité locale, les nombres de Milnor des sections planes (dans le cas des hypersurfaces à singularité isolée), les multiplicités des variétés polaires, ou les invariants de courbures sont tous en correspondance et leur constance le long des strates d’une stratification donnée est équivalente à une certaine condition de régularité, le plus souvent de nature différentielle, de cette stratification : stratification normalement pseudo-plate pour l’équimultiplicité, régularité de Whitney ou de Verdier pour la constance des nombres de Milnor des sections planes et des multiplicités des variétés polaires (cf **Équimult** $_{\mathbb{C}}$ et **Équising** $_{\mathbb{C}}$, section 3.1). L’étude de ce type de correspondance en géométrie complexe est l’objet de la théorie de l’équisingularité, initiée par O. Zariski.

Nous présentons des substituts réels de ces invariants complexes. Leur nature est plus sauvage que celle de leur équivalent complexe car il ne s’agit pas en général d’entiers donnant lieu à des fonctions sous-analytiques constructibles (ie constantes sur les strates d’une stratification sous-analytique de l’ensemble en question), mais de réels dont le comportement est celui d’une fonction Log-analytique (cf [Co-Li-Ro]). Tous les invariants réels que nous construisons le sont à l’aide de la caractéristique d’Euler, le plus élémentaire des invariants additifs mais le plus fondamental de ceux-ci, et une partie d’entre-eux sont les localisations des courbures de Lipschitz-Killing, qui procurent des formules exactes sur le volume des tubes des ensembles définissables. Les invariants de Vitushkin sont quant à eux construits sur le nombre de composantes connexes et donnent seulement lieu à des formules approchées portant sur le volume des tubes ; ils sont étudiés dans [Co-Yo1] (cf section 1.4).

Ce que nous appelons *équisingularité réelle* est l’étude de la correspondance entre la *continuité* (et non plus la constance comme en complexe) de ces invariants le long des strates d’une stratification et la régularité de cette stratification.

La continuité ou même la constance de nos invariants réels le long des strates d’une stratification ne garantit pas que celle-ci jouisse d’une bonne régularité (cf exemple section 3.2). Les résultats sont en sens inverse ; c’est une régularité adéquate de la stratification (par exemple la régularité de Verdier) qui assure la continuité des invariants le long de ses strates (cf **Équimult** $_{\mathbb{R}}$ et **Équising** $_{\mathbb{R}}$, section 3.2).

Si l’équisingularité complexe suggère comment nos invariants réels doivent se

correspondre, il me semble que la géométrie convexe montre pourquoi ils le doivent : les résultats de finitude comme l'exemplaire théorème de Hadwiger (cf section 1.3) portant sur les invariants additifs de la géométrie convexe forcent ceux-ci à être linéairement liés. Cette rigidité structurelle doit alors s'étendre aux invariants additifs de la géométrie sous-analytique, qui comme les nôtres sont suffisamment réguliers. Le chapitre 1, introductif, est entièrement consacré à la mise en place de ce point de vue.

Les correspondances que nous établissons entre nos invariants locaux réels sont des formules du type Cauchy-Crofton locales (cf $(\mathcal{C}^{loc}\mathbb{R})$ section 2.2, $(\mathcal{C}^{loc}\mathbb{Q}_p)$ section 2.3 et $(\mathcal{C}_{Mult}^{loc})$ section 2.4). L'effet de moyenne et donc de compensation que permet ce type de formules intégrales est un principe qui traverse tous les articles présentés ici. C'est ce principe qui prévaut encore dans [Co-Yo2] (cf chapitre 4) où, grâce à une version quantifiée de la formule de Cauchy-Crofton sphérique, nous montrons le comportement modéré des trajectoires des champs de vecteurs lipschitz : celles-ci ne s'enlacent pas infiniment en temps fini et d'une borne de leur rotation nous déduisons une borne de l'invariant de Hopf-Arnold.

1- Introduction : invariants additifs de courbure

1.1. Courbures de Lipschitz-Killing. On peut faire remonter à J. Steiner l'idée, aussi belle que féconde, selon laquelle une famille d'ensembles se déformant sur un ensemble spécial X fait apparaître des invariants remarquables attachés à X lui-même. C'est ce principe qui est par exemple à l'œuvre dans la notion de type topologique du link simplicial en topologie algébrique, du link géométrique en théorie des singularités, du théorème d'unicité des triangulations en géométrie modérée (cf les théorèmes de M. Shiota) et de nombre de Milnor d'une singularité isolée d'hypersurface complexe, où la caractéristique d'Euler des fibres voisines $f^{-1}(\rho) \cap B_{(0,r)}$, $0 < \rho \ll r \ll 1$, définit un invariant analytique du germe de la fibre $f^{-1}(0)$, lorsque $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Ce principe est rendu encore plus explicite dans la version motivique de la fibre de Milnor (†) et l'obtention de la densité locale des ensembles définissables p -adiques (cf section 2.3).

Dans [St] il est prouvé qu'étant donné un polytope P (l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points) de \mathbb{R}^n (de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 dans [St]), le volume du voisinage tubulaire $\mathcal{T}_{P,\rho} = \bigcup_{x \in P} B_{(x,\rho)}$ de rayon $\rho \geq 0$ de P est un polynôme en ρ dont les coefficients $\Lambda_0(P), \dots, \Lambda_n(P)$ ne dépendent que de P et sont invariants par les isométries de l'espace ambiant :

$$\forall \rho \geq 0, \quad Vol_n(\mathcal{T}_{P,\rho}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Lambda_{n-i}(P) \cdot \rho^i. \quad (1)$$

Par commodité nous normalisons les coefficients $\Lambda_i(P)$ en introduisant dans (1) le i -volume α_i de la boule unité i -dimensionnelle.

En faisant $\rho = 0$ dans cette formule, on obtient $\Lambda_n(P) = Vol_n(P)$. D'autre part, en notant $\delta = \max\{|x-y|; x, y \in P\}$ le diamètre de P , pour un élément $x \in P$ quelconque, la double inclusion $B_{(x,\rho)} \subset \mathcal{T}_{P,\rho} \subset B_{(x,\rho+\delta)}$ montre que : $Vol_n(\mathcal{T}_{P,\rho}) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \alpha_n \cdot \rho^n$ et donc $\Lambda_0(P) = 1$. Il est utile pour la suite de voir en cette égalité plutôt la suivante : $\Lambda_0(P) = \chi(P)$. Les coefficients $\Lambda_0(P)$ et $\Lambda_n(P)$ sont obtenus ainsi sans calcul, mais une preuve directe de (1) fournit une expression de tous les coefficients $\Lambda_i(P)$.

Pour donner cette preuve nous introduisons quelques notations.

Si P est un polytope de \mathbb{R}^n de dimension n , engendré par $n+1$ points indépendants, un hyperplan affine de \mathbb{R}^n engendré par n de ces points est appelé une *facette* de P .

(†) Lorsque $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, on peut voir en $\mathcal{X}_n = \{\varphi \in \mathcal{L}_n(M); ord_t(f_n(\varphi)) = n\}$ le voisinage tubulaire d'ordre n dans l'espace des arcs, de la variété $f = 0$. En notant $[\mathcal{X}_n]$ la classe de \mathcal{X}_n dans l'anneau de Grothendieck $K_0(Var_{\mathbb{C}})_{\mathbb{L}}$, où $\mathbb{L} = [A^1]$, la rationalité de la série $\sum_{n \geq 0} [\mathcal{X}_n] (\mathbb{L}^{-m} T)^n$ (cf [De-Lo]) définissant la fibre de Milnor motivique est un

résultat de finitude notoirement parent de la formule de Steiner (1) pour les convexes, du théorème de Hadwiger ou de la formule des tubes de Weyl et de son avatar sous-analytique (1').

Le vecteur normal à une facette F de P est le vecteur unitaire orthogonal à F situé dans le demi-espace défini par F qui ne contient pas P . Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, une i -face de P est l'intersection de $n-i$ facettes distinctes de P et de P . On note $\mathcal{F}_i(P)$ l'ensemble des i -faces de P . Par convention $\mathcal{F}_n(P) = \{P\}$. À tout point $x \in P$ on peut associer F_x , l'unique face de P de dimension minimale contenant x . Si $x \in \partial P$ (le bord de P), on définit $C(x, P)$, le cône normal extérieur à P en x , de la façon suivante : $C(x, P)$ est le cône de \mathbb{R}^n engendré sur \mathbb{R}_+ par les vecteurs normaux aux facettes de P contenant x . On convient que : $C(x, P) = \{0\}$, lorsque $x \in P \setminus \partial P$.

Remarquons que si F_x est de dimension $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $C(x, P)$ est un cône invariant sous l'action de \mathbb{R}_+^\times et de dimension $n-i$. De plus quel que soit $y \in F_x$, $C(x, P) = C(y, P)$. On définit donc $C(F, P)$, le cône normal extérieur de P le long d'une face F de P , par $C(x, P)$, où x est quelconque dans F . On a : $C(P, P) = \{0\}$.

Si P est un polytope dégénéré de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire si le sous-espace vectoriel $[P]$ de \mathbb{R}^n engendré par P est de dimension $< n$, on note $C_{[P]}(x, P)$ le cône normal extérieur de P en x dans $[P]$, au sens de la définition qui précède, puisque P est de codimension nulle dans $[P]$. Avec cette notation, le cône normal extérieur de P en x dans \mathbb{R}^n , noté $C_{\mathbb{R}^n}(x, P)$ est défini par $C_{[P]}(x, P) \times [P]^\perp$. Le cône normal extérieur est ainsi relatif à l'espace dans lequel il est obtenu, mais nous donnons une définition intrinsèque attachée au cône normal extérieur : l'angle extérieur.

Définition 1 (angle extérieur). Soit P un polytope de \mathbb{R}^n et $F \in \mathcal{F}_i(P)$. On définit $\gamma(F, P)$, l'angle extérieur de P le long de F par :

$$\gamma(F, P) = \frac{1}{\alpha_{n-i}} \cdot Vol_{n-i}(C(F, P) \cap B_{(0,1)}^n) = Vol_{n-i-1}(C(F, P) \cap S_{(0,1)}).$$

Par convention $\gamma(P, P) = 1$ (cf fig.1).

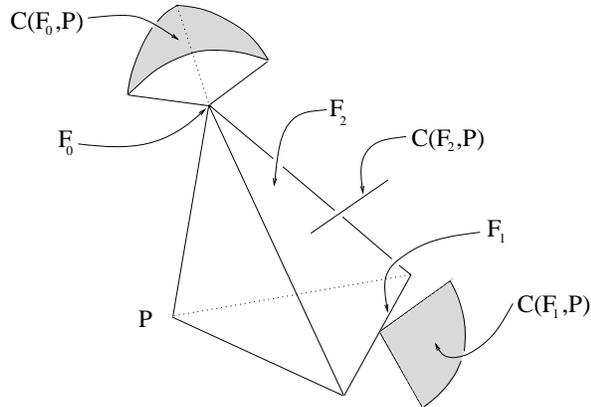


fig.1

La notion d'angle extérieur introduite, la preuve de (1) est immédiate.

Preuve de l'égalité (1) dans le cas polyédral. La convexité de P , par découpage de $\mathcal{T}_{P,\rho}$, donne :

$$Vol_n(\mathcal{T}_{P,\rho}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot \rho^{n-i} \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} Vol_i(F) \cdot \gamma(F, P). \quad \square$$

On obtient en particulier :

$$\Lambda_i(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} Vol_i(F) \cdot \gamma(F, P). \quad (2)$$

L'égalité (2) montre en quoi les $\Lambda_i(P)$ traduisent la concentration de courbure de P le long de ses faces i -dimensionnelles, de sorte que l'égalité (1) montre que la dégénérescence de $\mathcal{T}_{P,\rho}$ sur P met en évidence la concentration de courbure de P le long de toutes ses faces.

De plus, du fait que le volume des voisinages tubulaires des polytopes est additif, c'est-à-dire que :

$$Vol_n(\mathcal{T}_{P \cup Q, \rho}) = Vol_n(\mathcal{T}_{P, \rho}) + Vol_n(\mathcal{T}_{Q, \rho}) - Vol_n(\mathcal{T}_{P \cap Q, \rho})$$

lorsque $P \cup Q$ est un polytope, l'égalité (1) montre que les invariants Λ_i sont eux-mêmes additifs : pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, pour tous polytopes P, Q , tels que $P \cup Q$ est un polytope,

$$\Lambda_i(P \cup Q) = \Lambda_i(P) + \Lambda_i(Q) - \Lambda_i(P \cap Q).$$

Dans le cas convexe, et non plus seulement polyédral convexe, l'égalité (1) a encore lieu, donnant naissance à des invariants additifs Λ_i définis sur l'ensemble \mathcal{K}^n des convexes compacts de \mathbb{R}^n . Une preuve reposant sur l'approximation d'un convexe par une suite de polytopes est donnée dans [Sc3], section 4.2. En voici une esquisse, dont on peut voir qu'elle n'est qu'une extension de la preuve dans le cas des polytopes :

Preuve de l'égalité (1) dans le cas convexe compact. Considérons $K \in \mathcal{K}^n$. On définit l'application (continue) :

$$f_\rho : \begin{array}{l} \mathcal{T}_{K,\rho} \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1}(0,1) \\ x \mapsto (\pi_K(x), u_K(x)) \end{array}$$

où $\pi_K(x)$ est la projection de x sur K et $u_K(x)$ le vecteur unitaire normal sortant de K et dirigeant la droite passant par x et $p_K(x)$. On note $\mu_{K,\rho}$ la mesure image par f_ρ de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . Si $K = P$ est un polytope et B un borélien de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}(0,1)$, on montre que :

$$\mu_{P,\rho}(B) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_{n-i,P}(B) \cdot \rho^i, \quad (a)$$

où $\lambda_{0,P}, \dots, \lambda_{n,P}$ sont des mesures positives sur les boréliens de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. En faisant $\rho = 1, \dots, \rho = n$ on obtient les $\lambda_{i,P}$ sous la forme :

$$\lambda_{i,P} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \mu_{P,k},$$

ce qui permet de définir $\lambda_{i,K}$, pour $K \in \mathcal{K}^n$, par $\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \mu_{K,k}$ et d'en faire une mesure (*a priori* à valeurs dans \mathbb{R}) sur les boréliens de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. On montre ensuite que si $K_j \rightarrow K$ dans \mathcal{K}^n muni de la distance de Hausdorff, $\mu_{K_j,r}$ tend vers $\mu_{K,r}$, pour tout $r > 0$, de sorte qu'en considérant une suite de polytopes convergeant vers K , on obtient la positivité des mesures $\lambda_{i,K}$ et on étend la formule (1) aux convexes, par passage à la limite dans (a), puisque $\mu_{K,\rho}(\mathbb{R}^n \times S^{n-1}(0,1)) = Vol_n(\mathcal{T}_{K,\rho})$. \square

Dans le cas convexe, une autre preuve est indiquée dans [Fe3, 3.2.35] ou [La] ; elle fait usage de la formule de Cauchy-Crofton, que nous rappelons ici :

Formule de Cauchy-Crofton ([Fe1, 5.11], [Fe3, 2.10.15, 3.2.26], [Sa, 14.69]) — Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble (\mathcal{H}^d, d) rectifiable, alors :

$$Vol_d(A) = \frac{1}{\beta(n,d)} \int_{\bar{P} \in \bar{G}(n-d,n)} Card(A \cap \bar{P}) d\bar{\gamma}_{d,n}(\bar{P}), \quad (CC)$$

où $\bar{G}(n-d,n)$ est la Grassmannienne affine des $(n-d)$ plans \bar{P} de \mathbb{R}^n , $\bar{\gamma}_{d,n}$ sa mesure canonique et $\beta(n,d)$ la constante universelle $\Gamma(\frac{n-i+1}{2})\Gamma(\frac{i+1}{2})/\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$ (Γ est la fonction d'Euler).

On peut maintenant donner une autre preuve de (1) dans le cas convexe compact.

Preuve de l'égalité (1) dans le cas convexe compact. La preuve se fait par récurrence sur la dimension de l'espace euclidien dans lequel est inclus le convexe compact K . Si celle-ci est 1, la formule (1) est triviale, si celle-ci est $n > 1$, on a :

$$Vol_n(\mathcal{T}_{K,\rho}) = Vol_n(K) + \int_{r=0}^{\rho} Vol_{n-1}(K^r) dr,$$

où K^r est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n à distance r de K . Calculons alors $Vol_{n-1}(K^r)$ à l'aide de la formule de Cauchy-Crofton. En remarquant que : $Card(\bar{L} \cap K^r) = 2$ ou $Card(\bar{L} \cap K^r) = 0$, pour un sous-ensemble de mesure pleine de $\bar{G}(1,n)$, on obtient par définition de $\bar{\gamma}_{1,n}$:

$$Vol_n(\mathcal{T}_{K,\rho}) = Vol_n(K) + \int_{r=0}^{\rho} \frac{2}{\beta(n,n-1)} \int_{H \in G(n-1,n)} Vol_{n-1}(\pi_H(K^r)) d\gamma_{n-1,n}(H) dr,$$

où $G(n - 1, n)$ est la Grassmannienne des $(n - 1)$ plans vectoriels de \mathbb{R}^n munie de sa mesure unitaire invariante sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$ et π_H la projection orthogonale sur $H \in G(n - 1, n)$.

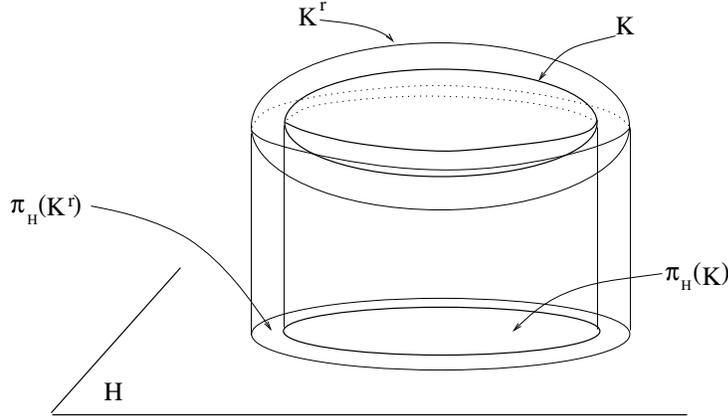


fig.2

Mais si notre hypothèse de récurrence est que l'expression du volume du voisinage tubulaire de rayon $r > 0$ des convexes de \mathbb{R}^{n-1} est un polynôme en r , on obtient, en observant que $\pi_H(K^r)$ est $\mathcal{T}_{\pi_H(K), r}$ dans H :

$$\begin{aligned}
 & Vol_n(\mathcal{T}_{K, \rho}) = Vol_n(K) \\
 & + \frac{2}{\beta(n, n - 1)} \int_{r=0}^{\rho} \int_{H \in G(n-1, n)} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \Lambda_{n-1-i}(\pi_H(K)) \cdot r^i d\gamma_{n-1, n}(H) dr, \\
 = & Vol_n(K) + \frac{2}{\beta(n, n - 1)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i}{i + 1} \cdot \rho^{i+1} \int_{H \in G(n-1, n)} \Lambda_{n-1-i}(\pi_H(K)) d\gamma_{n-1, n}(H). \quad \square
 \end{aligned}$$

Dans [St], la formule (1) est également prouvée pour les surfaces de classe C^{2+} , suggérant une extension au cas lisse. On doit cette extension H. Weyl, qui dans [We] prouve :

Formule des tubes de Weyl ([We]) — Soit X une sous-variété compacte de \mathbb{R}^n , lisse et de dimension d . Soit $\eta_X > 0$ tel que quel que soit ρ , $0 < \rho \leq \eta_X$, lorsque $y \in \mathcal{T}_{X, \rho}$, il existe un unique $x \in X$ tel que $y \in (T_x X)^\perp$. On a alors pour tout $\rho \leq \eta_X$:

$$Vol_n(\mathcal{T}_{X, \rho}) = \sum_{i=0}^{[d/2]} \alpha_{n-d+2i} \Lambda_{d-2i}(X) \cdot \rho^{n-d+2i},$$

où les $\Lambda_k(X)$ s'expriment grâce au tenseur de courbure riemannien et sont par conséquent invariants par plongements isométriques.

En résumé $Vol_n(\mathcal{T}_{X,\rho})$ est un polynôme en ρ qui définit :

- des invariants de courbure dans le cas où X est lisse, pour ρ suffisamment petit,
- des invariants additifs, quel que soit $\rho \geq 0$, dans le cas où X est un polytope ou plus généralement convexe compact et qui traduisent la concentration de courbure le long des faces d'un polytope, ou qui rendent compte de la dégénérescence de celle-ci lorsque l'on considère des suites de polytopes convergeant vers un convexe compact dans la métrique de Hausdorff.

En revanche, lorsque X est une réunion quelconque deux polytopes P, Q , il se peut que $Vol_n(\mathcal{T}_{X,\rho})$ ne soit pas un polynôme en ρ . Il suffit de penser à $X_1 = P \cup Q$ où $P = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ et $Q = \{(0, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$, pour $1 \leq \rho \leq 2$. De même si X n'est pas une variété lisse, il se peut que quel que soit $\rho > 0$, $Vol_n(\mathcal{T}_{X,\rho})$ ne soit pas un polynôme en ρ . Par exemple si $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, (x^2 + y - 1)(x^2 + (y - 2)^2 - 1) = 0\}$, on obtient, quel que soit $\rho > 0$ (suffisamment petit), $Vol_2(\mathcal{T}_{X,\rho}) = (1 + \rho)^2 \arccos\left(\frac{1}{1 + \rho}\right) - \sqrt{\rho^2 + 2\rho}$ (cf fig.3).

Remarque. D'après [Co-Li-Ro], on sait cependant que lorsque X est un ensemble sous-analytique de \mathbb{R}^n , $Vol(\mathcal{T}_{X,\rho})$ est un polynôme en des fonctions sous-analytiques en ρ et en leur logarithme (cf chapitre 3).

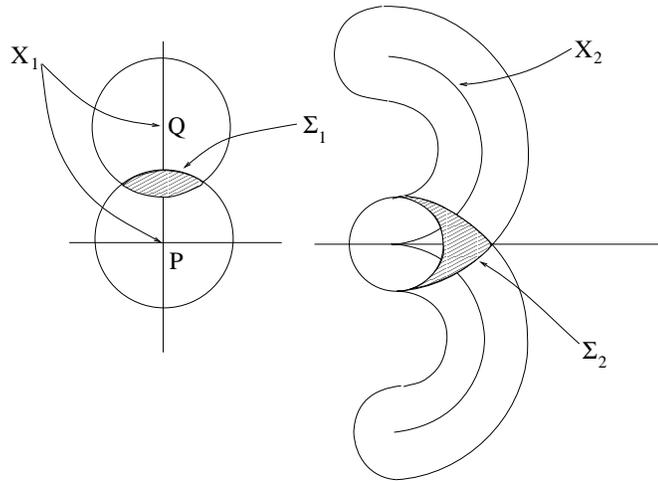


fig.3

Les aires hachurées Σ_1 et Σ_2 de la figure 3, comptées avec multiplicité 1 dans le calcul de

$Vol_2(\mathcal{T}_{X_i,\rho})$ contribuent de manière non polynomiale. Mais si celles-ci sont comptées avec multiplicité 2, on obtient d'une part dans le calcul modifié de $Vol_2(\mathcal{T}_{X_1,\rho})$ la somme des aires des disques de rayon ρ centrés en P et en Q et d'autre part dans le calcul modifié de $Vol_2(\mathcal{T}_{X_2,\rho})$ le double du volume du voisinage tubulaire de rayon ρ du quart de cercle privé du volume de la boule de rayon ρ . Ainsi une contribution double du volume des aires hachurées fournit deux polynômes en ρ . De plus on observe que pour $j = 1, 2$:

- $\forall x \in \Sigma_j : 2 = \chi(X_j \cap B_{(x,\rho)})$,
- $\forall x \in \mathcal{T}_{X_j,\rho} \setminus \Sigma_j : 1 = \chi(X_j \cap B_{(x,\rho)})$,
- $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{T}_{X_j,\rho} : \chi(X_j \cap B_{(x,\rho)}) = 0$.

Il s'ensuit que, pour $j=1,2$: $\int_{x \in \mathbb{R}^2} \chi(X_j \cap B_{(x,\rho)}) dx = \int_{x \in \mathcal{T}_{\rho,X_j}} \chi(X_j \cap B_{(x,\rho)}) dx$ est un polynôme en ρ , contrairement à $Vol_2(\mathcal{T}_{X_j,\rho})$.

Cet exemple rend compte d'un fait général ; la formule (1) admet la généralisation (1') aux ensembles compacts et sous-analytiques dans \mathbb{R}^n (ou même définissables dans une structure o-minimale sur les réels) :

Théorème ([Fu1...7], [Be-Br1,2], [Br-Ku]) — Soit X un ensemble sous-analytique compact de \mathbb{R}^n . Il existe des constantes $\Lambda_0(X), \dots, \Lambda_n(X)$ telles que quel que soit $\rho \geq 0$:

$$\int_{x \in \mathcal{T}_{\rho,X}} \chi(X \cap B_{(x,\rho)}) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Lambda_{n-i}(X) \cdot \rho^i. \tag{1'}$$

Les $\Lambda_i(X), i = 0, \dots, n$ sont appelés les courbures de Lipschitz-Killing de X . Il s'agit d'invariants des isométries sous-analytiques. De plus on dispose de la formule :

$$\Lambda_i(X) = \int_{\bar{P} \in \bar{G}(n-i,n)} \chi(X \cap \bar{P}) \frac{d\bar{\gamma}_{n-i,n}(\bar{P})}{\beta(n,i)}. \tag{2'}$$

Remarques au sujet de (1') et (2'). - Clairement (1') est une généralisation de (1) au cas non convexe puisque si X est convexe, quel que soit $\rho \geq 0$, quel que soit $x \in \mathcal{T}_{X,\rho}$, $\chi(X \cap B_{(x,\rho)}) = 1$ et par conséquent $\int_{x \in \mathcal{T}_{\rho,X}} \chi(X \cap B_{(x,\rho)}) dx = Vol_n(\mathcal{T}_{X,\rho})$. De même (1') est une généralisation de la formule des tubes de H. Weyl au cas non lisse, puisque si X est lisse, il existe $\eta_X > 0$ tel que quel que soit $\rho, 0 < \rho < \eta_X$, quel que soit $x \in \mathcal{T}_{X,\rho}$, $\chi(X \cap B_{(x,\rho)}) = 1$ et $\int_{x \in \mathcal{T}_{\rho,X}} \chi(X \cap B_{(x,\rho)}) dx = Vol_n(\mathcal{T}_{X,\rho})$.

- Notons que (1') provient d'une formule cinématique plus générale (cf [Br-Ku], [Fu5]). Si X et Y sont deux sous-analytiques compacts de \mathbb{R}^n :

$$\int_{g \in G} \Lambda_k(X \cap g \cdot Y) dg = \sum_{i+j=k+n} c_{n,i,j} \cdot \Lambda_i(X) \cdot \Lambda_j(Y) \tag{1''}$$

avec G le groupe des isométries de \mathbb{R}^n et $c_{n,i,j}$ des constantes universelles.

- L'expression des $\Lambda_i(X)$ donnée en (2') est une extension au cas sous-analytique de la formule (2) de représentation des $\Lambda_i(X)$ dans le cas polyédral.

- On obtient à l'aide de (2') les caractérisations suivantes de Λ_0 et Λ_d , où $d = \dim(X)$, que l'on a obtenu à partir de (1) dans le cas convexe : $\Lambda_0(X) = \chi(X)$ et directement d'après la formule de Cauchy-Crofton $\Lambda_d(X) = Vol_d(X)$. Enfin $\Lambda_{d+1}(X) = \dots = \Lambda_n(X) = 0$, si $d < n$.

- La caractéristique d'Euler étant additive sur les sous-analytiques compacts et ceux-ci étant stables par réunion et intersection finies, l'égalité (1') ou (2') montre que les Λ_i sont des invariants additifs des sous-analytiques compacts :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \Lambda_i(X \cup Y) = \Lambda_i(X) + \Lambda_i(Y) - \Lambda_i(X \cap Y),$$

lorsque X et Y sont des sous-analytiques compacts de \mathbb{R}^n .

1.2. Cycle conormal et cycle caractéristique. La formule (1') semble indiquer que les objets X auxquels elle s'applique appartiennent *a priori* à une catégorie d'ensembles définissables dans une structure o-minimale, afin que les caractéristiques d'Euler des sections planes de X soient uniformément bornées, ce que ne requiert nullement la formule (1) pour les convexes ni la formule des tubes de Weyl, qui est valable dans le cas lisse non nécessairement modéré. L'approche de J. Fu développée dans les années 1980-1990, qui utilise la théorie de Federer des courants intégraux et qui étend celle des ensembles à *positive reach* (cf [Ba], [Fe2], [Zäl,2]), éclaire cette zone d'ombre et offre une théorie des courbures de Lipschitz-Killing adaptée à la fois aux ensembles de la géométrie modérée, aux convexes et aux sous-variétés lisses de \mathbb{R}^n .

Nous résumons ici la théorie du cycle (co)normal de J. Fu qui est, comme on le remarque en fin de section, la version en théorie de la mesure géométrique du cycle caractéristique de M. Kashiwara et P. Schapira. Pour une connaissance complète de cette théorie, nous renvoyons aux différents articles de J. Fu donnés en référence. Les notations sont celles rendues classiques par [Fe3].

Soit M une variété lisse orientable de dimension n , $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ la projection canonique du fibré cotangent de M , ω la forme symplectique naturelle sur T^*M , $\hat{T}^*M = T^*M \setminus M$, $S^*M = \hat{T}^*M / \sim$, où $\xi \sim \eta$ ssi existe $a > 0$ tel que $\xi = a \cdot \eta$ et $\nu : \hat{T}^*M \rightarrow S^*M$ la projection.

Définition. On dit qu'une fonction localement lipschitz $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction de Monge-Ampère* lorsqu'existe un courant intégral $\mathbf{T} \in I_n(T^*M)$ (cf [Fe3, 4.1.24]) tel que :

- $\partial \mathbf{T} = 0$
- $\mathbf{T} \llcorner \omega = 0$ (on dit alors que \mathbf{T} est lagrangien)
- $\pi_{M|spt(\mathbf{T})}$ est propre
- Pour toute n -forme θ à support compact sur M et $\varphi : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction \mathcal{C}^∞ quelconque :

$$\mathbf{T}(\varphi \cdot \pi_M^* \theta) = \int_M (\varphi \circ Df) \cdot \theta.$$

D'après [Fu3], si un tel courant existe il est unique et on le note $[Df]$ car si f est \mathcal{C}^2 , $[Df]$ est le courant d'intégration sur le graphe $\Gamma(Df) = \{(x, Df_{(x)}); x \in M\} \subset \mathbf{T}^*M$ de Df . De plus, toujours d'après [Fu3], si M est analytique et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sous-analytique et localement lipschitz, f est une fonction de Monge-Ampère.

Pour $x \in M$, notons $D^*f_{(x)}$ la différentielle de Clarke de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ en x : $D^*f_{(x)} = \text{Conv}\{L \in T_x^*M; L = \lim_{i \rightarrow \infty} Df_{(x_i)}, \text{ avec } x_i \rightarrow x\}$. Si X est un compact de M , une fonction de Monge-Ampère positive et propre telle que $f^{-1}(\{0\}) = X$ est appelée une *aura de X*. Une aura de X est *non dégénérée* ssi existe un voisinage U de X dans M tel que : $\overline{\Gamma(D^*f|_{U \setminus X})} \subset \hat{\mathbf{T}}^*M$. Si M est munie d'une métrique riemannienne et si X est à *positive reach* (ie si $\sup\{r > 0; \forall x, d(x, X) \leq r, \text{ il existe un unique } y \in X \text{ tel que } d(x, X) = d(x, y)\} \neq 0$) alors $f = d(\cdot, X)$ est une aura non dégénérée de X . En particulier, si X est lisse ou convexe, X est à *positive reach*, tandis que si X est sous-analytique (en supposant M analytique), $f = d(\cdot, X)$ est une aura de X qui peut être dégénérée (par exemple dans la cas où X est le cusp $y^2 = x^3$ de \mathbb{R}^2 , $\lim_{x \rightarrow 0} D^*f_{(x,0)} = 0$). Cependant dans le cas sous-analytique ou définissable, même si 0 peut-être une valeur critique de $f = d(\cdot, X)$, l'ensemble des valeurs critiques de f est localement fini dans \mathbb{R} . C'est cette dernière propriété qui est utile dans la définition du cycle conormal que l'on donne maintenant.

Supposons que X possède une aura f non dégénérée et donc qu'existe un voisinage U de X dans M comme décrit ci-dessus, ou que X est sous-analytique dans M et dans ce cas on note r_1 la plus petite valeur critique non nulle de $d(\cdot, X)$ et on pose $U = d(\cdot, X)^{-1}(]0, r_1[)$. On définit alors le *cycle conormal* $N^*(f, 0)$ de X , qui à ce stade est attaché au choix de la fonction f , par :

$$\begin{aligned} \text{pour } 0 < r < r_1, \quad N^*(f, r) &= \nu_{\#} \langle [Df], \pi_M^* f, r \rangle \in I_{n-1}(S^*M), \\ N^*(f, 0) &= \lim_{r \rightarrow 0} N^*(f, r) \\ &= -\nu_{\#} (\partial([Df] \llcorner \pi_M^{-1}(M \setminus X)) \llcorner \pi_M^{-1}(U)) \in I_{n-1}(S^*M). \end{aligned}$$

La terminologie “ $N^*(f, 0)$ est le cycle conormal de X lorsque f est une aura de X ” est justifiée par le fait que le courant $N^*(f, 0)$ ne dépend pas du choix de f ; si f et g sont deux auras de $X = f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$, on a par [Fu7, 3.3.3] : $\lim_{r \rightarrow 0} N^*(f, r) = \lim_{r \rightarrow 0} N^*(g, r)$. On note finalement, lorsque f est une aura de X particulière :

$$N^*(X) := N^*(f, 0).$$

Dans le cas où M est muni d'une structure riemannienne, on identifie naturellement \mathbf{T}^*M et TM , S^*M et SM et note $N(X) \in I_{n-1}(SM)$, le *cycle normal de X* au lieu de $N^*(X)$.

Le cycle conormal est additif sur les sous-analytiques compacts :

$$N^*(X \cup Y) + N^*(X \cap Y) = N^*(X) + N^*(Y)$$

et dans le cas sous-analytique, le théorème d'unicité de [Fu7, 3.2] montre que $N(X)$ est complètement caractérisé par l'égalité (3) ci-dessous (cf [Be-Br1,2], [Br-Ku]).

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-analytique de \mathbb{R}^n et $\alpha_X : S\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\alpha_X(x, v) = 1 - \chi(X \cap B_{(x,\delta)} \cap h_v^{-1}(h_v(x) - \epsilon)),$$

avec $h_v(z) = -(v|z)$ et $0 < \epsilon \ll \delta \ll 1$ (voir fig.4.a et 4.b). Si $x \notin X$, $\alpha_X(x, \cdot) = 0$ et si (X_j) est une stratification de Whitney de X , $x \in X_i$, $\alpha_X(x, v)$ est non nul ssi x est critique pour $h_v|_{X_i}$. Enfin (cf [Br-Ku]) on montre que pour v générique dans S^{n-1} , $h_v : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse (relative à la stratification (X_j) de (X)).

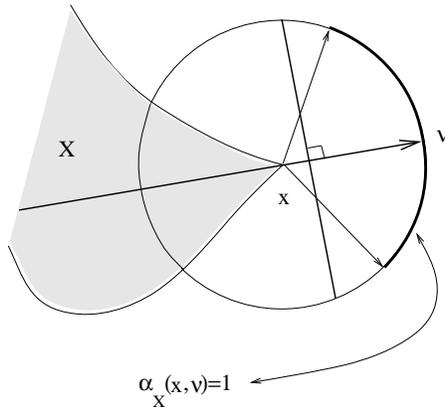


fig.4.a

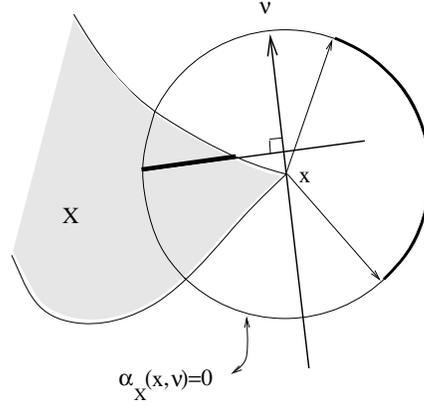


fig4.b

Soit $p : S\mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$ et ς la forme volume de S^{n-1} . On a alors, pour toute fonction lisse $\varphi : S\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$N(X)(\varphi \cdot p^*\varsigma) = \int_{v \in S^{n-1}} \sum_{x \in X} \varphi(x, v) \alpha_X(x, v) d\varsigma(v). \tag{3}$$

Dans le cas où φ vaut 1 sur $\nu^{-1}(X)$, l'égalité (3) devient :

$$N(X)(p^*\varsigma) = Vol_{n-1}(S^{n-1})\chi(X) \tag{3'}$$

puisque $\int_{v \in S^{n-1}} \sum_{x \in X} \alpha_X(x, v) d\zeta(v) = \int_{v \in S^{n-1}} \chi(X) d\zeta(v)$.

Maintenant afin de présenter les invariants Λ_i pour les convexes ou les sous-analytiques de \mathbb{R}^n par une formule du type (2) ou (2') faisant usage du cycle normal, on applique le cycle normal à des $(n - 1)$ -formes de $\mathbb{S}\mathbb{R}^n$ particulières $\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1} \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{S}\mathbb{R}^n)$. Ces formes sont définies de la façon suivante (cf [Fu5], [Be-Br1,2]). Soit $(x, v) \in \mathbb{S}\mathbb{R}^n$ et $(v = b_1, \dots, b_n)$ une base orthonormée de $T_x\mathbb{R}^n$, de base duale $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, alors (b_2, \dots, b_n) est une base de T_vS^{n-1} dont la base duale est notée $(\omega_2, \dots, \omega_n)$. On pose :

$$\kappa_i = \frac{1}{Vol_{n-i-1}(S^{n-i-1})} \sum_{\tau \in S(\{2, \dots, n\})} \epsilon(\tau) \omega_{\tau(2)} \wedge \dots \wedge \omega_{\tau(n-i)} \wedge \sigma_{\tau(n-i+1)} \dots \wedge \sigma_{\tau(n)}.$$

Remarques. - La définition des κ_i ne dépend pas du choix de la base orthonormée orientée (b_1, \dots, b_n) .

- Les formes κ_i constituent une base de l'espace des $(n - 1)$ formes de $\mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{S}\mathbb{R}^n)$ invariantes sous l'action des isométries orientées de \mathbb{R}^n induites sur $\mathbb{S}\mathbb{R}^n$ ([Fu5]).

Pour X convexe ou sous-analytique dans \mathbb{R}^n , on montre alors que les coefficients $\Lambda_i(X)$ qui apparaissent dans la formule (1') sont donnés par :

$$\Lambda_i(X) = N(X)(\kappa_i), \quad i = 0, \dots, n - 1 \tag{4}$$

La formule (4) redonne immédiatement la formule (2) qui exprime $\Lambda_i(X)$ lorsque X est un polytope, car dans ce cas $N(X)$ est le courant d'intégration le long des produits des faces par leur angle extérieur solide (ie vu comme sous-ensemble de S^{n-1}) dans $\mathbb{S}\mathbb{R}^n$. La forme κ_0 est la forme de Gauss $p^*\zeta$ sur $\mathbb{S}\mathbb{R}^{n-1}$, de sorte que d'après (3'), on retrouve bien $\Lambda_0 = \chi$, dans le cas sous-analytique.

Enfin comme cela est remarqué dans [Fu7], N^* correspond au cycle caractéristique défini par M. Kashiwara et P. Schapira, de la façon suivante (les notations sont celles de [Ka-Sc]). Supposons que M est analytique riemannienne, dans [Ka-Sc, 9.4.1] est défini le cycle caractéristique $CC(F)$ de $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(M))$ comme l'image dans $H^0(T^*M; \mathcal{L}_X)$ de $id_F \in \text{Hom}(F, F)$, avec \mathcal{L}_X le faisceau des cycles lagrangiens sur T^*M (cf [Ka-Sc, 9.3.1]). En notant $C(M)$ la \mathbb{R} -algèbre des fonctions sous-analytiquement constructibles sur M et $K_0(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(M))$ le groupe de Grothendieck de $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(M)$, on dispose des isomorphismes ([Ka-Sc, 9.7.1], [Ka-Sc, 9.4.5, 9.7.10]) :

$$\chi : K_0(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(M)) \rightarrow C(M)$$

$$CC : K_0(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(M)) \rightarrow H^0(T^*M; \mathcal{L}_M),$$

qui induisent l'isomorphisme :

$$cc = CC \circ \chi^{-1} : C(M) \rightarrow H^0(T^*M; \mathcal{L}_M).$$

Notons maintenant $\mu : S^*M \times]0, \infty[\rightarrow \hat{T}^*M$ et $z : M \rightarrow T^*M$. On définit la conification \vec{N}^* de N^* par :

$$\vec{N}^*(X) = \mu_{\#}(N^*(X) \times]0, \infty[) + z_{\#}[X] \in I_n(T^*M),$$

où $z_{\#}[X]$ est le n -courant nul de $I_n(T^*M)$ lorsque $\dim(X) < n$. L'additivité du cycle conormal permet de définir une application de $C(M)$ vers $I_n(T^*M)$, qui à $\varphi = \sum_{j=1}^p m_j \mathbf{1}_{X_j}$ associe $\vec{N}^*(\varphi) = \sum_{j=1}^{\ell} m_j \cdot \vec{N}^*(X_j)$. En identifiant les n -courants intégraux lagrangiens et les éléments de $H^0(T^*M; \mathcal{L}_M)$, on a alors ([Fu7, 4.7]) :

$$\iota_{\#} \vec{N}^* = cc,$$

où $\iota : T^*M \rightarrow T^*M$ est la multiplication par -1 .

1.3. Théorie des valuations. En se donnant les Λ_i par les formules (1') et (2') on observe immédiatement leur invariance sous les isométries de \mathbb{R}^n . D'autre part le fait qu'une base de l'espace des $(n - 1)$ formes différentielles sur $S\mathbb{R}^n$ invariantes sous les isométries de \mathbb{R}^n soit donnée par $\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1}$ et les formules (4) : $\Lambda_i(\cdot) = N^*(\cdot)(\kappa_i)$ suggèrent que le cheminement inverse est possible ; c'est-à-dire que les invariants Λ_i (sous certaines hypothèses) sont des modèles des invariants additifs. L'étude systématique des invariants additifs (des convexes compacts de \mathbb{R}^n) a été inaugurée par H. Hadwiger et son école, et est motivée par la résolution du troisième problème de Hilbert consistant à classifier les invariants de découpage des polytopes. Un des résultats les plus frappants de cette étude est le théorème obtenu par Hadwiger qui caractérise effectivement à l'aide des Λ_i les fonctions additives (sur les convexes compacts des espaces euclidiens), invariantes par les isométries et continues relativement à la métrique de Hausdorff. Nous donnons ici le vocabulaire nécessaire pour énoncer le théorème de Hadwiger et la question indécise de son extension au cas sphérique. Pour plus de détails on pourra se reporter à [Sc3,4] ou [McMu-Sc].

Notons \mathcal{K}^n (resp. $\mathcal{K}S^{n-1}$) l'ensemble des convexes compacts de \mathbb{R}^n (resp. de S^{n-1} , ie la trace dans S^{n-1} des convexes compacts coniques de \mathcal{K}^n de sommet l'origine). Une application $v : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $v : \mathcal{K}S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$) est une valuation réelle (resp. une *valuation sphérique réelle*) si $v(\emptyset) = 0$ et si quels que soient $K, L \in \mathcal{K}^n$ (resp. $K, L \in \mathcal{K}S^{n-1}$) tels que $K \cup L \in \mathcal{K}^n$ (resp. $K \cup L \in \mathcal{K}S^{n-1}$), on a :

$$v(K \cup L) = v(K) + v(L) - v(K \cap L).$$

On dit qu'une valuation v sur \mathcal{K}^n (resp. $\mathcal{K}S^{n-1}$) est *continue* si elle est continue pour la métrique de Hausdorff sur \mathcal{K}^n (resp. sur $\mathcal{K}S^{n-1}$). On dit qu'une valuation v sur \mathcal{K}^n (resp. $\mathcal{K}S^{n-1}$) est *simple* si la restriction de v aux convexes de dimension non maximale est nulle. Soit G un sous groupe du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une valuation v sur \mathcal{K}^n (resp. $\mathcal{K}S^{n-1}$) est *G-invariante* si elle est invariante sous l'action des translations de \mathbb{R}^n et de G (resp. sous l'action de G restreinte à S^{n-1}).

Le théorème de Hadwiger qui souligne le rôle central des invariants de Lipschitz-Killing en tant qu'objets additifs est alors :

Théorème ([Had], [Kl]) — *Une base de l'espace des valuations sur \mathcal{K}^n , continues et $SO_n(\mathbb{R})$ -invariantes, est : $(\Lambda_0 = 1, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n = Vol_n)$.*

De façon équivalente : une base de l'espace des valuations simples sur \mathcal{K}^n , continues et $SO_n(\mathbb{R})$ -invariantes, est $\Lambda_n = Vol_n$.

Ce théorème oblige les invariants additifs continus de la géométrie convexe euclidienne à être linéairement liés. La deuxième formulation du théorème de Hadwiger permet de poser la question de la validité d'une telle rigidité dans le cas sphérique. Ce problème délicat apparaît naturellement au chapitre 2, lorsque se pose la question de la localisation des invariants Λ_i . Pour anticiper, une réponse positive à cette question signifierait qu'existe un nombre fini de modèles pour les invariants (sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$) additifs et continus (au sens de la métrique de Hausdorff) sur les germes coniques et convexes, de sorte que les invariants locaux que nous allons définir au chapitre 3, au moins en restriction aux cônes convexes, seraient linéairement liés.

Question ([Gr-Sc] Problème 74, [Sc-McMu] Problème 14.3) — *Une valuation simple sur $\mathcal{K}S^{n-1}$, continue et invariante, est-elle proportionnelle au volume de S^{n-1} ?*

Notons que l'on dispose d'une réponse positive à cette question, dans le cas où $n \leq 3$ (cf [McMu-Sc] Théorème 14.4) et dans le cas où la valuation est de signe constant ([Sc1 Th. 6.2], [Sc2]). Dans ce dernier cas la continuité de la valuation n'est pas requise et la valuation est définie *a priori* sur les polytopes et non pas nécessairement sur tous les convexes de S^{n-1} .

La généralisation suivante du théorème de Hadwiger est due à S. Alesker :

Théorème — *Soit G un sous-groupe compact de $O_n(\mathbb{R})$.*

(i)- *L'espace $Val^G(\mathcal{K}^n)$ des valuations continues, invariantes sous les translations et sous l'action de G est de dimension finie si et seulement si G agit transitivement sur S^{n-1} ([Al1, Th. 8.1], [Al5, Prop. 2.6]).*

(ii)- *On peut munir l'espace $Val^G(\mathcal{K}^n)$ d'un produit ([Al4], [Al-Fu]) qui en fait une algèbre (graduée par le degré d'homogénéité) et :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x]/(x^{n+1}) &\rightarrow Val^{O_n(\mathbb{R})}(\mathcal{K}^n) = Val^{SO_n(\mathbb{R})}(\mathcal{K}^n) \\ x &\mapsto \Lambda_1 \end{aligned}$$

est une isomorphisme d'algèbre graduées ([Al4, Th. 2.6]).

La théorie générale des valuations et celles du cycle conormal ou du cycle caractéristique se rencontrent dans la caractérisation des valuations représentables par le cycle conormal. Notons que l'espace $Val(\mathcal{K}^n)$ des valuations continues et invariantes par translation munies de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de \mathcal{K}^n est un espace de Banach. Soit $\rho : Gl_n(\mathbb{R}) \rightarrow Gl(Val(\mathcal{K}^n))$ la représentation de $Gl_n(\mathbb{R})$ dans $Val(\mathcal{K}^n)$ induite par l'action de $Gl_n(\mathbb{R})$ sur \mathcal{K}^n :

$$\begin{array}{lcl} \rho : Gl_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & Gl(Val(\mathcal{K}^n)) \\ g & \mapsto & \rho(g) : Val(\mathcal{K}^n) \rightarrow Val(\mathcal{K}^n) \\ & & v \mapsto \rho(g)v : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ & & K \mapsto v(g \cdot K) \end{array}$$

Étant donné $v \in Val(\mathcal{K}^n)$, si $g \mapsto \rho(g)v$ est \mathcal{C}^∞ , on dit v est $Gl_n(\mathbb{R})$ - \mathcal{C}^∞ ou simplement \mathcal{C}^∞ . On note $Val^\infty(\mathcal{K}^n)$ l'espace des valuations continues, invariantes par translation et \mathcal{C}^∞ . L'espace $Val^\infty(\mathcal{K}^n)$ est caractérisé à l'aide du cycle conormal, en ce sens que les valuations représentables par le cycle conormal sont exactement les valuations \mathcal{C}^∞ :

Théorème — Avec les notations qui précèdent :

(i)- Si G est un sous groupe compact de $O_n(\mathbb{R})$ qui agit transitivement sur S^{n-1} , $Val^G(\mathcal{K}^n) \subset Val^\infty(\mathcal{K}^n)$ ([A13], [A14, Th.0.9(ii)]).

(ii)- La valuation v est telle qu'existe une $(n - 1)$ -forme φ sur $S^*\mathbb{R}^n$ pour laquelle $\forall K \in \mathcal{K}^n$, $v(K) = N^*(K)(\varphi)$ si et seulement si $v \in Val^\infty(\mathcal{K}^n)$ ([A15, Prop.3.8]).

En particulier les valuations de $Val^{O_n(\mathbb{R})}(\mathcal{K}^n)$ sont représentées par le cycle normal.

La preuve de (ii) utilise le profond théorème d'irréductibilité de la représentation naturelle de $Gl_n(\mathbb{R})$ dans l'espace des valuations paires et impaires due S. Alesker, dont une conséquence est la solution de la conjecture de P. McMullen.

1.4. Les invariants de Vitushkin. Les invariants Λ_i sont construits sur $\Lambda_0 = \chi$ à l'aide de la formule (2'), ce qui leur confère leur caractère additif sur les sous-analytiques compacts. Dans le cas convexe, Λ_0 est le nombre de composantes connexes, que l'on note ici V_0 . On peut alors construire des invariants V_i à l'aide de V_0 de même que l'on a construit les Λ_i à l'aide de Λ_0 .

Les variations multidimensionnelles $V_0(X), \dots, V_n(X)$ de Vitushkin d'un sous-analytique compact X de \mathbb{R}^n sont définies comme suit (cf [Vi1,2] et [Co-Yo1] pour une étude complète) :

$$V_i(X) = \int_{\bar{P} \in \bar{G}(n-i,n)} V_0(X \cap \bar{P}) \frac{d\bar{\gamma}_{n-i,n}(\bar{P})}{\beta(n,i)}.$$

Remarques. - D'après la formule de Cauchy-Crofton, si $\dim(X) = d$, $V_d(X) = \Lambda_d(X) = Vol_d(X)$.

- Les variations V_i restent additives sur les convexes, mais ne le sont bien sûr plus en général sur les sous-analytiques compacts. Dans tous les cas les variations sont des invariants des isométries de \mathbb{R}^n , puisque obtenues par moyenne sur les sections affines $(n - i)$ -dimensionnelles.

- Une autre propriété commune aux V_i et aux Λ_i est l'homogénéité en degré i : $V_i(\lambda \cdot X) = \lambda^i V_i(X)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

En substituant dans (2') le nombre de composantes connexes V_0 à la caractéristique d'Euler Λ_0 , on perd l'additivité et l'espoir d'obtenir des formules exactes comme les formules (1) et (1') liant les $V_i(X)$ et des volumes d'ensembles construits à partir de X . Néanmoins on montre que les variations V_i sont les coefficients d'un polynôme en $1/\epsilon$ qui majore une quantité métrique attachée à X , l' ϵ -entropie $M_{X,\epsilon}$ de X .

Soit X un ensemble borné et $\epsilon > 0$ un réel. L' ϵ -entropie $M_{X,\epsilon}$ de X est introduite dans [Ko-Ti] comme le nombre minimal de boules (fermées) de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir X . La quantité $M_{X,\epsilon}$ possède des propriétés très similaires au volume du voisinage tubulaire $\mathcal{T}_{X,\epsilon}$ (cf [Co-Yo1, Chap. 2]), en particulier la propriété de croissance polynomiale évoqué précédemment, que l'on énonce maintenant et qui est à rapprocher de la formule (1') :

Théorème ([Iv1, p. 246], [Ze], [Co-Yo1, Th. 3.5]) — *Soit X un ensemble borné dans \mathbb{R}^n . Quel que soit $\epsilon > 0$, on a :*

$$M_{X,\epsilon} \leq C(n) \sum_{i=0}^n \frac{1}{\epsilon^i} V_i(X), \tag{1''}$$

où $C(n)$ est une constante ne dépendant que de n .

La formule (1'') et une étude fine du comportement des variations par image polynomiale permet d'obtenir des majorations pour le volume des voisinages tubulaires, proches de la formule (1). Par exemple ([Co-Yo1, Th. 5.9]) :

$$Vol_n(\mathcal{T}_{X \cap B^n(0,r),\rho}) \leq C(n) \sum_{i=0}^d B_{0,n-i}(X) \cdot r^i \cdot \rho^{n-i} \leq C \cdot (r^d \rho^{n-d} + \rho^n),$$

où X est un ensemble sous-analytique de \mathbb{R}^n de dimension d , $B_{0,n-i}(X) = \max(\{V_0(X \cap \bar{P}); \bar{P} \in G(n-i, n)\})$ et $C(n)$ une constante ne dépendant que de n , C une constante ne dépendant que de n et des $B_{0,n-i}(X)$. Et ([Co-Yo1, Cor. 8.9]) :

$$Vol_n(g^{-1}(B^q(0,\rho)) \cap B^n(0,r)) \leq K \cdot C \frac{1}{\delta_0 \cdots \delta_q} r^{n-q} \cdot \rho^q,$$

où $g : B^n(0,r) \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une application polynomiale telle que quel que soit $x \in g^{-1}(B^q(0,\rho))$, $\lambda_i(Dg_{(x)}) \geq \delta_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, q$ et $\lambda_0(Dg_{(x)}) = 1$, $\lambda_1(Dg_{(x)}) \geq \dots \geq \lambda_q(Dg_{(x)})$ sont les demi-axes de l'ellipsoïde $Dg_{(x)}(B^n(0,1))$.

Le bon comportement des variations V_i par image polynomiale et l'inégalité (1'') ont été utilisés de façon essentielle par Y. Yomdin pour prouver la version entropique du théorème de Sard quantitatif pour les valeurs presque-critiques (cf [Yo], [Co-Yo1, Th. 9.2 et 9.3]) qui étend le théorème de Sard quantitatif pour les valeurs critiques de H. Federer ([Fe3, Th. 3.4.3]).

Théorème de Morse-Sard quantitatif ([Yo], [Co-Yo1, Th. 9. 3]) — *Soit $f : B^n(0,r) \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^k , où $k = p + \alpha$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0, 1]$. Alors :*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Delta_f^\nu) \leq \dim_e(\Delta_f^\nu) \leq \nu + \frac{n - \nu}{k},$$

où Δ_f^ν est l'ensemble des valeurs critiques de f de rang $\leq \nu$, $\dim_{\mathcal{H}}$ la dimension de Hausdorff et \dim_e la dimension d'entropie ($\dim_e(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(M_{A,\epsilon})}{\log(1/\epsilon)}$, pour un sous-ensemble A d'un espace métrique).

Remarque. D'après [Co1], l'énoncé précédent est le meilleur possible, puisqu'il est construit dans [Co1] une famille de fonction $f_\beta : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, avec $\beta \in]2, \infty[$, telle que f est $\mathcal{C}^{\frac{2 \log(3)}{\log(\beta)}}$ et $\dim_e(\Delta_{f_\beta}^0) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$.

2- Invariants additifs locaux

La question du comportement asymptotique d'invariants de courbure a été traitée par plusieurs auteurs (citons entre autres [La-Lê], [La], [Lo]), pour lesquels il s'agit de montrer que des limites d'intégrales d'invariants de courbure sur les fibres lisses $f^{-1}(t) \cap B_{(0,\epsilon)}$ voisines d'une fibre singulière $f^{-1}(0)$, quand t et ϵ tendent vers 0, s'expriment en fonction d'invariants analytiques de la singularité isolée $0 \in f^{-1}(0)$. Par exemple dans [Lo], généralisant une formule prouvée dans [La], F. Loeser établit pour $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ à singularité isolée en 0, l'égalité :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(n,j)}{\epsilon^{2j}} \int_{f^{-1}(t) \cap B_{(0,\epsilon)}} c_{n-j}(T_f) \wedge \omega^j = (-1)^{n-j} (\mu^{(n+1-j)} + \mu^{(n-j)}),$$

où $C(n,j)$ est une constante universelle ne dépendant que de n et j , $c_{n-j}(T_f)$ est la $(n-j)^{j^{\text{ème}}}$ forme de Chern-Weil du fibré tangent relatif de f , $\omega = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \|z\|^2$ et $\mu^{(n+1-j)}$ le $j^{\text{ème}}$ nombre de Milnor-Teissier de f , ie le nombre de Milnor d'une section générique de $f^{-1}(0)$ par un plan vectoriel de \mathbb{C}^{n+1} de codimension j (cf [Te1]).

Dans le cas réel le même type d'égalité asymptotique est obtenu dans [Dut1,2]. La fibre de Milnor d'un polynôme réel $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est ici relative au choix d'une déformation f_t de $f = f_0$ à un paramètre et à singularité isolée en 0. De plus, aux nombres de Milnor-Teissier on substitue les moyennes des degrés topologiques des restrictions de f à des plans vectoriels généraux. En notant s_j la $j^{\text{ème}}$ fonction symétrique de courbure de la fibre $C_t^\epsilon = f_t^{-1}(0) \cap B_{(0,\epsilon)}$, pour des constantes universelles $C'(n,k)$ et $C''(n,k)$ ne dépendant que de n et k , on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^k} \int_{C_t^\epsilon} s_{n-k} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^k} \int_{C_0^\epsilon \setminus \{0\}} s_{n-k} \\ &= C'_{n,k} \int_{G(n-k+2, n+1)} \deg_0 \nabla(f_0|_K) d\gamma_{n-k+2, n+1}(K) + \\ & C''(n,k) \int_{G(n-k, n+1)} \deg_0 \nabla(f_0|_H) d\gamma_{n-k, n+1}(H). \end{aligned}$$

Nous exposons maintenant comment dans [Co-Me] on attache directement à un germe d'ensemble sous-analytique X_0 de \mathbb{R}^n arbitrairement singulier, les localisations naturelles des valuations continues et invariées par les isométries de \mathbb{R}^n . D'après le théorème de Hadwiger (chapitre 1), si l'on se restreint aux convexes de \mathbb{R}^n , il suffit de savoir localiser les seules valuations $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$. Les invariants Λ_i sont de nature locale-globale, en ce sens qu'ils s'expriment certes à l'aide du cycle caractéristique ou conormal mais qu'ils traduisent aussi le comportement global de l'ensemble compact pour lequel on les calcule. En les localisant on obtient des invariants Λ_i^{loc} de nature locale-locale.

2.1. Les invariants de Lipschitz-Killing locaux $(\Lambda_i^{\ell oc}(X_0))_{i \in \{0, \dots, n\}}$. Dans [Co-Me] est développée l'approche suivante : à un ensemble sous-analytique compact X de \mathbb{R}^n , de dimension $d = 1, \dots, n$ et contenant 0 sont attachés les invariants $\Lambda_0(X) = \chi(X), \dots, \Lambda_d(X) = Vol_d(X)$. Ceux-ci témoignent de la géométrie globale de X . La formule (2') montrant que Λ_i est i -homogène, ie $\Lambda_i(\lambda \cdot X) = \lambda^i \Lambda_i(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, il est naturel de considérer le comportement asymptotique de $\frac{1}{\alpha_i} \Lambda_i(\frac{1}{\epsilon} \cdot (X \cap B_{(0, \epsilon)})) = \frac{1}{\alpha_i \epsilon^i} \Lambda_i(X \cap B_{(0, \epsilon)})$, quand $\epsilon \rightarrow 0$, en vue d'obtenir des invariants attachés au seul germe X_0 de X en 0. Indépendamment et par des techniques différentes, ce type de localisation des Λ_i a été traité dans [Be-Br2] (en considérant la trace de X dans la sphère $S^{n-1}(0, \epsilon)$ au lieu de la boule $B_{(0, \epsilon)}$).

En utilisant essentiellement le lemme d'isotopie de Thom-Mather qui garantit qu'à \bar{P} fixé la limite $\chi(\frac{1}{\epsilon} \cdot (X \cap B_{(0, \epsilon)}) \cap \bar{P})$ existe lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et que celle-ci est uniformément bornée relativement à \bar{P} , on montre :

Théorème ([Co-Me, Th. 1.3])— *Soit X un ensemble sous-analytique compact de \mathbb{R}^n , représentant quelconque du germe X_0 . Avec les notations précédentes, quel que soit $i \in \{0, \dots, n\}$, la limite suivante existe :*

$$\Lambda_i^{\ell oc}(X_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_i \cdot \epsilon^i} \Lambda_i(X \cap B^n(0, \epsilon)). \quad (5)$$

Nous appelons $(\Lambda_i^{\ell oc}(X_0))_{i \in \{0, \dots, n\}}$ la suite des invariants de Lipschitz-Killing locaux du germe X_0 .

Remarques. - Les $\Lambda_i^{\ell oc}$ sont invariants sous l'action des isométries de \mathbb{R}^n et sont additifs, comme le sont les Λ_i .

- $\Lambda_i^{\ell oc}(X_0) = 0$, pour $i > d$, puisque Λ_i est nul en restrictions aux sous-analytiques de dimension $< i$.

- $\Lambda_0^{\ell oc}(X_0) = 1$, puisque $\Lambda_0 = \chi$ et que localement un germe sous-analytique est contractile.

- Puisque $\Lambda_d^{\ell oc}(X_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Vol_d(X \cap B_{(0, \epsilon)})}{Vol_d(B^d(0, \epsilon))}$ est par définition la densité locale $\Theta_d(X_0)$ du germe X_0 , on a prouvé le corollaire suivant, initialement obtenu par K. Kurdyka et G. Raby :

Corollaire (cf aussi [Ku-Ra], [Ku-Po-Ra], [Li]) — *La densité locale des ensembles définissables de \mathbb{R}^n existe en tout point de \mathbb{R}^n .*

La figure suivante représente ce qui est pris en compte dans le calcul de $\Lambda_i^{\ell oc}(X)$. Pour $P \in G(i, n)$, notons $K_\ell^{P, \epsilon}$ les domaines de P au-dessus desquels la caractéristique de la fibre de $\pi_{P|X \cap B^n(0, \epsilon)}$ est constante et égale à $\chi_\ell^{P, \epsilon}$. La quantité $\Lambda_i(X \cap B^n_{(0, \epsilon)})$ est alors obtenue comme la moyenne sur tous les plans P de la somme $\sum_{\ell=1}^{\ell_P} \chi_\ell^{P, \epsilon} \cdot Vol_i(K_\ell^{P, \epsilon})$.

En particulier les volumes des domaines $K_\ell^{P,\epsilon}$ (en vert sur la figure) déterminés par les valeurs critiques de π_P provenant du link $X \cap S_{(0,\epsilon)}$ sont comptabilisés dans cette somme.

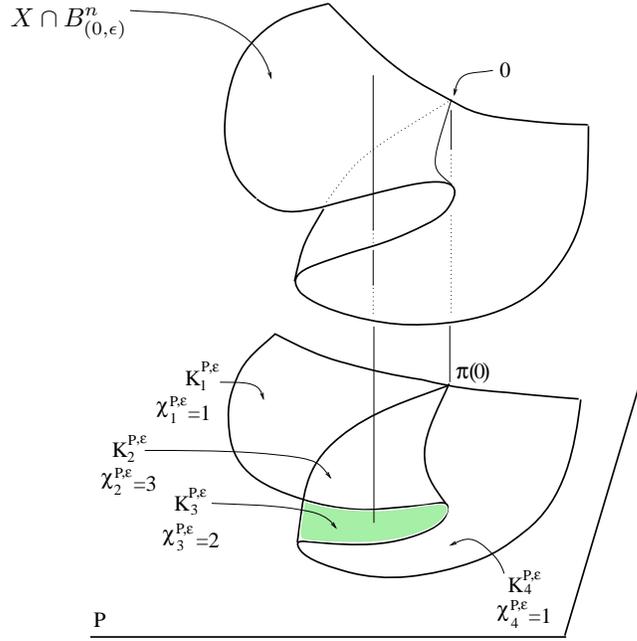


fig. 5

2.2. Les invariants polaires réels $(\sigma_i(X_0))_{i \in \{0, \dots, n\}}$. Après la suite $(\Lambda_i^{loc}(X_0))_{i \in \{0, \dots, n\}}$ nous définissons une seconde suite d'invariants locaux. Pour X un ensemble sous-analytique compact de \mathbb{R}^n contenant l'origine, rappelons que nous avons noté $\mathcal{C}(X)$ le groupe des fonctions sous-analytiquement constructibles sur X . Soit Y un ensemble sous-analytique compact de \mathbb{R}^m et $f : X \rightarrow Y$ une application sous-analytique continue. Pour $Z \subset X$ et $y \in Y$, notons $f_*(\mathbf{1}_Z)(y) = \chi(f^{-1}(y) \cap Z)$. On considère alors le foncteur suivant de la catégorie des ensembles sous-analytiques compacts à celle des groupes :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) \\ f \downarrow & & \downarrow f_* \\ Y & \longrightarrow & \mathcal{C}(Y) \end{array}$$

Dans [Co-Me, Théorème 2.6], il est montré que pour $f = \pi_P$ une projection générale sur un i -plan vectoriel P de \mathbb{R}^n , ce diagramme admet l'équivalent local :

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}(X_0) \\
 \pi_{P_0} \downarrow & & \downarrow \pi_{P_0*} \\
 P_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}(P_0)
 \end{array} \tag{6}$$

où pour $Z_0 \subset X_0$ et $y \in P$, $\pi_{P_0*}(\mathbf{1}_{Z_0})(y) = \chi(\pi_P^{-1}(y) \cap Z \cap B_{(0,r)})$, r étant suffisamment petit, et $0 < \|y\| \ll r$. Si l'on note ensuite par $\theta(\varphi)$ l'intégrale relativement à la densité locale en 0 d'un germe $\varphi : P_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ de fonction constructible, c'est-à-dire :

$$\theta(\varphi) = \sum_{j=1}^N n_j \cdot \Theta(K_0^j) \text{ lorsque } \varphi = \sum_{j=1}^N n_j \cdot \mathbf{1}_{K_0^j}, \text{ pour des germes d'ensembles sous-}$$

analytiques $K_0^j \subset P_0$, on obtient la formule qui définit les *invariants polaires réels* $\sigma_i(X_0)$:

$$\sigma_i(X_0) = \int_{P \in G(i,n)} \theta(\pi_{P_0*}(\mathbf{1}_{X_0})) d\gamma_{i,n}(P), \quad i = 0, \dots, n. \tag{7}$$

Remarques. - Les σ_i sont invariants sous l'action des isométries de \mathbb{R}^n (puisqu'obtenus comme moyenne sur les projections génériques) et sont additifs (puisque construits via la caractéristique d'Euler et la densité locale).

- $\sigma_i(X_0) = 0$, pour $i > d$, puisqu'un k -plan affine évite génériquement un ensemble sous-analytique de codimension $> k$.

- $\sigma_0(X_0) = \Lambda_0^{\text{loc}}(X_0) = 1$ (c'est encore la structure conique locale des ensemble sous-analytique).

- Lorsque $i = d$, on montre que $\sigma_d(X_0) = \Lambda_d^{\text{loc}}(X_0) = \Theta_d(X_0)$. Comme cette égalité affirme que la localisation du volume Vol_d en Θ_d est σ_d , c'est-à-dire se calcule par la moyenne sur les d -plans vectoriels P de \mathbb{R}^n de la localisation en 0 du nombre de points dans les fibres des projections d'un représentant du germe en question sur P , il s'agit de l'équivalent local de la formule de Cauchy-Crofton. On l'énonce ainsi :

Théorème (Formule de Cauchy-Crofton locale) ([Co2], [Co3, Th.1.16], [Co-Me], Th.3.1) — Soit X un sous-ensemble sous-analytique de \mathbb{R}^n de dimension d et soient $\mathcal{G} \subset G(d, n)$ un sous-ensemble sous-analytique de $G(d, n)$ sur lequel agit transitivement un sous-groupe G de $O_n(\mathbb{R})$ et $\mu_{d,n}$ une mesure G -invariante sur \mathcal{G} , tels que :

- les espaces tangents au cône tangent de X_0 sont dans \mathcal{G} ,
- il existe $P^0 \in \mathcal{G}$ dont le fixateur G_{P^0} agit transitivement sur le d -espace vectoriel sous-jacent à P^0 et $\mu_{d,n}(\mathcal{G}) = \mu_{d,n}(\mathcal{G} \cap \mathcal{E}_X^d) = 1$, où \mathcal{E}_X^d est l'ensemble des d -plans de $G(d, n)$ pour lesquels la localisation (6) est permise.

L'égalité suivante a alors lieu :

$$\sigma_d^{\mathcal{G}}(X_0) = \Theta_d(X_0), \tag{CC}^{\text{loc}}\mathbb{R}$$

avec $\sigma_d^{\mathcal{G}}$ défini comme en (9) mais relativement à \mathcal{G} .

Comme annoncé, dans le cas où $\mathcal{G} = G(d, n)$ et $G = O_n(\mathbb{R})$, la formule donne : $\sigma_d(X_0) = \Lambda_d^{\ell oc}(X_0)$ et dans le cas où X est analytique complexe, $\mathcal{G} = \tilde{G}(d/2, n)$ (les $d/2$ -plans vectoriels complexes de \mathbb{C}^n) et $G = U_n(\mathbb{C})$, la formule donne : $\sigma_d^{\tilde{G}(d/2, n)}(X_0) = e(X, 0) = \Theta_d(X_0)$, avec $e(X, 0)$ la multiplicité locale de X_0 en 0. L'obtention de l'égalité $e(X, 0) = \Theta_d(X_0)$ via la formule de Cauchy-Crofton locale redémontre le théorème de R. Draper (cf [Dr]).

Remarque. Lorsque $(X^j)_{j \in \{0, \dots, k\}}$ est une stratification de Whitney de X , $0 \in X^0$, $\sigma_i(X_0) = 1$ pour $i \leq \dim(X^0)$ ([Co-Me, Rem. 2.9]). De sorte que si $(X^j)_{j \in \{0, \dots, k\}}$ est une stratification de Whitney de X et si d_0 est la dimension de la strate qui contient 0, on a :

$$\sigma_*(X_0) = (1, \dots, 1, \sigma_{d_0+1}(X_0), \dots, \sigma_{d-1}(X_0), \Lambda_d^{\ell oc}(X_0) = \Theta_d(X_0), 0, \dots, 0).$$

La figure suivante représente cette fois ce qui est pris en compte dans le calcul de $\sigma_i(X_0)$. Ici, contrairement au calcul des $\Lambda_i^{\ell oc}$ où tous les domaines $K_\ell^{P,r}$ importent, seuls importent les domaines $K_\ell^{P,r}$ adhérents à l'origine (en rouge sur la figure 6) car les $K_\ell^{P,r}$ contribuent pour $\chi_\ell^{P,r} \cdot \Theta_i((K_\ell^{P,r})_0)$ dans le calcul de $\theta(\pi_{P_0*}(\mathbf{1}_{X_0}))$.

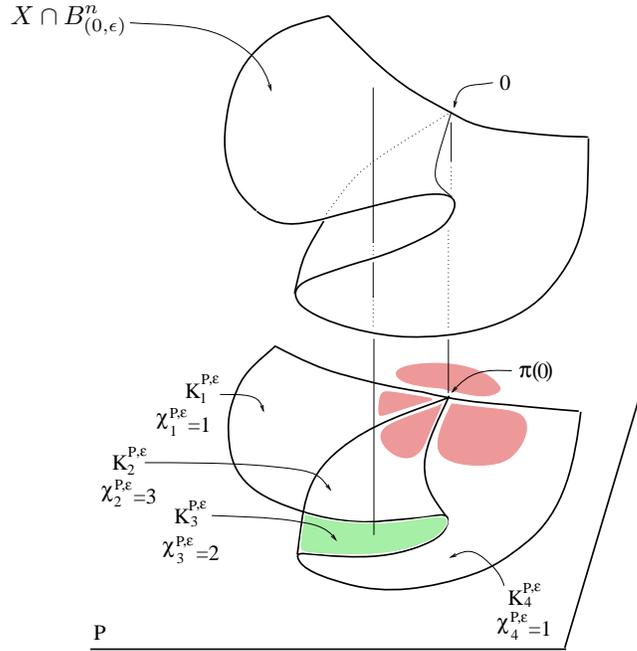


fig. 6

En particulier les domaines $K_\ell^{P,r}$ (en vert sur la figure 6) que déterminent les valeurs critiques de π_P provenant du link $X \cap S_{(0,r)}$ n'entrent pas en ligne de compte dans $\theta(\pi_{P_0*}(\mathbf{1}_{X_0}))$, puisqu'on prouve ([Co-Me, Prop. 2.5]) que pour chaque projection générale π_P existe $\rho_P > 0$, tel que pour tout r , $0 < r < \rho_P$, le discriminant de la restriction π_P au link $X \cap S_{(0,r)}$ est à distance non nulle de $0 = \pi_P(0)$.

2.3. Formule locale de Cauchy-Crofton pour les sous-analytiques p -adiques. Nous exposons ici comment, avec une définition adaptée de la densité locale au cas définissable p -adique on peut encore obtenir une version p -adique de la formule de Cauchy-Crofton locale (cf [Cl-Co-Lo]). Cette possibilité illustre la généralité en géométrie modérée d'une telle formule qui s'appuie essentiellement sur la propriété définissant la mesure de la grassmannienne, c'est-à-dire son invariance sous l'action du groupe des transformations linéaires laissant fixe la sphère.

Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p d'anneau de valuation R . On note ord la valuation de K et on pose $|y| = q^{-\text{ord}(y)}$, $|0| = 0$, où q est le cardinal du corps résiduel de K . Si $x = (x_i)$ est un élément de K^n et m un entier, on note $B_{(x,q^{-\ell})}$ la boule $\{(z_1, \dots, z_n) \in K^n; \text{ord}(z_i - x_i) \geq \ell, 1 \leq i \leq n\}$ de K^n de centre x et de rayon $q^{-\ell}$.

La notion d'ensemble sous-analytique de K^n est étudiée en détail dans [De-Va]. On en rappelle brièvement ici la définition. Soit $\mathcal{L}_{\text{Mac}} = \{0, +, -, \cdot, \{P_r\}_{r>0}\}$ le langage de Macintyre et $\mathcal{L}_{\text{an}} = \mathcal{L}_{\text{Mac}} \cup \{-1, \cup_{n>0} K\{x_1, \dots, x_n\}\}$, où P_r est le groupe multiplicatif des $r^{\text{ièmes}}$ puissances de K^\times , $K\{x_1, \dots, x_n\}$ est l'anneau des séries entières sur K restreintes (les séries formelles convergeant sur R^n), et où un élément f de $K\{x_1, \dots, x_n\}$ est interprété comme la fonction analytique restreinte de K^n vers K donnée par : $x \mapsto f(x)$ si $x \in R^n$, $x \mapsto 0$ si $x \in K^n \setminus R^n$. Un sous-ensemble sous-analytique de K^n est alors un ensemble \mathcal{L}_{an} -définissable avec coefficients dans K .

Soit $X \subset K^n$ un ensemble sous-analytique de dimension $d \geq 0$. Il existe $X' \subset K^n$ une sous-variété lisse de K^n telle que $X \setminus X'$ est de dimension $< d$. On construit une mesure canonique μ_d sur X' : pour tout sous-ensemble J de cardinal d de $\{1, \dots, n\}$, avec $j_i < j_{i+1}$, j_i dans J , soit dx_J la d -forme $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_d}$ de K^n ((x_1, \dots, x_n) étant les coordonnées globales de K^n) restreinte à X' . On pose $|\omega_0|_{X'} = \sup_J |dx_J|$. La mesure canonique μ_d sur X' est celle induite par $|\omega_0|_{X'}$, celle-ci étant étendue par 0 sur $X \setminus X'$ notée μ_d (cf [Oe], [Se]).

Soit X un ensemble sous-analytique de K^n de dimension d . Contrairement au cas sous-analytique réel, on ne peut pas en p -adique localiser le volume de X par : $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\mu_d(X \cap B_{(0,q^{-\ell})})}{\mu_d B^d(0, q^{-\ell})}$. Il suffit par exemple de considérer l'ensemble X des points de \mathbb{Q}_p de valuation paire. On montre alors (cf [Cl-Co-Lo]) que :

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} q^{2\ell} \mu_1(X \cap B(0, q^{-2\ell})) = (1 + q^{-1})^{-1}$$

tandis que :

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} q^{2\ell-1} \mu_1(X \cap B(0, q^{-2\ell+1})) = (1 + q)^{-1}.$$

Cependant on peut attacher à tout sous-analytique $X \subset K^n$ un sous-groupe Λ du groupe multiplicatif K^\times , d'indice fini e dans K^\times , tel que pour tout $x \in X$, pour toute droite affine L de K^n passant par x , $L \cap X$ est un Λ -cône local en x , c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, C un Λ -cône de K^n en x avec $L \cap X \cap B_{(x, q^{-\ell})} = C \cap B_{(x, q^{-\ell})}$, enfin par un Λ -cône en x nous entendons un sous-ensemble sous-analytique C de K^n contenant x et tel que $C - x$ soit stable sous l'action multiplicative de Λ . On montre alors que la quantité $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\mu_d(X \cap B_{(0, q^{-\ell})})}{\mu_d B^d(0, q^{-\ell})}$ est e -périodiquement convergente (dans l'exemple ci-dessus $\Lambda = X$ et $e = 2$, et $\Lambda = X$, $e = a$, pour $X = \text{ord}^{-1}(a\mathbb{Z})$).

Précisément : la série formelle $F_{X,x}(T) = \frac{1}{\mu_d(B^d(0, 1))} \sum_{i \in \mathbb{N}} q^{id} \mu_d(X \cap B_{(x, q^{-i})}) T^i$

est une fraction rationnelle en T ayant en $T = 1$ un pôle simple (cf [Cl-Lo, Th. 4.4.1]), de sorte que $(1 - T)F(T)$ possède un rayon de convergence en $T = 1$ et peut ainsi être évalué en $T = 1$. On définit alors la densité locale $\Theta_d(X_x)$ de X en x par :

$$\Theta_d(X_x) = \text{ev}_{|T=1}((1 - T)F(T)) \in \mathbb{Q}.$$

On montre de plus qu'il existe des rationnels d_0, \dots, d_{e-1} tels que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_d(X \cap B_{(x, q^{-i})})}{\mu_d(B^d(0, q^{-i}))} = d_j, \text{ pour } i \equiv j \pmod{e}, \text{ et que } \Theta_d(X_x) = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{e-1} d_j.$$

Pour $P \in G(n - d, n)$, soit $\pi_P : K^n \rightarrow K^n/P \simeq K^d$ la projection canonique. L'identification $K^n/P \simeq K^d$ permet le calcul de la densité locale des germes de K^n/P et par conséquent le calcul de $\theta(\varphi)$, pour $\varphi : (K^n/P)_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ un germe de fonction définissable constructible (cf section 2.2). La grassmannienne $G(n - d, n)$ étant munie de son unique mesure unitaire $\gamma_{d,n}$, invariante par l'action de $Gl_n(R)$, avec la définition ci-dessus de la densité locale, on montre que la formule de Cauchy-Crofton a encore lieu (on suppose $x = 0$) :

Théorème (formule de Cauchy-Crofton locale p -adique) ([Cl-Co-Lo]) —
Avec les notations qui précèdent, on a :

$$\Theta_d(X_x) = \int_{P \in G(n, n-d)} \theta_d(\pi_{P_0^*}(\mathbf{1}_{X_0})) d\gamma_{d,n}(P). \quad (\mathcal{CC}^{loc} \mathbb{Q}_p)$$

2.4. Formule multidimensionnelle locale de Cauchy-Crofton. Les formules $\mathcal{CC}^{loc} \mathbb{R}$ et $\mathcal{CC}^{loc} \mathbb{Q}_p$ relient la localisation du d -volume Λ_d de X à la moyenne des cardinaux des fibres locales des projections sur des plans de même dimension que X . Cette formule admet une généralisation multidimensionnelle en géométrie modérée réelle : pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, les localisations Λ_j^{loc} sont combinaisons linéaires des invariants polaires locaux $\sigma_j, \dots, \sigma_n$ (formule $\mathcal{CC}_{Mult}^{loc}$ ci-dessous).

Rappelons que $\Lambda_j^{\ell oc}(X_0)$ prend en compte le discriminant des links $X \cap S_{(0,r)}$, $0 < r \ll 1$, contrairement à $\sigma_j(X_0)$ qui ne tient compte que des domaines $K_\ell^{P,r}$ adhérents à l'origine, c'est-à-dire ceux bornés par le seul discriminant du germe X_0 (cf fig. 5 et fig. 6). La structure conique des singularités en géométrie modérée assure que la donnée de la topologie du link est équivalente à la donnée de la topologie de la singularité. L'expression fournie par $(\mathcal{CC}_{Mult}^{\ell oc})$ de chaque terme d'une des suites $\Lambda_*^{\ell oc}$ ou σ_* en fonction des termes de l'autre étend ce principe en géométrie intégrale : en moyenne (sur les projections) l'oubli de la contribution de la géométrie du link dans le calcul des invariants polaires est tout de même compensé.

Avant d'énoncer la formule $(\mathcal{CC}_{Mult}^{\ell oc})$ de Cauchy-Crofton locale multidimensionnelle, nous expliquons comment, en restriction aux cônes convexes, cette formule s'inscrit dans la question de la version sphérique du théorème de Hadwiger (cf section 1.3).

Les invariants $(\Lambda_i^{\ell oc})_{i \in \{0, \dots, n\}}$ définissent des valuations sphériques $(\widehat{\Lambda}_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ continues et $O_n(\mathbb{R})$ -invariantes sur les convexes (et même les sous-analytiques quelconques) de S^{n-1} par la formule :

$$\widehat{\Lambda}_i(K) = \Lambda_i^{\ell oc}(\widehat{K}_0) = \frac{1}{\alpha_i} \Lambda_i(\widehat{K} \cap B_{(0,1)}), \quad (\widehat{8})$$

dans laquelle K est un convexe de S^{n-1} , c'est-à-dire la trace dans S^{n-1} de son cône $\widehat{K} = \mathbb{R}_+ \cdot K$ de sommet l'origine, ce dernier étant convexe dans \mathbb{R}^n .

Une autre suite possible de valuations sphériques $O_n(\mathbb{R})$ -invariantes sur les polyèdres de S^{n-1} (que l'on peut ensuite étendre si on le souhaite aux convexes sphériques par approximation) déduite de $(\Lambda_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ est :

$$\Xi_i(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} Vol_i(F) \cdot \gamma(\widehat{F}, \widehat{P}) = Vol_i(S^i(0,1)) \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} \Theta_i(\widehat{F}_0) \cdot \gamma(\widehat{F}, \widehat{P}), \quad (\widehat{9})$$

où $P \subset S^{n-1}$ est un polyèdre sphérique, c'est-à-dire que $\mathbb{R}_+ \cdot P = \widehat{P}$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces vectoriels fermés de \mathbb{R}^n , $\mathcal{F}_i(P)$ l'ensemble des faces i -dimensionnelles de P (les faces $(i+1)$ -dimensionnelles de \widehat{P}) et $\gamma(\widehat{F}, \widehat{P})$ l'angle extérieur de \widehat{P} le long de \widehat{F} . Les valuations Ξ_i sont les équivalents sphériques naturels des courbures de Lipschitz-Killing euclidienne Λ_i d'après la formule (2).

Enfin les invariants polaires $(\sigma_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ définissent également des valuations sphériques $O_n(\mathbb{R})$ -invariantes $(\widehat{\sigma}_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ sur les convexes (de même que sur les sous-analytiques quelconques) de S^{n-1} , à l'aide d'une formule du même type que la formule (8) :

$$\widehat{\sigma}_i(K) = \sigma_i(\widehat{K}_0). \quad (\widehat{10})$$

Les trois familles de valuations sphériques $O_n(\mathbb{R})$ -invariantes $(\widehat{\Lambda}_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$, $(\Xi_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ et $(\widehat{\sigma}_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ étant indépendantes dans l'espace des valuations sphériques, une réponse positive à la question de la généralisation à la sphère du théorème de finitude de Hadwiger aurait pour conséquence directe que chaque

élément d'une de ces trois familles serait combinaison linéaire des éléments des deux autres, respectivement. Ainsi en restriction aux cônes polyédraux, chaque élément de $(\Lambda_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ serait combinaison linéaire (à coefficients universels) des éléments de $(\sigma_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ et inversement. Mais en l'absence de réponse positive à la question de la validité du théorème de Hadwiger en géométrie convexe sphérique, cette dépendance est prouvée directement dans [Co-Me, Th. A4 et A5] pour les polytopes (et même en réalité dans [Co-Me, section 3.1] pour tous les cônes sous-analytiques). On montre que chaque Λ_i^{loc} et chaque σ_j s'exprime sur la famille $(\Xi_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$. On calcule ensuite explicitement, toujours en se restreignant aux polytopes, les coefficients qui lient (à ce stade seulement sur les germes de cônes polyédraux ou sous-analytiques) les Λ_i^{loc} et les σ_j .

D'autre part la formule de Cauchy-Crofton locale qui égale σ_d et Λ_d^{loc} sur tous les germes sous-analytiques suggère qu'en toute généralité, pour tout germe X_0 d'ensemble sous-analytique compact de \mathbb{R}^n , $\Lambda_i^{\text{loc}}(X_0)$ est combinaison linéaire (à coefficients universels) des $\sigma_j(X_0)$ et inversement. C'est l'objet du théorème 3.1 de [Co-Me] :

Théorème (Formule multidimensionnelle locale de Cauchy-Crofton)

([Co-Me], Th. 3.1) — *Il existe une matrice triangulaire supérieure $(m_i^j)_{1 \leq i, j \leq n, i < j}$ telle que, pour tout germe X_0 d'ensemble sous-analytique compact :*

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1^{\text{loc}} \\ \vdots \\ \Lambda_n^{\text{loc}} \end{pmatrix} (X_0) = \begin{pmatrix} 1 & m_1^2 & \dots & m_1^{n-1} & m_1^n \\ 0 & 1 & \dots & m_2^{n-1} & m_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} (X_0) \quad (\mathcal{CC}_{\mathcal{M}ult}^{\text{loc}})$$

On a : $m_i^j = \delta \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-i} \cdot \alpha_i} \binom{i}{j} - \delta \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_{j-1-i} \cdot \alpha_i} \binom{i}{j-1}$, si $i + 1 \leq j \leq n$.

Comme la formule $(\mathcal{CC}_{\mathcal{M}ult}^{\text{loc}})$ calcule la localisation des courbures $(\Lambda_0, \dots, \Lambda_n)$, dont le $d^{\text{ième}}$ terme est Vol_d pour les germes de dimension d , en fonction des moyennes des caractéristiques d'Euler des sections planes multidimensionnelles, on voit en $(\mathcal{CC}_{\mathcal{M}ult}^{\text{loc}})$ la version multidimensionnelle de la formule de Cauchy-Crofton locale $(\mathcal{CC}^{\text{loc}}\mathbb{R})$. En particulier la $d^{\text{ième}}$ ligne de $(\mathcal{CC}_{\mathcal{M}ult}^{\text{loc}})$, lorsque $d = \dim(X_0)$, est la formule de Cauchy-Crofton locale $(\mathcal{CC}^{\text{loc}}\mathbb{R})$: $\Lambda_d^{\text{loc}}(X_0) = \Theta_d(X_0) = \sigma_d(X_0)$.

Les formules locales du chapitre 2 s'organisent en le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
& & (\mathcal{CC}^{loc\mathbb{Q}_p}) & & \\
& & \nearrow & & \\
(\mathcal{CC}) & \longrightarrow & (\mathcal{CC}^{loc\mathbb{R}}) & \hookrightarrow & (\mathcal{CC}_{Mult}^{loc}) \\
& & \uparrow & & \\
& & [Dr] : e(X, 0) = \Theta_d(X_0) & &
\end{array}$$

où “ \longrightarrow ” signifie “se localise en”, “ \uparrow ” signifie “s’étend en réel par”, “ \nearrow ” signifie “s’étend en p-adique par” et “ \hookrightarrow ” signifie “se généralise en toutes dimensions par”.

3- Équisingularité réelle

Puisqu'attachées au germe X_x d'un ensemble sous-analytique compact X en chacun de ses points x , les deux familles d'invariants $\Lambda_*^{\ell oc} = (\Lambda_i^{\ell oc})_{i \in \{0, \dots, n\}}$ et $\sigma_* = (\sigma_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ définissent deux familles de fonctions :

$$\begin{aligned} \Lambda_*^{\ell oc} : X &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} & \text{et } \sigma_* : X &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\mapsto (\Lambda_i^{\ell oc}(X_x))_{i \in \{0, \dots, n\}} & x &\mapsto (\sigma_i(X_x))_{i \in \{0, \dots, n\}} \end{aligned}$$

Ces deux applications sont dans une structure o-minimale strictement plus grande que celle des sous-analytiques globaux ; la catégorie Log-analytique, d'après :

Théorème ([Li-Ro], [Co-Li-Ro]) — *Pour chaque composante $C : X \rightarrow \mathbb{R}$ de chacune de ces deux applications ci-dessus existent un polynôme P et des fonctions sous-analytiques A_1, \dots, A_k sur X telles que :*

$$C = P(A_1, \dots, A_k, \log(A_1), \dots, \log(A_k)).$$

En conséquence il existe une stratification du sous-analytique compact X , à strates Log-analytiques, le long desquelles les applications $\Lambda_*^{\ell oc}$ et σ_* sont continues. Mais il s'agit ici de relier la régularité de ces applications à la géométrie des singularités de X , c'est-à-dire de proposer des conditions de régularité explicites pour une stratification qui imposent la continuité des applications $\Lambda_*^{\ell oc}$ et σ_* le long des strates. D'après la formule multidimensionnelle locale de Cauchy-Crofton ($\mathcal{CC}^{\ell oc}\mathbb{R}$), il suffit de faire porter cette étude sur la seule application σ_* , dont le comportement dépend de la géométrie des discriminants.

Nous rappelons maintenant les définitions de la (a), (b), (b*) ou (w)-régularité pour une stratification (cf [Tr1,2] par exemple pour un panorama des conditions de régularité des stratifications). Une stratification (X^j) d'un sous-ensemble X de \mathbb{R}^n , localement finie et vérifiant la condition de la frontière est dite :

- (a)-régulière ssi pour tout couple (X^i, X^j) de strates tel que $X^i \subset \text{adh}(X^j)$, pour tout $x \in X^i$, pour toute suite y_ℓ de points de X^j telle que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} y_\ell = x$, on a : $T_x X^i \subset \lim_{\ell \rightarrow \infty} T_{y_\ell} X^j$.

- (b)-régulière ssi pour tout couple (X^i, X^j) de strates tel que $X^i \subset \text{adh}(X^j)$, pour tout $x \in X^i$, pour toute suite y_ℓ de points de X^j telle que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} y_\ell = x$, pour toute suite x_ℓ de points de X^i telle que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_\ell = x$, on a : $\lim_{\ell \rightarrow \infty} (x_\ell y_\ell) \subset \lim_{\ell \rightarrow \infty} T_{y_\ell} X^j$, $(x_\ell y_\ell)$ étant la droite passant par x_ℓ et y_ℓ .

- (b*)-régulière ssi pour tout couple (X^i, X^j) de strates tel que $X^i \subset \text{adh}(X^j)$, pour tout $x \in X^i$, pour tout p , $\dim(X^j) \leq p \leq n$, il existe un ouvert dense \mathcal{M}_x dans $\{\Pi \in G(p, n), T_x X^i \subset \Pi\}$ pour lequel on ait, quelle que soit la sous-variété \mathcal{W} de \mathbb{R}^n telle que $X^i \subset \mathcal{W}$ dans un voisinage de x , l'implication : $T_x \mathcal{W} \in \mathcal{M}_x \implies X^j$ et \mathcal{W} sont transverses dans un voisinage de x et le couple $(X^i, \mathcal{W} \cap X^j)$ est b-régulier en x .

- (w)-régulière ssi pour tout couple (X^i, X^j) de strates tel que $X^i \subset \text{adh}(X^j)$, pour tout $x \in X^i$, il existe une constante $C > 0$ et un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n tels que : $\forall y \in X^i \cap U, \forall z \in X^j \cap U, d(T_y X^i, T_z X^j) \leq C\|y - z\|$.

Signalons pour la suite que la condition (b) implique la condition (a) et qu'en complexe les trois conditions sont (b), (b*) et (w) sont égales alors qu'en sous-analytique réel (w) \succ (b*) \succ (b) \succ (a), la première inégalité n'étant pas en général une égalité, ce que l'on ignore pour la seconde.

3.1. Régularité des invariants polaires σ_i dans le cas complexe. Dans cette section X est un ensemble analytique complexe de \mathbb{C}^n de dimension complexe d . On définit comme dans le cas réel les invariants polaires complexes, notés $\tilde{\sigma}_i, i = 0, \dots, n$, à l'aide des projections sur les seuls i -plans vectoriels complexes. Dans ce cas, étant donné $x \in X$, il existe $r > 0$, tel que pour tout y générique dans un i -plan affine générique P passant par x , on ait :

$$\tilde{\sigma}_i(X_x) = \chi(\pi_P^{-1}(y) \cap X \cap B_{(0,r)}).$$

En particulier comme on l'a déjà observé, $\tilde{\sigma}_d(X_x)$ est $e(X, x)$, la multiplicité locale de X en x . En 1970 H. Hironaka prouve dans [Hi] qu'une condition de régularité de nature différentielle, la condition (b) de Whitney, assure l'équimultiplicité (de l'ensemble le long de ses strates), condition de nature algébrique, dont il montre aussi la nature topologique après éclatement (la pseudo-platitudo normale) :

Théorème (Équimult $_{\mathbb{C}}$) ([Hi]) — *Soit X un ensemble analytique complexe de \mathbb{C}^n . La fonction $X \ni x \mapsto e(X, x) \in \mathbb{N}$ est une fonction constante en restriction aux strates de toute stratification de Whitney de X .*

Ce résultat a véritablement ouvert la voie de la théorie de l'équisingularité complexe, initiée par O. Zariski dans [Zar1,2,3,4] à la fin des années 1960 et pour laquelle il s'agit de comparer les points de vue algébrique, topologique, métrique ou différentiel dans l'étude des singularités d'un ensemble analytique complexe X , afin de dégager des énoncés équivalents mais de nature *a priori* distincte, qui traduisent le fait que le long d'un certain sous-ensemble analytique de X les singularités se propagent à l'identique. Nous en rappelons maintenant les énoncés importants :

Dans le cas important où X est l'hypersurface $f^{-1}(0)$, donnée par une application analytique $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ admettant en 0 une singularité isolée, on a pour y générique dans le germe de i -plan vectoriel générique P_0 :

$$\chi(\pi_P^{-1}(y) \cap X \cap B_{(0,r)}) = \chi(\pi_P^{-1}(0) \cap f^{-1}(\epsilon) \cap B_{(0,r)}),$$

où ϵ est générique dans \mathbb{C} et suffisamment proche de 0.

Dans ce cas $\chi(\pi_P^{-1}(0) \cap f^{-1}(\epsilon) \cap B_{(0,r)})$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre de Milnor de f dans P^\perp , ie $1 + (-1)^{n-i-1} \mu^{(n-i)}$, où $\mu^{(n-i)}$ est le nombre de

Milnor de la section $(n - i)$ -plane de X_0 ([Te1]). On a donc, dans le cas où X_0 est le germe d'une hypersurface complexe de \mathbb{C}^n à singularité isolée en 0 :

$$\tilde{\sigma}_i(X_0) = 1 + (-1)^{n-i-1} \mu^{(n-i)}.$$

Dans [Te1] il est montré que l'indépendance de la suite $(\mu^{(0)}(X_t), \dots, \mu^{(n)}(X_t))$ relativement aux paramètres t (et donc, dans ce cadre, de la suite $(\tilde{\sigma}_0(X_t), \dots, \tilde{\sigma}_n(X_t))$), pour une famille analytique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de germes d'hypersurfaces analytiques de \mathbb{C}^n ayant 0 pour singularité isolée, implique la condition de Whitney, au voisinage de 0 dans \mathbb{C} , pour le couple $(X \setminus \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Et d'après [Br-Sp], l'implication réciproque est vraie.

En toute généralité, lorsque est X analytique complexe dans \mathbb{C}^n , de dimension quelconque et non plus seulement une hypersurface, les invariants complexes $\tilde{\sigma}_i(X_x)$ ont été considérés pour la première fois par M. Kashiwara dans [Ka] (où les boules sont ouvertes et non fermées comme c'est le cas ici) : un invariant $E_{X_0}^0$ y est défini par récurrence sur la dimension de X_0 à l'aide de $\tilde{\sigma}_i$. L'étude de cet invariant est reprise par A. Dubson ([Dub1,2]) puis dans [Br-Du-Ka] où les auteurs en donnent une version multidimensionnelle $E_{X_0}^q$. Leur définition est la suivante :

$$E_{X_0}^k = \sum_{X^{j_0} \subset \bar{X}^j \setminus X^j, \dim(X^j) < \dim(X_0)} E_{X^j}^k \cdot \tilde{\sigma}_{k+\dim(X^j)+1}(X_0),$$

où (X^j) est une stratification de Whitney de X_0 , et X^{j_0} la strate contenant 0. Les auteurs remarquent ensuite (cf aussi [Dub1,2]) que :

$$E_{X_0}^k = Eu_{X_0},$$

où Eu_{X_0} est l'obstruction d'Euler locale de X en 0, introduite par R. MacPherson dans [MacPh], puis que :

$$(-1)^k (E_{X_0}^{\dim(X_0)-k-1} - E_{X_0}^{\dim(X_0)-k}) = e(\mathcal{P}^k(X_0), 0),$$

où $e(\mathcal{P}^k(X_0), 0)$ est la multiplicité en 0 de la variété polaire $\mathcal{P}^k(X_0)$ de codimension k de X_0 en 0 (Voir aussi [Me], [Lê-Te1,2,3], [Dub2]). Il est annoncé sans preuve dans [Dub1, Prop. 1], [Dub2, Th. II.2.7 page 30], et [Br-Du-Ka], que les invariants $\tilde{\sigma}_i(X_y)$ sont constants lorsque y varie dans une strate d'une stratification de Whitney de X_0 (cf [Co-Me, Cor. 4.5] pour une preuve directe de cette affirmation). Mais dans [He-Me1], [Na2], [Te2] il est prouvé que la constance des multiplicités $e(\mathcal{P}^k(X_y), y)$ lorsque y varie dans une strate d'une stratification donnée de X_0 équivaut à la (b) -régularité de cette stratification, ce qui donne une preuve indirecte, compte tenu de l'égalité ci-dessus reliant les $e(\mathcal{P}^k(X_y), y)$ et les $\tilde{\sigma}_i(X_y)$, de la constance des $\tilde{\sigma}_i(X_y)$ le long de strates de Whitney.

On rassemble ces résultats dans le théorème suivant, où $e(\Delta^k(X_y), y)$ est la multiplicité en y du discriminant $\Delta^k(X_y)$ associé à $\mathcal{P}^k(X_y)$.

Théorème (Équising_ℂ) ([He-Me1], [Na2], [Lê-Te3], [Te2]) — Soit X_0 un germe en 0 d'ensemble analytique complexe de \mathbb{C}^n muni d'une stratification (X^j) . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)- La stratification (X^j) est de Whitney.
- (ii)- Les fonctions $X^j \ni y \mapsto e(\mathcal{P}^k(X_y^k), y)$, pour tous les couples (X^j, X^k) tels que $X^j \subset \overline{X^k}$, sont constantes.
- (iii)- Les fonctions $X^j \ni y \mapsto e(\Delta^k(X_y^k), y)$, pour tous les couples (X^j, X^k) tels que $X^j \subset \overline{X^k}$, sont constantes.
- (iv)- Les fonctions $y \ni X^j \mapsto \tilde{\sigma}_i(X_y^k)$, pour tous les couples (X^j, X^k) tels que $X^j \subset \overline{X^k}$, sont constantes.

3.2. Régularité des invariants polaires réels σ_i . La version réelle du théorème **Équimult_ℂ** de [Hi], selon lequel le long des strates d'une stratification de Whitney d'un ensemble analytique complexe X , $x \mapsto e(X, x)$ est constante a été obtenue dans [Co3], sous la forme suivante (on rappelle d'une part qu'un substitut réel de la multiplicité locale est la densité puisque si X est analytique complexe, $e(X, x) = \Theta_{\dim_{\mathbb{R}}(X)}(X_x)$ par [Dr] ou par la formule de Cauchy-Crofton locale et d'autre part que $(b) = (w)$ en complexe) :

Théorème (Équimult_ℝ) ([Co3, Th. 0.4]) — En restriction aux strates d'une stratification (w) -régulière d'un ensemble sous-analytique fermé X de dimension d , la fonction densité $x \mapsto \Theta_d(X_x)$ est continue.

Remarque. D'après [Va] la fonction densité $x \mapsto \Theta_d(X_x)$ est même localement lipschitz le long de strates (w) -régulières et continue le long de strates (b) -régulières.

Le théorème **Équising_ℝ** que l'on énonce plus bas, et qui est le résultat principal de [Co-Me], est la version réelle du théorème **Équising_ℂ**. Portant sur σ_* , il généralise le théorème **Équimult_ℝ**, qui ne porte que sur $\sigma_d = \Theta_d$, de la même façon que le théorème **Équising_ℂ** généralise le théorème **Équimult_ℂ**. Cependant, contrairement au cas complexe, dans le cas sous-analytique réel, on ne peut espérer une équivalence dans **Équising_ℝ**. En effet la continuité ou même la constance de σ_* le long des strates d'une stratification donnée de X n'assure pas en général une bonne condition de régularité pour cette stratification. Il suffit de considérer l'exemple qui suit.

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 si Y est l'axe Oy et si X est le semi-algébrique suivant (une fronce le long de l'axe Oy , pincée sur l'axe Oz) :

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; yz^3 = x^3 - 3z^3x, z \geq 0\},$$

on vérifie que : $\forall y \in Y$, $\sigma_1(X_y) = 1$ et $\sigma_2(X_y) = \Theta_2(X_y) = 1/2$. La suite σ_* est par conséquent constante le long de Y , sans pour autant que $X^{\text{rég}}$ soit (w) ou (b) -régulier le long de Y , puisque pas même (a) -régulier.

L'objet du théorème **Équising** $_{\mathbb{R}}$ est l'implication inverse : une certaine régularité pour une stratification assure la continuité de l'application σ_* le long des strates de cette stratification. Cette régularité est une condition géométrique portant sur les discriminants généraux en toutes dimensions (**Équising** $_{\mathbb{R}}$ (i)) : l'équisécabilité de ceux-ci, équivalente en complexe à leur équivariabilité ou à la condition (w) et qui en réel reste une conséquence de la (w)-régularité (**Équising** $_{\mathbb{R}}$ (ii)). Pour énoncer cette condition de régularité, nous donnons au préalable quelques définitions.

Pour X un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et $Y = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$, soit $\mathcal{D}(X, Y)$ le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{D}(X, Y) = \text{adh} \left\{ (y, \ell, u) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}_+^\times ; (y, u\ell) \in X \setminus Y \right\}.$$

L'application $u : \mathcal{D}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ induite par la projection sur \mathbb{R}_+^\times est appelée *déformation de X au cône normal à Y dans X* . Sa fibre en $0 \in \mathbb{R}$ est le *cône normal à Y dans X* , noté $C_Y X$. La première projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ induit une application $p : C_Y X \rightarrow Y$. Nous notons $(C_Y X)_y$ la fibre $p^{-1}(y)$. Une telle fibre est non vide si et seulement si $y \in \text{adh}(X \setminus Y)$. On dit que X est *normalement pseudo-plat le long de Y* si la projection $p : C_Y X \rightarrow Y$ est ouverte (cf [Hi]). Pour $y \in Y$, notons $s = \dim((C_Y X)_y)$. Alors il existe un ensemble sous-analytique \mathcal{Q}_y^q dense dans $G(q, n)$, tel que pour tout $P \in \mathcal{Q}_y^q$ on ait l'existence d'un voisinage $\mathcal{U}_{y,P}$ de y dans \mathbb{R}^n pour lequel :

$$(\text{adh}(X \cap \mathcal{U}_{y,P}) \setminus Y) \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(Y)) = \emptyset$$

si et seulement si $s + k \leq q$ (cf [Co3, Lem. 2.3]). Lorsque \mathcal{Q}_y^d existe, on dit que X est *équisécable le long de Y en y* (cf [He-Me2]), cette condition équivaut à $\dim((C_Y X)_y) \leq d - k$.

La dimension des fibres du cône normal de X à Y , la pseudo-platitudo normale, la condition (b) de Whitney et l'équivariabilité de X le long de Y (lorsque X et Y sont analytiques complexes) sont liés par la proposition suivante :

Théorème — Soit X et Y deux ensembles sous-analytiques de \mathbb{R}^n , X étant de dimension d et Y lisse de dimension k .

- (i) Si Y est une strate d'une stratification de Whitney de $\text{adh}(X)$, $\text{adh}(X)$ est normalement pseudo-plat le long de Y (cf [Hi], [He-Me2], [Or-Tr]).
- (ii) Si X est normalement pseudo-plat le long de Y , quel que soit $y \in Y$, $\dim((C_Y X)_y) \leq d - k$ (cf ([Hi], [He-Me2], [Or-Tr], [Co3, Lem. 2.4])).
- (iii) Si X et Y sont des ensembles analytiques complexes de \mathbb{C}^n , la pseudo-platitudo normale de X le long de Y , l'équisécabilité de X le long de Y , l'équivariabilité de X le long de Y et la condition $\dim((C_Y X)_y) = d - k$ pour tout $y \in Y$, sont équivalentes (cf [Hi], [Sc], [He-Me2]).

Puisqu'en complexe les conditions (b) , (b^*) et (w) sont équivalentes et que l'équisécabilité des discriminants est l'équimultiplicité des discriminants (en vertu du théorème précédent), le théorème **Équising $_{\mathbb{R}}$** qui suit est bien comme annoncé l'équivalent réel du théorème **Équising $_{\mathbb{C}}$** . On rappelle à nouveau que l'exemple donné en début de section montre qu'en réel on ne peut espérer des équivalences entre conditions de régularité et continuité de σ_* dans **Équising $_{\mathbb{R}}$** .

Théorème (Équising $_{\mathbb{R}}$) ([Co-Me, Th. 4.9 et 4.10]) — *Soit X un ensemble sous-analytique fermé de \mathbb{R}^n de dimension d , muni d'une stratification (b^*) -régulière $(X^j)_{j \in \{0, \dots, m\}}$ dont Y est une strate.*

- (i) *Soit $i \in \{\dim(Y) + 1, \dots, d\}$. Si pour un ensemble sous-analytique dense \mathcal{D}^i de $G(i, n)$, on a :*

$$P \in \mathcal{D}^i \implies \dim((C_Y \Delta_{X_y}(P))_y) \leq i - 1 - \dim(Y), \quad \forall y \in Y,$$

c'est-à-dire si les discriminants généraux $(i-1)$ -dimensionnels sont équisécables le long de Y , alors la restriction à Y de l'invariant $\sigma_i(X_y)$ est continue en tout point de Y .

- (ii) *Si $(X^j)_{j \in \{0, \dots, m\}}$ est de plus (w) -régulière, le sous-analytique dense \mathcal{D}^i existe pour tout $i \in \{\dim(Y) + 1, \dots, d\}$ et par conséquent les restrictions à Y des invariants $\sigma_1(X_y), \dots, \sigma_n(X_y)$ et $\Lambda_1^{\text{loc}}(X_y), \dots, \Lambda_n^{\text{loc}}(X_y)$ sont continues le long de Y .*

Les énoncés du chapitre 3 s'organisent en le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\acute{E}quimult}_{\mathbb{R}} & \hookrightarrow & \mathbf{\acute{E}quising}_{\mathbb{R}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{\acute{E}quimult}_{\mathbb{C}} & \hookrightarrow & \mathbf{\acute{E}quising}_{\mathbb{C}} \end{array}$$

où “ \uparrow ” signifie “s'étend en réel par” et “ \hookrightarrow ” signifie “se généralise par”.

4- Enlacement de trajectoires de champs de vecteurs Lipschitz

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus dans [Co-Yo2]. Ils concernent l'enlacement de deux trajectoires d'un champ de vecteurs. La seule régularité supposée de ce champ est la régularité lipschitz. On note dans la suite la constante de lipschitz de ce champ par K . On commence par définir trois notions de rotation d'une courbe selon la nature de l'objet autour duquel on veut mesurer cette rotation.

Définition ([Co-Yo2]) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une (paramétrisation d') une courbe lipschitz.

- La rotation $R(\gamma, x)$ de γ autour d'un point x de \mathbb{R}^n , tel que $x \notin \gamma(I)$, est la longueur de la courbe image de $\gamma(I)$ par $e : \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \rightarrow S^{n-1}(x, 1)$, où $e(z) = \frac{z-x}{\|z-x\|}$.

- La rotation $R(\gamma, \mathcal{L})$ de γ autour d'un sous-espace affine \mathcal{L} de \mathbb{R}^n , tel que $\gamma(I) \cap \mathcal{L} = \emptyset$, est la rotation (au sens précédent) de la projection orthogonale de $\gamma(I)$ sur un sous-espace affine P de \mathbb{R}^n orthogonal à \mathcal{L} et de dimension $n - \dim(\mathcal{L})$, autour de $\mathcal{L} \cap P$.

- La rotation de deux courbes lipschitz disjointes non nécessairement fermées $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dans \mathbb{R}^3 est définie par l'intégrale de Gauss (cf [Ar-Kh]) :

$$R(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_1 \in I_1} \int_{t_2 \in I_2} \frac{\langle \gamma_1' \wedge \gamma_2', \gamma_{12} \rangle}{\|\gamma_{12}\|^3} dt_1 dt_2,$$

où $\gamma_{12} = \gamma_2 - \gamma_1$.

- Avec les mêmes notations, la rotation absolue des deux courbes γ_1 et γ_2 est :

$$R_{abs}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_1 \in I_1} \int_{t_2 \in I_2} \frac{|\langle \gamma_1' \wedge \gamma_2', \gamma_{12} \rangle|}{\|\gamma_{12}\|^3} dt_1 dt_2.$$

Remarques. - On a : $|R(\gamma_1, \gamma_2)| \leq R_{abs}(\gamma_1, \gamma_2)$.

- La quantité $R(\gamma_1, \gamma_2)$ est usuellement considérée lorsque γ_1 et γ_2 sont des courbes fermées. Dans ce cas $R(\gamma_1, \gamma_2)$ est l'enlacement topologique des deux noeuds γ_1 et γ_2 (cf [Ar-Kh], [Co-Yo2, Th.2.2]).

- La rotation $R(\gamma_1, \gamma_2)$ est invariante par déformation continue sans croisement et avec extrémités fixes des courbes γ_1 et γ_2 ([Co-Yo2, Prop.2.3]).

- Lorsque $\gamma_2 = \mathcal{L}$ est une droite de \mathbb{R}^3 , $R_{abs}(\gamma_1, \gamma_2) = R(\gamma_1, \mathcal{L})$ ([Co-Yo2, Prop. 2.4]).

Sur un intervalle de temps T , il est facile de prouver que la rotation d'une trajectoire d'un champ de vecteurs lipschitz, autour d'un point stationnaire ou d'un sous-espace affine invariant par le champ, est bornée par $K \cdot T$ ([Co-Yo2, Prop. 3.1 et 3.2]). En revanche, il est possible qu'en temps fini, la rotation d'une trajectoire d'un champ (même C^∞) autour d'une droite qui n'est pas invariante par le champ, soit infinie, comme le montre l'exemple qui suit :

Exemple. Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le difféomorphisme défini par :

$$\Phi(x, y, z) = (x, y, z) \text{ si } x \leq 0 \text{ et } \Phi(x, y, z) = (x, y + \omega_1(x), z + \omega_2(x)) \text{ si } x \geq 0,$$

avec $\omega_1(x) = e^{-1/x^2} \cos(1/x)$ et $\omega_2(x) = e^{-1/x^2} \sin(1/x)$. L'image du demi-axe $\{(x, 0, 0); x \geq 0\}$ par Φ est une courbe ω , dont la rotation autour de Ox_1 est infinie dans tout voisinage de l'origine. Soit alors v le champ de vecteur C^∞ de \mathbb{R}^3 , image par Φ du champ constant égal à $e_1 = (1, 0, 0)$:

$$v(x, y, z) = D\Phi_{(x,y,z)}(e_1) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, z) = (1, \omega'_1(x), \omega'_2(x)).$$

La courbe ω est une trajectoire de v dont la rotation autour de Ox_1 est infinie en temps fini.

Le fait remarquable mis en évidence dans [Co-Yo2] est que contrairement à la rotation autour d'une droite non stationnaire, la rotation d'une trajectoire d'un champ de vecteurs lipschitz autour d'un point non nécessairement stationnaire est bornée par $K \cdot T$, sur l'intervalle de temps T .

Théorème ([Co-Yo2, Th. 3.8]) — Soient v un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, de constante de lipschitz K et $\omega(t)$ une trajectoire de v . Pour tout $x_0 \in U$, la rotation de ω autour de x_0 sur un intervalle de temps T satisfait :

$$R(\omega, x_0) \leq \frac{2\pi}{\nu} + \frac{(n-2)K}{\nu^2} \cdot T, \text{ où } \nu = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Remarques. - D'après la formule de Cauchy-Crofton sphérique pour le calcul de la longueur des courbes de S^{n-1} (cf [Fe2, 3.2.48]), la longueur de $e(\omega(T))$ est la moyenne du nombre de points des sections de $e(\omega(T))$ avec les grandes sphères $S^{n-2} \subset S^{n-1}$. La preuve du théorème ci-dessus repose sur une version de la formule de Cauchy-Crofton sphérique pour le calcul de la longueur de $e(\omega(T))$, dans laquelle on quantifie le défaut de transversalité de $e(\omega(T))$ et des sphères S^{n-2} (cf [Co-Yo2, Th. 3.4]).

- Bien entendu, on ne peut espérer en général que la rotation d'une trajectoire d'un champ de vecteurs (même algébrique) en temps infini soit bornée ; il suffit de penser aux trajectoires cycliques, ou aux trajectoires voisines de cycles limites.

Le théorème précédent permet d'obtenir une borne pour la rotation de deux trajectoires ω_1 et ω_2 d'un champ de vecteur lipschitz. Il suffit d'intégrer $R(\omega_1, x)$, en tout point de ω_2 et d'utiliser la borne (11). On obtient :

Théorème ([Co-Yo2, Th. 3.9]) — Soient $\nu = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, ω_1 et ω_2 deux trajectoires, sur des intervalles de temps respectifs T_1 et T_2 , d'un champ de vecteurs lipschitz v défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ et de constante de lipschitz K . On a :

$$R_{abs}(\omega_1, \omega_2) \leq \frac{K}{2\nu} \min\{T_1, T_2\} + \frac{K^2}{4\pi\nu^2} T_1 T_2. \quad (12)$$

Une application directe de la borne (12) est une borne de l'invariant de Hopf-Arnold asymptotique, dont nous rappelons brièvement la définition.

Dans [Ar] est étudié le problème extrémal suivant : étant donné un champ de vecteurs v à divergence nulle sur un domaine compact U de \mathbb{R}^3 (on suppose que v est tangent à ∂U), quelle est l'énergie minimale $e(v)$ pour tous les champs de vecteurs ξ sur U obtenus à partir de v sous l'action des difféomorphismes de U préservant le volume (l'énergie $E(\xi)$ de ξ sur U étant par définition $\frac{1}{2} \int_U (\xi, \xi)$) ?

Pour répondre à cette question, la construction suivante est faite. Soient $T_1, T_2 > 0$ et pour (presque tout) x et y dans U , considérons γ_x la trajectoire de v passant par x à $t = 0$ et Γ_{x, T_1} la courbe fermée obtenue en fermant $\gamma_x([0, T_1])$ par un segment, puis considérons $R(\Gamma_{x, T_1}, \Gamma_{y, T_2})$, la rotation de Γ_{x, T_1} et Γ_{y, T_2} . V. Arnold prouve alors que la limite $\mathcal{A}_v(x, y) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1 T_2} R(\Gamma_{x, T_1}, \Gamma_{y, T_2})$ existe et égale $\lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1 T_2} R(\gamma_x(T_1), \gamma_y(T_2))$. L'invariant de Hopf asymptotique $I(v)$ de v est alors défini comme : $I(v) \cdot \int_{(x, y) \in U \times U} dx dy = \int_{(x, y) \in U \times U} \mathcal{A}_v(x, y) dx dy$ et on prouve (sous des hypothèses supplémentaires) que $e(v) = I(v)/\lambda$ (où λ est une valeur propre d'un certain opérateur naturel (cf [Ar, section 5.1]). La question de la nature topologique de I est étudiée en particulier dans [Ga-Gh 1,2].

Une conséquence directe de (12) est alors l'obtention d'une borne supérieure pour $I(v)$ qui ne dépend que de la constante de lipschitz K de v .

Théorème ([Co-Yo2, Th. 3.12]) — *Avec les notations qui précèdent et*
 $\nu = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$I(v) \leq \frac{K^2}{4\pi\nu^2 Vol^2(U)}.$$

Références

- [Al1] S. Alesker, On P. McMullen's conjecture on translation invariant valuations, *Adv. Math.* **155**, (2000), 239-263
- [Al2] S. Alesker, Description of translation invariant valuations on convex sets with solution of P; McMullen's conjecture, *GAFGA Geom. Funct. Anal.* **11**, (2001), 244-272
- [Al3] S. Alesker, Hard Lefschetz theorem for valuations, complex integral geometry and unitarily invariant valuations, *J. Differential Geom.* **63**, (2003), 63-95
- [Al4] S. Alesker, The multiplicative structure on continuous polynomial valuations, *GAFGA, Geom. Funct. Anal.* **14**, 1, (2004), 1-26
- [Al5] S. Alesker, Theory of valuations on manifolds: a survey, *GAFGA, Geom. Funct. Anal.* **17**, (2007), 1321-1341
- [Al-Fu] S. Alesker, J. H. G. Fu, Theory of valuations on manifolds, III. Multiplicative structure in the general case, *Trans. Amer. Mathematical Soc.* **360**, 4, (2008), 1951-1981
- [Ar] V. I. Arnold, The asymptotic Hopf invariant and its applications. *Sel. Math. Sov.* **5**, 1986, 327-345
- [Ar-Kh] V. I. Arnold, B. A. Khesin, Topological methods in hydrodynamics. *Applied Mathematical Sciences* **125** Springer-Verlag, New York, (1998)
- [Ba] V. Bangert, Sets with positive reach, *Arch. Math.* **38**, (1982), 54-57
- [Be-Br1] A. Bernig, L. Bröcker, Lipschitz-Killing invariants. *Math. Nachr.* **245** (2002), 5-25
- [Be-Br2] A. Bernig, L. Bröcker, Courbures intrinsèques dans les catégories analytico-géométriques. *Ann. Inst. Fourier* **53** (2003), no. 6, 1897-1924
- [Br-Du-Ka] J. L. Brylinski, A. S. Dubson, M. Kashiwara, Formule de l'indice pour modules holonomes et obstruction d'Euler locale. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **293** (1981), no. 12, 573-576
- [Br-Ku] L. Bröcker, M. Kuppe, Integral geometry of tame sets. *Geom. Dedicata* **82** (2000), no. 1-3, 285-323
- [Br-Sp] J. Briançon, J. P. Speder, Les conditions de Whitney impliquent μ^* constant. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **26** (1976), 153-163
- [Cl-Co-Lo] R. Cluckers, G. Comte, F. Loeser, Local densities and tangent cones for p -adic definable sets. *Travail en cours*
- [Cl-Lo] R. Cluckers, F. Loeser, Constructible motivic functions and motivic integration. *Inv. Math.* **173** (2008), 23-121
- [Co1] G. Comte, Sur les hypothèses du théorème de Sard pour le lieu critique de rang 0. *C. R. Acad. Sci. Paris, t.* **323** (1996), *Série I*, 143-146

- [Co2] G. Comte, Formule de Cauchy-Crofton pour la densité des ensembles sous-analytiques. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328* (1999), *Série I*, 505-508
- [Co3] G. Comte, Équisingularité réelle : nombre de Lelong et images polaires. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **33** (2000), 757-788
- [Co-Li-Ro] G. Comte, J. -M. Lion, J. -Ph. Rollin, Nature Log-analytique du volume des sous-analytiques. *Illinois J. Math* **44**, 4, (2000), 884-888
- [Co-Me] G. Comte, M. Merle, Équisingularité réelle II : invariants locaux et conditions de régularité. À paraître dans *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **41** fasc. 2, (2008)
- [Co-Yo1] G. Comte, Y. Yomdin, Tame geometry with application in smooth analysis. *Lecture Notes in Math* **1834**, Springer-Verlag, Berlin (2004)
- [Co-Yo2] G. Comte, Y. Yomdin, Rotation of trajectories of Lipschitz vector fields. À paraître dans *J. Differential Geom.*
- [De-Lo] J. Denef, F. Loeser, Motivic Igusa zeta functions. *J. Alg. Geom.* **7** (1998), 505-537
- [De-Va] J. Denef, L. Van Den Dries, p -adic and real subanalytic sets. *Annals Math.* **128** (1988), 79-138
- [Dr] R. N. Draper, Intersection theory in analytic geometry. *Math. Ann.* **180** (1969), 175-204
- [Dub1] A. S. Dubson, Classes caractéristiques des variétés singulières. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **287** (1978), no. 4, 237-240
- [Dub2] A. S. Dubson, Calcul des invariants numériques des singularités et des applications. Thèse, Bonn University, (1981)
- [Dut1] N. Dutertre, Courbures et singularités réelles. *Comment. Math. Helvetici* **77** (2002), 846-863
- [Dut2] N. Dutertre, Curvature integrals on the real Milnor fiber. *Comment. Math. Helvetici* **83** (2008), 241-288
- [Fe1] H. Federer, The (Φ, k) rectifiable subsets of n space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 114-192
- [Fe2] H. Federer, Curvature measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. **93** (1959), 418-491
- [Fe3] H. Federer, Geometric measure theory. *Grundlehren Math. Wiss.*, Vol. **153** (1969) *Springer-Verlag*
- [Fu1] H. G. J. Fu, Tubular neighborhoods in Euclidean spaces. *Duke Math. J.* **52** (1985), no. 4, 1025-1046
- [Fu2] H. G. J. Fu, Curvature measures and generalized Morse theory. *J. Differential Geom.* **30** (1989), no. 3, 619-642

- [Fu3] H. G. J. Fu, Monge-Ampère functions I. *Indiana Univ. Math. J.* **38** (1989), 745-771
- [Fu4] H. G. J. Fu, Monge-Ampère functions II. *Indiana Univ. Math. J.* **38** (1989), 773-789
- [Fu5] H. G. J. Fu, Kinematic formulas in integral geometry. *Indiana Univ. Math. J.* **39** (1990), no. 4, 1115-1154
- [Fu6] H. G. J. Fu, Curvature of singular spaces via the normal cycle. Differential geometry: geometry in mathematical physics and related topics (Los Angeles, CA, 1990), 211-221, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **54** (1993), Part 2, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*
- [Fu7] H. G. J. Fu, Curvature measures of subanalytic sets. *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 4, 819-880
- [Ga-Gh1] J. -M. Gambaudo, É. Ghys, Enlacements asymptotiques. *Topology* **36**, no. 6, (1997), 1355-1379
- [Ga-Gh2] J. -M. Gambaudo, É. Ghys, Signature asymptotique d'un champ de vecteurs en dimension 3. *Duke Mathematical Journal* **106**, no. 1, (2000), 41-79.
- [Go-MacPh] M. Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse Theory. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* (1988), **vol. 14**, *Springer-Verlag*
- [Gr-Sc] P. M. Gruber, R. Schneider, Problems in geometric convexity. In: Contributions to Geometry, ed. par J. Tölke et J. M. Wills, Birkhäuser Verlag, Basel, (1979), 225-278
- [Had] H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1957)
- [He-Me1] J. P. Henry, M. Merle, Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka. *Proc. Symp. in Pure Math.* **40** (1983) (vol. 1), *Arcata 1981*, *Amer. Math. Soc.*, 575-584
- [He-Me2] J. P. Henry, M. Merle, Conditions de régularité et éclatements. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **37** (1987), 159-190
- [He-Me-Sa] J. P. Henry, M. Merle, C. Sabbah, Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **17** (1984), 227-268
- [Hi] H. Hironaka, Normal cones in analytic Whitney stratifications. *Publ. Math. I.H.E.S.* **36** (1970), 127-138
- [Ka] M. Kashiwara, Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations. *Proc. Japan Acad.* **49** (1973), 803-804
- [Ka-Sc] M. Kashiwara, P. Schapira, Sheaves on manifolds. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 292, Springer-Verlag, Berlin, (1990)
- [Ku-Ra] K. Kurdyka, G. Raby, Densité des ensembles sous-analytiques. *Ann. Inst.*

Fourier **39** (1989), no. 3, 753-771

[Ku-Po-Ra] K. Kurdyka, J. -P. Poly, G. Raby, Moyennes des fonctions sous-analytiques, densité, cône tangent et tranches. (Trento, 1988), 170-177, *Lecture Notes in Math.*, **1420** (1990), Springer, Berlin

[Kl] D. A. Klain, A short proof of Hadwiger's characterization theorem. *Mathematika* **42** (1995), 329-339

[Ko-Ti] A. N. Kolmogorov, V. M. Tihomirov, ε -entropy and ε -capacity of sets in functional space. *Amer. Math. Soc. Transl.* **17**, (1961), 277-364.

[La] R. Langevin, Th. Shifrin, Polar varieties and integral geometry, *Amer. J. of Math.* **104** (1982), no 3, 553-605

[La-Lê] R. Langevin, D. T. Lê, Courbure au voisinage d'une singularité, *C. R. Acad. Sci. Paris* **290** (1980), 95-98

[Lê-Te1] Lê Dũng Tráng, B. Teissier, Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières. *Annals of Math.* **114** (1981), 457-491

[Lê-Te2] Lê Dũng Tráng, B. Teissier, Errata à "Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières". *Annals of Math.* **115** (1982), 668-668

[Lê-Te3] Lê Dũng Tráng, B. Teissier, Cycles évanescents et conditions de Whitney II. *Proc. Symp. in Pure Math.* **40** (1983) (vol. 2), Arcata 1981, *Amer. Math. Soc.*, 65-103

[Li] J. -M. Lion, Densité des ensembles semi-pfaffiens. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **6**, 7, (1998), no. 1, 87-92

[Li-Ro] J. M. Lion, J. P. Rolin, Intégration des fonctions sous-analytiques et volume des sous-ensembles sous-analytiques. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **48**, (1998), 755-767.

[Lo] F. Loeser, Formules intégrales pour certains invariants locaux des espaces analytiques complexes, *Comment. Math. Helvetici* **59** (1984), no 3, 204-225

[MacPh] R. D. MacPherson, Chern classes for singular algebraic varieties. *Ann. of Math.* (2) **100** (1974), 423-432

[McMu-Sc] P. McMullen, R. Schneider, Valuations on convex bodies, Convexity and its applications, edited by Peter Gruber and Jörg M. Wills, Boston: Birkhäuser Verlag (1983)

[Na1] V. Navarro Aznar, Conditions de Whitney et sections planes. *Inv. Math.* **61** (1980), 199-226

[Na2] V. Navarro Aznar, Stratifications régulières et variétés polaires locales. *Manuscrit*, (1981)

[Oe] J. Oesterlé, Réduction modulo p^n des sous-ensembles analytiques fermés de \mathbb{Z}_p^N . *Inv. Math.* **66** (1982), 325-341

[Or-Tr] P. Orro, D. Trotman, On the regular stratifications and conormal structure

of subanalytic sets. *Bull. London Math. Soc.* **18**, (1986), 185-191.

[Ri] J. J. Risler, On the curvature of the Milnor fiber, *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), 445-454

[Sa] L. A. Santalo. Integral geometry and geometric probability. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* Vol. **1** (1976), Addison-Wesley Publishing Co., London-Amsterdam

[Sc] W. Schickhoff, Whitney'sche Tangentenkegel, Multiplizitätsverhalten, Normal-Pseudoflachheit und Äquisingularitätstheorie für Ramifizierte Räume. *Schriftenreihe des Math. Inst. der Universität Münster 2, Serie. Heft 12*, (1977)

[Sc1] R. Schneider, Curvatures measures of convex bodies. *Ann. Mat. Pura appl.* **116**, (1978), 101-134

[Sc2] R. Schneider, A uniqueness theorem for finitely additive invariant measures on a compact homogeneous space. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **XXX**, (1981), 341-344

[Sc3] R. Schneider, Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **44** (1993), *Cambridge University Press*

[Sc4] R. Schneider, Integral geometry - Measure theoretic approach and stochastic applications *Advanced course on integral geometry, CRM* (1999)

[Se] J.-P. Serre, Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **54**(1981), 323-401

[St] J. Steiner, Über parallele Flächen. *Monatsber. Preuß Akad. Wissen., Berlin*, (1840). *Ges. Werke*, vol 2. (1882), Reimer, Berlin

[Te1] B. Teissier, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. *Astérisque* **7-8** (1973), *Singularités à Cargèse.*, 285-362

[Te2] B. Teissier, Variétés polaires II: Multiplicités polaires, sections planes et conditions de Whitney. *Actes de la conférence de géométrie algébrique de la Rabida (1981)*, *Springer Lecture Notes in Math.* **961**, Springer, Berlin, (1982), 314-491 \ominus

[Tr1] D. Trotman, Espaces stratifiés réels. *Stratifications, singularities and differential equations, II (Marseille 1990, Honolulu 1990)*, *Travaux en cours* **55**, Hermann, Paris, (1997), 93-107

[Tr2] D. Trotman, Lectures on real stratification theory. *Singularity theory*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2007), 139-155

[Va] G. Valette, Volume, density and Whitney conditions. *Ann. Pol. Math.* **93**, (2008)

[Vi1] A. G. Vitushkin, O mnogomernykh Variaziyah, Gostehisdat, Moskow, (1955).

[Vi2] A. G. Vitushkin, Ozenka sloznosti zadachi tabulirovaniya, Fizmatgiz, Moskow, (1959). Translation: Theory of the transmission and processing of information. Pergamon Press, (1961).

- [Yo] Y. Yomdin, The geometry of critical and near-critical values of differentiable mappings. *Math. Ann.* **264**, (1983), n. 4. 495-515
- [Zä1] M. Zähle, Integral and current representations of Federer's curvature measures, *Arch. Math.* **46** (1986), 557-567
- [Zä2] M. Zähle, Curvature and currents for unions of sets with positive reach, *Geom. Dedicata* **23** (1987), 155-171
- [Za1] O. Zariski, Studies in equisingularity (I), (II), (III). *Amer. J. of Math.* **87**, **87**, **90**, (1965), (1965), (1968), 507-536, 972-1006, 961-1023
- [Za2] O. Zariski, Some open questions in the theory of singularities. *Bull. Amer. Math. Soc.* **77**, (1971), 481-491
- [Za3] O. Zariski, On equimultiple subvarieties of algebroid hypersurfaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **72**, no. 4, (1975), 1425-1426. Correction : *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **72**, no. 8, (1975)
- [Za4] O. Zariski, Foundations of a general theory of equisingularity on r-dimensional algebroid and algebraic varieties, of embedding dimension r+1. *Amer. J. of Math.* **101** (1979), 453-514
- [Zer] M. Zerner, Approximation par des variétés algébriques dans les espaces Hilbertiens. *Studia Mathematica* t. **38**, (1970), 413-435

Nice, Le 19 septembre 2008

SUR LA NEIGE

Comment trace-t-on une route à travers la neige vierge ? Un homme marche en tête, suant et jurant, il déplace ses jambes à grand peine, s'enlise constamment dans une neige friable, profonde. Il s'en va loin devant : des trous noirs irréguliers jalonnent sa route. Fatigué, il s'allonge sur la neige, allume une cigarette et la fumée du gros gris s'étale en un petit nuage bleu au-dessus de la neige blanche étincelante. L'homme est reparti, mais le nuage flotte encore là où il s'était arrêté : l'air est presque immobile. C'est toujours par de belles journées qu'on trace les routes pour que les vents ne balaient pas le labeur humain. L'homme choisit lui-même ses repères dans l'infini neigeux : un rocher, un grand arbre ; il meut son corps sur la neige comme le barreur conduit son bateau sur la rivière d'un cap à l'autre.

Sur la piste étroite et trompeuse ainsi tracée, avance une rangée de cinq à six hommes. Ils ne posent pas le pied dans les traces, mais à côté. Parvenus à un endroit fixé à l'avance, ils font demi-tour et marchent à nouveau de façon à piétiner la neige vierge, là où l'homme n'a encore jamais mis le pied. La route est tracée. Des gens, des convois de traîneaux, des tracteurs peuvent l'emprunter. Si l'on marchait dans les pas du premier homme, ce serait un chemin étroit, visible mais à peine praticable, un sentier au lieu d'une route, des trous où l'on progresserait plus difficilement qu'à travers la neige vierge. Le premier homme a la tâche la plus dure, et quand il est à bout de forces, un des cinq hommes de tête passe devant. Tous ceux qui suivent sa trace, jusqu'au plus petit, au plus faible, doivent marcher sur un coin de neige vierge et non dans les traces d'autrui. Quant aux tracteurs et aux chevaux, ils ne sont pas pour les écrivains mais pour les lecteurs.

1956

